DETERMINATION OF A TIME - DEPENDENT TERM IN THE RIGHT HAND SIDE OF LINEAR PARABOLIC EQUATIO NS WITH ROBIN BOUNDARY CONDITION FROM BOUNDARY OBSERVATIONS

Bui Viet Huong
University of Transport and Communications

ARTICLE INFO

Received: **08/12/2021**

Revised: **28/02/2022**

Published: **28/02/2022**

KEYWORDS

Inverse problems
Ill-posed problems
Boundary observations
Finite difference methods
Conjugate gradient methods

ABSTRACT

We propose a variational method for determining a time-dependent term in the right hand side of parabolic equations with Robin boundary condition from boundary observations. We have shown the formula for functional to be minimized gradient via an adjoint problem. The direct problem is discretized by the finite difference methods and the variational problem is solved by the conjugate gradient method and Tikhonov regularization.

XÁC ĐỊNH THÀNH PHẦN PHỤ THUỘC THỜI GIAN TRONG VẾ PHẢI PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC TUYẾN TÍNH VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN ROBIN TỪ QUAN SÁT TRÊN BIÊN

Bùi Việt Hương
Trường Đại học Giao thông Vận tải, Hà Nội

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: **08/12/2021**

Ngày hoàn thiện: **28/02/2022**

Ngày đăng: **28/02/2022**

TỪ KHÓA

Bài toàn ngược
Bài toán đặt không chỉnh
Quan sát biên
Phương pháp sai phân hữu hạn
Phương pháp gradient liên hợp

TÓM TẮT

Chúng tôi đề xuất phương pháp biến phân cho bài toán xác định thành phần phụ thuộc thời gian trong vế phải phương trình parabolic với điều kiện biên Robin từ quan sát trên biên. Chúng tôi đưa ra công thức tính gradient của phiếm hàm cần cực tiểu hóa dựa trên bài toán liên hợp. Bài toán thuận được rời rạc bằng phương pháp sai phân hữu hạn, bài toán biến phân được giải bằng phương pháp gradient liên hợp kết hợp với phương pháp chỉnh Tikhonov.

DOI: **https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5334**

* Corresponding author. *Email: huongbv@utc.edu.vn*

1 Giới thiệu bài toán

Bài toán xác định nguồn trong quá trình truyền nhiệt được nhiều nhà khoa học nghiên cứu trong vòng 50 năm qua. Mặc dù có khá nhiều kết quả về tính tồn tại, duy nhất và đánh giá ổn định cho cho bài toán, nhưng do tính đặt không chỉnh và có thể phi tuyến của bài toán, nên trong thời gian gần đây có rất nhiều các nhà toán học và kỹ sư đặt lại vấn đề nghiên cứu chúng (xem [1], [2], [3], [4]). Giả sử Ω là một miền Lipschitz, giới nội trong không gian $\mathbb{R}^n$. Ta kí hiệu $\partial\Omega$ là biên của Ω, $Q := \Omega \times (0, T]$ và $S := \partial\Omega \times (0, T]$, với $T > 0$. Xét bài toán giá trị biên ban đầu với điều kiện biên Robin

$$u_t - \Delta u = f(t)h(x,t) + g(x,t),\ (x,t) \in Q \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = \psi(x,t),\ (x,t) \in S \tag{1.3}$$

Ở đây, ν là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên S. Và $f(t), h(x,t), g(x,t), u_0(x), \psi(x,t)$ là các hàm lần lượt thuộc các không gian $L^2(0,T), L^2(Q), L^2(\Omega), L^2(S)$. Và σ là hàm nằm trong không gian $L^\infty(S)$ được giả thiết là không âm hầu khắp nơi trên S.

Bài toán thuận là bài toán xác định u khi các hệ số của phương trình (1.1) và các dữ kiện u_0, ψ cũng như f, h, g đã biết. Bài toán ngược là bài toán xác định vế phải khi một số điều kiện bổ sung trên lời giải u được cho thêm vào.

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán ngược: Xây dựng lại thành phần phụ thuộc thời gian $f(t)$ trong vế phải của phương trình parabolic tuyến tính (1.1) – (1.3) từ dữ kiện quan sát trên biên

$$u|_S = \varphi, \tag{1.4}$$

với giả thiết rằng toán tử quan sát φ thuộc không gian $L^2(S)$.

Để giải bài toán ngược, chúng tôi sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu bằng cách cực tiểu hoá phiếm hàm

$$J_\gamma(f) = \frac{1}{2}||u(f) - \varphi||^2_{L^2(S)} + \frac{\gamma}{2}||f - f^*||^2_{L^2(0,T)},$$

với $\gamma > 0$ là tham số hiệu chỉnh Tikhonov, $f^* \in L^2(0,T)$ là một dự đoán ban đầu của f. Chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng phương pháp biến phân dạng này đã được sử dụng để giải các bài toán truyền nhiệt ngược (xem [2], [5], [6]) và chứng tỏ nó rất hữu hiệu.

Để làm được điều đó, chúng tôi chứng minh, phiếm hàm (2.4) khả vi Fréchet và đưa ra công thức cho gradient của phiếm hàm thông qua một bài toán liên hợp. Sau đó, chúng tôi rời rạc hoá bài toán bằng phương pháp sai phân hữu hạn, rồi giải bài toán tối ưu rời rạc bằng phương pháp gradient liên hợp. Các kết quả số cho thấy cách tiếp cận của chúng tôi là đúng đắn và phương pháp giải số là hữu hiệu.

2 Kết quả chính

2.1 Bài toán thuận

Trước khi đưa ra công thức nghiệm yếu của bài toán (1.1) – (1.3), chúng tôi bắt đầu bằng việc nhắc lại không gian hàm thường xuyên được sử dụng trong bài toán giá trị biên ban đầu trong phương trình parabolic.

Định nghĩa 2.1. Cho V là một không gian Hilbert. Kí hiệu $W(0,T)$ là không gian tuyến tính gồm tất cả các hàm $y \in L^2(0,T;V)$, có đạo hàm (theo nghĩa phân bố) $y' \in L^2(0,T;V^*)$ với chuẩn xác định bởi

$$\|y\|_{W(0,T)} = \Big(\int_0^T \left(\|y(t)\|_V^2 + \|y'(t)\|_{V^*}^2 \right) dt \Big)^{1/2}.$$

Không gian $W(0,T) = \{y : y \in L^2(0,T;V), y' \in L^2(0,T;V^*)\}$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle_{W(0,T)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_V + \int_0^T \langle u'(t), v'(t) \rangle_{V^*} dt.$$

Để đưa ra đánh giá cho nghiệm yếu của bài toán (1.1) – (1.3), trước tiên chúng tôi định nghĩa nghiệm yếu của bài toán trong không gian $W(0,T)$

Định nghĩa 2.2. Hàm $u \in W(0,T)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1.1) - (1.3) nếu với mọi hàm thử $\eta \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ ta đều có đẳng thức

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_t, \eta \rangle_{H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + \iint_Q \nabla u \nabla \eta dxdt + \iint_S \sigma u \eta dsdt \\ = \iint_Q (fh + g) \eta dxdt + \iint_S \psi \eta dsdt \end{aligned} \tag{2.1}$$

và $u(x,0) = u_0(x), x \in Q$. Ta có đánh giá sau:

Định lý 2.1. ([7]) *Cho $y \in W_2^{1,0}(Q)$ là nghiệm yếu của bài toán (1.1) - (1.3). Khi đó nghiệm y thuộc không gian $W(0,T)$.*

Định lý 2.2. ([7]) *Nghiệm yếu y của bài toán (1.1) - (1.3) thỏa mãn đánh giá dạng*

$$\|y\|_{W(0,T)} \le c_w \left(\|fh\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(Q)} + \|\psi\|_{L^2(S)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right), \tag{2.2}$$

với hằng số $c_w > 0$ không phụ thuộc vào (f, g, u_0). Hay nói cách khác, ánh xạ $(f, g, u_0) \mapsto y$ xác định toán tử tuyến tính liên tục từ không gian $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ vào không gian $W(0,T)$ và trong trường hợp riêng ánh xạ đó vào không gian $C([0,T]; L^2(\Omega))$.

2.2 Phương pháp biến phân

Xét bài toán (1.1) - (1.3). Vì nghiệm của bài toán $u(x,t)$ phụ thuộc vào hàm $f(t)$ nên thay vì kí hiệu $u(x,t,f)$ ta kí hiệu là $u(f)$ hoặc $u(f, u_0, \psi)$ để nhấn mạnh sự phụ thuộc vào hàm f của nghiệm u. Để xác định f, ta tìm cực tiểu hoá của phiếm hàm

$$J_0(f) = \frac{1}{2}\|u(f) - \varphi\|^2_{L^2(S)} \tag{2.3}$$

trong không gian $L^2(S)$. Vì bài toán tìm cực tiểu của phiếm hàm $J_0(f)$ không ổn định và có thể có nhiều nghiệm nên chúng tôi sử dụng phương pháp chỉnh Tikhonov, tìm cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov

$$J_\gamma(f) = \frac{1}{2}\|u(f) - \varphi\|^2_{L^2(S)} + \frac{\gamma}{2}\|f - f^*\|^2_{L^2(0,T)} \tag{2.4}$$

với $\gamma > 0$ là tham số hiệu chỉnh Tikhonov, $f^* \in L^2(0,T)$ là một dự đoán ban đầu của f. Ta thấy, nếu $f > 0$ thì bài toán tìm cực tiểu của phiếm hàm $J_\gamma(f)$ có nghiệm duy nhất.

Xét bài toán liên hợp của bài toán (1.1) – (1.3) xác định như sau

$$-p_t - \Delta p = 0, \ (x,t) \in Q \tag{2.5}$$

$$p(x,T) = 0, \ x \in \Omega \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} + \sigma u = u(f) - \varphi, \ (x,t) \in S \tag{2.7}$$

Bằng cách đổi chiều thời gian, bài toán liên hợp (2.5) – (2.7) có nghiệm duy nhất trong không gian $W(0,T)$.

Định lý 2.3. *Phiếm hàm J_γ khả vi Fréchet và đạo hàm của nó $\nabla J_\gamma(f)$ có dạng*

$$\nabla J_\gamma(f) = \int_\Omega h(x,t)p(x,t)dx + \gamma(f(t) - f^*(t)), \tag{2.8}$$

với $p(x,t)$ là nghiệm của bài toán liên hợp (2.5) – (2.7).

Chứng minh: Trước tiên, chúng tôi đưa vào toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{S} : L^2(0,T) \to L^2(S)$ xác định bởi

$$S(f) = u(f,0,0)|_S.$$

Với biến phân $\delta f \in L^2(0,T)$ của f đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} J_0(f+\delta f) - J_0(f) &= \frac{1}{2}\|u(f+\delta f) - \varphi\|^2_{L^2(S)} - \frac{1}{2}\|u(f) - \varphi\|^2_{L^2(S)} \\ &= \frac{1}{2}\|u(f+\delta f) - u(f) + u(f) - \varphi\|^2_{L^2(S)} - \frac{1}{2}\|u(f) - \varphi\|^2_{L^2(S)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\|S(\delta f) + u(f) - \varphi\|^2_{L^2(S)} - \frac{1}{2}\|u(f) - \varphi\|^2_{L^2(S)}$$

$$= \langle S(\delta f), u(f) - \varphi\rangle_{L^2(S)} + \frac{1}{2}\|S(\delta f)\|^2_{L^2(S)}$$
$$= \langle S(\delta f), u(f) - \varphi\rangle_{L^2(S)} + o\big(\|\delta f\|_{L^2(0,T)}\big)$$

trong đó, $\delta u(f)$ là nghiệm bài toán

$$\delta u_t - \Delta \delta u = \delta f(t) h(x,t),\ (x,t) \in Q \tag{2.9}$$
$$\delta u(x,0) = 0,\ x \in \Omega \tag{2.10}$$
$$\frac{\partial \delta u}{\partial \nu} + \sigma u = 0,\ (x,t) \in S \tag{2.11}$$

Sử dụng công thức Green (xem [[7] Định lý 3.18]) cho nghiệm của hai bài toán (2.5) – (2.7) và (2.9) – (2.11) ta có

$$\begin{aligned}\int_Q \delta f h(x,t) p(x,t) dxdt &= \int_S u(\delta f, 0, 0)\big(u(f) - \varphi\big) dsdt \\ &= \int_S S(\delta f)\big(u(f) - \varphi\big) dsdt \\ &= \langle S(\delta f), u(f) - \varphi\langle^2_L (S) + o\big(\|\delta f\|_{L^2(0,T)}\big)\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}J_0(f + \delta f) - J_0(f) &= \int_Q \delta f h(x,t) p(x,t) dxdt \\ &= \left\langle \int_\Omega h(x,t) p(x,t) dx, \delta f \right\rangle_{L^2(0,T)} + o\big(\|\delta f\|_{L^2(0,T)}\big)\end{aligned}$$

Vậy $J_0(f)$ khả vi Fréchet và gradient của nó có dạng

$$\nabla J_0(f) = \int_\Omega h(x,t) p(x,t) dx$$

với $p(x,t)$ là ngiệm của bài toán liên hợp (2.5) – (2.7). Do đó, ta có công thức (2.8) mô tả gradient của phiếm hàm Tikhonov $J_\gamma(f)$.

Bài toán thuận và bài toán liên hợp được giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Bài toán biến phân được giải bằng phương pháp gradient liên hợp.

2.3 Phương pháp gradient liên hợp

Chúng tôi giới thiệu phương pháp gradient liên hợp để giải bài toán biến phân:

Bước 1:

1.1. Cho $k = 0$ và cho trước xấp xỉ ban đầu f^0.

1.2. Tính $U^0(f^0)$ là nghiệm của bài toán thuận

$$\begin{cases} U_t^0 - \Delta U^0 = f^0(t)h(x,t) + g(x,t), (x,t) \in Q, \\ U^0(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial U^0}{\partial \nu} + \sigma U^0 = \psi(x,t), (x,t) \in S. \end{cases}$$

1.3. Tính $\tilde{r}_0 = U^0(f^0) - \varphi = U^0 x, t; f^0) - \varphi$ với $\varphi = u_{ex}(x,t;f^0)$, trong đó u_{ex} là nghiệm chính xác của bài toán (1.1) – (1.3).

1.4.Tính $r_0 = -\nabla J_\gamma(f^0)$ cho bởi công thức (2.8), được xác định bằng cách giải bài toán liên hợp.

$$\begin{cases} -p_t^0 - \Delta p^0 = 0, (x,t) \in Q, \\ p^0(x,T) = 0, x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial p^0}{\partial \nu} + \sigma u = u(x,t;f^0) - \varphi, (x,t) \in S. \end{cases}$$

1.5. Đặt $d_0 = r_0$.

Bước 2: Cho $n = 0, 1, 2, ...$ 2.1. Tính $Ad_n = U^n(d_n) = U^n(x,t;d_n)$, trong đó $U^n(x,t;d_n)$ là nghiệm của bài toán thuận với $f = d_n$.

2.2. Tính $\alpha_n = \dfrac{||\, r_k \,||^2_{L^2(0,T)}}{||Ad_n||^2_{L^2(0,T)} + \lambda\, ||d_n||^2_{L^2(0,T)}}$.

2.3. Cập nhật $f_{n+1} = f_n + \alpha_n d_n$.

2.4. Tính $\tilde{r}_{n+1} = \tilde{r}_n + \alpha_n A d_n$.

2.5. Tính gradient r_{n+1} trong công thức (2.8) bằng cách giải bài toán liên hợp.

$$\begin{cases} -p_t^{n+1} - \Delta p^{n+1} = 0, (x,t) \in Q \\ p^{n+1}(x,T) = 0, x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial p^{n+1}}{\partial \nu} + \sigma u = u(x,t;f^n) - \varphi, (x,t) \in S. \end{cases}$$

2.6. Tính $\beta_n = \dfrac{||r_{n+1}||^2_{L^2(0,T)}}{||r_n||^2_{L^2(0,T)}}$.

2.7. Cập nhật $d_{n+1} = r_n + \beta_n d_n$.

Quá trình lặp ở trên được viết cho bài toán liên tục. Để tìm cực tiểu của phiếm hàm $J_\gamma(f)$, chúng tôi tiến hành rời rạc bài toán thuận (1.1) – (1.3), rời rạc phiếm hàm $J_\gamma(f)$, sau đó xây dựng bài toán liên hợp tương ứng để tính đạo hàm cho phiếm hàm rời rạc này. Bài toán thuận được rời rạc bằng phương pháp sai phân hữu hạn.

2.4 Ví dụ số minh hoạ

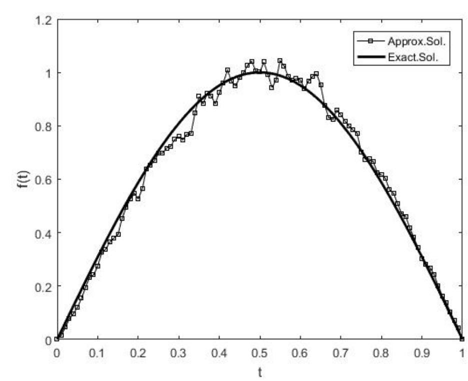
Chúng tôi lập trình ví dụ số minh họa cho thuật toán trong trường hợp một chiều. Xét miền $\Omega = (0, 1)$ và $T > 0$, phương trình truyền nhiệt một chiều có dạng

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(t)h(x,t) + g(x,t),\ (x,t) \in (0,1) \times [0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x),\ x \in (0,1) \\ -u_x(0,t) + u(0,t) &= g_1(t),\ t \in [0,T) \\ u_x(1,t) + u(1,t) &= g_2(t),\ t \in [0,T) \end{aligned}$$

Chúng tôi tìm lại hàm $f(t)$ trong trường hợp $f(t)$ là một hàm khả vi trên $(0, 1)$ và $f(t)$ là một hàm không khả vi trên $(0, 1)$. Trong cả hai trường hợp, nghiệm chính xác U_{ex}, điều kiện ban đầu $u_0(x)$ và điều kiện biên $g_1(t), g_2(t)$ được xác định như sau

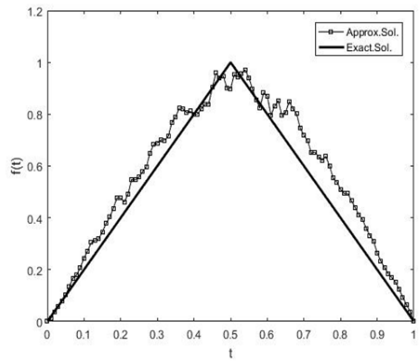
$$\begin{aligned} U_{ex} &= \sin(\pi t)\cos(x - t)\ (x,t) \in (0,1) \times [0,T) \\ u(x,0) &= 0,\ x \in (0,1) \\ g_1(t) &= \sin(\pi t)\big[\sin(-t) + \cos(-t)\big],\ t \in [0,T) \\ g_2(t) &= -\sin(\pi t)\big[\sin(1-t) + \cos(1-t)\big],\ t \in [0,T) \end{aligned}$$

- Trường hợp $f(t) = \sin(t)$ là hàm trơn. Ta có kết quả số



Hình 1: Nghiệm chính xác và nghiệm giải số với nhiễu 10%.

- Trường hợp $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{nếu } t \le 0.5 \\ 2(1-t) & \text{nếu } t > 0.5 \end{cases}$ là hàm không khả vi. Ta có kết quả số



Hình 2. *Nghiệm chính xác với nghiệm giải số với nhiễu 10%*

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông Vận tải trong đề tài mã số T2021 – CB – 007.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] J. R. Cannon, *The One-dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1984.
[2] N. H. Dinh, *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*. Peter Lang Verlag, Frankfurt/Main, Bern, New York, Paris, 1998.
[3] M. Hinze, "A variational discretization concept in control constrained optimization: The linear-quadratic case," *Computat. Optimiz. Appl.*, vol. 30, pp. 45-61, 2005.
[4] A. I. Prilepko and D. S. Tkachenko, "The Fredholm property and the wellposedness of the inverse source problem with integral overdetermination," *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 43, pp. 1338-1347, 2003.
[5] N. H. Dinh, "A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equations II: A variational method", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 13, pp. 541-564, 1992.
[6] N. H. Dinh, "A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equations III: A variational method and its approximation schemes," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 13, pp. 565-583, 1992.
[7] F. Troltzsh, *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.