TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN
TẠP CHÍ KHOA HỌC
ĐẠI HỌC SÀI GÒN
Số 75 (03/2021)

SAIGON UNIVERSITY
SCIENTIFIC JOURNAL
OF SAIGON UNIVERSITY
No. 75 (03/2021)

ISSN 1859 - 3208

Email: tcdhsg@sgu.edu.vn ; Website: http://sj.sgu.edu.vn/

KHÔI PHỤC THÔNG LƯỢNG NHIỆT TRÊN BIÊN CỦA THANH HỮU HẠN HAI CHIỀU TỪ CÁC DỮ LIỆU BÊN TRONG

Reconstruction of the heat flux on the boundary of a two-dimensional finite slab from interior data

ThS. Nguyễn Quang Huy

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM

TÓM TẮT

Nghiên cứu này xem xét bài toán hồi phục toàn bộ thông lượng nhiệt theo thời gian trên bề mặt của một lớp bên trong của vật thể từ hai dữ liệu đo bên trong trong trường hợp không thuần nhất. Nghiên cứu tính không chỉnh theo nghĩa của Hadamard bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt tích phân. Kết quả là ước lượng được sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác.

Từ khóa: *bài toán không chỉnh, dữ liệu bên trong, phép chỉnh hóa, phương trình nhiệt, thông lượng nhiệt*

ABSTRACT

This research considers the two – dimensional heat problem of recovering the heat flux on the surface of a layer inside of a heat-conducting body from two interior temperature measurements in the nonhomogeneous case. The ill-posedness in the sense of Hadamard by using a truncation method had been explored. As a result, we obtain the error estimate between the regularized solution and the exact solution to the problem.

Keywords*: ill-posed problem, interior data, regularization, heat equation, heat flux*

1. Giới thiệu

Bài toán xác định nhiệt độ từ các phép đo đạc tại các điểm bên trong của một miền được nghiên cứu bởi nhiều tác giả và có nhiều ứng dụng trong Vật lý và Địa chất. Trên thực tế, trong nhiều bài toán vật lý [1], một cảm biến nhiệt không thể được gắn ở bề mặt của vật thể (chẳng hạn, phần vỏ của một tên lửa). Mặt khác, chúng ta có thể dễ dàng đo lịch sử nhiệt độ tại các điểm bên trong của vật thể. Vì thế, để tìm lịch sử nhiệt của vật thể, chúng ta sử dụng nhiệt độ đo được bên trong bản thân nó.

Bài toán đã được giải quyết trong trường hợp một chiều [2-4] và hai chiều [5-6].

Trong nghiên cứu của mình, A. Carasso [2] đã giải bài toán tìm hàm $u(0,t) = f(t)$ sao cho:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le \infty \\ u(l,t) = g(t), l > 0,\ 0 \le t < \infty. \end{cases}$$

Nhóm tác giả Lê và cộng sự [3] đã giải quyết bài toán tìm hàm $w(t) = u_x(1,t)$ sao

Email: huynq@hcmute.edu.vn

cho: $\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, 1 < x < a, t > 0, a > 2, \\ u(1,t) = f(t), t > 0, \\ u(2,t) = g(t), t > 0. \end{cases}$

Hơn nữa, các tác giả cũng xem xét bài toán tìm hàm $u(0,t) = v(t)$ sao cho:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, 0 < x < 1, t > 0, \\ u(1,t) = f(t), t > 0, \\ u_x(1,t) = w(t), t > 0. \end{cases}$$

Các tác giả P. N. Dinh Alain, P. H. Quan và D. D. Trong [5] đã giải quyết bài toán xác định phân bố nhiệt $u(x,0,t) = v(x,t)$, trong đó hàm u thỏa mãn phương trình

$$\Delta u - u_t = 0, x \in \mathbb{R}, 0 < y < 2, t > 0,$$

với các điều kiện biên:

$$u(x,1,t) = f(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
$$u(x,2,t) = g(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

và điều kiện đầu: $u(x,y,0) = 0, x \in \mathbb{R}, 0 < y < 2.$

Bài toán xác định thông lượng nhiệt $u_y(x,1,t) = w(x,t)$ sao cho:

$$\Delta u - u_t = 0, x \in \mathbb{R}, 1 < y < 2, t > 0,$$
$$u(x,1,t) = f(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
$$u(x,2,t) = g(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
$$u(x,y,0) = 0, x \in \mathbb{R}, 1 < y < 2,$$

đã được Quan và cộng sự [6] giải quyết.

Như đã biết, mặc dù có tính duy nhất nghiệm, những bài toán trên không chỉnh theo nghĩa của Hadamard, nghĩa là nghiệm của bài toán không luôn luôn tồn tại và thậm chí trong trường hợp tồn tại nghiệm, nó không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu cho trước. Trên thực tế, một thay đổi nhỏ trên dữ liệu có thể gây ra một thay đổi đáng kể trên nghiệm. Do vậy, một phép chỉnh hóa là cần thiết. Tuy vậy cho đến nay các bài báo liên quan đến trường hợp không thuần nhất thì rất ít gặp. Từ những phân tích ở trên, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm thông lượng nhiệt bề mặt:

$$u_y(x,1,t) = v(x,t) \tag{1.1}$$

thỏa mãn:

$$\Delta u - u_t = F(x,y,t), x \in \mathbb{R}, 1 < y < 2, t > 0, \tag{1.2}$$
$$u(x,1,t) = f(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{1.3}$$
$$u(x,2,t) = g(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{1.4}$$
$$u(x,y,0) = 0, x \in \mathbb{R}, 1 < y < 2, \tag{1.5}$$

trong đó F, f, g là các dữ liệu đo đạc.

Phương pháp chỉnh hóa cho bài toán trên được sử dụng trong bài báo là phương pháp chặt cụt tích phân. Với các điều kiện của nghiệm chính xác, chúng tôi xác định được sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác trong trường hợp không thuần nhất là $\|v_\varepsilon - v_0\|_2 \le C_4 \varepsilon^{3/10}$, trong đó $C_4 > 0$ phụ thuộc vào nghiệm chính xác.

2. Các kết quả chính

2.1. Nghiệm chính xác của bài toán (1.1) - (1.5)

Bổ đề 2.1 [7]. *Cho* $a > 0$.

Đặt:

$$H_1(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{x^2+a^2}{4t}} & (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \\ 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (-\infty,0) \end{cases},$$

$$H_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+a^2}{4t}} & (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \\ 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (-\infty,0) \end{cases}.$$

Khi đó , ta có:

$$\hat{H}_1(z,r)=\frac{2}{a}e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}}\left[\cos\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\right)-i\,\mathrm{sgn}(r)\sin\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\right)\right],$$

$$\hat{H}_2(z,r)=\frac{e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{z^4+r^2}}\Bigg[\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}\cos\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\right)$$
$$-\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\sin\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\right)$$
$$-i\,\mathrm{sgn}(r)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}\sin\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\right)$$
$$-i\,\mathrm{sgn}(r)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\cos\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2}\right)\Bigg].$$

Hơn nữa, ta có $\left|\hat{H}_1(z,r)\right|=\frac{2}{a}e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}}$, $\left|\hat{H}_2(z,r)\right|=\frac{e^{\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}}}{\sqrt[4]{z^4+r^2}}$.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi tìm nghiệm chính xác của bài toán (1.1) - (1.5).

Trước hết, chúng tôi biến đổi bài toán (1.1) – (1.5) về một phương trình tích phân dạng tích chập.

Đặt: $\Gamma(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi(t-\tau)}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}}$

và $G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\Gamma(x,y,t,\xi,\eta,\tau)-\Gamma(x,4-y,t,\xi,\eta,\tau)$,

ta có: $G_{\xi\xi}+G_{\eta\eta}+G_\tau=0.$ Tích phân đẳng thức $div(G\nabla u-u\nabla G)-(uG)_\tau=G.F$, trên miền $(-n,\, n)\times(1,\,2)\quad\times(0,\,t-\varepsilon)$ và cho $\varepsilon\to 0$, ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t g(\xi,\tau)G_\eta(x,y,t,\xi,2,\tau)d\tau d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t G(x,y,t,\xi,1,\tau)u_\eta(\xi,1,\tau)d\tau d\xi$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t f(\xi,\tau)G_\eta(x,y,t,\xi,1,\tau)d\tau d\xi+u(x,y,t)+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\int_1^2 G(x,y,t,\xi,\eta,\tau).F(\xi,\eta,\tau)d\eta d\tau d\xi=0. \quad (2.1)$$

Thay (1.1) vào (2.1), ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t G(x,y,t,\xi,1,\tau)v(\xi,\tau)d\tau d\xi=-u(x,y,t)+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t f(\xi,\tau)G_\eta(x,y,t,\xi,1,\tau)d\tau d\xi$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t g(\xi,\tau)G_\eta(x,y,t,\xi,2,\tau)d\tau d\xi-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\int_1^2 G(x,y,t,\xi,\eta,\tau).F(\xi,\eta,\tau)d\eta d\tau d\xi. \quad (2.2)$$

Cho $y \to 1^+$ trong (2.2), ta đạt được:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \left[\frac{1}{2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - \frac{1}{2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}}\right]v(\xi,\tau)d\tau d\xi$$

$$= -f(x,t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}} f(\xi,\tau)d\tau d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+1}{4(t-\tau)}} g(\xi,\tau)d\tau d\xi - 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\int_1^2 G(x,1,t,\xi,\eta,\tau).F(\xi,\eta,\tau)d\eta d\tau d\xi. \quad (2.3)$$

Điều này dẫn đến

$$S * v(x,t) = -R_1 * f(x,t) + R_2 * g(x,t) - f(x,t) - \int_1^2 \left(R_3 - R_4\right) * F(x,\eta,t)d\eta, \quad (2.4)$$

Trong đó, ta định nghĩa rằng $v(x,t) = f(x,t) = g(x,t) = 0$ khi $t < 0$,

$$S = P_1 - P_2,$$

$$P_1(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}e^{-\frac{x^2}{4t}} & (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty) \\ 0 & (x,t) \in \mathbb{R}\times(-\infty,0) \end{cases},$$

$$P_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}e^{-\frac{x^2+4}{4t}} & (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty) \\ 0 & (x,t) \in \mathbb{R}\times(-\infty,0) \end{cases},$$

$$R_1(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}e^{-\frac{x^2+4}{4t}} & (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty) \\ 0 & (x,t) \in \mathbb{R}\times(-\infty,0) \end{cases},$$

$$R_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}e^{-\frac{x^2+1}{4t}} & (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty) \\ 0 & (x,t) \in \mathbb{R}\times(-\infty,0) \end{cases},$$

$$R_3(x,\eta,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\left[e^{-\frac{x^2+(1-\eta)^2}{4t}}\right] & (x,\eta,t) \in \mathbb{R}\times[1,2]\times[0,+\infty) \\ 0 & (x,\eta,t) \in \mathbb{R}\times[1,2]\times(-\infty,0) \end{cases},$$

$$R_4(x,\eta,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\left[e^{-\frac{x^2+(3-\eta)^2}{4t}} \right] & (x,\eta,t) \in \mathbb{R}\times[1,\,2]\times[0,+\infty) \\ 0 & (x,\eta,t) \in \mathbb{R}\times[1,\,2]\times(-\infty,\,0) \end{cases}.$$

Đặt:

$$K(x,t) = -R_1 * f(x,t) + R_2 * g(x,t) - f(x,t) - \int_1^2 \left(R_3 - R_4\right) * F(x,\eta,t)d\eta. \tag{2.5}$$

Lấy biến đổi Fourier hai vế của (2.4), ta được

$$\hat{S}(z,r).\hat{v}(z,r) = \hat{K}(z,r), \tag{2.6}$$

Trong đó, $\hat{v}(z,r) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)e^{-i(xz+tr)}dxdt.$

Từ (2.6), ta tìm được nghiệm chính xác của bài toán (1.1) – (1.5)

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{K}(z,r)}{\hat{S}(z,r)} e^{i(xz+tr)}dzdr. \tag{2.7}$$

Trong các kết quả chính sau đây, ta ký hiệu $\|\,.\,\|_2$ là chuẩn $L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.2. Chỉnh hóa bài toán (1.1) - (1.5)

Chúng tôi xây dựng nghiệm chỉnh hóa của bài toán (1.1) – (1.5) là

$$v_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{D_\varepsilon} \frac{\hat{K}(z,r)}{\hat{S}(z,r)} e^{i(xz+tr)}dzdr, \tag{2.8}$$

Trong đó, $D_\varepsilon = \left\{(z,r)\,/\,a_\varepsilon \le |z| \le b_\varepsilon \ and \ a_\varepsilon^2 \le |r| \le b_\varepsilon^2\right\}$ với $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ sẽ được chọn sau sao cho $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon = 0$ và $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon = +\infty$.

Bổ đề 2.2 (Tính ổn định của nghiệm chỉnh hóa cho bởi phương trình 2.8):

Giả sử rằng $v_k \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *là nghiệm chỉnh hóa cho bởi (2.8) tương ứng với các dữ liệu* $f_k, g_k \in L^2(\mathbb{R}^2), F_k \in L^2(1,2,L^2(\mathbb{R}^2)), k = 1,2.$ *Khi đó, ta có*

$$\left\|v_1 - v_2\right\|_2 \le C_1\,\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon}\sqrt{\left\| f_1 - f_2\right\|_2^2 + \left\|g_1 - g_2\right\|_2^2 + \frac{1}{a_\varepsilon^2}\left\|F_1 - F_2\right\|^2_{L^2(1,2,L^2(\mathbb{R}^2))}},$$

Trong đó, $C_1 = \sqrt{\dfrac{3\sqrt[4]{32}}{\left(1-e^{-\sqrt[4]{8}}\right)^2}\max\left\{(2+2\|R_1\|_1^2),\|R_2\|_1^2\right\}}$ *là hằng số.*

Định lý 2.1

Cho $\gamma \in \left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ *và* $\varepsilon \in (0, e^{-1/\gamma})$. *Giả sử* $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *là nghiệm duy nhất của bài toán (1.1)– (1.5) tương ứng với các dữ liệu chính xác* $f_0, g_0 \in L^2(\mathbb{R}^2), F_0 \in L^2(1,2,L^2(\mathbb{R}^2))$ *và* $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *là nghiệm chỉnh hóa cho bởi (2.8) tương ứng với các dữ liệu đo đạc* $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^2), F_\varepsilon \in L^2(1,2,L^2(\mathbb{R}^2))$ *thỏa mãn* $\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon$, $\|g_\varepsilon - g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon$ *và* $\|F_\varepsilon - F_0\|_{L^2(1,2,L^2(\mathbb{R}^2))} \le \varepsilon$. *Khi đó, ta có* $\|v_\varepsilon - v_0\|_2 \le C_2\varepsilon^{1-3\gamma} + \eta(\varepsilon)$, *với* $C_2 > 0$ *là hằng số và* $\eta(\varepsilon) \to 0$ *khi* $\varepsilon \to 0$.

Chứng minh:

Ta đặt: $a_\varepsilon = \varepsilon^\gamma$, $b_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^\gamma}$. Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$\left\|v_{\varepsilon(f_\varepsilon,g_\varepsilon,F_\varepsilon)} - v_0\right\|_2 = \left\|\hat{v}_{\varepsilon(f_\varepsilon,g_\varepsilon,F_\varepsilon)} - \hat{v}_0\right\|_2 \le \left\|\hat{v}_{\varepsilon(f_\varepsilon,g_\varepsilon,F_\varepsilon)} - \hat{v}_{\varepsilon(f_0,g_0,F_0)}\right\|_2 + \left\|\hat{v}_{\varepsilon(f_0,g_0,F_0)} - \hat{v}_0\right\|_2. \quad (2.9)$$

Áp dụng bổ đề 2.2 và bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le a+b+c$ cho $a,b,c \ge 0$, ta đạt được: $\left\|\hat{v}_{\varepsilon(f_\varepsilon,g_\varepsilon,F_\varepsilon)} - \hat{v}_{\varepsilon(f_0,g_0,F_0)}\right\|_2 \le C_1\varepsilon^{-2\gamma}\left(2\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\varepsilon\right)$.

Vì thế $\left\|\hat{v}_{\varepsilon(f_\varepsilon,g_\varepsilon,F_\varepsilon)} - \hat{v}_{\varepsilon(f_0,g_0,F_0)}\right\|_2 \le C_2\varepsilon^{1-3\gamma}$, (2.10)

trong đó $C_2 = 3C_1$.

Đặt $\eta(\varepsilon) = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2\setminus D_\varepsilon} |\hat{v}_0(z,r)|^2 dzdr}$, ta có $\left\|\hat{v}_{\varepsilon(f_0,g_0,F_0)} - \hat{v}_0\right\|_2 = \eta(\varepsilon) \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$.

(2.11)

Từ (2.9), (2.10) và (2.11), ta đạt được:

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 \le C_2\varepsilon^{1-3\gamma} + \eta(\varepsilon). \quad (2.12)$$

Chứng minh hoàn tất.

Nhận xét 2.1 Định lý 2.1 không đưa ra đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác vì điều kiện của nghiệm chính xác chưa đủ mạnh. Tuy nhiên, có nghiệm chỉnh hóa vẫn tốt dù không biết rằng nghiệm chính xác tốt như thế nào. Định lý tiếp sau đây đưa ra sai số cụ thể với điều kiện bổ sung trên nghiệm chính xác.

Định lý 2.2

Cho v_ε, v_0 như trong định lý 1. Giả sử rằng $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)\bigcap L^1(\mathbb{R}^2)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ và $0<\varepsilon<1/2$. Khi đó, ta có $\left\|v_\varepsilon - v_0\right\|_2 \le C_4\,\varepsilon^{\frac{3}{10}}$, trong đó $C_4>0$ phụ thuộc v_0.

Chứng minh:

Đặt:
$$a_\varepsilon = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}\varepsilon^{1/5},$$
$$b_\varepsilon = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}\frac{1}{\varepsilon^{3/10}},$$
$$T_\varepsilon = \left[-b_\varepsilon, b_\varepsilon\right]\times\left[-b_\varepsilon^2, b_\varepsilon^2\right],$$
$$Q_\varepsilon = \left[-a_\varepsilon, a_\varepsilon\right]\times\left[-a_\varepsilon^2, a_\varepsilon^2\right],$$
$$D_\varepsilon = T_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon.$$

Từ bổ đề 2.2, ta có:

$$\left\|\hat{v}_{\varepsilon(F_\varepsilon, f_\varepsilon, g_\varepsilon)} - \hat{v}_{\varepsilon(F_0, f_0, g_0)}\right\|_2^2 \le C_1^2\,\frac{b_\varepsilon^2}{a_\varepsilon^2}\left[2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{a_\varepsilon^2}\right]. \tag{2.13}$$

$$\left\|\hat{v}_{\varepsilon(F_0, f_0, g_0)} - \hat{v}_0\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2\setminus D_\varepsilon}\left|\hat{v}_0(z,r)\right|^2 dzdr = \int_{\mathbb{R}^2\setminus T_\varepsilon}\frac{(z^2+r^2)\left|\hat{v}_0(z,r)\right|^2}{(z^2+r^2)}dzdr + \int_{Q_\varepsilon}\left|\hat{v}_0(z,r)\right|^2 dzdr$$
$$\le \left\|\sqrt{z^2+r^2}\,\hat{v}_0(z,r)\right\|_2^2\frac{1}{2b_\varepsilon^2} + 4\left\|\hat{v}_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^2 a_\varepsilon^3.$$

Do vậy $\left\|\hat{v}_{\varepsilon(F_0, f_0, g_0)} - \hat{v}_0\right\|_2^2 \le \left\|\sqrt{z^2+r^2}\,\hat{v}_0(z,r)\right\|_2^2\frac{1}{2b_\varepsilon^2} + 4\left\|v_0\right\|_1^2 a_\varepsilon^3.$ (2.14)

Từ (2.9), (2.13) và (2.14), ta được $\left\|v_\varepsilon - v_0\right\|_2^2 \le C_3^2\left(\frac{\varepsilon^2 b_\varepsilon^2}{a_\varepsilon^2} + \frac{1}{b_\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 b_\varepsilon^2}{a_\varepsilon^4} + a_\varepsilon^3\right),$

trong đó $C_3^2 = \max\left\{2C_1^2, \frac{1}{2}\left\|\sqrt{z^2+r^2}\,\hat{v}_0(z,r)\right\|_2^2, 4\left\|v_0\right\|_1^2\right\}.$

Điều này dẫn đến

$$\left\|v_\varepsilon - v_0\right\|_2^2 \le C_3^2\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{3/5}\varepsilon^{2/5}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2/5}\varepsilon^{3/5} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{3/5}\varepsilon^{4/5}} + \left(\frac{4}{3}\right)^{3/5}\varepsilon^{3/5}\right).$$

Do đó, ta được

$$\left\|v_\varepsilon - v_0\right\|_2^2 \le C_4^2\varepsilon^{3/5}, \text{ với } C_4 = C_3\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^{2/5}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}+\left(\frac{4}{3}\right)^{3/5}}.$$

Vì vậy $\left\|v_\varepsilon - v_0\right\|_2 \le C_4\,\varepsilon^{3/10}$. (2.15)

Chứng minh hoàn tất.

3. Kết luận

Nghiên cứu này đã chỉnh hóa bài toán khôi phục thông lượng nhiệt trên biên của một vật thể hữu hạn hai chiều trong trường hợp không thuần nhất. Chúng tôi đã xây dựng nghiệm chỉnh hóa của bài toán và đưa ra đánh giá sai số có dạng Holder giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác của bài toán.

Lời cảm ơn

Đầu tiên, tác giả muốn gửi lời cám ơn đến Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh. Tác giả cũng cám ơn các phản biện và biên tập viên vì những ý kiến đóng góp cho bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. D. Ang, R. Gorenflo, L. K. Vy and D. D. Trong, *Moment theory and some inverse problem in potential theory and heat conduction*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 2002.

[2] Carasso, "Determing surface temperatures from interior observations", *SIAM J. Appl. Math*. 42 (1981), pp 547 – 558.

[3] T. T. Le, D. N. Thanh and P. H. Tri, "Surface temperature determination from borehole measurements: A finite slab model", *Acta Mathematica Vietnamica*, Volume 20, Number 2, 1995, pp. 193 – 206.

[4] T. T. Le and M. P. Navarro, "Surface temperature from borehole measurement: regularization and error estimates", *Inter. J. Math. Math. Sci.*, Volume 18, Number 3(1995), pp 601 - 606.

[5] P. H. Quan, D. D. Trong and P. N. Dinh Alain, "Sinc approximation of the heat flux on the boundary of a two – dimensional finite slab", *Numer. Funct. Anal. Optim*, 27, no. 5-6, pp 685-695, 2006.

[6] P. N. Dinh Alain, P. H. Quan and D. D. Trong, "Sinc approximation of the heat distribution on the boundary of a two – dimensional finite slab", *Nonlinear analysis: Real World Applications* 9 (2008), pp 1103 – 1111.

[7] Erdelyi, et al., *Tables of Integral Transforms*, vol. 1, McGraw – Hill, Newyork, 1954.

[8] Andreas Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problem*, Springer, 1966.

Ngày nhận bài: 12/3/2020 Biên tập xong: 15/3/2021 Duyệt đăng: 20/3/2021