

PGS. TS. NGUYỄN QUỐC TRUNG

XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ

Tập 1

CHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN



PGS. TS. NGUYỄN QUỐC TRUNG

XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ

TẬP 1

(CHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN)



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI GIỚI THIỆU

Cuộc cách mạng khoa học và công nghệ đang diễn ra một cách sôi động chưa từng thấy như hiện nay trên toàn thế giới thúc đẩy loài người nhanh chóng bước sang một kỷ nguyên mới. Đó là kỷ nguyên của nền văn minh dựa trên cơ sở công nghiệp trí tuệ. Mở đầu cho cuộc cách mạng khoa học và công nghệ lần này có thể được đánh dấu bằng sự ra đời và phát triển ồ ạt của máy tính cũng như các phương tiện xử lý thông tin khác, đặc biệt là các hệ thống xử lý song song với tốc độ ngày càng cao. Cùng với sự phát triển nhanh chóng các công cụ xử lý tín hiệu số cũng như các nhu cầu ứng dụng các công cụ này vào mọi lĩnh vực hoạt động của xã hội loài người đòi hỏi sự phát triển đồng bộ các phương pháp xử lý tín hiệu hiện đại. Đặc biệt phương pháp xử lý số này phải áp dụng có hiệu quả trong các lĩnh vực thông tin liên lạc, phát thanh truyền hình, tự động điều khiển và các ngành công nghệ khác.

Để giúp tìm hiểu một cách cơ bản vấn đề này, chúng tôi xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách **“Xử lý tín hiệu và lọc số”** của PGS.TS. Nguyễn Quốc Trung. Cuốn sách đã được trình bày một cách hệ thống từ những kiến thức cơ bản về tín hiệu và các phương pháp tổng hợp phân tích các hệ thống rời rạc đến những phương pháp xử lý số tín hiệu dựa trên các công cụ toán học và vật lý hiện đại. Đặc biệt cuốn sách dành phần lớn cho việc phân tích và tổng hợp các bộ lọc số làm cơ sở cho việc ứng dụng trong các ngành công nghệ khác nhau.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách **“Xử lý tín hiệu và lọc số”** không những giúp ích tốt cho sinh viên các ngành công nghệ mà cũng là tài liệu tham khảo tốt cho NCS cũng như các chuyên gia đang hoạt động trong các lĩnh vực có liên quan.

GS. TS. Nguyễn Xuân Quỳnh

Viện trưởng Viện Điện tử - Tin học và Tự động hóa.

LỜI NÓI ĐẦU

Ngay sau khi xuất bản cuốn “Vi điện tử số” tập 1, “Trung tâm nghiên cứu phát triển Điện tử - Tin học - Viễn thông” - hợp tác giữa trường Đại học Bách khoa Hà Nội và Tổng công ty Điện tử - Tin học Việt Nam đã nhận được lời mời cùng xây dựng chương trình hiện đại hóa giáo trình và giáo cụ ngành Điện tử - Tin học - Viễn thông của Trung tâm Đào tạo Bưu chính Viễn thông I thuộc Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông và khoa Thông tin Tin học trường Đại học dân lập Đông Đô. Chúng tôi đã tổ chức Hội thảo khoa học về chương trình số hóa kỹ thuật Điện tử - Viễn thông, trước hết trong lĩnh vực giảng dạy của trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông... và khoa Thông tin Tin học trường Đại học dân lập Đông Đô. Trong buổi hội thảo chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến quý báu của các giảng viên và các nhà khoa học giàu kinh nghiệm. Hội thảo đã khẳng định việc hiện đại hóa trong lĩnh vực giảng dạy là cần thiết và rất cấp bách.

Ba cuốn sách: “Vi điện tử số” và “Xử lý tín hiệu và lọc số” tập 1 và tập 2 nằm trong bộ sách “Xử lý thông tin” nhằm mục đích này.

Chúng ta đều biết rằng việc số hóa các thiết bị Điện tử - Viễn thông đã và đang được thực hiện rất mạnh mẽ trên toàn thế giới cũng như ở Việt Nam. Chính vì vậy mà xử lý tín hiệu và lọc số đã trở thành một ngành khoa học và kỹ thuật. Sự phát triển rất nhanh chóng này khởi đầu từ sự ra đời của các mạch vi điện tử cỡ lớn VLSI (Very - Large - Scale Integration) là nền tảng cho sự phát triển đến chóng mặt của các phần cứng số (Digital hardware) chuyên dụng cũng như máy tính số (Digital Computer) với giá thành rẻ hơn, kích thước nhỏ hơn, tốc độ cao hơn.

Để tiếp cận với ngành khoa học hiện đại này chúng ta cần phải được trang bị những kiến thức cơ bản không thể thiếu được của xử lý tín hiệu và lọc số.

Giáo trình (XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ) này đã được dùng để giảng dạy nhiều năm cho học sinh chính khóa, cao học, nghiên cứu sinh của trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Học viện Viễn thông ORAN (Institut des Télécommunication d'ORAN), Đại học Tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Bách khoa Đà Nẵng, Trung tâm đào tạo Bưu chính Viễn thông I và II, Viện Khoa học kỹ thuật Bưu điện thuộc Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, Cục tác chiến Điện tử Bộ Quốc phòng, Đại học dân lập Đông Đô, Đại học dân lập Phương Đông...

Cuốn sách (XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ) chia thành 4 tập.

Tập 1: đề cập những vấn đề cơ bản của xử lý tín hiệu bao gồm biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền biến số n , trong miền z , trong miền tần số liên tục ω , trong miền tần số rời rạc ω ($\omega = 2\pi f$) và trong miền tần số rời rạc ω_k (hoặc miền k).

Tập 2: gồm các vấn đề về tổng hợp và thiết kế các loại bộ lọc số đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR) và đáp ứng xung chiều dài vô hạn (IIR).

Tập 3: bao gồm các kiến thức về cấu trúc và độ nhạy của các hệ thống số, biểu diễn hệ thống rời rạc trong không gian trạng thái lọc số nhiều nhịp, biến đổi Fourier nhanh và

cuối cùng là biến đổi Hilbert và hệ thống pha tối thiểu.

Tập 4: gồm các vấn đề về biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền sóng con (Wavelet), hiệu ứng lượng tử hóa trong xử lý tín hiệu và lọc số, các phương pháp đánh giá phổ, các bộ lọc số thích nghi, tiên đoán tuyến tính và cuối cùng là xử lý đồng cấu.

Địa chỉ liên hệ:

Cơ quan: PGS. TS. Nguyễn Quốc Trung, Trưởng khoa Điện tử Viễn thông.

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

Tel: 04 8692242, 04 8694957, 04 6623166, 04 6623266.

Nhà riêng: Nhà A2 - 109B Trung Tự, Đống Đa, Hà Nội.

Tel: 04 8528934; DĐ: 0913231914.

E-mail: nqtrung@fpt.vn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn những lời chỉ giáo quý giá của GS. TS Nguyễn Xuân Quỳnh, Viện trưởng Viện Điện tử, Tin học và Tự động hóa và GS. TS Phan Anh, Giám đốc Trung tâm nghiên cứu và phát triển Điện tử - Tin học - Viễn thông, để cuốn sách được hoàn thành với chất lượng cao hơn.

Tác giả
Nguyễn Quốc Trung

Chương 1. TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

1.1. NHẬP MÔN

1.1.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

a) Định nghĩa tín hiệu

Tín hiệu là biểu diễn vật lý của thông tin.

Ví dụ 1.1.1.1 :

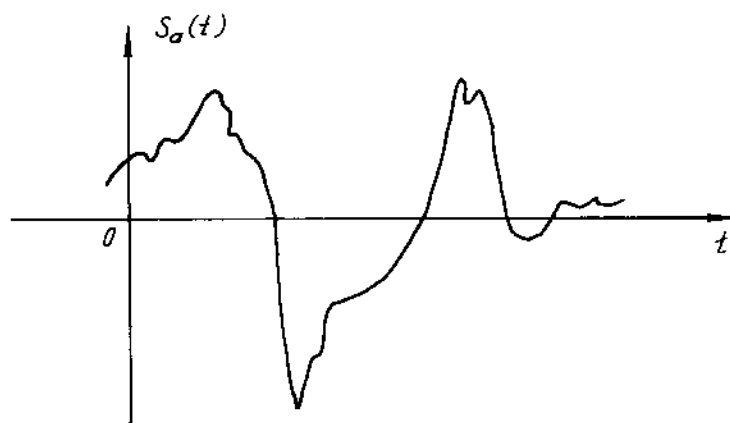
- Các tín hiệu nhìn thấy là các sóng ánh sáng mang thông tin tới mắt của chúng ta.
- Các tín hiệu nghe thấy là các sự biến đổi của áp suất không khí truyền thông tin tới tai chúng ta.

b) Biểu diễn toán học của tín hiệu

Về mặt toán học, tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của một hoặc nhiều biến số độc lập.

Ví dụ 1.1.1.2 :

Ta có tín hiệu microphone $S_a(t)$ được biểu diễn trên hình 1.1.1.1.



Hình 1.1.1.1

Từ hình 1.1.1.1 ta thấy $S_a(t)$ là hàm một biến số, và biến số này là thời gian t . Vì là hàm của một biến nên ta còn gọi là tín hiệu một chiều.

Ví dụ 1.1.1.3

Trong xử lý số ta chỉ xét ảnh tĩnh.

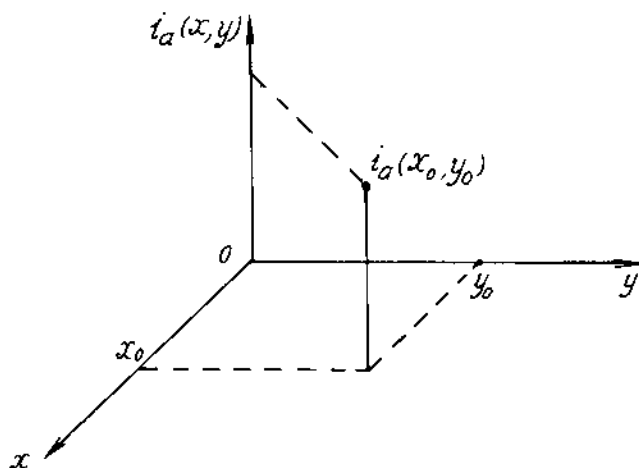
Một ảnh được đặc trưng bởi một cường độ sáng phụ thuộc hai biến số x và y : $i_a(x, y)$, x và y biểu diễn hệ tọa độ trong mặt phẳng ảnh. $i_a(x, y)$ là tín hiệu hai chiều. $i_a(x, y)$ được biểu diễn trên hình 1.1.1.2.

Chúng ta chia tín hiệu ra làm 2 nhóm lớn : tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc.

c) Định nghĩa tín hiệu liên tục

- Nếu biến độc lập của sự biểu diễn toán học của một tín hiệu là liên tục, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu liên tục.

- **Nhận xét** : Theo định nghĩa tín hiệu liên tục, thì từ liên tục ở đây được hiểu là liên tục theo biến số.



Hình 1.1.1.2.

Nếu dựa vào hàm số, chúng ta có thể phân loại tín hiệu liên tục ra làm hai loại :

- Tín hiệu tương tự
- Tín hiệu lượng tử hóa.

Định nghĩa tín hiệu tương tự

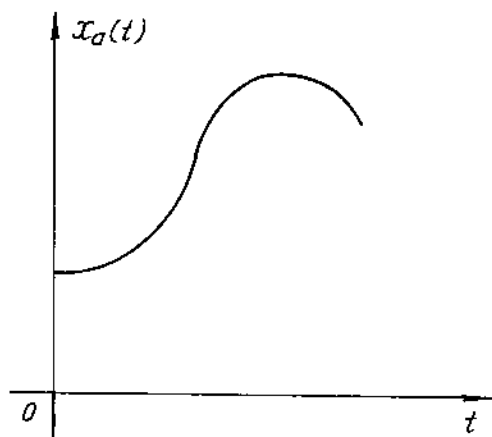
Nếu hàm của tín hiệu liên tục là liên tục thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu tương tự.

Định nghĩa tín hiệu lượng tử hóa

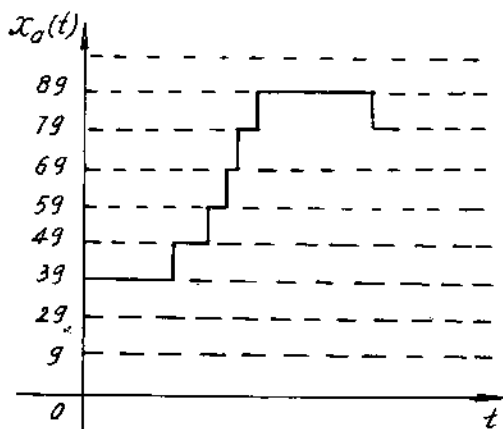
Nếu hàm của tín hiệu liên tục là rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu lượng tử hóa.

Ví dụ 1.1.1.4 :

Chúng ta có hai tín hiệu liên tục có biến số là thời gian t được biểu diễn trên hình 1.1.1.3 a là tín hiệu tương tự và hình 1.1.1.3 b là tín hiệu lượng tử hóa.



(a)



(b)

Hình 1.1.1.3.

d) Định nghĩa tín hiệu rời rạc

- Nếu tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của các biến rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu rời rạc.

- **Nhận xét** : Từ rời rạc ở đây được hiểu là rời rạc theo biến số.

Nếu dựa vào biên độ, chúng ta cũng có thể phân loại tín hiệu rời rạc ra làm hai loại :

- Tín hiệu lấy mẫu

- Tín hiệu số.

- **Định nghĩa tín hiệu lấy mẫu**

Nếu hàm của tín hiệu rời rạc là liên tục (không được lượng tử hoá) thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu lấy mẫu.

- **Định nghĩa tín hiệu số**

Nếu hàm của tín hiệu rời rạc là rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu số.

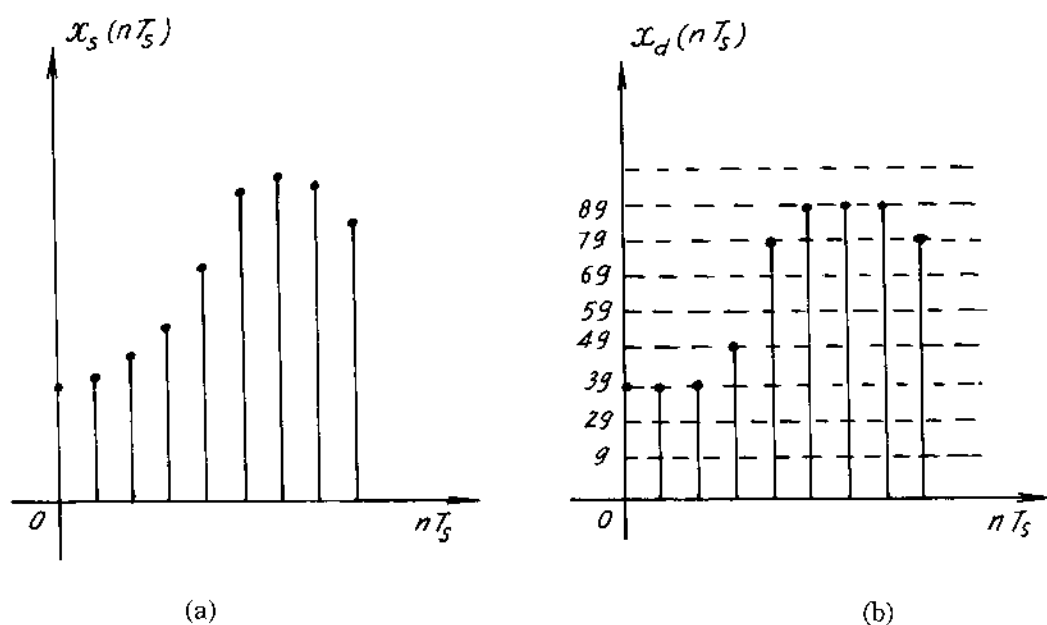
Nhận xét : Như vậy tín hiệu số là tín hiệu được rời rạc hóa cả về biến số và biên độ.

Còn tín hiệu tương tự là tín hiệu liên tục cả về biến số và biên độ.

Ví dụ 1.1.1.5 :

Chúng ta có hai tín hiệu rời rạc có biến số là thời gian t được biểu diễn trên hình 1.1.1.4, thời gian t được rời rạc hóa với chu kỳ rời rạc T_s .

Hình 1.1.1.4 (a) tín hiệu lấy mẫu và (b) tín hiệu số.



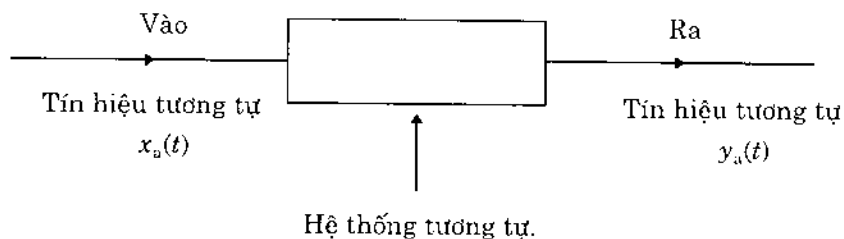
Hình 1.1.1.4.

1.1.2. CÁC HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU

Chúng ta có thể phân loại các hệ thống xử lý theo chính tín hiệu cần xử lý.

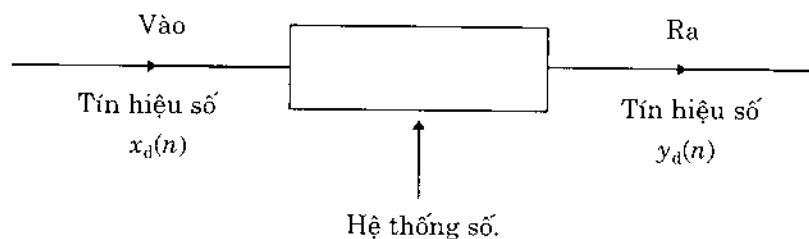
Ví dụ 1.1.2.1 :

Chúng ta có một hệ thống tương tự, nếu ở đầu vào của hệ thống đó chúng ta đặt các tín hiệu tương tự, thì ở đầu ra chúng ta thu được các tín hiệu tương tự, xem hình 1.1.2.1.



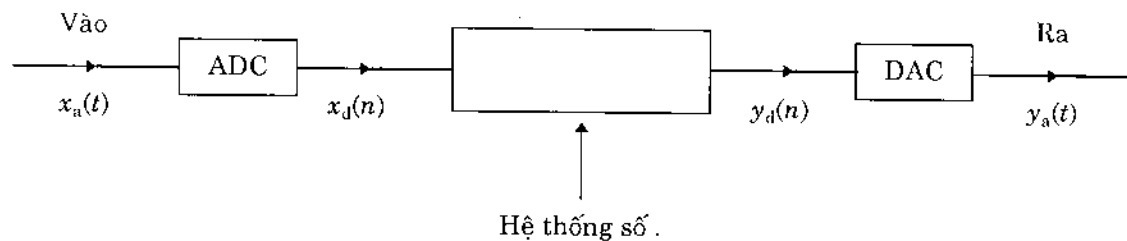
Hình 1.1.2.1.

Chúng ta có một hệ thống số khi các tín hiệu ở đầu vào và đầu ra của hệ thống đó là tín hiệu số, xem hình 1.1.2.2.



Hình 1.1.2.2.

Sơ đồ tổng quát của hệ thống xử lý số được cho bởi hình 1.1.2.3.



Hình 1.1.2.3.

Nhận xét :

- Tín hiệu tương tự ở đầu vào được chuyển sang dạng số nhờ một hệ biến đổi tương tự - số ADC.

- Tín hiệu tương tự ở đầu ra được thiết lập lại nhờ hệ biến đổi số - tương tự DAC.

Như vậy tín hiệu ra của bộ biến đổi ADC là tín hiệu số $x_d(n)$, đó là tín hiệu vào của hệ thống số, hệ thống số này làm nhiệm vụ xử lý tín hiệu số $x_d(n)$ và đưa ra tín hiệu số $y_d(n)$.

Về bản chất ta thấy rằng chúng ta xử lý tín hiệu tương tự bằng con đường số, vì vậy môn học này gọi là “Xử lý số tín hiệu”, tổng quát hơn là tên gọi “Xử lý tín hiệu số”.

1.2. TÍN HIỆU RỜI RẠC

1.2.1. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU RỜI RẠC

a) Biểu diễn toán học

Một tín hiệu rời rạc được biểu diễn bởi một dãy các giá trị thực hoặc phức.

Nếu nó được hình thành bởi các giá trị thực, thì nó được gọi là tín hiệu thực. Còn nếu nó được hình thành bởi các giá trị phức, thì nó được gọi là tín hiệu phức.

Trong phần trên chúng ta đã định nghĩa tín hiệu rời rạc gồm 2 loại là tín hiệu lấy mẫu và tín hiệu số, với ký hiệu như sau :

$x_s(nT_s)$: tín hiệu lấy mẫu.

$x_d(nT_s)$: tín hiệu số.

Bây giờ thống nhất ký hiệu chung của tín hiệu rời rạc là $x(nT_s)$. Như vậy ở đây nT_s là biến độc lập, n là số nguyên, T_s là chu kỳ lấy mẫu. Để tiện cho cách biểu diễn tín hiệu rời rạc chúng ta sẽ chuẩn hoá biến số độc lập nT_s bởi chu kỳ lấy mẫu T_s như sau :

$$\frac{nT_s}{T_s} = n$$

Như vậy sau khi chuẩn hoá ta có :

$$x(nT_s) \xrightarrow[\text{bởi } T_s]{\text{chuẩn hoá}} x(n)$$

Chú ý rằng nếu trong miền biến số chúng ta chuẩn hoá bởi chu kỳ lấy mẫu T_s thì trong miền tần số chúng ta phải chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s $\left(F_s = \frac{1}{T_s}\right)$

Cách biểu diễn toán học tín hiệu rời rạc $x(n)$ cụ thể như sau :

$$x(n) = \begin{cases} \text{biểu thức toán} & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ví dụ 1.2.1.1 :

Hãy cho cách biểu diễn toán học của một tín hiệu rời rạc nào đó.

Giải :

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ở đây : $N_1 = 0$ $N_2 = 4$

b) Biểu diễn đồ thị

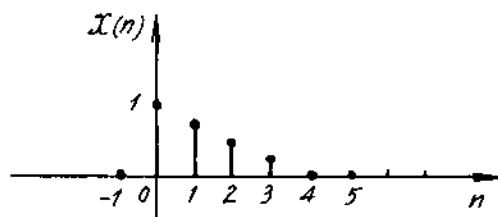
Để tiện minh họa một cách trực quan trong nhiều trường hợp chúng ta dùng biểu diễn đồ thị.

Ví dụ 1.2.1.2 :

Hãy vẽ đồ thị tín hiệu rời rạc của ví dụ 1.2.1.1.

Giải :

Đồ thị của ví dụ 1.2.1.1 cho trên hình 1.2.1.1.



Hình 1.2.1.1

c) Biểu diễn bằng dãy số

Cách biểu diễn này là ở chỗ chúng ta liệt kê các giá trị của $x(n)$ thành một dãy số như sau :

$$x(n) = \{ \dots, x(n-1), \underset{\bar{n}}{x(n)}, x(n+1), \dots \}$$

Để chỉ ra giá trị của $x(n)$ tại vị trí thứ n ta dùng ký hiệu $\bar{n}$, bởi vì khi dùng cách biểu diễn này ta không biết đâu là $x(n)$.

Vì tín hiệu rời rạc thực chất là các dãy số như cách biểu diễn này nên ta thường gọi tín hiệu rời rạc $x(n)$ là dãy $x(n)$.

Chú ý rằng tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa chỉ với giá trị n nguyên, $x(n)$ không được coi như bằng 0 đối với các giá trị n không nguyên, $x(n)$ không được định nghĩa với các giá trị không nguyên này.

Trong các cách biểu diễn trên ta dùng cách nào cũng được, tùy từng trường hợp ta dùng cho thuận lợi với mục đích của chúng ta.

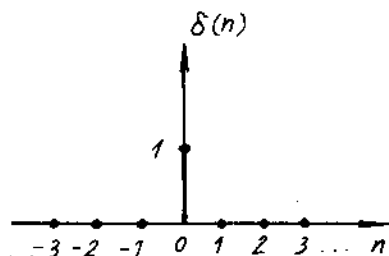
1.2.2. MỘT VÀI DÃY CƠ BẢN

a) Dãy xung đơn vị

Trong miền n dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2.2.1)$$

Đồ thị của $\delta(n)$ cho trên hình 1.2.2.1.

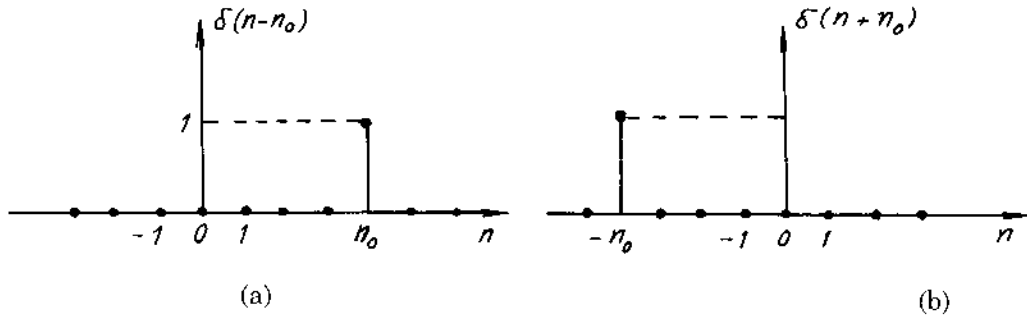


Hình 1.2.2.1.

Ví dụ 1.2.2.1 :

Hãy tìm biểu diễn toán học và đồ thị của tín hiệu sau đây : $\delta(n - n_0)$ và $\delta(n + n_0)$

Giải :



Hình 1.2.2.2.

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases} \quad \delta(n + n_0) = \begin{cases} 1 & n = -n_0 \\ 0 & n \neq -n_0 \end{cases}$$

Đồ thị của $\delta(n - n_0)$ và $\delta(n + n_0)$ cho trên hình 1.2.2.2 (a) và (b).

b) Dây nhảy đơn vị

Dây nhảy đơn vị được định nghĩa như sau trong miền n :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.2.2.2)$$

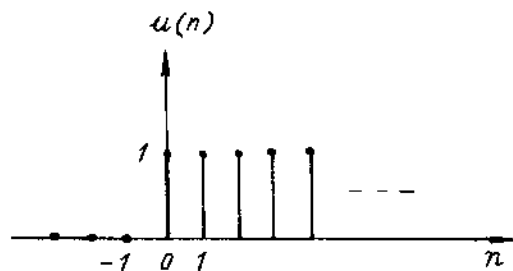
Đồ thị của $u(n)$ cho trên hình 1.2.2.3.

Ví dụ 1.2.2.2 :

Hãy tìm biểu diễn toán học và đồ thị của các dây sau đây :

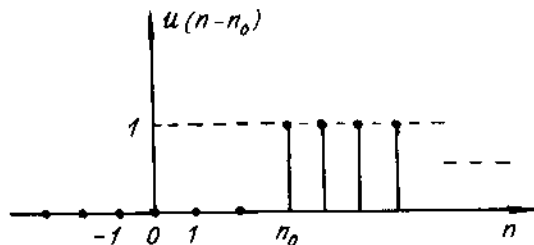
$$u(n - n_0) \text{ và } u(n + n_0)$$

Giải :



Hình 1.2.2.3.

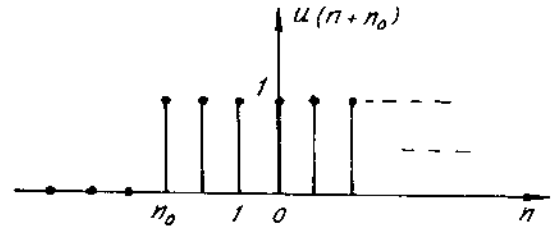
$$u(n - n_0) = \begin{cases} 1 & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases}$$



(a)

$$u(n+n_0) = \begin{cases} 1 & n \geq -n_0 \\ 0 & n < -n_0 \end{cases}$$

Đồ thị của $u(n - n_0)$ và $u(n + n_0)$ cho trên hình 1.2.2.4 (a) và (b).



(b)

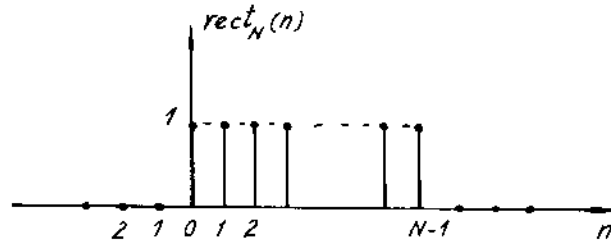
Hình 1.2.2.4.

c) Dãy chữ nhật

Dãy chữ nhật được định nghĩa như sau trong miền n .

$$rect_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.2.2.3)$$

Đồ thị của $rect_N(n)$ cho trên hình 1.2.2.5.



Hình 1.2.2.5.

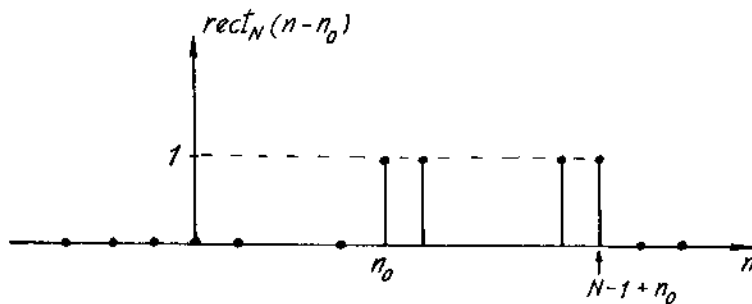
Ví dụ 1.2.2.3 :

Hãy tìm biểu diễn toán học và đồ thị của dãy sau đây : $rect_N(n - n_0)$

Giải :

$$rect_N(n - n_0) = \begin{cases} 1 & n_0 \leq n \leq N-1 + n_0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Đồ thị của $rect_N(n - n_0)$ cho trên hình 1.2.2.6.



Hình 1.2.2.6.

d) Dây dốc đơn vị

Dây dốc đơn vị được định nghĩa như sau trong miền n .

$$r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.2.2.4)$$

Đồ thị của $r(n)$ cho trên hình 1.2.2.7.

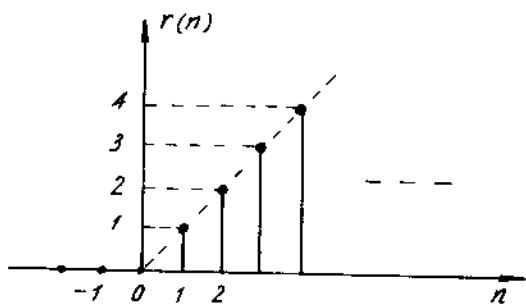
Ví dụ 1.2.2.4 :

Hãy tìm biểu diễn toán học và đồ thị của dãy sau đây : $r(n - n_0)$.

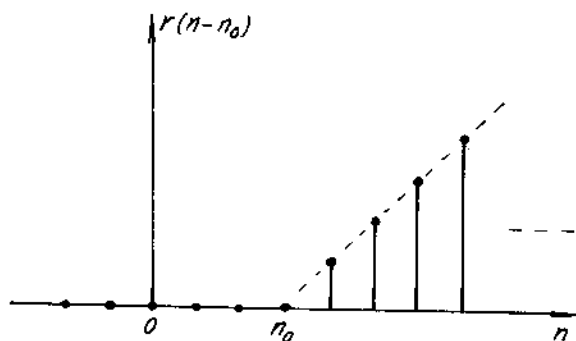
Giải :

$$r(n - n_0) = \begin{cases} n - n_0 & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases}$$

Đồ thị của $r(n - n_0)$ cho trên hình 1.2.2.8.



Hình 1.2.2.7.



Hình 1.2.2.8.

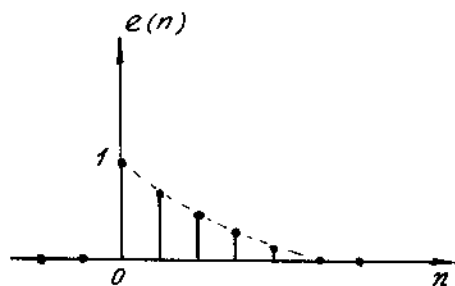
e) Dây hàm mũ thực

Dây hàm mũ thực được định nghĩa như sau trong miền n .

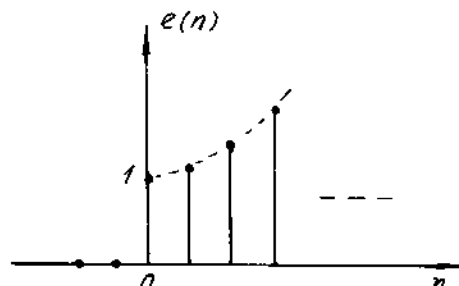
$$e(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.2.2.5)$$

Ở đây a là tham số.

Dây này tăng giảm phụ thuộc tham số a lớn hơn hoặc nhỏ hơn 1 như trên hình 1.2.2.9 (a) và (b).



(a)
 $a < 1$



(b)
 $a > 1$

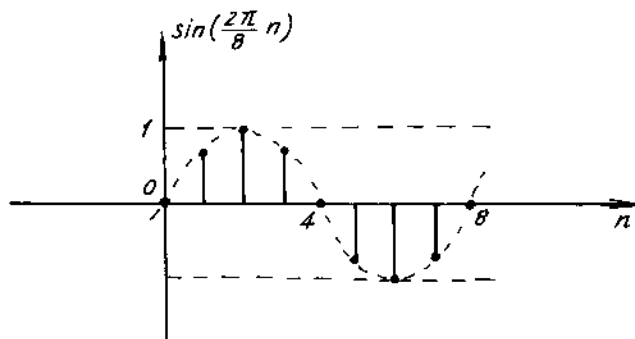
Hình 1.2.2.9.

f) Dãy sin

Dãy sin được định nghĩa như sau trong miền n .

$$s(n) = \sin(\omega_0 n) \quad (1.2.2.6)$$

Đồ thị của $s(n)$ cho trên hình 1.2.2.10 với $\omega_0 = \frac{2\pi}{8}$.



$$\text{với } \omega_0 = \frac{2\pi}{8}$$

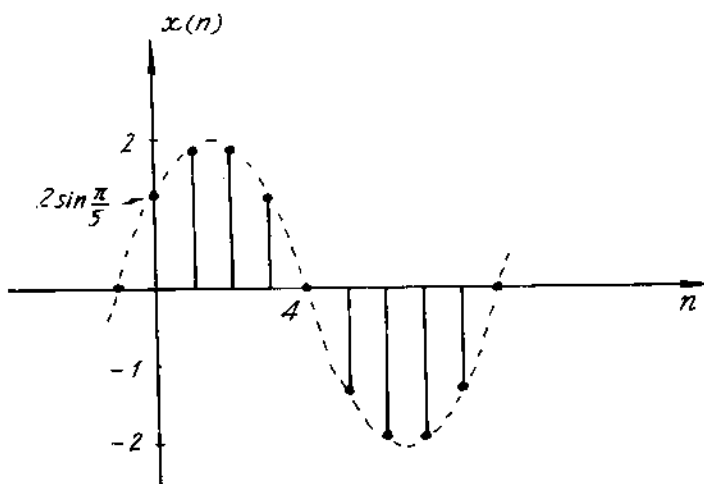
Hình 1.2.2.10.

Ví dụ 1.2.2.5 :

Tìm biểu diễn đồ thị dãy sau đây

$$x(n) = 2\sin\left[\frac{2\pi}{10}(n+1)\right]$$

Giải : Đồ thị hình 1.2.2.11.



Hình 1.2.2.11.

g) Dãy mũ phức

$$x(n) = \exp[j\omega n] \quad (1.2.2.7)$$

Nhờ công thức Euler ta có :

$$x(n) = e^{j\omega n} [\cos(\omega n) + j \sin(\omega n)] \quad (1.2.2.8)$$

1.2.3. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

a) Dãy chu kỳ (Dãy tuần hoàn)

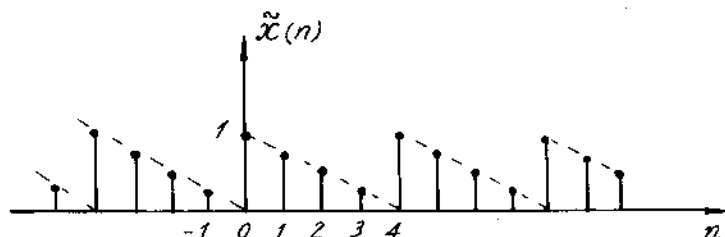
Chúng ta nói rằng một dãy là tuần hoàn với chu kỳ N , nếu ta có :

$$x(n) = x(n + N) = x(n + kN) \quad \text{với } \forall n \quad (1.2.3.1)$$

Ta ký hiệu dãy tuần hoàn bởi dấu $\sim \tilde{x}(n)$; $\tilde{x}(n)_N$

Ví dụ 1.2.3.1 : Hãy vẽ một dãy tuần hoàn với chu kỳ $N=4$

Giải : Dãy $\tilde{x}(n)$ có $N=4$ cho trên hình 1.2.3.1



Hình 1.2.3.1.

b) Dãy có chiều dài hữu hạn

Dãy được xác định với số hữu hạn N mẫu (N điểm trên trục hoành) gọi là dãy có chiều dài hữu hạn.

N gọi là chiều dài dãy.

Ví dụ 1.2.3.2 :

Hãy vẽ một dãy có chiều dài hữu hạn $N = 4$.

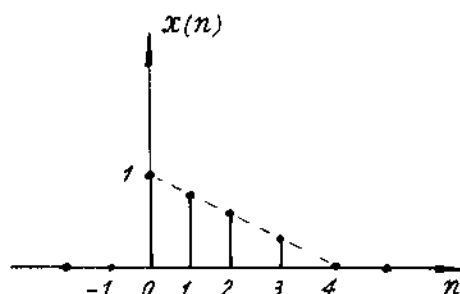
Giải :

Dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn $N = 4$ cho trên hình 1.2.3.2.

Dãy này có chiều dài $N = 4$.

Nhận xét : Tất nhiên chúng ta có thể coi dãy $x(n)$ này có chiều dài lớn hơn 4, tại các điểm tiếp theo dãy có biên độ bằng không. Còn dãy $u(n)$ có chiều dài vô cùng.

Dãy $\delta(n)$ có chiều dài là một. Dãy $rect_N(n)$



Hình 1.2.3.2.

có chiều dài là N . Nếu ta ký hiệu chiều dài của dãy $x(n)$ là $L : L[x(n)]$, thì dãy $rect_N(n)$ sẽ viết là :

$$L[rect_N(n)] = [0, N - 1] = N$$

c) Năng lượng và công suất của dãy

Năng lượng của dãy được định nghĩa là

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.2.3.2)$$

Ở đây $| \cdot |$ là modul.

Ví dụ 1.2.3.3 :

Hãy tính năng lượng của dãy $u(n)$ và $rect_N(n)$.

Giải :

$$E_u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty$$

$$E_{rect_N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |rect_N(n)|^2 = N$$

Công suất trung bình của dãy $x(n)$ được định nghĩa là :

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.2.3.3)$$

Năng lượng của dãy $x(n)$ trong khoảng hữu hạn $-N \leq n \leq N$ được định nghĩa là :

$$E_{x_N} = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.2.3.4)$$

Vậy ta có :

$$E_x = \lim_{N \rightarrow \infty} E_{x_N} \quad (1.2.3.5)$$

và

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_{x_N} \quad (1.2.3.6)$$

Dãy năng lượng :

Nếu năng lượng của dãy $x(n)$ là hữu hạn (tức là $0 < E_x < \infty$), thì $x(n)$ gọi là dãy năng lượng.

Dãy công suất :

Nếu P_x là hữu hạn (tức là $0 < P_x < \infty$), thì $x(n)$ gọi là dãy công suất.

Ví dụ 1.2.3.4 :

Hãy tính công suất trung bình của dãy $u(n)$ và $rect_N(n)$.

Giải :

$$P_u = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |u(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{rect_M} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |rect_M(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{2N+1} = 0$$

Ta thấy rằng $E_{rect_M} = M$ là hữu hạn, vì vậy $P_{rect_M} = 0$, còn trong trường hợp tổng quát nếu E_x là vô hạn thì P_x có thể là hữu hạn hoặc vô hạn.

Từ hai ví dụ 1.2.3.3 và 1.2.3.4 ta thấy rằng $E_{rect_M}(n)$ là dãy năng lượng, còn $u(n)$ là dãy công suất.

d) Tổng của hai dãy

Định nghĩa : Tổng của hai dãy nhận được bằng cách cộng từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

Ví dụ 1.2.3.5 :

Hãy tìm tổng của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là dãy $x_3(n)$ như sau :

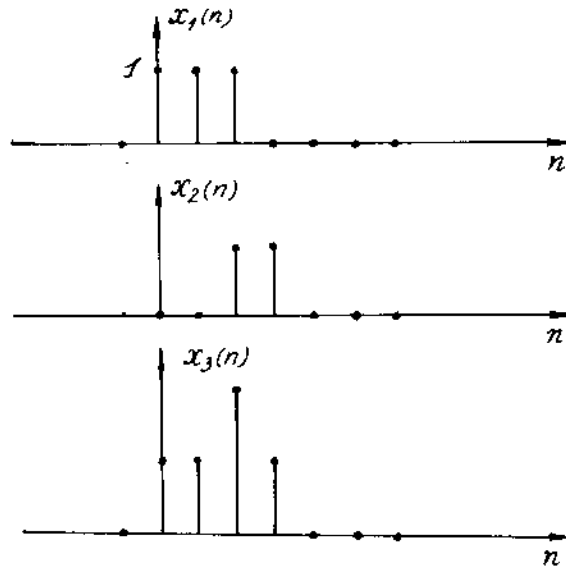
$$x_3(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$\text{với } x_1(n) = rect_3(n)$$

$$x_2(n) = rect_2(n-2)$$

Giải :

Giải bằng đồ thị cho trên hình 1.2.3.3.



Hình 1.2.3.3.

e) Tích của hai dãy

Tích của hai dãy nhận được bằng cách nhân từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

Ví dụ 1.2.3.6 :

Hãy tìm tích của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là $x_3(n)$ như sau :

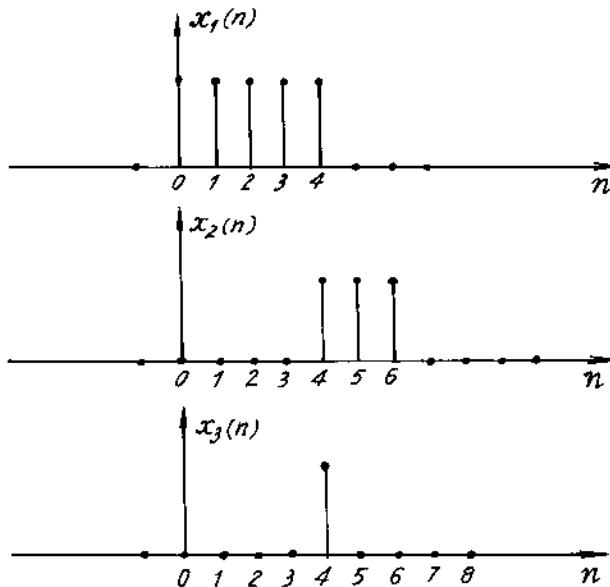
$$x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

với $x_1(n) = \text{rect}_5(n)$

$$x_2(n) = \text{rect}_3(n - 4)$$

Giải :

Giải bằng đồ thị cho trên hình 1.2.3.4.



Hình 1.2.3.4.

Chú ý : Tích của nhiều dãy cũng được định nghĩa tương tự như trên.

f) Tích với hằng số

Tích của một dãy với một hằng số nhận được bằng cách nhân tất cả các giá trị mẫu của dãy với chính một hằng số đó.

Ví dụ 1.2.3.7 :

Hãy tìm tích của hằng số α và dãy $x_1(n)$ là dãy $x_3(n)$ như sau :

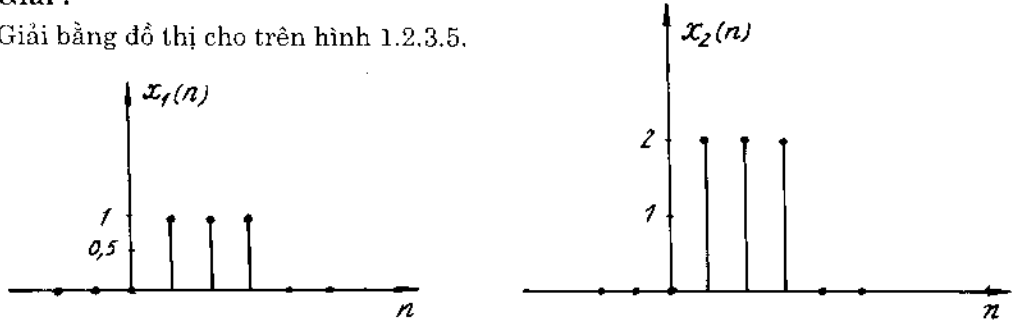
$$x_3(n) = \alpha x_1(n)$$

với $\alpha = 2$

$$x_1(n) = \text{rect}_3(n - 1)$$

Giải :

Giải bằng đồ thị cho trên hình 1.2.3.5.



Hình 1.2.3.5.

g) Trễ (dịch)

Ta nói rằng dãy $x_2(n)$ là dãy lặp lại trễ của dãy $x_1(n)$ khác nếu ta có :

$$x_2(n) = x_1(n - n_0)$$

với mọi n, n_0 số nguyên âm hoặc dương.

Ví dụ 1.2.3.8 :

Hãy tìm dãy trễ $x_2(n)$ của dãy $x_1(n)$ như sau :

$$x_2(n) = x_1(n - 1)$$

với

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giải :

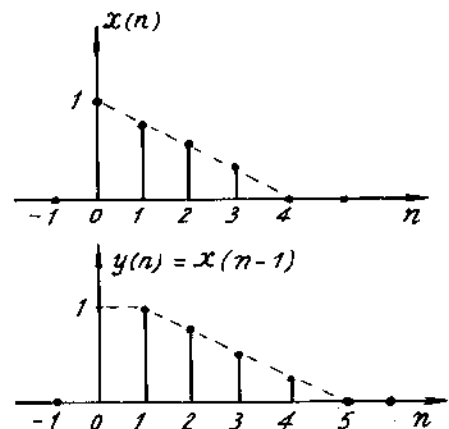
Giải bằng đồ thị cho trên hình 1.2.3.6.

Nhận xét :

Nhờ có phép tổng, tích và trễ, chúng ta có thể diễn tả một dãy dưới dạng tổng sau đây :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \quad (1.2.3.7)$$

$\delta(n - k)$ là dãy xung đơn vị trễ.



Hình 1.2.3.6.

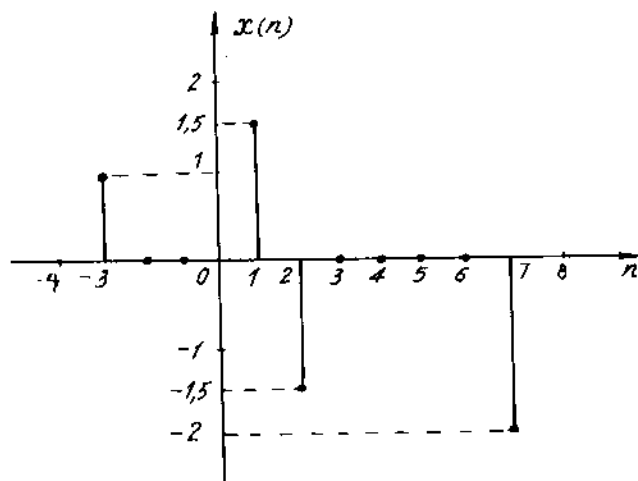
Ví dụ 1.2.3.9 :

Hãy vẽ đồ thị của dãy $x(n]$ được cho bởi biểu thức sau đây :

$$x(n) = \delta(n+3) + 1,5 \delta(n-1) - 1,5 \delta(n-2) - 2 \delta(n-7).$$

Giải :

Giải bằng đồ thị cho trên hình 1.2.3.7.



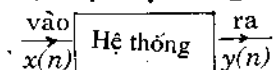
Hình 1.2.3.7.

1.3. CÁC HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

1.3.1. CÁC HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH

a) Định nghĩa

- **Ký hiệu hệ thống**



- **Kích thích và đáp ứng** : Dãy vào được gọi là dãy kích thích (hoặc kích thích), dãy ra được gọi là đáp ứng của hệ thống với kích thích đang khảo sát.

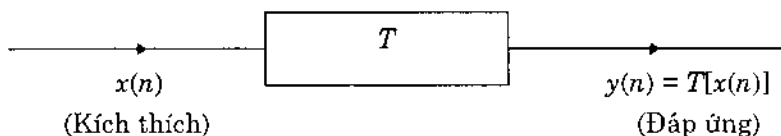
- **Đặc trưng của hệ thống** : Một hệ thống xử lý số được đặc trưng bởi một toán tử T làm nhiệm vụ biến đổi dãy vào $x(n)$ thành dãy ra $y(n)$. Chúng ta có thể sử dụng 2 loại ký hiệu toán tử sau đây:

$$T[x(n)] = y(n)$$

hoặc

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n) \quad (1.3.1.1)$$

Chúng ta cũng có thể biểu diễn hệ thống này bằng sơ đồ cho trên hình 1.3.1.1

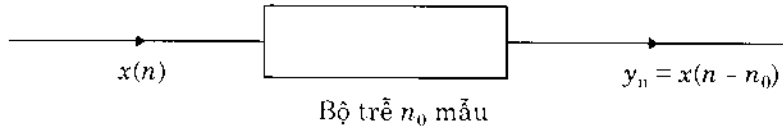


Hình 1.3.1.1

Ví dụ 1.3.1.1:

Nếu T là toán tử trễ, ta sẽ có

$$T[x(n)] = x(n - n_0) = y(n)$$



Hình 1.3.1.2.

b) Các hệ thống tuyến tính

Đối với các hệ thống tuyến tính, toán tử T phải thoả mãn nguyên lý xếp chồng, vì thế T đặc trưng cho một hệ thống tuyến tính bắt buộc phải tuân theo quan hệ sau :

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (1.3.1.2)$$

Ở đây a và b là hai hằng số bất kỳ.

- $y_1(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_1(n)$.

- $y_2(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_2(n)$.

Ví dụ 1.3.1.2 :

Xét toán tử trễ T :

$$T[x(n)] = x(n - n_0) = y(n)$$

$$\Rightarrow T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ax_1(n - n_0) + bx_2(n - n_0).$$

Vậy hệ thống được đặc trưng bởi toán tử T là hệ thống tuyến tính.

c) Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính

Ta thấy rằng một dãy bất kỳ $x(n)$ có thể được biểu diễn bằng biểu thức tổng sau đây :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Giả sử hệ thống của chúng ta là tuyến tính, chúng ta có thể viết :

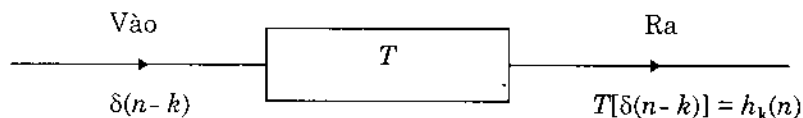
$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

Vì $x(k)$ độc lập với n , nên ta có :

$$y(n) = T[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad (1.3.1.3)$$

Nếu ta ký hiệu $h_k(n)$ là đáp ứng của hệ thống với kích thích $\delta(n-k)$, có nghĩa là :

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)], \text{ xem hình 1.3.1.3}$$



Hình 1.3.1.3.

Và chúng ta có :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (1.3.1.4)$$

Đáp ứng $h_k(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính.

Nhận xét :

- Các hệ thống tuyến tính được đặc trưng hoàn toàn bởi đáp ứng xung của nó.
- $h_k(n)$ là hàm của k và n , như vậy ở các giá trị k khác nhau sẽ cho ta các đáp ứng xung khác nhau, hệ thống tuyến tính này sẽ phụ thuộc vào biến k , nếu biến k là thời gian, thì ta có hệ thống tuyến tính phụ thuộc vào thời gian.

Sau đây chúng ta sẽ xét hệ thống tuyến tính bất biến theo k , tức là dạng của đáp ứng xung $h_k(n)$ không phụ thuộc vào k .

1.3.2. CÁC HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

a) Định nghĩa

Nếu $y(n)$ là đáp ứng ứng với kích thích $x(n)$, thì hệ thống tuyến tính gọi là bất biến khi $y(n-k)$ là đáp ứng của kích thích $x(n-k)$, ở đây k là số nguyên dương hoặc âm.

Nếu biến số là thời gian, thì ta nói hệ thống bất biến theo thời gian.

Ví dụ 1.3.2.1 :

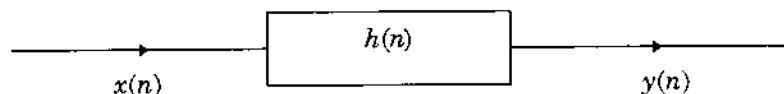
Hệ thống $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1)$ là hệ thống tuyến tính bất biến.

b) Tích chập

Khi hệ thống của chúng ta là hệ thống tuyến tính và bất biến, thì ta có quan hệ sau :

$$\begin{aligned} T[\delta(n)] &= h(n) \\ T[\delta(n-k)] &= h(n-k) = h_k(n) \\ \Rightarrow y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned} \quad (1.3.2.1)$$

Như vậy $h_k(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính. Còn $h(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến, lúc này $h(n)$ sẽ không phụ thuộc vào k , tức là nếu biến là thời gian thì ở mọi thời điểm khác nhau đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến luôn là $h(n)$. Đến đây ta có thể nói rằng đáp ứng xung $h(n)$ sẽ đặc trưng hoàn toàn cho một thống tuyến tính bất biến, xem hình 1.3.2.1



Hình 1.3.2.1

và ta có quan hệ sau :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n)*h(n) \quad (1.3.2.2)$$

Quan hệ (1.3.2.2) được gọi là tích chập của $x(n)$ và $h(n)$ được ký hiệu bởi dấu $*$.

Chú ý : Tích chập này chỉ đúng với hệ thống tuyến tính bất biến, vì nó được định nghĩa chỉ cho hệ thống này.

Ví dụ 1.3.2.2 :

Cho $x(n) = \text{rect}_5(n)$

và

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính tích chập $x(n) * h(n)$.

Giải :

Để tính tích chập này, trước tiên chúng ta nhận xét bản chất của biểu thức tích chập.

Ta thấy rằng từ biểu thức :

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = y(n)$$

Để thu được $y(n)$ ta phải tính $y(n)$ theo từng giá trị của n , về lý thuyết n và k giữ các giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$, như vậy ta không thể tính hết được, nhưng thực tế chúng ta thường làm việc với các dãy có chiều dài hữu hạn. Với mỗi giá trị của $y(n)$ ta phải tính một tổng theo k của tích $x(k)h(n-k)$ như sau :

$$\text{Nếu } n = -1 \Rightarrow y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k)$$

$$\text{Nếu } n = 0 \Rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)$$

$$\text{Nếu } n = 1 \Rightarrow y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)$$

⋮
⋮
⋮

Tập hợp tất cả các giá trị này ta có $y(n)$.

Áp dụng vào ví dụ 1.3.2.2 :

$x(k) = \text{rect}_5(k) \rightarrow$ ta đổi biến n thành k

$$h(n-k) = \begin{cases} 1 - \frac{n-k}{4} & 0 \leq n-k \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

$\rightarrow$ ta đổi biến n thành $n-k$.

Vì

$$x(k) = \text{rect}_5(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

Vậy tổng theo k chỉ tính từ 0 đến 4 là đủ.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Rightarrow \sum_{k=0}^4$$

$$n = -1 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^4 x(k)h(-1-k) = \frac{1,0}{k=0} + \frac{1,0}{k=1} + \frac{1,0}{k=2} + \frac{1,0}{k=3} + \frac{1,0}{k=4} = 0$$

$$n = 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^4 x(k)h(-k) = 1,1 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^4 x(k)h(1-k) = 1,0,75 + 1,1 + 1,0 + 1,0 + 1,0 = 1,75$$

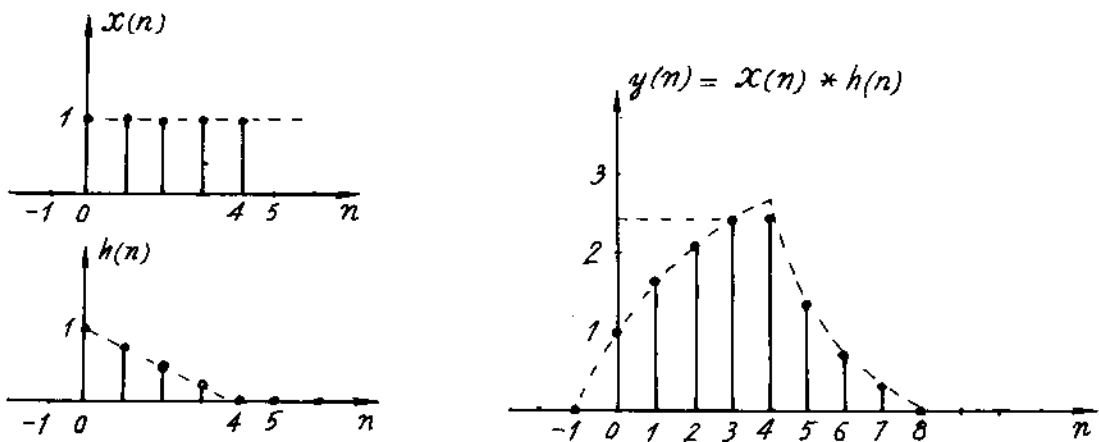
$$n = 2 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^4 x(k)h(2-k) = 1,0,5 + 1,0,75 + 1,1 + 1,0 + 1,0 = 2,25$$

Tiếp tục tính tương tự như trên ta thu được kết quả :

$$\begin{array}{lll} y(3) = 2,5 & y(4) = 2,5 & y(5) = 1,5 \\ y(6) = 0,75 & y(7) = 0,25 & y(8) = 0 \\ y(9) = 0 \dots\dots \end{array}$$

Các giá trị khác của $y(n)$ đều bằng không.

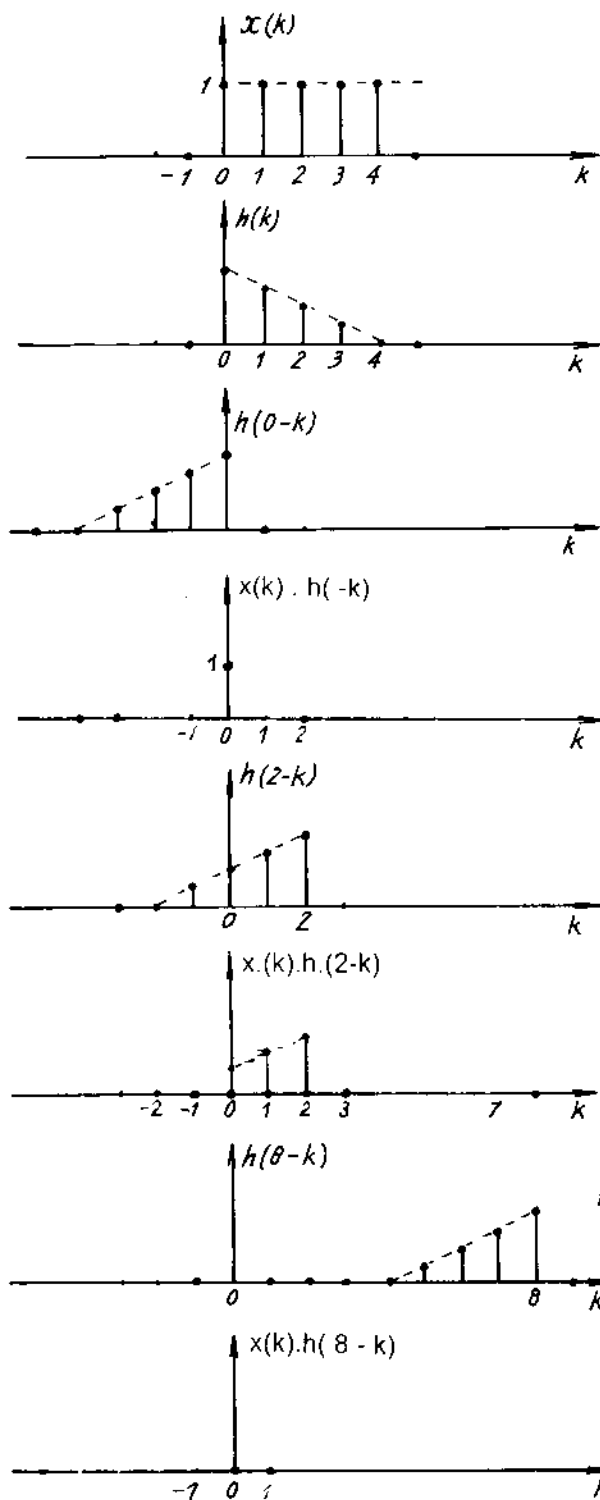
Ta có $y(n)$ cho bởi đồ thị sau (hình 1.3.2.2).



Hình 1.3.2.2.

Chúng ta có thể minh họa cách tính tích chập bằng đồ thị, như thế ta có thể hiểu trực quan hơn. Các bước tính như sau :

- Đổi biến số n thành k , $x(n) \rightarrow x(k)$, $h(n) \rightarrow h(k)$, cố định $x(k)$ lại.
- Quay $h(k)$ đối xứng qua trục tung, để thu được $h(-k)$, tức là ta có $h(0-k)$ (ứng với $n=0$).
- Dịch chuyển $h(-k)$ theo từng giá trị n , nếu n dương thì dịch chuyển về phía phải, nếu n âm thì dịch về phía trái, ta sẽ thu được $h(n-k)$.
- Thực hiện phép nhân $x(k) \cdot h(n-k)$ theo từng mẫu đối với tất cả các giá trị của k .
- Cộng các giá trị thu được, chúng ta sẽ có một giá trị của $y(n)$, tổng hợp các kết quả ta sẽ có dãy $y(n)$. Xem hình 1.3.2.3.



$$\begin{aligned}
 n=0, \quad y(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0-k) \\
 &= \dots + 0 + 1 + 0 + \dots \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n=2, \quad y(2) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k) \\
 &= \dots + 0,5 + 0,75 + 1 + 0 + \dots \\
 &= 2,25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n=8, \quad y(8) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(8-k) \\
 &= \dots + 0 + 0 + 0 + \dots \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Hình 1.3.2.3.

Hình 1.3.2.3 đã minh họa cho ta cách tính tích chập bằng đồ thị, nếu ta tính tất cả các giá trị của $y(n)$ và vẽ đồ thị thì ta sẽ có $y(n)$ như trên hình 1.3.2.2.

Chúng ta còn có thể tính tích chập trực tiếp từ biểu thức giải tích của $x(n)$ và $h(n)$:

$$x(k) = \text{rect}_5(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

$$h(n-k) = \begin{cases} 1 - \frac{n-k}{4} & 0 \leq n-k \leq 4 \\ 0 & \text{giá trị còn lại} \end{cases}$$

Ta thấy rằng $x(k) = 1$ trong khoảng $0 \leq k \leq 4$. Vì vậy tổng theo k , $\sum_k$ luôn lấy từ 0

đến 4 :

$$\sum_{k=0}^4 x(k)h(n-k)$$

Còn đối với $h(n-k)$ thì $h(n-k)$ chỉ xác định trong khoảng $0 \leq n-k \leq 4$, còn ngoài khoảng này, $h(n-k) = 0$, vậy nếu n chạy trong khoảng từ 0 đến 4 : $0 \leq n \leq 4$, thì k chỉ lấy giá trị lớn nhất là n . Vì nếu $k > n$ thì $(n-k) < 0$ mà $(n-k) < 0$ thì $h(n-k) = 0$, như vậy tổng từ 0 đến 4 theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^4 x(k)h(n-k) \quad \text{với } 0 \leq n \leq 4$$

sẽ thay bằng tổng từ 0 đến n theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \quad \text{với } 0 \leq n \leq 4$$

Còn nếu n chạy trong khoảng từ 5 đến 7 : $5 \leq n \leq 7$, thì k sẽ lấy giá trị nhỏ nhất là $(n-4)$, vì nếu $k < n-4$ (tức là $k \leq n-5$) thì $(n-k) > 4$, mà $(n-k) > 4$ thì $h(n-k)$ không xác định.

Vậy tổng từ 0 đến 4 theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \quad \text{với } 5 \leq n \leq 7$$

Sẽ được thay bằng tổng từ $(n-4)$ đến 4 theo k .

$$y(n) = \sum_{k=n-4}^4 x(k)h(n-k) \quad \text{với } 5 \leq n \leq 7$$

Còn nếu n nằm ngoài khoảng từ 0 đến 7 :

$$n < 0 \quad \text{và} \quad n > 7 \quad \text{thì} \quad y(n) = 0$$

Vậy thay vào ta có :

$$\text{Với } 0 \leq n \leq 4 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot \left[1 - \frac{n-k}{4} \right]$$

$$\Rightarrow y(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^n 1}_{n+1} - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n-k}{4}}_{\frac{n}{4}(n+1)} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{k}{4}}_{\frac{1}{4} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n}$$

(xem phần phụ lục các công thức tính tổng).

$$\Rightarrow y(n) = (n+1) \left(\frac{8-n}{8} \right) \quad \text{với} \quad 0 \leq n \leq 4$$

$$\text{Với } 5 \leq n \leq 7 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=n-4}^4 1 \cdot \left[1 - \frac{n-k}{4} \right]$$

$$\Rightarrow \text{Với } 5 \leq n \leq 7 \Rightarrow y(n) = \frac{5}{2} \left(3 - \frac{n}{2} \right) - (n-4) \left(\frac{3-n}{8} \right)$$

Vậy cuối cùng ta có :

$$y(n) = \begin{cases} (n+1) \left(\frac{8-n}{8} \right) & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{5}{2} \left(3 - \frac{n}{2} \right) - (n-4) \left(\frac{3-n}{8} \right) & 5 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

Thay các giá trị của n vào ta sẽ có $y(n)$ như trên hình 1.3.2.3.

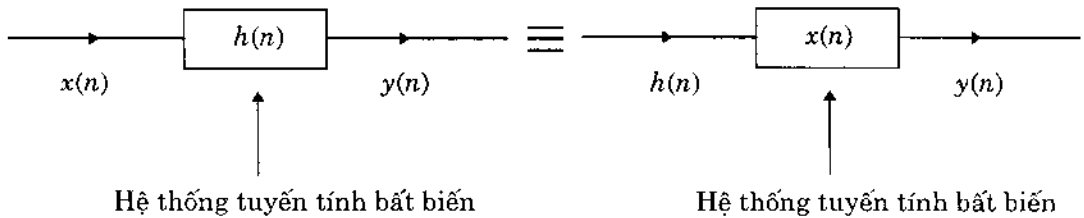
Ngoài ra nếu các dãy có chiều dài quá lớn và hình dạng quá phức tạp thì cũng như các bài toán khác, chúng ta phải lập trình để tính bằng máy tính điện tử.

c) Các tính chất của tích chập

Tích chập có tính chất giao hoán

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) \star h(n) = h(n) \star x(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \end{aligned} \quad (1.3.2.3)$$

Nhờ quan hệ (1.3.2.3) này ta thấy rằng hệ thống tuyến tính bất biến có kích thích $x(n)$ và đáp ứng $h(n)$ sẽ tương đương với hệ thống có kích thích $h(n)$ và đáp ứng $x(n)$, minh họa trên hình 1.3.2.4.



Hình 1.3.2.4.

Chúng ta có thể dễ dàng chứng minh tính giao hoán này như sau :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$\begin{aligned} \text{Thay biến } n-k=l \Rightarrow k=n-l \quad ; \quad & k : -\infty \rightarrow l : +\infty \\ & k : +\infty \rightarrow l : -\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=-\infty}^{-\infty} x(n-l)h(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n-l)$$

$$\Rightarrow y(n) = h(n) * x(n)$$

Chú ý : Tích thường cũng có tính giao hoán, vì vậy chúng ta có thể viết :

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \\ &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \end{aligned}$$

Tích chập có tính kết hợp

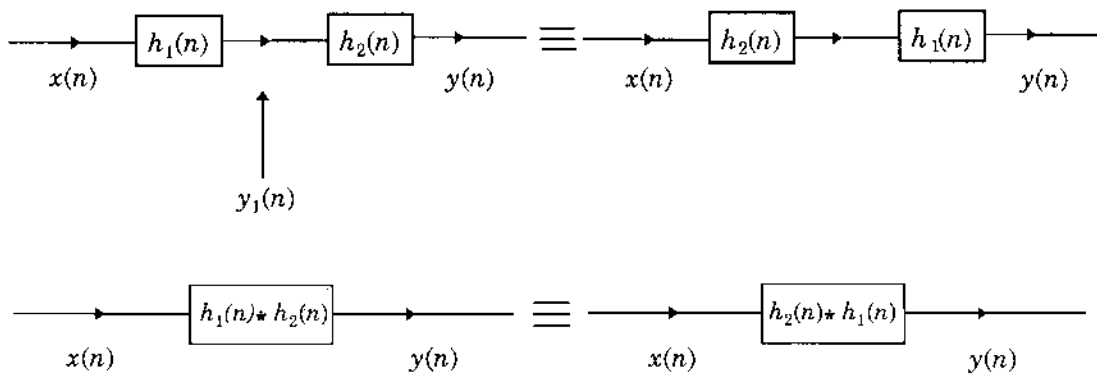
$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (1.3.2.4)$$

Quan hệ (1.3.2.4) cho ta thấy rằng việc nối tiếp hai hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là tích chập của $h_1(n)$ và $h_2(n)$: $h_1(n) * h_2(n)$:

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n)$$

$$y(n) = y_1(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

$$\Rightarrow h(n) = h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$$



Hình 1.3.2.5.

Chứng minh tính kết hợp :

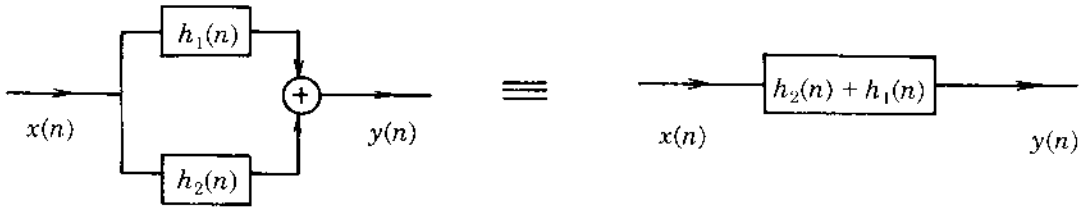
$$\begin{aligned} x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [h_1(n-k) * h_2(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [h_2(n-k) * h_1(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_2(l) h_1[(n-k)-l] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_1[(n-l)-k] \right]}_{x(n-l) * h_1(n-l)} h_2(l) \\
&= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)
\end{aligned}$$

Tích chập có tính phân phối

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)] \quad (1.3.2.5)$$

Quan hệ (1.3.2.4) cho ta thấy rằng nối song song hai hệ thống bất biến có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là tổng của $h_1(n)$ và $h_2(n)$. Xem hình 1.3.2.6.



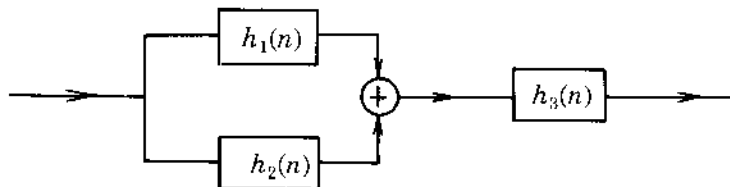
Hình 1.3.2.6.

Chứng minh tính kết hợp :

$$\begin{aligned}
x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [h_1(n-k) + h_2(n-k)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_1(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_2(n-k) \\
&= [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)]
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.2.3

Cho ba hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$, $h_2(n)$ và $h_3(n)$ được ghép nối theo sơ đồ hình 1.3.2.7.



Hình 1.3.2.7.

Với

$$h_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{2} & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

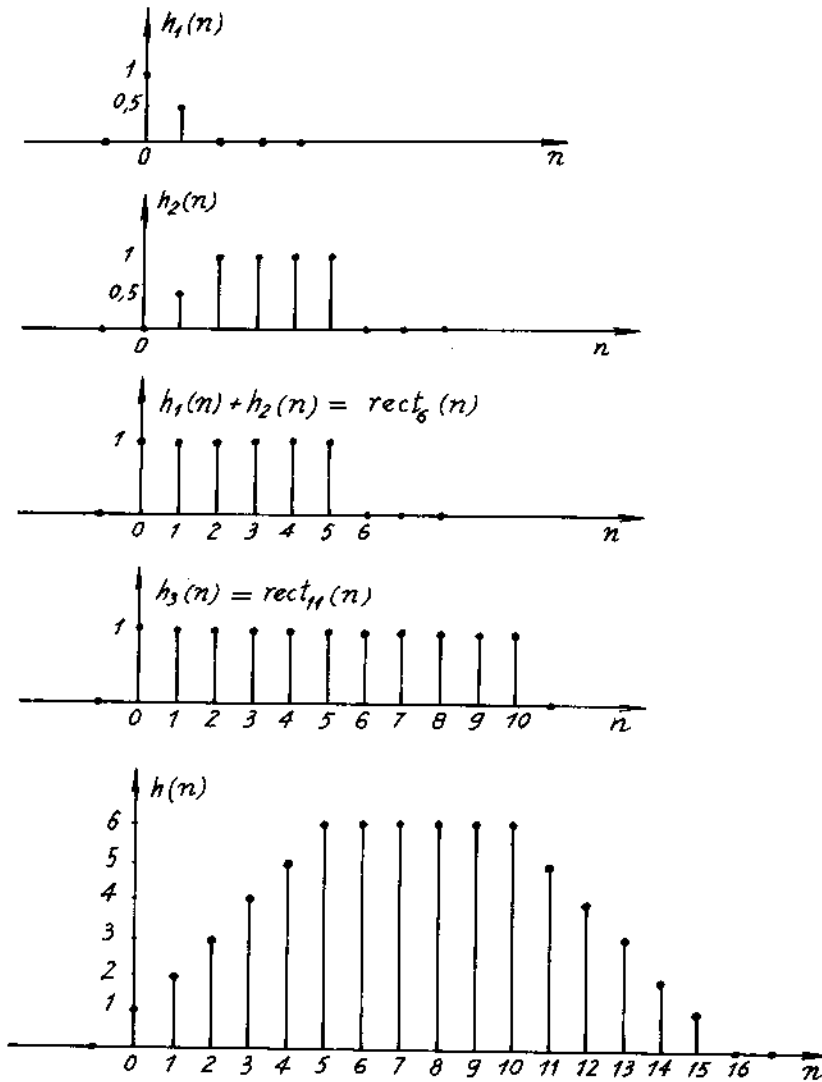
$$h_2(n) = \frac{1}{2} \delta(n-1) + u(n-2) - u(n-6)$$

$$h_3(n) = \text{rect}_{11}(n)$$

Hãy tính $h(n)$ của hệ tổng quát.

Giải . Theo hình 1.3.2.8 ta có $h(n)$ như sau :

$$h(n) = [h_1(n) + h_2(n)] * h_3(n).$$



Hình 1.3.2.8.

Trên hình 1.3.2.8 chúng ta thấy rõ cách tính $h(n)$ bằng đồ thị.

Chúng ta có thể tính $h(n)$ bằng biểu thức giải tích :

$$h(n) = \text{rect}_6(n) * \text{rect}_{11}(n)$$

$$\begin{aligned}
h(n) &= \sum_{k=0}^n 1 = n+1 & 0 \leq n \leq 5 \\
\Rightarrow h(n) &= \sum_{k=0}^5 1 = 6 & 5 \leq n \leq 10 \\
h(n) &= \sum_{k=n-10}^5 1 = 16-n & 11 \leq n \leq 15 \\
h(n) &= 0 & \text{các giá trị khác}
\end{aligned}$$

1.3.3. HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN VÀ NHÂN QUẢ

a) Định nghĩa

Một hệ thống tuyến tính bất biến gọi là nhân quả nếu đáp ứng ra của nó ở một thời điểm bất kỳ $n = n_0$ hoàn toàn độc lập với kích thích của nó ở các thời điểm tương lai $n > n_0$.

Nói cách khác, đối với một hệ thống nhân quả đáp ứng ra không bao giờ đi trước kích thích của nó.

b) Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

Định lý : Một hệ thống tuyến tính bất biến là nhân quả nếu và chỉ nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn điều kiện sau đây :

$$\Rightarrow h(n) = 0 \quad \text{với } n < 0 \quad (1.3.3.1)$$

Chứng minh :

Giả sử ta có hai kích thích $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$$x_1(n) = x_2(n) \quad \text{với } n < n_0$$

$$x_1(n) \neq x_2(n) \quad \text{với } n \geq n_0$$

Hai đáp ứng ra của hệ thống tuyến tính bất biến :

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)h(n-k)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

Nếu hệ thống này là nhân quả thì ta có :

$$y_1(n) = y_2(n) \quad \text{với } n < n_0$$

Chúng ta có thể chia tổng này thành hai phần :

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_1(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{\infty} x_1(k)h(n-k)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_2(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

$$\text{với } k < n_0 \Rightarrow x_1(k) = x_2(k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_1(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_2(k)h(n-k) \\ \Rightarrow \quad & y_1(n) - y_2(n) = \sum_{k=n_0}^{\infty} x_1(k)h(n-k) - \sum_{k=n_0}^{\infty} x_2(k)h(n-k) \\ & = \sum_{k=n_0}^{\infty} [x_1(k) - x_2(k)]h(n-k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{với } k > n_0 \quad & \Rightarrow \quad x_1(k) \neq x_2(k) \\ & \Rightarrow \quad x_1(k) - x_2(k) \neq 0 \quad \text{với } k \geq n_0 \end{aligned}$$

Ta thấy rằng nếu hệ thống là nhân quả thì :

$$\begin{aligned} \text{với } n < n_0 \quad & \Rightarrow \quad y_1(n) - y_2(n) = 0 \\ & y_1(n) - y_2(n) = \sum_{k=n_0}^{\infty} [x_1(k) - x_2(k)]h(n-k) = 0 \end{aligned}$$

Để thỏa mãn quan hệ này, ta buộc phải có :

$$h(n-k) = 0 \quad \text{với } n < n_0 \text{ và } k \geq n_0$$

Cuối cùng ta đặt $m = n - k$.

Với $n < n_0$ và $k \geq n_0$ thì $(n - k) < 0$, ta có $m < 0$

Ta thu được :

$$h(m) = 0 \quad \text{với } m < 0$$

Định lý đã được chứng minh.

Định lý đảo : Nếu đáp ứng xung $h(n)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến bằng không với $n < 0$, thì hệ thống đó là nhân quả.

Nhận xét : Các hệ thống nhân quả là hệ thống duy nhất thực hiện được về mặt vật lý.

Đối với các hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả, ta có thể biến dạng công thức tích chập dựa theo tính chất : $h(n) = 0$ với $n < 0$.

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) * h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ h(n-k) &= 0 \quad \text{với } k > n \\ &\neq 0 \quad \text{với } k \leq n \\ \Rightarrow \quad y(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

Nếu viết ở dạng :

$$\begin{aligned} y(n) = h(n) * x(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ h(k) &= 0 \quad \text{với } k < 0 \\ \Rightarrow \quad y(n) &= \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) \end{aligned}$$

Nếu đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn

$$\begin{aligned} h(n) &\neq 0 \quad \text{với } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{giá trị khác} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

Ví dụ 1.3.3.1 :

Kiểm tra tính nhân quả của hai hệ thống tuyến tính bất biến được cho bởi các phương trình sai phân sau :

$$y_1(n) = 2x(n-1) + x(n-2)$$

$$y_2(n) = 3x(n-1) + 2x(n-2) + x(n+2)$$

Giải :

Đặt $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n).$

Ta có : $h_1(n) = 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$

$$h_2(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n+2)$$

Xem hình 1.3.3.1 ta thấy rằng:

$$h_1(n) = 0$$

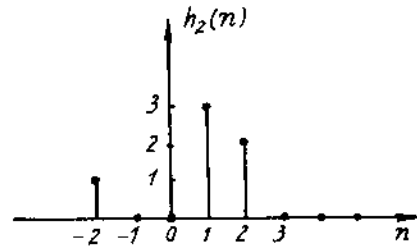
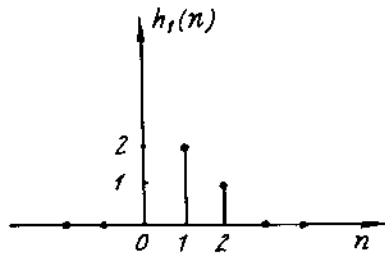
với $n < 0$

$h_1(n)$ là nhân quả.

$$h_2(n) \neq 0$$

với $n < 0$

$h_2(n)$ là không nhân quả.



Hình 1.3.3.1.

c) Dãy nhân quả

Chúng ta có thể dùng khái niệm nhân quả đối với các dãy.

Một dãy $x(n)$ được gọi là nhân quả nếu chúng ta có :

$$x(n) = 0 \quad \text{với} \quad n < 0 \quad (1.3.3.2)$$

Đối với hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả có kích thích $x(n)$ nhân quả ta có thể viết :

Nếu $h(n) = 0$ với $n < 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k)$

nhưng $x(k) = 0$ với $k < 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k)$

Tương tự ta có : $y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) \quad (1.3.3.3)$$

Ví dụ 1.3.3.2 :

Cho hệ thống tuyến tính bất biến có $h(n)$ và $x(n)$ như sau :

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} b^n & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Với $0 < a < 1$; $0 < b < 1$ và $a \neq b$

Hãy tính $y(n)$

Giải : Vì $h(n)$ và $x(n)$ đều là nhân quả, nên ta có :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n b^k a^{(n-k)} = a^n \sum_{k=0}^n (a^{-1})^k b^k \\ \Rightarrow y(n) &= \begin{cases} a^n \frac{1 - (ba^{-1})^{n+1}}{1 - ba^{-1}} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nhận xét :

Từ ví dụ 1.3.3.2 ta thấy rằng đối với hệ thống $h(n)$ nhân quả có kích thích vào $x(n)$ nhân quả thì ta sẽ có đáp ứng ra $y(n)$ nhân quả. Tương tự, nếu ta xét trên quan điểm chiều dài của dãy ta thấy rằng nếu :

$$\begin{aligned} &L[h(n)] = [0, +\infty] = \infty \\ \text{và} &L[x(n)] = [0, +\infty] = \infty \\ \text{thì} &L[y(n)] = [0, +\infty] = \infty \end{aligned}$$

Ở đây ta lấy ký hiệu L là chiều dài của dãy.

Nếu hệ thống $h(n)$ và kích thích vào $x(n)$ là nhân quả nhưng có chiều dài hữu hạn :

$$\begin{aligned} &L[h(n)] = [0, N_1 - 1] = N_1 \quad N_1 > 0 \\ \text{và} &L[x(n)] = [0, N_2 - 1] = N_2 \quad N_2 > 0 \end{aligned}$$

thì ta có thể suy ngay ra chiều dài của đáp ứng ra $y(n)$:

$$L[y(n)] = [0, N_1 + N_2 - 2] = N_1 + N_2 - 1.$$

Để minh họa chúng ta có thể xem lại ví dụ 1.3.2.3.

d) Tín hiệu và hệ thống phản nhân quả

Ngược với khái niệm nhân quả, chúng ta có khái niệm phản nhân quả (anticausal).

Một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được gọi là phản nhân quả nếu chúng ta có :

$$x(n) = 0 \quad \text{với } n > 0$$

Vậy về chiều dài của tín hiệu phản nhân quả là :

$$L[x(n)] = [-\infty, 0] = \infty$$

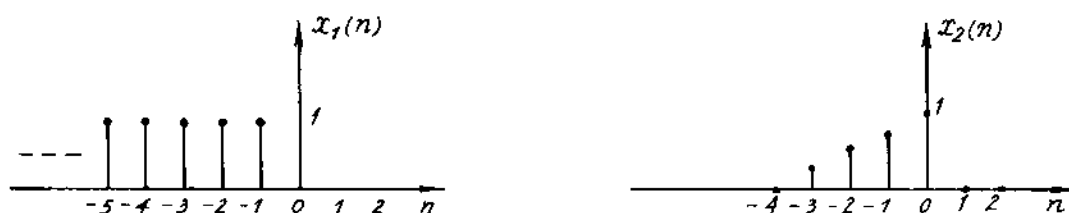
Một hệ thống rời rạc được gọi là phản nhân quả nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn điều kiện :

$$h(n) = 0 \quad \text{với } n > 0$$

$$\text{Vậy } L[h(n)] = [-\infty, 0] = \infty$$

Ví dụ 1.3.3.3 :

Xét tính nhân quả của các tín hiệu cho trên hình 1.3.3.2.



Hình 1.3.3.2.

Giải : $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là các tín hiệu phản nhân quả.
 $x_1(n)$ là tín hiệu phản nhân quả có chiều dài vô hạn.
 $x_2(n)$ là tín hiệu phản nhân quả có chiều dài hữu hạn.
 $L[x_1(n)] = [-\infty, 0] = \infty$
 $L[x_2(n)] = [-4, 0] = 5$

1.3.4. HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN ỔN ĐỊNH

a) Định nghĩa

Một hệ thống được gọi là ổn định, nếu ứng với dãy đầu vào giới hạn, ta có dãy đầu ra giới hạn.

Tức là với $|x(n)| < \infty$ với n bất kỳ.

Ta sẽ có $|y(n)| < \infty$ với n bất kỳ.

Ví dụ 1.3.4.1 :

Ta có hai hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$ và $h_2(n)$, hai hệ thống này có cùng dãy kích thích đầu vào là $x(n) = u(n)$.

$$h_1(n) = \text{rect}_4(n) \quad h_2(n) = u(n).$$

Xét sự ổn định của hai hệ thống này.

Giải :

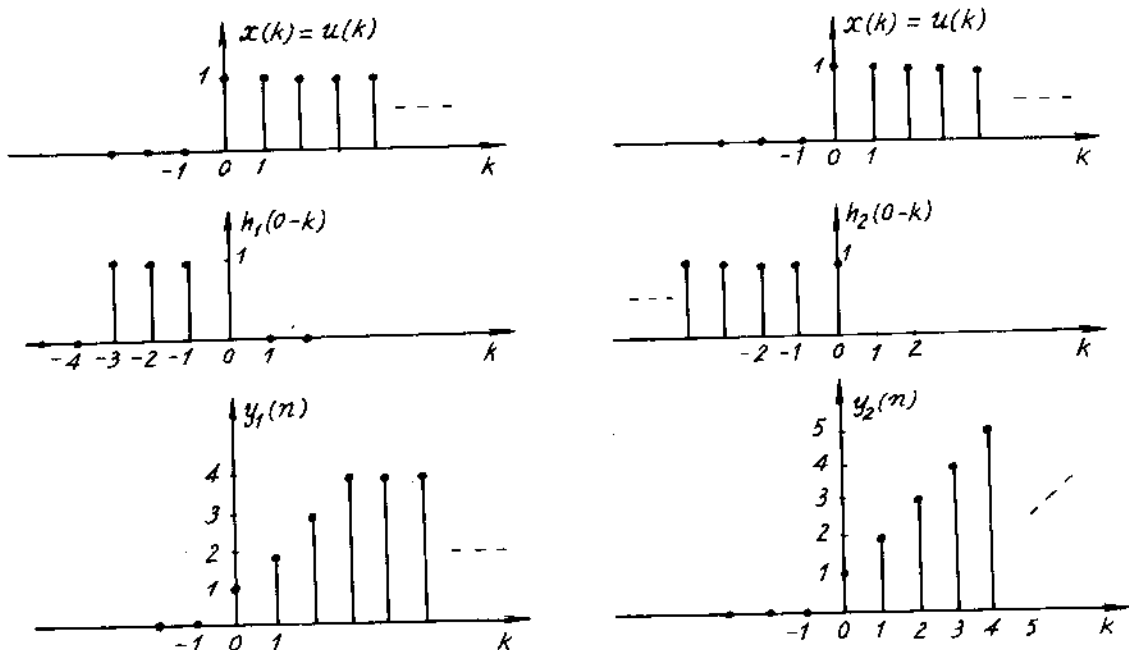
Ở đây dãy đầu vào $x(n)$ bị hạn chế ở 1 :

$$|x(n)| = 1 < \infty \quad \text{với } n \text{ bất kỳ.}$$

Bây giờ ta xét dãy ra $y_1(n)$ và $y_2(n)$.

$$y_1(n) = u(n) \star \text{rect}_4(n) \quad \text{và} \quad y_2(n) = u(n) \star u(n)$$

Kết quả cho trên hình 1.3.4.1.



Hình 1.3.4.1.

Từ hình 1.3.4.1 ta thấy rằng :

$|y_1(n)| \leq 4 < \infty$ với mọi $n \Rightarrow$ Hệ thống ổn định.

$|y_2(n)| = \infty$ khi $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ hệ thống không ổn định.

Chú ý : Nếu xét đáp ứng xung của hệ thống ta có :

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 < \infty$$

$$S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2(n)| = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Tổng S_1 hữu hạn thì hệ thống ổn định.

Tổng S_2 vô hạn thì hệ thống không ổn định.

Vậy ta có thể dựa vào đáp ứng xung $h(n)$ để xét sự ổn định của hệ thống mà không cần tính đáp ứng ra $y(n)$, ta có định lý sau :

b) Định lý

Một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu và chỉ nếu đáp ứng xung của nó thỏa mãn điều kiện sau :

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.3.4.1)$$

Chứng minh :

Ta sẽ chứng minh điều kiện đủ để hệ thống ổn định, tức là nếu với $x(n)$ bị hạn chế với mọi n mà ta có :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad \text{thì} \quad y(n) < \infty \quad \text{với mọi } n.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ \Rightarrow |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \\ \Rightarrow |y(n)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \end{aligned}$$

Nếu kích thích $x(n)$ bị hạn chế, thì ta có :

$$x(n) \leq M < \infty \quad \text{với mọi } n.$$

Ở đây M là một số dương hữu hạn.

Như vậy ta có thể viết modul của đáp ứng ra dưới dạng :

$$|y(n)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Vậy nếu :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

thì $|y(n)| < \infty$ với mọi n .

Đây là điều kiện đủ cho định lý trên.

Bây giờ ta sẽ chứng minh điều kiện cần của định lý.

Tức là nếu tổng :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty \quad \text{thì} \quad |y(n)| = \infty$$

Ở đây ta chỉ cần chứng minh tại một mẫu n nào đó mà $y(n)$ không bị hạn chế, $|y(n)| = \infty$ là đủ để chứng minh. Để đơn giản ta xét mẫu $n = 0$.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ n = 0 &\Rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

Để $y(0)$ giữ giá trị dương, chúng ta coi dãy kích thích như sau :

$$x(n) = +M \quad \text{nếu} \quad h(-n) \geq 0$$

$$x(n) = -M \quad \text{nếu} \quad h(-n) < 0$$

$$\Rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M|h(-k)| = M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(-k)|$$

$$\text{mà} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(-k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Nếu đáp ứng xung $h(n)$ không thoả mãn điều kiện sau :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

tức là
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

mà M là số hữu hạn dương:

$$\Rightarrow y(0) = M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = M \cdot \infty = \infty$$

Nếu chỉ tại một mẫu nào đó mà $y(n)$ không bị hạn chế thì ta nói rằng $y(n)$ không bị hạn chế.

Vậy nếu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$ thì hệ thống sẽ không ổn định, điều kiện cần của định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 1.3.4.2 :

Hãy xét tính nhân quả và tính ổn định của hệ thống có đáp ứng xung $h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

Giải :

- Tính nhân quả :

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Hệ thống này là nhân quả.

- Tính ổn định :

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k$$

Nếu $|a| < 1$ thì chuỗi này hội tụ về số hữu hạn :

$$S = \frac{1}{1 - |a|}$$

Nếu $|a| \geq 1$ thì chuỗi này phân kỳ.

Vậy hệ thống này ổn định nếu $|a| < 1$ và hệ thống sẽ không ổn định nếu $|a| \geq 1$.

1.4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẲNG

1.4.1. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH

Về mặt toán học, kích thích vào $x(n)$ và đáp ứng ra $y(n)$ của hầu hết các hệ thống tuyến tính thỏa mãn một phương trình sai phân tuyến tính sau đây :

$$\sum_{k=0}^N a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n)x(n-r) \quad (1.4.1.1)$$

Ở đây N và M là các số nguyên dương.

N gọi là bậc của phương trình sai phân.

Nhận xét:

+ Các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống tuyến tính thay cho vai trò đáp ứng xung $h_k(n)$.

+ Nếu các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ không bị thay đổi theo thời gian (và viết là a_k và b_r) thì phương trình sai phân tuyến tính được gọi là phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng và nó dùng để mô tả hệ thống tuyến tính bất biến.

Phương trình này chính là ảnh rời rạc của phương trình vi phân tuyến tính đối với các hệ số liên tục, phương trình có dạng sau :

$$\sum_{k=0}^N a_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M b_r(t) \frac{d^r x(t)}{dt^r} \quad (1.4.1.2)$$

Chúng ta có thể nhận được một phương trình sai phân tuyến tính từ một phương trình vi phân tuyến tính bằng cách thay gần đúng của các đạo hàm vào vị trí của các đạo hàm. Như là với đạo hàm bậc một, ta có gần đúng sau :

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Nên nhớ rằng khi nghiên cứu hệ thống tương tự bằng con đường tương tự, chúng ta không được coi phương trình sai phân là gần đúng của phương trình vi phân và không dùng phương trình sai phân này để nghiên cứu hệ thống tương tự bằng con đường tương tự. Nhưng chúng ta có thể nghiên cứu hệ thống tương tự bằng con đường số, lúc đó phương trình sai phân sẽ là gần đúng của phương trình vi phân, và ta dùng nó đặc trưng cho hệ thống số tuyến tính rời rạc, khi nghiên cứu bộ lọc IIR chúng ta sẽ quay lại vấn đề này.

Ví dụ 1.4.1.1 :

Chúng ta có hai hệ thống tuyến tính được cho bởi hai phương trình sai phân tuyến tính sau

$$(1) \quad y(n) = n x(n)$$

$$(2) \quad y(n) = 2 x(n) + 3 x(n - 1)$$

Hãy tìm các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$.

Giải :

Hệ thống (1) : $N = 0$; $M = 0 \Rightarrow$ là hệ thống bậc 0

$$a_0(n) = 1 ; a_1(n) = \dots = a_n(n) = 0$$

$$b_0(n) = n ; b_1(n) = \dots = b_M(n) = 0$$

Ở đây $a_0(n) = 1$ là hằng số, nhưng $b_0(n) = n$ là phụ thuộc biến số n , $b_0(n)$ không phải là hằng số.

Hệ thống (2) : $N = 0$; $M = 1 \Rightarrow$ là hệ thống bậc 0

$$a_0(n) = 1 ; a_1(n) = \dots = a_n(n) = 0$$

$$b_0(n) = 2 ; b_1(n) = 3 ; b_2(n) = \dots = b_M(n) = 0$$

Ở đây các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ đều là hằng số độc lập với n .

Nhận xét :

Hệ thống (1) và (2) đều là hệ thống tuyến tính, nhưng hệ thống (1) không phải là hệ thống bất biến vì hệ số của nó không phải là hằng số, và phương trình $y(n) = nx(n)$ không phải là phương trình sai phân hệ số hằng. Còn hệ thống (2) là bất biến vì hệ số của nó là hằng số, và phương trình $y(n) = 2x(n) + 3x(n - 1)$ là phương trình sai phân hệ số hằng.

1.4.2. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẲNG

a) Dạng tổng quát

Trong chương trình của chúng ta, chúng ta chỉ đi sâu nghiên cứu các hệ thống tuyến tính bất biến, mà đầu vào và đầu ra của hệ thống này được liên hệ với nhau bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N . Vì vậy chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ các phương trình này.

Một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N có dạng sau :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1.4.2.1)$$

Nhận xét :

Tập hợp các hệ số a_k và b_r sẽ biểu diễn một hệ thống tuyến tính bất biến.

Chúng ta có thể viết phương trình (1.4.1.1) dưới dạng khác sau đây :

$$\begin{aligned} a_0 y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) &= \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \\ \text{Nếu } a_0 \neq 0 \Rightarrow y(n) &= \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) \\ \Rightarrow y(n) &= \sum_{r=0}^M b'_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a'_k y(n-k) \end{aligned} \quad (1.4.2.2)$$

$$\text{Ở đây :} \quad b'_r = \frac{b_r}{a_0} ; \quad a'_k = \frac{a_k}{a_0} ; \quad a_0 \neq 0$$

Chúng ta có thể giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bằng các phép toán số học sơ cấp : nhân, tổng và hiệu.

Vi dụ 1.4.2.1 :

Ta có phương trình sai phân bậc nhất sau :

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống với điều kiện đầu $y(-1) = 0$ với $n < 0$ và $y(n) = 0$ với $n > 0$.

Giải : Nếu $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$

- Với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$ ta có :

$$h(n) = 0 \quad \text{với } n < 0$$

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = a \cdot 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a \cdot 1 + 0 = a$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a \cdot a + 0 = a^2$$

$$\vdots$$

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n) = a \cdot a^{n-1} + 0 = a^n$$

$$\Rightarrow h(n) = a^n u(n).$$

Hệ thống này là nhân quả.

- Với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n > 0$

$$y(n-1) = \frac{1}{a} [y(n) - x(n)]$$

$$y(n) = \frac{1}{a} [y(n+1) - x(n+1)]$$

$$\Rightarrow h(n) = 0 \text{ với } n > 0$$

$$h(0) = \frac{1}{a} [h(1) - x(1)] = \frac{1}{a} [0 - 0] = 0$$

$$h(-1) = \frac{1}{a} [h(0) - x(0)] = \frac{1}{a} [0 - 1] = -\frac{1}{a} = -(a^{-1})$$

$$h(-2) = \frac{1}{a} [h(-1) - x(-1)] = \frac{1}{a} [-a^{-1} - 0] = -a^{-2}$$

.

.

.

$$h(n) = \frac{1}{a} [h(n+1) - x(n+1)] = \frac{1}{a} [-a^{n+1} - 0] = -a^n$$

$$\Rightarrow h(n) = -a^n u(-n-1)$$

Hệ thống này là không nhân quả.

Như vậy ta thấy rằng cùng một phương trình sai phân nhưng với các điều kiện đầu khác nhau, ta có các nghiệm khác nhau.

Nhận xét :

Trong thực tế chúng ta thường gặp các hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả với kích thích vào nhân quả, tức là $h(n)$ và $x(n)$ là nhân quả, trong trường hợp này đáp ứng ra của chúng ta cũng sẽ là nhân quả và chúng ta có thể tìm đáp ứng ra $y(n)$ của hệ thống bằng tích chập :

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

và tích chập này sẽ được tính từ 0 đến n .

Ví dụ 1.4.2.2 :

Tiếp theo ví dụ 1.4.2.1, khi ta đã có đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống nhân quả :

$$h(n) = a^n u(n).$$

Ta sẽ tìm $y(n)$ với $x(n)$.

Giải :

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$= \sum_{k=0}^n a^k x(n-k) \quad n \geq 0$$

Ngoài ra chúng ta cũng có thể giải trực tiếp $y(n)$ từ phương trình sai phân đã cho bằng cách thế trực tiếp các giá trị của $y(n)$ và $x(n)$ từ nhỏ đến lớn, ta gọi phương pháp này là phương pháp thế.

Ví dụ 1.4.2.3 :

Chúng ta dùng phương trình của ví dụ 1.4.2.1

$$y(n) = a y(n-1) + x(n)$$

Hãy tìm $y(n)$ bằng phương pháp thế với điều kiện đầu là $y(n) = 0$ với $n < 0$

Giải :

$$y(0) = ay(-1) + x(0) = a \cdot 0 + x(0)$$

$$y(1) = ay(0) + x(1) = ax(0) + x(1)$$

$$y(2) = ay(1) + x(2) = a^2x(0) + ax(1) + x(2)$$

.

.

.

$$y(n) = a^n x(0) + a^{n-1} x(1) + \dots + ax(n-1) + x(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n a^k x(n-k)$$

Biểu thức này của $y(n)$ cũng chính là biểu thức tích chập của $h(n)$ và $x(n)$ khi $h(n)$ và $x(n)$ đều là nhân quả. Vậy từ đây ta cũng có thể suy ra biểu thức của $h(n)$:

$$h(n) = a^n u(n)$$

b) Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Cũng giống như trường hợp phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng đối với các hệ thống tương tự. Thủ tục giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng cũng gồm các bước tương tự như sau :

1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Phương trình thuần nhất là phương trình không có thành phần thứ hai, tức là ta tìm $y(n)$ ứng với đầu vào $x(n) = 0$, nghiệm này ta ký hiệu là $y_0(n)$.

Như vậy phương trình sai phân thuần nhất sẽ có dạng sau đây :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (1.4.2.3)$$

Thông thường nhất ta tìm nghiệm dưới dạng dãy hàm mũ như sau :

$$y_0(n) = \alpha^n$$

Thay vào (1.4.2.3) ta có phương trình đa thức theo α như sau :

$$\sum_{k=0}^N a_k \alpha^{n-k} = 0$$

$$\text{hoặc là } a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{N-1} \alpha^{n-(N-1)} + a_N \alpha^{n-N} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^{n-N} (a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N) = 0$$

và ta có phương trình :

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N = 0 \quad (1.4.2.4)$$

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của hệ thống, và đa thức bên trái gọi là đa thức đặc trưng, đa thức này có bậc là N .

Phương trình đặc trưng (1.4.2.4) sẽ có N nghiệm, ký hiệu là $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Các nghiệm này có thể là thực hoặc phức. Nếu các nghiệm này không trùng nhau thì ta có nghiệm bội. Nếu các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_N$ là thực (trong thực tế thường như vậy) thì các nghiệm phức sẽ là các cặp liên hợp phức.

Giả sử chúng ta có các nghiệm đơn, ta sẽ có nghiệm tổng quát của phương trình sai phân thuần nhất dưới dạng như sau :

$$y_0(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_{N-1} \alpha_{N-1}^n + A_N \alpha_N^n = \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n \quad (1.4.2.5)$$

Ở đây $A_1, A_2, \dots, A_N$ là các hằng số sẽ được xác định bởi điều kiện đầu đã cho đối với hệ thống.

Còn các nghiệm của phương trình đặc trưng (1.4.2.4) có các nghiệm bội, thì dạng của nghiệm $y_0(n)$ sẽ thay đổi. Giả sử α_2 là nghiệm bội bậc l , ta sẽ có :

$$\begin{aligned} y_0(n) &= A_1 \alpha_1^n + A_{20} \alpha_2^n + A_{21} n \alpha_2^n + A_{22} n^2 \alpha_2^n + \dots + A_{2(l-1)} n^{l-1} \alpha_2^n + \dots + A_N \alpha_N^n \\ \Rightarrow y_0(n) &= A_1 \alpha_1^n + (A_{20} + A_{21} n + \dots + A_{2(l-1)} n^{l-1}) \alpha_2^n + \dots + A_{N-1} \alpha_{N-1}^n + A_N \alpha_N^n \end{aligned} \quad (1.4.2.6)$$

2. Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân có thành phần thứ hai.

Phương trình có thành phần thứ hai tức là phương trình ứng với đầu vào $x(n) \neq 0$, có dạng tổng quát như sau :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1.4.2.7)$$

Nghiệm riêng này ta ký hiệu là $y_p(n)$.

Thông thường dạng của $y_p(n)$ được chọn giống như dạng của $x(n)$.

3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sẽ là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_0(n)$ và nghiệm riêng của phương trình có thành phần thứ hai $y_p(n)$:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) \quad (1.4.2.8)$$

4. Tìm giá trị các hệ số

Giá trị các hệ số của nghiệm cuối cùng $y(n)$ sẽ được xác định nhờ điều kiện đầu.

Chú ý : Ở bước 2 khi ta đã chọn $y_p(n)$ giống dạng của $x(n)$ nhưng nếu $y_p(n)$ lại nằm trong $y_0(n)$, tức là trong thành phần $y_0(n)$ có $y_p(n)$, như vậy trong $y(n)$ thì $y_p(n)$ là thừa và vô nghĩa. Trong trường hợp này ta sẽ chọn $y_p(n)$ độc lập với các thành phần của $y_0(n)$, cách chọn $y_p(n)$ lúc này cũng giống như cách chọn $y_0(n)$ khi phương trình đặc trưng có nghiệm bội.

Ví dụ nếu $y_0(n)$ có chứa thành phần $A_i \alpha_i^n$ thì $y_p(n)$ sẽ chọn là $Bn \alpha_i^n$ chứ không chọn là $B \alpha_i^n$.

Ví dụ 1.4.2.4 :

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc một sau đây :

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = 0$ và $x(n) = n$.

Giải :

- Tìm $y_0(n)$.

Ta có phương trình thuần nhất :

$$y(n) + 2y(n-1) = 0$$

Chọn dạng của $y_0(n)$ là α^n

$$\Rightarrow \alpha^n + 2\alpha^{n-1} = 0$$

$$\alpha^{n+1} (\alpha + 2) = 0$$

Phương trình đặc trưng là :

$$\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2$$

Phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm đơn $\alpha_1 = -2$

$$\Rightarrow y_0(n) = A_1 \alpha_1^n = A_1 (-2)^n$$

- Tìm $y_p(n)$

Ta có phương trình có thành phần thứ hai

$$y(n) + 2y(n-1) = n$$

Vậy $y_p(n)$ có dạng giống $x(n) = n$

$$\Rightarrow y_p(n) = Bn + C$$

Thay vào phương trình ta sẽ tìm được B và C :

$$Bn + C + 2[B(n-1) + C] = n$$

$$Bn + C + 2Bn - 2B + 2C = n$$

Đồng nhất các hệ số của 2 vế ta có :

$$B = \frac{1}{3} \quad ; \quad C = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow y_p(n) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

- Tìm $y(n)$

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1 (-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

- Xác định hệ số A_1 .

Dựa vào điều kiện đầu $y(-1) = 0$, ta có :

$$y(-1) = A_1 (-2)^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{2}{9}$$

Vậy ta có nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n + \frac{2}{9} [1 - (-2)^n] & \text{với } n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ví dụ 1.4.2.5 :

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc một sau đây :

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2x(n) + x(n-1)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = 0$ và $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Giải :

- Tìm $y_0(n)$

Ta có phương trình thuần nhất

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0$$

Chọn dạng $y_0(n)$ là α^n , ta có :

$$\alpha^n - \frac{1}{2} \alpha^{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha^{n-1} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Ta có :

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_0(n) = A_1 \alpha_1^n = A_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

- Tìm $y_p(n)$

Ta có phương trình có thành phần thứ hai.

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

Trong trường hợp này nếu ta chọn $y_p(n)$ có dạng giống $x(n)$ tức là :

$$y_p(n) = B \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Như thế $y_p(n)$ sẽ trùng với $y_0(n)$, vậy ta phải chọn $y_p(n)$ có dạng sau :

$$y_p(n) = Bn \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\Rightarrow Bn \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} B(n-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

Đồng nhất hệ số của hai vế, ta có :

$$\Rightarrow B = 4$$

Vậy ta có :

$$y_p(n) = 4n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

- Tìm $y(n)$

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 4n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

- Xác định A_1 :

Dựa vào điều kiện đầu $y(-1) = 0$, ta có :

$$y(-1) = A_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} + 4(-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = 4$$

Vậy ta có nghiệm tổng quát của phương trình sai phân bậc 1 đã cho như sau :

$$y(n) = \begin{cases} 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n (1+n) & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nhận xét :

Từ ví dụ trên ta thấy rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n (1+n) \right\} = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot n = y_p(n)$$

Vậy ta có :

$$y_p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$$

Ví dụ 1.4.2.6 :

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc 2 sau đây :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + x(n-2)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$ và $x(n) = 5^n$

Giải :

- Tìm $y_0(n)$

Ta có phương trình thuần nhất bậc 2 sau đây :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0$$

Chọn dạng của $y_0(n)$ là α^n

Ta có phương trình đặc trưng

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1 ; \alpha_2 = 2$$

$$y_0(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 2^n$$

- Tìm $y_p(n)$

Ta có phương trình có thành phần thứ hai :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 5^n + 5^{n-2}$$

Chọn $y_p(n)$ có dạng giống $x(n)$, tức là :

$$y_p(n) = B \cdot 5^n$$

$\Rightarrow$ Để tìm B ta thay $y_p(n)$ vào phương trình sai phân rồi đồng nhất các hệ số :

$$B5^n - 3B5^{n-1} + 2B5^{n-2} = 5^n + 5^{n-2}$$

$$B5^n \left[1 - \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{25} \right] = 5^n \left(1 + \frac{1}{25} \right)$$

$$B \cdot \frac{12}{25} = \frac{26}{25}$$

$$\Rightarrow B = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow y_p(n) = \frac{13}{6} 5^n$$

- Tìm $y(n)$

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1 1^n + A_2 2^n + \frac{13}{6} 5^n$$

- Tìm A_1 và A_2

Dựa vào 2 điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$

$$y(-1) = A_1 1^{-1} + A_2 2^{-1} + \frac{13}{6} 5^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A_1 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{13}{30} = 0$$

$$y(-2) = A_1 1^{-2} + A_2 2^{-2} + \frac{13}{6} 5^{-2} = 0$$

$$A_1 + \frac{1}{4} A_2 + \frac{13}{30} \cdot \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{39}{150} = \frac{13}{50} \quad ; \quad A_2 = -\frac{104}{75}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sai phân bậc 2 là :

$$y(n) = \begin{cases} \frac{13}{50} - \frac{104}{75} 2^n + \frac{13}{6} 5^n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.4.3. CÁC HỆ THỐNG KHÔNG ĐỆ QUY VÀ ĐỆ QUY (Nonrecursive and recursive systems)

Chúng ta sẽ phân biệt hai hệ thống số tiêu biểu, đó là hệ thống không đệ quy và hệ thống đệ quy.

a) Hệ thống số không đệ quy

Chúng ta đã biết rằng các hệ thống tuyến tính bất biến được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N như sau :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Trong trường hợp nếu $N = 0$, ta có :

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$\text{hoặc :} \quad y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad ; \quad a_0 = 1 \quad (1.4.3.1)$$

Từ đây ta có định nghĩa sau :

Định nghĩa : Hệ thống được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính bậc không ($N = 0$) được gọi là hệ thống không đệ quy.

Nhận xét :

Từ quan hệ (1.4.3.1) ta thấy rằng b_r là các hằng số. Vậy thì hệ thống không đệ quy là hệ thống mà đáp ứng ra $y(n)$ của nó chỉ phụ thuộc vào kích thích vào ở thời điểm hiện tại và quá khứ. Ta có thể viết :

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)] \quad (1.4.3.2)$$

Ở đây $F[.]$ ký hiệu là hàm.

Bây giờ từ (1.4.3.1) ta gọi

$$h(k) = b_k$$

Ta sẽ có :

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) \quad (1.4.3.3)$$

Phương trình 1.4.3.3 là biểu thức của tích chập giữa $h(n)$ và $x(n)$ khi $h(n)$ là nhân quả và có chiều dài hữu hạn : $L[h(n)] = M + 1$: hữu hạn. $h(n)$ chính là đáp ứng xung của hệ thống không đệ quy. Vậy ta có thể nói rằng : Hệ thống tuyến tính bất nhân quả có đáp

ứng xung chiều dài hữu hạn được mô tả bởi tích chập 1.4.3.3 là hệ thống không đệ quy (hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn, tiếng Anh gọi là :Finite - duration Impulse Response system, viết tắt là FIR system).

Ví dụ 1.4.3.1 :

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống không đệ quy cho bởi phương trình sai phân sau:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$

Giải :

Trong trường hợp này $N = 0$; $M = 3$,

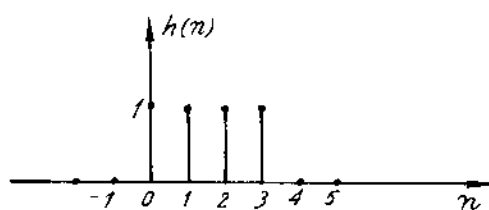
vậy hệ thống này là không đệ quy và $L[h(n)] = 4$. Để tìm $h(n)$ ta thay $x(n) = \delta(n)$ thì $y(n) = h(n)$

Ta có :

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$$

$$h(n) = \text{rect}_4(n)$$

Vậy hệ thống này là hệ thống FIR, $h(n)$ được biểu diễn trên hình 1.4.3.1.



Hình 1.4.3.1.

Nhận xét về đáp ứng xung của hệ thống FIR:

Ta đã có phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng của hệ thống FIR là :

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Như vậy đáp ứng xung $h(k)$ của hệ thống FIR chính là hệ số b_k , và ta có :

$$h(k) = \begin{cases} b_k & \text{với } 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{các giá trị khác} \end{cases} \quad (1.4.3.4)$$

Tính ổn định của hệ thống FIR :

Ta thấy rằng hệ thống FIR là hệ thống luôn luôn ổn định, bởi vì :

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^M |h(k)| = \sum_{k=0}^M |b_k|$$

Nếu b_k là số hữu hạn thì tổng S sẽ luôn luôn hữu hạn :

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Vậy hệ thống FIR luôn thỏa mãn điều kiện ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến.

Ví dụ 1.4.3.2 :

Ta có phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây :

$$y(n) = x(n) + \frac{3}{4}x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2) + \frac{1}{4}x(n-3)$$

Hãy tìm $h(n)$ và xét sự ổn định của hệ thống.

Giải :

Dùng hệ thức 1.4.3.4 ta có ngay $h(n)$, vì :

$$b_0 = 1 \quad ; \quad b_1 = \frac{3}{4} \quad ; \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad b_3 = \frac{1}{4}$$

Ở đây

$$M = 3, N = 0$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{3}{4} & n = 1 \\ \frac{1}{2} & n = 2 \\ \frac{1}{4} & n = 3 \\ 0 & \text{các giá trị khác} \end{cases}$$

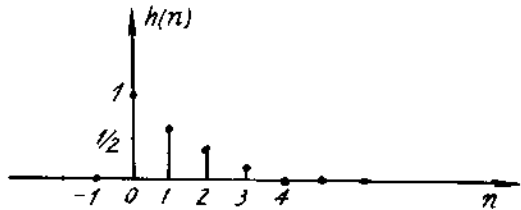
$h(n)$ được biểu diễn bằng đồ thị trên hình 1.4.3.2.

Đây là hệ thống không đệ quy và cũng là hệ FIR : $L[h(n)] = 4$.

Bây giờ ta xét tính ổn định của hệ thống :

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^3 |h(n)|$$

$$S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2,5 < \infty$$



Hệ thống này là ổn định .

Hình 1.4.3.2.

Vậy ta có thể nói rằng hệ thống FIR là hệ thống luôn ổn định và đây là một ưu việt của bộ lọc số FIR mà ta sẽ nghiên cứu kỹ ở các chương sau.

b) Hệ thống số đệ quy

Trong trường hợp nếu $N > 0$ ta có phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N như sau :

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$= \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad ; \quad a_0 = 1 \quad (1.4.3.5)$$

Vậy ta có định nghĩa sau :

Định nghĩa : Hệ thống được đặc trưng bởi phương trình sai phân bậc $N > 0$ được gọi là hệ thống đệ quy.

Nhận xét :

Từ quan hệ 1.4.3.5 ta thấy rằng b_r và a_k là các hằng số, vậy thì hệ thống đệ quy là hệ thống mà đáp ứng ra $y(n)$ của nó phụ thuộc vào kích thích vào ở thời điểm hiện tại và quá khứ và cả vào đáp ứng ra ở thời điểm quá khứ.

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)] \quad (1.4.3.6)$$

Ở đây $F[\cdot]$ ký hiệu là hàm.

Nếu ta giải phương trình 1.4.3.5 với kích thích vào $x(n) = \delta(n)$ ta sẽ tìm được đáp ứng xung $h(n)$. Ta sẽ thấy rằng đáp ứng xung của hệ thống đệ quy sẽ có chiều dài vô hạn. Và nếu ta giải phương trình 1.4.3.5 với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$ thì hệ thống sẽ là nhân quả và $h(n)$ sẽ là dãy nhân quả. Vậy hệ thống đệ quy là hệ thống mà đáp ứng xung $h(n)$ của nó có chiều dài vô hạn (Tiếng Anh : Infinite - duration Impulse Response System, viết tắt là IIR system).

Ví dụ 1.4.3.3 :

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống đệ quy cho bởi phương trình sai phân sau :

$$y(n] = a y(n-1) + x(n)$$

Với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$

Giải :

Trong trường hợp này $N = 1$, $M = 0$, vậy hệ thống này là hệ thống đệ quy. Nếu ta thay $x(n) = \delta(n)$ ta sẽ có $y(n) = h(n)$. Bởi phương trình này đơn giản ta có thể dùng phương pháp thế (xem ví dụ 1.4.2.1) để tìm $h(n)$ và sau các phép tính đơn giản ta có :

$$h(n) = a^n u(n)$$

$h(n)$ được biểu diễn bằng đồ thị trên hình 1.4.3.3.

Đây là hệ thống đệ quy và cũng là hệ thống IIR, $L[h(n)] = [0, +\infty] = \infty$

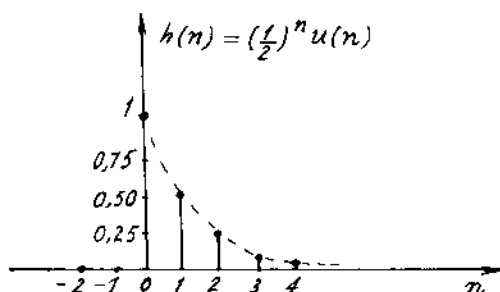
Bây giờ ta xét tính ổn định :

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

Nếu $|a| < 1$ thì S sẽ hội tụ :

$$S = \frac{1}{1-|a|}$$

Và hệ thống IIR này sẽ ổn định.



Hình 1.4.3.3.

Nếu $|a| \geq 1$ thì S sẽ phân kỳ, hệ thống này sẽ không ổn định.

Vậy với hệ thống IIR, ta phải luôn xét tính ổn định của nó. Đây là nhược điểm của bộ lọc số IIR so với bộ lọc FIR xét về quan điểm độ ổn định.

Nhận xét về đáp ứng xung của hệ thống IIR.

Ta thấy rằng đối với hệ thống FIR ta có thể tìm ngay được $h(n)$ từ các hệ số của phương trình sai phân tuyến tính hệ-số hằng. Còn đối với hệ thống IIR, từ các hệ số của phương trình sai phân ta không thể tìm được ngay $h(n)$. Nhưng từ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất ta lại có thể tìm được $h(n)$, cụ thể như sau.

Một hệ thống đệ quy tuyến tính và nhân quả bất kỳ sẽ có quan hệ giữa đáp ứng ra $y(n)$ với đáp ứng xung $h(n)$ và kích thích vào $x(n)$ như sau :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) \quad n \geq 0$$

Đây là tích chập giữa $h(n)$ và $x(n)$, và ta cũng thấy rằng nếu $x(n) = \delta(n)$ thì $y(n) = h(n)$

$$y(n) = h(n) \quad \left| \quad x(n) = \delta(n) \right. \quad (1.4.3.7)$$

Ở đây ký hiệu $\left| \right.$ có nghĩa là "với điều kiện".

Khi giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng ta đã tìm nghiệm tổng quát bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và nghiệm riêng của phương trình có vế hai với kích thích $x(n)$ cho trước.

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n)$$

$y_p(n)$ được xác định với kích thích vào đã cho. Vậy trong trường hợp kích thích vào chỉ là một xung ở $n = 0$ thì $x(n) = \delta(n)$ còn với $n > 0$ thì $x(n) = 0$, thì $y_p(n) = 0$:

$$y_p(n) = 0 \quad \left| \quad x(n) = 0 \quad \text{với } n > 0 \right. \quad (1.4.3.8)$$

Vậy ta có :

$$y(n) = y_0(n) \quad \left| \quad x(n) = \delta(n) \right. \quad (1.4.3.9)$$

Đến đây ta có thể xác định $h(n)$ bằng $y_0(n)$.

$$h(n) = y_0(n) = \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n \quad (1.4.3.10)$$

Hệ thức (1.4.3.9) là trường hợp phương trình đặc trưng có các nghiệm đơn, tức là tất cả các nghiệm phân biệt nhau, và α_k là các nghiệm đơn của phương trình đặc trưng :

$$\sum_{k=0}^N a_k \alpha^{N-k} = 0 \quad (1.4.3.11)$$

Còn các hệ số A_k sẽ được xác định bởi các điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$.

Bây giờ ta xét tính ổn định của hệ thống IIR.

Chúng ta sẽ sử dụng điều kiện ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \\ S &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^N A_k \alpha_k^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^N |A_k| |\alpha_k^n| \\ \Rightarrow S &\leq \sum_{k=0}^N |A_k| \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k^n \right| \end{aligned}$$

$$S \leq \sum_{k=0}^N |A_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n$$

$\sum_{k=0}^N |A_k|$ là hằng số, vậy nếu $|\alpha_k| < 1$ với mọi k thì ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_k|^n < \infty$$

và từ đây ta có :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Vậy nếu $|\alpha_k| < 1$ với mọi k thì hệ thống IIR tương ứng sẽ ổn định.

Còn nếu chỉ cần một trong số nghiệm của phương trình đặc trưng $|\alpha_k| \geq 1$, thì tổng $S = \infty$ và hệ thống IIR tương ứng sẽ không ổn định.

Vậy ta có thể phát biểu lại điều kiện ổn định của hệ thống IIR như sau :

Điều kiện ổn định : Điều kiện cần và đủ cho sự ổn định của một hệ thống IIR nhân quả được biểu diễn bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng là giá trị tuyệt đối của tất cả các nghiệm α_k của phương trình đặc trưng phải nhỏ hơn một.

$$|\alpha_k| < 1 \quad \text{với mọi } k \quad (1.4.3.12)$$

thì

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Ví dụ 1.4.3.4 :

Hãy tìm $h(n)$ và xét sự ổn định của hệ thống IIR được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$

Giải : Tìm $y_0(n)$

Từ đầu bài ta có phương trình đặc trưng sau :

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Ta thu được : $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = 2$

Vậy $y_0(n) = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 2^n = h(n)$

Xác định hệ số A_1 và A_2 theo điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$ và đặt $x(n) = \delta(n)$.

$n = 0$: $y(0) - 3y(-1) + 2y(-2) = \delta(0) + 2\delta(-1)$

Ta có : $y(0) = 1$

$n = 1$: $y(1) - 3y(0) + 2y(-1) = \delta(1) + 2\delta(0)$

Ta có : $y(1) = 3y(0) + 2y(0) = 5$

Mặt khác thay $y_0(n)$ vào ta có :

$$y(0) = A_1 + A_2 = 1$$

$$y(1) = A_1 + 2A_2 = 5$$

Từ đây ta có :

$$A_1 = -3 \quad \text{và} \quad A_2 = 4$$

Cuối cùng :

$$h(n) = -3 + 4.2^n = 2^{n+2} - 3 \quad n \geq 0$$

Vì cả $|\alpha_1| = 1$ và $|\alpha_2| = 2 > 1$ nên hệ thống IIR này không ổn định.

c) Hệ thống đệ quy thuần túy (Purely recursive system)

Hệ thống đệ quy thuần túy là trường hợp riêng của hệ thống đệ quy khi $M = 0$.

Nếu $N > 0$ và $M = 0$ ta có phương trình sai phân tuyến tính bậc N như sau :

$$y(n) = b_0 x(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad , \quad a_0 = 1 \quad (1.4.3.13)$$

Vậy phương trình sai phân 1.4.3.13 là phương trình đặc trưng cho hệ thống đệ quy thuần túy.

Nhận xét :

Từ phương trình 1.4.3.13 ta thấy rằng b_0 và a_k là các hằng số, vậy thì hệ thống đệ quy thuần túy là hệ thống mà đáp ứng ra $y(n)$ của nó phụ thuộc vào kích thích vào chỉ ở thời điểm hiện tại và vào đáp ứng ra chỉ ở thời điểm quá khứ.

$$y(n) = F[x(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)] \quad (1.4.3.14)$$

Ở đây $F[\dots]$ ký hiệu là hàm.

Tất nhiên hệ thống đệ quy thuần túy 1.4.3.13 này cũng là hệ thống IIR, tức là đáp ứng xung $h(n)$ của nó có chiều dài vô hạn.

Ví dụ 1.4.3.5 :

Cho hệ thống đệ quy thuần túy mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ và xét độ ổn định của nó với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$.

Giải :

Ở đây $N = 2$, $M = 0$, $b_0 = 1$

Để xác định $h(n)$ ta chỉ cần tìm $y_0(n)$.

Phương trình đặc trưng có dạng :

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Ta có : $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$

Vậy $y_0(n) = A_1.1^n + A_2.2^n = h(n)$

Xác định A_1 và A_2 theo điều kiện đầu và đặt $x(n) = \delta(n)$.

$n = 0$: $y(0) - 3y(-1) + 2y(-2) = \delta(0) = 1$

Ta có : $y(0) = 1$

$n = 1$: $y(1) - 3y(0) + 2y(-1) = \delta(1) = 0$

Ta có : $y(1) = 3$

Thay vào $y_0(n)$ ta có :

$$y(0) = A_1 + A_2 = 1$$

$$y(1) = A_1 + 2A_2 = 3$$

Từ đây ta có : $A_1 = -1$ và $A_2 = 2$

Cuối cùng $h(n) = -1 + 2.2^n = 2^{n+1} - 1 \quad n \geq 0$

Vì $|\alpha_1| = 1$ và $|\alpha_2| = 2 > 1$ nên hệ thống này là không ổn định.

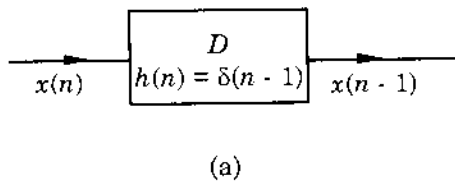
Nhận xét : Hệ thống đệ quy thuần túy trong ví dụ 1.4.3.5 này có cùng vết phải của phương trình sai phân với hệ thống đệ quy trong ví dụ 1.4.3.4, vậy chúng có chung phương trình đặc trưng, vì vậy độ ổn định của chúng giống nhau mặc dù đáp ứng xung của chúng khác nhau. Sau này khi xét chúng trong miền z , ta thấy chúng có cùng các cực, vì vậy tính ổn định của chúng là như nhau.

1.4.4. CÁC PHẦN TỬ THỰC HIỆN HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

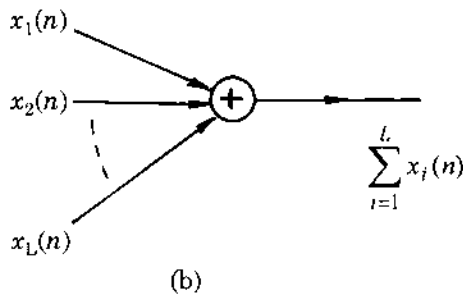
Nhờ có phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng chúng ta có thể thực hiện trực tiếp các hệ thống số bằng các phần tử thực hiện.

a) Các phần tử thực hiện

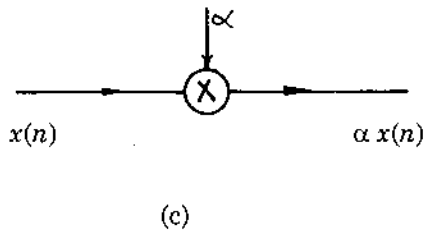
Các phần tử thực hiện được biểu diễn trên hình (1.4.4.1)



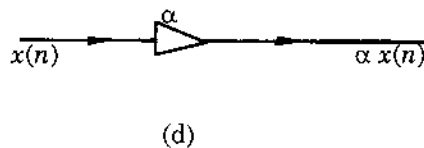
Bộ trễ
(D : Delay : Trễ)



Bộ cộng



Bộ nhân với hằng số



Bộ nhân với hằng số

Hình 1.4.4.1.

Để dễ hiểu sơ đồ khối thực hiện hệ thống, chúng ta viết lại phương trình sai phân của các hệ thống như sau :

Hệ thống không đệ quy :

$$y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^M b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]}$$

Hệ thống đệ quy :

$$y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^M b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]} + \underbrace{\sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)}_{F_2[y(n-1), \dots, y(n-N)]}$$

Hệ thống đệ quy thuần túy :

$$y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)}_{F_2[y(n-1), \dots, y(n-N)]}$$

b) Thực hiện các hệ thống rời rạc

Một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định là hệ thống thực hiện được về mặt vật lý, dù cho là hệ thống đó là không đệ quy, đệ quy hay đệ quy thuần túy.

Dựa vào phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng cho từng hệ thống này chúng ta có thể xây dựng sơ đồ khối tổng quát của chúng như trên hình (1.4.4.2) : (a) - Hệ thống không đệ quy, (b) - Hệ thống đệ quy, (c) - Hệ thống đệ quy thuần nhất.

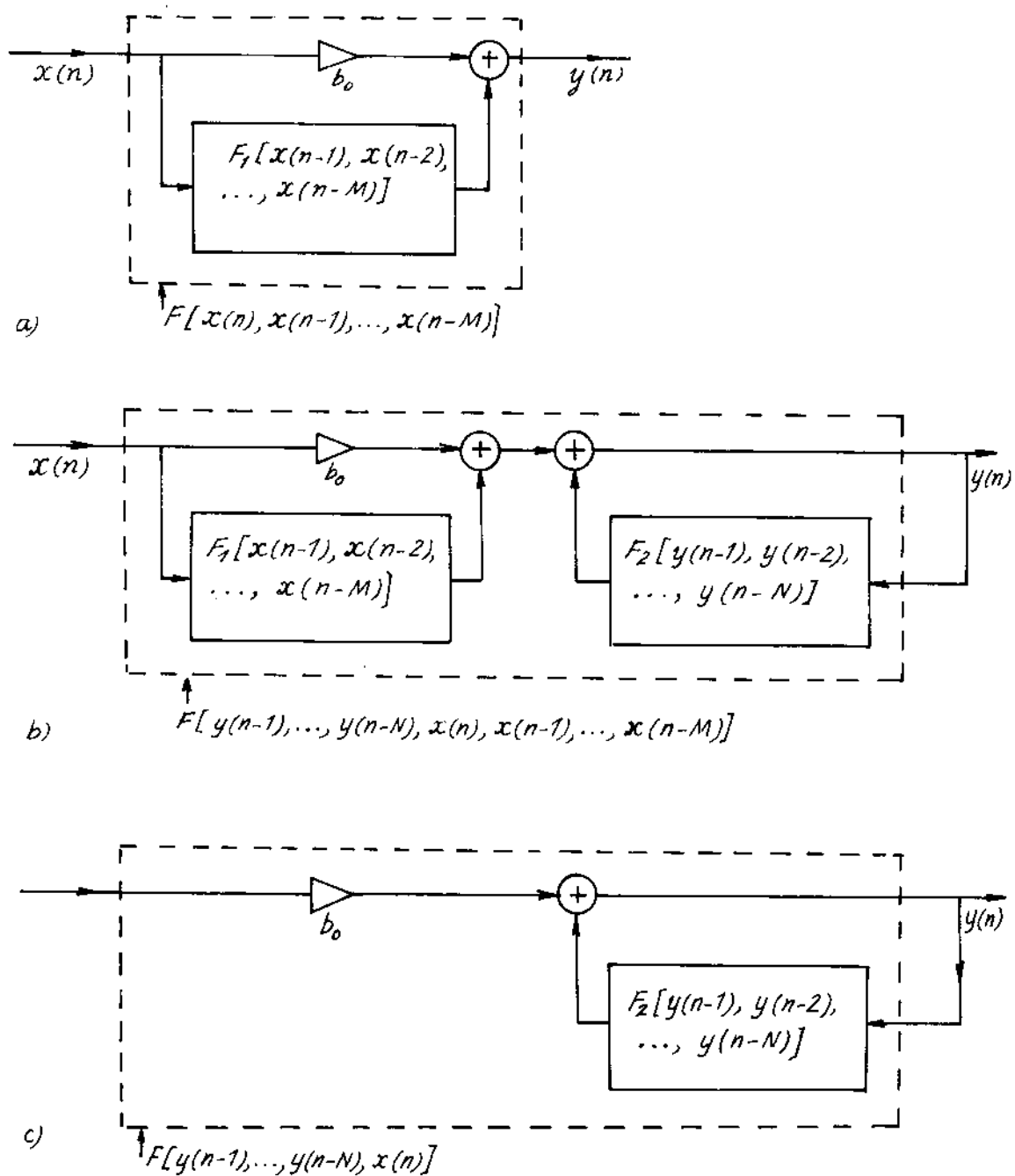
Nhận xét :

- Hệ thống không đệ quy, sơ đồ của nó không có nhánh phản hồi, vì vậy nó luôn luôn ổn định, tức là hệ thống số FIR luôn ổn định.

- Hệ thống đệ quy, sơ đồ của nó gồm hai khối F_1 và F_2 , F_1 giống hệ thống không đệ quy còn F_2 là nhánh phản hồi. Do có nhánh phản hồi nên ta phải xét độ ổn định của hệ IIR.

- Hệ thống đệ quy thuần túy, sơ đồ của nó chỉ có b_0 và khối F_2 , do F_2 là nhánh phản hồi nên nó cũng là hệ thống IIR và ta phải xét độ ổn định của nó.

- Ta có thể dùng các phần tử thực hiện để tìm cấu trúc chi tiết của hệ thống này.



Hình 1.4.4.2.

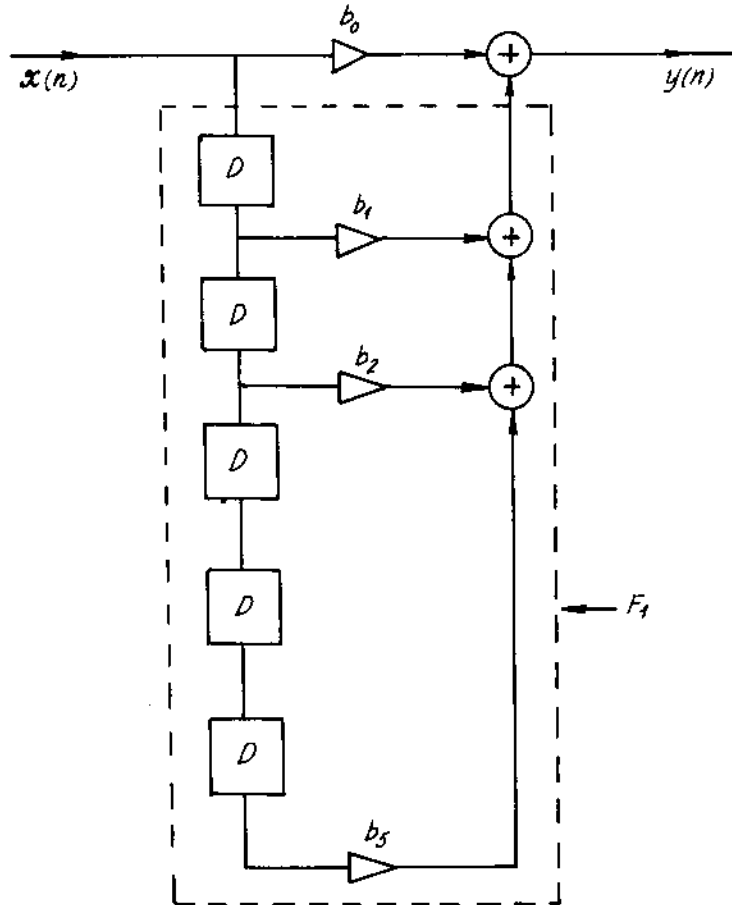
Ví dụ 1.4.4.1 :

Cho phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng :

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_5 x(n-5)$$

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống cho bởi phương trình này.

Giải : Đây là sơ đồ hệ thống không đệ quy : $N = 0$; $M = 5$. Sơ đồ của hệ thống như trên hình 1.4.4.3.



Hình 1.4.4.3.

Ví dụ 1.4.4.2 :

Hãy vẽ sơ đồ cấu trúc của hệ thống rời rạc được cho bởi phương trình sai phân tuyến tính sau đây :

$$y(n) = - \sum_{k=1}^3 a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^3 b_r x(n-r)$$

Giải : Đây là hệ thống đệ quy $N = M = 3$. Cấu trúc của hệ thống này cho trên hình 1.4.4.4.

Ví dụ 1.4.4.3 :

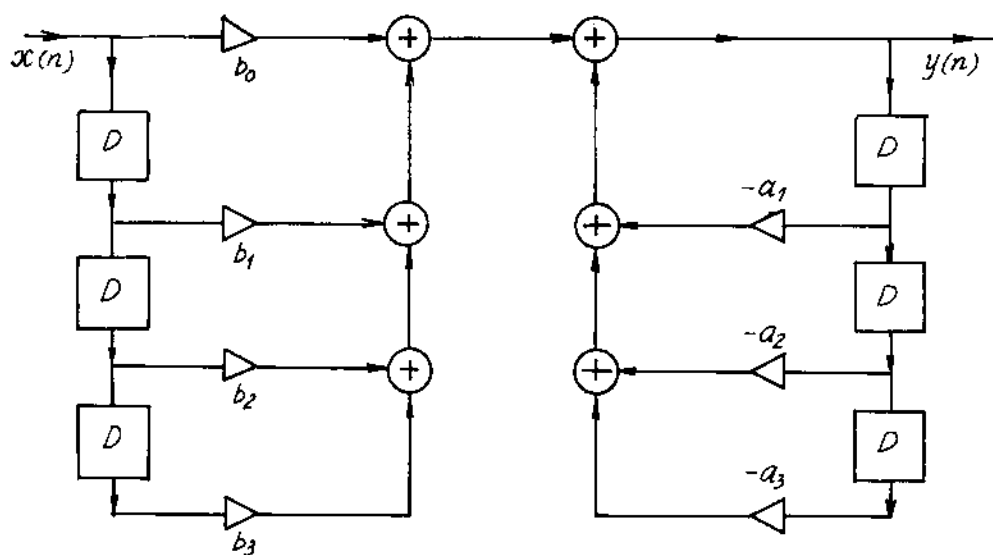
Hãy vẽ sơ đồ cấu trúc của hệ thống rời rạc được cho bởi phương trình sai phân tuyến tính sau đây :

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - a_4 y(n-4)$$

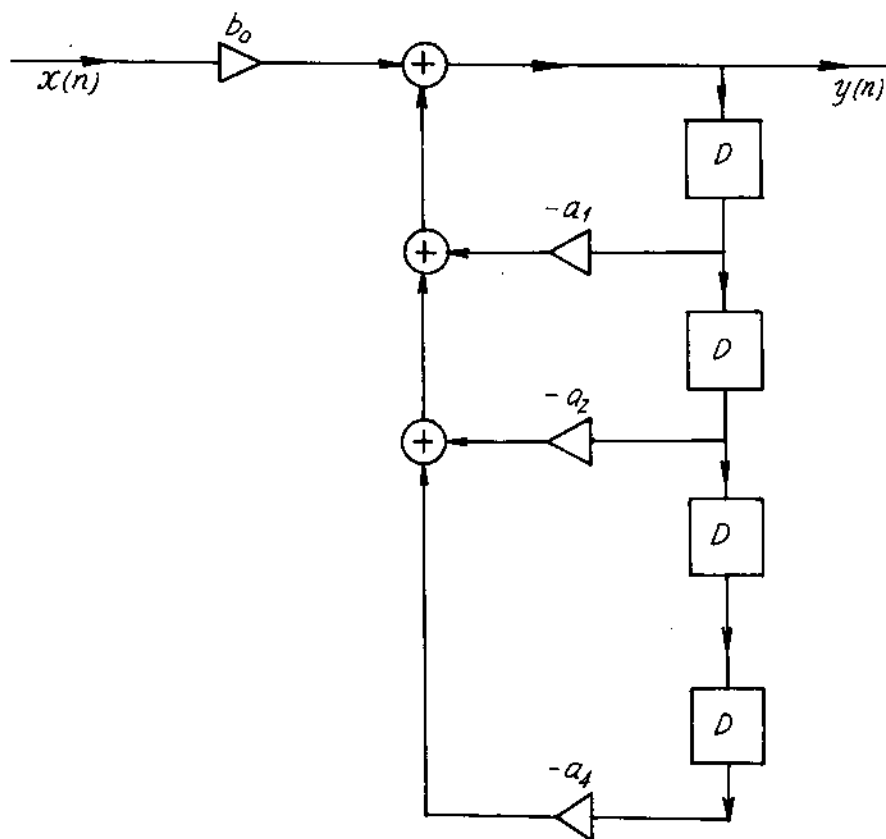
Giải :

Đây là hệ thống đệ quy thuần túy : $N = 4$, $M = 0$.

Cấu trúc của hệ thống này cho trên hình 1.4.4.5.



Hình 1.4.4.4.

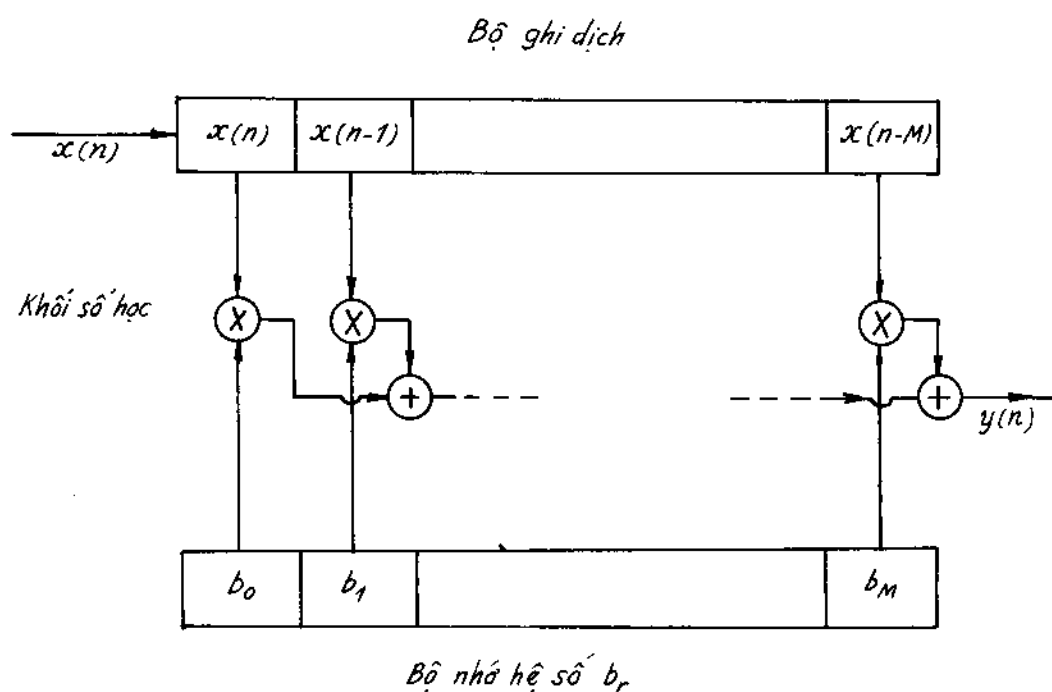


Hình 1.4.4.5.

Trong thực tế dây của bộ trễ tín hiệu sẽ được thực hiện bằng bộ ghi dịch, các hệ số b_r và a_k được nhớ trong các bộ nhớ, và các phép nhân với hệ số và cộng sẽ được thực hiện bởi bộ số học.

Sơ đồ nêu trên hình 1.4.4.6 là sơ đồ thực hiện hệ thống không đệ quy cho bởi phương trình sai phân sau :

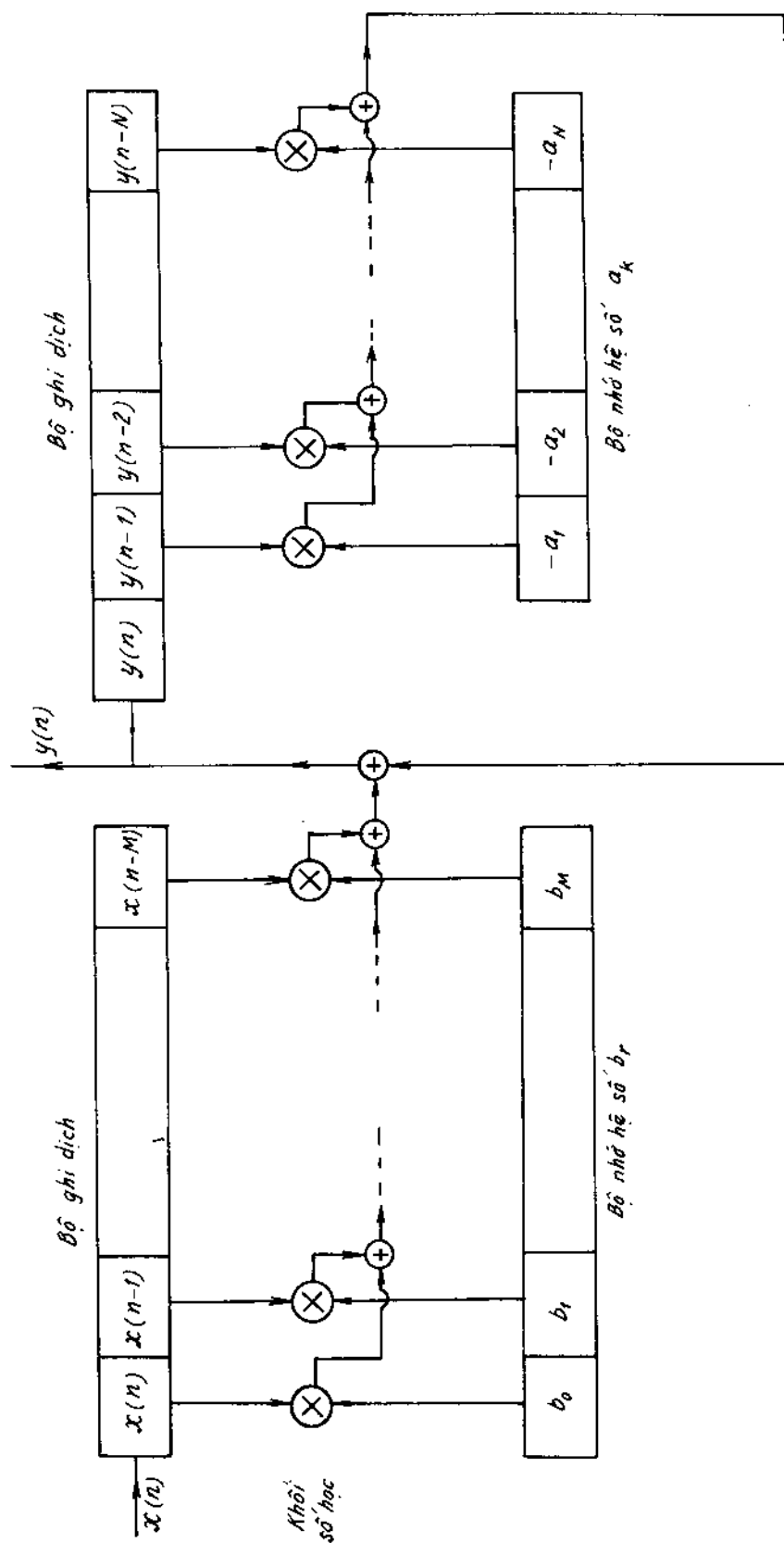
$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



Hình 1.4.4.6.

Sơ đồ trên hình 1.4.4.7 cho ta sơ đồ thực hiện hệ thống đệ quy được mô tả bởi phương trình sai phân tổng quát sau đây :

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)$$



Hình 1.4.4.7.

1.5. TƯƠNG QUAN CỦA CÁC TÍN HIỆU

1.5.1. MỞ ĐẦU

Trong việc xử lý tín hiệu, chúng ta luôn cần phải so sánh các tín hiệu với nhau, chẳng hạn như vấn đề của tín hiệu radar, radar sẽ phát tín hiệu để tìm mục tiêu là $x(n)$, tín hiệu này sau khi đập vào mục tiêu (như máy bay chẳng hạn) sẽ phản xạ trở lại radar, radar thu lại tín hiệu này nhưng bị trễ đi một thời gian $D = n_0 T_s$ (T_s là chu kỳ lấy mẫu), tín hiệu mà radar thu lại sẽ bị suy giảm với hệ số suy giảm A , tức là radar sẽ thu lại tín hiệu $Ax(n - n_0)$. Ngoài tín hiệu phản xạ từ mục tiêu này, radar còn bị nhiễu cộng can thiệp: $\gamma(n)$. Vậy tổng cộng nếu trong không gian có mục tiêu mà radar phát hiện được thì radar sẽ thu được tín hiệu :

$$y(n) = Ax(n - n_0) + \gamma(n)$$

Còn nếu không có mục tiêu trong không gian hoặc radar không phát hiện được mục tiêu thì radar chỉ thu được nhiễu cộng $\gamma(n)$, và :

$$y(n) = \gamma(n)$$

So sánh hai tín hiệu $x(n)$ và $y(n)$ ta sẽ phát hiện được có mục tiêu hay không, và xác định được thời gian trễ $D = n_0 T_s$, từ đó ta xác định được khoảng cách của mục tiêu.

Một phương pháp so sánh hay dùng nhất đó là "tương quan" sẽ được mô tả dưới đây.

1.5.2. TƯƠNG QUAN CHÉO VÀ TỰ TƯƠNG QUAN

a) Định nghĩa tương quan chéo

Giả sử ta có hai dãy $x(n)$ và $y(n)$, tối thiểu một trong hai dãy có năng lượng hữu hạn. Tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$ được định nghĩa như sau :

$$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5.2.1)$$

Ví dụ 1.5.2.1 :

Cho hai tín hiệu $x(n)$ và $y(n)$ sau đây

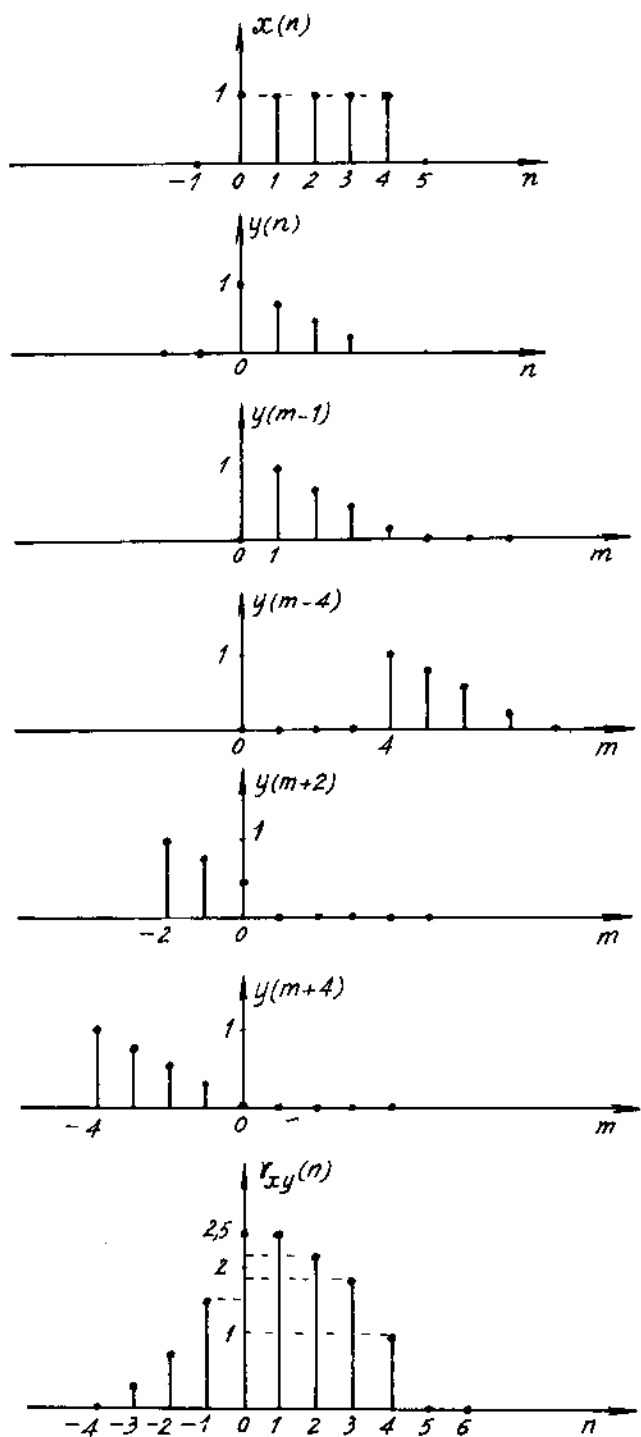
$$x(n) = \text{rect}_5(n)$$

$$y(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$.

Giải :

Theo định nghĩa ta có thể giải bằng đồ thị được minh họa trên hình 1.5.2.1.



$$\begin{aligned}
 r_{xy}(0) &= 2,5 \\
 r_{xy}(1) &= 2,5 \\
 r_{xy}(2) &= 2,25 \\
 r_{xy}(3) &= 1,75 \\
 r_{xy}(4) &= 1 \\
 r_{xy}(5) &= 0 \\
 r_{xy}(-1) &= 1,5 \\
 r_{xy}(-2) &= 0,75 \\
 r_{xy}(-3) &= 0,25 \\
 r_{xy}(-4) &= 0
 \end{aligned}$$

Hình 1.5.2.1.

b) Định nghĩa tự tương quan

Trong định nghĩa tương quan chéo nếu ta có $x(n) \equiv y(n)$ thì ta có định nghĩa tự tương quan.

Vậy hàm tự tương quan được định nghĩa như sau :

$$r_{xx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-n) \quad (1.5.2.2)$$

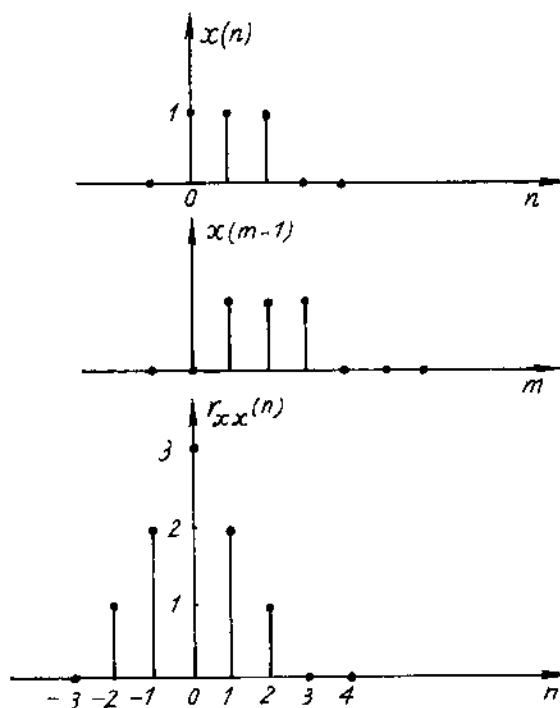
$r_{xx}(n)$ là hàm tự tương quan của dãy $x(n)$.

Ví dụ 1.5.2.2 :

Cho dãy : $x(n) = \text{rect}_3(n)$

Hãy tìm hàm tự tương quan r_{xx} và cho nhận xét về kết quả thu được.

Giải : Giải bằng đồ thị được minh họa trên hình 1.5.2.2.



Hình 1.5.2.2.

Nhận xét : Hàm tự tương quan $r_{xx}(n)$ bao giờ cũng đạt được cực đại tại gốc tọa độ $n = 0$, bởi vì rằng một dãy bất kỳ bao giờ cũng giống chính nó.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài tập 1 - 1

Hãy tìm quan hệ giữa dãy xung đơn vị và dãy nhảy đơn vị.

Bài tập 1 - 2

Hãy tìm biểu diễn toán học và đồ thị của các dãy sau đây :

$$\text{rect}_{N-n_0}(n) \text{ và } \text{rect}_{N-n_0}(n-n_0) \text{ với } N > n_0$$

Bài tập 1 - 3

Hãy tìm quan hệ giữa dãy nhảy đơn vị và dãy chữ nhật.

Bài tập 1 - 4

Hãy tìm quan hệ giữa dãy nhảy đơn vị và dãy dốc đơn vị.

Bài tập 1 - 5

Hãy xét các hệ thống sau đây có phải là tuyến tính hay không ?

a) $T[x(n)] = x^2(n) = y(n)$

b) $T[x(n)] = n x(n) = y(n)$

Bài tập 1 - 6

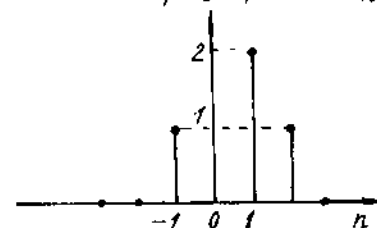
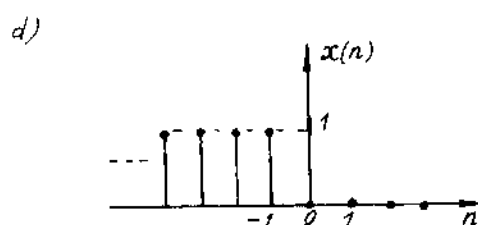
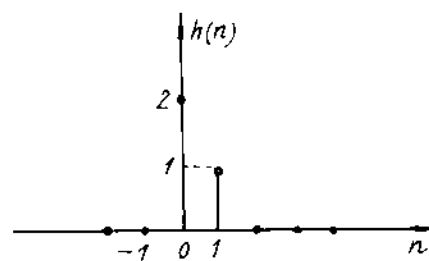
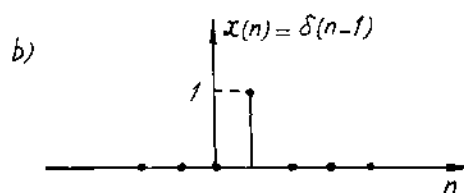
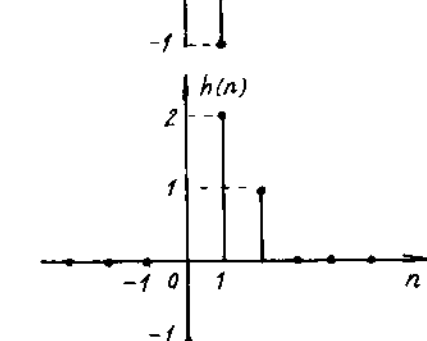
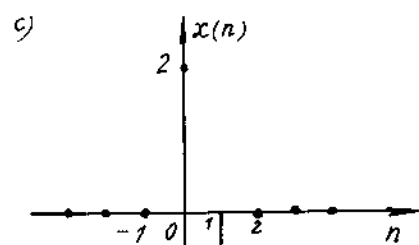
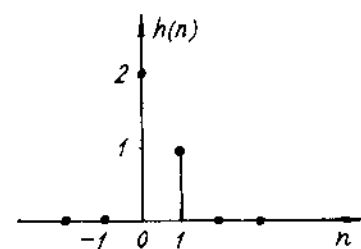
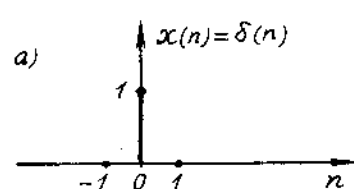
Hãy xét các hệ thống sau đây có phải là bất biến theo biến n hay không ?

a) $y(n] = x^2(n)$

b) $y(n] = n x(n)$

Bài tập 1 - 7

Hãy tính các tích chập : $x(n] * h(n) = y(n)$



Hình BT. 1.7 a, b, c, d.

Bài tập 1 - 8

Đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính bất biến được cho bởi $h(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$$

Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống này với kích thích $x(n)$:

$$x(n) = \text{rect}_N(n)$$

Bài tập 1 - 9

Cho hai hệ thống tuyến tính bất biến ghép với nhau theo hình vẽ sau :



Với : $h_1(n) = 2^n$ với mọi n .

$$h_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tổng quát.

Hãy nhận xét tính nhân quả của hệ thống $h_1(n)$, $h_2(n)$ và hệ thống tổng quát $h(n)$.

Bài tập 1 - 10

Cho hai tín hiệu rời rạc $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$$x_1(n) = \text{rect}_4(n)$$

$$x_2(n) = u(n)$$

và hai hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là $g(n)$ và $h(n)$:

$$g(n) = \text{rect}_4(n)$$

$$h(n) = \text{rect}_4(n+1)$$

Hãy tìm đáp ứng ra của từng hệ thống với từng **dãy** vào $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

Hãy nhận xét tính nhân quả của chúng.

Bài tập 1 - 11

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng ra là :

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^m x(n-m) + \dots$$

Nhận xét tính nhân quả và tính ổn định.

Bài tập 1 - 12

Giả sử $e(n)$ là tín hiệu rời rạc có dạng hàm mũ :

$$e(n) = \alpha^n \quad \text{với mọi } n, \alpha : \text{hằng số.}$$

và ta có tín hiệu bất kỳ $x(n)$ và $y(n)$.

Chứng minh rằng :

$$[e(n) \cdot x(n)] * [e(n) \cdot y(n)] = e(n) [x(n) * y(n)]$$

Bài tập 1 - 13

Cho hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h(n)$, kích thích vào $x(n)$ và đáp ứng ra $y(n)$, với :

$$\begin{aligned} h(n) & \begin{cases} \neq 0 & N_0 \leq n \leq N_1 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \\ x(n) & \begin{cases} \neq 0 & N_2 \leq n \leq N_3 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \\ y(n) & \begin{cases} \neq 0 & N_4 \leq n \leq N_5 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$

Các giá trị N_0, N_1, N_2, N_3 cho trước và $N_0 < N_2 < N_1 < N_3$.

Hãy tìm N_4 và N_5 theo hàm của N_0, N_1, N_2 và N_3 .

Bài tập 1 - 14

Chúng ta có hai hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$ và $h_2(n)$ ghép nối tiếp với nhau với:

$$h_1(n) = h_2(n) = u(n) - u(n - 3)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tổng quát.

Hãy nhận xét tính ổn định và tính nhân quả của chúng.

Bài tập 1 - 15

Cho hai tín hiệu rời rạc $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \frac{1}{2} \text{rect}_2(n) + u(n - 2) \\ x_2(n) &= \frac{1}{2} u(n) \end{aligned}$$

Tìm đáp ứng ra của các hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ và $h_4(n)$ với từng kích thích vào $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

Nhận xét tính bất biến nhân quả và tính ổn định.

Cho :

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \text{rect}_9(n + 3) \\ h_2(n) &= \text{rect}_6(n) \\ h_3(n) &= \text{rect}_3(n - 3) \\ h_4(n) &= \text{rect}_3(n + 3) \end{aligned}$$

Bài tập 1 - 16

Hãy kiểm tra tính ổn định và tính bất biến nhân quả của các hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung như sau :

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \frac{1}{n(n+1)} [u(n-1) - u(n-11)] \\ h_2(n) &= \frac{1}{n(n+1)} u(n-1) \end{aligned}$$

Bài tập 1 - 17

Hãy kiểm tra tính ổn định của các hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung như sau :

$$h_1(n) = \frac{1}{n} u(n-1)$$

$$h_2(n) = (-1)^n \frac{1}{n} u(n-1)$$

$$h_3(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} u(n-1)$$

$$h_4(n) = \frac{1}{n^2} u(n-1)$$

Bài tập 1 - 18

Hãy tính tích chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$$a) x_1(n) = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$x_2(n) = \text{rect}_6(n)$$

$$b) x_1(n) = \text{rect}_7(n)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{8} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$c) x_1(n) = \text{rect}_3(n-2)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_5(n-1)$$

$$e) x_1(n) = u(n-2)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{6} & 2 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$d) x_1(n) = u(n-3)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_4(n-1)$$

$$f) x_1(n) = \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1-n & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Bài tập 1 - 19

Hãy tìm đáp ứng ra $y(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến sau :

$$a) x(n) = \text{rect}_3(n+1)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$b) x(n) = \begin{cases} n & -1 \leq n \leq 2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$h(n) = \text{rect}_4(n)$$

Bài tập 1 - 20

Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống tuyến tính bất biến

$$a) x(n) = \text{rect}_3(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & -2 \leq n \leq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$b) x(n) = \text{rect}_3(n+5)$$

$$h(n) = \begin{cases} n+1 & -3 \leq n \leq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

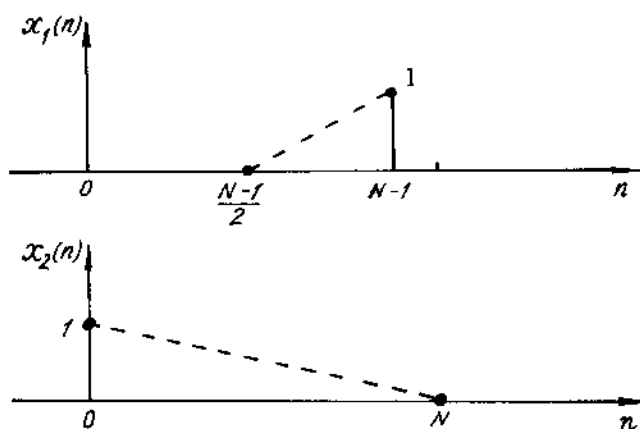
Bài tập 1 - 21

Hãy tính các tích chập sau đây : $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$$a) x_1(n) = a^n u(n)$$

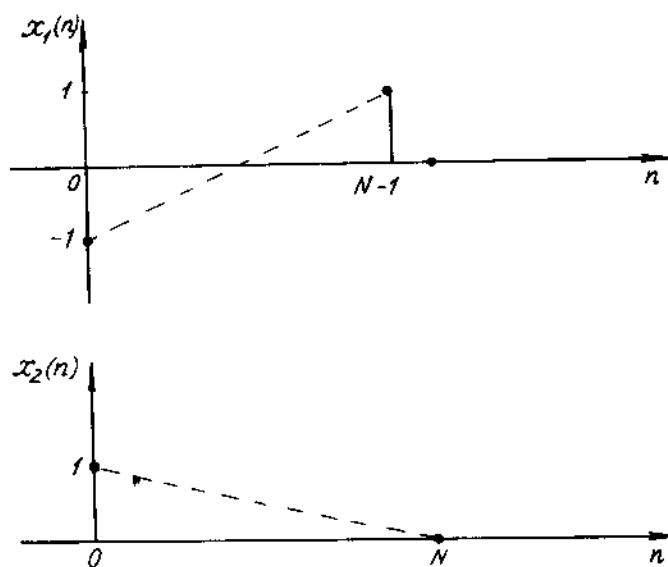
$$x_2(n) = u(-n)$$

b) $x_1(n)$ và $x_2(n)$ cho trên hình BT. 1.21 a.



Hình BT 1.21 a

c) $x_1(n)$ và $x_2(n)$ cho trên hình BT 1.21 b.



Hình BT 2.21b.

d)

$$x_1(n) = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \beta^{n-n_0} & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases} \quad ; \quad n_0 > 0 ; \quad 0 < \beta < 1$$

Bài tập 1 - 22

Hãy giải phương trình sai phân bậc nhất sau đây

$$y(n) = x(n) + \alpha y(n-1)$$

Với điều kiện đầu $y(-1) = 0$; $x(n) = 1 \quad \forall n$

a) Giải bằng phương pháp thế.

b) Giải bằng phương pháp tìm nghiệm tổng quát.

Bài tập 1 - 23

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây :

$$y(n) = x(n) - 3y(n-1)$$

a) Với điều kiện đầu $y(-1) = 0$; $x(n) = n^2 + n$

b) Với điều kiện đầu $y(-1) = 2$; $x(n) = n^2 + n$

c) Với điều kiện đầu $y(-1) = 2$; $x(n) = 1 \quad \forall n$

Bài tập 1 - 24

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây :

$$y(n) - 3y(n-1) + 5y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$; $x(n) = (-1)^n \quad \forall n$

Bài tập 1 - 25

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$y(n] - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Bài tập 1 - 26

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây :

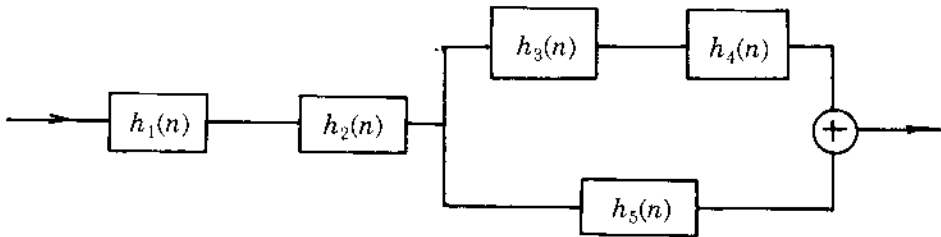
$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

a) Với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$; $x(n) = 4^n \quad \forall n$

b) Với điều kiện đầu $y(-1) = 1$; $y(-2) = 3$; $x(n) = 4^n \quad \forall n$

Bài tập 1 - 27

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ trên hình BT 1 - 27 dưới đây



Hình BT 1 - 27.

$$h_1(n) = \delta(n-4)$$

$$h_2(n) = \text{rect}_4(n+4)$$

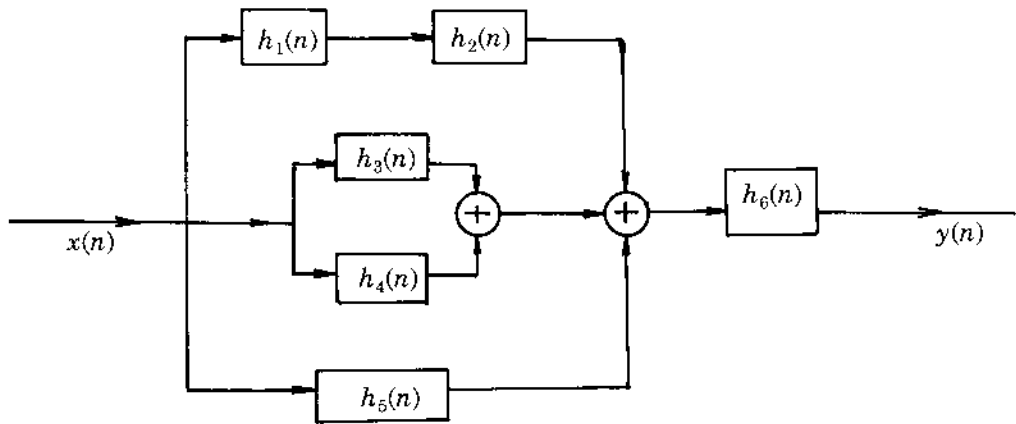
$$h_3(n) = \delta(n+2)$$

$$h_4(n) = \frac{1}{2} \text{rect}_3(n-3)$$

$$h_5(n) = \frac{1}{2} \text{rect}_3(n-1)$$

Bài tập 1 - 28

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ cho trên hình BT 1 - 28 sau đây :



Hình BT 1 - 28.

$$h_1(n) = \delta(n + 1)$$

$$h_2(n) = \text{rect}_3(n - 1)$$

$$h_3(n) = \delta(n + 1)$$

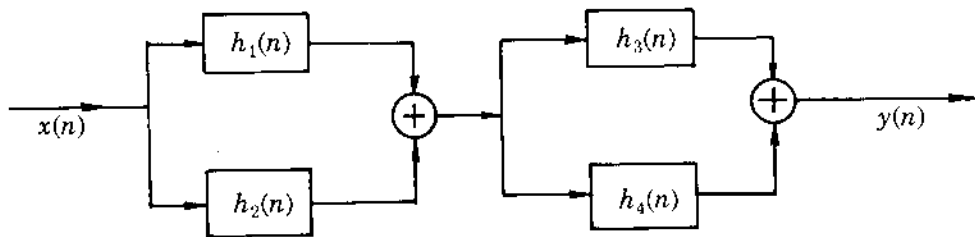
$$h_4(n) = \delta(n)$$

$$h_5(n) = u(n - 2) - u(n - 5)$$

$$h_6(n) = \delta(n - 2)$$

Bài tập 1 - 29

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ cho trên hình BT 1 - 29 sau đây :



Hình BT 1 - 29.

$$h_1(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2)$$

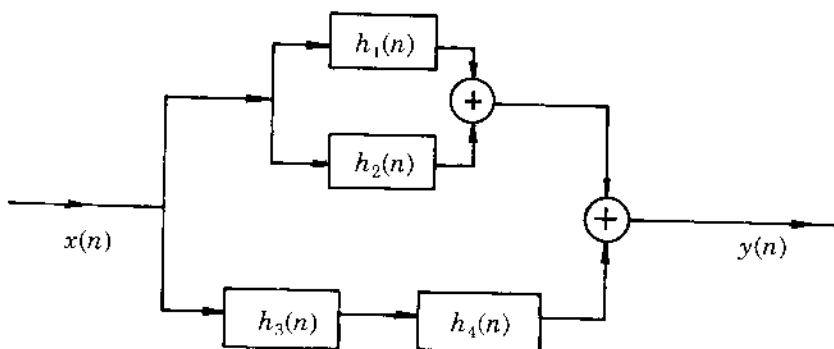
$$h_2(n) = \frac{1}{2} \text{rect}_2(n - 1)$$

$$h_3(n) = \begin{cases} n + 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$h_4(n) = \begin{cases} 5 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Bài tập 1 - 30

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ cho trên hình BT 1 - 30 sau đây.



Hình BT 1 - 30.

$$h_1(n) = \frac{1}{2} \delta(n - 1) + \frac{1}{2} \delta(n - 2)$$

$$h_2(n) = \frac{1}{2} \text{rect}_2(n - 1)$$

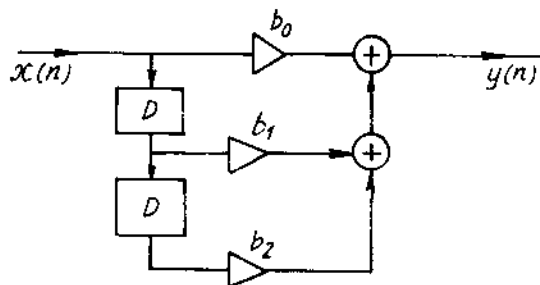
$$h_3(n) = \delta(n - 3)$$

$$h_4(n) = \text{rect}_7(n - 3)$$

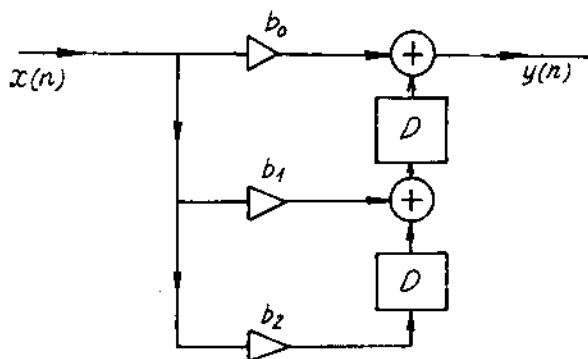
Bài tập 1 - 31

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ cho trên hình BT 1 - 31 sau đây.

a)



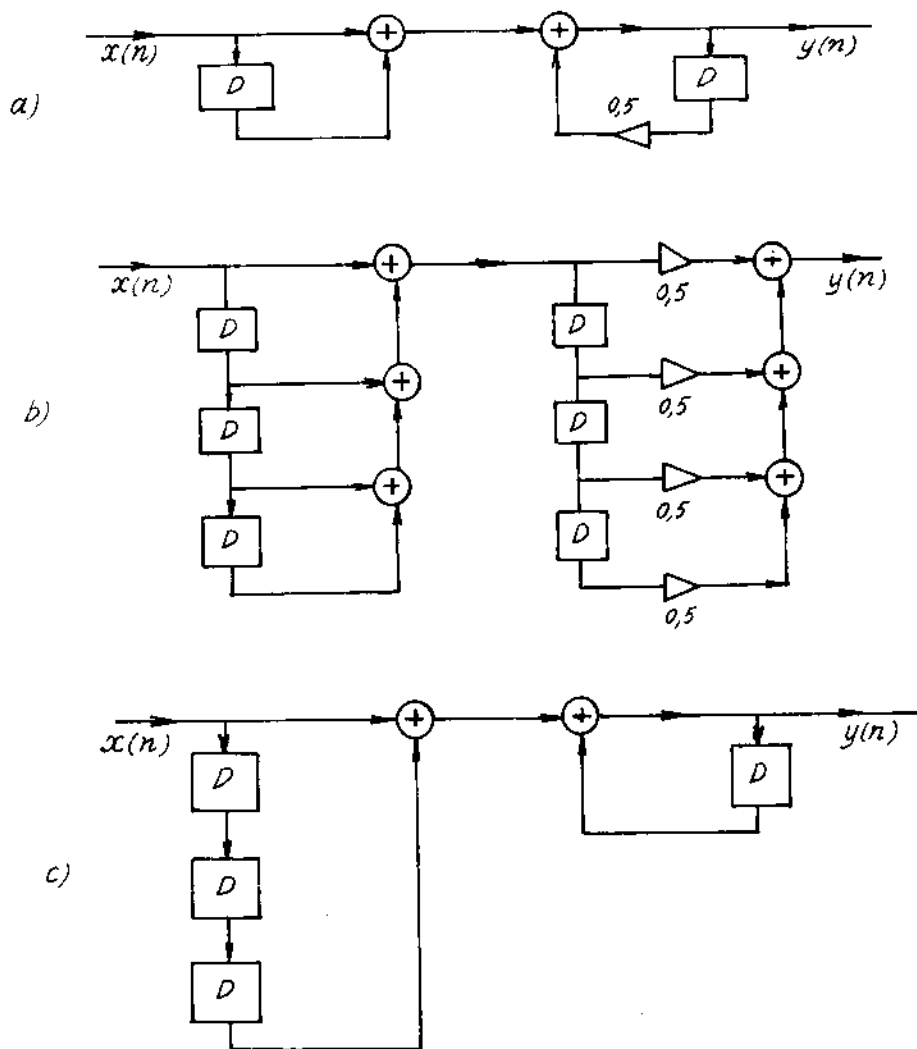
b)



Hình BT 1 - 31.

Bài tập 1 - 32

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n]$ của hệ thống được cho bởi sơ đồ cho trên hình BT 1 - 32.

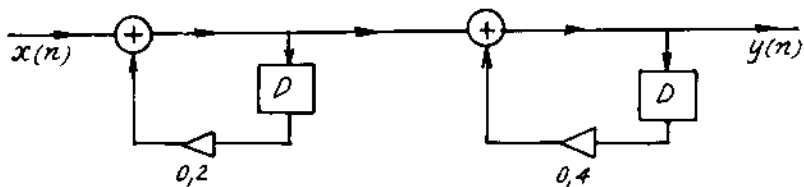


Hình BT 1 - 32.

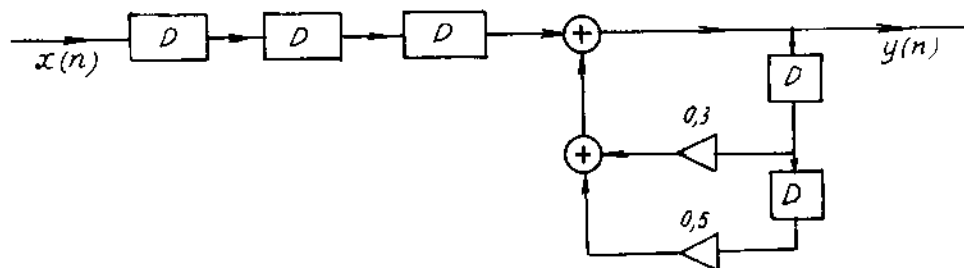
Bài tập 1 - 33

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n]$ và xét sự ổn định của các hệ thống cho trên hình BT 1 - 33 sau đây.

a)



b)



Hình BT 1 - 33.

Bài tập 1 - 34

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện các hệ thống được mô tả bởi các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

a) $y(n) - 2y(n-1) + 3y(n-2) = x(n) + x(n-1) + 2x(n-4)$

b) $5y(n) + 3y(n-1) + 6y(n-4) = x(n) + 3x(n-2) + 5x(n-3)$

c) $2y(n) + 6y(n-3) + 3y(n-4) = x(n)$

d) $3y(n) = x(n-1) + 3x(n-3) + 4x(n-5)$

Bài tập 1 - 35

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện, tìm đáp ứng xung $h(n)$ và xét sự ổn định của các hệ thống được mô tả bởi các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây :

a) $y(n) - 0,2y(n-1) = 2x(n) + 3x(n-1) + 4x(n-2)$

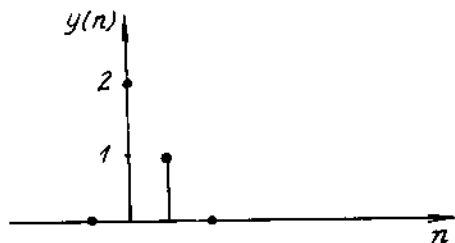
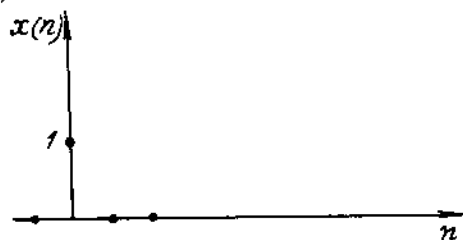
b) $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) = x(n)$

c) $4y(n) - 2y(n-1) - y(n-2) = 2x(n) + x(n-1)$

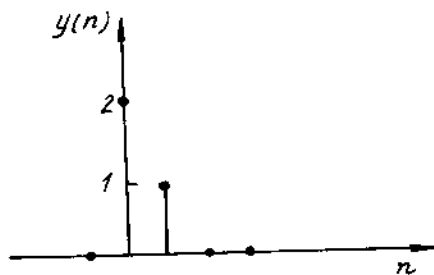
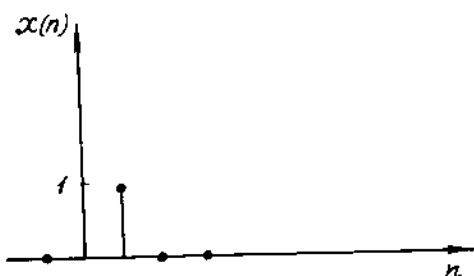
Bài tập 1 - 36

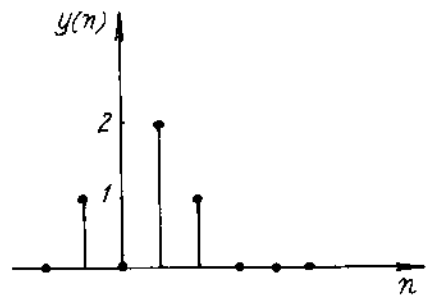
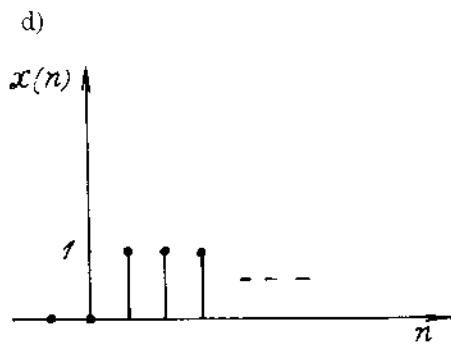
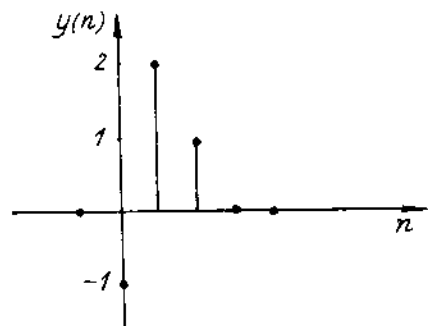
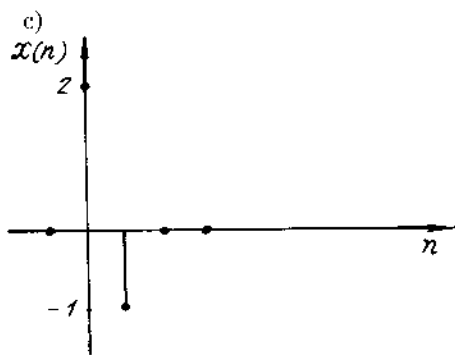
Hãy tính tương quan chéo $r_{xy}(n)$ của các dãy cho trên hình BT 1 - 36 sau đây :

a)



b)





Hình BT 1 - 36.

Bài tập 1 - 37

Hãy tính tương quan chéo của các dãy sau đây :

$$x_1(n) = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{1}, 2, 3, 1, 1 \}$$

$$x_2(n) = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{1}, 1, 1, 2, 3 \}$$

Hãy cho nhận xét.

Chương 2 . BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

2.1. MỞ ĐẦU

Trong chương 1 chúng ta đã tiến hành khảo sát tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền của biến số độc lập tự nhiên. Đây là cách khảo sát trực tiếp, nhưng nhiều trường hợp cách khảo sát trực tiếp này gặp phải những khó khăn nhất định hoặc rất phức tạp và hiệu quả không cao.

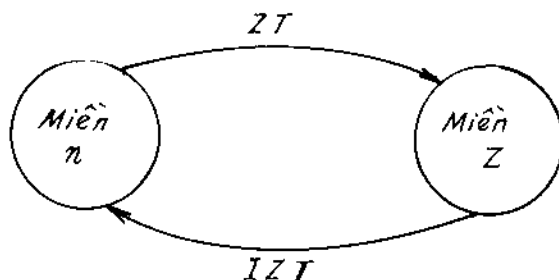
Ngoài phương pháp khảo sát trực tiếp này chúng ta có thể dùng nhiều phương pháp khảo sát gián tiếp khác thông qua các kỹ thuật biến đổi. Các biến đổi này làm nhiệm vụ chuyển miền biến số độc lập sang các miền khác và như vậy tín hiệu và hệ thống rời rạc sẽ được biểu diễn trong các miền mới này với các biến số mới. Mỗi một cách biến đổi sẽ có những thuận lợi riêng của nó, tùy từng trường hợp mà chúng ta dùng biến đổi nào. Sau khi khảo sát xong tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền các biến số mới này, nếu cần thiết chúng ta sẽ dùng các biến đổi ngược để đưa chúng về miền biến số độc lập cũ (miền biến số độc lập tự nhiên).

Phương pháp khảo sát gián tiếp này sẽ làm đơn giản rất nhiều các công việc mà chúng ta gặp phải khi dùng phương pháp khảo sát trực tiếp trong miền biến số độc lập tự nhiên.

Trong chương này chúng ta sẽ dùng biến đổi Z (Z - Transform, viết tắt là ZT), như vậy tín hiệu và hệ thống rời rạc sẽ được biểu diễn trong miền Z . Phương pháp khảo sát gián tiếp trong miền Z này đặc biệt quan trọng trong việc phân tích tín hiệu và hệ thống rời rạc và nó cho những kết quả khả quan, mà nếu khảo sát trực tiếp trong miền biến số độc lập tự nhiên sẽ không có được.

Biến đổi Z đóng vai trò như biến đổi Laplace (Laplace Transform) trong việc phân tích tín hiệu và hệ thống liên tục.

Quan hệ giữa miền n và miền Z được hình thức hoá bằng đồ hình trên hình 2.1.1.1.



Hình 2.1.1.1.

2.2. BIẾN ĐỔI Z (Z - TRANSFORM)

2.2.1. ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z HAI PHÍA VÀ MỘT PHÍA

a) Biến đổi Z hai phía (The two - side Z - transform)

Định nghĩa : Biến đổi Z hai phía của dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} \quad (2.2.1.1)$$

Ở đây Z là một biến số phức.

Như vậy biến đổi Z đã biến đổi việc biểu diễn tín hiệu $x(n)$ trong miền biến số độc lập tự nhiên n thành việc biểu diễn tín hiệu $X(Z)$ trong miền Z (tức là trong mặt phẳng phức Z, vì Z là biến số phức) và $X(Z)$ là một hàm phức của biến số Z.

Theo quan điểm toán tử, chúng ta sẽ dùng ký hiệu toán tử ZT như sau:

$$\begin{aligned} ZT[x(n)] &= X(Z) \\ x(n) &\xrightarrow{ZT} X(Z) \end{aligned} \quad (2.2.1.2)$$

tức là toán tử ZT tác động vào $x(n)$ sẽ cho ta $X(Z)$

Theo định nghĩa (2.2.1.1) ta thấy rằng biến đổi Z là một chuỗi lũy thừa vô hạn, nó tồn tại chỉ đối với các giá trị của Z mà tại đó chuỗi này hội tụ.

Ví dụ 2.2.1.1 : Tìm biến đổi Z của các tín hiệu có chiều dài hữu hạn sau đây:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \delta(n) \\ x_2(n) &= \delta(n - n_0) \quad n_0 > 0 \\ x_3(n) &= 2\delta(n + 2) + \delta(n) + 3\delta(n - 1) \\ x_4(n) &= 3\delta(n + 4) + \delta(n + 1) \end{aligned}$$

Giải : Chúng ta tìm $X(Z)$ theo quan hệ (2.2.1.1)

$$\begin{aligned} X_1(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)Z^{-n} = 1 \cdot Z^0 = 1 \\ X_2(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_0)Z^{-n} = 1 \cdot Z^{-n_0} = Z^{-n_0} \\ X_3(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\delta(n + 2) + \delta(n) + 3\delta(n - 1)]Z^{-n} = 2Z^2 + 1 + 3Z^{-1} \\ X_4(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [3\delta(n + 4) + \delta(n + 1)]Z^{-n} = 3Z^4 + Z^1 \end{aligned}$$

Nhập xét :

$X_1(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z, tức là trong toàn bộ mặt phẳng Z, nói là $ZT[x_1(n)]$ hội tụ trong toàn mặt phẳng Z.

$X_2(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z, trừ $Z = 0$, tức là $ZT[x_2(n)]$ hội tụ trong toàn mặt phẳng Z, trừ gốc tọa độ.

$X_3(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z, trừ $Z = 0$ và $T = \infty$, tức là $ZT[x_3(n)]$ hội tụ trong toàn mặt phẳng Z, trừ gốc tọa độ và ∞ .

$X_4(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z, trừ $Z = \infty$, tức là $ZT[x_4(n)]$ hội tụ trong toàn mặt phẳng Z, trừ ở ∞ .

Ví dụ 2.2.1.2 : Tìm ZT của các tín hiệu có chiều dài vô hạn sau đây:

$$x_5(n) = \begin{cases} e^{-0,5n} & n \geq -2 \\ 0 & n < -2 \end{cases}$$

$$x_6(n) = \begin{cases} e^{-0,5n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải :

$$\begin{aligned} X_5(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_5(n)Z^{-n} = \sum_{n=-2}^{\infty} e^{-0,5n}Z^{-n} = e \cdot Z^2 + e^{0,5}Z + \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-0,5}Z^{-1} \right)^n \\ &= eZ^2 + e^{0,5}Z + \frac{1}{1 - e^{-0,5}Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > e^{-0,5} \quad \text{và} \quad Z \neq \infty \\ X_6(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_6(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0,5n}Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-0,5}Z^{-1} \right)^n \\ &= \frac{1}{1 - e^{-0,5}Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > e^{-0,5} \end{aligned}$$

b) Biến đổi Z một phía (The one - side Z - transform)

Định nghĩa : Biến đổi Z một phía của dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} \quad (2.2.1.3)$$

Theo quan điểm toán tử, chúng ta cũng sẽ dùng ký hiệu toán tử ZT^1 như biến đổi Z hai phía như sau:

$$ZT^1[x(n)] = X^1(Z) \quad (2.2.1.4)$$

Sự khác nhau giữa biến đổi Z một phía và hai phía:

- Tổng theo n chỉ chạy từ 0 đến ∞ .
- Không biểu diễn được tín hiệu $x(n)$ đối với miền biến số độc lập âm ($n < 0$).
- Biến đổi Z một phía và hai phía của tín hiệu nhân quả là như nhau.
- Đối với tín hiệu nhân quả thì biến đổi Z một phía là duy nhất, vì tín hiệu nhân quả bằng không với $n < 0$.
- Về ký hiệu, để phân biệt với biến đổi Z hai phía, ta ghi số 1 ở phía trên bên trái : $X^1(Z)$, ZT^1 số 1 có nghĩa là một phía.
- Đối với biến đổi Z hai phía ta có thể chỉ gọi là biến đổi Z , thì ta hiểu đây là biến đổi Z hai phía và về ký hiệu ta không ghi gì ở phía trên cả: $X(Z)$, ZT .

Ví dụ 2.2.1.3 :

Tìm biến đổi Z một phía của các tín hiệu sau:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \delta(n) \\ x_2(n) &= \delta(n - n_0) \quad n_0 > 0 \\ x_3(n) &= 2\delta(n + 2) + \delta(n) + 3\delta(n - 1) \\ x_4(n) &= 3\delta(n + 4) + \delta(n + 1) \end{aligned}$$

$$x_5(n) = \begin{cases} e^{-0,5n} & n \geq -2 \\ 0 & n < -2 \end{cases}$$

$$x_6(n) = \begin{cases} e^{-0.5n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải : Theo định nghĩa của biến đổi Z một phía ta có:

$$X_1^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)Z^{-n} = 1 \cdot Z^0 = 1 \quad \text{với mọi } Z$$

$$X_2^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-n_0)Z^{-n} = 1 \cdot Z^{-n_0} = Z^{-n_0} \quad \text{với } Z \neq 0$$

$$X_3^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_3(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [2\delta(n+2) + \delta(n) + 3\delta(n-1)]Z^{-n} = 1 + 3Z^{-1} \quad \text{với } Z \neq 0$$

$$X_4^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_4(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [3\delta(n+4) + \delta(n+1)]Z^{-n} = 0 \quad \text{với mọi } Z$$

$$X_5^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_5(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0.5n} Z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-0.5} Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > e^{-0.5}$$

$$X_6^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_6(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0.5n} Z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-0.5} Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > e^{-0.5}$$

Nhận xét: Kết hợp với các ví dụ 2.2.1.1 và ví dụ 2.2.1.2 ta thấy rằng:

Nếu $x(n)$ là nhân quả thì $ZT[x(n)] = ZT^1[x(n)]$.

Nếu $x(n)$ là phản nhân quả thì $ZT^1[x(n)] = 0$, nhưng $ZT[x(n)] \neq 0$.

Nếu $x(n)$ là không nhân quả thì $ZT^1[x(n)]$ là không duy nhất.

$x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_6(n)$ là các dãy nhân quả.

$x_4(n)$ là dãy phản nhân quả.

$x_3(n)$ và $x_5(n)$ là các dãy không nhân quả.

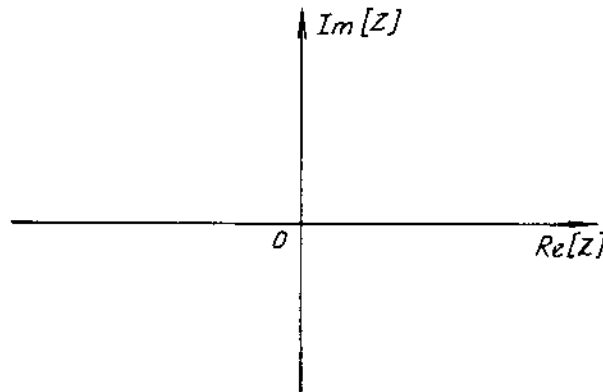
c) Mặt phẳng Z

Ở trên ta đã nói đến mặt phẳng Z , bây giờ ta xét chi tiết hơn một chút.

Bởi vì Z là biến số phức vì vậy ta có thể viết dưới dạng phần thực và phần ảo.

$$Z = \text{Re}[Z] + j\text{Im}[Z] \quad (2.5.1.5)$$

Mặt phẳng Z được tạo ra bởi trục tung $\text{Im}[Z]$ và trục hoành $\text{Re}[Z]$, xem hình (2.2.1.1).

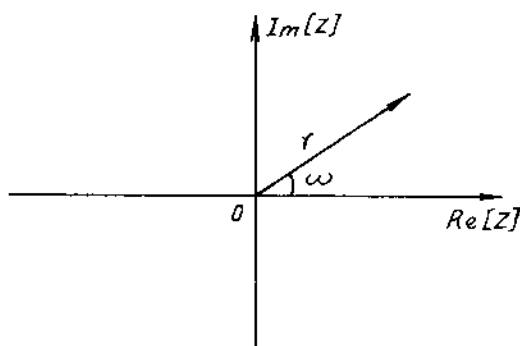


Hình 2.2.1.1.

Ngoài ra có thể biểu diễn Z trong tọa độ cực, và Z được viết dưới dạng sau:

$$Z = re^{j\omega} \quad (2.2.1.6)$$

Tọa độ cực trong mặt phẳng Z được minh họa trên hình 2.2.1.2.



Hình 2.2.1.2.

Ta cũng có liên hệ giữa $Re[Z]$, $Im[Z]$ và r , ω như sau:

$$Re[Z] = r \cos \omega$$

$$Im[Z] = r \sin \omega$$

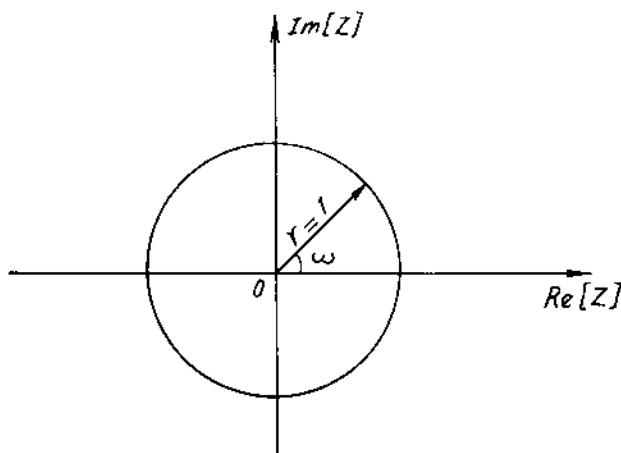
Ngoài ra trong mặt phẳng Z còn có một vòng tròn ứng với :

$$|Z| = r = 1$$

Vòng tròn này gọi là vòng tròn đơn vị, trên vòng tròn đơn vị Z được đánh giá như sau

$$Z = e^{j\omega}$$

Minh họa vòng tròn đơn vị trên hình 2.2.1.3.



Hình 2.2.1.3.

Vòng tròn đơn vị đặc biệt quan trọng trong việc đánh giá các đặc tính của hệ thống số dựa vào các vị trí của điểm cực, điểm không, chúng nằm ở trong hay ngoài vòng tròn đơn vị.

2.2.2. SỰ TỒN TẠI CỦA BIẾN ĐỔI Z

a) Định nghĩa miền hội tụ của biến đổi Z

Định nghĩa: Tập hợp tất cả các giá trị của Z mà tại đó chuỗi

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = ZT[x(n)]$$

hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z hai phía.

Đối với biến đổi Z một phía chúng ta cũng có định nghĩa tương tự.

Định nghĩa: Tập hợp tất cả các giá trị của Z mà tại đó chuỗi:

$$X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} = ZT^1[x(n)]$$

hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z một phía.

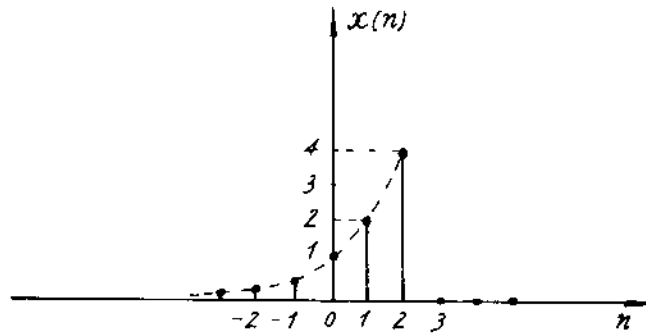
Ví dụ 2.2.2.1 :

Cho tín hiệu rời rạc sau đây:

$$x(n) = \begin{cases} 2^n & \text{với } -\infty \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{với } n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy xác định biến đổi Z hai phía, một phía và xác định miền hội tụ của chúng.

Giải : Tín hiệu $x(n)$ là không nhân quả có chiều dài $L[x(n)] = [-\infty, 2] = \infty$, $x(n)$ được vẽ trên hình 2.2.2.1.



Hình 2.2.2.1.

Theo định nghĩa ta có biến đổi Z hai phía như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^2 2^n Z^{-n} = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n Z^{-n}$$

Đổi biến $n = -m$ ta có:

$$X(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} Z^m + 1 + 2Z^{-1} + 4Z^{-2}$$

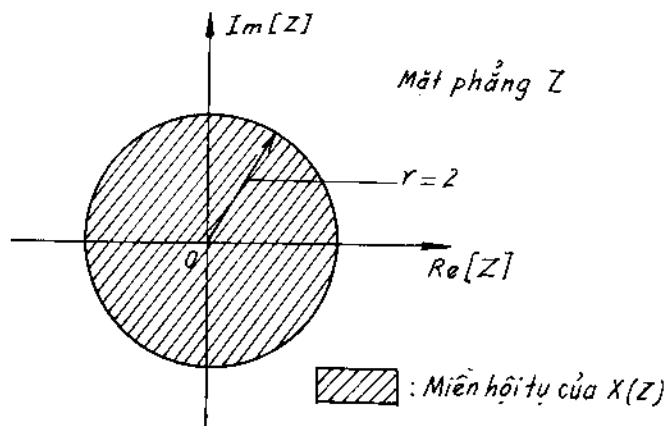
$$\text{Gọi: } X_1(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} Z^m = \frac{2^{-1}Z}{1 - 2^{-1}Z} = \frac{Z}{2 - Z} \quad \text{với } |Z| < 2$$

$$X_2(Z) = 1 + 2Z^{-1} + 4Z^{-2} \quad \text{với } Z \neq 0$$

Vậy:

$$X(Z) = \frac{Z}{2-Z} + 1 + 2Z^{-1} + 4Z^{-2} \quad \text{với } |Z| < 2 \text{ và } Z \neq 0$$

Hình 2.2.2.2 biểu diễn miền hội tụ của $X(Z)$ trong mặt phẳng Z :



Hình 2.2.2.2.

Như vậy miền hội tụ của $X(Z)$ là miền nằm bên trong vòng tròn có bán kính là 2 trừ gốc tọa độ.

Bây giờ ta tính biến đổi Z một phía của $x(n)$

$$X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^2 2^n Z^{-n} = 1 + 2Z^{-1} + 4Z^{-2} \quad \text{với } Z \neq 0$$

Vậy miền hội tụ của $X^1(Z)$ là toàn bộ mặt phẳng Z trừ gốc tọa độ $Z = 0$.

b) Tiêu chuẩn Cauchy

Phát biểu tiêu chuẩn Cauchy:

Tiêu chuẩn Cauchy khẳng định rằng một chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots \quad (2.2.2.1)$$

hội tụ nếu điều kiện sau đây được thoả mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n} < 1 \quad (2.2.2.2)$$

Ví dụ 2.2.2.2 :

Xét sự hội tụ của chuỗi sau đây:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n) = 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$u(n) = 1 \quad \text{với mọi } n \geq 0$$

Giải : Ứng dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u(n)|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |1|^{1/n} = 1$$

Chuỗi này không thoả mãn điều kiện (2.2.2.2) vậy chuỗi này phân kỳ.

Ví dụ 2.2.2.3 :

Xét sự hội tụ của chuỗi sau đây:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$$

Giải : Ứng dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{3}\right)^n \right|^{1/n} = \frac{1}{3} < 1$$

Chuỗi này thoả mãn điều kiện (2.2.2.2), vậy nó sẽ hội tụ.

c) Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

Để áp dụng tiêu chuẩn Cauchy chúng ta có thể chia chuỗi $X(Z)$ thành hai chuỗi như sau:

$$\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = X_1(Z) + X_2(Z) \\ X_1(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} \\ X_2(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} \end{aligned}$$

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi $X_1(Z)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)Z^{-n}|^{1/n} < 1$$

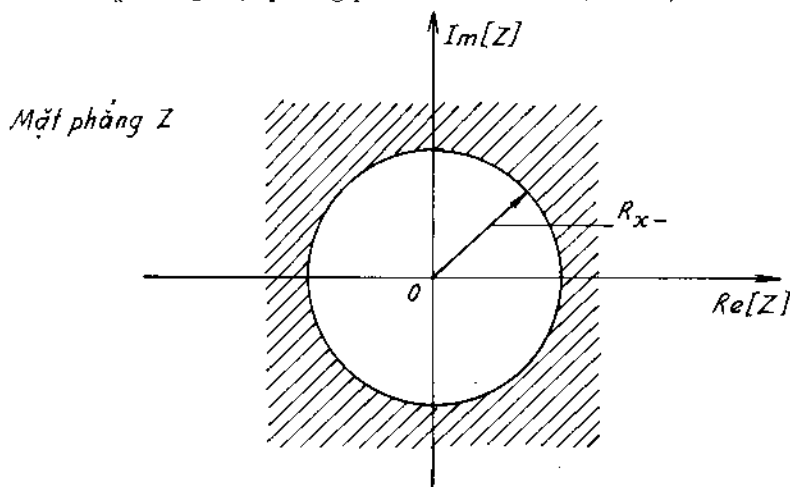
dẫn đến:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{1/n} |Z^{-1}| < 1$$

Đặt $R_x = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{1/n}$ (2.2.2.3)

Ta có : $R_x |Z^{-1}| < 1$, Vậy thì $|Z| > R_x$

Khi đó chuỗi $X_1(Z)$ sẽ hội tụ với $|Z| > R_x$ tức là bên ngoài vòng tròn, tâm là gốc tọa độ, có bán kính là R_x trong mặt phẳng phức Z . Xem hình (2.2.2.3).



Hình 2.2.2.3

Tương tự đối với chuỗi $X_2(Z)$ ta có :

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} - x(0)$$

Đổi biến số $l = -n$ ta có:

$$X_2(Z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(-l)Z^l - x(0)$$

Nếu $x(0)$ là số hữu hạn ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi $X_2(Z)$ như sau:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)Z^l|^{1/l} < 1$$

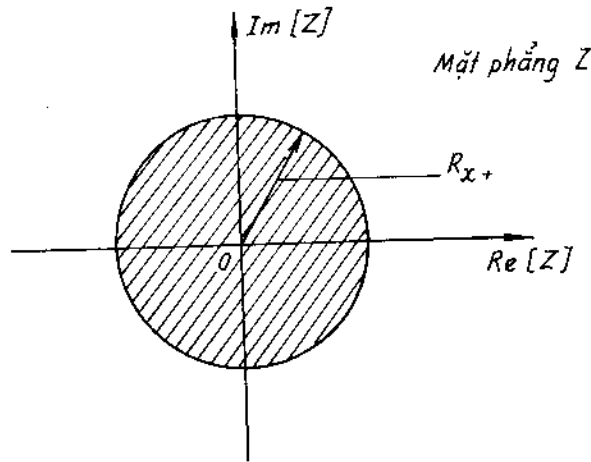
dẫn đến:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{1/l} |Z| < 1$$

Đặt : $R_{x+} = \left[\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{1/l} \right]^{-1} \quad (2.2.2.4)$

Ta có $\frac{1}{R_{x+}} |Z| < 1$ vậy thì $|Z| < R_{x+}$

Như vậy chuỗi $X_2(Z)$ sẽ hội tụ với $|Z| < R_{x+}$ tức là bên trong vòng tròn, tâm là gốc tọa độ, có bán kính là R_{x+} trong mặt phẳng phức Z , hình 2.2.2.4 cho ta biểu diễn trực quan miền hội tụ của $X_2(Z)$ trong mặt phẳng Z .



Hình 2.2.2.4.

Cuối cùng ta thấy rằng giao của miền hội tụ của $X_1(Z)$ và $X_2(Z)$ sẽ là miền hội tụ của $X(Z)$:

$$RC[X(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)] \quad (2.2.2.5)$$

ở đây :

RC : Miền hội tụ (Region of convergence).

$RC[X(Z)]$: miền hội tụ của $X(Z)$,...

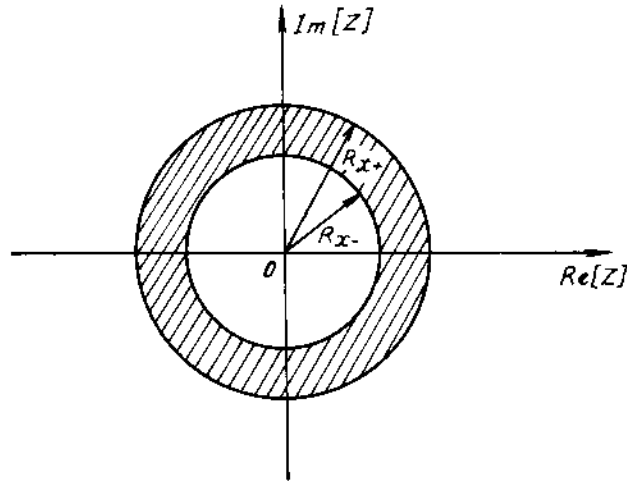
$\cap$: Phép giao trong đại số tập hợp.

Vậy nếu $R_{x-} < R_{x+}$ ta có thể phát biểu:

Miền hội tụ của biến đổi Z hai phía là một hình vành khăn có bán kính trong R_{x-} và bán kính ngoài R_{x+} , tâm là gốc tọa độ, trong mặt phẳng phức Z :

$$R_{x-} < |Z| < R_{x+} \quad (2.2.2.6)$$

Hình 2.2.2.5 minh hoạ miền hội tụ của biến đổi Z hai phía đối với tín hiệu không nhân quả $x(n)$.



Hình 2.2.2.5.

Nhận xét :

- Vì R_{x-} và R_{x+} được xác định từ $x(n)$ vậy hai giới hạn R_{x-} và R_{x+} này đặc trưng cho tín hiệu $x(n)$.
- Đối với tín hiệu nhân quả có chiều dài vô hạn $L[x(n)] = [0, \infty]$, miền hội tụ của biến đổi Z hai phía $X(Z)$ nằm ngoài vòng tròn có bán kính R_{x-} .
- Đối với tín hiệu phản nhân quả có chiều dài vô hạn, $L[x(n)] = [-\infty, 0]$, miền hội tụ của biến đổi Z hai phía $X(Z)$ nằm trong vòng tròn có bán kính R_{x+} .
- Nếu $R_{x-} \geq R_{x+}$ thì:

$$RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)] = \emptyset \quad (2.2.2.7)$$

Ở đây $\emptyset$ là tập hợp rỗng trong đại số tập hợp, tức là không có miền hội tụ chung cho $X_1(Z)$ và $X_2(Z)$ và từ đó $X(Z)$ sẽ không tồn tại.

- Chuỗi
$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

có tên là chuỗi Laurent, nó là một hàm giải tích. Vì vậy trong miền hội tụ $RC[X(Z)]$ biến đổi Z $X(Z)$ và tất cả các đạo hàm của nó là hàm liên tục của Z .

Ví dụ 2.2.2.4 :

Cho
$$x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|} \quad \text{với mọi } n.$$

Hãy tìm biến đổi Z hai phía và miền hội tụ.

Giải:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|} Z^{-n}$$

$$|n| = \begin{cases} = n & \text{nếu } n \geq 0 \\ = -n & \text{nếu } n < 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} Z^{-1}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} Z^{-1}\right]^n$$

Gọi:

$$X_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} Z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4} Z^{-1}} \quad \text{với } \left|\frac{3}{4} Z^{-1}\right| < 1$$

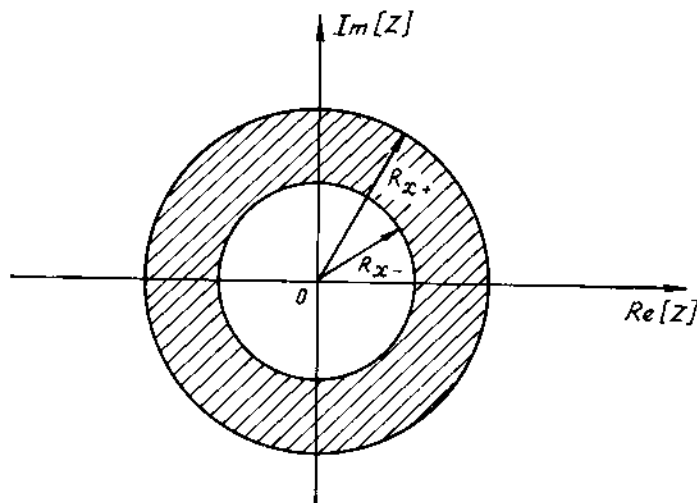
$$= \frac{1}{1 - \frac{3}{4} Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > \frac{3}{4}; \quad R_{x-} = \frac{3}{4}$$

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{3}{4} Z^{-1}\right)^n = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{4} Z^{-1}\right)^{-1}\right]^l = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} Z\right)^l = \frac{\frac{3}{4} Z}{1 - \frac{3}{4} Z} \quad \text{với } \left|\frac{3}{4} Z\right| < 1$$

$$= \frac{\frac{3}{4} Z}{1 - \frac{3}{4} Z} \quad \text{với } |Z| < \frac{4}{3}; \quad R_{x+} = \frac{4}{3}$$

$$X(Z) = X_1(Z) + X_2(Z) = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{\left(1 - \frac{3}{4} Z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4} Z\right)} \quad \frac{3}{4} < |Z| < \frac{4}{3}$$

Miền hội tụ của $X(Z)$ cho trên hình 2.2.2.6 là hình vành khăn với bán kính trong $\frac{3}{4}$ và bán kính ngoài $\frac{4}{3}$ mặt phẳng Z . $R_{x-} = \frac{3}{4}$; $R_{x+} = \frac{4}{3}$



Hình 2.2.2.6.

Ví dụ 2.2.2.5 : Cho hai tín hiệu rời rạc sau đây:

$$x(n) = u(n)$$

$$y(n) = -u(-n - 1)$$

Hãy tìm biến đổi Z hai phía của miền hội tụ.

Giải :

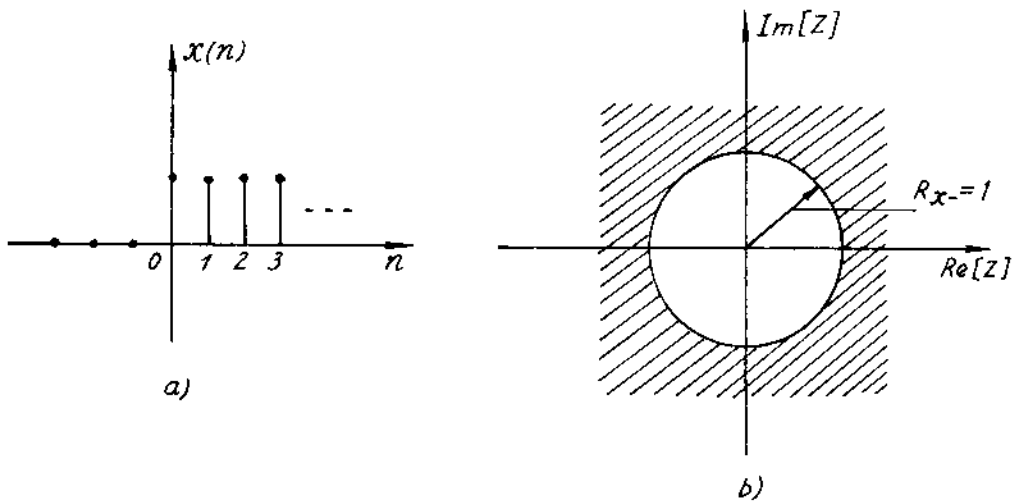
$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n}$$

Ta có:

$$X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1} \quad |Z| > 1$$

Ta thấy rằng $x(n)$ là tín hiệu nhân quả $L[x(n)] = [0, \infty]$, và $X(Z)$ hội tụ với $|Z| > 1$, tức là miền hội tụ $RC[X(Z)]$ của nó nằm ngoài vòng tròn có bán kính là 1, vì vậy bán kính hội tụ sẽ là $R_{x-} = 1$ và $|Z| > R_{x-}$.

Tín hiệu $x(n)$ và miền hội tụ $RC[X(Z)]$ được biểu diễn bên hình 2.2.2.7 (a) và (b) tương ứng.



Hình 2.2.2.7.

Với $y(n)$ ta có:

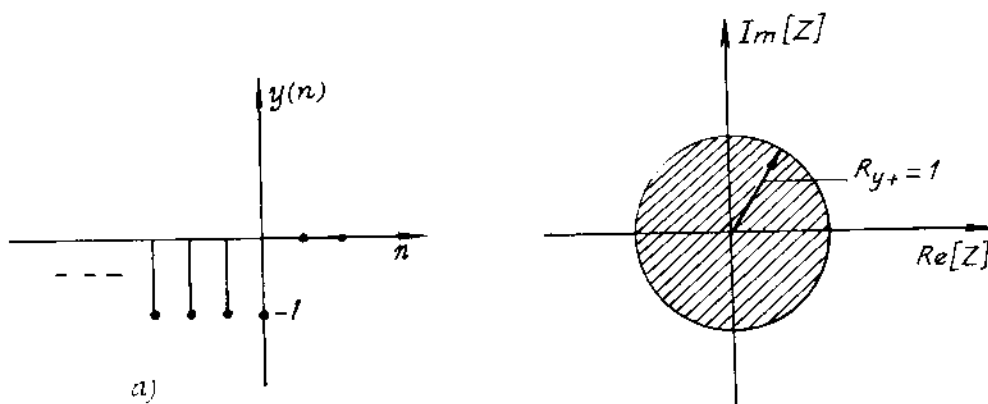
$$ZT[y(n)] = Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)Z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} Z^{-n}$$

Ta có:

$$Y(Z) = - \sum_{l=1}^{\infty} Z^l = \frac{Z}{Z-1} \quad \text{với } |Z| < 1$$

Ta thấy rằng $y(n)$ là tín hiệu phản nhân quả $L[x(n)] = [-\infty, -1]$ và $Y(Z)$ hội tụ với $|Z| < 1$, tức là miền hội tụ $RC[Y(Z)]$ của nó nằm trong vòng tròn có bán kính là 1, như vậy bán kính hội tụ sẽ là $R_{y+} = 1$ và $|Z| < R_{y+}$.

Tín hiệu $y(n)$ và miền hội tụ $RC[Y(Z)]$ được biểu diễn trên hình 2.2.2.8 (a) và (b) tương ứng.



Hình 2.2.2.8.

Nhận xét : về ví dụ 2.2.2.5

$$x(n) \neq y(n)$$

$$X(Z) = Y(Z)$$

$$RC[X(Z)] \neq RC[Y(Z)]$$

- Vậy ta có thể nói rằng một tín hiệu rời rạc $x(n)$ nào đó được xác định duy nhất bởi biến đổi Z $X(Z)$ của nó và miền hội tụ $RC[X(Z)]$ của nó.

- Nói chung $x(n)$ là tín hiệu nhân quả chiều dài vô hạn $L[x(n)] = [n_1, \infty]$, $n_1 \geq 0$, thì $R_{x+} = \infty$ bởi vì Z chỉ có mũ âm và $RC[X(Z)]$: $|Z| > R_{x-}$

- Còn nếu $x(n)$ là tín hiệu phản nhân quả chiều dài vô hạn $L[x(n)] = [-\infty, n_2]$, $n_2 \leq 0$ thì $R_{x-} = 0$ bởi vì Z chỉ chứa mũ dương và $RC[X(Z)]$: $|Z| < R_{x+}$

- Tổng kết về miền hội tụ của biến đổi Z hai phía :

Dựa vào các ví dụ và nhận xét ở trên chúng ta có thể rút ra các kết luận chung sau đây cho trong bảng 2.2.2.1 về miền hội tụ.

Bảng 2.2.2.1

Dãy $x(n)$ với $ x(n) < \infty$	Miền hội tụ $RC[X(Z)]$
Chiều dài hữu hạn $L[x(n)] = [n_1, n_2]$ $X(Z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)Z^{-n} \quad ; \quad n_1 < n_2$	
Nhân quả: $L[x(n)] = [n_1, n_2]$, $n_1 \geq 0$	Toàn bộ mặt phẳng Z trừ $Z = 0$
Phản nhân quả: $L[x(n)] = [n_1, n_2]$, $n_2 \leq 0$	Toàn bộ mặt phẳng Z trừ $Z = \infty$
Không nhân quả: $L[x(n)] = [n_1, n_2]$, $n_1 \leq 0$, $n_2 \geq 0$	Toàn bộ mặt phẳng Z trừ $Z = 0$ và $Z = \infty$
Chiều dài vô hạn:	
Nhân quả: $L[x(n)] = [n_1, \infty]$, $n_1 \geq 0$	Miền ngoài vòng tròn bán kính R_{x-} . $ Z > R_{x-}$

Phản nhân quả $L[x(n)] = [-\infty, n_2], n_2 \leq 0$ Không nhân quả: có 3 loại $L[x(n)] = [-\infty, +\infty]$	Miền trong vòng tròn bán kính $R_{x+}; Z < R_{x+}$ Miền vành khăn bán kính trong R_{x-} , bán kính ngoài $R_{x+}; R_{x-} < Z < R_{x+}$
$L[x(n)] = [n_1, +\infty], n_1 < 0$	Miền ngoài vòng tròn bán kính $R_{x-}; Z > R_{x-}$ và trừ $Z = \infty$
$L[x(n)] = [-\infty, n_2], n_2 > 0$	Miền trong vòng tròn bán kính $R_{x+}; Z < R_{x+}$ và trừ $Z = 0$

d) Miền hội tụ của biến đổi Z một phía

Theo định nghĩa của biến đổi Z một phía

$$ZT^1[x(n)] = X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

Như vậy nếu $x(n)$ là nhân quả thì biến đổi Z một phía và hai phía của nó là như nhau:

$$X^1(Z) = X(Z)$$

Vậy ta có thể nói miền hội tụ của biến đổi Z một phía chính là miền hội tụ của biến đổi Z hai phía nếu $x(n)$ là nhân quả, tức là:

Với tín hiệu có chiều dài hữu hạn thì RC $[X^1(Z)]$ là toàn bộ mặt phẳng Z trừ $Z = 0$.

Với tín hiệu có chiều dài vô hạn thì RC $[X^1(Z)]$ là miền ngoài vòng tròn có bán kính $R_{x-}; |Z| > R_{x-}$

2.2.3. CỰC VÀ KHÔNG (POLES AND ZEROS)

Trong thực tế chúng ta thường gặp các biến đổi Z cho dưới dạng một thương số của hai đa thức của Z (hoặc Z^{-1}) và như vậy $X(Z)$ là hàm hữu tỷ của Z:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2.2.3.1)$$

a) Định nghĩa không

Tại các điểm $Z = Z_{or}$ ta có $X(Z_{or}) = 0$ thì các điểm đó gọi là các không của $X(Z)$.

Vậy nghiệm của tử số $N(Z)$ chính là không của $X(Z)$.

Nếu $N(Z)$ là đa thức của Z bậc M thì $X(Z)$ có M không.

b) Định nghĩa cực

Tại các điểm $Z = Z_{pk}$ ta có $X(Z_{pk}) = \infty$ thì các điểm đó gọi là các cực của $X(Z)$.

Vậy nghiệm của mẫu số $D(Z)$ chính là cực của $X(Z)$.

Nếu $D(Z)$ là đa thức của Z bậc N thì $X(Z)$ có N cực.

c) Biểu diễn $X(Z)$ dưới dạng cực và không

Nếu $N(Z)$ là đa thức của Z bậc M

$$N(Z) = b_0 + b_1Z + \dots + b_MZ^M$$

Thì ta có thể viết:

$$N(Z) = b_M (Z - Z_{01}) (Z - Z_{02}) \dots (Z - Z_{0M}) = b_M \prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})$$

Ở đây Z_{0r} là các nghiệm của $N(Z)$.

Và nếu $D(Z)$ là đa thức của Z bậc N :

$$D(Z) = a_0 + a_1 Z + \dots + a_N Z^N$$

thì ta có thể viết

$$D(Z) = a_N (Z - Z_{p1}) (Z - Z_{p2}) \dots (Z - Z_{pN}) = a_N \prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})$$

ở đây Z_{pk} là các nghiệm của $D(Z)$.

Từ đây ta có:

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \frac{b_M \prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})}{a_N \prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})} = C \frac{\prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})} \quad (2.2.3.2)$$

ở đây $C = \frac{b_M}{a_N}$.

Ta có thể biểu diễn $X(Z)$ theo đa thức của Z^{-1}

$$X(Z) = C \frac{Z^M \prod_{r=1}^M (1 - Z_{0r} Z^{-1})}{Z^N \prod_{k=1}^N (1 - Z_{pk} Z^{-1})} = C Z^{M-N} \frac{\prod_{r=1}^M (1 - Z_{0r} Z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - Z_{pk} Z^{-1})} \quad (2.2.3.3)$$

Ở dạng cuối cùng này vì có Z^{M-N} vậy nếu $M > N$ thì ta có $(M-N)$ không ở $Z = 0$, còn nếu $M < N$ thì ta có $(N-M)$ cực ở $Z = 0$.

Nếu $X(\infty) = 0$ thì ta có không tại $Z = \infty$, nếu $X(\infty) = \infty$ thì ta có cực tại $Z = \infty$.

Chú ý :

- Từ biểu thức (2.2.3.2) và (2.2.3.3) ta thấy rằng $X(Z)$ có thể được biểu diễn chính xác bởi các cực và không.
- Trong mặt phẳng phức Z các cực sẽ được ký hiệu bằng dấu gạch chéo (x), còn các không được ký hiệu bằng dấu khuyên nhỏ (o).

Ví dụ 2.2.3.1 :

Cho $x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ và các cực, các không của $X(Z)$.

Giải :

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = 1 + 3Z^{-1} + 2Z^{-2}$$

Miền hội tụ : toàn bộ mặt phẳng Z , trừ $Z = 0$.

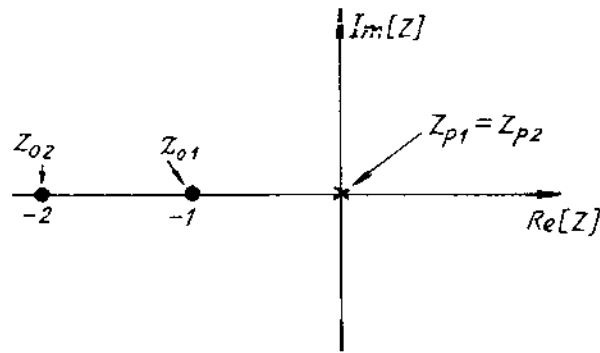
Tìm cực và không:

$$X(Z) = Z^{-2} (Z^2 + 3Z + 2) = Z^{-2} (Z + 1) (Z + 2)$$

$$X(Z) = \frac{(Z + 1)(Z + 2)}{Z^2}$$

$X(Z)$ có hai không tại $Z_{01} = -1$ và $Z_{02} = -2$, và có một cực kép tại $Z = 0$; $Z_{p1} = Z_{p2} = 0$.

Vị trí của các cực và không cho trên hình 2.2.3.1.



Hình 2.2.3.1.

Chú ý : Theo định nghĩa của miền hội tụ thì miền hội tụ của $X(Z)$ không chứa các cực của $X(Z)$ vì tại các cực $X(Z)$ không xác định. Vậy trong trường hợp này $x(n)$ là dãy nhân quả có chiều dài hữu hạn nên $X(Z)$ hội tụ trên toàn mặt phẳng Z trừ gốc tọa độ, đó chính là vị trí của các cực Z_{p1} và Z_{p2} .

Ví dụ 2.2.3.2 :

Cho $x(n) = a^n u(n)$ $a > 0$

Hãy tìm $ZT[x(n)]$, $RC[X(Z)]$, các cực và vẽ chúng trên mặt phẳng Z .

Giải : Từ định nghĩa biến đổi Z ta có:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) Z^{-n}$$

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (aZ^{-1})^n = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} \quad \text{với } |Z| > a$$

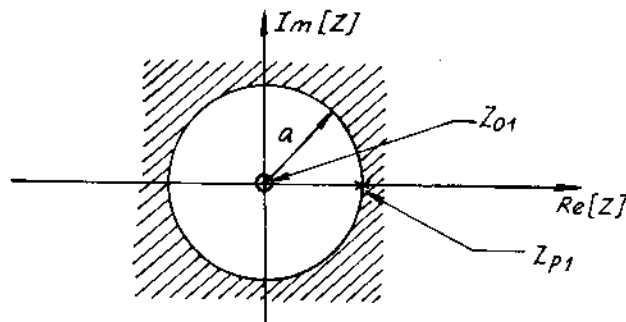
Vậy $RC[X(Z)] : |Z| > a, R_{\infty} = a$.

Biểu diễn $X(Z)$ là hàm của Z

$$X(Z) = \frac{Z}{Z - a}$$

Vậy $X(Z)$ có một không $Z_{01} = 0$ và một cực $Z_{p1} = a$.

Hình 2.2.3.2 sẽ biểu diễn $RC[X(Z)]$ và vị trí của Z_{01} và Z_{p1} với giá trị $a > 0$.



Hình 2.2.3.2.

Chú ý : $RC[X(Z)] : |Z| > a$ là miền nằm ngoài vòng tròn có bán kính a , không kể chu vi của vòng tròn. $RC[X(Z)]$ không chứa cực Z_{p1} , $Z_{p1} = a$ nằm trên chu vi của vòng tròn bán kính a .

2.3. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC (THE INVERSE Z - TRANSFORM).

Thông thường khi chúng ta có biến đổi $Z \rightarrow X(Z)$ của một dãy nào đó, tức là chúng ta có biểu diễn của dãy $x(n)$ trong miền Z , sau khi khảo sát gián tiếp dãy trong miền Z thì chúng ta cần phải đưa nó trở về miền biến số độc lập tự nhiên, tức là chúng ta phải tìm $x(n)$ từ biến đổi $Z \rightarrow X(Z)$ của nó. Biến đổi Z ngược sẽ giúp chúng ta thực hiện công việc này.

Định lý Cauchy, một định lý quan trọng trong lý thuyết biến số phức, sẽ cho ta cơ sở để xây dựng công thức của biến đổi Z ngược.

2.3.1. ĐỊNH LÝ CAUCHY

Định lý Cauchy được phát biểu như sau:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c Z^{n-1} dZ = \begin{cases} 1 & \text{với } n = 0 \\ 0 & \text{với } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.3.1.1)$$

Ở đây c là đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ của mặt phẳng phức Z theo chiều dương (tức là ngược chiều kim đồng hồ).

2.3.2. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

Theo định nghĩa của biến đổi Z ta có:

$$X(Z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)Z^{-l}$$

Nhân hai vế của quan hệ này với $\frac{Z^{n-1}}{2\pi j}$ và lấy tích phân theo chiều dài của một đường cong bao quanh gốc tọa độ và nằm trong miền hội tụ của $X(Z)$, ta có:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z)Z^{n-1} dZ = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)Z^{-l+n-1} dZ$$

Ở đây tích phân lấy trong miền hội tụ của $X(Z)$ tức là $X(Z)$ hội tụ khi lấy tích phân. Chúng ta có thể thay đổi thứ tự của tổng và tích phân ở vế phải của quan hệ trên:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z)Z^{n-1} dZ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \frac{1}{2\pi j} \oint_c Z^{-l+n-1} dZ$$

Theo định lý Cauchy ta có:

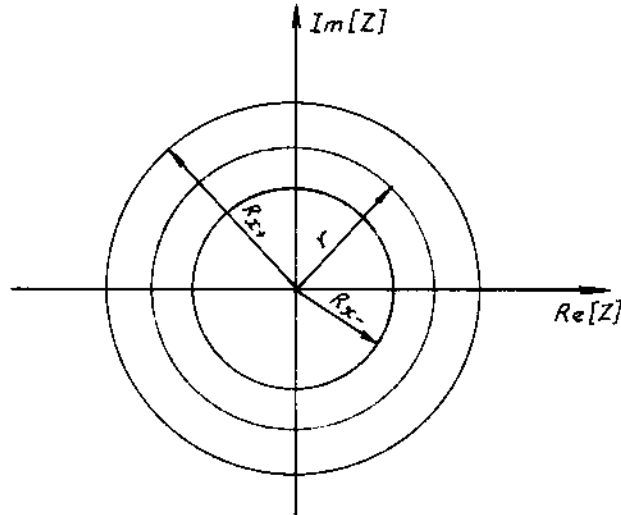
$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c Z^{-l+n-1} dZ = \begin{cases} 1 & \text{với } -l+n=0 & \text{hay } l=n \\ 0 & \text{với } -l+n \neq 0 & \text{hay } l \neq n \end{cases}$$

Vậy với $l=n$ ta có:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ \quad (2.3.2.1)$$

Đây là biểu thức của biến đổi Z ngược.

Đường cong c phải là đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ của mặt phẳng phức Z theo chiều dương và phải nằm trong miền hội tụ của $X(Z)$. Đường cong c này được minh họa trên hình 2.3.2.1, trên hình này ta chọn đường cong c là đường tròn bán kính r : $R_{x-} < r < R_{x+}$.



Hình 2.3.2.1.

Theo quan điểm toán tử, chúng ta sẽ dùng ký hiệu toán tử IZT để chỉ toán tử biến đổi Z ngược.

$$IZT[X(Z)] = x(n)$$

Vậy cuối cùng ta có cặp biến đổi Z như sau:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n}$$

$$IZT[X(Z)] = x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ$$

Trong thực tế chúng ta có ba phương pháp để tính biến đổi Z ngược như sau:

- Tính trực tiếp tích phân dùng lý thuyết thặng dư gọi là phương pháp thặng dư.
- Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa theo Z hoặc Z^{-1} .
- Phương pháp khai triển thành tổng các phân thức tối giản.

2.3.3. PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

Theo lý thuyết thặng dư của hàm biến số phức thì tích phân vòng trong biểu thức biến đổi Z ngược có thể được đánh giá bằng tổng các thặng dư như sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ = \sum_k \text{Res} \left[X(Z) Z^{n-1} \Big|_{Z=Z_{pk}} \right] \quad (2.3.3.1)$$

Ở đây: Z_{pk} là các cực của $X(Z) Z^{n-1}$ nằm trong đường cong khép kín c .

$\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1} \mid Z = Z_{pk}\right]$ đọc là thặng dư của $X(Z)Z^{n-1}$ tại cực $Z = Z_{pk}$. $X(Z)Z^{n-1}$ có bao nhiêu cực (đơn hoặc bội) thì phải tính đủ bấy nhiêu thặng dư, sau đó lấy tổng của tất cả các thặng dư này ta sẽ có $x(n)$.

Nói chung, nếu $X(Z)Z^{n-1}$ là một hàm hữu tỷ của Z thì ta có thể viết:

$$X(Z)Z^{n-1} = \frac{\psi(Z)}{(Z - Z_{pk})^{s_k}} \quad (2.3.3.2)$$

Ở đây Z_{pk} là một cực bội bậc s_k của $X(Z)Z^{n-1}$

Chú ý: Trong trường hợp này $\Psi(Z)$ không có cực tại $Z = Z_{pk}$ và ta có thể viết:

$$\Psi(Z) = X(Z)Z^{n-1} (Z - Z_{pk})^{s_k} \quad (2.3.3.3)$$

Từ đây ta có công thức tính $\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1} \mid Z = Z_{pk}\right]$ như sau:

$$\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1} \mid Z = Z_{pk}\right] = \frac{1}{(s_k - 1)!} \frac{d^{s_k-1} \psi(Z)}{dZ^{s_k-1}} \Big|_{Z = Z_{pk}} \quad (2.3.3.4)$$

Nếu Z_{pk} là cực đơn, tức là $s_k = 1$, thì biểu thức này có dạng đặc biệt như sau:

$$\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1} \mid Z = Z_{pk}\right] = \frac{1}{0!} \frac{d^0 \psi(Z)}{dZ^0} \Big|_{Z = Z_{pk}} = \psi(Z) \Big|_{Z = Z_{pk}} = \psi(Z_{pk}) \quad (2.2.3.5)$$

Sau khi tính tất cả các thặng dư của hàm $X(Z)Z^{n-1}$ ở tất cả các cực ở trong đường cong khép kín c và cộng chúng lại ta thu được $x(n)$.

Ví dụ 2.3.3.1:

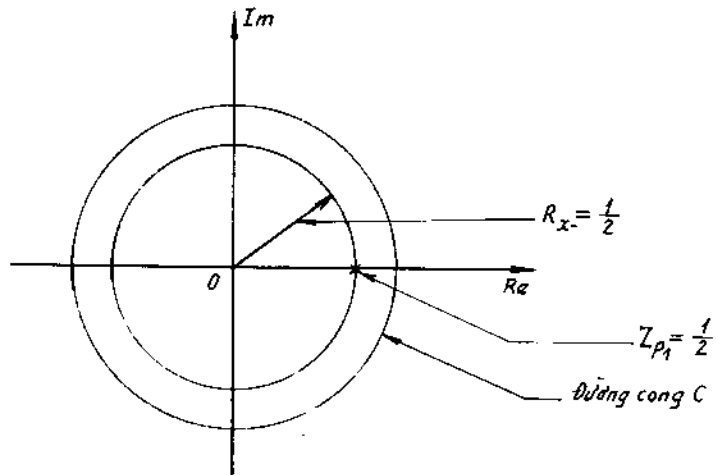
Cho
$$X(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}}; \quad RC[X(Z)] : |Z| > \frac{1}{2}$$

Hãy tìm biến đổi Z ngược.

Giải: Theo biểu thức của biến đổi Z ngược ta có:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z)Z^{n-1} dZ = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{Z^n}{Z - \frac{1}{2}} dZ$$

Ở đây để đơn giản ta có thể chọn đường cong c theo hình 2.3.3.1, nó là đường tròn bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}$.



Hình 2.3.3.1.

Ta có:

$$X(Z)Z^{n-1} = \frac{Z^n}{Z - \frac{1}{2}}$$

Từ đây với $n \geq 0$ ta có:

$$Z_{p1} = \frac{1}{2} ; s_1 = 1 : \text{một cực đơn}$$

$$\Psi(Z) = Z^n$$

Như vậy đường cong c bao quanh chỉ một cực $Z_{p1} = \frac{1}{2}$ và ta thu được ngay kết quả

$$\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1} \mid Z = 1/2\right] = \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

Vậy
$$x(n) = \psi\left(Z_{p1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Với $n < 0$:

Ta đặt $n = -m$ ta có:

$$x(-m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{Z^m(Z - \frac{1}{2})} dZ ; \quad m > 0$$

Ở đây ta có một cực đơn tại $Z_{p1} = \frac{1}{2}$ và một cực bội bậc m tại $Z_{p2} = 0$.

Ta tiến hành tính thặng dư của $X(Z)Z^{m-1}$:

$$X(Z)Z^{m-1} = \frac{1}{Z^m\left(Z - \frac{1}{2}\right)}$$

Tại cực đơn $Z_{p1} = \frac{1}{2}$ và $s_1 = 1$

$$\psi(Z) = \frac{1}{Z^m} = Z^{-m}$$

$$\text{Res}\left[X(Z)Z^{m-1} \mid Z = 1/2\right] = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} = 2^m$$

Tại cực bội bậc m $Z_{p2} = 0$ và $s_2 = m$:

$$\psi(Z) = \frac{1}{\left(Z - \frac{1}{2}\right)} = \left(Z - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\text{Res}\left[X(Z)Z^{m-1} \mid Z = 0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}\psi(Z)}{dZ^{m-1}} \Big|_{Z=0} = \frac{1}{(m-1)!} \left[-\frac{(m-1)!}{(1/2)^m} \right] = -2^m$$

Kết quả với $n < 0$ ta có:

$$x(-m) = \text{Res}\left[X(Z)Z^{m-1} \mid Z = \frac{1}{2}\right] + \text{Res}\left[X(Z)Z^{m-1} \mid Z = 0\right] = 2^m - 2^m = 0$$

Đổi biến $-m = n = 0$ ta có :

$$x(n) = 0 \quad \text{với} \quad n < 0$$

Kết quả cuối cùng

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{với } n \geq 0 \\ 0 & \text{với } n < 0 \end{cases}$$

2.3.4. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI LUYỆN THỪA

Ta biết rằng trong miền hội tụ của $X(Z)$ thì $X(Z)$ là một hàm giải tích của Z , như vậy ta có thể khai triển $X(Z)$ thành chuỗi lũy thừa có dạng :

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n Z^{-n} \quad (2.3.4.1)$$

mà theo định nghĩa của biến đổi Z ta có:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n}$$

Cả hai chuỗi này đều hội tụ trong miền hội tụ của $X(Z)$. Vậy đồng nhất các hệ số của hai chuỗi này ta có:

$$x(n) = \alpha_n \quad (2.3.4.2)$$

tức là các hệ số của Z^{-n} chính là các giá trị của $x(n)$

Ví dụ 2.3.4.1 :

Cho
$$X(Z) = \frac{Z}{Z+2}$$

Hãy tìm $x(n)$ với các miền hội tụ của $X(Z)$:

a) $RC[X(Z)] : |Z| > 2$

b) $RC[X(Z)] : |Z| < 2$

Giải :

a) $RC[X(Z)] : |Z| > 2$: miền ngoài vòng tròn bán kính 2.

Vậy $x(n)$ sẽ là dãy nhân quả

$$X(Z) = \frac{Z}{Z+2} = \frac{1}{1+2Z^{-1}}$$

Ta tiến hành chia tử số của $X(Z)$ cho mẫu số của nó thì ta sẽ có chuỗi lũy thừa theo Z^{-1} :

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1+2Z^{-1} \overline{) \phantom{1+2Z^{-1}}} \\ \underline{-2Z^{-1}} \phantom{+4Z^{-2}} \\ -2Z^{-1} - 4Z^{-2} \phantom{+8Z^{-3}} \\ \underline{+4Z^{-2}} \phantom{+8Z^{-3}} \\ +4Z^{-2} + 8Z^{-3} \phantom{+16Z^{-4}} \\ \underline{-8Z^{-3}} \phantom{+16Z^{-4}} \\ -8Z^{-3} - 16Z^{-4} \phantom{+32Z^{-5}} \\ \underline{+16Z^{-4}} \phantom{+32Z^{-5}} \\ \phantom{-8Z^{-3} - 16Z^{-4} + 16Z^{-4}} 16Z^{-4} \phantom{+32Z^{-5}} \\ \phantom{-8Z^{-3} - 16Z^{-4} + 16Z^{-4}} \dots \end{array}$$

Vậy tổng quát ta có :

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n Z^{-n} \quad \text{với } |Z| > 2$$

Ta thu được dãy $x(n)$ như sau :

$$x(n) = (-2)^n u(n)$$

b) $RC[X(Z)] : |Z| < 2$: miền ngoài vòng tròn bán kính 2. Vậy $x(n)$ sẽ là dãy phản nhân quả:

$$X(Z) = \frac{1}{1+2Z^{-1}} = \frac{1}{2Z^{-1}+1}$$

Ta tiến hành chia tử số của $X(Z)$ cho mẫu số của nó để nhận được chuỗi lũy thừa theo Z :

$$\begin{array}{r} 1 \qquad \qquad \qquad \overline{) 2Z^{-1} + 1} \\ 1 + \frac{1}{2}Z \\ \hline -\frac{1}{2}Z \\ -\frac{1}{2}Z - \frac{1}{4}Z^2 \\ \hline \frac{1}{4}Z^2 \\ \frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{8}Z^3 \\ \hline -\frac{1}{8}Z^3 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Vậy tổng quát ta có:

$$X(Z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m Z^m \quad \text{với } \left|-\frac{1}{2}Z\right| < 1 \quad \text{hay } |Z| < 2$$

để có dạng của biến đổi Z với lũy thừa của Z^{-1} , ta đổi biến số $m = -n$ ta có:

$$X(Z) = -\sum_{n=-1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} Z^{-n}$$

Ta thu được dãy $x(n)$ như sau:

$$x(n) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

Từ ví dụ này ta có thể suy ra công thức tính biến đổi Z ngược cho trường hợp $X(Z)$ có dạng:

$$X(Z) = \frac{Z}{Z - Z_{pk}} = \frac{1}{1 - Z_{pk}Z^{-1}}$$

Vậy theo ví dụ trên ($Z_{pk} = -2$) ta có:

$$IZT \left[\frac{1}{1 - Z_{pk} Z^{-1}} \right] = x(n) = \begin{cases} (Z_{pk})^n u(n) & \text{nếu } RC[X(Z)] : |Z| > |Z_{pk}| \text{ (dãy nhân quả)} \\ -\left(\frac{1}{Z_{pk}}\right)^{-n} u(-n-1) & \text{nếu } RC[X(n)] : |Z| < |Z_{pk}| \\ & \text{(dãy phản nhân quả)} \end{cases}$$

2.3.5. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN THÀNH PHẦN THỨC TỐI GIẢN

Trong thực tế chúng ta thường sử dụng các biến đổi Z hữu tỷ và ta có thể viết biến đổi Z dưới dạng sau đây:

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} \quad (2.3.5.1)$$

Phương pháp này chính là việc tiến hành khai triển biến đổi Z này thành các phân thức tối giản sau đó tìm biến đổi Z ngược của các phân thức này, kết quả cuối cùng là tổng các biến đổi Z ngược của các phân thức tối giản này.

Bây giờ ta tiến hành nghiên cứu phương pháp này.

Giả sử:

$N(Z)$ là đa thức bậc M .

$D(Z)$ là đa thức bậc N .

Nếu $M \geq N$, ta tiến hành chia đa thức $N(Z)$ cho $D(Z)$ kết quả thu được dưới dạng tổng quát sau đây:

$$X(Z) = S(Z) + \frac{P(Z)}{Q(Z)} \quad (2.3.5.2)$$

Ở đây $S(Z)$ là đa thức bậc $M - N$ có dạng sau đây:

$$S(Z) = B_{M-N} Z^{M-N} + B_{M-N-1} Z^{M-N-1} + \dots + B_1 Z + B_0 \quad (2.3.5.3)$$

Bậc của $P(Z)$ bé hơn bậc của $Q(Z)$ và $Q(Z) = D(Z)$ Vậy $Q(Z)$ là đa thức bậc N .

Nếu $M < N$ thì $S(Z) = 0$ và

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} \quad (2.3.5.4)$$

Bây giờ chúng ta tiến hành khai triển thương số $P(Z)/Q(Z)$ thành các phân thức tối giản, chúng ta xét các trường hợp:

- Trường hợp $X(Z)$ chỉ có các cực đơn

Trong trường hợp này ta viết $X(Z)$ dưới dạng sau:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} \quad (2.3.5.5)$$

Ở đây Z_{pk} là cực đơn của $X(Z)$, tức là các Z_{pk} là các nghiệm đơn của $X(Z)$.

A_k được tính theo biểu thức sau:

$$A_k = (Z - Z_{pk}) \left. \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right|_{Z=Z_{pk}} \quad (2.3.5.6)$$

- Trường hợp $X(Z)$ có một cực bội

Giả sử $X(Z)$ có một cực bội bậc s là Z_{pl} , các cực còn lại là cực đơn thì ta sẽ khai triển $X(Z)$ dưới dạng sau:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N-s} \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} + \sum_{j=1}^s \frac{c_j}{(Z - Z_{pl})^j} \quad (2.3.5.7)$$

ở đây Z_{pl} là cực bội bậc s , Z_{pk} là các cực đơn.

A_k và c_j được tính như sau :

$$A_k = \left(Z - Z_{pk} \right) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \Big|_{Z = Z_{pk}}$$

$$c_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dZ^{s-j}} \left[\left(Z - Z_{pl} \right)^s \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right] \Big|_{Z = Z_{pl}} \quad (2.3.5.8)$$

- Trường hợp $X(Z)$ có L cực bội.

Giả sử $X(Z)$ có L cực bội bậc $s_1, s_2, \dots, s_L$, các cực còn lại là cực đơn thì ta khai triển $X(Z)$ dưới dạng sau:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{k=1}^{\textcircled{N}} \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{s_i} \frac{c_j s_i}{(Z - Z_{pli})^j} \quad (2.3.5.9)$$

Ở đây :

$$\textcircled{N} = N - \sum_{i=1}^L s_i$$

Z_{pk} là các cực đơn.

Z_{pli} là các cực bội bậc s_i .

A_k và c_{jsi} được tính như sau:

$$A_k = \left(Z - Z_{pk} \right) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \Big|_{Z = Z_{pk}}$$

$$c_{jsi} = \frac{1}{(s_i - j)!} \frac{d^{s_i - j}}{dZ^{s_i - j}} \left[\left(Z - Z_{pli} \right)^{s_i} \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right] \Big|_{Z = Z_{pli}} \quad (2.3.5.10)$$

Sau khi khai triển $X(Z)$ xong ta sẽ tìm IZT của từng phân thức một rồi tổng hợp kết quả ta sẽ có $x(n)$.

IZT của các phân thức sẽ được tìm bởi các công thức sau:

$$IZT \left[\frac{Z}{Z - Z_{pk}} \right] = (Z_{pk})^n u(n)$$

$$IZT \left[\frac{1}{Z - Z_{pk}} \right] = (Z_{pk})^{n-1} u(n-1) \quad (2.3.5.11)$$

Trường hợp tổng quát ta có:

$$IZT \left[\frac{Z}{(Z - Z_{pk})^{m+1}} \right] = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} Z_{pk}^{n-m} u(n) \quad (2.3.5.12)$$

với $|Z| > |Z_{pk}|$

$$IZT \left[\frac{Z}{(Z - Z_{pk})^{m+1}} \right] = -\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} Z_{pk}^{n-m} u(-n-1) \quad (2.3.5.13)$$

với $|Z| < |Z_{pk}|$

Ví dụ 2.3.5.1 :

Cho
$$X(Z) = \frac{Z+2}{2Z^2 - 7Z + 3}$$

Hãy tìm $x(n)$ bằng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Giải:

Trước hết ta phải tìm tất cả các điểm cực của $X(Z)$.

Ta thấy rằng:

$$P(Z) = Z + 2$$

$$Q(Z) = 2Z^2 - 7Z + 3$$

và
$$X(Z) = \frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)}$$

Vậy $X(Z)$ có hai điểm cực đơn là:

$$Z_{p1} = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad Z_{p2} = 3$$

Theo biểu thức (2.3.5.5) ta có

$$X(Z) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})}$$

A_1 và A_2 được tính theo biểu thức (2.3.5.6)

$$A_1 = \left((Z - Z_{p1}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right) \Big|_{Z=Z_{p1}} = \left(Z - \frac{1}{2} \right) \frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)} \Big|_{Z=1/2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left((Z - Z_{p2}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right) \Big|_{Z=Z_{p2}} = (Z-3) \frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)} \Big|_{Z=3} = 1$$

Vậy :

$$X(Z) = \frac{-\frac{1}{2}}{Z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{Z-3}$$

Áp dụng biểu thức (2.3.5.1) ta có ngay kết quả của $x(n)$:

$$x(n) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1) + 3^{n-1} u(n-1) = 3^{n-1} u(n-1) - \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n-1)$$

Ví dụ 2.3.5.2 :

Cho :
$$X(Z) = \frac{Z}{\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-1)^2}$$

Hãy tìm $x(n)$ bằng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Giải: $X(Z)$ có một điểm cực đơn $Z_{p1} = \frac{1}{2}$ và một điểm cực bội bậc hai $Z_{p2} = 1$ và đây là trường hợp $M < N$ vậy ta có:

$$X(Z) = \sum_{k=1}^1 \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} + \sum_{j=1}^2 \frac{c_j}{(Z - Z_{pj})^j} = \frac{A_1}{Z - \frac{1}{2}} + \frac{c_1}{Z - 1} + \frac{c_2}{(Z - 1)^2}$$

Bây giờ ta tìm A_1 , c_1 và c_2

$$A_1 = \left(Z - \frac{1}{2} \right) \frac{Z}{\left(Z - \frac{1}{2} \right) (Z-1)^2} \bigg|_{Z = 1/2} = 2$$

$$c_1 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dZ^{2-1}} \left[(Z-1)^2 \frac{Z}{\left(Z - \frac{1}{2} \right) (Z-1)^2} \right] \bigg|_{Z=1} = \frac{1}{1!} \left[-\frac{\frac{1}{2}}{\left(Z - \frac{1}{2} \right)^2} \right] \bigg|_{Z=1} = -2$$

$$c_2 = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{2-2}}{dZ^{2-2}} \left[(Z-1)^2 \frac{Z}{\left(Z - \frac{1}{2} \right) (Z-1)^2} \right] \bigg|_{Z=1} = \frac{1}{0!} \frac{Z}{\left(Z - \frac{1}{2} \right)} \bigg|_{Z=1} = 2$$

Vậy :

$$X(Z) = \frac{2}{\left(Z - \frac{1}{2} \right)} - \frac{2}{(Z-1)} + \frac{2}{(Z-1)^2} = X_1(Z) + X_2(Z) + X_3(Z)$$

$$IZT[X_1(Z)] = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1)$$

$$IZT[X_2(Z)] = -2 u(n-1)$$

Bây giờ ta tìm $IZT[X_3(Z)]$

Ta biết rằng:

$$\frac{d}{dZ} \left[\frac{1}{Z-1} \right] = -\frac{1}{(Z-1)^2}$$

mà
$$IZT \left[\frac{1}{(Z-1)} \right] = u(n-1)$$

Vậy:

$$IZT[u(n-1)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n-1) Z^{-n} = \frac{1}{Z-1}$$

$$-\frac{d}{dZ} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n-1) Z^{-n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n-1)(-n) Z^{-n-1} = \frac{d}{dZ} \left[\frac{1}{Z-1} \right] = -\frac{1}{(Z-1)^2}$$

đổi biến số: $-n-1 = -m \Rightarrow n = m-1$

vậy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(Z-1)^2} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m-1)u(m-2)Z^{-m} \\ \Rightarrow ZT[(n-1)u(n-2)] &= \frac{1}{(Z-1)^2} \\ \Rightarrow IZT[X_3(Z)] &= 2(n-1)u(n-2) \end{aligned}$$

Cuối cùng:

$$x(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - 2u(n-1) + 2(n-1)u(n-2)$$

Một giải pháp khác để tránh dùng dãy trễ và để dùng được biểu thức (2.3.5.12) chúng ta sẽ thêm cho $X(Z)$ một điểm cực đơn $Z_p = 0$. Tức là sẽ khai triển $X(Z)/Z$ thành tổng các phân thức tối giản chứ không phải $X(Z)$, rồi sau đó chuyển Z sang về phải để thu được $X(Z)$.

Ví dụ 2.3.5.3 :

Cho:
$$X(Z) = \frac{Z+2}{2Z^2 - 7Z + 3}$$

Hãy tìm $x(n)$

Giải :

Chúng ta giải bằng phương pháp khai triển $X(Z)/Z$ thành các phân thức tối giản.

$$\frac{X(Z)}{Z} = \frac{Z+2}{Z(2Z^2 - 7Z + 3)} = X'(Z)$$

$X'(Z)$ có 3 điểm cực đơn $Z_{p1} = \frac{1}{2}$, $Z_{p2} = 3$ và $Z_{p3} = 0$.

Vậy ta có:

$$X'(Z) = \frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)Z}$$

Bây giờ ta tìm các hệ số A_k

$$\begin{aligned} A_k &= \left. (Z - Z_{pk}) X'(Z) \right|_{Z = Z_{pk}} \\ A_1 &= \left. \left(Z - \frac{1}{2} \right) \frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2} \right)(Z-3)Z} \right|_{Z = 1/2} = -1 \\ A_2 &= \left. (Z-3) \frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2} \right)(Z-3)Z} \right|_{Z = 3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$A_3 = Z \frac{Z+2}{2\left(Z-\frac{1}{2}\right)(Z-3)Z} \bigg|_{Z=0} = \frac{2}{3}$$

Vậy ta có:

$$X'(Z) = \frac{X(Z)}{Z} = -\frac{1}{Z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{Z-3} + \frac{\frac{2}{3}}{Z}$$

$$X(Z) = -\frac{Z}{Z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}Z}{Z-3} + \frac{2}{3}$$

Từ đây ta có $x(n)$ như sau:

$$x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{3} 3^n u(n) + \frac{2}{3} \delta(n)$$

Trong trường hợp $RC [X(Z)] : |Z| > 3$

$$x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{3} 3^n u(-n-1) + \frac{2}{3} \delta(n)$$

Trong trường hợp $RC [X(Z)] : \frac{1}{2} < |Z| < 3$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - \frac{1}{3} 3^n u(-n-1) + \frac{2}{3} \delta(n)$$

Trong trường hợp $RC [X(Z)] : |Z| < \frac{1}{2}$

Chú ý rằng chúng ta cũng có thể coi $X(Z)$ như phân thức của biến Z^{-1} , và chúng ta coi Z^{-1} là biến Z' mới và tìm các điểm cực theo Z' mới này.

Ví dụ 2.3.5.4 :

Cho
$$X(Z) = \frac{1}{1-3Z^{-1}+2Z^{-2}} \quad |Z| > 2$$

Hãy tìm $x(n)$

Giải:

Coi $Z^{-1} \equiv Z'$ ta có các điểm cực là $Z'_{p1} = 1$ và $Z'_{p2} = \frac{1}{2}$.

Vậy ta có:

$$X(Z) = \frac{1}{2(Z'-Z'_{p1})(Z'-Z'_{p2})} = \frac{1}{2(Z^{-1}-1)\left(Z^{-1}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$A_1 = \left(Z^{-1}-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\left(Z^{-1}-1\right)\left(Z^{-1}-\frac{1}{2}\right)} \bigg|_{Z^{-1}=1} = 1$$

$$A_2 = \left(Z^{-1} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2 \left(Z^{-1} - 1 \right) \left(Z^{-1} - \frac{1}{2} \right)} \bigg|_{Z^{-1} = 1/2} = 1$$

Vậy:

$$X(Z) = \frac{1}{\left(Z^{-1} - 1 \right)} - \frac{1}{\left(Z^{-1} - \frac{1}{2} \right)} = -\frac{1}{\left(1 - Z^{-1} \right)} + \frac{2}{\left(1 - 2Z^{-1} \right)} = -\frac{Z}{\left(Z - 1 \right)} + \frac{2Z}{\left(Z - 2 \right)}$$

$$|Z| > 2$$

Từ đây ta có $x(n)$ như sau:

$$x(n) = -u(n) + 2.2^n u(n) = (2^{n+1} - 1) u(n)$$

2.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

2.4.1. TÍNH TUYẾN TÍNH

Nếu chúng ta có hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ và các biến đổi Z của nó như sau:

$$ZT[x_1(n)] = X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) Z^{-n}$$

$$RC[X_1(Z)] : R_{x1-} < |Z| < R_{x1+}$$

$$ZT[x_2(n)] = X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) Z^{-n}$$

$$RC[X_2(Z)] : R_{x2-} < |Z| < R_{x2+}$$

Giả sử ta có dãy $x(n)$ là tổ hợp tuyến tính của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \quad a, b \text{ là các hằng số}$$

Biến đổi Z của $x(n)$ sẽ là:

$$\begin{aligned} ZT[x(n)] = X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)] Z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) Z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) Z^{-n} = aX_1(Z) + bX_2(Z) \\ RC[X(Z)] : R_{x-} &< |Z| < R_{x+} \end{aligned}$$

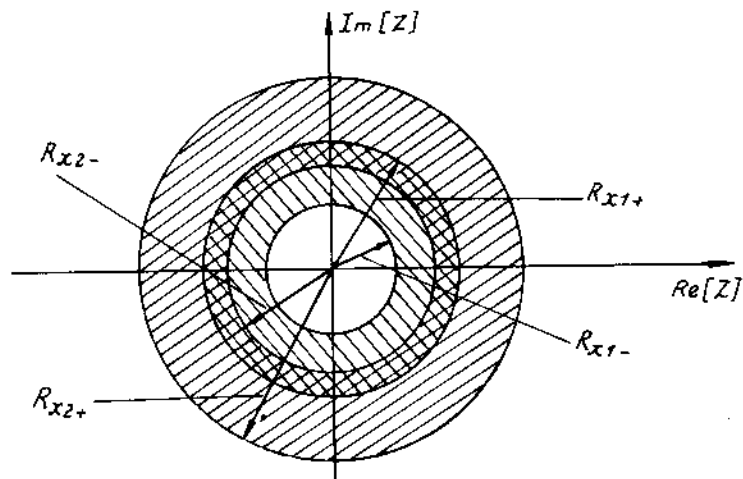
$$\text{Vậy: } RC[X(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$$

và ta cũng có:

$$R_{x-} = \max [R_{x1-}, R_{x2-}]$$

$$R_{x+} = \min [R_{x1+}, R_{x2+}]$$

Miền hội tụ của $X(Z)$ được minh họa trên hình 2.4.1.1.



Hình 2.4.1.1.

Chú ý rằng nếu có các điểm không xuất hiện trong quá trình tổ hợp tuyến tính, mà các điểm không này lại bù vào một số điểm cực của $X_1(Z)$ hoặc $X_2(Z)$, lúc đó miền hội tụ của $X(Z)$ có thể sẽ lớn hơn.

Ví dụ 2.4.1.1 :

Chúng ta có:

$$x_1(n) = a^n u(n) ; \quad a > 0$$

$$x_2(n) = a^n u(n-1) ; \quad a > 0$$

$$x(n) = a^n u(n) - a^n u(n-1)$$

Hãy xác định miền hội tụ của $X_1(Z)$, $X_2(Z)$ và $X(Z)$.

Giải :

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) Z^{-n} = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} ; \quad |Z| > a$$

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n-1) Z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} - 1 = \frac{aZ^{-1}}{1 - aZ^{-1}} ; \quad |Z| > a$$

Áp dụng tính tuyến tính ta có:

$$X(Z) = X_1(Z) - X_2(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} - \frac{aZ^{-1}}{1 - aZ^{-1}} = \frac{1 - aZ^{-1}}{1 - aZ^{-1}} = 1$$

Vậy : $RC[X(Z)]$: toàn bộ mặt phẳng Z .

2.4.2. TRỄ

Giả sử có một dãy $x(n)$ và $ZT[x(n)] = X(Z)$,

$$RC[X(Z)] : R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

Nếu ta có dãy $y(n)$ là phiên bản trễ của $x(n)$ như sau :

$$y(n) = x(n - n_0)$$

$$\text{và} \quad ZT[y(n)] = Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)Z^{-n}$$

$$\text{Đổi biến số:} \quad l = n - n_0 \Rightarrow n = l + n_0$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có:} \quad Y(Z) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)Z^{-(l+n_0)} = Z^{-n_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)Z^{-l} \\ &= Z^{n_0} X(Z) \quad \text{với} \quad RC[Y(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+} \end{aligned}$$

Vậy cuối cùng ta có thể viết:

$$ZT[x(n - n_0)] = Z^{n_0} X(Z) \quad (2.4.2.1)$$

Biểu thức 2.4.2.1 chính là tính chất trễ của biến đổi Z.

Chú ý rằng: nếu $n_0 > 0$ thì:

$$RC[Y(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+} \quad \text{và} \quad Z \neq 0$$

tức là ta có thêm một điểm cực $Z_{p1} = 0$

Nếu $n_0 < 0$ thì:

$$RC[Y(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+} \quad \text{và} \quad Z \neq \infty$$

tức là ta có thêm một điểm không $Z_{o1} = \infty$

Ví dụ 2.4.2.1 :

Hãy tìm biến đổi Z ngược của các $X(Z)$ sau đây:

$$\text{a) } X_1(Z) = \frac{Z^4}{Z-1}$$

$$\text{b) } X_2(Z) = \frac{Z^{-4}}{Z-a}$$

Giải :

$$\text{a) } IZT[X_1(Z)] = IZT\left[Z^3 \frac{Z}{Z-1}\right]$$

$$IZT\left[\frac{Z}{Z-1}\right] = u(n) \quad \text{vậy} \quad ZT[u(n)] = \frac{Z}{Z-1}$$

Áp dụng tính chất trễ (2.4.2.1) ta có:

$$ZT[u(n+3)] = Z^3 \frac{Z}{Z-1}$$

$$\text{Vậy} \quad IZT[X_1(Z)] = u(n+3)$$

$$\text{b) } IZT[X_2(Z)] = IZT\left[Z^{-5} \frac{Z}{Z-a}\right]$$

$$IZT\left[\frac{Z}{Z-a}\right] = a^n u(n)$$

Vậy ta có:

$$IZT\left[Z^{-5} \frac{Z}{Z-a}\right] = a^{n-5} u(n-5)$$

2.4.3. NHÂN VỚI DÃY HÀM MŨ a^n

Ta có dãy $x(n)$ và $ZT[x(n)] = X(Z)$, $RC[X(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

nhân dãy $x(n)$ này với dãy hàm mũ a^n ta có:

$$y(n) = a^n x(n)$$

Lấy biến đổi Z của $y(n)$ ta có:

$$ZT[y(n)] = Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{Z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{Z}{a}\right)$$

Vậy: $ZT[a^n u(n)] = X\left(\frac{Z}{a}\right)$ (2.4.3.1)

và $RC\left[X\left(\frac{Z}{a}\right)\right] : |a|R_{r-} < |Z| < |a|R_{r+}$

Ví dụ 2.4.3.1 :

Cho các dãy sau đây:

a) $x_1(n) = 2^n u(n)$

b) $x_2(n) = 3^n 2^n u(n)$

c) $x_3(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n 2^n u(n)$

d) $x_4(n) = e^{j\frac{\pi}{2}n} 2^n u(n)$

Hãy tìm biến đổi Z , miền hội tụ của biến đổi Z , các điểm cực, các điểm không.

Giải :

Trước tiên ta tìm $X_1(Z)$ sau đó áp dụng tính chất nhân với dãy hàm mũ (2.4.3.1) để tìm $X_2(Z)$, $X_3(Z)$ và $X_4(Z)$.

a)
$$\begin{aligned} X_1(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n) Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n Z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - 2Z^{-1}} & |Z| > 2 \\ &= \frac{Z}{Z - 2} & |Z| > 2 \end{aligned}$$

$Z_{p1} = 2$

b)
$$\begin{aligned} X_2(Z) &= X_1\left(\frac{Z}{3}\right) \\ &= \frac{\frac{Z}{3}}{\frac{Z}{3} - 2} & |Z| > |3| \cdot 2 \\ &= \frac{Z}{Z - 6} & |Z| > 6 \end{aligned}$$

$Z_{p1} = 6$

c)
$$\begin{aligned} X_3(Z) &= X_1\left(\frac{Z}{1/3}\right) \\ &= \frac{\frac{Z}{1/3}}{\frac{Z}{1/3} - 2} & |Z| > \left|\frac{1}{3}\right| \cdot 2 \\ &= \frac{3Z}{3Z - 2} & |Z| > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$Z_{p1} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
 d) \quad Z_4(Z) &= X_1\left(\frac{Z}{e^{j\frac{\pi}{2}}}\right) = X_1\left(Ze^{-j\frac{\pi}{2}}\right) \\
 &= \frac{Z.e^{-j\frac{\pi}{2}}}{Z.e^{-j\frac{\pi}{2}} - 2} \quad \begin{array}{l} |Z| > \left|e^{j\frac{\pi}{2}}\right| 2 \\ |Z| > 2 \end{array} \\
 Z_{p1} &= 2e^{j\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

Nhận xét :

- Nếu a là một số thực dương, việc đổi biến Z thành biến $\frac{Z}{a}$ tương ứng với việc đưa gần vào gốc tọa độ ($a < 1$) hoặc kéo xa khỏi gốc tọa độ ($a > 1$) vị trí các điểm cực và các điểm không theo các đường bán kính.

- Nếu a thuộc loại $e^{j\omega_0}$ thì việc đổi biến Z thành $\frac{Z}{a}$ sẽ tương ứng với việc quay đi một góc ω_0 vị trí các điểm cực và các điểm không theo vòng tròn có tâm là gốc tọa độ.

- Ta có thể nói rằng việc nhân dãy đã cho với một dãy hàm mũ a^n cho phép thay đổi vị trí các điểm cực và các điểm không của biến đổi Z .

2.4.4. ĐẠO HÀM CỦA BIẾN ĐỔI Z

Theo định nghĩa của biến đổi Z ta có:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

Thì ta có:

$$\frac{dX(Z)}{dZ} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x(n)Z^{-n-1} \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

Nhân cả hai vế với $-Z$ ta có:

$$-Z \frac{dX(Z)}{dZ} = -Z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x(n)Z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)Z^{-n}$$

Từ đây ta có thể viết:

$$ZT[nx(n)] = -Z \frac{dX(Z)}{dZ} \quad (2.4.4.1)$$

Ví dụ 2.4.4.1 :

Hãy tìm biến đổi Z của dãy $x_2(n) = u^2 x_1(n)$ theo hàm của $X_1(Z) = ZT[x_1(n)]$

Giải :

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n}$$

theo (2.4.4.1) ta có:

$$ZT[nx_1(n)] = -Z \frac{dX_1(Z)}{dZ}$$

Tiếp tục áp dụng (2.4.4.1) lần nữa ta có:

$$ZT[n.x_1(n)] = -Z \frac{d}{dZ} \left[-Z \frac{dX_1(Z)}{dZ} \right] = Z \frac{dX_1(Z)}{dZ} + Z^2 \frac{dX_1(Z)}{dZ}$$

Ví dụ 2.4.4.2 :

Hãy tìm biến đổi Z của dãy $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = na^n u(n)$$

Giải :

Gọi: $x(n) = nx_1(n)$

$$x_1(n) = a^n u(n)$$

Trước hết ta tìm $X_1(Z)$

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} = \frac{1}{1-aZ^{-1}} \quad |Z| > |a|$$

Áp dụng biểu thức 2.4.2.1 ta có:

$$X(Z) = -Z \frac{dX_1(Z)}{dZ} = \frac{aZ^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2} \quad |Z| > |a|$$

2.4.5. DÂY LIÊN HỢP PHỨC

Giả sử chúng ta có hai dãy sau đây: $x(n)$ và $x^*(n)$, ở đây dấu $*$ có nghĩa là liên hợp phức.

Lấy biến đổi Z cả hai dãy này ta có:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$ZT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)Z^{-n}$$

mà ta có:

$$[X(Z)]^* = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} \right]^*$$

$$X^*(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)(Z^*)^{-n}$$

$$X^*(Z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) \left[(Z^*)^* \right]^{-n} \quad \text{mà } (Z^*)^* = Z$$

Vậy ta có:

$$X^*(Z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)Z^{-n}$$

Cuối cùng ta thu được kết quả sau:

$$ZT[x^*(n)] = X^*(Z^*) \quad (2.4.5.1)$$

Ví dụ 2.4.5.1 :

Giả sử ta có dãy $x^*(-n)$. Hãy tìm biến đổi Z của dãy $x^*(-n)$ theo hàm của $X(Z)$.

Giải :

$$X(Z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$ZT[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)Z^{-n}$$

$$ZT[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)Z^{-n}$$

đổi biến số :

$-n = m$ ta có:

$$ZT[x^*(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m)Z^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m)\left(\frac{1}{Z}\right)^{-m}$$

Theo biểu thức (2.4.5.1) ta có:

$$ZT[x^*(m)] = X^*\left[\left(\frac{1}{Z}\right)^*\right] = X^*\left(\frac{1}{Z^*}\right)$$

Kết quả cuối cùng thu được như sau:

$$ZT[x^*(-n)] = X^*\left(\frac{1}{Z^*}\right)$$

2.4.6. ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ ĐẦU

Bằng một phương pháp đơn giản, định lý này cho phép đưa ra giá trị tại gốc tọa độ của một dãy khi chúng ta biết biến đổi Z của nó. Vậy rõ ràng là định lý này chỉ có giá trị đối với dãy nhân quả.

Biến đổi Z của một dãy nhân quả bất kỳ $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} & |Z| > R_{x-} \\ &= x(0) + \frac{x(1)}{Z} + \frac{x(2)}{Z^2} + \dots + \frac{x(n)}{Z^n} + \dots \end{aligned}$$

Nếu chúng ta tìm giới hạn của $X(Z)$ khi Z tiến ra vô cùng, thì tất cả các thành phần của chuỗi trên sẽ tiến về không, trừ thành phần đầu tiên, vì vậy ta có:

$$x(0) = \lim_{Z \rightarrow \infty} X(Z) \quad (2.4.6.1)$$

Nếu $x(n)$ là nhân quả ($x(n) = 0$ khi $n < 0$)

Biểu thức (2.4.6.1) chính là định lý giá trị đầu.

Từ định lý giá trị đầu ở trên chúng ta phát triển trong trường hợp sau đây:

Nếu $X(Z)$ hội tụ khi $|Z| > R_{x-}$ và nếu chúng ta có:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n_0} X(Z) = A < \infty \quad \text{với } n_0 \text{ là số nguyên dương hoặc âm}$$

thì ta thu được:

$$x(n_0) = A \quad \text{và} \quad x(n) = 0 \quad \text{với } n < n_0$$

Ví dụ 2.4.6.1 :

Hãy tìm giá trị đầu của dãy $x(n)$ khi biết rằng biến đổi Z của nó có dạng sau đây:

Giải :

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Z}{Z-3} = 1$$

Ví dụ 2.4.6.2 :

Hãy tìm giá trị đầu của các dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ nếu ta biết biến đổi Z của chúng có các dạng sau đây:

$$a) X_1(Z) = \frac{Z^4}{Z-1}$$

$$b) X_2(Z) = \frac{2Z^{-3}}{Z-1}$$

Giải :

$$a) \quad X_1(Z) = \frac{Z^4}{Z-1} \quad \Rightarrow \quad Z^{-3} X_1(Z) = \frac{Z}{Z-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} Z^{-3} X_1(Z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{Z}{Z-1} = 1$$

Vậy ta thu được kết quả sau:

$$x_1(-3) = 1 \quad \text{và} \quad x_1(n) = 0 \quad \text{với} \quad n < -3$$

$$b) \quad X_2(Z) = \frac{2Z^{-3}}{Z-1} \quad \Rightarrow \quad Z^4 X_2(Z) = \frac{2Z}{Z-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} Z^4 X_2(Z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2Z}{Z-1} = 2$$

$$\text{Kết quả ta có:} \quad x_2(n) = 2 \quad \text{và} \quad x_2(n) = 0 \quad \text{với} \quad n < 4$$

2.4.7. TÍCH CHẬP CỦA HAI DÃY

Nếu ta có dãy $x_3(n)$ là tích chập của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

Thì trong miền Z ta có:

$$X_3(Z) = X_1(Z) \cdot X_2(Z) \quad (2.4.7.1)$$

Chúng minh

Biến đổi Z của dãy $x_3(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X_3(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) * x_2(n)] Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k) \right] Z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k) Z^{-n}$$

đổi biến số:

$$m = n - k \Rightarrow n = m + k$$

Ta có

$$X_3(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m) Z^{-m} \right] Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) Z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m) Z^{-m}$$

Theo định nghĩa của biến đổi Z ta có:

$$X_3(Z) = X_1(Z) \cdot X_2(Z)$$

Tính chất đã được chứng minh.

Nhận xét về miền hội tụ của $X_3(Z)$:

$$- RC[X_3(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$$

- Miền hội tụ của $X_3(Z)$ có thể rộng hơn giao của miền hội tụ của $X_1(Z)$ và của $X_2(Z)$ nếu có các điểm không của biến đổi Z này bù cho các điểm cực của biến đổi Z kia hoặc ngược lại.

Ví dụ 2.4.7.1 :

Cho hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = n u(n)$$

$$x_2(n) = u(n)$$

Hãy tìm dãy $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ thông qua các tính chất của biến đổi Z .

Giải :

$$\begin{aligned} X_1(Z) &= ZT[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nu(n)Z^{-n} = -Z \frac{d}{dZ} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)Z^{-n} \right] = -Z \frac{d}{dZ} \left[\sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} \right] \\ &= -Z \frac{d}{dZ} \left[\frac{1}{1-Z^{-1}} \right] = -Z \frac{d}{dZ} \left[\frac{Z}{Z-1} \right] = -Z \frac{(Z-1) - Z}{(Z-1)^2} = \frac{Z}{(Z-1)^2} \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$X_1(Z) = \frac{Z}{(Z-1)^2}$$

$$X_2(Z) = ZT[x_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1}$$

$$X_3(Z) = X_1(Z) \cdot X_2(Z) = \frac{Z}{(Z-1)^2} \cdot \frac{Z}{Z-1} = Z \frac{Z}{(Z-1)^3}$$

$$IZT \left[\frac{Z}{(Z-1)^3} \right] = \frac{n(n-1)}{2} u(n)$$

Áp dụng tính chất trễ (2.4.2.1) ta có:

$$ZT \left[Z \frac{Z}{(Z-1)^3} \right] = \frac{(n+1)n}{2} u(n+1)$$

Vậy ta có kết quả của $x_3(n)$ như sau:

$$x_3(n) = \frac{(n+1)n}{2} u(n+1)$$

Ngoài ra ta biết rằng:

$$\begin{aligned} x_3(n) &= x_1(n) * x_2(n) = [nu(n)] * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ku(k).u(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ku(n-k) = \sum_{k=0}^n k \end{aligned}$$

Cuối cùng ta có quan hệ sau đây:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ví dụ 2.4.7.2 :

Giả sử chúng ta có hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = n^2 u(n)$$

$$x_2(n) = u(n)$$

Nhờ các tính chất của biến đổi Z hãy tìm dãy $x_3(n)$ như sau:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

Giải :

$$X_1(Z) = ZT[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 u(n) Z^{-n}$$

Chúng ta chia $x_1(n)$ thành hai phần như sau:

$$x_1(n) = n^2 u(n) = [n(n-1) + n]u(n) = \left[2 \frac{n(n-1)}{2} + n \right] u(n)$$

Vậy :

$$X_1(Z) = ZT[x_1(n)] = ZT \left[2 \frac{n(n-1)}{2} u(n) \right] + ZT[n u(n)] = 2 \frac{Z}{(Z-1)^3} + \frac{Z}{(Z-1)^2}$$

Tiếp tục tìm $X_2(Z)$ và $X_3(Z)$ ta có:

$$X_2(Z) = ZT[x_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) Z^{-n} = \frac{Z}{Z-1}$$

Vậy :

$$\begin{aligned} X_3(Z) &= X_1(Z) \cdot X_2(Z) = \left[2 \frac{Z}{(Z-1)^3} + \frac{Z}{(Z-1)^2} \right] \cdot \frac{Z}{Z-1} \\ &= \frac{2Z^2}{(Z-1)^4} + \frac{Z^2}{(Z-1)^3} = \frac{2Z^2 + Z^2(Z-1)}{(Z-1)^4} = \frac{Z^3 + Z^2}{(Z-1)^4} \\ X_3(Z) &= \frac{Z^3}{(Z-1)^4} + \frac{Z^2}{(Z-1)^4} = Z^2 \frac{Z}{(Z-1)^4} + Z \frac{Z}{(Z-1)^4} \end{aligned}$$

Chúng ta đã có:

$$IZT \left[\frac{Z}{(Z-1)^4} \right] = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} u(n)$$

Theo tính chất trễ (2.4.2.1) ta có:

$$\begin{aligned} IZT \left[Z^2 \frac{Z}{(Z-1)^4} \right] &= \frac{(n+2)(n+1)n}{6} u(n+2) \\ IZT \left[Z \frac{Z}{(Z-1)^4} \right] &= \frac{(n+1)n(n-1)}{6} u(n+1) \end{aligned}$$

Vậy:

$$x_3(n) = IZT[X_3(n)] = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}u(n+2) + \frac{(n+1)n(n-1)}{6}u(n+1)$$

Nhưng dựa vào biểu thức của $x_3(n)$ ta thấy rằng: $x_3(n) = 0$ nếu $n = 0$, $n = -1$ và $n = -2$.

Vậy ta có thể viết:

$$x_3(n) = \left[\frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \right] u(n)$$

Rút gọn lại ta có:

$$x_3(n) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} u(n)$$

Ngoài ra ta biết rằng:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 u(k) u(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 u(n-k) = \sum_{k=0}^n k^2$$

Cuối cùng ta có quan hệ sau đây:

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

2.4.8. TÍCH CỦA HAI DÂY

Giả sử ta có một dây $x_3(n)$ bằng tích của hai dây $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

Thì trong miền Z ta có quan hệ sau:

$$X_3(Z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) X_2\left(\frac{Z}{v}\right) v^{-1} dv \quad (2.4.8.1)$$

mà :

$$\begin{aligned} RC[X_1(Z)] : & \quad R_{x1-} < |Z| < R_{x1+} \\ RC[X_2(Z)] : & \quad R_{x2-} < |Z| < R_{x2+} \\ RC[X_3(Z)] : & \quad RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)] \end{aligned}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa của biến đổi Z ta có:

$$\begin{aligned} X_3(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2(n) Z^{-n} \\ x_2(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_2(v) v^{n-1} dv \\ \Rightarrow X_3(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_2(v) v^{n-1} dv \cdot Z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \oint_C X_2(v) \left(\frac{Z}{v}\right)^{n-1} v^{-1} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \left(\frac{Z}{v} \right)^n \right] v^{-1} X_2(v) dv \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1 \left(\frac{Z}{v} \right) X_2(v) v^{-1} dv
\end{aligned}$$

Thay đổi thứ tự của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ hoặc $X_1(Z)$ và $X_2(Z)$ ta có:

$$X_3(Z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2 \left(\frac{Z}{v} \right) v^{-1} dv$$

Tính chất đã được chứng minh xong.

Quan hệ trong (2.4.8.1) còn được gọi là định lý tích chập phức.

Chú ý rằng đường cong kín của tích phân c phải được chọn trong miền giao của hai miền hội tụ của $X_1(Z)$ và $X_2(Z)$, hay nói cách khác chính là miền hội tụ của $X_3(Z)$.

$$RC[X_3(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$$

$$\text{hay} \quad RC[X_3(Z)] : \max[R_{x_1}, R_{x_2}] < |Z| < \min[R_{x_1}, R_{x_2}]$$

Ví dụ 2.4.8.1 :

Giả sử ta có dãy $x_3(n)$ là tích của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2^*(n)$ như sau :

$$x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2^*(n)$$

$$ZT[x_1(n)] = X_1(Z) \quad ; \quad ZT[x_2^*(n)] = X_2^*(Z^*)$$

Hãy tìm $X_3(Z)$ tại điểm $Z = 1$.

Hãy tìm $X_3(Z)$ nếu ta chọn đường cong khép kín của tích phân đường trong quan hệ (2.4.8.1) là vòng tròn đơn vị.

Giải :

Tại $Z = 1$, $X_3(Z)$ có giá trị sau đây :

$$\begin{aligned}
X_3(Z) \Big|_{Z=1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n) Z^{-n} \Big|_{Z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2^* \left(\frac{1}{v^*} \right) v^{-1} dv
\end{aligned}$$

- Chọn đường cong c là vòng tròn đơn vị ta có :

$$\frac{1}{v^*} \Big|_{v=e^{j\omega}} = \left(\frac{1}{e^{j\omega}} \right)^* = \frac{1}{e^{-j\omega}} = e^{j\omega}$$

$$v = e^{j\omega} \Rightarrow \oint_c \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{de^{j\omega}}{e^{j\omega}} = j d\omega$$

Vậy ta có :

$$X_1(v) \rightarrow X_1(e^{j\omega})$$

$$X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right) \rightarrow X_2^*(e^{j\omega})$$

$$X_3(Z) \Big|_{Z=1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) X_2^*(e^{j\omega}) d\omega$$

Chú ý

Nếu

$$x_1(n) = x_2(n) = x(n) \quad \text{ta có:}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Đây là định lý Parseval, cho ta quan hệ giữa năng lượng của tín hiệu và năng lượng của phổ của tín hiệu đó (chúng ta sẽ nghiên cứu lại ở chương 3).

2.4.9. TƯƠNG QUAN CỦA HAI TÍN HIỆU

Chúng ta biết rằng hàm tương quan chéo của hai tín hiệu $x(n)$ và $y(n)$ được định nghĩa bởi quan hệ sau đây:

$$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(m-n)$$

Thì trong miền Z ta có quan hệ:

$$R_{xy}(Z) = X(Z) Y\left(\frac{1}{Z}\right) \quad (2.4.9.1)$$

Chứng minh

$$R_{xy}(Z) = ZT[r_{xy}(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xy}(n) Z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(m-n) \right] Z^{-n}$$

Đổi biến: $l = m - n, \quad n = m - l$

Ta có:

$$R_{xy}(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(m) y(l) Z^{-(m-l)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) Z^{-m} \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(l) (Z^{-1})^{-l} = X(Z) Y\left(\frac{1}{Z}\right)$$

Tính chất (2.4.9.1) đã được chứng minh.

Bây giờ ta xét miền hội tụ

$$RC[X(Z)] : R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

$$RC\left[Y\left(\frac{1}{Z}\right)\right] : \frac{1}{R_{y+}} < |Z| < \frac{1}{R_{y-}}$$

$$RC[R_{xy}(Z)] = RC[X(Z)] \cap RC\left[Y\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$$

$$: \max \left[R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}} \right] < |Z| < \min \left[R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}} \right]$$

Ví dụ 2.4.9.1 :

Giả sử chúng ta có dãy $x(n)$ như sau:

$$x(n) = \text{rect}_N(n)$$

Hãy sử dụng quan hệ (2.4.9.1) để tính hàm tự tương quan $r_{xx}(n)$.

Giải :

$$X(Z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} Z^{-n} = \frac{1-Z^{-N}}{1-Z^{-1}}, \quad Z \neq 1$$

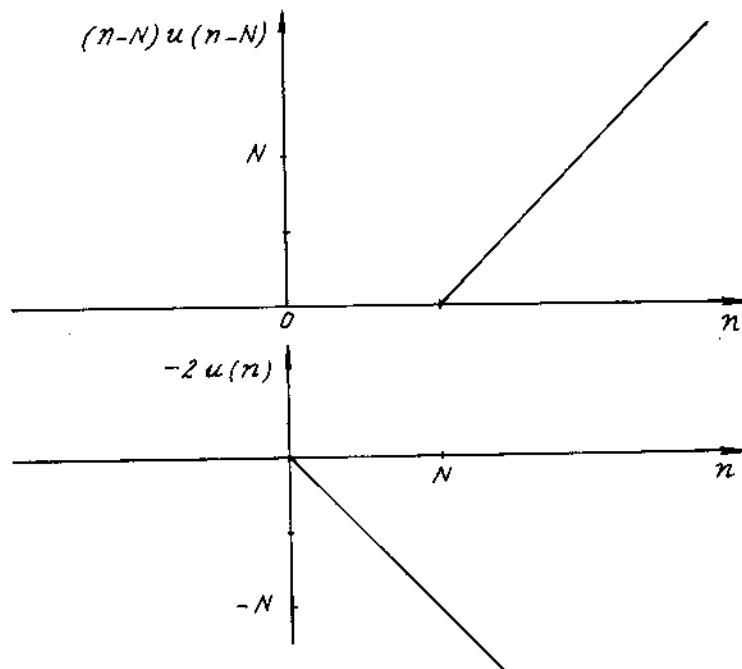
$$X\left(\frac{1}{Z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^n = \sum_{n=0}^{N-1} Z^n = \frac{1-Z^N}{1-Z}, \quad Z \neq 1$$

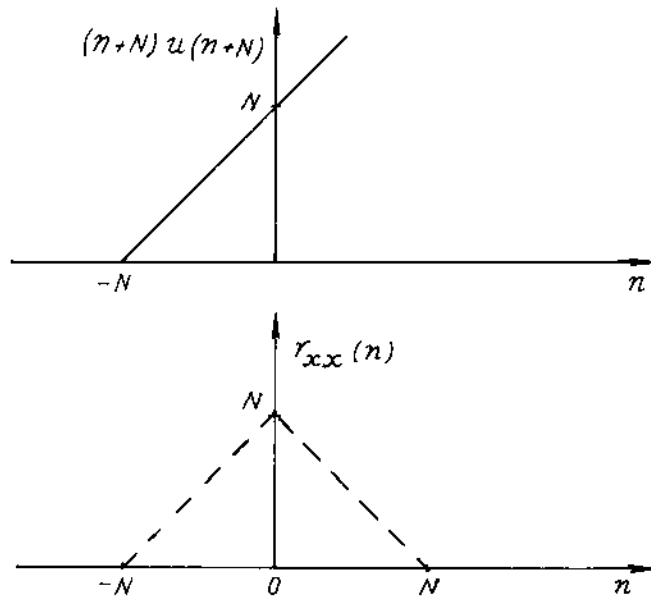
Từ đây ta có:

$$\begin{aligned} R_{xx}(Z) &= X(Z) \cdot X\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1-Z^{-N}}{1-Z^{-1}} \cdot \frac{1-Z^N}{1-Z} = \frac{Z(1-Z^{-N})(Z^N-1)}{(Z-1)^2} \\ &= \frac{(Z-Z^{-N+1})(Z^N-1)}{(Z-1)^2} = \frac{Z^{N+1}-Z-Z+Z^{-N+1}}{(Z-1)^2} \\ &= Z^N \frac{Z}{(Z-1)^2} - 2 \frac{Z}{(Z-1)^2} + Z^{-N} \frac{Z}{(Z-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{xx}(n) &= IZT[R_{xx}(Z)] \\ &= (n-N)u(n-N) - 2nu(n) + (n+N)u(n+N) \\ \Rightarrow r_{xx}(n) &= N - |n| \end{aligned}$$

Minh họa bằng đồ thị $r_{xx}(n)$ cho trên hình 2.4.9.1





Hình 2.4.9.1.

2.4.10. TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

Các tính chất của biến đổi Z được tổng kết trên bảng 2.4.10.1

Bảng 2.4.10.1.

Miền n	Miền Z	Miền hội tụ
$x_1(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(Z) Z^{n-1} dZ$	$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) Z^{-n}$	$R_{x1-} < Z < R_{x1+}$
$x_2(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_2(Z) Z^{n-1} dZ$	$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) Z^{-n}$	$R_{x2-} < Z < R_{x2+}$
$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(Z) + bX_2(Z)$	$RC [X_1(Z)] \cap RC [X_2(Z)]$
$x(n - n_0)$	$Z^{-n_0} X(Z)$	$R_{x-} < Z < R_{x+}$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1} Z)$	$ a R_{x-} < Z < a R_{x+}$
$nx(n)$	$-Z \frac{dX(Z)}{dZ}$	$R_{x-} < Z < R_{x+}$
$x^*(n)$	$X^*(Z^*)$	$R_{x-} < Z < R_{x+}$
$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{Z}\right)$	$\frac{1}{R_{x+}} < Z < \frac{1}{R_{x-}}$
$x(0)$ (nếu $x(n)$ là nhân quả)	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(Z)$	

$Re[x(n)] = \frac{x(n) + x^*(n)}{2}$	$\frac{1}{2}[X(Z) + X^*(Z^*)]$	$R_{x-} < Z < R_{x+}$
$Im[x(n)] = \frac{x(n) - x^*(n)}{2}$	$\frac{1}{2j}[X(Z) - X^*(Z^*)]$	$R_{x-} < Z < R_{x+}$
$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(Z) \cdot X_2(Z)$	$RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$
$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) X_2\left(\frac{Z}{v}\right) v^{-1} dv$	$RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$
$r_{x_1 x_2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(m-n)$	$R_{x_1 x_2}(Z) = X_1(Z) X_2\left(\frac{1}{Z}\right)$	$RC[X_1(Z)] \cap RC\left[X_2\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$

2.4.11. MỘT VÀI BIẾN ĐỔI Z THÔNG DỤNG

Bảng 2.4.11.1 sẽ cung cấp cho chúng ta một vài biến đổi Z thông dụng, nó sẽ giúp chúng ta tính nhanh hơn các biến đổi Z.

Bảng 2.4.11.1

Miền n	Miền Z	Miền hội tụ
$\delta(n)$	1	Toàn bộ mặt phẳng Z
$\delta(n - n_0)$	Z^{-n_0}	Toàn bộ mặt phẳng Z trừ tại 0 nếu $n_0 > 0$ trừ tại ∞ nếu $n_0 < 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - Z^{-1}}$	$ Z > 1$
$u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - Z^{-1}}$	$ Z < 1$
$nu(n)$	$\frac{Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2}$	$ Z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - aZ^{-1}}$	$ Z > a$
$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - aZ^{-1}}$	$ Z < a$
$na^n u(n)$	$\frac{aZ^{-1}}{(1 - aZ^{-1})^2}$	$ Z > a$
$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{aZ^{-1}}{(1 - aZ^{-1})^2}$	$ Z < a$
$(\cos \omega_0 n) \cdot u(n)$	$\frac{1 - Z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2Z^{-1} \cos \omega_0 + Z^{-2}}$	$ Z > 1$

$(\sin \omega_0 n) \cdot u(n)$	$\frac{Z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2Z^{-1} \cos \omega_0 + Z^{-2}}$	$ Z > 1$
$a^n (\cos \omega_0 n) \cdot u(n)$	$\frac{1 - aZ^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2aZ^{-1} \cos \omega_0 + a^2 Z^{-2}}$	$ Z > a $
$a^n (\sin \omega_0 n) \cdot u(n)$	$\frac{aZ^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2aZ^{-1} \cos \omega_0 + a^2 Z^{-2}}$	$ Z > a $

2.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

Chúng ta biết rằng trong miền n , một hệ thống tuyến tính bất biến được đặc trưng bởi đáp ứng xung $h(n)$ của nó hoặc được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, nhưng việc phân tích hệ thống nhiều khi gặp những bất tiện như là tích chập, cách giải phương trình sai phân, xét độ ổn định v.v...

Để giải quyết những khó khăn trong miền n chúng ta sẽ chuyển cách biểu diễn hệ thống sang miền Z , cụ thể ta đưa ra khái niệm hàm truyền đạt của hệ thống.

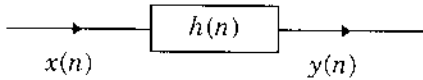
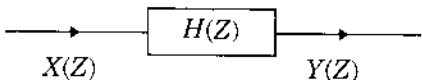
2.5.1. HÀM TRUYỀN ĐẠT CỦA HỆ THỐNG RỜI RẠC

a) Định nghĩa

Trước hết ta tiến hành so sánh quan hệ giữa đầu vào, đầu ra và đáp ứng xung trong miền n sau đó chuyển sang miền Z .

Bảng 2.5.1.1 sẽ cho ta sự so sánh này trong cả hai miền n và Z .

Bảng 2.5.1.1.

Miền n	Miền Z
	
$y(n) = x(n) * h(n)$ $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ $h(n) = \text{IZT}[H(Z)]$	$Y(Z) = X(Z) \cdot H(Z)$ $X(Z) = \text{ZT}[x(n)]$ $H(Z) = \text{ZT}[h(n)]$ $Y(Z) = \text{ZT}[y(n)]$ $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

Từ bảng 2.5.1.1 ta có định nghĩa của hàm truyền đạt như sau:

Hàm truyền đạt của một hệ thống rời rạc chính là biến đổi Z của đáp ứng xung và được ký hiệu là $H(Z)$:

$$H(Z) = \text{ZT}[h(n)]$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (2.5.1.1)$$

b) Hàm truyền đạt $H(Z)$ của một hệ thống rời rạc được mô tả bởi phương trình sai phân

Quan hệ giữa đầu vào - đầu ra của một hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến và nhân quả được cho bởi phương trình sai phân sau đây:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Lấy biến đổi Z các thành phần của phương trình này ta có:

$$\begin{aligned} ZT \left[\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) \right] &= ZT \left[\sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \right] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) \right] Z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \right] Z^{-n} \end{aligned}$$

Sử dụng các tính chất tuyến tính và tính chất trễ của biến đổi Z ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k ZT[y(n-k)] &= \sum_{r=0}^M b_r ZT[x(n-r)] \\ \sum_{k=0}^N a_k Z^{-k} Y(Z) &= \sum_{r=0}^M b_r Z^{-r} X(Z) \\ Y(Z) \sum_{k=0}^N a_k Z^{-k} &= X(Z) \sum_{r=0}^M b_r Z^{-r} \end{aligned}$$

Từ đây ta rút ra quan hệ giữa hàm truyền đạt $H(Z)$ với các hệ số a_k và b_r của phương trình sai phân như sau :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}} \quad (2.5.1.2)$$

Nếu $a_0 = 1$ ta có :

$$\begin{aligned} H(Z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}} \\ y(n) &= \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \end{aligned} \quad (2.5.1.3)$$

Ví dụ 2.5.1.1 :

Hãy tìm hàm truyền đạt của hệ thống không đệ quy.

Giải :

Trong trường hợp hệ thống không đệ quy thì $N = 0$ vậy ta có :

$$H(Z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}}{a_0}$$

Nếu $a_0 = 1$ thì :

$$H(Z) = \sum_{r=0}^M b_r Z^{-r} \quad (2.5.1.4)$$

c) Biểu diễn hàm truyền đạt bằng các điểm cực và điểm không

Cũng giống như tín hiệu rời rạc, hàm truyền đạt $H(Z)$ của một hệ thống rời rạc có thể được biểu diễn bằng các điểm cực và các điểm không của nó như sau :

$$H(Z) = c \frac{\prod_{r=1}^M (1 - Z_{0r} Z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - Z_{pk} Z^{-1})} \quad (2.5.1.5)$$

$$= c Z^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (1 - Z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (1 - Z_{pk})} \quad (2.5.1.6)$$

Ví dụ 2.5.1.2 :

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 4y(n-1) - 5y(n-2) + y(n-3)$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$?

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống.

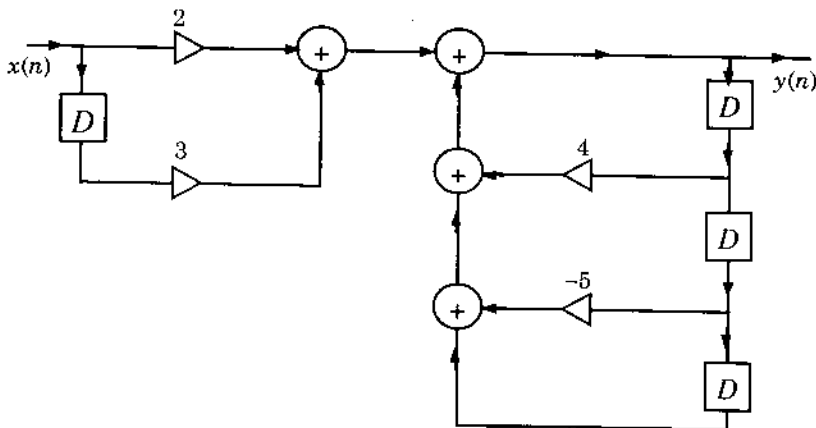
Giải :

Đây là hệ thống đệ quy

$M = 1$	$N = 3$
$b_0 = 2$	$a_0 = 1$
$b_1 = 3$	$a_1 = -4$
	$a_2 = 5$
	$a_3 = -5$

Từ đây ta có : $H(Z) = \frac{2 + 3Z^{-1}}{1 - 4Z^{-1} + 5Z^{-2} - Z^{-3}}$

Sơ đồ thực hiện hệ thống cho trên hình 2.5.1.1.



Hình 2.5.1.1

Ví dụ 2.5.1.3 :

Cho hệ thống có hàm truyền đạt sau đây :

$$H(Z) = \frac{1 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2}}{1 - 4Z^{-1} - Z^{-3} + 5Z^{-4}}$$

Hãy viết phương trình sai phân.

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống.

Giải :

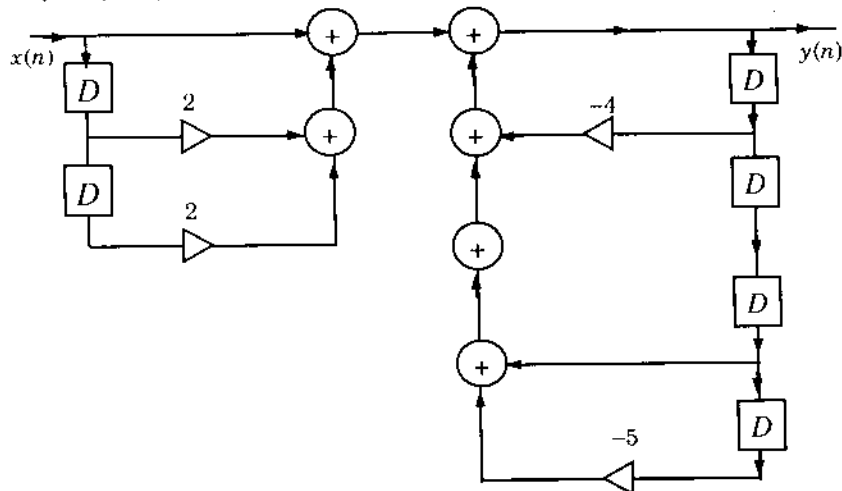
Đây là hệ thống đệ quy

$M = 2$	$N = 4$
$b_0 = 1$	$a_0 = 1$
$b_1 = 2$	$a_1 = 4$
$b_2 = 3$	$a_2 = -1$
	$a_3 = 5$

Từ đây ta có :

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) - 4y(n-1) + y(n-3) - 5y(n-4)$$

Sơ đồ thực hiện hệ thống cho trên hình 2.5.1.2.



Hình 2.5.1.2

2.5.2. PHÂN TÍCH HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

a) Các phần tử thực hiện

Trên hình 1.4.4.1 đã trình bày cách biểu diễn các phần tử thực hiện trong miền n . Từ cách biểu diễn này lấy biến đổi Z đầu vào và đầu ra của các phần tử thực hiện, ta sẽ có cách biểu diễn trong miền Z như sau :

- *Phần tử trễ*

Gọi $x(n)$ là đầu vào, $y(n)$ là đầu ra, quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của phần tử trễ trong miền Z như sau :

$$y(n) = x(n-1)$$

Lấy biến đổi Z như sau :

$$ZT[y(n)] = ZT[x(n-1)]$$

$$\Rightarrow Y(Z) = Z^{-1}X(Z)$$

Như vậy phép trễ trong miền n đã được thay bằng phép nhân với Z^{-1} trong miền Z .

- Phần tử cộng

Gọi $x_i(n)$ là các đầu vào, $y(n)$ là đầu ra, ta có quan hệ sau :

$$y(n) = \sum_{i=1}^M x_i(n)$$

Lấy biến đổi Z ta có :

$$ZT[y(n)] = ZT\left[\sum_{i=1}^M x_i(n)\right]$$

$$\Rightarrow Y(Z) = \sum_{i=1}^M X_i(Z)$$

- Phần tử nhân với hằng số

Gọi $x(n)$ là các đầu vào, α là hằng số, $y(n)$ là đầu ra, ta có quan hệ sau :

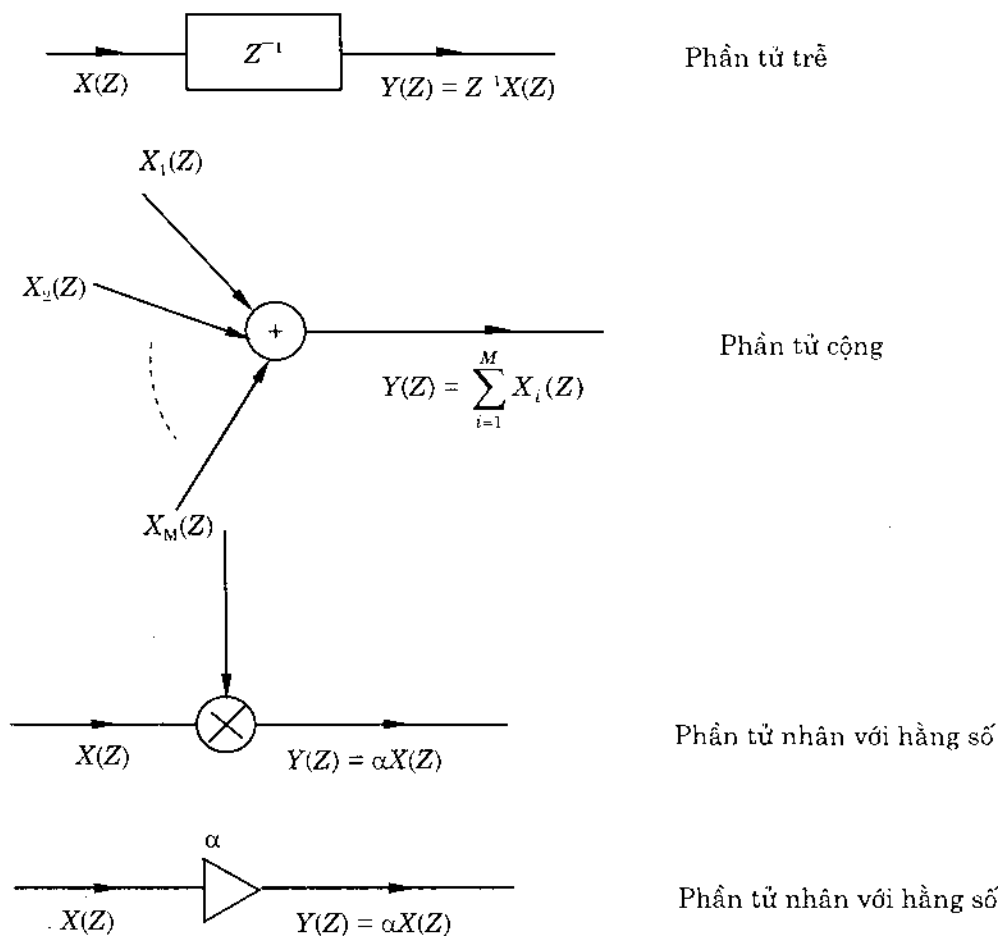
$$y(n) = \alpha x(n)$$

Lấy biến đổi Z ta có :

$$ZT[y(n)] = ZT[\alpha x(n)]$$

$$\Rightarrow Y(Z) = \alpha X(Z)$$

Hình 2.5.2.1 sẽ trình bày cách biểu diễn những phần tử thực hiện này trong miền Z.



Hình 2.5.2.1.

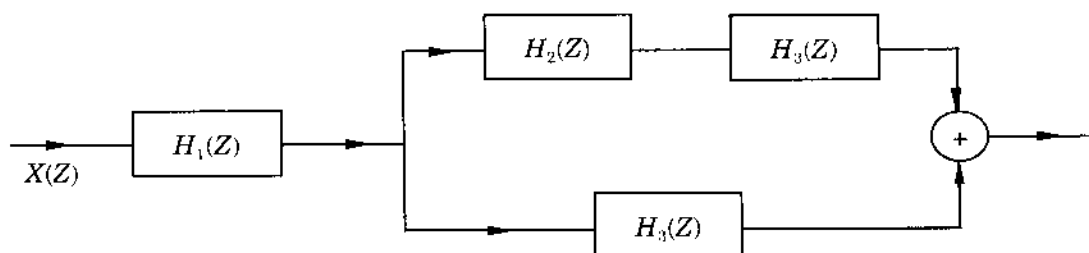
b) Phân tích hệ thống rời rạc

Việc phân tích hệ thống rời rạc dựa trên nguyên tắc chung sau đây :

- + Phân tích hệ thống tổng quát thành các hệ thống nhỏ hơn (hay những khối nhỏ hơn).
- + Tìm quan hệ ghép nối giữa những khối nhỏ hơn này.
- + Tìm hàm truyền đạt $H_i(Z)$ của từng khối nhỏ này.
- + Ghép các hàm truyền đạt của những khối nhỏ đã tìm thấy theo quy luật đã phân tích ở trên.

Ví dụ 2.5.2.1 :

Cho một hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như trên hình 2.5.2.2 sau đây :



Hình 2.5.2.2

Hãy phân tích sơ đồ khối này và tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ chung của cả hệ thống theo các hàm truyền đạt $H_i(Z)$ của các khối.

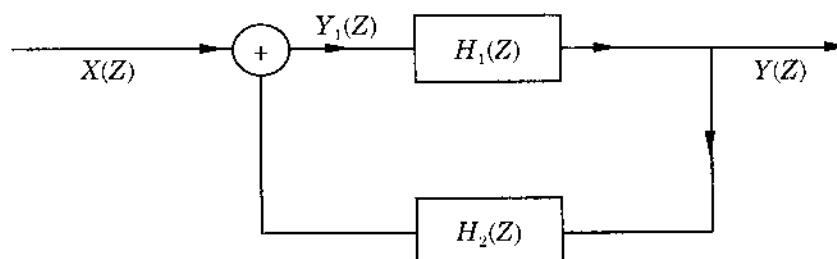
Giải :

Phân tích quan hệ ghép nối tiếp và song song giữa các khối $H_i(Z)$ ta có $H(Z)$ như sau:

$$H(Z) = H_1(Z) \cdot [H_2(Z) + H_3(Z)]$$

Ví dụ 2.5.2.2 :

Cho một hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như hình 2.5.2.3 như sau :



Hình 2.5.2.3

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ chung của cả hệ thống theo $H_1(Z)$ và $H_2(Z)$.

Giải :

Quan hệ giữa $H_1(Z)$ và $H_2(Z)$ không phải nối tiếp, cũng không phải song song mà là quan hệ phản hồi.

Trong sơ đồ ta đặt thêm biến phụ $Y_1(Z)$, sau đó tìm quan hệ giữa $Y(Z)$ và $X(Z)$ chúng ta có kết quả sau đây :

$$Y_1(Z) = X(Z) + H_2(Z)Y(Z)$$

$$Y(Z) = H_1(Z)Y_1(Z) = H_1(Z)[X(Z) + H_2(Z)Y(Z)]$$

$$= H_1(Z)X(Z) + H_1(Z)H_2(Z)Y(Z)$$

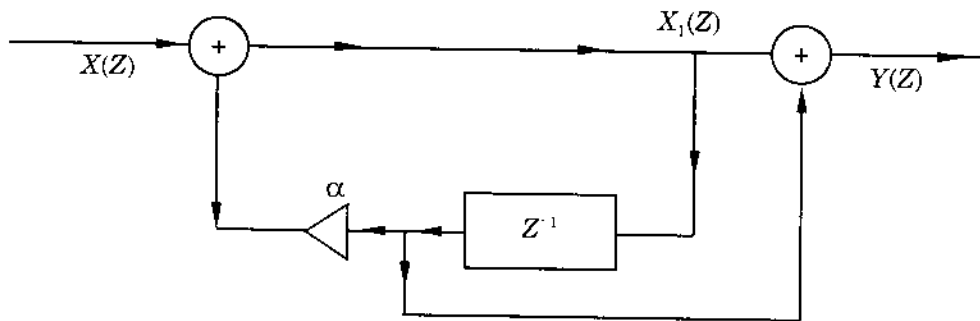
$$\Rightarrow Y(Z)[1 - H_1(Z)H_2(Z)] = H_1(Z)X(Z)$$

Từ đây ta thu được :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{H_1(Z)}{1 - H_1(Z)H_2(Z)}$$

Ví dụ 2.5.2.3 :

Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như hình 2.5.2.4 sau đây :



Hình 2.5.2.4

Hãy tìm hàm truyền $H(Z)$ và đáp ứng xung $h(n)$.

Giải :

Đặt thêm biến phụ $X_1(Z)$, sau đó tìm quan hệ giữa $Y(Z)$ và $X(Z)$:

$$X_1(Z) = X(Z) + \alpha Z^{-1}X_1(Z)$$

$$Y(Z) = X_1(Z) + Z^{-1}X_1(Z) = (1 + Z^{-1})X_1(Z)$$

Từ đây ta có :

$$X_1(Z) = \frac{X(Z)}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

$$Y(Z) = \frac{1+Z^{-1}}{1-aZ^{-1}} X(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1+Z^{-1}}{1-aZ^{-1}}$$

$$h(n) = IZT[H(Z)] = IZT\left[\frac{1+Z^{-1}}{1-aZ^{-1}}\right]$$

$$= IZT\left[\frac{1}{1-aZ^{-1}}\right] + IZT\left[\frac{Z^{-1}}{1-aZ^{-1}}\right]$$

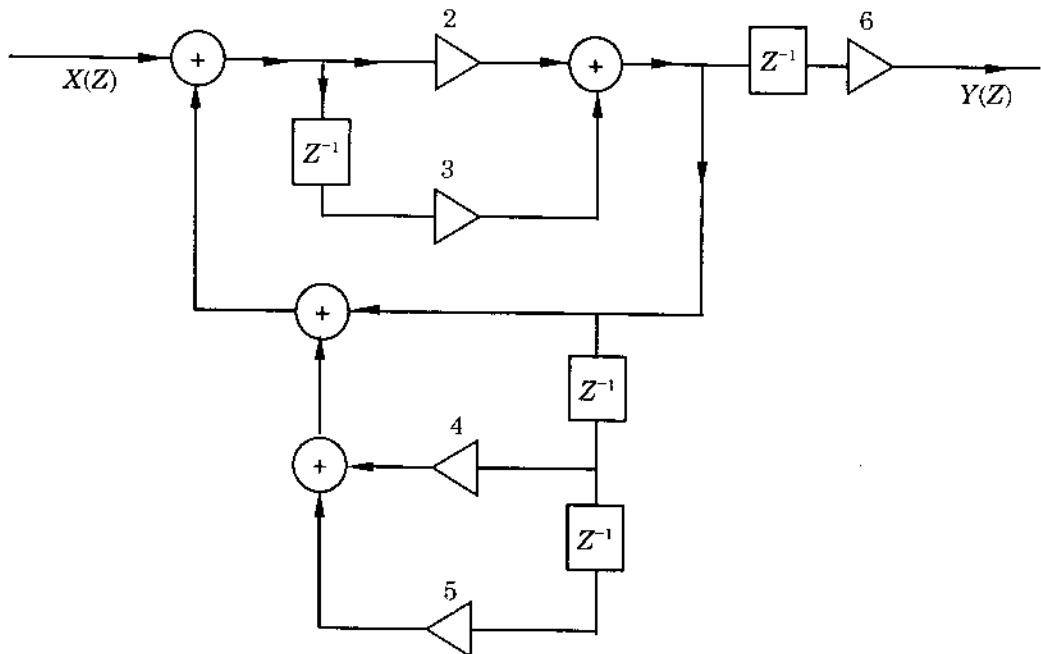
$$= IZT\left[\frac{Z}{Z-a}\right] + IZT\left[Z^{-1} \frac{Z}{Z-a}\right]$$

Theo biểu thức (2.3.5.11) và (2.3.5.12) ta có :

$$h(n) = \alpha^n u(n) + \alpha^{n-1} u(n-1)$$

Ví dụ 2.5.2.4 :

Cho hệ thống có sơ đồ sau đây (hình 2.5.2.5).



Hình 2.5.2.5

Hãy tìm $H(Z)$.

Giải :

Chúng ta có thể phân tích sơ đồ thành các khối như trên hình 2.5.2.6.

Từ đây ta có $H(Z)$:

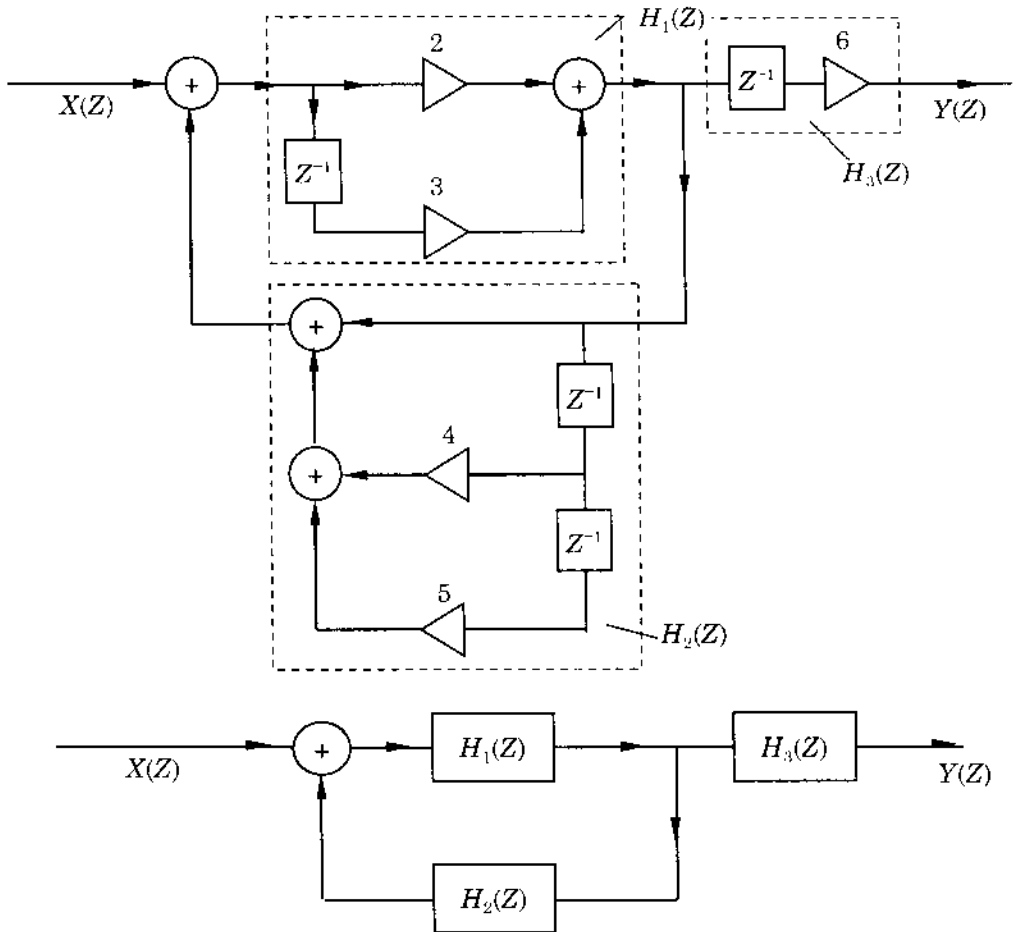
$$H(Z) = \frac{H_1(Z)}{1 - H_1(Z) \cdot H_2(Z)} \cdot H_3(Z)$$

$$H_1(Z) = 2 + 3Z^{-1}$$

$$H_2(Z) = 1 + 4Z^{-1} + 5Z^{-2}$$

$$H_3(Z) = 6Z^{-2}$$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{2 + 3Z^{-1}}{1 - (2 + 3Z^{-1})(1 + 4Z^{-1} + 5Z^{-2})} \cdot 6Z^{-2}$$



Hình 2.5.2.6

2.5.3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẲNG NHỜ BIẾN ĐỔI Z

Trong chương thứ nhất chúng ta đã gặp những khó khăn khi giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Những khó khăn ấy sẽ được giải quyết khi ứng dụng biến đổi Z.

Bởi vì việc giải phương trình sai phân thường đi kèm với điều kiện đầu khác không, vì vậy, ta cần ứng dụng biến đổi Z một phía để giải phương trình.

Ví dụ 2.5.3.1 :

Hãy giải phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

với:

$$x(n) = 3^{n-2} \\ y(-2) = -\frac{4}{9} \quad ; \quad y(-1) = -\frac{1}{3}$$

Giải :

Lấy biến đổi Z một phía 2 vế của phương trình:

$$\begin{aligned} ZT^1[y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2)] &= ZT^1[x(n)] \\ ZT^1[y(n)] + ZT^1[-3y(n-1)] + ZT^1[2y(n-2)] &= ZT^1[x(n)] \\ Y^1(Z) - 3[Z^{-1}Y^1(Z) + y(-1)] + 2[Z^{-2}Y^1(Z) + Z^{-1}y(-1) + y(-2)] &= X^1(Z) \end{aligned}$$

Thay điều kiện đầu:

$$y(-2) = -\frac{4}{9} \quad \text{và} \quad y(-1) = -\frac{1}{3}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} Y^1(Z)(1 - 3Z^{-1} + 2Z^{-2}) + 1 - \frac{2}{3}Z^{-1} - \frac{8}{9} &= X^1(Z) \\ X^1(Z) = 3^{-2} \frac{1}{1 - 3Z^{-1}} &= \frac{1}{9} \frac{Z}{Z - 3} \end{aligned}$$

Biến đổi tiếp:

$$Y^1(Z) \frac{(Z-1)(Z-2)}{Z^2} = \frac{2}{3Z} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \frac{Z}{Z-3} = \frac{6(Z-3) - Z(Z-3) + Z^2}{9Z(Z-3)} = \frac{Z-2}{Z(Z-3)}$$

Vậy:

$$Y^1(Z) = \frac{Z}{(Z-1)(Z-3)}$$

Để tìm $y(n)$ ta phải tìm $IZT[Y^1(Z)]$, ta dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản:

$$\frac{Y^1(Z)}{Z} = \frac{A_1}{(Z-1)} + \frac{A_2}{(Z-3)}$$

Tìm các hệ số A_1 và A_2 theo công thức (2.3.5.6) ta có: $A_1 = -\frac{1}{2}$ và $A_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy ta có $Y^1(Z)$ như sau :

$$Y^1(Z) = -\frac{1}{2} \frac{Z}{Z-1} + \frac{1}{2} \frac{Z}{Z-3}$$

Tìm $IZT[Y^1(Z)]$ theo công thức (2.3.5.11) hoặc (2.3.5.12)

Ta có $y(n)$ như sau:

$$y(n) = -\frac{1}{2} 1^n u(n) + \frac{1}{2} 3^n u(n) = \frac{1}{2} (3^n - 1) u(n)$$

2.5.4. ĐỘ ỔN ĐỊNH

a) Sự ổn định của một hệ thống tuyến tính bất biến

Khi không có tín hiệu ở đầu vào của hệ thống số, nhưng cũng có thể ở đầu ra của hệ thống xuất hiện tín hiệu, đó chính là trường hợp hệ thống không ổn định.

Trong chương một chúng ta đã nghiên cứu tính ổn định của một hệ thống tuyến tính bất biến (không nhất thiết là nhân quả). Trong miền n , đáp ứng xung $h(n)$ là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống, vì thế tính ổn định của hệ thống cũng phụ thuộc vào đáp ứng xung, cụ thể một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu điều kiện sau đây được thoả mãn:

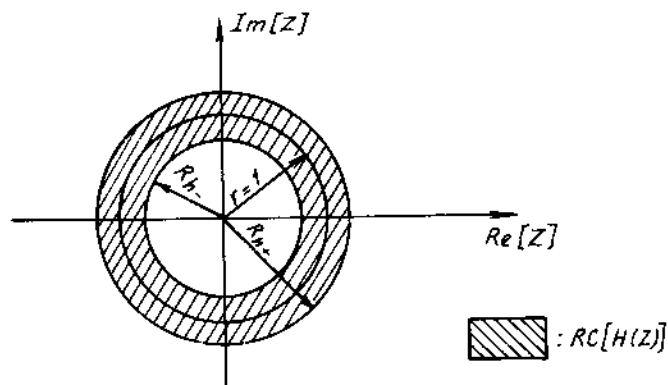
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Đó là điều kiện ổn định trong miền n , bây giờ ta chuyển sang miền Z , lúc đó hàm truyền đạt $H(Z)$ sẽ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống. Hàm truyền đạt của hệ thống tuyến tính bất biến có dạng sau :

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n} \quad R_{h-} < |Z| < R_{h+}$$

So sánh điều kiện ổn định trong miền n với công thức tính $H(Z)$, ta thấy rằng muốn điều kiện ổn định trong miền n được thoả mãn thì hàm truyền đạt $H(Z)$ phải hội tụ với $|Z| = 1$ (tức là trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z), vì thế miền hội tụ (miền vành khăn) của $H(Z)$ nhất thiết phải chứa vòng tròn đơn vị.

Hình 2.5.4.1 sẽ minh họa điều này.



Hình 2.5.4.1.

Từ đây chúng ta có thể phát biểu điều kiện ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến như sau :

Một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu và chỉ nếu vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt của hệ thống.

b) Sự ổn định của một hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

Trong thực tế chúng ta chỉ gặp những hệ thống nhân quả vì vậy chúng ta sẽ nghiên cứu điều kiện ổn định đối với hệ thống nhân quả.

Hàm truyền đạt của một hệ thống nhân quả được cho bởi công thức dưới đây :

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)Z^{-n} \quad (2.5.4.1)$$

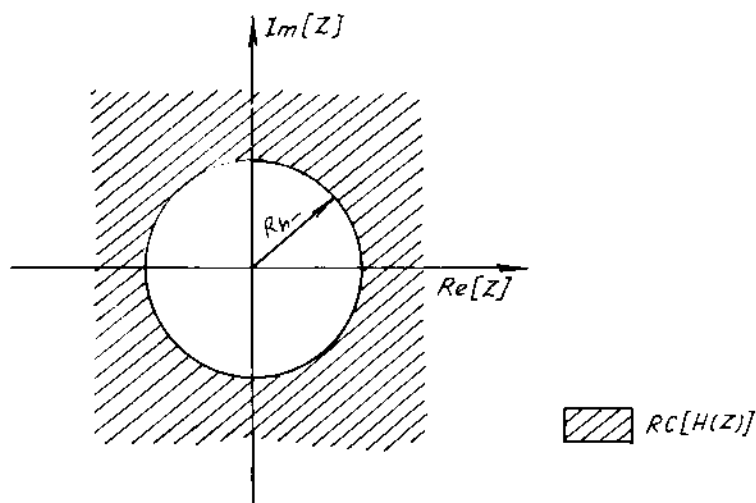
Miền hội tụ của $H(Z)$ nằm ngoài vòng tròn có bán kính R_{h-} , tức là :

$$RC [H(Z)] : |Z| > R_{h-} \quad (2.5.4.2)$$

ở đây :

$$R_{h-} = \lim_{n \rightarrow \infty} |h(n)|^{\frac{1}{n}} \quad (\text{theo tiêu chuẩn Cauchy})$$

Hình 2.5.4.2 sẽ minh họa miền hội tụ của $H(Z)$ trong trường hợp hệ thống là nhân quả.



Hình 2.5.4.2.

Từ đây ta có thể suy ra tính nhân quả của một hệ thống tuyến tính bất biến như sau :

Một hệ thống tuyến tính bất biến là nhân quả nếu và chỉ nếu miền hội tụ của hàm truyền đạt của hệ thống nằm ngoài vòng tròn có bán kính R_{h-} .

Như vậy ta thấy rằng đối với các hệ thống tuyến tính bất biến, điều kiện nhân quả và điều kiện ổn định là khác nhau và độc lập với nhau. Cụ thể là một hệ thống tuyến tính bất biến ổn định có thể là nhân quả hoặc không nhân quả. Tương tự một hệ thống nhân quả có thể ổn định hoặc không ổn định.

Trong thực tế, hệ thống thực hiện được về mặt vật lý là hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định. Vậy để xét hệ thống này chúng ta kết hợp cả hai điều kiện nhân quả và ổn định.

Ta thấy rằng đối với hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả thì hàm truyền đạt $H(Z)$ phải có miền hội tụ nằm ngoài vòng tròn bán kính R_{h-} .

Còn đối với các hệ thống ổn định thì miền hội tụ của hàm truyền đạt $H(Z)$ phải chứa vòng tròn đơn vị. Vậy đối với hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định thì hàm truyền đạt $H(Z)$ phải có miền hội tụ như sau :

$$RC [H(Z)] : |Z| > R_h- \\ R_h- < 1 \quad (2.5.4.3)$$

Mà chúng ta biết rằng miền hội tụ của hàm truyền đạt $H(Z)$ không chứa bất cứ điểm cực nào của $H(Z)$, từ đây ta rút ra điều kiện ổn định của một hệ thống bất biến nhân quả như sau :

Một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt $H(Z)$ nằm bên trong vòng tròn đơn vị.

Ví dụ 2.5.4.1 :

Giả sử ta có một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \quad a > 0$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$.

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống.

Hãy nghiên cứu độ ổn định của hệ thống nhân quả.

Giải :

Tìm $H(Z)$:

Lấy biến đổi Z của phương trình sai phân đã cho trong ví dụ này ta có :

$$Y(Z) = aZ^{-1} Y(Z) + X(Z)$$

Từ đây ta có $H(Z)$ như sau :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z - a}$$

Trong trường hợp này hàm truyền đạt $H(Z)$ có một điểm không $Z_{01} = 0$ và một điểm cực $Z_{p1} = a$.

Tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống :

$$h(n) = IZT [H(Z)]$$

Áp dụng biểu thức (2.3.5.12) và (2.3.5.13) trong trường hợp này ta có :

Đối với hệ thống nhân quả thì miền hội tụ của $H(Z)$ sẽ nằm ngoài vòng tròn có bán kính a , tức là $H(Z)$ hội tụ với $|Z| > a$, vậy ta có đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả như sau :

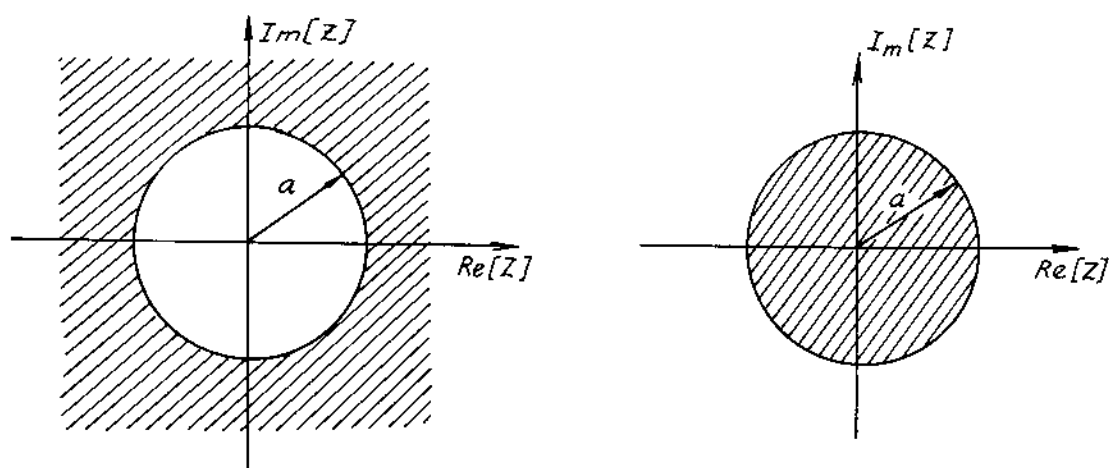
$$h(n) = a^n u(n)$$

Miền hội tụ của $H(Z)$ được minh họa trên hình (2.5.4.3a).

Đối với hệ thống tuyến tính bất biến phản nhân quả thì miền hội tụ của $H(Z)$ sẽ nằm trong vòng tròn có bán kính a , tức là $H(Z)$ hội tụ với điều kiện $|Z| < a$, vậy ta có đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến phản nhân quả như sau :

$$h(n) = -a^n u(-n-1)$$

Miền hội tụ của $H(Z)$ đối với hệ thống phản nhân quả được minh họa trên hình (2.5.4.3b).

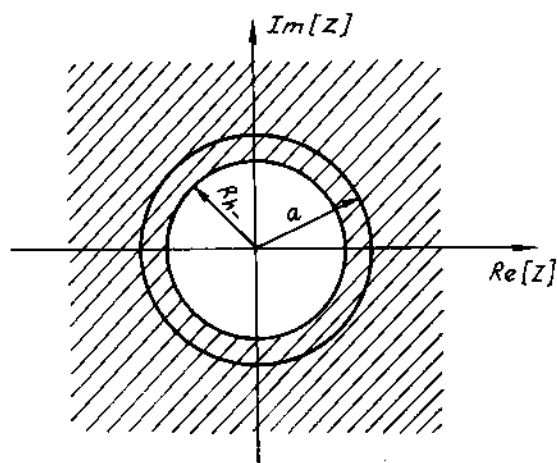


Hình 2.5.4.3.

- Nghiên cứu độ ổn định của hệ thống nhân quả :

Hàm truyền đạt $H(Z)$ chỉ có một điểm cực $Z_{p1} = a$. Vậy theo điều kiện ổn định, hệ thống nhân quả này là ổn định nếu $a < 1$, tức là $Z_{p1} = a$ phải nằm trong vòng tròn đơn vị. Trong trường hợp này đáp ứng xung $h(n)$ sẽ giảm theo hàm mũ với sự tăng của n .

Minh họa độ ổn định của hệ thống nhân quả này cho trên hình 2.5.4.4.



Hình 2.5.4.4.

Ví dụ 2.5.4.2 :

Giả sử ta có một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả có hàm truyền đạt $H(Z)$ như sau :

$$H(Z) = \frac{Z^2 - Z + 1}{Z^2 - Z + \frac{1}{2}}$$

Hãy xét sự ổn định của hệ thống này.

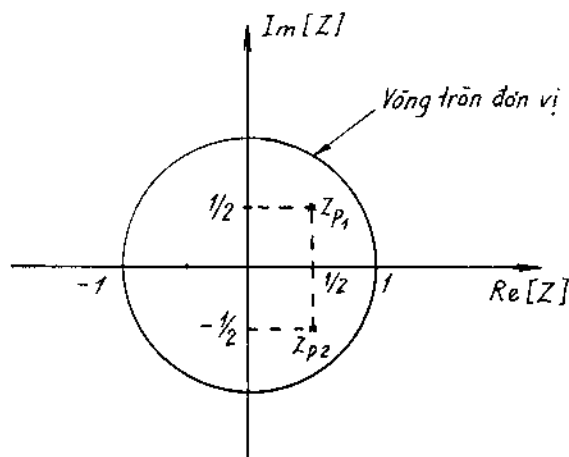
Giải :

$H(Z)$ có hai điểm cực :

$$Z_{p1} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$Z_{p2} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

Đây là hai điểm cực phức đều nằm trong vòng tròn đơn vị, vì vậy hệ thống này là ổn định. Minh họa của các điểm cực trên hình 2.5.4.5.



Hình 2.5.4.5.

c) Tiêu chuẩn ổn định Jury

Trong phần trên ta thấy rằng muốn biết một hệ thống có ổn định hay không, chúng ta phải tìm các điểm cực của hàm truyền đạt $H(Z)$. Nhưng khi bậc của mẫu số của $H(Z)$ lớn thì việc tìm các điểm cực sẽ gặp nhiều khó khăn. Để tránh tìm các điểm cực mà vẫn biết được hệ thống có ổn định hay không chúng ta có thể dùng tiêu chuẩn ổn định Jury sẽ được trình bày dưới đây (tiêu chuẩn này tương tự tiêu chuẩn Routh - Hurwitz trong trường hợp hệ thống tương tự).

Tiêu chuẩn ổn định Jury được trình bày như sau :

Giả sử ta có một hệ thống mà hàm truyền đạt $H(Z)$ của nó có dạng sau đây :

$$H(Z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{N-r}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{N-k}} \quad (2.5.4.4)$$

$$\text{Coi} \quad D(Z) = \sum_{k=0}^N a_k Z^{N-k} \quad (2.5.4.5)$$

Chúng ta dùng các hệ số a_k của $D(Z)$ để xây dựng một bảng gồm $2N - 3$ hàng như dưới đây :

Bảng 2.5.4.1

Hàng	Hệ số			
1	a_0	a_1	a_2	$\dots \dots \dots a_N$
2	a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	$\dots \dots \dots a_0$
3	c_0	c_1	c_2	$\dots \dots \dots c_{N-1}$
4	c_{N-1}	c_{N-2}	c_{N-3}	$\dots \dots \dots c_0$
5	d_0	d_1	d_2	$\dots \dots \dots d_{N-2}$
6	d_{N-2}	d_{N-3}	d_{N-4}	$\dots \dots \dots d_0$
.	.	.	.	$\dots \dots \dots$
.	.	.	.	$\dots \dots \dots$
.	.	.	.	$\dots \dots \dots$
$2N - 3$	r_0	r_1	r_2	

Các phần tử $c_i, d_i, \dots$ của bảng 2.5.4.1 được tính bằng cách sau đây :

$$\begin{aligned} c_i &= \det \begin{bmatrix} a_0 & a_{N-1} \\ a_N & a_i \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{N-1} \\ a_N & a_i \end{vmatrix} = a_0 \cdot a_i - a_N \cdot a_{N-1} \\ &\text{với } i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ d_i &= \det \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{vmatrix} = c_0 c_i - c_{N-1-i} \cdot c_{N-1} \\ &\text{với } i = 0, 1, 2, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (2.5.4.6)$$

Tính đến hàng thứ $(2N - 3)$, hàng cuối cùng này chỉ có 3 hệ số, thì ta dừng lại.

Từ đây ta phát biểu tiêu chuẩn ổn định Jury như sau :

Một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu và chỉ nếu hàm truyền đạt $H(Z)$ của nó thoả mãn các điều kiện sau đây :

$$\begin{aligned} 1. \quad & D(Z) \Big|_{Z=1} > 0 \\ 2. \quad & D(Z) \Big|_{Z=-1} > 0 && \text{với } N \text{ chẵn} \\ & D(Z) \Big|_{Z=-1} < 0 && \text{với } N \text{ lẻ} \end{aligned} \quad (2.5.4.7)$$

3.

$$\begin{aligned} |a_0| &> |a_N| \\ |c_0| &> |c_{N-1}| \\ |d_0| &> |d_{N-2}| \\ &\dots\dots\dots \\ |r_0| &> |r_2| \end{aligned}$$

Ví dụ 2.5.4.3 :

Cho một hệ thống có hàm truyền đạt như sau :

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-1} + Z^{-2}}{1 - Z^{-1} + \frac{1}{2}Z^{-2}} = \frac{Z^2 - Z + 1}{Z^2 - Z + \frac{1}{2}}$$

Hãy dùng tiêu chuẩn ổn định Jury để xét sự ổn định của hệ thống này.

Giải :

$$D(Z) = Z^2 - Z + \frac{1}{2}$$

$N = 2$: là số chẵn

$2N - 3 = 1$ hàng

Chúng ta chỉ có một hàng, vậy ta không cần lập bảng 2.5.4.1 nữa, mà ứng dụng luôn tiêu chuẩn ổn định Jury (2.5.4.7).

$$1. \quad D(Z) \Big|_{Z=1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$2. \quad D(Z) \Big|_{Z=-1} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 0 \quad (N \text{ chẵn})$$

$$3. \quad a_N = a_2 = \frac{1}{2}$$

$$1 > |a_N| \Rightarrow 1 > \frac{1}{2}$$

Cả ba điều kiện của tiêu chuẩn Jury đều được thoả mãn, vậy đây là hệ thống ổn định.

Ví dụ 2.5.4.4 :

Một hệ thống có hàm truyền đạt $H(Z)$ như sau :

$$H(Z) = \frac{1}{4 + 3Z^{-1} + 2Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4}}$$

Hãy xét sự ổn định của hệ thống này nhờ tiêu chuẩn ổn định Jury.

Giải :

Viết lại $H(Z)$:

$$H(Z) = \frac{1/4}{1 + \frac{3}{4}Z^{-1} + \frac{1}{2}Z^{-2} + \frac{1}{4}Z^{-3} + \frac{1}{4}Z^{-4}} = \frac{\frac{1}{4}Z^4}{Z^4 + \frac{3}{4}Z^3 + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{4}}$$

$$D(Z) = Z^4 + \frac{3}{4}Z^3 + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{4}$$

$N = 4$: là số chẵn.

Tìm các hệ số của bảng 2.5.4.1.

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{3}{4} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{4} \quad a_4 = \frac{1}{4}$$

$$2N - 1 = 8 - 3 = 5 \text{ hàng}$$

$$c_0 = 1 - a_4 a_4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$c_1 = a_1 - a_4 a_{4-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

$$c_2 = a_2 - a_4 a_{4-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = \frac{6}{16}$$

$$c_3 = a_3 - a_4 a_{4-3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{16}$$

$$d_0 = c_0 \cdot c_0 - c_3 \cdot c_3 = \left(\frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{224}{256}$$

$$d_1 = c_0 c_1 - c_3 c_2 = \frac{15}{16} \cdot \frac{11}{16} - \frac{1}{16} \cdot \frac{6}{16} = \frac{159}{256}$$

$$d_2 = c_0 c_2 - c_3 c_1 = \frac{15}{16} \cdot \frac{6}{16} - \frac{1}{16} \cdot \frac{11}{16} = \frac{79}{256}$$

Ứng dụng tiêu chuẩn ổn định Jury (2.5.4.7) ta có :

$$1 \quad D(Z) \Big|_{Z=1} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} > 0$$

$$2. \quad D(Z) \Big|_{Z=-1} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} > 0 \quad (N \text{ chẵn})$$

3.

$$1 > \frac{1}{4} \Rightarrow 1 > |a_4|$$

$$\frac{15}{16} > \frac{1}{16} \Rightarrow |c_0| > |c_3|$$

$$\frac{224}{256} > \frac{79}{256} \Rightarrow |d_0| > |d_2|$$

cả ba điều kiện của tiêu chuẩn Jury đều thỏa mãn, vậy hệ thống này là hệ thống ổn định.

Ví dụ 2.5.4.5 :

Giả sử ta có một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = x(n)$$

Hãy tìm hàm truyền đạt của hệ thống.

Hãy xét sự ổn định của hệ thống nhờ tiêu chuẩn Jury theo hai tham số a_1 và a_2 .

Giải :

Lấy biến đổi Z hai vế của phương trình sai phân ta có :

$$Y(Z) \cdot (1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}) = X(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}} = \frac{Z^2}{Z^2 + a_1 Z + a_2}$$

Xét sự ổn định :

$$D(Z) = Z^2 + a_1 Z + a_2$$

$$N = 2 \Rightarrow 2N - 3 = 1 \text{ hàng}$$

Ứng dụng tiêu chuẩn Jury (2.5.4.1) ta có :

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} D(Z) \\ Z = 1 \end{array} \right\} = 1 + a_1 + a_2 > 0$$

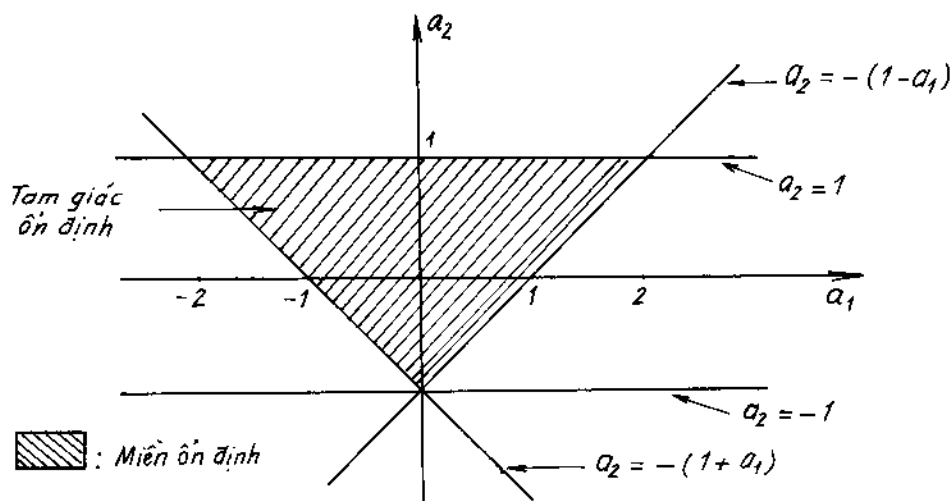
$$\Rightarrow a_2 > -(1 + a_1)$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} D(Z) \\ Z = -1 \end{array} \right\} = 1 - a_1 + a_2 > 0 \quad (N \text{ chẵn})$$

$$\Rightarrow a_2 > -(1 - a_1)$$

$$3. \quad 1 > |a_2| \Rightarrow -1 < a_2 < 1$$

Dựa vào ba điều kiện ổn định trên, chúng ta xác định miền ổn định của hệ thống theo a_1 và a_2 . Miền ổn định của hệ thống là một hình tam giác trong mặt phẳng (a_1, a_2) . Đồ thị minh họa cho trên hình 2.5.4.6.



Hình 2.5.4.6.

Chú ý

Nếu ta phân biệt chi tiết hơn đối với các điểm cực thực và điểm cực phức ta có :

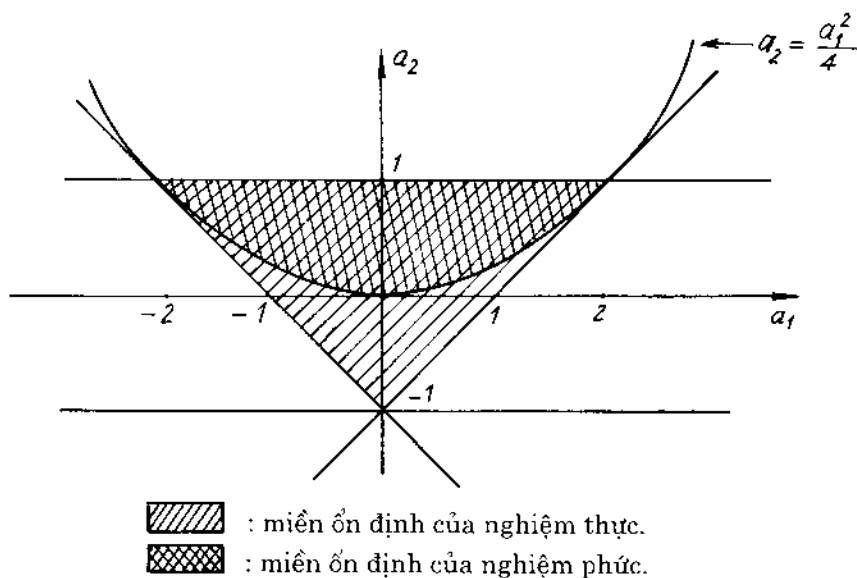
Đối với điểm cực thực :

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \Rightarrow a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$$

Đối với điểm cực phức :

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0 \Rightarrow a_2 > \frac{a_1^2}{4}$$

Đồ thị minh họa cho trên hình 2.5.4.7.



Hình 2.5.4.7.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 2.1

Hãy tìm biến đổi Z hai phía và miền hội tụ của dãy sau đây :

$$x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-|n|} \quad \text{mọi } n.$$

Bài tập 2.2

Cho dãy :

$$x(n) = u(n) - u(-n - 1)$$

Hãy tìm $X(Z)$, $X^l(Z)$ và miền hội tụ $X^l(Z)$ (biến đổi Z một phía).

Bài tập 2.3

Giả sử $X(Z)$ là hàm hữu tỷ có dạng

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

$$N(Z) = \sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}$$

$$D(Z) = \sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}$$

Hãy biểu diễn $X(Z)$ dưới dạng cực và không theo Z và Z^{-1} .

Bài tập 2.4

Cho $x(n) = 2^n \text{rect}_{10}(n)$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ, các cực và các không.

Bài tập 2.5

Cho hai dãy :

$$a) \quad x(n) = \begin{cases} e^{j\omega n} & n \geq 0, \quad \omega : \text{tham số} \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$b) \quad x(n) = \begin{cases} ne^{-an} & n \geq 0, \quad a : \text{hằng số} \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ, các cực và các không.

Bài tập 2.6

Cho hai dãy :

$$a) \quad x(n) = a^n u(-n)$$

$$b) \quad x(n) = -a^n u(-n-1)$$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ, các cực và các không.

Bài tập 2.7

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ, các cực và các không của dãy sau đây :

$$x(n) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-m+1)a^{n-m} & n \geq 0, \quad m < n \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Bài tập 2.8

Cho đáp ứng xung của hệ thống nhân quả sau :

$$h(n) = \frac{\gamma^n \sin[(n+1)b]}{\sin b} \cdot u(n)$$

Hãy tính $H(Z)$, $RC[H(Z)]$, Z_{pk} , Z_{or} .

Bài tập 2.9

Cho hai dãy :

$$a) x_1(n) = \text{rect}_N(n) \quad \text{và} \quad b) x_2(n) = n_0 \text{rect}_N(n)$$

Hãy tính ZT của chúng và miền hội tụ.

Bài tập 2.10

Cho dãy :

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -b^n & n < 0 \end{cases}$$

Tính $X(Z)$, $RC[X(Z)]$, Z_{pk} , Z_{or} .

Lập luận trong các trường hợp $|a| = |b|$ và $|a| \neq |b|$

Bài tập 2.11

Cho :

$$X(Z) = \frac{Z^3}{Z-1}$$

Hãy tìm $x(n)$ dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Bài tập 2.12

Hãy tìm biến đổi Z ngược ứng với dãy nhân quả của $X(Z)$ như sau :

$$X(Z) = \frac{4}{Z^3(2Z-1)} \quad |Z| > \frac{1}{2}$$

Bài tập 2.13

Dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Hãy tìm biến đổi Z ngược nhân quả với $X(Z)$:

$$X(Z) = \frac{4Z^2 + 8Z}{4Z^2 - 5Z + 1}$$

Bài tập 2.14

Cho

$$X(Z) = \frac{Z}{(Z-1)^2(Z-2)}$$

Dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Tìm $x(n)$ ứng với tất cả các miền hội tụ của $X(Z)$.

Bài tập 2.15

Cho

$$X(Z) = \frac{1}{1 - \sqrt{3}Z^{-1} + Z^{-2}}$$

Hãy tìm biến đổi Z ngược bằng phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa.

Bài tập 2.16

Cho

$$X(Z) = \frac{Z^{-1}}{1 - \sqrt{2}Z^{-1} + Z^{-2}}$$

Hãy tìm biến đổi Z ngược bằng phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa.

Bài tập 2.17

Hãy tìm biến đổi Z ngược của $X(Z)$ sau đây :

$$X(Z) = e^z + e^{1/z}$$

Bài tập 2.18

Nếu ta có các quan hệ sau :

$$ZT[x_1(n)] = X_1(Z) ; \quad ZT[x_2(n)] = X_2(Z) ; \quad X_2(Z) = X_1(Z^M)$$

a) Hãy tìm $x_2(n)$ theo hàm của $x_1(n)$.

b) Hãy tìm $x_2(n)$ nếu ta có :

$$X_2(Z) = \frac{Z^M}{Z^M - 1}$$

Bài tập 2.19

Nếu ta có :

$$\begin{aligned} x(n) &= 0 & \text{với } n < 0 \\ x(n) &= x(n+N) & \text{với } n \geq 0 \end{aligned}$$

thì ta có :

$$X(Z) = F(Z) \sum_{n=0}^{N-1} x(n)Z^{-n}$$

Hãy tìm $F(Z)$.

Bài tập 2.20

Hàm truyền đạt của một hệ thống số được cho bởi biểu thức sau :

$$H(Z) = \frac{G(Z^2) + Z^{\frac{N-1}{2}}}{2}$$

Hãy tìm $h(n)$ theo hàm của $g(n)$.

Bài tập 2.21

Cho một hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả có đáp ứng xung $h(n)$ như sau :

$$h(n) = \begin{cases} b^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Hãy ứng dụng cách biểu diễn trong miền Z tìm đáp ứng ra của hệ thống ứng với kích thích nhân quả như sau :

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$a \neq b$

Bài tập 2.22

Một hệ thống tuyến tính bất biến có phương trình sai phân như sau :

$$y(n) = 3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)$$

với điều kiện đầu là : $y(-1) = y(-2) = 0$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống.
- Hãy nghiên cứu tính ổn định và tính nhân quả của hệ thống.
- Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống.

Bài tập 2.23

Giả sử chúng ta có một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân như sau đây :

$$y(n) = 0,3y(n-1) + 0,3y(n-2) - 0,3x(n).$$

Điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$.

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống.
- Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$.
- Hãy nghiên cứu tính ổn định và nhân quả của hệ thống.

Bài tập 2.24

Hãy dùng biến đổi Z một phía để giải các phương trình sai phân sau đây :

$$a) \quad y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

điều kiện đầu : $y(-1) = y(-2) = 1$

$$b) \quad y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

điều kiện đầu : $y(-1) = 1$.

$$c) \quad y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n)$$

$$x(n) = u(n)$$

điều kiện đầu $y(-1) = 0, y(-2) = 1$.

Bài tập 2.25

Cho hai hệ thống được mô tả bởi hai phương trình sai phân sau đây :

a) $y(n] = y(n - 1) + x(n) - 3x(n - 1) + 2x(n - 2).$

b) $y(n] = x(n) - 2x(n - 1)$

Hãy so sánh hai hệ thống này và rút ra những nhận xét gì ?

Bài tập 2.26

Hãy dựa vào vị trí các điểm cực trên mặt phẳng Z để xác định độ ổn định của các hệ thống có hàm truyền đạt như sau :

a) $H_1(Z) = 1 + Z^{-1} - 2Z^{-2} + Z^{-3}$

b) $H_2(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}Z^{-2}\right)\left(1 - 0,3Z^{-1}\right)}$

c) $H_3(Z) = \frac{1}{(Z + 0,5)(Z^2 - Z + 1)}$

Bài tập 2.27

Hãy dùng tiêu chuẩn ổn định Jury để xét sự ổn định của các hệ thống có hàm truyền đạt như sau :

a) $H_1(Z) = \frac{Z^{-1} + 2Z^{-2} + 3Z^{-3}}{1 + \frac{1}{2}Z^{-1} + \frac{1}{3}Z^{-2} + \frac{1}{4}Z^{-3}}$

b) $H_2(Z) = \frac{1}{3 + Z^{-1} + Z^{-2} + \frac{1}{2}Z^{-3} + \frac{1}{3}Z^{-4} + Z^{-5}}$

Bài tập 2.28

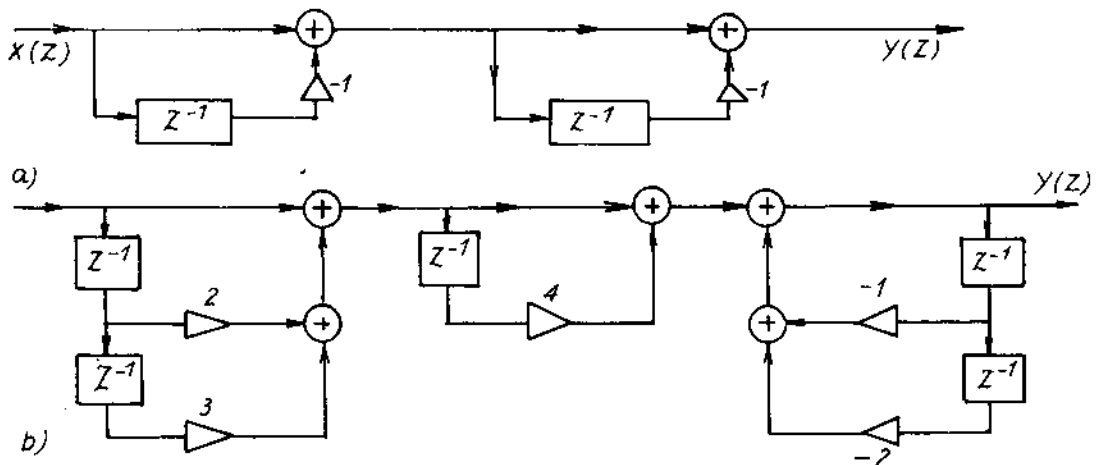
Hãy dùng tiêu chuẩn ổn định Jury để xét sự ổn định của các hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

a) $y(n] = 0,02 y(n - 1) + 0,1 y(n - 2) + 0,03 y(n - 3) + 0,25 y(n - 4) + 0,5x(n) + 0,3x(n - 1)$

b) $y(n] = 0,15y(n - 3) + 0,3y(n - 4) + 0,2y(n - 5) + 0,01y(n - 6) + 0,1x(n) + 0,2x(n - 1).$

Bài tập 2.29

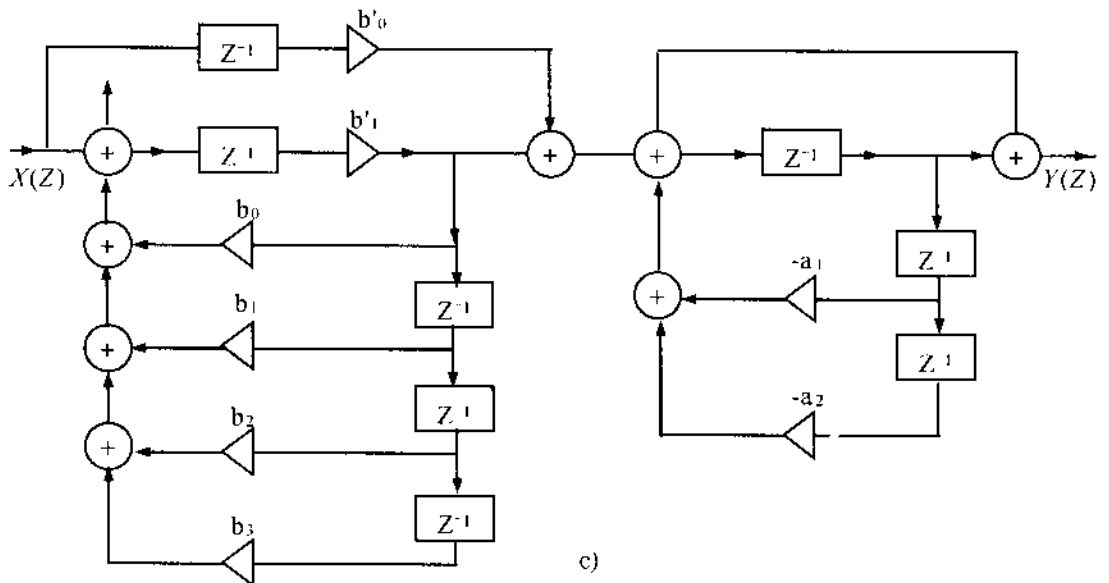
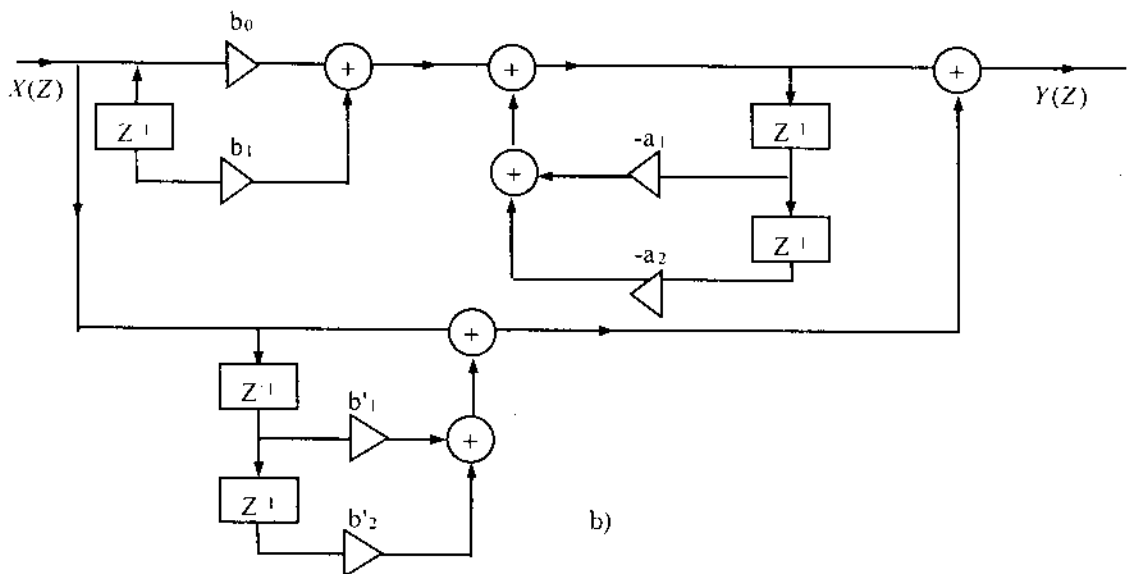
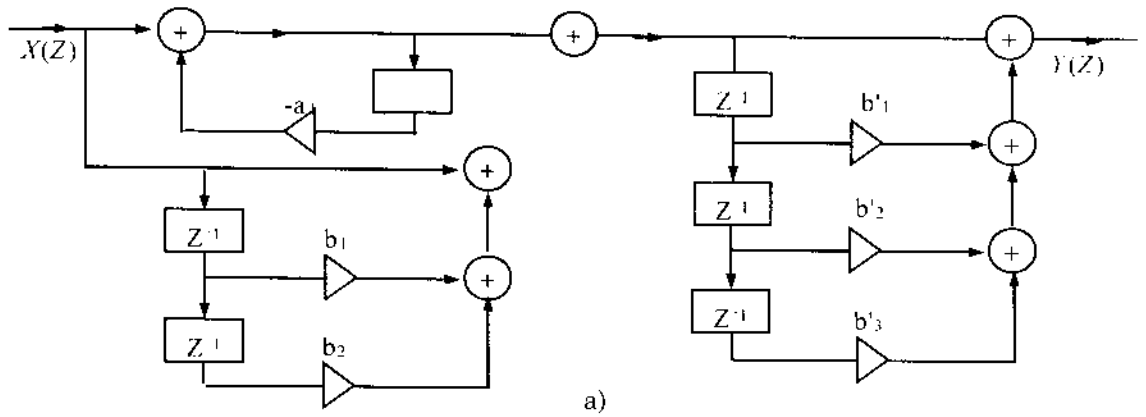
Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ và xét độ ổn định các hệ thống có sơ đồ sau đây :



Hình BT2.29

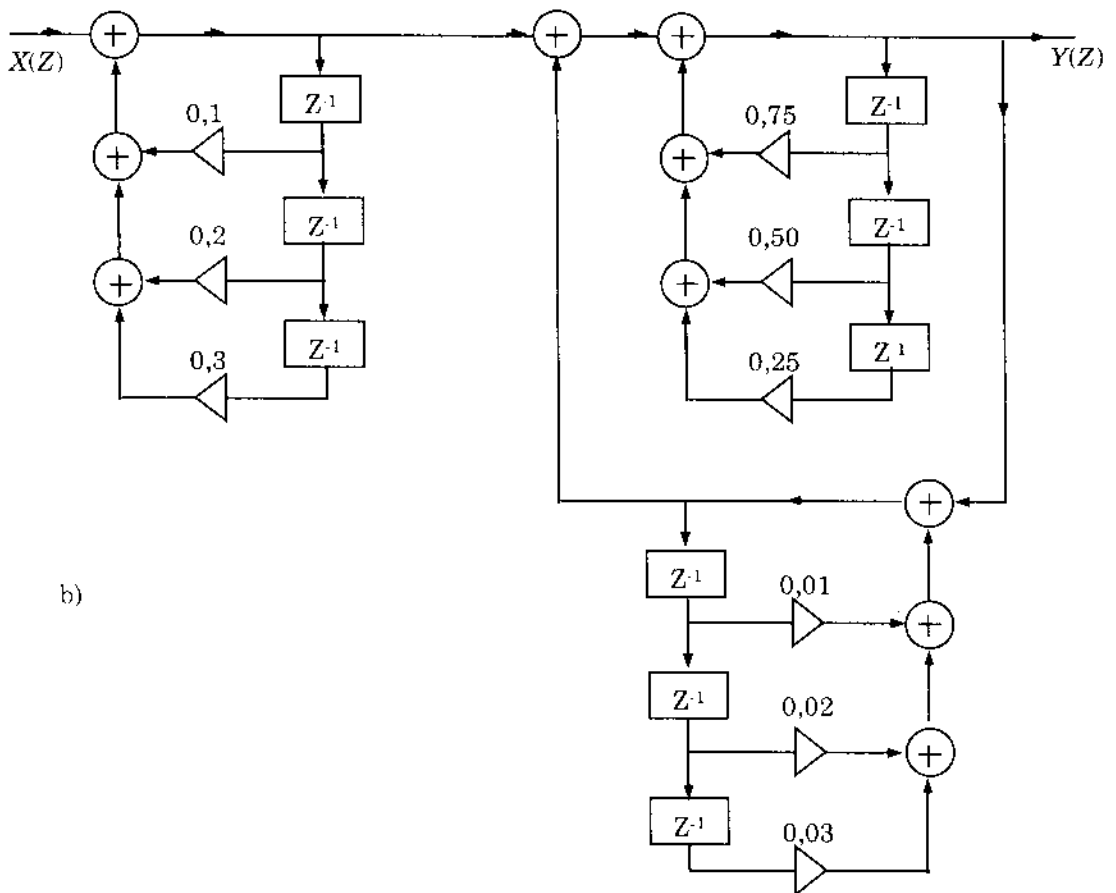
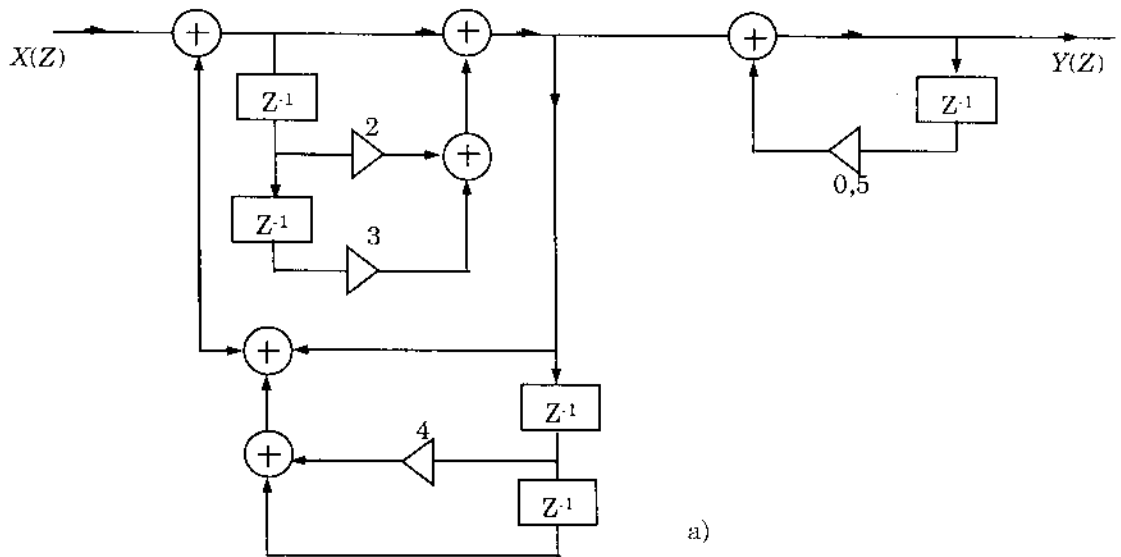
Bài tập 2.30

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ của các hệ thống sau đây :



Bài tập 2.31

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ và dùng tiêu chuẩn ổn định Jury để xét sự ổn định của các hệ thống rời rạc có sơ đồ sau đây :



Bài tập 2.32

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$y(n) = 3x(n) + 4x(n-1) - 5x(n-2)$$

Hãy tìm $h(n)$, $H(Z)$.

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.33

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$2y(n) = 2x(n) - 4x(n-1) + 6x(n-2) - 8x(n-3)$$

Hãy tìm $h(n)$, $H(Z)$.

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.34

Cho hệ thống có hàm truyền đạt như sau :

$$H(Z) = 1 + 2Z^{-1} - 3Z^{-2} + 2Z^{-3} + Z^{-4}$$

Hãy tìm $h(n)$.

Hãy viết phương trình sai phân

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.35

Cho hệ thống có đáp ứng xung $h(n)$ như sau :

$$h(n) = \text{rect}_4(n)$$

Hãy tìm $H(Z)$.

Hãy viết phương trình sai phân

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.36

Cho hệ thống có đáp ứng xung $h(n)$ như sau :

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

với : $h_1(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h_2(n) = u(n) - u(n-5)$$

Hãy tìm $H(Z)$.

Hãy viết phương trình sai phân

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.37

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau :

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 3x(n-2) - 4y(n-1) + 5y(n-2) + y(n-3)$$

Hãy tìm $H(Z)$.

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.38

Cho hệ thống có hàm truyền đạt như sau :

$$H(Z) = \frac{3 + 4Z^{-1}}{1 + 5Z^{-1} - 6Z^{-2}} + 2Z^{-1}$$

Hãy viết phương trình sai phân

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.39

Cho hệ thống có hàm truyền đạt như sau :

$$H(Z) = \frac{2}{(Z - \frac{1}{2})(Z - \frac{1}{3})(Z - \frac{1}{4})}$$

Hãy tìm $h(n)$.

Hãy viết phương trình sai phân.

Hãy xét sự ổn định của hệ thống

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.40

Cho hệ thống có đáp ứng xung như sau :

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot u(n-1)$$

Hãy tìm $H(Z)$.

Hãy viết phương trình sai phân.

Hãy xét sự ổn định của hệ thống

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 2.41

Cho hệ thống có đáp ứng xung như sau :

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

với : $h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$

$$h_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$h_2(n) = u(n) - u(n-5)$$

Hãy tìm $H(Z)$.

Hãy viết phương trình sai phân.

Hãy xét sự ổn định của hệ thống

Hãy vẽ sơ đồ.

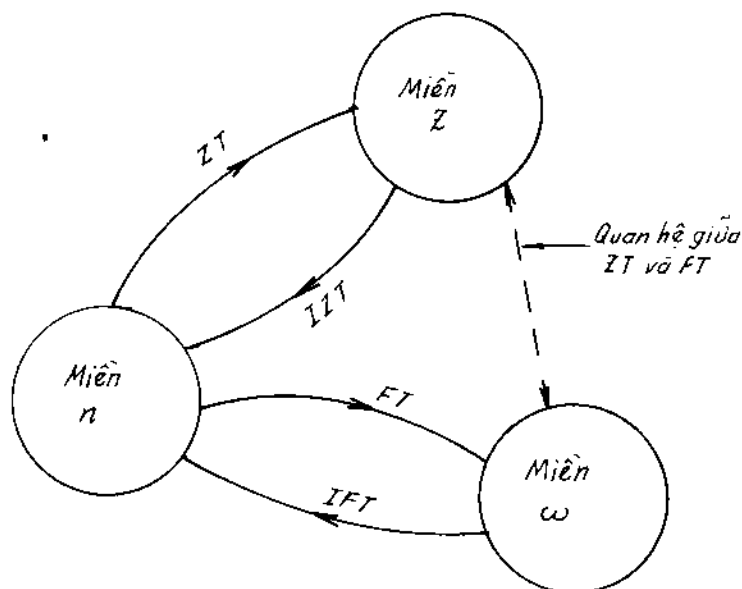
Chương 3. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

3.1. MỞ ĐẦU

Ở chương 1 chúng ta đã tiến hành nghiên cứu trực tiếp tín hiệu của hệ thống rời rạc trong miền biến số độc lập, như ta đã biết một phương pháp nghiên cứu trực tiếp này nhiều khi gặp những khó khăn phức tạp và hiệu quả không cao. Sau đó ở chương 2, thông qua biến đổi Z chúng ta đã tiến hành nghiên cứu tín hiệu của hệ thống rời rạc trong miền Z và chúng ta đã thấy được những thuận lợi của phương pháp nghiên cứu gián tiếp này.

Trong chương này chúng ta sẽ dùng một công cụ toán học khác, đó là biến đổi Fourier để chuyển việc biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc từ miền biến số độc lập n sang miền tần số liên tục ω .

Như vậy cho đến chương 3 này chúng ta có 3 miền biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc. Sự liên hệ giữa các miền biểu diễn được minh họa trên hình 3.1.1



Hình 3.1.1.

FT: Fourier Transform (biến đổi Fourier)

IFT: Inverse Fourier Transform (biến đổi Fourier ngược)

3.2. BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC

3.2.1. ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI FOURIER (FOURIER TRANSFORM)

a) Định nghĩa

Biến đổi Fourier của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.2.1.1)$$

Như vậy biến đổi Fourier đã chuyển việc biểu diễn tín hiệu $x(n)$ trong miền biến số độc lập n thành việc biểu diễn tín hiệu $X(e^{j\omega})$ trong miền tần số ω (hoặc tần số $f = \frac{\omega}{2\pi}$),

tức là trên trục ảo $j\omega$, vì $j\omega$ là biến số ảo. Như vậy ta thấy rằng $X(e^{j\omega})$ sẽ là một hàm phức của biến số ω .

Theo quan điểm toán tử, chúng ta sẽ dùng ký hiệu toán tử FT như sau:

$$\begin{aligned} FT[x(n)] &= X(e^{j\omega}) \\ x(n) &\xrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (3.2.1.2)$$

tức là toán tử FT tác động vào $x(n)$ sẽ cho $X(e^{j\omega})$.

b) Các phương pháp thể hiện $X(e^{j\omega})$

* Thể hiện dưới dạng phần thực và phần ảo.

Bởi vì $X(e^{j\omega})$ là một hàm biến số phức nên ta có thể biểu diễn $X(e^{j\omega})$ trong miền tần số ω dưới dạng phần thực và phần ảo như biểu thức (3.2.1.3) sau đây:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= R_e[X(e^{j\omega})] + jI_m[X(e^{j\omega})] \\ R_e[X(e^{j\omega})] &: \text{phần thực của } X(e^{j\omega}) \\ I_m[X(e^{j\omega})] &: \text{phần ảo của } X(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (3.2.1.3)$$

* Thể hiện dưới dạng Modulun và argument

$X(e^{j\omega})$ là hàm biến số phức vậy ta có thể thể hiện nó dưới dạng modulun và argument như biểu thức sau đây:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]} \quad (3.2.1.4)$$

Ở đây:

$| |$: Là modulun

$\arg$: Là argument

$|X(e^{j\omega})|$: gọi là phổ biên độ của $x(n)$.

$\arg[X(e^{j\omega})]$: gọi là phổ pha của $x(n)$.

Ta cũng có quan hệ giữa phổ biên độ, phổ pha và phần thực, phần ảo của $X(e^{j\omega})$ như sau:

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{Re^2[X(e^{j\omega})] + Im^2[X(e^{j\omega})]} \quad (3.2.1.5)$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \arctg \frac{Im[X(e^{j\omega})]}{Re[X(e^{j\omega})]} \quad (3.2.1.6)$$

Ngoài ra ta còn dùng ký hiệu $\varphi(\omega)$ để chỉ argument, ta có:

$$\varphi(\omega) \equiv \arg[X(e^{j\omega})] \quad (3.2.1.7)$$

Vậy ta có:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.2.1.8)$$

* Thể hiện dưới dạng độ lớn và pha

Giả sử ta thể hiện $X(e^{j\omega})$ ở dạng sau đây:

$$X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} \quad (3.2.1.9)$$

Ở đây $A(e^{j\omega})$ là thực và có thể lấy giá trị dương hoặc âm, tức là:

$$|A(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \quad (3.2.1.10)$$

$$\arg[A(e^{j\omega})] = \begin{cases} 2k\pi & \text{nếu } A(e^{j\omega}) \geq 0; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ (2k+1)\pi & \text{nếu } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases} \quad (3.2.1.11)$$

Vậy ta có thể viết:

$$\arg[A(e^{j\omega})] = \left\{ 2k + \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sgn}[A(e^{j\omega})] \right] \right\} \pi \quad (3.2.1.12)$$

Và ta biết rằng hàm dấu Sgn được thể hiện như sau:

$$\operatorname{Sgn}[A(e^{j\omega})] = \frac{A(e^{j\omega})}{|A(e^{j\omega})|}$$

Do đó:

$$\arg[A(e^{j\omega})] = \left\{ 2k + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{A(e^{j\omega})}{|A(e^{j\omega})|} \right] \right\} \pi \quad (3.2.1.13)$$

Còn $\theta(\omega)$ sẽ được thể hiện như sau:

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \arg[A(e^{j\omega})] + \theta(\omega) = \varphi(\omega) \quad (3.2.1.14)$$

Vậy:

$$\theta(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})] - \arg[A(e^{j\omega})] = \varphi(\omega) - \arg[A(e^{j\omega})] \quad (3.2.1.15)$$

Ví dụ 3.2.1.1 : Cho phổ $X(e^{j\omega})$ có dạng sau:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \sin 3\omega$$

Hãy tìm:

- $Re[X(e^{j\omega})]$ và $Im[X(e^{j\omega})]$
- $A(e^{j\omega})$ và $\theta(\omega)$
- $|X(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$
- Vẽ $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$

Giải :

a) Vì
$$e^{-j\frac{\omega}{2}} = \cos \frac{\omega}{2} - j \sin \frac{\omega}{2}$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} Re[X(e^{j\omega})] &= \cos \frac{\omega}{2} \sin 3\omega \\ Im[X(e^{j\omega})] &= -\sin \frac{\omega}{2} \sin 3\omega \end{aligned}$$

b) Từ biểu thức 3.2.1.9 ta có:

$$A(e^{j\omega}) = \sin 3\omega$$

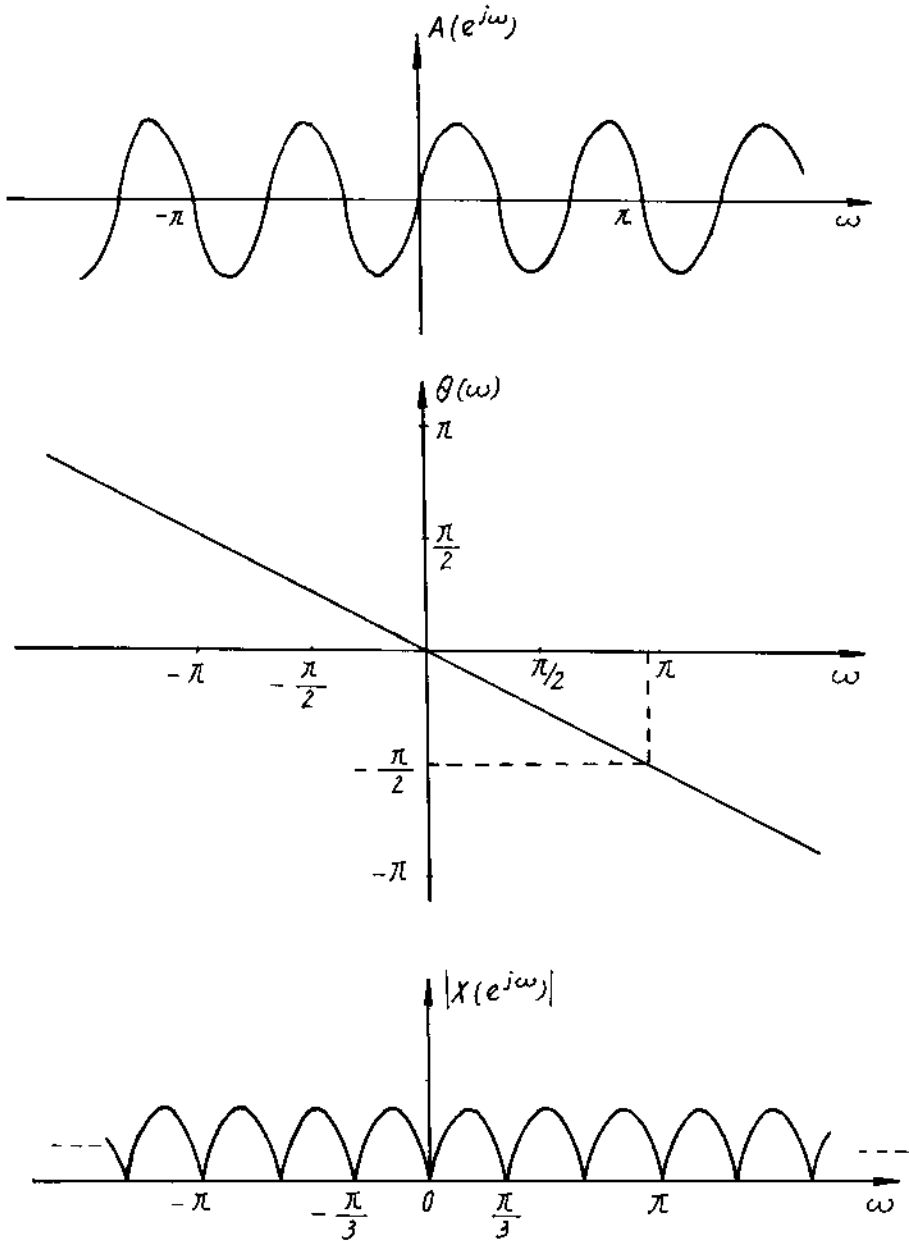
$$\theta(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$

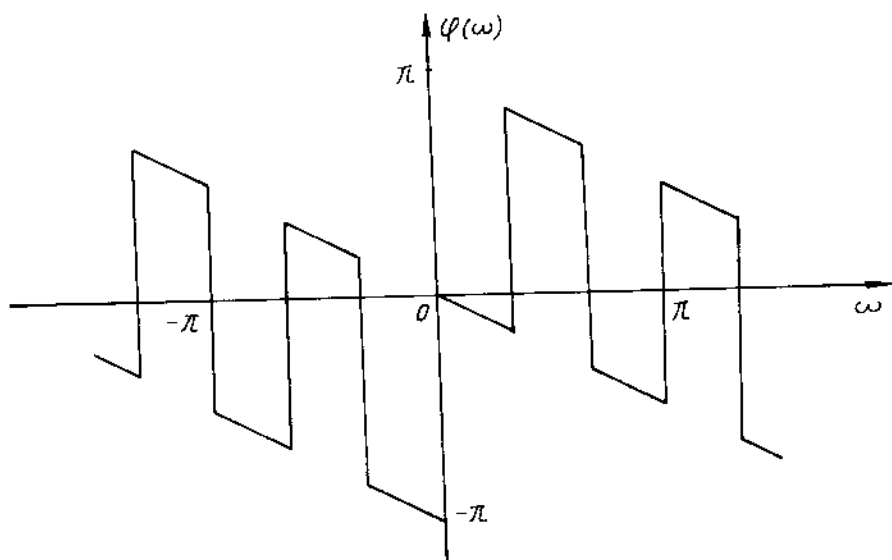
c) Từ biểu thức (3.2.1.10) và (3.2.1.13) và (3.2.1.14) ta có:

$$|X(e^{j\omega})| = |\sin 3\omega|$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega}{2} + \left\{ 2k \pm \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin 3\omega}{|\sin 3\omega|} \right] \right\} \pi$$

d) Đồ thị của $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$ được cho trên hình 3.2.1.1.





$$\text{Với } \arg[A(e^{j\omega})] = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A(e^{j\omega}) \geq 0 \\ -\pi & \text{nếu } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases} \quad \text{Với } \arg[A(e^{j\omega})] = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A(e^{j\omega}) \geq 0 \\ \pi & \text{nếu } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

Hình 3.2.1.1

Ví dụ 3.2.1.2 : Hãy tìm biến đổi Fourier của các dãy sau đây:

$$x_1(n) = \delta(n)$$

$$x_2(n) = \delta(n-1)$$

$$x_3(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$$

$$x_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$x_5(n) = u(n)$$

$$x_6(n) = 2^n u(n)$$

Giải :

$$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-j\omega n} = 1$$

$$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega}$$

$$FT[x_3(n)] = X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1)e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1)e^{-j\omega n} = e^{j\omega} + e^{-j\omega}$$

$$\begin{aligned} FT[x_4(n)] &= X_4(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_4(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

$$FT[x_5(n)] = X_5(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_5(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}$$

chuỗi này không tồn tại vì $|e^{-j\omega n}| = 1$. Vậy ta nói rằng dãy $x_5(n)$ không có biến đổi Fourier. Tương tự ta thấy rằng $x_6(n)$ cũng không có biến đổi Fourier.

$$FT[x_6(n)] = X_6(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2e^{-j\omega})^n$$

chuỗi này không tồn tại vì $|2e^{-j\omega}| = 2 > 1$.

Vậy $x_6(n)$ không có FT.

Ví dụ 3.2.1.3 : Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \text{rect}_N(n)$$

- Hãy tìm $X(e^{j\omega})$
- Hãy tìm phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$.

Giải :

Trước tiên ta tìm biến đổi Fourier của dãy $x(n)$:

$$\begin{aligned} FT[x(n)] &= X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}}}{e^{j\omega \frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega \frac{\omega}{2}}} \cdot \frac{e^{-j\omega \frac{N}{2}}}{e^{-j\omega \frac{\omega}{2}}} = e^{-j(N-1)\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$

Vậy ta có phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$ như sau :

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right| \\ \arg[X(e^{j\omega})] &= -(N-1)\frac{\omega}{2} + \arg \left[\frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right] \end{aligned}$$

ở đây

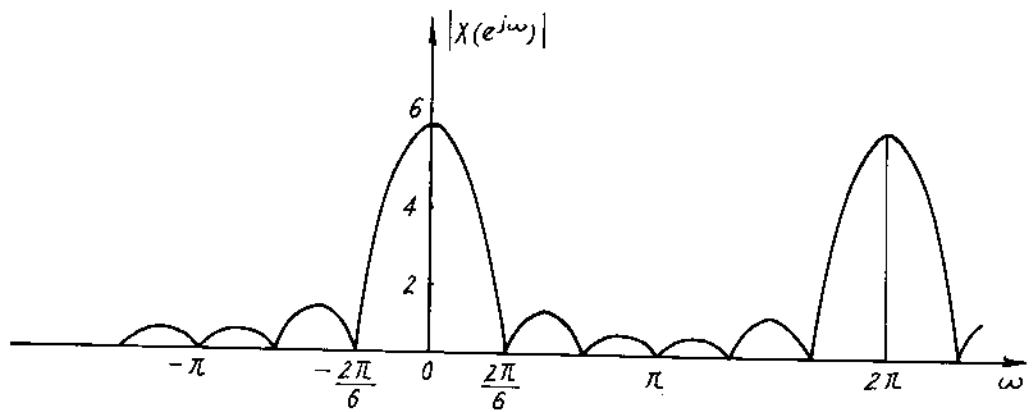
$$\arg \left[\frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right] = \left\{ 2k \pm \frac{1}{2} \left[1 - \text{sgn} \left(\frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right) \right] \right\} \cdot \pi$$

$$\text{Sgn} \left[\frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right] = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

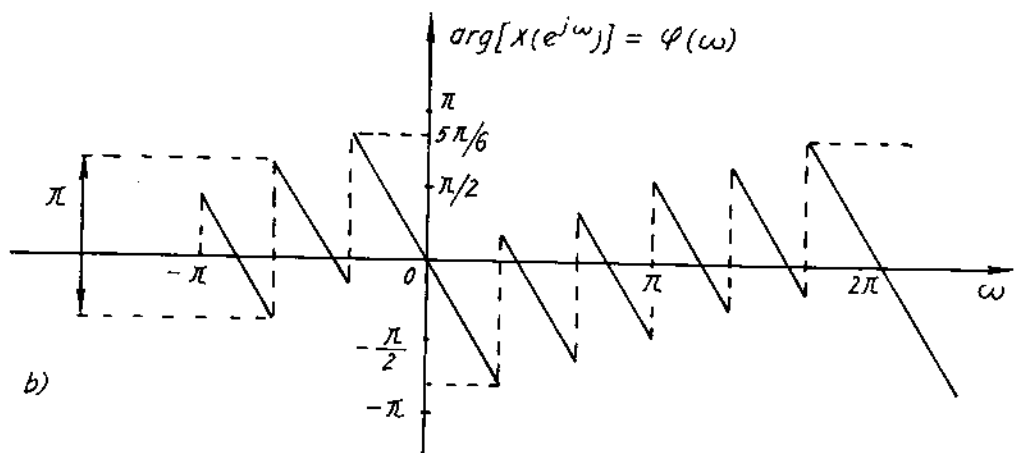
$$A(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

$$\theta(e^{j\omega}) = -(N-1) \frac{\omega}{2}$$

Đồ thị của $|X(e^{j\omega})|$ và $\arg [X(e^{j\omega})]$ với $N = 6$ được cho trên hình 3.2.1.2.



a)



b)

Hình 3.2.1.2.

3.2.2. SỰ TỒN TẠI CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

Ta thấy rằng biến đổi Fourier chỉ tồn tại nếu chuỗi trong (3.2.1.1) hội tụ. Ta có thể phát biểu điều kiện hội tụ của chuỗi này như sau:

Chuỗi trong (3.2.1.1) hội tụ nếu và chỉ nếu $x(n)$ thoả mãn điều kiện sau đây:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad 3.2.2.1)$$

Nếu điều kiện này được thoả mãn thì chuỗi (3.2.1.1) sẽ hội tụ tuyệt đối về một hàm liên tục của ω .

Nhận xét :

Về mặt toán học chúng ta có quan hệ sau đây:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2 \quad 3.2.2.2)$$

mà nếu:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

thì :

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2 < \infty$$

và ta cũng có:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad 3.2.2.3)$$

Vậy nếu năng lượng E_x của tín hiệu $x(n)$ là hữu hạn thì $x(n)$ sẽ thoả mãn điều kiện (3.2.2.1), tức là ta có thể nói rằng: **Biến đổi Fourier của tín hiệu có năng lượng hữu hạn là luôn luôn tồn tại.**

Ví dụ 3.2.2.1: Hãy xét sự tồn tại của biến đổi Fourier và tính năng lượng E_x của các dãy $x(n)$ sau đây:

- a) $x_1(n) = u(n)$
- b) $x_2(n) = r(n)$
- c) $x_3(n) = \delta(n)$
- d) $x_4(n) = \text{rect}_N(n)$

Giải :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \\ E_{x_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} 1^2 = \infty \end{aligned}$$

Vậy $X_1(e^{j\omega})$ là không tồn tại.

$$\text{b)} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$$

$$E_{X_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |n|^2 = \infty$$

Vậy $X_2(e^{j\omega})$ là không tồn tại.

$$c) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)| = 1 < \infty$$

$$E_{X_3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)|^2 = 1$$

Vậy $X_3(e^{j\omega})$ tồn tại.

$$d) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_4(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{rect}_N(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N < \infty$$

$$E_{X_4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{rect}_N(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |1|^2 = N$$

Vậy $X_4(e^{j\omega})$ tồn tại.

3.2.3. BIẾN ĐỔI FOURIER NGƯỢC (INVERSE FOURIER TRANSFORM)

Chúng ta biết rằng $X(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn của biến tần số ω có chu kỳ là 2π và $X(e^{j\omega})$ tồn tại nếu điều kiện (3.2.2.1) được thỏa mãn. Vậy chúng ta có thể khai triển hàm $X(e^{j\omega})$ thành chuỗi Fourier trong khoảng $(-\pi, \pi)$ vì thế chúng ta có thể coi các hệ số của khai triển chuỗi Fourier này chính là $x(n)$, tức là chúng ta có thể tìm thấy các giá trị của $x(n)$ từ $X(e^{j\omega})$.

Bây giờ chúng ta sẽ thiết lập công thức tính $x(n)$ từ $X(e^{j\omega})$. Từ công thức (3.2.1.1) ta có:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Nhân cả hai vế với $e^{j\omega l}$ rồi lấy tích phân trong khoảng $(-\pi, \pi)$ ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega l} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega l} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega(l-n)} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega$$

Ta biết rằng:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{nếu } l = n \\ 0 & \text{nếu } l \neq n \end{cases} \quad (3.2.3.1)$$

Vậy:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x(l) & \text{nếu } l = n \\ 0 & \text{nếu } l \neq n \end{cases}$$

Cuối cùng ta có:

$$x(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega l} d\omega \quad (3.2.3.2)$$

Vậy ta có cặp biến đổi Fourier sau đây:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.2.3.3)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Ta có thể dùng ký hiệu toán tử sau đây để biểu diễn biến đổi Fourier ngược:

$$IFT [X(e^{j\omega})] = x(n) \quad (3.2.3.4)$$

hoặc:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{IFT} x(n) \quad (3.2.3.5)$$

Và để biểu diễn cặp biến đổi Fourier ta có:

$$\left. \begin{aligned} FT [x(n)] &= X(e^{j\omega}) \\ IFT [X(e^{j\omega})] &= x(n) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3.6)$$

hoặc:

$$x(n) \xrightleftharpoons[IFT]{FT} X(e^{j\omega}) \quad (3.2.3.7)$$

Ví dụ 3.2.3.1 : Cho

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

n_0 : số nguyên

Hãy tìm $x(n)$, hãy vẽ $X(e^{j\omega})$ và $x(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, $n_0 = 4$

Giải : Từ biểu thức (3.2.3.2) ta có:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-n_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(n-n_0)} e^{j\omega(n-n_0)} \bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n-n_0)]}{\omega_c(n-n_0)} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}[\omega_c(n-n_0)] \end{aligned}$$

Với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ và $n_0 = 4$ ta có:

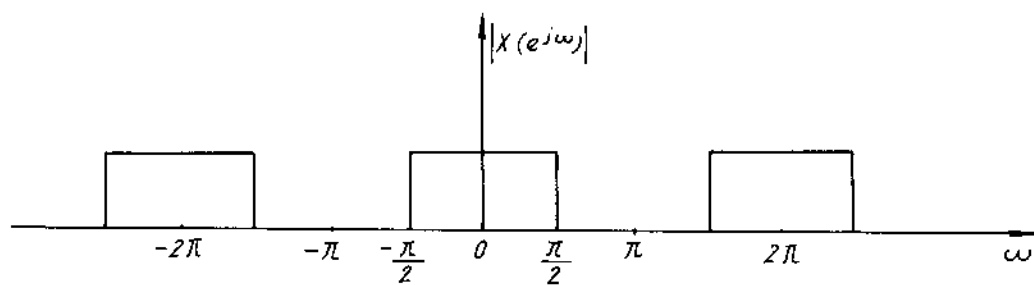
$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j4\omega} & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$x(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(n-4)}{\frac{\pi}{2}(n-4)}$$

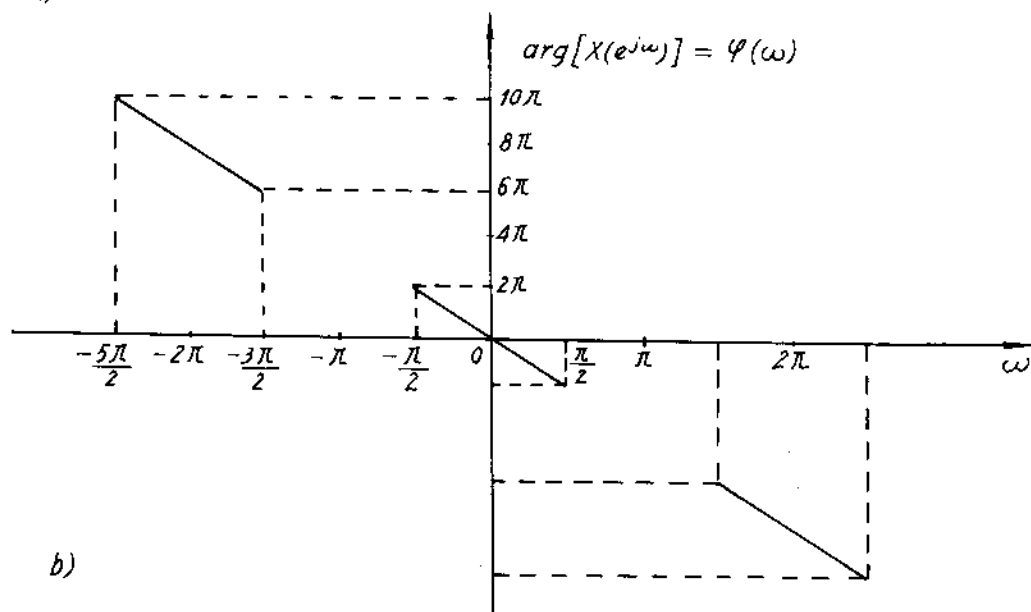
$X(e^{j\omega})$ và $x(n)$ được vẽ trên hình 3.2.3.1

$$\left| X(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

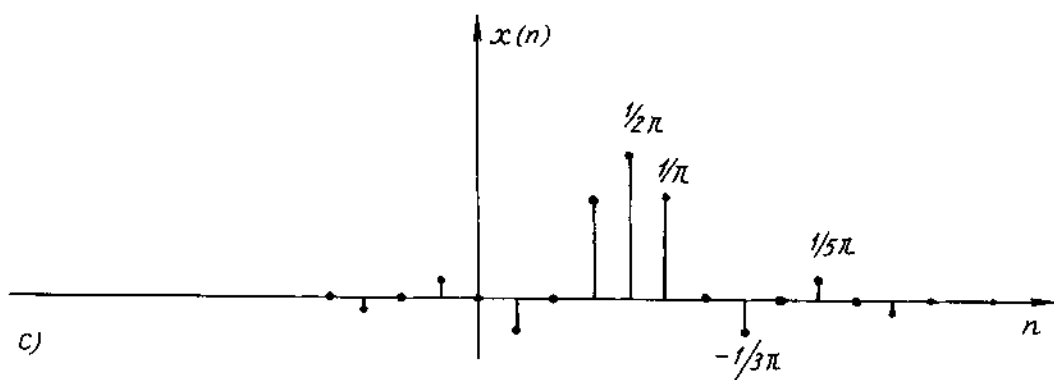
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -4\omega & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$



a)



b)



c)

Hình 3.2.3.1

3.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

Phần trên chúng ta đã thiết lập được cặp biến đổi Fourier (3.2.3.3). Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu các tính chất của biến đổi Fourier để chúng ta có thể đơn giản hoá được những vấn đề phức tạp của việc phân tích tần số tín hiệu. Như vậy ta thấy rằng $X(e^{j\omega})$ có chu kỳ là 2π , vì vậy chúng ta chỉ cần nghiên cứu phổ trong khoảng $(-\pi, \pi)$ hoặc $(0, 2\pi)$, khoảng tần số này ta gọi là khoảng cơ bản.

3.3.1. TÍNH CHẤT TUYẾN TÍNH

Giả sử ta có hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ và biến đổi Fourier của chúng là :

$$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$$

$$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

Chúng ta coi $x(n)$ được tạo bởi tổ hợp tuyến tính của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau :

$$x(n) = a x_1(n) + b x_2(n) \quad (3.3.1.1)$$

Ở đây a và b là các hằng số.

Biến đổi Fourier của $x(n)$ được cho bởi :

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)]e^{-j\omega n} = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (3.3.1.2)$$

Biểu thức (3.3.1.1) và (3.3.1.2) thể hiện tính tuyến tính của biến đổi Fourier.

Ví dụ 3.3.1.1 : Hãy xác định biến đổi Fourier của tín hiệu sau đây :

$$x(n) = 2 x_1(n) + 3 x_2(n)$$

với :

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải : Áp dụng tính chất tuyến tính ở trên ta có :

$$X(e^{j\omega}) = 2X_1(e^{j\omega}) + 3X_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Vậy :

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{1}{2 - e^{-j\omega}} + \frac{1}{3 - e^{-j\omega}} = \frac{1 - 2e^{-j\omega}}{6 - 5e^{-j\omega} + e^{j2\omega}}$$

3.3.2. TÍNH CHẤT TRỄ

Giả sử $y(n)$ là phiên bản trễ của $x(n)$, tức là:

$$y(n) = x(n - n_0) \quad (3.3.2.1)$$

n_0 : số nguyên.

Ta có :

$$Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0)e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số : $l = n - n_0$, ta có :

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega l} e^{-j\omega n_0} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (3.3.2.2)$$

Biểu thức (3.3.2.1) và (3.3.2.2) thể hiện tính chất trễ của biến đổi Fourier. Nếu ta biểu diễn $Y(e^{j\omega})$ ở dạng modul và argument, ta có:

$$\begin{aligned} |Y(e^{j\omega})| &= |X(e^{j\omega})| \\ \arg[Y(e^{j\omega})] &= -\omega n_0 + \arg[X(e^{j\omega})] \end{aligned} \quad (3.3.2.3)$$

Từ biểu thức (3.3.2.3) ta thấy rằng tín hiệu $x(n)$ trễ đi n_0 mẫu trong miền biến số độc lập n , thì trong miền tần số phổ biên độ của nó giữ nguyên không đổi, còn phổ pha của nó sẽ tăng thêm một lượng $-\omega n_0$.

Ví dụ 3.3.2.1 : Cho $x(n) = \text{rect}_N(n - n_0)$

- Hãy tìm $X(e^{j\omega})$

- Hãy tìm phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$.

Giải : Áp dụng tính chất trễ ta có:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = FT[\text{rect}_N(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} FT[\text{rect}_N(n)]$$

Áp dụng kết quả của ví dụ 3.2.1.1 ta có:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} e^{-j(N-1)\frac{\omega}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = e^{-j\omega(n_0 + \frac{N-1}{2})} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

Vậy ta có phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$ như sau:

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right| \\ \arg[X(e^{j\omega})] &= -\omega \left(n_0 + \frac{N-1}{2} \right) + \arg \left[\frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right] \end{aligned}$$

3.3.3. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG

Trong trường hợp tổng quát tín hiệu $x(n)$ là tín hiệu phức, ta có thể viết:

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)] \quad (3.3.3.1)$$

Vậy dãy liên hợp phức của $x(n)$ là $x^*(n)$ có dạng:

$$x^*(n) = \text{Re}[x(n)] - j\text{Im}[x(n)] \quad (3.3.3.2)$$

Bây giờ ta tìm quan hệ giữa $FT[x^*(n)]$ và $FT[x(n)]$:

$$\begin{aligned} FT[x(n)] &= X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ FT[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right]^* \right\}^* \\ &= \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} \right\}^* = \{X(e^{-j\omega})\}^* = X^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Vậy:

$$FT[x^*(n)] = X^*(e^{j\omega}) \quad (3.3.3.3)$$

Nếu $x(n)$ là thực thì:

$$x^*(n) \equiv x(n) \text{ và } FT[x^*(n)] = FT[x(n)]$$

Vậy đối với tín hiệu $x(n)$ thực ta có quan hệ sau đây:

$$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \quad (3.3.3.4)$$

hay:

$$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \quad (3.3.3.5)$$

Từ quan hệ (3.3.3.4) hay (3.3.3.5) ta có thể nói rằng phổ của tín hiệu thực có tính đối xứng Hermit (Hermitian Symmetry).

Từ đây thấy rằng đối với $x(n)$ thực ta có:

$$Re[X(e^{j\omega})] = Re[X(e^{-j\omega})] \quad (3.3.3.6)$$

$$Im[X(e^{j\omega})] = -Im[X(e^{-j\omega})] \quad (3.3.3.7)$$

Tức là:

$Re[X(e^{j\omega})]$ là hàm chẵn của ω .

$Im[X(e^{j\omega})]$ là hàm lẻ của ω .

Tương tự đối với modul và argument ta cũng có:

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad (3.3.3.8)$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] \quad (3.3.3.9)$$

Vậy ta nói rằng $|X(e^{j\omega})|$ là đối xứng (hoặc đối xứng chẵn) còn $\arg[X(e^{j\omega})]$ là phản đối xứng (hoặc đối xứng lẻ).

Vi dụ 3.3.3.1 : Cho $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$

Hãy tính $X(e^{j\omega})$, $Re[X(e^{j\omega})]$, $Im[X(e^{j\omega})]$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\arg[X(e^{j\omega})]$, sau đó hãy vẽ chúng.

Giải :

$$\begin{aligned} FT[x(n)] &= X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} = \frac{1 - \frac{3}{4}e^{j\omega}}{\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{j\omega}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{4}\cos\omega - j\frac{3}{4}\sin\omega}{1 - \frac{3}{2}\cos\omega + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\operatorname{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] = \frac{1 - \frac{3}{4} \cos \omega}{1 - \frac{3}{2} \cos \omega + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

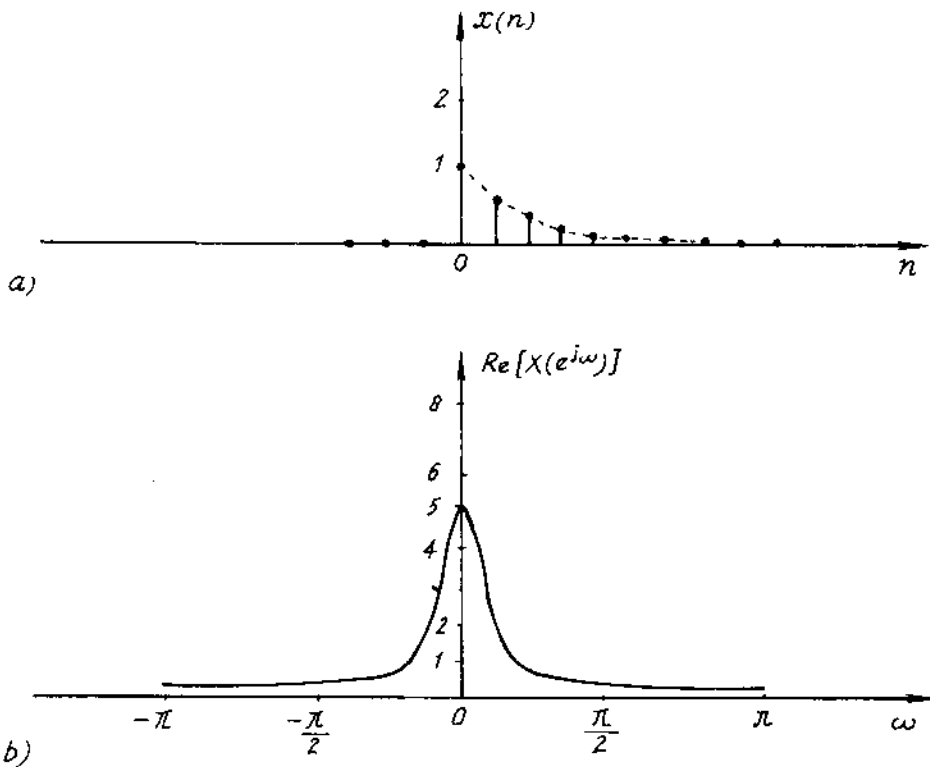
$$\operatorname{Im}\left[X(e^{j\omega})\right] = -\frac{\frac{3}{4} \sin \omega}{1 - \frac{3}{2} \cos \omega + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

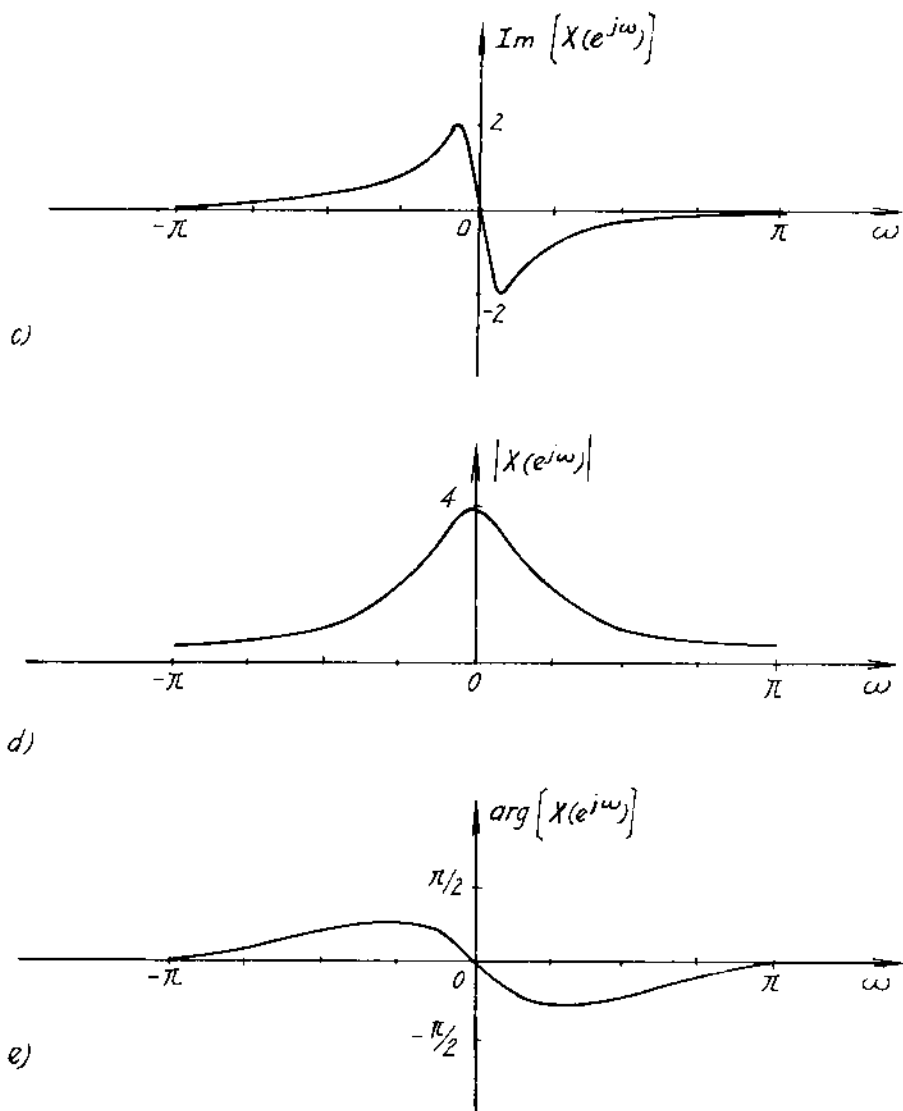
Áp dụng quan hệ (3.2.1.5) và (3.2.1.6) ta có:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{2} \cos \omega + \left(\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$\arg\left[X(e^{j\omega})\right] = -\operatorname{arctg} \frac{\frac{3}{4} \sin \omega}{1 - \frac{3}{2} \cos \omega}$$

Đồ thị của $x(n)$, $\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})]$, $\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]$, $\left|X(e^{j\omega})\right|$ và $\arg[X(e^{j\omega})]$ được cho trên hình 3.3.3.1 (a), (b), (c), (d) và (e).





Hình 3.3.3.1.

3.3.4. TÍNH CHẤT BIẾN SỐ n ĐẢO

Giả sử ta có tín hiệu $x(n)$ và biến đổi Fourier của nó là:

$$FT[x(n) = X(e^{j\omega})] = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]}$$

Bây giờ ta tính biến đổi Fourier của tín hiệu $x(-n)$:

$$FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j\omega n}$$

đổi biến số $l = -n$ ta có:

$$FT[x(-n)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega l} = X(e^{-j\omega})$$

Vậy:

$$FT[x(-n)] = X(e^{-j\omega}) \quad (3.3.4.1)$$

Nếu $x(-n)$ là thực thì từ tính đối xứng Hermit (3.3.3.4) và (3.3.3.5) ta có:

$$\begin{aligned} FT[x(-n)] &= X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) = \left| X(e^{-j\omega}) \right| e^{j \arg[X(e^{-j\omega})]} \\ &= \left| X(e^{j\omega}) \right| e^{-j \arg[X(e^{j\omega})]} \end{aligned}$$

Vậy với tín hiệu $x(n)$ thực ta có thể nói rằng: nếu tín hiệu bị đảo biến số n ngược lại quanh gốc tọa độ thì phổ biên độ của nó giữ nguyên không đổi, còn phổ pha của nó bị đổi dấu.

Ví dụ 3.3.4.1 : Giả sử tín hiệu $x(-n)$ là phức, hãy tính biến đổi Fourier của liên hợp phức của $x(-n)$ theo hàm của $X(e^{j\omega})$.

Giải :

$$FT[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n}$$

đổi biến số

$$l = -n$$

$$\begin{aligned} FT[x^*(-n)] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^*(l)e^{-j\omega l} = \left\{ \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{j\omega l} \right]^* \right\}^* \\ &= \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega l} \right]^* = X^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

3.3.5. TÍCH CHẬP CỦA HAI TÍN HIỆU

Giả sử ta có hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$

$$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega}); \quad FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

Ta có dãy $x_3(n)$ như sau:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

Bây giờ ta tìm biến đổi Fourier của $x_3(n)$ theo hàm của $X_1(e^{j\omega})$ và $X_2(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} FT[x_3(n)] &= FT[x_1(n) * x_2(n)] = X_3(e^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất trễ (3.3.2.2) ta có:

$$X_3(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)e^{-j\omega k} X_2(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)e^{-j\omega k}$$

Vậy:

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

Ví dụ 3.3.5.1 : Giả sử ta có hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = x_2(n) = \delta(n+2) + \delta(n-2)$$

Hãy tính tích chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ thông qua tính chất của biến đổi Fourier.

Giải :

Theo định nghĩa của biến đổi Fourier ta có:

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n+2) + \delta(n-2)] e^{-j\omega n} = e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} = 2\cos 2\omega$$

Vậy:

$$\begin{aligned} X_3(e^{j\omega}) &= X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) = 4 \cos^2 2\omega = (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2 = e^{j4\omega} + 2e^{j2\omega} e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega} \\ &= e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega} \end{aligned}$$

Áp dụng biến đổi Fourier ngược ta có:

$$x_3(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)$$

3.3.6. TÍCH CỦA HAI DÃY

Nếu ta có:

$$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$$

$$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

thì:

$$FT[X_1(n) \cdot x_2(n)] \equiv FT[x_3(n)] \equiv X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j(\omega-\omega')}) \cdot X_2(e^{j\omega'}) d\omega'$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} X_3(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega'}) e^{j\omega' n} d\omega' \right] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) e^{-j(\omega-\omega')n} X_2(e^{j\omega'}) d\omega' \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j(\omega-\omega')}) X_2(e^{j\omega'}) d\omega' \quad (3.3.6.1)$$

$$= X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega}) \quad (3.3.6.2)$$

$$= X_2(e^{j\omega}) * X_1(e^{j\omega})$$

Quan hệ (3.3.6.1) và (3.3.6.2) được gọi là tích chập liên tục và tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Nhận xét :

Tích $x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$ thường được dùng trong trường hợp chúng ta nghiên cứu $x_1(n)$ có chiều dài rất dài, để giới hạn chiều dài của $x_1(n)$ ta sẽ nhân nó với $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn gọi là cửa sổ, như là ta có thể dùng của sổ chữ nhật $x_2(n) = \text{rect}_N(n)$. Sau này ta sẽ dùng rất nhiều kỹ thuật của sổ này để tổng hợp bộ lọc số FIR.

3.3.7. VI PHÂN TRONG MIỀN TẦN SỐ

Nếu $FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$
 thì $FT[nx(n)] = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ (3.3.7.1)

Chứng minh:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega n} = -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-j\omega n}$$

Vậy ta có:

$$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-j\omega n} = FT[nx(n)]$$

3.3.8. TRẺ TẦN SỐ

Nếu ta có:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

thì:

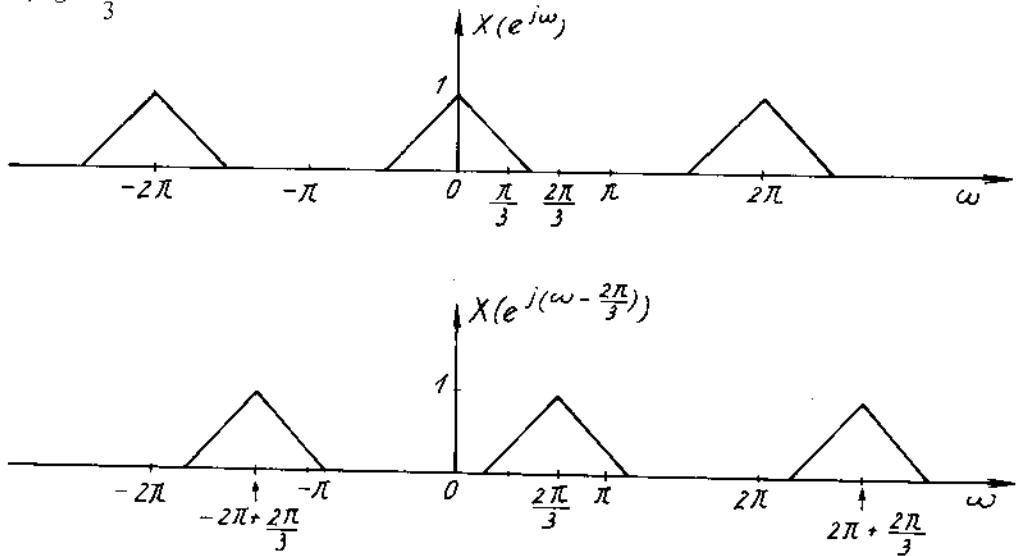
$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (3.3.8.1)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa của biến đổi Fourier ta có:

$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega - \omega_0)n} = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Nhận xét:

Việc nhân dãy $x(n)$ với $e^{j\omega_0 n}$ trong miền biến số n sẽ tương đương với việc dịch chuyển tần số của phổ $X(e^{j\omega})$ đi một lượng ω_0 . Hình 3.3.8.1 minh họa phổ $X(e^{j\omega})$ dịch đi một lượng $2\frac{\pi}{3}$.



Hình 3.3.8.1.

Ví dụ 3.3.8.1 : Cho $x(n)$ và $FT [x(n)] = X(e^{j\omega})$

Hãy tìm phổ của $x(n) \cos \omega_0 n = y(n)$.

Hãy minh hoạ phổ của $x(n)$ và $y(n)$ với $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ bằng hình vẽ.

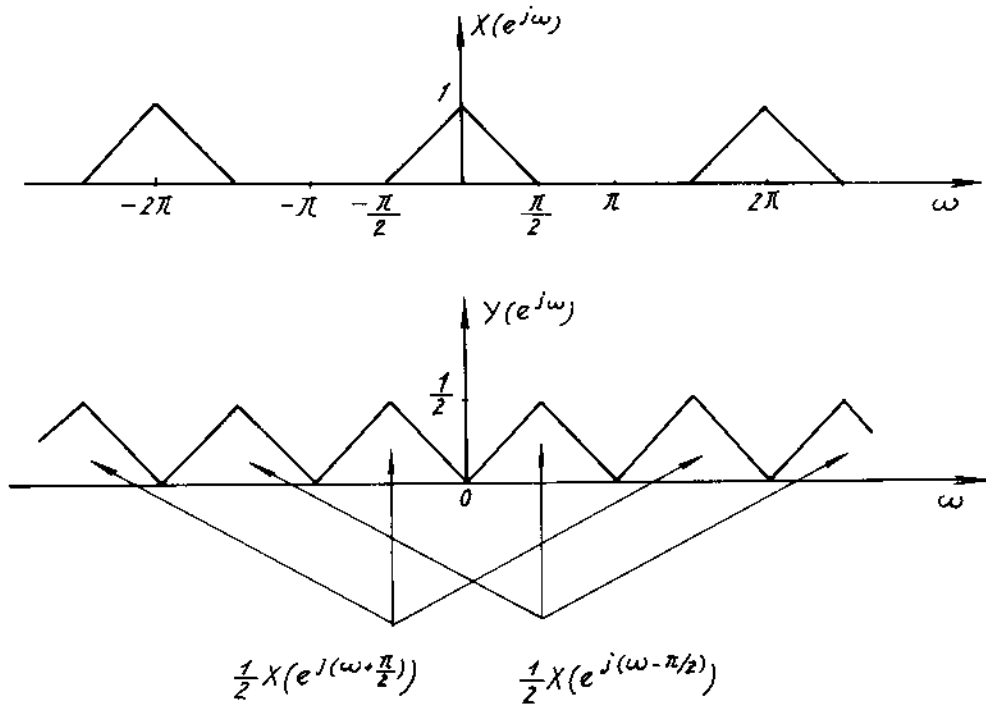
Giải : Ta biết rằng: $\cos \omega_0 n = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} FT[x(n) \cos \omega_0 n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos \omega_0 n e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2} X(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{aligned} \quad (3.3.8.2)$$

Quan hệ (3.3.8.2) gọi là định lý điều chế, bởi vì $x(n) \cos \omega_0 n$ là thực, vì vậy trong thực tế người ta hay dùng quan hệ này.

Hình (3.3.8.2) minh hoạ phổ của $x(n)$ và phổ của $y(n) = x(n) \cos \frac{\pi}{2} n$



Hình 3.3.8.2

3.3.9. QUAN HỆ PARSEVAL

Nếu ta có:

$$FT [x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$$

$$FT [x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

thì:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})d\omega \quad (3.3.9.1)$$

Quan hệ (3.3.9.1) gọi là quan hệ Parseval

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega})e^{-j\omega n} d\omega \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2^*(e^{j\omega}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2^*(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega})d\omega \end{aligned}$$

Trong trường hợp $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$ quan hệ Parseval cho ta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.3.9.2)$$

$|X(e^{j\omega})|^2$ gọi là phổ mật độ năng lượng của $x(n)$, nó thể hiện sự phân bố năng lượng theo hàm của tần số. Ta ký hiệu nó là $S_{xx}(e^{j\omega})$.

Vậy ta có:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \quad (3.3.9.3)$$

Ta biết rằng năng lượng của tín hiệu $x(n)$ là E_x :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Như vậy quan hệ Parseval chính là quan hệ giữa năng lượng của tín hiệu và phổ mật độ năng lượng của tín hiệu đó.

Trong trường hợp $x(n)$ là thực thì $|X(e^{j\omega})|$ là đối xứng:

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$

Vậy ta có thể nói rằng nếu $x(n)$ là thực thì $S_{xx}(\omega)$ cũng là đối xứng:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{-j\omega}) \quad (3.3.9.4)$$

Ví dụ 3.3.9.1 : Cho $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$

Hãy tính và vẽ phổ mật độ năng lượng của $x(n)$.

Giải : Trước hết ta phải xét $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ xem nó có tồn tại hay không.

Điều kiện để $FT[x(n)]$ hội tụ là:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| &< \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4 < \infty \end{aligned}$$

Vậy $FT[x(n)]$ tồn tại.

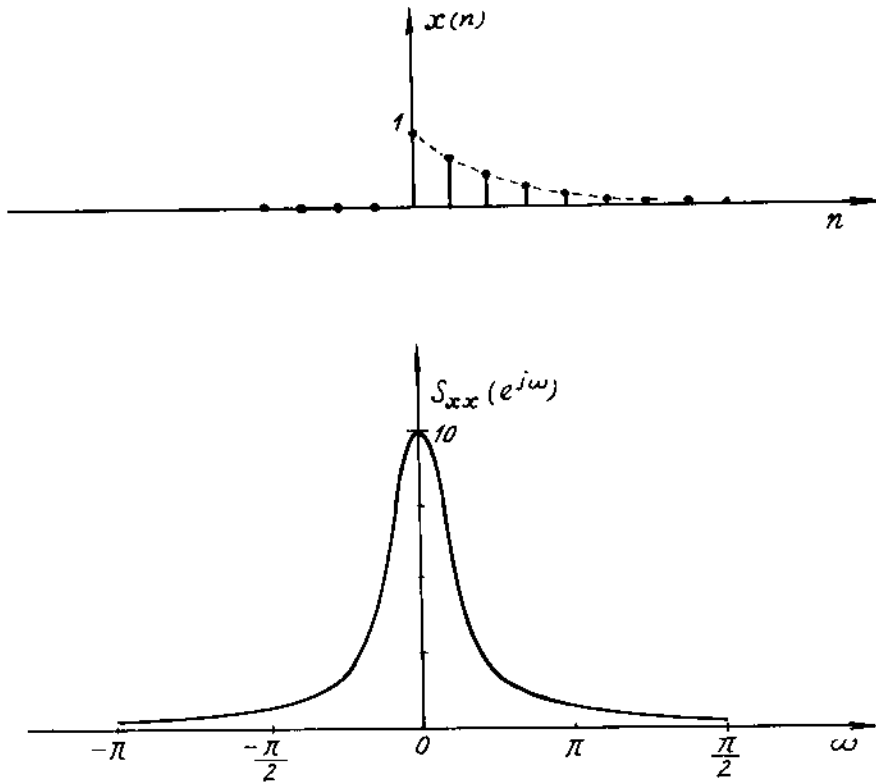
Theo định nghĩa của biến đổi Fourier ta có:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

Phổ mật độ năng lượng $S_{xx}(e^{j\omega})$ được tính như sau:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\cos\omega + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

Đồ thị của $x(n)$ và $S_{xx}(e^{j\omega})$ được cho trên hình 3.3.9.1.



Hình 3.3.9.1

3.3.10. ĐỊNH LÝ TƯƠNG QUAN VÀ ĐỊNH LÝ WEINER KHINTCHINE

Nếu

$$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$$

$$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

thì:

$$FT[r_{x_1x_2}(n)] = R_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega}) \quad (3.3.10.1)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} FT[r_{x_1 x_2}(n)] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{x_1 x_2}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(m-n) \right] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(m-n) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

Đổi biến $m - n = l$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_2(l) e^{-j\omega(m-l)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) X_2(e^{-j\omega}) e^{-j\omega m} \\ &= X_2(e^{-j\omega}) X_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

Nhận xét :

Nếu $x_2(n)$ là thực ta có :

$$R_{x_1 x_2}(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{-j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) X_2^*(e^{j\omega}) \quad (3.3.10.2)$$

Nếu $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$ ta có hàm tự tương quan

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot X(e^{-j\omega})$$

Nếu hàm tự tương quan của $x(n)$ thực ta có:

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 = S_{xx}(e^{j\omega})$$

Vậy biến đổi Fourier của hàm tự tương quan sẽ bằng phổ mật độ năng lượng của tín hiệu.

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \quad (3.3.10.3)$$

Quan hệ (3.3.10.3) ở trên gọi là định lý Wiener- Khintchine.

Đối với biến đổi Fourier của hàm tương quan chéo ta còn gọi $R_{x_1 x_2}(e^{j\omega})$ là phổ mật độ năng lượng chéo của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ và ký hiệu là $S_{x_1 x_2}(e^{j\omega})$.

$$R_{x_1 x_2}(e^{j\omega}) = S_{x_1 x_2}(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) \quad (3.3.10.4)$$

Ví dụ 3.3.10.1 : Cho tín hiệu $x(n)$ là thực. Hãy tính giá trị của hàm tự tương quan của $x(n)$ tại gốc tọa độ $n = 0$, và hãy cho nhận xét về kết quả thu được.

Giải : Theo định nghĩa hàm tự tương quan ta có:

$$r_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) x(m-n)$$

Tại $n = 0$ ta có:

$$r_{xx}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) x(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)|^2 = E_x$$

Theo công thức của biến đổi Fourier ngược ta có:

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_{xx}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Tại gốc tọa độ $n = 0$ ta có:

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$$

Và nếu $x(n)$ là thực ta có:

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Kết quả cuối cùng:

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.3.10.5)$$

Đây chính là quan hệ Parseval (3.3.9.2).

Ta có nhận xét rằng năng lượng của tín hiệu bằng giá trị của hàm tự tương quan lấy tại $n = 0$.

3.3.11. TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER ĐỐI VỚI TÍN HIỆU RỜI RẠC

Bảng 3.3.11.1 cho ta các tính chất cơ bản của biến đổi Fourier đối với tín hiệu rời rạc.

Bảng 3.3.11.1

Tính chất	Miền biến số n	Miền tần số liên tục ω
Ký hiệu	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(e^{j\omega})$ $X_1(e^{j\omega})$ $X_2(e^{j\omega})$
Cặp biến đổi Fourier	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$
Tuyến tính	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
Trễ	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Đối xứng	$x(n)$ thực	$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ $Re [X(e^{j\omega})] = Re [X(e^{-j\omega})]$ $Im [X(e^{j\omega})] = -Im [X(e^{-j\omega})]$ $ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ $\arg [X(e^{j\omega})] = -\arg [X(e^{-j\omega})]$
Liên hợp phức	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Biến số đảo	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Tích chập	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$

Tích (đại số)	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j(\omega-\omega')}) X_2(e^{j\omega'}) d\omega'$
Vị phân trong miền ω	$\frac{dx(n)}{dn}$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Trễ tần số	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Điều chế	$x(n) \cos \omega_0 n$	$\frac{1}{2} X(e^{j(\omega+\omega_0)}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Quan hệ Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) X_2^*(e^{j\omega}) d\omega$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
Tương quan	$r_{x_1 x_2}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(m-n)$	$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2^*(e^{j\omega})$
Định lý Weiner- Kintchine	$r_{xx}(n)$	$R_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) ^2$

3.4. SO SÁNH BIẾN ĐỔI FOURIER VỚI BIẾN ĐỔI Z

3.4.1. QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Biến đổi Z của dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} \quad (3.4.1.1)$$

Miền hội tụ là $RC : R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

Chúng ta có thể biểu diễn biến Z dưới dạng tọa độ cực sau đây:

$$Z = r e^{j\omega} \quad (3.4.1.2)$$

Ở đây $|Z| = r$ và $\arg[Z] = \omega$

Tiếp tục chúng ta có:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n} \quad (3.4.1.3)$$

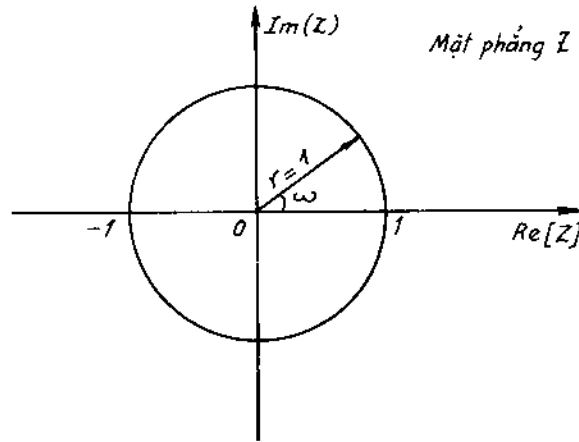
Từ biểu thức (3.4.1.3) ta có thể coi biến đổi Z $X(Z)$ như là biến đổi Fourier của dãy tín hiệu $x(n) r^{-n}$:

$$FT[x(n) r^{-n}] = ZT[x(n)] \quad (3.4.1.4)$$

nếu $X(Z)$ hội tụ tại $|Z| = 1$, thì:

$$X(Z) \Big|_{Z = e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n} = FT[x(n)]$$

Như vậy biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được đánh giá trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z như minh họa trên hình 3.4.1.1.



Hình 3.4.1.1.

Ví dụ 3.4.1.1 : Cho dãy tín hiệu:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Hãy tìm $X(Z)$ và $X(e^{j\omega})$

Giải :

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n Z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} Z^{-1}} \quad |Z| > \frac{1}{3}$$

Vậy $X(Z)$ hội tụ trên vòng tròn đơn vị nên $X(e^{j\omega})$ tồn tại, ta có:

$$X(e^{j\omega}) = X(Z) \Big|_{Z = e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}}$$

Chú ý : Nếu vòng tròn đơn vị không nằm trong miền hội tụ của $X(Z)$, tức là $X(Z)$ không hội tụ trên vòng tròn đơn vị, thì $X(e^{j\omega})$ sẽ không tồn tại, do đó nếu $X(e^{j\omega})$ tồn tại thì chắc chắn $X(Z)$ phải hội tụ trên vòng tròn đơn vị.

Như vậy có thể xảy ra trường hợp biến đổi Z hội tụ nhưng biến đổi Fourier không hội tụ.

Ví dụ 3.4.1.2 : Cho $x(n) = u(n)$

Hãy tính $X(Z)$ và $X(e^{j\omega})$

Giải :

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1} \quad ; \quad RC: |Z| > 1$$

Trong trường hợp này vòng tròn đơn vị $|Z| = 1$ không nằm trong miền hội tụ của $X(Z)$, vậy $X(e^{j\omega})$ không tồn tại, tức là chuỗi:

$$FT[x(n)] = FT[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega n} \quad \text{sẽ phân kỳ.}$$

3.4.2. ĐÁNH GIÁ HÌNH HỌC $X(e^{j\omega})$ TRÊN MẶT PHẪNG Z

Giả sử $X(Z)$ được biểu diễn dưới dạng cực và không như sau:

$$X(Z) = C \frac{\prod_{r=1}^M (Z - Z_{or})}{\prod_{l=1}^N (Z - Z_{pl})} \quad (3.4.2.1)$$

Chúng ta biết rằng:

$$X(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = C \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - Z_{or})}{\prod_{l=1}^N (e^{j\omega} - Z_{pl})} \quad (3.4.2.2)$$

Tử số và mẫu số là tích của các số phức có dạng sau đây:

$$e^{j\omega} - Z_{or} = |e^{j\omega} - Z_{or}| e^{j \arg[e^{j\omega} - Z_{or}]} = M_{or} e^{j\varphi_{or}}$$

Ở đây:

$$M_{or} = |e^{j\omega} - Z_{or}|$$

$$\varphi_{or} = \arg [e^{j\omega} - Z_{or}]$$

$$e^{j\omega} - Z_{pl} = |e^{j\omega} - Z_{pl}| e^{j \arg[e^{j\omega} - Z_{pl}]} = M_{pl} e^{j\varphi_{pl}}$$

ở đây:

$$M_{pl} = |e^{j\omega} - Z_{pl}|$$

$$\varphi_{pl} = \arg [e^{j\omega} - Z_{pl}]$$

Nếu C là hằng số thực, ta có thể viết:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]} \quad (3.4.2.3)$$

$$X(e^{j\omega}) = C \frac{\prod_{r=1}^M M_{or} e^{j\varphi_{or}}}{\prod_{l=1}^N M_{pl} e^{j\varphi_{pl}}} = C \frac{\prod_{r=1}^M M_{or}}{\prod_{l=1}^N M_{pl}} e^{j \left[\sum_{r=1}^M \varphi_{or} - \sum_{l=1}^N \varphi_{pl} \right]}$$

Vậy ta có:

$$\left| X(e^{j\omega}) \right| = C \frac{\prod_{r=1}^M M_{or}}{\prod_{l=1}^N M_{pl}} \quad (3.4.2.4)$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \sum_{r=1}^M \varphi_{or} - \sum_{l=1}^N \varphi_{pl} \quad (3.4.2.5)$$

Đánh giá biên độ và pha của $X(e^{j\omega})$ có thể được thực hiện trực tiếp trong mặt phẳng Z , các giá trị M_{or} và M_{pl} là modun của các vectơ nối các điểm cực và các điểm không của $X(Z)$ với một điểm M cần đánh giá nằm trên vòng tròn đơn vị ($Z = e^{j\omega}$), các giá trị argument φ_{or} và φ_{pl} là các góc tạo bởi các véc tơ trên với hướng song song với trục thực.

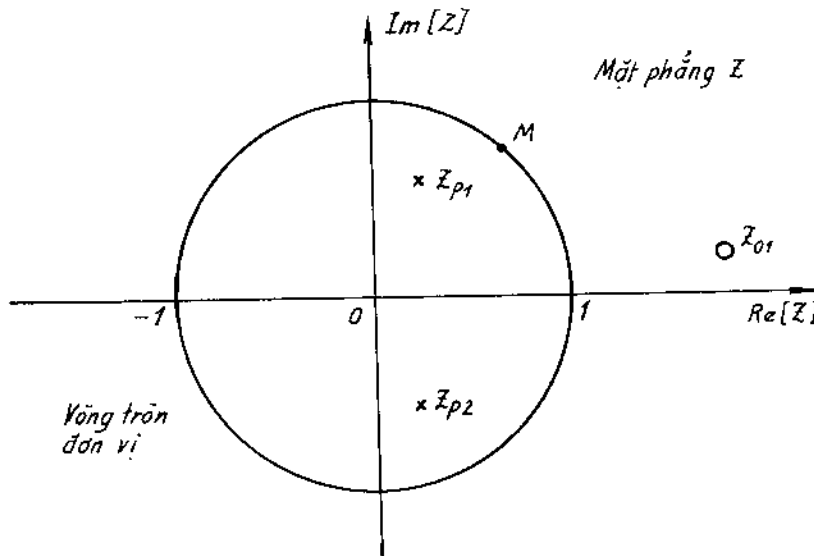
Nếu biểu diễn ở dạng vectơ ta có thể viết:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{or} &= \vec{e^{j\omega}} - \vec{Z_{or}} & \text{hoặc} & \quad \vec{e^{j\omega}} = \vec{M}_{or} + \vec{Z_{or}} \\ \vec{M}_{pl} &= \vec{e^{j\omega}} - \vec{Z_{pl}} & \text{hoặc} & \quad \vec{e^{j\omega}} = \vec{M}_{pl} + \vec{Z_{pl}} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.4.2.1 : Giả sử $X(Z)$ có dạng dưới đây:

$$X(Z) = \frac{Z - Z_{01}}{(Z - Z_{p1})(Z - Z_{p2})}$$

Z_{01} , Z_{p1} , Z_{p2} và điểm M được phân bố trong mặt phẳng Z như hình 3.4.2.1.



Hình 3.4.2.1

Hãy đánh giá hình học $X(e^{j\omega})$ tại điểm M .

Giải : Vẽ các vectơ $\vec{e^{j\omega}}$, $\vec{Z_{01}}$, $\vec{Z_{p1}}$ và $\vec{Z_{p2}}$ từ đó xác định các vectơ :

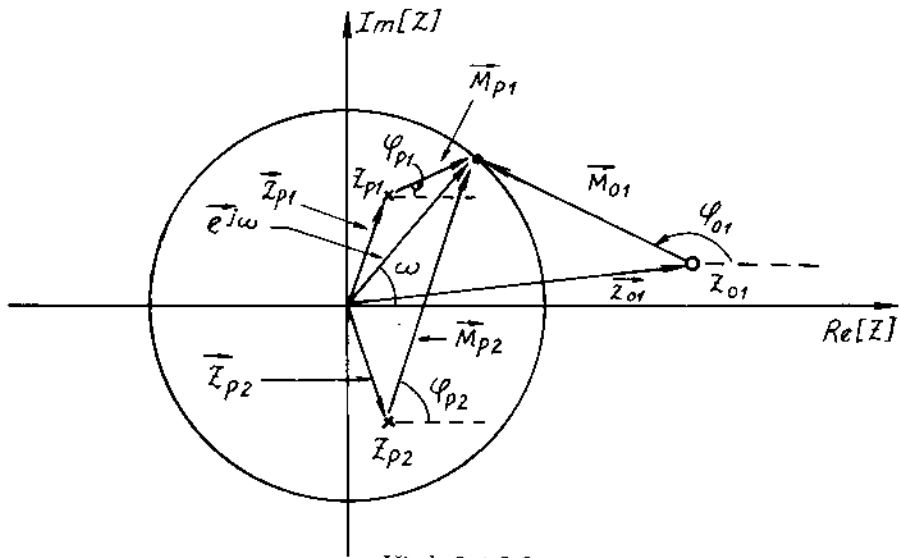
$$\vec{M}_{01} = \vec{e^{j\omega}} - \vec{Z_{01}}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{p1} &= \vec{e}^{j\omega} - \vec{Z}_{p1} \\ \vec{M}_{p2} &= \vec{e}^{j\omega} - \vec{Z}_{p2}\end{aligned}$$

từ đó xác định:

$$\begin{aligned}|\vec{M}_{01}| &= M_{01} & \varphi_{01} \\ |\vec{M}_{p1}| &= M_{p1} & \varphi_{p1} \\ |\vec{M}_{p2}| &= M_{p2} & \varphi_{p2}\end{aligned}$$

Kết quả được cho trên hình 3.4.2.2.



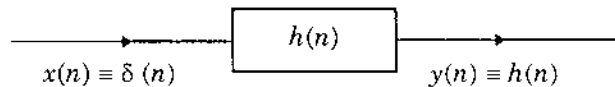
Hình 3.4.2.2.

3.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

3.5.1. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ

a) Định nghĩa

Chúng ta biết rằng đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến chính là đáp ứng (hay đáp ứng ra) của hệ thống với kích thích (hay kích thích vào) $x(n) = \delta(n)$, như minh họa trên sơ đồ 3.5.1.1



Hình 3.5.1.1.

Bây giờ chúng ta đặt ở đầu vào kích thích

$$x(n) = e^{j\omega n} \quad \text{với } -\infty < n < \infty \quad (3.5.1.1)$$

ở đây ω là tần số.

Vậy đáp ứng ra $y(n)$ của hệ thống sẽ được tính như sau:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \right] e^{j\omega n}$$

Đặt:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \quad (3.5.1.2)$$

Vậy ta có:

$$y(n) = H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \quad (3.5.1.3)$$

Từ đây ta có định nghĩa: $H(e^{j\omega})$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống.

Nhận xét: Theo biểu thức (3.5.1.2) ta thấy rằng đáp ứng tần số của hệ thống chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung:

$$H(e^{j\omega}) = FT[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3.5.1.4)$$

Ngược lại ta cũng có thể nói rằng đáp ứng xung của hệ thống chính là biến đổi Fourier ngược của đáp ứng tần số của hệ thống:

$$h(n) = IFT[H(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.5.1.5)$$

b) Biểu diễn $H(e^{j\omega})$

Như vậy $H(e^{j\omega})$ là hàm biến số phức của tần số ω , như vậy ta có thể biểu diễn nó dưới dạng sau đây:

$$H(e^{j\omega}) = \text{Re}[H(e^{j\omega})] + j\text{Im}[H(e^{j\omega})] \quad (3.5.1.6)$$

hoặc:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.5.1.7)$$

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] \quad (3.5.1.8)$$

Ở đây:

$|H(e^{j\omega})|$ gọi là đáp ứng tần số của biên độ hay gọi tắt là đáp ứng biên độ của hệ thống.

$\varphi(\omega)$ gọi là đáp ứng tần số của pha hay gọi tắt là đáp ứng pha của hệ thống.

Rõ ràng là ta cũng có quan hệ giữa đáp ứng tần số của biên độ $|H(e^{j\omega})|$ và pha $\varphi(\omega)$ với phần thực và phần ảo của $H(e^{j\omega})$:

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\text{Re}^2[H(e^{j\omega})] + \text{Im}^2[H(e^{j\omega})]} \quad (3.5.1.9)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[H(e^{j\omega})]}{\text{Re}[H(e^{j\omega})]} \quad (3.5.1.10)$$

Cũng giống như tín hiệu, chúng ta có cách biểu diễn dưới dạng độ lớn và pha như sau :

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}$$

$A(e^{j\omega})$ gọi là độ lớn, có thể thấy các giá trị âm hoặc dương. Còn $|H(e^{j\omega})|$ chỉ lấy các giá trị dương.

Ví dụ 3.5.1.1 : Cho một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung như sau :

$$h(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

Hãy xác định đáp ứng tần số của hệ thống và đáp ứng ra với kích thích vào là

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n} ; \text{ và } a = \frac{1}{3}$$

Giải :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

Vì $|a| < 1$ nên $|ae^{-j\omega}| < 1$ nên chuỗi này hội tụ, vậy ta có :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Từ đây ta có :

$$\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}$$

$$\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})] = \frac{a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\operatorname{arctg} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$

Với $x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n}$, ứng dụng biểu thức (3.5.1.3) ta có đáp ứng xung ra $y(n)$ như sau :

$$y(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}n}$$

c. Xét phương trình sai phân

Trong chương một chúng ta có phương trình sai phân dạng tổng quát sau đây :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Lấy biến đổi Fourier hai vế của phương trình sai phân trên, sau đó đặt :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Chúng ta thu được quan hệ giữa các hệ số của phương trình sai phân b_r, a_k với đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (3.5.1.11)$$

Nếu coi $a_0 = 1$ ta có :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (3.5.1.12)$$

Và phương trình sai phân tương ứng là :

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Ví dụ 3.5.1.2 :

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1) + 4y(n-1) - 5y(n-2)$$

Hãy tìm đáp ứng tần số ?

Giải :

So sánh với biểu thức (3.5.1.12) ta thấy rằng :

$$M = 1 \text{ vậy } b_0 = 1 \text{ và } b_1 = 3$$

$$N = 2 \text{ vậy } a_0 = 1; a_1 = -4 \text{ và } a_2 = 5.$$

Từ đây ta có đáp ứng tần số như sau :

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{\sum_{r=0}^1 b_r e^{-j\omega r}}{1 + \sum_{k=1}^2 a_k e^{-j\omega k}} \\ &= \frac{1 + 3e^{-j\omega}}{1 - 4e^{-j\omega} + 5e^{-j2\omega}} \end{aligned}$$

3.5.2. CÁC BỘ LỌC SỐ LÝ TƯỞNG

Một ứng dụng quan trọng nhất của xử lý tín hiệu là lọc số. Các bộ lọc số dần dần đã thay thế các bộ lọc tương tự.

Việc thiết kế các bộ lọc số thực tế (sẽ nghiên cứu ở chương sau) đều đi từ lý thuyết các bộ lọc số lý tưởng, vì vậy cần phải nghiên cứu các bộ lọc lý tưởng. Chúng ta sẽ tiến hành nghiên cứu bốn loại bộ lọc số tiêu biểu là :

- Bộ lọc số thông thấp.
- Bộ lọc số thông cao.
- Bộ lọc số thông dải.
- Bộ lọc số chắn dải.

Lọc ở đây chúng ta hiểu là lọc tần số chính, vì vậy mà tất cả các đặc trưng của lọc tần số đều được cho theo đáp ứng biên độ.

a) Bộ lọc số thông thấp lý tưởng

Trước hết chúng ta định nghĩa thế nào là bộ lọc thông thấp lý tưởng. Bộ lọc thông thấp lý tưởng được định nghĩa theo đáp ứng biên độ.

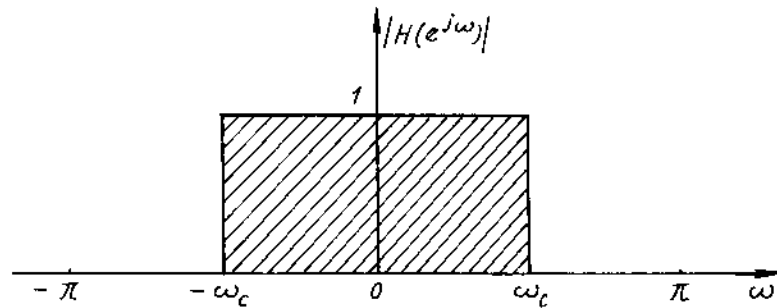
Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (3.5.2.1)$$

$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$

Hình 3.5.2.1 cho đồ thị của đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng.



Hình 3.5.2.1

Nhận xét:

Ở đây $\left| H(e^{j\omega}) \right|$ là đối xứng, tức là chúng ta đã định nghĩa bộ lọc số thông thấp lý tưởng với $h(n)$ là thực, và sau này nếu $\left| H(e^{j\omega}) \right|$ là đối xứng thì ta chỉ cần xét một nửa chu kỳ ($0 \leq \omega \leq \pi$) là đủ.

Nếu chỉ xét trong một nửa chu kỳ thì các tham số của bộ lọc số thông thấp lý tưởng sẽ như sau:

ω_c : tần số cắt

$0 \leq \omega \leq \omega_c$: dải thông

$\omega_c \leq \omega \leq \pi$: dải chắn

Ví dụ 3.5.2.1 : Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông thấp lý tưởng pha không ($0(\omega) = 0$) như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và hãy vẽ $h(n)$ trong trường hợp tần số cắt

$$\omega_c = \frac{\pi}{2}.$$

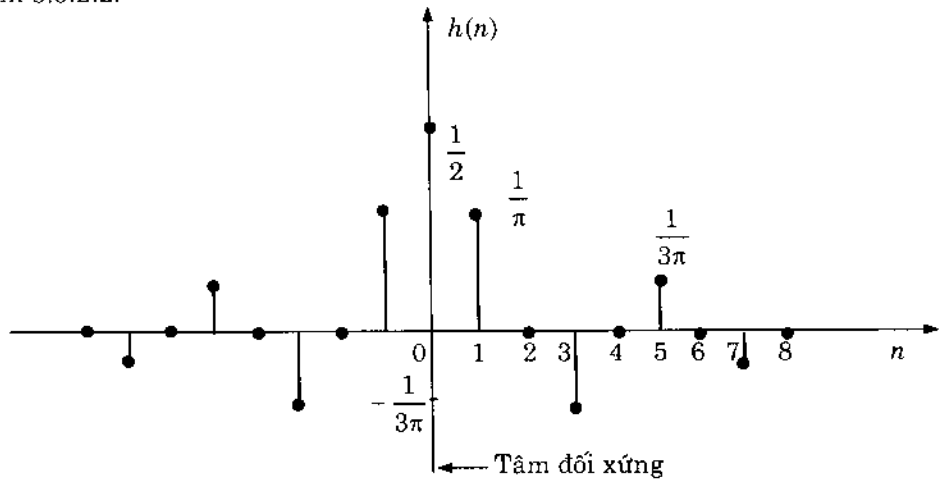
Giải :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{2\pi} \sin \omega_c n$$

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \quad (3.5.2.2)$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ ta có :
$$h(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\frac{\pi}{2} n}$$

Thay từng giá trị của n vào ta sẽ thu được các giá trị của $h(n)$. Đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 3.5.2.2.



Hình 3.5.2.2

Nhận xét :

- Đáp ứng xung $h(n)$ là đối xứng, bởi vì đáp ứng pha $\theta(\omega)$ là tuyến tính.
- Tâm đối xứng của $h(n)$ nằm tại mẫu $n=0$, bởi vì pha $\theta(\omega)=0$ (trùng với trục hoành).
- Tại tất cả các mẫu là số nguyên lần của 2 (các mẫu chẵn) trừ tại $n = 0$ thì $h(n) = 0$ bởi vì $\omega_c = \frac{\pi}{2}$. Trong trường hợp tổng quát $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ (M là nguyên dương) thì tại các mẫu là số nguyên lần của M , $h(n) = h(mM) = 0$.

- Các bộ lọc có tần số cắt $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ (M là nguyên dương) được gọi là bộ lọc Nyquist.

- Nếu $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ gọi là bộ lọc nửa band, nếu $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ gọi là bộ lọc một phần M band.

- Đáp ứng biên độ $|H(e^{j\omega})|$ của các bộ lọc có thông số thấp lý tưởng là hoàn toàn như nhau, nhưng đáp ứng pha $\theta(\omega)$ có thể khác nhau.

- $L[H(n)] = \infty$

- Là không nhân quả và có chiều dài vô hạn

- Không thực hiện được về vật lý.

- Để thực hiện được về vật lý chúng ta phải cắt ngắn chiều dài của $h(n)$ và đưa về nhân quả, nhưng nếu để pha $\theta(\omega) = 0$ thì không đảm bảo $h(n)$ là đối xứng và có độ chính

xác cao, vậy muốn đảm bảo $h(n)$ là nhân quả và có chiều dài hữu hạn nhưng $h(n)$ phải là đối xứng và có độ chính xác cao thì chúng ta phải đối pha, tức là dời trục đối xứng về phía chiều n dương (xem ví dụ 3.5.2.1b).

Ví dụ 3.5.2.1b. Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng có pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$ như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

+ Hãy tìm $h(n)$

+ Hãy vẽ $h(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, $N = 7$.

Giải:

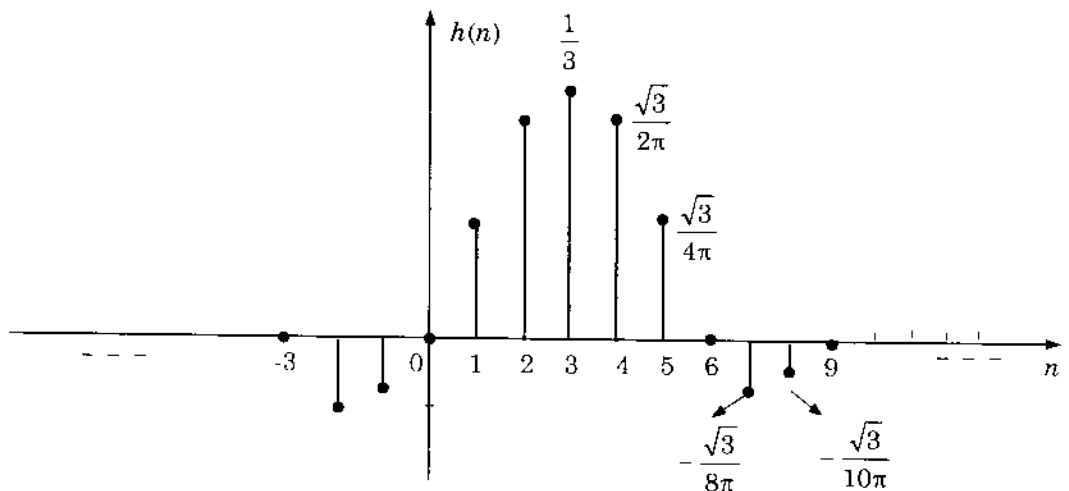
$$+ h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} d\omega$$

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \quad (3.5.2.2b)$$

+ Thay $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, $N = 7$ ta có:

$$h(n) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{3} (n-3)}{\frac{\pi}{3} (n-3)}$$

Thay từng giá trị của n vào ta thu được các giá trị của $h(n)$, từ đó ta có đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 3.5.2.2b:



Hình 3.5.2.2b

Nhận xét: Theo ví dụ 3.5.2.1b, để thực hiện được về vật lý bộ lọc này chúng ta sẽ lấy $h(n)$ có chiều dài hữu hạn từ 0 đến 6 như vậy sẽ đảm bảo $h(n)$ có chiều dài hữu hạn, nhân quả và độ chính xác cao.

b) Bộ lọc số thông cao lý tưởng

Cũng giống như bộ lọc số thông thấp lý tưởng, bộ lọc số thông cao lý tưởng cũng được định nghĩa theo đáp ứng biên độ.

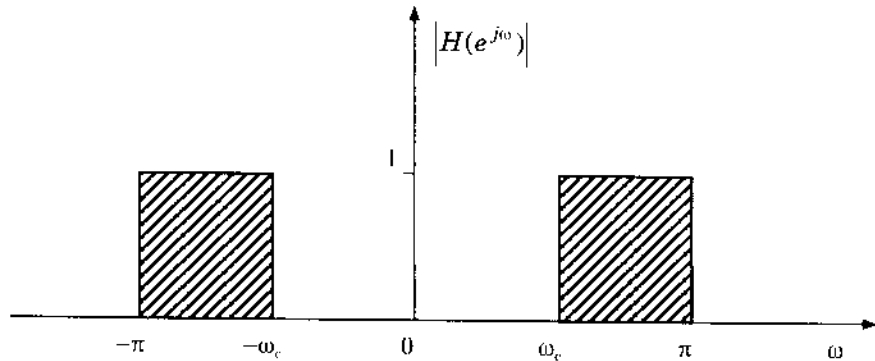
Định nghĩa

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau :

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (3.5.2.3)$$

$$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Đồ thị của đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông cao lý tưởng được cho trên hình 3.5.2.3.



Hình 3.5.2.3

Nhận xét như bộ lọc thông thấp lý tưởng, $|H(e^{j\omega})|$ là đối xứng như vậy $h(n)$ là thực và như vậy trong miền tần số ω ta chỉ cần xét $|H(e^{j\omega})|$ trong một nửa chu kỳ ($0 \leq \omega \leq \pi$) là đủ.

Nếu xét trong một nửa chu kỳ thì các tham số của bộ lọc thông cao lý tưởng sẽ như sau :

ω_c : tần số cắt.

$0 \leq \omega \leq \omega_c$: dải chặn.

$\omega_c \leq \omega \leq \pi$: dải thông.

Ví dụ 3.5.2.2 : Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông cao lý tưởng pha không $\theta(\omega) = 0$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và vẽ $h(n)$ trong trường hợp $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

Giải:

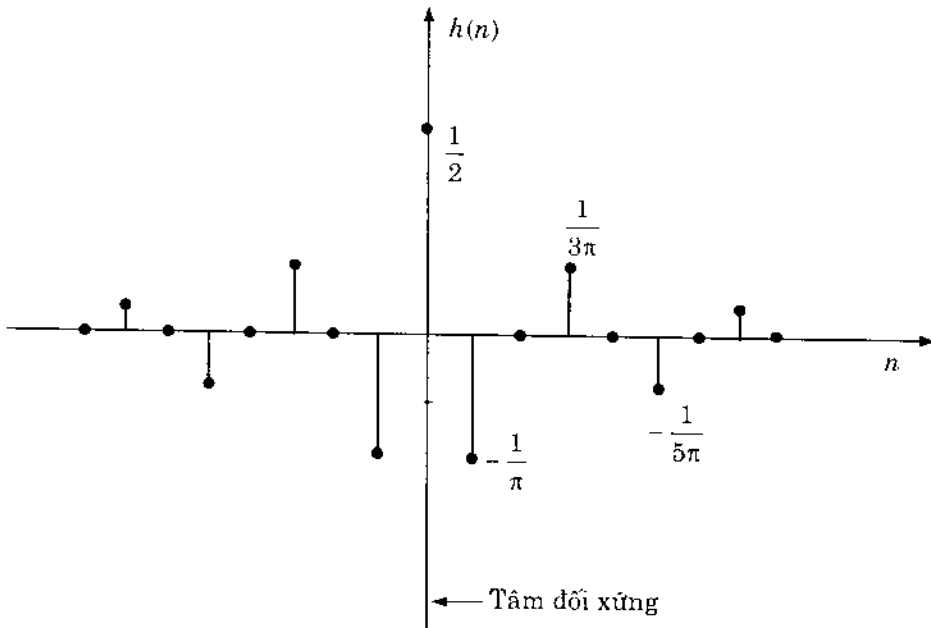
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \pi n}{\pi n} - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \quad (2.5.2.4)$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ ta có :

$$h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\frac{\pi}{2} n}$$

Thay từng giá trị của n vào ta sẽ thu được các giá trị của $h(n)$. Đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 3.5.2.4.



Hình 3.5.2.4

Nhận xét :

- Cũng giống như bộ lọc số thông thấp lý tưởng pha không, đối với bộ lọc số thông cao lý tưởng thì $h(n)$ là đối xứng và tâm đối xứng nằm tại mẫu $n = 0$ bởi vì $\theta(\omega)$ là tuyến tính và $\theta(\omega) = 0$.

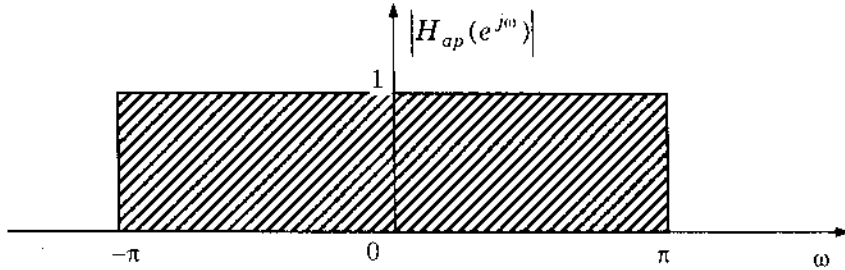
- Nếu ta ký hiệu bộ lọc số thông thấp (Lowpass filter) là $h_{lp}(e^{j\omega})$ và $h_{lp}(n)$; bộ lọc thông cao (High pass filter) là $H_{hp}(e^{j\omega})$ và $h_{hp}(n)$ thì ta thấy rằng đối với các bộ lọc pha không ta có quan hệ sau đây :

$$h_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - h_{lp}(0) & n = 0 \\ -h_{lp}(n) & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.5.2.5)$$

Ta thấy rằng $\delta(n)$ chính là đáp ứng xung của bộ lọc thông tất (All - pass filter) pha không đáp ứng biên độ của bộ lọc thông tất là : $|H_{ap}(e^{j\omega})|$ được định nghĩa như sau :

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1 \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (3.5.2.6)$$

$|H_{ap}(e^{j\omega})|$ được minh họa trên hình 3.5.2.5.



Hình 3.5.2.5

Như vậy bộ lọc thông tất cho thông qua tất các thành phần tần số, hay nói cách khác bộ lọc thông tất là bộ lọc thông thấp có tần số cắt $\omega_c = \pi$ (nếu xét trong nửa chu kỳ $0 \leq \omega \leq \pi$). Vì vậy bộ lọc thông tất thường dùng làm các bộ di pha và việc thiết kế bộ lọc thông tất chỉ theo các tiêu chuẩn kỹ thuật của đáp ứng pha, không cần xét đến đáp ứng biên độ, vì trong cả dải tần $|H_{ap}(e^{j\omega})|$ đều bằng 1.

- Nếu các bộ lọc thông thấp, thông cao và thông tất có cùng đáp ứng pha ta sẽ có các quan hệ sau đây :

$$h_{bp}(n) = h_{ap}(n) - h_{lp}(n) \quad (3.5.2.7)$$

và

$$H_{bp}(e^{j\omega}) = H_{ap}(e^{j\omega}) - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad (3.5.2.8)$$

và ta cũng có :

$$|H_{bp}(e^{j\omega})| = |H_{ap}(e^{j\omega})| - |H_{lp}(e^{j\omega})| \quad (3.5.2.9)$$

Ví dụ 3.5.2.2b

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao lý tưởng có pha tuyến tính $0(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ 0 & \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ & \omega_c \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$

+ Hãy tìm $h(n)$

+ Hãy vẽ $h(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{3}, N=7$.

Giải :

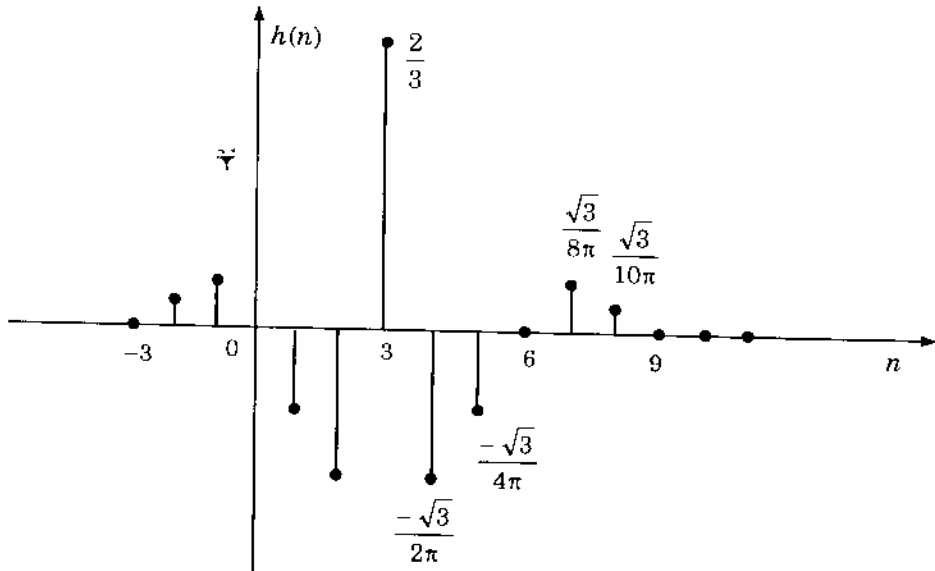
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n - \frac{N-1}{2})} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n - \frac{N-1}{2})} d\omega =$$

$$h(n) = \delta(n - \frac{N-1}{2}) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c (n - \frac{N-1}{2})}{\omega_c (n - \frac{N-1}{2})} \quad (2.5.2.4b)$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, $N = 7$ ta có :

$$h(n) = \delta(n-3) - \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} (n-3)}{\frac{\pi}{3} (n-3)}$$

Thay từng giá trị của n vào ta sẽ thu được các giá trị của $h(n)$, từ đó ta có đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 3.5.2.4b.



Hình 3.5.2.5b

Nhận xét :

Giống nhận xét của ví dụ 3.5.2.1b.

c) Bộ lọc thông dải lý tưởng (ideal band filter)

Chúng ta định nghĩa theo đáp ứng biên độ.

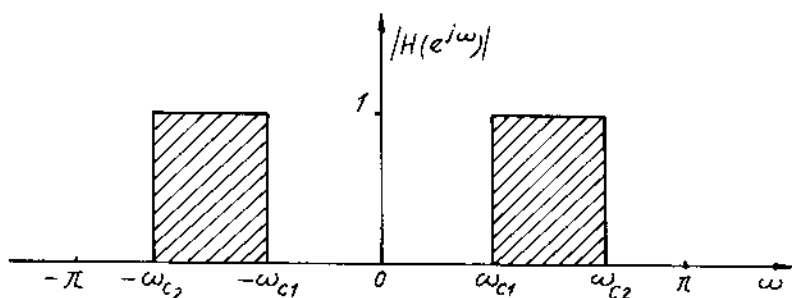
Định nghĩa

Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau :

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

($-\pi \leq \omega \leq \pi$)

Hình 3.5.2.6 cho ta đồ thị của đáp ứng biên độ của bộ lọc thông dải lý tưởng này.



Hình 3.5.2.6.

Nhận xét :

Đáp ứng biên độ $|H(e^{j\omega})|$ là đối xứng trong một chu kỳ ($-\pi \leq \omega \leq \pi$) vì vậy chúng ta chỉ cần xét trong một nửa chu kỳ ($0 \leq \omega \leq \pi$). Trong một nửa chu kỳ này bộ lọc thông dải chỉ cho thông qua các thành phần tần số từ ω_{c1} đến ω_{c2} .

Các tham số của bộ lọc thông dải lý tưởng như sau:

- ω_{c1} : tần số cắt dưới.
- ω_{c2} : tần số cắt trên.
- $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$: dải thông.
- $0 \leq \omega \leq \omega_{c1}$: dải chắn.
- $\omega_{c2} \leq \omega \leq \pi$: dải chắn.

Ví dụ 3.5.2.3 : Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải lý tưởng pha không ($\theta(\omega) = 0$) như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và tìm $h(n)$ trong trường hợp $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$.

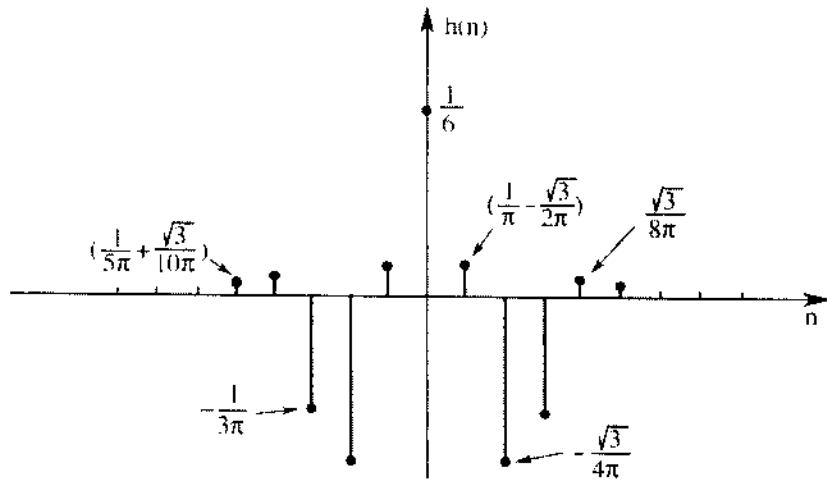
Giải :

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n} d\omega \\ h(n) &= \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n} \end{aligned} \quad (3.5.2.11)$$

Thay $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\frac{\pi}{2} n} - \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\frac{\pi}{3} n}$$

Trong trường hợp này đồ thị của $h(n)$ được cho trên hình 3.5.2.7.



Hình 3.5.2.7

Nhận xét :

- Nếu ta có hai bộ lọc thông thấp có tần số cắt là ω_{c2} và ω_{c1} và nếu hai bộ lọc thông này có cùng đáp ứng pha thì bộ lọc thông dải chính là hiệu của hai bộ lọc thông thấp này, tức là : $H_{bp}(e^{j\omega}) = H_{lp2}(e^{j\omega}) - H_{lp1}(e^{j\omega})$

ở đây : $H_{bp}(e^{j\omega})$: là đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải.

$H_{lp2}(e^{j\omega})$: là đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp tần số cắt ω_{c2} .

$H_{lp1}(e^{j\omega})$: là đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp tần số cắt ω_{c1} .

Và trong miền n ta cũng có :

$$h_{bp}(n) = h_{lp2}(n) - h_{lp1}(n)$$

- Khi $\omega_{c2} \approx \omega_{c1}$ ta có bộ lọc thông dải hẹp, thường được dùng làm bộ lọc cộng hưởng.

Ví dụ 3.5.2.3b : Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải lý tưởng có pha tuyến tính

$$Q(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} \text{ như sau :}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} & \begin{cases} -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ \omega \text{ còn lại} \end{cases} \\ 0 & \end{cases}$$

$$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

+ Hãy tìm $h(n)$.

+ Hãy vẽ $h(n)$ với $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$, $N = 7$.

Giải :

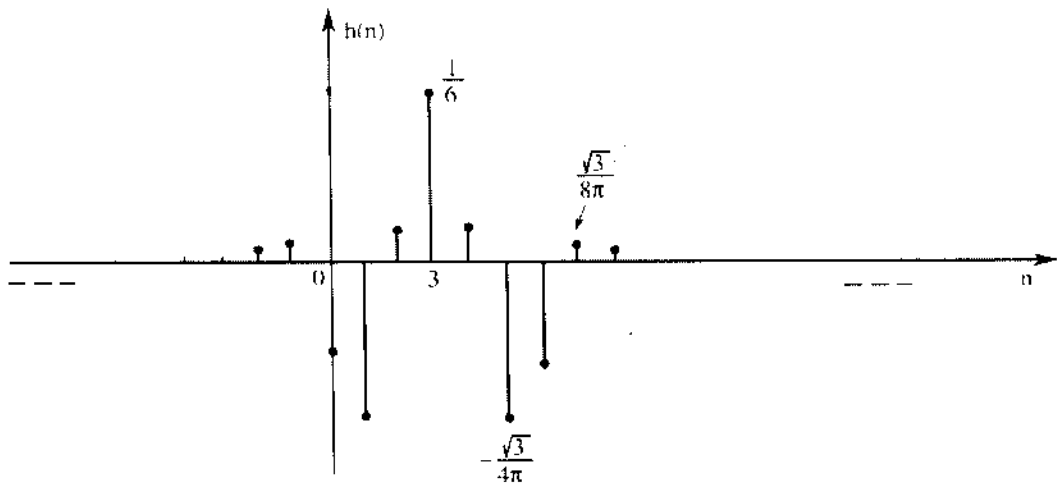
$$+ h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} (n - \frac{N-1}{2})}{\omega_{c2} (n - \frac{N-1}{2})} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} (n - \frac{N-1}{2})}{\omega_{c1} (n - \frac{N-1}{2})} \quad (5.3.1.11b)$$

+ Thay $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$, $N = 7$ ta có :

$$h(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} (n-3)}{\frac{\pi}{2} (n-3)} - \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} (n-3)}{\frac{\pi}{3} (n-3)}$$

Thay các giá trị của n vào, ta thu được các giá trị của $h(n)$, từ đó ta có đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 3.5.2.7b.



Hình 3.5.2.7b

d) Bộ lọc số chắn dải lý tưởng (ideal band stop filter)

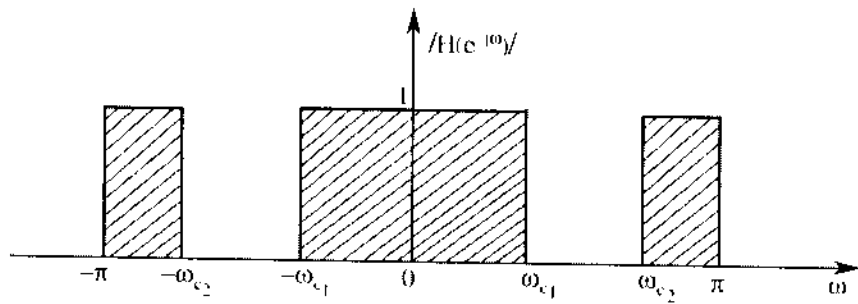
Định nghĩa :

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số chắn dải lý tưởng được định nghĩa như sau :

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} \pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ -\omega_{c1} \leq \omega \leq -\omega_{c2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (3.5.2.12)$$

$$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Đồ thị đáp ứng biên độ của bộ lọc số chắn dải lý tưởng được cho trên hình 3.5.2.8.



Hình 3.5.2.8

Ví dụ 3.5.2.4: Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số chẵn dải lý tưởng pha không như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} \pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ -\omega_{c1} \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và tìm $h(n)$ trong trường hợp

$$\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}, \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$$

Giải :

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n} d\omega \\ h(n) &= \delta(n) - \left[\frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n} \right] \end{aligned} \quad (3.5.2.13)$$

Thay $\omega_{c1} = \frac{\pi}{2}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{3}$ ta có :

$$h(n) = \delta(n) - \left[\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\frac{\pi}{2} n} - \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\frac{\pi}{3} n} \right]$$

Đồ thị của $h(n)$ được cho trên hình 3.5.2.9.

Nhận xét :

- Nếu các bộ lọc thông tắt, bộ lọc thông dải và bộ lọc chẵn dải có cùng đáp ứng pha thì ta có các quan hệ sau :

$$H_{bs}(e^{j\omega}) = H_{ap}(e^{j\omega}) - H_{bp}(e^{j\omega})$$

ở đây :

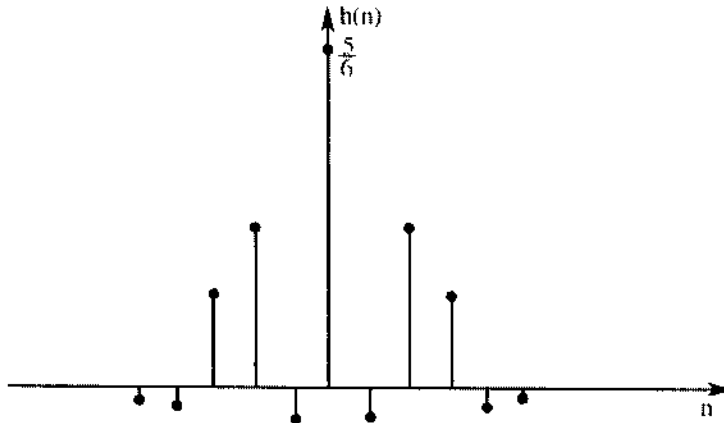
$H_{bs}(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc chẵn dải.

$H_{ap}(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc thông tắt.

$H_{bp}(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải.

và tương tự trong miền n ta cũng có :

$$H_{bs}(n) = H_{ap}(n) - H_{bp}(n)$$



Hình 3.5.2.9.

Nhận xét: Nếu các bộ lọc thông tắt, bộ lọc thông dải và bộ lọc chắn dải có cùng đáp ứng pha thì ta có các quan hệ sau:

$$H_{bs}(e^{j\omega}) = H_{ap}(e^{j\omega}) - H_{bp}(e^{j\omega})$$

ở đây:

$H_{bs}(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc chắn dải.

$H_{ap}(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc thông tắt.

$H_{bp}(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải.

và tương tự trong miền n ta cũng có:

$$H_{bs}(n) = H_{ap}(n) - H_{bp}(n)$$

Ví dụ 3.5.2.4b : Cho đáp ứng tần số của bộ lọc chắn dải lý tưởng có pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} \pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ -\omega_{c1} \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$

+ Hãy tìm $h(n)$

+ Hãy vẽ $h(n)$ với $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$, $N = 7$.

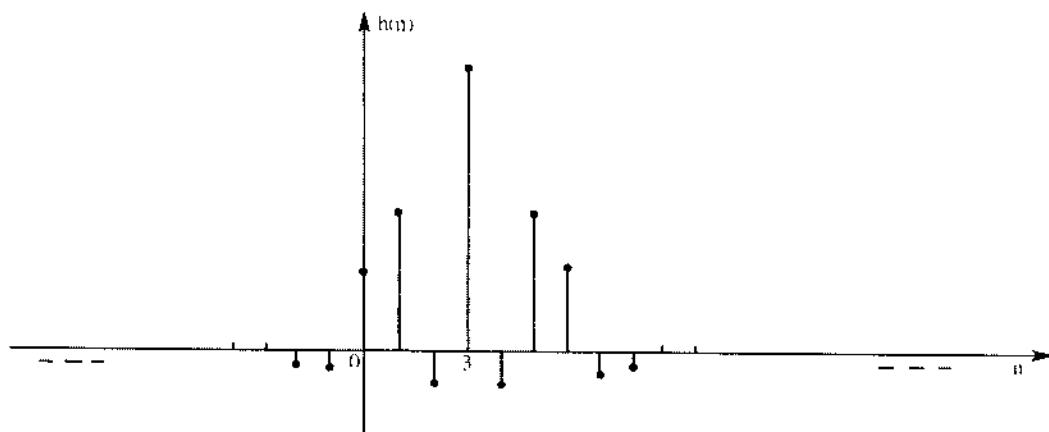
Giải :

$$\begin{aligned} + h(n) &= IFT[H(e^{j\omega})] = \\ &= \delta(n - \frac{N-1}{2}) - \left[\frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2}(n - \frac{N-1}{2})}{\omega_{c2}(n - \frac{N-1}{2})} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1}(n - \frac{N-1}{2})}{\omega_{c1}(n - \frac{N-1}{2})} \right] \quad (5.3.1.13b) \end{aligned}$$

+ Thay $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$, $N = 7$ ta có :

$$h(n) = \delta(n-3) - \left[\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(n-3)}{\frac{\pi}{2}(n-3)} - \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3}(n-3)}{\frac{\pi}{3}(n-3)} \right]$$

Thay các giá trị của n vào, ta có các giá trị của $h(n)$, từ đó ta có đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 3.5.2.9b.



Hình 3.5.2.9b

e) Kết luận chung về các bộ lọc số lý tưởng

- Các bộ lọc số lý tưởng không thể thực hiện được về vật lý mặc dù ta đã xét trường hợp $h(n)$ thực bởi vì chiều dài của $h(n)$ là vô cùng, hơn nữa $h(n)$ là không nhân quả, tức là:

$$L[h(n)] = [-\infty, +\infty] = \infty$$

$$h(n) \neq 0 \text{ khi } n < 0.$$

3.5.3. BỘ LỌC SỐ THỰC TẾ

Các lọc số thực tế được đặc trưng bởi các tham số kỹ thuật trong miền tần số liên tục ω có bốn tham số chính là :

δ_1 : độ gợn sóng ở dải thông.

δ_2 : độ gợn sóng ở dải chắn.

ω_p : tần số giới hạn (biên tần) dải thông.

ω_s : tần số giới hạn (biên tần) dải chắn.

Ngoài ra còn có tham số phụ là :

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p : \text{bề rộng dải quá độ}$$

Hình 3.5.3.1 là minh họa đối với bộ lọc thông thấp.

Đối với bộ lọc số thông cao, thông dải và chắn dải chúng ta cũng tự suy ra các tham số kỹ thuật tương ứng.

3.5.4. BỘ VI PHÂN

Định nghĩa : Hệ thống dùng để vi phân tín hiệu được gọi là bộ vi phân. Trong miền tần số liên tục, một bộ vi phân số lý tưởng có đáp ứng tần số được định nghĩa như sau :

$$H(e^{j\omega}) = j\omega \quad 0 \leq |\omega| \leq \pi \quad (3.5.4.1)$$

Từ đây ta có thể tìm được đáp ứng xung $h(n)$ của bộ vi phân lý tưởng như sau :

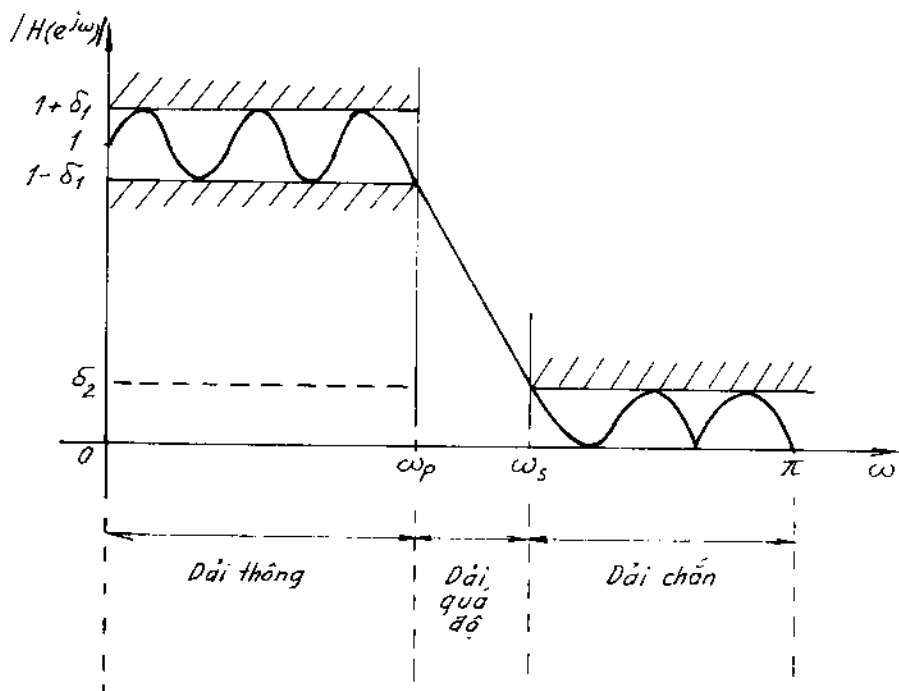
$$h(n) = IFT[H(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\cos \pi n}{n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad (3.5.4.2)$$

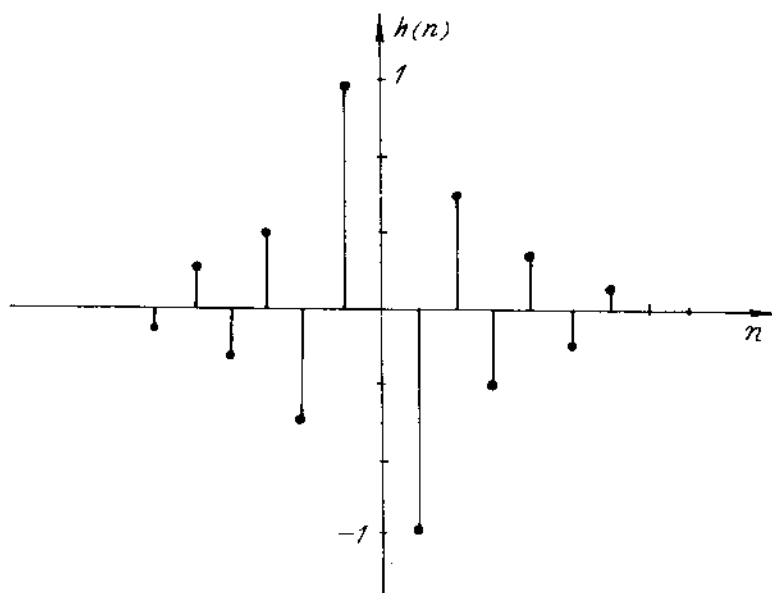
Từ đây ta đã thấy rằng đáp ứng xung $h(n)$ của bộ vi phân lý tưởng là phản đối xứng.
Tức là:

$$\begin{aligned} h(n) &= -h(-n) \\ h(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.4.3)$$

Đồ thị của đáp ứng xung $h(n)$ cho trên hình 3.5.4.1.



Hình 3.5.3.1.



Hình 3.5.4.1.

3.5.5 BỘ BIẾN ĐỔI HILBERT

Định nghĩa : Đáp ứng tần số của bộ biến đổi Hilbert lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 \leq \omega \leq \pi \\ j & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \quad (3.5.5.1)$$

Thực chất bộ biến đổi Hilbert lý tưởng chính là bộ lọc thông tất (All - pass filter) làm nhiệm vụ di pha một góc 90° .

Bộ biến đổi Hilbert được dùng thường xuyên trong các hệ thống thông tin và các hệ thống xử lý tín hiệu.

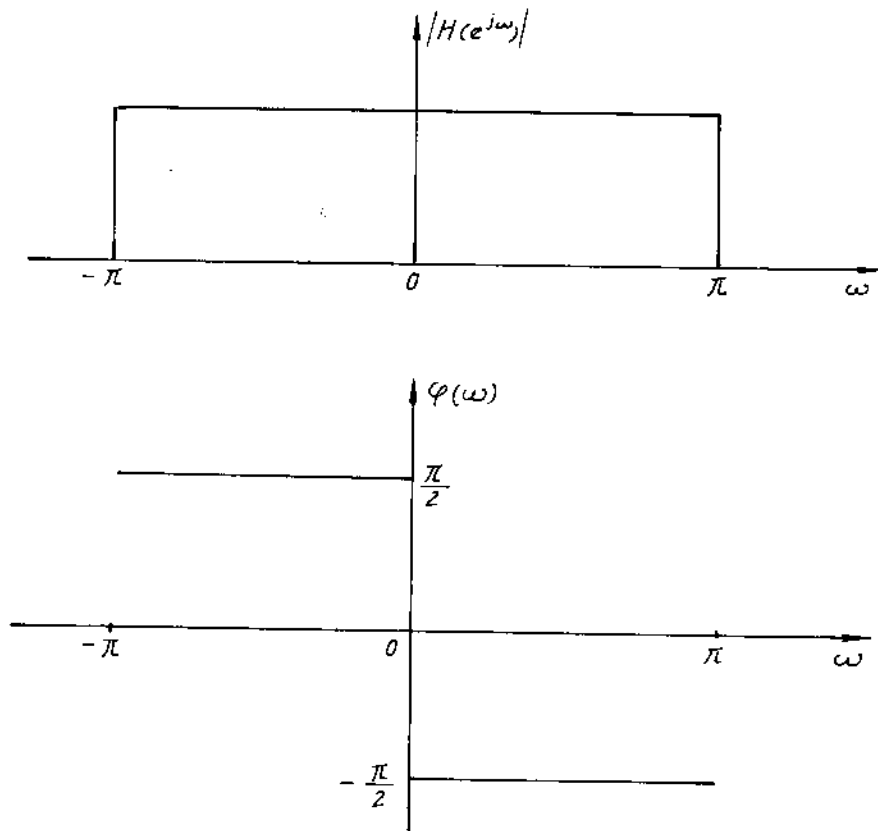
Biểu diễn $H(e^{j\omega})$ dưới dạng đáp ứng biên độ và đáp ứng pha ta có:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\varphi(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & 0 \leq \omega \leq \pi \\ \frac{\pi}{2} & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

$|H(e^{j\omega})|$ và $\varphi(e^{j\omega})$ được minh hoạ trên hình 3.5.5.1.



Hình 3.5.5.1.

Đáp ứng xung $h(n)$ của bộ biến đổi Hilbert số được tính như sau:

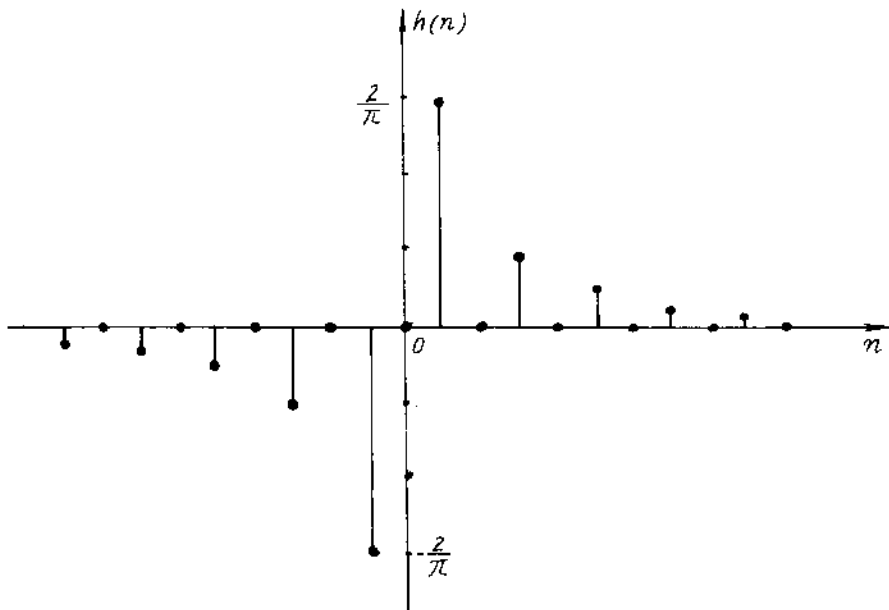
$$h(n) = IFT\{H(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{\pi}{2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} n}{n} & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.5.5.2)$$

Từ biểu thức (3.5.5.2) ở trên ta thấy rằng $h(n)$ có chiều dài vô hạn và không nhân quả. Ngoài ra ta có nhận xét rằng $h(n)$ là phản đối xứng, tức là:

$$\begin{aligned} h(n) &= -h(-n) & n \neq 0 \\ h(0) &= 0 & n = 0 \end{aligned} \quad (3.5.5.3)$$

Đồ thị của $h(n)$ cho trên hình (3.5.5.2).



Hình 3.5.5.2.

Sau này trong chương 5, chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp thiết kế bộ biến đổi Hilbert thực tế (cụ thể là bộ biến đổi Hilbert *FIR* pha tuyến tính).

3.6. LẤY MẪU TÍN HIỆU

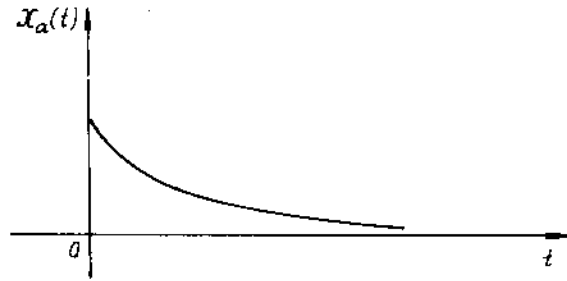
Lấy mẫu tín hiệu đóng một vai trò rất quan trọng trong lĩnh vực thông tin nói chung và trong xử lý tín hiệu nói riêng. Lấy mẫu tín hiệu được ứng dụng đối với cả các tín hiệu tắt định và với cả các tín hiệu ngẫu nhiên khi bề rộng phổ của các tín hiệu này là hữu hạn. Ví dụ như các tín hiệu quen thuộc mà ta gặp hàng ngày: tín hiệu tiếng nói, âm nhạc, hình ảnh...

3.6.1. ĐỊNH LÝ LẤY MẪU

Giả sử chúng ta có một tín hiệu tương tự có năng lượng hữu hạn $x_a(t)$, tức là tín hiệu tương tự này phải thoả mãn điều kiện sau đây:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt < \infty \quad (3.6.1.1)$$

Hình 3.6.1.1 cho ta một ví dụ về tín hiệu tương tự có năng lượng hữu hạn.



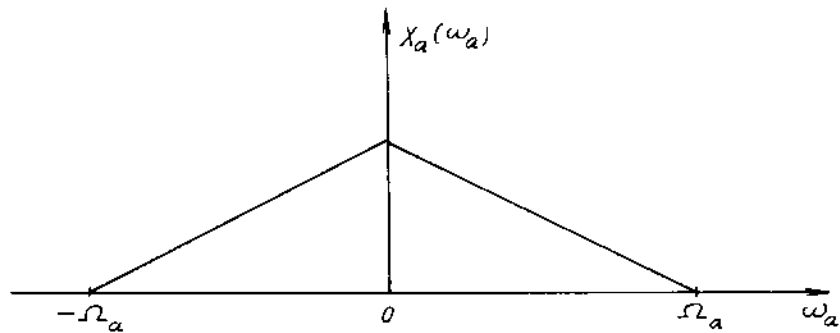
Hình 3.6.1.1.

Hơn nữa chúng ta có thể nói rằng một tín hiệu tương tự có năng lượng hữu hạn là tín hiệu có bề rộng phổ hữu hạn.

$$X_a(\omega_a) = 0 \text{ với } |\omega_a| > \Omega_a \quad (3.6.1.2)$$

ở đây: Ω_a là một mức tần số hữu hạn.

Một ví dụ về tín hiệu tương tự có bề rộng phổ hữu hạn được cho trên hình 3.6.1.2.



Hình 3.6.1.2.

Bởi vì phổ $X_a(\omega_a)$ là hữu hạn nên ta có thể viết dưới dạng chuỗi Fourier như sau:

$$X_a(\omega_a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j\omega_a n \frac{\pi}{\Omega_a}} \quad (3.6.1.3)$$

với:

$$a_n = \frac{1}{2\Omega_a} \int_{-\Omega_a}^{\Omega_a} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a n \frac{\pi}{\Omega_a}} d\omega_a \quad (3.6.1.4)$$

Theo định nghĩa của biến đổi Fourier, chúng ta có thể viết như sau:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a t} d\omega_a \quad (3.6.1.5)$$

Nhưng do phổ $X_a(\omega_a)$ là hữu hạn:

$$X_a(\omega_a) \neq 0 \quad \text{với } |\omega_a| \leq \Omega_a$$

Nên ta có thể viết:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_a}^{\Omega_a} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a t} d\omega_a \quad (3.6.1.6)$$

Bây giờ chúng ta chỉ tính $x_a(t)$ tại các thời điểm (nếu biến là thời gian) rời rạc

$$t = n \frac{\pi}{\Omega_a}$$

$$x_a\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_a}^{\Omega_a} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a n \frac{\pi}{\Omega_a}} d\omega_a$$

Vậy ta có:

$$2\pi \cdot x_a\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) = \int_{-\Omega_a}^{\Omega_a} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a n \frac{\pi}{\Omega_a}} d\omega_a \quad (3.6.1.7)$$

Theo (3.6.1.4) ta có thể viết:

$$2\Omega_a a_n = \int_{-\Omega_a}^{\Omega_a} X_a(\Omega_a) e^{j\omega_a n \frac{\pi}{\Omega_a}} d\omega_a \quad (3.6.1.8)$$

Từ đây, đồng nhất (3.6.1.7) và (3.6.1.8) đã dẫn đến kết quả dưới đây:

$$a_n = \frac{\pi}{\Omega_a} x_a\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) \quad (3.6.1.9)$$

Vì $x_a\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)$ không còn là tín hiệu liên tục nữa nên ta thay nó bằng ký hiệu $x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)$.

Vấn đề đặt ra ở đây là chúng ta tìm lại tín hiệu tương tự $x_a(t)$ từ các giá trị rời rạc $x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)$.

Thay thế giá trị của a_n trong (3.6.1.9) vào biểu thức của $X_a(\omega_a)$ trong (3.6.1.3) ta có:

$$X_a(\omega_a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\Omega_a} x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) e^{-j\omega_a n \frac{\pi}{\Omega_a}} \quad (3.1.6.10)$$

Thay thế $X_a(\omega_a)$ trong (3.6.1.10) vào biểu thức của $x_a(t)$ trong (3.6.1.6):

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_a}^{\Omega_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\Omega_a} x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) e^{-j\omega_a n \frac{\pi}{\Omega_a}} e^{j\omega_a t} d\omega_a$$

Vì phổ $X_a(\omega_a)$ là hữu hạn nên chuỗi (3.6.1.3) hội tụ, từ đó có thể viết:

$$\begin{aligned}
x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Omega_a} x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) \int_{-\Omega_a}^{\Omega_a} e^{j\omega_a \left(t - n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)} d\omega_a \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Omega_a} x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) \left[\frac{1}{j\left(t - n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)} e^{j\omega_a \left(t - n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)} \right]_{-\Omega_a}^{\Omega_a} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Omega_a} x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) \left(\frac{2}{t - n \frac{\pi}{\Omega_a}} \right) \sin\left[\Omega_a \left(t - n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)\right]
\end{aligned}$$

Cuối cùng thu được biểu thức $x_a(t)$ như sau:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) \frac{\sin\left[\Omega_a \left(t - n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)\right]}{\Omega_a \left(t - n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)} \quad (3.6.1.11)$$

Biểu thức (3.6.1.11) được gọi là công thức nội suy, bởi vì theo biểu thức này $x_a(t)$ được nội suy ra một cách hoàn toàn chính xác từ tập hợp các giá trị rời rạc $x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right)$. Như vậy biểu thức (3.6.1.11) chính là nội dung của định lý lấy mẫu.

Đôi khi để viết ngắn gọn người ta ký hiệu hàm sin cardinal như sau:

$$\text{sinc } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad : \quad \text{Sin cardinal}$$

Vậy viết lại (3.6.1.11) như sau:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) \text{sinc} \left[\Omega_a \left(t - n \frac{\pi}{\Omega_a}\right) \right] \quad (3.6.1.12)$$

Hình 3.6.1.3 minh họa công thức nội suy (3.6.1.11) và (3.6.1.12).

Bây giờ chúng ta chuyển sang phát biểu lại định lý lấy mẫu trong miền tần số.

- Giá trị $\frac{\pi}{\Omega_a} = T_s$ gọi là chu kỳ lấy mẫu (hoặc bước lấy mẫu)

- $\frac{1}{T_s} = F_s$ gọi là tần số lấy mẫu, vậy $F_s = \frac{\Omega_a}{\pi}$.

- Trong quan hệ giữa tần số f và ω ta có $\omega = 2\pi f$

Vậy : $\Omega_a = 2\pi F_s = 2\pi \frac{\Omega_a}{\pi} = 2\Omega_a = \frac{2\pi}{T_s}$

$$\Omega_a = 2\pi F_s, \quad F_s = \frac{\Omega_a}{2\pi}$$

Theo lý thuyết nội suy, rõ ràng là nếu các công thức nội suy (3.6.1.11) và (3.6.1.12) đúng với chu kỳ lấy mẫu $T_s = \frac{\pi}{\Omega_a}$ thì nó cũng đúng với $T_s < \frac{\pi}{\Omega_a}$.

Như vậy về thực chất theo các công thức nội suy và theo minh họa trên hình 3.6.1.3 thì tín hiệu tương tự $x_a(t)$ thu được chính là xếp chồng của vô số các hàm sin cardinal

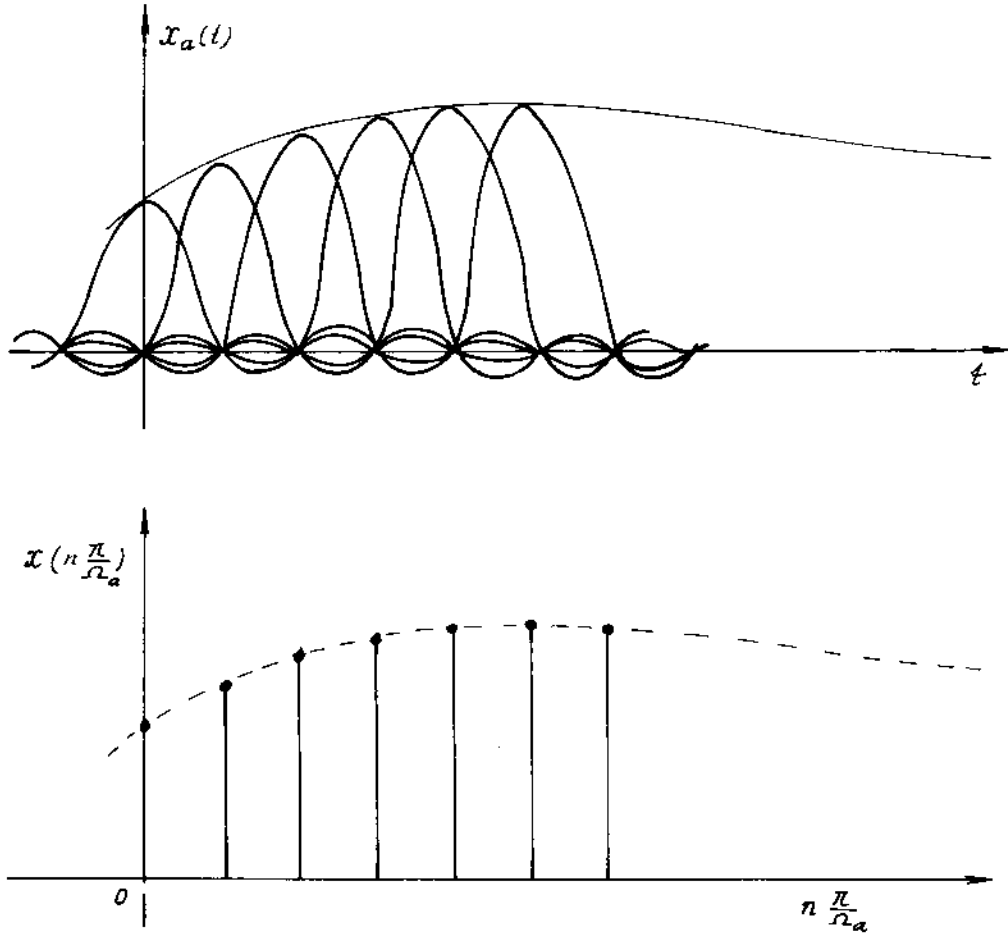
được trể đi các lượng bằng số nguyên lần của chu kỳ lấy mẫu $T_s = \frac{\pi}{\Omega_a}$ với hệ số nhân là giá trị của các mẫu $x\left(n\frac{\pi}{\Omega_a}\right)$.

Từ đây ta có thể phát biểu định lý lấy mẫu trong miền tần số như sau:

Một tín hiệu tương tự có bề rộng phổ hữu hạn trong khoảng $\left[-F_a = -\frac{\Omega_a}{2\pi}, F_a = \frac{\Omega_a}{2\pi}\right]$

được xác định một cách hoàn toàn chính xác bởi tập hợp các mẫu $x(nT_s)$ của nó nếu tần số lấy mẫu F_s thoả mãn điều kiện sau đây:

$$F_s \geq 2F_a \quad (3.6.1.13)$$



Hình 3.6.1.3.

3.6.2. TẦN SỐ NYQUIST (HOẶC NHỊP NYQUIST)

Định nghĩa

Tần số lấy mẫu lấy giá trị $2F_a$ được gọi là tần số Nyquist.

Ký hiệu tần số Nyquist là F_{sNy} .

$$F_{sNy} = 2F_a \quad , \quad \Omega_{sNy} = 2\Omega_a$$

Tất nhiên tương ứng ta cũng có chu kỳ (hoặc bước) Nyquist T_{sNy} :

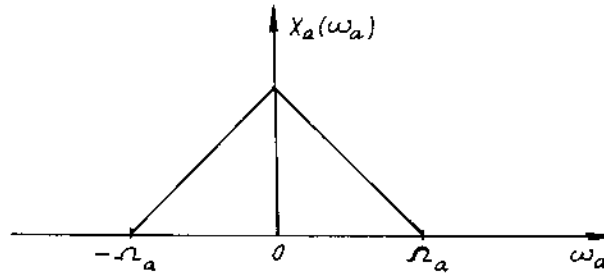
$$T_{sNy} = \frac{1}{F_{sNy}} = \frac{1}{2F_a}$$

Chú ý rằng trong chương 1 chúng ta đã nói đến việc chuẩn hoá biến số nT_s bằng chu kỳ lấy mẫu T_s .

Vậy :
$$x(nT_s) \longrightarrow x(n)$$

Tương ứng trong miền tần số (ω hoặc f) chúng ta sẽ có sự chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu $F_s = \frac{1}{T_s}$.

Ví dụ 3.6.2.1 : Cho tín hiệu tương tự có phổ như hình vẽ 3.6.2.1.



Hình 3.6.2.1.

Hãy vẽ phổ của các tín hiệu lấy mẫu trong ba trường hợp sau:

a) $F_s = F_{sNy}$ b) $F_s = \frac{2F_{sNy}}{3}$ c) $F_s = 2F_{sNy}$

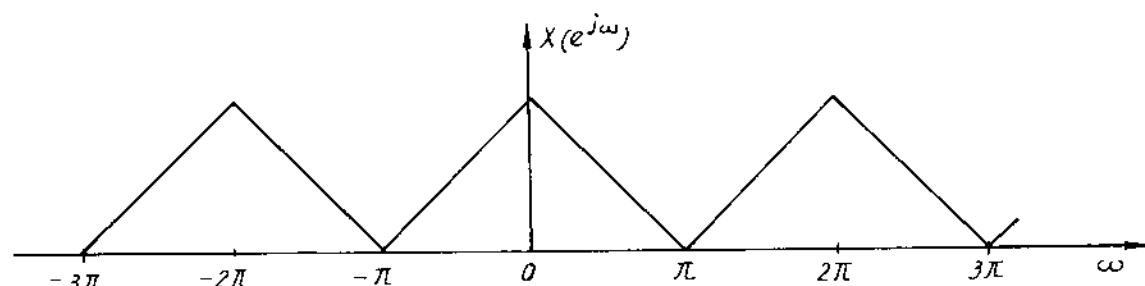
Giải :

Hình 3.6.2.2 cho ta kết quả vẽ theo trục tần số ω chuẩn hoá.

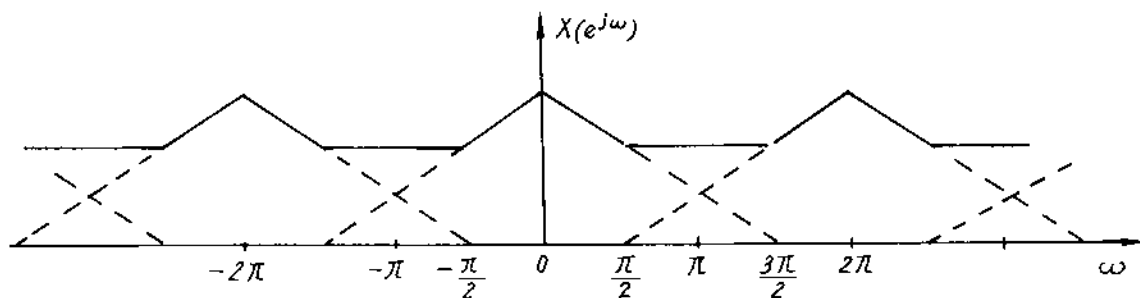
Nhận xét:

- Trường hợp b là trường hợp không thoả mãn định lý lấy mẫu bởi vì $F_s < F_{sNy}$ phổ bị dãn ra. Do đó đã gây ra hiện tượng chồng phổ. Trong trường hợp này không thể nào tách ra để lấy được phổ gốc ban đầu, vì có đoạn chồng lên nhau nên phổ đã bị biến dạng. Như thế, trong miền biến số khi chúng ta cần khôi phục lại tín hiệu tương tự từ tín hiệu lấy mẫu trong trường hợp này thì chúng ta sẽ không thu được tín hiệu tương tự như tín hiệu ban đầu trước khi lấy mẫu.

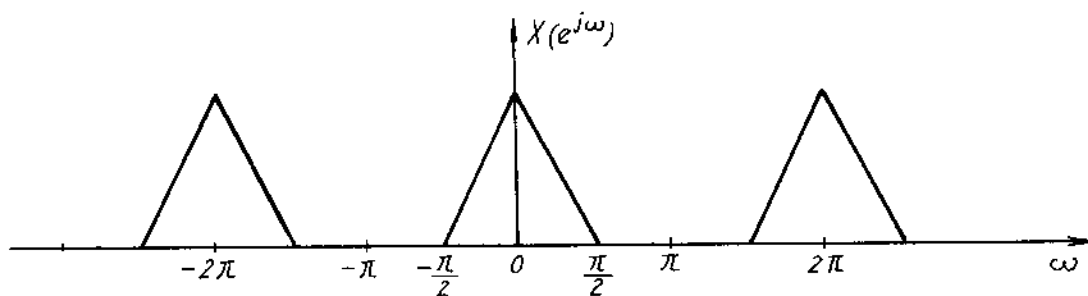
- Trường hợp a và c là trường hợp thoả mãn định lý lấy mẫu $F_s \geq F_{sNy}$, do đó không gây ra hiện tượng chồng phổ. Trong trường hợp a. $F_s = F_{sNy}$, ta thấy rằng $X_a(\omega_a)$ sau khi chuẩn hoá, chuẩn hoá ω_a bởi F_s thì $X_a(\omega_a)$ sẽ trùng khít với một chu kỳ của $X(e^{j\omega})$ (trong khoảng $-\pi \leq \omega \leq \pi$). Trong trường hợp c. $F_s > F_{sNy}$ phổ bị co lại và $X_n(\omega_a)$ sẽ trùng với một chu kỳ của $X(e^{j\omega})$. Trong hai trường hợp này chúng ta dễ dàng tách ra để lấy lại phổ gốc ban đầu của tín hiệu tương tự. Như thế trong miền biến số khi khôi phục lại tín hiệu ban đầu từ tín hiệu lấy mẫu, chúng ta sẽ thu được tín hiệu tương tự giống hệt như ban đầu.



a)



b)



c)

Hình 3.6.2.2.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài tập 3.1

Chứng minh rằng:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{nếu } l = n \\ 0 & \text{nếu } l \neq n \end{cases}$$

Bài tập 3.2.

Giả sử $x(n)$ là phức, hãy tìm quan hệ giữa $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$ và $\text{Im}[X(e^{j\omega})]$ với $\text{Re}[x(n)]$ và $\text{Im}[x(n)]$

Bài tập 3.3

Hãy tìm quan hệ giữa $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$ và $\text{Im}[X(e^{j\omega})]$ với $x(n)$ nếu:

- a) $x(n)$ thực.
- b) $x(n)$ thực và chẵn.
- c) $x(n)$ thực và lẻ.

Bài tập 3.4

Hãy tìm quan hệ giữa $Re[X(e^{j\omega})]$ và $Im[X(e^{j\omega})]$ với $x(n)$ nếu:

- a) $x(n)$ là thuần ảo.
- b) $x(n)$ là thuần ảo và chẵn.
- c) $x(n)$ là thuần ảo và lẻ.

Bài tập 3.5

Cho:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm: $X(e^{j\omega})$, $|X(e^{j\omega})|$, $\arg[X(e^{j\omega})]$, $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$.

Hãy vẽ: $x(n)$, $X(e^{j\omega})$, $|X(e^{j\omega})|$, $\arg[X(e^{j\omega})]$, $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$.

Bài tập 3.6

Hãy tính biến đổi Fourier từ biến đổi Z của các dãy sau đây:

- a) $x_1(n) = 3^n u(n)$
- b) $x_2(n) = (-1)^n u(n)$.

Bài tập 3.7

Hãy đánh giá hình học $X\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)$ nếu biết $X(Z)$ như sau:

$$X(Z) = 5 \frac{Z - 2e^{j\frac{\pi}{6}}}{\left(Z - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(Z - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}$$

Bài tập 3.8

Cho hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = x_2(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$$

Hãy tính tích chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ thông qua biến đổi Fourier.

Hãy vẽ dạng của $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$, $X_1(e^{j\omega})$, $X_2(e^{j\omega})$ và $X_3(e^{j\omega})$.

Bài tập 3.9

Cho đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính bất biến như sau:

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Dựa vào cách biểu diễn hệ thống trong miền tần số ω . Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống ứng với kích thích vào như sau:

$$\text{a) } x(n) = Ae^{j\frac{\pi}{2}n} \quad \forall n$$

$$b) x(n) = 10 + 5 \sin \frac{\pi}{2} n + 20 \cos \pi n \quad \forall n$$

Bài tập 3.10

Cho phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$

Hãy tìm $H(e^{j\omega})$, $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|H(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$

Hãy vẽ đồ thị của $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|H(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$

Bài tập 3.11

Cho phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

Hãy tìm $H(e^{j\omega})$, $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|H(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$

Hãy vẽ đồ thị của $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|H(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$

Bài tập 3.12

Cho một tín hiệu rời rạc $x(n]$ có biến đổi Fourier như sau:

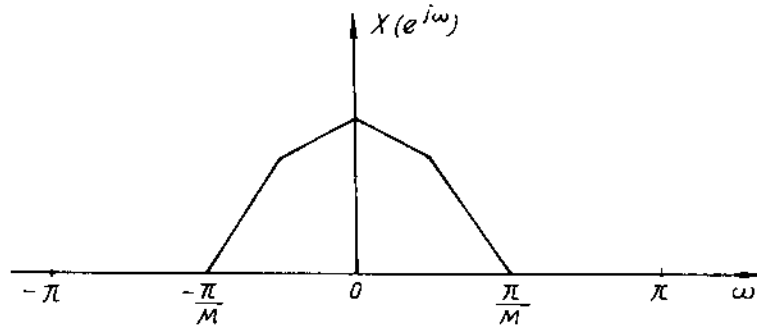
$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \neq 0 & |\omega| < \omega_c \\ = 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

a) Nếu ta có một tín hiệu mới $x_1(n]$ được định nghĩa như sau:

$$x_1(n) = x(nM); \quad M \text{ là số nguyên dương}$$

Hãy tìm $X_1(Z)$ theo hàm của $X(Z)$

b) Nếu $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ và $X(e^{j\omega})$ có dạng như hình BT 3.12 như sau:



Hình BT 3.12.

Hãy vẽ $X_1(e^{j\omega})$

Nếu ta có một tín hiệu mới nữa $x_2(n]$ được định nghĩa như sau:

$$x_2(n) = x_1(n/L); \quad L: \text{là số nguyên dương}$$

Hãy vẽ $X_2(e^{j\omega})$

Bài tập 3.13

Cho bộ lọc số thông thấp lý tưởng có đáp ứng tần số như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j4\omega} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

- Hãy tìm $h(n)$.

- Hãy vẽ $h(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ và $\omega_c = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 3.14

Cho bộ lọc thông cao lý tưởng có đáp ứng tần số như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j3\omega} & \begin{cases} -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

- Hãy tìm $h(n)$.

- Hãy vẽ $h(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ và $\omega_c = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 3.15

Chúng ta có một bộ lọc số thông dải lý tưởng có đáp ứng tần số như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega\omega_0} & \omega_{c2} \leq |\omega| \leq \omega_{c1} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Đặt $\omega_{c2} = \omega_{c1} = \Delta\omega$; $\frac{\omega_{c2} + \omega_{c1}}{2} = \omega_0$

a) Hãy tìm công thức tính gần đúng $h(n)$ khi $\Delta\omega$ rất nhỏ.

b) Hãy cho các nhận xét về loại bộ lọc này.

Bài tập 3.16

Hãy giải thích vì sao đáp ứng tần số của bộ vi phân lý tưởng pha không có dạng sau đây:

$$H(e^{j\omega}) = j\omega \quad 0 \leq |\omega| \leq \pi$$

Bài tập 3.17

Cho đáp ứng tần số của bộ vi phân lý tưởng như sau:

$$H(e^{j\omega}) = j\omega \quad 0 \leq |\omega| \leq \pi$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$.

Bài tập 3.18

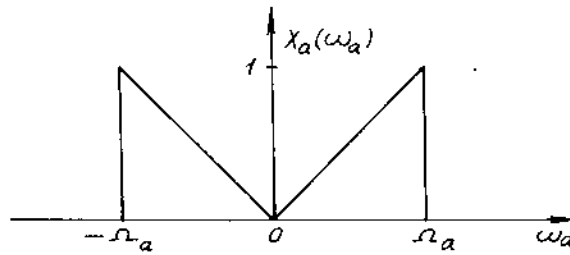
Cho đáp ứng tần số của bộ biến đổi Hilbert lý tưởng như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 \leq \omega \leq \pi \\ j & -\pi \leq \omega \leq 0 \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của nó.

Bài tập 3.19

Cho tín hiệu tương tự có phổ như hình BT 3.19 dưới đây:



Hình BT 3.19.

Hãy vẽ phổ của tín hiệu lấy mẫu trong 3 trường hợp sau đây:

a) $F_s = F_{sNy}$

b) $F_s = \frac{F_{sNy}}{2}$

c) $F_s = 3F_{sNy}$

Bài tập 3.20

Cho tín hiệu $x(n)$ được lấy mẫu từ một tín hiệu tương tự với chu kỳ lấy mẫu là T_s , một tín hiệu mới $x_1(n)$ được tạo từ tín hiệu này với chu kỳ lấy mẫu là $\frac{T_s}{2}$ bằng cách sau đây:

$$x_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & n \text{ chẵn} \\ \frac{1}{2} \left[x\left(\frac{n-1}{2}\right) + x\left(\frac{n+1}{2}\right) \right] & n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Hãy tìm phổ của $x_1(n)$ nếu phổ của $x(n)$ như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Bài tập 3.21

Chứng minh rằng nếu:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}$$

thì ta có:

$$X(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \frac{Z}{Z - e^{j\omega}} d\omega \quad |Z| > 1$$

Bài tập 3.22

Cho tín hiệu tương tự $x_a(t)$ được lấy mẫu với chu kỳ T_s , biến đổi Fourier của $x_a(t)$ là $X_a(\omega_a)$. Hãy chứng minh rằng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)Z^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega_a) \frac{Z}{Z - e^{j\omega_a T_s}} d\omega_a \quad |Z| > 1$$

Bài tập 3.23

Cho một tín hiệu rời rạc sau đây:

$$x(n) = u(n)e^{-j\omega n} \sin \omega n$$

Hãy tìm biến đổi Z của nó.

Bài tập 3.24

Hãy xác định đáp ứng tần số của hệ thống có đáp ứng xung $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \text{rect}_N \left(n + \frac{N}{2} \right) \quad (N \text{ chẵn})$$

Bài tập 3.25

Cho đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính bất biến như sau:

$$h(n) = \delta(n) + 2e^{-3n} u(n)$$

a) Hãy tìm đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống.

b) Hãy tìm đáp ứng ra $y(n)$ của hệ thống với kích thích $x(n)$ như sau:

$$x(n) = 4 \cos^2 2n$$

Bài tập 3.26

Giả sử có một tín hiệu $x(n]$, biến đổi Fourier của nó là $X(e^{j\omega})$. Hãy xác định tín hiệu mà biến đổi Fourier của nó có dạng $X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$ ở đây ω_0 là một hằng số.

Bài tập 3.27

Hãy xác định đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = x(n) + x(n - N)$$

Ở đây N là hằng số.

Hãy vẽ đồ thị $|H(e^{j\omega})|$

Bài tập 3.28

Cho phổ của tín hiệu $x(n)$ như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \cos 2\omega e^{-j\frac{\omega}{3}}$$

Hãy biểu diễn phổ này ở dạng

- Phần thực, phần ảo

- $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$

- $|X(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$

Hãy vẽ đồ thị $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$.

Bài tập 3.29

Cho phổ của tín hiệu $x(n)$ như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sin 4\omega e^{-j2\omega}$$

Hãy biểu diễn phổ này ở dạng

- Phần thực, phần ảo

- $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$

- $|X(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$

Hãy vẽ đồ thị $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$.

Bài tập 3.30

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây :

$$y(n] = 2x(n] + x(n - 1] + 3x(n - 2] + 4y(n - 1] - y(n - 2] + 5y(n - 3]$$

Hãy tìm $H(e^{j\omega})$

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 3.31

Cho hệ thống có đáp ứng tần số như sau :

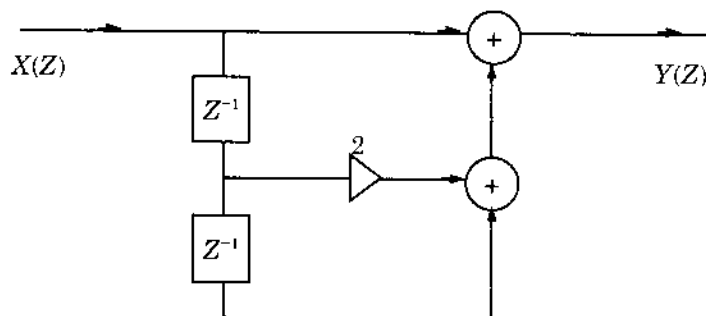
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega}}{2 + 4e^{-j\omega} - 6e^{-j2\omega}}$$

Hãy viết phương trình sai phân

Hãy vẽ sơ đồ.

Bài tập 3.32

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT3.32 sau đây :



Hình BT3.32

Hãy viết phương trình sai phân

Hãy tìm $h(n]$, $H(Z)$, $H(e^{j\omega})$

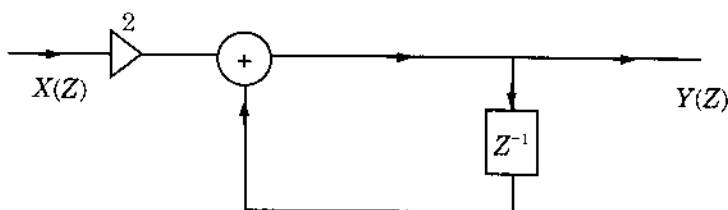
Hãy biểu diễn $H(e^{j\omega})$ dưới dạng

- $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$
- $|H(e^{j\omega})|$, $\varphi(\omega)$

Cho nhận xét về hệ thống này.

Bài tập 3.33

Cho hệ thống có sơ đồ cho trên hình BT3.33 sau đây :



Hình BT3.32

Hãy viết phương trình sai phân

Hãy tìm $h(n)$, $H(Z)$, $H(e^{j\omega})$

Hãy biểu diễn $H(e^{j\omega})$ dưới dạng

$$- A(e^{j\omega}), \theta(\omega)$$

$$- |H(e^{j\omega})|, \varphi(\omega)$$

Cho nhận xét về hệ thống này.

Bài tập 3.34

Cho tín hiệu thoại $x(n)$ có băng rộng phổ $F_u = 0 \div 4$ kHz, tín hiệu này đi qua bộ lọc số thông thấp lý tưởng để lọc lấy tần số từ $0 \div 1$ kHz.

Hãy vẽ đáp ứng biên độ $|H(e^{j\omega})|$ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng này.

Bài tập 3.35

Cho tín hiệu số được lấy mẫu với tần số lấy mẫu bằng tần số Nyquist $F_{sNg} = 40$ kHz. Tín hiệu này đi qua một bộ lọc số lý tưởng để lọc lấy tần số từ $10 \div 15$ kHz.

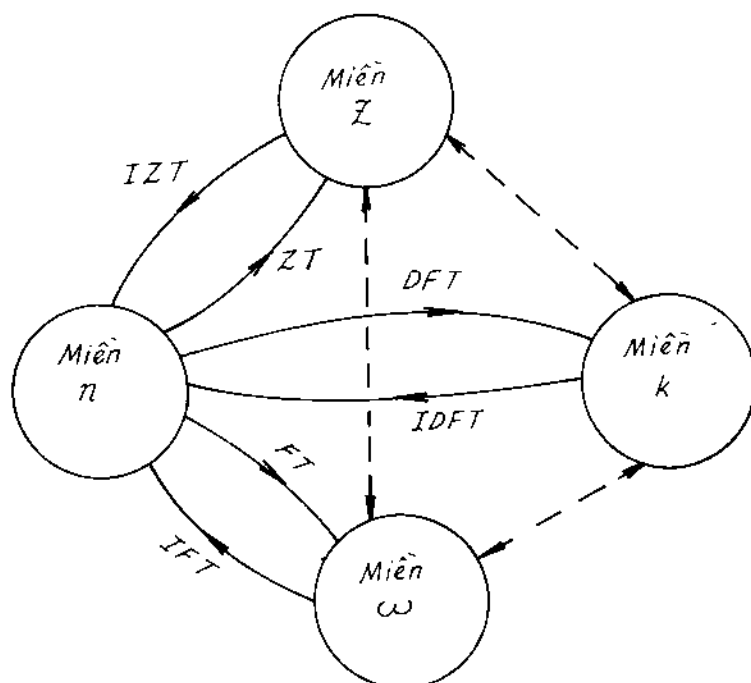
Hãy vẽ đáp ứng biên độ $|H(e^{j\omega})|$ của bộ lọc số lý tưởng này và cho biết đây là bộ lọc số lý tưởng gì?

Chương 4. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

4.1. MỞ ĐẦU

Trong chương 3 chúng ta đã nghiên cứu cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền tần số liên tục ω (hoặc f). Chúng ta đã dùng biến đổi Fourier đối với tín hiệu rời rạc để làm việc chuyển tín hiệu và hệ thống rời rạc từ miền biến số n sang miền tần số liên tục ω . Việc nghiên cứu trong miền ω rất thuận lợi cho việc phân tích và tổng hợp các hệ thống số, đặc biệt đối với các bộ lọc số mà chúng ta sẽ xét ở các chương sau.

Như vậy tổng kết lại chúng ta đã nghiên cứu việc biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong 3 miền: Miền biến số n , miền Z và miền ω . Trong mỗi một miền có những thuận lợi riêng của nó và giữa các miền cũng có sự liên hệ với nhau, hình 4.1.1 cho ta sơ đồ chuyển đổi giữa các miền và sự liên hệ giữa chúng với nhau.



Hình 4.1.1.

Trong chương 4 này chúng ta sẽ nghiên cứu cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền tần số rời rạc ω_k hoặc để ngắn gọn ta gọi là miền k . Thực chất của cách biểu diễn này là ta lấy từng điểm rời rạc trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z để biểu diễn. Để chuyển cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc sang miền tần số rời rạc chúng ta sẽ dùng một công cụ toán học gọi là biến đổi Fourier rời rạc (Discrete Fourier Transform : DFT). Việc biểu diễn trong miền tần số rời rạc đặc biệt hiệu quả khi xuất hiện các thuật toán tính nhanh DFT, ta gọi là biến đổi Fourier nhanh (Fast Fourier Transform : FFT).

Hình 4.1.1 cho sơ đồ chuyển đổi giữa miền n và miền k và sự liên hệ giữa miền k với các miền Z và ω mà chúng ta đã xét.

4.2. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC TÍN HIỆU TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ N

4.2.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

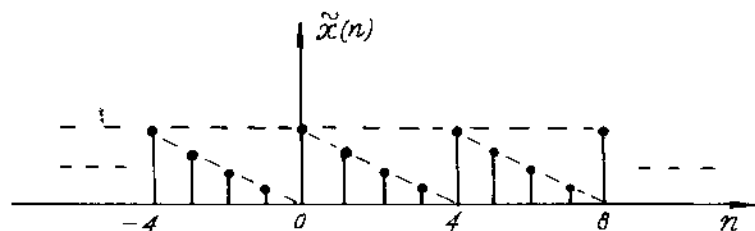
a) Tổng quan

Giả sử chúng ta có dãy tuần hoàn có chu kỳ N là $\tilde{x}(n)$. Chúng ta có thể viết như sau:

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + lN) \quad (4.2.1.1)$$

ở đây l là số nguyên

Hình (4.2.1.1) cho một ví dụ về dãy tuần hoàn có chu kỳ $N = 4$.



Hình 4.2.1.1.

Ta thấy rằng một dãy tuần hoàn có chu kỳ N có thể được biểu diễn bởi một chuỗi Fourier, tức là bởi một tổng của các dãy sin và cosin hoặc bởi tổng của các dãy hàm mũ phức có tần số cơ bản $\frac{2\pi}{N}$.

Giả sử chúng ta có dãy hàm mũ phức như sau:

$$e_k(n) = e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (4.2.1.2)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

Ta biết rằng:

$$e_0(n) = e^0 = 1$$

$$e_N(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nN} = e^{j2\pi n} = 1$$

Vậy:

$$e_0(n) = e_N(n)$$

Tương tự ta có:

$$e_1(n) = e_{N+1}(n)$$

$$e_2(n) = e_{N+2}(n)$$

$$e_3(n) = e_{N+3}(n)$$

.....

.....

Như vậy chúng ta có thể biểu diễn dãy tuần hoàn có chu kỳ N $\tilde{x}(n)$ dưới dạng sau đây:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (4.2.1.3)$$

ở đây $\tilde{X}(k)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N , hệ số $\frac{1}{N}$ trong công thức (4.2.1.3) dùng để tính toán $\tilde{X}(k)$ dưới dạng gọn hơn.

Bây giờ chúng ta tiến hành tính $\tilde{X}(k)$.

Nhân cả hai vế của biểu thức (4.2.1.3) với $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$

Ta có:

$$\tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

Sau đó lấy tổng theo n từ 0 đến $(N-1)$ ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

Đổi thứ tự của hai tổng ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \right]$$

Ta biết rằng:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nr} = \begin{cases} N & \text{với } r = lN \text{ (l: số nguyên)} \\ 0 & \text{với } r \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.2.1.4)$$

Vậy ta có:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} 1 & \text{với } (k-m) = lN \\ 0 & \text{với } (k-m) \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nếu ta lấy giá trị $l = 0$ thì $k = m$

Vậy ta có:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (k-m)n} \right] = \tilde{X}(m)$$

Vậy:

$$\tilde{X}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} mn}$$

Hoặc ta có thể viết:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (4.2.1.5)$$

Chú ý rằng $\tilde{X}(k)$ trong biểu thức (4.2.1.5) là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N , tức là:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(0) &= \tilde{X}(N) \\ \tilde{X}(1) &= \tilde{X}(N-1) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Chúng ta sẽ lấy cách biểu diễn $\tilde{X}(k)$ trong biểu thức (4.2.1.5) để làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn.

b) Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (4.2.1.6)$$

Nếu chúng ta đặt:

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} W_N^{kn} &= e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ W_N^{-kn} &= e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned} \quad (4.2.1.7)$$

Vậy ta có thể viết lại biểu thức của biến đổi Fourier rời rạc (4.2.1.7) như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (4.2.1.8)$$

Ta ký hiệu biến đổi Fourier rời rạc là DFT (Discrete Fourier Transform) và ta có ký hiệu toán tử như sau:

$$\text{DFT} [\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

$$\text{hoặc} \quad \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}(k)$$

Ví dụ 4.2.1.1: Cho dãy $x(n)$ như sau :

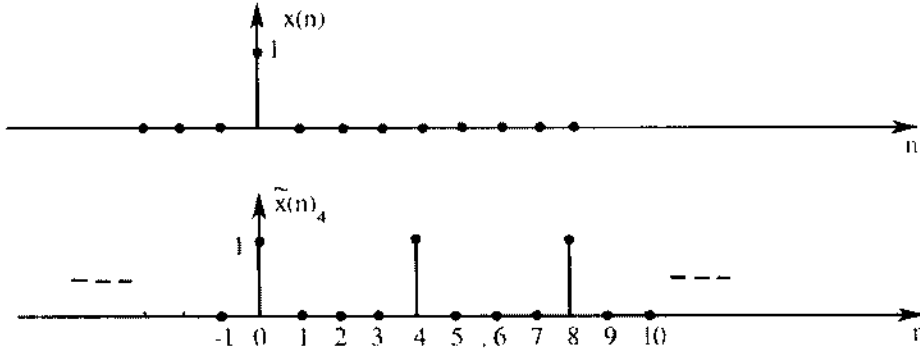
$$x(n) = \delta(n)$$

Hãy vẽ $\tilde{x}(n)_4$

Hãy tìm và vẽ $\tilde{x}(k)_4$

Giải :

Dạng của $\tilde{x}(n)_4$ được cho trên hình 4.2.1.1b.



Hình 4.2.1.1b

Để tìm $\tilde{x}(k)_4$ ta áp dụng công thức (4.2.1.6) ta có :

$$\tilde{x}(k)_4 = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)_4 W_4^{k,n} =$$

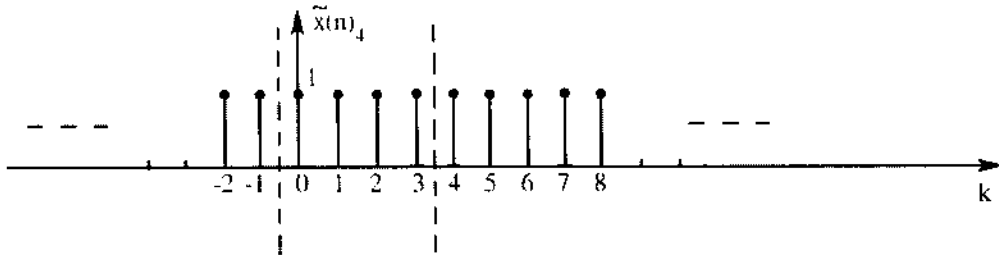
$$k=0 \Rightarrow \tilde{x}(0)_4 = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)_4 W_4^{0,n} = \tilde{x}(0)_4 W_4^{0,0} + \tilde{x}(1)_4 W_4^{0,1} + \tilde{x}(2)_4 W_4^{0,2} + \tilde{x}(3)_4 W_4^{0,3} = 1$$

$$k=1 \Rightarrow \tilde{x}(1)_4 = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)_4 W_4^{1,n} = \tilde{x}(0)_4 W_4^{1,0} + \tilde{x}(1)_4 W_4^{1,1} + \tilde{x}(2)_4 W_4^{1,2} + \tilde{x}(3)_4 W_4^{1,3} = 1$$

$$k=2 \Rightarrow \tilde{x}(2)_4 = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)_4 W_4^{2,n} = \tilde{x}(0)_4 W_4^{2,0} + \tilde{x}(1)_4 W_4^{2,1} + \tilde{x}(2)_4 W_4^{2,2} + \tilde{x}(3)_4 W_4^{2,3} = 1$$

$$k=3 \Rightarrow \tilde{x}(3)_4 = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)_4 W_4^{3,n} = \tilde{x}(0)_4 W_4^{3,0} + \tilde{x}(1)_4 W_4^{3,1} + \tilde{x}(2)_4 W_4^{3,2} + \tilde{x}(3)_4 W_4^{3,3} = 1$$

Từ kết quả tính toán ở trên ta vẽ được dạng của như trên hình 4.2.1.1c :



Hình 4.2.1.1c

Ví dụ 4.2.1.1b : Cho dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ như sau :

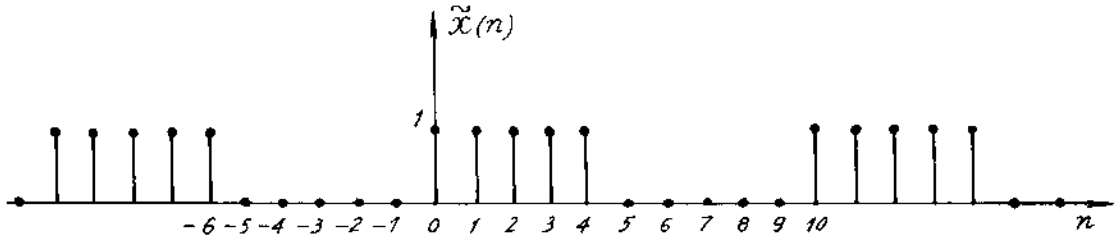
$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

Với chu kỳ $N = 10$

Hãy tìm $\tilde{X}(k)$.

Giải :

Dạng của $\tilde{x}(n)$ được cho trên hình (4.2.1.2).



Hình 4.2.1.2.

Ta có thể viết:

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + l.10)$$

Áp dụng biểu thức (4.2.1.6) ta có:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^9 \tilde{x}(n) W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{j \frac{2\pi}{10} kn} = \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi}{10} k 5}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{10} k}} = \frac{2j \sin \frac{\pi k}{2} e^{-j \frac{\pi}{2} k}}{2j \sin \frac{\pi k}{10} e^{-j \frac{\pi}{10} k}}$$

$$\tilde{X}(k) = e^{-j \frac{\pi k}{10}} \frac{\sin \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k} = 5 e^{-j \frac{4\pi}{10} k} \frac{\sin \frac{\pi}{2} k / \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k / \frac{\pi}{10} k}$$

đặt:

$$\tilde{A}(k) = 5 \frac{\sin \frac{\pi}{2} k / \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k / \frac{\pi}{10} k}$$

ta có:

$$\tilde{X}(k) = e^{-j \frac{4\pi}{10} k} \tilde{A}(k) = |\tilde{X}(k)| e^{j \arg[\tilde{X}(k)]} = |\tilde{X}(k)| e^{j \varphi(k)}$$

ở đây: $\varphi(k) \equiv \arg |\tilde{X}(k)|$

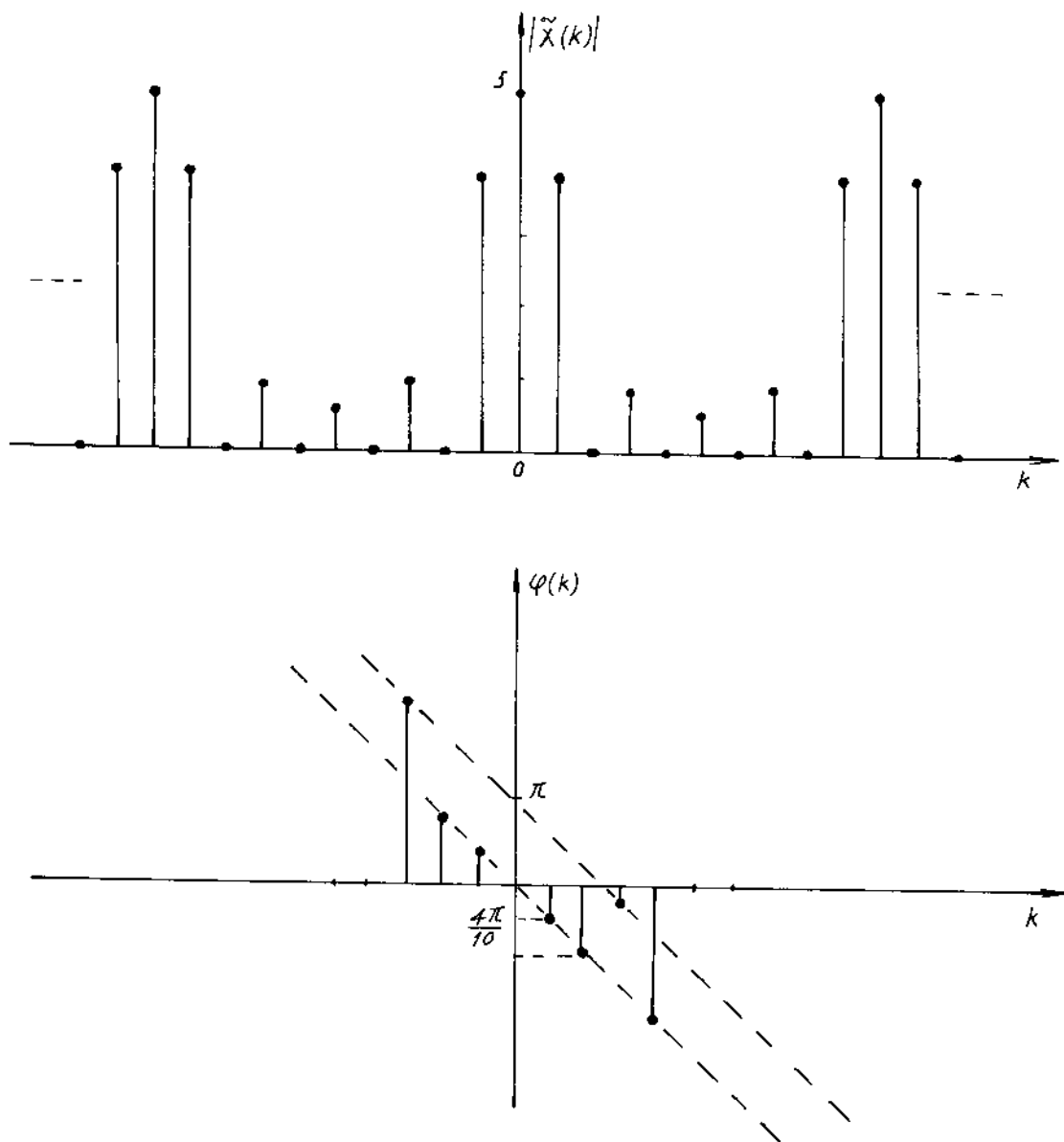
Cần chú ý rằng $A(k)$ là thực, nhưng có thể âm hoặc dương, vậy ta có hàm dấu của $A(k)$ là:

$$\begin{aligned} \text{Sgn}[\tilde{A}(k)] &= \frac{\tilde{A}(k)}{|\tilde{A}(k)|} \\ \text{Sgn}[A(k)] &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } \tilde{A}(k) \text{ dương} \\ -1 & \text{nếu } \tilde{A}(k) \text{ âm} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} |\tilde{X}(k)| &= |\tilde{A}(k)| \\ \varphi(k) &= -\frac{4\pi}{10} k + \frac{\pi}{2} \{1 - \text{Sgn}[A(k)]\} \end{aligned}$$

Hình (4.2.1.3) cho ta đồ thị của $|\tilde{X}(k)|$ và $\varphi(k)$.



Hình 4.2.1.3.

Ví dụ 4.2.1.2 :

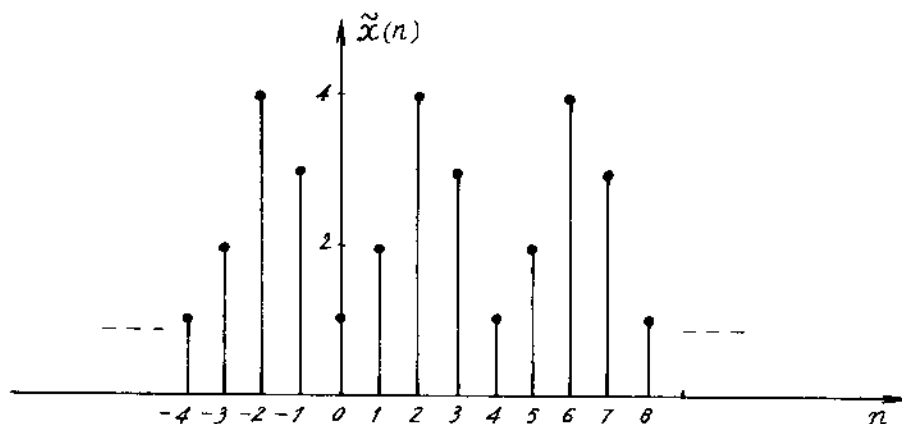
Cho dãy tuần hoàn có chu kỳ $N = 4$ như sau:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 3 & n = 3 \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{X}(k)$.

Giải :

Đồ thị của $\tilde{x}(n)$ được cho trên hình (4.2.1.4).



Hình 4.2.1.4.

$N = 4$ nên ta có:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{-j\frac{\pi}{2}nk} = (-j)^{nk}$$

Chúng ta phải tiến hành tính từng điểm của $X(k)$ như sau:

$$\tilde{X}(0) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n0} = 1 + 2 + 4 + 3 = 10$$

$$\tilde{X}(1) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n1} = 1(-j)^0 + 2(-j)^1 + 4(-j)^2 + 3(-j)^3 = -3 + j$$

$$\tilde{X}(2) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = 1(-j)^0 + 2(-j)^2 + 4(-j)^4 + 3(-j)^6 = 0$$

$$\tilde{X}(3) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = 1(-j)^0 + 2(-j)^3 + 4(-j)^6 + 3(-j)^9 = -3 - j$$

Biểu diễn $\tilde{X}(k)$ dưới dạng modul và argument ta có:

$$\tilde{X}(k) = |\tilde{X}(k)|e^{j\arg[\tilde{X}(k)]}$$

$$|\tilde{X}(0)| = 10$$

$$|\tilde{X}(1)| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\tilde{X}(2)| = 0$$

$$|\tilde{X}(3)| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

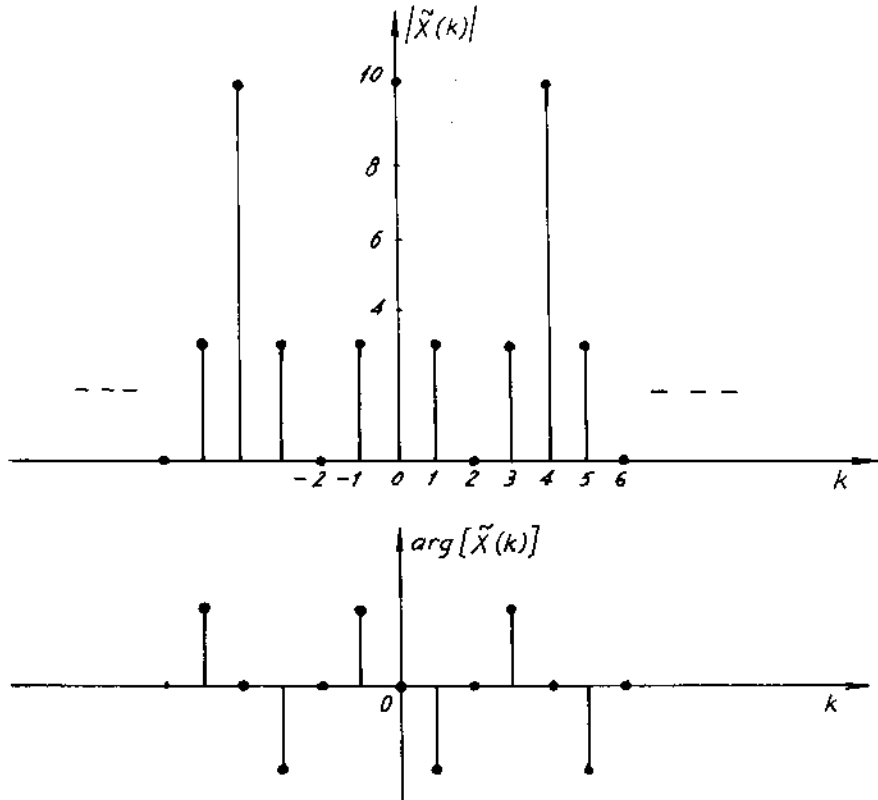
$$\arg[\tilde{X}(0)] = 0$$

$$\arg[\tilde{X}(1)] = \arctg\left(\frac{1}{-3}\right) = -\arctg\frac{1}{3}$$

$$\arg[\tilde{X}(2)] = 0$$

$$\arg[\tilde{X}(3)] = \arctg\left(\frac{-1}{-3}\right) = \arctg\frac{1}{3}$$

Đồ thị của $|\tilde{X}(k)|$ và $\arg[\tilde{X}(k)]$ cho trên hình (4.2.1.5).



Hình 4.2.1.5.

c) Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc ngược

Biến đổi Fourier rời rạc ngược được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.2.1.9)$$

hoặc:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (4.2.1.10)$$

Như vậy ta đã lấy cách biểu diễn dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N bởi tổng các dãy hàm mũ làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc ngược.

Chúng ta ký hiệu biến đổi Fourier rời rạc ngược là *IDFT* (Inverse Discrete Fourier Transform) và ta có ký hiệu toán tử sau:

$$IDFT[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$$

$$\text{hoặc} \quad [\tilde{X}(k)] \xrightarrow{IDFT} \tilde{x}(n)$$

Chú ý rằng trong những trường hợp cần nhấn mạnh chu kỳ của dãy tuần hoàn ta dùng ký hiệu sau :

$\tilde{x}(n)_N$ và $\tilde{X}(k)_N$ tức là dãy tuần hoàn có chu kỳ N .

Ví dụ 4.2.1.3 : Cho dãy $\tilde{X}(k)_4$ như sau :

$$\tilde{X}(k)_4 = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 3 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(0 \leq k \leq 3)$$

Hãy tìm $\tilde{x}(n)_4$

Giải :

Theo biểu thức (4.2.1.9) và (4.2.1.10) ta có :

$$\tilde{x}(n)_4 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{X}(k)_4 W_4^{k \cdot 0} =$$

Thay các giá trị của n trong một chu kỳ, tức là $n = 0 \div 3$ ta có:

$$\begin{aligned} n = 0 \Rightarrow \tilde{x}(0)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{X}(k)_4 W_4^{-k \cdot 0} \\ &= \frac{1}{4} [\tilde{X}(0)_4 W_4^{-0 \cdot 0} + \tilde{X}(1)_4 W_4^{-1 \cdot 0} + \tilde{X}(2)_4 W_4^{-2 \cdot 0} + \tilde{X}(3)_4 W_4^{-3 \cdot 0}] \\ &= \frac{1}{4} [1 + 1 + 1 + 1] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 1 \Rightarrow \tilde{x}(1)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{X}(k)_4 W_4^{-k \cdot 1} \\ &= \frac{1}{4} [\tilde{X}(0)_4 W_4^{-0 \cdot 1} + \tilde{X}(1)_4 W_4^{-1 \cdot 1} + \tilde{X}(2)_4 W_4^{-2 \cdot 1} + \tilde{X}(3)_4 W_4^{-3 \cdot 1}] \end{aligned}$$

$$W_4^{-0 \cdot 1} = e^{j0} = 1$$

$$W_4^{-1 \cdot 1} = e^{j \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 1} = e^{j \frac{\pi}{2}} = j$$

$$W_4^{-2 \cdot 1} = e^{j \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 1} = e^{j \frac{3\pi}{2}} = -1$$

$$W_4^{-3 \cdot 1} = e^{j \frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 1} = e^{j\pi} = -j$$

Vậy :

$$\frac{1}{4} [1 + j - 1 - j] = 0$$

Tính tương tự ta có :

$$\tilde{x}(2)_4 = 0 ; \tilde{x}(3)_4 = 0$$

Vậy ta có :

$$\tilde{X}(n)_4 = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & 1 \leq n \leq 3 \end{cases}$$

$$(0 \leq n \leq 3)$$

d) Bình luận

Chúng ta đã có :

$$\tilde{X}(k)_N = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)_N W_N^{k \cdot n}$$

Khai triển ta có :

$$\tilde{X}(0) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^0 + \tilde{x}(2)W_N^0 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^0$$

$$\tilde{X}(1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^1 + \tilde{x}(2)W_N^2 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)}$$

$$\tilde{X}(2) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^2 + \tilde{x}(2)W_N^4 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{2(N-1)}$$

⋮

$$\tilde{X}(N-1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^{(N-1)} + \tilde{x}(2)W_N^{2(N-1)} + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)}$$

Vậy ta có thể viết dưới dạng ma trận :

$$\tilde{X}(k)_N = \mathbf{W}_N \tilde{x}(0) \quad (4.2.1.11)$$

ở đây :

$$\tilde{X}(k)_N = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix} ; \tilde{x}(n)_N = \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \tilde{x}(2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Như vậy biến đổi Fourier rời rạc là một biến đổi thực hiện tương ứng một vectơ $\tilde{X}(k)$ trong miền tần số rời rạc k với một vectơ xác định trong miền biến đổi n . Toán tử của biến đổi này là ma trận $\mathbf{W}_N$. Và ta cũng có dạng ma trận của *IDFT* :

$$\tilde{x}(n)_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \tilde{X}(k)_N \quad (4.2.1.11b)$$

ở đây $\mathbf{W}_N^*$ là liên hợp phức của $\mathbf{W}_N$.

Ví dụ 4.2.1.4: Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha $\alpha(\omega) = 0$ như sau:

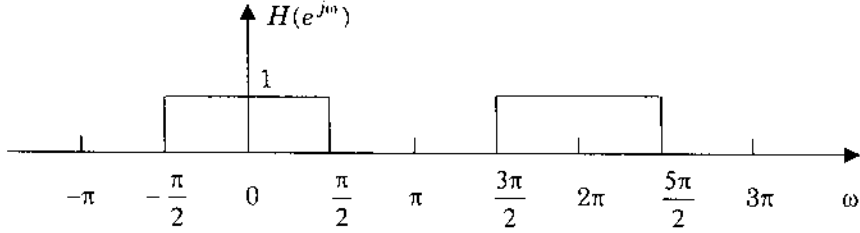
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

- Hãy tìm và vẽ $\tilde{H}(k)_4$

- Hãy tìm và vẽ $\tilde{h}(k)_4$

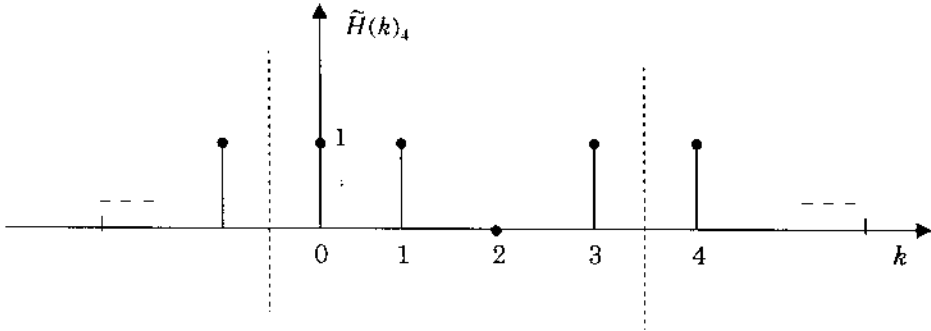
Giải:

Trước hết chúng ta vẽ $H(e^{j\omega})$ trên hình 4.2.1.6



Hình 4.2.1.6

Chia vòng tròn đơn vị thành 4 điểm chúng ta thu được $\tilde{H}(k)_4$ trên hình 4.2.1.7.



Hình 4.2.1.7

Từ hình 4.2.1.7 ta có:

$$\tilde{H}(0)_4 = 1$$

$$\tilde{H}(1)_4 = 1$$

$$\tilde{H}(2)_4 = 0$$

$$\tilde{H}(3)_4 = 1$$

Từ đây áp dụng công thức 4.2.1.9 và 4.2.1.10 ta có:

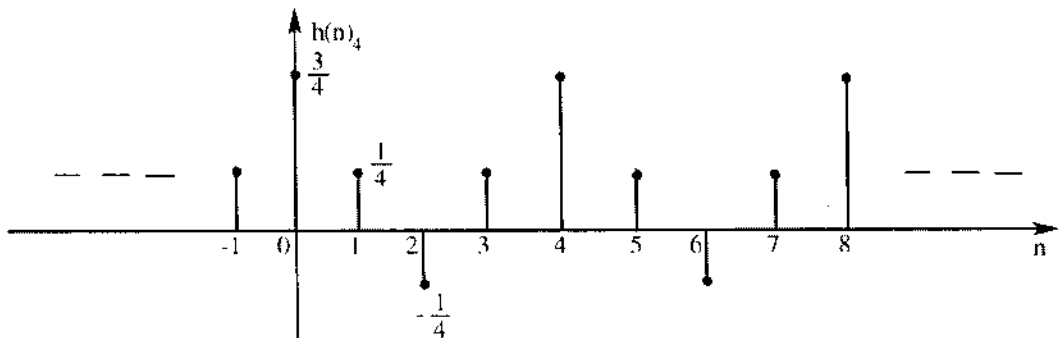
$$\tilde{h}(n)_4 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{H}(k)_4 W_4^{-kn}$$

Vậy

$$\begin{aligned} n = 0 \Rightarrow \tilde{h}(0)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{H}(k)_4 W_4^{-k \cdot 0} = \\ &= \frac{1}{4} [\tilde{H}(0)_4 W_4^{-0 \cdot 0} + \tilde{H}(1)_4 W_4^{-1 \cdot 0} + \tilde{H}(2)_4 W_4^{-2 \cdot 0} + \tilde{H}(3)_4 W_4^{-3 \cdot 0}] \\ &= \frac{1}{4} [1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 1 \Rightarrow \tilde{h}(1)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{H}(k)_4 W_4^{-k.1} = \\
&= \frac{1}{4} \left[\tilde{H}(0)_4 W_4^{-0.1} + \tilde{H}(1)_4 W_4^{-1.1} + \tilde{H}(2)_4 W_4^{-2.1} + \tilde{H}(3)_4 W_4^{-3.1} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[1.1 + 1.e^{\frac{e^{2\pi}}{4}} + 0 + 1.e^{\frac{2\pi}{4}.3} \right] \\
&= \frac{1}{4} [1 + j + 0 + j] = \frac{1}{4} \\
n = 2 \Rightarrow \tilde{h}(2)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{H}(k)_4 W_4^{-k.2} = \\
&= \frac{1}{4} \left[\tilde{H}(0)_4 W_4^{-0.2} + \tilde{H}(1)_4 W_4^{-1.2} + \tilde{H}(2)_4 W_4^{-2.2} + \tilde{H}(3)_4 W_4^{-3.2} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[1.1 + 1.e^{\frac{e^{2\pi}}{4}.2} + 0 + 1.e^{\frac{2\pi}{4}.6} \right] \\
&= \frac{1}{4} [1 - 1 + 0 - 1] = -\frac{1}{4} \\
n = 3 \Rightarrow \tilde{h}(3)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \tilde{H}(k)_4 W_4^{-k.3} = \\
&= \frac{1}{4} \left[\tilde{H}(0)_4 W_4^{-0.3} + \tilde{H}(1)_4 W_4^{-1.3} + \tilde{H}(2)_4 W_4^{-2.3} + \tilde{H}(3)_4 W_4^{-3.3} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[1.1 + 1.e^{\frac{e^{2\pi}}{4}.3} + 0 + 1.e^{\frac{2\pi}{4}.9} \right] \\
&= \frac{1}{4} [1 - j + 0 + j] = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Đồ thị của cho trên hình 4.2.1.8.



Hình 4.2.1.8

e) Bản chất của *DFT*

DFT bản chất là biến đổi đối phức bởi vì:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cos \frac{2\pi}{N} kn - j \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \sin \frac{2\pi}{N} kn \\ &= \tilde{A}(k) + j\tilde{B}(k)\end{aligned}$$

ở đây:

$$\tilde{A}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cos \frac{2\pi}{N} kn \quad (4.2.1.12)$$

$$\tilde{B}(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \sin \frac{2\pi}{N} kn \quad (4.2.1.13)$$

$\tilde{A}(k)$: Gọi là biến đổi cosin.

$\tilde{B}(k)$: Gọi là biến đổi sin.

4.2.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC DÂY TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ N

Để sử dụng có hiệu quả *DFT* chúng ta cần phải nghiên cứu các tính chất của chúng.

a) Tính tuyến tính

DFT là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu ta có hai dãy $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ là hai dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N và nếu ta có dãy $\tilde{x}_3(n)$ là tổ hợp tuyến tính của $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$:

$$\tilde{x}_3(n) = a \tilde{x}_1(n) + b \tilde{x}_2(n)$$

ở đây a và b là các hằng số.

$$\text{Thì nếu: } DFT[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$$

$$DFT[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k)$$

Ta có:

$$DFT[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k) = a \tilde{X}_1(k) + b \tilde{X}_2(k) \quad (4.2.2.1)$$

ở đây tất cả các dãy đều là tuần hoàn có chu kỳ N .

b) Tính chất trễ

Nếu $\tilde{x}(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N và :

$$DFT[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

thì nếu ta có dãy $\tilde{x}(n - n_0)$ là dãy trễ của dãy $\tilde{x}(n)$ cũng là tuần hoàn có chu kỳ N thì

$$DFT[\tilde{x}(n + n_0)] = W_N^{-kn_0} \tilde{X}(k) \quad (4.2.2.2)$$

Chứng minh:

$$DFT[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

$$DFT[\tilde{x}(n + n_0)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n + n_0) W_N^{kn}$$

$$\begin{aligned}\text{đối biến số:} \quad l &= n + n_0 \\ n &= l - n_0\end{aligned}$$

Ta có:

$$DFT[\tilde{x}(n + n_0)] = \sum_{l=n_0}^{N-1+n_0} \tilde{x}(l) W_N^{k(l-n_0)} = \sum_{l=n_0}^{N-1+n_0} \tilde{x}(l) W_N^{kl} W_N^{-kn_0}$$

bởi vì $\tilde{x}(l)$ là tuần hoàn với chu kỳ N và W_N^{kl} cũng là tuần hoàn với chu kỳ N nên:

$$\sum_{l=n_0}^{N-1+n_0} \tilde{x}(l) W_N^{kl} = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}(l) W_N^{kl} = \tilde{X}(k)$$

Vậy ta có:

$$DFT[\tilde{x}(n + n_0)] = W_N^{-kn_0} \tilde{X}(k)$$

Cần lưu ý rằng nếu $n_0 \geq N$, thì do tính tuần hoàn ta có thể lập luận như sau:

$$\text{Đặt} \quad n_0 = n'_0 + lN,$$

ta có:

$$\tilde{x}(n + n_0) = \tilde{x}(n + n'_0 + lN) = \tilde{x}(n + n'_0)$$

và :

$$W_N^{-kn_0} = W_N^{-k(n'_0 + lN)} = W_N^{-kn'_0} W_N^{-klN} = W_N^{-kn'_0}$$

$$\text{vì:} \quad W_N^{-klN} = e^{j2\pi kl} = 1$$

Tương tự đối với biến đổi Fourier rời rạc ngược ta cũng có:

$$IDFT[\tilde{X}(k + k_0)] = W_N^{nk_0} \tilde{x}(n) \quad (4.2.2.3)$$

Chứng minh :

$$IDFT[\tilde{X}(k + k_0)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k + k_0) W_N^{-kn}$$

$$\text{đối biến:} \quad l = k + k_0$$

$$k = l - k_0$$

Vậy:

$$IDFT[\tilde{X}(k + k_0)] = \frac{1}{N} \sum_{l=k_0}^{N-1+k_0} \tilde{X}(l) W_N^{-(l-k_0)n} = \frac{1}{N} \sum_{l=k_0}^{N-1+k_0} \tilde{X}(l) W_N^{-ln} W_N^{k_0n}$$

Do $\tilde{X}(l)$ và W_N^{-ln} là tuần hoàn với chu kỳ N ta có:

$$\frac{1}{N} \sum_{l=k_0}^{N-1+k_0} \tilde{X}(l) W_N^{-ln} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}(l) W_N^{-ln} = \tilde{x}(n)$$

Vậy ta có:

$$IDFT[\tilde{X}(k + k_0)] = W_N^{nk_0} \tilde{x}(n)$$

c) Tính đối xứng

Nếu ta có dãy $\tilde{x}(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N và cũng có :

$$\tilde{X}(k) = DFT[\tilde{x}(n)]$$

thì:

$$DFT[\tilde{x}^*(n)] = \tilde{X}^*(-k) \quad (4.2.2.4)$$

ở đây dấu $*$ là liên hợp phức.

Chúng minh:

$$\begin{aligned} DFT\left[\tilde{x}^*(n)\right] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n)W_N^{kn} = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n)W_N^{kn} \right]^* \right\}^* \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{-kn} \right]^* = \tilde{X}^*(-k) \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có:

$$DFT[\tilde{x}^*(-n)] = \tilde{X}^*(k) \quad (4.2.2.5)$$

Chúng minh:

$$DFT\left[\tilde{x}^*(-n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(-n)W_N^{kn}$$

Đổi biến $-n = m$ ta có:

$$DFT\left[\tilde{x}^*(-n)\right] = \sum_{m=0}^{-(N-1)} \tilde{x}^*(m)W_N^{-km}$$

Do tính tuần hoàn với chu kỳ N của $\tilde{x}(m)$ và W_N^{km} , ta có:

$$DFT\left[\tilde{x}^*(-n)\right] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)W_N^{km} \right]^* = \tilde{X}^*(k)$$

Ta cũng có:

$$DFT\{Re[\tilde{x}(n)]\} = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)] \quad (4.2.2.6)$$

Chúng minh:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= Re[\tilde{x}(n)] + jIm[\tilde{x}(n)] \\ \tilde{x}^*(n) &= Re[\tilde{x}(n)] - jIm[\tilde{x}(n)] \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} Re[\tilde{x}(n)] &= \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(n)] \\ DFT\{Re[\tilde{x}(n)]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(n)]W_N^{kn} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n)W_N^{kn} \right] = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)] \end{aligned}$$

Tính DFT của phần tử ảo của $\tilde{x}(n)$ ta có:

$$DFT\{Im[\tilde{x}(n)]\} = \frac{1}{2j}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)] \quad (4.2.2.7)$$

Chúng minh:

$$\begin{aligned} DFT\{Im[\tilde{x}(n)]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2j} [\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(n)] W_N^{kn} = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} - \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n) W_N^{kn} \right] = \frac{1}{2j} [\tilde{X}(k) - X^*(-k)] - \\ &= \frac{j}{2} [\tilde{X}^*(-k) - \tilde{X}(k)] \end{aligned}$$

Tổng kết lại các tính chất đối xứng của DFT đối với $x(n)$ phức ta có:

$$\begin{aligned} DFT[\tilde{x}^*(n)] &= \tilde{X}^*(-k) \\ DFT[\tilde{x}^*(-n)] &= \tilde{X}^*(k) \\ DFT\{Re[\tilde{x}(n)]\} &= \frac{1}{2} [\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)] \\ DFT\{Im[\tilde{x}(n)]\} &= \frac{j}{2} [X^*(-k) - \tilde{X}(k)] \end{aligned}$$

Trong thực tế thường chúng ta hay xử lý những tín hiệu thực, vậy bây giờ ta xét tính đối xứng của DFT đối với dãy $x(n)$ thực.

Nếu $x(n)$ là thực thì:

$$Re[\tilde{X}(k)] = Re[\tilde{X}^*(-k)] \quad (4.2.2.8)$$

Chúng minh:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= Re[\tilde{X}(k)] + jIm[\tilde{X}(k)] \\ \tilde{X}^*(k) &= Re[\tilde{X}(k)] - jIm[\tilde{X}(k)] \end{aligned}$$

Vậy:

$$Re[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{2} [\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(k)]$$

Vì $\tilde{x}(n)$ là thực nên $\tilde{x}(n) = \tilde{x}^*(n)$, vậy:

$$DFT[\tilde{x}(n)] = DFT[\tilde{x}^*(n)]$$

và theo tính chất (4.2.2.4) ta có:

$$\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$$

lấy liên hiệp phức hai vế ta có:

$$\tilde{X}^*(k) = \tilde{X}(-k)$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} Re[\tilde{X}(-k)] &= \frac{1}{2} [\tilde{X}(-k) + \tilde{X}^*(-k)] \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{X}^*(k) + \tilde{X}(k)] = Re[\tilde{X}(k)] \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$Re[\tilde{X}(k)] = Re[\tilde{X}(-k)]$$

Tương tự, nếu $x(n)$ là thực thì:

$$Im[\tilde{X}(k)] = -Im[\tilde{X}(-k)] \quad (4.2.2.9)$$

Chúng minh:

$$Im[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{2j} [\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(k)] = \frac{1}{2j} [\tilde{X}^*(-k) - \tilde{X}(-k)] = -Im[\tilde{X}(-k)]$$

Tương tự, nếu $\tilde{X}(n)$ là thực ta có:

$$|\tilde{X}(k)| = |\tilde{X}(-k)| \quad (4.2.2.10)$$

$$\arg [\tilde{X}(k)] = -\arg [\tilde{X}(-k)] \quad (4.2.2.11)$$

d) Tích chập tuần hoàn

Trong chương 1 chúng ta đã nghiên cứu tích chập tuyến tính:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

Tích chập tuần hoàn có khác định nghĩa của tích chập tuyến tính một chút là do chiều dài của các dãy tuần hoàn là vô cùng nhưng các chu kỳ lại lặp lại giống nhau, vì thế tổng chỉ lấy trong một chu kỳ, vậy ta có định nghĩa của tích chập tuần hoàn như sau:

Tích chập tuần hoàn của hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có chu kỳ N là một dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\tilde{x}_2(n-m) \quad (4.2.2.12)$$

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \left(\tilde{*} \right)_N \tilde{x}_2(n)$$

Bây giờ chúng ta xét trong miền k

$$\text{Nếu:} \quad DFT[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$$

$$DFT[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k)$$

$$DFT[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k)$$

Thì:

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k) \quad (4.2.2.13)$$

Chứng minh:

$$\tilde{X}_3(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m) \right] W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2(n-m) W_N^{kn}$$

$$\text{đổi biến:} \quad l = n - m$$

$$n = l + m$$

và chú ý $\tilde{x}_2(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N ,

ta có:

$$\tilde{X}_3(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) W_N^{k(l+m)} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{km} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) W_N^{kl} = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

Ví dụ 4.2.2.1 : Cho hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)_8$ và $\tilde{x}_2(n)_8$ có chu kỳ $N = 8$ như trên hình 4.2.2.1.

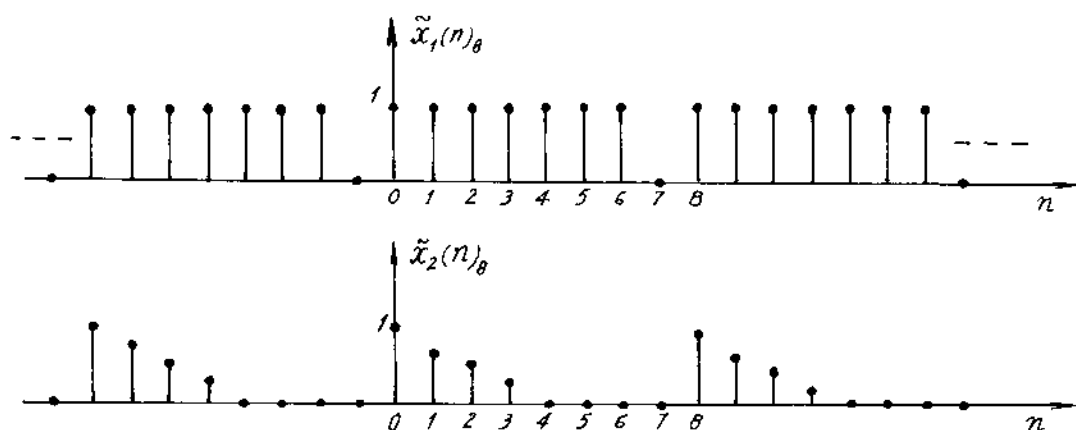
Hãy tìm $\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \left(\tilde{*} \right)_8 \tilde{x}_2(n)$

Giải :

Theo công thức (4.2.2.1) ta có:

$$\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$$

Như vậy ta phải tiến hành tính tổng giá trị của $\tilde{x}_3(n)$ trong một chu kỳ, tức là tính $\tilde{x}_3(0)$ đến $\tilde{x}_3(7)$. Chúng ta sẽ tiến hành bằng đồ thị cho trên hình 4.2.2.2.



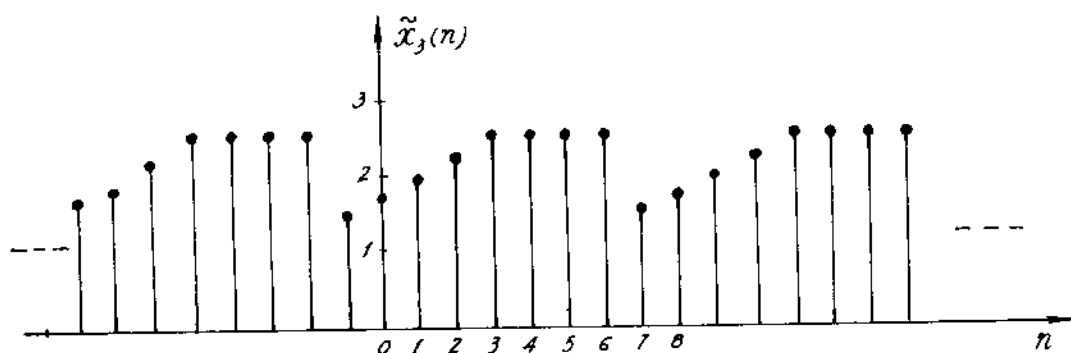
Hình 4.2.2.1.

Sau khi tính toán ta thu được kết quả sau:

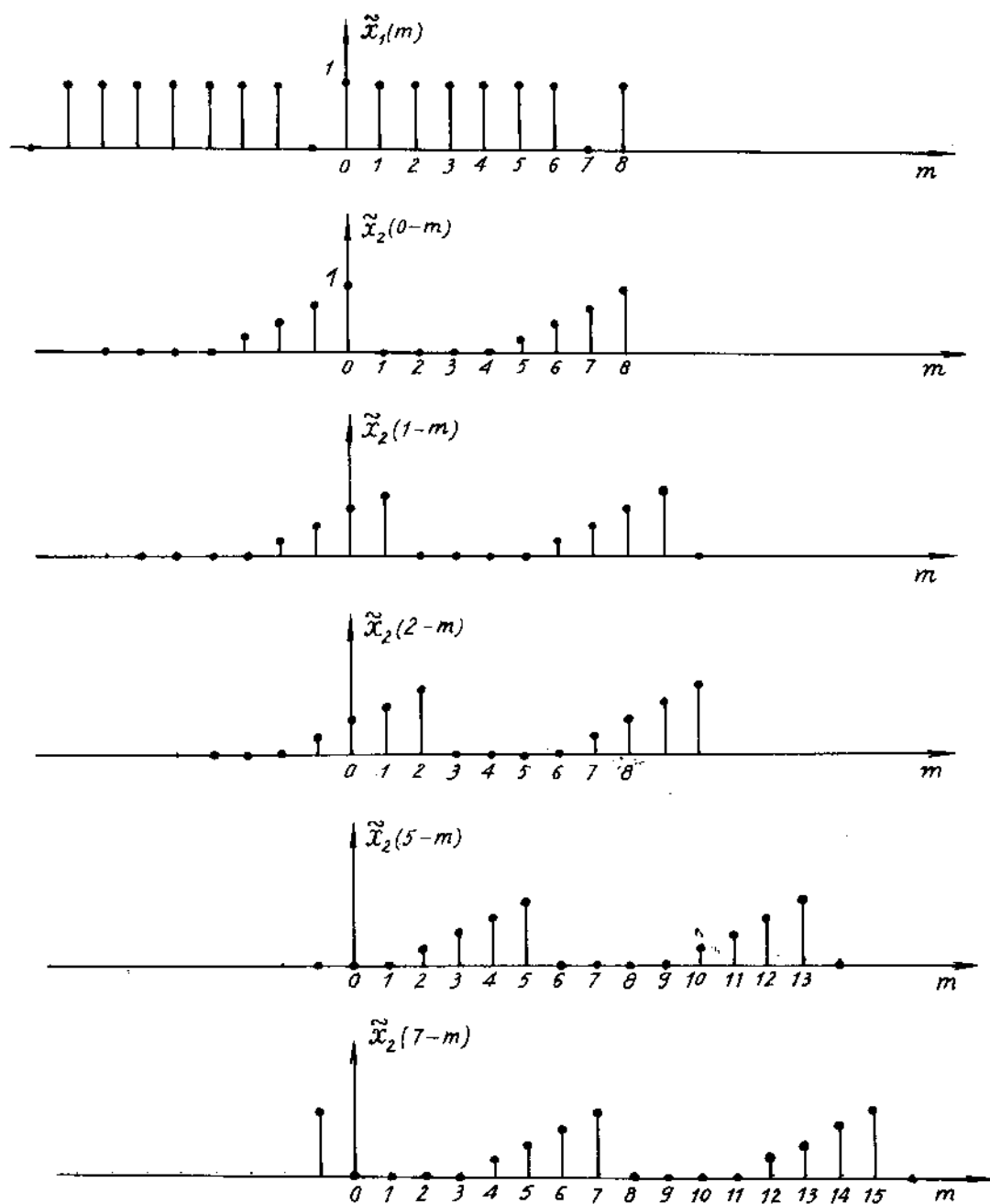
$$\tilde{x}_3(0) = 1,75 \quad \tilde{x}_3(1) = 2 \quad \tilde{x}_3(2) = 2,25 \quad \tilde{x}_3(3) = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(4) = 2,5 \quad \tilde{x}_3(5) = 2,5 \quad \tilde{x}_3(6) = 2,25 \quad \tilde{x}_3(7) = 1,75$$

và đồ thị của $\tilde{x}_3(n)$ như trên hình 4.2.2.3.



Hình 4.2.2.3.



Hình 4.2.2.2.

e) Tích của hai dãy

Nếu chúng ta coi tích của hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có cùng chu kỳ N là một dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn cũng có chu kỳ N như sau:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$$

và nếu chúng ta có:

$$DFT[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$$

$$DFT[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k)$$

$$DFT[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k)$$

thì ta có.

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l) \quad (4.2.2.14)$$

Chứng minh :

$$DFT[\tilde{x}_3(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n) W_N^{kn} = \tilde{X}_3(k)$$

Thay :

$$\tilde{x}_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) W_N^{-ln}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1(n) \cdot \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) W_N^{-ln} \cdot W_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1(n) W_N^{-ln} \cdot W_N^{kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1(n) W_N^{n(k-l)} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \cdot \tilde{X}_1(k-l) \end{aligned}$$

hoặc là:

$$\tilde{X}_3(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \cdot \tilde{X}_2(k-l) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$$

Như vậy ta thấy rằng trong miền n là tích đại số bình thường thì trong miền k (miền tần số rời rạc) sẽ là tích chập, điều đáng chú ý là tích chập trong miền k cũng là tích chập rời rạc, nó chỉ khác hệ số tỷ lệ $\frac{1}{N}$

Mặt khác chúng ta nhớ lại rằng nếu chúng ta biểu diễn tín hiệu trong miền tần số liên tục ω , trong miền n là tích chập bình thường, thì trong miền ω sẽ là tích chập, nhưng tích chập này là tích chập liên tục được định nghĩa bởi một tích phân.

f) Tương quan tuần hoàn

Nếu chúng ta có hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có chu kỳ N , thì hàm tương quan chéo của hai dãy này sẽ được tính toán trên một chu kỳ và được cho bởi công thức sau:

$$\tilde{r}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(m-n) \quad (4.2.2.15)$$

Vậy ta thấy rằng hàm tương quan chéo của hai dãy cùng có chu kỳ N là một dãy tuần hoàn cũng có chu kỳ N .

Bây giờ ta xét trong miền k

Nên ta có:

$$\begin{aligned} DFT\{\tilde{x}_1(n)\} &= \tilde{X}_1(k) \\ DFT\{\tilde{x}_2(n)\} &= \tilde{X}_2(k) \\ DFT\{\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n)\} &= \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) \end{aligned}$$

Thì ta có :

$$\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(-k) \quad (4.2.2.16)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} DFT\left[\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n)\right] &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(m-n) W_N^{kn} = \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m-n) W_N^{kn} \end{aligned}$$

đổi biến $l = m - n$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) W_N^{k(m-l)} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{km} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) W_N^{-kl} \\ &= \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(-k) \end{aligned}$$

Chú ý rằng:

$$\left\{ \left[\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) W_N^{-kl} \right]^* \right\}^* = \left[\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2^*(l) W_N^{kl} \right]^*$$

Vậy nếu $\tilde{x}_2(n)$ là thực thì $\tilde{x}_2^* = \tilde{x}_2(n)$, ta có:

$$\tilde{X}_2(-k) = \tilde{X}_2^*(k)$$

Và:

$$\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2^*(k) \quad (4.2.2.17)$$

Quan hệ này cũng đúng đối với các dãy $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ phức, nếu tương quan chéo của chúng được định nghĩa như sau:

$$\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2^*(n-m) \quad (4.2.2.18)$$

Chứng minh :

$$DFT\left[\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2^*(n-m) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2^*(n-m) W_N^{kn}$$

đổi biến $l = m - n$ ta có:

$$\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2^*(l) W_N^{k(m-l)} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{km} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2^*(l) W_N^{-kl}$$

mà:

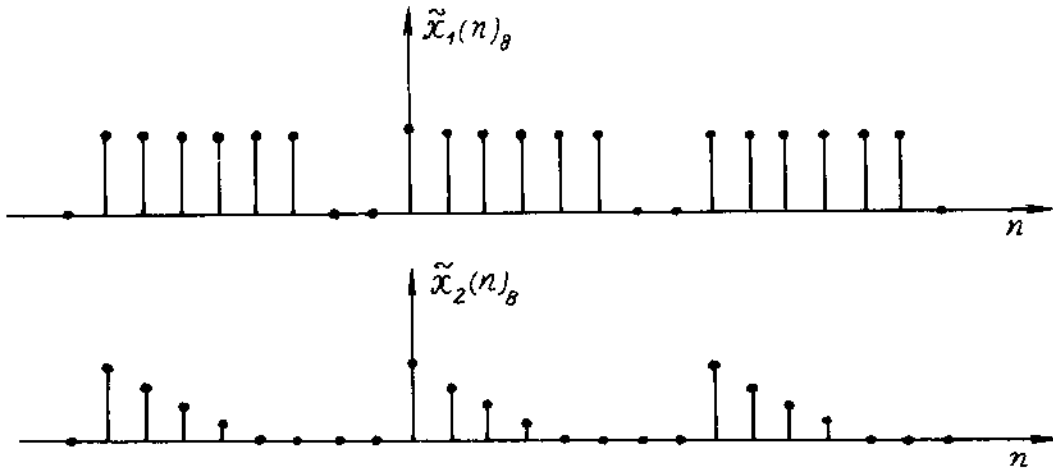
$$\left\{ \left[\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2(l) W_N^{-kl} \right]^* \right\}^* = \left[\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_2^*(l) W_N^{kl} \right]^*$$

Vậy:

$$\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2^*(k)$$

Ví dụ 4.2.2.2 :

Cho hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)_8$ và $\tilde{x}_2(n)_8$ có chu kỳ $N = 8$ như hình 4.2.2.4.



Hình 4.2.2.4.

Giải : Theo công thức 4.2.2.15 ta có:

$$\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n) = \sum_{m=0}^{8-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(m-n)$$

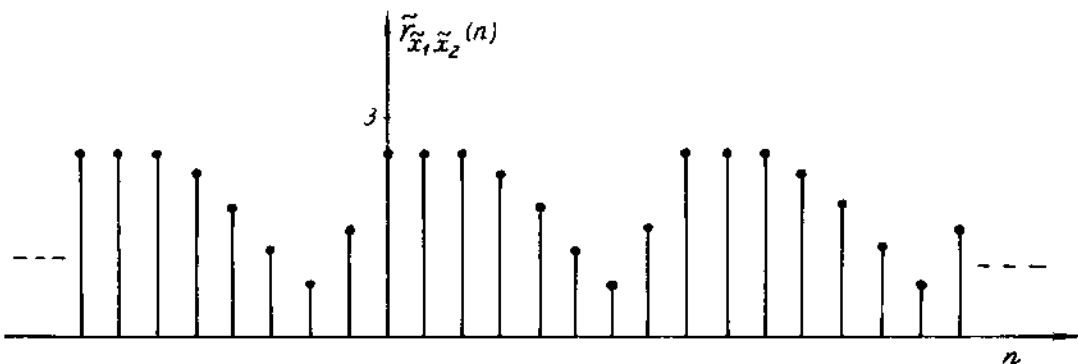
Vậy ta phải tính $\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n)$ trong một chu kỳ tức là tính từ $\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(0)$ đến $\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(7)$

Đồ thị minh họa quá trình tính toán cho trên hình 4.2.2.5.

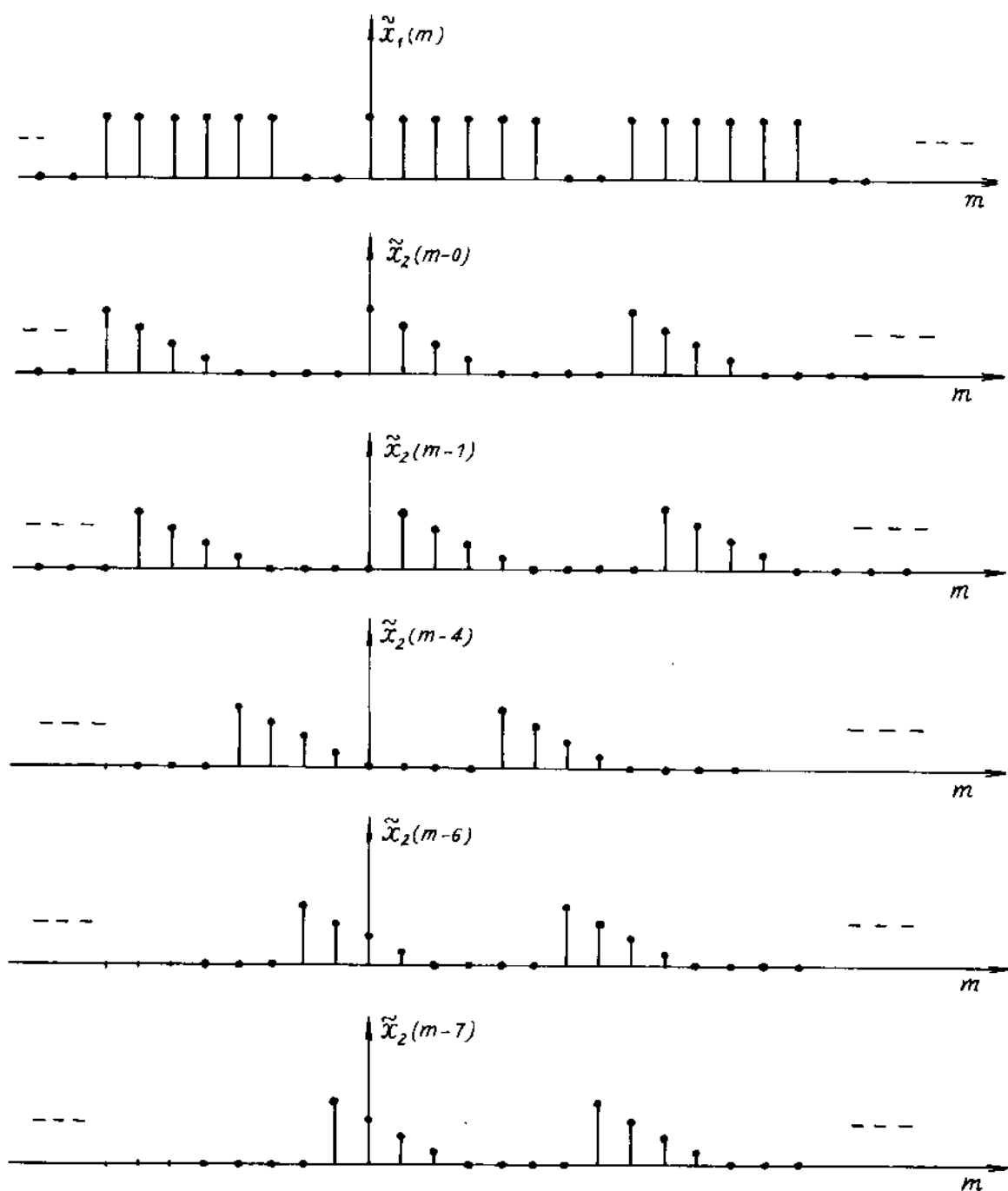
Sau khi tính toán chúng ta thu được kết quả sau :

$$\begin{array}{llll} \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(0) = 2,5 & \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(1) = 2,5 & \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(2) = 2,5 & \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(3) = 2,25 \\ \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(4) = 1,75 & \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(5) = 1,25 & \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(6) = 0,75 & \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(7) = 1,5. \end{array}$$

Và kết quả của $\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n)$ cho trên hình 4.2.2.6.



Hình 4.2.2.6.



Hình 4.2.2.5.

g) Tổng kết các tính chất của DFT đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ N

Bảng (4.2.2.1) cho ta các tính chất cơ bản của DFT đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ N .

Miền n	Miền k
$\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k)$
$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$	$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$
$a\tilde{x}_1(n)_N + b\tilde{x}_2(n)_N$	$a\tilde{X}_1(k)_N + b\tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n - n_0)$	$W_N^{kn_0} \tilde{X}(k)$
$W_N^{ln} \tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k + l)$
$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n - m) = \tilde{x}_1(n)_N (\tilde{*})_N \tilde{x}_2(n)_N$	$\tilde{X}_1(k)_N \tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}_1(n)_N \cdot \tilde{x}_2(n)_N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l)_N \tilde{X}_2(k - l)_N = \tilde{X}_1(k)(\tilde{*}) \tilde{X}_2(k)$
$\tilde{r}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2^*(m - n)$	$\tilde{R}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2^*(-k)$
Nếu $\tilde{x}_2(n)$ thực	$\tilde{R}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2^*(k)$
$\tilde{r}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2^*(m - n)$	$\tilde{R}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2^*(k)$
$\tilde{x}^*(n)$	$\tilde{X}^*(-k)$
$\tilde{x}^*(-n)$	$\tilde{X}^*(k)$
$Re[\tilde{x}(n)]$	$\frac{1}{2} [\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)]$
$jIm[\tilde{x}(n)]$	$\frac{1}{2} [\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)]$
Nếu $\tilde{x}(n)$ thực	$\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$
	$Re[\tilde{X}(k)] = Re[\tilde{X}(-k)]$
	$Im[\tilde{X}(k)] = -Im[\tilde{X}(-k)]$
	$ \tilde{X}(k) = \tilde{X}(-k) $
	$\arg[\tilde{X}(k)] = -\arg[\tilde{X}(-k)]$

4.3. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC DẪY KHÔNG TUẦN

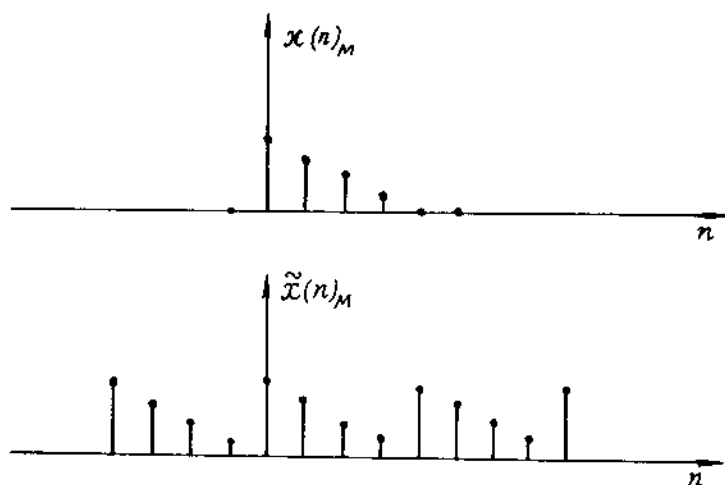
HOÀN CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN

4.3.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

a) Tổng quan

Nếu chúng ta có một dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn M và một dãy tuầ hoàn có chu kỳ N .

Nếu $M = N$ thì dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ chính bằng chính xác một chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ $N = M$ $\tilde{x}(n)_M$. Hình (4.3.1.1) sẽ cho ta một ví dụ $M = N = 4$.



Hình 4.3.1.1.

Nếu $M < N$ thì ta thấy rằng dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ sẽ có thể bằng chính một chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$ khi chúng ta coi dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ là một dãy có chiều dài N bằng cách kéo dài dãy này thêm $N - M$ mẫu có giá trị không.

$$x(n)_M \rightarrow x(n)_N$$

Hình 4.3.1.2 sẽ cho ta một ví dụ $M = 4$, $N = 8$.

Như vậy ta thấy rằng từ một dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ ta có thể lập một dãy tuần hoàn có chu kỳ $N \geq M$ $\tilde{x}(n)_N$ và mỗi một chu kỳ của $\tilde{x}(n)_N$ sẽ chính bằng dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_M$. Còn trong trường hợp $N < M$ thì chúng ta không thể làm được việc đó.

Vì thế nếu $N \geq M$ ta có thể viết:

$$\tilde{x}(n)_N = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (x(m + rN))_M$$

hoặc:

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) = x(n)_N$$

Rõ ràng là dãy $x(n)_N$ có chiều dài hữu hạn N nhận được bằng cách trích ra một chu kỳ của dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$ có chu kỳ N , tức là:

$$x(n)_N = \begin{cases} x^2(n)_N & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Để nhận được dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn chúng ta có thể sử dụng một dãy chữ nhật

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy ta có:

$$x(n)_N = \tilde{x}(n) \cdot \text{rect}_N(n)$$

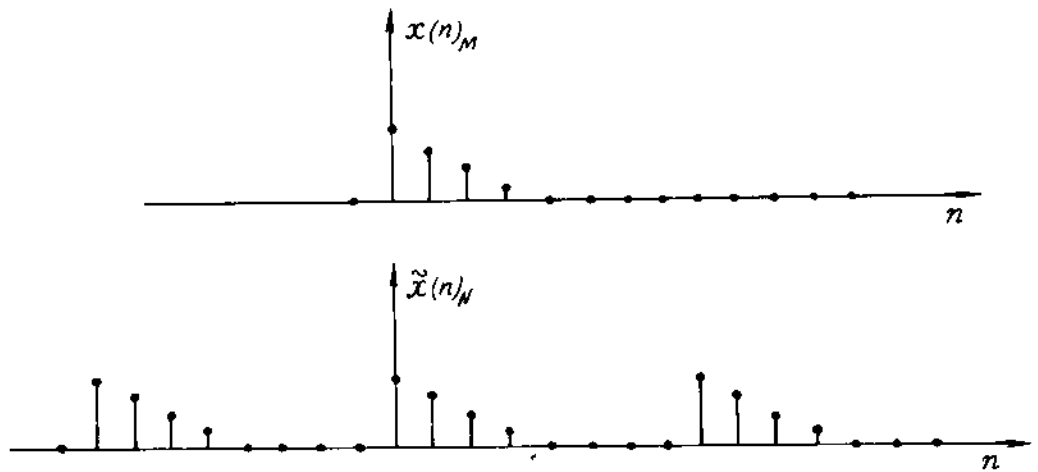
Chúng ta cũng có tính đối ngẫu giữa miền n và miền k (hoặc là giữa dãy $x(n)$ và dãy $X(k)$). Vì vậy trong miền k , đối với dãy $X(k)$ ta cũng có thể viết:

$$\tilde{X}(k) = X(k, \text{mod } N) = X(k)_N$$

$$X(k) = \begin{cases} \tilde{X}(k) & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) \cdot \text{rect}_N(k)$$

Hơn nữa chúng ta thấy rằng biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N chỉ tính trong một chu kỳ rồi kết quả đó được tuần hoàn hoá từ $-\infty$ đến $+\infty$ với chu kỳ N . Vậy ta có thể lấy định nghĩa của biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N để làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N nhưng không được tuần hoàn hoá mà chỉ lấy từ 0 đến $N-1$.



Hình 4.3.1.2.

b) Các định nghĩa

Cặp biến đổi Fourier rời rạc (*DFT*) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa như sau:

Biến đổi Fourier thuận

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_n^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.3.3.1)$$

Ký hiệu :

$$DFT [x(n)] = X(k)$$

$$x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$$

Biến đổi Fourier ngược (*IDFT*)

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_n^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.3.3.2)$$

Ký hiệu :

$$IDFT [X(k)] = x(n)$$

$$X(k) \xrightarrow{IDFT} x(n)$$

Ở đây ta gọi $X(k)$ là phổ rời rạc của tín hiệu $x(n)$, và nếu biểu diễn ở dạng modul và argument ta có:

$$X(k) = |X(k)|e^{j\varphi(k)}$$

$$\varphi(k) = \arg [X(k)] \quad (4.3.1.3)$$

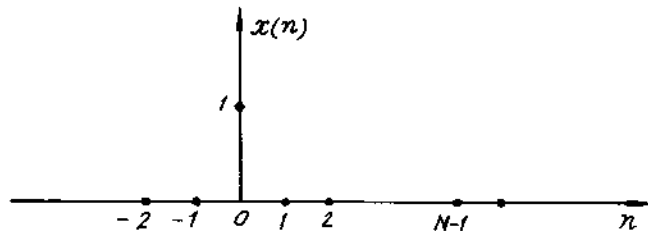
$|X(k)|$: Gọi là phổ rời rạc biên độ.

$\varphi(k)$: Gọi là phổ rời rạc pha.

Ví dụ 4.3.1.1 : Hãy tìm *DFT* của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \delta(n)$$

Giải : Muốn tìm *DFT* trước hết ta phải chọn chiều dài của *DFT*, tức là chọn chiều dài của dãy. Giả sử ta chọn là N , vậy dãy $x(n)$ có dạng sau (hình 4.3.1.3).



Hình 4.3.1.3.

Và $X(k)$ được tính như sau:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)W_N^{kn}$$

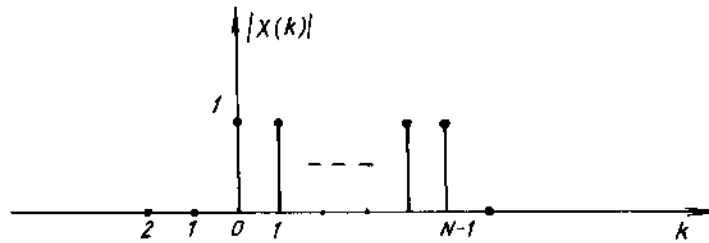
$$= \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = |X(k)|e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\varphi(k) = 0 \quad \forall k$$

$|X(k)|$ có dạng sau (hình 4.3.1.4).



Hình 4.3.1.4.

Ví dụ 4.3.1.2 : Hãy tìm *DFT* của dãy có chiều dài hữu hạn:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giải : Theo định nghĩa *DFT* ta có:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (a W_N^k)^n = \frac{1 - (a W_N^k)^N}{1 - a W_N^k}$$

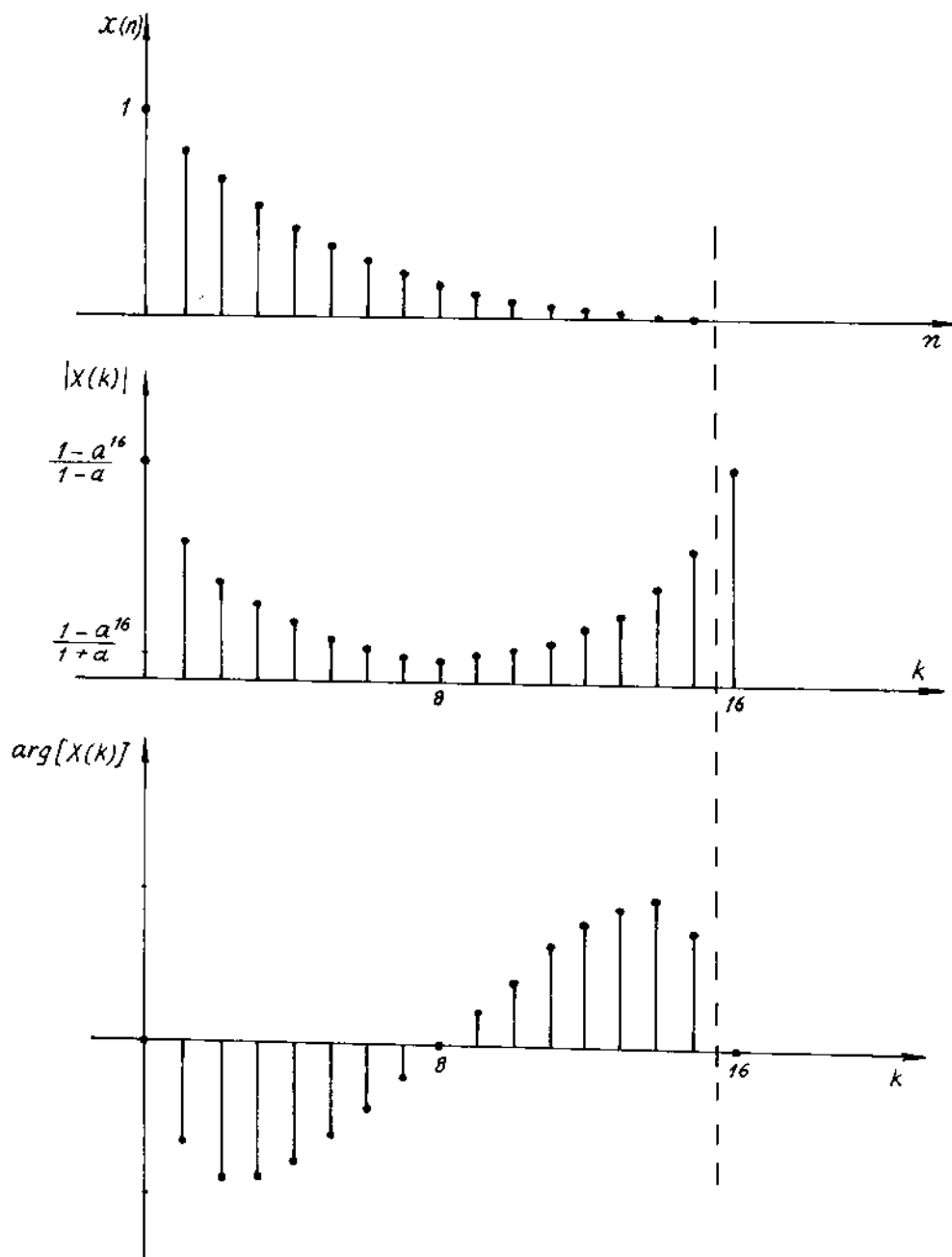
mà: $W_N^{kn} = 1 \quad \forall k$

Vậy:

$$X(k) = \frac{1 - a^N}{1 - a W_N^k}$$

$$X(k) = |X(k)|e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \frac{1 - a^N}{\sqrt{\left(1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k\right)^2 + a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{N} k}} = \frac{1 - a^N}{\sqrt{1 - 2a \cos \frac{2\pi}{N} k + a^2}}$$



Hình 4.3.1.5.

Để tìm $\arg[X(k)]$ ta viết $X(k)$ dưới dạng sau:

$$X(k) = \frac{1 - a^N \left(1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k - ja \sin \frac{2\pi}{N} k \right)}{\left(1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k \right)^2 + a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{N} k}$$

$$\varphi(k) = \arg[X(k)] = \arctg \frac{\operatorname{Im}[X(k)]}{\operatorname{Re}[X(k)]} = -\arctg \left(\frac{a \sin \frac{2\pi}{N} k}{1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k} \right)$$

$$= -\arctg \frac{a \sin \frac{2\pi}{N} k}{a \cos \frac{2\pi}{N} k - 1}$$

Hình 4.3.1.5 cho dạng của $x(n)$; $|X(k)|$; $\varphi(k)$ với $N = 16$ và $a = 0,9$.

4.3.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC DÂY CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN

Trong mục này chúng ta sẽ nhìn lại các tính chất của *DFT* đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ N theo quan điểm của các dãy có chiều dài hữu hạn N , tức là trong khoảng $0 \leq n \leq N-1$.

a) Tính tuyến tính

DFT là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu ta có hai dãy có chiều dài hữu hạn $x_1(n)$ và $x_2(n)$ và dãy $x_3(n)$ là tổ hợp tuyến tính của hai dãy này, tức là:

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \quad (4.3.2.1)$$

mà ta có:

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

$$DFT[x_3(n)] = X_3(k)$$

thì ta có:

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (4.3.2.2)$$

Chú ý rằng nếu chiều dài của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là khác nhau

$$L[x_1(n)] = N_1$$

$$L[x_2(n)] = N_2$$

thì ta phải chọn chiều dài của dãy $x_3(n)$ như sau:

$$L[x_3(n)] = N_3 = \max(N_1, N_2)$$

và tất cả các $DFT[x_1(n)]$, $DFT[x_2(n)]$ và $DFT[x_3(n)]$ đều phải tính trên N_3 mẫu. Giả sử nếu $N_1 < N_2$ thì dãy $x_1(n)$ phải được kéo dài thêm $N_2 - N_1$ mẫu không và $DFT[x_1(n)]$ phải được tính trên $N_3 = N_2$ mẫu và $DFT[x_2(n)]$, $DFT[x_3(n)]$ cũng được tính trên $N_3 + N_2$ mẫu. Cụ thể là:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) W_{N_2}^{kn} \equiv X_1(k)_{N_3} \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n) W_{N_2}^{kn} \equiv X_2(k)_{N_3} \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

$$X_3(k) = \sum_{n=0}^{N_3-1} x_3(n) W_{N_2}^{kn} \equiv X_3(k)_{N_3} \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

Chú ý rằng để nhấn mạnh và chỉ rõ chiều dài của các dãy trong miền n và miền k ta ghi thêm chiều dài vào ký hiệu dãy như là:

$$\begin{aligned} x_1(n)_{N_1} &: \text{Dãy có chiều dài } N_1 \\ x_2(n)_{N_2} &: \text{Dãy có chiều dài } N_2 \\ x_3(n)_{N_3} &: \text{Dãy có chiều dài } N_3 \\ X_1(k)_{N_3} &: \text{Dãy có chiều dài } N_3 \end{aligned}$$

b) Trễ vòng

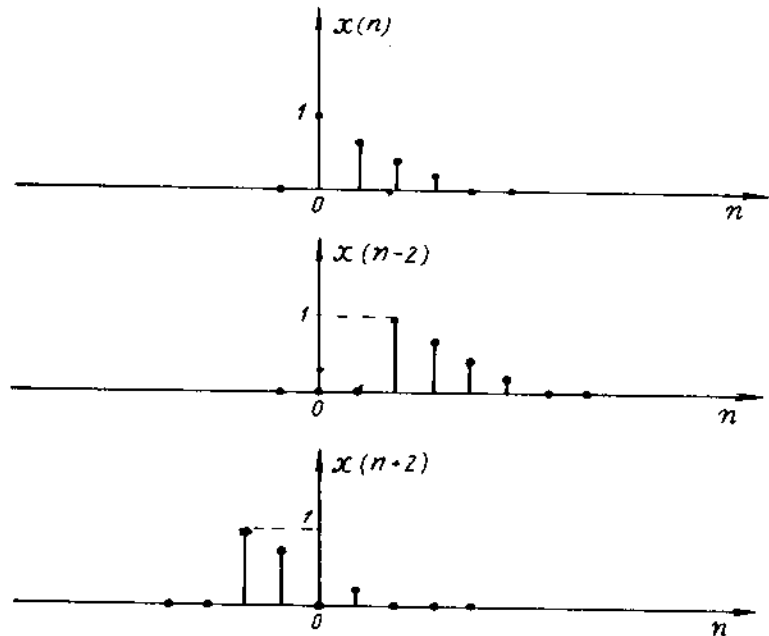
Trước hết chúng ta nhìn lại trễ tuyến tính và trễ tuần hoàn có chu kỳ N để so sánh và rút ra kết luận của trễ vòng. Để thấy được một cách trực quan ta có các ví dụ sau:

Ví dụ 4.3.2.1 : Cho dãy $x(n)$ sau;

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm trễ tuyến tính $x(n-2)$ và $x(n+2)$.

Giải : Chúng ta giải bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.1.



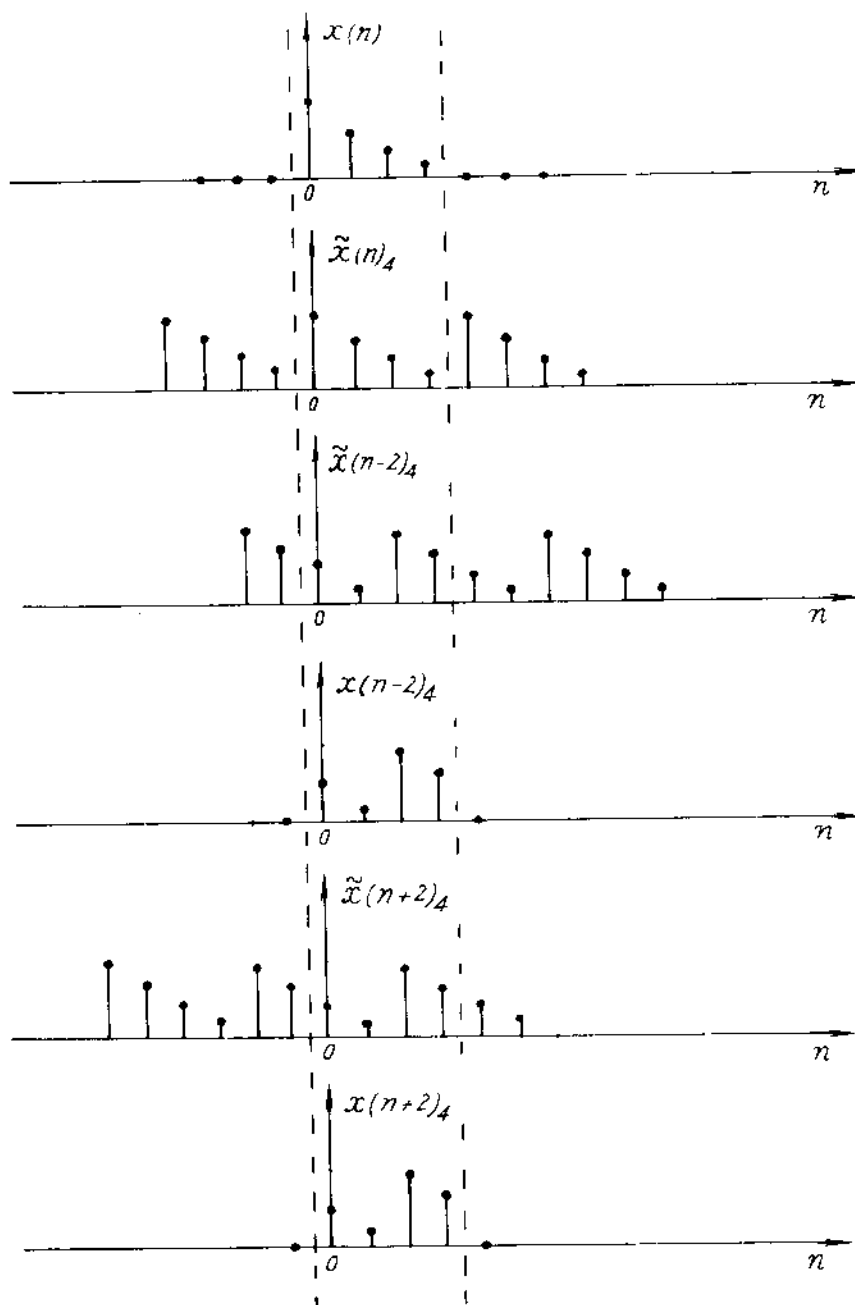
Hình 4.3.2.1.

Ví dụ 4.3.2.2 : Cho dãy tuần hoàn chu kỳ $N = 4$ $\tilde{x}(n)_4$ sau đây:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n < 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{x}(n-2)_4$ và $\tilde{x}(n+2)_4$ sau đó lấy ra một chu kỳ của hai dãy này.

Giải : Chúng ta giải bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.2.



Hình 4.3.2.2.

Chú ý rằng để phân biệt các loại trễ ta có các ký hiệu sau:

$x(n - n_0)$: Trễ tuyến tính

$\tilde{x}(n - n_0)_N$: Trễ tuần hoàn chu kỳ N

$x(n - n_0)_N$: Trễ vòng với chiều dài N .

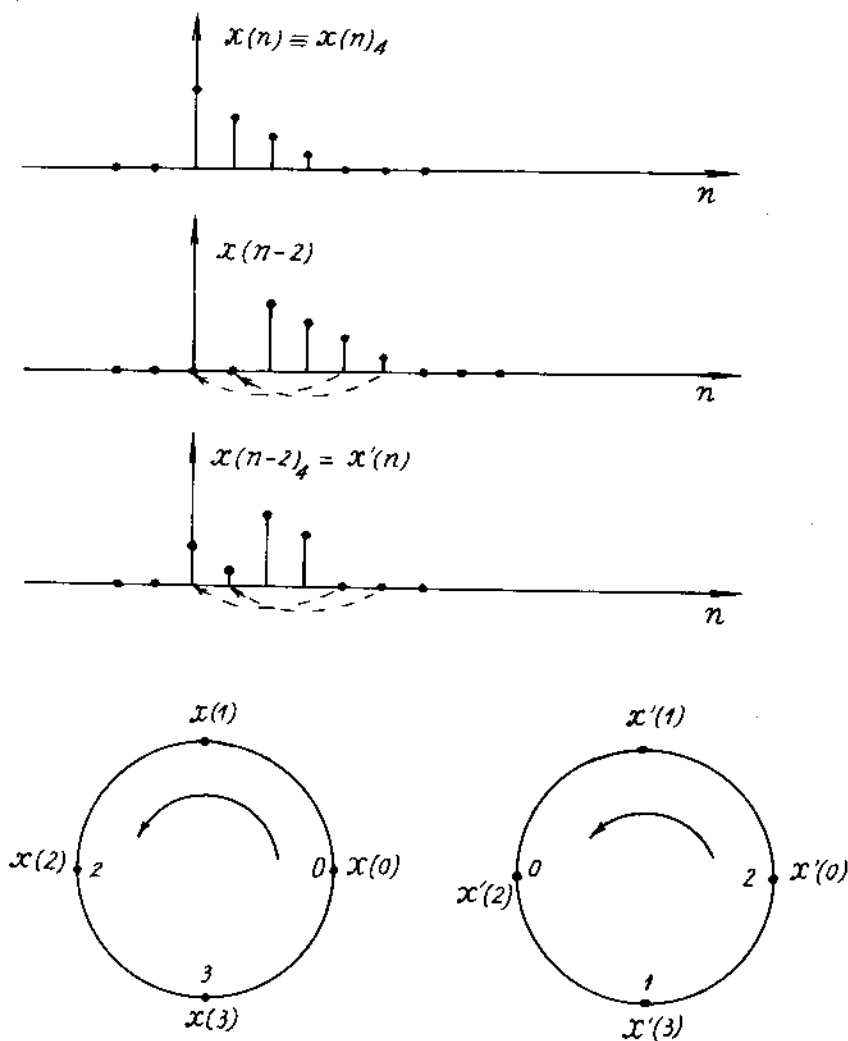
Nhận xét về hai ví dụ 4.3.2.1 và 4.3.2.2 ta thấy rằng, nếu ta trích ra một chu kỳ (từ 0 đến $N-1$) của trễ tuần hoàn chu kỳ N thì ta sẽ được trễ vòng $x(n \pm n_0)_N$ so sánh với trễ tuyến tính $x(n \pm n_0)$ thì ta thấy rằng nếu các mẫu của trễ tuyến tính vượt ra ngoài khoảng từ 0 đến $N - 1$ thì nó sẽ vòng vào bên trong khoảng đó để làm sao dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_N$ xác định trong khoảng $[0, N - 1]$ thì trễ vòng của nó $x(n - n_0)_N$ xác định trong khoảng $[0, N-1]$ chứ không được vượt ra ngoài khoảng đó.

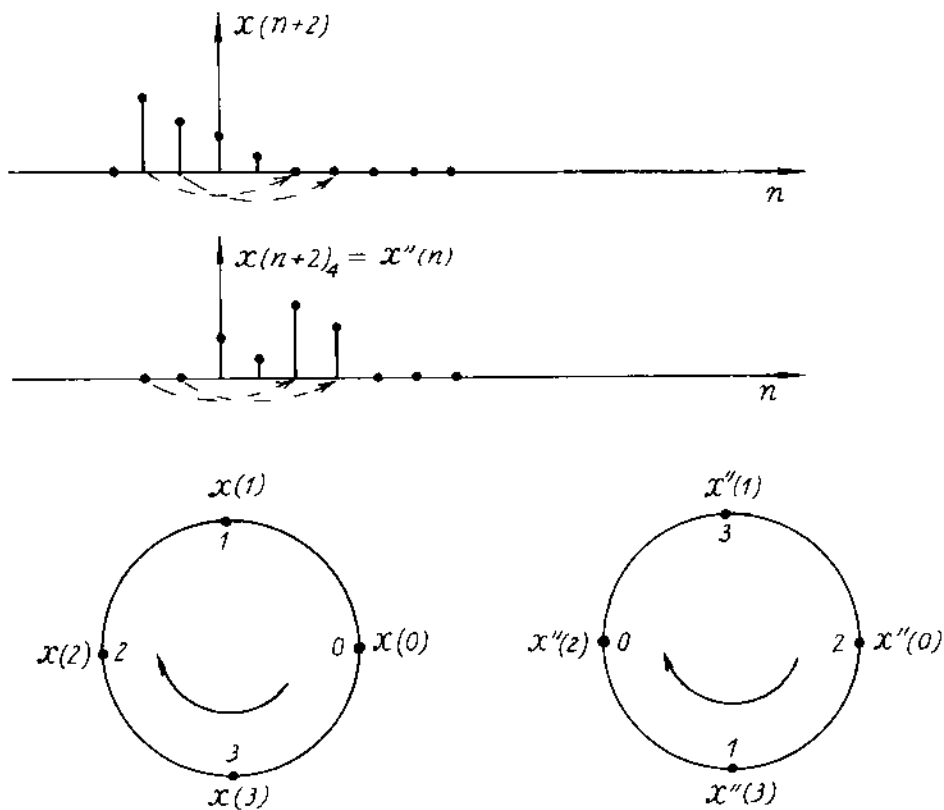
Vậy ta có thể nói rằng trễ vòng tương ứng với việc hoán vị vòng các mẫu của dãy $x(n)_N$ trong khoảng $[0, N-1]$ và ta có thể viết :

$$x(n)_N = \tilde{x}(n)_N \text{rect}_N(n)$$

$$x(n \pm n_0)_N = \tilde{x}(n \pm n_0)_N \text{rect}_N(n) \quad (4.3.2.3)$$

Hình 4.3.2.3 sẽ minh hoạ thêm cho chúng ta bản chất của trễ vòng và những điều nhận xét ở trên.





Hình 4.3.2.3.

Chúng ta đã xét xong bản chất của trễ vòng trong miền n , do tính đối ngẫu, trong miền k ta cũng có bản chất tương tự, tức là:

$$\begin{aligned} X(k)_N &= \tilde{X}(k)_N \text{rect}_N(k) \\ X(k - k_0)_N &= \tilde{X}(k - k_0)_N \text{rect}_N(k) \end{aligned} \quad (4.3.2.4)$$

Bây giờ chúng ta xét tính chất trễ trong miền n thì trong miền k sẽ ra sao?

Nếu ta có:

$$DFT[x(n)_N] = X(k)_N$$

$$\text{Thì} \quad DFT[x(n - n_0)_N] = W_N^{kn_0} X(k)_N \quad (4.3.2.5)$$

Chúng minh :

Chúng ta dựa vào cách chứng minh tính chất trễ của dãy tuần hoàn chu kỳ N .

Ta đã có:

$$DFT[\tilde{x}(n - n_0)_N] = W_N^{kn_0} \tilde{X}(k)_N$$

Nếu cả hai vế ta đều lấy ra một chu kỳ $[0, N - 1]$, tức là:

$$x(n - n_0)_N = \tilde{x}(n - n_0)_N \text{rect}_N(n)$$

$$X(k)_N = \tilde{X}(k)_N \text{rect}_N(k)$$

Vậy ta có:

$$DFT[x(n - n_0)_N] = W_N^{kn_0} X(k)_N$$

Tương tự ta cũng có tính chất trễ trong miền k .

Nếu ta có:

$$IDFT[X(k)_N] = x(n)_N$$

Thì :

$$IDFT[X(k - k_0)_N] = W_N^{k_0 n} x(n)_N \quad (4.3.2.6)$$

Cách chứng minh cũng dựa vào cách chứng minh tính chất trễ của dãy tuần hoàn chu kỳ N trong miền k .

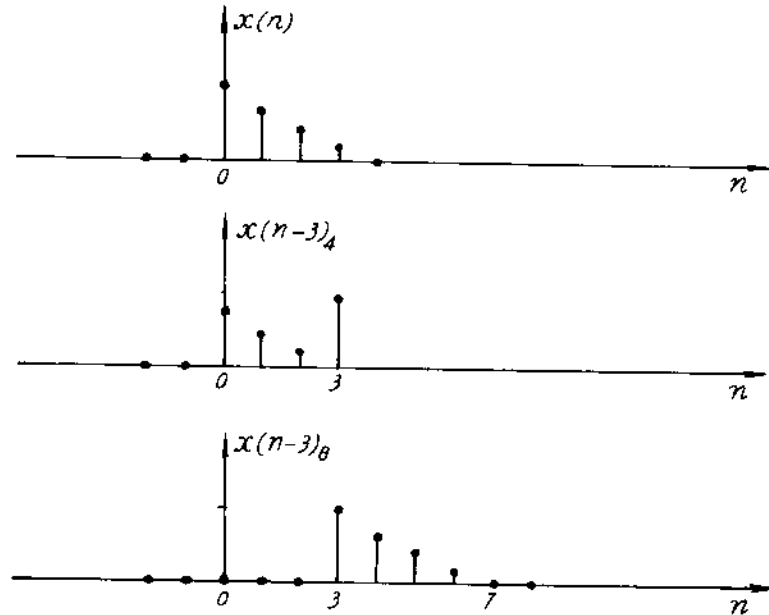
Vi dụ 4.3.2.3 : Cho hai dãy có chiều dài hữu hạn như sau:

$$x_1(n)_4 = x_2(n)_8 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

- Hãy vẽ $x_1(n - 3)_4$ và $x_2(n - 3)_8$.

- Hãy tìm $DFT[x_1(n - 3)_4]$ và $DFT[x_2(n - 3)_8]$.

Giải : Chúng ta giải bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.4.



Hình 4.3.2.4.

Trước tiên ta tìm $DFT[x_1(n)_4]$ sau đó áp dụng tính chất trễ trong biểu thức (4.3.2.5).

$$X_1(k)_4 = DFT[x_1(n)_4]$$

$$X_1(0)_4 = \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{0n} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
X_1(1)_4 &= \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{1n} = 1 + \frac{3}{4} W_4^1 + \frac{1}{2} W_4^2 + \frac{1}{4} W_4^3 = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \\
X_1(2)_4 &= \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{2n} = 1 + \frac{3}{4} W_4^2 + \frac{1}{2} W_4^4 + \frac{1}{4} W_4^6 = \frac{1}{2} \\
X_1(3)_4 &= \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{3n} = 1 + \frac{3}{4} W_4^3 + \frac{1}{2} W_4^6 + \frac{1}{4} W_4^9 = \frac{1}{2} + j \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất trễ ta có:

$$\begin{aligned}
DFT[x_1(n-3)_4] &= W_4^{3k} X_1(k)_4 = X_1(k)_4 = e^{j \frac{2\pi}{4} 3k} X_1(k)_4 \\
&= (-j)^{3k} X_1(k)_4 = (j)^k X_1(k)_4
\end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned}
X_1(0)_4 &= 2 \frac{1}{2} \\
X_1(1)_4 &= j \left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \\
X_1(2)_4 &= j^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\
X_1(3)_4 &= j^3 \left(\frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Để tìm $DFT[x_2(n-3)_8]$ trước tiên ta tìm $DFT[x_2(n)_8]$ sau đó áp dụng tính chất trễ:

$$\begin{aligned}
X_2(k)_8 &= DFT[x_2(n)_8] = \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{kn} \\
X_2(0)_8 &= \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{0n} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 \frac{1}{2} \\
X_2(1)_8 &= \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{1n} = 1 + \frac{3}{4} W_8^1 + \frac{1}{2} W_8^2 + \frac{1}{4} W_8^3 \\
X_2(2)_8 &= \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{2n} = 1 + \frac{3}{4} W_8^2 + \frac{1}{2} W_8^4 + \frac{1}{4} W_8^6 \\
X_2(3)_8 &= \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{3n} = 1 + \frac{3}{4} W_8^3 + \frac{1}{2} W_8^6 + \frac{1}{4} W_8^9 \\
X_2(4)_8 &= \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{4n} = 1 + \frac{3}{4} W_8^4 + \frac{1}{2} W_8^8 + \frac{1}{4} W_8^{12} \\
X_2(5)_8 &= \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{5n} = 1 + \frac{3}{4} W_8^5 + \frac{1}{2} W_8^{10} + \frac{1}{4} W_8^{15} \\
X_2(6)_8 &= \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{6n} = 1 + \frac{3}{4} W_8^6 + \frac{1}{2} W_8^{12} + \frac{1}{4} W_8^{18}
\end{aligned}$$

$$X_2(7)_8 = \sum_{n=0}^3 x_2(n)_8 W_8^{7n} = 1 + \frac{3}{4} W_8^7 + \frac{1}{2} W_8^{14} + \frac{1}{4} W_8^{21}$$

Sau đó áp dụng tính chất trễ ta có:

$$DFT[x_2(n-3)_8] = X_2(k)_8 W_8^{3k}$$

Nhận xét về ví dụ 4.3.2.4 ta thấy rằng, nếu ta trích ra một chu kỳ (từ 0 đến $N-1$) của dãy tuần hoàn biến đảo $\tilde{x}(-n)_N$ thì ta sẽ được dãy biến đảo vòng chiều dài hữu hạn $x(-n)_N$, tức là chiều dài của $x(-n)_N$ không được vượt ra ngoài khoảng $[0, N-1]$, vậy ta có thể viết:

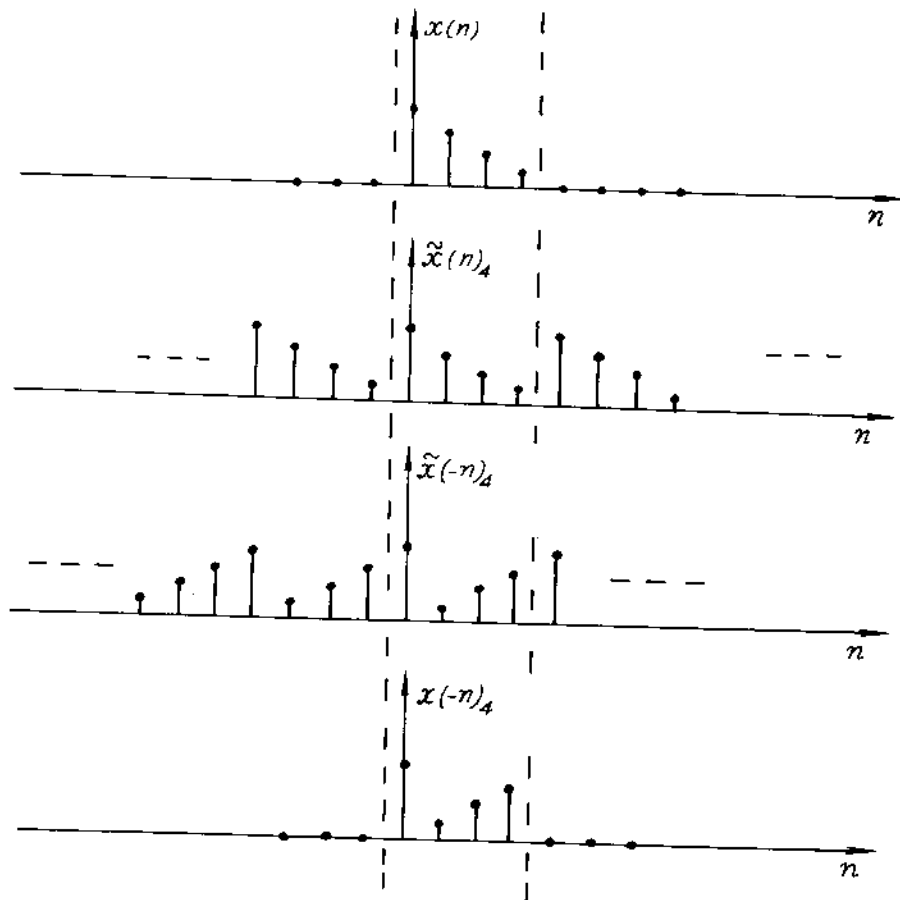
$$x(-n)_N = \tilde{x}(-n)_N \text{rect}_N(n)$$

Chúng ta luôn luôn có tính đối ngẫu giữa miền biến số rời rạc n và miền tần số rời rạc k , vì thế đối với dãy $X(k)_N$ ta cũng có thể viết như sau:

$$X(-k)_N = \tilde{X}(-k)_N \text{rect}_N(k)$$

Hình 4.3.2.6 sẽ minh hoạ thêm cho chúng ta rõ bản chất của dãy biến đảo chiều dài hữu hạn.

Tương tự như trên bây giờ chúng ta xét dãy biến n đảo, tức là $x(-n)_N$, ví dụ 4.3.2.4 sẽ minh hoạ bản chất của $x(-n)_N$.



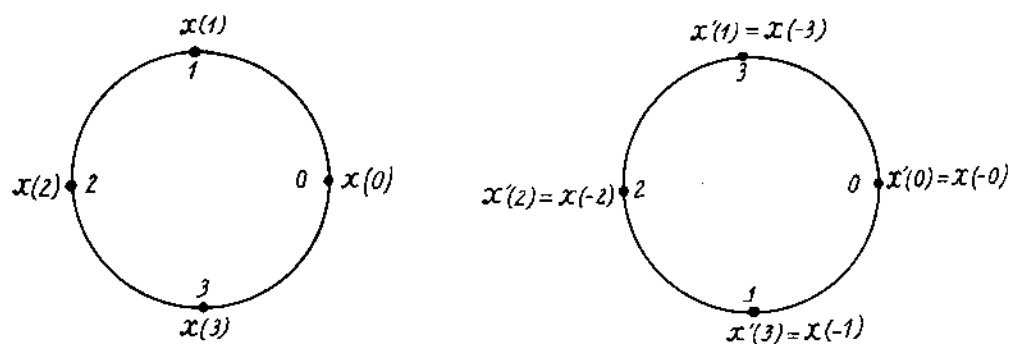
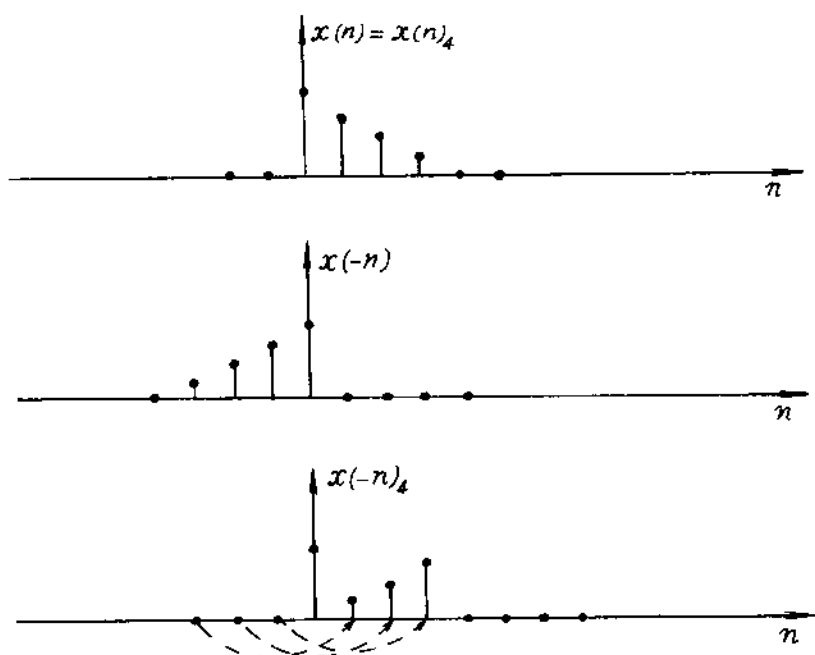
Hình 4.3.2.5.

Ví dụ 4.3.2.4 : Cho dãy tuần hoàn có chu kỳ $N = 4$ $\tilde{x}(n)_4$ sau đây:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{x}(-n)_4$ sau đó lấy ra một chu kỳ của dãy này.

Giải : Giải bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.5.



Hình 4.3.2.6.

Ta cũng có nhận xét rằng do tính tuần hoàn của $\tilde{x}(n)$, vậy:

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + N)$$

$$\tilde{x}(-n) = \tilde{x}(-n + N) = \tilde{x}(N - n)$$

và ta cũng có:

$$x(-n)_N = \tilde{x}(-n) \text{rect}_N(n)$$

$$X(N-n)_N = \tilde{X}(N-n) \text{rect}_N(n)$$

$$\text{thì : } x(-n)_N = x(N-n)_N \quad (4.3.2.9)$$

Tương tự trong miền k ta cũng có:

$$X(-k)_N = X(N-k)_N \quad (4.3.2.10)$$

Ta cũng dễ dàng thấy rằng:

$$DFT\{x(-n)_N\} = X(-k)_N \quad (4.3.2.11)$$

$$DFT\{x(N-n)_N\} = X(N-k)_N \quad (4.3.2.12)$$

c. Tính đối xứng

Chúng ta có dãy chiều dài hữu hạn N $x(n)_N$ và

$$DFT\{x(n)_N\} = X(k)_N$$

thì ta có:

$$DFT\{x^*(n)_N\} = X^*(-k)_N \quad (4.3.2.13)$$

dấu $*$ ở đây là liên hợp phức.

Chứng minh:

$$x^*(n)_N = \tilde{X}^*(n) \text{rect}_N(n)$$

$$X^*(-k)_N = \tilde{X}^*(-k) \text{rect}_N(n)$$

Theo biểu thức (4.2.1.17) thì :

$$DFT\{\tilde{X}^*(n)\} = \tilde{X}^*(-k)$$

Vậy:

$$DFT\{x^*(n)_N\} = \tilde{X}^*(-k)_N$$

Tương tự ta cũng có:

$$DFT\{x^*(-n)_N\} = X^*(k) \quad (4.3.2.14)$$

Các tính chất đối xứng của DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn có thể suy ra từ các tính chất của DFT đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N , hoặc các tính chất của FT trong chương 3.

Bây giờ ta xét chi tiết tính đối xứng đối với dãy phức có chiều dài hữu hạn N $x(n)_N$.

Dãy $x(n)_N$ có thể được biểu diễn dưới dạng sau:

$$x(n)_N = \text{Re}\{x(n)_N\} + j\text{Im}\{x(n)_N\} \quad (4.3.2.15)$$

$$x^*(n)_N = \text{Re}\{x(n)_N\} - j\text{Im}\{x(n)_N\} \quad (4.3.2.16)$$

và:

$$\text{Re}\{x(n)_N\} = \frac{x(n)_N + x^*(n)_N}{2} \quad (4.3.2.17)$$

$$j\text{Im}\{x(n)_N\} = \frac{x(n)_N - x^*(n)_N}{2} \quad (4.3.2.18)$$

Do vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned} DFT\{\text{Re}\{x(n)_N\}\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{Re}\{x(n)_N\} W_N^{-kn} = \frac{1}{2} DFT\{x(n)_N + x^*(n)_N\} \\ &= \frac{1}{2} [X(k)_N + X^*(-k)_N] = X_e(k)_N \end{aligned} \quad (4.3.2.19)$$

$X_e(k)_N$ là phần đối xứng liên hợp của $X(k)_N$.

Bây giờ ta xét DFT của phần ảo của $x(n)_N$.

$$\begin{aligned} DFT\{j\text{Im}[x(n)_N]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} j\text{Im}[x(n)_N] W_N^{kn} = \frac{1}{2} DFT[x(n)_N + x^*(n)_N] \\ &\quad - \frac{1}{2} [X(k)_N + X^*(-k)_N] = -X_0(k)_N \end{aligned} \quad (4.3.2.20)$$

$X_0(k)_N$ là phần phần đối xứng liên hợp của $X(k)_N$.

Trong thực tế thường gặp các dãy tín hiệu thực, vì vậy ta hãy xét trường hợp riêng khi $x(n)_N$ là thực.

Ta có thể biểu diễn $X(k)_N$ dưới dạng sau đây:

$$X(k)_N = \text{Re}[X(k)_N] + j\text{Im}[X(k)_N] \quad (4.3.2.21)$$

$$X^*(k)_N = \text{Re}[X(k)_N] - j\text{Im}[X(k)_N] \quad (4.3.2.22)$$

Vậy:

$$\text{Re}[X(k)_N] = \frac{1}{2} [X(k)_N + X^*(k)_N] \quad (4.3.2.23)$$

$$j\text{Im}[X(k)_N] = \frac{1}{2} [X(k)_N - X^*(k)_N] \quad (4.3.2.24)$$

Và nếu $x(n)$ là thực ta có: $x(n)_N = X^*(n)_N$

và $DFT[x(n)_N] = DFT[x^*(n)_N]$

tức là:

$$X(k)_N = X^*(-k)_N \quad (4.3.2.25)$$

lấy liên hợp phức hai vế ta có:

$$X^*(k)_N = [X^*(-k)_N]^* = X(-k)_N \quad (4.3.2.26)$$

với biến đảo $-k$ ta có:

$$\text{Re}[X(-k)_N] = \frac{1}{2} [X(-k)_N + X^*(-k)_N]$$

Theo (4.3.2.25) và (4.3.2.26) ta có:

$$\text{Re}[X(-k)_N] = \frac{1}{2} [X^*(k)_N + X(k)_N]$$

Vậy với $x(n)$ thực ta có:

$$\text{Re}[X(k)_N] = \text{Re}[X(-k)_N] \quad (4.3.2.27)$$

Tương tự ta có:

$$\text{Im}[X(k)_N] = -\text{Im}[X(-k)_N] \quad (4.3.2.28)$$

Bây giờ ta xét Môđun và argument

$$|X(-k)_N| = [X(k)_N X^*(k)_N]^{\frac{1}{2}} = [X^*(-k)_N X(-k)_N]^{\frac{1}{2}} = |X(-k)_N| \quad (4.3.2.29)$$

Tương tự:

$$\arg[X(k)_N] = \arctg \frac{\text{Im}[X(k)_N]}{\text{Re}[X(k)_N]} = \arctg \left[-\frac{\text{Im}[X(-k)_N]}{\text{Re}[X(-k)_N]} \right] = -\arg[X(-k)_N] \quad (4.3.2.30)$$

d. Tích chập vòng

Đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ N ta đã có quan hệ sau:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \left(\tilde{*} \right)_N \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$$

và trong miền k ta có:

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

Chú ý rằng tất cả các dãy ở quan hệ trên đều là tuần hoàn chu kỳ N . Còn đối với dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N , chúng ta có thể coi chúng tương ứng với một chu kỳ của các dãy tuần hoàn chu kỳ N , vì vậy chúng ta cũng có định nghĩa và tính chất tương tự như với các dãy tuần hoàn chu kỳ N .

Định nghĩa : Tích chập vòng của hai dãy không tuần hoàn $x_1(n)_N$ và $x_2(n)_N$ có chiều dài hữu hạn N là một dãy không tuần hoàn cũng có chiều dài hữu hạn N $x_3(n)_N$ được cho bởi quan hệ sau:

$$x_3(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N \cdot x_2(n-m)_N \quad (4.3.2.31)$$

$$= x_1(n)_N \left(\tilde{*} \right)_N x_2(n)_N \quad (4.3.2.32)$$

$(*)_N$ là tích chập vòng chiều dài N .

Nếu trong miền n là tích chập vòng thì trong miền k ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau đây:

$$X_3(k)_N = X_1(k)_N \cdot X_2(k)_N \quad (4.3.2.33)$$

ở đây:

$$X_1(k)_N = DFT[x_1(n)_N]$$

$$X_2(k)_N = DFT[x_2(n)_N]$$

$$X_3(k)_N = DFT[x_3(n)_N]$$

Ví dụ 4.3.2.4 : Cho hai dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn $N = 4$ như sau:

$$x_1(n)_4 = \delta(n-1)$$

$$x_2(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính tích chập vòng chiều dài $N = 4$ của hai dãy này.

Giải:

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 (*)_4 x_2(n)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(n-m)_4$$

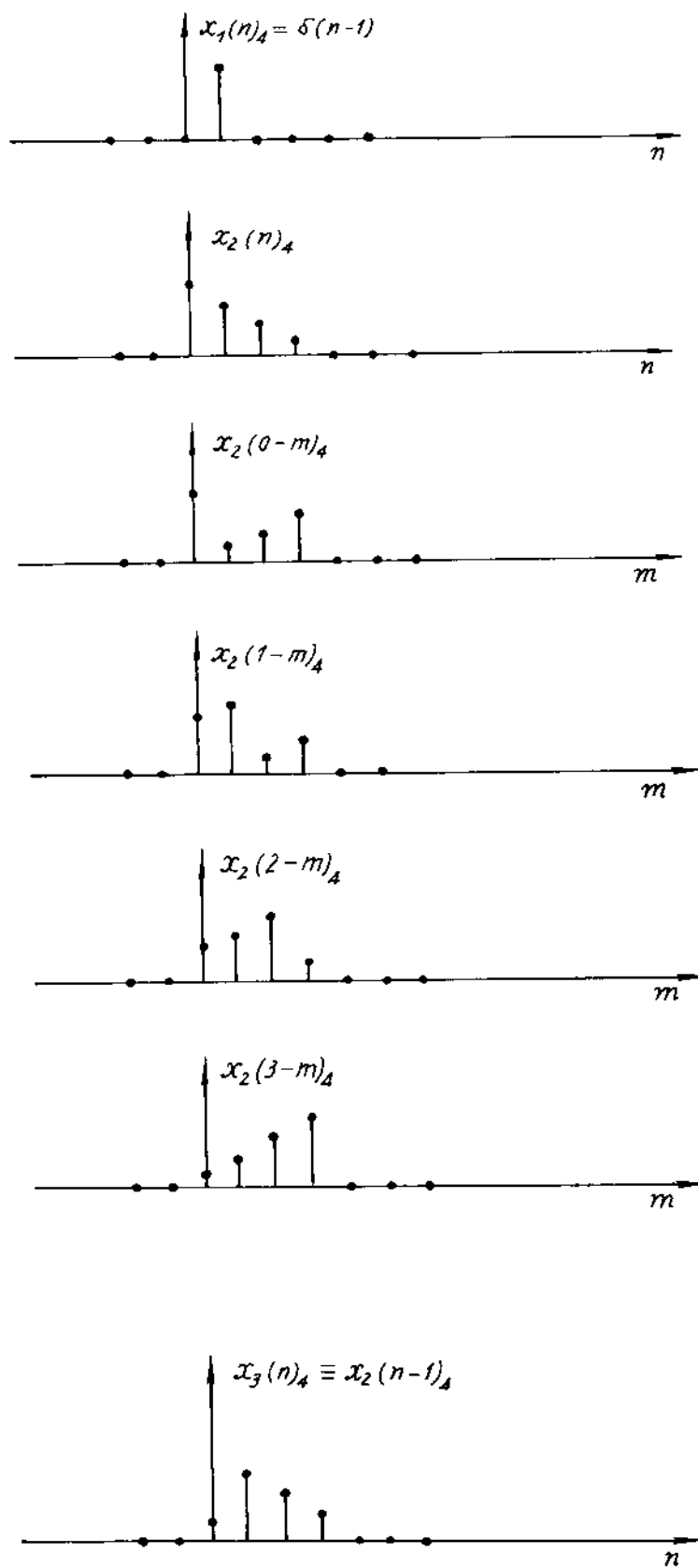
$$x_3(0)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(0-m)_4$$

$$x_3(1)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(1-m)_4$$

$$x_3(2)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(2-m)_4$$

$$x_3(3)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(3-m)_4$$

Để thấy rõ bản chất của tích chập vòng, chúng ta hãy xem quá trình tính toán và kết quả bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.7.



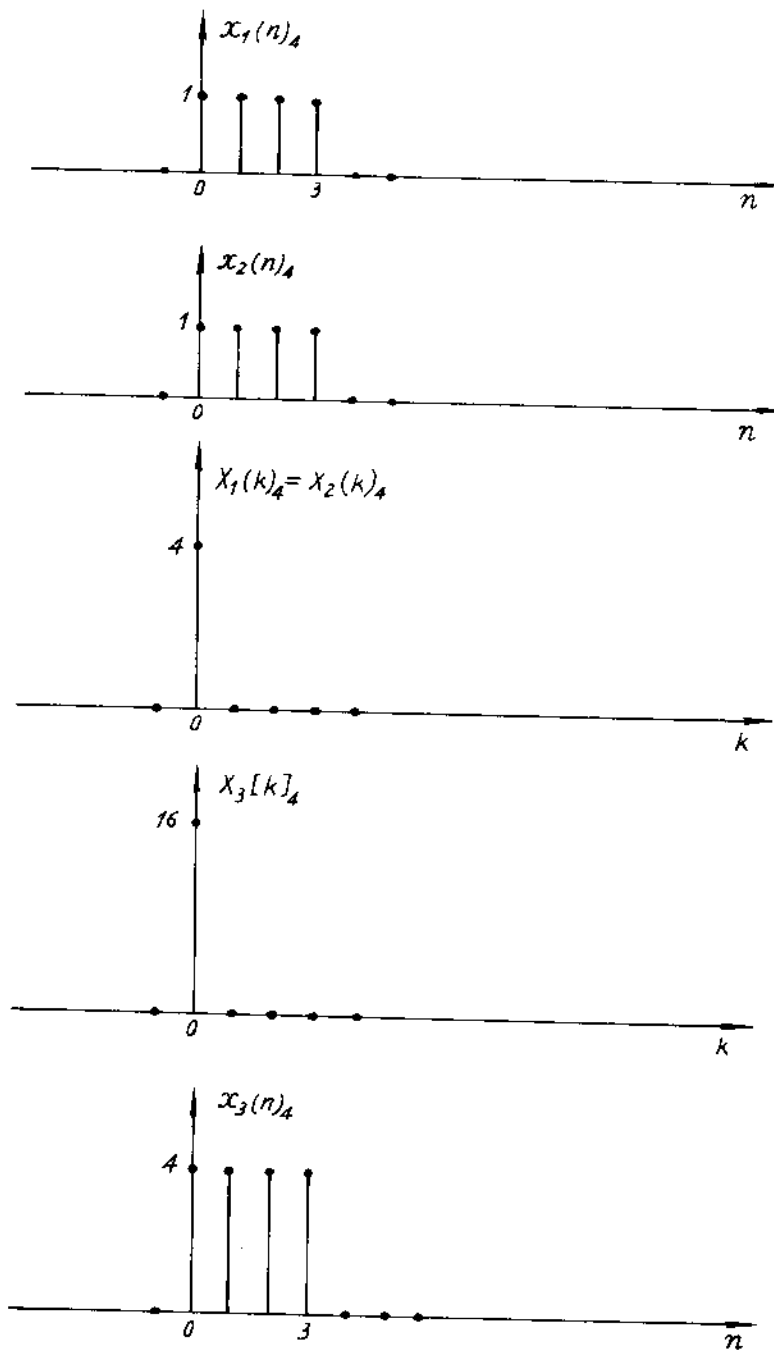
Hình 4.3.2.7.

Nhận xét : Chúng ta có thể áp dụng tính chất của biểu thức (4.3.2.33) để tính tích chập vòng, đây là cách tính gián tiếp thông qua *DFT*, nhưng cho ta hiệu quả cao hơn. Để thấy rõ chúng ta hãy xét ví dụ dưới đây (ví dụ 4.3.2.5).

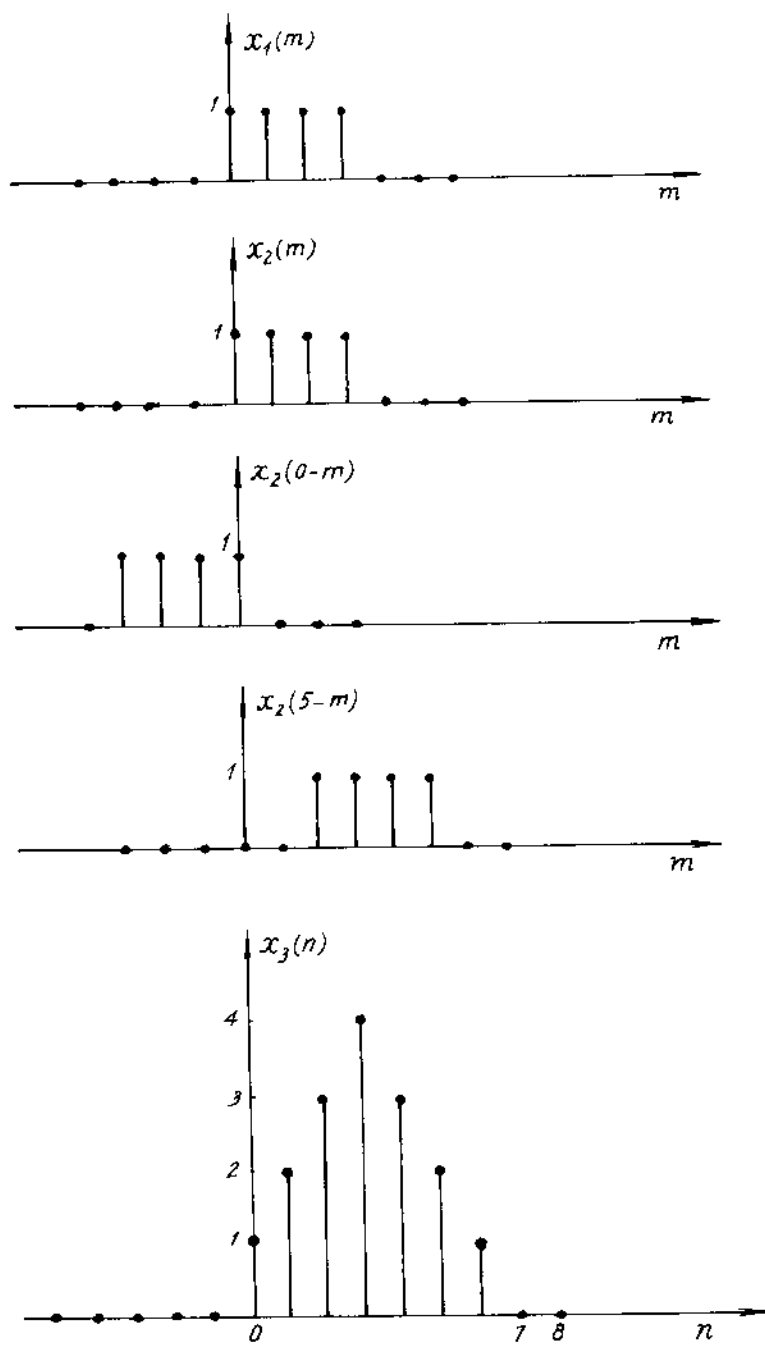
Ví dụ 4.3.2.5 : Cho hai dãy có chiều dài hữu hạn sau đây:

$$x_1(n)_N = x_2(n)_N = \text{rect}_N(n)$$

Hãy tính $x_3(n)_N = x_1(n)_N (*) x_2(n)_N$ thông qua *DFT*.



Hình 4.3.2.8.



Hình 4.3.2.9.

Giải:

$$\begin{aligned}
 X_1(k)_N &= X_2(k)_N = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} \\
 &= \begin{cases} N & k=0 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Áp dụng biểu thức (4.3.2.33) ta có:

$$X_3(k)_N = X_1(k)_N \cdot X_2(k)_N \\ = \begin{cases} N^2 & k = 0 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Để tìm $x_3(n)_N$ ta áp dụng công thức của *IDFT*

$$x_3(n)_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)_N W_N^{kn} \\ = \begin{cases} \frac{1}{N} X_3(0)_N W_N^0 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \\ = \begin{cases} N & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

Minh họa bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.8 với $N = 4$.

Ví dụ 4.3.2.6 :

Hãy tính tích chập tuyến tính $x_1(n) * x_2(n) = x_3(n)$ với $x_1(n) = x_2(n) = \text{rect}_4(n)$.

Giải:

Chúng ta giải bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.9.

Ví dụ 4.3.2.7 :

Hãy tính tích chập vòng với chiều dài $2N = 8$ của hai dãy có chiều dài hữu hạn $N = 4$.

$$x_1(n)_4 (*) x_2(n)_4 = x_3(n)_8 \quad \text{với} \quad x_1(n)_4 = x_2(n)_4 = \text{rect}_4(n)$$

Giải :

Trước hết chúng ta phải kéo chiều dài của $x_1(n)_4$ và $x_2(n)_4$ thêm 4 mẫu không, tức là ta có hai dãy mới $x_1(n)_8 = x_2(n)_8$ có 4 mẫu không, lời giải được cho bằng đồ thị trên hình 4.3.2.10.

Nhận xét :

Kết quả thu được từ các ví dụ 4.3.2.5, 4.3.2.6 và 4.3.2.7 cho ta thấy rằng tích chập vòng với chiều dài $2N$ sẽ bằng tích chập tuyến tính, như vậy chúng ta có thể dùng tích chập vòng với chiều dài $2N$ để tính tích chập tuyến tính của hai dãy bất kỳ có chiều dài hữu hạn N , và vì thế chúng ta có thể sử dụng *DFT* với chiều dài $2N$ để tìm tích chập tuyến tính của hai dãy có chiều dài hữu hạn N .

Nhưng do chiều dài của dãy $x_3(n)$ là $2N-1$. Vậy để tiết kiệm thời gian tính toán và bộ nhớ của máy tính, chúng ta có thể dùng tích chập vòng với chiều dài $2N-1$ để tìm tích chập tuyến tính.

Tổng quát ta có thể nói như sau: nếu chiều dài của $x_1(n)$ là $N_1 : x_1(n)_{N_1}$, chiều dài của $x_2(n)$ là $N_2 : x_2(n)_{N_2}$ thì chiều dài của $x_3(n)$ là $N_3 = N_1 + N_2 - 1 : x_3(n)_{N_1+N_2-1}$ và tích chập tuyến tính là:

$$x_3(n)_{N_1+N_2-1} = x_1(n)_{N_1} * x_2(n)_{N_2}$$

tích chập vòng là:

$$x_3(n)_{N_1+N_2-1} = x_1(n)_{N_1+N_2-1} (*) x_2(n)_{N_1+N_2-1}$$

Vậy trong trường hợp này dãy $x_1(n)_{N_1}$ được kéo dài thêm N_2-1 mẫu không để trở thành dãy $x_1(n)_{N_1+N_2-1}$, và dãy $x_2(n)_{N_2}$ được kéo dài thêm N_1-1 mẫu không để trở thành dãy $x_2(n)_{N_1+N_2-1}$.

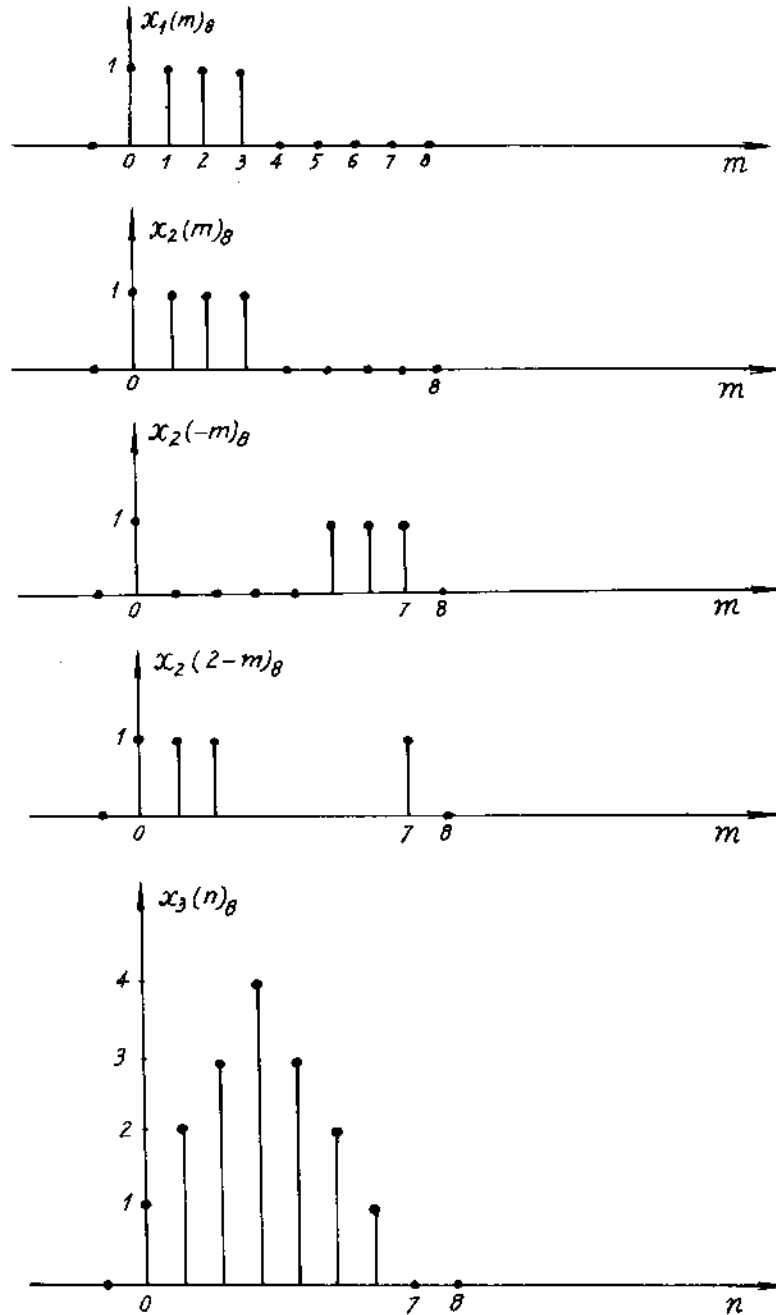
Nếu ứng dụng *DFT* ta sẽ có:

$$X_3(k)_{N_1+N_2-1} = X_1(k)_{N_1+N_2-1} \cdot X_2(k)_{N_1+N_2-1} \quad (4.3.2.34)$$

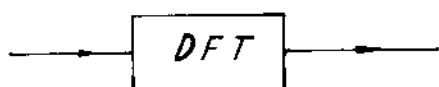
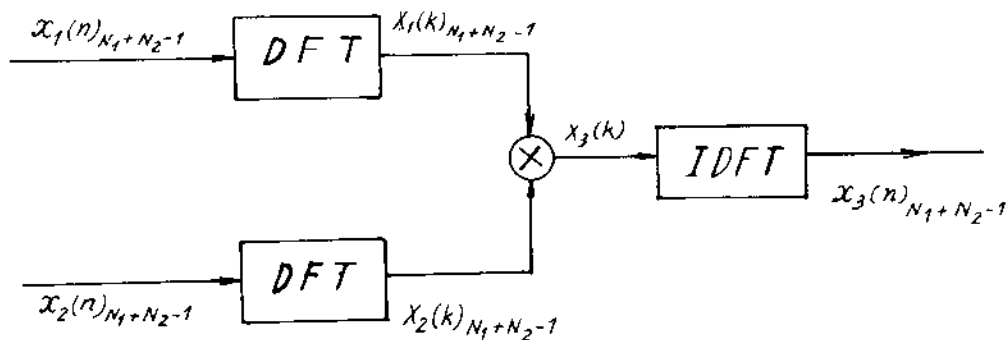
Tức là ta có DFT được tính với chiều dài $N_1 + N_2 - 1$ sau đó dùng IDFT để tính $x_3(n)_{N_1+N_2-1}$.

$$\text{IDFT}[X_3(k)_{N_1+N_2-1}] = x_3(n)_{N_1+N_2-1}$$

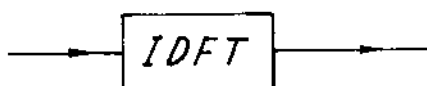
Sơ đồ minh họa cho trên hình 4.3.2.11.



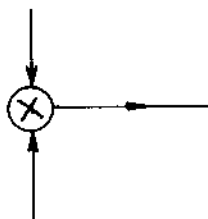
Hình 4.3.2.10.



: Bộ biến đổi Fourier



: Bộ biến đổi Fourier ngược



: Bộ nhân

Hình 4.3.2.11.

Nhận xét:

Ta có biểu thức tích chập vòng như sau:

$$\begin{aligned}
 x_3(n)_N &= x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n-m)_N \\
 x_3(0)_N &= x_1(0)_N x_2(0)_N + x_1(1)_N \underbrace{x_2(0-1)_N}_{x_2(N-1)} + \dots + x_1(N-1)_N \underbrace{x_2(-(N-1))}_{x_2(1)} \\
 x_3(1)_N &= x_1(0)_N x_2(1)_N + x_1(1)_N \underbrace{x_2(1-1)_N}_{x_2(0)} + \dots + x_1(N-1)_N \underbrace{x_2(1-(N-1))_N}_{x_2(2)_N} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$x_3(N-1)_N = x_1(0)_N x_2(N-1)_N + x_1(1)_N x_2(N-2)_N + \dots + x_1(N-1)_N x_2(0)_N$$

Từ đây ta có thể viết tích chập vòng dưới dạng ma trận như sau:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_3(0)_N \\ x_3(1)_N \\ \vdots \\ x_3(N-1)_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3(n)_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(0)_N & x_2(N-1)_N & \dots & x_2(1)_N \\ x_2(1)_N & x_2(0)_N & & x_2(2)_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2(N-1)_N & x_2(N-2)_N & & x_2(0)_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2(n)_N} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0)_N \\ x_1(1)_N \\ \vdots \\ x_1(N-1)_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1(n)_N}$$

$$\Rightarrow x_3(n)_N = \mathbf{x}_2(n)_N \cdot \mathbf{x}_1(n)_N$$

Ma trận $\mathbf{x}_2(n)_N$ được gọi là ma trận vòng.

e. Quan hệ Parseval

Quan hệ Parseval phát biểu như sau: Năng lượng của tín hiệu bằng tổng năng lượng của các hài thành phần của nó, tức là:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)_N|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)_N|^2 \quad (4.3.2.36)$$

Chứng minh :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)_N|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N x^*(n)_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(-k)_N W_N^{-kn} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(-k)_N W_N^{-kn} \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(-k)_N \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(-k)_N X(-k)_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(-k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \end{aligned}$$

Bảng 4.3.2.1 cho ta các tính chất quan trọng của *DFT* đối với các dãy có chiều dài hữu hạn.

Bảng 4.3.2.1

Dãy	<i>DFT</i>
$x(n)_N = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$	$X(k)_N = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{-kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$
$ax_1(n)_{N_1} + bx_2(n)_{N_2} = x_3(n)_{N_3}$	$aX_1(k)_{N_3} + bX_2(k)_{N_1} = X_3(k)_{N_3}$
$N_3 = \max [N_1, N_2]$	
$x(n - n_0)_N$	$W_N^{kn_0} X(k)_N$

$W_N^{-k_0 n} x(n)$	$X(k - k_0)_N$
$\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n - m)_N = x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$	$X_1(k)_N X_2(k)_N$
$x_1(n)_N x_2(n)_N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)_N X_2(k - l)_N$
$x^*(n)_N$	$X^*(-k)_N$
$x^*(-n)_N$	$X^*(k)_N$
$Re [x(n)_N]$	$\frac{1}{2} X(k)_N + \frac{1}{2} X^*(-k)_N$
$jIm [x(n)_N]$	$\frac{1}{2} X(k)_N - \frac{1}{2} X^*(-k)_N$
Với $x(n)_N$ thực	$X(k)_N = X^*(-k)_N$ $X^*(k)_N = X(-k)_N$ $Re[X(k)_N] = Re [X(-k)_N]$ $Im [X(k)_N] = - Im [X(-k)_N]$ $ X(k)_N = X(-k)_N $ $\arg [X(k)_N] = - \arg [X(-k)_N]$
$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N ^2$

4.3.3. TÍCH CHẬP NHANH (HAY TÍCH CHẬP PHÂN ĐOẠN)

a) Tổng quan

Để ứng dụng *DFT* vào việc tính tích chập không tuần hoàn, tức là tích chập tuyến tính, trước hết chúng ta phải phân biệt hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất khi các dãy chập với nhau có chiều dài gần bằng nhau và ngắn; trường hợp thứ hai khi các dãy chập với nhau có chiều dài khác xa nhau.

Trường hợp thứ nhất chính là trường hợp chúng ta đã nghiên cứu ở các phần trên. Nhưng trong thực tế chúng ta thường gặp trường hợp thứ hai. Việc tính toán *DFT* của dãy có chiều dài quá dài sẽ xảy ra trường hợp vượt quá dung lượng của bộ nhớ của máy tính và cần phải có thời gian tính toán quá lớn không cho phép. Hơn nữa để có được mẫu đầu tiên của kết quả ta phải đợi kết thúc tất cả các tính toán.

Để giải quyết các vấn đề trên chúng ta phải chia tính toán ra nhiều giai đoạn.

Chúng ta có hai phương pháp (được Stockham nghiên cứu phát triển) nội dung như sau:

- Chia dãy thành nhiều dãy con.
- Chập từng dãy con một.
- Tổ hợp các kết quả thành phần.

Giả sử dãy $x(n)$ có chiều dài là N , dãy $h(n)$ có chiều dài là M , và N rất lớn hơn M ($N \gg M$) và dãy $y(n) = x(n) * h(n)$ có chiều dài là $N + M - 1$ sẽ rất lớn. Vậy nếu ta dùng DFT thì DFT sẽ được tính với chiều dài $N + M - 1$. Vậy nếu N rất lớn thì chúng ta không thể dùng DFT để tính tích chập này được. Vì thế nếu muốn dùng DFT thì ta phải phân dãy $x(n)$ ra làm nhiều đoạn nhỏ.

Sau đây chúng ta xét từng phương pháp một.

b) Phương pháp 1: Cộng xếp chồng

Giả sử ta cần tính tích chập tuyến tính

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ L[x(n)] &= N \\ L[h(n)] &= M \\ N &\gg M \end{aligned}$$

Dãy $x(n)$ được coi như tổng của các dãy thành phần $x_i(n)$, mà $L[x_i(n)] = N_1$

Tức là ta có:

$$x(n)_N = \sum_i x_i(n)_{N_1} \quad (4.3.3.1)$$

với:

$$x_i(n)_{N_1} = \begin{cases} x(n) & iN_1 \leq n \leq (i+1)N_1 - 1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ta biết rằng:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \left[\sum_i x_i(n-m) \right] \\ &= \sum_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x_i(n-m) = \sum_i h(n)_M * x_i(n)_{N_1} = \sum_i x_i(n)_{N_1+M-1} \end{aligned} \quad (4.3.3.2)$$

$y_i(n)_{N_1+M-1} = h(n)_M * x_i(n)_{N_1}$ gọi là tích chập phân đoạn, đây là tích chập tuyến tính, nếu dùng DFT thì mỗi tích chập phân đoạn này ta phải tính DFT với chiều dài $N_1 + M - 1$. Tức là ta phải tính tích chập vòng với chiều dài $N_1 + M - 1$:

$$y_i(n)_{N_1+M-1} = h(n)_{N_1+M-1} (*)_{N_1+M-1} x_i(n)_{N_1+M-1} \quad (4.3.3.3)$$

như vậy tích chập vòng này sẽ bằng tích chập tuyến tính. Thế thì $h(n)_M$ sẽ được kéo dài $N_1 - 1$ mẫu không và $x_i(n)_{N_1}$ sẽ được kéo dài $M - 1$ mẫu không.

Trong miền tần số rời rạc k ta có:

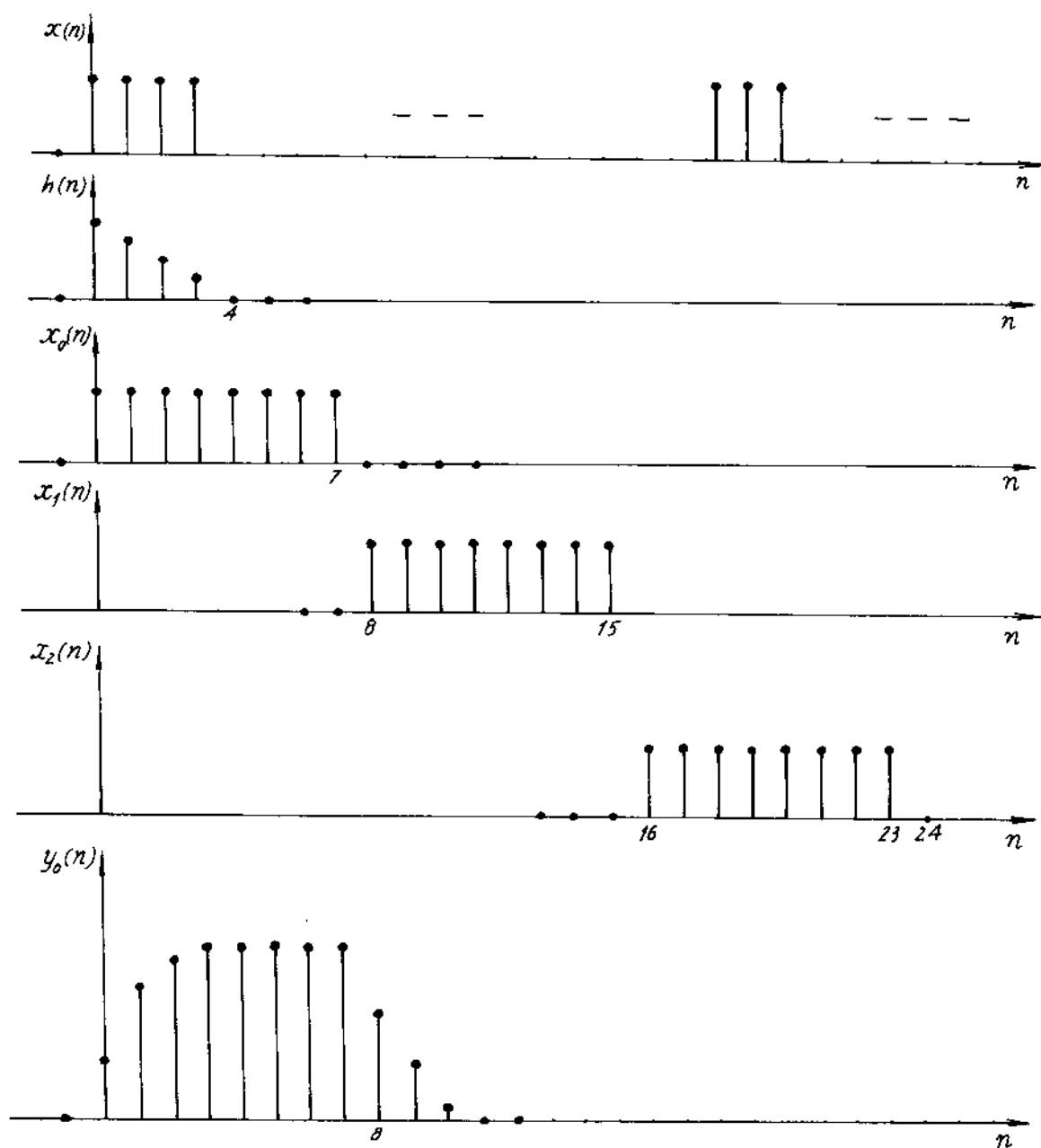
$$Y_i(k)_{N_1+M-1} = H(k)_{N_1+M-1} X_i(k)_{N_1+M-1} \quad (4.3.3.3)$$

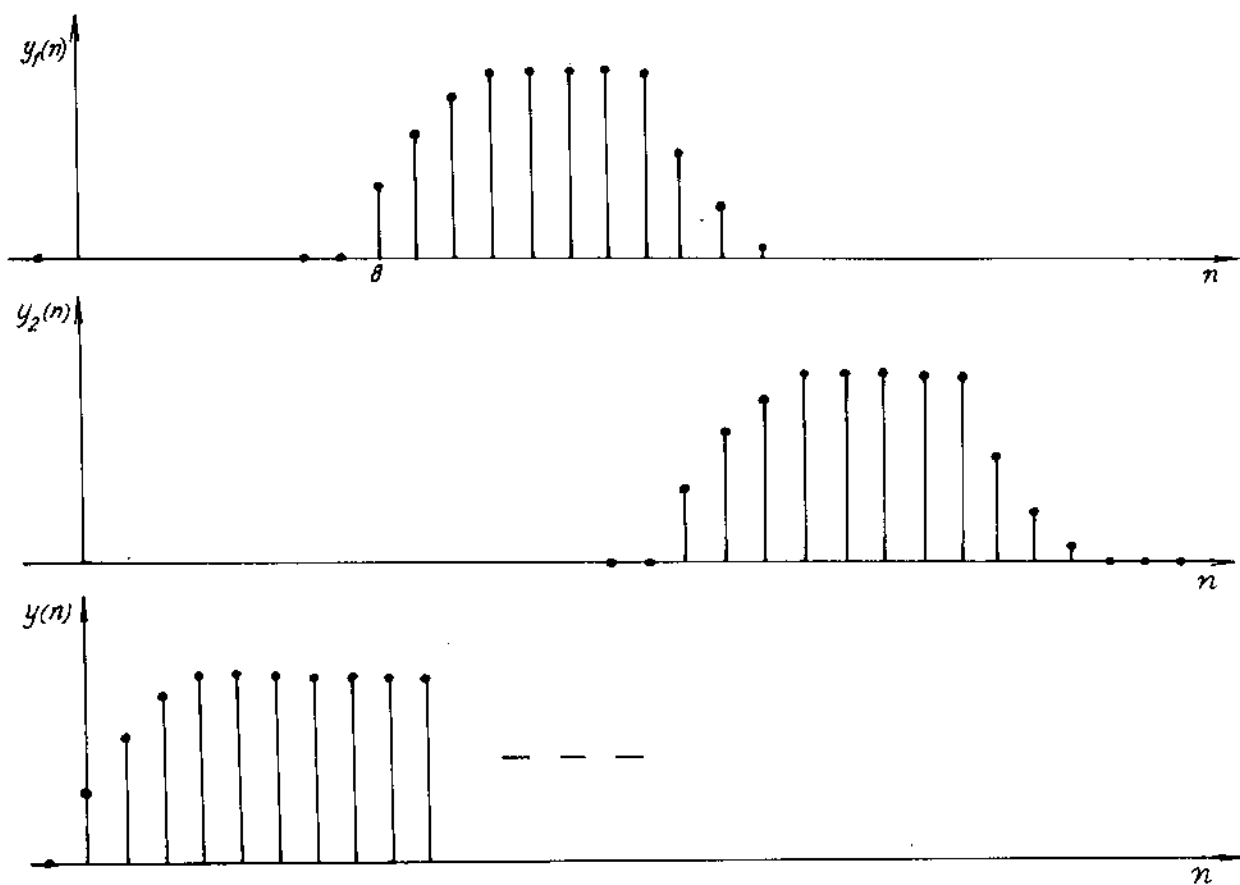
Sau đó dùng $IDFT$ để tính $y_i(n)_{N_1+M-1}$

$$\begin{aligned}
 y_i(n)_{N_1+M-1} &= IDFT[Y_i(k)_{N_1+M-1}] \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{N_1+M-1} \sum_{k=0}^{N_1+M-2} Y_i(k)_{N_1+M-1} W_{N_1+M-1}^{-kn} & iN_1 \leq n \leq (i+1)N_1+M-2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(4.3.3.4)

Hình 4.3.3.1 cho ta một ví dụ minh họa tích chập phân đoạn theo phương pháp cộng xếp chồng với $M = 4$, $N_1 = 8$.





Hình 4.3.3.1.

Nhận xét :

- Nếu N_1 rất dài thì ta có lợi là số lượng các đoạn sẽ ít đi, nhưng vì N_1 dài nên thời gian tính toán của một đoạn sẽ tăng lên.
- Nếu N_1 nhỏ thì có cái bất lợi là số lượng các đoạn sẽ tăng lên, nhưng lại có lợi là thời gian tính toán một đoạn sẽ giảm đi.

Vậy trong thực tế chúng ta phải chọn giá trị của N_1 tối ưu so với chiều dài M của $h(n)$. Giá trị N_1 tối ưu được chọn theo bảng 4.3.3.1, gọi là bảng HELMS.

Bảng 4.3.3.1

Chiều dài của $h(n)$ M	Chiều dài của DFT N_1+M-1
≤ 10	32
11- 17	64
18 - 29	128
30- 52	256

53 - 94	512
95 - 171	1024
172 - 310	2048
311 - 575	4096
576 - 1050	8192
1051 - 2000	16.384
2001 - 3800	32.768
3801 - 7400	65.536
7401 - 14800	131.072
.	.
.	.
.	.

c. Phương pháp 2: đặt kế nhau

Chúng ta có một phương pháp nữa để tính tích chập nhanh gọi là phương pháp đặt kế nhau, cũng giống như phương pháp cộng xếp chồng. Giả sử ta có:

$$L[x(n)] = N$$

$$L[h(n)] = M$$

$$N \gg M$$

Ta cần tính tích chập tuyến tính

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Trong phương pháp này $x(n)$ được coi như là tổng của các dãy thành phần đặt kế lên nhau $M - 1$ điểm, tức là $M - 1$ điểm đầu tiên của dãy thành phần $x_{i+1}(n)$ sẽ kế lên $M-1$ điểm cuối cùng của dãy thành phần $x_i(n)$. Còn dãy thành phần đầu tiên $x_0(n)$ sẽ được bổ sung $M - 1$ mẫu không đầu tiên.

Chúng ta gọi chiều dài của các dãy thành phần $x_i(n)$ là N_1 :

$$L[x_i(n)] = N_1$$

Sau đó ta phải chọn $N_1 > M$. Để ứng dụng biến đổi Fourier rời rạc (DFT) để tính tích chập phân đoạn này, chúng ta tính tích chập vòng của $x_i(n)_{N_1}$ với $h(n)_M$ như sau:

$$x_i(n)_{N_1} (*)_{N_1} h(n)_M = y'_i(n)_{N_1} \quad (4.3.3.5)$$

Tức là ở dãy $h(n)_M$ được kéo dài thêm $N_1 - (M-1)$ mẫu không và tích chập vòng ở đây có chiều dài N_1 . Chuyển tính tích chập vòng 4.3.3.5 sang miền k ta có:

$$Y'_i(k)_{N_1} = X_i(k)_{N_1} \cdot H(k)_{N_1} \quad (4.3.3.6)$$

ở đây:

$$X_i(k)_{N_1} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_i(n)_{N_1} W_{N_1}^{kn} & 0 \leq k \leq N_1 - 1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$H(k)_{N_1} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N_1-1} h(n)_M W_{N_1}^{kn} & 0 \leq k \leq N_1 - 1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Sau đó dùng biến đổi Fourier ngược (IDFT) để tìm $y'(n)_{N_1}$ như sau:

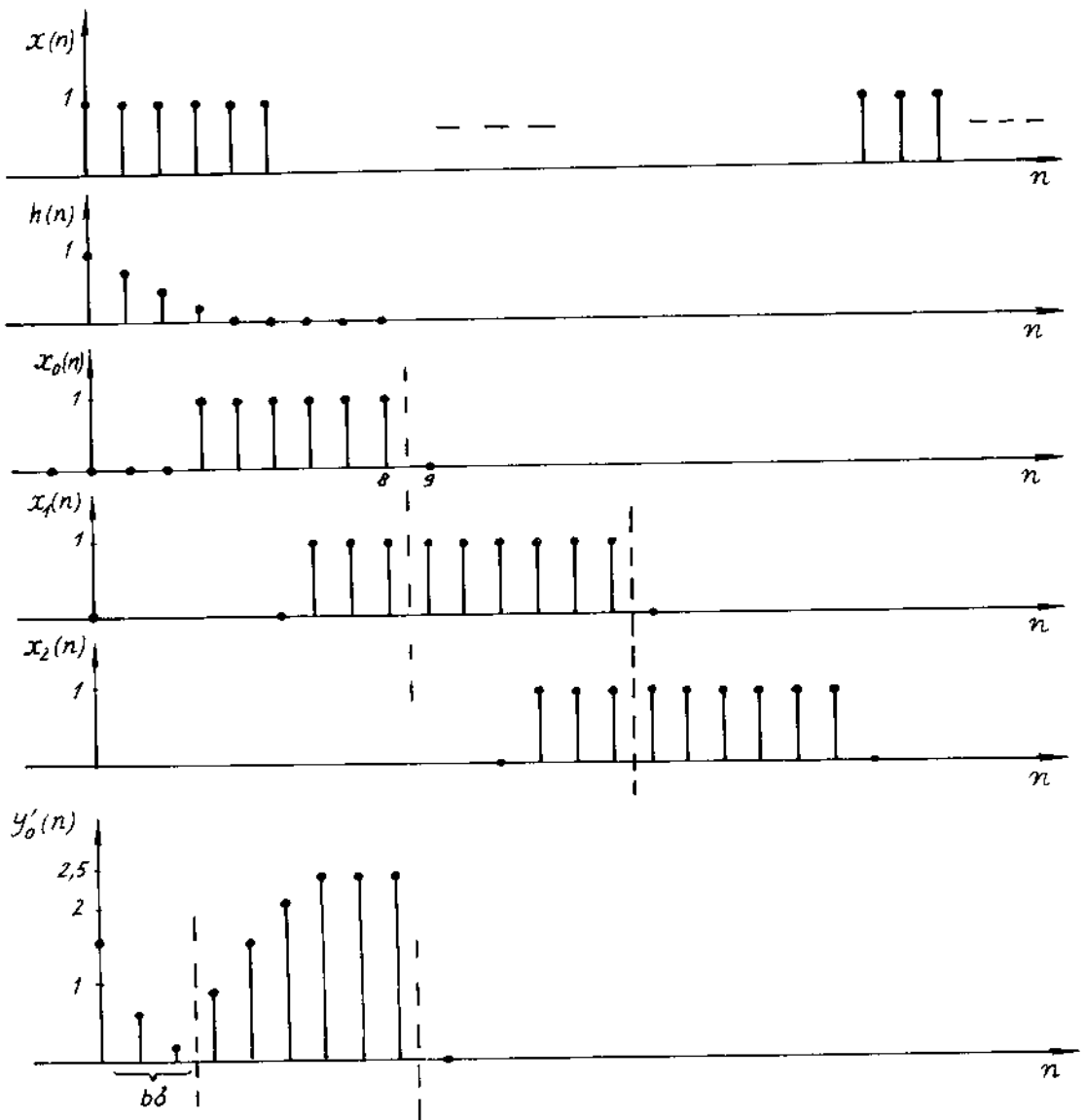
$$y'_i(n)_{N_1} = \begin{cases} \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} Y'_i(k)_{N_1} W_{N_1}^{-kn} & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.3.3.7)$$

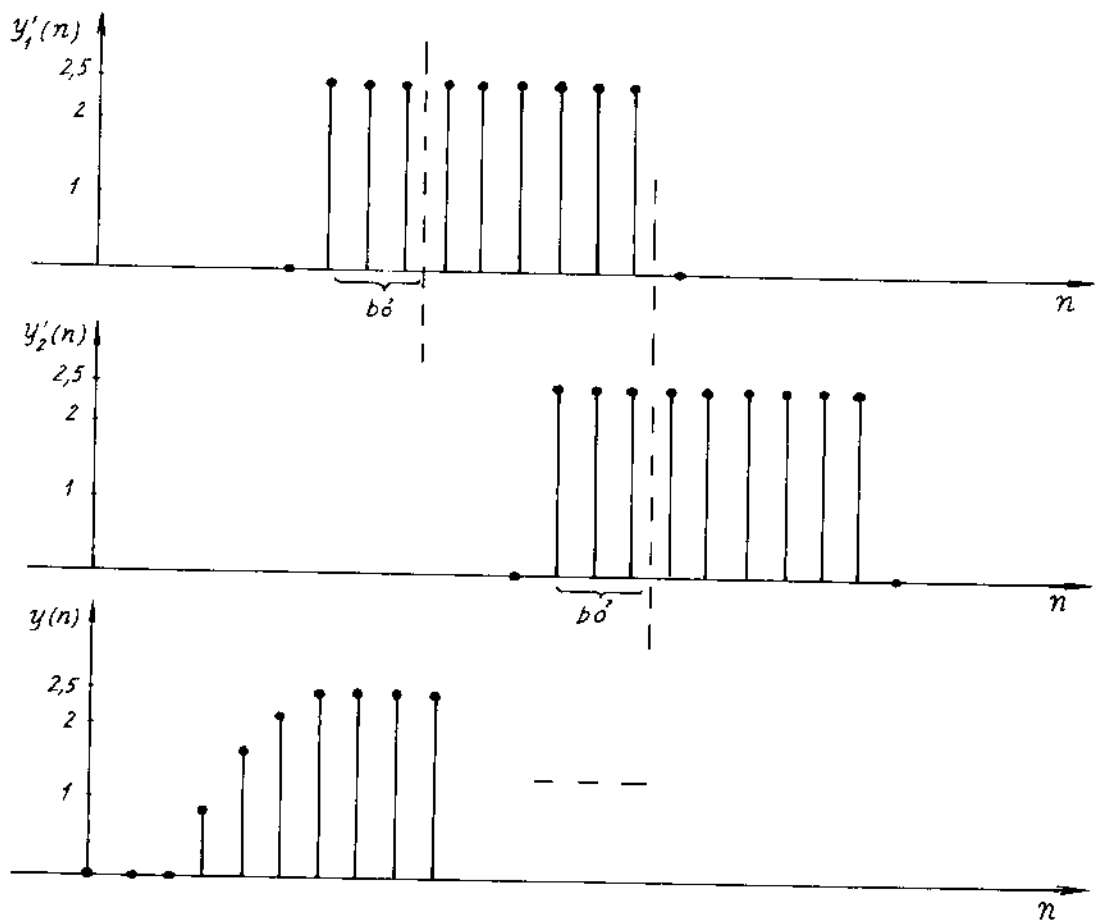
Sau khi tính được $y'_i(n)_N$ chúng ta phải bỏ đi $M-1$ điểm đầu tiên để thu được $y_i(n)$. Sau đó cộng các giá trị của $y_i(n)$ ta thu được $y(n)$:

$$y(n) = \sum_i y_i(n)$$

Hình 4.3.3.2 cho ta một ví dụ minh họa tích chập phân đoạn theo phương pháp đặt kế nhau với $M = 4$, $N_1 = 9$.

Cũng giống như phương pháp cộng xếp chồng, chiều dài của $DFT(N_1)$ được chọn tương ứng với chiều dài M của $h(n)_M$ sao cho thời gian tính toán là tối ưu nhất. Trong thực tế người ta chọn N_1 theo bảng HELMS (Bảng 4.3.3.1).





Hình 4.3.3.2.

4.3.4. KHÔI PHỤC BIẾN ĐỔI Z VÀ BIẾN ĐỔI FOURIER TỪ DFT

a. Khôi phục biến đổi Z

Giả sử có một dãy $x(n)_N$ có chiều dài hữu hạn N .

Vậy ta có:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)_N Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N Z^{-n}$$

Chúng ta có thể tìm $X(Z)$ theo hàm của DFT $[x(n)_N]$

$$\begin{aligned} DFT[x(n)_N] &= X(k)_N \\ &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IDFT [X(k)_N] &= x(n)_N \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $ZT [x(n)_N]$ như sau:

$$\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} \right] Z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} Z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \sum_{n=0}^{N-1} \left(W_N^{-k} Z^{-1} \right)^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \frac{1 - \left(W_N^{-k} Z^{-1} \right)^N}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}} \end{aligned}$$

nhưng $W_N^{-kN} = 1$

vậy:

$$X(Z) = \frac{1 - Z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)_N}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}} \quad (4.3.4.1)$$

Nhận xét:

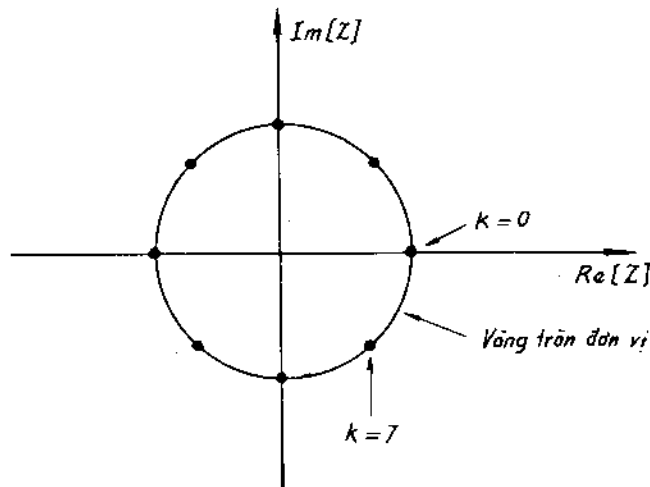
- Có thể nói rằng chúng ta có thể nhận được biến đổi Z của một dãy có chiều dài hữu hạn từ N giá trị của $X(k)_N$.

- Các giá trị (N giá trị) của $X(k)_N$ chính là các mẫu của $X(Z)$ được đánh giá trên vòng tròn đơn vị tại các điểm rời rạc $\frac{2\pi}{N}k$, vậy trên vòng tròn đơn vị ta lấy mẫu $X(Z)$ tại các điểm như sau:

$$Z = e^{j\omega k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^{-k}$$

và ta có thể viết:

$$X(Z) \Big|_{Z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} = X(k)_N$$



Hình 4.3.4.1.

Đến đây ta có thể nói rằng biểu thức (4.3.4.1) cho chúng ta công thức biến đổi Z của một dãy có chiều dài hữu hạn N từ N "mẫu tần số" của $X(Z)$ trên vòng tròn đơn vị.

Vị trí "các mẫu tần số" trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z được minh họa trên hình 4.3.4.1 với $N = 8$.

Ví dụ 4.3.4.1 : Cho dãy $x(n)$ như sau :

$$x(n) = \delta(n)$$

Hãy tính $x(k)_4$?

Hãy khôi phục $X(Z)$ từ $X(k)_4$?

Giải :

Theo ví dụ 4.3.1.1 ta đã có $X(k)_4$ như sau :

$$X(k)_4 = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 3 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Theo biểu thức 4.3.4.1 ta có :

$$X(Z) = \frac{1-Z^4}{4} \sum_{k=0}^3 \frac{X(k)_4}{1-W_4^{-k}Z^{-1}}$$

$$W_4^{-k} = e^{\frac{j2\pi k}{4}} = e^{\frac{j\pi k}{2}}$$

$$k=0 \Rightarrow W_4^{-0} = 1$$

$$k=1 \Rightarrow W_4^{-1} = e^{\frac{j\pi}{2}} = j$$

$$k=2 \Rightarrow W_4^{-2} = e^{j\pi} = -1$$

$$k=3 \Rightarrow W_4^{-3} = e^{\frac{j3\pi}{2}} = -j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(Z) &= \frac{1-Z^4}{4} \left[\frac{1}{1-Z^{-1}} + \frac{1}{1-jZ^{-1}} + \frac{1}{1+Z^{-1}} + \frac{1}{1+jZ^{-1}} \right] \\ &= \frac{1-Z^4}{4} \left[\frac{2}{1-Z^{-2}} + \frac{2}{1+jZ^{-2}} \right] \end{aligned}$$

Nhận xét :

Nếu tính trực tiếp theo công thức của biến đổi Z chúng ta cũng thu được kết quả trên.

b. Khôi phục biến đổi Fourier

Chúng ta có thể nhận được biến đổi Fourier từ biến đổi Z nếu vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z .

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) = X(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega}} &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)_N}{1-e^{\frac{j2\pi k}{N}} e^{-j\omega}} = \\ &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)_N}{1-e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)}} \end{aligned}$$

Ta biết rằng :

$$1-e^{-jx} = e^{-j\frac{x}{2}} \left(e^{j\frac{x}{2}} - e^{-j\frac{x}{2}} \right) = 2e^{-j\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2}$$

$$\text{Vậy: } X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} e^{-j \left[\frac{\omega(N-1)}{2} + \frac{\pi}{N} k \right]} \quad (4.34.2)$$

Biểu thức (4.34.2) chính là quan hệ cho phép ta tìm biến đổi Fourier bằng cách nội suy từ các giá trị $X(k)_1$.

Ví dụ 4.3.4.2 : Cho dãy $x(n)$ như sau :

$$x(n) = \delta(n)$$

Hãy tính $x(k)_1$

Hãy khôi phục $X(e^{j\omega})$ từ $X(k)_1$?

Giải :

Theo ví dụ 4.3.1.1 ta đã có :

$$X(k)_4 = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 3 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Theo biểu thức 4.3.4.2 ta có

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k)_4 \frac{\sin 2\omega}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{4} k \right)} e^{-j \left[\frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{4} k \right]} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2\omega}{\sin \left(\frac{\omega}{2} \right)} e^{-j \frac{3\omega}{2}} + \frac{\sin 2\omega}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} e^{-j \left(\frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} + \frac{\sin 2\omega}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} e^{-j \left(\frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{2} \right)} + \frac{\sin 2\omega}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{3\pi}{4} \right)} e^{-j \left(\frac{3\omega}{2} + \frac{3\pi}{4} \right)} \right] = 1 \end{aligned}$$

Nhận xét :

Chúng ta có thể tính $X(e^{j\omega})$ từ $X(Z)$ như sau :

$$X(e^{j\omega}) = X(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega}} = 1.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài tập 4.1

Hãy chứng minh biểu thức (4.2.1.4)

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} nr} = \begin{cases} N & \text{với } r=lN \text{ (l : nguyên)} \\ 0 & r \text{ còn lại} \end{cases}$$

Bài tập 4.2

Giả sử $\tilde{x}(n)$ là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N và $\tilde{X}_1(k)_N = DFT_1[\tilde{x}(n)_N]$ là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N . Ta cũng có thể coi $\tilde{x}(n)$ như một dãy tuần hoàn có chu kỳ $2N$ và ta có $\tilde{X}_2(k)_{2N} = DFT_2[\tilde{x}(n)_{2N}]$. Vậy $\tilde{X}_2(k)_{2N}$ có chu kỳ $2N$.

Tìm $\tilde{X}_2(k)_{2N}$ theo hàm của $\tilde{X}_1(k)_N$.

Bài tập 4.3

$\tilde{x}(n)$ là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N và ta có $\tilde{X}(k) = DFT[\tilde{x}(n)]$.

Tìm $DFT[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}_1(l)$ theo hàm của $\tilde{x}(l)$.

Bài tập 4.4

Cho hai dãy:

$\tilde{x}(n)$: dãy tuần hoàn chu kỳ N .

$\tilde{y}(n)$: dãy tuần hoàn có chu kỳ M ; $N \neq M$.

$$\tilde{w}(n) = \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n)$$

a) Tìm chu kỳ của $\tilde{w}(n)$.

b) Tìm $\tilde{W}(k)$ theo hàm của $\tilde{X}(k)$ và $\tilde{Y}(k)$.

Bài tập 4.5

Một tín hiệu tiếng nói có băng rộng phổ là 20kHz được lấy mẫu bằng tần số Nyquist ($f_s = f_{\text{Nyquist}}$) một DFT được tính trên 4096 mẫu của $x(n)$. Hãy tính khoảng cách giữa hai mẫu trong cùng tần số, tức là khoảng cách tần số giữa $X(k)$ và $X(k+1)$.

Bài tập 4.6

Tính DFT với chiều dài $N = 16$ của các dãy sau:

$$x_1(n)_{16} = \begin{cases} 1 & \text{với } n = 0, 1, 2, 14, 15 \\ 0 & \text{với } 3 \leq n \leq 13 \end{cases}$$

$$x_2(n)_{16} = \begin{cases} 1 & \text{với } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 15 \end{cases}$$

Hãy so sánh kết quả và rút ra nhận xét gì?

Bài tập 4.7

Cho một dãy $x_1(n)$ có chiều dài hữu hạn N và ta tạo một dãy mới $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn $M.N$ bằng cách sau đây:

$$x_2(n) = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{M}\right) & \text{với } n = 0 \bmod M \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm của $X_1(k)$.

Bài tập 4.8

Cho dãy $x_1(n)$ có chiều dài hữu hạn N . Ta tạo một dãy mới $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn N như $x_1(n)$ bằng cách sau:

$$x_2(n) = (-1)^n x_1(n)$$

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm của $X_1(k)$.

Bài tập 4.9

Cho dãy $x_1(n)$ có chiều dài hữu hạn N . Ta tạo dãy $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn MN bằng cách sau:

$$x_2(n) = \tilde{x}_1(-n-1) \text{rect}_{MN}(n)$$

a) Hãy cho một ví dụ về $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

b) Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm của $X_1(k)$.

Bài tập 4.10

Cho quan hệ giữa hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_2(n) = x_1(n).x_1(2n) \quad ; \quad x_1(n) \text{ có chiều dài hữu hạn } N.$$

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm của $X_1(k)$.

Bài tập 4.11

Cho dãy $x_1(n)$ có chiều dài hữu hạn N , ta tạo dãy mới có chiều dài hữu hạn $\frac{N}{2}$ như sau (N chẵn).

$$x_2(n) = \begin{cases} x_1(n) + x_1\left(n + \frac{N}{2}\right) & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm của $X_1(k)$.

Bài tập 4.12

Cho dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N .

Chứng minh rằng:

$$x(-n)_N = x(N-n)_N$$

Bài tập 4.13

Cho dãy $x(n)$ chiều dài hữu hạn N , DFT được tính trên N mẫu:

$$X(k)_N = DFT[x(n)_N]$$

Nếu $x(n)$ thỏa mãn quan hệ sau đây:

$$x(n) = -x(N-1-n)$$

Hãy tìm $X(0)_N$.

Bài tập 4.14

Cho dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N , DFT được tính trên N mẫu:

$$X(k)_N = DFT[x(n)_N]$$

Nếu $x(n)$ thỏa mãn quan hệ sau: $x(n) = x(N-1-n)$ với N chẵn.

Hãy tính $X\left(\frac{N}{2}\right)_N$

Bài tập 4.15

Cho dãy $x_1(n)$ có chiều dài vô hạn, biến đổi Z của nó là $X_1(Z)$ và dãy $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn N , biến đổi DFT của nó là $X_2(k)_N$ (N điểm). Hãy xác định quan hệ giữa $x_1(n)$ và $x_2(n)$ nếu $X_1(Z)$ và $X_2(k)_N$ có quan hệ sau đây:

$$X_2(k)_N = X_1(Z) \bigg|_{Z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Bài tập 4.16

Cho dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$$v_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \neq 0 & \text{với } 0 \leq n < 10 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X_2(k)_{10} = DFT[x_2(n)_{10}]$$

Ta biết rằng
$$X_2(k)_{10} = X_1\left(e^{j\frac{2\pi}{10}k}\right)$$

Hãy tính $x_2(n)$.

Bài tập 4.17

Chúng ta có hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn:

$$x_1(n) = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giả sử rằng $N_1 < N_2$.

Nếu chúng ta thực hiện tích chập tuyến tính:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

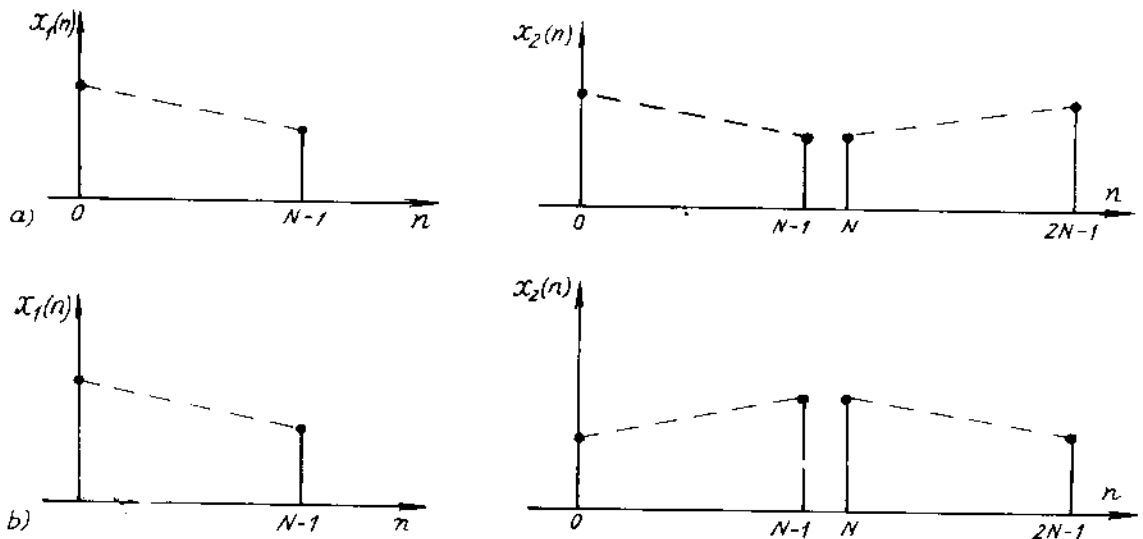
và tích chập vòng với chiều dài N_2 :

$$x_3(n)_{N_2} = x_1(n)_{N_1} (*)_{N_2} x_2(n)_{N_2}$$

Hãy xác định số mẫu mà tích chập tuyến tính trùng với tích chập vòng.

Bài tập 4.18

Cho hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như trên hình BT 4.18 dưới đây:

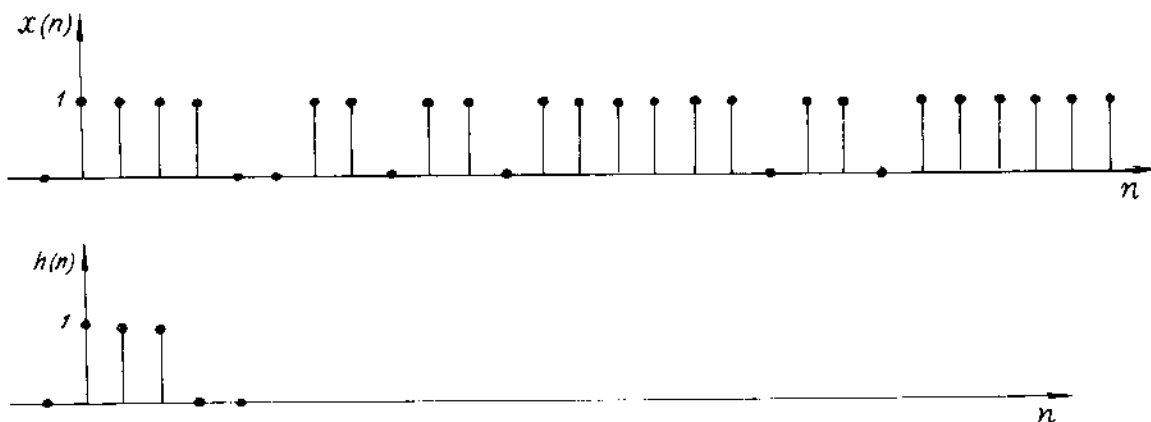


Hình BT 4.18.

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm của $X_1(k)$.

Bài tập 4.19

Hãy dùng phương pháp đồ thị tính toán tích chập phân đoạn của hai dãy $x(n)$ và $h(n)$ cho trên hình BT 4.19 sau đây:



Hình BT 4.19.

- Dùng phương pháp cộng xếp chồng.
- Dùng phương pháp đặt kề nhau.

Bài tập 4.20

Chúng ta có một dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N .

$$x(n) = \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq N-1 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nếu cần tính :

$$X(Z) \Big|_{Z = e^{j \frac{2\pi}{M} k}}$$

Nhờ biến đổi Fourier rời rạc M điểm của một dãy $x_1(n)$ khác, mà dãy $x_1(n)$ nhận được từ dãy $x(n)$ nếu $N > M$ và $\frac{N}{M} = L$ là số nguyên.

Hãy xác định thủ tục tính toán $x_1(n)$.

Bài tập 4.21

Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ có chiều dài $N : L[x(n)] = [0, N-1]$. Chúng ta muốn tính M mẫu của biến đổi Z $X(Z)$ tại M điểm trên vòng tròn đơn vị ($M < N$). Hãy xác định thủ tục tính M mẫu của $X(Z)$ theo DFT M điểm của $x(n)$.

Bài tập 4.22

Cho hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau :

$$x_1(n) = \text{rect}_5(n)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_3(n)$$

Hãy tính :

a. $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

b. $x_3(n)_6 = x_1(n)_6 * x_2(n)_6$

c. $x_3(n)_{10} = x_1(n)_{10} *_{10} x_2(n)_{10}$

Bài tập 4.23

Cho hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau :

$$x_1(n) = u(n) - u(n - 6)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_4(n - 2)$$

Hãy tính :

a. $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

b. $x_3(n)_6 = x_1(n)_6 (*) x_2(n)_6$

c. $x_3(n)_{11} = x_1(n)_{11} (*)_{11} x_2(n)_{11}$

Bài tập 4.24

Cho hệ thống có đáp ứng xung $h(n)$ như sau :

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

a. Hãy tìm $H(1)_4$

b. Bảng đồ thị của $H(k)_4$ hãy tìm $H(e^{j\omega})$

c. Hãy tìm $\tilde{h}(n)_4$ và $\tilde{H}(k)_4$.

Bài tập 4.25

Cho hệ thống có đáp ứng xung $h(n)$ như sau :

$$h(n) = \text{rect}_6(n)$$

a. Hãy tìm $H(e^{j\omega})$

b. Từ đồ thị của $H(e^{j\omega})$ hãy tìm $H(k)_6$

c. Dùng DFT với $N = 6$ để tìm tín hiệu ra $y(n)$.

Bài tập 4.26

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha 0(ω) = 0 như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

Hãy tìm $H(k)_1$, $H(k)_6$ và $H(k)_8$ trong các trường hợp sau đây :

a. $\omega_c = \frac{\pi}{2}$; b. $\omega_c = \frac{\pi}{3}$; c. $\omega_c = \frac{\pi}{4}$

Bài tập 4.27

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao lý tưởng pha $\theta(\omega) = 0$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

Hãy tìm $H(k)_1$, $H(k)_6$ và $H(k)_8$ trong các trường hợp sau đây :

a. $\omega_c = \frac{\pi}{2}$; b. $\omega_c = \frac{\pi}{3}$; c. $\omega_c = \frac{\pi}{4}$

Bài tập 4.28

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải lý tưởng pha $\theta(\omega) = 0$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

Hãy tìm $H(k)_4$, $H(k)_6$ và $H(k)_8$ trong các trường hợp sau đây :

a. $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$; b. $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$; c. $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$
 $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{3}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$

Bài tập 4.29

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số chẵn dải lý tưởng pha $\theta(\omega) = 0$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

Hãy tìm $H(k)_3$, $H(k)_5$ và $H(k)_7$ trong các trường hợp sau đây :

a. $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$; b. $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$; c. $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$
 $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{8}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$

Bài tập 4.30

Cho tín hiệu $x(n) = \delta(n)$, tín hiệu này đi qua bộ lọc số thông thấp lý tưởng với tần số cắt $\omega_c = \frac{\pi}{2}$. Hãy tìm

- Phổ của tín hiệu vào $X(e^{j\omega})$
- Phổ của tín hiệu ra $Y(e^{j\omega})$
- Hãy dùng *DFT* với chiều dài $N = 4$ để tìm tín hiệu ra $y(n)$.

Bài tập 4.31

Cho tín hiệu $x(n) = \text{rect}_2(n)$, tín hiệu này đi qua bộ lọc số thông cao lý tưởng với tần số cắt $\omega_c = \frac{\pi}{3}$. Hãy tìm

- Phổ của tín hiệu vào $X(e^{j\omega})$
- Phổ của tín hiệu ra $Y(e^{j\omega})$
- Hãy dùng *DFT* với chiều dài $N = 4$ để tìm tín hiệu ra $y(n)$.

Bài tập 4.32

Cho tín hiệu $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$, tín hiệu này đi qua bộ lọc số thông dải lý tưởng với tần số cắt trên $\omega_{c2} = \frac{3\pi}{4}$. Hãy tìm

- Phổ của tín hiệu vào $X(e^{j\omega})$
- Phổ của tín hiệu ra $Y(e^{j\omega})$
- Hãy dùng *DFT* với chiều dài $N = 4$ để tìm tín hiệu ra $y(n)$.

Bài tập 4.33

Cho tín hiệu $x(n) = \frac{1}{4}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) - \frac{1}{4}\delta(n-2)$, tín hiệu này đi qua bộ lọc số chắn dải lý tưởng với tần số cắt dưới $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$, tần số cắt trên $\omega_{c2} = \frac{3\pi}{4}$. Hãy tìm

- Phổ của tín hiệu vào $X(e^{j\omega})$
- Phổ của tín hiệu ra $Y(e^{j\omega})$
- Hãy dùng *DFT* với chiều dài $N = 4$ để tìm tín hiệu ra $y(n)$.

Bài tập 4.34

Cho phổ của một tín hiệu như sau :

$$X(e^{j\omega}) = \cos 2\omega \cdot e^{j\omega}$$

Hãy tìm $X(k)$, bằng phương pháp đồ thị.

Bài tập 4.35

Cho phổ của một tín hiệu như sau :

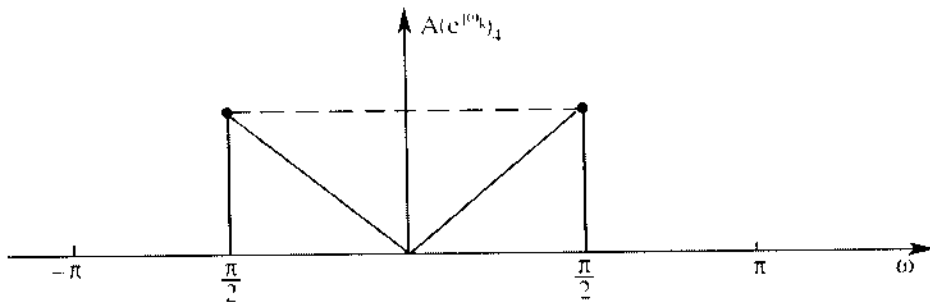
$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \omega \cdot e^{-j\omega} & \frac{\pi}{2} < \omega \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$0 \leq \omega < 2\pi$$

Hãy tìm $X(k)_8$ bằng phương pháp đồ thị.

Bài tập 4.36

Cho phổ của một tín hiệu như trên hình BT4.36 như sau :

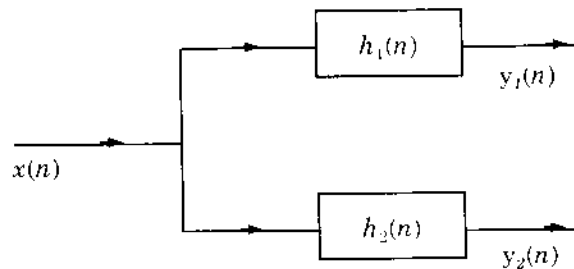


Hình BT4.36

Hãy tìm $X(k)_8$ bằng phương pháp đồ thị.

Bài tập 4.37

Cho hệ thống có sơ đồ như trên hình BT4.37 như sau :



Hình BT4.37

Cho :

$h_1(n)$ là bộ lọc số thông thấp lý tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

$h_2(n)$ là bộ lọc số thông cao lý tưởng với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

a. Từ $H_1(e^{j\omega})$ và $H_2(e^{j\omega})$ hãy tìm $H_1(k)_4$ và $H_2(k)_4$

b. Cho $x(n) = \text{rect}_1(n)$

Hãy dùng *DFT* và *IDFT* với $N = 4$ để tìm tín hiệu ra $y_1(n)$ và $y_2(n)$.

PHỤ LỤC

$$S = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

$$S = \sum_{k=0}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$S = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} k = \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} 1 = n_2 - n_1 + 1$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow x > 0 \quad S \text{ hội tụ nếu } x < 1$$

S phân kỳ nếu $x \geq 1$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{nếu } x < 1$$

$$S = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{nếu } x < 1$$

$$S = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{nếu } x \neq 1$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} x^k = \frac{x^{n_1} - x^{n_2+1}}{1-x}; \quad n_2 > n_1$$

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2+1}$$

Chuỗi Riman:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{hội tụ nếu } \alpha > 1$$

phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$

Nghiệm của phương trình : $x^N - a^N = 0$

Phương trình có N nghiệm là:

$$x_k = ae^{j \frac{2\pi}{N}(k-1)} \quad k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

$$\text{và : } x^N - a^N = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N)$$

Hàm dấu Sgn :

$$\text{Sgn}(a) = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} +1 & \text{nếu } a > 0 \\ -1 & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

hoặc :

$$\text{Sgn}(a) = \begin{cases} e^{j0} & \text{nếu } a > 0 \\ e^{j\pi} & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$
$$\text{Sgn}(a) = \begin{cases} e^{j0} & \text{nếu } \frac{a}{|a|} = 1 \\ e^{j\pi} & \text{nếu } \frac{a}{|a|} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Sgn}(a) = e^{j \left(1 - \frac{a}{|a|} \right) \frac{\pi}{2}}$$

Một vài công thức lượng giác :

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

$$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1- Nguyễn Xuân Quỳnh " Lý thuyết mạch logic và kỹ thuật số", Nhà xuất bản Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà Nội 1991.
- 1- Nguyễn Xuân Quỳnh "Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng", Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 1995.
- 3- Nguyễn Quốc Trung "Vi điện tử số", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1997.
- 4- M. Kunt "Traitement numérique des signaux" TE XX, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1980.
- 5- R. Boite et H. Leich "Les filtres numériques" Masson, Paris 1982.
- 6- P. G. Fontollet "Systèmes de télécommunications" TE. XVIII., Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1983.
7. M.Hassler, J. Neiryneck "Filtres électriques" TE. XIX. Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1982.
- 8- René Boite et Murat Kunt "Traitement de la Parole" Complément au Traité d'électricité, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1987.
- 9- Alexandru Spătaru "Fondements de la théorie de la Transmission de l'informatinon complément au Traité d'électricité, Presses Polytechniques romandes, Lausanne, 1987.
- 10- Hansruedi Bühler "Réglages échantillonnés"
Vol. 1 (1982, 1986). Traitement par la transformation en Z.
Vol. 2 (1983), Traitement dans l'espace d'état.
Complément au traité d'électricité, presses Polytechniques romandes, Lausanne.
- 11- M. G. Bellanger "Traitement numérique du signal" Masson, Paris 1988.
- 12- Jean - Pirre Vidal "Traitement numérique du Signal Paris, 1987.
- 13- Jean - Claude Lafont et Jean - Paul Vabre "Cours et Problèmes d'électronique numérique" Ellipses, Paris 1988
- 14- F. de Coulon "Théorie et traitement des Signaux" TE. VI, Presses Polytechniques romandes, Lausanne, 1984.
- 15- Leland B. Jackson "Signals, Systems, and Transforms" Addison - Wesley Publishing Company, printed in The United States of America 1991.
- 16- Peter Kraniavskas "Transforms in Signals and Systems" Addison - Wesley Publishing Comapany, printed in Great Britain by William Clowes Ltd. 1993.
- 17- INMOS Limited "Digital Signal Processing" Prentice Hall international (UK) Ltd. Printed and bound in Great Britain at the University Press, Cambridge, 1989.
- 18- John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis "Introduction to Digital Signal Process- ing" Maxwell Macmillan International Editions, New York 1989.

- 19- John G. Proakis "Digital Communication" McGraw - Hill International Editions
Printed in Singapore 1995.
- 20- A. Antoniou "Digital filter: Analysis and Design" McGraw Hill, New York 1979
- 21- Richard G. Lyons "Understanding Digital Signal Processing" Addison - Wesley
Publishing Company, Massachusetts, 1997.
- 22- Gordon E. Pelton "Voice Processing" McGraw - Hill, International Editions 1993.
- 23- John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis "Digital Signal Processing: Principles,
Algorithms, and Applications" Macmillan Publishing Company, printed in the
Republic of Singapore, 1992.
- 24- David J. Defatta, Joseph G. Lucas and William S. Hodgkiss "Digital Signal Processing:
A System Design Approach" John Wiley & Sons. Inc, printed in Singapore 1988.
- 25- Athanasios Papoulis "Signal Analysis" McGraw - Hill Book Company, New York
1977.
- 26- Sophoclis J. Orfanidis "Optimum Signal processing: A Introduction" McGraw - Hill.
Book company, New York 1988
- 27- James V. Candy "Signal Processing: The Modern approach McGraw - Hill Book
company New York 1988.
- 28- Stephen P. Banks "Signal Processing, Image processing and Pattern Recognition"
Prentice Hall International (UK) Ltd. 1990.
- 29- Richard J. Vaccaro "Digital Control: "A State - Space Approach" McGraw - Hill,
Inc, New Yrok 1995.
- 30- Charles W. Therrien "Discrete Random Signal and Statistical Signal processing"
Prentice Hall International, Inc, Printed in the United States of America, 1992.
- 31- C. J. Savant, Jr., Martin S. Roden, and Gordon L. Carpenter "Electronic design:
Circuits and Systems" The Benjamin/ Cummings Publishing company, Inc, Califor-
nia 1991.
- 32- R. E. Crochiere and L. R. Rabiner "Multirate Digital Signal Processing" Englewood
cliffs, NJ : Prentice, 1983.
- 33- L. R. Rabiner and B. Gold "Theory and Application of Digital Signal Processing"
Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1975.
- 34- A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer "Digital Signal Processing" Englewood Cliffs,
NJ : Prentice - Hall 1975.
- 35 - Martin Vetterli "A Theory of Multirate Filter Banks" IEEE Transactions on acous-
tics, Speech, and Signal Processing, Vol ASSP - 35, No - 3, March 1987.
- 36- P.P Vaaidyanathan "Multirate Digital filter, Filter Banks, Polyphase Networks, and
Applications" A Tutorial Proceedings of IEEE, Vol 78, No1 January 1990.
- 37.- Ali N. Akansu "The Binomial QMF - Wavelet Transform for Multiresolution Signal
Decomposition" IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41 No 1 January
1993 P.P 13 - 14.
- 38- R.D Koilpillai and P.P. Vaidyanathan "A Spectial factorization Approch to Pseudo
- QMF Design" IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41 No 1 January
1993, P.P 82 - 92.

- 39- A. S. Alkairy "Design and characterization of optimal FIR Filter with arbitrary Phase". IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41 No 2 February 1993 P.P 559 - 637.
- 40- G. Li "Optimal FWL (finite word Length) Design of State - Space Digital Systems With Weighted Sensitivity Minimization and Sparseness Consideration", IEEE Transaction on circuits and Systems, Vol 39 No 5 May 1992 P.P 365 - 376.
- 41- P.P Vaidyanathan and T.Q. Nguyen "A Trick for the design of FIR half - band filters", IEEE Transaction on circuits and Systems, Vol 34 Mar 1987 P.P 297 - 300
- 42- P.P Vaidyanathan and T. Q. Nguyen "Eigenfilters: A new approach to least - squares FIR filter design and applications including Nyquist filters", IEEE Trans- action on circuits and systems, Vol 34 Jan 1997 P.P 11 - 23.
- 43- P.P Vaidyanathan, Z. Dognata, T. Q. Nguyen, and T. Saramaki "Improved ap- proach for De of perfect reconstruction FIR QMF banks with lossless polyphase Structures", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 37 July 1989.
- 44- P.P Vaidyanathan, Z. Dognata, and T. Q. Nguyen "General Synthesis Procedures for Lossless transfer matrices, for perfect reconstruction multirate filter bank ap- plications" IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 36. P.P 1561 - 1574, oct 1988.
- 45- P. Q. Hoang and P.P. Vaidyanathan "Lattice Structures for optimal design and robust implementation of two - channel perfect reconstruction QMF banks", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 36 P.P 81 - 94 Jan 1988.

MỤC LỤC

Lời giới thiệu	3
Lời nói đầu	5
Chương 1. TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC	
1.1. Nhập môn	7
1.1.1 Các định nghĩa	7
1.1.2. Các hệ thống xử lý tín hiệu	9
1.2. Tín hiệu rời rạc	11
1.2.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc	11
1.2.2. Một vài dãy cơ bản	12
1.2.3. Một số định nghĩa	17
1.3. Các hệ thống tuyến tính bất biến	21
1.3.1. Các hệ thống tuyến tính	21
1.3.2. Các hệ thống tuyến tính bất biến	23
1.3.3. Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả	32
1.3.4. Hệ thống tuyến tính bất biến ổn định	36
1.4. Các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng	39
1.4.1. Phương trình sai phân tuyến tính	39
1.4.2. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng	41
1.4.3. Các hệ thống đệ quy và không đệ quy	48
1.4.4. Các phần tử thực hiện hệ thống tuyến tính bất biến	55
1.5. Tương quan của các tín hiệu	62
1.5.1. Mở đầu	62
1.5.2. Tương quan chéo và tự tương quan	62
Bài tập chương 1	65
Chương 2. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN Z	
2.1. Mở đầu	76
2.2. Biến đổi Z	77
2.2.1. Định nghĩa biến đổi Z hai phía và một phía	77
2.2.2 Sự tồn tại của biến đổi Z	80
2.2.3. Cực và không	89
2.3. Biến đổi Z ngược	92
2.3.1 Định nghĩa Cauchy	92
2.3.2. Biến đổi Z ngược	92
2.3.3. Phương pháp thặng dư	93

2.3.4. Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa	96
2.3.5. Phương pháp khai triển thành phân thức tối giản	98
2.4. Tính chất của các biến đổi Z	104
2.4.1. Tính tuyến tính	104
2.4.2. Trễ	105
2.4.3. Nhân với dãy hàm mũ a^N	106
2.4.4. Đạo hàm của biến đổi Z	108
2.4.5. Dãy liên hợp phức	109
2.4.6. Định lý giá trị đầu	110
2.4.7. Tích chập của hai dãy	111
2.4.8. Tích của hai dãy	114
2.4.9. Tương quan của hai tín hiệu	116
2.4.10. Tổng kết các tính chất của các biến đổi Z	118
2.4.11. Một vài biến đổi Z thông dụng	119
2.5. Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền Z	120
2.5.1. Hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc	120
2.5.2. Phân tích hệ thống trong miền Z	123
2.5.3. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng nhờ biến đổi Z	128
2.5.4. Độ ổn định	130
Bài tập chương 2	139
Chương 3. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC	
3.1. Mở đầu	148
3.2. Biến đổi Fourier của các tín hiệu rời rạc	149
3.2.1. Định nghĩa biến đổi Fourier	149
3.2.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier	155
3.2.3. Biến đổi Fourier ngược	156
3.3. Các tính chất của biến đổi Fourier	159
3.3.1. Tính chất tuyến tính	159
3.3.2. Tính chất trễ	160
3.3.3. Tính chất đối xứng	160
3.3.4. Tính chất biến số n đảo	163
3.3.5. Tích chập của hai tín hiệu	164
3.3.6. Tích của hai dãy	165
3.3.7. Vệt phân trong miền tần số	166
3.3.8. Trễ tần số	166
3.3.9. Quan hệ Parsevan	167
3.3.10. Định lý tương quan và định lý Weiner Khintchine	169

3.3.11. Tổng kết các tính chất của biến đổi Fourier đối với tín hiệu rời rạc	171
3.4. So sánh biến đổi Fourier với biến đổi Z	172
3.4.1. Quan hệ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Z	172
3.4.2. Đánh giá hình học $Xe^{j\omega}$ trên mặt phẳng Z	174
3.5. Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền tần số liên tục	176
3.5.1. Đáp ứng tần số	176
3.5.2. Các bộ lọc số lý tưởng	179
3.5.3. Bộ lọc số thực tế	192
3.5.4. Bộ vi phân	192
3.5.5. Bộ biến đổi Hilbert	194
3.6. Lấy mẫu tín hiệu	195
3.6.1. Định lý lấy mẫu	196
3.6.2. Tần số Nyquist	199
Bài tập chương 3	201
Chương 4. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC	
4.1. Mở đầu	209
4.2. Biến đổi Fourier rời rạc đối với các tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N	210
4.2.1. Các định nghĩa	210
4.2.2. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ N	222
4.3. Biến đổi Fourier rời rạc đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn	234
4.3.1. Các định nghĩa	234
4.3.2. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với các dãy có chiều dài hữu hạn	239
4.3.3. Tích chập nhanh	258
4.3.4. Khôi phục biến đổi Z và biến đổi Fourier từ DFT	264
Bài tập chương 4	267
Phụ lục	276
Tài liệu tham khảo	278

Chịu trách nhiệm sản :
Biên tập:
Thiết kế bìa sách:

TS.Phạm Văn Diên
Nguyễn Thị Ngọc Khuê
Đặng Ngọc Quang

In 500 cuốn, khuôn khổ: 19x27 ,tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Số đăng ký KHXB số: 289/QĐXB-NXBKHKH ngày 20/10/2008
Quyết định xuất bản số: 82- 2008/CXB/282.1-02/KHKH ngày 14/01/2008
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2008.

208289 B00

Xử lý tín hiệu số 11



0807090000077

76,000

Giá: 76.000đ