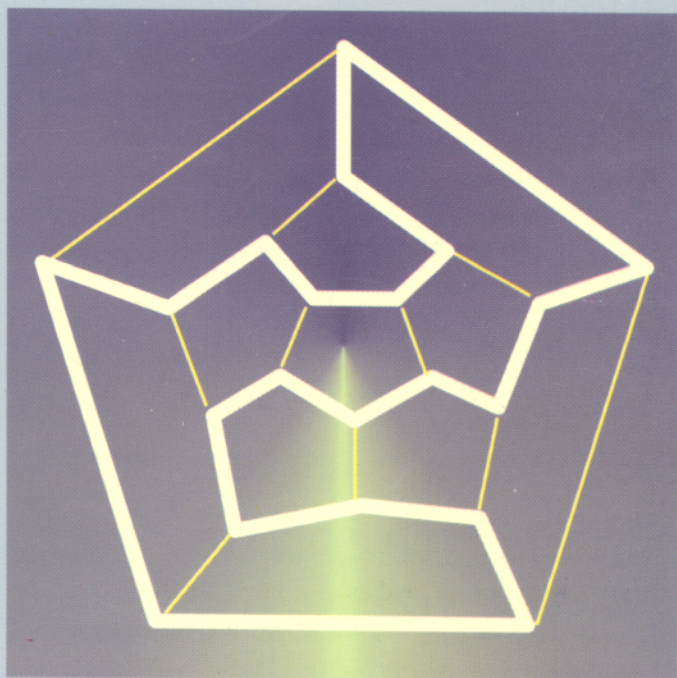


ĐẶNG HUY RUẬN

LÝ THUYẾT

ĐỒ THỊ
VÀ
ỨNG DỤNG



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

ĐẶNG HUY RUẬN

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ và ỨNG DỤNG



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI 2000

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Mở đầu	7
Chương 1. Các khái niệm cơ bản	9
1. Định nghĩa đồ thị	9
2. Các cách biểu diễn đồ thị	10
3. Một số dạng đồ thị đặc biệt	12
Chương 2. Bậc của đỉnh đồ thị	15
1. Bậc của đỉnh	15
2. Nửa bậc:	16
3. Một số tính chất:	16
4. Ứng dụng	21
Chương 3. Xích, chu trình, đường và vòng	23
1. Xích, chu trình	23
2. Đường, vòng	24
3. Một số tính chất	25
4. Ứng dụng	27
Chương 4. Đồ thị liên thông	29
1. Định nghĩa	29
2. Tính chất	30
3. Ứng dụng	34
Chương 5. Hàm Grundy	36
1. Định nghĩa	36
2. Các phép toán trên đồ thị	37

Chương 6. Chu số	42
1. Định nghĩa và tính chất	42
2. Hệ chu trình độc lập	43
Chương 7. Sắc số và đồ thị màu	45
1. Định nghĩa	45
2. Một số tính chất	46
3. Thuật toán tìm sắc số	49
4. Lớp đồ thị có chu trình tam giác cùng màu	52
Chương 8: Số ổn định trong và số ổn định ngoài	55
1. Số ổn định trong	55
2. Số ổn định ngoài	57
3. Sự liên hệ giữa số ổn định trong, số ổn định ngoài với các bài toán trên bàn cờ	60
Chương 9. Nhân của đồ thị	65
1. Định nghĩa	65
2. Tính chất: (điều kiện để đồ thị không có nhân)	65
3. Áp dụng cho hàm Grundy	67
Chương 10. Trò chơi trên đồ thị	69
1. Trò chơi Nim	69
2. Phương pháp dùng hàm Grundy	70
Chương 11. Đồ thị Eulere	76
1. Định nghĩa	77
2. Điều kiện cần và đủ để một đa đồ thị vô hướng là đồ thị Eulere	78
3. Thuật toán để tìm trực tiếp chu trình Eulere (Jlertg)	83
4. Điều kiện đủ để đồ thị có hướng là đồ thị Eulere	83
5. Thuật toán tìm vòng Eulere	85
Chương 12. Mạng vận tải	86
1. Mạng vận tải	86
2. Luồng vận tải	86

3. Bài toán luồng cực đại.....	87
4. Bài toán luồng cực tiểu	96
Chương 13. Cặp ghép.....	98
1. Định nghĩa	98
2. Điều kiện tồn tại cặp ghép.....	99
3. Cặp ghép lớn nhất.....	102
Chương 14. Đồ thị Hamilton	107
1. Định nghĩa	108
2. Điều kiện tồn tại chu trình Hamilton.....	109
3. Điều kiện tồn tại đường Hamilton.....	114
4. Ứng dụng.....	115
Chương 15. Đường đi ngắn nhất	118
1. Thuật toán tìm đường đi.....	119
2. Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất	121
3. Đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số.....	122
Chương 16. Cây và bụi	125
1. Định nghĩa	125
2. Đặc điểm của cây và bụi	126
3. Cây bao trùm.....	128
4. Cây bao trùm trên đồ thị có trọng số.....	129
5. Thuật toán tìm hệ cơ sở của các chu trình.....	133
Chương 17. Đồ thị phẳng	134
1. Định nghĩa.	135
2. Một số tính chất.	136
3. Ứng dụng.....	138
Chương 18. Các bài tập kèm theo lời giải.....	140
Tài liệu tham khảo	159

MỞ ĐẦU

Trong nhiều tình huống, do thói quen người ta thường vẽ lên giấy những điểm biểu thị cho các cá thể, các khu dân cư, các đơn vị hành chính, các nút giao thông, các hóa chất... và nối các điểm đó với nhau bằng những nét hoặc những mũi tên tượng trưng cho mối liên hệ nào đó. Các sơ đồ này dùng ở khắp mọi nơi với các tên gọi khác nhau. Trong tâm lý học gọi nó là "xã hội đồ". Trong kinh tế gọi là sơ đồ tổ chức. Trong giao thông vận tải gọi là mạng giao thông... Chính D.Konig là người đầu tiên đề nghị gọi các sơ đồ như trên là "đồ thị", đồng thời đề nghị nghiên cứu một cách có hệ thống các tính chất của nó.

Một điều rất đáng quan tâm là nhiều ngành khoa học hoàn toàn khác nhau lại dùng những định lý giống nhau; chẳng hạn, khái niệm "ma trận liên thuộc", do G. R. Kirchhoof đưa ra để nghiên cứu mạch điện, song đã được Henri Poincare dùng lại trong tôpô học để xây dựng "analysis situs" của nó. Khái niệm "điểm khớp" đã xuất hiện từ lâu trong xã hội học, đến gần đây lại xuất hiện trong ngành điện tử. Những thí dụ như trên nhiều vô kể. Điều này chứng tỏ lý thuyết đồ thị được hình thành từ thực tế. Nó có rất nhiều ứng dụng trong xã hội.

Để có thể áp dụng vào các lĩnh vực khác nhau, lý thuyết đồ thị phải được hình thức hóa đến mức cao. Tuy vậy, nhiều khái niệm cơ bản, như "xích", "đường đi", "tâm"... được định nghĩa một cách trừu tượng, nhưng vẫn còn giữ được mối quan hệ nhất định với những "đồ thị thực tế", mà ta rất dễ nhận ra khi sơ đồ đã vạch xong. Bởi vậy lý thuyết đồ thị khá "gần gũi" với thực tế và có rất nhiều ứng dụng trong tin học, xã hội, kinh tế, giáo dục v.v...

Lý thuyết đồ thị trình bày ở đây với mục đích là giúp bạn đọc làm quen với một công cụ toán học có thể áp dụng cho khoa học về cách xử lý,

mà trước hết là trong các lĩnh vực: lý thuyết thông tin, điều khiển học, tin học, trò chơi... Mặt khác, tác giả cũng giành một khối lượng đáng kể để trình bày những ứng dụng của lý thuyết đồ thị vào việc giải các bài toán "không mẫu mực", mà ta thường gặp ở các trường chuyên, lớp chọn, nhằm bồi dưỡng tư duy toán học cho học sinh. Đồng thời cũng liệt kê một số lượng đáng kể các bài tập, nhằm giúp bạn đọc quan tâm làm quen với các bài toán "không mẫu mực".

Tuy đã hết sức cố gắng, song chắc chắn cuốn sách vẫn còn những khiếm khuyết, chúng tôi mong được sự góp ý của độc giả để lần xuất bản tới cuốn sách có nội dung hoàn hảo hơn. Xin chân thành cảm ơn. Thư góp ý xin gửi về: Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - 70 Trần Hưng Đạo - Hà Nội.

Tác giả

CHƯƠNG I

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

Tập hợp $X \neq \emptyset$ các đối tượng và bộ E các cặp sắp thứ tự và không sắp thứ tự các phần tử của X được gọi là một đồ thị, đồng thời được ký hiệu bằng $G(X, E)$ (hoặc bằng $G = (X, E)$ hoặc bằng $G(X)$).

Các phần tử của X được gọi là các đỉnh. Cặp đỉnh không sắp thứ tự được gọi là cạnh, cặp đỉnh sắp thứ tự được gọi là cạnh có hướng hay cung.

Đồ thị chỉ chứa các cạnh được gọi là đồ thị vô hướng, còn đồ thị chỉ chứa các cung được gọi là đồ thị có hướng. Nếu đồ thị chứa cả cạnh lẫn cung, thì nó được gọi là đồ thị hỗn hợp hay đồ thị hỗn tạp.

Một cặp đỉnh có thể được nối với nhau bằng hai hoặc nhiều hơn hai cạnh (hai hoặc nhiều hơn hai cung cùng một hướng). Các cạnh (cung) này được gọi là các cạnh (cung) bội.

Một cung (hay một cạnh) có thể bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh. Cung hay cạnh loại này được gọi là khuyên hay nút.

Cặp đỉnh x, y được nối với nhau bằng cạnh (cung) a , thì x, y được gọi là các đỉnh hay hai đầu của cạnh (cung) a và a được gọi là cạnh (cung) thuộc đỉnh x , đỉnh y .

Nếu cung b xuất phát từ đỉnh u và đi vào đỉnh v , thì u được gọi là đỉnh đầu, còn v được gọi là đỉnh cuối của cung b .

Cặp đỉnh x, y được gọi là hai đỉnh kề nhau, nếu $x \neq y$ và là hai đầu của cùng một cạnh hay một cung.

Đối với mọi đỉnh x dùng $D(x)$ để chỉ tập đỉnh, mà mỗi đỉnh này được nối với x bằng ít nhất một cạnh, $D^+(x)$ để chỉ tập đỉnh, mà mỗi đỉnh này từ x có cung đi tới; $D^-(x)$ để chỉ tập đỉnh mà mỗi đỉnh này có cung đi tới x .

Hai cạnh (cung) a, b được gọi là kề nhau, nếu:

- 1) Chúng khác nhau.
- 2) Chúng có đỉnh chung (nếu a, b là cung, thì không phụ thuộc vào đỉnh chung đó là đỉnh đầu hay đỉnh cuối của cung a , đỉnh đầu hay đỉnh cuối của cung b).

Ví dụ 1.1: Cho đồ thị hỗn hợp có khuyên $G(X, E)$ với tập đỉnh :

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\},$$

tập cạnh và cung :

$$E = \{x_1, x_2; x_2, x_3; x_4, x_6; x_5, x_6; x_3, x_3; x_1, x_6; x_5, x_5\}$$

$$= \{ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad b_1 \quad b_2 \},$$

trong đó a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 - các cạnh, b_1, b_2 - các cung, cung b_1 có x_1 là đỉnh đầu, x_6 là đỉnh cuối.

2. CÁC CÁCH BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

2.1. Biểu diễn bằng hình học

Giả sử có đồ thị $G(X, E)$.

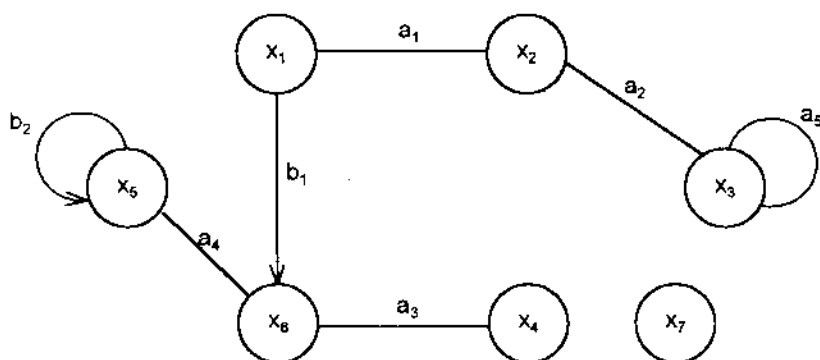
Biểu diễn đỉnh : Lấy các điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các phần tử thuộc tập X và dùng ngay ký hiệu các phần tử này để ghi trên các điểm tương ứng.

Biểu diễn cạnh: Nếu cạnh a với hai đỉnh đầu là x, y thì nó được biểu diễn bằng một đoạn thẳng hay một đoạn cong nối giữa hai điểm x, y và không đi qua các điểm tương ứng trung gian khác.

Biểu diễn cung: Nếu cung a có đỉnh đầu là x , đỉnh cuối là y , thì nó được biểu diễn bằng một đoạn thẳng hoặc một đoạn cong được định hướng đi từ x sang y và không qua các điểm tương ứng trung gian khác.

Hình nhận được gọi là dạng biểu diễn hình học của đồ thị $G(X, E)$. Đôi khi người ta cũng gọi dạng biểu diễn hình học là một đồ thị.

Ví dụ 1.2: Dạng biểu diễn hình học của đồ thị $G(X, E)$ cho trong ví dụ 1.1:



Hình 1.1

2.2. Biểu diễn bằng ma trận liên thuộc

Giả sử đồ thị $G(X, E)$ gồm n đỉnh, m cạnh và cung.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}.$$

Ma trận liên thuộc của đồ thị G là ma trận A gồm n hàng tương ứng với n đỉnh và m cột tương ứng với m cạnh và cung.

Ma trận $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq m$ có

$$a_{i,j} = \begin{cases} +1, & \text{nếu } x_i \text{ là đỉnh đầu cung } e_j \\ -1, & \text{nếu } x_i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \\ 1, & \text{nếu } x_i \text{ là một đầu của cạnh } e_j \\ 0, & \text{nếu } x_i \text{ không thuộc cạnh (cung) } e_j \\ +2, & \text{nếu } x_i \text{ là đỉnh, mà cung } e_j \text{ đồng thời là khuyên xuất phát từ nó.} \\ 2, & \text{nếu } x_i \text{ là đỉnh, mà cạnh } e_j \text{ đồng thời là khuyên thuộc nó.} \end{cases}$$

Ví dụ 1.3: Đồ thị hỗn hợp có khuyên trong ví dụ 1.1 có ma trận liên thuộc A dạng sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b_1 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & +2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix}$$

2.3. Biểu diễn bằng ma trận kề

Giả sử đồ thị $G(X, E)$ gồm n đỉnh, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Ma trận kề của đồ thị G là một ma trận vuông A cấp n có các hàng và cột đều tương ứng với các đỉnh của đồ thị.

$A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ với :

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{nếu từ } x_i \text{ sang } x_j \text{ có cung} \\ 1, & \text{nếu } x_i, x_j \text{ được nối bằng một cạnh} \\ 0, & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Nhận xét: Ma trận kề của đồ thị bất kỳ đều là một ma trận vuông có các phần tử là 0 hoặc 1 hoặc +1. Trong trường hợp đồ thị vô hướng, thì ma trận kề đối xứng qua đường chéo thứ nhất.

3. MỘT SỐ DẠNG ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Trong những trường hợp không cần phân biệt giữa cạnh và cung ta quy ước dùng cạnh thay cho cả cung.

Đồ thị $G(X, E)$ không có khuyên và mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng không quá một cạnh, được gọi là *đồ thị đơn* hay *đơn đồ thị* và thông thường được gọi là đồ thị.

Đồ thị $G(X, E)$ không có khuyên và có ít nhất một cặp đỉnh được nối với nhau bằng từ hai cạnh trở lên được gọi là *đa đồ thị*.

Đồ thị vô hướng (có hướng) $G(X, E)$ được gọi là đồ thị - đầy đủ, nếu mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng đúng một cạnh (một cung với chiều tùy ý).

Đa đồ thị vô hướng (có hướng) $G(X, E)$ được gọi là đồ thị k - đầy đủ, nếu mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng đúng k cạnh (k cung với chiều tùy ý).

Đồ thị (đa đồ thị) $G(X, E)$ được gọi là đồ thị (đa đồ thị) hai mảng, nếu tập đỉnh X của nó được phân thành hai tập con rời nhau X_1, X_2 ($X_1 \cup X_2 = X$ và $X_1 \cap X_2 = \emptyset$) và mỗi cạnh đều có một đầu thuộc X_1 , còn đầu kia thuộc X_2 . Khi đó $G(X, E)$ còn được ký hiệu bằng $G(X_1, X_2, E)$.

Đồ thị (đa đồ thị) $G(X, E)$ được gọi là đồ thị (đa đồ thị) phẳng, nếu nó có ít nhất một dạng biểu diễn hình học trải trên một mặt phẳng nào đó, mà các cạnh của đồ thị chỉ cắt nhau ở đỉnh.

Đồ thị (đa đồ thị) $G(X, E)$ được gọi là hữu hạn, nếu số đỉnh của nó hữu hạn, tức tập X có lực lượng hữu hạn.

Đồ thị (đa đồ thị) với tập đỉnh vô hạn, được gọi là đồ thị (đa đồ thị) vô hạn.

Đồ thị (đa đồ thị) với số cạnh thuộc mỗi đỉnh đều hữu hạn được gọi là đồ thị (đa đồ thị) hữu hạn địa phương.

Hiển nhiên rằng, một đồ thị hay đa đồ thị hữu hạn, thì nó cũng hữu hạn địa phương.

Trong các phần tiếp theo, nếu không có chú ý gì thêm, thì các đồ thị, đa đồ thị được xét đều hữu hạn.

Cho $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset; H \subseteq E, F = E \cap (Y \times Y)$ và $V = (X \times X) / E$.

Đồ thị $G_1(Y, F)$ được gọi là *đồ thị con*, còn $G_2(X, H)$ là *đồ thị bộ phận* của đồ thị $G(X, E)$.

Đồ thị $G'(X, V)$ được gọi là *đồ thị bù* của đồ thị $G(X, E)$.

Đồ thị có hướng $G(X, E)$ được gọi là *đồ thị đối xứng*, nếu

$$\forall x, y \in X [(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E].$$

Trong đồ thị đối xứng tùy ý hai đỉnh kề nhau x, y luôn luôn được nối bằng hai cung ngược chiều nhau. Để đơn giản, trong trường hợp này người ta quy ước thay hai cung nối trên bằng một cạnh nối giữa x và y .

Đồ thị có hướng $G(X, E)$ được gọi là *đồ thị phản đối xứng*, nếu

$$\forall x, y \in X [(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \notin E].$$

CHƯƠNG 2

BẬC CỦA ĐỈNH ĐỒ THỊ

Đối với đồ thị và đa đồ thị có hướng, ngoài khái niệm bậc còn có khái niệm nửa bậc.

1. BẬC CỦA ĐỈNH

Giả sử $G(X, E)$ là một đồ thị hay đa đồ thị có hướng hoặc không có hướng. Số cạnh và cung thuộc đỉnh x được gọi là bậc của đỉnh x và ký hiệu bằng $m(x)$.

Ví dụ 2.1: Trong đồ thị hình 2.1

$$m(x_1) = m(x_2) = 3,$$

$$m(x_3) = 4, m(x_4) = 2$$

$$m(x_6) = 1, m(x_7) = 1,$$

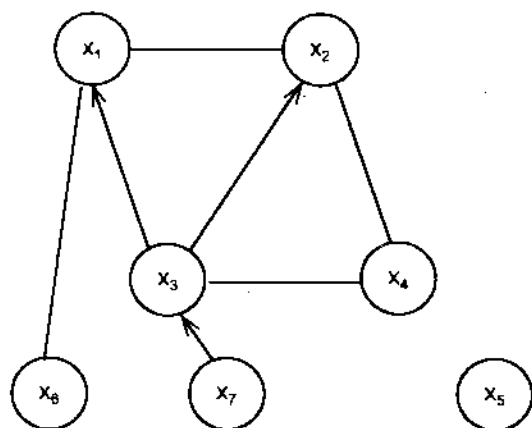
$$m(x_5) = 0.$$

Đỉnh có bậc bằng 0 được gọi là đỉnh biệt lập.

Đỉnh có bậc bằng 1 được gọi là đỉnh treo.

Cạnh (cung) có ít nhất một đầu là đỉnh treo được gọi là cạnh (cung) treo.

Trong đồ thị hình 2.1 x_5 là đỉnh biệt lập; x_6, x_7 là các đỉnh treo; (x_1, x_6) là cạnh treo, còn (x_7, x_3) là cung treo.



Hình 2.1

2. NỬA BẬC

Giả sử $G(X, E)$ là đồ thị hoặc đa đồ thị có hướng. Số cung đi vào đỉnh x được gọi là nửa bậc vào của x và ký hiệu bằng $m'(x)$ hoặc bằng $m^-(x)$.

Số cung đi ra khỏi đỉnh x được gọi là nửa bậc ra của đỉnh x và ký hiệu hoặc bằng $m''(x)$ hoặc bằng $m^+(x)$.

Ký hiệu tập cung đi vào đỉnh x bằng $E^-(x)$, còn tập cung đi ra khỏi đỉnh x bằng $E^+(x)$.

Ví dụ 2.2:

$$m'(x_1) = 0, \quad m''(x_1) = 3$$

$$m'(x_2) = 1, \quad m''(x_2) = 2$$

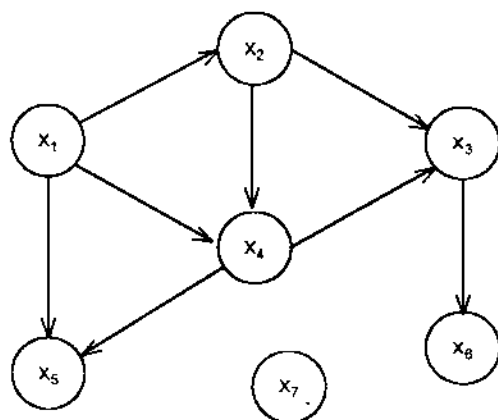
$$m'(x_3) = 2, \quad m''(x_3) = 1$$

$$m'(x_4) = 2, \quad m''(x_4) = 2$$

$$m'(x_5) = 2, \quad m''(x_5) = 0$$

$$m'(x_6) = 1, \quad m''(x_6) = 0$$

$$m'(x_7) = m''(x_7) = 0$$



$$E^-(x_1) = \emptyset, \quad E^+(x_1) = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_1, x_5)\} \quad \text{Hình 2.2}$$

$$E^-(x_4) = \{(x_1, x_4), (x_2, x_4)\}, \quad E^+(x_4) = \{(x_4, x_3), (x_4, x_5)\}.$$

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Định lý 2.1:

Trong một đồ thị hay đa đồ thị tùy ý, tổng số bậc của tất cả các đỉnh bao giờ cũng gấp đôi số cạnh.

Thật vậy, khi tính bậc của các đỉnh mỗi cạnh vô hướng hoặc có hướng đều được tính mỗi đầu đúng một lần, nên dễ dàng suy ra khẳng định trên.

Định lý 2.2:

Trong một đồ thị hay đa đồ thị tùy ý số đỉnh bậc lẻ luôn luôn là một số chẵn.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị (đa đồ thị) $G(X, E)$ có n đỉnh, m cạnh

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n\},$$

các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ bậc lẻ và $x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$ bậc chẵn.

Theo định lý 2.1 có đẳng thức:

$$\underbrace{m(x_1) + m(x_2) + \dots + m(x_k)}_A + \underbrace{m(x_{k+1}) + \dots + m(x_{n-1}) + m(x_n)}_B = 2m$$

Vì B là tổng của các số chẵn, nên B là một số chẵn. Bởi vậy $A = 2m - B$ phải là một số chẵn.

Số chẵn A là tổng của k số lẻ, nên k phải chẵn. Bởi vậy số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị hay đa đồ thị bất kỳ phải là một số chẵn.

Định lý 2.3:

Trong một đồ thị với n ($n \geq 2$) đỉnh có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc.

Chứng minh:

Giả sử $G(X, E)$ là đồ thị tùy ý với $|X| = n \geq 2$. Xét hai khả năng sau:

1) Nếu đồ thị có đỉnh bậc 0, thì trong đồ thị không có một đỉnh nào kề với tất cả các đỉnh còn lại, nên mỗi đỉnh của đồ thị có bậc là một trong $n - 1$ số nguyên: 0, 1, 2, ..., $n - 3$, $n - 2$.

2) Nếu đồ thị có đỉnh $n - 1$, thì đồ thị không có đỉnh bậc 0. Bởi vậy bậc của mỗi đỉnh thuộc đồ thị là một trong $n - 1$ số nguyên: 1, 2, ..., $n - 2$, $n - 1$.

Từ kết quả lý luận trên khẳng định được rằng, đồ thị $G(X, E)$ với n đỉnh, nhưng chỉ có không quá $n - 1$ loại bậc. Bởi vậy, phải có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.4:

Nếu đồ thị với n ($n > 2$) đỉnh có đúng 2 đỉnh cùng bậc, thì hai đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc $n - 1$.

Chứng minh:

Giả sử x, y là hai đỉnh cùng bậc của đồ thị $G(X, E)$ và đều có bậc 0 hoặc bậc $n - 1$. Loại x, y và tất cả các cạnh thuộc chúng khỏi đồ thị G , ta

được đồ thị con G_1 có $n - 2$ đỉnh. Theo định lý 2.3 trong G_1 có 2 đỉnh cùng bậc, chẳng hạn u, v .

1) Nếu x, y cùng bậc 0, thì u, v trong G không kề với x, y nên u, v đồng thời 2 đỉnh cùng bậc trong đồ thị G . Như vậy, đồ thị G phải có ít nhất 2 cặp đỉnh cùng bậc.

2) Nếu x, y đều có bậc $n - 1$. Khi đó mỗi đỉnh u, v đều kề đồng thời với x, y , nên trong đồ thị G các đỉnh u, v cũng cùng bậc. Như vậy trong đồ thị G phải có ít nhất 2 cặp đỉnh cùng bậc.

Cả hai trường hợp có thể đều dẫn tới mâu thuẫn với tính chất: Đồ thị G có duy nhất một cặp đỉnh cùng bậc, nên x, y không thể cùng bậc 0 hoặc cùng bậc $n - 1$. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.5:

Số đỉnh bậc $n - 1$ trong đồ thị G với n ($n \geq 4$) đỉnh, mà 4 đỉnh tùy ý có ít nhất một đỉnh kề với 3 đỉnh còn lại, không nhỏ hơn $n - 3$.

Chứng minh:

1) Nếu G đầy đủ, thì khẳng định hiển nhiên.

2) Nếu G có cặp đỉnh duy nhất không kề nhau. Khi đó trong G có $n - 2$ đỉnh bậc $n - 1$.

3) Nếu G có 2 cặp đỉnh không kề nhau, thì chúng phải có đỉnh chung. Thật vậy, giả sử $A, B; I, D$ là 2 cặp đỉnh không kề nhau. Nếu hai cặp đỉnh này không có đỉnh chung, thì trong bốn đỉnh A, B, I, D không có đỉnh nào kề với ba đỉnh còn lại, như vậy mâu thuẫn với giả thiết, nên hai cặp $A, B; I, D$ phải có hai đỉnh trùng nhau, chẳng hạn $B = I$.

Lấy đỉnh C tùy ý khác với A, B, D . Trong bộ bốn A, B, C, D đỉnh C kề với cả 3 đỉnh A, B, D .

Loại D ra khỏi bộ bốn trên và thay vào đó là đỉnh E tùy ý khác với A, B, C, D . Trong bộ bốn A, B, C, E hoặc C hoặc E phải kề với cả 3 đỉnh còn lại, nếu E kề với 3 đỉnh còn lại, thì C kề với E . Do đó C kề với cả ba đỉnh A, B, E .

Do E là đỉnh tùy ý trong $n - 4$ đỉnh còn lại (khác các đỉnh A, B, C), nên C có bậc $n - 1$.

C là đỉnh tùy ý trong $n - 3$ đỉnh khác A, B, D nên đồ thị có $n - 3$ đỉnh bậc $n - 1$. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.6 :

Với mọi số tự nhiên n ($n > 2$), luôn tồn tại đồ thị n đỉnh mà 3 đỉnh bất kỳ của đồ thị đều không cùng bậc.

Chứng minh:

- 1) Với $n = 3$ đồ thị G_3 gồm 1 đỉnh bậc 0 và 2 đỉnh bậc 1.
- 2) Giả sử khẳng định đúng với đồ thị G_n có n đỉnh. Đồ thị G_{n+1} có $n + 1$ đỉnh được xây dựng như sau:

a) Nếu G_n có đỉnh bậc $n - 1$, thì không có đỉnh bậc 0, nếu ta ghép vào G_n đỉnh x bậc 0 và được G_{n+1} gồm $n + 1$ đỉnh việc ghép thêm đỉnh x vẫn bảo toàn tính chất của G_n : ba đỉnh bất kỳ đều không cùng bậc và đồ thị G_n không có đỉnh bậc 0, nên trong G_{n+1} ba đỉnh bất kỳ đều không cùng bậc.

b) Nếu G_n không có đỉnh bậc $n - 1$. Khi đó tất cả các đỉnh của G_n đều có bậc không vượt quá $n - 2$. Thêm vào G_n đỉnh x (không thuộc G_n) và nối x với từng đỉnh của G_n bằng một cạnh, được đồ thị G_{n+1} có $n + 1$ đỉnh. Đỉnh x có bậc bằng n , còn bậc của mỗi đỉnh thuộc G_n trong G_{n+1} được tăng lên một đơn vị, nhưng đều không vượt quá $n - 1$ và trong bậc mới ba đỉnh bất kỳ của G_n vẫn không cùng bậc. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.7

Đồ thị hai mảng $G(Y, Z; E)$ với mọi đỉnh $y \in Y$ đều có $m(y) \geq 1$, đồng thời có tính chất: bất kỳ hai cặp đỉnh $y_1, y_2; z_1, z_2 \in Z$ nào cũng thỏa mãn điều kiện: Nếu y_1 kề với z_1 , y_2 kề với z_2 , thì trong hai cặp đỉnh $y_1, z_2; y_2, z_1$ có ít nhất một cặp đỉnh kề nhau. Khi đó trong tập Z có ít nhất một đỉnh kề với tất cả các đỉnh thuộc Y .

Chứng minh:

Ký hiệu $|Y| = m, |Z| = n$. Xét ba khả năng có thể sau:

- 1) $m = 1$: Do Y có phần tử duy nhất y , mà $m(y) \geq 1$, trong tập Z có ít nhất phần tử z kề với y . Bởi vậy $m(z) = 1 = |Y|$.

2) $m > 1$, $n = 1$, theo giả thiết, với mọi $y \in Y$ đều có $m(y) \geq 1$, nên đỉnh z duy nhất của tập Z phải kề với tất cả các đỉnh thuộc Y hay $m(z) = |Y|$.

3) $m > 1$, $n > 1$. Gọi z là đỉnh có bậc lớn nhất trong tập Z .

a) Nếu $m(z) = |Y|$, khẳng định được chứng minh.

b) Giả sử $m(z) = k < m = |Y|$. Ký hiệu $y_1, y_2, \dots, y_k$ là các đỉnh kề với z và y_{k+1} phải kề với đỉnh $t \in Z$ và $t \neq z$.

Xét hai cặp đỉnh (z, y_i) , (t, y_{k+1}) với $i = 1, 2, \dots, k$. Ngoài ra t còn kề với y_{k+1} , nên $m(t) = k + 1 > k = m(z)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $m(z)$ cực đại.

Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.8:

Trong đồ thị $G(X, E)$ với ít nhất $kn + 1$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $(k - 1)n + 1$, luôn tồn tại đồ thị con đầy đủ gồm $k + 1$ đỉnh.

Chứng minh:

Khẳng định được chứng minh bằng quy nạp theo k .

1) Với $k = 1$, khẳng định hiển nhiên đúng.

2) Với $k = 2$ có thể làm chặt hơn giả thiết: Nếu đồ thị $2n + 1$ đỉnh, mà mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn n , thì nó có đồ thị con 3 đỉnh đầy đủ. Thật vậy, xét đỉnh x tùy ý, còn y là một trong các đỉnh kề với x . Tổng số đỉnh kề với x và y không nhỏ hơn $2n$, nhưng số đỉnh khác x và y chỉ là $2n - 1$. Vậy, phải có ít nhất 1 đỉnh z được tính 2 lần. Khi đó x, y, z tạo thành một đồ thị con đầy đủ 3 đỉnh.

3) Giả sử, khẳng định đúng với k . Cần suy ra tính đúng đắn của khẳng định đối với $k + 1$.

Theo giả thiết, trong đồ thị G gồm $(k + 1)n + 1$ đỉnh, số đỉnh kề với đỉnh x tùy ý không nhỏ hơn $kn + 1$, nên số đỉnh của G không kề với x sẽ không vượt quá n . Bởi vậy, mỗi đỉnh y kề với x , thì nó kề với nhiều nhất n đỉnh không kề với đỉnh x . Do đó đỉnh y phải kề với ít nhất

$kn + 1 - n = (k - 1)n + 1$ đỉnh kề với đỉnh x . Xét đồ thị con G_1 gồm các đỉnh kề với x . Đồ thị con G_1 có ít nhất $kn + 1$ đỉnh và mỗi đỉnh của nó kề với ít nhất $(k - 1)n + 1$ thuộc G_1 , nên theo giả thiết quy nạp, trong G_1 có đồ thị con đầy đủ G_2 gồm $k + 1$ đỉnh. Vì đỉnh x kề với từng đỉnh thuộc G_2 , nên đỉnh x kết hợp với các đỉnh thuộc G_2 lập thành một đồ thị đầy đủ gồm $k + 2$ đỉnh trong đồ thị G .

Khẳng định được chứng minh.

4. ỨNG DỤNG

Bài tập 2.1. Chứng minh rằng trong một lớp học tùy ý số học sinh mà mỗi người có một số lẻ bạn thân trong lớp, luôn luôn là một số chẵn

Bài tập 2.2. Chứng minh rằng số người mà mỗi người đã có một lẻ lần bắt tay trên trái đất là một số chẵn

Bài tập 2.3. Chứng minh rằng trong một cuộc họp tùy ý gồm từ 2 đại biểu trở lên, luôn luôn có ít nhất 2 đại biểu, mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đến dự họp

Bài tập 2.4. Chứng minh rằng nếu trong một nhóm tùy ý gồm ít nhất 3 người, mà có đúng 2 người có số người quen bằng nhau, thì họ không thể đồng thời không quen ai hoặc đồng thời quen tất cả những người còn lại trong nhóm

Bài tập 2.5. Một cuộc hội thảo quốc tế với $n(n \geq 4)$ đại biểu tham gia. Cứ bốn đại biểu đến dự có ít nhất một người nói chuyện trực tiếp được với 3 người còn lại. Chứng minh rằng có ít nhất $n - 3$ đại biểu, mà mỗi người có thể nói chuyện trực tiếp với tất cả những người còn lại.

Bài tập 2.6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ($n \geq 2$) luôn luôn tìm được một nhóm gồm n người, mà 3 người bất kỳ trong nhóm đều không có số người quen bằng nhau.

Bài tập 2.7. Hai thôn A, B ở cạnh nhau. Mỗi gia đình ở thôn A quen với ít nhất một gia đình ở thôn B . đồng thời bất kỳ hai gia đình y_1, y_2 nào thuộc thôn A , hai gia đình tùy ý z_1, z_2 thuộc thôn B cùng thỏa mãn điều kiện: Nếu gia đình y_1 quen với gia đình z_1 , gia đình y_2 quen với gia đình z_2 thì trong hai cặp gia đình $y_1, z_2; y_2, z_1$ có ít nhất một cặp gia đình

quen nhau. Chứng minh rằng trong thôn B có ít nhất một gia đình quen với tất cả các gia đình thuộc thôn A .

Bài tập 2.8. Chứng minh rằng trong một quần đảo tùy ý gồm $kn + 1$ hòn đảo (k, n là các số nguyên dương) và mỗi hòn đảo có đường ngầm nối với ít nhất $(k - 1)n + 1$ hòn đảo thuộc quần đảo này, luôn luôn tồn tại một nhóm gồm $k + 1$ hòn đảo, mà mỗi hòn đảo có đường hầm đi đến từng hòn đảo thuộc nhóm.

Hướng dẫn :

Để giải các bài toán trên trước hết ta chuyển chúng về các bài toán trên đồ thị, rồi dựa vào các tính chất để suy ra kết luận trong các bài toán tương ứng.

1. Xây dựng các đồ thị $G_{2,i}$ tương ứng với các bài toán 2, i ($1 \leq i \leq 8$)

Xây dựng $G_{2,1}$:

a) *Đỉnh*: Lấy các điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các học sinh trong lớp, đồng thời dùng luôn mã số của các em, để ghi trên các điểm tương ứng.

b) *Cạnh*: Trong đồ thị $G_{2,1}$ các đỉnh x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi hai học sinh x, y thân nhau.

Đồ thị $G_{2,1}$ mô tả toàn bộ quan hệ thân nhau trong lớp học mà ta xét.

Các đồ thị $G_{2,i}$ ($2 \leq i \leq 8$) xây dựng một cách tương tự.

2. Vận dụng các tính chất vào các đồ thị tương ứng để suy ra các khẳng định phát biểu trong các bài toán trên.

a) Với cách xây dựng trên bậc của mỗi đỉnh thuộc $G_{2,1}$ bằng đúng số người quen của học sinh tương ứng với đỉnh này. Theo định lý 2.2 số đỉnh bậc lẻ trong $G_{2,1}$ là một số lẻ chẵn, nên số học sinh mà mỗi người có một số lẻ bạn thân trong lớp phải là một số chẵn.

b) Tương tự khẳng định trong bài toán 2, i ($2 \leq i \leq 8$) suy được nhờ vận dụng định lý 2.1 vào đồ thị $G_{2,i}$.

CHƯƠNG 3

XÍCH, CHU TRÌNH, ĐƯỜNG VÀ VÒNG

Đối với đồ thị (đa đồ thị) vô hướng có khái niệm xích (dây chuyền) và chu trình, còn đối với đồ thị (đa đồ thị) có hướng tồn tại khái niệm đường và vòng. Tuy vậy, người ta vẫn thường dùng khái niệm đường cho cả đồ thị và đa đồ thị vô hướng.

1. XÍCH, CHU TRÌNH

Giả sử $G(X, E)$ là một đồ thị hay đa đồ thị vô hướng.

Dãy α các đỉnh của $G(X, E)$:

$$\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n]$$

được gọi là một xích hay một dây chuyền, nếu $\forall i$ ($1 \leq i \leq n - 1$) cặp đỉnh x_i, x_{i+1} kề nhau.

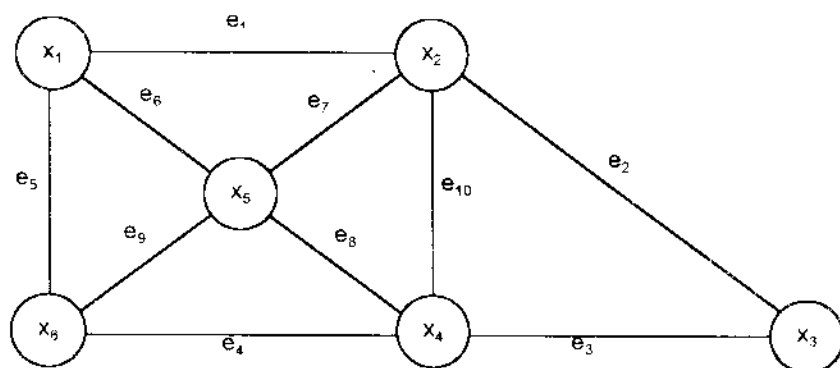
Tổng số vị trí của tất cả các cạnh xuất hiện trong xích α , được gọi là độ dài của xích α , đồng thời được ký hiệu bằng $|\alpha|$.

Các đỉnh x_1, x_n được gọi là hai đỉnh đầu của xích α . Ngoài ra, còn nói rằng xích α nối giữa các đỉnh x_1 và x_n . Để chỉ rõ đỉnh đầu và đỉnh cuối ta còn ký hiệu α bằng $\alpha[x_1, x_n]$.

Một xích với hai đầu trùng nhau, được gọi là một chu trình.

Xích (chu trình) α , được gọi là xích (chu trình) đơn (sơ cấp hay cơ bản), nếu nó đi qua mỗi cạnh (mỗi đỉnh) không quá một lần.

Ví dụ 3.1. Cho đồ thị:



Hình 3.1

$\alpha_1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_1$ là chu trình đơn và sơ cấp.

$\alpha_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_1$ là chu trình đơn nhưng không phải là chu trình sơ cấp.

2. ĐƯỜNG, VÒNG

Giả sử $G(X, E)$ là đồ thị hay đa đồ thị có hướng. Dây đỉnh β của $G(X, E)$:

$$\beta = [x_1 x_2 \dots x_i x_{i+1} \dots x_{m-1} x_m]$$

được gọi là một đường hay một đường đi nếu $\forall (1 \leq i \leq m-1)$ đỉnh x_i là đỉnh đầu, còn x_{i+1} là đỉnh cuối cùng một cung nào đó.

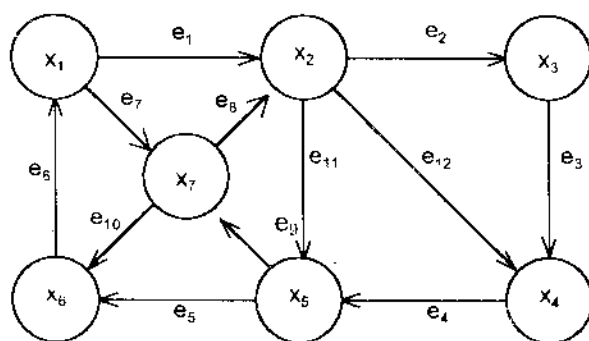
Tổng số vị trí của tất cả các cung xuất hiện trong β được gọi là độ dài của đường β , đồng thời được ký hiệu bằng $|\beta|$.

Đỉnh x_1 được gọi là đỉnh đầu, còn x_m là đỉnh cuối của đường β . Người ta còn nói rằng, đường β xuất phát từ đỉnh x_1 và đi tới đỉnh x_m . Đường β còn được ký hiệu bằng $\beta[x_1, x_m]$.

Một đường có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau được gọi là một vòng.

Đường (vòng) β , được gọi là đường (vòng) đơn (sơ cấp hay cơ bản), nếu nó đi qua mỗi cạnh (mỗi đỉnh) không quá một lần.

Ví dụ 3.2. Cho đồ thị có hướng:



Hình 3.2

$\beta_1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_1$ là vòng đơn và vòng sơ cấp.

$\beta_2 = x_1 x_4 x_2 x_5$ không phải là đường.

$\beta_3 = x_1 x_7 x_2 x_5 x_7 x_6 x_1$ là vòng đơn nhưng không là vòng sơ cấp

$\beta_4 = x_1 x_7 x_2 x_5 x_7 x_2 x_4$ không phải là đường đơn và cũng không phải là đường sơ cấp.

Hai xích (chu trình) được gọi là rời nhau, nếu chúng không có cạnh chung.

Hai đường (vòng) gọi là rời nhau nếu chúng không có cạnh chung.

Để dễ hình dung ta gọi chu trình có độ dài 3, 4, 5, ..., n là chu trình tam giác, tứ giác, ngũ giác, ..., n - giác.

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Định lý 3.1

Trong một đồ thị vô hướng với n ($n \geq 3$) đỉnh và các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 2 luôn luôn tồn tại chu trình sơ cấp.

Chứng minh:

Vì đồ thị hữu hạn, mà mỗi xích sơ cấp qua từng đỉnh không quá một lần, nên số xích sơ cấp trong đồ thị $G(X, E)$ là một số hữu hạn. Bởi vậy luôn luôn xác định được xích sơ cấp có độ dài cực đại trong đồ thị $G(X, E)$.

Giả sử $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ là một trong những xích có độ dài cực đại. Do bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 2, nên x_1 phải kề với một đỉnh y nào đó (khác x_2). Ngược lại nếu đỉnh y khác với đỉnh x_i ($3 \leq i \leq k$) thì xích sơ cấp:

$$\alpha' = (y, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$$

có độ dài $|\alpha'| = |\alpha| + 1 > |\alpha|$

Như vậy, đã đi tới mâu thuẫn với tính độ dài cực đại của xích α , nên $y = x_i$ ($3 \leq i \leq k$) và trong đồ thị có chu trình sơ cấp $\beta = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i)$.

Định lý 3.2

Trong một đồ thị vô hướng với n đỉnh ($n \geq 4$) và các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 3 luôn luôn tồn tại chu trình sơ cấp độ dài chẵn.

Chứng minh:

Giả sử α là một trong những xích sơ cấp độ dài cực đại.

$$\alpha = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k).$$

Vì α có độ dài cực đại, mà bậc của x_1 không ít hơn 3 nên x_1 phải kề với hai đỉnh khác nhau thuộc α : x_i ($3 \leq i \leq k$), x_j ($3 \leq j \leq k$). Khi đó được hai chu trình sơ cấp:

$$\alpha_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i, x_1).$$

$$\alpha_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_1).$$

1) Nếu một trong hai chu trình α_1, α_2 có độ dài chẵn, khẳng định được chứng minh.

2) Ngược lại nếu cả hai chu trình α_1, α_2 đều có độ dài lẻ.

Khi đó xích:

$$\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i).$$

có độ dài chẵn và xích

$$\alpha_4 = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_1)$$

có độ dài lẻ nên chu trình:

$$\alpha_5 = (x_1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_1)$$

có độ dài chẵn. Khẳng định được chứng minh.

Nhận xét: Các tính chất:

- (1) Đồ thị G không có chu trình độ dài lẻ.
- (2) Đồ thị G không có chu trình sơ cấp độ dài lẻ

tương đương với nhau.

Thật vậy, từ tính chất (1) suy ra tính chất (2) là hiển nhiên. Để chứng minh điều ngược lại ta dùng phản chứng.

Giả sử G không có chu trình sơ cấp độ dài lẻ, nhưng trong G có tồn tại chu trình độ dài lẻ, chẳng hạn:

$$\alpha = [x_0, x_1, \dots, x_m = x_0]$$

là một chu trình nào đó của G với độ dài lẻ (m). Ta tiến hành phân chia α như sau: Mỗi khi gặp hai đỉnh x_i và x_j với $0 \leq i < j < m$ và $x_i = x_j$ thì ta phân α thành hai chu trình bộ phận: $\alpha[x_0, x_j]$ và $\alpha[x_0, x_i] + \alpha[x_j, x_0]$. Do α có độ dài lẻ, nên một trong hai chu trình bộ phận trên có độ dài lẻ. Ta lại phân chia chu trình có độ dài lẻ thành hai chu trình bộ phận tương ứng. Tiếp tục phân chia theo cách trên cho tới khi không còn khả năng thực hiện nữa vì mỗi lần phân chia ta đều được một chu trình độ dài lẻ nên chu trình độ dài lẻ nhận được trong lần phân chia cuối cùng là chu trình sơ cấp, nên ta đã đi đến mâu thuẫn với giả thiết. Do đó G không thể có chu trình độ dài lẻ.

4. ỨNG DỤNG

Hai bài tập sau xem như các ví dụ về ứng dụng định lý 3.1 và định lý 3.2.

Bài tập 3.1. Một cuộc họp có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác. Chứng minh rằng có thể xếp được một số đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó quen.

Bài tập 3.2. Một thôn có ít nhất 4 gia đình. Mỗi gia đình thân với ít nhất 3 gia đình khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số chẵn gia đình làm nhà xung quanh một cái hồ để mỗi gia đình sống giữa hai gia đình mà họ thân.

Hướng dẫn :

Để giải hai bài toán trên trước hết xây dựng đồ thị tương ứng, sau đó vận dụng kết quả của định lý 3.1 và 3.2 mà suy ra kết luận.

Xây dựng đồ thị

- *Đỉnh*: Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các đại biểu đến dự cuộc họp (các gia đình trong thôn).
- *Cạnh*: Hai điểm x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi hai đại biểu x, y quen nhau (hai gia đình x, y thân nhau).

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_1 (G_2)

Đồ thị G_1 mô tả toàn bộ quan hệ quen nhau của các đại biểu đến dự họp. Còn đồ thị G_2 mô tả toàn bộ quan hệ thân nhau của các gia đình trong thôn.

Vận dụng kết quả của các định lý để suy ra kết luận:

Vì mỗi đại biểu quen ít nhất 2 người đến dự họp, nên bậc mỗi đỉnh của đồ thị G_1 không nhỏ hơn 2, theo định lý 3.1 trong G_1 có chu trình sơ cấp. Khi đó dựa theo một trong những chu trình sơ cấp của G_1 mà sắp xếp các đại biểu tương ứng ngồi xung quanh bàn tròn, thì mỗi đại biểu sẽ ngồi giữa hai người mà anh (chị) ta quen.

Do mỗi gia đình thân với ít nhất 3 gia đình trong thôn, nên bậc của đỉnh đồ thị G_2 không nhỏ hơn 3. Theo định lý 3.2, trong G_2 có chu trình sơ cấp độ dài chẵn. Khi đó dựa theo một trong những chu trình này, mà sắp xếp các gia đình làm nhà xung quanh một cái hồ, thì mỗi gia đình sẽ sống giữa hai gia đình mà họ thân.

CHƯƠNG 4

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Đối với đồ thị vô hướng có khái niệm liên thông, còn đối với đồ thị có hướng đưa ra khái niệm liên thông mạnh.

1. ĐỊNH NGHĨA

Hai đỉnh x, y được gọi là cặp đỉnh liên thông, nếu hoặc giữa x và y có ít nhất một xích nối với nhau, hoặc tồn tại ít nhất một đường đi từ x sang y hoặc từ y sang x .

Đồ thị vô hướng $G(X, E)$ được gọi là *đồ thị liên thông*, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều liên thông.

Đồ thị có hướng $G = (X, E)$ được gọi là *đồ thị liên thông mạnh*, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều liên thông.

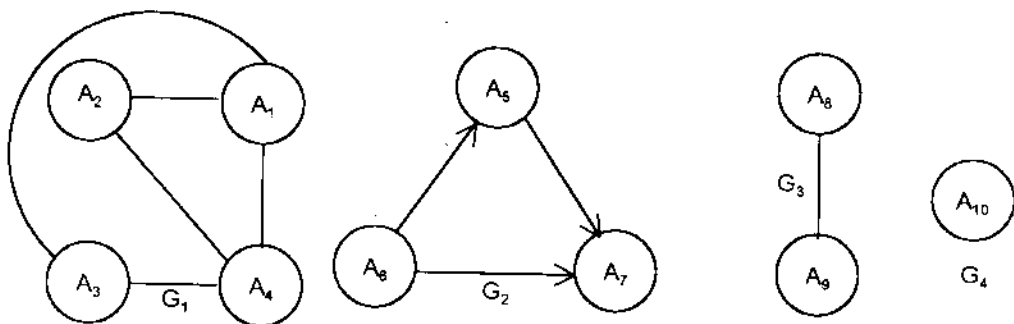
Giả sử a là đỉnh bất kì thuộc đồ thị G . Dùng Ca để ký hiệu tập con các đỉnh của G , gồm đỉnh a và tất cả các đỉnh liên thông với a trong đồ thị G .

Đồ thị con của G , có tập đỉnh là Ca , được gọi là một thành phần liên thông của đồ thị G .

Đỉnh x trong đồ thị liên thông G được gọi là *điểm khớp*, nếu đồ thị con G_1 nhận được từ G bằng cách bỏ đỉnh x , là đồ thị không liên thông. Điểm khớp x , mà nó được nối với mỗi thành phần liên thông của G_1 bằng đúng một cạnh, được gọi là *điểm khớp đơn*.

Ví dụ 4.1. Cho đồ thị G có 4 thành phần liên thông (hình 4.1).

Các đồ thị con G_1, G_3, G_4 liên thông. Đồ thị con G_2 liên thông mạnh.



Hình 4.1

2. TÍNH CHẤT

Định lý 4.1

Đồ thị với n ($n \geq 2$) đỉnh, mà tổng bậc của hai đỉnh tùy ý đều không nhỏ hơn n , là đồ thị liên thông.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị $G = (X, E)$ có n đỉnh ($n \geq 2$). Với mọi cặp đỉnh a, b của đồ thị G đều có:

$$m(a) + m(b) \geq n \quad (1)$$

nhưng a, b không liên thông. Khi đó trong đồ thị G tồn tại hai thành phần liên thông: G_1 có n_1 đỉnh và chứa đỉnh a , G_2 chứa đỉnh b và có n_2 đỉnh.

Vì G_1, G_2 là các thành phần liên thông của G , nên: $n_1 + n_2 \leq n$

Khi đó:

$$m(a) + m(b) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2 < n \quad (2)$$

Do sự mâu thuẫn của các đẳng thức (1) và (2), suy ra kết luận: Đồ thị G phải liên thông. Khẳng định được chứng minh.

Từ định lý trên suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 4.1

Đồ thị mà bậc của mỗi đỉnh của nó không nhỏ hơn một nửa số đỉnh, là đồ thị liên thông.

Định lý 4.2

Nếu đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ, thì hai đỉnh này phải liên thông.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị $G(X, E)$ có đúng hai đỉnh bậc lẻ, chẳng hạn, hai đỉnh này là a và b .

Giả sử a, b không liên thông với nhau. Khi đó chúng phải thuộc hai thành phần liên thông nào đó của đồ thị G , G_1 chứa a , còn G_2 chứa b .

Bậc của đỉnh a trong G_1 cũng chính là bậc của đỉnh a trong G , nên trong G_1 đỉnh a vẫn có bậc lẻ. Và đồ thị G_1 có duy nhất một đỉnh bậc lẻ. Ta đi đến mâu thuẫn. Vậy hai đỉnh a, b phải liên thông.

Phân hoạch:

Giả sử có tập $M \neq \emptyset$. Dãy các tập con của M :

$$X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_m$$

được gọi là một phân hoạch của tập M , nếu nó thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện sau:

- 1) $\forall i (1 \leq i \leq m) \quad X_i \neq \emptyset$
- 2) $\forall i, j (1 \leq i, j \leq m, i \neq j) \quad X_i \cap X_j = \emptyset$
- 3) $\bigcup_{i=1}^m X_i = X$

Định lý 4.3

Dãy các tập đỉnh của các thành phần thuộc đồ thị $G(X, E)$ lập thành một phân hoạch của tập đỉnh X .

Chứng minh:

Giả sử $G_1(C_{a_1}, E), G_2(C_{a_2}, E), \dots, G_m(C_{a_m}, E)$ là tất cả các thành phần liên thông của đồ thị $G(X, E)$.

Theo định nghĩa C_{a_i} bao gồm đỉnh a_i và tất cả các đỉnh thuộc X liên thông với a_i , nên $C_{a_i} \subseteq X (1 \leq i \leq m)$.

Vì $a_i \in C_{a_i}$, nên $\forall (1 \leq i \leq m) C_{a_i} \neq \emptyset$.

Giả sử $i \neq j$, nhưng $C_{a_i} \cap C_{a_j} \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại đỉnh x , mà $x \in C_{a_i}$ và $x \in C_{a_j}$, nên x liên thông với cả a_i và a_j . Vì vậy a_i và a_j liên thông. Bởi vậy a_i liên thông với mọi đỉnh thuộc C_{a_j} và ngược lại a_j cũng liên thông với mọi đỉnh thuộc C_{a_i} . Do đó $C_{a_i} = C_{a_j}$. Ta đã đi đến mâu thuẫn với tính chất $C_{a_i} \neq C_{a_j}$, nên $C_{a_i} \cap C_{a_j} = \emptyset$.

Do $a_i \in C_{a_i}$ và $C_{a_i} \subseteq X$ ($1 \leq i \leq m$) nên $X = \bigcup_{i=1}^m C_{a_i}$.

Định lý 4.4

Đồ thị $G(X, E)$ liên thông khi và chỉ khi nó có một thành phần liên thông duy nhất.

Chứng minh

1) *Điều kiện cần*: Giả sử $G(X, E)$ liên thông, nhưng lại có không ít hơn hai thành phần liên thông. Giả sử $G_1(C_a, E)$, $G_2(C_b, E)$ là hai trong các thành phần liên thông của G . Khi đó $\exists x \in C_a \exists y \in C_b$ và x, y không liên thông với nhau. Bởi vậy đồ thị $G(X, E)$ không liên thông. Ta đã đi tới mâu thuẫn với giả thiết, nên $G(X, E)$ phải có một thành phần liên thông duy nhất.

2) *Điều kiện đủ*: Giả sử đồ thị $G(X, E)$ có một thành phần liên thông duy nhất. Khi đó thành phần liên thông này chứa tất cả các đỉnh của đồ thị $G(X, E)$.

Do mọi đỉnh của thành phần liên thông đều liên thông nhau, nên mọi cặp đỉnh của đồ thị liên thông nhau, nên $G(X, E)$ là đồ thị liên thông. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 4.5

Giả sử $G(X, E)$ là một đồ thị liên thông. Một đỉnh của đồ thị $G(X, E)$ là điểm khớp khi và chỉ khi trong $G(X, E)$ tồn tại hai đỉnh a, b , sao cho mỗi xích nối a với b đều phải đi qua đỉnh này.

Chứng minh

1) *Điều kiện cần.* Giả sử đỉnh x là điểm khớp trong đồ thị $G(X, E)$. Khi đó đồ thị con $G_1(X - \{x\}, E)$ là đồ thị không liên thông, nên nó chứa ít nhất 2 thành phần liên thông. Giả sử G_2, G_3 là hai trong các thành phần liên thông của G_1 . Giả sử a là một đỉnh nào đó của G_2 còn b là một trong những đỉnh của G_3 . Do a, b thuộc 2 thành phần liên thông khác nhau, nên trong G các đỉnh a, b không liên thông. Nhưng trong $G(X, E)$ các đỉnh a, b lại liên thông, nên mọi xích nối a, b đều phải đi qua đỉnh x .

2) *Điều kiện đủ.* Giả sử mọi xích nối a, b đều đi qua đỉnh x , nên nếu bỏ đỉnh x , thì đồ thị con $G_1(X - \{x\}, E)$ chứa hai đỉnh a, b không liên thông, bởi vậy $G_1(X - \{x\}, E)$ không liên thông. Do đó đỉnh x là điểm khớp của đồ thị $G(X, E)$.

Định lý 4.6

Giả sử đồ thị G có n đỉnh, m cạnh, k thành phần liên thông. Khi đó có bất đẳng thức:

$$m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1).$$

Chứng minh:

Giả sử $G_1, G_2, \dots, G_k$ là các thành phần liên thông của đồ thị G và G_i có n_i ($1 \leq i \leq k$) đỉnh.

Giả sử G_1 là một trong những thành phần liên thông có số đỉnh nhiều nhất. "Dồn" về G_1 tất cả các cạnh của đồ thị G , nằm ngoài G_1 , bằng cách sau đây: Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_s$ là tất cả các cạnh thuộc đỉnh x trong G_i ($2 \leq i \leq k$). Khi đó trong G_1 xác định thêm đỉnh x' tương ứng với đỉnh x , rồi từ x' kẻ các cạnh t'_j ($1 \leq j \leq s$) tương ứng với t_j , đi tới các đỉnh cũ khác nhau của G_1 , đồng thời loại bỏ đỉnh x và các cạnh xuất phát từ nó khỏi G_i ($2 \leq i \leq k$).

Với cách này ta "chuyển" được về G_1 tất cả m cạnh của G và đối với mỗi G_i ($2 \leq i \leq k$) tối đa $n_i - 1$ đỉnh. Khi đó đồ thị con G_1 có số cạnh là m và số đỉnh $n' \leq n - k + 1$ số cạnh tối đa có thể trong G_1 là

$$C_{n'}^2 \leq C_{n-k+1}^2 = \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$$

$$\text{nên} \quad m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1).$$

Khẳng định được chứng minh.

Hệ quả 4.2

Nếu đồ thị G có n đỉnh và số cạnh lớn hơn $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ thì nó liên thông.

Chứng minh:

Dùng k để kí hiệu số thành phần liên thông của G . Khi đó theo định lý 4.6 số cạnh m của đồ thị thỏa mãn các bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) < m < \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

Bất đẳng thức chỉ thỏa mãn khi $k = 1$. Theo định lý 4.4, đồ thị G liên thông.

3. ỨNG DỤNG

Bài tập sau xem như ví dụ về ứng dụng định lý 4.1, 4.2 và hệ quả 4.1.

Bài tập 4.1. Một quần đảo có n ($n \geq 2$) hòn đảo và hai hòn đảo bất kì thuộc quần đảo đều có số đầu mối đường ngầm tới một trong các hòn đảo này đều không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng từ một hòn đảo tùy ý thuộc quần đảo ta có thể đi đến một hòn đảo bất kì khác của quần đảo bằng đường ngầm.

Bài tập 4.1.a. Khi về nghỉ hè mỗi bạn học sinh của lớp 11A trường Le Hồng Phong đều trao đổi địa chỉ với ít nhất một nửa số bạn trong lớp. Chứng minh rằng trong thời gian nghỉ hè mỗi bạn của lớp 11A đều có thể báo tin một cách trực tiếp hay gián tiếp cho từng bạn trong lớp.

Bài tập 4.2. Trong một cuộc họp có đúng hai đại biểu không quen nhau và mỗi đại biểu này có một số lẻ người quen đến dự. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên, để mỗi người ngồi giữa hai người mà anh (chị) ta quen.

Hướng dẫn :

Để giải các bài tập trên trước hết xây dựng các đồ thị tương ứng, sau đó vận dụng kết quả của định lý 4.1, hệ quả 4.1 và định lý 4.2 mà suy ra kết luận.

Xây dựng đồ thị

- **Đỉnh:** Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các hòn đảo thuộc quần đảo (các bạn học sinh trong lớp 11A, các đại biểu đến họp).

- **Cạnh:** Hai điểm x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi hai hòn đảo x, y có đường ngầm nối trực tiếp với nhau (các bạn x, y trao đổi địa chỉ cho nhau, các đại biểu x, y quen nhau).

- Đồ thị nhện được ký hiệu bằng $G_1, (G_2, G_3)$

- Đồ thị G_1 mô tả toàn bộ lưới đường ngầm trong quần đảo.

- Đồ thị G_2 mô tả toàn bộ quan hệ trao đổi địa chỉ trong lớp 11A

- Đồ thị G_3 mô tả toàn bộ quan hệ quen biết trong các đại biểu đến dự họp.

Vận dụng kết quả của các định lý để suy ra kết luận

- Do hai hòn đảo bất kì đều có tổng số đầu mỗi đường ngầm không nhỏ hơn n , nên hai đỉnh bất kì của đồ thị G_1 đều có tổng bậc không nhỏ hơn n . Bởi vậy, theo định lý 4.1, đồ thị G_1 liên thông, nên hai hòn đảo bất kì có đường ngầm nối với nhau.

- Vì mỗi bạn học sinh lớp 11 A trao đổi địa chỉ với ít nhất một nửa số bạn trong lớp, nên bậc của mỗi đỉnh thuộc G_2 đều không nhỏ hơn một nửa số đỉnh của đồ thị. Khi đó, theo hệ quả 4.1, đồ thị G_2 liên thông. Bởi vậy hai đỉnh x, y đều có xích α nối với nhau. Khi đó thông qua các bạn tương ứng với các đỉnh thuộc xích α , mà bạn tương ứng với đỉnh x bảo tin được cho bạn tương ứng với đỉnh y và ngược lại.

- Hai đại biểu không quen nhau, thì hai đỉnh tương ứng không kề nhau. Mỗi đại biểu này lại có một số lẻ người quen đến họp, nên trong đồ thị G_3 có đúng hai đỉnh bậc lẻ và hai đỉnh này lại không kề nhau. Khi đó, theo định lý 4.2, hai đỉnh này liên thông nên có ít nhất một xích nối giữa hai đỉnh này. Giả sử α là một trong những xích nối giữa hai đỉnh bậc lẻ này. Dựa vào α ta sắp xếp các đại biểu tương ứng ngồi giữa hai đại biểu tương ứng với hai đỉnh bậc lẻ thì các đại biểu này sẽ ngồi giữa hai người mà anh (chị) ta quen.

CHƯƠNG 5

HÀM GRUNDY

1. ĐỊNH NGHĨA

Giả sử $G = (X, E)$ là đồ thị vô hướng hoặc có hướng hoặc hỗn hợp.

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$ - Tập số nguyên không âm

Định nghĩa: Ánh xạ g từ tập đỉnh X vào tập các số nguyên không âm N

$$g : X \longrightarrow N$$

được gọi là hàm Grundy, nếu $\forall x \in X$ hàm $g(x)$ thỏa mãn điều kiện:

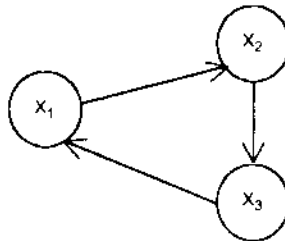
$$g(x) = \min\{N / g(D(x) \cup D^+(x))\}$$

Điều kiện này tương đương với hai điều kiện sau:

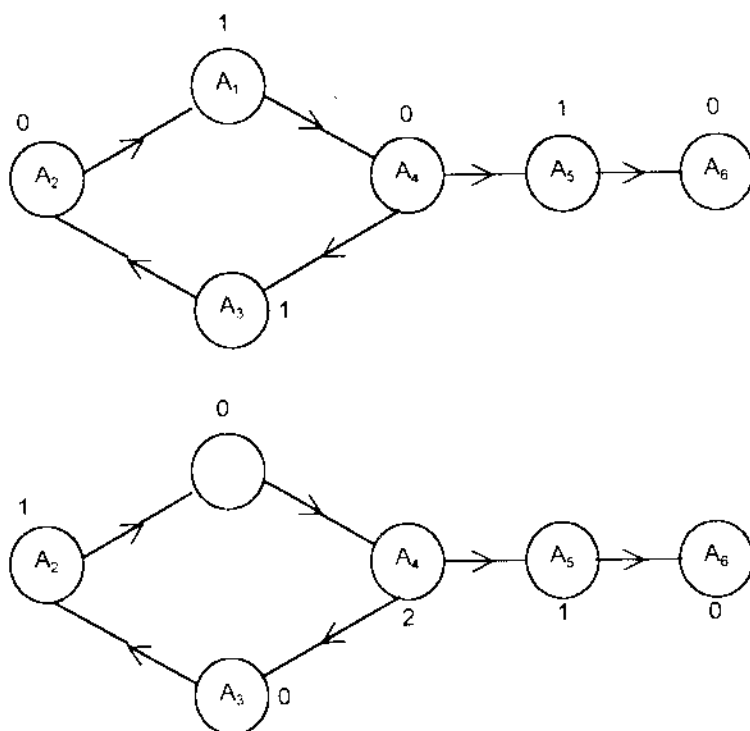
a) $\forall x \in X$, nếu $y \in (D(x) \cup D^+(x))$, thì $g(x) \neq g(y)$

b) $\forall u \in N$, nếu $u < g(x)$, thì $u \in g(D(x) \cup D^+(x))$,

tức là $\exists y \in (D(x) \cup D^+(x))$ và $u = g(y)$.



Hình 5.1. Đồ thị này không chấp nhận hàm Grundy



Hình 5.2

Từ định nghĩa trên suy ra nhận xét sau:

- 1) $\forall x \in X$, nếu $(D(x) \cup D^-(x)) = \emptyset$ thì $g(x) = 0$.
- 2) Nếu x kề với y thì $g(x) \neq g(y)$
- 3) $g(x) \leq |D(x) \cup D^-(x)|$

4) Đồ thị có thể không chấp nhận hàm Grundy, chẳng hạn, đồ thị có khuyên hay đồ thị là một chu trình hoặc một vòng với độ dài lẻ, chẳng hạn như đồ thị ở hình 5.1, nhưng cũng có thể chấp nhận đồng thời nhiều hàm Grundy, như đồ thị trong hình 5.2.

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN ĐỒ THỊ

Giả sử có n đồ thị với các tập đỉnh không giao nhau từng đôi một $G_1(X_1, E_1), G_2(X_2, E_2), \dots, G_n(X_n, E_n)$.

2.1. Đồ thị tích

Xét các tập:

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_i \in X_i \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

(Tích Descartes của các tập X_i ($1 \leq i \leq n$))

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \mid (x_i, x'_i) \in E_i \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

Định nghĩa: Đồ thị $G = (X, E)$ được gọi là đồ thị tích hay đồ thị giao của các đồ thị $G_1, G_2, \dots, G_n$, đồng thời còn được ký hiệu là

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \text{ hay } G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$$

2.2. Đồ thị tổng

Xét tập:

$$F = \{x_1, x_2, \dots, x_n, (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \mid \exists i (1 \leq i \leq n) \quad ((x_i, x'_i) \in E_i)\}$$

Định nghĩa: Đồ thị $G = (X, F)$ được gọi là đồ thị tổng hay đồ thị hợp của các đồ thị $G_1, G_2, \dots, G_n$, đồng thời còn được ký hiệu là

$$G_1 + G_2 + \dots + G_n, \text{ hay } G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$$

Dễ dàng nhận thấy rằng các phép toán $\times$ và $+$ được định nghĩa ở trên rất quen thuộc trong lý thuyết trò chơi. Ngoài ra, ta cũng thường gặp các phép toán này trong nhiều lĩnh vực có sự tham gia của lý thuyết đồ thị.

Ví dụ: Có hai máy M_1, M_2 . Mỗi máy có thể ở trong một số trạng thái. Ký hiệu tập trạng thái của máy M_i bằng X_i , $E_i = \{(x_i, x'_i) \mid x'_i \text{ là trạng thái tiếp theo của trạng thái } x_i \text{ (} i = 1, 2)\}$. Khi đó nếu người thợ tại mỗi thời điểm tác động đồng thời cả hai máy thì đồ thị mô tả các tình huống có thể sẽ là $G_1 \times G_2$, còn nếu chỉ tác động một trong hai máy, thì đồ thị mô tả các tình huống có thể sẽ là $G_1 + G_2$.

Một vấn đề đặt ra là các phép toán trên đồ thị có bảo toàn tính chấp nhận một hàm Grandy hay không? Để xét vấn đề này trước hết cần làm quen với khái niệm tổng digit của các số thứ tự. Giả sử $(C^1, C^2, \dots, C^k)$, trong đó $C^i \in \{0, 1\}$ ($1 \leq i \leq k$) là mã nhị phân hay dạng khai triển nhị phân của số nguyên C , tức là:

$$C = C^1 + 2C^2 + 4C^3 + \dots + 2^{(k-1)}C^k$$

Khi đó người ta thường viết:

$$C = C^k C^{k-1} \dots C^2 C^1$$

Dễ dàng nhận thấy rằng: cách viết theo hệ nhị phân về nguyên tắc, giống như cách viết theo hệ thập phân và hoàn toàn có thể thiết lập sự tương ứng. Chẳng hạn ta biểu diễn 10 số nguyên không âm đầu tiên:

Ghi theo hệ thập phân	Ghi theo hệ nhị phân	Khai triển nhị phân
0	0	(0)
1	1	(1)
2	10	(0, 1)
3	11	(1, 1)
4	100	(0, 0, 1)
5	101	(1, 0, 1)
6	110	(0, 1, 1)
7	111	(1, 1, 1)
8	1000	(0, 0, 0, 1)
9	1001	(1, 0, 0, 1)

Trong số học $[n]_{(2)}$ hay "n theo modun 2" là số dư (bằng 0 hay bằng 1) khi chia n cho 2

Giả sử có n số nguyên $C_1, C_2, \dots, C_n$ với các dạng khai triển nhị phân $C_k = (C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots)$. Véc tơ:

$$C = \left(\left[\sum_{k=1}^n C_k^0 \right]_{(2)}, \left[\sum_{k=1}^n C_k^1 \right]_{(2)}, \left[\sum_{k=1}^n C_k^2 \right]_{(2)}, \dots \right)$$

được gọi là tổng digit của các số nguyên $C_1, C_2, \dots, C_n$, đồng thời được ký hiệu bằng:

$$C = C_1 \dot{+} C_2 \dot{+} \dots \dot{+} C_{n-1} \dot{+} C_n$$

Ví dụ 5.1:

$$3 \dot{+} 7 = (1, 1) + (1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} 1 \dot{+} 3 \dot{+} 11 &= (1) + (1, 1) + (1, 1, 0, 1) \\ &= (1, 0, 0, 0) + (1, 1, 0, 0) + (1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Định lý 5.1

Tổng Digit $\dot{+}$ có các tính chất sau:

- 1) Kết hợp: $(\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} \gamma = \alpha \dot{+} (\beta \dot{+} \gamma)$
- 2) Tồn tại phần tử trung hòa 0, sao cho: $\alpha \dot{+} 0 = \alpha$ với mọi số nguyên α .
- 3) Với mọi số α tồn tại phần tử đối $(-\alpha)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\alpha \dot{+} (-\alpha) = 0$$

- 4) Giao hoán: $\alpha \dot{+} \beta = \beta \dot{+} \alpha$

Theo ngôn ngữ đại số, bốn tính chất trên biểu thị rằng tập hợp số nguyên trên đó xác định tổng digit lập thành một nhóm Abel.

Định lý 5.2

Nếu các đồ thị $G_1, G_2, \dots, G_n$ chấp nhận các hàm Grundy tương ứng $g_1, g_2, \dots, g_n$, thì đồ thị tổng:

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

cũng chấp nhận một hàm Grundy g , mà giá trị của nó tại đỉnh:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

được cho bởi tổng digit:

$$g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \dots \dot{+} g_n(x_n)$$

Ta chứng minh rằng hàm $g(x)$ xác định như vậy trên tập hợp:

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

là một hàm Grundy của tổng $G = (X, F)$. Muốn vậy ta phải chỉ ra rằng:

(1^o) Với mọi số thứ tự $\beta < g(x)$ đều tồn tại đỉnh y mà hoặc x, y được nối bằng một cạnh hoặc từ x sang y có cung, sao cho $g(y) = \beta$.

Thật vậy, xét các khai triển nhị phân:

$$g_k(x_k) = (C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots);$$

$$g(x) = (C^0, C^1, C^2, \dots),$$

trong đó

$$C^r = \left[\sum_{k=1}^n C_k^r \right]_{(2)}$$

và $\beta = (\beta^0, \beta^1, \beta^2, \dots)$, trong đó $\beta < g(x)$.

Giả sử r là số thứ tự lớn nhất, sao cho $\beta^r \neq C^r$ (r nhất định tồn tại vì $\beta \neq g(x)$), vì $\beta < g(x)$, nên ta có:

$$\beta^r = 0; \quad C^r = \left[\sum_{k=1}^n C_k^r \right]_{(2)} = 1$$

Vậy trong các số $C_1^r, C_2^r, \dots, C_n^r$ phải có ít nhất một số bằng 1, giả sử $C_1^r = 1$. Ta đặt:

$$d^s = \begin{cases} C_1^s & \text{nếu } \beta^s = C^s \\ [C_1^s + 1]_{(2)} & \text{nếu } \beta^s \neq C^s \end{cases}$$

Trong trường hợp này trong G_1 tồn tại đỉnh y_1 kề với x_1 , sao cho:

$$g_1(y_1) = (d^1, d^2, \dots)$$

Khi đó ta có:

$$G(y_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g_1(y_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \dots \dot{+} g_n(x_n) = \beta$$

(2'') Không tồn tại một y nào kề với x mà $g(y) = g(x)$.

Thật vậy, xét đỉnh $y = (y_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, trong đó y_1 là một đỉnh kề với x_1 trong G_1 và đặt: $g_1(y_1) = (d^1, d^2, \dots)$

Vì $g_1(y_1) \neq g_1(x_1)$, nên với số tự nhiên r nào đó có $d^r \neq C_1^r$. Vậy:

$$[d_1^r + C_2^r + C_3^r + \dots + C_n^r]_{(2)} \neq [C_1^r + C_2^r + C_3^r + \dots + C_n^r]_{(2)}$$

Do đó: $g(y) \neq g(x)$

Chứng minh này cho ta một qui tắc tính hàm Grundy cho tổng các đồ thị. Kết quả này sẽ được ứng dụng trong các chương sau.

CHƯƠNG 6

CHU SỐ

Khái niệm chu số chẳng những được xác định đối với đồ thị, mà còn đối với cả đa đồ thị.

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

Giả sử $G = (X, U)$ là một đa đồ thị vô hướng với n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Đặt $\rho(G) = n - p$

Định nghĩa: Đại lượng $m - \rho(G) = m - n + p$ được gọi là chu số của đa đồ thị G và được ký hiệu bằng $\nu(G)$.

Chu số có các tính chất quan trọng trong lý thuyết đồ thị.

Định lý 6.1

Cho đa đồ thị G . Giả sử G' là đa đồ thị nhận được từ G bằng cách nối hai đỉnh a và b của G bởi một cạnh mới. Nếu a và b trùng nhau hoặc trong G đã liên thông với nhau thì ta có:

$$\rho(G') = \rho(G), \quad \nu(G') = \nu(G) + 1,$$

Trong trường hợp ngược lại (a, b trong G không liên thông):

$$\rho(G') = \rho(G) + 1, \quad \nu(G') = \nu(G).$$

Hệ quả 6.1

Đối với mọi đa đồ thị G đều có: $\rho(G) \geq 0, \nu(G) \geq 0$

Thật vậy xuất phát từ đồ thị thành lập bằng các đỉnh của G . Đồ thị này không có cạnh, mà tất cả các đỉnh đều là đỉnh biệt lập. Đồ thị G được xây dựng dần dần từng cạnh một. Thoạt đầu n đỉnh biệt lập chính

là n thành phần liên thông, tức $n = p$, và đồ thị không có cạnh nên $m = 0$. Ta có:

$$\rho = n - p = n - n = 0, \quad v = m - n + p = 0 - n + n = 0$$

Giả sử trong quá trình bổ sung cạnh ta đã nhận được đa đồ thị G_1 với số cạnh m_1 số thành phần liên thông p_1 .

Bổ sung vào G_1 cạnh a ta nhận được đa đồ thị G_2 với số cạnh $m_2 = m_1 + 1$ và số thành phần liên thông p_2 .

Có hai khả năng xảy ra:

α) Nếu a nối giữa hai đỉnh thuộc hai thành phần liên thông khác nhau. Khi đó $p_2 = p_1 - 1$, nên:

$$\rho(G_2) = n - p_2 = n - (p_1 - 1) = n - p_1 + 1 > \rho(G_1)$$

$$v(G_2) = m_2 - n + p_2 = m_1 + 1 - n + p_1 - 1 = m_1 - n + p_1 = v(G_1)$$

β) Ngược lại, a nối giữa hai đỉnh không thuộc hai thành phần liên thông khác nhau, nên số thành phần liên thông không giảm. Bởi vậy $p_2 = p_1$ và ta có:

$$\rho(G_2) = n - p_2 = n - p_1 = \rho(G_1)$$

$$v(G_2) = m_2 - n + p_2 = m_1 + 1 - n + p_1 = m_1 - n + p_1 + 1 > v(G_1)$$

Như vậy trong quá trình xây dựng đa đồ thị G , các số ρ và v không giảm.

2. HỆ CHU TRÌNH ĐỘC LẬP

Giả sử có đa đồ thị vô hướng $G = (X, V)$ với m cạnh. Ta đặt tương ứng mỗi chu trình của G với một vectơ trong R^m được xây dựng như sau:

Đầu tiên gán cho mỗi cạnh của đa đồ thị G một hướng tùy ý. Nếu chu trình α đi qua cạnh u_k r_k lần thuận hướng và s_k lần nghịch hướng, thì ta đặt $C^k = r_k - s_k$ (nếu là một khuyên thì quy ước $s_k = 0$).

Vectơ: $(C^1, C^2, \dots, C^k, \dots, C^m)$ được gọi là vectơ chu trình tương ứng với α và kí hiệu bằng $\vec{\alpha}$.

Định nghĩa: Các chu trình $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ được gọi là độc lập hay độc lập tuyến tính nếu các vectơ tương ứng $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots$ độc lập tuyến tính.

Cần lưu ý rằng, tính chất độc lập của hệ chu trình không phụ thuộc vào hướng gán cho các cạnh.

Định lý 6.2

Chu số $\nu(G)$ của đa đồ thị G bằng số cực đại các chu trình độc lập tuyến tính.

Chứng minh:

Đầu tiên ta lấy đồ thị không có cạnh, thành lập bằng các đỉnh của G . Đây là đồ thị gồm toàn các đỉnh biệt lập. Sau đó xây dựng đa đồ thị G bằng cách thêm vào từng cạnh một.

Theo định lý 6.1, chu số sẽ tăng lên một đơn vị nếu cạnh thêm vào lập nên một chu trình mới và chu số sẽ không thay đổi trong trường hợp ngược lại.

Giả sử trước khi thêm cạnh u_k trong đồ thị đã có một hệ cơ sở gồm các chu trình: $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

Và sau khi thêm cạnh u_k đã lập thêm các chu trình mới: $\beta_1, \beta_2, \dots$

Vì $\beta_j^k \neq 0$, mà $\alpha_j^k = \alpha_2^k = \dots = 0$, nên $\overrightarrow{\beta_j}$ không thể biểu diễn tuyến tính qua các vectơ $\overrightarrow{\alpha_i}$. Mặt khác các vectơ $\overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_3}, \dots$ có thể biểu diễn tuyến tính qua $\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots$. Bởi vậy, mỗi khi chu số tăng một đơn vị, thì số cực đại các chu trình độc lập cũng tăng lên một đơn vị. Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 6.1

Đa đồ thị G không có chu trình khi và chỉ khi $\nu(G) = 0$.

Hệ quả 6.2

Đa đồ thị G có một chu trình duy nhất khi và chỉ khi $\nu(G) = 1$.

Định lý 6.3

Chu số $\nu(G)$ của đa đồ thị có hướng liên thông mạnh G bằng số cực đại các vòng độc lập tuyến tính trong G .

CHƯƠNG 7

SẮC SỐ VÀ ĐỒ THỊ MÀU

Trong chương này sẽ trình bày về các đồ thị, mà hoặc tập đỉnh hoặc tập cạnh của chúng được tô bằng từ hai màu trở lên.

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho trước một số nguyên dương p . Ta nói rằng đồ thị G là p sắc, nếu bằng p màu khác nhau có thể tô trên các đỉnh (mỗi đỉnh một màu), sao cho hai đỉnh kề nhau tùy ý đều có màu khác nhau.

Số p nhỏ nhất, mà đối với số đó đồ thị G là p sắc, được gọi là sắc số của đồ thị G và ký hiệu bằng $\chi(G)$.

Nói cách khác, sắc số của một đồ thị là số màu ít nhất cần dùng để tô trên các đỉnh của đồ thị (mỗi đỉnh một màu), sao cho hai đỉnh kề nhau tùy ý được tô bằng hai màu khác nhau.

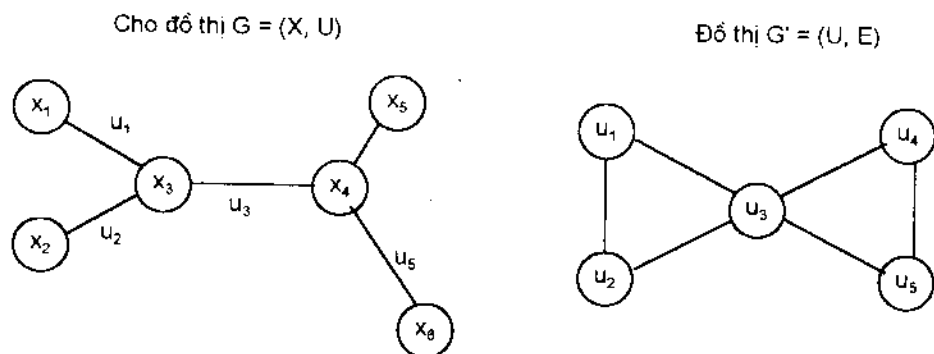
Sắc lớp: Số màu ít nhất cần dùng để tô trên các cạnh của đồ thị (mỗi cạnh một màu), sao cho hai cạnh kề nhau tùy ý đều có màu khác nhau.

Người ta có thể chuyển bài toán sắc lớp về bài toán sắc số bằng cách: Đối với mỗi đồ thị $G = (X, U)$ xây dựng đồ thị $G' = (U, E)$, trong đó U là tập cạnh của đồ thị G , còn tập cạnh E của nó được xác định như sau:

$$E = \{(u, u') \mid u, u' \in U \text{ và là hai cạnh kề nhau}\}$$

Dễ dàng thấy rằng, sắc số của đồ thị G' bằng sắc lớp của đồ thị G .

Ví dụ 7.1



Hình 7.1

Sắc số đồ thị G' bằng sắc lớp của đồ thị G

2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Định lý 7.1. Một chu trình độ dài lẻ luôn có sắc số bằng 3

Chứng minh:

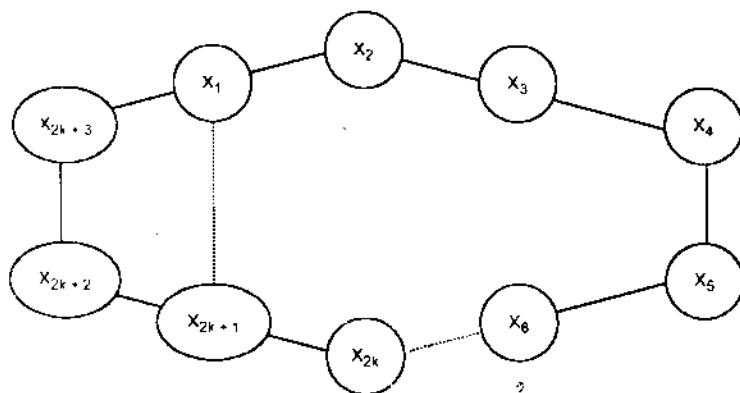
Giả sử α là một chu trình độ dài lẻ tùy ý. Khi đó tồn tại số tự nhiên n , để $|\alpha| = 2n + 1$. Ký hiệu các đỉnh của α một cách liên tiếp bằng $x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}$.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng qui nạp theo n .

a. *Cơ sở qui nạp:* với $n = 1$. Chu trình α gồm 3 đỉnh x_1, x_2, x_3 . Do mỗi đỉnh x_i ($1 \leq i \leq 3$) đều kề với hai đỉnh còn lại, nên ta phải dùng đúng 3 màu khác nhau, thì mới đủ tô trên mỗi đỉnh một màu, để cho hai đỉnh kề nhau tùy ý đều có màu khác nhau.

b. *Qui nạp:* giả sử khẳng định đã đúng với $n \leq k$, nghĩa là đối với chu trình α_1 tùy ý với độ dài $2n + 1$ ($1 \leq n \leq k$) đều có sắc số bằng 3. Cần chỉ ra rằng với $n = k + 1$ khẳng định vẫn đúng, nghĩa là chu trình α tùy ý với độ dài $2(k + 1) + 1$ cũng có sắc số bằng 3.

Giả sử α là chu trình độ dài lẻ tùy ý có độ dài bằng $2(k + 1) + 1$ và có tập đỉnh được đánh số liên tiếp là $\{x_1, x_2, \dots, x_{2k+3}\}$



Hình 7.2

Nối đỉnh x_1 với đỉnh x_{2k+1} ta được chu trình α_1 với độ dài lẻ $2k+1$. Theo giả thiết qui nạp sắc số của α_1 bằng 3 đồng thời x_1 và x_{2k+1} có màu khác nhau. Chẳng hạn x_1 được tô bằng màu M_1 và x_{2k+1} được tô bằng màu M_2 . Khi đó để tô đỉnh x_{2k+2} ta có thể dùng lại màu M_1 và tô đỉnh x_{2k+3} ta dùng lại màu M_2 . Nghĩa là không phải thêm màu mới. Vậy sắc số của α bằng 3 và khẳng định được chứng minh.

Định lý 7.2 (Định lý Konig)

Đồ thị $G = (X, U)$ với ít nhất một cạnh là đồ thị hai sắc khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.

Chứng minh:

1) *Điều kiện đủ:* Giả sử đồ thị $G = (X, U)$ không có chu trình độ dài lẻ. Cần chỉ ra G là đồ thị 2 - sắc. Có thể giả thiết G là đồ thị liên thông (nếu G không liên thông ta xét riêng từng thành phần liên thông).

Ta tô màu dần dần các đỉnh của đồ thị G theo quy tắc sau:

a) Tô màu xanh cho đỉnh z tùy ý.

b) Nếu đỉnh x nào đó đã được tô màu xanh, ta dùng màu đỏ để tô cho tất cả các đỉnh kề với x ; nếu đỉnh y được tô màu đỏ, thì ta dùng màu xanh tô cho tất cả các đỉnh kề với y .

Vì đồ thị G liên thông, nên sớm hay muộn mọi đỉnh của nó đều được tô màu và mỗi đỉnh của G không thể cùng một lúc được tô màu xanh và màu đỏ. Thật vậy, giả sử trong G tồn tại đỉnh v mà theo nguyên tắc nó

vừa phải tô màu xanh, đồng thời lại phải được tô màu đỏ. Khi đó v đồng thời kề với đỉnh s đã có màu xanh và đỉnh t đã có màu đỏ, nên các đỉnh s, v, t nằm trên một chu trình độ dài lẻ. Như vậy, mâu thuẫn với giả thiết nên đỉnh v như trên không tồn tại.

Mặt khác, do đồ thị có ít nhất một cạnh, nên cần phải dùng hai màu để tô trên hai đỉnh của cạnh này.

Vậy G là một đồ thị 2 - sắc.

2) *Điều kiện cần*: Giả sử G là đồ thị 2 - sắc, nhưng trong G lại có chu trình độ dài lẻ và α là một trong những chu trình độ dài lẻ của G . Khi đó, theo định lý 7.1, sắc số của α bằng 3. Mặt khác, sắc số của một đồ thị không nhỏ hơn sắc số của bất kì đồ thị con nào, nên sắc số của G ít nhất bằng 3. Ta đi tới mâu thuẫn với giả thiết, nên G không có chu trình độ dài lẻ. Khẳng định được chứng minh.

Từ định lý trên suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 7.1

Tất cả các chu trình độ dài chẵn đều có sắc số bằng 2.

Định lý 7.3

Đồ thị đầy đủ với n đỉnh luôn luôn có sắc số bằng n .

Chứng minh

Khẳng định được chứng minh bằng qui nạp theo số đỉnh của đồ thị. Dùng G_n để ký hiệu đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh.

1) *Cơ sở quy nạp*: Với $n = 1$, G_1 gồm 1 đỉnh, nên phải dùng 1 màu.

2) *Quy nạp*: Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, nghĩa là G_k tùy ý đã có sắc số bằng k . Ta cần khẳng định tính đúng đắn của định lý đối với $n = k + 1$, nghĩa là G_{k+1} có sắc số bằng $k + 1$.

Giả sử G_{k+1} là một đồ thị đầy đủ tùy ý với tập đỉnh:

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$$

Ta loại khỏi G_{k+1} một đỉnh tùy ý, chẳng hạn đỉnh x_{k+1} , cùng với các cạnh thuộc nó. Đồ thị con nhận được cũng là một đồ thị đầy đủ (G_k) gồm k đỉnh, nên theo giả thiết qui nạp $\chi(G_k) = k$.

"Khôi phục" lại đỉnh x_{k+1} cùng với các cạnh thuộc nó, tức là "trở lại" đồ thị G_{k+1} . Vì x_{k+1} kề với từng đỉnh thuộc G_k , nên để tô màu cho x_{k+1} ta phải dùng một màu chưa sử dụng trên G_k . Do đó:

$$\chi(G_{k+1}) = \chi(G_k) + 1 = k + 1$$

Khẳng định đã được chứng minh.

3. THUẬT TOÁN TÌM SẮC SỐ

Nhờ các kết quả trên dễ dàng phát hiện được những đồ thị 2 - sắc, song đối với các đồ thị loại khác, ta chưa có một phương pháp tổng quát để xác định sắc số của chúng. Tuy vậy, đã có một số phương pháp đặc thù, cho phép xác định sắc số của những lớp đồ thị nhất định.

3.1. Phương pháp hàm Grundy

Trong nhiều trường hợp hàm Grundy tỏ ra là một công cụ có hiệu quả trong việc xác định sắc số của đồ thị.

Định lý 7.4.

Giả sử $G = (X, E)$ là một đồ thị vô hướng. Đồ thị G là đồ thị p - sắc khi và chỉ khi nó nhận hàm Grundy với:

$$\max_{x \in X} g(x) \leq p - 1.$$

3.2. Phương pháp thực nghiệm

Thoạt đầu dùng p màu tùy ý: 1, 2, ..., p để tô trên các đỉnh. Sau đó tìm cách loại dần từng màu một trong các màu đã tô (mà người ta gọi chúng là các "màu tối hạn"), cho tới khi không có khả năng loại trừ, ta sẽ được sắc số của đồ thị.

Muốn vậy, ta xét đỉnh x có "màu tối hạn" nào đó và các thành phần liên thông: $C_1^{i,k} = (X_1, E_1)$, $C_2^{i,k} = (X_2, E_2)$, ..., $C_t^{i,k} = (X_t, E_t)$ của đồ thị con sinh bởi hai màu i và k . Dùng $T(x)$ để ký hiệu tập đỉnh hoặc có cạnh hoặc có cung nối với x . Xét các giao $X_s \cap T(x)$ ($1 \leq s \leq t$). Có bốn khả năng xảy ra:

1) Nếu tất cả các tập đỉnh $X_s \cap T(x)$ ($1 \leq s \leq t$) đều cùng một màu. Chẳng hạn màu i thì ta dùng màu i để tô lên các đỉnh có màu k và dùng màu k tô lên các đỉnh có màu i trong mỗi tập X_s ($1 \leq s \leq t$) đồng thời dùng màu i tô lên đỉnh x .

2) Nếu như trong các tập $X_s \cap T(x)$ ($1 \leq s \leq t$) có một số tập màu i và các tập còn lại màu k , chẳng hạn các tập $X_1 \cap T(x)$, $X_2 \cap T(x)$, ..., $X_p \cap T(x)$ màu i , còn các tập $X_{p+1} \cap T(x)$, ..., $X_t \cap T(x)$ màu k . Khi đó các tập X_s ($1 \leq s \leq p$) giữ nguyên màu ở các đỉnh, trong các tập X_s ($p+1 \leq s \leq t$) ta đổi các đỉnh màu i sang màu k và màu k sang màu i và dùng màu k để tô lên đỉnh x .

3) Nếu $X_s \cap T(x) = \emptyset$ ($1 \leq s \leq t$) ta dùng một màu trong hai màu i hoặc k để tô lên đỉnh x .

Trong cả ba trường hợp trên ta đều thay được "màu tới hạn" ở đỉnh x bằng một màu khác đã dùng để tô trên đỉnh của đồ thị, nên số màu đã giảm đi một.

4) Nếu có một trong những tập $X_s \cap T(x)$ ($1 \leq s \leq t$) mà hai màu, thì không có khả năng áp dụng thuật toán này.

3.3. Phương pháp giải tích

Thực chất của phương pháp này là kiểm tra bằng giải tích xem đồ thị G có thể tô bằng p màu được không.

Phương pháp này như sau: Với mỗi cách tô bằng p màu ta cho tương ứng với một hệ thống các số q_t^i (trong đó $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, p$) được xác định như sau:

$$q_t^i = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } x_i \text{ có màu } t; \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt

$$r_j^i = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x_i \text{ là điểm nút của cạnh } v_j; \\ 0, & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó bài toán được đặt ra như sau: Hãy tìm các số nguyên q_t^i , sao cho hệ bất phương trình sau thỏa mãn:

$$\begin{cases} q_t^i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, s) \\ \sum_{t=1}^s q_t^i = 1 & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{k=1}^s r_j^k q_t^k \leq 1 & (j = 1, 2, \dots, m; \quad t = 1, 2, \dots, s) \end{cases} \quad (*)$$

Sau đó dùng phương pháp của quy hoạch tuyến tính để tìm nghiệm nguyên của hệ bất phương trình tuyến tính (*).

Số s nhỏ nhất mà hệ (*) có nghiệm nguyên là sắc số của đồ thị G .

3.4. Phương pháp chứng minh cận trên và cận dưới

Phương pháp này thích hợp với những đồ thị chứa ít đỉnh. Thuật toán gồm hai bước:

1. *Chứng minh cận dưới.* Nhờ các định lý 7.1, 7.2, 7.3, hệ quả 7.1 hoặc bằng lý luận trực tiếp chỉ ra rằng:

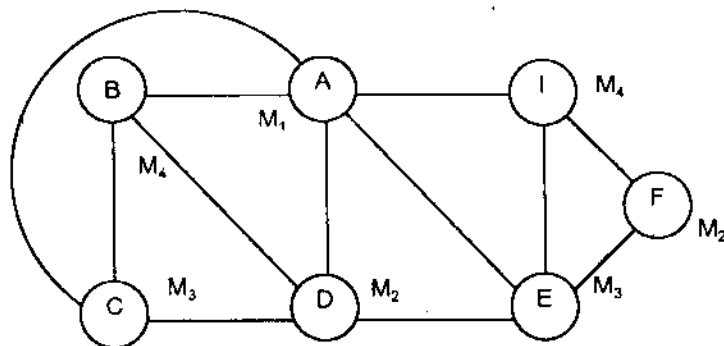
$$\chi(G) \geq p \quad (1)$$

2. *Chứng minh cận trên.* Bằng cách tô trực tiếp chỉ ra rằng với p màu đủ để tô trên các đỉnh, sao cho hai đỉnh kề nhau tùy ý đều có màu khác nhau, nghĩa là:

$$\chi(G) \leq p \quad (2)$$

Khi đó suy ra rằng sắc số $\chi(G)$ của đồ thị G bằng p .

Ví dụ 7.1. Cho đồ thị G như hình vẽ. Hãy tìm sắc số của đồ thị G .



Hình 7.3

1) *Cận dưới*: Đồ thị con G_1 với tập đỉnh $\{A, B, C, D\}$ là một đồ thị đầy đủ 4 đỉnh nên có sắc số $\chi(G_1) = 4$.

Mặt khác sắc số của một đồ thị không thể nhỏ hơn sắc số của một đồ thị con tùy ý thuộc nó, nên ta có:

$$\chi(G) \geq \chi(G_1) = 4 \quad (1)$$

2) *Cận trên*: Bằng cách tô cụ thể như hình vẽ, ta chỉ cần 4 màu (M_1, M_2, M_3, M_4) đã tô được các đỉnh của đồ thị, để hai đỉnh kề nhau tùy ý đều có màu khác nhau nên:

$$\chi(G) \leq 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\chi(G) = 4$.

4. LỚP ĐỒ THỊ CÓ CHU TRÌNH TAM GIÁC CÙNG MÀU

Để phục vụ cho việc giải quyết một lớp các bài toán nào đó cần xét những dãy số đặc biệt và đưa ra các khẳng định thích hợp, chẳng hạn, để xây dựng một lớp đồ thị có chu trình tam giác cùng màu người ta đưa ra các dãy số nguyên dương:

$$a_1 = 2, a_2 = 5, \dots, a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$$

$$u_2 = 3, u_3 = 6, \dots, u_{n+1} = (u_n - 1)n + 2$$

4.1. Một số khẳng định

Định lý 7.5

a) Một đồ thị đầy đủ vô hướng với $a_n + 1$ đỉnh, các cạnh được tô bằng n màu luôn có chu trình tam giác cùng màu.

b) Một đồ thị đầy đủ vô hướng với U_{n+1} đỉnh, các cạnh được tô bằng n màu luôn có chu trình tam giác cùng màu.

Chứng minh phần a (Bằng qui nạp theo chỉ số n)

1. *Cơ sở quy nạp*: $n = 1$. Đồ thị đầy đủ tương ứng gồm $a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$ đỉnh lập thành một chu trình tam giác. Các cạnh của đồ thị này được tô bằng một màu, nên chu trình tam giác lập nên G_1 cùng màu.

2) *Quy nạp*: Giả sử khẳng định đã đúng với $n = k$, nghĩa là, đồ thị đầy đủ bất kì G_k gồm $a_k + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng k màu đã có chu trình tam giác cùng màu. Cần chứng tỏ khẳng định đúng với $n = k+1$.

Xét đồ thị đầy đủ tùy ý G_{k+1} với $a_{k+1} + 1$ đỉnh và các cạnh được tô bằng $k+1$ màu.

Giả sử P là một đỉnh tùy ý của G_{k+1} . Khi đó P được nối với $a_{k+1} = (k+1)a_k + 1$ đỉnh bằng các cạnh được tô bằng không quá $k+1$ màu, nên xuất phát từ P phải có ít nhất $a_k + 1$ cạnh được tô bằng cùng một màu. Giả sử màu này là màu đỏ và các cạnh $PA_1, PA_2, \dots, PA_{a_k}, PA_{a_k+1}$ được tô màu đỏ. Có hai khả năng xảy ra:

1) Nếu một trong các cạnh nối giữa các đỉnh A_i, A_j ($1 \leq i, j \leq a_k + 1$) được tô màu đỏ, chẳng hạn cạnh (A_1, A_2) màu đỏ. Khi đó chu trình tam giác A_1PA_2 màu đỏ, nên đồ thị G_{k+1} có chu trình tam giác màu đỏ.

2) Trường hợp ngược lại, không có cạnh nào trong các cạnh (A_i, A_j) ($1 \leq i, j \leq a_k + 1$) được tô màu đỏ. Khi đó đồ thị con đầy đủ G_k với tập đỉnh $\{A_1, A_2, \dots, A_{a_k}, A_{a_k+1}\}$ có các cạnh được tô bằng không quá k màu, nên theo giả thiết qui nạp G_k đã có chu trình tam giác cùng màu. Bởi vậy G_{k+1} có chu trình tam giác cùng màu. Khẳng định được chứng minh.

Phần b chứng minh tương tự.

4.2. Ứng dụng

Bài tập 7.1. Trên mặt phẳng lấy 6 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng, khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một cặp điểm, mà đoạn thẳng nối giữa chúng là cạnh ngắn nhất thuộc một tam giác nào đó, đồng thời là cạnh dài nhất của một tam giác khác trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho?

Để giải bài toán trên trước hết dùng màu xanh để tô mỗi đoạn thẳng là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Phần cạnh còn lại được tô màu đỏ. Khi đó được đồ thị G_2 gồm 6 đỉnh, các cạnh được tô bằng hai màu.

Theo định lý 7.5, đồ thị G_2 có chu trình tam giác cùng màu. Do khoảng cách giữa các cặp điểm đã cho khác nhau từng đôi một, nên tam

giác bất kì với đỉnh là các điểm đã cho đều có cạnh ngắn nhất, mà cạnh này được dùng màu xanh để tô trước. Bởi vậy chu trình tam giác cùng màu phải là tam giác xanh. Khi đó cạnh dài nhất trong tam giác này chính là đoạn thẳng cần tìm.

Bài tập 7.2. Mười bảy nhà khoa học đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi người trong số họ chỉ biết một trong ba ngoại ngữ: Anh, Nga, Pháp. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng biết một trong ba ngoại ngữ nói trên.

Lấy 17 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng và tương ứng với 17 nhà khoa học đến dự họp. Đoạn thẳng nối giữa hai điểm tương ứng với hai nhà khoa học:

- Cùng biết tiếng Anh được tô màu xanh.
- Cùng biết tiếng Nga được tô màu đỏ.
- Cùng biết tiếng Pháp được tô màu vàng.

Khi đó được đồ thị đầy đủ G_3 gồm 17 đỉnh, các cạnh được tô bằng 3 màu, nên theo định lý 7.5, tương ứng với $n = 3$, đồ thị G_3 có chu trình tam giác cùng màu. Do đó ba nhà khoa học tương ứng với ba đỉnh thuộc chu trình này biết cùng một ngoại ngữ.

CHƯƠNG 8

SỐ ỔN ĐỊNH TRONG VÀ SỐ ỔN ĐỊNH NGOÀI

1. SỐ ỔN ĐỊNH TRONG

1.1. Định nghĩa

Giả sử có đồ thị $G = (X, U)$

Định nghĩa: Tập con $A \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định trong, nếu mọi cặp đỉnh thuộc A đều không kề nhau.

Tập con $B \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định trong cực đại, nếu B là tập ổn định trong và nếu thêm vào B một đỉnh tùy ý $x \in X$, thì tập con nhận được $B \cup \{x\}$ sẽ không ổn định trong.

1.2. Tính chất

Nếu A là tập ổn định trong, thì mọi tập con của A đều phải ổn định trong.

1.3. Số ổn định trong

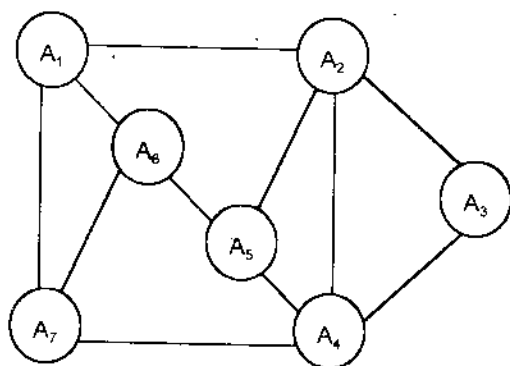
Dùng $H(G)$ để ký hiệu họ gồm tất cả các tập ổn định trong của đồ thị G .

Định nghĩa: Số phần tử của một trong những tập ổn định trong có lực lượng lớn nhất được gọi là số ổn định trong của đồ thị G , đồng thời được ký hiệu bằng $\alpha(G)$, nghĩa là:

$$\alpha(G) = \max\{|A| \mid A \in H(G)\}$$

Chú ý: Đối với khái niệm ổn định trong, người ta quan tâm trước hết đến các tập ổn định trong có lực lượng cực đại, tức những tập ổn định trong có số phần tử bằng số ổn định trong của đồ thị.

Ví dụ 8.1. Cho đồ thị G . Hãy tìm tất cả các tập ổn định trong và số ổn định trong của đồ thị G .



Hình 8.1

Các tập ổn định trong:

- Gồm 1 đỉnh: Do đồ thị không có khuyên, nên mỗi đỉnh của đồ thị lập thành một tập ổn định trong: $\{A_i\}$, $(1 \leq i \leq 7)$

- Gồm 2 đỉnh:

$$\begin{array}{llll} M_1 = \{A_1, A_3\}, & M_2 = \{A_1, A_4\} & M_3 = \{A_1, A_5\} & M_4 = \{A_2, A_6\} \\ M_5 = \{A_2, A_7\}, & M_6 = \{A_3, A_5\} & M_7 = \{A_3, A_6\} & M_8 = \{A_3, A_7\} \\ M_9 = \{A_4, A_6\}, & M_{10} = \{A_5, A_7\} & & \end{array}$$

- Gồm 3 đỉnh:

$$M_{11} = \{A_1, A_3, A_5\}, \quad M_{12} = \{A_3, A_5, A_7\}$$

Chỉ có hai tập ổn định trong với lực lượng bằng 3, nhưng đều ổn định trong cực đại, nên trong đồ thị G không có tập ổn định trong lực lượng bằng 4. Bởi vậy:

$$\alpha(G) = |M_{11}| = |M_{12}| = 3.$$

Định lý 8.1

Nếu trong đồ thị $G = (X, E)$ với n đỉnh, mà bậc của mỗi đỉnh đều không vượt quá ρ thì số ổn định trong:

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\rho + 1}$$

Chứng minh:

Giả sử A là một trong những tập ổn định trong có lực lượng lớn nhất. Xét đỉnh x tùy ý nằm ngoài A . Khi đó x phải kề với ít nhất một đỉnh thuộc A (nếu không tập $A \cup \{x\}$ sẽ ổn định trong và ta đi tới mâu thuẫn với giả thiết A là tập ổn định trong có lực lượng cực đại). Từ đó suy ra số cạnh xuất phát từ tập A không nhỏ hơn lực lượng của tập $X - A$, nghĩa là:

$$\rho\alpha(G) = \rho|A| \geq n - |A| = n - \alpha(G)$$

$$\text{Từ đó có: } \alpha(G)(1 + \rho) \geq n \text{ nên: } \alpha(G) \geq \frac{n}{\rho + 1}$$

2. SỐ ỔN ĐỊNH NGOÀI

2.1. Định nghĩa

Tập con $B \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định ngoài nếu với mọi đỉnh x thuộc tập $X - B$, đều tồn tại đỉnh $y \in B$, để hoặc từ x sang y có cung hoặc cặp đỉnh x, y được nối bằng một cạnh.

2.2. Tính chất

Nếu B là tập ổn định ngoài, thì mọi tập chứa B đều ổn định ngoài.

2.3. Số ổn định ngoài

Dùng $\mathcal{H}(G)$ để ký hiệu họ gồm tất cả các tập ổn định ngoài trong đồ thị G .

Định nghĩa: Số phần tử của một trong những tập ổn định ngoài có lực lượng bé nhất được gọi là số ổn định ngoài của đồ thị G , đồng thời được ký hiệu bằng $\beta(G)$, nghĩa là:

$$\beta(G) = \min\{|B| \mid B \in \mathcal{H}(G)\}$$

Chú ý: Đối với khái niệm ổn định ngoài, người ta quan tâm trước hết đến các tập ổn định ngoài có lực lượng cực tiểu, tức là những tập ổn định ngoài có lực lượng bằng số ổn định ngoài.

2.4. Thuật toán tìm số ổn định ngoài

Để tìm số ổn định ngoài của đồ thị $G = (X, U)$ ta thực hiện một thuật toán gồm hai bước:

1) Xây dựng một đồ thị hai mảng $G_1 = (X, \bar{X}, \Delta)$, trong đó $\bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}$ và ánh xạ Δ được xác định bằng các quy tắc sau:

1^o) $\forall x \in X (\bar{x} \in \Delta(x))$ (Từ x sang $\bar{x}$ có cung).

2^o) Nếu từ x sang y có cung hoặc cặp đỉnh x, y được nối bằng 1 cạnh, thì $\bar{x} \in \Delta(y)$ (Từ y sang $\bar{x}$ có cung)

2) Xác định tập con $A \subseteq X$ có lực lượng bé nhất mà $\Delta(A) \supseteq \bar{X}$.

Để đạt được mục đích trên ta thực hiện một số khâu sau đây:

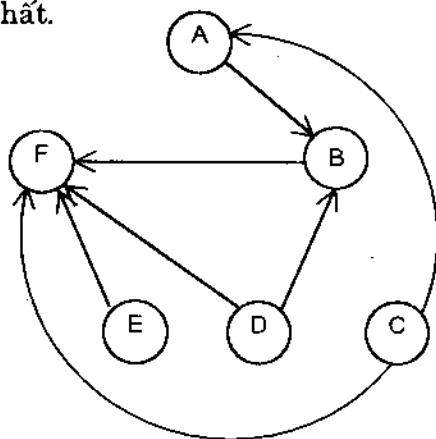
1^o) Mỗi đỉnh x , mà nó là đỉnh duy nhất có cung đi tới $\bar{x}$, đều được giữ lại.

2^o) Đối với mọi tập con $A \subseteq X$, mà tồn tại tập con $B \subseteq X$, để $\Delta(A) \subseteq \Delta(B)$, thì loại bỏ tập đỉnh A khỏi đồ thị G_1 .

Thực hiện phép loại trừ này cho tới khi trong đồ thị G_1 chỉ còn các đỉnh không có khả năng loại trừ.

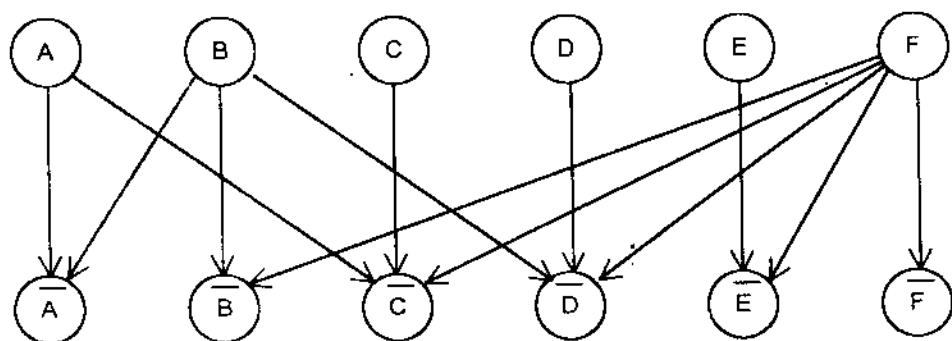
Lực lượng của tập con M của tập đỉnh còn lại thuộc X , mà $\Delta(M) \supseteq \bar{X}$ chính là số ổn định ngoài của đồ thị G .

Ví dụ 8.2. Cho đồ thị G như hình vẽ. Hãy tìm các tập ổn định ngoài có lực lượng bé nhất.



Hình 8.2

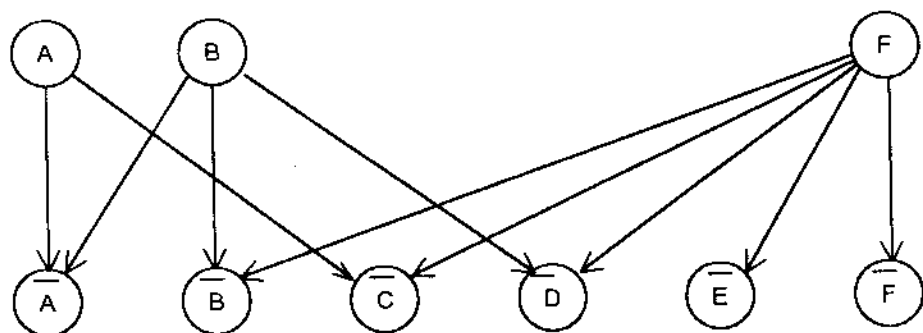
1. Xây dựng đồ thị hai mảng G_1 .



Hình 8.3

2. Đơn giản hóa G_1 và xác định các tập ổn định ngoài có lực lượng cực tiểu:

- Đỉnh F là đỉnh duy nhất có cung đi tới $\bar{F}$ nên F phải được giữ lại.
- Do $\Delta(\{C, D, E\}) \subseteq \Delta(F)$, nên tập $\{C, D, E\}$ bị loại khỏi G_1 và ta được đồ thị G_2 .



Hình 8.4

- Các đỉnh A và B không đồng thời loại bỏ được. Vậy hai tập ổn định ngoài có lực lượng bé nhất là $N_1 = \{A, F\}$, $N_2 = \{B, F\}$ và số ổn định ngoài

$$\beta(G) = |\{A, F\}| = |\{B, F\}| = 2.$$

3. SỰ LIÊN HỆ GIỮA SỐ ỔN ĐỊNH TRONG, SỐ ỔN ĐỊNH NGOÀI VỚI CÁC BÀI TOÁN TRÊN BÀN CỜ

Bài toán 8.1. Trên bàn cờ $n \times n$ có thể đặt tối đa bao nhiêu con mã (xe, tượng, hậu), để chúng không ăn lẫn nhau? Có bao nhiêu cách đặt?

Bài toán 8.2. Trên bàn cờ $n \times n$ có thể đặt tối thiểu bao nhiêu con mã (xe, tượng, hậu) để chúng khống chế được tất cả các ô còn lại của bàn cờ? Có bao nhiêu cách đặt?

3.1. Xây dựng các đồ thị tương ứng

- **Xây dựng đồ thị G_M**

Định. Ký hiệu các ô của bàn cờ theo dạng ma trận: a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$). Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các ô của bàn cờ và dùng ngay ký hiệu các ô của bàn cờ để ghi trên các điểm tương ứng.

Cạnh: *Nước đi của con mã:*
Con mã có nước đi là hai đầu mút của mỗi đường chéo hình chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 nên cặp điểm bất kì, tương ứng với hai ô là đầu mút của đường chéo thuộc hình chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 tùy ý đều được nối bằng một cạnh.

	*		x		x	*
x			*			
	*				*	

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_M . Đồ thị này mô tả toàn bộ các nước đi của con mã trên bàn cờ $n \times n$.

- **Xây dựng đồ thị G_X :**

Định: Tương tự như đồ thị G_M .

Cạnh: Con xe có thể đi theo hàng ngang hoặc hàng dọc, nên mỗi cặp điểm tương ứng với hai ô nằm trên cùng hàng ngang hoặc cùng một hàng dọc đều được nối bằng một cạnh.

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_X . Đồ thị này mô tả toàn bộ các nước đi của con xe trên bàn cờ $n \times n$.

- *Xây dựng đồ thị G_T :*

Đỉnh: Tương tự như đồ thị G_M .

Cạnh: Con tượng đi theo đường chéo một hình vuông tùy ý, nên cặp điểm bất kì tương ứng với hai ô là đầu mút của đường chéo hình vuông tùy ý đều được nối bằng một cạnh.

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_T . Đồ thị này mô tả toàn bộ các nước đi của con tượng trên bàn cờ $n \times n$.

- *Xây dựng đồ thị G_H :*

Đỉnh: Tương tự như đồ thị G_M .

Cạnh: Con hậu có nước đi bao gồm nước đi của con xe và con tượng, nên cặp điểm tùy ý tương ứng với hai ô hoặc nằm trên một hàng ngang, hoặc nằm trên một hàng dọc hoặc là đầu mút của một đường chéo thuộc hình vuông tùy ý đều được nối bằng một cạnh.

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_H . Đồ thị này mô tả toàn bộ các nước đi của con hậu trên bàn cờ $n \times n$.

Lý luận để suy ra đáp số: Hai quân cờ không ăn lẫn nhau khi và chỉ khi chúng không đứng ở hai ô thuộc cùng một nước đi. Mặt khác hai đỉnh bất kì không kề nhau khi và chỉ khi chúng tương ứng với hai ô không thuộc cùng một nước đi. Bởi vậy:

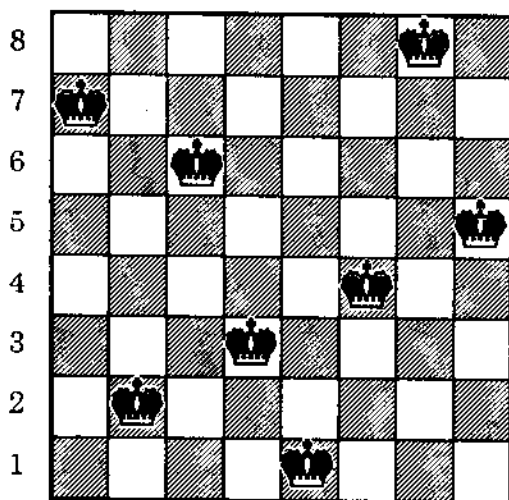
- Số con mã (xe, tượng, hậu) tối đa có thể đặt trên bàn cờ $n \times n$ để chúng không ăn lẫn nhau bằng số ổn định trong của đồ thị $G_M (G_X, G_T, G_H)$. Số cách đặt bằng số tập ổn định trong có lực lượng bằng số ổn định trong của đồ thị tương ứng.

Mỗi quân cờ đều khống chế được tất cả các ô, mà mỗi ô này lập với ô nó đứng thành một nước đi. Mặt khác mỗi ô của bàn cờ đều tương ứng với một đỉnh hoặc thuộc tập ổn định ngoài nào đó hoặc kề với ít nhất một đỉnh thuộc tập ổn định ngoài, nên số con mã (xe, tượng, hậu) tối thiểu cần đặt trên bàn cờ $n \times n$ để nó khống chế được toàn bộ các ô còn lại bằng số ổn định ngoài của đồ thị $G_M (G_X, G_T, G_H)$. Số cách đặt bằng số tập ổn định ngoài có lực lượng bằng số ổn định ngoài của đồ thị tương ứng.

Ví dụ 8.3 (Gauss). Bài toán tám con hậu chính là một trường hợp của bài toán 8.1 khi $n = 8$. Với $n = 8$ đồ thị G_H có số ổn định trong bằng 8, nên chỉ có thể đặt tối đa 8 con hậu trên bàn cờ 8×8 , thì chúng không thể ăn lẫn nhau.

Còn về số cách đặt thì lúc đầu Gauss tưởng có 76 cách. Năm 1854 tờ báo về cờ ở Beclin "Schaczeitung" đưa ra được 40 cách, nhưng thực tế đồ thị G_H có 92 tập ổn định trong lực lượng bằng 8, nên có tất cả 92 cách đặt 8 con hậu trên bàn cờ 8×8 để chúng không ăn lẫn nhau. Đặt như 12 sơ đồ sau đây:

(72631485)	(61528374)	(58417263)
(35841726)	(46152837)	(57263148)
(16837425)	(57263184)	(48157263)
(51468273)	(42751863)	(35281746)



(72631485)

Hình 8.5

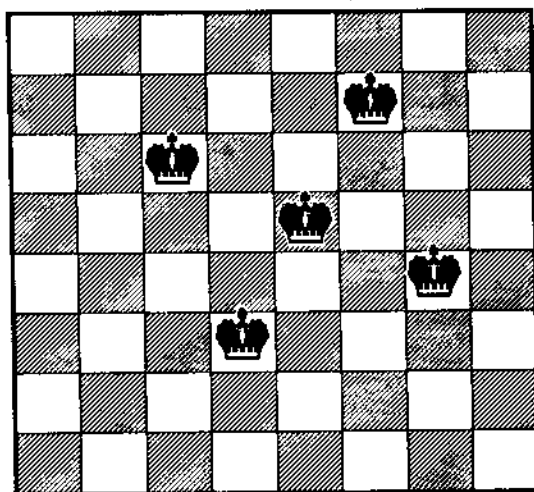
Mỗi sơ đồ như trên (H.8.5) tương ứng với một hoán vị và từ mỗi sơ đồ ta suy ra 8 cách đặt khác nhau: 3 cách đặt bằng cách quay 90° , 180° , 270° . Các lời giải khác suy được bằng cách đối xứng mỗi sơ đồ nhận được qua đường chéo chính.

Hoán vị cuối cùng chỉ cho 4 lời giải vì sơ đồ tương ứng sẽ trùng với chính nó sau khi quay 180° .

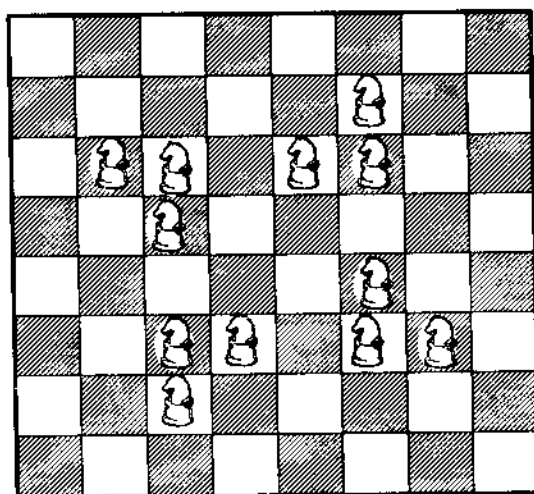
Ví dụ 8.4. Bài toán về 5 con hậu chính là trường hợp của bài toán 8.2 khi $n = 8$. Với $n = 8$ đồ thị G_H có số ổn định ngoài $\beta = 5$, nên chỉ cần 5 con hậu bố trí trên các ô tương ứng với một tập ổn định ngoài thì chúng sẽ khống chế được tất cả các ô của bàn cờ (hình 8.6).

Với $n = 8$ số ổn định ngoài của đồ thị G_M bằng 12, nên chỉ cần đặt 12 con mã trên các ô tương ứng với các đỉnh thuộc một tập ổn định ngoài, thì sẽ khống chế được tất cả các ô của bàn cờ (hình 8.7)

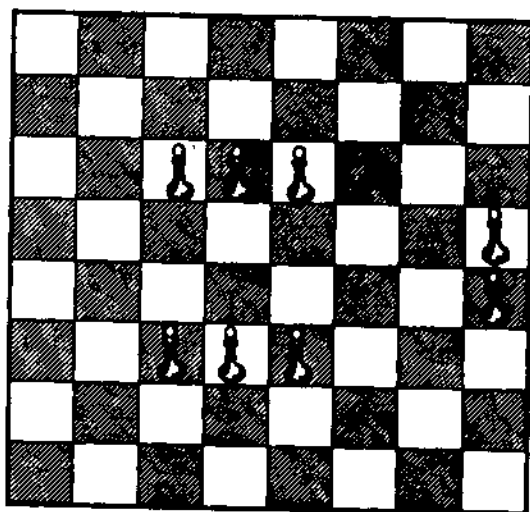
Với $n = 8$ đồ thị G_T có số ổn định ngoài bằng 8, nên chỉ cần đặt 8 con tượng trên các ô tương ứng với các đỉnh thuộc một tập ổn định ngoài thì sẽ khống chế được tất cả các ô của bàn cờ (hình 8.8).



Hình 8.6



Hình 8.7



Hình 8.8

Với $n = 8$ đồ thị G_X có số ổn định ngoài bằng 8, nên chỉ cần đặt 8 con xe trên các ô nằm trên một đường chéo, thì chúng sẽ khống chế được tất cả bàn cờ.

CHƯƠNG 9

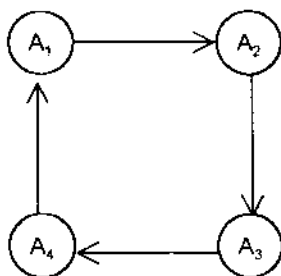
NHÂN CỦA ĐỒ THỊ

1. ĐỊNH NGHĨA

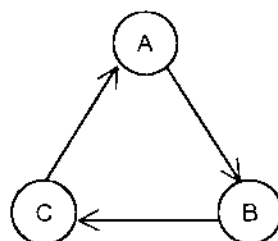
Giả sử có đồ thị $G = (X, U)$. Tập hợp $S \subseteq X$ được gọi là nhân của đồ thị G nếu nó vừa là tập ổn định trong lại vừa là tập ổn định ngoài.

Do S là tập ổn định trong nên nó không chứa khuyên. Mặt khác S ổn định ngoài nên nó phải chứa tất cả các đỉnh biệt lập và các đỉnh không có cung đi ra.

Ví dụ 9.1. Đồ thị hình 9.1 có hai nhân là $\{A_1, A_3\}$ và $\{A_2, A_4\}$. Còn đồ thị ở hình 9.2 không có nhân vì các tập ổn định trong chỉ gồm 1 đỉnh, còn các tập ổn định ngoài phải gồm ít nhất 2 đỉnh.



Hình 9.1



Hình 9.2

2. TÍNH CHẤT: (điều kiện để đồ thị không có nhân)

Định lý 9.1

Nếu đồ thị $G = (X, U)$ có số ổn định trong nhỏ hơn số ổn định ngoài, thì nó không có nhân.

Chứng minh:

Giả sử trong đồ thị $G = (X, U)$ có $\alpha(G) < \beta(G)$ (1), nhưng lại có nhân và S là một trong những nhân của đồ thị G . Khi đó, theo định nghĩa:

$$\alpha(G) = \max\{|A| \mid A \in \mathcal{H}(G)\} \geq |S| \geq \min\{|B| \mid B \in \mathcal{J}(G)\} = \beta(G) \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) đi tới mâu thuẫn, nên G không thể có nhân. Định lý được chứng minh.

Định lý 9.2

Nếu đồ thị $G = (X, U)$ có hàm Grundy $g(x)$ thì tập hợp

$$S = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$$

là nhân của đồ thị G .

Chứng minh:

1) $\forall x, y \in S, g(x) = g(y) = 0$, nên x, y không thể kề nhau. Do đó S là tập ổn định trong.

2) $\forall z \in (X - S)$. Khi đó $g(z) > 0$, nên tồn tại y , để hoặc từ z sang y có cung, hoặc z, y có cạnh nối với nhau. Do đó $g(y) = 0$, tức $y \in S$. Bởi vậy S là tập ổn định ngoài.

Định lý 9.3

Nếu S là nhân của đồ thị $G = (X, U)$ thì nó cũng là tập ổn định trong cực đại.

Chứng minh:

Giả sử S là nhân của đồ thị và $\forall x \in (X - S)$. Xét $S \cup \{x\}$. Vì S là nhân và $x \notin S$, nên $\exists y \in S$, để hoặc x, y được nối bằng một cạnh hoặc từ x sang y có cung. Bởi vậy $S \cup \{x\}$ không ổn định trong, nên S ổn định trong cực đại.

Định lý 9.4

Trong đồ thị vô hướng không có khuyên, mọi tập ổn định trong cực đại đều là nhân.

Chứng minh:

Giả sử B là một tập ổn định trong cực đại của đồ thị vô hướng $G = (X, E)$. Khi đó $\forall x \in (X - B)$ đều $\exists y \in B$ để x, y có cạnh nối với nhau, nên B đồng thời là tập ổn định ngoài. Do đó B là nhân của đồ thị G .

Giả sử có đồ thị $G = (X, E)$ và $A \subseteq X$. Dùng $D(A)$ để ký hiệu tập đỉnh, mà mỗi đỉnh này có cạnh nối với ít nhất một đỉnh thuộc A . Còn $D^-(A)$ là tập đỉnh mà mỗi đỉnh này có ít nhất một đỉnh thuộc A có cung đi tới nó. $D^+(A)$ là tập đỉnh mà mỗi đỉnh này có cung đi tới ít nhất một đỉnh thuộc A .

Hệ quả 9.1

Mọi đồ thị vô hướng không có khuyên đều có nhân

Chứng minh:

Thật vậy, giả sử đồ thị $G = (X, U)$ là đồ thị vô hướng không có khuyên. Khi đó mỗi đỉnh đều lập thành một tập ổn định trong. Xuất phát từ đỉnh tùy ý x_0 . Đặt $S_0 = \{x_0\}$. Sau đó chọn đỉnh tùy ý $x_1 \notin D(x_0)$ và đặt $S_1 = S_0 \cup \{x_1\} = \{x_0, x_1\}$. Tiếp theo chọn đỉnh tùy ý $x_2 \notin D(S_1)$ Vì đồ thị G hữu hạn, nên sớm hay muộn quá trình phải dừng lại, tức là có số n tự nhiên để $D(S_n) = X - S_n$. Với cách chọn này S_n là tập ổn định trong cực đại, nên theo định lý 9.4, nó là nhân của đồ thị G .

3. ÁP DỤNG CHO HÀM GRUNDY

Các điều kiện về sự tồn tại nhân có thể mở rộng cho hàm Grundy nhờ kết quả sau:

Định lý 9.5

Nếu mỗi đồ thị con của đồ thị $G = (X, E)$ đều có nhân, thì đồ thị G có hàm Grundy.

Chứng minh:

Thật vậy, giả sử S_0 là một nhân nào đó của đồ thị G , còn S_1 là nhân của đồ thị con sinh ra bởi tập $X_1 = X - S_0$, S_2 là nhân của đồ thị con sinh ra bởi tập hợp $X_2 = X_1 - S_1$, ...

Một cách tổng quát:

$X_t = X_{t-1} - S_{t-1}$, nếu t không phải là số thứ tự bị giới hạn.

$X_t = \bigcap_{s=t} X_s$, nếu t là số thứ tự giới hạn.

(với $s < t$ kéo theo $X_t \supset X_s$, do đó theo nguyên lý quy nạp tồn tại số tự nhiên k để $X_k = \emptyset$).

Các tập S_i lập thành một phân hoạch của tập X .

Với mỗi đỉnh x ta cho tương ứng với một số thứ tự $g(x)$ như sau:

$$g(x) = t \Leftrightarrow x \in S_t$$

Ta kiểm tra lại hai điều kiện để $g(x)$ là hàm Grundy:

1) Giả sử $g(x) = t$. Khi đó $\forall s < t$ đều tồn tại $y \in D(x)$ để $g(y) = s$. Thật vậy, vì $x \in S_t$ và $t > s$, nên $x \in X_t \subset X_s$, $x \notin S_s$. Vì S_s là tập ổn định ngoài của đồ thị con sinh bởi tập X_s , nên tồn tại đỉnh y trong S_s , mà hoặc x, y có cạnh nối với nhau hoặc từ x sang y có cung. Do $y \in S_s$ nên $g(y) = s$.

2) Giả sử $g(x) = t$. Khi đó không tồn tại đỉnh y mà hoặc x, y có cạnh nối với nhau, hoặc từ x sang y có cung và $g(y) = t$. Thật vậy, nếu khả năng này không xảy ra, thì x, y là hai đỉnh kề nhau, mà cùng thuộc S_t , nên S_t không phải là tập ổn định trong. Ta đi tới mâu thuẫn với tính chất S_i là nhân.

Từ các định lý trên ta suy ra hệ quả sau đây:

Hệ quả 9.1

Đồ thị vô hướng có hàm Grundy khi và chỉ khi nó không có khuyên.

Chứng minh:

Thật vậy, nếu đồ thị có hàm Grundy thì nó không thể có khuyên.

Ngược lại, nếu đồ thị G không có khuyên thì mỗi đồ thị con của nó đều không có khuyên. Khi đó mỗi đồ thị con đều có nhân, nên theo định lý 9.5, đồ thị G có hàm Grundy.

CHƯƠNG 10

TRÒ CHƠI TRÊN ĐỒ THỊ

1. TRÒ CHƠI NIM

Giữa hai đấu thủ, được ký hiệu là (A) và (B) có một đồ thị $G = (X, E)$ cho phép xác định một trò chơi nào đó. Trong trò chơi này mỗi thế là một đỉnh của đồ thị. Đỉnh khởi đầu x_0 được chọn bằng cách gấp thăm và các đấu thủ lần lượt đi: Đầu tiên đấu thủ (A) chọn đỉnh x_1 trong tập $D(x_0) \cup D^+(x_0)$; sau đó đấu thủ (B) chọn đỉnh x_2 trong tập $D(x_1) \cup D^+(x_1)$, tiếp theo đấu thủ (A) chọn đỉnh x_3 trong tập $D(x_2) \cup D^+(x_2)$, v.v.... Nếu một trong hai đấu thủ chọn được đỉnh x_k , mà $D(x_k) \cup D^+(x_k) = \emptyset$ thì ván đó kết thúc. Đấu thủ nào chọn được đỉnh cuối cùng thì thắng cuộc và đấu thủ kia thua cuộc.

Để kỷ niệm một trò tiêu khiển quen thuộc mà Nim đã tổng quát hoá, người ta gọi trò chơi mô tả ở trên là trò chơi Nim và dùng ngay đồ thị $G = (X, E)$ xác định nó để ký hiệu cho trò chơi này.

Khi có một trò chơi vấn đề đặt ra là phải phát hiện được thế thắng, cần xác định các đỉnh của đồ thị G mà ta phải chọn, để đảm bảo thắng cuộc, mặc dù đối phương chống trả ra sao, kết quả chủ yếu dựa vào định lý sau:

Định lý 10.1

Nếu đồ thị $G = (X, E)$ có nhân S và nếu một đấu thủ đã chọn một đỉnh trong nhân S , thì việc chọn này bảo đảm cho anh ta thắng hoặc hoà.

Chứng minh:

Thật vậy, nếu đấu thủ A chọn được đỉnh $x_1 \in S$, thì hoặc $D(x_1) \cup D^+(x_1) = \emptyset$, lúc đó anh ta thắng cuộc; hoặc đối phương buộc phải

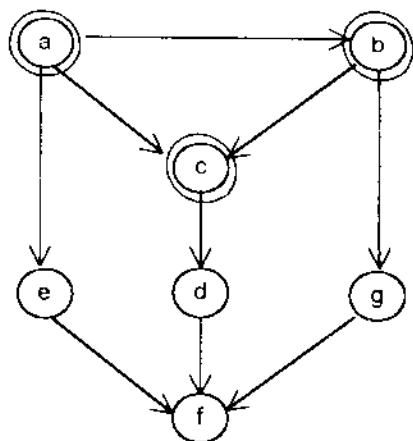
chọn một đỉnh $x_2 \in (X - S)$, khi đó đến lượt mình đấu thủ (A) lại có thể chọn $x_3 \in S$ và cứ như thế mãi. Nếu đến một lúc nào đó một trong các đấu thủ thắng bằng cách chọn được đỉnh x_k , mà $D(x_k) \cup D^+(x_k) = \emptyset$, thì $x_k \in S$ và theo cách đó, thì đấu thủ (A) đến lượt chọn x_k , nên (A) chính là người thắng cuộc.

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 10.1. Đồ thị trên hình hình 10.1 diễn tả một trò chơi Nim trong đó không có nhân.

Để giữ được thế hòa (trò chơi này không bao giờ kết thúc) thì các đấu thủ lần lượt chọn các đỉnh thuộc tập $\{a, b, c\}$.

Nếu đấu thủ nào chọn được đỉnh f , thì chắc chắn anh ta thắng cuộc, còn nếu đấu thủ nào chọn phải một trong các đỉnh thuộc tập $\{d, e, g\}$ thì chắc chắn thua cuộc.



Hình 10.1

2. PHƯƠNG PHÁP DÙNG HÀM GRUNDY

Một trong những phương pháp chơi tốt là dựa vào nhân của đồ thị. Mặt khác, nếu đối với đồ thị $G = (X, E)$ hàm Grundy $g(x)$ tồn tại, thì ta dễ dàng suy ra nhân:

$$S = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$$

Nếu đỉnh đầu tiên được chọn x_1 , mà $g(x_1) = 0$ thì đấu thủ (A) rơi vào thế bí và đối phương có thể tự bảo đảm thắng hoặc hoà, trái lại nếu $g(x_1) \neq 0$ thì (A) sẽ tự bảo đảm thắng hoặc hoà bằng cách chọn một đỉnh x_2 , mà $g(x_2) = 0$.

Hệ quả 10.1

Nếu đối với đồ thị $G = (X, E)$ tồn tại hàm Grundy $g(x)$ thì mọi cách chọn đỉnh y , sao cho $g(y) = 0$ đều bảo đảm thắng cuộc, mọi cách chọn z mà $g(z) \neq 0$ đều bị thua cuộc.

Ví dụ 10.2. Trò chơi bốc diêm: trên bàn có một đồng diêm gồm M que. Hai đấu thủ (A) và (B) lần lượt bốc một số que tùy ý. Ai hết que để bốc là thua cuộc.

Trò chơi này có thể diễn tả bằng đồ thị có hướng $G = (X, E)$.

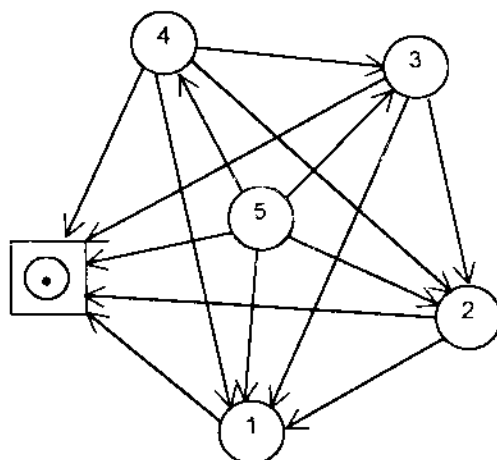
Đỉnh: Dùng ngay số lượng diêm để ký hiệu các đỉnh của đồ thị:

$$X = \{M, M-1, M-2, \dots, 2, 1, 0\}$$

Cung: Đối với mỗi đỉnh $x > 0$ có cung đi tới tập đỉnh:

$$D^+(x) = \{x-1, x-2, \dots, 2, 1, 0\}$$

Chẳng hạn với $M = 5$ được diễn tả bằng đồ thị hình 10.2



Hình 10.2

Đồ thị G có nhân $B = \{0\}$.

Hàm Grundy $g(x)$ của đồ thị được xác định bằng quan hệ: $g(i) = i$

Khi đó dễ dàng suy ra: $B = \{x \in X \mid g(x) = 0\} = \{0\}$

Ví dụ 10.3. Trò chơi bốc diêm có hạn chế.

Trên bàn có một đồng diêm gồm M que, còn k là một số nguyên tùy ý $1 \leq k < M$. Hai đấu thủ lần lượt bốc diêm: đến lượt mình, mỗi đấu thủ phải bốc ít nhất 1 que và nhiều nhất k que. Người bốc được que cuối cùng là thắng cuộc.

Trò chơi này có thể diễn tả bằng đồ thị có hướng $G = (X, E)$.

Đỉnh: Dùng ngay số lượng diêm để ký hiệu các đỉnh của đồ thị:

$$X = \{M, M-1, M-2, \dots, 2, 1, 0\}$$

Cung: Đối với mỗi đỉnh $x \geq k$ có cung đi tới tập đỉnh thuộc tập:

$$D^-(x) = \{x-1, x-2, \dots, x-k+1, x-k\}$$

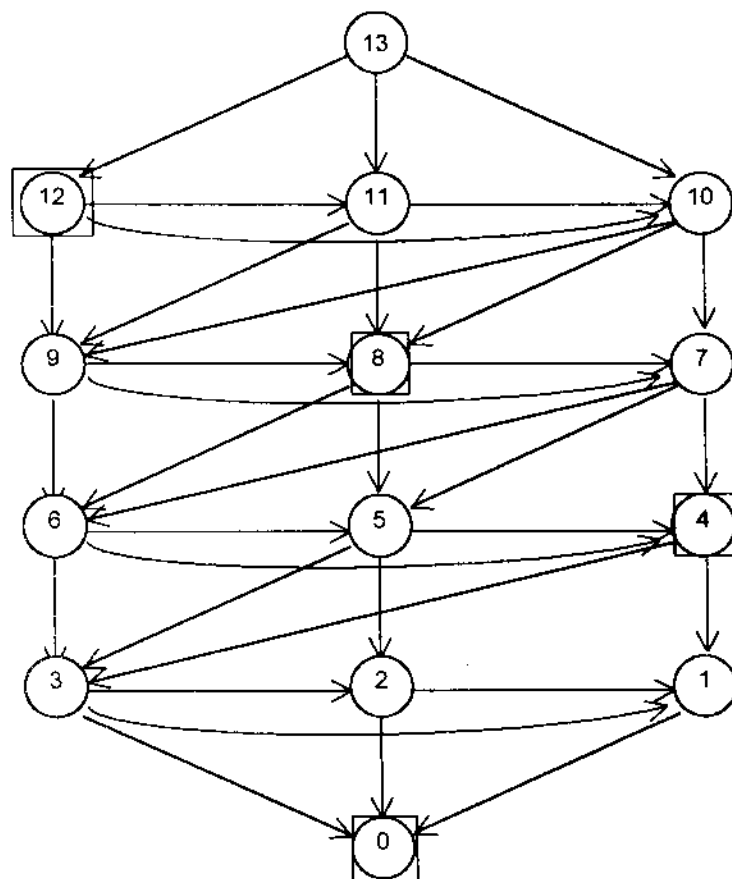
Chẳng hạn $M = 13, k = 3$ trò chơi được diễn tả bằng đồ thị hình 10.3.

Đối với trò chơi này hàm Grundy được xác định bằng quan hệ sau:

Với mọi $i \in X$.

$$g(i) = i \bmod (k+1) \quad (= \text{phần dư khi chia } i \text{ cho } k+1)$$

Nhân của đồ thị $B = \{i \in X \mid g(i) = 0\} = \{i \in X \mid i \vdots (k+1)\}$.



Hình 10.3

Đối với trò chơi diễn tả ở hình hình 10.3 có nhân

$$S = (12, 8, 4, 0),$$

Nên nếu đấu thủ (A) được đi trước mà anh ta muốn thắng cuộc thì trước hết đấu thủ (A) phải bốc 1 que để số diêm còn lại 12 que (để đạt được đỉnh 12 thuộc nhân B).

Tiếp sau, nếu đấu thủ B bốc s ($1 \leq s \leq 3$) que diêm, thì đấu thủ (A) bốc $4 - s$ que để số diêm còn lại là 8 (để đạt được đỉnh 8 thuộc nhân S). sau đó, nếu đấu thủ (B) bốc t que diêm ($1 \leq t \leq 3$), thì đấu thủ (A) lại bốc $4 - t$ que, để số diêm còn lại là 4 (để đạt được đỉnh 4 thuộc nhân S). Tiếp theo đấu thủ (B) chỉ có thể bốc từ 1 đến 3 que, nên số diêm còn lại sẽ không ít hơn 1 que và không quá 3 que và đấu thủ (A) được bốc cả số diêm còn lại (tức là đạt được đỉnh 0 thuộc nhân S). Đấu thủ (B) đến lượt mình không còn diêm để bốc, nên thua cuộc.

Đối với trường hợp tổng quát, thuật chơi bảo đảm cho người đi trước thắng cuộc cũng được thực hiện tương tự. Giả sử m là số lớn nhất không vượt quá $M - 1$ và $m \equiv (k+1)$. Khi đó người đi đầu (Đấu thủ (A)) cần bốc $M - m$ que, để số diêm còn lại là m que. Tiếp theo, nếu người đi thứ hai (đấu thủ (B)) bốc t que, thì đến lượt mình đấu thủ (A) bốc $k + 1 - t$ que. Thuật toán này bảo đảm cho (A) là người bốc được que diêm cuối cùng.

Chú ý: nếu $M \equiv (k+1)$ và người thứ hai thực hiện thuật toán trên, thì người đi đầu luôn luôn thua cuộc.

2.1. Trò chơi tổng

Giả sử có n trò chơi Nim khác nhau $G_1 = (X_1, E_1)$, $G_2 = (X_2, E_2)$, ..., $G_n = (X_n, E_n)$ và hai đấu thủ chơi lần lượt theo qui tắc: Mỗi người đến lượt mình chọn một trong các trò chơi Nim, chơi với trò chơi đã chọn, và bỏ qua các trò chơi khác; người đầu tiên hoàn toàn không thể chơi được thì thua cuộc. Đây là một trò chơi Nim trên một đồ thị là tổng của các đồ thị $G_i = (X_i, E_i)$ ($1 \leq i \leq n$). Kết quả sau cho ta phương pháp chơi bảo đảm thắng cuộc.

Định lý 10.2

Giả sử các trò chơi $G_1 = (X_1, E_1)$, $G_2 = (X_2, E_2)$, ..., $G_n = (X_n, E_n)$ có hàm Grundy tương ứng $g_1, g_2, \dots, g_n$. Nếu trò chơi là tổng các trò chơi trên, thì việc chọn thế:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$$

mà với thể này: $g(x) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n) = 0$ sẽ bảo đảm thắng hoặc hoà.

Kết quả này suy từ định lý 5.2.

Ví dụ 10.4. Trò chơi Nim đơn hay trò chơi Fan Tan.

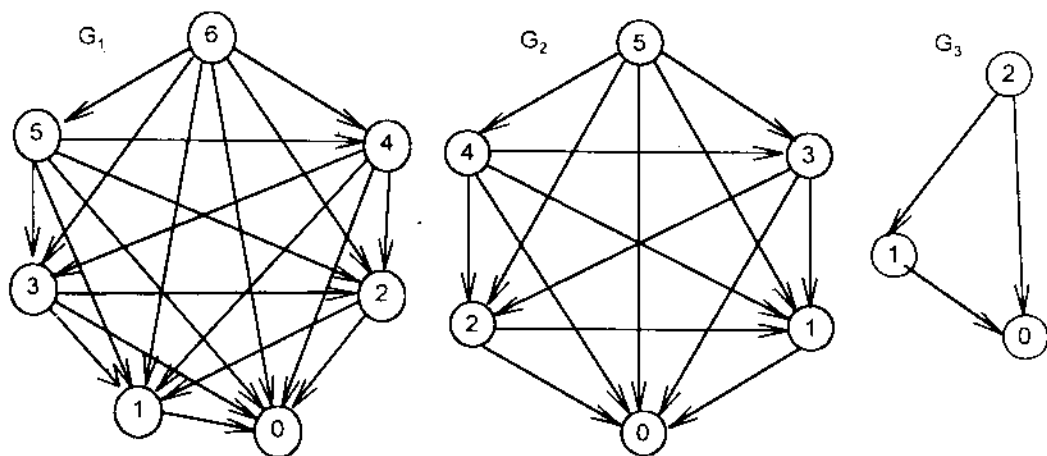
Trước mặt hai đấu thủ có n đồng que diêm. Mỗi đấu thủ đến lượt mình, được chọn một đồng bất kỳ (không trống) và bốc một hay nhiều que diêm tùy ý. Người nào lấy được que diêm cuối cùng thì thắng cuộc.

Kiểu chơi này là tổng các trò chơi $G_1 = (X_1, E_1)$, $G_2 = (X_2, E_2)$, ..., $G_n = (X_n, E_n)$. Trong mỗi trò chơi $G_k = (X_k, E_k)$, một phần tử $x_k \in X_k$ biểu thị trạng thái của đồng thứ k , còn $g_k(x_k)$ ($1 \leq k \leq n$) bằng số que diêm tương ứng.

Theo định lý 10.2 việc chơi bảo đảm thắng cuộc nếu và chỉ nếu sau khi bốc tổng digit các số que diêm còn lại trong các đồng bằng 0, tức phải bốc ở đồng nào và bao nhiêu để, sau khi bốc, trò chơi có thể $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, mà

$$g(x) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n) = 0.$$

Chẳng hạn với $n = 3$, đồng diêm thứ nhất gồm 6 que, đồng thứ hai gồm 5 que và đồng thứ ba gồm 2 que. Khi đó trò chơi được diễn tả bằng ba đồ thị G_1, G_2, G_3 ở hình 10.4



Hình 10.4

Nếu đấu thủ (A) là người đi đầu, để đảm bảo chiến thắng anh ta cần phải bốc ở đồng thứ hai đi 1 que, tức là trong đồ thị G_2 đạt tới đỉnh 4, nghĩa là chọn thế: $x = (6, 4, 2)$ và khi đó

$$g(x) = g(6) \dot{+} g(4) \dot{+} g(2) = (0, 1, 1) + (0, 0, 1) + (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Tiếp theo, nếu đấu thủ (B) bốc ở đồng thứ nhất 3 que. Khi đó (B) chọn thế $y = (3, 4, 2)$ và có:

$$g(y) = g(3) \dot{+} g(4) \dot{+} g(2) = 3 \dot{+} 4 \dot{+} 2 = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, 1, 0) = (1, 0, 1)$$

Đến lượt (A) anh ta phải bốc ở đồng thứ 2 đi 3 que diêm, tức là chọn thế $z = (3, 1, 2)$ và có:

$$g(z) = g(3) \dot{+} g(1) \dot{+} g(2) = 3 \dot{+} 1 \dot{+} 2 = (1, 1, 0) + (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Tiếp theo, chẳng hạn (B) bốc cả hai que diêm của đồng thứ ba, tức là chọn thế $u = (3, 1, 0)$ và có:

$$g(u) = g(3) \dot{+} g(1) \dot{+} g(0) = 3 \dot{+} 1 \dot{+} 0 = (1, 1, 0) + (1, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

Khi đó đối thủ (A) cần bốc ở đồng thứ nhất 2 que diêm, tức là chọn thế: $v = (1, 1, 0)$ và có

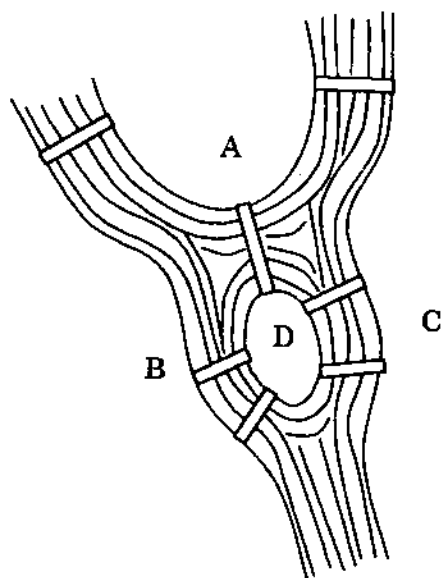
$$g(v) = g(1) \dot{+} g(1) \dot{+} g(0) = 1 \dot{+} 1 \dot{+} 0 = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) + (0, 0, 0)$$

Đến lượt (B) anh ta nhất định phải bốc que diêm còn lại của đồng thứ nhất hoặc thứ hai. Chẳng hạn (B) bốc hết đồng thứ hai. Khi đó (A) là người bốc được que diêm cuối cùng (que diêm ở đồng thứ nhất) và thắng cuộc.

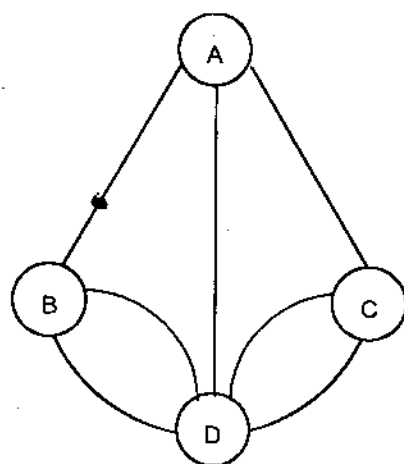
CHƯƠNG 11

ĐỒ THỊ EULERE

Bài toán cổ điển và lý thú về đồ thị Eulere xuất hiện tại nước Nga. Thành phố Königsberg của nước Nga có sông Pregel chảy qua, giữa sông có cù lao Kneiphof và 7 cây cầu như hình vẽ hình 11.1.



Hình 11.1

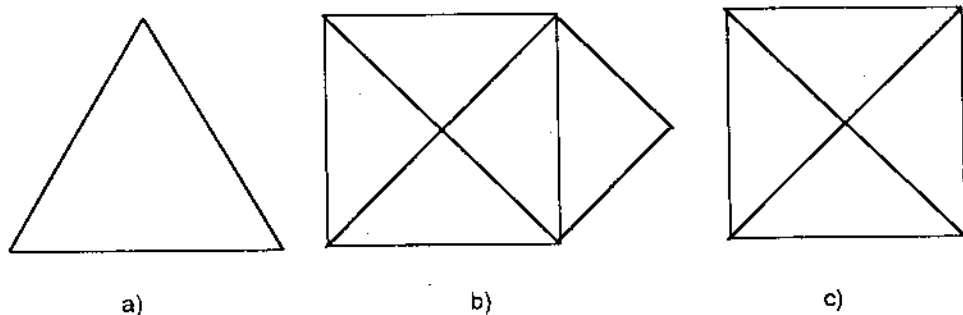


Hình 11.2

Từ khi xuất hiện 7 cây cầu (hình 11.1) người dân ở đây đã đặt vấn đề: Liệu có cách nào đi dạo được qua cả bảy cầu và qua mỗi cầu đúng một lần được không? Bài toán này đã làm say mê những người dân ở Königsberg trong một thời gian dài. Đến năm 1736 nhà Toán học Eulere đã chứng minh rằng bài toán trên không giải được bằng cách dùng A, B, C, D để biểu thị các miền đất ở hai máu cầu đồng thời là đỉnh của đa đồ thị G, các cầu được biểu thị bằng các cạnh nối giữa các đỉnh tương ứng

với các miền đất hai bên mấu cầu (hình 11.2). Đa đồ thị G không có xích đi qua tất cả các cạnh và qua mỗi cạnh đúng một lần, nên không thể đi dạo được qua cả 7 cây cầu và qua mỗi cầu đúng 1 lần!

Vẽ hình một nét yêu cầu từ khi đặt bút đến lúc kết thúc không được nhấc bút ra khỏi mặt giấy. Đây là vấn đề lý thú. Song không phải bất kỳ hình nào cũng vẽ được một nét. Chẳng hạn tại hình 11.3: hình (a) và hình (b) vẽ được một nét nhưng hình (c) không vẽ được một nét.



Hình 11.3

Điều kiện cần và đủ, để đồ thị vô hướng có xích Eulere sẽ xác định được: Tại sao hình này vẽ được một nét, còn hình kia không thể vẽ được một nét?

1. ĐỊNH NGHĨA

Xích α của đồ thị G được gọi là xích Eulere, nếu nó đi qua tất cả các cạnh của G và qua mỗi cạnh đúng một lần. Nói cách khác, xích Eulere của đồ thị G là một xích đơn và đi qua tất cả các cạnh của G .

Chu trình α của đồ thị G được gọi là chu trình Eulere nếu nó đi qua tất cả các cạnh của G và qua mỗi cạnh đúng một lần. Nói cách khác chu trình Eulere của đồ thị G là một chu trình đơn và nó đi qua tất cả các cạnh của đồ thị G .

Đồ thị vô hướng G được gọi là đồ thị Eulere, nếu nó có chu trình Eulere.

Đường β của đồ thị có hướng G được gọi là đường Eulere, nếu nó đi qua tất cả các cung của đồ thị G và qua mỗi cung đúng một lần. Nói cách

khác, đường Eulere của đồ thị có hướng G là một đường đơn, mà nó đi qua tất cả các cung của đồ thị G .

Vòng (mạch) β của đồ thị có hướng G được gọi là vòng (mạch) Eulere, nếu nó đi qua tất cả các cung của đồ thị G và qua mỗi cung đúng một lần. Nói cách khác, vòng (mạch) Eulere của đồ thị có hướng G là một vòng (mạch) đơn, mà nó đi qua tất cả các cung của đồ thị G .

Đồ thị có hướng G được gọi là đồ thị Eulere, nếu nó có vòng Eulere.

2. ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ ĐỂ MỘT ĐA ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG LÀ ĐỒ THỊ EULERE

Giả sử $G = (X, E)$ là một đồ thị vô hướng.

Bổ đề 11.1

Nếu tất cả các đỉnh của đa đồ thị G đều có bậc chẵn, thì xuất phát từ đỉnh A tùy ý của G ta đều vạch ra được một chu trình đơn đi qua A .

Chứng minh:

1) Nếu A là đỉnh biệt lập, thì chu trình đi qua A có độ dài bằng 0.

2) Nếu A có bậc dương, thì xuất phát từ A phải có ít nhất 2 cạnh. Giả sử hai trong các cạnh của đỉnh A là (A, B) và (A, C) .

Theo (AB) , (AC) đi theo hướng độc lập nhau, mỗi khi qua một đỉnh, thì đi vào bằng một cạnh, đi ra theo một cạnh khác và không bao giờ lặp lại.

Vì đồ thị G hữu hạn, nên sau một số bước hai xích phải gặp nhau và ta được chu trình đơn đi qua A . Bổ đề được chứng minh.

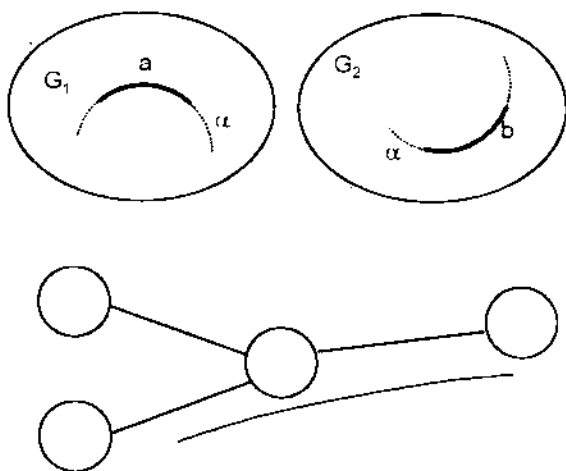
Bổ đề 11.2

Nếu đa đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ là đồ thị Eulere, thì G phải chứa không quá một thành phần liên thông có cạnh và các đỉnh đều bậc chẵn.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị G có chu trình Eulere, nhưng hoặc chứa không ít hơn 2 thành phần liên thông có cạnh, hoặc có đỉnh bậc lẻ.

1) Giả sử G chứa không ít hơn 2 thành phần liên thông có cạnh và hai trong các thành phần liên thông chứa cạnh của G là G_1, G_2 (hình 11.4), và α là một trong những chu trình Eulere của G . Khi đó, nếu α xuất phát từ G_1 thì nó không thể sang G_2 để đi qua b . Ngược lại, nếu α bắt đầu từ G_2 thì nó không thể sang G_1 để đi qua a . Cả hai trường hợp ta đều đi đến mâu thuẫn. Vậy đồ thị G phải có không quá một thành phần liên thông chứa cạnh.



Hình 11.4

2) Giả sử G có đỉnh bậc lẻ và A là một trong những đỉnh bậc lẻ của G đồng thời A có bậc bằng 3 (hình 11.4) và ba cạnh thuộc A là (A, B) , (A, C) và (A, D) .

Khi đó, nếu chu trình Eulere α muốn đi qua cả 3 cạnh thuộc A , thì có cạnh nó phải đi 2 lần, trường hợp qua mỗi cạnh không quá 1 lần, thì α không đi qua được cả ba cạnh thuộc đỉnh A . Vậy ta đã đi đến mâu thuẫn với tính chất của chu trình Eulere. Do đó G không thể chứa đỉnh bậc lẻ.

Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 11.3.

Nếu đa đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ chứa không quá một thành phần liên thông có cạnh và các đỉnh đều bậc chẵn, thì G có chu trình Eulere.

Chứng minh (Thuật toán tìm chu trình Eulere thứ nhất):

1) Nếu tất cả các đỉnh của G đều biệt lập, thì chu trình Eulere trong trường hợp này có độ dài bằng 0.

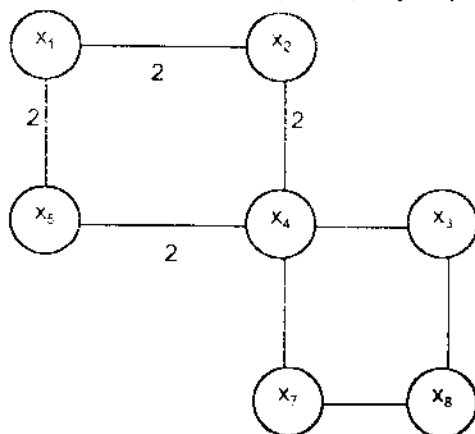
2) Giả sử G_1 là thành phần liên thông duy nhất trong G có chứa cạnh. Khi đó xuất phát từ đỉnh tùy ý $A \in G_1$, theo Bổ đề 11.2, Vạch ra

Xuất phát từ x_6 vạch chu trình đơn:

$$p_{11}: (x_5, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_7)(x_7, x_6)(x_6, x_5)$$

Và dùng số 1 để ghi trên các cạnh thuộc p_{11}

"Xoá" p_{11} khỏi đồ thị G . Đồ thị còn nhận được ký hiệu bằng G_1 hình 11.6.



Hình 11.6

G_1 và p_{11} có 4 đỉnh chung là x_2, x_3, x_5, x_7 . Đồ thị G_1 cũng có các đỉnh đều bậc chẵn. Qua đỉnh chung x_2 trong G_1 vạch ra một chu trình đơn mới p_{12} và dùng số 2 để ghi trên các cạnh thuộc p_{12} :

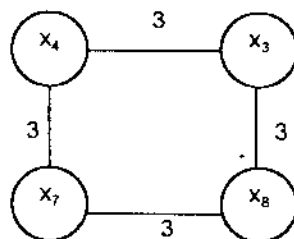
$$p_{12}: (x_2, x_1)(x_1, x_5)(x_5, x_4)(x_4, x_2)$$

Thông nhất các chu trình p_{11} và p_{12} thành chu trình đơn mới p_1 :

$$p_1: (x_5, x_2)(x_2, x_1)(x_1, x_5)(x_5, x_4)(x_4, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_7)(x_7, x_6)(x_6, x_5)$$

"Xoá" chu trình p_{12} khỏi đồ thị G_1 , phần còn lại ký hiệu bằng G_2 (Hình 11.7)

G_2 và p_1 có các đỉnh chung là x_3, x_4 , và x_7 . G_2 cũng có các đỉnh bậc chẵn. Qua đỉnh chung x_4 vạch ra trong G_2 chu trình đơn mới p_{21} và dùng số 3 để ghi trên các cạnh thuộc p_{21} :



Hình 11.7

$$p_{21}: (x_4, x_3)(x_3, x_8)(x_8, x_7)(x_7, x_4)$$

Thống nhất chu trình p_2 và p_1 thành chu trình đơn

$$p_2: (x_5, x_2)(x_2, x_1)(x_1, x_7)(x_7, x_4)(x_4, x_3)(x_3, x_6)(x_6, x_8)(x_8, x_9)(x_9, x_4)(x_4, x_2) \\ (x_2, x_1)(x_1, x_7)(x_7, x_4)(x_4, x_3)(x_3, x_6)(x_6, x_8)(x_8, x_9)(x_9, x_4)(x_4, x_2)$$

Chu trình đơn p_2 đi qua tất cả các cạnh của G , nên nó là một chu trình Eulere của G .

Từ bổ đề 11.2 và 11.3 suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 11.1

Đa đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ là đa đồ thị Eulere khi và chỉ khi nó chứa không quá một thành phần liên thông có cạnh và các đỉnh đều bậc chẵn.

Hệ quả 11.2

Đa đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ có xích Eulere khi và chỉ khi nó chứa không quá một thành phần liên thông có cạnh và nếu số đỉnh bậc lẻ là 0 hoặc 2.

1) Điều kiện cần

Vì nếu trong G có xích Eulere α , thì nó phải đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, nên G không thể chứa quá một thành phần liên thông có cạnh. Ngoài ra, chỉ có thể đỉnh đầu và đỉnh cuối của α (nếu chúng khác nhau) là có bậc lẻ và α qua mỗi đỉnh đều đi vào bằng một cạnh và đi ra bằng một cạnh khác và không lặp lại, nên chỉ có hai đỉnh là đầu của α mới bậc lẻ. Do đó số đỉnh bậc lẻ trong G chỉ có thể là 0 hoặc 2.

2) Điều kiện đủ

a) Nếu đồ thị G không chứa đỉnh bậc lẻ, thì theo bổ đề 11.3, nó có chu trình Eulere - Xích Eulere khép kín.

b) Nếu trong G có đúng hai đỉnh bậc lẻ, chẳng hạn, A, B là 2 đỉnh bậc lẻ của G . Nếu thêm vào cạnh mới (A, m, B) , thì đồ thị nhận được G_1 thỏa mãn điều kiện bổ đề 11.3, nên nó có chu trình Eulere α . Chu trình α đi qua mỗi cạnh của đồ thị G đúng một lần và qua cạnh (A, m, B) cũng đúng một lần, nên khi loại cạnh mới thêm khỏi α , thì phần còn lại chính là xích Eulere của đồ thị G .

Hệ quả được chứng minh.

3. THUẬT TOÁN ĐỂ TÌM TRỰC TIẾP CHU TRÌNH EULERE (JLERG)

Để tìm chu trình Eulere của đa đồ thị G ta thực hiện thuật toán sau:

Xuất phát từ một đỉnh tùy ý của G , mỗi khi đi qua một cạnh ta "Xóa" cạnh đó đi và ghi lại theo thứ tự từ trái sang phải.

Khi thực hiện thuật toán này cần lưu ý: Mỗi khi gặp cạnh bậc cầu (cạnh duy nhất nối hai thành phần liên thông) cần phải xóa hết một trong hai thành phần liên thông rồi mới "xóa" cạnh bậc cầu.

Chú ý: Nếu đa đồ thị có 2 đỉnh bậc lẻ, thì khi tìm xích Eulere cần xuất phát từ một trong hai đỉnh bậc lẻ và sẽ kết thúc tại đỉnh bậc lẻ kia.

4. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG LÀ ĐỒ THỊ EULERE.

Ta mở rộng những khái niệm đã xét ở trên cho trường hợp đồ thị có hướng.

Định nghĩa: Đồ thị có hướng $G = (X, U)$ được gọi là đồ thị tựa đối xứng, nếu tại mỗi đỉnh x số cung đi vào đỉnh x bằng số cung đi ra khỏi đỉnh x , nói cách khác, nếu

$$m^-(x) = m^+(x)$$

Định lý 11.1

Đa đồ thị có hướng $G = (X, U)$ là đồ thị Eulere khi và chỉ khi nó chứa không quá một thành phần liên thông có cung và tựa đối xứng.

Chứng minh:

1) Điều kiện cần.

Nếu đa đồ thị G có vòng Eulere α , thì α phải đi qua tất cả các cung, nên G không thể chứa quá 1 thành phần liên thông có cung. Mặt khác vì α phải đi qua mỗi cung đúng một lần, nên mỗi khi qua đỉnh α đi vào bằng một cung, đi ra bằng một cung khác và không bao giờ lặp lại, nên số cung đi vào tại mỗi đỉnh phải bằng số cung đi ra khỏi đỉnh này, tức đồ thị G phải tựa đối xứng.

2. *Điều kiện đủ.* Giả sử đối với những đa đồ thị có hướng với ít hơn m cung chứa không quá 1 thành phần liên thông có cạnh và tựa đối xứng đã có vòng Eulere. Cần chỉ ra rằng khẳng định cũng đúng với đa đồ thị có m cung.

Xuất phát từ đỉnh x_0 tùy ý, đi theo hướng bất kỳ, không đi qua cung nào hai lần và mỗi khi tới một đỉnh, mà có cung đi ra chưa đi qua thì đi tiếp cho tới khi gặp đỉnh không còn cung để đi tiếp. Đỉnh này tất phải là x_0 và ta được một vòng đơn ký hiệu bằng β . Có thể β chưa đi qua hết các cung của G . Vậy phần còn lại là một đồ thị bộ phận tựa đối xứng G .

Giả sử $C_1, C_2, \dots, C_k$ là các thành phần liên thông của G có chứa ít nhất một cung. Theo giả thiết quy nạp $C_1, C_2, \dots, C_k$ đã có các vòng Eulere $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$.

Đồ thị là thành phần liên thông duy nhất của G liên thông nên β lần lượt gặp C_i ($1 \leq i \leq k$) tại các đỉnh tương ứng

$$x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \dots, x_k \in C_k.$$

Thống nhất các vòng $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ thành vòng đơn γ đi qua tất cả các cung của đồ thị bằng cách: Từ x_0 đi theo β đến x_1 , sau đó đi theo β_1 trở về x_1 , rồi lại theo β sang $x_2 \dots$ cứ tiếp tục đi như vậy cho đến khi đến x_k . Sau khi đi theo β_k để lại x_k tiếp tục đi theo β về đỉnh x_0 .

Vòng β chính là một vòng Eulere của đồ thị G .

Hệ quả 11.3

Đa đồ thị có hướng $G = (X, U)$ có đường Eulere (không khép kín) khi và chỉ khi G có đúng một thành phần liên thông chứa cung, một đỉnh với bậc vào lớn hơn bậc ra một đơn vị một đỉnh với bậc ra lớn hơn bậc vào một đơn vị và tất cả các đỉnh còn lại đều có bậc vào, bậc ra bằng nhau.

Chứng minh:

1) *Điều kiện cần.* Giả sử G có đường Eulere (không khép kín) β . Vì β phải đi qua tất cả các cung của đồ thị G , nên G không thể có quá một thành phần liên thông có cung. (Trường hợp ngược lại, β không thể đi qua được tất cả các cung của G).

Trừ đỉnh xuất phát đường β bắt đầu bằng cung đi ra khỏi đỉnh này, đỉnh cuối cùng đường β kết thúc bằng một cung đi vào đỉnh này, tại mỗi đỉnh còn lại bao giờ β cũng tới bằng một cung đi vào và rời bằng một cung đi ra, nên G chỉ có thể có đúng một đỉnh có số cung đi vào lớn hơn số cung đi ra là một, đúng một đỉnh có số cung đi ra lớn hơn số cung đi vào là 1, mỗi đỉnh còn lại đều có số cung đi vào bằng số cung đi ra.

2) *Điều kiện đủ.* Giả sử đa đồ thị G có đúng một thành phần liên thông G_1 chứa cung, một đỉnh (A) có số cung đi ra lớn hơn số cung đi vào là một, một đỉnh (B) có số cung đi vào lớn hơn số cung đi ra là một và mỗi đỉnh còn lại đều có số cung đi vào và đi ra bằng nhau.

Thêm vào cung mới đi từ đỉnh (B) sang đỉnh (A) . Ký hiệu cung này bằng (B, m, A) . Đa đồ thị nhận được ký hiệu bằng G' , thỏa mãn điều kiện của định lý 11.1, nên nó có vòng Eulere (β). Vòng β đi qua mỗi cung của G đúng một lần và qua cung (B, m, A) cũng đúng một lần, nên loại cung (B, m, A) khỏi β , được đường Eulere của đa đồ thị G .

5. THUẬT TOÁN TÌM VÒNG EULERE

Để tìm vòng Eulere của đồ thị có hướng $G = (X, U)$ xuất phát từ một đỉnh tùy ý, mỗi khi đi dọc theo hết một cung ta xóa cung đó đi và ghi lại theo thứ tự từ trái sang phải, rồi đi tiếp, nếu còn cung xuất phát từ đỉnh cuối của cung vừa mới đi qua. Khi thực hiện thuật toán này cần lưu ý: Mỗi khi gặp cung cầu (cung duy nhất nối giữa hai thành phần liên thông), thì phải xóa hết cung của thành phần liên thông, mà cầu xuất phát, rồi mới xóa cầu.

Chú ý: Nếu A là đỉnh duy nhất trong đa đồ thị có hướng $G = (X, U)$ với số cung ra lớn hơn số cung vào là một, thì khi tìm đường Eulere của G ta phải xuất phát từ đỉnh A .

CHƯƠNG 12

MẠNG VẬN TẢI

1. MẠNG VẬN TẢI

Mạng vận tải là một đồ thị có hướng hữu hạn không có khuyên $G = (X, U)$ với $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, trong đó:

1) Mỗi cung u được gán một số $C(u) \geq 0$ và được gọi là khả năng thông qua của cung u .

2) Một và chỉ một đỉnh x_0 không có cung đi vào. Đỉnh x_0 được gọi là lối vào (duy nhất) của mạng.

3) Một và chỉ một đỉnh x_n không có cung đi ra. Đỉnh x_n được gọi là lối ra (duy nhất) của mạng.

2. LƯỠNG VẬN TẢI

Để định lượng khai thác, tức xác định lượng vật chất chuyển qua mạng vận tải $G = (X, U)$ người ta đưa ra khái niệm luồng vận tải và nó được định nghĩa như sau:

Hàm $\varphi(u)$ xác định trên tập cung U và nhận giá trị nguyên được gọi là luồng vận tải của mạng vận tải G , nếu

$$1) \quad \forall u \in U \quad \varphi(u) \geq 0$$

$$2) \quad \forall x (x \neq x_0, x \neq x_n) \quad \sum_{u \in U^+(x)} \varphi(u) = \sum_{v \in U^-(x)} \varphi(v)$$

$$3) \quad \forall v \in U \quad \varphi(u) \leq C(u)$$

Ta xem $\varphi(u)$ như là lượng hàng chuyển trên cung $U = (x, y)$ từ đỉnh x sang đỉnh y và không vượt quá khả năng thông qua của cung này. Ngoài

ra từ điều kiện (2) ta thấy rằng, nếu x không phải là lối vào x_0 hay lối ra x_n , thì lượng hàng chuyển tới x bằng lượng hàng chuyển khỏi x .

Từ quan hệ (2) suy ra:

$$4) \quad \sum_{u \in U^-(x_n)} \varphi(u) = \sum_{v \in U^+(x_0)} \varphi(v) = \varphi_{x_n}$$

Đại lượng φ_{x_n} (φ_{x_0}) được gọi là luồng qua mạng, hay là cường độ luồng tại điểm x_n hay giá trị của luồng φ . Bài toán đặt ra ở đây là tìm φ để đạt φ_{x_n} max, tức là tìm giá trị lớn nhất của luồng.

Giả sử $A \subset X$. Dùng $U^-(A)$ để kí hiệu tập cung có điểm cuối thuộc tập A , nhưng điểm đầu không thuộc A , còn $U^+(A)$ là tập cung có điểm đầu thuộc A và điểm cuối nằm ngoài A .

Đối với tập cung M tùy ý đại lượng $\varphi(M) = \sum_{u \in M} \varphi(u)$ được gọi là luồng của tập cung M .

Từ điều kiện (2) dễ dàng suy ra hệ quả:

Hệ quả 12.1

Nếu φ là luồng của mạng vận tải $G = (X, U)$, thì đối với mọi $A \subset (X - \{x_0, x_n\})$ đều có:

$$\varphi(U^-(A)) = \varphi(U^+(A))$$

3. BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI

Bài toán 1. Cho mạng vận tải $G = (X, U)$. Hãy tìm luồng φ để đạt φ_{x_n} max trên mạng G ?

Nguyên lý của các thuật toán giải bài toán tìm luồng cực đại là như sau:

3.1. Thiết diện

Giả sử $A \subset X$ là tập con tùy ý không chứa đỉnh vào x_0 và chứa đỉnh ra x_n .

Tập $U^-(A)$ được gọi là một thiết diện của mạng vận tải G .

Đại lượng $C(U(A)) = \sum_{u \in U(A)} C(u)$ được gọi là khả năng thông qua của thiết diện $U(A)$.

Từ định nghĩa thiết diện và khả năng thông qua của nó ta nhận thấy rằng, mỗi đơn vị hàng hoá được chuyển từ x_0 đến x_n ít nhất cũng phải một lần qua một cung nào đó của thiết diện $U(A)$. Vì vậy, dù luồng φ và thiết diện $U(A)$ như thế nào đi nữa cũng vẫn thoả mãn quan hệ:

$$\varphi_n \leq C(U(A))$$

Bởi vậy, nếu đối với luồng φ và thiết diện V , mà có:

$$\varphi_n = C(V)$$

thì chắc chắn rằng luồng φ đạt giá trị lớn nhất (và thiết diện V có khả năng thông qua nhỏ nhất).

3.2. Luồng đầy

Cung u trong mạng vận tải G với luồng vận tải φ được gọi là cung bão hoà, nếu $\varphi(u) = C(u)$.

Luồng φ của mạng vận tải G được gọi là luồng đầy, nếu mỗi đường đi từ x_0 đến x_n đều chứa ít nhất một cung bão hoà.

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng, nếu luồng φ trong mạng vận tải G chưa đầy thì nhất định tìm được đường α đi từ đỉnh vào x_0 đến đỉnh ra x_n không chứa cung bão hoà. Khi đó đối với mỗi cung u thuộc α ta tăng luồng bằng $\varphi'(u)$ với:

$$\varphi'(u) = \varphi(u) + 1, \quad \text{nếu } u \in \alpha$$

$$\varphi'(u) = \varphi(u), \quad \text{nếu } u \notin \alpha$$

Khi đó φ' cũng là một luồng, mà giá trị của nó là:

$$\varphi'_n = \varphi_n + 1 > \varphi_n$$

Như vậy, đối với mỗi luồng không đầy ta có thể nâng giá trị của nó và nâng cho tới khi nhận được một luồng đầy.

Tuy vậy, thực tế cho thấy có thể có một luồng đầy, nhưng vẫn chưa đạt tới giá trị cực đại. Bởi vậy, cần phải dùng thuật toán Ford - Fulkereson để tìm giá trị cực đại của luồng.

3.3. Thuật toán tổng quát để xác định luồng cực đại (thuật toán Ford - Fulkereson)

Để tìm luồng cực đại của mạng vận tải G ta xuất phát từ luồng tùy ý φ của G , rồi nâng luồng lên đầy, sau đó áp dụng thuật toán Ford - Fulkereson hoặc ta có thể áp dụng thuật toán Ford - Fulkereson trực tiếp đối với luồng φ .

Thuật toán gồm hai bước

Bước 1 (đánh dấu ở đỉnh của mạng)

Đỉnh vào x_0 được đánh dấu bằng 0;

1) Nếu đỉnh x_i đã được đánh dấu, thì ta dùng chỉ số $+i$ để đánh dấu cho mọi đỉnh y chưa được đánh dấu, mà từ x_i sang y có cung và cung này chưa bão hoà nghĩa là:

$$(x_i, y) \in U \text{ và } \varphi(x_i, y) < C(x_i, y)$$

2) Nếu đỉnh x_i đã được đánh dấu, thì ta dùng chỉ số $-i$ để đánh dấu cho mọi đỉnh z chưa được đánh dấu, mà z sang x_i có cung và luồng của cung này dương, nghĩa là $(z, x_i) \in U$ và $\varphi(z, x_i) > 0$.

Nếu với phương pháp này ta đánh dấu được tới đỉnh ra x_n , thì trong G tồn tại giữa x_0 và x_n một xích α , mọi đỉnh đều khác nhau và được đánh dấu theo chỉ số của đỉnh liền trước nó (chỉ sai khác nhau về về dấu). Khi đó chắc chắn ta nâng được giá trị của luồng.

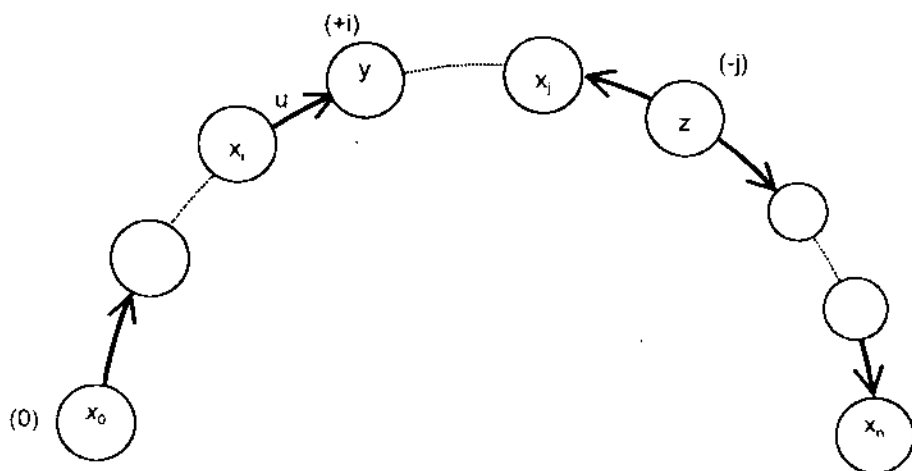
Bước 2: (nâng giá trị của luồng)

Để nâng giá trị của luồng φ ta đặt:

$$\varphi'(u) = \varphi(u), \quad \text{nếu } u \notin \alpha.$$

$$\varphi'(u) = \varphi(u) + 1, \quad \text{nếu } u \in \alpha \text{ được định hướng theo chiều của xích } \alpha \text{ đi từ } x_0 \text{ đến } x_n,$$

$$\varphi'(u) = \varphi(u) - 1, \quad \text{nếu } u \in \alpha \text{ và } u \text{ được định hướng ngược với chiều của xích } \alpha \text{ đi từ } x_0 \text{ đến } x_n \text{ (hình 12.1)}$$



Hình 12.1

Đối với φ' cả ba điều kiện (1) - (3) của luồng đều thoả mãn, nên φ' cũng là một luồng và ta có:

$$\varphi'_n = \varphi_n + 1$$

Như vậy, ta đã nâng được luồng lên một đơn vị.

Sau đó lặp lại một vòng mới. Vì khả năng thông qua của các cung đều hữu hạn, nên quá trình phải dừng lại sau một số hữu hạn bước.

Bước 3: Nếu với luồng φ^0 bằng phương pháp trên ta không thể nâng giá trị của luồng lên nữa, nghĩa là ta không thể đánh dấu được đỉnh x_n , thì ta nói rằng quá trình nâng luồng kết thúc và φ^0 đã đạt giá trị cực đại, đồng thời gọi φ^0 là luồng kết thúc.

3.4. Tính cực đại của luồng kết thúc

Khi mạng vận tải $G = (X, U)$ đạt tới luồng φ^0 , thì bước tiếp theo ta không thể đánh dấu được tới đỉnh ra x_n . Trên cơ sở hiện trạng được đánh dấu tại bước này ta sẽ chứng minh rằng luồng φ^0 đã đạt được giá trị cực đại.

Hệ quả 12.2

Đối với mọi luồng φ của mạng vận tải $G = (X, U)$ và đối với mọi tập con $A \subset X$, chứa đỉnh ra x_n và không chứa đỉnh vào x_0 , đều có:

$$\varphi_{x_n} = \varphi(U^-(A)) - \varphi(U^+(A))$$

Chứng minh:

Đặt $A_1 = A - \{x_n\}$. Dùng C_1 để ký hiệu tập cung, mà đỉnh đầu nằm ngoài A , còn đỉnh cuối là x_n , tức:

$$C_1 = \{(a, x_n) \mid a \notin A\}$$

Khi đó
$$U^-(A) = U^-(A_1) \cup C_1 \quad (\text{hình 12.2})$$

và theo hệ quả 12.1 với φ là luồng tùy ý của G :

$$\varphi(U^-(A_1)) = \varphi(U^+(A_1)) \quad (1)$$

Dùng C_2 để ký hiệu tập cung có đỉnh đầu thuộc A_1 và đi vào x_n :

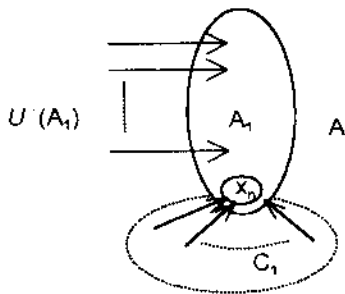
$$C_2 = \{(b, x_n) \mid b \in A_1\}$$

Khi đó: $U^+(A) = U^+(A_1) \cup C_2$ (hình 12.3)

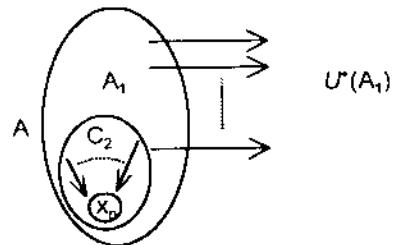
$$\varphi(U^+(A)) = \varphi(U^+(A_1)) + \varphi(C_2) \quad (2)$$

và vì $U^-(A_1) \cap C_1 = \emptyset$ nên

$$\varphi(U^-(A)) = \varphi(U^-(A_1)) + \varphi(C_1)$$



Hình 12.2



Hình 12.3

Vì C_1, C_2 đã chứa tất cả các cung đi tới đỉnh ra x_n tức:

$$U^-(x_n) = C_1 \cup C_2$$

Và $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, nên

$$\varphi_{x_n} = \varphi(U^-(x_n)) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2) \quad (3)$$

Khi đó, từ (1) - (3) ta có

$$\varphi_{x_n} = \varphi(U^-(A)) - \varphi(U^+(A))$$

Bổ đề được chứng minh.

Định lý 12.1 (Định lý Ford - Fulkerson)

Trong một mạng vận tải cho trước, giá trị lớn nhất của luồng bằng khả năng thông qua nhỏ nhất của thiết diện, tức là:

$$\varphi_{x_n} \max = \max_{\varphi} \varphi_{x_n} = \min_{\substack{A \subset X \\ x_s \in A \\ x_n \notin A}} C(U^-(A))$$

Chứng minh:

Giả sử trong mạng vận tải $G = (X, U)$ φ^0 là luồng cuối cùng, mà sau đó bằng phương pháp đánh dấu của thuật toán Ford - Fulkerson không đạt được tới đỉnh ra x_n . Trên cơ sở hiện trạng được đánh dấu lần cuối cùng này ta dùng B để ký hiệu tập gồm tất cả các đỉnh của G không được đánh dấu. Khi đó $x_s \notin B$, $x_n \in B$. Bởi vậy B là một thiết diện của mạng vận tải G và theo hệ quả 12.2

$$\varphi_{x_n}^0 = \varphi^0(U^-(B)) - \varphi^0(U^+(B)) \quad (1)$$

Đối với mỗi cung $u = (a, b)$ thuộc $U(B)$ thì $a \notin B$ và $b \in B$, tức đỉnh đầu a được đánh dấu, còn đỉnh cuối b không được đánh dấu, nên theo nguyên tắc đánh dấu thứ nhất, u đã là cung bão hoà, tức là:

$$\varphi^0(u) = C(u)$$

$$\text{Do đó: } \varphi^0(U^-(B)) = \sum_{u \in U^-(B)} \varphi^0(u) = \sum_{u \in U^-(B)} C(u) = C(U^-(B)) \quad (2)$$

Đối với mỗi cung $v = (s, t) \in U^+(B)$ thì $s \notin B$ và $t \in B$, tức đỉnh đầu s không được đánh dấu, còn đỉnh cuối t lại được đánh dấu nên theo nguyên tắc đánh dấu thứ hai luồng $\varphi^0(v) = 0$.

Bởi vậy:

$$\varphi^0(U^+(B)) = \sum_{v \in U^+(B)} \varphi^0(v) = 0$$

Từ (1) - (3) suy ra:

$$\varphi_{x_n}^0 = C(U^-(B))$$

Mặt khác do φ_{x_n}'' là giá trị lớn nhất của luồng đạt được, còn $C(U(B))$ là giá trị nhỏ nhất trong các khả năng thông qua của các thiết diện thuộc mạng vận tải G , nên có:

$$\varphi_{x_n} \max = \max_{\varphi} \varphi_{x_n} = \min_{\substack{A \subseteq X \\ x_n \notin A \\ x_0 \in A}} C(U(A))$$

Định lý được chứng minh.

Chú ý: Nếu mạng vận tải $G = (X, U)$ với tập cung:

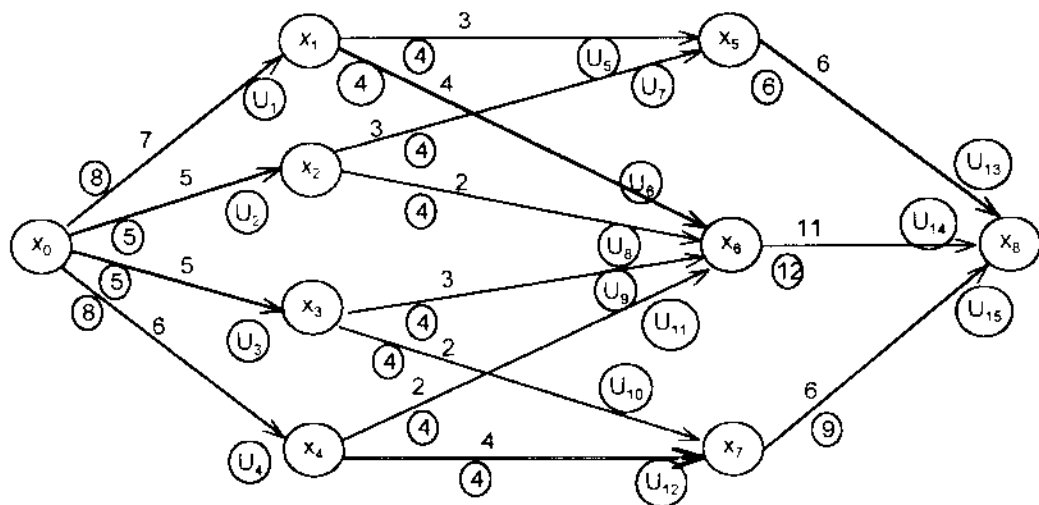
$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_p, \dots, u_{m-1}, u_m\}$$

Gồm m phân tử, thì mỗi luồng φ của nó được biểu diễn dưới dạng một vectơ m toa đồ:

$$\varphi = \{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_i), \varphi(u_{i+1}), \dots, \varphi(u_{m-1}), \varphi(u_m)\}$$

trong đó $\varphi(u_i)$ là luồng của cung u_i ($1 \leq i \leq m$).

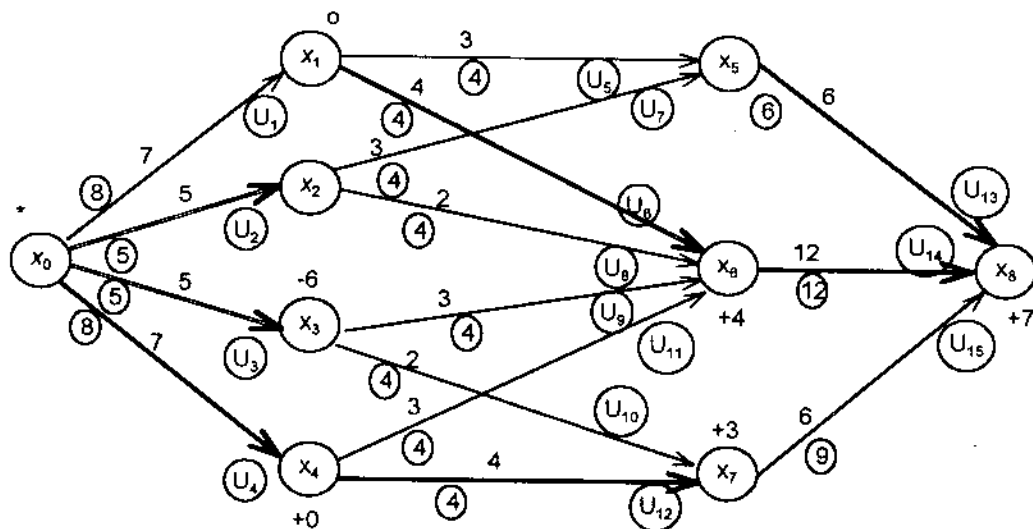
Ví dụ: Cho mạng vận tải như hình 12.4 với kí hiệu các cung và khả năng thông qua được đặt trong khuyên tròn, luồng được ghi trên các cung, còn cung bão hoà được tô đậm:



Hình 12.4

$$\begin{aligned} \varphi &= \{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3), \varphi(u_4), \varphi(u_5), \varphi(u_6), \varphi(u_7), \varphi(u_8), \varphi(u_9), \varphi(u_{10}), \\ &\quad \varphi(u_{11}), \varphi(u_{12}), \varphi(u_{13}), \varphi(u_{14}), \varphi(u_{15})\} \\ &= \{7, 5, 5, 6, 3, 4, 3, 2, 3, 2, \\ &\quad 2, 4, 6, 11, 6\} \end{aligned}$$

Luồng φ có đường $\alpha = (x_0, x_4), (x_4, x_6), (x_6, x_8)$ gồm các cung chưa bão hoà nên nó chưa đầy. Do đó có thể nâng luồng của các cung này lên một đơn vị, để được φ' với $\varphi'(U_i) = \varphi(U_i) + 1$ với $i = 4, 11, 14$, và $\varphi'(U_i) = \varphi(U_i)$ với $(1 \leq i \leq 15 \text{ và } i \neq 4, 11, 14)$ (hình 2.5).



Hình 12.4

$$\varphi' = \{7, 5, 5, 7, 3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 12, 6\}$$

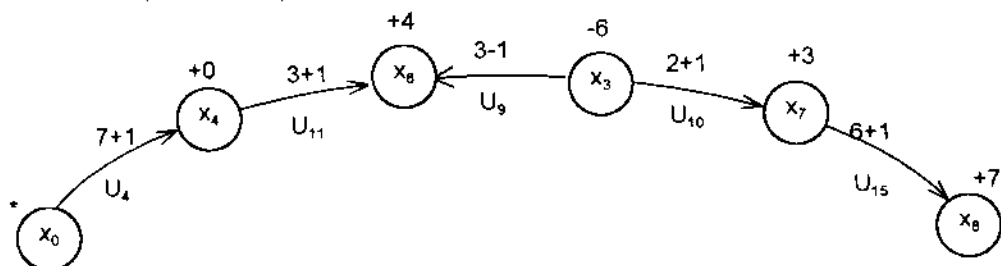
Do mỗi đường xuất phát từ x_0 đến x_8 đều chứa ít nhất một cung bão hoà, nên luồng φ' là luồng đầy. Song nó chưa phải luồng cực đại.

Áp dụng thuật toán Ford - Fulkerson để nâng luồng φ' .

Đầu tiên đánh dấu x_0 bằng *. Cung U_4 có đỉnh đầu (x_0) được đánh dấu và $\varphi'(U_4) = 7 < 8 = C(U_4)$, nên đỉnh cuối (x_4) được đánh dấu bằng $+0$. Cung U_{11} có đỉnh đầu (x_4) được đánh dấu và $\varphi'(U_{11}) = 3 < 4 = C(U_{11})$, nên đỉnh cuối (x_6) được đánh dấu bằng $+4$. Cung U_{14} có đỉnh đầu (x_6) được đánh dấu nhưng $\varphi'(U_{14}) = 12 = C(U_{14})$, nên không thể vận dụng qui tắc thứ nhất để đánh dấu cho đỉnh cuối (x_8) của U_{14} . Khi đó ta có thể vận dụng qui tắc thứ hai để đánh dấu cho đỉnh đầu (x_3) của cung U_9 (vì cung U_9 có điểm cuối (x_6) được đánh dấu và $\varphi'(U_9) > 0$) bằng -6 . Cung U_{10} có đỉnh đầu (x_3) được đánh dấu và $\varphi'(U_{10}) = 2 < 4 = C(U_{10})$, nên ta vận dụng được qui tắc thứ nhất để đánh dấu cho đỉnh cuối (x_7) bằng $+3$. Cung U_{15}

có đỉnh đầu (x_7) được đánh dấu và $\varphi^1(U_{15}) = 6 < 8 = C(U_{15})$, nên ta vận dụng qui tắc thứ nhất để đánh dấu đỉnh cuối (x_8) bằng +7.

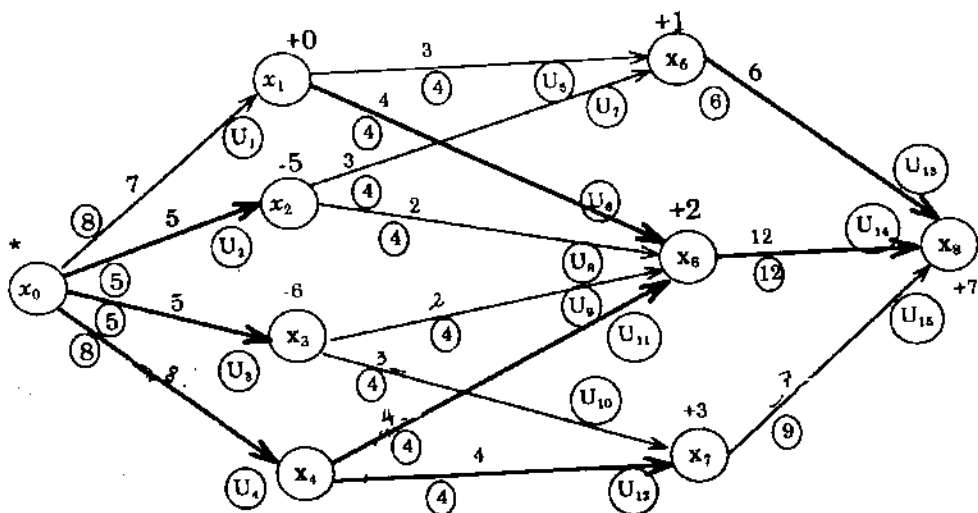
Quá trình đánh dấu đạt tới đỉnh ra x_8 , nên ta có thể nâng luồng φ^1 lên một đơn vị bằng cách biến đổi luồng tại các cung thuộc xích α được đánh dấu (hình 12.6)



Hình 12.6

Xét theo chiều xích α đi từ đỉnh vào x_0 đến đỉnh ra x_8 các cung U_4 , U_{11} , U_{10} , U_{15} cùng chiều, nên tăng luồng cho mỗi cung này lên một đơn vị, còn cung U_9 ngược chiều ta giảm luồng của nó đi một đơn vị. Sau khi hoàn tất phép biến đổi này ta được luồng φ^2 : $\varphi^2(U_i) = \varphi^1(U_i) + 1$ với $i = 4, 11, 10, 15$,

$\varphi^2(U_j) = \varphi^1(U_j)$ với $j = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14$, $\varphi^2(U_9) = \varphi^1(U_9) - 1$ và $\varphi^2 = (7, 5, 5, 8, 3, 4, 3, 2, 2, 3, 4, 4, 6, 12, 7)$

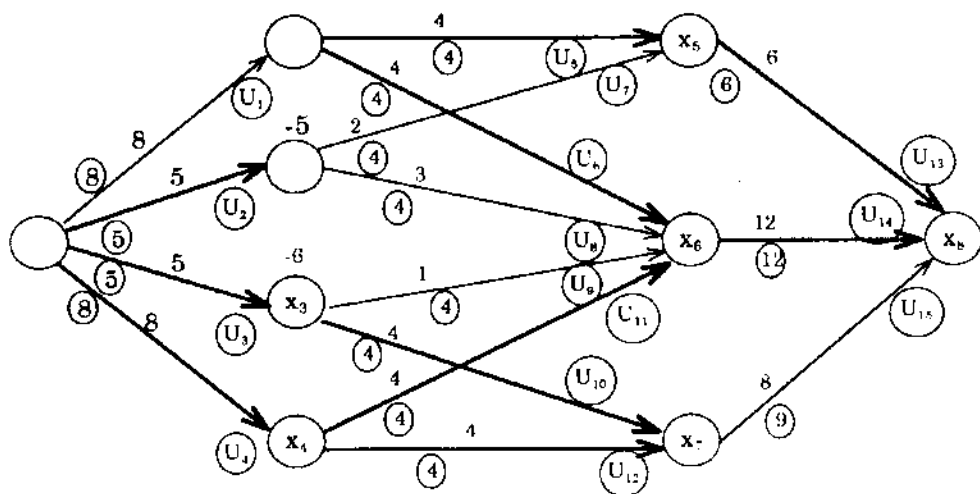


Hình 12.7

Tiếp tục áp dụng thuật toán Ford - Fulkerson để nâng luồng φ^2 bằng cách vận dụng qui tắc thứ nhất để đánh dấu các đỉnh x_i bằng +0, x_5 bằng +1, x_6 bằng +2, x_7 bằng +3, x_8 bằng +7 và vận dụng qui tắc thứ 2 để đánh dấu x_2 bằng -5, x_3 bằng -6 (hình 12.7)

Dựa theo chiều của xích được đánh dấu đi từ x_0 đến x_8 luồng của các cung $U_1, U_7, U_8, U_{10}, U_{15}$ được tăng một đơn vị, còn luồng của các cung U_2, U_9 phải giảm đi một đơn vị và luồng φ^3 nhận được sẽ là:

$$\varphi^3 = \{8, 5, 5, 8, 4, 4, 2, 3, 1, 4, 4, 4, 6, 12, 8\}$$



Hình 12.8

Tiếp theo ta chỉ có thể đánh dấu được đỉnh x_8 (hình 12.8) nên quá trình nâng luồng kết thúc và ta được:

$$\varphi_{x_8} \max = 6 + 12 + 8 = 26$$

4. BÀI TOÁN LUỒNG CỰC TIỂU

Đối ngẫu với bài toán luồng cực đại ta xét bài toán sau:

Bài toán: Cho mạng vận tải $G = (X, U)$. Cần tìm luồng φ có giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện:

$$(3') \quad \varphi(u) \geq C(u) \quad (u \in U)$$

Bài toán này rất giống bài toán luồng cực đại và cũng thường gặp trong thực tế.

Thuật toán cho bài toán tìm luồng cực tiểu

Ta có thể dùng phương pháp giống như phương pháp giải bài toán tìm luồng cực đại. Xuất phát từ luồng φ nào đó thoả mãn điều kiện (3') ta dùng phương pháp sau đây để giảm giá trị của luồng φ .

Đầu tiên đánh dấu lối ra x_n .

1) Nếu đỉnh x_i đã được đánh dấu, thì ta sẽ ghi hệ số $+j$ cho mọi đỉnh x_j , mà từ x_i sang x_j có cung, x_j chưa được đánh dấu và $\varphi(x_i, x_j) > C(x_i, x_j)$.

2) Nếu đỉnh x_j đã được đánh dấu, thì ta ghi hệ số $-j$ cho mọi đỉnh x_i chưa được đánh dấu, mà từ x_j sang x_i có cung.

Nếu bằng cách đánh dấu này, mà đạt tới được đỉnh vào x_o , thì có thể giảm luồng đi một đơn vị, nếu không đánh dấu được tới x_o , thì luồng φ đã đạt giá trị cực tiểu.

CHƯƠNG 13

CẶP GHÉP

Trước khi đi vào các khái niệm cơ bản ta làm quen với các bài toán, mà chúng được giải quyết nhờ các kết quả của cặp ghép.

Bài toán về các học sinh nam và học sinh nữ: Trong một trường trung học, mỗi học sinh nữ có m bạn trai và mỗi học sinh nam có m bạn gái. Vậy liệu có thể sắp xếp mỗi cô gái khiêu vũ với một bạn trai của mình và mỗi cậu con trai khiêu vũ với một bạn gái của mình được không?

Bài toán phân công: Một cơ quan có n nhân viên $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$ nhiệm vụ. Mỗi nhân viên, do trình độ, có thể đảm nhiệm được một hay nhiều nhiệm vụ trong các nhiệm vụ kể trên. Vậy có thể phân công mỗi người một nhiệm vụ thích hợp với trình độ của người đó được không?

Trong phần này nói chung chỉ xét các đồ thị hai mảng có hướng $G = (X, Y, U)$ mà mỗi cung đều đi từ tập đỉnh X sang tập đỉnh Y .

1. ĐỊNH NGHĨA

Tập cung E ($E \subseteq U$) được gọi là cặp ghép của đồ thị G hay tập cung độc lập trong đồ thị G , nếu hai cung bất kỳ thuộc E đều không kề nhau (không có đỉnh chung).

Nếu cặp ghép lập quan hệ tương ứng một - một giữa tập $A \subseteq X$ và tập $B \subseteq Y$, thì ta nói rằng ghép cặp tập A trên tập B hay đã ghép cặp A và Y . Mục tiêu chủ yếu là xác định số lớn nhất các cung của một cặp ghép.

Đại lượng

$$\delta_0 = \max_{A \subseteq X} (|A| - |D^+(A)|)$$

được gọi là số hụt của đồ thị G .

Vì $|\Phi| = |D^+(\Phi)| = 0$ nên luôn luôn có $\delta_0 \geq 0$.

Tập C ($C \subseteq (X \cup Y)$) được gọi là *giá* hay *tập đỉnh tựa* trong đồ thị G , nếu mỗi cung u ($u \in U$) có ít nhất một đầu mút thuộc C . Đây là một khái niệm rất quan trọng.

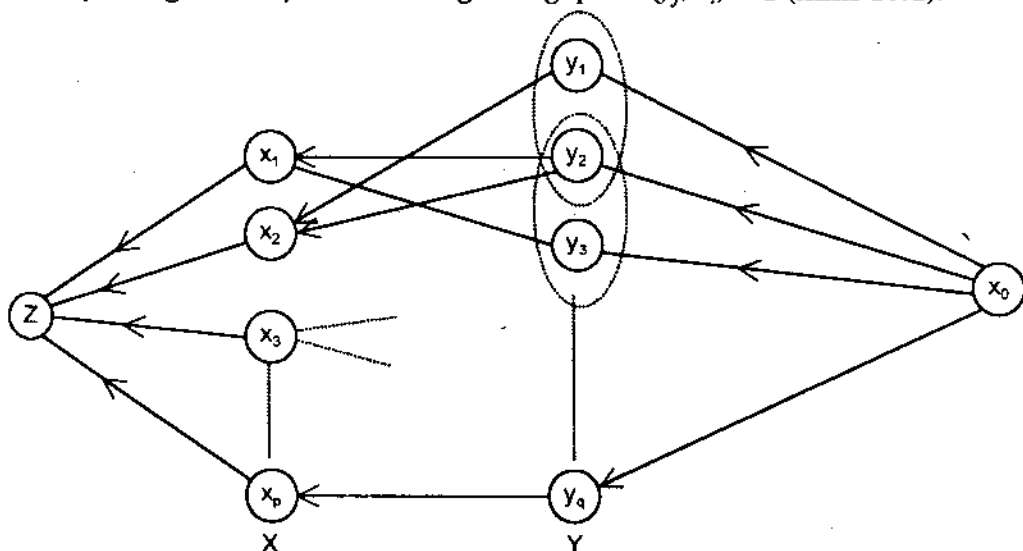
2. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI CẶP GHÉP

Định lý 13.1 (Định lý König-Hall)

Ta có thể ghép cặp X vào Y khi và chỉ khi đối với mọi tập $A \subseteq X$ đều có: $|D^+(A)| \geq |A|$.

Chứng minh:

Xét mạng vận tải xác định bởi: Các điểm X và Y , lối vào x_0 , và lối ra Z , nối đỉnh vào x_0 tới mỗi đỉnh $y_j \in Y$ bằng một cung có khả năng thông qua $C(x_0, y_j) = 1$; sau đó từ mỗi đỉnh $x_i \in X$ kẻ một cung đi tới đỉnh ra Z với khả năng thông qua $C(x_i, z) = 1$; Cuối cùng đối với mỗi đỉnh $y_j \in D^+(x_i)$ kẻ một cung đi tới x_i với khả năng thông qua $C(y_j, x_i) = 1$ (hình 13.1).



Hình 13.1

Vì các cung đều có khả năng thông qua bằng 1, nên nếu $A \subseteq X$, thì tổng yêu cầu của tập A là $\sum_{u \in U^+(A)} C(u) = |A|$ giá trị lớn nhất của luồng mà ta có thể đưa vào A là $\sum_{v \in U^-(A)} C(v) = D^-(A)$.

Mỗi luồng của mạng xác định một cặp ghép của đồ thị hai mảng đồng thời các điểm x_i và y_j tương ứng với nhau khi có một đơn vị của luồng đi qua cung (y_j, x_i) . Ngược lại mỗi cặp ghép xác định một luồng nào đó. Ta chỉ có thể ghép cặp X vào Y khi và chỉ khi luồng lớn nhất làm bão hoà các cung đi ra (định lý 12.1), nghĩa là nếu:

$$\sum_{u \in U^+(A)} C(u) \leq \sum_{v \in U^-(A)} C(v) \quad (A \subseteq X)$$

hay, nói cách khác:

$$|A| \leq |D^+(A)| \quad (A \subseteq X)$$

Định lý được chứng minh.

Sử dụng khái niệm số hụt có thể phát biểu định lý König-Hall dưới dạng sau: Điều kiện cần và đủ để có thể ghép cặp X vào Y là $\delta_i = 0$.

Từ chứng minh định lý König - Hall ta thấy rằng: xác định cặp ghép lớn nhất là một bài toán về luồng cực đại. Bởi vậy ta có thể dùng thuật toán Ford-Kerson (chương 12) để giải quyết vấn đề này.

Hệ quả 13.1

Trong đồ thị hai mảng $G = (X, Y, U)$ với $|X| = p$, $|Y| = q$, ta đánh số các đỉnh $x_i \in X$ và $y_j \in Y$, sao cho:

$$\begin{aligned} |D^+(x_1)| &\leq |D^+(x_2)| \leq \dots \leq |D^+(x_p)|, \\ |D^-(y_1)| &\geq |D^-(y_2)| \geq \dots \geq |D^-(y_q)| \end{aligned} \quad (1)$$

Khi đó điều kiện đủ để có thể ghép cặp X vào Y là $q \geq p$, đồng thời $|D^+(x_1)| > 0$ và

$$\begin{aligned} |D^+(x_1)| + |D^+(x_2)| + \dots + |D^+(x_k)| &> |D^-(y_1)| + |D^-(y_2)| + \dots + |D^-(y_{k-1})| \\ (k &= 2, 3, \dots, p) \end{aligned} \quad (2)$$

Thật vậy, xét hai tập con $A \subseteq X$ và $B \subseteq Y$ tương ứng với k và $k-1$ phần tử ta có:

$$\sum_{x \in A} |D^+(x)| \geq \sum_{i=1}^k |D^+(x_i)| > \sum_{i=1}^{k-1} |D^-(y_j)| \geq \sum_{y \in B} |D^-(y)|$$

Số cung đi ra khỏi A lớn hơn số cung đi vào B . Do đó $D^+(A) \not\subseteq B$ dù tập B (có $k-1$ phần tử) là như thế nào đi nữa. Từ đó có:

$$|D^+(A)| > k-1 = |A|-1 \text{ hay } |D^+(A)| \geq |A| \quad (A \subseteq X)$$

Vậy, theo định lý Konig-Hall có thể ghép X vào Y .

Hệ quả 13.2

Nếu đối với đồ thị $G = (X, Y, U)$ tồn tại một số nguyên m mà $|D^+(x)| \geq m$ với mọi $x \in X$ và $|D^-(y)| \leq m$ với mọi $y \in Y$, thì có thể ghép cặp X vào Y .

Chứng minh:

Giả sử $|X|=p$, $|Y|=q$. Khi đó có thể đánh số các đỉnh của X và Y để có trật tự (1)

$$\text{Vì } \sum_{x \in X} |D^+(x)| = \sum_{y \in Y} |D^-(y)|, \quad \sum_{x \in X} |D^+(x)| \geq p.m \quad \text{và} \quad \sum_{y \in Y} |D^-(y)| \leq q.m.$$

$q.m \geq p.m$. Do đó $q \geq p$.

Do $\forall x \in X \quad |D^+(x)| \geq m > 0$ nên $|D^+(x_1)| > 0$ và $\forall k (2 \leq k \leq p)$ thì

$$\begin{aligned} |D^+(x_1)| + |D^+(x_2)| + \dots + |D^+(x_k)| &\geq km > (k-1)m \\ &\geq |D^-(y_1)| + |D^-(y_2)| + \dots + |D^-(y_{k-1})| \end{aligned} \quad (2)$$

Bởi vậy, theo hệ quả 13.1 có thể ghép cặp X vào Y .

Định lý 13.2

Trong đồ thị $G = (X, Y, U)$ số cực tiểu các phần tử của giá C là $|X| - \delta_0$.

Chứng minh:

Xét giá C bất kì của đồ thị G . Ký hiệu phần của C nằm trong X bằng C_1 , còn phần nằm trong Y bằng C_2 . Khi đó:

$$C = C_1 \cup C_2 \quad \text{với } C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

Ký hiệu phần bù của C_1 bằng $\overline{C_1} = X \setminus C_1$. Khi đó $D^+(\overline{C_1}) \subseteq C_2$. Mặt khác, $\overline{C_1}$ gồm tất cả đỉnh đầu của các cung không có đỉnh đầu

thuộc C_1 , mà $C_1 \cup \overline{C_1} = X$ chứa đỉnh đầu của tất cả các cung của G . Bởi vậy $D^+(\overline{C_1})$ chứa toàn bộ các đỉnh cuối của những cung không có đỉnh đầu thuộc C_1 . Do đó mỗi cung của G đều có đầu mút thuộc C_1 hoặc $D^+(\overline{C_1})$, nên $C_1 \cup D^+(\overline{C_1})$ cũng là một giá. Vì vậy, để tìm giá có lực lượng bé nhất ta chỉ cần xét các giá có dạng $C_1 \cup D^+(\overline{C_1})$.

Xét lực lượng bé nhất của các tập tựa dạng $C_1 \cup D^+(\overline{C_1})$.

$$\begin{aligned} \min |C_1 \cup D^+(\overline{C_1})| & \Big|_{C_1 \cap D^+(\overline{C_1}) = \emptyset} = \min \{ |C_1| + |D^+(\overline{C_1})| \} \\ & = \min \{ |X| - |X| + |C_1| + |D^+(\overline{C_1})| \} = \\ & = \min \{ |X| - (|X| - |C_1| - |D^+(\overline{C_1})|) \} = \\ & = |X| - \max \{ |X| - |C_1| - |D^+(\overline{C_1})| \} \quad (|X| - |C_1| = |\overline{C_1}|) \\ & = |X| - \max \{ |\overline{C_1}| - |D^+(\overline{C_1})| \} \quad (\overline{C_1} = B) \\ & = |X| - \max_{B \subseteq X} \{ |B| - |D^+(B)| \} = |X| - \delta_0 \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 13.3

Số ổn định trong của đồ thị $G = (X, Y, U)$ là $\alpha(G) = |Y| + \delta_0$.

Chứng minh:

Thật vậy, nếu C là giá, thì phần bù $S = (X \cup Y) \setminus C$ của nó là tập ổn định trong, bởi vậy không thể có cung nào của G , mà cả hai đầu đều thuộc S , ngược lại, nếu S là tập ổn định trong cực đại, thì phần bù của nó là một giá nên:

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= \max_C |S| = \max_C (|X| + |Y| - |C|) \\ &= |X| + |Y| - \min_C |C| = |X| + |Y| - (|X| - \delta_0) \\ &= |X| + |Y| - |X| + \delta_0 = |Y| + \delta_0 \end{aligned}$$

3. CẶP GHÉP LỚN NHẤT

Trong phần này xét quan hệ giữa số hụt của đồ thị hai mảng với số lớn nhất các cung của cặp ghép.

Bổ đề 13.1

Nếu với $A \subseteq X$ mà đặt $\delta(A) = |A| - |D^+(A)|$, thì $\forall A_1, A_2 \subseteq X$ đều có:

$$\delta(A_1 \cup A_2) + \delta(A_1 \cap A_2) = \delta(A_1) + \delta(A_2)$$

Thật vậy, ta có hệ thức:

$$|A_1 \cup A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| \quad (3)$$

$$\begin{aligned} |D^+(A_1 \cup A_2)| + |D^+(A_1 \cap A_2)| &\leq |D^+(A_1) \cup D^+(A_2)| + |D^+(A_1) \cap D^+(A_2)| \\ &= |D^+(A_1)| + |D^+(A_2)| \end{aligned} \quad (4)$$

Lấy hệ thức (3) trừ hệ thức (4), ta nhận được công thức đã phát biểu:

Bổ đề 13.2

Họ $\mathcal{A} = \{A \mid \delta(A) = \delta_0\}$ đóng đối với các phép toán hợp ($\cup$) và giao ($\cap$), nghĩa là:

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ thì } A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$$

Thật vậy, nếu $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ thì theo bổ đề 13.1 ta có:

$$\delta(A_1 \cup A_2) + \delta(A_1 \cap A_2) \geq \delta(A_1) + \delta(A_2) = 2\delta_0 \quad (5)$$

Do $A_1 \cap A_2 \subseteq X$ và $A_1 \cup A_2 \subseteq X$ nên ta có

$$\delta(A_1 \cap A_2) = |A_1 \cap A_2| - |D^+(A_1 \cap A_2)| \leq \max_{A \subseteq X} \{ |A| - |D^+(A)| \} = \delta_0 \quad (6)$$

$$\delta(A_1 \cup A_2) = |A_1 \cup A_2| - |D^+(A_1 \cup A_2)| \leq \max_{A \subseteq X} \{ |A| - |D^+(A)| \} = \delta_0$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$\delta(A_1 \cup A_2) = \delta(A_1 \cap A_2) = \delta_0$$

Bởi vậy $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ và $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

Bổ đề 13.3

Nếu $\delta_0 > 0$, thì giao A_0 của mọi tập thuộc $\mathcal{A} = \{A \mid \delta(A) = \delta_0\}$ là một tập không trống.

Chứng minh:

Thật vậy, vì đồ thị ta xét là hữu hạn, nên A_0 là giao của một số hữu hạn tập của $\mathcal{A}$. Theo bổ đề 13.2, tập A đóng với giao nên $A_0 \in \mathcal{A}$. Nếu $A_0 = \Phi$ thì:

$$\delta_0 = \delta(A_0) = \delta(\Phi) = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\delta_0 > 0$, nên $A_0 \neq \Phi$.

Định lý 13.4 (konig - Ore)

Trong đồ thị hai mảng $G = (X, Y, U)$ số lớn nhất các cung của cặp ghép (số cực đại các cung độc lập) là $|X| - \delta_0$.

Chứng minh:

1) $\delta_0 = 0$. Khi đó theo định lý Konig - Hall có thể ghép cặp X vào Y . Bởi vậy số lớn nhất các cung của cặp ghép bằng $|X| = |X| - 0 = |X| - \delta_0$.

2) Giả sử $\delta_0 > 0$. Xét giao A_0 của các tập hợp A mà $\delta(A) = \delta_0$. Theo bổ đề 13.3 $A_0 \neq \Phi$.

a) Nếu loại khỏi đồ thị đỉnh $x_0 \in A_0$, thì số huyệt vẫn không đổi.

Thật vậy, ký hiệu số huyệt của đồ thị mới là δ'_0 , thì $\delta'_0 \leq \delta_0$. Vì đồ thị mới vẫn chứa tập A_0 với $\delta(A_0) = \delta_0$ (theo bổ đề 13.2, tập $\mathcal{A} = \{A \mid \delta(A) = \delta_0\}$ đóng với giao, nên $A_0 \in \mathcal{A}$) nên:

$$\delta'_0 = \max_{A \subseteq (X \setminus \{x_0\})} \{ |A| - |D^+(A)| \} = |A_0| - |D^+(A_0)| = \delta(A_0) = \delta_0$$

b) Nếu loại khỏi đồ thị đỉnh $x_0 \in A$, thì số huyệt của đồ thị giảm đi một đơn vị

Vì $x_0 \in A_0$, nên x_0 thuộc mọi tập $A \in \mathcal{A}$, tức là x_0 thuộc mọi tập A với $\delta(A) = \delta_0 = \max_{A \subseteq X} \{ |A| - |D^+(A)| \}$, nên số huyệt của đồ thị mới là $\delta'_0 < \delta_0$.

Vì vậy tập $A'_0 = A_0 - \{x_0\}$ thoả mãn điều kiện:

$$\delta(A'_0) = |A_0| - 1 - |D^+(A'_0)| < \delta_0 = |A_0| - |D^+(A_0)|$$

$$\text{Từ đó: } |D^+(A_0)| - 1 < |D^+(A'_0)|$$

$$\text{Do đó: } |D^+(A'_0)| \geq |D^+(A_0)| \quad (1)$$

Do $A'_0 \subset A_0$, nên ta lại có:

$$|D^+(A'_0)| \leq |D^+(A_0)| \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $|D^+(A'_0)| = |D^+(A_0)|$

Như vậy cuối cùng ta có:

$$\delta(A'_0) = |A'_0| - |D^+(A'_0)| = (|A_0| - 1) - |D^+(A_0)| = |A_0| - |D^+(A_0)| - 1 = \delta_0 - 1.$$

Mặt khác

$$\delta_0 > \delta'_0 = \max_{A \subseteq (X \setminus \{x_0\})} \left\{ |A| - |D^+(A)| \right\} \geq \delta(A'_0) = \delta_0 - 1$$

$$\text{Vậy } \delta'_0 = \delta_0 - 1.$$

Từ các phần trên thấy rằng δ_0 là số nhỏ nhất các đỉnh của X cần phải loại ra, để có đồ thị $G_1 = (X_1, Y, U_1)$ với số hụt $\delta'_0 = 0$ nghĩa là, theo định lý Konig - Hall có thể ghép cặp X_1 vào Y , nên số lớn nhất các cung của cặp ghép bằng:

$$|X_1| = |X| - \delta_0$$

Hệ quả 13.3 (Định lý Konig)

Trong đồ thị hai mảng tùy ý $G = (X, Y, U)$ số nhỏ nhất các đỉnh của giá (số nhỏ nhất các đỉnh tựa) bằng số lớn nhất các cung của cặp ghép (số lớn nhất các cung độc lập)

Thật vậy, từ các định lý 13.2 và 13.4 ta có: số cực tiểu các đỉnh của giá thuộc đồ thị G bằng $(|X| - \delta_0)$ số lớn nhất các cung của cặp ghép.

Định lý 13.5

Cho đồ thị vô hướng $G = (X, U)$ với $|X| \geq 2n$ ($n \geq 1$) và bậc của mỗi đỉnh x của đồ thị đều không nhỏ hơn n .

Chứng minh rằng trong G luôn luôn tồn tại một đồ thị bộ phận hai mảng $G_1 = (Y, Z, V)$ với $|Y| = n$ đồng thời ghép cặp được Y vào Z (trên đồ thị bộ phận).

Chứng minh:

Ta xây dựng đồ thị bộ phận hai mảng G_1 như sau: Lấy dần vào tập V các cạnh của U , sao cho các đầu mút đều khác nhau, cho đến khi bất kì cạnh nào trong số còn lại cũng kề với cạnh nào đó đã thuộc V . Giả sử $|V| = k$.

Nếu $k = n$ thì khẳng định được chứng minh. Bởi vì chỉ việc lấy ở mỗi cạnh một đầu mút cho vào Y , các đầu mút kia cho vào Z . Khi đó ta có

$G_1 = (Y, Z, V)$ là đồ thị hai mảng và V là một cặp ghép thiết lập tương ứng 1-1 giữa Y và Z nên ghép được Y vào Z .

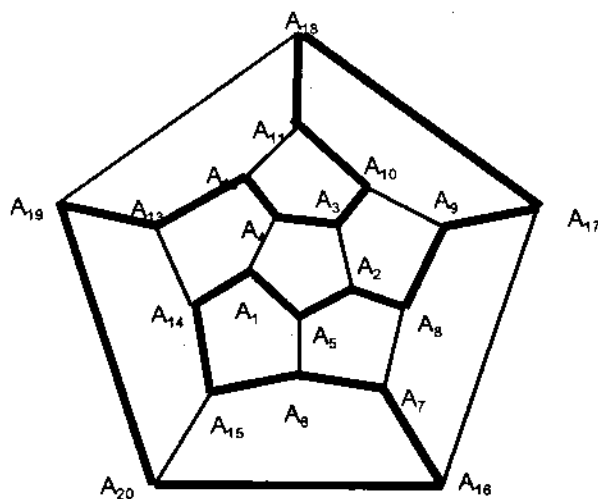
Nếu $k < n$, thì $|X| \geq 2k + 2$ nên ngoài k cạnh thuộc V , chẳng hạn $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2k-1}, a_{2k})$ còn tìm được hai đỉnh a_{2k+1}, a_{2k+2} thuộc X mà không là đầu mút của cạnh nào thuộc V . Theo cách chọn tập cạnh V thì mỗi đỉnh này chỉ có thể kề với một đỉnh nào đó trong V (Vì nếu nó kề với một đỉnh không là đầu mút của cạnh trong V , thì khi đó bổ sung cho V một cạnh mới nữa), đồng thời mỗi đỉnh này kề với ít nhất n đỉnh.

Ta đánh dấu tất cả các đỉnh thuộc V mà kề với a_{2k+1} số đỉnh được đánh dấu không nhỏ hơn n . Đánh dấu tất cả các đỉnh là đầu mút của cạnh thuộc V và đầu mút kia kề với a_{2k+2} . Số đỉnh này cũng không ít hơn n . Như vậy số lần đánh dấu trên các đỉnh thuộc V là $2n$, nhưng số đỉnh của V là $2k < 2n$, nên có ít nhất một đỉnh được đánh dấu hai lần. Giả sử đỉnh này là a_i . Theo tính chất của a_i , nó kề với a_{2k+1} và trong V có cạnh (a_i, a_m) với đầu mút a_m kề với a_{2k+2} . Như vậy ta có thể loại cạnh (a_i, a_m) ra khỏi V và kết nạp hai cạnh (a_i, a_{2k+1}) và (a_m, a_{2k+2}) vào V . Cứ tiếp tục như vậy, sau một số bước hữu hạn ta có $|V| = n$. Khẳng định được chứng minh.

CHƯƠNG 14

ĐỒ THỊ HAMILTON

Để làm quen với chu trình Hamilton xin mở đầu bằng bài toán du lịch kín quanh thế giới do Hamilton đặt ra: Chọn trước trên trái đất 20 thành phố: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$. Để đơn giản giả sử rằng các thành phố này là đỉnh của một hình 12 mặt đều (đó là đa diện có 12 mặt ngũ giác đều và 20 đỉnh) thay cho trái đất, còn các cạnh của đa diện biểu hiện cho đường đi giữa các thành phố, trên hình 14.1.



Hình 14.1

Liệu một khách du lịch có thể tham quan tất cả 20 thành phố, qua mỗi thành phố đúng một lần rồi lại trở về được địa điểm xuất phát hay không? Và có bao nhiêu cách đi?

Hamilton đã giải quyết bài toán trên bằng cách chỉ ra nguyên tắc đi như sau: khách du lịch khi tới đầu mút của một cạnh, nếu anh ta chọn

cạnh bên trái mình thì phép chọn được ký hiệu bằng T , chọn cạnh phía phải ký hiệu bằng P , và ở nguyên tại chỗ ký hiệu bằng 1. Tích của phép chọn được xác định theo nguyên tắc: PT là phép chọn đi theo cạnh phải rồi đi tiếp theo cạnh trái, TTP hay T^2P là phép chọn đi theo cạnh trái hai lần sau đó đi theo cạnh phải 1 lần.v.v.. Hai phép chọn là bằng nhau, nếu xuất phát từ cùng một điểm cả hai đều cùng đi tới một điểm. Tích không có tính chất giao hoán ($PT \neq TP$), nhưng có tính chất kết hợp chẳng hạn $(TT)P = T(TP)$.

Ta có các công thức:

$$P^5 = T^6 = 1; \quad PT^2P = TPT; \quad TP^2T = PTP; \quad TP^2T = P^2; \quad PT^2T = T^2;$$

Nên:

$$1 = P^5 = P^2P^3 = (TP^3T)P^3 = (IP^3)^2 = [T(TP^3T)P]^2 \dots = [T^3P^3TPTP]^2 = \dots \\ = TTTTPPTPTPTTTTPPTPTP$$

Tích cuối cùng gồm 20 chữ cái, đồng thời không thể tách ra được một đoạn nào có tích bằng 1. Bởi vậy dãy này lập thành một đường du lịch khép kín qua cả 20 thành phố và qua mỗi thành phố đúng 1 lần.

Sau này lý thuyết về chu trình Hamilton sẽ giúp ta giải quyết các bài toán tương tự như bài toán du lịch ở trên.

1. ĐỊNH NGHĨA

Xích α trong đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ được gọi là xích Hamilton, nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của G và qua mỗi đỉnh đúng một lần. Nói cách khác, xích Hamilton là một xích sơ cấp, mà nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

Chu trình α trong đồ thị $G = (X, E)$ được gọi là chu trình Hamilton, nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G và qua mỗi đỉnh đúng một lần. Nói cách khác, chu trình Hamilton là một chu trình sơ cấp, mà nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

Đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ được gọi là đồ thị Hamilton, nếu nó có chu trình Hamilton.

Đường β trong đồ thị có hướng $G = (X, E)$ được gọi là đường Hamilton, nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G và qua mỗi đỉnh đúng một lần. Nói cách khác, đường Hamilton là một đường sơ cấp, mà nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

Vòng Hamilton trong đồ thị vô hướng $G = (X, U)$ được gọi là vòng Hamilton nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G và qua mỗi đỉnh đúng một lần. Nói cách khác, vòng Hamilton là một vòng sơ cấp mà nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.

Đồ thị vô hướng $G = (X, U)$ được gọi là đồ thị Hamilton nếu nó có vòng Hamilton.

Đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ được gọi là đồ thị thuần nhất bậc k , nếu mỗi đỉnh của đồ thị G đều có bậc bằng k .

Đồ thị có hướng $G = (X, U)$ được gọi là đồ thị tựa đối xứng cấp k , nếu mỗi đỉnh của đồ thị G có đúng k cung đi vào và k cung đi ra.

Đồ thị liên thông và không có điểm khớp được gọi là đồ thị không khớp.

2. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI CHU TRÌNH HAMILTON

Bổ đề 14.1

Nếu đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ có chu trình Hamilton thì G là đồ thị không khớp và mỗi đỉnh của nó đều có bậc không nhỏ hơn 2.

Thật vậy, nếu đồ thị $G = (X, E)$ có chu trình Hamilton (α) . Chu trình α qua tất cả các đỉnh, không có điểm khớp và mỗi đỉnh của nó đều bậc 2, nên đồ thị G không thể có điểm khớp và bậc của mỗi đỉnh phải có bậc không nhỏ hơn 2.

Bổ đề 14.2

Đồ thị vô hướng n ($n \geq 3$) đỉnh liên thông, thuần nhất bậc 2 có chu trình Hamilton.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ ($|X| = n \geq 3$), liên thông thuần nhất bậc 2.

Đồ thị G hữu hạn, nên số xích sơ cấp trong G cũng hữu hạn.

Giả sử $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ là một trong những xích sơ cấp có độ dài dài nhất ($|\alpha|_{\max}$).

Nếu $k < n$ thì tồn tại đỉnh $y \notin \alpha$. Do G liên thông, nên phải có ít nhất một đỉnh thuộc α kề với đỉnh y , chẳng hạn x_i .

Nếu $i = 2, 3, \dots, k-1$ thì $m(x_i) > 2$ nên vô lý.

Nếu $i=1$ hoặc k , thì xích $(y, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ hoặc xích $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, y)$ có độ dài bằng $|\alpha| + 1 > |\alpha|_{\max}$ nên cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Do đó $k=n$, tức ta được xích Hamilton.

Vì $m(x_1) = m(x_n) = 2$ nên x_1 phải kề với x_n (không thể kề với đỉnh x_i ($3 \leq i \leq n-1$) vì bậc của mỗi đỉnh này đã bằng 2). Ta được chu trình Hamilton.

Nhờ bổ đề 14.2 trên suy ra kết quả sau:

Bổ đề 14.3

Đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ có chu trình Hamilton khi và chỉ khi nó có một đồ thị bộ phận liên thông và thuần nhất bậc 2

Chứng minh:

1) Điều kiện cần là hiển nhiên. Bởi vì, nếu đồ thị G có chu trình Hamilton thì mỗi chu trình Hamilton của G là một đồ thị bộ phận liên thông thuần nhất bậc 2.

2) Điều kiện đủ

Giả sử đồ thị $G = (X, E)$ có đồ thị bộ phận $G_1 = (X_1, E_1)$ liên thông và thuần nhất bậc 2. Theo bổ đề 14.2 đồ thị G_1 có chu trình Hamilton (α). Khi đó chu trình α cũng chính là chu trình Hamilton trong đồ thị G . Định lý được chứng minh.

Bổ đề 14.4

Nếu $\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ là xích sơ cấp có độ dài cực đại trong đồ thị G và

$$m(x_1) + m(x_k) \geq k$$

thì đồ thị con G_1 gồm các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ sẽ lập thành một đồ thị Hamilton gồm k đỉnh.

Chứng minh:

1) Nếu x_1, x_k kề nhau thì α là một chu trình sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị con G_1 .

2) x_1, x_k không kề nhau.

Do α là xích cực đại, nên x_1 cũng như x_k không thể kề với một đỉnh nào ngoài α . Xét các cặp đỉnh có khả năng là cạnh của đồ thị, mà một đầu là x_1 hoặc x_k .

(1)		(x_1, x_2)
(2)	(x_k, x_2)	(x_1, x_3)
(3)	(x_k, x_3)	(x_1, x_4)
.....		
(i)	(x_k, x_i)	(x_1, x_{i+1})
(i+1)	(x_k, x_{i+1})	(x_1, x_{i+2})
.....		
(k-2)	(x_k, x_{k-2})	(x_1, x_{k-1})
(k-1)	(x_k, x_{k-1})	
$m(x_k) + m(x_1)$		

Nếu từ hàng 2 đến hàng $k-2$ mỗi hàng có không quá 1 cạnh, thì số cạnh của đồ thị G trong hệ (*) sẽ không vượt quá $k-1$.

Bởi vậy $m(x_k) + m(x_1) \leq k-1 < k$

Ta đi tới mâu thuẫn với giả thiết, nên trong hệ (*) từ hàng 2 đến hàng $k-2$ phải có ít nhất một hàng mà cả hai cặp đỉnh đều là cạnh của đồ thị G . Chẳng hạn $(x_k, x_i), (x_1, x_{i+1})$ ($2 \leq i \leq k-2$) đều là cạnh của đồ thị G . Ta sắp xếp lại xích α để được α' .

$$\alpha' = [x_{i+1}, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{i+3}, x_{i+2}]$$

Có x_{i+1} và x_{i+2} kề nhau nên là chu trình sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của G_1 . Vậy G_1 là đồ thị Hamilton gồm k đỉnh.

Bổ đề 14.5

Giả sử đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ có n đỉnh và $l=n-1$ hoặc $l=n$.

Nếu $\forall x, y \in X (m(x)+m(y) \geq l)$ (1), thì trong G có xích sơ cấp độ dài cực đại chứa không ít hơn l đỉnh.

Chứng minh:

Với điều kiện (1), theo định lý 4.1, G là đồ thị liên thông.

Giả sử $\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ là một xích sơ cấp có độ dài cực đại nào đó của đồ thị G . Khi đó $k \geq l$.

Thật vậy, giả sử $k < l$, khi đó từ điều kiện (1) ta có:

$$m(x_k) + m(x_1) \geq k$$

và theo bổ đề 14.4 đồ thị con G_1 gồm các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_k$ có chu trình Hamilton. Giả sử:

$$\beta = [y_1, y_2, \dots, y_k]$$

là một trong những chu trình Hamilton của G_1 , thì trong G β là một chu trình sơ cấp. Do $k < l$, nên có ít nhất một đỉnh (y) của G nằm ngoài β . Vì G liên thông, nên y phải nối với một đỉnh nào đó của β , chẳng hạn y nối với y_j bằng một xích độ dài dương. Ta được xích sơ cấp mới: $\beta' = [y, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{j+2}, y_{j+1}]$ có độ dài lớn hơn α . Ta đi đến mâu thuẫn với tính độ dài cực đại của α . Do đó $k \geq l$.

Định lý 14.1

Giả sử $G = (X, E)$ là đồ thị vô hướng có n đỉnh.

- a) Nếu $\forall x, y \in X (m(x) + m(y) \geq n-1)$ (1), thì G có xích Hamilton;
- b) Nếu $\forall x, y \in X (m(x) + m(y) \geq n)$ (2), thì G có chu trình Hamilton.

Chứng minh:

1) Do điều kiện (1) theo bổ đề 14.5 trong đồ thị G có xích sơ cấp độ dài cực đại chứa không ít hơn $n-1$ đỉnh. Giả sử: $\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l]$ với $l \geq n-1$ là một trong những xích có độ dài cực đại.

- a) Nếu $l=n$ thì α là xích Hamilton của đồ thị G .

b) Nếu $l = n-1$ theo bổ đề 12.4 đồ thị con G_1 của G gồm các đỉnh $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ có chu trình Hamilton. Giả sử một trong những chu trình Hamilton của G_1 là:

$$\beta = [y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}]$$

Trong đồ thị G còn một đỉnh, chẳng hạn x , không nằm trên β . Với điều kiện (1), theo định lý 4.1 đồ thị G liên thông, nên x phải kề với một đỉnh nào đó thuộc β , chẳng hạn y_i ($1 \leq i \leq n-1$). Khi đó xích

$$\gamma = [x, y_i, y_{i-1}, \dots, y_1, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{i+1}]$$

đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G , nên γ là một xích Hamilton của đồ thị G .

2) Với điều kiện (2), theo bổ đề 12.5, trong đồ thị G có xích sơ cấp cực đại chứa n đỉnh. Giả sử:

$$w = [z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n]$$

là một trong những xích có độ dài cực đại. Khi đó, theo bổ đề 12.4 đồ thị con G_2 của G gồm các đỉnh $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$ có chu trình Hamilton. Giả sử:

$$\varepsilon = [p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n]$$

là một chu trình Hamilton của G_1 . Chu trình ε là chu trình sơ cấp và đi qua tất cả n đỉnh của G nên trong G ε là một chu trình Hamilton. Định lý được chứng minh.

Từ định lý trên có các hệ quả sau:

Hệ quả 14.1

1) Mọi đồ thị đầy đủ vô hướng với ít nhất hai đỉnh đều có xích Hamilton.

2) Mọi đồ thị đầy đủ vô hướng với ít nhất 3 đỉnh đều có chu trình Hamilton.

Hệ quả 14.2

Nếu bậc của mỗi đỉnh trong đồ thị vô hướng G không nhỏ hơn một nửa số đỉnh, thì nó có chu trình Hamilton.

3. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI ĐƯỜNG HAMILTON

Định lý 14.2 (Rédei)

Trong đồ thị có hướng đầy đủ luôn luôn tồn tại đường Hamilton.

Chứng minh (Thuật toán tìm đường Hamilton trong đồ thị đầy đủ có hướng)

Giả sử $G = (X, U)$ là đồ thị có hướng đầy đủ nào đó và:

$$\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i-1}, \dots, x_{k-1}, x_k]$$

là một đường sơ cấp bất kì trong đồ thị G .

1) Nếu α đã đi qua tất cả các đỉnh của G , thì nó là một đường Hamilton của G .

2) Nếu trong G còn có đỉnh nằm ngoài α , thì ta có thể bổ sung dần dần các đỉnh này vào α và các đường sơ cấp nhận được tiếp theo để cuối cùng nhận được đường Hamilton.

Thật vậy, giả sử x là đỉnh tùy ý không nằm trên α .

a) Nếu cung nối x và x_1 xuất phát từ x , thì bổ sung x vào đầu của đường α , để được α_1 , mà $|\alpha_1| = |\alpha| + 1$

$$\alpha_1 = [x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k]$$

b) Nếu tồn tại chỉ số i ($1 \leq i < k-1$) mà từ x_i có cung đi tới x và từ x có cung đi tới x_{i+1} thì ta chen x vào giữa x_i và x_{i+1} , để được đường sơ cấp α_2 mà $|\alpha_2| = |\alpha| + 1$,

$$\alpha_2 = [x_1, x_2, \dots, x_i, x, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k]$$

c) Nếu cả hai khả năng trên đều không xảy ra nghĩa là $\forall i$ ($1 \leq i < k$) x_i đều có cung đi tới x . Khi đó bổ sung x vào cuối của đường α và được α_3 mà $|\alpha_3| = |\alpha| + 1$,

$$\alpha_3 = [x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x]$$

Nếu đồ thị G có n đỉnh thì sau $n-k$ bổ sung ta sẽ được đường Hamilton.

Bổ để được chứng minh.

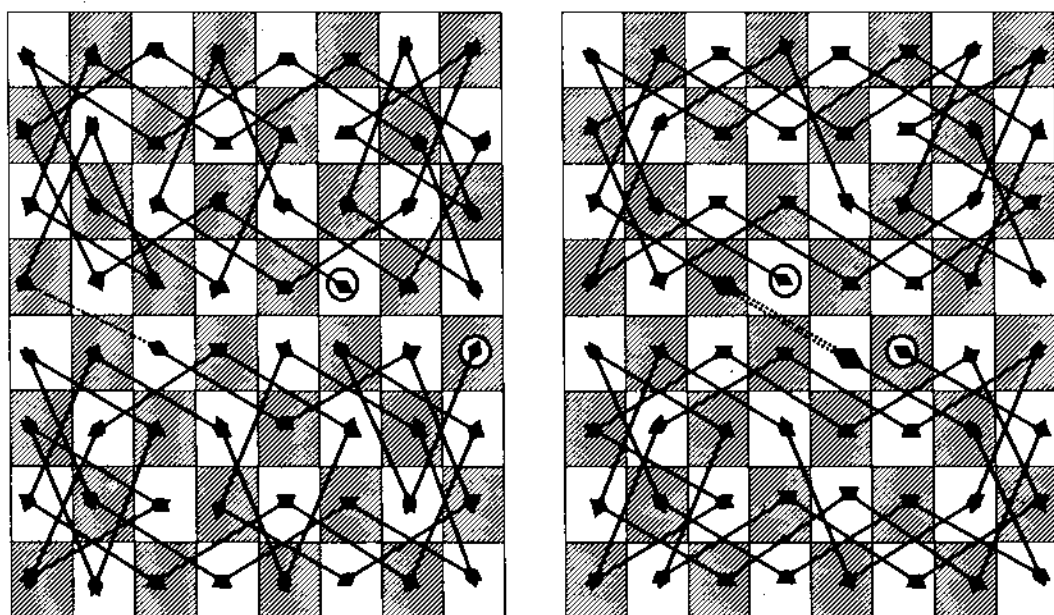
4. ỨNG DỤNG

Bài toán 14.1. Hành trình của con mã trên bàn cờ (Euler). Liệu con mã có thể di chuyển được qua tất cả các ô của bàn cờ 8×8 ($n \times n$) và qua mỗi ô đúng một lần (rồi trở về được ô xuất phát).

Bài toán này được nhiều nhà toán học chú ý, đặc biệt Euler, De Moivre, Vandermonde, v.v...

Hiện nay đã có nhiều lời giải và phương pháp giải cũng có rất nhiều, trong đó có qui tắc (hình như được thực tế xác nhận, nhưng không được lý luận kiểm chứng): Mỗi lần bố trí con mã ta chọn vị trí mà tại vị trí này số ô chưa dùng tới do nó không chế là ít nhất.

Một phương pháp khác dựa trên tính đối xứng của hai nửa bàn cờ ta tìm hành trình của con mã trên một nửa bàn cờ, rồi lấy đối xứng cho nửa bàn cờ còn lại, sau đó nối hành trình của hai nửa đã tìm lại với nhau (hình 14.2).



Hình 14.2

Từ kết quả của chương 8 khẳng định được: con mã có thể di chuyển được qua tất cả các ô của bàn cờ $n \times n$ qua mỗi ô đúng một lần (và trở lại

được ô xuất phát) khi và chỉ khi trên đồ thị G_M có xích Hamilton (chu trình Hamilton).

Bài toán 14.2. Nhà vua mời $2n$ ($n \geq 2$) kỵ mã đến dự tiệc. Mỗi kỵ mã quen ít nhất n kỵ mã đến dự tiệc. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp tất cả các kỵ mã ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa 2 người mà anh (chị) ta quen.

Bài toán này có thể giải bằng cách ứng dụng các kết quả về chu trình Hamilton. Trước hết xây dựng đồ thị G , mô tả toàn bộ quan hệ của các kỵ mã:

Đỉnh của đồ thị G : Lấy $2n$ điểm trên mặt phẳng và trong không gian, không có 3 điểm nào thẳng hàng và tương ứng với $2n$ kỵ mã đến dự tiệc. Ta dùng ngay ký hiệu các kỵ mã, để ghi trên các điểm tương ứng.

Cạnh của đồ thị G : Hai điểm tùy ý x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi hai người tương ứng với x, y quen nhau.

Mỗi đỉnh x của đồ thị G có bậc bằng đúng số người mà x quen, nên trong đồ thị G tất cả các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn n . Khi đó, theo Hệ quả 14.2, G có chu trình Hamilton. Giả sử α là một trong những chu trình Hamilton của đồ thị G . Theo thứ tự của các đỉnh xuất hiện trong α , mà sắp xếp các kỵ mã tương ứng ngồi xung quanh bàn tròn, thì mỗi kỵ mã sẽ ngồi giữa hai người anh (chị) ta quen.

Bài toán 14.3. Trong một đợt thi đấu bóng bàn có n ($n \geq 2$) đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ gặp từng đấu thủ khác đúng một lần. Trong thi đấu bóng bàn chỉ có khả năng thắng hoặc thua. Chứng minh rằng sau đợt thi đấu có thể xếp tất cả các đấu thủ đứng thành một hàng dọc, để người đứng sau thắng người đứng ngay trước anh (chị) ta.

Bài toán cũng được giải nhờ ứng dụng kết quả về đường Hamilton. Trước hết xây dựng đồ thị G , mô tả toàn bộ quan hệ thắng, thua giữa các đấu thủ.

Đỉnh của đồ thị G : Lấy n điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian, không có 3 điểm nào thẳng hàng và tương ứng với các đấu thủ. Dùng ngay ký hiệu các đấu thủ, để ghi trên các điểm tương ứng.

Cạnh của đồ thị G : Đối với hai điểm tùy ý x, y , từ đỉnh x sang y kẻ một cung khi và chỉ khi vận động viên x thắng vận động viên y .

G là một đồ thị có hướng, nên, theo định lý 14.2, trong G có đường Hamilton. Giả sử β là một trong những đường Hamilton của G . Khi đó theo thứ tự của các đỉnh xuất hiện trong β mà sắp xếp các đấu thủ tương ứng đứng theo một hàng dọc, thì vận động viên đứng sau sẽ thắng vận động viên đứng ngay trước anh (chị) ta.

CHƯƠNG 15

ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

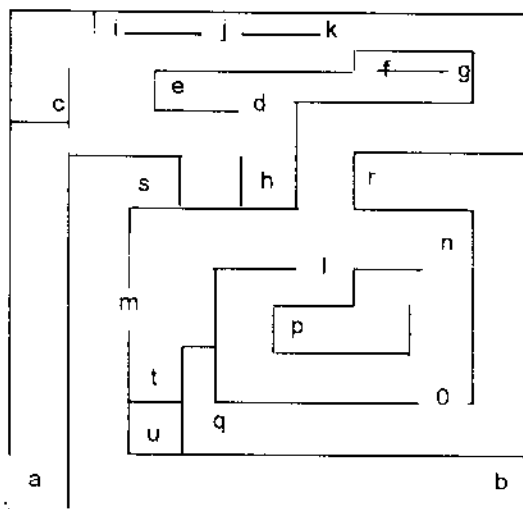
Cho đồ thị $G = (X, U)$ và hai đỉnh a và b . Hai bài toán sau được đặt ra một cách tự nhiên.

Bài toán 1. Tìm đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b (hoặc ngược lại).

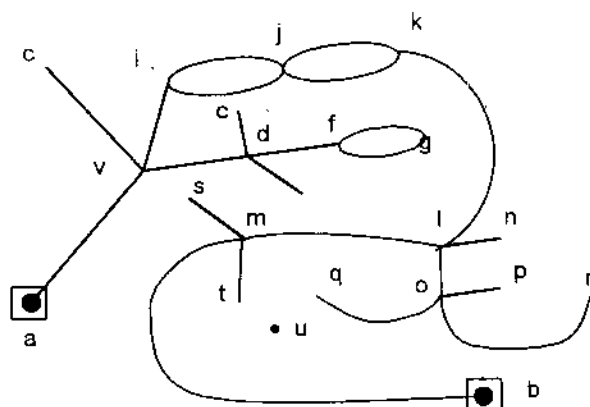
Bài toán 2. Tìm đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b có độ dài ngắn nhất.

Hiển nhiên rằng, bài toán 2 bao hàm bài toán 1.

Một thí dụ nổi tiếng về tìm đường đi là *mê lộ*: Có mê lộ (hình 15.1). Một người ở a tìm cách ra khỏi mê lộ bằng cách đi theo hành lang. Điều này quy về giải bài toán 1 đối với đồ thị tương ứng ở hình 15.2, trong đó X là tập hợp các ngã đường và $y \in D(x)$, nếu có một hành lang nối tiếp các ngã đường x và y .



Hình 15.1



Trong trường hợp mê lộ, như ở hình 15.1, không có cầu thang và hoàn toàn trải trên một mặt phẳng nằm ngang, thì đồ thị tương ứng của nó, hình 15.2, có tính chất đặc biệt: các cạnh của nó không bao giờ cắt nhau (trừ tại các đầu mút của chúng); nói cách khác đồ thị tương ứng với mê lộ là một đồ thị phẳng.

Đối với trường hợp này giải bài toán 1 khá dễ, chỉ cần đi theo qui tắc sau:

Luôn luôn đi theo hành lang ở gần phía tay phải mình nhất khi gặp các ngã đường.

Như vậy, hiển nhiên ta sẽ ra khỏi mê lộ mà không phải đi qua một cạnh nào quá hai lần.

1. THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI

1.1. Thuật toán tổng quát của bài toán 1

Trước hết xét đồ thị dạng cây (hình 15.3) có gốc là a . Ta tìm một đường đi từ a đến đỉnh b nào đó. Một phương pháp đơn giản như sau: từ a đi theo một nhánh nào đó càng xa càng tốt, nếu chưa gặp đỉnh b , thì quay lộn lại ngã đường gần nhất, để tiếp tục đi theo hướng mới chưa thăm dò v.v.. cho tới khi gặp đỉnh b . Đường đi cần tìm từ a đến b sẽ gồm tất cả các cạnh mà trong quá trình tìm chỉ thăm dò đúng một lần.

theo chiều tới x và k lần theo chiều rời khỏi x . Vậy ta còn có thể rời khỏi x theo một cạnh chưa đi qua.

2^o) Giả sử $(a_0 = a, a_1, a_2, \dots)$ là dãy các ngã đường khác nhau đã gặp. Chúng được đánh số theo thứ tự đã gặp lần đầu tiên. Khi đó mỗi cạnh liên thuộc a_k ($k=0, 1, \dots$) đều đã đi qua hai lần (lần đi và lần trở lại).

Thật vậy, với $k=0$ (theo 1^o) khẳng định này đúng.

Giả sử rằng khẳng định trên đúng với $k \leq p-1$. Ta sẽ chứng tỏ rằng nó đúng với $k=p$. Gọi (a_i, a_p) là cạnh đã dẫn người đi đường tới a_p lần đầu tiên (vì $i < p$ nên cạnh này đã đi qua cả hai chiều. Vậy theo qui tắc Tarry, điều này chỉ có thể xảy ra khi mọi cạnh liên thuộc với a_p đều đã đi qua cả hai chiều.

Vậy khẳng định trên được chứng minh.

3^o) Nếu tồn tại một đường đi $\alpha = (a, x_1, x_2, \dots, x_m, b)$ từ a đến b , thì sớm hay muộn người đi đường xuất phát từ a cũng gặp ngã đường b .

Thật vậy, theo 2^o, mọi đỉnh kề với một đỉnh đã đi qua cũng là một đỉnh đã đi qua, mà đường α là một dãy các đỉnh kề nhau xuất phát từ a , kết thúc tại b , nên khi xuất phát từ a thì người đi đường theo qui tắc Tarry sẽ đến được b .

2. THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

(Thuật toán cho bài toán 2)

Bằng phương pháp lập, dần dần ta sẽ cho mỗi đỉnh x một chỉ số nào đó bằng độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới x . Thuật toán gồm hai bước:

Bước 1: Ghi chỉ số ở các đỉnh bằng qui nạp theo số bước

1^o) Đánh dấu đỉnh xuất phát a bằng chỉ số 0.

2^o) Giả sử sau k bước đã đánh dấu một số đỉnh của đồ thị bằng các chỉ số $0, 1, 2, \dots, k-1$. Dùng $A(i)$ để ký hiệu tập đỉnh được đánh dấu bằng chỉ số i ($0 \leq i \leq k-1$). Sang bước $k+1$ ta xác định tập đỉnh $A(k)$ gồm các đỉnh được đánh dấu bằng chỉ số k :

$$A(k) = \left\{ x \in X \mid \begin{array}{l} x \notin \bigcup_{i=0}^{k-1} A(i) \text{ (x chưa được đánh số) và} \\ \exists y \in A(k-1), x \in D^+(y) \text{ hoặc } x \in D(y) \end{array} \right\}$$

Quá trình đánh số sẽ dừng lại khi đạt tới đỉnh b .

Bước 2: Tìm đường ngắn nhất.

Giả sử b được đánh số bằng m ($b \in A(m)$). Khi đó ta tìm tất cả các dãy $b_1, b_2, \dots, b_m$ có thể sao cho:

$$b_1 \in A(m-1), b \in D^+(b_1) \quad (b \in D(b_1))$$

$$b_2 \in A(m-2), b_1 \in D^+(b_2) \quad (b_1 \in D(b_2))$$

.....

$$b_{m-1} \in A(1), b_{m-1} \in D^+(a) \quad (b_{m-1} \in D(a))$$

Đường $\alpha = [a, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_2, b_1, b]$ là một trong những đường đi ngắn nhất từ a sang b .

3. ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ

3.1 Đồ thị có trọng số

Đồ thị $G = (X, U)$ mà mỗi cạnh $u \in U$ được đặt tương ứng với một số thực $l(u)$ (trên u ghi số thực $l(u)$) được gọi là một đồ thị có trọng số ở cạnh và thông thường gọi là đồ thị có trọng số.

Tổng $\sum_{u \in U} l(u)$ được gọi là trọng số của đồ thị G , đồng thời được ký hiệu bằng $l(G)$.

$$l(G) = \sum_{u \in U} l(u)$$

Giả sử $\alpha = (a) u_1, u_2 \dots u_i, u_{i+1}, \dots, u_m (b)$ là một đường nào đó đi từ a đến b .

Tổng $\sum_{i=1}^m l(u_i)$ được gọi là trọng số của đường α , đồng thời được ký hiệu bằng $l(\alpha)$

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^m l(u_i)$$

Dùng $D(a, b)$ để ký hiệu tập gồm tất cả các đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b .

Xét đại lượng:

$$l(a, b) = \min \{ l(\alpha) \mid \alpha \in D(a, b) \}$$

Bài toán 3. Cho đồ thị có trọng số $G = (X, E)$ và a, b là hai đỉnh tùy ý của G . Hãy tìm đường đi ngắn nhất (đường có trọng số bé nhất) đi từ đỉnh a đến đỉnh b , tức tìm đường $\alpha \in D(a, b)$, mà $l(\alpha) = l(a, b)$?

3.2. Thuật toán cho bài toán 3 (Thuật toán Dijkstra)

(cho trường hợp trọng số không âm)

Thuật toán gồm hai bước:

Bước 1: Ghi và giảm chỉ số tại các đỉnh đến cực tiểu.

- Ghi chỉ số: Tại đỉnh $a = x_0$ ghi chỉ số $\lambda_0 = 0$ và tại đỉnh $x_i, i \neq 0$ ghi chỉ số λ_i là số dương đủ lớn, thậm chí có thể lớn hơn trọng số của đồ thị G .

- Giảm chỉ số đến cực tiểu: Đối với mỗi đỉnh λ_j ($j = 1, 2, \dots$) ta tìm mọi cạnh (cung) (x_i, x_j) mà $\lambda_j - \lambda_i > l(x_i, x_j)$. Sau đó tại đỉnh x_j thay chỉ số λ_j bằng chỉ số $\lambda'_j = \lambda_i + l(x_i, x_j) < \lambda_j$. Cần lưu ý rằng $\lambda'_j > 0$ nếu $j \neq 0$.

Ta tiếp tục quá trình này cho đến khi không còn cạnh (cung) nào cho phép giảm bớt các chỉ số λ_i nữa.

Bước 2: Tìm đường ngắn nhất.

Sau khi chỉ số cực tiểu tại tất cả các đỉnh đã được thiết lập, ký hiệu chỉ số của b bằng λ_b và chỉ số tại đỉnh x_{p_1} bằng λ_{p_1} ($i = 1, 2, \dots$)

Để tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b , ta đi theo chiều ngược lại. Tại đỉnh b tìm tất cả các đỉnh x_{p_1} , sao cho: $\lambda_b - \lambda_{p_1} = l(x_{p_1}, b)$

Tại x_{p_1} lại tìm tất cả các đỉnh x_{p_2} mà: $\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} = l(x_{p_2}, x_{p_1}), v.v., \dots$

Dãy $\lambda_b, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \dots$ giảm dần thật sự, vì vậy đến một lúc nào đó sẽ tìm được $x_{p_{k+1}} = a$. Khi đó λ_b là độ dài của đường ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b và $\alpha = [a, x_{p_k}, x_{p_{k-1}}, \dots, x_{p_2}, x_{p_1}, b]$ là một trong những đường ngắn nhất từ a đến b .

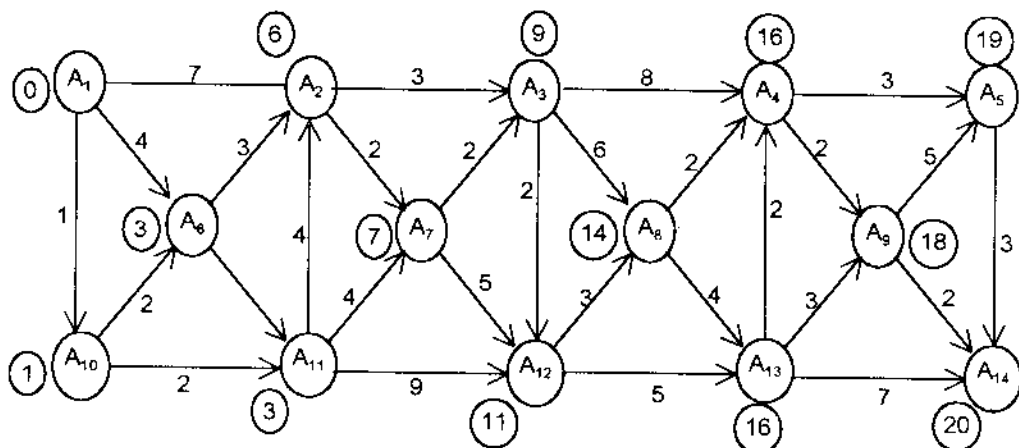
Thật vậy, giả sử $\beta = [a, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s}, b]$ là một đường đi nào đó từ a đến b . Khi đó

$$\begin{aligned}
& \lambda_{k_1} - 0 \leq l(a, x_{k_1}) \\
& \lambda_{k_2} - \lambda_{k_1} \leq l(x_{k_1}, x_{k_2}) \\
& + \dots\dots\dots \\
& \lambda_{k_s} - \lambda_{k_{s-1}} \leq l(x_{k_{s-1}}, x_{k_s}) \\
& \lambda_b - \lambda_{k_s} \leq l(x_{k_s}, b)
\end{aligned}$$

$$\lambda_b - 0 \leq l(\beta)$$

Với đường đi α ta có $\lambda_b = l(\alpha)$, nên α là một trong những đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b .

Ví dụ 15.1. Cho đồ thị có trọng số như hình vẽ. Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A_1 đến đỉnh A_{14} .



Hình 15.4

Hai đường đi ngắn nhất từ A_1 đến A_{14}

$\alpha_1 = [A_1, A_{10}, A_6, A_2, A_3, A_{12}, A_8, A_4, A_9, A_{14}]$ với $l(\alpha_1) = l(\alpha_2) = 20$.

$\alpha_2 = [A_1, A_{10}, A_{11}, A_7, A_3, A_{12}, A_8, A_4, A_9, A_{14}]$

CHƯƠNG 16

CÂY VÀ BỤI

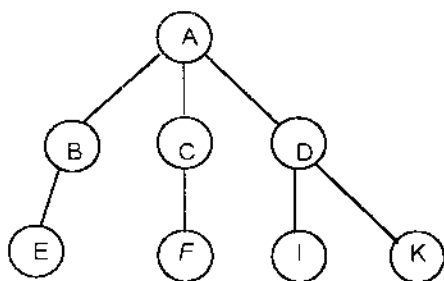
Ta xét các đồ thị dạng đặc biệt: Đồ thị vô hướng liên thông và không có chu trình; đồ thị có hướng liên thông mạnh và không có vòng.

1. ĐỊNH NGHĨA

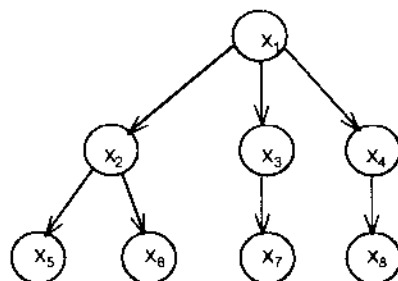
Một đồ thị vô hướng liên thông, không có chu trình và có ít nhất hai đỉnh được gọi là một cây (hình 16.1). Khái niệm quan trọng này là do Cayley đề ra.

Đồ thị hữu hạn có hướng $G = (X, U)$ là một bụi gốc $x_1 \in X$, nếu nó có ít nhất hai đỉnh và thoả mãn ba điều kiện sau:

- 1) Mỗi đỉnh khác x_1 là điểm cuối của một cung duy nhất.
- 2) Đỉnh x_1 không là điểm cuối của bất kỳ một cung nào.
- 3) Đồ thị $G = (X, U)$ không có vòng (hình 16.2).



Hình 16.1



Hình 16.2

2. ĐẶC ĐIỂM CỦA CÂY VÀ BỤI

Định lý 16.1

Giả sử H là một đồ thị vô hướng với n đỉnh ($n > 1$). Để đặc trưng cho một cây thì sáu tính chất sau đây là tương đương:

- (1) H liên thông và không có chu trình;
- (2) H không có chu trình và có $n-1$ cạnh;
- (3) H liên thông và có $n-1$ cạnh.
- (4) H không có chu trình và nếu thêm một cạnh nối giữa hai đỉnh bất kì không kề nhau thì đồ thị nhận được H' có một chu trình (và chỉ một mà thôi);
- (5) H liên thông và khi bớt một cạnh bất kì thì đồ thị mất tính liên thông.
- (6) Mọi cặp đỉnh của H đều được nối với nhau bằng một xích và chỉ một mà thôi.

Chứng minh:

Định lý được chứng minh theo phương pháp vòng tròn.

Ký hiệu số cạnh của đồ thị H bằng m , số thành phần liên thông bằng p .

(1) $\Rightarrow$ (2): Theo tính chất (1): $p=1$, $\mathcal{V}(H) = m-n+1$, nên $m=n-1$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Theo tính chất (2): $m=n-1$, $\mathcal{V}(H)=0$ nên

$$\mathcal{V}(H) = m-n+p = n-1-n+p = 0 \Rightarrow p=1.$$

Bởi vậy H liên thông và có $n-1$ cạnh.

(3) $\Rightarrow$ (4): Theo tính chất (3): $p=1$, $m=n-1$ nên

$$\mathcal{V}(H) = m-n+p = n-1-n+1 = 0$$

tức là H không có chu trình; ngoài ra, nếu thêm vào một cạnh nối giữa hai đỉnh không kề nhau, thì đồ thị H' nhận được sẽ có chu số:

$$\mathcal{V}(H') = m + 1 - n + 1 = n - 1 + 1 - n + 1 = 1$$

nên đồ thị H' có chu trình và chỉ một mà thôi.

(4) $\Rightarrow$ (5): Lấy hai đỉnh bất kỳ x, y của đồ thị H . Theo tính chất 4: nếu thêm vào cạnh (x, y) thì đồ thị mới nhận được H' có chu trình, điều đó chứng tỏ giữa x, y đã có xích nối với nhau, tức H đã liên thông.

Giả sử bớt đi một cạnh nào đó, chẳng hạn (u, v) mà đồ thị nhận được vẫn liên thông. Điều này chứng tỏ trong đồ thị H giữa các đỉnh u, v ngoài cạnh (u, v) còn một xích nữa nối giữa chúng, tức là trong H có ít nhất một chu trình đi qua u, v . Ta đi tới mâu thuẫn với tính chất 4: đồ thị H không có chu trình. Bởi vậy, nếu bớt đi một cạnh tùy ý thì đồ thị nhận được từ H sẽ không liên thông.

(5) $\Rightarrow$ (6). Giả sử trong H tồn tại cặp đỉnh nào đó, chẳng hạn x, y , được nối với nhau bằng từ hai xích trở lên. Khi đó, nếu ta bỏ đi một cạnh nào đó thuộc một trong hai xích này, thì xích còn lại vẫn bảo đảm cho x, y liên thông. Như vậy ta đã đi tới mâu thuẫn với tính chất 5. Do đó, mọi cặp đỉnh của H đều được nối với nhau bằng một xích và chỉ một mà thôi.

(6) $\Rightarrow$ (1). Giả sử H không liên thông. Khi đó có ít nhất một cặp đỉnh không có xích nối với nhau, nên mâu thuẫn với tính chất (6).

Giả sử H có chu trình. Khi đó có ít nhất một cặp đỉnh nằm trên chu trình này được nối với nhau bằng ít nhất hai xích. Như vậy ta cũng đi đến mâu thuẫn với tính chất (6). Bởi vậy đồ thị H có tính chất (1).

Định lý đã được chứng minh.

Định lý 16.2

Một cây có ít nhất hai đỉnh treo

Chứng minh:

Giả sử cây H chỉ có không quá một đỉnh treo. Ta tưởng tượng có một khách bộ hành đi theo đồ thị đó, xuất phát từ một đỉnh tùy ý (trong trường hợp đồ thị không có đỉnh treo) hay từ đỉnh treo (trong trường hợp đồ thị có 1 đỉnh treo): Nếu hành khách tự cấm mình không đi qua một cạnh hai lần, khi đó không thể gặp một đỉnh hai lần (do đồ thị H không có chu trình). Mặt khác, khi tới một đỉnh người đó luôn luôn có thể đi ra bằng một cạnh mới (vì mỗi đỉnh khác đỉnh xuất phát đều có ít nhất hai cạnh). Như vậy khách bộ hành sẽ đi mãi không bao giờ dừng lại. Đó là điều không thể xảy ra, vì đồ thị H có hữu hạn đỉnh. Vậy đồ thị H không thể có ít hơn hai đỉnh treo. Định lý được chứng minh.

Định lý 16.3

Mọi bụi khi bỏ định hướng các cạnh đều trở thành cây.

Chứng minh:

Giả sử bụi $H = (X, U)$ có gốc là x_1 và đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ nhận được từ bụi H sau khi bỏ định hướng các cung.

1) Đồ thị G liên thông: Do điều kiện 1) mỗi đỉnh $x \neq x_1$ đều có đường từ x_1 đi tới, thật vậy, giả sử $x \neq x_1$ và từ x_1 không có đường đi tới x .

Nếu x là đỉnh biệt lập, thì nó không thể là đỉnh cuối của một cung nào, còn nếu x không phải đỉnh biệt lập, thì phải có đỉnh y là điểm xuất phát của một đường đi tới x . Nhưng do từ x_1 không có đường đi tới x nên $y \neq x_1$; mà nó cũng không là điểm cuối của bất kì cung nào. Như vậy, ta đã đi tới mâu thuẫn với điều kiện 1). Do đó mọi đỉnh $x \neq x_1$ từ x_1 đều có đường đi tới nó, nên trong G mọi đỉnh x đều có xích nối với đỉnh x_1 . Bởi vậy G liên thông.

2) Đồ thị G không có chu trình. Thật vậy, giả sử G có chu trình, thì trong H dãy cung tương ứng với các cạnh thuộc chu trình này sẽ hoặc lập thành một vòng hoặc có ít nhất hai cung có chung điểm cuối. Như vậy ta đã đi tới mâu thuẫn với điều kiện 1) hoặc điều kiện 3). Nên đồ thị G không có chu trình và liên thông. Do đó G là 1 cây. Định lý được chứng minh.

3. CÂY BAO TRÙM

Giả sử $G = (X, E)$ là đồ thị vô hướng với n đỉnh ($n \geq 2$).

Mỗi đồ thị bộ phận của đồ thị mà liên thông thì được gọi là cây bao trùm của G hay cây bao trùm của tập X .

Định lý 16.4

Đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ với n ($n \geq 2$) đỉnh có cây bao trùm khi và chỉ khi nó liên thông.

Chứng minh:

1) Điều kiện cần:

Giả sử đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ có cây bao trùm ($H = (X, F)$), nhưng G lại không liên thông. Khi đó $\exists x, y \in X$ không có xích nối với

nhau. Đồ thị $H = (X, F)$ nhận được từ G bằng cách bỏ đi một số cạnh, nên trong đồ thị H các đỉnh x, y cũng không thể có xích nối với nhau. Bởi vậy đồ thị H không liên thông. Ta đã đi tới mâu thuẫn với tính chất của cây. Do đó đồ thị G liên thông.

2) Điều kiện đủ

Nếu đồ thị G liên thông ta tìm tất cả các cạnh, mà khi loại các cạnh này khỏi G không làm mất tính liên thông của đồ thị.

Nếu trong G không có cạnh như vậy, thì G không có chu trình nên nó chính là cây bao trùm.

Ngược lại, giả sử a là một cạnh nào đó trong các cạnh đã nói ở trên. Ta xoá a khỏi G và ký hiệu đồ thị bộ phận nhận được bằng G_1 .

Đối với G_1 và các đồ thị nhận được tiếp theo ta thực hiện xoá cạnh tương tự như trên, cho tới khi nhận được đồ thị bộ phận $H = (X, F)$ liên thông và tất cả các cạnh khi xoá đều làm mất tính liên thông của đồ thị, nên đồ thị bộ phận $H = (X, F)$ là một cây bao trùm của đồ thị G . Định lý được chứng minh.

Chứng minh điều kiện đủ cũng chính là thuật toán tìm cây bao trùm của đồ thị.

4. CÂY BAO TRÙM TRÊN ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ

Trong phần này ta chỉ xét những đồ thị vô hướng, có trọng số không âm và với n ($n \geq 2$) đỉnh.

Giả sử $G = (X, U)$ là một đồ thị có trọng số. Dùng $C(G)$ để ký hiệu tập gồm tất cả các cây bao trùm của đồ thị G . Xác định đại lượng:

$$l_0(G) = \min \{ l(H) \mid H \in C(G) \}$$

Bài toán 1: Cho đồ thị liên thông vô hướng có trọng số $G = (X, U)$. Hãy tìm một cây bao trùm bé nhất (cây bao trùm có trọng số bé nhất), tức tìm cây bao trùm $H = (X, E)$ của đồ thị G mà $l(H) = l_0(G)$

- Thuật toán Kruskal cho bài toán 1

Để tìm cây bao trùm bé nhất của đồ thị G ta giữ lại lần lượt các cạnh bé nhất.

Đầu tiên giữ lại một trong những cạnh có trọng số bé nhất. Ký hiệu cạnh được giữ lại tại bước 1 là v_1 và tập cạnh được giữ lại bước này là $V_1 = \{v_1\}$.

Sang bước hai giữ lại một trong những cạnh có trọng số bé nhất, mà chưa được giữ. Ký hiệu cạnh được giữ lại tại bước này là v_2 và tập cạnh đã được giữ lại là: $V_2 = V_1 \cup \{v_2\} = \{v_1, v_2\}$.

Tại bước ba giữ lại một trong những cạnh có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại, mà nó không lập với các cạnh đã giữ thành chu trình. Ký hiệu cạnh được giữ lại tại bước này bằng v_3 và tập cạnh đã được giữ lại là $V_3 = V_2 \cup \{v_3\} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Giả sử sau k bước ta giữ lại được tập cạnh là: $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$

Sang bước $k+1$ ta giữ lại một trong những cạnh có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại, mà nó không lập với các cạnh thuộc V_k thành chu trình. Ký hiệu cạnh được giữ lại tại bước này bằng v_{k+1} và tập cạnh được giữ lại sau $k+1$ bước là $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}\}$.

Tiếp tục quá trình này cho tới khi không thể giữ thêm được một cạnh nào nữa thì dừng lại, và ta được tập cạnh V_i .

Đồ thị bộ phận $H = (X, V_i)$ không có chu trình, nhưng nếu thêm một cạnh bất kì trong các cạnh còn lại của G đều xuất hiện chu trình, nên theo tính chất (4) đồ thị H là một cây và nó là một trong những cây bao trùm của đồ thị G .

Mặt khác theo tính chất (2) cây H phải có $i = n-1$ đỉnh.

Định lý 16.5

Nếu đồ thị $G = (X, U)$ liên thông và có trọng số khác nhau từng đôi một, thì cây bao trùm $H = (X, V_{n-1})$ với tập cạnh V_{n-1} được xác định bằng thuật toán Kruskal là cây bao trùm bé nhất và duy nhất (Bài toán 1 có lời giải duy nhất).

Chứng minh:

Giả sử $H_1 = (X, V)$ là một cây bao trùm có trọng số bé nhất tùy ý của đồ thị G . Ta sẽ chứng minh rằng $V = V_{n-1}$.

Nếu $V \neq V_{n-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}\}$.

Khi đó, do $|V| = |V_{n-1}| = n - 1$, nên trong V_{n-1} , phải có cạnh không thuộc V . Giả sử v_k là cạnh có chỉ số nhỏ nhất trong V_{n-1} không thuộc V . Theo tính chất (4), thì phải có một và chỉ một chu trình α trong tập $V \cup \{v_k\}$. Nếu α chỉ gồm các cạnh thuộc V_{n-1} , thì khi đó V_{n-1} có chu trình, nên mâu thuẫn với tính chất của V_{n-1} . Vậy α phải chứa ít nhất một cạnh không thuộc V_{n-1} . Giả sử $u_0 \in \alpha$ và $u_0 \notin V_{n-1}$.

Đặt $W = (V \cup \{v_k\}) - \{u_0\}$. Đồ thị $H_2 = (X, W)$ không chứa chu trình và có $n - 1$ cạnh, nên, theo tính chất 2, nó là một cây.

Mặt khác, do k là chỉ số nhỏ nhất mà $v_k \notin V$ và $u_0 \in V$, nên $V_{k-1} \cup \{u_0\} \subset V$. Do đó tập $V_{k-1} \cup \{u_0\}$ không chứa chu trình, nhưng cạnh u_0 lại không được giữ lại, mà v_k được chọn. Bởi vậy: $l(u_0) > l(v_k)$.

Cây $H_2 = (X, W)$ nhận được từ cây $H_1 = (X, V)$ bằng cách đổi u_0 thành v_k . Bởi vậy $l(H_2) < l(H_1)$. Ta đã đi tới mâu thuẫn với tính chất trọng số bé nhất của H_1 . Do đó $V = V_{n-1}$ và cây bao trùm $H = (X, V_{n-1})$ có trọng số bé nhất và duy nhất.

Đối với những đồ thị có trọng số không khác nhau từng đôi một từ định lý 16.5 có hệ quả sau:

Hệ quả 16.1

Nếu đồ thị $G = (X, U)$ liên thông, thì cây bao trùm $H = (X, V_{n-1})$ với tập cạnh V_{n-1} được xác định bằng thuật toán Kruskal là cây bao trùm bé nhất.

Giả sử đồ thị $G = (X, U)$ liên thông, nhưng các trọng số không khác nhau từng đôi một. Bằng thuật toán Kruskal ta xác định được tập.

$$V_{n-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$$

không chứa chu trình và là một trong những tập gồm $n-1$ cạnh của G có tổng trọng số bé nhất, nên đồ thị $H = (X, V_{n-1})$ là một trong những cây bao trùm có trọng số bé nhất của G .

Thật vậy, ta có thể thu xếp mọi cạnh của đồ thị có trọng số khác nhau bằng cách: Đối với mỗi nhóm cạnh có trọng số bằng nhau ta "đánh số" dựa theo thứ tự ưu tiên khi xác định tập V_{n-1} , sau đó thêm cho mỗi cạnh một "trọng số phụ"; chẳng hạn, nhóm $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ij}$ có trọng số bằng

nhau, tức $l(u_{i1}) = l(u_{i2}) = \dots = l(u_{in})$, ta thêm "trọng số phụ ε_i và đổi như sau:

$$l(u_{i1}) \rightarrow l'(u_{i1}) = l(u_{i1}) + \varepsilon_i$$

$$l(u_{i2}) \rightarrow l'(u_{i2}) = l(u_{i2}) + 2\varepsilon_i$$

.....

$$l(u_{in}) \rightarrow l'(u_{in}) = l(u_{in}) + t\varepsilon_i.$$

Trong đồ thị mới với các trọng số phụ được thu xếp để cho trọng số các cạnh khác nhau từng đôi một có một và chỉ một cây bao trùm $H = (X, U_{n-1})$ có trọng số bé nhất. Vậy $H = (X, V_{n-1})$ là cây bao trùm có trọng số bé nhất của đồ thị G .

- *Thuật toán Prim cho bài toán 1 (Thuật toán lan toả).*

Để tìm cây bao trùm bé nhất của đồ thị $G = (X, E)$ ta xuất phát từ một đỉnh tùy ý, chẳng hạn A . Trong các cạnh thuộc đỉnh A ta giữ lại một trong những cạnh có trọng số bé nhất, chẳng hạn (A, B) .

Trong các cạnh còn lại hoặc thuộc đỉnh A hoặc thuộc đỉnh B ta giữ lại một trong những cạnh có trọng số bé nhất, chẳng hạn (A, C) .

Tiếp theo trong các cạnh còn lại hoặc thuộc A hoặc thuộc B hoặc thuộc C ta giữ lại một trong những cạnh có trọng số bé nhất, nhưng không lập với những cạnh đã giữ thành một chu trình.

Cứ tiếp tục quá trình này cho tới khi số cạnh được giữ lại ít hơn số đỉnh là 1, thì, theo tính chất 2, ta được cây bao trùm và là cây bao trùm có trọng số bé nhất.

Chú ý:

1) Đối với Thuật toán Kruskal cũng như thuật toán Prim đều có thể thực hiện theo kiểu đối ngẫu: Loại dần các cạnh có trọng số lớn nhất của đồ thị, mà không làm mất tính chất liên thông cho đến khi không thể loại cạnh được nữa.

2). Có thể áp dụng Thuật toán Kruskal và thuật toán Prim để tìm cây bao trùm có trọng số lớn nhất bằng cách lần lượt giữ lại cạnh có trọng số lớn nhất, mà nó không lập với các cạnh đã giữ thành chu trình.

5. THUẬT TOÁN TÌM HỆ CƠ SỞ CỦA CÁC CHU TRÌNH

Trước hết giả thiết rằng đồ thị $G = (X, E)$ có m cạnh và liên thông (trong trường hợp ngược lại, thì xét riêng từng thành phần liên thông).

Để tìm hệ cơ sở của các chu trình thuộc đồ thị G ta thực hiện theo hai bước:

1). Trước hết xây dựng một cây bao trùm của đồ thị G . ($H = (X, V_{n-1})$)

Giả sử trong quá trình xây dựng cây bao trùm H ta đã loại bỏ các cạnh $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$, tức $u_i \notin V_{n-1} (1 \leq i \leq m-n+1)$

2) Xây dựng hệ chu trình cơ sở:

Thêm vào cây H cạnh bất kỳ u_i ($1 \leq i \leq m-n+1$), tức là khôi phục lại cạnh u_i trong đồ thị G , thì trong đồ thị nhận được từ H sẽ xuất hiện một và chỉ một chu trình α_i . Đây cũng chính là một chu trình trong đồ thị G .

Bằng cách khôi phục lần lượt từng cạnh $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$, (với lưu ý rằng, sau khi nhận được chu trình α_i ta lại "xoá cạnh u_i ($1 \leq i \leq m-n+1$) khỏi đồ thị G), ta được các chu trình tương ứng

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-n+1}. \quad (1)$$

Hệ chu trình (1) độc lập bởi vì với mọi cặp chỉ số $1 \leq i, j \leq m-n+1$, thì α_i chứa u_j , không chứa u_j và ngược lại, α_j chứa u_i và không chứa u_i .

Mặt khác $m-n+1 = \nu(G)$, nên hệ (1) chứa một số cực đại các chu trình độc lập, nên hệ (1) là một cơ sở của các chu trình trong đồ thị G .

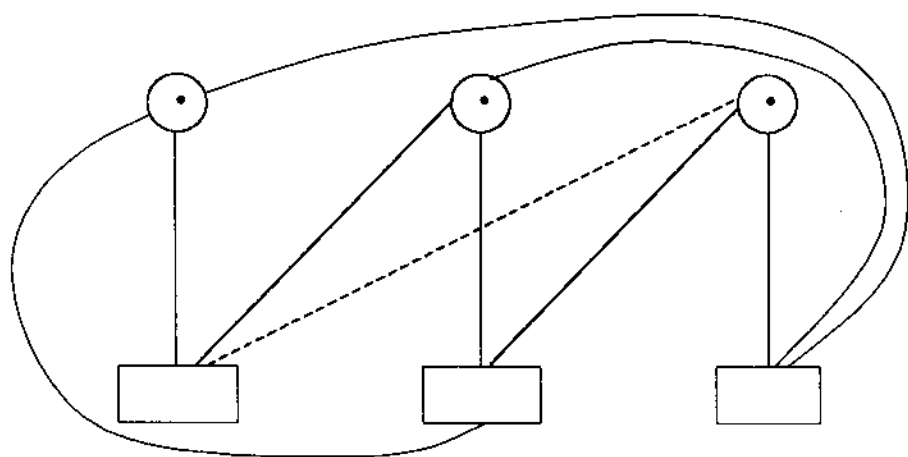
CHƯƠNG 17

ĐỒ THỊ PHẪNG

Đồ thị (hay đa đồ thị) G là phẳng, nếu có thể vẽ nó lên một mặt phẳng, sao cho các đỉnh tương ứng với những điểm khác nhau, các cạnh là những đường cong đơn giản, và hai cạnh bất kỳ không có điểm chung, trừ hai đầu mút. Đồ thị thoả mãn những điều kiện như trên còn gọi là đồ thị tô pô phẳng.

Các đồ thị, mà có thể biến đổi cho trùng nhau bằng phép biến dạng co dãn liên tục trên mặt phẳng thì không được coi là những đồ thị phẳng khác nhau.

Đối với đồ thị phẳng, từ xa xưa đã lưu truyền một bài toán cổ "Ba nhà, ba giếng": Có ba nhà riêng và 3 cái giếng. Mỗi nhà đều có quyền dùng nước ở cả 3 giếng và có quyền làm đường riêng để đi lấy nước ở từng giếng. Vậy có cách nào để giúp ba nhà này thiết kế, để các quãng đường của họ hoàn toàn không cắt nhau?



Hình 17.1

Thực tế cho thấy là không thể được! Từ 3 nhà đến 3 giếng có 9 đường, song chỉ thiết kế được 8 đường không cắt (trừ các đầu nút). Nếu xây thêm đường thứ 9 nhất định nó sẽ phải cắt ít nhất một trong các đường đã có. Sau này sẽ lý giải thêm về hiện tượng này.

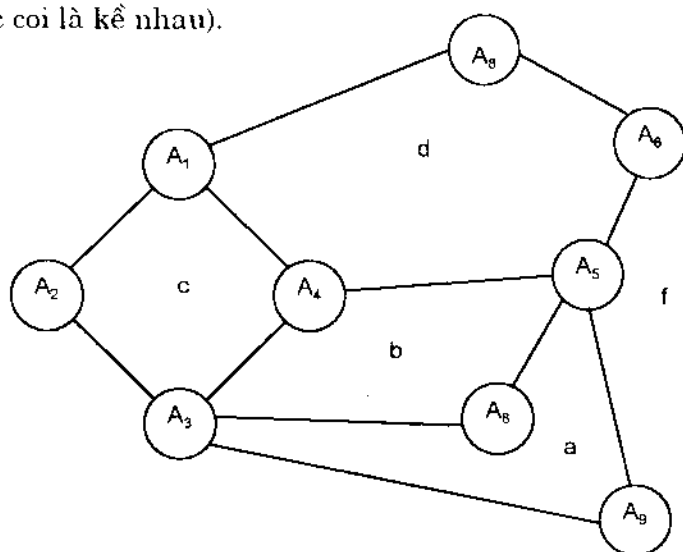
1. ĐỊNH NGHĨA

Giả sử G là một đồ thị phẳng.

Diện hữu hạn của đồ thị G là một miền của mặt phẳng được giới hạn bởi các cạnh của G , sao cho hai điểm bất kỳ của miền này đều có thể nối bằng một nét liền mà không gặp một đỉnh hoặc một cạnh nào ở bên trong.

Biên của diện d là tập hợp gồm tất cả các cạnh giới hạn diện d .

Hai diện d và f được gọi là kề nhau, nếu biên của chúng có ít nhất một cạnh chung. (Các diện tiếp xúc với nhau chỉ ở một đỉnh, thì không được coi là kề nhau).



Hình 17.2

Diện b và c kề nhau ở một cạnh (A_3, A_4); Diện a và b kề với nhau ở hai cạnh: (A_3, A_4) và (A_5, A_8). Diện a và diện c không kề nhau.

Trong đồ thị tô pô biên của diện d gồm một hay nhiều chu trình sơ cấp rời nhau, các cạnh treo hoặc các cạnh "cầu" (cạnh nối hai chu trình rời nhau).

Ta gọi chu trình của diện d là các chu trình sơ cấp chứa mọi cạnh khác của biên ở bên trong nó.

Phần mặt phẳng còn lại sau khi đã loại bỏ tất cả các diện hữu hạn của đồ thị phẳng G , được gọi là diện vô hạn của đồ thị G .

Như vậy, mỗi đồ thị phẳng có một diện vô hạn. Diện vô hạn không có chu tuyến.

Ví dụ 17.1. Bản đồ địa lý là một đồ thị phẳng không có cạnh "cầu". Đồ thị này có tính chất đặc biệt: Bậc của mỗi đỉnh đều không vượt quá 3.

2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Định lý 17.1

Số miền hữu hạn trong đồ thị phẳng G luôn luôn bằng chu số của đồ thị G .

Chứng minh:

Bằng quy nạp theo số các miền hữu hạn (h) của đồ thị G .

1) Với $h = 1$. Đồ thị G có một miền hữu hạn, nên có một chu trình đơn duy nhất. Bởi vậy chu số $V(G) = 1 = h$.

2). Giả sử khẳng định đúng với mọi đồ thị có không quá $h = t$ diện hữu hạn. Cần chứng minh định lý đối với đồ thị phẳng có $h = t + 1$ diện hữu hạn.

Giả sử đồ thị phẳng G có n đỉnh, m cạnh, p thành phần liên thông và $t + 1$ miền hữu hạn. Chọn một cạnh nào đó trên biên của một miền hữu hạn, mà nó tiếp xúc với miền vô hạn. Bỏ cạnh này, nhận được đồ thị bộ phận G' có số miền hữu hạn bằng t . Theo giả thiết quy nạp $V(G') = t$, nên

$$m - 1 - n + p = t \Rightarrow m - n + p = t + 1.$$

Vậy $V(G) = h$. Định lý được chứng minh.

Hệ quả 17.1

Nếu một đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh, m cạnh và f diện, thì

$$n - m + f = 2 \quad (\text{Công thức Euler})$$

Thật vậy, số diện hữu hạn của đồ thị G bằng $V(G)$. Ngoài ra mỗi đồ thị phẳng có một diện vô hạn duy nhất, nên

$$f = V(G) + 1 = (m \cdot n + 1) + 1 = m \cdot n + 2$$

Bởi vậy: $n \cdot m + f = 2$

Hệ quả 17.2

Trong một đồ thị phẳng liên thông tùy ý luôn luôn tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc không vượt quá 5.

Thật vậy, trong đồ thị phẳng mỗi diện được bao bằng ít nhất 3 cạnh. Mặt khác mỗi cạnh có thể nằm trên biên của tối đa hai diện, nên có quan hệ

$$3f \leq 2m \text{ nên } f \leq \frac{2m}{3} \quad (1)$$

Nếu trong đồ thị phẳng mà tất cả các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 6. Khi đó mỗi đỉnh của đồ thị phải là đầu mút của ít nhất 6 cạnh, mà mỗi cạnh lại có 2 đầu mút, nên

$$6n \leq 2m$$

$$\text{Do đó: } n \leq \frac{m}{3} \quad (2)$$

Khi đó theo (1), (2) và công thức Euler có

$$2 = m \cdot n + f \leq \frac{m}{3} \cdot m + \frac{2m}{3} = 0.$$

Ta đã đi đến mâu thuẫn. Vậy đồ thị phẳng phải có ít nhất một đỉnh bậc không vượt quá 5.

Hệ quả 17.3

Mỗi bản đồ địa lý có ít nhất một diện, mà số cạnh của chu tuyến không vượt quá 5.

Thật vậy, trong bản đồ địa lý mỗi đỉnh là đầu mút của ít nhất ba cạnh. Mặt khác mỗi cạnh lại chỉ có thể xuất hiện ở chu tuyến tối đa 2 diện, nên có: $3n \leq 2m$.

Từ đó

$$n \leq \frac{2m}{3} \quad (3)$$

Nếu phải giả thiết rằng mỗi diện đều có chu tuyến gồm ít nhất 6 cạnh, thì số cạnh xuất hiện trong các diện không nhỏ hơn $6f$. Mặt khác mỗi cạnh lại chỉ có thể xuất hiện tại không quá hai chu tuyến, nên $2m \leq 6f$. Từ đó có

$$f \leq \frac{m}{3} \quad (4)$$

Sử dụng các quan hệ (1), (2) và công thức Euler có:

$$2 = n - m + f \leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0.$$

Ta đi tới mâu thuẫn, nên đồ thị phẳng phải có ít nhất một diện với chu tuyến có không quá 5 cạnh.

3. ỨNG DỤNG

Công thức Euler phát biểu trong Hệ quả 17.1 đúng trong nhiều trường hợp rất có hiệu quả.

Ví dụ 17.1 (Euler). Trong không gian ba chiều một đa diện lồi có n đỉnh, m cạnh và f diện luôn luôn thoả mãn hệ thức:

$$n - m + f = 2 \quad (*)$$

Thật vậy, ta có thể vẽ đa diện lên một mặt cầu, sao cho hai cạnh tuỳ ý không cắt nhau tại các điểm khác với các đầu mút. Sau đó tiến hành phép chiếu nổi với tâm ở giữa một trong các diện, thì có thể biểu diễn đa diện đã cho trên mặt phẳng. Đồ thị phẳng "biểu diễn" đa diện đã cho cũng có m cạnh, n đỉnh và f diện, nên theo công thức Euler có hệ thức (*).

Ví dụ 17.2. Vận dụng công thức Euler, để giải quyết bài toán "3 nhà 3 giếng". Coi mỗi nhà, mỗi giếng là một đỉnh, đường nối giữa nhà và giếng là một cạnh của đồ thị (G). Khi đó có thể thiết kế được 9 đường nối nhà và giếng, sao cho không có cặp đường nào cắt nhau ngoài đầu mút khi và chỉ khi G là một đồ thị phẳng.

Giả sử G là đồ thị phẳng, ta có:

$$f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5.$$

Chu tuyến của mỗi diện thuộc G chứa ít nhất 4 cạnh (vì nếu một diện nào đó chỉ có 3 cạnh, thì diện đó có 3 đỉnh, mà hai trong 3 đỉnh đó thuộc về cùng một loại: nhà hay giếng; nhưng hai đỉnh cùng loại lại không thể kề nhau). Như vậy số vị trí của các cạnh xuất hiện trên tất cả các chu tuyến không thể ít hơn $4f$. Mặt khác mỗi cạnh lại không thể xuất hiện ở quá 2 chu tuyến, nên tổng số vị trí các cạnh trên tất cả các chu tuyến sẽ không vượt quá $2n$. Bởi vậy:

$$2 \times 9 = 2m \geq 4f = 20.$$

Ta đã đi tới mâu thuẫn, nên đồ thị G không phẳng. Do đó bài toán 3 nhà 3 giếng có lời giải phủ định.

Ví dụ 17.3. Chứng minh rằng đồ thị đầy đủ gồm 5 đỉnh không phải là đồ thị phẳng.

Giả sử đồ thị đầy đủ gồm 5 đỉnh G là đồ thị phẳng. Khi đó nó thoả mãn công thức Euler:

$$f = 2 - n + m = 2 - 5 + 10 = 7.$$

Chu tuyến của mỗi diện đều có ít nhất 3 cạnh, nên số vị trí các cạnh tính theo tất cả các chu tuyến sẽ không ít hơn $3f$. Mặt khác mỗi cạnh lại không thể xuất hiện ở quá 2 chu tuyến, nên số vị trí của các cạnh tính theo tất cả các chu tuyến sẽ không vượt quá $2m$. Bởi vậy có bất đẳng thức

$$2 \times 10 = 2m \geq 3f = 3 \cdot 7 = 21.$$

Ta đã đi đến mâu thuẫn, nên đồ thị đầy đủ 5 đỉnh không phải là đồ thị phẳng.

CHƯƠNG 18

CÁC BÀI TẬP KÈM THEO LỜI GIẢI

1. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BẬC CỦA ĐỒ THỊ

Bài toán 1: Có 20 đội bóng thi đấu với nhau, mỗi đội phải đấu một trận với từng đội khác.

Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu một số trận như nhau?

Giải :

Bài toán được chuyển qua đồ thị như sau:

Cho tương ứng mỗi đội bóng với 1 đỉnh của đồ thị. Khi hai đội đã đấu với nhau thì ta nối hai đỉnh bằng 1 cạnh. Bởi vậy bậc của mỗi đỉnh bằng số trận mà đội tương ứng đã thi đấu. Đến đây bài toán được phát biểu dưới dạng đồ thị:

Cho một đồ thị gồm 20 đỉnh. Chứng minh rằng bao giờ cũng có hai đỉnh cùng bậc.

Thật vậy, trong 20 đỉnh, không thể có đồng thời một đỉnh bậc 0 (chẳng hạn đỉnh A) và một đỉnh bậc 19 (chẳng hạn đỉnh B). Nếu đỉnh B có bậc 19 thì B là đầu mút của 19 cạnh nối B với 19 đỉnh còn lại, trong đó có A , do đó A là đỉnh có bậc khác 0. Ngược lại nếu A có đỉnh bậc 0 thì bậc của B có nhiều nhất là 18. Có 20 đỉnh, mà mỗi đỉnh chỉ có thể có một trong 19 bậc (từ 0 đến 18 hoặc từ 1 đến 19). Vì vậy theo nguyên tắc Dirichet phải có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

Từ cách chứng minh trên ta thấy bất cứ lúc nào cũng có hai đội bóng trong số 20 đội đã đấu được một số trận như nhau.

Nếu sử dụng định lý: "Trong mọi đồ thị có n đỉnh ($n \geq 2$), bao giờ cũng có ít nhất hai đỉnh cùng bậc" thì rõ ràng sau khi bài toán chuyển qua đồ thị sẽ được giải hết sức đơn giản.

Bài toán 2: Có 20 đội bóng thi đấu với nhau, mỗi đội phải đấu 1 trận với từng đội khác. Có một lúc, người ta nhận thấy có đúng 2 đội đã đấu một số trận như nhau. Chứng minh rằng khi đó hoặc có đúng một đội chưa thi đấu trận nào, hoặc có đúng 1 đội đã thi đấu với tất cả các đội khác.

Giải:

Nếu ta chuyển bài toán về đồ thị, thì bài toán phát biểu như sau:

Cho một đồ thị gồm 20 đỉnh. Chứng minh rằng nếu đồ thị đó có đúng 2 đỉnh cùng bậc, thì đồ thị có đúng 1 đỉnh bậc 0 hoặc có đúng 1 đỉnh bậc 19.

Trước hết, nếu đồ thị có đúng hai đỉnh cùng bậc thì bậc đó không thể là 0 mà cũng không thể là 19.

Thật vậy, nếu đồ thị có đúng hai đỉnh bậc 0 (các đỉnh khác có bậc đôi một khác nhau), thì loại bỏ hai đỉnh cô lập này ta được đồ thị mới (G') có 18 đỉnh với bậc đôi một khác nhau, điều đó trái với kết quả trong chứng minh bài 1. Còn nếu đồ thị có hai đỉnh cùng bậc là 19 thì đồ thị bù (G'') của G có hai đỉnh cùng bậc 0 và các đỉnh khác có bậc đôi một khác nhau, điều này không thể xảy ra, như trên đã lý luận.

Như vậy, đồ thị có đúng hai đỉnh cùng bậc k , với $k \neq 0$ và $k \neq 19$.

Suy ra đồ thị có đúng một đỉnh bậc 0 hoặc một đỉnh bậc 19 (nếu không thì đồ thị phải có hai đỉnh nữa có cùng bậc $k' \neq k$, $1 \leq k \leq 18$ trái với giả thiết).

Bài toán 3: Chứng minh: Trong n - giác lồi G , không tồn tại tập U chứa hơn n cạnh hay đường chéo, sao cho 2 đoạn bất kỳ trong U đều có điểm chung.

Giải:

Giả sử trong G chọn được tập U gồm k cạnh hay đường chéo, sao cho hai đoạn bất kỳ trong chúng đều có điểm chung. Cần chứng minh $k \leq n$.

Coi mỗi đỉnh của G là một đỉnh đồ thị. Hai đỉnh là kề nhau, nếu chúng là đầu mút của một đoạn thuộc U . Ta cũng nói đỉnh x có bậc i nếu x kề với i đỉnh khác. Ký hiệu m_i là số đỉnh bậc i ($i = 1, 2, \dots$).

$$\text{Ta có } n = m_0 + m_1 + m_2 + \dots, \text{ nên } m_1 + m_2 + \dots \leq n \quad (1)$$

Xét đỉnh x bậc $i > 2$ và $D(x)$ gồm các đỉnh $x_1, x_2, \dots, x_i$. Không giảm tính tổng quát, có thể coi $(x, x_1); (x, x_2)$ là các cạnh của đồ thị tương ứng với cạnh hay đường chéo ngoài cùng của G trong i cạnh nói trên. Khi đó đỉnh x_j với $1 < j < i$, có bậc 1 (vì bất kỳ cạnh hay đường chéo (x_j, y) nào, với y khác x , đều không có điểm chung với một trong hai cạnh (x, x_1) hoặc (x, x_j) , nghĩa là (x_j, y) không thuộc U). Do vậy mỗi đỉnh bậc $i > 2$ kề với ít nhất $i - 2$ đỉnh bậc 1, suy ra, m_i đỉnh bậc i ($i = 3, 4, \dots$) kề với không ít hơn $(i - 2)m_i$ đỉnh bậc 1. Mặt khác, nếu x và y là hai đỉnh khác nhau, thì không thể kề với cùng một đỉnh bậc 1, nghĩa là các đỉnh bậc một kề với các đỉnh bậc i đôi một khác nhau. Ta có bất đẳng thức sau:

$$m_1 \geq m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots \quad (2)$$

Mỗi cạnh gồm hai đầu mút, nên k cạnh thuộc U có $2k$ đầu mút, mỗi đỉnh bậc i kề với i đỉnh trong $2k$ đỉnh này nên ta có:

$$2k = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{aligned} 2k &= m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) + (m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots) \\ &\leq (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + \dots) + m_1 = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \dots) \leq 2n \end{aligned}$$

Ta có $k \leq n$. Đó là điều phải chứng minh.

2. CÁC BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ

Bài toán 4: Một lớp học có 40 học sinh về nghỉ hè. Biết rằng mỗi em có địa chỉ của ít nhất 20 bạn, và nếu bạn này có địa chỉ của bạn kia thì bạn kia cũng có địa chỉ của bạn này. Chứng minh rằng bất cứ hai em nào trong lớp cũng có thể nhắn tin cho nhau.

Giải:

Ta cho tương ứng mỗi học sinh với mỗi đỉnh của đồ thị, còn hai học sinh có trao đổi địa chỉ cho nhau thì hai đỉnh tương ứng được nối bởi một cạnh; mỗi em có địa chỉ của ít nhất 20 bạn nghĩa là mỗi đỉnh có bậc ít nhất bằng 20. Khi đó hai bạn có thể nhắn tin cho nhau nếu trên đồ thị

tồn tại một đường đi nối giữa hai đỉnh tương ứng. Ta ký hiệu đồ thị trên là G

Theo Hệ quả 4.1 đồ thị G liên thông, nên hai đỉnh tùy ý đều có đường nối với nhau. Bởi vậy hai bạn bất kỳ trong lớp đều có thể nhắn tin cho nhau.

Bài toán 5: Tại mỗi đỉnh của một đồ thị liên thông ta viết một số thực sao cho số viết tại mỗi đỉnh bằng trung bình cộng của các số viết tại mỗi đỉnh kề với đỉnh này. Chứng minh rằng tất cả các số được viết đều bằng nhau.

Giải:

Để cho gọn, ta ký hiệu số ghi tại đỉnh x cũng là x .

Giả sử a là số nhỏ nhất trong các số được viết tại tất cả các đỉnh và b là số viết tại đỉnh b bất kỳ, ta sẽ chứng minh $a = b$.

Vì đồ thị liên thông, nên tồn tại đường đi $(a, a_1, a_2, \dots, a_k)$. Nếu a được nối với m đỉnh $x, y, \dots, z$ thì:

$$a = \frac{x + y + \dots + z}{m}$$

Song $a \leq x, y, \dots, z$, nên $a = x = y = \dots = z$. Điều đó cũng có nghĩa là $a = a_1$.

Cho a_1 đóng vai trò của a (điều này hoàn toàn có thể được vì $a_1 = a$ nên cũng là số nhỏ nhất trong các số đã viết) thì $a_1 = a_2, \dots$, cuối cùng ta có kết quả là $a = a_1 = a_2 = \dots = a_k = b$.

Bài toán 6: Chứng minh rằng đối với đồ thị liên thông G tùy ý có n cạnh luôn luôn có thể đánh số các cạnh của G bằng các số $1, 2, \dots, n$, sao cho tại mỗi đỉnh mà ở đó có ít nhất hai cạnh của đồ thị, thì USCLN của các số nguyên viết trên các cạnh thuộc đỉnh này bằng 1.

Giải:

Từ một đỉnh x bất kỳ, đi dọc theo các cạnh phân biệt của đồ thị, ta đánh số các cạnh bằng $1, 2, \dots$ theo thứ tự ta gặp chúng, cho tới khi gặp lại cạnh đã được đánh số thì dừng lại (không đi theo cạnh nào lần thứ hai). Nếu còn cạnh chưa được đánh số, do G liên thông, nên trong các

cạnh này phải có cạnh mà đỉnh thuộc nó đã nằm trên đường đi vừa đánh số. Lại xuất phát từ đỉnh đó, lấy số vừa dừng lại, tiếp tục đi dọc theo các cạnh chưa đánh số để đánh số tiếp (theo cách đã làm trên) cho đến khi gặp lại tình huống cũ. Lặp lại quá trình này cho đến khi tất cả các cạnh đều được đánh số.

Giả sử y là đỉnh nối với k cạnh ($k \geq 2$). Nếu y trùng x thì y là đỉnh đầu cạnh ghi số 1, nên bài toán đã chứng minh xong.

Nếu y khác x , giả sử lần đầu tiên gặp y tại đỉnh cuối của cạnh đánh số r . Lúc này có $k - 1$ ($k - 1 \geq 1$) cạnh chưa được đánh số nối với y . Do vậy, từ y ra theo một trong các cạnh còn lại này phải đánh số $r + 1$. Do $(r, r + 1) = 1$, nên USCLN của các số ghi trên các cạnh y cũng bằng 1.

3. CÁC BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN CHU TRÌNH

Bài toán 7: Cho một tập hợp $n > 3$ điểm trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và một số tự nhiên k ($k < n$). Chứng minh:

a. Nếu $k \leq \frac{n}{2}$, thì từ mỗi điểm của tập hợp đã cho có thể vẽ các đoạn thẳng nối với ít nhất k điểm khác sao cho trong đó không có 3 đoạn nào tạo thành một tam giác.

b. Nếu $k > \frac{n}{2}$ và mỗi điểm của tập hợp đã cho được nối bằng những đoạn thẳng với k điểm khác, thì trong các đoạn thẳng đó bao giờ cũng có 3 cạnh của một tam giác.

Giải:

Xét $k \leq \frac{n}{2}$, chọn trong tập X (chứa n điểm), một tập con A gồm $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ điểm, $B = X/A$ chứa $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ điểm nếu n chẵn và chứa $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ điểm nếu n lẻ.

Vì k nguyên nên $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, do đó A, B chứa không ít hơn k điểm, xây dựng đồ thị 2 mảng: mỗi đỉnh thuộc tập này kể mọi đỉnh thuộc tập kia thì giả thiết phần a được thực hiện, tuy nhiên không có chu trình tam giác nào

(đồ thị 2 mảng thì 2 sắc nên không có chu trình với độ dài lẻ). Có thể phát biểu tổng quát hơn: không có đa giác lẻ đỉnh.

Xét $k > \frac{n}{2}$ và mỗi điểm trong X được nối với k điểm khác bởi các đoạn thẳng. Giả sử (x, y) là một trong số các đoạn thẳng này. Theo giả thiết, x và y mỗi điểm được nối với k điểm nên ngoài (x, y) ra mỗi điểm x, y đều được nối với $k - 1$ điểm nữa, tổng cộng số đoạn thẳng có ít nhất một đầu mút x hoặc y là $2k - 1$. Nhưng, số điểm còn lại (khác x, y) là $n - 2$; $k > \frac{n}{2}$ nên $2k - 2 > n - 2$. Suy ra trong $2k - 1$ đoạn thẳng nói trên có hai đoạn thẳng trùng đầu mút z . Ta được một chu trình tam giác (x, y, z) .

Tổng quát của bài toán

Cho tập X có $n > 3$ điểm, trong chúng không có 3 điểm nào thuộc một đường thẳng và các số tự nhiên p, k thoả mãn: $3 \leq p < n; k < n$.

a. Nếu $\frac{k}{n} < (p - 2)/(p - 1)$, thì mỗi điểm của X có thể được nối bằng các đoạn thẳng đến ít nhất k điểm khác của X , sao cho bất kỳ tập con Y (chứa p điểm) nào của X , cũng có 2 điểm không được nối bằng đoạn thẳng.

b. Nếu $\frac{k}{n} > \frac{(p - 2)}{(p - 1)}$ và mỗi điểm của X được nối bởi các đoạn thẳng với k điểm khác của X , thì có một tập con A chứa p điểm của X , sao cho 2 điểm bất kỳ trong chúng đều được nối bằng một đoạn thẳng.

Bài toán 8: Trên mỗi ô của bảng vuông $n \times n$ ($n > 1$) viết một chữ cái. Biết rằng tất cả các dòng của bảng đều khác nhau. Chứng minh rằng trong đó có một cột, mà sau khi xoá nó, bảng còn lại cũng không có dòng nào trùng nhau (về chữ viết và thứ tự viết).

Giải:

Nếu tồn tại một chỉ số i ($1 \leq i \leq n$) mà không có hai dòng nào chỉ khác nhau ở phần tử thứ i , thì sau khi xoá cột i đi, hai dòng nào cũng khác nhau ở một vị trí nữa và khi đó bài toán đã giải xong.

Xét trường hợp: với mỗi $i = 1, 2, 3, \dots, n$ bao giờ cũng tồn tại ít nhất một cặp dòng chỉ khác nhau ở phần tử thứ i duy nhất (1).

Xây dựng đồ thị như sau: mỗi dòng của bảng là một đỉnh của đồ thị, như vậy đồ thị có n đỉnh. Với mỗi chỉ số có thể có nhiều cặp dòng có tính chất (1), song ta chỉ chọn một cặp dòng có tính chất này làm cạnh của đồ thị, như vậy, mỗi i cho ta một dòng, nên có tất cả n dòng. Đồ thị này có $n > 2$ đỉnh và có ít nhất n cạnh, nên nó có ít nhất một chu trình. Ta ký hiệu chu trình này là $(a, b, c, \dots, e, f, a)$, trong đó $a, b, c, d, \dots, e, f$ là các đỉnh của đồ thị (là các dòng của bảng). Với cách xây dựng đồ thị trên ta có: a kề b tức là hai dòng a, b (và cũng chỉ có hai dòng này, khác nhau ở phần tử thứ i). Các cặp dòng khác có giá trị trùng nhau ở vị trí thứ i , nghĩa là: $b, c; c, d; \dots; e, f; f, a$ tại vị trí thứ i trùng nhau, suy ra b, a trùng nhau tại vị trí thứ i . Điều này hoàn toàn vô lý, vì hai dòng a, b vừa khác nhau, vừa trùng nhau tại vị trí thứ i . Từ đây suy ra khẳng định của bài toán được chứng minh.

4. CÁC BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG VÀ CHU TRÌNH HAMILTON

Đồ thị đấu loại là đồ thị có hướng, mà trong đó hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bởi đúng 1 cung. Tên gọi đấu loại xuất hiện vì đồ thị như vậy có thể biểu diễn kết quả thi đấu bóng chuyền, bóng bàn hay bất kỳ trò chơi nào mà không cho phép hoà.

Hãy sử dụng đồ thị trên để giải bài toán sau:

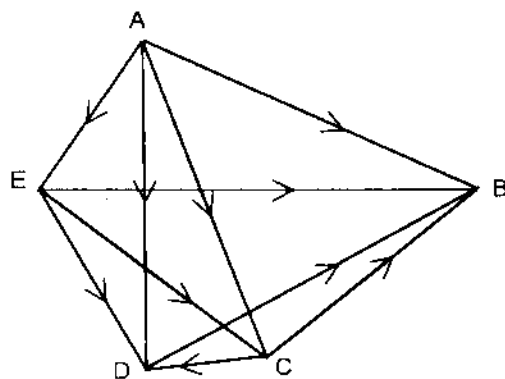
Bài toán 9: Có 5 đội bóng chuyên thi đấu với nhau để tranh giải cúp quốc gia. Biết rằng hai đội chỉ đấu với nhau đúng một trận và mỗi đội phải đấu với 4 đội khác, đồng thời không có trận hoà.

Chúng tỏ rằng căn cứ vào kết quả thi đấu có thể xếp đội trưởng các đội đứng theo một hàng dọc để đội đứng sau thắng đội đứng ngay trước.

Giải:

Ta cho tương ứng mỗi đội bóng là một đỉnh của đồ thị, hai đội đã thi đấu với nhau ta dùng một cung nối 2 đỉnh tương ứng; chiều của cung đó là từ đỉnh tương ứng với đội thắng sang đỉnh tương ứng với đội thua. Như vậy đồ thị thiết lập được là đồ thị đầy đủ có hướng với 5 đỉnh. Đồ thị trong hình 18.1 mô tả kết quả thi đấu của 5 đội bóng

chuyến A, B, C, D, E nào đó. Theo định lý: "Đồ thị đầy đủ, có hướng luôn luôn có đường Hamilton". Nên căn cứ vào một trong những đường Hamilton ta có thể xếp đội trưởng các đội đứng theo hàng dọc như sau: A, E, C, D, B .



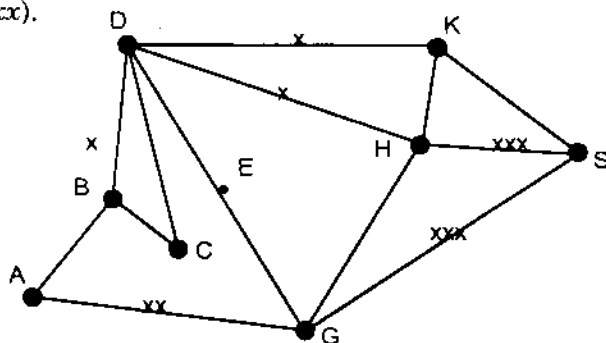
Hình 18.1

Bài toán 10: Hình 18.2 cho sơ đồ nhà ở của 8 học sinh A, B, C, D, E, G, H, K .

Hãy tìm một đường đi từ nhà học sinh A qua nhà mỗi học sinh khác đúng 1 lần để cùng đến sân vận động S (khi A đến nhà bạn nào thì bạn đó cùng A đến sân vận động).

Giải:

Trước hết ta thấy các đỉnh A, E, C đều có đỉnh bậc 2, bởi vậy đường Hamilton xuất phát từ A phải đi qua cạnh BC, CD, DE, EG . Khi đó ta xoá đi các cạnh BD, DK, DH (đánh dấu x), đồng thời cạnh AG cũng được xoá (đánh dấu xx).



Hình 18.2

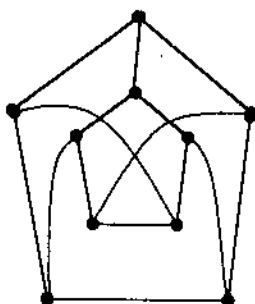
Tiếp theo học sinh A đi tiếp từ G sang H rồi sang K và cuối cùng từ đỉnh K sang đỉnh S . Đường Hamilton được tạo thành. $ABCDEFGHKS$ mô tả toàn bộ hành trình của học sinh xuất phát từ A và đi tới sân vận động S , theo đúng yêu cầu của bài toán đặt ra.

Bài toán 11: Một nước có 10 thành phố. Hãy thiết lập một mạng cầu hàng không (bảng đồ thị) sao cho:

1. Mỗi thành phố có cầu hàng không nối trực tiếp với đúng 3 thành phố khác;
2. Từ mỗi thành phố có đường hàng không đi tới một thành phố tùy ý khác và trong hành trình đi tới đích có thể đi qua từng thành phố đúng một lần.

Giải:

Mạng hàng không cần tìm (hình 18.3) là một đồ thị gồm 10 đỉnh, bậc của mỗi đỉnh bằng 3 và có chu trình Hamilton.



Hình 18.3

Bài toán 12: Dùng phương pháp đồ thị để thể hiện việc bố trí lịch thi cho học sinh PTTH với 7 môn thi trong 7 ngày. Yêu cầu phải bố trí lịch thi sao cho hai môn thi của cùng một thầy giáo không được rơi và hai ngày liên tiếp nhau. Biết rằng không có thầy giáo nào cùng có nhiều hơn 4 môn thi.

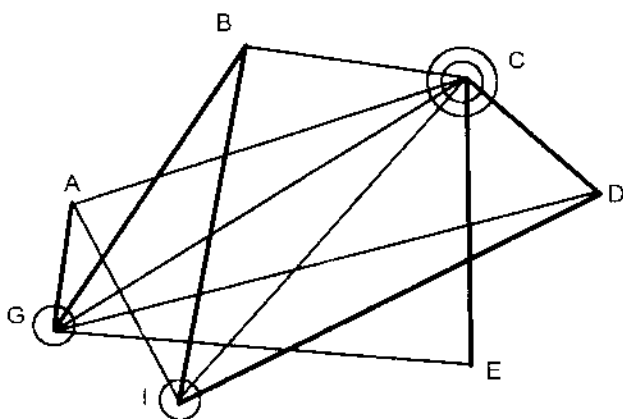
Giải:

Ta xây dựng đồ thị G (hình 18.4), trong đó các đỉnh tương ứng với các môn thi; mỗi cặp đỉnh được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi chúng tương ứng với hai môn thi thuộc hai thầy khác nhau. Đồ thị trong hình 18.4 mô tả trường hợp: một thầy có 4 môn thi (tương ứng với các

đỉnh A, B, D, E), một thầy có 2 môn thi (tương ứng với các đỉnh F, G); còn thầy thứ ba có một môn thi (tương ứng với đỉnh C).

Do mỗi thầy giáo có số môn thi không vượt quá 4, nên mỗi đỉnh kề với ít nhất 3 đỉnh. Do đó các đỉnh của đồ thị G có bậc không nhỏ hơn 3, nên tổng bậc của hai đỉnh bất kỳ không nhỏ hơn 6. Do đó, theo định lý 14.1, đồ thị G có xích Hamilton (gồm các cạnh tô đậm).

Dựa vào xích Hamilton này ta lập được lịch thi theo yêu cầu bài toán.



Hình 18.4

Bài toán 13: Vị trí nhà ở và đường nối giữa các nhà của 9 học sinh A, B, C, E, F, G, H, K được mô tả trên hình 18.5. Chứng minh rằng:

- Bạn A không thể đi đến nhà bạn K với điều kiện: Trên đường đi A phải ghé qua nhà từng bạn khác đúng 1 lần;
- Mỗi bạn đều có thể qua thăm từng bạn khác đúng một lần rồi lại trở về được nhà mình.

Giải:

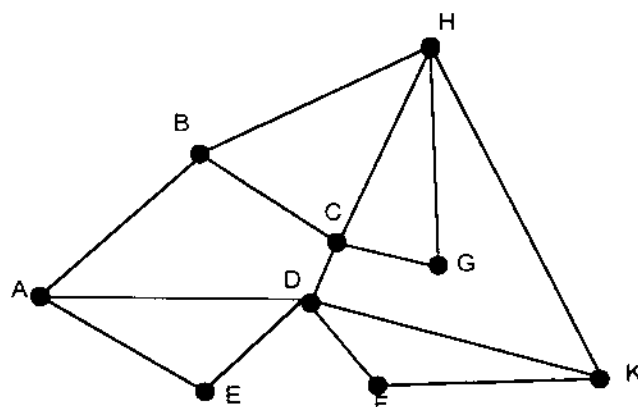
a). Thực chất bài toán yêu cầu chứng minh đồ thị trên hình H.18.5 không có xích Hamilton nối giữa đỉnh A và đỉnh K .

Thật vậy, nếu trong đồ thị có xích Hamilton (α) nối giữa đỉnh A và đỉnh K , thì phải đi qua tất cả các đỉnh còn lại, trong đó có các đỉnh bậc bằng 2: E, F, G , nghĩa là phải đi qua các cạnh AE, ED, DF, FK, CG, GH . Có hai khả năng xảy ra:

- Nếu α không đi qua đỉnh nào 2 lần, thì nó không thể đồng thời đi qua được 3 đỉnh E, F, G ;

- Ngược lại, nếu α đi qua được cả 3 đỉnh E, F, G thì nó phải đi qua một đỉnh nào đó từ 2 lần trở lên.

Như vậy đã đi tới mâu thuẫn, với tính chất của xích Hamilton nên không tồn tại xích Hamilton nối giữa đỉnh A và đỉnh K . Bài toán được chứng minh.



Hình 18.5

b) Đồ thị trong hình 18.5 có chu trình Hamilton, chẳng hạn,

$$\beta: A, E, D, F, K, H, G, C, B, A$$

nên mỗi em đều xuất phát từ vị trí của mình, đi theo chu trình β , thì sẽ thăm được từng bạn đúng một lần rồi lại trở về được nhà mình.

Bài toán 14: Trên bàn cờ có 4×4 ô vuông. Chứng minh con mã không thể đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần, rồi trở về ô ban đầu.

Giải

A1	X1	X2	A2
X8	B1	B2	X3
X7	B4	B3	X4
A4	X6	X5	A3

Coi mỗi ô của bàn cờ là một đỉnh của đồ thị, hai ô thực hiện được một bước đi của con mã tương ứng với hai đỉnh kề của đồ thị, ta cần chứng minh rằng: Đồ thị không có chu trình Hamilton.

Trước hết xét tất cả các nửa yếu tố có thể có của đồ thị. Các đỉnh $A1, A3$ chỉ kề

B2, B4, các đỉnh A2, A4 chỉ kề với B1, B3. Do vậy bất kỳ nửa yếu tố nào cũng phải chứa hai chu trình không giao nhau (A1, B2, A3, B4, A1); (A2, B1, A4, B3, A2). Xem hai chu trình không giao này như các đồ thị con bộ phận, thì chúng là hai thành phần liên thông của nửa yếu tố; do đó nửa yếu tố là một đồ thị không liên thông nên không có chu trình Hamilton (theo khẳng định 4.3).

5. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ TÔ MÀU.

Bài toán 15: Chứng minh rằng trong không gian có 6 đường thẳng, trong đó không có 3 đường thẳng nào đồng qui tại một điểm, không có 3 đường thẳng nào đồng phẳng và không có 3 đường thẳng nào song song, thì nhất định có 3 đường thẳng đôi một chéo nhau.

Giải:

Ta chuyển bài toán về dạng đồ thị bằng cách lấy 6 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng và tương ứng với 6 đường thẳng đã cho. Mỗi cặp điểm được nối bằng một đoạn thẳng màu xanh khi và chỉ khi các đường thẳng tương ứng với chúng chéo nhau. Các cặp điểm còn lại được nối bằng một đoạn thẳng tô màu đỏ. Ta được một đồ thị (G) đầy đủ gồm 6 đỉnh và các cạnh được tô bằng hai màu: xanh, đỏ, theo định lý 7.5, đồ thị G có tam giác cùng màu. Theo điều kiện đầu bài ba đường thẳng bất kỳ đều có hai đường thẳng chéo nhau, nên tam giác tùy ý có đỉnh là các điểm đã chọn đều có ít nhất một cạnh màu xanh nên tam giác cùng màu phải là tam giác màu xanh. Ba đường thẳng tương ứng với 3 đỉnh của tam giác xanh sẽ chéo nhau từng đôi một.

Bằng cách tương tự ta có thể giải các bài toán sau:

Bài toán 16: Sáu đội bóng tham gia một đợt thi đấu. Mỗi đội gặp từng đội khác đúng một trận. Chứng minh rằng vào bất cứ thời điểm nào cũng có 3 đội, mà hoặc các đội đã gặp nhau từng đôi một hoặc chưa thi đấu với nhau trận nào.

Bài toán 17: Mười bảy nhà bác học. Mỗi người trao đổi thư với 16 người khác. trong thư họ chỉ bàn về 3 đề tài, nhưng bất cứ hai nhà khoa học nào cũng chỉ bàn với nhau về một trong ba đề tài nói trên. Chứng minh rằng có ít nhất 3 nhà khoa học đã bàn với nhau cùng một đề tài.

Bài toán 18: Cho n điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Một số cặp điểm được nối bằng các đoạn thẳng tô màu xanh hoặc đỏ, sao cho hai điểm bất kỳ đều được nối với nhau bằng một đường gấp khúc duy nhất gồm các đoạn thẳng đã được tô màu.

Chứng minh rằng có thể tô nốt các đoạn thẳng còn lại (có hai đầu tại n điểm đã cho) bằng màu xanh hoặc đỏ, để bất kỳ tam giác nào (có các đỉnh tại n điểm đã cho) cũng có số cạnh tô đỏ là lẻ.

Giải:

Coi mỗi điểm đã cho là 1 đỉnh, còn các đoạn thẳng đã nối giữa các cặp điểm là cạnh của đồ thị G . Theo điều kiện đầu bài G liên thông giữa hai đỉnh được nối bằng một xích duy nhất và các cạnh của đồ thị được tô bằng hai màu.

Giả sử x, y là hai đỉnh không kề nhau. Ta bổ sung vào đồ thị G cạnh nối x với y và tô màu cho cạnh này như sau:

Ký hiệu $D(x, y)$ là xích duy nhất nối giữa x và y . Khi đó:

- Cạnh (x, y) được tô màu xanh, nếu $D(x, y)$ có một số lẻ cạnh xanh;
- Cạnh (x, y) được tô màu đỏ, nếu $D(x, y)$ có một số chẵn cạnh xanh;

Rõ ràng cách tô màu này phù hợp với cả trường hợp $D(x, y)$ trùng với (x, y) , (cạnh (x, y) đã được tô màu từ trước).

Xét chu trình tam giác bất kỳ (x, y, z, x) . Ta sẽ chỉ ra rằng: có thể chọn thêm một đỉnh a , sao cho các đường đã tô màu trước đó $D(x, a)$, $D(y, a)$, $D(z, a)$ không có đỉnh chung nào khác đỉnh a (a có thể trùng với x, y, z , chẳng hạn a trùng với x). Khi đó $D(x, a)$ là một đỉnh. Thật vậy, từ z đi theo xích $D(z, x)$ cho đến khi gặp $D(x, y)$ tại một đỉnh. Đó chính là đỉnh a (nếu không gặp các đỉnh trên đường đi, thì sẽ gặp ở đầu mút x). Ký hiệu p, q, r là số cạnh tô màu xanh của các xích $D(x, a, y)$, $D(y, a, z)$, $D(z, a, x)$. Theo cách chọn màu, số các cạnh tô màu xanh của chu trình (x, y, z, x) đúng bằng số các số lẻ của bộ ba p, q, r .

Do mỗi cạnh tô xanh của $D(a, x)$, $D(a, y)$, $D(a, z)$ được tính hai lần, nên $p+q+r$ là một số chẵn. Bởi vậy số các số lẻ trong bộ ba p, q, r là số chẵn. Do đó số cạnh xanh của chu trình tam giác (x, y, z, x) chẵn. Từ đó suy ra số cạnh đỏ của chu trình này phải lẻ.

6. BÀI TOÁN VỀ CÂY

Bài toán 19: Có bốn đội bóng đá A, B, C, D lọt vào vòng bán kết trong giải các đội mạnh khu vực. Có mấy dự đoán xếp hạng như sau:

- Đội B vô địch, đội D nhì.
- Đội B nhì, đội C ba.
- Đội A nhì, đội C tư.

Biết rằng mỗi dự đoán trên đúng về một đội. Hãy cho biết kết quả xếp hạng của các đội.

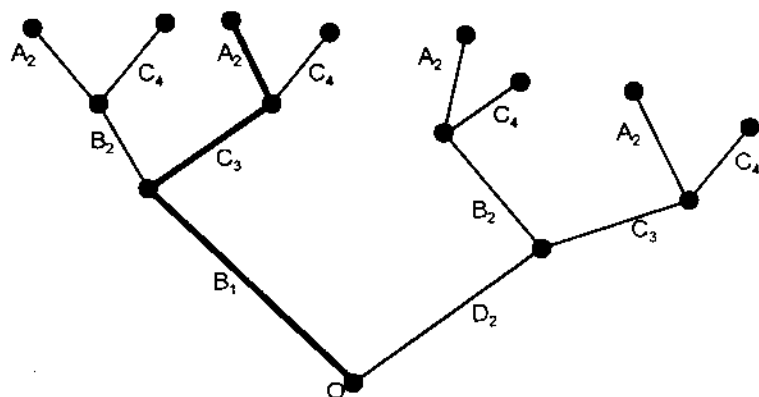
Giải:

Ta ký hiệu:

- B_1 : Đội B nhất.
- B_2 : Đội B nhì
- D_2 : Đội D nhì
- A_2 : Đội A nhì.
- C_3 : Đội C ba
- C_4 : Đội C bốn

Để biết kết quả xếp hạng của các đội ta vẽ cây như sau:

- Hai "nhánh" đầu tiên ứng với dự đoán thứ nhất.
- Từ mỗi nhánh trên lại rẽ thành hai nhánh ứng với dự đoán thứ hai.
- Tiếp tục rẽ nhánh đối với dự đoán thứ 3 theo cách trên ta có 1 cây:



Hình 18.6

Ta chọn một đường đi từ "gốc" O đến "ngọn" trên đó các cạnh không mang chữ trùng nhau. Vì một đội không thể xếp hai hạng khác nhau) và không có chỉ số trùng nhau. (Vì hai đội không thể được xếp hạng cùng một hạng), đồng thời thứ tự xếp hạng của các đội thoả mãn điều kiện đầu bài. Đường tô đậm nét với dãy ký hiệu B_1, C_3, A_2, D_4 cho ta xếp hạng cần tìm.

7. BÀI TOÁN VỀ CẶP GHÉP

Bài toán 20: Một đoàn du lịch gồm $2n$ ($n \geq 1$) người. Mỗi người quen (từ trước) với ít nhất n người trong đoàn. Chứng minh rằng có thể sắp xếp đoàn du lịch ngồi trên một đoàn tàu, sao cho mỗi ghế có đúng hai người đã quen nhau (từ trước) ngồi cạnh nhau.

Giải:

Coi mỗi du khách là một đỉnh đồ thị. Hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi hai du khách tương ứng quen nhau (từ trước). Ta được một đồ thị với $2n$ đỉnh và bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn n . Theo định lý 13.5, tồn tại cặp ghép n đỉnh vào n đỉnh, nên theo cặp ghép này, mà sắp xếp các du khách ngồi từng cặp trên mỗi ghế sẽ thoả mãn yêu cầu: hai người quen nhau (từ trước) ngồi cạnh nhau.

8. ĐỒ THỊ PHẪNG - ĐỊNH LÝ EULER

Bài toán 21: Đa diện lồi có k ($k \geq 5$) mặt, mà từ mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh. Hai người chơi trò chơi như sau: mỗi người lần lượt tô đỏ một mặt trong các mặt còn lại. Người thắng, là người tô được 3 mặt có chung một đỉnh. Chứng minh rằng tồn tại cách chơi mà người được tô trước luôn luôn thắng.

Giải:

Theo nhận xét trên thì đa diện lồi được coi là một đồ thị phẳng. Giả sử, tất cả các diện đều có bậc 3. Khi đó: Do mỗi cạnh thuộc đúng hai diện nên $m = \frac{3k}{2}$. Mặt khác, từ mỗi đỉnh có đúng 3 cạnh, nên mỗi đỉnh là chung của 3 diện, đồng thời mỗi diện có đúng 3 đỉnh nên số đỉnh bằng số

diện hay $n=k$. Sử dụng định lý Euler: $n-m+f=2$ hay $k-\frac{3k}{2}+k=2$. Suy ra $k=4$. Điều này trái với giả thiết ($k \geq 5$). Như vậy có ít nhất một diện bậc không nhỏ hơn 4 (kí hiệu diện này là D_1). Khi đó có thể chơi như sau:

Bước 1: Gọi a là người được tô trước, anh ta tô diện D_1 . Ta nhận thấy rằng: diện D_1 kề với không ít hơn 4 diện (vì diện bậc 4); hai diện, kề với D_1 , cùng qua một đỉnh của D_1 , cũng kề nhau (vì từ mỗi đỉnh chỉ có đúng 3 cạnh, trong đó đã có 2 cạnh thuộc diện D_1 nên cạnh còn lại phải chung cho 2 diện).

Bước 2: Sau khi người thứ hai tô, chắc chắn còn ít nhất 3 diện kề với D_1 , đồng thời kề nhau liên tiếp đôi một. Không giảm tổng quát, giả sử đó là D_2, D_3, D_4 kề với hai diện còn lại. Khi đó A tô D_3 .

Bước 3: Sau khi người thứ hai tô, chắc chắn còn lại một trong hai diện D_2, D_4 đó là diện mà A cần phải tô để thắng.

9. CÁC BÀI TOÁN CÓ TÍNH TỔNG HỢP

Bài toán 22: Một cơ quan cần tuyển 3 người để lập thành một nhóm có đủ năng lực biên dịch các tài liệu từ 6 thứ tiếng Anh, Pháp, Nga, Đức, Trung Quốc và Bồ Đào Nha sang tiếng Việt. Có 7 người đến dự tuyển, trong đó mỗi người đều biết 2 và chỉ 2 trong 6 thứ tiếng đó và bất cứ người nào cũng cùng biết nhiều nhất một thứ tiếng chung trong 6 thứ tiếng đó. Biết rằng thứ tiếng nào cũng có ít nhất hai người biết. Hỏi có thể xảy ra trường hợp không thể tuyển chọn được như yêu cầu đã nêu không? Tại sao?

(Đề thi học sinh giỏi toán 11 của Hà Nội, năm học 1987 - 1988).

Giải:

Ta cho tương ứng mỗi ngoại ngữ là một đỉnh: A, P, N, D, T, B và một người biết hai ngoại ngữ biểu diễn bằng một cạnh nối hai đỉnh tương ứng với hai ngoại ngữ đó. Do mỗi người đều biết 2 ngoại ngữ nên ứng với 7 người, đồ thị có 7 cạnh. Mặt khác, vì bất cứ người nào cũng biết nhiều nhất một thứ tiếng chung, tức là không có hai cạnh khác nhau cùng nối với 1 cặp đỉnh. Ngoài ra, thứ tiếng nào cũng có ít nhất hai người biết, thành thử mỗi đỉnh có bậc ít nhất là 2.

Như vậy, bài toán có thể phát triển như sau:

Cho đơn đồ thị có 6 đỉnh và 7 cạnh, bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 2. Liệu có thể xảy ra trường hợp không có 3 cạnh nào đôi một không kề nhau hay không? Tại sao?

Trước hết, ta thấy G liên thông vì G có 6 đỉnh và bậc của mỗi đỉnh ≥ 2 , nếu không liên thông thì 6 đỉnh đó cô lập thành 2 tam giác rời nhau và G chỉ có 6 cạnh suy ra G có chu trình (nếu không thì G là 1 cây và có cạnh treo, điều này trái với giả thiết). Mặt khác $7 \times 2 = 14 = 6 \times 2 + 2$, nên G có hai đỉnh bậc 3 (hoặc 1 đỉnh bậc 4) và các đỉnh còn lại phải là bậc 2. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

1. Trường hợp G có đỉnh A bậc 4 (hình a) với 4 cạnh AB, AD, AN, AP . Khi đó đỉnh T không thể kề với A mà kề hai đỉnh khác, P và N chẳng hạn và hai đỉnh còn lại là B và D phải kề nhau.

Đến đây ta có thể chọn các cạnh BD, NT, PA là không kề nhau.

2. Trường hợp G có hai đỉnh bậc 3, giả sử là A và P . Do G liên thông nên có ít nhất một đường đi từ A tới P . Ta tạm bỏ đường đi đó (vẫn giữ các đỉnh A và P). Có thể xảy ra:

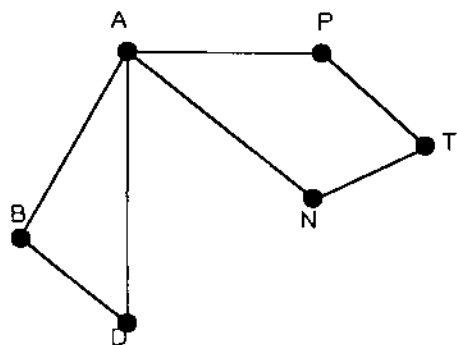
a) G không còn liên thông. Như vậy ta còn hai chu trình cơ bản (còn gọi là sơ cấp) phân biệt, mỗi chu trình gồm 3 cạnh. Ta chọn cạnh AP và hai cạnh không kề với nó là TB và ND (hình b)

b) G vẫn liên thông. Khi đó ta còn một chu trình sơ cấp (vì mỗi đỉnh đều có bậc 2). Ta có 3 đường đi từ A đến P (Một đường đã tạm bỏ, hai đường theo chu trình), trong đó đường ngắn có độ dài 1 (hình c) hoặc độ dài 2 (hình d: APT hoặc ADB).

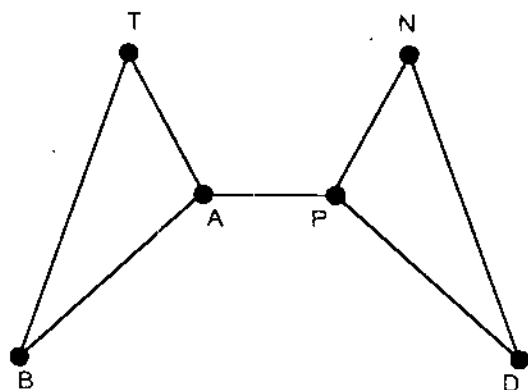
Trên hình c trên chu trình cơ bản độ dài 6 luôn luôn chọn 3 cạnh kề nhau chẳng hạn AD, PT, BN .

Trên hình d chỉ việc chọn một cạnh thuộc đường đi ngắn nhất từ A đến P và hai cạnh không kề với nó trên chu trình sơ cấp còn lại AD, TB, NB hoặc DP, AT, NB .

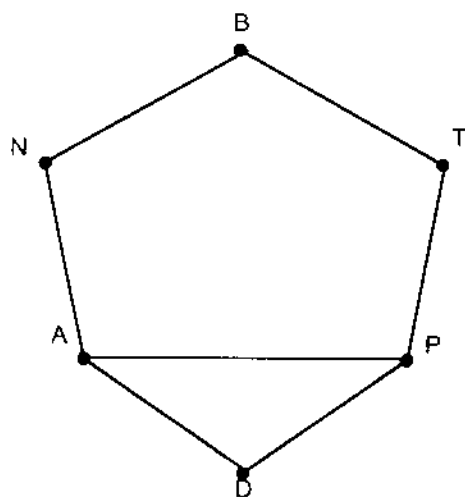
Vậy trong mọi trường hợp ta đều tìm được 3 cạnh đôi một không kề nhau.



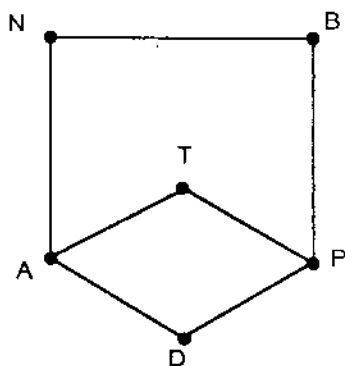
a)



b)



c)



d)

Hình 18.7

Bài toán 23: Một tổ học sinh lớp 10 chuyên toán có 11 học sinh. Buổi họp đầu tiên của tổ vào dịp đầu năm học, bạn tổ trưởng đã phát hiện ra điều thú vị rằng mỗi bạn trong tổ đã quen đúng ba bạn khác. Ngay lập tức bạn A đứng lên bác bỏ phát hiện đó. Vậy trong hai bạn, ai nói đúng? Vì sao?

Giải:

Giả sử bạn tổ trưởng nói đúng. Khi đó nếu cho tương ứng mỗi đỉnh của đồ thị là một bạn trong tổ và hai bạn quen nhau sẽ có 1 cạnh nối bởi hai đỉnh tương ứng. Dễ thấy bậc của các đỉnh là như nhau và bằng 3. Do đó số cạnh của đồ thị là $11 \times 3 / 2$. Phép chia này có thương không nguyên,

bởi vậy phát hiện của tổ trưởng về số người quen của mỗi bạn trong tổ là không đúng, dẫn đến bạn A nói đúng.

Bài toán 24: Trong một hội thảo có $2n$ người ngồi quanh một bàn tròn thảo luận với nhau. Sau giờ giải lao, họ lại ngồi vào theo một trật tự khác. Chứng minh có ít nhất hai người mà số người ngồi xen giữa họ trước và sau giờ nghỉ là như nhau.

Giải:

Coi mỗi người là một đỉnh $2n$ giác đều nội tiếp đường tròn tâm O và đánh số các đỉnh $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ theo chiều dương (chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Đặt tương ứng mỗi điểm a_i với véc tơ $\overrightarrow{a_i}$ gốc O , ngọn a_i coi việc đỉnh a_i di chuyển đến a_j như phép quay véc tơ $\overrightarrow{a_i}$ theo chiều dương đến vị trí vectơ $\overrightarrow{a_j}$. Khi đó ta có một hệ II gồm $2n$ véc tơ, và sau khi thay đổi vị trí, $2n$ véc tơ nhận được cũng lại chính là hệ II. Ký hiệu góc quay của véc tơ $\overrightarrow{a_i}$ là α_i , thì α_i nhận một trong $2n$ giá trị: $0, \alpha, 2\alpha, \dots, (2n-1)\alpha$; với $\alpha = \frac{\pi}{n}$

(1)

Nếu chứng minh được tồn tại hai chỉ số $i \neq j$ sao cho $\alpha_i = \alpha_j$ thì bài toán được giải quyết.

Xem mỗi đỉnh đa giác đều là một đỉnh đồ thị, việc di chuyển a_i đến a_j theo chiều dương coi là xác định một cạnh (có hướng) từ a_i đến a_j . Khi đó ta được một đồ thị có hướng, mỗi đỉnh đều có đúng một cạnh đến và một cạnh đi, nghĩa là nửa bậc trong và nửa bậc ngoài của tất cả các đỉnh thuộc đồ thị đều bằng 1. Điều này chứng tỏ đồ thị là một yếu tố và gồm các chu trình không giao nhau.

Từ kết quả này, ta suy ra, các véc tơ của hệ II được phân thành một số nhóm sao cho tổng số đo các góc quay trong mỗi nhóm là $2k\pi$. Do đó tổng tất cả các góc quay của các vectơ là $2k\pi$

(2)

Giả sử $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($\forall i \neq j$), khi đó $2n$ góc nhận đủ $2n$ giá trị trong (1), nên tổng tất cả các góc quay bằng:

$$(1 + 2 + \dots + (2n-1)) \frac{\pi}{n} = (2n-1)\pi \quad (3)$$

Ta nhận thấy (3) mâu thuẫn với (2), bài toán được giải quyết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Claude Berge*
Théorie des Graphes et ses applications. Dunod, Paris 1967.
2. *Nguyễn Hữu Ngự*
Giáo trình lý thuyết đồ thị. Đại học tổng hợp Hà Nội.
3. *Hoàng Chung*
Graph và giải toán phổ thông, 1992.
4. *Đỗ Đức Giáo*
Toán rời rạc. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 1999.
5. *Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa*
Toán rời rạc. Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.
6. *Lê Hải Châu, Lê Hải Khôi*
199 bài toán chọn lọc về toán tổ hợp. Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.
7. *Doãn Châu Long*
Lý thuyết về qui hoạch tuyến tính và lý thuyết đồ thị hữu hạn. Nhà xuất bản Giáo dục, 1971.
8. *Richard Johnsonbaush*
Disorete Methematics. DePaul University, Chicago.
Macmillan Publicshing Company New York.
9. *C.L.Liu*
Elements of discrete Mathematics. McGraw - Hill Book Company.
10. *Nguyễn Đề, Nguyễn Khánh Nguyên* (dịch)
Các đề thi vô địch toán các nước tập I, II (Tiếng Nga). Nhà xuất bản Giáo dục, 1996
11. Các số báo toán học tuổi trẻ từ 1970 đến 1998.
12. Báo KBAHT từ 1975 đến 1990.

ĐẶNG HUY RUẬN

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ và ỨNG DỤNG

<i>Chịu trách nhiệm xuất bản</i>	:	Pgs, Ts. TÔ ĐĂNG HẢI
<i>Biên tập</i>	:	ĐỒ THỊ CẢNH
<i>Sửa bản in</i>	:	LÊ MINH
<i>Trình bày bìa</i>	:	HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 - TRẦN HUNG ĐẠO - HÀ NỘI

In 1.000 bản, khổ 16 x 24, tại Xí nghiệp in 19 - 8 số 3
đường Nguyễn Phong Sắc - Nghĩa Tân - Cầu Giấy - Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số: 1296-7, ngày 13-11-2000
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2001

QS
20

Giá : 18.000đ