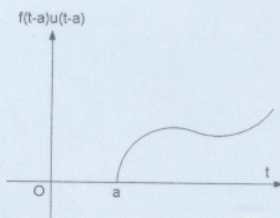
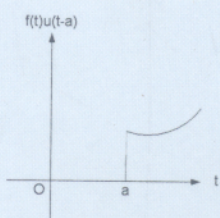
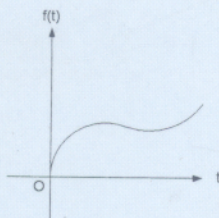
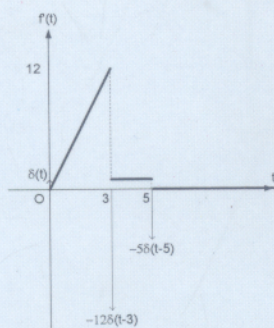
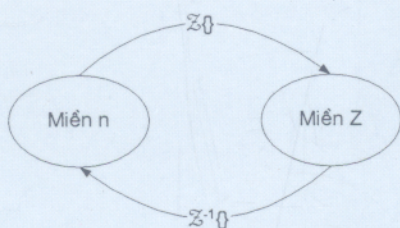


TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
KHOA ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG

TÔ BÁ ĐỨC (chủ biên)
ĐÀO LÊ THU THẢO
NGUYỄN HỮU PHÁT

GIÁO TRÌNH
TOÁN KỸ THUẬT



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
KHOA ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG

TÔ BÁ ĐỨC (CHỦ BIÊN)
ĐÀO LÊ THU THẢO
NGUYỄN HỮU PHÁT

GIÁO TRÌNH

TOÁN KỸ THUẬT



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Khi xem xét về những vấn đề kỹ thuật, không chỉ riêng trong kỹ thuật Điện tử Viễn thông mà tất cả các ngành kỹ thuật nói chung, chúng ta luôn bị ràng buộc bởi các hiện tượng vật lý. Bản chất vật lý buộc các nhà khoa học, các kỹ sư phải thực hiện trong những khung giới hạn của đối tượng vật lý cần miêu tả. Tuy thuộc vào các hiện tượng vật lý khác nhau của mỗi chuyên ngành kỹ thuật phải xem xét mà chúng ta sử dụng những công cụ toán học cho phù hợp nhằm mô tả hiện tượng, ước lượng và tối ưu hoá chúng trên ý nghĩa kỹ thuật. Các mô hình và các giả thiết toán học trong hầu hết các trường hợp đều tìm cách tiếp cận một cách gần đúng nhất với bản chất vật lý của hiện tượng và đơn giản hoá các vấn đề kỹ thuật trong các điều kiện nhất định.

Với mục đích trang bị cho sinh viên kỹ thuật ngành Điện tử Viễn thông các kiến thức cơ bản về toán áp dụng trong kỹ thuật, Khoa Điện tử Viễn thông Trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã xây dựng và đề xuất chương trình khung môn Toán kỹ thuật. Khi biên soạn cuốn sách này, tác giả đã tham khảo và cập nhật những kiến thức mới nhất được xuất bản trong vài năm gần đây trên thế giới, đồng thời dựa trên tiêu chí nhấn mạnh vào các công cụ toán học được sử dụng nhiều nhất trong các ngành kỹ thuật, đặc biệt là trong ngành Điện tử viễn thông. Nội dung cuốn sách bao gồm ba chương, đi vào các vấn đề sau:

- Chương 1: Nhắc lại về đại số tuyến tính, không gian vector; các lập luận và các công thức chủ yếu dựa trên không gian vector số phức; làm rõ ý nghĩa của các vấn đề trong đại số tuyến tính.
- Chương 2: Đề cập đến các phép biến đổi giữa các không gian hàm số và không gian dãy số; các phép biến đổi bao gồm biến đổi Laplace, biến đổi $\mathbb{Z}$, và biến đổi Fourier cho cả không gian hàm số và không gian dãy số.

- Chương 3: Hệ thống lại lý thuyết xác suất; giới thiệu về quá trình ngẫu nhiên và các đặc tính của chúng.

Những nội dung trên được dùng làm môn học cơ sở cho các môn học chuyên ngành Điện tử viễn thông đồng thời có thể sử dụng làm tài liệu tham khảo cho các ngành kỹ thuật khác. Tác giả cho rằng nắm vững các kiến thức toán học trong cuốn sách này cũng sẽ rất hữu ích cho các sinh viên muốn học cao lên sau đại học.

Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp trong Bộ môn Mạch và Xử lý tín hiệu, đặc biệt là Trưởng bộ môn, Tiến sỹ Phạm Văn Bình, đã góp ý kiến quý báu, động viên và khích lệ trong quá trình hoàn thiện cuốn sách này.

Nhóm tác giả

Tô Bá Đức (Chủ biên)

Đào Lê Thu Thảo

Nguyễn Hữu Phát

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
Chương 1: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH	9
1.1. KHÔNG GIAN VECTOR	9
1.1.1. Khái niệm về không gian vector	9
1.1.2. Phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính	10
1.1.3. Bao tuyến tính và cơ sở của một không gian vector	10
1.1.4. Biểu diễn vector	11
1.1.5. Không gian con	12
1.2. TÍCH VÔ HƯỚNG	14
1.2.1. Định nghĩa tích vô hướng	14
1.2.2. Phần bù trực giao của một không gian con	15
1.3. NORM CỦA VECTOR	16
1.4. QUÁ TRÌNH TRỰC GIAO HOÁ GRAM-SCHMIDT	18
1.5. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH	19
1.5.1. Các khái niệm về ánh xạ tuyến tính	19
1.5.2. Biểu diễn ánh xạ tuyến tính theo ma trận	21
1.5.3. Các ma trận đặc biệt	22
1.5.4. Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với trường hợp cơ sở trực chuẩn	23
1.5.5. Rank và Nullity của ma trận	24
1.5.6. Bài toán đổi cơ sở	25
1.6. BỔ SUNG THÊM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH	27
1.7. TRỊ RIÊNG VÀ VECTOR RIÊNG	30
BÀI TẬP	35

Chương 2: CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI	38
2.1. BIẾN ĐỔI LAPLACE	38
2.1.1. Biến đổi Laplace thuận	38
2.1.2. Sự tồn tại của biến đổi Laplace	42
2.1.3. Các tính chất của biến đổi Laplace	45
2.1.4. Bảng các biến đổi Laplace thông dụng	46
2.1.5. Biến đổi Laplace ngược	47
2.1.6. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng	51
2.1.7. Hàm nhảy đơn vị và hàm xung đơn vị	54
2.1.8. Xem xét thêm về phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng	61
2.1.9. Tích chập	64
2.2. BIẾN ĐỔI $\mathcal{Z}$	66
2.2.1. Dãy số	66
2.2.2. Biến đổi $\mathcal{Z}$	67
2.2.3. Các tính chất của biến đổi $\mathcal{Z}$	71
2.2.4. Bảng các biến đổi $\mathcal{Z}$ thông dụng	72
2.2.5. Biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược	73
2.3. CHUỖI FOURIER	76
2.3.1. Khai triển chuỗi Fourier	76
2.3.2. Định lý nhân và định lý Parseval	78
2.4. BIẾN ĐỔI FOURIER	81
2.4.1. Tích phân Fourier	81
2.4.2. Cặp biến đổi Fourier	83
2.4.3. Các tính chất của biến đổi Fourier	86
2.4.4. Năng lượng và công suất trung bình - Định lý Parseval	90
2.4.5. Biến đổi Fourier tổng quát	92
2.4.6. Biến đổi Fourier cho dãy số rời rạc	92
2.4.7. Biến đổi Fourier rời rạc	94
BÀI TẬP	96
Chương 3: XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN	99
3.1. KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT	99
3.1.1. Một số thuật ngữ	99

3.1.2. Lý thuyết tiên đề	99
3.1.3. Xác suất giao	100
3.1.4. Xác suất có điều kiện	101
3.1.5. Xác suất toàn phần	102
3.1.6. Định lý Bayes	102
3.1.7. Độc lập thống kê	103
3.1.8. Chuỗi phép thử Bernoulli	104
3.2. BIẾN NGẪU NHIÊN	105
3.2.1. Định nghĩa biến ngẫu nhiên	105
3.2.2. Hàm phân bố và hàm mật độ	105
3.2.3. Một số biến ngẫu nhiên thông dụng	107
3.2.4. Hàm phân bố và hàm mật độ có điều kiện	111
3.2.5. Các đặc số của biến ngẫu nhiên	113
3.3. VECTOR NGẪU NHIÊN	117
3.3.1. Khái niệm về vector ngẫu nhiên	117
3.3.2. Hàm phân bố giao và hàm mật độ giao	118
3.3.3. Độc lập thống kê	120
3.3.4. Định lý giới hạn tập trung	121
3.3.5. Các đặc số của vector ngẫu nhiên	122
3.3.6. Vector ngẫu nhiên Gauss	127
3.4. CÁC QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN	129
3.4.1. Đặt vấn đề	129
3.4.2. Khái niệm về quá trình ngẫu nhiên	129
3.4.3. Các hàm phân bố và hàm mật độ của quá trình ngẫu nhiên	130
3.4.4. Hai quá trình ngẫu nhiên độc lập thống kê	130
3.4.5. Quá trình dừng	131
3.4.6. Trung bình theo thời gian và quá trình ergodic	134
3.4.7. Các hàm tương quan và hàm hiệp biến	135
3.4.8. Quá trình ngẫu nhiên Gauss	139
3.4.9. Đặc tính phổ của quá trình ngẫu nhiên	140
BÀI TẬP	147
TÀI LIỆU THAM KHẢO	151

Chương 1

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1.1. KHÔNG GIAN VECTOR

1.1.1. Khái niệm về không gian vector

Một không gian vector (vector space) V trên một trường vô hướng (scalar field) F là một tập không rỗng có chứa các phần tử, được gọi là các vector, với 2 luật: cộng vector và nhân vô hướng.

Luật cộng vector phải thoả mãn các tiên đề sau:

1. Với mọi $\vec{x}$ và $\vec{y}$ thuộc không gian vector V , tồn tại duy nhất một vector tổng $\vec{z} \in V$ sao cho $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$
2. Luật cộng vector có tính kết hợp: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. Tồn tại duy nhất một vector không có tính chất sau: $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ với mọi $\vec{x} \in V$
4. Với mọi $\vec{x} \in V$, tồn tại vector $-\vec{x} \in V$, sao cho $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
5. Luật cộng vector có tính giao hoán: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Luật nhân vô hướng phải thoả mãn các tiên đề sau:

6. Với mọi giá trị vô hướng $a \in F$, và vector $\vec{x} \in V$, tồn tại duy nhất một vector $a\vec{x} \in V$
7. Luật nhân vô hướng có tính kết hợp: $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$ với mọi $\vec{x} \in V$ và $a, b \in F$
8. Luật nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng vô hướng: $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$
9. Luật nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng vector: $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$
10. Tồn tại duy nhất một phần tử đơn vị (unit element) $1 \in F$ có tính chất sau: $1\vec{x} = \vec{x}$ với mọi $\vec{x} \in V$

F là cấu trúc đại số trường. Điều đó có nghĩa: F là một nhóm Abel dưới luật cộng; F là một nhóm Abel dưới luật nhân; và luật nhân trên F có tính chất

phân phối đối với luật cộng trên F . Một số ví dụ về trường vô hướng là: tập các số hữu tỷ Q , tập các số thực R , tập các số phức C , và trường Galois.

Ví dụ: Tập hợp các tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$, với a, b , và c là các hệ số, tạo thành một không gian vector. Tập hợp các tam thức bậc hai này hoàn toàn thoả mãn các tiên đề được liệt kê ở trên.

1.1.2. Phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính

Cho một tập các vector $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ thuộc một không gian vector V trên một trường F . Tập các vector $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ này là phụ thuộc tuyến tính (linear dependent) nếu tồn tại một tập các giá trị vô hướng $a_1, a_2, \dots, a_n$, mà ít nhất trong chúng có một giá trị khác không, để $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$.

Nếu tập các vector $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ không phải là phụ thuộc tuyến tính thì chúng được gọi là độc lập tuyến tính (linear independent). Nói một cách khác, tập các vector $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ là độc lập tuyến tính tương đương với mệnh đề sau: $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$ nếu và chỉ nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

1.1.3. Bao tuyến tính và cơ sở của một không gian vector

Cho A là một tập con của V . Tập hợp mới được hình thành bởi tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vector nằm trong A được gọi là **bao tuyến tính** hay **span** của A và được ký hiệu là $\text{span}(A)$.

Một số các tính chất của span :

- $A \subset \text{span}(A)$
- Nếu $A \subset B$ thì $\text{span}(A) \subset \text{span}(B)$
- Nếu tồn tại một tập hữu hạn n các vector độc lập tuyến tính $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ có span của nó bằng V thì mọi tập các vector độc lập tuyến tính lấy ra từ V có tối đa n phần tử

Nếu như một tập các vector độc lập tuyến tính (không nhất thiết phải có hữu hạn các phần tử) có span của nó bằng V thì tập các vector nói trên được gọi là **cơ sở (basis)** của V .

Một số các tính chất của cơ sở:

- Nếu không gian vector V có một cơ sở gồm hữu hạn n phần tử thì tất cả các cơ sở khác của V cũng có n phần tử. Số nguyên n được gọi là số chiều của không gian vector V . Ký hiệu $n = \dim(V)$. Trường hợp không gian vector có một cơ sở có vô hạn các phần tử thì không gian đó được gọi là không gian vô hạn chiều. Không gian có số chiều nhỏ nhất là không gian có chứa duy nhất $\vec{0}$.
- Nếu không gian vector V có số chiều là n , còn được gọi là không gian n chiều, thì mọi tập hợp con của V có chứa nhiều hơn hoặc bằng $n + 1$ phần tử bắt buộc phải là phụ thuộc tuyến tính.
- Nếu không gian vector V có hữu hạn chiều thì bất kỳ một tổ hợp tuyến tính nào thuộc V đều có thể mở rộng được thành cơ sở của không gian vector V .

Ví dụ: Tập hợp các tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ hình thành một không gian vector. Cơ sở của nó có thể được lựa chọn như sau như sau:

1. $\{1, x, x^2\}$
2. hoặc $\{1, x - 1, x(x - 1)\}$

1.1.4. Biểu diễn vector

Cho một không gian vector V có cơ sở của nó là $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$. $\vec{x}$ là một vector thuộc V . Cách biểu diễn như sau là duy nhất:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = [\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

Các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là các tọa độ (coordinates) của $\vec{x}$. Biểu diễn $[x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n]^T$ được gọi là tọa độ của vector (coordinate vector). Tọa độ của vector được dùng để biểu diễn thay cho một vector một khi đã xác định theo một cơ sở cho trước.

Hoàn toàn có thể viết $\vec{x} = [x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n]^T$, khi đó x_k với $k = 1, 2, \dots, n$ được gọi là các thành phần (components) của vector $\vec{x}$.

1.1.5. Không gian con

Tập hợp các vector W là một tập con của không gian vector V và bản thân W là một không gian vector thì khi đó W được gọi là không gian con của V . Lưu ý rằng W phải là một không gian vector trên cùng trường vô hướng F giống như không gian vector V .

Ví dụ:

- Tập các vector tự do có chung gốc trên một mặt phẳng (2 chiều), được ký hiệu là R_2 , là một không gian vector con của tập các vector tự do có chung gốc trên không gian 3 chiều, được ký hiệu là R_3 .
- Tập các nhị thức bậc nhất là không gian vector con của tập các tam thức bậc hai.

Giao của các không gian con

Cho W_1 và W_2 là các không gian con của V . Giao của W_1 và W_2 được định nghĩa là: $W_1 \cap W_2 = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \in W_1 \text{ và } \vec{x} \in W_2\}$. Ở đây dễ dàng thấy một tính chất quan trọng là giao của một số lượng bất kỳ các không gian vector con cũng là một không gian vector con.

Cho X là một tập con của V , X không nhất thiết phải là một không gian vector con. Luôn tồn tại một tập các không gian vector con $W_i \subset V$ và chúng cùng chứa X . Giao của **tất cả** các không gian con có chứa X , được ký hiệu là $\bigcap_{X \subset W_i} W_i$, là không gian con nhỏ nhất có chứa X . Từ đó dẫn đến kết

luận:

$$\bigcap_{X \subset W_i} W_i = \text{span}(X) \quad (1.1.2)$$

Không gian tổng

Cho W_1 và W_2 là các không gian con của V . Định nghĩa $W_1 + W_2$ là tập hợp tất cả các vector $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ với $\vec{x}_1 \in W_1$ và $\vec{x}_2 \in W_2$. Lại cũng dễ dàng thấy là $W_1 + W_2$ cũng đồng thời là một không gian con của V (dựa trên việc kiểm chứng tiên đề 1 và tiên đề 6 của không gian vector cho tập $W_1 + W_2$). Ở đây có tính chất là $W_1 + W_2 = \text{span}(W_1 \cup W_2)$ với $W_1 \cup W_2 = \{\vec{x} \in V : \vec{x} \in W_1 \text{ hoặc } \vec{x} \in W_2\}$. Hay nói một cách khác $W_1 +$

W_2 là *không gian vector con* nhỏ nhất có chứa cả W_1 và W_2 . Nói chung $W_1 \cup W_2$ không phải là một không gian con.

Cơ sở của không gian con

Mọi cơ sở của một không gian con của không gian vector V đều có thể mở rộng để trở thành cơ sở của V bằng cách bổ sung thêm một tập hợp các vector độc lập tuyến tính.

Hai không gian con bằng nhau

Hai không gian con W_1 và W_2 là bằng nhau nếu 1 trong 3 mệnh đề sau đây thoả mãn:

- $W_1 \subset W_2$ và $W_2 \subset W_1$
- Cả hai không gian W_1 và W_2 đều được sinh bởi cùng một cơ sở có số chiều hữu hạn
- Cả hai không gian W_1 và W_2 có cùng số chiều, giá trị số chiều này là hữu hạn, và $W_1 \subset W_2$

Định lý về số chiều của không gian tổng

Cho W_1 và W_2 là các không gian con của V thì:

$$\dim\{W_1 + W_2\} = \dim\{W_1\} + \dim\{W_2\} - \dim\{W_1 \cap W_2\} \quad (1.1.3)$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu $W_1 \cap W_2$ chỉ có chứa duy nhất vector $\vec{0}$ thì không gian tổng được gọi là tổng trực tiếp (direct sum) và được ký hiệu là $W_1 \oplus W_2$. Khi đó luôn có:

$$\dim\{W_1 \oplus W_2\} = \dim\{W_1\} + \dim\{W_2\} \quad (1.1.3a)$$

Nếu như $\vec{x} \in W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ thì chỉ có một cách duy nhất để phân tích như sau: $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i$ với $\vec{x}_i \in W_i$.

Nếu W_1 là một không gian con của V thì luôn tồn tại không gian con W_2 để $W_1 \oplus W_2 = V$, tuy nhiên W_2 chưa chắc đã phải là duy nhất.

Tính tiến của không gian con

Cho W là một không gian con của V , và cho $\vec{x}_0 \in V$ nhưng $\vec{x}_0 \notin W$. Tập hợp

$$\{\bar{y} \in V : \bar{y} = \bar{x} + \bar{x}_0, \bar{x} \in W\}$$

được gọi là tịnh tiến của không gian W . Kết quả của phép tịnh tiến nói chung không phải là một không gian vector.

1.2. TÍCH VÔ HƯỚNG

1.2.1. Định nghĩa tích vô hướng

Cho V là một không gian vector trên trường vô hướng F , là trường số thực R hoặc trường số phức C . Tích vô hướng của 2 vector $\bar{x}$ và $\bar{y}$, còn được gọi là tích trong (inner product), ký hiệu là $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, là một ánh xạ $\langle \rangle : V \times V \rightarrow F$ sao cho các tiên đề sau đây được thoả mãn:

1. $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$ là một số thực không âm hay $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$, và $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ khi và chỉ khi $\bar{x} = \vec{0}$
2. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$
3. $\langle a\bar{x} + b\bar{y}, \bar{z} \rangle = a\langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + b\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$

Không gian hữu hạn n chiều có tích vô hướng được gọi là không gian Euclid (Euclidean space).

Một số định nghĩa tích vô hướng điển hình:

1. Không gian R^n trên R có tích vô hướng định nghĩa như sau:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x^T y = y^T x = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.2.1a)$$

x^T là chuyển vị (transpose) của x

2. Không gian C^n trên C có tích vô hướng định nghĩa như sau:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x^T y^* = y^H x = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad (1.2.1b)$$

$$y^H \text{ là đối xứng hermitian của } y, \quad y^H = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix}^T$$

3. Xét không gian vector là tập các hàm số phức xác định trên khoảng đóng $[a, b]$, tích vô hướng được định nghĩa như sau:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g^*(t) dt \quad (1.2.1c)$$

Hai vector $\bar{x}$ và $\bar{y}$ trong một không gian vector có tích vô hướng được gọi là **trực giao (orthogonal)** nếu $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$. Một cơ sở của một không gian vector có các phần tử trực giao từng đôi một được gọi là **cơ sở trực giao**.

1.2.2. Phần bù trực giao của một không gian con

Cho W là một không gian con của V . Phần bù trực giao của W được ký hiệu là $W^\perp$ được định nghĩa như sau:

$$W^\perp = \{ \bar{x} \in V : \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0 \forall \bar{y} \in W \} \quad (1.2.2)$$

Lưu ý rất quan trọng trong định nghĩa trên là nếu $\bar{x} \in W^\perp$ thì $\bar{x}$ trực giao với tất cả các phần tử của không gian con W .

Một số nhận xét về phần bù trực giao:

- $W^\perp$ cũng là một không gian vector. Điều này được kiểm chứng bằng cách chỉ ra rằng tổng của 2 vector thuộc $W^\perp$ và tích của một vector thuộc $W^\perp$ với một giá trị vô hướng thuộc F cũng trực giao với tất cả các vector thuộc W .
- Giao của W và $W^\perp$ chứa duy nhất $\vec{0}$. Điều này dễ dàng chứng minh từ ngay tiên đề đầu tiên dùng để định nghĩa cho phép toán tích vô hướng.
- Tập cơ sở của W và cơ sở của $W^\perp$ hợp thành cơ sở của không gian vector V .

Từ đó dẫn đến kết luận rằng $V = W \oplus W^\perp$.

1.3. NORM CỦA VECTOR

Norm của một vector (vector norm) là một ánh xạ $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn các tiên đề sau:

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$ với mọi $\vec{x} \in V$ và $\|\vec{x}\| = 0$ khi và chỉ khi $\vec{x} = \vec{0}$
2. Thoả mãn bất đẳng thức tam giác: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
3. $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$ với mọi $\vec{x} \in V$ và $\alpha \in \mathbb{F}$

Đại lượng norm của một vector được dùng để xác định *chiều dài* của một vector.

Một lớp các norm hay được sử dụng, gọi là p-norms được định nghĩa là:

$$\|\vec{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (1.3.1)$$

Trong lớp p-norms này, các norm hay được sử dụng nhất đó là:

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad (1.3.1a)$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad (1.3.1b)$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{infinity norm}) \quad (1.3.1c)$$

2-norm được gọi là Euclidean norm và nếu như không có chỉ ký hiệu rõ ràng thì phép toán lấy norm luôn được hiểu đang sử dụng 2-norm.

Khi đang xét một không gian Euclid với 2-norm và tích vô hướng được định nghĩa theo (1.2.1a) và (1.2.1b), nói một cách khác với mọi vector $\vec{x}$ thuộc không gian vector đang xét luôn có $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2$, ta có bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovski-Schwarz.

Định lý 1 (Bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovski-Schwarz): Cho $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là các vector trong một không gian vector trên trường số phức $\mathbb{C}$ có tích vô hướng và 2-norm thoả mãn $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2$, dẫn đến

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad (1.3.2)$$

Chứng minh: Xét α là một số thực

$$\begin{aligned}\|\alpha\bar{x} + \bar{y}\|^2 &= \langle \alpha\bar{x} + \bar{y}, \alpha\bar{x} + \bar{y} \rangle = \alpha^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2\alpha \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + 2\alpha \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \\ &= \alpha^2 \|\bar{x}\|^2 + 2\alpha (\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^*) + \|\bar{y}\|^2 = \alpha^2 \|\bar{x}\|^2 + 2\alpha \operatorname{Re}[\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle] + \|\bar{y}\|^2\end{aligned}$$

Tam thức bậc hai trên luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên:

$$\operatorname{Re}[\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle] - \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 \leq 0 \text{ hay } \operatorname{Re}[\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle] \leq \|\bar{x}\| \|\bar{y}\|$$

Đặt $c = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^*}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}$, nhận thấy nếu coi c là một hằng số thì:

$$\operatorname{Re}[\langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle] \leq \|c\bar{x}\| \|\bar{y}\| \text{ tương đương với } \operatorname{Re}[c \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle] \leq |c| \|\bar{x}\| \|\bar{y}\|$$

Mà $|c| = 1$, từ đó bất đẳng thức ở trên trở thành:

$$\frac{\operatorname{Re}[\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle]}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|} \leq \|\bar{x}\| \|\bar{y}\| \text{ hay } |\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \|\bar{y}\|$$

Đối với tích vô hướng được định nghĩa theo (1.2.1c) trên không gian hàm số xác định trong khoảng đóng $[a, b]$ và 2-norm được định nghĩa là

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \text{ phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz}$$

coi như bài tập để bạn đọc tự chứng minh.

Một cơ sở trực giao $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ mà $\|\bar{a}_i\| = 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$ được gọi là một **cơ sở trực chuẩn (orthonormal)**.

Nếu $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ một cơ sở trực chuẩn của không gian vector V , $\bar{x}$ là một vector bất kỳ thuộc V , $\bar{x}$ hoàn toàn có thể được biểu diễn bằng tổ hợp tuyến tính của các phép chiếu $\bar{x}$ lên các vector thành phần của cơ sở trực chuẩn như sau:

$$\bar{x} = \langle \bar{x}, \bar{a}_1 \rangle \bar{a}_1 + \langle \bar{x}, \bar{a}_2 \rangle \bar{a}_2 + \dots + \langle \bar{x}, \bar{a}_n \rangle \bar{a}_n \quad (1.3.3)$$

Hay vector toạ độ của $\bar{x}$ là $[\langle \bar{x}, \bar{a}_1 \rangle | \langle \bar{x}, \bar{a}_2 \rangle | \dots | \langle \bar{x}, \bar{a}_n \rangle \bar{a}_n]^T$

1.4. QUÁ TRÌNH TRỰC GIAO HOÁ GRAM-SCHMIDT

Cho một tập các vector $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ độc lập tuyến tính thuộc không gian n chiều V . Quá trình trực giao hoá Gram-Schmidt (Gram-Schmidt procedure) được dùng để xây dựng một tập các vector $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ trực chuẩn, đây chính là một cơ sở trực chuẩn của không gian V (các vector trực giao từng đôi một đảm bảo tính độc lập tuyến tính, số vector là n trùng với số chiều của không gian V). Quá trình được mô tả theo các công thức sau:

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{x}_1}{\|\bar{x}_1\|_2}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\bar{x}_2 - \langle \bar{x}_2, \bar{y}_1 \rangle \bar{y}_1}{\|\bar{x}_2 - \langle \bar{x}_2, \bar{y}_1 \rangle \bar{y}_1\|_2}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\bar{x}_3 - \langle \bar{x}_3, \bar{y}_1 \rangle \bar{y}_1 - \langle \bar{x}_3, \bar{y}_2 \rangle \bar{y}_2}{\|\bar{x}_3 - \langle \bar{x}_3, \bar{y}_1 \rangle \bar{y}_1 - \langle \bar{x}_3, \bar{y}_2 \rangle \bar{y}_2\|_2}$$

...

$$\bar{y}_n = \frac{\bar{x}_n - \langle \bar{x}_n, \bar{y}_1 \rangle \bar{y}_1 - \langle \bar{x}_n, \bar{y}_2 \rangle \bar{y}_2 - \dots - \langle \bar{x}_n, \bar{y}_{n-1} \rangle \bar{y}_{n-1}}{\|\bar{x}_n - \langle \bar{x}_n, \bar{y}_1 \rangle \bar{y}_1 - \langle \bar{x}_n, \bar{y}_2 \rangle \bar{y}_2 - \dots - \langle \bar{x}_n, \bar{y}_{n-1} \rangle \bar{y}_{n-1}\|_2}$$

Trong không gian n chiều, xuất phát từ chỉ r vector $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ trực chuẩn từng đôi một, $r < n$. Tập vector này có thể mở rộng thành một cơ sở trực chuẩn của không gian V theo các bước sau:

1. Mở rộng tập hợp ban đầu để trở thành một cơ sở của V . Điều đó có nghĩa cần tìm ra tập các vector $\bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n$ bổ sung vào tập các vector ban đầu để tập các vector $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n$ là độc lập tuyến tính
2. Áp dụng quá trình Gram-Schmidt để xây dựng n vector trực chuẩn từ n vector độc lập tuyến tính nói trên. Tập cuối cùng thu được chính là cơ sở trực chuẩn của không gian vector V .

1.5. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.5.1. Các khái niệm về ánh xạ tuyến tính

Cho U và V là các không gian vector trên trường F . Một ánh xạ tuyến tính (linear transformation) đặc trưng bởi toán tử T từ U vào V là một ánh xạ với mỗi liên hệ giữa $\bar{x} \in U$ với $\bar{y} = T(\bar{x}) \in V$ duy nhất sao cho thoả mãn điều kiện tuyến tính như sau: Nếu $\bar{x}_1$ và $\bar{x}_2$ thuộc U , a và b là các phần tử của F thì $T(a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2) = aT(\bar{x}_1) + bT(\bar{x}_2)$. T được gọi là toán tử tuyến tính của ánh xạ $T: U \rightarrow V$.

Với mọi $\bar{x} \in U$, ta gọi $\bar{y} = T(\bar{x})$ là ảnh của $\bar{x}$ qua phép ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow V$ (image of $\bar{x}$ under T). Xét X là một tập con của không gian vector V , tập hợp ảnh của tất cả các phần tử thuộc X được gọi là ảnh của X (image of X), ký hiệu là $T(X)$.

$T(U)$ chính là miền giá trị (range) của phép ánh xạ T ($T(U) \subset V$). Miền giá trị của T được ký hiệu là $\text{Range}(T)$ (một số tài liệu coi miền giá trị - range - là ảnh - image - của phép ánh xạ). Số chiều của $T(U)$ được gọi là rank của T (một số tài liệu tài liệu gọi giá trị này là hạng của T) và ký hiệu là $\text{rank}(T)$.

Nhân (kernel) của T được định nghĩa là tập tất cả các vector thuộc U sao cho ảnh của chúng là $\vec{0}$. Nhân của T được ký hiệu là $\text{Ker}(T)$. Bởi phép ánh xạ là *tuyến tính* nên rõ ràng là nhân của T là một không gian con của U . Số chiều của nhân được gọi là nullity của T và được ký hiệu là $\text{nullity}(T)$.

Từ đây dễ dàng dẫn đến một định lý quan trọng đó là:

Định lý 2:

$$\dim(U) = \text{rank}(T) + \text{nullity}(T) \quad (1.5.1)$$

Chứng minh: Giả sử $\text{nullity}(T) = k$ và $\dim(U) = n$. Do $\text{Ker}(T) \subset U$ nên $\text{nullity}(T) \leq \dim(U)$ hay $k \leq n$. Lại giả sử $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ là cơ sở của $\text{Ker}(T)$. Xuất phát từ k vector độc lập tuyến tính này có thể mở rộng thành một cơ sở của không gian U là $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \vec{a}_{k+2}, \dots, \vec{a}_n$. Ta sẽ chứng minh rằng $T(\vec{a}_{k+1}), T(\vec{a}_{k+2}), \dots, T(\vec{a}_n)$ là cơ sở của $\text{Range}(T)$.

Trước tiên ta thấy rằng $T(\vec{a}_{k+1}), T(\vec{a}_{k+2}), \dots, T(\vec{a}_n)$ là độc lập tuyến tính. Thực vậy, xét phương trình $a_{k+1}T(\vec{a}_{k+1}) + a_{k+2}T(\vec{a}_{k+2}) + \dots + a_nT(\vec{a}_n) = \vec{0}$ được biến đổi về trái thành $T(a_{k+1}\vec{a}_{k+1} + a_{k+2}\vec{a}_{k+2} + \dots + a_n\vec{a}_n) = \vec{0}$ (do T là một ánh xạ tuyến tính) hay $\vec{u} = (a_{k+1}\vec{a}_{k+1} + a_{k+2}\vec{a}_{k+2} + \dots + a_n\vec{a}_n) \in \text{Ker}(T)$. Dẫn đến $\vec{u}$ luôn có thể biểu diễn bởi một cách duy nhất theo tổ hợp tuyến tính của $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ tức là: $\vec{u} = a_{k+1}\vec{a}_{k+1} + a_{k+2}\vec{a}_{k+2} + \dots + a_n\vec{a}_n = -a_1\vec{a}_1 - a_2\vec{a}_2 - \dots - a_k\vec{a}_k$. Phương trình nói trên tương đương với $a_1\vec{a}_1 + \dots + a_k\vec{a}_k + a_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \dots + a_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Điều này lại tương đương với $a_1 = \dots = a_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0$. Kết luận là $T(\vec{a}_{k+1}), T(\vec{a}_{k+2}), \dots, T(\vec{a}_n)$ độc lập tuyến tính.

Thứ hai ta thấy rằng $\text{Range}(T) = \text{span}(T(\vec{a}_{k+1}), T(\vec{a}_{k+2}), \dots, T(\vec{a}_n))$. Thực vậy nếu $\vec{y}$ là một vector bất kỳ thuộc $\text{Range}(T)$ thì luôn tồn tại vector $\vec{x} \in U$ để $\vec{y} = T(\vec{x})$. Phân tích $\vec{x}$ theo cơ sở của không gian U là $\vec{x} = a_1\vec{a}_1 + \dots + a_k\vec{a}_k + a_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \dots + a_n\vec{a}_n$. Tác động toán T lên cả hai vế của phương trình ta được $\vec{y} = a_1T(\vec{a}_1) + \dots + a_kT(\vec{a}_k) + a_{k+1}T(\vec{a}_{k+1}) + \dots + a_nT(\vec{a}_n)$. Mà $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ thuộc $\text{Ker}(T)$ nên $T(\vec{a}_1) = T(\vec{a}_2) = \dots = T(\vec{a}_k) = \vec{0}$. Dẫn đến $\vec{y} = a_{k+1}T(\vec{a}_{k+1}) + \dots + a_nT(\vec{a}_n)$ tức là $\vec{y}$ luôn có thể biểu diễn theo tổ hợp tuyến tính của $T(\vec{a}_{k+1}), T(\vec{a}_{k+2}), \dots, T(\vec{a}_n)$.

Từ 2 mệnh đề trên dẫn đến ta chứng minh được $T(\vec{a}_{k+1}), T(\vec{a}_{k+2}), \dots, T(\vec{a}_n)$ là cơ sở của $\text{Range}(T)$. Số chiều của $\text{Range}(T) = n-k$, định lý đã được chứng minh.

$T: U \rightarrow V$ là ánh xạ một - một nếu và chỉ nếu $\text{nullity}(T) = 0$, điều này có nghĩa là số chiều của nhân bằng 0. $T: U \rightarrow V$ là toàn ánh ($\text{Range}(T) = V$) nếu và chỉ nếu $\text{rank}(T) = \dim(V)$, có nghĩa là số chiều của miền giá trị hay số chiều của ảnh của U bằng số chiều của V .

Ánh xạ tuyến tính T có ánh xạ ngược, ký hiệu T^{-1} , nếu T là song ánh. Song ánh có nghĩa vừa là ánh xạ 1-1 vừa là toàn ánh. Từ định lý trên, một số nhận xét tính chất của phép ánh xạ và số chiều của tập nguồn và tập đích được đưa ra như sau:

- Nếu $\dim(U) < \dim(V)$ thì $\text{rank}(T) \leq \dim(U) < \dim(V)$ nên T không thể là toàn ánh.
- Nếu $\dim(U) > \dim(V)$ thì $\text{nullity}(T) = \dim(U) - \text{rank}(T) \geq \dim(U) - \dim(V) > 0$ nên T không thể là ánh xạ một - một.
- $\dim(U) = \dim(V)$ là điều kiện cần để ánh xạ tuyến tính đặc trưng bởi toán tử T có ánh xạ ngược.

1.5.2. Biểu diễn ánh xạ tuyến tính theo ma trận

Giả sử rằng U và V là các không gian vector trên cùng một trường vô hướng F . T là toán tử của một ánh xạ tuyến tính từ U vào V . Cũng giả sử rằng $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ và $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_m$ lần lượt là các cơ sở của U và V . Thực hiện phép ánh xạ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ vào n phần tử trong V thông qua T và biểu diễn chúng theo cơ sở $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_m$:

$$T(\vec{\alpha}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{\beta}_i \quad \text{với } j = 1, 2, \dots, n \quad (1.5.2a)$$

Viết theo dạng ma trận là:

$$T[\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] = [\vec{\beta}_1 | \vec{\beta}_2 | \dots | \vec{\beta}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.5.2b)$$

$$\text{hay } T[\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] = [\vec{\beta}_1 | \vec{\beta}_2 | \dots | \vec{\beta}_m] A \quad (1.5.2c)$$

Xét một vector bất kỳ, $\vec{x} \in U$, $\vec{x}$ được phân tích một cách duy nhất theo tổ hợp tuyến tính của cơ sở của U như sau:

$$\vec{x} = [\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

Khi tác động lên $\vec{x}$ thông qua phép ánh xạ T , do phép ánh xạ là tuyến tính nên:

$$\bar{y} = T[\bar{x}] = T[\bar{\alpha}_1 \mid \bar{\alpha}_2 \mid \dots \mid \bar{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\bar{\beta}_1 \mid \bar{\beta}_2 \mid \dots \mid \bar{\beta}_m] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.5.4)$$

Đồng thời $\bar{y}$ được phân tích một cách duy nhất theo tổ hợp tuyến tính của cơ sở của U như sau:

$$\bar{y} = [\bar{\beta}_1 \mid \bar{\beta}_2 \mid \dots \mid \bar{\beta}_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.5.5)$$

Vậy vector toạ độ của ảnh của vector $\bar{x}$ thông qua phép ánh xạ $T: U \rightarrow V$ được biểu diễn theo vector toạ độ của $\bar{x}$ theo công thức:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.5.6)$$

Vậy có kết luận là ma trận A hoàn toàn đại diện cho ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow V$.

1.5.3. Các ma trận đặc biệt

Nếu các không gian vector U và V trên trường số thực R , các phần tử của A là các số thực, ta nói $A \in R^{m \times n}$ (m hàng, n cột). Nếu các không gian vector U và V trên trường số phức C , các phần tử của A là các số phức, ta nói $A \in C^{m \times n}$.

Ma trận vuông $P \in R^{n \times n}$ được gọi là ma trận trực giao (orthogonal) nếu $P^T = P^{-1}$ hay $P^T P = P^{-1} P = I$. Điều này tương đương với các vector cột của P là trực giao từng đôi một và các vector hàng của P cũng trực giao từng đôi một.

Ma trận vuông $P \in C^{n \times n}$ được gọi là ma trận trực giao (orthogonal – và một số tài liệu Anh ngữ còn gọi là unitary) nếu $P^H = P^{-1}$ hay $P^H P = P^{-1} P = I$

(P^H là đối xứng hermitian hay chuyển vị liên hợp của P). Điều này tương đương với các vector cột của P là trực giao từng đôi một và các vector hàng của P cũng trực giao từng đôi một.

Ma trận vuông $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được gọi là ma trận đối xứng (symmetric) nếu $P^T = P$. Ma trận vuông $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ có tính chất đối xứng tương tự như trên, $P^H = P$, lúc này P được gọi là **ma trận đối xứng hermitian**. Các ma trận đối xứng và ma trận đối xứng hermitian có ứng dụng quan trọng trong các bài toán liên quan đến tìm trị riêng và chuyển đổi ma trận về ma trận trực giao (bởi lẽ ma trận đối xứng và ma trận đối xứng hermitian luôn có n trị riêng thực và có n vector riêng ứng với các trị riêng ấy tạo thành một tập các vector trực chuẩn, điều này sẽ được trình bày trong phần trị riêng và vector riêng).

1.5.4. Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với trường hợp cơ sở trực chuẩn

Nhắc lại rằng nếu $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_m$ là một cơ sở trực chuẩn của V , vector bất kỳ $\vec{y} \in V$ được phân tích theo tổ hợp tuyến tính của cơ sở trực chuẩn theo công thức:

$$\vec{y} = \langle \vec{y}, \vec{\beta}_1 \rangle \vec{\beta}_1 + \langle \vec{y}, \vec{\beta}_2 \rangle \vec{\beta}_2 + \dots + \langle \vec{y}, \vec{\beta}_m \rangle \vec{\beta}_m$$

Xét $T: U \rightarrow V$ là một ánh xạ tuyến tính, $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ và $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_m$ lần lượt là các cơ sở trực chuẩn của U và V . Ảnh của cơ sở của U qua phép ánh xạ T là:

$$\begin{aligned} T(\vec{\alpha}_1) &= \langle T(\vec{\alpha}_1), \vec{\beta}_1 \rangle \vec{\beta}_1 + \langle T(\vec{\alpha}_1), \vec{\beta}_2 \rangle \vec{\beta}_2 + \dots + \langle T(\vec{\alpha}_1), \vec{\beta}_m \rangle \vec{\beta}_m \\ T(\vec{\alpha}_2) &= \langle T(\vec{\alpha}_2), \vec{\beta}_1 \rangle \vec{\beta}_1 + \langle T(\vec{\alpha}_2), \vec{\beta}_2 \rangle \vec{\beta}_2 + \dots + \langle T(\vec{\alpha}_2), \vec{\beta}_m \rangle \vec{\beta}_m \\ &\vdots \\ T(\vec{\alpha}_n) &= \langle T(\vec{\alpha}_n), \vec{\beta}_1 \rangle \vec{\beta}_1 + \langle T(\vec{\alpha}_n), \vec{\beta}_2 \rangle \vec{\beta}_2 + \dots + \langle T(\vec{\alpha}_n), \vec{\beta}_m \rangle \vec{\beta}_m \end{aligned}$$

Hay biểu diễn ở dạng tích ma trận

$$\mathbf{T}[\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] = [\vec{\beta}_1 | \vec{\beta}_2 | \dots | \vec{\beta}_m] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_1), \vec{\beta}_1 \rangle & \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_2), \vec{\beta}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_n), \vec{\beta}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_1), \vec{\beta}_2 \rangle & \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_2), \vec{\beta}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_n), \vec{\beta}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_1), \vec{\beta}_m \rangle & \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_2), \vec{\beta}_m \rangle & \dots & \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_n), \vec{\beta}_m \rangle \end{bmatrix} \quad (1.5.7a)$$

$$\text{Từ đây dẫn đến } a_{ij} = \langle \mathbf{T}(\vec{\alpha}_j), \vec{\beta}_i \rangle \quad (1.5.7b)$$

1.5.5. Rank và Nullity của ma trận

Rank và Nullity của ma trận A đại diện cho một phép ánh xạ tuyến tính T chính là rank và nullity của T . Quay trở lại theo công thức biểu diễn ánh xạ tuyến tính theo tích ma trận:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] &= [\vec{\beta}_1 | \vec{\beta}_2 | \dots | \vec{\beta}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \left[[\vec{\beta}_1 | \vec{\beta}_2 | \dots | \vec{\beta}_m] \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \mid [\vec{\beta}_1 | \vec{\beta}_2 | \dots | \vec{\beta}_m] \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \mid \dots \mid [\vec{\beta}_1 | \vec{\beta}_2 | \dots | \vec{\beta}_m] \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Từ phần trước, xét thấy rằng $\text{rank}(T)$ là số lớn nhất các vector độc lập tuyến tính trong tập các vector $\mathbf{T}(\vec{\alpha}_1), \mathbf{T}(\vec{\alpha}_2), \dots, \mathbf{T}(\vec{\alpha}_n)$. Từ đây dẫn đến rank của ma trận A là số lớn nhất các vector cột độc lập tuyến tính của ma trận A và giá trị này cũng chính bằng số lớn nhất các vector hàng độc lập tuyến tính của ma trận A . Nếu ma trận A được bổ sung một cột mà cột này là tổ hợp của một vector là tổ hợp tuyến tính của các vector cột còn lại thì không làm tăng rank của ma trận. Điều này cũng đúng khi bổ sung thêm hàng theo nguyên tắc như vậy.

Xét trường hợp đặc biệt $T: U \rightarrow U$. Ánh xạ T , được biểu diễn bởi ma trận A n hàng, n cột, là ánh xạ một - một tương đương với hai mệnh đề sau đây:

1. $\text{rank}(\mathbf{T}) = n$
2. $\text{nullity}(\mathbf{T}) = 0$

Trong trường hợp này có nghĩa là ma trận A có $\text{rank}(A) = n$ và được gọi là ma trận **không suy biến (nonsingular)**. Ma trận không suy biến luôn tồn tại ma trận nghịch đảo, do đó nó còn được gọi là ma trận khả đảo. Lúc này ta thấy rằng sẽ tồn tại ánh xạ ngược của $\mathbf{T}$ và được ký hiệu là $\mathbf{T}^{-1}$.

1.5.6. Bài toán đổi cơ sở

Cho $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ là một cơ sở của không gian vector U . Vector $\vec{x} \in U$ được biểu diễn một cách duy nhất như sau:

$$\vec{x} = [\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.5.9)$$

với $[x_1 | x_2 | \dots | x_n]^T$ là vector tọa độ của $\vec{x}$

Giả sử rằng $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \dots, \vec{\alpha}'_n$ là một cơ sở mới của không gian U . Từng vector trong cơ sở mới được biểu diễn theo tổ hợp tuyến tính của cơ sở cũ theo công thức:

$$\vec{\alpha}'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \vec{\alpha}_i \quad \text{với } j = 1, 2, \dots, n \quad (1.5.10a)$$

$$\text{hay } [\vec{\alpha}'_1 | \vec{\alpha}'_2 | \dots | \vec{\alpha}'_n] = [\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] \mathbf{P} \quad (1.5.10b)$$

Nhận xét ngay thấy rằng các cột của $\mathbf{P}$ chính là các tọa độ của từng phần tử trong cơ sở mới theo cơ sở cũ. Do đó các vector cột của $\mathbf{P}$ là độc lập tuyến tính, hay $\mathbf{P}$ là ma trận không suy biến (ma trận khả đảo).

Vector $\vec{x}$ được biểu diễn theo tổ hợp tuyến tính của cơ sở mới như sau:

$$\vec{x} = [\vec{\alpha}'_1 | \vec{\alpha}'_2 | \dots | \vec{\alpha}'_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = [\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] \mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad (1.5.11)$$

Vậy quan hệ giữa vector tọa độ cũ và vector tọa độ mới là:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad (1.5.12)$$

Xét bài toán cho ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow V$. Giả sử $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$ và $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m$ lần lượt là các cơ sở của U và V . Ánh xạ T được đại diện bởi ma trận A với:

$$T[\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_2 | \dots | \bar{\alpha}_n] = [\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_2 | \dots | \bar{\beta}_m] A \quad (1.5.13)$$

- Giả sử ta đổi cơ sở của không gian nguồn U , cơ sở mới là $\bar{\alpha}'_1, \bar{\alpha}'_2, \dots, \bar{\alpha}'_n$ có quan hệ với cơ sở cũ của U thông qua ma trận P . Lúc này, ánh xạ T được đại diện bởi ma trận A' do cơ sở của U đã thay đổi. Thấy rằng quan hệ giữa cơ sở mới của U và cơ sở không đổi của V như sau:

$$T[\bar{\alpha}'_1 | \bar{\alpha}'_2 | \dots | \bar{\alpha}'_n] = [\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_2 | \dots | \bar{\beta}_m] A' \quad (1.5.14)$$

Mặt khác:

$$T[\bar{\alpha}'_1 | \bar{\alpha}'_2 | \dots | \bar{\alpha}'_n] = T[\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_2 | \dots | \bar{\alpha}_n] P = [\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_2 | \dots | \bar{\beta}_m] A P \quad (1.5.15)$$

$$\text{Từ đây dẫn đến } A' = AP \text{ hay } A = A'P^{-1} \quad (1.5.16)$$

- Giả sử ta đổi cơ sở của không gian đích V mà giữ nguyên cơ sở của không gian nguồn U , cơ sở mới của V là $\bar{\beta}'_1, \bar{\beta}'_2, \dots, \bar{\beta}'_n$ có quan hệ với cơ sở cũ của V thông qua ma trận Q . Quan hệ giữa cơ sở mới và cơ sở cũ theo công thức:

$$[\bar{\beta}'_1 | \bar{\beta}'_2 | \dots | \bar{\beta}'_n] = [\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_2 | \dots | \bar{\beta}_n] Q \quad (1.5.17)$$

Lúc này, ánh xạ T được đại diện bởi ma trận A'' do cơ sở của U đã thay đổi. Thấy rằng quan hệ giữa cơ sở mới của U và cơ sở không đổi của V như sau:

$$T[\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_2 | \dots | \bar{\alpha}_n] = [\bar{\beta}'_1 | \bar{\beta}'_2 | \dots | \bar{\beta}'_n] A'' = [\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_2 | \dots | \bar{\beta}_n] Q A'' \quad (1.5.18)$$

Từ đây dẫn đến $A = QA''$ hay $A'' = Q^{-1}A$ (1.5.19)

• Lại giả sử rằng đồng thời đổi cơ sở của không gian nguồn U và không gian đích V . Cơ sở mới của U và V lần lượt là $\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \dots, \tilde{\alpha}'_n$ và $\tilde{\beta}'_1, \tilde{\beta}'_2, \dots, \tilde{\beta}'_n$. Quan hệ giữa các cơ sở mới và các cơ sở cũ theo các công thức giống như trên đại diện bởi các ma trận P và Q . Lúc này, ánh xạ T được đại diện bởi ma trận A'' do cơ sở của U đã thay đổi. Thấy rằng quan hệ giữa cơ sở mới của U và cơ sở mới của V như sau:

$$T[\tilde{\alpha}'_1 | \tilde{\alpha}'_2 | \dots | \tilde{\alpha}'_n] = [\tilde{\beta}'_1 | \tilde{\beta}'_2 | \dots | \tilde{\beta}'_n] A'' \quad (1.5.20)$$

$$\text{hay} \quad T[\tilde{\alpha}_1 | \tilde{\alpha}_2 | \dots | \tilde{\alpha}_n] P = [\tilde{\beta}_1 | \tilde{\beta}_2 | \dots | \tilde{\beta}_n] Q A'' \quad (1.5.21)$$

$$\text{hay} \quad T[\tilde{\alpha}_1 | \tilde{\alpha}_2 | \dots | \tilde{\alpha}_n] = [\tilde{\beta}_1 | \tilde{\beta}_2 | \dots | \tilde{\beta}_n] Q A'' P^{-1} \quad (1.5.22)$$

Từ đây dẫn đến $A = Q A'' P^{-1}$ hay $A'' = Q^{-1} A P$ (1.5.23)

• Rõ ràng là nếu V trùng với U hay ta có ánh xạ $T: U \rightarrow U$. Cùng đồng loạt đổi cơ sở của tập nguồn và tập đích tới cùng cơ sở mới ta có $A = P A'' P^{-1}$ hay $A P = P A''$. Hai ma trận A và A'' được gọi là hai ma trận **đồng dạng (similar)**. Chúng là hai ma trận đại diện cho hai **ánh xạ tuyến tính đồng dạng**.

1.6. BỔ SUNG THÊM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Cho $T: U \rightarrow V$ là một ánh xạ tuyến tính, $\vec{b}$ là một vector thuộc không gian V . Rất nhiều bài toán trong thực tế đặt ra là tìm tất cả các vector $\vec{x} \in U$ sao cho $T[\vec{x}] = \vec{b}$. Nếu như các cơ sở của các không gian U và V là biết trước, ánh xạ tuyến tính T được đặc trưng bởi ma trận A , vector $\vec{b}$ được đại diện bởi vector toạ độ theo cơ sở của không gian vector V . Bài toán trở thành hệ phương trình n ẩn m phương trình:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (1.6.1)$$

Nếu trên quan điểm về ánh xạ tuyến tính, rõ ràng là nếu $\vec{b}$ không thuộc miền giá trị $\text{Range}(T)$ của phép ánh xạ thì hệ phương trình là không có

nghiệm. Thêm vào nữa, giả sử $T[\bar{x}] = \bar{b}$ có hai nghiệm là $\bar{x}_1$ và $\bar{x}_2$ thì $T[\bar{x}_1 - \bar{x}_2] = T[\bar{x}_1] - T[\bar{x}_2] = \bar{0}$ nên $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ thuộc nhân $\text{Ker}(T)$ của phép ánh xạ. Kết quả là nếu $\bar{x}_0$ là một nghiệm của $T[\bar{x}] = \bar{b}$ và $\bar{z} \in \text{Ker}(T)$ thì mọi nghiệm của $T[\bar{x}] = \bar{b}$ đều là tịnh tiến của $\bar{x}_0$ theo vector $\bar{z}$. Vậy nếu $T[\bar{x}] = \bar{b}$ có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất nếu và chỉ nếu $\text{Ker}(T)$ chỉ chứa duy nhất vector $\bar{0}$ (phương trình thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường).

Lại có nhận xét rằng hệ phương trình tuyến tính có thể được viết theo dạng sau:

$$[\bar{A}_1 | \bar{A}_2 | \dots | \bar{A}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \bar{b} \text{ với } \bar{A}_j = [\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_2 | \dots | \bar{\beta}_m] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (1.6.2)$$

hay $\bar{b}$ phải là một tổ hợp tuyến tính của các vector cột của ma trận A. Điều này dẫn đến điều kiện cần và đủ để $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm là $\bar{b} \in \text{span}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n)$.

Từ các nhận xét ở trên ta có thể tổng quát hoá về các trường hợp có nghiệm của phương trình như sau. Trước tiên, định nghĩa ma trận bổ sung, hay có thể gọi là ma trận gia tố (augmented matrix), của A là $[A|\bar{b}]$. Có thể chứng tỏ được rằng hệ phương trình tuyến tính $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\text{rank}([A|\bar{b}]) = \text{rank}(A) \quad (1.6.3)$$

(tham khảo [2] trang 130 - Định lý Kronecker – Capelli)

Nhắc lại rằng nếu $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm thì $\bar{b}$ phải là một tổ hợp tuyến tính của các vector cột của ma trận A. Điều đó có nghĩa bổ sung thêm cột $[b_1 | b_2 | \dots | b_m]^T$ vào ma trận A không làm tăng rank của ma trận. Trên quan điểm ánh xạ tuyến tính, chuyển đổi ma trận A về dạng bậc thang (row-echelon form) là quá trình tìm một ma trận mới A' có dạng bậc thang đại diện cho ánh xạ tuyến tính T sau khi đổi cơ sở của không gian đích U. Điều này dẫn đến vector $\bar{b}$ có tọa độ mới là $\bar{b}' = Q^{-1}\bar{b}$ và ánh xạ T sẽ có ma trận

đại diện mới là $A' = Q^{-1}A$. Số vector hàng khác 0 của A' là rank của A' và cũng chính là rank của A . Do đó cách thức để tìm rank của ma trận là đưa ma trận về dạng bậc thang. Cách thức này cũng là cách thức tổng quát để tìm toàn bộ nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tham khảo [2] trang 131).

Như đã trình bày ở trên, điều kiện cần và đủ để $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm là $\bar{b} \in \text{span}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n)$, hay $\bar{b} \in \text{Range}(T)$. Do đó, $\bar{b}$ phải trực giao với tất cả các vector thuộc $\text{Range}(T)^\perp$. Nói một cách khác, $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm tương đương với $\bar{b}$ phải trực giao với tất cả các vector trong một cơ sở bất kỳ của $\text{Range}(T)^\perp$.

Cho ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow V$, ta có khái niệm về ánh xạ liên hợp của T (một số tài liệu còn gọi là adjoint của T), ký hiệu bởi toán tử T^* là ánh xạ tuyến tính $T^*: V \rightarrow U$ thoả mãn:

$$\langle T(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, T^*(\bar{y}) \rangle \quad (1.6.4)$$

Chúng ta thừa nhận rằng ánh xạ $T^*: V \rightarrow U$ luôn tồn tại và là một ánh xạ tuyến tính (việc chứng minh T^* tồn tại và là toán tử của một ánh xạ tuyến tính có thể coi như một bài tập). Mỗi quan hệ giữa ma trận đặc trưng cho ánh xạ $T: U \rightarrow V$ và ma trận đặc trưng của ánh xạ $T^*: V \rightarrow U$ như sau:

Nếu $T: U \rightarrow V$ là một ánh xạ tuyến tính, $T^*: V \rightarrow U$ là ánh xạ liên hợp của nó, $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$ là một cơ sở trực chuẩn của U , $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m$ là một cơ sở trực chuẩn của V . A là ma trận đặc trưng cho ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow V$ dựa trên các cơ sở trực chuẩn trên thì ma trận đặc trưng cho toán tử T^* là A^H .

Thực vậy do các cơ sở được xét đến của các không gian vector là các cơ sở trực chuẩn và giả sử B là ma trận đặc trưng cho T^* nên $a_{ij} = \langle T(\bar{\alpha}_j), \bar{\beta}_i \rangle$ và $b_{ij} = \langle T^*(\bar{\beta}_j), \bar{\alpha}_i \rangle$ (theo (1.5.7b)). Ta thấy rằng $b_{ij} = \langle T^*(\bar{\beta}_j), \bar{\alpha}_i \rangle = \langle \bar{\alpha}_i, T^*(\bar{\beta}_j) \rangle^* = \langle T(\bar{\alpha}_j), \bar{\beta}_i \rangle^* = a_{ji}$ (theo định nghĩa của tích vô hướng trên không gian vector V). Do đó $B = A^H$, hay ma trận đặc trưng cho T^* là đối xứng hermitian của A .

Từ đây dẫn đến $\text{Ker}(A^H) = \text{Range}(A)^\perp$ và $\text{Range}(A^H) = \text{Ker}(A)^\perp$. Thực vậy, Nếu $\bar{y} \in \text{Ker}(A^H) \subset V$ thì $T^*(\bar{y}) = A^H \bar{y} = \vec{0}$ suy ra với mọi $\bar{x} \in U$ thì $\langle \bar{x}, A^H \bar{y} \rangle = 0$, và bởi A và A^H đại diện cho 2 toán tử liên hợp lẫn nhau nên $\langle A\bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ hay $\text{Ker}(A^H)$ trực giao với $\text{Range}(A)$.

Điều này dẫn đến 2 kết luận như sau:

- $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm khi và chỉ khi $\bar{b}$ trực giao với $\text{Ker}(A^H)$
- $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm khi và chỉ khi $\bar{b} \in \text{Ker}(A^H)^\perp = \text{Range}(A)$.

1.7. TRỊ RIÊNG VÀ VECTOR RIÊNG

Trị riêng và vector riêng được sử dụng rất nhiều trong các bài toán kỹ thuật liên quan đến đại số tuyến tính. Nếu như chúng ta hình dung trong không gian thì vector riêng là phần tử trong không gian vector mà phép tự ánh xạ không làm thay đổi phương của vector đó. Nếu như một vector bất kỳ được phân tích theo cơ sở mà mỗi thành phần của cơ sở là một vector riêng thì qua phép tự ánh xạ vector thu được là tổng của từng thành phần của vector ban đầu nhân với trị riêng. Ma trận đặc trưng sẽ có dạng đường chéo. Dưới đây là các phân tích toán học của vấn đề này.

Xét ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow U$ đại diện bởi ma trận vuông A n hàng n cột. Xét vector $\bar{e} \neq \vec{0}$ thoả mãn điều kiện:

$$T\bar{e} = \lambda\bar{e} \text{ với } \lambda \in F \quad (1.7.1)$$

vector $\bar{e}$ được gọi là **vector riêng (eigenvector)** ứng với **trị riêng (eigenvalue)** λ .

Nếu nhìn trên quan điểm phép tính trên các ma trận thì bài toán trở thành tìm vector cột $\bar{e} \neq \vec{0}$ để $A\bar{e} = \lambda\bar{e}$, λ thoả mãn phương trình trên được gọi là trị riêng của A và $\bar{e}$ được gọi là vector riêng ứng với trị riêng λ .

Tập tất cả các vector $\bar{e}$ thoả mãn phương trình $A\bar{e} = \lambda\bar{e}$ với một giá trị λ cụ thể nào đó được gọi là không gian riêng (eigenspace) ứng với λ và được ký hiệu là S_λ . Chú ý rằng $\vec{0}$ là một phần tử của không gian riêng nhưng $\vec{0}$ không phải là một vector riêng. Bằng phép biến đổi đại số ma trận, thấy rằng:

$$(A - \lambda I)\bar{e} = \vec{0} \quad (1.7.2)$$

Đây chính là bài toán giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Không gian riêng S_{λ_i} ứng với trị riêng λ_i chính là nhân của ma trận $(A - \lambda I)$, hay $S_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda I)$. Số chiều của S_{λ_i} được gọi là **bội hình học (geometric multiplicity)** của λ_i , ký hiệu là q_i . Giá trị bội hình học chính là số lượng lớn nhất có thể các vector riêng độc lập tuyến tính ứng với λ_i . Nhân của $(A - \lambda I)$ khác rỗng khi và chỉ khi định thức của ma trận $(A - \lambda I)$ này:

$$|A - \lambda I| = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.7.3)$$

($| \cdot |$ là ký hiệu định thức của ma trận)

Đây là phương trình theo λ và được gọi là phương trình đặc trưng của A . Khai triển $|A - \lambda I|$ ta được một đa thức theo λ có dạng:

$$c(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 \quad (1.7.4)$$

và được gọi là **đa thức đặc trưng** của A .

Nếu λ_i là nghiệm bội bậc m_i của phương trình đặc trưng trên thì m_i được gọi là **bội đại số (algebraic multiplicity)** của λ_i .

Nhắc lại rằng hai ma trận A và A' là đồng dạng (similar) nếu tồn tại một ma trận không suy biến (ma trận khả đảo) P để $A = PA'P^{-1}$. Thực chất A và A' đại diện cho cùng một ánh xạ tuyến tính tự ánh xạ trên không gian U với mỗi quan hệ giữa hai cơ sở là $[\vec{a}'_1 | \vec{a}'_2 | \dots | \vec{a}'_n] = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \dots | \vec{a}_n]P$. Có thể chứng tỏ được rằng **hai ma trận đồng dạng có các trị riêng giống nhau**.

Thực vậy, xét một $\vec{e}$ là một vector thuộc không gian U với cơ sở $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, đồng thời $\vec{e}$ cũng là vector riêng qua ánh xạ tuyến tính đại diện bởi ma trận A , do đó $A\vec{e} = \lambda\vec{e}$. Nhìn không gian U trên cơ sở mới $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \dots, \vec{a}'_n$ với mỗi quan hệ $[\vec{a}'_1 | \vec{a}'_2 | \dots | \vec{a}'_n] = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \dots | \vec{a}_n]P$, vector $\vec{e}$ được thể hiện bởi toạ độ mới được ký hiệu là $\vec{e}'$ (chú ý rằng $\vec{e}'$ cũng chính là $\vec{e}$ chỉ khác bởi biểu diễn toạ độ theo cơ sở mới) với mỗi quan hệ $\vec{e} = P\vec{e}'$. Khi đó $A\vec{e} = \lambda\vec{e} \Leftrightarrow (PA'P^{-1})(P\vec{e}') = \lambda(P\vec{e}') \Leftrightarrow A'\vec{e}' = \lambda\vec{e}'$, rõ ràng là λ là một trị riêng của A' và $\vec{e}'$ là một vector riêng ứng với trị riêng đó.

Định lý 3: Nếu ma trận A có k trị riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ và $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ là các vector riêng lần lượt ứng với các trị riêng đó. Ta có kết

luận là $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ là các vector độc lập tuyến tính.

Thực vậy, ta chứng minh bằng phản chứng. trong $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ chỉ có r vector độc lập tuyến tính $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$, còn $\vec{e}_k$ phụ thuộc tuyến tính vào r vector này. Khi có duy nhất một cách biểu diễn như sau:

$$\vec{e}_k = \sum_{i=1}^r c_i \vec{e}_i, \text{ trong đó có ít nhất một hệ số } c_i \neq 0$$

với $i = 1, 2, \dots, r$.

Tác động ánh xạ tuyến tính T đặc trưng bởi ma trận A lên cả hai vế của phương trình trên:

$$T(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^r c_i T(\vec{e}_i) \text{ hay } \lambda_k \vec{e}_k = \sum_{i=1}^r c_i \lambda_i \vec{e}_i$$

- Nếu $\lambda_k = 0$ thì $\lambda_i \neq 0$ với $i = 1, 2, \dots, r$. Vế trái của biểu thức trên bằng $\vec{0}$ mà $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$ nên

$$\sum_{i=1}^r c_i \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0} \Leftrightarrow c_i \lambda_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r. \text{ Điều này là vô lý.}$$

- Nếu $\lambda_k \neq 0$, chia cả hai vế của biểu thức trên cho λ_k dẫn đến:

$$\vec{e}_k = \sum_{i=1}^r c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k} \right) \vec{e}_i$$

tức là $\lambda_i = \lambda_k$ với mọi $i = 1, 2, \dots, r$. Điều này cũng là vô lý.

Xét ma trận vuông A n cột n hàng đại diện cho ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow U$ đối với một cơ sở $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ cho trước nào đó. Giả sử rằng T có n vector riêng độc lập tuyến tính $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Đây cũng có thể được sử dụng như một cơ sở của không gian vector U . Nhận xét rằng:

$$[\vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \dots | \vec{e}_n] = [\vec{\alpha}_1 | \vec{\alpha}_2 | \dots | \vec{\alpha}_n] P$$

Với P là ma trận hình thành bởi các cột là vector tọa độ của từng vector thuộc cơ sở mới phân tích theo cơ sở cũ.

$$P = [\vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \dots | \vec{e}_n]$$

Việc chuyển cơ sở từ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ sang $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ phải thông qua ma

trận chuyển đổi P . Sau khi nhìn nhận ánh xạ tuyến tính T trên cơ sở mới, ánh xạ này đại diện bởi ma trận D liên quan đến ma trận đại diện cũ theo công thức: $D = P^{-1}AP$ hay $AP = PD$. Nhân ma trận A với ma trận P ta thấy:

$$\begin{aligned} AP &= A[\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \dots | \bar{e}_n] = T[\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \dots | \bar{e}_n] = [T(\bar{e}_1) | T(\bar{e}_2) | \dots | T(\bar{e}_n)] \\ &= [\lambda_1 \bar{e}_1 | \lambda_2 \bar{e}_2 | \dots | \lambda_n \bar{e}_n] = [\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \dots | \bar{e}_n] D \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Điều này cho thấy D là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các trị riêng:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.7.6)$$

Các diễn giải trên đưa đến kết luận là nếu ma trận A có đúng n trị riêng khác nhau thì A có thể chéo hoá được. Điều ngược lại cũng hoàn toàn chính xác. **Vậy điều kiện cần và đủ để một ma trận $n \times n$ có thể chéo hoá được là nó có đúng n trị riêng khác nhau.**

Trong trường hợp A có các trị riêng bội, quá trình chéo hoá A không thể thực hiện được. Tuy nhiên ta vẫn có thể tìm được ma trận P để $D = P^{-1}AP$ gần như là ma trận đường chéo, các trị riêng của A xuất hiện trên đường chéo của P và ngay trên các trị riêng này là các giá trị 1. Dạng của ma trận D này được gọi là **Jordan canonical form** (tham khảo [1] trang 479).

Một ma trận đối xứng trên $\mathbb{R}$ luôn có các trị riêng thực. Nói cách khác, phương trình đặc trưng luôn có các nghiệm thực mà không có nghiệm phức nào. Tương tự một ma trận đối xứng hermitian trên $\mathbb{C}$ cũng luôn có các trị riêng thực. Ta sẽ chứng minh cho trường hợp ma trận đối xứng hermitian bằng cách giả sử A là một ma trận đối xứng hermitian đặc trưng cho một ánh xạ tuyến tính $T: U \rightarrow U$, λ là một trị riêng của A và $\bar{e}$ là một vector riêng tương ứng với trị riêng đó. Xét:

$$\lambda \langle \bar{e}, \bar{e} \rangle = \langle \lambda \bar{e}, \bar{e} \rangle = \langle A\bar{e}, \bar{e} \rangle = e^H(Ae) = (e^H A)e = (A^H e)^H e$$

do A là đối xứng hermitian hay $A^H = A$ nên:

$$(A^H e)^H e = (Ae)^H e = \langle \bar{e}, A\bar{e} \rangle = \langle \bar{e}, \lambda \bar{e} \rangle = \langle \lambda \bar{e}, \bar{e} \rangle^* \text{ hay}$$

$$\lambda \langle \bar{e}, \bar{e} \rangle = (\lambda \langle \bar{e}, \bar{e} \rangle)^* \quad (1.7.7)$$

mà $\langle \bar{e}, \bar{e} \rangle$ là một giá trị thực dương nên λ phải là một số thực.

Nếu λ_1 và λ_2 là các trị riêng khác nhau của ma trận A là đối xứng hermitian và $\bar{e}_1$ và $\bar{e}_2$ là các vector riêng lần lượt tương ứng với các trị riêng đó thì $\bar{e}_1$ và $\bar{e}_2$ là trực giao với nhau. Thực vậy:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle &= \langle \lambda_1 \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = \langle A \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = e_2^H (A e_1) = (e_2^H A) e_1 = (A^H e_2)^H e_1 \\ &= (A e_2)^H e_1 = \langle \bar{e}_1, A \bar{e}_2 \rangle = \langle \bar{e}_1, \lambda_2 \bar{e}_2 \rangle = \langle \lambda_2 \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle^* = \lambda_2 \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{từ đây suy ra:} \quad (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = 0 \quad (1.7.8)$$

hay $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = 0$ tương đương với $\bar{e}_1$ và $\bar{e}_2$ là trực giao.

Phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0$ là phương trình bậc n theo λ nên A có n nghiệm thực. Có thể chứng minh được **rằng A cũng tồn tại n vector riêng trực chuẩn** như sau:

- Do A là đối xứng hermitian nên A là đặc trưng cho một toán tử tự liên hợp T theo một cơ sở trực chuẩn trên không gian vector U , điều đó có nghĩa $T^* = T$. Điều này được khẳng định bởi biến đổi sau

$$\begin{aligned} \langle T(\bar{x}), \bar{y} \rangle &= \langle A \bar{x}, \bar{y} \rangle = y^H (A x) = (y^H A) x \\ &= (A^H y)^H x = (A y)^H x = \langle \bar{x}, A \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, T(\bar{y}) \rangle \end{aligned}$$

- A là đối xứng hermitian đặc trưng cho một toán tử tự liên hợp của một ánh xạ tuyến tính nên tồn tại một vector riêng đã được chuẩn hoá $\bar{e}_1 \in U$ (có $\|\bar{e}_1\| = 1$) tương ứng với một trị riêng thực λ_1 nên:

$$T(\bar{e}_1) = \lambda_1 \bar{e}_1$$

- Xét không gian $W_1 = \text{span}(\bar{e}_1)$ và $W_1^\perp$ là phần bù trực giao của W_1 . Rõ ràng là $U = W_1 \oplus W_1^\perp$ nên $\dim(W_1) + \dim(W_1^\perp) = n$. Nếu $n = 1$ thì $W_1 = U$, định lý đã được chứng minh bởi U có đúng $n = 1$ vector riêng trực chuẩn.

d. Nếu $n > 1$, thì với mọi $\bar{y} \in W_1^\perp$ thì $\langle \bar{e}_1, \bar{y} \rangle = 0$, xét:

$$\langle T(\bar{y}), \bar{e}_1 \rangle = \langle \bar{y}, T(\bar{e}_1) \rangle = \langle \bar{y}, \lambda_1 \bar{e}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \bar{y}, \bar{e}_1 \rangle = 0$$

nên $T(\bar{y}) \in W_1^\perp$, hay toán tử T của ánh xạ tuyến tính cũng đóng kín với không gian con $W_1^\perp$ và T là toán tử tự liên hợp trên $W_1^\perp$. Tương tự tồn tại một vector riêng đã được chuẩn hoá $\bar{e}_2 \in W_1^\perp \subset U$ (có $\|\bar{e}_2\| = 1$) tương ứng với một trị riêng thực λ_2 để $T(\bar{e}_2) = \lambda_2 \bar{e}_2$ và $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = 0$.

e. Lại tiếp tục xây dựng $W_2 = \text{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ và $W_2^\perp$ là phần bù trực giao của W_2 ta sẽ mở rộng được n vector trực chuẩn là vector riêng của A .

Từ đây dẫn tới các kết luận như sau: ***Ma trận đối xứng trên $\mathbf{R}$ và ma trận đối xứng hermitian trên $\mathbf{C}$ có bội hình học của mỗi trị riêng bằng với bội đại số của nó.*** Điều đó có nghĩa nếu λ là nghiệm bội bậc m của phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0$ thì ứng với λ có đủ m vector riêng mà chúng là độc lập tuyến tính.

Đối với các ma trận kiểu đối xứng như trên (đối xứng thường trên $\mathbf{R}$ và đối xứng hermitian trên $\mathbf{C}$) trong quá trình chéo hoá để xây dựng ma trận đường chéo theo công thức $D = P^{-1}AP$ với $P = [\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \dots | \bar{e}_n]$ là quá trình ***chéo hoá trực giao*** bởi P là một ma trận trực giao, tức là $P^T = P^{-1}$ (đối với ma trận với các phần tử là các số thực) hoặc $P^H = P^{-1}$ (đối với ma trận với các phần tử là các số phức). Tính trực giao của P là hiển nhiên bởi lẽ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ là các vector trực chuẩn ($P^H P = I$).

BÀI TẬP

1. Trong tất cả các tập con của $\mathbf{R}^3$ sau đây, tập nào là không gian con:

- Tập tất cả các vector có $x_1 = 0$
- Tập tất cả các vector có $x_1 = 1$
- Tập tất cả các vector có $x_1 x_2 = 0$
- Tập chứa duy nhất vector $[0 \ 0 \ 0]^T$
- Tổ hợp tuyến tính của $\bar{x} = [1 \ 1 \ 0]^T$ và $\bar{y} = [2 \ 0 \ 1]^T$
- Tập tất cả các vector có toạ độ thoả mãn công thức

$$x_3 - x_2 + 3x_1 = 0.$$

2. Bộ các vector sau có phải là độc lập tuyến tính không?

$$\bar{x}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad \bar{x}_2 = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

$$\bar{x}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T \quad \bar{x}_4 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

Bao tuyến tính của của các vector trên có phải là $\mathbb{R}^4$ không?

3. Xem xét bộ các vector sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

a. $[1 \ 1 \ 2]^T$ $[1 \ 2 \ 1]^T$ $[3 \ 1 \ 1]^T$

b. $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$; $\bar{x}_2 - \bar{x}_3$; $\bar{x}_3 - \bar{x}_4$; $\bar{x}_4 - \bar{x}_1$

với $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ là các vector tùy ý

c. $[1 \ 1 \ 0]^T$ $[1 \ 0 \ 0]^T$ $[0 \ 1 \ 1]^T$ $[x \ y \ z]^T$.

4. Chứng minh rằng nếu $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ độc lập tuyến tính thì $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$; $(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)$; $(\bar{x}_3 + \bar{x}_1)$ cũng độc lập tuyến tính.

5. Chứng minh rằng mọi cơ sở của không gian vector V phải có cùng số vector.

6. Tìm chiều dài và tích vô hướng của

$$\bar{x} = [1 \ 4 \ 0 \ 2]^T \text{ và } \bar{y} = [2 \ -2 \ 1 \ 3]^T.$$

7. Cho $\bar{x}$ và $\bar{y}$ cùng thuộc một không gian vector trên trường số thực. Chứng tỏ rằng $\bar{x} - \bar{y}$ trực giao với $\bar{x} + \bar{y}$ nếu và chỉ nếu $\|\bar{x}\| = \|\bar{y}\|$.

8. Xét không gian $\mathbb{R}_2$ (không gian các vector hình học có chung gốc trên mặt phẳng). Hãy tìm ma trận đại diện cho các phép ánh xạ:

- a. Quay vector đi một góc 90° thuận chiều kim đồng hồ
b. Chiều vector xuống trục x

9. Giải thích tại sao $A\bar{x} = \bar{b}$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $\text{rank}([A|b]) = \text{rank}(A)$

10. Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$, một cơ sở của không gian này bao gồm các thành phần:

$$\bar{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cơ sở mới của không gian nói trên bao gồm các thành phần sau:

$$\vec{\alpha}'_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\alpha}'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\alpha}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận P thể hiện mối quan hệ giữa vector tọa độ theo cơ sở cũ và vector tọa độ theo cơ sở mới.

Cho vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ theo cơ sở $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3)$ là $[1 \ 2 \ 2]^T$, hãy tìm tọa độ của $\vec{x}$ theo cơ sở $(\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \vec{\alpha}'_3)$

11. Cho $A\vec{x} = \vec{b}$ luôn có ít nhất 1 nghiệm. Chứng tỏ rằng nghiệm của $A^T \vec{y} = \vec{0}$ là $\vec{y} = \vec{0}$

12. Cho $AB = 0$. Chứng tỏ rằng $\text{Range}(B) \subset \text{Ker}(A)$.

13. Hệ phương trình tuyến tính $A\vec{x} = \vec{0}$ có đúng 1 nghiệm $\vec{x} = \vec{0}$, tìm $\text{rank}(A)$.

14. Tìm trị riêng và vector riêng của

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

15. Hãy tìm cách phân tích các ma trận sau dưới dạng $A = PDP^{-1}$ (D là ma trận đường chéo)

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Chương 2

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

Chương này sẽ đề cập đến các phép biến đổi tuyến tính đối với các hàm số có tính chất liên tục từng phần và các phép biến đổi đối với các dãy số rời rạc. Các phép biến đổi đối với hàm số bao gồm: biến đổi Laplace, khai triển chuỗi Fourier và biến đổi Fourier. Các phép biến đổi đối với dãy số bao gồm: biến đổi Z, biến đổi Fourier đối với dãy số rời rạc và biến đổi Fourier rời rạc DFT.

Các phép biến đổi này có vai trò ứng dụng rất quan trọng trong các ngành kỹ thuật nói chung và ngành Điện - Điện tử - Viễn thông nói riêng. Đặc biệt chúng là các công cụ gián tiếp nhưng rất hữu ích trong phân tích tín hiệu cũng như phân tích và thiết kế các hệ thống tuyến tính.

Các phép biến đổi này đều có chung dạng biểu thức toán học, đó là từ hàm số hoặc dãy số ban đầu đem nhân với một hàm số hoặc dãy số được gọi là nhân của phép biến đổi, sau đó lấy tích phân hoặc lấy tổng trên biến số của miền ban đầu. Bởi biểu thức toán học là đối xứng nên nếu hàm số hoặc dãy số ban đầu là thực thì sau phép biến đổi thu được một hàm số hay dãy số có một số tính chất đối xứng tương ứng nào đó. Thực chất các phép biến đổi này không khác gì việc biểu diễn không gian vector các hàm số liên tục hoặc dãy số theo cơ sở trực giao là các hàm e mũ hoặc các hàm lũy thừa. Một điểm cần lưu ý là về mặt tổng quát, các không gian các hàm số và không gian các dãy số là các không gian có số chiều vô hạn (không gian $\mathcal{L}_2$ và không gian ℓ_2).

Do dạng biểu thức toán học là như nhau nên các tính chất tương ứng của các phép biến đổi cũng tương tự nhau. Với cách tiếp cận thuần túy toán học, nội dung các chương của phần này được trình bày theo nguyên tắc: đưa ra các công thức toán học cho từng phép biến đổi, các định lý liên quan đến sự tồn tại của phép biến đổi, và các tính chất cho từng phép biến đổi.

2.1. BIẾN ĐỔI LAPLACE

2.1.1. Biến đổi Laplace thuận

Cho hàm số $f(t)$ xác định trên miền $\mathbb{R}$, biến đổi Laplace thuận hay gọi tắt là **biến đổi Laplace (Laplace Transform)** của $f(t)$ được định nghĩa bởi công thức sau:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

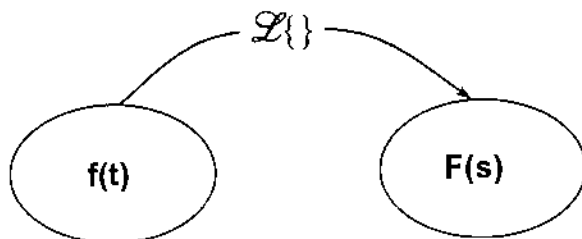
Với s là biến số phức, e^{-st} được gọi là nhân của phép biến đổi. $\mathcal{L}$

Biến đổi Laplace cho kết quả, hay ảnh, của phép biến đổi là một hàm biến phức, ký hiệu là $F(s)$. Công thức đầy đủ là:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.1.1)$$

Nhận xét:

- $\mathcal{L}$ là ký hiệu của **toán tử Laplace (Laplace Transform Operator)**, tác động lên hàm số $f(t)$ thu được hàm số $F(s)$. Miền xác định chứa biến số phức thường được gọi là miền tần số phức. Hình vẽ sau thể hiện mối quan hệ giữa 2 miền không gian hàm số.



- $f(t)$ và $F(s)$ được gọi là **cặp biến đổi Laplace**, ký hiệu $\{f(t), F(s)\}$
- Theo công thức trên, phép biến đổi Laplace có cận trên của phép lấy tích phân là ∞ . Đây là dạng tích phân suy rộng (improper integral) nên công thức của phép biến đổi được khai triển như sau:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad (2.1.2)$$

Hàm số $f(t)$ có biến đổi Laplace khi và chỉ khi giới hạn ngoài cùng bên tay phải của biểu thức hội tụ khi $T \rightarrow \infty$

- Cận dưới của phép tính tích phân bằng 0, điều đó có nghĩa phép biến đổi đã bỏ mất thông tin phần $t < 0$ của hàm gốc $f(t)$. Lúc này, $F(s)$ chỉ mang thông tin về $f(t)$ với $t \geq 0$. Tuy nhiên vấn đề này không gặp trở ngại gì trong các bài toán ứng dụng.

Hàm số $f(t)$ được gọi là **nhân quả (causal)** nếu:

$$f(t) = 0 \text{ khi } t < 0 \quad (2.1.3)$$

Định nghĩa **hàm nhẩy đơn vị (Heaviside unit step function)**:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Nhân hàm $f(t)$ với $u(t)$ ta có:

$$f(t)u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t) & (t \geq 0) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

là một hàm nhân quả. Từ đây có nhận xét rằng $F(s)$ mang đầy đủ thông tin về $f(t)u(t)$. Nói một cách chính xác, $\{f(t)u(t), F(s)\}$ là cặp biến đổi Laplace

- Trường hợp cận dưới của phép biểu thức tích phân từ $-\infty$, **biến đổi Laplace hai phía (two – sided or bilateral Laplace transform)** được ký hiệu là:

$$\mathcal{L}_B \{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.1.6)$$

Để phân biệt với trường hợp này, phép biến đổi Laplace theo công thức ở phần trước được gọi là biến đổi Laplace một phía. Nhiều tài liệu chỉ đề cập đến biến đổi Laplace một phía bởi khía cạnh ứng dụng của nó. Phạm vi các hàm số có biến đổi Laplace một phía là lớn hơn nhiều so với phạm vi các hàm số có biến đổi Laplace hai phía. Nhìn chung, khi đề cập đến biến đổi Laplace tức là đề cập đến biến đổi Laplace 1 phía, trừ trường hợp chỉ rõ là biến đổi 2 phía.

- Cận dưới của phép tính tích phân trong công thức của phép biến đổi Laplace luôn được quy định là từ 0-. Điều này hữu ích trong trường hợp hàm số $f(t)$ có thành phần vuông góc với trục hoành tại gốc tọa độ, ví dụ như hàm xung Dirac. Do vậy công thức biến đổi Laplace đầy đủ là

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.1.7)$$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Laplace của $f(t) = c$, c : constant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c\} &= \int_0^{\infty} c e^{-st} dt = c \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \\ &= c \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{e^{-st}}{s} \right)_0^T \right] = \frac{c}{s} \left(1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} \right) \end{aligned}$$

Đặt $s = \sigma + j\omega$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\sigma T} (\cos \omega T + j \sin \omega T)$$

Do hàm số $\cos \omega T + j \sin \omega T$ là bị chặn, giới hạn trên hội tụ về 0 khi $\sigma > 0$, ngược lại là phân kỳ

Vậy $\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$ với $\text{Re}(s) > 0$

Dẫn đến cặp biến đổi Laplace:

$$\begin{cases} f(t) = c, & c: \text{constant} \\ F(s) = \frac{c}{s} & \text{Re}(s) > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi Laplace của $f(t) = t$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right)_0^T \right] = \frac{1}{s^2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T e^{-sT}}{s} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT}}{s^2} \end{aligned}$$

Đặt $s = \sigma + j\omega$

$$\Rightarrow e^{-st} = e^{-\sigma T} (\cos \omega T + j \sin \omega T)$$

Do hàm số $\cos \omega T + j \sin \omega T$ là bị chặn, dẫn đến:

- Khi $\text{Re}(s) > 0$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T e^{-sT}}{s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT}}{s^2} = 0$
- Khi $\text{Re}(s) \leq 0$, hai giới hạn trên không tồn tại

Vậy $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ với $\text{Re}(s) > 0$

Dẫn đến cặp biến đổi Laplace:
$$\begin{cases} f(t) = t \\ F(s) = \frac{1}{s^2} \end{cases} \quad \text{Re}(s) > 0$$

Ví dụ 3: Tìm biến đổi Laplace của $f(t) = e^{kt}$,
với $k \in \mathbb{R}$, k : constant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^{\infty} e^{kt} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-k)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{e^{-(s-k)t}}{s-k} \right) \right]_0^T = \frac{1}{s-k} \left(1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(s-k)T} \right) \end{aligned}$$

- Khi $\text{Re}(s) > \text{Re}(k)$, $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(s-k)T} = 0$
- Khi $\text{Re}(s) \leq \text{Re}(k)$, giới hạn trên không tồn tại

Vậy $\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$ với $\text{Re}(s) > \text{Re}(k)$

Dẫn đến cặp biến đổi Laplace:

$$\begin{cases} f(t) = e^{kt} \\ F(s) = \frac{1}{s-k} \end{cases} \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(k)$$

2.1.2. Sự tồn tại của biến đổi Laplace

Định nghĩa hàm bậc mũ:

Hàm $f(t)$ là hàm bậc mũ (exponential order) khi $t \rightarrow \infty$ nếu tồn tại một số thực σ và các số thực dương M, T sao cho:

$$|f(t)| < Me^{\sigma t} \quad \text{với mọi } t > T$$

Điều này có nghĩa nếu tồn tại một hàm e mũ để $Me^{\sigma t}$ luôn lớn hơn trị tuyệt đối của $f(t)$ khi tăng t từ $t > T$ thì $f(t)$ là hàm bậc mũ. Nói cách khác, hàm bậc mũ $f(t)$ không tăng nhanh hơn hàm e mũ dạng $Me^{\sigma t}$.

Giá trị σ_c nhỏ nhất trong tập các giá trị σ sao cho $|f(t)| < Me^{\sigma t}$ được gọi là **biên hội tụ (abscissa of convergence)**.

Nhận xét: Phần lớn các hàm toán học biểu thị trong các ứng dụng là hàm bậc mũ.

Ví dụ 1: Hàm không phải là hàm bậc mũ là e^{t^2}

Ví dụ 2: Hàm số $f(t) = t^3$ là một hàm bậc mũ.

Thực vậy, khai triển chuỗi Taylor:

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 t^3 + \dots (\alpha > 0)$$

$$\Rightarrow t^3 < \frac{6e^{\alpha t}}{\alpha^3} \text{ khi } t \rightarrow \infty, \text{ vậy } f(t) = t^3 \text{ là hàm bậc mũ.}$$

Định lý về sự tồn tại của biến đổi Laplace:

Nếu một hàm số nhân quả $f(t)$ liên tục từng phần (*piecewise continuous*) trên đoạn $[0, \infty]$ và là bậc mũ với biên hội tụ σ_c thì biến đổi Laplace của $f(t)$ có miền hội tụ là $\text{Re}(s) > \sigma_c$, và biến đổi Laplace của $f(t)$ được tính theo công thức:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

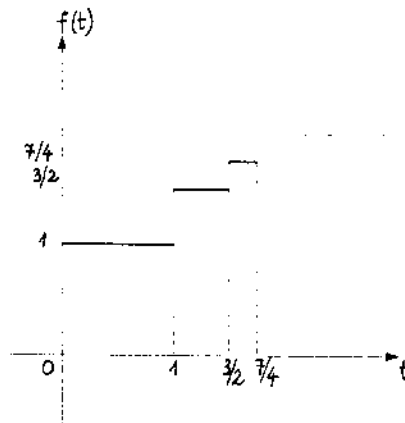
Miền hội tụ được ký hiệu là $\text{RoC}\{F(s)\}$

Lưu ý:

- Định lý trên chỉ phát biểu điều kiện đủ, tức là nếu có điều kiện của mệnh đề thuận xảy ra: hàm số nhân quả $f(t)$ liên tục từng phần trên đoạn $[0, \infty]$ và là bậc mũ với biên hội tụ σ_c , thì $f(t)$ có biến đổi Laplace, miền hội tụ là $\text{Re}(s) > \sigma_c$. Điều kiện ngược lại chưa chắc đã đúng. Điều đó có nghĩa có thể có các hàm số tồn tại biến đổi Laplace mà không thoả mãn điều kiện nói trên hay phạm vi các hàm số có biến đổi Laplace có thể lớn hơn phạm vi các hàm số được xét trong điều kiện đã nêu.
- Điều kiện liên tục từng phần (*piecewise continuous*) có nghĩa là hàm số $f(t)$ có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 (*finite discontinuities*), ngoài các điểm đó ra hàm số $f(t)$ là liên tục và bị chặn.

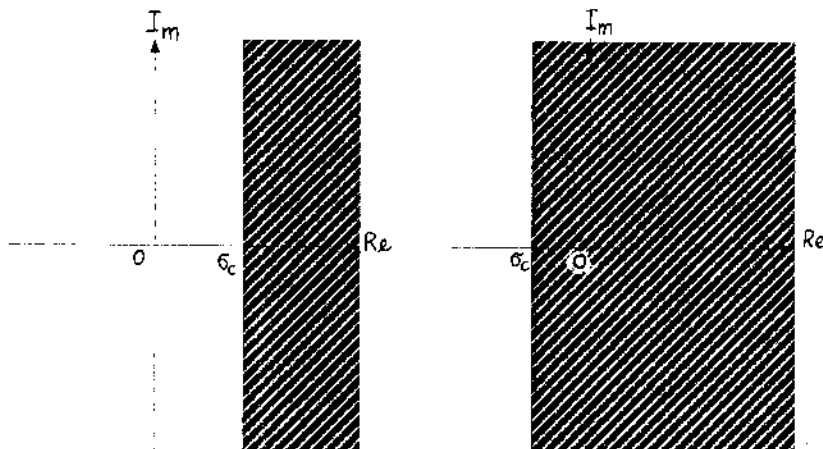
Ví dụ: Hàm $f(t) = \frac{1}{t-3}$ có điểm gián đoạn loại 2 tại $t = 3$, đây không phải là hàm số liên tục từng phần.

Ví dụ: Hàm có dạng như sau:



có vô số điểm gián đoạn loại 2 tại $0, 1, 3/2, 7/4, \dots$, đây không phải là hàm số liên tục từng phần.

- Miền hội tụ trên mặt phẳng phức là phần nửa mặt phẳng bên phải của đường thẳng đứng $s = \sigma_c$. Miền hội tụ được biểu thị bởi phần được gạch chéo trên hình vẽ sau trong 2 trường hợp $\sigma_c > 0$ và $\sigma_c < 0$.



2.1.3. Các tính chất của biến đổi Laplace

Ba tính chất sau được suy ra từ ngay biểu thức toán học của phép biến đổi Laplace:

1. *Tuyến tính*: Cho $f(t)$ và $g(t)$ là các hàm số có biến đổi Laplace, miền hội tụ lần lượt là $\text{Re}(s) > \sigma_1$ và $\text{Re}(s) > \sigma_2$, α và β là các hằng số, thì:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (2.1.8)$$

Miền hội tụ: $\text{Re}(s) > \sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-st} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} \end{aligned}$$

Miền hội tụ phải là giao của 2 miền để 2 công thức tích phân suy rộng hội tụ.

2. *Định lý dịch thứ nhất*: Giả sử $f(t)$ có ảnh qua phép biến đổi Laplace là $F(s)$, miền hội tụ $\text{Re}(s) > \sigma_c$, k là một hằng số, thì:

$$\mathcal{L}\{e^{kt} f(t)\} = F(s - k) \quad (2.1.9)$$

Miền hội tụ: $\text{Re}(s) > \sigma_c + \text{Re}(k)$

Chứng minh:

$$\mathcal{L}\{e^{kt} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{kt} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-k)t} dt = F(s - k)$$

Quá trình biến đổi trên không làm thay đổi miền hội tụ.

3. *Đạo hàm của phép biến đổi*: Giả sử $f(t)$ có ảnh qua phép biến đổi Laplace là $F(s)$, miền hội tụ $\text{Re}(s) > \sigma_c$, n là một số nguyên dương thì:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (2.1.10)$$

Miền hội tụ: $\text{Re}(s) > \sigma_c$

Chứng minh:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n} &= \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n} [f(t)e^{-st}] dt = \int_0^\infty f(t) \frac{\partial^n e^{-st}}{\partial s^n} dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-st} dt \\
&= (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\} \\
\text{Vậy } \mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}
\end{aligned}$$

Quá trình biến đổi trên không làm thay đổi miền hội tụ.

2.1.4. Bảng các biến đổi Laplace thông dụng

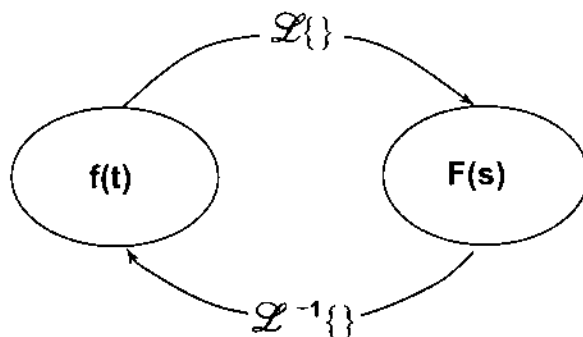
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Miền hội tụ RoC
c , c là hằng số	$\frac{c}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
t^n , n là số nguyên dương	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
e^{kt} , k là hằng số	$\frac{1}{s-k}$	$\text{Re}(s) > \text{Re}(k)$
$\sin at$, a là hằng số	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\cos at$, a là hằng số	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$e^{-kt} \sin at$, k & a là các hằng số	$\frac{a}{(s+k)^2 + a^2}$	$\text{Re}(s) > -k$
$e^{-kt} \cos at$, k & a là các hằng số	$\frac{s+k}{(s+k)^2 + a^2}$	$\text{Re}(s) > -k$

2.1.5. Biến đổi Laplace ngược

Ký hiệu $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ để biểu diễn một hàm nhân quả $f(t)$ sao cho biến đổi Laplace của $f(t)$ là $F(s)$, điều đó có nghĩa:

$$\text{nếu } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ thì } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (2.1.11a)$$

Phép biến đổi từ $F(s)$ sang $f(t)$ nói trên được gọi là **Biến đổi Laplace ngược (Inverse Laplace Transform)**. $f(t)$ là ảnh của $F(s)$ qua phép biến đổi Laplace ngược. $\mathcal{L}^{-1}$ là ký hiệu của **toán tử Laplace ngược (inverse Laplace Transform Operator)**. Hình vẽ sau thể hiện mối quan hệ đầy đủ giữa các miền xác định thông qua các phép biến đổi.



Ảnh của $f(t)$ qua phép biến đổi Laplace chỉ mang thông tin về $f(t)$ trên miền $t \geq 0$. Điều này dẫn tới $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ chỉ cho thông tin về $f(t)$ với $t \geq 0$. Khi viết $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ thì luôn phải hiểu rằng $f(t)$ là một hàm nhân quả. Một cách chặt chẽ, phép biến đổi này phải viết là:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)u(t) \quad (2.1.11b)$$

với $u(t)$ là hàm nhảy đơn vị đã được định nghĩa ở phần trước.

Một số ví dụ đối với biến đổi Laplace ngược:

Ví dụ 1: Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\}$ trên miền $\text{Re}(s) > 2$

$$\frac{1}{(s+3)(s-2)} = \frac{-\frac{1}{5}}{s+3} + \frac{\frac{1}{5}}{s-2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\} = -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$$

Ví dụ 2: Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s^2+9)}\right\}$ trên miền $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{s+1}{s^2(s^2+9)} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{9}s}{s^2+9} - \frac{\frac{1}{9}}{s^2+9} \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s^2+9)}\right\} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9}t - \frac{1}{9}\cos 3t - \frac{1}{27}\sin 3t\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+s+13}\right\}$ trên miền $\operatorname{Re}(s) > -3$

$$\begin{aligned}\frac{2}{s^2+6s+13} &= \frac{2}{(s+3)^2+4} \\ &= \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}\end{aligned}$$

Do $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$ với $\operatorname{Re}(s) > 0$

nên $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+4}\right\} = e^{-3t}\sin 2t$ với $\operatorname{Re}(s) > -3$

Ví dụ 4: Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s+5}\right\}$ trên miền $\operatorname{Re}(s) > -1$

$$\begin{aligned}\frac{s+7}{s^2+2s+5} &= \frac{s+7}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + 3\frac{2}{(s+1)^2+4} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s+5}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} \\ &= e^{-t}\cos 2t + 3e^{-t}\sin 2t\end{aligned}$$

với $\operatorname{Re}(s) > -1$

Phương pháp tổng quát tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm phân thức hữu tỷ

Cơ sở lý thuyết: Cho hàm phức $f(z)$ có điểm cực bậc n tại z_0 . Khai triển Laurent tại tâm z_0 của hàm $f(z)$ là:

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z - z_0)^l + \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{(z - z_0)^k}$$

Xét hàm số $\phi(z) = (z - z_0)^n f(z)$ dẫn đến

$$\phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z - z_0)^{l+n} + \sum_{k=1}^n b_k (z - z_0)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} (z - z_0)^k + \sum_{l=n}^{\infty} a_{l-n} (z - z_0)^l$$

Điểm z_0 trở thành điểm kỳ dị có thể bỏ qua của $\phi(z)$. Khai triển Taylor hàm số $\phi(z)$ tại tâm z_0 dẫn tới

$$b_{n-k} = \frac{\phi^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \text{với } 1 \leq k \leq n$$

Trường hợp z_0 là điểm cực đơn giản, hay còn gọi là điểm cực bậc một thì

$$b_1 = \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Xét bài toán tìm biến đổi Laplace ngược của một hàm phân thức hữu tỷ:

Cho hàm số $F(s)$ trên miền số phức có dạng phân thức hữu tỷ.

$$F(s) = \frac{H_1(s)}{H_2(s)}$$

Với $H_1(s)$, $H_2(s)$ là các đa thức bậc lần lượt là M và N , $M < N$, các hệ số của các đa thức này là thực. Dạng của $H_1(s)$ và $H_2(s)$ lần lượt là:

$$H_1(s) = a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \dots + a_0 = \sum_{l=0}^M a_l s^l$$

$$H_2(s) = b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_0 = \sum_{k=0}^N b_k s^k$$

$a_0, a_1, \dots, a_M; b_0, b_1, \dots, b_N$ là các hệ số thực

Trường hợp $H_2(s)$ chỉ có các nghiệm đơn hay $F(s)$ chỉ có các điểm cực bậc một $s_1, s_2, \dots, s_N$

$$H_2(s) = b_N (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N)$$

Khai triển của $F(s)$ lúc này trở thành

$$F(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_N}{s-s_N}$$

Để xác định hệ số A_k , $k=1\dots N$, xét điểm cực bậc một s_k của hàm số $F(s)$

$$F(s) = \frac{A_k}{s-s_k} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \frac{A_l}{s-s_l} = \frac{A_k}{s-s_k} + G(s)$$

Rõ ràng là hàm số $G(s)$ có tính giải tích (analytic) tại $s=s_k$ dẫn đến $G(s)$ có khai triển Taylor tại $s=s_k$

$$F(s) = \frac{A_k}{s-s_k} + \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s-s_k)^l \text{ suy ra } A_k = \text{Res } F(s) = \left[(s-s_k)F(s) \right]_{s=s_k}$$

Vậy ảnh Laplace ngược của hàm số $F(s)$ là

$$f(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \quad \text{với } A_k = \left[(s-s_k)F(s) \right]_{s=s_k}$$

Trường hợp mà $s_1, s_2, \dots, s_N$ đều là các nghiệm thực, các hệ số A_k đều là số thực, dẫn đến $f(t)$ chỉ chứa các thành phần là các hàm e mũ.

Trường hợp có một nghiệm phức $s_k = \sigma_k + j\omega_k$. Do $H_1(s), H_2(s)$ đều là các đa thức với hệ số thực nên $f(t)$ phải có thêm một điểm cực bậc một tại $\bar{s}_k = \bar{s}_k = \delta_k - j\omega_k$. Từ đó dẫn đến: $A_{\bar{k}} = \overline{A_k}$

Nếu A_k có dạng $A_k = \text{Re}(A_k) + j\text{Im}(A_k)$ thì $\overline{A_k} = \text{Re}(A_k) - j\text{Im}(A_k)$

Từ đây dẫn đến $f(t)$ có các thành phần

$$\begin{aligned} A_k e^{s_k t} + \overline{A_k} e^{\bar{s}_k t} &= [\text{Re}(A_k) + j\text{Im}(A_k)] e^{(\sigma_k + j\omega_k)t} + [\text{Re}(A_k) - j\text{Im}(A_k)] e^{(\sigma_k - j\omega_k)t} \\ &= \text{Re}(A_k) e^{\sigma_k t} (e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t}) + j\text{Im}(A_k) e^{\sigma_k t} (e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t}) \\ &= 2[\text{Re}(A_k) e^{\sigma_k t} \cos \omega_k t - \text{Im}(A_k) e^{\sigma_k t} \sin \omega_k t] \end{aligned}$$

Với $A_k = \left[(s-s_k)F(s) \right]_{s=s_k}$ và $\sigma_k = \text{Re}(s_k), \omega_k = \text{Im}(s_k)$

Tổng quát, $f(t)$ có dạng

$$f(t) = \sum_{l=1}^r 2[\text{Re}(A_l) e^{\sigma_l t} \cos \omega_l t - \text{Im}(A_l) e^{\sigma_l t} \sin \omega_l t] + \sum_{k=N-2r+1}^N A_k e^{s_k t}$$

Trong đó

- $l=1, r$, s_l là các nghiệm phức đơn, $\sigma_l = \text{Re}(s_l), \omega_l = \text{Im}(s_l)$,
 $A_l = \left[(s-s_l)F(s) \right]_{s=s_l}$
- $k=N-2r+1, N$, s_k là các nghiệm thực đơn, và $A_k = \left[(s-s_k)F(s) \right]_{s=s_k}$

Trường hợp hàm $H_2(s)$ có nghiệm bội bậc r tại $s = s_k$ (s_k là nghiệm thực)

Do s_k là điểm cực bậc r của $F(s)$

$$F(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_{n-r}}{s-s_{n-r}} + \sum_{l=1}^r B_l \frac{1}{(s-s_k)^l}$$

$$= G(s) + \sum_{l=1}^r B_l \frac{1}{(s-s_k)^l}$$

Rõ ràng $G(s)$ có tính giải tích tại $s = s_k$ nên khai triển chuỗi Laurent của $F(s)$

tại tâm $s = s_k$ có dạng: $F(s) = \sum_{l=1}^r B_l \frac{1}{(s-s_k)^l} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (s-s_k)^i$

Lúc này, xét $\phi(s) = (s-s_k)^r F(s)$

Do s_k trở thành điểm kỳ dị có thể bỏ qua của $\phi(s)$ nên $B_{r-l} = \frac{\phi^{(l)}(s_k)}{l!}$

Ảnh Laplace ngược của hàm $F(s)$ là:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m-r} A_i e^{s_i t} + \sum_{l=1}^r \frac{B_{r-l} t^{l-1}}{(r-l)!} e^{s_k t}$$

s_i , $i = 1, m-r$, là các điểm cực thực bậc một của $F(s)$

$$A_i = [(s-s_i)F(s)]_{s=s_i}$$

s_k là điểm cực thực bậc r của $F(s)$, $B_{r-l} = \frac{\phi^{(l)}(s_k)}{l!}$

với $\phi(s) = (s-s_k)^r F(s)$

2.1.6. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Tính chất biến đổi của đạo hàm

Giả sử hàm $f(t)$ có biến đổi Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ thì:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) \quad (2.1.12)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} df = e^{-st} f(t) \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Trường hợp gián đoạn tại $t = 0$, tích phân của phép biến đổi phải lấy cận dưới từ 0^- , do đó

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0-) \quad (2.1.12a)$$

Tương tự cho đạo hàm bậc hai:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (2.1.12b)$$

Tổng quát, biến đổi Laplace của đạo hàm bậc n:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i}f^{(i-1)}(0) \quad (2.1.12c)$$

Tính chất biến đổi của tích phân

Giả sử hàm $f(t)$ có biến đổi Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ thì:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (2.1.13)$$

Chứng minh: Xét hàm số $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$.

Nhận thấy $\frac{dg}{dt} = f(t)$, $g(0) = 0$

Đặt $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

$$\Rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = sG(s) - g(0) = sG(s)$$

$$\text{Vậy } \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\text{Hay } \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng là các phương trình có dạng sau

đây $a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t)$, với $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ là các hằng số.

Giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng nói trên là tìm ra hàm số $x(t)$ với hàm số $f(t)$ cho trước và các điều kiện đầu $x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ cho trước. $x^{(k)}(0)$ là ký hiệu của giá trị đạo hàm bậc k của $x(t)$ tại $t = 0$.

Dựa trên các tính chất biến đổi của đạo hàm và biến đổi của tích phân, các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng được đưa về phương trình đại số. Nghiệm của phương trình vi phân được suy ra từ nghiệm của phương trình đại số thông qua phép biến đổi Laplace ngược. Sau đây là một số ví dụ về các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng.

Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân: $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x(t) = 2e^{-t}, t \geq 0$

$$\text{với điều kiện đầu: } \begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Biến đổi Laplace cả 2 vế của phương trình vi phân:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 5sX(s) - 5x(0) + 6X(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$X(s)(s^2 + 5s + 6) - (s + 5) = \frac{2}{s+1}$$

$$X(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_1 = \left. \frac{s^2 + 6s + 7}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = 1$$

$$A_2 = \left. \frac{s^2 + 6s + 7}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2} = 1$$

$$A_3 = \left. \frac{s^2 + 6s + 7}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-3} = -1$$

$$\text{Vậy } X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$x(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t} \quad t \geq 0$$

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x(t) = \sin t, t \geq 0$

$$\text{với điều kiện đầu: } \begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Biến đổi Laplace cả 2 vế của phương trình vi phân:

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 6sX(s) - 6x(0) + 9X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$X(s)(s^2 + 6s + 9) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+3)^2(s^2+1)} = \frac{A_{11}}{s+3} + \frac{A_{12}}{(s+3)^2} + \frac{A_2}{s-j} + \frac{A_3}{s+j}$$

$$A_2 = \frac{1}{(s+j)(s+3)^2} \Big|_{s=-j} = \frac{-3-4j}{100}$$

$$A_3 = \frac{1}{(s-j)(s+3)^2} \Big|_{s=j} = \frac{-3+4j}{100}$$

$$\text{Xét } \phi(s) = (s+3)^2 X(s) = \frac{1}{s^2+1}, \Rightarrow \phi'(s) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$$

$$A_{12} = \frac{\phi(s)}{0!} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{s^2+1} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{10}$$

$$A_{11} = \frac{\phi'(s)}{1!} \Big|_{s=-3} = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \Big|_{s=-3} = \frac{3}{50}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } X(s) &= \frac{3}{50} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{10} \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{-3-4j}{100(s-j)} + \frac{-3+4j}{100(s+j)} \\ &= \frac{2}{50} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{10} \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{3}{50} \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{25} \frac{1}{s^2+1} \\ x(t) &= \frac{3}{50} e^{-3t} + \frac{1}{10} t e^{-3t} - \frac{3}{50} \cos t + \frac{2}{25} \sin t \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

2.1.7. Hàm nhảy đơn vị và hàm xung đơn vị

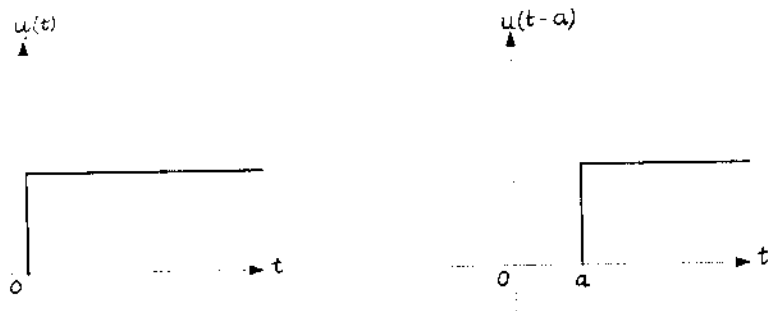
Hàm nhảy đơn vị

Hàm nhảy đơn vị được định nghĩa là

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (2.1.14a)$$

Hàm nhảy đơn vị được dùng để biểu diễn các hàm số không liên tục, tại các điểm không liên tục, hàm số gián đoạn loại 1. Ví dụ hàm không liên tục là

hàm xung vuông, kết quả từ việc đóng ngắt các công tắc trong một mạch điện.



Khi biểu diễn hàm nhảy đơn vị tại thời điểm a , hàm nhận được là kết quả tịnh tiến hàm $u(t)$ đi một khoảng a

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (t \geq a) \end{cases} \quad (2.1.14b)$$

Hàm số nhận giá trị bằng 1 trong khoảng từ a đến b được biểu diễn là

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 1 & (a \leq t < b) \\ 0 & t \geq b \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Ví dụ hàm nhân quả $f(t)$ có

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & (0 \leq t < t_1) \\ f_2(t) & (t_1 \leq t < t_2) \\ f_3(t) & (t_2 \leq t) \end{cases}$$

Ta có thể biểu diễn thành

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t)[u(t) - u(t-t_1)] + f_2(t)[u(t-t_1) - u(t-t_2)] + f_3(t)u(t-t_2) \\ &= f_1(t)u(t) + [f_2(t) - f_1(t)]u(t-t_1) + [f_3(t) - f_2(t)]u(t-t_2) \end{aligned}$$

Biến đổi Laplace của hàm nhảy đơn vị

Cho hàm nhảy đơn vị tại a : $u(t-a) \quad a \geq 0$

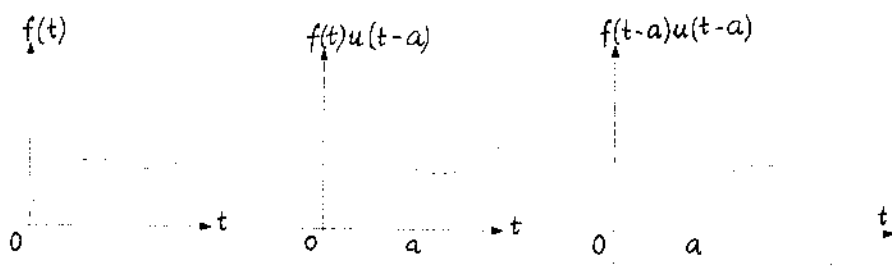
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u(t-a)\} &= \int_0^{+\infty} u(t-a)e^{-st} dt \\
&= \int_0^a 0 e^{-st} dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-sT}}{s} \Big|_a^{+\infty} \right) = \frac{e^{-as}}{s}
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

$$\text{Trường hợp } a = 0 \rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \tag{2.1.16a}$$

Định lý dịch thứ hai

Cho hàm số nhân quả $f(t)$, hàm số $f(t-a)u(t-a)$ là kết quả khi lấy tịnh tiến sang bên phải của hàm số $f(t)$ đi một khoảng a

$$f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ f(t-a) & (t \geq a) \end{cases} \tag{2.1.17}$$



Phát biểu: Nếu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, a là một hằng số dương

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{2.1.18a}$$

Chứng minh:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^{+\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dt$$

Đặt $\tau = t - a \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau$$

$$= e^{-sa} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sa} F(s)$$

Ngược lại, ta có công thức

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}^{-1} = f(t-a)u(t-a) \quad (2.1.18b)$$

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Laplace của hàm số

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ k & (a \leq t < b) \quad k = \text{const}, b > a > 0 \\ 0 & (t \geq b) \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} f(t) &= k[u(t-a) - u(t-b)] \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= k[\mathcal{L}\{u(t-a)\} - \mathcal{L}\{u(t-b)\}] \\ &= k\left[\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}\right] = \frac{k(e^{-as} - e^{-bs})}{s} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi Laplace của hàm số

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & (0 \leq t < 3) \\ t+3 & (3 \leq t < 5) \\ 4 & (t \geq 5) \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2 u(t) - (2t^2 - t - 3)u(t-3) - (t+3-4)u(t-5) \\ &= 2t^2 u(t) - [2(t-3)^2 + 11(t-3) + 12]u(t-3) - [(t-5) + 4]u(t-5) \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{2t^2 u(t)\} - \mathcal{L}\{[2(t-3)^2 + 11(t-3) + 12]u(t-3)\} \\ &\quad - \mathcal{L}\{[(t-5) + 4]u(t-5)\} - \mathcal{L}\{4u(t-5)\} \\ &= \frac{4}{s^3} - e^{-3s}\left(\frac{4}{s^3} + \frac{11}{s^2} + \frac{4}{s}\right) - e^{-5s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s}\right) \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số

$$F(s) = \frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}$$

Giải:

$$\frac{4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s(s+2)}\right\} = (2 - 2e^{-2t})u(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}\right\} = (2 - 2^{-2(t-4)})u(t-4)$$

Ví dụ 4: Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số

$$F(s) = \frac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+1)}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \frac{(s+3)}{s(s^2+1)} &= \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{(s+3)}{s(s^2+1)}\right\} = (3 - 3\cos t + \sin t)u(t) \\ \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+1)}\right\} &= [3 - 3\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)]u(t-\pi) \\ &= [3 + 3\cos t - \sin t]u(t-\pi) \\ &= \begin{cases} 0 & t < \pi \\ [3 + 3\cos t - \sin t]u(t-\pi) & t \geq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

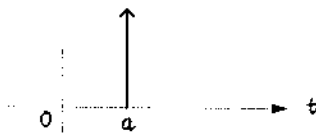
Hàm xung đơn vị

Hàm xung đơn vị là một hàm toán học được lý tưởng hoá có dạng:

$$\delta(t-a) = 0 \quad (t \neq a) \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1 \quad (2.1.19)$$

Hàm số này còn được gọi là xung Dirac, hay xung delta. Đồ thị của hàm xung đơn vị được cho như ở hình vẽ dưới đây:

$$\delta(t-a)$$



Hàm xung đơn vị tại vị trí 0 là $\delta(t)$

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.1.19a)$$

Chúng ta thừa nhận tính chất dịch sau đây:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(t) \Big|_{t=a} = f(a) \quad (2.1.20)$$

Nếu chọn cận của phép lấy tích phân từ α đến β :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \delta(t-a) dt = \begin{cases} f(a) & \alpha < a < \beta \\ 0 & \begin{cases} a \leq \alpha \\ a \geq \beta \end{cases} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Biến đổi Laplace của hàm xung đơn vị

Với $a > 0$, theo định nghĩa $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt = e^{-as}$ theo đúng công thức của tính chất dịch thứ hai. Từ đó ta có cặp biến đổi Laplace

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \\ \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t-a) \end{cases} \quad a > 0 \quad (2.1.22)$$

Trong trường hợp $a = 0$, cận dưới của tích phân lấy từ 0-.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

Cặp biến đổi Laplace là:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \\ \mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t) \end{cases} \quad (2.1.22a)$$

Mối quan hệ giữa hàm nhảy đơn vị và hàm xung đơn vị

Nhận xét rằng: $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(theo công thức của tính chất dịch)

Biểu thức này lại thể hiện đúng giá trị của hàm $u(t)$. Từ đây suy ra:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (2.1.23a)$$

$$\text{hay} \quad \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \quad (2.1.23b)$$

Tương tự ta cũng có kết luận

$$\frac{d}{dt} u(t - a) = \delta(t - a) \quad (2.1.24)$$

Đạo hàm tổng quát

Từ kết luận đạo hàm của hàm nhảy đơn vị là hàm xung đơn vị, người ta đưa ra khái niệm đạo hàm tổng quát của một hàm số liên tục từng phần (có hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1).

Giả sử $f(t)$ là một hàm số liên tục từng phần, có các điểm gián đoạn loại 1 tại các vị trí $t_1, t_2, \dots, t_n$, bước nhảy tại các vị trí đó lần lượt là $d_1, d_2, \dots, d_n$. Sau khi biểu diễn $f(t)$ theo tổng của các thành phần mà mỗi thành phần là tích của một hàm liên tục với một hàm nhảy đơn vị rồi lấy đạo hàm được:

$$f'(t) = g'(t) + \sum_{i=1}^n d_i \delta(t - t_i) \quad (2.1.25)$$

$g'(t)$ là đạo hàm bậc nhất của $f(t)$ tại những vị trí hàm $f(t)$ tồn tại đạo hàm.

Vậy đạo hàm tổng quát của một hàm số liên tục từng phần bằng đạo hàm bậc nhất của hàm số đó tại những vị trí có đạo hàm cộng với tổng của các hàm xung đơn vị tại các vị trí gián đoạn nhân với độ lớn bước nhảy.

Tại các điểm gián đoạn, bước nhảy có độ lớn bằng chênh lệch giữa giới hạn trái và giới hạn phải của hàm số tại điểm gián đoạn này:

$$d_i = f(t_i + 0) - f(t_i - 0)$$

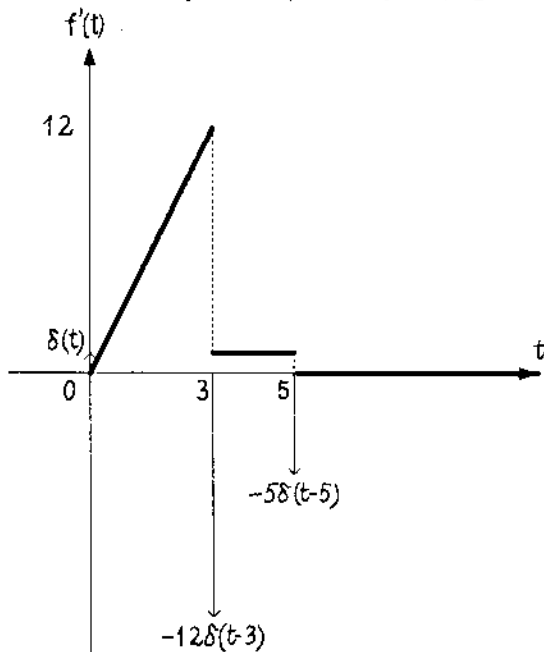
Đặc biệt, nếu hàm gián đoạn tại 0, đạo hàm tổng quát của nó sẽ có thành phần:

$$[f(0+) - f(0-)]\delta(t)$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm tổng quát của hàm số

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 + 1 & 0 \leq t < 3 \\ t + 4 & 3 \leq t < 5 \\ 4 & t \geq 5 \end{cases}$$

Giải: Hàm số có 3 điểm gián đoạn tại $t_1 = 0$, $t_2 = 3$, và $t_3 = 5$
 Chúng có các bước nhảy lần lượt là $d_1 = 1$, $d_2 = -12$, và $d_3 = -5$



$$\Rightarrow f'(t) = g'(t) + \delta(t) - 12\delta(t-3) - 5\delta(t-5)$$

$$\text{với } g'(t) = \begin{cases} 4t & 0 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t < 5 \\ 0 & t \geq 5 \end{cases}$$

2.1.8. Xem xét thêm về phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Phần này sẽ xem xét thêm đến các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng có vẻ phải là các hàm số có các điểm gián đoạn.

Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x(t) = f(t) \quad , t \geq 0$$

$$\text{với} \quad f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2$$

Giải: $f(t) = 3[u(t) - u(t-6)] \Rightarrow$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3}{s} - \frac{3e^{-6s}}{s}$$

Lấy biến đổi Laplace cả hai vế của phương trình:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 5sX(s) - 5x(0) + 6X(s) = \frac{3}{s} - \frac{e^{-6s}}{s}$$

$$X(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{3}{s} + 2\frac{3e^{-6s}}{s}$$

$$X(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} - \frac{3e^{-6s}}{s(s+2)(s+3)}$$

$$X(s) = X_1(s) - e^{-6s}X_2(s)$$

▪ Xét $X_1(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3}$

$$A_1 = \left. \frac{2s+3}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left. \frac{2s+3}{s(s+3)} \right|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \left. \frac{2s+3}{s(s+2)} \right|_{s=-3} = -1$$

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

▪ Xét $X_2(s) = \frac{3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s+2} + \frac{B_3}{s+3}$

$$B_1 = \left. \frac{3}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{3}{s(s+3)} \Big|_{s=-2} = -\frac{3}{2}$$

$$B_3 = \frac{3}{s(s+2)} \Big|_{s=-3} = 1$$

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$\text{Vậy } X(s) = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right] - e^{-6s} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - e^{-3t} \right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2(t-6)} + e^{-3(t-6)} \right] u(t-6) \quad t \geq 0$$

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x(t) = f(t) + 3\frac{df}{dt}$$

với $f(t) = e^{-t}u(t)$,

các điều kiện ban đầu đều bằng 0.

$$\text{Giải:} \quad f(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s+1}$$

$$f(0-) = 0$$

Lấy biến đổi Laplace cả hai vế của phương trình:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 5sX(s) - 5x(0) + 6X(s) = F(s) + 3sF(s) - 3f(0-)$$

$$X(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{1}{s+1} + \frac{3s}{s+1}$$

$$X(s) = \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_1 = \frac{3s+1}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$A_2 = \frac{3s+1}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-2} = 5$$

$$A_3 = \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-3} = 4$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } X(s) &= -\frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+2} + \frac{5}{s+3} \\ \Rightarrow x(t) &= -e^{-t} + 4e^{-2t} - 5e^{-3t} \quad t \geq 0\end{aligned}$$

2.1.9. Tích chập

Cho 2 hàm số $f(t)$ và $g(t)$ liên tục từng phần. Tích chập của $f(t)$ và $g(t)$, ký hiệu là $f * g(t)$, được định nghĩa:

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.1.26)$$

Trường hợp đặc biệt khi $f(t)$ và $g(t)$ đều là các hàm nhân quả thì:

$$\begin{cases} f(\tau) = 0 & \tau < 0 \\ g(t-\tau) = 0 & \tau > t \end{cases}$$

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.1.26a)$$

Các tính chất:

$$\blacksquare \text{ Giao hoán: } f * g(t) = g * f(t) \quad (2.1.27)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned}f * g(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_t^0 f(t-\tau_1)f(\tau_1)d(t-\tau_1) \\ &= \int_0^t f(t-\tau_1)g(\tau_1)d\tau_1 = g * f(t)\end{aligned}$$

Tính chất này cũng đúng trong cả trường hợp $f(t)$ và $g(t)$ không nhân quả

- $\blacksquare$ *Biến đổi Laplace của tích chập:* Nếu $f(t)$, $g(t)$ là các hàm nhân quả, bậc mũ, liên tục từng phần khi $t \geq 0$, có ảnh Laplace lần lượt là $F(s)$ và $G(s)$ thì:

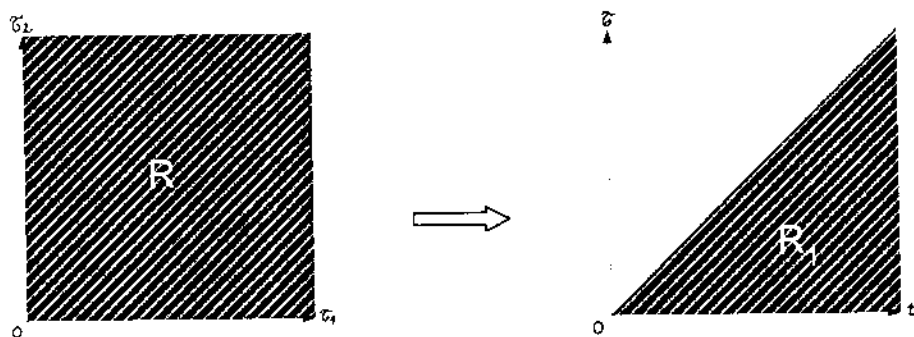
$$\mathcal{L}\{f * g(t)\} = F(s)G(s) \quad (2.1.28)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned}
 F(s)G(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \left[\int_0^{\infty} f(\tau_1) e^{-s\tau_1} d\tau_1 \right] \left[\int_0^{\infty} g(\tau_2) e^{-s\tau_2} d\tau_2 \right] \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(\tau_1+\tau_2)} f(\tau_1) g(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \iint_R e^{-s(\tau_1+\tau_2)} f(\tau_1) g(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned}$$

Với R là góc phần tư thứ nhất trên mặt phẳng Đề các (Cartesian coordinate system)

Đổi biến $t = \tau_1 + \tau_2$ và $\tau = \tau_2$, miền R đổi thành miền R_1 bao bởi trục thực dương và đường phân giác góc phần tư thứ nhất.



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F(s)G(s) &= \iint_{R_1} e^{-st} f(t-\tau) g(\tau) dt d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right] dt \\
 &= \mathcal{L}\{g * f(t)\} = \mathcal{L}\{f * g(t)\}
 \end{aligned}$$

Ví dụ: Tìm $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)^2}\right\}$

Giải: Xét $F(s) = \frac{1}{s^2}$ và $G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$
 $\Rightarrow f(t) = t$ và $g(t) = te^{-2t}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = g * f(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \tau e^{-2\tau}(t-\tau)d\tau = t \int_0^t \tau e^{-2\tau}d\tau - \int_0^t \tau^2 e^{-2\tau}d\tau$$

$$\bullet \int_0^t \tau e^{-2\tau}d\tau = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{te^{-2t}}{2}$$

$$\bullet \int_0^t \tau^2 e^{-2\tau}d\tau = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{t^2 e^{-2t}}{2}$$

Vậy

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)^2}\right\} = t\left[\frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{te^{-2t}}{2}\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{t^2 e^{-2t}}{2}\right]$$

$$= \frac{te^{-2t}}{4} + \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{t}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}[(t+1)e^{-2t} + (t-1)]$$

2.2. BIẾN ĐỔI Z

2.2.1. Dãy số

Dãy số về bản chất là ánh xạ từ tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ vào tập các số thực $\mathbb{R}$ hoặc tập các số phức $\mathbb{C}$. Nếu tập đích là tập các số thực $\mathbb{R}$, ta có dãy số thực. Nếu tập đích là tập các số phức $\mathbb{C}$, ta có dãy số phức.

Một dãy số có hữu hạn các phần tử được ký hiệu như sau:

$$\{x_n\}_0^{N-1} = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$$

n được gọi là chỉ số của mỗi phần tử x_n trong dãy số. Mở rộng ra cho dãy số có vô hạn các phần tử:

$$\{x_n\}_0^\infty = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

$$\{x_n\}_{-\infty}^\infty = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

Trong tài liệu này nếu chỉ ghi $\{x_n\}$ mà không có chú thích gì thêm có nghĩa là chỉ số của dãy chạy từ $-\infty$ đến ∞ .

2.2.2. Biến đổi $\mathcal{Z}$

Định nghĩa

Cho dãy số $\{x_n\}$, biến đổi $\mathcal{Z}$ của dãy $\{x_n\}$ được định nghĩa là:

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (2.2.1)$$

Tương tự như phép biến đổi Laplace tác động lên một hàm số, biến đổi $\mathcal{Z}$ tác động lên một dãy số thu được ảnh là một hàm biến phức. $\mathcal{Z}$ là toán tử của phép biến đổi và z^n là nhân của phép biến đổi.

Công thức trên được gọi là công thức của biến đổi $\mathcal{Z}$ hai phía. Bên cạnh đó còn có biến đổi $\mathcal{Z}$ một phía được định nghĩa bởi công thức sau:

$$\mathcal{Z}^1\{x_n\} = X^1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (2.2.2)$$

Và cũng tương tự như khái niệm hàm nhân quả trong không gian các hàm số liên tục ta có khái niệm dãy nhân quả. Dãy nhân quả có thể được hiểu là dãy bắt đầu từ chỉ số 0 hoặc cũng có thể được hiểu là dãy có các phần tử bằng 0 ứng với các chỉ số nhỏ hơn 0.

Nhận xét rằng biến đổi $\mathcal{Z}$ một phía và biến đổi $\mathcal{Z}$ hai phía của một dãy nhân quả là như nhau. Nếu như trong các bài toán cũng như công thức biến đổi mà không có sự đề cập cụ thể là biến đổi $\mathcal{Z}$ một phía hay hai phía thì luôn quy ước rằng biến đổi $\mathcal{Z}$ hai phía đang được sử dụng.

Ví dụ 1: Tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ của dãy số sau:

$$x_n = \begin{cases} 2^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{z}\right)^n}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

$$\text{với } \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

$$\text{Hay } X(z) = \frac{z}{z-2} \quad \text{với } |z| > 2$$

Từ ví dụ trên, ta có một số nhận xét sau đây:

- Ảnh của dãy $\{x_n\} = \{2^n\}_0^\infty$ qua phép biến đổi $\mathcal{Z}$ là hàm số $X(z) = \frac{z}{z-2}$ nhưng chuỗi hàm $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$ chỉ hội tụ đến $X(z)$ với phạm vi z nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính 2 trên mặt phẳng biến số z .
- Dãy số $\{x_n\}$ chính là các hệ số trong khai triển hàm số $X(z) = \frac{z}{z-2}$ theo chuỗi lũy thừa của z . Thực vậy:

$$\frac{z}{z-2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{z}\right)^n + \dots$$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ của dãy số $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_0^\infty$

Giải:

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2z}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2z}\right)^n}{1 + \frac{1}{2z}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z+1} \quad \text{với } |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Miền hội tụ của biến đổi Z

Tập hợp tất cả các giá trị z mà tại đó chuỗi hàm $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z. Miền hội tụ được ký hiệu là $\text{RoC}\{X(z)\}$.

Phần tiếp theo sẽ dựa trên quy tắc hội tụ Cauchy để chỉ ra miền hội tụ của biến đổi Z trong các trường hợp dãy $\{x_n\}$ bị chặn cả hai phía, bị chặn một phía, và không bị chặn ở phía nào (có chỉ số chạy từ $-\infty$ đến ∞).

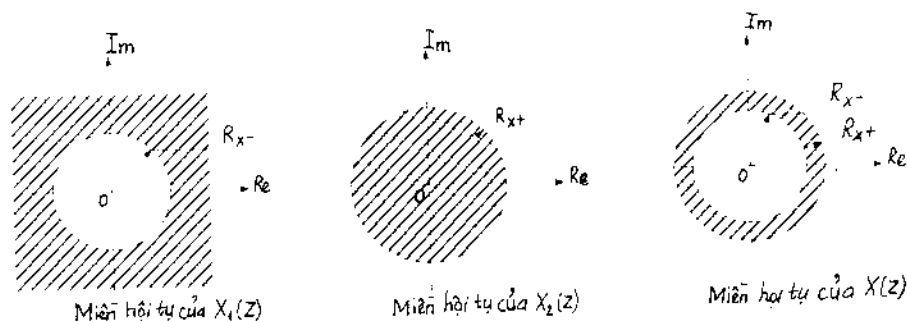
- Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} < 1$ thì chuỗi số trên hội tụ, ngược lại chuỗi số trên là phân kỳ (tham khảo [3] trang 345).
- Áp dụng quy tắc hội tụ Cauchy vào công thức biến đổi Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n}}_{X_1(z)} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x_n z^{-n}}_{X_2(z)} \quad (2.2.3)$$

Để $X(z)$ hội tụ thì đồng thời cả hai chuỗi thành phần đều phải hội tụ

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n}$, theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy chuỗi này hội tụ nếu và chỉ nếu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n z^{-n}|^{1/n} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n} |z|^{-1} < 1 \Leftrightarrow |z| > R_{x-} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n}$$



Xét $\sum_{n=-\infty}^{-1} x_n z^{-n} = \sum_{l=1}^{\infty} x_{-l} z^l$, theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy chuỗi này hội tụ nếu và chỉ nếu:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |x_{-l} z^l|^{\frac{1}{l}} < 1 \Leftrightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} |x_{-l}|^{\frac{1}{l}} |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < R_{x+} = \left[\lim_{l \rightarrow \infty} |x_{-l}|^{\frac{1}{l}} \right]^{-1}$$

- Qua đó có kết luận như sau:
 - Miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n}$ phải nằm bên ngoài một đường tròn trên mặt phẳng Z .
 - Miền hội tụ của $\sum_{n=-\infty}^{-1} x_n z^{-n}$ phải nằm bên trong một đường tròn trên mặt phẳng Z .
 - Miền hội tụ của $X(z)$ nói chung là nằm trong một hình vành khăn bao bởi hai đường tròn.
 - Trường hợp $R_{x-} \geq R_{x+}$ hay $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} \geq \left[\lim_{l \rightarrow \infty} |x_{-l}|^{\frac{1}{l}} \right]^{-1}$ thì $X(z)$ không có miền hội tụ, có nghĩa là trong trường hợp này $\{x_n\}$ không có biến đổi $\mathcal{Z}$.

Tổng kết các trường hợp hội tụ của biến đổi $\mathcal{Z}$ như sau:

- Nếu $\{x_n\}$ bị chặn ở cả hai đầu, miền hội tụ là toàn bộ mặt phẳng Z .
- Nếu $\{x_n\}$ bị chặn ở đầu dưới (dãy nhân quả là trường hợp riêng), miền hội tụ là bên ngoài một đường tròn.
- Nếu $\{x_n\}$ bị chặn ở đầu trên (dãy phản nhân quả là trường hợp riêng), miền hội tụ là bên trong một đường tròn.
- Nếu $\{x_n\}$ bị không bị chặn ở cả hai đầu, miền hội tụ là hình vành khăn trong trường hợp $R_{x-} < R_{x+}$ với $R_{x-} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}}$ và $R_{x+} = \left[\lim_{l \rightarrow \infty} |x_{-l}|^{\frac{1}{l}} \right]^{-1}$

Ngoài ra đối với các điểm $z = 0$ và $z = \infty$ ta phải xét như sau:

- Nếu $\{x_n\}$ xác định trên các phần tử có chỉ số dương, ta phải loại điểm $z = 0$ ra khỏi miền hội tụ.
- Nếu $\{x_n\}$ xác định trên các phần tử có chỉ số âm, ta phải loại điểm $z = \infty$ ra khỏi miền hội tụ.

Vậy trường hợp duy nhất mà biến đổi $\mathcal{Z}$ của $\{x_n\}$ hội tụ trên toàn bộ mặt phẳng Z kể cả các điểm $z = 0$ và $z = \infty$ là:

$$x_n = \begin{cases} a & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \text{ với } a \text{ là hằng số}$$

khí đó người ta ký hiệu dãy là $a\delta_n$ với

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

dãy này còn được gọi là dãy Delta – Kronecker.

2.2.3. Các tính chất của biến đổi $\mathcal{Z}$

a. Tuyến tính

Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ có biến đổi $\mathcal{Z}$ lần lượt là $X(z)$ và $Y(z)$, α và β là các hằng số (thực hoặc phức thì:

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \alpha \mathcal{Z}\{x_n\} + \beta \mathcal{Z}\{y_n\} = \alpha X(z) + \beta Y(z) \quad (2.2.4)$$

Chúng minh:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\alpha x_n + \beta y_n\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) z^{-n} = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} \\ &= \alpha X(z) + \beta Y(z) \end{aligned}$$

b. Trễ (dịch thời gian)

Cho $\{x_n\}$ có biến đổi $\mathcal{Z}$ là $X(z)$, $\{y_n\}$ là trễ của $\{x_n\}$ đi một đoạn n_0 ,
 $y_n = x_{n - n_0}$, thì:

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = z^{-n_0} X(z) \quad (2.2.5)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-n_0} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-(n+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-n_0} X(z)$$

c. Nhân với a^n

Cho $\{x_n\}$ có biến đổi $\mathcal{Z}$ là $X(z)$ thì:

$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\} = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (2.2.6)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

d. Nhân với n

Cho $\{x_n\}$ có biến đổi $\mathcal{Z}$ là $X(z)$ thì:

$$\mathcal{Z}\{nx_n\} = -z \frac{d}{dz} X(z) \quad (2.2.7)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} X(z) &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{d}{dz} (z^{-n}) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (-n) z^{-(n+1)} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nx_n) z^{-n} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } -z \frac{d}{dz} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nx_n) z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx_n\}$$

2.2.4. Bảng các biến đổi $\mathcal{Z}$ thông dụng

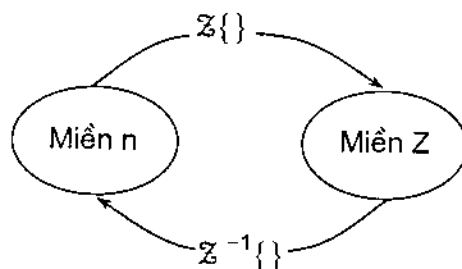
Từ bản thân định nghĩa của biến đổi $\mathcal{Z}$ và các tính chất của nó, ta có bản biến đổi $\mathcal{Z}$ của một số hàm số sau đây:

$\{x_n\}$	$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(s)$	Miền hội tụ RoC
$x_n = \delta_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$	1	mọi z
$x_n = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$x_n = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, a: hằng số	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$x_n = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$x_n = \begin{cases} na^{n-1} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, a: hằng số	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$x_n = \begin{cases} \cos \omega_0 n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$x_n = \begin{cases} \cos \omega_0 n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$

2.2.5. Biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược

Trong các phần trước, chúng ta đã xem xét các dãy $\{x_n\}$, mà phần lớn trong chúng là các dãy nhân quả, khi tác động lên $\{x_n\}$ một toán tử $\mathcal{Z}$, là toán tử của phép biến đổi $\mathcal{Z}$, ta thu được một hàm số, ký hiệu là $X(z)$. Nhìn nhận theo hướng ngược lại, $\{x_n\}$ là ảnh của $X(z)$ qua một phép biến đổi gọi là biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược, ký hiệu là $\mathcal{Z}^{-1}$.

$$\text{Nếu } \mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) \text{ thì } \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \{x_n\} \quad (2.2.8)$$



Nhận xét rằng x_n chính là các hệ số trong khai triển $X(z)$ theo chuỗi lũy thừa, còn được gọi là khai triển Laurent có tâm tại $z = 0$. Vậy từng giá trị của $\{x_n\}$ được tính theo công thức sau:

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (2.2.9)$$

với C là một đường cong kín, bao quanh gốc tọa độ, chiều ngược chiều kim đồng hồ và nằm trong miền hội tụ của $X(z)$ (tham khảo thêm về tích phân Cauchy và khai triển chuỗi Laurent của hàm biến phức).

Trên lý thuyết có ba phương pháp tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược của một hàm số:

- Phương pháp thặng dư
- Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa
- Phương pháp khai triển thành tổng của các phân thức đơn giản.

Phương pháp thặng dư dựa trên định lý thặng dư khi tính tích phân của một hàm số theo một đường cong kín. Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa thực chất là xem xét quy luật thương số của phép chia 2 đa thức. Hai phương pháp này ít được sử dụng do cách thức tính phức tạp.

Phương pháp thông dụng nhất là phương pháp khai triển thành tổng của các phân thức đơn giản. Các phân thức đơn giản có biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược được cho như sau:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-a} \right] = a^n \quad \text{với } n \geq 0 \quad (2.2.10a)$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{z-a} \right] = a^{n-1} \quad \text{với } n \geq 1 \quad (2.2.10b)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^{m+1}}\right] = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} a^{n-m} \quad \text{với } n \geq 0 \quad (2.2.10c)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^{m+1}}\right] = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{m!} a^{n-m-1} \quad \text{với } n \geq m+1 \quad (2.2.10d)$$

Để thuận tiện trong việc biểu diễn các kết quả là tổng của các dãy xuất phát từ chỉ số 0, người ta hay sử dụng công thức (2.2.10a) và (2.2.10c). Do vậy, chiến thuật để tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược trước tiên là nên chia hàm số $X(z)$ cho z , sau đó khai triển $\frac{X(z)}{z}$ thành tổng của các phân thức tối giản có dạng như vế phải của (2.2.10b) và (2.2.10d), tiếp theo nhân cả hai vế với z ta có $X(z)$ được biểu diễn bằng tổng các thành phần có dạng như vế phải của (2.2.10a) và (2.2.10c).

Ví dụ 1: Tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược của hàm số sau:

$$X(z) = \frac{z}{z-2}$$

Giải: Theo công thức (2.2.10a)

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^n \quad \text{với } n \geq 0, \quad x_n = 0 \quad \text{với các giá trị } n \text{ khác.}$$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược của hàm số sau:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-2} \\ A_1 &= \frac{1}{z-2} \Big|_{z=1} = -1 \\ A_2 &= \frac{1}{z-1} \Big|_{z=2} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \Rightarrow X(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = -\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^n - 1$$

với $n \geq 0$, và $x_n = 0$ với các giá trị n khác.

Ví dụ 3: Tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược của hàm số sau:

$$X(z) = \frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}$$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z+1}{z(z+1)(z-3)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z+1} + \frac{A_3}{z-3}$$

$$A_1 = \left. \frac{2z+1}{(z+1)(z-3)} \right|_{z=0} = -\frac{1}{3}$$

$$A_2 = \left. \frac{2z+1}{z(z-3)} \right|_{z=-1} = -\frac{1}{4}$$

$$A_3 = \left. \frac{2z+1}{z(z+1)} \right|_{z=3} = \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{3} \frac{1}{z} - \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{12} \frac{1}{z-3}$$

$$\Rightarrow X(z) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \frac{z}{z+1} + \frac{1}{12} \frac{z}{z-3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = -\frac{1}{3} \mathcal{Z}^{-1}[1] - \frac{1}{4} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] + \frac{1}{12} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-3}\right]$$

$$= -\frac{1}{3} \delta_n - \frac{1}{4} (-1)^n + \frac{1}{12} 3^n$$

với $n \geq 0$, và $x_n = 0$ với các giá trị n khác.

2.3. CHUỖI FOURIER

2.3.1. Khai triển chuỗi Fourier

Phép khai triển chuỗi Fourier được áp dụng đối với các hàm tuần hoàn. Hàm số $f(t)$ được gọi là hàm tuần hoàn với chu kỳ T nếu:

$$f(t) = f(t + mT) \quad \text{với } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.3.1)$$

trong đó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ được gọi là tần số góc của hàm tuần hoàn.

Khai triển chuỗi Fourier của hàm $f(t)$ được đưa ra theo các dạng sau:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (2.3.2)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.3.3)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad (2.3.4)$$

Các hệ số ở dạng thứ nhất và dạng thứ hai liên hệ với nhau theo công thức:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{và} \quad \varphi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (2.3.5)$$

Trên quan điểm các hàm tuần hoàn chu kỳ T đều nằm trong một không gian Euclidean với định nghĩa tích vô hướng của hai vector là:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g^*(t) dt \quad (2.3.6)$$

Việc khai triển chuỗi Fourier chẳng qua là tìm vector tọa độ của từng vector theo cơ sở là một tập các vector trực chuẩn bao gồm 1, $\cos n\omega t$ và $\sin n\omega t$ (ở dạng 2) hoặc bao gồm $e^{jn\omega t}$ (ở dạng 3). Nhắc lại rằng nếu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ một cơ sở trực chuẩn của không gian vector V và $\vec{v}$ là một vector bất kỳ thuộc V thì:

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{a}_1 \rangle \vec{a}_1 + \langle \vec{v}, \vec{a}_2 \rangle \vec{a}_2 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{a}_n \rangle \vec{a}_n \quad (2.3.7)$$

hay các tọa độ được tính bằng tích vô hướng của vector $\vec{v}$ với từng phần tử trong cơ sở.

Trên cơ sở lý luận như vậy, các hệ số a_n và b_n được tính theo công thức:

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_0^{d+T} f(t) dt \quad (2.3.8a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T^{d+T} f(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{với } n = \overline{1.. \infty} \quad (2.3.8b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T^{d+T} f(t) \sin(\omega t) dt \quad \text{với } n = \overline{1.. \infty} \quad (2.3.8c)$$

Dạng thứ 3 còn được gọi là dạng phức của khai triển chuỗi Fourier. Các hệ số trong dạng này có mối quan hệ với các hệ số ở dạng thứ 2 theo công thức:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \quad \text{với } n > 0, \quad \text{và } c_n = \frac{a_{-n} + j b_{-n}}{2} \quad \text{với } n < 0 \quad (2.3.9)$$

Các hệ số c_n của dạng phức được tính trực tiếp theo công thức

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-j n \omega t} dt \quad \forall n \in Z \quad (2.3.10)$$

Điều kiện hội tụ của chuỗi Fourier:

Các công thức khai triển chuỗi Fourier của một hàm số tuần hoàn theo (2.4.2), (2.4.3), và (2.4.4) nảy sinh một vấn đề: với điều kiện nào của $f(t)$ thì biểu thức ở vế bên phải hội tụ về hàm $f(t)$. Nếu nhìn nhận trên quan điểm phân tích các hàm tuần hoàn theo tọa độ của nó dựa trên một cơ sở trực chuẩn thì vấn đề đó chính là hàm $f(t)$ thể nào thì nó thuộc span của cơ sở đang được xét đến. Chúng ta thừa nhận định lý sau đây.

Định lý Dirichlet: Nếu $f(t)$ là một hàm tuần hoàn và bị chặn, trong mỗi chu kỳ:

- có một số hữu hạn các điểm cực đại và cực tiểu
- hoặc có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1

thì khai triển Fourier của $f(t)$ sẽ hội tụ về $f(t)$ tại các điểm mà tại đó $f(t)$ liên tục, và hội tụ về trung bình cộng của giới hạn trái và giới hạn phải của $f(t)$ mà tại đó $f(t)$ gián đoạn.

2.3.2. Định lý nhân và định lý Parseval

Định lý nhân (Multiplicity theorem):

Cho $f(t)$ và $g(t)$ là 2 hàm thực tuần hoàn cùng chu kỳ T , c_n và d_n lần lượt là các hệ số trong khai triển chuỗi Fourier dạng phức của $f(t)$ và $g(t)$ thì:

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t)g(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n^* \quad (2.3.11)$$

Chứng minh:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{với} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega t} \quad \text{với} \quad d_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} g(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Có

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t)g(t)dt = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \right] g(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{T} \int_d^{d+T} g(t) e^{jn\omega t} dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_{-n}$$

Mà do $g(t)$ là hàm thực nên: $d_{-n} = d_n^*$. Vậy:

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t)g(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n^*$$

Ở dạng lượng giác, công thức của định lý được viết là:

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t)g(t)dt = \frac{1}{4} a_0 \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$$

Định lý Parseval:

Trong trường hợp đặc biệt hàm thực $g(t)$ trùng với $f(t)$, ta có định lý Parseval theo công thức sau:

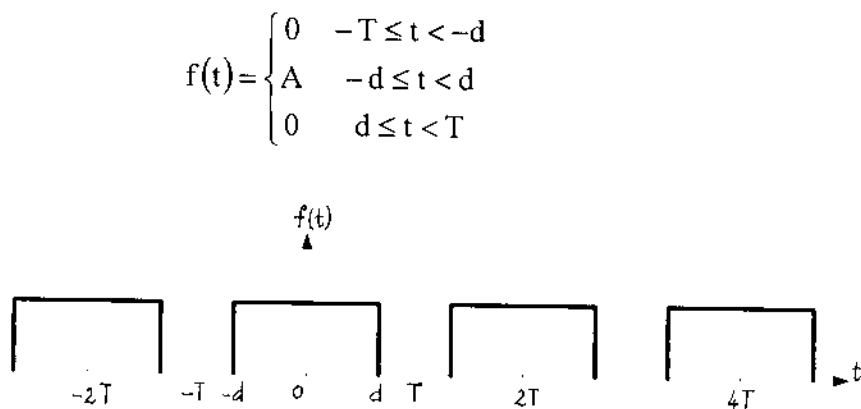
$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.3.12a)$$

Dạng lượng giác công thức của định lý được viết là:

$$\frac{1}{T} \int_d^{d+T} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.3.12b)$$

Ví dụ

Tìm khai triển chuỗi Fourier của dãy xung chữ nhật có giá trị trong một chu kỳ tuần hoàn $[-T, T]$ như sau:



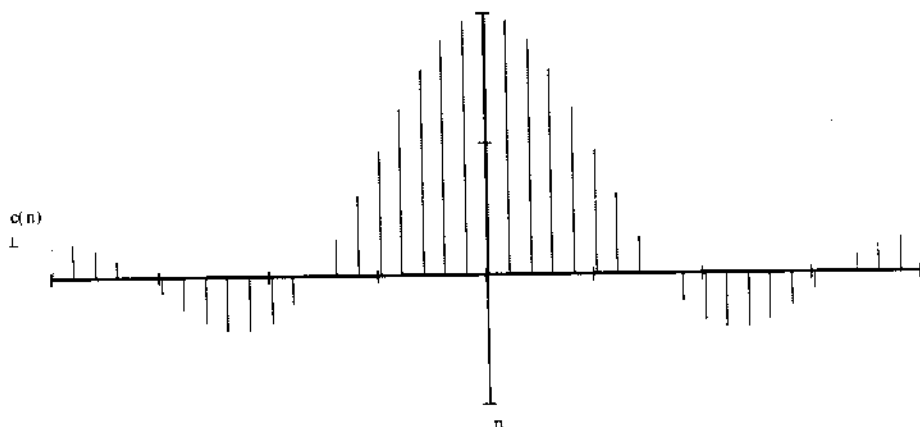
Giải:

$$\blacksquare \quad n = 0 \Rightarrow c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-d}^d A dt = \frac{Ad}{T}$$

$$\blacksquare \quad n \neq 0 \Rightarrow c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{2T} \int_{-d}^d A e^{-jn\frac{\pi}{T}t} dt$$

$$= \frac{A}{n\pi} \frac{e^{jn\frac{\pi d}{T}} - e^{-jn\frac{\pi d}{T}}}{2j} = \frac{Ad}{T} \frac{\sin \frac{n\pi d}{T}}{\frac{n\pi d}{T}}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{Ad}{T} \text{sinc} \frac{n\pi d}{T} \quad \text{với} \quad \text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$



2.4. BIẾN ĐỔI FOURIER

2.4.1. Tích phân Fourier

Nhắc lại rằng nếu một hàm số tuần hoàn chu kỳ T , thỏa mãn định lý Dirichlet về điều kiện hội tụ của chuỗi Fourier thì hàm số trên có khai triển chuỗi Fourier theo công thức sau:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{với } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ được gọi là tần số góc cơ bản các hệ}$$

số của chuỗi Fourier được tính theo công thức:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Nếu quy ước biến số rời rạc là $\omega_n = n\omega_0$ thì cặp công thức trên trở thành:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} \quad \text{và} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

c_n có thể được coi là một dãy số rời rạc phụ thuộc vào dãy ω_n .

Nhận xét rằng khi hàm số xét đến không còn là hàm số tuần hoàn nữa, hay ta có thể coi chu kỳ tuần hoàn $T \rightarrow \infty$, ω_n tiến dần đến biến số liên tục.

Để xây dựng công thức tích phân Fourier một cách chặt chẽ, xuất phát từ hàm số bất kỳ $f(t)$, xét hàm số $g(t)$ tuần hoàn chu kỳ T có giá trị trong một

chu kỳ $\frac{(2n-1)T}{2} \leq t < \frac{(2n+1)T}{2}$ là $g(t) = f(t - nT)$. Khai triển chuỗi Fourier của $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j\omega_n t} \quad \text{với} \quad G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

với số gia của biến số chạy rời rạc là: $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\text{Do đó: } g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega$$

$$\text{Đặt hàm số} \quad G(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad \text{thì:} \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(j\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega$$

Từ đây có nhận xét rằng khi $T \rightarrow \infty$ thì:

- $g(t)$ càng dần tiến đến $f(t)$
- $\Delta\omega \rightarrow 0$ hay biến rời rạc ω_n càng dần đến biến liên tục ω

Suy ra:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(j\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Cuối cùng ta có kết luận công thức tích phân Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (2.4.1)$$

Điều kiện hội tụ của tích phân Fourier: Giống như khi ta xét đến khai triển chuỗi Fourier, câu hỏi đặt ra là trong điều kiện nào của hàm $f(t)$ thì về trái của (2.4.1), bản chất là công thức tích phân suy rộng, hội tụ đến $f(t)$. Định lý sau đây nói lên điều kiện đủ để tích phân Fourier của hàm $f(t)$ hội tụ về hàm $f(t)$.

Nếu hàm số $f(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- là khả tích tuyệt đối hay $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty$
- có một số hữu hạn các điểm cực đại và cực tiểu hoặc có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 trong một khoảng bất kỳ của biến số

thì biểu diễn của tích phân Fourier có dạng

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \text{ sẽ hội tụ về } f(t) \text{ tại các điểm mà tại đó } f(t)$$

liên tục, và hội tụ về trung bình cộng của giới hạn trái và giới hạn phải của $f(t)$ mà tại đó $f(t)$ gián đoạn.

2.4.2. Cặp biến đổi Fourier

Từ công thức tích phân Fourier, ta có cặp biến đổi Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.4.2a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.4.2b)$$

$\mathcal{F}$ thể hiện toán tử của biến đổi Fourier thuận, $\mathcal{F}^{-1}$ thể hiện toán tử biến đổi Fourier ngược. Biến đổi Fourier tác động lên hàm số $f(t)$ ở miền biến số t được hàm số $F(j\omega)$ nhận giá trị phức ở miền biến số ω .

Một số tài liệu sử dụng ký hiệu hàm ảnh của biến đổi Fourier là $F(\omega)$ bởi bản chất đây là hàm phức với biến số thực. Tài liệu này cũng như rất nhiều tài liệu khác sử dụng ký hiệu hàm số ở miền ω là $F(j\omega)$ để thể hiện mối quan hệ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Laplace. Đó cũng là lý do mà hệ số $\frac{1}{2\pi}$ nằm ở công thức biến đổi Fourier ngược thay vì nằm ở công thức biến đổi Fourier thuận.

Trong một số tài liệu khác, đặc biệt các tài liệu liên quan đến xử lý tín hiệu và lý thuyết truyền thông, biến số f , có đơn vị là vòng trên giây, được thay cho biến số ω , có đơn vị là radians trên giây. Khi đó mối qua hệ chỉ là thay

$\omega = 2\pi f$ và hệ số $\frac{1}{2\pi}$ ở công thức biến đổi Fourier ngược không còn tồn tại nữa.

Một số ví dụ

Theo định lý về điều kiện đủ để công thức tích phân Fourier hội tụ, một trong các điều kiện là $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, các hàm số sau đây là không thoả mãn điều kiện này:

- $f(t) = A \quad \forall t; A = \text{constant}$
- $f(t) = t^n \quad \forall t; n \geq 1$
- $f(t) = e^{at} \quad \forall t; a \in \mathbb{R}$

Khi quan tâm tới biến đổi Fourier của một hàm số, các hàm kiểu này ít khi được xét đến. Nhìn nhận ở góc độ mối quan hệ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Laplace thì biến đổi Fourier chẳng qua là biến đổi Laplace lấy trên trục ảo của miền biến số s , do đó nếu biến đổi Laplace của một hàm số có miền hội tụ không chứa $|s| = 0$ thì không có biến đổi Fourier. Ở phần sau khi xem xét đến khái niệm năng lượng và công suất trung bình của một hàm số, các hàm dạng đã liệt kê ở trên được xếp vào loại có công suất trung bình vô hạn, và không quan tâm đến phổ của nó.

Các hàm số được đưa ra trong các ví dụ sau đây chắc chắn tồn tại biến đổi Fourier.

Ví dụ 1: Tìm biến đổi Fourier của hàm số sau:

$$f(t) = e^{-at}u(t) \quad \text{với} \quad a \in \mathbb{R}, a \geq 0$$

Giải:

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

Ví dụ 2: Tìm biến đổi Fourier của hàm số sau:

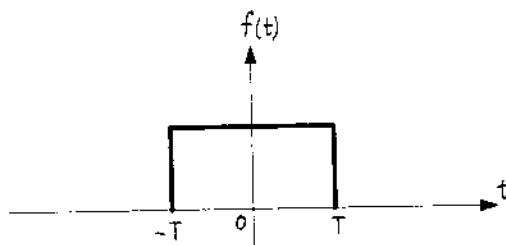
$$f(t) = e^{-a|t|} \quad \text{với} \quad a \in \mathbb{R}, a \geq 0$$

Giải:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{e^{-(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm biến đổi Fourier của một xung chữ nhật:

$$f(t) = \begin{cases} A & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$



Giải:
$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-T}^T A e^{-j\omega t} dt$$

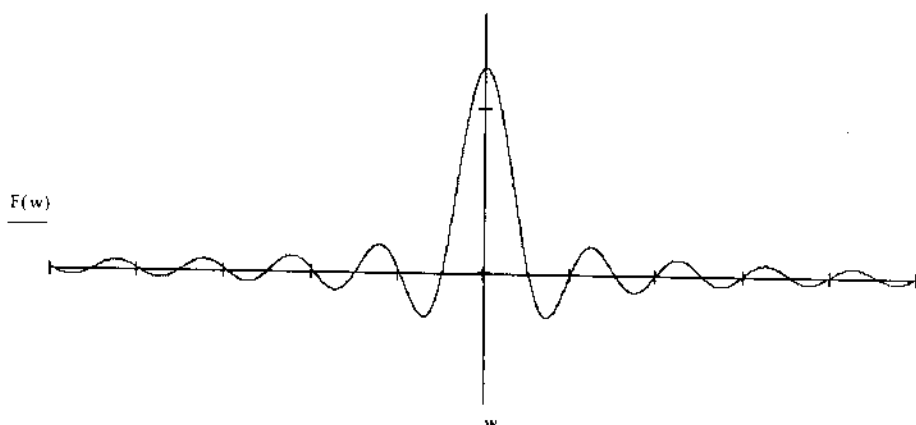
▪ $\omega = 0 \Rightarrow \mathcal{F}\{f(t)\} \Big|_{\omega=0} = \int_{-T}^T A dt = 2AT$

▪ $\omega \neq 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-T}^T A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-T}^T = \frac{2A}{\omega} \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j} = 2AT \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{f(t)\} = 2AT \operatorname{sinc} T\omega \quad \text{với}$$

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$



2.4.3. Các tính chất của biến đổi Fourier

a. Tuyến tính

Cho $f(t)$ và $g(t)$ có biến đổi Fourier lần lượt là $F(j\omega)$ và $G(j\omega)$, α và β là các hằng số (thực hoặc phức) thì:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\} = \alpha F(j\omega) + \beta G(j\omega) \quad (2.4.3)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-j\omega t} dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha F(j\omega) + \beta G(j\omega) \end{aligned}$$

Tính chất tuyến tính đồng thời cũng đúng với biến đổi Fourier ngược.

b. Biến đổi của đạo hàm

Cho $f(t)$ biến đổi Fourier là $F(j\omega)$ thì:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = (j\omega)F(j\omega) \quad (2.4.4)$$

Chứng minh:

$$\text{Có: } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [F(j\omega)e^{j\omega t}] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(j\omega)F(j\omega)]e^{j\omega t} d\omega$$

hay $\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = (j\omega)F(j\omega)$

Mở rộng: $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = (j\omega)^n F(j\omega)$

c. Co giãn miền thời gian

Cho $f(t)$ biến đổi Fourier là $F(j\omega)$ thì:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad a = \text{constant}, a \neq 0 \quad (2.4.5)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt$$

Đặt $\tau = at \Rightarrow$

- $a > 0$, cận lấy tích phân từ $-\infty \rightarrow \infty$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

- $a < 0$, cận lấy tích phân từ $\infty \rightarrow -\infty$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} d\tau = -\frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Vậy trong cả hai trường hợp $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

d. Dịch thời gian

Cho $f(t)$ biến đổi Fourier là $F(j\omega)$ thì:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(j\omega) \quad t_0 = \text{constant} \quad (2.4.6)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t} dt$$

Đặt $\tau = t - t_0 \Rightarrow$

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d(\tau+t_0) = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

e. Dịch tần số

Cho $f(t)$ biến đổi Fourier là $F(j\omega)$ thì:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(j(\omega - \omega_0)) \quad \omega_0 = \text{constant} \quad (2.4.7)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(j(\omega - \omega_0))$$

f. Tích chập

Cho $f(t)$ và $g(t)$ có biến đổi Fourier lần lượt là $F(j\omega)$ và $G(j\omega)$, α và β là các hằng số (thực hoặc phức thì:

$$\mathcal{F}\{f * g(t)\} = F(j\omega)G(j\omega) \quad (2.4.8)$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa tích chập: $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

$$\mathcal{F}\{f * g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

Đổi biến $\tau_1 = \tau$ và $\tau_2 = t - \tau$, ta có:

$$\mathcal{F}\{f * g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)e^{-j\omega(\tau_1+\tau_2)} d(\tau_2 + \tau) \right] d\tau_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 = F(j\omega)G(j\omega)$$

g. Tích thường

Cho $f(t)$ và $g(t)$ có biến đổi Fourier lần lượt là $F(j\omega)$ và $G(j\omega)$, α và β là các hằng số (thực hoặc phức thì:

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi} [F * G(j\omega)] \quad (2.4.9)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{F * G(j\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F * G(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\lambda) G(j(\omega - \lambda)) d\lambda \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\lambda) e^{j\lambda t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(j(\omega - \lambda)) e^{j(\omega - \lambda)t} d(\omega - \lambda) \right] d\lambda = 2\pi f(t)g(t) \end{aligned}$$

h. Đối ngẫu

Cho $f(t)$ biến đổi Fourier là $F(j\omega)$ thì:

$$\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega) \quad (2.4.10)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} &= f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \Rightarrow 2\pi f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(jy) e^{jyt} dy \\ \Rightarrow 2\pi f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(jy) e^{-jyt} dy \\ \Rightarrow 2\pi f(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(jy) e^{-jy\omega} dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{F(jt)\} \end{aligned}$$

i. Đối xứng Hermitian

Cho $f(t)$ là hàm thực và biến đổi Fourier của $f(t)$ là $F(j\omega)$ thì:

$$F(-j\omega) = F^*(j\omega) \quad (2.4.11)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tương tự} \quad F(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt + j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \end{aligned}$$

do $f(t)$ là thực nên $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$, điều này tương đương với:

- $|F(j\omega)|$ là hàm chẵn – hay đồ thị của $|F(j\omega)|$ đối xứng qua trục tung
- $\text{Arg}[F(j\omega)]$ là hàm lẻ – hay đồ thị của $\text{Arg}[F(j\omega)]$ đối xứng qua gốc toạ độ.

Do $F(j\omega)$ thể hiện trọng số của từng thành phần $e^{j\omega}$ trong $f(t)$ nên biểu diễn của $F(j\omega)$ theo trục ω còn được gọi là phổ của $f(t)$, $|F(j\omega)|$ được gọi là phổ biên độ và $\text{Arg}[F(j\omega)]$ được gọi là phổ pha của $f(t)$.

2.4.4. Năng lượng và công suất trung bình - Định lý Parseval

Năng lượng của hàm số $f(t)$ trong trường hợp hàm số này là thực được cho bởi công thức:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \quad (2.4.12)$$

Thế $f(t)$ theo công thức biến đổi Fourier ngược của $F(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega
 \end{aligned}$$

Bởi $f(t)$ là hàm thực hay $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ nên:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.4.13)$$

Từ đây rút ra đẳng thức Parseval thể hiện mối quan hệ giữa năng lượng tính ở miền t và năng lượng tính ở miền ω :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.4.14)$$

Công suất trung bình của $f(t)$ được định nghĩa bởi:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \quad (2.4.15)$$

Chúng ta có nhận xét rằng tất cả các hàm số thoả mãn điều kiện đủ của tích phân Fourier hội tụ đều có năng lượng hữu hạn. Từ đó dẫn đến chúng cũng có công suất trung bình hữu hạn. Tiếp theo ta xét đến một lớp các hàm số có năng lượng vô hạn như lại có công suất trung bình hữu hạn, đó là các hàm sin và cosin.

Ví dụ: Tìm công suất trung bình của $f(t) = \cos \omega_0 t$

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega_0 t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[t + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[T + \frac{2\sin(\omega_0 T)}{2\omega_0} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_0 T)}{\omega_0} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Các hàm số có công suất trung bình hữu hạn như trên có biến đổi Fourier tổng quát (generalize Fourier transform).

2.4.5. Biến đổi Fourier tổng quát

Theo tính chất dịch của hàm Dirac:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \quad (2.4.16a)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=t_0} = e^{-j\omega t_0} \quad (2.4.16b)$$

Từ tính chất đối ngẫu của biến đổi Fourier dẫn tới các cặp biến đổi Fourier sau:

$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

Xuất phát từ các cặp biến đổi Fourier này dẫn tới khái niệm biến đổi Fourier tổng quát của các hàm số có công suất trung bình hữu hạn. Các hàm ảnh qua phép biến đổi Fourier của các hàm số nói trên đều chứa các hàm lý tưởng hoá dạng $\delta(\omega)$ hay $\delta(\omega - \omega_0)$.

Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier của các hàm số $\cos(\omega_0 t)$ và $\sin(\omega_0 t)$:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2j} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} - \frac{1}{2j} \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

2.4.6. Biến đổi Fourier cho dãy số rời rạc

Xuất phát từ hàm tuần hoàn với chu kỳ T , nếu đổi biến số $\theta = \frac{2\pi}{T}t = \omega t$ ta có hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π theo biến số θ . Ký hiệu hàm số mới là $F(e^{j\theta})$, hàm số này có khai triển chuỗi Fourier là:

$$F(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{jn\theta}$$

$$\text{với } f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\theta}) e^{-jn\theta} d\theta$$

Nói một cách khác, dãy $\{f_n\}$ được tạo ra từ khai triển chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn $F(e^{j\theta})$. Ngược lại, xuất phát từ dãy số $\{g_n\}$ ta thu được hàm tuần hoàn $G(e^{j\theta})$ theo cách sau:

$$\tilde{G}(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{jn\theta}$$

$$\text{với } g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}(e^{j\theta}) e^{-jn\theta} d\theta$$

Từ đây, ta có định nghĩa về biến đổi Fourier cho một dãy số dựa trên các công thức trên với một chút thay đổi là đổi dấu của các biến số trong các hàm e mũ:

$$\mathcal{F}\{g_n\} = G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\omega} \quad (2.4.17a)$$

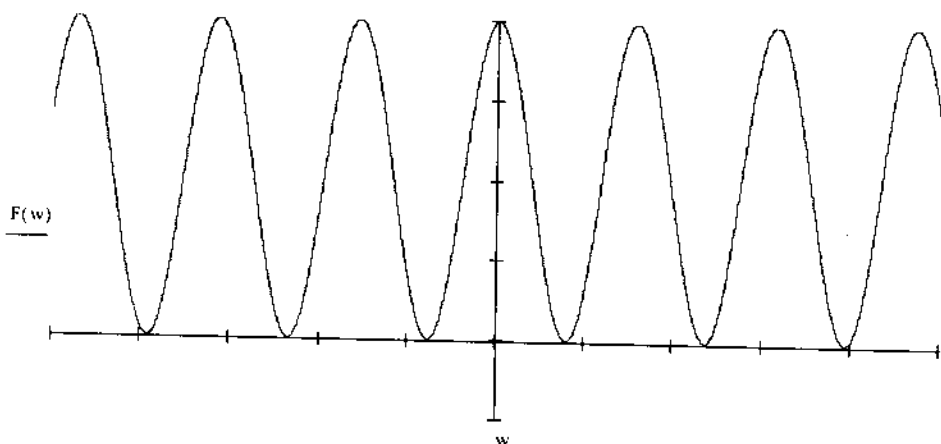
$$\mathcal{F}^{-1}\{G(e^{j\omega})\} = g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad (2.4.17b)$$

Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier của dãy $\{g_n\}$ với

$$g_0 = 2; g_{-2} = g_2 = 1; \quad g_k = g_{-k} = 0 \quad k \neq 0, k \neq \pm 2$$

Giải:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g_n\} = G(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\omega} = g_{-2} e^{2j\omega} + g_0 + g_2 e^{-2j\omega} \\ &= 2 + e^{2j\omega} + e^{-2j\omega} = 2 + 2 \cos 2\omega = 4 \cos^2 \omega \end{aligned}$$



2.4.7. Biến đổi Fourier rời rạc

Xét một dãy số $\{g_n\}$ chỉ xác định với đúng N phần tử có chỉ số từ 0 đến $N-1$. Biến đổi Fourier cho dãy số trên là:

$$\mathcal{F}\{g_n\} = G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jn\omega}$$

Ta có nhận xét rằng đây là một tổng hữu hạn các thành phần, đồng thời là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π . Ta rời rạc hoá biến số ω bằng cách lấy mẫu tại N vị trí cách đều nhau trong khoảng $[0, 2\pi]$ với $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$. Các vị trí lấy mẫu lần lượt là: $0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \dots, (N-1)\Delta\omega$. Tại các mẫu này ta thu được một dãy rời rạc $\{G_k\}$:

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jnk\Delta\omega} \quad (2.4.18)$$

Nhận xét rằng $\{G_k\}$ tuần hoàn chu kỳ N , thực vậy

$$G_{k+N} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jn(k+N)\Delta\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jnk\Delta\omega} e^{-jnN\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jnk\Delta\omega} = G_k$$

Do đó dãy chỉ gồm N phần tử $\{G_k\}_0^{N-1}$ hoàn toàn có thể đại diện cho $\{G_k\}_{-\infty}^{\infty}$.

Tiếp theo ta chứng minh được rằng xuất phát từ $\{G_k\}_0^{N-1}$, ta hoàn toàn có thể khôi phục được dãy $\{g_n\}_0^{N-1}$. Thực vậy, để tìm phần tử thứ m của dãy $\{g_n\}_0^{N-1}$ với $0 \leq m \leq N-1$. Ta nhân cả 2 vế của (*) với $e^{-jkm\Delta\omega}$

$$\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jkm\Delta\omega} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-jnk\Delta\omega} \right] e^{jkm\Delta\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Delta\omega} \right]$$

Mặt khác:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Delta\omega} = \begin{cases} \frac{1 - e^{j2\pi k(m-n)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k(m-n)}} = 0 & m \neq n \\ \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N & m = n \end{cases}$$

hay

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Delta\omega} = N\delta_{mn} \quad \text{với } \delta_{mn} \text{ là giá trị Delta - Kronecker}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jkm\Delta\omega} = N \sum_{n=0}^{N-1} g_n \delta_{mn} = Ng_m$$

Vậy dãy $\{g_n\}_0^{N-1}$ được khôi phục từ $\{G_k\}_0^{N-1}$ theo công thức:

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jkn\Delta\omega}$$

Từ đây ta có cặp biến đổi Fourier cho dãy hữu hạn N phần tử:

$$\{G_k\}_0^{N-1} = \text{DFT}\{g_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (2.4.19a)$$

$$\{g_n\}_0^{N-1} = \text{DFT}\{G_k\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{jkn\frac{2\pi}{N}} \quad (2.4.19b)$$

Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier rời rạc của: $\{g_n\}_0^2 = \{1, 2, 1\}$

Giải:

$$G_0 = \sum_{n=0}^2 g_n = g_0 + g_1 + g_2 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$G_1 = \sum_{n=0}^2 g_n e^{-j\frac{2\pi}{3}n} = g_0 + g_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + g_2 e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$G_2 = \sum_{n=0}^2 g_n e^{-j\frac{2\pi}{3}n} = g_0 + g_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}} + g_2 e^{-j\frac{8\pi}{3}} = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 2e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Vậy } \{G_k\}_0^2 = \left\{4, e^{-j\frac{2\pi}{3}}, e^{j\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

$$\text{Ngược lại, xét dãy: } \{\tilde{g}_n\}_0^{N-1} = \text{DFT}\{G_k\} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k e^{jkn\frac{2\pi}{3}}$$

$$\tilde{g}_0 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k = \frac{1}{3} (G_0 + G_1 + G_2) = \frac{1}{3} \left(4 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{2\pi}{3}}\right) = 1$$

$$\tilde{g}_1 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k e^{j\frac{2\pi}{3}k} = \frac{1}{3} \left(G_0 + G_1 e^{j\frac{2\pi}{3}} + G_2 e^{j\frac{4\pi}{3}}\right) = \frac{1}{3} (4 + 1 + 1) = 2$$

$$\tilde{g}_2 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k e^{j\frac{2\pi}{3}k} = \frac{1}{3} \left(G_0 + G_1 e^{j\frac{4\pi}{3}} + G_2 e^{j\frac{8\pi}{3}}\right) = \frac{1}{3} \left(4 + e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) = 1$$

$$\text{Vậy } \{\tilde{g}_n\}_0^2 = \{1, 2, 1\} = \{g_n\}_0^2.$$

BÀI TẬP

1. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a. e^{3t}

b. $\cos(2t)$

c. $3t^2 - 2\sin(3t)$

d. te^{-t}

e. $t^2 e^{-2t}$

f. $t^2 \cos(2t) + t \sin(2t)$

g. $t^2 e^{-2t} + e^{-t} \cos(3t) + 2$

h. $[e^{3t} + 1] \cos(t) + 5 \sin(t)$

2. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

$$\text{a. } f_1(t) = \begin{cases} t^2 & (0 \leq t < 1) \\ 2t - 1 & (1 \leq t < 3) \\ 5 & (t \geq 3) \end{cases}$$

$$\text{b. } f(t) = \begin{cases} 3t^2 & (0 \leq t < 4) \\ 2t - 3 & (4 \leq t < 6) \\ 4 & (t \geq 6) \end{cases}$$

3. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

a. $\frac{s+3}{s^2+5s+4}$

b. $\frac{e^{-s}}{s}$

$$c. \frac{(s+4)e^{-\pi s}}{s^2+7s+18}$$

$$d. \frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}$$

4. Giải các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây bằng phương pháp dùng biến đổi Laplace:

$$a. \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x(t) = f(t)$$

với điều kiện đầu: $x(0) = 1$ và $x'(0) = 0$

$$\text{và: } f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$b. \frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 10x(t) = f(t)$$

với điều kiện đầu: $x(0) = 1, x'(0) = 0$

$$\text{và: } f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < 4\pi \\ 0 & t \text{ còn lại} \end{cases}$$

5. Giải hệ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc nhất sau đây bằng phương pháp dùng biến đổi Laplace:

$$2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 9y(t) = e^{-2t}$$

$$2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 4x(t) - 37y(t) = 0$$

6. Tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ của các dãy số sau:

$$a. x_n = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^n & n \geq -2 \\ 0 & n < -2 \end{cases} \quad b. y_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

7. Chứng minh rằng biến đổi $\mathcal{Z}$ của dãy số

$$x_n = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-m+1)a^{n-m} & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

(trong đó a là hằng số, m là hằng số nguyên dương)

$$\text{là } m! \frac{z}{(z-a)^{m+1}}$$

8. Tìm biến đổi $\mathcal{Z}$ ngược của các hàm số sau:

a. $\frac{z}{z^2 - 6z + 8} \quad (|z| > 4)$

b. $\frac{z}{z^2 - 5z + 4} \quad (|z| > 4)$

c. $\frac{1}{(4z-3)^2} \quad (|z| > \frac{3}{4})$

d. $\frac{1}{4z^2 - 2\sqrt{3}z + 1} \quad (|z| > \frac{1}{2})$

9. Tìm các hệ số trong khai triển dạng phức chuỗi Fourier của các hàm số sau:

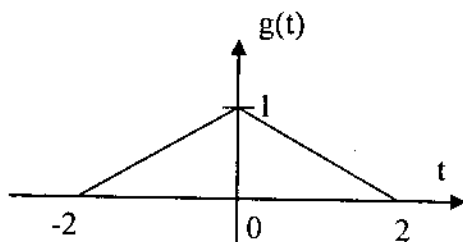
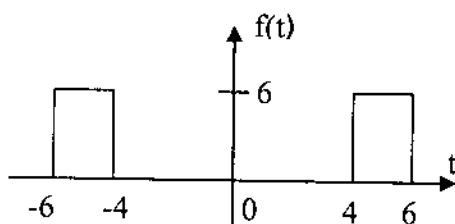
a. Hàm $f(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π , trong một chu kỳ $[-\pi, \pi]$

$$f(t) = \begin{cases} \pi & -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 & t \text{ còn lại} \end{cases}$$

b. Hàm $g(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2, trong một chu kỳ $[-1, 1]$

$$g(t) = 1 - t^2$$

10. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số được cho như hình vẽ dưới đây



11. Tìm công suất trung bình của các hàm số sau:

a. $\sin(t) + \cos(t)$

b. $\cos(2t)$

12. Vẽ phổ biên độ và phổ pha của hàm số sau:

a. $\cos(2t)$

b. $\cos(20\pi t) \cdot \cos(10^5 \pi t)$

13. Tìm biến đổi Fourier của dãy số $x_n = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < 6 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$. Hãy vẽ phổ biên độ và phổ pha.

14. Tìm biến đổi Fourier rời rạc của dãy số $\{x_n\}_{n=0}^3 = \{1, 3, 3, 1\}$

Chương 3

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

3.1. KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

3.1.1. Một số thuật ngữ

Phần này sẽ trình bày một số khái niệm và thuật ngữ liên quan đến lý thuyết xác suất.

- Quy tắc hoạt động: Được hiểu là một tập hợp các quy tắc cho một hoạt động nào đó. Các tài liệu tiếng Anh dùng với thuật ngữ **experiment**.
- Phép thử (trial): Một hoạt động cụ thể thực hiện theo các quy tắc nói trên.
- Kết quả (outcome): Kết quả của một phép thử.
- Sự kiện (event): Là một kết quả đơn hoặc là một tổ hợp của một số kết quả thu được sau một phép thử cụ thể.

Ví dụ: Rút một cách ngẫu nhiên một quân bài từ một bộ bài 52 quân. Ghi lại số và chất của quân bài đó.

Ở đây, quy tắc hành động là việc rút một cách ngẫu nhiên một quân bài từ một bộ bài. Khi thực hiện việc rút một quân bài, ta thực hiện một phép thử. Số và chất của quân bài rút ra cho ta một kết quả. Kết quả đó có thể coi là một sự kiện đơn. Nếu thực hiện việc rút liên tiếp một số quân bài, ghi lại các kết quả là số và chất của chúng, tổ hợp của các kết quả này cũng cho ta một sự kiện.

3.1.2. Lý thuyết tiên đề

Nói chung, lý thuyết xác suất được xây dựng từ lý thuyết tập hợp (set theory). Tuy nhiên có một số cách tiếp cận khác nhau để đưa ra khái niệm về xác suất. Cách tiếp cận theo lý thuyết tiên đề (Axiomatic Theory of Probability) là hiện đại và được chấp nhận rộng rãi hơn cả. Lý thuyết này gồm việc định nghĩa các tập hợp, hàm xác suất và các tiên đề như sau:

- Không gian mẫu (sample space), ký hiệu là tập S , bao gồm tất cả các kết quả có thể có khi thực hiện một phép thử theo một quy tắc cho trước.
- Đại số sigma (hay trường sigma), ký hiệu là Σ , là tập hợp tất cả các sự kiện có thể có từ quy tắc nói trên. Nói một cách khác tập Σ được xây dựng từ tập không gian mẫu S với mỗi phần tử của Σ là một tập con của S .
- Hàm xác suất P , là một hàm số có miền xác định (domain) là Σ và miền giá trị (range) là $[0,1]$.

Hàm số P phải thoả mãn các tiên đề sau:

- Tiên đề 1: $P(A) \geq 0$ với A là một sự kiện
- Tiên đề 2: $P(S) = 1$
- Tiên đề 3: $P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N P(A_n)$

với $A_m \cap A_n = \emptyset, m \neq n = 1, 2, \dots, N$.

Kết luận để xây dựng một mô hình xác suất cần định nghĩa 3 vấn đề:

- Tập không gian mẫu
- Các sự kiện cần quan tâm
- Một hàm xác suất gắn liền với các sự kiện, đồng thời phải thoả mãn cả 3 tiên đề đã đề cập đến trong lý thuyết tiên đề về xác suất.

3.1.3. Xác suất giao

Xác suất giao (joint probability), hay còn được gọi là xác suất tích được định nghĩa:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3.1.1)$$

Điều này được rút ra từ lý thuyết tập hợp và có thể chứng tỏ bằng giản đồ Venn.

Công thức trên tương đương với

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \quad (3.1.1a)$$

Với sự thống nhất với tiên đề 3, dấu “=” xảy ra khi $A \cap B = \emptyset$.

3.1.4. Xác suất có điều kiện

Cho trước sự kiện B có $P(B) > 0$. Định nghĩa xác suất có điều kiện (conditional probability) của A với điều kiện B cho trước là:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3.1.2)$$

Công thức này không được chứng minh, tuy nhiên cả 3 tiên đề trên vẫn hoàn toàn thỏa mãn và không xung đột gì với định nghĩa này.

Ví dụ: Cho một hộp có chứa các quả bóng gồm 3 màu đỏ, vàng, xanh và cả 3 màu đều có hai loại: to và nhỏ. Bảng danh mục các quả bóng trong hộp được cho như sau:

Màu bóng	Loại bóng		Tổng cộng
	Nhỏ	To	
Đỏ	4	16	20
Vàng	25	5	30
Xanh	36	14	50
Tổng cộng	65	35	100

Quy tắc thực hiện là lấy ra một quả bóng từ hộp bóng. Định nghĩa các sự kiện như sau:

- A: Bốc được một quả bóng vàng
- B: Bốc được một quả bóng nhỏ
- C: Bốc được một quả bóng xanh

Tính $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(B|C)$.

Giải: Nhận xét thấy rằng có tổng cộng 100 quả bóng trong hộp

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,30; & P(B) &= 0,65; & P(C) &= 0,50; \\ P(A \cap B) &= 0,25; & P(A \cap C) &= 0; & P(B \cap C) &= 0,36; \end{aligned}$$

$$\text{dẫn đến: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,65} = \frac{5}{13}$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0}{0,50} = 0$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0,36}{0,50} = 0,72$$

3.1.5. Xác suất toàn phần

Nếu $B_m \cap B_n = \emptyset$ với mọi $m \neq n = 1, 2, \dots, N$

và $\bigcup_{n=1}^N B_n = S$

thì
$$P(A) = \sum_{n=1}^N P(A | B_n) P(B_n) \quad (3.1.3)$$

công thức này được gọi là công thức xác suất toàn phần (total probability) của sự kiện A.

Thực vậy, do $A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^N B_n \right) = \bigcup_{n=1}^N (A \cap B_n)$

nên
$$P(A) = P(A \cap S) = P\left(\bigcup_{n=1}^N (A \cap B_n)\right) = \sum_{n=1}^N P(A \cap B_n)$$

(bởi $B_m \cap B_n = \emptyset$ với mọi $m \neq n = 1, 2, \dots, N$)

và
$$P(A) = \sum_{n=1}^N P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^N P(A | B_n) P(B_n)$$

(theo công thức xác suất có điều kiện).

3.1.6. Định lý Bayes

Nếu A và B đều là các sự kiện có xác suất khác không hay $P(A) > 0$ và $P(B) > 0$ thì

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (3.1.4)$$

Một dạng khác của định lý được thể hiện bởi công thức:

$$P(B_n | A) = \frac{P(A | B_n) P(B_n)}{P(A | B_1) P(B_1) + P(A | B_2) P(B_2) + \dots + P(A | B_N) P(B_N)} \quad (3.1.5)$$

Ví dụ: Một đường truyền tín hiệu dãy các bit 0 và 1 có các sự kiện được định nghĩa như sau:

- B_1 và B_2 lần lượt là các sự kiện phía phát gửi đi bit '1' và bit '0'
- A_1 và A_2 lần lượt là các sự kiện phía thu nhận được bit '1' và bit '0'.

Do đường truyền không hoàn toàn là không xảy ra lỗi bit nên có thể phát đi bit '1' mà lại nhận được bit '0' và ngược lại. Trường hợp này là xảy ra lỗi bit.

Cho $P(B_1) = 0,55$; $P(B_2) = 0,45$

$P(A_1|B_1) = 0,95$ và $P(A_2|B_1) = 0,05$

$P(A_2|B_2) = 0,95$ và $P(A_1|B_2) = 0,05$

Tìm:

- Xác suất nhận được bit '1' $P(A_1)$
- Xác suất nhận được bit '0' $P(A_2)$
- Các xác suất nhận được bit sai $P(B_1|A_2)$ và $P(B_2|A_1)$
- Các xác suất nhận được bit đúng $P(B_1|A_1)$ và $P(B_2|A_2)$

Giải:

$$P(A_1) = P(A_1|B_1) P(B_1) + P(A_1|B_2) P(B_2)$$

$$= 0,95.0,55 + 0,05.0,45 = 0,545$$

$$P(A_2) = P(A_2|B_1) P(B_1) + P(A_2|B_2) P(B_2)$$

$$= 0,05.0,55 + 0,95.0,45 = 0,455$$

$$P(B_1 | A_2) = \frac{P(A_2 | B_1)P(B_1)}{P(A_2)} = \frac{0,05.0,55}{0,455} = 0,060$$

$$P(B_2 | A_1) = \frac{P(A_1 | B_2)P(B_2)}{P(A_1)} = \frac{0,05.0,45}{0,545} = 0,045$$

$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 | B_1)P(B_1)}{P(A_1)} = \frac{0,95.0,55}{0,545} = 0,955$$

$$P(B_2 | A_2) = \frac{P(A_2 | B_2)P(B_2)}{P(A_2)} = \frac{0,95.0,45}{0,455} = 0,940$$

3.1.7. Độc lập thống kê

Cho A và B là các sự kiện có xác suất khác không. Hai sự kiện A và B là độc lập thống kê (stastically independent) nếu sự xuất hiện của sự kiện này không bị ảnh hưởng bởi sự kiện còn lại. Biểu diễn một cách toán học:

$$P(A|B) = P(A) \text{ và } P(B|A) = P(B) \quad (3.1.6a)$$

Từ đó ta rút ra kết quả sau:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (3.1.6b)$$

Từ đây dẫn đến kết luận là hai sự kiện độc lập thống kê không thể là hai sự kiện loại trừ lẫn nhau (mutually exclusive events). Nói cụ thể nếu A và B là hai sự kiện độc lập thống kê thì không thể có $A \cap B = \emptyset$.

Khi xét với một số lượng lớn hơn 2 các sự kiện $A_1, A_2, \dots, A_N$. Chúng là một tập hợp các sự kiện độc lập thống kê nếu các điều kiện sau đồng thời được thoả mãn:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (3.1.7a)$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \quad (3.1.7b)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_N) \quad (3.1.7c)$$

với $1 \leq i < j < k < \dots \leq N$, tổng cộng có $(2^N - N - 1)$ điều kiện.

Nếu tập các sự kiện trên chỉ có duy nhất điều kiện đầu thoả mãn thì chúng là các sự kiện độc lập từng đôi một (independent by pair).

3.1.8. Chuỗi phép thử Bernoulli

Xét quy tắc chỉ có một trong 2 khả năng kết quả sau mỗi phép thử. Đặt A là một kết quả và $\bar{A}$ là kết quả còn lại. Không gian mẫu là $S = \{A, \bar{A}\}$.

Giả sử xác suất của các kết quả trên là: $P(A) = p$ và $P(\bar{A}) = 1-p$.

Từ đó dẫn đến xác suất để A xuất hiện đúng k lần sau N phép thử là

$$P\{A \text{ xuất hiện đúng } k \text{ lần}\} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \quad (3.1.8)$$

Ví dụ: Một người cầm bóng ném vào một ống bơ để trên một mặt bàn. Ống bơ cách người đứng ném 5m. Xác suất người đó ném trúng ống bơ là 0,2. Ống bơ sẽ bị đổ nếu bị ném trúng 2 quả bóng. Cứ cho như là nếu đã ném trúng 2 quả đầu thì vẫn ném quả thứ 3 với xác suất trúng như trên. Tìm xác suất ống bơ bị đổ sau 3 lần ném.

Giải: Ống bơ bị đổ nếu bị trúng 2 quả hoặc 3 quả sau 3 lần ném:

$$P\{\text{ném trúng đúng 2 quả}\} = C_3^2 (0,2)^2 (0,8)^1 = 0,096$$

$$P\{\text{ném trúng đúng 3 quả}\} = C_3^3 (0,2)^3 (0,8)^0 = 0,008$$

$$P\{\text{ống bơ đổ}\} = 0,096 + 0,008 = 0,104$$

3.2. BIẾN NGẪU NHIÊN

3.2.1. Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Một biến ngẫu nhiên (random variable) $X(s)$ là một hàm số thực hiện việc ánh xạ mỗi một sự kiện thuộc trường Σ của không gian mẫu S vào một số thực

$$X: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

Đồng thời hàm X cũng phải thoả mãn một số điều kiện sau:

- tập $\{X \leq x\}$ với x là một số thực bất kỳ phải gắn với một sự kiện nào đó
- $P\{X = -\infty\} = 0$ và $P\{X = \infty\} = 0$.

Các ví dụ:

1. Thực hiện vừa gieo đồng xu, vừa gieo xúc xắc. Tập không gian mẫu là: $\{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$.

Biến xác suất là một ánh xạ giữa một phần tử từ không gian mẫu nói trên vào một phần tử của tập hợp được liệt kê như sau: $\{-12, -11, \dots, 0, 0,5, 1, \dots, 5,5, 6\}$

2. Một bánh xe, trên bánh xe có đánh dấu một mũi tên, xung quanh bánh xe được chia đều thành 12 vị trí và đánh các số từ 1 đến 12. Thực hiện ánh xạ từ không gian mẫu vào tập hợp $\{0 < x \leq 144\}$.

Chú ý:

- Biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị là rời rạc
- Biến ngẫu nhiên liên tục nhận các giá trị là liên tục.

3.2.2. Hàm phân bố và hàm mật độ

• Hàm phân bố tích lũy (cumulative distribution function – CDF)

Hàm phân bố tích lũy được định nghĩa:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad (3.2.1)$$

hàm số này còn được gọi tắt là hàm phân bố.

Hàm phân bố có các tính chất sau:

$$1. F_X(-\infty) = 0 \quad (3.2.2a)$$

$$2. F_X(\infty) = 1 \quad (3.2.2b)$$

$$3. 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (3.2.2c)$$

$$4. F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \text{ nếu } x_1 < x_2 \quad (3.2.2d)$$

$$5. P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) \quad (3.2.2e)$$

$$6. F_X(x+) = F_X(x) \quad (3.2.2f)$$

Nếu X là một biến ngẫu nhiên rời rạc, miền giá trị gồm N phần tử rời rạc $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ thì:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^N P\{X = x_i\} u(x - x_i) \quad (3.2.3)$$

với $u(x-a)$ là hàm nhảy đơn vị (unit step function) và được định nghĩa bởi:

$$u(x-a) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases}$$

Để viết ngắn gọn, chúng ta quy ước $P(x_i) = P\{X = x_i\}$ dẫn đến

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^N P(x_i) u(x - x_i) \quad (3.2.3a)$$

• Hàm mật độ xác suất (probability density function – pdf)

Hàm mật độ xác suất được định nghĩa:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (3.2.4)$$

hàm số này còn được gọi tắt là hàm mật độ.

Trường hợp X là biến ngẫu nhiên rời rạc, miền giá trị gồm N phần tử rời rạc $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ thì:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^N P(x_i) \delta(x - x_i) \quad (3.2.5)$$

với $\delta(x)$ là hàm xung đơn vị, còn gọi là xung Delta hay xung Dirac.

Hàm mật độ có các tính chất sau:

$$1. \quad 0 \leq f_X(x) \text{ với mọi } x \quad (3.2.6a)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (3.2.6b)$$

$$3. \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad (3.2.6c)$$

$$4. \quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\xi) d\xi \quad (3.2.6d)$$

Các tính chất 1 và 2 của hàm mật độ có thể được dùng để kiểm tra một hàm số có thoả mãn là một hàm mật độ hay không.

3.2.3. Một số biến ngẫu nhiên thông dụng

Biến ngẫu nhiên Gauss

X là biến ngẫu nhiên Gauss (Gaussian random variable) nếu hàm mật độ có dạng:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.2.7)$$

với $\sigma_x > 0$ và $-\infty < \mu_x < \infty$ là các hằng số thực.

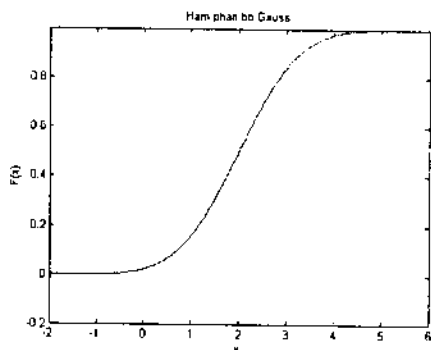
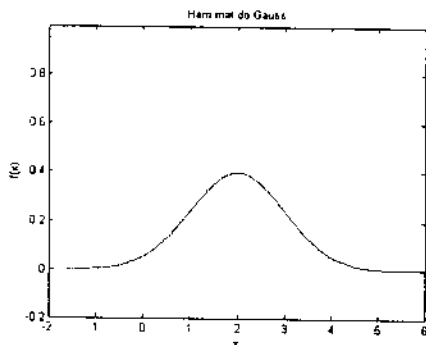
Hàm phân bố của biến ngẫu nhiên Gauss là:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} d\xi \quad (3.2.8)$$

Đồ thị của hàm mật độ Gauss và hàm phân bố Gauss với $\mu_x = 2$ và $\sigma_x = 1$ được cho như hình vẽ sau đây:

Phân bố Gauss còn được gọi là phân bố chuẩn (normal distribution).

Thực tế ta không thể tính được giá trị của hàm phân bố Gauss từ công thức tích phân được cho theo định nghĩa. Tuy nhiên ta có thể tính gần đúng bằng cách xét hàm số sau:



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi. \quad (3.2.9)$$

Giá trị này được cho theo bảng phụ lục ở rất nhiều các tài liệu về lý thuyết xác suất. Khi đó hàm phân bố Gauss tại giá trị x được tính bằng

$$F_X(x) = F\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (3.2.10)$$

Biến ngẫu nhiên nhị phân (Binomial)

Cho $0 < p < 1$, biến ngẫu nhiên nhị phân là một loại biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm mật độ và hàm phân bố được định nghĩa như sau:

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \delta(x-k) \quad (3.2.11)$$

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k} u(x-k) \quad (3.2.12)$$

Hàm mật độ nhị phân chính là kết quả của chuỗi phép thử Bernoulli.

Biến ngẫu nhiên Poisson

Cho b là một hằng số dương, biến ngẫu nhiên Poisson có hàm mật độ và hàm phân bố như sau:

$$f_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^N \frac{b^k}{k!} \delta(x-k) \quad (3.2.13)$$

$$F_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^N \frac{b^k}{k!} u(x-k) \quad (3.2.14)$$

Biến ngẫu nhiên Poisson thường được ứng dụng trong mô tả mật độ xác suất các sự kiện đếm được trong một số ví dụ như sau:

- Mô tả số đơn vị bị lỗi trong một mẫu sản phẩm được lấy ra từ một dây chuyền sản xuất
- Mô tả số cuộc gọi điện thoại trong một khoảng thời gian
- Mô tả số electron phát ra từ một phần của cathode trong một đơn vị thời gian.

Nếu như xét trong một khoảng thời gian T , các sự kiện đếm được có tần suất trung bình là λ và tuân theo phân bố Poisson thì hằng số b được xác định bởi công thức

$$b = \lambda T$$

Biến ngẫu nhiên phân bố đều

Biến ngẫu nhiên phân bố đều (uniform) có hàm mật độ và hàm phân bố theo định nghĩa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x \text{ còn lại} \end{cases} \quad (3.2.15)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Biến ngẫu nhiên phân bố đều đều có ứng dụng điển hình trong việc mô tả sai số lượng tử hoá, là quá trình làm tròn các giá trị của tín hiệu về các mức lượng tử (bởi giá trị của bước lượng tử được giả sử là rất nhỏ so với toàn bộ khoảng các giá trị có thể nhận được nên có thể coi như xấp xỉ biến ngẫu nhiên phân bố đều theo quan điểm xấp xỉ Newton).

Biến ngẫu nhiên e mũ

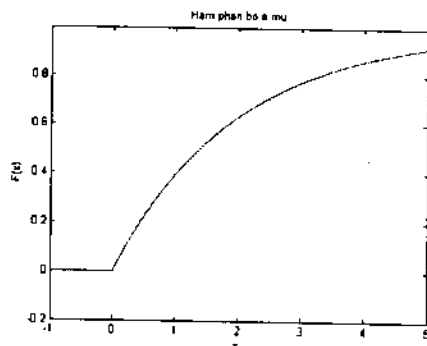
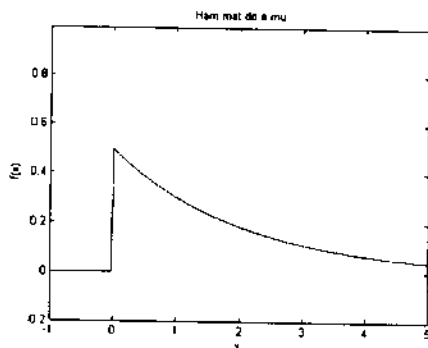
Biến ngẫu nhiên e mũ (exponential) có hàm mật độ và hàm phân bố theo định nghĩa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (3.2.17)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (3.2.18)$$

với a, b là các số thực, $b > 0$.

Đồ thị của hàm mật độ e mũ và hàm phân bố e mũ với $b = 2$ và $a = 0$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biến ngẫu nhiên e mũ được sử dụng để mô tả sự dao động của mức tín hiệu phản xạ từ một vật thể mà radar thu được.

Biến ngẫu nhiên Rayleigh

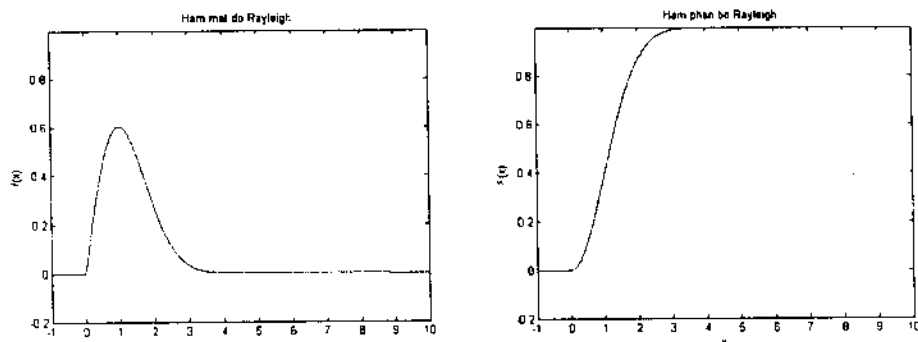
Biến ngẫu nhiên Rayleigh có hàm mật độ và hàm phân bố theo định nghĩa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{b} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (3.2.19)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (3.2.20)$$

với a, b là các số thực, $b > 0$.

Đồ thị của hàm mật độ Rayleigh và hàm phân bố Rayleigh với $b = 1$ và $a = 0$ được cho như hình vẽ dưới đây.



Biến ngẫu nhiên Rayleigh được ứng dụng trong mô tả sự sai lệch ở các hệ thống đo lường. Nó cũng được dùng để mô tả đường bao của một loại nhiễu khi tín hiệu đi qua một bộ lọc thông dải, hoặc kênh truyền có băng thông hữu hạn.

3.2.4. Hàm phân bố và hàm mật độ có điều kiện

Hàm phân bố có điều kiện (conditional distribution) của biến ngẫu nhiên X với điều kiện B cho trước được định nghĩa:

$$F_X(x|B) = P\{X \leq x|B\} = \frac{P\{(X \leq x) \cap B\}}{P(B)} \quad (3.2.21)$$

trong đó $\{(X \leq x) \cap B\}$ là tập hợp tất cả các kết quả s mà $X(s) \leq x$ và $s \in B$

Các tính chất của hàm phân bố có điều kiện:

$$1. F_X(-\infty|B) = 0 \quad (3.2.22a)$$

$$2. F_X(\infty|B) = 1 \quad (3.2.22b)$$

$$3. 0 \leq F_X(x|B) \leq 1 \quad (3.2.22c)$$

$$4. F_X(x_1|B) \leq F_X(x_2|B) \text{ nếu } x_1 < x_2 \quad (3.2.22d)$$

$$5. P\{x_1 < X \leq x_2|B\} = F_X(x_2|B) - F_X(x_1|B) \quad (3.2.22e)$$

$$6. F_X(x+|B) = F_X(x|B) \quad (3.2.22f)$$

Hàm mật độ có điều kiện (conditional density) của biến ngẫu nhiên X với điều kiện B cho trước được định nghĩa:

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx} \quad (3.2.23)$$

Các tính chất của hàm mật độ có điều kiện:

$$1. \quad 0 \leq f_X(x|B) \text{ với mọi } x \quad (3.2.24a)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|B) dx = 1 \quad (3.2.24b)$$

$$3. \quad F_X(x|B) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi|B) d\xi \quad (3.2.24c)$$

$$4. \quad P\{x_1 < X \leq x_2 | B\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\xi|B) d\xi \quad (3.2.24d)$$

Ví dụ: Cho hai hộp có chứa các quả bóng gồm 3 màu đỏ, vàng, xanh cùng kích cỡ. Bảng danh mục các quả bóng trong hộp được cho như sau:

Màu bóng	Hộp		Tổng cộng
	1	2	
Đỏ	5	80	85
Vàng	35	60	95
Xanh	60	10	70
Tổng cộng	100	150	250

Quy tắc thực hiện là lấy ra một quả bóng từ hộp bóng. Định nghĩa các sự kiện như sau:

- B_1 : Bốc một quả bóng từ hộp thứ nhất
- B_2 : Bốc một quả bóng từ hộp thứ hai
- x_1 : Bốc được một quả bóng đỏ
- x_2 : Bốc được một quả bóng vàng
- x_3 : Bốc được một quả bóng xanh

Gán cho các sự kiện x_1, x_2, x_3 các giá trị của biến ngẫu nhiên X lần lượt là $x_1 = 1, x_2 = 2$, và $x_3 = 3$. Cho trước $P(B_1) = 0,2$ và $P(B_2) = 0,8$

Tìm: $f_X(x|B_1), F_X(x|B_1), f_X(x|B_2), F_X(x|B_2)$, và $f_X(x)$

Giải: Từ bảng số liệu ta có:

$$P\{x_1 | B_1\} = \frac{5}{100} \quad P\{x_2 | B_1\} = \frac{35}{100} \quad P\{x_3 | B_1\} = \frac{60}{100}$$

$$P\{x_1 | B_2\} = \frac{80}{150} \quad P\{x_2 | B_2\} = \frac{60}{150} \quad P\{x_3 | B_2\} = \frac{10}{150}$$

dẫn đến: $f_X(x | B_1) = \frac{5}{100}\delta(x-1) + \frac{35}{100}\delta(x-2) + \frac{60}{100}\delta(x-3)$

$$F_X(x | B_1) = \frac{5}{100}u(x-1) + \frac{35}{100}u(x-2) + \frac{60}{100}u(x-3)$$

$$f_X(x | B_2) = \frac{80}{150}\delta(x-1) + \frac{60}{150}\delta(x-2) + \frac{10}{150}\delta(x-3)$$

$$F_X(x | B_2) = \frac{80}{150}u(x-1) + \frac{60}{150}u(x-2) + \frac{10}{150}u(x-3)$$

theo công thức xác suất toàn phần: $P(A) = \sum_{n=1}^N P(A | B_n)P(B_n)$ nếu $B_m \cap B_n = \emptyset$ và $\bigcup_{n=1}^N B_n = S$, trong bài toán này B_1 và B_2 là các sự kiện loại trừ lẫn

nhau nên:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(x_1|B_1)P(B_1) + P(x_1|B_2)P(B_2) \\ &= \frac{5}{100} \cdot 0,2 + \frac{80}{150} \cdot 0,8 = 0,437 \end{aligned}$$

tương tự $P(x_2) = 0,390$

$$P(x_3) = 0,173$$

$$f_X(x) = 0,437\delta(x-1) + 0,390\delta(x-2) + 0,173\delta(x-3)$$

$$F_X(x) = 0,437u(x-1) + 0,390u(x-2) + 0,173u(x-3)$$

3.2.5. Các đặc số của biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng

Đối với biến ngẫu nhiên X , đặc số kỳ vọng được dùng để xem xét trung bình của biến ngẫu nhiên đó. Một số thuật ngữ khác đề cập tới chính đại lượng này là: expectation of X , expected value of X , và statistical average of X .

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là:

$$E[X] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (3.2.25)$$

Trong trường hợp X là biến ngẫu nhiên rời rạc, do $f_X(x) = \sum_{i=1}^N P\{x_i\} \delta(x - x_i)$ nên

$$E[X] = \sum_{i=1}^N x_i P(x_i) \quad (3.2.26)$$

Ví dụ: Tìm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên mũ.

Giải:
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^{\infty} x \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} dx = \frac{e^{\frac{a}{b}}}{b} \int_a^{\infty} x e^{-\frac{x}{b}} dx = a + b$$

Kỳ vọng của hàm số $g(\cdot)$ của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x) dx$$

Trong trường hợp X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì:

$$E[X] = \sum_{i=1}^N g(x_i) P\{x_i\}$$

Ví dụ: Giả sử điện áp rơi trên một điện trở giá trị 1Ω tuân theo phân bố ngẫu nhiên Rayleigh với $a=0$ và $b=5$. Tìm công suất trung bình tiêu tán trên điện trở đó.

Giải: Coi v là biến ngẫu nhiên đại diện cho phân bố của điện áp rơi trên

điện trở đang xét. Hàm mật độ:
$$f_v(v) = \begin{cases} \frac{2v}{5} e^{-\frac{v^2}{5}} & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$$

Năng lượng sinh ra bởi điện áp rơi trên điện trở là: $g(v) = v^2$

Công suất trung bình là:

$$E[g(v)] = E[v^2] = \int_0^{\infty} \frac{2v^3}{5} e^{-\frac{v^2}{5}} dv = 5 \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi} d\xi = 5[W]$$

Moment

- **Moment gốc (moment about origin)**

Khi xét các hàm số $g(X) = X^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) thì kỳ vọng của các hàm số này được gọi là moment gốc của biến ngẫu nhiên X . Ta có định nghĩa cho moment gốc bậc n của biến ngẫu nhiên X :

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (3.2.27)$$

- $m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx$ chính là phần diện tích được bao bởi đồ thị của hàm mật độ và trục hoành, luôn có $m_0 = 1$.
- $m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \bar{X} = E[X]$ chính là kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X .

- **Moment trung tâm (central moment)**

Xét các hàm số $g(X) = (X - \bar{X})^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Moment trung tâm bậc n của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa theo kỳ vọng của các hàm số này:

$$\mu_n = E[(X - \bar{X})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n f_X(x) dx \quad (3.2.28)$$

- $\mu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
- $\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X}) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx - \bar{X} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \bar{X} - \bar{X} = 0$
- Moment trung tâm bậc hai được gọi là phương sai (variance) của X , được ký hiệu là σ_X^2 :

$$\sigma_X^2 = \mu_2 = E[(X - \bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f_X(x) dx \quad (3.2.29)$$

căn bậc hai của phương sai được gọi là độ lệch tiêu chuẩn (standard deviation), ký hiệu là σ_x .

Từ công thức tính kỳ vọng của một hàm số, ta có nhận xét rằng kỳ vọng của một tổ hợp tuyến tính các hàm số bằng tổ hợp tuyến tính của các kỳ vọng của các hàm số đó. Do đó

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E[(X - \bar{X})^2] = E[X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2] = E[X^2] - 2\bar{X}E[X] + \bar{X}^2 \\ &= E[X^2] - \bar{X}^2 = m_2 - m_1^2\end{aligned}\quad (3.2.29a)$$

- Moment trung tâm bậc ba được gọi là xoắn (skew) của X. Nó đặc trưng cho tính bất đối xứng của X. Nếu X có hàm mật độ đối xứng qua kỳ vọng $\bar{X}$ thì tất cả các moment trung tâm bậc lẻ đều bằng 0.

Giá trị được chuẩn hóa $\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$ được gọi là hệ số xoắn (skewness) của biến ngẫu nhiên X.

Hàm đặc tính và hàm khởi tạo moment

• Hàm đặc tính (characteristic function)

Hàm đặc tính của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa bởi công thức:

$$\phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx \quad (3.2.30)$$

Công thức trên tương tự như công thức của phép biến đổi Fourier của hàm mật độ ngoại trừ dấu '+' đứng trước biến số ω . Do đó nếu cho trước $\phi_X(\omega)$, ta hoàn toàn có thể tìm được hàm mật độ của X theo công thức:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(\omega) e^{-j\omega x} d\omega \quad (3.2.31)$$

nói một cách khác có sự tương ứng một - một giữa hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X và hàm đặc tính của nó.

Hàm đặc tính của một biến ngẫu nhiên có những tính chất sau:

- Hàm đặc tính của một biến ngẫu nhiên luôn tồn tại duy nhất.
- Hàm đặc tính có mối liên hệ với các moment gốc theo công thức:

$$m_n = (-j)^n \left. \frac{d^n \phi_X(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \quad (3.2.32)$$

- Hàm đặc tính đạt cực đại tại $\omega = 0$, tại đó giá trị của $\phi_X(\omega)$ bằng 1.

• Hàm khởi tạo moment (moment generating function)

Hàm khởi tạo moment của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa bởi công thức:

$$M_X(v) = E[e^{vX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{vx} dx \quad (3.2.33)$$

Từ các công thức định nghĩa cho hàm đặc tính và hàm khởi tạo moment ta thấy hàm đặc tính chính là hàm khởi tạo moment lấy theo trục ảo (thay $v = j\omega$).

Hàm khởi tạo moment của một biến ngẫu nhiên có những tính chất sau:

- Hàm khởi tạo moment có mối liên hệ với các moment gốc theo công thức:

$$m_n = \left. \frac{d^n M_X(v)}{dv^n} \right|_{v=0} \quad (3.2.34)$$

- Hàm khởi tạo moment có thể không xác định trên toàn bộ miền biến số phức v .

3.3. VECTOR NGẪU NHIÊN

3.3.1. Khái niệm về vector ngẫu nhiên

Xét một không gian mẫu S , trên đó một phần tử s thuộc đại số sigma của S có ảnh qua 2 ánh xạ khác nhau tương ứng với 2 biến ngẫu nhiên khác nhau X và Y lần lượt là x và y . Cặp số thực (x, y) đặc trưng cho sự kiện s thông qua hai ánh xạ $X: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ và $Y: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

Cặp (x, y) tương ứng với một điểm ngẫu nhiên (random point) trên toạ độ trục giao Đêcác (Cartesian coordinate system). Cặp giá trị này được coi là một vector ngẫu nhiên (vector random variable hay random vector).

Mặt phẳng chứa tất cả các điểm (x, y) thông qua 2 phép ánh xạ nói trên có thể coi như một không gian mẫu mới. Không gian mẫu này được gọi với các

tên: không gian mẫu miền giá trị (range sample space), hay không gian tích (two-dimensional product space), hoặc không gian mẫu giao (joint sample space). Chúng ta thống nhất ký hiệu không gian mẫu mới này là S_j .

Xét các sự kiện A và B được định nghĩa là: $A = \{X \leq x_0\}$ và $B = \{Y \leq y_0\}$, thế thì sự kiện A sẽ tương ứng với các điểm trên phần nửa mặt phẳng $x \leq x_0$ và sự kiện B sẽ tương ứng với các điểm trên phần nửa mặt phẳng $y \leq y_0$.

Sự kiện giao hay giao giữa hai sự kiện A và B, ký hiệu là $A \cap B$, là tập hợp $\{X \leq x \text{ và } Y \leq y\}$ và được viết là $\{X \leq x, Y \leq y\}$.

Mở rộng ra khi xét đến N ánh xạ riêng biệt để thu được N biến ngẫu nhiên riêng biệt $X_1, X_2, \dots, X_N$, không gian đích lúc này là một không gian N chiều và mỗi phần tử trong không gian mẫu này là một vector N chiều.

3.3.2. Hàm phân bố giao và hàm mật độ giao

- **Hàm phân bố giao (joint distribution function)**

Hàm phân bố giao được định nghĩa:

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} \quad (3.3.1)$$

Trường hợp X và Y đều là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

- Hàm số đặc trưng cho X nhận N giá trị rời rạc $x_1, x_2, \dots, x_N$
- Hàm số đặc trưng cho Y nhận M giá trị rời rạc $y_1, y_2, \dots, y_M$

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) u(x - x_n) u(y - y_m) \quad (3.3.2)$$

Mở rộng cho biến ngẫu nhiên N chiều, ta có định nghĩa:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N\} \quad (3.3.3)$$

Các tính chất của hàm phân bố giao:

$$1. F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0, F_{X,Y}(-\infty, y) = 0, F_{X,Y}(x, -\infty) = 0 \quad (3.3.4a)$$

$$2. F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1 \quad (3.3.4b)$$

$$3. 0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1 \quad (3.3.4c)$$

$$4. F_{X,Y}(x,y) \text{ là hàm đồng biến theo cả } x \text{ và } y \quad (3.3.4d)$$

$$5. P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) \quad (3.3.4e)$$

$$6. F_{X,Y}(x, \infty) = F_X(x) \quad \text{và} \quad F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y) \quad (3.3.4f)$$

Ở tính chất 6, các hàm số $F_X(x)$ và $F_Y(y)$ được gọi là các hàm phân bố biên (marginal distribution). Chúng là các hàm phân bố giao với một trong 2 biến bằng ∞ .

• Hàm mật độ giao (joint density function)

Hàm mật độ giao được định nghĩa:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.3.5)$$

Trường hợp X và Y đều là các biến ngẫu nhiên rời rạc:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n, y_m) \delta(x - x_n) \delta(y - y_m) \quad (3.3.6)$$

Mở rộng cho biến ngẫu nhiên N chiều, ta có định nghĩa:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial^N F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} \quad (3.3.7)$$

Các tính chất của hàm mật độ giao:

$$1. 0 \leq f_{X,Y}(x, y) \text{ với mọi } x, y \quad (3.3.8a)$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1 \quad (3.3.8b)$$

$$3. F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.3.8c)$$

$$4. F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1$$

$$\text{và } F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.3.8d)$$

$$5. \quad P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad (3.3.8e)$$

$$6. \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad \text{và} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx \quad (3.3.8f)$$

- Đối với không gian mẫu N chiều, tính chất 3 được mở rộng như sau:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_N} f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N \quad (3.3.8g)$$

- Các hàm trong tính chất 6 được gọi là các hàm mật độ biên (marginal density). Chúng có mối liên hệ với các hàm phân bố biên theo công thức:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \text{và} \quad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \quad (3.3.9)$$

3.3.3. Độc lập thống kê

Ở phần trước chúng ta đã định nghĩa khái niệm về hai sự kiện là độc lập thống kê nếu sự xuất hiện của sự kiện này không ảnh hưởng đến sự kiện còn lại. Điều đó có nghĩa xác suất giao của hai sự kiện bằng tích các xác suất của từng sự kiện.

Trong phần này chúng ta có khái niệm về hai biến ngẫu nhiên là độc lập thống kê. Hai biến ngẫu nhiên là độc lập thống kê nếu và chỉ nếu:

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\} \quad (3.3.10)$$

Từ đó dẫn đến các tính chất sau của hai biến ngẫu nhiên độc lập thống kê:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{và} \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (3.3.11)$$

Tiếp theo ta xét đến các hàm phân bố và hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên là tổng của 2 biến ngẫu nhiên độc lập thống kê. Giả sử W là biến ngẫu nhiên tổng của 2 biến ngẫu nhiên độc lập thống kê X và Y tức là:

$$W(s) = X(s) + Y(s) \quad (3.3.12)$$

với s là một sự kiện bất kỳ trong không gian mẫu ban đầu. Từ đây dẫn đến

$$F_W(w) = P\{W \leq w\} = P\{X+Y \leq w\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{w-y} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \left[\int_{-\infty}^{w-y} f_X(x) dx \right] dy \quad (3.3.13)$$

$$\text{suy ra } f_w(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(w-y) dy = (f_X * f_Y)(w) \quad (3.3.14)$$

với '*' là ký hiệu của phép tính tích chập (convolution).

Mở rộng cho N biến ngẫu nhiên độc lập thống kê $x_1, x_2, \dots, x_N$ có:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad (3.3.15)$$

thì ta có hàm mật độ của biến ngẫu nhiên tổng là

$$f_Y(y) = (f_{X_1} * f_{X_2} * \dots * f_{X_N})(y) \quad (3.3.16)$$

3.3.4. Định lý giới hạn tập trung

Hiểu theo nghĩa rộng, định lý giới hạn tập trung (central limit theorem) phát biểu rằng *hàm phân bố của tổng một số lượng lớn các biến ngẫu nhiên sẽ tiến tới phân bố Gauss.*

Định lý này bị ràng buộc bởi điều kiện các biến ngẫu nhiên là độc lập thống kê và chỉ đúng với một số trường hợp các biến ngẫu nhiên không phải độc lập thống kê. Tuy nhiên các ứng dụng của định lý này hầu hết nằm trong trường hợp các biến ngẫu nhiên là độc lập thống kê hoặc được giả sử là chúng độc lập thống kê.

Trong trường hợp các biến ngẫu nhiên có các hàm phân bố khác nhau thì tổng:

$$Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad (3.3.17)$$

$$\text{sẽ có kỳ vọng là } \bar{Y}_N = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_N \quad (3.3.18)$$

$$\text{và phương sai là } \sigma_{Y_N}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_N}^2 \quad (3.3.19)$$

biến ngẫu nhiên Y_N sẽ có hàm phân bố tiệm cận đến hàm phân bố Gauss khi $N \rightarrow \infty$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện đủ sau:

- $\sigma_{X_i}^2 > B_1$ $i = 1, 2, \dots, N$
- $E|X_i - \bar{X}_i|^3 < B_2$ $i = 1, 2, \dots, N$

với B_1, B_2 là các số thực dương. Các điều kiện này nhằm đảm bảo rằng không có biến ngẫu nhiên thành phần nào là chiếm ưu thế trong tổng các biến ngẫu nhiên.

Định lý chỉ ra rằng hàm phân bố của biến ngẫu nhiên tổng tiến tới hàm phân bố Gauss. Tất nhiên là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên rời rạc là tổ hợp tuyến tính của các xung Dirac, tuy nhiên ta cũng thấy rằng đường bao của các hàm số này cũng tiệm cận tới hàm mật độ Gauss.

Một trường hợp riêng rất được quan tâm là: các biến ngẫu nhiên thành phần là độc lập thống kê, đồng thời chúng có **cùng phân bố và mật độ**, $\bar{X}_i = \bar{X}$, $\sigma_{X_i} = \sigma_X$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$. thì $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ sẽ tiệm cận đến biến ngẫu nhiên Gauss khi $N \rightarrow \infty$. Điều này tương đương với mệnh đề sau:

$$W_N = \frac{Y_N - \bar{Y}_N}{\sigma_{Y_N}} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})}{\sqrt{N}\sigma_X} \quad (3.3.20)$$

là biến ngẫu nhiên Gauss có kỳ vọng bằng 0 và phương sai bằng 1 hay

$$f_{W_N}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \quad (3.3.21)$$

Định lý được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng $\lim \phi_{W_N}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ với $\phi_{W_N}(\omega)$ là hàm đặc tính của W_N .

3.3.5. Các đặc số của vector ngẫu nhiên

Kỳ vọng

Nếu $g(X, Y)$ là một hàm số của 2 biến ngẫu nhiên X và Y , kỳ vọng của $g(., .)$

$$\text{định nghĩa là: } \bar{g} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (3.3.22)$$

Mở rộng cho biến ngẫu nhiên N chiều, ta có định nghĩa:

$$\begin{aligned}\bar{g} &= E[g(X_1, X_2, \dots, X_N)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_N) f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N\end{aligned}\quad (3.3.23)$$

Ví dụ: Tìm kỳ vọng của hàm số g là tổ hợp tuyến tính của N biến ngẫu nhiên.

Giải: Có
$$g(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i$$

với α_i là các hằng số, $i = 1, 2, \dots, N$

Kỳ vọng:

$$\begin{aligned}\bar{g} &= E\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N\end{aligned}$$

mà

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \dots \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N \right] dx_i \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_i}(x_i) dx_i = E[X_i]\end{aligned}$$

tương tự:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N &= E[X_2] \\ \dots \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_N f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N &= E[X_N]\end{aligned}$$

nên

$$E\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i\right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i E[X_i]$$

Kết luận là kỳ vọng của tổ hợp tuyến tính của N biến ngẫu nhiên bằng tổ hợp tuyến tính của kỳ vọng của N biến ngẫu nhiên.

Moment

- **Moment gốc (moment about origin)**

Moment gốc của vector ngẫu nhiên (X, Y) được định nghĩa là:

$$m_{nk} = E[X^n Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (3.3.24)$$

- $n + k$ được gọi là bậc của moment
- m_{n0} là moment m_n của biến ngẫu nhiên X
- m_{0k} là moment m_k của biến ngẫu nhiên Y

- $m_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (3.3.25)$

được gọi là tương quan (correlation) của 2 biến ngẫu nhiên X và Y . Ký hiệu $R_{XY} = m_{11}$.

- Nhận xét rằng R_{XY} thể hiện mức độ phụ thuộc giữa biến ngẫu nhiên này và biến ngẫu nhiên kia. Trường hợp X và Y là các thành phần của một vector ngẫu nhiên thì R_{XY} thể hiện mức độ phụ thuộc giữa các biến ngẫu nhiên với nhau.
- Nếu $R_{XY} = E[X]E[Y]$ thì quan hệ giữa X và Y được gọi là không có tính tương quan (uncorrelated)
Dễ dàng rút ra kết luận rằng nếu 2 biến ngẫu nhiên độc lập thống kê thì giữa chúng không có tính tương quan, điều ngược lại chưa chắc đã đúng.
- Nếu $R_{XY} = 0$ thì X và Y là trực giao (orthogonal).

Moment trung tâm (central moment)

Moment trung tâm của vector ngẫu nhiên (X, Y) được định nghĩa là:

$$\mu_{nk} = E[(X - \bar{X})^n (Y - \bar{Y})^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n (y - \bar{Y})^k f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (3.3.26)$$

- $\mu_{20} = \sigma_X^2$ là phương sai của X
 - $\mu_{02} = \sigma_Y^2$ là phương sai của Y
 - $\mu_{11} = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) f_{X,Y}(x,y) dx dy$
- (3.3.27)

được gọi là hiệp biến (covariance) của 2 biến ngẫu nhiên X và Y.
Ký hiệu $C_{XY} = \mu_{11}$

Hiệp biến có mối quan hệ với tương quan và kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên theo công thức

$$C_{XY} = R_{XY} - E[X]E[Y] \quad (3.3.28)$$

- Nhận xét rằng C_{XY} thể hiện mức độ tương đồng giữa biến ngẫu nhiên này và biến ngẫu nhiên kia. Trường hợp X và Y là các thành phần của một vector ngẫu nhiên thì C_{XY} thể hiện mức độ tương đồng giữa các biến ngẫu nhiên với nhau. Nói một cách cụ thể, hai biến ngẫu nhiên có hiệp biến càng nhỏ thì tính tương đồng càng cao hay hàm phân bố (hay phân bố biên) càng gần như giống nhau (có sự sai khác rất nhỏ).
- Nếu $C_{XY} = 0$ thì X và Y không có tính tương quan
- Nếu $C_{XY} = -E[X]E[Y]$ thì X và Y là trực giao
- Giá trị $\rho = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$

$$(3.3.29)$$

được gọi là hệ số hiệp biến (covariance coefficient) của X và Y, $-1 \leq \rho \leq 1$ thể hiện mức độ tương quan giữa X và Y.

Mở rộng cho biến ngẫu nhiên N chiều, ta có định nghĩa:

$$\begin{aligned} \mu_{n_1 n_2 \dots n_N} &= E[(X_1 - \bar{X}_1)(X_1 - \bar{X}_2) \dots (X_N - \bar{X}_N)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - \bar{X}_1)(X_1 - \bar{X}_2) \dots (X_N - \bar{X}_N) f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \end{aligned}$$

(3.3.30)

Ví dụ: Tìm phương sai của tổ hợp tuyến tính của N biến ngẫu nhiên.

Giải: Có $X = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i$ với α_i là các hằng số, $i = 1, 2, \dots, N$

dẫn đến $\bar{X} = E\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i\right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i E[X_i] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{X}_i$

$$X - \bar{X} = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{X}_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i (X_i - \bar{X}_i)$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[(X - \bar{X})^2] = E\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i (X_i - \bar{X}_i) \sum_{j=1}^N \alpha_j (X_j - \bar{X}_j)\right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j E(X_i - \bar{X}_i) E(X_j - \bar{X}_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j C_{X_i X_j} \end{aligned}$$

trong trường hợp đặc biệt nếu các biến ngẫu nhiên thành phần là không tương quan từng đôi một thì

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \sigma_{X_i}^2$$

Hàm đặc tính của vector ngẫu nhiên

Cho 2 biến ngẫu nhiên X và Y, hàm đặc tính (joint characteristic function) của vector ngẫu nhiên (X, Y) được định nghĩa bởi công thức:

$$\phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) = E[e^{(j\omega_1 X + j\omega_2 Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) e^{(j\omega_1 X + j\omega_2 Y)} dx dy \quad (3.3.31)$$

Công thức trên tương tự như công thức của phép biến đổi Fourier 2 chiều của hàm mật độ giao ngoại trừ dấu '-' đứng trước các biến số ω_1 và ω_2 . Do đó hàm mật độ giao có thể được tính từ hàm đặc tính theo công thức:

$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) e^{-(j\omega_1 X + j\omega_2 Y)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.3.32)$$

Trong các trường hợp cố định các biến số $\omega_1 = 0$ và $\omega_2 = 0$, ta có các hàm đặc tính biên: $\phi_X(\omega_1) = \phi_{X,Y}(\omega_1, 0)$ và $\phi_Y(\omega_2) = \phi_{X,Y}(0, \omega_2)$ (3.3.33)

Hàm đặc tính có mối liên hệ với các moment gốc theo công thức:

$$m_{nk} = (-j)^{n+k} \frac{\partial^{n+k} \phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^n \partial \omega_2^k} \Big|_{\omega_1=0, \omega_2=0} \quad (3.3.34)$$

3.3.6. Vector ngẫu nhiên Gauss

- Vector ngẫu nhiên Gauss 2 chiều (bivariate Gaussian)

Vector ngẫu nhiên Gauss 2 chiều có hàm mật độ được định nghĩa theo công thức

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\bar{X})^2}{\sigma_X^2} - \frac{(x-\bar{X})(y-\bar{Y})}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\bar{Y})^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\} \quad (3.3.35)$$

Một số nhận xét về vector ngẫu nhiên Gauss 2 chiều:

- Hàm mật độ đạt cực đại tại $(\bar{X}, \bar{Y})$

$$f_{X,Y}(x,y) \leq f_{X,Y}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \quad (3.3.35a)$$

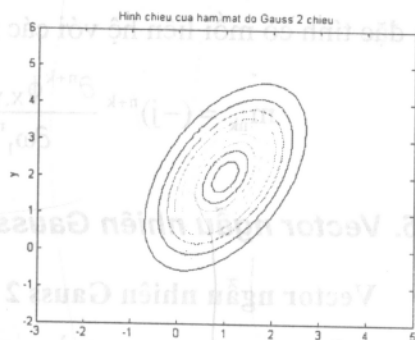
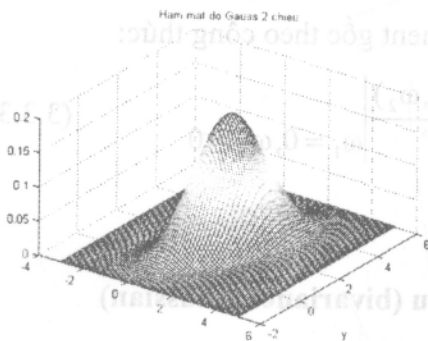
- Nếu $\rho = 0$ hay giữa X và Y không có tính tương quan thì

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$\text{với } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma_X^2}} \text{ và } f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(y-\bar{Y})^2}{2\sigma_Y^2}} \quad (3.3.35b)$$

hay hai biến ngẫu nhiên đều là Gauss mà chúng không tương quan thì tương đương với chúng là độc lập thống kê.

Hình vẽ dưới thể hiện phối cảnh của vector ngẫu nhiên Gauss 2 và hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy của tọa độ Đề các.



• Vector ngẫu nhiên Gauss N chiều

Vector ngẫu nhiên Gauss N chiều là vector ngẫu nhiên có hàm mật độ theo công thức sau:

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |C_X|}} \exp \left\{ -\frac{[x - \bar{X}]^T [C_X]^{-1} [x - \bar{X}]}{2} \right\} \quad (3.3.36)$$

với

$$[x - \bar{X}] = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{X}_1 \\ x_2 - \bar{X}_2 \\ \vdots \\ x_N - \bar{X}_N \end{bmatrix}$$

và

$$[C_X] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận hiệp biến

Một số tính chất của biến ngẫu nhiên Gauss được rút ra như sau:

- Vector ngẫu nhiên Gauss hoàn toàn được xác định bởi các moment bậc 1 và bậc 2.
- Nếu giữa các biến ngẫu nhiên Gauss là không tương quan thì chúng độc lập thống kê.
- Tác động một ánh xạ tuyến tính lên vector ngẫu nhiên Gauss ta cũng được một vector ngẫu nhiên Gauss.

3.4. CÁC QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

3.4.1. Đặt vấn đề

Trong các phần trước, chúng ta đã quan tâm đến các biến ngẫu nhiên và các vector ngẫu nhiên, đã làm rõ các khái niệm liên quan đến các hàm phân bố, hàm mật độ, các đặc số quan trọng và hàm đặc tính. Về bản chất, biến ngẫu nhiên và vector ngẫu nhiên là một ánh xạ từ đại số sigma của không gian mẫu vào tập số thực hoặc một không gian vector. Nói cách khác, mỗi một sự kiện thuộc đại số sigma của không gian mẫu được đặc trưng bởi một giá trị thực hoặc một vector cụ thể, xác suất xuất hiện của tất cả các sự kiện được quan tâm được đặc trưng bởi hàm phân bố hoặc hàm mật độ trên không gian vector.

Đối với các ngành khoa học, đặc biệt trong khoa học kỹ thuật, chúng ta thường gặp phải một hàm dữ liệu liên tục hoặc dãy dữ liệu rời rạc mà giá trị của chúng tại một thời điểm cụ thể là hoàn toàn ngẫu nhiên. Việc đặc trưng hoá các dữ liệu này và xem xét các thông số thống kê của chúng là cần thiết, cả trên khía cạnh phân tích lẫn thiết kế (ước lượng, dự đoán, và quyết định).

3.4.2. Khái niệm về quá trình ngẫu nhiên

Một quá trình ngẫu nhiên (random process hay stochastic process) là ánh xạ từ một phần tử s_0 thuộc không gian mẫu S nào đó vào một hàm số $x_0(t)$. Mặt khác, ta cũng có thể nói, quá trình ngẫu nhiên là một tập các biến ngẫu nhiên X thay đổi theo thời gian t . Thông thường, một quá trình ngẫu nhiên được ký hiệu là $X(t)$, còn $x(t)$ thể hiện cho một hàm số ứng với một sự kiện cụ thể; $x(t)$ được gọi là một thể hiện (ensemble hay realization) của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Tại một thời điểm cụ thể t_0 , $X(t_0)$ trở thành một biến ngẫu nhiên.

Các quá trình ngẫu nhiên có thể được phân loại theo tính liên tục hay rời rạc như sau:

- Biến ngẫu nhiên tại tất cả các thời điểm có thể được xét đến nhận các giá trị liên tục theo biến thời gian liên tục, khi đó gọi là “quá trình ngẫu nhiên liên tục” (continuous random process)
- Biến ngẫu nhiên tại tất cả các thời điểm có thể được xét đến chỉ nhận các giá trị rời rạc theo biến thời gian liên tục, khi đó gọi là “quá trình ngẫu nhiên rời rạc” (discrete random process)

- Biến ngẫu nhiên nhận các giá trị liên tục nhưng chỉ xét tại các thời điểm rời rạc, khi đó gọi là “dãy ngẫu nhiên liên tục” (continuous random sequence)
- Cả giá trị của biến ngẫu nhiên và thời gian đều rời rạc, khi đó gọi là “dãy ngẫu nhiên rời rạc” (discrete random sequence).

3.4.3. Các hàm phân bố và hàm mật độ của quá trình ngẫu nhiên

Nhắc lại rằng ứng với một thời điểm cụ thể t_1 là đang xét đến một biến ngẫu nhiên $X(t_1)$ nằm trong quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Hàm phân bố bậc 1 của quá trình ngẫu nhiên tại thời điểm t_1 được định nghĩa là:

$$F_X(x_1; t_1) = P(\{X(t_1) \leq x_1\}) \quad (4.4.1)$$

Tương tự có định nghĩa hàm phân bố bậc 2:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}) \quad (4.4.2)$$

và khi xét tại N thời điểm phân biệt, ta có hàm phân bố bậc N :

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) \\ = P(\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_N) \leq x_N\}) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Các hàm mật độ được định nghĩa theo các hàm phân bố như sau:

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{dF_X(x_1; t_1)}{dx_1} \quad (4.4.4)$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.4.5)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\partial^N F_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} \quad (4.4.6)$$

3.4.4. Hai quá trình ngẫu nhiên độc lập thống kê

Xét hai quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$. Với quá trình $X(t)$, xét tại N thời điểm thu được một vector ngẫu nhiên với N thành phần $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$. Với quá trình $Y(t)$, xét tại M thời điểm cũng được một vector ngẫu nhiên với M thành phần $Y(t_1'), Y(t_2'), \dots, Y(t_M')$.

Hai quá trình $X(t)$ và $Y(t)$ là độc lập thống kê nếu và chỉ nếu 2 vector ngẫu nhiên nói trên là độc lập thống kê theo bất cứ cách chọn 2 bộ thời điểm $t_1, t_2,$

..., t_N và $t_1', t_2', \dots, t_M'$ như thế nào, điều đó có nghĩa:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M; t_1, t_2, \dots, t_N, t_1', t_2', \dots, t_M') \\ = f_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N).f_Y(y_1, y_2, \dots, y_M; t_1', t_2', \dots, t_M') \quad (4.4.7)$$

3.4.5. Quá trình dừng

Về mặt khái quát, quá trình dừng (stationary process) là quá trình mà các thuộc tính thống kê của nó (bao gồm kỳ vọng, phương sai, tương quan giữa hai thời điểm, hoặc thậm chí hàm mật độ và hàm phân bố giao giữa nhiều thời điểm) không đổi theo thời gian. Tuy nhiên nói một cách chặt chẽ, các quá trình dừng được định nghĩa ở các mức độ khác nhau tương ứng với tính chất không thay đổi của hàm mật độ theo thời gian tuyệt đối. Quá trình là *dừng theo nghĩa hẹp* nếu nó là một quá trình dừng với mọi mức độ.

- **Quá trình dừng bậc 1**

Một quá trình là dừng bậc 1 nếu:

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + \Delta) \quad (4.4.8)$$

với mọi cách chọn thời điểm t_1 và khoảng dịch thời gian Δ . Điều này có nghĩa quá trình dừng bậc 1 nếu hàm mật độ bậc 1 không thay đổi theo thời gian t . Nếu xét tại một thời điểm t_1 thì:

$$E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1) dx_1 \quad (4.4.9)$$

cũng không đổi theo thời gian hay $E[X(t_1)] = \bar{X} = \text{constant}$

- **Quá trình dừng bậc 2**

Một quá trình là dừng bậc 2 nếu:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \quad (4.4.10)$$

với mọi cách chọn các thời điểm t_1, t_2 và khoảng dịch thời gian Δ .

Rõ ràng là quá trình dừng bậc 2 cũng bao hàm cả quá trình dừng bậc 1.

Từ đây ta thấy rằng hàm mật độ bậc 2 không hề phụ thuộc vào các thời điểm tuyệt đối t_1, t_2 mà chỉ phụ thuộc vào khoảng cách thời gian tương đối $\tau = t_2 - t_1$. Điều đó có nghĩa hàm mật độ bậc 2 của quá trình dừng bậc 2 chỉ phụ thuộc vào 3 biến số: x_1, x_2 và τ .

Từ đây ta thấy hàm tự tương quan:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (4.4.11)$$

chỉ còn là hàm số của một biến thời gian tương đối τ hay:

$$R_{xx}(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = R_{xx}(\tau) \quad (4.4.11a)$$

• Quá trình dừng theo nghĩa rộng (WSS)

Trong nhiều trường hợp, chúng ta chỉ cần quan tâm đến tính chất của các đặc số thống kê bậc 2 của một quá trình là đủ để giải bài toán một cách tương đối đơn giản.

Quá trình là dừng theo nghĩa rộng (wide sense stationary – WSS) nếu nó thoả mãn cả 2 điều kiện sau đây:

- Kỳ vọng tại các thời điểm khác nhau là không đổi:
 $E[X(t)] = \bar{X} = \text{constant}$
- Hàm tự tương quan chỉ phụ thuộc vào khoảng thời gian tương đối giữa 2 thời điểm được xét đến:

$$E[X(t)X(t + \tau)] = R_{xx}(\tau)$$

Nhận xét rằng một quá trình là dừng bậc 2 thì cũng là quá trình WSS, điều ngược lại chưa chắc đã đúng. Một quá trình WSS cũng là dừng bậc 1, điều ngược lại chưa chắc đã đúng.

Ví dụ: Một quá trình ngẫu nhiên được xác định theo công thức sau:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

A và ω_0 là các hằng số, Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng $(0, 2\pi)$.

Xét tính dừng của quá trình ngẫu nhiên nói trên.

Giải: Hàm phân bố của biến ngẫu nhiên Θ là:

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \theta \text{ còn lại} \end{cases}$$

Xét kỳ vọng và hàm tự tương quan của quá trình ngẫu nhiên:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} A \cos(\omega_0 t + \theta) d\theta = 0$$

là hằng số

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] = E[A \cos(\omega_0 t + \Theta) A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau)] + \frac{A^2}{2} \underbrace{E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)]}_{=0} \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

không phụ thuộc vào biến thời gian tuyệt đối t

Từ đó dẫn đến $X(t)$ là quá trình dừng theo nghĩa rộng WSS.

• Quá trình dừng chặt chẽ bậc N

Quá trình $X(t)$ là dừng chặt chẽ bậc N nếu:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta, \dots, t_N + \Delta) \quad (4.4.12)$$

với mọi cách chọn các thời điểm $t_1, t_2, \dots, t_N$ và khoảng dịch thời gian Δ .

Thông thường khi xét đến các mô hình, việc giả sử hoặc lập luận rằng một quá trình là dừng theo nghĩa rộng đủ đảm bảo khả năng kiểm soát được về mặt toán học. Việc đòi hỏi quá trình dừng là chặt chẽ hơn đôi khi làm bài toán phức tạp, khó kiểm soát.

• Tương quan giữa hai quá trình

Hai quá trình $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là dừng đối với nhau nếu hàm tương quan chéo $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$ chỉ phụ thuộc vào khoảng thời gian tương đối $\tau = t_2 - t_1$ tức là:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] = R_{XY}(\tau) \quad (4.4.13)$$

3.4.6. Trung bình theo thời gian và quá trình ergodic

- Trung bình theo thời gian

Trung bình theo thời gian là một đại lượng được định nghĩa là:

$$A[.] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [.] dt \quad (4.4.14)$$

Đối với một thể hiện cụ thể $x(t)$ của một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$, trung bình theo thời gian của nó là:

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (4.4.15)$$

Hàm tự tương quan theo thời gian được định nghĩa là:

$$\mathfrak{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (4.4.16)$$

Rõ ràng là theo các định nghĩa ở trên, với $x(t)$ là một thể hiện của $X(t)$, $\bar{x}$ là một giá trị cụ thể và $\mathfrak{R}_{xx}(\tau)$ là một hàm số. Khi xét đến tất cả các thể hiện của quá trình ngẫu nhiên hay thay $x(t)$ bằng $X(t)$, trung bình theo thời gian trở thành một biến ngẫu nhiên và hàm tự tương quan theo thời gian trở thành một quá trình ngẫu nhiên.

- Quá trình Ergodic

Trong trường hợp $X(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên theo nghĩa rộng – WSS thì kỳ vọng của trung bình theo thời gian sẽ bằng kỳ vọng của quá trình ngẫu nhiên và kỳ vọng của hàm tự tương quan theo thời gian sẽ bằng hàm tự tương quan của quá trình. Biểu diễn toán học là:

$$E[\bar{x}] = \bar{X} \quad (4.4.17)$$

$$E[\mathfrak{R}_{xx}(\tau)] = R_{xx}(\tau) \quad (4.4.18)$$

Ta đi vào một lớp các quá trình có trung bình theo thời gian là một hằng số (không còn là một biến ngẫu nhiên) và hàm tự tương quan theo thời gian là một hàm số theo khoảng sai khác thời gian tương đối τ (không còn là quá trình ngẫu nhiên). Lớp các quá trình như vậy được gọi là các quá trình

ergodic. Biểu diễn toán học thì quá trình ergodic là quá trình có:

$$\bar{x} = \bar{X} = \text{hằng số} \quad (4.4.19)$$

$$\mathfrak{R}_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) \quad (4.4.20)$$

Một quá trình ergodic hiển nhiên đã là một quá trình dừng theo nghĩa rộng nhưng đã bị ràng buộc bởi các điều kiện chặt chẽ hơn rất nhiều. Trong các bài toán kỹ thuật, việc giả sử một quá trình là ergodic cho phép tính kỳ vọng và hàm tương quan dựa trên trung bình theo thời gian và tương quan theo thời gian. Việc tính toán này đơn thuần chỉ dựa trên các giá trị của một thể hiện của quá trình tại thời điểm hiện tại và trong quá khứ.

Ví dụ: Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A$ với A là một biến ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng $(0,1)$.

$X(t)$ là một quá trình dừng theo nghĩa rộng, tuy nhiên đó không phải là một quá trình ergodic. Cụ thể mỗi một thể hiện của $X(t)$ có thể là một đường thẳng và trung bình theo thời gian của các thể hiện đó rất khác xa nhau.

• Hai quá trình ergodic đối với nhau

Hai quá trình ngẫu nhiên là ergodic đối với nhau nếu bản thân mỗi quá trình là ergodic và chúng thoả mãn thêm điều kiện sau:

$$\mathfrak{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt = R_{xy}(\tau) \quad (4.4.21)$$

3.4.7. Các hàm tương quan và hàm hiệp biến

Ở phần trước, quá trình dừng theo nghĩa rộng được định nghĩa dựa trên hàm tương quan. Phần này sẽ đi sâu vào các tính chất của chúng.

• Hàm tự tương quan và các tính chất

Hàm tự tương quan (auto-correlation) của một quá trình $X(t)$ được định nghĩa là:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$\text{hay} \quad R_{xx}(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (4.4.22)$$

là một hàm số với hai biến số. Nếu $X(t)$ là dừng theo nghĩa rộng, hàm tự tương quan chỉ phụ thuộc vào giá trị sai khác thời gian tương đối, hay nói

cách khác là hàm số của biến số là đại lượng sai khác giữa 2 thời điểm được xét đến theo công thức:

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \quad (4.4.23)$$

Hàm tự tương quan của một quá trình WSS có các tính chất sau:

$$1. \quad R_{xx}(0) = E[X^2(t)] \quad (4.4.24a)$$

điều này là hiển nhiên được suy ra từ công thức định nghĩa.

$$2. \quad R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad (4.4.24b)$$

$$\text{Thực vậy: } R_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t-\tau)X(t)] = R_{xx}(-\tau)$$

Nói cách khác, hàm tự tương quan của một quá trình dừng là hàm chẵn.

$$3. \quad |R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) \quad (4.4.24c)$$

Thực vậy, ta luôn có:

$$E[(X(t) \pm X(t+\tau))^2] \geq 0$$

$$\text{hay} \quad E[X^2(t)] + E[X^2(t+\tau)] \pm 2E[X(t)X(t+\tau)] \geq 0$$

$$\text{tương đương: } 2R_{xx}(0) \pm 2R_{xx}(\tau) \geq 0$$

$$\text{dẫn đến} \quad |R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

4. Nếu $E[X(t)] \neq 0$ và $X(t)$ không có thành phần tuần hoàn nào cả thì

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \{E[X(t)]\}^2 = \bar{X}^2 \quad (4.4.24d)$$

5. Nếu $X(t)$ có chứa một thành phần tuần hoàn thì $R_{xx}(\tau)$ cũng có chứa thành phần tuần hoàn với chu kỳ đó

Ở đây chúng ta có thể đưa ra ví dụ cho tính chất 5 này

$$\text{Giả sử} \quad X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t)$$

A và ω_0 là các hằng số, Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng $(0, 2\pi)$.

$N(t)$ là một quá trình WSS và độc lập với Θ

$$\begin{aligned}
R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\
&= E[\{A \cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t)\} \{A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta) + N(t + \tau)\}] \\
&= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)] + E[A \cos(\omega_0 t + \Theta)N(t + \tau)] \\
&\quad + E[A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)N(t)] + E[N(t)N(t + \tau)] \\
&= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) + R_{NN}(\tau)
\end{aligned}$$

Tức là $X(t)$ là một quá trình WSS và $R_{XX}(\tau)$ cũng có chứa thành phần tuần hoàn với tần số góc ω_0 .

6. $R_{XX}(\tau)$ không thể có dạng tùy ý, cụ thể nó không thể có dạng:

- bằng phẳng ở đỉnh
- đường thẳng đứng hoặc có các điểm gián đoạn

Bởi lẽ từ tính đối xứng của hàm tự tương quan $R_{XX}(\tau)$, biến đổi Fourier của hàm tự tương quan là:

$$\mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos(j\omega\tau) d\tau \geq 0$$

nên không thể có các tính chất như đã liệt kê ở trên, đó là những tính chất chỉ khi phổ của $R_{XX}(\tau)$ có phần âm.

Ví dụ: Cho $R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1 + 6\tau}$, tìm phương sai σ_X^2

Giải:

Theo tính chất 4: $\{E[X(t)]\}^2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{XX}(\tau) = 25$

Theo tính chất 1: $E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = 29$

Vậy: $\sigma_X^2 = E[X^2(t)] - \{E[X(t)]\}^2 = 4$

• Hàm tương quan chéo và các tính chất

Cho $X(t)$ và $Y(t)$ là 2 quá trình ngẫu nhiên, hàm tương quan chéo (cross-correlation) của 2 quá trình ngẫu nhiên là:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (4.4.25)$$

Nếu $X(t)$ và $Y(t)$ là 2 quá trình dừng đối với nhau thì hàm tương quan chéo chỉ phụ thuộc vào giá trị sai khác thời gian tương đối giữa 2 thời điểm được xét đến hay:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] = R_{XY}(\tau) \quad (4.4.26)$$

Trường hợp $R_{XY}(t, t + \tau) = 0$ thì 2 quá trình là trực giao (orthogonal).

Trường hợp $X(t)$ và $Y(t)$ là độc lập thống kê và cả 2 quá trình đều là dừng theo nghĩa rộng thì:

$$R_{XY}(\tau) = \overline{XY} = \text{hằng số}$$

Hàm tương quan chéo của hai quá trình là dừng đối với nhau có các tính chất sau:

$$1. \quad R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau) \quad (4.4.27a)$$

$$2. \quad |R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)} \quad (4.4.27b)$$

3. Từ đó dẫn đến bất đẳng thức sau:

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)] \quad (4.4.27c)$$

Ví dụ: Xét 2 quá trình

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$Y(t) = B \cos(\omega_0 t) - A \sin(\omega_0 t)$$

với ω_0 là các hằng số,

A và B là các biến ngẫu nhiên có cùng kỳ vọng bằng 0 và có cùng phương sai σ^2 , A và B là không tương quan.

Chứng minh rằng $X(t)$ và $Y(t)$ là dừng đối với nhau.

Giải:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t + \tau) &= E[X(t)Y(t + \tau)] \\ &= E\{ \{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)\} \{B \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau) - A \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau)\} \} \\ &= E[AB \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau)] + E[B^2 \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E[A^2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau)] - E[AB \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau)] \\
& = E[AB] \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) \\
& \quad + E[B^2] \sin(\omega_0 \tau) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau) - E[A^2] \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau) \\
& = \sigma^2 \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau) - \sigma^2 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau) \\
& = -\sigma^2 \sin(\omega_0 \tau)
\end{aligned}$$

Do đó, $X(t)$ và $Y(t)$ là 2 quá trình dừng đối với nhau.

• Hàm tự hiệp biến

Hàm tự hiệp biến (auto-covariance) của một quá trình được định nghĩa là:

$$\begin{aligned}
C_{xx}(t, t + \tau) &= E\{[X(t) - E[X(t)]] [X(t + \tau) - E[X(t + \tau)]]\} \\
&= R_{xx}(t, t + \tau) - E[X(t)]E[X(t + \tau)]
\end{aligned} \quad (4.4.28)$$

Nếu $X(t)$ là dừng theo nghĩa rộng thì:

$$C_{xx}(t, t + \tau) = R_{xx}(\tau) - \bar{X}^2 = C_{xx}(\tau) \quad (4.4.29)$$

hay hàm tự hiệp biến cũng chỉ phụ thuộc vào giá trị sai khác thời gian tương đối trong trường hợp này phương sai là không đổi theo thời gian:

$$\sigma_x^2 = E\{[X(t) - E[X(t)]]^2\} = C_{xx}(0) = R_{xx}(0) - \bar{X}^2 \quad (4.4.30)$$

• Hàm hiệp biến chéo

Hàm hiệp biến chéo (cross-covariance) giữa 2 quá trình được định nghĩa là:

$$\begin{aligned}
C_{xy}(t, t + \tau) &= E\{[X(t) - E[X(t)]] [Y(t + \tau) - E[Y(t + \tau)]]\} \\
&= R_{xy}(t, t + \tau) - E[X(t)]E[Y(t + \tau)]
\end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Nếu $X(t)$ và $Y(t)$ là hai quá trình dừng đối với nhau thì hàm hiệp biến chéo cũng chỉ phụ thuộc vào biến số sai khác thời gian tương đối bởi:

$$C_{xy}(t, t + \tau) = R_{xy}(\tau) - \bar{X}\bar{Y} = C_{xy}(\tau) \quad (4.4.32)$$

Hai quá trình dừng đối với nhau được gọi là không tương quan đối với nhau nếu:

$$C_{xy}(\tau) = 0$$

3.4.8. Quá trình ngẫu nhiên Gauss

Một quá trình ngẫu nhiên Gauss nếu hàm mật độ bậc N tại các thời điểm $t_1, t_2, \dots, t_N$ là một vector ngẫu nhiên Gauss:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |C_X|}} \exp \left\{ -\frac{[x - \bar{X}]^T [C_X]^{-1} [x - \bar{X}]}{2} \right\}$$

Các phần tử của ma trận hiệp biến C_X là:

$$\begin{aligned} C_{ik} &= C_{X_i, X_k} = E[(X_i - \bar{X}_i)(X_k - \bar{X}_k)] \\ &= C_{XX}(t_i, t_k) = C_{XX}(t_i, t_k) - E[X(t_i)]E[X(t_k)] \end{aligned}$$

Trong trường hợp đặc biệt, được xét đến rất nhiều trong các bài toán kỹ thuật, là quá trình Gauss dừng theo nghĩa rộng thì:

$$\bar{X}_i = E[X(t_i)] = \bar{X} = \text{hằng số}$$

Bên cạnh đó, các hàm tự tương quan và hàm tự hiệp biến chỉ phụ thuộc vào biến thời gian sai khác tương đối giữa 2 thời điểm được xét đến:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_i, t_k) &= R_{XX}(t_k - t_i) \\ \text{và} \quad C_{XX}(t_i, t_k) &= C_{XX}(t_k - t_i) \end{aligned}$$

3.4.9. Đặc tính phổ của quá trình ngẫu nhiên

Mật độ phổ công suất

Nhắc lại đối với một hàm số xác định $x(t)$, phổ của nó là biến đổi Fourier của hàm số:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.4.33)$$

Hàm gốc ban đầu được khôi phục từ hàm phổ của nó qua phép biến đổi Fourier ngược:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.4.34)$$

Năng lượng trong một khoảng hữu hạn $[-T, T]$ được tính bằng:

$$E_{x_T} = \int_{-T}^T [x(t)]^2 dt \quad (4.4.35a)$$

Năng lượng của hàm số trên toàn bộ miền biến số được tính theo công thức của định lý Parseval:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (4.4.35b)$$

$|X(j\omega)|^2$ được gọi là hàm phổ mật độ công suất (power density spectrum).

Công suất trung bình được tính theo công thức:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^2 dt \quad (4.4.36)$$

Nếu giới hạn hàm số trong khoảng $[-T, T]$ ta được hàm số $x_T(t)$, biến đổi Fourier của hàm số này là:

$$X_T(j\omega) = \mathcal{F}^{-1}\{x_T(t)\} = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.4.37)$$

Khi đó công suất trung bình được tính theo công thức:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (4.4.38)$$

Khi xét đến quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ chứ không còn đơn thuần là một hàm số xác định $x(t)$ nữa, việc xét đến phổ và công suất cho từng thể hiện của quá trình ngẫu nhiên không có ý nghĩa lớn lắm. Do đó ta định nghĩa công suất trung bình của quá trình ngẫu nhiên như sau:

$$P_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt \quad (4.4.39)$$

Từ công thức định nghĩa ta thấy công suất trung bình chính là trung bình theo thời gian của kỳ vọng của bình phương của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$

$$P_{xx} = A\{E[X^2(t)]\} \quad (4.4.40)$$

Từ đây ta có thể viết lại công thức tính công suất trung bình:

$$P_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(j\omega)|^2]}{2T} d\omega \quad (4.4.41)$$

Các biến đổi trên dẫn dắt tới định nghĩa của hàm phổ mật độ công suất của quá trình ngẫu nhiên:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(j\omega)|^2]}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(j\omega)X_T(j\omega)]}{2T} \quad (4.4.42)$$

Và phổ mật độ công suất có quan hệ với công suất trung bình theo công thức:

$$P_{xx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (4.4.43)$$

Ví dụ: Tìm công suất và phổ mật độ công suất của:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

A và ω_0 là các hằng số, Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng $(0, \pi/2)$.

Giải:

Xét quá trình ngẫu nhiên $X^2(t)$ có kỳ vọng bằng:

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= A^2 E[\cos^2(\omega_0 t + \Theta)] = \frac{A^2 \{1 + E[\cos(2\omega_0 t + 2\Theta)]\}}{2} \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\omega_0 t + 2\Theta) d\Theta = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

Công suất trung bình:

$$P_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t) \right] dt = \frac{A^2}{2}$$

Để tìm mật độ phổ công suất, trước hết ta tính:

$$\begin{aligned} X_T(j\omega) &= \int_{-T}^T A \cos(\omega_0 t + \Theta) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2} \int_{-T}^T (e^{j(\omega_0 t + \Theta)} - e^{-j(\omega_0 t + \Theta)}) e^{-j\omega t} dt \\ &= AT \{e^{j\Theta} \text{sinc}[(\omega - \omega_0)T] + e^{-j\Theta} \text{sinc}[(\omega + \omega_0)T]\} \end{aligned}$$

dẫn đến:
$$\frac{E[|X_T(j\omega)|^2]}{2T} = \frac{E[X_T(j\omega)X_T^*(j\omega)]}{2T}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2T} E \left[A^2 T^2 \left\{ e^{j\omega T} \text{sinc}[(\omega - \omega_0)T] + e^{-j\omega T} \text{sinc}[(\omega + \omega_0)T] \right\} \right. \\
&\quad \left. \left\{ e^{-j\omega T} \text{sinc}[(\omega - \omega_0)T] + e^{j\omega T} \text{sinc}[(\omega + \omega_0)T] \right\} \right] \\
&= \frac{A^2 \pi}{2} \left[\frac{T}{\pi} \text{sinc}^2[(\omega - \omega_0)T] + \frac{T}{\pi} \text{sinc}^2[(\omega + \omega_0)T] \right]
\end{aligned}$$

do: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\pi} \text{sinc}^2(\alpha T) = \delta(\alpha)$

nên: $S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T(j\omega)]^2}{2T} = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

Đến đây, công suất cũng được tính từ hàm mật độ phổ công suất theo công thức

$$P_{xx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{A^2 \pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] d\omega = \frac{A^2}{2}$$

Vậy 2 cách tiếp cận cho cùng kết quả công suất trung bình của quá trình ngẫu nhiên.

Hàm phổ mật độ công suất có các tính chất sau:

1. $S_{xx}(\omega)$ là một hàm thực không âm. Điều này xuất phát từ bản thân định nghĩa của hàm phổ mật độ công suất.
2. $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$ hay $S_{xx}(\omega)$ là một hàm chẵn. Bởi lẽ $S_{xx}(\omega)$ là biến đổi Fourier của $R_{xx}(\tau)$ (điều này sẽ được đề cập đến sau) và đã chứng minh được ở tính chất thứ 6 của hàm tự tương quan.
3. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = A\{E[X^2(t)]\}$ các biểu thức ở cả 2 vế đều là công suất trung bình.

$$4. S_{xx}(\omega) = \omega^2 S_{\dot{x}x}(\omega) \text{ với } \dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

Mối quan hệ giữa phổ mật độ công suất và hàm tự tương quan

Giữa phổ mật độ công suất và hàm tự tương quan có mối quan hệ như sau:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = A[R_{xx}(t, t + \tau)] \quad (4.4.44)$$

$$\text{và} \quad S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A[R_{xx}(t, t + \tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.4.45)$$

Hay quan hệ giữa $S_{xx}(\omega)$ và $A\{R_{xx}(t, t + \tau)\}$ là quan hệ của một cặp biến đổi Fourier. Quan hệ này được chứng minh như sau:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T(j\omega)]^2}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T(j\omega)X_T^*(j\omega)]}{2T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1)X(t_2)] e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_{xx}(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-t} \left[\int_{-T}^T R_{xx}(t, t + \tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{xx}(t, t + \tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$\text{do đó} \quad S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A[R_{xx}(t, t + \tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Trường hợp khi $X(t)$ là quá trình dừng theo nghĩa rộng thì $S_{xx}(\omega)$ và $R_{xx}(\tau)$ là một cặp biến đổi Fourier. Từ đây rút ra định lý Wiener-Khinchine:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.4.46)$$

$$\text{và} \quad R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4.4.47)$$

Ví dụ: Tìm phổ mật độ công suất của quá trình ngẫu nhiên có hàm tự tương quan được cho theo công thức sau:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

Giải: Phổ mật độ công suất là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan hay:

$$S_{XX}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Mật độ phổ công suất chéo

Mật độ phổ công suất chéo (cross power density spectrum) của 2 quá trình được định nghĩa bởi công thức:

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(j\omega)Y_T(j\omega)]}{2T} \quad (4.4.48)$$

$$\text{và} \quad S_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[Y_T^*(j\omega)X_T(j\omega)]}{2T} \quad (4.4.49)$$

Công suất chéo trung bình (cross power) được tính bởi công thức:

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) d\omega \quad (4.4.50)$$

$$\text{và} \quad P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega) d\omega \quad (4.4.51)$$

Phổ mật độ công suất chéo có các tính chất sau:

1. $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$
2. $\text{Re}[S_{XY}(\omega)]$ và $\text{Re}[S_{YX}(\omega)]$ là các hàm chẵn.
3. $\text{Im}[S_{XY}(\omega)]$ và $\text{Im}[S_{YX}(\omega)]$ là các hàm lẻ.
4. $S_{XY}(\omega) = 0$ và $S_{YX}(\omega) = 0$ nếu $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình trực giao

5. Nếu $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên không tương quan, thêm nữa:

$$E[X(t)] = \bar{X} = \text{hằng số}$$

$$E[Y(t)] = \bar{Y} = \text{hằng số}$$

$$\text{thì } S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi \bar{X} \bar{Y} \delta(\omega)$$

Mối quan hệ giữa phổ mật độ công suất chéo và tương quan chéo

Tương tự như mối quan hệ giữa hàm tự tương quan và mật độ phổ công suất của một quá trình ngẫu nhiên, ta cũng có kết luận:

- $S_{XY}(\omega)$ và $A\{R_{XY}(t, t + \tau)\}$ là một cặp biến đổi Fourier
- $S_{YX}(\omega)$ và $A\{R_{YX}(t, t + \tau)\}$ là một cặp biến đổi Fourier

Ta chứng minh cho mệnh đề thứ nhất:

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(j\omega)Y_T(j\omega)]}{2T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^T Y(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1)Y(t_2)] e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_{XY}(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-t} \left[\int_{-T}^T R_{XY}(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{XY}(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A[R_{XY}(t, t+\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.4.52)$$

Mệnh đề sau được chứng minh hoàn toàn tương tự.

Trong trường hợp $X(t)$ và $Y(t)$ là dừng theo nghĩa rộng đối với nhau thì ta có các quan hệ sau đây:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.4.53)$$

$$S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.4.54)$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4.4.55)$$

$$R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4.4.56)$$

BÀI TẬP

1. Cho quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn bởi hàm số sau:

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

với a và ω_0 là các hằng số

Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trên $(0, 2\pi)$

Chứng minh rằng $X(t)$ là quá trình dừng theo nghĩa rộng.

2. Cho các quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn bởi hàm số sau:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$Y(t) = B \cos(\omega_0 t) - A \sin(\omega_0 t)$$

với ω_0 là hằng số

A và B là các biến ngẫu nhiên không tương quan

$$E[A] = E[B] = 0 \text{ và } \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$$

- Chứng minh rằng $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình dừng theo nghĩa rộng.
 - Chứng minh rằng $X(t)$ và $Y(t)$ là dừng đối với nhau.
3. Cho quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn bởi hàm số sau:

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

với a và ω_0 là các hằng số

Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trên $(-\pi, \pi)$

Quá trình ngẫu nhiên $Y(t)$ được định nghĩa như sau

$$Y(t) = X^2(t)$$

a. Hãy xem xét xem $Y(t)$ có phải là dừng theo nghĩa rộng hay không?

b. Hãy xem xét xem $X(t)$ và $Y(t)$ có phải là dừng đối với nhau hay không?

4. Cho $X(t)$ là một quá trình dừng theo nghĩa rộng. Quá trình ngẫu nhiên $Y(t)$ được định nghĩa như sau:

$$Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

với ω_0 là hằng số

Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trên $(-\pi, \pi)$ và độc lập đối với $X(t)$.
Xem xét xem $Y(t)$ có phải là quá trình dừng theo nghĩa rộng hay không?

5. Cho $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên. Quá trình ngẫu nhiên $W(t)$ được định nghĩa như sau:

$$W(t) = X(t) + Y(t)$$

Tìm $R_{ww}(t, t+\tau)$ trong các trường hợp sau:

- $X(t)$ và $Y(t)$ có tính tương quan đối với nhau
- $X(t)$ và $Y(t)$ không có tính tương quan đối với nhau
- $X(t)$ và $Y(t)$ không có tính tương quan đối với nhau
và $E[X(t)] = E[Y(t)] = 0$.

6. Cho $X(t)$ là một quá trình dừng theo nghĩa rộng. Quá trình ngẫu nhiên $Y(t)$ được định nghĩa như sau:

$$Y(t) = X(t) - X(t+t_0)$$

với t_0 là hằng số

- a. Tìm $E[Y(t)]$ và σ_Y^2 theo các tham số thống kê của $X(t)$
- b. Câu hỏi a trong trường hợp đầu bài là $Y(t) = X(t) + X(t+t_0)$
7. Cho $X(t)$ là một quá trình dừng theo nghĩa rộng. Xét trên quá trình đó tại các thời điểm $t_1, t_2, \dots, t_N$. Đặt $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, ..., $X_N = X(t_N)$.
Biến ngẫu nhiên $\hat{X}$ được định nghĩa như sau:

$$\hat{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

- Chứng minh rằng $E[\hat{X}] = \bar{X}$, với $\bar{X}$ là kỳ vọng của quá trình $X(t)$.
- Giả sử rằng $t_1, t_2, \dots, t_N$ là cách xa nhau đủ để $X_1, X_2, \dots, X_N$ là độc lập thống kê. Chứng minh rằng $(\sigma_{\hat{X}})^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}$
- Giả sử rằng $\bar{X} = 0$. Phương sai của quá trình ngẫu nhiên được ước lượng như sau:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X})^2$$

Chứng minh rằng $E[\hat{\sigma}_X^2] = \sigma_X^2$

8. Cho quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn bởi hàm số sau:

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

với a và ω_0 là các hằng số

Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trên $(0, \pi)$

- Tìm hàm tự tương quan của quá trình $X(t)$
- Tìm công suất trung bình theo công thức ở miền thời gian.
- Tìm hàm mật độ phổ công suất từ định nghĩa

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(j\omega)|^2]}{2T}$$

- Tìm hàm mật độ phổ công suất từ biến đổi Fourier của trung bình theo thời gian của hàm tự tương quan.
- Tìm công suất trung bình theo công thức ở miền tần số.

9. Cho các quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn bởi hàm số sau:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

với ω_0 là hằng số

A và B là các biến ngẫu nhiên

- Tìm hàm tự tương quan của $X(t)$
- Tìm mật độ phổ công suất của $X(t)$.

10. Cho quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ được định nghĩa như sau:

$$X(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i(t)$$

với $X_i(t)$ là các quá trình dừng theo nghĩa rộng và trực giao từng đôi đối với nhau.

Chứng minh rằng $S_{xx}(\omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 S_{x_i x_i}(\omega)$

11. Cho quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn bởi hàm số sau:

$$X(t) = a \cos(\Omega t + \Theta)$$

với a là hằng số

Ω là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ là $f_{\Omega}(\cdot)$

Θ là biến ngẫu nhiên phân bố đều trên $(0, 2\pi)$

và độc lập với Ω

Chứng minh rằng $S_{xx}(\omega) = \frac{\pi a^2}{2} [f_{\Omega}(\omega) + f_{\Omega}(-\omega)]$

12. Cho $X(t)$ và $Y(t)$ là hai quá trình dừng đối với nhau. Quá trình ngẫu nhiên $W(t)$ được định nghĩa như sau:

$$W(t) = X(t) \cos(\omega_0 t) + Y(t) \sin(\omega_0 t)$$

- Hãy chỉ ra các điều kiện của $X(t)$ và $Y(t)$ để $W(t)$ là dừng theo nghĩa rộng
- Từ các điều kiện tìm được ở câu a., hãy tìm hàm mật độ phổ công suất của $W(t)$.
- Tìm hàm mật độ phổ công suất của $W(t)$ nếu $X(t)$ và $Y(t)$ là không tương quan.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. James G., Burley D., Clements D., Dyke P., Searl J., Steele N., Wright J., *Advanced Mordern Engineering Mathematics*, Second Edition, Prentice Hall, 1999, ISBN 0-201-059621-0.
2. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, Tập một, Đại số và Hình học giải tích*, Nhà xuất bản Giáo dục, tháng 10-2004.
3. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, Tập ba, Phép tính giải tích một biến số*, Nhà xuất bản Giáo dục, tháng 10-2004.
4. Oppenheim A., Willsky A., *Signals and Systems*, Prentice Hall, 2000, ISBN 0-13-651175-9
5. Peebles Peyton Z., *Probabiliy, Random Variables, and Random Signal Principles*, Second Edition, McGraw-Hill, 1987, ISBN 0-07-049219-0.
6. Proakis J., *Digital Communication*, Fourth Edidion, McGraw-Hill, 2002, ISBN 0-07-232111-3.

GIÁO TRÌNH TOÁN KỸ THUẬT

**Tác giả: TÔ BÁ ĐỨC (chủ biên)
ĐÀO LÊ THU THẢO
NGUYỄN HỮU PHÁT**

Chịu trách nhiệm xuất bản: ĐỒNG KHẮC SÙNG
Biên tập và sửa bài: NGUYỄN HUY TIẾN
NGỌC DIỆP
Trình bày bìa: XUÂN DỪNG

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo - Hà Nội**

In 300 cuốn, khổ 16 × 24 cm, tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Quyết định xuất bản số: 82-2008/CXB/24-02/KHKT-17/3/2008
In xong và nộp lưu chiểu Quý II năm 2008.

2 0 8 0 8 2

gt toán kỹ thuật



0205080000005

36,000

Giá: 36 000^d