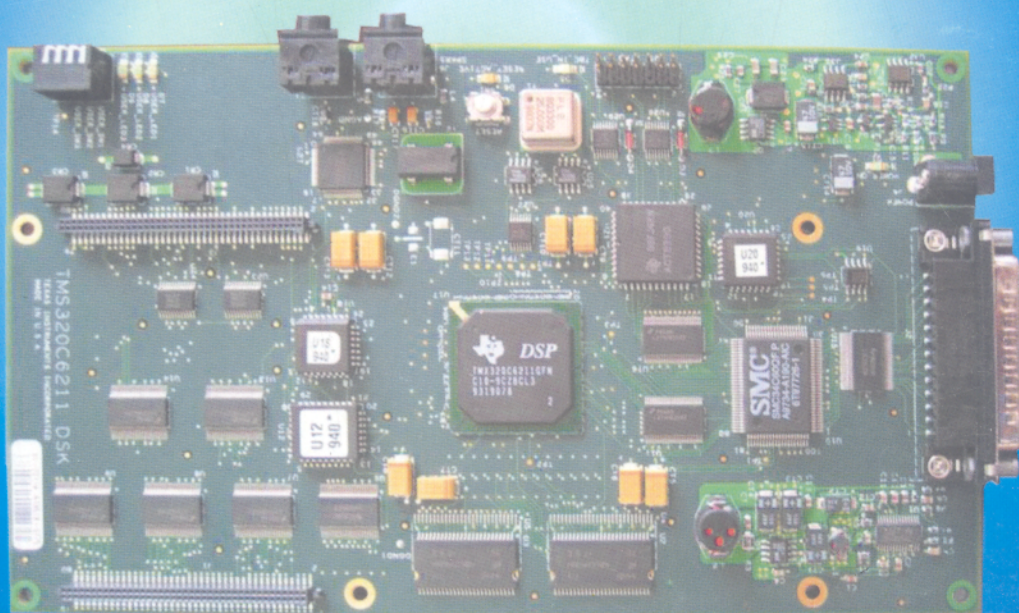


· PGS. TS. NGUYỄN QUỐC TRUNG (Chủ biên)
ThS. HOÀNG VĂN QUANG - ThS. TRẦN ĐÌNH THÔNG
ThS. KIỀU XUÂN THỰC

Giáo trình XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

PGS.TS NGUYỄN QUỐC TRUNG (*Chủ biên*)
ThS. HOÀNG VĂN QUANG – ThS. TRẦN ĐÌNH THÔNG
ThS. KIỀU XUÂN THỰC

Giáo trình
XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Bản quyền thuộc HEVOBCO – Nhà xuất bản Giáo dục

192 – 2007/CXB/8 – 411/GD

Mã số: 7B683M7 – DAI

Lời nói đầu

Sự ra đời của các vi mạch điện tử cỡ lớn (VLSI- very large scale integration) đã tạo ra một bước ngoặt lớn trong xử lý thông tin và truyền thông. Đây là nền tảng của sự phát triển các thiết bị số chuyên dụng cũng như máy tính với giá thành rẻ hơn, kích thước nhỏ hơn, tốc độ xử lý cao hơn; kéo theo đó là quá trình số hóa các thiết bị đã và đang diễn ra mạnh mẽ trên toàn cầu. Chính vì vậy mà xử lý số tín hiệu (nghĩa là xử lý tín hiệu bằng con đường số) đã trở thành một ngành khoa học và kỹ thuật. Đây là một ngành khoa học và kỹ thuật mới đã và đang phát triển rất mạnh và được áp dụng rất hiệu quả trong các lĩnh vực thông tin liên lạc, phát thanh, truyền hình, đo lường và điều khiển... Để tiếp cận với ngành khoa học hiện đại này chúng ta cần trang bị cho sinh viên những kiến thức cơ bản nhất về xử lý số tín hiệu. Giáo trình *Xử lý số tín hiệu* được biên soạn cho đối tượng là sinh viên cao đẳng các ngành công nghệ kỹ thuật điện tử, công nghệ phần cứng máy tính, công nghệ viễn thông, công nghệ tự động... Giáo trình được chia làm 6 chương, đề cập đến các khái niệm cơ bản về biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền biến số n, miền z, miền tần số liên tục, miền tần số rời rạc; định nghĩa và các phương pháp tổng hợp các bộ lọc số FIR, IIR.

Mặc dù giáo trình đã được sử dụng để giảng dạy nhiều năm tại Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Công nghiệp Hà Nội... nhưng cũng không tránh khỏi những sai sót, nhầm lẫn. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc để lần tái bản tới được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về:

– Công ty CP Sách Đại học - Dạy nghề, NXB Giáo dục, 25 Hàn Thuyên - Hà Nội. Điện thoại 04. 8264974

– PGS.TS. Nguyễn Quốc Trung, Trưởng khoa Điện tử - Viễn thông, Đại học Bách khoa Hà Nội, số 1 - Đại Cồ Việt - Hà Nội.

– ThS. Kiều Xuân Thực, Phó Trưởng khoa Điện tử, Đại học Công nghiệp Hà Nội, Minh Khai - Từ Liêm - Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

Chương 1

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

1.1. MỞ ĐẦU

1.1.1. Định nghĩa tín hiệu

Tuỳ thuộc vào phạm vi sử dụng của tín hiệu ta có các định nghĩa khác nhau, có thể định nghĩa tín hiệu chung nhất như sau:

Tín hiệu là biểu diễn vật lý của thông tin.

Ví dụ:

– Các tín hiệu nhìn thấy là các dạng ánh sáng mang thông tin tới mắt chúng ta.

– Các tín hiệu nghe thấy là các sự biến đổi của áp suất không khí truyền thông tin tới tai chúng ta.

Tín hiệu được chia thành hai loại: tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc.

1.1.2. Định nghĩa tín hiệu liên tục

Nếu biến độc lập của sự biểu diễn toán học của một tín hiệu là liên tục thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu liên tục.

Nhận xét: Theo định nghĩa tín hiệu liên tục thì từ liên tục ở đây được hiểu là liên tục theo biến số.

Nếu dựa vào hàm số, chúng ta có thể phân loại tín hiệu liên tục thành hai loại:

+ Tín hiệu tương tự.

+ Tín hiệu lượng tử hoá.

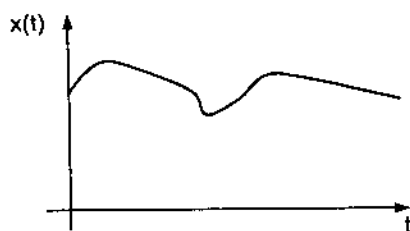
a) Định nghĩa tín hiệu tương tự

Nếu hàm của tín hiệu liên tục là liên tục thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu tương tự.

b) Định nghĩa tín hiệu lượng tử hoá

Nếu hàm của tín hiệu liên tục là rời rạc thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu lượng tử hoá.

Ví dụ: Chúng ta có hai tín hiệu liên tục có biến số là thời gian t , biểu diễn trên hình 1.1 là tín hiệu tương tự và hình 1.2 là tín hiệu lượng tử hoá.



Hình 1.1. Tín hiệu tương tự



Hình 1.2. Tín hiệu lượng tử hoá

1.1.3. Định nghĩa tín hiệu rời rạc

Nếu tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của các biến rời rạc thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu rời rạc.

Nhận xét: Từ rời rạc ở đây được hiểu là rời rạc theo biến số.

Nếu dựa vào biên độ, chúng ta cũng có thể phân tín hiệu rời rạc thành hai loại:

- + Tín hiệu lấy mẫu;
- + Tín hiệu số.

a) Định nghĩa tín hiệu lấy mẫu

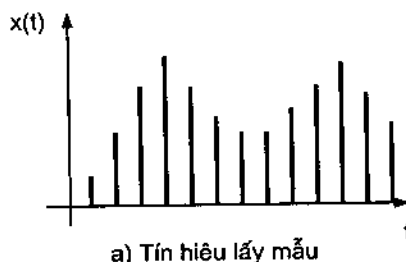
Nếu hàm của tín hiệu rời rạc là liên tục (không được lượng tử hoá) thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu lấy mẫu.

b) Định nghĩa tín hiệu số

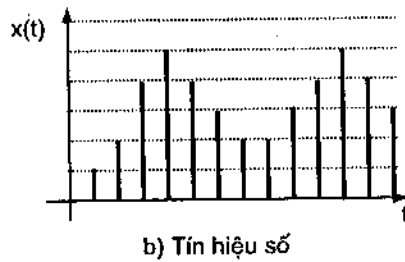
Nếu hàm của tín hiệu rời rạc là rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu số.

Nhận xét: Như vậy tín hiệu số là tín hiệu được rời rạc hoá cả về biến số và biên độ, còn tín hiệu tương tự là liên tục cả về biến số và biên độ.

Ví dụ: Tín hiệu lấy mẫu hình 1.3(a) và tín hiệu số hình 1.3(b)



a) Tín hiệu lấy mẫu



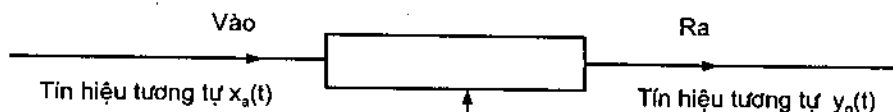
b) Tín hiệu số

Hình 1.3

1.2. CÁC HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU

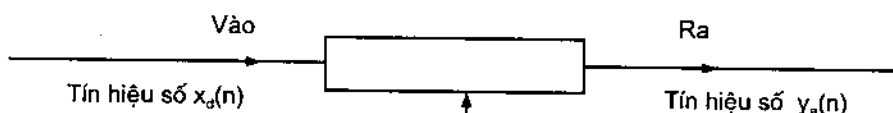
Có thể phân loại các hệ thống xử lý theo chính tín hiệu cần xử lý:

– Hệ thống được gọi là hệ thống tương tự nếu ở đầu vào của hệ thống đó chúng ta đặt các tín hiệu tương tự thì ở đầu ra chúng ta thu được các tín hiệu tương tự.



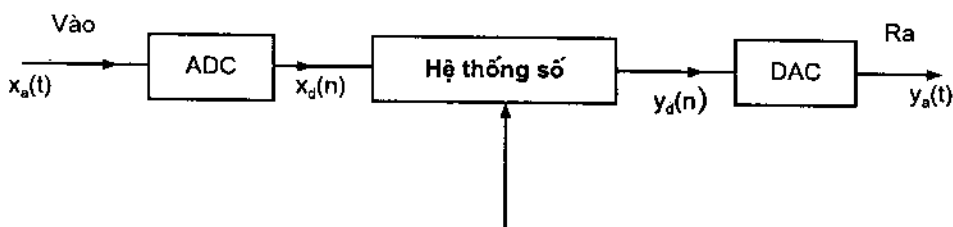
Hình 1.4. Hệ thống tương tự

– Hệ thống được gọi là hệ thống số khi các tín hiệu ở đầu vào và đầu ra của hệ thống là tín hiệu số.



Hình 1.5. Hệ thống số

Sơ đồ tổng quát của hệ thống xử lý số tín hiệu:



Hình 1.6. Hệ thống xử lý số tín hiệu

Nhận xét:

– Tín hiệu tương tự ở đầu vào được chuyển sang dạng số nhờ một hệ biến đổi tương tự – số ADC (ADC – Analog Digital Converter).

– Tín hiệu tương tự ở đầu ra được thiết lập lại nhờ hệ biến đổi số – tương tự DAC (DAC – Digital Analog Converter).

Vậy tín hiệu ra của bộ biến đổi ADC là tín hiệu số $x_d(n)$, đó là tín hiệu vào của hệ thống số, hệ thống số này làm nhiệm vụ xử lý tín hiệu số $x_d(n)$ và đưa ra tín hiệu số $y_d(n)$.

Như vậy về bản chất chúng ta thực hiện việc xử lý tín hiệu tương tự bằng con đường số, vì vậy học phần này được gọi là *Xử lý số tín hiệu*.

1.3. TÍN HIỆU RỜI RẠC

1.3.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc

Có ba cách biểu diễn tín hiệu rời rạc: Biểu diễn bằng toán học, biểu diễn bằng đồ thị và biểu diễn bằng dãy số.

a) *Biểu diễn toán học*

Một tín hiệu rời rạc được biểu diễn một dãy các giá trị thực hoặc phức.

Nếu nó được hình thành từ các giá trị thực thì ta gọi là tín hiệu thực, còn nếu nó được hình thành từ các giá trị phức thì nó được gọi là tín hiệu phức.

Như chúng ta đã định nghĩa tín hiệu rời rạc gồm hai loại là tín hiệu lấy mẫu và tín hiệu số với ký hiệu:

$x_s(nT_s)$: Tín hiệu lấy mẫu;

$x_d(nT_s)$: Tín hiệu số.

Ta thống nhất ký hiệu chung của tín hiệu rời rạc là $x(nT_s)$, ở đây nT_s là biến độc lập, n là số nguyên và T_s chu kỳ lấy mẫu. Để thuận lợi cho cách biểu diễn tín hiệu rời rạc chúng ta chuẩn hoá biến số độc lập nT_s bởi

chu kỳ lấy mẫu T_s : $\frac{nT_s}{T_s} = n$

Như vậy sau khi chuẩn hoá ta có:

$$x_s(nT_s) \xrightarrow{\text{Chuẩn hoá bởi } T_s} x(n)$$

Nếu trong miền biến số chúng ta chuẩn hoá bởi chu kỳ lấy mẫu T_s thì trong miền tần số chúng ta phải chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s ($F_s = \frac{1}{T_s}$).

Cách biểu diễn toán học tín hiệu rời rạc $x(n)$:

$$x(n) = \begin{cases} \text{Biểu thức toán, } N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0, n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.1)$$

Ví dụ: Biểu diễn toán học của một tín hiệu rời rạc nào đó:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

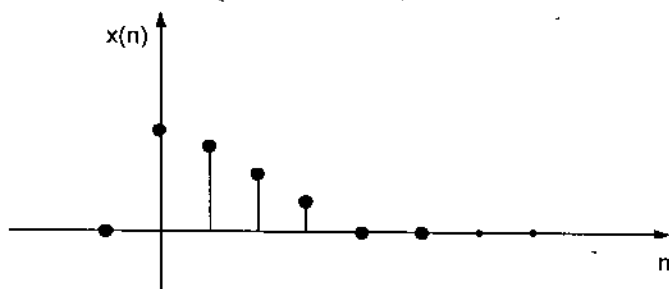
Ở đây $N_1 = 0$ và $N_2 = 4$.

b) Biểu diễn đồ thị

Để tiện cho việc minh họa trực quan hơn chúng ta biểu diễn tín hiệu bằng đồ thị.

Ví dụ: Biểu diễn tín hiệu dưới dạng đồ thị của tín hiệu:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$



Hình 1.7. Minh họa biểu diễn đồ thị của tín hiệu $x(n)$

c) Biểu diễn bằng dãy số

Biểu diễn bằng dãy số là chúng ta liệt kê các giá trị của $x(n)$ thành một dãy số như sau:

$$x(n) = \{ \dots, x(n-1), x(n), x(n+1), \dots \}$$

$\bar{n}$

Để chỉ giá trị của $x(n)$ tại giá trị n ta dùng ký hiệu $\bar{n}$, bởi vì khi dùng cách biểu diễn này ta không biết đâu là $x(n)$.

Tùy theo các trường hợp mà sử dụng cách biểu diễn nào cho phù hợp và thuận lợi với mục đích của chúng ta.

Ghi chú:

– Vì tín hiệu rời rạc thực chất là các dãy số như cách biểu diễn này nên ta thường gọi tín hiệu rời rạc là dãy. Tín hiệu rời rạc $x(n)$ còn được gọi là dãy $x(n)$.

– Tín hiệu rời rạc $x(n)$ chỉ được định nghĩa với n là các số nguyên, $x(n)$ không được định nghĩa với các giá trị n không nguyên.

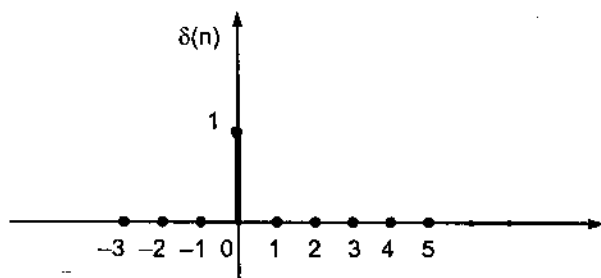
1.3.2. Các dãy cơ bản

a) Dãy xung đơn vị

Trong miền n dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Đồ thị của $\delta(n)$ được biểu diễn như hình 1.8



Hình 1.8. Dãy xung đơn vị

Ví dụ: Hãy tìm biểu diễn toán học và đồ thị của các tín hiệu sau:

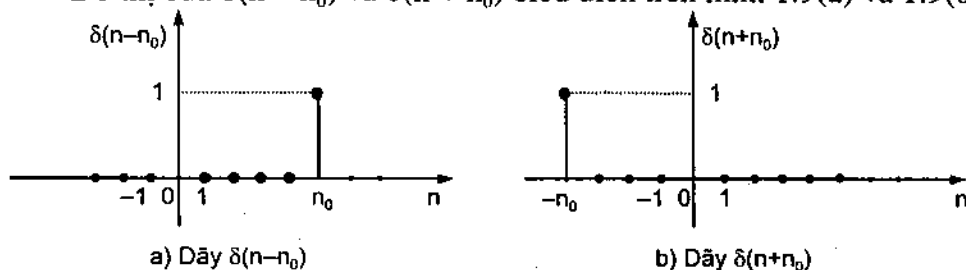
$$\delta(n - n_0) \text{ và } \delta(n + n_0)$$

Bài giải:

Theo định nghĩa $\delta(n)$ ta có:

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}; \quad \delta(n + n_0) = \begin{cases} 1, & n = -n_0 \\ 0, & n \neq -n_0 \end{cases}$$

Đồ thị của $\delta(n - n_0)$ và $\delta(n + n_0)$ biểu diễn trên hình 1.9(a) và 1.9(b)



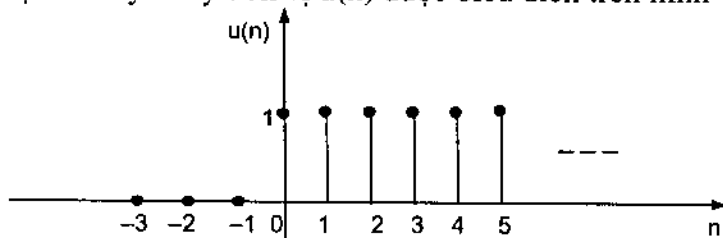
Hình 1.9.

b) Dãy nhảy đơn vị (dãy bậc đơn vị)

Trong miền n , dãy nhảy đơn vị được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Đồ thị của dãy nhảy đơn vị $u(n)$ được biểu diễn trên hình 1.10



Hình 1.10. Dãy nhảy đơn vị $u(n)$

Ví dụ: Hãy biểu diễn toán học và đồ thị của các dãy sau đây:

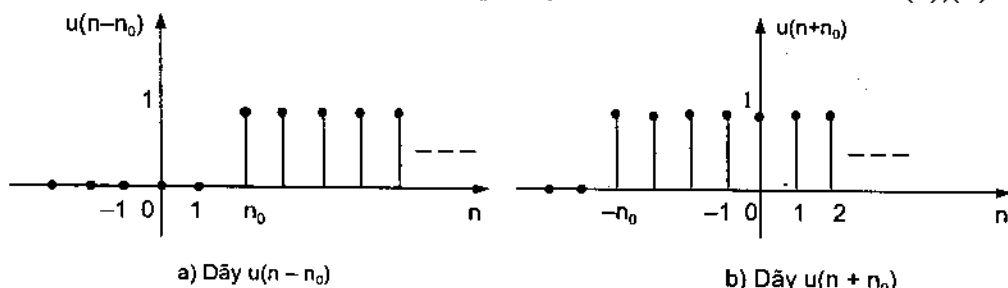
$$u(n - n_0) \text{ và } u(n + n_0)$$

Bài giải:

Theo định nghĩa $u(n)$ ta có:

$$u(n - n_0) = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases}; \quad u(n + n_0) = \begin{cases} 1, n \geq -n_0 \\ 0, n < -n_0 \end{cases}$$

Đồ thị của $u(n - n_0)$ và $u(n + n_0)$ được biểu diễn trên hình 1.11(a),(b)



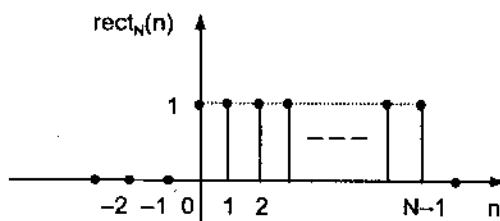
Hình 1.11

c) Dãy chữ nhật

Trong miền n dãy chữ nhật được định nghĩa:

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.4)$$

Đồ thị của dãy $\text{rect}_N(n)$ cho trên hình 1.12



Hình 1.12. Đồ thị của dãy $\text{rect}_N(n)$

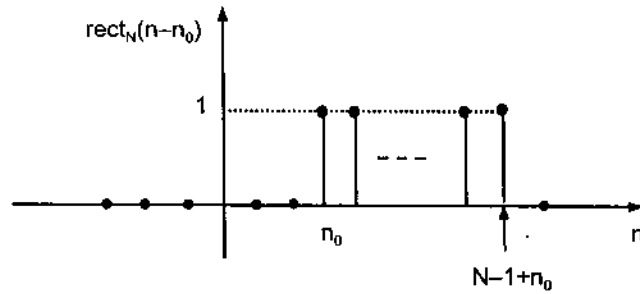
Ví dụ:

Hãy biểu diễn toán học và đồ thị của dãy $\text{rect}_N(n-n_0)$

Bài giải:

$$\text{rect}_N(n-n_0) = \begin{cases} 1, & n_0 \leq n \leq N-1+n_0 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Đồ thị của $\text{rect}_N(n-n_0)$ được biểu diễn trên hình 1.13



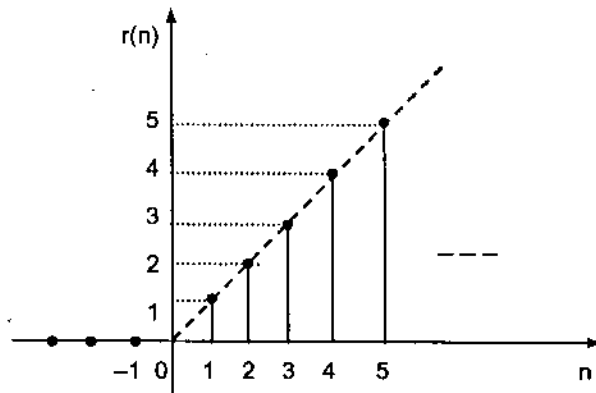
Hình 1.13. Dãy $\text{rect}_N(n-n_0)$

d) Dãy dốc đơn vị

Trong miền n dãy dốc đơn vị được định nghĩa:

$$r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Đồ thị của $r(n)$ được biểu diễn trên hình 1.14.



Hình 1.14. Dãy dốc đơn vị

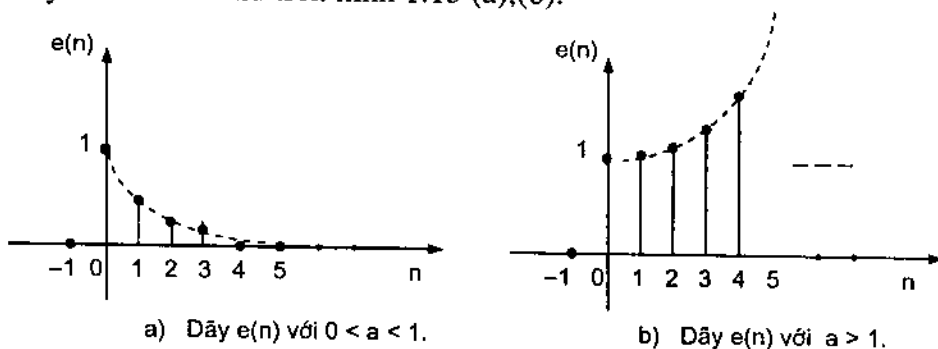
e) Dãy hàm mũ thực

Trong miền n dãy hàm mũ thực được định nghĩa:

$$e(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Ở đây a là tham số.

Dãy này tăng hay giảm phụ thuộc vào giá trị của tham số a lớn hơn 1 hay nhỏ hơn 1 như trên hình 1.15 (a),(b).



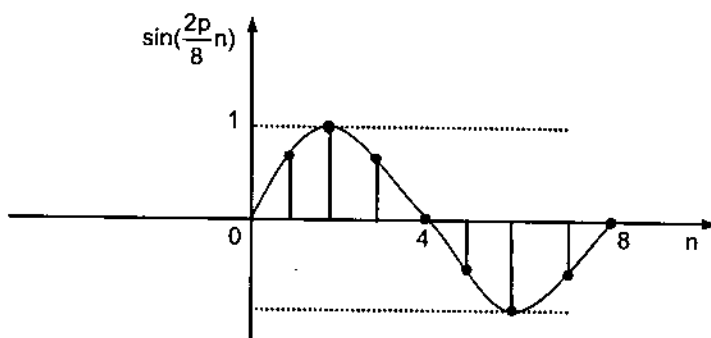
Hình 1.15

g) Dây sin

Dãy sin được định nghĩa trong miền n như sau:

$$s(n) = \sin(\omega_0 n) \quad (1.7)$$

Đồ thị của $s(n)$ với $\omega_0 = 2\pi/8$ cho trên hình 1.16



Hình 1.16. Ví dụ về dãy sin

h) Dây mũ phức

$$x(n) = \exp[(\sigma + j\omega)n] \quad (1.8)$$

Ta có: $\exp[(\sigma + j\omega)n] = \exp(\sigma n) \cdot \exp(j\omega n)$

mà $\exp(j\omega n) = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$

$$\text{Do đó: } x(n) = e^{\sigma n} [\cos(\omega n) + j \sin(\omega n)] \quad (1.9)$$

1.3.3. Một số định nghĩa

a) Dây chu kỳ (dây tuần hoàn)

Ta có thể nói rằng một dãy là tuần hoàn với chu kỳ n nếu ta có:

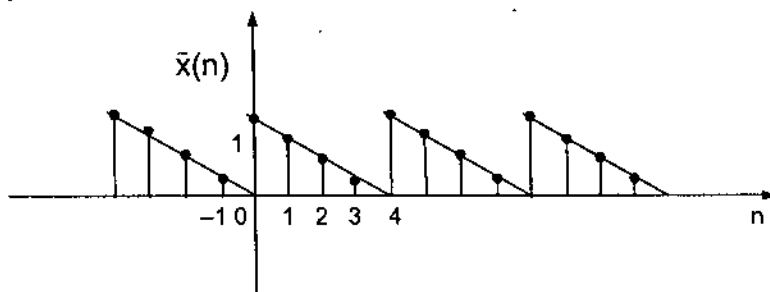
$$x(n) = x(n + N) = x(n + kN) \text{ với mọi } k \quad (1.10)$$

Ta ký hiệu dãy tuần hoàn với chu kỳ N bởi dấu $\sim$, $\tilde{x}(n)$ hoặc $\tilde{x}(n)_N$

Ví dụ: Hãy biểu diễn bằng đồ thị một dãy tuần hoàn với chu kỳ $N = 4$.

Bài giải:

Dãy $\tilde{x}(n)_N$ với $N = 4$ cho trên hình 1.17.



Hình 1.17. Dãy tuần hoàn chu kỳ $N = 4$

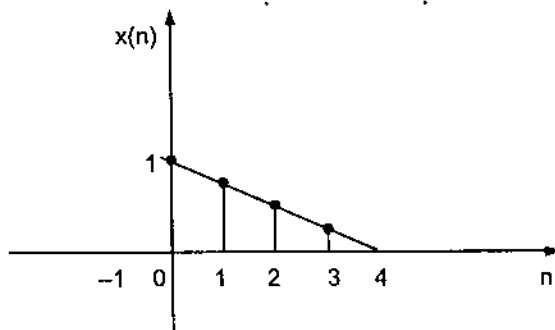
b) Dãy có chiều dài hữu hạn

Dãy được xác định với số hữu hạn N mẫu (N điểm trên trục hoành) gọi là dãy có chiều dài hữu hạn; N được gọi là chiều dài dãy.

Ví dụ: Hãy vẽ một dãy có chiều dài hữu hạn $N = 4$.

Bài giải:

Dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn $N = 4$ được biểu diễn trên hình 1.18.



Hình 1.18. Dãy $x(n)$ chiều dài $N = 4$

Nhận xét: chúng ta có thể xem dãy $x(n)$ này có chiều dài lớn hơn 4, tại các điểm tiếp theo dãy có biên độ bằng 0.

Ta thấy rằng dãy $u(n)$ có chiều dài vô cùng, dãy $\delta(n)$ có chiều dài là 1; dãy $\text{rect}_N(n)$ có chiều dài là N . Nếu ta ký hiệu chiều dài của dãy $x(n)$ là $L[x(n)]$ thì $L[\text{rect}_N(n)] = [0, N-1] = N$.

c) Năng lượng và công suất của dãy

Năng lượng của dãy $x(n)$ được định nghĩa:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.11)$$

Ở đây $||$ là ký hiệu của phép lấy modul

Ví dụ: Tính năng lượng của dãy $u(n)$ và $\text{rect}_N(n)$.

Bài giải:

$$E_{u(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty$$

$$E_{\text{rect}_N(n)} = \sum_{n=-N}^N |\text{rect}_N(n)|^2 = N$$

Công suất trung bình của dãy được định nghĩa là:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.12)$$

Năng lượng của dãy $x(n)$ là hữu hạn $-N \leq n \leq N$ được định nghĩa:

$$E_{x_N} = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.13)$$

Vậy ta có:

$$E_x = \lim_{N \rightarrow \infty} E_{x_N} \quad (1.14)$$

và

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_{x_N} \quad (1.15)$$

Dãy năng lượng:

Nếu năng lượng của dãy $x(n)$ là hữu hạn (tức $0 < E_x < \infty$) thì $x(n)$ gọi là dãy năng lượng.

Dãy công suất:

Nếu công suất của một dãy $x(n)$ là hữu hạn (tức là $0 < P_x < \infty$) thì $x(n)$ gọi là dãy công suất.

Ví dụ: Tính công suất trung bình của dãy $u(n)$ và $\text{rect}_N(n)$.

Bài giải:

$$P_u = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |u(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |1|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\text{rect}_M(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |\text{rect}_M(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{2N+1} = 0$$

Ta thấy rằng $E_{\text{rect}_N(n)} = M$ là hữu hạn, vì vậy $P_{\text{rect}_M} = 0$, còn trong trường hợp tổng quát nếu E_x là vô hạn thì P_x có thể là vô hạn hoặc hữu hạn.

d) Tổng của hai dãy

Định nghĩa: Tổng của hai dãy nhận được bằng cách cộng từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến số độc lập.

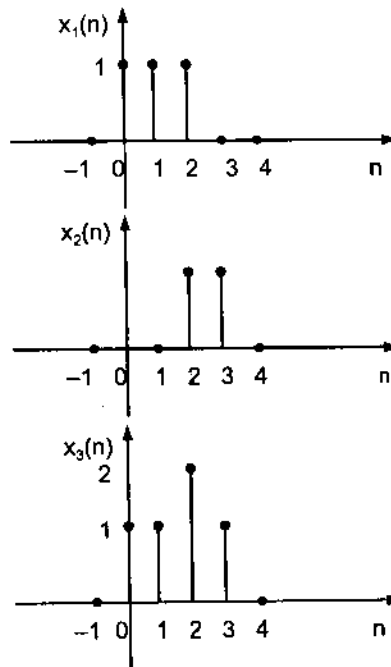
Ví dụ:

Hãy tìm tổng của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$: $x_3(n) = x_1(n) + x_2(n)$

Với: $x_1(n) = \text{rect}_3(n)$
 $x_2(n) = \text{rect}_2(n-2)$

Bài giải:

Tổng hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ được thực hiện trên đồ thị cho trên hình 1.19.



Hình 1.19. Tổng $x_1(n)$ và $x_2(n)$

e) Tích của hai dãy

Tích của hai dãy nhận được bằng cách nhân từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

Ví dụ: Hãy tìm tích của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là dãy $x_3(n)$ như sau:

$$x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

Với: $x_1(n) = \text{rect}_5(n)$; $x_2(n) = \text{rect}_3(n - 4)$

Bài giải: Giải bằng đồ thị trên hình 1.20.

Ghi chú: Tích của nhiều dãy cũng được định nghĩa tương tự.

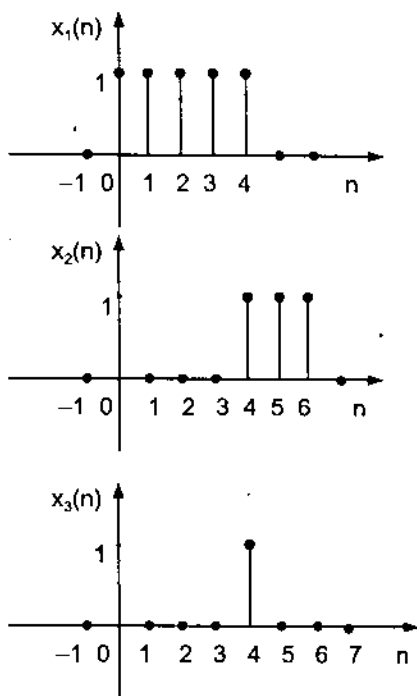
f) Tích với hằng số

Tích của một dãy với một hằng số nhận được bằng cách nhân tất cả các giá trị mẫu của dãy với chính một hằng số đó.

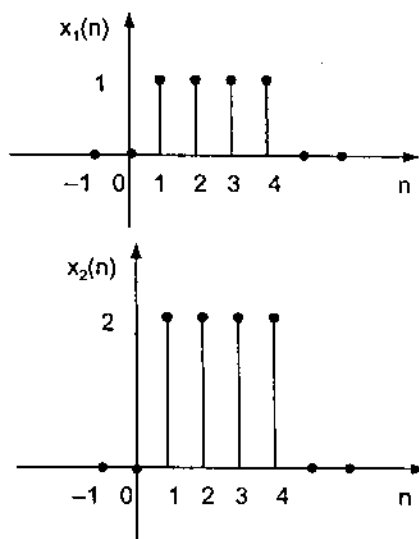
Ví dụ: Hãy tìm dãy $x_2(n) = \alpha \cdot x_1(n)$

Biết $\alpha = 2$ và $x_1(n) = \text{rect}_4(n - 1)$

Bài giải: Giải bằng đồ thị cho trên hình 1.21.



Hình 1.20. Tích hai dãy



Hình 1.21. Tích với hằng số

g) Trễ (dịch)

Ta nói rằng dãy $x_2(n)$ là dãy lặp lại trễ của dãy $x_1(n)$ khác n_0 mẫu nếu ta có:

$$x_2(n) = x_1(n - n_0) \text{ với mọi } n; \quad (1.16)$$

trong đó n_0 là số nguyên, âm hoặc dương. Dãy $x_2(n)$ còn được gọi là trễ tuyến tính của $x_1(n)$.

Ví dụ:

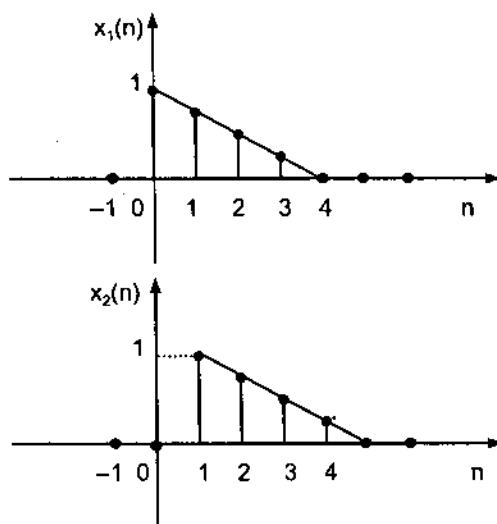
Hãy tìm dãy trễ $x_2(n)$ của dãy $x_1(n)$:

$$x_2(n) = x_1(n - 1)$$

Với
$$x_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Bài giải:

Giải bằng đồ thị trên hình 1.22.



Hình 1.22. Trễ

Nhận xét: Nhờ có các phép tính trên mà chúng ta có thể biểu diễn một dãy $x(n)$ bất kỳ dưới dạng tổng quát như sau:

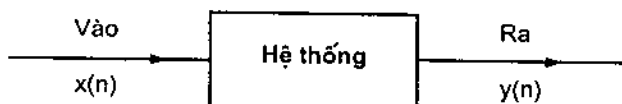
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (1.7)$$

1.4. CÁC HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

1.4.1. Các hệ thống tuyến tính

a) Định nghĩa

Ký hiệu hệ thống:



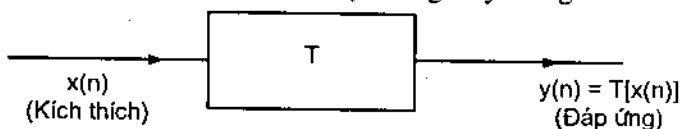
Kích thích và đáp ứng: Dãy vào được gọi là dãy kích thích (hay kích thích), dãy ra được gọi là đáp ứng của hệ thống với kích thích đang khảo sát.

Đặc trưng của hệ thống: Một hệ thống xử lý số được đặc trưng một toán tử T làm nhiệm vụ biến đổi dãy vào $x(n)$ thành dãy ra $y(n)$ chúng ta có thể sử dụng hai ký hiệu toán tử sau đây:

$$T[x(n)] = y(n) \quad (1.18)$$

Hoặc $x(n) \xrightarrow{T} y(n)$

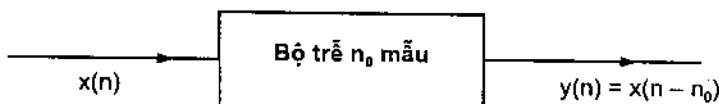
Chúng ta cũng có thể biểu diễn hệ thống này bằng sơ đồ:



Ví dụ:

Toán tử T là toán tử trễ, ta có:

$$T[x(n)] = x(n - n_0) = y(n)$$



b) Các hệ thống tuyến tính

Đối với các hệ thống tuyến tính, toán tử T phải thoả mãn nguyên lý xếp chồng, vì thế T đặc trưng cho một hệ thống tuyến tính bất buộc phải tuân theo quan hệ sau:

$$\begin{aligned} T[a.x_1(n) + b.x_2(n)] &= T[a.x_1(n)] + T[b.x_2(n)] \\ &= a.T[x_1(n)] + b.T[x_2(n)] = a.y_1(n) + b.y_2(n) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ở đây a, b là hai hằng số bất kỳ;

$y_1(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_1(n)$;

$y_2(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_2(n)$.

Ví dụ:

Xét toán tử trễ T : $T[x(n)] = x(n - n_0) = y(n)$

Ta có: $T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$
 $= ax_1(n - n_0) + bx_2(n - n_0)$

Vậy hệ thống đặc trưng bởi toán tử T này là hệ thống tuyến tính.

c) Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính

Ta biết rằng một dãy bất kỳ $x(n)$ có thể được biểu diễn bởi công thức:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Giả sử hệ thống của chúng ta là tuyến tính chúng ta có thể viết lại:

$$y(n) = T[x(n)] = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(k)\delta(n-k)]$$

Vì biến k độc lập với biến n nên ta có:

$$y(n) = T[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad (1.20)$$

Nếu ta ký hiệu $h_k(n)$ là đáp ứng của hệ thống với kích thích $\delta(n-k)$ tức là: $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$.



Khi đó chúng ta có:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (1.21)$$

$h_k(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính.

Nhận xét:

- Các hệ thống tuyến tính đặc trưng bởi đáp ứng xung của nó.
- $h_k(n)$ là hàm của k và n , các giá trị của k khác nhau sẽ có các đáp ứng xung khác nhau, có nghĩa là hệ thống tuyến tính này phụ thuộc vào biến k , nếu biến k là thời gian thì hệ thống phụ thuộc vào thời gian.

Sau đây chúng ta sẽ xét hệ thống tuyến tính bất biến theo biến k , tức là dạng của đáp ứng xung $h_k(n)$ không phụ thuộc vào k .

1.4.2. Các hệ thống tuyến tính bất biến

a) Định nghĩa

Nếu $y(n)$ là đáp ứng với kích thích $x(n)$ thì hệ thống tuyến tính gọi là bất biến khi $y(n-k)$ là đáp ứng của kích thích $x(n-k)$, ở đây k là số nguyên dương hoặc âm. Nếu biến số là thời gian thì ta nói bất biến theo thời gian.

Ví dụ như hệ thống $y(n) = 2x(n) + 3x(n-2)$ là hệ thống tuyến tính bất biến, hệ thống $y(n) = nx(n) + x(n-2)$ không phải là hệ thống tuyến tính bất biến.

b) Tích chập

Phép tính tích chập chỉ được định nghĩa cho hệ thống tuyến tính bất biến.

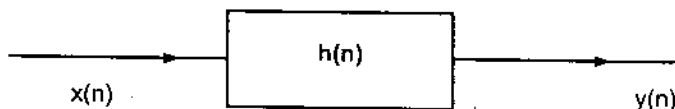
Ta có quan hệ: $T[\delta(n)] = h(n)$

$$T[\delta(n-k)] = h(n-k) = h_k(n)$$

Ta có:
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.22)$$

Như vậy $h_k(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất kỳ còn $h(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến, lúc này $h(n)$ không phụ thuộc vào k , tức là nếu biến là thời gian thì ở mọi thời điểm khác nhau đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến luôn là $h(n)$.

Vậy chúng ta có thể nói rằng đáp ứng xung $h(n)$ sẽ đặc trưng hoàn toàn cho một hệ thống tuyến tính bất biến.



Ta có quan hệ sau:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \quad (1.23)$$

Phép tính $(*)$ được gọi là phép tích chập, quan hệ (1.23) được gọi là tích chập của $x(n)$ và $h(n)$.

Sau đây chúng ta sẽ xét các phương pháp thực hiện phép tích chập.

Phương pháp 1: Phương pháp tính trực tiếp (phương pháp thế)

Khi thực hiện phép chập trực tiếp, ta thường phải tính toán các tổng hữu hạn hoặc vô hạn các số hạng có dạng a^n và na^n . Các biểu thức có dạng đơn giản cho một số chuỗi thường gặp được liệt kê trong bảng sau:

$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad a < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^N - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad a < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$

Ví dụ: Hãy thực hiện tích chập hai tín hiệu:

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, & a \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

và $h(n) = u(n)$

Bài giải:

Bằng cách tính toán trực tiếp tích chập ta thấy:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(n-k)$$

Vì $u(k) = 0$ với $k < 0$ và $u(n-k) = 0$ khi $n > k$ nên khi $n < 0$ không có số hạng nào không bằng 0 trong tổng và $y(n) = 0$, khi $n \geq 0$ ta có:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Do vậy ta có: $y(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \cdot u(n)$

Phương pháp 2: Phương pháp giải bằng đồ thị

Các bước thực hiện như sau:

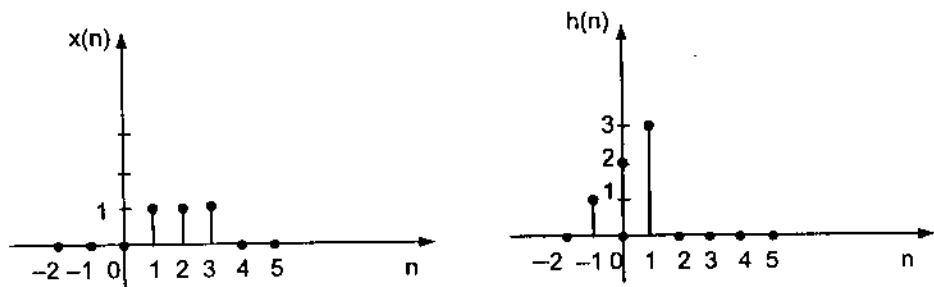
Bước 1: Vẽ hai chuỗi $x(k)$ và $h(k)$ như là các hàm của k .

Bước 2: Chọn một trong hai chuỗi, ví dụ $h(k)$, và đảo ngược thời gian của chuỗi này để tìm thành phần của chuỗi $h(-k)$.

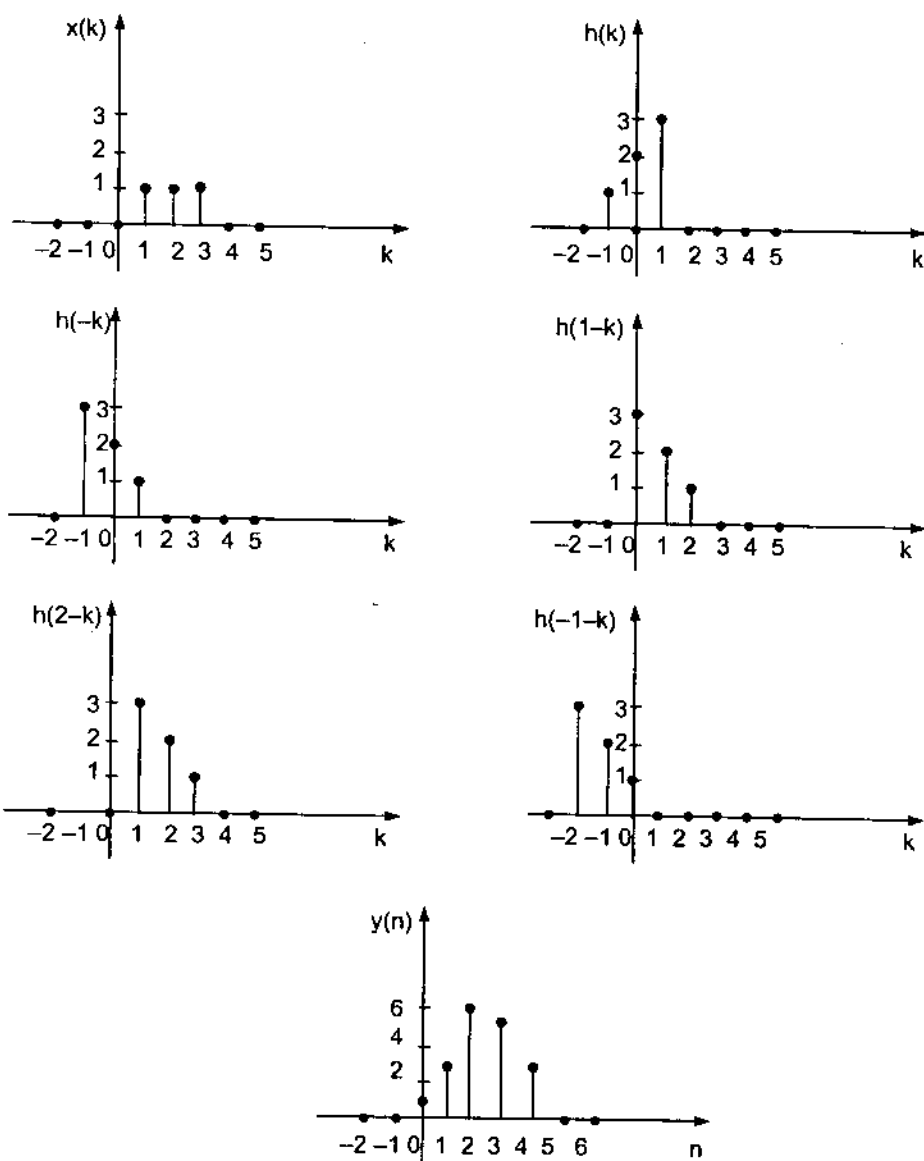
Bước 3: Dịch chuỗi đã đảo ngược thời gian bởi n . (Lưu ý: Nếu $n > 0$ điều này tương đương với phép dịch sang phải, còn nếu $n < 0$ điều này tương đương với phép dịch sang trái).

Bước 4: Nhân hai chuỗi $x(k)$ và $h(n-k)$ và lấy tổng các tích đối với mọi giá trị của k . Kết quả sẽ là giá trị của $y(n)$. Quá trình này được lặp lại với mọi giá trị n có thể.

Ví dụ: Hãy tính tích chập $y(n) = x(n) * h(n)$ trong đó $x(n)$ và $h(n)$ được cho bởi hình 1.23.



Hình 1.23



Hình 1.24. Tính tích chập bằng phương pháp đồ thị

Bài giải:

Bước 1: Vẽ $x(k)$ và $h(k)$ như là các hàm của k , ta chọn một trong hai chuỗi này để đảo ngược thời gian. Trong ví dụ ta đảo ngược thời gian chuỗi $h(k)$ thành chuỗi $h(-k)$.

Bước 2: Thực hiện phép nhân $x(k) \cdot h(-k)$ và lấy tổng trên k , ta tìm thấy $y(0) = 1$.

Bước 3: Dịch $h(-k)$ sang phải 1 đơn vị để có chuỗi $h(1-k)$ thực hiện phép nhân $x(k).h(1-k)$ và lấy tổng trên k , ta tìm thấy $y(1) = 3$.

Bước 4: Dịch $h(1-k)$ sang phải một lần nữa để có chuỗi $h(2-k)$. Thực hiện phép nhân $x(k).h(2-k)$ và lấy tổng trên k , ta tìm thấy $y(2) = 6$.

Bước 5: Tiếp tục theo cách trên ta tìm thấy $y(3) = 5$, $y(4) = 3$ và $y(n) = 0$ với $n > 4$.

Bước 6: Lấy $h(-k)$ và dịch chuỗi này sang trái 1 đơn vị để có $h(-1-k)$, do tích $x(k).h(-1-k) = 0$ với mọi k , ta tìm thấy $y(-1) = 0$. Thực tế $y(n) = 0$ với mọi $n < 0$.

Một thực tế thường gặp khi thực hiện phép chập giữa hai chuỗi có chiều dài hữu hạn là: nếu $x(n)$ là chuỗi có chiều dài L_1 , $h(n)$ là chuỗi có chiều dài L_2 , thì $y(n) = x(n)*h(n)$ sẽ có chiều dài bằng: $L = L_1 + L_2 - 1$.

Phương pháp 3: Phương pháp quy luật trượt

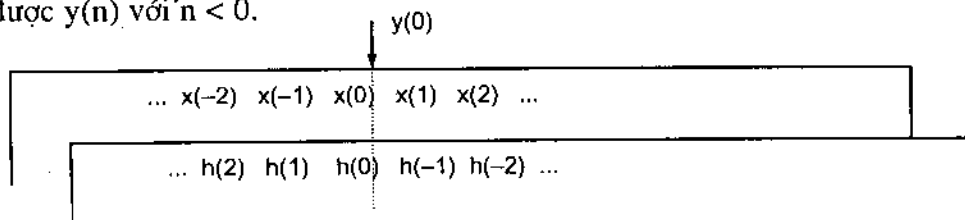
Một phương pháp khác để chúng ta thực hiện phép tích chập gọi là phương pháp quy luật trượt (slide rule method), phương pháp này thuận lợi khi cả hai chuỗi $x(n)$ và $h(n)$ đều là các chuỗi hữu hạn và tồn tại trong khoảng thời gian ngắn.

Các bước thực hiện:

Bước 1: Ghi các giá trị của $x(k)$ dọc theo đỉnh của tờ giấy và ghi các giá trị của $h(-k)$ dọc theo đỉnh của một tờ giấy khác (minh họa như hình bên dưới).

Bước 2: Xếp thẳng hàng các giá trị $x(0)$ và $h(0)$ của hai chuỗi, nhân từng cặp số và cộng các tích để có giá trị $y(0)$.

Bước 3: Trượt tờ giấy có chuỗi $h(-k)$ về phía phải 1 đơn vị, nhân từng cặp số lấy tổng của các tích để có giá trị $y(1)$ và lặp lại việc trượt này về phía phải bởi $n > 0$. Cũng thực hiện tương tự như vậy về phía trái để thu được $y(n)$ với $n < 0$.



Ví dụ: Cho $x(n) = \text{rect}_5(n)$

và
$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính tích chập $x(n)*h(n)$

(Thực hiện theo các bước trên, bạn đọc tự giải ví dụ này).

c) Tính chất của phép tính tích chập

Tính chất 1: Tích chập có tính giao hoán

$$y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (1.24)$$

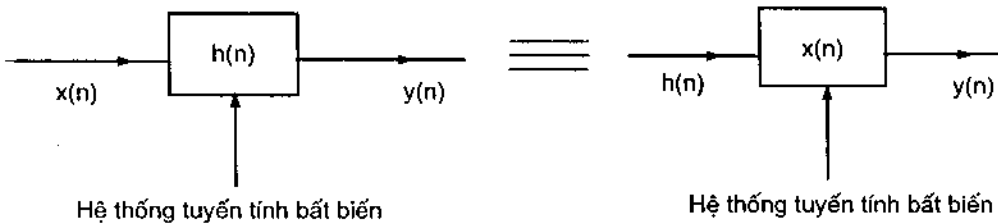
Từ tính chất này ta thấy hệ thống tuyến tính bất biến có kích thích $x(n)$ và đáp ứng xung $h(n)$ sẽ tương đương với hệ thống có kích thích $h(n)$ và đáp ứng xung $x(n)$.

Chứng minh: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

Thay biến $n-k = l$ hay $k = n-l$ ta có:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-l)h(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n-l) = h(n)*x(n) \end{aligned}$$

Vậy $y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$



Hình 1.25. Tính chất giao hoán của tích chập

Chú ý: phép nhân có tính giao hoán, vì vậy chúng ta có thể viết:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \\ h(n) * x(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \end{aligned}$$

Tính chất 2: Tích chập có tính kết hợp

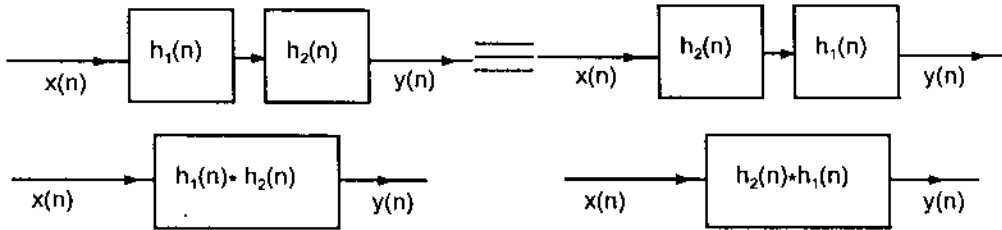
$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (1.25)$$

Quan hệ này ta thấy việc nối tiếp hai hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là tích chập của $h_1(n)$ với $h_2(n)$: $h_1(n) * h_2(n)$:

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $h(n) = h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$



Hình 1.26. Hệ thống tuyến tính bất biến mắc nối tiếp

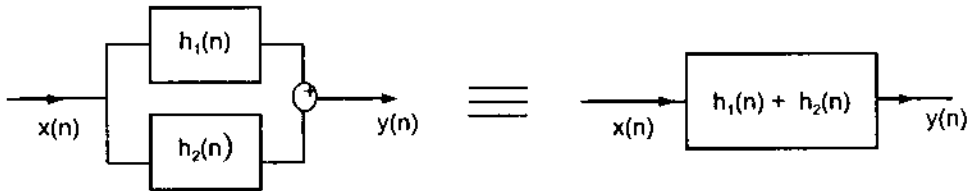
Chứng minh:

$$\begin{aligned} x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [h_1(n-k) * h_2(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_2(l) h_1[(n-k)-l] \right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_1[(n-l)-k] \right] h_2(l) \\ &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \end{aligned}$$

Tính chất 3: Tích chập có tính phân phối

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)] \quad (1.26)$$

Từ tính chất này ta thấy rằng nếu nối song song hai hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là tổng của $h_1(n)$ và $h_2(n)$.



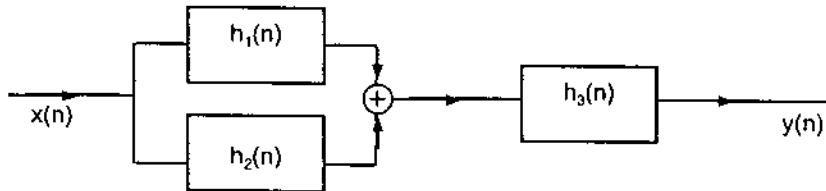
Hình 1.27. Hệ thống tuyến tính bất biến mắc song song

Chứng minh:

$$\begin{aligned}
 x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [h_1(n-k) + h_2(n-k)] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) [h_1(n-k)] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_2(n-k) \\
 &= [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)]
 \end{aligned}$$

Ví dụ:

Cho ba hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$, $h_2(n)$ và $h_3(n)$ được ghép nối theo hình 1.28.



Hình 1.28

Với:

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{2}, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$h_2(n) = \frac{1}{2} \delta(n-1) + u(n-2) + u(n-6)$$

$$h_3(n) = \text{rect}_{11}(n)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của của hệ thống.

Bài giải:

Theo hình vẽ 1.28 ta thấy đáp ứng xung của hệ thống là

$$h(n) = [h_1(n) + h_2(n)] * h_3(n).$$

Dễ thấy $h_1(n) + h_2(n) = \text{rect}_6(n)$, vì vậy $h(n) = \text{rect}_6(n) * \text{rect}_{11}(n)$

* Xác định $h(n)$ bằng phương pháp giải tích:

$$h(n) = \text{rect}_6(n) * \text{rect}_{11}(n)$$

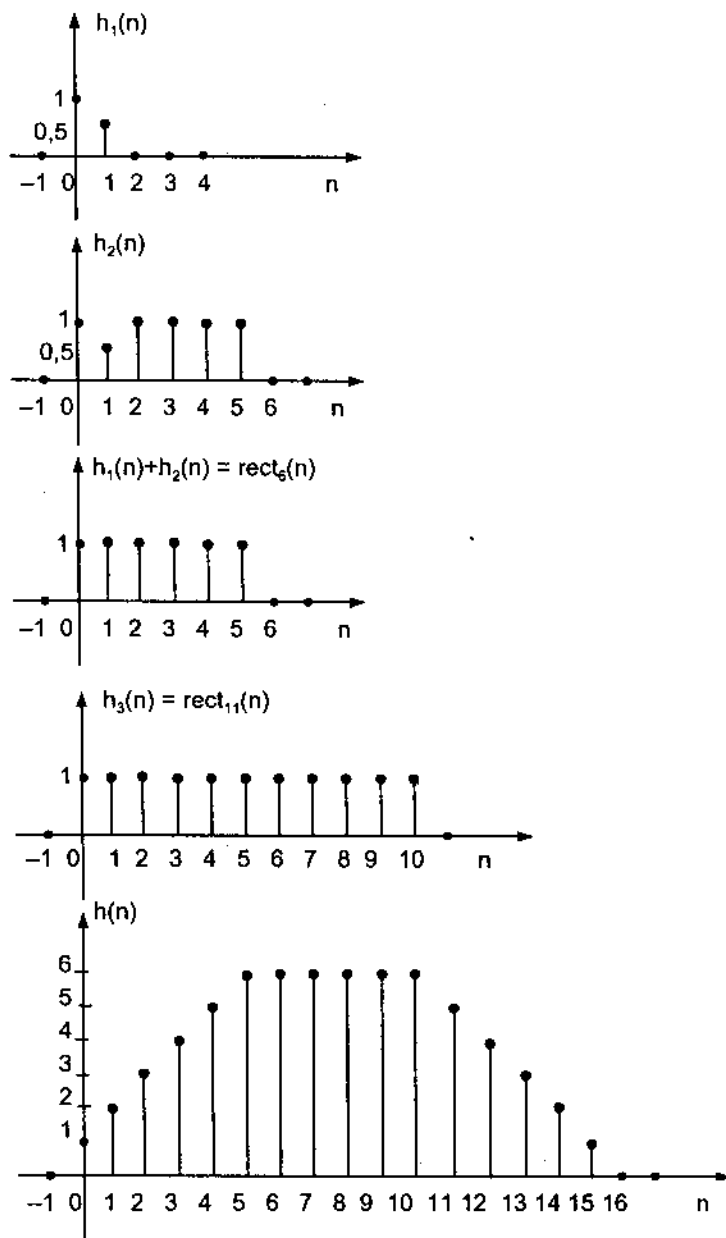
$$h(n) = \sum_{k=1}^n 1 = n+1 \quad 0 \leq n \leq 5$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^5 1 = 6 \quad 5 \leq n \leq 10$$

$$h(n) = \sum_{k=n-10}^5 1 = 16 - n, \quad 11 \leq n \leq 15$$

$h(n) = 0$, các giá trị n khác.

* Xác định $h(n)$ bằng phương pháp đồ thị: xem hình 1.29.



Hình 1.29

1.4.3. Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

a) Định nghĩa

Một hệ thống tuyến tính bất biến gọi là nhân quả nếu đáp ứng của nó ở thời điểm bất kỳ $n = n_0$ hoàn toàn độc lập với kích thích của nó ở các thời điểm tương lai $n > n_0$.

Nói cách khác, đối với hệ thống nhân quả đáp ứng không bao giờ đi trước kích thích của nó.

b) Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

Định lý: Một hệ thống tuyến tính bất biến là nhân quả nếu và chỉ nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$h(n) = 0 \text{ với } n < 0 \quad (1.27)$$

Chứng minh: Giả sử ta có hai kích thích $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$$x_1(n) = x_2(n) \text{ với } n < n_0$$

$$x_1(n) \neq x_2(n) \text{ với } n \geq n_0$$

Hai đáp ứng của hệ thống tuyến tính bất biến tương ứng là:

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)h(n-k)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

Nếu hệ thống này là nhân quả thì ta có:

$$y_1(n) = y_2(n) \text{ với } n < n_0$$

Chúng ta có thể chia tổng này thành hai phần:

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_1(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{\infty} x_1(k)h(n-k)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_2(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

Với $k < n_0$ thì $x_1(k) = x_2(k)$ do đó:

$$\sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_1(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_2(k)h(n-k)$$

$$y_1(n) - y_2(n) = \sum_{k=n_0}^{\infty} x_1(k)h(n-k) - \sum_{k=n_0}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x_1(n) - x_2(n)]h(n-k)$$

Nếu $k > n_0$ thì $x_1(k) \neq x_2(k) \Rightarrow x_1(k) - x_2(k) \neq 0$ với $k \geq n_0$

Ta thấy rằng nếu hệ thống là nhân quả thì với $n < n_0$ ta có:

$$y_1(n) - y_2(n) = 0$$

hay
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [x_1(n) - x_2(n)]h(n-k) = 0$$

Để thoả mãn điều kiện này, ta buộc phải có:

$$h(n-k) = 0 \text{ với } n < n_0 \text{ và } k \geq n_0$$

Ta đặt $m = n - k$

với $n < n_0$ và $k \geq n_0$ thì $(n-k) < 0$, ta có $m < 0$

Ta thu được: $h(m) = 0$ với $m < 0$

Định lý đã được chứng minh.

Định lý đảo: Nếu đáp ứng xung $h(n)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến bằng không với $n < 0$ thì hệ thống đó là nhân quả.

Nhận xét: Đối với hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả ta có thể biến công thức tích chập theo tính chất $h(n) = 0$ với $n < 0$.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)h(n-k)$$

$$h(n-k) = \begin{cases} 0, & \text{với } k > n \\ \neq 0, & \text{với } k \leq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(n)h(n-k)$$

Nếu viết dưới dạng khác:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Vì $h(k) = 0$ với $k < 0$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

Nếu đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn:

$$h(n) = \begin{cases} \neq 0, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(n)x(n-k)$$

Ví dụ: Hãy kiểm tra tính nhân quả của hai hệ thống tuyến tính bất biến được cho bởi phương trình sau:

$$y_1(n) = 2x(n-1) + x(n-2)$$

$$y_2(n) = 3x(n-1) + 2x(n-2) + \delta(n+2)$$

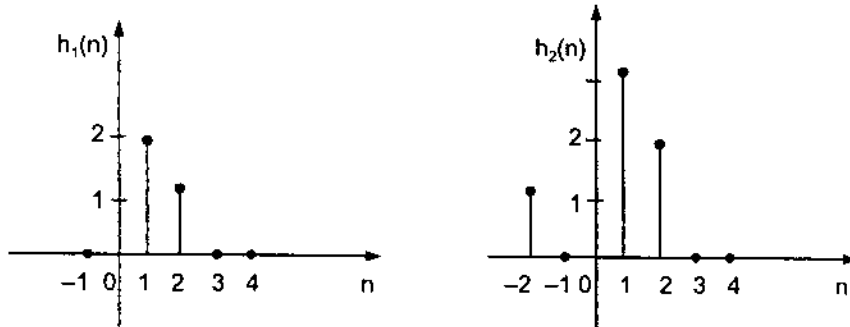
Bài giải:

Ta biết rằng $h(n) = y(n)$ khi cho $x(n) = \delta(n)$, áp dụng ta có:

$$h_1(n) = 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$h_2(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n+2)$$

Đồ thị biểu diễn $h_1(n)$ và $h_2(n)$ như sau:



Hình 1.30

Xem hình 1.30 ta thấy:

$h_1(n) = 0$ với $n < 0$, $h_1(n)$ là nhân quả

$h_2(n) \neq 0$ với $n < 0$, $h_2(n)$ là không nhân quả

c) Dây nhân quả

Tương tự như chúng ta có thể dùng khái niệm nhân quả đối với các dãy:

Một dãy $x(n]$ được gọi là dãy nhân quả nếu thoả mãn:

$$x(n) = 0 \text{ với } n < 0 \quad (1.28)$$

Đối với hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả thì:

$$h(n) = 0 \text{ với } n < 0$$

$$\Rightarrow h(n-k) = 0 \text{ với } k > n$$

Do đó ta có:
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k)$$

Nhưng $x(k) = 0$ với $k < 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k)$

Tương tự ta có: $y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) \quad (1.29)$$

d) Tín hiệu và hệ thống phản nhân quả

Ngược với khái niệm nhân quả ta có khái niệm phản nhân quả (anticausal).

Một tín hiệu rời rạc $x(n]$ được gọi là phản nhân quả nếu chúng ta có:

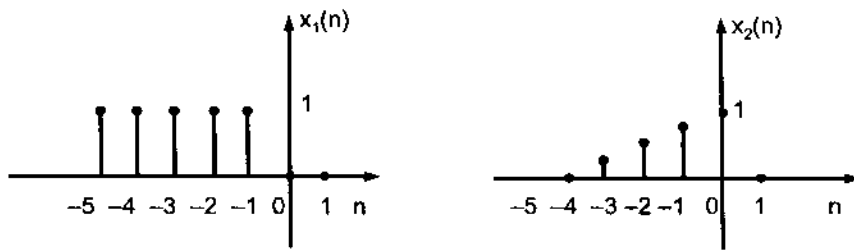
$$x(n) = 0 \text{ với } n > 0 \quad (1.30)$$

Một hệ thống rời rạc được gọi là phản nhân quả nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó thoả mãn điều kiện:

$$h(n) = 0 \text{ với } n > 0 \quad (1.31)$$

Ví dụ:

Xét tính nhân quả của các tín hiệu cho trên hình 1.31.



Hình 1.31. Ví dụ về dãy phản nhân quả

Bài giải:

$x_1(n)$ và $x_2(n)$ là các tín hiệu phản nhân quả

$x_1(n)$ là tín hiệu phản nhân quả có chiều dài vô hạn.

$x_2(n)$ là tín hiệu phản nhân quả có chiều dài hữu hạn.

$$L[x_1(n)] = [-\infty, 0] = \infty$$

$$L[x_2(n)] = [-4, 0] = 5$$

1.4.4. Hệ thống tuyến tính bất biến ổn định

a) Định nghĩa

Một hệ thống được gọi là ổn định nếu ứng với đầu vào giới hạn, ta có đầu ra giới hạn.

Tức là với $|x(n)| < \infty$ với n bất kỳ ta sẽ có $|y(n)| < \infty$ với n bất kỳ.

Ví dụ:

Xét sự ổn định của hai hệ thống TTBB có đáp ứng xung là $h_1(n) = \text{rect}_4(n)$ và $h_2(n) = u(n)$ biết hai hệ thống này có cùng dãy kích thích đầu vào là $x(n) = u(n)$.

Bài giải:

Ở đây dãy vào $x(n)$ bị hạn chế ở 1:

$$|x(n)| = 1 < \infty \text{ với } n \text{ bất kỳ.}$$

Bây giờ ta xét dãy ra $y_1(n)$ và $y_2(n)$.

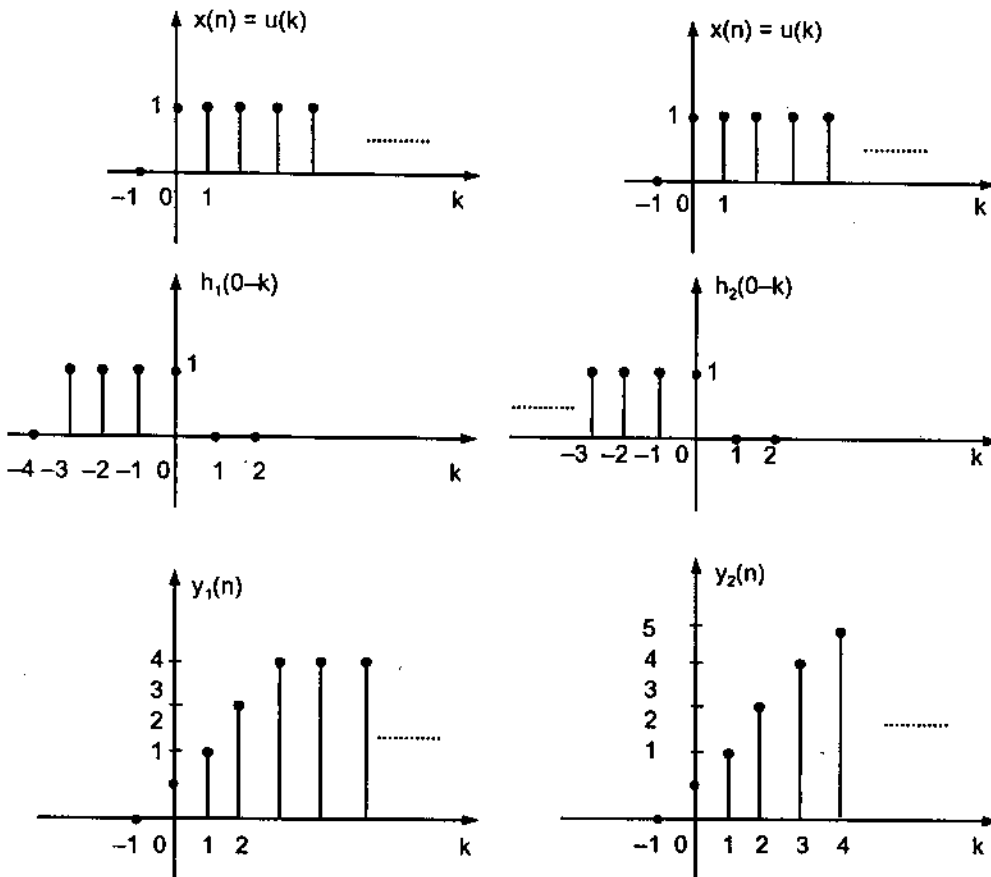
$$y_1(n) = u(n) * \text{rect}_4(n) \text{ và } y_2(n) = u(n) * u(n)$$

Kết quả thu được trên hình 1.32

Từ hình 1.32 ta thấy rằng:

$$|y_1(n)| \leq 4 < \infty \text{ với mọi } n \Rightarrow \text{Hệ thống ổn định.}$$

$$|y_2(n)| = \infty \text{ khi } n \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Hệ thống không ổn định.}$$



Hình 1.32

Ghi chú: Nếu xét đáp ứng xung của hệ thống ta có:

$$s_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = 1+1+1+1+ = 4 < \infty$$

$$s_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2(n)| = 1+1+1+1+... = \infty$$

Tổng S_1 hữu hạn thì hệ thống ổn định.

Tổng S_2 vô hạn thì hệ thống không ổn định.

Vậy chúng ta có thể dựa vào đáp ứng xung $h(n)$ để xét sự ổn định của hệ thống mà không cần tính đáp ứng ra $y(n)$, ta có định lý sau:

b) Định lý

Một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu và chỉ nếu đáp ứng xung của nó thỏa mãn điều kiện sau:

$$s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.32)$$

1.5. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẲNG

1.5.1. Phương trình sai phân tuyến tính

Về mặt toán học, kích thích đầu vào $x(n)$ và đáp ứng đầu ra $y(n)$ của hầu hết các hệ thống tuyến tính thỏa mãn phương trình sai phân tuyến tính sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k(n) \cdot y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n) \cdot x(n-r) \quad (1.33)$$

Ở đây N và M là các số nguyên dương, N là bậc của phương trình sai phân.

Nhận xét: Trong phương trình này tập hợp các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ sẽ biểu diễn toàn bộ hành vi của hệ thống đối với một giá trị n cho trước.

Ví dụ: Cho hai hệ thống tuyến tính được cho bởi phương trình sai phân sau:

$$\text{Hệ thống 1} \quad y_1(n) = nx(n)$$

$$\text{Hệ thống 2} \quad y_2(n) = -2x(n) + x(n-1)$$

Hãy tìm bậc và các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$

Bài giải:

Xét hệ thống 1: $y_1(n) = nx(n)$ có $N = 0$; $M = 0 \Rightarrow$ là hệ thống bậc 0

$$a_0(n) = 1; a_1(n) = \dots = a_N(n) = 0$$

$$b_0(n) = n; b_1(n) = \dots = b_M(n) = 0$$

Ở đây $a_0(n) = 1$ là hằng số, nhưng $b_0(n) = n$ là phụ thuộc vào biến số n , $b_0(n)$ không phải là hằng số.

Xét hệ thống 2: $y_2(n) = 2x(n) + 3x(n-1)$ có $N = 0; M = 1 \Rightarrow$ là hệ thống bậc 0.

$$a_0(n) = 1; a_1(n) = \dots = a_N(n) = 0$$

$$b_0(n) = -2; b_1(n) = 1; b_2(n) = \dots = b_M(n) = 0$$

Ở đây các hằng số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ đều là các hằng số độc lập với n .

Hai hệ thống đều là hệ thống tuyến tính, nhưng hệ thống 1 không phải là hệ thống tuyến tính bất biến vì hệ số của nó không phải là hằng số, hệ thống 2 là hệ thống tuyến tính bất biến vì hệ số của nó là hằng số.

1.5.2. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N có dạng:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1.34)$$

Ở đây các hệ số a_k và b_r là các hằng số không phụ thuộc vào biến độc lập n .

Chúng ta sẽ viết phương trình dưới dạng khác sau đây:

$$a_0 y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$\text{Nếu } a_0 \neq 0 \text{ ta có } y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) \quad (1.35)$$

Để giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng ta có hai phương pháp: phương pháp thế và phương pháp nghiệm tổng quát.

a) Phương pháp trực tiếp (phương pháp thế)

Phương pháp thế là phương pháp giải phương trình sai phân bằng cách thế các giá trị $y(n)$ và $x(n)$ từ nhỏ đến lớn.

Ví dụ: Cho hệ thống có phương trình sai phân bậc nhất:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n).$$

Hãy tìm đáp ứng xung và đáp ứng của hệ thống biết $y(n) = 0$ với $n < 0$.

Bài giải:

– Tìm $h(n)$:

Nếu $x(n) = \delta(n)$ thì $y(n) = h(n) \Rightarrow h(n) = ah(n-1) + \delta(n)$

Theo điều kiện đầu ta có $y(n) = 0$ với $n < 0 \Rightarrow h(n) = 0$ với $n < 0$

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = a \cdot 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a \cdot 1 + 0 = a$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a \cdot a + 0 = a^2$$

.....

.....

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n) = a \cdot a^{n-1} + 0 = a^n$$

Vậy $h(n) = a^n \cdot u(n)$

Hệ thống này là hệ thống nhân quả.

– Tìm $y(n)$:

$$y(0) = ay(-1) + x(0) = a \cdot 0 + x(0)$$

$$y(1) = ay(0) + x(1) = a \cdot x(0) + x(1)$$

$$y(2) = ay(1) + x(2) = a^2x(0) + ax(1) + x(2)$$

.....

$$y(n) = a^n x(0) + a^{n-1} x(1) + \dots + ax(n-1) + x(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n a^k x(n-k)$$

Đây cũng chính là biểu thức tích tích chập của $h(n)$ và $x(n)$ khi $h(n)$ và $x(n)$ đều là nhân quả.

b) Phương pháp nghiệm tổng quát

Các bước giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bằng phương pháp nghiệm tổng quát:

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_0(n)$.

Phương trình thuần nhất là phương trình có vế phải bằng 0, phương trình thuần nhất có dạng:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (1.36)$$

Thông thường nghiệm tổng quát có dạng hàm mũ $y_0(n) = \alpha^n$ thay vào phương trình trên ta có:

$$\sum_{k=0}^N a_k \alpha^{n-k} = 0$$

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{N-1} \alpha^{n-(N-1)} + a_N \alpha^{n-N} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^{n-N} (a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N) = 0$$

Và ta có phương trình:

$$(a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N) = 0 \quad (1.37)$$

Phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của hệ thống và đa thức vế bên trái gọi là đa thức đặc trưng, nó có bậc là N.

Phương trình đặc trưng sẽ có N nghiệm được ký hiệu là $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$; các nghiệm này có thể là thực hoặc phức. Nếu các nghiệm trùng nhau thì ta có nghiệm bội.

Giả sử chúng ta có N nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, ta sẽ có nghiệm tổng quát của phương trình sai phân thuần nhất dưới dạng sau:

$$y_0(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \dots + A_{N-1} \alpha_{N-1}^n + A_N \alpha_N^n = \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n \quad (1.38)$$

Ở đây các giá trị $A_1, A_2, \dots, A_N$ là các hằng số sẽ được xác định bởi các điều kiện đầu.

Nếu nghiệm đặc trưng của phương trình sai phân là các nghiệm bội thì nghiệm tổng quát $y_0(n)$ của phương trình sẽ thay đổi. Giả sử α_2 là nghiệm bội bậc l, ta sẽ có:

$$y_0(n) = A_1 \alpha_1^n + A_{20} \alpha_2^n + A_{21} n \alpha_2^n + A_{22} n^2 \alpha_2^n + \dots + A_{2(l-1)} n^{l-1} \alpha_2^n + \dots + A_N \alpha_N^n$$

$$\Rightarrow y_0(n) = A_1 \alpha_1^n + (A_{20} + A_{21} n + A_{22} n^2 + \dots + A_{2(l-1)} n^{l-1}) \alpha_2^n + \dots + A_{N-1} \alpha_{N-1}^n + A_N \alpha_N^n \quad (1.39)$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân không thuần nhất.

Phương trình sai phân không thuần nhất là phương trình ứng với đầu vào $x(n) \neq 0$, dạng tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1.40)$$

Nghiệm riêng này ký hiệu là $y_p(n)$. Thông thường dạng của $y_p(n)$ được chọn giống như dạng của $x(n)$.

Nếu $y_p(n)$ lại nằm trong $y_0(n)$, tức là trong thành phần $y_0(n)$ có $y_p(n)$ thì ta phải chọn $y_p(n)$ độc lập với các thành phần của $y_0(n)$. Cách chọn $y_p(n)$ cũng giống như chọn $y_0(n)$ trong trường hợp có nghiệm bội.

Ví dụ nếu $y_0(n)$ có chứa thành phần $A_1\alpha^n$, thì $y_p(n)$ phải chọn là $Bn\alpha^n$, chứ không được chọn $B\alpha^n$.

Bước 3: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân.

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân là tổng của hai nghiệm: nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_0(n)$ và nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y_p(n)$

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n)$$

Bước 4: Tìm giá trị các hệ số

Giá trị các hệ số của nghiệm cuối cùng $y(n)$ sẽ được xác định nhờ điều kiện đầu.

Ví dụ:

Giải phương trình: $y(n) + 2y(n-1) = x(n)$ với điều kiện đầu: $y(-1) = 0$ và $x(n) = n$.

Bài giải:

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát $y_0(n)$ của phương trình thuần nhất.

Phương trình thuần nhất có dạng:

$$y(n) + 2y(n-1) = 0$$

Chọn dạng của $y_0(n)$ là α^n ta có $\alpha^n + 2\alpha^{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha^{n-1}(\alpha + 2) = 0$

Phương trình đặc trưng: $\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2$

Phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm đơn

$$\alpha_1 = -2 \Rightarrow y_0(n) = A_1\alpha_1^n = A_1(-2)^n$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

Phương trình không thuần nhất:

$$y(n) + 2y(n-1) = n$$

Chọn nghiệm riêng $y_p(n)$ có dạng giống $x(n) = n \Rightarrow y_p(n) = Bn + C$

Thay vào phương trình không thuần nhất được:

$$Bn + C + 2[B(n-1) + C] = n$$

$$Bn + C + 2Bn - 2B + 2C = n$$

$$3Bn + (3C - 2B) = n$$

Đồng nhất các hệ số của hai vế ta có:

$$B = \frac{1}{3}; C = \frac{2}{9} \Rightarrow y_p(n) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

Bước 3: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

Bước 4: Xác định các hệ số.

Dựa vào các điều kiện đầu $y(-1) = 0$, ta có:

$$y(-1) = A_1(-2)^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{2}{9}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}[1 - (-2)^n], & \text{với } n \geq 0 \\ 0 & , n \text{ còn lại} \end{cases}$$

hay
$$y(n) = \left\{ \frac{1}{3}n + \frac{2}{9} \cdot [1 - (-2)^n] \right\} \cdot u(n)$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2x(n) + x(n-1)$$

Với điều kiện đầu: $y(-1) = 0$ và $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Bài giải:

Bước 1: Tìm nghiệm $y_0(n)$ phương trình thuần nhất.

Phương trình thuần nhất:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0$$

Chọn dạng $y_0(n)$ là α^n ta có:

$$\alpha^n - \frac{1}{2}\alpha^{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha^{n-1}(\alpha - \frac{1}{2}) = 0$$

Phương trình đặc trưng:

$$(\alpha - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0(n) = A_1\alpha_1^n = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng $y_p(n)$ phương trình không thuần nhất.

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Trong trường hợp này nếu chọn $y_p(n)$ có dạng giống $x(n)$ tức là:

$$y_p(n) = B\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Như thế sẽ trùng với $y_0(n)$, vậy ta phải chọn $y_p(n)$ có dạng sau:

$$y_p(n) = Bn\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow Bn\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}B(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Đồng nhất hệ số ta có: $B = 4$

Vậy:
$$y_p(n) = 4n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bước 3: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y(n)$

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bước 4: Xác định các hệ số

Dựa vào điều kiện đầu $y(-1) = 0$, ta có:

$$y(-1) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 4(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 0 \Rightarrow A_1 = 4$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

$$y(n) = \begin{cases} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n (1+n), & n \geq 0 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.5.3. Các hệ thống đệ quy và không đệ quy

a) Hệ thống số không đệ quy

Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N có dạng tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Trong trường hợp nếu $N = 0$, ta có:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r); \quad a_0 \neq 0 \quad (1.41)$$

Từ đây ta có:

– *Định nghĩa*: Hệ thống được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính bậc không ($N = 0$) được gọi là hệ thống không đệ quy.

– *Nhận xét*: Từ quan hệ trên ta thấy rằng b_r là các hằng số. Vậy hệ thống số không đệ quy là hệ thống mà đáp ứng $y(n)$ của nó chỉ phụ thuộc vào kích thích ở thời điểm hiện tại và quá khứ.

$$\text{Có thể viết: } y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)] \quad (1.42)$$

Ở đây $F[.]$ ký hiệu là hàm.

Nếu gọi $h(k) = b_k$ thì từ (1.41) ta sẽ có:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) \quad (1.43)$$

Phương trình này là biểu thức tích chập giữa $h(n)$ và $x(n)$ khi $h(n)$ là nhân quả và có chiều dài hữu hạn: $L[h(n)] = M + 1$. $h(n)$ chính là đáp ứng xung của hệ thống không đệ quy.

Vậy có thể nói rằng: Hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn được mô tả bởi tích chập $y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k)$

là hệ thống không đệ quy hay còn gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn, (tiếng Anh là: Finite – duration Impulse Response System, viết tắt là FIR system).

Ví dụ: Tìm đáp ứng xung của hệ thống không đệ quy cho bởi phương trình sai phân: $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$.

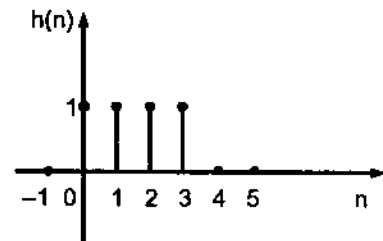
Bài giải:

Trường hợp này $N = 0$ và $M = 3$, vậy hệ thống này là không đệ quy và $L[h(n)] = 4$.

Để tìm $h(n)$ ta thay $x(n) = \delta(n)$ thì $y(n) = h(n)$.

Ta có: $h(n) = \delta(n) + \delta(n+1) + \delta(n+2) + \delta(n+3) \Rightarrow h(n) = \text{rect}_4(n)$.

Vậy hệ thống này là hệ thống FIR, $h(n)$ được biểu diễn hình 1.33.



Hình 1.33. Hệ thống không đệ quy

* Nhận xét về đáp ứng xung của hệ thống FIR:

Ta có phương trình sai phân của hệ thống FIR là:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Như vậy đáp ứng xung $h(k)$ của hệ thống FIR chính là các hệ số b_k

Ta có:

$$h(k) = \begin{cases} b_k, & \text{với } 0 \leq k \leq M \\ 0, & \text{các giá trị khác} \end{cases} \quad (1.44)$$

* Tính ổn định của hệ thống FIR:

Ta có

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^M |h(k)| = \sum_{k=0}^M |b_k|$$

Nếu b_k là số hữu hạn thì tổng S luôn luôn hữu hạn:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Vậy hệ thống FIR luôn ổn định.

b) Hệ thống đệ quy

Trong trường hợp nếu $N > 0$ ta có phương trình sai phân bậc N sau:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{r=0}^N \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k); \text{ với } a_0 \neq 0 \\ &= \sum_{r=0}^N b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k); \text{ với } a_0 = 1 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Vậy ta có định nghĩa:

Định nghĩa: Hệ thống đặc trưng bởi phương trình sai phân bậc $N > 0$ được gọi là hệ thống đệ quy.

Nhận xét: Từ quan hệ (1.45) ta thấy: b_r và a_k là các hằng số, vậy hệ thống đệ quy là hệ thống mà đáp ứng $y(n)$ của nó phụ thuộc vào kích thích ở thời điểm hiện tại và quá khứ và phụ thuộc cả vào đáp ứng ở thời điểm quá khứ.

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]; \quad (1.46)$$

$F[.]$ là ký hiệu hàm.

Khi giải (1.45) với $x(n) = \delta(n)$ ta thu được đáp ứng xung $h(n)$ và thấy rằng $h(n)$ có chiều dài vô hạn. Vậy hệ thống đệ quy là hệ thống có đáp

ứng xung có chiều dài vô hạn (Infinite – duration Impulse Response System, viết tắt: IIR system).

Ví dụ:

Hãy tìm đáp ứng xung và xét ổn định cho hệ thống đệ quy cho bởi phương trình sai phân:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

Với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$.

Bài giải:

Ta có $N = 1$ và $M = 0$, vậy hệ thống này là hệ thống đệ quy. Nếu thay $x(n) = \delta(n)$ ta có $y(n) = h(n)$:

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n)$$

Dùng phương pháp thế tìm được:

$$h(n) = a^n u(n)$$

$h(n)$ được biểu diễn hình 1.34.

Đây là hệ thống đệ quy và cũng là hệ thống IIR, $L[h(n)] = [0, +\infty] = \infty$

Xét tính ổn định:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

+ Nếu $|a| < 1$ thì S sẽ hội tụ: $S = \frac{1}{1-|a|}$, hệ thống ổn định.

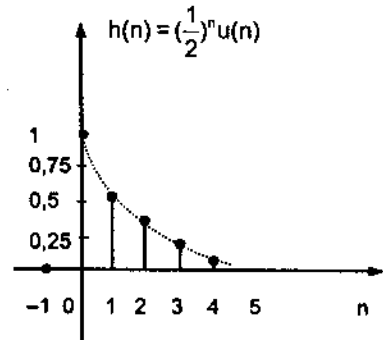
+ Nếu $|a| \geq 1$ thì S sẽ phân kỳ, hệ thống không ổn định.

Qua ví dụ này ta thấy rằng khác với hệ thống FIR, tính ổn định của hệ thống IIR tùy thuộc vào các trường hợp, do đó ta luôn phải xét ổn định cho hệ thống IIR. Đây là nhược điểm của bộ lọc số IIR so với bộ lọc FIR xét về quan điểm độ ổn định.

c) Hệ thống đệ quy thuần túy (Purely recurse system)

Hệ thống số đệ quy thuần túy là trường hợp riêng của hệ thống số đệ quy khi $M = 0$. Nếu $N > 0$ và $M = 0$ thì phương trình sai phân tuyến tính bậc N như sau:

$$y(n) = b_0 x(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k), \quad a_0 = 1 \quad (1.47)$$



Hình 1.34. Hệ thống đệ quy

Phương trình này là phương trình đặc trưng cho hệ thống đệ quy thuần túy.

Nhận xét: Từ phương trình đặc trưng này ta thấy b_0 và a_k là các hằng số, vậy hệ thống đệ quy thuần túy là hệ thống mà đáp ứng $y(n)$ của nó phụ thuộc kích thích ở thời điểm hiện tại và vào đáp ứng ở thời điểm quá khứ.

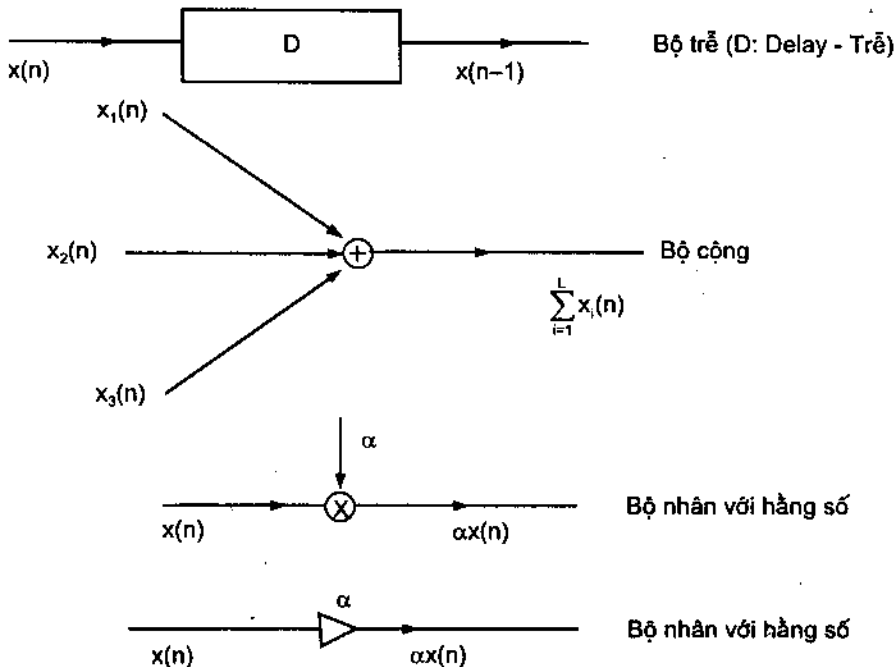
$$y(n) = F[x(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)] \quad (1.48)$$

Tất nhiên hệ thống đệ quy thuần túy cũng là hệ thống IIR.

1.5.4. Sơ đồ thực hiện hệ thống tuyến tính bất biến

a) Các phần tử thực hiện hệ thống

Dựa vào phương trình sai phân hệ số hằng (hệ thống TTBB) ta thấy rằng để thực hiện hệ TTBB cần 3 loại phần tử: phần tử trễ, phần tử nhân và phần tử cộng. Kí hiệu của chúng được cho trên hình 1.36.

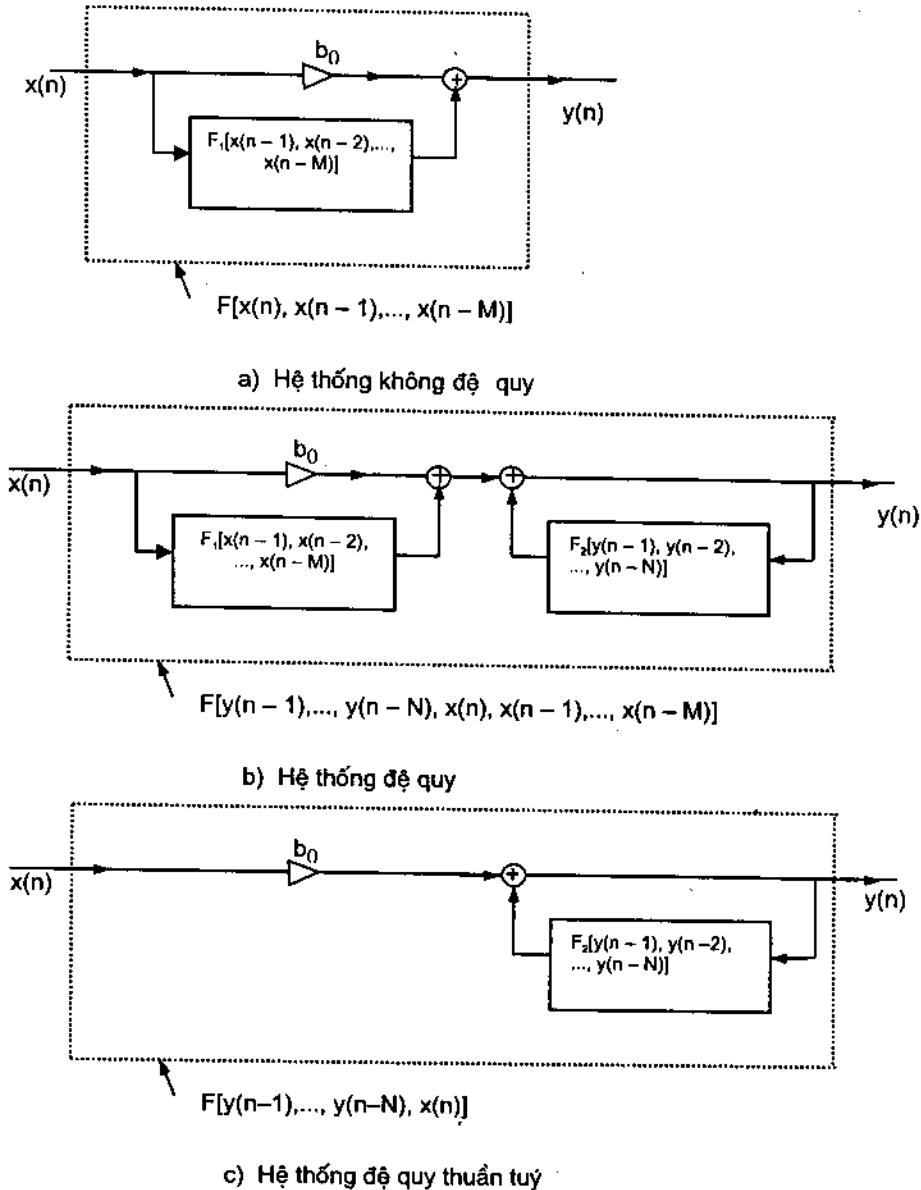


Hình 1.36. Các phần tử thực hiện hệ thống tuyến tính bất biến

b) Thực hiện các hệ thống rời rạc

Một hệ thống tuyến tính bất biến và ổn định là hệ thống thực hiện được về mặt vật lý, dù cho hệ thống đó không đệ quy, đệ quy hay đệ quy thuần túy.

Dựa vào phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng của từng hệ thống mà chúng ta có thể xây dựng sơ đồ tổng quát của chúng trong các hình 1.37(a), (b), và (c).



Hình 1.37

Nhận xét:

– Hệ thống không đệ quy, sơ đồ của nó không có phản hồi, vì vậy nó luôn ổn định, tức là hệ thống FIR luôn ổn định.

– Hệ thống đệ quy, sơ đồ của nó gồm hai khối F_1 và F_2 , F_1 giống hệ thống không đệ quy còn F_2 là thành phần phản hồi. Do có nhánh phản hồi nên ta phải xét độ ổn định của IIR.

– Hệ thống đệ quy thuần túy, sơ đồ của nó chỉ có b_0 và F_2 do F_2 là nhánh phản hồi nên nó cũng là hệ thống IIR do đó phải xét độ ổn định.

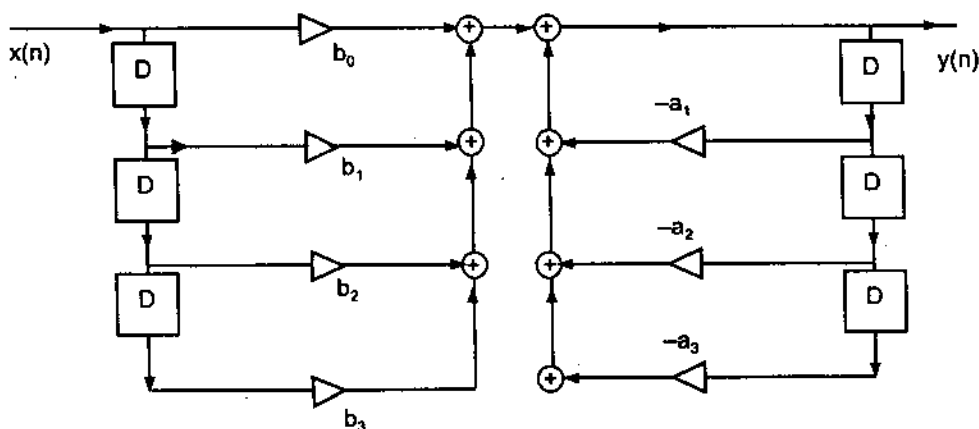
Ví dụ:

Hãy vẽ sơ đồ cấu trúc của hệ thống rời rạc được cho bởi phương trình sai phân tuyến tính sau:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^3 a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^3 b_r x(n-r)$$

Bài giải:

Đây là hệ thống đệ quy có $N = M = 3$. Cấu trúc của nó được vẽ trên hình 1.38.



Hình 1.38

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Bài 1: Hãy xét các hệ thống sau đây có phải là hệ thống tuyến tính hay không:

a) $T[x(n)] = x^2(n) = y(n)$; b) $T[x(n)] = nx(n) = y(n)$

Bài 2: Hãy tính các tích chập $x(n] * h(n) = y(n)$ theo các phương pháp trực tiếp, đồ thị và quy luật trượt với:

a) $x(n] = \delta(n-1)$; $h(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

b) $x(n] = u(-n)$; $h(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=-1; n=1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

Bài 3: Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến cho bởi $h(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad 0 < a < 1$$

Hãy tìm đáp ứng của hệ thống với kích thích:

$$x(n] = \text{rect}_N(n)$$

Bài 4: Hãy kiểm tra tính ổn định của các hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung như sau:

$$h_1(n) = \frac{1}{2} u(n-1); \quad h_2(n) = (-1)^n \frac{1}{n} u(n-1); \quad h_3(n) = \frac{1}{n^2} u(n-1)$$

Bài 5: Giải phương trình sai phân sau:

$$y(n) = x(n) + ay(n-1] \quad \text{với điều kiện đầu } y(-1) = 0; \quad x(n) = u(n)$$

a) Giải bằng phương pháp thế.

b) Giải bằng phương pháp nghiệm tổng quát.

Bài 6: Giải phương trình sai phân sau:

$$y(n) - 3y(n-1] - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1]$$

a) Với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0; \quad x(n) = 4^n u(n)$

b) Với điều kiện đầu $y(-1) = 1; \quad y(-2) = 3; \quad x(n) = 4^n u(n)$.

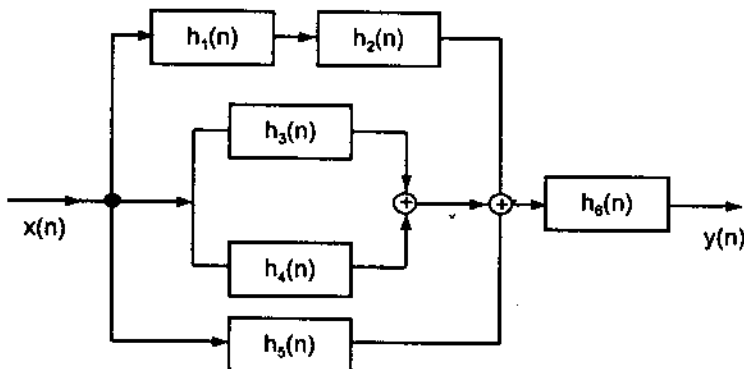
Bài 7: Vẽ sơ đồ thực hiện các hệ thống được mô tả bởi các phương trình sai phân sau:

a) $y(n] - 2y(n-1] + 3y(n-2) = x(n) + x(n-1] + 2x(n-4)$

b) $2y(n) + 6y(n-3] + 3y(n-4) = x(n)$

c) $3y(n) = x(n-1] + 3x(n-3] + 4x(n-5)$

Bài 8: Tìm đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến cho bởi sơ đồ thực hiện sau:



Hình 1.39

Trong đó:

$$h_1(n) = \delta(n+1]$$

$$h_4(n) = \delta(n)$$

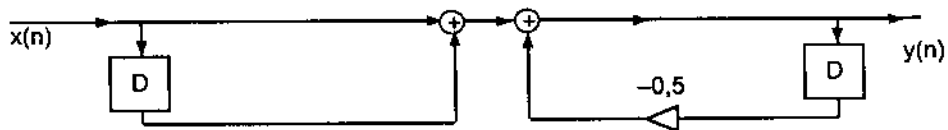
$$h_2(n) = \text{rect}_3(n-1]$$

$$h_5(n) = u(n-1] - u(n-5)$$

$$h_3(n) = \delta(n+1]$$

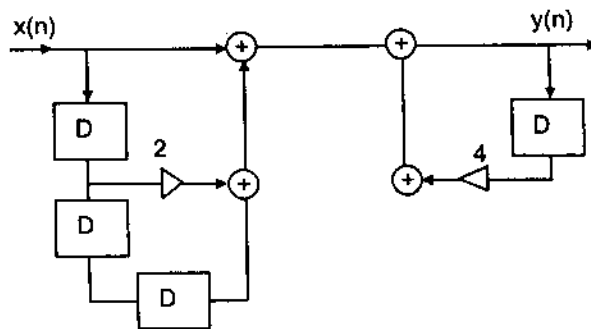
$$h_6(n) = \delta(n-2)$$

Bài 9: Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ thực hiện sau:



Hình 1.40.

Bài 10: Tìm phương trình sai phân của hệ thống tuyến tính bất biến ở hình 1.41



Hình 1.41

Chương 2

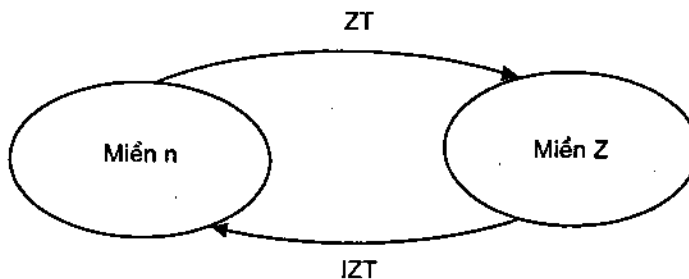
BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

2.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong chương 1 chúng ta đã nghiên cứu tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền n và thấy rằng có nhiều khó khăn trong việc tính toán và phân tích hệ thống trong miền này như việc tính tích chập, giải phương trình sai phân... Để khắc phục những hạn chế trên người ta sử dụng các phương pháp gián tiếp để nghiên cứu tín hiệu và hệ thống bằng cách chuyển từ cách biểu diễn từ miền n sang một miền trung gian, miền này thuận lợi cho việc nghiên cứu và có thể chuyển đổi ngược lại miền n được.

Chương này ta sẽ nghiên cứu phép biến đổi Z (Z – transform, viết tắt là ZT). Phép biến đổi Z tương tự như biến đổi Laplace trong việc phân tích tín hiệu và hệ thống liên tục.

Quan hệ giữa miền n và miền Z được thể hiện trên hình 2.1.



Hình 2.1. Quan hệ giữa miền n và miền Z

2.2. BIẾN ĐỔI Z

2.2.1. Biến đổi Z hai phía (The two-side Z -transform)

Biến đổi Z hai phía của dãy $x(n)$ được xác định theo công thức:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} \quad (2.1)$$

Ký hiệu: $ZT[x(n)] = X(Z)$

hoặc $x(n) \xrightarrow{ZT} X(Z)$

ở đây Z là một số phức: $Z = \text{Re}[Z] + j\text{Im}[Z]$ (Re: real part – phần thực; Im: Imaginary part – phần ảo).

Tập hợp tất cả các giá trị thực của Z tạo thành một đường thẳng gọi là trục thực. Tập hợp tất cả các giá trị ảo của Z tạo thành một đường thẳng gọi là trục ảo. Đặt hai trục này vuông góc với nhau gọi là mặt phẳng phức Z .

Ngoài ra, Z còn được biểu diễn dưới dạng toạ độ cực: $Z = re^{j\omega}$

$$\text{Re}[z] = r \cos \omega$$

$$\text{Im}[z] = r \sin \omega$$

Phép biến đổi Z đã chuyển việc biểu diễn tín hiệu $x(n)$ ở miền n thành việc biểu diễn tín hiệu $X(Z)$ trong miền Z , tức là trong mặt phẳng phức Z .

Sau đây là một số công thức thường sử dụng khi tìm ZT:

$$\sum_{n_1}^{n_2} 1 = n_2 - n_1 + 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{nếu } |x| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |x| \geq 1 \end{cases}$$

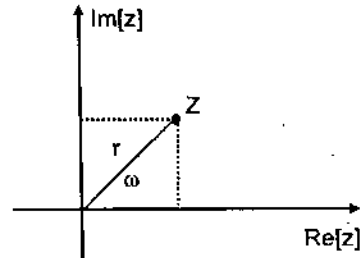
$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \quad x \neq 1$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} x^n = \frac{x^{N_1} - x^{N_2+1}}{1-x} \quad x \neq 1$$

Ví dụ: Hãy tìm ZT của các dãy sau:

$$x_1(n) = \delta(n)$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$



Hình 2.2. Mặt phẳng phức

$$x_3(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

Bài giải:

Sử dụng định nghĩa để tìm $X(Z)$ ta có:

$$X_1(Z) = ZT[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)Z^{-n} = 1 \cdot Z^0 = 1$$

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot Z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}Z^{-1}\right)^n = \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} & \text{nếu } |Z| > \frac{1}{2} \\ \infty & \text{nếu } |Z| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X_3(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)Z^{-n} = -\sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot Z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (2Z)^n - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2Z)^n - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} & \text{nếu } |Z| < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{nếu } |Z| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nhận xét:

- $X_1(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z , tức là toàn bộ mặt phẳng Z hay còn nói $X_1(Z)$ hội tụ trong toàn mặt phẳng Z .

- $X_2(Z)$ tồn tại với $|Z| > \frac{1}{2}$, tức là $X_2(Z)$ hội tụ trong miền ngoài đường tròn bán kính $r = 1/2$ trên mặt phẳng Z .

- $X_3(Z)$ tồn tại với $|Z| < \frac{1}{2}$, tức là $X_3(Z)$ hội tụ trong miền trong đường tròn bán kính $r = 1/2$ trên mặt phẳng Z .

Biểu thức của $X_2(Z)$ và $X_3(Z)$ giống nhau chỉ khác nhau về miền hội tụ, vì thế một biến đổi Z ($X(Z)$) sẽ tồn tại duy nhất một $x(n)$ để có $ZT[x(n)] = X(Z)$ khi xác định chính xác miền hội tụ của $X(Z)$.

2.2.2. Biến đổi Z một phía (The one-side Z – transform)

Định nghĩa: Biến đổi Z một phía của dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X^1(Z) = ZT^1[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} \quad (2.2)$$

Số 1 ở trong $X^1(Z)$ dùng để ký hiệu cho biến đổi Z một phía. Sự khác nhau cơ bản giữa biến đổi Z một phía và biến đổi Z hai phía là tổng theo n biến đổi Z một phía chỉ chạy từ 0 đến ∞ .

Ví dụ: Tìm ZT và ZT^1 của các dãy sau đây:

$$x_1(n) = \delta(n)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_3(n+2)$$

$$x_3(n) = \delta(n) + \delta(n-3)$$

Bài giải:

Ta dùng định nghĩa để tìm biến đổi Z:

$$X_1(Z) = X^1_1(Z) = 1$$

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_3(n+2)Z^{-n} = \sum_{n=-2}^0 Z^{-n} = Z^2 + Z + 1$$

$$X^1_2(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{rect}_3(n+2)Z^{-n} = 1$$

$$X^1_3(Z) = X_3(Z) = 1 + Z^{-3}$$

Nhận xét: Nếu dãy $x(n)$ nhân quả thì biến đổi Z một phía và biến đổi Z hai phía như nhau.

2.3. SỰ TỒN TẠI CỦA BIẾN ĐỔI Z

2.3.1. Định nghĩa miền hội tụ

Miền hội tụ của biến đổi Z hai phía là tập hợp tất cả các giá trị của Z mà tại đó chuỗi $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$ hội tụ.

Ký hiệu: $RC[X(Z)]$ – đọc là miền hội tụ của $X(Z)$ (Trong đó RC là viết tắt của Region of Convergence – miền hội tụ).

Với biến đổi Z một phía cũng có định nghĩa miền hội tụ tương tự:

Miền hội tụ của biến đổi Z một phía là tập hợp tất cả các giá trị của Z

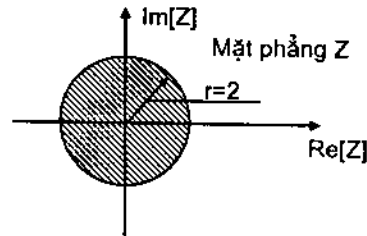
mà tại đó chuỗi $X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}$ hội tụ.

Ví dụ: Tìm $X(Z)$ và miền hội tụ với $x(n) = 2^n u(n)$.

Bài giải:

Tương tự như ví dụ trong mục 2.2.1 ta tìm được $X(Z) = \frac{1}{1-2Z^{-1}}$ với miền hội tụ $|Z| > 2$

Miền hội tụ của $X(Z)$ là toàn bộ mặt phẳng Z bỏ phần hình tròn có bán kính $r = 2$ (hình 2.3).



Hình 2.3. Biểu diễn miền hội tụ

2.3.2. Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy

Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy phát biểu:

Chuỗi
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots \quad (2.3)$$

hội tụ nếu thỏa mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad (2.4)$$

Để áp dụng tiêu chuẩn hội tụ Cauchy ta viết lại $X(Z)$ như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = X_1(Z) + X_2(Z)$$

với

$$X_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}, \quad X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n}$$

Áp dụng tiêu chuẩn cho chuỗi $X_1(Z)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)Z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} |Z^{-1}| < 1$$

Đặt
$$R_{x-} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} \quad (2.5)$$

ta có $R_{x-} |Z^{-1}| < 1$ suy ra: $|Z| > R_{x-}$

Như vậy $X_1(Z)$ sẽ hội tụ với $|Z| > R_{x-}$, tức là miền nằm ngoài đường tròn bán kính là R_{x-}

Tương tự áp dụng tiêu chuẩn cho chuỗi $X_2(Z)$:

Viết lại $X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)Z^{-n} - x(0) = \sum_{n=0}^{\infty} x(-n)Z^n - x(0)$

$x(0)$ là một số hữu hạn, nên $X_2(Z)$ hội tụ khi $\sum_{n=0}^{\infty} x(-n)Z^n$ hội tụ.

Tương tự trên ta có $|Z| < R_{x+}$, với $R_{x+} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}$ (2.6)

Như vậy $X_2(Z)$ sẽ hội tụ với $|Z| < R_{x+}$, tức là bên trong đường tròn bán kính là R_{x+} .

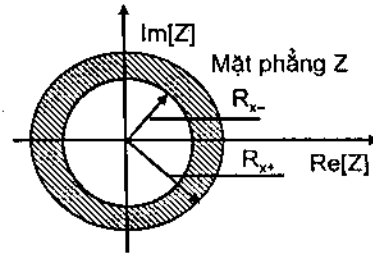
Miền hội tụ của $X(Z)$ chính là giao của miền hội tụ của $X_1(Z)$ và miền hội tụ của $X_2(Z)$:

$$RC[X(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$$

Nếu $R_{x-} < R_{x+}$ miền hội tụ của $X(Z)$ là miền vành khăn, với bán kính trong là R_{x-} , bán kính ngoài là R_{x+} (hình 2.4).

Nhận xét:

- Giá trị R_{x-} và R_{x+} được quyết định bởi $x(n)$.
- Nếu $x(n)$ là dãy bị chặn trái thì miền hội tụ của $X(Z)$ là $|Z| > R_{x-}$.
- Nếu $x(n)$ là dãy bị chặn phải thì miền hội tụ của $X(Z)$ là $|Z| < R_{x+}$.
- Nếu $R_{x-} > R_{x+}$ thì miền hội tụ là rỗng, có nghĩa là $X(Z)$ không tồn tại.



Hình 2.4. Miền hội tụ của $X(Z)$

2.4. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC (IZT: INVERSE Z TRANSFORM)

2.4.1. Cực và không (poles and zeros)

Trong thực tế ta thường gặp biến đổi Z tồn tại dưới dạng phân thức:

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} \quad (2.7)$$

Với $N(Z)$ là đa thức bậc M: $N(Z) = b_0 + b_1Z + b_2Z^2 + \dots + b_MZ^M$

$D(Z)$ là đa thức bậc N: $D(Z) = a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + \dots + a_NZ^N$

a) Định nghĩa cực

Các điểm $Z = Z_{pk}$ được gọi là điểm cực nếu $X(Z_{pk}) = \infty$. Vậy điểm cực chính là nghiệm của đa thức mẫu số $D(Z)$, nếu $D(Z)$ là đa thức bậc N sẽ có N điểm cực, và có thể viết lại $D(Z)$:

$$D(Z) = a_N(Z - Z_{p1})(Z - Z_{p2})\dots(Z - Z_{pN}) = a_N \prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk}) \quad (2.8)$$

b) Định nghĩa không

Các điểm $Z = Z_{0r}$ được gọi là điểm không nếu $X(Z_{0r}) = 0$. Vậy điểm không chính là nghiệm của đa thức tử số $N(Z)$, nếu $N(Z)$ là đa thức bậc M sẽ có M điểm không và có thể viết lại $N(Z)$:

$$N(Z) = b_M(Z - Z_{01})(Z - Z_{02})\dots(Z - Z_{0N}) = b_M \prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r}) \quad (2.9)$$

Từ đó có thể biểu diễn $X(Z)$ dưới dạng các điểm không và điểm cực như sau:

$$X(Z) = \frac{b_M \prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})}{a_N \prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})} = C \frac{\prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})} \quad \text{với } C = \frac{b_M}{a_N} \quad (2.10)$$

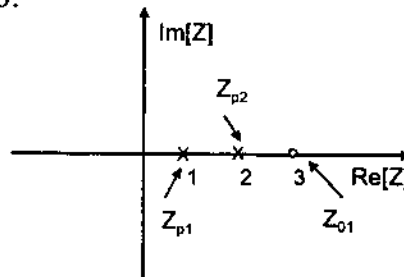
Trong mặt phẳng Z các điểm cực được ký hiệu bởi dấu "x", các điểm không được ký hiệu bằng dấu "o", và chú ý rằng điểm cực không bao giờ nằm trong miền hội tụ của $X(Z)$.

Ví dụ:

Cho $X(Z) = \frac{Z-3}{Z^2-3Z+2}$ $|Z| > 2$. Tìm các điểm cực và điểm không của $X(Z)$ và biểu diễn trên mặt phẳng Z .

Bài giải:

$X(Z)$ có một điểm không: $Z_{01} = 3$, hai điểm cực: $Z_{p1} = 1$, $Z_{p2} = 2$ được biểu diễn trên hình 2.5.



Hình 2.5

2.4.2. Biến đổi Z ngược

Sau khi khảo sát tín hiệu và hệ thống trong miền Z ta cần phải đưa nó trở lại miền n bằng phép biến đổi Z ngược.

Biến đổi Z ngược (IZT) được định nghĩa bởi công thức sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) \cdot Z^{n-1} \cdot dZ \quad (2.11)$$

Trong đó C là một đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ của mặt phẳng phức theo chiều dương và nằm trong miền hội tụ của X(Z).

Trong thực tế có ba phương pháp để tính biến đổi Z ngược:

- Khai triển thành các phân thức tối giản.
- Khai triển thành chuỗi lũy thừa.
- Tính trực tiếp tích phân đường theo công thức (2.11) dùng lý thuyết thặng dư, gọi là phương pháp thặng dư.

Ở đây chỉ xin giới thiệu phương pháp khai triển thành phân thức tối giản, đây là phương pháp đơn giản và thường được áp dụng trong thực tế.

Nội dung phương pháp: Trong thực tế ta thường gặp biến đổi Z tồn tại dưới dạng phân thức: $X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$

với N(Z) là đa thức bậc M: $N(Z) = b_0 + b_1Z + b_2Z^2 + \dots + b_MZ^M$

D(Z) là đa thức bậc N: $D(Z) = a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + \dots + a_NZ^N$

Nếu $M \geq N$, ta lấy N(Z) chia cho D(Z), kết quả được:

$$X(Z) = S(Z) + \frac{P(Z)}{Q(Z)}, \text{ với } S(Z) \text{ là đa thức có bậc } M - N, Q(Z) = D(Z)$$

$$\text{Nếu } M < N \text{ thì } S(Z) = 0 \text{ và } X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)}$$

Bây giờ ta tiến hành khai triển $\frac{P(Z)}{Q(Z)}$ thành các phân thức tối giản.

Xét các trường hợp:

*₁) Nếu Q(Z) có N nghiệm đơn:

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} \quad (2.12)$$

Với: Z_{pk} là các điểm cực đơn của $\frac{P(Z)}{Q(Z)}$, A_k được xác định theo công thức:

$$A_k = (Z - Z_{pk}) \left. \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right|_{Z = Z_{pk}} \quad (2.13)$$

*₂) Nếu $Q(Z)$ có một nghiệm bội:

Giả sử $Q(Z)$ có một nghiệm bội là Z_{pl} và có bậc là s khi đó:

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} = \left(\sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{Z - Z_{pk}} + \sum_{j=1}^s \frac{C_j}{(Z - Z_{pl})^j} \right) \quad (2.14)$$

Với: Z_{pk} là các điểm cực đơn, Z_{pl} là cực bội của $\frac{P(Z)}{Q(Z)}$, A_k và C_j được

xác định theo công thức:

$$A_k = (Z - Z_{pk}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \Big|_{Z = Z_{pk}} \quad (2.15)$$

$$C_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dZ^{s-j}} \left[(Z - Z_{pl})^s \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right] \Big|_{Z = Z_{pl}} \quad (2.16)$$

Sau khi khai triển xong $X(Z)$ ta tìm IZT của từng biểu thức rồi cộng chúng lại để được $x(n)$.

Trong quá trình tìm IZT của các biểu thức ta thường gặp sử dụng các công thức sau:

- $\text{IZT}[C.Z^N] = C\delta(n+N)$ (với C là hằng số, N là số nguyên)
- $\text{IZT}\left[\frac{Z}{Z - Z_{pk}} = \frac{1}{1 - Z_{pk}Z^{-1}}\right] = \begin{cases} (Z_{pk})^n U(n) & \text{nếu } |Z| > |Z_{pk}| \\ -(Z_{pk})^n U(-n-1) & \text{nếu } |Z| < |Z_{pk}| \end{cases}$
- $\text{IZT}\left[\frac{1}{Z - Z_{pk}} = \frac{Z^{-1}}{1 - Z_{pk}Z^{-1}}\right] = \begin{cases} (Z_{pk})^{n-1} U(n-1) & \text{nếu } |Z| > |Z_{pk}| \\ -(Z_{pk})^{n-1} U(-n) & \text{nếu } |Z| < |Z_{pk}| \end{cases}$
- $\text{IZT}\left[\frac{Z^N}{Z - Z_{pk}}\right] = \begin{cases} (Z_{pk})^{n+N-1} U(n+N-1) & \text{nếu } |Z| > |Z_{pk}| \\ -(Z_{pk})^{n+N-1} U(-n-N) & \text{nếu } |Z| < |Z_{pk}| \end{cases}$
- $\text{IZT}\left[\frac{Z_{pk}Z^{-1}}{(1 - Z_{pk}Z^{-1})^2}\right] = \begin{cases} n(Z_{pk})^n U(n) & \text{nếu } |Z| > |Z_{pk}| \\ -n(Z_{pk})^n U(-n-1) & \text{nếu } |Z| < |Z_{pk}| \end{cases}$

Ví dụ:

Cho
$$X(Z) = \frac{Z-1}{Z^2-5Z+6} \quad |Z| > 3$$

Tìm $x(n)$ tương ứng.

Bài giải:

$X(Z)$ có thể viết lại như sau:

$$X(Z) = \frac{Z-1}{(Z-2)(Z-3)} = \frac{A_1}{Z-2} + \frac{A_2}{Z-3}$$

Áp dụng công thức 2.13 ta có:

$$A_1 = (Z-2) \frac{Z-1}{(Z-2)(Z-3)} \Big|_{Z=2} = -1$$

$$A_2 = (Z-3) \frac{Z-1}{(Z-2)(Z-3)} \Big|_{Z=3} = 2$$

$$X(Z) = \frac{-1}{Z-2} + \frac{2}{Z-3}$$

Vậy

Áp dụng các công thức IZT ở trên ta được:

$$x(n) = -2^n u(n) + 2 \cdot 3^n u(n)$$

2.5. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

2.5.1. Tính tuyến tính

Nếu $x(n) = a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)$ thì $X(Z) = a \cdot X_1(Z) + b \cdot X_2(Z)$

Với $X(Z) = ZT[x(n)]$, $X_1(Z) = ZT[x_1(n)]$, $X_2(Z) = ZT[x_2(n)]$,

a, b là các hằng số

$RC[X(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$ và ta cũng có:

$$R_{x-} = \max[R_{x1-}, R_{x2-}]$$

$$R_{x+} = \min[R_{x1+}, R_{x2+}]$$

2.5.2. Tính chất trễ

Nếu $y(n) = x(n - n_0)$ (n_0 là số nguyên), với $ZT[x(n)] = X(Z)$ và $RC[X(Z)]: R_{x-} < \{Z\} < R_{x+}$, thì $Y(Z) = Z^{-n_0} \cdot X(Z)$.

Nếu $n_0 > 0$ thì $RC[Y(Z)]: R_{x-} < \{Z\} < R_{x+}, Z \neq 0$

Nếu $n_0 < 0$ thì $RC[Y(Z)]: R_{x-} < \{Z\} < R_{x+}, Z \neq \infty$

Ví dụ:

$$\text{Cho } x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n), \quad x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n+2),$$

Tìm $X_1(Z)$ rồi suy ra $X_2(Z)$.

Bài giải:

$$\text{Theo ví dụ trong mục 2.2.1 ta có } X_1(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} \text{ với } |Z| > \frac{1}{2}$$

Viết lại $x_2(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \cdot u(n+2) = 4x_1(n+2)$, áp dụng tính chất tuyến tính và trễ ta có:

$$X_2(Z) = 4 \cdot Z^2 X_1(Z) = \frac{Z^2}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} \text{ với } |Z| > \frac{1}{2}, Z \neq \infty$$

Ví dụ:

$$\text{Cho } X(Z) = \frac{Z}{(Z-1)(Z-2)^2} \text{ với } |Z| > 2, \text{ tìm } x(n).$$

Bài giải:

$X(Z)$ có 1 cực đơn $Z_{p1} = 1$ và một cực bội $Z_{p2} = 2$ có bậc là 2

$$X(Z) = \frac{A_1}{Z-1} + \frac{C_1}{Z-2} + \frac{C_2}{(Z-2)^2}$$

Áp dụng công thức 2.15 và 2.16 ta có:

$$A_1 = (Z-1) \cdot \frac{Z}{(Z-1)(Z-2)^2} \Big|_{Z=1} = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dZ^{2-1}} \left[(Z-2)^2 \cdot \frac{Z}{(Z-1)(Z-2)^2} \right] \Big|_{Z=2} = \frac{-1}{(Z-1)^2} \Big|_{Z=2} = -1$$

$$C_2 = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{2-2}}{dZ^{2-2}} \left[(Z-2)^2 \cdot \frac{Z}{(Z-1)(Z-2)^2} \right] \Big|_{Z=2} = \frac{Z}{Z-1} \Big|_{Z=2} = 2$$

$$\text{Vậy } X(Z) = \frac{1}{Z-1} + \frac{-1}{Z-2} + \frac{2}{(Z-2)^2}$$

$$\text{IZT} \left[\frac{1}{Z-1} \right] = U(n-1)$$

$$\text{IZT} \left[\frac{-1}{Z-2} \right] = -2^{n-1} U(n-1)$$

$$\text{IZT} \left[\frac{2}{(Z-2)^2} \right] = \text{IZT} \left[\frac{2.Z^{-2}}{(1-2Z^{-1})^2} \right] = \text{IZT} \left[\frac{2.Z^{-1}Z^{-1}}{(1-2Z^{-1})^2} \right]$$

Đặt $X_1(Z) = \frac{2Z^{-1}}{(1-2Z^{-1})^2} \Rightarrow x_1(n) = n 2^n u(n)$

Mà $\frac{2Z^{-1}Z^{-1}}{1-2Z^{-1}} = Z^{-1}.X_1(Z)$, áp dụng tính chất trễ ta có:

$$\text{IZT} \left[\frac{2.Z^{-1}Z^{-1}}{(1-2Z^{-1})^2} \right] = x_1(n-1) = (n-1)2^{n-1}u(n-1)$$

Vậy kết quả $x(n) = u(n-1) - 2^{n-1} u(n-1) + (n-1).2^{n-1} u(n-1)$

2.5.3. Nhân với dãy hàm mũ

Nếu $y(n) = a^n x(n)$ (a là hằng số),

với $\text{ZT}[x(n)] = X(Z)$ và $\text{RC}[X(Z)]: R_x < \{Z\} < R_{x+}$,

thì $Y(Z) = X \left[\frac{Z}{a} \right]$ và $\text{RC}[Y(Z)]: |a|.R_x < \{Z\} < |a|.R_{x+}$

Ví dụ: Tìm biến đổi Z của các dãy sau đây:

$$x_1(n) = 3^n \left(\frac{1}{2} \right)^n .u(n), \quad x_2(n) = a^n .u(n)$$

Bài giải:

* Tìm $X_1(Z)$:

Gọi $x(n) = \left(\frac{1}{2} \right)^n .u(n)$ theo ví dụ trong mục 2.2.1 ta có

$$X(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > \frac{1}{2}$$

Ta có: $x_1(n) = 3^n \cdot x(n)$ nên $X_1(Z) = X\left(\frac{Z}{3}\right) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}Z^{-1}}$ với $|Z| > \frac{3}{2}$

* Tìm $X_2(Z)$:

Để dàng tìm được $X(Z) = ZT[u(n)] = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$ với $|Z| > 1$

Mà $X_2(Z) = a^n u(n)$ nên $X_2(Z) = X\left(\frac{Z}{a}\right) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}$ với $|Z| > |a|$

2.5.4. Đạo hàm của biến đổi Z

Nếu $y(n) = n \cdot x(n)$ với $ZT[x(n)] = X(Z)$ và $RC[X(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

thì $Y(Z) = -Z \frac{dX(Z)}{dZ}$ và $RC[Y(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z của $x(n) = n \cdot a^n u(n)$

Bài giải:

Gọi $x_1(n) = a^n u(n)$, theo ví dụ trong mục 2.5.3 ta có

$$X_1(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} \quad |Z| > |a|$$

Mà $x(n) = n \cdot x_1(n)$ nên $X(Z) = -Z \frac{dX_1(Z)}{dZ} = \frac{aZ^{-1}}{(1 - aZ^{-1})^2}$ với $|Z| > |a|$

2.5.5. Tích chập của hai dãy

Nếu $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ thì $X(Z) = X_1(Z) \cdot X_2(Z)$ và

$$RC[X(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$$

Nhận xét: Tích chập ở miền n khi chuyển sang miền Z sẽ là tích thường, điều này sẽ làm cho việc tính tích chập đơn giản hơn khi sử dụng biến đổi Z.

Ví dụ:

Cho $x_1(n) = 2^n u(n)$, $x_2(n) = 3^n u(n)$. Tìm $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$.

Bài giải:

Để tìm $x(n)$ ta chuyển tích chập này sang miền Z. Ta có:

$$X(Z) = X_1(Z).X_2(Z); X_1(Z) = \frac{Z}{Z-2}; \text{ với } |Z| > 2$$

$$X_2(Z) = \frac{Z}{Z-3} \text{ với } |Z| > 3$$

$$X(Z) = \frac{Z^2}{(Z-2)(Z-3)} \text{ với } |Z| > 3. \text{ Để có } x(n) \text{ ta lấy IZT của } X(Z).$$

$$\text{Đặt } X_3(Z) = \frac{1}{(Z-2)(Z-3)} = \frac{-1}{Z-2} + \frac{1}{Z-3}$$

$$\Rightarrow x_3(n) = -2^{n-1} u(n-1) + 3^{n-1} u(n-1)$$

Mà $X(Z) = Z^2 X_3(Z)$ nên áp dụng tính chất trễ ta có:

$$x(n) = x_3(n+2) = 3^{n+1} u(n+1) - 2^{n+1} u(n+1)$$

2.5.6. Dãy liên hợp phức

Nếu $ZT[x(n)] = X(Z)$ thì $ZT[x^*(n)] = X^*(Z^*)$.

Trong đó dấu * là kí hiệu của phép lấy liên hợp phức.

2.6. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

Trong chương 1 chúng ta đã biết một hệ thống tuyến tính bất biến được đặc trưng bởi đáp ứng xung $h(n)$ hoặc một phương trình sai phân tuyến tính. Khi phân tích hệ thống chúng ta gặp một số khó khăn như tính tích chập, giải phương trình sai phân hoặc xét tính ổn định của hệ thống. Để khắc phục những khó khăn trên chúng ta sẽ chuyển cách biểu diễn hệ thống ở miền n sang cách biểu diễn hệ thống ở miền Z với đặc trưng của hệ thống là hàm truyền đạt $H(Z)$.

2.6.1. Hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc

Trong miền n ta đã biết đáp ứng $y(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến được xác định theo công thức:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Chuyển công thức này sang miền Z bằng cách lấy biến đổi Z của 2 vế rồi áp dụng tính chất biến đổi Z của tích chập ta có:

$$Y(Z) = X(Z).H(Z) \Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (2.17)$$

$H(Z)$ được gọi là hàm truyền đạt của hệ thống, $H(Z)$ cũng chính là biến đổi Z của đáp ứng xung $h(n)$.

Nếu hệ thống được mô tả bằng phương trình sai phân tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Lấy biến đổi Z của hai vế của phương trình này và áp dụng các tính chất tuyến tính, trễ của biến đổi Z ta có:

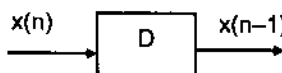
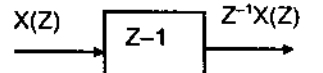
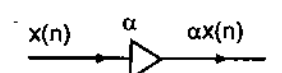
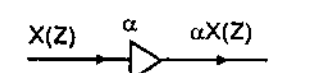
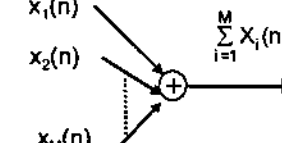
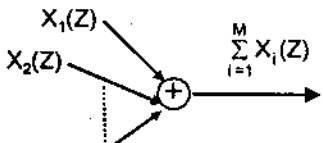
$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot Z^{-k} \cdot Y(Z) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot Z^{-r} \cdot X(Z)$$

$$Y(Z) \sum_{k=0}^N a_k \cdot Z^{-k} = X(Z) \sum_{r=0}^M b_r \cdot Z^{-r}$$

Do đó ta có:
$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r \cdot Z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot Z^{-k}} \quad (2.18)$$

2.6.2. Phân tích hệ thống rời rạc trong miền Z

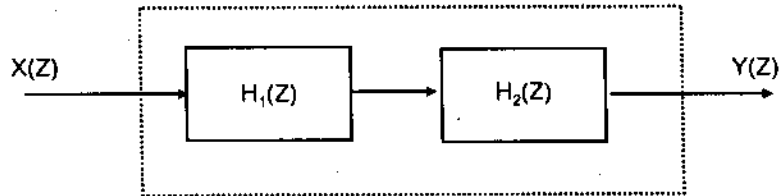
a) Các phân tử thực hiện hệ thống

Phân tử	Miền n	Miền Z
Trễ		
Nhân với hằng số		
Cộng		

b) Phân tích hệ thống

Để tiến hành phân tích hệ thống trước hết ta xem xét các cách ghép cơ bản sau:

*** Ghép nối tiếp**

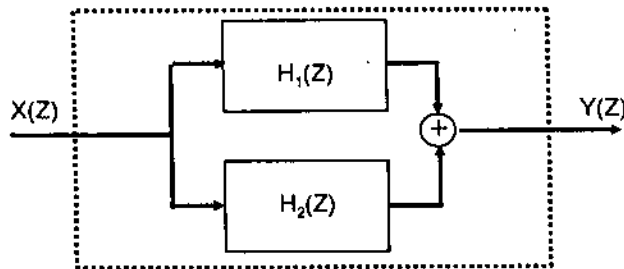


Theo sơ đồ ta có: $Y(Z) = X(Z).H_1(Z).H_2(Z) \Rightarrow$ hàm truyền đạt của cả hệ thống:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = H_1(Z).H_2(Z) \quad (2.19)$$

Nhận xét: Nếu ta có hai hay nhiều hệ thống ghép nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của cả hệ thống bằng tích các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

*** Ghép song song**

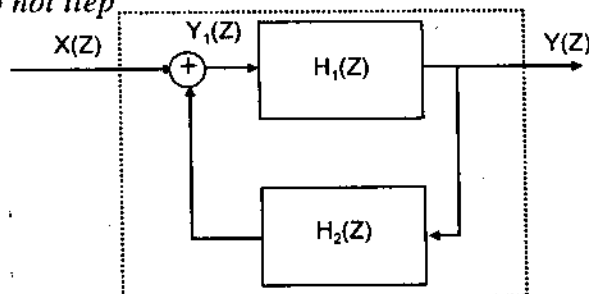


Theo sơ đồ ta có: $Y(Z) = X(Z).H_1(Z) + X(Z).H_2(Z) \Rightarrow$ Hàm truyền đạt của cả hệ thống:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = H_1(Z) + H_2(Z) \quad (2.20)$$

Nhận xét: Nếu ta có hai hay nhiều hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của cả hệ thống bằng tổng các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

*** Ghép hồi tiếp**



Theo sơ đồ ta có:

$$Y_1(Z) = X(Z) + Y(Z).H_2(Z)$$

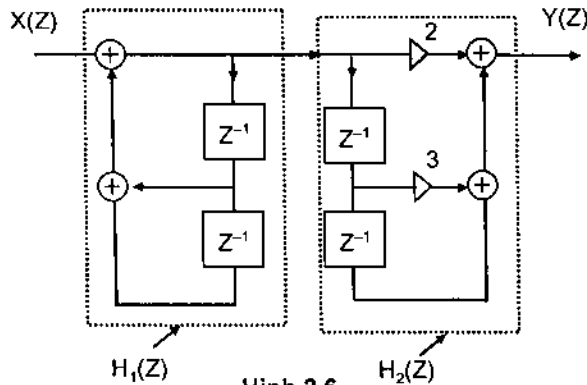
$Y(Z) = Y_1(Z).H(Z) = \{X(Z) + Y(Z).H_2(Z)\}.H(Z) \Rightarrow$ Hàm truyền đạt của cả hệ thống

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{H_1(Z)}{1 - H_1(Z).H_2(Z)} \quad (2.21)$$

Từ đó ta thấy rằng việc phân tích hệ thống trong miền Z dựa trên nguyên tắc sau:

- Phân tích hệ thống thành các hệ thống nhỏ hơn (hệ thống nhỏ hơn này thường là hệ thống có cách ghép cơ bản như phân trên đã xét).
- Tìm hàm truyền đạt của hệ thống nhỏ đó.
- Căn cứ vào cách ghép giữa các hệ thống nhỏ ta sẽ tìm được hàm truyền đạt của cả hệ thống.

Ví dụ: Hãy tìm hàm truyền đạt của hệ thống cho bởi sơ đồ hình 2.6.



Hình 2.6

Bài giải:

Ta phân tích hệ thống thành hai hệ thống: $H_1(Z)$ và $H_2(Z)$.

$H_1(Z)$ là hệ thống mắc theo kiểu hồi tiếp:

$$H_1(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}(1 + Z^{-1})} = \frac{1}{1 - Z^{-1} - Z^{-2}}$$

$H_2(Z)$ là hệ thống mắc theo kiểu song song:

$$H_2(Z) = 2 + 3Z^{-1} + Z^{-2}$$

Hàm truyền đạt của cả hệ thống:

$$H(Z) = H_1(Z).H_2(Z) = \frac{2 + 3Z^{-1} + Z^{-2}}{1 - Z^{-1} - Z^{-2}}$$

2.6.3. Giải phương trình sai phân dùng biến đổi Z

Trong chương 1 chúng ta đã thấy sự khó khăn của việc giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, điều này có thể khắc phục bằng cách sử dụng biến đổi Z để giải phương trình sai phân. Bởi việc giải phương trình sai phân thường đi kèm với điều kiện ban đầu khác không nên ta dùng biến đổi Z một phía để giải phương trình sai phân.

Khi sử dụng biến đổi Z một phía cần chú ý công thức trễ sau đây:

$$\text{Nếu } y(n) = x(n - n_0) \text{ thì } Y^1(Z) = Z^{-n_0}(X^1(Z) + \sum_{r=1}^{n_0} x(-r)Z^r) \quad (2.22)$$

Nội dung phương pháp:

- Biến đổi Z một phía hai vế của phương trình sai phân (chú ý công thức trễ).

- Tìm $Y(Z)$.

- Biến đổi Z ngược của $Y(Z)$ ta sẽ được $y(n)$.

Ví dụ: Giải phương trình sai phân:

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n)$$

Biết: $y(-1) = y(-2) = 0; \quad x(n) = \text{rect}_2(n)$

Bài giải:

Lấy ZT^1 hai vế của phương trình ta được:

$$Y^1(Z) - 5Z^{-1}(Y^1(Z) + y(-1)Z) + 6Z^{-2}(Y^1(Z) + y(-1)Z + y(-2)Z^2) = X^1(Z) \quad (*)$$

Theo đầu bài ta có: $y(-1) = y(-2) = 0$

$$x(n) = \text{rect}_2(n) \Rightarrow X^1(Z) = 1 + Z^{-1}$$

Thay vào (*) ta có:

$$Y^1(Z) - 5Z^{-1}Y^1(Z) + 6Z^{-2}Y^1(Z) = 1 + Z^{-1}$$

$$Y^1(Z) = \frac{1 + Z^{-1}}{1 - 5Z^{-1} + 6Z^{-2}}$$

Ta coi mẫu số của $Y^1(Z)$ là đa thức bậc 2 đối với Z^{-1} , $Y^1(Z)$ có thể viết lại:

$$Y^1(Z) = \frac{1 + Z^{-1}}{6(Z^{-1} - \frac{1}{2})(Z^{-1} - \frac{1}{3})} = \frac{A}{Z^{-1} - \frac{1}{2}} + \frac{B}{Z^{-1} - \frac{1}{3}}$$

$$A = \left. \frac{1 + Z^{-1}}{6(Z^{-1} - \frac{1}{3})} \right|_{Z^{-1} = \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{1 + Z^{-1}}{6(Z^{-1} - \frac{1}{2})} \bigg|_{Z^{-1} = \frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}$$

Vậy
$$Y^1(Z) = \frac{3}{2(Z^{-1} - \frac{1}{2})} - \frac{4}{3(Z^{-1} - \frac{1}{3})} = \frac{-3}{(1 - 2Z^{-1})} + \frac{4}{1 - 3Z^{-1}}$$

Do đó ta có: $y(n) = 4 \cdot 3^n \cdot u(n) - 3 \cdot 2^n \cdot u(n)$

2.6.4. Sự ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến

a) Sự ổn định

Trong chương 1 chúng ta đã biến một hệ thống tuyến tính bất biến được gọi là ổn định nếu:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Đây là điều kiện ổn định trong miền n , khi chuyển sang miền Z đặc trưng cho hệ thống là hàm truyền đạt $H(Z)$:

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n} \quad \text{với } R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

So sánh với điều kiện ổn định trong miền n với công thức tính $H(Z)$ này ta thấy rằng muốn điều kiện ổn định trong miền n được thỏa mãn thì hàm truyền đạt $H(Z)$ phải hội tụ với $|Z|=1$, có nghĩa là miền hội tụ của $H(Z)$ phải chứa đường tròn đơn vị.

Chúng ta có thể phát biểu điều kiện ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến như sau:

Một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu và chỉ nếu hàm truyền đạt của hệ thống có miền hội tụ chứa đường tròn đơn vị.

b) Sự ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

Hàm truyền đạt của hệ thống nhân quả cho bởi công thức:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)Z^{-n} \quad (2.23)$$

Vì $h(n)$ là dãy bị chặn trái nên miền hội tụ của $H(Z)$ là $|Z| > R_{x-}$ có nghĩa là miền hội tụ nằm ngoài đường tròn bán kính R_{x-} (với $R_{x-} = \lim_{n \rightarrow \infty} |h(n)|^{\frac{1}{n}}$).

Vậy, một hệ thống tuyến tính bất biến là nhân quả nếu miền hội tụ của hàm truyền đạt của hệ thống nằm ngoài đường tròn có bán kính R_{x-} .

Bây giờ ta đi xét điều kiện ổn định của hệ thống nhân quả:

Ta biết để hệ thống nhân quả thì: $RC[H(Z)]: |Z| > R_{x-}$, để hệ thống ổn định thì $R_{x-} < 1$. Mà ta biết rằng điểm cực không bao giờ thuộc miền hội tụ, kết hợp hai điều kiện trên ta đi đến kết luận:

"Hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả sẽ ổn định nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt nằm trong đường tròn đơn vị".

Ví dụ:

Xét tính nhân quả và ổn định của hệ thống có:

$$H(Z) = \frac{1+Z}{Z^2 - 7Z + 12}, \quad |Z| > 4$$

Ta thấy hệ thống này nhân quả nhưng không ổn định vì có hai điểm cực $Z_{p1} = 3$ và $Z_{p2} = 4$ không nằm trong đường tròn đơn vị.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Bài 1: Tìm biến đổi Z hai phía và miền hội tụ của dãy sau đây:

$$x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-|n|} \text{ với mọi } n$$

Bài 2: Hãy tìm ZT và miền hội tụ của các dãy sau:

$$a) x_1(n) = \text{rect}_N(n); \quad b) x_2(n) = n_0 \text{rect}_N(n)$$

Bài 3: Hãy tìm ZT, miền hội tụ và các cực, các không của các dãy sau:

$$a) x(n) = 2n \text{rect}_3(n); \quad b) x(n) = \begin{cases} e^{j\omega n} & n \leq 0; \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$c) x(n) = a^n u(-n) \quad d) x(n) = -a^n u(-n-1)$$

Bài 4: Hãy biến đổi Z ngược với các dãy sau:

$$a) x(z) = \frac{z^3}{z-1}; \quad b) x(z) = \frac{4}{z^3(2z-1)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$c) x(z) = \frac{4z^2 + 8z}{4z^2 - 5z + 1}; \quad d) x(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

Bài 5: Hệ thống tuyến tính bất biến có phương trình sai phân sau:

$$y(n) = 3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)$$

Với điều kiện đầu: $y(-1) = y(-2) = 0$

a) Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống

- b) Xét tính ổn định của hệ thống
 c) Tìm đáp ứng xung của hệ thống

Bài 6: Dùng biến đổi Z một phía giải các phương trình sau;

a) $y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$

Điều kiện đầu: $y(-1) = y(-2) = 1$

b) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$ $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$; điều kiện đầu: $y(-1) = 1$

c)

$y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n)$; $x(n) = u(n)$

Điều kiện đầu: $y(-1) = 0$; $y(-2) = 1$

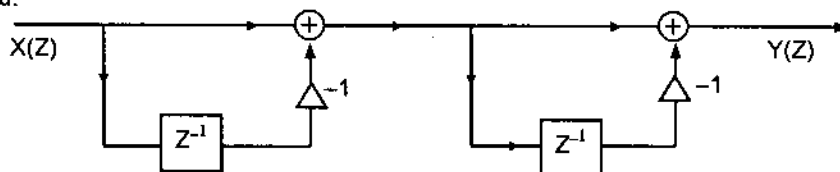
Bài 7: Dựa vào các điểm cực trên mặt phẳng Z để xác định độ ổn định của hệ thống có hàm truyền đạt sau:

a) $H_1(Z) = 1 + Z^{-1} - 2Z^{-2} + Z^{-3}$

b) $H_2(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}Z^{-2}\right)(1 - 0,3Z^{-1})}$

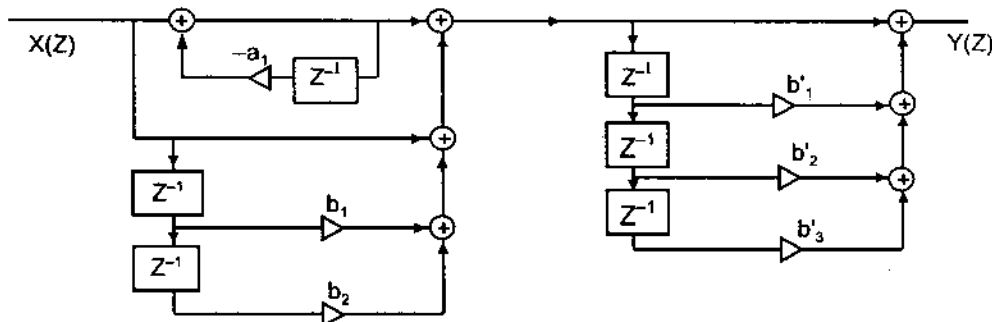
c) $H_3(Z) = \frac{1}{(Z + 0,5)(Z^2 - Z + 1)}$

Bài 8: Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ và xét độ ổn định của các hệ thống có sơ đồ sau:



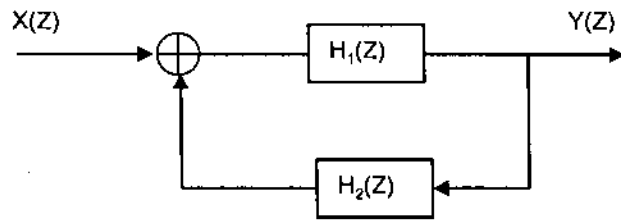
Hình 2.7.

Bài 9: Tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống sau:



Hình 2.8

Bài 10: Xác định hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống ở hình 2.9.



Hình 2.9

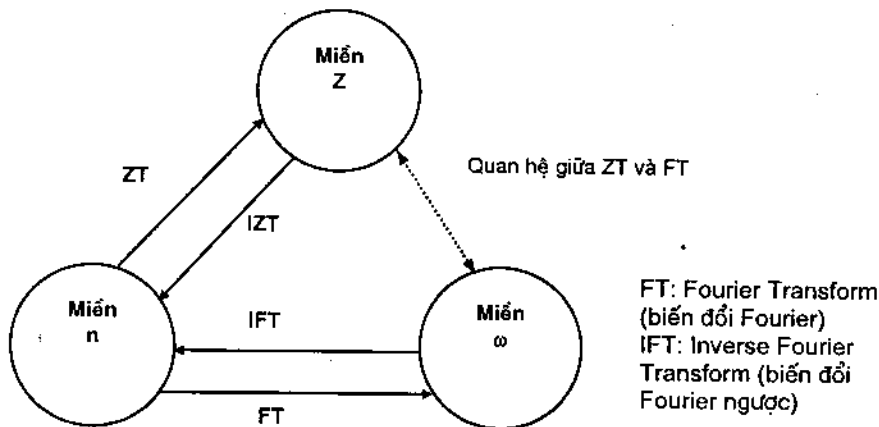
Chương 3

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

3.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong chương 2 chúng ta đã nghiên cứu tín hiệu rời rạc trong miền Z và đã thấy được những thuận lợi của phương pháp này. Chương này chúng ta nghiên cứu một công cụ toán học khác để biểu diễn gián tiếp tín hiệu rời rạc, đó là biến đổi Fourier. Biến đổi Fourier sẽ chuyển việc biểu diễn tín hiệu trong miền biến số độc lập n sang miền tần số liên tục ω .

Như vậy cho đến chương này chúng ta đã có 3 miền biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc. Sự liên hệ giữa các miền biểu diễn được minh họa trên hình 3.1.



Hình 3.1. Quan hệ giữa miền n , miền Z và miền ω

3.2. BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC

3.2.1. Định nghĩa biến đổi Fourier (FT)

a) Định nghĩa

Biến đổi Fourier của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.1)$$

Như vậy, biến đổi Fourier đã chuyển việc biểu diễn tín hiệu $x(n)$ trong miền biến số độc lập n thành việc biểu diễn tín hiệu $X(e^{j\omega})$ trong miền tần số ω , tức là trên trục ảo $j\omega$. Vậy $X(e^{j\omega})$ là hàm số phức của biến số ω .

Ký hiệu dạng toán tử:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) \quad (3.2)$$

b) Các phương pháp biểu diễn $X(e^{j\omega})$

– Biểu diễn dưới dạng phần thực và phần ảo:

Vì $X(e^{j\omega})$ là một hàm số phức nên có thể biểu diễn $X(e^{j\omega})$ trong miền tần số ω dưới dạng phần thực và phần ảo:

$$X(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j\text{Im}[X(e^{j\omega})] \quad (3.3)$$

$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$: phần thực của $X(e^{j\omega})$

$\text{Im}[X(e^{j\omega})]$: phần ảo của $X(e^{j\omega})$

– Biểu diễn dưới dạng modul và argument:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} \quad (3.4)$$

$| |$: là modul

$\arg$: là argument

$|X(e^{j\omega})|$ được gọi là phổ biên độ của $x(n)$

Đặt $\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})]$, $\varphi(\omega)$ được gọi là phổ pha của $x(n)$

Vì vậy có thể viết: $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$

Quan hệ giữa phổ biên độ, phổ pha với phần thực và phần ảo như sau:

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{\text{Re}^2[X(e^{j\omega})] + \text{Im}^2[X(e^{j\omega})]}$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \arctg \frac{\text{Im}[X(e^{j\omega})]}{\text{Re}[X(e^{j\omega})]}$$

– Biểu diễn dưới dạng độ lớn và pha:

$$X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)} \quad (3.5)$$

$A(e^{j\omega})$: được gọi là độ lớn của $X(e^{j\omega})$ và $A(e^{j\omega})$ là số thực có thể lấy giá trị dương hoặc âm.

$\theta(\omega)$: được gọi là pha của $X(e^{j\omega})$

Quan hệ giữa độ lớn và pha với modul và argument:

$$|A(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$$

$$\theta(\omega) = \varphi(\omega) - \arg[A(e^{j\omega})] = \begin{cases} \varphi(\omega) & \text{nếu } A(e^{j\omega}) > 0 \\ \varphi(\omega) - \pi & \text{nếu } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Cho $X(e^{j\omega}) = e^{j\omega} \sin(\omega)$

Tìm $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$, $\text{Im}[X(e^{j\omega})]$, $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$

Bài giải:

Theo dạng biểu diễn của $X(e^{j\omega})$ của bài toán ta có:

$$A(e^{j\omega}) = \sin(\omega)$$

$$\theta(\omega) = \omega$$

$$|X(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})| = |\sin(\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \theta(\omega), & \sin(\omega) > 0 \\ \theta(\omega) + \pi, & \sin(\omega) < 0 \end{cases}$$

Để tìm $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$, $\text{Im}[X(e^{j\omega})]$ ta viết lại $X(e^{j\omega})$:

$$X(e^{j\omega}) = (\cos(\omega) + j\sin(\omega)) \cdot \sin(\omega) = \frac{1}{2} \sin(2\omega) + j \sin^2(\omega)$$

$$\text{Vậy } \text{Re}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2} \sin(2\omega), \text{Im}[X(e^{j\omega})] = \sin^2(\omega)$$

Ví dụ: Tìm biến đổi Fourier của các dãy sau đây:

$$x_1(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$x_3(n) = 2^n u(n)$$

Bài giải:

$$\text{FT}[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_1(n) e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega}$$

$$\begin{aligned}
 \text{FT}[x_2(n)] &= X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \\
 \text{FT}[x_3(n)] &= X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2e^{-j\omega})^n
 \end{aligned}$$

Chuỗi này không hội tụ vì $|2e^{j\omega}| = 2 > 1$

Vậy $x_3(n)$ không tồn tại FT.

3.2.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier

Để tồn tại $\text{FT}[x(n)]$ thì chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ phải hội tụ, chuỗi này hội tụ nếu và chỉ nếu dãy $x(n)$ thoả mãn điều kiện:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (3.6)$$

Về mặt toán học chúng ta có quan hệ sau đây:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2$$

Mà nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ thì $\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2 < \infty$ và ta có:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Vậy, nếu năng lượng E_x của tín hiệu $x(n)$ là hữu hạn thì điều kiện hội tụ được thoả mãn hay nói cách khác biến đổi Fourier của dãy có năng lượng hữu hạn luôn luôn tồn tại.

3.2.3. Biến đổi Fourier ngược (IFT: Inverse Fourier Transform)

Dễ dàng nhận thấy hàm $X(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π vì

vậy chúng ta có thể chỉ khai triển hàm $X(e^{j\omega})$ thành chuỗi Fourier trong khoảng $[-\pi, \pi]$ và coi các hệ số của khai triển này chính là $x(n)$, tức là có thể tìm thấy các giá trị của $x(n)$ từ $X(e^{j\omega})$.

Cách thiết lập công thức tính $x(n)$:

$$\text{Ta có } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Nhân cả hai vế với $e^{j\omega l}$ rồi lấy tích phân trong đoạn $[-\pi, \pi]$ ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega l} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega l} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega$$

$$\text{Ta có: } \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{nếu } l = n \\ 0 & \text{nếu } l \neq n \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\text{Vậy: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x(l) & \text{nếu } l = n \\ 0 & \text{nếu } l \neq n \end{cases}$$

Cuối cùng ta có:

$$x(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega l} d\omega \quad (3.8)$$

Đổi biến số l thành n ta có:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.9)$$

Đây chính là công thức biến đổi Fourier ngược.

Vậy ta có cặp biến đổi Fourier sau đây:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

3.3. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA FT

3.3.1. Tính chất tuyến tính

$$\text{Nếu } x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \text{ thì } X(e^{j\omega}) = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (3.10)$$

Với $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$, $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$, $X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)]$
 a, b là các hằng số.

3.3.2. Tính chất trễ

Nếu $y(n) = x(n-n_0)$ (n_0 là số nguyên), với $FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$
 thì $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$. (3.11)

Từ biểu thức trên ta có:

$$\begin{aligned} |Y(e^{j\omega})| &= |X(e^{j\omega})| \\ \arg(Y(e^{j\omega})) &= -\omega n_0 + \arg[X(e^{j\omega})] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vậy, nếu tín hiệu $x(n)$ trễ đi n_0 mẫu trong miền biến số độc lập n thì trong miền tần số phổ biên độ của nó giữ nguyên, còn phổ pha của nó sẽ tăng thêm lượng $-\omega n_0$.

Ví dụ:

$$\text{Cho } x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n+2)$$

Tìm $X_1(e^{j\omega})$ rồi suy ra $X_2(e^{j\omega})$

Bài giải:

$$\text{Theo ví dụ trong mục 3.2.1b ta có } X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\text{Viết lại } x_2(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u(n+2) = 4x_1(n+2), \text{ áp dụng tính chất tuyến}$$

$$\text{tính và trễ ta có: } X_2(Z) = 4.e^{j\omega 2}.X_1(e^{j\omega}) = 4 \frac{e^{j\omega 2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

3.3.3. Vi phân trong miền tần số

$$\text{Nếu } y(n) = n.x(n) \text{ thì } Y(e^{j\omega}) = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (3.13)$$

3.3.4. Trễ tần số

$$\text{Nếu ta có } FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) \text{ thì } FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (3.14)$$

3.3.5. Tích chập của hai dãy

$$\text{Nếu } x(n) = x_1(n) * x_2(n) \text{ thì } X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) \quad (3.15)$$

3.3.6. Tích của hai dãy

$$\text{Nếu } x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \text{ thì } X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega}) \quad (3.16)$$

3.4. SO SÁNH BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Biến đổi Z của dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

Miền hội tụ là RC: $R_x < |Z| < R_{x+}$

Biểu diễn Z dưới dạng tọa độ cực ta có:

$$Z = r \cdot e^{j\omega}, \text{ ở đây: } |Z| = r \text{ và } \arg[Z] = \omega$$

$$X(Z) = X(r e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(r e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$$

Theo biểu thức trên ta có thể coi biến đổi Z của dãy $x(n)$ như là biến đổi Fourier của dãy tín hiệu $x(n) r^{-n}$: $FT[x(n) r^{-n}] = ZT[x(n)]$

Nếu $X(Z)$ hội tụ tại $|Z| = 1$ thì:

$$X(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = FT[x(n)]$$

Vậy, biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được đánh giá trên đường đơn vị trong mặt phẳng Z. Vì vậy, nếu vòng tròn đơn vị không nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z thì $X(e^{j\omega})$ sẽ không tồn tại, nếu $X(e^{j\omega})$ tồn tại thì chắc chắn $X(Z)$ phải hội tụ trên đường tròn đơn vị.

Ví dụ: Cho $x(n) = 2^n u(n)$. Tìm $X(Z)$ và $X(e^{j\omega})$.

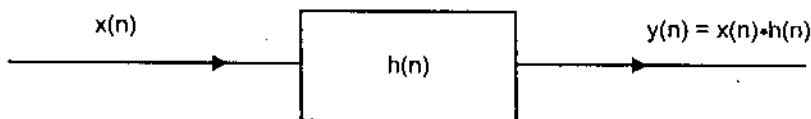
Bài giải:

$$\text{Ta tìm được: } X(Z) = \frac{1}{1-2Z^{-1}}, \quad |Z| > 2$$

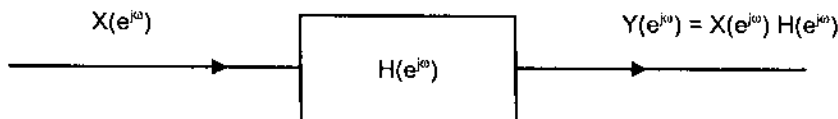
Trong trường hợp này miền hội tụ của $X(Z)$ không chứa đường tròn đơn vị nên $X(e^{j\omega})$ không tồn tại.

3.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

Hệ thống tuyến tính trong miền n được đặc trưng bởi đáp ứng xung $h(n)$.



Khi hệ thống được chuyển sang miền tần số ω :



$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống;

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$: được gọi là đáp ứng biên độ của hệ thống;

$\varphi(\omega)$: được gọi là đáp ứng pha của hệ thống.

3.6. CÁC BỘ LỌC SỐ LÝ TƯỞNG

Việc thiết kế các bộ lọc số thực tế đều dựa trên cơ sở lý thuyết các bộ lọc số lý tưởng. Người ta phân chia thành 4 loại bộ lọc số tiêu biểu là:

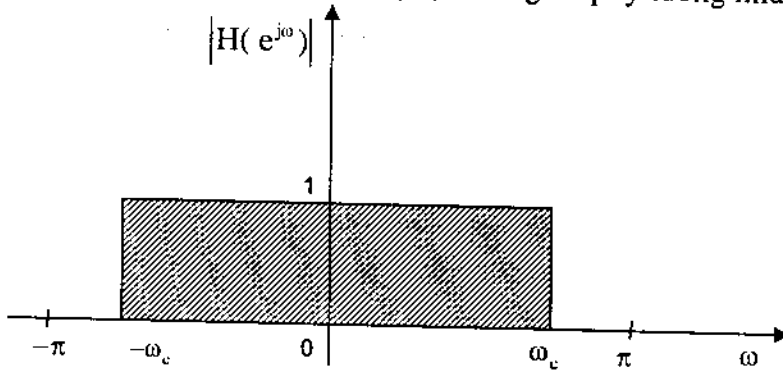
- Bộ lọc số thông thấp lý tưởng;
- Bộ lọc số thông cao lý tưởng;
- Bộ lọc số thông dải lý tưởng;
- Bộ lọc số chắn dải lý tưởng.

3.6.1. Bộ lọc thông thấp lý tưởng

Bộ lọc thông thấp lý tưởng được định nghĩa theo đáp ứng biên độ. Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (3.17)$$

Đồ thị của đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp lý tưởng như sau:



Hình 3.2. Đồ thị đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng

Nhận xét:

$|H(e^{j\omega})|$ đối xứng vì vậy ta chỉ cần xét $|H(e^{j\omega})|$ với một nửa chu kỳ $[0, \pi]$ là đủ. Khi xét trong nửa chu kỳ thì các tham số của bộ lọc thông thấp lý tưởng bao gồm:

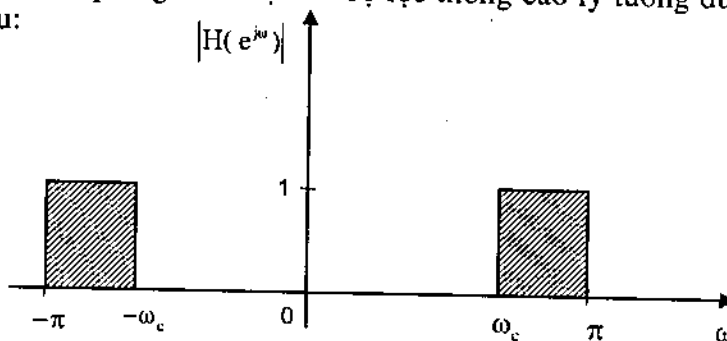
- ω_c : tần số cắt;
- $0 \leq \omega \leq \omega_c$: dải thông;
- $\omega_c \leq \omega \leq \pi$: dải chắn.

3.6.2. Bộ lọc thông cao lý tưởng

Đáp ứng biên độ của bộ lọc dải thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & \begin{cases} -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ 0, & \omega \end{cases} \quad (3.18)$$

Đồ thị của đáp ứng biên độ của bộ lọc thông cao lý tưởng được biểu diễn như sau:



Hình 3.3. Đồ thị đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông cao lý tưởng

Nhận xét:

Cũng giống như bộ lọc số thông thấp lý tưởng $|H(e^{j\omega})|$ đối xứng. Như vậy $h(n)$ là thực và trong miền tần số ta chỉ cần xét trong một nửa chu kỳ. Khi đó các tham số của bộ lọc thông cao lý tưởng bao gồm:

ω_c : tần số cắt;

$\omega_c \leq \omega \leq \pi$: dải thông;

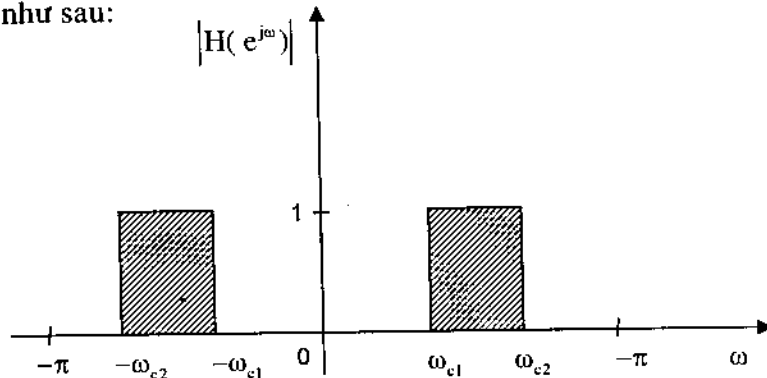
$0 \leq \omega \leq \omega_c$: dải chắn.

3.6.3. Bộ lọc thông dải lý tưởng

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (3.19)$$

Đồ thị của đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được biểu diễn như sau:



Hình 3.4. Đồ thị đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng

Nhận xét:

Đáp ứng biên độ $|H(e^{j\omega})|$ đối xứng trong một chu kỳ $[-\pi, \pi]$ do đó chỉ cần xét nửa chu kỳ $[0, \pi]$. Trong một nửa chu kỳ, bộ lọc thông dải chỉ cho thông qua các thành phần tần số từ ω_{c1} đến ω_{c2} . Các tham số của bộ lọc thông dải lý tưởng bao gồm:

ω_{c1} : tần số cắt dưới;

ω_{c2} : tần số cắt trên;

$\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$: dải thông.

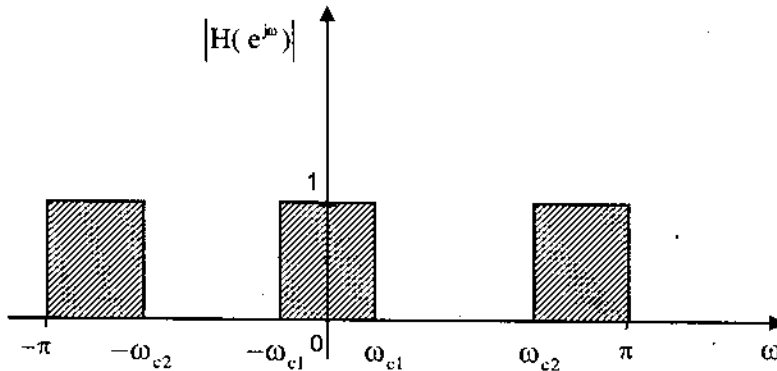
$$\begin{cases} 0 \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} : \text{dải chặn.}$$

3.6.4. Bộ lọc chặn dải lý tưởng

Đáp ứng biên độ của bộ lọc chặn dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & \begin{cases} -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ 0, & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (3.20)$$

Đồ thị của bộ lọc chặn dải lý tưởng được biểu diễn như sau:



Hình 3.5. Đồ thị đáp ứng biên độ của bộ lọc số chặn dải lý tưởng

Nhận xét:

Đáp ứng biên độ $|H(e^{j\omega})|$ đối xứng trong một chu kỳ $[-\pi, \pi]$ do đó chỉ cần xét nửa chu kỳ $[0, \pi]$. Trong một nửa chu kỳ, bộ lọc thông dải chỉ cho thông qua các thành phần tần số từ ω_{c2} đến π . Các tham số của bộ lọc thông dải lý tưởng bao gồm:

ω_{c1} : tần số cắt dưới

ω_{c2} : tần số cắt trên

$\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$: dải chặn

$$\begin{cases} 0 \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} : \text{dải thông}$$

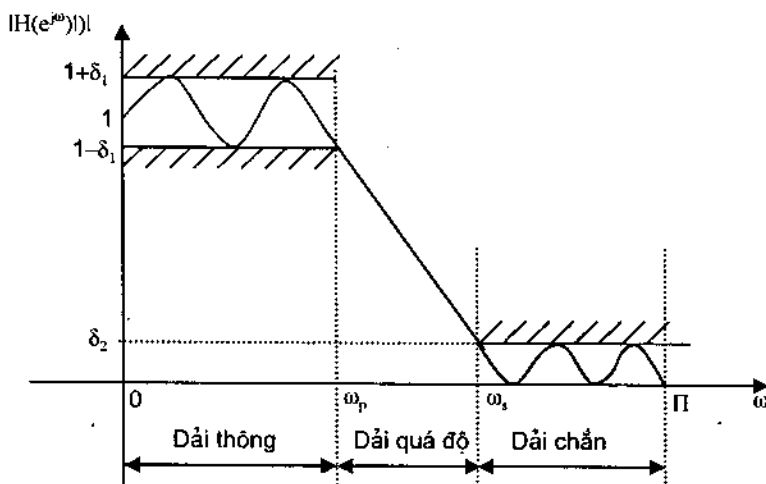
3.7. BỘ LỌC SỐ THỰC TẾ

Trong miền tần số liên tục các bộ lọc số thực tế được đặc trưng bởi 4 tham số kỹ thuật chính là:

- Độ gợn sóng ở dải thông δ_1
- Độ gợn sóng ở dải chặn δ_2
- Tần số giới hạn dải thông ω_p
- Tần số giới hạn dải chặn ω_s

Ngoài 4 tham số chính này, người ta còn sử dụng một tham số phụ là bề rộng dải quá độ $\Delta \omega = \omega_s - \omega_p$.

Hình 3.7 minh họa đáp ứng biên độ và các chỉ tiêu của một bộ lọc thông thấp thực tế.



Hình 3.7. Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp thực tế

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Bài 1:

Gọi $h(n)$ là đáp ứng xung đơn vị của hệ thống tuyến tính bất biến, tìm đáp ứng tần số biết:

a) $h(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$

b) $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \cdot u(n-2)$

Bài 2:

Cho $x(n) = \begin{cases} 1, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$

Hãy tìm và vẽ: $X(e^{j\omega})$; $|X(e^{j\omega})|$; $\arg[X(e^{j\omega})]$; $A(e^{j\omega})$; $\theta(\omega)$

Bài 3:

Hãy tính biến đổi Fourier từ biến đổi Z của các dãy sau:

a) $x_1(n) = 3^n \cdot u(n)$

b) $x_2(n) = (-1)^n \cdot u(n)$

Bài 4:

Cho hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = x_2(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$$

Hãy tính tích chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ thông qua biến đổi Fourier.

Hãy vẽ đồ thị biểu diễn $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$, $X_1(e^{j\omega})$, $X_2(e^{j\omega})$, $X_3(e^{j\omega})$

Bài 5:

Cho đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến như sau:

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Dùng biến đổi Fourier hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống ứng với các kích thích như sau:

a) $x(n) = Ae^{j\frac{\pi}{2}n}$ với mọi n .

b) $x(n) = 10 + 5\sin\frac{\pi}{2}n + 20\cos\pi n$ với mọi n .

Bài 6:

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng như sau:

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

hãy tìm và vẽ: $H(e^{j\omega})$, $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|H(e^{j\omega})|$, $\phi(\omega)$

Bài 7:

Cho đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính bất biến như sau:

$$h(n) = \delta(n) + 2e^{-3n}u(n)$$

a) Hãy tìm đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống.

b) Hãy tìm đáp ứng $y(n)$ của hệ thống ứng với kích thích $x(n)$ sau:

$$x(n) = 4\cos^2(2n)$$

Bài 8:

Hãy xác định đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân sau:

$$y(n) = x(n) - x(n - N), \quad N \text{ là hằng số}$$

Hãy tìm và vẽ đồ thị $H(e^{j\omega})$.

Bài 9:

Một hệ thống tuyến tính bất biến có tín hiệu đầu vào $x(n] = 2^n u(n)$ và tín hiệu đầu ra là $y(n) = \text{rect}_2(n+1)$. Tìm đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$.

Bài 10:

Một hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả được mô tả bởi phương trình sai phân $y(n) + 4y(n-1) + y(n-2) = 2x(n)$. Tìm đáp ứng tần số của hệ thống.

Bài 11:

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng có tần số cắt là $\omega_c = \pi/3$

Bài 12:

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số thông cao lý tưởng có tần số cắt là $\omega_c = 2\pi/3$.

Bài 13:

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số thông dải lý tưởng có các tần số cắt là $\omega_{c1} = \pi/3$, $\omega_{c2} = 2\pi/3$.

Bài 14:

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số chắn dải lý tưởng có các tần số cắt là $\omega_{c1} = \pi/4$, $\omega_{c2} = 3\pi/4$.

Chương 4

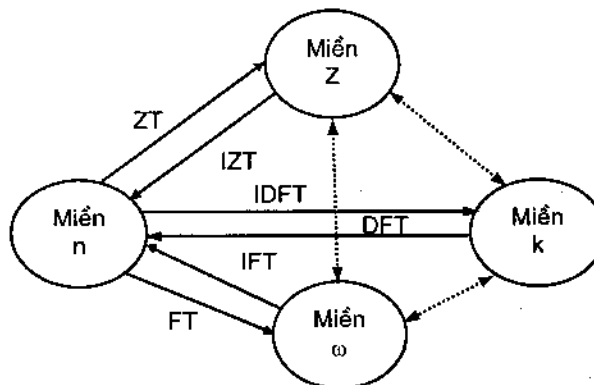
BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

4.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong các chương trước đã nghiên cứu việc biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong 3 miền: miền biến số độc lập n , miền Z và miền ω . Trong mỗi miền có thuận lợi riêng của nó và giữa các miền cũng có liên hệ với nhau.

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền tần số rời rạc ω_k , hoặc để gán gọn ta gọi là miền k . Thực chất của cách biểu diễn này là ta lấy từng điểm rời rạc trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z để biểu diễn. Để chuyển cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc sang miền tần số rời rạc chúng ta sẽ dùng một công cụ toán học gọi là biến đổi Fourier rời rạc (Discrete Fourier Transform: DFT). Việc biểu diễn trong miền tần số rời rạc đặc biệt hiệu quả từ khi xuất hiện các thuật toán tính nhanh DFT, ta gọi là biến đổi Fourier nhanh (Fast Fourier Transform: FFT).

Hình 4.1 biểu diễn các phép chuyển đổi giữa các miền và sự liên hệ giữa chúng.



Hình 4.1. Quan hệ giữa các miền n , Z , ω và k

4.2. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC VỚI TÍN HIỆU TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ N

4.2.1. Các định nghĩa

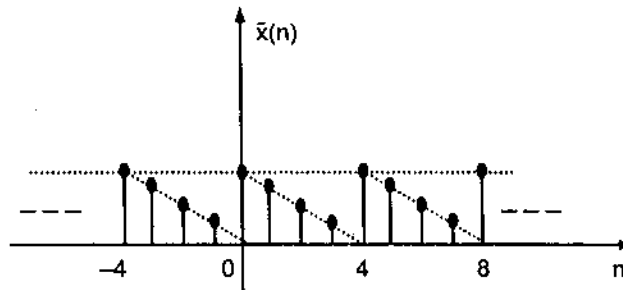
a) Cơ sở

Một dãy $\tilde{x}(n)$ được gọi là tuần hoàn chu kỳ N nếu

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + l.N) \quad (4.1)$$

Ở đây l là số nguyên.

Hình 4.2. cho ta ví dụ về một dãy tuần hoàn có chu kỳ N = 4



Hình 4.2. Ví dụ tín hiệu tuần hoàn chu kỳ N = 4

Ta thấy rằng một dãy tuần hoàn có chu kỳ N có thể được biểu diễn bởi một chuỗi Fourier, tức là bởi tổng của các dãy sin và cosin hoặc bởi tổng các dãy hàm mũ phức có tần số cơ bản $\frac{2\pi}{N}$.

Giả sử có dãy hàm mũ phức như sau:

$$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n.k} \quad (4.2)$$

Với $k = 0, 1, \dots, N-1$

Ta có $e_0(n) = e^0 = 1$

$$e_N(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n.N} = e^{j2\pi} = 1$$

Vậy $e_0(n) = e_N(n)$.

Tương tự ta có: $e_1(n) = e_{N+1}(n)$

$$e_2(n) = e_{N+2}(n)$$

$$e_3(n) = e_{N+3}(n)$$

.....

Như vậy chúng ta có thể biểu diễn dãy tuần hoàn có chu kỳ N $\tilde{x}(n)$ dưới dạng sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n.k} \quad (4.3)$$

Ở đây $\tilde{X}(k)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N , hệ số $\frac{1}{N}$ trong công thức (4.3) dùng để tính toán $\tilde{X}(k)$ dưới dạng gọn hơn.

* Tính $\tilde{X}(k)$:

Nhân hai vế của (4.3) với $e^{-j\frac{2\pi}{N}m.n}$ ta có:

$$\tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}m.n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n.k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}m.n}$$

Lấy tổng theo n từ 0 đến $(N-1)$ ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}m.n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n.k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}m.n}$$

Đổi thứ tự của hai tổng ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}m.n} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m).n} \right]$$

Ta biết: $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n.r} = \begin{cases} N & \text{khi } (k-m) = 1N (\in Z) \\ 0 & \text{khi } (k-m) \neq 1N \end{cases}$

Vậy: $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m).n} = \begin{cases} 1 & \text{khi } (k-m) = 1N \\ 0 & \text{khi } (k-m) \neq 1N \end{cases}$

Nếu lấy giá trị $l = 0$ thì $k = m$ ta có:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m).n} \right] = \tilde{X}(m)$$

Vậy: $\tilde{X}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}m.n}$

Hoặc có thể viết:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}k.n} \quad (4.4)$$

$\tilde{X}(k)$ trong biểu thức này là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N , tức là:

$$\tilde{X}(0) = \tilde{X}(N)$$

$$\tilde{X}(1) = \tilde{X}(N-1)$$

.....

Chúng sẽ lấy cách biểu diễn $\tilde{X}(k)$ để định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn.

b) Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N được định nghĩa:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.5)$$

Nếu đặt $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Ta có: $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Vậy ta có công thức biến đổi Fourier rời rạc:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (4.6)$$

Ta ký hiệu biến đổi Fourier rời rạc là DFT (viết tắt của Discrete Fourier Transform) và có ký hiệu như sau:

$$\text{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

hoặc $\tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}(k)$

c) Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc ngược

Biến đổi Fourier rời rạc ngược được định nghĩa:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.7)$$

Hoặc: $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (4.8)$

Như vậy chúng ta đã lấy cách biểu diễn dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N bởi tổng các dãy hàm mũ làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc ngược.

Ký hiệu biến đổi Fourier rời rạc ngược là IDFT (viết tắt của Inverse Discrete Fourier Transform) và có ký hiệu như sau:

$$\text{IDFT}[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$$

hoặc
$$\tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{IDFT}} \tilde{x}(n)$$

Trong các trường hợp cần nhấn mạnh chu kỳ của dãy tuần hoàn ta dùng ký hiệu sau đây:

$\tilde{x}(n)_N$ và $\tilde{X}(k)_N$ tức là dãy tuần hoàn chu kỳ N.

d) Bản chất của DFT

DFT bản chất là biến đổi phức vì:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cos \frac{2\pi}{N} kn - j \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \sin \frac{2\pi}{N} kn = \tilde{A}(k) + j\tilde{B}(k)$$

Ở đây:

$$\tilde{A}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cos \frac{2\pi}{N} kn$$

$$\tilde{B}(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \sin \frac{2\pi}{N} kn.$$

$\tilde{A}(k)$: gọi là biến đổi cosin.

$\tilde{B}(k)$: gọi là biến đổi sin.

4.2.2. Các tính chất cơ bản của biến đổi fourier rời rạc với dãy tuần hoàn có chu kỳ N

a) Tính chất tuyến tính

Giả sử chúng ta có hai dãy $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ là hai dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N và chúng ta có dãy $\tilde{x}_3(n)$ là tổ hợp tuyến tính của của $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$:

$$\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n) \quad (4.9)$$

ở đây a, b là các hằng số.

$$\begin{aligned}
\text{Nếu:} \quad & \text{DFT}[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k) \\
& \text{DFT}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k) \\
\text{thì:} \quad & \text{DFT}[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k) = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ở đây tất cả các dãy đều có chu kỳ là N .

b) Tính chất trễ

Nếu $\tilde{x}(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N và:

$$\text{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

Nếu dãy $\tilde{x}(n - n_0)$ là dãy trễ của dãy $\tilde{x}(n)$ cũng tuần hoàn có chu kỳ N thì:

$$\text{DFT}[\tilde{x}(n + n_0)] = W_N^{-kn_0} \tilde{X}(k) \tag{4.11}$$

c) Tính chất đối xứng

Nếu $\tilde{x}(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N và có:

$$\tilde{X}(k) = \text{DFT}[\tilde{x}(n)]$$

$$\text{thì} \quad \text{DFT}[\tilde{x}^*(n)] = \tilde{X}^*(-k) \tag{4.12}$$

ở đây dấu $*$ là liên hợp phức.

d) Tích chập tuần hoàn

Ta đã nghiên cứu tích chập tuyến tính:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

Tích chập tuần hoàn có khác tích chập tuyến tính vì chiều dài của các dãy tuần hoàn là vô cùng nhưng các chu kỳ lại lặp lại giống nhau, vì thế tổng chỉ lấy trong một chu kỳ, vậy ta có định nghĩa tích chập tuần hoàn như sau:

Tích chập tuần hoàn của hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có chu kỳ N là một dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn có chu kỳ N được định nghĩa:

$$\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n-m) \tag{4.13}$$

kí hiệu:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) (\tilde{*})_N \tilde{x}_2(n)$$

Ta xét trong miền k :

Nếu chúng có hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có cùng chu kỳ N và dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn cũng có chu kỳ N như sau:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n)(*)_N \tilde{x}_2(n)$$

và nếu

$$\text{DFT}[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k); \text{DFT}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k); \text{DFT}[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k)$$

$$\text{thì: } \tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k). \quad (4.14)$$

e) Tích của hai dãy

Nếu chúng ta coi tích của hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có cùng chu kỳ N là một dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn cũng có chu kỳ N như sau:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$$

và nếu chúng ta có:

$$\text{DFT}[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k); \text{DFT}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k); \text{DFT}[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k)$$

$$\text{thì: } \tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k)(*)_N \tilde{X}_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \cdot \tilde{X}_2(k-l) \quad (4.15)$$

f) Tương quan tuần hoàn

Nếu chúng ta có hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có cùng chu kỳ N thì hàm tương quan chéo giữa hai dãy này sẽ được tính toán trên một chu kỳ và được cho bởi công thức sau:

$$\tilde{r}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(m-n) \quad (4.16)$$

Vậy ta thấy rằng hàm tương quan chéo của hai dãy cùng có chu kỳ N là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N .

Bây giờ ta xét trong miền k :

$$\text{Nếu: } \text{DFT}[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$$

$$\text{DFT}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k); \text{DFT}[\tilde{r}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(n)] = \tilde{R}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(k)$$

$$\text{thì: } \tilde{R}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k).$$

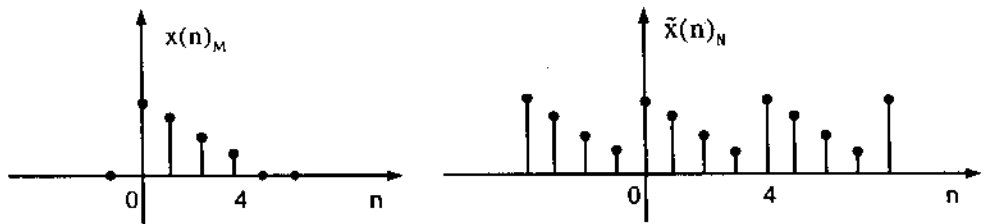
4.3. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC VỚI CÁC DẪY KHÔNG TUẦN HOÀN CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN

4.3.1. Tổng quan

Nếu có một dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn M và một dãy tuần hoàn có chu kỳ N .

Nếu $M = N$ thì dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ bằng chính xác một chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ $N = M$: $\tilde{x}(n)_N$

Ví dụ: Trong trường hợp $M = N = 4$

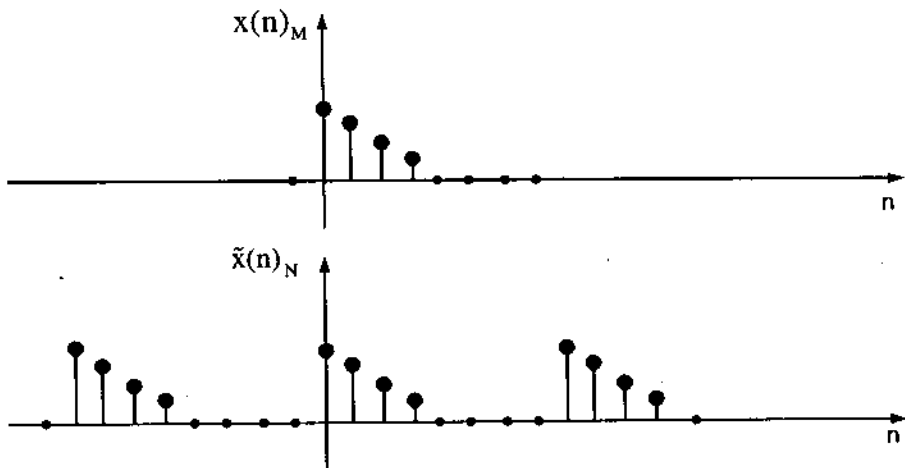


Hình 4.3

Nếu $M < N$ thì ta thấy rằng dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ sẽ có thể bằng chính một chu kỳ của dãy tuần hoàn có chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$ khi chúng ta coi dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ là một dãy có chiều dài N bằng cách kéo dài dãy này thêm $N - M$ mẫu có giá trị không.

$$x(n)_M \rightarrow x(n)_N$$

Hình 4.4. minh hoạ trường hợp này với $N = 8$ và $M = 4$.



Hình 4.4

Như vậy ta thấy một dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn $x(n)_M$ ta có thể lập một dãy tuần hoàn có chu kỳ $N \geq M$ $\tilde{x}(n)_N$ và mỗi một chu kỳ của $\tilde{x}(n)_N$ sẽ chính bằng dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_M$. Còn trong trường hợp $N < M$ thì chúng ta không thể thực hiện được.

Nếu $N \geq M$ ta thể viết:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (x(m+rN))_M \quad (4.18)$$

Dãy $x(n)_N$ có chiều dài hữu hạn N nhận được bằng cách trích ra một chu kỳ của dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$ có chu kỳ N tức là:

$$x(n)_N = \begin{cases} \tilde{x}(n)_N, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \neq \end{cases} \quad (4.19)$$

Để nhận được dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn chúng ta có thể sử dụng một dãy chữ nhật.

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } x(n)_N = \tilde{x}(n) \cdot \text{rect}_N(n) \quad (4.20)$$

Chúng ta cũng có tính đối ngẫu giữa miền n và miền k (hoặc giữa dãy $x(n)$ và dãy $X(k)$). Vì vậy trong miền k , đối với dãy $X(k)$ có thể viết:

$$X(k) = \begin{cases} \tilde{X}(k), & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) \cdot \text{rect}_N(k) \quad (4.22)$$

Mặt khác ta thấy rằng biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N chỉ tính trong một chu kỳ rồi kết quả đó được tuần hoàn hoá từ $-\infty$ đến $+\infty$ với chu kỳ N .

Vậy ta có thể lấy định nghĩa của biến đổi của Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N để làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N nhưng không được tuần hoàn hoá mà chỉ lấy từ 0 đến $N-1$.

4.3.2. Các định nghĩa

Cặp biến đổi Fourier rời rạc (DFT) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn được định nghĩa:

* Biến đổi Fourier thuận:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_n^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.23)$$

Ký hiệu: $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$

$$x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k)$$

* Biến đổi Fourier ngược (IDFT)

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_n^{-kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.24)$$

Ký hiệu: $\text{IDFT}[X(k)] = x(n)$

$$X(k) \xrightarrow{\text{IDFT}} x(n)$$

$X(k)$ được gọi là phổ rời rạc của tín hiệu $x(n)$, và nếu biểu diễn ở dạng modul và argument ta có:

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)} \quad (4.25)$$

$$\varphi(k) = \arg[X(k)]$$

$|X(k)|$: được gọi là phổ rời rạc biên độ.

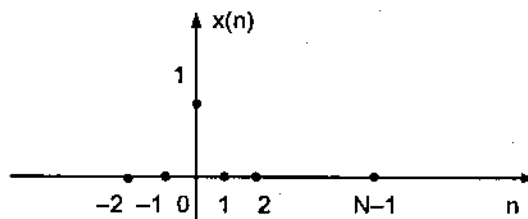
$\varphi(k)$: được gọi là phổ rời rạc pha.

Ví dụ: Hãy tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \delta(n)$$

Bài giải:

Muốn tìm DFT trước hết phải chọn chiều dài của DFT, tức là chọn chiều dài của dãy. Giả sử chọn là N , vậy $x(n)$ có dạng như hình 4.4.



Hình 4.4

Và $X(k)$ được tính như sau:

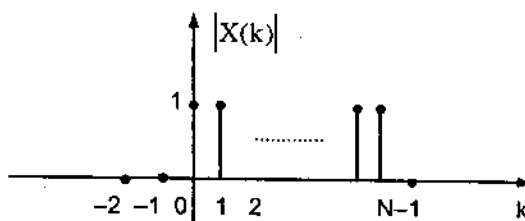
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = |X(k)|e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$\varphi(k) = 0$, mọi giá trị của k

$|X(k)|$ được biểu diễn trên hình 4.5.



Hình 4.5

4.3.3. Các tính chất cơ bản của DFT đối với các dãy có chiều dài hữu hạn

a) Tính tuyến tính

Giả sử ta có hai dãy chiều dài hữu hạn $x_1(n)$, $x_2(n)$ và $x_3(n)$ là tổ hợp tuyến tính của hai dãy này:

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

Nếu: $\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$

$$\text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

$$\text{DFT}[x_3(n)] = X_3(k)$$

thì: $X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$ (4.26)

Nếu chiều của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là khác nhau.

$$L[x_1(n)] = N_1$$

$$L[x_2(n)] = N_2$$

Khi đó phải chọn chiều dài của dãy $x_3(n)$ như sau:

$$L[x_3(n)] = N_3 = \max(N_1, N_2)$$

và tất cả các $\text{DFT}[x_1(n)]$, $\text{DFT}[x_2(n)]$ và $\text{DFT}[x_3(n)]$ đều phải tính trên N_3 mẫu. Giả sử $N_1 < N_2$ thì dãy $x_2(n)$ phải được kéo dài thêm $N_2 - N_1$ mẫu không và $\text{DFT}[x_1(n)]$ phải được tính trên N_2 mẫu và $\text{DFT}[x_2(n)]$, $\text{DFT}[x_3(n)]$ cũng được tính trên $N_3 = N_2$ mẫu.

Cụ thể:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n)W_{N_2}^{kn} \equiv X_1(k)_{N_3}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n)W_{N_2}^{kn} \equiv X_2(k)_{N_3}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

$$X_3(k) = \sum_{n=0}^{N_3-1} x_3(n)W_{N_3}^{kn} \equiv X_3(k)_{N_3}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

b) Trễ vòng

Để có được khái niệm trễ vòng ta cần xem lại khái niệm trễ (trễ tuyến tính) và trễ tuần hoàn chu kỳ N.

Ví dụ:

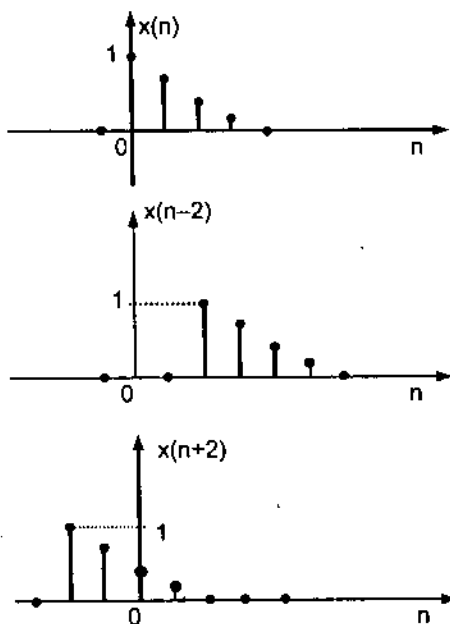
Cho một dãy $x(n)$ sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm trễ tuyến tính $x(n-2)$ và $x(n+2)$

Bài giải:

Chúng ta giải bằng đồ thị như trên hình 4.6.



Hình 4.6

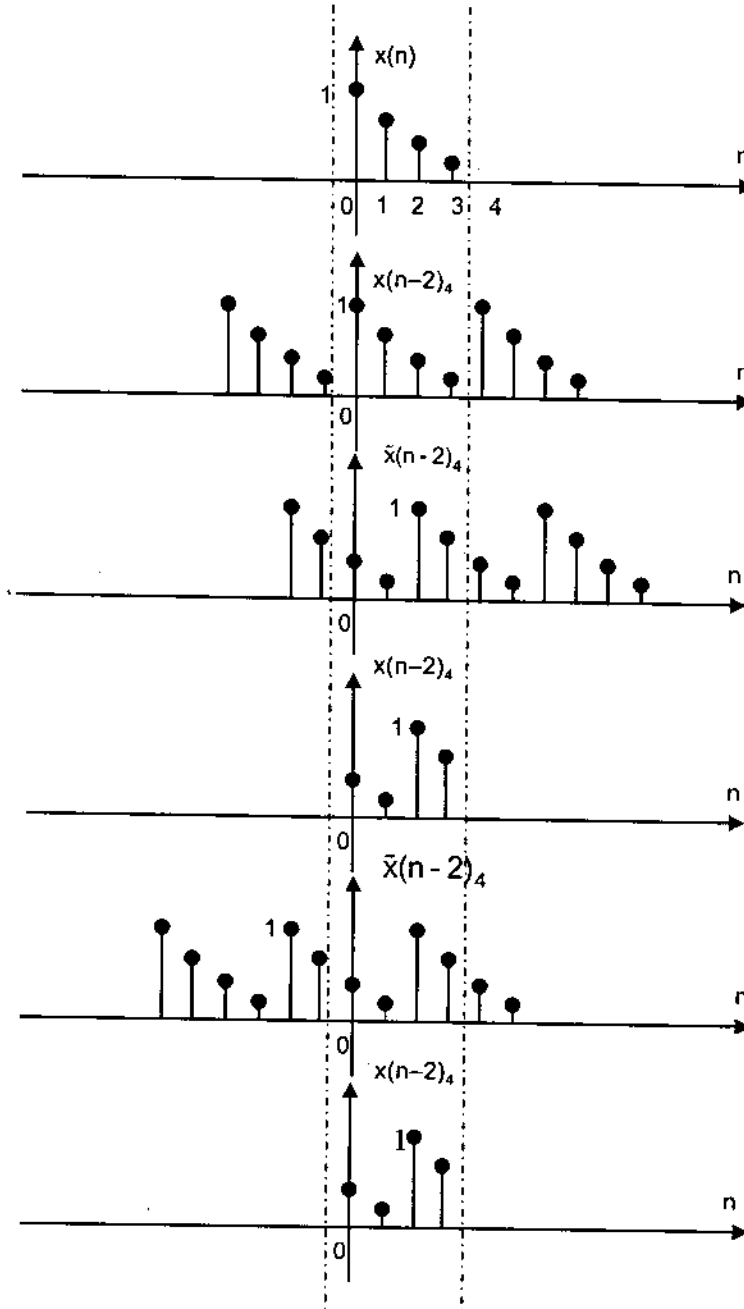
Ví dụ:

Cho dãy tuần hoàn chu kỳ $N = 4$, $\tilde{x}(n)_4$ sau đây:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm trễ tuần hoàn $\tilde{x}(n-2)_4$ và $\tilde{x}(n+2)_4$ và lấy ra một chu kỳ của hai dãy này.

Bài giải: xem hình 4.7.



Hình 4.7

$x(n-2)_4$ và $x(n+2)_4$ được gọi là trễ vòng với chiều dài $N=4$ của $x(n]$.

* Khái niệm trễ vòng: Nếu ta trích ra một chu kỳ của trễ tuần hoàn

chu kỳ N $\tilde{x}(n \pm n_0)_N$ ta sẽ được trê vòng $x(n \pm n_0)_N$:

$$x(n \pm n_0) = \tilde{x}(n \pm n_0)_N \cdot \text{rect}_N(n) \quad (4.27)$$

c) Tính đối xứng

Nếu ta có dãy chiều dài hữu hạn N là $x(n)_N$ và $\text{DFT}[x(n)_N] = X(k)_N$ thì: $\text{DFT}[x^*(n)_N] = X^*(-k)_N$

Ở đây * là dấu phức liên hợp.

d) Tích chập vòng

Đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ N có quan hệ sau:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n)(\tilde{*})_N \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$$

Trong miền k ta có:

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

Tất cả các dãy nêu trên đều có chu kỳ tuần hoàn là N. Đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N, chúng ta có thể coi chúng tương ứng với một chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ N, vì vậy ta có định nghĩa và tính chất tương tự như với các dãy tuần hoàn chu kỳ N.

Định nghĩa: Tích chập vòng của hai dãy không tuần hoàn $x_1(n)$ và $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn N là một dãy không tuần hoàn cũng có chiều dài hữu hạn N $x_3(n)$ cho bởi quan hệ sau:

$$x_3(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n-m)_N = x_1(n)_N (\tilde{*})_N x_2(n)_N \quad (4.28)$$

Khi đó trong miền k sẽ như sau:

$$X_3(k)_N = X_1(k)_N \cdot X_2(k)_N.$$

Ở đây: $X_1(k)_N = \text{DFT}[x_1(n)_N]$; $X_2(k)_N = \text{DFT}[x_2(n)_N]$

$$X_3(k)_N = \text{DFT}[x_3(n)_N]$$

Ví dụ: Cho hai dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N = 4 như sau:

$$x_1(n)_4 = \delta(n-1)$$

$$x_2(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính tích chập vòng chiều dài N = 4 của hai dãy:

Bài giải:

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 (*)_4 x_2(n)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 \cdot x_2(n-m)_4$$

$$x_3(0)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 \cdot x_2(0-m)_4 = \frac{1}{4}$$

$$x_3(1)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 \cdot x_2(1-m)_4 = 1$$

$$x_3(2)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 \cdot x_2(2-m)_4 = \frac{3}{4}$$

$$x_3(3)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 \cdot x_2(3-m)_4 = \frac{1}{2}$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Bài 1:

$\tilde{x}(n)$ là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N và ta có $\tilde{X}_1(k)_N = \text{DFT}_1[\tilde{x}(n)_N]$ là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N . Ta cũng có thể coi $\tilde{x}(n)$ như một dãy tuần hoàn có chu kỳ $2N$ và ta có $\tilde{X}_2(k)_{2N} = \text{DFT}_2[\tilde{x}(n)_{2N}]$. Vậy $\tilde{X}_2(k)_{2N}$ có chu kỳ $2N$.

Tìm $\tilde{X}_2(k)_{2N}$ theo hàm của $\tilde{X}_1(k)_N$.

Bài 2:

$\tilde{x}(n)$ là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N và ta có $\tilde{X}(k) = \text{DFT}[\tilde{x}(n)]$. Tìm $\text{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{x}(1)$.

Bài 3:

Tính DFT chiều dài $N = 16$ của các dãy sau:

$$x_1(n)_{16} = \begin{cases} 1, & \text{với } n = 0, 1, 2, 14, 15 \\ 0, & \text{với } 3 \leq n \leq 13 \end{cases}$$

$$x_2(n)_{16} = \begin{cases} 1, & \text{với } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{với } 5 \leq n \leq 15 \end{cases}$$

Hãy so sánh 2 kết quả và đưa ra nhận xét.

Bài 4:

Cho dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N . Chứng minh rằng:

$$x(-n)_N = x(N-n)_n$$

Bài 5:

Cho dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn N , DFT được tính trên N mẫu:

$$X(k)_N = \text{DFT}[x(n)_N]$$

Nếu $x(n)$ thỏa mãn quan hệ sau: $x(n) = x(N - 1 - n)$ với N chẵn. Hãy tính $X\left(\frac{N}{2}\right)_N$

Bài 6:

Cho quan hệ giữa hai dãy $X_1(n)$ và $X_2(n)$ như sau:

$$x_2(n) = x_1(n).x_1(2n); \quad X_1(n) \text{ có chiều dài hữu hạn } N.$$

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm $X_1(k)$.

Bài 7:

Tìm biến đổi Fourier rời rạc $\tilde{X}(k)_5$ của dãy tuần hoàn

$$\tilde{x}(n)_5 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & \text{với } 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{với } n = 4 \end{cases}$$

Bài 8:

Tìm biến đổi Fourier rời rạc $X(k)_3$ của dãy có chiều dài hữu hạn

$$\tilde{x}(n)_3 = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{3}\delta(n-2)$$

Bài 9:

Tính tích chập tuần hoàn của hai dãy $\tilde{x}(n)_6$ và $\tilde{h}(n)_6$ biết:

$$\tilde{x}(n)_6 = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-2)$$

$$\tilde{h}(n)_6 = \text{rect}_4(n)$$

Chương 5

TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI HỮU HẠN

5.1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong các chương trước chúng ta đã nghiên cứu các phương pháp chính được sử dụng trong xử lý số tín hiệu, đây là những phương pháp mang nặng tính lý thuyết. Trong chương này chúng ta sẽ sử dụng các công cụ chính đã được nghiên cứu ở những chương trước vào các trường hợp thực tế của kỹ thuật xử lý số tín hiệu. Nhưng để đơn giản hóa các phương pháp tổng hợp chúng ta chỉ giới hạn nghiên cứu các trường hợp của hệ thống tuyến tính bất biến.

Trước khi đi vào chi tiết nghiên cứu phương pháp tổng hợp các bộ lọc số, chúng ta hãy định nghĩa thế nào là lọc số và bộ lọc số.

- Định nghĩa bộ lọc số:

Một hệ thống dùng để làm biến dạng sự phân bố tần số thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho được gọi là bộ lọc số.

- Định nghĩa việc lọc số:

Các thao tác của xử lý dùng để làm biến dạng sự phân bố tần số của thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho nhờ một hệ thống số được gọi là sự lọc số.

5.2. TỔNG QUAN

5.2.1. Các tính chất bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR)

Các bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn được đặc trưng bởi hàm truyền đạt sau đây:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} \quad (5.1)$$

Tức là: $L[h(n)] = [0, N-1] = N$

Như vậy điều kiện ổn định luôn luôn thoả mãn theo công thức (5.2):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| < \infty \quad (5.2)$$

Từ công thức (5.1) ta thấy rằng $H(z)$ chỉ có các điểm cực tại gốc tọa độ của mặt phẳng phức, các điểm cực này luôn nằm trong đường tròn đơn vị nên hệ thống luôn ổn định.

Một thuận lợi nữa của bộ lọc FIR là do chiều dài của $h(n)$ là hữu hạn nên nếu $h(n)$ là không nhân quả thì $h(n) \neq 0$ với $n < 0$.

Khi đó ta có thể đưa về nhân quả bằng cách chuyển gốc tọa độ giá trị đầu tiên khác không của $h(n)$ mà đảm bảo $|H(e^{j\omega})|$ vẫn không thay đổi.

5.2.2. Các bước tổng hợp bộ lọc số FIR

Về nguyên tắc tổng quát để tổng hợp bộ lọc số FIR chúng ta có 4 bước:

Bước 1: Giải quyết vấn đề gần đúng để xác định các hệ số của bộ lọc thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho, cụ thể là 4 chỉ tiêu δ_1 , δ_2 , ω_s , ω_p .

Bước 2: Chọn cấu trúc lượng tử hoá các hệ số của bộ lọc theo số bit hữu hạn cho phép.

Bước 3: Lượng tử hoá các biến vào của bộ lọc, tức là chọn chiều dài của từ đối với:

- Đầu vào;
- Đầu ra;
- Các bộ nhớ trung gian.

Bước 4: Kiểm tra bằng cách mô phỏng trên máy tính xem bộ lọc cuối cùng có thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho hay không.

Trong chương này ta sẽ tập trung vào bước thứ nhất, tức là xác định $h(n)$ sao cho các chỉ tiêu kỹ thuật được thoả mãn.

5.3. CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH

5.3.1. Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha)

Giả sử $h(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc FIR xác định với các mẫu $n = 0, 1, \dots, N-1$, tức là:

$$L[h(n)] = [0, N - 1].$$

Hàm truyền đạt của nó như sau:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} = h(0) + h(1)Z^{-1} + \dots + h(N-1)Z^{-(N-1)}$$

Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega.n + j[-\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega.n]$$

hoặc là: $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})]$$

Ta thấy rằng $H(e^{j\omega})$ là tuần hoàn với chu kỳ 2π , tức là:

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi m)})$$

Nếu $h(n)$ là thực thì theo tính chất của biến đổi Fourier đối với tín hiệu rời rạc ta có:

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|; \arg[H(e^{j\omega})] = -\arg[H(e^{-j\omega})]$$

Vậy ta nói:

$$|H(e^{j\omega})| : \text{là hàm chẵn (đối xứng);}$$

$$\varphi(\omega) : \text{là hàm lẻ (phản đối xứng).}$$

Do $H(e^{j\omega})$ là tuần hoàn với chu kỳ 2π vậy chúng ta chỉ nghiên cứu $|H(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$ trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ (hoặc là $-\pi \leq \omega \leq \pi$) và trong trường hợp đặc biệt nếu $h(n)$ là thực thì $|H(e^{j\omega})|$ là hàm chẵn và $\varphi(\omega)$ là hàm lẻ trong khoảng một chu kỳ, vì vậy ta chỉ cần nghiên cứu $H(e^{j\omega})$ trong khoảng $0 \leq \omega \leq \pi$.

5.3.2. Bộ lọc pha FIR tuyến tính

Chúng ta nghiên cứu hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định, bây giờ chúng ta có thêm một điều kiện ràng buộc nữa về pha, đó là điều kiện pha tuyến tính. Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ sẽ được biểu diễn như sau:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}.$$

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Ta biết rằng thời gian lan truyền tín hiệu τ được tính như sau:

$$\tau = \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (5.3)$$

Với $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ ta có: $\tau = -\alpha$

Vậy α là hằng số biểu diễn thời gian lan truyền tín hiệu.

Chúng ta nghiên cứu hai trường hợp:

1. $\beta = 0$; $\theta(\omega) = -\alpha\omega$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

2. $\beta \neq 0$; $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

* Trường hợp 1:

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= -\alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \\ H(e^{j\omega}) &= A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\alpha\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\cos \omega \cdot n - j \sin \omega \cdot n] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy:} \quad A(e^{j\omega}) \cos \alpha \cdot \omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \cos \omega \cdot n$$

$$A(e^{j\omega}) \sin \alpha \cdot \omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \sin \omega \cdot n$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \omega = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega \cdot n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega \cdot n}$$

Vì $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$, ta có:

$$\operatorname{tg} \alpha \omega = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega \cdot n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega \cdot n} \quad (5.4)$$

Đến đây chúng ta có thêm hai trường hợp: $\alpha = 0$ và $\alpha \neq 0$.

– Nếu $\alpha = 0$:

$$\operatorname{tg} 0 = 0 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega \cdot n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega \cdot n}$$

$\Rightarrow h(n) = 0$ với $n \neq 0$ và giá trị $h(0) \neq 0$ chọn tùy ý.

$$h(n) = \begin{cases} \neq 0 & , \quad n = 0 \\ = 0 & , \quad n \neq 0 \end{cases}$$

– Nếu $\alpha \neq 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha \omega = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega . n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega . n} = \frac{\sin \alpha \omega}{\cos \alpha \omega}$$

$$\sin \alpha \omega . \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega . n = \cos \alpha \omega . \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega . n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\cos \omega n . \sin \alpha \omega - \sin \omega n . \cos \alpha \omega] = 0$$

Vậy ta có:
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) . \sin [(\alpha - n) . \omega] = 0 \quad (5.5)$$

Phương trình (5.5) cho ta nghiệm:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (5.6)$$

$$h(n) = h(N-1-n)$$

Ví dụ:

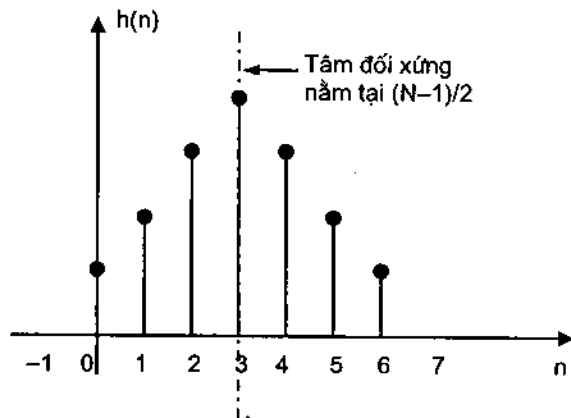
Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\alpha \omega$ có $N = 7$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 4$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

Bài giải:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 3$$

$$h(n) = h(6-n)$$

Vậy: $h(0) = h(6)$, $h(1) = h(5)$, $h(2) = h(4)$ và $h(3)$. Đồ thị $h(n)$ được cho trên hình 5.1.



Hình 5.1

Ví dụ:

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ có $N = 6$, $h(0) = 1$,
 $h(1) = 2$, $h(2) = 3$.

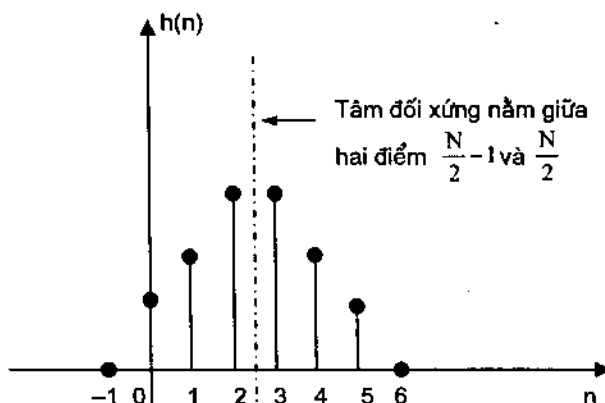
Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

Bài giải:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 2,5; \quad h(n) = h(5-n)$$

Vậy: $h(0) = h(5)$, $h(1) = h(4)$, $h(2) = h(3)$.

Đồ thị $h(n)$ được cho trên hình 5.2.



Hình 5.2

Nhận xét:

+ Đối với mỗi một giá trị của N , chỉ có một giá trị α đảm bảo pha tuyến tính.

+ Đối với giá trị α này, đáp ứng xung $h(n)$ là đối xứng.

+ Nếu N lẻ thì α là một số nguyên và tâm đối xứng của đáp ứng xung trùng với mẫu $\frac{N-1}{2}$.

+ Nếu N chẵn thì α là một số không nguyên và tâm đối xứng của đáp ứng xung nằm giữa hai mẫu $\frac{N}{2} - 1$ và $\frac{N}{2}$.

Đặc điểm quan trọng nhất đối với bộ lọc FIR pha tuyến tính này là tính đối xứng của đáp ứng xung $h(n)$ mà sau này có rất nhiều ứng dụng quan trọng.

* Trường hợp 2:

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega}) \cdot e^{\beta - j\alpha\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

Chứng minh tương tự của trường hợp 1 ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \sin[\beta + (n - \alpha)\omega] = 0 \quad (5.7)$$

và nghiệm duy nhất của (5.7) là:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}; \quad \beta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

Ví dụ: Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ có $N = 7$, $h(0) = 1, h(1) = 2, h(2) = 3$

Tìm α và vẽ $h(n)$.

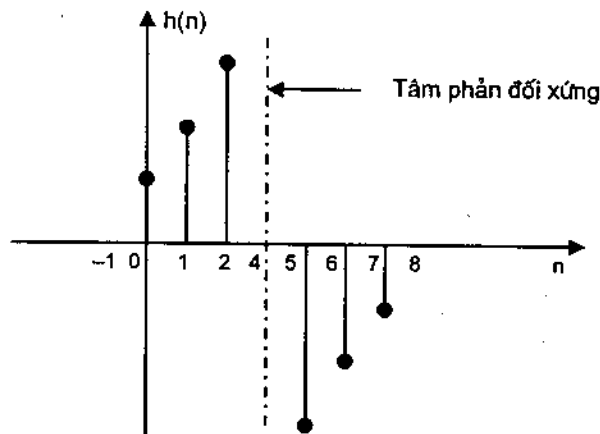
Bài giải:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 3$$

$$h(n) = -h(6-n)$$

Vậy: $h(0) = -h(6), h(1) = -h(5), h(2) = -h(4)$ và $h(3) = -h(3) = 0$.

Đồ thị $h(n)$ được cho trên hình 5.3.



Hình 5.3

Ví dụ:

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ có $N = 6$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$.

Tìm α và vẽ $h(n)$.

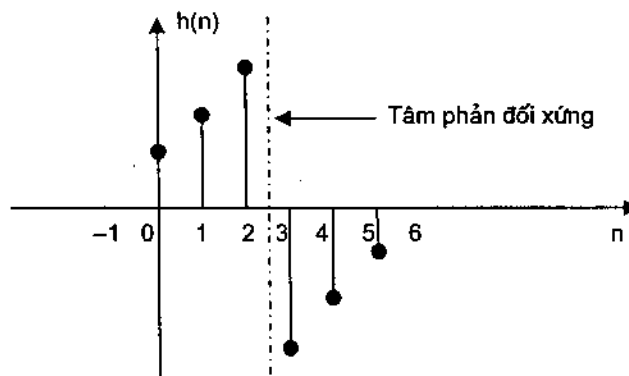
Bài giải:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 2,5$$

$$h(n) = -h(5-n)$$

Vậy: $h(0) = -h(5)$, $h(1) = -h(4)$, $h(2) = -h(3)$.

Đồ thị của $h(n)$ như hình 5.4



Hình 5.4

Nhận xét:

+ Đối với mỗi một giá trị của N , chỉ có một giá trị α đảm bảo pha tuyến tính.

+ Đối với giá trị α này, đáp ứng xung $h(n)$ là phản đối xứng.

+ Nếu N lẻ thì α là một số nguyên và tâm phản đối xứng của đáp ứng xung trùng với mẫu $\frac{N-1}{2}$ và $h(\frac{N-1}{2}) = 0$.

+ Nếu N chẵn thì α là một số không nguyên và tâm phản đối xứng của đáp ứng xung nằm giữa hai mẫu $\frac{N}{2}-1$ và $\frac{N}{2}$.

Đặc điểm đối với bộ lọc FIR pha tuyến tính này là tính phản đối xứng của đáp ứng xung $h(n)$.

Như vậy, đối với bộ lọc FIR pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ ta có thể chia thành 4 loại:

- + Loại 1: $h(n)$ đối xứng, N lẻ;
- + Loại 2: $h(n)$ đối xứng, N chẵn;
- + Loại 3: $h(n)$ phản đối xứng, N lẻ;
- + Loại 4: $h(n)$ phản đối xứng, N chẵn.

5.4. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA CÁC BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH

5.4.1. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N lẻ (bộ lọc FIR loại 1)

Chúng ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})e^{-j\omega \cdot \frac{N-1}{2}}$$

Áp dụng tính chất đối xứng của $h(n)$ chúng ta chia tổng này thành 3 phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right).e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số thành phần thứ 3: $n = N - 1 - m$

Ta có:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right).e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{m=\frac{N-1}{2}+1}^0 h(N-1-m).e^{-j\omega(N-1-m)} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right).e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n).e^{-j\omega(N-1-n)} \end{aligned}$$

Sau đó áp dụng $h(n) = h(N-1-n)$ và biến đổi tiếp thu được kết quả:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos \omega \cdot n \right] e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (5.8)$$

Ở đây: $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2} - 0\right)$; $a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$

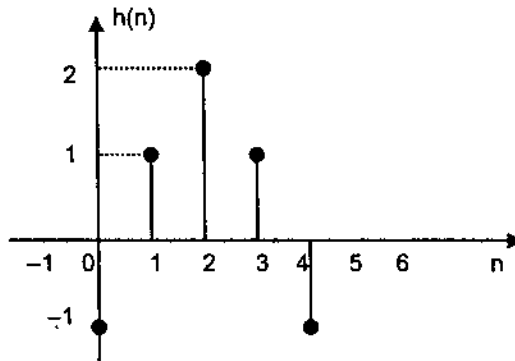
So sánh với biểu thức: $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}).e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$

$$\text{Ta có:} \quad A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos \omega \cdot n; \quad (5.9)$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

Ví dụ: Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính như hình 5.5.

Hãy tìm $a(n)$ và $|H(e^{j\omega})|$



Hình 5.5

Bài giải:

$$N = 5, N - 1 = 4$$

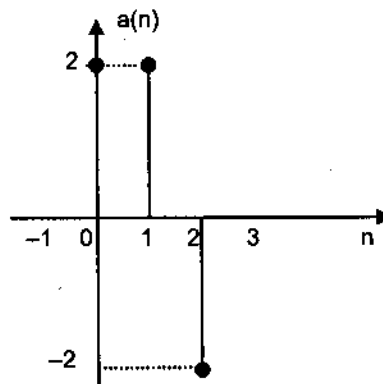
Vậy:

$$a(0) = h(2 - 0) = h(2) = 2$$

$$a(1) = 2h(2 - 1) = 2h(1) = 2$$

$$a(2) = 2h(2 - 2) = 2h(0) = -2$$

Đồ thị của $a(n)$ hình 5.6:



Hình 5.6

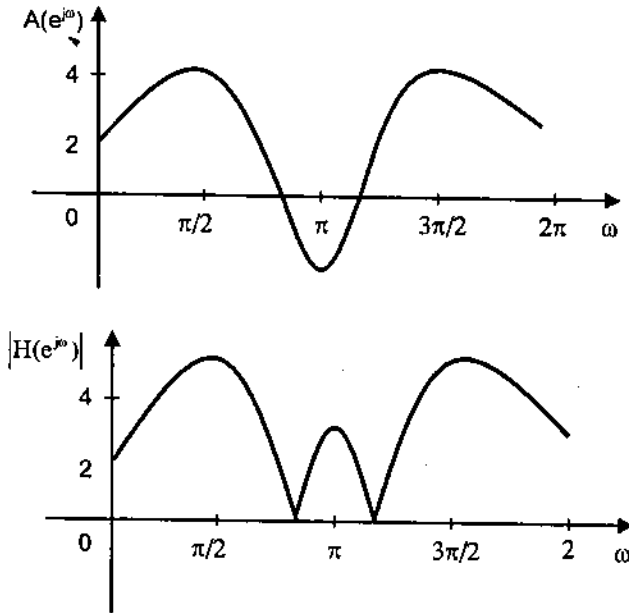
Ta có:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^2 a(n) \cos \omega n$$

$$\begin{aligned}
 &= a(n) \cos \omega.n = a(0) \cos 0 + a(1) \cos \omega + a(2) \cos 2\omega \\
 &= 2 + 2 \cos \omega - 2 \cos 2\omega
 \end{aligned}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})| = |2 + 2 \cos \omega - 2 \cos 2\omega|$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ được biểu diễn hình 5.7.



Hình 5.7

5.4.2. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N chẵn (bộ lọc FIR loại 2)

Ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})e^{j\alpha.\omega}$$

Do N chẵn nên chúng ta chia tổng này thành 2 phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n).e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số thành phần thứ 2 ta có: $n = N - 1 - m$

Ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n).e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} h(N-1-m).e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Sau đó áp dụng $h(n) = h(N-1-n)$ và biến đổi tiếp ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos[\omega.(n - \frac{1}{2})] \right] e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (5.10)$$

Ở đây:

$$b(n) = 2h(\frac{N}{2} - n) \quad , \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$$

So sánh với biểu thức:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}).e^{-j\alpha\omega}$$

Ta có:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos[\omega.(n - \frac{1}{2})];$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (5.11)$$

Chú ý rằng với $\omega = \pi$ thì:

$$\cos[\omega(n - \frac{1}{2})] = \cos[\pi(n - \frac{1}{2})] = \cos[\frac{\pi}{2}(2n-1)];$$

mà $2n-1$ lẻ với mọi n , vậy:

$$\cos[\frac{\pi}{2}(2n-1)] = 0 \text{ với mọi } n$$

Vậy tại $\omega = \pi$ thì luôn có $A(e^{j\omega}) = 0$, có nghĩa là ta không thể sử dụng bộ lọc FIR pha tuyến tính loại 2 để tổng hợp các bộ lọc yêu cầu có đáp ứng tần số khác 0 tại $\omega = \pi$ (ví dụ như lọc thông cao).

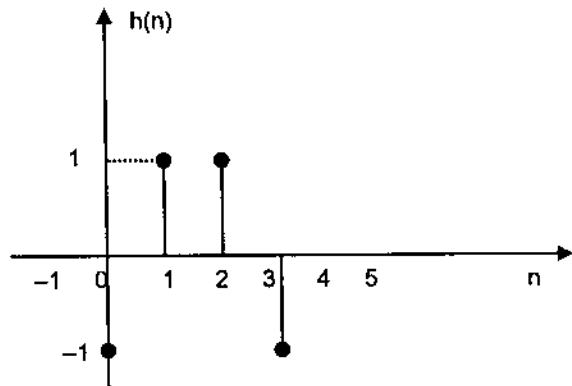
Ví dụ:

Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính hình 5.8.

Tìm $b(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$

Bài giải:

$$N = 4, N/2 = 2$$



Hình 5.8

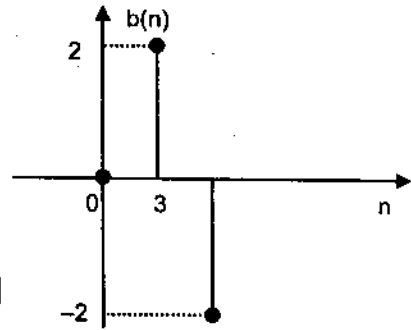
Vậy: $b(1) = 2h(2-1) = 2h(1) = 2$
 $b(2) = 2h(2-2) = 2h(0) = -2$

Đồ thị của $b(n)$ như hình 5.9.

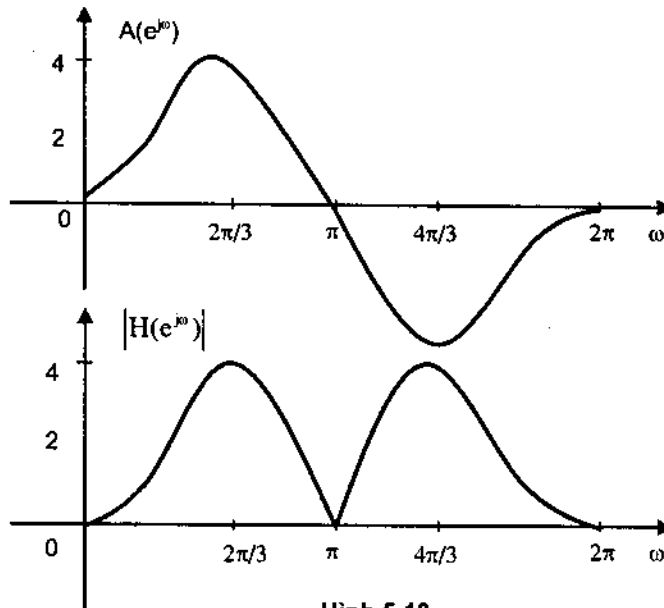
$$\begin{aligned} A(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^2 a(n) \cos[\omega.(n - \frac{1}{2})] \\ &= a(1) \cos[\omega.(1 - \frac{1}{2})] + b(2) \cos[\omega.(2 - \frac{1}{2})] \\ &= 2 \cos \frac{\omega}{2} - 2 \cos 3 \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})| = \left| 2 \cos \frac{\omega}{2} - 2 \cos 3 \frac{\omega}{2} \right|$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ được biểu diễn trên hình 5.10.



Hình 5.9



Hình 5.10

5.4.3. Trường hợp đáp ứng xung phản đối xứng, N lẻ (bộ lọc FIR loại 3)

Ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})e^{j\omega \cdot \frac{N-1}{2}}$$

Do N lẻ, chúng ta chia tổng này thành 3 phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + h(\frac{N-1}{2}).e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n}$$

Trong trường hợp này $h(\frac{N-1}{2}) = 0$, vậy:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số thành phần thứ 3: $n = N - 1 - m$

Ta có:
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-m).e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Áp dụng $h(n) = -h(N-1-n)$ và biến đổi tiếp ta thu được kết quả:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega.n \right] e^{-j(\frac{\pi}{2} - \omega \frac{N-1}{2})} \quad (5.12)$$

Ở đây:
$$c(n) = 2h(\frac{N-1}{2} - n)$$

So sánh với biểu thức ta có:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}).e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

Ta có:
$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega.n$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \quad (5.13)$$

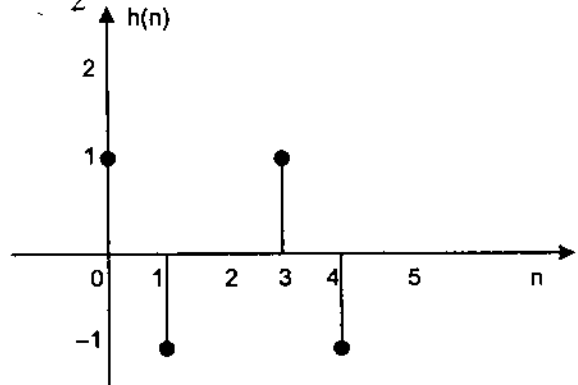
Ví dụ:

Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính như hình 5.11. Tìm $c(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$.

Bài giải:

$$N = 5, (N-1)/2 = \alpha = 2;$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$



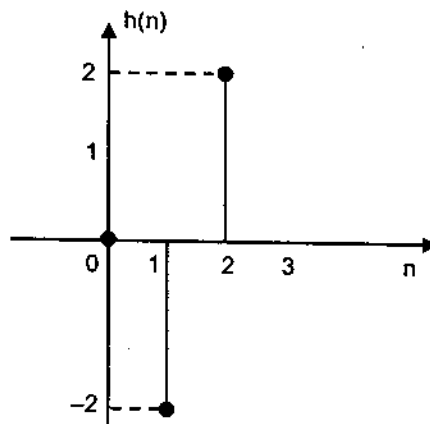
Hình 5.11

Vậy:

$$c(1) = 2h(2 - 1) = 2h(1) = -2$$

$$c(2) = 2h(2 - 2) = 2h(0) = 2$$

Đồ thị của $c(n)$ như hình 5.12.

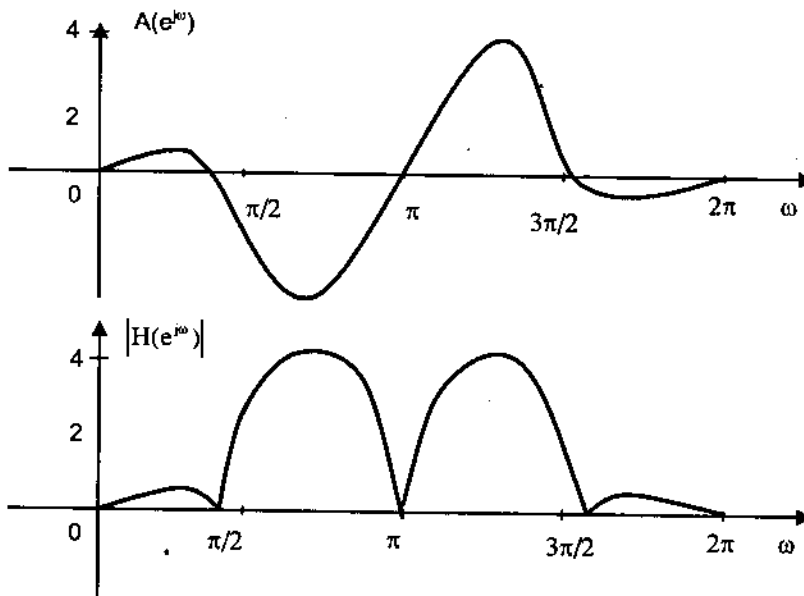


Hình 5.12

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^2 c(n) \sin \omega \cdot n = c(1) \sin \omega + c(2) \sin 2\omega = -2 \sin \omega + 2 \sin 2\omega$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})| = |-2 \sin \omega + 2 \sin 2\omega|$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ được biểu diễn hình 5.13



Hình 5.13

5.4.4. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N chẵn (bộ lọc FIR loại 4)

Chúng ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})e^{j\alpha.\omega}$$

Do N chẵn chúng ta chia tổng này thành hai phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n).e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số thành phần thứ 2: $n = N - 1 - m$

Ta có:
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n).e^{-j\omega n} + \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^0 h(N-1-m).e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Áp dụng tính chất phản đối xứng $h(n) = -h(N-1-n)$ và biến đổi tiếp thu được kết quả:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\omega.\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \right] e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \omega \frac{N-1}{2}\right)} \quad (5.14)$$

Ở đây:

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$$

So sánh với biểu thức ta có:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}).e^{-j\alpha\omega}.$$

Ta có:
$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\omega.\left(n - \frac{1}{2}\right)\right];$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}; \beta = \frac{\pi}{2} \quad (5.15)$$

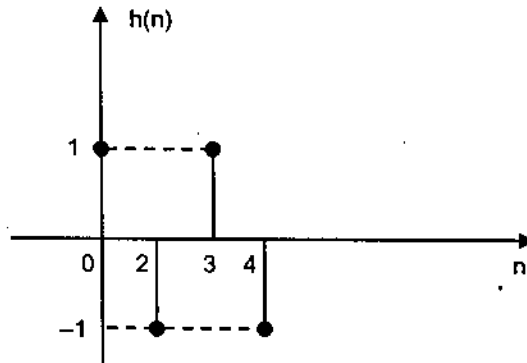
Chú ý với $\omega = 0$ thì:

$$\sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[0\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[\frac{0}{2}(2n-1)\right] = 0 \quad \forall n;$$

Vậy tại $\omega = 0$ thì ta luôn có $A(e^{j\omega}) = 0$, như vậy ta không thể sử dụng bộ lọc FIR loại này để tổng hợp các bộ lọc có yêu cầu đáp ứng tần số khác 0 tại tần số $\omega = 0$ (ví dụ như bộ lọc thông thấp).

Ví dụ:

Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính hình 5.14.



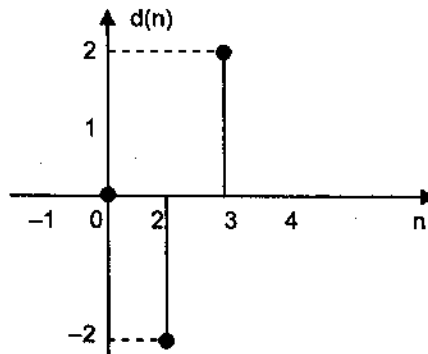
Hình 5.14

Tìm $d(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$

Bài giải: $N = 4$, $(N - 1)/2 = \alpha = 1,5$; $\beta = \frac{\pi}{2}$

Vậy: $d(1) = 2h(2 - 1) = 2h(1) = -2$
 $d(2) = 2h(2 - 2) = 2h(0) = 2$

Đồ thị của $d(n)$ biểu diễn trên hình 5.15.

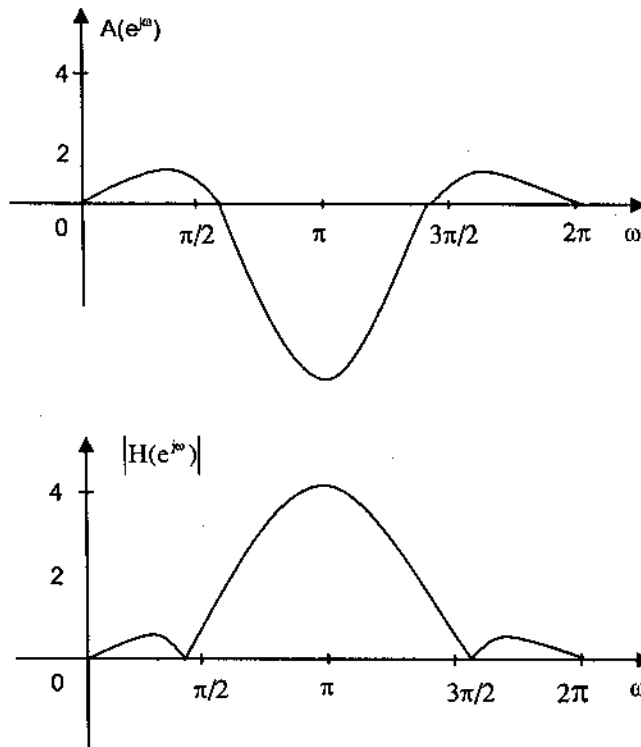


Hình 5.15

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^2 d(n) \sin[\omega.(n - \frac{1}{2})] = d(1) \sin \frac{\omega}{2} + d(2) \sin \frac{3\omega}{2} = -2 \sin \frac{\omega}{2} + 2 \sin \frac{3\omega}{2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})| = \left| -2 \sin \frac{\omega}{2} + 2 \sin \frac{3\omega}{2} \right|$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ được biểu diễn trên hình 5.16:



Hình 5.16

5.5. PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ FIR

5.5.1. Tổng quan

Việc nghiên cứu các phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR thực chất là nghiên cứu các phương pháp tính toán các hệ số của bộ lọc. Các hệ số này là những số thực khi cài đặt trên hệ thống nó sẽ được lượng tử hoá và mã hoá ra mã nhị phân. Trong phần này chúng ta chỉ nghiên cứu phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính, bởi vì pha tuyến tính có rất nhiều ưu điểm và được sử dụng rộng rãi. Các hệ số $h(n)$ của bộ lọc phải được tính toán sao cho bộ lọc thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã đề ra. Các chỉ tiêu kỹ thuật này thông thường được cho trong miền tần số, tức là theo đáp ứng tần số. Có nhiều phương pháp được sử dụng để tổng hợp bộ lọc số FIR như phương pháp cửa sổ, phương pháp lấy mẫu tần số,... Sau đây chúng ta sẽ đi sâu vào nghiên cứu phương pháp cửa sổ.

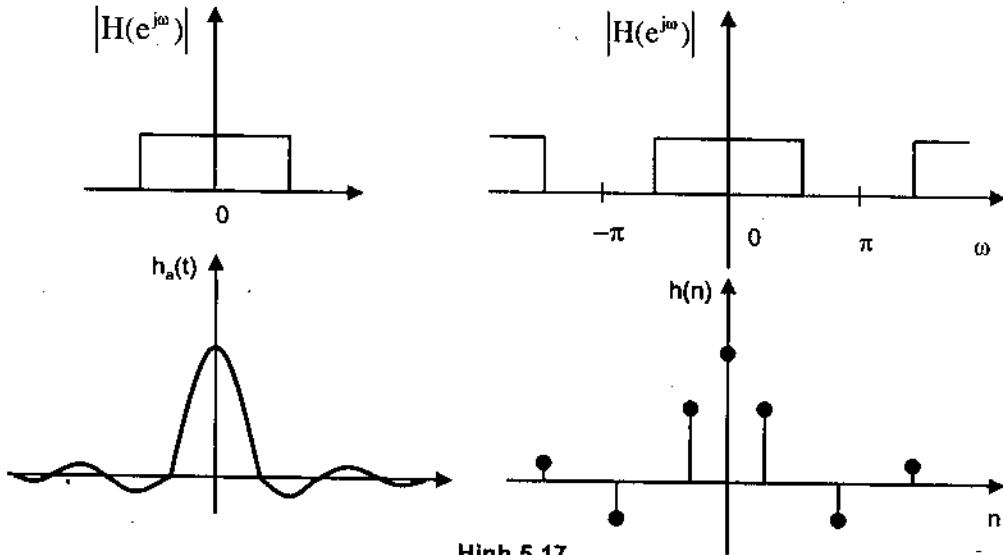
5.5.2. Phương pháp cửa sổ

Chúng ta biết rằng đáp ứng tần số của một bộ lọc số $H(e^{j\omega})$ là một

hàm tuần hoàn chu kỳ 2π , trong khi đó một bộ lọc tương tự được đặc trưng trong miền tần số tương tự ω_a bằng đáp ứng tần số của nó $H_a(\omega_a)$. Để thực hiện được phép lọc bằng con đường số, đáp ứng tần số $H_a(\omega_a)$ này phải được coi như là tuần hoàn chu kỳ 2π như sau:

$$H_a(\omega) \rightarrow H(e^{j\omega}) \text{ và } h_a(t) \rightarrow h(n)$$

Hình 5.17. so sánh hai trường hợp tương tự và số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha không.



Hình 5.17

Nhận xét:

- Các giá trị của $h(n)$ là các hệ số của khai triển Fourier của hàm tuần hoàn có chu kỳ 2π , vì vậy phương pháp của số còn gọi là phương pháp tổng hợp bộ lọc FIR nhờ khai triển Fourier.

- $h(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng, vì vậy $h(n)$ có chiều dài vô hạn nên không thực hiện được.

- $h(n)$ không nhân quả, như vậy sẽ không thực hiện được về vật lý.

- Để cho đáp ứng xung $h(n)$ trở thành đáp ứng xung của bộ lọc FIR, chúng ta đưa $h(n)$ trở thành nhân quả và phải hạn chế chiều dài của nó.

- Để hạn chế chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ chúng ta sử dụng các hàm cửa sổ. Cửa sổ được ký hiệu như sau (trong miền n):

$$w(n)_N \begin{cases} \neq 0 & , & 0 \leq n \leq N-1 \\ = 0 & , & n \notin [0, N-1] \end{cases} \quad (5.16)$$

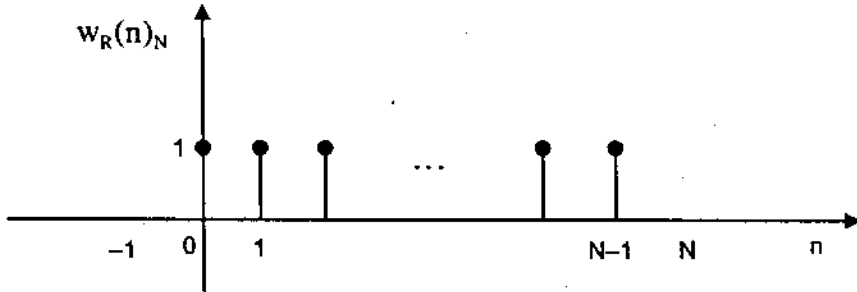
Sau đây ta sẽ xem xét một số dạng của sổ thông dụng:

a) Cửa sổ chữ nhật

Định nghĩa của sổ chữ nhật như sau:

$$\text{Trong miền } n: w_R(n)_N \begin{cases} = 1 & , \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ = 0 & , \quad n \notin [0, N-1] \end{cases} \quad (5.17)$$

Đồ thị của cửa sổ chữ nhật như hình 5.18



Hình 5.18

Như vậy ta thấy rằng cửa sổ chữ nhật chính là dãy chữ nhật $\text{rect}_N(n)$, cửa sổ này sẽ dùng để hạn chế chiều dài của $h(n)$ lý tưởng có pha tuyến tính. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= h(n) \cdot w_R(n)_N \\ \text{Tức là: } h_d(n) &= \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \notin [0, N-1] \end{cases} \end{aligned} \quad (5.18)$$

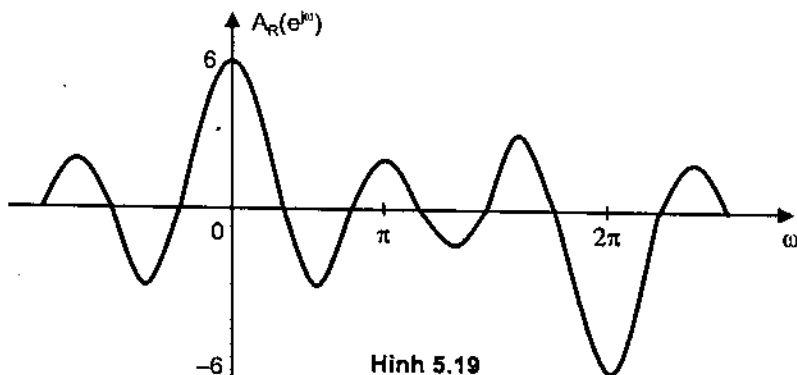
Trong miền tần số:

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \text{FT}[w_R(n)_N] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)_N \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin \frac{\omega \cdot N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } A_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{\omega \cdot N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}; \quad \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega = -\alpha \cdot \omega \quad (5.19)$$

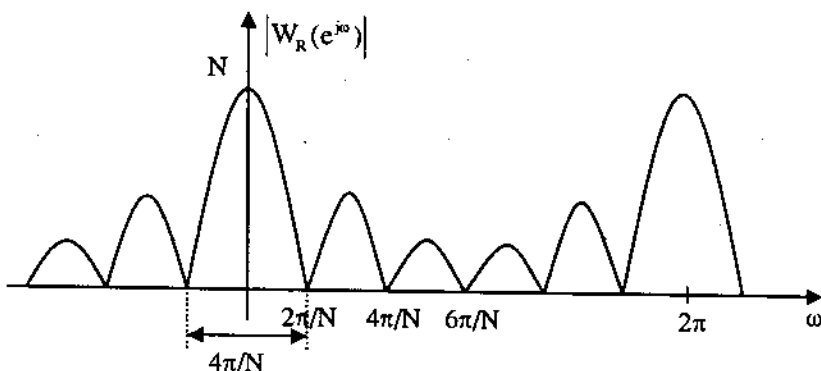
$$\text{và } W_R(e^{j\omega}) = A_R(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

$A_R(e^{j\omega})$ được biểu diễn như hình 5.19.



Hình 5.19

$|W_R(e^{j\omega})|$ được biểu diễn như hình 5.20.



Hình 5.20

Nhận xét:

+ $W_R(e^{j\omega})$ gọi là cửa sổ phổ.

+ Bề rộng của đỉnh trung tâm, ký hiệu là $\Delta\omega_R$, đối với cửa sổ chữ

nhật thì $\Delta\omega_R = \frac{4\pi}{N}$.

b) Cửa sổ tam giác (hay cửa sổ BARTLERT)

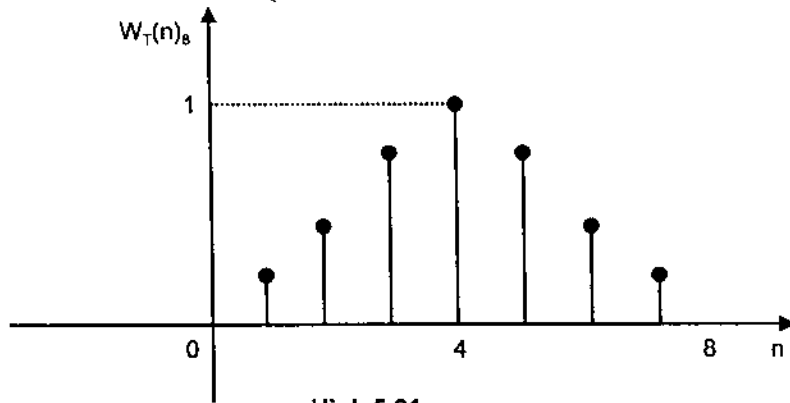
* Định nghĩa cửa sổ tam giác:

Trong miền n cửa sổ tam giác được định nghĩa như sau:

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \notin [0, N-1] \end{cases} \quad (5.20)$$

Đồ thị của cửa sổ tam giác với $N = 9$ như hình 5.21.

$$w_T(n)_9 = \begin{cases} \frac{n}{4} & , 0 \leq n \leq 4 \\ 2 - \frac{n}{4} & , 4 \leq n \leq 8 \\ 0 & , n \notin [0, 8] \end{cases}$$



Hình 5.21

Trong miền tần số:

$$W_T(n)_N = \frac{2}{N-1} \cdot \text{rect}_{\frac{N-1}{2}}(n) * \text{rect}_{\frac{N-1}{2}}(n-1)$$

$$= \frac{2}{N-1} W_R(n)_{\frac{N-1}{2}} * W_R(n-1)_{\frac{N-1}{2}}$$

$$W_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1} \cdot W_R(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}} \cdot e^{-j\omega} \cdot W_T(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}}$$

$$W_T(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}} = e^{-j\omega \frac{\frac{N-1}{2}-1}{2}} \frac{\sin(\omega \frac{\frac{N-1}{2}-1}{2})}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

mà:

$$W_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1} \cdot e^{-j\omega \frac{\frac{N-1}{2}-1}{2}} \cdot \left[\frac{\sin(\omega \frac{\frac{N-1}{2}-1}{2})}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2 \quad (5.21)$$

$$W_T(e^{j\omega})_N = A_T(e^{j\omega})_N \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

Vậy:

$$A_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin(\frac{\omega(N-1)}{2})}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2 \quad (5.22)$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2} \cdot \omega$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Bài 1:

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$ có đặc điểm gì?

Bài 2:

Hãy chứng minh biểu thức sau:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos \omega n \right] e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

là đáp ứng tần số của trường hợp FIR loại 1.

Bài 3:

Hãy chứng minh biểu thức sau:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

là đáp ứng tần số của trường hợp FIR loại 2.

Bài 4:

Hãy chứng minh biểu thức sau:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n \right] e^{-j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \omega)}$$

là đáp ứng tần số của trường hợp FIR loại 3.

Bài 5:

Hãy chứng minh biểu thức sau:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N+1}{2}-1} d(n) \sin \omega(n - \frac{1}{2}) \right] e^{-j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)}$$

là đáp ứng tần số của trường hợp FIR loại 4.

Bài 6:

Cho $h(n)$ đối xứng $N = 7$

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1, 5, 1, 0, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$h(n) = \vec{0}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài 7:

Cho $h(n)$ đối xứng $N = 6$

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 3, 3, 1, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$h(n) = \vec{0}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài 8:

Cho $h(n)$ phản đối xứng $N = 7$

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, -1, -2, 0, 2, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$$h(n) = \vec{0}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài 9:

Cho $h(n)$ phản đối xứng $N = 6$

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, -1, -2, 2, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$$h(n) = \vec{0}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài 10:

Hãy chứng minh rằng:

$$1 + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} 2\cos(\omega n) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

Chương 6

TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI VÔ HẠN

6.1. MỞ ĐẦU

Chương 5 đã trình bày khái quát về lọc số; bộ lọc số; các bước tổng hợp bộ lọc số FIR; các đặc trưng và đáp ứng của FIR pha tuyến tính; một số phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR. Trong chương này chúng ta tìm hiểu về bộ lọc số đáp ứng xung chiều dài vô hạn (bộ lọc số IIR) và các phương pháp tổng hợp bộ lọc số IIR.

Tổng hợp bộ lọc số IIR là tìm ra các hệ số của bộ lọc số IIR sao cho thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc ở miền tần số liên tục là δ_1 , δ_2 , ω_s , ω_p . Các phương pháp tổng hợp bộ lọc số IIR được chia làm 2 loại:

- Phương pháp chuyển từ thiết kế bộ lọc tương tự sang bộ lọc số, có nghĩa là tổng hợp bộ lọc tương tự trước sau đó chuyển đổi tương đương từ tương tự sang số để thu được bộ lọc số.

- Phương pháp sử dụng máy tính, tìm ra các thủ tục tối ưu hóa để thay thế bộ lọc bằng một bộ lọc khác có các chỉ tiêu xấp xỉ với sai số tối thiểu.

Phương pháp thứ nhất ưu điểm là đơn giản, độ chính xác chấp nhận được nên nó được sử dụng rất rộng rãi, do vậy trong chương này ta chỉ tập trung vào phương pháp này.

6.2. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN TỪ BỘ LỌC TƯƠNG TỰ SANG BỘ LỌC SỐ

6.2.1. Mở đầu

Việc thiết kế bộ lọc số IIR theo phương pháp chuyển từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số gồm có 2 bước:

- *Bước 1*: thiết kế bộ lọc tương tự, tức là căn cứ vào các chỉ tiêu kỹ thuật ở miền tần số liên tục là δ_1 , δ_2 , ω_s và ω_p để tìm ra hàm truyền đạt

của bộ lọc tương tự $H(s)$. Các bộ lọc tương tự đã được nghiên cứu kỹ trong kỹ thuật tương tự, trong phần 6.3 sẽ trình bày một cách vắn tắt việc thiết kế một số bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản.

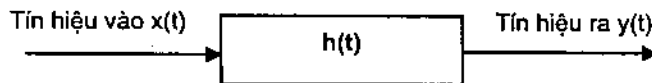
– *Bước 2:* chuyển từ hàm truyền đạt $H(s)$ của bộ lọc tương tự thành hàm truyền đạt $H(Z)$ của bộ lọc số.

Có 4 phương pháp chuyển đổi từ hệ thống tương tự sang hệ thống số sẽ được đề cập là:

- Phương pháp bất biến xung;
- Phương pháp biến đổi song tuyến;
- Phương pháp tương đương vi phân;
- Phương pháp biến đổi z tương ứng.

6.2.2. Nhắc lại về hệ thống tương tự

Hệ thống tương tự biểu diễn tổng quát như sau:



Hình 6.1. Hệ thống tương tự

Trong đó: – $x(t)$ là tín hiệu vào, còn được gọi là kích thích;

– $y(t)$ là tín hiệu ra, còn được gọi là đáp ứng,

$$y(t) = h(t) * x(t); \quad (6.1)$$

– $h(t)$ là đáp ứng xung của hệ thống, chính là đáp ứng của hệ thống khi có kích thích là xung nhảy đơn vị $u(t)$: $h(t) = y(t)|_{x(t)=u(t)}$

Trong miền thời gian hệ thống tương tự được mô tả bằng phương trình vi phân tổng quát:

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j} \quad (6.2)$$

Trong đó a_i, b_j là các hệ số thực hoặc phức.

Việc giải phương trình vi phân này thường phức tạp nên người ta thường sử dụng phép biến đổi Laplace để chuyển từ phương trình vi phân thành phương trình đại số. Biến đổi Laplace 2 vế của (6.1) ta thu được:

$$\sum_{i=0}^N a_i \cdot s^i \cdot Y(s) = \sum_{j=0}^M b_j \cdot s^j \cdot X(s)$$

$$\text{Hay} \quad Y(s) \cdot \sum_{i=0}^N a_i \cdot s^i = X(s) \cdot \sum_{j=0}^M b_j \cdot s^j \quad (6.3)$$

Trong đó:

- s là toán tử Laplace, $s = \beta + j\omega$;
- $X(s)$ là ảnh Laplace của $x(t)$, $X(s) = \text{LT} [x(t)]$;
- $Y(s)$ là ảnh Laplace của $y(t)$, $Y(s) = \text{LT} [y(t)]$;

Từ (6.3) ta có:

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j \cdot s^j}{\sum_{i=0}^N a_i \cdot s^i} \quad (6.4)$$

$H(s)$ được gọi là hàm truyền đạt của hệ thống trong miền s .

Sau khi rút gọn, các nghiệm của đa thức mẫu số của $H(s)$ được gọi là các điểm cực của hệ thống, các nghiệm của đa thức tử số của $H(s)$ được gọi là các điểm không của hệ thống.

6.2.3. Phương pháp bất biến xung

Cơ sở của phương pháp này là lấy mẫu đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc tương tự thành $h(nT_s)$ rồi chuẩn hoá bởi chu kỳ lấy mẫu T_s để thu được $h(n)$. Như vậy hình dạng của $h(n)$ và $h(t)$ là như nhau, chỉ khác ở chỗ $h(t)$ là liên tục còn $h(n)$ là rời rạc.

Giả sử hàm truyền đạt $H(s)$ của bộ lọc tương tự được biểu diễn ở dạng:

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}} \quad (6.5)$$

Trong đó:

- s_{pk} là các điểm cực đơn của $H(s)$;
- Các hệ số A_k được xác định theo công thức:

$$A_k = (s - s_{pk}) \cdot H(s) \big|_{s=s_{pk}} \quad (6.6)$$

Người ta chứng minh được công thức xác định hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng là:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk} \cdot T_s} \cdot z^{-1}} \quad (6.7)$$

Trong đó T_s là tần số lấy mẫu, A_k là các hệ số xác định theo (6.6) và s_{pk} là các cực đơn của $H(s)$.

Ví dụ: Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt:

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

Hãy xác định hàm truyền đạt của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp bất biến xung.

Bài giải:

$H(s)$ có 2 điểm cực là $s_{p1} = -1$ và $s_{p2} = -3$. Ta phân tích $H(s)$ về dạng (6.5).

$$H(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+3)}$$

Áp dụng công thức (6.6) ta có:

$$A_1 = (s+1) \cdot \frac{2}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$A_2 = (s+3) \cdot \frac{2}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-3} = -1$$

Áp dụng công thức (6.7) ta có:

$$H(z) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk} T_s} s^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-T_s} s^{-1}} + \frac{-1}{1 - e^{-3T_s} s^{-1}}$$

Thu gọn ta được:

$$H(z) = \frac{(e^{-T_s} - e^{-3T_s}) \cdot s^{-1}}{1 - (e^{-T_s} + e^{-4T_s}) \cdot s^{-1} + e^{-4T_s} \cdot s^{-2}}$$

6.2.4. Phương pháp biến đổi song tuyến

Phương pháp biến đổi song tuyến cho phép ta thu được hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số từ hàm truyền đạt $H(s)$ của bộ lọc tương tự bằng cách thay:

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6.8)$$

Tuy nhiên khi áp dụng phương pháp này cần lưu ý đến quan hệ phi tuyến giữa tần số trên mặt phẳng s và tần số trên mặt phẳng Z :

$$\omega_a = \frac{2}{T_s} \cdot \text{tg} \frac{\omega}{2} \quad (6.9)$$

Trong đó ω_s là tần số tương ứng trên mặt phẳng s (áp dụng cho bộ lọc tương tự), ω là tần số trên mặt phẳng Z (áp dụng cho bộ lọc số).

Vì vậy khi áp dụng phương pháp biến đổi song tuyến để thiết kế bộ lọc số IIR ta cần phải thực hiện 3 bước sau:

– Chuyển đổi các chỉ tiêu tần số ω_s và ω_p sang giá trị mới ω_{as} và ω_{ap} theo công thức (9);

– Tổng hợp bộ lọc tương tự (tức là tìm $H(s)$) theo các chỉ tiêu δ_1 , δ_2 , ω_{as} và ω_{ap} ;

– Xác định hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng bằng cách áp dụng công thức (6.8).

Ví dụ: Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt:

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

Hãy xác định hàm truyền đạt của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài giải:

Áp dụng công thức (6.8) ta có:

$$H(z) = \frac{2}{\left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1\right) \left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 3\right)}$$

Thu gọn ta được:

$$H(z) = \frac{T_s + T_s \cdot z^{-1}}{(4 + 8T_s + 3T_s^2) + (6T_s^2 - 8) \cdot z^{-1} + (3T_s^2 - 8T_s + 4) \cdot z^{-2}}$$

6.2.5. Phương pháp tương đương vi phân

Bằng cách so sánh định nghĩa vi phân và biến đổi Laplace trong xử lý tín hiệu tương tự với định nghĩa sai phân và biến đổi Z trong xử lý số tín hiệu người ta nhận thấy rằng hàm truyền đạt của một bộ lọc số IIR $H(z)$ hoàn toàn có thể nhận được trực tiếp từ hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $H(s)$ bằng cách đổi biến số theo công thức:

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T_s} \quad (6.10)$$

Phương pháp này được gọi là phương pháp tương đương vi phân.

Ví dụ: Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt:

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

Hãy xác định hàm truyền đạt của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bài giải:

Áp dụng biểu thức (6.10) ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{2}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T_s} + 1\right)\left(\frac{1-z^{-1}}{T_s} + 3\right)}$$

Biến đổi ta được:

$$H(z) = \frac{2T_s}{(1+T_s)(1+3T_s) - (4T_s+2).z^{-1} + z^{-2}}$$

6.2.6. Phương pháp biến đổi Z tương ứng

Phương pháp này tương tự phương pháp bất biến xung, tức là chuyển đổi trực tiếp các điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt $H(s)$ của bộ lọc tương tự trên mặt phẳng s thành các điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số trên mặt phẳng z .

Giả sử hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự có dạng:

$$H(s) = C \frac{\prod_{j=1}^M (s - s_{oj})}{\prod_{i=1}^N (s - s_{pi})} \quad (6.11)$$

trong đó s_{oj} là các điểm không và s_{pi} là các điểm cực của bộ lọc tương tự.

Thì chúng ta thu được hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng là:

$$H(z) = C \frac{\prod_{j=1}^M (1 - e^{s_{oj}T_s}.z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - e^{s_{pi}T_s}.z^{-1})} \quad (6.12)$$

Với T_s là chu kỳ lấy mẫu tín hiệu.

So sánh (6.11) và (6.12) ta thấy rằng mỗi phân tử $(s - a)$ của $H(s)$ được ánh xạ thành phân tử $(1 - e^{aT_s}.z^{-1})$ trong $H(z)$. Đó chính là nội dung của phương pháp biến đổi z tương ứng.

Ví dụ: Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt:

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

Hãy xác định hàm truyền đạt của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp biến đổi z thích ứng.

Bài giải:

Áp dụng biểu thức (6.12) ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = 2 \frac{1}{(1 - e^{-T_s}.z^{-1})(1 - e^{-3T_s}.z^{-1})}$$

Khai triển và thu gọn ta được:

$$H(z) = \frac{2}{1 - (e^{-T_s} + e^{-3T_s}).z^{-1} + e^{-4T_s}.z^{-2}}$$

6.3. TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ THÔNG THẤP

6.3.1. Bộ lọc tương tự Butterworth

a) Định nghĩa

Bộ lọc tương tự Butterworth có đáp ứng tần số chuẩn hóa là:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \quad (6.13)$$

Trong đó n được gọi là bậc của bộ lọc, n càng lớn thì bộ lọc càng gần với bộ lọc lý tưởng.

b) Tổng hợp bộ lọc thông thấp tương tự Butterworth

* Xác định bậc của bộ lọc:

Bậc của bộ lọc là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:

$$n \geq \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \omega_s - \lg \omega_p} \quad (6.14)$$

* Tính tần số cắt:

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{\left[(1 - \delta_1)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2n}}} \quad (6.15)$$

* Xác định hàm truyền đạt $H(s)$

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})} \quad (6.16)$$

Trong đó H_0, s_{pk} được xác định như sau:

+ Theo tần số chuẩn hóa $\frac{\omega}{\omega_c}$

$$H_0 = 1$$

$$s_{pk} = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)} \text{ với } k = 0, 1, \dots, n$$

+ Theo tần số không chuẩn hóa

$$H_0 = \omega_c^n$$

$$s_{pk} = \omega_c \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)} \text{ với } k = 0, 1, \dots, n$$

Ví dụ:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,2\Pi \text{ và } \omega_p = 0,1\Pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài giải:

Bước 1: Xác định lại các chỉ tiêu tần số theo công thức (6.9):

$$\omega_{as} = \frac{2}{T_s} \cdot \text{tg} \frac{\omega_s}{2}$$

$$\omega_{ap} = \frac{2}{T_s} \cdot \text{tg} \frac{\omega_p}{2}$$

Chuẩn hóa bằng tần số lấy mẫu F_s ta có:

$$\omega_{as} = 2 \cdot \text{tg} \frac{0,2\Pi}{2} \approx 0,64984$$

$$\omega_{ap} = 2 \cdot \lg \frac{0,1\Pi}{2} \approx 0,31677$$

Bước 2: Tổng hợp bộ lọc Butterworth

– Xác định bậc của bộ lọc: theo công thức (6.14)

$$n \geq \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \cdot \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \omega_s - \lg \omega_p} = \frac{\lg \frac{1}{0,1 \cdot \sqrt{2 \cdot 0,1}}}{\lg \frac{0,64984}{0,31677}} = 4,33$$

Vậy ta chọn $n = 5$.

– Tính tần số cắt:

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{\left[(1 - \delta_1)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2n}}} = \frac{0,31677}{\left[(1 - 0,1)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2 \cdot 5}}} = 0,56576$$

– Xác định H_0 và các điểm cực của $H(s)$:

$$H_0 = \omega_c^n = 0,56576^5 = 0,05796$$

$$s_{pk} = \omega_c \cdot e^{j\Pi \left(\frac{1+2k-1}{2+2n} \right)} = 0,56576 \cdot e^{j\Pi \left(\frac{1+2k-1}{2+2 \cdot 5} \right)}$$

$$= 0,56576 \cdot e^{j\Pi \left(\frac{k+2}{5} \right)}$$

$$s_{p1} = 0,56576 \cdot e^{j\frac{3\Pi}{5}}$$

$$s_{p2} = 0,56576 \cdot e^{j\frac{4\Pi}{5}}$$

$$s_{p3} = 0,56576 \cdot e^{j\frac{5\Pi}{5}} = -0,56576$$

$$s_{p4} = 0,56576 \cdot e^{j\frac{6\Pi}{5}} = s_{p2}^*$$

$$s_{p5} = 0,56576 \cdot e^{j\frac{7\Pi}{5}} = s_{p1}^*$$

– Xác định hàm truyền đạt $H(s)$.

Áp dụng công thức (6.16) ta có:

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})} = \frac{0,05796}{\prod_{k=1}^5 (s - s_{pk})}$$

$$= \frac{0,05796}{\left(s - 0,56576e^{j\frac{3\Pi}{5}} \right) \left(s - 0,56576e^{j\frac{4\Pi}{5}} \right) (s + 0,56576) \left(s - 0,56576e^{j\frac{6\Pi}{5}} \right) \left(s - 0,56576e^{j\frac{7\Pi}{5}} \right)}$$

Thu gọn ta được:

$$H(s) = \frac{0,05796}{(s + 0,56576)(s^2 - 1,1304s + 0,32)(s^2 - 1,1309s + 0,32)}$$

Bước 3: Tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ của bộ lọc số

Vì các tần số của bộ lọc đã được chuẩn hóa bởi tần số lấy mẫu nên khi áp dụng phương pháp biến đổi song tuyến ta cũng chuẩn hóa s bởi tần số lấy mẫu như sau:

$$\text{Từ } s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Chuẩn hóa bởi FS ta được

$$s = \frac{2}{1} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Thay vào $H(s)$ ở trên ta tìm được $H(Z)$:

$$H(Z) = \frac{0,05796}{\left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 0,56576\right) \left(\left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 - 1,1304 \cdot 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 0,32\right) \left(\left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 - 1,1309 \cdot 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 0,32\right)}$$

Đến đây bạn đọc tự biến đổi để thu gọn $H(Z)$.

6.3.2. Bộ lọc tương tự Chebyshev

a) Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1

* **Định nghĩa:** Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 là bộ lọc có đáp ứng biên độ gọn sóng ở dải thông và giảm đơn điệu ở dải chắn.

Đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 là:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}} \quad (6.17)$$

Trong đó:

- T là ký hiệu của đa thức Chebyshev.
- ϵ là tham số xác định biên độ gọn sóng ở dải thông, nó có quan hệ với δ_1 theo công thức:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

* Tổng hợp bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1:

– Xác định bậc của bộ lọc: n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:

$$n \geq \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon^2} - 1 \right)}{\ln \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} + \sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^2 - 1} \right)} \quad (6.18)$$

trong đó $A_s = \delta_2$.

– Xác định hàm truyền đạt $H(s)$:

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})} \quad (6.19)$$

Trong đó:
$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \quad (6.20)$$

$$s_{pk} = R_a \sin u_k + jR_b \cos u_k \quad (6.21)$$

với:
$$u_k = \left(\frac{2k-1}{2n} + 1 \right) \Pi \quad (6.22)$$

$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}; \quad R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \quad (6.23)$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6.24)$$

b) Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2

* Định nghĩa: Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2 là bộ lọc có đáp ứng biên độ gọn sang ở dải chặn và giảm đơn điệu ở dải thông.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_s)}{T_n\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \right]^2}} \quad (6.25)$$

Trong đó:

- T là ký hiệu của đa thức Chebyshev;
- ε là tham số, nó có quan hệ với δ_1 theo công thức.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

* Tổng hợp bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2:

- Xác định bậc của bộ lọc: n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:

$$n \geq \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon^2} - 1 \right)}{\ln \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} + \sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^2 - 1} \right)} \quad (6.26)$$

trong đó $A_s = \delta_2$.

- Xác định hàm truyền đạt H(s):

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})} \quad (6.27)$$

Trong đó:

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \quad (6.28)$$

$$s_{pk} = R_a \sin u_k + jR_b \cos u_k \quad (6.29)$$

với:

$$u_k = \left(\frac{2k-1}{2n} \right) \Pi \quad (6.30)$$

$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}; \quad R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \quad (6.31)$$

$$\gamma = \left(\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1} + \frac{1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6.32)$$

6.4. BIẾN ĐỔI TẦN SỐ

Trong phần 6.3 chúng ta đã nghiên cứu phương pháp tổng hợp bộ lọc thông thấp tương tự, từ đó thông qua các phương pháp biến đổi ở phần 6.2 ta sẽ thu được các bộ lọc số thông thấp. Tuy nhiên trong thực tế còn có yêu cầu tổng hợp các bộ lọc số thông cao, thông dải, chắn dải. Để giải quyết các yêu cầu đó, trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp biến đổi từ bộ lọc thông thấp thành các bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải, chắn dải. Các phép biến đổi này cho phép chúng ta tổng hợp được bộ lọc số bất kỳ bằng 2 con đường:

1. Thiết kế bộ lọc tương tự thông thấp trước, sau đó chuyển nó thành bộ lọc tương tự thông cao/thông dải hay chắn dải tùy theo yêu cầu bằng việc biến đổi tần số trong miền tương tự. Cuối cùng thực hiện biến đổi bộ lọc tương tự này thành bộ lọc số cần tìm bằng cách áp dụng 1 trong 4 phương pháp biến đổi tương tự sang số như đã trình bày trong phần 6.2.

2. Thiết kế bộ lọc tương tự thông thấp trước, sau đó chuyển nó thành bộ lọc số thông thấp bằng cách áp dụng 1 trong 4 phương pháp biến đổi tương tự sang số như đã trình bày trong phần 6.2. Cuối cùng thực hiện biến đổi bộ lọc số thông thấp này thành bộ lọc số cần tìm (thông thấp/thông cao/thông dải hay chắn dải) tùy theo yêu cầu bằng việc biến đổi tần số trong miền số.

6.4.1. Biến đổi tần số trong miền tương tự

Giả sử ta đã có bộ lọc tương tự thông thấp với hàm truyền đạt là $H(s)$. Để thu được các bộ lọc tương tự khác ta sẽ thực hiện bằng cách biến đổi từ biến s của $H(s)$ thành biến s' của $H(s')$, $H(s')$ – là hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự mong muốn.

a) Biến đổi thông thấp – thông thấp

Giả sử ta đã có bộ lọc thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(s)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc thông thấp với tần số cắt là ω_c' và hàm truyền đạt là truyền $H(s')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi sau:

$$s = \lambda \cdot s' \quad (6.33)$$

Trong đó λ là hằng số, $\lambda = \omega_c / \omega_c'$.

Nếu bộ lọc thông thấp ban đầu đã được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hóa ($\omega_c = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện với $\lambda = 1/\omega_c'$.

Ta thu được hàm truyền đạt của bộ lọc thông thấp mới là:

$$H(s') = H(s) \Big|_{s=\lambda s'} \quad (6.34)$$

b) Biến đổi thông thấp – thông cao

Giả sử ta đã có bộ lọc thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(s)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc thông cao với tần số cắt là ω_c' và hàm truyền đạt là truyền $H(s')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi sau:

$$s = \lambda/s' \quad (6.35)$$

Trong đó λ là hằng số, $\lambda = \omega_c \cdot \omega_c'$.

Nếu bộ lọc thông thấp đã được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hóa ($\omega_c=1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện với $\lambda = \omega_c'$

Ta thu được hàm truyền đạt của bộ lọc thông cao là:

$$H(s') = H(s) \Big|_{s=\frac{\lambda}{s'}} \quad (6.36)$$

c) Biến đổi thông thấp – thông dải

Giả sử ta đã có bộ lọc thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(s)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc thông dải với tần số cắt dưới là ω_{c1}' , tần số cắt trên là ω_{c2}' và hàm truyền đạt là truyền $H(s')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi sau:

$$s = f(s') = \omega_c \frac{s'^2 + \omega_{c1}' \cdot \omega_{c2}'}{s' (\omega_{c2}' - \omega_{c1}')} \quad (6.37)$$

Nếu bộ lọc thông thấp đã được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hóa ($\omega_c = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện theo công thức sau:

$$s = f(s') = \frac{s'^2 + \omega_{c1}' \cdot \omega_{c2}'}{s' (\omega_{c2}' - \omega_{c1}')} \quad (6.38)$$

Ta thu được hàm truyền đạt của bộ lọc thông dải là:

$$H(s') = H(s) \Big|_{s=f(s')} \quad (6.39)$$

d) Biến đổi thông thấp – chắn dải

Giả sử ta đã có bộ lọc thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(s)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc chắn dải với tần số cắt

dưới là ω'_{c1} , tần số cắt trên là ω'_{c2} và hàm truyền đạt là truyền $H(s')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi sau:

$$s = f(s') = \omega_c \cdot \frac{s' \cdot (\omega'_{c2} - \omega'_{c1})}{s'^2 + \omega'_{c1} \cdot \omega'_{c2}} \quad (6.40)$$

Nếu bộ lọc thông thấp đã được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hóa ($\omega_c = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện theo công thức sau:

$$s = f(s') = \frac{s' \cdot (\omega'_{c2} - \omega'_{c1})}{s'^2 + \omega'_{c1} \cdot \omega'_{c2}} \quad (6.41)$$

Ta thu được hàm truyền đạt của bộ lọc chắn dải là:

$$H(s') = H(s) \Big|_{s=f(s')} \quad (6.42)$$

6.4.2. Biến đổi tần số trong miền số

Giả sử ta đã có bộ lọc số thông thấp với hàm truyền đạt là $H(Z)$. Để thu được các bộ lọc số khác ta sẽ thực hiện bằng cách biến đổi từ biến Z của $H(Z)$ thành biến Z' của $H(Z')$, $H(Z')$ – là hàm truyền đạt của bộ lọc số mong muốn.

a) Biến đổi thông thấp – thông thấp

Giả sử ta đã có bộ lọc số thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(Z)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc số thông thấp với tần số cắt là ω'_c và hàm truyền đạt là truyền $H(Z')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi sau:

$$Z^{-1} = f(Z'^{-1}) = \frac{Z'^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z'^{-1}} \quad (6.43)$$

Với

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2} \cdot T_s\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2} \cdot T_s\right)} \quad (6.44)$$

Nếu tần số được chuẩn hóa theo tần số lấy mẫu F_s ($F_s = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện với:

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2}\right)} \quad (6.45)$$

Ta thu được:

$$H(Z') = H(Z) \Big|_{Z^{-1} = f(Z'^{-1})} \quad (6.46)$$

b) Biến đổi thông thấp – thông cao

Giả sử ta đã có bộ lọc số thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(Z)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc số thông cao với tần số cắt là ω'_c và hàm truyền đạt là truyền $H(Z')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi sau:

$$Z^{-1} = f(Z'^{-1}) = -\frac{Z'^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z'^{-1}} \quad (6.47)$$

Với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2} \cdot T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2} \cdot T_s\right)} \quad (6.48)$$

Nếu tần số được chuẩn hóa theo tần số lấy mẫu F_s ($F_s = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện với:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2}\right)} \quad (6.49)$$

Ta thu được:

$$H(Z') = H(Z) \Big|_{Z^{-1} = f(Z'^{-1})} \quad (6.50)$$

c) Biến đổi thông thấp – thông dải

Giả sử ta đã có bộ lọc số thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(Z)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc số thông dải với tần số

cắt dưới là ω_{c1}' , tần số cắt trên là ω_{c2}' và hàm truyền đạt là truyền $H(Z')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi tần số cho bởi công thức:

$$Z^{-1} = f(Z'^{-1}) = -\frac{Z'^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z'^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{2\alpha k}{k+1} Z'^{-1} + \frac{k-1}{k+1} Z'^{-2}} \quad (6.51)$$

Với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2} \cdot T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} \cdot T_s\right)} \quad (6.52)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2} T_s\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} \cdot T_s\right) \quad (6.53)$$

Nếu tần số được chuẩn hóa theo tần số lấy mẫu F_s ($F_s = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right)} \quad (6.54)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right) \quad (6.55)$$

$$\text{Ta thu được: } H(Z') = H(Z) \Big|_{Z^{-1}=f(Z'^{-1})} \quad (6.56)$$

d) Biến đổi thông thấp – chắn dải

Giả sử ta đã có bộ lọc số thông thấp có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H(Z)$. Bây giờ ta cần chuyển nó thành bộ lọc số chắn dải với tần số cắt dưới là ω'_{c1} , tần số cắt trên là ω'_{c2} và hàm truyền đạt là truyền $H(Z')$. Khi đó ta dùng phép biến đổi tần số cho bởi công thức:

$$Z^{-1} = f(Z'^{-1}) = -\frac{Z'^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} Z'^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{1 - \frac{2\alpha}{k+1} Z'^{-1} + \frac{1-k}{1+k} Z'^{-2}} \quad (6.57)$$

Với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2} \cdot T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} \cdot T_s\right)} \quad (6.58)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2} T_s\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} \cdot T_s\right) \quad (6.59)$$

Nếu tần số được chuẩn hóa theo tần số lấy mẫu F_s ($F_s = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right)} \quad (6.60)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right) \quad (6.61)$$

Ta thu được:

$$H(Z') = H(Z) \Big|_{Z^{-1} = f(Z'^{-1})} \quad (6.62)$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Bài 1:

Xác định $|H(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$ của bộ lọc số IIR có phương trình sai phân là:

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

Bài 2:

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt là:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ và vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp bất biến xung.

Bài 3:

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt là:

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ và vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp bất biến xung.

Bài 4:

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt là:

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ và vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài 5:

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt là:

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ và vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp bất biến xung.

Bài 6:

Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt là:

$$H(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ và vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp biến đổi z tương ứng.

Bài 7:

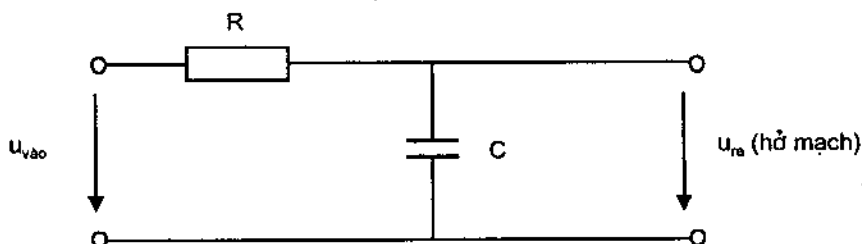
Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt:

$$H(s) = \frac{2}{(s-1)(s+3)}$$

Hãy xác hàm truyền đạt và vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bài 8:

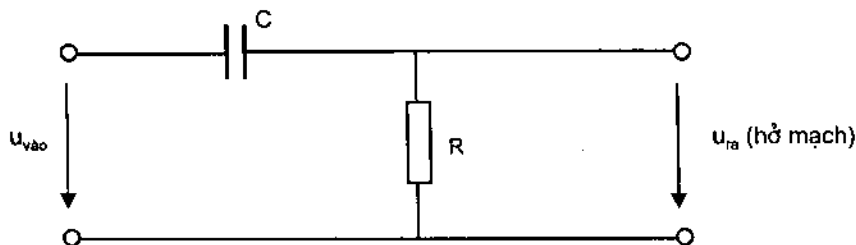
Cho mạch lọc thông thấp tương tự sau:



Hãy chuyển nó thành mạch số bằng phương pháp bất biến xung.

Bài 9:

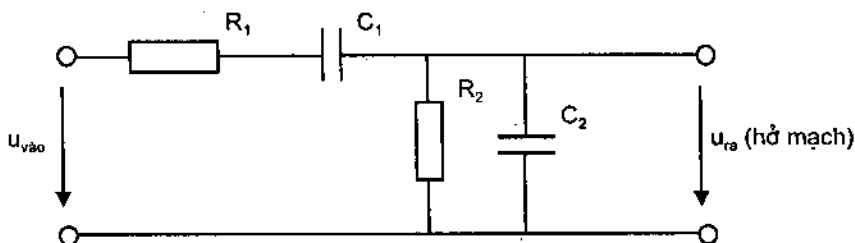
Cho mạch lọc thông cao tương tự sau:



Hãy chuyển nó thành mạch số bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bài 10:

Cho mạch điện tương tự sau:



Hãy chuyển nó thành mạch số bằng phương pháp biến đổi z tương ứng.

Bài 11:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,2\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi Z tương ứng.

Bài 12:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,2\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bài 13:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,2\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp bất biến xung.

Bài 14:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,2\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi song tuyến và phương pháp biến đổi tần số trong miền tương tự.

Bài 15:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,2\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi song tuyến và phương pháp biến đổi tần số trong miền số.

Bài 16:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,5\pi \text{ và } \omega_p = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev loại 1 bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài 17:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,2\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev loại 2 bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bài 18:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,3\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev loại 1 bằng phương pháp bất biến xung.

Bài 19:

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,3\pi \text{ và } \omega_p = 0,1\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao từ bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev loại 1 bằng phương pháp biến đổi song tuyến và phương pháp biến đổi tần số trong miền tương tự.

Bài 20:

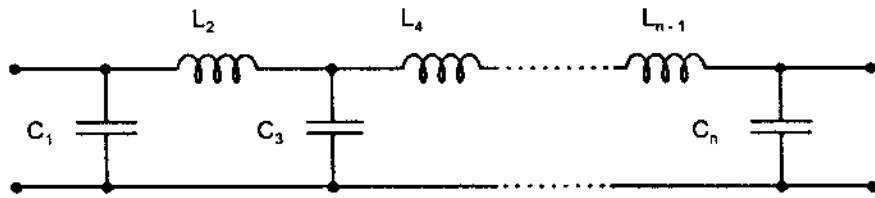
Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \omega_s = 0,4\pi \text{ và } \omega_p = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao từ bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev loại 2 bằng phương pháp biến đổi song tuyến và phương pháp biến đổi tần số trong miền số.

Bài 21:

Cho mạch lọc tương tự thông thấp như hình sau:



với:

$$C_k = 2 \sin \left[\frac{(2k-1)}{2n} \pi \right]$$

$$L_k = 2 \sin \left[\frac{(2k-1)}{2n} \pi \right]$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(s)$ và chuyển thành mạch số bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phạm Thượng Hàn , 2006. *Xử lý số tín hiệu và ứng dụng*.
NXB Giáo dục.
- [2] Nguyễn Quốc Trung, 2002. *Xử lý tín hiệu và lọc số*.
Tập 1, NXB Khoa học và Kỹ thuật.
- [3] Nguyễn Quốc Trung, 2006. *Xử lý tín hiệu và lọc số*.
Tập 2, NXB Khoa học và Kỹ thuật.
- [4] Nguyễn Xuân Quỳnh, 1991. *Lý thuyết mạch logic và kỹ thuật số*.
NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp.
- [5] Nguyễn Xuân Quỳnh, 1995. *Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng*.
NXB Giáo dục.
- [6] M. Kunt, 1980. *Traitement numérique des signaux*.
TEXX, Presses Polytechniques romandes, Lausanne.

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Chương 1

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

1.1. Mở đầu	3
1.1.1. Định nghĩa tín hiệu.....	5
1.1.2. Định nghĩa tín hiệu liên tục.....	5
1.1.3. Định nghĩa tín hiệu rời rạc	6
1.2. Các hệ thống xử lý tín hiệu	7
1.3. Tín hiệu rời rạc	8
1.3.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc	8
1.3.2. Các dãy cơ bản	10
1.4. Các hệ thống tuyến tính bất biến.....	18
1.4.1. Các hệ thống tuyến tính.....	18
1.4.2. Các hệ thống tuyến tính bất biến.....	20
1.4.3. Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả.....	29
1.4.4. Hệ thống tuyến tính bất biến ổn định.....	32
1.5. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.....	34
1.5.1. Phương trình sai phân tuyến tính.....	34
1.5.2. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.....	35
1.5.3. Các hệ thống đệ quy và không đệ quy	40
1.5.4. Sơ đồ thực hiện hệ thống tuyến tính bất biến	44

Chương 2

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU

VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

2.1. Đặt vấn đề	49
2.2. Biến đổi Z.....	49
2.2.1. Biến đổi Z hai phía (The two-side Z-transform)	49
2.2.2. Biến đổi Z một phía (The one-side Z – transform).....	51
2.3. Sự tồn tại của biến đổi Z.....	52
2.3.1. Định nghĩa miền hội tụ.....	52
2.3.2. Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.....	53

2.4. Biến đổi Z ngược (IZT: Inverse Z Transform)	54
2.4.1. Cực và không (poles and zeros).....	54
2.4.2. Biến đổi Z ngược	55
2.5. Các tính chất của biến đổi Z.....	58
2.5.1. Tính tuyến tính	58
2.5.2. Tính chất trễ	58
2.5.3. Nhân với dãy hàm mũ	60
2.5.4. Đạo hàm của biến đổi Z	61
2.5.5. Tích chập của hai dãy.....	61
2.5.6. Dãy liên hợp phức	62
2.6. Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền Z	62
2.6.1. Hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc	62
2.6.2. Phân tích hệ thống rời rạc trong miền Z.....	63
2.6.3. Giải phương trình sai phân dùng biến đổi Z.....	66
2.6.4. Sự ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến	67

Chương 3

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU

VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

3.1. Đặt vấn đề	71
3.2. Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc.....	71
3.2.1. Định nghĩa biến đổi Fourier (FT).....	71
3.2.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier	74
3.2.3. Biến đổi Fourier ngược (IFT: Inverse Fourier Transform).....	74
3.3. Các tính chất cơ bản của FT.....	75
3.3.1. Tính chất tuyến tính	75
3.3.2. Tính chất trễ	76
3.3.3. Vi phân trong miền tần số	76
3.3.4. Trễ tần số.....	76
3.3.5. Tích chập của hai dãy.....	77
3.3.6. Tích của hai dãy	77
3.4. So sánh biến đổi Fourier và biến đổi Z.....	77
3.5. Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền tần số liên tục.....	78
3.6. Các bộ lọc số lý tưởng.....	78
3.6.1. Bộ lọc thông thấp lý tưởng	78
3.6.2. Bộ lọc thông cao lý tưởng.....	79
3.6.3. Bộ lọc thông dải lý tưởng	80
3.6.4. Bộ lọc chắn dải lý tưởng.....	81
3.7. Bộ lọc số thực tế.....	82

Chương 4
BIỂU DIỄN TÍN HIỆU
VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

4.1. Đặt vấn đề	85
4.2. Biến đổi fourier rời rạc với tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N.....	86
4.2.1. Các định nghĩa.....	86
4.2.2. Các tính chất cơ bản của biến đổi fourier rời rạc với dãy tuần hoàn có chu kỳ N	89
4.3. Biến đổi fourier rời rạc với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn.....	92
4.3.1. Tổng quan.....	92
4.3.2. Các định nghĩa.....	93
4.3.3. Các tính chất cơ bản của DFT đối với các dãy có chiều dài hữu hạn.....	95

Chương 5
TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ
CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI HỮU HẠN

5.1. Đặt vấn đề	101
5.2. Tổng quan.....	101
5.2.1. Các tính chất bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR).....	101
5.2.2. Các bước tổng hợp bộ lọc số FIR	102
5.3. Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính.....	102
5.3.1. Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha)	102
5.3.2. Bộ lọc pha FIR tuyến tính	103
5.4. Đáp ứng tần số của các bộ lọc FIR pha tuyến tính	109
5.4.1. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N lẻ (bộ lọc FIR loại 1).....	109
5.4.2. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N chẵn (bộ lọc FIR loại 2)	111
5.4.3. Trường hợp đáp ứng xung phản đối xứng, N lẻ (bộ lọc FIR loại 3)	113
5.4.4. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N chẵn (bộ lọc FIR loại 4)	116
5.5. Phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR.....	118
5.5.1. Tổng quan	118
5.5.2. Phương pháp cửa sổ	118

Chương 6
TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ
CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI VÔ HẠN

6.1. Mở đầu.....	125
6.2. Phương pháp chuyển từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số	125
6.2.1. Mở đầu	125
6.2.2. Nhắc lại về hệ thống tương tự.....	126
6.2.3. Phương pháp bất biến xung	127
6.2.4. Phương pháp biến đổi song tuyến.....	128
6.2.5. Phương pháp tương đương vi phân.....	129
6.2.6. Phương pháp biến đổi Z tương ứng.....	130
6.3. Tổng hợp các bộ lọc tương tự thông thấp	131
6.3.1. Bộ lọc tương tự Butterworth	131
6.3.2. Bộ lọc tương tự Chebyshev.....	134
6.4. Biến đổi tần số.....	137
6.4.1. Biến đổi tần số trong miền tương tự	137
6.4.2. Biến đổi tần số trong miền số.....	139
Tài liệu tham khảo.....	147

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH – DN

TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :

DƯƠNG VĂN BẰNG

Trình bày bìa :

HOÀNG MẠNH DỨA

Chế bản :

ĐÌNH XUÂN DŨNG

GIÁO TRÌNH XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

Mã số: 7B683M7 – DAI

In 1.500 bản, khổ 16 x 24 cm. In tại Công ty In & Văn hoá phẩm.

Địa chỉ: 83 Hào Nam – Hà Nội.

Số ĐKKH xuất bản: 192 – 2007/CXB/8 – 411/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2007.



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYỀN - HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO BỘ MÔN HOÁ HỌC CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

(Bộ sách giáo trình dùng cho các trường đào tạo hệ cao đẳng)

- | | |
|----------------------------------|----------------------------|
| 1. Xử lý số tín hiệu | PGS. TS. Nguyễn Quốc Trung |
| 2. Vi xử lý và cấu trúc máy tính | TS. Ngô Diên Tập |
| 3. Lý thuyết điều khiển tự động | PGS. TS. Phan Xuân Minh |
| 4. Linh kiện điện tử | TS. Nguyễn Viết Nguyên |
| 5. Kỹ thuật xung số | PGS. TS. Đặng Văn Chuyết |
| 6. Kỹ thuật mạch điện tử | PGS. TS. Đặng Văn Chuyết |
| 7. Kỹ thuật lập trình C | TS. Nguyễn Linh Giang |

Bạn đọc có thể mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;

Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh ; Số 62 Nguyễn Chí Thanh ;

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1 ; Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng, Quận 3 ; 240 Trần Bình Trọng – Quận 5 ;

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4 ;

Website : www.nxbgd.com.vn



Giá: 16.500đ