NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH - DƯƠNG THỦY VỸ

Bài tập
TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP HAI

DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH – DƯƠNG THỦY VỸ

Bài tập
TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP HAI

(Sách dùng cho sinh viên các trường Cao đẳng)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

11 – 2007/CXB/340 – 2119/GD Mã số : 7K616T7 – DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Làm bài tập là một khâu rất quan trọng trong việc học toán, nó giúp cho người học toán hiểu được lý thuyết thấu đáo hơn, rèn luyện tư duy khoa học, kỹ năng tính toán và khả năng vận dụng toán học vào giải quyết vấn đề (problem solving), kích thích niềm say mê học tập, say mê tìm tòi của người học. Vì vậy, cuối mỗi chương của bộ sách "Toán học cao cấp" viết cho các hệ, lớp cao đẳng của các trường đại học kỹ thuật, chúng tôi đã đưa ra một số bài tập. Bộ sách "Bài tập Toán học cao cấp" này được viết nhằm trình bày bài giải và hướng dẫn giải của hầu hết các bài tập đã ra trong bộ sách trên. Ngoài ra, một số bài tập khác cũng đã được bổ sung.

Mỗi chương của bộ sách đều mở đầu bằng phần Tóm tắt lý thuyết, nhằm nhắc lại các điểm mấu chốt của lý thuyết về những : định nghĩa, định lý cơ bản, phương pháp cơ bản, công thức cơ bản. Phần Đề bài và phần Bài giải và hướng dẫn của mỗi chương được xếp tách rời nhau.

Chúng tôi không khuyến khích người học khi làm bài tập sử dụng ngay bài giải trong sách này mà không tự mình giải các bài tập đó. Gặp khó khăn khi làm một bài tập nào đó, người học nên xem lại phần Tóm tắt lý thuyết và nếu cần cả phần tương ứng trong giáo trình. Chỉ nên xem lời giải trong sách sau khi đã giải xong bài để đánh giá kết quả học tập của mình. Chỉ trong quá trình vừa học lý thuyết, vừa làm bài tập thì người học mới dần dần hiểu được các khái niệm toán học mới, nắm được các phương pháp cơ bản và nhớ được các kết quả cơ bản.

Hy vọng rằng, quyển sách này sẽ giúp các bạn sinh viên học tốt môn Toán, yêu thích môn Toán và say mê tìm tòi các vấn đề toán học trong công nghệ và kỹ thuật.

Chúng tôi mong nhận được ý kiến của bạn đọc đối với bộ sách này. Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Chương VII

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số nhiều biến số. Miền xác định

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$, ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$ gọi là hàm số hai biến số xác định trên D. Đó là một quy tắc cho ứng với mỗi cặp số thực $(x, y) \in D$ một số thực duy nhất $z = f(x, y)$. Nếu hàm số được cho bởi biểu thức $z = f(x, y)$ thì miền xác định của nó được hiểu là tập hợp những điểm (x, y) sao cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa.

2. Giới hạn và liên tục

Dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ gọi là dẫn tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ nếu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0.$$

Khi đó ta ký hiệu $M_n \to M_0$ hay $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$.

Hàm số $f(M) = f(x, y)$ xác định trong miền D chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ điểm M_0, gọi là dần tới L khi $M(x, y)$ dần tới $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi dãy $M_n(x_n, y_n)$ (khác M_0) thuộc miền D dần tới M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L.$$

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong miền D, $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm thuộc D. Hàm số $f(x, y)$ được gọi là liên tục tại M_0 nếu:

1) Tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$;

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Nếu $f(x, y)$ liên tục tại mọi điểm trong miền D, ta nói $f(x, y)$ liên tục trong D.

3. Đạo hàm riêng

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Như vậy, khi tính đạo hàm riêng của hàm số đối với biến số nào thì coi các biến số còn lại là hằng số.

Đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng định nghĩa ở trên gọi là đạo hàm riêng cấp hai:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Nếu hàm số f(x, y) có các đạo hàm riêng f_{xy} và f_{yx} trong một miền D và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Các đạo hàm riêng cấp cao hơn định nghĩa tương tự.

4. Vi phân toàn phần

- Nếu hàm số f(x, y) có các đạo hàm riêng f_x, f_y trong miền D chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

trong đó $\alpha \to 0$ và $\beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$.

Biểu thức $f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ là phần chính của số gia

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

gọi là vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) tại (x_0, y_0) và được ký hiệu là $df(x_0, y_0)$. Vì x, y là biến số độc lập nên $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, vậy

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

- Khi Δx, Δy khá nhỏ ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

- Điều kiện cần và đủ để biểu thức P(x, y)dx + Q(x, y)dy là một vi phân toàn phần trong một miền D nào đó là trong miền ấy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Khi điều kiện trên được thoả mãn, ta có thể tìm được hàm số f(x, y) sao cho

$$df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

5. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu z = f(u, v) là hàm số khả vi của u, v và nếu u = u(x), v = v(x) là những hàm số khả vi của x thì z là hàm số khả vi của x và ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Nếu z = f(u, v) là hàm số khả vi của u, v và các hàm số u = u(x, y), v = v(x, y) có các đạo hàm riêng u_x, u_y, v_x, v_y thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ và ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

6. Đạo hàm của hàm số ẩn

Nếu hàm số F(x, y) khả vi và nếu $F_y(x, y) \neq 0$ thì phương trình F(x, y) = 0 xác định ở lân cận x một hàm số ẩn y(x) khả vi và

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Nếu hàm số F(x, y, z) khả vi và nếu $F_z(x, y, z) \neq 0$ thì phương trình F(x, y, z) = 0 xác định ở lân cận điểm (x, y) một hàm số ẩn z(x, y) khả vi và:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

7. Đạo hàm theo hướng. Vectơ građien

• Đạo hàm của hàm số f(M) = f(x, y, z) theo hướng của vectơ đơn vị $\vec{u}$ tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là giới hạn nếu có của tỷ số

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho} = \frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$

khi $\rho \to 0$, trong đó $\rho = \overline{MM_0}$ và được ký hiệu là $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0,z_0)$.

Nếu hàm số f(x, y, z) khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì tại đó nó có đạo hàm theo mọi hướng xác định bởi vectơ $\vec{u}$ và

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma,$$

trong đó α, β, γ là những góc mà $\vec{u}$ tạo với các trục Ox, Oy, Oz.

• Nếu hàm số f(x, y, z) có các đạo hàm riêng f_x, f_y, f_z tại điểm M(x, y, z), người ta gọi građiên của f tại M là vectơ có các thành phần $(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$, ký hiệu là $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z)$ hay $\vec{\nabla} f(x,y,z)$.

Giữa $D_{\vec{u}}f(M)$ và $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ có hệ thức

$$D_{\vec{u}}f(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M).\vec{u},$$

trong đó $\vec{u}$ là vectơ đơn vị.

Nếu hàm số f(x, y, z) khả vi tại điểm M(x, y, z) thì giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $D_{\vec{u}}f(M)$ bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}} f(M)\right|$ và đạt được khi $\vec{u}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$.

8. Cực trị của hàm số hai biến số

Ta nói hàm số z = f(x, y) đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi điểm M(x, y) khá gần M_0 (nhưng khác M_0) hiệu $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.

Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tại đó các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại thì $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$. Điểm (x_0, y_0) tại đó $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ gọi là điểm dừng của hàm số $f(x, y)$.

Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $f(x, y)$ và hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp hai ở lân cận điểm M_0. Đặt $r = f_{xx}(x_0, y_0)$, $s = f_{xy}(x_0, y_0)$, $t = f_{yy}(x_0, y_0)$. Khi đó:

1) Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$; đó là cực tiểu nếu $r > 0$, là cực đại nếu $r < 0$.

2) Nếu $s^2 - rt > 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ không là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$.

3) Nếu $s^2 - rt = 0$ thì chưa thể kết luận được $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$ hay không.

• Cực trị của hàm số $f(x, y)$ với điều kiện $y = \varphi(x)$ được gọi là cực trị có điều kiện.

• Muốn tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $f(x, y)$ trong một miền đóng bị chặn D ta thực hiện các bước sau:

1) Tính giá trị của f tại các điểm dừng của f nằm trong miền D;

2) Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của f trên biên của miền D;

3) Số lớn (bé) nhất trong các giá trị tính ở 1) và 2) là giá trị lớn (bé) nhất phải tìm.

9. Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong tại một điểm

Cho đường cong có phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Phương trình tiếp tuyến của đường cong đó tại $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ là

$$\frac{X - x(t_o)}{x'(t_o)} = \frac{Y - y(t_o)}{y'(t_o)} = \frac{Z - z(t_o)}{z'(t_o)},$$

trong đó X, Y, Z là các toạ độ chạy của đường tiếp tuyến.

Phương trình pháp diện của đường cong tại $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ là

$$[X - x(t_0)]x'(t_0) + [Y - y(t_0)]y'(t_0) + [Z - z(t_0)]z'(t_0) = 0.$$

10. Phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong tại một điểm

Cho mặt cong có phương trình $f(x, y, z) = 0$. Phương trình tiếp diện của mặt cong tại $M(x_0, y_0, z_0)$ là

$$(X - x_0)f_x(M_0) + (Y - y_0)f_y(M_0) + (Z - z_0)f_z(M_0) = 0.$$

Phương trình pháp tuyến của mặt cong tại $M(x_0, y_0, z_0)$ là

$$\frac{X - x_o}{f_x(M_o)} = \frac{Y - y_o}{f_y(M_o)} = \frac{Z - z_o}{f_z(M_o)}.$$

B. ĐỀ BÀI

1. Cho $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$. Tính:

$$f(2, 1);\ f(-1, 3);\ f(x, 2x^2);\ f(x + h, y + k).$$

2. Cho $g(x, y, z) = x^2.\ln y.\sin z$. Tính:

$$g\left(-1, e^2, \frac{\pi}{4}\right);\ g(t, t, t);\ g(x + y, x, x - y).$$

3. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y + 1}$; b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$;

c) $f(x, y) = x^2\ln(4 - x^2 - 4y^2)$; d) $f(x, y) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{y - 1}$;

e) $f(x, y) = \sqrt{x}\ln(x + y)$; f) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x + y}$;

g) $f(x, y) = \arccos\dfrac{x}{y}$;

h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$;

i) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$;

j) $f(z, y, z) = \ln\left(\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} - 1\right)$.

4. Mô tả các mặt bậc hai sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; b) $z = 4x^2 + y^2 + 1$;

c) $4(x^2 + y^2) - z^2 - 4 = 0$; d) $y - x^2 - 1 = 0$;

e) $y^2 - x^2 - 1 = 0$; f) $y^2 - x^2 - z^2 = 0$.

5. Tìm giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = \dfrac{5xy^2 - 3x^2y + 1}{2xy - 1}$;

b) $f(x, y) = \dfrac{2x^2 - 3y^2}{3x^2 + 2y^2}$;

c) $f(x, y) = \dfrac{2 + x^2 + y^2}{2y} \sin y$;

d) $f(x, y) = \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$;

e) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

6. Tính các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = x^2y^2(x^3 + y^3)$;

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

c) $f(x, y) = y\ln(x^2 - y^2)$;

d) $f(x, y) = -y\sqrt{x} + 4x\sqrt[3]{y^2}$;

e) $f(x, y) = e^{2x^2 - xy + y^2}$;

f) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y}{x}$;

g) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1 + x^2}$;

h) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

i) $f(x, y) = e^{xy}\operatorname{tg}(x - 2y)$;

j) $f(x, y) = x^{y^2}$ $(x > 0)$;

k) $f(x, y, z) = e^{xyz} \sin \dfrac{y}{x}$;

l) $f(x, y, z) = z \sin \dfrac{y}{x + z}$.

7. Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

c) $f(x, y) = ye^{xy}$;

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y^2 + 1)$;

e) $f(x, y) = e^{x+y}\sin(x - y)$;

f) $f(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^3}$;

g) $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

h) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^{-x}$.

8. Tính gần đúng các số sau:

a) $\sqrt{9.(1,95)^2 + (8,1)^2}$;

b) $\ln[(0,09)^3 + (0,99)^3]$;

c) $\sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$;

d) $\sqrt{5e^{0,02} + (2,03)^2}$;

e) $\dfrac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98} \,.\, \sqrt[4]{(1,05)^3}}$;

f) $\sqrt{(3,02)^2 + (1,99)^2 + (5,98)^2}$.

9. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = x^3y^2 + 2x\sqrt{y}$;　　b) $f(x, y) = \cos^2(2x - 3y)$;

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$;　　d) $f(x, y) = \sin(x - y) + \cos(x + y)$.

10. Tính các đạo hàm riêng cấp cao của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = x^3y^2 - 5x^4y$, tính f_{xxx};　　b) $f(x, y) = e^{xy^2}$, tính f_{xxy};

c) $f(x, y) = \cos(ax + e^y)$, tính f_{xyy};　　d) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, tính f_{yzy};

e) $f(x, y, z) = e^{xy}\sin z$, tính f_{zyx};　　f) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, tính f_{xyz}.

11. Trong các hàm số sau, hàm số nào thoả mãn phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 0$?

a) $u(x, y) = x^2 + y^2$;　　b) $u(x, y) = x^2 - y^2$;

c) $u(x, y) = x^3 + 3xy^2$;　　d) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$;

e) $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;　　f) $u(x, y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.

12. Chứng minh rằng các hàm số sau thoả mãn phương trình $u_{tt} = a^2u_{xx}$:

a) $u(x, t) = \sin(kx)\sin(akt)$;　　b) $u(x, t) = (x - at)^4 + (x + at)^4$;

c) $u(x, t) = \sin(x - at) + \ln(x + at)$.

13. a) Tìm hàm số $u(x, y)$ thoả mãn phương trình $u_x = 0$;

b) Tìm hàm số $u(x, y)$ thoả mãn phương trình $u_{xy} = 0$.

14. Nếu biểu thức nào trong các biểu thức ω dưới đây là vi phân toàn phần, hãy tìm hàm số $f(x, y)$ sao cho $df = \omega$:

a) $\omega = (3x^2 + y)dx + (x - 4y^2)dy$;

b) $\omega = (5xy + 3)dx + (2y^2 - x^2 + 1)dy$;

c) $\omega = (3x^2y^2 - 4xy + 3)dx + (2x^3y - 2x^2)dy$;

d) $\omega = (6x + \sin y)dx + (x\cos y + y^2 + \sin y)dy$;

e) $\omega = (x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx$;

f) $\omega = (y + e^x\cos y + x^2)dx + (x - e^x\sin y + e^y)dy$;

g) $\omega = x^2\ln y\,dx - (x + y^2\ln x)dy$ $(x > 0, y > 0)$;

h) $\omega = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{2y}{x^3}\right)dx - \left(\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{x^2}\right)dy$.

15. Dùng quy tắc lấy đạo hàm của hàm số hợp, tính $\frac{dz}{dx}$:

a) $z = u^3 + v^3$, trong đó $u = x^2$, $v = 1 - e^x$;

b) $z = u\sqrt{1+v^2}$, trong đó $u = xe^{-x}$, $v = \cos x$;

c) $z = \ln(u + v^2)$, trong đó $u = \sqrt{1+x}$, $v = 1+\sqrt{x}$.

16. Dùng quy tắc lấy đạo hàm của hàm số hợp, tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$:

a) $z = u^2\sin v$, trong đó $u = x^2 + y^2$, $v = 2xy$;

b) $z = \sin u\cos v$, trong đó $u = (x - y)^2$, $v = x^2 - y^2$;

c) $z = u^2 - 3u^2v^3$, trong đó $u = xe^y$, $v = xe^{-y}$;

d) $z = \text{arctg}(uv)$, trong đó $u = x^2$, $v = xe^y$;

e) $z = e^{u-3v}$, trong đó $u = x^2y$, $v = xy^2$.

17. a) Chứng minh rằng hàm số $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ thoả mãn phương trình

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{2}{u}.$$

b) Chứng minh rằng hàm số $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thoả mãn phương trình

$$\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = \frac{z}{y^2}.$$

c) Chứng minh rằng hàm số $u = xf(x + y) + yg(x + y)$, trong đó f, g là hai hàm số khả vi, thoả mãn phương trình

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

18. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn sau:

a) $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 9$, tính y';

b) $y^3 + (x^2 + 1)y + x^4 = 0$, tính y';

c) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \text{arctg}\frac{y}{x}$, tính y', y'';

d) $x\cos y + y\cos x = 1$, tính y';

e) $1 + xe^y - ye^x = 0$, tính y';

f) $xy^2 - \sin(x + y) + y = 0$, tính y';

g) $xy + yz - zx = 0$, tính z_x, z_y;

h) $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y + z)$, tính z_x, z_y;

i) $yx^4 + x^2y^3 = e^{xyz}$, tính z_x, z_y;

j) $xe^y + yz + ze^x = 0$, tính z_x, z_y;

k) $\ln(1 + y - z) - z - x = 0$, tính z_x, z_y.

19. Tính građiên của các hàm số f tại điểm P và đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{u}$:

a) $f(x, y) = x^2y^3 + 4xy^5$, $P(1, -1)$, $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

b) $f(x, y) = e^x\sin y$, $P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

c) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $P(1, -2, 1)$, $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

d) $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$, $P(1, 2, 3)$, $\vec{u}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

20. Tính giá trị lớn nhất của vận tốc biến thiên của hàm số f tại điểm M, giá trị lớn nhất ấy đạt được theo hướng nào?

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $M(3, 4)$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + 2y}$, $M(2, 4)$;

c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $M(4, 2, 1)$;

d) $f(x, y, z) = \cos(2x - 3y + 3z)$, $M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

21. Chứng minh rằng nếu $u(x, y)$, $v(x, y)$ là các hàm số khả vi; a, b là hằng số thì:

a) $\overrightarrow{\text{grad}}(au + bv) = a\overrightarrow{\text{grad}}\, u + b\overrightarrow{\text{grad}}\, v$;

b) $\overrightarrow{\text{grad}}(uv) = u\overrightarrow{\text{grad}}\, v + v\overrightarrow{\text{grad}}\, u$;

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\overrightarrow{\text{grad}}\,u - u\overrightarrow{\text{grad}}\,v}{v^2}$, $v \neq 0$;

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\,(u^n) = nu^{n-1}\overrightarrow{\text{grad}}\,u$, $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y$;

b) $f(x, y) = x\sin y$;

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right)$;

d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$;

e) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$;

f) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$;

g) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$;

h) $f(x, y) = x[(\ln x)^2 + y^2]$;

i) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$, $0 \leq x, y \leq \dfrac{\pi}{4}$;

j) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$.

23. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số:

a) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$;

b) $f(x, y) = x^2 + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$;

24. a) Điểm nào trên mặt $z^2 = xy + 1$ gần gốc toạ độ nhất?

b) Điểm nào trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ gần điểm $(3, -1)$ nhất?

c) Điểm nào trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 4$ gần gốc toạ độ nhất?

d) Trong các hình hộp chữ nhật mà ba mặt nằm trên ba mặt phẳng tọa độ, một đỉnh nằm trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$, hình nào có thể tích lớn nhất.

25. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số f trên miền D:

a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, D là miền tròn đóng $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$;

b) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1$, $y = 1$ và $x + y = 1$;

c) $f(x, y) = 1 + xy - x - y$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 4$;

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ và $y = -1$;

e) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \dfrac{\pi}{2}$.

26. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong tại điểm P:

a) $x = t,\ y = \dfrac{t^2}{2},\ z = \dfrac{t^3}{3},\ P\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$;

b) $x = 2t,\ y = 2\sqrt{2}\cos t,\ z = 2\sqrt{2}\sin t,\ P\left(\dfrac{\pi}{2}, 2, 2\right)$;

c) $x = t\sin t + \cos t,\ y = t\cos t - \sin t,\ z = 2t,\ P\left(\dfrac{\pi}{2}, -1, \pi\right)$;

d) $x = \cos t,\ y = 3e^t,\ z = 3e^{-t}$, $P(1, 3, 3)$.

27. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt tại điểm P:

a) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $P(1, 1, 1)$;

b) $4x^2 + y^2 + z^2 = 24$, $P(2, 2, 2)$;

c) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $P(2, 2, 3)$;

d) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $P(1, 0, 0)$.

C. BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

$$\Rightarrow f(2, 1) = \frac{2.2.1}{2^2 + 2.1^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$f(-1, 3) = \frac{2.(-1).3}{(-1)^2 + 2.3^2} = -\frac{6}{19};$$

$$f(x, 2x^2) = \frac{2.x.2x^2}{x^2 + 2.4x^4} = \frac{4x^3}{x^2 + 8x^4};$$

$$f(x + h, y + k) = \frac{2(x + h)(y + k)}{(x + h)^2 + 2(y + k)^2} =$$

$$= \frac{2xy + 2hy + 2kx + 2hk}{x^2 + 2y^2 + h^2 + 2k^2 + 2hx + 4ky}.$$

2. $g(x, y, z) = x^2 \ln y \sin z$

$$\Rightarrow g\left(-1, e^2, \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^2 \ln(e^2) \sin\frac{\pi}{4} = 1.2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2};$$

$g(t, t, t) = t^2 \ln t \sin t$;

$g(x + y, x, x - y) = (x + y)^2 \ln x \sin(x - y)$.

3. a) Miền xác định của hàm số $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y + 1}$ là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \neq 0\},$$

đó là toàn bộ mặt phẳng tọa độ trừ những điểm trên đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

b) Miền xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$ là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \geq 0\},$$

nó gồm những điểm của mặt phẳng tọa độ nằm ở dưới đường parabôn $y = x^2$, kể cả những điểm trên đường $y = x^2$.

c) Hàm số $f(x, y) = x^2\ln(4 - x^2 - 4y^2)$ xác định khi $4 - x^2 - 4y^2 > 0$. Vậy miền xác định của nó là tập những điểm nằm trong đường elip

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

d) Miền xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{y - 1}$ là tập hợp $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1 \text{ và } y \geq 1\}$, đó là một phần tư của mặt phẳng tọa độ nằm trên đường thẳng $y = 1$ và ở bên phải đường thẳng $x = -1$, kể cả biên của nó (hình 7.1).

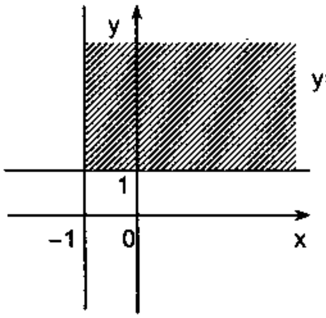
e) Miền xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x}\ln(x + y)$ là tập hợp

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ và } x + y > 0\} \text{ (hình 7.2)}.$$

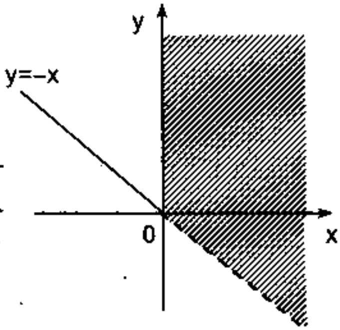
f) Miền xác định của hàm số $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x + y}$ là

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9 \text{ và } x + y \ne 0\},$$

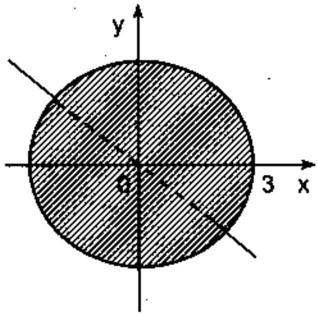
đó là tập hợp những điểm nằm ở trong hay trên đường tròn $x^2 + y^2 = 9$, trừ đi những điểm trên đường phân giác thứ hai (hình 7.3).



Hình 7.1

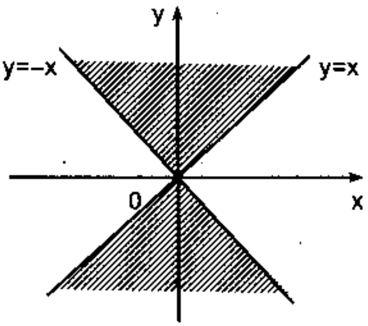


Hình 7.2

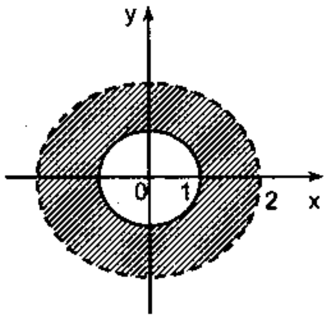


Hình 7.3

g) Hàm số $f(x, y) = \arccos\dfrac{x}{y}$ xác định khi $y \ne 0$ và $\left|\dfrac{x}{y}\right| \le 1$. Miền xác định của nó là tập hợp $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ne 0 \text{ và } x^2 \le y^2\}$. Phương trình $x^2 = y^2$ biểu diễn cặp đường thẳng $y = \pm x$. Vậy miền xác định phải tìm là miền chứa trục Oy nằm giữa hai đường thẳng $y = \pm x$, trừ điểm gốc tọa độ (hình 7.4).



Hình 7.4



Hình 7.5

h) Miền xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ là tập hợp $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 < 4\}$, đó là miền hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn cùng tâm tại gốc tọa độ có bán kính 1 và 2, kể cả đường tròn bán kính 1 (hình 7.5).

i) Hàm số $f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ xác định khi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Miền xác định của nó là hình cầu đơn vị, đóng, tâm tại gốc tọa độ.

j) Miền xác định của hàm số $f(x, y, z) = \ln\left(\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1\right)$ là tập hợp

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} > 1\}$, đó là phần của $\mathbb{R}^3$ nằm trên mặt

phẳng $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

4. a) Phương trình đã cho có thể viết là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1.$$

Đó là phương trình của mặt cầu có tâm tại điểm (1, 1, 0), có bán kính bằng 1.

b) Mặt có phương trình

$$z - 1 = 4x^2 + y^2$$

là mặt parabôlôit eliptic nhận các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$ làm mặt phẳng đối xứng. Nó cắt mặt phẳng $x = 0$ theo đường parabôn

$$z = y^2 + 1,\ x = 0;$$

cắt mặt phẳng $y = 0$ theo đường parabôn

$$z = 4x^2 + 1,\ y = 0;$$

cắt mặt phẳng $z = k$ nếu $k \ge 1$ theo đường elip

$$4x^2 + y^2 = k - 1.$$

c) Viết lại phương trình dưới dạng dưới dạng

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1.$$

Đó là phương trình của mặt hypebôlôit một tầng, nhận các mặt phẳng tọa độ làm mặt phẳng đối xứng, nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Mặt đó cắt các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$ theo các đường hypebôn:

$$y^2 - \frac{z^2}{4} = 1,\ x = 0,$$

$$x^2 - \frac{z^2}{4} = 1,\ y = 0,$$

cắt mặt phẳng z = k theo đường tròn

$$x^2 + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4}.$$

Do đó mặt đang xét là một mặt tròn xoay, do hypebôn $x^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, $y = 0$ quay quanh trục Oz sinh ra.

d) Phương trình $y - x^2 - 1 = 0$ không chứa biến số z, nên là phương trình của mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, cắt mặt phẳng $z = 0$ theo đường parabôn $y = x^2 + 1$.

e) Mặt bậc hai $y^2 - x^2 - 1 = 0$ là mặt trụ, có đường sinh song song với trục Oz, cắt mặt phẳng $z = 0$ theo đường hypebôn $y^2 - x^2 = 1$.

f) Mặt $y^2 - x^2 - z^2 = 0$ cắt mặt phẳng $z = 0$ theo đường có phương trình $y^2 - x^2 = 0$, tức là theo cặp đường thẳng $y = \pm x$, cắt mặt phẳng $x = 0$ theo cặp đường thẳng $y = \pm z$ và chỉ giao với mặt phẳng $y = 0$ tại gốc tọa độ. Nó cắt mặt phẳng $z = k$ theo đường tròn $x^2 + z^2 = k^2$. Đó là mặt nón tròn xoay có đỉnh tại gốc tọa độ, nhận Oz làm trục đối xứng.

5. a) Ta có: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5xy^2 - 3x^2y + 1}{2xy - 1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

b) Ta có:

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3};$$

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

Khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo hai hướng khác nhau, f(x, y) dần tới hai giới hạn khác nhau, do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

c) Ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2 + x^2 + y^2)}{2}.\frac{\sin y}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 + x^2 + y^2}{2}.\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 1 \,.\, 1 = 1.$$

d) Ta có:

$$\lim_{x \to 0} f(x,-x) = \lim_{x \to 0} \frac{(x-x^2)}{2x^2} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Vì $0 \neq 1$, nên không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

e) Ta có

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2+1}+1$$

nếu $(x,y) \neq (0,0)$. Do đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right) = 2.$$

6. a) $f(x, y) = x^2y^2(x^3+y^3) = x^5y^2 + x^2y^5$

$\Rightarrow$ $f_x = 5x^4y^2 + 2xy^5$;

$f_y = 2x^5y + 5x^2y^4$.

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\Rightarrow \quad f_x = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$f_y = x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2y) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

c) $f(x, y) = y\ln(x^2-y^2)$

$$\Rightarrow \quad f_x = \frac{2xy}{x^2-y^2};$$

$$f_y = \ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

d) $f(x, y) = -y\sqrt{x} + 4x\sqrt[3]{y^2} = -yx^{\frac{1}{2}} + 4xy^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow$ $f_x = -\dfrac{1}{2}yx^{-\frac{1}{2}} + 4y^{2/3} = -\dfrac{y}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{y^2}$;

$f_y = -\sqrt{x} + 4x.\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} = -\sqrt{x} + \dfrac{8x}{3\sqrt[3]{y}}$.

e) $f(x, y) = e^{2x^2 - xy + y^2}$

$\Rightarrow$ $f_x = e^{2x^2 - xy + y^2}(4x - y)$;

$f_y = e^{2x^2 - xy + y^2}(2y - x)$.

f) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y}{x}$

$\Rightarrow$ $f_x = \dfrac{3x^2}{y^3} - \dfrac{y}{x^2}$;

$f_y = -\dfrac{3x^3}{y^4} + \dfrac{1}{x}$.

g) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1 + x^2}$

$\Rightarrow$ $f_x = \dfrac{1}{1 + \dfrac{y^2}{(1+x^2)^2}} . \left(-\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}\right) = -\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2 + y^2}$;

$f_y = \dfrac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + y^2} . \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2 + y^2}$.

h) $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

$\Rightarrow$ $f_x = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$$f_y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}.$$

i) $f(x, y) = e^{xy}tg(x - 2y)$

$$\Rightarrow \quad f_x = e^{xy}\frac{1}{\cos^2(x-2y)} + ye^{xy}tg(x-2y);$$

$$f_y = -2e^{xy}\frac{1}{\cos^2(x-2y)} + xe^{xy}tg(x-2y).$$

j) $f(x, y) = x^{y^2}$

$$\Rightarrow \quad f_x = y^2x^{y^2-1};$$

$$f_y = x^{y^2}.2y.\ln x.$$

k) $f(x, y, z) = e^{xyz}\sin\frac{y}{x}$

$$\Rightarrow \quad f_x = yze^{xyz}\sin\frac{y}{x} + e^{xyz}.\cos\frac{y}{x}.\left(-\frac{y}{x^2}\right) = e^{xyz}\left(yz\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right);$$

$$f_y = xze^{xyz}\sin\frac{y}{x} + e^{xyz}.\cos\frac{y}{x}.\left(\frac{1}{x}\right) = e^{xyz}\left(xz\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\right);$$

$$f_z = xye^{xyz}\sin\frac{y}{x}.$$

l) $f(x, y, z) = z\sin\frac{y}{x+z}$

$$\Rightarrow \quad f_x = z\cos\frac{y}{x+z}.\left(-\frac{y}{(x+z)^2}\right) = -\frac{zy}{(x+z)^2}\cos\frac{y}{x+z};$$

$$f_y = \frac{z}{x+z}\cos\frac{y}{x+z};$$

$$f_z = \sin\frac{y}{x+z} + z\cos\frac{y}{x+z}.\left(-\frac{y}{(x+z)^2}\right) = \sin\frac{y}{x+z} - \frac{zy}{(x+z)^2}\cos\frac{y}{x+z}.$$

7. a) Áp dụng công thức

$$df = f_x dx + f_y dy.$$

vào hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, ta có:

$$f_x = 3x^2 - 3y,\ \ f_y = 3y^2 - 3x;$$

$$df = (3x^2 - 3y)dx + (3y^2 - 3x)dy.$$

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

$$\Rightarrow\ f_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},\ \ f_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$df = \frac{(y^2 - x^2)dx - 2xy\,dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

c) $f(x, y) = ye^{xy}$

$\Rightarrow$ $f_x = y^2e^{xy}$, $f_y = e^{xy} + xye^{xy}$;

$df = e^{xy}[y^2dx + (1 + xy)\,dy]$.

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y^2 + 1)$

$$\Rightarrow\ df = \frac{2xdx + 6ydy}{x^2 + 3y^2 + 1}.$$

e) $f(x, y) = e^{x+y}\sin(x - y)$

$\Rightarrow$ $f_x = e^{x+y}\sin(x - y) + e^{x+y}\cos(x - y)$,

$f_y = e^{x+y}\sin(x - y) - e^{x+y}\cos(x - y)$;

$df = e^{x+y}\ \{[\sin(x - y) + \cos(x - y)]\,dx + [\sin(x - y) - \cos(x - y)]\,dy\}$.

f) $f(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^3}$

$$\Rightarrow\ f_x = \sqrt{y^2 + z^3},\ f_y = \frac{xy}{\sqrt{y^2 + z^3}},\ f_z = \frac{3xz^2}{2\sqrt{y^2 + z^3}};$$

$$df = \sqrt{y^2 + z^3}\ dx + \frac{xy}{\sqrt{y^2 + z^3}}\,dy + \frac{3xz^2}{2\sqrt{y^2 + z^3}}\,dz.$$

g) $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\Rightarrow\ df = \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

h) $\quad f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^{-x}$

$\Rightarrow \quad df = (e^y - ze^{-x})dx + (xe^y + e^z)dy + (ye^z + e^{-x})dz.$

8. a) Ta cần tính gần đúng $f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ với:

$$f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2}\ ;\ x_o = 2;\ y_o = 8;\ \Delta x = -0{,}05;\ \Delta y = 0{,}1.$$

Theo công thức tính gần đúng

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) \approx f(x_o; y_o) + f_x(x_o, y_o)\Delta x + f_y(x_o, y_o)\Delta y,$$

trong đó:

$$f_x = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + y^2}},\ f_y = \frac{y}{\sqrt{9x^2 + y^2}},\ f(2, 8) = 10;$$

$$f_x(2, 8) = \frac{18}{10} = 1{,}8\ ,\ f_y(2, 8) = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Vậy

$$f(1{,}95; 8{,}1) \approx 10 - (1{,}8)(0{,}05) + (0{,}8)(0{,}1) = 10 - 0{,}09 + 0{,}08 = 9{,}99.$$

b) Tính $f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ với:

$$f(x, y) = \ln(x^3 + y^3);\ x_o = 0;\ y_o = 1;\ \Delta x = 0{,}09;\ \Delta y = -0{,}01.$$

Ta có:

$$f_x = \frac{3x^2}{x^3 + y^3},\ f_y = \frac{3y^2}{x^3 + y^3};$$

$$f(0, 1) = \ln 1 = 0;\ f_x(0, 1) = 0;\ f_y(0, 1) = 3;$$

$$f(0{,}09; 0{,}99) \approx 3.(-0{,}01) = -0{,}03.$$

c) Với hàm số ba biến số $f(x, y, z)$ ta cũng có công thức tính gần đúng tương tự như với hàm số hai biến số

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y, z_o + \Delta z) \approx f(x_o, y_o, z_o) + f_x(x_o, y_o; z_o)\Delta x + f_y(x_o, y_o, z_o)\Delta y + f_z(x_o; y_o, z_o)\Delta z.$$

Ta cần tính $\quad f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y, z_o + \Delta z)$ với:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}\ ;\ x_o = 1;\ y_o = 2;\ z_o = 1;$$
$$\Delta x = 0{,}04;\ \Delta y = -0{,}01;\ \Delta z = 0{,}02.$$

Ta có:

$$f_x = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}},\ f_y = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}},\ f_z = \frac{1}{2z\sqrt{x^y + \ln z}};$$

$$f(1, 2, 1) = 1;\ f_x(1, 2, 1) = 1;\ f_y(1, 2, 1) = 0;\ f_z(1, 2, 1) = \frac{1}{2}.$$

Vậy: $f(1{,}04;\ 1{,}99;\ 1{,}02) \approx 1 + 0{,}04 + 0{,}01 = 1{,}05.$

d) Tính $f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ với :

$$f(x, y) = \sqrt{5e^x + y^2}\ ;\ x_o = 0,\ y_o = 2;\ \Delta x = 0{,}02;\ \Delta y = 0{,}03.$$

Ta có

$$f_x = \frac{5e^x}{2\sqrt{5e^x + y^2}},\quad f_y = \frac{y}{\sqrt{5e^x + y^2}};$$

$$f(0, 2) = 3;\qquad f_x(0, 2) = \frac{5}{6};\qquad f_y(0, 2) = \frac{2}{3}.$$

Vậy: $f(0{,}02;\ 2{,}03) = 3 + \frac{5}{6}.(0{,}02) + \frac{2}{3}.(0{,}03) = 3{,}037.$

e) Tính $f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y, z_o + \Delta z)$ với:

$$f(x, y, z) = x^2 y^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{3}{4}};\ x_o = 1;\ y_o = 1;\ z_o = 1;$$

$$\Delta x = 0{,}03;\ \Delta y = -0{,}02;\ \Delta z = 0{,}05.$$

Ta có:

$$f_x = 2xy^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{3}{4}},\ f_y = -\frac{1}{3}x^2 y^{-\frac{4}{3}} z^{-\frac{3}{4}},\ f_z = -\frac{3}{4}x^2 y^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{7}{4}};$$

$$f(1, 1, 1) = 1,\ f_x(1, 1, 1) = 2,\ f_y(1,1,1) = -\frac{1}{3},\ f_z(1,1,1) = -\frac{3}{4}.$$

Vậy: $f(1{,}03;\ 0{,}98;\ 1{,}05) \approx 1 + 2.(0{,}03) + \frac{1}{3}.(0{,}02) - \frac{3}{4}(0{,}05) \approx 1{,}027.$

f) Tính $f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y, z_o + \Delta z)$ với:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ;\ x_o = 3;\ y_o = 2;\ z_o = 6;$$

$$\Delta x = 0{,}02;\ \Delta y = -0{,}01;\ \Delta z = -0{,}02.$$

Ta có

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ f_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$f(3, 2, 6) = 7$, $f_x(3, 2, 6) = \frac{3}{7}$, $f_y(3, 2, 6) = \frac{2}{7}$, $f_z(3, 2, 6) = \frac{6}{7}$.

Vậy:

$$f(3{,}02;\ 1{,}99;\ 5{,}98) \approx 7 + \frac{3}{7}.(0{,}02) + \frac{2}{7}.(-0{,}01) + \frac{6}{7}.(-0{,}02) \approx 6{,}989.$$

9. a) $f(x, y) = x^3y^2 + 2x\sqrt{y}$

$$\Rightarrow \quad f_x = 3x^2y^2 + 2\sqrt{y},\quad f_y = 2x^3y + \frac{x}{\sqrt{y}};$$

$$f_{xx} = 6xy^2,\ f_{xy} = f_{yx} = 6x^2y + \frac{1}{\sqrt{y}},\ f_{yy} = 2x^3 - \frac{x}{2\sqrt{y^3}}.$$

b) $f(x, y) = \cos^2(2x - 3y) = \frac{1}{2}[1 + \cos(4x - 6y)]$

$$\Rightarrow \quad f_x = -2\sin(4x - 6y),\ f_y = 3\sin(4x - 6y);$$

$$f_{xx} = -8\cos(4x - 6y),\ f_{xy} = f_{yx} = 12\cos(4x - 6y),\ f_{yy} = -18\cos(4x - 6y).$$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \quad f_x = 3x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},\ f_y = 3y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$f_{xx} = 3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 3x\,x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3(x^2 + y^2) + 3x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 3\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ f_{yy} = 3\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

d) $f(x, y) = \sin(x - y) + \cos(x + y)$

$$\Rightarrow \quad f_x = \cos(x - y) - \sin(x + y),\ f_y = -\cos(x - y) - \sin(x + y);$$

$$f_{xx} = -\sin(x - y) - \cos(x + y),\ f_{xy} = f_{yx} = \sin(x - y) - \cos(x + y),$$

$$f_{yy} = -\sin(x - y) - \cos(x + y).$$

10. a) $f(x, y) = x^3y^2 - 5x^4y$

$\Rightarrow \quad f_x = 3x^2y^2 - 20x^3y;\ f_{xx} = 6xy^2 - 60x^2y;\ f_{xxx} = 6y^2 - 120xy.$

b) $\quad f(x, y) = e^{xy^2}$

$\Rightarrow \quad f_x = y^2 e^{xy^2};\ f_{xx} = y^4 e^{xy^2},$

$f_{xxy} = 4y^3 e^{xy^2} + y^4 e^{xy^2}.2xy = 2y^3 e^{xy^2}(2 + xy^2).$

c) $\quad f(x, y) = \cos(ax + e^y)$

$\Rightarrow \quad f_x = -a\sin(ax + e^y);\ f_{xy} = -a\cos(ax + e^y)e^y;$

$f_{xyy} = a\sin(ax + e^y)\, e^{2y} - a\cos(ax + e^y)e^y.$

d) $\quad f(x, y, z) = e^{xyz}$

$\Rightarrow \quad f_y = xze^{xyz};\ f_{yz} = xe^{xyz} + x^2zye^{xyz};$

$f_{yzy} = x^2ze^{xyz} + x^2ze^{xyz} + x^3yz^2e^{xyz} = x^2ze^{xyz}(2 + xyz).$

e) $\quad f(x, y, z) = e^{xy}\sin z$

$\Rightarrow \quad f_z = e^{xy}\cos z;\ f_{zy} = x\cos z.e^{xy};$

$f_{zyx} = \cos z.e^{xy} + xy\cos z.e^{xy} = \cos z.e^{xy}(1 + xy).$

f) $\quad f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$

$$\Rightarrow \quad f_x = \frac{2x}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}, \quad f_{xy} = -\frac{8xy}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2},$$

$$f_{xyz} = \frac{8xy.2.(x^2 + 2y^2 + 3y^2)6z}{(x^2 + 2y^2 + 3x^2)^4} = \frac{96xyz}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^3}.$$

11. a) $\quad u(x, y) = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad u_x = 2x,\ u_{xx} = 2,\ u_{yy} = 2$

$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 4 \neq 0.$

b) $\quad u(x, y) = x^2 - y^2$

$\Rightarrow \quad u_x = 2x,\ u_{xx} = 2,\ u_y = -2y,\ u_{yy} = -2$

$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.$

c) $\quad u(x, y) = x^3 + 3xy^2$

$\Rightarrow \quad u_x = 3x^2 + 3y^2,\ u_{xx} = 6x,\ u_y = 6xy,\ u_{yy} = 6x$

$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 12x \neq 0$ nếu $x \neq 0.$

d) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

$\Rightarrow \quad u_x = 3x^2 - 3y^2, u_{xx} = 6x, u_y = -6xy, u_{yy} = -6x$

$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.$

e) Đặt $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, hàm số $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \ln r$ xác định khi $r \neq 0$.

Ta có $u_x = u_r.r_x$. Nhưng $u_r = \frac{1}{r}$, $r_x = \frac{x}{r}$, nên $u_x = \frac{1}{r}.\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}$. Do đó

$$u_{xx} = \frac{r^2 - x.2r.r_x}{r^4} = \frac{r^2 - x.2r.\frac{x}{r}}{r^4} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}$$

Vì lý do đối xứng, ta có

$$u_{yy} = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4}.$$

Do đó

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{r^2 - 2x^2 + r^2 - 2y^2}{r^4} = \frac{2r^2 - 2(x^2 + y^2)}{r^4} = \frac{2r^2 - 2r^2}{r^4} = 0.$$

f) $u(x, y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

$\Rightarrow \quad u_x = -e^{-x}\cos y + e^{-y}\sin x;\ u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x;$

$u_y = -e^{-x}\sin y + e^{-y}\cos x;\ u_{yy} = -e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.$

Vậy các hàm số b), d), e), f) thỏa mãn phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

12. a) $u(x, t) = \sin(kx)\sin(akt)$

$\Rightarrow \quad u_x = k\cos(kx)\sin(akt);\quad u_{xx} = -k^2\sin(kx)\sin(akt);$

$u_t = ak\sin(kx)\cos(akt);\quad u_{tt} = -a^2k^2\sin(kx)\sin(akt)$

$\Rightarrow \quad u_{tt} = a^2u_{xx}.$

b) $u(x, t) = (x - at)^4 + (x + at)^4$

$\Rightarrow \quad u_x = 4(x - at)^3 + 4(x + at)^3, u_{xx} = 12(x - at)^2 + 12(x + at)^2;$

$u_t = -4a(x - at)^3 + 4a(x + at)^3, u_{tt} = 12a^2(x - at)^2 + 12a^2(x + at)^2$

$\Rightarrow \quad u_{tt} = a^2u_{xx}.$

c) $u(x, t) = \sin(x - at) + \ln(x + at)$

$$\Rightarrow \quad u_x = \cos(x - at) + \frac{1}{x + at}; \quad u_{xx} = -\sin(x - at) - \frac{1}{(x + at)^2};$$

$$u_t = -a\cos(x - at) + \frac{a}{x + at}, \quad u_{tt} = -a^2 \sin(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

Chú thích. Có thể chứng minh được rằng, nếu f(u) và f(v) là hai hàm số bất kỳ có đạo hàm cấp hai liên tục thì hàm số z = f(x − at) + g(x + at) thỏa mãn phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

13. a) Nếu hàm số hai biến số độc lập u(x, y) thỏa mãn phương trình $u_x = 0$ thì u(x, y) không phụ thuộc x, vậy u(x, y) = f(y) với mọi hàm số f bất kỳ.

b) Vì $u_{xy} = (u_x)_y = 0$, nên u_x không phụ thuộc y, do đó $u_x = f(x)$ với mọi hàm số f bất kỳ. Nếu gọi F(x) là một nguyên hàm nào đó của f(x), ta được

$$u(x, y) = F(x) + G(y),$$

G(y) đóng vai trò của hằng số tùy ý khi lấy nguyên hàm đối với x, còn F(x) là một hàm số khả vi tùy ý vì là nguyên hàm của hàm số f(x). Tóm lại nghiệm của phương trình $u_{xy} = 0$ có dạng u(x, y) = F(x) + G(y).

14. a) Biểu thức ω = P(x, y)dx + Q(x, y)dy là một vi phân toàn phần khi và chỉ khi $P_y = Q_x$. Ta có

$$P(x, y) = 3x^2 + y, \; Q(x, y) = x - 4y^2 \Rightarrow P_y = 1 = Q_x.$$

Do đó ω là một vi phân toàn phần. Hàm số f(x, y) thỏa mãn điều kiện df = ω khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y \\ f_y = x - 4y^2 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu của hệ, ta được

$$f(x, y) = x^3 + xy + \varphi(y),$$

φ(y) là một hàm số khả vi bất kỳ của biến số y. Do đó

$$f_y = x + \varphi'(y).$$

So sánh với phương trình sau của hệ, ta được $\varphi'(y) = -4y^2$, do đó

$$\varphi(y) = -\frac{4}{3}y^3 + C,$$

trong đó C là hằng số tùy ý, vậy

$$f(x, y) = x^3 + xy - \frac{4}{3}y^3 + C.$$

b) $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, $P(x, y) = 5xy + 3$, $Q(x, y) = 2y^2 - x^2 + 1$

$$\Rightarrow \quad P_y = 5x,\ Q_x = -2x \qquad \Rightarrow \quad P_y \neq Q_x.$$

Vậy ω không là vi phân toàn phần.

c) $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, $P(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3$, $Q(x, y) = 2x^3y - 2x^2$

$$\Rightarrow \quad P_y = 6x^2y - 4x = Q_x.$$

Vậy ω là vi phân toàn phần của hàm $f(x, y)$.

Tìm hàm $f(x, y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} f_x = 3x^2y^2 - 4xy + 3 \\ f_y = 2x^3y - 2x^2 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu của hệ ta được

$$f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ là một hàm số khả vi bất kỳ, do đó

$$f_y = 2x^3y - 2x^2 + \varphi'(y)$$

So sánh với phương trình sau của hệ, ta được $\varphi'(y) = 0$, do đó $\varphi(y) = C$, C là hằng số tùy ý. Vậy

$$f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x + C.$$

d) $\quad \omega = (6x + \sin y)dx + (x\cos y + y^2 + \sin y)dy$

$$= 6xdx + (y^2 + \sin y)dy + \sin y dx + x\cos y dy$$

Ta nhận thấy rằng:

$$6xdx = d(3x^2),\ (y^2 + \sin y)dy = d\left(\frac{y^3}{3} - \cos y\right),$$

$$\sin y dx + x\cos y dy = d(x\sin y).$$

Do đó

$$\omega = d\left(3x^2 + \frac{y^3}{3} - \cos y + x\sin y\right).$$

Vậy ω là vi phân toàn phần của hàm số

$$f(x, y) = 3x^2 + \frac{y^3}{3} - \cos y + x\sin y + C,$$

C là hằng số tùy ý.

Sinh viên hãy tìm lại kết quả này bằng phương pháp giải của các câu trên.

e) $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$,

$P(x, y) = x\cos y - y\sin y$, $Q(x, y) = x\sin y + y\cos y$,

$\Rightarrow$ $P_y = -x\sin y - y\cos y - \sin y$, $Q_x = \sin y$

$\Rightarrow$ $P_y \neq Q_x$.

Vậy ω không là vi phân toàn phần.

f) $\omega = (y + e^x\cos y + x^2)dx + (x - e^x\sin y + e^y)dy$

$= x^2dx + e^ydy + ydx + xdy + (e^x\cos ydx - e^x\sin ydy)$

Vì $x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$, $e^ydy = d(e^y)$, $xdy + ydx = d(xy)$,

$e^x\cos ydx - e^x\sin ydy = d(e^x\cos y)$, nên

$$\omega = d\left(\frac{x^3}{3} + e^y + xy + e^x\cos y\right).$$

Vậy ω là vi phân toàn phần phần của hàm số

$$f(x, y) = \left(\frac{x^3}{3} + e^y + xy + e^x\cos y\right) + C,$$

C là hằng số tùy ý.

g) $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, $P(x, y) = x^2\ln y$, $Q(x, y) = -(x + y^2\ln x)$,

$$\Rightarrow \quad P_y = \frac{x^2}{y}, Q_x = -1 - \frac{y^2}{x} \Rightarrow P_y \neq Q_x.$$

Vậy ω không là vi phân toàn phần.

h) $$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

$$P(x, y) = \frac{1}{y} + \frac{2y}{x^3}, Q(x,y) = -\left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad P_y = -\frac{1}{y^2} + \frac{2}{x^3} = Q_x,$$

do đó ω là vi phân toàn phần.

Tìm hàm f(x, y) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{y} + \frac{2y}{x^3} \\ f_y = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Từ phương trình sau của hệ, ta được

$$f(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} + \varphi(x),$$

φ(x) là hàm số khả vi bất kỳ của x. Do đó

$$f_x = \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} + C .$$

So sánh với phương trình đầu ta có $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$, C là hằng số bất kỳ. Vậy

$$f(x, y) = \frac{1}{y} + \frac{2y}{x^3} + \varphi'(x)$$

15. a) $z = u^3 + v^3$, $u = x^2$, $v = 1 - e^x$.

Theo công thức

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}.u'(x) + \frac{\partial z}{\partial v}v'(x),$$

ta có

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2, \ \frac{\partial z}{\partial v} = 3v^2, \ u'(x) = 2x, \ v'(x) = -e^x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 3u^2.2x + 3v^2(-e^x) = 3x^4.2x + 3(1 - e^x)^2(-e^x)$$

$$= 6x^5 - 3e^x(1 - 2e^x + e^{2x}).$$

b) $z = u\sqrt{1+v^2}$, $u = xe^{-x}$, $v = \cos x$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{1+v^2},\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{uv}{\sqrt{1+v^2}},\ u'(x) = e^{-x} - xe^{-x},\ v'(x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{1+\cos^2 x}\ e^{-x}(1-x) + \frac{xe^{-x}\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}(-\sin x)$$

$$= \frac{(1+\cos^2 x)\, e^{-x}(1-x) - xe^{-x}\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

c) $z = \ln(u + v^2)$, $u = \sqrt{1+x}$, $v = 1 + \sqrt{x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u+v^2},\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u+v^2},\ u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x+2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{2(1+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+1+x+2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x+2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right).$$

16. a) Áp dụng công thức

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ta có $\quad z = u^2\sin v,\ u = x^2 + y^2,\ v = 2xy$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 2u\sin v,\ \frac{\partial z}{\partial v} = u^2\cos v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2+y^2)\sin(2xy).2x + (x^2+y^2)^2\cos(2xy).2y$$

$$= (x^2+y^2)[4x\sin(2xy) + 2y(x^2+y^2)\cos(2xy)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)\sin(2xy).2y + (x^2 + y^2)^2\cos(2xy).2x$$

$$= (x^2 + y^2)[4y\sin(2xy) + 2x.(x^2 + y^2)\cos(2xy)].$$

b) $z = \sin u\cos v,\ u = (x - y)^2,\ v = x^2 - y^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \cos u\ \cos v,\ \frac{\partial z}{\partial v} = -\sin u\ \sin v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y),\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x - y)^2 \cos(x^2 - y^2).2(x - y) - \sin(x - y)^2 \sin(x^2 - y^2).2x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\cos(x - y)^2 \cos(x^2 - y^2).2(x - y) + \sin(x - y)^2 \sin(x^2 - y^2).2y.$$

c) $\quad z = u^2 - 3u^2v^3,\ u = xe^y,\ v = xe^{-y}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 2u - 6uv^3\ ,\ \frac{\partial z}{\partial v} = -9u^2v^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y\ .\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -xe^{-y}\ .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2xe^y - 6x^4e^{-2y})e^y - 9x^4e^{-y} = 2xe^{2y} - 15x^4e^{-y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2xe^y - 6x^4e^{-2y})xe^y + 9x^4e^{-y}x = 2x^2e^{2y} + 3x^5e^{-y}.$$

d) $\quad z = \text{arctg}(uv),\ u = x^2,\ v = xe^y$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{v}{1 + u^2v^2},\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u}{1 + u^2v^2}\ .$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^y\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y} = xe^y\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xe^y}{1 + x^6e^{2y}}.2x + \frac{x^2}{1 + x^6e^{2y}}.e^y = \frac{3x^2e^y}{1 + x^6e^{2y}}\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{1 + x^6e^{2y}}.xe^y = \frac{x^3e^y}{1 + x^6e^{2y}}\ .$$

e) $z = e^{u-3v},\ u = x^2y,\ v = xy^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = e^{u-3v},\ \frac{\partial z}{\partial v} = -3e^{u-3v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2,\ \frac{\partial v}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y-3xy^2}(2xy - 3y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y-3xy^2}(x^2 - 6xy).$$

17. a) Ta có

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{u},$$

$$u_{xx} = \frac{u - xu_x}{u^2} = \frac{u - x.\dfrac{x}{u}}{u^2} = \frac{u^2-x^2}{u^3}.$$

Vì u không đổi khi ta hoán vị vòng quanh x, y, z với nhau, nên

$$u_{yy} = \frac{u^2-y^2}{u^3},\ u_{zz} = \frac{u^2-z^2}{u^3}.$$

Do đó

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = \frac{u^2-x^2+u^2-y^2+u^2-z^2}{u^3} = \frac{3u^2-(x^2+y^2+z^2)}{u^3}$$

$$= \frac{3u^2-u^2}{u^3} = \frac{2}{u} \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

b) Ta có

$$z = y\ln(x^2-y^2),$$

$$z_x = \frac{2xy}{x^2-y^2},\ z_y = -\frac{2y^2}{x^2-y^2} + \ln(x^2-y^2),$$

$$\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = \frac{2y-2y}{x^2-y^2} + \frac{1}{y}\ln(x^2-y^2) = \frac{y\ln(x^2-y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

c) Ta có

$$u = xf(x+y) + yg(x+y)$$

$$u_x = xf'(x+y) + yg'(x+y) + f(x+y)$$

$$u_y = xf'(x+y) + yg'(x+y) + g(x+y)$$

$$u_{xx} = xf''(x+y) + yg''(x+y) + 2f'(x+y) \qquad (1)$$

$$u_{xy} = xf''(x+y) + yg''(x+y) + f'(x+y) + g'(x+y) \qquad (2)$$

$$u_{yy} = xf''(x+y) + yg''(x+y) + 2g'(x+y) \qquad (3)$$

Nhân phương trình (1) với 1, nhân phương trình (2) với (–2), nhân phương trình (3) với 1 rồi cộng lại, ta được

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

18. a) Nếu y là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$, và nếu

$$F'_y(x, y) \neq 0 \Rightarrow y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Ta có:

$$F(x, y) = y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 - 9 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 6xy^2 + 20x^3,\ F_y(x, y) = 5y^4 + 6x^2y$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{6xy^2 + 20x^3}{5y^4 + 6x^2y}.$$

b) $$F(x, y) = y^3 + (x^2+1)y + x^4 = 0,$$

$$F_x(x, y) = 2xy + 4x^3,\ F_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{2xy + 4x^3}{3y^2 + x^2 + 1}.$$

c) Ta có

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên theo x và lưu ý rằng y là hàm số ẩn của x, ta được

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{xy'-y}{x^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad x + yy' = xy' - y \Rightarrow y'(x-y) = x + y \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Để tính đạo hàm y", đạo hàm hai vế của (*) đối với x, ta được

$$(x-y)y'' + (1-y')y' = 1 + y'$$

$$\Rightarrow \quad (x-y)y'' = 1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

d) và e) sinh viên tự giải

f) $\quad F(x, y) = xy^2 - \sin(x+y) + y = 0$

$$\Rightarrow \quad F_x = y^2 - \cos(x+y),\; F_y = 2xy - \cos(x+y) + 1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\cos(x+y) - y^2}{2xy - \cos(x+y) + 1}.$$

g) Nếu phương trình F(x, y, z) = 0 xác định z là hàm ẩn của hai biến số x, y và nếu $F_z(x, y, z) \neq 0$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

Ta có

$$F(x, y, z) = xy + yz - zx = 0,$$

$$\Rightarrow \quad F_x(x, y, z) = y - z.\; F_y(x, y, z) = x + z.\; F_z(x, y, z) = y - x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y-z}{x-y},\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z}{x-y}.$$

h) $\quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x(y+z) = 0.$

$$\Rightarrow \quad F_x(x, y, z) = 2x - 2(y+z),\; F_y(x, y, z) = 2y - 2x,$$

$$F_z(x, y, z) = -2z - 2x$$

$$\Rightarrow \quad z_x = \frac{x - y - z}{x + z}, \quad z_y = \frac{y - x}{x + z}.$$

i) $F(x, y, z) = yx^4 + x^2y^3 - e^{xyz} = 0$

$$\Rightarrow \quad F_x(x, y, z) = 4yx^3 + 2xy^3 - yze^{xyz},$$

$$F_y(x, y, z) = x^4 + 3x^2y^2 - xze^{xyz},$$

$$F_z(x, y, z) = -xye^{xyz}$$

$$\Rightarrow \quad z_x = \frac{yze^{xyz} - 4x^3y - 2xy^3}{-xye^{xyz}},$$

$$z_y = \frac{xze^{xyz} - x^4 - 3x^2y^2}{-xye^{xyz}}.$$

j) $F(x, y, z) = xe^y + yz + ze^x = 0$

$$\Rightarrow \quad F_x = e^y + ze^x, \; F_y = xe^y + z, \; F_z = y + e^x$$

$$\Rightarrow \quad z_x = -\frac{e^y + ze^x}{y + e^x}, z_y = -\frac{xe^y + z}{y + e^x}.$$

k) $F(x, y, z) = \ln(1 + y - z) - z - x = 0$

$$\Rightarrow \quad F_x = -1, \; F_y = \frac{1}{1 + y - z}, \; F_z = \frac{-1}{1 + y - z} - 1 = -\frac{2 + y - z}{1 + y - z}$$

$$\Rightarrow \quad z_x = -\frac{1 + y - z}{2 + y - z}, \quad z_y = \frac{1}{2 + y - z}.$$

19. a) $f(x, y) = x^2y^3 + 4xy^5$

$$\Rightarrow \quad f_x = 2xy^3 + 4y^5, \; f_y = 3x^2y^2 + 20xy^4,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(1, -1) = f_x(1, -1)\vec{i} + f_y(1, -1)\vec{j} = -6\vec{i} + 23\vec{j}.$$

Vì $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$ nên

$$D_{\vec{u}} f(1, -1) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(1, -1).\vec{u} = (-6).\frac{3}{5} - \frac{4}{5}.23 = -22.$$

b) $f(x, y) = e^x \sin y$

$\Rightarrow$ $f_x = e^x \sin y,\ f_y = e^x \cos y,\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{e}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{e}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Vì $\vec{u} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ nên

$$D_{\vec{u}} f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{e}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{e}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{e}{\sqrt{10}}.$$

c) $f(x, y, z) = xy^2z^3$

$\Rightarrow$ $f_x = y^2z^3,\ f_y = 2xyz^3,\ f_z = 3xy^2z^2,$

$\overrightarrow{\text{grad}} f(1, -2, 1) = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$

Vì $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$ nên

$$D_{\vec{u}} f(1, -2, 1) = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

d) $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$

$\Rightarrow$ $f_x = 2xy + \sqrt{1+z}\ ,\ f_y = x^2,\ f_z = \dfrac{x}{2\sqrt{1+z}},$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(1, 2, 3) = 6\vec{i} + \vec{j} + \dfrac{1}{4}\vec{k}$.

Vì $\vec{u} = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{1}{3}\vec{j} - \dfrac{2}{3}\vec{k}$ nên

$$D_{\vec{u}} f(1, 2, 3) = 6.\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} - \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{25}{6}.$$

20. a) Vận tốc biến thiên của hàm số f tại điểm M đạt giá trị lớn nhất theo hướng của vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$, giá trị lớn nhất ấy bằng $|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)|$. Ta có

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\ f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},\ f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(3, 4) = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j},\ |\overrightarrow{\text{grad}}\, f(3, 4)| = \sqrt{\frac{6^2 + 8^2}{25^2}} = \frac{10}{25}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của vận tốc biến thiên của f tại M bằng $\frac{10}{25}$, đạt được theo hướng của vectơ $\left(\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right)$.

b) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + 2y}$, $f_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2y}}$, $f_y = \frac{1}{\sqrt{x^3+2y}}$

$\overrightarrow{\text{grad}}f(2,4) = \frac{6}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{\text{grad}}f(2,4)\right| = \frac{\sqrt{37}}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của vận tốc biến thiên của f tại M bằng $\frac{\sqrt{37}}{4}$, đạt được theo hướng của vectơ $\left(\frac{6}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $f_x = \frac{1}{y}$, $f_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$, $f_z = -\frac{y}{z^2}$

$\overrightarrow{\text{grad}}f(4,2,1) = \frac{1}{2}\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k}$, $\left|\overrightarrow{\text{grad}}f(4,2,1)\right| = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của vận tốc biến thiên của f tại M bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$, đạt được theo hướng của vectơ $\left(\frac{1}{2}, 0; -2\right)$.

d) $f(x, y, z) = \cos(2x - 3y + 3z)$

$\Rightarrow$ $f_x = -2\sin(2x - 3y + 3z)$, $f_y = 3\sin(2x - 3y + 3z)$,

$f_z = -3\sin(2x - 3y + 3z)$,

$\overrightarrow{\text{grad}}\,f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right) = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\left|\overrightarrow{\text{grad}}\,f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)\right| = \sqrt{22}$

Vậy giá trị lớn nhất của vận tốc biến thiên của f tại M bằng $\sqrt{22}$, đạt được theo hướng của vectơ (2, –3, 3).

21. a) $\overrightarrow{\text{grad}}(au + bv) = (au + bv)_x\vec{i} + (au + bv)_y\vec{j}$

$= a(u_x\vec{i} + u_y\vec{j}) + b(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) = a\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u + b\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v$.

b) $$\overrightarrow{\text{grad}}(uv) = (uv)_x\vec{i} + (uv)_y\vec{j}$$

$$= (uv_x + vu_x)\vec{i} + (uv_y + vu_y)\vec{j}$$

$$= u(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) + v(u_x\vec{i} + u_y\vec{j})$$

$$= u\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v + v\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u.$$

c) $$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)_x\vec{i} + \left(\frac{u}{v}\right)_y\vec{j}$$

$$= \frac{vu_x - uv_x}{v^2}\vec{i} + \frac{vu_y - uv_y}{v^2}\vec{j}$$

$$= \frac{v(u_x\vec{i} + u_y\vec{j}) - u(v_x\vec{i} + v_y\vec{j})}{v^2}$$

$$= \frac{v\,\overrightarrow{\text{grad}}u - u\,\overrightarrow{\text{grad}}v}{v^2}.$$

d) $$\overrightarrow{\text{grad}}(u^n) = (u^n)_x\vec{i} + (u^n)_y\vec{j}$$

$$= nu^{n-1}u_x\vec{i} + nu^{n-1}u_y\vec{j} = nu^{n-1}\left(u_x\vec{i} + u_y\vec{j}\right)$$

$$= nu^{n-1}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u.$$

22. a) Hàm số $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y$ xác định trên toàn $\mathbb{R}^2$. Ta có

$$f_x = 4x + 2y + 2,\ f_y = 2y + 2x + 2.$$

Giải hệ

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Ta được một điểm dừng là điểm $(0, -1)$. Vì $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 2$ nên $s^2 - rt = -4 < 0$, $(0, -1)$ là điểm cực trị. Vì $r = 4 > 0$ nên điểm $(0, -1)$ là điểm cực tiểu. Cực tiểu $f(0, -1) = -1$.

b) Hàm số $f(x, y) = x\sin y$ xác định trên $\mathbb{R}^2$. Ta có

$$f_x = \sin y,\ f_y = x\cos y$$

Giải hệ

$$\begin{cases} \sin y = 0 \\ x\cos y = 0 \end{cases}$$

Ta được các điểm dừng $(0, k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$f_{xx} = 0,\ f_{xy} = \cos y,\ f_{yy} = -x\sin y.$$

Tại các điểm dừng $r = 0$, $s = \pm 1$, $t = 0$, $s^2 - rt = 1 > 0$ hàm số không có cực trị.

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right) = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{xy}{12} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{47}{3}x + \dfrac{47}{4}y$

$$f_x = -\frac{2x}{3} - \frac{y}{12} + \frac{47}{3},\quad f_y = -\frac{x}{12} - \frac{y}{2} + \frac{47}{4}$$

Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{12} = \dfrac{47}{3} \\ \dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 141 \end{cases}$$

Ta được $x = 21$, $y = 20$, do đó có một điểm dừng $(21, 20)$. Ta có

$$f_{xx} = -\frac{2}{3},\ f_{xy} = -\frac{1}{12},\ f_{yy} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $s^2 - rt = \dfrac{1}{144} - \dfrac{1}{3} < 0$. Vì $r = -\dfrac{2}{3} < 0$ nên điểm $(21, 20)$ là điểm cực đại. Cực đại $f(21, 20) = 282$.

d) $$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1,$$
$$f_x = 4x^3 - 4y,\ f_y = 4y^3 - 4x.$$

Tọa độ của điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

Thế $y = x^3$ rút ra từ phương trình đầu vào phương trình sau, ta được

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1).$$

Suy ra $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Vậy có 3 điểm dừng $M_o(0, 0)$, $M_1(1, 1)$, $M_2(-1, -1)$. Ta có

$$f_{xx} = 12x^2,\ f_{xy} = -4,\ f_{yy} = 12y^2.$$

Tại M_o ta có $s^2 - rt = 16 > 0$, M_o không là điểm cực trị. Tại M_1 và M_2 ta có $s^2 - rt = -128 < 0$. Vậy M_1 và M_2 là hai điểm cực tiểu vì $r = 12 > 0$. Vậy cực tiểu $f(1, 1) = -1$, cực tiểu $f(-1, -1) = -1$.

e) $\quad f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2,$

$\quad f_x = 6xy - 6x,\ f_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y.$

Giải hệ

$$\begin{cases} 6x(y-1) = 0 \\ 3(x^2 + y^2 - 2y) = 0 \end{cases}$$

ta được bốn điểm dừng $M_o(0, 0)$, $M_1(0, 2)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(-1,1)$.

Ta có

$$f_{xx} = 6y - 6,\ f_{xy} = 6x,\ f_{yy} = 6y - 6.$$

Tại M_o ta có $r^2 - st = -36 < 0$, $r = -6 < 0$ nên M_o là điểm cực đại.

Tại M_1, ta có $r^2 - st = -36 < 0$, $r = 6 > 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu.

Tại M_2 và M_3 ta có $r^2 - st = 36 > 0$ nên M_2 và M_3 không là điểm cực trị. Vậy cực đại $f(0, 0) = 2$, cực tiểu $f(0, 2) = -2$.

f) $\quad f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

$\quad f_x = 2(x - y) + 3(x + y)^2,\ f_y = -2(x - y) + 3(x + y)^2.$

Giải hệ

$$\begin{cases} 2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \\ -2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \end{cases}$$

Cộng vế với vế của hai phương trình ta được $(x + y)^2 = 0$, do đó $x + y = 0$ và $x - y = 0$. Vậy có một điểm dừng duy nhất là $M_o(0, 0)$. Ta có

$$f_{xx} = 2 + 6(x + y),\ f_{xy} = -2 + 6(x + y),\ f_{yy} = 2 + 6(x + y).$$

Tại M_o ta có $s^2 - rt = 0$. Ta phải xem xét thêm tại điểm M_o. Vì $f(x, x) = 8x^3$, biểu thức $8x^3$ thay đổi dấu ở lân cận $x = 0$, vì vậy điểm $(0, 0)$ không thể là điểm cực trị. Vậy hàm số không có cực trị.

g) $f(x, y) = xy(1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2$

$f_x = y - 2xy - y^2$, $f_y = x - x^2 - 2xy$.

Giải hệ

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu suy ra $y = 0$, hoặc $1 - 2x - y = 0$. Từ phương trình sau suy ra hoặc $x = 0$, hoặc $1 - x - 2y = 0$. Do đó

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = 0 \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Vậy có 4 điểm dừng $M_o(0, 0)$, $M_1(1, 0)$, $M_2(0, 1)$, $M_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Ta có

$$f_{xx} = -2y, \quad f_{xy} = 1 - 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x.$$

Tại M_o, $s^2 - rt = 1 > 0$ nên M_o không là điểm cực trị.

Tại M_1, $s^2 - rt = 1 > 0$ nên M_1 không là điểm cực trị.

Tại M_2, $s^2 - rt = 1 > 0$ nên M_2 không là điểm cực trị.

Tại M_3, $s^2 - rt = -\frac{1}{3} < 0$, $r = -\frac{2}{3}$, M_3 là điểm cực đại. Vậy hàm số có cực đại $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

h) $f(x, y) = x[(\ln x)^2 + y^2]$ xác định với $x > 0$ và mọi $y \in \mathbb{R}$.

$f_x = (\ln x)^2 + y^2 + 2\ln x$, $f_y = 2xy$.

Giải hệ

$$\begin{cases} (\ln x)^2 + 2\ln x + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Vì $x > 0$, ta được $y = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$ hoặc $\ln x = -2$ $\Rightarrow x = 1$, hoặc $x = e^{-2}$. Vậy có hai điểm dừng là $M_o(1, 0)$ và $M_2(e^{-2}, 0)$.

Ta có

$$f_{xx} = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2.\frac{1}{x},\ f_{xy} = 2y,\ f_{yy} = 2x.$$

Tại M_o ta có $r = 2$, $s = 0$, $t = 2$, $r^2 - st = -4 < 0$ nên M_o là điểm cực tiểu.

Tại M_1 ta có $r = -2e^2$, $s = 0$, $t = 2e^{-2}$, $r^2 - st = 4 > 0$ nên M_o không là điểm cực trị.

Vậy hàm số có cực tiểu $f(1, 0) = 0$.

i) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y),\ 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{4}$

$$f_x = \cos x - \sin(x + y),\ f_y = \cos y - \sin(x + y).$$

Giải hệ

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x + y) = 0 \\ \cos y - \sin(x + y) = 0 \end{cases}$$

ta được

$$\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$$

vì $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{4}$, suy ra $\quad \cos x - \sin 2x = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y = \frac{\pi}{6}.$$

Điểm $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ là điểm dừng. Ta có

$$f_{xx} = -\sin x - \cos(x + y),\ f_{xy} = -\cos(x + y),\ f_{yy} = -\sin y - \cos(x + y).$$

Tại điểm $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ ta có $r = -1$, $s = -\frac{1}{2}$, $t = -1$, $s^2 - rt = -\frac{3}{4} < 0$, nên điểm $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ là điểm cực đại. Vậy hàm số có cực đại $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

j) $f(x, y) = (x - y)\,e^{xy}$

$$f_x = e^{xy} + ye^{xy}(x - y) = e^{xy}(1 + xy - y^2)$$

$$f_y = -e^{xy} + xe^{xy}(x - y) = e^{xy}(-1 + x^2 - xy).$$

Giải hệ

$$\begin{cases} 1 + xy - y^2 = 0 \\ -1 - xy + x^2 = 0 \end{cases}$$

ta thấy ngay $y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$. Nếu $y = x$, thay vào phương trình đầu của hệ, ta được $1 = 0$, vô lý. Vậy $y = -x$, suy ra $1 - 2y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy ta có 2 điểm dừng là $M_o\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ta có

$$f_{xx} = ye^{xy}(1 + xy - y^2) + ye^{xy} = e^{xy}(2y + xy^2 - y^3),$$
$$f_{xy} = xe^{xy}(1 + xy - y^2) + e^{xy}(x - 2y) = e^{xy}(2x - 2y + x^2y - xy^2),$$
$$f_{yy} = xe^{xy}(-1 + x^2 - xy) - e^{xy}x = e^{xy}(-2x + x^3 - x^2y).$$

Tại cả hai điểm M_o, M_1 ta đều có $s^2 - rt = \frac{7}{2} > 0$ nên hàm số không có cực trị.

23. a) Từ điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$, rút ra $y = \frac{5 - 2x}{3}$. Do đó

$$f\left(x, \frac{5 - 2x}{3}\right) = \frac{x}{3}(5 - 2x) = \frac{1}{3}(-2x^2 + 5x)$$

Đó là một tam thức bậc hai đối với x, với hệ số đầu âm, nó đạt cực đại khi $x = \frac{5}{4}$. Cực đại có điều kiện phải tìm là $f\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$.

b) Từ điều kiện $x^2 + y^2 = 1$, rút ra $x^2 = 1 - y^2$. Thế vào hàm số $f(x, y)$, ta được

$$f\left(\pm\sqrt{1 - y^2}, y\right) = -y^2 + y + 1.$$

Hàm số đó có cực đại tại $y = \frac{1}{2}$. Cực đại của hàm số là

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

24. a) Gọi d là khoảng cách từ điểm (x, y, z) tới gốc tọa độ. Ta có $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Ta cần tìm điểm tại đó hàm số $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $z^2 = xy + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Thế $z^2 = xy + 1$ vào f(x, y, z) ta được hàm số hai biến số

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1.$$

Giải hệ

$$\begin{cases} F_x = 2x + y = 0 \\ F_y = 2y + x = 0 \end{cases}$$

ta được điểm dừng (0, 0). Vì r = 2, s = 0, t = 2, $s^2 - rt = -4 < 0$ nên điểm dừng (0, 0) là điểm cực tiểu. Với x = 0, y = 0, ta có $z^2 = 1$. Vậy hai điểm trên mặt $z^2 = xy + 1$ gần gốc tọa độ nhất là (0, 0, 1) và (0, 0, −1).

b) Tìm điểm (x, y) tại đó hàm số $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 1)^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 4$ đạt giá trị nhỏ nhất. Đặt x = 2cost, y = 2sint, thế vào hàm số f(x, y), ta được

$$\begin{aligned} f(2\cos t, 2\sin t) &= (2\cos t - 3)^2 + (2\sin t + 1)^2 \\ &= 14 + 4(\sin t - 3\cos t) := F(t). \end{aligned}$$

F(t) đạt giá trị nhỏ nhất khi sint − 3cost đạt giá trị nhỏ nhất. Đặt $\varphi = \text{arctg}3$, ta có

$$\sin t - 3\cos t = \sin t - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos t = \frac{\sin(t-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Vì $\text{tg}\varphi = 3$, ta có $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin t - 3\cos t = \sqrt{10}\sin(t - \varphi)$,

biểu thức này đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sin(t - \varphi) = -1 \Rightarrow t - \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow t = \varphi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t = \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin t = -\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Vậy điểm phải tìm là điểm $\left(\dfrac{6}{\sqrt{10}}, \dfrac{-2}{\sqrt{10}}\right)$.

Chú thích. Có thể giải câu này bằng hình học giải tích. Điểm phải tìm là một trong hai giao điểm của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm (3, −1) với đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

c) Tìm điểm tại đó hàm số $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $x + 2y + 3z = 4$ đạt giá trị nhỏ nhất. Thế $x = 4 - 2y - 3z$ vào hàm số $f(x, y, z)$, ta được

$(4 - 2y - 3z)^2 + y^2 + z^2 = 5y^2 + 10z^2 + 12yz - 16y - 24z + 16 := F(y, z)$.

Giải hệ

$$\begin{cases} F_y = 2(5y + 6z - 8) = 0 \\ F_z = 2(10z + 6y - 12) = 0 \end{cases}$$

ta được $y = \frac{4}{7}$, $z = \frac{6}{7}$, vậy $\left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$ là điểm dừng. Vì $r = 10$, $s = 12$, $t = 20$, $s^2 - rt = 144 - 200 < 0$, nên $\left(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số $F(y, z)$. Vậy điểm phải tìm là điểm $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

d) Gọi (x, y, z) là đỉnh của hình hộp nằm trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$ (hình 7.6). Thể tích của hình hộp đó là $V = xyz$. Vậy ta cần tìm điểm tại đó hàm số $f(x, y, z) = xyz$ với điều kiện $x + 2y + 3z = 6$ đạt giá trị lớn nhất. Thế $x = 6 - 2y - 3z$ vào $f(x, y, z)$, ta được

$$F(y, z) = (6 - 2y - 3z)yz = 6yz - 2y^2z - 3yz^2.$$

Giải hệ

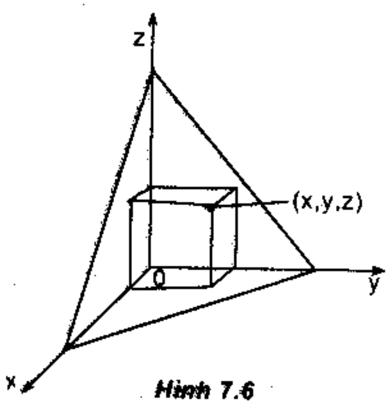
$$\begin{cases} F_y = z(6 - 4y - 3z) = 0 \\ F_z = y(6 - 2y - 6z) = 0 \end{cases}$$

ta được các điểm dừng $M_o(0, 2)$, $M_1(3, 0)$, $M_2\left(1, \frac{2}{3}\right)$. Ta có

$F_{yy} = -4z$, $F_{yz} = 6 - 4y - 6z$,
$F_{zz} = -6y$.

Tại M_o và M_1 ta có $s^2 = rt > 0$ nên tại M_o, M_1 không có cực trị.

Tại M_2 ta có :



Hình 7.6

$$r = -\frac{8}{3},\ s = -2,\ t = -6 \Rightarrow s^2 - rt = -12 < 0.$$

Vậy M_2 là điểm cực đại. Đỉnh của hình hộp phải tìm nằm trên mặt phẳng $x + 2y + 3y + 3z = 6$ là điểm $\left(2, 1, \frac{2}{3}\right)$.

25. a) $\quad f(x, y) = 1 - x^2 - y^2,$

$\quad f_x = -2x,\ f_y = -2y$

Hàm số f(x, y) chỉ có một điểm dừng là gốc tọa độ, điểm này nằm ngoài miền D (hình 7.7), vậy ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của f(x, y) trên đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Phương trình tham số của đường tròn đó là

$$x - 1 = \cos t,\ y - 1 = \sin t.$$

Thế vào hàm số f(x, y), ta được

$$f(1 + \cos t, 1 + \sin t) = 1 - (1 + \cos t)^2 - (1 + \sin t)^2$$

$$= 2 - 2(\sin t + \cos t) = 2 - 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) := F(t).$$

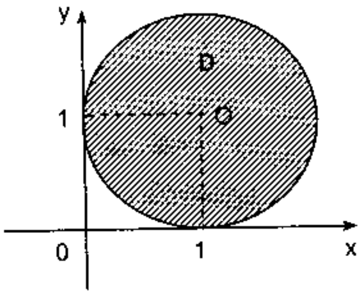
Vì $-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$, nên giá trị lớn nhất và bé nhất của F(t) theo thứ tự là $-2 + 2\sqrt{2}$ và $-2 - 2\sqrt{2}$. Đó cũng là giá trị lớn nhất và bé nhất của f(x, y) trong miền đóng D.

b) $\quad f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y,$

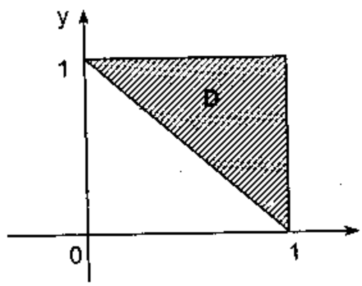
$\quad f_x = 2x + 1,\ f_y = 6y - 1.$

Hàm số chỉ có một điểm dừng $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ nằm ngoài miền D (hình 7.8).

Vậy chỉ cần tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trên biên của miền D.



Hình 7.7



Hình 7.8

– Trên đường $x = 1$ ta có $f(1, y) = 3y^2 - y + 2$, nó đạt cực tiểu tại $y = \frac{1}{6}$, vậy chỉ cần tính $f(1, 0)$, $f\left(1, \frac{1}{6}\right)$ và $f(1, 1)$. Ta có

$$f(1, 0) = 2,\ f\left(1, \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{12},\ f(1, 1) = 4.$$

– Trên đường $y = 1$, ta có $f(x, 1) = x^2 + x + 2$, nó tăng khi $0 \le x \le 1$, vậy chỉ cần tính $f(0, 1)$ vì đã tính $f(1, 1)$ ở trên. Ta có $f(0, 1) = 2$.

– Trên đường $x + y = 1$, ta có $y = 1 - x$, do đó $f(x, 1 - x) = 4x^2 - 4x + 2$, nó đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$. Vậy chỉ cần tính $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ta có $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

Từ các giá trị đã tính, ta thấy rằng giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trong miền D là $f(1, 1) = 4$ và $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

c) $$f(x, y) = 1 + xy - x - y$$

$$f_x = y - 1,\ f_y = x - 1.$$

Hàm số có một điểm dừng $(1, 1)$, nó nằm trên đường $y = x^2$ (hình 7.9). Vậy chỉ cần tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của $f(x, y)$ trên biên của miền D.

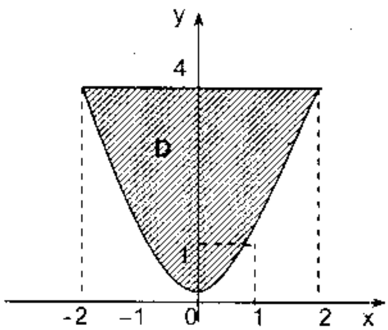
– Trên đường $y = 4$, ta có $f(x, 4) = 3x - 3$, nó đạt giá trị lớn nhất và bé nhất tại $x = -2$ và $x = 2$. Ta có

$f(-2, 4) = -9$, $f(2, 4) = 3$.

– Trên đường $y = x^2$, ta có

$$f(x, x^2) = x^3 - x^2 - x + 1 := F(x).$$

Vì $F'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ khi $x = 1$ và $x = -\frac{1}{3}$, nên ta chỉ cần tính $f(1, 1)$ và $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$. Ta có



Hình 7.9

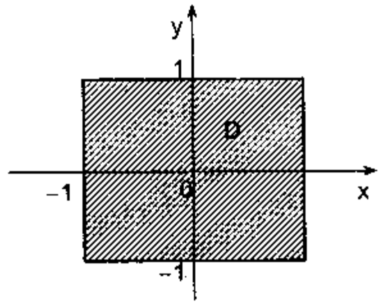
$$f(1, 1) = 0,\ f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right) = \frac{32}{27}.$$

So sánh các giá trị đã tính, ta thấy giá trị lớn nhất và bé nhất của f(x, y) trong miền D là f(2, 4) = 3 và f(−2, 4) = −9.

d) $$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4.$$

$$f_x = 2x + 2xy = 2x(1 + y),\ f_y = 2y + x^2$$

Hàm số có các điểm dừng $M_o(0, 0)$, $M_1(\sqrt{2}, 0)$ và $M_2(-\sqrt{2}, 0)$. Hai điểm M_1, M_2 nằm ngoài miền D (hình 7.10). Ta so sánh f(0, 0) = 4 với giá trị lớn nhất và bé nhất của f(x, y) trên biên.



Hình 7.10

– Trên hai đường x = ± 1, ta có $f(\pm 1, y) = y^2 + y + 5$, nó đạt cực tiểu tại $y = -\frac{1}{2}$. Ta có f(±1, 1) = 7, f(±1, −1) = 5, $f(\pm 1, -\frac{1}{2}) = \frac{19}{4}$.

– Trên đường y = 1, ta có $f(x, 1) = 2x^2 + 5$, nó đạt giá trị nhỏ nhất tại x = 0, f(0, 1) = 5.

– Trên đường y = −1, f(x, −1) = 5.

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f(x, y) trong miền D là f(±1, 1) = 7 và f(0, 0) = 4.

e) $$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$$

$$f_x = \cos x + \cos(x + y),\ f_y = \cos y + \cos(x + y)$$

Giải hệ

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x + y) = 0 \\ \cos y + \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

So sánh hai phương trình của hệ, ta được cosx = cosy, do đó x = y vì $0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}$. Thế vào phương trình đầu của hệ, ta được

$$0 = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Vì $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $\cos x > 0$ nên $\cos\frac{3x}{2} = 0$, do đó $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2}$. Vậy $x = \frac{\pi}{3}$ và $y = \frac{\pi}{3}$, ta có một điểm dừng $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, điểm này nằm trong miền D,

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

– Trên đường $x = 0$, $f(0, y) = 2\sin y$, nó tăng khi $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, $f(0, 0) = 0$, $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 2$.

– Trên đường $y = 0$, $f(x, 0) = 2\sin x$, $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2$.

– Trên đường $x = \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 1 + \sin y + \cos y = 1 + \sqrt{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; nó đạt giá trị lớn nhất bằng $1 + \sqrt{2}$ khi $y = \frac{\pi}{4}$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $y = 0$ và $y = \frac{\pi}{2}$.

– Trên đường $y = \frac{\pi}{2}$, $f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin x + \cos x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ cũng có giá trị lớn nhất, bé nhất trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ bằng $1 + \sqrt{2}$ và 2.

Tóm lại giá trị lớn nhất và bé nhất phải tìm là

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ và } f(0, 0) = 0.$$

26. a) $x = t;\ y = \frac{t^2}{2},\ z = \frac{t^2}{3}$

Điểm $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ ứng với $t = 1$. Ta có $x' = 1$, $y' = t$, $z' = t^2$. Các hệ số chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong tại P là 1, 1, 1. Phương trình của đường tiếp tuyến đó là

$$X - 1 = Y - \frac{1}{2} = Z - \frac{1}{3}.$$

Phương trình pháp diện của đường cong tại P là

$$X - 1 + Y - \frac{1}{2} + Z - \frac{1}{3} = 0$$

hay $$X + Y + Z - \frac{11}{6} = 0.$$

b) $x = 2t,\ y = 2\sqrt{2}\cos t,\ z = 2\sqrt{2}\sin t$

$x' = 2,\ y' = -2\sqrt{2}\sin t, z' = 2\sqrt{2}\cos t.$

Điểm $P\left(\frac{\pi}{2}, 2, 2\right)$ ứng với $t = \frac{\pi}{4}$. Các hệ số chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong tại P là 2, −2, 2 cũng là 1, −1, 1. Phương trình đường tiếp tuyến đó là

$$X - \frac{\pi}{2} = 2 - Y = Z - 2.$$

Phương trình pháp diện của đường cong tại P là

$$X - \frac{\pi}{2} + 2 - Y + Z - 2 = 0$$

hay $$X - Y + Z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

c) $x = t\sin t + \cos t,\ y = t\cos t - \sin t,\ z = 2t,$

$x' = t\cos t,\ y' = -t\sin t,\ z' = 2.$

Điểm $P\left(\frac{\pi}{2}, -1, \pi\right)$ ứng với $t = \frac{\pi}{2}$. Các hệ số chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong tại P là 0, $-\frac{\pi}{2}$, 2. Phương trình đường tiếp tuyến đó là

$$X = \frac{\pi}{2},\ \frac{Y + 1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{Z - \pi}{2}$$

Phương trình của pháp diện của đường cong tại P là

$$-\frac{\pi}{2}(Y + 1) + 2(Z - \pi) = 0$$

hay $$-\frac{\pi}{2}Y + 2Z - \frac{5\pi}{2} = 0.$$

d) $x = \cos t,\ y = 3e^{t},\ z = 3e^{-t},$

$x' = -\sin t,\ y' = 3e^{t},\ z' = -3e^{-t}.$

Điểm P(1, 3, 3) ứng với t = 0; các hệ số chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong tại P là (0, 3, −3). Phương trình của tiếp tuyến đó là

$$X - 1 = 0,\ Y - 3 = 3 - Z.$$

Phương trình của pháp diện của đường cong tại P là

$$Y - 3 + 3 - Z = 0$$

hay $$Y - Z = 0.$$

27. a) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y,$

$z_x = 2x - 2y - 1,\ z_y = -2x + 2y + 2.$

Các hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt tại P(1, 1, 1) là (−1, 2, −1). Phương trình của pháp tuyến đó là

$$\frac{X-1}{-1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-1}{-1}$$

Phương trình của tiếp diện của mặt tại P là

$$-(X-1) + 2(Y-1) - (Z-1) = 0$$

hay $$-X + 2Y - Z = 0$$

b) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0$

$f_x = 8x,\ f_y = 2y,\ f_z = 2z$

Các hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt tại P(2, 2, 2) là 16, 4, 4 hay 4, 1, 1. Phương trình của pháp tuyến đó là

$$\frac{X-2}{4} = Y - 2 = Z - 2$$

Phương trình của tiếp diện của mặt tại P là

$$4(X-2) + (Y-2) + (Z-2) = 0$$

hay $$4X + Y + Z - 12 = 0.$$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$

$f_x = 2x,\ f_y = 2y,\ f_z = -2z$

Các hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt tại P(2, 2, 3) là 4, 4, −6 hay 2, 2, −3. Phương trình của pháp tuyến đó là

$$\frac{X-2}{2} = \frac{Y-2}{2} = \frac{Z-3}{-3}.$$

Phương trình của tiếp diện của mặt tại P là

$$2X + 2Y - 3Z + 1 = 0$$

d) $z = \ln(x^2 + y^2)$.

$$z_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},\ z_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Các hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt tại P(1, 0, 0) là 2, 0, −1. Phương trình của pháp tuyến đó là

$$\frac{X-1}{2} = \frac{Z}{-1},\ \ Y = 0.$$

Phương trình của tiếp diện của mặt tại P là

$$2(X - 1) - Z = 0.$$

Chương VIII

TÍCH PHÂN KÉP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hàm số z = f(x, y) xác định trong miền bị chặn, nằm trong mặt phẳng Oxy. Chia tuỳ ý miền D thành n miền nhỏ $d_0, d_1, ..., d_{n-1}$, có các diện tích tương ứng là $\Delta\sigma_0, \Delta\sigma_1, ..., \Delta\sigma_{n-1}$. Trong mỗi miền nhỏ d_i lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\lambda_i \to 0$ (λ_i là đường kính của d_i), tổng $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta\sigma_i$ tiến đến một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm M_i trong mỗi miền nhỏ d_i, thì giới hạn I được gọi là tích phân kép của hàm số f(x, y) trong miền D, ký hiệu là

$$I = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma .$$

Khi đó hàm số f(x, y) gọi là khả tích trong miền D. Nếu hàm số f(x, y) liên tục trong miền bị chặn D thì nó khả tích trong miền D.

2. Các tính chất của tích phân kép

Tính chất 1. $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ (k là hằng số).

Tính chất 2. $\iint\limits_D [f_1(x,y) + f_2(x,y) - f_3(x,y)]\, d\sigma =$

$$= \iint\limits_D f_1(x,y)d\sigma + \iint\limits_D f_2(x,y)d\sigma - \iint\limits_D f_3(x,y)d\sigma.$$

Tính chất 3. Nếu miền lấy tích phân D chia thành hai miền D_1 và D_2 rời nhau thì

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

Tính chất 4. Nếu tại mọi điểm thuộc miền D ta luôn có $f(x, y) \geq 0$ thì $\iint_D f(x,y)d\sigma \geq 0$, còn nếu $f(x, y) \leq 0$ tại mọi điểm thuộc miền D thì $\iint_D f(x,y)d\sigma \leq 0$.

Tính chất 5. Nếu tại mọi điểm thuộc miền D ta luôn có $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$ thì

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \geq \iint_D \varphi(x,y)d\sigma.$$

Tính chất 6. Nếu m và M là các giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số f(x, y) trong miền D, nghĩa là : $m \leq f(x, y) \leq M$ tại mọi điểm $(x, y) \in D$ thì

$$m.S_D \leq \iint_D f(x;y)d\sigma \leq M.S_D,$$

trong đó S_D là diện tích của miền D.

Tính chất 7 (còn gọi là định lý về giá trị trung bình). Nếu f(x, y) liên tục trong miền D thì trong miền đó tìm được ít nhất một điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$ sao cho :

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi_i, \eta_i)S_D.$$

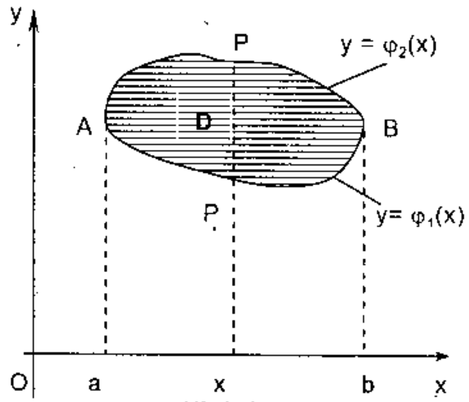
Giá trị của hàm số f(x, y) tại điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$ gọi là giá trị trung bình của hàm số f(x, y) trong miền D.

3. Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Đề-các

Có hai công thức tính:

a) $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

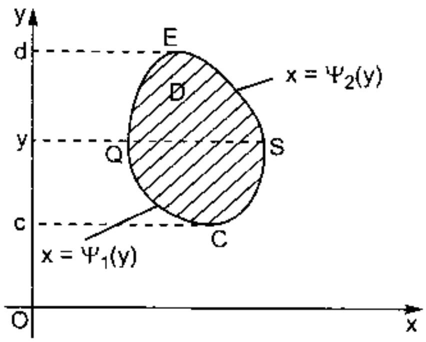
trong đó: D là miền trong mặt phẳng Oxy, sao cho mọi đường thẳng song song với trục Oy cắt biên của nó không quá hai điểm. Các cận lấy tích phân xác định như sau: kẻ một đường thẳng bất kỳ song song với trục Oy, cắt biên của miền D tại hai điểm P và R, lần lượt gọi là điểm vào và điểm ra. Khi đó cận dưới của tích phân theo y là phương trình $y = \varphi_1(x)$ của đoạn đường cong APB chứa điểm vào, cận trên là phương trình $y = \varphi_2(x)$ của đoạn đường cong ARB chứa điểm ra. Cận dưới a và cận trên b của tích phân theo x là hoành độ các tiếp điểm A và B của các đường tiếp tuyến song song với trục Oy của biên của miền D (hình 8.1).



Hình 8.1

b) $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

trong đó: D là miền trong mặt phẳng Oxy, sao cho mọi đường thẳng song song với trục Ox cắt biên của nó không quá hai điểm. Các cận lấy tích phân xác định như sau: kẻ một đường thẳng bất kỳ song song với trục Ox, cắt biên của miền D tại hai điểm Q và S. Khi đó cận dưới của tích phân theo x là phương trình $x = \psi_1(y)$ của đoạn đường cong CQE chứa điểm vào, cận trên là phương trình $y = \psi_2(y)$ của đoạn đường cong CSE chứa điểm ra. Cận dưới c và cận trên d của tích phân theo y là tung độ của các tiếp điểm C và E của các đường tiếp tuyến song song với trục Ox của biên của miền D (hình 8.2).



Hình 8.2

4. Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ cực

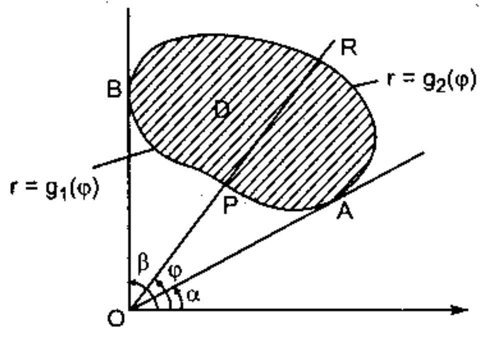
Khi chuyển sang tọa độ cực: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, thì $dxdy = rdrd\varphi$ và

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Tính tích phân ở vế phải bằng cách đưa về hai tích phân xác định liên tiếp đối với các biến r và φ. Để xác định các cận lấy tích phân, ta phân biệt ba trường hợp sau:

a) Trường hợp gốc cực O nằm ngoài miền D (hình 8.3)

Các cận lấy tích phân được xác định như sau: từ gốc cực O kẻ một tia bất kỳ cắt biên của miền D tại hai điểm P và R, lần lượt gọi là điểm vào và điểm ra. Khi đó cận dưới của tích phân theo r là phương trình $r = g_1(\varphi)$ của đoạn đường cong APB chứa điểm vào, cận trên là phương trình $r = g_2(\varphi)$ của đoạn đường cong ARB chứa điểm ra. Cận dưới α và cận trên β của tích phân theo φ chính là các góc cực của các tiếp điểm A và B ($\alpha < \beta$) và ta có:

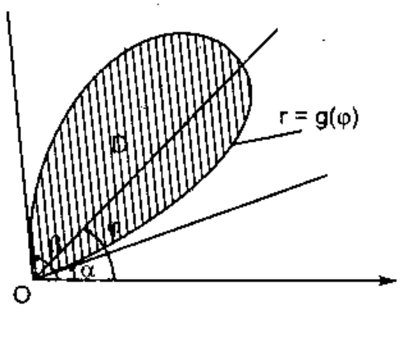


Hình 8.3

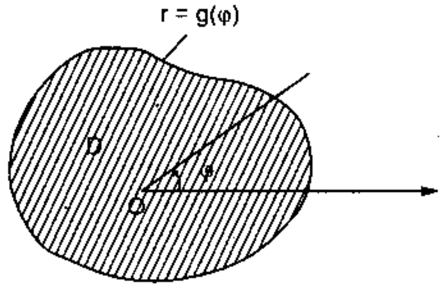
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

b) Trường hợp gốc cực O nằm trên biên của miền D (hình 8.4). Khi đó ta có công thức tính:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$



Hình 8.4



Hình 8.5

c) *Trường hợp gốc cực O nằm trong miền D* (hình 8.5), khi đó ta có công thức tính:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

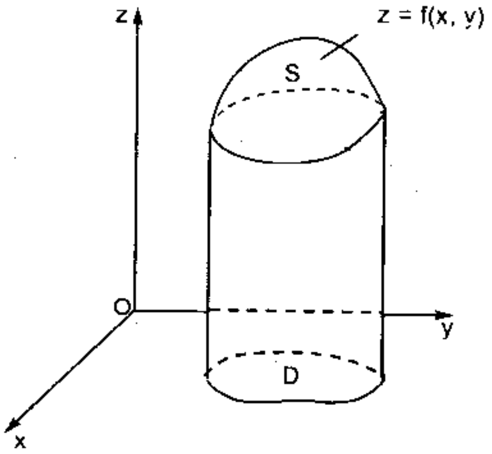
5. Thể tích vật thể

• Thể tích V của một vật thể hình trụ cong, có đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, đáy trên là mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$ và các đường sinh song song với Oz (hàm số $z = f(x, y)$ liên tục và không âm trong miền D) được tính bằng công thức (hình 8.6):

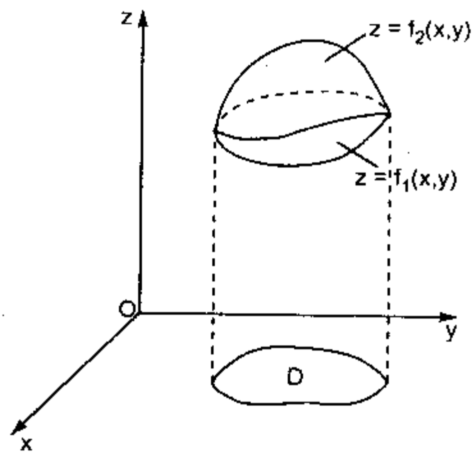
$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Nếu $f(x, y) \leq 0$ trong miền D thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq 0$ và

$$V = -\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$



Hình 8.6



Hình 8.7

• Thể tích V của vật thể giới hạn bởi các mặt cong $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$ và hình chiếu của vật thể đó lên mặt phẳng Oxy là miền D ($f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ liên tục và $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ trong miền D) được tính bằng công thức (hình 8.7):

$$V = \iint\limits_D [f_2(x,y) - f_1(x,y]dxdy.$$

6. Diện tích hình phẳng

Trong hệ toạ độ Đề-các, diện tích S của hình phẳng D là:

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Trong hệ toạ độ cực, diện tích S của hình phẳng D là:

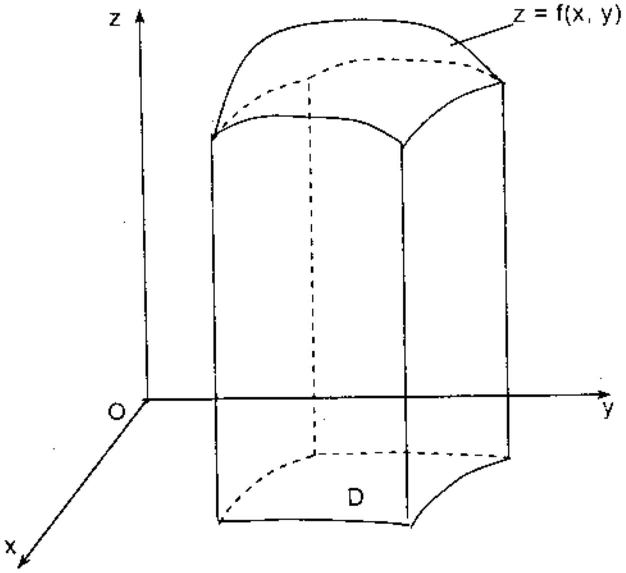
$$S = \iint_D r.drd\varphi..$$

7. Diện tích mặt cong

Diện tích S của mặt cong z = f(x, y) (f(x, y), $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ liên tục trong miền D), giới hạn bởi một đường cong kín bằng (hình 8.8):

$$S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,$$

trong đó D là hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy, $p = f'_x$, $q = f'_y$.



Hình 8.8

B. ĐỀ BÀI

Tính các tích phân :

1. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx.$

2. $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy.$

3. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} rdr.$

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2 \varphi dr.$

Tìm các cận của tích phân kép $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ***khi đổi thành hai tích phân xác định liên tiếp :***

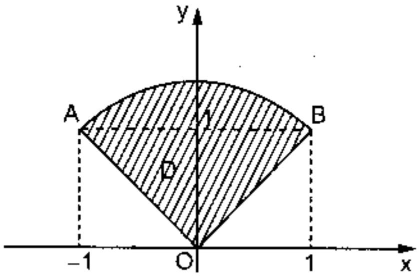
5. D là hình chữ nhật có các đỉnh : O(0, 0) ; A(2, 0) ; B(2, 1) ; C(0, 1).

6. D là hình tam giác có các đỉnh : O(0, 0) ; A(1, 0) ; B(1, 1).

7. D là hình thang có các đỉnh : O(0, 0) ; A(2, 0) ; B(1, 1) ; C(0, 1).

8. D là hình bình hành có các đỉnh : A(1, 2) ; B(2, 4) ; C(2, 7) ; $D_1(1, 5)$.

9. D là hình quạt tròn OAB như hình 8.9.



Hình 8.9

Dựa vào các cận đã cho, hãy viết phương trình các đường cong giới hạn miền lấy tích phân D và vẽ miền lấy tích phân ấy :

10. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy.$ **11.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy.$

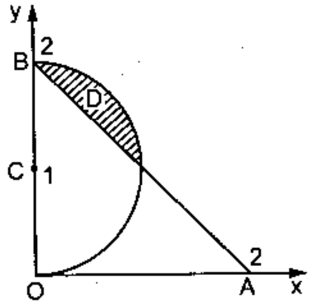
12. $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx.$

Đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân kép sau :

13. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy.$ **14.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

15. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy.$

Tính những tích phân kép sau :



Hình 8.10

16. $\iint\limits_D x\,dxdy$, D là miền như hình 8.10.

17. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, D là phần mặt tròn tâm O(0, 0), bán kính a, nằm trong góc phần tư thứ nhất.

18. $\iint\limits_D \dfrac{x\,dxdy}{x^2 + y^2}$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x^2}{2}$ và $y = x$.

19. $\iint\limits_D e^{x/y}dxdy$, D là miền tam giác cong giới hạn bởi các đường $y^2 = x$, $x = 0$ và $y = 1$.

Chuyển những tích phân kép dưới đây sang hệ toạ độ cực và xác định các cận lấy tích phân theo r và theo φ :

20. $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$. D là miền tam giác, giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = -x$ và $y = 1$.

21. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} f\left(\dfrac{y}{x}\right)dy$.

22. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2})dy$.

Chuyển sang hệ toạ độ cực, tính những tích phân kép sau :

23. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2ax$.

24. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$. D là mặt tròn, tâm tại gốc O, bán kính 1.

25. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, D là miền vành khăn, nằm giữa hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

26. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy$.

Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt :

27. $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0$.

28. $z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1$ và các mặt toạ độ.

29. $x + y + z = a, 3x + y = a, \frac{3}{2}x + y = a, y = 0, z = 0\ (a > 0)$.

Chuyển sang hệ toạ độ cực, tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt :

30. $2az = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\ (a > 0)$.

31. $x^2 + y^2 = 2ax, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0\ (a > 0)$.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

32. $y^2 = 4ax, x + y = 3a, y = 0\ (y \geq 0, a > 0)$.

33. $y = 2^x, y = 2^{-2x}, y = 4$.

34. $r = a\sin 3\varphi$.

35. Tính diện tích phần mặt phẳng $6x + 3y + 2z = 12$ ở trong góc phần tám thứ nhất ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

36. Tính diện tích phần mặt parabôlôit $z = x^2 + y^2$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

37. Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = Rx$.

C. BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. Trước hết, tính tích phân theo x, xem y là hằng số, ta có :

$$\int_0^1 (x^2 + 2y)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + 2y.$$

Đưa kết quả vừa tính được vào tích phân theo y, ta có :

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y\right)dy = \left(\frac{1}{3}y + y^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{14}{3}$$

2. $\displaystyle\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy = \int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}x^2y^{-2}dy = \int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}dx$

$$= \int_1^2(-x+x^3)dx = \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{a\sin\varphi}^{a} rdr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=a\sin\varphi}^{r=a}d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\cos^2\varphi d\varphi$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{4}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{3\cos\varphi} r^2\sin^2\varphi dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3\cos\varphi}d\varphi$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}9\sin^2\varphi\cos^3\varphi d\varphi = 18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^3\varphi d\varphi$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\cos^3\varphi d\varphi = 18\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\varphi-\cos^5\varphi)d\varphi$$

$$= 18\left(\frac{2}{3}-\frac{4.2}{5.3}\right) = \frac{12}{5}.$$

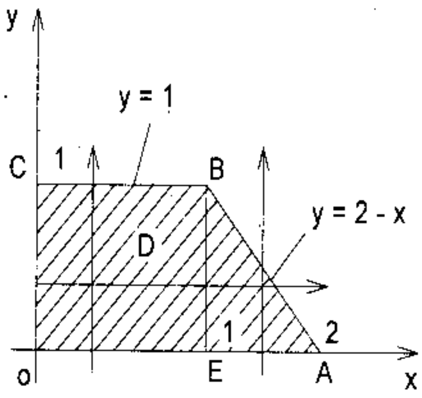
(Nhớ rằng, trong chương 6, ta có công thức :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \frac{2.4\ldots n-1}{1.3.5\ldots n}\ \text{nếu n nguyên, dương và lẻ)}$$

5 và 6. Sinh viên tự giải.

7. Nếu dùng công thức b) tính tích phân theo x trước, kẻ một đường thẳng bất kỳ song song với trục Ox, ta thấy rằng đường OC chứa điểm vào có phương trình x = 0, đường AB chứa điểm ra có phương trình x = 2 − y, còn y biến thiên từ $y_O = 0$ đến $y_C = 1$, vậy (hình 8.11) :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y)dx$$



Hình 8.11

Nếu dùng công thức a) tính tích phân theo y trước. Vì đường cong chứa điểm ra CBA gồm hai đoạn CB và BA có phương trình khác nhau, nên phải chia miền D thành hai miền OEBC và EAB. Ta có :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{OEBC} f(x, y)dxdy + \iint_{EAB} f(x, y)dxdy$$

Đối với miền OEBC, đường OE chứa điểm vào có phương trình y = 0, đường CB chứa điểm ra có phương trình y = 1, còn x biến thiên từ $x_O = 0$ đến $x_E = 1$, do đó :

$$\iint_{OEBC} f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy.$$

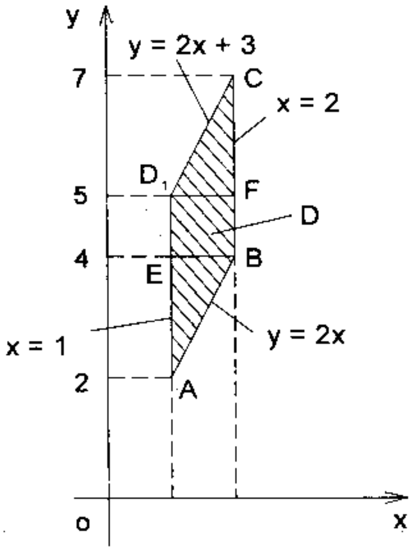
Đối với miền EAB, đường EA chứa điểm vào có phương trình y = 0, đường BA chứa điểm ra có phương trình y = 2 − x, còn x biến thiên từ $x_E = 1$ đến $x_A = 2$, do đó :

$$\iint_{EAB} f(x, y)dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

Vậy : $$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y)dy.$$

8. Nếu dùng công thức a) tính tích phân theo y trước, dùng cách xác định cận đã nêu trong phần tóm tắt lý thuyết, ta có (hình 8.12) :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x, y)dy.$$



Hình 8.12

Nếu dùng công thức b) tính tích phân theo x trước, ta thấy rằng đường cong AD_1C chứa điểm vào gồm hai đoạn AD_1 và D_1C có phương trình khác nhau; đường cong ABC chứa điểm ra gồm hai đoạn AB và BC có phương trình khác nhau; ngoài ra $y_B = 4 \neq y_{D_1} = 5$, nên phải chia miền D thành ba miền ABE, $EBFD_1$ và D_1FC, do đó :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{ABE} f(x, y)dxdy + \iint_{EBFD_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_1FC} f(x,y)dxdy.$$

Dùng cách xác định cận đã nêu trong phần tóm tắt lý thuyết, ta có :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_2^4 dy \int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_4^5 dy \int_1^2 f(x,y)dx + \int_5^7 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)dx.$$

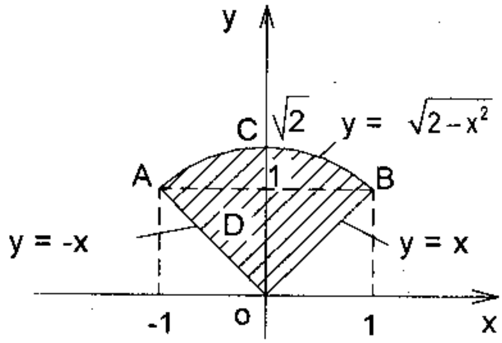
9. Nếu dùng công thức a) tính tích phân theo y trước, ta thấy rằng đường cong AOB chứa điểm vào gồm hai đoạn AO và OB có phương trình khác nhau, nên phải chia miền D thành hai miền AOC và COB, do đó :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{AOC} f(x, y)dxdy + \iint_{COB} f(x, y)dxdy.$$

Dùng cách xác định cận đã nêu trong phần tóm tắt lý thuyết, ta có (hình 8.13) :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

Nếu dùng công thức b), tính tích phân theo x trước, ta thấy rằng đường cong OAC chứa điểm vào gồm hai đoạn OA và AC có phương trình khác nhau; đường cong OBC chứa điểm ra gồm hai đoạn OB và BC có phương trình khác nhau, nhưng $y_A = y_B = 1$, nên phải chia miền D thành hai miền AOB và ACB, do đó :



Hình 8.13

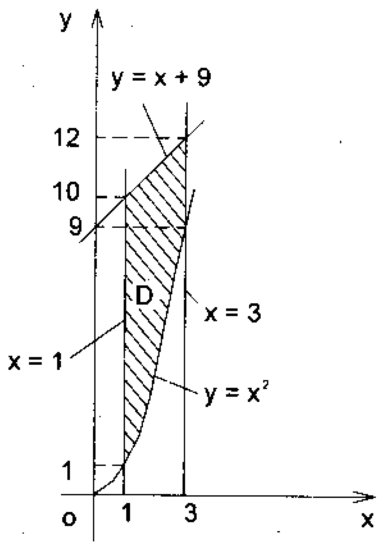
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{AOB} f(x, y)dxdy + \iint_{ACB} f(x, y)dxdy.$$

Dùng cách xác định cận đã nêu trong phần tóm tắt lý thuyết, ta có :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

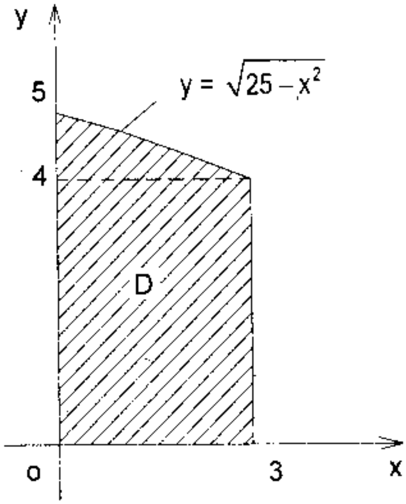
(Chú ý rằng, nếu biểu diễn x là hàm số của y thì $x = -\sqrt{2-y^2}$ là phương trình của đoạn AC, còn $x = \sqrt{2-y^2}$ là phương trình của đoạn BC).

10. Theo đầu bài, y biến thiên từ $y = x^2$ đến $y = x + 9$, còn x biến thiên từ $x = 1$ đến $x = 3$. Do đó, miền D giới hạn bởi các đường cong : $y = x^2$, $y = x + 9$, $x = 1$ và $x = 3$. Miền lấy tích phân D được vẽ trong hình 8.14.

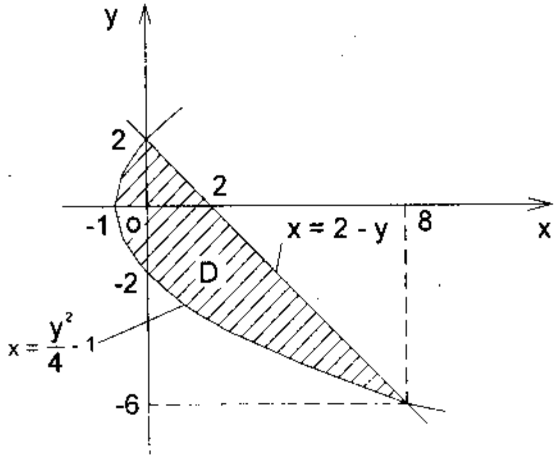


Hình 8.14

11. Ta có : y biến thiên từ $y = 0$ đến $y = \sqrt{25-x^2}$, còn x biến thiên từ $x = 0$ đến $x = 3$. Do đó, miền D giới hạn bởi các đường cong : $y = 0$, $y = \sqrt{25-x^2}$, $x = 0$ và $x = 3$. Miền lấy tích phân D được vẽ trong hình 8.15.



Hình 8.15

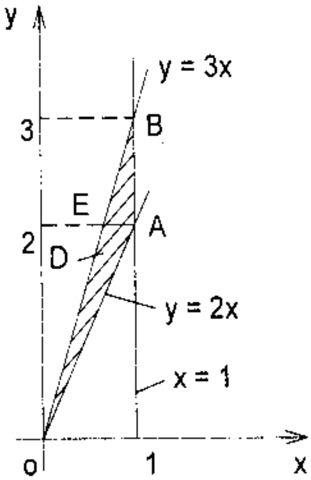


Hình 8.16

12. Ta có : x biến thiên từ $x = \dfrac{y^2}{4} - 1$ đến $x = 2 - y$, còn y biến thiên từ $y = -6$ đến $y = 2$. Do đó, miền D giới hạn bởi hai đường cong $x = \dfrac{y^2}{4} - 1$ và $x = 2 - y$ (hình 8.16).

13. Theo đầu bài, miền D giới hạn bởi các đường thẳng $y = 2x$, $y = 3x$ và $x = 1$ (hình 8.17).

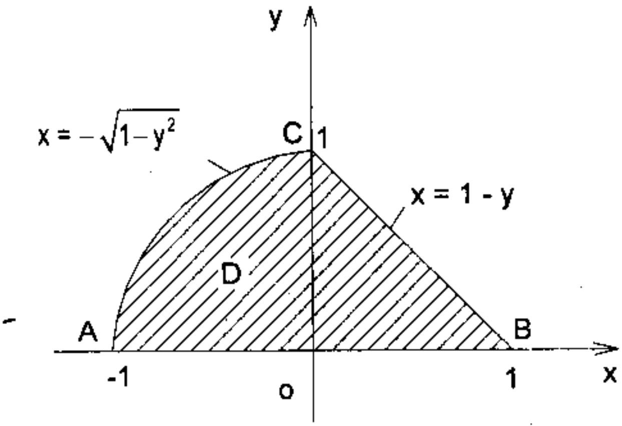
Đổi thứ tự lấy tích phân, nghĩa là lấy tích phân theo x trước. Vì đường cong OAB chứa điểm ra gồm hai đoạn OA và AB có phương trình khác nhau, nên phải chia miền D thành hai miền OAE và EAB, do đó :



Hình 8.17

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dx.$$

14. Theo đầu bài, miền D giới hạn bởi các đường cong $x = -\sqrt{1-y^2}$, $x = 1 - y$ và $y = 0$ (hình 8.18).

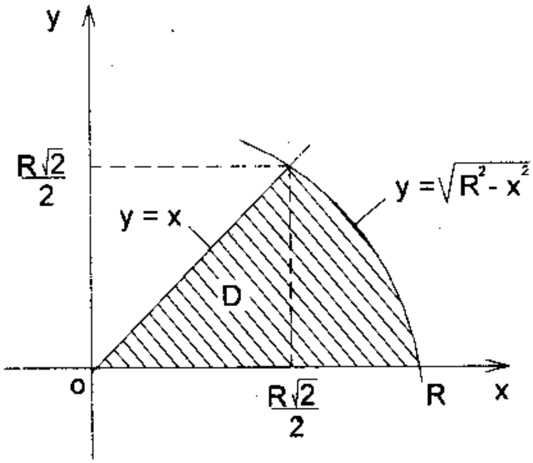


Hình 8.18

Đổi thứ tự lấy tích phân nghĩa là lấy tích phân theo y trước. Vì đường cong ACB chứa điểm ra gồm hai đoạn AC và CB có phương trình khác nhau, nên phải chia miền D thành hai miền AOC và OCB, do đó :

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy.$$

15. Theo đầu bài, miền D giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y = x$ và $y = 0$ (hình 8.19).



Hình 8.19

Đổi thứ tự lấy tích phân, ta được

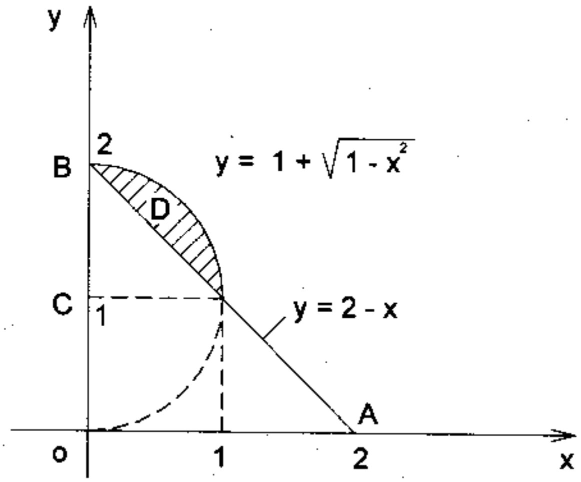
$$\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{x} f(x,y)dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx .$$

16. Dùng công thức a) tính tích phân theo y trước (hình 8.20), ta có :

$$\iint_D x dxdy = \int_0^1 x dx \int_{2-x}^{1+\sqrt{1+x^2}} dy = \int_0^1 x\left(y\Big|_{y=2-x}^{y=1+\sqrt{1-x^2}} \right)dx$$

$$= \int_0^1 x\left(x + \sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx = \int_0^1 (x^2 - x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} d(1-x^2)$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$



Hình 8.20

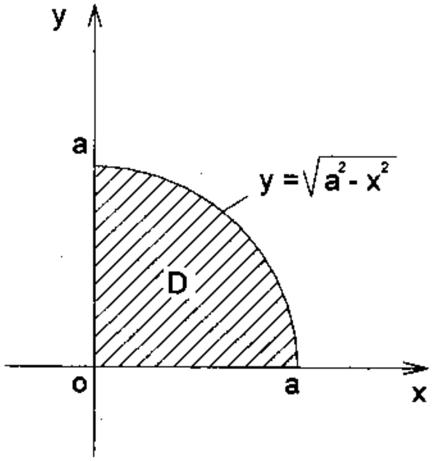
17. Dùng công thức a) (hình 8.21), ta có :

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

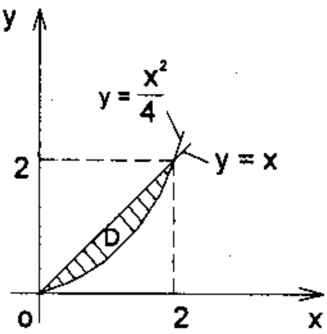
$$= \int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a (\arcsin 1 - \arcsin 0) dx$$

$$= \int_0^a (\arcsin 1) dx = \frac{\pi}{2} x \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} a.$$



Hình 8.21



Hình 8.22

18. Dùng công thức a) (hình 8.22), ta có :

$$\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2 + y^2} = \int_0^2 x\,dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^2 x\left(\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=x} dx = \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^2 (\operatorname{arctg} 1) dx - \int_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2} dx .$$

Đối với tích phân thứ hai ở vế phải, dùng phương pháp tích phân từng phần : đặt $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, $du = \frac{2dx}{4 + x^2}$, $dv = dx$, $v = x$, ta nhận được :

$$\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{4}x\Big|_0^2 - \left(x\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2xdx}{4+x^2}\right)$$

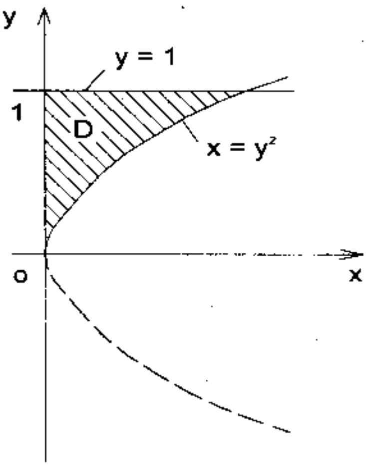
$$= \ln(4+x^2)\Big|_0^2 = \ln 2 .$$

Đối với các bài tập 16, 17, 18, sinh viên nên tự giải bằng cách dùng công thức b) (tính tích phân theo x trước). Đặc biệt, sinh viên có thể giải các bài tập 17, 18 bằng cách chuyển sang hệ tọa độ cực.

19. Dùng công thức b) (tính tích phân theo x trước (hình 8.23)), ta có :

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}dx = \int_0^1 (ye^{x/y})\Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (ye^y - y)dy$$

$$= \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 ydy .$$



Hình 9.23

Đối với tích phân thứ nhất ở vế phải, dùng phương pháp tích phân từng phần : đặt u = y, du = dy, dv = e^ydy, v = e^y, ta nhận được :

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy = ye^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= e - e^y\Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

20. Chuyển sang tọa độ cực phương trình các đường biên của miền D :

$y = x \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi = r\cos\varphi,$

$\mathrm{tg}\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$

$y = -x \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi = -r\cos\varphi,$

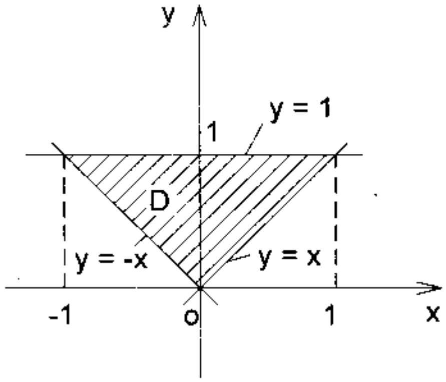
$\mathrm{tg}\varphi = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4},$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi = 1,\ r = \frac{1}{\sin\varphi}.$

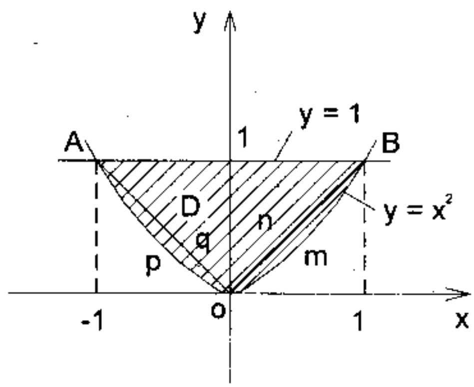
Vì gốc cực 0 nằm trên biên của miền D (hình 8.24), ta có :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi,\, \sin\varphi)\,rdr\,.$$



Hình 8.24



Hình 8.25

21. Theo đầu bài, miền D giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $y = 1$ (hình 8.25). Chuyển sang tọa độ cực phương trình các đường biên của miền D:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi = r^2\cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,,$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad r\sin\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sin\varphi}\,.$$

Vì đường cong kín giới hạn miền D đi qua gốc cực 0, gồm ba đoạn : hai đoạn OmB và OpA thuộc đường parabôn và một đoạn AB thuộc đường thẳng, nên phải chia miền D thành ba miền OmBnO, OnBAqO và OpAqO bởi hai tia OB : $\varphi = \frac{\pi}{4}$ và OA : $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Ta có :

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(tg\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rdr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(tg\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rdr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(tg\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{\sin\pi}{\cos^2\varphi}} rdr$$

22. Theo đầu bài, miền D giới hạn bởi các đường thẳng y = x, y = 0 và x = 2 (hình 8.26). Chuyển sang tọa độ cực phương trình các đường thẳng trên là :

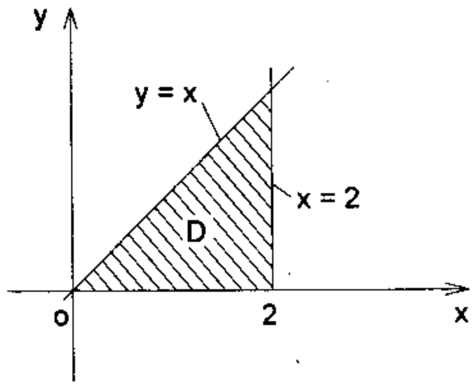
$y = x \Rightarrow r\sin\varphi = r\cos\varphi,$

$\mathrm{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4},$

$y = 0 \Rightarrow \varphi = 0,$

$x = 2 \Rightarrow r\cos\varphi = 2$

$\Rightarrow r = \frac{2}{\cos\varphi}.$



Hình 8.26

Vì gốc cực 0 nằm trên biên của miền D nên :

$$\int_0^2 dx \int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r)r dr.$$

23. Chuyển sang tọa độ cực, phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2ax$ có dạng :

$$r = 2a\cos\varphi.$$

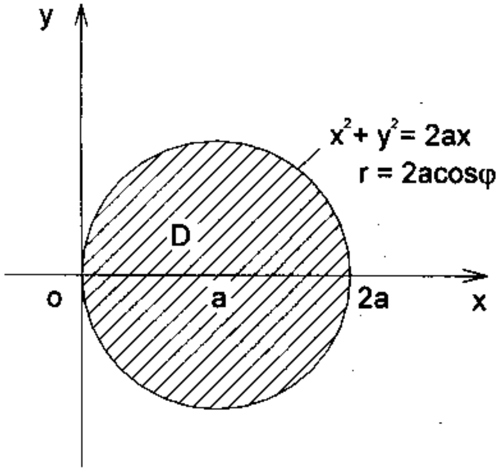
Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D (hình 8.27), nên :

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_D r^2.rdrd\varphi = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3 dr$$

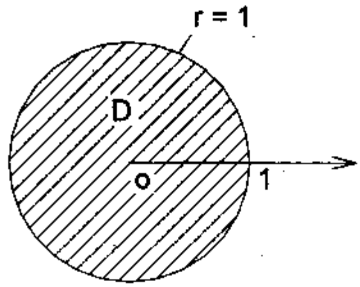
$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2a\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16a^4\cos^4\varphi d\varphi = 2.\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16a^4\cos^4\varphi d\varphi$$

($16a^4\cos^4\varphi$ là hàm số chẵn đối với φ)

$$= 8a^4\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^4}{2}.$$



Hình 8.27



Hình 8.28

24. Trong hệ tọa độ cực, đường tròn tâm O, bán kính 1 có phương trình: $r = 1$.

Vì gốc cực O nằm trong miền D (hình 8.28), nên :

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1 - r^2}\,.rdrd\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1}{2}}(-2rdr) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\varphi$$

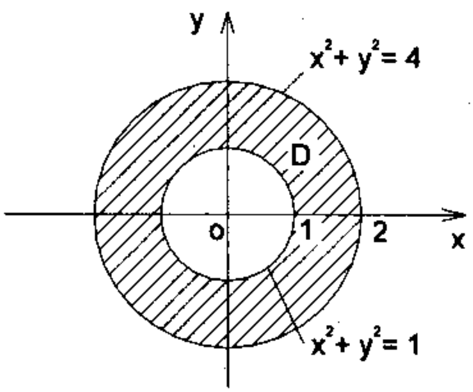
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

25. Chuyển sang tọa độ cực phương trình các đường biên của miền D là:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1,$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$$

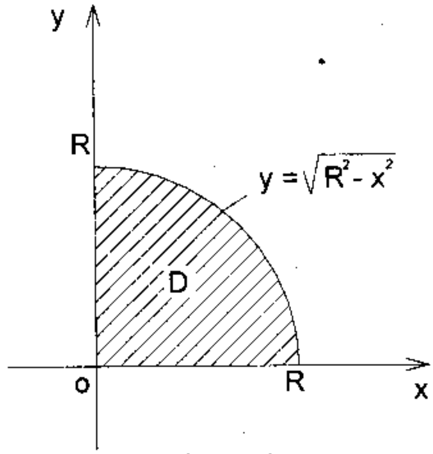
Dùng cách xác định cận đã nêu trong mục 4, phần tóm tắt lý thuyết và chú ý rằng miền D bao quanh gốc cực O (hình 8.29), nên :



Hình 8.29

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_D \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{r^2}} = \iint\limits_D drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 dr = 2\pi .$$

26. Theo đầu bài, miền D là một phần tư mặt tròn, nằm trong góc phần tư I, tâm tại O, bán kính R. Chuyển sang tọa độ cực, phương trình đường tròn $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ có dạng : $r = R$. Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D (hình 8.30), nên :



Hình 8.30

$$\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \ln(1+r^2)rdr$$

Tính :

$$\int\limits_0^R \ln(1+r^2)rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^R \ln(1+r^2).2rdr .$$

Đổi biến số : $1 + r^2 = t$, $2rdr = dt$; khi thay lần lượt $r = 0$, $r = R$, các cận mới là : $t = 1$ và $t = 1 + R^2$, do đó :

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^R \ln(1+r^2).2rdr = \frac{1}{2}\int\limits_1^{1+R^2} \ln t\, dt .$$

Để tính tích phân ở bên phải, dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t}$, $dv = dt$, $v = t$ và :

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^{1+R^2} \ln t\, dt = \frac{1}{2}\left[t\ln t\Big|_1^{1+R^2} - \int\limits_1^{1+R^2} dt \right]$$

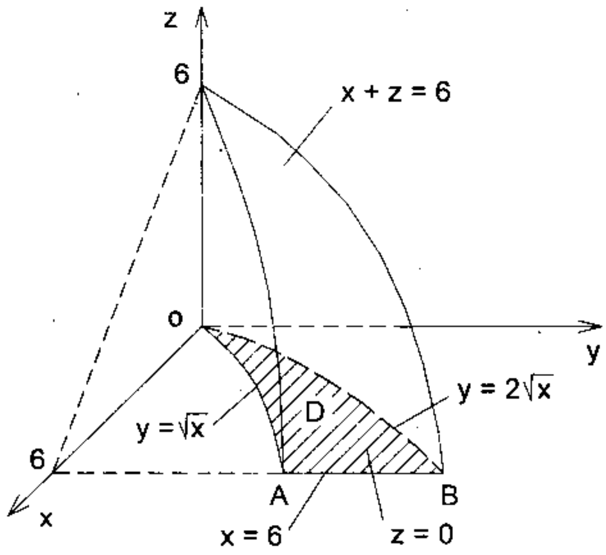
$$= \frac{1}{2}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2) - (1+R^2-1)\right].$$

Vậy:

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\right]d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\right]\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2\right].$$

27. Trong không gian, phương trình $y = \sqrt{x}$ và $y = 2\sqrt{x}$ là phương trình mặt trụ, đường sinh song song với Oz và đường chuẩn lần lượt là parabôn $y = \sqrt{x}$ và $y = 2\sqrt{x}$ trong mặt phẳng Oxy; $x + z = 6$ là phương trình mặt phẳng song song với Oy và thẳng góc với mặt phẳng Oxz (giao tuyến là đường thẳng $x + z = 6$) ; $z = 0$ là mặt phẳng Oxy. Do đó, vật thể mà ta phải tính thể tích có dạng như hình 8.31.



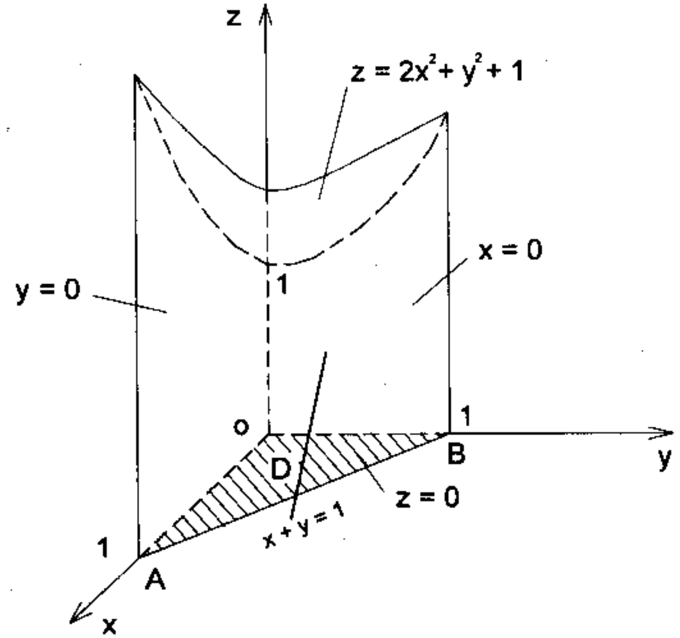
Hình 8.31

Thấy rằng, mặt giới hạn phía trên của vật thể có phương trình $z = 6 - x$, miền lấy tích phân D là tam giác cong OAB giới hạn bởi các đường parabol $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ và đường thẳng $x = 6$. Vậy :

$$V = \iint_D (6-x)\,dxdy = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x)\,dy = \int_0^6 (6-x)y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^6 (6-x)\sqrt{x}\,dx = \left(4x\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Big|_0^6 = \frac{48}{5}\sqrt{6}\,.$$

28. Trong không gian, x + y = 1 là phương trình mặt phẳng song song với Oz và thẳng góc với mặt phẳng Oxy (giao tuyến là đường thẳng x + y = 1). Mặt cong giới hạn phía trên của vật thể có phương trình $z = 2x^2 + y^2 + 1$, miền lấy tích phân D là tam giác vuông OAB giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, y = 0 và x + y = 1 (hình 8.32).



Hình 2.32

Vậy:

$$V = \iint_D (2x^2 + y^2 + 1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1)dy$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2y + \frac{y^3}{3} + y \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \left((2x^2 + 1)(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx$$

$$= \int_0^1 (-2x^3 + 2x^2 - x + 1)dx - \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3 d(1-x)$$

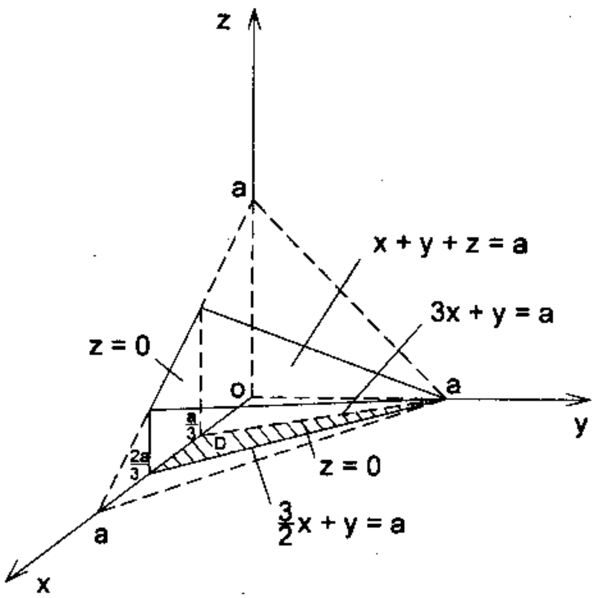
$$= \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{12}(1-x)^4 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

29. Trong không gian,

$$3x + y = a$$

và $\frac{3}{2}x + y = a$

là phương trình mặt phẳng song song với Oz và thẳng góc với mặt phẳng Oxy (giao tuyến là các đường thẳng $3x + y = a$ và $\frac{3}{2}x + y = a$). Mặt giới hạn phía trên của vật thể có phương trình $z = a - x - y$, miền lấy tích phân D là tam giác ABC giới hạn bởi



Hình 2.33

các đường thẳng $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$ và $y = 0$ (hình 8.33), do đó :

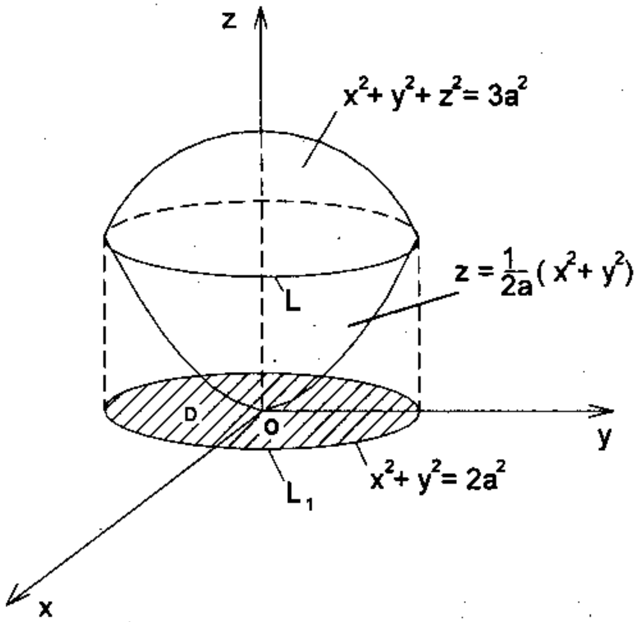
$$V = \iint\limits_D (a - x - y)\,dxdy = \int_0^a dy \int_{\frac{1}{3}(a-y)}^{\frac{2}{3}(a-y)} (a - x - y)\,dx$$

$$= \int_0^a \left((a-y)x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=\frac{1}{3}(a-y)}^{x=\frac{2}{3}(a-y)} dy$$

$$= \int_0^a \left[(a-y)\frac{1}{3}(a-y) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}(a-y)^2 - \frac{1}{9}(a-y)^2 \right) \right] dy$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^a (a-y)^2\, d(a-y) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(a-y)^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{18}.$$

30. $z = \dfrac{1}{2a}(x^2 + y^2)$ là phương trình mặt parabôlôit tròn xoay, có đỉnh tại gốc O; $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ là phương trình mặt cầu tâm tại gốc O, bán kính $a\sqrt{3}$.



Hình 8.34

Đường cong L, giao tuyến của hai mặt, được xác định bởi hệ thống hai phương trình :

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{2a}(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \end{cases}$$

Khử z trong hai phương trình, ta được :

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{4a^2}(x^2 + y^2)^2 = 3a^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 4a^2(x^2 + y^2) - 12a^4 = 0.$$

Đó là phương trình bậc hai đối với $x^2 + y^2$, giải ra nhận được $x^2 + y^2 = 2a^2$. Đây chính là phương trình của đường tròn L_1, giới hạn miền D và là hình chiếu của đường cong giao tuyến L xuống mặt phẳng Oxy (hình 8.34).

Vì tính đối xứng của vật thể đối với các mặt phẳng tọa độ Oxz và Oyz, nên chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ thể tích nằm trong góc phần tám thứ thứ nhất. Ta có :

$$\frac{V}{4} = \iint_{D_1} \left(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2a} \right) dxdy$$

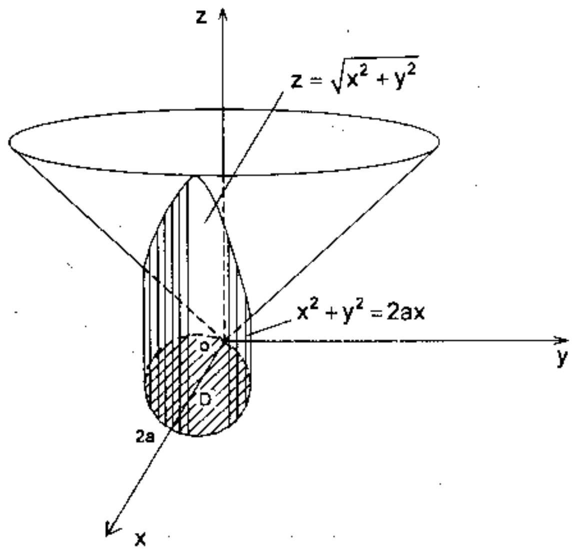
trong đó, D_1 là $\frac{1}{4}$ mặt tròn $x^2 + y^2 \le 2a^2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ cực bằng cách thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, ta có :

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a} \right) rdr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3}(3a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{8a} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=a\sqrt{2}} d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{6\sqrt{3} - 5}{6} a^3 d\varphi = \frac{2}{3}(6\sqrt{3} - 5)a^3\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5).$$

31. Theo hình 8.35, mặt giới hạn phía trên của vật thể là mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, miền lấy tích phân D là mặt tròn tâm (a, 0), bán kính a, nằm trong mặt phẳng Oxy.

Vì tính đối xứng của vật thể đối với mặt phẳng tọa độ Oxz, chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ thể tích nằm trong góc phần tám thứ nhất. Ta có :



Hình 8.35

$$\frac{V}{2} = \iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$

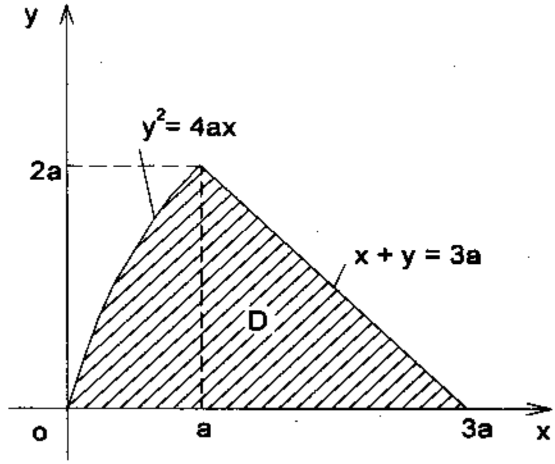
trong đó, D_1 là $\frac{1}{2}$ mặt tròn $x^2 + y^2 \le 2ax$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ cực bằng cách thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, ta có:

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}r^3\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8a^3\cos^3\varphi = 2.\frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi$$

$$= \frac{16}{3}a^3.\frac{2!!}{3!!} = \frac{32}{9}a^3.$$

32. Ta có: $S = \iint\limits_D dxdy.$



Hình 8.36

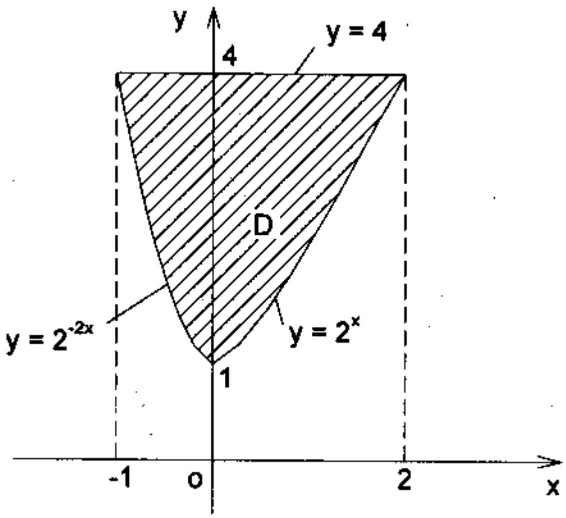
Với miền D ở hình 8.36, ta tính tích phân theo x trước là đơn giản nhất:

$$S = \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int_0^{2a} x\Bigg|_{x=\frac{y^2}{4a}}^{x=3a-y} dy = \int_0^{2a}\left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right)dy$$

$$= \left(3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a}\right)\Bigg|_0^{2a} = \frac{10}{3}a^2.$$

33. Ta có:

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$



Hình 8.37

Với miền D ở hình 8.37, ta tính tích phân theo x trước là đơn giản nhất:

$$S = \int_1^4 dy \int_{-\frac{\ln y}{2\ln 2}}^{\frac{\ln y}{\ln 2}} dx = \int_1^4 \left(\frac{\ln y}{\ln 2} + \frac{\ln y}{2\ln 2}\right) dy = \frac{2}{2\ln 2}\int_1^4 \ln y dy.$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = \ln y \Rightarrow du = \dfrac{dy}{y}$, $dv = dy$, $v = y$, ta có:

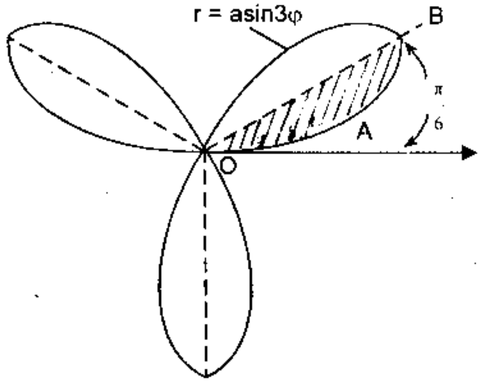
$$S = \frac{3}{2\ln 2}(y\ln y - y)\Big|_1^4 = \frac{3}{2\ln 2}(4\ln 4 - 3) = 12 - \frac{9}{\ln 4} \approx 5,507.$$

34. Vì tính đối xứng của diện tích phải tìm, nên chỉ cần tính $\dfrac{1}{6}$ diện tích (hình 8.38), và có:

$$\frac{S}{6} = \iint\limits_{OAB} r dr d\varphi.$$

$$S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{a\sin 3\varphi} rdr=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a\sin 3\varphi}d\varphi=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\sin^2 3\varphi d\varphi$$

$$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi=\frac{3a^2}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$



Hình 8.38

35. Phương trình mặt phẳng có thể viết dưới dạng:

$$z=6-3x-\frac{3}{2}y.$$

Do đó, $p=z'_x=-3$,

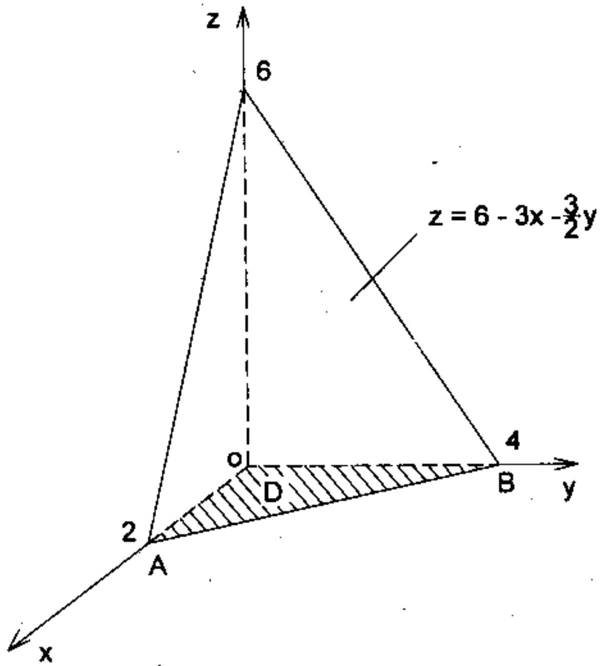
$$q=z'_y=-\frac{3}{2}$$

và

$$S=\iint_D\sqrt{1+9+\frac{9}{4}}dxdy=\frac{7}{2}\iint_D dxdy.$$

Nhưng $\iint_D dxdy$ chính là diện tích của tam giác vuông OAB (hình 8.39), vậy:

$$S=\frac{7}{2}.\frac{1}{2}.4.2=14.$$



Hình 8.39

36. Vì tính đối xứng của diện tích phải tìm đối với các mặt phẳng tọa độ Oxz và Oyz, nên chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ diện tích nằm trong góc phần tám thứ nhất (hình 8.40).

Ta có: $p = z'_x = 2x,$

$q = z'_y = 2y,$

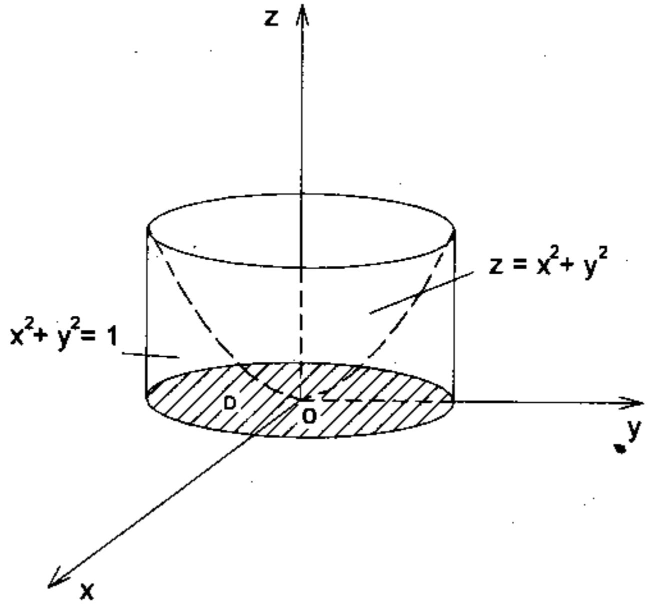
và: $$\frac{S}{4} = \iint_{D_1} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy$$

trong đó D_1 là $\frac{1}{4}$ mặt tròn $x^2 + y^2 \leq 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ cực bằng cách thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, ta có:

$$S = 4\iint_{D_1} \sqrt{1 + 4r^2}\,rdrd\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{8}(1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4r^2) =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=1} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\sqrt{5}-1)d\varphi$$

$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$



Hình 8.40

37. Vì tính đối xứng của diện tích phải tìm đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy và Oxz, chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ diện tích nằm trong góc phần tám I (hình 8.41). Ta có:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$p = z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$q = z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

và:

$$\frac{S}{4}=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

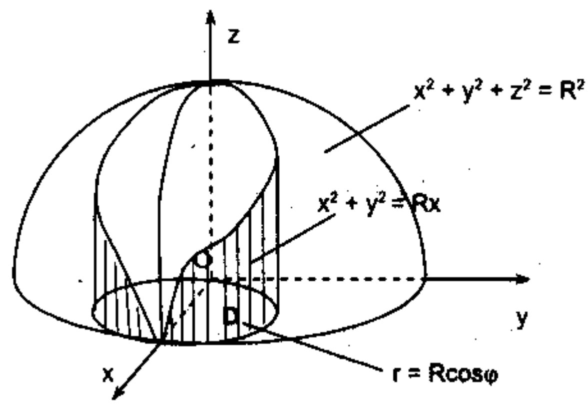
$$S=4R\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

trong đó D là một nửa mặt tròn $x^2 + y^2 \le Rx$, $y \ge 0$ trong mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ cực bằng cách thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$:

$$S=4R\iint\limits_{D}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}}=-2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\cos\varphi}(R^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}d(R^2-r^2)$$

$$=-2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{r=0}^{r=R\cos\varphi}d\varphi=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi$$

$$=4R^2(\varphi+\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2R^2(\pi-2).$$



Hình 8.41

Chương IX

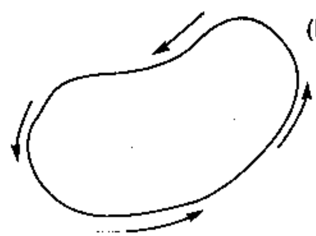
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hai hàm số P(x, y), Q(x, y) xác định trên cung cong phẳng $\overset{\frown}{BC}$. Chia tuỳ ý cung $\overset{\frown}{BC}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $B = B_o, B_1, B_2, ..., B_n = C$ có các độ dài tương ứng là $\Delta s_o, \Delta s_1, ..., \Delta s_{n-1}$. Trên mỗi cung nhỏ thứ i $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Gọi $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ và $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ là các hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ lên hai trục Ox và Oy. Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\Delta s_i \to 0$, tổng $I_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]$ tiến tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia $\overset{\frown}{BC}$ và cách chọn điểm M_i trên mỗi cung nhỏ $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$, thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường của hai hàm số P(x, y), Q(x, y) dọc theo cung cong phẳng từ B đến C, ký hiệu là

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$



Hình 9.1

Nếu cung cong phẳng $\overset{\frown}{BC}$ trơn và nếu các hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$ thì tích phân đường tồn tại.

Từ định nghĩa dễ thấy rằng

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Chú ý : Tích phân đường dọc theo đường cong kín L theo chiều dương (chiều sao cho một người đi dọc L theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở về bên trái (hình 9.1)) được ký hiệu là :

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2. Các tính chất của tích phân đường

Một tính chất hay dùng là : Nếu cung cong phẳng $\overset{\frown}{BC}$ chia thành hai cung $\overset{\frown}{BD}$ và $\overset{\frown}{DC}$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\overset{\frown}{BD}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{DC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

3. Các tính tích phân đường

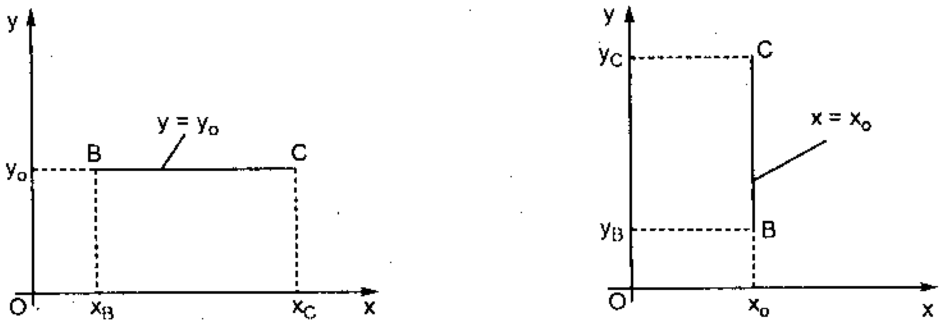
Giả sử $\overset{\frown}{BC}$ là một cung cong trơn, các hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$.

a) Nếu $\overset{\frown}{BC}$ được cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, điểm B ứng với t_B, điểm C ứng với t_C thì :

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_B}^{t_C} \left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt .$$

b) Nếu $\overset{\frown}{BC}$ được cho bởi phương trình $y = f(x)$, điểm B ứng với x_B, điểm C ứng với x_C thì :

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_B}^{x_C} [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]dx.$$



Hình 9.2

Đặc biệt, nếu (hình 9.2) :

- $\overset{\frown}{BC}$ là một đoạn thẳng $y = y_0$, $x_B \le x \le x_C$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_B}^{x_C} P(x,y_o)dx.$$

- $\overset{\frown}{BC}$ là một đoạn thẳng $x = x_0$, $y_B \le y \le y_C$ thì

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_B}^{y_C} Q(x_o, y)dy.$$

c) Nếu $\overset{\frown}{BC}$ được cho bởi phương trình $x = g(y)$, điểm B ứng với y_B, điểm C ứng với y_C thì :

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_B}^{y_C} [P(g(y),y)g'(y) + Q(g(y),y)]dy.$$

4. Công thức Green

Nếu các hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền D thì ta có công thức Green :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy,$$

trong đó L là biên của miền D.

5. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường cong lấy tích phân

Nếu các hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền D, giới hạn bởi một đường cong kín L, thì điều kiện ắt có và đủ để $\oint_l Pdx + Qdy = 0$, l là một đường cong kín bất kỳ nằm trong miền D, là :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ với } \forall (x, y) \in D.$$

6. Công của một lực biến đổi

Công A của một lực $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ tác dụng lên một chất điểm M chuyển động trên cung cong phẳng từ B đến C được tính bởi công thức

$$A = \int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

7. Diện tích hình phẳng

Diện tích S của miền D, giới hạn bởi đường cong kín L trong mặt phẳng Oxy được tính bằng một trong ba công thức sau :

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx\ ;$$

$$S = \oint_L xdy\ ;$$

$$S = -\oint_L ydx.$$

8. Tích phân đường trong không gian

Tích phân đường của ba hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) xác định trên cung cong $\overset{\frown}{BC}$ trong không gian được định nghĩa như sau : Chia $\overset{\frown}{BC}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $B = B_0, B_1, B_2, ..., B_n = C$. Trên mỗi cung nhỏ $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i, \xi_i)$. Khi đó :

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta s_i \to 0 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} [P(\xi_i, \eta_i, \xi_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \xi_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \xi_i)\Delta z_i],$$

trong đó $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ lần lượt là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ lên ba trục Ox, Oy, Oz.

Nếu $\overset{\frown}{BC}$ là một cung trơn trong không gian, được cho bởi phương trình tham số : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$; điểm B ứng với t_B, điểm C ứng với t_C; các hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$, thì :

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_B}^{t_C} [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) +$$

$$+ R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]dt$$

B. ĐỀ BÀI

1. Tính các tích phân đường sau :

a) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ điểm A(1, 1) đến điểm B(2, 4).

b) $\int\limits_{L} (xy - 1)dx + x^2 y dy$, L từ điểm A(1, 0) đến điểm B(0, 2) trong các trường hợp sau :

α) theo đường thẳng 2x + y = 2;

β) theo cung parabol $4x + y^2 = 4$;

γ) theo cung elip x = cost, y = 2sint.

c) $\oint\limits_{L} (x^2 + y^2)dy$, L là chu vi của hình tứ giác có các đỉnh là A(0, 0), B(2, 0), C(4, 4) và D(0, 4).

d) $\oint\limits_{L} xdy$, L là chu vi của tam giác tạo nên bởi các trục toạ độ và đường thẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

e) $\int\limits_{L} (2a - y)dx + (a - y)dy$, L là cung xyclôit từ t = 0 đến t = 2π :

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

g) $\oint\limits_{L} \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$.

h) $\int\limits_{L} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, L là một phần tư đường hình sao $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$, từ điểm A(R, 0) đến điểm B(0, R).

2. Dùng công thức Green tính :

a) $\oint\limits_{L} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, L là chu vi của tam giác có các đỉnh A(1, 1), B(2, 2), C(1, 3). Tìm lại kết quả thu được bằng cách tính trực tiếp tích phân đường trên.

b) Hiệu của hai tích phân :

$$I_1 = \int_{\overline{AmB}} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy \text{ và } I_2 = \int_{\overset{\frown}{AnB}} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

trong đó $\overline{AmB}$ là đoạn thẳng nối điểm A(0, 0) với điểm B(1, 1), $\overset{\frown}{AnB}$ là cung parabol $y = x^2$ nối hai điểm trên.

3. Cho $I = \oint_L (1-x^2)y dx + x(1+y^2)dy$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$. Tính :

a) Trực tiếp I;

b) I bằng cách dùng công thức Green.

4. Dùng công thức Green tính

$$I = \oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,$$

L là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm lại kết quả thu được bằng cách tính trực tiếp tích phân đường trên.

5. Tính

$$I = \int_C (x^2 + y\cos xy)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy,$$

C là cung tròn x = acost, y = asint, lấy theo chiều tăng của tham số t : $0 \le t \le \pi$, $a > 0$.

6. Tính :

a) $\int_{\overset{\frown}{AB}} x^2dx + y^2dy$, $\overset{\frown}{AB}$ là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ nằm phía trên trục Ox và lấy theo chiều kim đồng hồ.

b) $\oint_L y\cos x dx + \sin x dy$, L là đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

7. Tìm hằng số a để

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(x^2 + 2xy + ay^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x+y)^3}$$

không phụ thuộc vào đường cong lấy tích phân đối với các đường cong không cắt đường thẳng $y = -x$. Tính tích phân I với a tìm được và $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

8. Các hình chiếu của lực $\vec{F}$ xuống các trục toạ độ là $P = 2xy$, $Q = x^2$. Chứng minh rằng công của lực $\vec{F}$ không phụ thuộc đường đi, mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối..

Tính công khi đi từ điểm $B(1, 0)$ đến điểm $C(0, 3)$.

9. Tại một điểm M của elip : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ có tác dụng một lực $\vec{F}$, mà môđun bằng khoảng cách từ M tới tâm elip và hướng về tâm elip.

a) Tính công của lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động dọc theo cung elip, nằm trong góc phần tư thứ nhất, từ $(a, 0)$ đến $(0, b)$.

b) Tính công của lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động dọc theo toàn bộ đường elip theo chiều dương.

10. Dùng tích phân đường tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đường parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 1$;

b) Đường axtrôit $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

11. Tính tích phân đường trong không gian

$$\int_L xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$$

với :

a) L là đoạn thẳng nối điểm $O(0, 0, 0)$ và điểm $B(-2, 4, 5)$;

b) L là cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ trong không gian cho bởi phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 45 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

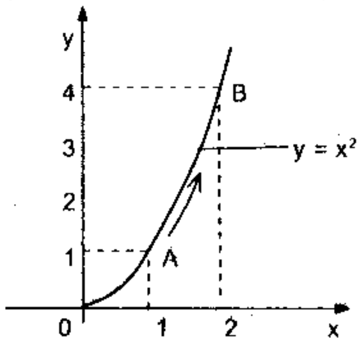
(cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ là một phần của đường tròn, giao tuyến của mặt cầu tâm $O(0, 0, 0)$, bán kính $\sqrt{45}$ với mặt phẳng $y = -2x$, nối điểm $A(3, -6, 0)$ và điểm $B(-2, 4, 5)$).

C. BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

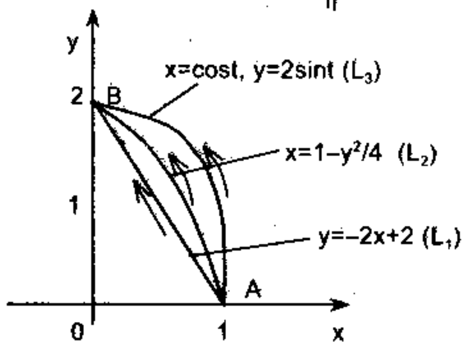
1. a) Ta có (hình 9.3) :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy = \int_{x_A}^{x_B} [(x^2 - 2x.x^2) + (2x.x^2 + (x^2)^2)2x]dx$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{6}x^6\right)\Bigg|_1^2 = 40\frac{19}{30}.$$



Hình 9.3



Hình 9.4

b.α) $y = -2x + 2,\ y' = -2$

$$\int_{L_1} (xy - 1)dx + x^2ydy = \int_{x_A}^{x_B} [x(-2x + 2) - 1 + x^2(-2x + 2)(-2)]dx$$

$$= \int_1^0 (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)dx = (x^4 - 2x^3 + x^2 - x)\Bigg|_1^0 = 1 \text{ (hình 9.4).}$$

β) Đơn giản nhất là đưa tích phân đường về tích phân xác định theo biến y :

$$x = 1 - \frac{y^2}{4},\ x'_y = -\frac{y}{2},$$

$$\int_{L_2} (xy - 1)dx + x^2ydy = \int_{y_A}^{y_B} \left[\left(\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)y - 1\right)\left(\frac{-y}{2}\right) + \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2 y\right]dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{y^6}{96} + \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^2}{4} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{17}{15}.$$

γ) $x = \cos t$, $x'_t = -\sin t$; $y = 2\sin t$, $y'_t = 2\cos t$.

$$\int_{L_3} (xy - 1)dx + x^2 y dy =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left[(\cos t.2\sin t - 1)(-\sin t) + \cos^2 t.2\sin t.2\cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^3 t \sin t + \sin t - 2\sin^2 t \cos t) dt$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, d(\sin t)$$

$$= \left(-\cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3}\sin^3 t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

c) Ta có :

$$\oint_L (x^2 + y^2)dy = \int_{\overline{AB}} (x^2 + y^2)dy + \int_{\overline{BC}} (x^2 + y^2)dy +$$

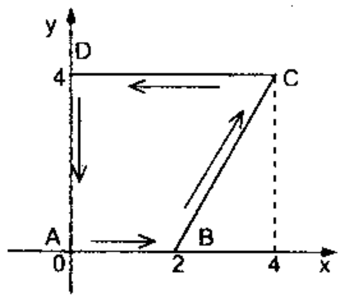
$$+ \int_{\overline{CD}} (x^2 + y^2)dy + \int_{\overline{DA}} (x^2 + y^2)dy \text{ (hình 9.5).}$$

Trên AB và CD, $y = 0$ và $y = 4$, nên $dy = 0$ và :

$$\int_{\overline{AB}} (x^2 + y^2)dy = \int_{\overline{CD}} (x^2 + y^2)dy = 0.$$

Trên DA, $x = 0$, nên :

$$\int_{\overline{DA}} (x^2 + y^2)dy = \int_4^0 y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 \Bigg|_4^0 = -\frac{64}{3}.$$



Hình 9.5

Phương trình của đường BC là : $x = \frac{y}{2} + 2$, do đó :

$$\int\limits_{BC} (x^2 + y^2)dy = \int\limits_{y_B}^{y_C} \left(\left(\frac{y}{2} + 2 \right)^2 + y^2 \right) dy$$

$$= \int\limits_0^4 \left(\frac{5}{4}y^2 + 2y + 4 \right) dy = \left(\frac{5}{12}y^3 + y^2 + 4y \right) \Bigg|_0^4 = \frac{176}{3}.$$

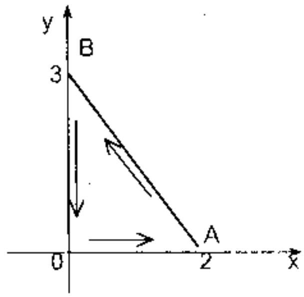
Vậy

$$\oint\limits_L (x^2 + y^2)dy = \frac{176}{3} - \frac{64}{3} = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}.$$

d) Ta có :

$$\oint\limits_L xdy = \oint\limits_{OA} xdy + \int\limits_{AB} xdy + \int\limits_{BO} xdy$$

(hình 9.6).



Hình 9.6

Trên OA, y = 0, dy = 0; trên BO, x = 0.

nên :

$$\int\limits_{OA} xdy = \int\limits_{BO} xdy = 0.$$

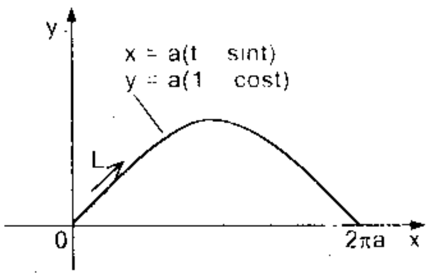
Phương trình của đường AB là :

$$x = 2\left(1 - \frac{y}{3}\right), \text{ do đó :}$$

$$\oint\limits_L xdy = \int\limits_{AB} xdy = 2\int\limits_{y_A}^{y_B} \left(1 - \frac{y}{3}\right)dy = 2\int\limits_0^3 \left(1 - \frac{y}{3}\right)dy = 2\left(y - \frac{y^2}{6}\right)\Bigg|_0^3 = 3$$

(Sinh viên nên thử tính $\int\limits_{AB} xdy$, xem y là hàm số của x).

e) Ta có (hình 9.7) :



Hình 9.7

$x = a(t - \sin t)$,

$x'_t = a(1 - \cos t)$,

$y = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$.

$$\int_L (2a-y)dx-(a-y)dy=$$

$$=\int_0^{2\pi}[(2a-a(1-\cos t))a(1-\cos t)-(a-a(1-\cos t))a\sin t]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[a^2(1-\cos^2 t)-a^2\sin t\cos t]dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t-\sin 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi a^2.$$

g) Đơn giản nhất là viết phương trình đường tròn $x^2+y^2=a^2$ dưới dạng tham số : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Ta có : $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = a\cos t$, và :

$$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)a\cos t}{a^2}dt$$

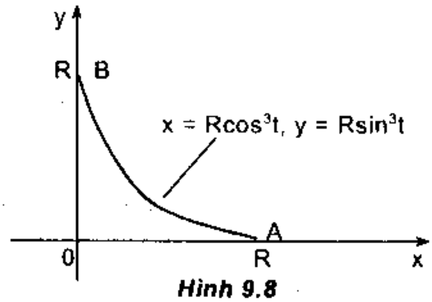
$$=\int_0^{2\pi}-(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=-\int_0^{2\pi}dt=-t\Big|_0^{2\pi}=-2\pi.$$

h) Ta có :

$x = R\cos^3 t$, $x'_t = -3R\cos^2 t\sin t$,

$y = R\sin^3 t$, $y'_t = 3R\sin^2 t\cos t$

(hình 9.8) và :



Hình 9.8

$$\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R\cos^3 t)^2 3R\sin^2 t\cos t-(R\sin^3 t)^2(-3R\cos^2 t\sin t)}{(R\cos^3 t)^{5/3}+(R\sin^3 t)^{5/3}}dt=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3R^3 \sin^2 t \cos^2 t(\cos^5 t + \sin^5 t)}{R^{5/3}(\cos^5 t + \sin^5 t)} dt$$

$$= \frac{3}{4} R^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt$$

$$= \frac{3}{8} R^{4/3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8} R^{4/3} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16} \pi R \sqrt[3]{R}.$$

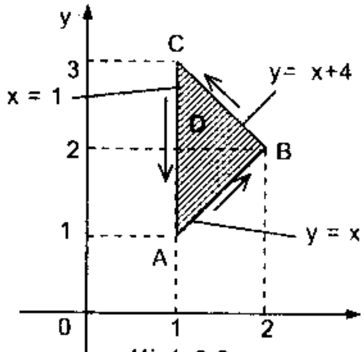
2. a) • Dùng công thức Green :

Ta có : $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$,

$Q(x, y) = (x + y)^2$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)$$

là những hàm số liên tục trên tam giác ABC (hình 9.9), nên áp dụng công thức Green, nhận được :



Hình 9.9

$$\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = \iint_D 2(x - y)dxdy$$

$$= 2\int_1^2 dx \int_x^{-x+4} (x - y)dy = 2\int_1^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^{y=-x+4} dx$$

$$= 2\int_1^2 (-2x^2 + 8x - 8)dx = 2\left(-2\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 8x \right) \Big|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

• Tính trực tiếp :

Ta có :

$$\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = \int_{\overline{AB}} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy +$$

$$+ \int_{\overline{BC}} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy + \int_{\overline{CA}} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy;$$

$$\int_{AB} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \int_{x_A}^{x_B} (2(x^2+x^2)+(x+x)^2.1)dx$$

$$= \int_1^2 8x^2dx = 8\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{56}{3}\ ;$$

$$\int_{BC} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy =$$

$$= \int_{x_B}^{x_C} [2(x^2+(-x+4)^2) + (x-x+4)^2.(-1)]dx$$

$$= \int_2^1 (4x^2-16x+16)dx = \left(4\frac{x^3}{3}-8x^2+16x\right)\bigg|_2^1 = -\frac{4}{3}\ ;$$

$$\int_{CA} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy =$$

$$= \int_{y_C}^{y_A} (1+y)^2dy = \int_3^1 (1+y)^2dy = \frac{1}{3}(1+y)^3\bigg|_3^1 = -\frac{56}{3}.$$

Vậy :

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}.$$

b) Ta có :

$$I_1 - I_2 = \int_{\overset{\frown}{AmB}} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy - \int_{\overset{\frown}{AnB}} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AmB}} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy + \int_{\overset{\frown}{BnA}} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AmBnA}} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$$

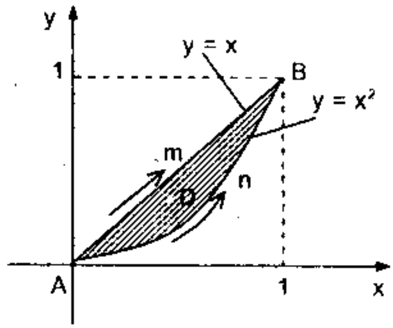
$$= -\oint_{\overset{\frown}{AnBmA}} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy.$$

Ở đây : $\quad P(x, y) = (x+y)^2,$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y)\,;$$

$$Q(x, y) = -(x-y)^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2(x-y).$$



Hình 9.10

Dùng công thức Green, ta nhận được (hình 9.10) :

$$I_1 - I_2 = -\oint\limits_{\overset{\frown}{AnBmA}} (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$$

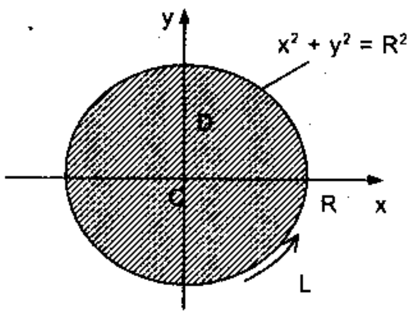
$$= -\iint\limits_D[-2(x-y)-2(x+y)]dxdy = \iint\limits_D 4xdxdy = 4\int_0^1 xdx\int_{x^2}^{x}dy$$

$$= 4\int_0^1 x.(y)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx = 4\int_0^1 x(x-x^2)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. • Tính trực tiếp :

Viết phương trình đường tròn dưới dạ

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad \text{với } 0 \le t \le 2\pi.$$



Hình 9.11

Ta có : $x'_t = -R\sin t$; $y'_t = R\cos t$ và :

$$I = \oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big[(1-R^2\cos^2 t)R\sin t(-R\sin t) + R\cos t(1+R^2\sin^2 t)R\cos t\Big]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}[R^2(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2R^4\sin^2 t\cos^2 t]dt$$

$$= R^2\int_0^{2\pi}\cos 2tdt + \frac{R^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt$$

$$= \frac{R^2}{2}\sin 2t\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{R^4}{4}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{2}$$

• Dùng công thức Green :

Ta có :

$$P(x, y) = (1 - x^2)\, y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2,$$

$$Q(x, y) = x(1 + y^2),\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2,$$

và :

$$I = \oint_L (1 - x^2)\, y dy + x(1 + y^2) dy = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy.$$

Để tính được đơn giản, ta chuyển sang tọa độ cực bằng cách thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, nhận được :

$$\iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \iint_D r^2 . rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \Bigg|_{r=0}^{r=R} \right) d\varphi = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^4}{4} \varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Vậy : $$I = \oint_L (1 - x^2)\, y dx + x(1 + y^2) dy = \frac{\pi R^4}{2}.$$

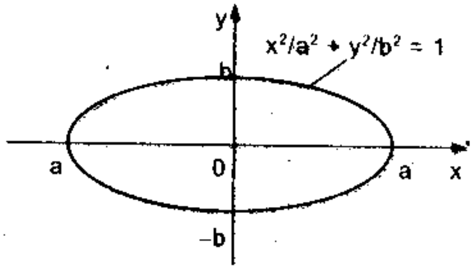
4. • Dùng công thức Green :

Ta có : $P(x, y) = xy + x + y$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1 ;$$

$$Q(x, y) = xy + x - y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1,$$



Hình 9.12

và :

$$I = \oint_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$$

$$= \iint_D [y + 1 - (x + 1)] dxdy = \iint_D (y - x) dxdy,$$

trong đó D là miền giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hình 9.12).

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (y-x)dy = \int_{-a}^{a}\left[\left(\frac{y^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\right]dx$$

$$= \int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) - \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\right)dx -$$

$$- \int_{-a}^{a} x\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\right)dx$$

$$= \int_{-a}^{a} -\frac{2b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 0 \text{ vì } -\frac{2b}{a}x\sqrt{a^2-x^2} \text{ là hàm số lẻ đối với x.}$$

Qua thí dụ này, rút ra kết quả sau :

$$\iint_D ydxdy = 0 \text{ nếu miền D đối xứng đối với trục Ox;}$$

$$\iint_D xdxdy = 0 \text{ nếu miền D đối xứng đối với trục Oy.}$$

• Tính trực tiếp :

Viết phương trình elip dưới dạng tham số :

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t, \text{ với } -\pi \le t \le \pi.$$

Ta có : $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$, và :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}[(a\cos t.b\sin t + a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) +$$

$$+ (a\cos t b\sin t + a\cos t - b\sin t)b\cos t]dt$$

$$= -a^2b\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\cos t dt - (a^2+b^2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t dt +$$

$$+ ab\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 t - \sin^2 t)dt + ab^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\sin t dt.$$

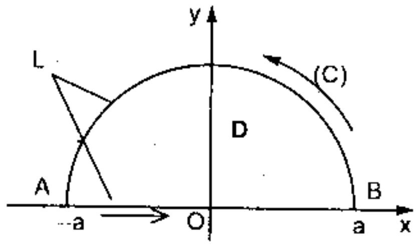
Tích phân thứ hai và thứ tư ở vế phải bằng không vì hàm số dưới dấu tích phân lẻ, do đó :

$$I = -2a^2b\int_0^{\pi}\sin^2 t\,d(\sin t) + 2ab\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt$$

$$= -2a^2b\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi} + 2ab\frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 0$$

(chú ý rằng $\sin^2 t\cos t$ và $\cos^2 t - \sin^2 t$ là những hàm số chẵn. Ở đây, ta không lấy $t \in [0, 2\pi]$ mà lấy $t \in [-\pi, \pi]$ nhằm sử dụng tính chẵn, lẻ của hàm số dưới dấu tích phân xác định).

5. Để tạo nên một đường cong kín L, ta bổ sung vào nửa đường tròn C đã cho đoạn thẳng $\overline{AB}$ có phương trình $y = 0$, $dy = 0$, $-a \le x \le a$ (hình 9.13). Khi đó, miền D, giới hạn bởi đường cong kín L, là nửa mặt tròn tâm O, bán kính a, nằm ở phía trên trục Ox. Dùng công thức Green, ta có :



Hình 9.13

$$P(x, y) = x^2 + y\cos xy,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos xy - xy\sin xy\ ;$$

$$Q(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 + y^2 - 1 + \cos xy - xy\sin xy, \text{ và :}$$

$$I = \int_C (x^2 + y\cos xy)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy +$$

$$+ \int_{\overline{AB}} (x^2 + y\cos xy)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy -$$

$$- \int_{\overline{AB}} (x^2 + y\cos xy)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy =$$

$$= \oint_L (x^2 + y\cos xy)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy -$$

$$- \int_{AB} (x^2 + y\cos xy)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2 - 1)dxdy - \int_{-a}^{a} x^2 dx .$$

Để tính tích phân kép ở vế phải, ta chuyển sang tọa độ cực bằng cách thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, nhận được :

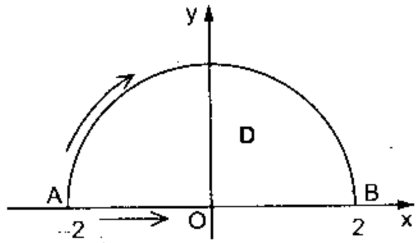
$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} (r^2 - 1)rdr - 2\int_0^{a} x^2 dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} d\varphi - 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{a^2}{4}(a^2 - 2)\varphi\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{3}a^3 = \frac{a^2}{12}[3\pi(a^2 - 2) - 8a].$$

6.a) Ta có :

$$P(x, y) = x^2,\ Q(x, y) = y^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 .$$



Hình 9.14

Vì $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục, mặt khác $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ với $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nên tích phân đường đã cho không phụ thuộc đường cong lấy tích phân $\overset{\frown}{AB}$. Để tính được đơn giản, ta thay tích phân đường lấy trên nửa đường tròn $\overset{\frown}{AB}$ bằng tích phân đường lấy trên đoạn thẳng $\overline{AB}$ của trục Ox (hình 9.14).

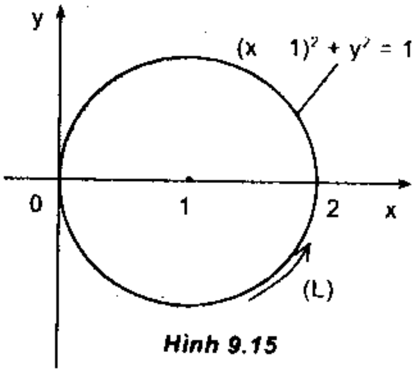
Trên đoạn thẳng này $y = 0$, $dy = 0$ và x biến thiên từ -2 đến 2, do đó :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} x^2dx + y^2dy = \int_{\overline{AB}} x^2dx + y^2dy = \int_{-2}^{2} x^2dx = 2\int_0^2 x^2dx$$

$$= 2.\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

b) Ta có : $P(x, y) = y\cos x$, $Q(x, y) = \sin x$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \cos x.$$



Hình 9.15

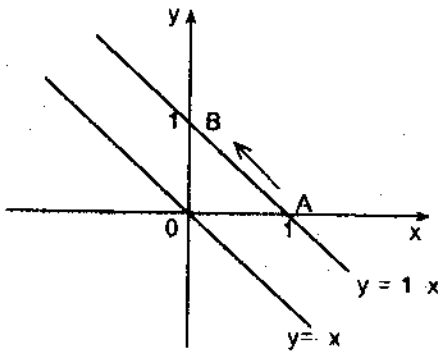
Vì P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục, mặt khác $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ với $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nên tích phân đường lấy trên đường tròn $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, nằm hoàn toàn trong $\mathbb{R}^2$ là bằng không (hình 9.15).

Vậy :

$$\oint_L y\cos x dy + \sin x dy = 0.$$

7. Ta có : $P(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + ay^2}{(x+y)^3}$, $Q(x, y) = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x+y)^3}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + 2(a-2)xy - ay^2}{(x+y)^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + 6xy - 5y^2}{(x+y)^4}.$$



Hình 9.16

Để I không phụ thuộc vào đường cong lấy tích phân đối với các đường cong không cắt đường thẳng $y = -x$, ta phải có : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ với $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ trừ những điểm của đường thẳng $y = -x$. Suy ra $a = 5$.

Vì đường thẳng $x + y = 1$ không cắt đường thẳng $y = -x$, nên khi $a = 5$, ta tính I từ A(1, 0) đến B(0, 1) trên đường thẳng nói trên (hình 9.16). Ta có :

$$x + y = 1,\ y = 1 - x,\ dy = -dx$$

và : $$I = \int_1^0 [x^2 + 2x(1-x) + 5(1-x)^2 + (x - (1-x))^2(-1)]dx =$$

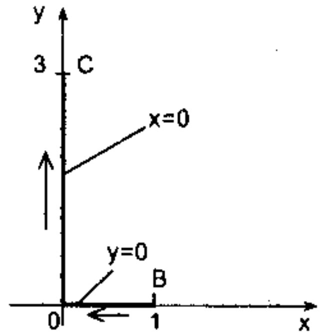
$$= 4\int_1^0 (1-x)dx = 4\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 = -2.$$

8. Vì : $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$ với $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

nên công của lực $\vec{F}$:

$$A = \int_{\overline{BC}} 2xydx + x^2dy$$

không phụ thuộc vào đường đi, mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu B và điểm cuối C.



Hình 9.17

Để tính công A của lực $\vec{F}$ khi đi từ điểm B(1, 0) đến điểm C(0, 3), đơn giản nhất là đi theo đường gấp khúc BOC (hình 9.17).

Ta có ngay :

$$A = \int_{\overline{BC}} 2xydx + x^2dy = \int_{\overline{BO}} 2xydx + x^2dy + \int_{\overline{OC}} 2xydx + x^2dy$$

$$= \int_1^0 0.dx + \int_0^3 0.dy = 0.$$

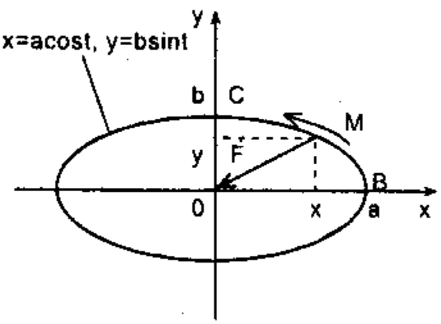
9. a) Ta có (hình 9.18) :

$P(x, y) = hc_{\overline{Ox}} \vec{F}(x,y) = -x$,

$Q(x, y) = hc_{\overline{Oy}} \vec{F}(x,y) = -y$.

Vậy : $\vec{F}(x,y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$, và :

$A = \int_{\overline{BC}} -xdx - ydy$ với B(a, 0), C(0, b).



Hình 9.18

Phương trình tham số của elip là : x = acost, y = bsint, $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$. Do đó :

$$A = -\int_{t_B}^{t_C} (a\cos t(-a\sin t) + b\sin t.b\cos t)dt =$$

$$= -(b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{a^2 - b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

b) Vì P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục, mặt khác : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ với mọi (x, y) $\in \mathbb{R}^2$ nên tích phân đường : $\oint_L -xdx - ydy$, L là toàn bộ đường elip nằm trong $\mathbb{R}^2$, là bằng không.

Vậy : $$A = \oint_L -xdx - ydy = 0.$$

10. a) Đơn giản nhất là dùng công thức : $S = \oint_L xdy$, L là đường cong kín $\overset{\frown}{AOBCA}$ lấy theo thứ tự ấy. Vì đường cong kín L gồm hai đoạn AOB và BCA có phương trình khác nhau, do đó phải chia đường cong kín L thành hai đoạn (hình 9.19), và có :

$$S = \int_{\overset{\frown}{AOB}} xdy + \int_{\overline{BCA}} xdy.$$

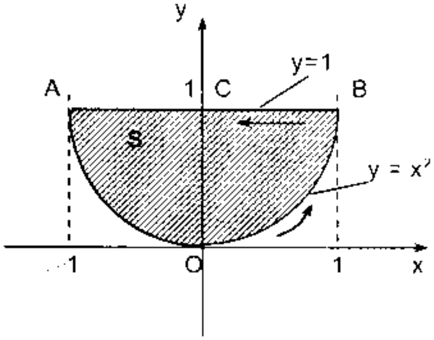
Trên BCA, y = 1, dy = 0, nên :

$$\int_{\overline{BCA}} xdy = 0.$$

Vậy

$$S = \int_{\overset{\frown}{AOB}} xdy = \int_{-1}^{1} x.2xdx = \int_{-1}^{1} 2x^2 dx$$

$$= 4\int_0^1 x^2 dx = 4\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$



Hình 9.19

b) Dùng công thức :

$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$, L là đường axtrôit $\overset{\frown}{ABCEA}$, ta có (hình 9.20) :

$$x = a\cos^3 t,\ x'_t = -3a\cos^2 t\sin t;$$

$$y = a\sin^3 t,\ y'_t = 3a\sin^2 t\cos t,$$

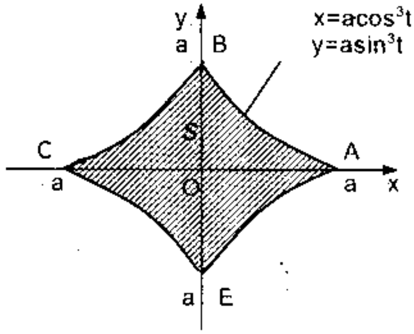
và: $$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\sin^2 t + 3a^2\cos^2 t\sin^4 t)dt.$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)dt$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt$$

$$= \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$



Hình 9.20

Chú ý. Vì tính đối xứng của diện tích phải tìm, có thể tính đối với trường hợp a :

$$\frac{S}{2} = \oint_{OBCO} xdy,$$

còn đối với trường hợp b :

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_{OABO} xdy - ydx.$$

Sinh viên nên thử tính bằng những công thức này.

11. a) Phương trình đường thẳng trong không gian đi qua hai điểm O(0, 0, 0) và B(−2, 4, 5) (hình 9.21) là :

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

Viết phương trình đường thẳng OB dưới dạng tham số, bằng cách đặt :

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = t,$$

ta có : $x = -2t,\ y = 4t,\ z = 5t,$

$x'_t = -2,\ y'_t = 4,\ z'_t = 5$, và :

$$\int_{\overline{OB}} xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz = \int_{t_0}^{t_B}[-2t(4t)^2(-2)+4t(5t)^2 4 - 5t(-2t)^2 5]dt$$

$$= \int_0^1 364t^3dt = \frac{364}{4}t^4\Big|_0^1 = 91\,.$$

b) Viết phương trình đường tròn trong không gian, giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 45$ với mặt phẳng $y = -2x$ dưới dạng tham số, bằng cách đặt : $x = t$, ta có :

$$y = -2x = -2t,$$

$$z^2 = 45 - x^2 - y^2 = 45 - 5t^2,$$

$$z = \sqrt{45 - 5t^2}$$

(ta lấy $z = \sqrt{45 - 5t^2}$ vì trên cung tròn $\widehat{AB}$, $z \geq 0$),

$$x'_t = 1,\ y'_t = -2,\ z'_t = \frac{-5t}{\sqrt{45-5t^2}},\ \text{và :}$$

$$\int_{\widehat{AB}} xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B}\left[t(-2t)^2.1 + (-2t)(45-5t^2)(-2) - \sqrt{45-5t^2}\,.t^2.\frac{-5t}{\sqrt{45-5t^2}}\right]dt$$

$$= \int_3^2 (180t - 11t^3)dt = \left(90t^2 - \frac{11}{4}t^4\right)\Big|_3^2 = -271{,}25\,.$$

Chương X

CHUỖI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Chuỗi số

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gọi là hội tụ nếu tổng riêng thứ n của nó $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ dần tới một giới hạn xác định khi $n \to \infty$, là phân kỳ nếu nó không hội tụ.

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Đó là điều kiện cần của chuỗi số hội tụ, nhưng điều kiện ấy không đủ.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$ hội tụ nếu $|q| < 1$, phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

2. Chuỗi số dương

- ***Các định lý so sánh***

a) Giả sử $0 \leq u_n \leq v_n$ với $\forall n \geq 1$. Khi đó, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ; nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng phân kỳ.

b) Giả sử $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ với $\forall n \geq 1$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ với $0 < k < +\infty$ thì hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

- ***Các quy tắc khảo sát sự hội tụ***

a) Quy tắc D'Alembert : Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ thì chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ khi $l<1$, phân kỳ khi $l>1$.

b) Quy tắc Cauchy : Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ thì chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ khi $l<1$, phân kỳ khi $l>1$.

c) Quy tắc tích phân : Giả sử f(x) là hàm số liên tục, dương, giảm trên khoảng $[1,+\infty)$, $f(x)\to 0$ khi $x\to+\infty$. Đặt $u_n=f(n)$, khi đó chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ khi $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ, phân kỳ khi $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ phân kỳ.

3. Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ

- Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ.

Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ gọi là bán hội tụ nếu nó hội tụ nhưng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ.

Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng s thì chuỗi số suy từ nó bằng cách thay đổi thứ tự của các số hạng và bằng cách nhóm tuỳ ý một số số hạng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng s.

- Chuỗi đan dấu là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots,$$

trong đó $u_n>0$, $\forall n\ge 1$.

Định lý Leibniz : Nếu $0<u_{n+1}\le u_n$, $\forall n\ge 1$ và nếu $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ thì chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ và có tổng $s\le u_1$.

4. Chuỗi luỹ thừa

• Chuỗi luỹ thừa là chuỗi mà số hạng tổng quát của nó là hàm số có dạng $a_n x^n$, trong đó a_n là hằng số và gọi là hệ số của chuỗi luỹ thừa.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Tồn tại một số $R \geq 0$ sao cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ với $|x| < R$ và phân kỳ với $|x| > R$. Tại $x = \pm R$ chuỗi luỹ thừa có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Số R gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ thì

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty, \\ 0 & \text{nếu } \rho = +\infty, \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$$

Tìm được R, ta biết rằng chuỗi luỹ thừa hội tụ trong khoảng $(-R, R)$. Muốn xác định được miền hội tụ của nó, ta chỉ còn phải xét sự hội tụ tại hai điểm $x = \pm R$.

• Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ R, thì tổng

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

là hàm số liên tục, khả vi trong khoảng $(-R, R)$ và trong khoảng ấy, ta có :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1};$$

$$\int f(x)dx = C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

C là hằng số tuỳ ý.

• Khai triển một hàm số thành chuỗi luỹ thừa:

Ta nói rằng hàm số f(x) khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trong một khoảng I, nếu tìm được một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trong khoảng ấy sao cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \forall x \in I.$$

Nếu trong một lân cận nào đó của x_0, hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp và trong lân cận ấy tồn tại một số dương M sao cho

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \forall n \ge 0,$$

thì f(x) có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa (gọi là chuỗi Taylor) trong lân cận ấy.

- Khai triển thành chuỗi luỹ thừa của một số hàm thông dụng

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (R = \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (R = \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (R = \infty)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}.x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (R = 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad (R = 1)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad (R = 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (R = 1)$$

B. ĐỀ BÀI

1. Xét sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây. Nếu chuỗi nào hội tụ, hãy tính tổng của nó.

1) $u_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $(n \ge 1)$; 2) $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$, $(n \ge 1)$;

3) $u_n = 4^{-n}.9^{n+2}, (n \geq 1)$; 4) $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+2n+3}, (n \geq 1)$;

5) $u_n = \dfrac{2}{n^2+n}, (n \geq 1)$; 6) $u_n = \dfrac{3n}{2n+1}, (n \geq 1)$;

7) $u_n = \dfrac{1}{4n^2-1}, (n \geq 1)$; 8) $u_n = \dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{5^n}, (n \geq 1)$;

9) $u_n = \dfrac{3^n+4^n}{6^n}, (n \geq 1)$; 10) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, (n \geq 1)$.

2. Áp dụng các định lý so sánh, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n^5}$; 2) $u_n = \dfrac{1}{n^2 2^n}$;

3) $u_n = \dfrac{2+5^n}{3^n}$; 4) $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$;

5) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^4+3}}$; 6) $u_n = \dfrac{1}{2^n-1}$;

7) $u_n = \dfrac{n}{2n^2-1}$; 8) $u_n = \dfrac{4}{(n+1)(2n-1)}$;

9) $u_n = \dfrac{1+3^n}{2+5^n}$; 10) $u_n = \dfrac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}-1)$;

11) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$; 12) $u_n = \dfrac{2n^2+n+1}{n^3+n^2+1}$;

13) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+n^3}$; 14) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$;

15) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}, (n \geq 3)$; 16) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

3. Áp dụng các quy tắc D'Alembert, Cauchy và tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{n^3}{3^n}$; 2) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

3) $u_n = \left(\dfrac{1+2n}{3n-2}\right)^n$;

4) $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, $(n \geq 3)$;

5) $u_n = \left(\dfrac{4n^2-1}{5n^2+2}\right)^{n^2}$;

6) $u_n = \dfrac{n.4^n}{(n+1)5^{n+1}}$;

7) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

8) $u_n = \sin^n\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{n}\right)$, $(n \geq 2)$;

9) $u_n = e^{n^2}$;

10) $u_n = (n+1)e^{-n^2}$;

11) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n+2n}$;

12) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

13) $u_n = tg^n\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2n^2}\right)$;

14) $u_n = \dfrac{4.7.10...(3n+1)}{2.6.10...(4n-2)}$;

15) $u_n = \dfrac{1}{(3n+1).3^{3n+1}}$;

16) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$, $(n \geq 2)$.

4. Xét sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối hay bán hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{n\sqrt{n}}$;

2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ (α là hằng số dương);

3) $u_n = \dfrac{\cos\left(n.\dfrac{\pi}{3}\right)}{n!}$;

4) $u_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2}$;

5) $u_n = (-1)^n\dfrac{2n^2-1}{3n^2+1}$;

6) $u_n = \dfrac{1}{2^n}\sin n\theta$, ($\theta$ là hằng số);

7) $u_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$;

8) $u_n = (-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$, $(n \geq 3)$;

9) $u_n = (-1)^n\dfrac{n^2}{n^3+1}$;

10) $u_n = \dfrac{(-10)^{n-1}}{n!}$;

11) $u_n = (-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}$;

12) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

5. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^2+3}$; 2) $u_n = \sin n$;

3) $u_n = \dfrac{(2n)^n}{n^{2n}}$; 4) $u_n = \dfrac{1}{2+\left(\dfrac{2}{e}\right)^n}$;

5) $u_n = n^3 e^{-n^4}$; 6) $u_n = (\sqrt[n]{2}-1)^n$;

7) $u_n = \dfrac{n^2+3}{2.3^n}$; 8) $u_n = (-1)^n \dfrac{7^n}{3^{2n+1}}$;

9) $u_n = \dfrac{(n+3)!}{n!3^n}$; 10) $u_n = \dfrac{3^3-n^3}{3^n}$;

11) $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2+4n}$; 12) $u_n = \dfrac{\sqrt[4]{n}+4}{n(\sqrt[3]{n}+2)}$;

13) $u_n = \dfrac{(-3)^n n^3}{(n+3)!}$.

6. Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

1) $u_n(x) = nx^n$; 2) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$;

3) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$; 4) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n2^n}$;

5) $u_n(x) = \dfrac{3^n x^n}{(n+1)^2}$; 6) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{\ln n}$, $(n \geq 3)$;

7) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)}$, $(n \geq 2)$; 8) $u_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$;

9) $u_n(x) = \dfrac{(-x)^n}{n^\alpha}$ (α là hằng số dương);

10) $u_n(x) = \dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$; 11) $u_n(x) = \dfrac{(x-2)^n}{n^n}$;

12) $u_n(x) = \dfrac{1}{n(x+2)^n}$.

7. Tìm chuỗi Taylor của hàm số f(x) ở lân cận $x = x_0$:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x},\quad x_0 = 1$;

3) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 2$.

8. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận $x_0 = 0$ các hàm số sau :

1) $f(x) = x\cos^2 x$; 2) $f(x) = xe^{-x}$;

3) $f(x) = x\sin\dfrac{x}{3}$; 4) $f(x) = \text{arctg}x$;

5) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $(x \geq -1)$;

9. Tính các số sau với độ chính xác 0,0001 :

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$; 2) $\cos 18^0$;

3) $\ln(1{,}04)$.

10. Tính các tích phân sau với độ chính xác 0,001 :

1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

C. BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. 1) Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$ là chuỗi nhân với $q = \dfrac{2}{3} < 1$, nó hội tụ và có tổng bằng $4.\dfrac{2/3}{1-2/3} = 8$.

2) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ và có tổng bằng 2.2 = 4.

3) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}.9^{n+2} = 9^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{4}\right)^n$ phân kỳ vì $q = \frac{9}{4} > 1$.

4) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+3}$ phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+3} = 1 \neq 0$.

Chú thích : Người ta cũng nói rằng điều kiện $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ là điều kiện đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

5) Ta có

$$u_n = \frac{2}{n^2+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Do đó tổng riêng thứ n

$$S_n = 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \to 2 \text{ khi } n\to\infty.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n}$ hội tụ và có tổng bằng 2.

6) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n+1}$ phân kỳ, vì $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} \neq 0$.

7) Ta có

$$u_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

Do đó

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2} \text{ khi } n\to\infty.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ hội tụ và có tổng bằng $\frac{1}{2}$.

8) Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}.$$

Hai chuỗi ở vế phải đều hội tụ, nên chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

9) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ và có tổng bằng

$$1+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1+2=3.$$

10) Ta có

$$u_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Do đó

$$S_n=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}\to 1 \text{ khi } n\to\infty.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng 1.

2. Các chuỗi số trong bài tập này đều có số hạng dương, nên có thể áp dụng các định lý so sánh để xét sự hội tụ của chúng.

1) Ta có

$$\frac{1}{n^2+n^5}<\frac{1}{n^2},\ \forall n\geq 1.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^5}$ hội tụ.

2) Vì $\frac{1}{n^2.2^n} \le \frac{1}{2^n}$, $\forall n \ge 1$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2.2^n}$ hội tụ.

3) Vì $\frac{2+5^n}{3^n} > \left(\frac{5}{3}\right)^n$, $\forall n \ge 1$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n$ phân kỳ (do $\frac{5}{3} > 1$) nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+5^n}{3^n}$ phân kỳ.

4) Vì $\frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{n^2}$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ hội tụ.

5) Vì $\frac{1}{\sqrt{n^4+3}} < \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \ge 1$, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+3}}$ hội tụ.

6) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ hội tụ, vì $\frac{1}{2^n-1}$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{2^n}$ khi $n \to \infty$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ.

7) Khi $n \to \infty$ thì $\frac{n}{2n^2-1}$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$. Chuỗi $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$ phân kỳ.

8) Khi $n \to \infty$, $\frac{4}{(n+1)(2n-1)}$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{4}{2n^2} = 2.\frac{1}{n^2}$. Chuỗi $2.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)(2n-1)}$ cũng hội tụ.

9) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{2+5^n}$ hội tụ vì khi $n \to \infty$ thì $\frac{1+3^n}{2+5^n}$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{3^n}{5^n}$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ hội tụ.

10) Khi $n \to \infty$, $e^{1/n} - 1$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{n}$, do đó u_n tương đương với $\frac{1}{n^2}$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n}-1\right)$ hội tụ.

11) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ phân kỳ vì khi $n \to \infty$ thì $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{\sqrt{n}}$, và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

12) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^3+n^2+1}$ phân kỳ vì khi $n \to \infty$ thì $\frac{2n^2+n+1}{n^3+n^2+1}$ là một vô cùng bé tương đương $\frac{2}{n}$, và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ phân kỳ.

13) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n^3}$ hội tụ vì khi $n \to \infty$ thì $\frac{\sqrt{n}}{1+n^3}$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ và $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall n \ge 1$, và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ.

14) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ hội tụ vì khi $n \to \infty$ thì $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{n^2}$, và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ.

15) Chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ phân kỳ vì ta có $\frac{\ln n}{n} \ge \frac{1}{n}$, $\forall n \ge 3$, và chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

16) Ta có $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$ tương đương với $\dfrac{1}{2n}$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ phân kỳ, do đó chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

3. 1) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \to \frac{1}{3} < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ theo quy tắc D'Alembert.

2) Vì

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = (n+1) \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)} \to \frac{1}{e} < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ theo quy tắc D'Alembert.

3) Theo quy tắc Cauchy, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1+2n}{3n-2} \to \frac{2}{3} < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

4) Đặt $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Hàm số f(x) liên tục, dương, giảm trên khoảng $[3, +\infty)$ và $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$. Vì $u_n = f(n)$ nên theo quy tắc tích phân ta chỉ cần xét tích phân suy rộng $\int_3^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln x}$. Đổi biến số $t = \ln x$, ta được

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t}. \qquad (*)$$

Tích phân (*) phân kỳ, do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

5) Theo quy tắc Cauchy, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{4n^2 - 1}{5n^2 + 2}\right)^n.$$

Khi $n \to \infty$, nó tương đương với $\left(\frac{4}{5}\right)^n$, mà $\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0 < 1$ khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

6) Ta có

$$u_n = \frac{n.4^n}{(n+1).5^{n+1}} \sim \frac{1}{5}.\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

7) Áp dụng quy tắc D'Alembert, ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}.\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{n^2}{4n^2} \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

8) Áp dụng quy tắc Cauchy, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{n}\right) \to \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

9) $\sqrt[n]{u_n} = e^{-n} \to 0 < 1$ khi $n \to \infty$, nên chuỗi hội tụ.

10) Theo quy tắc D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)e^{-n^2-2n-1}}{(n+1)e^{-n^2}} \sim e^{-2n-1} \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-2n-1} = 0 < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ.

11) Ta có

$$u_n = \frac{n^2}{2^n + 2n} \sim \frac{n^2}{2^n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Dễ thấy rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ hội tụ theo quy tắc D'Alembert, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

12) Áp dụng quy tắc Cauchy, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e} < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó chuỗi hội tụ.

13) $\sqrt[n]{u_n} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2n^2}\right) \to \text{tg}\frac{\pi}{6} < 1$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi hội tụ.

14) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+4}{4n+2} \to \frac{3}{4} < 1$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi hội tụ.

15) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3^3}\frac{3n+1}{3n+4} \to \frac{1}{3^3} < 1$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi hội tụ.

16) $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\left(-\frac{n+1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{n+1}\right)(n-1)} \to e^{-2} < 1$ khi $n\to\infty$.

Do đó chuỗi hội tụ.

4. 1) Vì $|u_n| = \frac{|\cos(n^2)|}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\forall n \ge 1$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối.

2) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ với $\alpha > 0$ là một chuỗi số đan dấu thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz, do đó nó hội tụ. Nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \le 1$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối khi $\alpha > 1$, bán hội tụ khi $\alpha \le 1$.

3) Vì $|u_n| < \frac{1}{n!}$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối.

4) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}$ là một chuỗi đan dấu, nhưng số hạng tổng quát của nó là $\frac{(-2)^n}{n^2}$ không dần tới 0 khi $n \to \infty$, nên nó phân kỳ.

5) Vì $u_n = (-1)^n\frac{2n^2-1}{3n^2+1}$, ta có một chuỗi đan dấu. Nhưng $|u_n| = \frac{2n^2-1}{3n^2+1} \to \frac{2}{3} \neq 0$ khi $n \to \infty$, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

6) Vì $|u_n| = \frac{1}{2^n}|\sin n\theta| \le \frac{1}{2^n}$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

7) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ là chuỗi đan dấu. Khi n tăng từ 1 đến $+\infty$ thì $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ giảm dần từ $\frac{1}{2}$ tới 0, nên theo định lý Leibniz, chuỗi đó hội tụ. Mặt khác, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ phân kỳ, vì $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ khi $n \to \infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ. Do đó chuỗi đã cho bán hội tụ.

8) Vì $u_n = (-1)^n\frac{\ln n}{n}$, chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ là chuỗi đan dấu thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz nên nó hội tụ. Xét chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. Áp dụng quy tắc tích phân, ta xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Hàm số f(x) liên tục, dương, giảm trên $[3, +\infty)$, $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$.

Tích phân suy rộng $\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ phân kỳ vì nếu đặt $t = \ln x$, ta có $dt = \frac{dx}{x}$, do đó

$$\int_3^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{\ln 3}^{+\infty} = +\infty.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$ bán hội tụ.

9) $u_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi đan dấu. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$, ta có:

$$f'(x) = \frac{(x^3+1)2x - x^2.3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2} < 0 \text{ khi } x > 3.$$

Do đó f(x) giảm khi x > 3, nên $\frac{n^2}{n^3+1}$ giảm khi n > 3, $\frac{n^2}{n^3+1} \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz, nên nó hội tụ. Nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ, vì $|u_n| = \frac{n^2}{n^3+1} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ.

10) Ta có $u_n = \frac{(-10)^{n-1}}{n!}$, $|u_n| = \frac{10^{n-1}}{n!}$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ vì $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{10}{n+1} \to 0 < 1$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

11) Ta có $u_n = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi đan dấu. Vì $\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x} \le 0$ với $\forall x \ge 2$ nên $\sin\frac{\pi}{n}$ giảm khi $n \ge 2$, $\sin\frac{\pi}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Theo dấu hiệu Leibniz chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Mặt khác $|u_n| = \sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$ khi $n \to \infty$, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ (do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ phân kỳ). Tóm lại chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ.

12) Ta có $|u_n| = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{1}{n}\ln n}$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = e^0 = 1 \neq 0$. Do đó $\lim\limits_{n=\infty} u_n \neq 0$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

5. 1) Vì $u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+3} \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ hội tụ nên chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

2) $u_n = \sin n$ không dần tới 0 khi $n \to \infty$, do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ phân kỳ.

3) Xét chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n = \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$. Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}}.\frac{n^{2n}}{(2n)^n} = \frac{(2n+2)^n.(2n+2).n^{2n}}{(n+1)^{2n}.(n+1)^2(2n)^n} =$$

$$= \frac{2^n(n+1)^n.2(n+1).n^n.n^n}{(n+1)^{2n}.(n+1)^2.2^n.n^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.\frac{1}{n+1} \to \frac{2}{e}.0 = 0 < 1 \text{ khi } n\to\infty.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

4) Ta có

$$u_n = \frac{1}{2+\left(\frac{2}{e}\right)^n},\ \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

5) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3 e^{-(n+1)^4}}{n^3 e^{-n^4}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 e^{-4n^3-6n^2-4n-1} \to 0 < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

6) Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln 2 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

7) Ta có

$$u_n = \frac{n^2+3}{2.3^n} \sim \frac{1}{2}\frac{n^2}{3^n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Áp dụng quy tắc D'Alembert, ta thấy ngay chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

8) Vì $|u_n| = \frac{7^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

9) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+4)!}{(n+1)!3^{n+1}} \cdot \frac{n!3^n}{(n+3)!} = \frac{1}{3}.\frac{n+4}{n+1} \to \frac{1}{3} < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

10) Ta có

$$|u_n| = \frac{n^3 - 3^3}{3^n} \text{ với } n > 3, \frac{n^3 - 3^3}{3^n} \sim \frac{n^3}{3^n} \text{ khi } n \to \infty.$$

Dễ thấy rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ hội tụ, do đó chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

11) Vì $|u_n| \le \frac{1}{n^2+4n}$, $\frac{1}{n^2+4n} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

12) Vì $u_n = \dfrac{\sqrt[4]{n}+4}{n(\sqrt[3]{n}+2)} \sim \dfrac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$ hội tụ nên chuỗi dương đã cho hội tụ.

13) Vì $|u_n| = \dfrac{3^n n^3}{(n+3)!}$ và $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{3^{n+1}(n+1)^3}{(n+4)!}.\dfrac{(n+3)!}{3^n.n^3} =$

$$= 3.\frac{1}{n+4}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to 0 < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

6. 1) Ta có

$$a_n = n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Chuỗi lũy thừa đã cho hội tụ trong khoảng $(-1, 1)$. Tại $x = -1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$. Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$. Cả hai chuỗi số ấy đều phân kỳ vì số hạng tổng quát không dần tới 0 khi $n \to \infty$. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-1, 1)$.

2) Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, nên $R = 1$. Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, nó hội tụ. Tại $x = -1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, đó là một chuỗi đan dấu thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz, nên nó hội tụ. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $[-1, 1]$.

3) Dễ thấy $R = 1$, nên chuỗi lũy thừa hội tụ trong khoảng $(-1, 1)$. Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$, đó là một chuỗi đan dấu hội tụ theo định lý Leibniz. Tại $x = -1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, nó phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $(-1, 1]$.

4) Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n.2^n}{(n+1).2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{n}{n+1} \to \dfrac{1}{2}$, nên $R = 2$. Chuỗi lũy thừa hội tụ trong khoảng $(-2, 2)$. Tại $x = 2$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$, nó hội tụ theo định lý Leibniz. Tại $x = -2$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, nó phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là khoảng $(-2, 2]$.

5) Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)^2}.\frac{(n+1)^2}{3^n} = 3\lim\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = 3.$$

Vậy $R = \dfrac{1}{3}$. Tại $x = \dfrac{1}{3}$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}$, nó hội tụ. Tại $x = -\dfrac{1}{3}$, ta có chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(n+1)^2}$ hội tụ theo định lý Leibniz. Miền hội tụ phải tìm là $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$.

6) Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}.$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta được

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Do đó $R = 1$. Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$. Vì $\dfrac{n}{\ln n} \to +\infty$ khi $n \to \infty$, nên với mọi số $C > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên n_o sao cho với $\forall n \geq n_o$ ta có $\dfrac{n}{\ln n} > C$, do đó $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{C}{n}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=n_o}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ, nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ phân kỳ. Tại $x = -1$, ta có chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$ thỏa mãn điều kiện của định lý Leibniz, nên nó hội tụ. Vậy miền hội tụ phải tìm là $[-1, 1)$.

7) Bán kính hội tụ $R = 1$. Tại $x = 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Tại $x = -1$ ta có chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$. Cả hai chuỗi đó đều hội tụ, vì

$$|u_n(\pm 1)| < \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Do đó miền hội tụ phải tìm là $[-1, 1]$.

8) Đặt $X = x + 1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{\sqrt{n}}$. Dễ thấy rằng miền hội tụ của nó là $[-1, 1)$. Do đó miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $[-2, 0)$.

9) Bán kính hội tụ $R = 1$. Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{n^{\alpha}}$, đó là một chuỗi đan dấu hội tụ. Tại $x = -1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, nó hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kỳ nếu $\alpha \le 1$. Vậy miền hội tụ phải tìm là $[-1, 1]$ nếu $\alpha > 1$ và là $(-1, 1]$ nếu $\alpha \le 1$.

10) Đặt $X = \frac{1-x}{1+x}$, ta được chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} X^n$. Bán kính hội tụ của nó bằng 1. Tại $X = 1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, nó phân kỳ. Tại $X = -1$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$ là một chuỗi đan dấu hội tụ theo định lý Leibniz. Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} X^n$ là $[-1, 1)$.

Từ $-1 \le \frac{1-x}{1+x} < 1$, ta suy ra $x > 0$. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(0, +\infty)$.

11) Đặt x – 2 = X, ta có chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n^n}$. Đặt $a_n = \frac{1}{n^n}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Do đó R = ∞. Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n^n}$ cũng như của chuỗi đã cho là $(-\infty, +\infty)$.

12) Đặt $\frac{1}{x+2} = X$, ta có chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n}$. Bán kính hội tụ của nó bằng 1. Miền hội tụ của nó là [–1, 1). Do đó

$$-1 \le \frac{1}{x+2} < 1$$

Giải hai bất phương trình trên, ta được $x \le -3$ hoặc $x > -1$. Vậy miền hội tụ phải tìm là $(-\infty, -3] \cup (-1, +\infty)$.

7. 1) Ta biết rằng nếu hàm số f(x) khả vi vô hạn trong một khoảng I nào đó, x_o là một điểm thuộc I, thì các hệ số của chuỗi Taylor của hàm số đó tại x_o là

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ ...,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ ...$$

Ta có

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ ...$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ ...$$

Do đó chuỗi Taylor của hàm f(x) = sinx tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + ... + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n!}\left(n-\frac{\pi}{4}\right)^n + ...\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n$$

2) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f'(x) = (-1)x^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$, ...,

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$, ...

$\Rightarrow$ $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 2!$, ..., $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$, ...

Chuỗi Taylor của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_o = 1$ là

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + ... + (-1)^n(x-1)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

3) $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f''(x) = (-1)\,x^{-2}$, $f'''(x) = (-1)(-2)\,x^{-3}$, ...,

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$, ...

$\Rightarrow$ $f(2) = \ln 2$, $f'(2) = \frac{1}{2}$, $f''(2) = -\frac{1}{2^2}$, $f'''(2) = 2!\frac{1}{2^3}$, ...,

$f^{(n)}(2) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{2^n}$, ...

Chuỗi Taylor của hàm số $f(x) = \ln x$ tại $x_o = 2$ là

$$\ln 2 + \left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3 - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n + ...$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n.$$

8. 1) $f(x) = x\cos^2 x = \frac{x}{2}(1+\cos 2x)$.

Áp dụng công thức khai triển thành chuỗi luỹ thừa của hàm số cosx, ta được

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + ...\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(2 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + ...\right) =$$

$$= x\left(1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+...\right)$$

$$= x-2\frac{x^3}{2!}+\frac{2^3x^5}{4!}-...+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n)!}+...$$

$$= x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n)!}.$$

2) Áp dụng công thức khai triển thành chuỗi lũy thừa của hàm số e^x, ta có

$$f(x)=xe^{-x}=x\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...\right)$$

$$= x-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}.$$

3) Theo công thức khai triển hàm số sinx thành chuỗi lũy thừa, ta có

$$f(x)=x\sin\frac{x}{3}=x\left[\frac{x}{3}-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{3}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{3}\right)^5-...+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}+...\right]$$

$$= \frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{3!3^3}+\frac{x^6}{5!3^5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!3^{2n+1}}+...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!3^{2n+1}}.$$

4) Vì $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}$, ta dùng công thức khai triển hàm số $(1+x)^{\alpha}$ thành chuỗi lũy thừa để khai triển f'(x). Ta được

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6...+(-1)^2x^{2n}+...$$

Tích phân hai vế, ta được

$$f(x)=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Nhưng vì f(0) = 0 nên C = 0, do đó

$$\text{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

5) Vì $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, dùng công thức khai triển hàm số $(1+x)^{\alpha}$, ta có

$$f(x) = 1+\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}x^n + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}x^n.$$

9. 1) Theo công thức khai triển thành chuỗi lũy thừa của hàm số e^x, ta có

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \frac{1}{4!5^4} - \ldots$$

Vế phải là một chuỗi đan dấu, do đó theo định lý Leibniz, nếu ta tính gần đúng tổng của nó bằng tổng của 4 số hạng đầu thì sai số không vượt quá trị tuyệt đối của số hạng thứ 5, tức là không vượt quá $\frac{1}{4!\,5^4} < 0{,}0001$. Vậy $e^{-\frac{1}{5}} \approx 1 - 0{,}2000 + 0{,}0200 - 0{,}0013 = 0{,}8187$

2) Sử dụng khai triển hàm cosx ta có

$$\cos 18^0 = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 + \ldots$$

Nếu tính gần đúng tổng của chuỗi đó bằng tổng của 3 số hạng đầu thì sai số không vượt quá $\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001$. Do đó

$$\cos 18^0 \approx 1 - 0{,}0493 + 0{,}0004 = 0{,}9511.$$

3) Theo công thức khai triển hàm số ln(1 + x) thành chuỗi lũy thừa, ta có

$$\ln(1{,}04) = \ln(1 + 0{,}04) = 0{,}04 - \frac{(0{,}04)^2}{2} + \frac{(0{,}04)^3}{3} - \frac{(0{,}04)^4}{4} + \ldots$$

Tính gần đúng tổng của vế phải bằng tổng của 4 số hạng đầu, sai số phạm phải không vượt quá $\frac{(0{,}04)^5}{5} < 0{,}0001$. Vậy

$$\ln(1{,}04) \approx 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}00002 - 0{,}0000006 = 0{,}0392.$$

10. 1) Khai triển hàm số e^{-x^2} thành chuỗi lũy thừa, ta được

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\int e^{-x^2}dx = C + x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} - \frac{x^{11}}{11.5!} + \ldots,$$

C là hằng số tùy ý. Chuỗi lũy thừa ở vế phải hội tụ trên toàn $\mathbb{R}$. Do đó

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left(C + x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} - \frac{x^{11}}{11.5!} + \ldots\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3.1!} + \frac{1}{5.2!} - \frac{1}{7.3!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{11.5!} + \ldots$$

Nếu tính gần đúng bằng tổng của 5 số hạng đầu, sai số không vượt quá $\frac{1}{11.5!} < 0{,}001$. Do đó

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0{,}7475.$$

2) Vì $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, nên $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ không phải là tích phân suy rộng. Ta có

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots$$

Do đó

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx = \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,1} =$$

$$= 0{,}1 - \frac{1}{4}.(0{,}01) + \frac{1}{9}(0{,}001) - \frac{1}{16}(0{,}0001) + \ldots$$

Tính gần đúng bằng tổng của 3 số hạng đầu, sai số không vượt quá 0,001. Do đó

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx = 0{,}1 - \frac{1}{4}.(0{,}01) + \frac{1}{9}.(0{,}001) \approx 0{,}098.$$

Chương XI

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình vi phân

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{hay} \quad y' = f(x, y).$$

Nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ của phương trình vi phân cấp một phụ thuộc một hằng số tuỳ ý C. Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp một thoả mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$, trong đó x_0, y_0 là các giá trị thích hợp cho trước, gọi là bài toán giá trị ban đầu (hay bài toán Cauchy).

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ của phương trình vi phân cấp hai phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý C_1, C_2. Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp hai thoả mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, trong đó x_0, y_0, y_1 là các giá trị thích hợp cho trước, gọi là bài toán giá trị ban đầu (hay bài toán Cauchy).

2. Phương trình vi phân cấp một

Một số dạng thường gặp của phương trình vi phân cấp một được cho dưới đây :

- *Phương trình biến số phân ly*

$$y' = p(x).q(y).$$

Để giải nó, ta viết nó dưới dạng $\dfrac{dy}{q(y)} = p(x)dx$ rồi lấy nguyên hàm hai vế.

• *Phương trình vi phân thuần nhất*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cách giải : Đặt $y = ux$, thế vào phương trình đã cho, ta được một phương trình biến số phân ly để tìm u. Tìm được u ta sẽ tìm được y.

• *Phương trình vi phân tuyến tính*

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (*)$$

Cách giải : Dùng phương pháp biến thiên hằng số. Trước hết giải phương trình thuần nhất tương ứng $y' + p(x)y = 0$, đó là một phương trình biến số phân ly. Nghiệm tổng quát của nó là $y = Cy_1(x)$. Sau đó xem C là hàm số của x, tìm hàm số C(x) sao cho $y = C(x)y_1(x)$ là nghiệm của phương trình

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) bằng nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' + p(x)y = 0$$

cộng với một nghiệm riêng của phương trình (*).

• *Phương trình Bernoulli*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \ \ (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

Cách giải : Chia hai vế cho y^{α}, rồi đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta được một phương trình vi phân tuyến tính để tìm z. Tìm được z ta sẽ tìm được y.

• *Phương trình vi phân toàn phần*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

trong đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Khi đó $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm f(x, y) nào đó. Tìm được hàm f(x, y), ta được tích phân tổng quát của phương trình là $f(x, y) = C$, C là hằng số tuỳ ý.

• *Một ứng dụng của phương trình vi phân tuyến tính cấp một* · Quỹ đạo trực giao.

Cho họ đường cong $\mathscr{C}$ có phương trình F(x, y, C) = 0, phụ thuộc tham số C. Khử C từ hai phương trình F(x, y, C) = 0 và $\frac{d}{dx}F(x, y, C) = 0$, ta được phương trình f(x, y, y') = 0, đó là phương trình vi phân của họ đường cong đã cho. Khi đó $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ là phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao của họ đường cong đã cho.

3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

thì nghiệm tổng quát của nó là

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

trong đó C_1 và C_2 là hai hằng số tùy ý.

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) bằng một nghiệm riêng bất kỳ của nó cộng với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2).

Từ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

thì có thể cho C_1, C_2 biến thiên theo x và tìm chúng để

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

là nghiệm của phương trình không thuần nhất (1). Muốn vậy $C_1'(x), C_2'(x)$ phải thoả mãn hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, do đó tính được $C_1(x), C_2(x)$ (Phương pháp biến thiên hằng số).

Nếu Y_1 là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x),$$

thì $Y_1 + Y_2$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

(Nguyên lý chồng nghiệm).

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số không đổi

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{3}$$

p, q là các hằng số.

- Phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{4}$$

Tìm nghiệm dưới dạng $y = e^{rx}$, trong đó r là một hằng số thoả mãn phương trình đại số bậc hai

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{5}$$

gọi là phương trình đặc trưng. Có ba trường hợp có thể xảy ra theo bảng sau :

Nghiệm của phương trình (5)	*Nghiệm của phương trình (4)*
r_1, r_2 thực, $r_1 \neq r_2$	$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = e^{rx}(C_1 + C_2x)$
$r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$, α, β thực	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

- Phương trình không thuần nhất (3)

Trong trường hợp tổng quát, dùng phương pháp biến thiên hằng số.

Trong hai trường hợp sau của vế phải f(x), có thể tìm một nghiệm riêng Y của nó bằng phương pháp hệ số bất định mà không cần làm một phép tính tích phân nào.

Dạng của vế phải f(x)	*Dạng của nghiệm riêng Y*
$e^{\alpha x}P_n(x)$, $P_n(x)$ là đa thực bậc n, α là hằng số.	a) $e^{\alpha x}Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thực bậc n, nếu α không là nghiệm của (5). b) $xe^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α là nghiệm đơn của (5) c) $x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α là nghiệm kép của (5)
$P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$, $P_m(x)$ là đa thức bậc m, $P_n(x)$ là đa thức bậc n, β là hằng số.	a) $Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x$, $l = \max(m, n)$, $Q_l(x)$, $R_l(x)$ là những đa thức bậc l, nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của (5) b) $x[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$, $l = \max(m, n)$, nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của (5)

B. ĐỀ BÀI

1. Giải các phương trình biến số phân ly :

1) $x(1 + y^2)^2dx + y(1 + x^2)^2dy = 0$; 2) $(x^2 + 1)y' = xy$;

3) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$; 4) $(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

5) $ydx = (x^2 - a^2)dy$.

2. Giải các bài toán giá trị ban đầu :

1) $y' = \dfrac{xy + 3x}{x^2 + 1}$, $y(2) = 2$;

2) $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0$, $y(0) = 1$;

4) $e^{1+x^2}\text{tg}y\,dx - \dfrac{e^{2x}}{x-1}dy = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Trong các phương trình vi phân cấp một sau đây, phương trình nào là thuần nhất ?

1) $2x^2 - y^2 + yy' = 0$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2}dx + ydy = 0$;

3) $(x^2 + y^2)y' = xy - x^2e^y$; 4) $y' = \ln x - \ln y$;

5) $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$; 6) $xy' = x + y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4. Giải các phương trình vi phân cấp một thuần nhất :

1) $y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$;   2) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$;

3) $y' = -\dfrac{x + y}{x}$;   4) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;

5) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;   6) $xy'\sin\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x$;

7) $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$.

5. Giải các phương trình vi phân cấp một tuyến tính :

1) $(x^2 + 1)y' + xy = -2$;

2) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x \quad (x > 0), \quad y(e) = \dfrac{e^2}{2}$;

3) $y' + 2xy = x$;

4) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$, $y(1) = 2$;

5) $y' - 1 = y\mathrm{tg}x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) $x^2y' + 2xy = \cos x$, $y(\pi) = 0$;

7) $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y(0) = 0$;

8) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;

9) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, $y(1) = 0$;

10) $xy' + y'\ln y = y$ $(y > 0)$;

11) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$.

6. Giải các phương trình cho dưới đây nếu đó là phương trình vi phân toàn phần :

1) $2x + y^2 + xyy' = 0$;

2) $(3x^2 - 3y + 1)dx - (3x - 1)dy = 0$;

3) $e^{-x}\left[\dfrac{1}{x+y}-\ln(x+y)\right]dx+e^{-x}\dfrac{dy}{x+y}=0 \quad (x+y>0)$;

4) $3x^2(1+\ln y)dx-\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy=0 \quad (y>0)$;

5) $x\sin y+(y\cos x)y'=0$;

6) $(\cos y+y\cos x)dx-(\sin x-x\sin y)dy=0$;

7) $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$;

8) $(y^2-x)y'=y$;

9) $3xy-2+(3y^2-x^2)y'=0$;

10) $(3x^2+6xy-2y^2)dx+(3x^2-4xy+4y^3)dy=0$;

11) $x\ln y dx-(x+y\ln x)dx=0 \quad (x>0, y>0)$;

12) $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$;

13) $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$.

7. Giải các phương trình vi phân sau bằng cách tìm thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x hoặc chỉ phụ thuộc y :

1) $ydx-xdy+\ln x dx=0$, $\alpha=\alpha(x)$ $(x>0)$;

2) $(x^2\cos x-y)dx+xdy=0$, $\alpha=\alpha(x)$;

3) $ydx-(x+y^2)dy=0$, $\alpha=\alpha(y)$;

4) $y\sqrt{1-y^2}dx+(x\sqrt{1-y^2}+y)dy=0$, $\alpha=\alpha(y)$.

8. Giải các phương trình vi phân cấp một sau :

1) $(x^2+2xy)dx+xydy=0$;

2) $x^2y'+xy=1$, $x>0$, $y(1)=2$;

3) $e^{-x}-2\cos^2x+3y^2y'=0$;

4) $x(1+2y)y'+x^2+y^2+y+e^yy'=0$, $y(0)=0$;

5) $xy'=x^2\cos x+y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$;

6) $y'=\dfrac{y+y^2}{x-1}$;

7) $y'(x + y^2) = y$;

8) $(3y^2 - 4y^3)y' = xe^x$.

9. Tìm quỹ đạo trực giao của các họ đường cong sau :

1) $x = Cy^2$; 2) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = C^2$;

3) $x^2 - 2y^2 = C$; 4) $y = \dfrac{1}{x+C}$.

10. Giải các bài toán giá trị ban đầu sau :

1) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

3) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$;

4) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

5) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

6) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

11. Giải các phương trình hay bài toán giá trị ban đầu sau :

1) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

2) $y'' - 2y' + 2y = x^2$; 3) $y'' + y = \sin x \sin 2x$;

4) $y'' + y = \sin x$; 5) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos^2 x$;

6) $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$; 7) $y'' + y = 4x\sin x$;

8) $y'' - 2y' + y = 1 + x + 2(3x^2 - 2)e^x$; 9) $y'' - y = x\cos^2 x$;

10) $y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x)$; 11) $y'' + y' + y = -13\sin 2x$;

12) $y'' + y = x\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \dfrac{3}{4}$;

13) $y'' + y' - 2y = e^{mx}$, m là hằng số dương;

14) $y'' + m^2 y = \cos x - \sin x$;

15) $y'' - (m+1)y' + my = x - 1$.

12. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp biến thiên hằng số :

1) $y'' + 4y = x$; 2) $y'' - y' = e^x$;

3) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $y'' + y = \operatorname{tg} x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

13. Dùng phương pháp chuỗi luỹ thừa để giải phương trình và bài toán giá trị ban đầu sau :

1) $y'' + y = 0$;

2) $y'' - 2xy' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

14. Giải các phương trình vi phân sau :

1) $yy' + y^2 = \dfrac{e^{-2x}}{2}$;

2) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$, $y(1) = 0$;

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x - 1)$;

4) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$;

5) $yy' = x\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$;

6) $2(x + yy') + e^y(1 + xy') = 0$;

7) $y'' + y = \sin^3 x$;

8) $3y^2y' + \text{tg}x - e^{-2x} = 0$.

C. BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. 1) Chia hai vế của phương trình cho $(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2$, ta được

$$\frac{xdx}{(1+x^2)^2} + \frac{ydy}{(1+y^2)^2} = 0$$

Vì $xdx = \frac{1}{2}d(1+x^2)$, $ydy = \frac{1}{2}d(1+y^2)$, nên lấy tích phân hai vế phương trình trên, ta được

$$-\frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2(1+y^2)} = K,$$

K là hằng số tùy ý.

Đặt $C = -2K$, tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = C.$$

2) $y = 0$ là một nghiệm của phương trình. Nếu $y \neq 0$, phương trình có thể viết là

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|C| = \ln(|C|\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y = C\sqrt{1+x^2},$$

C là hằng số tùy ý. Lưu ý rằng nghiệm $y = 0$ mà ta nhận xét ở trên cũng nằm trong nghiệm tổng quát $y = C\sqrt{1+x^2}$, nó ứng với $C = 0$.

3) Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$ thì phương trình có thể viết được là

$$\frac{(1-y)dy}{y^2} + \frac{(1+x)dx}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} - \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x^2} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C,\ C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

4) Dễ thấy rằng $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ là nghiệm của phương trình. Nếu $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$, $y \neq 0$, $y \neq \pm 1$ thì phương trình có thể viết là

$$\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{ydy}{1-y^2} = 0.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| - \frac{1}{2}\ln|1-y^2| = \ln|K|,$$

K là hằng số tùy ý. Do đó nếu $C = -2K$, ta được

$$\ln|1-x^2| + \ln|1-y^2| = C.$$

5) $y = 0$ và $x = \pm a$ là nghiệm của phương trình. Nếu $x^2 - a^2 \neq 0$ và $y \neq 0$, có thể viết phương trình là

$$\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{dy}{y}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = \ln|y| - \ln|C|$$

$$\Rightarrow y = C\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2a},\ C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

2. 1) Nếu y + 3 ≠ 0, phương trình viết được là

$$\frac{dy}{y+3} = \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln\frac{y+3}{C} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\sqrt{x^2+1},$$

C là hằng số tùy ý.

Do đó

$$y + 3 = C\sqrt{x^2+1}.$$

Từ điều kiện ban đầu y(2) = 2, ta được

$$5 = C\sqrt{5} \Rightarrow C = \sqrt{5}.$$

Vậy nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$y = \sqrt{5(x^2+1)} - 3.$$

2) Phương trình được viết là

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x - 2y) - \cos(x+2y) = 2\sin x\sin 2y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sin 2y} = 2\sin x dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}y| = -2\cos x + C, \text{ C là hằng số tùy ý.}$$

Từ điều kiện $y(0) = \frac{\pi}{4}$, ta được 0 = −2 + C, do đó C = 2. Vậy tích phân riêng của bài toán là

$$\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}y| = 2 - 2\cos x.$$

3) Phân ly biến số, ta được

$$\frac{xdx}{x^4+1} + \frac{y^2dy}{y^6+1} = 0$$

Đặt $X = x^2$, ta có

$$xdx = \frac{1}{2}dX\,,\ x^4 + 1 = X^2 + 1.$$

Đặt $Y = y^3$, ta có

$$y^2dy = \frac{1}{3}dY\,,\ y^6 + 1 = Y^2 + 1.$$

Phương trình trên trở thành

$$\frac{1}{2}\frac{dX}{X^2+1} + \frac{1}{3}\frac{dY}{Y^2+1} = 0$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}X + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}Y = C \Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2 + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}y^3 + C\,.$$

Từ điều kiện $y(0) = 1$, ta được $C = \frac{\pi}{12}$. Vậy

$$3\operatorname{arctg}x^2 + 2\operatorname{arctg}y^3 = \frac{\pi}{2}.$$

4) Phân ly biến số, ta được

$$e^{(x-1)^2}(x-1)dx = \frac{\cos y\,dy}{\sin y}.$$

Vì $e^{(x-1)^2}(x-1)dx = \frac{1}{2}d\left(e^{(x-1)^2}\right)$, nên bằng cách tích phân hai vế ta được

$$\frac{1}{2}e^{(x-1)^2} = \ln|\sin y| + C \Rightarrow e^{(x-1)^2} = 2\ln|\sin y| + 2C\,,$$

C là hằng số tùy ý. Vì $y(1) = \frac{\pi}{2}$, ta được $2C = 1$. Vậy tích phân riêng của bài toán là

$$e^{(x-1)^2} = 2\ln|\sin y| + 1\,.$$

3. 1) Phương trình đã cho không là phương trình vi phân thuần nhất.

2) Nếu $y \neq 0$, phương trình có thể viết là

$$y' = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Nó có dạng

$$y' = \begin{cases} -\sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1} & \text{nếu } y > 0 \\ \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1} & \text{nếu } y < 0 \end{cases}$$

đó là một phương trình vi phân thuần nhất.

3) Phương trình không thể đưa về dạng $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ nên không là phương trình vi phân thuần nhất.

4) Phương trình $y' = \ln x - \ln y = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ là phương trình vi phân thuần nhất.

5) Nếu $x \neq 0$, chia tử và mẫu của vế phải cho x, ta được

$$y' = \frac{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)},$$

đó là phương trình vi phân thuần nhất.

6) Nếu $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x, ta được

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right),$$

đó là phương trình vi phân thuần nhất.

4. 1) Phương trình có thể viết là

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

nên nó là phương trình vi phân thuần nhất. Đặt $y = ux$, ta được

$$xu' + u = u + u^2 \Rightarrow x\frac{du}{dx} = u^2.$$

Dễ thấy rằng u = 0 là một nghiệm của phương trình đó, nên y = 0 là một nghiệm của phương trình đã cho. Nếu $u \neq 0$, ta được

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C \Rightarrow u = -\frac{1}{\ln|x| + C}.$$

Suy ra

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + C}, \text{ C là hằng số tuỳ ý.}$$

2) Phương trình viết được dưới dạng

$$y' = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Đặt y = ux, ta được

$$xu' + u = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{(1+u)du}{u^2+2u-1} + \frac{dx}{x} = 0$$

Tích phân hai vế, vì $(1 + u)\,du = \frac{1}{2}d(u^2 + 2u - 1)$, ta được

$$\frac{1}{2}\ln|u^2 + 2u - 1| + \ln|x| = \ln|C|$$

$$\Rightarrow x\sqrt{|u^2 + 2u - 1|} = C \Rightarrow |y^2 + 2xy - x^2| = C^2, \text{ C là hằng số tùy ý.}$$

3) Đặt y = ux, phương trình trở thành

$$x\frac{du}{dx} + u = -1 - u \Rightarrow \frac{du}{2u+1} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{2}\ln|2u + 1| + \ln|x| = \ln|C| \Rightarrow x\sqrt{|2u+1|} = C$$

$$\Rightarrow x^2|2u + 1| = C^2 \Rightarrow |x^2 + 2xy| = C^2, \text{ C là hằng số tùy ý.}$$

4) Đặt y = ux, phương trình được đưa về dạng

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \frac{1}{u} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{u^2}{2} = \ln|Cx| \Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} = \ln|Cx| \Rightarrow y^2 = 2x^2\ln|Cx|,$$

C là hằng số tùy ý.

5) Đặt y = ux, ta có

$$x\frac{du}{dx} = \sin u \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| \Rightarrow x = C\operatorname{tg}\frac{u}{2} = C\operatorname{tg}\frac{y}{2x}.$$

Từ điều kiện $y(1) = \frac{\pi}{2}$, ta được C = 1. Vậy

$$x = \operatorname{tg}\frac{y}{2x}.$$

6) Đặt y = ux, ta được

$$x\sin u\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow \sin udu = -\frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\cos u = \ln\left|\frac{x}{C}\right| \Rightarrow x = Ce^{\cos u} \Rightarrow x = Ce^{\frac{y}{x}}$$, C là hằng số tùy ý.

7) Đặt y = ux, ta có

$$x\frac{du}{dx} = e^u \Rightarrow e^{-u}du = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$-e^{-u} = \ln|x| - \ln|C| \Rightarrow e^{-u} = \ln|C| - \ln|x|$$

$$\Rightarrow y = -x\ln\left(|\ln|C| - \ln|x||\right)$$, C là hằng số tùy ý.

5. 1) Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{xdx}{x^2+1} = 0.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C| = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$$

Bây giờ cho C biến thiên, tức là tìm hàm số C(x) sao cho $y = \frac{C(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ thỏa mãn phương trình không thuần nhất đã cho. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$(x^2+1)\left[\frac{C'(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{C(x).x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right] + \frac{xC(x)}{\sqrt{x^2+1}} = -2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}\,C'(x) = -2 \Rightarrow C'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow C(x) = -2\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + K,$$ K là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{K}{\sqrt{x^2+1}} - 2\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2) Giải phương tình thuần nhất tương ứng

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x\ln x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}.$$

Vì $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, nên $\frac{dx}{x\ln x} = \frac{d(\ln x)}{\ln x}$. Do đó ta được

$$\frac{dy}{y} = \frac{d(\ln x)}{\ln x}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được y = Clnx, C là hằng số tùy ý.

Cho hằng số C biến thiên, ta có $y' = C'(x)\ln x + \frac{C(x)}{x}$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)\ln x = x\ln x \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + K,$$

K là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + K\right)\ln x.$$

Từ điều kiện $y(e) = \frac{e^2}{2}$, ta được $\frac{e^2}{2} + K = \frac{e^2}{2} \Rightarrow K = 0$. Vậy nghiệm của bài toán ban đầu là

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x.$$

3) Giải phương tình thuần nhất

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + 2xdx = 0.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| + x^2 = \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x^2, \text{ C là hằng số tùy ý.}$$

Vậy nghiệm của phương trình thuần nhất là

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Cho hằng số C biến thiên rồi thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)e^{-x^2} = x \Rightarrow C'(x) = e^{x^2}.x$$

$$\Rightarrow C(x) = \int e^{x^2}xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + K,$$

K là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương tình đã cho là

$$y = Ke^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

4) Giải phương trình thuần nhất

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Tích phân hai vế ta được

$$\ln|y| + \ln x = \ln|C| \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Cho hằng số C biến thiên, ta có $y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{C'(x)}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = \ln x + K,$$

K là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{\ln x + K}{x}.$$

Từ điều kiện ban đầu $y(1) = 2$ ta được $K = 2$. Vậy

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

5) Phương trình viết lại là

$$y' - y\operatorname{tg}x = 1 \text{ với } \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Giải phương trình thuần nhất

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg}x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\frac{d(\cos x)}{\cos x}.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = -\ln\cos x + \ln|C| \Rightarrow y = \frac{C}{\cos x}.$$

Cho hằng số C biến thiên, ta được $y' = \frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x}$. Thế vào phương tình đã cho, ta được

$$C'(x) = \cos x \Rightarrow C(x) = \sin x + K,$$

K là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = \frac{\sin x + K}{\cos x}.$$

6) Giải phương tình thuần nhất

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy=0\Rightarrow\frac{dy}{y}+2\frac{dx}{x}=0$$

$$\Rightarrow \ln|y|+2\ln|x|=\ln|C|\Rightarrow yx^2=C\Rightarrow y=\frac{C}{x^2}.$$

Cho C biến thiên, thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)=\cos x\Rightarrow C(x)=\sin x+K.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=\frac{\sin x+K}{x^2}.$$

Từ điều kiện ban đầu $y(\pi)=0$, ta được $K=0$. Vậy nghiệm phải tìm là

$$y=\frac{\sin x}{x^2}.$$

7) Giải phương trình thuần nhất

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\cos^2 x}=0$$

$$\Rightarrow \ln|y|+\text{tg}x=\ln|C|\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\text{tg}x\Rightarrow y=Ce^{-\text{tg}x}.$$

Cho C biến thiên, thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)e^{-\text{tg}x}=\frac{\text{tg}x}{\cos^2 x}\Rightarrow C'(x)=e^{\text{tg}x}\text{tg}x.\frac{1}{\cos^2 x}=e^{\text{tg}x}\text{tg}x\,d(\text{tg}x).$$

Đổi biến số $\text{tg}x=u$, ta được

$$C(x)=\int e^u u du.$$

Bằng phương pháp tích phân từng phần, ta được

$$C(x)=ue^u-e^u+K=\text{tg}x\,e^{\text{tg}x}-e^{\text{tg}x}+K.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=(\text{tg}xe^{\text{tg}x}-e^{\text{tg}x}+K)e^{-\text{tg}x}=Ke^{-\text{tg}x}+\text{tg}x-1.$$

Do điều kiện ban đầu $y(0)=0$, ta được $K=1$. Vậy nghiệm phải tìm là

$$y=e^{-\text{tg}x}+\text{tg}x-1.$$

8) Giải phương trình thuần nhất

$$x\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x+1}=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x(x+1)}=\frac{dx}{x}-\frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right|=\ln\frac{x}{x+1}\Rightarrow y=C\frac{x}{x+1}.$$

Cho C biến thiên, ta được $y'=C'(x)\frac{x}{x+1}+\frac{C(x)}{(x+1)^2}$. Thay y' vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)\frac{x^2}{x+1}=x\Rightarrow C'(x)=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\Rightarrow C(x)=x+\ln x+K.$$

K là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=\frac{(x+\ln x+K)x}{x+1}.$$

9) Giải phương tình thuần nhất

$$\frac{dy}{dx}-2xy=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=2xdx\Rightarrow\ln\left|\frac{y}{C}\right|=x^2\Rightarrow y=Ce^{x^2}.$$

Cho C biến thiên, thế vào phương tình đã cho, ta được

$$C'(x)=2x\Rightarrow C(x)=x^2+K.$$

K là hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=(x^2+K)e^{x^2}.$$

Từ điều kiện $y(1)=0$, ta được $K=-1$. Nghiệm phải tìm là

$$y=(x^2-1)e^{x^2}$$

10) Phương trình đã cho không là tuyến tính cấp một nếu xem y là hàm phải tìm, x là biến số độc lập. Vì

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

nên có thể viết nó dưới dạng

$$y\frac{dx}{dy} = x + \ln y \Rightarrow y\frac{dx}{dy} - x = \ln y.$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một nếu xem x là hàm phải tìm, y là biến số độc lập. Giải phương trình thuần nhất

$$y\frac{dx}{dy} - x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \ln|y| \Rightarrow x = Cy.$$

Cho C biến thiên theo y, ta có $\frac{dx}{dy} = C'(y)y + C(y)$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(y)y^2 = \ln y \Rightarrow C'(y) = \frac{\ln y}{y^2} \Rightarrow C(y) = \int\frac{\ln y dy}{y^2}.$$

Bằng cách tích phân từng phần, ta được

$$C(y) = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + K, \text{ K là hằng số tùy ý.}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$x = Ky - \ln y - 1.$$

11) Phương trình đã cho là phương trình vi phân tuyến tính cấp một, xác định khi $x \neq 0$. Nó có thể viết dưới dạng

$$xy' + y = \sin x \Leftrightarrow (xy)' = \sin x.$$

Lấy nguyên hàm hai vế đối với x ta được

$$xy = -\cos x + C, \text{ C là hằng số tuỳ ý.}$$

Do đó

$$y = \frac{C - \cos x}{x}.$$

6. 1) Phương trình đã cho viết được dưới dạng

$$P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

trong đó: $P(x, y) = 2x + y^2$, $Q(x, y) = xy$. Vì $P_y = 2y$, $Q_x = y \Rightarrow P_y \neq Q_x$ (trừ khi $y = 0$) nên phương trình đã cho không là phương trình vi phân toàn phần.

2) Ta có:

$$P(x, y) = 3x^2 - 3y + 1,\ Q(x, y) = -(3x - 1) \Rightarrow P_y = -3 = Q_x.$$

Do đó phương trình đã cho là phương tình vi phân toàn phần. Tích phân tổng quát của nó có dạng f(x, y) = C, C là hằng số tùy ý, còn f(x, y) là hàm thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y + 1 \\ f_y = -3x + 1 \end{cases}$$

Tích phân phương trình sau của hệ theo y, ta được

$$f = -3xy + y + \varphi(x),$$

trong đó $\varphi(x)$ là một hàm bất kỳ khả vi của x. Do đó

$$f_x = -3y + \varphi'(x).$$

So sánh với phương trình đầu của hệ, ta được

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow \varphi(x) = x^3 + x$$

(không cộng thêm hằng số tùy ý, vì chỉ cần tìm một hàm f(x, y)). Do đó

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + x + y.$$

Tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$x^3 - 3xy + x + y = C.$$

3) Ta có:

$$P(x, y) = e^{-x}\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right], \ Q(x,y) = \frac{e^{-x}}{x+y}$$

$$\Rightarrow \quad P_y = e^{-x}\left[-\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{x+y}\right] = Q_x .$$

Vậy phương trình đã cho là một phương trình vi phân toàn phần. Ta tìm hàm số f(x, y) sao cho

$$\begin{cases} f_x = e^{-x}\left[\dfrac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right] \\ f_y = \dfrac{e^{-x}}{x+y} \end{cases}$$

Từ phương trình sau của hệ, ta được

$$f(x, y) = e^{-x}\ln(x + y) + \varphi(x),$$

φ là một hàm số khả vi bất kỳ của x.

Do đó

$$f_x = \frac{e^{-x}}{x+y} - e^{-x}\ln(x+y) + \varphi'(x).$$

So sánh với phương trình đầu của hệ, ta được

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow f(x, y) = e^{-x}\ln(x + y).$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$e^{-x}\ln(x + y) = C.$$

4) Ta có :

$$P(x, y) = 3x^2(1 + \ln y),\ \ Q(x, y) = -\left(2y - \frac{x^3}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_y = \frac{3x^2}{y} = Q_x .$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tìm hàm số f(x, y) sao cho

$$\begin{cases} f_x = 3x^2(1+\ln y) \\ f_y = -\left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right) \end{cases}$$

Từ phương trình đầu của hệ, ta được

$$f(x, y) = x^3(1 + \ln y) + \varphi(y),$$

φ là một hàm số khả vi bất kỳ của y. Do đó

$$f_y = \frac{x^3}{y} + \varphi'(y).$$

So sánh với phương trình sau của hệ, ta được

$$\varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -y^2 \Rightarrow f(x,y) = x^3(1+\ln y) - y^2.$$

Vậy tích phân tổng quát phải tìm là

$$x^3(1+\ln y) - y^2 = C.$$

5) $$P(x,y) = x\sin y,\ Q(x, y) = y\cos x$$

$$\Rightarrow \quad P_y = x\cos y,\ Q_x = -y\sin x \Rightarrow P_y \neq Q_x.$$

Phương trình đã cho không là phương trình vi phân toàn phần.

6) $P(x, y) = \cos y + y\cos x$, $Q(x, y) = x\sin y - \sin x$

$\Rightarrow$ $P_y = -\sin y + \cos x$, $Q_x = \sin y - \cos x$.

Vì $P_y \neq Q_x$ nên phương trình đã cho không là phương trình vi phân toàn phần.

7) Phương trình có thể viết là

$$x^2dx - 2ydy + xdy + ydx = 0.$$

Nhưng $x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$, $2ydy = d(y^2)$, $xdy + ydx = d(xy)$, nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần có dạng

$$d\left(\frac{x^3}{3} - y^2 + xy\right) = 0.$$

Tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{x^3}{3} - y^2 + xy = C.$$

8) $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = y^2 - x \Rightarrow P_y = -1 = Q_x$.

Phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tìm một hàm số $f(x, y)$ sao cho

$$\begin{cases} f_x = -y \\ f_y = y^2 - x \end{cases}$$

Từ phương trình đầu, suy ra

$$f(x, y) = -xy + \varphi(y),$$

φ là một hàm số bất kỳ khả vi của y. Do đó

$$f_y = -x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3} \Rightarrow f(x,y) = -xy + \frac{y^3}{3}.$$

Vậy tích phân tổng quát phải tìm là

$$-xy + \frac{y^3}{3} = C.$$

9) Phương trình đã cho không là phương trình vi phân toàn phần.

10) Ta có:

$$P(x, y) = 3x^2 + 6xy - 2y^2, Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^3$$

$$\Rightarrow \quad P_y = 6x - 4y = Q_x.$$

Phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tìm một hàm số f(x, y) sao cho

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 6xy - 2y^2 \\ f_y = 3x^2 - 4xy + 4y^3 \end{cases}$$

Từ phương trình đầu suy ra

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 2y^2x + \varphi(y),$$

φ là một hàm số khả vi bất kỳ phụ thuộc y. Do đó

$$f_y = 3x^2 - 4xy + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4 \Rightarrow f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + y^4.$$

Vậy tích phân tổng quát phải tìm là

$$x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + y^4 = C.$$

11) Phương trình đã cho không là phương trình vi phân toàn phần.

12) Phương trình có thể viết là

$$\frac{2xy\,dx - 3x^2dy}{y^4} + \frac{dy}{y^2} = 0.$$

Nhưng

$$\frac{2xy\,dx - 3x^2dy}{y^4} = d\left(\frac{x^2}{y^3}\right), \frac{dy}{y^2} = -d\left(\frac{1}{y}\right)$$

nên phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần có dạng

$$d\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Tích phan tong quát của nó là

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

13) Ta có

$$P(x, y) = e^x + y + \sin y, Q(x, y) = e^y + x + x\cos y$$

$$\Rightarrow \quad P_y = 1 + \cos y = Q_x.$$

Phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tìm một hàm số f(x, y) sao cho

$$\begin{cases} f_x = e^x + y + \sin y \\ f_y = e^y + x + x\cos y \end{cases}$$

Từ phương trình đầu của hệ suy ra

$$f(x, y) = e^x + xy + x\sin y + \varphi(y),$$

$$\Rightarrow \quad f_y = x + x\cos y + \varphi'(y).$$

So sánh phương trình này với phương trình sau của hệ, ta được

$$\varphi'(y) = e^y \Rightarrow \varphi(y) = e^y \Rightarrow f(x, y) = e^x + xy + x\sin y + e^y.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$e^x + xy + x\sin y + e^y = C.$$

7. 1) $\alpha(x)$ là thừa số tích phân khi và chỉ khi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(x)(y + \ln x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x\alpha(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x) = -\alpha(x) - x\alpha'(x) \Leftrightarrow 2\alpha(x) + x\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{\alpha} + 2\frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{\alpha}{C}\right| = \ln\frac{1}{x^2} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{C}{x^2}.$$

Chọn C = 1, ta được $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$. Vậy ta được phương trình vi phân toàn phần

$$\frac{y + \ln x}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0 \qquad (1)$$

tương đương với phương trình đã cho vì $x > 0$. Đến đây bạn đọc có thể tìm được tích phân tổng quát của phương trình (1), cũng là tích phân tổng quát của phương trình đã cho, đó là

$$y + \ln x + 1 = Cx, \text{ C là hằng số tùy ý.}$$

2) Thừa số tích phân $\alpha(x)$ là hàm số sao cho

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(x)(x^2\cos x - y\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\alpha(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow -\alpha(x) = \alpha(x) + x\alpha'(x) \Leftrightarrow 2\alpha(x) + x\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{\alpha} + 2\frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{\alpha}{C}\right| = \ln\frac{1}{x^2} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{C}{x^2}.$$

Chọn C = 1, ta được $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ và phương trình vi phân toàn phần là

$$\left(\cos x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{x}dy = \cos x\, dx + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow d\left(\frac{y}{x} + \sin x\right) = 0.$$

Tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{y}{x} + \sin x = C,$$

đó cũng là tích phân tổng quát của phương trình đã cho vì $x > 0$.

3) Thừa số tích phân $\alpha(y)$ phải thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial}{\partial y}[\alpha(y)y] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(y)(x+y^2)\right]$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(y)\, y + \alpha(y) = -\alpha(y) \Leftrightarrow 2\alpha(y) + y\frac{d\alpha}{dy} = 0 \Rightarrow \alpha(y) = \frac{C}{y^2}.$$

Chọn C = 1, ta được $\alpha(y) = \frac{1}{y^2}$ và phương trình vi phân toàn phần là

$$\frac{dx}{y} - \left(\frac{x}{y^2} + 1\right)dy = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y} + y\right) = 0.$$

Nó tương đương với phương trình đã cho vì $y \neq 0$. Tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{x}{y} + y = C \Rightarrow x + y^2 = Cy.$$

4) Dễ thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Bây giờ xét $y \neq 0$. Thừa số tích phân $\alpha(y)$ phải thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(y)y\sqrt{1-y^2}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(y)(x\sqrt{1-y^2}+y)\right]$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(y)y\sqrt{1-y^2}=\alpha(y)\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\Leftrightarrow \frac{d\alpha}{\alpha}=\frac{ydy}{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\alpha}{C}\right|=\ln(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow \alpha(y)=\frac{C}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Chọn $C = 1$, ta được $\alpha(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ và phương trình vi phân toàn phần

$$ydx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy=0\Leftrightarrow xdy+ydx+\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow d\left(xy-\sqrt{1-y^2}\right)=0.$$

Nó tương đương với phương trình đã cho vì $y \neq 0$. Tích phân tổng quát của nó là

$$xy-\sqrt{1-y^2}=C.$$

8. Trong bài tập này, ta nhận biết loại của mỗi phương trình cần phải giải.

1) Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$1+2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)y'=0.$$

Đó là một phương trình vi phân thuần nhất. Đặt $y = ux$, ta được

$$xuu'+u^2+2u+1=0$$

$$\Rightarrow xu\frac{du}{dx}+(u+1)^2=0\Rightarrow \frac{udu}{(u+1)^2}+\frac{dx}{x}=0.$$

Đổi biến $u + 1 = v$ ta có: $u = v - 1$, $du = dv$. Do đó

$$\frac{dv}{v}+\frac{dx}{x}-\frac{dv}{v^2}=0.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|vx|+\frac{1}{v}=C\Rightarrow \ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C.$$

2) Phương trình đã cho là phương trình tuyến tính cấp một. Giải phương trình thuần nhất

$$x^2y' + xy = 0 \Rightarrow xdy + ydx = 0 \Rightarrow xy = C \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Cho C biến thiên theo x, thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = \ln x + K \Rightarrow y = \frac{\ln x + K}{x}.$$

Từ điều kiện ban đầu $y(1) = 2$ suy ra $K = 2$. Vậy nghiệm riêng phải tìm là

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

3) Vì $3y^2y' = (y^3)'$, nên nếu đặt $z = y^3$, ta được

$$z' = 2\cos^2 x - e^{-x} = 1 + \cos 2x - e^{-x}.$$

Do đó

$$z = y^3 = x + \frac{\sin 2x}{2} + e^{-x} + C.$$

4) Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$(x + 2xy + e^y)\, y' + x^2 + y^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + y)\, dx + (x + 2xy + e^y)\, dy = 0.$$

Đặt $P(x, y) = x^2 + y^2 + y$, $Q(x, y) = x + 2xy + e^y$. Ta có

$$P_y = 2y + 1 = Q_x.$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Bạn đọc có thể tìm được tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = C.$$

Từ điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, ta được $C = 1$. Tích phân riêng phải tìm là

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = 1.$$

5) Ta có phương trình vi phân tuyến tính

$$xy' - y = x^2\cos x.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $y = Cx$.

Cho C biến thiên, thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x) = \cos x \Rightarrow C(x) = \sin x + K \Rightarrow y = Kx + x\sin x.$$

Do điều kiện $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ta được $K = -1$. Vậy nghiệm riêng phải tìm là

$$y = -x + x\sin x.$$

6) Phương trình đã cho là phương trình Bernoulli

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$$

$y = 0$ là một nghiệm của phương trình. Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2, ta được

$$y^{-2}y' - \frac{y^{-1}}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Đặt $z = y^{-1}$, ta có $z' = -y^{-2}y'$. Do đó ta được phương trình cấp một tuyến tính đối với z là

$$-z' - \frac{z}{x-1} = \frac{1}{x-1}. \qquad (*)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $z = \dfrac{C}{x-1}$.

Cho C biến thiên rồi thế vào phương trình (*) ta được

$$C'(x) = -1 \Rightarrow C(x) = -x + K \Rightarrow z = \frac{K-x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{x-1}{K-x}.$$

7) Xem x là hàm số phải tìm, y là biến số độc lập. Phương trình đã cho có thể viết là

$$x + y^2 = y\frac{dx}{dy} \Rightarrow y\frac{dx}{dy} - x = y^2. \qquad (**)$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với x. Nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là $x = Cy$. Cho C biến thiên rồi thế vào phương trình (**) ta được

$$C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y + K \Rightarrow x = (y + K)y = Ky + y^2.$$

8) Vì $3y^2y' = (y^3)'$, $4y^3y' = (y^4)'$ nên phương trình đã cho có thể viết là

$$(y^3 - y^4)' = xe^x.$$

Do đó

$$y^3 - y^4 = \int xe^x dx.$$

Tính vế phải bằng cách tích phân từng phần, ta được

$$y^3 - y^4 = xe^x - e^x + C.$$

9. 1) Phương trình của họ đường cong là

$$x = Cy^2.$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được

$$1 = 2Cyy'.$$

Từ phương trình đầu rút ra $C = \frac{x}{y^2}$, thế vào phương trình sau ta được

$$1 = \frac{2xy'}{y} \Rightarrow y = 2xy'.$$

Đó là phương trình vi phân của họ đường cong đã cho. Do đó phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao của nó là

$$y = -\frac{2x}{y'} \Rightarrow yy' + 2x = 0.$$

Do đó

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = C^2 \Rightarrow \frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{2C^2} = 1.$$

Quỹ đạo trực giao phải tìm là họ đường elip có tâm tại gốc tọa độ, nhận hai trục tọa độ làm trục đối xứng, có các bán trục là C và $C\sqrt{2}$.

2) Họ đường cong đã cho là họ đường tròn có tâm tại điểm (1, 1), bán kính C:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = C^2.$$

Đạo hàm hai vế đối với x, ta được phương trình vi phân của họ đường tròn đó là

$$(x - 1) + (y - 1)y' = 0.$$

Phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao là

$$(x - 1) - (y - 1)\frac{1}{y'} = 0 \Rightarrow (x - 1)y' - y = -1.$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là y = C(x − 1). Cho C biến thiên, thế vào phương trình trên, ta được

$$C'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{x-1} + K$$

$$\Rightarrow\ y = (x-1)\left[K + \frac{1}{x-1}\right] = K(x-1)+1$$

$$\Rightarrow\ y - 1 = K(x - 1).$$

Đó là họ đường thẳng đi qua điểm (1, 1).

3) Họ đường cong đã cho là họ đường hypebôn nhận cặp đường thẳng $x \pm y\sqrt{2} = 0$ làm tiệm cận:

$$x^2 - 2y^2 = C.$$

Đạo hàm hai vế đối với x, ta được phương trình vi phân của họ đường đó là

$$x - 2yy' = 0.$$

Phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao là

$$x + \frac{2y}{y'} = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0.$$

Tích phân tổng quát của nó là

$$yx^2 = C.$$

Quỹ đạo trực giao là họ đường hypebôn $y = \dfrac{C}{x^2}$.

4) Họ đường cong đã cho là họ đường hypebôn nhận đường thẳng x = −C và trục Ox làm tiệm cận:

$$y = \frac{1}{x+C} \Rightarrow y(x+C) = 1. \qquad (1)$$

Đạo hàm hai vế đối với x, ta được

$$y'(x + C) + y = 0. \qquad (2)$$

Từ phương trình (1) suy ra $x + C = \dfrac{1}{y}$. Thế vào phương trình (2) ta được

$$\frac{y'}{y} + y = 0.$$

Đó là phương trình vi phân của họ đường hypebôn đã cho. Phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao của nó là

$$-\frac{1}{yy'} + y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{y'} + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2dy = dx.$$

Tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{y^3}{3} - x = C \Rightarrow y^3 = 3(x + C).$$

10. 1) Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 2 = 0$ có hai nghiệm $r_1 = -1$, $r_2 = 2$. Do đó phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} \Rightarrow y' = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x}$$

Vì $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3}, C_1 = -\frac{1}{3}.$$

Vậy nghiệm riêng phải tìm là

$$y = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}.$$

2) Phương trình đặc trưng $r^2 - 10r + 25 = 0$ có nghiệm kép $r_1 = r_2 = 5$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^{5x}(C_1x + C_2)$$

$$\Rightarrow y' = e^{5x}C_1 + 5e^{5x}(C_1x + C_2) = 5C_1xe^{5x} + (C_1 + 5C_2)e^{5x}.$$

Vì $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, ta có $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Nghiệm phải tìm là $y = xe^{5x}$.

3) Phương trình đặc trưng $r^2 - 2r + 10 = 0$ có 2 nghiệm phức liên hợp $r = 1 \pm 3i$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$$

$$\Rightarrow y' = e^x[(C_1 + 3C_2)\cos 3x + (C_2 - 3C_1)\sin x].$$

Từ điều kiện $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$, ta được $C_2 = 0$, $C_1 = -\frac{1}{3}$. Vậy nghiệm phải tìm là

$$y = -\frac{1}{3}e^x \cos 3x.$$

4) Phương trình đặc trưng $r^2 + 3r = 0$ có hai nghiệm $r_1 = 0$, $r_2 = -3$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 + C_2e^{-3x} \Rightarrow y' = -3C_2e^{-3x}.$$

Vì $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -3C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_2 = -\frac{2}{3},\ C_1 = \frac{5}{3}.$$

Vậy nghiệm phải tìm là

$$y = \frac{1}{3}(5 - 2e^{-3x}).$$

5) Phương trình đặc trưng $r^2 + 9 = 0$ có hai nghiệm $r = \pm 3i$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x \Rightarrow y' = -3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x.$$

Từ điều kiện $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$, ta được $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Do đó

$$y = \sin 3x.$$

6) Phương tình đặc trưng $r^2 - 2r + 2 = 0$ có hai nghiệm phức $r = 1 \pm i$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

$$\Rightarrow \quad y' = e^x[(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x)].$$

Vì $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, ta được $C_1 = 1$, $C_1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$. Vậy

$$y = e^x(\cos x + \sin x).$$

11. 1) Phương trình đặc trưng $r^2 + r - 2 = 0$ có hai nghiệm $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Vế phải của phương trình là $\cos x - 3\sin x$, mà $\pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên tìm một nghiệm riêng của phương trình có vế phải dưới dạng

$$Y = A\cos x + B\sin x,$$

trong đó A, B là hai hằng số mà ta sẽ xác định bằng phương pháp hệ số bất định. Do đó

$$Y' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$Y'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Thế vào phương trình vi phân có vế phải, ta được

$$(-3A + B)\cos x - (A + 3B)\sin x = \cos x - 3\sin x.$$

Đó là một đồng nhất thức, do đó các hệ số của các số hạng đồng dạng phải bằng nhau, tức là:

$$\begin{cases} -3A + B = 1 \\ A + 3B = 3 \end{cases} \Rightarrow A = 0,\ B = 1.$$

Vậy: $Y = \sin x$.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \sin x \Rightarrow y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + \cos x.$$

Vì $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, ta được

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0,\ C_1 = 1.$$

Vậy nghiệm phải tìm là

$$y = e^x + \sin x.$$

2) Phương trình đặc trưng $r^2 - 2r + 2 = 0$ có hai nghiệm phức $r = 1 \pm 2i$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Vế phải của phương trình là $x^2 = e^{0x}x^2$, do 0 không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình có vế phải dưới dạng

$$Y = Ax^2 + Bx + C$$

$$\Rightarrow \quad Y' = 2Ax + B$$

$$\Rightarrow \quad Y'' = 2A.$$

Thế vào phương trình vi phân có vế phải, ta được

$$2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A) = x^2.$$

Suy ra

$$2A = 1,\ 2B - 4A = 0,\ 2C - 2B + 2A = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = \frac{1}{2}.$$

Vậy

$$Y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Do đó nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

3) Nghiệm của phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ là $r = \pm i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Vế phải của phương trình là $\sin x\sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$. Theo nguyên lý chồng nghiệm ta tìm một nghiệm riêng của phương trình có vế phải có dạng $Y_1 + Y_2$, trong đó Y_1 là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y = \frac{1}{2}\cos x, \qquad (1)$$

Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y = -\frac{1}{2}\cos 3x. \qquad (2)$$

Vế phải của phương trình (1) là $\frac{1}{2}\cos x$, mà $\pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm Y_1 dưới dạng

$$Y_1 = x(A\cos x + B\sin x).$$

Do đó

$$Y'_1 = x(-A\sin x + B\cos x) + A\cos x + B\sin x,$$

$$Y''_1 = x(-A\cos x - B\sin x) - 2A\sin x + 2B\cos x.$$

Thế vào phương trình (1), ta được

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \frac{1}{2}\cos x.$$

Suy ra:

$$A = 0,\ B = \frac{1}{4},\ Y_1 = \frac{1}{4}x\cos x.$$

Vế phải của (2) là $-\frac{1}{2}\cos 3x$, ta tìm Y_2 dưới dạng

$$Y_2 = C\cos 3x + D\sin 3x.$$

Thế vào (2), ta được

$$-8C\cos 3x - 8D\sin 3x = -\frac{1}{2}\cos 3x.$$

Suy ra

$$C = \frac{1}{16},\ D = 0,\ Y_2 = \frac{1}{16}\cos 3x.$$

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{16}\cos 3x.$$

4) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Vế phải của phương trình là sinx, mà $\pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng Y của phương trình đã cho có dạng

$$Y = x(A\cos x + B\sin x).$$

Thế vào phương trình có vế phải, ta được

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x.$$

Do đó

$$A = -\frac{1}{2},\ B = 0,\ Y = -\frac{1}{2}x\cos x.$$

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

5) Phương trình đặc trưng $r^2 - 4r + 4 = 0$ có nghiệm kép $r = 2$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x).$$

Vế phải của phương trình là

$$e^{2x}\cos^2 x = \frac{1}{2}e^{2x}(1 + \cos 2x).$$

Theo nguyên lý chồng nghiệm, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $Y_1 + Y_2$, trong đó Y_1, Y_2 theo thứ tự là nghiệm riêng của các phương trình:

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{2}e^{2x}, \tag{1}$$

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x. \tag{2}$$

Vế phải của (1) là $\frac{1}{2}e^{2x}$, 2 lại là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

Ta tìm nghiệm riêng Y_1 dưới dạng

$$Y_1 = Ax^2e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad Y'_1 = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x},$$

$$Y''_1 = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}.$$

Thế vào (1), ta được

$$2Ae^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{4}x^2e^{2x}.$$

Vế phải của (2) là $\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x$, $2 \pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta tìm Y_2 dưới dạng

$$Y_2 = e^{2x}(C\cos 2x + D\sin 2x)$$

$$\Rightarrow \quad Y'_2 = e^{2x}(-2C\sin 2x + 2D\cos 2x) + 2e^{2x}(C\cos 2x + D\sin 2x),$$

$$Y''_2 = e^{2x}(-4C\cos 2x - 4D\sin 2x) + 4e^{2x}(-2C\sin 2x + 2D\cos 2x) + + 4e^{2x}(C\cos 2x + D\sin 2x).$$

Thế vào (2) ta được

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{8},\ D = 0 \Rightarrow Y_2 = -\frac{1}{8}\cos 2x\,.e^{2x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x\right).$$

6) Nghiệm của phương trình đặc trưng là $-1 \pm i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Một nghiệm riêng của phương trình có vế phải là $Y_1 + Y_2$, trong đó Y_1, Y_2 theo thứ tự là nghiệm riêng của các phương trình

$$y'' + 2y' + 2y = 2x, \qquad (1)$$

$$y'' + 2y' + 2y = -\sin x. \qquad (2)$$

Vế phải của (1) là $2x = e^{0x}.2x$, 0 không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta tìm Y_1 dưới dạng $Y_1 = Ax + B$. Thế vào (1), ta được

$$2Ax + (2B + 2A) = 2x$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2}(x-1).$$

Vế phải của (2) là $-\sin x$, $\pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta tìm Y_2 dưới dạng $Y_2 = C\cos x + D\sin x$. Thế vào phương trình (2), ta được

$$(C + 2D)\cos x + (D - 2C)\sin x = -\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C + 2D = 0 \\ -2C + D = -1 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{2}{5},\ D = -\frac{1}{5} \Rightarrow Y_2 = \frac{1}{5}(2\cos x - \sin x).$$

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{5}(2\cos x - \sin x).$$

7) Phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ có nghiệm $\pm i$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Vế phải của phương trình là $4x\sin x$, $\pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Do đó ta tìm một nghiệm riêng của phương tình có vế phải dưới dạng

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$
$$= (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$$
$$\Rightarrow \quad Y' = -(Ax^2 + Bx)\sin x + (2Ax + B)\cos x + (Cx^2 + Dx)\cos x + (2Cx + D)\sin x$$
$$Y'' = -(Ax^2 + Bx)\cos x - 2(2Ax + B)\sin x + 2A\cos x -$$
$$- (Cx^2 + Dx)\sin x + 2(2Cx + D)\cos + 2C\sin x.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$(2A + 2D - 4Cx)\cos x + (-4Ax - 2B + 2C)\sin x = 4x\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2A + 2D = 0 \\ 4C = 0 \\ -4A = 4 \\ -2B + 2C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -1,\ B = C = 0,\ D = 1 \Rightarrow Y = x(-x\cos x + \sin x).$$

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x(\sin x - x\cos x).$$

8) Phương trình đặc trưng $r^2 - 2r + 1 = 0$ có nghiệm kép $r = 1$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = e^x(C_1 + C_2x).$$

Vế phải của phương trình là: $1 + x + 2(3x^2 - 2)e^x$. Ta tìm nghiệm riêng của phương trình có vế phải dưới dạng $Y = Y_1 + Y_2$, trong đó

$$Y''_1 - 2Y'_1 + Y_1 = 1 + x \tag{1}$$

$$Y''_2 - 2Y'_2 + Y_2 = 2(3x^2 - 2)e^x \tag{2}$$

Vế phải của (1) là $1 + x$, 0 không là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm Y_1 dưới dạng $Y_1 = Ax + B$. Thế vào phương trình (1), ta được

$$Ax + B - 2A = 1 + x \Rightarrow A = 1,\ B = 3 \Rightarrow Y_1 = x + 3.$$

Vế phải của (2) là $2(3x^2 - 2)e^x$, 1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, ta tìm Y_2 dưới dạng

$$Y_2 = e^x x^2(Ax^2 + Bx + C) = e^x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2).$$

Thế vào phương trình (2), ta được

$$e^x(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = e^x(6x^2 - 4)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = 0,\ C = -2 \ \Rightarrow\ Y_2 = e^x x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right).$$

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + x + 3 + e^x x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right).$$

9) Vế phải của phương trình là $x\cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\cos 2x$. Dùng nguyên lý chồng nghiệm, bạn đọc có thể tìm được nghiệm tổng quát của phương trình có vế phải là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x\cos 2x + \frac{2}{25}\sin 2x.$$

10) $\quad y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x).$

11) $\quad y = y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 2\cos 2x + 3\sin 2x.$

12) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Vì vế phải của phương trình là $x\cos x$, $\pm\, i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình với vế phải $x\cos x$ có dạng

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$

Bằng phương pháp hệ số bất định, ta được

$$A = D = 0,\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad Y = x\left(\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}x\sin x\right) = \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x$$

$$\Rightarrow y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{x}{4}\sin x + \frac{x}{2}\sin x + \frac{x^2}{4}\cos x.$$

Từ các điều kiện $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$ ta được $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm riêng phải tìm là

$$y = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x.$$

13) Phương trình đặc trưng $r^2 + r - 2 = 0$ có hai nghiệm $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Vế phải của phương trình là e^{mx}, hai trường hợp có thể xảy ra:

• Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -2$, ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $Y = Ae^{mx}$, A là hằng số. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$A = \frac{1}{m^2 + m - 2}.$$

Do đó

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{1}{m^2 + m - 2}e^{mx}.$$

• Nếu $m = 1$, ta có phương trình

$$y'' + y' - 2y = e^x. \qquad (*)$$

Vì 1 là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đang xét dưới dạng $Y = Axe^x$. Thế vào phương trình (*), ta được $A = \frac{1}{3} \Rightarrow Y = \frac{1}{3}xe^x$. Vậy nghiệm riêng của phương trình là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x.$$

14) • Nếu $m = 0$, phương trình đã cho có dạng

$$y'' = \cos x - \sin x.$$

Lấy nguyên hàm hai vế hai lần, ta được

$$y = -\cos x + \sin x + C_1x + C_2,$$

C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý.

• Nếu $m \neq 0$, phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt $r = \pm im$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos mx + C_2\sin mx.$$

Vế phải của phương trình là $e^{0x}(\cos x - \sin x)$, ta xét 2 trường hợp: $\pm m \neq 1$ và $\pm m = 1$.

– Giả sử $\pm m \neq 1$: Tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng

$$Y = A\cos x + B\sin x.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$A(m^2 - 1)\cos x + B(m^2 - 1)\sin x = \cos x - \sin x$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{m^2 - 1}, B = -\frac{1}{m^2 - 1} \Rightarrow Y = \frac{1}{m^2 - 1}(\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow \quad y = C_1\cos mx + C_2\sin mx + \frac{1}{m^2 - 1}(\cos x - \sin x).$$

– Giả sử $\pm m = 1$: Vì $\pm im$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng

$$Y = x(A\cos x + B\sin x).$$

Thế vào phương trình đã cho, và giải ra ta được

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x(\cos x + \sin x).$$

15) Phương trình đặc trưng $r^2 - (m + 1)r + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $r_1 = 1$, $r_2 = m$ nếu $m \neq 1$; có một nghiệm kép $r_1 = r_2 = 1$ nếu $m = 1$.

• Nếu $m = 1$, phương trình đã cho trở thành

$$y'' - 2y'' + y = x - 1.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = e^x(C_1 + C_2x)$. Vế phải của phương trình đã cho là $e^{0x}(x - 1)$, mà 0 không là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $Y = Ax + B$. Bằng phương pháp hệ số bất định ta tìm được: $A = 1$, $B = 1$, do đó $Y = x + 1$.

Vậy trong trường hợp $m = 1$ ta được nghiệm

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + x + 1.$$

• Nếu $m \neq 1$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1e^x + C_2e^{mx}.$$

Ta cũng tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng.

$$Y = Ax + B.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$Y = \frac{1}{m}\left(x + \frac{1}{m}\right).$$

Vậy trong trường hợp $m \neq 1$ ta tìm được nghiệm là

$$y = C_1e^x + C_2e^{mx} + \frac{1}{m}\left(x + \frac{1}{m}\right).$$

12. 1) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x, \qquad (*)$$

C_1 và C_2 là hai hằng số tùy ý.

Biểu thức (*) là nghiệm của phương trình có vế phải nếu C_1 và C_2 là những hàm số thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1\cos 2x + C'_2\sin 2x = 0 \\ -2C'_1\sin 2x + 2C'_2\cos 2x = x \end{cases}$$

Giải hệ trên đối với C'_1, C'_2, ta được

$$C'_1 = -\frac{1}{2}x\sin 2x,\ C'_2 = \frac{1}{2}x\cos 2x.$$

Do đó

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int x\sin 2x dx = \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + K_1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int x\cos 2x\, dx = \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + K_2,$$

trong đó: K_1, K_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = \left(\frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + K_1\right)\cos 2x +$$

$$+\left(\frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + K_2\right)\sin 2x$$

$$= K_1\cos 2x + K_2\sin 2x + \frac{x}{4}.$$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng, giải phương trình này bằng phương pháp tìm một nghiệm riêng của phương trình có vế phải đơn giản hơn nhiều.

2) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1 + C_2e^x \text{ với } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Biểu thức này là nghiệm tổng quát của phương trình có vế phải nếu C_1, C_2 là hai hàm số thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 e^x = 0 \\ \quad C'_2 e^x = e^x \end{cases} \Rightarrow C'_2 = 1, C'_1 = -e^x$$

$\Rightarrow \quad C_1 = -e^x + K_1, C_2 = x + K_2,$

trong đó: K_1, K_2 là hai hàm số tuỳ ý.

Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = K_1 + K_2e^x + e^x(x - 1).$$

3) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Tìm hai hàm số $C_1(x)$, $C_2(x)$ sao cho

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là

$$C'_1 = -1,\ C'_2 = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow C_1 = -x + K_1, C_2 = \ln(\sin x) + K_2$$

Vậy nghiêm tổng quát phải tìm là

$$y = K_1\cos x + K_2\sin x - x\cos x + \sin x.\ln(\sin x).$$

4) Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Tìm hai hàm số $C_1(x)$, $C_2(x)$ sao cho

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \operatorname{tg}x \end{cases}$$

Giải ra ta được

$$C'_1 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}, \ C'_2 = \sin x.$$

Suy ra:

$$C_1 = \sin x - \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x + \ln\left(\frac{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right) + K_1,$$

$$C_2 = -\cos x + K_2$$

trong đó: K_1, K_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Vậy nghiêm cần tìm là

$$y = K_1\cos x + K_2\sin x + \cos x.\ln\left(\frac{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right).$$

13. 1) Giả sử phương trình đã cho có nghiệm khai triển được dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

Do đó

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + (n+1)\,a_{n+1}x^n + ...$$

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + ... + (n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^n + ...$$

Thế vào phương trình đã cho và sắp xếp theo lũy thừa tăng của x, ta được

$$(2a_2 + a_o) + (3.2a_3 + a_1)x + ... + [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n + ... = 0$$

Do đó

$$2a_1 + a_o = 0,$$

$$32a_3 + a_1 = 0,$$

....

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy:

$$a_2 = -\frac{a_o}{2}, \qquad a_3 = -\frac{a_1}{3.2},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4.3}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5.4},$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n-1)}, \qquad a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{(2n+1)2n}.$$

Nhân các đẳng thức trên vế với vế ta được

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_o}{(2n)!}, \qquad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!} \text{ với } \forall n \geq 1.$$

Các hệ số a_o, a_1 không chịu sự ràng buộc nào, đó là hai hằng số tùy ý. Vậy ta được nghiệm

$$y = a_o\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) +$$

$$+ a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right).$$

Nghiệm đó chính là $y = a_o\cos x + a_1\sin x$ (một kết quả quen biết).

2) Giả sử phương trình có nghiệm khai triển được thành chuỗi lũy thừa. Viết y, y', y" như ở câu 1) rồi thế vào phương trình, ta được

$$xy'' = 2a_2x + 6a_3x^2 + \ldots + (n+1)na_{n+1}x^n + \ldots$$

$$2y' = 2a_1 + 4a_2x + 6a_3x^2 + \ldots + 2a_{n+1}x^n + \ldots$$

$$xy = a_ox + a_1x^2 + \ldots + a_{n-1}x^n + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad xy'' + 2y' + xy = 2a_1 + (6a_2 + a_o)x + \ldots$$

$$+ [(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}]x^n + \ldots = 0$$

Do đó:

$$a_1 = 0,$$

$$6a_2 + a_o = 0,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy :

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 0$$

$$a_2 = -\frac{a_o}{3.2}$$

$$a_4 = -\frac{a_0}{5.4}$$

$\dots$

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n+1)2n}.$$

Nhân các đẳng thức trên từng vế một, ta được

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n+1)!},\ a_o \text{ là hằng số tùy ý.}$$

Vậy

$$y = a_o\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots\right)$$

Dễ kiểm tra chuỗi lũy thừa đó hội tụ với mọi x và

$$y = \begin{cases} a_o \dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a_o & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

14. 1) Đặt $z = y^2$, phương trình trở thành

$$\frac{1}{2}z' + z = \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z. Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = y^2 = (x + C)e^{-2x}.$$

2) Xem x là hàm số phải tìm, y là biến số độc lập, phương trình được viết là

$$y^2 + 2y + x^2 + 2x\frac{dx}{dy} = 0.$$

Đó là một phương trình Bernoulli đối với x. Đặt $x^2 = u$, ta được một phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với u

$$\frac{du}{dy} + u = -y^2 - 2y.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $u = Ce^{-y}$. Cho C biến thiên rồi thế vào phương trình có vế phải, ta được

$$C'(y) = -e^{y}(y^2 + 2y) \Rightarrow C(y) = \int e^{y}(y^2 + 2y)dy = -y^2e^{y} + K,$$

K là hằng số tùy ý.

Vậy

$$u = x^2 = (-y^2e^{y} + K)e^{-y} = -y^2 + Ke^{-y} \Rightarrow x^2 + y^2 = Ke^{-y}.$$

Do $y(1) = 0$, ta được $K = 1$. Vậy tích phân riêng phải tìm là

$$x^2 + y^2 = e^{-y}.$$

3) Phương trình đặc trưng $r^2 - 4r + 4 = 0$ có nghiệm kép $r_1 = r_2 = 2$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = e^{2x}(C_1 + C_2x)$.

Vế phải của phương trình là $e^{2x}(x - 1)$, nên ta tìm một nghiệm riêng Y của phương trình có vế phải dưới dạng

$$Y = e^{2x}.x^2(Ax + B) = e^{2x}(Ax^3 + Bx^2).$$

Tìm A, B bằng phương pháp hệ số bất định, ta được $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm cần tìm là

$$y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x + x^2\left(\frac{x}{6} - \frac{1}{2}\right)\right).$$

4) Phương trình đặc trưng $r^2 + 5r + 6 = 0$ có hai nghiệm $r_1 = -2, r_2 = -3$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

Biểu thức trên sẽ là nghiệm của phương trình đã cho nếu C_1, C_2 là hai hàm số thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1 e^{-2x} + C'_2 e^{-3x} = 0 \\ -2C'_1 e^{-2x} - 3C'_2 e^{-3x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được

$$C'_1 = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \; C'_2 = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}.$$

Do đó

$$C_1 = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx \ , \ C_2 = -\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx \, .$$

Trong cả hai tích phân trên, đổi biến $e^x = u$, ta được:

$$C_1 = \int \frac{udu}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + K_1 = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + K_1 \, ,$$

$$C_2 = -\int \frac{u^2du}{1+u^2} = \int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du = -u + \text{arctg}u + K_2$$

$$= -e^x + \text{arctg}e^x + K_2,$$

trong đó: K_1, K_2 là hai hằng số tuỳ ý.

Vậy

$$y = K_1e^{-2x} + K_2e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) + e^{-3x}(\text{arctg}e^x - e^x) \, .$$

5) Ta có phương trình phân ly biến số

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

hay $$\frac{1}{2}(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+y^2) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) \, .$$

Do đó

$$\sqrt{(1+y^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C \, .$$

6) Phương trình viết được dưới dạng

$$y'(2y + xe^y) + 2x + e^y = 0 \quad \text{hay} \quad Pdx + Qdy = 0,$$

trong đó $P = 2x + e^y$, $Q = xe^y + 2y$. Vì $P_y = Q_x = e^y$, nên phương trình đã cho là một phương trình vi phân toàn phần. Tìm hàm $f(x, y)$ sao cho

$$\begin{cases} f_x = 2x + e^y \\ f_y = xe^y + 2y. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $$f(x, y) = x^2 + y^2 + xe^y.$$

Vậy tích phân tổng quát phải tìm là

$$x^2 + y^2 + xe^y = C.$$

7) Nghiệm của phương trình đặc trưng $r^2 + 1 = 0$ là $r = \pm i$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Vế phải của phương trình là: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. Tìm một nghiệm riêng của phương trình có vế phải dưới dạng $Y_1 + Y_2$, trong đó Y_1, Y_2 theo thứ tự là nghiệm riêng của các phương trình

$$y'' + y = \frac{3}{4}\sin x$$

$$y'' + y = -\frac{1}{4}\sin 3x.$$

Giải ra ta được:

$$Y_1 = -\frac{3}{8}x\cos x,\ Y_2 = \frac{1}{32}\sin x.$$

$$\Rightarrow Y = -\frac{3}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x.$$

Do đó

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x.$$

8) Đặt $z = y^3$, ta được

$$z' = e^{-2x} - \mathrm{tg}x.$$

Do dó

$$z = y^3 = -\frac{1}{2}e^{-2x} - \ln|\cos x| + C.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh.
Toán học cao cấp (Tập 1, 2, 3).
Nhà xuất bản Giáo dục, 2000.

[2] James Stewart.
Calculus.
Brooks/Cole Publishing Company, 1991.

[3] Elie Azoulay, Jean Avignant.
Mathématiques (Tome 1, 2, 3, 4).
Mc Graw Hill, 1991.

[4] P.E. Đankô, A.G. Pôpôp, I. Ia Côgiepnhicôva.
Bài tập toán học cao cấp (Phần 1, 2 – bản dịch tiếng Việt).
Nhà xuất bản Mir Maxcơva, 1983.

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc CT CP Sách ĐH – DN
TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
BÙI QUANG TUẤN

Chế bản :
QUANG CHÍNH

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP – TẬP HAI

Mã số : 7K616T7 – DAI

In 2.000 cuốn (QĐ 75), khổ 16 x 24. In tại Công ty CP In Anh Việt.
Địa chỉ : Số 74, ngõ 310, đường Nghi Tàm, Tây Hồ, Hà Nội.
Số ĐKKH xuất bản : 11 – 2007/CXB/340 – 2119/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2007.

TÌM ĐỌC GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. Giáo trình Toán học cao cấp – T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
2. Giáo trình Toán học cao cấp – T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
3. Bài tập Toán học cao cấp – T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
4. Bài tập Toán học cao cấp – T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
5. Giáo trình Vật lý đại cương – T1	Lương Duyên Bình
6. Giáo trình Vật lý đại cương – T2	Lương Duyên Bình
7. Bài tập Vật lý đại cương – T1	Lương Duyên Bình
8. Bài tập Vật lý đại cương – T2	Lương Duyên Bình
9. Hoá học đại cương	Lê Mậu Quyền
10. Vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn
11. Bài tập vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách – Thiết bị trường học ở địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

8934980760383

Giá: 19.500đ