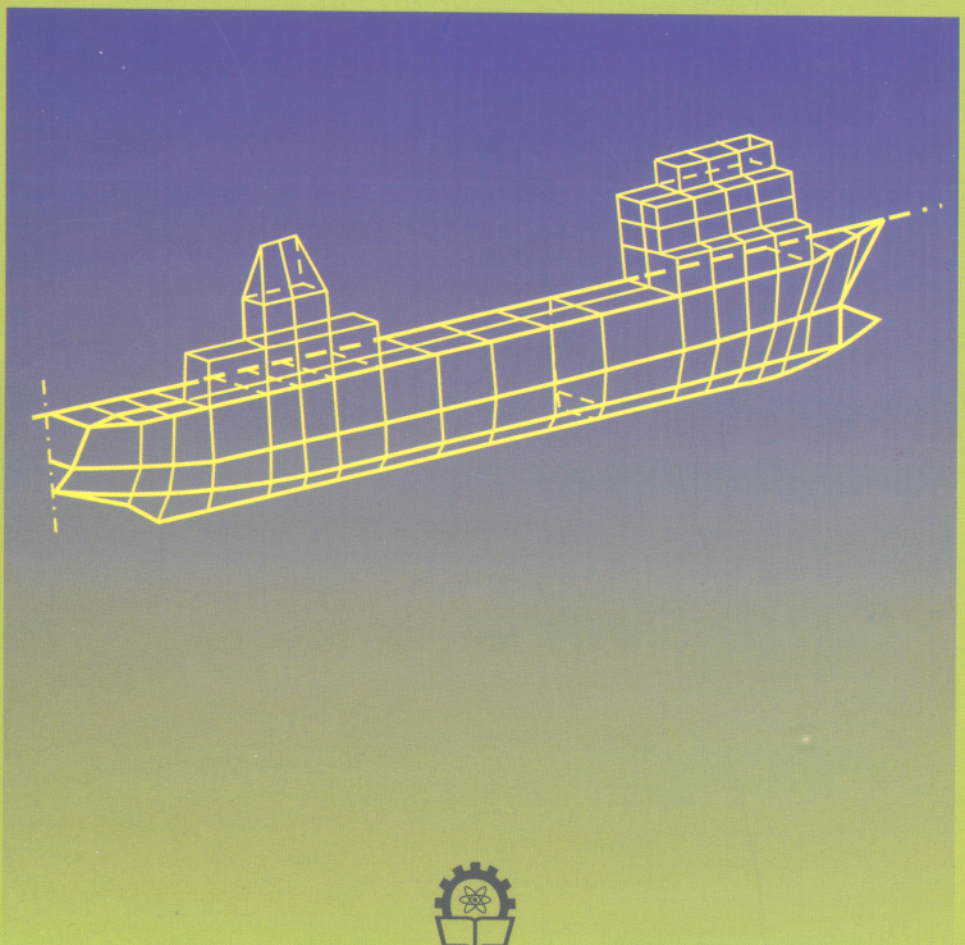
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

50 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

1956 - 2006

PGS.TS. VŨ VĂN KHIÊM

DAO ĐỘNG TÀU THỦY



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
50 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

PGS. TS. VŨ VĂN KHIÊM

DAO ĐỘNG TÀU THUỶ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Dao động là một hiện tượng kỹ thuật hay gặp trong các lĩnh vực điện, điện tử, quang học,... đặc biệt trong lĩnh vực cơ học. Trong những năm gần đây các bài toán dao động cơ học đã được khảo sát rất nhiều do yêu cầu của thực tế và do sự phát triển nhanh chóng các thuật toán tính toán mới cũng như sự phát triển như vũ bão của máy tính điện tử. Vì vậy, dao động của máy móc, công trình, máy bay, tàu thuỷ,... đều đang được các chuyên gia nghiên cứu ngày càng sâu sắc hơn. Ngày nay, các kỹ sư cơ khí nói chung và kỹ sư các chuyên ngành máy bay, tàu thuỷ,... cần phải được trang bị khá kỹ kiến thức về dao động của chuyên ngành mình.

Giáo trình này được biên soạn sau bảy năm giảng dạy môn Dao động tàu thuỷ cho sinh viên ngành Kỹ thuật tàu thuỷ – Khoa Cơ khí – Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Nội dung giáo trình đã nhận được sự góp ý rất nhiều của GS. TSKH. Nguyễn Văn Khang. Nhân đây tôi xin gửi tới GS. lời cám ơn trân trọng. Tôi cũng xin cám ơn TS. Nguyễn Phong Điền đã giúp tôi dịch một số đoạn trong [1] và ThS. Nguyễn Minh Phương đã chế bản, cũng như các cộng sự khác đã giúp tôi hoàn thành cuốn sách này.

Cuốn sách được xuất bản lần đầu nên mặc dù đã được chỉnh sửa nhiều lần nhưng vẫn không tránh khỏi có những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp để lần xuất bản sau tốt hơn.

Mọi ý kiến xin gửi về cho:

PGS. TS. Vũ Văn Khiêm
Bộ môn Cơ học ứng dụng
Khoa Cơ khí
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Tel: 04.8680469, 0903208696
Email: khiem@mail.hut.edu.vn

PHẦN I
DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 1
DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Hệ cơ học hôlônôm một bậc tự do là cơ hệ mà vị trí của nó trong không gian được xác định bởi một toạ độ suy rộng. Chuyển động của hệ được xác định bởi qui luật thay đổi của toạ độ suy rộng đó theo thời gian.

Trong chương này ta xét dao động nhỏ của hệ một bậc tự do quanh vị trí cân bằng ổn định. Khi đó phương trình vi phân mô tả dao động của hệ sẽ là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số.

1.1. DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN

1.1.1. Một số thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động

Trước hết chúng ta xét một vài thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do.

Thí dụ 1.1: Dao động của một vật nặng treo vào lò xo.

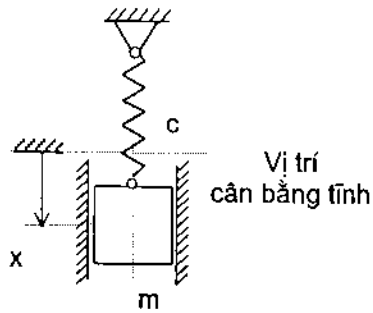
Xét một vật nặng khối lượng m treo vào lò xo có hệ số cứng c. Bỏ qua khối lượng lò xo (hình 1.1).

Động năng và thế năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2;\ \Pi = \frac{1}{2}cx^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại hai:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$



Hình 1.1

ta nhận được phương trình dao động của hệ:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \qquad (1.1)$$

Chú ý rằng ta có thể nhận được phương trình dao động (1.1) bằng nhiều phương pháp khác nhau. Chẳng hạn, nếu sử dụng định luật Newton ta có:

$$m\ddot{x} = P - c.(x_0 + x)$$

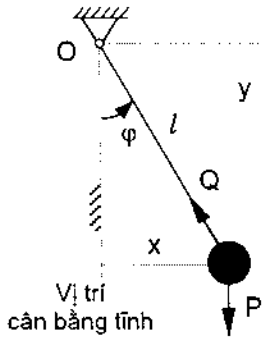
trong đó x_0 là độ dãn tĩnh của lò xo $P = cx_0$, còn biểu thức của lực đàn hồi tuyến tính của lò xo $F_{dh} = c.(x_0+x)$, lực đàn hồi hướng ngược chiều trục x. Từ phương trình trên ta suy ra:

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Thí dụ 1.2: Dao động con lắc toán học.

Con lắc toán học là một hệ dao động gồm một chất điểm có khối lượng m treo vào một điểm O cố định bằng một sợi dây nhẹ, không dãn chiều dài là l (hình 1.2). Gọi toạ độ của chất điểm là x, y. Từ hình vẽ ta có $x = l\sin\varphi$, $y = l\cos\varphi$. Từ đó dễ dàng tính được các biểu thức động năng và thế năng của chất điểm:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2; \quad \Pi = -mgy = -mgl\cos\varphi$$



Hình 1.2

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại hai ta được:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

hay: $$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

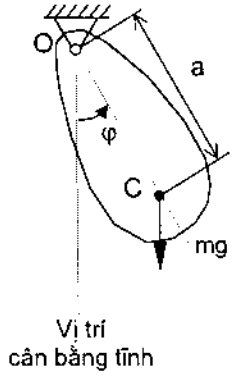
Trong trường hợp con lắc dao động nhỏ, ta có thể lấy xấp xỉ $\sin\varphi \approx \varphi$. Khi đó phương trình dao động nhỏ của con lắc toán học có dạng:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (1.2)$$

Thí dụ 1.3: Dao động con lắc vật lý.

Con lắc vật lý là một hệ dao động gồm có một vật rắn có thể quay quanh một trục cố định đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa khối tâm C của vật (hình 1.3). Khoảng cách từ điểm O đến khối tâm C của vật là a, mômen quán tính của vật rắn với trục quay là J_0. Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2; \quad \Pi = -mga\cos\varphi$$



Hình 1.3

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại hai ta được:

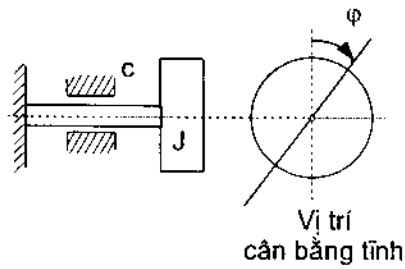
$$J_0\ddot{\varphi} + mga\sin\varphi = 0$$

Trong trường hợp con lắc vật lý dao động nhỏ, ta lấy $\sin\varphi \approx \varphi$, phương trình vi phân dao động có dạng:

$$J_0\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \qquad (1.3)$$

Thí dụ 1.4: Dao động xoắn.

Xét dao động xoắn của một vật nặng (chẳng hạn một đĩa hình tròn) gắn chặt vào một trục đàn hồi. Đầu kia của trục đàn hồi ngàm chặt vào tường cố định (hình 1.4). Cho biết mômen quán tính của vật nặng đối với trục quay là J, độ cứng xoắn của trục đàn hồi là c. Giả thiết mômen quán tính của trục đàn hồi đối với trục quay nhỏ hơn nhiều so với mômen quán tính của vật nặng đối với trục quay. Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng:



Hình 1.4

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2;\ \Pi = \frac{1}{2}c\varphi^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại hai ta nhận được phương trình dao động xoắn tuyến tính của vật nặng:

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \tag{1.4}$$

Gọi q là toạ độ suy rộng. Từ các phương trình (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) ta thấy dạng của phương trình dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do có dạng chung là:

$$m\ddot{q} + cq = 0 \tag{1.5}$$

1.1.2. Tính toán dao động tự do không cản

Nếu ta sử dụng ký hiệu: $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$ (1.6)

thì phương trình dao động tự do không cản có dạng:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Như đã biết từ lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm của phương trình vi phân (1.7) có dạng như sau:

$$q = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t \tag{1.8}$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Các hằng số này được xác định từ các điều kiện đầu:

$$t = 0:\ q(0) = q_0,\ \ \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

Để xác định các hằng số C_1, C_2 ta đạo hàm biểu thức (1.8) theo thời gian:

$$\dot{q} = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t \tag{1.9}$$

Thế các điều kiện đầu vào các biểu thức (1.8) và (1.9) ta xác định được:

$$C_1 = q_0;\ \ C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \tag{1.10}$$

Chú ý rằng nghiệm (1.8) của phương trình vi phân (1.7) có thể viết dưới dạng:

$$q = A\sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{1.11}$$

Trong đó A và α là các hằng số tuỳ ý. Do hệ thức:

$$\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sin\omega_0 t \cos\alpha + \sin\alpha \cos\omega_0 t$$

nên từ (1.8), (1.10) và (1.11) dễ dàng tính được:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2} \; ; \; \mathrm{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \omega_0 \cdot \frac{q_0}{\dot{q}_0} \qquad (1.12)$$

Từ biểu thức (1.11) ta thấy dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do được mô tả bởi hàm điều hoà. Vì vậy dao động tự do không cản còn được gọi là dao động điều hoà.

Trong biểu thức (1.11), A được gọi là biên độ dao động, ω_0 được gọi là tần số riêng, $\omega_0 t + \alpha$ được gọi là pha dao động, α là pha ban đầu. Đại lượng $T = 2\pi / \omega_0$ được gọi là chu kỳ dao động.

Qua khảo sát trên, dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do là dao động điều hoà và có các tính chất sau:

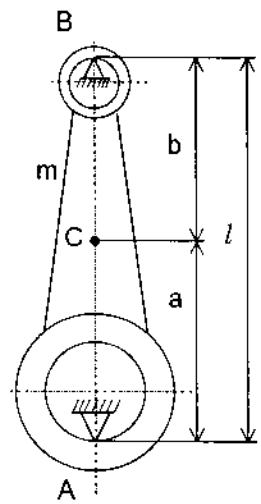
- Tần số riêng và chu kỳ dao động không phụ thuộc vào các điều kiện đầu mà chỉ phụ thuộc vào các tham số của hệ.

- Biên độ dao động là hằng số. Biên độ dao động và pha ban đầu của dao động tự do không cản phụ thuộc vào các điều kiện đầu và các tham số của hệ.

Việc xác định tần số dao động riêng theo công thức (1.6) là nhiệm vụ quan trọng nhất của bài toán dao động tự do.

Thí dụ 1.5: Tay biên khối lượng m, dài *l*. Tìm toạ độ trọng tâm và mômen quán tính của tay biên đối với trục qua trọng tâm và vuông góc với mặt phẳng tay biên. Các kích thước cho trên hình vẽ.

Lời giải: Ta sẽ xác định các đại lượng trên bằng thực nghiệm (hình 1.5). Gọi vị trí trọng tâm là C. Các khoảng cách a, b trên hình là các đại lượng cần tìm, với a = *l* – b. Ký hiệu J_A, J_B là mômen quán tính của tay biên lần lượt đối với các trục đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. J_A, J_B là các đại lượng chưa biết. Ta làm hai thí nghiệm xem tay biên là con lắc vật lý, lần lượt có các điểm treo là A rồi B.



Hình 1.5

Phương trình dao động nhỏ quanh A, theo (1.3) là:

$$J_A \ddot{\varphi}_A + mga\varphi_A = 0$$

Từ đó suy ra chu kỳ dao động quanh A:

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mga}} \qquad (1.13)$$

Tương tự, phương trình dao động nhỏ của tay biên quanh B là:

$$J_B \cdot \ddot{\varphi}_B + mgb\varphi_B = 0$$

Từ đó suy ra chu kỳ dao động:

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = 2\pi\sqrt{\frac{J_B}{mgb}} \tag{1.14}$$

Các đại lượng T_A, T_B ở trên được xác định bằng thực nghiệm (chẳng hạn sử dụng đồng hồ bấm giây). Ngoài ra, ta còn có ba phương trình:

$$a + b = l;\ J_A = J_C + ma^2;\ J_B = J_C + mb^2 \tag{1.15}$$

Như thế ta có năm phương trình để xác định năm ẩn là J_A, J_B, J_C, a, b. Giải các phương trình trên ta được:

$$b = l \cdot \frac{gT_A^2 - 4\pi^2 l}{g.(T_A^2 + T_B^2) - 8\pi^2 l};\quad J_C = \frac{T_B^2}{4\pi^2} \cdot mgb - mb^2$$

1.1.3. Xác định các tham số độ cứng của hệ dao động

Các phần tử đàn hồi trong các hệ dao động hữu hạn bậc tự do thường được giả thiết bỏ qua khối lượng. Đại lượng đặc trưng cho phần tử đàn hồi tuyến tính có độ cứng và ký hiệu là c. Vì hệ có thể thực hiện được dao động thẳng, dao động uốn, dao động xoắn,... nên thứ nguyên của độ cứng c nói chung khác nhau. Phần tử đàn hồi có nhiều dạng và nhiều kết cấu tuỳ theo sự sử dụng và cách chịu lực của chúng. Dưới đây trình bày một số công thức tính toán hệ số cứng c qui đổi.

a. Tính toán hệ số cứng qui đổi của thanh đàn hồi

Nếu phần tử đàn hồi là các thanh đàn hồi không trọng lượng, ta có thể tính toán hệ số cứng quy đổi tương đối đơn giản.

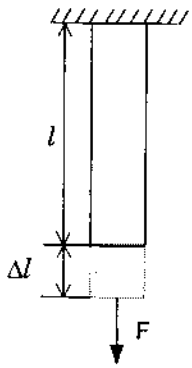
Trong trường hợp thanh đàn hồi chịu kéo nén (hình 1.6), từ [6], ta có: $\Delta l = \frac{Fl}{EA}$

trong đó E là môđun đàn hồi; A là diện tích mặt cắt ngang.

Từ đó ta suy ra: $F = \frac{EA}{l}\Delta l = c\Delta l$

Vậy độ cứng qui đổi được xác định bởi công thức:

$$c = \frac{EA}{l}$$



Hình 1.6

Trong trường hợp thanh đàn hồi chịu xoắn (hình 1.7) từ [6] ta có công thức:

$$\Delta\varphi = \frac{M_x l}{GI_p}$$

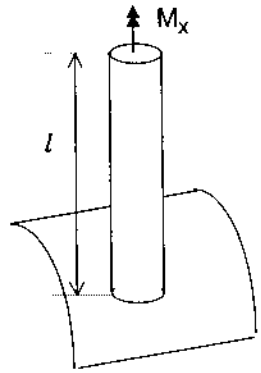
trong đó G là môđun trượt;

I_p là mômen quán tính cực của mặt cắt ngang.

Từ công thức trên dễ dàng suy ra: $M_x = \frac{GI_p}{l}\Delta\varphi = c\Delta\varphi$

Vậy độ cứng qui đổi trong trường hợp thanh xoắn có dạng:

$$c = \frac{GI_p}{l} \qquad (1.17)$$



Hình 1.7

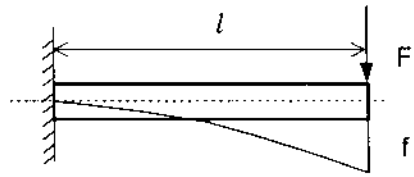
Trường hợp thanh đàn hồi bị uốn, hệ số cứng qui đổi c còn phụ thuộc vào các điều kiện biên. Để làm thí dụ ta xét dầm chịu uốn như hình 1.8. Từ [6] ta tính được độ võng: $f = \frac{1}{3}\cdot\frac{Fl^3}{EI}$

Trong đó EI là độ cứng chống uốn. Từ đó ta suy ra:

$$F = \frac{3EI}{l^3}f = cf$$

Vậy độ cứng qui đổi c được xác định bởi công thức:

$$c = 3\frac{EI}{l^3} \qquad (1.18)$$

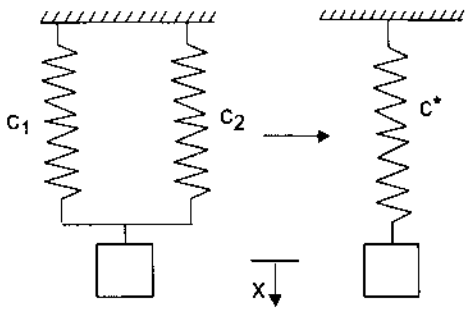


Hình 1.8

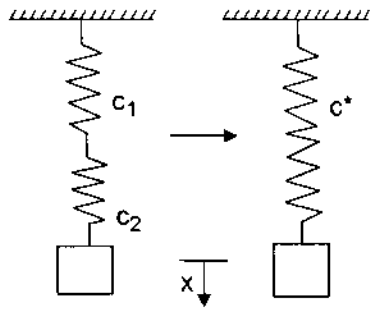
b. Tính toán lò xo thay thế tương đương của các hệ các lò xo mắc song song và mắc nối tiếp

Đối với hệ có hai lò xo mắc song song như hình 1.9, ta có thể thay thế tương đương bằng hệ có một lò xo. Từ biểu thức lực đàn hồi lò xo, ta suy ra công thức tính hệ số cứng lò xo tương đương:

$$F = c_1x + c_2x = c^*x \longrightarrow c^* = c_1 + c_2$$



Hình 1.9



Hình 1.10

Nếu hệ có n lò xo mắc song song, tính toán tương tự ta có

$$c^* = \sum_{j=1}^{n} c_j \qquad (1.19)$$

Đối với hệ có hai lò xo mắc nối tiếp như hình 1.10, nếu ở hệ thay thế lò xo dãn ra một đoạn x bằng tổng hai độ dãn x_1 và x_2 của hệ ban đầu thì ta có:

$$F = c_1x_1 = c_2x_2;\ \ x_1 + x_2 = x;\ \ F = c^*x$$

Từ đó ta suy ra: $x = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} = \frac{F}{c^*} \rightarrow \frac{1}{c^*} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

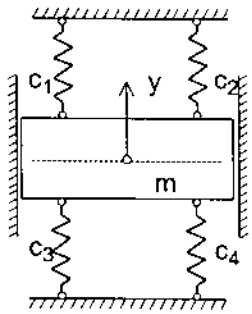
Nếu hệ có n lò xo mắc nối tiếp thì công thức tính hệ số cứng lò xo thay thế có dạng:

$$\frac{1}{c^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_j} \tag{1.20}$$

Thí dụ 1.6: Cho hệ dao động gồm khối lượng và các lò xo mắc như hình 1.11. Hãy tính tần số riêng của hệ.

Lời giải: Ở đây ta có bốn lò xo mắc song song. Do đó:

$$c^* = c_1 + c_2 + c_3 + c_4,\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}}$$



Hình 1.11

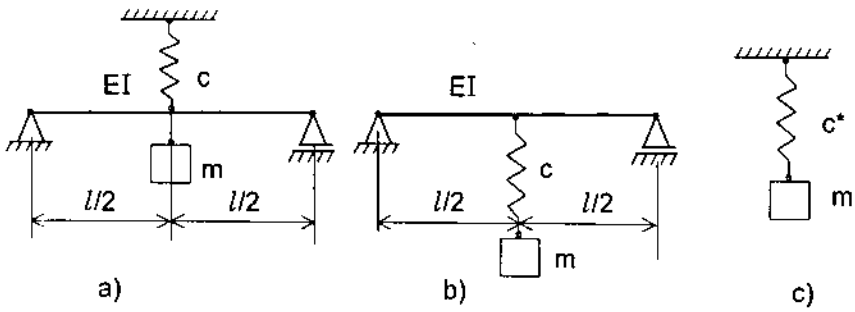
Thí dụ 1.7: Cho hai hệ dao động như hình 1.12a và 1.12b. Mỗi hệ gồm một dầm không trọng lượng có độ cứng chống uốn là EI, một lò xo có độ cứng c và một khối lượng m. Hãy tính các tần số riêng của chúng.

Lời giải: Cả hai hệ đã cho đều có thể thay bằng một mô hình thay thế tương đương (hình 1.12c).

Trên hình 1.12a dầm và lò xo là hai lò xo mắc song song. Lò xo thay thế dầm có độ cứng quy đổi là: $c_1 = \frac{48EI}{l^3}$

Từ đó dễ dàng tính được lò xo thay thế tương đương của hệ:

$$c^* = c + c_1 = c + \frac{48EI}{l^3}$$



Hình 1.12

Tần số riêng của hệ trên hình 1.12a là: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \sqrt{\frac{cl^3 + 48EI}{ml^3}}$

Trên hình 1.12b, dầm và lò xo là hai lò xo mắc nối tiếp. Do đó:

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_1} \rightarrow c^* = \frac{cc_1}{c + c_1}$$

Tần số riêng của hệ là:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \sqrt{\frac{48cEI}{(cl^3 + 48EI)m}}$$

Như thế tần số riêng của hệ b nhỏ hơn tần số riêng của hệ a. Nói cách khác, hệ b có lò xo thay thế mềm hơn.

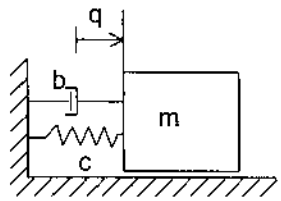
1.2. DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ CẢN

Quan sát các hệ dao động, ta thấy dao động tự do nói chung tắt dần theo thời gian. Tính chất này của hệ dao động lý giải bởi ảnh hưởng của lực cản. Hai loại lực cản phổ biến nhất là lực ma sát nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc và lực ma sát khô.

1.2.1. Tính toán dao động tự do có ma sát nhớt

Xét dao động của hệ mô tả trên hình 1.13. Do có thêm lực cản nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, nên phương trình vi phân dao động của hệ có dạng:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \qquad (1.21)$$



Hình 1.13

Nếu ta đưa vào các ký hiệu:

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2; \quad \frac{b}{m} = 2\delta \qquad (1.22)$$

thì phương trình (1.21) có dạng:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (1.23)$$

Theo lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính, phương trình đặc trưng của (1.23) là:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (1.24)$$

Tuỳ theo quan hệ giữa δ và ω_0, có thể xảy ra các trường hợp sau:

$\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ): $\lambda_{1,2} = -\delta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\delta \geq \omega_0$ (lực cản lớn): $\lambda_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

a. Trường hợp thứ nhất: $\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ)

Trong trường hợp này λ có giá trị phức. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (1.23) có dạng:

$$q = e^{-\delta t}.(C_1.\cos\omega t + C_2.\sin\omega t) \quad (1.25)$$

trong đó: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (1.26)

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện đầu:

$t = 0$: $q(0) = q_0$; $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$

Từ các điều kiện đầu đã cho, dễ dàng xác định các hằng số C_1, C_2:

$$C_1 = q_0;\ C_2 = \frac{\dot{q}_0 + \delta q_0}{\omega} \quad (1.27)$$

Để biến đổi biểu thức (1.25) ta đưa vào các hằng số A và β xác định theo hệ thức:

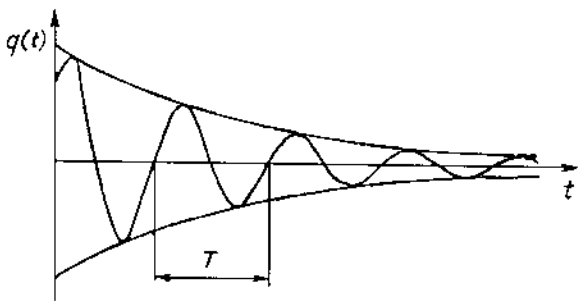
$C_1 = A.\sin\beta$; $C_2 = A.\cos\beta$

Từ đó suy ra: $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $tg\beta = \dfrac{C_1}{C_2}$

Biểu thức nghiệm (1.25) bây giờ có thể viết dưới dạng:

$$q = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) \quad (1.28)$$

Từ biểu thức nghiệm (1.28) ta thấy: Khi lực cản đủ nhỏ, hệ thực hiện dao động tắt dần. Độ lệch $Ae^{-\delta t}$ giảm theo luật số mũ, tiệm cận tới không (hình 1.14). Dao động được mô tả bởi phương trình (1.28) là dao động họ hình sin.



Hình 1.14

Tuy chuyển động của hệ được mô tả bởi qui luật không tuần hoàn, nhưng toạ độ q lại đổi dấu một cách tuần hoàn. Vì thế người ta qui ước gọi ω là "tần số riêng", $T = 2\pi / \omega$ là "chu kỳ", còn $Ae^{-\delta t}$ là "biên độ" của dao động tắt dần.

Để đặc trưng cho độ tắt dần của dao động tự do có cản nhớt, ta đưa vào khái niệm độ tắt lôga. Độ tắt lôga Λ được xác định bởi hệ thức:

$$\Lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \delta T \quad (1.29)$$

Độ tắt lôga đặc trưng cho độ giảm "biên độ" dao động tắt dần. Trong thực tế ta thường xác định tỷ số hai biên độ dao động sau k chu kỳ:

$$\frac{q(t)}{q(t+kT)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+kT)}} = e^{\delta kT}$$

Từ đó ta suy ra: $\Lambda = \delta T = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{q(t)}{q(t+kT)}$ (1.30)

b. Trường hợp thứ hai: $\delta > \omega_0$ (lực cản lớn)

Khi $\delta > \omega_0$ hai nghiệm λ_1 và λ_2 của phương trình đặc trưng là các số thực và âm.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (1.23) có dạng

$$q = Ae^{-\delta t}sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\,t + \beta) \qquad (1.31)$$

Đường biểu diễn q = q(t) cắt trục t không quá một lần (hình 1.15). Do đó chuyển động của hệ là chuyển động tắt dần, không dao động.

c. Trường hợp thứ ba: $\delta = \omega_0$ (lực cản tới hạn)

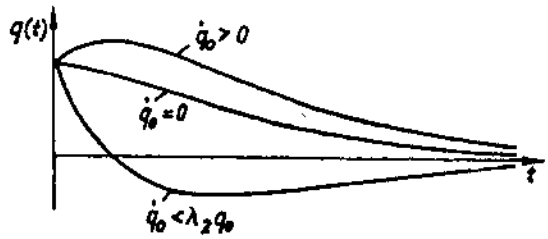
Trong trường hợp này hai nghiệm λ_1 và λ_2 là các số thực âm và bằng nhau. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (1.23) có dạng:

$$q = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2) \qquad (1.32)$$

Chuyển động của hệ là tắt dần, không dao động.

Trong một số tài liệu viết về dao động trong kỹ thuật, người ta còn sử dụng khái niệm độ cản Lehr. Độ cản Lehr (ký hiệu bằng chữ D) được xác định bởi hệ thức:

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}} \qquad (1.33)$$



Hình 1.15

Phương trình vi phân dao động tự do có cản nhớt (1.23) có thể viết dưới dạng:

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (1.34)$$

Do hệ thức $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$ chuyển động của hệ được phân thành ba trường hợp sau:

D < 1 ($\delta < \omega_0$): độ cản nhỏ;

D = 1 ($\delta = \omega_0$): độ cản tới hạn;

D > 1 ($\delta > \omega_0$): độ cản lớn.

Căn cứ vào độ cản Lehr ta có kết luận: Khi D < 1 chuyển động của hệ là dao động tắt dần, khi D ≥ 1 chuyển động của hệ tắt dần, không dao động.

Từ công thức định nghĩa độ cản Lehr, ta dễ dàng xác định được hệ thức liên hệ giữa độ tắt lôga và độ cản Lehr:

$$\Lambda = \delta T = 2\pi\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \qquad (1.35)$$

Thí dụ 1.8: Gắn một khối lượng m vào đầu thanh. Gắn vào thanh các phần tử cản và đàn hồi như hình 1.16. Bỏ qua khối lượng của thanh.

- Phải chọn độ lớn của hệ số cản b như thế nào để hệ có khả năng dao động nhỏ ?
- Xác định độ cản Lehr D cần thiết để sau mười dao động, biên độ giảm còn 1/10 biên

độ của chu kỳ đầu, sau đó xác định chu kỳ dao động.

Lời giải: Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục đi qua A và do φ nhỏ lấy xấp xỉ sinφ ≈ φ, cosφ ≈ 1, ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ:

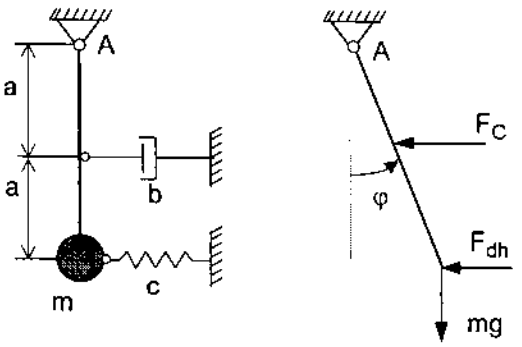
$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{4m}\dot{\varphi} + (\frac{c}{m} + \frac{g}{2a})\varphi = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

trong đó: $2\delta = \frac{b}{8m}$; $\omega_0^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{2a}$.

Để hệ có khả năng dao động nhỏ thì $\delta < \omega_0$. Từ đó suy ra:

$$\frac{b}{8m} < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{8}{2a}} \rightarrow b < 8\sqrt{cm + \frac{gm^2}{2a}}$$



Hình 1.16

Từ các công thức (1.30) và (1.35) ta có:

$$10 \cdot \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln\frac{q_n}{q_{n+10}} = \ln 10 \rightarrow D = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{20\pi}{\ln 10}\right)^2 + 1}} = 0{,}037$$

Chu kỳ dao động: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2am}{2ac + gm}}$

1.2.2. Nhận xét chung về dao động tự do có ma sát

Ngoài ma sát nhớt, ta còn có ma sát khô và các dạng tổ hợp. Trong trường hợp cản nhỏ, ta có dao động tự do có ma sát của hệ một bậc tự do nói chung có dạng tắt dần giống như dạng ma sát nhớt.

1.3. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ CHỊU KÍCH ĐỘNG ĐIỀU HOÀ

1.3.1. Các dạng kích động của mô hình dao động khối lượng - lò xo

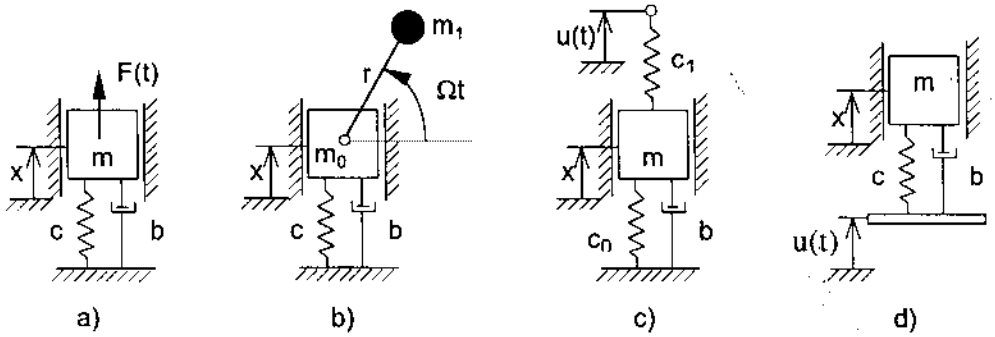
Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do có dạng tổng quát như sau:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = f(t) \tag{1.36}$$

Để thấy rõ việc xác định các hàm f(t) ta xét các mô hình dao động trên hình 1.17.

Trên hình 1.17a hệ dao động chịu kích động lực. Giả sử $F(t) = \hat{F}\sin\Omega t$, trong đó $\hat{F}$ là giá trị cực đại của hàm F(t). Ta có:

$$f(t) = \hat{F}\sin\Omega t \tag{1.37}$$



Hình 1.17

Trên hình 1.17b hệ chịu kích động bởi lực quán tính gây ra do khối lượng lệch tâm m_1. Trong phương trình (1.41) ta lấy $m = m_0 + m_1$, còn hàm f(t) có dạng:

$$f(t) = m_1.r.\Omega^2.\sin\Omega t \tag{1.38}$$

Trên hình 1.17c hệ chịu kích động bởi lực đàn hồi. Giả sử điểm đầu của lò xo chuyển động theo qui luật: $u(t) = \hat{u}.\sin\Omega t$.

Trong phương trình (1.36) ta lấy $c = c_0 + c_1$, còn hàm f(t) có dạng:

$$f(t) = c_1.\,\hat{u}.\sin\Omega t \tag{1.39}$$

Trên hình 1.17d hệ chịu kích động động học. Giả sử điểm chân của lò xo chuyển động theo qui luật $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$ .Trong trường hợp này hàm f(t) có dạng:

$$f(t) = cu(t) + b.\dot{u}(t) = (c.\sin\Omega t + b.\Omega\cos\Omega t).\hat{u} \tag{1.40}$$

Với bốn loại lực kích động kể trên, phương trình vi phân dao động cưỡng bức (1.36) có ba dạng mẫu như sau.

a. Kích động lực hoặc kích động qua lò xo

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2.x = \omega_0^2.\hat{y}\sin\Omega t \tag{1.41}$$

Trong đó: $\hat{y} = \dfrac{F}{c}$ hoặc $\hat{y} = \dfrac{c_1}{c_0 + c_1}\cdot\hat{u}$

b. Kích động bởi khối lượng lệch tâm

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2.x = \Omega^2.\hat{y}.\sin\Omega t \tag{1.42}$$

với: $\hat{y} = \dfrac{m_1}{m_0 + m_1}\cdot r$

c. Kích động động học

$$\ddot{x} + 2\delta.\dot{x} + \omega_0^2.x = \omega_0.\hat{y}.\left(\omega_0\sin\Omega t + 2\delta\frac{\Omega}{\omega_0}\cos\Omega t\right) \tag{1.43}$$

với $\hat{y} = \hat{u}$.

1.3.2. Tính toán dao động cưỡng bức không cản

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức không cản của hệ một bậc tự do có dạng:

$$m.\ddot{q} + c.q = H.\sin\Omega t \tag{1.44}$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu: $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$; $h = \dfrac{H}{m}$

thì phương trình (1.44) có dạng: $\ddot{q} + \omega_0^2 q = h\sin\Omega t$ (1.45)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1.45) bao gồm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng của phương trình có vế phải.

Khi $\Omega \neq \omega_0$ ta tìm nghiệm riêng của phương trình (1.45) dưới dạng:

$$q^* = A.\sin\Omega t \tag{1.46}$$

trong đó A là hằng số chưa xác định. Thế biểu thức (1.46) vào phương trình (1.45), so sánh với các hệ số của $\sin\Omega t$, ta rút ra biểu thức xác định A:

$$A = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (\text{với } \Omega \neq \omega_0)$$

Theo lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm tổng quát của phương trình (1.45) có dạng:

$$q(t) = C_1.\cos\omega_0 t + C_2.\sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cdot\sin\Omega t \tag{1.47}$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện đầu. Giả sử khi t = 0 thì $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Thế các điều kiện đầu này vào biểu thức (1.47) và đạo hàm của nó, ta có:

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \frac{h\Omega}{\omega_0.(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Như thế, biểu thức nghiệm (1.47) có dạng:

$$q(t) = q_0.\cos\omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\cdot\sin\omega_0 t - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\cdot\sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cdot\sin\Omega t \tag{1.48}$$

Nghiệm (1.48) gồm hai phần: ba số hạng đầu biểu thị dao động tự do với tần số là tần số riêng của hệ, số hạng thứ tư biểu thị dao động cưỡng bức với tần số là tần số của lực kích động. Chú ý rằng khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$ chỉ có hai số hạng đầu của dao động tự do triệt tiêu. Vì vậy số hạng thứ ba được gọi là thành phần dao động tự do kéo theo. Giai đoạn tồn tại cả các thành phần dao động với tần số lực kích động và các thành phần dao động với tần số riêng được gọi là giai đoạn chuyển tiếp. Giai đoạn chỉ tồn tại thành phần dao động với tần số của lực kích động được gọi là giai đoạn bình ổn.

Nếu bỏ qua các thành phần dao động tự do trong (1.48) ta có biểu thức xác định trạng thái bình ổn của dao động cưỡng bức

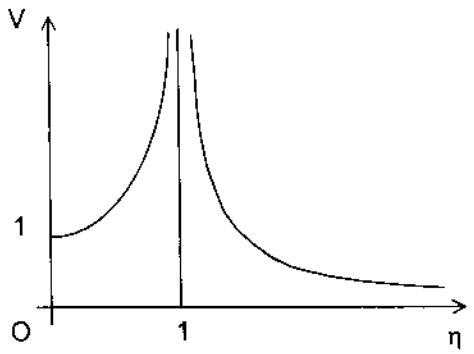
$$q^*(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cdot \sin \Omega t = \frac{H}{c(1-\eta^2)} \cdot \sin \Omega t \tag{1.49}$$

Chú ý rằng thừa số H / c là dịch chuyển gây ra bởi lực tĩnh H đặt vào vật rắn dao động. Trong đó $\eta = \Omega / \omega_0$. Đại lượng:

$$V(\eta) = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|} \tag{1.50}$$

biểu thị tác dụng động lực của lực kích động, và được gọi là hàm khuếch đại (hoặc hệ số động lực). Trên hình 1.18 biểu diễn sự phụ thuộc của V vào η.

Khi tỷ số Ω / ω_0 dần đến 1 thì hàm khuếch đại (hệ số động lực) và do đó biên độ dao động cưỡng bức tăng lên nhanh chóng và tiến tới vô cùng khi $\Omega = \omega_0$. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng cộng hưởng. Như vậy hiện tượng cộng hưởng là hiện tượng biên độ dao động cưỡng bức tăng lên rất lớn do tần số của lực kích động trùng với tần số dao động tự do. Trong thực tế không có trường hợp nào biên độ dao động tăng lên vô cùng vì trong các hệ thực bao giờ cũng tồn tại lực cản. Vấn đề này sẽ được xét ở sau.



Hình 1.18

Trở lại biểu thức tổng quát (1.48) của nghiệm. Khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$, biểu thức nghiệm (1.48) có dạng:

$$q(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t\right) \tag{1.51}$$

Ta xét trường hợp khi tần số Ω của lực kích động rất gần với tần số dao động tự do ω_0. Đưa vào ký hiệu:

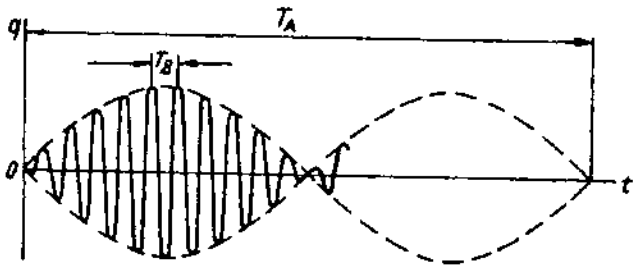
$$\Omega - \omega_0 = 2\varepsilon$$

trong đó ε là một đại lượng vô cùng bé. Bỏ qua các số hạng bé cỡ ε trong biểu thức của q ta có:

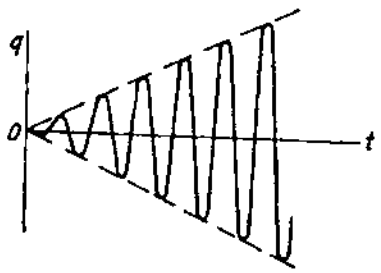
$$q \approx \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\sin \Omega t - \sin \omega_0 t\right) = \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cdot \cos \frac{\Omega + \omega_0}{2} t \cdot \sin \frac{\Omega - \omega_0}{2} t$$

$$= \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cdot \sin \varepsilon t . \cos \frac{\Omega + \omega_0}{2} t \approx -\frac{h \sin \varepsilon t}{2\Omega\varepsilon} \cdot \cos \Omega t \tag{1.52}$$

Do ε là một vô cùng bé nên hàm sinεt biến thiên chậm, còn chu kỳ của nó $2\pi/\varepsilon$ rất lớn. Trong trường hợp này có thể xem biểu thức (1.52) là qui luật dao động với chu kỳ $2\pi/\Omega$ và biên độ biến đổi $(h/2\Omega\varepsilon).\sin\varepsilon t$. Dạng dao động này được biểu diễn trên hình 1.19. Hiện tượng dao động này gọi là hiện tượng phách.



Hình 1.19



Hình 1.20

Xét trường hợp $\Omega \to \omega_0.(\varepsilon \to 0)$. Khi đó, ta có thể thay sinεt bằng εt trong biểu thức (1.52) và ta có hệ thức:

$$q = -\frac{ht}{2\omega_0} \cdot \cos\omega_0 t \qquad (1.53)$$

Biên độ $ht/2\omega_0$ tăng lên vô hạn khi thời gian t tăng như hình 1.20. Như thế, ngay trong phạm vi lý thuyết dao động tuyến tính không cản, sự tăng biên độ lên vô hạn ở vùng cộng hưởng cũng đòi hỏi phải có thời gian. Đối với các máy được thiết kế làm việc ở trên vùng cộng hưởng, khi tăng vận tốc của máy qua vùng cộng hưởng, cần phải khẩn trương cho vượt qua đủ nhanh.

Như thế khi tính toán dao động cưỡng bức không cản ta phân ra hai trường hợp:

- Trường hợp xa cộng hưởng ($\Omega \neq \omega_0$)

- Trường hợp gần cộng hưởng ($\Omega \approx \omega_0$). Trong trường hợp này khi $\Omega = \omega_0 + 2\varepsilon$ ta có hiện tượng phách, khi $\Omega = \omega_0$ ta có hiện tượng cộng hưởng.

1.3.3. Tính toán dao động cưỡng bức có ma sát nhớt

Các phương trình vi phân dao động tuyến tính chịu kích động điều hoà của hệ một bậc tự do có ma sát nhớt (1.41), (1.42) và (1.43) có thể viết dưới dạng như sau:

$$\ddot{q} + 2\delta.\dot{q} + \omega_0^2.q = h_1.\sin\Omega t + h_2.\cos\Omega t \qquad (1.54)$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình này dưới dạng:

$$q^*(t) = M.\sin\Omega t + N.\cos\Omega t \qquad (1.55)$$

trong đó M, N là các hằng số cần xác định. Thế biểu thức (1.55) vào phương trình (1.54) rồi so sánh các hệ số của $\sin\Omega t$ và $\cos\Omega t$, ta rút ra hệ hai phương trình đại số tuyến tính để xác định M và N:

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)M - 2\delta\Omega N = h_1$$
$$2\delta\Omega M + (\omega_0^2 - \Omega^2)N = h_2$$

Giải ra ta được:

$$M = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)h_1 + 2\delta\Omega h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$
$$N = \frac{-2\delta\Omega h_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \quad (1.56)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1.54) là tổng của nghiệm riêng (1.56) và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất (1.28):

$$q(t) = A.e^{-\delta t}.\sin(\omega t + \beta) + M.\sin\Omega t + N.\cos\Omega t \quad (1.57)$$

Số hạng thứ nhất của biểu thức nghiệm (1.57) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Hai số hạng sau có tần số Ω của ngoại lực biểu diễn thành phần dao động cưỡng bức của hệ.

Thành phần dao động cưỡng bức (1.55) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$q^*(t) = \hat{q}.\sin(\Omega t + \varphi) \quad (1.58)$$

trong đó:

$$\hat{q} = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2.\Omega^2}} = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\omega_0^2.\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2.\eta^2}} \quad (1.59)$$

$$tg\varphi = \frac{N}{M} \quad (1.60)$$

Ở đây, cũng như các đoạn trước, ta dùng ký hiệu $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$; $D = \frac{\delta}{\omega_0}$. So sánh phương trình vi phân (1.54) với các phương trình vi phân (1.41), (1.42) và (1.43) ta rút ra các hệ thức sau:

- Trường hợp kích động lực hoặc kích động qua lò xo:

$$\hat{q} = V_1(\eta, D)\hat{y};\ V_1 = \left[\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.61)$$

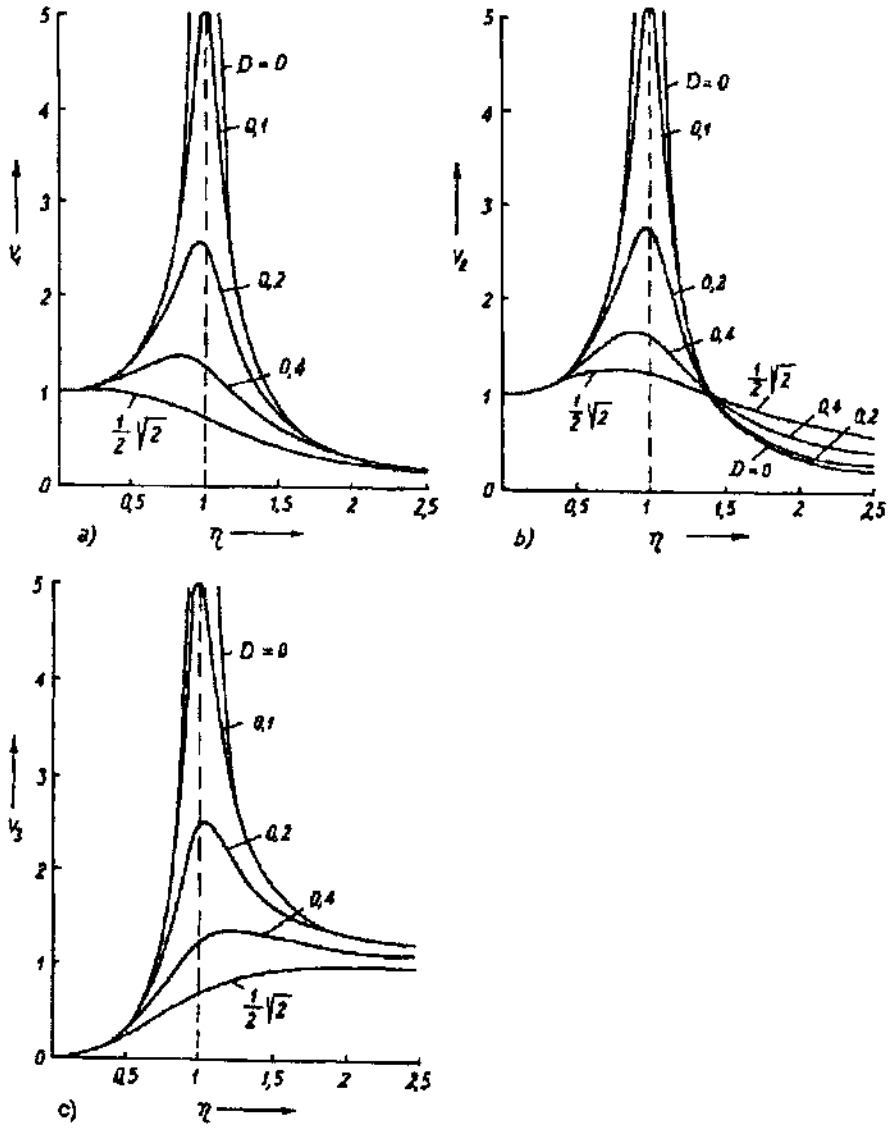
- Trường hợp kích động động học:

$$\hat{q} = V_2(\eta, D)\hat{y};\ V_2 = \sqrt{1 + 4D^2\eta^2}\ V_1 \quad (1.62)$$

- Trường hợp kích động bởi khối lượng lệch tâm:

$$\hat{q} = V_3(\eta, D)\hat{y};\ V_3 = \eta^2 V_1 \quad (1.63)$$

Các hàm V_1, V_2, V_3 được gọi là các hàm khuếch đại (hay các hệ số động lực). Đồ thị của các hàm khuếch đại V_1, V_2, V_3 ứng với một vài giá trị của độ cản Lehr D cho trên hình 1.21.



Hình 1.21

Khi ta cố định độ cản D (xem như đã cho), các hàm V_1, V_2, V_3 đạt cực đại tại các giá trị sau của η:

V_1 đạt cực đại khi $\eta = \sqrt{1-2D^2}$

V_2 đạt cực đại khi $\eta = \sqrt{\sqrt{1+8D^2} - \frac{1}{2D}} \approx \sqrt{1-2D^2}$ nếu $D << 1$

V_3 đạt cực đại khi $\eta = \dfrac{1}{\sqrt{1-2D^2}}$

Ta có thể tính được các giá trị cực đại này:

$$\max_{\eta} V_1 = \max_{\eta} V_3 = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

$$\max_{\eta} V_2 \approx \frac{1}{2D}\cdot\left(1+\frac{5}{2}D^2\right) \text{ khi D nhỏ}$$

Góc pha ban đầu φ được xác định bởi hệ thức (1.60):

$$tg\varphi = \frac{-2\delta\Omega h_1 + \left(\omega_0^2-\Omega^2\right)h_2}{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)h_1 + 2\delta\Omega h_2}$$

Trường hợp kích động lực và kích động bởi khối lượng lệch tâm:

$$tg\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} = \frac{-2D\eta}{1-\eta^2} \rightarrow \varphi = -\text{arctg}\frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

Trường hợp kích động động học, ta có:

$$tg\varphi = \frac{-2\delta\Omega^3}{(\omega_0^2-\Omega^2)\omega_0^2+4\delta^2\Omega^2} = \frac{-2D\eta}{1-\eta^2+4D^2\eta^2}$$

$$\rightarrow \varphi = -\text{arctg}\frac{2D\eta^3}{1-\eta^2+4D^2\eta^2}$$

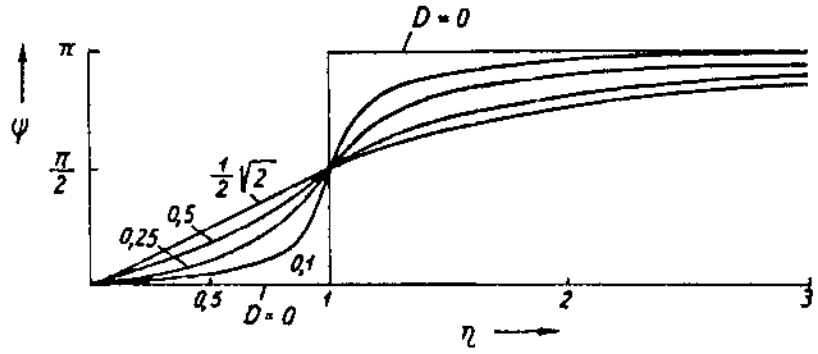
Nếu ta ký hiệu $\psi = -\varphi$ thì ta có ba hệ thức sau:

$\psi = 0$ khi $\eta \rightarrow 0$: Dao động cùng pha

$\psi = \pi / 2$ khi $\eta = 1$: Cộng hưởng

$\psi = \pi$ khi $\eta \rightarrow \infty$: Dao động ngược pha

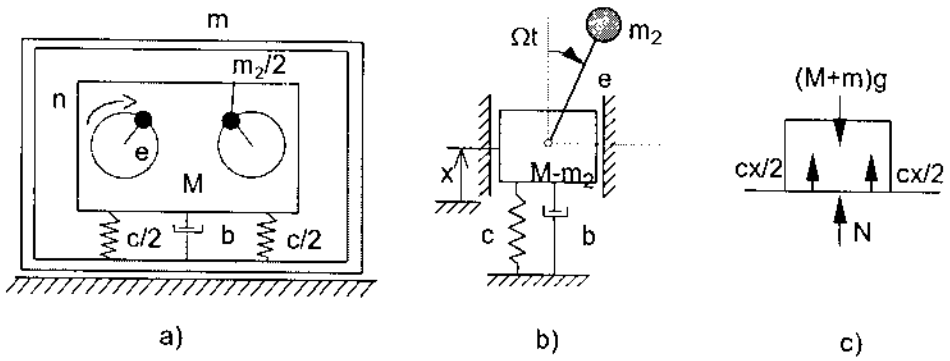
Trường hợp kích động lực hoặc kích động bởi khối lượng lệch tâm sự phụ thuộc của góc ψ vào η ứng với một vài giá trị của D được biểu diễn trên hình 1.22.



Hình 1.22

Thí dụ 1.9: Bộ phận làm việc của máy đầm đất có khối lượng M tựa trên các lò xo như hình 1.23a. Khối lượng vỏ máy là m. Ở bộ phận làm việc có hai khối lượng lệch tâm (mỗi khối lượng là m_2 / 2) quay với số vòng quay là n. Hãy chọn các tham số của máy sao cho máy làm việc ở vùng cộng hưởng và trong quá trình làm việc vỏ máy không nẩy lên khỏi đất.

Lời giải:



Hình 1.23

Mô hình cơ học của bộ phận làm việc của máy như hình 1.23b. Bộ phận này dao động quanh vị trí cân bằng tĩnh. Toạ độ của m_2 là:

$$x_2 = x + e\cos\Omega t$$

Phương trình vi phân chuyển động của mô hình máy làm đất là:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \Omega^2.m_2.e.\cos\Omega t$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + cx = \Omega^2.x_0.\cos\Omega t$$

với $x_0 = m_2e/M$.

Nghiệm của phương trình này theo (1.58), (1.42), (1.63) có dạng:

$$x = x_0.V_3.\cos(\Omega t - \varphi)$$

với:
$$V_3 = \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Khi cản nhỏ, hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\eta \approx 1$:

$$\Omega \approx \omega_0 \rightarrow \frac{\pi n}{30} \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \rightarrow c \approx \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 M$$

Khi cộng hưởng $V_3 \approx \dfrac{1}{2D}$.

Phản lực pháp tuyến của nền tác dụng lên vỏ máy (hình 1.23c):

$$N = (M + m).g - cx$$

$$N_{min} = (M + m)g - cx_{max} = (M + m).g - \frac{cx_0}{2D}$$

Điều kiện để vỏ máy không nhảy khỏi nền:

$$N_{min} \geq 0 \rightarrow (M+m)g \geq \frac{cx_0}{2D} \rightarrow D \geq \frac{cx_0}{2(M+m)g}$$

1.3.4. Đệm đàn hồi của máy

Để giảm lực truyền xuống nền móng người ta dùng đệm đàn hồi. Giả sử máy có khối lượng m, đệm đàn hồi qui đổi thành lò xo có hệ số cứng c và giảm chấn có hệ số b. Nếu trên máy chịu tác dụng một lực điều hoà $F(t) = \hat{F}\sin\Omega t$ (hình 1.17a) thì lực truyền xuống nền được xác định bởi hệ thức:

$$F_{td} = cx + b\dot{x} \tag{1.64}$$

Như đã biết, phương trình vi phân mô tả dao động của mô hình 1.17a có dạng:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \frac{\hat{F}}{c}\sin\Omega t \tag{1.65}$$

Trong quá trình chuyển động bình ổn, nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$x = \frac{\hat{F}}{c} V_1(\eta, D)\sin(\Omega t - \psi) \tag{1.66}$$

Thế biểu thức (1.66) vào phương trình (1.64) ta được:

$$\begin{aligned} F_{td} &= \frac{\hat{F}}{c} V_1(\eta, D).\left[c\sin(\Omega t - \psi) + b\Omega\cos(\Omega t - \psi)\right] \\ &= \frac{\hat{F}}{c} V_1(\eta, D)\sqrt{c^2 + b^2\Omega^2}\,\sin(\Omega t - \psi + \gamma) \end{aligned} \tag{1.67}$$

với: $tg\gamma = \frac{b\Omega}{c} = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2}$

và do: $\sqrt{c^2 + b^2\Omega^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2\Omega^2} = c\sqrt{1 + 4D^2\eta^2}$

ta có: $$F_{td} = \hat{F}V_2(\eta, D).\sin(\Omega t - \psi + \gamma) \tag{1.68}$$

Từ công thức (1.68) ta suy ra: Để cho lực truyền xuống nền móng nhỏ ta phải chọn các tham số của hệ sao cho hàm khuếch đại V_2 đạt cực tiểu.

Nếu trên máy có bộ phận quay chưa được cân bằng sẽ sinh ra các lực ly tâm (hình 1.17b). Nhờ có đệm đàn hồi ta có thể giảm được lực truyền xuống móng máy. Như đã biết phương trình vi phân dao động của mô hình 1.17b có dạng:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{m_1 r}{m_0 + m_1}\cdot\Omega^2.\sin\Omega t \tag{1.69}$$

Nghiệm riêng của phương trình (1.69) có dạng:

$$x = \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} V_3(\eta, D)\sin(\Omega t - \psi) \tag{1.70}$$

Thế (1.70) vào biểu thức (1.64) ta được:

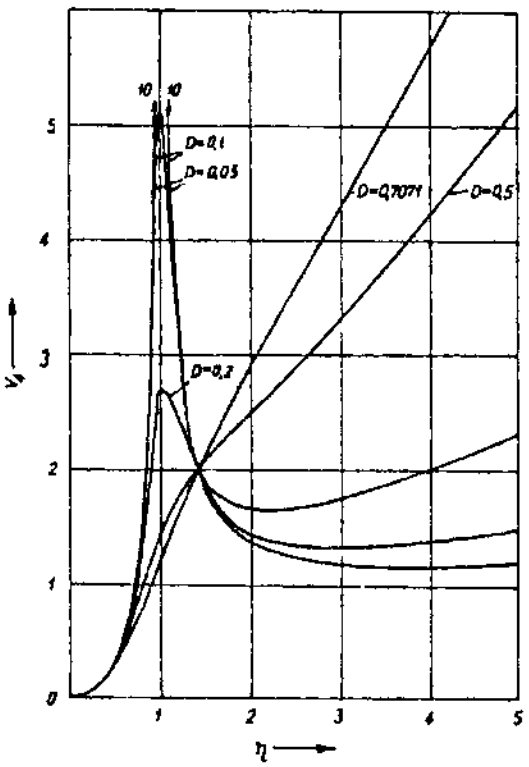
$$F_{td} = \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} \cdot V_3(\eta, D) \cdot \left[c\sin(\Omega t - \psi) + b\Omega\cos(\Omega t - \psi)\right]$$

$$F_{td} = \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} V_3(\eta, D)\sqrt{c^2 + b^2\Omega^2}\sin(\Omega t - \psi + \gamma)$$

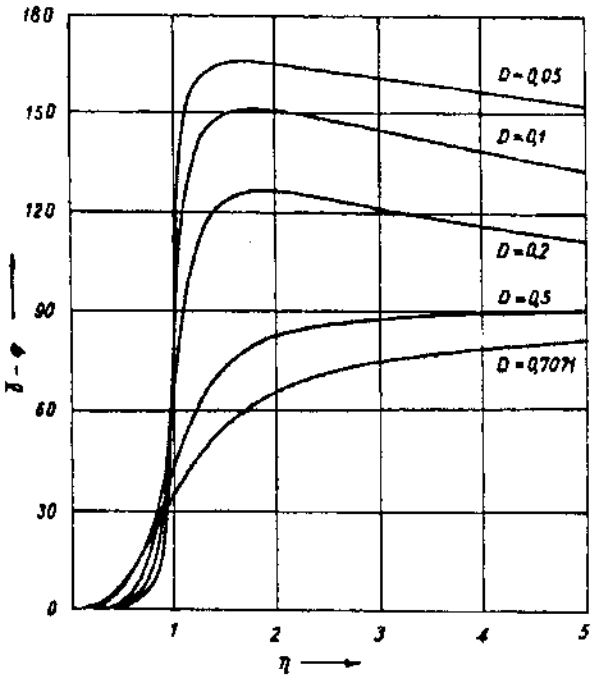
$$= c \cdot \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} \cdot \eta^2 V_2(\eta, D)\sin(\Omega t - \psi + \gamma) \tag{1.71}$$

Nếu ta đưa vào hàm khuếch đại $V_4(\eta,D) = \eta^2 V_2(\eta,D)$ thì lực truyền xuống đất có dạng:

$$F_{td} = c \cdot \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} V_4(\eta, D)\sin(\Omega t - \psi + \gamma) \tag{1.72}$$



Hình 1.24a



Hình 1.24b

Sự phụ thuộc của hàm khuếch đại $V_4(\eta,D)$ và góc $(\gamma - \psi)$ vào η khi cho biết giá trị của D cho trên hình 1.24a và 1.24b.

Trong kỹ thuật ta cũng hay gặp bài toán do ảnh hưởng rung của nền các thiết bị trên nền móng làm việc sẽ kém chính xác. Trong trường hợp này ta sử dụng mô hình 1.17d. Nhờ có đệm đàn hồi sẽ làm giảm ảnh hưởng rung của nền móng lên các thiết bị đặt trên đó.

Thí dụ 1.10: Một máy gắn chặt vào móng và được đặt trên nền bằng một hệ lò xo song song. Khối lượng của máy và móng là 1000 kg. Trong quá trình máy làm việc xuất

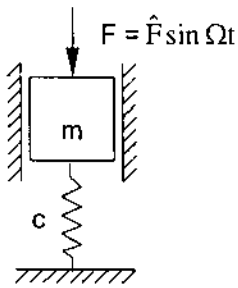
hiện một lực điều hoà tác dụng theo phương thẳng đứng với biên độ $\hat{F} = 1000$ N và tần số f = 10 Hz. Dưới ảnh hưởng của lực này móng dao động theo phương thẳng đứng. Hãy xác định hệ số cứng của lò xo tương đương với cả hệ lò xo sao cho chỉ có 5% lực tác dụng lên móng truyền xuống nền. Sau đó xác định độ lún tĩnh của móng và biên độ dao động của nó.

Lời giải: Mô hình cơ học của bài toán cho trên hình 1.25. Phương trình dao động của hệ là:

$$m\ddot{x} + cx = \hat{F}\sin\Omega t$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{c}\frac{1}{1-n^2}\sin\Omega t$$

Nghiệm dừng là: $x = \frac{\hat{F}}{c}\frac{1}{1-\eta^2}\sin\Omega t$



Hình 1.25

Thế biểu thức nghiệm vào biểu thức tính lực truyền xuống nền ta được:

$$F_{td} = cx = \hat{F}\frac{1}{1-\eta^2}\sin\Omega t$$

Từ điều kiện $\frac{\hat{F}_{td}}{\hat{F}} = \frac{1}{|1-\eta^2|} = 0{,}05$

ta suy ra $\eta = \sqrt{21} = 4{,}58$

Hệ số cứng của lò xo tổng là:

$$c = m\omega_0^2 = m\frac{\Omega^2}{\eta^2} = m\frac{(2\pi f)^2}{\eta^2} = 1000.\frac{(2\pi.10)^2}{21} = 188 \text{ N/mm}$$

Với hệ số cứng đó, độ nén tĩnh của móng máy là:

$$\frac{mg}{c} = \frac{1000.9{,}81}{188} = 52{,}2 \text{ mm}$$

Biên độ dao động dừng của móng máy là:

$$\hat{x} = \frac{1}{|1-\eta^2|}\frac{\hat{F}}{c} = \frac{1000}{20.188} = 0{,}266 \text{ mm}$$

1.3.5. Một vài nhận xét về tính chất dao động cưỡng bức khi có ma sát

Qua các tính toán ở trên ta có thể rút ra một số nhận xét về tính chất của dao động tuyến tính có cản nhớt chịu kích động điều hoà ở trạng thái bình ổn như sau:

- Dao động cưỡng bức khi có cản xảy ra với tần số của lực kích động.
- Biên độ dao động cưỡng bức không phụ thuộc vào các điều kiện đầu và thời gian. Do

đó khác với dao động tự do có cản, dao động cưỡng bức không tắt dần vì lực cản.

- Khi $\Omega = \omega_0$ biên độ dao động cưỡng bức tuy khá lớn, nhưng vẫn là đại lượng hữu hạn. Nó chưa phải là giá trị lớn nhất trong các giá trị của biên độ.

Khi hệ chịu tác dụng lực điều hoà $F = \hat{F}\sin\Omega t$, biên độ dao động cưỡng bức có dạng:

$$A = \hat{q} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

Từ điều kiện $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$ ta suy ra $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$. Vậy $A = A_{max}$ khi $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$. Biên độ dao động cưỡng bức đạt cực đại khi Ω nhỏ hơn ω_0 một chút.

- Trong dao động cưỡng bức có cản nhớt luôn xảy ra sự lệch pha giữa pha dao động và pha của lực kích động. Độ lệch pha đó được xác định bởi công thức:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Khi $\Omega = \omega_0$ thì $\mathrm{tg}\alpha = \infty$ do đó $\alpha = \pi/2$. Vậy dao động cưỡng bức khi cộng hưởng có pha lệch một góc $\pi/2$ so với pha của ngoại lực.

- Ở xa vùng cộng hưởng, biên độ dao động cưỡng bức với lực cản nhỏ không khác mấy so với biên độ dao động cưỡng bức không cản. Ở gần vùng cộng hưởng lực cản có một vai trò rất quan trọng. Trong vùng cộng hưởng độ lớn biên độ dao động cưỡng bức phụ thuộc rõ rệt vào hệ số cản.

1.4. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ CHỊU KÍCH ĐỘNG ĐA TẦN VÀ CHỊU KÍCH ĐỘNG TUẦN HOÀN

1.4.1. Tính toán dao động của hệ chịu kích động đa tần

Trong thực tế ta cũng hay gặp dao động của hệ chịu kích động của tổ hợp các kích động ngoài với các tần số khác nhau. Phương trình chuyển động của hệ có dạng:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = \sum_{i=1}^{n} \hat{F}_i \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \tag{1.73}$$

Chia hai vế của phương trình (1.73) cho m và sử dụng các ký hiệu quen biết ta được

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{F}_i}{m} \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \tag{1.74}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (1.74) dưới dạng:

$$q = \sum_{i=1}^{n} \hat{q}_i \sin(\Omega_i t + \alpha_i - \beta_i) \tag{1.75}$$

Thế biểu thức (1.75) vào phương trình (1.74) ta dẫn đến hệ phương trình để xác định $\hat{q}_i$ và β_i

$$\begin{aligned}&\left(\omega_0^2-\Omega_i^2\right)\hat{q}_i\cos\beta_i+2\delta\Omega_i\hat{q}_i\sin\beta_i=\frac{\hat{F}_i}{m}\\&2\delta\Omega_i\hat{q}_i\cos\beta_i-\left(\omega_0^2-\Omega_i^2\right)\hat{q}_i\sin\beta_i=0\end{aligned}\tag{1.76}$$

Hệ phương trình (1.76) là hệ hai phương trình đại số tuyến tính đối với hai ẩn là $\hat{q}_i\cos\beta_i$ và $\hat{q}_i\sin\beta_i$. Giải ra ta được:

$$\hat{q}_i\cos\beta_i=\frac{\hat{F}_i\left(\omega_0^2-\Omega_i^2\right)}{m\left[\left(\omega_0^2-\Omega_i^2\right)^2+4\delta^2\Omega_i^2\right]}\tag{1.77}$$

$$\hat{q}_i\sin\beta_i=\frac{\hat{F}_i 2\delta\Omega_i}{m\left[\left(\omega_0^2-\Omega_i^2\right)^2+4\delta^2\Omega_i^2\right]}\tag{1.78}$$

Chia biểu thức (1.78) cho (1.77) ta được:

$$tg\beta_i=\frac{2\delta\Omega_i}{\omega_0^2-\Omega_i^2}=\frac{2D\eta_i}{1-\eta_i^2}\tag{1.79}$$

với $\eta_i=\dfrac{\Omega_i}{\omega_0}$

Bình phương các biểu thức (1.77) và (1.78) rồi cộng lại ta rút ra

$$\hat{q}_i=\frac{\hat{F}_i}{c}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta_i^2\right)^2+4D^2\eta_i^2}}=\frac{\hat{F}_i}{c}V_i(\eta_i,D)\tag{1.80}$$

1.4.2. Tính toán dao động của hệ chịu kích động tuần hoàn

Trong thực tế ta hay gặp các kích động tuần hoàn. Như đã biết từ giải tích toán, hàm f(t) tuần hoàn chu kỳ T bao giờ cũng có thể khai triển thành chuỗi Fourier

$$f(t)=a_0+\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos j\Omega t+b_j\sin j\Omega t)\tag{1.81}$$

trong đó $\Omega=2\pi/T$ là tần số cơ bản của kích động. Các hệ số Fourier a_0, a_j, b_j ($j=1,\ldots,\infty$) được xác định theo công thức sau

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\,;\ a_j=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos j\Omega t dt\,;\ b_j=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin j\Omega t dt\tag{1.82}$$

Từ các công thức (1.82) ta thấy, nếu f(t) là hàm chẵn thì $b_j=0$, nếu f(t) là hàm lẻ thì $a_0=a_j=0$.

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của kích động tuần hoàn có dạng:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m}\left[a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t)\right] \quad (1.83)$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (1.84) dưới dạng:

$$q^* = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t) \quad (1.84)$$

Thế biểu thức (1.84) vào phương trình (1.83) và so sánh các hệ số của sinjΩt và cosjΩt, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các hằng số chưa biết A_0, A_j, B_j

$$\omega_0^2 A_0 = \frac{a_0}{m}$$

$$\left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2\right]A_j + 2\delta j\Omega B_j = \frac{a_j}{m}$$

$$-2\delta j\Omega A_j + \left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2\right]B_j = \frac{b_j}{m}$$

Giải hệ phương trình trên ta nhận được:

$$A_0 = \frac{a_0}{m\omega_0^2}$$

$$A_j = \frac{\left[\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right]a_j - 2\delta j\Omega b_j}{m\left[\left(\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 j^2\Omega^2\right]}$$

$$B_j = \frac{\left[\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right]b_j + 2\delta j\Omega a_j}{m\left[\left(\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 j^2\Omega^2\right]}$$

Như thế dao động cưỡng bức mạnh phát sinh khi $\Omega = \omega_0/j$. Cộng hưởng loại này được gọi là cộng hưởng cấp j.

Do hệ thức lượng giác: $A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t = C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j)$

với $C_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$; $\mathrm{tg}\alpha_j = A_j / B_j$, biểu thức nghiệm (1.84) có thể viết dưới dạng:

$$q^* = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \quad (1.85)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.83) khi $\delta < \omega_0$ có dạng:

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) + A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \quad (1.86)$$

Số hạng thứ nhất của (1.86) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Với t đủ lớn, ta chỉ cần quan tâm tới thành phần thứ hai của (1.86), biểu thị dao động cưỡng bức của hệ.

CHƯƠNG 2
DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

Cũng như trong chương 1, ở đây ta chỉ xét dao động của các hệ cơ học hôlônôm. Một hệ n bậc tự do là một hệ mà vị trí của nó trong không gian được xác định bởi n toạ độ suy rộng: q_1, q_2, ..., q_n. Dưới tác dụng của lực, chuyển động của hệ được xác định bởi sự biến đổi của các toạ độ suy rộng này theo thời gian.

Trong chương này ta xét bài toán dao động nhỏ của hệ n bậc tự do quanh vị trí cân bằng tĩnh. Khi đó hệ các phương trình vi phân mô tả dao động của hệ là hệ n phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số.

Trong các bài toán kỹ thuật, ta thường gặp bốn mô hình cơ học sau: hệ các vật rắn, hệ các phần tử hữu hạn, hệ liên tục, hệ nhiều vật hỗn hợp. Các phương trình toán học mô tả dao động của hệ các vật rắn là các phương trình vi phân thường, loại phương trình chúng ta xét trong chương này. Đối với hệ các phần tử hữu hạn, sau một số phép biến đổi ta cũng nhận được hệ các phương trình vi phân thường. Các phương trình toán học mô tả dao động của hệ liên tục (môi trường liên tục) là các phương trình đạo hàm riêng. Các phương trình toán học mô tả dao động của hệ nhiều vật hỗn hợp là các phương trình vi phân thường và các phương trình đạo hàm riêng. Tuy nhiên, khi tính toán dao động của các hệ phức tạp, người ta thường cố gắng biến đổi tương đương gần đúng về hệ n bậc tự do, với n là số bé nhất có thể chấp nhận được.

2.1. THIẾT LẬP CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Việc lựa chọn các phương pháp để thành lập các phương trình vi phân dao động của hệ nhiều bậc tự do phụ thuộc vào mô hình cơ học của các máy và các công trình. Đối với các cơ hệ gồm các chất điểm, các vật rắn, các phần tử lò xo bỏ qua trọng lượng, các phần tử cản, người ta thường dùng phương trình Lagrange loại hai để thiết lập các phương trình dao động. Đối với các kết cấu đàn hồi, người ta thường sử dụng các phương pháp lực, phương pháp biến dạng, phương pháp phần tử hữu hạn. Đối với các cơ hệ phức tạp người ta còn sử dụng phương pháp các hệ con (phương pháp tách cấu trúc) để thiết lập các phương trình vi phân dao động. Dưới đây ta trình bày việc áp dụng phương pháp sử dụng phương trình Lagrange loại hai để thiết lập phương trình vi phân dao động của một số mô hình dao động cụ thể.

Các phương trình Lagrange loại II được áp dụng để thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ hôlônôm có dạng tổng quát như sau:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^*, \quad i = 1, ..., n \tag{2.1}$$

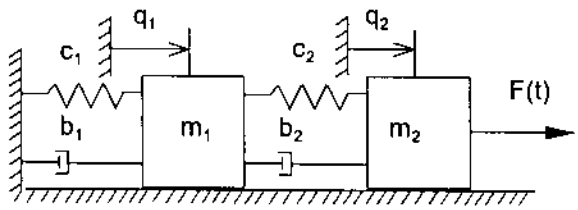
trong đó: q_i là toạ độ suy rộng, Q_i là lực suy rộng tương ứng với q_i, T là biểu thức động năng, n là số bậc tự do của hệ, Π là thế năng, Φ là hàm hao tán (năng lượng tiêu hao của lực cản nhớt), Q_i^* là lực suy rộng còn lại (không có thế và không là lực ma sát nhớt) của q_i.

Thí dụ 2.1: Cho mô hình dao động như hình vẽ 2.1. Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.

Lời giải: Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1q_1^2 + \frac{1}{2}c_2(q_2 - q_1)^2$$



Hình 2.1

Biểu thức hàm hao tán có dạng:

$$\Phi = \frac{1}{2}b_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại II ta được:

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{q}_1 + (b_1 + b_2)\dot{q}_1 - b_2\dot{q}_2 + (c_1 + c_2)q_1 - c_2q_2 = 0 \\ &m_2\ddot{q}_2 - b_2\dot{q}_1 + b_2\dot{q}_2 - c_2q_1 + c_2q_2 = F(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Các phương trình (2.2) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \tag{2.3}$$

Trong đó $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

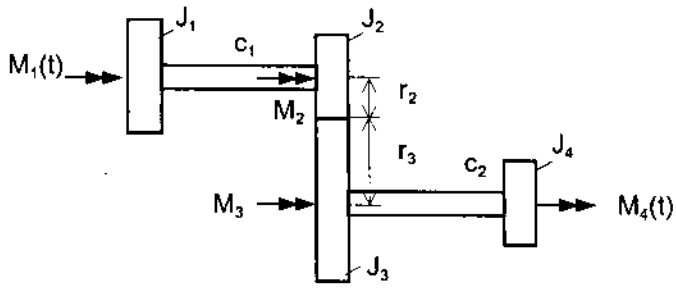
Khi trên hệ không có lực kích động và không có phần tử cản, phương trình dao động tự do không cản có dạng

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Thí dụ 2.2: Thiết lập phương trình dao động xoắn của một mô hình truyền động như hình 2.2. Cho biết các mômen $M_1(t)$, $M_4(t)$. Các mômen M_2 và M_3 tỷ lệ với vận tốc:

$$M_2 = -b_2\dot{\varphi}_2, \quad M_3 = -b_3\dot{\varphi}_3$$

Lời giải: Cơ cấu truyền động như hình 2.2 là một hệ dao động ba bậc tự do. Trong bốn đại lượng định vị φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 có một điều kiện ràng buộc $r_2\varphi_2 = -r_3\varphi_3$. Ta chọn các toạ độ suy rộng: $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$, $q_3 = \varphi_4$. Động năng, thế năng và hàm hao tán của hệ có dạng



Hình 2.2

$$T = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + J_3\dot{\varphi}_3^2 + J_4\dot{\varphi}_4^2\right);$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(\varphi_4 - \varphi_3)^2; \quad \Phi = \frac{1}{2}b_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}b_3\dot{\varphi}_3^2$$

Thế điều kiện ràng buộc $\varphi_3 = -\frac{r_2}{r_3}\varphi_2$ vào các biểu thức trên, ta có:

$$T = \frac{1}{2}\left\{J_1\dot{\varphi}_1^2 + \left[J_2 + \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 J_3\right]\dot{\varphi}_2^2 + J_4\dot{\varphi}_4^2\right\}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(\varphi_4 + \frac{r_2}{r_3}\varphi_2)^2; \quad \Phi = \frac{1}{2}\left[b_2 + b_3\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2\right]\dot{\varphi}_2^2$$

Để xác định các lực suy rộng ứng với các lực còn lại không thế, không cản tuyến tính ta tính công khả dĩ của hệ

$$\delta A = M_1(t)\delta\varphi_1 + M_4(t)\delta\varphi_4 = M_1(t)\delta\varphi_1 + M_4(t)\delta\varphi_4$$

Vậy ta có $\quad Q_1^* = M_1(t);\ Q_3^* = M_4(t)$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được hệ phương trình vi phân dao động của cơ cấu truyền động:

$$\begin{aligned}
&J_1\ddot{\varphi}_1 - c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = M_1(t)\\
&\left[J_2 + (r_2/r_3)^2 J_3\right]\ddot{\varphi}_2 + \left[b_2 + b_3(r_2/r_3)^2\right]\dot{\varphi}_2\\
&\quad + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + c_2\frac{r_2}{r_3}(\varphi_4 + \frac{r_2}{r_3}\varphi_2) = 0 \qquad (2.5)\\
&J_4\ddot{\varphi}_4 + c_2(\varphi_4 + \frac{r_2}{r_3}\varphi_2) = M_4(t)
\end{aligned}$$

Hệ phương trình (2.5) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \qquad (2.6)$$

trong đó:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 + (r_2/r_3)^2 J_3 & 0 \\ 0 & 0 & j_4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 + (r_2/r_3)^2 b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

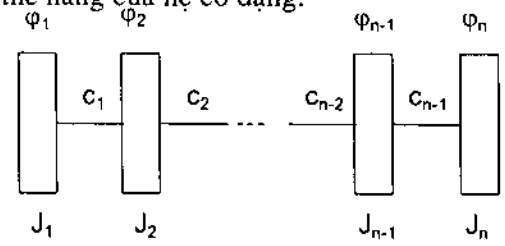
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + (r_2/r_3)^2 c_2 & (r_2/r_3)c_2 \\ 0 & (r_2/r_3)c_2 & c_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ 0 \\ M_4(t) \end{bmatrix}$$

Thí dụ 2.3: Thiết lập phương trình vi phân dao động tự do của hệ dao động xoắn gồm n đĩa như hình 2.3.

Lời giải: Biểu thức động năng và biểu thức thế năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} J_i \dot{\varphi}_i^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} c_i(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2$$



Hình 2.3

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i}$$

ta được hệ phương trình dao động tự do của mô hình khảo sát:

$$\begin{aligned} &J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ &J_2\ddot{\varphi}_2 + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &J_{n-1}\ddot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) - c_{n-2}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) = 0 \\ &J_n\ddot{\varphi}_n - c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Hệ phương trình (2.7) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$$

2.2. DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN

Phương trình vi phân mô tả dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

Trong đó **M** và **C** là các ma trận vuông cấp n có các phần tử là hằng số. Trong nhiều bài toán thực tế, chúng là các ma trận thực đối xứng.

2.2.1. Các tần số riêng và các dạng dao động riêng

Ta tìm nghiệm của phương trình (2.8) dưới dạng:

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}\sin(\omega t + \alpha) \tag{2.9}$$

Thế biểu thức (2.9) vào phương trình (2.8) rồi đơn giản đi biểu thức $\sin(\omega t + \alpha)$ ta nhận được phương trình:

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\,\mathbf{a} = 0 \tag{2.10}$$

Để cho phương trình đại số tuyến tính thuần nhất (2.10) có nghiệm không tầm thường, điều kiện cần là:

$$\left|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}\right| = 0 \tag{2.11}$$

Phương trình (2.11) là một phương trình đại số bậc n đối với ω^2 và được gọi là phương trình tần số hoặc phương trình đặc trưng. Các nghiệm ω_k (k = 1,...,n) của phương trình tần số được gọi là các tần số riêng. Thay lần lượt các giá trị của ω_k (k = 1,..., n) vào phương trình (2.10) ta nhận được các hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định các thành phần của vectơ $\mathbf{a}_k$

$$(\mathbf{C} - \omega_k^2\,\mathbf{M})\,\mathbf{a}_k = 0 \tag{2.12}$$

Các vectơ $\mathbf{a}_k$ này được gọi là các vectơ riêng.

Do phương trình (2.12) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có định thức hệ số bằng không nên các thành phần của vectơ $\mathbf{a}_k$ được xác định sai khác một hằng số nhân. Chẳng hạn ta có thể chọn a_{1k} một cách tuỳ ý.

Ta đưa vào ký hiệu:

$$v_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{1k}}, \text{ hoặc: } v_i^{(k)} = \frac{a_i^{(k)}}{a_1^{(k)}} \quad i, k = 1,2,\ldots, n \tag{2.13}$$

Thay lần lượt các $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ vào phương trình (2.12) ta xác định được ma trận

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

ở đây $\quad v_{1k} = v_1^{(k)} = 1 \;\forall\; k.$

Mỗi vectơ cột của ma trận (2.14)

$$\mathbf{v}_k = [v_{1k}\;\; v_{2k}\;\; \cdots\;\; v_{nk}]^T = [v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)}]^T$$

cho ta biết một dạng dao động riêng của hệ dao động (2.8). Ma trận **V** được gọi là ma trận dạng riêng (Modalmatrix). Như thế ma trận dạng riêng cho ta biết tất cả các dạng dao động riêng có thể có của hệ dao động.

Xét trường hợp hệ hai bậc tự do. Khi đó các phương trình vi phân dao động tự do không cản có dạng

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Phương trình tần số (2.11) đối với trường hợp này có dạng:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\omega^2 m_{11} & c_{12}-\omega^2 m_{12} \\ c_{21}-\omega^2 m_{21} & c_{22}-\omega^2 m_{22} \end{vmatrix}=0$$

Khai triển định thức cấp hai trên ta được:

$$(c_{11}-\omega^2 m_{11})(c_{22}-\omega^2 m_{22})-(c_{12}-\omega^2 m_{12})(c_{21}-\omega^2 m_{21})=0 \tag{2.16}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu $v_{2i} = a_2^{(i)}/a_1^{(i)}$ thì từ phương trình (2.12) ta suy ra các phương trình xác định các phần tử của ma trận dạng riêng

$$(c_{11}-\omega_i^2 m_{11})+v_{2i}(c_{12}-\omega_i^2 m_{12})=0,\quad i=1,2 \tag{2.17a}$$

hoặc: $$(c_{21}-\omega_i^2 m_{21})+v_{2i}(c_{22}-\omega_i^2 m_{22})=0,\qquad i=1,2 \tag{2.17b}$$

Ma trận dạng riêng của hệ hai bậc tự do trên có dạng

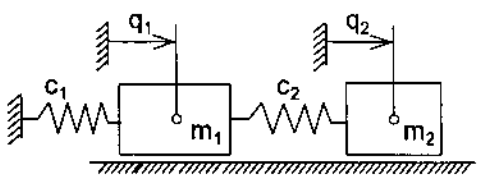
$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Thí dụ 2.4: Cho mô hình dao động như hình vẽ 2.4a. Hãy xác định ma trận dạng riêng khi $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = m_2 = m$, sau đó vẽ các dạng dao động riêng của hệ.

Lời giải: Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2;$$

$$\Pi=\frac{1}{2}c_1 q_1^2+\frac{1}{2}c_2(q_2-q_1)^2$$



Hình 2.4a

Sử dụng phương trình Lagrange loại II, ta dễ dàng thiết lập được phương trình vi phân dao động tự do của hệ:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Tương ứng với phương trình (2.3) ta có

$$\left\{\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Từ đó ta suy ra phương trình tần số:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \omega^2 m_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.20)$$

Khai triển định thức (2.20) ta được phương trình:

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0$$

Từ đó ta tính được các tần số riêng:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \qquad (2.21)$$

Thế các biểu thức của ω_1 và ω_2 vào phương trình (2.19) ta có

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (c_1 + c_2 - m_1\omega_1^2)/c_2 \end{bmatrix} a_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2/(c_2 - m_2\omega_1^2) \end{bmatrix} a_{11}$$

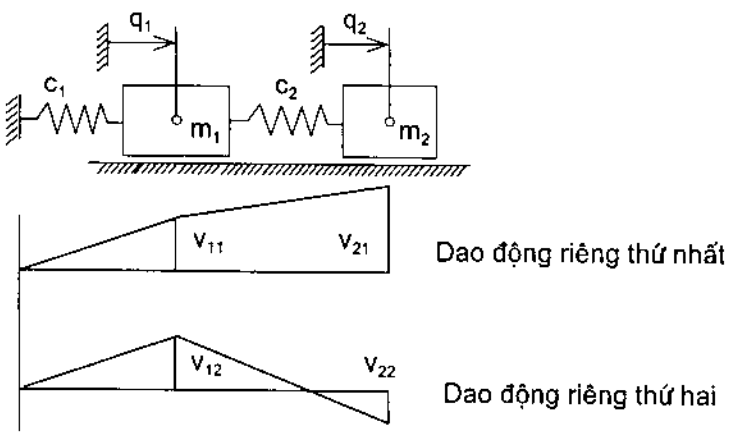
$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (c_1 + c_2 - m_1\omega_2^2)/c_2 \end{bmatrix} a_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2/(c_2 - m_2\omega_2^2) \end{bmatrix} a_{12}$$

Trong đó các đại lượng a_{11} và a_{12} là các hằng số chọn tuỳ ý.

Khi $c_1 = c_2 = c$ và $m_1 = m_2 = m$, ta dễ dàng tính được:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}62 & -0{,}62 \end{bmatrix}$$

Trên hình 2.4b cho ta các dạng dao động riêng thứ nhất và thứ hai



Hình 2.4b

2.2.2. Tính chất trực giao của các vectơ riêng

Xét phương trình dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad (2.22)$$

Nếu các ma trận khối lượng **M** và ma trận độ cứng **C** là các ma trận thực đối xứng thì các vectơ riêng $\mathbf{v}_k$ tương ứng với các tần số riêng ω_k sẽ trực giao với ma trận khối lượng **M** và ma trận độ cứng **C**. Ta có các hệ thức:

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{M}\, \mathbf{v}_i = 0;\ \mathbf{v}_j^T \mathbf{C}\, \mathbf{v}_i = 0;\ \text{khi } \omega_i \neq \omega_j \tag{2.23}$$

Ta sẽ chứng minh tính chất trên. Chú ý đến ký hiệu (2.13), từ phương trình (2.12) ta suy ra:

$$\omega_i^2 \mathbf{M}\, \mathbf{v}_i = \mathbf{C}\, \mathbf{v}_i \tag{2.24}$$

$$\omega_j^2 \mathbf{M}\, \mathbf{v}_j = \mathbf{C}\, \mathbf{v}_j \tag{2.25}$$

Nhân bên trái phương trình (2.24) với $\mathbf{v}_j^T$, phương trình (2.25) với $\mathbf{v}_i^T$ ta được:

$$\omega_i^2\ \mathbf{v}_j^T \mathbf{M}\, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j^T \mathbf{C}\, \mathbf{v}_i \tag{2.26}$$

$$\omega_j^2\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{M}\, \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C}\, \mathbf{v}_j \tag{2.27}$$

Do tính chất đối xứng của các ma trận **M** và **C** ta có:

$$\mathbf{v}_j^T\ \mathbf{M}\, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T\ \mathbf{M}\, \mathbf{v}_j; \qquad \mathbf{v}_j^T\ \mathbf{C}\, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T\ \mathbf{C}\, \mathbf{v}_j \tag{2.28}$$

Đem phương trình (2.26) trừ đi phương trình (2.27) và chú ý đến tính chất (2.28) ta suy ra:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\ \mathbf{v}_j^T\ \mathbf{M}\, \mathbf{v}_i = 0 \tag{2.29}$$

Do đó $\mathbf{v}_j^T\ \mathbf{M}\, \mathbf{v}_i = 0$ khi $\omega_i \neq \omega_j$. Từ (2.26) ta suy ra $\mathbf{v}_j^T\ \mathbf{C}\, \mathbf{v}_i = 0$ khi $\omega_i \neq \omega_j$.

Chú ý rằng nếu $\omega_i^2 = \omega_j^2$ thì từ (2.29) ta không thể suy ra tính chất trực giao của các vectơ riêng tương ứng.

Giả sử ω_i^2 là một nghiệm bội k của phương trình đặc trưng. Do $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ nên ứng với ω_i^2 ta sẽ có k vectơ riêng độc lập tuyến tính. Các vectơ này trực giao với (n - k) vectơ riêng còn lại. Mỗi tổ hợp tuyến tính của k vectơ riêng này lại là một vectơ riêng ứng với ω_i^2. Như thế từ k vectơ riêng này ta có thể xây dựng một cơ sở trực giao đối với **M** của không gian con của R^n. Xây dựng tương tự đối với các trị riêng bội khác của phương trình đặc trưng, kết quả ta được n vectơ riêng trực giao với **M**.

2.2.3. Các toạ độ chính

Như trên đã trình bày, phương trình vi phân dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.30}$$

Nếu ta có thể chọn được các toạ độ suy rộng đặc biệt sao cho với các toạ độ đó, các

ma trận khối lượng và ma trận độ cứng đều có dạng đường chéo, thì các toạ độ suy rộng đó được gọi là các toạ độ chính. Ta ký hiệu các toạ độ chính bởi $p_1, p_2, .., p_n$.

Thực hiện phép đổi biến:

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\,\mathbf{p} \tag{2.31}$$

Trong đó **V** là ma trận dạng riêng. Thế (2.31) vào phương trình (2.30) ta có:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\,\mathbf{V}\,\mathbf{p} = 0$$

Nhân bên trái phương trình trên với $\mathbf{V}^T$ ta được

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\,\mathbf{V}\,\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^T\mathbf{C}\,\mathbf{V}\,\mathbf{p} = 0 \tag{2.32}$$

Do tính chất (2.23), các ma trận $\mathbf{V}^T\mathbf{M}\,\mathbf{V}$ và $\mathbf{V}^T\mathbf{C}\,\mathbf{V}$ là các ma trận đường chéo:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}^T\mathbf{C}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \gamma_n \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Vì vậy các phương trình (2.32) có dạng:

$$\mu_i\ddot{p}_i + \gamma_i p_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.34}$$

Trong đó $\mu_i = \mathbf{v}_i^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{v}_i$; $\gamma_i = \mathbf{v}_i^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{v}_i$ (2.35)

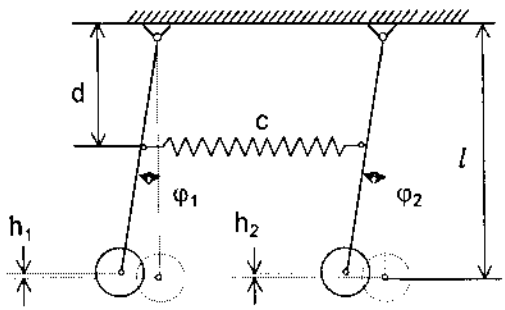
Nếu ta đưa vào các ký hiệu: $\overline{\omega}_i^2 = \dfrac{\gamma_i}{\mu_i}$

thì các phương trình (2.34) xác định các dạng dao động chính có dạng:

$$\ddot{p}_i + \overline{\omega}_i^2 p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.36}$$

Việc giải các phương trình (2.36) đã được bàn kỹ trong chương 1.

Thí dụ 2.5: Một hệ hai con lắc có chiều dài mỗi thanh là *l*, khối lượng mỗi vật điểm là m. Hai thanh được nối với nhau bằng lò xo có hệ số cứng là c, ở vị trí cách trục quay một đoạn là d (hình 2.5). Độ dài của lò xo ở trạng thái không biến dạng bằng khoảng cách giữa hai trục con lắc. Bỏ qua khối lượng các thanh, khối lượng lò xo và lực cản



Hình 2.5

a. Xác định các toạ độ chính của hệ.

b. Xác định dao động tự do của hệ với các điều kiện đầu $\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Lời giải: Trước hết ta thiết lập phương trình vi phân dao động tự do của hệ hai con lắc trên hình 2.5. Biểu thức động năng và thế năng có dạng:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2); \quad \Pi = mgh_1 + mgh_2 + \frac{1}{2}cd^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

Do: $h_1 = l(1 - \cos\varphi_1) \approx \frac{1}{2}l\varphi_1^2$; $h_2 = l(1 - \cos\varphi_2) \approx \frac{1}{2}l\varphi_2^2$

nên ta có: $\Pi = \frac{1}{2}[(mgl + cd^2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 2cd^2\varphi_1\varphi_2]$

Thế các biểu thức động năng, thế năng vào phương trình Lagrange loại II ta được các phương trình dao động tự do của hệ hai con lắc:

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 + (mgl + cd^2)\varphi_1 - cd^2\varphi_2 = 0$$
$$ml^2\ddot{\varphi}_2 - cd^2\varphi_1 + (mgl + cd^2)\varphi_2 = 0$$

Ở thí dụ này ta có: $m_{11} = m_{22} = ml^2$, $m_{12} = 0$, $m_{21} = 0$, $c_{11} = c_{22} = mgl + cd^2$, $c_{12} = c_{21} = -cd^2$. Do đó phương trình tần số có dạng:

$$(mgl + cd^2 - ml^2\omega^2)^2 - c^2d^4 = 0$$

Từ đó suy ra: $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$; $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}$

Bây giờ ta xác định các phần tử của ma trận dạng riêng. Từ phương trình (2.17a) ta suy ra:

$$v_{21} = \frac{c_{11} - m_{11}\omega_1^2}{c_{12} - m_{12}\omega_1^2} = -\frac{mgl + cd^2 - ml^2\frac{g}{l}}{-cd^2} = 1$$

$$v_{22} = \frac{c_{11} - m_{11}\omega_2^2}{c_{12} - m_{12}\omega_2^2} = -\frac{mgl + cd^2 - ml^2\left(\frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}\right)}{-cd^2} = 1$$

Vậy ma trận dạng riêng là: $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_1 + p_2 \\ \varphi_2 &= p_1 - p_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} p_1 &= (\varphi_1 + \varphi_2)/2 \\ p_2 &= (\varphi_1 - \varphi_2)/2 \end{aligned}$$

Phương trình dao động dạng toạ độ chính:

$$\ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = 0$$
$$\ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 = 0$$

Từ đó ta dễ dàng tìm được các dạng dao động chính:

$$p_1(t) = C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad p_2(t) = C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Trở lại toạ độ suy rộng φ_1, φ_2 ta có:

$$\varphi_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$\varphi_2(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Các hằng số C_1, C_2, α_1, α_2 được xác định từ các điều kiện đầu $\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Đạo hàm theo thời gian các hàm φ_1, φ_2 ta được:

$$\dot{\varphi}_1(t) = \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$\dot{\varphi}_2(t) = \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Từ các điều kiện đầu đã cho ta được hệ bốn phương trình xác định C_1, C_2, α_1, α_2

$$C_1 \sin\alpha_1 + C_2 \sin\alpha_2 = \varphi_0$$
$$C_1 \sin\alpha_1 - C_2 \sin\alpha_2 = 0$$
$$\omega_1 C_1 \cos\alpha_1 + \omega_2 C_2 \cos\alpha_2 = 0$$
$$\omega_1 C_1 \cos\alpha_1 - \omega_2 C_2 \cos\alpha_2 = 0$$

Từ hai phương trình thứ ba và thứ tư ta suy ra:

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

Từ hai phương trình đầu ta có:

$$2C_1 \sin\alpha_1 = 2C_2 \sin\alpha_2 = \varphi_0 \quad \rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\varphi_0$$

Vậy dao động tự do của hệ hai con lắc có dạng:

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$
$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

2.2.4. Một vài trường hợp đặc biệt

Trong đoạn này ta giới hạn chỉ xét dao động tự do hệ hai bậc tự do. Phương trình vi phân dao động có dạng:

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0$$
$$m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0$$

Khi sử dụng các toạ độ chính hệ phương trình trên đưa được về dạng:

$$\begin{aligned} &\ddot{p}_1 + \omega_1^2\, p_1 = 0 \\ &\ddot{p}_2 + \omega_2^2\, p_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

a. Trường hợp 1: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Khi đó nghiệm hệ phương trình (2.37) có dạng:

$$p_1 = C_1 \sin(\omega t + \alpha_1); \quad p_2 = C_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

Cả hai toạ độ chính đều dao động điều hoà với cùng tần số ω. Từ hệ thức:

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\,\mathbf{p}$$

ta suy ra: $q_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_1);\ \ q_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_2)$

Trong trường hợp này cả hai toạ độ suy rộng đều thực hiện dao động điều hoà với cùng tần số ω. Nếu ta chọn toạ độ q_1, q_2 bất kỳ thì chúng cũng dao động điều hoà với tần số ω chung đó. Do đó phương trình dao động có dạng:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0;\ \ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0$$

b. Trường hợp 2: $\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 = 0$

Khi đó hệ phương trình (2.37) có dạng:

$$\begin{aligned} &\ddot{p}_1 + \omega_1^2\ p_1 = 0 \\ &\ddot{p}_2 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &p_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ &p_2 = C_2 t + C_3 \end{aligned}$$

Như thế trong trường hợp $\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 = 0$ thì toạ độ chính p_1 thực hiện dao động điều hoà với tần số ω_1 còn toạ độ chính p_2 hoặc luôn là hằng số (nếu $C_2 = 0$) hoặc tăng lên vô cùng khi thời gian t tăng. Khả năng nào xảy ra phụ thuộc vào các điều kiện đầu.

Nếu như ta chọn q_1, q_2 một cách tuỳ ý, thì từ các phương trình (2.17a) và (2.17b) ta có:

$$(c_{11} - m_{11}\omega_2^2) + v_{22}(c_{12} - m_{12}\omega_2^2) = 0$$

$$(c_{12} - m_{21}\omega_2^2) + v_{22}(c_{22} - m_{22}\omega_2^2) = 0$$

Khi $\omega_2 = 0$, từ hai phương trình trên ta suy ra:

$$v_{22} = -\frac{c_{11}}{c_{12}} = -\frac{c_{12}}{c_{22}} \ \rightarrow\ c_{12} = \pm\sqrt{c_{11}c_{22}}$$

Trong trường hợp tổng quát ta có:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + p_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 t + C_3 \\ q_2 &= v_{21} p_1 + v_{22} p_2 = v_{21} C_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + v_{22} C_2 t + v_{22} C_3 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Thí dụ 2.6: Cho hệ gồm hai khối lượng m_1 và m_2 nối với nhau bằng lò xo có độ cứng c như hình 2.6. Hãy tìm biểu thức nghiệm tổng quát và một tích phân đầu của hệ.

Lời giải: Động năng và thế năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c\left(x_2 - x_1\right)^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại II ta được:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c x_1 - c x_2 = 0$$

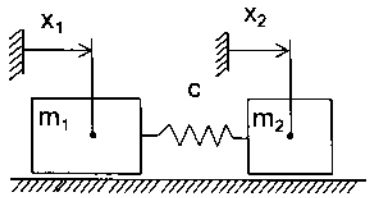
$$m_2 \ddot{x}_2 - c x_1 + c x_2 = 0$$

Phương trình đặc trưng của hệ:

$$\left|\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M}\right| = \begin{vmatrix} c-\omega^2 m_1 & -c \\ -c & c-\omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \quad m_1 m_2 \omega^4 - c(m_1+m_2)\,\omega^2 = 0$$

Từ đó suy ra: $\omega_1^2 = \dfrac{c(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$; $\omega_2^2 = 0$



Hình 2.6.

Ma trận dạng riêng có dạng: $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$

Trong đó v_{2i} được xác định từ phương trình:

$$c - \omega_i^2 m_1 - c v_{2i} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{21} = \frac{m_1}{m_2}, \quad v_{22} = 1$$

Vậy ta có: $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -m_1/m_2 & 1 \end{bmatrix}$

Các phương trình chuyển động của hệ trong dạng toạ độ chính:

$$\begin{aligned} &\ddot{p}_1 + \omega_1^2\, p_1 = 0 \\ &\ddot{p}_2 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &p_1 = A\cos(\omega_1 t + \alpha) \\ &p_2 = B_1 + B_2 t \end{aligned}$$

Trở lại toạ độ x_1, x_2 ta có:

$$x_1(t) = p_1(t) + p_2(t) = B_1 + B_2 t + A\cos(\omega_1 t + \alpha)$$

$$x_2(t) = -\frac{m_1}{m_2} p_1(t) + p_2(t) = B_1 + B_2 t - \frac{m_1}{m_2} A\cos(\omega_1 t + \alpha)$$

Các hằng số A, α, B_1, B_2 được xác định từ các điều kiện đầu.

Gọi x_C là toạ độ khối tâm cơ hệ, theo định nghĩa khối tâm ta có:

$$(m_1 + m_2)x_C = m_1 x_1 + m_2(l + x_2)$$

Từ định lý bảo toàn động lượng ta có:

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_C = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = \text{const} \tag{2.39}$$

Biểu thức (2.39) là một tích phân đầu của hệ.

Theo kết quả trên ta có $\dot{x}_c = B_2$ - khối tâm cơ hệ chuyển động đều.

c. *Trường hợp 3:* $\omega_1 \approx \omega_2$

Phương trình dao động ở dạng toạ độ chính

$$\ddot{p}_1 + \omega_1^2\, p_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$\ddot{p}_2 + \omega_2^2\, p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_2(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Trong đó C_1, C_2, α_1, α_2 là các hằng số.

Trở lại toạ độ q_1, q_2 theo (2.31) ta có:

$$q_1 = p_1 + p_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{2.40}$$

$$q_2 = v_{21}p_1 + v_{22}p_2 = v_{21}C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + v_{22}C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{2.41}$$

Do $\omega_1 \approx \omega_2$ nên $\omega_2 - \omega_1 << \omega_1$. Nếu ta đặt:

$$\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1) \tag{2.42}$$

thì $\varphi(t)$ thay đổi chậm theo thời gian. Từ (2.40) ta suy ra:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_1 + \varphi) \\ &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2[\sin(\omega_1 t + \alpha_1)\cos\varphi + \sin\varphi\cos(\omega_1 t + \alpha_1)] \\ &= (C_1 + C_2\cos\varphi)\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin\varphi\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \end{aligned}$$

Tính toán tương tự ta được:

$$q_2 = (v_{21}C_1 + v_{22}C_2\cos\varphi)\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + v_{22}C_2\sin\varphi\cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

Nếu ta đặt:

$$C_1 + C_2\cos\varphi = A_1\cos\theta_1;\ C_2\sin\varphi = A_1\sin\theta_1$$

$$v_{21}C_1 + v_{22}C_2\cos\varphi = A_2\cos\theta_2;\ \ v_{22}C_2\sin\varphi = A_2\sin\theta_2$$

thì các biểu thức $q_1(t)$, $q_2(t)$ có dạng:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_1(t)\sin(\omega_1 t + \alpha_1 + \theta_1) \\ q_2(t) &= A_2(t)\sin(\omega_1 t + \alpha_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{2.43}$$

trong đó:

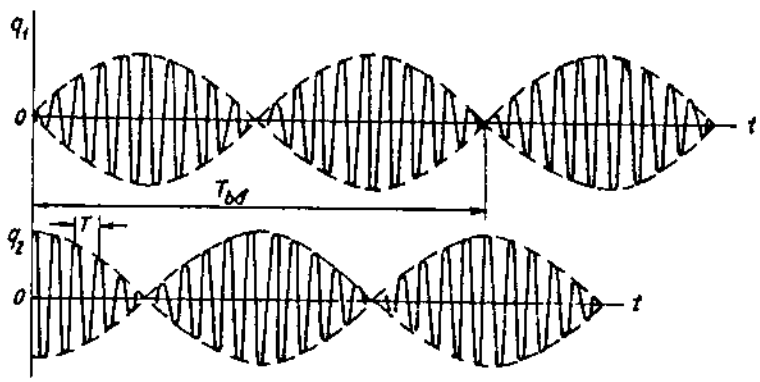
$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos\varphi};\ \ \mathrm{tg}\theta_1 = \frac{C_2\sin\varphi}{C_1 + C_2\cos\varphi}$$

$$A_2 = \sqrt{v_{21}^2C_1^2 + v_{22}^2C_2^2 + 2v_{21}v_{22}C_1C_2\cos\varphi};\ \ \mathrm{tg}\theta_1 = \frac{v_2C_2\sin\varphi}{v_{21}C_1 + v_{22}C_2\cos\varphi}$$

Do góc $\varphi(t)$ thay đổi chậm theo thời gian nên các hàm A_1, A_2, θ_1, θ_2 thay đổi chậm theo thời gian. Từ (2.43) ta thấy chu kỳ thay đổi biên độ:

$$T_{bd} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

rất lớn so với chu kỳ $T = 2\pi/\omega_1$. Hiện tượng dao động như thế gọi là hiện tượng phách. Đồ thị dao động có dạng như hình 2.7.



Hình 2.7

Thí dụ 2.7: Tìm điều kiện xuất hiện hiện tượng phách đối với mô hình dao động trong thí dụ 2.5

Lời giải: Theo thí dụ 2.5 ta có: $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$; $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}$

Hiện tượng phách xuất hiện khi: $\omega_2 - \omega_1 << \omega_1 \rightarrow \omega_2^2 - \omega_1^2 << \omega_1^2$

Từ các công thức trên ta suy ra điều kiện xuất hiện hiện tượng phách

$$\frac{2cd^2}{ml^2} << \frac{g}{l} \rightarrow \frac{2cd^2}{ml} << g$$

2.3. DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ CẢN

Phương trình vi phân dao động tự do có lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc của hệ n bậc tự do có dạng:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.44}$$

Trong đó các ma trận **M**, **B**, **C** là các ma trận hằng số.

Trong một số bài toán kỹ thuật ma trận cản **B** có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \delta\mathbf{C} \tag{2.45}$$

Trong đó α và δ là các hằng số. Ma trận (2.45) được gọi là ma trận cản Rayleigh.

Khi đó bằng phép biến đổi $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$, với **V** là ma trận dạng riêng, ta đưa được phương trình (2.44) về dạng:

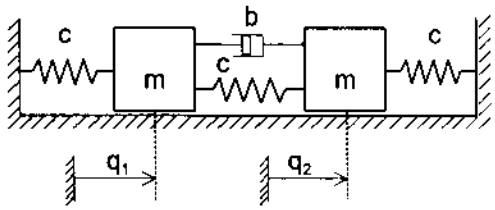
$$\mu_i\ddot{p}_i + \beta_i\dot{p}_i + \gamma_i p_i = 0, \quad (i = 1,2,..n) \tag{2.46}$$

trong đó:

$$\mu_i = \mathbf{v}_i^T\mathbf{M}\mathbf{v}_i; \quad \beta_i = \mathbf{v}_i^T\mathbf{B}\mathbf{v}_i; \quad \gamma_i = \mathbf{v}_i^T\mathbf{C}\mathbf{v}_i \tag{2.47}$$

Nghiệm của các phương trình dạng (2.46) đã được khảo sát kỹ trong chương 1.

Thí dụ 2.8: Cho mô hình dao động hệ hai bậc tự do như hình 2.8. Hãy tìm nghiệm của hệ bằng phương pháp ma trận dạng riêng.



Hình 2.8.

Lời giải: Các biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2);$$

$$\Pi = \frac{1}{2}cq_1^2 + \frac{1}{2}c(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}cq_2^2; \quad \Phi = \frac{1}{2}b(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được phương trình vi phân dao động tự do có cản của hệ:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chia phương trình trên cho m và sử dụng các ký hiệu:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m};\ \delta = \frac{b}{2m};\ D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

ta được: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + 2\omega_0 D\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nếu chọn $\alpha = -2\omega_0 D;\ \delta = \dfrac{2D}{\omega_0}$

thì từ phương trình trên ta có: $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \delta\mathbf{C}$

Do đó ta có thể áp dụng phương pháp ma trận dạng riêng tìm nghiệm của phương trình dao động ở trên. Phương trình đặc trưng của hệ:

$$\left|\mathbf{C} - \lambda^2\mathbf{M}\right| = \begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \lambda^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^4 - 4\omega_0^2\lambda^2 + 3\omega_0^4 = 0$$

Giải ra ta được: $\lambda_1^2 = 3\omega_0^2;\ \ \lambda_2^2 = \omega_0^2$

Phương trình xác định các vectơ riêng:

$$(\lambda_i^2 - 2\omega_0^2 + \omega_0^2\alpha_2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad v_{2i} = \frac{2\omega_0^2 - \lambda_i^2}{\omega_0^2}$$

Khi $\lambda_1^2 = 3\omega_0^2 \Rightarrow v_{21} = -1$, khi $\lambda_{21}^2 = \omega_0^2 \Rightarrow v_{22} = 1$

Vậy ma trận dạng riêng là $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Từ đó dễ dàng tính được

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\ \ \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V} = \omega_0^2\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\ \ \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = 2\omega_0 D\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình dao động của hệ dưới dạng tọa độ chính:

$$\ddot{p}_1 + 4\omega_0 D\dot{p}_1 + 3\omega_0^2 p_1 = 0$$

$$\ddot{p}_2 + \omega_0^2 p_2 = 0$$

Từ đó suy ra các biểu thức nghiệm dạng tọa độ chính:

$$p_1(t) = e^{-2D\omega_0 t}[C_{11}\cos(\sqrt{3 - 4D^2}\,\omega_0 t) + C_{12}\sin(\sqrt{3 - 4D^2}\,\omega_0 t)]$$

$$p_2(t) = C_{21}\cos\omega_0 t + C_{22}\sin\omega_0 t$$

Trở lại tọa độ suy rộng ban đầu ta có:

$$q_1(t) = p_1(t) + p_2(t) = e^{-2D\omega_0 t}[C_{11}\cos(\sqrt{3-4D^2}\,\omega_0 t)$$
$$+ C_{12}\sin(\sqrt{3-4D^2}\,\omega_0 t)] + C_{21}\cos\omega_0 t + C_{22}\sin\omega_0 t$$
$$q_2(t) = -p_1(t) + p_2(t) = -e^{-2D\omega_0 t}[C_{11}\cos(\sqrt{3-4D^2}\,\omega_0 t)$$
$$+ C_{12}\sin(\sqrt{3-4D^2}\,\omega_0 t)] + C_{21}\cos\omega_0 t + C_{22}\sin\omega_0 t$$

Giả sử cho biết điều kiện đầu:

$$q_1(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = v, \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

Với các điều kiện đầu đó ta dễ dàng tính được

$$C_{11} = C_{21} = 0;\ C_{12} = \frac{v}{2\omega_0}\frac{1}{\sqrt{3-4D^2}};\ C_{22} = \frac{v}{2\omega_0}$$

Nghiệm riêng ứng với các điều kiện đầu trên có dạng:

$$q_1(t) = \frac{v}{2\omega_0}[\frac{1}{\sqrt{3-4D^2}}e^{-2D\omega_0 t}\sin(\sqrt{3-4D^2}\,\omega_0 t) + \sin\omega_0 t]$$
$$q_2(t) = -\frac{v}{2\omega_0}[\frac{1}{\sqrt{3-4D^2}}e^{-2D\omega_0 t}\sin(\sqrt{3-4D^2}\,\omega_0 t) - \sin\omega_0 t]$$

2.4. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

2.4.1. Phương pháp trực tiếp

Về mặt toán học dao động cưỡng bức có cản nhớt của hệ tuyến tính n bậc tự do được mô tả bởi phương trình vi phân dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \tag{2.48}$$

Trong đó **M**, **B**, **C** là các ma trận hằng số, **f**(t) là vectơ cột các ngoại lực tác dụng. Giả sử **f**(t) là vectơ tuần hoàn theo thời gian và có thể khai triển thành chuỗi Fourier một cách gần đúng:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{m}(\mathbf{a}_k\cos k\Omega t + \mathbf{b}_k\sin k\Omega t)$$

Ta sử dụng nguyên lý cộng tác dụng trong lý thuyết hệ phương trình vi phân tuyến tính để tìm nghiệm phương trình (2.48). Trước hết ta tìm nghiệm phương trình:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}\mathbf{q}_0 = \mathbf{a}_0 \tag{2.49}$$

dưới dạng $\mathbf{q}_0 = \mathbf{v}_0$ (2.50)

Thế (2.50) vào (2.49) ta nhận được hệ phương trình xác định $\mathbf{v}_0$

$$\mathbf{C}\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \tag{2.51}$$

Sau đó ta tìm nghiệm của phương trình

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{C}\mathbf{q}_k = \mathbf{a}_k \cos k\Omega t + \mathbf{b}_k \sin k\Omega t \tag{2.52}$$

Nghiệm của phương trình (2.52) được tìm dưới dạng:

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{u}_k \sin k\Omega t + \mathbf{v}_k \cos k\Omega t \tag{2.53}$$

Đạo hàm vectơ $\mathbf{q}_k$ theo t:

$$\dot{\mathbf{q}}_k = k\Omega(\mathbf{u}_k \cos k\Omega t - \mathbf{v}_k \sin k\Omega t) \tag{2.54}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_k = -k^2\Omega^2(\mathbf{u}_k \sin k\Omega t + \mathbf{v}_k \cos k\Omega t) \tag{2.55}$$

Thế các biểu thức (2.53), (2.54) và (2.55) vào phương trình (2.52) rồi so sánh các hệ số, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các vectơ $\mathbf{u}_k$ và $\mathbf{v}_k$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} - k^2\Omega^2\mathbf{M} & -k\Omega\mathbf{B} \\ k\Omega\mathbf{B} & \mathbf{C} - k^2\Omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

Khi định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình trên khác không, thì các vectơ $\mathbf{u}_k$ và $\mathbf{v}_k$ được xác định duy nhất. Như thế nghiệm của phương trình dao động cưỡng bức (2.48) khi $\mathbf{f}(t)$ tuần hoàn được tính theo biểu thức

$$\mathbf{q} = \mathbf{v}_0 + \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{u}_k \sin k\Omega t + \mathbf{v}_k \cos k\Omega t) \tag{2.57}$$

trong đó $\mathbf{v}_0$ được xác định từ phương trình (2.51), còn $\mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_k$ được xác định từ phương trình (2.56).

Trong trường hợp không có cản ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$) người ta có thể xác định nghiệm bằng phương pháp giải tích đối với hệ hai bậc tự do. Trong trường hợp số bậc tự do lớn hơn hai người ta thường sử dụng máy tính tìm nghiệm theo thuật toán trình bày ở trên.

Thí dụ 2.9: Cho mô hình cơ học của một thiết bị làm việc theo nguyên lý rung như hình 2.9. Cho biết kích động lệch tâm ở khối lượng thứ nhất là $2.\Delta m.e = 2.20$ kg.0,1 m = 4 kgm. Khối lượng các vật và độ cứng lò xo có trị số như sau:

$$m_1 = m_0 + 2.\ \Delta m = 1500 \text{ kg};\ m_2 = 1000 \text{ kg};\ c_1 = 10^8 \text{ kg/s}^2;\ c_{12} = 10^7 \text{ kg/s}^2.$$

Hai môtơ quay đều ngược chiều nhau với vận tốc góc Ω. Hãy xác định các tần số riêng của hệ, tính và vẽ đồ thị dao động cưỡng bức.

Lời giải: Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

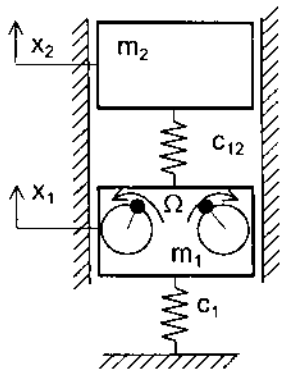
$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_{12}(x_2 - x_1)^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được các phương trình vi phân dao động của hệ

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_{12})x_1 - c_{12}x_2 = 2\Delta m e\Omega^2 \sin\Omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2 - c_{12}x_1 + c_{12}x_2 = 0$$

Chia hai vế của phương trình đầu cho m_1, hai vế của phương trình hai cho m_2 ta được

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1 + c_{12}}{m_1}x_1 - \frac{c_{12}}{m_1}x_2 = 2\frac{\Delta m}{m_1}e\Omega^2 \sin\Omega t$$
$$\ddot{x}_2 - \frac{c_{12}}{m_2}x_1 + \frac{c_{12}}{m_2}x_2 = 0$$



Hình 2.9

Nếu ta đưa vào các ký hiệu:

$$\gamma_1^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1};\ \gamma_2^2 = \frac{c_{12}}{m_2};\ \hat{F}_1 = 2\Delta m e\Omega^2$$

thì hai phương trình vi phân trên có dạng

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1^2 x_1 - \frac{c_{12}}{m_1}x_2 = \frac{\hat{F}_1}{m_1}\sin\Omega t \qquad (2.58)$$
$$\ddot{x}_2 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{c_{12}}{m_2}x_1 = 0$$

a) Xác định các tần số riêng

Để xác định các tần số riêng, ta xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với hệ phương trình trên:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1^2 x_1 - \frac{c_{12}}{m_1}x_2 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{c_{12}}{m_2}x_1 = 0$$

Phương trình tần số:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1^2 - \omega^2 & -\dfrac{c_{12}}{m_1} \\ -\dfrac{c_{12}}{m_2} & \gamma_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = (\gamma_1^2 - \omega^2)(\gamma_2^2 - \omega^2) - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} = 0 \qquad (2.59)$$

$$\omega^4 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\omega^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} = 0$$

Giải phương trình bậc hai ở trên đối với ω^2;

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2}{4} - \gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2}}$$

Thay số vào biểu thức của ω_1 và ω_2 ta xác định được

$$\omega_1 = 94{,}7\ 1/s; \qquad \omega_2 = 272{,}7\ 1/s$$

b) Tính toán dao động cưỡng bức

Do không có cản (**B = 0**) nên xuất phát từ biểu thức (2.57) ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình (2.58) dưới dạng

$$x_1 = A_1 \sin\Omega t; \quad x_2 = A_2 \sin\Omega t \tag{2.60}$$

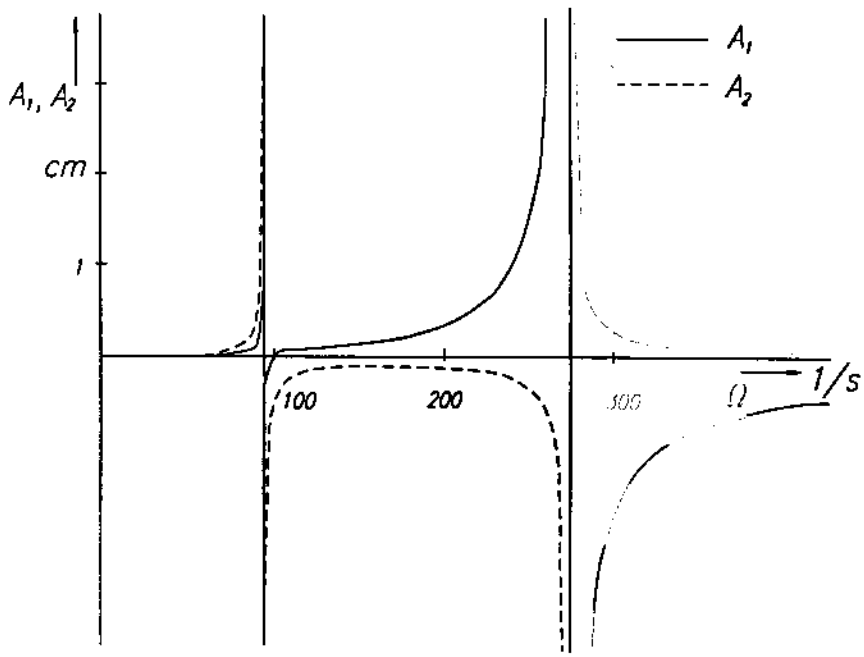
Thế các biểu thức (2.60) vào phương trình (2.58) ta dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$(\gamma_1^2 - \Omega^2)A_1 - \frac{c_{12}}{m_1}A_2 = \frac{\hat{F}_1}{m_1}$$

$$-\frac{c_{12}}{m_2}A_1 + (\gamma_2^2 - \Omega^2)A_2 = 0$$

Giải ra ta được: $A_1 = \dfrac{\hat{F}_1(\gamma_2^2 - \Omega^2)}{m_1\Delta^*}$; $A_2 = \dfrac{\hat{F}_1 c_{12}}{m_1 m_2 \Delta^*}$

trong đó $\Delta^* = (\gamma_1^2 - \Omega^2)(\gamma_2^2 - \Omega^2) - \dfrac{c_{12}^2}{m_1 m_2}$ (2.61)



Hình 2.10

So sánh các biểu thức (2.59) và (2.61) ta rút ra kết luận: khi $\Omega = \omega_1$ hoặc khi $\Omega = \omega_2$ thì $\Delta^* = 0$, do đó $A_1 \to \infty$, $A_2 \to \infty$. Hệ xảy ra hiện tượng cộng hưởng.

Để vẽ các đường cong biên độ tần số, trước hết ta nhắc lại một số kiến thức quen thuộc về tam thức bậc hai. Nếu x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì ta có thể phân tích tam thức bậc hai thành các thừa số như sau:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Từ biểu thức (2.61) ta có:

$$\Delta^* = \Omega^4 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\Omega^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} = (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)$$

Từ các nhận xét trên ta có thể dễ dàng vẽ các đường cong biên độ- tần số như hình 2.10 (trang 49).

2.4.2. Phương pháp ma trận dạng riêng

Phương pháp ma trận dạng riêng (Modalmatrix) được áp dụng thuận tiện đối với hệ tuyến tính không cản:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \tag{2.62}$$

trong đó **M** và **C** là các ma trận thực, đối xứng.

Áp dụng phép biến đổi tọa độ: $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$ (2.63)

với **V** là ma trận dạng riêng, **p** là vectơ các tọa độ chính, ta đưa được phương trình (2.62) về dạng:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{p} = \mathbf{f}(t)$$

Nhân bên trái phương trình trên với ma trận chuyển vị $\mathbf{V}^T$ của ma trận dạng riêng ta được:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{p} = \mathbf{V}^T\mathbf{f}(t) \tag{2.64}$$

Các ma trận $\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}$ và $\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}$ là các ma trận đường chéo và có dạng như (2.33).

Nếu ta đưa vào ký hiệu:

$$h_i = \mathbf{v}_i^T\mathbf{f} \qquad (i = 1,2,..n) \tag{2.65}$$

thì phương trình (2.64) viết được dưới dạng hệ n phương trình vi phân tuyến tính cấp hai:

$$\mu_i\ddot{p} + \gamma_i p_i = h_i \qquad (i = 1,2,..n) \tag{2.66}$$

Trong đó μ_i, γ_i được xác định bởi công thức (2.35).

Nghiệm của mỗi phương trình của hệ (2.66) ứng với điều kiện đầu

$$p_i(0) = p_{i0};\ \dot{p}_i(0) = \dot{p}_{i0}$$

có dạng: $$p_i(t) = p_{i0}\cos\omega_i t + \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i}\sin\omega_i t + \frac{1}{\mu_i\omega_i}\int_0^t h_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (2.67)$$

trong đó: $\omega_i^2 = \dfrac{\gamma_i}{\mu_i}$

Đối với trường hợp kích động điều hoà $f_i(t) = \hat{f}_i \sin\Omega t$, theo công thức (2.65) ta có:

$$h_i(t) = (\sum_{k=1}^{n} v_{ki}\hat{f}_k)\sin\Omega t = \hat{h}_i \sin\Omega t$$

Các phương trình (2.66) đối với trường hợp này có dạng

$$\mu_i\ddot{p}_i + \gamma_i p_i = \hat{h}_i \sin\Omega t, \quad (i = 1,2,..n) \qquad (2.68)$$

Nghiệm của các phương trình (2.66) trong giai đoạn bình ổn là:

$$p_i = \frac{\hat{h}_i}{\gamma_i(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega_i^2})}\sin\Omega t$$

Trở về tọa độ ban đầu q_k ta có:

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^{n} v_{ki}p_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{v_{ki}\hat{h}_i}{\gamma_i(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega_i^2})}\sin\Omega t \qquad (2.69)$$

Như thế, khi chịu kích động điều hòa, hệ dao động với tần số của lực kích động và dạng dao động phụ thuộc vào các tham số của hệ và tần số của kích động ngoài. Từ công thức (2.69) ta thấy: khi tần số kích động Ω bằng tần số riêng ω_i của hệ, biên độ dao động cưỡng bức tăng lên vô hạn. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng cộng hưởng.

Nếu kể đến lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, phương trình vi phân dao động cưỡng bức có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \qquad (2.70)$$

Trong kỹ thuật ta hay gặp trường hợp: $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \delta\mathbf{C}$

với α, δ là các hằng số thực. Tương tự như các mục trước, bằng phép biến đổi (2.63) phương trình (2.70) đưa được về dạng:

$$\mu_i\ddot{p}_i + \mu_i\dot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i(t), \quad (i = 1,2..., n) \qquad (2.71)$$

trong đó μ_i, γ_i, β_i được xác định bởi công thức (2.47) còn h_i tính theo công thức (2.65). Việc tìm nghiệm của phương trình (2.71) đã được trình bày trong chương 1.

Thí dụ 2.10: Xét mô hình dao động trong thí dụ 2.8. Giả sử trên vật thứ hai tác dụng một lực $F_2(t) = \hat{F}_2 \sin\Omega t$ theo chiều q_2. Hãy viết phương trình vi phân dao động dạng tọa độ chính. Tìm dao động cưỡng bức bình ổn.

Lời giải: Phương trình vi phân dao động cưỡng bức có dạng

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}_2 \sin\Omega t \end{bmatrix}$$

Chia hai vế của hệ phương trình trên cho m và sử dụng các ký hiệu như ở thí dụ 2.8 ta được:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + 2\omega_0 D\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}_2 \sin\Omega t / m \end{bmatrix}$$

Trong thí dụ 2.8 ta đã tính được ma trận dạng riêng:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Do đó: $\mathbf{V}^T\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}_2 \sin\Omega t / m \end{bmatrix} = \dfrac{\hat{F}_2}{m}\begin{bmatrix} -\sin\Omega t \\ \sin\Omega t \end{bmatrix}$

Hệ phương trình vi phân dao động cưỡng bức dạng tọa độ chính:

$$\ddot{p}_1 + 4\omega_0 D\dot{p}_1 + 3\omega_0^2 p_1 = -\frac{\hat{F}_2}{2m}\sin\Omega t \tag{2.72}$$

$$\ddot{p}_2 + \omega_0^2 p_2 = \frac{\hat{F}_2}{2m}\sin\Omega t \tag{2.73}$$

Ở trạng thái chuyển động bình ổn (bỏ qua thành phần dao động tự do) nghiệm của các phương trình (2.72) và (2.73) có dạng:

$$p_1(t) = M_1 \sin\Omega t + N_1 \cos\Omega t$$

$$p_2(t) = \frac{\hat{F}_2}{2m}\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t = M_2 \sin\Omega t \qquad (\Omega \neq \omega_0)$$

trong đó: $$M_1 = \frac{(3\omega_0^2 - \Omega^2)\hat{F}_2}{2m[(3\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 16\omega_0^2 D^2\Omega^2]}$$

$$N_1 = \frac{4\omega_0^2 D\Omega\hat{F}_2}{2m[(3\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 16\omega_0^2 D^2\Omega^2]}$$

Từ hệ thức $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$ ta suy ra các biểu thức đối với các tọa độ q_1, q_2 ban đầu

$$q_1(t) = (M_1 + M_2)\sin\Omega t + N_1 \cos\Omega t$$

$$q_2(t) = (M_2 - M_1)\sin\Omega t - N_1 \cos\Omega t$$

2.5. MỘT VÀI BÀI TOÁN ÁP DỤNG

2.5.1. Bộ tắt chấn động lực không tính đến ma sát

a. Lý thuyết

Xét phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ hai bậc tự do không cản

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Giả sử các lực kích động có dạng

$$f_1(t) = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha); \quad f_2(t) = \hat{f}_2 \sin(\Omega t + \alpha) \tag{2.75}$$

Ta tìm nghiệm của hệ phương trình (2.74) dưới dạng:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\Omega t + \alpha); \\ q_2 &= A_2 \sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{2.76}$$

trong đó A_1, A_2 là các hằng số cần xác định.

Thế các biểu thức (2.76) vào phương trình (2.74) ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định A_1 và A_2

$$\begin{aligned} (c_{11} - m_{11}\Omega^2)A_1 + (c_{12} - m_{12}\Omega^2)A_2 &= \hat{f}_1 \\ (c_{21} - m_{21}\Omega^2)A_1 + (c_{22} - m_{22}\Omega^2)A_2 &= \hat{f}_2 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Để đơn giản giả sử **M** và **C** là các ma trận đối xứng ($c_{12} = c_{21}$, $m_{12} = m_{21}$). Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (2.77) ta được

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(c_{22} - m_{22}\Omega^2)\hat{f}_1 - (c_{12} - m_{12}\Omega^2)\hat{f}_2}{\Delta} \\ A_2 &= \frac{(c_{11} - m_{11}\Omega^2)\hat{f}_2 - (c_{12} - m_{12}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \end{aligned} \tag{2.78}$$

trong đó: $\Delta = (c_{11} - m_{11}\Omega^2)(c_{22} - m_{22}\Omega^2) - (c_{12} - m_{12}\Omega^2)^2$ (2.79)

Xét trường hợp $\hat{f}_2 = 0$. Khi đó từ công thức (2.78) ta suy ra:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(c_{22} - m_{22}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \\ A_2 &= \frac{-(c_{12} - m_{12}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \end{aligned} \tag{2.80}$$

Khi $\Delta \neq 0$, nếu ta chọn các tham số của hệ sao cho $c_{22} - m_{22}\Omega^2 = 0$ thì:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{\hat{f}_1}{c_{12} - m_{12}\Omega^2} \tag{2.81}$$

Vậy khi $\Omega^2 = c_{22} / m_{22}$ thì dao động cưỡng bức ứng với tọa độ suy rộng thứ nhất được hoàn toàn dập tắt.

b. Nguyên lý thiết kế bộ tắt chấn động lực

Dựa trên lý thuyết ở trên, người ta chế tạo các thiết bị tắt dao động gọi là bộ tắt chấn động lực hay bộ hút (Absorber). Giả sử ta có mô hình dao động xoắn như hình 2.11a. Dễ dàng tính được biểu thức động năng và thế năng

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2$$

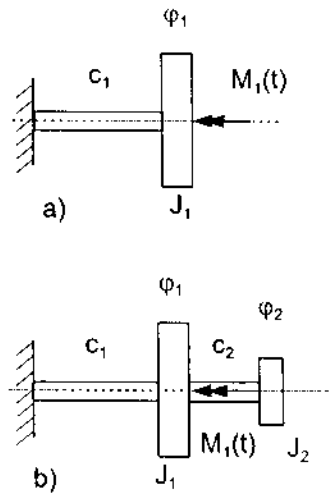
và lực suy rộng $Q = M_1(t) = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha)$. Phương trình vi phân dao động của hệ trên hình 2.11a có dạng:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha) \qquad (2.82)$$

Ở chế độ chuyển động bình ổn, dao động cưỡng bức của hệ có dạng:

$$\varphi_1 = \frac{\hat{f}_1}{J_1(\omega_1^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t + \alpha) \qquad (2.83)$$

trong đó: $\omega_1^2 = c_1 / J_1$.



Hình 2.11

Gắn vào mô hình 2.11a một hệ phụ như hình 2.11b. Mô hình 2.11b là một hệ cơ học gồm hai bậc tự do. Hệ phương trình vi phân dao động của hệ này có dạng:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + (c_1 + c_2)\varphi_1 - c_2 \varphi_2 = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 = 0 \qquad (2.84)$$

Điều kiện dập tắt dao động φ_1 là $\Omega^2 = c_2 / J_2$. Khi đó ta có:

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = -\frac{\hat{f}_1}{c_2} \sin(\Omega t + \alpha) \qquad (2.85)$$

Hệ phụ lắp thêm vào hệ 2.11a như trên hình 2.11b được gọi là bộ tắt chấn động lực. Khi thiết kế bộ tắt chấn động lực trong thí dụ trên ta phải chú ý đến hai điều sau:

- Chọn hệ số cứng c_2 sao cho biên độ dao động cưỡng bức của góc $\varphi_2(t)$ là $\hat{f}_1 / c_2$ có thể chấp nhận được.

- Chọn mômen quán tính khối J_2 sao cho $\Omega^2 = c_2 / J_2$.

Chú ý: Trong [2] có xét đến ví dụ minh hoạ cho bộ tắt chấn động lực có kể đến ma sát nhớt - đây là bài toán phức tạp.

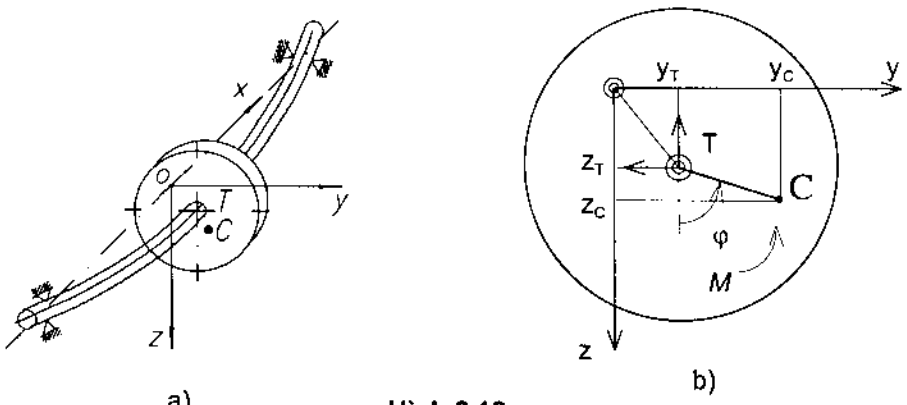
2.5.2. Dao động uốn của trục Laval

Mô hình dao động uốn của trục quay đơn giản nhất là mô hình dao động uốn của trục Laval. Mô hình gồm một trục không khối lượng mang một đĩa ở giữa trục. Ta ký hiệu tâm trục là T, trọng tâm của đĩa là C. Khoảng cách giữa T và C gọi là độ lệch tâm và ký hiệu là e. Khi trục chưa bị uốn điểm T trùng với điểm O của gốc tọa độ (hình 2.12a). Ta ký hiệu tọa độ của điểm T và C trong mặt phẳng Oyz tương ứng là y_T, z_T và y_C, z_C. Như thế y_T và z_T là độ võng của trục quay. Gọi φ là góc quay của đĩa quanh trục đi qua T và song song với trục x.

Từ hình 2.12b ta có các hệ thức liên hệ:

$$y_C = y_T + e\sin\varphi$$
$$z_C = z_T + e\cos\varphi \qquad (2.86)$$

Như thế vị trí của đĩa được xác định bởi ba tham số y_T, z_T và φ.



Hình 2.12

Ta ký hiệu m là khối lượng của đĩa, P = mg là trọng lượng của đĩa, b là hệ số cản tuyến tính, c là hệ số cứng tuyến tính. Ta chọn vị trí ban đầu của trục z ứng với vị trí cân bằng tĩnh. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có (xem hình 2.12b):

$$m\ddot{y}_C = -cy_T - b\dot{y}_T$$
$$m\ddot{z}_C = -cz_T - b\dot{z}_T \qquad (2.87)$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục đi qua trọng tâm C và song song với trục x

$$J\ddot{\varphi} = (cy_T + b\dot{y}_T)e\cos\varphi - (cz_T + b\dot{z}_T)e\sin\varphi + M(t) \qquad (2.88)$$

Trong đó J là mômen quán tính của đĩa đối với trục đi qua khối tâm C và vuông góc với mặt phẳng yz, M(t) là mômen ngoại lực.

Trong thực tế độ lệch tâm e và độ võng của trục là nhỏ cho nên ở trạng thái chuyển động bình ổn ta có thể xem vận tốc góc của trục là hằng số ($\dot{\varphi} = \Omega$). Khi đó ta có:

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0;\quad y_C = y_T + e\sin(\Omega t + \varphi_0);\quad z_C = z_T + e\cos(\Omega t + \varphi_0) \qquad (2.89)$$

Thế các biểu thức (2.89) vào các phương trình (2.87) ta nhận được hệ phương trình vi phân dao động uốn của trục Laval

$$m\ddot{y}_T + b\dot{y}_T + cy_T = me\Omega^2\sin(\Omega t + \varphi_0)$$
$$m\ddot{z}_T + b\dot{z}_T + cz_T = me\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi_0) \qquad (2.90)$$

Với các giả thiết đã nêu trên dao động uốn của trục Laval được xem như dao động phẳng đơn giản không có liên hệ giữa các dịch chuyển theo hai phương y và z vuông góc với

nhau. Việc tìm nghiệm của từng phương trình trong hệ (2.90) đã được xét kỹ trong chương 1.

Khi b = 0 các phương trình (2.90) có dạng:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_T + \omega_0^2 y_T &= e\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ \ddot{z}_T + \omega_0^2 z_T &= e\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0) \end{aligned} \tag{2.91}$$

trong đó: $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$

Khi $\Omega = \omega_0$ biên độ dao động cưỡng bức của hệ sẽ tăng lên vô cùng. Hiện tượng này được gọi là hiện tượng cộng hưởng. Số vòng quay của trục Laval ứng với $\Omega = \omega_0$ được gọi là số vòng quay tới hạn và được tính theo công thức:

$$n_{th} = \frac{30}{\pi}\omega_0 = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Chú ý rằng nếu đĩa không được lắp ở chính giữa của trục quay, hoặc nếu độ cứng của trục đối với các ổ đỡ không đối xứng đối với mặt phẳng giữa đĩa thì khi trục quay đĩa sẽ bị nghiêng. Khi đó các tần số riêng của hệ không những phụ thuộc vào các tham số của hệ như độ cứng, momen quán tính khối mà còn phụ thuộc cả vào số vòng quay của trục.

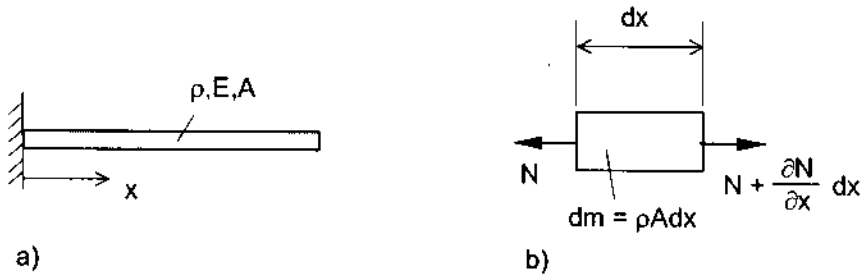
CHƯƠNG 3
DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Các hệ liên tục còn được gọi là các hệ vô hạn bậc tự do. Trong chương này, ta xét dao động của một số hệ liên tục đơn giản nhưng hay gặp trong kỹ thuật. Đó là dao động của dây, dao động của thanh và dầm, dao động của màng và dao động của tấm. Các đại lượng vật lý đặc trưng cho dao động của hệ vô hạn bậc tự do như khối lượng, độ cứng phân bố một cách liên tục.

Phương trình mô tả dao động của hệ liên tục là các phương trình đạo hàm riêng. Ở các hệ liên tục, ta nhận được vô số các tần số riêng, các dạng dao động riêng, vv...

3.1. DAO ĐỘNG DỌC VÀ DAO ĐỘNG XOẮN CỦA THANH THẲNG

3.1.1 Thiết lập phương trình vi phân dao động dọc của thanh



Hình 3.1

Xét một thanh thẳng (hình 3.1a) có mật độ khối là ρ(x), thiết diện là A(x), môđun đàn hồi là E. Thanh thực hiện dao động u(x,t) dọc trục x. Áp dụng nguyên lý d'Alembert, xét một phân tố của thanh chịu lực như hình 3.1b. Phương trình chuyển động theo trục x của phân tố thanh có dạng:

$$\rho(x)A(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -N + (N + \frac{\partial N}{\partial x}dx)$$

$$\rightarrow \quad \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.1}$$

Từ [6] ta có: $N = EA(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$

Thế biểu thức trên vào phương trình (3.1) ta nhận được phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 \tag{3.2}$$

3.1.2. Dao động dọc tự do của thanh đồng chất thiết diện không đổi

Khi $\rho(x)$ và $A(x)$ đều là các hằng số, từ phương trình (3.2) ta suy ra phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\ \ c^2 = \frac{E}{\rho} \tag{3.3}$$

Như thế phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng là phương trình đạo hàm riêng cấp hai. Bây giờ ta tìm nghiệm của phương trình (3.3) dưới dạng:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.4}$$

Thế biểu thức nghiệm (3.4) vào phương trình (3.3) ta có:

$$X(x)\ddot{T}(t) - c^2X''(x)T(t) = 0$$

$$\rightarrow c^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

Do vế trái của phương trình trên chỉ phụ thuộc vào x, còn vế phải chỉ phụ thuộc vào t, cho nên hai vế đó phải bằng hằng số. Với mục đích định trước, ta ký hiệu hằng số đó là $-\omega^2$. Ta có:

$$c^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

Từ đó ta nhận được hai phương trình vi phân thường:

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \tag{3.5}$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \tag{3.6}$$

Nghiệm tổng quát của các phương trình này có dạng:

$$X(x) = A^*\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x \tag{3.7}$$

$$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \tag{3.8}$$

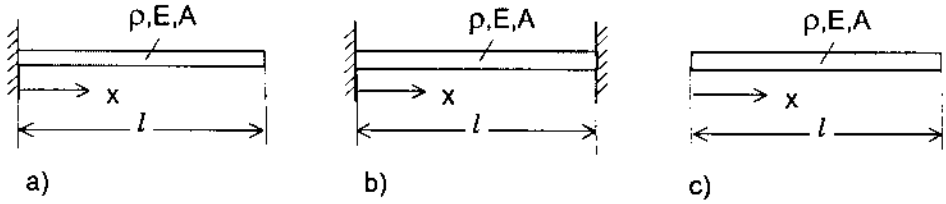
Các hằng số A*, B được xác định từ các điều kiện biên, còn các hằng số C, D được xác định từ các điều kiện đầu.

Thí dụ 3.1: Hãy xác định các tần số riêng và các hàm riêng của các thanh chịu liên kết như hình 3.2

• Đối với thanh một đầu ngàm chặt, một đầu tự do (hình 3.2a), các điều kiện biên có dạng:

$$u(0,t)=0 \rightarrow X(0)=0 \rightarrow A^*=0$$

$$N(l,t)=EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \rightarrow X'(l)=0 \rightarrow B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l=0$$



Hình 3.2

Với các giả thiết $B \neq 0$, $\omega > 0$, ta suy ra phương trình đặc trưng:

$$\cos\frac{\omega}{c}l=0 \tag{3.9}$$

Từ đó suy ra các tần số riêng và các hàm riêng:

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{2k-1}{2}\frac{\pi c}{l}=\frac{2k-1}{2}\pi\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}},\ k=1,2,\cdots\\ X_k(x) &= B_k\sin\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi x}{l}\right),\ k=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{3.10}$$

Đối với thanh hai đầu bị ngàm chặt (hình 3.2b), các điều kiện biên có dạng:

$$X(0)=0 \rightarrow A^*=0;\ X(l)=0 \rightarrow \sin\frac{\omega}{c}l=0$$

Từ đó ta có các tần số riêng và các hàm riêng:

$$\omega_k=k\frac{\pi c}{l}=k\pi\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}};\ X_k(x)=B_k\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.11}$$

Đối với thanh hai đầu tự do (hình 3.2c), các điều kiện biên có dạng:

$$X'(0)=0 \rightarrow B=0;\quad X'(l)=0 \rightarrow \sin\frac{\omega}{c}l=0$$

Từ đó ta nhận được:

$$\omega_k=k\frac{\pi c}{l}=k\pi\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}};\ X_k(x)=A_k^*\cos\frac{k\pi x}{l} \tag{3.12}$$

Như thế, từ các điều kiện biên, chúng ta xác định được các tần số riêng và các hàm riêng. Bảng 3.1 thống kê một số dạng cơ bản các điều kiện biên bài toán dao động dọc của thanh.

Thí dụ 3.2: Hãy xác định các tần số riêng và các hàm riêng của thanh một đầu bị ngàm chặt, một đầu mang khối lượng điểm m như hình 3.3a.

Lời giải: Điều kiện biên bên trái:

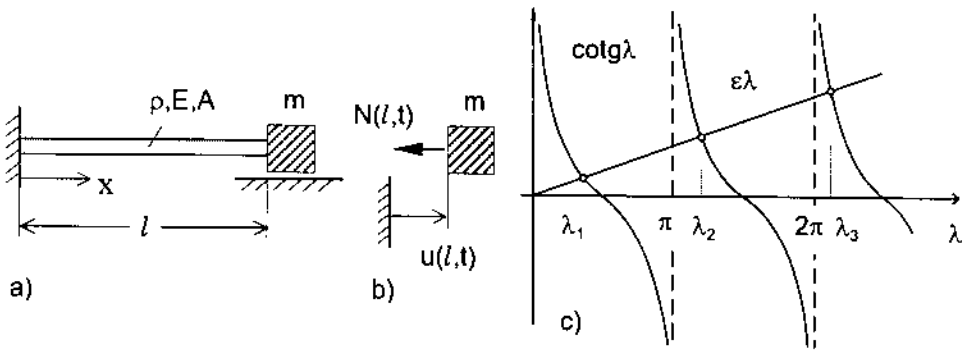
$$u(0,t) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow A^* = 0$$

Điều kiện biên bên phải (xem hình 3.3b)

$$EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -m\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} \rightarrow EAX'(l) = m\omega^2 X(l)$$

$$\rightarrow EAB\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l = m\omega^2 B\sin\frac{\omega}{c}l$$

$$\rightarrow \operatorname{cotg}\frac{\omega}{c}l = \frac{m\omega c}{EA}$$



Hình 3.3

Ta đưa vào các ký hiệu: $\lambda = \frac{\omega l}{c}$; $\varepsilon = \frac{m}{\rho A l}$

và chú ý đến $c^2 = \frac{E}{\rho}$, từ phương trình trên ta suy ra:

$$\operatorname{cotg}\lambda = \varepsilon\lambda \tag{3.13}$$

Phương trình đặc trưng (3.13) là một phương trình siêu việt. Giải phương trình này bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị (hình 3.3c), ta nhận được một tập vô hạn các giá trị riêng λ_k. Từ đó suy ra các tần số riêng và các hàm riêng:

$$\omega_k = \lambda_k\frac{c}{l} = \lambda_k\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}},; \; k = 1,2,\cdots$$

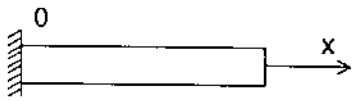
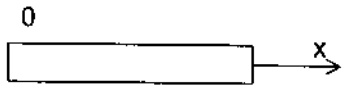
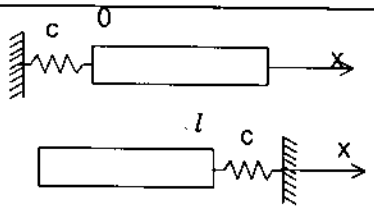
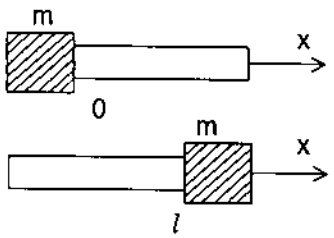
$$X_k(x) = B_k\sin\lambda_k\frac{x}{l}$$

Nếu ta chọn ε = 1, thì ta có:

$$\lambda_1 = 0{,}860 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \lambda_1 \frac{c}{l} = 0{,}860\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

$$\lambda_2 = 3{,}425 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \lambda_2 \frac{c}{l} = 3{,}425\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

Bảng 3.1. Các điều kiện biên của một vài dạng liên kết

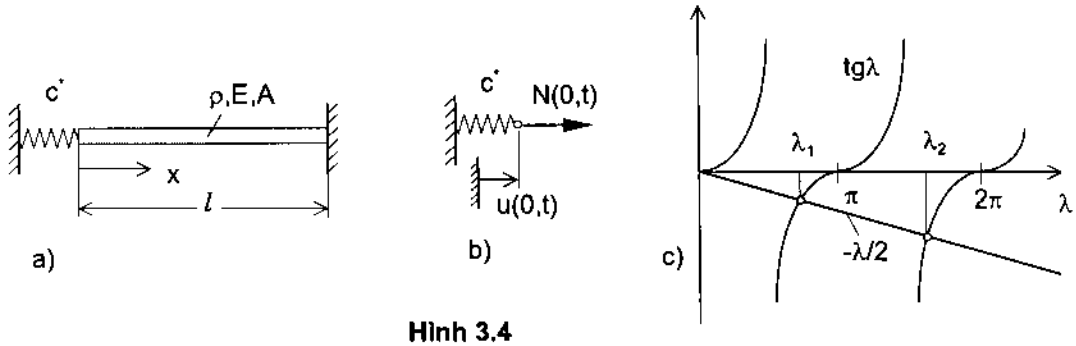
Sơ đồ	Dạng liên kết	Điều kiện biên
	Ngàm	$u(0,t) = 0$
	Đầu tự do	$EA\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$
	Lực dọc	$EA\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = N$
	Liên kết đàn hồi tuyến tính	$EA\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = cu$ $EA\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -cu$
	Đầu thanh gắn khối lượng	$EA\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $EA\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Thí dụ 3.3: Một thanh thẳng bên phải bị ngàm chặt, bên trái gắn vào lò xo như hình 3.4a. Hãy xác định tần số riêng cơ bản khi $c^* = 2EA/l$.

Lời giải: Các điều kiện biên có dạng:

$$EA\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = c^* u(0,t) \text{ (xem hình 3.4b)} \rightarrow EAX'(0) = c^*X(0): \quad EAB\frac{\omega}{c} = c^* A^*$$

$$u(l,t) = 0 \rightarrow X(l) = 0: A^* \cos\frac{\omega}{c} l + B\sin\frac{\omega}{c} l = 0$$



Hình 3.4

Như thế ta nhận được hệ hai phương trình để xác định A* và B:

$$c^*A^* - EA\frac{\omega}{c}B = 0$$

$$A^*\cos\frac{\omega}{c}l + B\sin\frac{\omega}{c}l = 0$$

Điều kiện cần để A^* và B không đồng thời triệt tiêu là định thức hệ số bằng không. Từ đó ta suy ra phương trình đặc trưng

$$c^*\sin\frac{\omega}{c}l + EA\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l = 0 \rightarrow \text{tg}\lambda + \frac{\lambda}{2} = 0 \qquad (3.14)$$

với: $\lambda = \dfrac{\omega l}{c}$

Phương trình đặc trưng (3.14) là phương trình siêu việt. Ta có thể giải phương trình này bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị (hình 3.4c). Ta có tần số riêng cơ bản:

$$\lambda_1 = 2{,}29 \rightarrow \omega_1 = \lambda_1\frac{c}{l} = 2{,}29\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

Chú ý rằng ứng với mỗi ω_k ta có một hàm riêng $X_k(x)$. Nghiệm tổng quát của phương trình (3.3) có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$$

Khi xét tới lực cản ngoài tỷ lệ bậc nhất với vận tốc $\partial u/\partial t$, phương trình vi phân dao động dọc tự do của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi (3.3) bây giờ có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.15)$$

trong đó 2δ là hệ số cản.

Áp dụng phương pháp Bernoulli khai triển theo các hàm riêng ta tìm nghiệm phương trình (3.15) dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) \tag{3.16}$$

Trong đó $X_k(x)$ là các hàm riêng, được xác định từ phương trình:

$$\frac{d^2X_k}{dx^2} + \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 X_k = 0 \tag{3.17}$$

Thế biểu thức (3.16) vào phương trình (3.15) ta được:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\ddot{T}_k(t)\, X_k(x) + 2\delta\dot{T}_k(t)\, X_k(x) - c^2 T_k(t)\, X_k''(x)] = 0 \tag{3.18}$$

Chú ý đến (3.17) $c^2 X_k''(x) = -\omega_k^2 X_k(x)$, phương trình (3.18) có dạng:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\ddot{T}_k(t) + 2\delta\dot{T}_k(t) + \omega_k^2 T_k(t)\right] X_k(x) = 0$$

Do tính chất của các hàm riêng: $\int_0^l X_j(x) X_k(x)dx \quad \begin{cases} = 0 & \text{khi } k \neq j \\ \neq 0 & \text{khi } k = j \end{cases}$

ta suy ra $\ddot{T}_k(t) + 2\delta\dot{T}_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = 0,\ k = 1,2,\cdots$ (3.19)

Việc tìm nghiệm của phương trình (3.19) đã được xét kỹ trong chương 1. Khi $\delta < \omega_k$ ta có dao động tắt dần

$$T_k(t) = e^{-\delta t}(C_k \cos\omega_k^* t + D_k \sin\omega_k^* t)$$

trong đó $\omega_k^* = \sqrt{\omega_k^2 - \delta^2}$

Biểu thức nghiệm (3.16) bây giờ có dạng:

$$u(x,t) = e^{-\delta t} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos\omega_k^* t + D_k \sin\omega_k^* t) X_k(x) \tag{3.20}$$

Các hằng số C_k, D_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Lực cản trong của thanh là lực cản chiếm ưu thế. Về thực chất loại lực này tuân theo quy luật phi tuyến. Trong phạm vi lý thuyết dao động tuyến tính, để đơn giản ta thừa nhận hệ thức:

$$F_{ct} \sim \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$$

Điều đó có nghĩa quan hệ giữa ứng suất biến dạng có dạng:

$$\sigma = E\left(u + \alpha\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{3.21}$$

Khi đó phương trình dao động dọc tự do của thanh có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta_e \frac{\partial u}{\partial t} - 2\delta_i \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.22}$$

Trong đó $2\delta_e$ là hệ số cản ngoài, $2\delta_i$ là hệ số cản trong.

3.1.3. Dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi

a. Thanh một đầu ngàm, một đầu tự do chịu tác dụng một lực dọc

Trong đoạn này ta xét bài toán dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi một đầu ngàm, một đầu tự do. Tại đầu tự do tác dụng một lực dọc thay đổi tuần hoàn theo t là $F(t) = F_0 \cos\Omega t$ (hình 3.5a).

Phương trình vi phân dao động dọc của thanh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.23}$$

Các điều kiện biên bây giờ có dạng:

$$u(0,t) = 0;\ N(l,t) = EAu'(l,t) = F_0 \cos\Omega t \tag{3.24}$$

Sự khác nhau giữa bài toán này và bài toán dao động tự do là điều kiện ở biên tự do. Bài toán này được gọi là bài toán có điều kiện biên không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất bao gồm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất $u_h(x,t)$ và một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất $u_p(x,t)$

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t) \tag{3.25}$$

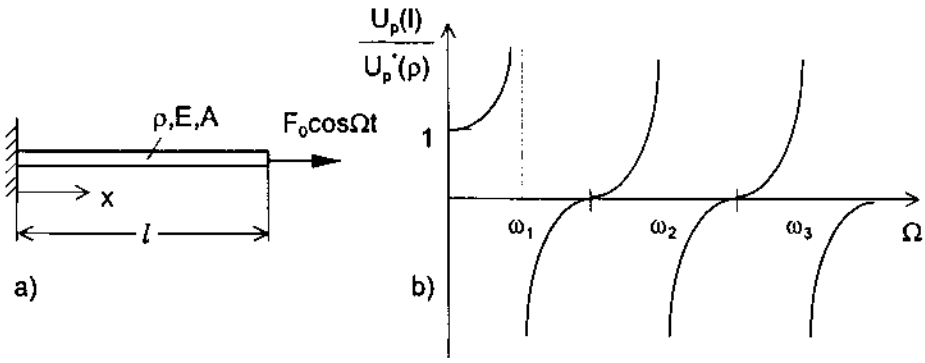
Nghiệm tổng quát của bài toán tuyến tính thuần nhất có dạng:

$$u_h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \cos\omega_k t + D_k \sin\omega_k t\right) X_k(x) \tag{3.26}$$

trong đó ω_k là các tần số riêng, $X_k(x)$ là các hàm riêng.

Ta tìm nghiệm riêng bài toán tuyến tính không thuần nhất dưới dạng:

$$u_p(x,t) = U_p(x)\cos\Omega t \tag{3.27}$$



Hình 3.5

Thế biểu thức (3.27) vào phương trình (3.23) ta nhận được phương trình vi phân thường:

$$\frac{d^2U_p}{dx^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}U_p = 0 \tag{3.28}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.28) có dạng:

$$U_p(x) = B_1\cos\frac{\Omega}{c}x + B_2\sin\frac{\Omega}{c}x$$

Vậy ta có: $u_p(x,t) = \left(B_1\cos\frac{\Omega}{c}x + B_2\sin\frac{\Omega}{c}x\right)\cos\Omega t$ (3.29)

Các hằng số B_1 và B_2 được xác định từ các điều kiện biên (3.24)

$$u_p(0,t) = 0 \quad : B_1 = 0$$

$$EAu'_p(l,t) = F_0\cos\Omega t;\ EAB_2\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l = F_0 \rightarrow B_2 = \frac{F_0}{EA\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l}$$

Nghiệm riêng (3.27) bây giờ có dạng:

$$u_p(x,t) = \frac{F_0c}{EA\Omega}\frac{\sin\frac{\Omega}{c}x}{\cos\frac{\Omega}{c}l}\cos\Omega t \tag{3.30}$$

Nghiệm tổng quát (3.25) là tổng của hai nghiệm (3.26) và (3.30). Các hằng số C_k và D_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Trong các hệ kỹ thuật, thường tồn tại thành phần cản. Do đó với t đủ lớn, nghiệm của bài toán thuần nhất sẽ dần tới không. Ta chỉ cần quan tâm đến nghiệm riêng (3.30).

Trên hình 3.5b biểu diễn đồ thị biên độ dao động dọc của điểm cuối thanh ($x = l$) theo tần số Ω. Trong đó ký hiệu:

$$U_p(l) = \frac{F_0l}{EA}\frac{\sin\frac{\Omega}{c}l}{\frac{\Omega}{c}l\cos\frac{\Omega}{c}l};\quad U_p^*(l) = \frac{F_0l}{EA}$$

Khi $\Omega \rightarrow 0$, do $\sin\frac{\Omega}{c}l \rightarrow \frac{\Omega}{c}l$, $\cos\frac{\Omega}{c}l \rightarrow 1$ nên $\frac{U_p(l)}{U_p^*(l)} \rightarrow 1$, với $U_p^*(l) = \frac{F_0l}{EA}$ là độ dãn tĩnh của thanh. Do phương trình đặc trưng dao động dọc tự do là $\cos\frac{\omega}{c}l = 0$, (xem phương trình (3.9)), nên khi $\Omega \rightarrow \omega_k$ (tần số riêng) thì biên độ dao động cưỡng bức tăng lên vô cùng (do $\cos\frac{\omega}{c}l \rightarrow 0$). Vậy hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\Omega = \omega_k$ (k =1, 2,...). Chú ý rằng biểu thức nghiệm riêng (3.30) chỉ sử dụng được khi $\Omega \neq \omega_k$. Khi $\Omega \rightarrow \omega_k$, biểu thức nghiệm riêng có dạng:

$$u_p(x,t) = U_p(x)t\cos\Omega t \tag{3.31}$$

Việc tìm nghiệm riêng trong trường hợp này đã được xét trong các tài liệu chuyên khảo.

b. Thanh chịu tác dụng của lực dọc phân bố

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi, trên thanh chịu tác dụng của lực dọc trục cường độ p(x,t). Khi đó phương trình vi phân dao động dọc cưỡng bức không cản của thanh có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p(x,t)}{\mu} \tag{3.32}$$

Áp dụng phương pháp khai triển theo các hàm riêng, ta tìm nghiệm riêng của phương trình (3.32) dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)X_i(x) \tag{3.33}$$

Trong đó $X_i(x)$ là các hàm riêng, được xác định từ phương trình:

$$X_i''(x) + \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 X_i(x) = 0 \tag{3.34}$$

Thế biểu thức nghiệm (3.33) vào phương trình (3.32) ta có:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t)X_i(x) - c^2 q_i(t)X_i''(x)\right] = \frac{1}{\mu}p(x,t)$$

Chú ý đến (3.34) phương trình trên có dạng:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\right]X_i(x) = \frac{1}{\mu}p(x,t) \tag{3.35}$$

Nhân hai vế của phương trình (3.35) với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân theo chiều dài của thanh:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\right]\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx$$

Do tính chất trực giao của các hàm riêng, từ phương trình trên ta suy ra hệ phương trình vi phân thường

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx}{\mu\int_0^l X_k^2(x)dx} = f_k(t),\ k = 1,2,\cdots \tag{3.36}$$

Giải hệ phương trình dạng toạ độ chính (3.36) ta xác định được các hàm $q_k(t)$. Sau đó thế vào biểu thức (3.33) ta tìm được nghiệm riêng của phương trình (3.32).

3.1.4. Dao động dọc tự do của thanh có thiết diện thay đổi

Công thức (3.37) được gọi là tỷ số Rayleigh, dùng để xác định tần số riêng thấp nhất dao động tự do của thanh thẳng có thiết diện thay đổi:

$$\omega^2 = c^2 \frac{\int_0^l A(x)X'^2(x)dx}{\int_0^l A(x)X^2(x)dx} \tag{3.37}$$

Giả sử $A(\xi) = A_0 f(\xi)$ và đặt $x = l\xi$; $\lambda^2 = \dfrac{\omega^2 l^2}{c^2}$; $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$

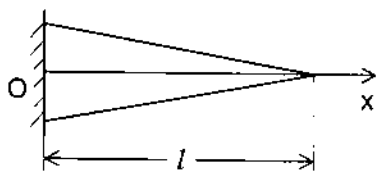
$$\rightarrow \lambda^2 = \frac{\int_0^l f(\xi)X'^2 d\xi}{\int_0^l f(\xi)X^2 d\xi} \tag{3.38}$$

Thí dụ 3.4: Sử dụng tỷ số Rayleigh tìm trị riêng bé nhất của nêm hình nón như hình 3.6.

Lời giải: Phương trình thiết diện:

$A(x) = A_0 f(x)$

$f(\xi) = (1-\xi)^2$



Hình 3.6

Ta chọn hàm $X(\xi)$ dạng: $X(\xi) = \sin\dfrac{\pi}{2}\xi$

Hàm $X(\xi)$ chọn như trên, thoả mãn các điều kiện biên. Thật vậy:

$u(0,t) = 0 \rightarrow X(0) = 0$

$EA\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \rightarrow X'(1) = \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

Ta tính các tích phân ở tử số và mẫu số của hệ thức (3.38)

$$\int_0^1 f(\xi)X'^2(\xi)d\xi = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 (1-\xi)^2\cos^2\frac{\pi}{2}\xi\, d\xi = \frac{\pi^2+6}{24}$$

$$\int_0^1 f(\xi)X^2(\xi)d\xi = \int_0^1 (1-\xi)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\xi\, d\xi = \frac{\pi^2-6}{6\pi^2}$$

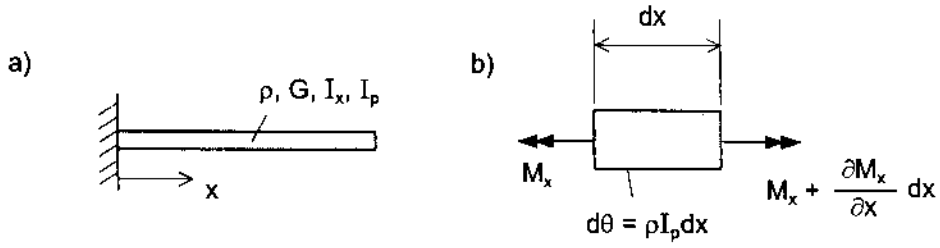
Từ đó suy ra $\lambda^2 = \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{\pi^2+6}{\pi^2-6} = 1{,}025\pi^2 \rightarrow \lambda = 1{,}0125\pi$

3.1.5. Dao động xoắn của thanh thẳng

Trước hết ta thiết lập phương trình vi phân dao động xoắn của thanh đồng chất, thiết diện biến đổi như hình 3.7a. Ta tách ra xét một phân tố nhỏ như hình 3.7b. Mômen quán tính là $d\theta = \rho dx \int_A r^2 dA = \rho I_p dx$, với I_p là mômen quán tính thiết diện cực. Áp dụng định lý mômen động lượng ta có:

$$d\theta\ddot{\varphi} = -M_x + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right) + q(x,t)dx$$

$$\rightarrow \rho I_p(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial M_x}{\partial x} = q(x,t) \tag{3.39}$$



Hình 3.7

Trong đó ρ là mật độ khối lượng, q(x,t) là cường độ mômen ngoại lực tác dụng lên thanh. Theo định luật Hook đối với thanh xoắn ta có hệ thức:

$$M_x = GI_d(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{3.40}$$

trong đó G là môđun cắt, I_d là mômen quán tính thiết diện xoắn, $GI_d(x)$ là độ cứng chống xoắn. Đối với mặt cắt hình tròn $I_d = I_p$. Nói chung I_d khác I_p.

Thế biểu thức (3.40) vào phương trình (3.39) ta nhận được phương trình vi phân dao động xoắn của thanh thẳng thiết diện biến đổi:

$$\rho I_p(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[GI_d(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = q(x,t) \tag{3.41}$$

Khi thanh đồng chất có thiết diện không đổi, I_p và I_d là các hằng số. Nếu ta đưa vào các ký hiệu:

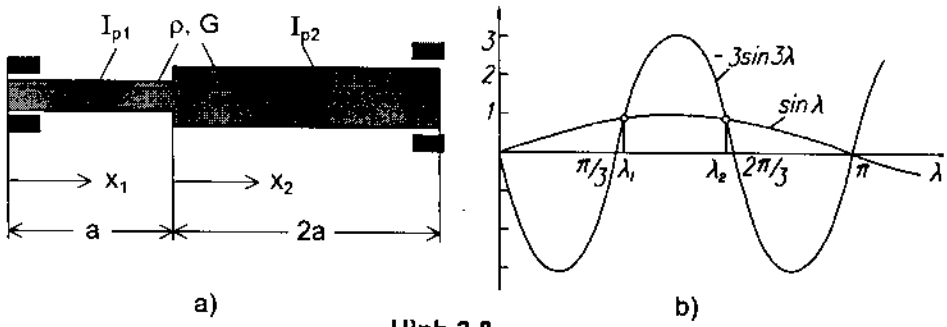
$$c^2 = \frac{GI_d}{\rho I_p};\ \mu = \rho I_p \tag{3.42}$$

thì từ phương trình (3.41) ta nhận được phương trình dao động xoắn của thanh đồng chất có thiết diện không đổi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{q(x,t)}{\mu} \tag{3.43}$$

Phương trình dao động xoắn của thanh thẳng có dạng giống như phương trình dao động dọc của thanh. Cách giải phương trình này đã được trình bày chi tiết ở trên.

Thí dụ 3.5: Trục đồng chất hình trụ tròn đặt trên hai ổ đỡ như hình 3.8. Cho biết $I_{p1}/I_{p2} = 1/2$. Hãy xác định tần số riêng cơ bản dao động xoắn của trục.



Hình 3.8

Lời giải: Ta chọn trên mỗi đoạn của trục toạ độ x_1 và x_2 như hình 3.8a. Theo cách tìm nghiệm ở trên ($\varphi(x,t) = X(x).T(t)$) ta có:

$$X_1(x_1) = A_1 \cos\frac{\omega}{c}x_1 + B_1 \sin\frac{\omega}{c}x_1$$

$$X_2(x_2) = A_2 \cos\frac{\omega}{c}x_2 + B_2 \sin\frac{\omega}{c}x_2$$

Các điều kiện biên và điều kiện chuyển tiếp có dạng:

$$M_x^{(1)}(0,t) = 0 \rightarrow X_1'(0) = 0: \; B_1 = 0$$

$$M_x^{(2)}(2a,t) = 0 \rightarrow X_2'(2a) = 0: -A_2\frac{\omega}{c}\sin\frac{\omega}{c}2a + B_2\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}2a = 0$$

$$\varphi_1(a,t) = \varphi_2(0,t) \rightarrow X_1(a) = X_2(0): \; A_1\cos\frac{\omega}{c}a = A_2$$

$$M_x^{(1)}(a,t) = M_x^{(2)}(0,t) \rightarrow I_{p1}X_1'(a) = I_{p2}X_2'(0): \; -I_{p1}A_1\frac{\omega}{c}\sin\frac{\omega}{c}a = I_{p2}B_2\frac{\omega}{c}$$

Từ ba phương trình cuối ta nhận được phương trình đặc trưng:

$$\cos\lambda\sin 2\lambda + \frac{1}{2}\sin\lambda\cos 2\lambda = 0$$

Trong đó $\lambda = \dfrac{\omega a}{c}$

Chú ý đến hệ thức lượng giác:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

phương trình đặc trưng có dạng:

$$\sin\lambda + 3\sin 3\lambda = 0 \qquad (3.44)$$

Giải phương trình (3.44) bằng phương pháp số hoặc bằng phương pháp đồ thị (hình 3.8b) ta được

$$\lambda_1 = 1{,}15 \rightarrow \omega_1 = \lambda_1 \frac{c}{a} = 1{,}15\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$$

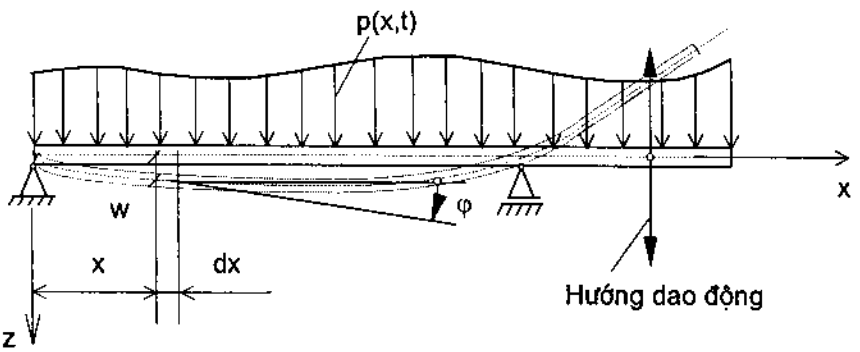
Nếu lấy $G = 0{,}81.10^5$ N/mm^2, $\rho = 7{,}89$ g/cm^3 (đối với sắt) và a = 2 m thì $\omega_1 = 1853$ s^{-1}. Do đó $f_1 = \omega_1/2\pi = 295$ s^{-1}.

3.2. DAO ĐỘNG UỐN CỦA DẦM

Khi nghiên cứu dao động dọc và dao động xoắn của thanh ta giả thiết chiều dài của thanh khá lớn so với các kích thước khác của thanh. Cũng như thế, khi nghiên cứu dao động uốn của dầm, ta giả thiết chiều dài của dầm đủ lớn so với các kích thước khác.

Khi thiết lập phương trình vi phân mô tả dao động uốn của dầm, Rayleigh (1842-1919) là người đầu tiên đã quan tâm đến tính quán tính quay của thiết diện, còn Timoshenko (1879-1972) là người đầu tiên quan tâm đến biến dạng trượt của trục dầm. Khi nghiên cứu dao động uốn của dầm, ta giả thiết rằng mặt cắt của dầm đối xứng qua hai trục. Chẳng hạn mặt cắt của dầm có dạng hình tròn, hình chữ nhật, hình chữ I. Khi mặt cắt của dầm không đối xứng qua hai trục thì dầm sẽ thực hiện dao động uốn và xoắn đồng thời. Bài toán đó ta không xét ở đây.

3.2.1 Thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của dầm



Hình 3.9

Giả sử các mặt cắt của dầm luôn luôn phẳng và vuông góc với trục võng của dầm. Trục hình học của dầm khi chưa biến dạng thì thẳng. Ta lấy đường thẳng này làm trục x, còn trục z chọn vuông góc với trục x (hình 3.9). Bỏ qua dao động xoắn và dao động dọc trục. Dầm chỉ thực hiện dao động uốn theo phương z.

Khác với bài toán tĩnh, ở đây độ võng w, góc xoay φ, mômen uốn M và lực cắt Q là các hàm của toạ độ x và thời gian t

$$w(x,t);\ \varphi(x,t);\ M(x,t);\ Q(x,t)$$

Như đã biết, quan hệ giữa độ võng và góc xoay có dạng:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \approx \varphi(x,t) \tag{3.45}$$

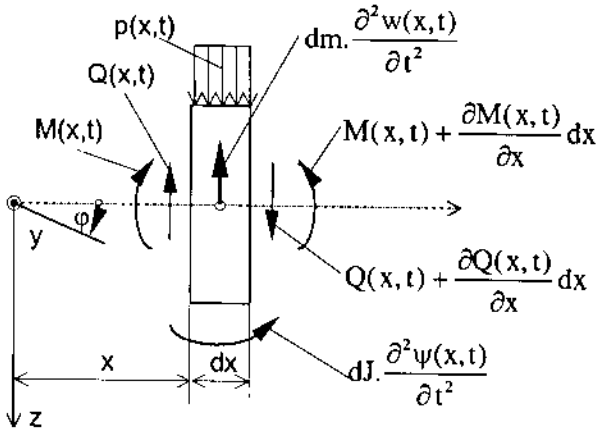
Bây giờ, để thiết lập các phương trình vi phân dao động uốn, ta tưởng tượng tách một phân tố nhỏ của dầm có chiều dài dx như hình 3.10. Trong đó góc xoay φ bằng tổng góc xoay ψ (do mômen uốn M gây nên) và góc trượt θ (do lực cắt Q gây ra)

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} = \psi + \theta \tag{3.46}$$

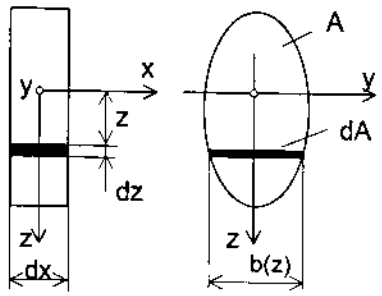
Để thiết lập các phương trình vi phân dao động uốn của dầm, ta áp dụng nguyên lý d'Alembert. Từ điều kiện cân bằng các lực theo phương z ta có:

$$-dm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx - Q + p(x,t)dx = 0 \tag{3.47}$$

trong đó dm = μ(x)dx, với μ(x) là khối lượng một đơn vị dài của dầm.



Hình 3.10



Hình 3.11

Từ điều kiện cân bằng mômen các lực, ta nhận được phương trình:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x}dx - M - Q\frac{dx}{2} - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)\frac{dx}{2} + dJ\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{3.48}$$

trong đó dJ là mômen quán tính khối của phân tố đối với trục y (hình 3.11)

$$dJ = \int z^2 dm^*$$

Nếu dầm là thanh đồng chất thì do $dm^* = \rho\, dA\, dx$, ta có hệ thức

$$dJ = \rho dx \int_A z^2 dA = \rho I(x) dx$$

trong đó $I(x) = \int_A z^2 dA$ là mômen quán tính mặt đối với trục y.

Từ các phương trình (3.47) và (3.48) ta suy ra:

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + p(x,t) \tag{3.49}$$

$$\rho I(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = Q - \frac{\partial M}{\partial x} \tag{3.50}$$

Từ [6] ta có các hệ thức sau

$$M = -E\,I(x)\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{3.51}$$

$$Q = k^* G\,A(x)\theta = k^* G\,A(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) \tag{3.52}$$

trong đó: là G môđun trượt, k* là hệ số phân bố trượt.

Như thế ta có hệ bốn phương trình vi phân với bốn hàm chưa biết là M, Q, w,ψ. Khi xây dựng các phương trình đạo hàm riêng trên, ta đã xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt và mômen quán tính quay. Lý thuyết dao động uốn của dầm dựa trên các phương trình (3.49) đến (3.52) được gọi là lý thuyết dao động uốn của dầm Timoshenko. Thế các biểu thức (3.51) và (3.52) vào các phương trình (3.49) và (3.50) ta nhận được hệ hai phương trình đạo hàm riêng cấp hai đối với độ võng w(x,t) và góc xoay ψ(x,t)

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k^* G\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right)\right] + p(x,t) \tag{3.53}$$

$$\rho I(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = k^* G\,A(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) + E\frac{\partial}{\partial x}\left[I(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right] \tag{3.54}$$

Để giải hệ hai phương trình này ta cần biết các điều kiện biên và các điều kiện đầu.

Đối với dầm đồng chất thiết diện không đổi, do A(x) và I(x) là các hằng số, từ các phương trình vi phân cơ bản ta suy ra các phương trình đơn giản hơn. Từ các phương trình (3.53) và (3.54) ta có

$$G\,k^* A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x,t) \tag{3.55}$$

$$-G\,k^* A\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = E\,I\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \rho I\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{3.56}$$

Đạo hàm phương trình (3.56) theo x rồi cộng vào phương trình (3.55) ta được:

$$0 = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x,t) + E\,I\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \rho I\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial x} \tag{3.57}$$

Mặt khác từ phương trình (3.55) ta rút ra:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\mu}{G\,k^* A}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{G\,k^* A}p(x,t)$$

Đạo hàm riêng phương trình trên theo x, rồi theo t hai lần ta được:

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\mu}{Gk^*A}\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2} + \frac{1}{Gk^*A}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial t^2} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} - \frac{\mu}{Gk^*A}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{1}{Gk^*A}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.58}$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình (3.57) ta có:

$$0 = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x,t) + EI\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\mu}{Gk^*A}\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2} + \frac{1}{Gk^*A}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}\right]$$
$$-\rho I\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} - \frac{\mu}{Gk^*A}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{1}{Gk^*A}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}\right] \tag{3.59}$$

Với chú ý $\mu = \rho A$, từ phương trình trên ta rút ra được phương trình vi phân cơ bản dao động uốn của dầm Timoshenko đồng chất thiết diện không đổi

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I\left(1 + \frac{E}{k^*G}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k^*G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}$$
$$= p(x,t) - \frac{EI}{k^*GA}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{k^*GA}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.60}$$

Nếu thanh đủ mảnh thì có thể bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt do lực cắt. Cho $k^*G \to \infty$, từ phương trình (3.60) ta suy ra phương trình:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{3.61}$$

Trong phương trình (3.61) ta vẫn còn chú ý đến ảnh hưởng của ngẫu lực quán tính quay. Theo các nghiên cứu của Rayleigh thành phần quán tính quay (ρI) chỉ có ảnh hưởng lớn đến các tần số dao động bậc cao. Đối với các vùng tần số thấp ta có thể bỏ qua thành phần quán tính quay. Cho $\rho I \to 0$, ta nhận được phương trình vi phân dao động uốn của dầm Euler-Bernoulli:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{3.62}$$

Chú ý rằng trong trường hợp dầm Euler-Bernoulli ta có quan hệ $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$.

3.2.2. Dao động uốn tự do của dầm Euler-Bernoulli đồng chất thiết diện không đổi

Trước hết ta xét dao động uốn tự do của dầm đồng chất thiết diện không đổi theo mô hình Euler-Bernoulli. Từ phương trình vi phân (3.62) ta có phương trình dao động uốn tự do:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.63}$$

Áp dụng phương pháp Bernoulli, ta tìm nghiệm của phương trình (3.63) dưới dạng

$$w(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{3.64}$$

Thế biểu thức (3.64) vào phương trình (3.63) ta được:

$$T(t)X^{(IV)}(x) + \frac{\mu}{EI}\ddot{T}(t)X(x) = 0$$

Từ đó suy ra: $$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{EI}{\mu}\frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)} \tag{3.65}$$

Do vế phải của phương trình (3.65) là hàm chỉ phụ thuộc vào x, còn vế trái là hàm chỉ phụ thuộc vào t, cho nên cả hai vế bằng một hằng số. Do có chủ định trước, ta gọi hằng số đó là ω^2. Từ đó suy ra

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \rightarrow \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \tag{3.66}$$

$$\frac{EI}{\mu}\frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)} = \omega^2 \rightarrow X^{(IV)}(x) - \frac{\mu\omega^2}{EI}X(x) = 0 \tag{3.67}$$

Nghiệm của phương trình (3.66) có dạng: $T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ (3.68)

Trong phạm vi bài toán xác định các tần số dao động riêng, ta phải tìm nghiệm phương trình (3.67). Để biểu diễn nghiệm một cách gọn gàng, ta đưa vào đại lượng không thứ nguyên λ

$$\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}l^4 \tag{3.69}$$

Khi đó, phương trình (3.67) có dạng:

$$X^{(IV)}(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 X(x) = 0 \tag{3.70}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.70) dưới dạng

$$X(x) = C_1\cos\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_2\sin\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_3\cosh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_4\sinh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) \tag{3.71}$$

Trong đó các hàm lượng giác cosx, sinx chúng ta quen biết từ học phổ thông, các hàm hyperbol coshx, sinhx chúng ta cũng đã quen biết trong giáo trình toán cao cấp. ở đây nhắc lại một ít về định nghĩa và các tính chất sơ cấp của các hàm hyperbol.

Theo định nghĩa

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\text{tgh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};\quad \cot\text{gh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Đồ thị các hàm hyperbol có dạng như hình 3.12. Từ định nghĩa trên ta dễ dàng suy ra

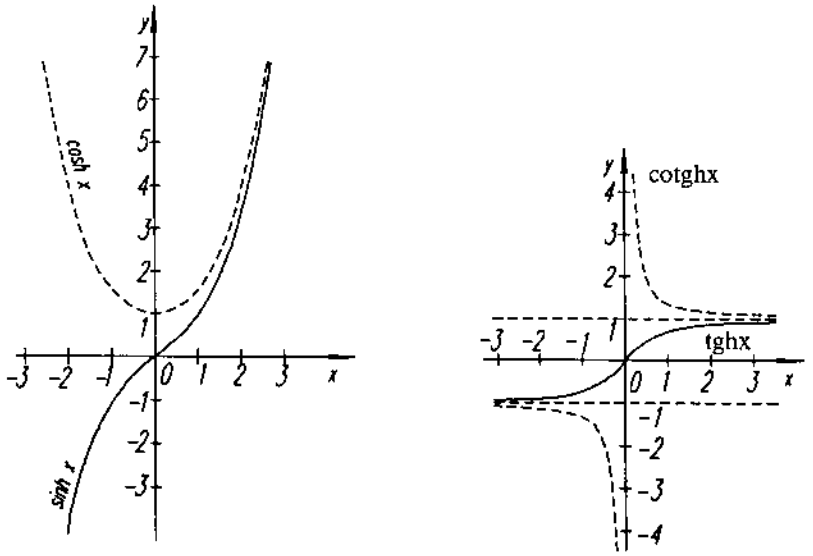
$$\sinh 0 = 0;\ \cosh 0 = 1;\ \text{tgh}0 = 0;\ \text{cotgh}0 = \pm\infty$$

Các hàm coshx, sinhx tuần hoàn chu kỳ $2\pi i$ (i là đơn vị ảo)

$$\sinh(x + 2k\pi i) = \sinh(x),\ \cosh(x + 2k\pi i) = \cosh(x),$$

còn các hàm tghx và cotghx tuần hoàn chu kỳ πi

$$\text{tgh}(x + k\pi i) = \text{tgh}(x),\ \text{cotgh}(x + k\pi i) = \text{cotgh}(x)$$



Hình 3.12

Đạo hàm các hàm sinhx, coshx có tính chất đặc biệt như sau:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 trong biểu thức (3.71) được xác định từ các điều kiện biên. Ở đầu dầm có gối tựa bản lề, độ võng và mômen uốn đều bằng không, do đó ta có:

$$X = 0,\ \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \tag{3.72a}$$

Ở đầu dầm bị ngàm chặt, độ võng và góc xoay đều bằng không, ta có:

$$X = 0,\ \frac{dX}{dx} = 0 \tag{3.72b}$$

Ở đầu dầm tự do, mômen uốn và lực cắt đều bằng không, do đó:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0,\ \frac{d^3X}{dx^3} = 0 \tag{3.72c}$$

Ở hai đầu dầm, bao giờ cũng có bốn điều kiện biên. Từ các điều kiện biên, ta có thể xác định được các hằng số trong hệ thức (3.71). Trong quá trình đó, chúng ta sẽ nhận được

phương trình đặc trưng. Giải phương trình đặc trưng ta nhận được các tần số riêng ω_j. Ứng với mỗi tần số riêng ω_j ta có một trị riêng λ_j, và theo (3.71) ta có một hàm riêng $X_j(x)$. Ta sẽ xét tính chất trực giao của các hàm riêng này. Giả sử $X_j(x)$, $X_k(x)$ là hai hàm riêng tương ứng với ω_j, ω_k. Từ phương trình (3.70) ta suy ra:

$$\frac{d^4X_j(x)}{dx^4} = \left(\frac{\lambda_j}{l}\right)^4 X_j(x)$$

$$\frac{d^4X_k(x)}{dx^4} = \left(\frac{\lambda_k}{l}\right)^4 X_k(x)$$

Nhân phương trình thứ nhất với $X_k(x)$, phương trình thứ hai với $X_j(x)$, trừ đi nhau rồi lấy tích phân theo x, ta được:

$$\frac{\lambda^4{}_j - \lambda^4{}_k}{l^4}\int_0^l X_j(x)X_k(x)dx + \int_0^l\left(X_j(x)\frac{d^4X_k}{dx^4} - X_k(x)\frac{d^4X_j}{dx^4}\right)dx = 0$$

Bằng cách tích phân từng phần, ta có:

$$\frac{\lambda_k^4 - \lambda_j^4}{l^4}\int_0^l X_j(x)X_k(x)dx = \left(X_j\frac{d^3X_k}{dx^3} - X_k\frac{d^3X_j}{dx^3} + \frac{dX_k}{dx}\frac{d^2X_j}{dx^2} - \frac{dX_j}{dx}\frac{d^2X_k}{dx^2}\right)\Bigg|_0^l$$

Chú ý đến các điều kiện biên (3.72a), (3.72b), (3.72c) ta có vế phải của phương trình trên luôn bằng không. Vậy ta có điều kiện trực giao:

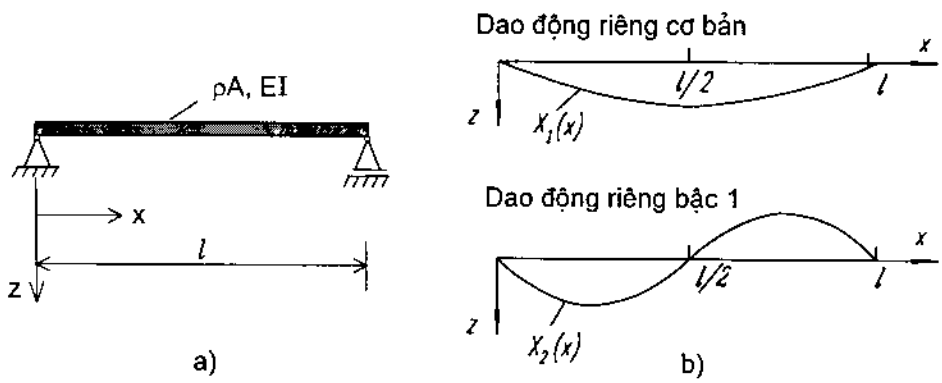
$$\int_0^l X_j(x)X_k(x)dx = 0 \quad \text{khi } j \neq k$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.63) có dạng:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left(A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t\right) \tag{3.73}$$

Các hằng số A_k,B_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Để làm thí dụ ta xét dao động uốn tự do của dầm hai đầu tựa bản lề như hình 3.13a.



Hình 3.13

Các điều kiện biên trong bài toán này là độ võng w(x,t) và mômen uốn M(x,t) triệt tiêu ở hai biên x = 0 và x = l

$$w(0,t)=0,\ \ M(0,t)=-EIw''(0,t)=0$$
$$w(l,t)=0,\ \ M(l,t)=-EIw''(l,t)=0$$

Với các điều kiện biên này, từ biểu thức nghiệm (3.71) ta suy ra 4 phương trình để xác định các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4

$$\begin{aligned}
&X(0)=0: && C_1 && +\ C_3 && =0\\
&X(l)=0: && C_1\cos\lambda+C_2\sin\lambda && +\ C_3\cosh\lambda+C_4\sinh\lambda && =0\\
&X''(0)=0: && -C_1 && +\ C_3 && =0\\
&X''(l)=0: && -C_1\cos\lambda-C_2\sin\lambda && +\ C_3\cosh\lambda+C_4\sinh\lambda && =0
\end{aligned}$$

Từ các phương trình trên và do sinh $\lambda \neq 0$ nên $C_1 = C_3 = C_4 = 0$. Mặt khác để cho $C_2 \neq 0$, ta có phương trình đặc trưng:

$$\sin\lambda = 0$$

Giải ra ta được: $\lambda_k = k\pi \rightarrow \omega_k = \left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{\dfrac{EI}{\mu}},\ k=1,2,\cdots$ (3.74)

Các hàm riêng (3.71) bây giờ có dạng:

$$X_k(x)=C_2^{(k)}\sin\lambda_k\frac{x}{l}=C_2^{(k)}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.75}$$

Khi k = 1, 2 ta có

$$\omega_1=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}},\ X_1(x)=C_2^{(1)}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\omega_2=\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}},\ X_2(x)=C_2^{(2)}\sin\frac{2\pi x}{l}$$

Các dạng dao động riêng cơ bản và dao động riêng bậc 1 vẽ trên hình 3.13b. Biểu thức nghiệm tổng quát (3.73) trong thí dụ này có dạng

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\left(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t\right) \tag{3.76}$$

ở đây ta lấy $C_2^{(k)}=1$.

Từ các điều kiện đầu:

$$w(x,0)=w_0(x),\ \ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=v_0(x)$$

ta có các biểu thức để xác định A_k và B_k

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}=w_0(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k\omega_k\sin\frac{k\pi x}{l}=v_0(x)$$

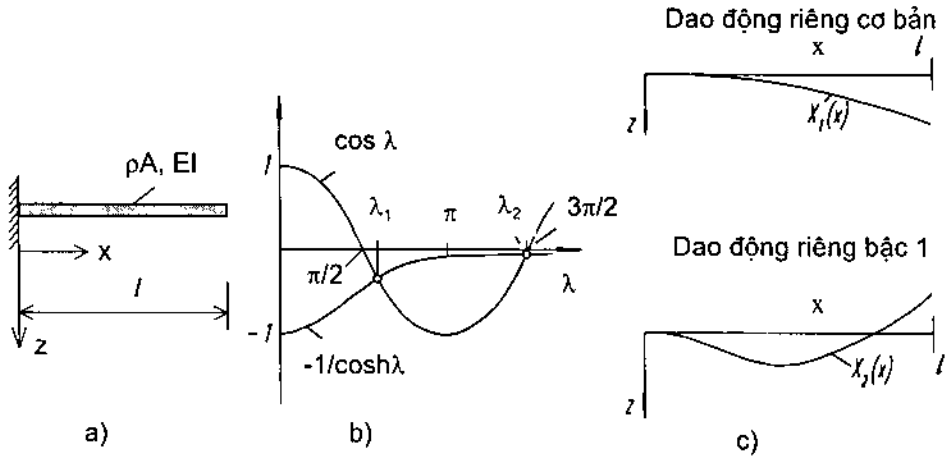
Chú ý đến tính chất trực giao của các hàm riêng (3.71), từ các biểu thức trên ta suy ra

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l w_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$B_k = \frac{2}{\omega_k l}\int_0^l v_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

Bây giờ ta chuyển sang xác định các tần số riêng và các hàm riêng của dầm một đầu ngàm chặt, một đầu tự do như hình 3.14a. Các điều kiện biên có dạng:

$$w(0,t)=0,\ \ M(l,t)=-EIw''(l,t)=0$$
$$w'(0,t)=0,\ \ Q(l,t)=-EIw'''(l,t)=0$$



Hình 3.14

Với các điều kiện biên trên từ biểu thức nghiệm (3.71) ta suy ra hệ bốn phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{aligned}
X(0)=0:&\quad C_1 + C_3 = 0\\
X'(0)=0:&\quad C_2 + C_4 = 0\\
X''(l)=0:&\quad -C_1\cos\lambda - C_2\sin\lambda + C_3\cosh\lambda + C_4\sinh\lambda = 0\\
X'''(l)=0:&\quad C_1\sin\lambda - C_2\cos\lambda + C_3\sinh\lambda + C_4\cosh\lambda = 0
\end{aligned}$$

Từ hai phương trình đầu của hệ bốn phương trình trên ta suy ra $C_1 = -C_3$, $C_2 = -C_4$. Sau đó thế vào hai phương trình sau ta được:

$$\begin{aligned}
&C_1(\cos\lambda+\cosh\lambda)+C_2(\sin\lambda+\sinh\lambda)=0\\
&C_1(\sin\lambda-\sinh\lambda)-C_2(\cos\lambda+\cosh\lambda)=0
\end{aligned}\qquad(3.77)$$

Điều kiện cần để cho C_1, C_2 không đồng nhất triệt tiệu là định thức các hệ số phải bằng không:

$$\Delta = \begin{vmatrix}\cos\lambda+\cosh\lambda & \sin\lambda+\sinh\lambda\\ \sin\lambda-\sinh\lambda & -(\cos\lambda+\cosh\lambda)\end{vmatrix}=0$$

Từ đó ta nhận được phương trình đặc trưng:

$$\cos\lambda \cosh\lambda + 1 = 0 \tag{3.78}$$

Giải phương trình (3.78) bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị ta nhận được tập vô hạn nghiệm $\lambda = \lambda_i$ (i = 1, 2, ...) (hình 3.14b). Khi biết được các giá trị riêng λ_i, từ công thức (3.68) ta xác định được các tần số riêng:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \tag{3.79}$$

Ứng với mỗi trị riêng λ_i, theo (3.71) ta có một hàm riêng:

$$X_i(x) = C_1^{(i)}\cos\frac{\lambda_i x}{l} + C_2^{(i)}\sin\frac{\lambda_i x}{l} + C_3^{(i)}\cosh\frac{\lambda_i x}{l} + C_4^{(i)}\sinh\frac{\lambda_i x}{l} \tag{3.80}$$

Từ hệ phương trình (3.77) ta suy ra:

$$C_2^{(i)} = -\frac{\cos\lambda_i + \cosh\lambda_i}{\sin\lambda_i + \sinh\lambda_i}C_1^{(i)}$$

Do đó $C_4^{(i)} = -C_2^{(i)} = \dfrac{\cos\lambda_i + \cosh\lambda_i}{\sin\lambda_i + \sinh\lambda_i}C_1^{(i)}$

Mặt khác, như trên đã chỉ ra $C_3^{(i)} = -C_1^{(i)}$.

Thế $C_2^{(i)}, C_3^{(i)}, C_4^{(i)}$ xác định theo $C_1^{(i)}$ vào biểu thức (3.80) ta được dạng cụ thể của hàm riêng:

$$X_i(x) = C_1^{(i)}\left[\cos\frac{\lambda_i x}{l} - \cosh\frac{\lambda_i x}{l} + \frac{\cos\lambda_i + \cosh\lambda_i}{\sin\lambda_i + \sinh\lambda_i}\left(-\sin\frac{\lambda_i x}{l} + \sinh\frac{\lambda_i x}{l}\right)\right]$$

Trên hình 3.14c cho ta dạng dao động riêng cơ bản và dạng dao động riêng bậc 1.

Giải bằng số phương trình đặc trưng (3.78) ta được:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1{,}875 \rightarrow \omega_1 = 3{,}516\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \\ \lambda_2 &= 4{,}694 \rightarrow \omega_2 = 22{,}034\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \end{aligned} \tag{3.81}$$

Biểu thức nghiệm tổng quát (3.73) trong trường hợp này có dạng:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)\left(A_i\cos\omega_i t + B_i\sin\omega_i t\right) \tag{3.82}$$

Các hằng số A_i, B_i được xác định từ các điều kiện đầu:

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = v_0(x)$$

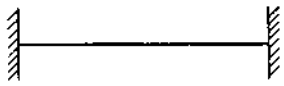
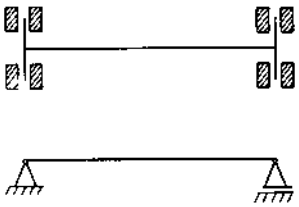
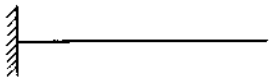
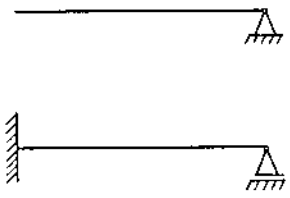
Như thế, ta có: $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)A_i = w_0(x)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i X_i(x)B_i = v_0(x)$

Nhân hai vế của các phương trình trên với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân theo x từ 0 đến l. Chú ý đến tính chất trực giao của các hàm riêng, ta được:

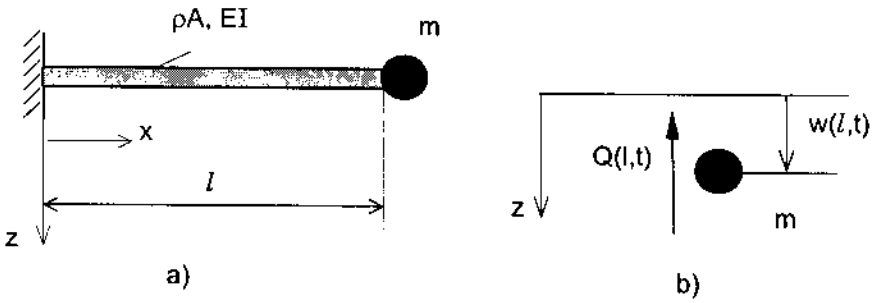
$$A_k = \frac{\int_0^l w_0(x)X_k(x)dx}{\int_0^l X_k^2(x)dx}; \quad B_k = \frac{\int_0^l v_0(x)X_k(x)dx}{\omega_k \int_0^l X_k^2(x)dx}$$

Tiến hành tính toán tương tự, ta xác định được các phương trình đặc trưng, các tần số riêng và các hàm riêng của bài toán dao động uốn tự do của dầm với các điều kiện biên khác nhau. Bảng 3.2 cho ta biết phương trình đặc trưng, các trị riêng của một số mô hình dao động uốn của dầm hay gặp.

Bảng 3.2. Các phương trình đặc trưng và các trị riêng của một số dầm

$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$	Phương trình đặc trưng	k	λ_k
	$\cos\lambda \cosh\lambda - 1 = 0$	1 2 3 n	4,730 7,853 10,996 $\approx (2n+1)\pi/2$
	$\sin\lambda = 0$	1 2 3 n	π 2π 3π $n\pi$
	$\cos\lambda \cosh\lambda + 1 = 0$	1 2 3 n	1,875 4,694 7,855 $\approx (2n-1)\pi/2$
	$tg\lambda - tgh\lambda = 0$	1 2 3 n	3,927 7,069 10,210 $\approx (4n+1)\pi/4$

Thí dụ 3.6: Cho dầm đồng chất, thiết diện không đổi, đầu bên trái ngàm chặt, đầu bên phải tự do mang khối lượng m. Cho biết $\varepsilon = m/\mu l = 3/4$. Hãy xác định các tần số riêng cơ bản và tần số riêng bậc 1 (hình 3.15).



Hình 3.15

Lời giải: Cũng giống như trường hợp dầm bị ngàm chặt một đầu, một đầu tự do ở trên, ta có ba điều kiện biên:

$$w(0,t) = 0;\ \ w'(0,t) = 0;\ \ M(l,t) = -EIw''(l,t) = 0$$

Để tìm điều kiện biên thứ tư, ta tưởng tượng tách khối lượng m khỏi dầm (hình 3.15b). từ định luật Newton II đối với khối lượng m ta có:

$$m\ddot{w}(l,t) = -Q(l,t) \rightarrow EIw'''(l,t) - m\ddot{w}(l,t) = 0$$

Với các điều kiện biên trên, từ biểu thức nghiệm (3.64), (3.68), (3.71) ta có

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_3 = 0\\
&C_2 + C_4 = 0\\
&-C_1\cos\lambda - C_2\sin\lambda + C_3\cosh\lambda + C_4\sinh\lambda = 0\\
&C_1\sin\lambda - C_2\cos\lambda + C_3\sinh\lambda + C_4\cosh\lambda\\
&+\varepsilon\lambda\left(C_1\cos\lambda + C_2\sin\lambda + C_3\cosh\lambda + C_4\sinh\lambda\right) = 0
\end{aligned}$$

Từ hai phương trình đầu ta suy ra $C_1 = -C_3$, $C_2 = -C_4$. Thế vào hai phương trình sau ta được:

$$\begin{aligned}
&-C_1(\cos\lambda + \cosh\lambda) - C_2(\sin\lambda + \sinh\lambda) = 0\\
&C_1(\sin\lambda + \varepsilon\lambda\cos\lambda - \sinh\lambda - \varepsilon\lambda\cosh\lambda)\\
&-C_2(\cos\lambda - \varepsilon\lambda\sin\lambda + \cosh\lambda + \varepsilon\lambda\sinh\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Từ điều kiện cần để cho C_1, C_2 không đồng nhất triệt tiêu, ta nhận được phương trình đặc trưng:

$$1 + \cosh\lambda\cos\lambda + \varepsilon\lambda(\sinh\lambda\cos\lambda - \cosh\lambda\sin\lambda) = 0 \qquad (3.83)$$

Khi $\varepsilon = 3/4$, giải phương trình trên bằng phương pháp số ta có

$$\lambda_1 = 1{,}320 \rightarrow \omega_1 = 1{,}742\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$
$$\lambda_2 = 4{,}060 \rightarrow \omega_2 = 16{,}48\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \qquad (3.84)$$

So sánh với kết quả (3.81) về các tần số riêng của dầm một đầu ngàm chặt, một đầu tự do ta thấy với khối lượng phụ m hai tần số riêng đầu tiên giảm đáng kể.

3.2.3. Dao động uốn cưỡng bức của dầm Euler-Bernoulli đồng chất thiết diện không đổi

Đoạn này ta xét bài toán dao động uốn cưỡng bức dầm đồng chất thiết diện không đổi theo mô hình Euler-Bernoulli, chịu tác dụng của ngoại lực theo phương vuông góc với trục của dầm. Phương trình vi phân dao động uốn cưỡng bức của dầm Euler-Bernoulli có dạng (xem phương trình (3.62))

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,t) \qquad (3.85)$$

a. Biến đổi phương trình đạo hàm riêng (3.85) về hệ phương trình vi phân thường

Áp dụng phương pháp Bernoulli, ta tìm nghiệm phương trình (3.85) dưới dạng:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)q_i(t) \qquad (3.86)$$

Trong đó $X_i(x)$ là các hàm riêng.

Thế biểu thức (3.86) vào phương trình (3.85) ta được

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[EI\, X_i^{(IV)}(x)q_i(t) + \mu X_i(x)\ddot{q}_i(t)\right] = p(x,t)$$

Từ đó suy ra: $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \frac{EI}{\mu}\frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)}q_i(t)\right]X_i(x) = \frac{p(x,t)}{\mu}$

Chú ý đến các biểu thức (3.67) ta có: $\frac{EI}{\mu}\frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)} = \omega_i^2$ (3.87)

Thế (3.87) vào phương trình trên ta được:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\right]X_i(x) = \frac{p(x,t)}{\mu}$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân dọc theo chiều dài của thanh

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\right]\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx$$

Do điều kiện trực giao của các hàm riêng ta suy ra:

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx}{\mu\int_0^l X^2{}_k(x)dx} = h_k(t) \tag{3.88}$$

Như thế ta đưa việc giải phương trình đạo hàm riêng (3.85) về việc giải hệ phương trình vi phân thường (3.88). Dưới đây ta xét một số dạng cụ thể của hàm kích động p(x,t).

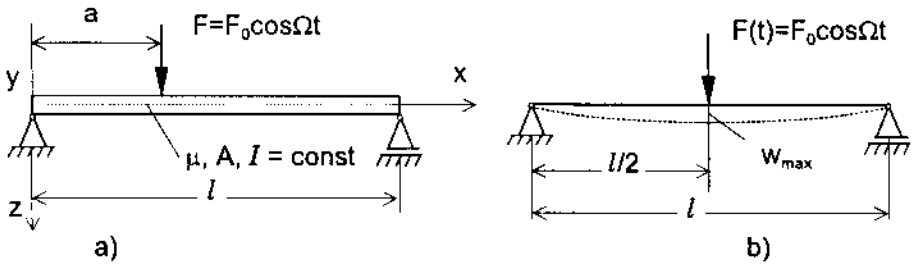
b. Lực kích động tập trung điều hoà

Xét dao động uốn của dầm chịu lực kích động tập trung điều hoà $F_0\cos\Omega t$ như hình 3.16a. Theo công thức (3.75) hàm riêng $X_k(x)$ có dạng:

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Trước hết ta tính tích phân

$$\int_0^l X_k^2(x)dx = \int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(2\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\Bigg|_0^l = \frac{l}{2}$$



Hình 3.16

Để tính tích phân $\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx$ trong trường hợp này ta sử dụng khái niệm hàm Delta-Dirac. Theo định nghĩa, hàm Delta-Dirac được xác định bởi hệ thức:

$$\delta(x-a) = 0 \text{ khi } x \neq a \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)dx = 1 \tag{3.89}$$

Hàm này có tính chất: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{3.90}$$

Áp dụng vào bài toán của ta. Từ biểu thức $p(x,t) = F_0\cos\Omega t\,\delta(x-a)$ ta suy ra:

$$\int_0^l F_0 \cos\Omega t\,\delta(x-a)X_k(x)dx = F_0\cos\Omega t\int_0^l X_k(x)\delta(x-a)dx$$

$$= F_0\cos\Omega t\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\delta(x-a)dx = F_0\cos\Omega t\sin\frac{k\pi a}{l}$$

Phương trình (3.88) bây giờ có dạng:

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{F_0\cos\Omega t\sin\frac{k\pi a}{l}}{\mu\frac{l}{2}} = \frac{2F_0\sin\frac{k\pi a}{l}}{\mu l}\cos\Omega t$$

Nghiệm dừng của phương trình trên theo chương 1 có dạng:

$$q_k(t) = \frac{2F_0\sin\frac{k\pi a}{l}}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t$$

Nghiệm cưỡng bức của phương trình (3.85) trong trường hợp này có dạng:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)q_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2F_0\sin\frac{k\pi a}{l}}{\mu l(\omega_k^2-\Omega^2)}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\Omega t$$

$$w(x,t) = \frac{2F_0\cos\Omega t}{\mu l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi a}{l}}{\omega_k^2-\Omega^2}\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (3.91)$$

Công thức (3.91) là biểu thức tính độ võng ở vị trí x bất kỳ của dầm tại thời điểm t.

Khi a = $l/2$, ta có: $w(x,t) = \frac{2F_0\cos\Omega t}{\mu l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\omega_k^2-\Omega^2}\sin\frac{k\pi x}{l}$

Chú ý rằng: $\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

Nếu ta đưa vào ký hiệu: $\eta = k^2\frac{\Omega}{\omega_k} = \frac{\Omega l^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{EI}}$

thì nghiệm (3.91) có dạng: $w(x,t) = \frac{2F_0 l^3\cos\Omega t}{\pi^4 EI}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi a}{l}}{k^4-\eta^2}\sin\frac{k\pi x}{l}$

Để minh hoạ ta lấy a = $\frac{l}{2}$ và $\eta = \frac{\Omega l^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{EI}} = 0{,}7$. Khi đó ta có thể tính độ võng ở giữa dầm một cách tương đối đơn giản (hình 3.16b)

$$w(\frac{l}{2},t)=\frac{2F_0 l^3\cos\Omega t}{\pi^4 EI}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^4-0{,}49}$$

Chú ý rằng: $\sum_{k=1,3,5,7}^{\infty}\frac{1}{k^4-0{,}49}=\frac{1}{0{,}51}+\frac{1}{80{,}51}+\frac{1}{624{,}51}+\frac{1}{1295{,}51}+\cdots\approx 1{,}975$

Do đó: $w(\frac{l}{2},t)=\frac{F_0 l^3}{24{,}65EI}\cos\Omega t$

Biên độ dao động ở giữa dầm là: $w_{max}=\frac{F_0 l^3}{24{,}65EI}$

Nếu dầm chịu tác dụng của lực $F(t) = F_0$ = const ở giữa dầm, theo [6] độ võng tĩnh ở giữa dầm là

$$w_t=\frac{F_0 l^3}{48EI}$$

Như thế độ võng động cực đại ở giữa dầm lớn gần gấp đôi độ võng tĩnh tại đó.

Ngoài ra chú ý rằng khi $\eta = k^2 \rightarrow \Omega = \omega_k$ thì xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Do có lực cản và do liên kết hình học nên biên độ dao động ở vùng cộng hưởng tăng lên khá lớn, tuy nhiên không tiến tới vô cùng như khi giả thiết bỏ qua lực cản.

3.2.4. Dao động uốn tự do của dầm Timoshenko thiết diện không đổi

Từ phương trình (3.60), cho p(x,t) = 0, ta nhận được phương trình dao động tự do của dầm Timoshenko

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho I\left(1+\frac{E}{k^*G}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2 I}{k^*G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=0 \qquad (3.92)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.92) dưới dạng:

$$w(x,t)=X(x)\cos(\omega t+\beta)$$

Thế biểu thức trên vào phương trình (3.92) và thực hiện một vài phép biến đổi sơ cấp ta nhận được phương trình vi phân thường:

$$\frac{d^4X}{dx^4}+\gamma^4 i^2(1+\alpha)\frac{d^2X}{dx^2}-\gamma^4(1-\gamma^4 i^4\alpha)X=0 \qquad (3.93)$$

Trong đó ta đưa vào các ký hiệu: $\gamma^4=\omega^2\frac{\rho A}{EI}$; $i^2=\frac{I}{A}$; $\alpha=\frac{E}{k^*G}$

Xét trường hợp dầm hai đầu có liên kết bản lề. Khi đó ta tìm nghiệm của phương trình (3.93) thoả mãn các điều kiện biên dưới dạng

$$X_k(x) = B_k \sin\frac{k\pi x}{l},\ k = 1,2,\cdots$$

Thế biểu thức trên vào phương trình (3.93) ta nhận được phương trình đặc trưng để xác định γ:

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \gamma^4 i^2(1+\alpha)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \gamma^4(1-\gamma^4 i^4\alpha) = 0$$

Phương trình trên là phương trình bậc hai đối với hàm γ^4. Giải ra ta được:

$$\gamma^4_{k1,k2} = \omega^2_{k1,k2}\frac{\rho A}{EI}$$
$$= \frac{1}{2i^4\alpha}\left[1+(1+\alpha)\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 \pm \sqrt{1+2(1+\alpha)\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 + (1-\alpha)^2\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^4}\right] \quad (3.94)$$

Khác với lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, ở đây ứng với mỗi giá trị của k ta có hai trị riêng khác nhau $\gamma_{k1} > \gamma_{k2}$. Như thế ứng với mỗi hàm riêng $X_k(x)$ ta có hai tần số riêng $\omega_{k1} > \omega_{k2}$. Sở dĩ có hiện tượng đó là vì trong lý thuyết dầm Euler-Bernoulli độ võng w và góc xoay φ có liên quan với nhau $w' = \varphi$, còn trong lý thuyết dầm Timoshenko chúng là hai đại lượng độc lập với nhau.

Về mặt kỹ thuật, người ta ít quan tâm đến các tần số cao (ứng với dấu cộng trước căn trong (3.94)). Ta xét trường hợp ứng với dấu trừ trước căn. Trong trường hợp $k\pi i/l << 1$, áp dụng khai triển:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots\ldots \qquad \text{với } |x| \le 1$$

ta có công thức gần đúng với căn thức trong (3.94):

$$\sqrt{1+2(1+\alpha)\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 + (1-\alpha)^2\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^4} = 1 + (1+\alpha)\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2$$
$$-2\alpha\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^4\left[1-2(1+\alpha)\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2\right] + \ldots\ldots$$

Từ đó ta nhận được biểu thức gần đúng xác định các tần số riêng:

$$\omega_k = k^2\pi^2\left[1-(1+\alpha)\left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2\right]\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \quad (3.95)$$

Chú ý rằng, tần số riêng của dầm Euler-Bernoulli được xác định bởi công thức:

$$\omega_k = k^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

Như thế số hạng thứ hai trong dấu ngoặc vuông của công thức (3.95) thể hiện sự khác nhau giữa các tần số riêng tính theo lý thuyết Timoshenko và lý thuyết Euler - Bernoulli. Độ lớn của số hạng này phụ thuộc vào độ mảnh $\lambda = l/i$ của dầm, vào chỉ số k và vào hệ số $1 + \alpha$. Đối với dầm có thiết diện hình chữ nhật, chiều cao h, nếu $k^* = 5/6$, $E/G = 8/3$ thì số hạng $(1+\alpha)(k\pi i/l)^2$ sẽ bằng $3{,}45(kh/l)^2$. Nếu $l/h = 10$ thì độ chênh lệch tần số riêng cơ bản (k = 1) giữa lý thuyết Timoshenko và lý thuyết Euler-Bernoulli là 3%, độ chênh lệch tần số riêng bậc 1 (k = 2) là 14%. Qua kinh nghiệm người ta thấy khi $l/k > 5h$ thì các kết quả tính toán theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli khá tốt. Ta sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko khi tỷ số l/k cỡ xấp xỉ bằng h.

3.2.5. Dao động uốn tự do của dầm Euler-Bernoulli có thiết diện thay đổi

Đối với dầm có thiết diện biến đổi việc tìm chính xác các tần số dao động riêng là bài toán khá cồng kềnh, phức tạp. Vì vậy người ta thường hay sử dụng các phương pháp gần đúng để xác định chúng. Dưới đây chúng ta trình bày một phương pháp gần đúng thông dụng để tính các tần số riêng của dầm Euler-Bernoulli: phương pháp Rayleigh

Trong các hệ bảo toàn ta có hệ thức: $T_{max} = \Pi_{max}$ (3.96)

Biểu thức thế năng biến dạng của dầm: $\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx$ (3.97)

Biểu thức động năng của dầm mà trên dầm có mang các khối lượng điểm m_i ở vị trí x_i có dạng

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\frac{\partial w(x_i,t)}{\partial t}\right]^2 \quad (3.98)$$

Giả sử dầm thực hiện dao động uốn không cản với tần số cơ bản ω. Khi đó nghiệm riêng tương ứng có dạng:

$$w(x,t) = X(x)(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = f(x)\sin(\omega t + \alpha) \quad (3.99)$$

Trong đó X(x) là hàm riêng ứng với tần số riêng ω.

Thế (3.99) vào biểu thức (3.97) ta được:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)f''^2(x)\sin^2(\omega t + \alpha)dx$$

Từ đó suy ra: $\Pi_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)f''^2(x)dx$ (3.100a)

Mặt khác, thế (3.99) vào biểu thức (3.98) ta có:

$$T = \frac{\omega^2}{2}\int_0^l \mu(x)f^2(x)\cos^2(\omega t + \alpha)dx + \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i f^2(x_i)\cos^2(\omega t + \alpha)$$

Do đó: $$T_{max} = \frac{\omega^2}{2}\left[\int_0^l \mu(x)f^2(x)dx + \sum_{i=1}^{n} m_i f^2(x_i)\right] \quad (3.100b)$$

Thế các biểu thức (3.100a), (3.100b) vào hệ thức (3.96) rồi giải ra ω^2 ta nhận được công thức Rayleigh để xác định tần số riêng cơ bản dao động uốn của dầm

$$\omega_R^2 = \frac{\int_0^l EI(x)f''^2(x)dx}{\int_0^l \mu(x)f^2(x)dx + \sum_{i=1}^{n} m_i f^2(x_i)} \quad (3.101)$$

trong đó: E là môđun đàn hồi; I(x) - mômen quán tính mặt; μ(x) - khối lượng trên một đơn vị dài của dầm.

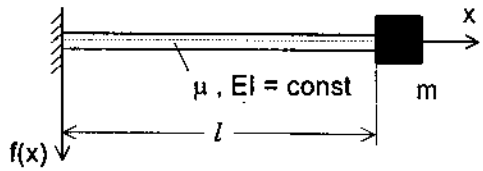
Đối với dầm có thiết diện biến đổi rất khó xác định chính xác các hàm riêng X(x). Vì vậy độ chính xác của phương pháp Rayleigh phụ thuộc vào việc chọn dạng của hàm f(x). Thông thường người ta chọn f(x) là một hàm nào đó thoả mãn các điều kiện biên của bài toán. Việc chọn dạng xác định của hàm f(x) tương đương với việc đưa vào các liên kết phụ để chuyển cơ hệ đã cho thành cơ hệ một bậc tự do. Những liên kết phụ đó nói chung làm tăng độ cứng của hệ. Do đó tần số riêng tính theo công thức Rayleigh thường lớn hơn giá trị chính xác của nó một ít.

Thí dụ 3.7: Xác định tần số dao động riêng của dầm một đầu ngàm chặt, một đầu tự do, trên đầu tự do có mang vật nặng khối lượng m (hình 3.17).

Lời giải: Ta chọn đường cong uốn của trục dao động như sau:

$$f(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^4 + a_3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_1\left(\frac{x}{l}\right) + a_0$$

trong đó các hằng số a_i được chọn sao cho f(x) thoả mãn các điều kiện biên.



Hình 3.17

Các điều kiện biên có dạng:

$x = 0: f(0) = 0,\ f'(0) = 0$

$x = l: f''(l) = 0,\ f'''(l) = 0$

Từ các điều kiện biên trên ta dễ dàng xác định các hằng số a_i

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = -4$$

Vậy $$f(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

Thế f(x) vào tử số và mẫu số của công thức (3.101) ta có:

$$\int_0^l EIf''^2(x)dx = EI\int_0^l\left[\frac{12}{l^2}\left(\frac{x}{l}-1\right)^2\right]^2 dx = \frac{144EI}{l^4}\int_0^l\left(\frac{x}{l}-1\right)^4 dx = \frac{144}{5}\frac{EI}{l^3}$$

$$\int_0^l \mu(x)f^2(x)dx + mf^2(l) = \mu\int_0^l\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]^2 dx + 9m$$

$$= \mu l\frac{104}{45} + 9m = \frac{1}{45}(104\mu l + 405m)$$

Từ đó suy ra: $\omega_R^2 = \dfrac{(144\times 45)EI}{5l^3(104\mu l + 405m)} = \dfrac{1296EI}{l^3(104\mu l + 405m)}$

Để kiểm tra độ chính xác của công thức Rayleigh, ta xét trường hợp $m = 0{,}75\mu l$. Khi đó:

$$\omega_R^2 = \frac{1296EI}{l^3(104\mu l + 405.0{,}75\mu l)} = \frac{1296}{407{,}75}\frac{EI}{\mu l^4} = 3{,}1784\frac{EI}{\mu l^4}$$

Do đó: $\omega_R = 1{,}7828\sqrt{\dfrac{EI}{\mu l^4}}$

Trường hợp m = 0, ta có:

$$\omega_R^2 = \frac{1296}{104}\frac{EI}{\mu l^4} \approx 12{,}46\frac{EI}{\mu l^4} \rightarrow \omega_R = 3{,}53\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

Giá trị chính xác của tần số riêng cơ bản theo công thức (3.81) là:

$$\omega_1 = 3{,}516\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

Vậy sai số là 0,4%.

Như vậy tần số riêng cơ bản theo công thức Rayleigh khá gần với tần số riêng tính chính xác.

3.3. DAO ĐỘNG UỐN CỦA TẤM

Tấm là phần tử kết cấu có dạng mặt phẳng mà bề dày của nó nhỏ so với các kích thước khác. Cũng như khi nghiên cứu dao động uốn của dầm, khi tính toán dao động uốn của tấm người ta sử dụng nhiều mô hình cơ học khác nhau, tuỳ theo cách đặt bài toán.

Tiêu chuẩn phân biệt quan trọng nhất là tỷ số giữa bề dày h của tấm với các kích thước bề mặt của tấm. Người ta thường phân ra bốn loại tấm: tấm rất mỏng, tấm mỏng, tấm trung bình, tấm dày. Bảng 3.3 cho ta một tổng quan về những ảnh hưởng có thể bỏ qua khi sử dụng các mô hình khác nhau của tấm.

Bảng 3.3. Sự phân loại các tấm

Đặc điểm của tấm	rất mỏng	mỏng	trung bình	dày
Chú ý đến các ứng suất vuông góc với mặt phẳng giữa	0	0	0	1
Chú ý đến biến dạng trượt	0	0	1	1
Mặt cắt phẳng	1	1	1	0
Chú ý đến các ứng suất căng màng	1	0	0	0
Chú ý đến quán tính quay	0	0	1	1

Lý thuyết tấm mỏng còn được gọi là lý thuyết tấm Kirchhoff, còn lý thuyết tấm trung bình còn được gọi là lý thuyết tấm Mindlin. Trong tài liệu này ta chỉ nghiên cứu dao động uốn của tấm mỏng theo lý thuyết của Kirchhoff (1824-1887).

3.3.1. Thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của tấm mỏng

Xét dao động uốn của tấm mỏng đồng chất bề dày h, mật độ khối ρ không đổi. Để thiết lập các phương trình dao động của tấm, ta thừa nhận các giả thiết của lý thuyết tấm mỏng cổ điển như sau:

1. Biến dạng uốn của tấm khi dao động là những biến dạng nhỏ tuân theo định luật Hooke.

2. Trong tấm luôn tồn tại một lớp trung hoà mà khoảng cách giữa các điểm của nó không thay đổi. Khi tấm đồng chất bị uốn ít, lớp trung hoà trùng với mặt cong trung bình chia đôi bề dày của tấm. Ta gọi mặt này là mặt trung hoà.

3. Các phần tử của tấm nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt trung hoà, khi tấm bị uốn vẫn nằm trên đường thẳng đó và đường thẳng đó vẫn vuông góc với mặt trung hoà.

4. Không xét đến các ứng suất vuông góc với mặt trung hoà.

5. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và quán tính quay.

Ta chọn mặt phẳng trùng với mặt trung hoà ở trạng thái chưa biến dạng làm mặt phẳng toạ độ xy, trục z được chọn vuông góc với mặt phẳng xy và hướng về phía dưới (hình 3.18). Ta ký hiệu u, v, w là các thành phần dịch chuyển của điểm M(x,y,z) của tấm tương ứng theo các trục x, y và z. Ký hiệu u_0, v_0, w_0 là các thành phần dịch chuyển tương ứng của điểm A thuộc mặt trung hoà mà MA vuông góc với mặt trung hòa. Từ các giả thiết trên ta có

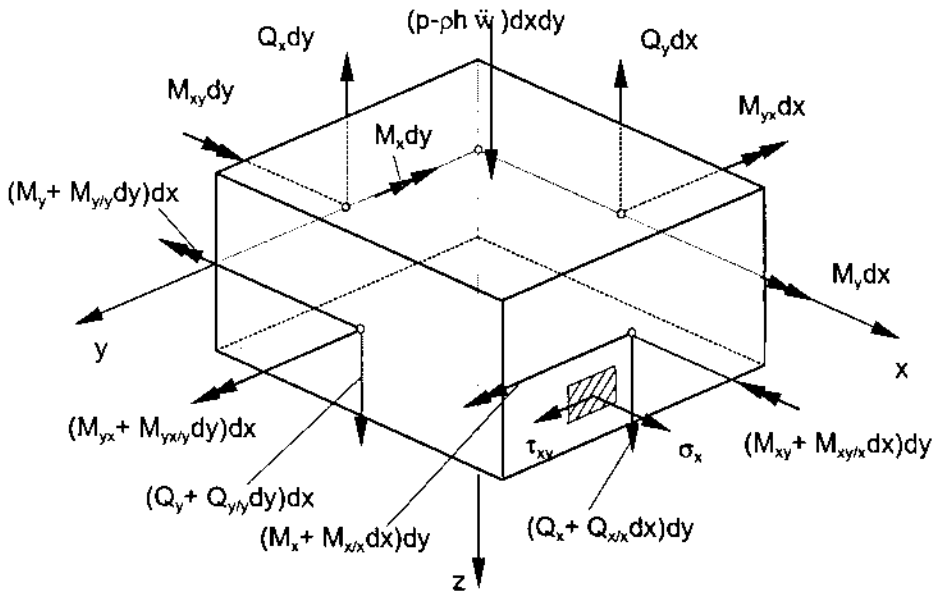
$$u_0 = v_0 = 0;\quad w_0 = w(x,y,t)$$
$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x};\quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}; \tag{3.102}$$

Với các lực và các mômen đã vẽ trên hình 3.18, áp dụng nguyên lý d'Alembert ta nhận được các phương trình sau:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(x, y, t) = 0 \tag{3.103}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \tag{3.104}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \tag{3.105}$$



Hình 3.18

Trong các phương trình trên ta sử dụng các ký hiệu:

Q_x , Q_y: Lực cắt trên một đơn vị dài ở các mặt cắt x = const, y = const theo hướng z;

M_x , M_y: Mômen uốn trên một đơn vị dài ở các mặt cắt x = const, y = const;

M_{xy}, M_{yx}: Mômen xoắn trên một đơn vị dài, vuông góc với các mặt cắt x = const, y = const, ($M_{xy} = M_{yx}$);

p(x,y,t): Tải trọng ngoài trên một đơn vị diện tích, vuông góc với mặt trung hòa;

w(x,y,t): Dịch chuyển của các điểm thuộc mặt trung hòa theo hướng z.

Thế các biểu thức (3.104) và (3.105) vào phương trình (3.103) ta được

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p(x, y, t) \tag{3.106}$$

Từ các công thức Cauchy quen thuộc trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính ta có các mối quan hệ hình học

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\ \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\ \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.107}$$

Từ các định luật Hooke đối với trạng thái ứng suất phẳng ta có:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\gamma^2}(\varepsilon_x + \gamma\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\gamma^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\gamma^2}(\varepsilon_y + \gamma\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\gamma^2}\left(\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\gamma)}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Từ đó ta tính được các mômen mặt cắt

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -(1-\gamma)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{3.109}$$

trong đó: $$D = \frac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)} \tag{3.110}$$

được gọi là độ cứng trụ của tấm, còn γ là hệ số Poisson.

Thế các biểu thức (3.109) vào phương trình (3.106) ta nhận được phương trình dao động uốn của tấm mỏng theo lý thuyết Kirchhoff

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,y,t) \tag{3.111}$$

Nếu ta sử dụng toán tử: $$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{3.112}$$

thì phương trình (3.111) có dạng:

$$D\Delta^2 w(x,y,t) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,y,t) \tag{3.113}$$

Nếu chỉ xét dao động uốn tự do của tấm, ta lấy p(x,y,t) = 0, từ phương trình (3.113) ta suy ra:

$$D\Delta^2 w(x,y,t) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.114}$$

Ta tìm nghiệm phương trình (3.114) dưới dạng:

$$w(x,y,t) = W(x,y)\sin(\omega t + \delta) \tag{3.115}$$

Thế (3.115) vào phương trình (3.114) ta có:

$$\Delta^2 W(x,y) - \beta^4 W(x,y) = 0 \tag{3.116}$$

trong đó ta ký hiệu: $\beta^4 = \dfrac{\omega^2 \rho h}{D}$ (3.117)

Phương trình (3.116) có thể viết dưới dạng:

$$(\Delta - \beta^2)(\Delta + \beta^2)W(x,y) = 0 \tag{3.118}$$

trong đó toán tử Δ có dạng:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Nghiệm của phương trình (3.118) có thể tìm dưới dạng:

$$W(x,y) = W_1(x,y) + W_2(x,y)$$

trong đó W_1, W_2 tương ứng là nghiệm của các phương trình:

$$\Delta W_1 + \beta^2 W_1 = 0 \tag{3.119a}$$

$$\Delta W_2 - \beta^2 W_2 = 0 \tag{3.119b}$$

Nếu xét bài toán dao động tự do của tấm trên nền đàn hồi, thì phương trình dao động tự do của tấm có dạng:

$$D\Delta^2 w + cw + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Phương trình này có thể đưa về dạng (3.116), nếu ta ký hiệu $\beta^4 = \dfrac{\omega^2 \rho h - c}{D}$

3.3.2. Dao động uốn của tấm mỏng hình chữ nhật

a. Dao động tự do

Phương trình vi phân đối với các dạng dao động riêng của tấm

$$\Delta^2 W - \beta^4 W = 0 \tag{3.120}$$

Trong hệ toạ độ Đề các vuông góc, phương trình (3.120) có dạng:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)W - \beta^4 W = 0 \tag{3.121}$$

Ta tìm nghiệm phương trình trên dưới dạng $W = W_1 + W_2$. Trong đó W_1, W_2 là nghiệm của các phương trình:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]W_1+\beta^2 W_1=0 \tag{3.122}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]W_2-\beta^2 W_2=0 \tag{3.123}$$

Áp dụng phương pháp tách biến ta tìm được nghiệm của phương trình (3.122) có dạng:

$$\begin{aligned}W_1(x,y)&=A_1\sin\alpha x\sin\gamma y+A_2\sin\alpha x\cos\gamma y\\&+A_3\cos\alpha x\sin\gamma y+A_4\cos\alpha x\cos\gamma y\end{aligned} \tag{3.124}$$

Với $\alpha^2+\gamma^2=\beta^2$

Cũng áp dụng phương pháp tách biến, ta tìm nghiệm phương trình (3.123) dưới dạng:

$$W_2(x,y)=X(x)\,Y(y) \tag{3.125}$$

Thế biểu thức (3.125) vào phương trình (3.123) ta được

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}-\beta^2XY=0\rightarrow\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\beta^2 \tag{3.126}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{d^2X}{dx^2}-\bar{\alpha}^2X=0 \tag{3.127}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}-\bar{\gamma}^2Y=0 \tag{3.128}$$

$$\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2=\beta^2 \tag{3.129}$$

Nghiệm của các phương trình (3.127), (3.128) có dạng:

$$X(x)=C_1\sinh\bar{\alpha}x+C_2\cosh\bar{\alpha}x \tag{3.130a}$$

$$Y(y)=C_3\sinh\bar{\gamma}y+C_4\cosh\bar{\gamma}y \tag{3.130b}$$

Nghiệm của phương trình (3.120) bây giờ có dạng

$$\begin{aligned}W(x,y)&=A_1\sin\alpha x\sin\gamma y+A_2\sin\alpha x\cos\gamma y\\&+A_3\cos\alpha x\sin\gamma y+A_4\cos\alpha x\cos\gamma y\\&+A_5\sinh\bar{\alpha}x\sinh\bar{\gamma}y+A_6\sinh\bar{\alpha}x\cosh\bar{\gamma}y\\&+A_7\cosh\bar{\alpha}x\sinh\bar{\gamma}y+A_8\cosh\bar{\alpha}x\cosh\bar{\gamma}y\end{aligned} \tag{3.131}$$

Trong đó $\alpha^2+\gamma^2=\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2=\beta^2$ (3.132)

Các giá trị của α, γ, $\bar{\alpha},\bar{\gamma}$ và do đó của β và ω được xác định từ các điều kiện biên.

Thí dụ 3.8: Tìm tần số riêng và dạng dao động riêng của tấm hình chữ nhật tựa bản lề trên bốn cạnh biên x = 0, x = a, y = 0, y = b.

Lời giải: Do liên kết ở trên biên là tựa bản lề, nên chuyển vị và mômen uốn ở trên biên đều bằng không. Ta có:

Trên biên x = 0, x = a: $w = 0,\ M_x = 0 \rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

Trên biên y = 0, y = b: $w = 0,\ M_y = 0 \rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

Ở trên các biên x = 0, x = a từ điều kiện w = 0 ta suy ra $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. Tương tự như vậy, ở trên các biên y = 0, y = b do w = 0 nên ta có $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Kết hợp với các điều kiện biên ở trên ta suy ra:

$$x = 0,\ x = a\ :\ W = 0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \tag{3.133}$$

$$y = 0,\ y = b\ :\ W = 0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \tag{3.134}$$

Từ các điều kiện biên ở trên, các hằng số $A_2, ..., A_8$ trong biểu thức (3.131) đều bằng không. Vậy ta còn:

$$W(x,y) = A_1 \sin\alpha x \sin\gamma y \tag{3.135}$$

Để cho $A_1 \neq 0$ ta suy ra:

$$\sin\alpha a = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_m a = m\pi, \qquad m = 1,2,....$$

$$\sin\gamma b = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_n b = n\pi, \qquad n = 1,2,....$$

Từ đó ta có $\beta^2_{m,n} = \pi^2\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{b}\right)^2\right]$

Các tần số riêng của tấm hình chữ nhật tựa bản lề trên bốn cạnh có dạng

$$\omega_{m,n} = \beta^2_{m,n}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \pi^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \qquad (m, n = 1, 2...) \tag{3.136}$$

Từ biểu thức dạng dao động riêng (3.135) và tần số riêng (3.136) ta suy ra nghiệm của bài toán dao động tự do của tấm hình chữ nhật tựa bản lề trên bốn cạnh biên:

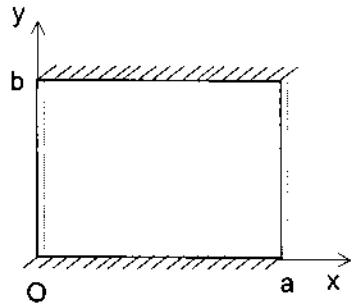
$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \sin\left\{\pi^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]t + \delta_{m,n}\right\} \tag{3.137}$$

trong đó các hằng số $A_{m,n}$ và $\delta_{m,n}$ được xác định từ các điều kiện đầu.

Thí dụ 3.9 : Xác định phương trình đặc trưng và các tần số riêng của tấm hình chữ nhật hai biên x = 0, x = a tựa bản lề, hai biên y = 0, y = b ngàm chặt (hình 3.19).

Lời giải: Tìm nghiệm dưới dạng (3.131) không thuận tiện. Ta tìm nghiệm phương trình (3.120) dưới dạng:

$$W(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{a}Y(y) \tag{3.138}$$



Hình 3.19

Rõ ràng với m = 1, 2, ... biểu thức nghiệm này sẽ thoả mãn tự động điều kiện biên:

$$x = 0,\ x = a\ :\quad W = 0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

Thế biểu thức nghiệm (3.138) vào phương trình (3.120) ta nhận được phương trình vi phân thường:

$$Y^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y'' + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - \beta^4\right)Y = 0 \tag{3.139}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp bốn (3.139) có dạng

$$Y(y) = C_1\cosh\lambda y + C_2\sinh\lambda y + C_3\cos\bar{\lambda}y + C_4\sin\bar{\lambda}y \tag{3.140}$$

trong đó

$$\lambda = \sqrt{\beta^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2}},\qquad \bar{\lambda} = \sqrt{\beta^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2}} \tag{3.141}$$

Do các biên y = 0, y = b ngàm chặt, các điều kiện biên có dạng:

$$y = 0,\ y = b\ :\ w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0\ \rightarrow\ Y = 0,\ Y' = 0$$

Vậy nghiệm (3.140) phải thoả mãn các điều kiện biên sau

$$(Y)_{y=0} = C_1 + C_3 = 0 \tag{3.142a}$$

$$(Y')_{y=0} = \lambda C_2 + \bar{\lambda}C_4 = 0 \tag{3.142b}$$

$$(Y)_{y=b} = C_1\cosh\lambda b + C_2\sinh\lambda b + C_3\cos\bar{\lambda}b + C_4\sin\bar{\lambda}b \tag{3.142c}$$

$$(Y')_{y=b} = \lambda C_1\sinh\lambda b + \lambda C_2\cosh\lambda b - \bar{\lambda}C_3\sin\bar{\lambda}b + \bar{\lambda}C_4\cos\bar{\lambda}b \tag{3.142d}$$

Để cho C_1, C_2, C_3, C_4 không đồng thời triệt tiêu, ta suy ra phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \bar{\lambda} \\ \cosh\lambda b & \sinh\lambda b & \cos\bar{\lambda}b & \sin\bar{\lambda}b \\ \lambda\sinh\lambda b & \lambda\cosh\lambda b & -\bar{\lambda}\sin\bar{\lambda}b & \bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}b \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó suy ra:

$$2\lambda\bar{\lambda}(\cos\bar{\lambda}b\cosh\lambda b-1)+(\bar{\lambda}^2-\lambda^2)\sin\bar{\lambda}b\sinh\lambda b=0 \tag{3.143}$$

Chú ý đến các ký hiệu (3.141), từ (3.143) ta giải ra các nghiệm $(\beta a)_{m,n}$. Sau đó chú ý đến hệ thức (3.117) ta tính được tần số riêng ω

$$\omega=\beta^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}=\frac{(\beta a)^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{3.144}$$

Đối với tấm hình vuông (a = b) ta có:

$$(\beta a)^2_{1,1}=28{,}946\ ;\quad (\beta a)^2_{2,1}=54{,}743\ ;\quad (\beta a)^2_{1,2}=69{,}320\ ;\ldots..$$

Cuối cùng chú ý rằng biểu thức nghiệm (3.131) không phải luôn luôn thuận tiện khi biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình (3.120).

b. Dao động cưỡng bức

Dao động uốn cưỡng bức không cản của tấm hình chữ nhật được biểu diễn bởi phương trình vi phân

$$D\Delta^2 w(x,y,t)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=p(x,y,t) \tag{3.145}$$

Để tìm nghiệm riêng của phương trình (3.145) ta có nhiều phương pháp khác nhau. Nếu đã biết được các hàm riêng của bài toán dao động tự do $W_{m,n}(x,y)$, ta có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (3.145) dưới dạng:

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{m,n}(x,y)q_{m,n}(t) \tag{3.146}$$

trong đó $q_{m,n}(t)$ là các hàm cần tìm. Dựa trên tính chất trực giao của các hàm riêng, ta có thể tìm phương trình vi phân đối với hàm $q_{m,n}(t)$ tương tự như trong tính toán dao động uốn của dầm.

Thế biểu thức (3.146) vào phương trình (3.145) ta được:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[D\Delta^2 W_{m,n}(x,y)q_{m,n}(t)+\rho h W_{m,n}(x,y)\ddot{q}_{m,n}(t)\right]=p(x,y,t) \tag{3.147}$$

Do $W_{m,n}(x,y)$ là các hàm riêng nên theo phương trình (3.116) với chú ý đến (3.117) ta có:

$$D\Delta^2 W_{m,n}=\omega^2_{m,n}\rho h W_{m,n} \tag{3.148}$$

Thế biểu thức (3.148) vào phương trình (3.147) ta suy ra:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho h\ddot{q}_{m,n}(t)+\omega^2_{m,n}\rho h q_{m,n}(t)\right]W_{m,n}(x,y)=p(x,y,t) \tag{3.149}$$

Nhân hai vế của phương trình (3.149) với hàm riêng $W_{i,j}(x,y)$ rồi lấy tích phân trên diện tích mặt tấm, chú ý đến tính chất trực giao của hàm riêng:

$$\iint_A W_{m,n} W_{i,j} dxdy \begin{cases} = 0 \text{ khi } i \neq m \text{ hoặc } j \neq n \\ \neq 0 \text{ khi } i = m \text{ và } j = n \end{cases}$$

ta nhận được hệ phương trình vi phân thường đối với $q_{m,n}(t)$:

$$\ddot{q}_{m,n}(t) + \omega_{m,n}^2 q_{m,n}(t) = \frac{1}{\rho h} f_{m,n}(t) \tag{3.150}$$

với
$$f_{m,n}(t) = \frac{\iint_A p(x,y,t) W_{m,n}(x,y) dxdy}{\iint_A W_{m,n}^2(x,y) dxdy} \tag{3.151}$$

Việc giải phương trình (3.150) đã được xét kỹ trong chương 1.

Nếu không biết trước các hàm riêng $W_{m,n}(x,y)$ ta áp dụng phương pháp Ritz-Galerkin tìm nghiệm phương trình (3.145) dưới dạng

$$w(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{i,j}(x,y) q_{i,j}(t) \tag{3.152}$$

trong đó $\varphi_{i,j}(x,y)$ được chọn sao cho thoả mãn các điều kiện biên.

PHẦN II

DAO ĐỘNG TÀU THUỶ

CHƯƠNG 4

NHẬN XÉT CHUNG VỀ DAO ĐỘNG TÀU THỦY

4.1. TỔNG QUAN VỀ DAO ĐỘNG TÀU THUỶ

Thân tàu thuỷ có thể xem là một hệ không gian bao gồm nhiều phần tử kết cấu có gân (gờ). Hệ này có phổ tần số riêng dày đặc. Thân tàu chịu kích động bởi một số lượng lớn các lực kích thích với phổ tần số cũng dày đặc như vậy, gây ra những dao động. Những dao động này là sự pha trộn phức tạp các dao động có các tần số khác nhau. Do vậy, không tránh được các hiện tượng cộng hưởng.

Với một con tàu hoàn chỉnh phải triệt tiêu hoặc giảm bớt các dao động không được phép, nói chung phải sử dụng các biện pháp rất tốn kém. Do vậy, cần có sự nghiên cứu càng sớm càng tốt về ảnh hưởng của trạng thái dao động tàu thuỷ.

Các cố gắng về mặt này của các kỹ sư tập trung chủ yếu vào các công việc sau:

- Giảm thiểu các lực kích động thuỷ lực qua các bố trí các bộ phận đẩy (xung lực) và hình dạng phía sau của tàu.

- Quan tâm đến các kích động dao động, động lực học của máy khi thiết kế các thiết bị máy.

- Tính toán sơ bộ tình trạng dao động của thân tàu và các bộ phận kết cấu của nó, lưu tâm đến kết quả tính toán này để tránh các dao động không được phép.

- Đo dao động của toàn bộ con tàu hoặc một bộ phận hoàn chỉnh của tàu ở tại bến cảng và trong hành trình chạy, rồi phân tích kết quả đo.

Sự kích động của các dao động cơ học lên tàu xảy ra do sự thay đổi áp suất gây nên bởi chân vịt vào phần ngoài ở phạm vi chân vịt, do sự thay đổi của các lực tác dụng lên chân vịt, qua lực quán tính và mômen lực quán tính tự do của các máy móc chính và phụ, và qua sóng biển.

Chủ yếu ở đây là các lực kích động thuỷ lực. Bởi vậy phải có các cố gắng để các lực kích động này ở mức thấp nhất có thể, thông qua việc bố trí tương ứng các bộ phận tạo sức đẩy và hình dạng tàu thuỷ ở mức thấp nhất có thể.

Những vấn đề liên quan trên ở trên thuộc vào phạm vi của động lực học thuỷ lực tàu thuỷ. Sự hiểu biết về mặt này đã được mở rộng đáng kể trong thời gian gần đây và đã có khả năng tính toán các lực kích động thuỷ lực phụ thuộc vào các tham số thiết kế, với độ chính xác đủ dùng.

Các kích động động lực học máy do các lực quán tính và mômen lực quán tính không cân bằng được xác định khá dễ dàng. Khi thiết kế các thiết bị máy bên cạnh việc phải đạt được các yêu cầu kỹ thuật và kinh tế thông thường ta cũng phải cố gắng giảm các kích động dao động càng ít càng tốt.

Việc bố trí và làm cân đối các dải thân tàu một cách hợp lý theo quan điểm dao động dẫn đến việc tính toán trạng thái dao động của nó. Do vậy sự phát triển, thường xuyên cải thiện các phương pháp thường gặp về tính toán dao động riêng và dao động cưỡng bức của thân tàu và các phần cấu trúc của nó là nhiệm vụ quan trọng của kỹ sư kỹ thuật tàu thuỷ.

Do cấu trúc rất phức tạp của thân tàu như là một hệ không gian các tấm có gân, trạng thái dao động của nó cũng liên quan đến các dao động của các phần thuộc hệ và bản thân chúng ít nhiều cũng liên quan với nhau. Từ các quan sát riêng lẻ sẽ cho ta thấy các dạng dao động đặc biệt trội hơn hẳn. Dao động toàn thể và cục bộ của thân tàu được phân biệt theo ý nghĩa trên.

Chúng ta nghiên cứu dao động thân tàu tổng thể khi các chuyển vị ngang và dọc của trục dài của tàu hoặc là sự quay xung quanh trục này trội hơn so với các biên độ dao động của các dải thân tàu riêng. Trong trường hợp này, thân tàu có thể quan niệm như là một dầm trên mặt nước, trong đó không cần chú ý sự kết nối với các hệ toạ độ địa phương.

Mặt khác, chúng ta khảo sát dao động cục bộ, khi sự ghép nối các dao động của các cấu trúc cục bộ với các cấu trúc lân cận và với dao động tổng thể của thân tàu là nhỏ bé, mà ảnh hưởng của nó được phép bỏ qua. Với nghĩa đó, cấu trúc cục bộ sẽ được tách từ bộ tổng thể để nghiên cứu.

Đặc biệt, các kết nối chặt chẽ của các cấu trúc cục bộ riêng lẻ với dao động tổng thể có thể được hiểu qua các tổ hợp mô hình hoá dầm lý tưởng với các dao động cục bộ. Các tính toán sơ bộ của dao động dầm có mức độ chính xác đủ dùng trong hầu hết các trường hợp thực tế.

Ngược lại, các tính toán về dao động cục bộ còn gặp phải các quan sát chưa đủ độ tin cậy. Chúng tự giới hạn chung ở các tính toán của các cấu trúc địa phương đặc biệt.

Bên cạnh dao động thân tàu còn xuất hiện dao động uốn, dọc, xoắn của trục truyền động mà các tính toán của nó là cần thiết.

Một số vấn đề khác trên tàu thuỷ là gối đỡ đàn hồi của các máy móc. Trong trường hợp riêng biệt ngay cả các phần trên của tàu cũng được kết nối đàn hồi với thân tàu, với cách thức như vậy ta giữ được mức độ dao động được phép trong các phòng ngủ, phòng làm việc.

Việc đo dao động tàu thuỷ có một ý nghĩa lớn. Với việc so sánh các giá trị đo được và giá trị tính toán cho phép kết luận về mô hình đưa ra áp dụng, các phương pháp tính toán và nảy sinh các tham số. Bên cạnh các phép đo trong hành trình chạy còn có các nghiên cứu về các kích động nhân tạo, các dao động đặc biệt của con tàu được kích động dao động ngay ở bến cảng. Việc sử dụng các dấu hiệu đo đạc, sự phân tích chúng và đánh giá cũng đóng một vai trò khá lớn.

4.2. CÁC NGUỒN KÍCH ĐỘNG LÊN TÀU THUỶ

Các kích động quan trọng nhất của những dao động cơ học trên tàu thuỷ là các thay đổi của các lực dọc trục, lực ngang (ở vùng nước chảy phía sau) và các mômen tác dụng lên chân vịt cũng như việc thay đổi áp lực gây ra bởi chân vịt.

Các đại lượng lực tác dụng lên chân vịt được truyền tới trục dẫn và các ổ trục trên thân tàu trường hợp cộng hưởng uốn khi gặp phải, có thể các lực này tăng lên một cách đáng kể và dẫn tới các dao động có hại trên thân tàu. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, các lực tác động lên phía đuôi tàu do việc thay đổi áp lực là cơ bản. Ngoài ra, các tác dụng của dao động kích động còn xuất phát từ các lực khối lượng và các mômen khối lượng mất cân bằng của các máy chính và máy phụ, cũng như từ các máy khác được đặt trên boong. Các lực khí thể trong động cơ đốt trong cũng gây nên các dao động kích động.

Cuối cùng có thể sóng biển cũng là nguyên nhân gây ra dao động đàn hồi của thân tàu. Bên cạnh đó, các kích động đặc biệt do Slamming đóng một vai trò đáng quan tâm.

4.2.1. Kích động dao động do chân vịt

Chân vịt là nguồn kích động quan trọng nhất cho các dao động của tàu thủy. Bởi vậy, nhiều cố gắng đã được thực hiện để nghiên cứu các quy luật có liên quan và để tìm ra các phương pháp có hiệu quả nhằm giảm thiểu các lực kích động này. Các vấn đề có liên quan đến điều này thuộc về phạm vi của thuỷ động lực học tàu thủy và không phải là đối tượng của quyển sách này. Ở đây chỉ mô tả những hiện tượng quan trọng nhất không thông qua việc khảo sát về mặt giải tích.

4. 2.1.1. Kích động do khối lệch tâm của chân vịt

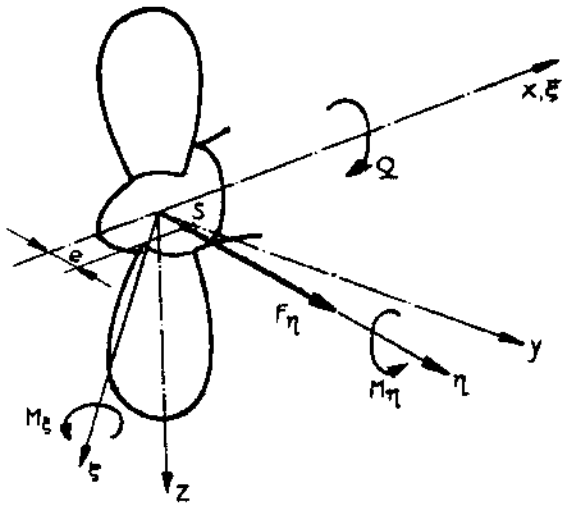
Do các độ lệch bởi chế tạo không thể tránh khỏi, trục quay và trục quán tính chính của chân vịt không trùng nhau một cách chính xác. Thông qua đó, xuất hiện các lực quán tính và các mômen quán tính. Hình 4.1 chỉ ra các mối quan hệ về mặt hình học.

x, y, z là các trục của hệ tọa độ tĩnh, ξ, η, ς là các trục tọa độ của hệ gắn với chân vịt, trục ξ trùng với trục quay, và trục η đi qua khối tâm của chân vịt.

Do độ lệch tâm e, xuất hiện một lực li tâm quay cùng với chân vịt:

$$F_\eta = em\Omega^2 \tag{4.1}$$

Ta biểu thị chúng như là lực tĩnh do khối lệch tâm gây ra. m biểu thị khối lượng của chân vịt và Ω là vận tốc góc của chân vịt.



Hình 4.1. Khối lệch tâm tĩnh và động lực của chân vịt.

Lực tĩnh do lệch tâm này là một lực kích động bậc một, có nghĩa là chúng có tần số bằng tần số quay của chân vịt. Nếu trục quay không trùng với trục quán tính chính, khi đó xuất hiện thêm một mômen quán tính tuần hoàn theo số vòng quay.

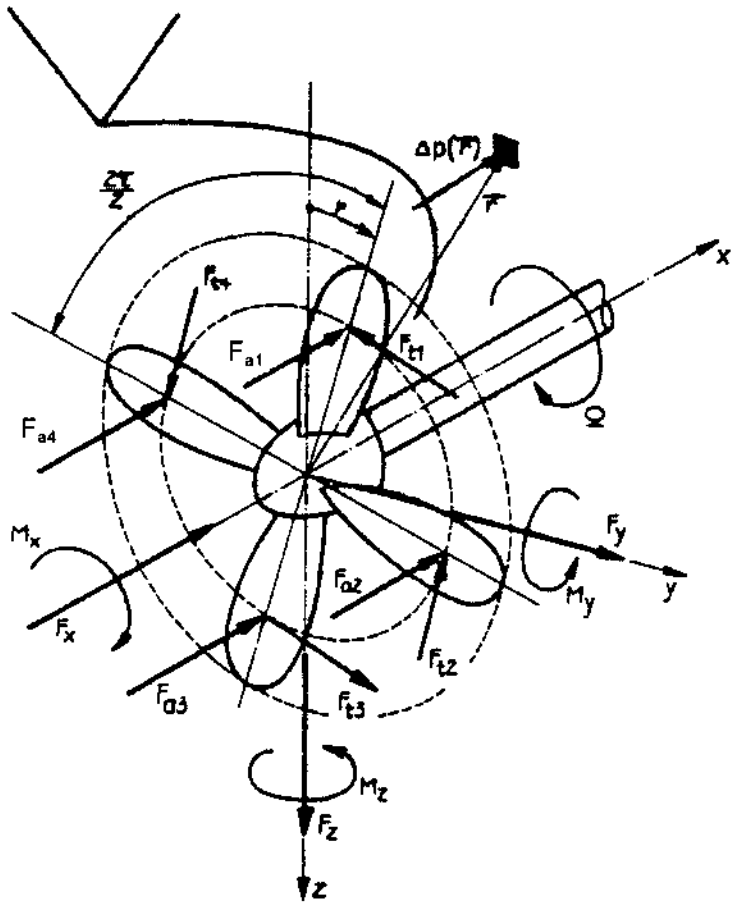
$$\begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\varsigma \end{bmatrix} = \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_{\xi\varsigma} \\ -I_{\xi\eta} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Ở đây ta coi gần đúng vận tốc góc là hằng số. $I_{\xi\varsigma}$ và $I_{\xi\eta}$ là mômen quán tính chữ nhật lấy theo các trục gắn chặt với vật rắn ξ, η, ς.

Ngoài các lực lệch tâm này còn xuất hiện các sự lệch khối lượng thuỷ động lực, khi mà từng cánh chân vịt riêng rẽ không được cân bằng. Theo đó, độ dốc khác nhau có ảnh hưởng rất lớn. Những lực và mômen lực tác động lên chân vịt được chỉ ra ở hình 4.2. Tại mỗi cánh thứ k của chân vịt tác động một lực hướng trục F_{ak} theo hướng x và một lực tiếp tuyến F_{tk} theo hướng chu vi. Hợp lực của chúng dưới dạng vectơ:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma F_{ak} \\ -\Sigma F_{tk} \cos\left[\varphi + \frac{2\pi}{Z}(k-1)\right] \\ -\Sigma F_{tk} \sin\left[\varphi + \frac{2\pi}{Z}(k-1)\right] \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

k = 1, 2, ..., z, trong đó z là số cánh của chân vịt



Hình 4.2. Lực và mômen lực ở chân vịt.

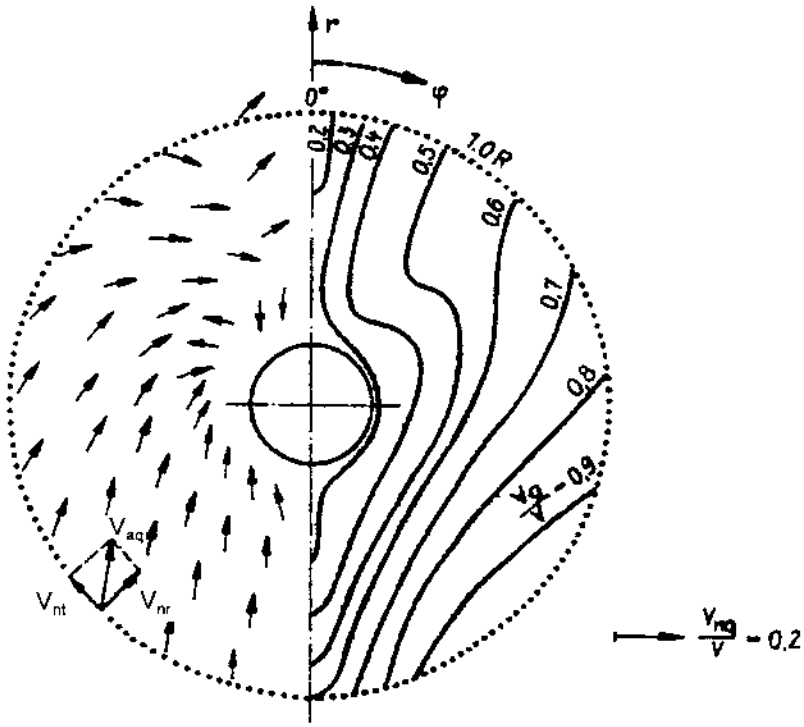
Các lực khác nhau của riêng từng cánh tạo ra một mômen:

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Sigma F_{tk} r_k \cos\left[\varphi + \frac{2\pi}{Z}(k-1)\right] \\ \Sigma F_{tk} r_k \sin\left[\varphi + \frac{2\pi}{Z}(k-1)\right] \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Cả hai vectơ này quay cùng với số vòng quay của chân vịt. Với tham số hình học của chân vịt đã biết cho phép tính toán được các vectơ này.

4.2.1.2. Các kích động gây ra bởi luồng nước do chân vịt

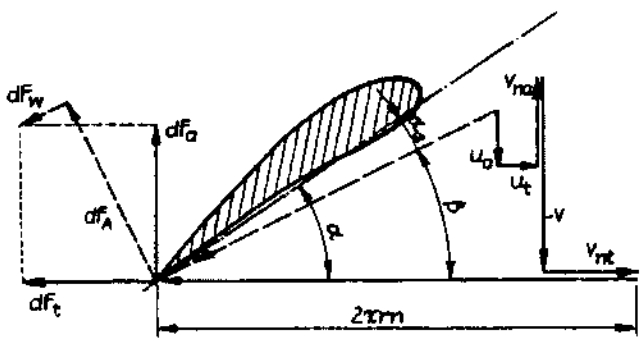
Luồng nước xung quanh chân vịt là không đều. Hình 4.3 chỉ ra một ví dụ của việc phân bố luồng nước tiếp tuyến và hướng kính trong mặt phẳng của chân vịt của một tàu thuỷ.



Hình 4.3

Trong đó v là vận tốc của tàu thủy, $v_a = v - v_{na}$ là vận tốc luồng nước phía trước, v_{na} là tốc độ luồng phía sau theo hướng trục; v_{nt}, v_{nr} là các thành phần tiếp tuyến và hướng kính của vận tốc luồng phía sau v_{nq}.

Do tính không đều của vận tốc luồng nước phía trước, chân vịt chịu tác động do các lực và các mômen thay đổi có chu kỳ theo mọi hướng, ngay cả khi vận tốc của tàu và tốc độ quay của chân vịt không thay đổi. Việc xuất hiện những lực biến đổi này được biểu diễn một cách đơn giản trong hình 4.4.



Hình 4.4. Lực và vận tốc ở mặt cắt chân vịt tại luồng phía sau tàu.

Trong đó u_a và u_t là các vận tốc bổ sung được tạo ra bởi chính bản thân chân vịt. Các vận tốc của luồng nước phía sau v_{na} và v_{nt} phụ thuộc vào φ, tác động lên vị trí góc của chân vịt $\alpha_e(\varphi)$ và tương ứng với các lực đẩy và tiếp tuyến khác nhau dF_a và dF_t. Mọi sự thay đổi của luồng tạo ra tại các biên của cánh chân vịt các luồng xoáy. Bởi vậy chân vịt làm việc không dừng. Với trường hợp luồng phía sau đã biết cho phép biểu diễn vận tốc luồng phía sau $v_{na}(\varphi)$, $v_{nt}(\varphi)$ thành chuỗi Fourier. Các thành phần điều hòa của góc $\alpha_e(\varphi)$ được xác định bởi biểu thức:

$$\alpha_e(\varphi) = \alpha - \operatorname{arctg}\frac{v - v_{na}(\varphi) + u_a}{2r\pi n - v_{nt}(\varphi) - u_t} \tag{4.5}$$

Nhờ việc tuyến tính hóa cho phép thiết lập các mối quan hệ trực tiếp giữa các thành phần điều hòa của $\alpha_e(\varphi)$ và các lực tác dụng tại cánh của chân vịt. Đối với từng cánh riêng, ta tích phân theo toàn bộ bán kính các lực tiếp tuyến $F_{tk}(\varphi)$ và lực đẩy $F_{ak}(\varphi)$, sau đó lấy tổng các đại lượng này trên toàn bộ các cánh của chân vịt, k = 1, 2,..., z, nó cho phép xác định được lực đẩy $F_x(\varphi)$, các thành phần lực cắt theo hướng thẳng đứng và nằm ngang $F_y(\varphi)$ và $F_z(\varphi)$, mômen xoắn $M_T(\varphi)$ và mômen uốn $M_y(\varphi)$ và $M_z(\varphi)$ tác động lên chân vịt (xem hình 4.2). Các điều hòa có hiệu quả cho mômen đẩy và quay là m = i.z, cho lực cắt và mômen uốn là m = i.z ± 1 (i = 1, 2, 3). Phương pháp này đã được biết từ trước, chúng cho khả năng tính toán các lực và mômen kích động với độ chính xác đủ dùng. Nhưng việc xác định vị trí pha của chúng vẫn gặp sai số khá lớn.

Việc tính toán này tuy nhiên gặp khó khăn do luồng không gian không dừng, được hình thành xung quanh chân vịt và gặp phải nhiều bong bóng nước. Nếu thực sự tại luồng xung quanh của cánh chân vịt, áp lực giảm xuống gần bằng áp lực của hơi nước thì tại các vị trí này hình thành các khoảng rỗng chứa khí và hơi nước. Việc di chuyển của các bong bóng này làm thay đổi vị trí, dạng và độ lớn của góc luồng. Chúng gặp nhau khi áp lực trong luồng lại tăng hơn áp lực của hơi nước. Hiệu ứng này ảnh hưởng cơ bản đến các lực tác dụng lên chân vịt

4.2.1.3. Xung áp lực kích động từ chân vịt lên thân tàu

Ngoài chân vịt vận tốc của tàu cũng bị biến đổi, do số cánh chân vịt là hữu hạn và các áp lực tác động lên thân tàu biến đổi với nhịp độ của cánh chân vịt đã tạo ra một sự thay đổi có tần số gọi là tần số tấm. Sự thay đổi của áp lực này có tần số là ν = i.n.z (i = 1, 2, 3) trong đó z là số cánh của chân vịt; n là số vòng quay /phút. Các bong bóng gặp phải trên cánh của chân vịt một cách thường xuyên hoặc tuỳ từng thời điểm làm gia tăng xung áp lực này. Hiện nay đã có nhiều phương pháp số khác nhau để tính toán xung áp lực này nhờ mối quan hệ với sự hình thành bong bóng.

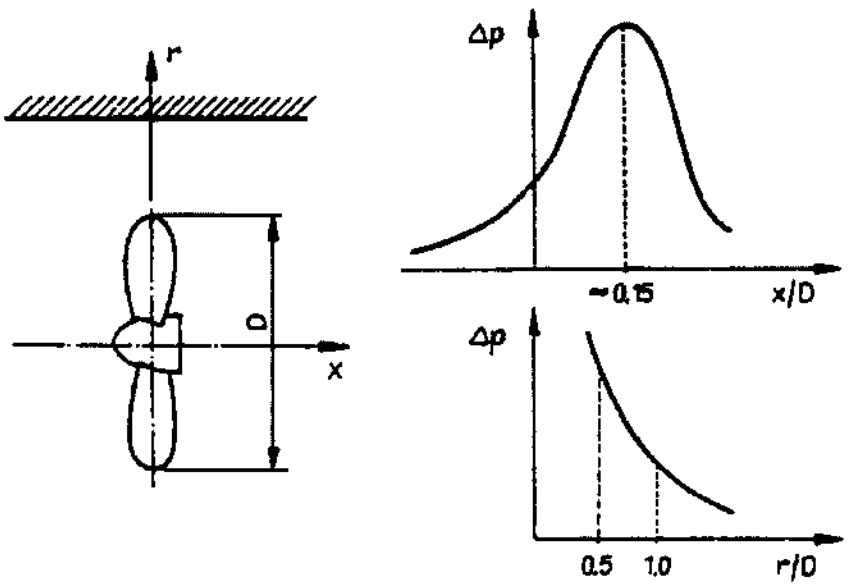
Sự phù hợp của các kết quả tính toán trên với các giá trị đo được trên tàu và mô hình tàu tuy nhiên vẫn còn là một vấn đề.

Các kinh nghiệm từ trước đến nay đã chỉ ra rằng xung áp lực kích động do chân vịt có một ảnh hưởng rất lớn đáng quan tâm đến dao động kích động của thân tàu, các dao động này đã được truyền qua trục chân vịt đến thân tàu.

Đặc biệt các bong bóng nước tại chân vịt tác dụng khá nhiều đến độ lớn của xung áp lực.

Trong hình 4.5 mô tả một ví dụ của đồ thị xung áp lực về mặt nguyên lý.

Trong đó ta có thể nhận thấy rằng xung áp lực lớn nhất khoảng 0,15 D gặp phải trước mặt phẳng chân vịt và xung này giảm nhanh với bán kính R. Từ đó suy ra rằng giữa chân vịt và lớp vỏ bên ngoài phải duy trì một khoảng cách đủ lớn.



Hình 4.5. Xung áp lực đối với chân vịt không bị xâm thực khí.

4.2.2. Các kích động dao động động lực lên tàu thuỷ

Các máy chính và máy trợ giúp được dùng hầu hết bằng động cơ diesel trong ngành đóng tàu thủy thời trước. Các lực quán tính và mômen quán tính bắt nguồn từ những động cơ này tạo ra các dao động có hại. Các máy trợ giúp chỉ kích động dao động các vùng trực tiếp xung quanh chúng, bởi vì năng lượng cần thiết cho việc kích động dao động toàn thể không đủ. Ngoài ra, các động cơ này đa phần có các ổ đỡ đàn hồi nhờ đó có khả năng khử các dao động nhiều bậc cao. Như vậy, ta chỉ quan tâm chủ yếu đến kích động dao động của máy chính.

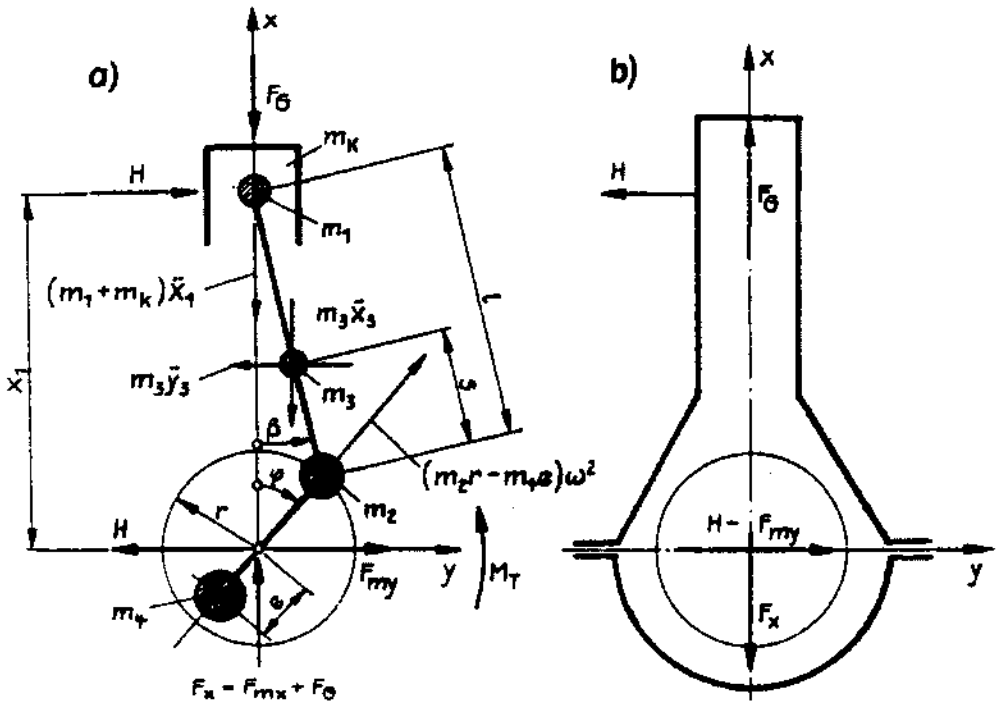
4.2.2.1. Kích động bởi rôto cứng

Các rôto cứng tạo ra các lực và mômen quán tính nếu chúng có các lượng mất cân bằng tĩnh hoặc động lực. Các mối liên hệ có liên quan được chỉ ra trong phần 4.2.1.1 ở một ví dụ về chân vịt. Chúng có thể được truyền một cách trực tiếp lên các rôto khác đặt trên boong tàu.

Các kích động lên tàu như vậy có thể xuất phát từ các bánh đà không được cân bằng hoàn toàn và phần quay của động cơ điện hoặc là tuôc bin.

4.2.2.2. Kích động do các lực và mômen quán tính trong động cơ đốt trong

Các lực và các mômen quán tính tự do tác động từ động cơ đốt trong dẫn tới các dao động nhiễu của thân tàu. Trong nhiều tài liệu động lực học của cơ cấu tay quay - con trượt đã được trình bày một cách cụ thể. Bởi vậy việc nghiên cứu dưới đây giới hạn trong một vài chú ý và bổ sung riêng



Hình 4.6. Các lực và mômen tại động cơ một xylanh:

a- các lực tác dụng vào cơ cấu;

b- các lực tác dụng vào vỏ động cơ.

Trong hình 4.6 mô tả các lực tác động lên hệ thống phát đông một xylanh. Các ký hiệu có ý nghĩa là:

r - bán kính tay quay;

m_k - khối lượng piston;

m_1, m_2, m_3 - ba khối lượng thu gọn của cần lắc;

m_4 - khối lượng của tay quay kể cả lượng đối trọng;

F_G - lực khí trên piston;

M_t - mômen xoắn;

e - khoảng cách khối tâm của tay quay bao gồm cả lượng đối trọng tính từ trục quay.

Các lực quán tính tổng hợp từ hình 4.6 dẫn đến:

$$F_{mx} = (m_l + m_k)\ddot{x}_l + m_3\ddot{x}_3 - (m_2 r - m_4 e).\omega^2\cos\varphi$$

$$F_{my} = m_3\ddot{y}_3 - (m_2 r - m_4 e).\omega^2\sin\varphi \qquad (4.6)$$

$$H_m = (m_l + m_k)\ddot{x}_1 \operatorname{tg}\beta$$

Thông qua thành phần lực nằm ngang H_m xuất hiện một mômen lật:

$$M_{mz} = H_m x_1 \qquad (4.7)$$

Từ hình 4.6 các mối quan hệ hình học được xác định:

$$x_1 = r\left(\cos\varphi + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}\right)$$

$$x_3 = r\left(\cos\varphi + \frac{\sigma}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}\right) \qquad (4.8)$$

$$y_3 = r.(1-\sigma).\sin\varphi$$

với $\lambda = r / l$; $\sigma = s / l$.

Sau khi khai triển các căn thức thành chuỗi luỹ thừa, sử dụng các biểu thức này và thế vào các phương trình (4.6), (4.7) chúng ta có các biểu thức của lực quán tính và mômen lực quán tính.

$$F_{mx} = -r\omega^2[(m_1 + m_k)(\cos\varphi + A_2\cos2\varphi - A_4\cos4\varphi + \ldots) +$$
$$+ m_3.(\cos\varphi + A_2\sigma\cos2\varphi - A_4\sigma\cos4\varphi + \ldots) + (m_2 + m_4\frac{e}{r}).\cos\varphi] \qquad (4.9a)$$

$$F_{my} = -r\omega^2[m_3(1-\sigma) + (m_2 + m_4\frac{e}{r})].\sin\varphi \qquad (4.9b)$$

$$M_{mz} = r^2\omega^2[(m_l + m_k)(B_1\sin\varphi - B_2\sin2\varphi - B_3\sin3\varphi - B_4\sin4\varphi +$$
$$+ B_5\sin5\varphi + \ldots) - m_3\sigma(C_1\sin\varphi + C_2\sin2\varphi +$$
$$+ C_3\sin3\varphi + C_4\sin4\varphi + \ldots)] \qquad (4.9c)$$

trong đó đưa vào các ký hiệu:

$$A_0 = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{64}\lambda^4\right);\ A_2 = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right);\ A_4 = \frac{\lambda^3}{4};\ B_1 = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right);$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{128}\lambda^4\right);\ B_3 = \frac{3}{4}\lambda\left(1 + \frac{3}{8}\lambda^2\right);\ B_4 = \frac{\lambda^2}{4}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right);\ B_5 = \frac{5}{32}\lambda^3;$$

$$C_1 = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^2}{8} - \frac{1}{64}\lambda^4\right) - \frac{\sigma}{\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{3}{64}\lambda^4\right); C_2 = 1 - \frac{15}{256}\lambda^4 - \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{\lambda^4}{16}\right)$$

$$C_2 = \frac{3}{8}\lambda\left(1 + \frac{3}{16}\lambda^2\right) - \frac{3}{8}\lambda\sigma\left(1 + \frac{9}{16}\lambda^2\right); C_4 = \frac{\lambda^2\sigma}{4}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (4.10)$$

Với các hệ thống phát động nhiều xylanh, các đại lượng lực của từng xylanh riêng được tính tổng cộng với sự chú ý tới vị trí pha của chúng. Các lực quán tính tổng hợp tác dụng lên tàu có các biểu thức sau:

$$F_{mx} = -\sum_{k=1}^{z} F_{mxk}\ ;\ F_{my} = -\sum_{k=1}^{z} F_{myk}$$

$$M_{mx} = \sum_{k=1}^{z} z_k F_{myk}\ ;\ M_{my} = -\sum_{k=1}^{z} z_k F_{mxk}\ ;\ M_{mz} = -\sum_{k=1}^{z} M_{mzk} \quad (4.11)$$

trong đó z là số xylanh và z_k là khoảng cách dọc trục của xylanh thứ k từ điểm quy chiếu.

4.2.2.3. Kích động thông qua các lực khí

Trong khi tại các động cơ đốt trong nhiều xylanh các mômen quán tính tổng hợp M_m thường bằng không, các lực khí gây ra một mômen, chúng tương ứng với các mômen quay tác động lên trục tay quay. Độ lớn của chúng xác định từ tổng của mômen của các lực tiếp tuyến:

$$M_{xG} = \sum_{k=1}^{z} F_{Tk} r \quad (4.12)$$

Sau khi chia các lực tiếp tuyến F_T thành các thành phần điều hòa ta có mômen quay:

$$M_{xG} = r\left\{a_{0k} + \sum_{k=1}^{z}\sum_{(m)}[a_m \cos m(\varphi_1 + \alpha_k) + b_m \sin m(\varphi_1 + \alpha_k)]\right\} \quad (4.13)$$

Trong đó a_m và b_m là các hệ số Fourier của các lực tiếp tuyến $F_T(\varphi)$ và α_k là góc nghiêng với trục tay quay của tay quay thứ k.

4.2.2.4. Các lực và mômen quán tính cho một vài sự sắp đặt vị trí các xylanh

Việc lựa chọn máy chính không được phép chỉ theo quan điểm về quan hệ tạo lực chuyển động mà các tác động của dao động kích động cũng phải được tính đến. Từ bảng 4.1 ta có thể đọc được các đại lượng và mômen quán tính không thứ nguyên đến bậc bốn với những vị trí xếp đặt khác nhau của tay quay và thứ tự kích nổ đối với một loạt môtơ. Các lực và mômen quán tính được xác định từ hệ thức.

$$F_{x(2)} = r\omega^2 A_2 (m_1 + m_k + \sigma m_3) f_{(2)}$$

$$F_{x(4)} = r\omega^2 A_4 (m_1 + m_k + \sigma m_3) f_{(4)}$$

$$F_{y(1)} = r\omega^2 (m_1 + m_k + m_3) am_{(1)} \quad (4.14)$$

$$F_{y(2)} = r\omega^2 A_2 (m_1 + m_k + \sigma m_3)\, am_{(2)}$$

$$F_{y(4)} = r\omega^2 A_4 (m_1 + m_k + \sigma m_3)\, am_{(4)}$$

Bảng 4.1. Lực quán tính và mômen quán tính không thứ nguyên của vài vị trí xếp đặt của tay quay

Số xylanh	Số kỳ nổ	Thứ tự kích nổ	f(2)	f(4)	m(1)	m(2)	m(4)
3	2	1-2-3	0	0	1,73	1,73	1,73
	4	1-3-2	0	0	1,73	1,73	1,73
4	3	1-4-2-3	0	4,0	1,41	4,00	0
	4	1-3-2-4	4,0	4,0	0	0	0
5	2	1-4-3-2-5	0	0	0,45	4,98	0,45
	4	1-3-5-4-2	0	0	0,45	4,98	0,45
	2	1-4-5-3-2	0	0	4,75	1,56	4,75
	4	1-5-2-4-3	0	0	4,75	1,56	4,75
6	2	1-6-2-4-3-5	0	0	0	3,64	3,64
	4	1-3-5-6-4-2	0	0	0	0	0
7	2	1-6-3-4-5-2-7	0	0	0,27	1,00	9,84
	4	1-3-5-7-6-4-2	0	0	0,27	1,00	9,84
8	2	1-8-2-6-4-5-3-7	0	0	0	0	0
	4	1-7-4-3-8-2-5-6	0	8,0	0	0	0
	4	1-6-5-2-7-4-3-8	0	4,0	0	0	0
9	2	1-8-3-6-5-4-7-2-9	0	0	0,19	0,55	16,33
	4	1-3-5-7-9-8-6-4-2	0	0	0,19	0,55	16,33
10	2	1-10-2-9-3-8-4-7-5-6	0	0	2,63	3,09	8,09
	4	1-2-3-4-5-10-9-8-7-6	0	0	2,63	3,09	8,09
	4	1-5-9-7-3-10-6-2-4-8	0	0	0	0	0

Trong đó các chỉ số trong dấu ngoặc biểu thị bậc của các điều hòa. a là chiều dài xylanh và coi như là hằng số. Ta giả sử rằng các khối lượng chuyển động đối với tất cả các xylanh là bằng nhau

Bảng 4.1 đã chỉ ra rằng các mômen quán tính trong nhiều trường hợp không được cân bằng. Tại các máy chính với tám xylanh có thể các mômen quán tính này nằm gần một nút dao động của dao động hai hoặc ba nút của thân tàu. Trong trường hợp này, các mômen quán tính tự do có thể gây ra các dao động của thân tàu lớn quá mức cho phép.

4.2.3. Kích động bởi sóng biển

Sóng biển cũng gây ra các dao động của thân tàu. Chúng ta phân biệt các kiểu kích động sau:

- Coi thân tàu như là vật thể cứng chuyển động trong nước. Qua đó hình thành các dao động với tần số thấp của các lực và mômen cắt trong mặt cắt ngang của thân tàu.

- Kích động va chạm do Slamming. Qua đó gây ra các dao động tắt dần như là các dao động riêng. Các va chạm gặp phải một cách ngẫu nhiên. Chúng ta biểu thị Slamming như là các đỉnh áp lực gặp phải trong thời gian ngắn và có giới hạn về vị trí, chúng xuất hiện khi phía trước hoặc phía sau tàu ngập dưới nước. Hiện tượng này đã được quan tâm rất lớn trong thời gian gần đây, vì có thể xuất hiện các yêu cầu về độ lớn của hiện tượng được nêu dẫn trên.

- Kích động dao động của thân tàu do các phần giàu năng lượng tại tần số cao của phổ dòng biển. Hiện tượng này thường chỉ gặp tại các tàu lớn và xuất hiện hiện tượng dao động với hai nút.

Việc phân biệt hai kích động được nêu cuối cùng thông thường là rất khó khăn.

Sóng biển không đều là một quá trình ngẫu nhiên, quá trình này có thể được biểu diễn bởi đại lượng đã biết thông thường. Những khảo sát tính toán dao động tần số cao được kích động bởi sóng biển là rất khó khăn và hiện tại nó cũng không đảm bảo được độ chính xác cần thiết. Những nhận xét dưới đây được rút ra từ kinh nghiệm:

- Dao động kích động sóng biển của thân tàu tăng theo chiều dài tàu. Do vậy ta chỉ quan tâm vấn đề này đối với những tàu lớn.

- Đối với phần chìm trong nước, những ảnh hưởng kích động bị giảm do quỹ đạo chuyển động tắt dần.

- Khi vận tốc tăng, ảnh hưởng của kích động cũng tăng.

- Sóng có góc nghiêng tăng, sẽ làm tăng kích động dao động.

- Hướng của sóng biển có ảnh hưởng khá lớn. Tác động kích động lớn nhất xảy ra khi tàu chuyển động ngược chiều sóng biển.

CHƯƠNG 5
DAO ĐỘNG THÂN TÀU THUỶ

5.1. DAO ĐỘNG TỔNG THỂ CỦA THÂN TÀU

5.1.1. Nhận xét chung

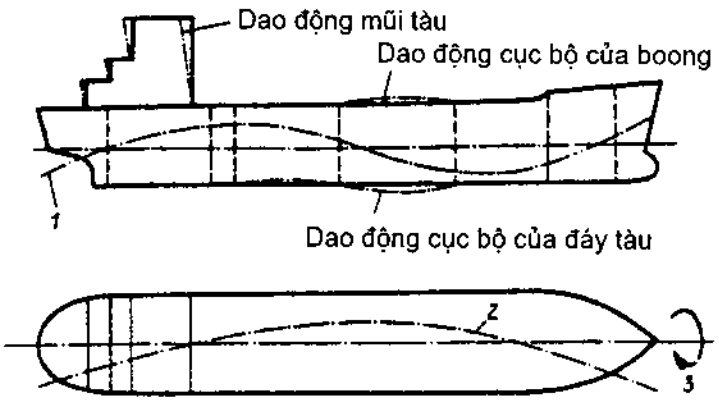
Sau phần phân loại sơ bộ được trình bày trong chương trước, chúng ta phân biệt ba kiểu dao động thân tàu dưới đây:

- Dao động toàn thể thân tàu, tại đó không có việc nối rõ rệt với các dao động cục bộ. Khi đó thân tàu được coi như là dầm nổi bơi trong nước.

- Dao động cục bộ của thân tàu. Trong trường hợp này các cấu trúc cục bộ được coi như là hệ khung phẳng có gờ tách biệt với nhau, trong đó tại vùng biên các điều kiện biên thực có thể được thiết lập.

- Dao động đồng thời, trong đó các dao động của dầm tuy là trội nhưng các phần cấu trúc cục bộ cũng đồng thời dao động và có sự kết nối với nhau. Một lớp đặc biệt trong các dao động này là các dao động của phần lái, phần này đã được thiết kế chế tạo từ trước. Thông qua đó chúng muốn chứng tỏ rằng, vùng này không được phép coi như là dầm nữa. Ngoài ra còn một dạng điển hình nữa là dao động đuôi tàu (cũng đã được thiết kế từ trước), trong khi ta thường chỉ nhận ra các dao động ít ỏi trong phần thân tàu còn lại.

Với khái niệm dao động toàn thể thân tàu, chúng ta phân biệt các dao động uốn theo phương đứng, ngang và dao động xoắn, dao động dọc. Dao động uốn ngang bao giờ cũng được nối với các dao động xoắn do tính không đối xứng của mặt cắt ngang thân tàu. Trong hình 5. 1 là các dao động được mô tả về nguyên lý.



Hình 5.1. Một vài kiểu dao động của thân tàu:
1- dao động thẳng đứng với ba nút; 2- dao động ngang với hai nút; 3- dao động xoắn.

5.1.2. Giới thiệu mô hình tính dao động toàn thể thân tàu

5.1.2.1. Mô hình dầm

Với mô hình dầm, thân tàu được coi như là một dầm bơi trong nước. Bên cạnh đó, ta cũng tính đến việc tác động quán tính của nước chuyển động cùng gây ra do dao động đàn hồi của dầm, thông qua đại lượng được gọi là khối lượng nước cùng dao động, khối lượng nước này được bổ sung thêm vào khối lượng của tàu thuỷ.

Mô hình đơn giản nhất là dầm Euler - Bernoulli. Tại các bậc dao động cao, các biến dạng trượt do lực cắt và mômen quán tính quay xung quanh trục nằm ngang không được bỏ qua nữa. Bởi vậy mô hình Euler - Bernoulli chỉ được phép ứng dụng cho tính toán "thô" các bậc dao động thấp nhất. Ngược lại, các dầm Timoshenko có tính đến các ảnh hưởng của biến dạng trượt, và bởi vậy nó mô tả một mô hình dùng được cho nhiều trường hợp để tính toán các dao động toàn thể thân tàu, chừng nào việc kết nối chặt chẽ với các dao động của cấu trúc cục bộ không đóng vai trò gì .

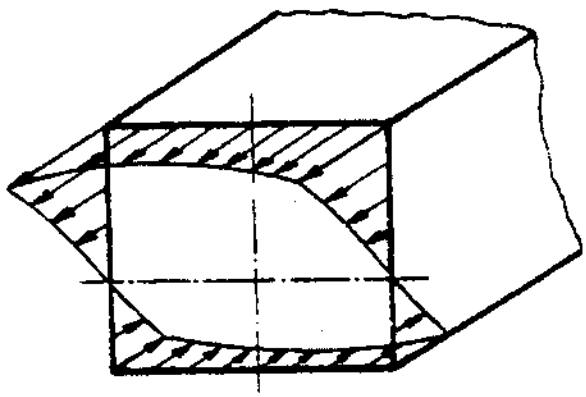
Mô hình dầm St. Verant - Bredt được dùng để tính toán thô dao động xoắn. Lý thuyết trong mô hình này bỏ qua sự "vênh" của mặt cắt ngang và những tác động từ đó. Việc giảm các độ cứng xoắn do có lỗ hổng lớn được tính gần đúng. Mô hình của dầm Wlassow có tính đến sự vênh của các mặt cắt.

Một tổ hợp với dầm Timoshenko tạo khả năng tính đến việc biến dạng trượt do lực cắt.

Tuy nhiên, mô hình dầm không thể xét được sự liên quan giữa dao động địa phương và các biến dạng trượt của tấm.

5.1.2.2. Mô hình tấm và mô hình tấm - thanh

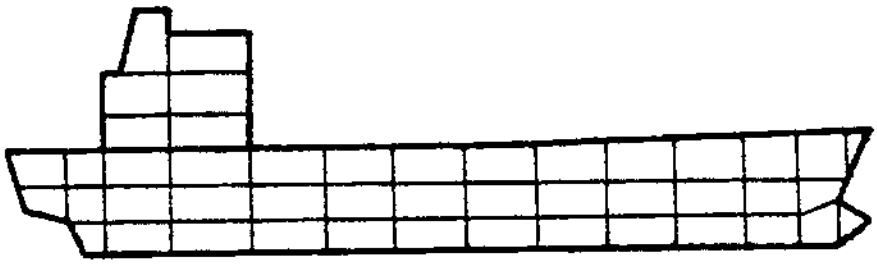
Với mô hình thuần tấm, thân tàu được coi như là một cái dầm hộp. Tại đó boong, thân tàu, sườn tàu được mô hình là các tấm (xem hình 5.2).



Hình 5.2. Thân tàu như là dầm hộp.

Mô hình này không cho phép quan tâm đến sự thay đổi thiết diện. Tuy nhiên, nó phù hợp với việc khảo sát một cách có so sánh tác dụng của biến dạng trượt và của lực quán tính dọc trục ở đáy boong và sườn tàu.

Với mô hình tấm - thanh, thân tàu được coi như một hệ phẳng của thanh và tấm như hình 5.3.



Hình 5.3. Mô hình tấm - thanh.

Thông thường sự áp dụng mô hình này liên quan đến phương pháp phần tử hữu hạn. Boong, đáy và tất cả các ngăn cách và kết nối ở đây giảm xuống thành các thanh, chúng được nối với các phần tử tấm để vỏ tàu chạy bao quanh. Trạng thái ứng xử của các phần thiết bị lắp thêm được thiết lập nhờ mô hình tấm - thanh tốt hơn hẳn là nhờ mô hình dầm. Phải hết sức cẩn thận khi xác định tham số cho các tấm và thanh thay thế.

5.1.2.3. Mô hình không gian

Việc lý tưởng hoá thân tàu như là hệ không gian các hệ khung phẳng có gờ phản ánh tốt nhất thực tế. Trong đó, thân tàu được phân chia thành các phần tử tấm cứng hoặc cong. Tuỳ theo việc đặt bài toán, ta có các khả năng dưới đây:

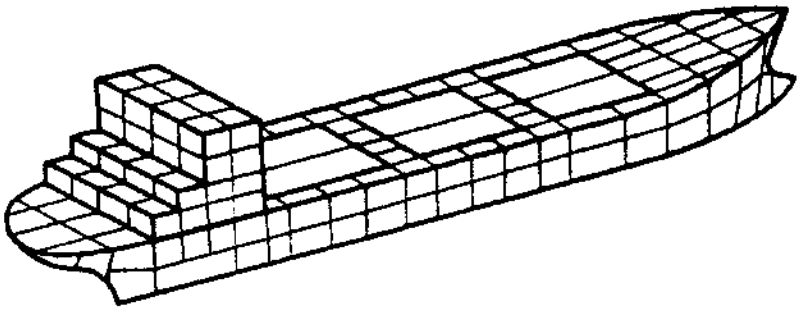
Trong hệ thống chung, đối với các tấm ta đề cập đến cả biến dạng uốn, cả biến dạng tấm và việc kết nối chúng thông qua các gờ uốn khá cứng.

- Đối với các tấm ta chỉ quan tâm biến dạng tấm trong hệ thống chung và đối với các gờ cứng ta chỉ quan tâm sức biến dạng dọc trục. Bởi vậy các dao động uốn cục bộ không được xét.

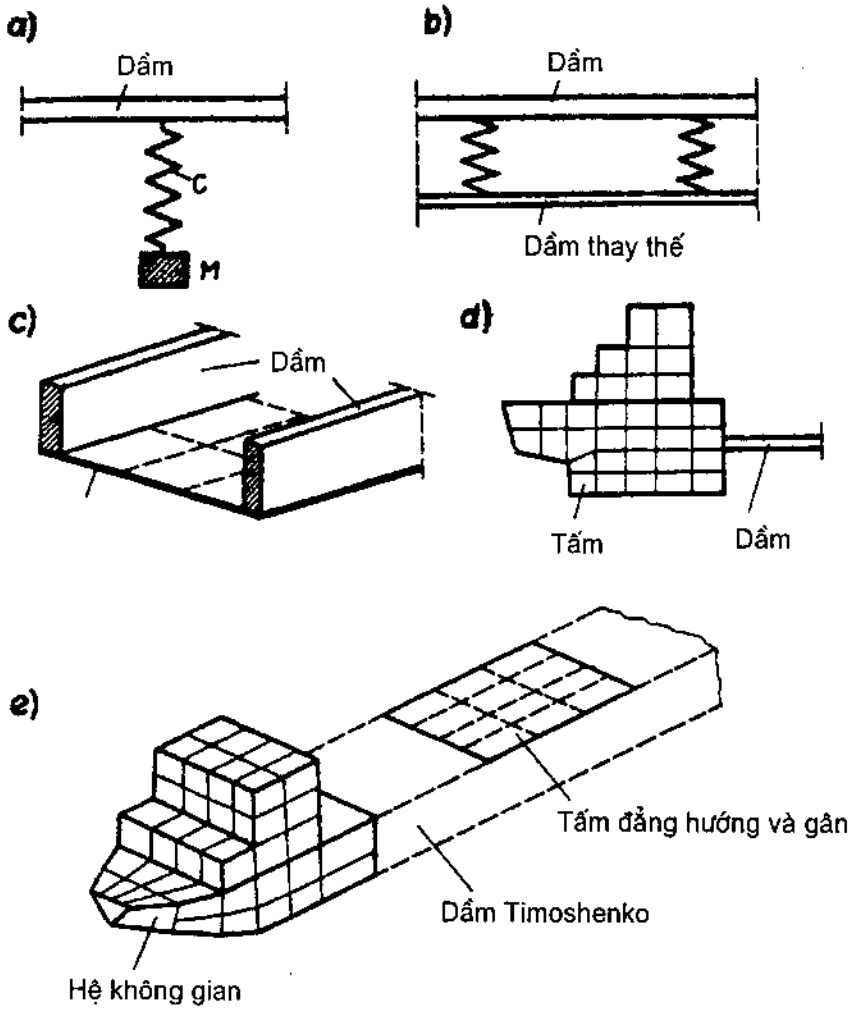
- Trong từng phần biến dạng uốn và biến dạng tấm được liên quan với các thành phần khác hoặc là chỉ thông qua các biến dạng hoặc chỉ là biến dạng uốn. Hình 5.4 chỉ ra một mô hình tính toán không gian. Việc ứng dụng mô hình tính toán không gian đòi hỏi một chi phí khá lớn cho việc xác định rất nhiều các dữ liệu vào và thời gian tính toán lớn.

5.1.2.4. Mô hình tính tổ hợp

Một sự phù hợp có thể sử dụng được thể hiện dưới việc ứng dụng mô hình được gọi là mô hình tổ hợp. Chúng kết nối mô hình dầm với mô hình hai chiều. Có rất nhiều phương án đáng bàn về nó. Một sự lựa chọn trong số các phương án được chỉ ra ở hình 5.5.



Hình 5.4. Mô hình tính không gian.



Hình 5.5. Mô hình tổ hợp.

Khả năng đơn giản nhất là của dao động một phần của hệ địa phương được tính đến thông qua một khối lượng thay thế M nối với dầm bởi phần tử đàn hồi. Khối lượng thay thế và độ cứng lò xo thay thế phải được xác định để tần số riêng của hai hệ là như nhau và sự thay đổi dọc có ảnh hưởng như nhau đối với cả hai hệ. Mô hình dầm - tấm theo hình 5.5.c cũng là một lựa chọn rất tốt. Thân tàu được coi là các dầm Timoshenko và cấu trúc cục bộ đáy tàu hoặc boong được mô hình là các tấm đẳng hướng. Mô hình được mô tả trong hình 5.5.c là rất có hiệu quả, đủ dùng trong nhiều trường hợp thực tế. Với mô hình này, phần cơ bản của thân tàu được coi là dầm Timoshenko, phần đuôi tàu tại đó có lắp đặt các thiết bị được coi như là hệ không gian gồm các khung phẳng có gờ và trong chừng mực nhất định, đáy và boong tàu được coi là các tấm đẳng hướng hoặc là tấm có gờ.

5.1.3. Tính toán dao động theo phương thẳng đứng của thân tàu theo mô hình dầm Timoshenko

5.1.3.1. Các đại lượng và công thức của mô hình tính toán

Trong mục 5.1.2, ta đã xác định rằng dầm Timoshenko mô tả một mô hình có thể sử dụng được để tính toán dao động toàn thể của thân tàu hoặc chí ít cũng cho một phần của thân tàu. Bởi vậy, các phương pháp quan trọng nhất dưới đây để tính toán dao động thân tàu theo phương thẳng đứng được trình bày trên cơ sở của mô hình này.

Các lực tác dụng lên một phần tử dầm và các ký hiệu của chúng được chỉ ra ở hình 5.6, nó gồm các ký hiệu sau:

$\tilde{W}(x,t)$, $W(x)$ - di chuyển thẳng đứng của trục dọc tàu góc uốn;

$\tilde{\beta}(x,t)$, $\beta(x)$ - phần của di chuyển thẳng đứng do mômen uốn và do lực cắt;

$\tilde{\gamma}(x,t)$, $\gamma(x)$ - góc của biến dạng trượt;

$\mu(x)$ - khối lượng trên một đơn vị chiều dài bao gồm cả khối lượng nước thuỷ động lực học (cuốn theo tàu);

$\theta(x)$ - mômen quán tính trên một đơn vị chiều dài, liên quan đến trục y;

δ - hệ số cản vật liệu;

b - hệ số cản ngoài;

$\tilde{Q}_z$, $\tilde{M}_y$ - lực cắt và mômen uốn;

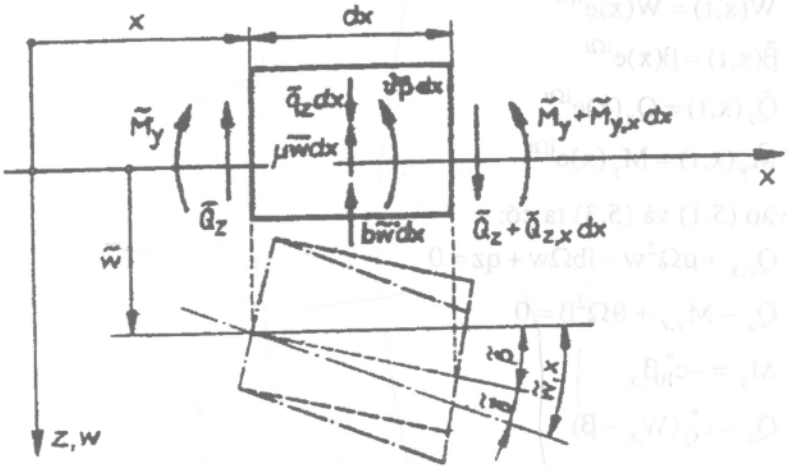
$\tilde{q}_z(x,t)$ - lực kích động trên đơn vị chiều dài.

Dấu ~ thể hiện là đại lượng phụ thuộc thời gian.

Từ hình 5.6 ta có các điều kiện cân bằng trên phần tử dầm.

$$\tilde{Q}_{zx} - \mu\ddot{\tilde{w}} - b\dot{\tilde{w}} + \tilde{q}_z = 0$$

$$\tilde{Q} - \tilde{M}_{y,x} - \vartheta\dot{\tilde{\beta}} = 0 \qquad (5.1)$$



Hình 5.6. Các lực và biến dạng ở phần tử dầm.

Ở đây ta ký hiệu $f_{,x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Ta có mối quan hệ ứng suất và biến dạng khi chú ý đến các yếu tố cản tuyến tính

$$\tilde{\sigma}_x = E\left(\tilde{\varepsilon}_x + \frac{\delta}{\Omega}\dot{\tilde{\varepsilon}}\right); \tau = G\left(\tilde{\gamma} + \frac{\delta}{\Omega}\dot{\tilde{\gamma}}\right) \tag{5.2}$$

Tần số vòng Ω ở mẫu số đề cập đến hiện tượng là với các vật liệu kim loại, yếu tố cản không phụ thuộc vào tần số. Nhờ mối quan hệ hình học:

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha = \tilde{\beta}_{,x} z$$

các đại lượng lực cắt có dạng:

$$\tilde{M}_y(x,t) = \int_{(A)} \tilde{\sigma}_x z dA = -C_B(x)\left(\tilde{\beta}_{,x} + \frac{\delta}{\Omega}\dot{\tilde{\beta}}_{,x}\right) \tag{5.3a}$$

$$\tilde{Q}_z(x,t) = C_Q(x)(\tilde{w}_{,x} - \tilde{\beta}) \tag{5.3b}$$

trong đó:

$C_B(x) = EI(x)$ - độ cứng chống uốn;

$C_Q(x) = GA(x).k(x)$ - độ cứng chống trượt của mặt cắt ngang;

$k(x)$ - hệ số trượt.

Với giới hạn ở kích động điều hoà:

$$\tilde{q}_z(x,t) = q_z(x)e^{i\Omega t} \tag{5.4}$$

Dầm thực hiện các dao động điều hoà với mối quan hệ tuyến tính. Ta có thể khử biến thời gian nhờ phép thế.

$$\begin{aligned}
&\tilde{W}(x,t) = W(x)e^{i\Omega t}\\
&\tilde{\beta}(x,t) = \beta(x)e^{i\Omega t}\\
&\tilde{Q}_z(x,t) = Q_z(x)e^{i\Omega t}\\
&\tilde{M}_y(x,t) = M_y(x)e^{i\Omega t}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Thay vào (5.1) và (5.3) ta có:

$$\begin{aligned}
&Q_{z,x} + \mu\Omega^2 w - ib\Omega w + qz = 0\\
&Q_z - M_{y,z} + \vartheta\Omega^2\beta = 0\\
&M_y = -c_B^*\beta_{,x}\\
&Q_z = c_Q^*(W_{,x} - \beta)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Với các độ cứng uốn và kéo nén phức:

$$\begin{aligned}
&c_B^* = c_B(1 + i\delta)\\
&c_Q^* = c_Q(1 + i\delta)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Từ (5.6) cho phép khử lực cắt và mômen uốn.

Tuỳ theo việc chọn các biến, các phương án trong bảng 5.1 cho ta các phương trình chuyển động, ở đây ta đã sử dụng các mối quan hệ động học $w_B + w_Q = w$; $w_{B,x} + \beta$; $w_{Q,x} = \gamma$; và dùng đại lượng vô hướng $\eta = b / \mu\Omega$ để biểu thị cản ngoài.

Bảng 5.1. Các phương án của phương trình chuyển động cho dầm Timoshenko với các biên tự do

Biến	Phương trình chuyển động	Điều kiện biên	Số phương trình
w, β	$\left[c_Q^*(w_{,x} - \beta)\right]_{,x} + \mu\Omega^2(1 - i\eta)w + q_z = 0$ $(c_B^*\beta_{,x})_{,x} + c_Q^*(w_{,x} - \beta) + \vartheta\Omega^2\beta = 0$	$\beta_{,x} = 0$ $W_{,x} = \beta$	(5.8a)
w, γ	$(c_Q^*\gamma)_{,x} + \mu\Omega^2(1 - i\eta)w + q_z = 0$ $\left[c_B^*(w_{,xx} - \gamma_{,x})\right]_{,x} + c_Q^*\gamma + \vartheta\Omega^2(w_{,x} - \gamma) = 0$	$w_{,xx} - \gamma_{,x} = 0$	(5.8b)
w_B, w_Q	$(c_Q^* w_{Q,x})_{,x} + \mu\Omega^2(w_B + w_Q)(1 - i\eta) + q_z = 0$ $(c_B^* w_{B,x})_{,x} + c_Q^* w_{Q,x} + \vartheta\Omega^2 w_{B,x} = 0$	$w_{B,xx} = 0$ $w_{Q,x} = 0$	(5.8c)
w, w_Q	$(c_Q^* w_{Q,x})_{,x} + \mu\Omega^2 w(1 - i\eta) + q_z = 0$ $\left[c_B^*(w_{,x} - w_{Q,x})\right]_{,x} + c_Q^* w_{Q,x} + \vartheta\Omega^2(w_{,x} - w_{Q,x}) = 0$	$w_{,xx} - w_{Q,xx} = 0$ $w_{Q,x} = 0$	(5.8d)

Ở các dao động có cản, các dịch chuyển là phức. Nhờ việc phân tích các đại lượng phức thành phần thực và ảo, các phương trình (5.8) có thể chia thành bốn phương trình thực tương ứng.

Bài toán biến phân tương đương với bài toán giá trị biên được giới hạn ở các chuyển động điều hoà sau khi tách riêng khử biến thời gian:

$$U - T - W_a \rightarrow \text{đạt cực trị} \tag{5.9}$$

Với thế năng của nội lực:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \left[c_B^* \beta_x^2 + c_Q^* (w_x - \beta)^2\right] dx \tag{5.10}$$

Động năng:

$$T = \frac{1}{2}\Omega^2 \int_0^l (\mu w^2 + \vartheta \beta^2) dx \tag{5.11}$$

và công của lực cản ngoài và lực kích động:

$$W_a = \int_0^l q_z w dx - \frac{1}{2} i\Omega b \int_0^l w^2 dx \tag{5.12}$$

Với các dao động toàn thể của thân tàu, ảnh hưởng của cản bao giờ cũng nhỏ và có thể bỏ qua khi xác định dao động riêng. Các phương trình tương ứng có được từ hệ (5.8) với:

$$q_z = 0;\ \delta = \eta = 0 \text{ và } \Omega = \omega$$

trong đó ω biểu thị tần số riêng vòng.

5.1.3.2. Các phương pháp giải

Có nhiều phương pháp để giải các bài toán giá trị biên đã cho tìm dao động cưỡng bức và các bài toán dao động riêng. Các phương pháp quan trọng nhất trong ứng dụng thực tế đóng tàu được mô tả dưới đây.

a. Phương pháp sai phân

Với phương pháp này, ta xuất phát từ hệ phương trình (5.8a) và thay thế bằng các toán tử sai phân tương ứng

Từ đó, với bước chọn h, ta có các phương trình sai phân cho dầm trục tâm

$$c_{Qk}^* \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{h^2} + \frac{c_{Q(k+1)}^* - c_{Q(k-1)}^*}{2h} \cdot \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2h} - c_{Qk}^* \frac{\beta_{k+1} - \beta_{k-1}}{2h} - \frac{c_{Q(k+1)}^* - c_{Q(k-1)}^*}{2h}\beta_k + \Omega^2 m_k (1 - i\eta_k) w_k + q_z = 0 \tag{5.13a}$$

$$\frac{c_{B(k+1)}^* - c_{B(k-1)}^*}{2h} \cdot \frac{\beta_{k+1} - \beta_{k-1}}{2h} + c_{Bk}^* \frac{\beta_{k+1} - 2\beta_k + \beta_{k-1}}{h^2} - \frac{c_{Q(k+1)}^* - c_{Q(k-1)}^*}{2h}\beta_k + c_{Qk}^* \left(\frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2h} - \beta_k\right) + \Omega^2 \vartheta_k \beta_k = 0 \tag{5.13b}$$

Hệ phương trình (5.13) với tất cả các điểm chia sẽ dẫn đến hệ phương trình có dạng:

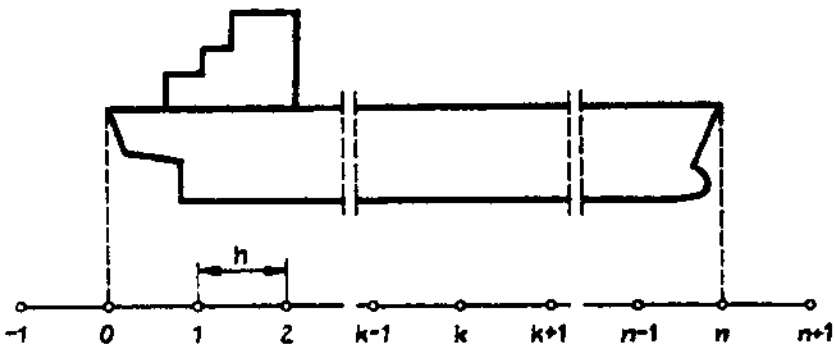
$$\left((1+i\delta)\begin{bmatrix}\underline{K}_{ww} & \underline{K}_{w\beta}\\ \underline{K}_{\beta w} & \underline{K}_{\beta\beta}\end{bmatrix}-\Omega^2(1-i\eta)\begin{bmatrix}\underline{M}_{ww} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{M}_{\beta\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{w}\\ \underline{\beta}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\underline{q}_z\\ \underline{0}\end{bmatrix} \tag{5.14}$$

trong đó: $\underline{w}=\begin{bmatrix}w_{-1} & w_0 & w_1 & \dots & w_{n+1}\end{bmatrix}^T$

$\underline{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_{-1} & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n+1}\end{bmatrix}^T$

là các vectơ dịch chuyển của tất cả các lưới và vectơ góc uốn.

Các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng trong công thức này là không đối xứng. Có một quy luật thô cho yêu cầu về cỡ bước là $h \le l_n/8$, l_n là nửa chiều dài sóng tương ứng với bậc dao động lớn nhất cần quan tâm.



Hình 5.7. Vẽ các điểm lưới cho phương pháp sai phân.

b. Phương pháp ma trận truyền (MTT)

Phương pháp ma trận truyền được ứng dụng nhiều trong chế tạo tàu thuỷ, với phương pháp này thân tàu được chia thành một số phần tử dầm hình lăng trụ với độ cứng và mật độ khối không đổi như hình 5.8. Có chủ định trước, phương pháp này được tính toán với các đại lượng vô hướng. Ta thêm vào các ký hiệu sau:

$$\xi=\frac{x}{l};\ \bar{W}=\frac{W}{l_0};\bar{\mu}=\frac{\mu}{\mu_0};\bar{\nu}=\frac{\nu}{l_0^2\mu_0};\bar{M}_y=\frac{M_y l_0}{c_{B0}};\ \bar{Q}_z=\frac{Q_z l_0^2}{c_{B0}};\bar{q}_z=\frac{q_z l_0^3}{c_{B0}};$$

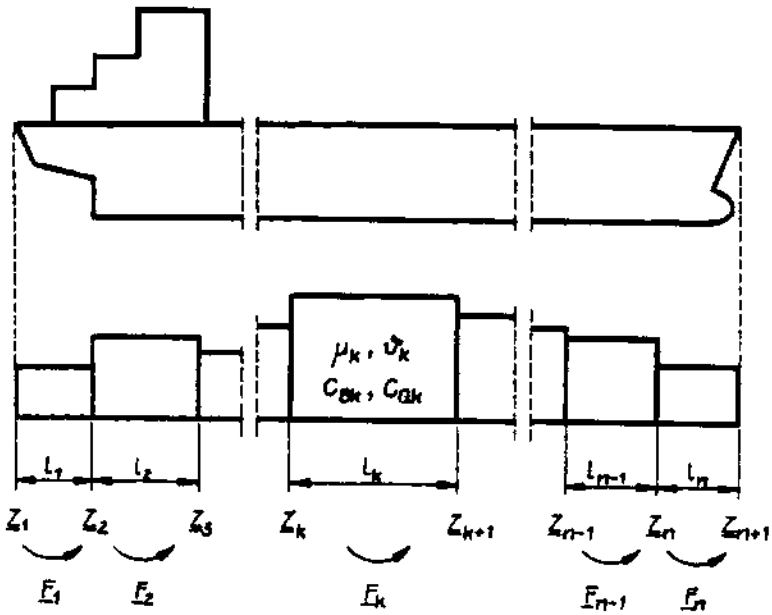
$$\bar{c}_B=\frac{c_B}{c_{B0}};\bar{c}_Q=\frac{c_Q l_0^2}{c_{B0}};\ \eta=\frac{b}{\mu\mu_0\Omega};\ \Lambda=\frac{\mu_0 l_0^4\Omega}{c_{B0}};\ \bar{l}_k=\frac{l_k}{l_0} \tag{5.15}$$

các đại lượng có chỉ số 0 biểu thị đại lượng tham chiếu được chọn bất kỳ.

Với các đại lượng không thứ nguyên này, phương trình (5.6) dẫn đến hệ phương trình chính tắc:

$$\bar{W}'=\beta+\frac{\bar{Q}_z}{\bar{c}_Q(1+i\delta)};\ \beta'=\frac{\bar{M}_y}{\bar{c}_B(1+i\beta)} \tag{5.16}$$

$$\bar{M}_y'=\bar{Q}_z+\Lambda\bar{\nu}\beta;\ \bar{Q}_z'=-\mu\Lambda(1-i\eta)\bar{W}-\bar{q}_z$$



Hình 5.8. Dầm thay thế với các tiết diện hình lăng trụ.

Dấu ' biểu thị đạo hàm theo toạ độ vô hướng ξ. Ta đưa ra một vectơ trạng thái:

$$Z^T = \left[\bar{W} \quad \beta \quad \bar{M}_y \quad \bar{Q}_z\right] \tag{5.17}$$

Khi đó (5.16) có dạng $\underline{Z}' = \underline{A}\underline{Z} + \underline{f}$ (5. 18)

$$\text{với:} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{\bar{c}_Q(1+i\delta)} \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{\bar{c}_B(1+i\delta)} & 0 \\ 0 & \bar{\nu}\Lambda & 0 & 1 \\ -\mu\Lambda(1-i\eta) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.19a}$$

$$\underline{f} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\bar{q}_z \quad 1\right]^T \tag{5.19b}$$

Nghiệm thuần nhất của phương trình (5.18) là: $\underline{Z}_h = e^{\underline{A}\xi}$ (5.20)

Nghiệm trên có thể dùng cho mọi phần tử dầm. Đối với đoạn dầm thứ k, vectơ trạng thái của biên trái dầm như sau: $\underline{Z}_{hk} = e^{\underline{A}\xi_k}$

Với ξ_k là toạ độ của biên trái. Khi đó ở biên phải ta có:

$$\underline{Z}_{h(k+1)} = e^{\underline{A}(\xi_k + \bar{l}_k)} = e^{\underline{A}\bar{l}_k} e^{\underline{A}\xi_k} = \underline{B}_k \underline{Z}_{hk} \tag{5.21}$$

Ta triển khai MTT $\underline{B}_k$ thành chuỗi ma trận:

$$\underline{B}_k = e^{\underline{A}\bar{l}_k} = \underline{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{A}_k^n \bar{l}_k^n \tag{5.22}$$

Trong đó $\underline{I}$ là ma trận đơn vị. Với các đoạn dầm đủ nhỏ chuỗi này hội tụ rất nhanh. Chúng thường được ngắt sau một số ít phần tử. Với dao động cưỡng bức, còn cần tồn tại nghiệm riêng $\underline{Z}_p$ của phương trình trình (5.18) được tìm nhờ tích phân phương trình sau $\underline{Z}_p' = \underline{f}$.

Điều này dẫn đến:

$$\bar{Q}_{zp} = -\bar{q}_z\xi;\ M_{yp} = -\bar{q}_z\frac{\xi^2}{2};\ \beta_p = \bar{q}_z\frac{\xi^3}{6\bar{c}_B(1+i\delta)}; \tag{5.23}$$

$$\bar{W}_p' = \beta_p + \frac{\bar{Q}_{zp}}{\bar{c}_Q(1+i\delta)};\ \bar{W}_p = \bar{q}_z\frac{\xi^2}{2(1+i\delta)}\left(\frac{\xi^2}{12\bar{c}_B} - \frac{1}{\bar{c}_Q}\right)$$

Ta bổ sung nghiệm riêng (5.23) vào nghiệm của phương trình thuần nhất, khi đó ta có MTT đoạn k với $\xi = \bar{l}_k$

$$\underline{F}_k = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & & & & & \bar{q}_z\dfrac{\bar{l}_k^2}{2(1+i\delta)}\left(\dfrac{\bar{l}_k^2}{12\bar{c}_B} - \dfrac{1}{\bar{c}_Q}\right) \\
 & & & & & \bar{q}_z\dfrac{\bar{l}_k^3}{6\bar{c}_B(1+i\delta)} \\
 & \multicolumn{4}{c|}{\underline{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\underline{A}_k^n\bar{l}_k^n} & & -\bar{q}_z\dfrac{\bar{l}_k^2}{2} \\
 & & & & & -\bar{q}_z\bar{l}_k \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \tag{5.24}$$

Các điều kiện biên liên quan đến quá trình truyền. Với trạng thái ở biên trái tự do:

$$\underline{z}_0 = \begin{bmatrix}\bar{w}_0 & \beta_0 & \bar{M}_0 & \bar{Q}_0 & 1\end{bmatrix}^T \tag{5.25}$$

và MTT
$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

Điều kiện biên ở bên trái là: $\underline{Z}_1 = \underline{R}_0\underline{Z}_0$ (5.27)

Tương tự ta có điều kiện đối với biên phải:

$$\underline{R}_{n+1} + \underline{Z}_{n+1} = 0 \tag{5.28}$$

$$\underline{R}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Các đoạn truyền riêng lẻ là:

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_0\underline{Z}_0$$
$$\underline{Z}_2 = \underline{F}_1\underline{R}_0\underline{Z}_0$$
$$\underline{Z}_{n+1} = \underline{F}_n\underline{F}_{n-1}\cdots\underline{F}_1\underline{R}_0\underline{Z}_0 \tag{5.30}$$
$$R_{n-1}\underline{F}_n\underline{F}_{n-1}\cdots\underline{F}_1\underline{R}_0\underline{Z}_0 = R_{n+1}\Pi_n\underline{R}_0\underline{Z}_0 = 0 \tag{5.31}$$

Từ mối quan hệ (5.31), các giá trị ban đầu chưa biết và β_0 được xác định đối với các dao động cưỡng bức cản, các đại lượng dịch chuyển và lực là phức. Nếu không tính bằng đại lượng phức thì vectơ trạng thái và MTT sẽ được phân thành các phần thực và ảo. Đối với một phần tử phức:

$$f_{ij} = f_{ijRe} + if_{ijIm}$$

ta đưa vào một ma trận con có dạng:

$$\begin{bmatrix} f_{ijRe} & -f_{ijIm} \\ f_{ijIm} & f_{ijRe} \end{bmatrix}$$

Ngoài ra các ma trận truyền tại biên (5.26) và (5.29) được khai triển dưới dạng đúp.

Với việc tính toán dao động riêng, phương trình (5.31) là thuần nhất. Các tần số riêng được xác định từ điều kiện:

$$\det(R_{n+1}\Pi_n\underline{R}_0) = 0 \tag{5.32}$$

trong trường hợp này có thể bỏ dễ dàng hàng và cột thứ năm trong các ma trận.

Khi tác động một lực kích động tập trung, nó có thể được chia thành phần phân bố nhỏ dủ mịn dọc theo chiều dài của phần tử dầm, hoặc là ta thực hiện tại vị trí lực kích động một hàm truyền gọi là ma trận (hàm) truyền điểm (xem hình 5.9).

Sự truyền qua điểm: $\underline{Z}_k^r = \underline{P}_k\underline{Z}_k^l$ (5.33)

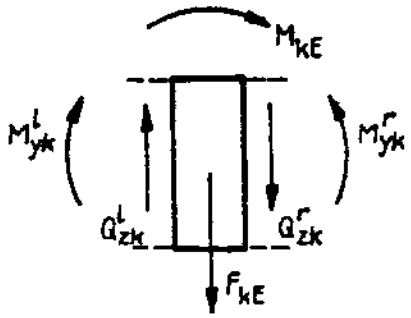
với:
$$\underline{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -M_{kE} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F_{kE} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

phải được đặt vào vị trí tương ứng trong quá trình truyền.

Phương pháp MTT rất phù hợp với việc tính toán máy. Nhược điểm duy nhất là có thể gặp phải sự không ổn định trong tính toán khi chọn số phần tử tăng lên. Từ đó có thể đề nghị rằng, chỉ nên phân chia thân tàu thành các phần tử dầm khi đòi hỏi sự phân bố độ cứng và phân bố khối lượng. Các đoạn lăng trụ dài không phải phân chia.

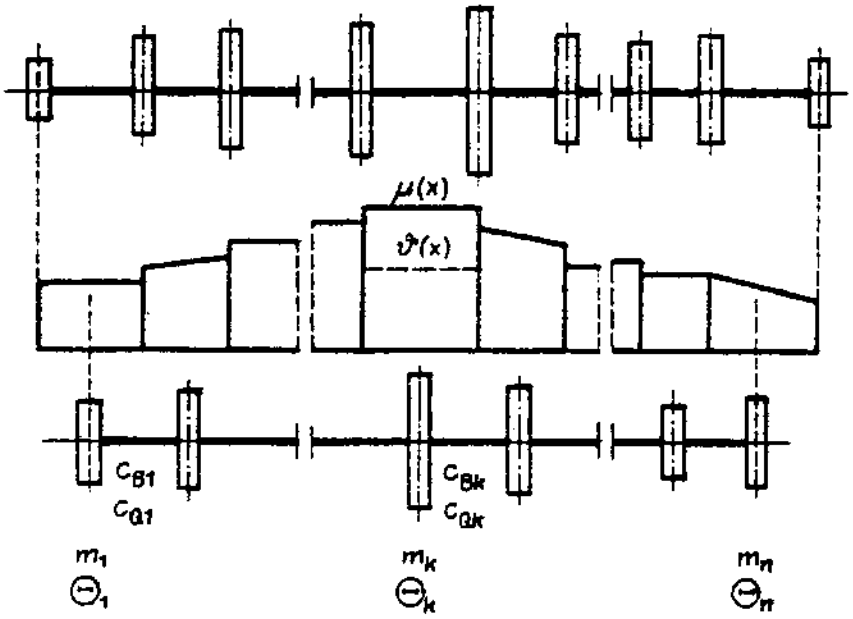
Phương pháp tấm thay thế rời rạc được mô tả như là một trường hợp đặc biệt của phương pháp này. Ở đây, cần rời rạc hóa hệ thân tàu được thay thế bởi một hệ các tấm rời rạc được sắp xếp, các tấm này được nối với nhau bởi các dầm không khối lượng. Bởi vậy các

khối lượng và mômen quán tính tập trung ở các tấm, còn độ cứng uốn và kéo nén tập trung các dầm. Cản ngoài được coi là lực tập trung đặt vào các tấm thay thế. Hình 5.10 chỉ ra hai khả năng cho hệ thay thế.



Hình 5.9. Sự truyền dưới tác dụng của một lực tập trung F_{KE} và một mômen tập trung M_{kE}.

Cả hai mô hình theo hình 5.10 được phân biệt chỉ ở chỗ là, trong trường hợp thứ nhất khối lượng được phân bố được đặt tại điểm nút của các đoạn chia. Còn trong trường hợp thứ hai khối lượng của mỗi đoạn được đặt tại trọng tâm của nó. Khi phân chia nhỏ dầm thì hai phương án này cho các kết quả sai khác nhau rất ít.



Hình 5.10. Mô hình cho phần tử tấm thay thế rời rạc.

Ta xuất phát từ phương trình (5.16) và bỏ tất cả các số hạng quán tính do giả thiết phần tử dầm không có khối lượng. Từ đó ta có:

$$\bar{W}' = \beta + \frac{\bar{Q}_z}{\bar{c}_Q(1+i\delta)}; \ \beta' = \frac{\bar{M}_y}{\bar{c}_B(1+i\beta)}; \tag{5.35}$$

$$\bar{M}_y' = \bar{Q}_z; \ \bar{Q}_z' = -\bar{q}_z$$

Tích phân trực tiếp (5.35), ta tính được MTT:

$$\underline{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & \bar{l}_k & \frac{-\bar{l}_k^2}{2\bar{c}_B(1+i\delta)} & \frac{\bar{l}_k^2}{1+i\delta}\left(\frac{1}{\bar{c}_Q} - \frac{\bar{l}_k^2}{6\bar{c}_B}\right) & \frac{\bar{q}_k}{1+i\delta}\left(\frac{\bar{l}_k^4}{24\bar{c}_B} - \frac{\bar{l}_k^2}{2\bar{c}_Q}\right) \\ 0 & 1 & \frac{-\bar{l}_k}{\bar{c}_B(1+i\delta)} & \frac{-\bar{l}_k^2}{2\bar{c}_B(1+i\delta)} & \bar{q}_z\frac{\bar{l}_k^3}{6\bar{c}_B(1+i\delta)} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{l}_k & -\bar{q}_z\frac{\bar{l}_k^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\bar{q}_z\bar{l}_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Các điều kiện truyền tại các tấm thay thế được xác định ở hình vẽ. Sau khi đưa vào các đại lượng:

$$\bar{m}_k = \frac{m_k}{m_0}; \ \bar{\Theta}_k = \frac{\Theta_k}{m_0 l_0^2}; \ \bar{M} = \frac{M_k l_0}{c_{B0}};$$

$$\bar{Q}_k = \frac{Q_k l_0^2}{c_{B0}}; \ \underline{Z}_k^l = \underline{F}_{k-1}\underline{P}_{k-1}\cdots\underline{F}_1\underline{P}_1\underline{R}_0\underline{Z}_0; \ \eta = \frac{b}{m_0\bar{m}_k\Omega} \tag{5.37}$$

ta được ma trận truyền sau:

$$\bar{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda\bar{\Theta}_k & 1 & 0 & \bar{M}_{kc} \\ -\Lambda\bar{m}_k(1-\eta) & 0 & 0 & 1 & \bar{F}_{kc} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Các giá trị đầu chưa biết và β'_1 tuân theo tương tự như mối quan hệ (5.31):

$$\underline{R}_{n+1}\underline{P}_n\underline{F}_{n-1}\underline{P}_{n-1}\cdots\underline{F}_1\underline{P}_1\underline{R}_0\underline{Z}_1^l = \underline{R}_{n+1}\underline{\Pi}_n\underline{R}_0\underline{Z}_0 = \underline{0} \tag{5.39}$$

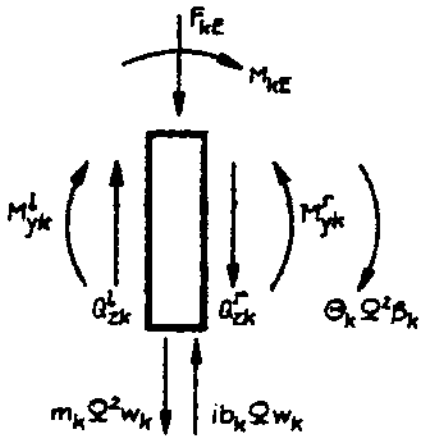
Từ đó cho ta vectơ trạng thái:

$$\underline{Z}_k^l = \underline{F}_{k-1}\underline{P}_{k-1}\cdots\underline{F}_1\underline{P}_1\underline{R}_0\underline{Z}_0$$

$$\underline{Z}_k^R = \underline{P}_k\underline{F}_{k-1}\underline{P}_{k-1}\cdots\underline{F}_1\underline{P}_1\underline{R}_0\underline{Z}_0 \tag{5.40}$$

Đối với dao động riêng, phương trình (5.32) cho ta tần số riêng. Vectơ $\underline{Z}_0$ ở đây là:

$$\underline{Z}_0 = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^l & \beta_1^l & \bar{M}_1^l & \bar{Q}_1^l & 1 \end{bmatrix}^T$$



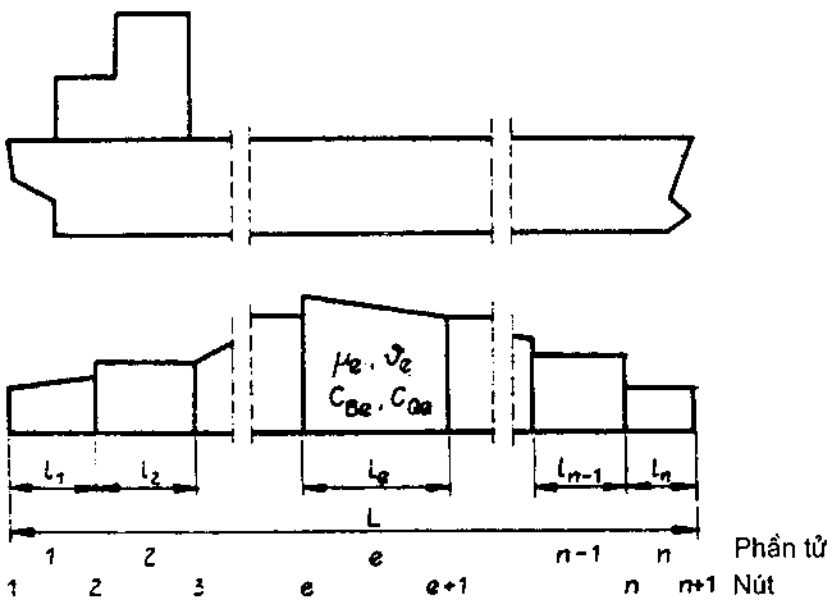
Hình 5.11. Các điều kiện truyền tại một tấm thay thế.

c. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) có các ứng dụng tính toán dao động toàn thể thân tàu với nhiều phương án. Một trong số các phương án đó được mô tả dưới đây. Hàm năng lượng cho một phần tử thể hiện ở các phương trình từ (5.9) đến (5. 12) với:

$$\beta = w_x - y$$

$$\Pi_c = \frac{1}{2}(1+i\delta)\int_0^l \left[c_B(w_{,xx}-\gamma_{,x})^2 + c_Q\gamma^2\right]dx - \frac{1}{2}\Omega^2\int_0^l\left[\mu w^2 + \nu(w_{,x}-\gamma)^2\right]dx$$
$$+\frac{1}{2}i\Omega b\int_0^l w^2dx - \int_0^l q_z w dx - \sum_{(i)} F_{zi}w(x_i) \qquad (5.41)$$



Hình 5.12. Phân chia thân tàu thành các phần tử hữu hạn.

Đối với dịch chuyển của phần tử, ta đặt:

$$\underline{w}(x) = \underline{h}^T(x)\underline{w}$$

$$\underline{\gamma}(x) = \underline{g}^T(x)\underline{\gamma} \tag{5.42}$$

Trong đó: $\underline{h}^T(x) = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4]$; $\underline{g}^T(x) = [g_1 \quad g_2]$

là các hàm dạng đối với các dịch chuyển w và γ, còn:

$$\underline{w}(x) = [w_1(0) \quad w_{1x}(0) \quad w_3(l) \quad w_{1x}(0)]$$

$$\underline{\gamma} = [\gamma(0) \quad \gamma(l)] \tag{5.43}$$

là các vectơ dịch chuyển nút. Bởi vậy mỗi phần tử có 6 bậc tự do. Hàm dạng được dùng dưới dạng các đa thức Hermite (5.44):

$$h_1 = 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3$$

$$h_2 = x - 3x^2/l + 2x^3/l^2$$

$$h_3 = 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3$$

$$h_4 = -x^2/l + x^3/l^3$$

$$g_1 = 1 - x/l;\ g_2 = x/l \tag{5.44}$$

Việc chọn các hàm dạng trong bài toán trên là có mục đích. Bởi vì phần biến dạng do lực cắt về căn bản là nhỏ hơn phần biến dạng uốn, điều đó đủ để xấp xỉ một góc trượt γ (x) bằng hàm dạng tuyến tính. Việc xấp xỉ được đưa ra ở đây, nhằm mục đích khử biến dạng trượt lực cắt thông qua các mối quan hệ thuần tĩnh học, không phải bao giờ cũng cho kết quả đủ chính xác.

Thế biểu thức (5.42) vào hàm (5.41) và thực hiện phép tính:

$$\partial\Pi_c/\partial\underline{w}^T = 0\ ;\ \partial\Pi_c/\partial\underline{\gamma}^T = 0$$

Khi đó ta có phương trình sau:

$$\left((1+i\delta)\begin{bmatrix} \int_0^l c_B \underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,xx}^T dx & -\int_0^l c_B \underline{h}_{,xx}\underline{g}_{,x}^T dx \\ -\int_0^l c_B \underline{g}_{,x}\underline{h}_{,xx}^T dx & \int_0^l (c_B \underline{g}_{,x}\underline{g}_{,x}^T + c_Q \underline{g}\underline{g}^T) dx \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. -\Omega^2 \begin{bmatrix} \int_0^l \left(\mu \underline{h}\underline{h}^T + \nu \underline{h}_{,x}\underline{h}_{,x}^T\right) dx - \frac{ib}{\Omega}\int_0^l \underline{h}\underline{h}^T dx & -\int_0^l \nu \underline{h}_{,x}\underline{g}^T dx \\ -\int_0^l \nu \underline{g}\underline{h}_{,x}^T dx & \int_0^l \nu \underline{g}\underline{g}^T dx \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\gamma} \end{bmatrix} \tag{5.45a}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^l q_z \underline{h} dx . \sum F_{zi} h_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

hoặc viết ngắn gọn:

$$\left[(1+i\delta)\underline{K}-\Omega^2\underline{M}_c\right]\underline{d}_c=\underline{f}_c \tag{5.45b}$$

Ma trận biểu diễn cản ngoài liên quan đến ma trận khối lượng.

Đối với phần tử dầm dạng lăng trụ cho phép tích phân (5.45) chính xác, và đưa ra các ma trận phần tử sau, nếu các vectơ dịch chuyển nút được định nghĩa dưới dạng:

$$\underline{d}_c=\left[w(0)\quad w_{,x}(0)\quad \gamma(0)\quad w(l)\quad w_{,x}(l)\quad \gamma(l)\right]^T$$

Và dùng các ký hiệu:

$$\chi=\frac{c_Q l^2}{c_B};\ \eta=\frac{b}{\mu\Omega};\ \varepsilon=\frac{\nu}{\mu l^2};\ \Lambda_c=\frac{\mu l^4}{420c_B}\Omega^2 \tag{5.46}$$

$$\underline{K}_c^*=\begin{bmatrix} 12 & 6l & 0 & 12 & 6l & 0 \\ & 4l^2 & -l^2 & -6l & 2l^2 & l^2 \\ & & l^2(1+\chi/3) & 2l & l^2 & -l^2(1-\chi/6) \\ & & & 12 & -6l & -2l \\ & \text{đối xứng} & & & 4l^2 & -l^2 \\ & & & & & l^2(1+\chi/3) \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

$$\underline{M}_c^*=\begin{bmatrix} 156(1-i\eta)+504\varepsilon & 22l(1-i\eta)+42\varepsilon l & 210\varepsilon l & 54(1-i\eta)-504\varepsilon & -13l(1-i\eta)+42\varepsilon l & 210\varepsilon l \\ & 4l^2(1-i\eta)+56\varepsilon l^2 & -35\varepsilon l^2 & 13l(1-i\eta)-42\varepsilon l & -3l^2(1-i\eta)-14\varepsilon l^2 & 35\varepsilon l^2 \\ & & 140\varepsilon l^2 & -210\varepsilon l & 35\varepsilon l^2 & 70\varepsilon l^2 \\ & & & 156(1-i\eta)+504\varepsilon & -22l(1-i\eta)-42\varepsilon l & -210\varepsilon l \\ & \text{đối xứng} & & & 4l^2(1-i\eta)+56\varepsilon l^2 & -35\varepsilon l^2 \\ & & & & & 140\varepsilon l^2 \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

Vectơ lực kích động $\underline{f}_e$ được thể hiện:

$$\underline{f}_e^*=q_z\frac{l^4}{c_B}\left[\frac{1}{2}\quad \frac{l}{12}\quad 0\quad \frac{1}{2}\quad -\frac{l}{12}\quad 0\right]^T+ \\ +\frac{l^3}{c_B}\sum_{(i)}F_{zi}\left[h_1(x_i)\quad h_2(x_i)\quad 0\quad h_3(x_i)\quad h_4(x_i)\quad 0\right]^T \tag{5.49}$$

Từ đó, ta có:

$$\left[(1+i\delta)\underline{K}_c^*-\underline{\Lambda}_c\underline{M}_c^*\right]\underline{d}_c=\underline{f}_c^* \tag{5.50}$$

ta còn đưa ra:

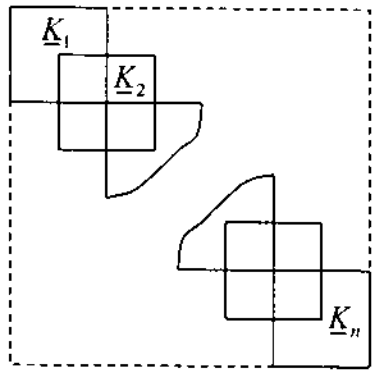
$$\Lambda_0=\frac{\mu_0 l_0^4}{420c_{B0}}\Omega^2 \tag{5.51}$$

với các đại lượng quan hệ tuỳ ý μ, l_0, c_{B0}. Từ (5.50), (5.51) và (5.46) suy ra:

$$\left[(1+i\delta)\underline{K}_c^* - \underline{\Delta}_0 \frac{\mu l^4 c_{B0}}{\mu_0 l_0^4 c_B} \underline{M}_c^*\right] \underline{d}_c = \underline{f}_c^* \tag{5.52}$$

Sự thiết lập các ma trận của hệ ở dạng thông thường nhờ việc dịch chuyển lên trên của các ma trận phần tử theo sơ đồ dưới đây:

$\underline{K} =$



(5.53)

ma trận khối lượng được thiết lập tương tự, bên cạnh đó cần phải lưu tâm đến phép nhân theo phương trình (5.52). Vectơ kích động của hệ được xác định tương tự nhờ việc dịch chuyển lên phía trên tương ứng của các vectơ kích động phần tử.

Tại biên tự do, các điều kiện động học không được thực hiện. Mặc dù vậy, trong trường hợp này ít nhất cũng phải lưu ý đến điều kiện $\gamma(0) = \gamma(l) = 0$

Nhờ việc gạch các dòng và cột tương ứng. Độ chính xác của tính toán được nâng cao, nếu các điều kiện của mômen tại biên triệt tiêu được duy trì.

$$w_{,xx}(0) - \gamma_{,x}(0) = 0$$

$$w_{,xx}(l) - \gamma_{,x}(l) = 0$$

Chú ý đến mối quan hệ từ (5.42) đến (5.44), các điều kiện biên này có dạng (5.54):

$$\begin{aligned} &6 - \frac{w_1}{l_1} + 4w_{1,x} - 6\frac{w_2}{l_1} + 2w_{2,x} - \gamma_2 = 0 \\ &6\frac{w_{n+1}}{l_n} - 6\frac{w_n}{l_n} - 2w_{n,x} - 4w_{n+1,x} - \gamma_n = 0 \end{aligned} \tag{5.54}$$

sau khi thiết lập các điều kiện biên, ta có mối quan hệ của cả hệ:

$$\left[(1+i\delta)\underline{K} - \Lambda\underline{M}\right]\underline{d} = \underline{f} \tag{5.55}$$

Từ đó các vectơ phức dịch chuyển nút được tính

$$\underline{d} = \left[(1+i\delta)\underline{K} - \Lambda\underline{M}\right]^{-1} \underline{f} \tag{5.56}$$

Lưu ý rằng vectơ dịch chuyển nút đã được xác định có liên quan đến chuyển động của vật thể rắn.

Để tính toán dao động riêng không cản, ta đặt:

$$\delta = b = 0 \text{ và } \underline{f} = \underline{0}$$

Bởi vì ma trận cản được thiết lập trực tiếp từ ma trận khối lượng theo luật cản đã được chấp nhận, bài toán dao động cưỡng bức có thể cũng được giải bằng phương pháp ma trận dạng riêng. Giả sử λ_k là trị riêng và $\underline{d}_k$ là vectơ riêng của bài toán giá trị riêng:

$$(\underline{K} - \lambda \underline{M})\underline{d} = \underline{0} \tag{5.57}$$

và $\underline{X} = [\underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \dots \quad \underline{d}_n]$ là ma trận dạng riêng tương ứng.

Phép biến đổi: $\underline{d} = \underline{X}\underline{d}^*$ (5.58)

đưa phương trình (5.55) về dạng:

$$[(1 + i\delta)\underline{K}^* - \Lambda \underline{M}\,]\,\underline{d}^* = \underline{f}^* \tag{5.59}$$

với các ma trận đường chéo:

$$\underline{K}^* = \underline{X}^T \underline{K}\underline{X} \text{ và } \underline{M}^* = \underline{X}^T \underline{M}\underline{X} \tag{5.60}$$

và vectơ lực kích động được biến đổi:

$$\underline{f}^* = \underline{X}^T \underline{f} \tag{5.61}$$

Từ (5.59) tìm được vectơ dịch chuyển nút phức $\underline{d}^*$ và sau khi biến đổi ngược nhờ (5.58) tìm được $\underline{d}$. Với việc khai triển thành các hàm riêng ta không cần quan tâm tất cả các hàm riêng.

d. Các phương pháp khác

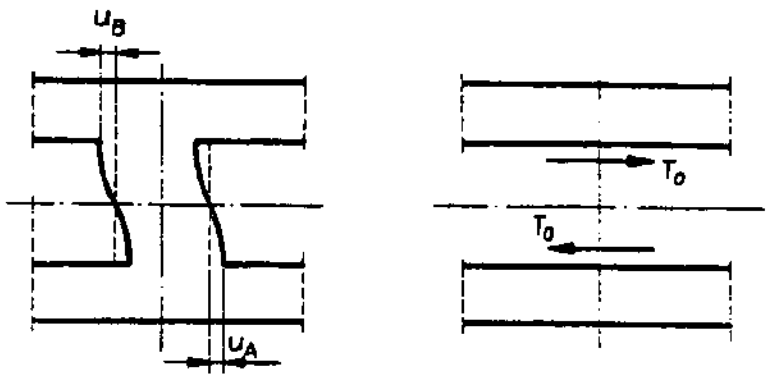
Bên cạnh các phương pháp đã được miêu tả, còn một vài phương pháp với các phương án khác nhau. Tuy nhiên, chúng không tìm được sự mở rộng to lớn trong thực tiễn đóng tàu. Bởi vậy, sự mô tả chi tiết chúng không được đề cập đến. Phương pháp đưa bài toán giá trị biên thành bài toán giá trị đầu đã được dùng nhiều lần để tính toán dao động toàn thể thân tàu. Tư tưởng cơ bản của phương pháp này là ở chỗ, hệ phương trình vi phân (5.8) được tích phân bằng số nhờ phương pháp Runge - Kutta với các giá trị biên được thừa nhận cho biên trái w(0) và γ(0) như là giá trị đầu và các điều kiện đầu này được biến đổi cho đến khi các điều kiện biên ở biên phải được thoả mãn.

Một phương pháp tiếp theo là phương pháp chuỗi khớp. Ngược lại với phương pháp thay thế tấm rời rạc, thân tàu được phân chia thành các phần tử thanh cứng tuyệt đối và có khối lượng, các phần tử này được nối với nhau bởi các khớp đàn hồi và chúng thể hiện cả biến dạng uốn cũng như cả biến dạng trượt. Ở đây cũng nên đề cập một phương pháp xấp xỉ liên tục, bởi vì phương pháp này trước đây đã được dùng nhiều cho việc tính toán dao động toàn thể của thân tàu. Nhược điểm của phương pháp này là việc tính toán các dạng riêng bậc cao đòi hỏi một quá trình trực giao hoá bằng số cồng kềnh để tách các dạng dao động riêng khỏi dạng dao động cơ bản.

Cuối cùng còn phải kể đến phương pháp Ritz. Ứng dụng của nó để tính toán dao động toàn thể thân tàu không thuận tiện lắm.

5.1.4. Dao động xoắn - uốn ngang kết hợp

Khi không có đối xứng ngang, các dao động uốn ngang bao giờ cũng kết hợp với dao động xoắn. Bởi vậy cả hai dạng dao động này đều phải được tính chung với nhau. Việc ứng dụng lý thuyết dầm cho các dạng dao động này ít nhiều cũng thích hợp để xác định xấp xỉ thô, tuy vậy vẫn còn nhiều vấn đề phải chú ý. Lý thuyết dầm sử dụng mô hình dầm Timoshenko cho các dao động uốn và sử dụng mô hình thanh Wlassow cho biến dạng xoắn với những con tàu có những đoạn boong (dạng hình quạt) tương đối nhỏ - ví dụ tàu chở dầu - thân tàu có thể được coi như là ống xoắn kín để khảo sát dao động xoắn. Tàu chở hàng hiện đại có các khoang rất lớn, cầu tàu giữa các nắp khoang bị tác động bởi hiện tượng phồng. Chúng có thể được xác định gần đúng nhờ việc đưa vào ảnh hưởng trượt bổ sung theo hình 5.13.



Hình 5.13. Xác định ảnh hưởng của cầu tàu trung gian.

Nếu C_s là độ cứng của cầu nối, thì với các ký hiệu trên hình 5.13, ta có công thức:

$$T_0 = (u_A - u_B).C_s \tag{5.62}$$

Theo lý thuyết của lực xoắn vòm, ta nhận được dịch chuyển dọc trục (độ cong phồng của tiết diện) gây ra do xoắn với các ký hiệu trên hình 5.14:

$$u_T(x,s) = -\varphi_{,x}\omega(x,s) + \frac{T_0}{G}\chi(s) \tag{5.63}$$

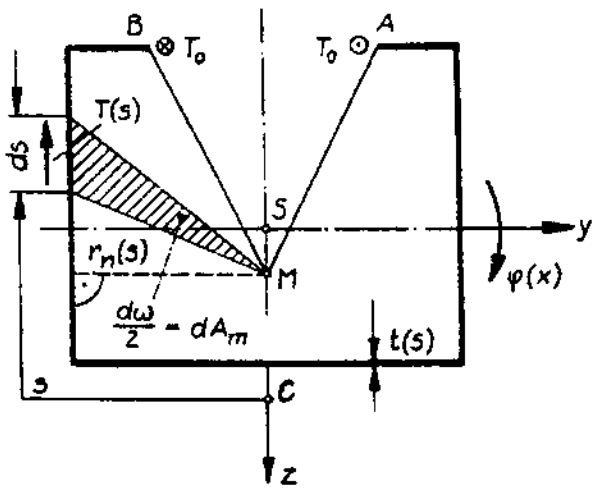
Với: $$\chi(s) = \int_0^s \frac{d\bar{s}}{t(\bar{s})} \tag{5.64}$$

$$\omega(s) = \int_0^s r_n(\bar{s})d\bar{s} \tag{5.65}$$

$r_n(s)$ thể hiện khoảng cách trực giao với đường khung của tiết diện từ điểm cực xoắn M và $\varphi(x)$ là góc xoắn. Thế (5.63) vào (5.62) đối với điểm A và B, khi đó ta có sự ảnh hưởng trượt:

$$T_0(x) = G\frac{\omega(s_B) - \omega(s_A)}{\frac{G}{C_s} + \chi(s_B) - \chi(s_A)}\varphi_{,x} = 2G\frac{A_m}{\frac{G}{C_s} + \chi_{AB}}\varphi_{,x} \tag{5.66}$$

trong đó A_m là diện tích đóng tạo bởi cung AMB và biên dạng, χ_{AB} là tích phân theo (5.64) với biên từ A đến B.



Hình 5.14. Các ký hiệu ở ống xoắn.

Thế T_0 từ (5.66) vào (5.63), khi đó ta có độ phồng xoắn:

$$u_T(x,s) = -\omega^*(s)\varphi_{,x}(x)$$

với:

$$\omega^*(s) = \omega(s) - \frac{2A_m}{1 + \frac{G}{C_s\chi_{AB}}}\frac{\chi(s)}{\chi_{AB}} \tag{5.67}$$

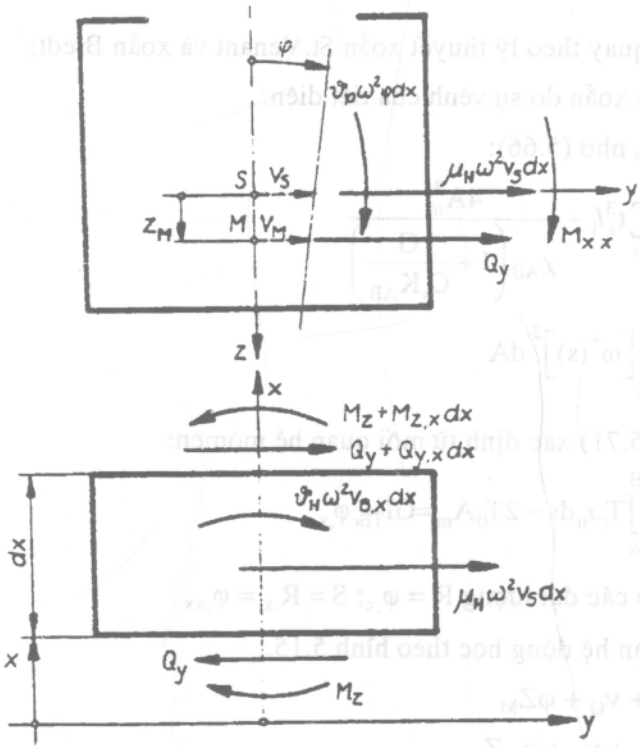
ta chọn điểm cực của hình quạt M sao cho:

$$I_{\omega y} = \int_{(A)} \omega^*(s) y dA = 0 \tag{5.68}$$

Ngoài ra, do tính đối xứng theo trục z, các điều kiện sau luôn thoả mãn:

$$S_\omega = \int_{(A)} \omega^*(s) dA = 0; \quad I_{\omega z} = \int_{(A)} \omega^*(s) z dA = 0$$

Điểm cực M của hình quạt luôn nằm trên trục z. Do tính đối xứng ta chọn điểm C là điểm ban đầu cho S.



Hình 5.15. Các ký hiệu và lực ở phần tử dầm.

Các điều kiện cân bằng ở phần tử dầm cho phép xác định từ hình 5.15. Chúng là:

$$Q_{y,x} = -\mu_H\omega^2 v_s$$
$$M_{z,x} = Q_y + \upsilon_H\omega^2 v_{B,x}$$
$$M_{x,x} = Q_{y,x}Z_m - \upsilon_p\omega^2\varphi \qquad (5.69)$$

Giữa các dịch chuyển và các đại lượng lực cắt có mối quan hệ sau:

$$M_z = -C_{BH}V_{B,xx} = -C_{BH}\beta_{H,x}$$
$$Q_y = -C_{QH}V_{Q,x} = C_{QH}\gamma_H \qquad (5.70)$$
$$M_x = Gl_T\varphi_{,x} = -El_{\omega\omega}\varphi_{,xxx}$$

trong đó:

υ_P, υ_H - mômen quán tính trên một đơn vị chiều dài liên quan đến lực hoặc là mômen quán tính xích đạo cho dao động theo phương ngang;

$C_{BH} = EI_{yy} = E\int_{(A)} y^2 dA$, $C_{QH} = k_H AG$ - độ cứng uốn và độ cứng trượt cho dao động theo phương ngang;

v_B, v_P - dịch chuyển do biến dạng uốn và trượt;

$\beta_H = v_{B,x}$, $\gamma_H = v_{Q,x}$ - góc uốn và góc trượt;

I_T - hệ số cản quay theo lý thuyết xoắn St.Venant và xoắn Bredt;

$I_{\omega\omega}$ - hệ số cản xoắn do sự vênh của tiết diện.

Ta có I_T và $I_{\omega\omega}$ nhờ (5.66):

$$I_T = \frac{1}{3}\sum_{(i)} t_i^3 l_i + \frac{4A_m^2}{\chi_{AB}\left(1+\frac{G}{C_s K_{AB}}\right)} \tag{5.71}$$

$$I_{\omega\omega} = \int_{(A)} \left[\omega^*(s)\right]^2 dA \tag{5.72}$$

Phần Bredt ở (5.71) xác định từ mối quan hệ mômen:

$$M_{XBr} = \int_A^B T_0 r_n ds = 2T_0 A_m = GI_{TBr}\varphi_{,x}$$

Nếu ta đưa vào các đại lượng $R = \varphi_{,x}$; $S = R_{,x} = \varphi_{,xx}$ (5.73)

và chú ý đến mối quan hệ động học theo hình 5.15.

$$v_S = v_B + v_Q + \varphi Z_M$$

$$v_{S,x} = \beta_H + \gamma_H + \varphi_{,x} Z_M \tag{5.74}$$

các phương trình (5.69), (5.70) và (5.73) có thể viết gọn lại dưới dạng hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{,x} = R \\
&R_{,x} = S \\
&S_{,x} = -\frac{1}{EI_{\omega\omega}}\left(M_x - GI_T R\right) \\
&M_{x,x} = -\mu_H \omega^2 Z_M v_s - \vartheta_p \omega^2 \varphi \\
&V_{s,x} = \beta_H + \frac{Q_\gamma}{C_{QH}} + RZ_M \\
&\beta_{H,x} = -\frac{M_z}{C_{BH}} \\
&M_{z,x} = Q_y + \vartheta_H \omega^2 \beta_H \\
&Q_{y,x} = -\mu_H \omega^2 V_S
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Nếu ta đưa vào vectơ trạng thái:

$$\underline{Z} = \left[\varphi \quad V_s \quad \beta_H \quad S \quad R \quad Q_y \quad M_z \quad M_x\right]^T \tag{5.76}$$

Khi đó hệ phương trình (5.75) viết được dưới dạng ma trận như sau:

$$\underline{Z}_{,x} = \underline{B}\underline{Z} \tag{5.77}$$

với ma trận:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Z_M & 1/C_{QH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/C_{BH} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{GI_T}{EI_{\omega\omega}} & 0 & 0 & -1/EI_{\omega\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_H\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_H\omega^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\vartheta_P\omega^2 & -\mu_H\omega^2 Z_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Ta giới hạn chỉ xét ở đây bài toán dao động riêng.

Để giải hệ phương trình chuyển động này, ta có thể sử dụng các phương pháp đã trình bày ở mục 5.1.3.2, trong đó đặc biệt cần quan tâm là phương pháp MTT và phương pháp PTHH.

Các điều kiện biên của bài toán này là:

$$Q_y\,(x = 0) = M_z\,(x = 0) = M_x\,(x = 0) = 0$$

$$Q_y\,(x = L) = M_z\,(x = L) = M_x\,(x = L) = 0$$

$$R\,(x = 0) = R\,(x = L) = 0$$

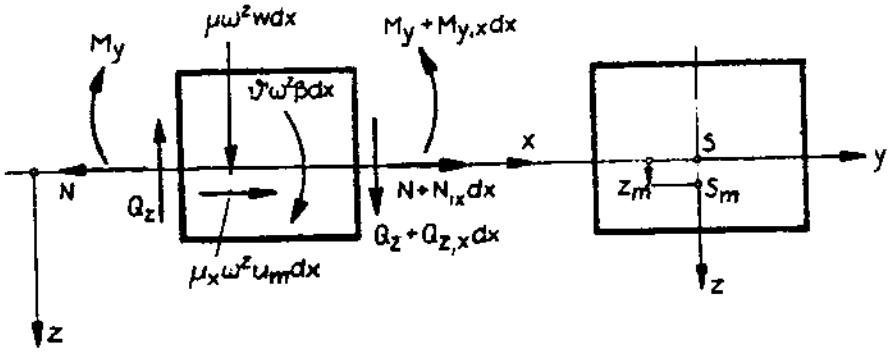
Điều kiện cuối cùng là yêu cầu triệt tiêu sự vênh tại đầu tàu.

Các mối quan hệ được trình bày ở đây mô tả bài toán đặt ra với xấp xỉ thô. Thực sự chúng chỉ có hiệu lực với tiết diện ngang không đổi. Nếu gặp phải bậc cầu, tức là tại đoạn chuyển tiếp giữa các tiết diện mở và đóng, các trạng thái chuyển tiếp không thể giải được bằng lý thuyết dầm.

Điều này rõ hơn, nếu ta chú ý rằng trục quay được xác định đi qua điểm tâm đường kéo nén có bước nhảy. Tại đoạn dầm mở, ta đặt $C_s \to 0$. Tại boong bao quanh, không có phần mẫu số thì $C_s \to \infty$. Đôi khi độ cứng của cầu tàu trên tổng chiều dài của nắp khoang được xác định không đúng

5.1.5. Dao động dọc - uốn của thân tàu

Dao động dọc của thân tàu trước hết bị gây ra do sự biến đổi chuyển động dọc của trục chân vịt có chu kỳ. Giữa dao động dọc và dao động uốn thẳng đứng có sự kết nối yếu, do khối tâm S_m không trùng với tâm S của diện tích tiết diện. Thông thường sự kết nối này là nhỏ được phép bỏ qua



Hình 5.16. Lực và các ký hiệu ở phần tử dầm dao động dọc.

β - là góc uốn, khi đó: $u_m = u_s - \beta z_m$ (5.79)

Từ hình 5.16 ta có các điều kiện cân bằng sau:

$$N_{,x} + \mu_x\omega^2 (u_s - \beta z_m) = 0$$
$$Q_{x,x} + \mu\omega^2 w = 0 \qquad (5.80)$$
$$-M_{y,x} + Q_z + \theta\omega^2\beta - \mu_x\omega^2 (u_s - \beta z_m) z_m = 0$$

Các lực ở mặt cắt được cho dưới dạng biểu thức:

$$N = u_{s,x}AE$$
$$M_y = -c_B\beta_{,x} \qquad (5.81)$$
$$Q_z = c_Q (w_{,x} - \beta)$$

Các phương trình này có thể viết gọn lại thành hệ phương trình chính tắc như sau:

$$u_{s,x} = \frac{N}{AE}$$
$$w_{,x} = \beta + \frac{Q_z}{c_Q}$$
$$\beta_{,x} = -\frac{M_y}{c_B}$$
$$N_{,x} = -\mu_x\omega^2(u_s - \beta z_m) \qquad (5.82)$$
$$M_{y,x} = Q_z + \theta\omega^2\beta - \mu_x\omega^2(u_s - \beta z_m)z_m = 0$$
$$Q_{z,x} = -\mu\omega^2 w$$

Với vectơ trạng thái: $\underline{Z} = \begin{bmatrix} u_s & w & \beta & N & M_y & Q_z \end{bmatrix}^T$

thì phương trình ma trận được viết: $\underline{Z}_{,x} = \underline{L}\underline{Z}$ (5.83)

Với ma trận:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c_Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{c_B} & 0 \\ -\mu_x\omega^2 & 0 & \mu_x\omega^2 z_m & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_x\omega^2 z_m & 0 & \theta\omega^2 + \mu_x\omega^2 z_m^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

Nghiệm của (5.83) là: $\underline{Z} = e^{\underline{L}x}$ (5.85)

Áp dụng phương pháp ma trận truyền các MTT được mô tả tương tự như ở phần b mục 5.1.3.2

$$\underline{Z}_{k+1} = \underline{C}_k \underline{Z}_k \tag{5.85b}$$

với: $$\underline{C} = \underline{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{L}_k^n \frac{l_k^n}{n!} \tag{5.86}$$

Thế N từ (5.82a) vào (5.82d) ta có:

$$(AEu_{s,x})_{,x} + \mu_x\omega^2 (u_s - \beta z_m) = 0$$

Từ đây ta bỏ qua số hạng liên quan đến Z_m, khi đó ta có phương trình dao động dọc:

$$(Aeu_{s,x})_{,x} + \mu\omega^2 u_s = 0 \tag{5.87}$$

Với vectơ trạng thái: $\underline{Z} = [u_s \quad N]^T$ (5.88)

thì ma trận $\underline{L}$ có dạng: $\underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{AE} \\ -\mu_x\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ (5.89)

Với mục đích áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), ta thay dịch chuyển u(x) bằng hàm thay thế: $U(x) = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4]\underline{u} = \underline{h}^T\underline{u}$

Với hàm dạng theo (5.44) và vectơ dịch chuyển nút:

$$\underline{u} = [u(0) \quad u_{,x}(0) \quad u(l) \quad u_{,x}(l)]^T$$

Từ hàm năng lượng: $$\pi_e = \frac{1}{2}\int_0^l AEu_{,x}^2 dx - \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^l \mu_x u^2 dx \tag{5.90}$$

ta có phương trình chuyển động của phần tử theo cách thông thường với các ma trận tương ứng.

5.1.6. Xác định các tham số

Tính chính xác của các kết quả tính toán dao động tàu thuỷ phụ thuộc vào độ chính xác của các tham số cần xác định. Việc xác định các tham số này thường gặp nhiều khó khăn. Dưới đây trình bày những tham số quan trọng nhất cho việc tính toán dao động tổng thể của tàu thuỷ.

5.1.6.1. Xác định tham số khối lượng

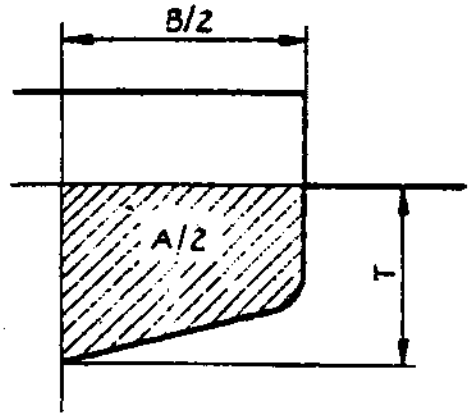
Việc xác định sự phân bố khối lượng và đường cong của mômen quán tính khối lượng nói chung mang tính tương đối. Cần chú ý là phần nào dao động với dạng nào. Các phần tử chịu tải có nối cứng với nhau hoặc nối cứng với tàu không? Đó là một vấn đề không đơn giản. Chúng cần có đủ kinh nghiệm để suy xét hoặc những nghiên cứu đặc biệt.

5.1.6.2. Khối lượng thuỷ động

Bổ sung vào khối lượng thân tàu thuỷ, các phần cấu thành nên nó và các tải trọng, còn có một khối lượng được gọi là khối lượng thuỷ động. Việc xác định được đại lượng này là bài toán quan trọng của thuỷ động lực học tàu thuỷ. Thông thường để xác định các khối lượng thuỷ động người ta hay dùng lý thuyết vật thể mảnh. Nghĩa là ta giả thiết rằng tại mỗi tiết diện cắt ngang của tàu thuỷ có một luồng bao quanh phẳng. Độ nhớt và tính nén được của nước được bỏ qua và ảnh hưởng của luồng nước không gian đặc biệt ở đuôi tàu và ở các nút dao động được xét đến một cách gần đúng. Qua những điều được nêu ở trên, khối lượng thuỷ động phụ thuộc vào dạng dao động.

Trong ngành đóng tàu, thông thường các khối lượng thuỷ động được mô tả thông qua các hệ số quán tính C, chúng được định nghĩa với các ký hiệu trong hình 5.17 thông qua hệ thức:

$$m_h = \frac{1}{2} C_z \rho \pi \frac{B^2}{4} R_z$$
$$m_{hy} = \frac{1}{2} C_y \rho \pi T^2 R_y \qquad (5.91)$$



Hình 5.17. Các ký hiệu tại tiết diện cắt ngang của tàu thuỷ.

Các hệ số quán tính C phụ thuộc vào dạng tàu, hướng chuyển động và tỷ số T/ B, chúng có thể được lấy từ các tài liệu tham khảo về thuỷ động học tàu thuỷ. R_z và R_y là các hệ số hiệu chỉnh khi tính đến ảnh hưởng của luồng không gian. Các hệ số quán tính có thể được xác định gần đúng bởi các công thức dưới đây:

$$C_z = \left(\frac{B_c}{B}\right)^2 \left[(1+A_1)^2 + 3A_3^2\right]$$

$$C_y = \frac{4}{\pi^2}\left[1 + \frac{16}{3\lambda^2}\left(\frac{B_c}{B}\right)^2 A_3^2\right] \tag{5.92}$$

$$\lambda = \frac{2T}{B};\ C_M = \frac{A}{BT}$$

$$A_1 = \frac{1-\lambda}{2\frac{B_c}{B}};\ A_3 = \frac{1+\lambda}{2\frac{B_c}{B}} - 1 \tag{5.93}$$

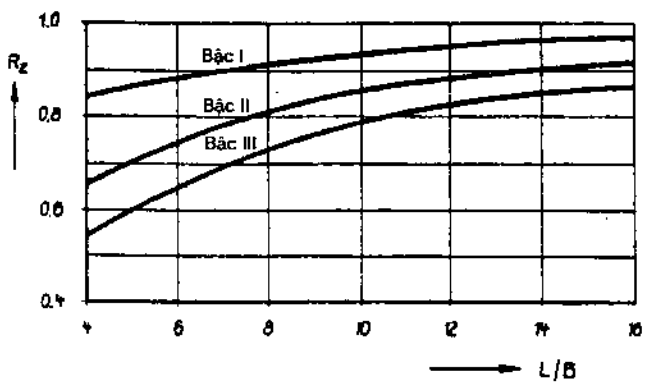
$$\frac{B_c}{B} = \frac{1}{4}\left[3(1+\lambda) - \sqrt{(1+\lambda)^2 + 8\lambda\left(1 - \frac{4}{\pi}C_M\right)}\right]$$

Hệ số R_z có thể được xác định cho 3 bậc dao động đầu tiên từ hình 5.18.

Vận tốc chuyển động của tàu thủy, độ nhớt và tính nén được của nước không được đề cập tới trong các hệ thức trên. Ảnh hưởng của các đại lượng này đến dao động đàn hồi của tàu thuỷ là không lớn.

Tính không chắc chắn của việc xác định các khối lượng thuỷ động do ảnh hưởng của luồng không gian nước bao quanh tăng lên đáng kể nếu trong mô hình tính toán, độ nhớt bao quanh tàu thuỷ được đề cập đến.

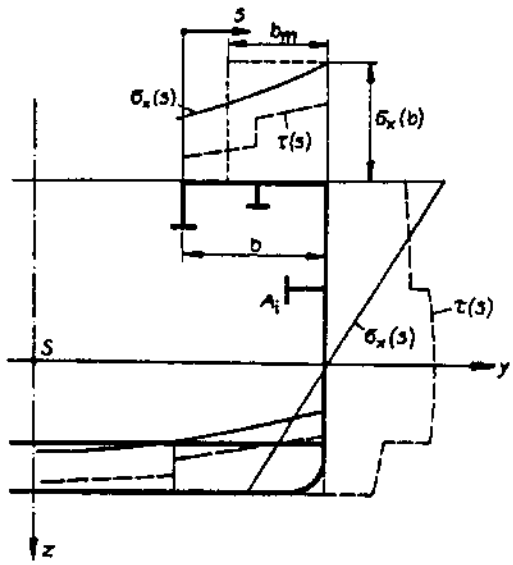
Vấn đề này còn được nhắc đến ở đoạn sau.



Hình 5.18. Hệ số R_z khi tính cả luồng bao quanh không gian.

5.1.6.3. Độ cứng uốn

Khi xác định độ cứng chống uốn C_b = EI thì phân bố ứng suất cục bộ cũng phải được tính đến. Trong mômen quán tính I có tất cả các thiết diện tại phạm vi truyền cùng được đưa vào. Các ứng suất pháp nằm trên đáy hoặc boong giảm xuống do tác động của biến dạng trượt tại "cầu tàu" phải được lưu tâm đến thông qua các hệ số điều chỉnh. Tiếp theo, các diện tích từng phần A_i trên boong và đáy tàu phải được nhân với hệ số $\sigma_{xi} / \sigma_{x0}$ (hình 5.19).



Hình 5.19. Đường cong ứng suất pháp và ứng suất trượt tại thiết diện ngang của thân tàu thuỷ.

Quá trình này đòi hỏi sự hiểu biết về đường cong ứng suất pháp $\sigma_x(s)$ ở đáy và boong tàu. Nó có thể được xác định gần đúng nếu ta coi thân tàu như là một cái hộp. Khó khăn là ở chỗ, việc giảm xuống của ứng suất pháp do biến dạng trượt phụ thuộc vào lực cắt, và đường cong lực cắt lại là hàm của dạng dao động. Bởi vậy, độ cứng chống uốn cũng là hàm của dạng dao động.

Khi bậc dao động tăng lên thì nửa bước sóng của dạng dao động giảm xuống và sự giảm ứng suất lại tăng lên.

Trong ngành đóng tàu, thông thường việc giảm ứng suất này được xác định thông qua bề rộng được "truyền cùng" loại một b_m. Như đã biết, đường cong ứng suất trên boong được xác định gần đúng qua:

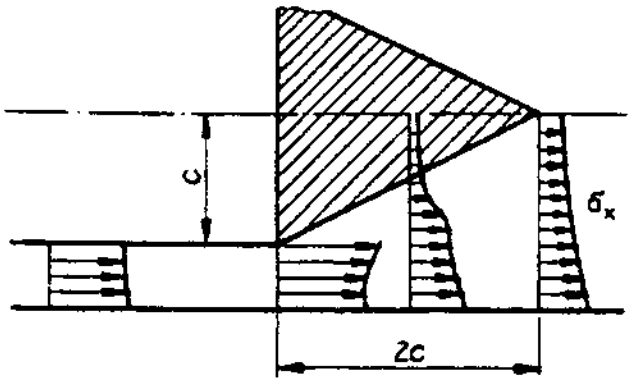
$$\sigma_x(s) = \sigma_x(b)\frac{\cosh\frac{s}{b}K}{\cosh K} \tag{5.94}$$

Trong đó tham số K được xác định từ: $\frac{\tanh K}{K} = \frac{b_m}{b}$ (5.95)

Bên cạnh đó, cần chú ý rằng bề rộng "truyền cùng" loại một phụ thuộc vào dạng dao động.

Tại các mặt cắt, đường cong ứng suất pháp bị sai lệch qua mặt cắt phải được xác định.

Ta có một phương pháp gần đúng trong thực tế, nếu như diện tích gạch chéo trong hình 5.20 được chấp nhận không truyền cùng.



Hình 5.20. Sự giảm thiểu mặt cắt ngang ở vùng cuối cửa tàu.

5.1.6.4. Độ cứng kéo nén

Độ cứng kéo nén được xác định theo công thức sau:

$$C_Q = kAG = GA_s$$

trong đó: A - diện tích tổng thể; k - hệ số trượt; A_s - diện tích mặt cắt có hiệu quả.

Nhờ việc tính tổng năng lượng, hệ số trượt được tính theo công thức:

$$k = \frac{I^2}{A\int_{(A)} \frac{S^2}{t^2} dA} \quad (5.96)$$

Trong đó S(x,s) là mômen tĩnh của diện tích mặt cắt ngang đối với toạ độ chu vi s và t là bề dày của tấm tôn. Hệ số trượt này không phụ thuộc chính xác vào hệ số mặt cắt ngang mà phụ thuộc vào dạng dao động do chứa S(x,s). Sự phụ thuộc dạng dao động này thường không được quan tâm.

5.1.6.5. Độ cứng chống xoắn

Để tính toán dao động uốn ngang kết hợp với dao động xoắn, còn cần đến độ cứng chống xoắn. Ta có mômen quán tính xoắn St. Venant từ hệ thức:

$$I_T = \frac{1}{3}\sum_{(i)} l_i t_i^3 \tag{5.97}$$

Phần Bredt của mômen quán tính xoắn theo hệ thức:

$$I_T^{Bredt} = \frac{4Am^2}{x_{AB}\left(1 + \frac{G}{C_s \chi_{AB}}\right)} \tag{5.98}$$

Cuối cùng, ta tính được phần do sự phồng từ công thức:

$$I_{\omega\omega} = \int_{(A)} \left[\omega(s) - \frac{2A_m}{1 + \frac{G}{C_s \chi_{AB}}} \cdot \frac{\chi(s)}{\chi_{AB}}\right]^2 dA \tag{5.99}$$

5.1.6.6. Cản

Các tác động của cản khi thân tàu dao động được nghiên cứu rất nhiều, và kiến thức hiện nay về vấn đề này vẫn còn chưa được thống nhất. Trong các tài liệu tham khảo đã đưa ra các mối quan hệ gần đúng, tuy nhiên vẫn còn tản mạn. Trong đoạn 5.1.3.1, ta đã đưa ra hai thành phần chính của cản: cản tuyến tính của vật liệu không phụ thuộc vào tần số, chúng được đặc trưng thông qua tham số vô hướng δ, và cản ngoài phụ thuộc vào vận tốc, bởi vậy nó phụ thuộc vào tần số với tham số b hoặc η. Nếu phải xét đến sự phụ thuộc vào tần số của cản vật liệu, thì tham số δ được đặt: $\delta = \delta_0 + \Omega\delta_1$.

Thông thường các tham số cản liên quan đến cản tới hạn, ở đó đại lượng này đặc trưng cho trạng thái giới hạn của sự tắt dần có chu kỳ hoặc không có chu kỳ của dao động tự do.

Chúng được xác định qua hệ thức:

$$(\delta + \eta)_{t.h} = \left(\delta_0 + \Omega\delta_1 + \frac{b}{\mu\Omega}\right)_{t.h} = 2 \tag{5.100}$$

Chữ t.h là viết tắt của chữ tới hạn.

Các tham số δ và η có thể nhận giá trị giới hạn dưới đây:

$\delta = 0{,}006$ đến $0{,}02$; $\eta = 0{,}02$ đến $0{,}06$

Về cơ bản, cản ngoài chịu ảnh hưởng của chất lỏng chuyển động cùng.

5.2. DAO ĐỘNG CỤC BỘ CỦA THÂN TÀU THUỶ

5.2.1. Nhận xét chung

Như đã trình bày ở phần 5.1, thân tàu được mô tả là một hệ không gian các khung phẳng có gân và ta cũng chỉ ra tính đa dạng của các hiện tượng dao động. Chúng ta xem các dao động từng phần của thân tàu là dao động cục bộ, khi mà ở đó việc kết nối các phần của hệ có cùng biên với nhau hoặc là kết nối với dao động toàn thể của tàu là ít ỏi.

Việc tính toán tương ứng với nhu cầu thực tế về trạng thái dao động của các cấu trúc thân tàu cục bộ có những khó khăn đáng kể, bởi vì việc xét độc lập các phần của cấu trúc và bỏ qua ảnh hưởng của các hệ lân cận không đem lại độ chính xác mong muốn.

Trong tính toán tĩnh, ta có thể xét tác động của các hệ lân cận qua độ cứng nối tương ứng, việc tính toán dao động yêu cầu phải xem các đại lượng nối động lực dưới dạng phụ thuộc vào dạng dao động và các khối lượng biên để đảm bảo trạng thái tương đương của phần cấu trúc này.

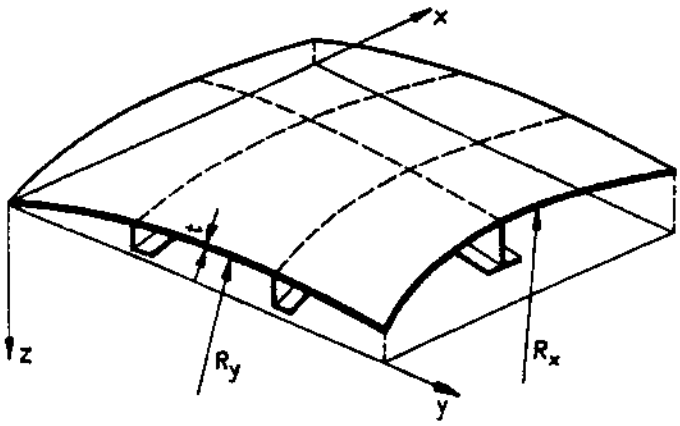
Các tham số này không thể xác định được ngay từ đầu. Do vậy chỉ có ràng buộc thoả mãn gần đúng khá thô điều kiện biên. Ta chọn các biên của cấu trúc cục bộ sao cho trị số của các di chuyển thẳng và quay càng nhỏ càng tốt. Đối với dịch chuyển vuông góc với diện tích trung bình của hệ khung dầm phẳng thì các tầng trung gian được tựa hay là các dầm chịu uốn cứng là các ví dụ gần đúng cho trường hợp này. Ngoài ra, ta phải cố gắng kéo các vùng biên ra khỏi phạm vi cần quan tâm xa nhất có thể, bởi vì ảnh hưởng của các điều kiện biên không thực giảm dần từ ngoài vào trong.

Người ta muốn xác định các trạng thái dao động của các hệ cục bộ từ việc xem xét cấu trúc chung, khi đó việc mô hình hoá rất đơn giản để tránh phí tổn là cần thiết và do điều này, trạng thái dao động cục bộ có thể bị sai.

Cấu trúc cục bộ của thân tàu bao giờ cũng cho phép đưa về được các hệ khung phẳng có gân đối với các tấm mỏng (dạng vách ngăn). Thông thường, tính cong trong phạm vi cục bộ được giả thiết là nhỏ bởi vậy, các khảo sát dưới đây giới hạn ở các tấm có gân và trong một vài trường hợp được giới hạn ở các vỏ có gân .

5.2.2. Giới thiệu mô hình cho tính toán tấm có gân và vỏ mỏng (thoải) có gân

Hệ khung phẳng có gân được cấu tạo từ vỏ bao quanh được giả thiết là mỏng và các gân làm cứng. Với các hệ dầm làm việc với nước, còn phải bổ sung thêm lượng chất lỏng tiếp xúc với hệ dầm phẳng.



Hình 5.21. Các ký hiệu ở hệ khung phẳng có gân.

Để tính toán trạng thái dao động của chúng, các mô hình dưới đây được sử dụng: mô hình thanh đỡ, tấm đẳng hướng và các hệ khung phẳng có gân.

Mô hình thanh đỡ chỉ có thể áp dụng vào tấm có gân. Mỗi bộ phận cứng được sắp xếp như là một đường kê trên tấm và bởi vậy, cấu trúc hai chiều được giảm xuống thành hệ dầm. Khó khăn khi áp dụng mô hình này là ở chỗ, các hàm truyền theo bề rộng tấm còn là các dạng dao động chưa biết, và ngoài ra, chúng biến đổi đáng kể dọc theo chiều dài của dầm. Các dao động của các tấm giữa các gân (bộ phận làm cứng) hoàn toàn không được đề cập đến trong mô hình này. Các sai số gây ra do điều này có thể lớn đến mức không được phép bỏ qua. Bởi vậy, việc áp dụng mô hình thanh đỡ được giới hạn ở các tấm được làm cứng bởi các gân có độ uốn khá mềm. Không thể đánh giá định lượng phạm vi ứng dụng mô hình này. Bởi vậy, khi ứng dụng mô hình này cần hết sức cẩn thận. Với mô hình tấm đẳng hướng, các gân cứng bị làm nhòa đi. Dao động uốn của tấm giữa các gân qua mô hình này cũng không được đề cập tới. Bởi vậy, mô hình này chỉ có thể áp dụng nếu như các gân được bố trí đều đặn và đủ sát nhau, như thế sẽ không gặp phải các dao động tấm trội hơn.

Vì vậy, để tính toán chính xác hơn, chỉ có một mô hình mà ở đó các gân được coi như là các dầm cứng chịu xoắn và uốn được bố trí rời rạc, chúng được gắn chặt với tấm (hình 5.21).

Đối với việc mô hình hoá hệ như vậy, một lần nữa lại có rất nhiều các khả năng khác nhau. Với các kích thước thông thường trong ngành đóng tàu, tấm nền bao giờ cũng được coi là tấm Kirschoff, bản hoặc vỏ mỏng. Vỏ bao quanh trong các tính toán tiếp theo được coi như là phẳng hoặc cong rất ít. Một vỏ được coi là cong ít nếu như chiều cao mũi tên độ cong nhỏ hơn 1/20 độ giãn dọc tương ứng.

Việc bỏ qua ứng suất tấm được giới thiệu trong nhiều tài liệu tham khảo nói chung là không được phép. Dẫu vậy, trong ngành đóng tàu xuất hiện nhiều hệ thống tính toán mà ở đó việc đơn giản hoá rất có hiệu quả. Với các gân sát nhau, có thể gặp phải sai số khi tính toán tần số riêng lớn hơn 20%. Ngược lại, luôn được phép bỏ qua các lực quán tính màng ở các tấm có gân cũng như ở các bản phẳng có gân.

Đối với các gân, với chủ định trước, ta dùng mô hình dầm Wlassow. Nó chứng tỏ rằng, độ cứng xoắn cũng lớn cùng bậc với độ cứng xoắn St. Venant và thậm chí còn có thể hơn. Các lực quán tính dọc trục và quán tính quay xung quanh trục vuông góc được phép bỏ qua. Ngược lại, quán tính quay xung quanh trục dầm bao giờ cũng phải tính đến. Sự quyết định về vấn đề biến dạng trượt do lực cắt vuông góc với hệ khung phẳng là khó khăn. Trong hầu hết các hệ xuất hiện trong thực tế, ảnh hưởng của chúng đến trạng thái dao động là ít ỏi. Chúng chỉ có ý nghĩa ở dạng dao động bậc cao. Một quy tắc khá thô cho dạng dao động mà

tại đó l_m / H ≥ 3 là sai số ở tần số riêng dưới 1%. Trong đó, l_m là nửa bước sóng nhỏ nhất quan sát được và H là chiều cao của biên dạng. Ngược lại, đối với khúc cong của gân theo hướng thiết diện trung bình, biến dạng trượt do lực cắt không có ý nghĩa gì. Thông thường, ảnh hưởng uốn của gân theo phương này có thể bỏ qua.

Khi tính toán các trạng thái dao động của tấm có tiếp xúc với chất lỏng, chất lỏng được coi là lý tưởng.

Tóm lại, ta có các mô hình dưới đây đối với trạng thái dao động của tấm có gân, bản phẳng có gân.

Tấm nền: Lý thuyết tấm Kirschoff + lý thuyết tĩnh của tấm hoặc lý thuyết động lực của bản phẳng với việc bỏ qua lực quán tính màng.

Gân cong ngang theo diện tích của tấm nền: Lý thuyết dầm Wlassow với việc bỏ qua lực quán tính dọc trục, tuy nhiên phải lưu tâm đến biến dạng trượt do lực cắt biến đổi.

Gân cong theo phương tiết diện trung bình của tấm nền: Dầm Wlassow và không lưu tâm đến lực quán tính hoặc bỏ qua ảnh hưởng uốn tổng cộng theo hướng này.

Chất lỏng: Chất lỏng lý tưởng.

Chúng ta cũng phân chia các tác động của cản tới dao động cục bộ thành cản vật liệu và cản ngoài. Để tiếp tục tính toán, ta áp dụng luật tuyến tính đơn giản. Ở đây, ta hiểu cản vật liệu qua hàm thay thế:

$$\underline{\bar{\sigma}} = \underline{H}(\underline{\tilde{\varepsilon}} + \frac{\delta}{\Omega}\underline{\dot{\tilde{\varepsilon}}}) \tag{5.101}$$

Trong đó:

Vectơ ứng suất trạng thái phẳng: $\underline{\bar{\sigma}}^T = \left[\bar{\sigma}_x\ \bar{\sigma}_y\ \bar{\tau}_{xy}\right]$

Vectơ biến dạng: $\underline{\tilde{\varepsilon}}^T = \left[\tilde{\varepsilon}_x\ \tilde{\varepsilon}_y\ \tilde{\gamma}_{xy}\right]$

Ma trận của định luật Hook cho trạng thái ứng suất phẳng.

$$\underline{H} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

δ: tham số của cản vật liệu; Ω: tần số vòng.

Dấu ~ ở bên trên đặc trưng cho đại lượng phụ thuộc thời gian và dấu • là đạo hàm theo thời gian.

Tần số vòng Ω ở mẫu số của đại lượng thứ hai trong (5.101) nói lên rằng cản vật liệu của kim loại độc lập với tần số.

Với giới hạn ở dao động điều hoà: $\tilde{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma}e^{i\Omega t}$ và $\tilde{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}e^{i\Omega t}$.

Định luật vật liệu ứng với trạng thái ứng suất phẳng:

$$\underline{\sigma} = (1 + i\delta)\underline{H}\underline{\varepsilon} \tag{5.102}$$

Chúng ta giả định rằng cản ngoài tỷ lệ với vận tốc dịch chuyển ngang với tấm nền. Theo đó đối với lực cản trên đơn vị diện tích, ta có:

$$\tilde{p}_D = b\dot{\tilde{w}} \tag{5.103}$$

Từ đây, đối với dao động điều hoà: $p_D = -ib\Omega w$ (5.104)

Qua (5.102) và (5.103) cản vật liệu không phụ thuộc vào tần số, còn cản ngoài thay đổi tuyến tính cùng tần số. Ảnh hưởng cản của chất lỏng phụ thuộc vào tần số. Nó thường được thể hiện qua sự thêm vào đại lượng b.

5.2.3. Công thức toán học của các mô hình

5.2.3.1. Công thức của bài toán giá trị biên

Trước hết, ta đưa ra các phương trình chuyển động đối với tấm phẳng. Vì thế, ta có các giả thiết sau:

+ Biến dạng nhỏ, bề dày của tấm là nhỏ, sử dụng giả thuyết Kirchhoff.

+ Độ cong nhỏ, đường cong là thiết diện có x= const và y= const, hình chiếu của phần tử đường lên mặt phẳng (x,y) cũng là phần tử đường.

Trong trường hợp này, ta có biến dạng của phần tử ở khoảng cách z đối với mặt phẳng trung bình của tấm:

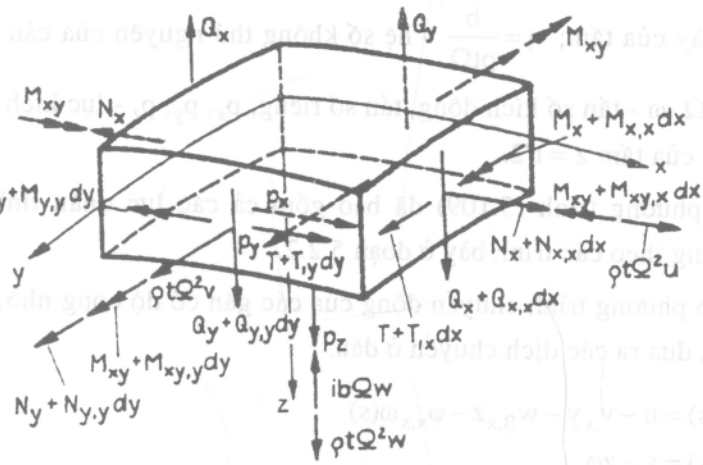
$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(z) &= u_{,x} - zw_{,xx} - wK_x \\
\varepsilon_y(z) &= v_{,y} - zw_{,yy} - wK_y \\
\gamma_{xy}(z) &= u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy}
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Trong đó u, v, w là các dịch chuyển ở mặt phẳng trung bình của tấm và $K_x = 1 / R_x$; $K_y = 1 / R_y$ là độ cong theo phương x và y.

Với giả thiết trạng thái ứng suất phẳng thì các ứng suất

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E^*}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{E^*}{1-\nu^2}\left[u_{,x} + \nu v_{,y} - z(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) - (K_x + \nu K_y)w\right] \\
\sigma_y &= \frac{E^*}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{E^*}{1-\nu^2}\left[u_{,y} + \nu v_{,x} - z(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) - (K_y + \nu K_x)\right] \\
\tau_{xy} &= \frac{E^*}{2(1-\nu^2)}\gamma_{xy} = \frac{E^*}{2(1-\nu^2)}(u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy})
\end{aligned} \tag{5.106}$$

ở đây: $E^* = E(1 + i\delta)$



Hình 5.22. Lực đặt ở phần tử tấm.

Theo hình 5.22, các phương trình cân bằng tại phần tử tấm là:

$$
\begin{aligned}
&N_{x,x} + T_{,y} + p_x + \rho t\Omega^2 u = 0\\
&N_{y,y} + T_{,x} + p_y + \rho t\Omega^2 v = 0\\
&Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_x K_x + N_y K_y + p_z - ib\Omega w + \rho t\Omega^2 w = 0\\
&-M_{xy,x} - M_{y,y} + Q_y - p_y \frac{t}{2} = 0\\
&M_{xy,y} + M_{x,x} - Q_x + p_x \frac{t}{2} = 0
\end{aligned}
\tag{5.107}
$$

Các lực p_x và p_y tác dụng lên mặt phẳng trên của tấm $z = t/2$.

Các đại lượng tại thiết diện nêu ra ở trên, được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
&N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz; \quad M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz; \quad T_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} dz\\
&N_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz; \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz
\end{aligned}
\tag{5.108}
$$

Khử các Q_x, Q_y trong (5.107), thay các đại lượng lực tại thiết diện ở (5.108) vào (5.107) và chú ý đến (5.106), ta được:

$$
\begin{aligned}
&u_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{,xy} - \left[(K_x + \nu K_y) w\right]_{,x} + (1-\nu^2)\frac{\rho}{E^*}\Omega^2 u + p_x \frac{1-\nu^2}{E^* t} = 0\\
&v_{,yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{,xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{,xy} - \left[(K_y + \nu K_x) w\right]_{,y} + (1-\nu^2)\frac{\rho}{E^*}\Omega^2 v + p_y \frac{1-\nu^2}{E^* t} = 0\\
&\nabla^4 w - \frac{12}{t^2}\left[(K_x + \nu K_y) u_{,x} + (K_y + \nu K_x) v_{,y} - (K_x^2 + K_y^2 + 2\nu K_x K_y) w\right]\\
&-12(1-\nu^2)\frac{\rho\Omega^2}{E^* t^2}(1 - i\eta) w = \frac{12(1-\nu)^2}{E^* t^3}\left(p_z + p_{x,x}\frac{t}{2} + p_{y,y}\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.109}
$$

trong đó: t - bề dày của tấm; $\eta = \dfrac{b}{\rho t \Omega}$ - hệ số không thứ nguyên của cản ngoài; ρ - mật độ của vật liệu tấm; Ω, ω - tần số kích động, tần số riêng; p_x, p_y, p_z - lực kích động điều hoà tác dụng lên mặt trên của tấm z = t/2.

Trong các phương trình (5.109) đã bao gồm cả các lực quán tính màng, dẫu rằng không cần có chúng theo các trình bày ở đoạn 5.2.2.

Để thiết lập phương trình chuyển động của các gân có độ cong nhỏ, ta dùng lý thuyết Wlassow. Sau đó, đưa ra các dịch chuyển ở đầu.

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(x,s) = u - v_{,x}y - w_{B,x}z - \varphi_{x,x}\omega(s)\\
&\bar{v}(x,s) = v - z\varphi_x\\
&\bar{w}(x,s) = w - y\varphi_x\\
&w = w_B + w_Q
\end{aligned} \tag{5.110}$$

trong đó:

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: dịch chuyển ở biên dạng phải theo toạ độ s (xem hình 5.23);

u, v, w: dịch chuyển của gốc toạ độ (mặt phẳng trung bình);

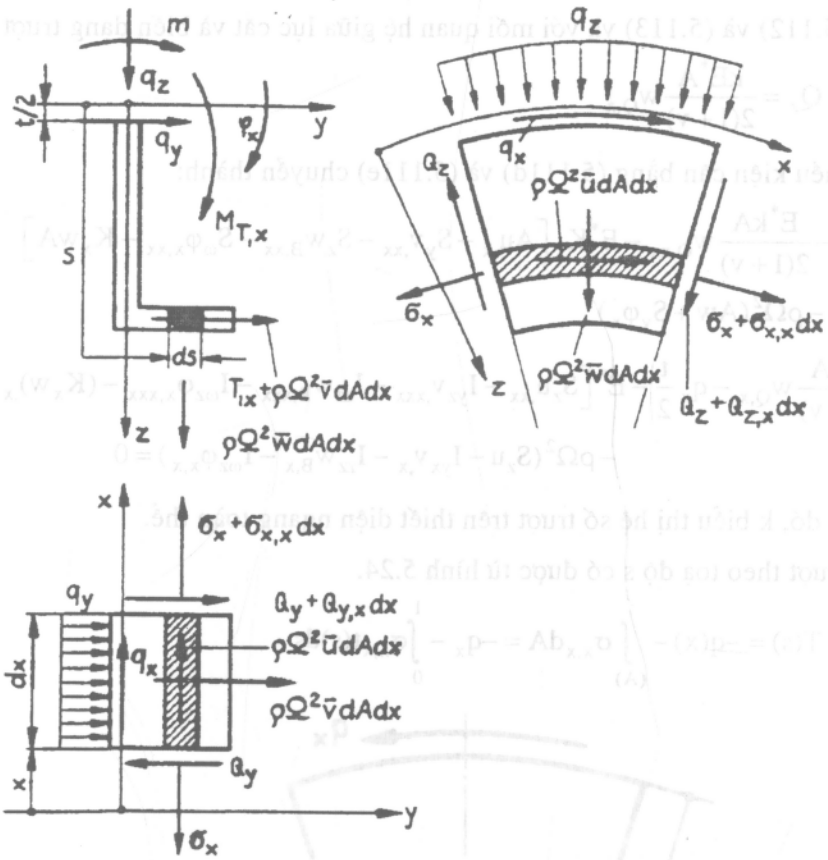
w_B, w_Q: phần dịch chuyển do uốn và do lực cắt;

$\omega(s) = \int_0^s n(\bar{s})d\bar{s}$: đơn vị của sự phồng;

φ_x: góc xoay của biên dạng theo trục x.

Các điều kiện cân bằng có được từ hình 5.23:

$$\begin{aligned}
&q_x + \int_{(A)} \sigma_{x,x}dA + \rho\Omega^2 \int_{(A)} \bar{u}dA = 0\\
&q_y + Q_{y,x} + \rho\Omega^2 \int_{(A)} \bar{v}dA = 0\\
&-Q_y + \int_{(A)} \sigma_{x,x}ydA = 0\\
&q_z + Q_{z,x} + \rho\Omega^2 \int_{(A)} \bar{w}dA + \int_{(A)} \sigma_x K_x dA = 0\\
&\int_{(A)} \sigma_{x,x}zdA - Q_z + q_x\frac{t}{2} + \rho\Omega^2 \int_{(A)} \bar{u}zdA = 0\\
&m + M_{T,x} - q_y\frac{t}{2} + \int_{(A)} T_{,x}ndA - \rho\Omega^2 \int_{(A)} (\bar{v}z - \bar{w}y)dA = 0
\end{aligned} \tag{5.111a...f}$$



Hình 5.23. Các ký hiệu và các lực tại phần tử dầm cong.

Ta nhận được biến dạng và ứng suất theo phương x đối với dầm Wlassow có độ cong nhỏ:

$$\bar{\varepsilon}(x,s) = u_{,x} - v_{,xx}y - w_{B,xx}z - \varphi_{x,xx}\omega - K_x w \tag{5.112}$$

$$\bar{\sigma}(x,s) = E^*\bar{\varepsilon}(x,s) \tag{5.113}$$

Số hạng cuối cùng ở (5.112) được hiểu là hiệu ứng bậc thang bởi dịch chuyển tổng thể của một pha theo hướng xuyên tâm quanh w.

Với chú ý đến (5.113) và điều kiện cân bằng (5.111a), ta được:

$$\begin{aligned} q_x = E^*\left[-Au_{,xx} + S_y v_{,xxx} + S_z w_{B,xxx} + \varphi_{x,xxx}S_\omega + (K_x w)_{,x}A\right] - \\ - \rho\Omega^2(Au - S_y v_{,x} - S_z w_{B,x} - S_\omega \varphi_{x,x}) \end{aligned} \tag{5.114a}$$

Từ (5.111b) và (5.111c) sau khi khử Q_y với chú ý đến (5.110):

$$\begin{aligned} q_y = E^*\left[-S_y u_{,xxx} + I_{yy}v_{,xxxx} + I_{yz}w_{B,xxxx} + I_{\omega y}\varphi_{x,xxxx} + (K_x w)_{,xx}S_y\right] - \\ - \rho\Omega^2(Av - S_z\varphi_{x,x}) \end{aligned} \tag{5.114b}$$

Với (5.112) và (5.113) và với mối quan hệ giữa lực cắt và biến dạng trượt do lực cắt:

$$Q_z = \frac{kE^*A}{2(1+v)} w_{Q,x} \tag{5.115}$$

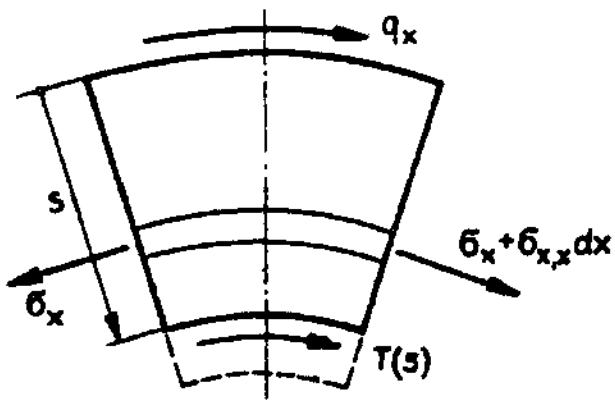
Các điều kiện cân bằng (5.111d) và (5.111e) chuyển thành:

$$\begin{aligned} q_z &= -\frac{E^*kA}{2(1+v)} w_{Q,xx} - E^*K_x\left[Au_{,x} - S_y v_{,xx} - S_z w_{B,xx} - S_\omega \varphi_{x,xx} - K_x wA\right] \\ &\quad -\rho\Omega^2(Aw + S_y\varphi_x) \\ &\frac{E^*kA}{2(1+v)} w_{Q,x} - q_x\frac{t}{2} - E^*\left[S_z u_{,xx} - I_{yz}v_{,xxx} - I_{zz}w_{B,xxx} - I_{\omega z}\varphi_{x,xxx} - (K_x w)_{,x}S_z\right] \\ &\quad -\rho\Omega^2(S_z u - I_{yx}v_{,x} - I_{zz}w_{B,x} - I_{\omega z}\varphi_{x,x}) = 0 \end{aligned} \tag{5.114c,d}$$

Trong đó, k biểu thị hệ số trượt trên thiết diện ngang toàn thể.

Lực trượt theo toạ độ s có được từ hình 5.24.

$$T(s) = -q(x) - \int_{(A)} \sigma_{x,x} dA = -q_x - \int_0^l \sigma_{x,x} t(s) ds$$



Hình 5.24. Lực trượt $T_{(s)}$.

Trong đó *l* là chiều dài của đường trung bình biên dạng đến tận điểm cuối tự do của biên dạng. Ta biến đổi số hạng thứ tư trong (5.111f) như sau:

$$\int_0^l T_{,x}(s)n(s)ds = \int_0^l T_{,x}(s)d\omega(s) = T_{,x}(s)\omega(s)\Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial T_{,x}(s)}{\partial s}\omega(s)ds$$

Số hạng đầu tiên triệt tiêu do điều kiện biên $T_{lx}(l) = \omega(s = 0)$, và ta nhận được:

$$\int_0^l T_{,x}(s)n(s)ds = \int_{(A)} \sigma_{x,xx}\omega dA \tag{5.116}$$

M_T là mômen theo thuyết xoắn St. Venant. Nó có mối liên hệ:

$$M_T = GI_T\varphi_{x,x} \tag{5.117}$$

với: $$I_T = \frac{1}{3}\sum_i t_i^3 s_i$$

Bây giờ, thế vào (5.116), (5.117) và (5.110) vào (5.111f), ta được:

$$\begin{aligned}(m - q_y\frac{t}{2}) = E^*\left[-S_\omega u_{,xxx} + I_{\omega y}w_{,xxx} + I_{z\omega}w_{B,xxxx} + I_{\omega\omega}\varphi_{x,xxxx} + (K_x w)_{,xx}S_\omega\right]\\ -\rho\Omega^2(-S_z v + I_p\varphi_x + I_{yz}w) - \frac{E^*}{2(1+v)}I_T\varphi_{x,xx}\end{aligned} \tag{5.114e}$$

Trong các phương trình (5.114), ta dùng các tham số mặt cắt sau:

$$\begin{aligned}&A = \int_{(A)} dA;\ S_y = \int_{(A)} ydA;\ S_z = \int_{(A)} zdA;\ S_\omega = \int_{(A)} \omega dA\\ &I_{yy} = \int_{(A)} y^2dA;\ I_{yz} = \int_{(A)} yzdA;\ I_{zz} = \int_{(A)} z^2dA\\ &I_p = I_{yy} + I_{zz};\ I_{\omega y} = \int_{(A)} \omega ydA;\ I_{\omega\omega} = \int_{(A)} \omega^2dA;\ I_{\omega z} = \int_{(A)} \omega zdA\end{aligned} \tag{5.118}$$

Biến dạng trượt do lực cắt theo phương z được bỏ qua, khi đó, có thể khử Q_z từ (5.111d) và (5.111e), từ hai phương trình này với $w_B = w$ ta nhận được:

$$\begin{aligned}q_z + q_{x,x}\frac{t}{2} = E^*[-S_z u_{,xxx} + I_{yz}v_{,xxxx} + I_{zz}w_{,xxxx} + I_{z\omega}\varphi_{x,xxxx} +\\ +(K_x w)_{,xx}S_z - K_x(Au_{,x} - S_y v_{,xx} - S_z w_{,xx} - S_\omega\varphi_{x,xx} - K_x A_w)]\\ -\rho\Omega^2(wA + S_y\varphi_x + S_z u_{,x} - I_{yz}v_{,xx} - I_{zz}w_{,xx} - I_{\omega z}\omega_{x,xx})\end{aligned} \tag{5.114f}$$

Trong trường hợp này, phương trình (5.114f) thay chỗ phương trình (5.114c) và (5.114d).

Đối với các gân theo phương y cũng có các quan hệ tương tự, nếu đổi chỗ các chữ số x và y. Cần chú ý rằng, góc xoay ϕ_y tương ứng là dương. Đôi khi, các gân tương ứng không được đặt ngang với nhau. Trong trường hợp này, các phương trình của tấm bao (vỏ) phải được chuyển sang hệ quy chiếu của các gân hoặc là ngược lại. Trên hình 5.26, trục của gân được đặt nghiêng một góc α so với trục x. Trong trường hợp này, hệ thức chuyển đổi như sau:

$$\begin{aligned}&u_k = c_k^\xi u_x\\ &u_{k,l} = c_k^\xi c_l^\lambda u_{\xi,\lambda}\\ &u_{k,lm} = c_k^\xi c_l^\lambda c_m^\mu u_{\xi,\lambda\mu}\\ &u_{k,lmn} = c_k^\xi c_l^\lambda c_m^\mu c_n^\nu u_{\xi,\lambda\mu\nu}\\ &u_{k,lmnp} = c_k^\xi c_l^\lambda c_m^\mu c_n^\nu c_p^\pi u_{\xi,\lambda\mu\nu}\end{aligned} \tag{5.119}$$

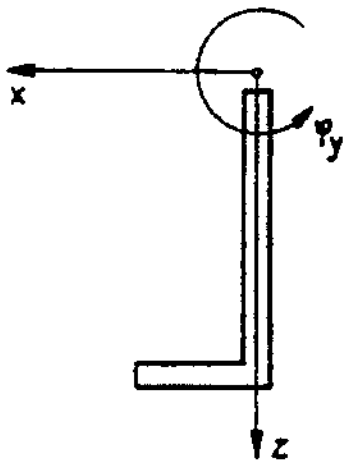
trong đó:

u_k (k = t, n, z) dịch chuyển ở hệ quy chiếu theo các gân;

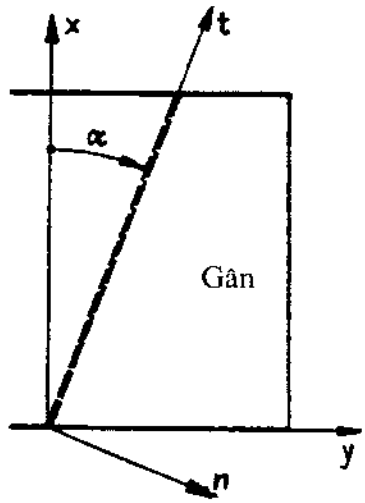
u_ξ (ξ = x, y, z) dịch chuyển ở hệ quy chiếu x, y, z;

$c_k^\xi = \cos(k,\xi)$ cosin chỉ phương giữa trục k và ξ.

Với các hệ thức này, các phương trình cũng có thể được viết cho các gân ngang với $\alpha = \pi / 2$.



Hình 5.25. Các ký hiệu đối với gân ngang.



Hình 5.26. Các ký hiệu ở gân đặt nghiêng.

5.2.3.2. Công thức của bài toán biến phân

Bài toán biến phân được áp dụng trong nhiều phương pháp giải. Cơ sở ở đây là nguyên lý Hamilton dưới dạng

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{U} - \tilde{T}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \tilde{W}_a dt \qquad (5.120)$$

Đối với chuyển động điều hoà, thời gian không có quan hệ với phép biến phân. Điều đó cho phép đưa (5.120) về dạng:

$$\delta (U - T) - \delta' W_a = 0 \qquad (5.121)$$

Trong đó, U và T là các biến phân của thế năng điều hoà và động năng, W_a là công khả dĩ của lực không bảo toàn. Năng lượng của lực cản trong được đưa vào nhờ áp dụng công thức biểu diễn cản thay thế trong (5.121) với việc dùng E^* trong thế năng đàn hồi U. Ta có thể viết phương trình (5.121) dưới dạng:

$$\Pi = U_p + U_{St} - T_p - T_{St} - W_D + W_E \rightarrow \text{cực tiểu} \qquad (5.122)$$

trong đó:

U_p, U_{St}: thế năng đàn hồi đối với tấm nền và gân;

T_p, T_{St}: động năng của tấm nền và gân;

W_D, W_E: công của lực cản ngoài và năng lượng của lực kích động.

Với (5.105) và (5.106), ta có thế năng đàn hồi và động năng của tấm nền:

$$U_p = \frac{1}{2}\int_{(V)}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})dV$$

$$= \frac{E^* t^3}{24(1-\nu^2)}\int_0^a\int_0^b\Big\{\frac{12}{t^2}\,[u_{,x}^2 + v_{,y}^2 + 2\nu u_{,x}v_{,y} + \frac{1-\nu}{2}u_{,y}^2 + \frac{1+\nu}{2}v_{,x}^2 + (1-\nu)u_{,y}v_{,x} - \tag{5.123a}$$

$$-2(K_x + \nu K_y)u_{,x}w - 2(K_y + \nu K_x)v_{,y}w + (K_x^2 + K_y^2 + 2\nu K_x K_y)w^2]$$

$$+ w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx}w_{,yy} + 2(1-\nu)w_{,xy}^2\Big\}dxdy$$

$$T_p = \frac{1}{2}\rho t\Omega^2\int_0^a\int_0^b(u^2 + v^2 + w^2)dxdy \tag{5.123b}$$

Với luật cản theo (5.104), công của lực cản ngoài là:

$$w_D = \frac{1}{2}\iint p_D w dxdy = -\frac{1}{2}i\rho t\Omega^2\eta\int_0^a\int_0^b w^2 dxdy \tag{5.123c}$$

Với giả thiết rằng, lực kích động phân bố trên diện tích và lực kích động tập trung F_{zi} tác động theo hướng z, ta có công của lực này:

$$w_E = \int_0^a\int_0^b w p_z dxdy + \sum_{(i)} w_i F_{zi} \tag{5.123d}$$

Ta nhận được các biểu thức năng lượng tương ứng phân bố theo chiều dài từ (5.110), (5.112) và (5.113).

$$U_L = \frac{1}{2}E^*\int_{(A)}\int_0^a\bar{\sigma}_x\tilde{\varepsilon}_x dAdx = \frac{1}{2}E^*\int_0^a[u_{,x}^2 A + I_{yy}v_{,xx}^2 +$$

$$+ I_{zz}w_{B,xx}^2 + I_{\omega\omega}\varphi_{x,xx}^2 + 2S_z u_{,x}w_{B,xx} - 2S_y u_{,x}v_{,xx} -$$

$$-2S_\omega u_{,x}\varphi_{x,xx} + 2I_{z\omega}w_{B,x}\varphi_{x,xx} + 2I_{yz}v_{,xx}w_{B,xx} - \tag{5.124a}$$

$$-2I_{\omega y}v_{,xx}\varphi_{x,xx} + 2K_x(-u_{,x}wA + S_y v_{,xx}w + S_z w w_{B,xx} -$$

$$-S_\omega w\varphi_{x,xx}) + K_x^2 w^2 A + \frac{1}{2(1+\nu)}kAw_{Q,x}^2 + \frac{1}{2(1+\nu)}I_T\varphi_{x,x}^2]dx$$

$$T_L = \frac{1}{2}\rho\Omega^2\int_0^a[Au^2 + I_{yy}v_{,x}^2 + I_{zz}w_{B,x}^2 + I_{\omega\omega}\varphi_{x,x}^2 - 2S_z u w_{B,x} -$$

$$-2S_y u v_{,x} - 2S_\omega u\varphi_{x,x} + 2I_{z\omega}w_{B,x}\varphi_{x,x} + 2I_{yz}v_{,x}w_{B,x} + \tag{5.124b}$$

$$+ 2I_{\omega y}v_{,x}\varphi_{x,x} + Av^2 - 2S_z v\varphi_x + Aw^2 + Av^2 - 2S_y w\varphi_x]dx$$

Trong đó, các gân trên theo phương x được biểu thị là các gân dọc. Các biểu thức tương ứng U_Q, T_Q dành cho các gân ngang.

5.2.3.3. Hệ chìm trong nước

Đối với hệ chìm trong nước, ngoài những phương trình đã nêu ở trên với chất lỏng lý tưởng, ta còn phải thêm vào phương trình năng lượng của chất lỏng là:

$$\tilde{\phi}_{,xx} + \tilde{\phi}_{,yy} + \tilde{\phi}_{,zz} = 0 \tag{5.125}$$

ở đây $\tilde{\phi}$ là thế vận tốc. Các điều kiện chuyển tiếp giữa tấm nền và chất lỏng được viết dưới dạng:

$$\tilde{w}(x,y,t) = \tilde{\phi}_{,z}(z=0) \tag{5.126}$$

$$\tilde{p}_F(x,y,t) = -p_F\tilde{\phi}(z=0) \tag{5.127}$$

Trong đó: $\tilde{p}_F$ là áp lực của chất lỏng lên bề mặt ngoài của tấm; ρ_F là mật độ chất lỏng. Khi giới hạn ở dao động điều hoà, với phép thế phân ly:

$$\tilde{w}(x,y,t) = -w(x,y)\cos\Omega t$$

$$\tilde{\phi}_F(x,y,t) = \phi(x,y,t)\Omega\sin\Omega t$$

$$\tilde{p}_F(x,y,z=0,t) = p_F(x,y,z=0)\cos\Omega t \tag{5.128}$$

Các quan hệ trên chuyển thành:

$$\phi_{,xx} + \phi_{,yy} + \phi_{,zz} = 0$$

$$\phi_z\,(z=0) = -w \tag{5.129}$$

$$p_F = -\rho_F\phi\Omega^2$$

Tính nén được và tính nhớt của chất lỏng không được đề cập đến ở các phương trình trên. Các nghiên cứu của nhiều tác giả cho thấy rằng, chúng được phép bỏ qua khi tính toán cho dao động điều hoà cục bộ. Còn công thức của động năng chất lỏng:

$$T_F = \frac{1}{2}\rho_F\Omega^2\int_0^a\int_0^b\int_0^c\left(\phi_{,x}^2 + \phi_{,y}^2 + \phi_{,z}^2\right)dxdydz \tag{5.130}$$

và công thức áp lực tác dụng giữa tấm và chất lỏng:

$$W_{FV} = \rho_F\Omega^2\int_0^a\int_0^b\phi(z=0)wdxdy \tag{5.131}$$

Từ đó, đối với dao động điều hoà chúng ta có thể xác định công thức thế năng tổng thể mở rộng riêng cho cả hai phần của hệ khung có gân và chất lỏng dưới dạng:

$$\Pi_P = U_P + U_{St} - T_P - T_{St} - W_D - W_F \rightarrow \text{cực tiểu trên } G_p$$

$$\Pi_F = -T_F + W_F \rightarrow \text{cực tiểu trên } G_F \tag{5.132}$$

G_P và G_F là vùng xác định bởi tấm và bởi chất lỏng. Khi đó thực hiện phép tính biến phân, chú ý rằng ở G_P chỉ có các dịch chuyển u, w, v biến thiên còn ở G_F chỉ có thế vận tốc ϕ là thay đổi. Tổng hợp hai hàm trên lại ta được:

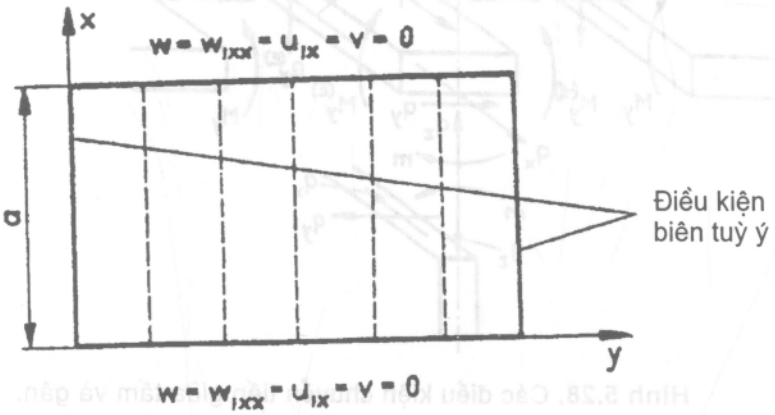
$$\Pi_P = \Pi_P + \Pi_F = U_P + U_{St} - T_P - W_D - T_F \tag{5.133}$$

Khi đó với phép tính biến phân, điều kiện chuyển tiếp như là điều kiện phụ sẽ được thoả mãn.

5.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI

5.3.1. Lời giải chính xác

Các lời giải chính xác của vấn đề đã nêu chỉ có thể tìm được trong trường hợp đặc biệt: tấm hoặc vỏ có bán kính cong không đổi. Trong trường hợp như vậy, ngoài biên ngang có mômen uốn và ứng suất pháp bằng 0, các dịch chuyển theo hướng các biên ngang cũng bị cản trở. Hình 5.27 chỉ ra một hệ như vậy.



Hình 5.27. Tấm chịu ngàm theo chiều dọc.

Bên cạnh đó biên dọc có thể chịu liên kết bất kỳ. Chúng ta chia hệ thành n phần, các phần này được giới hạn bởi các gân. Sử dụng hệ thức tách biến cho mỗi phần:

$$u(x, y) = U(y)\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$v(x, y) = V(y)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{5.134}$$

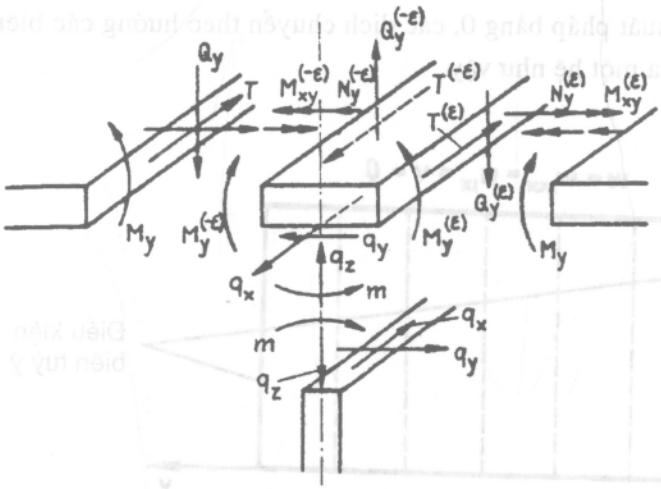
$$w(x, y) = W(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Khi đó phương trình chuyển động (5.109) đưa về một hệ phương trình vi phân thường và có lời giải chính xác. Với cách tương tự, từ các phương trình chuyển động của các gân (5.114) và các hệ thức cho nội lực:

$$q_x(x) = \overline{Q}_x \cos\frac{m\pi x}{a} \; ; \quad q_z(x) = \overline{Q}_z \sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$q_y(x) = \overline{Q}_y \sin\frac{m\pi x}{a} \; ; \quad m(x) = \overline{M}_z \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{5.135}$$

ta được một hệ các phương trình đại số. Hệ thức (5.134) và (5.135) đã thoả mãn các điều kiện biên tại các biên ngang. Bởi vậy các lời giải cho từng trường hợp tấm phải được làm phù hợp với các điều kiện biên dọc và điều kiện chuyển tiếp tại gân. Các điều kiện chuyển tiếp được mô tả tại hình 5.28.



Hình 5.28. Các điều kiện chuyển tiếp giữa tấm và gân.

Các điều kiện này có dạng:

$$T^{(\varepsilon)} - T^{(-\varepsilon)} - q_x = 0$$

$$Q_y^{(\varepsilon)} - Q_y^{(-\varepsilon)} - q_z - q_{x,y}\frac{t}{2} + M_{xy,x}^{(\varepsilon)} - M_{xy,x}^{(-\varepsilon)} = 0$$

$$-m - M_y^{(\varepsilon)} + M_y^{(-\varepsilon)} - q_y\frac{t}{2} = 0 \tag{5.136}$$

$$N_y^{(\varepsilon)} - N_y^{(-\varepsilon)} - q_y = 0$$

Chúng ta còn quan tâm đến các điều kiện chuyển tiếp động học, khi đó nhờ việc tách sự phụ thuộc vào x và đưa ra các lời giải tổng quát cho U(y), V(y), W(y) dẫn đến một hệ phương trình để xác định các trị riêng và các dạng riêng hoặc các dịch chuyển trong trường hợp các dao động cưỡng bức.

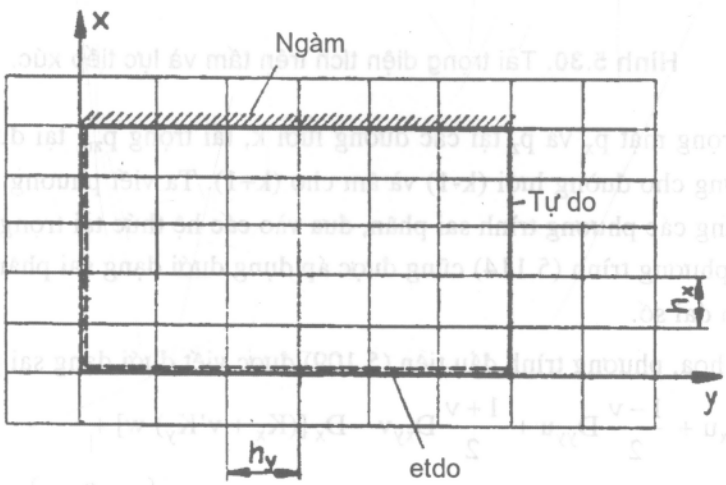
Việc chấp nhận giả thiết các dịch chuyển bằng 0 tại các biên ngang theo hướng của biên này dẫn đến tác dụng của ứng suất trượt trên biên. Tuy nhiên thành phần ứng suất này tại các biên tự do không tồn tại. Bởi vì sai số mắc phải vì điều này nhỏ nên giả thiết các biên có ứng suất pháp vẫn có thể sử dụng được.

5.3.2. Phương pháp sai phân

Phương pháp sai phân phù hợp cho việc tính toán dao động của tấm có gân và vỏ phẳng. Thuật toán giải xây dựng ở đây rất đơn giản và dễ hiểu, đặc biệt khi các gân bố trí vuông góc với nhau và hệ có biên hình chữ nhật.

Tư tưởng của phương pháp này ở chỗ, các toán tử vi phân xuất hiện trong các phương trình vi phân chuyển động được xấp xỉ thông qua các toán tử sai phân. Hệ được đánh dấu bởi mạng các đường lưới và đối với một mắt lưới (i,j) một phương trình vi phân được thiết lập. Hình 5.29 chỉ ra việc đặt mạng lưới cho một vùng hình chữ nhật. Cho các biên có dịch chuyển bằng 0 cần một đường lưới và cho các biên khác 0 cần hai đường lưới ngoài. Với các dịch chuyển u_{ij} và v_{ij} ta chỉ cần một số các điểm ngoài và trong trường hợp các dịch chuyển ở biên bằng 0 ta không cần một điểm nào.

Các dịch chuyển của điểm ngoài cho phép mô tả bởi các dịch chuyển cùng sự trợ giúp của điều kiện biên trong phạm vi xác định. Chú ý rằng với phương pháp sai phân, các điều kiện biên động học cũng như động lực học phải được thoả mãn.



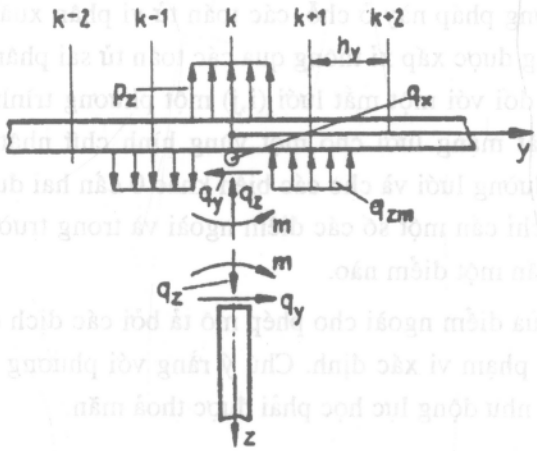
Hình 5.29. Đặt lưới cho các dịch chuyển.

Để thoả mãn điều kiện chuyển tiếp giữa tấm và gân có hai cách. Thứ nhất, toàn bộ hệ được chia tại các đường gân và tại biên của từng phần tử, các điều kiện chuyển tiếp được mô tả thông qua các điểm ngoài tương ứng.

Đơn giản hơn nữa, các đại lượng lực tác dụng giữa gân và tấm trong phạm vi khoảng cách giữa hai đường thuộc lưới được coi như là tải trọng bề mặt (tải trọng diện tích) như hình 5.30. Mômen xoắn ở đây được thay thế bởi hai thành phần lực mặt tác dụng ngược chiều nhau. Các mômen và bước nhảy lực cắt gặp phải tại gân được xấp xỉ theo cách này.

Các tải trọng diện tích trong phạm vi của gân ta có thể xác định được từ hình 5.30:

$$p_x = \frac{-q_x}{h_y}\,;\; p_z = \frac{q_z + q_{x,x}\dfrac{t}{2}}{h_y}\,;\; p_{zm} = \pm\frac{m - q_y\dfrac{t}{2}}{2h_y^2} \tag{5.137}$$



Hình 5.30. Tải trọng diện tích trên tấm và lực tiếp xúc.

Các tải trọng mặt p_x và p_z tại các đường lưới k, tải trọng p_{zm} tại đường lưới (k−1) và (k+1). Dấu dương cho đường lưới (k-1) và âm cho (k+1). Ta viết phương trình chuyển động (5.109) dưới dạng các phương trình sai phân, đưa vào các hệ thức tải trọng (5.137), bên cạnh đó q_x, q_y, ... ở phương trình (5.114) cũng được áp dụng dưới dạng sai phân, khi đó ta có một hệ phương trình đại số.

Để minh hoạ, phương trình đầu tiên (5.109) được viết dưới dạng sai phân:

$$D_{xx}u + \frac{1-\nu}{2}D_{yy}u + \frac{1+\nu}{2}D_{xy}v - D_x\left[(K_x + \nu' K_y)\,w\right] +$$

$$+ (1-\nu^2)\frac{\rho}{E^*}\Omega^2 u + \begin{Bmatrix} 0 \\ p_x\dfrac{1-\nu^2}{E^* t} \end{Bmatrix} = 0 \tag{5.138}$$

với $$p_x\frac{1-\nu^2}{E^* t} = -\frac{1-\nu^2}{E^* t h_y}\left[-AD_{xx}u + S_y D_{xxxx}v + S_z D_{xxx}w + S_\omega D_{xxx}\varphi_x +\right.$$

$$\left. + AD_x(K_x w) - \rho\Omega^2\left(Au - S_y D_x v - S_z D_x w - S_\omega D_x \varphi_x\right)\right] \tag{5.139}$$

Ký hiệu D_{ij} mô tả toán tử sai phân. Như vậy các toán tử áp dụng được biểu diễn:

$$D_{xx} = \frac{1}{h_x^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D_{yy} = \frac{1}{h_y^2}[1 \quad -2 \quad 1];$$

$$D_{xy} = \frac{1}{4h_x h_y}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad D_x = \frac{1}{2h_x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5.140}$$

Bằng cách tương tự các phương trình (5.109b), (5.109c) và (5.114f) cũng có thể biểu diễn dưới dạng các phương trình sai phân. Tuy nhiên chú ý đến góc quay biên dạng, ta xác định được $\varphi_x = w_{,y}$.

Trong phương trình (5.139) các biến dạng trượt còn lại được bỏ qua. Việc áp dụng phương trình (5.109) viết dưới dạng sai phân cho các điểm mắt lưới cho ta bài toán giá trị biên dưới dạng:

$$\left(\underline{K} - \lambda\frac{1 - i\eta}{1 + i\delta}\underline{M}\right)\underline{d} = \underline{f} \tag{5.141}$$

hoặc bài toán trị riêng của dao động riêng không cản:

$$(\underline{K} - \lambda\underline{M})\,\underline{d} = \underline{0} \tag{5.142}$$

trong đó $\underline{d} = [\underline{u}^T \quad \underline{v}^T \quad \underline{w}^T]^T$ là vectơ dịch chuyển các điểm mắt lưới, $\underline{K}$: ma trận độ cứng, $\underline{M}$: ma trận khối lượng và $\underline{f}$ là vectơ lực kích động. Các ma trận độ cứng trong phương pháp sai phân nói chung là không đối xứng. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp dễ dàng biến đổi thành đối xứng. Tại các biên có ứng suất pháp bằng 0 thì việc làm đối xứng ma trận này chỉ có $t^{+\delta}$ khi giả thiết một cách gần đúng là dịch chuyển tại các biên theo hướng của những biên này bằng không. Tất cả các ma trận có dạng ma trận dải.

Việc nâng cao đáng kể độ chính xác sẽ đạt được nếu đối với các dịch chuyển w, các toán tử sai phân được xấp xỉ cao hơn. Đối với chuyển vị u, v thì việc sử dụng các toán tử sai phân thông thường là đủ vì ảnh hưởng của nó đến chuyển vị w là nhỏ.

Các kích động động học được thực hiện thông qua việc làm thoả mãn các điều kiện động học tại các điểm kích động. Đối với sự xuất hiện các dạng biên không có dạng hình chữ nhật, các điều kiện biên được thoả mãn thông qua phép nội suy. Do các ưu điểm của phương pháp sai phân khi giải các bài toán vỏ phẳng, ta có thể áp dụng cho bài toán tấm với các thuật toán được giữ nguyên.

5.3.3. Phương pháp Ritz

Phương pháp này đặc biệt phù hợp cho bài toán phân tích dao động của hệ được gia cố bởi các biên hình chữ nhật. Ta có hệ thức cho các chuyển vị trong tấm:

$$\underline{v}(x,y)=\begin{bmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\\w(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{f}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T\\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T\\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{h}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a}\\\underline{b}\\\underline{c}\end{bmatrix}=\underline{G}(x,y)\underline{d} \tag{5.143}$$

trong đó: $\underline{d}=[\underline{a}^T \quad \underline{b}^T \quad \underline{c}^T]^T$ (5.144)

là các vectơ tự do trong khai triển Ritz cho các chuyển vị u ,v, w và:

$$\begin{aligned}\underline{f}^T &= [f_1 \ldots f_l]\\ \underline{g}^T &= [g_1 \ldots g_m]\\ \underline{h}^T &= [h_1 \ldots h_n]\end{aligned} \tag{5.145}$$

là hệ các hàm toạ độ.

Vectơ biên dạng trượt của hệ có dạng:

$$\underline{\varepsilon}=\underline{D}.\underline{v}=\underline{D}.\underline{G}.\underline{d} \tag{5.146}$$

với ma trận $\underline{D}=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0 & -z\partial^2/\partial x^2-K_x\\ 0 & \partial/\partial y & -z\partial^2/\partial y^2-K_y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & -2z\partial^2/\partial x\partial y\end{bmatrix}$ (5.147)

với giả thiết về vật liệu (5.101) ta có vectơ ứng suất:

$$\underline{\sigma}=(1+i\delta)\underline{H}\underline{\varepsilon} \tag{5.148}$$

với ma trận $H=\dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$ (5.149)

Thế năng đàn hồi của hệ được tính:

$$U_p=\frac{1}{2}\int_{(V)}\varepsilon^T\sigma dV=\frac{1}{2}\underline{d}^T\underline{K}_p\underline{d} \tag{5.150}$$

với ma trận độ cứng: $\underline{K}_p=\int_{(V)}(DG)^T\underline{H}(DG)dV$ (5.151)

Động năng được biểu diễn:

$$T_p=\frac{1}{2}\rho\Omega^2\int_{(V)}\underline{v}^T\underline{v}dV=\frac{1}{2}\underline{d}^T\underline{M}_p\underline{d}\Omega^2 \tag{5.152}$$

trong đó: $$\underline{M}_p = \rho \int_{(V)} G^T \underline{G} dV \tag{5.153}$$

là ma trận khối lượng. Cuối cùng công của lực cản ngoài và của lực kích động theo phương trình (5.123c), (5.123d) có dạng:

$$W_D = -\frac{1}{2} i\Omega^2 \rho t\eta \int_0^a\int_0^b v^2 dxdy = -\frac{1}{2}\underline{d}^T \underline{B}\underline{d}\Omega^2 \tag{5.154}$$

$$W_E = -\int_0^a\int_0^b p_z w dxdy + \Sigma w_i F_{zi} = -\underline{d}^T \underline{f} \tag{5.155}$$

với: $$\underline{B} = i\rho t\eta \int_0^a\int_0^b \underline{h}\underline{h}^T dxdy \tag{5.156}$$

$$\underline{f} = \int_0^a\int_0^b p_z h dxdy + \sum_{(i)} F_{zi}\underline{h}_i$$

Bằng cách tương tự ta có hệ thức tương ứng cho các gân. Ta giới hạn ở đây chỉ cho bài toán liên quan đến các gân dọc, ta có:

$$\underline{v}_L(x, y_L, s = 0) = \underline{G}_L \underline{d} \tag{5.157}$$

$$\underline{\varepsilon}_{xL} = \underline{D}_L \underline{V}_L = \underline{D}_L \underline{G}_L \underline{d} \tag{5.158}$$

$$\underline{G}_L = \begin{bmatrix} \underline{f}^T(x,y_L) & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{g}^T(x,y_L) & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{h}^T(x,y_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_L^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{g}_L^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{h}_L^T \end{bmatrix} \tag{5.159}$$

$$\underline{D}_L = \left[\partial/\partial x \quad -y\partial^2/\partial x^2 \quad (-z\partial^2/\partial x^2 - \omega\partial^3/\partial x^2\partial y - K_x)\right]$$

$$\underline{\bar{V}}_L(x, y_L, s) = \begin{bmatrix} \bar{u}_L \\ \bar{v}_L \\ \bar{w}_L \end{bmatrix} = \underline{L}_L \underline{v}_L \tag{5.160}$$

$$\underline{L}_L = \begin{bmatrix} 1 & -y\partial/\partial x & -z\partial/\partial x - \omega\partial^2/\partial x\partial y \\ 0 & 1 & -z\partial/\partial y \\ 0 & 0 & 1 + y\partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{5.161}$$

chỉ số L biểu diễn gân dọc. Với các ký hiệu và toán tử này, ta có hệ thức năng lượng:

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2}E^* \int_{(A)}\int_0^a \varepsilon_{xL}^2 dAdx = \frac{1}{2}\underline{d}^T \underline{K}_L \underline{d}(1 + i\delta) \\ T_L &= \frac{1}{2}\rho\Omega^2 \int_{(A)}\int_0^a \underline{v}^T \underline{v} dAdx = \frac{1}{2}\underline{d}^T \underline{M}_L \underline{d}\Omega^2 \end{aligned} \tag{5.162}$$

với:

$$\underline{K}_L = E\int_{(A)}\int_0^a (\underline{D}_L\underline{G}_L)^T(\underline{D}_L\underline{G}_L)dAdx$$

$$\underline{M}_L = \rho\int_{(A)}\int_0^a (\underline{L}_L\underline{G})^T(\underline{L}_L\underline{G})dAdx \qquad (5.163)$$

Phương trình (5.122) có thể được viết dưới dạng:

$$(1+i\delta)\frac{1}{2}(\underline{d}^T\underline{K}_P\underline{d}+\underline{d}^T\underline{K}_L\underline{d})-\Omega^2\frac{1}{2}(\underline{d}^T\underline{M}_P\underline{d}+\underline{d}^T\underline{M}_L\underline{d}+\underline{d}^T\underline{B}\underline{d})-\underline{d}^T\underline{f}\rightarrow \text{cực tiểu} \qquad (5.164)$$

Biến đổi nhờ hệ thức của vectơ Ritz dẫn đến:

$$\left[(1+i\delta)(\underline{K}_P+\underline{K}_L)-\Omega^2(\underline{M}_P+\underline{M}_L-\underline{B})\right]\underline{d}=\underline{f} \qquad (5.165)$$

Việc khai triển dẫn đến các ma trận:

$$\underline{K}_P=\frac{Et}{1-\nu^2}\int_0^a\int_0^b \begin{bmatrix} \underline{f}_{,x}\underline{f}_{,x}^T+\frac{1-\nu}{2}\underline{f}_{,y}\underline{f}_{,y}^T & \nu\underline{f}_{,x}\underline{g}_{,y}^T+\frac{1-\nu}{2}\underline{f}_{,y}\underline{g}_{,x}^T & -(K_x+\nu K_y)\underline{f}_{,x}\underline{h}^T \\ & \underline{g}_{,y}\underline{g}_{,y}^T+\frac{1-\nu}{2}\underline{g}_{,y}\underline{g}_{,y}^T & -(K_y+\nu K_x)\underline{g}_{,y}\underline{h}^T \\ \text{đối xứng} & & \begin{array}{l}\frac{s^3}{12}\Big[\underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,xx}^T+\\ \nu(\underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,yy}^T+\underline{h}_{,yy}\underline{h}_{,xx}^T\\ +\underline{h}_{,yy}\underline{h}_{,yy}^T+\\ 2(1-\nu)\underline{h}_{,xy}\underline{h}_{,xy}^T\Big]\\ +(K_x^2+K_y^2+\\ +2\nu K_xK_y)\underline{h}\underline{h}^T\end{array} \end{bmatrix} dxdy \qquad (5.166)$$

$$\underline{M}_P=\rho t\int_0^a\int_0^b \begin{bmatrix} \underline{f}\underline{f}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ & \underline{g}\underline{g}^T & \underline{0} \\ \text{đối xứng} & & (1-i\eta)\underline{h}\underline{h}^T \end{bmatrix} dxdy \qquad (5.167)$$

$$\underline{K}_L = E\int_0^a \begin{bmatrix} A\underline{f}_{,x}\underline{f}_{,x}^T & -S_y\underline{f}_{,x}\underline{g}_{,xx}^T & -S_z\underline{f}_{,x}\underline{h}_{,xx}^T - S_\omega\underline{f}_{,x}\underline{h}_{,xxy}^T - K_x\underline{f}_{,x}\underline{h}^T A \\ & -I_{yy}\underline{g}_{,xx}\underline{g}_{,xx}^T & I_{yz}\underline{g}_{,xx}\underline{h}_{,xx}^T - I_{\omega y}\underline{g}_{,xx}\underline{h}_{,xxy}^T - S_y K_x\underline{g}_{,xx}\underline{h}^T \\ & & I_{zz}\underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,xx}^T + I_{\omega z}(\underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,xxy}^T + \underline{h}_{,xxy}\underline{h}_{,xx}^T) + I_{\omega\omega}\underline{h}_{,xxy}\underline{h}_{,xxy}^T + S_z K_x(\underline{h}_{,xx}\underline{h}^T + \underline{h}\underline{h}_{,xx}^T) + S_\omega K_x(\underline{h}_{,xxy}\underline{h}^T + \underline{h}\underline{h}_{,xxy}) + K_x^2 A\underline{h}\underline{h}^T + \frac{1}{2(1+\nu)} I_r\underline{h}_{,xy}\underline{h}_{,xy}^T \\ & \text{đối xứng} & \end{bmatrix} dx \qquad (5.168)$$

$$\underline{M}_L = \rho\int_0^a \begin{bmatrix} A\underline{f}\underline{f}^T & -S_y\underline{f}\underline{g}_{,x}^T & -S_z\underline{f}\underline{h}_{,x}^T - S_\omega\underline{f}\underline{h}_{,xy}^T \\ & -I_{yy}\underline{g}_{,x}\underline{g}_{,x}^T + A\underline{g}\underline{g}^T & I_{yz}\underline{g}_{,x}\underline{h}_{,x}^T - I_{\omega y}\underline{g}_{,x}\underline{h}_{,xy}^T - S_z\underline{g}\underline{h}_{,y}^T \\ & & I_{zz}\underline{h}_{,x}\underline{h}_{,x}^T + I_{\omega\omega}\underline{h}_{,xy}\underline{h}_{,xy}^T + I_{\omega z}(\underline{h}_{,xy}\underline{h}_{,x}^T + \underline{h}_{,x}\underline{h}_{,xy}^T) + I_P\underline{h}_{,y}\underline{h}_{,y}^T) + A\underline{h}\underline{h}^T + S_y(\underline{h}_{,y}\underline{h}^T + \underline{h}\underline{h}_{,y}^T) \\ & \text{đối xứng} & \end{bmatrix} dx \qquad (5.169)$$

Các ma trận cản ở đây có quan hệ với ma trận khối lượng. Hệ thức:

$$f_K(x,y) = f_{K1}(x)f_{K2}(y)$$
$$g_K(x,y) = g_{K1}(x)g_{K2}(y)$$
$$h_K(x,y) = h_{K1}(x)h_{K2}(y)$$

được sử dụng như các hàm toạ độ, trong đó f_{K1}, f_{K2} và g_{K1}, g_{K2} có liên quan tới các hàm riêng dao động uốn của dầm Euler – Bernoulli. Điều kiện biên của các biên có ứng suất

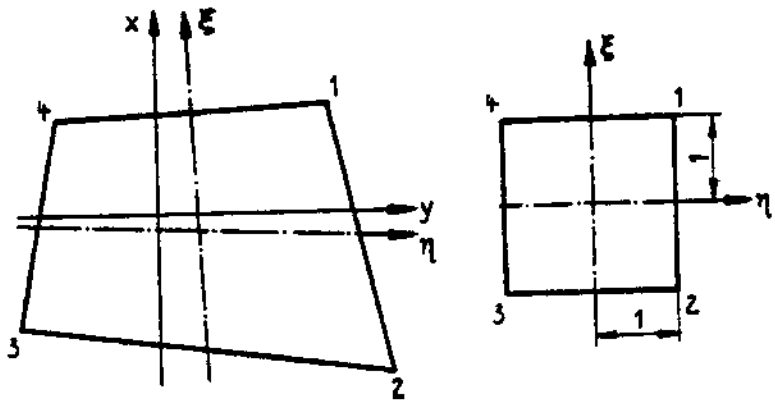
bằng không, tuy nhiên chưa được chứng tỏ ở đây. Với những biên như vậy phải giả thiết gần đúng có các dịch chuyển theo hướng biên bằng không.

Trong trường hợp dao động cưỡng bức có cản ta có các giá trị Ritz phức.

5.3.4. Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH)

Phương pháp PTHH (FEM) đã được sử dụng ngày càng rộng rãi trong ngành chế tạo tàu thuỷ vì khả năng ứng dụng đa năng của nó để tính toán dao động các cấu trúc.

Phương pháp này được biết đến với rất nhiều hình thức. Ở đây chỉ đề cập đến một phương án, rất phù hợp cho việc tính toán dao động của cấu trúc tàu thuỷ. Tư tưởng cơ bản của phương pháp là hệ được chia thành các phần tử hữu hạn và trạng thái chuyển vị trong các phần tử được mô tả theo các hàm dạng bao gồm các chuyển vị của nút (như là tham số tự do) và các đạo hàm của nó. Việc kết hợp các phần tử thành hệ thống qua sự biến đổi hệ thức năng lượng do dịch chuyển của các nút. Chúng ta giới hạn trong trường hợp bài toán tấm dưới đây. Ta chọn tứ giác có các cạnh là đường thẳng như hình 5.31 làm phần tử và có thể biến đổi về dạng một tấm vuông đơn vị.



Hình 5.31. Tứ giác và ảnh của nó sang hình vuông đơn vị.

Trạng thái chuyển vị bên trong một tấm vuông đơn vị được mô tả thông qua hệ thức:

$$\underline{v}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \\ w(\xi,\eta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{f}^T(\xi,\eta) & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{f}^T(\xi,\eta) & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{h}^T(\xi,\eta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{d}_u \\ \underline{d}_v \\ \underline{d}_w \end{bmatrix}=\underline{G}(\xi,\eta)\underline{d} \qquad (5.170)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \underline{f}^T &= [h_{22}\ h_{42}\ h_{24}\ h_{12}\ h_{32}\ h_{14}\ h_{11}\ h_{31}\ h_{13}\ h_{21}\ h_{41}\ h_{23}] \\ \underline{h}^T &= [h_{22}\ h_{42}\ h_{24}\ h_{44}\ h_{12}\ h_{32}\ h_{14}\ h_{34}\ h_{11}\ h_{31}\ h_{13}\ h_{33}\ h_{21}\ h_{41}\ h_{23}\ h_{43}] \end{aligned} \qquad (5.171)$$

là các vectơ của các hàm dạng. Các hàm dạng này được thiết lập từ các đa thức Hecmit:

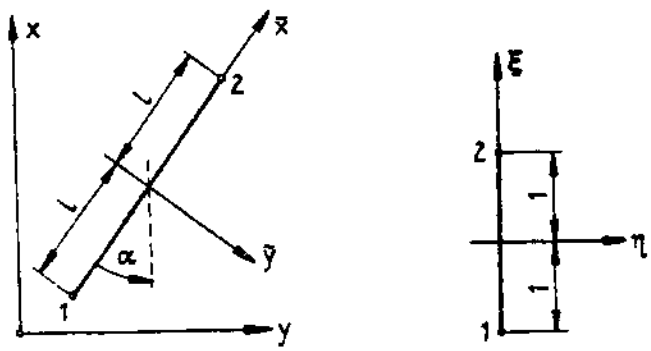
$$h_{ij}(\xi,\eta) = p_i(\xi)\, q_j(\eta) \tag{5.172a}$$

với:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi); & q_1 &= \frac{1}{4}(1-\eta)^2(2+\eta);\\
p_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi); & q_2 &= \frac{1}{4}(1-\eta)^2(2-\eta);\\
p_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi); & q_3 &= \frac{1}{4}(1-\eta)^2(1+\eta);\\
p_4 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)^2(1-\xi); & q_4 &= -\frac{1}{4}(1+\eta)^2(1-\eta)
\end{aligned} \tag{5.172}$$

Dịch chuyển của các điểm nút được định nghĩa:

$$\begin{aligned}
\underline{d}_u^T &= \left[u_1\ u_{1,\xi}\ u_{1,\eta}\ u_2 \dots u_{4,\eta}\right]\\
\underline{d}_v^T &= \left[v_1\ v_{1,\xi}\ v_{1,\eta}\ v_2 \dots v_{4,\eta}\right]\\
\underline{d}_w^T &= \left[w_1\ w_{1,\xi}\ w_{1,\eta}\ w_{1,\xi\eta}\ w_2 \dots w_{4,\xi\eta}\right]
\end{aligned} \tag{5.173}$$

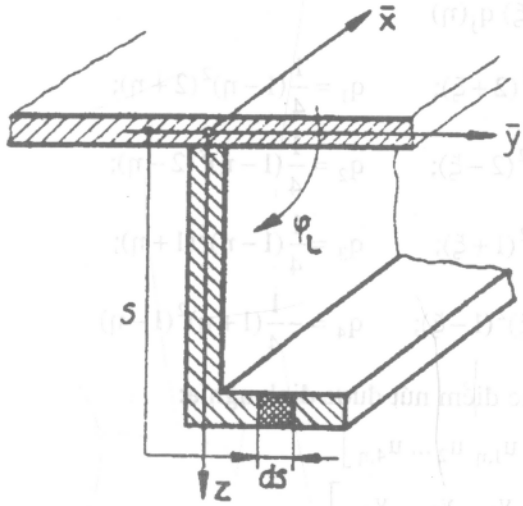


Hình 5.32. Sự biến đổi của phần tử thanh trong hệ toạ độ ξ_η.

Phần tử tấm - đĩa có 40 bậc tự do. Phần tử dạng thanh thẳng tương ứng với hình 5.32 được biến đổi trong hệ quy chiếu $\eta\xi$. Trạng thái chuyển vị trong phần tử thanh có thể biểu diễn:

$$\underline{V}(\xi) = \begin{bmatrix} u(\xi)\\ v(\xi)\\ w(\xi)\\ \varphi_L(\xi)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}^T(\xi) & 0^T & 0^T & 0^T\\ 0^T & \underline{r}^T(\xi) & 0^T & 0^T\\ 0^T & 0^T & \underline{r}^T(\xi) & 0^T\\ 0^T & 0^T & 0^T & \underline{r}^T(\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\bar{d}}_u\\ \underline{\bar{d}}_v\\ \underline{\bar{d}}_w\\ \underline{\bar{d}}_\varphi\end{bmatrix} = \underline{G}(\xi)\underline{\bar{d}} \tag{5.174}$$

Trong đó $\underline{v}(\xi)$ mô tả vectơ chuyển vị của thanh cho toạ độ quay s = 0 (xem hình 5.33).



Hình 5.33. Mặt cắt ngang của thanh.

Hàm dạng $\underline{r}(\xi)$ được xác định từ đa thức Hecmit:

$$\underline{r}^T(\xi) = \left[p_1(\xi) \quad p_3(\xi) \quad p_2(\xi) \quad p_4(\xi)\right] \tag{5.175}$$

với $p_i(\xi)$ theo (5.172). Các vectơ chuyển vị của điểm nút được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{d}}_u^T &= \left[u_1 \quad u_{1,\xi} \quad u_2 \quad u_{2,\xi}\right] \quad ; \quad \underline{\bar{d}}_v^T = \left[v_1 \quad v_{1,\xi} \quad v_2 \quad v_{2,\xi}\right] \\ \underline{\bar{d}}_w^T &= \left[w_1 \quad w_{1,\xi} \quad w_2 \quad w_{2,\xi}\right] \quad ; \quad \underline{\bar{d}}_\varphi^T = \left[\varphi_1 \quad \varphi_{1,\xi} \quad \varphi_2 \quad \varphi_{2,\xi}\right] \end{aligned} \tag{5.176}$$

Trạng thái ứng suất trượt và ứng suất pháp ở tấm có thể nhờ hệ thức này và qui luật của vật liệu theo (5.148) biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{D}(x,y)\underline{v}(\xi,\eta) = \underline{D}(x,y)\underline{G}(\xi,\eta)\underline{d} \\ \underline{\sigma} &= (1+i\delta)\underline{H}\underline{\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.177}$$

Mối quan hệ này phù hợp với kết quả xác định bằng phương pháp Ritz. Với phương pháp Ritz $\underline{G}$ là ma trận của các hàm toạ độ và $\underline{d}$ là vectơ dịch chuyển của điểm nút. Chúng ta có thể trực tiếp sử dụng các hệ thức năng lượng trong mục 5.3.3 và xác định được các ma trận phần tử của tấm.

$$\begin{aligned} \underline{K}_P &= \int_{(V)} \left[\underline{D}(x,y)\underline{G}(\xi,\eta)\right]^T \underline{H}\left[\underline{D}(x,y)\underline{G}(\xi,\eta)\right]dV \\ \underline{M}_P &= \rho \int_{(V)} \underline{G}^T(\xi,\eta)\underline{G}(\xi,\eta)dV \\ \underline{B} &= i\rho t\eta \int_{(S)} \underline{h}(\xi,\eta)\underline{h}^T(\xi,\eta)dS \\ \underline{f} &= \int_{(S)} p_z\underline{h}(\xi,\eta)dS + \sum_{(i)} F_{zi}h(\xi_i,\eta_i) \end{aligned} \tag{5.178}$$

Trong đó S là diện tích bề mặt của phần tử.

Độ dãn tỷ đối dọc theo thớ của profil nhận được thông qua:

$$\bar{\varepsilon}_x(\xi,s) = \underline{\bar{D}}(\xi,s)\underline{\bar{G}}(\xi)\underline{\bar{d}} \tag{5.179}$$

trong đó:
$$\underline{\bar{D}}(\xi,s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\xi} & -\frac{\bar{y}(s)}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} & \frac{\bar{z}(s)}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} & -K_x - \frac{\omega(s)}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \end{bmatrix} \tag{5.180}$$

Với việc viết gọn $\underline{d}_\varphi = [\underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{1}]\underline{\bar{d}} = \underline{D}_\varphi$ ta có hệ thức thế năng đàn hồi cho một phần tử thanh trong mối quan hệ với luật xoắn St.Vơ năng và không có biến dạng trượt do lực cắt:

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{1}{2}(1+i\delta)E\int_{(A)}\int_{-1}^{1}(\underline{\bar{D}}\underline{\bar{G}}\underline{\bar{d}})^T(\underline{\bar{D}}\underline{\bar{G}}\underline{\bar{d}})/dAd\xi + \int_{-1}^{1}\frac{I_T}{2(1+\upsilon)}(\underline{r}^T\underline{\bar{D}}_\varphi\underline{\bar{d}})^T(\underline{r}^T\underline{\bar{D}}_\varphi\underline{\bar{d}})/d\xi \\ &= \frac{1}{2}(1+i\delta)\underline{d}\underline{K}\underline{d}\end{aligned} \tag{5.181}$$

Với ma trận độ cứng của phần tử thanh:

$$\underline{\bar{K}} = El\int_{(A)}\int_{-1}^{1}\left[\underline{\bar{D}}(\xi)\underline{\bar{G}}(\xi)\right]^T\left[\underline{\bar{D}}(\xi)\underline{\bar{G}}(\xi)\right]dAd\xi + \frac{I_T l}{2(1+\upsilon)}\int_{-1}^{1}\underline{\bar{D}}_\varphi^T\underline{r}(\xi)\underline{r}^T(\xi)\underline{\bar{D}}_\varphi d\xi \tag{5.182}$$

Vectơ chuyển vị của một điểm trên mặt cắt ngang cùng về một toạ độ s từ (5.110) và (5.174) là:

$$\underline{\bar{V}}(\xi,s) = \begin{bmatrix}\bar{u}(\xi,s)\\ \bar{v}(\xi,s)\\ \bar{w}(\xi,s)\end{bmatrix} = \underline{L}(\xi,s)\underline{v}(\xi) = \underline{L}(\xi,s)\underline{G}(\xi)\underline{\bar{d}} \tag{5.183}$$

với ma trận
$$\underline{L}(\xi,s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{y}(s)}{l}\frac{\partial}{\partial\xi} & \frac{\bar{z}(s)}{l}\frac{\partial}{\partial\xi} & -\frac{\omega(s)}{l}\frac{\partial}{\partial\xi} \\ 0 & 1 & 0 & -\bar{z} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{y} \end{bmatrix} \tag{5.184}$$

Sử dụng quan hệ (5.183) ta có động năng của phần tử thanh:

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\rho\Omega^2\int_{(A)}\int_{-1}^{1}\underline{\bar{v}}^T\underline{\bar{v}}dAl d\xi = \frac{1}{2}\Omega^2\underline{\bar{d}}^T\underline{\bar{M}}\underline{\bar{d}} \tag{5.185}$$

với ma trận khối lượng:
$$\underline{\bar{M}} = \rho l\int_{(A)}\int_{-1}^{1}\left[\underline{L}(\xi)\underline{\bar{G}}(\xi)\right]^T\left[\underline{L}(\xi)\underline{\bar{G}}(\xi)\right]dAd\xi \tag{5.186}$$

Các tích phân đối với ma trận độ cứng, khối lượng, cản theo phương trình (5.178) có thể không thực hiện được. Ta phải biến đổi ma trận $\underline{D}(x,y)$ thành $\underline{D}(\xi,\eta)$ trong hệ quy chiếu (ξ, η). Trong đó ta chọn phép biến đổi tuyến tính thông qua quan hệ:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{S}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}^T \underline{x} \\ \underline{S}^T \underline{y} \end{bmatrix} \tag{5.187}$$

Trong đó $\underline{x}$, $\underline{y}$ là các vectơ định vị của các điểm góc của phần tử trong hệ (x,y) và

$$\underline{S}^T = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4]$$

với:

$$S_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad S_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$
$$S_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad S_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{5.188}$$

Đạo hàm theo ξ và η dẫn đến:

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \tag{5.189}$$

$$\begin{bmatrix} \partial^2/\partial\xi^2 \\ \partial^2/\partial\eta^2 \\ \partial^2/\partial\xi\partial\eta \end{bmatrix} = \underline{P} \begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 \\ \partial^2/\partial y^2 \\ \partial^2/\partial x\partial y \end{bmatrix} + \underline{Q} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \tag{5.190}$$

với:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{bmatrix}; \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} \partial^2 x/\partial\xi^2 & \partial^2 y/\partial\xi^2 \\ \partial^2 x/\partial\eta^2 & \partial^2 y/\partial\eta^2 \\ \partial^2 x/\partial\xi\partial\eta & \partial^2 y/\partial\xi\partial\eta \end{bmatrix} \tag{5.191}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} (\partial x/\partial\xi)^2 & (\partial y/\partial\xi)^2 & 2(\partial x/\partial\xi)(\partial y/\partial\xi) \\ (\partial x/\partial\eta)^2 & (\partial y/\partial\eta)^2 & 2(\partial x/\partial\eta)(\partial y/\partial\eta) \\ (\partial x/\partial\xi)(\partial x/\partial\eta) & (\partial y/\partial\xi)(\partial y/\partial\eta) & (\partial x/\partial\xi)(\partial y/\partial\eta)+(\partial x/\partial\xi)(\partial y/\partial\eta) \end{bmatrix} \tag{5.192}$$

Ngược lại:

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{bmatrix} \tag{5.193}$$

$$\begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 \\ \partial^2/\partial y^2 \\ \partial^2/\partial x\partial y \end{bmatrix} = \underline{P}^{-1} \begin{bmatrix} \partial^2/\partial\xi^2 \\ \partial^2/\partial\eta^2 \\ \partial^2/\partial\xi\partial\eta \end{bmatrix} - \underline{P}^{-1}\underline{Q}\underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{bmatrix} \tag{5.194}$$

Từ đó ta có thể mô tả ma trận vi phân $\underline{D}$ trong hệ toạ độ (ξ, η) như sau:

$$\underline{D}(\xi,\eta)=\underline{R}\left[\begin{array}{c:c:c} \underline{J}^{-1}\begin{bmatrix}\partial/\partial\xi\\ \partial/\partial\eta\end{bmatrix} & & \\ & \underline{J}^{-1}\begin{bmatrix}\partial/\partial\xi\\ \partial/\partial\eta\end{bmatrix} & \\ & & \underline{P}^{-1}\begin{bmatrix}\partial^2/\partial\xi^2\\ \partial^2/\partial\eta^2\\ \partial^2/\partial\xi\partial\eta\end{bmatrix} \\ & & \underline{P}^{-1}\underline{Q}\underline{J}^{-1}\begin{bmatrix}\partial/\partial\xi\\ \partial/\partial\eta\end{bmatrix} \\ & & K_x(\xi,\eta) \\ & & K_y(\xi,\eta) \end{array}\right] \tag{5.195}$$

$$\underline{R}=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c} 1 & & & & -\bar{z} & & & -\bar{z} & & & -1 & \\ \hdashline & & & 1 & & -\bar{z} & & & -\bar{z} & & & -1 \\ \hdashline & 1 & 1 & & & & -2\bar{z} & & & -\bar{z} & & \end{array}\right] \tag{5.196}$$

Các ma trận cho phần tử tấm được biểu diễn qua:

$$\begin{aligned}
\underline{K}_p &= t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[D(\xi,\eta)G(\xi,\eta)\right]^T\underline{H}\left[D(\xi,\eta)G(\xi,\eta)\right]\det\underline{J}d\xi d\eta\\
\underline{M}_p &= \rho t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\underline{G}^T(\xi,\eta)\underline{G}(\xi,\eta)\det\underline{J}d\xi d\eta\\
\underline{B} &= i\rho t\eta\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\underline{h}(\xi,\eta)\underline{h}^T(\xi,\eta)\det\underline{J}d\xi d\eta\\
\underline{f} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}p_z\underline{h}(\xi,\eta)\det\underline{J}d\xi d\eta+\sum_{(i)}F_{zi}\underline{h}(\xi_i,\eta_i)
\end{aligned} \tag{5.197}$$

Với mỗi phần tử tồn tại quan hệ:

$$\left[(1+i\delta)(\underline{K}_P+\bar{\underline{K}})_e-\Omega^2(\underline{M}_P+\bar{\underline{M}}-\underline{B})_e\right]\underline{d}_e=\underline{f}_e \tag{5.198}$$

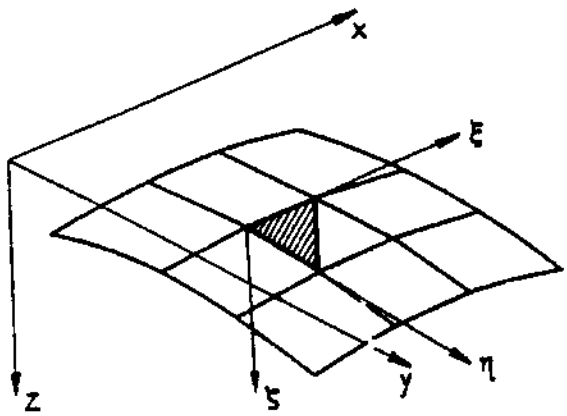
Chúng phải biến đổi đưa về hệ qui chiếu tổng thể theo cách thông thường.

Cuối cùng, khi xét đến hình dạng và các điều kiện biên động học, quan hệ của toàn hệ được xác lập.

Phương pháp PTHH mô tả ở đây áp dụng được cho các kết cấu phẳng và cong theo một trục. Đặc biệt phù hợp cho các hệ có các gân vuông góc với nhau.

Ngoài ra còn những phương án khác của phương pháp PTHH sử dụng các dạng phần tử khác nhau đã biết. Để tính toán, các hệ chương trình đã được xây dựng. Các đặc tính khác của phương pháp này được đề cập tới trong nhiều tài liệu chuyên khảo.

Việc áp dụng phương pháp PTHH cho bài toán vỏ cong theo hai trục cũng có nhiều phương án khác nhau. Khả năng đơn giản nhất là chia vỏ thành các phần tử tam giác ở hình 5.34.

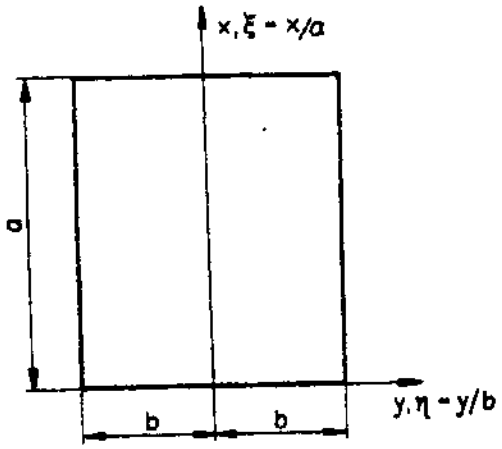


Hình 5.34. Chia vỏ thành các phần tử tam giác.

Quan hệ giữa tác dụng uốn và lực màng, lực bề mặt tại các phần tử phẳng được xây dựng thông qua phép biến đổi trên hệ toạ độ toàn thể. Việc ứng dụng của các phần tử tam giác phẳng chỉ phù hợp đối với các mặt có bán kính cong lớn. Với các vỏ có bán kính cong nhỏ thì ta phải áp dụng các phần tử cong, trong đó các phần tử được phép xây dựng trên cơ sở của lý thuyết vỏ phẳng. Việc sử dụng các phần tử thể tích mà phù hợp với vỏ có chiều dày lớn không phải là mục tiêu của bài toán cho cấu trúc thân tàu.

Một phương án có nhiều ưu điểm để tính toán dao động của kết cấu phẳng có gân là phương pháp các dải hữu hạn (FSM). Cơ sở của phương pháp này là việc phân chia kết cấu thành các phân tử dạng dải và ấn định trạng thái chuyển vị trong dải (theo hướng dải) thông qua các hệ thức giải tích. Các hệ thức này phải thoả mãn các điều kiện biên tại các biên ngang. Theo hướng vuông góc với hướng của dải, các đa thức thông thường sử dụng cho phương pháp PTHH được áp dụng. Từ đó bài toán hai chiều được giảm xuống thành bài toán một chiều. Hình 5.35 mô tả một phần tử dải hữu hạn có phương theo trục x. Trạng thái chuyển vị được biểu diễn qua:

$$\begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \\ w(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_u(\xi)\underline{f}_u^T(\eta) & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & g_v(\xi)\underline{f}_v^T(\eta) & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & g_w(\xi)\underline{f}_w^T(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_u \\ \underline{d}_v \\ \underline{d}_w \end{bmatrix} \tag{5.199}$$



Hình 5.35. Phần tử dải hữu hạn.

Trong đó $g_u(\xi)$, $g_v(\xi)$, $g_w(\xi)$ là các hệ thức biểu diễn sự phụ thuộc của chuyển vị theo hướng dải. $\underline{f}_u^T(\eta)$, $\underline{f}_v^T(\eta)$ và $\underline{f}_w^T(\eta)$ là các vectơ của hàm dạng. Ta thường áp dụng các đa thức hecmit bậc ba cho hàm dáng của cả ba chuyển vị:

$$\underline{f}^T(\eta)=\left[\frac{1}{4}(1-\eta)^2(2+\eta)\quad \frac{1}{4}(1-\eta)^2(1+\eta)\quad \frac{1}{4}(1+\eta)^2(2-\eta)\quad -\frac{1}{4}(1+\eta)^2(1-\eta)\right] \tag{5.200}$$

Bởi vì ảnh hưởng của biến dạng của tấm tròn (đĩa) là rất nhỏ so với biến dạng uốn, trong những bài toán các chuyển vị của đĩa có thể biểu diễn dưới dạng đa thức bậc nhất:

$$\underline{f}_u^T(\eta)=\underline{f}_v^T(\eta)=\left[\frac{1}{2}(1-\eta)\quad \frac{1}{2}(1+\eta)\right] \tag{5.201}$$

Các vectơ chuyển vị của điểm nút:

$$\begin{aligned}
&\underline{d}_u^T=\left[u_1\quad u_{1,\eta}\quad u_2\quad u_{2,\eta}\right] \qquad \text{hoặc}\quad \underline{d}_u^T=\left[u_1\quad u_2\right]\\
&\underline{d}_v^T=\left[v_1\quad v_{1,\eta}\quad v_2\quad v_{2,\eta}\right] \qquad \text{hoặc}\quad \underline{d}_v^T=\left[v_1\quad v_2\right]\\
&\underline{d}_u^T=\left[w_1\quad w_{1,\eta}\quad w_2\quad w_{2,\eta}\right]
\end{aligned} \tag{5.202}$$

Một phần tử dải bao gồm 12 hoặc tám bậc tự do. Ta có thể xác định quan hệ cuả các gân trong phần tử dải. Tuy nhiên phải quan tâm đến một vài điều kiện khác (ở đây không đề cập đến).

Xét trường hợp đơn giản, các biên có mômen bằng không có thể được mô tả đủ chính xác qua các hàm:

$$g_u(\xi) = \cos m\pi\xi;\ \ g_v(\xi) = \sin m\pi\xi;\ \ g_w(\xi) = \sin m\pi\xi \tag{5.203}$$

Phương pháp FSM đặc biệt có ưu điểm cho việc tính toán các kết cấu chỉ được gia cố độ cứng theo một hướng.

5.4. CÁC HỆ CHỊU VA ĐẬP BỞI CHẤT LỎNG

5.4.1. Tấm hình chữ nhật không có gân cứng với gối tựa có mômen bằng không và chịu tác dụng của chất lỏng

Việc đưa ra mô hình cho kết cấu thân tàu chịu va đập cục bộ bởi chất lỏng đã được đề cập tới tại mục 5.2.3.3. Ta xét trước hết một trường hợp đơn giản: Tấm hình chữ nhật có điều kiện biên mômen bằng không, dao động riêng với va đập của chất lỏng tại một phía. Từ phương trình của tấm (5.109c) ta cho độ cong và cản bằng 0 và đưa vào áp suất của chất lỏng theo (5.129c) như là tải trọng ngoài. Ta có:

$$\nabla^4 w - \lambda w = \frac{\rho_F}{\rho}\lambda\phi(z=0) \tag{5.204a}$$

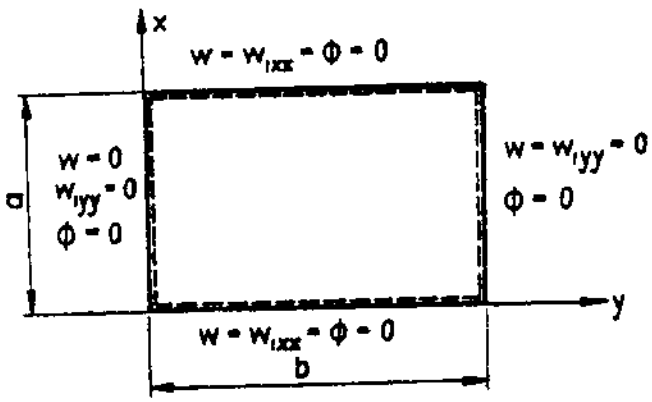
Ngoài ra ta còn có phương trình thế năng của chuyển động chất lỏng theo (5.129a):

$$\phi_{,xx} + \phi_{,yy} + \phi_{,zz} = 0 \tag{5.204b}$$

và điều kiện chuyển tiếp: $\phi_{,z}(z = 0) = -w$ (5.204c)

với ký hiệu: $\lambda = 12(1-\upsilon)^2\dfrac{\rho\omega^2}{Et^2}$ (5.205)

Ở đây ta giả thiết rằng các biên và điều kiện biên có dạng như hình 5.36:



Hình 5.36. Các ký hiệu và điều kiện biên của tấm hình chữ nhật.

Ta coi rằng các biên giáp với chuyển động của chất lỏng có tính chất không đồng nhất về hình học. Đối với chuyển động của chất lỏng, các điều kiện biên tại biên $z = z_R$ phải thoả mãn. Thêm nữa, ta xem rằng tại đó áp suất cũng như vận tốc bằng không, có nghĩa là:

$$\phi(z_R) = 0, \text{ hoặc } \phi_{,z}(z_R) = 0$$

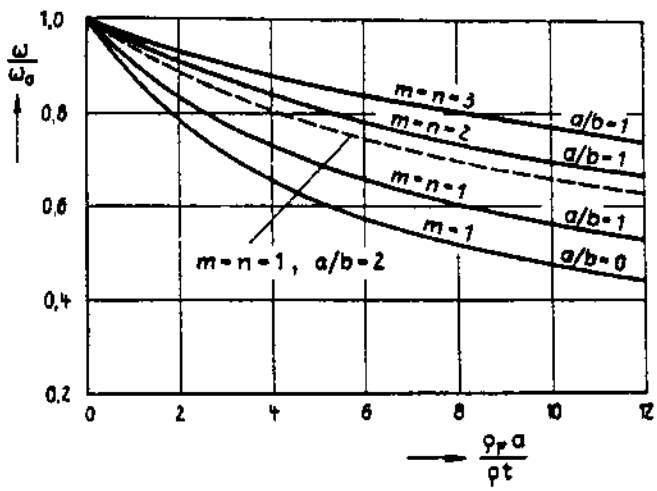
Hệ phương trình (5.204) được thoả mãn với hệ thức:

$$w = w_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$
$$\phi = \phi_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}(e^{-kz} + Ce^{kz}) \tag{5.206}$$

Thế các hệ thức này vào phương trình (5.204) ta có:

$$C = e^{-2kz_R}$$
$$k = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \tag{5.207}$$
$$\lambda = \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 \frac{1}{1 + \frac{\rho_F}{\rho t k}\frac{1 \pm C}{1 \mp C}}$$

Hệ thức trên cùng biểu thị điều kiện biên có áp suất bằng không và hệ thức dưới biểu thị điều kiện biên có vận tốc bằng không tại $z = z_R$. Trong chất lỏng (chịu kéo nén đến vô hạn) $z_R \to \infty$ và bởi vậy $C = 0$. Ở hình 5.37 quan hệ ω/ω_0 cho điều kiện biên $z_R \to \infty$ được mô tả. ω_0 là tần số vòng riêng khi không có tải trọng va đập của nước. Điều này chỉ ra rằng, tải trọng va đập của chất lỏng làm giảm các tần số riêng đi một lượng đáng kể và ảnh hưởng của chất lỏng với các dao động riêng bậc cao giảm.



Hình 5.37. Quan hệ giữa tần số riêng và tải trọng va đập của nước.

Đáng quan tâm là sự tắt dần của chuyển động chất lỏng khi khoảng cách z lớn dần. Sự suy giảm của áp suất được xác định theo (5.206) với C = 0:

$$\phi(z) = \phi(z=0)e^{-kz} = \phi(z=0)e^{-\frac{z}{a}\pi\sqrt{m^2+\frac{a^2}{h^2}n^2}} \tag{5.208}$$

Từ đó suy ra, ngay khi $z_R = a$, thế vận tốc và theo đó áp suất giảm 4% và khi z = 2a áp suất trên tấm giảm 0,2%. Chú ý là việc áp dụng các phương pháp gần đúng cho chất lỏng vô hạn là đủ chính xác cho các điều kiện biên $\phi\ (z = \infty) \equiv 0$ với $z / a \geq 1{,}5$, trong đó a biểu thị một nửa chiều dài bước sóng.

5.4.2. Các phương pháp giải

Để tính toán dao động của kết cấu phẳng chịu tải va đập của nước, ta quan tâm tới các phương pháp mô tả tại mục 5.3. Tuy nhiên chỉ có phương pháp sai phân và phương pháp PTHH là có ý nghĩa thực tế.

Với phương pháp sai phân ta có thể xây dựng được một thuật giải rất rõ ràng và dễ hiểu. Phương trình sai phân trong mục 5.3.2 cần được bổ sung thêm phương trình chuyển động của chất lỏng:

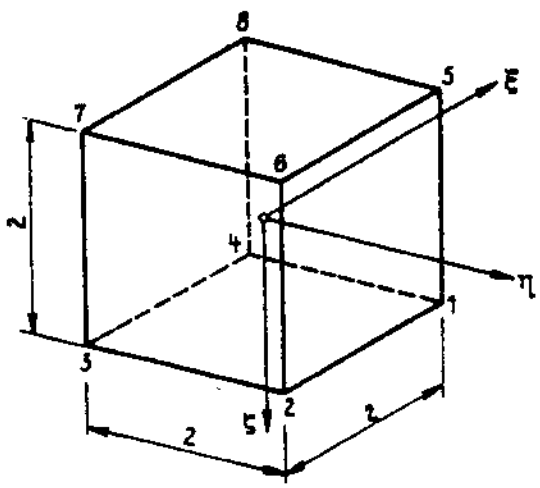
$$D_{xx}\phi + D_{yy}\phi + D_{zz}\phi = 0 \tag{5.209}$$

Trong đó ký hiệu D_{ij} mô tả các toán tử sai phân. Ta bổ sung thêm ở vế phải phương trình (5.109c) hệ thức của áp suất nước là tải trọng:

$$p_{zF} = -\rho_F\omega\phi\ (z = 0) \tag{5.210}$$

Điều kiện chuyển tiếp giữa tấm và chất lỏng: $D_z\phi = -w$ (5.211)

Phương pháp phổ biến nhất để giải quyết bài toán đặt ra là phương pháp PTHH. Quan hệ được đề cập tới trong mục 5.3.4 cần bổ sung thêm ma trận khối lượng của chất lỏng. Các phần tử được sử dụng là phần tử chất lỏng dạng lập phương (hình 5.38).



Hình 5.38. Phần tử chất lỏng dạng lập phương.

Ta thiết lập hệ thức thế vận tốc trong mỗi phần tử:

$$\phi(\xi,\eta,\zeta) = \underline{\varphi}^T \underline{d}_\phi \tag{5.212}$$

với vectơ chuyển vị nút: $\underline{d}_\phi^T = \left[\phi_1 \;\; \phi_{1,\xi} \;\; \phi_{1,\eta} \;\; \phi_{1,\zeta} \;\; \phi_2 \cdots \phi_{8,\zeta}\right]$ (5.213)

Phần tử này có 32 bậc tự do và nhiều hơn đáng kể so với phần tử dạng tấm.

Hàm dạng có dạng:

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}^T = [&\varphi_{222} \;\; \varphi_{422} \;\; \varphi_{242} \;\; \varphi_{224} \;\; \varphi_{122} \;\; \varphi_{322} \;\; \varphi_{142} \;\; \varphi_{124} \\ &\varphi_{112} \;\; \varphi_{312} \;\; \varphi_{132} \;\; \varphi_{114} \;\; \varphi_{212} \;\; \varphi_{412} \;\; \varphi_{232} \;\; \varphi_{214} \\ &\varphi_{221} \;\; \varphi_{421} \;\; \varphi_{241} \;\; \varphi_{223} \;\; \varphi_{121} \;\; \varphi_{321} \;\; \varphi_{141} \;\; \varphi_{123} \\ &\varphi_{121} \;\; \varphi_{311} \;\; \varphi_{131} \;\; \varphi_{113} \;\; \varphi_{211} \;\; \varphi_{411} \;\; \varphi_{231} \;\; \varphi_{213}]\end{aligned} \tag{5.214}$$

với $\varphi_{ijk}(\xi,\eta,\zeta) = p_i(\xi)\, q_j(\eta)\, r_k(\zeta)$ (5.215)

p_i, q_j, và r_k là các đa thức Hecmit theo (5.172). Với một phần tử dạng hình hộp chữ nhật các kích thước a, b, c có mặt trong hệ thức động năng của chất lỏng:

$$T_F = \frac{1}{2} abc \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\phi_{,\xi}^2 + \phi_{,\eta}^2 + \phi_{,\zeta}^2\right) d\xi d\eta d\zeta$$

Sử dụng (5.212) ta có: $T_F = \frac{1}{2}\underline{d}_\phi^T \underline{M}_F \underline{d}_\phi$

và sau khi đạo hàm theo $\underline{d}_\phi^T$ ma trận khối lượng:

$$\underline{M}_{\phi\phi} = abc \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\underline{\varphi}_{,\xi}\underline{\varphi}_{,\xi}^T + \underline{\varphi}_{,\eta}\underline{\varphi}_{,\eta}^T + \underline{\varphi}_{,\zeta}\underline{\varphi}_{,\zeta}^T\right) d\xi d\eta d\varphi \tag{5.216}$$

Công được thực hiện do một phần chất lỏng:

$$W_F = \rho_F \Omega^2 \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \phi(z=0) w dx dy = \underline{d}_w^T \underline{M}_{w\phi} \underline{d}_\phi \tag{5.217}$$

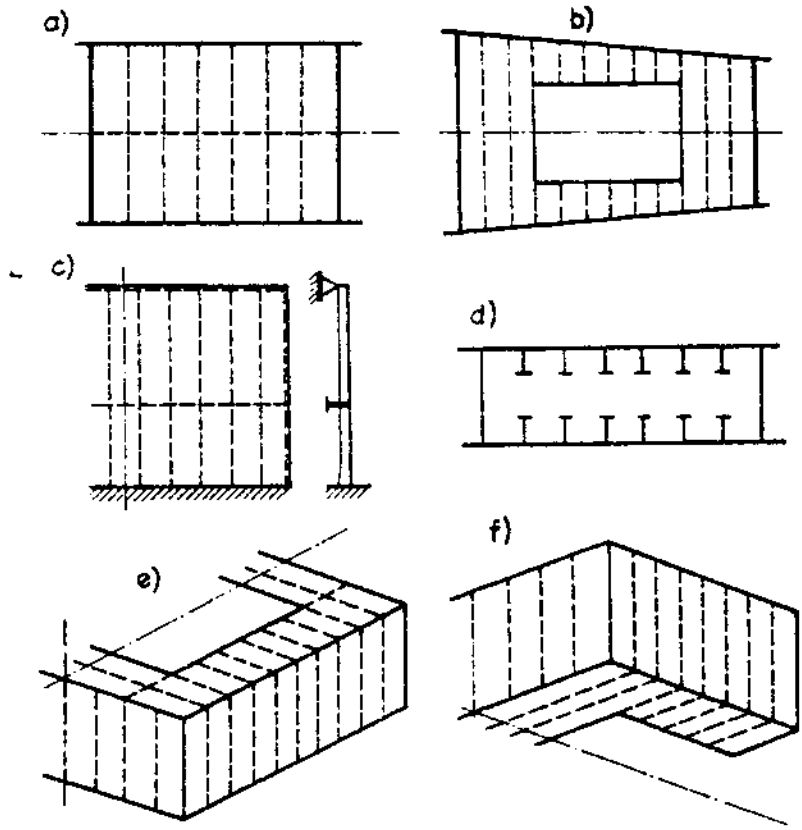
với: $\underline{M}_{w\varphi} = \rho_F \Omega^2 ab \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underline{h}\varphi^T(0) d\xi d\eta$ (5.218)

Các quan hệ giữa các phần tử với tấm (kể các chất lỏng) dẫn đến bài toán dao động riêng dưới dạng:

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{uv} & \underline{K}_{uw} & 0 \\ & \underline{K}_{vv} & \underline{K}_{vw} & 0 \\ & & \underline{K}_{ww} & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & 0 & 0 & 0 \\ & \underline{M}_{vv} & 0 & 0 \\ & & \underline{M}_{ww} & \underline{M}_{w\phi} \\ & & & \underline{M}_{\phi\phi} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \underline{d}_u \\ \underline{d}_v \\ \underline{d}_w \\ \underline{d}_\phi \end{bmatrix} = 0 \tag{5.219}$$

5.5. CÁC HƯỚNG DẪN TRONG THỰC HÀNH

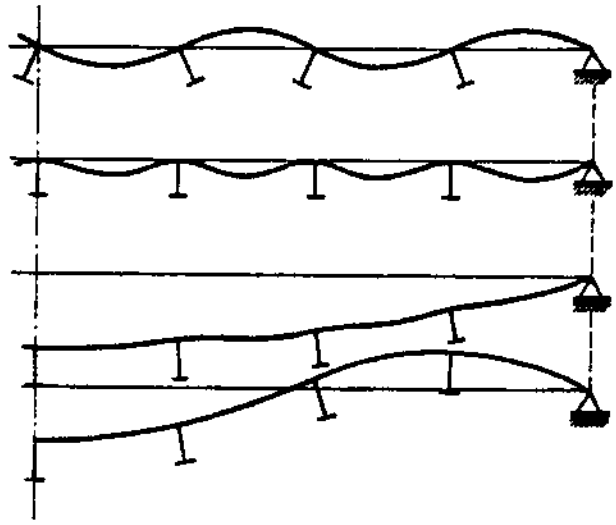
Khi tính toán dao động của kết cấu thân tàu (cục bộ), ta cần phải chia từ kết cấu chung và tại các phần riêng phải lựa chọn các điều kiện biên thay thế một cách phù hợp. Bên cạnh đó ta phải cố gắng xác định các ranh giới biên sao cho các giả thiết về điều kiện biên là gần với thực tế nhất. Trên hình 5.39 mô tả một vài kết cấu điển hình. Các hình 5.39a-b là các tấm phẳng. Các biên có thể được xem như đối xứng hoặc không đối xứng đối với các chuyển vị.



Hình 5.39. Ví dụ về kết cấu cục bộ của thân tàu.

Nếu xuất hiện tải va đập do chất lỏng, khi đó tồn tại thế vận tốc ϕ. Phức tạp hơn là các điều kiện biên tại các biên dọc. Do các tần số riêng của tấm đáy và tấm sườn bên rất khác nhau, trước hết chỉ xét riêng tấm đáy và các biên dọc được mô tả thông qua tác dụng của ngàm đàn hồi. Nhưng nếu các tần số riêng này ít sai khác nhau, cả hai hệ (tấm đáy và tấm sườn) có thể coi như một hệ để tính toán (hình 5.39e, 5.39f). Hình 5.39d mô tả một đoạn tấm nền trong và ngoài. Các biên dọc và ngang có thể là đối xứng hoặc không đối xứng.

Một vài dạng dao động điển hình cho tấm có gân theo một hướng được mô tả trên hình 5.40. Có hai trường hợp đặc biệt: trường hợp thứ nhất là tấm dao động giữa các đường gân đối xứng (hoặc không đối xứng), các đường gân hầu như không chuyển động. Trường hợp thứ hai các đường gân thực hiện các chuyển động ngang.



Hình 5.40. Vài dạng dao động của tấm có gân dọc biên.

Các chuyển động tương đối của các tấm giữa các gân thường nhỏ. Với dạng đầu tiên, các tần số riêng được đánh giá với độ chính xác đủ lớn. Thông thường tại thân tàu có các kết cấu cục bộ tại chỗ, các kết cấu này phải được làm chắc theo một hướng và các biên ngang của nó được coi như có các điều kiện biên mômen bằng không. Trong trường hợp này cho phép phân chia sự phụ thuộc theo hướng gân qua các hệ thức điều hoà. Từ đó một bài toán hai chiều được giảm xuống thành bài toán một chiều.

Tại các kết cấu cục bộ, điều kiện biên không thể mô tả đủ chính xác. Tuỳ theo khả năng, ta dựa vào các kết cấu bên cạnh để mô tả nó vì sai số do xác định điều kiện biên giảm dần từ ngoài vào trong.

CHƯƠNG 6
TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA CÁC KẾT CẤU THÂN TÀU ĐẶC BIỆT

6.1. CÁC NHẬN XÉT CHUNG

Trong mục 5.1.2.1 việc tính toán dao động đã được đề cập tới trong đó thân tàu được coi như là các dầm, việc nối các dao động cục bộ không được xét đến. Các dao động của kết cấu thân tàu cục bộ được trình bày trong đoạn sau.

Bởi vì bài toán này liên quan đến nhiều phạm vi khác nhau nên hình thành một hệ dao động phức hợp và tổng quát và như vậy, toàn bộ thân tàu có thể coi là một hệ không gian với các kết cấu có gân. Như vậy việc phân biệt giữa dao động cục bộ và dao động toàn thể không phải là đối tượng cơ bản và việc tính toán dao động cung cấp cho ta tất cả các dạng dao động có liên quan đến mô hình. Để thực hiện việc tính toán như vậy yêu cầu một lượng lớn các dữ liệu đầu vào và thời gian tính lớn để giải các hệ phương trình. Bởi vậy những cố gắng trong phần này làm giảm khối lượng tính toán.

Trước hết, ta cố gắng đưa ra các mô hình tính đơn giản nhất trong đó các tham số hình học và vật lý của mô hình là những tham số nhất thiết có liên quan đến bài toán đã cho, theo cách này thì các lực quán tính của tấm mỏng bao giờ cũng được bỏ qua, tuy nhiên việc tiết kiệm thời gian tính toán là không đáng kể.

Cùng với điều này cho phép ta đơn giản hóa mô hình tính toán cho các hệ phẳng bằng cách bỏ qua các biến dạng uốn trong từng phần của hệ. Việc làm đơn giản hóa mô hình cũng liên quan đến các mô hình được tổ hợp lại từ các đoạn dầm hoặc từ các kết cấu phẳng. Theo cách này thân tàu có thể được coi như dầm Timoshenko. Nếu các dao động của các hệ cục bộ chẳng hạn các bộ phận ở đáy tàu hoặc boong tàu là đáng kể thì các hệ này được mô hình hóa là kết cấu phẳng cùng với mô hình dầm.

Một khả năng tiếp theo là các gân trong một phạm vi nào đấy được làm "nhòa đi" và bởi vậy một hệ thống có gân được thay thế bởi một hệ các tấm.

Việc ứng dụng của phương pháp PTHH cũng dẫn đến một loạt các đơn giản hóa đáng kể. Tại đó việc gia cố độ cứng có liên quan trực tiếp trong các phần tử, tác dụng của nó có thể được mô tả thông qua các chuyển vị của các nút của phần tử tấm, cuối cùng việc giảm tính toán có thể đạt được bằng cách làm giảm số bậc tự do của các hệ phương trình lớn, việc giảm này sẽ dễ dàng thực hiện nếu toàn bộ hệ được chia thành kết cấu nhỏ phù hợp (cấu trúc

con) và việc làm giảm số bậc tự do được thực hiện trên các siêu phần tử. Việc kết hợp các siêu phần tử với cấu trúc toàn thể dẫn đến bài toán trị riêng và bài toán biên với kích cỡ đơn giản hơn.

Việc bỏ qua các điểm nút bên trong trước hết dẫn đến việc mất mát thông tin, và những dạng dao động riêng sẽ không xuất hiện. Hiện nay đã có nhiều kỹ thuật mô tả siêu phần tử. Theo cách này cho phép ta xây dựng được một cấu trúc cây nhị phân của các cấu trúc con, chúng bao hàm cả cấu trúc từng phần điển hình cho tàu thủy. Việc phát triển vấn đề này vẫn còn trong giai đoạn nghiên cứu.

Một vấn đề đặc biệt của dao động thân tàu là dao động của các khoang trên đặc biệt là ở phía đuôi tàu bởi vì ở tại đó xuất hiện các lực kích động đáng kể và có các phòng điều khiển cũng như phòng sinh hoạt. Việc kiểm soát dao động trong phạm vi này có ý nghĩa đặc biệt quan trọng.

6.2. CÁC DAO ĐỘNG THẲNG ĐỨNG CỦA THÂN TÀU XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA VIỆC NỐI VỚI CÁC DAO ĐỘNG CỤC BỘ

6.2.1. Ứng dụng của phương pháp ma trận truyền

Như đã xác định trong 5.2, giữa các dao động cục bộ và các dao động toàn thể của thân tàu có liên quan đến nhau và không thể bỏ qua được. Ví dụ trong trường hợp các tần số riêng cục bộ của boong hoặc là đáy tàu gần với các tần số riêng dao động của dầm. Một nhu cầu trong thực tế là cần phải xây dựng một mô hình hợp lý trong đó thân tàu loại trừ phần trên boong được coi như là dầm Timoshenko và các đoạn boong và đáy tàu được coi như là các tấm. Bởi vì mô hình này có ý nghĩa cơ bản và có nhiều ứng dụng rộng rãi, nên tiếp sau đây chúng ta sẽ mô tả nó thông qua các biểu diễn giải tích.

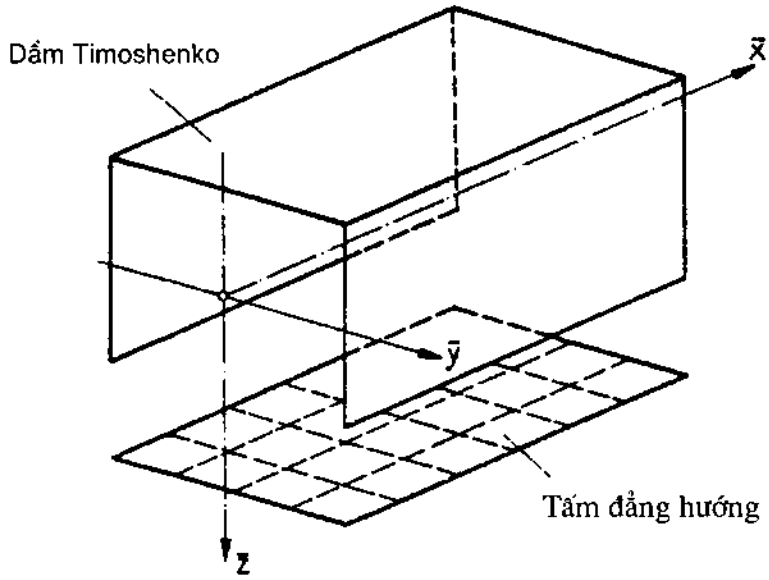
Trong hình 6.1 chỉ ra một mô hình như vậy. Mô hình này bao gồm một dầm Timoshenko và một tấm có độ cứng thuần nhất được nối với nó. Các lực tác động lên cả hai phần của hệ được chỉ ở hình 6.2, trong đó các chỉ số H và B đặc trưng cho dầm và phần đáy tàu. Từ hình 6.2 ta có thể xác định được các điều kiện cân bằng:

$$\begin{aligned}
&N_{H,x} + q_z = 0\\
&Q_{H,x} + q_z + \mu_H\omega^2 w_H = 0\\
&-M_{H,x} + Q_H + \vartheta_H\omega^2\beta_H + N_{H,x}a = 0\\
&N_{B,x} - q_z = 0
\end{aligned} \tag{6.1}$$

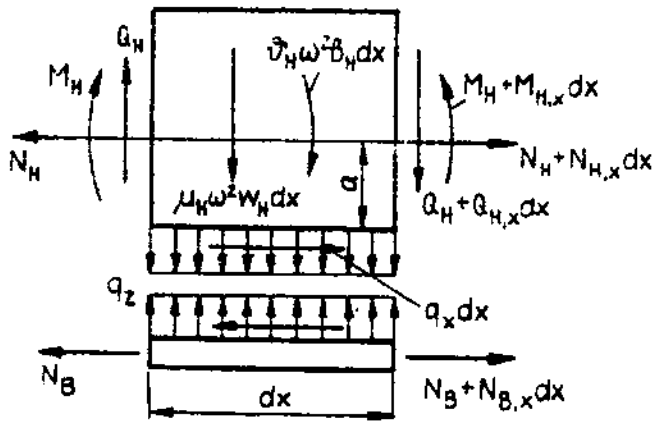
Các phương trình chuyển động của tấm:

$$D_x w_{B,xxxx} + 2Hw_{B,xxyy} + D_y w_{B,yyyy} - \frac{\mu_B}{B}\omega^2 w_B = 0 \tag{6.2}$$

trong đó: B là bề rộng của đáy tàu; D_x, D_y, H là các độ cứng của tấm trực hướng.



Hình 6.1. Hệ dầm Timoshenko và tấm đẳng hướng.



Hình 6.2. Lực ở thân tàu chính và đáy tàu.

Đối với dầm Timoshenko ta có hệ thức:

$$M_H = -C_{BH}\beta_{H,x}$$
$$Q_H = C_{QH}(w_{H,x} - \beta_H) \qquad (6.3)$$

với β_H là góc xoay và C_{BH}, C_{QH} là độ cứng uốn và độ cứng kéo nén của dầm.

Từ các điều kiện tương thích ở chỗ nối giữa dầm – tấm dẫn đến:

$$\frac{M_H}{I_H}a + \frac{N_H}{A_H} = \frac{N_B}{A_B} \tag{6.4}$$

trong đó A_H, A_B là diện tích mặt cắt ngang của hệ chính (dầm) và đáy tàu, I_H là mômen quán tính mặt của hệ chính.

Khử q_x từ (6.1a) và (6.1d), thế $N_{B,x} = -N_{H,x}$ vào (6.4), ta có:

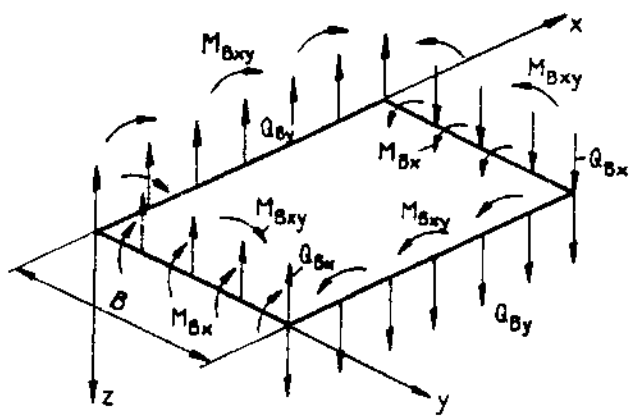
$$N_{H,x} = \frac{A_B a}{I_H(1 + A_B / A_H)} M_{H,x}$$

và từ (6.1c) suy ra: $M_{H,x} = \frac{1}{K}(Q_H + \vartheta_H \omega^2 \beta_H)$ (6.5)

với: $$K = 1 + \frac{A_B a^2}{I_H(1 + A_B / A_H)} \tag{6.6}$$

Với các quan hệ này, từ (6.1) và (6.3) ta có hệ phương trình đạo hàm riêng:

$$\begin{aligned} &Q_{H,x} = -\mu_H \omega^2 w_H - q_z \\ &M_{H,x} = \frac{1}{K}\left(Q_H + \vartheta_H \omega^2 \beta_H\right) \\ &\beta_H = -M_H / C_{BH} \\ &w_{H,x} = \beta_H + Q_H / C_{QH} \\ &D_x w_{B,xxxx} + 2H_x w_{B,xxyy} + D_y w_{B,yyyy} - \frac{\mu_B}{B}\omega^2 w_B = 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$



Hình 6.3. Các điều kiện biên của tấm.

Tại biên của tấm y = 0 và y = B, từ hình 6.3 ta có các điều kiện biên:

$$w_B = w_H$$
$$M_{By} = 0 \qquad (6.8)$$
$$V_{By} = Q_{By} + M_{Bxy,x} = \pm\frac{1}{2}q_z \qquad (y = 0, B)$$

Đối với dạng dao động tại đáy tàu, ta đặt:

$$w_B(x,y) = w_H(x) + v_B(x)\sin\frac{\pi y}{B} \qquad (6.9)$$

điều đó có nghĩa là ta chỉ xét trong trường hợp đáy dao động với một nửa bước sóng. Giả thiết này là phù hợp, vì trong trường hợp này các dao động của dầm chịu ảnh hưởng đáng kể của dao động cục bộ của tấm. Thế (6.9) vào (6.2), nhân với $\sin\frac{\pi y}{B}$ và lấy tích phân theo y. Bỏ qua số hạng $4 / \pi D_x w_{H,xxx}$ khi đó ta có phương trình tấm dưới dạng:

$$D_x v_{B,xxxx} - 2H\frac{\pi^2}{B^2}v_{B,xx} + \left(D_y\frac{\pi^4}{B^4} - \frac{\mu_B}{B}\omega^2\right) = \frac{4}{\pi}\frac{\mu_B}{B}\omega^2 w_H \qquad (6.10)$$

Các đại lượng lực tại biên tấm y = 0 và y = B được xác định từ lý thuyết của tấm:

$$M_{By} = -(D_y w_{B,yy} + D_1 w_{B,xx})$$
$$M_{Bxy} = -2D_{xy} w_{B,xy} = -(H - D_1) w_{B,xy} \qquad (6.11)$$
$$Q_{By} = -(D_y w_{B,yyy} + H w_{B,xxy})$$

với: $2D_{xy} = H - D_1$.

Trong đó D_{xy} là độ cứng xoắn liên quan tới biến dạng trượt của tấm và D_1 là phần của độ cứng tấm liên quan tới ảnh hưởng của ứng suất pháp theo phương ngang.

Trong mục 6.2.3 mô tả việc xác định các tham số này. Thế (6.11) vào các điều kiện biên (6.8) ta có:

$$w_B = w_H$$
$$D_y w_{B,yy} + D_1 w_{B,xx} = 0 \qquad (6.12)$$
$$D_y w_{B,yyy} + (2H - D_1) w_{B,xxy} = \mp\frac{1}{2}q_z$$

Tích phân phương trình tấm (6.2) theo y với cách thế tương tự và quan tâm tới (6.12c):

$$q_z = -\int_0^B \left(D_x w_{B,xxxx} + D_1 w_{B,xxy} - \frac{\mu_B}{B}\omega^2 w_B\right)dy \qquad (6.13)$$

Kết hợp với (6.9) và thực hiện tích phân, quan hệ này dẫn đến:

$$q_z = \mu_B\omega^2 w_H - 2D_x\frac{B}{\pi}v_{B,xxxx} + D_1\frac{2\pi}{B}v_{B,xx} + 2\frac{\mu}{\pi}\omega^2 v_B \qquad (6.14)$$

Trong đó số hạng $D_x w_{H,xxx}$ được bỏ qua. Theo cách tương tự ta thiết lập được các đại lượng nội lực tại biên tấm x = const:

$$M_{Bx} = -(D_x w_{B,xx} + D_1 w_{B,yy})$$
$$V_{Bx} = Q_{Bx} + M_{Bxy,y} = -(D_x w_{B,xxx} + H w_{B,xyy}) - 2D_{xy} w_{B,xyy} \tag{6.15}$$
$$= -D_x w_{B,xxx} - (2H - D_1) w_{B,xyy} = Q_{Bx}$$

Kết hợp với (6.9) và thực hiện tích phân theo y và bỏ qua số hạng w_H:

$$M_{Bx} = \frac{2B}{\pi}\left[D_1\left(\frac{\pi}{B}\right)^2 v_B - D_x v_{B,xx}\right]$$
$$Q_{Bx} = \frac{2B}{\pi}\left[(2H - D_1)\left(\frac{\pi}{B}\right)^2 v_{B,x} - D_x v_{B,xxx}\right] \tag{6.16}$$

Từ các phương trình thu được, ta viết hệ phương trình dưới dạng đạo hàm riêng:

$$w_{H,x} = \beta_H + Q_H / C_{QH}$$
$$\beta_{H,x} = -M_H / C_{BH}$$
$$M_{H,x} = \frac{1}{K}(Q_H + \vartheta_H \omega^2 \beta_H)$$
$$Q_{H,x} = -\omega^2\left[\mu_H + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)\mu_B\right] w_H + 2\left(\frac{\pi}{B}\right)^3\left[(2H - D_1)\frac{D_1}{D_x} - D_y\right] v_B -$$
$$-\left(\frac{\pi}{B}\right)^2 (2H - D_1)\frac{M_{Bx}}{D_x} \qquad \text{(từ 6.7a)}$$
$$v_{B,x} = R$$
$$R_{,x} = \frac{D_1}{D_x}\left(\frac{\pi}{B}\right)^2 v_B - \frac{\pi}{2BDx} M_{Bx}$$
$$M_{Bx,x} = 4\frac{\pi}{B}(D_1 - H)R + Q_{Bx}$$
$$Q_{Bx,x} = -\frac{8}{\pi^2}\mu_B \omega^2 w_H + \left[2\left(\frac{\pi}{B}\right)^3\left(D_y - D_1^2/D_x\right) - \frac{2\mu_B}{\pi}\omega^2\right] v_B + \left(\frac{\pi}{B}\right)^2 \frac{D_1}{D_x} M_{Bx}$$

(từ 6.16b) (6.17)

trong đó q_z được thay thế từ (6.14), $v_{B,xxxx}$ từ (6.10), $v_{B,xx}$ từ (6.16a) và $v_{B,xxx}$ từ (6.16b). Việc bỏ qua các số hạng $w_{H,xx}$, $w_{H,xxx}$ và $w_{H,xxxx}$ xuất phát từ giả thiết là độ võng của hệ chính nhỏ so với độ võng của nền theo hướng x.

Với vectơ trạng thái: $\underline{z}^T = [w_H\ \beta_H\ M_H\ Q_H\ v_B\ R\ M_{Bx}\ Q_{Bx}]$ (6.18)

hệ phương trình (6.17) được biểu diễn dưới dạng: $\underline{Z}_{,x} = \underline{C}\,\underline{z}$ (6.19)

với ma trận:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} & C_{12} & & C_{14} & & & & \\ & & C_{23} & & & & & \\ & C_{32} & & C_{34} & & & & \\ C_{41} & & & & C_{45} & & C_{47} & \\ & & & & & C_{56} & & \\ & & & & C_{65} & & C_{67} & \\ & & & & & C_{76} & & \\ C_{81} & & & & C_{85} & & C_{87} & \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Các phần tử của ma trận $\underline{C}$ là:

$$C_{12} = 1;\ C_{14} = 1/C_{BH};\ C_{23} = -1/C_{BH};\ C_{32} = \frac{1}{K}\vartheta_H\omega^2;\ C_{34} = \frac{1}{K};$$

$$C_{41} = -\omega^2\left[\mu_H + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\mu_B\right)\right];\ C_{45} = 2\left(\frac{\pi}{B}\right)^3\left[(2H - D_l)\frac{D_l}{D_x} - D_y\right]; \tag{6.21}$$

$$C_{47} = -\left(\frac{\pi}{B}\right)^2(2H - D_l)\frac{1}{D_x};\quad C_{56} = 1;\ C_{65} = \frac{D_l}{D_x}\left(\frac{\pi}{B}\right)^2;$$

$$C_{67} = -\frac{\pi}{2BDx};\ C_{76} = 4\frac{\pi}{B}(D_l - H);\ C_{78} = 1;\ C_{81} = -\frac{8}{\pi^2}\mu_B\omega^2;$$

$$C_{85} = 2\left(\frac{\pi}{B}\right)^3\left(D_y - D_l^2/D_x\right) - \frac{2\mu_B}{\pi}\omega^2;\quad C_{87} = \left(\frac{\pi}{B}\right)^2\frac{D_l}{D_x}$$

Phương pháp ma trận truyền mô tả trong mục 5.1.3.2 được áp dụng để giải hệ phương trình (6.19).

Các phản lực tác động từ đáy tàu được truyền dẫn tới các vách ngăn của boong tàu. Bên cạnh đó xuất hiện sự biến dạng của tấm đáy và cần được xét tới. Sự ảnh hưởng này có thể mô hình hoá thông qua một lò xo thay thế.

6.2.2. Áp dụng phương pháp PTHH

Nhờ việc áp dụng phương pháp PTHH ta có thể mô tả được quan hệ giữa các dao động của dầm và các dao động của các hệ cục bộ dạng tấm phẳng. Ta sử dụng cùng một mô hình như trong mục trước. Xét một trường hợp đặc biệt, tại đó tấm dao động theo hướng y với một nửa sóng hình sin. Khi đó:

$$w_B(x,y) = w_H(x) + v_H(x)\sin\frac{\pi y}{B} \tag{6.22}$$

Đối với thế năng đàn hồi của thân tàu ta có hệ thức năng lượng:

$$U_H = \frac{1}{2}\int_0^L \left[C_B\left(w_{H,xx} - \gamma_{H,x}\right)^2 + C_Q \gamma_H^2 \right] dx \tag{6.23}$$

trong đó bao gồm cả độ cứng uốn c_B và độ cứng trượt c_Q cũng như diện tích mặt cắt ngang đáy tàu xác định theo (6.31). Thế năng đàn hồi của tấm chịu uốn thuần tuý:

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^B \left[D_x w_{B,xx}^2 + D_y w_{B,yy}^2 + 2D_1 w_{B,xx} w_{B,yy} + 4D_{xy} w_{B,xy}^2 \right] dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[D_x B\left(w_{H,xx}^2 + \frac{1}{2} w_{B,xx}^2 + \frac{\pi}{4} v_{B,xx} w_{H,xx} \right) + D_y \frac{\pi^4}{2B^3} v_B^2 - \right. \\ &\qquad \left. - D_1 \frac{\pi}{B}\left(4w_{H,xx} + \pi v_{B,xx}\right) v_B + 2D_{xy} \frac{\pi^2}{B} v_{B,x}^2 \right] dx \end{aligned} \tag{6.24}$$

Động năng của dầm kể cả nền (đáy tàu):

$$\begin{aligned} T_{HB} &= \frac{1}{2}\omega^2 \left[\int_0^L \left(\mu_H w_H^2 + \vartheta \beta_H^2\right) dx + \int_0^L\int_0^B \frac{\mu_B}{B} w_B^2 dxdy \right] \\ &= \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^L \left[(\mu_H + \mu_B) w_H^2 + \frac{\pi}{4}\mu_B w_H v_B + \frac{\mu_B}{2} w_B^2 + \vartheta \beta_H^2 \right] dx \end{aligned} \tag{6.25}$$

Ngoài ra còn có động năng của nước cùng dao động:

$$T_F = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^L \left(\mu_{HF} w_H^2 + 2\mu_{HBF} w_H v_B + \mu_{BF} w_B^2\right) dx \tag{6.26}$$

trong đó:

μ_H, μ_F - khối lượng của dầm và nền trên một đơn vị chiều dài;

ϑ - mômen quán tính khối của toàn bộ mặt cắt đối với trục y, trên một đơn vị chiều dài;

$\mu_{HF} = \frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{B}{2}\right)^2 C_{HF}$ - khối lượng thuỷ động do biến dạng uốn của dầm trên một đơn vị chiều dài;

$\mu_{BF} = \frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{B}{2}\right)^2 C_{BF}$ - khối lượng thuỷ động do biến dạng uốn của nền trên một đơn vị chiều dài;

$\mu_{HBF} = \frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{B}{2}\right)^2 C_{HBF}$ - khối lượng thuỷ động do sự kết hợp giữa chuyển động của dầm và của tấm;

C_{HF}, C_{BF}, C_{HBF} - các tham số cho các khối lượng thuỷ động.

Đối với chuyển động của dầm ta đưa vào các hàm từ (5.42) trong mục c của 5.1.3.2 Với ký hiệu w_H và γ_H là các vectơ chuyển vị của điểm nút ta có các chuyển vị của dầm:

$$\begin{aligned} w_H(x) &= \underline{h}^T(x)\underline{w}_H \\ \gamma_H(x) &= \underline{g}^T(x)\underline{\gamma}_H \end{aligned} \tag{6.27}$$

Biến dạng uốn của tấm được mô tả qua hệ thức:

$$v_B(x) = \underline{h}^T(x)\underline{v}_B \tag{6.28}$$

Ta thế các chuyển vị này vào quan hệ để tính dao động riêng không cản:

$$\pi = U_H + U_B - T_{HB} - T_F \rightarrow \text{cực tiểu}$$

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \underline{K}_{13} \\ & \underline{K}_{22} & \underline{K}_{23} \\ \text{đối xứng} & & \underline{K}_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \underline{M}_{11} & \underline{M}_{12} & \underline{M}_{13} \\ & \underline{M}_{22} & \underline{M}_{23} \\ \text{đối xứng} & & \underline{M}_{33} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} w_H \\ \gamma_H \\ v_H \end{bmatrix} = 0 \tag{6.29}$$

với các ma trận con:

$$\begin{aligned}
&\underline{K}_{11} = \int_0^L (C_B + D_x B)\underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,xx}^T dx;\ \underline{K}_{12} = -\int_0^L C_B \underline{h}_{,xx}\underline{g}_{,x}^T dx; \\
&\underline{K}_{13} = 2\int_0^L \left(\frac{B}{\pi} D_x \underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,xx}^T - \frac{\pi}{B} D_1 \underline{h}_{,xx}\underline{h}^T\right) dx;\ \underline{K}_{22} = -\int_0^L \left(C_B \underline{g}_{,x}\underline{g}_{,x}^T + C_Q \underline{g}\underline{g}^T\right) dx; \\
&\underline{K}_{33} = \int_0^L \left(\frac{B}{2} D_x \underline{h}_{,xx}\underline{h}_{,xx}^T + \frac{2\pi^2}{B} D_{xy}\underline{h}_{,x}\underline{h}_{,x}^T - \frac{\pi^2}{B} D_1 \underline{h}_{,xx}\underline{h}^T + \frac{\pi^4}{2B^3} D_y \underline{h}\underline{h}^T\right) dx \\
&\underline{M}_{11} = \int_0^L \left[(\mu_H + \mu_B + \mu_{HF})\underline{h}\underline{h}^T + \vartheta \underline{h}_{,x}\underline{h}_{,x}^T\right] dx;\ \underline{M}_{12} = -\int_0^L \vartheta \underline{h}_{,x}\underline{g}^T dx; \\
&\underline{M}_{13} = \int_0^L \left(\frac{2}{\pi}\mu_B + \mu_{HBF}\right)\underline{h}\underline{h}^T dx;\ \underline{M}_{22} = \int_0^L \vartheta \underline{g}\underline{g}^T dx; \\
&\underline{M}_{33} = \int_0^L \left(\frac{\mu_B}{2} + \mu_{BF}\right)\underline{h}\underline{h}^T dx;\ \underline{K}_{23} = \underline{K}_{32} = \underline{M}_{23} = \underline{M}_{32} = 0
\end{aligned} \tag{6.30}$$

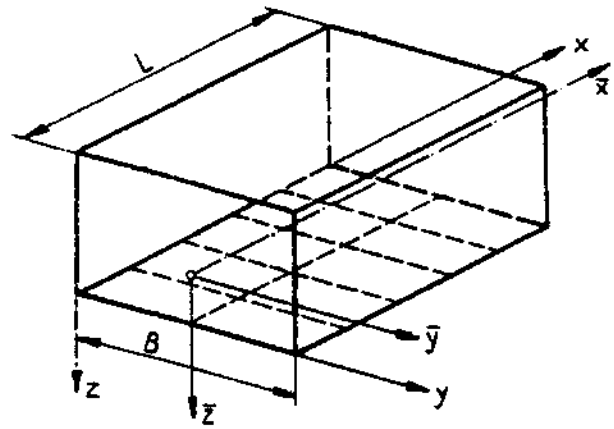
trong đó các độ cứng uốn và trượt được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} C_B &= E\left(I_H + \frac{A_H A_B}{A_H + A_B} a^2\right) = EI_{HB} \\ C_Q &= kG(A_H + A_B) \end{aligned} \tag{6.31}$$

a là khoảng cách từ đường trung hoà của mặt cắt ngang dầm không có nền đến nền đáy.

Để tính toán các dao động cưỡng bức ta phải bổ sung các phần tử cản và kích động vào các quan hệ được xét ở trên.

Tại các kết cấu cục bộ một chiều ta có thể giả thiết kết cấu phẳng được nối với dầm. Trong đó ta ký hiệu bề rộng của phần tử tấm là B và chiều dài L. Hình 6.4 mô tả phần tử dầm-tấm.



Hình 6.4. Phần tử tổ hợp.

Thế năng đàn hồi của toàn bộ thiết diện ngang khi không xét đến biến dạng uốn của các phần tử tấm là:

$$U_H = \frac{1}{2}\int_0^L \left[C_B \left(w_{H,xx} - \gamma_{H,x} \right)^2 + C_Q \gamma_H^2 \right] dx \tag{6.32}$$

Thế năng của tấm bị uốn:

$$U_B = \frac{1}{2} D \int_0^L \int_0^B \left[w_{B,xx}^2 + w_{B,yy}^2 + 2\nu w_{B,xx} w_{B,yy} + 2(1-\nu) w_{B,xy}^2 \right] dxdy \tag{6.33}$$

và thế năng của các gân dọc và ngang:

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2} E \sum \int_0^L \Big[I_{zz} w_{B,xx}^2(y_L) + I_{\omega\omega} w_{B,xxy}^2(y_L) + \\ &\quad + 2 I_{z\omega} w_{B,xx}(y_L) w_{B,xxy}(y_L) + \frac{1}{2(1+\nu)} I_T w_{B,xy}^2(y_L) \Big] dx \\ U_Q &= \frac{1}{2} E \sum \int_0^B \Big[I_{zz} w_{B,yy}^2(x_Q) + I_{\omega\omega} w_{B,xxy}^2(x_Q) + \\ &\quad + 2 I_{z\omega} w_{B,yy}(x_Q) w_{B,xyy}(x_Q) + \frac{1}{2(1+\nu)} I_T w_{B,xy}^2(x_Q) \Big] dy \end{aligned} \tag{6.34}$$

Trong đó các phần tử có toạ độ x_L và y_L được lấy tổng. Trong hệ thức này các chuyển vị u và v tại mặt phẳng trung tâm của tấm được bỏ qua. Hệ thức động năng tương ứng có dạng:

$$T_H = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^L \left(\mu_H w_H^2 + \vartheta \beta_H^2\right) dx;\ T_B = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^L \int_0^B \frac{\mu_B}{B} w_B^2 dxdy$$

$$T_L = \frac{1}{2}\omega^2 \rho \sum \int_0^L \Big[I_{zz} w_{B,x}^2(y_L) + I_{\omega\omega} w_{B,xy}^2(y_L) + 2I_{z\omega} w_{B,x}(y_L) w_{B,xy}(y_L) + \\ + I_P w_{B,y}^2(y_L) + A w_B^2(y_L) + 2S_y w_B(y_L) w_{B,y}(y_L) \Big] dx \tag{6.35}$$

$$T_Q = \frac{1}{2}\omega^2 \rho \sum \int_0^B \Big[I_{zz} w_{B,y}^2(x_Q) + I_{\omega\omega} w_{B,xy}^2(x_Q) + 2I_{z\omega} w_{B,y}(x_Q) w_{B,xy}(x_Q) + \\ + I_P w_{B,x}^2(x_Q) + A w_B^2(x_Q) + 2S_x w_B(x_Q) w_{B,x}(x_Q) \Big] dy$$

Động năng của lượng nước cùng dao động theo tàu như (6.26).

Trong trường hợp các dạng dao động chỉ giới hạn đối với uốn của tấm, qua quan hệ:

$$w_B(x,y) = w_H(x) + v_B(x)\sin\frac{\pi y}{B} \tag{6.36}$$

bài toán tấm có thể đưa về bài toán một chiều. Thế năng tổng có dạng:

$$\Pi = U_H + U_B + U_L + U_Q - T_H - T_B - T_L - T_Q - T_F \rightarrow \text{cực tiểu} \tag{6.37}$$

Đối với trạng thái chuyển vị, ta xây dựng các hệ thức như (6.27), (6.28):

$$\begin{aligned} w_H(x) &= \underline{h}^T(x)\underline{w}_H \\ \gamma_H(x) &= \underline{g}^T(x)\underline{\gamma}_H \\ v_B(x) &= \underline{h}^T(x)\underline{v}_B \end{aligned} \tag{6.38}$$

Với các hàm dạng theo (5.42) và vectơ chuyển vị của điểm nút:

$$\begin{aligned} \underline{w}_H^T &= \left[w_H(0) \quad w_{H,x}(0) \quad w_H(L) \quad w_{H,x}(L) \right] \\ \underline{\gamma}_H^T &= \left[\gamma_H(0) \quad \gamma_H(L) \right] \\ \underline{v}_H^T &= \left[v_B(0) \quad v_{B,x}(0) \quad v_B(L) \quad v_{B,x}(L) \right] \end{aligned} \tag{6.39}$$

Với các hệ thức này cho phép ta xác định các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng theo cách thông thường, thế (6.38) vào (6.37) và tính theo $\underline{w}_H^T$, $\underline{\gamma}_H^T$, $\underline{v}_B^T$.

Trong trường hợp đang xét chúng ta đã đơn giản hoá bài toán bằng cách bỏ qua biến dạng ở diện tích giữa của tấm và biểu diễn biến dạng uốn của tấm nền bởi một hàm điều hoà nửa sóng hình sin.

Sự đơn giản hoá này có thể không phải áp dụng nếu ta tách riêng các phần tử mặt và phần tử dầm và coi nó như các phần tử được làm cứng. Trong trường hợp này sự ảnh hưởng của chất lỏng không thể xét đến thông qua việc sử dụng đại lượng là khối lượng thuỷ động, mà phải coi chất lỏng như là một phần của hệ.

6.2.3. Xác định các tham số

Đối với phần đáy đơn hoặc kép được mô hình hoá bởi các tấm, các tham số được xác định như dưới đây.

Các mô hình và các nội lực tại một đáy kép được mô tả trên hình 6.5. Thế năng đàn hồi có dạng:

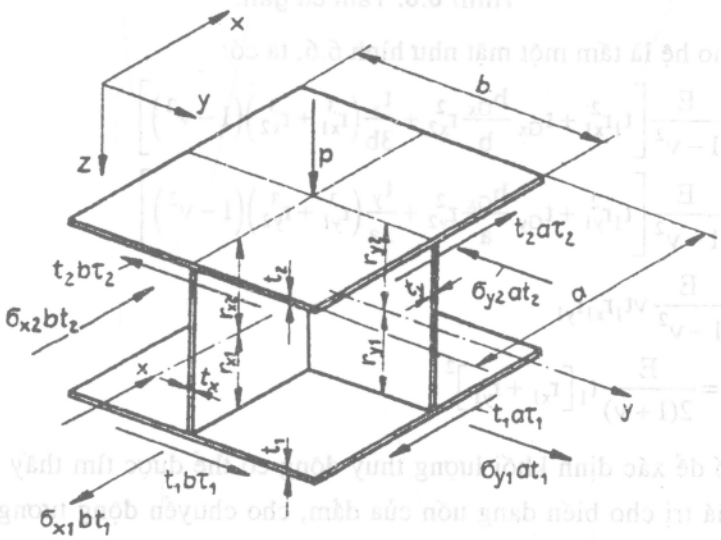
$$U_{DB} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \Big[\sigma_{x1}t_1\varepsilon_{x1} + \sigma_{x2}t_2\varepsilon_{x2} + \sigma_{y1}t_1\varepsilon_{y1} + \sigma_{y2}\varepsilon_{y2} + t_1\tau_1\left(\gamma_{1x} + \gamma_{2x}\right) + \\ + t_2\tau_2\left(\gamma_{2x} + \gamma_{2y}\right)\Big]dxdy + \frac{1}{2}\int_0^a\int_{-r_{2x}}^{r_{1x}} t_x\sigma_x\varepsilon_x dxdz + \frac{1}{2}\int_0^b\int_{-r_{2y}}^{r_{1y}} t_y\sigma_y\varepsilon_y dydz \tag{6.40}$$

với các quan hệ đối với tấm:

$$\varepsilon_{x1} = -r_{x1}w_{,xx}\ ;\ \ \varepsilon_{x2} = -r_{x2}w_{,xx};\ \ \varepsilon_{y1} = -r_{y1}w_{,yy};\ \ \varepsilon_{y2} = -r_{y2}w_{,yy};\ \ \gamma = -zw_{,xy}$$

từ (6.40) dẫn đến:

$$U_{DB} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left(D_x w_{,xx}^2 + D_y w_{,yy}^2 + 2D_1 w_{,xx}w_{,yy} - 4D_{xy}w_{,xy}^2\right)dxdy \tag{6.41}$$



Hình 6.5. Mô hình và các lực của một tấm kép.

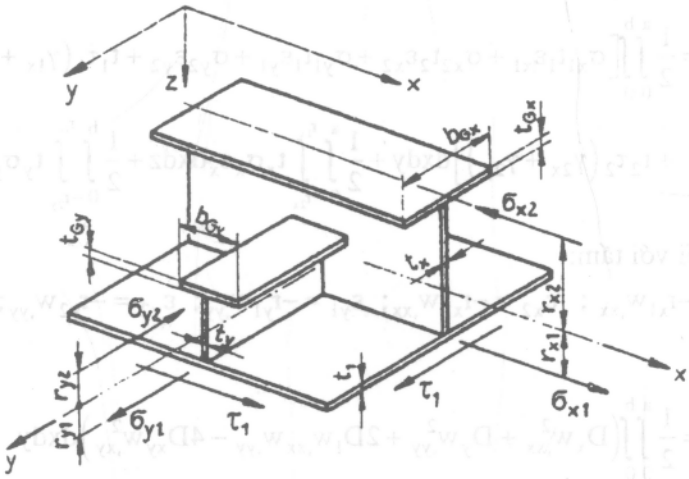
với độ cứng của tấm:

$$D_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[r_{x1}^2 t_1 + r_{x2}^2 t_2 + \frac{t_x}{3b}\left(r_{x1}^3 + r_{x2}^3\right)\left(1-\nu^2\right)\right]$$

$$D_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[r_{y1}^2 t_1 + r_{y2}^2 t_2 + \frac{t_y}{3a}\left(r_{y1}^3 + r_{y2}^3\right)\left(1-\nu^2\right)\right] \qquad (6.42)$$

$$D_1 = \frac{E\nu}{1-\nu^2}\left[t_1 r_{x1} + t_2 r_{x2} r_{y2}\right]$$

$$4D_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[t_1 r_{x1}^2 + t_2 r_{x2}^2 + t_1 r_{y1}^2 + t_2 r_{y2}^2 + 2t_1 r_{x1} r_{y1} + 2t_2 r_{x2} r_{y2}\right]$$



Hình 6.6. Tấm có gân.

Với sơ đồ cho hệ là tấm một mặt như hình 6.6, ta có:

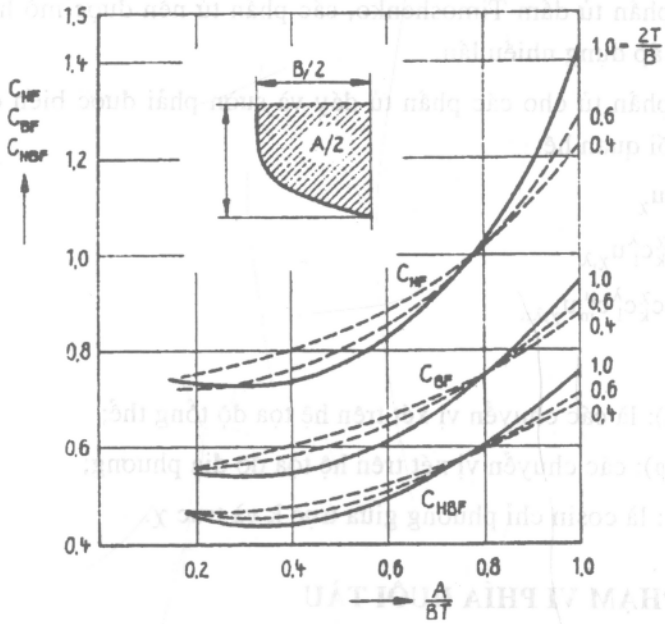
$$D_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[t_1 r_{x1}^2 + t_{Gx}\frac{b_{Gx}}{b} r_{x2}^2 + \frac{t_x}{3b}\left(r_{x1}^3 + r_{x2}^3\right)\left(1-\nu^2\right)\right]$$

$$D_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[t_1 r_{y1}^2 + t_{Gy}\frac{b_{Gx}}{a} r_{y2}^2 + \frac{t_y}{3a}\left(r_{y1}^3 + r_{y2}^3\right)\left(1-\nu^2\right)\right] \qquad (6.43)$$

$$D_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\nu t_1 r_{x1} r_{y1}$$

$$4D_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} t_1\left[r_{x1} + r_{y1}\right]^2$$

Các tham số để xác định khối lượng thuỷ động có thể được tìm thấy ở hình 6.7. c_{HF}, c_{BF}, c_{HBF} là các giá trị cho biến dạng uốn của dầm, cho chuyển động tương đối của đáy và cho việc kết nối cả hai chuyển động. Chúng được xác định từ (6.26).



Hình 6.7. Các tham số để xác định khối lượng thuỷ động.

6.3. CÁC DAO ĐỘNG CỦA ĐÁY KÉP

Để tính toán dao động cục bộ của một đoạn đáy kép, trong đa số các trường hợp, việc mô hình hoá chúng như các tấm là đủ chính xác. Vấn đề này đã được mô tả ở đoạn trước.

Nếu việc khảo sát dao động cần độ chính xác cao hơn thì đoạn đáy kép phải được chia thành các phần tử và được khảo sát bằng phương pháp PTHH. Đáy kép được chia nhỏ thành các ô thông qua các đường gân đỡ theo chiều dọc và viền đáy. Nhờ sử dụng các hàm dáng cấp ba, việc chia nhỏ thêm các phần tử tự nhiên này không cần thiết nữa.

Tuỳ theo việc đặt bài toán, ta có các phương án sau đây khi áp dụng phương pháp PTHH:

- Các phần tử tấm - đĩa được áp dụng cho tất cả các phần tử.

- Các phần tử tấm-đĩa được áp dụng cho các phần tử của đáy trong và ngoài. Đối với các phần tử sống gân ở giữa chỉ sử dụng phần tử đĩa. Ta không xét đến dao động của gân vì có thể đơn giản hoá được.

- Đối với các phần tử đĩa, biến dạng uốn của tấm không được xét đến. Trong trường hợp này, đối với các phần tử đáy, các chuyển động của vật thể rắn tuyệt đối theo hướng vuông góc với mặt phẳng trung bình của tấm phải được xét đến hoặc là các khối lượng của các phần tử tấm được tập trung ở các điểm nút. Không thể mô hình hoá đơn giản hơn nữa.

- Các gân là phần tử dầm Timoshenko, các phần tử nền được mô hình là phần tử đĩa. Mô hình này có thể áp dụng nhiều lần.

Các ma trận phần tử cho các phần tử đáy và sườn phải được biến đổi sang hệ toạ độ tổng thể nhờ qua mối quan hệ:

$$u_k = c_k^{\chi} u_{\chi}$$
$$u_{k,l} = c_k^{\chi} c_l^{\lambda} u_{\chi,\lambda} \qquad (6.44)$$
$$u_{k,lm} = c_k^{\chi} c_l^{\lambda} c_m^{\mu} u_{\chi,\lambda\mu}$$

Trong đó:

u_k (k = x, y, z): là các chuyển vị xét trên hệ tọa độ tổng thể;

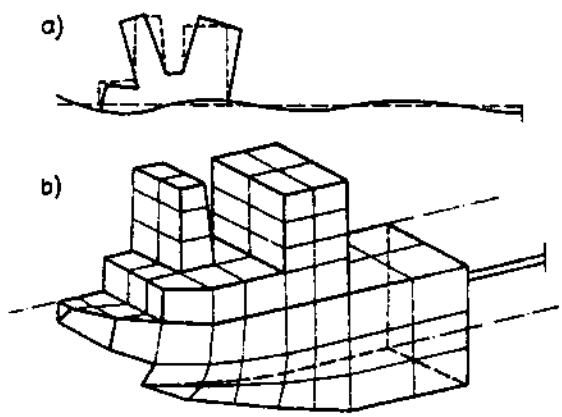
u_{χ} ($\chi = \xi, \eta, \varphi$): các chuyển vị xét trên hệ tọa độ địa phương;

$c_k^{\chi} = \cos(k,\chi)$: là cosin chỉ phương giữa trục k và trục χ.

6.4. DAO ĐỘNG PHẠM VI PHÍA ĐUÔI TÀU

Tầm quan trọng của việc khống chế các dao động của các kết cấu và công trình ở phạm vi phía đuôi tàu đã được nhắc tới trong mục giới thiệu chung của phần này. Tương ứng ta phải cố gắng tính toán được các dao động một cách chính xác.

Mô hình dầm không được sử dụng ở đây. Trong hình 6.8 có hai khả năng về việc thiết lập mô hình.



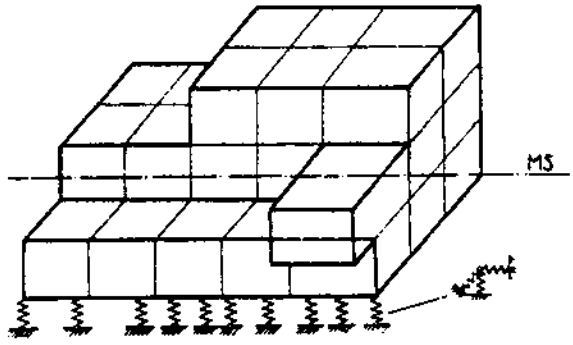
Hình 6.8. Mô hình tính toán dao động đuôi tàu.

Mô hình theo hình 6.8a được cấu tạo từ một dầm và được kết hợp với một mô hình đĩa. Các biến dạng uốn và biến dạng trượt của các công trình bên trên được mô tả hợp lý thông qua các phần tử này, tuy nhiên các biến dạng ngang và quan hệ tương hỗ với thân tàu không được xét tới.

Mô hình 6.8b tốt hơn, đuôi tàu cũng như phần các công trình bên trên được mô hình hoá như một hệ kết cấu phẳng được bố trí trong không gian. Trong đó các phần tử của kết cấu phẳng được mô hình bởi các hệ đĩa-thanh hoặc đĩa-tấm-dầm tuỳ theo ta quan tâm đến dạng dao động nào.

Trong những trường hợp đặc biệt, việc khống chế mức dao động của đuôi tàu trong một phạm vi biên độ cho phép không thực hiện được bằng các giải pháp về kết cấu thông thường. Một hướng giải quyết cho vấn đề này là thông qua việc lắp các gối đỡ đàn hồi cho toàn bộ các công trình bên trên, trong đó giữa thân tàu và công trình được nối bởi các khâu trung gian đàn hồi. Khác với các kết cấu gối đỡ thông thường cho các cơ cấu cứng, ở đây, bản thân các công trình bên trên boong cũng là một kết cấu đàn hồi phức tạp. Theo đó sự đa dạng của dạng dao động riêng là rất lớn.

Với mô hình tính, các kết cấu phẳng và không gian được sử dụng. Một mô hình phương pháp PTHH không gian được mô tả trên hình 6.9.



Hình 6.9. Mô hình PTHH không gian cho gối đỡ đàn hồi.

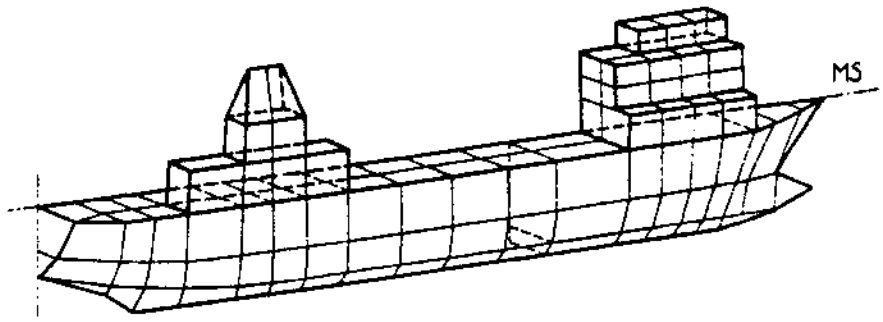
Thông thường các điểm nối của các phần tử trung gian đàn hồi với thân tàu được coi là cố định. Ta sử dụng các phần tử đĩa - tấm - dầm một cách có mục đích. Tần số riêng nhỏ nhất tương ứng với dạng dao động riêng của vật cứng tuyệt đối. Các tần số riêng cao hơn tương ứng với các dao động do biến dạng đàn hồi.

Việc bố trí các phần tử lò xo là một vấn đề đặc biệt. Việc bố trí này cố gắng sao cho tạo ra một việc phân bố tải trọng đều đặn giữa các phần tử đàn hồi.

6.5. TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA TOÀN BỘ THÂN TÀU NHỜ MÔ HÌNH PTHH KHÔNG GIAN

Có những dạng tàu thuỷ mà các công trình bên trên được xây dựng ở phía mũi tàu. Trong trường hợp này việc mô hình mũi và giữa tàu như là các dầm Timoshenko không ổn.

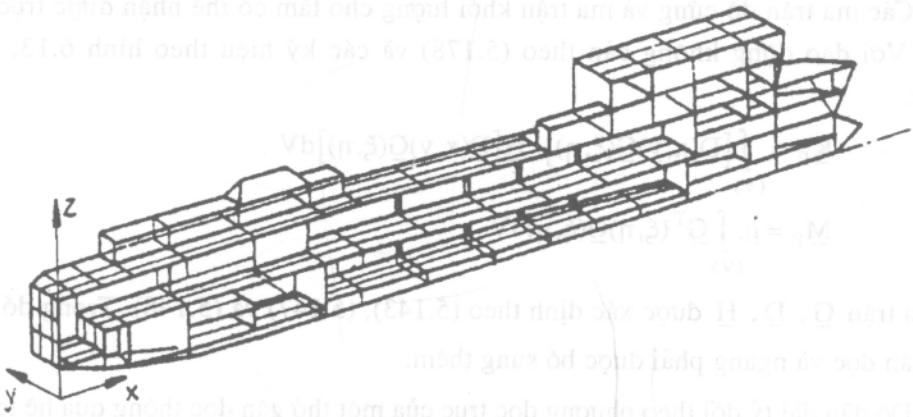
Khi đó, hoặc toàn bộ thân tàu, hoặc tối thiểu phạm vi các công trình trên boong phải được mô hình hoá như các hệ không gian. Tuy nhiên tính chính xác của bài toán sử dụng phương pháp PTHH cho toàn bộ thân tàu sẽ kéo theo một khối lượng tính toán lớn cho thu thập số liệu, xử lý và xuất kết quả. Một cách đơn giản là coi thân tàu đối xứng theo mặt phẳng giữa dọc theo trục tàu để khảo sát các dao động thẳng đứng và dọc. Ta phải đặc biệt chú ý đến số phần tử và việc bố trí các phần tử. Thân tàu được phân thông qua các vách dọc và ngang thành các vùng. Ta nên sử dụng các vùng được phân chia tự nhiên theo kết cấu này. Việc sử dụng các hàm dáng bậc ba cho ta độ chính xác đủ lớn để mô tả các dao động cục bộ. Nhưng bản thân lưới chia như vậy vẫn tạo ra một số bậc tự do vượt quá nhiều lần số bậc tự do có thể áp dụng. Bởi vậy ta kết hợp các khối lớn thành các phần tử có đặc tính đồng nhất thông qua việc áp dụng các phần tử gia cố độ cứng. Bên cạnh đó ta phải quyết định, có đưa các hiệu ứng biến dạng uốn và màng vào các phần tử hay không, việc này đòi hỏi nhiều kinh nghiệm. Hình 6.10 chỉ ra một ví dụ đơn giản cho việc chia lưới PTHH để tính cho tàu RO-RO.



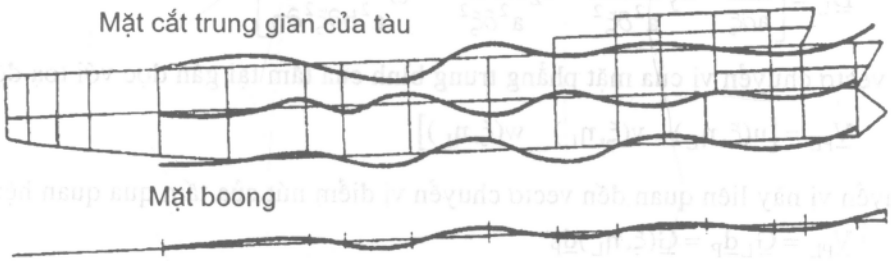
Hình 6.10. Chia lưới PTHH để mô hình tính cho tàu RO-RO.

Một ví dụ tiếp theo chỉ ra trên hình 6.11 cho một tàu chở hàng với diện tích trên boong lớn. Các dạng dao động mô tả trên hình 6.12. Đáng chú ý là sự sai khác đáng kể giữa các dạng riêng của boong trên, boong thứ hai và đáy. Việc so sánh cho ta thấy các dao động uốn tại mặt boong và đáy là đáng kể. Việc mô hình hoá dưới dạng dầm không mô tả được các dao động cục bộ có biên độ lớn và việc kết nối dao động này với các dao động của dầm. Ngoài ra, mô hình thân tàu không có các công trình bên trên như là dầm ở ví dụ trên là không chấp nhận được. Như vậy các mô hình dầm chỉ có thể áp dụng được khi không xét đến việc kết nối các dao động cục bộ.

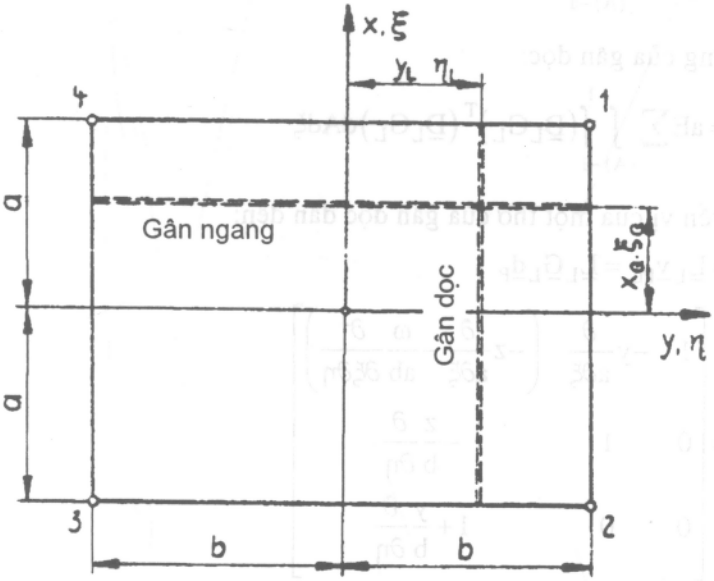
Nhờ việc sử dụng các phần tử hữu hạn ta có thể giảm đáng kể số bậc tự do trong các kết cấu phẳng với gân cứng. Hình 6.13 chỉ ra các phần tử hình chữ nhật với các ký hiệu tương ứng.



Hình 6.11. Mô hình PTHH cho một tàu chở hàng.



Hình 6.12. Dạng dao động cho hình 6.11.



Hình 6.13. Phần tử hữu hạn tấm hình chữ nhật đẳng hướng có gân.

Các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng cho tấm có thể nhận được trực tiếp từ mục 5.3.4. Với dao động không cản theo (5.178) và các ký hiệu theo hình 6.13, các ma trận này là:

$$\underline{K}_P = \int_{(V)} \left[\underline{D}(x,y)\underline{G}(\xi,\eta)\right]^T \underline{H}\left[\underline{D}(x,y)\underline{G}(\xi,\eta)\right]dV$$
$$\underline{M}_P = \rho \int_{(V)} \underline{G}^T(\xi,\eta)\underline{G}(\xi,\eta)dV \tag{6.45}$$

các ma trận $\underline{G}$, $\underline{D}$, $\underline{H}$ được xác định theo (5.143), (5.147) và (5.148). Trong đó các quan hệ giữa gân dọc và ngang phải được bổ sung thêm.

Độ dãn dài tỷ đối theo phương dọc trục của một thớ gân dọc thông qua hệ toạ độ y và z:

$$\varepsilon_{xL} = \underline{D}_L \underline{v}_{PL} \tag{6.46}$$

trong đó: $$\underline{D}_L = \left[\frac{\partial}{a\partial\xi} \quad -y\frac{\partial^2}{a^2\partial\xi^2} \quad -z\frac{\partial^2}{a^2\partial\xi^2} \quad -\omega\frac{\partial^3}{a^2b\partial\xi^2\partial\eta}\right] \tag{6.47}$$

và $\underline{v}_{PL}$ là vectơ chuyển vị của mặt phẳng trung bình của tấm tại gân dọc với toạ độ η_L:

$$\underline{V}_{PL} = \left[u(\xi,\eta_L) \quad v(\xi,\eta_L) \quad w(\xi,\eta_L)\right]$$

Chuyển vị này liên quan đến vectơ chuyển vị điểm nút của tấm qua quan hệ:

$$\underline{V}_{PL} = \underline{G}_L \underline{d}_P = \underline{G}(\xi,\eta_L)\underline{d}_P \tag{6.48}$$

Từ đó ta có thế năng biến dạng của một gân dọc:

$$U_L = \frac{1}{2}E\sum \int_{(A)} \int_{-a}^{a} \varepsilon_{xL}^2 dAdx = \frac{1}{2}\underline{d}_P^T \underline{K}_L \underline{d}_P$$

với ma trận độ cứng của gân dọc:

$$\underline{K}_L = aE\sum \int_{(A)} \int_{-1}^{1} \left(\underline{D}_L G_L\right)^T \left(\underline{D}_L G_L\right) dAd\xi \tag{6.49}$$

Vectơ chuyển vị của một thớ của gân dọc dẫn đến:

$$\underline{V}_L = \underline{L}_L \underline{v}_{PL} = \underline{L}_L \underline{G}_L \underline{d}_P$$

với $$\underline{L}_L = \begin{bmatrix} 1 & -y\dfrac{\partial}{a\partial\xi} & \left(-z\dfrac{\partial}{a\partial\xi} - \dfrac{\omega}{ab}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right) \\ 0 & 1 & -\dfrac{z}{b}\dfrac{\partial}{\partial\eta} \\ 0 & 0 & 1+\dfrac{y}{b}\dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

Từ đó ta xác định được động năng của một gân dọc:

$$T_L = \frac{1}{2}\omega^2\rho\sum\int_{(A)}\int_{-a}^{a}\underline{v}_L^T\underline{v}_L dAdx = \frac{1}{2}\omega^2\underline{d}_P^T\underline{M}_L\underline{d}_P$$

với: $$\underline{M}_L = \rho a\sum\int_{(A)}\int_{-1}^{1}(\underline{L}_L\underline{G}_L)^T(\underline{L}_L\underline{G}_L)dAd\xi \tag{6.51}$$

Các hệ thức tương ứng cho các gân ngang như sau:

$$\underline{U}_Q = \frac{1}{2}\underline{d}_P^T\underline{K}_Q\underline{d}_P$$

$$\underline{K}_Q = Eb\sum\int_{(A)}\int_{-1}^{1}(\underline{D}_Q G_Q)^T(\underline{D}_Q G_Q)dAd\eta$$

$$T_Q = \frac{1}{2}\underline{d}_P^T\underline{M}_Q\underline{d}_P$$

$$\underline{M}_Q = \rho b\sum\int_{(A)}\int_{-1}^{1}(\underline{L}_Q\underline{G}_Q)^T(\underline{L}_Q\underline{G}_Q)dAd\eta$$

$$\underline{G}_Q = \underline{G}(\xi_Q,\eta)$$

$$\underline{D}_Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial\eta} & -\frac{x\partial^2}{b^2\partial\eta^2} & -\frac{z}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\omega}{ab^2}\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_Q = \begin{bmatrix} -\frac{x\partial}{b\partial\eta} & 1 & -\frac{z}{b}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\omega}{ab}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} \\ 1 & 0 & -\frac{z}{a}\frac{\partial}{\partial\xi} \\ 0 & 0 & 1 + \frac{y}{a}\frac{\partial}{\partial\xi} \end{bmatrix} \tag{6.52}$$

Thực hiện việc lấy tổng tất cả các gân. Ta có các phương trình chuyển động cho mỗi phần tử khi xét dao động riêng không cản:

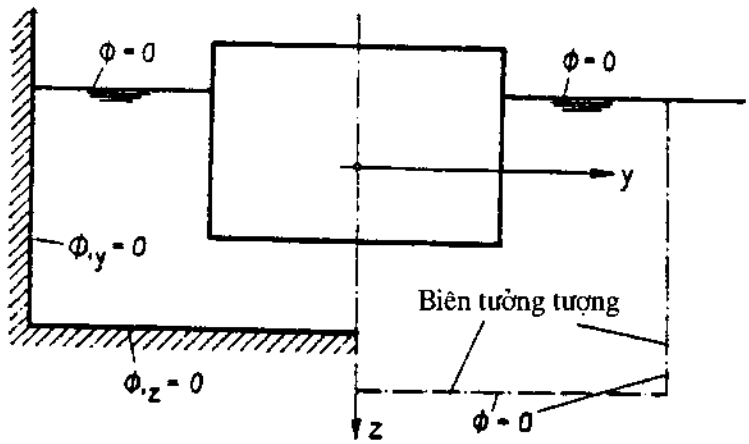
$$\left[(\underline{K}_P + \underline{K}_L + \underline{K}_Q) - \omega^2(\underline{M}_P + \underline{M}_L + \underline{M}_Q)\right]\underline{d}_p = 0 \tag{6.53}$$

Việc xác định ảnh hưởng của chất lỏng có thể thực hiện được thông qua việc áp dụng một mô hình PTHH không gian, trong đó chất lỏng được coi là một phần của hệ không gian. Ở đây ta chuyển đổi các điều kiện biên vô hạn của chất lỏng vô hạn thành các điều kiện biên hữu hạn (ví dụ hình 6.14). Sai lệch sinh ra thường là nhỏ và bỏ qua được nếu khoảng cách giữa các biên tưởng tượng của bề mặt thân tàu ít nhất là tương ứng với một nửa chiều dài bước sóng lớn nhất hoặc một nửa bước sóng của dạng riêng cần quan tâm.

Ma trận khối lượng của chất lỏng được xác định từ hệ thức động năng mô tả trong đoạn 5.4. Tất cả các phần tử hữu hạn được áp dụng là phần tử diện tích với hàm dạng bậc

hai, ba và có 20 hoặc 32 bậc tự do. Để ghép nối với bề mặt thân tàu, chúng được biến đổi nhờ các tham số phụ.

Tại bề mặt thân tàu, các điều kiện chuyển tiếp giữa hai hệ con phải được thoả mãn (xem phần 5.4). Tại các biên cứng, đạo hàm của thế vận tốc vuông góc với biên phải triệt tiêu.



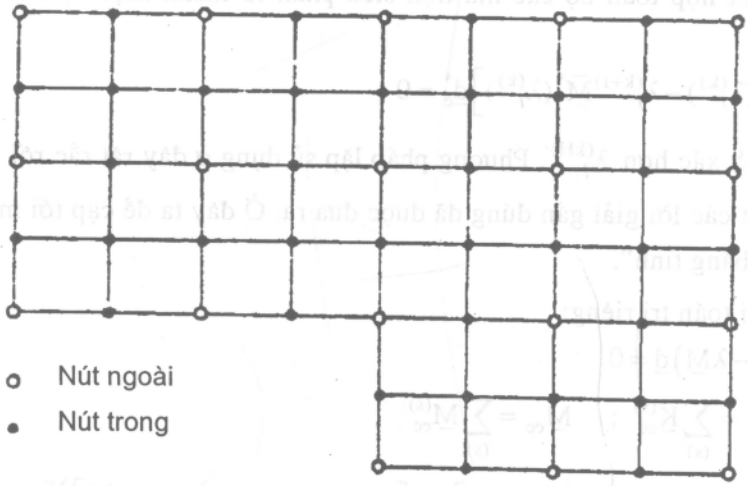
Hình 6.14. Các điều kiện biên cho chất lỏng.

6.6. ÁP DỤNG KỸ THUẬT CẤU TRÚC CON - SIÊU PHẦN TỬ ĐỂ TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA TÀU THUỶ

Việc áp dụng các mô hình PTHH không gian làm cho khối lượng tính toán rất lớn do bài toán trị riêng của ma trận lớn hoặc bài toán giá trị biên kích cỡ lớn. Những năm gần đây đã có các phương pháp để dung hoà bài toán trị riêng lớn. Với các bài toán tĩnh, kỹ thuật cấu trúc con-siêu phần tử rất phù hợp. Các kết quả áp dụng cho bài toán động có thể tìm thấy trong tài liệu chuyên sâu. Hiện nay đã có nhiều kỹ thuật khác để giải quyết bài toán này. Ở đây chỉ đề cập đến một vài chi tiết riêng.

Để giảm số bậc tự do, toàn bộ kết cấu được chia nhỏ thành các cấu trúc con thông qua các đặc điểm kết cấu riêng. Hình 6.15 chỉ ra một ví dụ của một kết cấu mặt. Chúng ta chia các bậc tự do của cấu trúc con thành bậc tự do ngoài (e) và trong (i). Từ đó việc rời rạc hoá PTHH một siêu phần tử s mô tả dưới dạng:

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^{(s)} & \underline{K}_{ie}^{(s)} \\ \underline{K}_{ie}^{(s)T} & \underline{K}_{ee}^{(s)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \underline{M}_{ii}^{(s)} & \underline{M}_{ie}^{(s)} \\ \underline{M}_{ie}^{(s)T} & \underline{M}_{ee}^{(s)} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \underline{a}_i^{(s)} \\ \underline{a}_e^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_i^{(s)} \\ \underline{f}_e^{(s)} \end{bmatrix} \tag{6.54}$$



Hình 6.15. Việc chia một cấu trúc thành các cấu trúc con.

Chúng ta đưa vào một ký hiệu gọi là ma trận độ cứng động lực cho các siêu phần tử:

$$\underline{D}^{(s)} = \underline{K}^{(s)} - \lambda \underline{M}^{(s)} \tag{6.55}$$

Khi đó (6.54) biến đổi về dạng:

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_{ii}^{(s)} & \underline{D}_{ie}^{(s)} \\ \underline{D}_{ie}^{(s)T} & \underline{D}_{ee}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_i^{(s)} \\ \underline{d}_e^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_i^{(s)} \\ \underline{f}_e^{(s)} \end{bmatrix} \tag{6.56}$$

Từ đó cho phép khử $\underline{d}_i^{(s)}$ và ta có: $\underline{\bar{D}}^{(s)} \underline{d}_e^{(s)} = \underline{f}_e^{(s)} - \underline{D}_{ie}^{(s)} \underline{D}_{ii}^{(s)-1} \underline{f}_i^{(s)}$ (6.57)

với ma trận độ cứng động lực siêu phần tử: $\underline{\bar{D}}^{(s)} = \underline{D}_{ee}^{(s)} - \underline{D}_{ie}^{(s)T} \underline{D}_{ii}^{(s)-1} \underline{D}_{ie}^{(s)}$ (6.58)

Hệ thức này gồm cả hệ số tỷ lệ với tần số λ.

Tại các dao động cưỡng bức, ta đã biết rằng, việc kết nối phù hợp có thể thực hiện được thông qua dạng đã cho. Ma trận siêu phần tử động lực này được nhập vào ma trận của toàn bộ hệ nhờ việc xét đến kết cấu.

Ta giới hạn việc khảo sát trong phạm vi bài toán trị riêng. Từ (6.57) dẫn đến:

$$\underline{\bar{D}}^{(s)} \underline{d}_e^{(s)} = 0 \tag{6.59}$$

Trong các ma trận siêu phần tử động lực các trị riêng chưa biết. Với phép gần đúng bậc k phù hợp của $\lambda_l^{(k)}$ của hệ ta có các gần đúng tương ứng của $\underline{\bar{D}}^{(s)}$. Ma trận siêu phần tử động lực dẫn đến từ (6.55):

$$\underline{\bar{M}}^{(s)}(\lambda_l^{(k)}) = -\frac{\partial \underline{\bar{D}}(\lambda_l^{(k)})}{\partial \lambda_l^{(k)}} = \underline{M}_{ee}^{(s)} + \underline{D}_{ie}^{(s)T} \underline{D}_{ii}^{(s)-1} \underline{M}_{ie}^{(s)T} + \underline{M}_{ie}^{(s)T} \underline{D}_{ii}^{(s)-1} \underline{D}_{ie}^{(s)} + \\ + \underline{D}_{ie}^{(s)T} \underline{D}_{ii}^{(s)-1} \underline{M}_{ii}^{(s)} \underline{D}_{ii}^{(s)-1} \underline{D}_{ie}^{(s)} \tag{6.60}$$

Sau khi kết hợp toàn bộ các ma trận siêu phần tử thành một hệ chung, dẫn đến bài toán trị riêng:

$$\left[\underline{\bar{D}}(\lambda_l^{(k)}) - \lambda_l^{(k+1)}\underline{\bar{M}}^*(\lambda_l^{(k)})\right]\underline{d}_c^* = 0 \tag{6.61}$$

với nghiệm chính xác hơn $\lambda_l^{(kH)}$. Phương pháp lặp sử dụng ở đây rất rắc rối và ít có ý nghĩa thực tế. Một loạt các lời giải gần đúng đã được đưa ra. Ở đây ta đề cập tới một phương pháp gọi là "làm cân bằng tĩnh".

Ta viết bài toán trị riêng:

$$\left(\underline{K} - \lambda\underline{M}\right)\underline{d} = 0 \tag{6.62}$$

với: $\underline{K}_{cc} = \sum_{(s)} \underline{K}_{cc}^{(s)}$; $\underline{M}_{cc} = \sum_{(s)} \underline{M}_{cc}^{(s)}$

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^{(a)} & \cdots & & \underline{K}_{ic}^{(a)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \underline{K}_{ii}^{(n)} & \underline{K}_{ic}^{(n)} \\ \underline{K}_{ic}^{(a)T} & \cdots & \underline{K}_{ic}^{(n)T} & \underline{K}_{cc} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \underline{M}_{ii}^{(a)} & \cdots & & \underline{M}_{ic}^{(a)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \underline{M}_{ii}^{(n)} & \underline{M}_{ic}^{(n)} \\ \underline{M}_{ic}^{(a)T} & \cdots & \underline{M}_{ic}^{(n)T} & \underline{M}_{cc} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \underline{d}_i^{(a)} \\ \vdots \\ \underline{d}_i^{(n)} \\ \underline{d}_c \end{bmatrix} = 0 \tag{6.63}$$

Với một siêu phần tử s:

$$\underline{K}_{ii}^{(s)}\underline{d}_i^{(s)} + \underline{K}_{ic}^{(s)}\underline{d}_c - \lambda\left(\underline{M}_{ii}^{(s)}\underline{d}_i^{(s)} + \underline{M}_{ic}^{(s)}\underline{d}_c\right) = 0$$

từ đó:

$$\begin{aligned} \underline{d}_i^{(s)} &= -\left(\underline{K}_{ii}^{(s)} - \lambda\underline{M}_{ii}^{(s)}\right)^{-1}\left(\underline{K}_{ic}^{(s)} - \lambda\underline{M}_{ic}^{(s)}\right)\underline{d}_c \\ &= -\left[\underline{I} - \lambda\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{M}_{ii}^{(s)}\right]^{-1}\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\left[\underline{K}_{ic}^{(s)} - \lambda\underline{M}_{ic}^{(s)}\right]\underline{d}_c \end{aligned} \tag{6.64}$$

ta khai triển gần đúng hệ thức trong dấu ngoặc của (6.64) dưới dạng chuỗi:

$$\left[\underline{I} - \lambda\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{M}_{ii}^{(s)}\right]^{-1} = \underline{I} + \lambda\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{M}_{ii}^{(s)} + \left[\lambda\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{M}_{ii}^{(s)}\right]^2 + \ldots \tag{6.65}$$

và chỉ giữ lại số hạng đầu tiên. Khi đó ta có quan hệ tĩnh giữa các bậc tự do trong và ngoài:

$$\underline{d}_i^{(s)} = -\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{K}_{ic}^{(s)}\underline{d}_c \tag{6.66}$$

Nếu ta xét tới việc kết nối các khối lượng, khi đó:

$$\underline{d}_i^{(s)} = -\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\left(\underline{K}_{ic}^{(s)} - \lambda\underline{M}_{ic}^{(s)}\right)\underline{d}_c \tag{6.67}$$

và ta có bài toán trị riêng phi tuyến.

Tuỳ theo số lượng của các số hạng trong chuỗi (6.65) ta có bài toán trị riêng với bậc bất kỳ.

Với phương pháp này ta có các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng siêu phần tử:

$$\underline{\bar{K}}^{(s)} = \underline{K}_{cc}^{(s)} - \underline{K}_{ic}^{(s)T}\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{K}_{ic}^{(s)}$$

$$\underline{\bar{M}}^{(s)} = \underline{M}_{cc}^{(s)} + \left(\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{K}_{ic}^{(s)}\right)^{T} M_{ii}^{(s)}\left(\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{K}_{ic}^{(s)}\right) - \tag{6.68}$$

$$- \underline{M}_{ic}^{(s)T}\left(\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{K}_{ic}^{(s)}\right) - \left(\underline{K}_{ii}^{(s)-1}\underline{K}_{ic}^{(s)}\right)^{-1}\underline{M}_{ic}^{(s)}$$

Việc mô tả các đặc điểm khác ta có thể tìm thấy trong các tài liệu chuyên sâu.

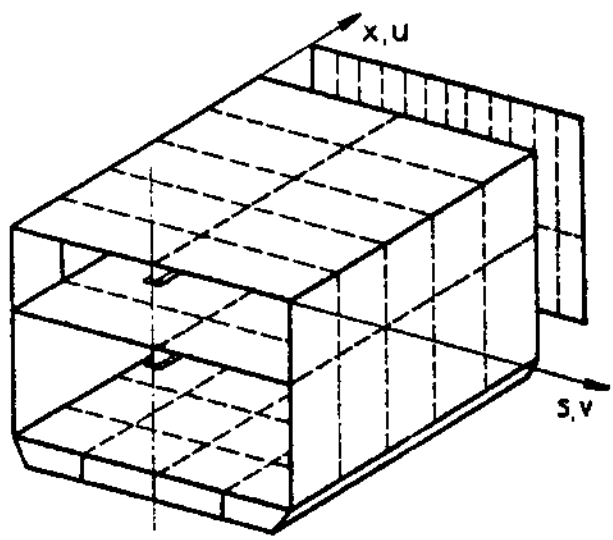
6.7. TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CỦA THÂN TÀU TRÊN CƠ SỞ ÁP DỤNG CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN KHÔNG GIAN

Một khả năng khác để tính toán là việc áp dụng các phần tử hữu hạn không gian trên cơ sở lý thuyết vỏ nửa mômen mở rộng của Wlasow.

Việc tính toán tĩnh học cho thân tàu có thể tìm thấy trong các tài liệu chuyên sâu

Để tính toán dao động của thân tàu, lý thuyết này cần được mở rộng và các biến dạng ngang hoặc các chuyển động ngang của các phần tử tấm phải được xét đến.

Ý tưởng cơ bản của phương pháp này là ở chỗ, thân tàu được chia thành các phần tử không gian và phẳng, chẳng hạn như hình 6.16. Các phần tử này lại bao gồm các phần tử vách phẳng chịu uốn được nối với nhau. Các phần tử vách có thể được làm cứng theo hai hướng. Ta giả thiết rằng, bán kính cong của tấm theo chiều dọc nhỏ bỏ qua được.



Hình 6.16. Sơ đồ chia thân tàu.

Trục x là theo hướng dọc tàu và s là toạ độ tại mặt cắt. Đối với các chuyển vị ta có:

$$u(x,s)=\sum_{\lambda=1}^{l}U_\lambda(x)\varphi_\lambda(s)=\underline{U}^T(x)\underline{\varphi}(s)$$
$$v(x,s)=\sum_{\mu=1}^{m}V_\mu(x)\psi_\mu(s)=\underline{V}^T(x)\underline{\psi}(s) \qquad (6.69)$$
$$w(x,s)=\sum_{\nu=1}^{n}W_\nu(x)\chi_\nu(s)=\underline{W}^T(x)\underline{\chi}(s)$$

Đồ thị của các chuyển vị theo hướng x được mô tả qua hệ thức:

$$\underline{U}(x)=\underline{G}_u(x)\underline{d}_u$$
$$\underline{V}(x)=\underline{G}_v(x)\underline{d}_v \qquad (6.70)$$
$$\underline{W}(x)=\underline{G}_w(x)\underline{d}_w$$

trong đó:

$$\underline{G}_u=\left[g_1(x)\underline{I}_1 \quad g_2(x)\underline{I}_1 \quad g_3(x)\underline{I}_1 \quad g_4(x)\underline{I}_1\right]$$
$$\underline{G}_v=\left[g_1(x)\underline{I}_2 \quad g_2(x)\underline{I}_2 \quad g_3(x)\underline{I}_2 \quad g_4(x)\underline{I}_2\right] \qquad (6.71)$$
$$\underline{G}_w=\left[g_1(x)\underline{I}_3 \quad g_2(x)\underline{I}_3 \quad g_3(x)\underline{I}_3 \quad g_4(x)\underline{I}_3\right]$$

là các vectơ của các hàm toạ độ với:

$$g_1(x)=1-3x^2/l^2+2x^3/l^3$$
$$g_2(x)=x-2x^2/l+x^3/l^2$$
$$g_3(x)=3x^2/l^2-2x^3/l^3 \qquad (6.72)$$
$$g_4(x)=-x^2/l+x^3/l^2$$

$\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ là các ma trận đơn vị với kích cỡ $l \times l$, $m \times m$ và $n \times n$. Thông qua:

$$\underline{d}_u^T=\left[U_{11} \;\; U_{21}...U_{l1}.....U_{14} \;\; U_{24}...U_{l4}\right]$$
$$\underline{d}_v^T=\left[V_{11} \;\; V_{21}...V_{m1}.....V_{14} \;\; V_{24}...V_{m4}\right] \qquad (6.73)$$
$$\underline{d}_w^T=\left[W_{11} \;\; W_{21}...W_{n1}.....W_{14} \;\; W_{24}...W_{n4}\right]$$

các vectơ chuyển vị của điểm nút được xác định. $\underline{\varphi}$ (s), $\underline{\psi}$ (s), $\underline{\chi}$ (s) là các hàm dạng. Các hàm này được chọn một cách có mục đích sao cho trạng thái chuyển vị được làm gần đúng một cách tốt nhất. Trong hình 6.17 là một sự kết hợp của các hàm dạng như vậy.

Trong đó:

φ_1: chuyển vị dọc trục là hằng số;

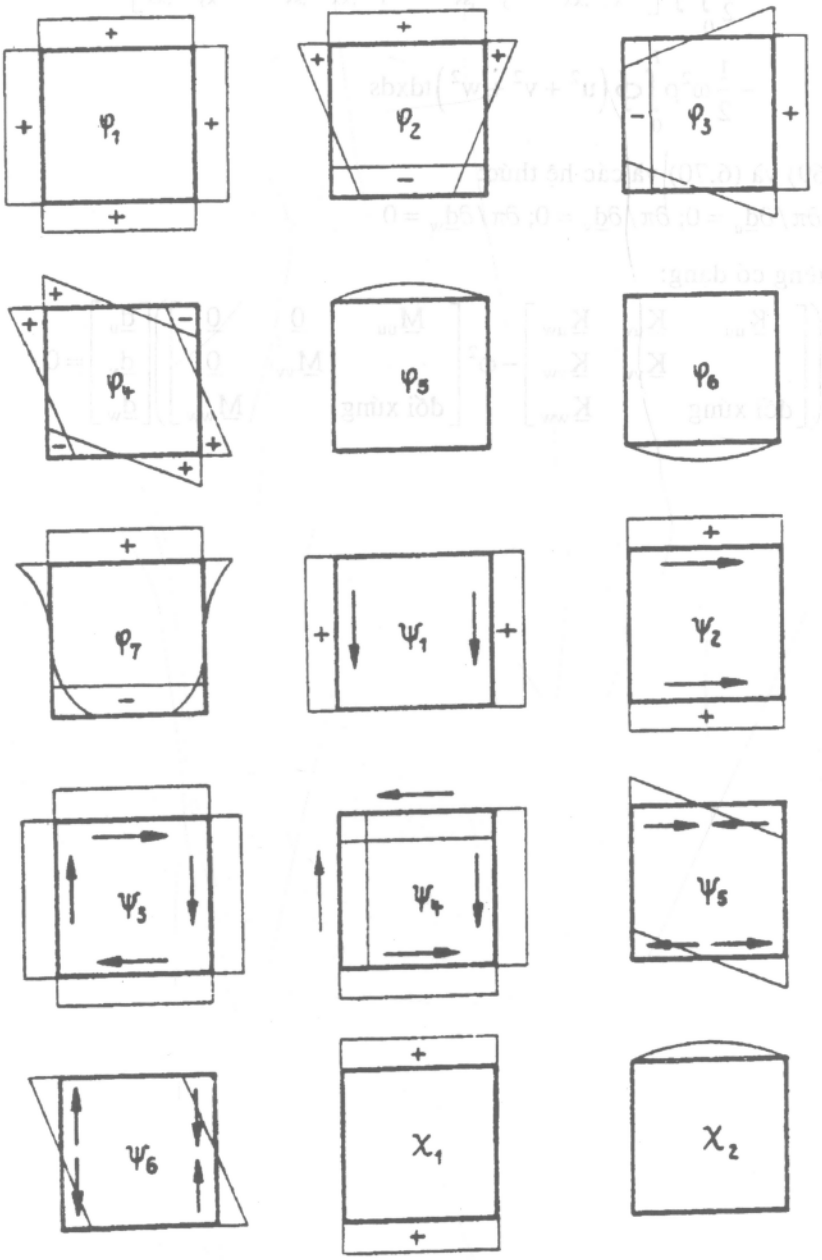
φ_2, φ_3: chuyển vị dọc trục do uốn ngang và thẳng đứng;

φ_4: chuyển vị dọc trục do biến dạng mặt cắt ngang;

φ_5, φ_6, φ_7: chuyển vị dọc trục do các biến dạng trượt trên đáy, boong và sườn;

ψ_i: chuyển vị theo hướng toạ độ bao;

χ_1, χ_2: chuyển vị vuông góc với mặt phẳng đáy và boong.



Hình 6.17

Hàm năng lượng cho các dao động riêng là:

$$\pi = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_0^l \oint \left[(u_{,x}+\nu v_{,s})u_{,x} + (v_{,s}+\nu u_{,x})v_{,s} + \frac{1-\nu}{2}(u_{,s}+v_{,x})\right] t dx ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l \oint \left[D_x w_{,xx}^2 + D_y w_{,ss}^2 + 2D_1 w_{,xx} w_{,ss} + 4D_{xy} w_{,xs}^2\right] dx ds \qquad (6.74)$$

$$-\frac{1}{2}\omega^2 \rho \int_0^l \oint \left(u^2+v^2+w^2\right) t dx ds$$

Từ (6.69) và (6.70) và các hệ thức:

$$\partial\pi/\partial \underline{d}_u = 0;\ \partial\pi/\partial \underline{d}_v = 0;\ \partial\pi/\partial \underline{d}_w = 0$$

bài toán trị riêng có dạng:

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{uv} & \underline{K}_{uw} \\ & \underline{K}_{vv} & \underline{K}_{vw} \\ \text{đối xứng} & & \underline{K}_{ww} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} & \underline{0} \\ \cdot & \underline{M}_{vv} & \underline{0} \\ \text{đối xứng} & & \underline{M}_{ww} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \underline{d}_u \\ \underline{d}_v \\ \underline{d}_w \end{bmatrix} = 0 \qquad (6.75)$$

CHƯƠNG 7
DAO ĐỘNG CỦA CÁC THIẾT BỊ MÁY

Các dao động phức hợp cũng gặp phải trong các thiết bị máy móc của tàu thuỷ. Trước hết phải kể đến các dao động xoắn - uốn - dọc của trục chân vịt. Ba loại dao động này kết nối với nhau thông qua trục khuỷu và chân vịt. Thường thì việc ảnh hưởng lẫn nhau của các dao động này là nhỏ có thể bỏ qua được và vì vậy một loại dao động có thể khảo sát riêng. Quan trọng nhất là dao động xoắn vì dạng này gặp phải tại trục chân vịt với cường độ lớn hơn.

Các máy và thiết bị thực hiện các dao động trên nền đàn hồi. Bởi vậy các máy phụ được đặt trên nền đàn hồi nhiều tầng. Cuối cùng, các máy chính và phụ cũng là các vật thể đàn hồi có thể bị kích động và dao động.

7.1. DAO ĐỘNG XOẮN CỦA TRỤC CHÂN VỊT

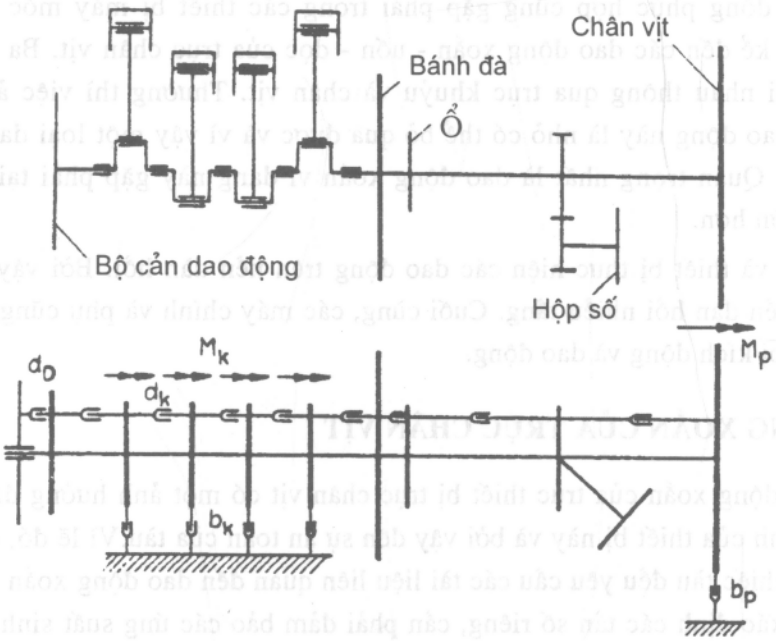
Các dao động xoắn của trục thiết bị trục chân vịt có một ảnh hưởng đáng kể đến độ bền khi vận hành của thiết bị này và bởi vậy đến sự an toàn của tàu.Vì lẽ đó, các tài liệu kỹ thuật cho mỗi chiếc tàu đều yêu cầu các tài liệu liên quan đến dao động xoắn này. Trong đó bên cạnh việc xác định các tần số riêng, cần phải đảm bảo các ứng suất sinh ra do mômen xoắn và dao động phải nhỏ hơn một giá trị cho phép. Bởi vậy, đối với mỗi thiết bị trục phải được tính toán dao động cưỡng bức. Việc tính toán dao động của chân vịt khác rất ít so với việc tính toán dao động của các hệ thống trục khác. Trong phần này chỉ đề cập tới một vài đặc điểm đối với thiết bị trục chân vịt. Đó là bên cạnh các kích động thông qua lực khí thể và lực quán tính của thiết bị phát động còn có các kích động từ chân vịt. Như thế ta phải lưu tâm tới khối lượng thuỷ động và tác động của cản đối với chân vịt.

Trên hình 7.1 là các chi tiết của một trục dẫn chân vịt và mô hình tính toán dao động xoắn.

Thiết bị trục chân vịt bao gồm: các bộ cản dao động xoắn, các phần tử phát động, bánh đà, ổ , trục trung gian, trục đầu ra và cuối cùng là chân vịt. Thường thì còn có một bộ phận truyền động cho động cơ tại trục. Với các động cơ có tốc độ vừa phải còn có một hộp số nối giữa động cơ và trục chân vịt. Nếu có nhiều động cơ cùng nối với một chân vịt sẽ tồn tại các trục dạng rẽ nhánh.

Việc mô hình hoá thiết bị này tuân theo cách thông thường. Tất cả các đoạn trục được thay thế bởi lò xo xoắn không khối lượng. Với các phần tử phát động chuyển động qua lại,

giả thiết một giá trị hằng trung bình cho mômen quán tính xoắn là đủ. Ảnh hưởng của cản được xác định thông qua các hệ số cản trong và cản ngoài. Trong đó cản ngoài được coi như gây ra bởi trục khuỷu và ma sát của ổ và tỷ lệ với vận tốc tuyệt đối. Ở đây cũng cần xét đến các hiệu ứng phi tuyến. Cản trong được tạo ra do cản của vật liệu, tỷ lệ với vận tốc tương đối hoặc do sự không phụ thuộc vào tần số, có thể tỷ lệ với độ lệch tương đối. Các giá trị cản của bộ cản cũng như cản tương đối là tỷ lệ gần đúng với bậc nhất vận tốc.



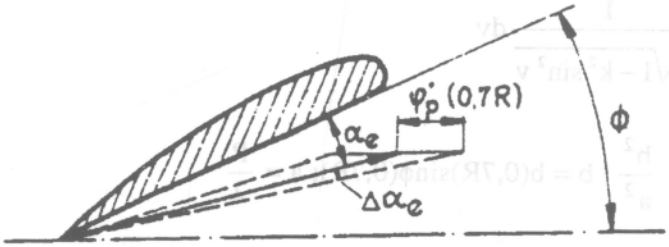
Hình 7.1. Mô hình của một trục dẫn chân vịt.

Như đã mô tả trong đoạn 4.2.1.3 do dao động của mômen xoắn tác động trên chân vịt tạo ra kích động dao động xoắn với tần số i.z.n (i = 1, 2, 3). Trong đó z là số cánh và n là số vòng quay/phút.

Do việc kết hợp của các mômen kích động này, vị trí pha của mômen động cơ phải được quan tâm đến.

Các dạng cản tại chân vịt rất phức tạp. Do độ lệch dao động của chân vịt xuất hiện bổ sung sự thay đổi vận tốc và dẫn đến thay đổi vị trí góc quay. Sự thay đổi góc quay này gây ra các mômen cản luôn ngược hướng với vận tốc góc, hình 7.2 mô tả mối quan hệ này. Tính chất cản gây ra do độ nhớt của chất lỏng cũng ảnh hưởng đến tác dụng của cản. Việc đánh giá cản của chân vịt xuất phát từ hình 7.2 thông qua sự thay đổi của góc định hướng do độ lệch dao động:

$$\Delta\alpha_e = \frac{\phi - \alpha_e}{2\pi n} \cdot \dot{\varphi}_p \qquad (7.1)$$

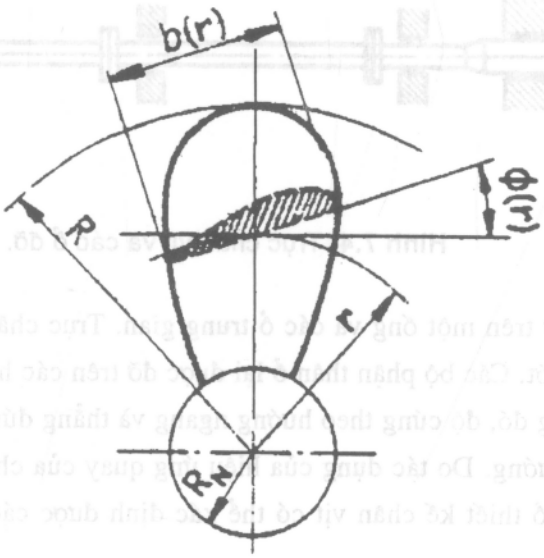


Hình 7.2. Sự thay đổi góc định hướng do dao động xoắn.

Ta coi rằng, mômen xoắn trung bình tỷ lệ với góc định hướng hiệu dụng ở 0,7R, từ (7.1) dẫn đến mômen cản:

$$M_D = M \cdot \frac{\phi - \alpha_e}{\alpha_e} \cdot \frac{\omega}{2\pi n} \cdot \varphi_p \tag{7.2}$$

trong đó: M_D - mômen cản; M - mômen xoắn trung bình; ω - tần số vòng của dao động xoắn; φ_p - độ lệch dao động của chân vịt; α_e - góc định hướng hiệu dụng; ϕ - góc nghiêng của chân vịt; n - số vòng quay.



Hình 7.3. Sơ đồ của chân vịt.

Nhờ sự trợ giúp của lý thuyết dải hai chiều, ta có thể đánh giá được khối lượng thuỷ động lực của chân vịt cho các dao động xoắn. Ta có:

$$m_{HP} = \frac{1}{4} K\rho\pi z \int_{R_N}^{R} b^2 \sin^2 \phi dr \tag{7.3}$$

Hệ số K xét đến ảnh hưởng của luồng không gian. Hệ số này có thể xác định được thông qua việc so sánh với luồng bao của một elip:

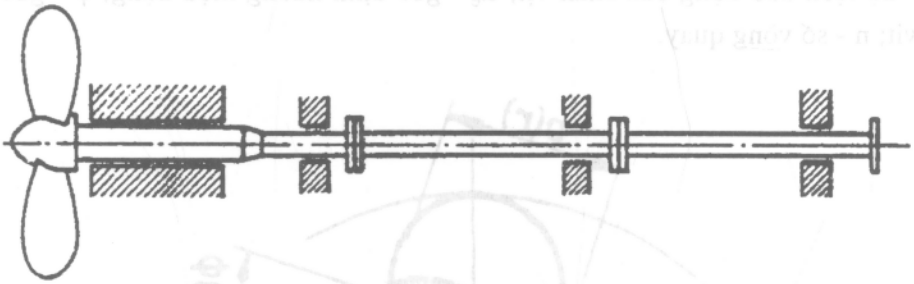
$$K = \frac{1}{\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} dv \qquad (7.4)$$

với: $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$; $b = b(0,7R)\sin\phi(0,7R)$; $a = \frac{R}{2}$

7.2. DAO ĐỘNG UỐN TRONG TRỤC DẪN CHÂN VỊT

7.2.1. Mô hình hoá và xác định tham số

Trong đoạn 4.2.1.1 đã mô tả rằng các lực cắt và mômen uốn tác dụng lên chân vịt biến đổi theo thời gian. Chúng tác dụng lên chân vịt các dao động uốn, các dao động này có thể dẫn tới dao động phía đuôi tàu. Các hư hại của ổ trong ống đỡ cũng phải được xét đến. Hình 7.4 chỉ ra một trục chân vịt và các ổ đỡ.



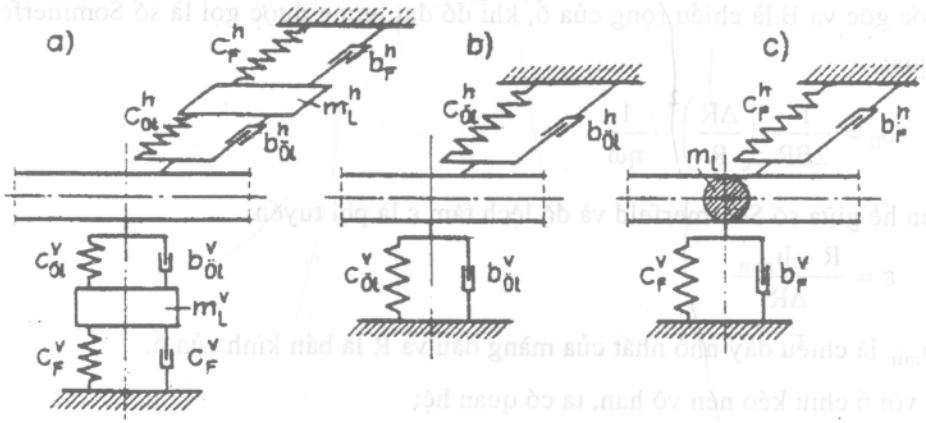
Hình 7.4. Trục chân vịt và các ổ đỡ.

Chân vịt được đỡ trên một ống và các ổ trung gian. Trục chân vịt chuyển động trong một môi trường dầu nhớt. Các bộ phận thân ổ lại được đỡ trên các hệ gối đỡ đàn hồi tại thân tầu cũng đàn hồi. Trong đó, độ cứng theo hướng ngang và thẳng đứng là khác nhau. Bởi vậy đây là ổ không đẳng hướng. Do tác dụng của hiệu ứng quay của chân vịt xuất hiện các dao động uốn. Từ các sơ đồ thiết kế chân vịt có thể xác định được các mô hình tính toán dao động uốn.

Trục được coi như một hệ rời rạc có một khối lượng hoặc coi như dầm Euler – Bernoulli liên tục. Chân vịt được mô hình như một đĩa quay, trong đó khối lượng và mômen quán tính thuỷ động lực cần được lưu ý tới.

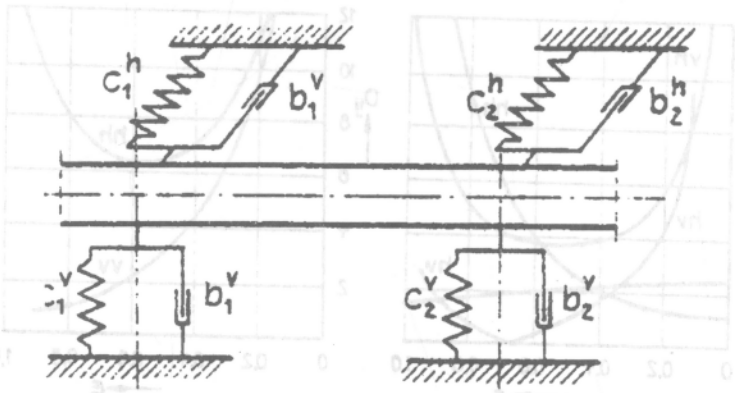
Việc mô hình hoá các gối đỡ phức tạp hơn do có các độ cứng của màng dầu, cản màng dầu, khối lượng của ổ, độ đàn hồi của gối đỡ và cản của ổ theo hai phương phải được xét đến. Hình 7.5 giới thiệu một vài mô hình cho gối đỡ trung gian.

Việc bố trí các phần tử đàn hồi và cản theo phương ngang và thẳng đứng là hợp lý. Trong mô hình tại hình 7.5a, dao động của ổ trong màng dầu tương đối với ổ và ổ dịch chuyển tương đối với nền. Khối lượng của ổ và một phần chân ổ được mô hình hoá thu gọn bởi khối lượng thay thế m_L. Trong trường hợp mô hình 7.5b, trục dao động độc lập trong màng dầu và ổ được coi như cứng tuyệt đối. Mô hình 7.5c chỉ ra trục và ổ dao động tương đối với nền.



Hình 7.5. Mô hình cho gối đỡ trung gian.

Tính đàn hồi và cản của màng dầu có liên quan đến các giá trị đặc trưng của ổ. Các nghiên cứu của Thorbeck đã chỉ ra rằng đối với mô hình trục dẫn chân vịt 7.5b có thể xác định được các giá trị này khá chính xác. Phức tạp hơn là các quan hệ trong ống Steven. Tác động của độ cứng và cản được xác định theo chiều dài ống. Điều này xảy ra thông qua việc bố trí những phần tử đàn hồi và cản dọc theo chiều dài ống. Có nhiều đề nghị cho vấn đề này. Khả năng đơn giản nhất theo hình 7.6 có hai cặp của các phần tử đàn hồi – cản được bố trí.



Hình 7.6. Mô hình cho ống Steven.

Bao giờ cũng xác định được hai cặp giá trị của lò xo - cản theo hai hướng c_i^v, c_i^h, b_i^v, b_i^h, các đại lượng này mô tả ứng xử cản và đàn hồi của ống đủ chính xác. Việc phân bố các phần tử đàn hồi - cản đem lại sự hài hoà tốt hơn với phân bố áp suất thực tế. Trong vấn đề này cần phải xem rằng, phân bố áp suất trong ổ là một hàm của dạng dao động và bởi vậy việc mô hình hoá ống Steven phụ thuộc chặt chẽ vào dạng dao động.

Ký hiệu ΔR là một nửa khe hở của ổ, F là phản lực ổ, η là độ nhớt động lực của dầu, ω là vận tốc góc và B là chiều rộng của ổ, khi đó đại lượng được gọi là số Sommerfeld được xác định qua:

$$S_0 = \frac{F}{2BR} \cdot \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{\eta\omega} \tag{7.5}$$

Quan hệ giữa số Sommerfeld và độ lệch tâm ε là phi tuyến.

ở đây $$\varepsilon = \frac{R - h_{min}}{\Delta R} \tag{7.6}$$

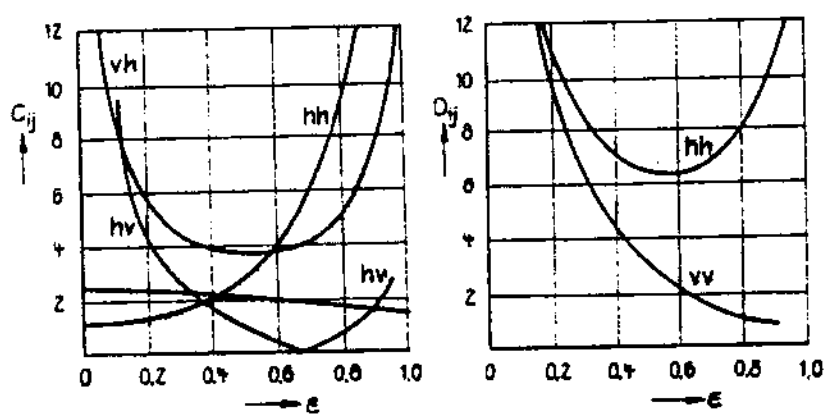
trong đó h_{min} là chiều dày nhỏ nhất của màng dầu và R là bán kính của ổ.

Đối với ổ chịu kéo nén vô hạn, ta có quan hệ:

$$\varepsilon^2 = -\frac{6}{S_0^2} + \sqrt{\frac{36}{S_0^4} + \frac{4}{3}} \tag{7.7}$$

Độ cứng màng dầu và cản màng dầu được biểu diễn qua độ lệch tâm tương đối. Hori đề nghị quan hệ này có dạng đường cong trên hình 7.7. Khi đó độ cứng và cản được xác định như sau:

$$c_{ij} = \frac{F}{\Delta R} \cdot C_{ij}(\varepsilon);\ b_{ij} = \frac{F}{\Delta R} \cdot D_{ij} \tag{7.8}$$



Hình 7.7. Các tham số không thứ nguyên của màng dầu.

Các chỉ số vv, hh, hv ở hình 7.7 đặc trưng cho các tham số màng dầu theo hướng thẳng đứng, ngang, và kết hợp. Tác dụng của hiệu ứng quay gây ra một ảnh hưởng không bỏ qua được với các tần số riêng uốn của trục chân vịt. Trong trường hợp này ta phải phân biệt được các tần số thuận và nghịch, trong đó tần số thuận nằm bên trên tần số nghịch. Các mômen tác dụng lên trục từ hiệu ứng quay được xác định:

$$M_{Py} = -\Theta_a \ddot{\varphi}_y - \Theta_p \Omega \dot{\varphi}_z$$

$$M_{Pz} = -\Theta_a \ddot{\varphi}_x + \Theta_p \Omega \dot{\varphi}_y \qquad (7.9)$$

Đối với trục chân vịt hoạt động thông thường thì ảnh hưởng của hiệu ứng quay là không quá lớn và chỉ làm thay đổi không đáng kể các tần số riêng.

Việc xác định khối lượng thuỷ động cho dao động uốn là một bài toán phức hợp của thuỷ động lực học. Thường thì ta sử dụng các phép gần đúng thô ít hoặc nhiều. Trường hợp đơn giản nhất là các khối lượng này được xác định qua quan hệ với khối lượng chân vịt:

$$M_{PH} \approx (0{,}1 \div 0{,}2) m_p$$

$$\Theta_{PH} \approx (1{,}5 \div 2{,}0)\, \Theta_p \qquad (7.10)$$

Phạm vi của tham số thể hiện sự không chắc chắn của giả thiết. Chính xác hơn là việc áp dụng lý thuyết dải với việc sử dụng hệ số xét tới ảnh hưởng của luồng không gian. Từ đó ta có hệ thức:

$$m_{PH} = \frac{1}{4} K \int_{R_N}^{R} \rho \pi b_p^2 \sin^2 \phi \cos^2 \left(\varphi + \frac{2\pi(z-1)}{z} \right) dr$$

$$= \frac{1}{4} K \rho \pi \frac{z}{2} \int_{R_N}^{R} b_p^2 \sin^2 \phi dr \qquad (7.11a)$$

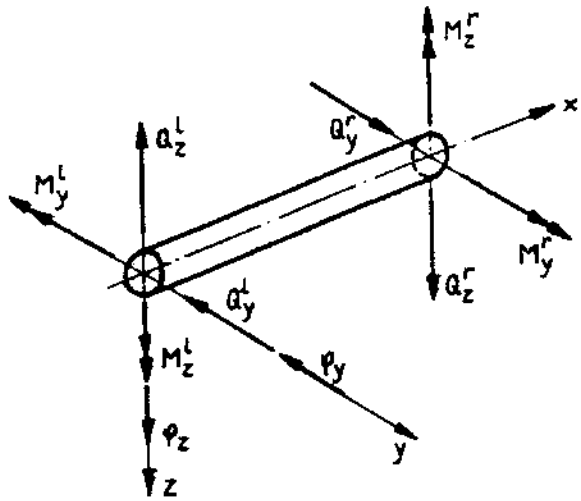
$$\Theta_{PH} = K \rho \pi \frac{z}{8} \int_{R_N}^{R} r^2 b_p^2 \cos \phi dr \qquad (7.11b)$$

Hệ số K được xác định từ (7.4), trong đó:

$$b = \max(b_p \sin\phi); \quad a = \frac{D}{2}$$

7.2.2. Phương pháp giải

Tất cả các phương pháp giải đã được mô tả trong mục 5.1.3.2. Đặc biệt phù hợp là phương pháp ma trận truyền. Sau đây ta quan tâm tới trường hợp các dao động riêng không cản.



Hình 7.8. Xác định dấu ở phần tử dầm.

Với việc xác định dấu theo hình 7.8 và từ vectơ trạng thái:

$$\underline{z}^T = [v \quad \varphi_z \quad M_z \quad Q_y \quad w \quad \varphi_y \quad M_y \quad Q_z]$$

ta có sự truyền một đoạn dầm: $\underline{z}^r = \underline{F}\underline{z}^l$ (7.12)

với ma trận truyền:

$$\underline{F} = \left[\begin{array}{cccc|c} C(l^*) & \frac{1}{\lambda}S(l^*) & \frac{1}{\lambda^2 c_B}c(l^*) & \frac{1}{\lambda^3 c_B}s(l^*) & \\ \lambda s(l^*) & C(l^*) & \frac{1}{\lambda c_B}S(l^*) & \frac{1}{\lambda^2 c_B}c(l^*) & 0 \\ \lambda^2 c_B c(l^*) & \lambda c_B s(l^*) & C(l^*) & \frac{1}{\lambda}S(l^*) & \\ -\lambda^3 c_B S(l^*) & \lambda^2 c_B c(l^*) & -\lambda s(l^*) & C(l^*) & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{0} & \text{như trên} \end{array}\right] \quad (7.13)$$

trong đó sử dụng các ký hiệu:

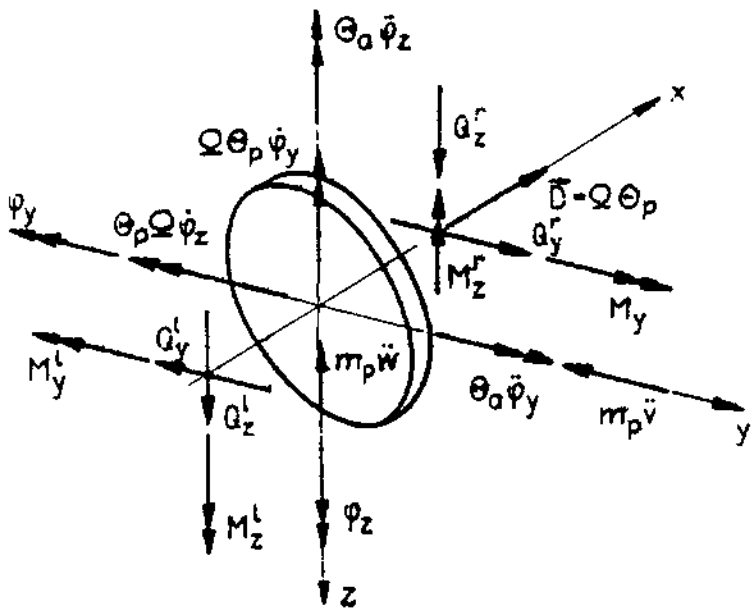
$$\lambda = \frac{\mu\omega^2}{c_B};\ c_B = EI;\ \varphi_y = w_{,x};\ \varphi_z = v_{,x};\ l^* = \lambda l$$

$$C(l^*) = \frac{1}{2}(\cosh l^* + \sin l^*);\ c(l^*) = \frac{1}{2}(\cosh l^* - \cos l^*) \quad (7.14)$$

$$S(l^*) = \frac{1}{2}(\sinh l^* + \sin l^*);\ s(l^*) = \frac{1}{2}(\sinh l^* - \sin l^*)$$

Ma trận truyền cho chân vịt từ hình 7.9:

$$\underline{U}_p'' = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & \Theta_a\omega^2 & 1 & & & -i\Theta_p\Omega\omega & & \\ -m_p\omega^2 & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & i\Theta_p\Omega\omega & & & & \Theta_a\omega^2 & 1 & \\ & & & -m_p\omega^2 & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{7.15}$$



Hình 7.9. Lực và mômen tại chân vịt.

Ma trận truyền cho ổ trung gian:

$$\underline{U}_L'' = \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ C_{hh} & & & 1 & C_{hv} & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ C_{vh} & & & & C_{vv} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

Các tính toán cho phương pháp ma trận truyền tuân theo cách thông thường. Quan hệ giữa cản và kích động gây ra vài khó khăn nhỏ.

Ngoài phương pháp này, phương pháp PTHH cũng có thể sử dụng để tính toán dao động uốn của chân vịt.

7.3. CÁC DAO ĐỘNG DỌC CỦA TRỤC CHÂN VỊT

Việc tính toán dao động dọc của trục chân vịt có sai khác một ít so với tính toán dao động dọc của các trục, ở chỗ là khối lượng thuỷ động phải được xét tới.

Với việc tính toán dao động cưỡng bức, ta phải xác định được các kích động và cản. Khối lượng thuỷ động của chân vịt dao động dọc trục được xác định một cách gần đúng:

$$m_{PHx} = \frac{1}{4} z\rho\pi \int_{R_N}^{R} b^2(r)\cos^2\phi dr \qquad (7.17)$$

7.4. GỐI ĐỠ ĐÀN HỒI CỦA MÁY VÀ CÁC CƠ CẤU KHÁC TRÊN TÀU

Việc bố trí gối đỡ đàn hồi là một phương pháp có hiệu quả để giảm dao động, tiếng ồn và có những ứng dụng rộng rãi trong ngành chế tạo tàu thủy. Các thiết bị phụ trợ thường được đặt trên nền đàn hồi. Trong những trường hợp đặc biệt, thậm chí cả máy chính. Việc giảm dao động đạt được thông qua việc đặt các lò xo giữa máy và nền. Việc xác định gối đỡ đàn hồi trong một số tài liệu đã được mô tả, ở đây chỉ cần thêm một vài chú ý. Trước hết là bên cạnh các kích động từ máy còn phải xét đến các kích động động học từ nền. Tiếp theo là do tàu chuyển động trên sóng nên kích động có dạng ngẫu nhiên. Có khi cùng một nền có lắp nhiều máy, cơ cấu và nền này lại được coi là đàn hồi so với thân tàu. Ví dụ như các thiết bị làm lạnh, thiết bị bơm và hút khí, điều hoà nhiệt độ. Ngay cả các thiết bị động cơ diesel đặt trên nền trung gian mềm không thể mô hình như vật thể cứng tuyệt đối.

CHƯƠNG 8
MỘT SỐ VẤN ĐỀ THỰC TIỄN CỦA DAO ĐỘNG TÀU THUỶ

8.1. NGHIÊN CỨU DAO ĐỘNG THỰC NGHIỆM TẠI TÀU THUỶ

8.1.1 Mục tiêu nghiên cứu

Bên cạnh các phương pháp giải tích tính toán dao động của kết cấu thân tàu và các chi tiết khác trên tàu, việc nghiên cứu bằng thực nghiệm có ý nghĩa rất lớn để:

- Xác định mô hình và các tham số liên quan đến các nghiên cứu lý thuyết
- Xác định và đánh giá mức độ dao động tại những vị trí trên tàu
- Kiểm định các kết quả tính bằng giải tích và các phần mềm
- Nhận dạng và có biện pháp phòng ngừa hư hại.

Các phương pháp, phạm vi và kiểu đánh giá kết quả đo dao động phụ thuộc vào mục tiêu cụ thể.

8.1.2. Các đại lượng đo

Tuỳ theo bài toán mà chúng ta đo dịch chuyển, vận tốc hoặc gia tốc. Có các loại đo đạc đặc biệt cho từng loại này. Nhờ việc nối với các bộ khuếch đại tích phân có thể với việc đo gia tốc thì vận tốc và quãng đường được xác định. Để xác định các tải trọng động lực, các lực và mômen trong những trường hợp xác định có thể sử dụng các đầu đo

Trong đa số các trường hợp, việc đo dao động trên tàu giới hạn trong các dao động dừng bởi vì các kích động gặp phải, trừ sóng biển, có đặc tính dừng. Nếu các đường cong theo thời gian đo được bao giờ cũng chứa một tập hợp các dao động có tần số cơ sở thì cho phép ta phân tích hàm là đại lượng đo được dưới dạng chuỗi Fourier:

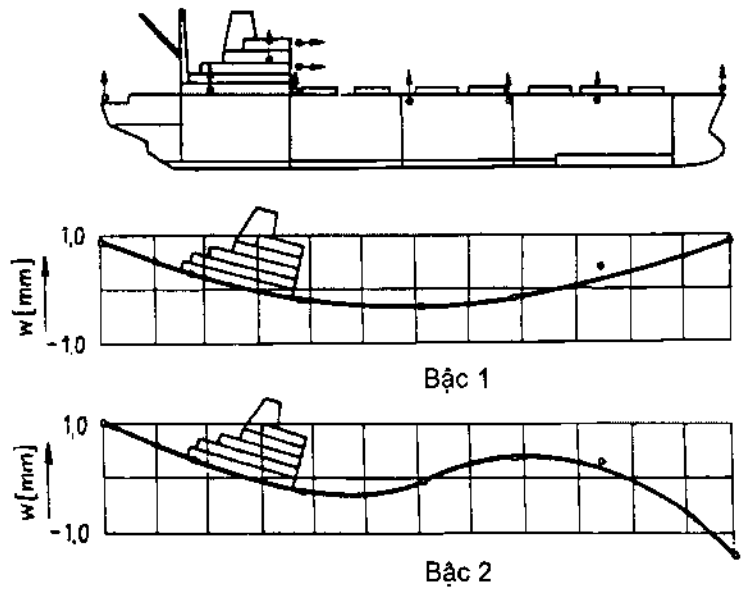
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin k\omega_0 t + b_k \cos k\omega_0 t)$$

Trong đó tần số cơ sở ω_0 có quan hệ với chu kỳ T: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

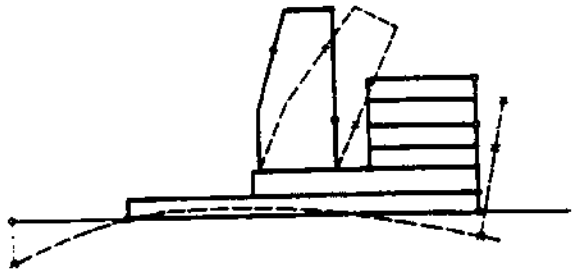
Nếu tín hiệu đo có chứa các tích phân tần số không phải là số nguyên lần tần số cơ sở, ví dụ tại cơ cấu hộp số có tỷ số truyền không phải là số nguyên thì tích phân Fourier là cần thiết cho việc phân tích. Việc áp dụng thuật toán nhanh cho biến đổi Fourier là đặc biệt phù hợp. Bởi vì phương pháp này xác định được các hàm khác nhau của tín hiệu nên được áp dụng rộng rãi cho việc phân tích tín hiệu dao động nói chung.

8.1.3. Xác định mô hình và xác định tham số bằng đo đạc

Việc tính toán dao động của cấu trúc, kết cấu tàu thuỷ, các mô hình tính và các tham số của nó thường được xác định thông qua các giả thiết để đơn giản hoá bài toán. Vì vậy chúng phải được kiểm nghiệm qua thực nghiệm. Để làm điều đó, các dao động được đo tại các vị trí khác nhau trong khoảng tần số quan tâm. Việc đo đạc được thực hiện trong quá trình mở máy hoặc sử dụng các bộ kích động chuyên dụng. Vài ví dụ về việc bố trí các điểm đo được mô tả trên hình 8.1 ÷ 8.3.



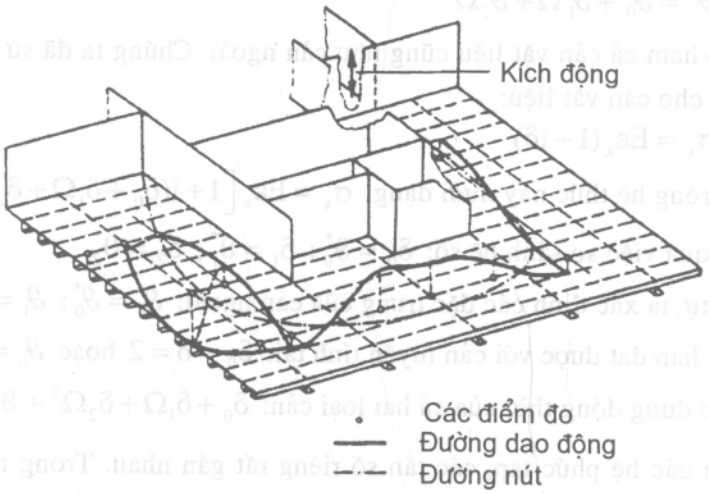
Hình 8.1



Hình 8.2

Hình 8.1 mô tả việc bố trí điểm đo để xác định các dao động thẳng đứng của thân tàu và các dao động ngang của các chi tiết trên boong. Hình 8.2 minh hoạ các điểm đo và một dạng dao động đo được cho các dao động của các kết cấu trên boong tàu.

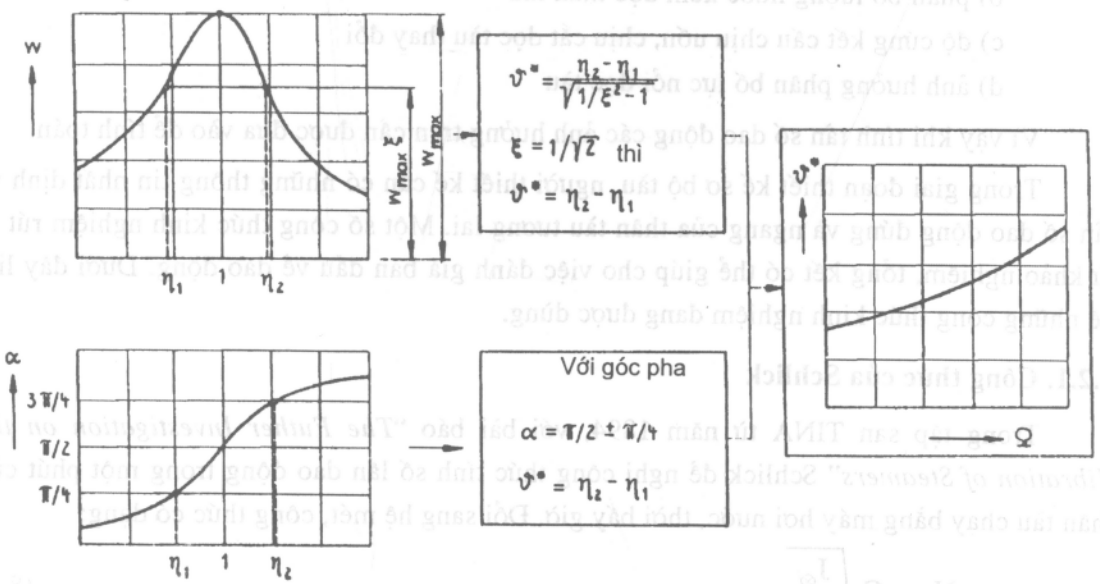
Hình 8.3 chỉ ra các vị trí đo và một dạng dao động của dao động cục bộ của tấm boong.



Hình 8.3

Mỗi cơ hệ thường có một phổ tần số riêng đặc trưng tương ứng với các dạng riêng. Bởi vậy để xây dựng các dạng dao động cần phải sử dụng khá nhiều vị trí đo, đặc biệt tại các dạng dao động riêng bậc cao.

Từ đường đáp ứng tần số và pha cho phép ta xác định được các thông tin về cản. Giống như hệ dao động một bậc tự do độ cản ϑ^* có thể được xác định thông qua thuật toán mô tả trên hình 8.4. Ta có thể khai triển ϑ^* dưới dạng chuỗi.



Hình 8.4

$$\vartheta^* = \vartheta_0^* + \vartheta_1^*\Omega + \vartheta_2^*\Omega^2$$

ϑ^* bao hàm cả cản vật liệu cũng như cản ngoài. Chúng ta đã sử dụng trong chương 4, 5 các hệ thức cho cản vật liệu:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x(1 + i\delta)$$

Ta mở rộng hệ thức này dưới dạng: $\sigma_x = E\varepsilon_x\left[1 + i(\delta_0 + \delta_1\Omega + \delta_2\Omega^2)\right]$

Thông qua việc so sánh hệ số: $\delta_0 = \vartheta_0^*$; $\delta_1 = \vartheta_1^*$; $\delta_2 = \vartheta_2^*$

Tương tự, ta xác định các đặc trưng của cản ngoài: $\vartheta_0 = \vartheta_0^*$; $\vartheta_1 = \vartheta_1^*$; $\vartheta_2 = \vartheta_2^*$

Cản tới hạn đạt được với cản tuyến tính tại: $\delta_0 = \delta = 2$ hoặc $\vartheta_0 = 2$

hoặc là tại tác dụng đồng thời của cả hai loại cản: $\delta_0 + \delta_1\Omega + \delta_2\Omega^2 + \vartheta = 2$

Đối với các hệ phức tạp, các tần số riêng rất gần nhau. Trong những trường hợp như vậy việc xác định các tham số cản thường không chính xác. Bởi vậy các kết quả được xác định trên đường cong đáp ứng tần số thường dễ bị nhầm lẫn nhất là ở vùng cộng hưởng. Với việc này người ta thường sử dụng các phương pháp phân tích tiếp

8.2. CÁC CÔNG THỨC KINH NGHIỆM XÁC ĐỊNH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA THÂN TÀU

Tần số dao động và biên độ dao động đứng và ngang của thân tàu nằm trên nước phụ thuộc vào các yếu tố:

a) phân bố khối lượng tàu dọc thân tàu

b) phân bố lượng nước kèm dọc thân tàu

c) độ cứng kết cấu chịu uốn, chịu cắt dọc tàu thay đổi

d) ảnh hưởng phân bố lực nổi dọc tàu

Vì vậy khi tính tần số dao động các ảnh hưởng trên cần được đưa vào để tính toán.

Trong giai đoạn thiết kế sơ bộ tàu, người thiết kế cần có những thông tin nhất định về tần số dao động đứng và ngang của thân tàu tương lai. Một số công thức kinh nghiệm rút ra từ khảo nghiệm, tổng kết có thể giúp cho việc đánh giá ban đầu về dao động. Dưới đây liệt kê những công thức kinh nghiệm đang được dùng.

8.2.1. Công thức của Schlick

Trong tập san TINA từ năm 1894, với bài báo "*The Futher Investigation on the Vibration of Steamers*" Schlick đề nghị công thức tính số lần dao động trong một phút của thân tàu chạy bằng máy hơi nước, thời bấy giờ. Đổi sang hệ mét, công thức có dạng:

$$N_v = C\sqrt{\frac{J_\otimes}{\Delta L^3}} \qquad (8.1)$$

trong đó: $J_\otimes$ - mômen quán tính mặt cắt ngang giữa tàu, tính bằng m^4;

Δ - lượng chiếm nước của tàu, tính bằng tấn (t);

L - chiều dài tàu, tính bằng mét (m);

C - hằng số xác định trên cơ sở thống kê, từ 280.10^4 cho tàu biển có hệ số đầy lớn đến $340.\ 10^4$ cho tàu cùng loại song hệ số đầy nhỏ.

8.2.2. Công thức Burrill

Trong tài liệu "*Ship Vibration: Simple Methods of Estimating Critical Frequencies*" Trans.NECI, 1934 - 1935, Burrill đề nghị tính số lần dao động trong một phút N_v theo công thức:

$$N_v = \phi\left[\frac{J}{\Delta L^3(1+B/2T)(1+r_s)}\right]^{1/2} \tag{8.2}$$

trong đó: J - mômen quán tính mặt cắt ngang giữa tàu, thời đó yêu cầu tính bằng ft^4;

Δ - lượng chiếm nước của tàu, tính bằng tấn (1 t = 2240 lb);

L - chiều dài giữa hai trụ, tính bằng ft;

B - chiều rộng tàu, tính bằng ft;

T - chiều chìm tàu, tính bằng ft;

Theo dõi và xử lý kết quả đo từ 25 tàu thật, Burill đưa ra hằng số ϕ là 2400000. Sai số của phép tính 5%.

r_s - hệ số tính đến ảnh hưởng lực cắt, theo Lockwood Taylor, hệ số hiệu chỉnh này là:

$$\frac{3,5D^2\left[3(B/D)^3+9(B/D)^2+6(B/D)\right]}{L^2(3B/D+1)} = 1,2 \tag{8.3}$$

trong đó: D - chiều cao tàu, tính bằng ft;

ϕ - hằng số rút ra từ kinh nghiệm.

Trong công thức Burill biểu thức 1 + (B/2T) thể hiện sự hiệu chỉnh cho lượng nước kèm. Nếu lượng nước kèm tính theo chỉ dẫn của Lockwood Taylor, công thức Burill trở thành:

$$N_v = \phi\left[\frac{J}{(\Delta+\Delta_1)L^3(1+r_s)}\right]^{1/2} \tag{8.4}$$

với: Δ_1 - lượng nước kèm. Trong trường hợp này nhận bằng ϕ = 2100000.

8.2.3. Công thức Todd

Công thức được F. H. Todd xây dựng từ 1935, trên cơ sở quan sát loạt tàu hàng và tàu khách.

$$N_v = C_1\left[\frac{BD_E^3}{\Delta L^3(1+B/3T)}\right]^{1/2} + C_2 \tag{8.5}$$

Trong công thức, D_E có ý nghĩa sau: Với tàu chở dầu và tàu chở hàng khô, thượng tầng ngắn, nó đóng vai trò chiều cao tàu tính đến boong. Với tàu khách, thượng tầng dài, D_E được gọi là chiều cao hữu hiệu và xác định tùy thuộc điều kiện cụ thể. Coi boong trên chùm lên hết chiều dài L_1 là boong cao nhất. Chiều cao từ tấm đáy đến boong ấy, đo tại giữa tàu là D_1. Khi đó:

$$D_E = \left[\sum D_1^2 L_1 / L\right]^{1/2} \tag{8.6}$$

Các hằng số C_1, C_2 được cho trong bảng sau:

	C_1	C_2
Tàu chở dầu	52000	28
Tàu chở hàng	46750	25
Tàu khách	44000	20

Trong hệ thống mét, công thức Todd được chuyển thành:

- với tàu chở dầu:

$$N_v = 94900\sqrt{\frac{BD_E^3}{(1,2 + B/3T)\Delta L^3}} + 28 \tag{8.7}$$

- với tàu chở hàng, tàu khách:

$$N_v = 85300\sqrt{\frac{BD_E^3}{(1,2 + B/3T)\Delta L^3}} + 25 \tag{8.8}$$

Thí dụ 8.1: Áp dụng công thức Burill và Todd tính số lần dao động trong một phút của tàu chở hàng với kích thước sau:

L = 160 m (525ft); B = 23,15 m (76ft); D = 13,6 m (44,5ft); Δ = 16840 t;

Tỷ lệ B/D = 1,71; r_s =0,213; J = 7.246.200 cm^4 (7800 ft^4); T = 24,4 ft

Theo công thức Burrill:

$$N_v = 2400000\sqrt{\frac{7800}{16840 \times 525^3 (1 + 76/48,8) \times 1,213}} = 77$$

Theo Todd:

$$N_v = 46750\sqrt{\frac{76 \times 44,5^3}{16840 \times 525^3 (1 + 76/3 \times 24,4)}} + 25 = 77$$

8.2.4. Công thức Kumai

Trong "*Report of Research Institute for Applied Mechanics*", Vol. 16, 1968, (Nhật Bản) Kumai đề nghị dùng công thức tính N_v như sau:

$$N_v = 3,07.10^6 \sqrt{\frac{I}{\Delta_i L^3}} \tag{8.9}$$

thứ nguyên được dùng: số lần dao động trong một phút.

trong công thức:

I - mômen quán tính mặt cắt ngang giữa tàu, tính bằng m^4;

Δ_i - lượng chiếm nước kèm = $\left(1,2 + \frac{1}{3}\frac{B}{T_m}\right)\Delta$; (8.10)

Δ - lượng chiếm nước, tính bằng tấn;

L - chiều dài giữa hai trụ, tính bằng m;

B - chiều rộng tàu, tính bằng m;

T_m - chiều chìm trung bình của tàu, tính bằng m.

Kết quả tính theo công thức trên đây phù hợp với kết quả tính theo phương pháp phần tử hữu hạn. Bảng so sánh sau trích từ tài liệu của các tác giả Johannessen và Skaar, công bố 1980, nêu rõ độ chính xác của công thức.

TT	Kiểu tàu	Δ, t	CT Kumai	PP PTHH	Sai lệch, %
1	Tàu hàng	15500	2,00	1,62	+23
2	RO - RO	32000	1,46	1,16	+26
3	RO – RO	49000	1,49	1,80	- 7
4	RO – RO	42000	1 ,04	0.94	+10
5	Tàu chở hoá chất	33000	1,00	0,93	+8
6	Tàu chở hàng rời	73000	0,63	0,64	-

Từ kết quả phân tích hồi qui hai tác giả trên xác lập đồ thị biểu diễn quan hệ giữa tần số dao động, áp dụng cho các dao động riêng bậc 2, 3, 4, 5, 6, theo sự thay đổi của kích cỡ tàu thuộc các kiểu tàu dân sự. Đồ thị trên hình 8.5 dùng cho tàu chở hàng nói chung, hiểu theo nghĩa hàng khô, hàng thùng. Đồ thị trình bày tại hình 8.6 dùng cho tàu chở dầu, chở hàng rời.

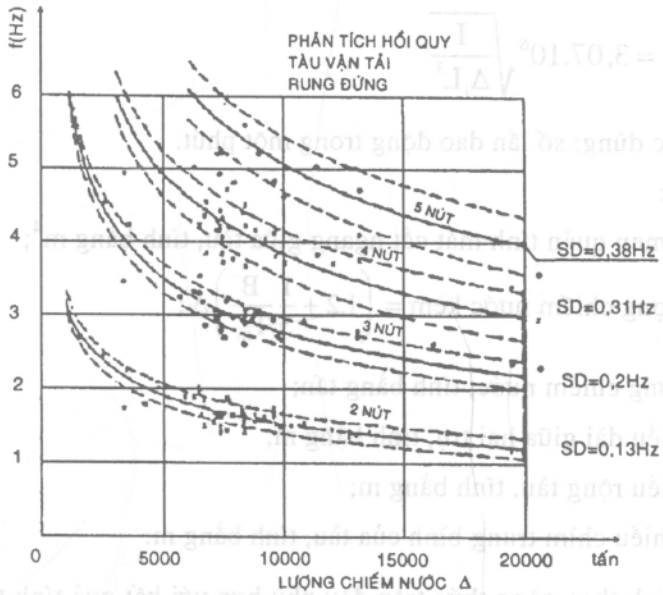
Căn cứ vào công thức Kumai và đồ thị của hai tác giả J - S, có thể viết công thức tính tần số dao động cho các bậc cao hơn nếu có giá trị N_v của bậc 2.

$$N_{n,v} \approx N_v (n-1)^a \tag{8.11}$$

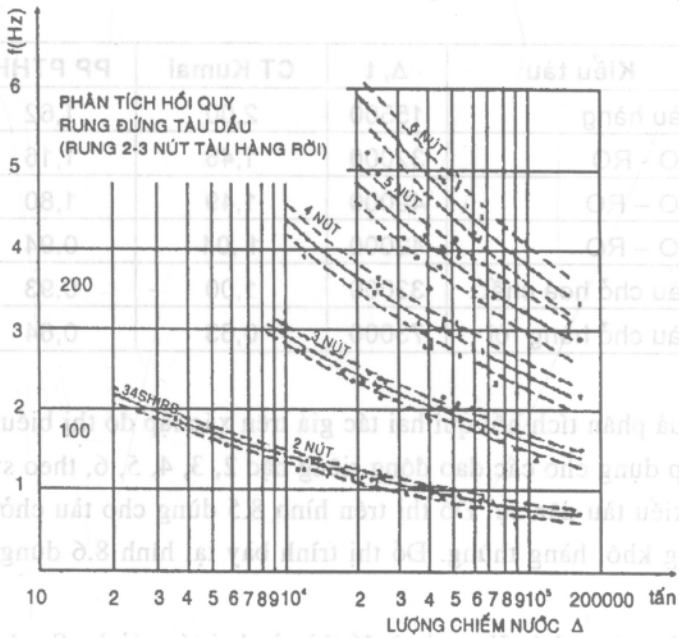
với: a = 0,845 dành cho tàu vận tải nói chung;

a = 1 cho tàu chở hàng rời;

a = 1,02 cho tàu chở dầu.



Hình 8.5



Hình 8.6

8.3. CÁC BIỆN PHÁP NGĂN NGỪA VÀ HẠN CHẾ RUNG TÀU

Xuất phát của các biện pháp chống rung là tìm cách hạn chế các tham số của quá trình rung gồm biên độ, vận tốc, gia tốc. Cả ba đại lượng này đều là hàm của tần số dao động, thay đổi độ lớn theo dạng hình sin.

Ở phần trên, chúng ta đã làm quen biểu thức xác định biên độ rung của hệ thống một bậc tự do. Mô hình tính của chúng ta tiến hành theo cách thông thường, tìm cách chuyển kết cấu thực tế về dầm hoặc hệ dầm tương đương, hệ tấm tương đương. Dao động của hệ tương đương vừa lập dưới dạng kết cấu liên tục, gần với dao động hệ một bậc tự do.

Dưới tác động lực gây rung biên độ F, tần số ω, công thức vừa đề cập có thể viết lại dưới dạng.

$$x(t) = \frac{F/K}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2n\omega}{p}\right)^2}}\cos(\omega t - \alpha) = X\cos(\omega t - \alpha) \qquad (8.12)$$

ở đây tần số riêng và hệ số cản tính theo:

$$p = \sqrt{\frac{K}{M}}\ ;\ n = \frac{D}{2Mp} \qquad (8.13)$$

trong công thức này: M - khối lượng; K - độ cứng; D - lực cản của hệ thống.

Từ công thức có thể đề ra các nguyên tắc chung làm giảm tác động rung tàu:

1) Tìm cách giảm biên độ lực F gây rung. Với hệ thống lực gây rung từ phía chân vịt tàu chúng ta có thể thay đổi các đặc tính thủy lực của chân vịt nhằm giảm biên độ lực gây rung. Một trong các biện pháp được sử dụng là tăng khe hở giữa đầu cánh với vỏ tàu nhằm giảm độ không điều hòa dòng chảy trong vùng, thay đổi các đường dòng do hệ số dòng theo nhiễu loạn. Trong nhiều trường hợp cần thiết thay đổi thiết kế chân vịt nhằm làm giảm lực kích động.

2) Tăng độ cứng K, trong nhiều trường hợp tăng độ cứng K thân tàu sẽ góp phần làm nhỏ quan hệ F/K ở tử số của công thức (8.12). Thực tế cho thấy K có thể tăng nếu kéo theo thay đổi p và trong trường hợp này nguy hại do thay đổi p lớn hơn nếu so với điều lợi do tăng K. Biện pháp tăng cứng kết cấu luôn được cân nhắc, tính toán trước khi thực hiện.

3) Tránh làm việc trong phạm vi cộng hưởng của rung thân tàu, có nghĩa tránh tình trạng ω gần quá với p. Theo hướng này cần chọn máy chính, hộp số thỏa đáng để tần suất quay máy chính, tần suất quay chân vịt không gần tần số dao động riêng của tàu ở các bậc đầu tiên, trong đó cần quan tâm đầy đủ đến dao động riêng thứ nhất. Chọn lựa số cánh chân vịt phù hợp với chế độ làm việc của chân vịt và máy chính góp phần thay đổi tần số quay của hệ thống.

4) Tăng hệ số cản n trong điều kiện có thể. Thông thường với kết cấu tàu thực tế, hệ số cản rất nhỏ, n << 1. Trường hợp gần với tần số cộng hưởng, theo (8.12) biên độ rung tính theo thức gần đúng X = (F/K) /2n, phụ thuộc vào độ lớn n. Tuy nhiên trong thực tế, với thân tàu đã được chế tạo người ta không còn có cơ hội để thay đổi hệ số cản.

5) Áp dụng những kết cấu hợp lý, có tác dụng giảm rung tàu.Vật liệu sử dụng trong kết cấu bệ máy nên chọn theo xu hướng vật liệu giảm chấn. Trong những trường hợp có thể, trên một số tàu cụ thể có thể áp dụng các cơ cấu giảm chấn cho bệ máy tàu nhằm hạn chế rung.

8.4. GIỚI HẠN RUNG ĐỘNG ÁP DỤNG CHO TÀU THUỶ

Rung động trên tàu được thể hiện qua bốn đại lượng chính: biên độ dao động của chuyển vị S, biên độ vận tốc, biên độ gia tốc và tần số dao động, được hiểu theo dạng tần số góc ω, đơn vị đo 1/s, hoặc tần số kỹ thuật $f = \omega/2\pi$ đo bằng số lần dao động trong một đơn vị thời gian, ví dụ số lần trong một giây, tính bằng hertz. Quan hệ giữa tần số f và chu kỳ T là: $f = 1/T$.

Giữa các đại lượng vừa nêu có mối quan hệ ràng buộc sau:

Vận tốc: $v = S.\omega$

Gia tốc: $a = S.\omega^2$

Từ kết quả thống kê, có thể thấy giới hạn cho các đại lượng trên nên nằm trong phạm vi hạn chế:

$S \leq 1 \div 1\ 5$ mm

$a \leq 1000 \div 1500$ mm/s^2

Công thức kinh nghiệm xác định giới hạn của S, tính bằng mm, áp dụng cho khu vực chở khách, khu sinh hoạt trên tàu:

$$S = \frac{1,3}{1+0,04f^2}$$

Tại những vùng mà người ít đi tới, giới hạn trên có thể nâng lên 15 lần.

Biên độ dao động các tấm trên tàu không được vượt quá giới hạn:

$$S = 0,10\left(\frac{b}{100t}\right)^2 t$$

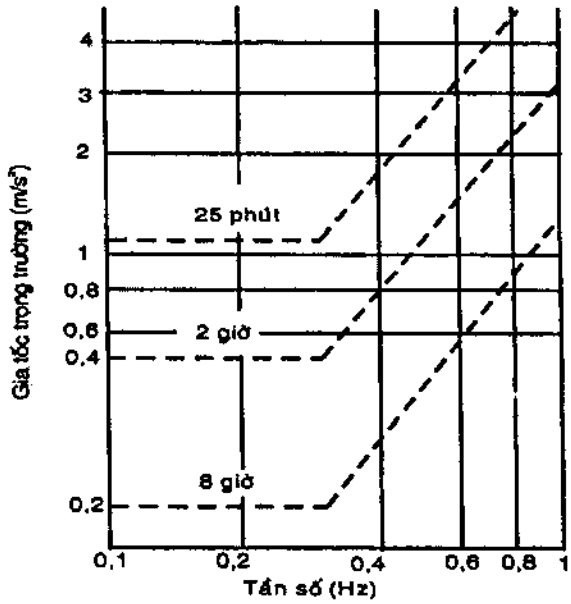
trong đó: b - chiều rộng tấm (cạnh nhỏ hơn); t - chiều dày tấm.

Trong thực tế người ta đã ghi nhận những trường hợp rung quá mức trên tàu thật như sau.

Tàu hàng dài 116 m, lượng chiếm nước 10.900 t, lắp máy chính sáu xi lanh, công suất 2000 kW (2700 Hp), quay tại vòng quay định mức 100 v/ph đã được phát hiện rung quá mức cho phép. Rung đứng trong bậc dao động riêng thứ nhất, biên độ chuyển vị đạt 7 mm tại khu vực đầu và cuối tàu. Gia tốc dao động ghi được 0,7 m/s^2 (0,07 g).

Tàu chở dầu dài 128 m, lượng chiếm nước tương đương tàu kể trước, lắp máy 1000 kW bị rung đáng kể, biên độ chuyển vị 14 mm, gia tốc 1,24 m/s^2. Tàu phải cải tạo lại mới đưa vào sử dụng.

Tàu chở khách dài 106 m, lượng chiếm nước 2240 t, lắp ba máy diesel công suất tổng cộng 3 × 660 kW, vòng quay định mức 750 v/ph, ba chân vịt quay với tần số 350 v/ph, bị rung với biên độ chỉ 0,2 mm song gia tốc đến 4,3 m/s^2 (0,44g) khi tiến. Lúc chạy lùi, biên độ dao động đạt 0,5 mm còn gia tốc vượt quá gia tốc trọng trường, đạt 11 m/s^2 (1,12g). Tàu không thể hoạt động vì hành khách không chịu nổi rung kiểu đó.



Hình 8.7

Nghiên cứu khả năng chịu đựng của con người trên tàu bị rung các nhà nghiên cứu đã đi đến những kết luận giống nhau. Nói chung người ta có khả năng làm việc trong điều kiện gia tốc dao động không quá lớn.

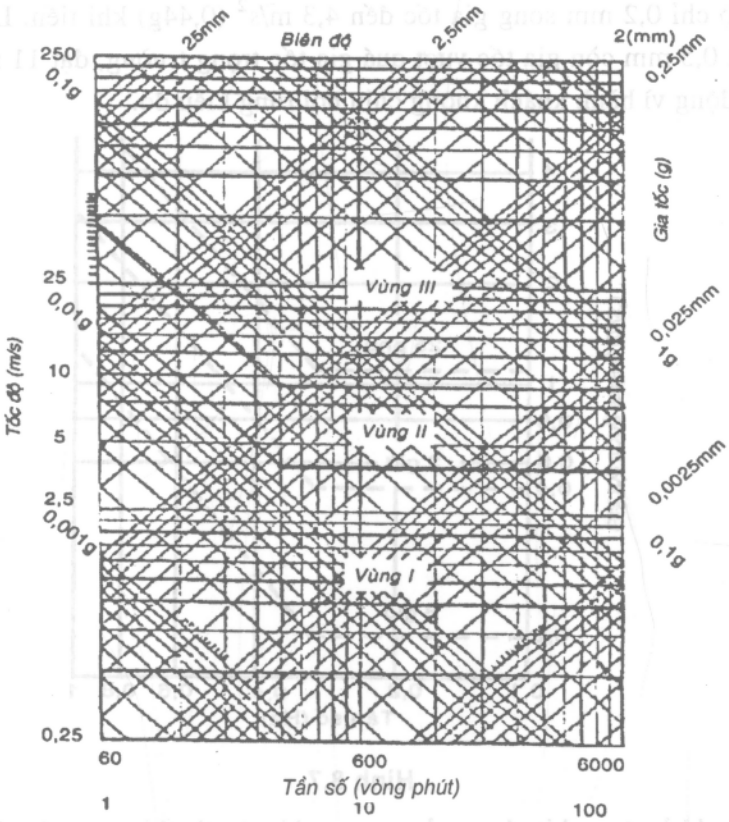
Trong phạm vi f < 0,3 Hz con người làm việc bình thường đến tám giờ đồng hồ nếu gia tốc chưa quá 0,2g với g - gia tốc trọng trường trái đất. Thời gian trên rút xuống còn hai giờ nếu gia tốc tăng đến 0,4g. Khi gia tốc đến lg hoặc hơn, người ta chỉ chịu đựng được không quá vài chục phút.

Trên cơ sở đó nhiều quốc gia đưa ra những tiêu chuẩn tránh rung, đảm bảo sức khỏe cho những người làm việc trên tàu. Một trong những dự thảo nhằm đưa ra tiêu chuẩn tránh rung, đảm bảo sức khỏe cho người làm việc trên tàu, hoạch định tại SNAME 1980, được vẽ lại ở hình 8.8 dưới đây. Trên biểu đồ trình bày trong hệ tọa độ biên độ dao động – tần số người ta chia làm ba vùng miêu tả mức độ cảm nhận khác nhau khi con người chịu rung trên tàu. Ba vùng đó được qui ước như sau:

Vùng I - mức độ rung trong vùng này không gây cảm giác khó chịu.

Vùng II - mức độ rung lớn hơn vùng I, cảm giác khó chịu đã cảm nhận được khi người ta phải làm việc trong vùng này.

Vùng III - mức độ rung lớn hơn các vùng vừa nêu, cảm giác khó chịu của người tăng rõ rệt hơn.

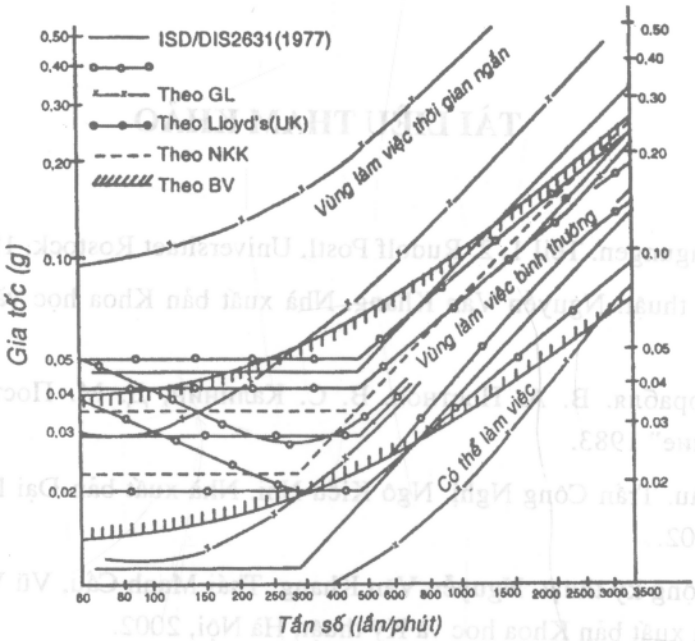


Hình 8.8

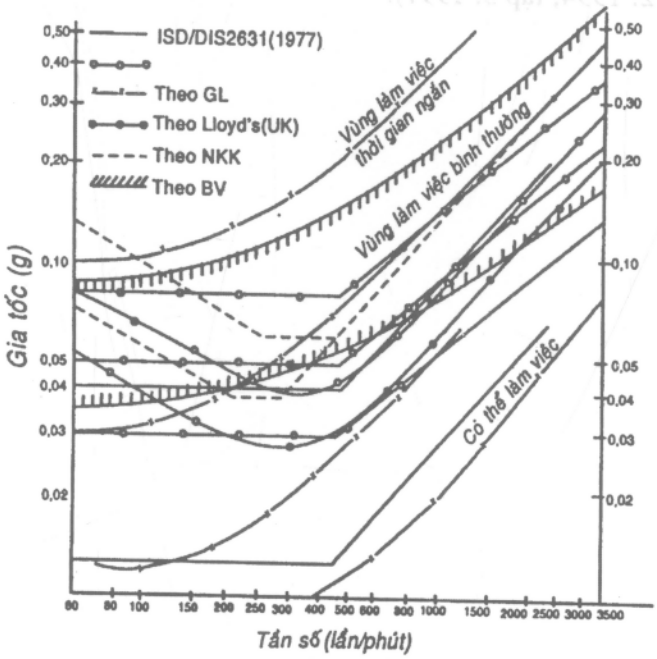
Từ cách chia vùng trên đồ thị chúng ta có thể xác định các tham số xuất hiện trong quá trình rung, có ảnh hưởng đến sức chịu đựng của con người. Ví dụ khi chịu rung với tần số 10 Hz, con người vẫn cảm thấy thoải mái nếu gia tốc không vượt quá 0,012 g, biên độ dao động hết sức nhỏ, chỉ vào hàng vài phần trăm mm. Tuy nhiên tại tần số đó, nếu biên độ tăng đến cỡ vài phần mười mm, tức tăng lên chừng 10 lần, cùng với nó gia tốc cũng tăng lên, sức chịu đựng có hạn của con người không cho phép cầm cự lâu trong trạng thái khó chịu.

Năm 1972 tổ chức tiêu chuẩn quốc tế ISO đề xuất những tiêu chuẩn an toàn, tránh rung. Năm 1974 tiêu chuẩn này được thông qua và các quốc gia được khuyến cáo áp dụng. Theo tiêu chuẩn của ISO, phạm vi làm việc an toàn cho con người được hạn chế trong vùng giới hạn, gia tốc rung không quá 0,05 g nếu tần số nhỏ hơn 60 lần/ph, tại tần số 500 lần/ph gia tốc không được lớn hơn 0,07 g. Tại tần số 3600 lần/phút giới hạn gia tốc có thể đến 0,25 g.

Tiêu chuẩn áp dụng cho dao động đứng ít khắc nghiệt hơn, được trình bày tại hình 8.10. Những yêu cầu tối thiểu của các nhà làm luật tập trung ở chỗ, người làm việc trên tàu phải được sống dễ chịu để có sức làm việc.



Hình 8.9. Tiêu chuẩn ISO rung ngang trên tàu.



Hình 8.10. Tiêu chuẩn ISO rung đứng trên tàu.

Theo cách này hai thông số cơ bản trên tàu bị rung phải nằm trong giới hạn cho phép, đó là tần số dao động và gia tốc. Hai đại lượng này được tính bằng đơn vị lần/ph với tần số và g = 9,81 m/s^2 khi tính gia tốc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Schiffsschwingungen. Teil 1, 2. Rudolf Postl. Universitaet Rostock, 1984
2. Dao động kỹ thuật. Nguyễn Văn Khang. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2001.
3. Вибрация корабля. В. А. Постнов, В. С. Калинин, Д. М. Постовцев. Ленинград "Судостроение" 1983.
4. Rung động tàu. Trần Công Nghị, Ngô Kiều Nhi. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh, 2002.
5. Bài tập dao động kỹ thuật. Nguyễn Văn Khang, Thái Mạnh Cầu, Vũ Văn Khiêm, Nguyễn Nhật Lệ. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2002.
6. Sức bền vật liệu. Lê Quang Minh, Nguyễn Văn Vượng. Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội, (tập 1: 1994; tập 2: 1994; tập 3: 1997).

MỤC LỤC

DAO ĐỘNG TÀU THUỶ

Tác giả: PGS. TS. Vũ Văn Khiêm

Chịu trách nhiệm xuất bản: PGS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập và sửa bài: ThS. NGUYỄN HUY TIẾN
NGỌC LINH – HOÀNG GIANG
Trình bày bìa: HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo - Hà Nội

In 700 cuốn, khổ 19 × 27 cm, tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Quyết định xuất bản số: 539–2006/CXB/55–45/KHKT–.7 /9/2006
In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2006.

206006

Giá: 45.000đ