

**Lâm Thị Ngọc Châu**

**GIÁO TRÌNH**

# **Toán rời rạc**

**Ebook.moet.gov.vn, 2008**

# CHƯƠNG 1 : ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

## 1.1. Tổng quan

- **Mục tiêu của chương 1**

Học xong chương này, sinh viên phải nắm bắt được các vấn đề sau:

- Thế nào là mệnh đề, chân trị của mệnh đề, các phép toán mệnh đề.
- Thực hiện được các phép toán mệnh đề.
- Hiểu được các ứng dụng của phép toán logic trong lập trình và trong đời sống hàng ngày.

- **Kiến thức cơ bản cần thiết**

Các kiến thức cơ bản trong chương này bao gồm:

- Kiến thức về phép toán đại số, phép toán hình học cơ bản.
- Có khả năng suy luận.
- Biết lập trình bằng ngôn ngữ Pascal, C

- **Tài liệu tham khảo**

Phạm văn Thiều, Đặng Hữu Thịnh. **Toán rời rạc ứng dụng trong tin học.**

Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội - 1997 (chương 1, trang 6 - 28).

- **Nội dung cốt lõi**

- Định nghĩa mệnh đề, biểu thức mệnh đề.
- Các phép toán
- Ví dụ ứng dụng
- Giới thiệu một số thuật ngữ chuyên dùng
- Tương đương logic và cách chứng minh.

## 1.2. Định nghĩa mệnh đề

Mỗi câu phát biểu là đúng hay là sai được gọi là một mệnh đề.

(Definition proposition: Any statement that is either true or false is called a proposition.)

Ví dụ 1: Các câu xác định dưới đây là một mệnh đề

- .  $2 + 3 = 5$
- .  $3 * 4 = 10$
- . Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau
- . Washington D.C. là thủ đô của Hoa Kỳ
- . Toronto là thủ đô của Canada

Câu xác định " $2 + 3 = 5$ ", "Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau" và "Washington D.C. là thủ đô của Hoa Kỳ" là các mệnh đề đúng. Còn các câu xác định " $3 * 4 = 10$ " và "Toronto là thủ đô của Canada" là các mệnh đề sai.

Như vậy, một mệnh đề có thể là mệnh đề đúng hoặc mệnh đề sai. Hay nói cách khác, một mệnh đề chỉ có thể lựa chọn 1 trong 2 giá trị là đúng hoặc là sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ 2: Xét các câu phát biểu sau

- . Hôm nay là thứ mấy ?
- . Một số thực âm không phải là số chính phương
- . Hãy đọc kỹ đoạn này
- .  $x + 1 = 2$
- .  $x + y = z$

Câu "Hôm nay là thứ mấy ?" không là mệnh đề vì nó chỉ là một câu hỏi không có giá trị đúng, sai. Câu "Một số âm không phải là số chính phương" có chân trị là đúng nếu xét trên tập hợp số thực  $R$  nhưng lại có chân trị sai khi xét trên tập hợp số phức. Câu " $x+1=2$ " và câu " $x+y=z$ " không phải là mệnh đề vì chúng chẳng đúng cũng chẳng sai bởi các biến trong những câu đó chưa được gán cho một giá trị cụ thể nào.

Giá trị đúng, sai của một mệnh đề được gọi là chân trị của mệnh đề đó. Chân trị của mệnh đề đúng ký hiệu là T (true), chân trị của mệnh đề sai ký hiệu là F (false).

Bảng chân trị của mệnh đề bao gồm các trường hợp đúng, sai có thể xảy ra của mệnh đề đó.

Mục đích của các hoạt động khoa học là phân biệt các mệnh đề để xác định chân trị của nó. Sự xác định chân trị này dựa vào thực nghiệm và lý luận. Lý luận ở đây là xác định chân trị của mệnh đề bằng cách kết hợp các mệnh đề mà ta đã biết

chân trị. Các luật lệ chế ngự cách kết hợp mang tính chính xác của phép toán đại số. Vì thế, chúng ta cần nói đến "Đại số mệnh đề".

### 1.3. Các phép tính mệnh đề

Trong phép tính mệnh đề, người ta không quan tâm đến ý nghĩa của câu phát biểu mà chỉ chú ý đến chân trị của các mệnh đề. Do đó, khi thực hiện các phép toán mệnh đề thông thường người ta không ghi rõ các câu phát biểu mà chỉ ghi ký hiệu. Các chữ cái sẽ được dùng để ký hiệu các mệnh đề. Những chữ cái thường dùng là P, Q, R,.....

Mệnh đề chỉ có một giá trị đơn (luôn đúng hoặc sai) được gọi là mệnh đề nguyên tử ( atomic proposition ). Các mệnh đề không phải là mệnh đề nguyên tử được gọi là mệnh đề phức hợp (compound propositions). Thông thường, tất cả mệnh đề phức hợp là mệnh đề liên kết (có chứa phép tính mệnh đề).

Các phép tính mệnh đề được sử dụng nhằm mục đích kết nối các mệnh đề lại với nhau tạo ra một mệnh đề mới. Các phép toán mệnh đề được trình bày trong chương này bao gồm : phép phủ định, phép hội, phép tuyển, phép XOR, phép kéo theo, phép tương đương.

#### 1.3.1. Phép phủ định (NEGATION)

Cho P là một mệnh đề, câu "không phải là P" là một mệnh đề khác được gọi là phủ định của mệnh đề P. Ký hiệu :  $\neg P$  ( $\bar{P}$  ).

Ví dụ :            P = "  $2 > 0$  "   
                        $\neg P$  = "  $2 \leq 0$  "

Bảng chân trị (truth table)

| p | $\neg p$ |
|---|----------|
| T | F        |
| F | T        |

**Qui tắc:** Nếu P có giá trị là T thì phủ định P có giá trị là F.

### 1.3.2. Phép hội (CONJUNCTION)

Cho hai mệnh đề  $P, Q$ . Câu xác định " $P$  và  $Q$ " là một mệnh đề mới được gọi là hội của 2 mệnh đề  $P$  và  $Q$ . Kí hiệu  $P \wedge Q$ .

Ví dụ : Cho 2 mệnh đề  $P$  và  $Q$  như sau

$P = "2 > 0"$  là mệnh đề đúng

$Q = "2 = 0"$  là mệnh đề sai

$P \wedge Q = "2 > 0 \text{ và } 2 = 0"$  là mệnh đề sai.

Bảng chân trị

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| T | T | T            |
| T | F | F            |
| F | T | F            |
| F | F | F            |

**Qui tắc :** Hội của 2 mệnh đề **chỉ đúng** khi cả hai mệnh đề là đúng. Các trường hợp còn lại là sai.

### 1.3.3. Phép tuyển (DISJUNCTION)

Cho hai mệnh đề  $P, Q$ . Câu xác định " $P$  hay (hoặc)  $Q$ " là một mệnh đề mới được gọi là tuyển của 2 mệnh đề  $P$  và  $Q$ . Kí hiệu  $P \vee Q$ .

Ví dụ : Cho 2 mệnh đề  $P$  và  $Q$  như sau

$P = "2 > 0"$  là mệnh đề đúng

$Q = "2 = 0"$  là mệnh đề sai

$P \vee Q = "2 \geq 0"$  là mệnh đề đúng.

Bảng chân trị

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| T | T | T          |
| T | F | T          |
| F | T | T          |
| F | F | F          |

**Qui tắc :** Tuyến của 2 mệnh đề **chỉ sai** khi cả hai mệnh đề là sai. Các trường hợp còn lại là đúng.

#### 1.3.4. Phép XOR

Cho hai mệnh đề P và Q. Câu xác định "loại trừ P hoặc loại trừ Q", nghĩa là "hoặc là P đúng hoặc Q đúng nhưng không đồng thời cả hai là đúng" là một mệnh đề mới được gọi là P xor Q. Kí hiệu  $P \oplus Q$ .

Bảng chân trị

| p | q | $p \oplus q$ |
|---|---|--------------|
| T | T | F            |
| T | F | T            |
| F | T | T            |
| F | F | F            |

#### 1.3.5. Phép toán trên bit

Các máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một bit có 2 giá trị khả dĩ là 0 và 1. Bit cũng có thể được dùng để biểu diễn chân trị. Thường người ta dùng bit 1 để biểu diễn chân trị đúng và bit 0 để biểu diễn chân trị sai. Các phép toán trên bit trong máy tính là các phép toán logic. Thông tin thường được biểu diễn bằng cách dùng các xâu bit. Ta có định nghĩa xâu bit như sau:

**Định nghĩa :** Một xâu bit (hoặc xâu nhị phân) là dãy có một hoặc nhiều bit. Chiều dài của xâu là số các bit trong xâu đó.

Ví dụ : 101011000 là một xâu bit có chiều dài là 9

Có thể mở rộng các phép toán trên bit tới các xâu bit. Người ta định nghĩa các OR bit, AND bit và XOR bit đối với 2 xâu bit có cùng chiều dài là các xâu có các bit của chúng là calc OR, AND, XOR của các bit tương ứng trong 2 xâu tương ứng. Chúng ta cũng dùng các kí hiệu  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\oplus$  để biểu diễn các phép tính OR bit, AND và XOR tương ứng.

Ví dụ : Tìm OR bit, AND bit và XOR bit đối với 2 xâu sau đây (mỗi xâu được tách thành 2 khối, mỗi khối có 5 bit cho dễ đọc)

|       |       |         |
|-------|-------|---------|
| 01101 | 10110 |         |
| 11000 | 11101 |         |
| <hr/> |       |         |
| 11101 | 11111 | OR bit  |
| 01000 | 10100 | AND bit |
| 10101 | 01011 | XOR bit |

### 1.3.6. Phép kéo theo (IMPLICATION)

Cho P và Q là hai mệnh đề. Câu "Nếu P thì Q" là một mệnh đề mới được gọi là mệnh đề kéo theo của hai mệnh đề P, Q. Kí hiệu  $P \rightarrow Q$ . P được gọi là giả thiết và Q được gọi là kết luận.

Ví dụ : Cho hai mệnh đề P và Q như sau

P = " tam giác T là đều "

Q = " tam giác T có một góc bằng 60° "

Để xét chân trị của mệnh đề  $P \rightarrow Q$ , ta có nhận xét sau :

- Nếu P đúng, nghĩa là tam giác T là đều thì rõ ràng rằng  $P \rightarrow Q$  là đúng.
- Nếu P sai, nghĩa là tam giác T không đều và cũng không là cân thì dù

Q là đúng hay sai thì mệnh đề  $P \rightarrow Q$  vẫn đúng.

Sau đây là bảng chân trị của ví dụ và cũng là bảng chân trị của mệnh đề  $P \rightarrow Q$ .

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| T | T | T                 |
| T | F | F                 |
| F | T | T                 |
| F | F | T                 |

**Qui tắc** : mệnh đề kéo theo **chỉ sai** khi giả thiết đúng và kết luận sai. Các trường hợp khác là đúng.

Từ mệnh đề  $P \rightarrow Q$ , chúng ta có thể tạo ra các mệnh đề kéo theo khác như là mệnh đề  $Q \rightarrow P$  và  $\neg Q \rightarrow \neg P$  được gọi là mệnh đề đảo và mệnh đề phản đảo của mệnh đề  $P \rightarrow Q$ .

Ví dụ : Tìm mệnh đề đảo và phản đảo của mệnh đề sau

" Nếu tôi có nhiều tiền thì tôi mua xe hơi"

Mệnh đề đảo là :

" Nếu tôi mua xe hơi thì tôi có nhiều tiền"

Mệnh đề phản đảo là :

" Nếu tôi không mua xe hơi thì tôi không có nhiều tiền"

### 1.3.7. Phép tương đương (BICONDITIONAL)

Cho P và Q là hai mệnh đề. Câu "P nếu và chỉ nếu Q" là một mệnh đề mới được gọi là P tương đương Q. Kí hiệu  $P \leftrightarrow Q$ . Mệnh đề tương đương là đúng khi P và Q có cùng chân trị.

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Đọc là : P nếu và chỉ nếu Q

P là cần và đủ đối với Q

Nếu P thì Q và ngược lại

Bảng chân trị

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|-----------------------|
| T | T | T                     |
| T | F | F                     |
| F | T | F                     |
| F | F | T                     |

## 1.4. Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES)

Cho P, Q, R,... là các mệnh đề. Nếu các mệnh đề này liên kết với nhau bằng các phép toán thì ta được một biểu thức mệnh đề.

Chú ý : . Một mệnh đề cũng là một biểu thức mệnh đề

. Nếu P là một biểu thức mệnh đề thì  $\neg P$  cũng là biểu thức mệnh đề

Chân trị của biểu thức mệnh đề là kết quả nhận được từ sự kết hợp giữa các phép toán và chân trị của các biến mệnh đề.

Ví  
chân trị của  
mệnh đề  $\neg P$

| P | $\neg P$ | Q | R | $Q \wedge R$ | $\neg P \vee (Q \wedge R)$ |
|---|----------|---|---|--------------|----------------------------|
| T | F        | T | T | T            | T                          |
| T | F        | T | F | F            | F                          |
| T | F        | F | T | F            | F                          |
| T | F        | F | F | F            | F                          |
| F | T        | T | T | T            | T                          |
| F | T        | T | F | F            | T                          |
| F | T        | F | T | F            | T                          |
| F | T        | F | F | F            | T                          |

dụ : Tìm  
biểu thức  
 $\neg P \vee (Q \wedge R)$

Do biểu thức mệnh đề là sự liên kết của nhiều mệnh đề bằng các phép toán nên chúng ta có thể phân tích để biểu diễn các biểu thức mệnh đề này bằng một cây mệnh đề.

Ví dụ : Xét câu phát biểu sau :

"Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy, và cô ta sẽ trở nên giàu có. Nhưng, nếu cô ta không thắng thì cô ta sẽ mất tất cả."

Đây là một biểu thức mệnh đề và phép toán chính là phép hội. Có thể viết lại như sau :

"Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy, và cô ta sẽ trở nên giàu có.

Nhưng,

nếu cô ta không thắng thì cô ta sẽ mất tất cả. "

Cả hai mệnh đề chính trong biểu thức mệnh đề này là mệnh đề phức hợp. Có thể định nghĩa các biến mệnh đề như sau:

P: Michelle thắng trong kỳ thi Olympic

Q: mọi người sẽ khâm phục cô ấy

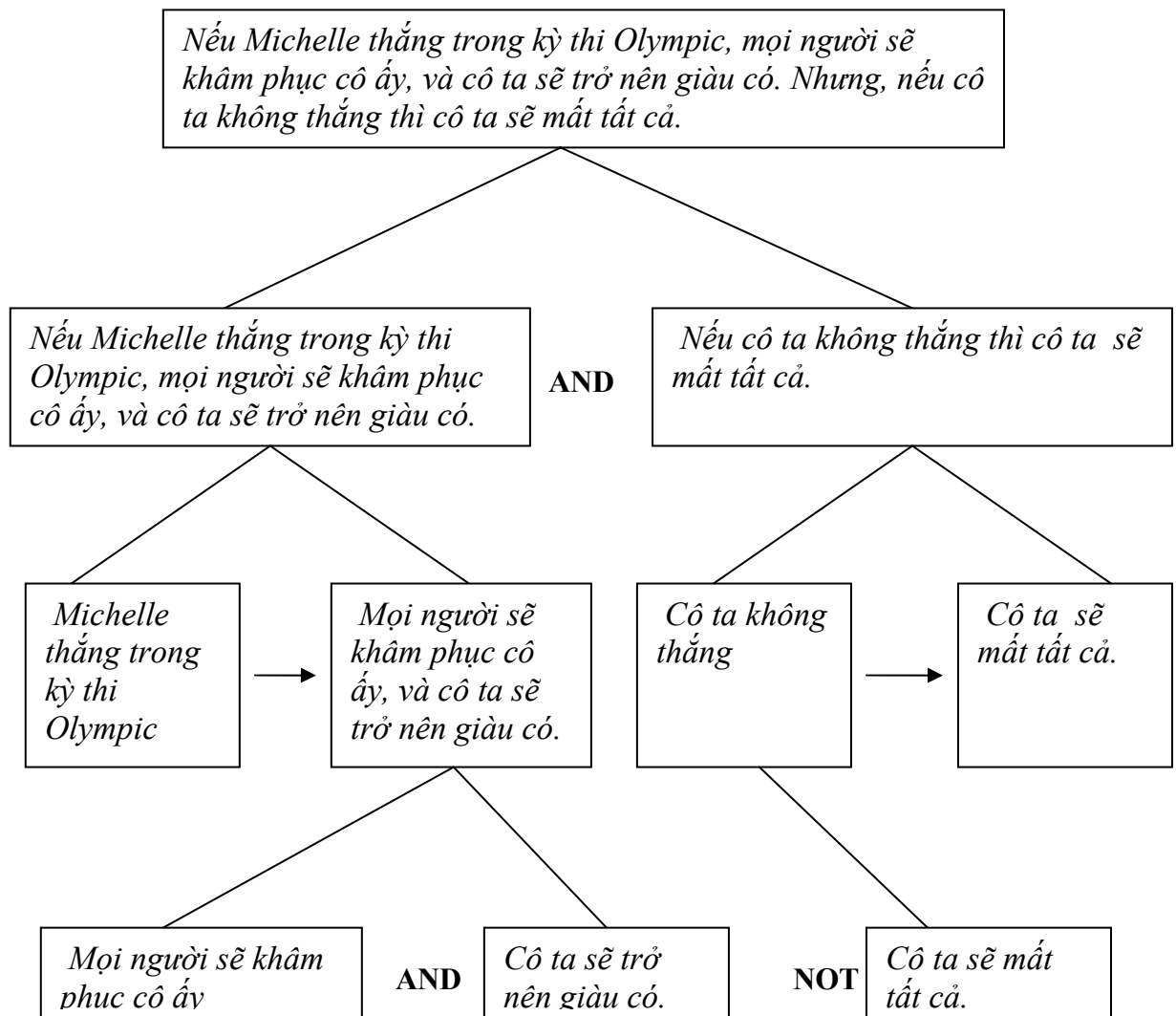
R: cô ta sẽ trở nên giàu có

S: cô ta sẽ mất tất cả

Biểu diễn câu phát biểu trên bằng các mệnh đề và các phép toán, ta có biểu thức mệnh đề sau :

$$(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow S)$$

Biểu diễn câu phát biểu trên thành một cây ngữ nghĩa như sau :



## 1.5. Các ứng dụng của Logic (EVERDAY LOGICAL)

Ngày nay, logic mệnh đề được ứng dụng nhiều trong các lĩnh vực khác nhau như:

- Viết
- Nói
- Tìm kiếm trên mạng (search engines)
- Toán học
- Các chương trình máy tính (logic in programming)

Do đó, hiểu biết các quy tắc để sử dụng logic là rất hữu ích. Sau đây là một vài ví dụ để chỉ ra các ứng dụng đó.

- **Ví dụ 1:** Logic trong tìm kiếm trên mạng

Đặt vấn đề : Bạn muốn tìm tài liệu trên mạng có liên quan đến hai từ "**disc golf**". Nếu bạn gõ vào ô tìm kiếm hai từ "**disc golf**" này, bạn sẽ tìm thấy các tài liệu về **disc** và các tài liệu về **golf** nhưng không tìm thấy các tài liệu về "**disc golf**".

Cách giải quyết : Bạn chỉ cần gõ vào ô tìm kiếm là "**disc AND golf**"

- **Ví dụ 2 :** Logic trong lập trình (Logic in programming)

Đặt vấn đề : Bạn muốn đặt điều kiện là nếu  $0 < x < 10$  hay  $x = 10$  thì tăng  $x$  lên 1 đơn vị.

`if (  $0 < x < 10$  OR  $x = 10$  ) x++;`

Cách giải quyết : Bạn có thể viết lại câu lệnh như sau

`if (  $x > 0$  AND  $x \leq 10$  ) x++ ;`

- **Ví dụ 3 :** Logic trong cách nói ở gia đình

Đặt vấn đề : Mẹ của bé An nói rằng : "Nếu con ngoan thì con có thể được ăn kem

hoặc ăn bánh bông lan". Bé An hiểu rằng nếu nó ngoan thì nó sẽ được ăn kem và ăn bánh bông lan. Tuy nhiên, mẹ của bé An tức giận vì thật sự bà ta chỉ cho phép nó được ăn một trong hai thứ mà thôi.

Cách giải quyết là mẹ của bé An phải nói như thế này : "Nếu con ngoan thì con sẽ được ăn hoặc là kem hoặc là bánh bông lan nhưng không được ăn cả hai".

- **Ví dụ 4** : Logic trong tính toán

Đặt vấn đề : Bạn có 3 lần kiểm tra trong lớp học. Nếu bạn đạt được 2 lần điểm A, hoặc chỉ một lần điểm A nhưng không được có một lần nào rớt trong 3 lần kiểm tra đó thì bạn sẽ đạt điểm A cho toàn khóa học. Bạn là người không được siêng năng lắm, vậy thì bạn sẽ chọn cách nào để đạt điểm A cho toàn khóa học ?

Cách giải quyết : Bởi vì điều kiện là OR nên cách giải quyết là bạn có thể đạt 2 điểm A và rớt lần 3, hay là chỉ cần đạt một điểm A và không rớt lần nào. Bạn sẽ lựa chọn đạt một điểm A và không rớt lần nào.

- **Ví dụ 5** : Logic trong đời sống

Đặt vấn đề: Sau khi nướng 1 chiếc bánh cho 2 đứa cháu trai và 2 đứa cháu gái đến thăm, Di Nellie lấy bánh ra khỏi lò nướng và để nguội. Sau đó, cô rời khỏi nhà để đến đóng cửa hàng ở gần đó. Lúc trở về thì có ai đó đã ăn 1/4 chiếc bánh và thậm chí còn đặt lại cái đĩa dơ bên phần bánh còn lại. Vì không còn ai đến nhà Di ngày hôm đó trừ 4 đứa cháu nên Di biết ngay là 1 trong 4 đứa đã ăn mà chưa được cho phép. Di Nellie bèn hỏi 4 đứa thì được các câu trả lời như sau:

- Charles : Kelly đã ăn phần bánh
- Dawn : Con không ăn bánh
- Kelly : Tyler ăn bánh
- Tyler : Con không ăn, Kelly nói chơi khi bảo rằng con ăn bánh.

Nếu chỉ 1 trong 4 câu trả lời trên là đúng và chỉ 1 trong 4 đứa cháu là thủ phạm, hãy tìm ra người mà Di Nellie phải phạt ?

Cách giải quyết : Vì chỉ 1 trong 4 câu trả lời trên là đúng nên chúng ta có thể dùng phép vét cạn để tìm lời giải.

- Giả sử Charles nói đúng nghĩa là Kelly ăn bánh. Ba câu còn lại là sai. Dawn nói "Con không ăn bánh" là sai nghĩa là Dawn có ăn bánh. Vậy có đến 2 người ăn bánh, điều này mâu thuẫn giả thiết, giả sử không được chấp thuận.

- Giả sử Dawn nói đúng nghĩa là Dawn không ăn bánh và 3 câu còn lại là sai. Nhận thấy có mâu thuẫn giữa Kelly và Tyler. Bởi vì Kelly nói "Tyler ăn bánh" là sai nghĩa là Tyler không ăn. Trong khi đó, Tyler lại nói rằng "Con không ăn..." là sai, vậy thực tế là nó có ăn. Giả thuyết này là không chấp nhận được.

- Giả sử Kelly nói đúng nghĩa là Tyler ăn bánh và 3 câu còn lại là sai. Như vậy, cũng có 2 thủ phạm là Kelly và Dawn. Mâu thuẫn giả thiết.

- Giả sử sau cùng là Tyler nói đúng nghĩa là nó không ăn bánh và 3 câu còn lại là sai. Nhận thấy chỉ có một người ăn bánh chính là Dawn. Vậy giả thuyết này là hợp lý và thủ phạm chính là Dawn.

• **Ví dụ 6 :** Logic trong toán học

Đặt vấn đề : Tìm số tự nhiên  $a$  biết rằng trong 3 mệnh đề dưới đây có 2 mệnh đề là đúng và 1 mệnh đề là sai.

1/  $a + 51$  là số chính phương

2/ Chữ số tận cùng của  $a$  là 1

3/  $a - 38$  là số chính phương

Cách giải quyết : Trước hết, chúng ta sẽ phải xác định xem 2 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai là mệnh đề nào ? Sau đó từ 2 mệnh đề đúng để tìm ra số tự nhiên  $a$ .

Số chính phương là số nguyên dương khi lấy căn bậc hai. Do đó, số chính phương có các chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9.

- Nhận thấy giữa mệnh đề 1 và 2 có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử 2 mệnh đề này đồng thời là đúng thì  $a+51$  có chữ số tận cùng là 2 nên không thể là số chính phương. Vậy trong 2 mệnh đề này phải có 1 mệnh đề là đúng và 1 là sai.

- Tương tự, nhận thấy giữa mệnh đề 2 và 3 cũng có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử mệnh đề này đồng thời là đúng thì  $a-38$  có chữ số tận cùng là 3 nên không thể là số chính phương.

Vậy trong 3 mệnh đề trên thì mệnh đề 1 và 3 là đúng, còn mệnh đề 2 là sai.

Với  $x > 0$  và  $y > 0$ . Đặt :

$$\begin{cases} a + 51 = x^2 \\ a - 38 = y^2 \end{cases}$$

$$89 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Suy ra :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 89 \end{cases} \quad (\text{loại vì } x, y \text{ là nguyên dương nên không thể có } x + y = 1)$$

Hay là :

$$\begin{cases} x + y = 89 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được  $x = 45$  và  $y = 44$ . Vậy  $a = 1974$ .

Trên đây là vài ví dụ đơn giản. Hy vọng rằng các ví dụ này cho chúng ta thấy được sự quan trọng của logic không chỉ trong toán học, khoa học máy tính mà còn trong cuộc sống hàng ngày.

## 1.6. Các thuật ngữ chuyên ngành (SOME TERMINOLOGY)

### 1.6.1. Định nghĩa Hằng đúng (Tautologie):

Một hằng đúng là một mệnh đề luôn có chân trị là đúng.

Một hằng đúng cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là đúng bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

Ví dụ : xét chân trị của biểu thức mệnh đề  $\neg P \vee P$

| <b>P</b> | <b><math>\neg P</math></b> | <b><math>\neg P \vee P</math></b> |
|----------|----------------------------|-----------------------------------|
| <b>T</b> | <b>F</b>                   | <b>T</b>                          |
| <b>F</b> | <b>T</b>                   | <b>T</b>                          |

Vậy  $\neg P \vee P$  là một hằng đúng.

### 1.6.2. Định nghĩa Hằng sai (Contradiction):

Một hằng sai là một mệnh đề luôn có chân trị là sai.

Một hằng sai cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là sai bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

Ví dụ : xét chân trị của biểu thức mệnh đề  $\neg P \wedge P$

| <b>P</b> | <b><math>\neg P</math></b> | <b><math>\neg P \wedge P</math></b> |
|----------|----------------------------|-------------------------------------|
| <b>T</b> | <b>F</b>                   | <b>F</b>                            |
| <b>F</b> | <b>T</b>                   | <b>F</b>                            |

Vậy  $\neg P \wedge P$  là một hằng sai.

### 1.6.3. Định nghĩa tiếp liên (Contingency):

Một tiếp liên là một biểu thức mệnh đề không phải là hằng đúng và không phải là hằng sai.

Ví dụ : Tìm chân trị của biểu thức mệnh đề  $(P \wedge Q) \vee \neg Q$

| p | q | $\neg q$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \vee \neg q$ |
|---|---|----------|--------------|----------------------------|
| T | T | F        | T            | T                          |
| T | F | T        | F            | T                          |
| F | T | F        | F            | F                          |
| F | F | T        | F            | T                          |

Vậy  $(P \wedge Q) \vee \neg Q$  là một tiếp liên vì nó không phải là hằng đúng và cũng không phải là hằng sai.

## 1.7. Mệnh đề hệ quả

Định nghĩa : Cho F và G là 2 biểu thức mệnh đề. Người ta nói rằng G là mệnh đề hệ quả của F hay G được suy ra từ F nếu  $F \rightarrow G$  là hằng đúng.

Kí hiệu  $F \rightarrow G$

Ví dụ : Cho  $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$

$G = P \rightarrow R$

Xét xem G có là mệnh đề hệ quả của F không ?

| P | Q | R | $P \rightarrow Q$ | $Q \rightarrow R$ | F | G | $F \rightarrow G$ |
|---|---|---|-------------------|-------------------|---|---|-------------------|
| T | T | T | T                 | T                 | T | T | T                 |
| T | T | F | T                 | F                 | F | F | T                 |
| T | F | T | F                 | T                 | F | T | T                 |
| T | F | F | F                 | T                 | F | F | T                 |
| F | T | T | T                 | T                 | T | T | T                 |

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>F</b> | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> |
| <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>T</b> |
| <b>F</b> | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>T</b> |

Vậy G là mệnh đề hệ quả của F

Nhận xét : Nếu G là hệ quả của F thì khi F là đúng thì bắt buộc G phải đúng.

Ngược lại, nếu G là đúng thì chưa có kết luận gì về chân trị của F.

## 1.8. Tương đương Logic (LOGICALLY EQUIVALENT)

- Định nghĩa 1 : Mệnh đề P và mệnh đề Q được gọi là tương đương logic nếu phép tương đương của P và Q ( $P \leftrightarrow Q$ ) là hằng đúng.
- Định nghĩa 2 : Hai mệnh đề P và Q được gọi là tương đương logic nếu và chỉ nếu chúng có cùng chân trị.
- Mệnh đề P và Q tương đương logic được kí hiệu là  $P \Leftrightarrow Q$  (hay  $P = Q$ )

**Ví dụ 1 :** Cho  $F = P \vee (Q \wedge R)$

$$G = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Xét xem hai mệnh đề trên là có tương đương logic không ?

Vậy F và G là tương đương logic hay  $F=G$ .

**Ví dụ 2:** Cho  $F = P \rightarrow Q$

$$G = \neg (P \vee Q)$$

Xét xem hai mệnh đề trên là có tương đương logic không ?

| p | q | $p \rightarrow q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|-------------------|----------|-----------------|
| T | T | T                 | F        | T               |
| T | F | F                 | F        | F               |
| F | T | T                 | T        | T               |
| F | F | T                 | T        | T               |

Vậy  $F \Leftrightarrow G$  hay  $P \rightarrow Q = \neg (P \vee Q)$

| p | q | r | $q \wedge r$ | F | $p \vee q$ | $p \vee r$ | G | $F \Leftrightarrow G$ |
|---|---|---|--------------|---|------------|------------|---|-----------------------|
| T | T | T | T            | T | T          | T          | T | T                     |
| T | T | F | F            | T | T          | T          | T | T                     |
| T | F | T | F            | T | T          | T          | T | T                     |
| T | F | F | F            | T | T          | T          | T | T                     |
| F | T | T | T            | T | T          | T          | T | T                     |
| F | T | F | F            | F | T          | F          | F | T                     |
| F | F | T | F            | F | F          | T          | F | T                     |
| F | F | F | F            | F | F          | F          | F | T                     |

**Bảng các tương đương logic thường dùng**

Đặt  $T$  = hằng đúng,  $F$  = hằng sai

| Equivalence                                                                                                                                | Name                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $p \vee T \Leftrightarrow T$<br>$p \wedge F \Leftrightarrow F$                                                                             | Domination laws                             |
| $p \wedge T \Leftrightarrow p$<br>$p \vee F \Leftrightarrow p$                                                                             | Identity laws                               |
| $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge p \Leftrightarrow p$                                                                             | Idempotent laws                             |
| $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$                                                                                                           | Double negation law                         |
| $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$<br>$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$                                                                   | Cancellation laws<br>(Not an official name) |
| $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$<br>$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$                                                             | Commutative laws                            |
| $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$                     | Associative laws                            |
| $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | Distributive laws                           |
| $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$                             | De Morgan's laws                            |
| $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$                                                                                        | Implication law                             |

**Lưu ý:**

Domination laws : luật nuốt

Identity laws : luật đồng nhất

Idempotent laws : luật lũy đẳng

Double negation law : luật phủ định kép

Cancellation laws : luật xóa bỏ

Commutative laws : luật giao hoán

Associative laws : luật kết hợp

Distributive laws : luật phân bố

De Morgan's laws : luật De Morgan

Ngoài các tương đương thường dùng trong bảng trên, có một tương đương logic khác mà chúng ta cũng sẽ hay gặp trong các chứng minh.

Đó là :

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

( sinh viên tự chứng minh xem như bài tập )

- **Ví dụ 1** : Không lập bảng chân trị, sử dụng các tương đương logic để chứng minh rằng  $(P \wedge Q) \rightarrow Q$  là hằng đúng.

$$((p \wedge q) \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q \quad \leftarrow \text{Implication law}$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee q \quad \leftarrow \text{De Morgan's Law}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q) \quad \leftarrow \text{Associative law}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee T \quad \leftarrow \text{Cancellation Law}$$

$$\Leftrightarrow T \quad \leftarrow \text{Domination Law}$$

- **Ví dụ 2** : Chứng minh rằng  $\neg(q \rightarrow p) \vee (p \wedge q) = q$

$$\begin{aligned}
 (\neg(q \rightarrow p)) \vee (p \wedge q) &\Leftrightarrow (\neg(\neg q \vee p)) \vee (p \wedge q) && \downarrow \text{Implication law} \\
 &\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) && \leftarrow \text{Commutative law} \\
 &\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge p) && \leftarrow \text{Distributive law} \\
 &\Leftrightarrow q \wedge (\neg p \vee p) && \leftarrow \text{Cancellation law} \\
 &\Leftrightarrow q \wedge T && \leftarrow \text{Identity law} \\
 &\Leftrightarrow q
 \end{aligned}$$

- **Ví dụ 3 :** Áp dụng trong lập trình

Giả sử trong chương trình có câu lệnh sau :

```
while(NOT(A[i]!=0 AND NOT(A[i]>= 10)))
```

Ta có thể viết lại câu lệnh này một cách đơn giản hơn bằng cách sử dụng công thức De Morgan.

```
while( A[i]==0 OR A[i]>= 10)
```

- **Ví dụ 4:** Giả sử trong chương trình có câu lệnh sau :

```
while( (i<size AND A[i]>10) OR (i<size AND A[i]<0) OR
NOT (A[i]!= 0 AND NOT (A[i]>= 10)))
```

Trước hết chúng ta sẽ áp dụng công thức De Morgan để biến đổi biểu thức sau cùng như sau :

```
while( (i<size AND A[i]>10) OR (i<size AND A[i]<0)
OR (A[i]==0 OR A[i]>= 10) )
```

Sau đó, chúng ta lại sử dụng công thức về tính phân bố của phép hội đối với phép tuyển để rút gọn biểu thức phía trước. Ta có câu lệnh sau cùng là :

```
while( (i<size AND ( A[i]>10 OR A[i]<0) ) OR (A[i]==0
OR A[i]>= 10) )
```

## 1.9. Tổng kết chương 1

Trong chương này sinh viên cần nắm vững định nghĩa mệnh đề cùng các phép toán logic. Ngoài ra, các thuật ngữ chuyên ngành cũng rất quan trọng. Sinh viên

phải biết cách áp dụng các phép toán logic trong lập trình. Tuy nhiên, có vấn đề cần lưu ý khi áp dụng tính giao hoán.

Trong một vài ngôn ngữ lập trình, ví dụ như C, Java, C++ thì việc sử dụng tính chất giao hoán có thể không là một ý tưởng hay.

Ví dụ : Nếu A là một mảng có n phần tử thì câu lệnh :

$\text{if}(i < n \text{ AND } A[i] == 0)$

và

$\text{if}(A[i] == 0 \text{ AND } i < n)$  là không tương nhau. (Tại sao ?)

(sinh viên tự tìm câu trả lời)

## 1.10. Bài tập chương 1

1/ a. Nếu biết mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là sai, hãy cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

$$P \wedge Q \quad \neg P \vee Q \quad Q \rightarrow P$$

b. Cho các biểu thức mệnh đề sau:

1.  $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \vee M)$

2.  $(P \wedge (Q \wedge R)) \rightarrow (S \oplus M)$

Xác định chân trị của các biến mệnh đề P, Q, R, S, M nếu các biểu thức mệnh đề trên là sai.

2/ Nếu Q có chân trị là T, hãy xác định chân trị của các biến mệnh đề P, R, S nếu biểu thức mệnh đề sau cũng là đúng

$$(Q \rightarrow ((\neg P \vee R) \wedge \neg S)) \wedge (\neg S \rightarrow (\neg R \wedge Q))$$

3/ Cho đoạn chương trình sau

a/ if  $n > 5$  then  $n := n + 2$  ;

b/ if  $((n + 2 = 8) \text{ or } (n - 3 = 6))$  then  $n := 2 * n + 1$  ;

c/ if  $((n - 3 = 16) \text{ and } (n \text{ div } 5 = 1))$  then  $n := n + 3$  ;

d/ if  $((n < 21) \text{ and } (n - 7 = 15))$  then  $n := n - 4$  ;

e/ if  $((n \text{ div } 5 = 2) \text{ or } (n + 1 = 20))$  then  $n := n + 1$  ;

Ban đầu biến nguyên n được gán trị là 7. Hãy xác định giá trị n trong các trường hợp sau :

- Sau mỗi câu lệnh (nghĩa là khi qua câu lệnh mới thì gán lại  $n = 7$ )
- Sau tất cả các lệnh (sử dụng kết quả của câu lệnh trước để tính toán cho câu sau)

4/ Cho đoạn chương trình sau :

- a/ if  $n-m = 5$  then  $n := n-2$  ;
- b/ if  $((2*m=n) \text{ and } (n \text{ div } 4 = 1))$  then  $n := 4*m - 3$  ;
- c/ if  $((n < 8) \text{ or } (m \text{ div } 2 = 2))$  then  $n := 2*m$  else  $m := 2*n$  ;
- d/ if  $((n < 20) \text{ and } (n \text{ div } 6 = 1))$  then  $m := m-n-5$  ;
- e/ if  $((n = 2*m) \text{ or } (n \text{ div } 2 = 5))$  then  $m := m+2$  ;
- f/ if  $((n \text{ div } 3 = 3) \text{ and } (m \text{ div } 3 < 1))$  then  $m := n$  ;
- g/ if  $m*n < 35$  then  $n := 3*m+7$  ;

Ban đầu biến nguyên  $n = 8$  và  $m = 3$ . Hãy xác định giá trị của  $m, n$  trong các trường hợp sau :

- Sau mỗi câu lệnh (nghĩa là khi qua câu lệnh mới thì gán lại  $n = 7$ )
- Sau tất cả các lệnh (sử dụng kết quả của câu lệnh trước để tính toán cho câu sau)

5/ Vòng lặp Repeat ... Until trong một đoạn chương trình Pascal như sau :

Repeat

.....

Until  $((x < 0) \text{ and } (y > 0)) \text{ or } (\text{not } ((w > 0) \text{ and } (t = 3)))$  ;

Với mỗi cách gán giá trị biến như sau, hãy xác định trong trường hợp nào thì vòng lặp kết thúc.

- a/  $x = 7, y = 2, w = 5, t = 3$
- b/  $x = 0, y = 2, w = -3, t = 3$
- c/  $x = 0, y = -1, w = 1, t = 3$
- d/  $x = 1, y = -1, w = 1, t = 3$

6/ Trong một phiên tòa xử án 3 bị can có liên quan đến vấn đề tài chánh, trước tòa cả 3 bị cáo đều tuyên thệ khai đúng sự thật và lời khai như sau :

- Anh A: Chị B có tội và anh C vô tội
- Chị B: Nếu anh A có tội thì anh C cũng có tội
- Anh C: Tôi vô tội nhưng một trong hai người kia là có tội

Hãy xét xem ai là người có tội ?

7/ Cho các mệnh đề được phát biểu như sau, hãy tìm số lớn nhất các mệnh đề đồng thời là đúng.

- a/ Quang là người khôn khéo
- b/ Quang không gặp may mắn
- c/ Quang gặp may mắn nhưng không khôn khéo
- d/ Nếu Quang là người khôn khéo thì nó không gặp may mắn
- e/ Quang là người khôn khéo khi và chỉ khi nó gặp may mắn
- f/ Hoặc Quang là người khôn khéo, hoặc nó gặp may mắn nhưng không đồng thời cả hai.

8/ Cho a và b là hai số nguyên dương. Biết rằng, trong 4 mệnh đề sau đây có 3 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai. Hãy tìm mọi cặp số (a, b) có thể có.

- 1/  $a+1$  chia hết cho b
- 2/  $a = 2b + 5$
- 3/  $a+b$  chia hết cho 3
- 4/  $a+7b$  là số nguyên tố

9/ Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, chứng minh rằng các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng

- a/  $(P \wedge Q) \rightarrow P$
- b/  $P \rightarrow (\neg P \rightarrow P)$
- c/  $P \rightarrow ((Q \rightarrow (P \wedge Q)))$
- d/  $\neg (P \vee \neg Q) \rightarrow \neg P$
- e/  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

10/ Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, xét xem biểu thức mệnh đề G có là hệ quả của F không ?

- |                                                     |                                                          |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| a/ $F = P \wedge (Q \vee R)$                        | $G = (P \wedge Q) \vee R$                                |
| b/ $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ | $G = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$                    |
| c/ $F = P \wedge Q$                                 | $G = (\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$ |

11/ Tương tự bài tập 9 và 10, chứng minh các tương đương logic sau đây:

- a/  $(P \vee Q) \wedge \neg (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

b/  $\neg(\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee \neg Q) \Leftrightarrow Q \wedge R$

c/  $((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$

d/  $\neg(P \vee Q) \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(Q \wedge P)$

e/  $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \wedge (R \vee \neg Q)) \Leftrightarrow \neg(Q \vee P)$

f/  $P \vee (P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow P$

g/  $P \vee Q \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

h/  $((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)) \Leftrightarrow P \wedge Q$

i/  $P \wedge ((\neg Q \rightarrow (R \wedge R)) \vee \neg(Q \vee (R \wedge S) \vee (R \wedge \neg S))) \Leftrightarrow P$

j/  $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee S \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg S \vee R) \Leftrightarrow P \vee (R \wedge (S \vee \neg Q))$

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| CHƯƠNG 1 : ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ .....                          | 5  |
| 1.1. Tổng quan .....                                     | 5  |
| 1.2. Định nghĩa mệnh đề.....                             | 5  |
| 1.3. Các phép tính mệnh đề .....                         | 7  |
| 1.3.1. Phép phủ định (NEGATION) .....                    | 7  |
| 1.3.2. Phép hội (CONJUNCTION).....                       | 8  |
| 1.3.3. Phép tuyển (DISJUNCTION) .....                    | 8  |
| 1.3.4. Phép XOR.....                                     | 9  |
| 1.3.5. Phép toán trên bit.....                           | 9  |
| 1.3.6. Phép kéo theo (IMPLICATION).....                  | 10 |
| 1.3.7. Phép tương đương (BICONDITIONAL).....             | 11 |
| 1.4. Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES).....        | 11 |
| 1.5. Các ứng dụng của Logic (EVERDAY LOGICAL).....       | 14 |
| 1.6. Các thuật ngữ chuyên ngành (SOME TERMINOLOGY) ..... | 17 |
| 1.6.1. Định nghĩa Hằng đúng (Tautologie): .....          | 17 |
| 1.6.2. Định nghĩa Hằng sai (Contradiction): .....        | 17 |
| 1.6.3. Định nghĩa tiếp liên (Contingency):.....          | 18 |
| 1.7. Mệnh đề hệ quả.....                                 | 18 |
| 1.8. Tương đương Logic (LOGICALLY EQUIVALENT).....       | 19 |
| 1.9. Tổng kết chương 1 .....                             | 23 |
| 1.10. Bài tập chương 1 .....                             | 24 |

## CHƯƠNG 2 : SUY LUẬN TOÁN HỌC & CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

### 2.1. Tổng quan

- **Mục tiêu của chương 1**

Học xong chương này, sinh viên phải nắm bắt được các vấn đề sau:

- Khái niệm về suy luận toán học
- Các phương pháp chứng minh và biết vận dụng các phương pháp này để chứng minh một bài toán cụ thể.

- **Kiến thức cơ bản cần thiết**

Các kiến thức cơ bản trong chương này bao gồm:

- Các phép toán đại số, hình học cơ bản để có thể đưa ra ví dụ minh họa trong từng phương pháp.
- Hiểu rõ quy tắc của phép kéo theo ở chương 1.

- **Tài liệu tham khảo**

Phạm văn Thiều, Đặng Hữu Thịnh. **Toán rời rạc ứng dụng trong tin học**. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội - 1997 (chương 3, trang 208 - 228).

- **Nội dung cốt lõi**

- Khái niệm về suy luận toán học
- Trình bày các phương pháp chứng minh bao gồm:
  - . Chứng minh rõ ràng
  - . Chứng minh tầm thường
  - . Chứng minh trực tiếp
  - . Chứng minh gián tiếp
  - . Chứng minh phản chứng
  - . Chứng minh quy nạp

## 2.2. Suy luận toán học

### 2.2.1. Khái niệm

Suy luận được xem là một trong những nền tảng xây dựng nên các ngành khoa học tự nhiên. Từ xưa đến nay, nhờ suy luận mà người ta có thể nhận thức được cái chưa biết từ những cái đã biết. Suy luận còn là cơ sở của sự sáng tạo. Từ các phán đoán, đưa đến các chứng minh để chấp nhận hay bác bỏ một vấn đề nào đó.

Suy luận toán học dựa trên nền tảng của các phép toán mệnh đề, chủ yếu là phép kéo theo. Để chứng minh một vấn đề nào đó, thông thường người ta phải xác định điểm ban đầu (có thể gọi là giả thiết) và điểm kết thúc (gọi là kết luận). Quá trình đi từ giả thiết đến kết luận gọi là quá trình chứng minh và quá trình này được thực thi bằng cách nào thì gọi đó là phương pháp chứng minh.

Các phương pháp chứng minh là rất quan trọng vì không những chúng thường được sử dụng trong toán học mà còn được áp dụng nhiều trong tin học. Ví dụ, sự kiểm tra tính đúng đắn của một chương trình, của một hệ điều hành, xây dựng các luật suy diễn trong lĩnh vực trí tuệ nhận tạo... Do đó, chúng ta cần phải nắm vững các phương pháp chứng minh.

Tuy nhiên, có những phương pháp chứng minh đúng vì nó được dựa trên cơ sở của một mệnh đề đúng (hằng đúng) và có những phương pháp chứng minh sai. Các phương pháp chứng minh sai này là cố ý hoặc vô ý. Khi phương pháp chứng minh dựa trên một hằng sai thì sẽ mang lại kết quả sai nhưng người ta vẫn cho là đúng thì được gọi là cố ý. Đôi khi có những phương pháp chứng minh dựa trên một tiếp liên (có khi mệnh đề là đúng nhưng cũng có lúc sai) mà người ta tưởng lầm là hằng đúng nên cho là kết quả bao giờ cũng đúng thì trường hợp này gọi là vô ý (hay ngộ nhận).

Sau đây, chúng ta sẽ đi tìm hiểu các qui tắc suy luận.

### 2.2.2. Các qui tắc suy luận

Như đã giới thiệu ở trên, những suy luận có dùng các qui tắc suy diễn gọi là suy luận có cơ sở. Khi tất cả các suy luận có cơ sở là đúng thì sẽ dẫn đến một kết luận đúng. Một suy luận có cơ sở có thể dẫn đến một kết luận sai nếu một trong các mệnh đề đã dùng trong suy diễn là sai. Sau đây là bảng các qui tắc suy luận đúng.

| Quy Tắc                                                                    | Hằng đúng                                                                    | Tên Luật               |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| $\frac{P}{\therefore P \vee Q}$                                            | $P \rightarrow (P \vee Q)$                                                   | Cộng                   |
| $\frac{P \wedge Q}{\therefore P}$                                          | $(P \wedge Q) \rightarrow P$                                                 | Rút gọn                |
| $\frac{P \quad P \rightarrow Q}{\therefore Q}$                             | $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$                                 | Modus Ponens           |
| $\frac{\neg Q \quad P \rightarrow Q}{\therefore \neg P}$                   | $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$                       | Modus Tollens          |
| $\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$ | $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ | Tam đoạn luận giả định |
| $\frac{P \vee Q}{\therefore Q}$                                            | $(P \vee Q) \rightarrow Q$                                                   | Tam đoạn luận tuyển    |

Trong các phân số của qui tắc thì các giả thiết được viết trên tử số, kết luận được viết dưới mẫu số. Kí hiệu  $\therefore$  có nghĩa là "vậy thì", "do đó",...

**Ví dụ :** Qui tắc suy luận nào là cơ sở của suy diễn sau :

- " Nếu hôm nay trời mưa thì cô ta không đến,  
Nếu cô ta không đến thì ngày mai cô ta đến,  
Vậy thì, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ta đến."

Đây là suy diễn dựa trên qui tắc tam đoạn luận giả định.

- "Nếu hôm nay tuyết rơi thì trường đại học đóng cửa.  
Hôm nay trường đại học không đóng cửa.  
Do đó, hôm nay đã không có tuyết rơi "

Đây là suy diễn dựa trên qui tắc Modus Tollens

- " Alice giỏi toán. Do đó, Alice giỏi toán hoặc tin"

Đây là suy diễn dựa trên qui tắc cộng.

**Ngụy biện**

Các phương pháp chứng minh sai còn được gọi là *ngụy biện*. Ngụy biện giống như qui tắc suy luận nhưng không dựa trên một hằng đúng mà chỉ là một tiếp liên. Đây chính là sự khác nhau cơ bản giữa suy luận đúng và suy luận sai. Loại suy luận sai này được gọi là ***ngộ nhận kết luận***.

Ví dụ : Xét xem suy diễn sau là có cơ sở đúng không ?

" Nếu bạn đã giải hết bài tập trong sách toán rời rạc 2 này thì bạn nắm vững logic. Bạn nắm vững logic vậy thì bạn đã giải hết bài tập trong sách toán rời rạc 2 này".

Nhận thấy suy diễn này là dựa trên mệnh đề sau :

$$((P \rightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$$

Trong đó:

P = "Bạn đã giải hết bài tập trong sách toán rời rạc 2"

Q = "Bạn nắm vững logic"

Mệnh đề  $((P \rightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$  không phải là hằng đúng vì nó sẽ sai khi P là F và Q là T. Do đó, suy diễn này không hoàn toàn có cơ sở đúng. Bởi vì, khi Q là T nghĩa là bạn đã nắm vững logic nhưng không chắc là bạn đã giải hết bài tập trong sách toán rời rạc 2 này mà có thể giải sách khác (P là F).

### 2.3. Các phương pháp chứng minh

Như đã giới thiệu trong phần trên, mỗi bài toán cần chứng minh thông thường đều có hai phần chính là giả thiết và kết luận. Việc chỉ ra được cái nào là giả thiết, cái nào là kết luận sẽ giúp cho việc chứng minh dễ dàng hơn thông qua việc sử dụng phương pháp chứng minh thích hợp. Do đó, các phương pháp chứng minh trong dạng bài toán này là có liên quan đến mệnh đề kéo theo.

Vậy, trước khi tìm hiểu các phương pháp chứng minh, chúng ta hãy xem lại bảng chân trị của mệnh đề P kéo theo Q ( với P là giả thiết và Q là kết luận). Các trường hợp để cho mệnh đề P kéo theo Q là đúng cũng chính là các phương pháp để chứng minh bài toán đúng.

|   |   |                   |
|---|---|-------------------|
| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|

|   |   |   |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

Nhận thấy rằng,  $P \rightarrow Q$  là đúng có 3 trường hợp. Các trường hợp này chính là các phương pháp chứng minh sẽ được trình bày dưới đây.

Trước khi đi vào các phương pháp chứng minh, có một khái niệm mà chúng ta cần tìm hiểu, đó là khái niệm về "**hàm mệnh đề**".

### Hàm mệnh đề :

➤ Cho  $A$  là một tập hợp không rỗng sao cho ứng với mỗi  $x \in A$  ta có một mệnh đề, ký hiệu là  $P(x)$ . Bây giờ ta nói  $P$  (hay  $P(x)$ ) là một hàm mệnh đề theo biến  $x \in A$ . Như vậy, khi nói ứng với mỗi  $x \in A$ , ta có một mệnh đề  $P(x)$ , nghĩa là khi đó tính đúng sai của  $P(x)$  được hoàn toàn xác định phụ thuộc vào từng giá trị của  $x \in A$ .

Ví dụ : Cho hàm mệnh đề

$$P(x) = \{ x \text{ là số lẻ} \} ; \quad x \in \mathbb{N}$$

Ta có :  $P(1)$  là mệnh đề đúng

$P(2)$  là mệnh đề sai.

➤ Tổng quát, với các tập hợp không rỗng  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , sao cho ứng với mỗi  $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$ , ta có một mệnh đề, ký hiệu  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ta nói  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là một hàm mệnh đề theo  $n$  biến  $x$ .

Ví dụ : Cho hàm mệnh đề

$$P(x, y, z) = \{ 2x + y - z = 0 \} \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

Ta có :  $P(x, y, z)$  là mệnh đề đúng khi  $x = 1, y = -1, z = 1$ .

$P(x, y, z)$  là mệnh đề sai khi  $x = 1, y = 1, z = 1$ .

### **2.3.1. Chứng minh rằng ( $P$ là sai)**

Dựa vào 2 dòng cuối của bảng chân trị, nhận thấy rằng khi  $P$  sai, bất chấp kết luận  $Q$  thế nào thì mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là luôn đúng. Vậy, để chứng minh mệnh đề

$P \rightarrow Q$  là đúng, người ta chỉ cần chứng minh rằng  $P$  là sai. Phương pháp chứng minh này được gọi là chứng minh rỗng.

Phương pháp chứng minh rỗng thường được sử dụng để chứng minh các trường hợp đặc biệt của định lý. Trường hợp tổng quát thì định lý này luôn đúng với mọi số  $n$  nguyên dương.

Ví dụ : Cho hàm mệnh đề  $P(n) = \text{"Nếu } n > 1 \text{ thì } n^2 > n \text{"}$

Chứng minh rằng  $P(1)$  là đúng.

Giải : Ta có  $P(1) = \{ \text{Nếu } 1 > 1 \text{ thì } 1^2 > 1 \}$

Nhận thấy rằng giả thiết  $1 > 1$  là sai, bất chấp kết luận  $1^2 > 1$  là đúng hay sai thì  $P(1)$  là đúng.

### 2.3.2. Chứng minh tầm thường ( $Q$ là đúng)

Dựa vào dòng 1 và dòng 3 của bảng chân trị, nhận thấy rằng khi  $Q$  đúng, bất chấp giả thiết  $P$  là đúng hay sai thì mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là luôn đúng. Vậy, để chứng minh mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là đúng, người ta chỉ cần chứng minh rằng  $Q$  là đúng. Phương pháp chứng minh này được gọi là chứng minh tầm thường.

Phương pháp chứng minh tầm thường cũng được sử dụng để chứng minh các trường hợp đặc biệt của định lý. Trường hợp tổng quát thì định lý này luôn đúng với mọi số  $n$  nguyên dương.

Ví dụ : Cho hàm mệnh đề

$P(n) = \{ \text{Nếu } a \text{ và } b \text{ là 2 số nguyên dương và } a \geq b \text{ thì } a^n \geq b^n \}$

Chứng minh rằng  $P(0)$  là đúng.

Giải : Ta có  $a^0 = b^0 = 1$ . Do đó  $a^0 \geq b^0$  là đúng.

Vậy  $P(0)$  là đúng bất chấp giả thiết  $a \geq b$  là đúng hay sai.

### 2.3.3. Chứng minh trực tiếp

Trong dòng 1 của bảng chân trị, mệnh đề  $P$  kéo theo  $Q$  có thể được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng nếu  $P$  đúng thì  $Q$  cũng phải đúng. Nghĩa là tổ hợp  $P$  đúng  $Q$  sai không bao giờ xảy ra. Phương pháp này được gọi là chứng minh trực tiếp.

Vậy để thực hiện phương pháp chứng minh trực tiếp, người ta giả sử rằng  $P$  là đúng, sau đó sử dụng các qui tắc suy luận hay các định lý để chỉ ra rằng  $Q$  là đúng và kết luận  $P \rightarrow Q$  là đúng.

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng { Nếu  $n$  là số lẻ thì  $n^2$  là số lẻ }

Giải : Giả sử rằng giả thiết của định lý này là đúng, tức là  $n$  là số lẻ. Ta có

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \quad (k=0,1,2,\dots) \\ \Rightarrow n^2 &= (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k + 2k) + 1 \text{ là lẻ.} \end{aligned}$$

Vậy nếu  $n$  là số lẻ thì  $n^2$  là số lẻ.

**Ví dụ 2 :** Cho hàm mệnh đề  $P(n) = \text{"Nếu } n > 1 \text{ thì } n^2 > n \text{"}$

Chứng minh rằng  $P(n)$  là đúng với  $n$  là số nguyên dương.

Giải : Giả sử  $n > 1$  là đúng, ta có :

$$\begin{aligned} n &= 1 + k \quad (k \geq 1) \\ \Rightarrow n^2 &= (1 + k)^2 = 1 + 2k + k^2 = (1 + k) + k + k^2 > n \end{aligned}$$

Vậy Nếu  $n > 1$  thì  $n^2 > n$ .

### 2.3.4. Chứng minh gián tiếp

Vì mệnh đề  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ . Do đó, để chứng minh mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là đúng, người ta có thể chỉ ra rằng mệnh đề  $\neg Q \rightarrow \neg P$  là đúng.

Ví dụ : Chứng minh định lý { Nếu  $3n + 2$  là số lẻ thì  $n$  là số lẻ }

Giải : Giả sử ngược lại kết luận của phép kéo theo là sai, tức  $n$  là chẵn.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } n &= 2k \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow 3n + 2 &= 3.2k + 2 = 2(3k + 1) \text{ là số chẵn} \\ \text{Vậy Nếu } 3n + 2 &\text{ là số lẻ thì } n \text{ là số lẻ} \end{aligned}$$

### Nhận xét

- Có những bài toán có thể sử dụng phương pháp chứng minh trực tiếp hay gián tiếp đều được cả. Tuy nhiên, có những bài toán không thể sử dụng phương pháp chứng minh trực tiếp được hoặc sử dụng trực tiếp thì bài giải sẽ dài dòng phức tạp hơn là sử dụng chứng minh gián tiếp ( hoặc ngược lại). Đây chính là sự khác biệt của chứng minh trực tiếp và chứng minh gián tiếp.

### Ví dụ 1 :

Sử dụng chứng minh gián tiếp để chứng minh rằng " Nếu  $n > 1$  thì  $n^2 > n$  "

Giải : Giả sử ngược lại kết luận của phép kéo theo là sai, tức là  $n^2 < n$ .

Vì  $n$  là nguyên dương nên ta có thể chia 2 vế cho  $n$  mà bất đẳng thức không đổi chiều. Ta có :  $n < 1$ .

Vậy từ  $\neg Q$  đã dẫn đến  $\neg P$ . Do đó, Nếu  $n > 1$  thì  $n^2 > n$ .

**Ví dụ 2 :** Sử dụng chứng minh trực tiếp để chứng minh rằng " Nếu  $3n + 2$  là số lẻ thì  $n$  là số lẻ ".

**Giải :** Giả sử  $3n + 2$  là số lẻ là đúng.

Nhận thấy rằng vì 2 là số chẵn nên suy ra được  $3n$  là số lẻ.

Vì 3 là số lẻ do đó  $n$  là số lẻ.

Vậy Nếu  $3n + 2$  là số lẻ thì  $n$  là số lẻ.

Ở đây chúng ta phải chứng minh thêm định lý là tích của 2 số lẻ là một số lẻ thì bài giải chặt chẽ hơn. Do đó, trong bài toán này việc sử dụng chứng minh gián tiếp là hay hơn dùng trực tiếp.

- Để chứng minh mệnh đề có dạng :

$$(P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n) \rightarrow Q$$

Chúng ta có thể sử dụng hằng đúng sau :

$$((P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n) \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P_1 \rightarrow Q) \wedge (P_2 \rightarrow Q) \wedge \dots \wedge (P_n \rightarrow Q))$$

Cách chứng minh này gọi là chứng minh từng trường hợp.

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng:

" Nếu  $n$  không chia hết cho 3 thì  $n^2$  không chia hết cho 3".

**Giải :** Gọi  $P$  là mệnh đề " $n$  không chia hết cho 3" và  $Q$  là mệnh đề " $n^2$  không chia hết cho 3". Khi đó,  $P$  tương đương với  $P_1 \vee P_2$ . Trong đó:

$$P_1 = "n \bmod 3 = 1"$$

$$P_2 = "n \bmod 3 = 2"$$

Vậy, để chứng minh  $P \rightarrow Q$  là đúng, có thể chứng minh rằng:

$$(P_1 \vee P_2) \rightarrow Q \text{ hay là } (P_1 \rightarrow Q) \wedge (P_2 \rightarrow Q)$$

Giả sử  $P_1$  là đúng. Ta có,  $n \bmod 3 = 1$ . Đặt  $n = 3k + 1$

(  $k$  là số nguyên nào đó).

Suy ra

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ không chia hết cho 3.}$$

Do đó,  $P_1 \rightarrow Q$  là đúng.

Tương tự, giả sử  $P_2$  là đúng. Ta có,  $n \bmod 3 = 2$ . Đặt  $n = 3k + 2$  ( $k$  là số nguyên nào đó).

Suy ra  $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$  không chia hết cho 3.

Do đó,  $P_2 \rightarrow Q$  là đúng.

Do  $P_1 \rightarrow Q$  là đúng và  $P_2 \rightarrow Q$  là đúng, hay là  $(P_1 \rightarrow Q) \wedge (P_2 \rightarrow Q)$ .

Vậy  $(P_1 \vee P_2) \rightarrow Q$ .

### 2.3.5. Chứng minh phản chứng

Chứng minh phản chứng thường được sử dụng để chứng minh mệnh đề  $P$  là đúng. Trước hết, người ta giả sử ngược lại rằng  $P$  là sai hay  $\neg P$  là đúng. Từ mệnh đề  $\neg P$  là đúng dẫn đến kết luận  $Q$  sao cho  $\neg P \rightarrow Q$  phải đúng. Khi đó, người ta chỉ ra rằng  $Q$  là một mâu thuẫn, nghĩa là :

$Q = R \wedge \neg R$ . (Sở dĩ có mâu thuẫn này là do ta giả sử  $P$  là sai)

Vì  $\neg P \rightarrow Q$  phải đúng và  $Q$  là F, suy ra rằng  $\neg P = F \Rightarrow P = T$ .

Phương pháp chứng minh phản chứng thường được sử dụng để chứng minh những vấn đề cơ bản và điều quan trọng trong kỹ thuật này là tìm ra được mâu thuẫn  $R \wedge \neg R$ .

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng " $\sqrt{2}$  là số vô tỉ".

Giải : Gọi  $P$  là mệnh đề " $\sqrt{2}$  là số vô tỉ". Giả sử ngược lại  $\neg P$  là đúng. Vậy,  $\sqrt{2}$  là số hữu tỉ ( vì tập số thực gồm 2 tập con là tập số vô tỉ và tập số hữu tỉ. Hai tập con này không có 3 giao nhau). Khi đó  $\exists a, b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) sao cho:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  ( với  $a, b$  không có ước chung hay phân số này là tối giản (mệnh đề R))

Bình phương hai vế :  $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2$  là số chẵn  $\Rightarrow a$  là số chẵn.

Đặt  $a = 2c$ ,  $c \in \mathbb{N}$ .

Ta có  $2b^2 = 4c^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2$  là số chẵn  $\Rightarrow b$  là số chẵn.

Vậy  $a, b$  đều có ước chung là 2 (mệnh đề  $\neg R$ ).

Điều này mâu thuẫn vì  $a/b$  là tối giản. Từ  $\neg P \rightarrow R \wedge \neg R$ .

Sở dĩ có mâu thuẫn này là do ta giả sử  $\sqrt{2}$  là số hữu tỉ. Vậy  $\sqrt{2}$  phải là số vô tỉ.

**Ví dụ 2 :** Một trong những cách giải bài toán tồn tại là dùng lập luận phản chứng.

Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

Giải : Trước hết sắp xếp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài  $a_1, a_2, \dots, a_7$ , và chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm được 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối (vì điều kiện để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng của 2 đoạn nhỏ hơn đoạn thứ ba).

Giả sử điều cần chứng minh là không xảy ra, nghĩa là đồng thời xảy ra các bất đẳng thức sau:

$$a_1 + a_2 \leq a_3$$

$$a_2 + a_3 \leq a_4$$

$$a_3 + a_4 \leq a_5$$

$$a_4 + a_5 \leq a_6$$

$$a_5 + a_6 \leq a_7$$

Từ giả thiết  $a_1, a_2$  có giá trị lớn hơn 10, ta nhận được  $a_3 > 20$ . Từ  $a_2 > 10$  và  $a_3 > 20$

ta nhận được  $a_4 > 30$ ,  $a_5 > 50$ ,  $a_6 > 80$  và  $a_7 > 130$ . Điều  $a_7 > 130$  là mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn 100. Có mâu thuẫn này là do giả sử điều cần chứng minh không xảy ra.

Vậy, luôn tồn tại 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối. Hay nói cách khác là 3 đoạn này có thể ghép thành một tam giác.

### 2.3.6. Chứng minh qui nạp

Giả sử cần tính tổng  $n$  số nguyên lẻ đầu tiên. Với  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  ta có :

$$n = 1: 1 = 1 = 1^2$$

$$n = 2: 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$n = 3: 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$n = 4: 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$n = 5: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Từ các kết quả này ta dự đoán tổng  $n$  số nguyên lẻ đầu tiên là  $n^2$ . Tuy nhiên, chúng ta cần có phương pháp chứng minh dự đoán trên là đúng.

Qui nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh rất quan trọng. Người ta dùng nó để chứng minh những kết quả đã có dựa trên sự suy luận nào đó như ví dụ trên. Tuy nhiên, qui nạp toán học chỉ dùng để chứng minh các kết quả nhận được bằng một cách nào đó chứ không là công cụ để phát hiện ra công thức.

• **Nguyên lý chứng minh qui nạp yếu**

Nhiều định lý phát biểu rằng  $P(n)$  là đúng  $\forall n$  nguyên dương, trong đó  $P(n)$  là hàm mệnh đề, ký hiệu  $\forall nP(n)$ . Qui nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh các định lý thuộc dạng trên. Nói cách khác qui nạp toán học thường sử dụng để chứng minh các mệnh đề dạng  $\forall nP(n)$ .

Nguyên lý chứng minh qui nạp yếu bao gồm 2 bước :

- Kiểm tra  $P(x_0)$  là đúng với  $x_0$  là giá trị đầu tiên của dãy số  $n$
- Giả sử rằng  $P(k)$  là đúng khi  $n=k$ . Từ đó suy ra rằng  $P(k+1)$  là đúng.

Ta có cách viết của suy luận trên như sau:

$$[P(x_0) \wedge (P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall nP(n)$$

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Giải : Đặt  $P(n) = \left\{ \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$

- Với  $n=1$  :  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$   $P(1)$  là đúng

- Giả sử  $P(k)$  là đúng khi  $n=k$ . Ta có :  $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$

Cần chứng minh rằng  $P(k+1)$  là đúng. Nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

Ta có :  $\sum_{i=1}^{K+1} i = \sum_{i=1}^K i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  (đpcm)

Vậy  $\forall n P(n)$ .

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng

$$P(n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right\}$$

- Với  $n=1$  :  $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$   $P(1)$  là đúng

- Giả sử  $P(k)$  là đúng khi  $n=k$ . Ta có :

$$\sum_{i=1}^K \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

Cần chứng minh rằng :

$$\sum_{i=1}^{K+1} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{K+1} \frac{i}{(i+1)!} &= \sum_{i=1}^K \frac{i}{(i+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\ &= 1 - \frac{(k+2) - (k+1)}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Vậy  $\forall n P(n)$

**Ví dụ 3 :** Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$n < 2^n \quad \text{với } n \text{ nguyên dương.}$$

- Khi  $n=1$  :  $1 < 2$  mệnh đề đúng

- Giả sử mệnh đề đúng khi  $n=k$ , ta có  $k < 2^k$ .

Cần chứng minh rằng  $k+1 < 2^{k+1}$ .

Thật vậy, vì  $k < 2^k \Rightarrow k+1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ .

Do đó,  $n < 2^n$  với  $n$  nguyên dương.

• **Chú ý 1:**

Khi sử dụng nguyên lý chứng minh qui nạp, không được bỏ qua bước kiểm tra  $P(x)$  là đúng vì nếu chỉ có  $(P(n) \rightarrow P(n+1))$  là không đủ để kết luận rằng  $\forall n P(n)$  là đúng.

Ví dụ : Xét

$$P(n) = \left\{ \sum_{i=0}^n i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+3)(n-2)}{2} \right\}$$

Giả sử  $P(k)$  là đúng khi  $n=k$ . Ta có :

$$\sum_{i=0}^K i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{(k+3)(k-2)}{2}$$

Cần chứng minh:

$$\sum_{i=0}^{K+1} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+3)(k-1)}{2}$$

Ta có :

$$\sum_{i=0}^{K+1} i = \sum_{i=0}^K i + (k+1) = \frac{(k+3)(k-2)}{2} + (k+1)$$

$$VT = \frac{k^2 - 2k + 3k - 6 + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k - 4}{2}$$

$$VT = \frac{(k-1)(k+4)}{2} = P(k+1) \quad (\text{đpcm})$$

Ta có  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  là đúng.

Tuy nhiên, khi xét  $P(0)$ :  $P(0) = \{0 = 3\}$  là mệnh đề sai.

Vậy  $\forall n P(n)$  là sai.

***Trong trường hợp này ta có thể kết luận như sau : Nếu  $P(k)$  là đúng và nếu  $\forall n \geq k (P(n) \rightarrow P(n+1))$  là đúng thì  $\forall n \geq k, P(n)$  là đúng.***

• **Chú ý 2 :**

Đôi khi chúng ta cần tính toán một biểu thức phụ thuộc vào  $n$ , bắt đầu là việc đoán ra kết quả, công việc này được làm bằng cách ít hay nhiều dựa vào kinh nghiệm. Sau đó, sử dụng nguyên lý chứng minh qui nạp để chứng minh rằng kết quả vừa tìm được là đúng.

**Ví dụ 1:** Tính tổng  $n$  số lẻ đầu tiên.

$$S = 1+3+5+7+\dots+(2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1)$$

Khi  $n=1$  :  $S = 1 = 1^2$

$n=2$  :  $S = 1+3 = 2^2$

$n=3$  :  $S = 1+3+5 = 3^2$

$n=4$  :  $S = 1+3+5+7 = 4^2$

$n=5$  :  $S = 1+3+5+7+9 = 5^2$

.....

Vậy có thể dự đoán rằng  $S = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$

Sau đó sử dụng chứng minh qui nạp để chứng minh kết quả vừa tìm được.

Đặt  $P(n) = \left\{ \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2 \right\}$

- Khi  $n=1$  :  $1 = 1$   $P(1)$  là đúng

- Giả sử rằng  $P(k)$  là đúng khi  $n=k$ . Ta có :

$$\sum_{i=1}^K (2i-1) = k^2$$

cần chứng minh  $P(k+1)$  là đúng, nghĩa là :

$$\sum_{i=1}^{K+1} (2i-1) = (k+1)^2$$

Vế trái  $= \sum_{i=1}^K (2i-1) + (2(k+1)-1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$  (đpcm)

Vậy  $\forall n P(n)$ .

**Ví dụ 2:** Tổng trên có thể tính toán với một cách khác như sau :

$$S = \sum_{i=1}^n (2i-1) = 2 \left( \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right) = 2 \left( \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = n(n+1) - n = n^2$$

**Ví dụ 3:** Tính tổng

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$$

Khi  $n=1$ :  $S = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

$$n=2: S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = \frac{3+1}{2.3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$n=3: S = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{2.4+1}{3.4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$n=4: S = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{3.5+1}{4.5} = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}$$

.....

Vậy có thể dự đoán tổng  $S = \frac{n}{n+1}$

Sử dụng nguyên lý qui nạp để chứng minh công thức trên.

$$\text{Đặt } P(n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n(n+1)} \right\}$$

- Khi  $n=1$ :  $1/2 = 1/2$   $P(1)$  là đúng

- Giả sử  $P(k)$  là đúng khi  $n=k$ . Ta có

$$\sum_{i=1}^K \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Cần chứng minh  $P(k+1)$  là đúng. Nghĩa là :

$$\sum_{i=1}^{K+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2} \quad (\text{đpcm})$$

$$\begin{aligned} \text{Vế trái} &= \sum_{i=1}^{K+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Vậy  $\forall n P(n)$ .

- Nguyên lý chứng minh qui nạp mạnh

Cho  $P(n)$  là một đẳng thức có chứa biến  $n$ , nếu  $P(0)$  là đúng và nếu  $(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$  là đúng thì  $P(n)$  là mệnh đề đúng  $\forall n$  (với 0 là phần tử đầu tiên).

**Chú ý rằng, để tạo ra giả thiết qui nạp với nguyên tắc qui nạp yếu, người ta chỉ giả thiết rằng  $P(k)$  là đúng tại  $n=k$ . Với nguyên tắc qui nạp mạnh, người ta chỉ ra rằng giả thiết đúng cho tất cả các mệnh đề  $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots \wedge P(k)$ . Đây chính là sự khác biệt cơ bản của 2 nguyên tắc qui nạp với giả thiết yếu và giả thiết mạnh.**

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng tích của 3 số liên tiếp luôn chia hết cho 6.

Giải : Đặt  $P(n) = \{n.(n+1).(n+2) \text{ chia hết cho } 6\}$  ( $n$  nguyên dương)

Ta có :  $P(1) = 1.2.3$  chia hết cho 6. Mệnh đề đúng.

$P(2) = 2.3.4$  chia hết cho 6. Mệnh đề đúng.

$P(3) = 3.4.5$  chia hết cho 6. Mệnh đề đúng.

.....

Giả sử  $\forall n \leq k$  ta có  $P(k)$  là đúng. Nghĩa là :  $k.(k+1).(k+2)$  chia hết cho 6.

Cần chứng minh rằng  $P(k+1)$  là đúng.

Nhận thấy:  $(k+1)(k+2)(k+3) = k.(k+1).(k+2) + 3.(k+1).(k+2)$

Trong đó :  $k.(k+1).(k+2)$  chia hết cho 6.

Và  $3.(k+1).(k+2)$  chia hết cho 6 = 2.3 (vì  $(k+1).(k+2)$  là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp nên chia chẵn cho 2).

Vì tổng của 2 số chia hết cho 6 sẽ chia hết cho 6 (sinh viên tự chứng minh), do đó  $(k+1).(k+2)(k+3)$  chia hết cho 6.  $P(n)$  đúng với mọi  $n$  nguyên dương.

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng nếu  $n$  là một số nguyên lớn hơn 1, khi đó  $n$  có thể được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

Giải : Đặt  $P(n) = \{n = a.b \dots c\}$  ( $a, b, \dots, c$  là các số nguyên tố)

Ta có  $P(2) = \{2 = 2.1\}$

$P(3) = \{3 = 3.1\}$

$P(4) = \{4 = 2.2\}$

.....

$P(18) = \{6.3 = 3.2.3\}$

..... là các mệnh đề đúng.

Giả sử  $P(n)$  đúng  $\forall n \geq 2$  ta có  $P(k)$  là đúng.

Cần chứng minh rằng  $P(k+1)$  là đúng.

Với  $n = k+1$  ta có 2 trường hợp xảy ra như sau:

- $k+1$  là số nguyên tố :  $k+1 = (k+1).1$   $P(k+1)$  đúng
- $k+1$  không là số nguyên tố (hợp số):  $k+1 = a.b$  ( $a, b, \in [2, k]$ )

Theo giả thiết qui nạp mạnh,  $a, b$  có thể là số nguyên tố hoặc là tích của các số nguyên tố. Vậy nếu  $k+1$  là hợp số thì nó cũng sẽ được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.  $P(n)$  đúng với mọi  $n \geq 2$ .

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng mọi bưu phí bằng hay lớn hơn 12 xu đều có thể tạo ra bằng các con tem 4 xu hay 5 xu.

Giải : Đặt  $P(n) = \{ n = 4 + \dots + 5 + \dots \}$

- Ta có :
- $P(12) = \{ 12 = 4 + 4 + 4 \}$
  - $P(13) = \{ 13 = 4 + 4 + 5 \}$
  - $P(14) = \{ 14 = 4 + 5 + 5 \}$
  - $P(15) = \{ 15 = 5 + 5 + 5 \}$
  - $P(16) = \{ 16 = 4 + 4 + 4 + 4 \}$
  - $P(17) = \{ 17 = 4 + 4 + 4 + 5 \}$

Giả sử  $n > 15$  và  $P(n)$  là đúng. Nhận thấy rằng để tạo ra bưu phí  $(n+1)$  xu ta chỉ cần dùng con tem  $n-3$  xu và cộng thêm một tem 4 xu.

## 2.4. Tổng kết chương 2

Chúng ta đã mô tả các phương pháp khác nhau để chứng minh định lý. Có thể thấy rằng không thể đưa ra một phương pháp nào để chứng minh cho một bài toán nào. Nắm vững các phương pháp chứng minh là một chuyện, biết áp dụng chúng để chứng minh các bài toán là một kỹ thuật đòi hỏi người sử dụng phải thực tập nhiều lần bằng cách thử các trường hợp khác nhau.

## 2.5. Bài tập chương 2

1/ Quy tắc suy luận nào được dùng trong mỗi lập luận sau :

a. Những con kangaroo sống ở Australia là loài thú có túi. Do đó, kangaroo là loài thú có túi.

b. Hoặc hôm nay trời nóng trên 100 độ hoặc là sự ô nhiễm là nguy hại. Hôm nay nhiệt độ ngoài trời thấp hơn 100 độ. Do đó, ô nhiễm là nguy hại.

c. Steve sẽ làm việc ở một công ty tin học vào mùa hè này. Do đó, mùa hè này anh ta sẽ làm việc ở một công ty tin học hoặc là một kẻ lang thang ngoài bãi bơi.

d. Nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi có thể trả lời được tất cả bài tập. Nếu tôi trả lời được tất cả bài tập thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này. Do đó, nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này

2/ Xác định xem các suy luận sau là có cơ sở không. Nếu một suy luận là có cơ sở thì nó dùng quy tắc suy luận nào. Nếu không hãy chỉ ra nguy hiểm nào đã được sử dụng.

a. Nếu  $n$  là một số thực lớn hơn 1 khi đó  $n^2 > 1$ . Giả sử  $n^2 > 1$ . Khi đó  $n > 1$ .

b. Nếu  $n$  là một số thực và  $n > 3$ , khi đó  $n^2 > 9$ . Giả sử  $n^2 \leq 9$ . Khi đó,  $n \leq 3$ .

c. Một số nguyên dương hoặc là số chính phương hoặc có một số chẵn các ước nguyên dương. Giả sử,  $n$  là một số nguyên dương có một số lẻ các ước nguyên dương. Khi đó,  $n$  là số chính phương.

3/ Chứng minh rằng bình phương của một số chẵn là một số chẵn bằng :

a. Chứng minh trực tiếp

b. Chứng minh gián tiếp

c. Chứng minh phản chứng

4/ Chứng minh rằng tích của 2 số hữu tỷ là một số hữu tỷ.

5/ Chứng minh rằng một số nguyên không chia hết cho 5 thì bình phương của nó khi chia cho 5 sẽ dư 1 hoặc 4.

6/ Chứng minh rằng nếu  $n$  là số nguyên dương khi đó  $n$  là lẻ nếu và chỉ nếu  $5n + 6$  là lẻ.

7/ Có 2 giả thiết

- Môn logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn logic.

- Nếu môn toán là dễ thì logic là không khó.

Bằng cách chuyển các giả thiết trên thành các mệnh đề chứa các biến và các toán tử logic. Hãy xác định xem mỗi một trong các khẳng định sau là các kết luận có cơ sở của các giả thiết đã cho không :

- a/ Môn toán là không dễ nếu nhiều sinh viên thích môn logic.  
 b/ Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.  
 c/ Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.  
 d/ Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.  
 e/ Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.
- 8/ Dùng nguyên lý qui nạp yếu, chứng minh các biểu thức tổng sau :

a. 
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

b. 
$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

c. 
$$\sum_{i=1}^n i(i!) = (n+1)! - 1$$

d. 
$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

e. 
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

f. 
$$\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

g. 
$$\sum_{i=1}^n 2 \cdot 3^{i-1} = 3^n - 1$$

h. 
$$\sum_{i=1}^n i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

9. Tìm công thức tính các tổng sau và sử dụng nguyên lý qui nạp để chứng minh công thức vừa tìm được

a. 
$$\sum_{i=1}^n (2i-1)$$

b. 
$$\sum_{i=1}^n 2^{i-1}$$

c. 
$$\sum_{i=1}^n i(3i-1)$$

d.  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$

e.  $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2$

f.  $\sum_{i=1}^n i(i+1)$

g.  $\sum_{i=1}^n x^i$

10. Dùng nguyên lý qui nạp mạnh, chứng minh các bất đẳng thức sau:

a.  $\forall n > 3 : 2^n < n!$

b.  $\forall n > 4 : n^2 < 2^n$

c.  $\forall n > 9 : n^2 < 2^n$

d.  $\forall n \geq 6 : 4n < n^2 - 7$

e.  $\forall n > 10 : n - 2 < (n^2 - n)/12$

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| CHƯƠNG 2 : SUY LUẬN TOÁN HỌC &                 | 28 |
| CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH.....                | 28 |
| 2.1. Tổng quan .....                           | 28 |
| 2.2. Suy luận toán học.....                    | 29 |
| 2.2.1. Khái niệm .....                         | 29 |
| 2.2.2. Các qui tắc suy luận .....              | 29 |
| 2.3. Các phương pháp chứng minh.....           | 31 |
| 2.3.1. Chứng minh rỗng ( P là sai) .....       | 32 |
| 2.3.2. Chứng minh tầm thường (Q là đúng) ..... | 33 |
| 2.3.3. Chứng minh trực tiếp .....              | 33 |
| 2.3.4. Chứng minh gián tiếp .....              | 34 |
| 2.3.5. Chứng minh phản chứng .....             | 36 |
| 2.3.6. Chứng minh qui nạp .....                | 37 |
| 2.4. Tổng kết chương 2 .....                   | 44 |
| 2.5. Bài tập chương 2.....                     | 44 |

## CHƯƠNG 3 : VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ

### 3.1. Tổng quan

- **Mục tiêu của chương 3**

Học xong chương này, sinh viên phải nắm bắt được các vấn đề sau:

- Thế nào là vị từ, không gian của vị từ, trọng lượng của vị từ.
- Thế nào là lượng từ, lượng từ tồn tại, lượng từ với mọi.
- Cách biểu diễn một câu thông thường thành biểu thức logic.

- **Kiến thức cơ bản cần thiết**

Các kiến thức cơ bản trong chương này bao gồm:

- Các phép toán đại số, hình học cơ bản để xác định được giá trị đúng, sai của các phát biểu.
- Có khả năng suy luận.
- Nắm vững các phép toán logic trong chương 1.

- **Tài liệu tham khảo**

Phạm văn Thiều, Đặng Hữu Thịnh. **Toán rời rạc ứng dụng trong tin học**. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội - 1997 (chương 1.3, trang 32 - 52).

- **Nội dung cốt lõi**

- Định nghĩa vị từ, không gian của vị từ, trọng lượng của vị từ.
- Định nghĩa lượng từ, lượng từ với mọi, lượng từ tồn tại.
- Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic.

### 3.2. Các định nghĩa

Trong toán học hay trong chương trình của máy tính, chúng ta thường gặp những câu có chứa các biến như sau : " $x > 3$ ", " $x = y + 3$ ", " $x + y = z$ "...

Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được gán cho những giá trị xác định. Trong chương này, chúng ta sẽ xem xét cách tạo ra những mệnh đề từ những câu như vậy.

### 3.2.1. Định nghĩa vị từ (Prédictat)

Một vị từ là một khẳng định  $P(x,y,...)$  trong đó có chứa một số biến  $x,y,...$  lấy giá trị trong những tập hợp  $A,B,...$  cho trước, sao cho :

- Bản thân  $P(x,y,...)$  không phải là mệnh đề.
- Nếu thay  $x, y, ...$  bằng những giá trị cụ thể thuộc tập hợp  $A, B, ...$  cho trước ta sẽ được một mệnh đề  $P(x, y, ...)$ , nghĩa là khi đó chân trị của  $P(x, y, ...)$  hoàn toàn xác định. Các biến  $x, y, ...$  được gọi là các biến tự do của vị từ.

Ví dụ 1: Các câu có liên quan đến các biến như: " $x > 3$ ", " $x + y = 5$ " rất thường gặp trong toán học và trong các chương trình của máy tính. Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được cho những giá trị xác định.

Nói cách khác, vị từ có thể xem là một hàm mệnh đề có nhiều biến hoặc không có biến nào, nó có thể đúng hoặc sai tùy thuộc vào giá trị của biến và lập luận của vị từ.

Ví dụ 2: Câu  $\{n \text{ là chẵn}\}$  là một vị từ. Nhưng, khi cho  $n$  là một số cụ thể là chẵn hay là lẻ ta được một mệnh đề:

$n = 2 : \{2 \text{ là chẵn}\}$ : mệnh đề đúng.

$n = 5 : \{5 \text{ là chẵn}\}$ : mệnh đề sai.

Vị từ  $\{n \text{ là chẵn}\}$  có 2 phần. Phần thứ nhất là biến  $x$  là chủ ngữ của câu. Phần thứ hai " $\text{là chẵn}$ " cũng được gọi là vị từ, nó cho biết tính chất mà chủ ngữ có thể có.

Ký hiệu:  $P(n) = \{n \text{ là chẵn}\}$

Tổng quát, người ta nói  $P(n)$  là giá trị của hàm mệnh đề  $P$  tại  $n$ . Một khi biến  $n$  được gán trị thì  $P(n)$  là một mệnh đề.

Ví dụ 3: Cho vị từ  $P(x) = \{x > 3\}$ . Xác định chân trị của  $P(4)$  và  $P(2)$ .

Giải:  $P(4) = \{4 > 3\}$  : mệnh đề đúng.

$P(2) = \{2 > 3\}$  : mệnh đề sai.

### 3.2.2. Không gian của vị từ (Prédi cat)

Người ta có thể xem vị từ như là một ánh xạ  $P$ , với mỗi phần tử  $x$  thuộc tập hợp  $E$  ta được một ảnh  $P(x) \in \{\emptyset, 1\}$ . Tập hợp  $E$  này được gọi là không gian của vị từ. Không gian này sẽ chỉ rõ các giá trị khả dĩ của biến  $x$  làm cho  $P(x)$  trở thành mệnh đề đúng hoặc sai.

### 3.2.3. Trọng lượng của vị từ (Prédi cat)

Chúng ta cũng thường gặp những câu có nhiều biến hơn. Vị từ xuất hiện cũng như một hàm nhiều biến, khi đó số biến được gọi là trọng lượng của vị từ.

Ví dụ 1: Vị từ  $P(a,b) = \{a + b = 5\}$  là một vị từ 2 biến trên không gian  $N$ . Ta nói  $P$  có trọng lượng 2.

Trong một vị từ  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  có trọng lượng là  $n$ . Nếu gán giá trị xác định cho một biến trong nhiều biến thì ta được một vị từ mới  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  có trọng lượng là  $(n-1)$ . Quy luật này được áp dụng cho đến khi  $n=1$  thì ta có một mệnh đề. Vậy, thực chất mệnh đề là một vị từ có trọng lượng là  $\emptyset$ .

Ví dụ 2: Cho vị từ  $P(x, y, z) = \{x + y = z\}$ .

$$\begin{aligned} \text{Cho } x = \emptyset : \quad & Q(y,z) = P(\emptyset, y, z) = \{\emptyset + y = z\} \\ y = \emptyset : \quad & R(z) = Q(\emptyset, z) = P(\emptyset, \emptyset, z) = \{\emptyset + \emptyset = z\} \\ z = \emptyset : \quad & T = P(\emptyset, \emptyset, 1) = \{\emptyset + \emptyset = 1\} \end{aligned}$$

mệnh đề sai.

Câu có dạng  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  được gọi là giá trị của hàm mệnh đề  $P$  tại  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $P$  cũng được gọi là vị từ.

### 3.2.4. Phép toán vị từ

Phép toán vị từ sử dụng các phép toán logic mệnh đề và là sự mở rộng của phép toán mệnh đề để thể hiện rõ hơn các tri thức.

Ví dụ 1: Cần viết câu "nếu hai người thích một người thì họ không thích nhau" dưới dạng logic vị từ.

Trước khi viết câu trên ta hãy tìm hiểu các câu đơn giản được viết như sau:

"Nam thích Mai" được viết theo phép toán vị từ là: thích (Nam, Mai).

"Đông thích Mai" được viết theo phép toán vị từ là: thích (Đông, Mai).

Tổng quát khẳng định trên được viết như sau:

$$\begin{aligned} & \text{Thích}(X, Z) \text{ AND thích}(Y, Z) \rightarrow \text{NOT thích}(X, Y) \\ \Leftrightarrow & (\text{Thích}(X, Z) \wedge \text{thích}(Y, Z) \rightarrow \neg \text{thích}(X, Y)) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho vị từ "Quả bóng màu xanh". Phép toán vị từ cho phép mô tả theo quan hệ tri thức theo dạng: (quả bóng, xanh).

Cách thể hiện này thuận tiện đối với việc dùng biến và hàm trong xử lý tri thức. Trong lĩnh vực trí tuệ nhân tạo, để lập trình trên các vị từ người ta sử dụng ngôn ngữ

Prolog. Đó là một ngôn ngữ cấp cao có đặc điểm gần với ngôn ngữ tự nhiên, do ông C.Cameraller (Đại học Marseilles, Pháp) và nhóm đồng sự cho ra đời năm 1973.

Ví dụ: Ta có tam đoạn luận sau:

"Người ta ai cũng chết  
Socrates là người  
Vậy Socrates phải chết"

Trong phần này chúng ta không đi sâu vào ngôn ngữ Prolog (vì sẽ học kỹ ở môn ngôn ngữ lập trình) mà chỉ giới thiệu các khái niệm trong lập trình Prolog có sử dụng các vị từ.

#### **a) Hằng:**

Là một giá trị xác định trong không gian của vị từ. các hằng được ký hiệu bởi các chữ thường dùng để đặt tên các đối tượng đặc biệt hay thuộc tính.

#### **b) Biến:**

Dùng để thể hiện các lớp tổng quát của các đối tượng hay các thuộc tính. Biến được viết bằng các ký hiệu bắt đầu là chữ in hoa. Vậy có thể dùng vị từ có biến để thể hiện các vị từ tương tự.

Ví dụ: Vị từ "Quả bóng màu xanh" có thể viết lại: "X màu Y".

Quả bóng xanh là các hằng được xác định trong không gian của vị từ. X, Y là biến.

#### **c) Các vị từ:**

Một sự kiện hay mệnh đề trong phép toán vị từ được chia thành phần. Vị từ và tham số. Tham số thể hiện một hay nhiều đối tượng của mệnh đề, còn vị từ dùng để khẳng định về đối tượng.

Ví dụ: Câu "X thích Y" có dạng thích (X, Y).

Thích là vị từ cho biết quan hệ giữa các đối tượng trong ngoặc. Đối số là các ký hiệu thay cho các đối tượng của bài toán.

#### **d) Hàm:**

Được thể hiện bằng ký hiệu, cho biết quan hệ hàm số.

Ví dụ: Hoa là mẹ của Mai, Đông là cha của Cúc. Hoa và Đông là bạn của nhau. Ta có hàm số được viết để thể hiện quan hệ này.

Mẹ (Mai) = Hoa  
Cha (Cúc) = Đông

Bạn (Hoa, Đông)

Các hàm được dùng trong vị từ là: Bạn (Mẹ (Mai), Cha (Cúc))

### 3.3. Các lượng từ

Khi tất cả các trong một hàm mệnh đề điều được gán cho một giá trị xác định. Ta được chân trị của hàm mệnh đề. Tuy nhiên, còn có một cách khác để biến các vị từ thành mệnh đề mà người ta gọi là sự lượng hóa (hay lượng từ).

#### 3.3.1. Lượng từ tồn tại ( $\exists$ )

Câu xác định "Tập hợp những biến  $x$  làm cho  $P(x)$  là đúng không là tập hợp rỗng" là một mệnh đề. Hay "Tồn tại ít nhất một phần tử  $x$  trong không gian sao cho  $P(x)$  là đúng" là một mệnh đề được gọi là lượng từ tồn tại của  $P(x)$ .

Ký hiệu:  $\exists x P(x)$  .

#### 3.3.2. Lượng từ với mọi ( $\forall$ )

Câu xác định "Tập hợp những  $x$  làm cho  $P(x)$  đúng là tất cả tập hợp  $E$ " là một mệnh đề. Hay " $P(x)$  đúng với mọi giá trị  $x$  trong không gian" cũng là một mệnh đề được gọi là lượng từ với mọi của  $P(x)$ .

Ký hiệu:  $\forall x P(x)$

Ví dụ: Cho vị từ  $P(x) = \{\text{số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$ .

Xét chân trị của hai mệnh đề  $\forall x P(x)$  và  $\exists x P(x)$ .

Giải:

$\forall x P(x) = \{\text{tất cả số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$  là mệnh đề sai khi  $x = 5$ .

$\exists x P(x) = \{\text{hiện hữu một số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$  là mệnh đề đúng khi  $x = 10$ .

Chú ý: Cho  $P$  là một vị từ có không gian  $E$ . Nếu  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , mệnh đề  $\forall x P(x)$  là đúng khi tất cả các mệnh đề  $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$  là đúng. Nghĩa là  $\forall x P(x) \Leftrightarrow P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \dots \wedge P(e_n)$  là đúng.

Tương tự  $\exists x P(x)$  là đúng nếu có ít nhất một trong những mệnh đề  $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$  là đúng. Nghĩa là  $\exists x P(x) \Leftrightarrow P(e_1) \vee P(e_2) \vee \dots \vee P(e_n)$  là đúng.

- Nếu không gian  $E$  là một tập trống thì  $\forall xP(x)$  và  $\exists xP(x)$  có chân trị như thế nào ? (Sinh viên tự giải đáp).

Ví dụ: Cho  $P(a,b) = \{\text{cặp số nguyên tương ứng thỏa } a + b = 5\}$

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

|                               |                                                                                                       |   |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $\forall(a,b) P(a,b)$         | {Tất cả cặp số nguyên tương ứng}                                                                      | F |
| $\exists(a,b) P(a,b)$         | {Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng $(a,b)$ sao cho $a + b = 5$ }                                   | V |
| $\exists b \forall a P(a,b)$  | {Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng $b$ sao cho cho mọi số nguyên tương ứng $a$ ta có $a + b = 5$ } | F |
| $\forall a \exists b P(a, b)$ | {Mọi số nguyên tương ứng $a$ , hiện hữu một số nguyên tương ứng $b$ sao cho $a + b = 5$ }             | V |
| $\exists a \forall b P(a,b)$  | {Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng $a$ sao cho cho mọi số nguyên tương ứng $b$ ta có $a + b = 5$ } | F |
| $\forall b \exists a P(a, b)$ | {Mọi số nguyên tương ứng $b$ , hiện hữu một số nguyên tương ứng $a$ sao cho $a + b = 5$ }             | V |

**Định lý 1:** Cho vị từ  $P(a, b)$  có trọng lượng là 2. Khi đó:

a)  $\forall a \forall b P(a,b)$  và  $\forall b \forall a P(a, b)$  là có cùng chân trị.

Nghĩa là :  $\forall a \forall b P(a,b) \leftrightarrow \forall b \forall a P(a, b)$

Ký hiệu:  $\forall(a,b) P(a,b)$

b)  $\exists a \exists b P(a,b)$  và  $\exists b \exists a P(a, b)$  là có cùng chân trị.

Nghĩa là:  $\exists a \exists b P(a,b) \leftrightarrow \exists b \exists a P(a, b)$

Ký hiệu:  $\exists(a,b) P(a,b)$

c) Nếu  $\exists a \forall b P(a,b)$  là đúng thì  $\forall b \exists a P(a,b)$  cũng đúng nhưng điều ngược lại chưa đúng. Nghĩa là :  $\exists a \forall b P(a,b) \rightarrow \forall b \exists a P(a,b)$

d) Nếu  $\exists b \forall a P(a,b)$  là đúng thì  $\forall a \exists b P(a,b)$  cũng đúng nhưng điều ngược lại chưa đúng. Nghĩa là :  $\exists b \forall a P(a,b) \rightarrow \forall a \exists b P(a,b)$

**Định lý 2:**

1.  $\neg (\forall x P(x))$  và  $\exists x (\neg P(x))$  là có cùng chân trị.

2.  $\neg (\exists x P(x))$  và  $\forall x (\neg P(x))$  là có cùng chân trị.

Giải thích:

1. Phủ định với  $\forall x P(x)$  nói rằng tập hợp những  $x$  làm cho  $P(x)$  đúng không là tất cả tập hợp  $E$ . Vậy nói rằng hiện hữu ít nhất một phần tử  $x \in E$  mà ở chúng  $P(x)$  là sai hay nói rằng hiện hữu ít nhất một phần tử  $x \in E$  mà ở chúng  $P(x)$  là đúng.

2.  $\neg \exists x P(x)$  nói rằng tập hợp những  $x$  mà ở chúng  $P(x)$  là đúng là tập hợp trống. Nghĩa là, tập hợp những  $x$  mà ở chúng  $P(x)$  là sai là tập hợp  $E$  hay không có phần tử nào làm  $P(x)$  đúng. Ta có  $\forall x (\neg P(x))$ .

Ví dụ: Phủ định của "Mọi số nguyên  $n$  là chia chắn cho 3"

là "Tồn tại ít nhất một số nguyên  $n$  không chia chắn cho 3"

- Phương pháp ứng dụng.

Để đạt được phủ định của một mệnh đề xây dựng bằng liên kết của những biến của vị từ với phương tiện định lượng, người ta thay thế những định lượng với mọi  $\forall$  bởi tồn tại  $\exists$ , tồn tại  $\exists$  bởi với mọi  $\forall$  và sau cùng thay thế vị từ bằng phủ định của vị từ đó.

**Định lý 3:** Cho  $P$  và  $Q$  là hai vị từ có cùng không gian.

1. Mệnh đề  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$  và  $(\forall x (P(x)) \wedge \forall x (Q(x)))$  là có cùng chân trị.

2. Nếu mệnh đề  $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$  là đúng thì ta có mệnh đề:

$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$  cũng đúng.

3. Mệnh đề  $\exists x (P(x) \vee Q(x))$  và  $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$  là có cùng chân trị.

4. Nếu mệnh đề  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$  là đúng thì ta có mệnh đề  $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$  là đúng, nhưng điều ngược lại không luôn luôn đúng.

Chú thích:

Nếu  $P$  và  $Q$  là hai vị từ có cùng không gian  $E$ . Ta có :

- Tập hợp  $A \subset E$  : Tập hợp những phần tử  $x$  thuộc  $E$  mà ở chúng thì  $P(x)$  là đúng.

- Tập hợp  $B \subset E$ : Tập hợp những phần tử  $x$  thuộc  $E$  mà ở chúng thì  $Q(x)$  là đúng.

Khi đó người ta lưu ý rằng,  $A \wedge B$  là tập hợp những  $x$  thuộc  $E$  mà ở chúng mệnh đề  $P(x) \wedge Q(x)$  là đúng. Trong khi đó  $A \vee B$  là tập hợp những  $x$  của  $E$  mà ở đó mệnh đề  $P(x) \vee Q(x)$  là đúng.

### 3.4. Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic

Sau khi đã được giới thiệu về các lượng từ, chúng ta có thể biểu diễn được một tập hợp rộng lớn các câu thông thường thành các biểu thức logic. Việc làm này nhằm mục đích loại đi những điều chưa rõ ràng và người ta có thể sử dụng các câu suy luận này trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo.

**Ví dụ 1:** Biểu diễn câu "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất" thành một biểu thức logic.

Giải: Giả sử  $B(x,y)$  là câu "y là bạn tốt của x". Để dịch câu trong ví dụ cần chú ý  $B(x,y)$  muốn nói rằng đối với mỗi cá nhân x có một cá nhân khác là y sao cho y là bạn tốt nhất của x, nếu z là một cá nhân khác y thì z không phải là bạn tốt nhất của x. Do đó, câu trong ví dụ có thể dịch thành:

$$\forall x \exists y \forall z [B(x,y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z))]$$

**Ví dụ 2:** Biểu diễn câu: "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh con, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào khác" thành một biểu thức logic:

Giải: Giả sử  $F(x)$  = "x là phụ nữ"

$P(x)$  = "x đã sinh con"

và  $M(x,y)$  = "x là mẹ của y"

Vì trong ví dụ áp dụng cho tất cả mọi người nên ta có thể viết nó thành biểu thức như sau:

$$\forall x (F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x,y)$$

**Ví dụ 3:** Xét các câu sau. Hai câu đầu tiên là tiền đề và câu ba là kết luận. Toàn bộ tập hợp 3 câu này được gọi là một suy lý.

"Tất cả sư tử Hà Đông đều hung dữ".

"Một số sư tử Hà Đông không uống cà phê".

"Một số sinh vật hung dữ không uống cà phê".

Giải: Gọi  $P(x)$  = {x là sư tử hà đông}

$Q(x)$  = {x hung dữ}

$R(x)$  = {x uống cà phê}

Giả sử rằng không gian là tập hợp toàn bộ các sinh vật, ta có cách suy diễn sau:

$$\forall x ( P(x) \rightarrow Q(x) )$$

$$\exists x ( P(x) \wedge \neg R(x) )$$

$$\exists x ( Q(x) \wedge \neg R(x) )$$

### 3.5. Tổng kết chương 3

Có một số điều cần lưu ý trong việc phủ định các lượng từ trong định lý 2.

Ví dụ : Hãy xét phủ định của câu sau đây :

"Tất cả sinh viên trong lớp đều đã học môn Toán rời rạc 2"

Câu này chính là câu sử dụng lượng từ với mọi như sau:  $\forall x P(x)$

Trong đó  $P(x) = \{ x \text{ đã học môn Toán rời rạc 2} \}$ .

Phủ định của câu này là : " Không phải tất cả các sinh viên trong lớp đều đã học môn Toán rời rạc 2". Điều này có nghĩa là : " Có ít nhất một sinh viên ở lớp này chưa học Toán rời rạc 2" . Đây chính là lượng từ tồn tại của phủ định hàm mệnh đề ban đầu được viết như sau :  $\exists x \neg P(x)$ . Ta có :

$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

Phép phủ định các lượng từ được minh họa rõ hơn trong bảng chú thích sau:

| Phủ định              | Mệnh đề tương đương   | Khi nào phủ định là đúng | Khi nào sai                  |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------------|
| $\neg \exists x P(x)$ | $\forall x \neg P(x)$ | $P(x)$ sai với mọi $x$   | Có một $x$ để $P(x)$ là đúng |
| $\neg \forall x P(x)$ | $\exists x \neg P(x)$ | Có một $x$ để $P(x)$ sai | $P(x)$ đúng với mọi $x$      |

### 3.6. Bài tập chương 3

1. Cho 2 vị từ  $P(x)$  xác định như sau:

$$P(x) = \{x \leq 3\}$$

$$Q(X) = \{x+1 \text{ là số lẻ}\}$$

Nếu không gian là tập số nguyên, hãy xác định chân trị của những mệnh đề sau:

- |           |                              |                                   |
|-----------|------------------------------|-----------------------------------|
| a) $P(1)$ | b) $Q(1)$                    | c) $\neg P(3)$                    |
| d) $Q(6)$ | e) $P(7) \wedge Q(7)$        | f) $P(3) \wedge Q(4)$             |
| g) $P(4)$ | h) $\neg (P(-4) \vee Q(-3))$ | i) $\neg P(-4) \wedge \neg Q(-3)$ |

2. Các vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$  được cho như bài tập 1.  $R(x) = \{x > 0\}$ . Nếu không gian vẫn là tập số nguyên.

a) Xác định chân trị của những mệnh đề sau:

- |                                                        |                                                          |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1. $P(3) \vee [Q(3) \vee \neg R(3)]$                   | 2. $\neg P(3) \wedge [Q(3) \vee [Q(3) \vee R(3)]]$       |
| 3. $P(2) \rightarrow [Q(2) \rightarrow R(2)]$          | 4. $[P(2) \Leftrightarrow Q(2)] \rightarrow R(2)$        |
| 5. $P(0) \rightarrow [\neg Q(1) \Leftrightarrow R(1)]$ | 5. $[P(-1) \Leftrightarrow Q(-2) \Leftrightarrow R(-3)]$ |

b) Xác định tất cả các giá trị  $x$  sao cho  $[P(x) \wedge Q(x)] \wedge R(x)$  là một mệnh đề đúng.

c) Tìm 5 giá trị nguyên dương nhỏ nhất của  $x$  sao cho vị từ.

$P(x) \rightarrow [\neg Q(x) \wedge R(x)]$  là mệnh đề đúng.

3. Cho vị từ  $P(x)$  được xác định như sau:  $P(x) = \{x^2 = 2x\}$  trên không gian là tập hợp số nguyên. Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề:

- |            |                     |                     |
|------------|---------------------|---------------------|
| a) $P(0)$  | b) $P(1)$           | c) $P(2)$           |
| d) $P(-2)$ | e) $\exists x P(x)$ | f) $\forall x P(x)$ |

4. Cho 2 vị từ 2 biến  $P(x,y)$  và  $Q(x,y)$  được xác định như sau:

$$P(x,y) = \{x^2 \geq y\}$$

$$Q(x,y) = \{x+2 < y\}$$

Nếu không gian là tập số thực, xác định chân trị của các mệnh đề

- |                                |                                                     |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------|
| a) $P(2,4)$                    | b) $Q(1,\pi)$                                       |
| c) $P(-3,8) \wedge Q(1,3)$     | d) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \vee \neg Q(-2,-3)$ |
| e) $P(2,2) \rightarrow Q(1,1)$ | f) $P(1,2) \Leftrightarrow \neg Q(1,2)$             |

5. Trong một chương trình Pascal,  $n$  là một biến nguyên và  $A$  là mảng chứa 20 giá trị nguyên  $A[1], A[2], \dots, A[20]$  được khai báo như sau:

for  $n:=1$  to 20 do

$A[n] := n * n - n;$

Hãy viết dạng kí hiệu của những mệnh đề sau: nếu xem  $A[n]$  như vị từ một biến  $n$  trên không gian các số nguyên từ 1 đến 20:

a) Mọi phần tử của mảng đều không âm.

- b) Số nguyên  $A[20]$  là phần tử lớn nhất trong mảng.
- c) Tồn tại 2 phần tử trong mảng  $A$  mà phần tử sau gấp 2 lần phần tử trước.
- d) Các phần tử trong mảng được xếp theo thứ tự tăng dần.
- e) Mọi phần tử trong mảng đều khác nhau.

Chứng minh các mệnh đề trên.

6. Trên không gian là tập số nguyên, cho các vị từ sau:

$$P(x) = \{x > 0\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ là số chẵn}\}$$

$$R(x) = \{x \text{ là số chính phương}\}$$

$$S(x) = \{x \text{ chia hết cho } 4\}$$

$$T(x) = \{x \text{ chia hết cho } 5\}$$

a) Viết dạng ký hiệu của những mệnh đề sau:

1. Có ít nhất 1 số nguyên chẵn.
2. Tồn tại 1 số nguyên dương là số chẵn.
3. Nếu  $x$  chẵn, thì  $x$  không chia hết cho 5.
4. Không có số nguyên chẵn nào là chia hết cho 5.
5. Tồn tại 1 số nguyên chẵn chia hết cho 4.
6. Nếu  $x$  chẵn và  $x$  là số chính phương, thì  $x$  chia hết cho 4.

b) Xác định chân trị của mỗi mệnh đề a). Với mỗi mệnh đề sai, hãy cho một dẫn chứng cụ thể.

c) Viết thành lời các dạng ký hiệu sau:

$$1. \forall x [R(x) \rightarrow P(x)]$$

$$2. \forall x [S(x) \rightarrow Q(x)]$$

$$3. \forall x [S(x) \rightarrow \neg T(x)]$$

$$4. \exists x [S(x) \wedge \neg R(x)]$$

$$5. \forall x [\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee S(x)]$$

7. Cho các vị từ trên không gian là tập số thực như sau:

$$P(x) = \{x \geq 0\}$$

$$Q(x) = \{x^2 \geq 0\}$$

$$R(x) = \{x^2 - 3x - 4 = 0\}$$

$$S(x) = \{x^2 - 3 > 0\}$$

Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau. Theo dẫn chứng hoặc giải thích cụ thể:

- |                                        |                                        |
|----------------------------------------|----------------------------------------|
| a) $\exists x [P(x) \wedge R(x)]$      | b) $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$ |
| c) $\forall x [Q(x) \rightarrow S(x)]$ | d) $\forall x [R(x) \vee S(x)]$        |
| e) $\forall x [R(x) \rightarrow P(x)]$ |                                        |

8. Cho 3 vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  được xác định như sau:

$$P(x) = \{x^2 - 8x + 15 = 0\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ là số lẻ}\}$$

$$R(x) = \{x > 0\}$$

Trên tập không gian là tất cả các số nguyên, hãy xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau. Cho dẫn chứng hoặc giải thích cụ thể:

- |                                                      |                                                    |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| a) $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$               | b) $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$             |
| c) $\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$               | d) $\exists x [Q(x) \rightarrow P(x)]$             |
| e) $\exists x [R(x) \wedge P(x)]$                    | f) $\forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$             |
| g) $\exists x [R(x) \rightarrow P(x)]$               | h) $\forall x [\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)]$   |
| i) $\exists x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$ | j) $\forall x [(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))]$ |

9. Cho 3 vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  như sau:

$$P(x) = \{x^2 - 7x + 10 = 0\}$$

$$Q(x) = \{x^2 - 2x - 3 = 0\}$$

$$R(x) = \{x < 0\}$$

a) Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau, cho dẫn chứng hoặc giải thích cụ thể, nếu không gian là tập số nguyên.

- |                                             |                                        |
|---------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $\forall x [P(x) \rightarrow \neg R(x)]$ | 2. $[Q(x) \rightarrow R(x)]$           |
| 3. $\exists x [Q(x) \rightarrow R(x)]$      | 3. $\exists x [P(x) \rightarrow R(x)]$ |

b) Câu hỏi như phần a) nhưng không gian là tập  $\mathbb{Z}$

c) Câu hỏi như phần a) nhưng không gian chỉ gồm 2 số nguyên 2, 5.

10. Cho  $P(x) = \{x \text{ học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần}\}$

Không gian là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường.

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $\exists x P(x)$      | b) $\forall x P(x)$      |
| c) $\exists x \neg P(x)$ | d) $\forall x \neg P(x)$ |

11. Cho vị từ  $P(x,y) = \{x \text{ đã học môn } y\}$  với không gian của  $x$  là tập hợp tất cả các sinh viên lớp bạn và không gian của  $y$  là tập hợp tất cả các môn tin học của học kỳ mà bạn đang học.

Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành các câu thông thường:

- |                                 |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $\exists x \exists y P(x,y)$ | b) $\exists x \forall y P(x,y)$ | c) $\forall x \exists y P(x,y)$ |
| d) $\exists y \forall x P(x,y)$ | e) $\forall y \exists x P(x,y)$ | f) $\forall x \forall y P(x,y)$ |

12. Cho vị từ:

$$P(x) = \{x \text{ nói được tiếng anh}\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ biết ngôn ngữ } C^{++}\}$$

Cho không gian là tập hợp các sinh viên lớp bạn. Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng  $P(x)$ ,  $Q(x)$ , các lượng từ và các phép toán logic.

- a) Có một sinh viên ở lớp bạn nói được tiếng Anh và biết  $C^{++}$
- b) Có một sinh viên ở lớp bạn nói được tiếng Anh nhưng không biết  $C^{++}$
- c) Mọi sinh viên ở lớp bạn đều nói được tiếng Anh hoặc biết  $C^{++}$
- d) Không có một sinh viên nào ở lớp bạn nói được tiếng Anh hoặc biết  $C^{++}$

13. Cho tân từ:

$$P(x) = \{x \text{ là sinh viên}\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ là kẻ ngu dốt}\}$$

$$R(x) = \{x \text{ là kẻ vô tích sự}\}$$

Bằng cách dùng các lượng từ, các phép toán logic và với các vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$ . Hãy diễn đạt các câu sau với không gian là toàn thể sinh viên:

- a) Không có sinh viên nào là kẻ ngu dốt
- b) Mọi kẻ ngu dốt đều là vô tích sự.
- c) Không có sinh viên nào là vô tích sự.

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| CHƯƠNG 3 : VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ .....                         | 48 |
| 3.1. Tổng quan .....                                       | 48 |
| 3.2. Các định nghĩa .....                                  | 48 |
| 3.2.1. Định nghĩa vị từ (Prédictat).....                   | 49 |
| 3.2.2. Không gian của vị từ (Prédi cat) .....              | 49 |
| 3.2.3. Trọng lượng của vị từ (Prédi cat) .....             | 50 |
| 3.2.4. Phép toán vị từ.....                                | 50 |
| 3.3. Các lượng từ .....                                    | 52 |
| 3.3.1. Lượng từ tồn tại ( $\exists$ ).....                 | 52 |
| 3.3.2. Lượng từ với mọi ( $\forall$ ).....                 | 52 |
| 3.4. Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic ..... | 55 |
| 3.5. Tổng kết chương 3 .....                               | 56 |
| 3.6. Bài tập chương 3 .....                                | 56 |

## CHƯƠNG 4 : LÝ THUYẾT TẬP MỜ & LOGIC MỜ

### 4.1. Tổng quan

- **Mục tiêu của chương 4**

Học xong chương này, sinh viên phải nắm bắt được các vấn đề sau:

- Thế nào là khái niệm của tập mờ, mệnh đề mờ, suy diễn mờ.
- Các phép toán trên tập mờ và logic mờ.

- **Kiến thức cơ bản cần thiết**

Các kiến thức cơ bản trong chương này bao gồm:

- Nắm vững các phép toán logic trong chương 1.
- Các suy luận ở chương 2.

- **Tài liệu tham khảo**

Nguyễn Hoàng Cương, Bùi Công Cường, Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh, Chu Văn Hỷ, **Hệ mờ và ứng dụng**. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội - 1998.

- **Nội dung cốt lõi**

- Giới thiệu khái niệm về tập mờ, các phép toán trên tập mờ.
- Mệnh đề mờ và các phép toán logic mờ.
- Suy diễn mờ.

### 4.2. Giới thiệu

Như đã biết, trong những suy luận đời thường cũng như các suy luận khoa học, logic toán học đóng một vai trò rất quan trọng.

Ngày nay, xã hội càng phát triển thì nhu cầu con người ngày càng cao. Do đó, sự tiến bộ của khoa học cũng rất cao. Suy luận logic mệnh đề đã giới thiệu trong chương 1 (tạm gọi là logic nguyên thủy hay logic rõ) với hai giá trị đúng, sai hay 1, 0 đã không giải quyết được hết các bài toán phức tạp nảy sinh trong thực tế.

Ví dụ: quần áo như thế nào được gọi là dày, là mỏng để máy giặt biết được mà có chế độ tự động sấy khô cho hợp lý ?

Hay trong thơ văn có câu:

" Trăng kia bao tuổi trăng già?

Núi kia bao tuổi gọi là núi non? "

Khái niệm trăng già hay núi non là không được định nghĩa rõ ràng. Những bài toán như vậy ngày một nhiều hơn trong các lĩnh vực điều khiển tối ưu, nhận dạng hệ thống,... nói chung là trong các quá trình quyết định nhằm giải các bài toán với các dữ liệu không đầy đủ, hoặc không được định nghĩa một cách rõ ràng (trong điều kiện thiếu thông tin chẳng hạn).

Một cách tiếp cận mới đã mang lại nhiều kết quả thực tiễn và đang tiếp tục phát triển đó là cách tiếp cận của lý thuyết tập mờ (FUZZY SET THEORY), do giáo sư Lotfi Zadeh của trường đại học California - Mỹ đề ra năm 1965. Công trình này thực sự đã khai sinh một ngành khoa học mới là lý thuyết tập mờ và đã nhanh chóng được các nhà nghiên cứu công nghệ mới chấp nhận ý tưởng. Một số kết quả bước đầu và hướng nghiên cứu tiếp theo góp phần tạo nên những sản phẩm công nghiệp đang được tiêu thụ trên thị trường. Lý thuyết tập mờ ngày càng phong phú và hoàn chỉnh, đã tạo nền vững chắc để phát triển logic mờ. Có thể nói logic mờ (Fuzzy logic) là nền tảng để xây dựng các hệ mờ thực tiễn, ví dụ trong công nghiệp sản xuất xi măng, sản xuất điện năng, các hệ chuyên gia trong y học giúp chuẩn đoán và điều trị bệnh, các hệ chuyên gia trong xử lý tiếng nói, nhận dạng hình ảnh,... Công cụ chủ chốt của logic mờ là tiền đề hóa và lập luận xấp xỉ với phép suy diễn mờ.

Trong chương này, mục đích chính là giới thiệu khái niệm tập mờ, logic mờ, tập trung đi vào các phép toán cơ bản và bước đầu đi vào lập luận xấp xỉ với phép suy diễn mờ.

### 4.3. Khái niệm tập mờ (fuzzy set)

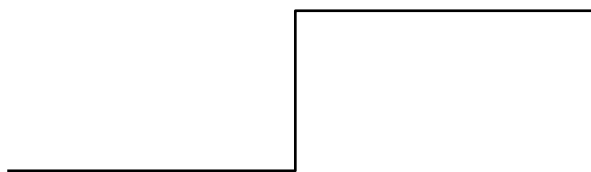
Như chúng ta đã biết, tập hợp thường là kết hợp của một số phần tử có cùng một số tính chất chung nào đó. Ví dụ : tập các sinh viên. Ta có :

$$T = \{ t / t \text{ là sinh viên} \}$$

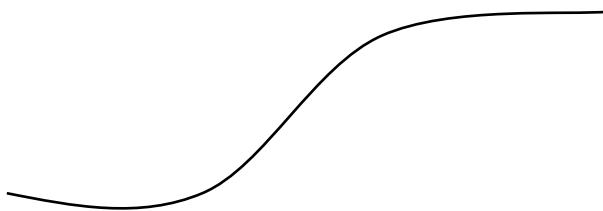
Vậy, nếu một người nào đó là sinh viên thì thuộc tập T, ngược lại là không thuộc tập T. Tuy nhiên, trong thực tế cuộc sống cũng như trong khoa học kỹ thuật có

nhiều khái niệm không được định nghĩa một cách rõ ràng. Ví dụ, **khi** nói về một "nhóm sinh viên khá", **thì** thế nào là khá? Khái niệm về khá không rõ ràng vì có thể sinh viên có điểm thi trung bình bằng 8.4 là khá, cũng có thể điểm thi trung bình bằng 6.6 cũng là khá (dải điểm khá có thể từ 6.5 đến 8.5),... Nói cách khác, "nhóm sinh viên khá" không được định nghĩa một cách tách bạch rõ ràng như khái niệm thông thường về tập hợp. Hoặc, khi chúng ta nói đến một "lớp các số lớn hơn 10" hoặc "một đồng quần áo cũ",..., là chúng ta đã nói đến những khái niệm mờ, hay những khái niệm không được định nghĩa một cách rõ ràng. Các phần tử của nhóm trên không có một tiêu chuẩn rõ ràng về tính "thuộc về" (thuộc về một tập hợp nào đó). Đây chính là những khái niệm thuộc về tập mờ. Trong đối thoại hàng ngày chúng ta bắt gặp rất nhiều khái niệm mờ này. Ví dụ, một ông giám đốc nói: "Năm qua chúng ta đã gặt hái được một số thành tích đáng khen ngợi. Năm tới đây chúng ta phải cố gắng thêm một bước nữa". Đây là một câu chứa rất nhiều khái niệm mờ.

Như vậy, logic rõ có thể biểu diễn bằng một đồ thị như sau



Logic mờ cũng có thể biểu diễn bằng một đồ thị nhưng là đồ thị liên tục



### **Định nghĩa tập mờ (Fuzzy set):**

Cho  $\Omega$  là không gian nền, một tập mờ  $A$  trên  $\Omega$  tương ứng với một **ánh xạ từ  $\Omega$  đến đoạn  $[0,1]$** .

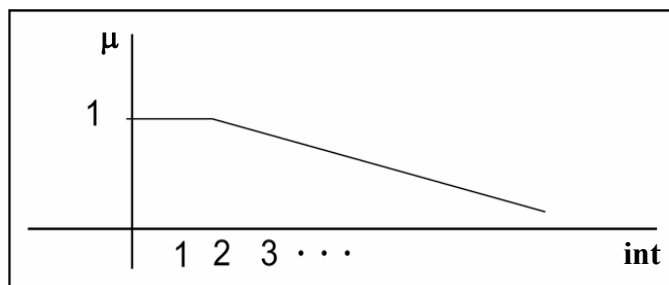
$A : \Omega \rightarrow [0,1]$  được gọi là hàm thuộc về (membership function)

Kí hiệu  $A = \{(a, \mu_A(a)) / a \in \Omega\}$

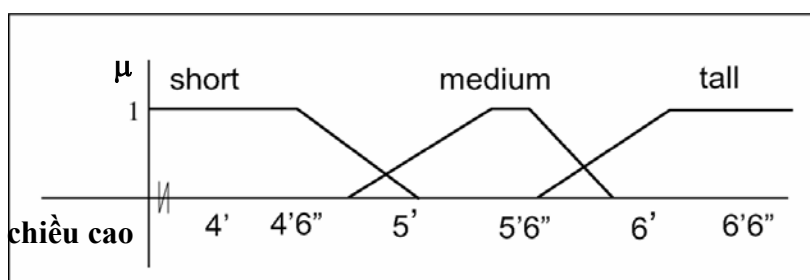
Trong đó,  $\mu_A(a) \in [0,1]$  chỉ mức độ thuộc về (membership degree) của phần tử  $a$  vào tập mờ  $A$ .

Khoảng xác định của hàm  $\mu_A(a)$  là đoạn  $[0, 1]$ , trong đó giá trị 0 chỉ mức độ không thuộc về, còn giá trị 1 chỉ mức độ thuộc về hoàn toàn.

**Ví dụ 1: Một sự biểu diễn tập mờ cho số "integer nhỏ".**



**Ví dụ 2: Một sự biểu diễn tập mờ cho các tập người đàn ông thấp, trung bình và cao.**



**Ví dụ 3: Cho  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , tập mờ  $A$  trên  $\Omega$  tương ứng với ánh xạ  $\mu_A$  như sau:**

$$\begin{aligned}\mu_A : \quad & 1 \rightarrow 0 \\ & 2 \rightarrow 1 \\ & 3 \rightarrow 0.5 \\ & 4 \rightarrow 0.3 \\ & 5 \rightarrow 0.2\end{aligned}$$

Ta có tập mờ  $A = \{(1,0), (2,1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$

Cách viết trên là sự liệt kê các phần tử khác nhau cùng với mức độ thuộc về tập hợp  $A$ .

Từ định nghĩa trên chúng ta có thể suy ra:

- Tập mờ **A là rỗng** nếu và chỉ nếu hàm thuộc về  $\mu_A(a) = 0, \forall a \in \Omega$
- Tập mờ  $A$  là toàn phần nếu và chỉ nếu  $\mu_A(a) = 1, \forall a \in \Omega$
- Hai tập mờ  $A$  và  $B$  bằng nhau nếu  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  với mọi  $x$  trong  $\Omega$ .

**Ví dụ 4:** Cho  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , tập mờ A trên  $\Omega$  tương ứng với ánh xạ  $\mu_A$  như ví dụ trên.

$$A = \{(1,0), (2,1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$$

Tập mờ B trên  $\Omega$  tương ứng với ánh xạ  $\mu_B$  như sau:

$$\begin{aligned}\mu_B : \quad 1 &\rightarrow 0 \\ 2 &\rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 0.5 \\ 4 &\rightarrow 0.3 \\ 5 &\rightarrow 0.2\end{aligned}$$

Ta có tập mờ  $B = \{(1,0), (2,1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$

Nhận thấy,  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  với mọi x trong  $\Omega$ . Vậy  $A = B$ .

#### 4.4. Các phép toán về tập mờ

Để có thể tiến hành mô hình hóa các hệ thống có chứa tập mờ và biểu diễn các qui luật vận hành của hệ thống này, trước tiên chúng ta cần tới việc suy rộng các phép toán logic cơ bản với các mệnh đề có chân trị trên đoạn  $[0, 1]$ .

Cho  $\Omega = \{P_1, P_2, \dots\}$  với  $P_1, P_2, \dots$  là các mệnh đề. Tập mờ A trên  $\Omega$  tương ứng với ánh xạ v như sau:

$$\begin{aligned}v : \quad \Omega &\rightarrow [0, 1] \\ \forall P_i \in \Omega &\rightarrow v(P_i)\end{aligned}$$

Ta gọi  $v(P_i)$  là chân trị của mệnh đề  $P_i$  trên  $[0, 1]$ .

##### 4.4.1. Phép bù

Phép phủ định trong logic kinh điển là một trong những phép toán cơ bản cho việc xây dựng phép bù của 2 tập hợp. Để suy rộng phép này trong tập mờ chúng ta cần tới toán tử  $v(\text{NOT } P)$ . Toán tử này phải thỏa các tính chất sau :

- $v(\text{NOT } P)$  chỉ phụ thuộc vào  $v(P)$ .
- Nếu  $v(P)=1$  thì  $v(\text{NOT } P)=0$
- Nếu  $v(P)=0$  thì  $v(\text{NOT } P)=1$
- Nếu  $v(P_1) \leq v(P_2)$  thì  $v(\text{NOT } P_1) \geq v(\text{NOT } P_2)$

**Định nghĩa 1 :**

Hàm  $n : [0,1] \rightarrow [0, 1]$  không tăng thỏa mãn các điều kiện  $n(0) = 1, n(1) = 0$ , được gọi là hàm phủ định.

Ví dụ :  $n(x) = 1 - x$  hay  $n(x) = 1 - x^2$  là các hàm phủ định.

Ta có **nhận xét** :

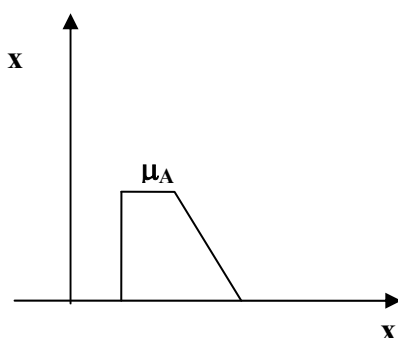
- Nếu  $v(P_1) < v(P_2)$  thì  $v(\text{NOT } P_1) > v(\text{NOT } P_2)$
- $v(\text{NOT } P)$  phụ thuộc liên tục vào  $v(P)$
- $v(\text{NOT } (\text{NOT } P)) = v(P)$

### Định nghĩa 2 (Phần bù của một tập mờ):

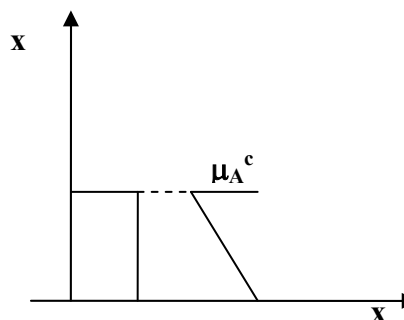
Cho  $n$  là hàm phủ định, phần bù  $A^c$  của tập mờ  $A$  là một tập mờ với hàm thuộc về được xác định bởi :

$$\mu_{A^c}(a) = n(\mu_A(a)) , \text{ với mỗi } a \in \Omega.$$

**Đồ thị của hàm thuộc về có dạng sau:**



Hình a



Hình b

Hình a : Hàm thuộc về của tập mờ  $A$

Hình b : Hàm thuộc về của tập mờ  $A^c$

Ví dụ : với  $n(x) = 1 - x$  thì ta có :

$$\mu_{A^c}(a) = n(\mu_A(a)) = 1 - \mu_A(a) , \text{ với mỗi } a \in \Omega.$$

Cho  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , và  $A$  là tập mờ trong  $\Omega$  như sau:

$$A = \{(1,0), (2,1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$$

Ta có :

$$A^c = \{(1,1), (2,0), (3,0.5), (4,0.7), (5,0.8)\}$$

### Định nghĩa 3:

a. Hàm phủ định  $n$  là nghiêm ngặt (strict) nếu nó là hàm liên tục và giảm nghiêm ngặt.

b. Hàm phủ định  $n$  là mạnh (strong) nếu nó là chặt và thỏa  $n(n(x)) = x, \forall x \in [0, 1]$ .

**Định nghĩa 4:**

Hàm  $\varphi = [a, b] \rightarrow [a, b]$  gọi là một tự đồng cấu (automorphism) của đoạn  $[a, b]$  nếu nó là hàm liên tục, tăng nghiêm ngặt và  $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$ .

**Định lý 1:**

Hàm  $n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  là hàm phủ định mạnh khi và chỉ khi có một tự đồng cấu  $\varphi$  của đoạn  $[0, 1]$  sao cho  $N(x) = N_{\varphi}(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$ .

**Định lý 2 :**

Hàm  $n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  là hàm phủ định nghiêm ngặt khi và chỉ khi có hai phép tự đồng cấu  $\psi, \varphi$  của  $[0, 1]$  sao cho  $n(x) = \psi(1 - \varphi(x))$ .

#### 4.4.2. Phép giao

Phép hội **AND** trong logic kinh điển là cơ sở để định nghĩa phép giao của 2 tập mờ. **AND** thỏa các tính chất sau :

- $v(P_1 \text{ AND } P_2)$  chỉ phụ thuộc vào  $v(P_1), v(P_2)$ .
- Nếu  $v(P_1)=1$  thì  $v(P_1 \text{ AND } P_2) = v(P_2)$ , với mọi  $P_2$
- Giao hoán  $v(P_1 \text{ AND } P_2) = v(P_2 \text{ AND } P_1)$
- Nếu  $v(P_1) \leq v(P_2)$  thì  $v(P_1 \text{ AND } P_3) \leq v(P_2 \text{ AND } P_3)$ , với mọi  $P_3$
- Kết hợp  $v(P_1 \text{ AND } (P_2 \text{ AND } P_3)) = v((P_1 \text{ AND } P_2) \text{ AND } P_3)$

**Định nghĩa 5:**

Hàm  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  là **phép hội** (t-chuẩn) khi và chỉ khi thỏa các điều kiện sau:

- $T(1, x) = x$ , với mọi  $0 \leq x \leq 1$ .
- $T$  có tính giao hoán, nghĩa là :  $T(x, y) = T(y, x)$ , với mọi  $0 \leq x, y \leq 1$ .
- $T$  không giảm theo nghĩa :  $T(x, y) \leq T(u, v)$ , với mọi  $x \leq u, y \leq v$ .
- $T$  có tính kết hợp :  $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ , với mọi  $0 \leq x, y, z \leq 1$ .

Từ các **tính chất trên có thể** suy ra  $T(0, x) = 0$ .

Ví dụ :

$$T(x, y) = \min(x, y)$$

$$T(x,y) = \max(0, x+y-1)$$

$$T(x,y) = x.y \quad (\text{tích đại số của } x \text{ và } y)$$

**Định nghĩa 6:**

Cho hai tập mờ  $A, B$  trên cùng không gian nền  $\Omega$  với hàm thuộc về  $\mu_A(a)$ ,  $\mu_B(a)$ , cho  $T$  là một phép hội .

Ứng với **phép hội  $T$** , tập giao của hai tập mờ  $A, B$  là một tập mờ trên  $\Omega$  với hàm thuộc về cho bởi :

$$\mu_{A \cap B}(a) = T(\mu_A(a), \mu_B(a)) \quad \forall a \in \Omega$$

Với  $T(x,y) = \min(x,y)$  ta có :

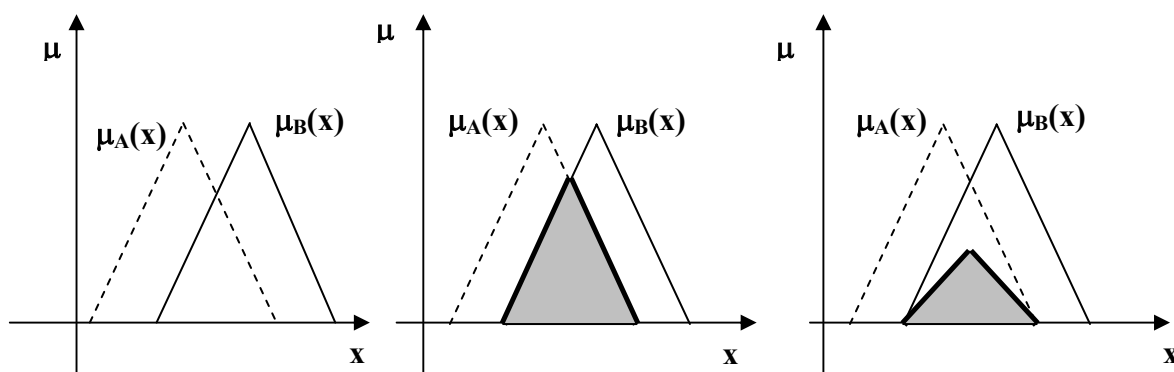
$$\mu_{A \cap B}(a) = \min(\mu_A(a), \mu_B(a))$$

Với  $T(x,y) = x.y$  ta có:

$$\mu_{A \cap B}(a) = \mu_A(a). \mu_B(a) \quad (\text{tích đại số})$$

Ta có thể biểu diễn phép giao của hai tập mờ qua hai hàm  $T(x,y) = \min(x,y)$  và  $T(x,y) = x.y$  theo các đồ thị sau đây:

- Hình a : Hàm thuộc về của hai tập mờ  $A$  và  $B$
- Hình b: Giao của hai tập mờ theo  $T(x,y) = \min(x,y)$
- Hình c: Giao của hai tập mờ theo  $T(x,y) = x.y$



Hình a

Hình b

Hình c

**Ví dụ :** Cho  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , và  $A, B$  là các tập mờ trong  $\Omega$  như sau:

$$A = \{(1,0), (2,1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$$

$$B = \{(1,0), (2,0.5), (3,0.7), (4,0.2), (5,0.4)\}$$

Với  $T(x,y) = \min(x,y)$ , ta có :

$$A \cap B = \{(1,0), (2,0.5), (3,0.5), (4,0.2), (5,0.2)\}$$

$$A \cap A^c = \{(1,0), (2,0.1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$$

### 4.4.3. Phép hợp

Phép tuyển OR trong logic kinh điển là cơ sở để định nghĩa phép hợp của 2 tập mờ. OR thỏa các tính chất sau :

- $v(P_1 \text{ OR } P_2)$  chỉ phụ thuộc vào  $v(P_1)$ ,  $v(P_2)$ .
- Nếu  $v(P_1) = 0$  thì  $v(P_1 \text{ OR } P_2) = v(P_2)$  , với mọi  $P_2$
- Giao hoán  $v(P_1 \text{ OR } P_2) = v(P_2 \text{ OR } P_1)$
- Nếu  $v(P_1) \leq v(P_2)$  thì  $v(P_1 \text{ OR } P_3) \leq v(P_2 \text{ OR } P_3)$ , với mọi  $P_3$
- Kết hợp  $v(P_1 \text{ OR } (P_2 \text{ OR } P_3)) = v((P_1 \text{ OR } P_2) \text{ OR } P_3)$ .

#### Định nghĩa 7:

Hàm  $S : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  được gọi là phép tuyển (t- đối chuẩn) nếu thỏa các tiên đề sau :

- $S(0, x) = x$ , với mọi  $0 \leq x \leq 1$ .
- S có tính giao hoán, nghĩa là :  $S(x,y) = S(y,x)$ , với mọi  $0 \leq x,y \leq 1$ .
- S không giảm theo nghĩa :  $S(x,y) \leq S(u,v)$ , với mọi  $x \leq u$ ,  $y \leq v$ .
- S có tính kết hợp :  $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$ , với mọi  $0 \leq x,y,z \leq 1$ .

Từ các tính chất trên suy ra  $S(1,x) = 1$ .

Ví dụ :

$$S(x,y) = \max(x,y)$$

$$S(x,y) = \min(1, x+y)$$

$$S(x,y) = x + y - x.y$$

#### Định nghĩa 8:

Cho hai tập mờ A, B trên cùng không gian nền  $\Omega$  với hàm thuộc về  $\mu_A(a)$ ,  $\mu_B(a)$ . Cho S là phép tuyển , phép hợp của hai tập mờ A, B là một tập mờ trên  $\Omega$  với hàm thuộc về cho bởi :

$$\mu_{A \cup B}(a) = S(\mu_A(a), \mu_B(a)) , \quad \forall a \in \Omega$$

Với  $S(x,y) = \max(x,y)$  ta có :

$$\mu_{A \cup B}(a) = \max(\mu_A(a), \mu_B(a)) \quad (\text{ xem hình a})$$

Với  $S(x,y) = \min(1, x+y)$

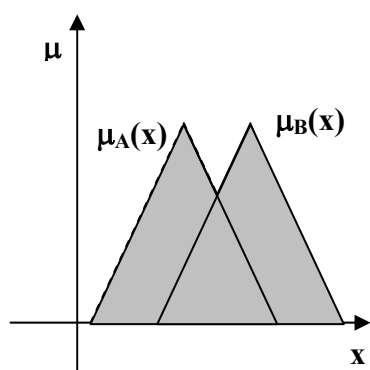
$$\mu_{A \cup B}(a) = \min(1, \mu_A(a) + \mu_B(a)) \quad (\text{ xem hình b})$$

Với  $S(x,y) = x + y - x.y$

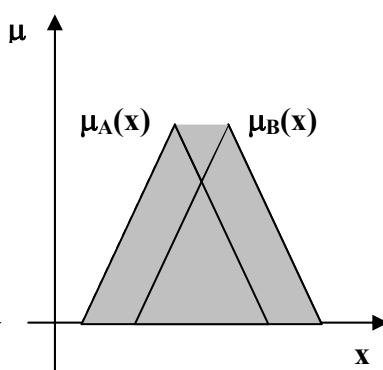
$$\mu_{A \cup B}(a) = \mu_A(a) + \mu_B(a) - \mu_A(a).\mu_B(a) \quad (\text{ xem hình c})$$

Có thể biểu diễn giao của các tập mờ với các phép toán trên bằng các đồ thị sau

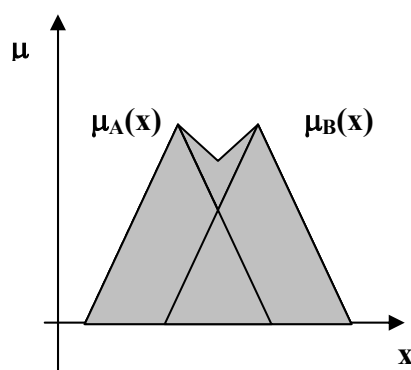
:



Hình a:



Hình b



Hình c

**Ví dụ :** Cho  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , và A, B là các tập mờ trong  $\Omega$  như sau:

$$A = \{(1,0), (2,1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$$

$$B = \{(1,0), (2,0.5), (3,0.7), (4,0.2), (5,0.4)\}$$

$$\text{Ta có : } A \cup B = \{(1,0), (2,1), (3,0.7), (4,0.3), (5,0.4)\}$$

$$A \cup A^c = \{(1,1), (2,1), (3,0.5), (4,0.7), (5,0.8)\}$$

#### 4.4.4. Một số qui tắc

Trong logic rõ với hai giá trị đúng, sai, có nhiều qui tắc đơn giản mà chúng ta thường sử dụng xem như tính chất hiển nhiên.

Ví dụ : với bất kỳ tập rõ  $A \subset \Omega$ , ta có:  $A \cap A^c = \emptyset$  và  $A \cup A^c = \Omega$ .

Thực ra, những qui tắc này có được là nhờ vào sự xây dựng toán học trước đó. Chuyển sang lý thuyết tập mờ thì hai tính chất quen dùng này đã không còn đúng nữa. Do đó, chúng ta cần xem xét lại một số tính chất.

- **Tính lũy đẳng (dempotancy)**

Chúng ta nói T là lũy đẳng nếu  $T(x,x) = x, \forall x \in [0,1]$ .

Tương tự, S là lũy đẳng nếu  $S(x,x) = x, \forall x \in [0,1]$ .

- **Tính hấp thu (absorption)**

Có hai dạng hấp thu :

$$- T(S(x,y),x) = x, \quad \forall x,y \in [0,1].$$

$$- S(T(x,y),x) = x, \quad \forall x,y \in [0,1].$$

- **Tính phân phối (distributivity)**

Có hai biểu thức xác định tính phân phối:

$$- S(x, T(y, z)) = T(S(x, y), S(x, z)), \quad \forall x, y, z \in [0, 1].$$

$$- T(x, S(y, z)) = S(T(x, y), T(x, z)), \quad \forall x, y, z \in [0, 1].$$

- **Luật De Morgan**

Cho  $T$  là t-chuẩn,  $S$  là t-đối chuẩn,  $n$  là phép phủ định. Chúng ta có bộ ba  $(T, S, n)$  là một bộ ba De Morgan nếu :

$$n(S(x, y)) = T(nx, ny)$$

#### 4.4.5. Phép kéo theo

Chúng ta sẽ xét phép kéo theo như một mối quan hệ, một toán tử logic.

Ta có các tiên đề sau cho hàm  $v(P_1 \rightarrow P_2)$  :

- $v(P_1 \rightarrow P_2)$  chỉ phụ thuộc vào  $v(P_1)$ ,  $v(P_2)$ .
- Nếu  $v(P_1) \leq v(P_3)$  thì  $v(P_1 \rightarrow P_2) \geq v(P_3 \rightarrow P_2)$ ,  $\forall P_2$
- Nếu  $v(P_2) \leq v(P_3)$  thì  $v(P_1 \rightarrow P_2) \leq v(P_1 \rightarrow P_3)$ ,  $\forall P_1$
- Nếu  $v(P_1) = 0$  thì  $v(P_1 \rightarrow P) = 1$ ,  $\forall P$ .
- Nếu  $v(P_1) = 1$  thì  $v(P \rightarrow P_1) = 1$ ,  $\forall P$ .
- Nếu  $v(P_1) = 1$  và  $v(P_2) = 0$  thì  $v(P_1 \rightarrow P_2) = 0$ .

Tính hợp lý của những tiên đề này dựa vào logic kinh điển và những tư duy trực quan của phép suy diễn. Từ tiên đề ban đầu ( $v(P_1 \rightarrow P_2)$  chỉ phụ thuộc vào  $v(P_1)$ ,  $v(P_2)$ ) khẳng định sự tồn tại của hàm số  $I(x, y)$  xác định trên  $[0, 1]^2$  với mong muốn tính chân trị của phép kéo theo qua biểu thức

$$v(P_1 \rightarrow P_2) = I(v(P_1), v(P_2))$$

**Định nghĩa 9:**

Phép kéo theo của một hàm số  $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  thỏa các điều kiện sau :

- Nếu  $x \leq z$  thì  $I(x, y) \geq I(z, y)$ ,  $\forall y \in [0, 1]$ .
- Nếu  $y \leq u$  thì  $I(x, y) \leq I(x, u)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .
- $I(0, x) = 1$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .
- $I(x, 1) = 1$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .
- $I(1, 0) = 0$

**Định nghĩa 10:**

Cho  $T$  là t-chuẩn,  $A$  là t-đối chuẩn,  $n$  là phép phủ định. Hàm  $I_S(x,y)$  xác định trên  $[0,1]^2$  bằng biểu thức :

$$I_S(x,y) = S(n(x),y)$$

**Ví dụ :** Cho  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , và  $A, B$  là các tập mờ trong  $\Omega$  như sau:

$$A = \{(1,0), (2,1), (3,0.5), (4,0.3), (5,0.2)\}$$

$$B = \{(1,0), (2,0.5), (3,0.7), (4,0.2), (5,0.4)\}$$

Với  $S(x,y) = \max(x,y)$  và  $n(x) = 1 - x$  ta có :

$$I_S(0,0) = S(n(0),0) = 1$$

$$I_S(1,0.5) = S(n(1),0.5) = 0.5$$

$$I_S(0.5,0.7) = S(n(0.5),0.7) = 0.7$$

$$I_S(0.3,0.2) = S(n(0.3),0.2) = 0.7$$

$$I_S(0.2,0.4) = S(n(0.2),0.4) = 0.8$$

## 4.5. Logic mờ

### 4.5.1. Định nghĩa mệnh đề mờ

Trong logic rõ thì mệnh đề là một câu phát biểu có giá trị đúng hoặc sai. Trong logic mờ thì mỗi mệnh đề mờ là một câu phát biểu không nhất thiết là đúng hoặc sai. Mệnh đề mờ được gán cho một giá trị trong khoảng từ 0 đến 1 để chỉ mức độ đúng (độ thuộc về) của nó.

Ví dụ : " Nam trông khá đẹp trai"

" Chiếc xe này chạy cũng được đấy".

" Cô ấy sống tạm gọi là hạnh phúc".

Cho  $\Omega = \{P_1, P_2, \dots\}$  với  $P_1, P_2, \dots$  là các mệnh đề. Tập mờ  $A$  trên  $\Omega$  tương ứng với ánh xạ  $v$  như sau:

$$v : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$\forall P_i \in \Omega \rightarrow v(P_i)$$

Ta gọi  $v(P_i)$  là chân trị của mệnh đề  $P_i$  trên  $[0, 1]$ .

Các phép toán trên mệnh đề mờ là các phép toán logic mờ dựa trên các tập mờ.

Ký hiệu mức độ đúng (chân trị) của mệnh đề mờ  $P$  là  $v(P)$ . Ta có :  $0 \leq v(P) \leq 1$ .

### 4.5.2. Các phép toán trên logic mờ

Các phép toán mệnh đề trong logic mờ được định nghĩa như sau:

. Phép phủ định :

$$v(\bar{P}) = 1 - v(P)$$

. Phép tuyển :

$$v(P_1 \vee P_2) = \max(v(P_1), v(P_2))$$

. Phép hội :

$$v(P_1 \wedge P_2) = \min(v(P_1), v(P_2))$$

Ví dụ 1:

Cho P, Q, R là các mệnh đề mờ với :  $v(P) = 0.1$ ,  $v(Q) = 0.9$ ,  $v(R) = 0.8$ .

Mệnh đề  $M = (P \wedge Q) \vee R$  có chân trị (độ thuộc về) là : 0.8

. Phép kéo theo:

$$v(P \rightarrow Q) = v(\bar{P} \vee Q) = \max(v(\bar{P}), v(Q))$$

Ví dụ 2:

Cho P, Q là các mệnh đề mờ với :  $v(P) = 0.1$ ,  $v(Q) = 0.6$

Mệnh đề  $v(P \rightarrow Q) = v(\bar{P} \vee Q) = \max(v(\bar{P}), v(Q)) = \max(1 - 0.1, 0.6) = 0.9$

### 4.6. Suy diễn mờ (Fuzzy inference)

Suy diễn mờ hay còn gọi là suy luận xấp xỉ là quá trình suy ra những kết luận dưới dạng các mệnh đề mờ trong điều kiện của qui tắc "Nếu... Thì...", với các dữ liệu đầu vào cho trước là không được rõ ràng.

Thông thường, suy diễn mờ hay sử dụng luật Modus Ponens hoặc Modus Tollens. Trong logic rõ, Modus Ponens diễn đạt như sau:

Mệnh đề 1 (Luật hoặc tri thức):  $P \rightarrow Q$

Mệnh đề 2 (sự kiện):  $P$  đúng

---

Kết luận :  $Q$  đúng

Trong suy diễn mờ, luật được diễn đạt dưới dạng sau :

Luật mờ : Nếu  $x=A$  thì  $y=B$

Sự kiện mờ :  $x=A'$

---

Kết luận :  $y=B'$

trong đó  $A, A'$  là các tập mờ trên không gian nền  $U$ ,  $B$  và  $B'$  là các tập mờ trên không gian nền  $V$ .

**Ví dụ :**

Luật mờ : Nếu góc tay quay ga lớn thì xe đi nhanh

Sự kiện mờ : Góc tay quay khá lớn

---

Kết luận : Xe đi khá nhanh

Trong logic rõ Modus Tollens có dạng:

Mệnh đề 1 (Luật hoặc tri thức):  $P \rightarrow Q$

Mệnh đề 2 (sự kiện):  $\neg Q$  đúng

---

Kết luận :  $\neg P$  đúng

Trong suy diễn mờ, luật được diễn đạt dưới dạng sau :

Luật mờ (hoặc tri thức mờ):  $P \rightarrow Q$

Sự kiện mờ :  $\neg Q$  khá đúng

---

Kết luận :  $\neg P$  khá đúng

**Ví dụ :**

Luật mờ : Nếu góc tay quay ga lớn thì xe đi nhanh

Sự kiện mờ : Xe không đi nhanh lắm

---

Kết luận : Góc tay quay không lớn lắm

Để ứng dụng suy diễn mờ vào trong bài toán thực tế thì vấn đề mấu chốt mà chúng ta cần thực hiện đó là xây dựng cơ chế lập luận xấp xỉ. Sau đây, chúng tôi xin trình bày một ứng dụng suy luận xấp xỉ trong việc chẩn đoán bệnh lao phổi. Trong phạm vi của chương này, chúng tôi chỉ trình bày phần sơ lược về cách xây dựng suy luận xấp xỉ.

Trước hết chúng ta hãy đi tìm hiểu về qui trình chẩn đoán. Hiện nay, khi một bệnh nhân đến khám tại một viện lao, bác sĩ tiến hành chẩn đoán theo các bước sau:

Giai đoạn 1: khám lâm sàng

- Khám ban đầu : nhìn bề ngoài (tóc, da, mắt,...)
- Hỏi về tình trạng của cơ thể bệnh nhân để có thêm nhiều thông tin.
- Từ các triệu chứng lâm sàng tiến hành chẩn đoán khẳng định khả năng mắc bệnh của bệnh nhân.

- Nếu hết giai đoạn này, bác sĩ không có nghi ngờ gì về bệnh lao, ông ta sẽ đưa ra câu trả lời phủ định bệnh lao và có thể gợi ý về khả năng bệnh nhân mắc một khác. Bệnh nhân sẽ được khuyên là nên quay lại nếu bệnh nặng hơn mà không rõ căn nguyên.

- Ngược lại, nếu tới cuối giai đoạn lâm sàng bệnh nhân bị nghi là đã mắc bệnh lao thì giai đoạn chẩn đoán thứ hai sẽ được tiến hành để có kết luận chắc chắn.

Giai đoạn 2: khám cận lâm sàng

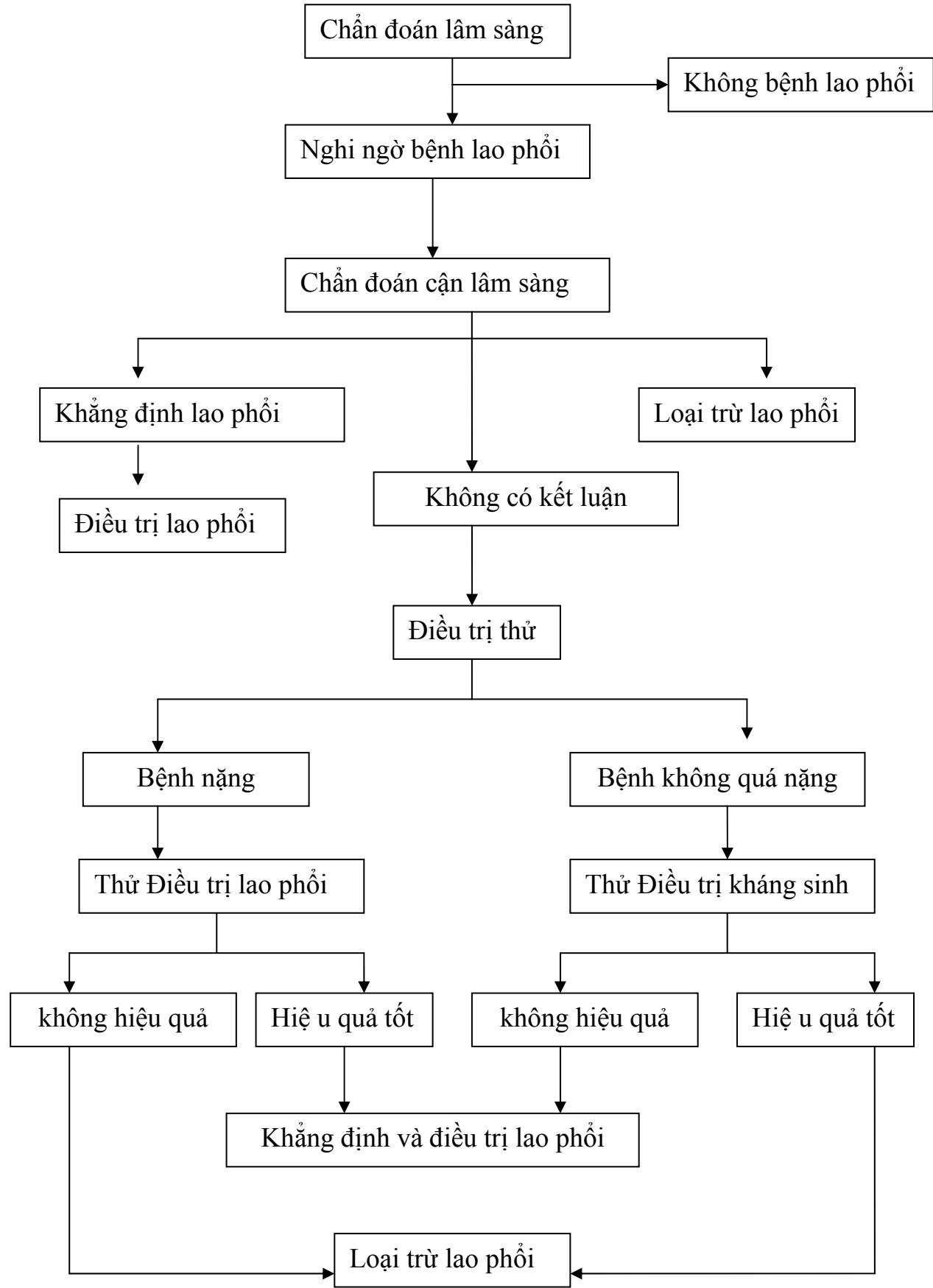
- Khám nghiệm đờm, ...

- Chụp X quang.

Hầu hết các triệu chứng cận lâm sàng đều có ảnh hưởng rất mạnh đến khả năng mắc bệnh của bệnh nhân. Vì vậy, bệnh trạng được khẳng định hoặc loại trừ một cách chắc chắn trong giai đoạn này.

Sau đó, bác sĩ sẽ có kết luận và đưa ra một phương án điều trị thử. Nếu bệnh trầm trọng thì bệnh nhân được điều trị lao phổi thử, nếu không quá trầm trọng thì điều trị bằng kháng sinh. Bởi vì, nếu thực tế không phải là lao phổi mà chỉ bị viêm phổi thì điều trị kháng sinh sẽ đem lại kết quả tích cực. Ngược lại, nếu thực sự mắc bệnh lao phổi thì chỉ phương án điều trị lao phổi mới có tác dụng.

Toàn bộ qui trình được thể hiện qua lược đồ sau:



Xây dựng suy diễn xấp xỉ :

Có 3 đối tượng mà chúng ta cần quan tâm :

1. Bệnh nhân : ký hiệu là P (Patient)

2. Các triệu chứng : S (Symptom)

Bao gồm : lâm sàng, cận lâm sàng, ... gọi chung là các triệu chứng. Ta có

:

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

3. Bệnh cần chẩn đoán : lao phổi D (Disease)

Nhận thấy giữa các đối tượng trên xuất hiện những quan hệ mờ :

Quan hệ triệu chứng - bệnh nhân :  $R_{SP}$

Quan hệ này được sử dụng làm thông tin đầu vào cho cơ chế lập luận trong quá trình chẩn đoán, được xác định bởi  $\mu_{SP} \in [0,1]$ . Giá trị này thể hiện mức độ xuất hiện của triệu chứng S trên bệnh nhân P. Nói cách khác,  $R_{SP}$  là một tập mờ có hàm thuộc về xác định như sau:

$$\mu_{SP} : R_{SP} \rightarrow [0,1]$$

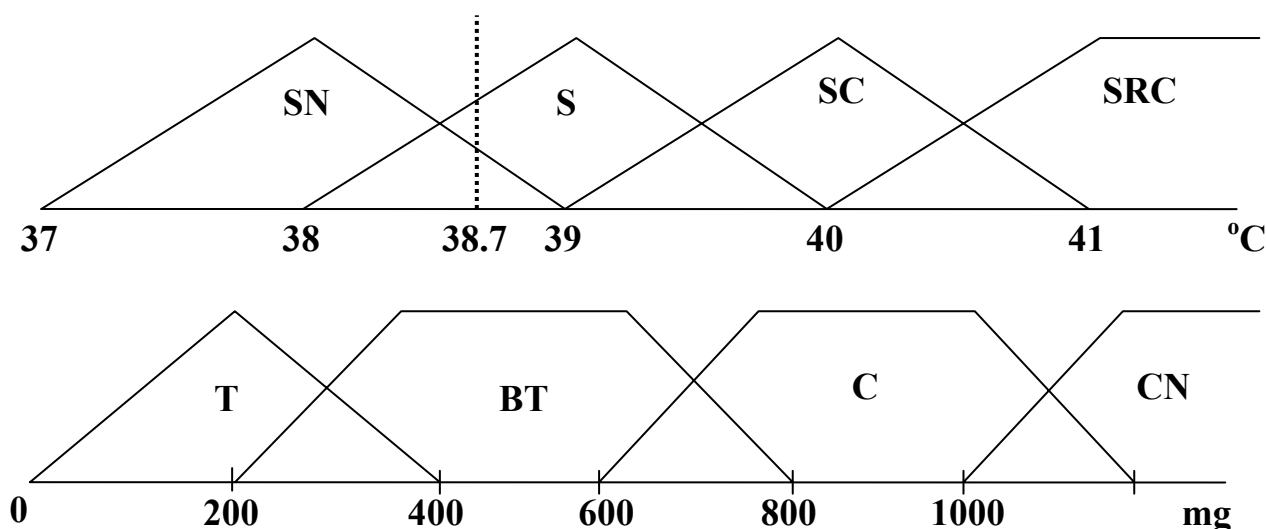
Với  $\mu_{SP} = 0$  có nghĩa là chắc chắn bệnh nhân không có triệu chứng S.

Với  $\mu_{SP} = 1$  có nghĩa là chắc chắn bệnh nhân có triệu chứng S.

Với  $0 < \mu_{SP} < 1$  có nghĩa là bệnh nhân có triệu chứng S với mức độ xuất hiện là  $\mu_{SP}$ .

Ví dụ : Giả sử để xem xét mức độ sốt của bệnh nhân để đưa ra liều lượng thuốc, có các phát biểu mờ (luật mờ) như sau :

- IF sốt nhẹ THEN liều lượng asperine thấp
- IF sốt THEN liều lượng asperine bình thường
- IF sốt cao THEN liều lượng asperine cao
- IF sốt rất cao THEN liều lượng asperine cao nhất



■ Thông thường người ta sẽ thực hiện 3 bước:

- Mờ hóa (fuzzyfication) giá trị nhập vào
- Suy luận Mờ
- Khử tính mờ (defuzzyfication) cho giá trị xuất ra

Vậy nếu bệnh nhân sốt ở 38.7 độ

=> liều lượng kê đơn là 480mg

Phần => là cả quá trình khử tính mờ (làm rõ hóa) chúng tôi không trình bày chi tiết ở đây, có thể dựa vào đồ thị để suy ra kết quả.

Ngoài ra, đôi khi bác sĩ phải đi đến kết luận "không rõ" đối với một triệu chứng nào đó. Khi đó,  $\mu_{SP}$  được định nghĩa là một giá trị rất bé như sau:  $\mu_{SP} = \varepsilon \approx 0$

Kế tiếp, chúng ta phải xác định quan hệ bệnh nhân - bệnh lao phổi :  $R_{PD}$  . Xác định mối quan hệ này cũng có nghĩa là đưa ra kết quả chẩn đoán về khả năng mắc bệnh của bệnh nhân.

## 4.7. Tổng kết chương 4

Tất cả những kiến thức trình bày trong chương này chỉ là phần cơ bản của lý thuyết tập mờ và logic mờ. Chúng tôi không đi sâu vào chi tiết mà chỉ nhằm mục đích trình bày các khái niệm và các phép toán để sinh viên nắm bắt được vấn đề là bên cạnh logic rõ còn có logic mờ. Sinh viên có thể tìm hiểu sâu hơn về logic mờ ở năm thứ tư trong phần ứng dụng logic mờ vào điều khiển tự động hóa (dành cho lớp điện tử) hay ứng dụng logic mờ trong trí tuệ nhân tạo. Tuy vậy, hy vọng rằng với các cơ sở kiến thức nền về logic mệnh đề, suy luận toán học, vị từ và lý thuyết tập mờ trong giáo trình này là hành trang hữu ích để đi vào các tri thức cao hơn.

#### 4.8. Bài tập chương 4

1. Cho  $\Omega = \{6, 2, 7, 4, 9\}$ , các tập mờ A, B, C trên  $\Omega$  tương ứng với ánh xạ  $\mu_A$ ,  $\mu_B$  và  $\mu_C$  như sau:

$$A = \{(6,0.2), (2,0.9), (7,0.5), (4,0.3), (9,0.2)\}$$

$$B = \{(6,0), (2,1), (7,0.5), (4,0.6), (9,0.1)\}$$

$$C = \{(6,0.3), (2,0.1), (7,1), (4,0), (9,0.5)\}$$

a/ Tính các tập  $A^C$ ,  $B^C$  và  $C^C$  với hàm thuộc về là  $1-x$

b/ Tính  $A \cap B$ ,  $B \cap C$ ,  $A \cap B \cap C$ ,  $A \cap C^C$ ,  $A \cap C^C$  với  $T(x,y) = \min(x,y)$

c/ Tính  $A \cup B$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cup B \cup C$ ,  $A \cup C^C$ ,  $A \cup C^C$  với  $S(x,y) = \max(x,y)$

2. Cho các tập mờ A,B,C được định nghĩa trên nền số nguyên  $\Omega = [0,5]$  với các hàm thuộc về như sau:  $\mu_A = \frac{x}{x+2}$  và  $\mu_B = \frac{1}{x}$

Hãy xác định các tập mờ sau ở dạng liệt kê và đồ thị :

a/ Tính các tập  $A^C$ ,  $B^C$  và  $C^C$  với hàm thuộc về là  $1-x$

b/ Tính  $A \cap B$ ,  $B \cap C$ ,  $A \cap B \cap C$ ,  $A \cap C^C$ ,  $A \cap C^C$  với  $T(x,y) = \min(x,y)$

c/ Tính  $A \cup B$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cup B \cup C$ ,  $A \cup C^C$ ,  $A \cup C^C$  với  $S(x,y) = \max(x,y)$

3. Thiết lập mô hình phân loại sinh viên qua các tập mờ sinh viên cần cù, sinh viên thông minh và sinh viên lười.

4. Cho A là tập mờ xác định trên nền X. Hãy chỉ ra rằng biểu thức  $A \cap C^C = X$  không đúng như đối với tập hợp kinh điển.

5. Kiểm tra xem tập mờ A, B với các hàm thuộc về xác định ở bài tập 2 là thỏa hai công thức của De Morgan.

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| CHƯƠNG 4 : LÝ THUYẾT TẬP MỜ & LOGIC MỜ ..... | 61 |
| 4.1. Tổng quan .....                         | 61 |
| 4.2. Giới thiệu .....                        | 61 |
| 4.3. Khái niệm tập mờ (fuzzy set) .....      | 62 |
| 4.4. Các phép toán về tập mờ.....            | 65 |
| 4.4.1. Phép bù .....                         | 65 |
| 4.4.2. Phép giao .....                       | 67 |
| 4.4.3. Phép hợp .....                        | 69 |
| 4.4.4. Một số qui tắc .....                  | 70 |
| 4.4.5. Phép kéo theo .....                   | 71 |
| 4.5. Logic mờ.....                           | 72 |
| 4.5.1. Định nghĩa mệnh đề mờ .....           | 72 |
| 4.5.2. Các phép toán trên logic mờ.....      | 73 |
| 4.6. Suy diễn mờ (Fuzzy inference).....      | 73 |
| 4.7. Tổng kết chương 4 .....                 | 78 |
| 4.8. Bài tập chương 4.....                   | 79 |

## Predicates and Quantifiers: Suggested Exercises

1. Write each of the following expressions so that negations are only applied to propositional functions (and not quantifiers or connectives).
  - (a)  $\neg\forall x\exists y\neg P(x, y)$
  - (b)  $\neg(\forall x\exists yP(x, y) \wedge \exists x\neg\forall yP(x, y))$
  - (c)  $\neg\forall x(\exists yP(x, y) \vee \forall yQ(x, y))$
  - (d)  $\neg\forall x\neg\exists y(\neg\forall zP(x, z) \rightarrow \exists zQ(x, y, z))$
  - (e)  $\neg\exists x(\neg\forall y[\exists z(P(y, x, z) \wedge P(y, z, x) \wedge P(x, y, z))] \vee \exists zQ(x, z))$
2. Let  $P(x, y)$  = "x likes y", where the universe of discourse for  $x$  and  $y$  is the set of all people. For each of the following, translate the expression to English, and tell the truth value.
  - (a)  $\forall x\forall yP(x, y)$
  - (b)  $\forall x\exists yP(x, y)$
  - (c)  $\forall y\exists xP(x, y)$
  - (d)  $\forall xP(x, \text{Chuck})$
  - (e)  $\neg\forall x\forall yP(x, y)$
  - (f)  $\forall x\neg\forall yP(x, y)$
  - (g)  $\forall x\neg\forall y\neg P(x, y)$
3. Let  $P(x, y, z)$  = " $x^2 + y^2 = z^2$ ", where the universe of discourse for all variables is the set of integers. What are the truth values of each of the following?
  - (a)  $\forall x\forall y\forall zP(x, y, z)$
  - (b)  $\exists x\exists y\forall zP(x, y, z)$
  - (c)  $\forall x\exists y\exists zP(x, y, z)$
  - (d)  $\forall x\forall y\exists zP(x, y, z)$
  - (e)  $\forall x\exists y\forall zP(x, y, z)$
  - (f)  $\exists x\exists y\exists zP(x, y, z)$
  - (g)  $\exists zP(2, 3, z)$
  - (h)  $\exists x\exists yP(x, y, 5)$
  - (i)  $\exists x\exists yP(x, y, 3)$
4. Write each of the following sentences using quantifiers and propositional functions (if it is possible).
  - (a) All disc golfers play ultimate frisbee.
  - (b) If all students in my class do their homework, then some of the students will pass.
  - (c) If none of the students in my class study, then all of the students in my class will fail.
  - (d) Not everybody knows how to throw a frisbee 300 feet.
  - (e) Some people like ice cream, and some people like cake, but everybody needs to drink water.
  - (f) Everybody loves somebody.
  - (g) Everybody is loved by somebody.
  - (h) Not everybody is loved by everybody.
  - (i) Nobody is loved by everybody.
  - (j) You can't please all of the people all of the time, but you can please some of the people some of the time.
  - (k) If only somebody would give me some money, I would buy a new house.
  - (l) Nobody loves me, everybody hates me, I'm going to eat some worms.
  - (m) Every rose has it's thorn, and every night has it's dawn.

| Rules of Inference                                                           |                        |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| Tautology                                                                    | Rule                   |
| $p \rightarrow (p \vee q)$                                                   | Addition               |
| $(p \wedge q) \rightarrow p$                                                 | Simplification         |
| $((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$                                  | Conjunction            |
| $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$                                 | Modus Ponens           |
| $[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$                       | Modus Tollens          |
| $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ | Hypothetical Syllogism |
| $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$                                   | Disjunctive Syllogism  |
| $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$                  | Contrapositive         |

| Rules of Inference for Quantifiers                                   |                            |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| $\forall x P(x)$<br>$\therefore P(c) \text{ if } c \in U$            | Universal instantiation    |
| $P(c) \text{ for arbitrary } c \in U$<br>$\therefore \forall x P(x)$ | Universal generalization   |
| $\exists x P(x)$<br>$\therefore P(c) \text{ for some } c \in U$      | Existential instantiation  |
| $P(c) \text{ for some } c \in U$<br>$\therefore \exists x P(x)$      | Existential generalization |

# Equivalence Relations

**Definition:** A relation  $R$  on a set  $A$  is called an *equivalence relation* if it is reflexive, symmetric, and transitive. Recall the definitions:

- **reflexive:**  $(a, a) \in R$  for all  $a \in A$ .
- **symmetric:**  $(a, b) \in R$  when  $(b, a) \in R$ , for  $a, b \in A$ .
- **transitive:**  $(a, b) \in R$  and  $(b, c) \in R$  implies  $(a, c) \in R$ , for  $a, b, c \in A$ .

If two elements are related by an equivalence relation, they are said to be *equivalent*.

## Examples

1. Let  $R$  be the relation on the set of English words such that  $\alpha R \beta$  if and only if  $\alpha$  starts with the same letter as  $\beta$ . Then  $R$  is an equivalence relation.
2. Let  $R$  be the relation on the set of all human beings such that  $x R y$  if and only if  $x$  was born in the same country as  $y$ . Then  $R$  is an equivalence relation.
3. Let  $R$  be the relation on the set of all human beings such that  $x R y$  if and only if  $x$  owns the same color car as  $y$ . Then  $R$  is an *not* equivalence relation.

# Congruence Modulo $m$

Let  $m > 1$  be a positive integer. Then the relation

$$R = \{(a, b) : a \equiv b \pmod{m}\}$$

is an equivalence relation.

**Proof:** By definition,  $a \equiv b \pmod{m}$  if and only if  $a - b = mk$ , for some integer  $k$ . Using this, we proceed:

- Since  $a - a = 0 = 0m$ , we have that  $a \equiv a \pmod{m}$ , and  $R$  is reflexive.
- If  $a \equiv b \pmod{m}$ , then  $a - b = km$ , for some integer  $k$ . Thus,  $b - a = (-k)m$ , and we have  $b \equiv a \pmod{m}$ , so  $R$  is symmetric.

- If  $a \equiv b \pmod{m}$ , and  $b \equiv c \pmod{m}$ , then we have  $a - b = km$  and  $b - c = lm$ , for integers  $k$  and  $l$ . Thus,

$$a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l)m,$$

and we have  $a \equiv c \pmod{m}$ , and  $R$  is transitive.

Therefore, congruence modulo  $m$  is an equivalence relation ■

**Definition:** Let  $R$  be an equivalence relation on a set  $A$ . The *equivalence class of  $a$*  is

$$[a]_R = \{b : (a, b) \in R\}.$$

In words,  $[a]_R$  is the set of all elements that are related to the element  $a \in A$ . If the relation is clear, we can omit the subscript (i.e.  $[a]$  instead of  $[a]_R$ ).

If  $b \in [a]_R$ , then  $b$  is called a *representative* of the equivalence class.

## Examples Continued

1. The equivalence class of **Xenon** is all words starting with the letter *X*. That is,

$$[\text{Xenon}] = \{ \alpha : \alpha \text{ is an English word starting with the letter } X \}$$

2. The equivalence class of *Chuck Cusack* is all people born in the United States of America. That is,

$$[\text{Chuck Cusack}] = \{ A : A \text{ is a person that was } \textit{born in the U.S.A.} \}$$

### **Example: Congruence Classes Modulo $m$**

The congruence class of an integer  $a$  modulo  $m$  is denoted by  $[a]_m$ .

Thus,

$$[3]_5 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$[0]_8 = \{\dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots\}$$

$$[5]_4 = [1]_4 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

## Equivalence Classes and Partitions

**Theorem 1:** Let  $R$  be an equivalence relation on a set  $A$ . The following statements are equivalent:

$$1. aRb$$

$$2. [a] = [b]$$

$$3. [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

**Proof:** Show that  $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$ , and  $3 \Rightarrow 1$ .

Notice that this theorem says that if the intersection of two equivalence classes is not empty, then they are equal. That is, two equivalence classes are either equal or disjoint.

**Definition:** A *partition* of a set  $S$  is a collection of disjoint nonempty subsets of  $S$  whose union is  $S$ . That is, a partition of  $S$  is a collections of subsets  $A_i, i \in I$  such that

$$A_i \neq \emptyset \text{ for } i \in I,$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ when } i \neq j, \text{ and}$$

$$\cup_{i \in I} A_i = S.$$

( $I$  is an index set. For example, often  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .)

**Theorem 2:** Let  $R$  be an equivalence relation on a set  $S$ . Then the equivalence classes of  $R$  form a partition of  $S$ . Conversely, given a partition  $\{A_i : i \in I\}$  of the set  $S$ , there is an equivalence relation  $R$  that has the sets  $A_i, i \in I$ , as its equivalence classes.

**Proof (informal):** The equivalence classes of an equivalence relation are nonempty (since  $a \in [a]_R$ ), and by Theorem 1 are disjoint. Since every element of the set  $S$  is in some equivalence class (e.g.  $a \in [a]_R$ ), the equivalence classes partition  $S$ .

(Proof of Theorem 2, continued)

Now, assume we have a partition  $\{A_i : i \in I\}$  of a set  $S$ .

Define a relation on  $S$  by  $aRb$  if and only if  $a, b \in A_i$  for some  $i$ . It is not hard to see that this is an equivalence relation

■

**Example:** We can partition the set of integers according to the equivalence classes modulo 5 as follows:

$$[0]_5 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\},$$

$$[1]_5 = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\},$$

$$[2]_5 = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\},$$

$$[3]_5 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\},$$

$$[4]_5 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}.$$

**Example:** Let  $R$  be the equivalence relation on the set of English words defined by  $\alpha R \beta$  if and only if  $\alpha$  starts with the same letter as  $\beta$ . Then we can partition the set of English words as follows:

$$\begin{aligned}[a] &= \{a, ant, any, able, \dots\}, \\[bread] &= \{be, big, bread, brown, \dots\}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ [zip] &= \{zebra, zed, zip, zoo, \dots\}.\end{aligned}$$

| Logical Equivalences                                                                                                                       |                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Equivalence                                                                                                                                | Name                                   |
| $p \vee T \Leftrightarrow T$<br>$p \wedge F \Leftrightarrow F$                                                                             | Domination laws                        |
| $p \wedge T \Leftrightarrow p$<br>$p \vee F \Leftrightarrow p$                                                                             | Identity laws                          |
| $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge p \Leftrightarrow p$                                                                             | Idempotent laws                        |
| $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$                                                                                                           | Double negation law                    |
| $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$<br>$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$                                                                   | Cancellation laws<br>(Unofficial name) |
| $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$<br>$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$                                                             | Commutative laws                       |
| $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$                     | Associative laws                       |
| $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | Distributive laws                      |
| $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$                             | De Morgan's laws                       |
| $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$                                                                                        | Implication law                        |