TRƯỜNG ĐẠI HỌC NÔNG NGHIỆP I

PGS.TS. NGUYỄN HẢI THANH

TOÁN ỨNG DỤNG

(Giáo trình Sau đại học)

NHê XUỵ T Bü N ụ ý I H̆ C Sh PHý M

Mục lục

Mở đầu

Trong một vài năm gần đây, các môn học Toán – Tin ứng dụng đã được đưa vào chương trình đào tạo Sau đại học cho một số chuyên ngành kinh tế – kĩ thuật như Quản trị kinh doanh, Quản lí đất đai, Công nghệ thông tin, Sinh học ... tại một số trường đại học trong nước. Các môn học này, tuy số đơn vị học trình chưa nhiều nhưng đã giúp cho học viên cao học cũng như các nghiên cứu sinh có những kiến thức cơ sở và nâng cao về Toán học và Tin học, đặc biệt về các phương pháp tính toán khoa học (Scientific Computing Methods), là các vấn đề hết sức cần thiết cho các đề tài nghiên cứu khoa học của họ. Điều này cũng phù hợp với xu thế chung trong đào tạo Sau đại học tại các trường đại học nước ngoài, với các môn học về Toán – Tin nâng cao cho học viên cao học, thường chiếm thời lượng khá lớn tới khoảng 200 đến 250 tiết bao gồm nhiều nội dung phong phú và cấp thiết.

Xuất phát từ những lí do trên và dựa trên các kinh nghiệm tích luỹ được trong quá trình dạy một số môn học cho chương trình Cao học Quản lí đất đai và Cao học Điện (Trường Đại học Nông nghiệp I), Cao học Toán – Tin ứng dụng (Trường Đại học Bách khoa Hà Nội), Cao học Quản trị kinh doanh (tại một số trường đại học khác), chúng tôi biên soạn giáo trình này với mong muốn việc ứng dụng các phương pháp toán học, các phương pháp vận trù học được triển khai rộng rãi hơn và mang lại các hiệu quả thiết thực hơn. Giáo trình với thời lượng từ 45 tới 60 tiết, trước hết, dành cho học viên cao học ngành Điện, với các nội dung đã được Khoa Cơ điện và Khoa Sau đại học, Trường Đại học Nông nghiệp I, thông qua. Các chủ đề trong giáo trình bao gồm: một số mô hình và phương pháp tối ưu, các bài toán về mạng, giới thiệu về quy hoạch động, một số ứng dụng của lí thuyết hàng chờ (Waiting Line Theory) và mô phỏng ngẫu nhiên (Stochastic Simulation), các khái niệm cơ bản và ứng dụng của quá trình ngẫu nhiên Markov. Đây là các chủ đề chính về Toán ứng dụng và Vận trù học mà học viên cao học của nhiều chuyên ngành kinh tế – kĩ thuật tại các trường đại học nước ngoài bắt buộc phải học. Các chủ đề này có thể giúp ích không chỉ cho vấn đề quản lí – sử dụng điện mà còn cho vấn đề thiết kế và xây dựng các hệ thống kĩ thuật điện. Giáo trình cũng có thể được lấy làm tài liệu tham khảo về các phương pháp toán ứng dụng hay mô hình hoá cho chương trình Cao học các chuyên ngành như: Quản lí đất đai, Kinh tế nông nghiệp và một số chuyên ngành kinh tế – kĩ thuật khác.

Khi biên soạn giáo trình, chúng tôi luôn chú ý nhấn mạnh khía cạnh ứng dụng các phương pháp toán học và khía cạnh tính toán khoa học với các ví dụ minh hoạ chọn lọc, nhằm giúp cho học viên hiểu rõ nên áp dụng các phương pháp đó vào các vấn đề nghiên cứu nào và áp dụng chúng như thế nào cho một số trường hợp cụ thể. Do thời lượng của môn học, giáo trình không đi sâu vào vấn đề chứng minh toán học của các phương pháp này cũng như các ứng dụng tổng quát của chúng trong các hệ thống lớn.

Hi vọng rằng, những học viên cao học quan tâm tới các phương pháp toán học được

trình bày trong giáo trình có thể tự mình tiếp tục có những nghiên cứu chuyên sâu hơn sau này. Chẳng hạn, với kiến thức về quy hoạch động và các phương pháp tối ưu phi tuyến mà giáo trình cung cấp, người đọc có thể tiếp tục nghiên cứu về các phương pháp quy hoạch động nhằm áp dụng vào các hệ điều khiển tối ưu trong tự động hoá. Còn với một số chủ đề về xích Markov và ứng dụng cũng như mô phỏng xích Markov, người đọc có thể tiếp tục nghiên cứu về các mô hình ngẫu nhiên như quá trình sinh–tử hay quá trình hồi phục có nhiều ứng dụng rộng rãi trong ngành Điện, Điện tử và Viễn thông hay Công nghệ thông tin.

Đây là một trong số không nhiều các giáo trình về Toán ứng dụng dành cho chương trình Sau đại học các chuyên ngành kinh tế – kĩ thuật tại các trường đại học trong nước, nên mặc dù chúng tôi hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn, nhưng chắc chắn giáo trình không tránh khỏi còn tồn tại những điểm hạn chế. Chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của các nhà khoa học, các thầy giáo, cô giáo, các học viên cao học, tiến sĩ để giáo trình được hoàn chỉnh, chính xác và sinh động hơn.

Cuối cùng, tác giả xin chân thành cảm ơn Khoa Sau đại học và Khoa Cơ điện, Trường Đại học Nông nghiệp I về những giúp đỡ quý báu trong quá trình biên soạn; cảm ơn Bộ môn Toán, giảng viên Đặng Xuân Hà và Bộ môn Tin học, các học viên cao học chuyên ngành Điện khoá 10 và 11, Trường Đại học Nông nghiệp I; kĩ sư Phan Văn Tiến và các học viên cao học chuyên ngành Toán – Tin ứng dụng, khoá 1 và 2, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, đã dành ý kiến đóng góp và tham gia hoàn chỉnh một số nội dung của giáo trình này. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các ý kiến phản biện quý báu của các ông Trưởng bộ môn Toán, Trường Đại học Nông nghiệp I và Trưởng khoa Toán – Tin ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

Hà Nội, ngày 19 tháng 5 năm 2005

PGS.TS. Nguyễn Hải Thanh

Chương I

MỘT SỐ MÔ HÌNH VÀ PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU

1. Mô hình quy hoạch tuyến tính

1.1. Các bước cần thiết khi áp dụng phương pháp mô hình hoá

– Tr·Ợ c hJ phÇi khÇo s§t, ph§t hi¸n vÈn LÒ cÇn giÇi quyJ.

– Ph§t biW c§c LiÒu ki¸n r¨ng bu¸c, m¹c ti°u c¹a b¨i to§n d·Ợi dÜng L¸nh t²nh. Sau L· l¹a chÒn c§c biJn quyJ L¸nh / c§c XÒn s´ v¨ x©y d¹ng m¹ h³nh L¸nh l·Ợng (c¸n g¸i l¨ m¹ h³nh to§n hÒc).

– Thu thÒp s´ li¸u, x§c L¸nh ph·Ợng ph§p giÇi quyJ.

– ¸nh ra quy tr³nh giÇi / thuÒt giÇi. C· thWgiÇi m¹ h³nh b·Ằng c§ch t²nh to§n th¹ng th·Ợng. ¸´ i v¸i c§c m¹ h³nh l¸n, gằm nhiÒu biJn v¨ nhiÒu LiÒu ki¸n r¨ng bu¸c cÇn lÒp tr³nh v¨ giÇi m¹ h³nh tr°n m§y t²nh.

– ¸§nh gi§ kJ quÇ. Trong tr·Ợng hằp ph§t hi¸n thÈy c· kJ quÇ bÈt th·Ợng hoÈc kJ quÇ kh¹ng ph½hằp v¸i th¸c tJ cÇn kiW tra v¨ ch¨nh s¹a lÜi quy tr³nh giÇi hoÈc m¹ h³nh.

– TriW khai c§c ph·Ợng §n t³m LÒ c tr°n th¸c tJ

C§c thuÒt ng¸ sau th·Ợng gÈp khi §p d¹ng ph·Ợng ph§p m¹ h³nh ho§:

– ¸ng d¹ng to§n/To§n ¸ng d¹ng (*MathematicalApplications* hay *Applied Mathematics*).

– VÒn tr½hÒc (*Operations Research* viJ tÒt l¨ *OR*).

– Khoa hÒc quÇn l² (*Management Science* viJ tÒt l¨ *MS*)

1.2. Mô hình quy hoạch tuyến tính

Phát biểu mô hình

V¸i m¹c L²ch t³m hiW b·Ợc LÈu, x®t m¹ h³nh to§n hÒc sau L©y, c¸n g¸i l¨ m¹ h³nh quy hoÜch tuyJn t²nh hay b¨i to§n quy hoÜch tuyJn t²nh (BTQHTT), m¨ trong L· ch½ng ta mu´n t´i ·Ợu ho§ (c¸c LÜi ho§ hay c¸c tiW ho§) h¨m m¹c ti°u:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_nx_n \rightarrow Max\ (Min)$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ (điều kiện không âm)

Ví dụ: $z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{Max}$

v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

CÇn t³m c§c gi§ tr· c¸a c§c biÕn quyÕt L©nh x_1, x_2 LÀm c§c r¨ng bu¸c L·Ề c thoÒ m«n v¨ h¨m m¸c ti°u LÀ gi§ tr· l¸n nhÕt.

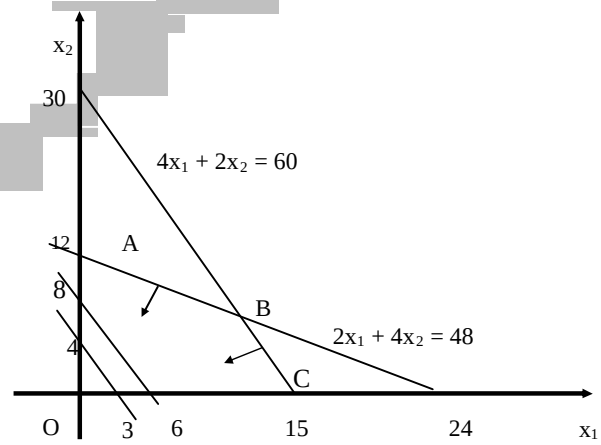
B¨i to§n n¨y c· Ã nghĩa kinh tÕ nh·Ề sau: GiÒ s· m¸t x² nghi¹p sÒn xuÕt hai loÕi sÒn phÈm I v¨ II. ¸n WsÒn xuÕt ra m¸t LÈhn v· sÒn phÈm I cÇn c· 4 LÈhn v· nguy°n li¹u loÕi A v¨ 2 LÈhn v· nguy°n li¹u loÕi B, c§c ch" ti °u L· cho m¸t LÈhn v· sÒn phÈm loÕi I I l¨ 2 v¨ 4. L·Ề ng nguy°n li¹u d¸ tr¸ loÕi A v¨ B hi¹n c· l¨ 60 v¨ 48 (LÈhn v·). H«y x§c LÒnh ph·Ềng §n sÒn xuÕt LÀi Ò i nhuÕn l¸n nhÕt, biÕt Ò i nhuÕn tr °n m¸i LÈhn v· sÒn phÈm b§n ra l¨ 8 v¨ 6 (LÈhn v· tiÒn t¹) cho c§c sÒn phÈm loÕi I v¨ II.

Phương pháp đồ thị

Ph·Ềng ph§p LÒ th· c· Ã nghĩa minh hoÕ v¨ gi¼p hiÈu bÒn chÕt vÕn LÒ

Bước 1: VÈ miền r¨ng bu¸c / miền c§c ph·Ềng §n khÒ thi, l¨ tÕp h¨p c§c ph·Ềng §n khÒ thi (c§c ph·Ềng §n, nÕu n· i m¸t c§ch ngÕu n g¨n). M¸i ph·Ềng §n LÀ c thÈhi¹n qua b¸ s´ (x_1, x_2) c¸n g¨i l¨ v®c th nghi¹m, thoÒ m«n tÕt cÒ c§c r¨ng bu¸c L« c· (xem h³nh I.1).

– Tr·Ề c hÕt chÈng ta vÈ LÒ th· $4x_1 + 2x_2 = 60$ bÈng c§ch x§c LÒnh hai LiÈm tr°n LÒ th·: ($x_1 = 0$, $x_2 = 30$) v¨ ($x_2 = 0$, $x_1 = 15$).



Hình I.1. Phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

ng¶y th¬ tr°n l¨ m¸t L:Ê ng th?ng chia mHÜ ph?ng l¨m hai n¯a mHÜ ph?ng: m¸t phÇn g¶m c§c LiW¶n (x_1, x_2) thoÇm«n $4x_1 + 2x_2 \leq 60$; m¸t phÇn thoÇm«n $4x_1 + 2x_2 \geq 60$. Ta t³m L:Ê c n¯a mHÜ ph?ng thoÇm«n $4x_1 + 2x_2 \leq 60$.

– T·Êhng t¸, c· thW¶ÊÊ L¶° th¬ $2x_1 + 4x_2 = 48$ b?ng c§ch x§c L¶nh hai LiW¶n thu¸c L¶° th¬ ($x_1 = 0$, $x_2 = 12$) v¨ ($x_2 = 0$, $x_1 = 24$). Sau L· t³m n¯a mHÜ ph?ng thoÇm«n $2x_1 + 4x_2 \leq 48$.

– L½c n¨y, giao c¸a hai n¯a mHÜ ph?ng t³m L:Ê c tr°n cho ta tÆp h¯p c§c LiW¶n (x_1, x_2) thoÇm«n hai r¨ng bu¸c LÇu ti°n. Tuy nhi°n, L'WÆthoÇm«n LiQu ki¶n kh¹ng @m c¸a c§c biÆh, ta ch¨ x®c c§c LiW¶n n?m trong g·c phÇn t·Êth¸ nhÈt. VÆy miQn c§c ph·Êhng §n khÇ thi l¨ miQn gi¸i h¶n b¶i t¸ gi§c OABC (c¸n g¯i l¨ L'hn h³nh v³ l¨ miQn tÜo n°n b¶i giao c¸a c§c n¯a mHÜ ph?ng).

Bước 2: Trong miQn (OABC) ta t³m LiW¶n (x_1, x_2) sao cho

$$z = 8x_1 + 6x_2 \text{ L'Ü¹t gi§ tr¸ l¸n nhÈt.}$$

Cách 1: Dùng đường đồng mức. T½y theo gi§ tr¸ c¸a x_1, x_2 m¨ z c· nh¸ng m¸c gi§ tr¸ kh§c nhau.

– VÊ L:Ê ng L°° ng m¸c: $8x_1 + 6x_2 = c$ ´ m¸c c = 24, (ta c· thWch¯n gi§ tr¸ c bÈi k³, nh·Êng ch¯n c = 24 l¨ b¸i s´ chung c¸a 6 v¨ 8 L'Wi¶c t³m toÜL¸ c§c LiW¶n cÆi hai tr¸c toÜL¸ thuÆn l¶i hhn). D¸ d¨ng t³m L:Ê c hai LiW¶n n?m tr°n L:Ê ng L°° ng m¸c n¨y l¨ ($x_1 = 0$, $x_2 = 4$) v¨ ($x_2 = 0$, $x_1 = 3$). C§c LiW¶n n?m tr°n L:Ê ng L°° ng m¸c n¨y L'Qu cho gi§ tr¸ h¨m m¸c ti°u z = 24.

– T·Êhng t¸, c· thW¶ÊL:Ê ng L°° ng m¸c th¸ hai: $8x_1 + 6x_2 = 48$ Li qua hai LiW¶n ($x_1 = 0$, $x_2 = 8$) v¨ ($x_2 = 0$, $x_1 = 6$). Ch½ng ta nhÆn thÈy, nJu t¸nh tiJh song song L:Ê ng L°° ng m¸c l°n tr°n theo h·Êng c¸a v®c tH ph§p tuyJh $\vec{n}(8, 6)$ th³ gi§ tr¸ c¸a h¨m m¸c ti°u $z = 8x_1 + 6x_2$ tÈng l°n.

VÆy gi§ tr¸ z l¸n nhÈt L'Ü¹t L:Ê c khi L:Ê ng L°° ng m¸c Li qua LiW¶n B(12, 6) (t³m L:Ê c $x_1 = 12$, $x_2 = 6$ b?ng c§ch giÇi h¶ ph·Êhng tr³nh $4x_1 + 2x_2 = 60$ v¨ $2x_1 + 4x_2 = 48$).

Kết luận: Trong c§c ph·Êhng §n khÇ thi th³ ph·Êhng §n t´i ·Êu l¨ ($x_1 = 12$, $x_2 = 6$). TÜi ph·Êhng §n n¨y, gi§ tr¸ h¨m m¸c ti°u l¨ l¸n nhÈt $z_{max} = 8 \times 12 + 6 \times 6 = 132$.

Nhận xét: Ph·Êhng §n t´i ·Êu c¸a b¨i to§n tr°n (hay c§c BTQHTT kh§c, nJu c·) c¸a m¸t BTQHTT v¸i miQn ph·Êhng §n D l¨ m¸t tÆp l°° i L'a di¶n c· L"nh lu¹n L'Ü¹t L:Ê c tÜi ²t nhÈt m¸t trong c§c L"nh c¸a D. C§c L"nh c¸a D c¸n g¯i l¨ c§c LiW¶n c¸c bi°n c¸a n· (ch²nh x§c hhn, LiW¶n c¸c bi°n l¨ LiW¶n thu¸cD, m¨ kh¹ng thW¶³m L:Ê c m¸t L'oÜn th?ng n¨o cÌng thu¸c L'hn h³nh nhÆn LiW¶n L· l¨ LiW¶n trong). NhÆn x®t tr°n L'©y l¨ m¸t L¶nh l² to§n h¯c L'« L:Ê c ch¸ng minh m¸t c§ch t´ng qu§t. N· i m¸t c§ch h³nh Çnh, mu´n L'Ü¹t L:Ê c ph·Êhng §n t´i ·Êu cho c§c BTQHTT th³ c¸Fn phÇi ñm¶o hiW¶nò L¶i x®t c§c LiW¶n c¸c bi°n c¸a miQn ph·Êhng §n.

Cách 2: T¸ nhÆn x®t tr°n, L'W¶³m ph·Êhng §n t´i ·Êu ta ch¨ c¸Fn so s§nh gi§ tr¸ c¸a h¨m m¸c ti°u tÜi c§c LiW¶n c¸c bi°n c¸a miQn ph·Êhng §n.

T²nh gi§ tr¸ z tÜi O(0, 0): z(0, 0) = 0; tÜi A(0, 12): z(0, 12) = 72; tÜi C(15,0): z(15, 0) =

120; tại B(12, 6): z(12, 6) = 132 = Max{z(O), z(A), z(B), z(C)}. Vậy z_{max} = 132.

Nhận xét: Mục tiêu của BTQHTT ta xuất phát từ một LiVân cực biên nào đó, tìm cách cải thiện hàm mục tiêu bằng cách lần lượt chuyển sang các biên kề. Tiếp tục nhằm cho tới khi tìm được phương án tối ưu. Trong trường hợp BTQHTT có phương án tối ưu thì quy trình giải nhảy bao gồm hữu hạn bước (do số LiVân cực biên là hữu hạn).

Với BTQHTT Lang xét, quy trình giải LÊc minh hoạ như sau:

O(0, 0) → A(0,12) → B(12,6) dừng

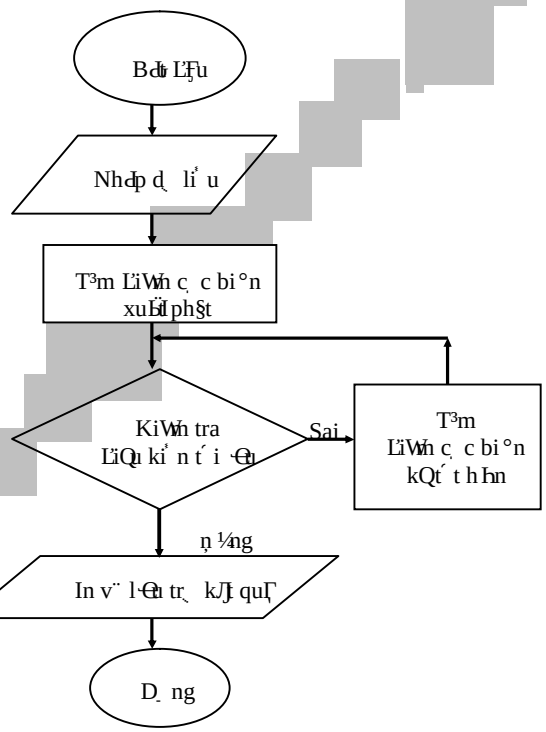
z = 0 → z = 72 → z = 132

hoặc:

O(0, 0) → C(15, 0) → B(12, 6) dừng

z = 0 → z = 120 → z = 132

Sơ đồ khối



Hình I.2. Sơ đồ khối giải BTQHTT

Quy tr³nh giÏi BTQHTT t´ ng qu§t c· sÈ L°° kh´ i giÏn l·Ê c nh·Êtr³nh b¨ y tr°n h³nh I.2. Trong sÈ L°° tr°n, v³ m¸ c L²ch tr³nh b¨ y vÈi L'QL'Èn giÏn, ch¼ng ta kh¹ ng L'Qcdp t¸ i c§c tr·Ê ng h° p khi BTQHTT c· miQn ph·Êng §n l¨ t dp r¸ ng (l¼c L· ta kh¹ ng t³m L·Ê c ph·Êng §n xuÈt ph§t) cÌ ng nh·Êkhi ta kh¹ ng t³m L·Ê c LiWn c¸ c bi°n kQt´ t hÈn mÈu d½LiQu ki¸ n t´ i ·Êu ch·Êa thoÏ m«n (l¼c L· tdp c§c gi§ tr¸ h¨ m m¸ c ti°u z kh¹ ng b¸ chÈu).

1.3. Phương pháp đơn hình

ÿ ©y l¨ ph·Êng ph§p s´ giÏi BTQHTT theo s È L°° tr°n. ÿ WgiÏi v² d¸ L« cho, tr·Ê c hJ ch¼ng ta cÏn L·Êa BTQHTT vQdÜng ch²nh tdc tr°n L©y, cÏn ldp m¸ t s´ bÏng L'Èn h³nh nh·Êtr³nh b¨ y trong bÏng I.1. Tr·Ê c hJ, cÏn LiQu s´ li¸ u c¸ a b¨ i to§n L« cho v¨ o bÏng L'Èn h³nh b·Ê c 1:

– C¸ t 1 l¨ c¸ t h¸ s´ h¨ m m¸ c ti°u ¸ ng v¸ i c§c biJn cÈ s´ L« chÌ n. Ph·Êng §n xuÈt ph§t c· thWchÌ n l¨ $x_1 = x_2 = 0$ (L©y ch²nh l¨ LiWn g´ c toÜL¸ O(0, 0)), do L· $x_3 = 60$, $x_4 = 48$). Nh·Ê vdy tÜi b·Ê c n¨ y ch¼ng ta ch·Êa b·Ê c v¨ o sÏn xuÈt, n°n trong ph·Êng §n ch·Êa c· L'Èn v¸ sÏn ph¨m loÜi I hay II L·Ê c sÏn xuÈt ra (ch¨ ñsÏn xuÈtò ra c§c l·Ê ng nguy°n li¸ u d·Êth¸ a, ta cÌ ng n· i l¨ c§c ñsÏn ph¨mò loÜi III v¨ IV), v¨ gi§ tr¸ h¨ m m¸ c ti°u z tÜm th¸ i bÌng 0. C§c biJn b½c· gi§ tr¸ l¸ n hÈn 0 c· ngh¸a l¨ c§c nguy°n li¸ u loÜi t·Êng ¸ ng ch·Êa L·Ê c s¸ d¸ ng hJ. Ta g¸ i c§c biJn x_3 v¨ x_4 l¨ c§c biJn cÈ s´ v³ ch¼ng c· gi§ tr¸ l¸ n hÈn 0 c¸ n x_1 v¨ x_2 l¨ c§c biJn ngo¨ i cÈ s´ v³ ch¼ng c· gi§ tr¸ bÌng 0. V¸ i b¨ i to§n c· hai r¨ ng bu¸ c, tÜi m¸ i b·Ê c ch¨ c· hai biJn cÈ s´ .

– C¸ t 2 l¨ c¸ t c§c biJn cÈ s´ . Trong c¸ t 3 (c¸ t ph·Êng §n) cÏn ghi c§c gi§ tr¸ c¸ a c§c biJn cÈ s´ L« chÌ n.

– C§c c¸ t tiJp theo l¨ c§c c¸ t h¸ s´ trong c§c LiQu ki¸ n r¨ ng bu¸ c t·Êng ¸ ng v¸ i c§c biJn x_1, x_2, x_3 v¨ x_4 c¸ a b¨ i to§n L« cho.

Bảng I.1. Các bảng đơn hình giải BTQHTT

Hệ số hàm mục tiêu c_j	Biến cơ sở	Phương án	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	60	4	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 8$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$
8	x_1	15	1	1/2	1/4	0
0	x_4	18	0	3	–1/2	1
Hàng z		$z_0 = 120$	$z_1 = 8$	$z_2 = 4$	$z_3 = 2$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 2$	$\Delta_3 = -2$	$\Delta_4 = 0$
8	x_1	12	1	0	1/3	–1/6
6	x_2	6	0	1	–1/6	1/3
Hàng z		$z_0 = 132$	8	6	5/3	2/3
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	–5/3	–2/3

Phân tích bảng đơn hình bước 1

– Hệ số ứng với biến x_1 trong hàng thứ nhất là $a_{11} = 4$ cho nghĩa là tại thay thế ràng buộc thứ nhất / rằng bù cho thứ nhất $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60$, x_1 tăng mức lên vào thế x_3 phải giảm bớt nên vào nhận giá nguyên x_2). Tương tự ta cho thấy giải thích Lấy nghĩa các số hệ số a_{ij} khác cho trong hàng 1 và hàng 2 trong bảng lần hình bước 1.

– Chúng ta xét hàng z các bảng lần hình. Ở Với z_1, cần phép đến ngưng cung thứ $z_1 = (các hệ số các hàng mục tiêu) \times (các hệ số các biến x_1) = 0\times4 + 0\times2 = (giá mức lên vào phần loại III)\times(tại thay thế ràng loại I / loại III) + (giá mức lên vào phần loại IV) \times (tại thay thế ràng loại I / loại IV) = tổng chi phí phải bỏ ra khi Lấy thêm mức lên vào phần loại I vào phương án sản xuất mới i = 0.$ Các giá trị z_j, với j = 1, 2, 3, 4, Lấy các tính tương tự về chính lại các khi Lấy mức lên vào phần loại x_j vào phương án sản xuất mới i. Còn z_0 lại giá trị các hàm mục tiêu Lại Lấy các tại phương án Lang xét: $z_0 = (các hệ số các hàm mục tiêu)\times (các phương án) = 0\times60 + 0\times48 = 0$.

– Trong hàng Δ_j cần ghi các giá trị Δ_j, j = 1, 2, 3, 4, tính theo công thức $\Delta_j = c_j$ ừ z_j = Để i nhuận trong mức lên vào phần ừ chi phí trong mức lên vào phần. Vậy Δ_j là "lãi biên"/mức lên vào phần khi Lấy thêm mức lên vào phần loại j vào phương án sản xuất mới i. Nếu $\Delta_j > 0$ thì hàm mục tiêu cũng tăng Lấy các khi ta Lấy thêm các lên vào phần loại j vào phương án sản xuất mới i. Công thức chung minh Lấy các Δ_j chính là Lấy hàm riêng $\partial z/\partial x_j$ các hàm mục tiêu z theo biến x_j. Nhưvậy, x_1 tăng lên 1 thì z tăng lên 8 còn x_2 tăng lên 1 thì z tăng lên 6.

Do Δ_1 và Δ_2 Là đương nên vẫn cũng khẳng cần thiết hàm mục tiêu khi chuyển sang

(hay ñxoay sangò) m¸t ph¬ng §n c¸c bi°n kQt´t hÞn (quay lÜi nhÞn x®t´ phÞn giÞi b¨i to§n b³ng ph¬ng ph§p L°ª th¨: LiW¥n c¸c bi°n kQc¸a LiW¥n (0, 0) c· thWl¨ A(0, 12) hay C(15, 0)).

Thủ tục xoay (pivotal procedure)

Bước 1: Chÿn c¸t xoay l¨ c¸t c· $\Delta_j > 0$ t¸c l¨ chÿn biÞn x_j l¨m biÞn chÞ s´ m¸i do x_j tÞng k®o theo h¨m m¸c ti°u tÞng. ¸ L©y ta chÿn L¬a x_1 v¨o (L§nh dÜu √´ c¸t Δ_1).

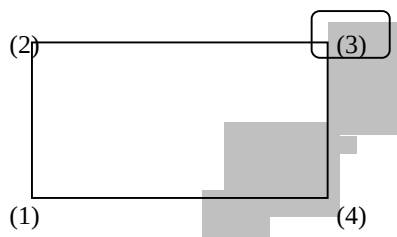
Bước 2: Chÿn h¨ng xoay LWx§c L¦nh L¬a biÞn n¨o ra kh¸i s´ biÞn chÞ s´ (v³ tÜi m¸i b¬c s´ biÞn chÞ s´ l¨ kh¹ng thay L¦i). ¸n Wchÿn h¨ng xoay, ta th¸c hi¦n quy tdc ñt" s´ d¬ng b®nhÜu" b³ng c§ch lÜy c¸t ph¬ng §n (60 48)^T chia t¬ng ¸ng cho c¸t xoay (4 2)^T LWchÿn t" s´ b®nhÜu. M¸t LiQu cÞn ch¼Ã l¨ ta ch" x®t c§c t" s´ c· mXu s´ d¬ng.

V³ Min{60/4, 48/2} = 60/4 LÜi L¬Ê c tÜi h¨ng LÞu, n°n ta L§nh dÜu √ v¨o h¨ng xoay l¨ h¨ng LÞu (h¨ng t¬ng ¸ng v¸i biÞn x_3). Do L· cÞn L¬a x_3 ra kh¸i c§c biÞn chÞ s´.

Bước 3: Chÿn phÞn t´ xoay n³m tr°n giao c¸a h¨ng xoay v¨ c¸t xoay.

Bước 4: Xoay sang bÞng LÞnh h³nh m¸i, x§c L¦nh c§c biÞn chÞ s´ m¸i LWLiQn v¨o c¸t biÞn chÞ s´, L°ng th¸i thay c§c gi§ tr¸ trong c¸t h¦ s´ h¨m m¸c ti°u. Sau L·, t²nh lÜi c§c phÞn t´ c¸a h¨ng xoay b³ng c§ch lÜy h¨ng xoay cÌ chia cho phÞn t´ xoay LWc· h¨ng m¸i t¬ng ¸ng.

Bước 5: C§c phÞn t´ c¸n lÜi c¸a bÞng LÞnh h³nh m¸i L¬Ê c t²nh theo quy tdc "h³nh chÿ nhdt": $(1)_{mới} = (1)_{cũ} - (2)_{cũ} \times (4)_{cũ}/(3)_{cũ}$, trong L· (3) l¨ L"nh t¬ng ¸ng v¸i phÞn t´ xoay (xem h³nh I.3).



Chÿng hÜn: $(1)_{cÞ} = 4$, $2_{(cÞ)} = 2$

$(3)_{cÞ}$ = phÞn t´ xoay = 4, $(4)_{cÞ} = 2$

$\Rightarrow (1)_{m¸i} = 4 - 2 \times \frac{2}{4} = 3.$

Hình I.3. Quy tắc hình chữ nhật

Giải thích: C§c b¬c xoay tr°n L©y ch" l¨ ph®p biÞn L¦i t¬ng L¬ng h" ph¬ng tr³nh

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \text{ (a)} \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \text{ (b)} \end{cases}$$

LWc· h"

$$\begin{cases} x_1 + (1/2)x_2 + (1/4)x_3 = 15 \text{ (aô)} \\ 0x_1 + 3x_2 - (1/2)x_3 + x_4 = 18 \text{ (bô)} \end{cases}$$

b³ng c§ch lÜy ph¬ng tr³nh (a) chia cho 4 (phÞn t´ xoay) LWc· (aô), r°i lÜy (b) tr¸ b¸t

2 × (a)/4 L'Wc· (bô). ¸ ©y ch²nh l¨ ¸ i dung ¸„ a b·Ę c 4 v¨ b·Ę c 5. C¸ n b·Ę c 3 sΣ L'Γm bΓo r³ng gi§ tr˙ ¸„ a c§c biJh c h s˚ m¸ i kh¹ ng @m (x_1 = 15, x_4 = 18).

Ćp d„ ng th„ t„ c xoay cho c§c phΓn t˙ n³ m tr°n h¨ ng 1 v¨ 2 ¸„ a bΓng L'hn h³nh b·Ę c 1, sau L· t²nh c§c gi§ tr˙ tr°n h¨ ng z_j v¨ Δ_j t·Ęng t¸ nh·Ękhi lΔp bΓng L'hn h³nh b·Ę c 1, ch¼ng ta sΣ nhΔn L·Ęc bΓng L'hn h³nh b·Ę c 2.

Phân tích bảng đơn hình bước 2

BΓng b·Ę c 2 c· thW L·Ęc ph@n t²ch t·Ęng t¸ nh·Ęb΄ng b·Ę c 1. CΓn ch¼Ï r³ng l¼c n¨ y ta L'ang ˚ v˙ tr² ¸„ a L'iW m C(15, 0) v³ x_1 = 15 ¸ n x_2 = 0; gi§ tr˙ ¸„ a h¨ m m„ c ti°u l¨ z_0 = 120 L'« L·Ęc cΓi thi˙ n hΔn so v¸ i b·Ę c 1. Ta thΔy Δ_2 = 2 > 0 n°n ¸ n c· thWcΓi thi˙ n h¨ m m„ c ti°u b³ng c§ch ch˜ n biJh x_2 l¨ m biJh cΔ s˚ m¸ i. Th¸ c hi˙ n c§c b·Ę c xoay sang ph·Ęng §n c¸ c bi°n kQt´ t hΔn, ch¼ng ta sΣ c· bΓng L'hn h³nh b·Ę c 3.

Phân tích bảng đơn hình bước 3

TÜi bΓng L'hn h³nh b·Ę c 3 ta thΔy L'iQu ki˙ n t´ i ·Ęu L'« L·Ęc thoΓ m«n *(Δ_j ≤ 0 ∀j=1, 2, 3, 4)* n°n kh¹ ng c¸ n khΓ nΔng cΓi thi˙ n ph·Ęng §n. Ph·Ęng §n t´ i ·Ęu L'« L'ÜI L·Ęc tÜi x_1 = 12, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0, t¸ c l¨ tÜi L'iW m ¸ c bi°n B(12, 6) v¸ i gi§ tr˙ z_{max} = 132.

Một số chú ý

– ¸ iQu ki˙ n t´ i ·Ęu cho c§c BTQHTT d Ü ng Max l¨ Δ_j ≤ 0 ∀j.

– ¸ ´ i v¸ i c§c BTQHTT cΓn ¸ c tiW m¨ ho§ h¨ m m„ c ti°u th³ L'iQu ki˙ n t´ i ·Ęu (hay ti°u chuΧn d¸ ng) l¨ Δ_j ≥ 0 ∀j (nJu t˚ n tÜi j m¨ Δ_j ≤ 0 th³ cΓn tiJp t¸ c cΓi thi˙ n h¨ m m„ c ti°u b³ng c§ch ch˜ n ¸ t j l¨ m ¸ t xoay...).

– Trong th¸ c ti¸ n giΓi c§c BTQHTT dÜng t´ ng qu§t c· thWxΓy ra tr·Ęng h˚ p kh¹ ng t³m L·Ęc ph·Ęng §n xuΔI ph§t (t¸ c l¨ kh¹ ng c· ph·Ęng §n khΓ thi, xem th°m m„ c 1.2). L¼c n¨ y c· thWkJI luΔn m¹ h³nh L'« thiJI lΔp c· c§c L'iQu ki˙ n r¨ ng bu¸ c qu§ chΗ chΣ, cΓn xem x®t n¸ i l¸ ng c§c L'iQu ki˙ n n¨ y.

– Trong tr·Ęng h˚ p ta t³m L·Ęc ¸ t xoay m¨ kh¹ ng t³m L·Ęc h¨ ng xoay th³ kJI luΔn h¨ m m„ c ti°u kh¹ ng b˙ chΗ tr°n (L´ i v¸ i c§c BTQHTT dÜng Max) hoΗ kh¹ ng b˙ chΗ d·Ęi (L´ i v¸ i c§c BTQHTT dÜng Min). Khi L· d¸ ng qu§ tr³nh giΓi v¨ kJI luΔn m¹ h³nh quy hoÜch tuyJh t²nh L'« thiJI lΔp kh¹ ng ph½h˚ p v¸ i th¸ c tJI

1.4. Giải mô hình quy hoạch tuyến tính bằng các phần mềm tính toán

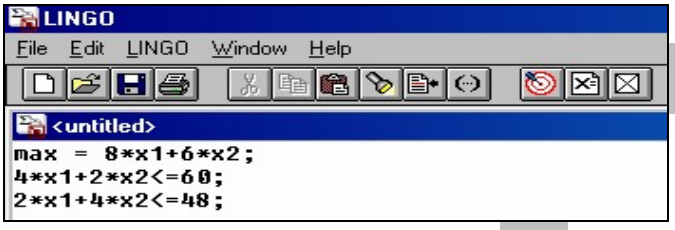
Hi˙ n nay c· nhiQu phΓn mQm t²nh to§n giΓi B TQHTT kh§ hi˙ u quΓ nh·ęExcel, Lingo. Nh¸ ng phΓn mQm n¨ y rΔI th@n thi˙ n v¸ i ng·Ęi d½ng. Tuy nhi°n cΓn nhΔI m ÜI nh r³ng, vi˙ c ph§t biW L·Ęc m¹ h³nh b¨ i to§n v¨ ph@n t²ch, L§nh gi§ L·Ęc kJI quΓ m¸ i ch²nh l¨ nh¸ ng kh@u quan tr˜ ng nhΔI trong ph·Ęng ph§p m¹ h³nh ho§. Sau L'©y, ch¼ng ta d½ng phΓn mQm Lingo L'WgiΓi v² d„ L'« x®t ˚ tr°n.

$$z = 8x_1 + 6x_2 \quad \rightarrow \text{Max}$$

v¸ i c§c r¨ ng bu¸ c:

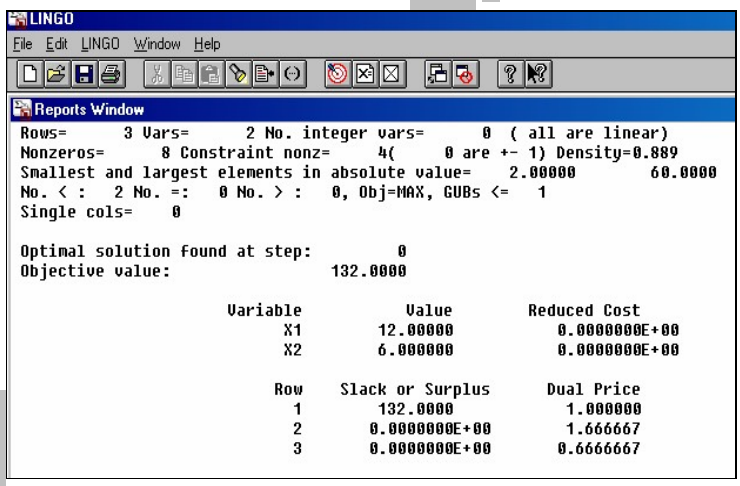
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ụ WgiĮ ì b¨i to§n n¨y, ch½ng ta cƒn c¨i LŒ Lingo v¨o trong m§y t²nh. NhÖ ì v¨o biW t·Ể ng Lingo tr°n m¨n h³nh LŒ Wv¨o c a s Lingo. Sau L· th c hi n c§c l nh Lingo: *Menu* > *New* > *<Untitle>* v¨ g» v¨o c§c d li u c a b¨i to§n nh·Œ h³nh I.4.



Hình I.4. Nhập dữ liệu của bài toán quy hoạch tuyến tính trong Lingo

TiJp theo, cƒn nh§y chu t v¨o n¼t LINGO v¨ giĮ ì b¨i to§n LŒ hu LŒ Ể c kJ quĮ chi tiJ nh·Œ tr°n h³nh I.5.



Hình I.5. Kết quả giải bài toán quy hoạch tuyến tính trong Lingo

KJ quĮ chi tiJ cho ta biJ gi§ tr c c LŒ i c a h¨m m c ti°u l¨ 132 v i ph·Œ ng §n t´ i ·Œ u l¨: $x_1 = 12$, $x_2 = 6$. C§c gi§ tr t´ i ·Œ u c a c§c biJ n LŒ i ngX u l¨ $y_1 = 5/3$ v¨ $y_2 = 2/3$ (c n g i l¨ c§c gi§ ·Ę c LŒ nh hay gi§ b· ng *Shadow Prices*).

1.5. Một số ứng dụng của phương pháp đơn hình

(GiĮ ì c§c b¨i to§n quy ho Œ ch sĮ n xuÖ trong lƒnh v c c Ęh kh² v¨ LŒ i n l c)

Bài toán phân phối điện năng

C· ba h¸ ph¸t tÇi cÇn LÈc cung cÊp LiÖn nLng t¬ hai nguồn LiÖn nªm c§ch xa nhau. Gi§ th¨nh truyQn tÇi m¸t LÈhn vÒ LiÖn nLng t¬ nguồn i LÈJh h¸ ti°u th¸ j l¨ c_{ij}. KhÇ nLng cung cÊp LiÖn nLng c¸a m¸i nguồn bÒ gi¸i hÜn bÖi tr¸ l·Èng hiÖn c· c¸a ch½ng l¨ A_1 v¨ A_2. Nhu cÇu ti°u d½ng c¸a c§c h¸ ti°u th¸ l¨ B_1, B_2 v¨ B_3. GÒi x_{ij} l¨ l·Èng LiÖn nLng LÈc LÈa t¬ nguồn i t¬i h¸ ti°u th¸ j. CÇn phÇi x§c LÈnh c§c x_{ij} sao cho tÖng chi ph² l¨ nh¸ nhÊt. NhÈ vdy ta c· BTQHTT sau:

$$z = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

v¬i c§c LiQu kiÖn r¨ng bu¸c l¨:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le A_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le A_2, \\ x_{11} + x_{21} = B_1, \\ x_{12} + x_{22} = B_2, \\ x_{13} + x_{23} = B_3, \\ x_{ij} \ge 0, \ \forall i = 1, 2 \text{ v¨ } \forall j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Comment [nht1]:

Comment [nht2]:

B¨i to§n tr°n LÈy (hoHc dÜng tÖng qu§t hÈn) c· thWgiÇi LÈc bªng ph·Èng ph§p LÈhn h³nh L« biJ hay ph·Èng ph§p ph©n ph´i sÉ LÈc nghi°n c¨u mÖc 1.3, ch·Èng II.

Bài toán phân tải cho máy

M¸t x² nghiÖp c· hai loÜi m§y M_1 v¨ M_2. C§c loÜi m§y n¨y c· thWsÇn xuÊt LÈc ba loÜi sÇn phXm P_1, P_2 v¨ P_3 v¬i c§c nLng suÊt l¨ a_{ij}, chªng hÜn m§y M_1 sÇn xuÊt sÇn phXm P_2 v¬i nLng suÊt a_{12}. M¸i LÈhn vÒ sÇn phXm mang lÜi l«i suÊt c_j v¬i j = 1, 2, 3. M¸i th§ng x² nghiÖp phÇi sÇn xuÊt sÇn phXm loÜi j kh¹ng ²t hÈn b_j LÈhn vÒ v¨ kh¹ng vÈt qu§ d_j LÈhn vÒ, j = 1, 2, 3. H«y lªp kJhoÜch ph©n tÇi cho c§cm§y sao cho LÜt tÖng lÒi nhuËn l¬n nhÊt.

D¬ thÊy b¨i to§n n¨y dXn t¬i BTQHTT sau:

$$z = \sum_{j=1}^{3} c_j \sum_{i=1}^{2} a_{ij}x_{ij} \quad \rightarrow \text{Max}$$

v¬i c§c LiQu kiÖn r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \geq b_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \geq b_2, \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \geq b_3, \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \leq d_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \leq d_2, \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \leq d_3, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq m_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq m_2, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2 \text{ v¨ } j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

(trong L· m_1 v¨ m_2 l¨ t˘ ng th˚ i gian chÜy m§y M_1 v¨ M_2).

B¨i to§n tr°n L©y c¸n c· thWph§t biWu m¸t c§ch t˘ ng qu§t h Hn v¨ v Xn giÇi LÊc b³ng ph·Êng ph§p LÈn h³nh. HÈn n¸a, trong lÇnh v¸c quy hoÜch sÇn xuÈt hay quÇn l² kinh doanh, n· i ri°ng trong ng¨nh cÈn kh² v¨ LÈi n l¸c, BTQHTT LÊc ¸ng d¸ng rÈt r¸ng r «i v¨ mang l Ü hi˙u quÇ cÇn thiJ.

2. Bổ sung thêm về phương pháp đơn hình

2.1. Đưa BTQHTT về dạng chính tắc

Ví dụ 1: (Tr·Êng h˚ p c§c r¨ng bu¸c LÇu c· dÈu ≤)

$$z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{Max}$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

n¸Êa BTQHTT vQ dÜng ch²nh tÈc nh·Êc LÈ« biJ b³ng c§ch th°m hai biJn b½ (*slack variables*) x_3 v¨ x_4. Ta c· BTQHTT d Ü ng ch²nh tÈc l¨:

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

L¼c n¨y, trong h˚ hai LiÇu ki˚ n r¨ng bu¸c LÈ« c· L¸ hai biJn L¸ ng L¸ c lÈp trong t¸ ng ph·Êng tr³nh v¸i h˚ s´ +1, n°n LÈ« c· th WÈ³m LÊc ph·Êng §n c¸ c bi°n xuÈt ph§t LÈWbÈr LÇu qu§ tr³nh giÇi b¨i to§n. M¸ t c§ch t˘ ng qu§t, *BTQHTT dạng chính tắc là bài toán với các biến*

không âm, các ràng buộc với dấu "=", hệ số vế phải của các ràng buộc không âm. Ngoài ra, mỗi phương trình bắt buộc phải có một biến đứng độc lập với hệ số +1.

Ví dụ 2: (Tr·Ể ng h ̊ p c· LïQu ki ̇ n r¨ng bu ̧ c v ̧ i dÜ ≥)

$$z = 8x_1 + 6x_2 \to Max$$

v ̧ i c§c r¨ng bu ̧ c:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 48 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ta th°m c§c biJh b½x_3 (*slack variable*) mang dÜ ñ+ò, x_4 (*surplus variable*) mang dÜ ñ–ò LWc· h ̇ LïQu ki ̇ n r¨ng bu ̧ c sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

PhÇ ̀ ì th°m biJh giÇ x_5 (x_5 g ̀ i l¨ l·Ể ng vi phÜm c ̧ a ph·Ể ng tr³nh th ̧ hai) LWLÈ c h ̇ LïQu ki ̇ n r¨ng bu ̧ c

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

L¼c n¨y, L« c· L ̧ hai biJh L ̧ ng L ̧ c lÇp trong t ̧ ng ph·Ể ng tr³nh v ̧ i h ̇ s ́ +1, n °n L« c· thWt³m LÈ c ph·Ể ng §n c ̧ c bi°n xuÜ ph§t LWbÇ LÇu qu§ tr³nh giÇ ̀ ì b¨i to§n b³ng ph·Ể ng ph§p LÇn h³nh v ̧ i h¨m m ̧ c ti°u l¨ $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \to Max$, trong L· $M \approx +\infty$ v¨ biWl th ̧ c $-Mx_5$ g ̀ i l¨ l·Ể ng phÜt (L§nh thuJ). B¨i to§n L« LÈ c LÈ a vQdÜ ng ch²nh tÇ c. L·Ể ng vi phÜm x_5 c¨ng l ̧ n th³ h¨m m ̧ c ti°u c¨ng giÇ m, gi§ tr ̇ c ̧ a h¨m m ̧ c ti°u ch ̈ c· thWLÜ Max khi $x_5 = 0$.

Ví dụ 3: (Tr·Ể ng h ̊ p c· biJh kh¹ ng d·Ể ng)

$$z = 8x_1 - 6x_2 \to Max$$

v ̧ i c§c r¨ng bu ̧ c:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

L¼c n¨y mu ́ n giÇ ̀ ì b¨i to§n b³ng ph·Ể ng ph§p LÇn h³nh ta phÇ ̀ ì L ̇ i biJh $x'_2 = -x_2$. Ta c· BTQHTT v ̧ i c§c biJh LQu kh¹ ng ©m.

$$z = 8x_1 + 6x'_2 \rightarrow Max$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x'_2 + x_3 \le 60 \\ 2x_1 - 4x'_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x'_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4: (TrÒng hÞp c· biÊn v¸i dÊu tuØ Ï)

$$z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow Max$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \quad \text{dÊu tuØ Ï} \end{cases}$$

L¼c n¨y ta viÊt biÊn x_2 dÒi dÞng $x_2 = x'_2 - x''_2$ v¸i

$$\begin{cases} x'_2 = \max[0, x_2] \\ x''_2 = \max[0, -x_2] \end{cases} \text{ th³ LÊm bÊo } \begin{cases} x'_2 \ge 0 \\ x''_2 \ge 0 \end{cases}$$

C§c r¨ng bu¸c s£ l¨

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x'_2 - 4x'_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

B¨i to§n v¸i h¨m m¸c ti°u l¨: $z = 8x_1 + 6x'_2 - 6x''_2 + 0x_3 + 0x_4$ v¨ c§c LiÊu kiÖn r¨ng bu¸c tr°n l¨ BTQHTT dÞng ch²nh tØc.

Kết luận: Bao gi¶ cÒng LiÊa LiÊc BTQHTT bÊt k³ (c§c biÊn c· dÊu tuØ Ï, c§c r¨ng bu¸c c· th W≤, ≥, =) vQdÞng ch²nh tØc.

2.2. Phương pháp đơn hình mở rộng

PhÒng ph§p LÊn h³nh m¶ r¸ng c¸n g¶ i l¨ phÒng ph§p L§nh thuÊM LiÊc §p d¸ng LiWLiWgiÊi BTQHTT c· biÊn giÊ.

Ví dụ:

$$z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow Max$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$(a)\begin{cases}4x_1+2x_2\le 60\\ 2x_1+4x_2\ge 48\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

hay: $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow$ Max v¸i c§c r¨ng bu¸c

$$(b)\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3=60\\ 2x_1+4x_2-x_4=48\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{cases}$$

Ta c· thW L·a b¨i to§n vQd¨ng ch²nh tac sau g` i l¨ b¨i to§n M:

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$ (trong L· $M \approx +\infty$) v¸i c§c r¨ng bu¸c

$$(c)\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3=60\\ 2x_1+4x_2-x_4+x_5=48\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0\end{cases}$$

Cách 1: C· thWgiI¡i BTQHTT v¸i c§c LiQu ki¹n r¨ng bu¸c (a) b³ng ph·Θng ph§p L³° th` LWnhdn L·Θ c kJt quI¡: ph·Θng §n t´ i ·Θu l¨ ($x_1 = 0$, $x_2 = 30$) v¨ $z_{max} = 180$.

Cách 2: GiI¡i BTQHTT v¸i c§c LiQu ki¹n r¨ng bu¸c (c) b³ng c§ch lDp bI¡ng LThn h³nh nh·Θth¹ ng th·Θ ng nh·Θng ch¼Ã h¹ s´ M $\approx +\infty$ (xem bI¡ng I.2).

Bảng I.2. Các bảng đơn hình giải bài toán M

H¹ s´ h¨m m¸c ti°u	BiJh ch¹ s´	Ph·Θng §n	8	6	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0 –M	x_3 x_5	60 48	4 2	2 4	1 0	0 –1	0 +1
H¨ng z		$z_0 = -48M$	$z_1 = -2M$	$z_2 = -4M$	$z_3 = 0$	$z_4 = M$	$z_5 = -M$
H¨ng Δ_j			$\Delta_1 = 8+2M$	$\Delta_2 = 6+4M$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = -M$	$\Delta_5 = 0$
0 6	x_3 x_2	36 12	3 1/2	0 1	1 0	1/2 –1/4	–1/2 1/4
H¨ng z		72	3	6	0	–3/2	3/2
H¨ng Δ_j			5	0	0	3/2	–M – 3/2
0 6	x_4 x_2	72 30	6 2	0 1	2 1/2	1 0	–1 0
H¨ng z		180	12	6	3	0	0
H¨ng Δ_j			–4	0	–3	0	–M

TÜi bI¡ng LThn h³nh cu´ i c½ng, ta thLÿy $\Delta_j \le 0$ $\forall j$ n°n ph·Θng §n t´ i ·Θu L« L'Ü¡ L·Θ c v¸i

$x_2 = 30$, $x_4 = 72$, c§c x_j kh§c = 0 v¨ $z_{Max} = 180$.

Lưu ý

– Khi m¸t biÙn giÃ L« LÈc LÈa ra kh¸i chÕ s´ th³ kh¹ng bao giª quay lÜi n¸a. Do L· ta c· thWxo§ c¸t biÙn giÃ L· kh¸i bÃng LÈn h³nh.

– NÙu dÜu hi¾u d¸ng xuÜt hi¾n ($\Delta_j \le 0\ \forall j$) nh·Èng v Xn c¸n biÙn giÃ v¸i gi§ tr¾ d·Èng trong s´ c§c biÙn chÕ s´ th³ LiÙu n¨y ch¸ng t¸ b¨i to§n ban LÃu kh¹ng thWc· ph·Èng §n khÃ thi (c· thWch¸ng minh b³ng phÃn ch¸ng).

– V¸i v² d¸ tr°n (xem bÃng I.2) ta thÜy qu§ tr³nh giÃi chia l¨m hai pha: pha 1 nh³m giÃi b¨i to§n M cho t¸i khi biÙn giÃ (x_5) LÈc LÈa ra kh¸i s´ biÙn chÕ s´ (l¼c n¨y c· ph·Èng §n c¸c bi°n xuÜt ph§t cho b¨i to§n (b)) v¨ pha 2 nh³m t³m ph·Èng §n t´i Èu cho b¨i to§n (b).

– PhÃn mÙm t²nh to§n Lingo c· thWgiÃi LÈc tÜt cÃ c§c BTQHTT kh¹ng L¸i h¸i ng·Èi d½ng phÃi LÈa ch¼ng vÙdÜng ch²nh tÙc.

3. Mô hình quy hoạch tuyến tính đa mục tiêu

3.1. Các khái niệm cơ bản

Phát biểu mô hình

Trong c§c b¨i to§n k¸thuÙt, c¹ ng nghª, quÃn l², kinh tÙn¹ ng nghi¾p v.v... nÃy sinh t¸ th¸c tÙ ch¼ng ta th·Èng phÃi xem x® LWc¾i Èu ho§ LÜng th¸i m¸t l¼c nhiÙu m¸c ti°u. C§c m¸c ti°u n¨y th·Èng l¨ kh§c vÙth¸ nguy°n, t¸c l¨ ch¼ng LÈc Lo b¾i c§c LÃn v¾ kh§c nhau. Nh¸ng t³nh hu´ng nh·ÈvÙy tÜo ra c§c b¨i to§n t´i Èu LÃa m¸c ti°u. Nh·ÈvÙy, ch¼ng ta cÃn phÃi t´i Èu ho§ (c¸c LÜi ho§ hoÙc c¸c tiWu ho§ tu8 theo t³nh hu´ng th¸c tÙ) kh¹ng phÃi l¨ ch"m¸t m¸c ti°u n¨o L· , m¨ l¨ LÜng th¸i tÜt cÃ c§c m¸c ti°u L« LÙra.

B¨i to§n t´i Èu LÃa m¸c ti°u m¨ trong L· miÙn r¨ng bu¸c D l¨ tÙp lÜi LÃa di¾n v¨ c§c m¸c ti°u $z_i = f_i(X)$, v¸i i = 1, 2,é , p, l¨ c§c h¨m tuyÙn t²nh x§c LÃnh tr°n D, LÈc g¸i l¨ b¨i to§n quy hoÜch tuyÙn t²nh LÃa m¸c ti°u. Khi L· , ta c· m¹ h³nh to§n h¸c sau LÈy LÈc g¸i l¨ m¹ h³nh quy hoÜch tuyÙn t²nh LÃa m¸c ti°u :

Max CX với ràng buộc $X \in D$, trong đó:

C là ma trận cấp $p \times n$

$D = \{ X \in R^n: AX \le B\}$

với A là ma trận cấp $m \times n$ và $B \in R^m$.

Ví dụ: BTQHTT v¸i hai m¸c ti°u

$f_1(X) = x_1 + 2x_2 \to$ Min hay $z_1 = f_1(X) = -x_1 - 2x_2 \to$ Max

$z_2 = f_2(X) = 2x_2, \to$ Max

v¸i c§c r¨ng bu¸c

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ta c· thWviJJ b¨i to§n n¨y d·Ę i dÜng ma trdn nh·Ęsau: Max CX v¸ i r¨ng bu¸ c $X \in D = \{X \in R^2 : AX \le B\}$, trong L· $X = (x_1, x_2)^T$, $B = (3, -3, 0, 0)^T$, c¸ n

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

C· thWn· i, BTQHTT L'a m„ c ti°u l¨ BTQHTT m¨ trong L· ch¼ng ta phÇi t´ i ·Ęu ho§ c½ng m¸ t l¼c nhiQu m„ c ti°u. Tuy nhi°n, c§c m„ c ti°u n¨y th·Ęng L´ i ch¸ i cÜnh tranh v¸ i nhau. Vi¹ c l¨m t´ t hÈn m„ c ti°u n¨y th·Ęng dXn t¸ i vi¹ c l¨m xÈu L¡i m¸ t s´ m„ c ti°u kh§c. V³ vdy vi¹ c giÇi c§c b¨i to§n t´ i ·Ęu L'a m„ c ti°u, t¸ c l¨ t³m ra m¸ t ph·Ęng §n khÇ thi t´ t nhÈt theo m¸ t nghQa n¨o L· , th¸ c chÈt ch²nh l¨ m¸ t b¨i to§n ra qu yJJ L'nh. C· thWchÈy lÜi ¹ L©y m¸ t lÇn n¸ a kh³ng L'nh "T´ i ·Ęu ho§ ch²nh l¨ c¹ ng c„ L'nh l·Ęng ch„ yJJu nhÈt c„ a qu§ tr³nh ra quyJJ L'nh".

Hi¹ n tÜi c§c t¨i li¹ u, s§ch chuy°n khÇo, tÜp ch² cdp nhdt vQlqnh v¸ c li °n ng¨nh To§n – Tin, Khoa h¸ c quÇn l², C¹ ng ngh¹ , Kinh tJJ n¸ i n, Ch kh² n¹ ng nghi¹ p,... L'Qcdp rÈt nhiQu t¸ i b¨i to§n t´ i ·Ęu L'a m„ c ti°u. VÈt L'Qnghi°n c¸ u ch s¹ l² thuyJJ, thudt to§n, ldp m¹ h³nh, x©y d¸ ng h¹ m§y t²nh tr¸ gi¼p quyJJ L'nh, v¨ §p d„ ng c§c m¹ h³nh t´ i ·Ęu L'a m„ c ti°u cho c§c qu§ tr³nh c¹ ng ngh¹ , quÇn l²,... l¨ m¸ t vÈt L'Qli°n ng¨nh L·Ęc rÈt nhiQu nh¨ khoa h¸ c v¨ kQs·Ęth¸ c h¨nh quan t©m.

Phương án tối ưu Pareto

Kh§i ni¸ m then ch´ t trong t´ i·Ęu ho§ L'a m„ c ti°u l¨ kh§i ni¸ m ph·Ęng §n t´ i ·Ęu Pareto.

Định nghĩa: M¸ t ph·Ęng §n t´ i ·Ęu Pareto X^* c· t²nh chÈt sau L©y:

– Tr·Ę c hJJ n· phÇi thu¸ c v¨o miQn c§c ph·Ęng §n khÇ thi c„ a b¨i to§n, t¸ c l¨ phÇi thoÇ m«n tÈt cÇ c§c r¨ng bu¸ c: $X^* \in D$.

– V¸ i m¸ i ph·Ęng §n khÇ thi kh§c $X \in D$ m¨ c· m¸ t m„ c ti°u n¨o L· t´ t hÈn ($f_i(X)$ t´ t hÈn $f_i(X^*)$) th³ cÒ ng phÇi c· ²t nhÈt m¸ t m„ c ti°u kh§c xÈu hÈn ($f_j(X)$ xÈu hÈn $f_j(X^*)$, $j \ne i$).

N· i m¸ t c§ch kh§c, kh¹ ng t¸ n tÜi m¸ t ph·Ęng §n khÇ thi n¨o $X \in D$ c· th Wtr¸ i hÈn X^* tr°n t¸ ng thW

n Wninh hoÜ L'nh nghQa tr°n, ta x®t v² d„ L« cho.

Ví dụ:

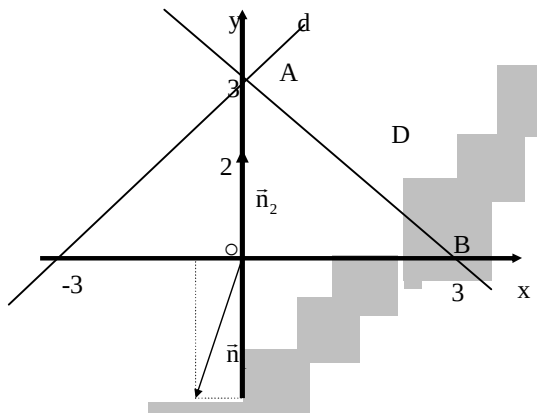
X®t BTQHTT v¸ i hai m„ c ti °u.

$$f_1(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Min}$$

$$f_2(X) = \quad 2x_2 \rightarrow \text{Max}$$

V¸i c§c r¨ng bu¸c

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Hình I.6. Minh ho¹ đồ thị BTQHTT hai m¹c tiêu

MiQn c§c ph¬ng §n khµ thi D (miQn gi¸i h¹n b¸i LoÜn AB v¨ c§c tia Ad, Bx) L¬Ø c biW¹ th¸ tr°n h³nh I.6. $\vec{n}_1(-1, -2)$ l¨ h¬Ø ng giµm c¸a m¹c ti°u 1, c¸n $\vec{n}_2(0, 2)$ l¨ h¬Ø ng tµng c¸a m¹c ti°u 2.

L¼c n¨y A(0, 3) cÌ ng nh¬ B(3, 0) l¨ hai ph¬ng §n t´i ¬u Pareto c¸a b¨i to§n tr°n. D¸ thÜy tµp h¸p P tÜl cµ c§c ph¬ng §n t´i ¬u Pareto bao g¸m c§c LiWm n³m tr°n LoÜn AB v¨ Ad.

3.2. Một số phương pháp giải BTQHTT đa mục tiêu

Định nghĩa 1

GiµÌ b¨i to§n t´i ¬u to¨n c¸c L¸a m¹c ti°u l¨ ch¨n ra t¸ tµp h¸p P c§c ph¬ng §n t´i ¬u Pareto c¸a b¨i to§n m¸t (hoHu m¸t s´) ph¬ng §n t´t nhÜl (thoµm«n nhÜl) theo m¸t nghµa n¨o L· d¸a tr°n ch¸ cÜu ¬u ti°n c¸a ng¬Ø i ra quyJt L¸nh.

Trong v² d¸ tr°n, tu8 theo ch¸ cÜu ¬u ti°n c¸a ng¬Ø i ra quyJt L¸nh, ch½ng ta c· thW ch¨n ra m¸t hoHu m¸t s´ LiWm t´i ¬u Pareto n³m tr°n AB hoHu tia Ad l¨m ph¬ng §n t´i ¬u c¸a b¨i to§n.

Cách 1: B³ng m¸t ph¬ng ph§p t´ i ¬u to§n h¸ c th²ch h¸ p t³m ra tËp h¸ p P tËt cÇ c§c ph¬ng §n t´ i ¬u Pareto. Ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh sÉ LÝra ch¸ cËu ¬u ti°n c¸ a m³nh L´ i v¸ i tËp P nh³m t³m ra ph¬ng §n t´ i ¬u Pareto thoÈ m«n nhËt cho b¨ i to§n L¸a m¸ c ti°u ban LÇu.

Cách 2: Vi¸ c t³m tËp h¸ p P trong tr¬Ì ng h¸ p c§c b¨ i to§n nhiÒu biÈn l¨ kh§ kh· v¨ mËt nhiÒu th¸ i gian. V³ vËy, so v¸ i c§ch 1, c§ch 2 sÉ tiÈn h¨nh theo tr³nh t¸ ng¬Ì c lÜi. Tr¬Ì c hÈt ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh sÉ LÝra ch¸ cËu ¬u ti°n c¸ a m³nh. D¸ a v¨o ch¸ cËu ¬u ti°n L· , c§c m¸ c ti°u sÉ L¬Ì c t´ h¸ p v¨o m¸ t m¸ c ti°u duy nhËt, ti°u biW cho h¨m t´ ng ti¸ n ²ch c¸ a b¨ i to§n. B¨ i to§n t´ i ¬u v¸ i h¨m m¸ c ti°u t´ h¸ p n¨y sÉ L¬Ì c giÇi b³ng m¸ t ph¬ng ph§p t´ i ¬u to§n h¸ c th²ch h¸ p, LWt³m ra m¸ t (hoHu m¸ t s´) ph¬ng §n t´ i ¬u Pareto. L½c n¨y, ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh sÉ ch¸ n ra trong s´ c§c ph¬ng §n t´ i ¬u Pareto L· m¸ t ph¬ng §n t´ t nhËt.

Ch¼ng ta sÉ tiÈp t¸ c ph©n t²ch c§ch th¸ 2. R » r¨ng, ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh kh¹ ng thWLÝQ ra ch¸ cËu ¬u ti°n c¸ a m³nh m¸ t c§ch ch²nh x§c ngay t¸ LÇu. Trong qu§ tr³nh giÇi b¨ i to§n, trong m¸ i b¬Ì c lHp, sau khi xem x®t lÜi ch¸ cËu ¬u ti°n L« LÝra, cÌ ng nh ¬ph¬ng §n trung gian v¸ a t³m L¬Ì c, ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh c· thWd¸ a v¨o c§c th¹ ng tin L· LWthay L´ i lÜi ch¸ cËu ¬u ti°n c¸ a m³nh. Sau L· , qu§ tr³nh giÇi lÜi L¬Ì c tiÈp t¸ c, cho t¸ i khi m¸ t ph¬ng §n t´ i ¬u cu´ i c½ng L¬Ì c L¬a ra.

Định nghĩa 2

Ph¬ng ph§p giÇi b¨ i to§n t´ i ¬u L¸a m¸ c ti°u d¸ a tr°n s¸ tr¸ gi½p c¸ a h¸ m§y t²nh, nh³m gi½p ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh t¸ ng b¬Ì c thay L´ i c§c quyÈt L¸ nh trung gian m¸ t c§ch th²ch h¸ p LWLi t¸ i m¸ t ph¬ng §n t´ i ¬u Pareto thoÈ m«n nhËt, L¬Ì c g¸ i l¨ ph¬ng ph§p t¬ng t§c ng¬Ì i – m§y t²nh.

Ph¬ng ph§p t¬ng t§c ng¬Ì i – m§y t²nh giÇi b¨ i to§n t´ i ¬u L¸a m¸ c ti°u c· c§c yÈu t´ cËu th¨nh sau:

– Ch¸ cËu ¬u ti°n c¸ a ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh v¨ h¨m t´ h¸ p t¬ng ¸ ng.

– KiW t¬ng t§c ng¬Ì i – m§y t²nh: cho bi ÈT c§c th¹ ng tin n¨o m§y t²nh phÇi L¬a ra lÜi trong c§c b¬Ì c lHp trung gian, v¨ c§ch thay L´ i c§c th¹ ng s´ c¸ a ch¸ cËu ¬u ti°n t¸ ph²a ng¬Ì i ra quyÈt L¸ nh.

– Kq thuËt t´ i ¬u to§n h¸ c L¬Ì c x©y d¸ ng d¸ a tr°n l² thuyÈt t´ i ¬u ho§ nh³m t³m ra c§c ph¬ng §n t´ i ¬u Pareto cho c§c b¨ i to§n c Ęn giÇi trong c§c b¬Ì c lHp trung gian.

Cho t¸ i th¸ i LiWn hi¸ n nay, h¨ng ch¸ c ph¬ng ph§p giÇi BTQHTT L¸a m¸ c ti°u L« L¬Ì c LÝQcdp t¸ i trong c§c tÜp ch² chuy°n ng¨nh, m¨ L¸a s´ ch¼ng LÝu c· nh¸ ng¸ ng d¸ ng rËt th¨nh c¹ ng trong nhi Qu lqnh v¸ c, nh¬Ì ph¬ng ph§p tham s´ , ph¬ng ph§p n· n ph§p tuy ÈTh, ph¬ng ph§p v®c th¸ c¸ c LÜi, ph¬ng ph§p tr¸ ng s´ t¬ng t§c c¸ a Chebysev, ph¬ng ph§p thoÈ d¸ ng m¸ t¬ng t§c c¸ a Nguy¸ n HÇi Thanh.

3.3. Phương pháp thoả dụng mờ tương tác giải BTQHTT đa mục tiêu

Thuật giải
a. Bước khởi tạo

– Nhập số liệu cho các hàm mục tiêu tuyến tính z_i (i = 1, 2,..., p) và miền ràng buộc.

– Giải BTQHTT cho từng mục tiêu z_i (i = 1, 2,..., p) và mỗi ràng buộc bán lẻ, thu lấy các phương án tối ưu X^1, X^2,..., X^p (nếu với mỗi mục tiêu không có tối ưu cho phương án tối thì cần xem xét lại chính sách lựa chọn ràng buộc bán lẻ).

– Tính giá trị hàm mục tiêu tại phương án X^1, X^2,..., X^p.

Lập bảng pay–off. Xác định giá trị cận trên z_i^B và giá trị cận dưới z_i^w của mục tiêu z_i (i=1, 2,..., p).

– Xác định các hàm thoả dụng mờ $\mu_1(z_1)$, $\mu_2(z_2)$,..., $\mu_p(z_p)$ cho từng mục tiêu dựa vào thang tin từ bảng pay–off theo công thức:

$$\mu_i(z_i) = \frac{z_i - z_i^w}{z_i^B - z_i^w}, \quad i = 1,2,...,p.$$

– Đặt k: = 1.

b. Các bước lặp (xác định cấp thứ k)

Bước 1: Xây dựng hàm mục tiêu tổng hợp từ các hàm thoả dụng trên:

$$w_1\mu_1(z_1) + w_2\mu_2(z_2) + ... + w_p\mu_p(z_p) \rightarrow \text{Max}$$

Trong đó: w_1, w_2,..., w_p là các trọng số phản ánh tầm quan trọng của từng hàm thoả dụng trong thành phần hàm tổng hợp, với

$$w_1 + w_2 + ... + w_p = 1 \text{ và } 0 \le w_1, w_2, ..., w_p \le 1.$$

Bước 2:

– Giải BTQHTT với hàm mục tiêu tổng hợp vừa tìm được ở phương án tối của bảng pay–off lần $X^{(k)}$ và giá trị của các hàm mục tiêu z_i cùng nhóm của các hàm thoả dụng $\mu_i(z_i)$ (với i =1, 2,..., p).

– Nếu ngoài ra quyết định chấm thêm chỉ của thoả mãn với các giá trị lẻ của các hàm mục tiêu cùng nhóm của các hàm thoả dụng thì phương án thu được $X^{(k)}$ chính là phải là phương án tối ưu nhóm của thoả mãn nhất. Đặt k:= k + 1, quay về bước 1.

– Nếu ngoài ra quyết định là chấm thêm thoả mãn thì phương án thu được $X^{(k)}$. Chuyển sang bước 3.

Bước 3: Kết thúc.

Ví dụ: Giải BTQHTT hai mục tiêu.

$$z_1 = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$z_2 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Max}$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$(D)\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a. Bước khởi tạo

– GiÃi BTQHTT cho t¸ng m¶c tÊu trong v² d¸ tr°n ta c· hai b¨i to§n: Max $z_1 = 8x_1 + 6x_2$ → Max v¸i LiÊu kiÖn r¨ng bu¸c (D) cho phÔng §n tÝ i Êu $X^1(12, 6)$ v¨ Max $z_1 = 132$; $z_2 = x_1 + 3x_2$ → Max cho phÔng §n tÝ i Êu $X^2(0, 12)$ v¨ Max $z_2 = 36$.

NhÔvdy miÒn phÔng §n tÝ i Êu Pareto ch²nh l¨ m× i phÔng §n thu¸c AB (xem h³nh I.1), v¸i A(0, 12) v¨ B(12, 6). $\bar{n}_1(8, 6)$ l¨ h·Ç ng tÆng c¶a m¶c ti°u 1, c¸n $\bar{n}_2(1, 3)$ l¨ h·Ç ng tÆng c¶a m¶c ti°u 2. Do L·, khi chÒn phÔng §n tÝ i Êu Pareto d¨ch dÃn t¸ B vQA th³ z_1 giÃm, z_2 tÆng. CÃn t³m phÔng §n tÝ i Êu Pareto "thoÃ m«n nhÊt" thu¸c AB b³ng c§ch ñth·Ông l·Ê ngò gi¸ a z_1 v¨ z_2.

– LÆp bÃng pay–off cho c§c m¶c ti°u

PhÔng §n X_i	z_1	z_2
$X^1(12, 6)$	132	30
$X^2(0, 12)$	72	36

D¸a tr°n th¹ng tin c¶a bÃng pay–off, ta c· $z_1^W = 72$, $z_1^B = 132$; c¸n $z_2^W = 30$, $z_2^B = 36$. Do L·, LoÜn biÃn thi°n cÃn x® cho z_1 l¨ [72, 132] v¨ cho z_2 l¨ [30, 36]. T¸ L· ch¼ng ta c· thWhiÃt lÆp c§c h¨m thoÃ d¶ng m¶ ng v¸i hai m¶c ti°u L« cho nhÔsau:

$$\mu_1(z_1) = \frac{z_1 - z_1^W}{z_1^B - z_1^W} = \frac{z_1 - 72}{132 - 72} = \frac{z_1}{60} - \frac{72}{60} = \frac{z_1}{60} - 1{,}2$$

H¨m thoÃ d¶ng m¶ tr°n LÃy ph¶ thu¸c v¨o z_1, n°n ph¶ thu¸c v¨o (x_1, x_2). Khi c· m¸t phÔng §n khÃ thi (x_1, x_2) ta t²nh LÊc L¸ thoÃ d¶ng $\mu_1(z_1)$ LÝ i v¸i m¶c ti°u z_1. TÔng t¸ LÝ i v¸i z_2 ta c· h¨m thoÃ d¶ng m¶:

$$\mu_2(z_2) = \frac{z_2 - z_2^W}{z_2^B - z_2^W} = \frac{z_2 - 30}{36 - 30} = \frac{z_2}{6} - 5.$$

LÆp h¨m thoÃ d¶ng tÖ h¶p $u = w_1\mu_1(z_1) + w_2\mu_2(z_2)$, trong L· w_1, w_2 l¨ c§c tr¸ ng sÝ thoÃ m«n $0 \le w_1, w_2 \le 1$ v¨ $w_1 + w_2 = 1$.

b. Các bước lặp

X® $w_1 = 0{,}5$ v¨ $w_2 = 0{,}5$, th³ c· $u = 0{,}5\left(\frac{z_1}{60} - 1{,}2\right) + 0{,}5\left(\frac{z_2}{6} - 5\right) = \left(\frac{z_1}{120} + \frac{z_2}{12}\right) + 1{,}9$. n¸ W

c¸c L¶i ho§ h¨m thoΓ d¸ng t˙ h˚p, ta ch" cΡn t³m Max $\left\{\frac{z_1}{120}+\frac{z_2}{12}\right\}$. VdΙy ch¼ng ta cΡn giΓi b¨i to§n: Max u = $\frac{z_1}{120}$ + $\frac{z_2}{12}$ v¸i c§c r¨ng bu¸c (D), hay b¨i to§n t·Θnng L·Θnng: z = 120u/18 = $x_1 + 2x_2 \rightarrow$ Max v¸i c§c r¨ng bu¸c (D). GiΓi BTQHTT n¨y ta sΕ c· kΙ quΓ (0, 12). NΙu thay L˙i gi§ tr˙ c¸a b¸ tr˜ng s´ (w_1, w_2) th³ sΕ thu L·Θc c§c ph·Θnng §n Pareto kh§c nhau, nh·Θng LΙu n³m tr°n LΙo¶n AB.

Chú ý: Ch¼Ι r³ng, v¸i m¸i b¸ tr˜ng s´ (w_1, w_2) ta t³m L·Θc m¸t ph·Θnng §n t´i ·Θu Pareto (x_1, x_2) b³ng c§ch l¨m c¸c L¶i ho§ h¨m thoΓ d¸ng t˙ h˚p u L« thiΙu lΙp L·Θc. C¸c thΙ chΙn c§c b¸ tr˜ng s´ w_1, w_2 kh§c nhau ta c· c§c ph·Θnng §n t´i ·Θu Pareto kh§c nhau. T¸ c§c ph·Θnng §n L·, ch¼ng ta chΙn L·Θc ph·Θnng §n t´i ·Θu Pareto t´t nhΕt.

PhΡn mΟm MULTIOPT phi°n bΓn 1.0 L·Θc x©y d¸ng d¸a tr°n ph·Θnng ph§p thoΓ d¸ng m˚ t·Θnng t§c nh³m giΓi BTQHTT L¸a m¸c ti°u. Ch·Θnng tr³nh L·Θc x©y d¸ng b³ng ng¹n ng¸ Visual Basic, c· giao di˙n LΙn giΓn v¨ d¸ d½ng. C§c ch¸c nΕng ch²nh c¸a phΡn mΟm bao g˚m:

– Ch¸c nΕng nhΙp d¸ li˙u cho BTQHTT L¸a m¸c ti°u m¸t c§ch tr¸c quan: nhΙp d¸ li˙u qua b¨n ph²m hoΗc nhΙp d¸ li˙u t¸ t˙p.

– XuΕt b¨i to§n L« L·Θc nhΙp ra t˙p.

– GiΓi b¨i to§n: theo d»i b΄ng pay–off v¨ giΓi theo ph·Θnng ph§p tr˜ng s´.

– XuΕt kΙ quΓ ra t˙p: xuΕt kΙ quΓ trung gian ra t˙p / xuΕt kΙ quΓ cu´i c½ng ra t˙p. Sau khi L« c¨i LΗt ch·Θnng tr³nh, m¸t li°n kΙ LΙn ch·Θnng tr³nh sΕ L·Θc tΕo tΕi menu *Start > Programs* c¸a Windows. ΒΝ Wkh˙i L¸ng ch·Θnng tr³nh, k²ch hoΕt menu *Start > Programs > Tối ưu đa mục tiêu.*

Sau L·, cΡn phΓi chΙn b¨i to§n b³ng c§ch v¨o menu *Chương trình*, LΝchΙn *Bài toán tuyến tính*.

Ng·Θi s¸ d¸ng c· thΝnhΙp d¸ li˙u theo m¸t trong hai c§ch sau:

Nhập dữ liệu từ bàn phím

ChΙn menu *Xử lí bài toán > Nhập dữ liệu > Nhập từ bàn phím*.

C§c s´ li˙u LΡu v¨o c¸a ch·Θnng tr³nh bao g˚m:

– n – s´ biΙn;

– m – s´ c§c r¨ng bu¸c;

– m1 – s´ c§c r¨ng bu¸c <= ;

– m2 – s´ c§c r¨ng bu¸c >= ;

– p – s´ c§c m¸c ti°u;

– ep – s´ d·Θnng L¸i nhΙ ;

– gz – s´ d·Θnng L¸i l¸n.

Nhập dữ liệu từ tệp

Th¸c hiªn lªnh *Xử lí bài toán>Nhập dữ liệu>Nhập từ tệp*, sau L· chän tªp dª liªu.

Ví dụ:

GiÃi b¨i to§n quy hoÜch tuyJn t²nh ba m¸c ti °u.

$$z_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_4 \to \text{Max}$$

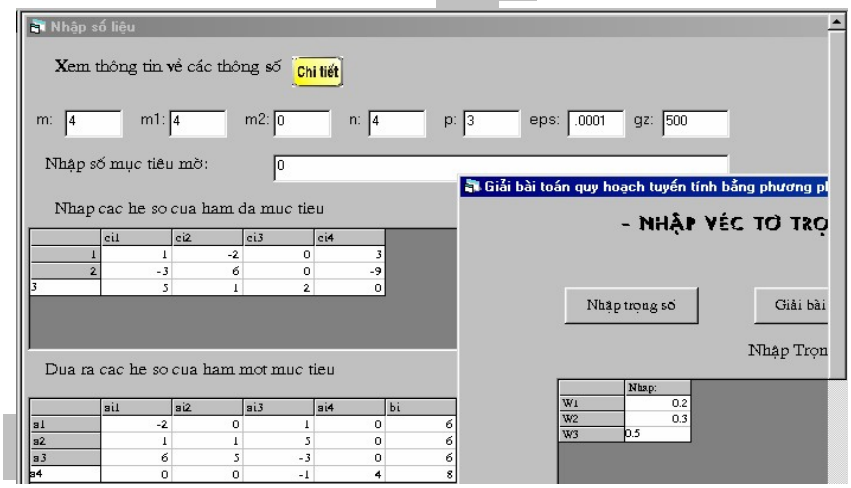
$$z_2 = -3x_1 + 6x_2 - 9x_4 \to \text{Max}$$

$$z_3 = 5x_1 + x_2 + 2x_3 \to \text{Max}$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 \le 6; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \le 6; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 \le 6; \\ -x_3 + 4x_4 \le 8; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

NhÆvdy, ´ L©y ch¼ng ta muª´ n c¸c LÜi ho§ LÅng th¸i ba h¨m m¸c ti°u tr°n miQn D c§c phÆhng §n khÃ thi thoÃm«n LÅng th¸i b´ n r¨ng bu¸c v¨ LiQu kªn kh¹ ng ©m c¸a c§c biJh.



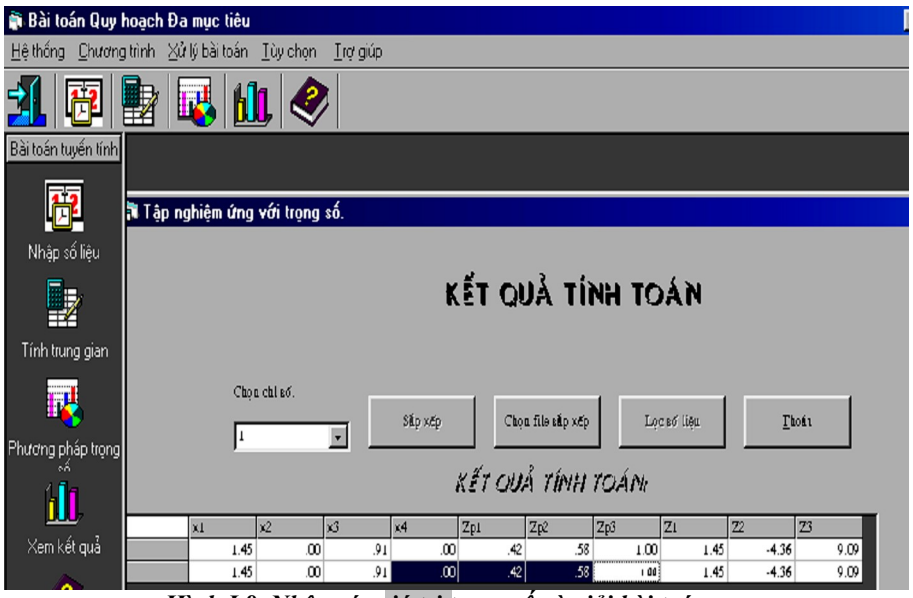
Hình 1.7. Nhập dữ liệu từ bàn phím

Trong bÆ¸c kh´i tÜb, ta nhªp dª liªu t¸ b¨n ph²m nhÆtr°n h³nh I.7.

– Sau khi L« nhªp dª liªu, th¸c hiªn t²nh c§c bÆ¸c trung gian (t²nh c§c gi§ tr¸ trong bÃng pay–off, t²nh c§c gi§ tr¸ cho c§c h¨m thoÃm¸ ng) b³ng c§ch chän *Xử lí bài toán>Tính toán>Tính trung gian*.

– Th¸c hiªn *Xử lí bài toán>Tính toán>Phương pháp trọng số*. Tr°n m¨n h³nh xuÖt hiªn form nhªp c§c gi§ tr¸ tr¸ng s´ (xem h³nh I.7: c§c gi§ tr¸ c¸a tr¸ ng s´ LÆ¸c nhªp sao cho

c· t˙ ng l¨ 1). Sau khi nh dp c§c gi§ tr˙ tr˙ ng s´ nhÏm v¨o n¼ *Giải bài toán* ĽWgiĘ i b¨i to§n (xem h³nh I.8).



Hình I.8. Nhập các giá trị trọng số và giải bài toán

KÕt qu¶ tr³n h×nh I.8 lµ $x_1 = 1,45$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,91$, $x_4 = 0$, $\mu_1(z_1) = 0,42$, $\mu_2(z_2) = 0,58$, $\mu_3(z_3) = 1$; $z_1 = 1,45$, $z_2 = -4,36$ vµ $z_3 = 9,09$ ¸ng v¸i b¸ tr˙ ng s´ $w_1 = 0,2$, $w_2 = 0,3$ v¨ $w_3 = 0,5$.

4. Mô hình tối ưu phi tuyến đơn và đa mục tiêu

4.1. Một số khái niệm cơ bản

Mô hình tối ưu tổng quát

M¹ h³nh t´ i ·Eu t˙ ng qu§t, hay b¨i to§n t´ i ·Eu t˙ ng qu§t, c· dÜng:

$$F(X) \to Min\ (Max)\ với\ X \in D \subset R^n.$$

¸ ĽÖy F(X) c· thWl¨ m¸ t h¨m v¹ h·Ęng hay h¨m v®c th, tuyJh t²nh hay phi tuyJh. Trong tr·Ęng h˚ p F(X) l¨ h¨m v¹ h·Ęng th³ ta c· m¹ h³nh t´ i ·Eu ĽÈn m¸ c ti°u, c¸ n nJu F l¨ h¨m v®c th th³ c· m¹ h³nh t´ i ·Eu Ľa m¸ c ti°u. D ĽÈ c g¸ i l¨ miQn r¨ng bu¸ c hay miQn ph·Ęng §n khĘ thi, th·Ęng ĽÈ c biWl di¸ n b´ i c§c ĽÈng th¸ c v¨/hoHo c§c bÏ ĽÈng th¸ c.

Mô hình tối ưu phi tuyến đơn mục tiêu

DÜng ch²nh tdc c¸ a b¨i to§n t´ i ·Eu m¸ t m¸ c ti°u ĽÈ c biWl di¸ n nh·Esau:

$$f(X) \to Min\ (Max), \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n,$$

với: (i) $g_j(X) \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$

(ii) $g_j(X) = 0, \quad j = k+1, k+2, \ldots, m,$

Trong các bài toán thực tế có thể bổ sung các ràng buộc

(iii) $a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Trong trường hợp hàm mục tiêu f(X) hoặc các ràng buộc trong các bài toán rằng buộc $g_j(X)$, j = 1, 2, …, m, là phi tuyến, chúng ta các bài toán phi tuyến. Khi biến các biến toàn x_i được bổ sung các giá trị nguyên, i = 1, 2, …, n, thì ta các bài toán tối ưu nguyên. Cũng nhận chú các biến số toàn (nhưng khác phần biến các biến toàn) bởi bổ sung các giá trị nguyên thì ta các bài toán tối ưu hỗn hợp nguyên.

Khái niệm Dữ miền các phương án (miền ràng buộc) cho bởi các ràng buộc (i), (ii) và/hoặc (iii) thì bài toán tối ưu được gọi hình nhưsau:

$$f(X) \to Min\ (Max) \text{ với } X \in D.$$

Lúc này, với việc bài toán cực tiểu hóa, $X^* \in D$ được gọi là phương án tối ưu nếu $\forall X \in D$ ta luôn có: $f(X^*) \le f(X)$. Trong trường hợp $f(X^*) \le f(X)$ chỉ với việc $\forall X \in D$ trong một lân cận nào đó của X^* thì X^* được gọi là phương án địa phương. Một các phương án, ta có thể nhận ra khái niệm phương án tối ưu cho bài toán cực hóa được gọi là phương án cho bài toán tối ưu. Người chú quan tâm tới việc tìm kiếm phương án tối ưu *bài toán tối ưu toàn cục*.

Trong các bài toán tối ưu phi tuyến đang nói chung, trong lớnh vực kh² – Lí n lực nói riêng, phương án tối ưu các cấm một Ĩ nghĩa quan trọng. Chúng hưởn trong thiết kế m§y nén nghiệp, sau khi đ½ng phương pháp phân tích hệ quy nhiều chiều, ta thường thu được các hàm mục tiêu f(X) cấu đường phi tuyến. Bài toán được là phương án tối ưu.

Cấu rất nhiều phương pháp giải các lớp bài toán tối ưu phi tuyến, nhưng chưa các phương pháp nào tồn tại hữu hiệu cho mọi bài toán tối ưu phi tuyến, được bởi tất các bài toán tối ưu nguyên và hỗn hợp nguyên.

Mô hình tối ưu phi tuyến đa mục tiêu

Một hình tối ưu là mục tiêu cực tiểu cấu đường:

$$z_j = f_j(X) \to Min\ (Max), \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, p\ (p \ge 2)$$

với: (i) $g_j(X) \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$

(ii) $g_j(X) = 0, \quad j = k+1, k+2, \ldots, m,$

Trong các bài toán thực tế có thể bổ sung các ràng buộc

(iii) $a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Trong m¹ h³nh n¨y, ta c· p m„c ti°u cÊn t´i ®a ho§, c§c h¸ s´ c„a c§c h¨m m„c ti°u v¨ r¨ng bu¸c n·i chung L©Ồc giÃ¶s¸ l¨ c§c gi§ tr¸ th¸c x§c L¸nh. Trong tr®Ồng h¸p c· ²t nhÊt m¸t trong c§c h¨m m„c ti°u hay c§c h¨m r¨ng bu¸c l¨ h¨m phi tuyÊn, ch¼ng ta c· b¨i to§n t´i ®a phi tuyÊn L©a m„c ti°u.

®´i v¸i b¨i to§n t´i ®a phi tuyÊn L©a m„c ti°u ch¼ng ta cÒng c· kh§i ni¸m ph®Ồng §n t´i ®a Pareto nh®ỐL« tr³nh b¨y trong m„c 3.1 v¨ 3.2 L´i v¸i BTQHTT L©a m„c ti°u.

CÒng nh®ỐL´i v¸i c§c BTQHTT L©a m„c ti°u, ph®Ồng ph§p giÃi b¨i to§n t´i ®a phi tuyÊn L©a m„c ti°u d¸a tr°n s¸ tr¸ giÃ¼p c„a h¸ m§y t²nh, nh³m giÃ¼p ng®Ồi ra quyÊt L¸nh t¸ ng b®Ồc thay L¸i c§c quyÊt L¸nh trung gian m¸t c§ch th²ch h¸p L©WÒi t¸i m¸t ph®Ồng §n t´i ®a Pareto thoÃ¶m«n nhÊt, L©Ồc g¸i l¨ ph®Ồng ph§p t®Ồng t§c ng®Ồi–m§y t²nh.

4.2. Một số phương pháp và phần mềm giải bài toán tối ưu phi tuyến đơn mục tiêu

Các phương pháp giải bài toán tối ưu toàn cục

C§c ph®Ồng ph§p giÃi b¨i to§n t´i ®a to¨n c„c phi tuyÊn L©hn m„c ti°u L©Ồc ph©n ra th¨nh hai l¸i p: ph®Ồng ph§p tÊt L¸nh (*deterministic methods*) v¨ ph®Ồng ph§p ng®Ồu nhi°n (*stochastic methods*).

Ph®Ồng ph§p tÊt L¸nh s¸ d„ng c§c t²nh chÊt giÃi t²ch c„a h¨m m„c ti°u v¨ c§c h¨m r¨ng bu¸c. M¸t s´ dÜng b¨i to§n t´i ®a to¨n c„c v¸i nh¸ng t²nh chÊt giÃi t²ch nhÊt L¸nh c„a h¨m m„c ti°u v¨ c§c h¨m r¨ng bu¸c c· thWgiÃi L©Ồc b³ng c§c ph®Ồng ph§p tÊt L¸nh th²ch h¸p, ch³ng hÜn nh®Ồph®Ồng ph§p quy hoÜch to¨n ph®Ồng, quy hoÜch t§ch, quy hoÜch lÔi, quy hoÜch d.cé Trong c§c tr®Ồng h¸p L· ph®Ồng §n t´i ®a to¨n c„c c· thWt³m L©Ồc sau m¸t s´ h¸u hÜn b®Ồc t²nh to§n v¸i L¸ ch²nh x§c chÒn tr®Ồc. Tuy nhi°n, L´i v¸i nhiÒu l¸p b¨i to§n t´i ®a to¨n c„c ph®Ồng ph§p tÊt L¸nh t¸ ra kh¹ng c· hi¸u quÃ.

Trong khi L·, c§c ph®Ồng ph§p ng®Ồu nhi°n nh®Ồ ph®Ồng ph§p L©a kh´i tÜo (*multistart*), m¹ ph¸ng t¹i (*simulated annealing*), thuÊt giÃi di truyÒn (*genetic algorith m*),é c· thW§p d„ng LWgiÃi c§c b¨i to§n t´i ®a to¨n c„c dÜng bÊt k³, kh¹ng L¸i h¸i c§c t²nh chÊt L©Hu bi¸t c„a h¨m m„c ti°u hay c§c h¨m r¨ng bu¸c. C§c ph®Ồng ph§p ng®Ồu nhi°n L©Hu bi¸t t¸ ra c· hi¸u quÃ L´i v¸i c§c b¨i to§n t´i ®a phi tuyÊn nguy°n v¨ h¸n h¸p nguy°n. Tuy nhi°n, c§c ph®Ồng ph§p n¨y th®Ồng ch¨ cho ph®Ồng §n ñgÃnò t´i ®a kh§ t´t sau m¸t s´ h¸u hÜn b®Ồc m¨ kh¹ng kiWm so§t L©Ồc L¸ ch²nh x§c c„a ph®Ồng §n t³m L©Ồc.

Phần mềm Lingo giải bài toán quy hoạch toàn phương

Ví dụ: GiÃi b¨i to§n t´i ®a phi tuyÊn dÜng to¨n ph®Ồng

$z = 8x_1^2 + 6x_2^2 \rightarrow \text{Max},$

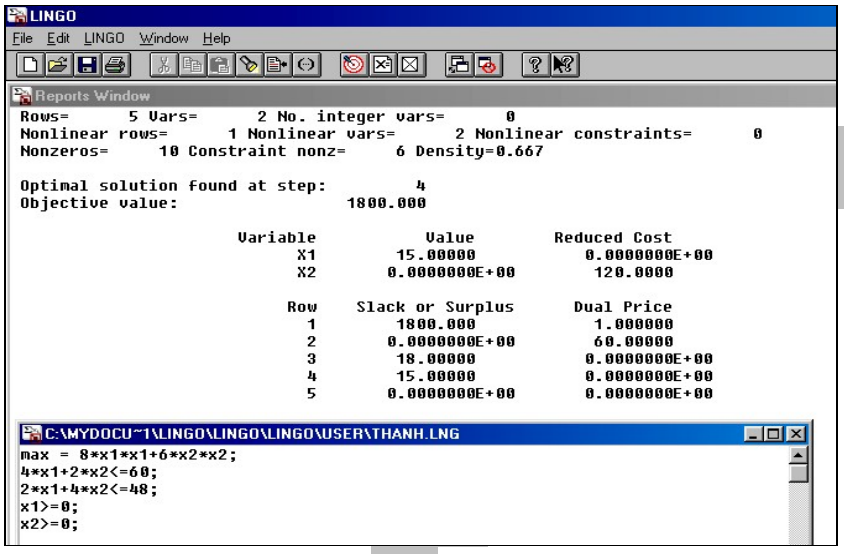
v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ng giải bài toán quy hoạch phi tuyến bằng phần mềm RST2ANU 1.0 để sử dụng giải các bài toán tối ưu phi tuyến phổ biến và các bài toán biến liên tục, các bài toán nguyên và cho các bài toán hỗn hợp nguyên. Quá trình xây dựng phương pháp tính toán, thuật giải, các hàm tính ngôn ngữ C và sau này ngôn ngữ Visual C++ 6.0 cùng nhiều chương thì nghiệm không đạt yêu cầu giải bài toán. Người đọc muốn biết giải các bài toán phương pháp tối ưu trong việc tính ra các phương pháp toán các vấn đề giao diện thân thiện với người sử dụng. Phần mềm là đề cập đến những tránh sao chép và những giải các bài toán lớn khi để các hàm tính hàm số tính mềm.

Thuật giải

Thuật giải ngẫu nhiên RST2AN (hay RST2ANU), để được ra bởi C. Mohan và Nguyễn Hải Thanh. Thuật giải này thuật giải tìm kiếm ngẫu nhiên các điểm khiến, các khác phù thuật toán mô phỏng tôi (SA). Thuật giải RST2AN là thuật giải lấy, bao gồm hai pha: pha cục bộ và pha toàn cục. Sau đây thuật giải RST2AN để phát biểu một chương trình giải cho bài toán tối ưu chung dùng cấu tiếp.



Hình I.9. Kết quả bài toán quy hoạch toàn phương trong Lingo.

Tiếp theo, cần nhấn chuột vào nút LINGO để giải bài toán để thu được kết quả chi tiết hình trên. Kết quả trên cho ta biết giá trị các biến là hàm mục tiêu là 180 với phương án tối ưu: $x_1 = 15$, $x_2 = 0$. Các giá trị tối ưu của các biến ngẫu là $y_1 = 5/3$ và $y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

Giải bài toán tối ưu phi tuyến bằng phần mềm RST2ANU

Phần mềm RST2ANU 1.0 để sử dụng giải các bài toán tối ưu phi tuyến dùng tính quá với các bài toán biến liên tục, các bài toán nguyên và cho các bài toán hỗn hợp nguyên. Quá trình xây dựng phương pháp tính toán, thuật giải, các hàm tính ngôn ngữ C và sau này ngôn ngữ Visual C++ 6.0 cùng nhiều chương thì nghiệm không đạt yêu cầu giải bài toán. Người đọc muốn biết giải các bài toán phương pháp tối ưu trong việc tính ra các phương pháp toán các vấn đề giao diện thân thiện với người sử dụng. Phần mềm là đề cập đến những tránh sao chép và những giải các bài toán lớn khi để các hàm tính hàm số tính mềm.

Thuật giải

Thuật giải ngẫu nhiên RST2AN (hay RST2ANU), để được ra bởi C. Mohan và Nguyễn Hải Thanh. Thuật giải này thuật giải tìm kiếm ngẫu nhiên các điểm khiến, các khác phù thuật toán mô phỏng tôi (SA). Thuật giải RST2AN là thuật giải lấy, bao gồm hai pha: pha cục bộ và pha toàn cục. Sau đây thuật giải RST2AN để phát biểu một chương trình giải cho bài toán tối ưu chung dùng cấu tiếp.

Trong pha toàn cục, một số lượng thích hợp L¸i, lỗn c§c phương §n khÔng thi L¹c L¹c ph§t sinh ra một c§ch ngẫu nhi°n vào trong mÔng c· t°n A. ¸n §nh dÒu hai LiWn c· gi§ trÞ hàm mục ti°u lỗn nhÒt vào nhÒt trong ¸ng lÞ M và L.

Trong pha cục bộ, c§c phương §n L¹c xâm l² nh³m thu L¹c gi§ trÞ tốt hÞn cục a hàm mục ti°u. Trong pha này, thuÒt giÔi x§c LÞnh X lÞ LiWn L¹c nỗi suy bÒc hai dỗa tr°n phương §n L và hai phương §n kh§c L¹c chỗn ngẫu nhi°n trong mÔng A. NÔu nhÒX lÞ phương §n khÔng thi th³ víi f(X) Ò f(M), M s£ L¹c thay thÔ bởi X trong mÔng A; cỗn víi f(X) > f(M), M s£ L¹c thay thÔ bởi X víi x§c suÒt p= exp(−b(f(X)−f(M))/(f(X)−f(L))), trong L· b > 0 lÞ tham số L¹c lỗa chỗn th²ch hợp. NÔu X khh¹ng phÔi lÞ phương §n khÔng thi, bỗ qua X và chỗn hai phương §n kh§c trong A một c§ch ngẫu nhi°n rồi c½ng víi L tiÔp tục sinh ra phương §n mới. Qu§ tr³nh cục thÔtiÔp diễn nhÒvÒy cho tới khi tÒp hợp c§c phương §n trong A s£ c· xu hỗng co cục m lÜi xung quanh một phương §n tối ¹u toàn cục.

Ví dụ: GiÔi bài to§n tối ¹u phi tuyÔn hỗn hợp nguy°n.

$$z = x_1^{0,6} + x_2^{0,6} + x_3^{0,4} + 2x_4 + 5x_5 - 4x_3 - x_6 \to \text{Min}$$

víi c§c rcàng buộc:

$$\begin{cases} x_2 - 3x_1 - 3x_4 = 0; \\ x_3 - 2x_2 - 2x_5 = 0; \\ 4x_4 - x_6 = 0; \\ x_1 + 2x_4 \le 4; \\ x_2 + x_5 \le 4; \\ x_3 + x_6 \le 6; \\ x_1 \le 3;\ x_2 \le 4;\ x_3 \le 4; \\ x_4 \le 1;\ x_5 \le 2;\ x_6 \le 6; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0; \\ x_4, x_5, x_6 \text{ lÞ c§c biÔn nguy°n.} \end{cases}$$

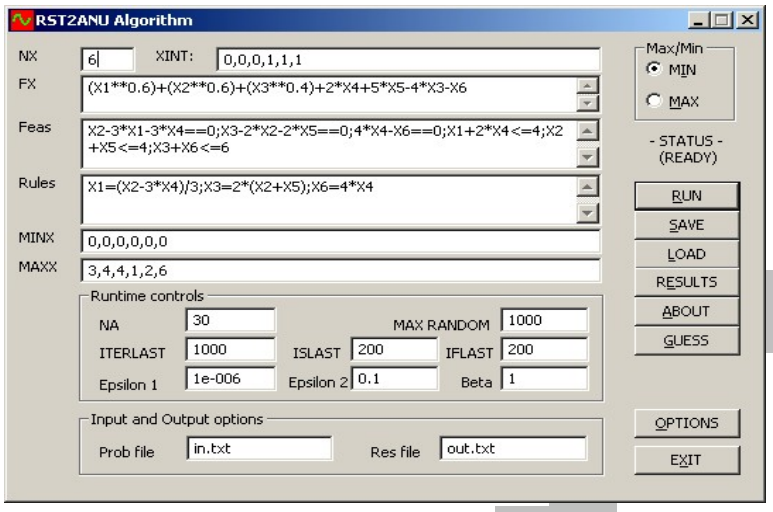
Hướng dẫn sử dụng

Chương trình L¹c g·i gỗn trong một file chÜy duy nhÒt mang t°n rst2anu1.0.exe. Khi bÒt LÞu khởi L¸ng chương trình, ngỗi d½ng s£ L¹c hỗi m« LÞng k² số dỗng chương trình. Mỗi ngỗi d½ng s£ L¹c cÒp một m« LÞng k² và phÔi c· m« LÞng k² mới số dỗng L¹c chương trình, do L· chương trình khh¹ng thWb sao chÞp.

Sau khi nhÒp m« LÞng k², ngỗi d½ng c· thWnhÒp bài to§n một c§ch dỗ dàng (xem h³nh I.10) víi:

– NX lÞ số biÔn cục a bài to§n.

– XINT x§c LÞnh biÔn nguy°n và biÔn khh¹ng nguy°n. Nhỗ trong h³nh tr°n, XINT = 0,0,0,1,1,1 cho biÔt ba biÔn LÞu lÞ biÔn li°n tục, ba biÔn sau lÞ biÔn nguy°n.



Hình I.10. Màn hình giao diện sau khi nhập xong dữ liệu

– FX l¨ x@u x§c L'nh h¨m r¨ng bu¸c, L·Ể c nhdp theo c¼ ph§p ¸a EvaluateExpression. C§c biJh L·Ể c viJ b³ng k² hi¹u ñXò c· k¯m theo ch" s´. V² d¸, X1 l¨ biJh th¸ nhËt, X5 l¨ biJh th¸ 5.

– NJu b¨i to§n t´i ·Eu l¨ b¨i to§n t³m c¸c tiWu th³ l¸a ch`n ¹ MIN v¨ ng·Ể c lÜi ch`n ¹ MAX v¸i b¨i to§n t³m c¸c LÜi.

– Feas x@u cho biJ c§c h¨m r¨ng bu¸c, L·Ể c nhdp c§ch nhau b´i dËu chËm phÍy hoHu xu´ng d¸ng. C§c x@u n¨y c Ì ng tu@n theo c¼ph§p ¸a EvaluateExpression.

– Rules l¨ c§c x@u ch" ra c§c ludt. ¸ L'@y, m¸t ludt c· thWcoi nh ·El¨ m¸t l'nh g§n gi§ tr' ¸a m¸t biJh b´i gi§ tr' ¸a m¸t biWu th¸ c c§c biJh kh§c.

– MINX l¨ mÍng x§c L'nh cdn d·Ể i cho c§c biJh, c§c gi§ tr' viJ c§ch nhau b´i dËu phXy (,).

– MAXX l¨ mÍng x§c L'nh cdn tr°n cho c§c biJh, c§c gi§ tr' viJ c§ch nhau b´i dËu phÍy (,).

– NA l¨ k²ch th·Ể c ¸a mÍng A (c· thWch`n tu8Ï, t´i thiWu l¨ 2(n + 1) v¸i n l¨ s´ biJh ¸a b¨i to§n).

– MAX RANDOM l¨ s´ lÊn c´ gdng t´i L'a L'Wt³m m¸t ph·Ểng §n chËp nhdn L·Ể c b³ng ph·Ểng ph§p ng Xu nhi°n.

– ITERLAST, ISLAST, IFLAST l¨ c§c gi¸i hÜn vQs´ v¸ng lHp, s´ lÊn thËt bÜi trong vi¹c cÍi thi¹n gi§ tr' h¨m m¸c ti°u, s´ lÊn thËt bÜi trong vi¹c n¸i suy ph·Ểng §n m¸i chËp nhdn L·Ể c.

– Epsilon1, epsilon2 l¨ c§c s´ d·Ểng L¸ nh¸ nh³m x§c L'nh ti°u chuXn co ¸a mÍng A theo thudt giÍi.

– Beta l¨ h³ng s´ s¨ d¸ng trong c¹ng th¸c t²nh x§c xuËt thay thJm¸t ph·Ểng §n t´t

hÈn trong mÇng A b´ i m¸ t ph©Øng §n tº i hÈn.

– Prob file v¨ Res file l¨ c§c t¹ p LÊu v¨o v¨ t¹ p kÈt quÇ. C· thWsoÜn sÈu t¹ p b¨i to§n LÊu v¨o rº i nÜp b¨i to§n. CÌng c· thWl©u m¸ t b¨i to§n L« nhËp ra t¹ p.

Chạy chương trình

Sau khi nhËp b¨i to§n hay nÜp b¨i to§n t¸ t¹ p, c· thWchÜy ch©Øng tr³nh b³ng c§ch k²ch chu¸ t v¨o n¼ RUN. Trong khi ch Üy ch©Øng tr³nh, ¹ tr Üng th§i ´ ph²a tr °n n¼ RUN s Ɛ xuÖt hi¹ n d¸ ng ch¸ SEARCHING. Khi thuËt giÇi chÜy xong th³ ¹ trÜng th§i sƐ tr´ vQ READY cho biÈt L« sÈu s¨ng cho c§c b¨i to§n tiÈp theo. Mº i th¹ ng tin vQ phÊn mQm v¨ c§ch s¨ d¸ ng sƐ L©Ò c biÈt nÈu k²ch chu¸ t v¨o n¼ ABOUT.

Sau khi chÜy xong ch©Øng tr³nh, kÈt quÇ chÜy sƐ L©Ò c xem tr¸ c tiÈp khi k²ch chu¸ t v¨o n¼ RESULTS v¨ c· th W©u ra file vÈn bÇn, bao gồm ph©Øng §n t´ i ©u, gi§ tr¸ h¨m m¸ c ti°u, mÇng A,é c· cÖu tr¼c nh©tr°n h³nh I.11.

```
****************************RESULTS*********************************
fx=(X1**0.6)+(X2**0.6)+(X3**0.4)+2*X4+5*X5-4*X3-X6
ITER = 158/1000; ISMAX = 76/200; IFMAX = 1001/1000
X*     = 0.666667 2.000000 4.000000 0.000000 0.000000 0.000000
f(X*) = -11.959130

==========================ARRAY A================================
 0.666667 2.000000 4.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -11.959130
 0.666667 2.000000 4.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -11.959130
 0.666667 2.000000 4.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -11.959130
 0.666667 2.000000 4.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -11.959130
 0.666667 2.000000 4.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -11.959130
 0.666667 2.000000 4.000000 0.000000 0.000000 0.000000 -11.959130
 0.666321 1.998962 3.997925 0.000000 0.000000 0.000000 -11.951906
 0.663472 1.990417 3.980834 0.000000 0.000000 0.000000 -11.892427
 0.662414 1.987243 3.974487 0.000000 0.000000 0.000000 -11.870339
 0.659851 1.979553 3.959105 0.000000 0.000000 0.000000 -11.816829
 0.640848 1.922544 3.845088 0.000000 0.000000 0.000000 -11.420634
 0.640116 1.920347 3.840693 0.000000 0.000000 0.000000 -11.405380
```

Hình I.11. Cấu trúc file kết quả

NhËvËy, b¨i to§n L« L©Ò c giÇi xong, v¸ i kÈt quÇ: $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, v¨ gi§ tr¸ t´ i ©u c¸ a h¨m m¸ c ti°u l¨ –11,95913.

Bài toán tối ưu thông số sàng phân loại

Ch¼ng ta c· thWs¨ d¸ ng phÊn mQm RST2ANU LWt³m nghi¹ m c¸ a h¹ ph©Øng tr³nh phi tuyÈn sau ph§t sinh trong vi¹ c t²nh to§n m¸ t s´ th¹ ng s´ h³nh h¶ c v¨ L¸ ng h¶ c c¸ a cÈn cÖu s¨ng ph©n lo Üi dao L¸ ng (cÊn ch¼Ï r³ng nhiQu ph ©Øng ph§p t²nh to§n th¹ ng d¸ ng kh§c c¸ a giÇi t²ch s´ L« t¸ ra kh¹ ng hi¹ u quÇ):

$$
\begin{cases}
r\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 + l''_3\cos\varphi_3 + l_4\cos\varphi_4 - x_{C1} = 0; \\
r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 + l''_3\sin\varphi_3 + l_4\sin\varphi_4 - y_{C1} = 0; \\
r\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 + l'_3\cos(\varphi_3 - \alpha) + l_5\cos\varphi_5 - x_{D1} = 0;
\end{cases}
$$

$$r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 + l'_3\sin(\varphi_3 - \alpha) + l_5\sin\varphi_5 - y_{D1} = 0;$$

Trong hệ phi tuyến trên các thông số là: r = 0,05m; l = 0,30m; l''_3 = 0,15m; l'_3 = 1,075m; l_3 = 1,025m; l_4 = 0,50m; l_5 = 0,40m; x_{C1} = 0,365m; y_{C1} = 0,635m; x_{D1} = 1,365m; y_{D1} = 0,635m; $\alpha = \pi/8$.

Áp dụng phần mềm RST2ANU giải hệ phương trình phi tuyến cho $\varphi_1 = k\pi/8$ (k = 0, é, 9), trước các hàm ràng buộc phương trình sau:

$z = (r\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 + l''_3\cos\varphi_3 + l_4\cos\varphi_4 - x_{C1})^2 + (r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 + l''_3\sin\varphi_3 + l_4\sin\varphi_4 - y_{C1})^2 + (r\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 + l'_3\cos(\varphi_3 - \alpha) + l_5\cos\varphi_5 - x_{D1})^2 + (r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 + l'_3\sin(\varphi_3 - \alpha) + l_5\sin\varphi_5 - y_{D1})^2 \rightarrow$ Min.

Kết quả được cho trong bảng I.3 với $z_{min} = 0$.

Bảng I.3. Kết quả tính toán giá trị các thông số của sàng phân loại

$\varphi_1 \in [0,2\pi]$	$\varphi_2 \in [0,\pi]$	$\varphi_3 \in [0,\pi]$	$\varphi_4 \in [0,\pi]$	$\varphi_5 \in [0,\pi]$
0	0,226128	0,551311	1,783873	1,666775
$\pi/18$	0,199269	0,550518	1,784628	1,670250
$2\pi/18$	0,170835	0,550590	1,782751	1,668853
$3\pi/18$	0,143343	0,550490	1,778826	1,663697
$4\pi/18$	0,112669	0,552073	1,770032	1,652171
$5\pi/18$	0,090986	0,551991	1,759350	1,639575
$6\pi/18$	0,066036	0,553576	1,745374	1,622823
$7\pi/18$	0,051284	0,554296	1,730174	1,602970
$8\pi/18$	0,039053	0,555262	1,713242	1,581813
$9\pi/18$	0,033773	0,556277	1,695605	1,560720

4.3. Một số phương pháp giải bài toán tối ưu phi tuyến đa mục tiêu

Phương pháp tương tác người–máy tính

Phương pháp PRELIME (*PREference Level Interactive Method*) hay còn gọi là phương pháp tương tác dựa trên mức ưu tiên do C. Mohan và Nguyễn Hữu Thanh Được và Cũng phương pháp trọng số quy chuẩn là do Andrezj Osyczka Được. Các phương pháp này được áp dụng giải–mô hình toán tối ưu vấn đề cực yêu thích sau:

– Chọn cấu ưu tiên cần ra quyết định và hàm mục tiêu.

– Giữa tương giải – mô hình: các thông tin nào mô hình hữu ích trong các bước lặp trung gian, và các thay đổi các thông số cần chọn cấu ưu tiên để ra quyết định.

– Không thuật tối ưu toàn hệ các xây dựng dựa trên lý thuyết tối ưu hoàn hảo tìm ra

c§c ph©Ng §n t´ i ©u Pareto cho c§c b¨i to§n c Ñn giÑi trong c§c b©Ç c lHþ trung gian.

Bài toán thiết kế trục máy

B¨i to§n c· hai m„ c ti°u sau:

– M„ c ti°u 1 l¨ c¸ c tiWu ho§ thWt²ch c„ a tr„ c m§y

$$f_1(X) = 0,785[x_1(6400 - x_2^2) + (1000 - x_1)(1000 - x_2^2)]\ (mm^3)$$

– M„ c ti°u 2 l¨ c¸ c tiWu ho§ L¸ n®n tonh c„ a tr„ c

$$f_2(X) = 3,298\times10^{-5}\left[\left(\frac{1}{4,096\times10^7 - x_2^4} - \frac{1}{10^8 - x_2^4}\right)x_1^3 + \frac{10^9}{10^8 - x_2^4}\right]\ (mm/N)$$

Trong L·, X= (x_1, x_2) l¨ v®c th quyJt L´nh hay v®c th ph©Ng §n, v¸ i x_1, x_2 l¨ c§c biJh quyJt L´nh sau: x_1 – L¸ d¨i phÑn gi§p n´ i tr„ c, x_2 – LÈ ng k²nh trong c„ a tr„ c. C§c th¹ ng s´ kh§c L«c LÈ c thWhi¸ n trong c§c h¨m m„ c ti°u $f_1(X)$ v¨ $f_2(X)$. Ch¼ng ta cÑn ch¸ n c§c gi§ tr¸ cho c§c biJh quyJt L´nh (c¸ n g¸ i l¨ c§c biJh thiJt kJ) x_1, x_2 LWt´ i ©u ho§ L¸ ng th¸ i c§c m„ c ti°u 1 v¨ 2 trong c§c LiQu ki¸ n r¨ng bu¸ c sau:

$$\begin{cases} g_1(X) = 180 - \dfrac{9,78\times10^6 x_1}{4,096\times10^7 - x_2^4} \ge 0, & (1) \\ g_2(X) = 75,2 - x_2 \ge 0, & (2) \\ g_3(X) = x_2 - 40 \ge 0, & (3) \\ g_4(X) = x_1 \ge 0, & (4) \end{cases}$$

trong L· c§c LiQu ki¸ n (2), (3), (4) l¨ d¸ hiWu (ngo¨i ra, ta gi¸ thiJt $x_1 \le 1000$), c¸ n LiQu ki¸ n (1) nÑy sinh do y°u cÑu sau: M¸ t mHu tr„ c m§y phÑi ch¸ u L¸ ng LÈ c t¸ i m¸ c t´ i La l¸ c F_{max} = 12000N. MHukh§c, L¸ n®n kJt n´ i cho ph®p l¨ 180N/mm.

Vi¸ c ph§t biWu b¨i to§n t´ i ©u La m„ c ti°u dÈ i dÜng to§n h¸ c (ch²nh l¨ vi¸ c ldp m¹ h³nh to§n h¸ c cho vBi LQph§t sinh t¸ th¸ c tJ) l¨ m¸ t kh©u rBi quan tr¸ ng nh³m m¹ tÑ t´ t nhBi h¨nh vi c„ a h¸ th´ ng LaNg LÈ c xem x®t, mHukh§c nh³m t ³m ra LÈ c c§c ph©Ng ph§p t´ i ©u ho§ c· hi¸ u quÑ LWLi t¸ i m¸ t ph©Ng §n L„ t´ t v¨ mang lÜi l¸ i ²ch.

Sau L©y, ch¼ng ta h«y ph©n t²ch vdn tdr hai ph©Ng ph§p giÑi b¨i to§n thiJt kJ tr„ c m§y L«n°u ra ´ tr°n.

Phương pháp trọng số quy chuẩn

Trong yJu t´ cBi th¨nh th„ nhBi, h¨m t¸ h¸ p c§c m„ c ti°u cho b¸ i $f(X) = \omega_1 f_1(X) + \omega_2 f_2(X)$, trong L· ω_1, ω_2 l¨ c§c tr¸ ng s´ kh¹ ng ©m ¸ ng v¸ i c§c h¨m $f_1(X)$ v¨ $f_2(X)$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Do gi§ tr¸ c„ a h¨m $f_1(X)$ th©Ng l¸ n gBp rBi nhiQu lÑn gi§ tr¸ c„ a h¨m $f_2(X)$, ω_1 v¨ ω_2 LÈ c quy chuXn nhÈ sau: $f(X) = \omega_1' f_1(X) + \omega_2' f_2(X)$, v¸ i $\omega_1' = \omega_1.10^{-6}/2,961$; $\omega_2' = \omega_2.10^{+3}/0,338$.

¸ yJu t´ cBi th¨nh th„ hai, trong c§c b©Ç c lHþ trung gian, ngÈ i ra quyJt L´nh thay

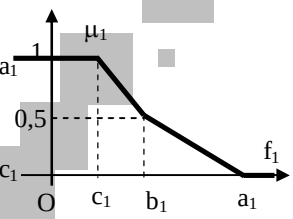
Ľ i lĘn lĐ t c§c cHþ tr ng s´ (ω_1, ω_2) v¸ i c§c gi§ tr l¨ (0,2; 0,8), (0,8; 0,2), (0,6; 0,4) v¨ (0,4; 0,6). CHþ tr ng s´ cu´ i c½ng cho ph©n §n t´ i ©u Pareto thoĘ m«n nhĐt l¨ $x_1 = 237,1$ v¨ $x_2 = 68,2$, v¸ i $f_1(X) = 3,529 \times 10^6$; $f_2(X) = 0,437 \times 10^{-3}$.

C¸ n´ yJu t´ cĐu th¨nh th¸ ba, t§c giĘ Andrezj Osyczka Ľ« s¨ d¸ ng thuJt to§n t´ i ©u d¸ t³m ng Xu nhi°n.

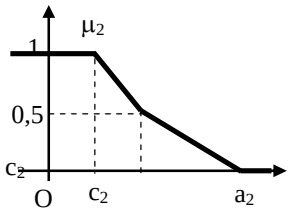
Phương pháp tương tác dựa trên mức ưu tiên PRELIME

TrĐ c hJ, ´ yJu t´ cĐu th¨nh th¸ nhĐt, hai m¸ c ti°u $f_1(X)$ v¨ $f_2(X)$ ĽĐ c chuyW i th¨nh hai h¨m (li°n) thu¸ c m¸ phĘn §nh L¸ thoĘ m«n c¸ a ngĐ i ra quyJt L nh L´ i v¸ i t¸ ng m¸ c ti°u. C§c h¨m thu¸ c m¸ n¨y l¨ c§c h¨m tuyJn t²nh t¸ ng kh½c, ĽĐ c viJ dĐ i dÜng giĘn lĐ c nhĐ sau cho m¸ t s´ LiWn n¸ i suy:

$$\mu_1 = \begin{cases} 0 & \text{nJu } f_1 \geq 6,594 \times 10^6 = a_1 \\ 0,5 & \text{nJu } f_1 = 4 \times 10^6 = b_1 \\ 1 & \text{nJu } f_1 \leq 2,944 \times 10^6 = c_1 \end{cases}$$



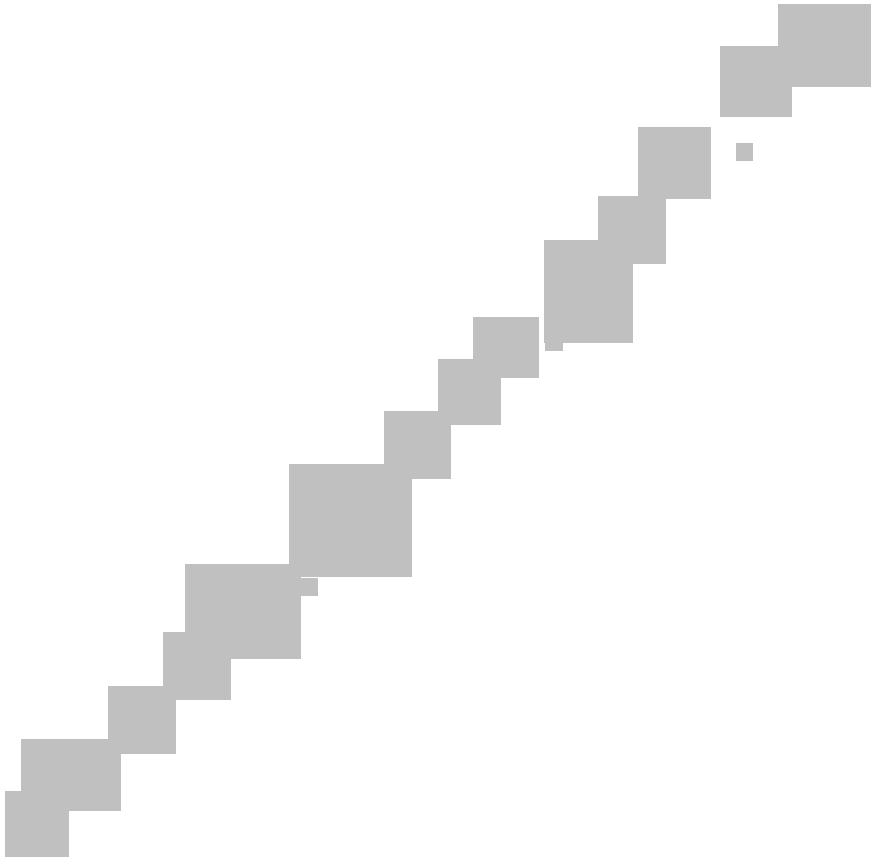
$$\mu_2 = \begin{cases} 0 & \text{nJu } f_2 \geq 0,499 \times 10^{-3} = a_2 \\ 0,5 & \text{nJu } f_2 = 0,450 \times 10^{-3} = b_2 \\ 1 & \text{nJu } f_2 \leq 0,338 \times 10^{-3} = c_2 \end{cases}$$



ĘĐ th c¸ a c§c h¨m thu¸ c m¸ cho´ c§c h³nh vĘ tr°n. Ph©n t²ch h¨m thu¸ c m¸ μ_1, ta thĐy: ngĐ i ra quyJt L nh sĘ c· L¸ thoĘ m«n 0 L´ i v¸ i m¸ i ph©n §n l¨m cho $f_1 \geq 6,594 \times 10^6$; L¸ thoĘ m«n 1 nJu $f_1 \leq 2,944 \times 10^6$; v¨ L¸ thoĘ m«n 0,5 nJu $f_1 = 4\times10^6$. ĘĐ thoĘ m«n 0,5 ĽĐ c coi l¨ L¸ thoĘ m«n t´ i thiWu v¨ m¸ c $f_1 = 4\times 10^{-6} = b_1$ ĽĐ c g¸ i l¨ m¸ c ©u ti°n t©n ng¸ ng L´ i v¸ i m¸ c ti°u f_1. T©n ng t¸ ch½ng ta c· thWph©n t²ch vQh ¨m thu¸ c μ_2 v¨ m¸ c ©u ti°n b_2. Sau L· , h¨m thoĘ d¸ ng t´ h p dÜng Max –Min ĽĐ c thiJt lJp cho hai h¨m m¸ c ti°u ri°ng rĘ tr°n dĐ i dÜng: Max{Min[μ_1, μ_2]} nh³m t³m ra ph©n §n thoĘ d¸ ng (x_1, x_2) trong miQn r¨ng bu¸ c c¸ a b¨i to§n.

Ę´ i v¸ i yJu t´ cĐu th¨nh th¸ hai, ngĐ i ra quyJt L nh sĘ cŁn c¸ v¨o th¹ ng tin do m§y t²nh ĽĐ a ra LWĽiQu ch¨nh c§c m¸ c ©u ti°n b_1 v¨ b_2. Thay L i c§c cHþ m¸ c ©u ti°n (b_1, b_2) t¸ (4×10^6; $0,45\times10^{-3}$) sang ($3,6\times10^6$; $0,435\times10^{-3}$), sĘ nhJn ĽĐ c ph©n §n sau (x_1, x_2) = (235,67 ; 67,67) v¸ i (f_1, f_2) = ($3,58\times10^6$; $0,433\times10^{-3}$).

Trong yJJu t´ cÜu th¨nh th¸ ba, c§c t§c giÍ L« d½ng thu ®t to§n t³m kiJJm ng¾u nhi°n c· LiQu khiWi RST2ANU kJJ h° p v¸ i thu®t to§n m¹ ph¸ ng t¹ i (SA) LWt³m ra c§c ph·Θng §n t´ i ·Θu Pareto cho c§c b¨i to§n trung gian th¹ ng qua vi¸ c giÍi b¨i to§n t´ i ·Θu phi tuy JJn LÍn m¸ c ti°u dÜng Max{Min[μ_1, μ_2]}.



Chương II

CÁC MÔ HÌNH MẠNG

1. Mô hình mạng vận tải

1.1. Phát biểu bài toán vận tải

B¨i to§n vdn tÇi L·Ëc §p dÕng rÈt r¸ng r«i trong lÞnh v¸c lÞp kJ hoÜch ph©n bæ sÇn ph×m h¨ng ho§ (d¨ch vÕ) tõ m¸t s´ L'a L'iW'n cung / cÈp ph§t tõi m¸t s´ L'a L'iW'n cÇu / ti°u th¸. Th¹ng th·Ëng, tÜi m¸i L'a L'iW'n cung (nhi L'i) ch¨ c· m¸t s´ l·Ëng gi¸i hÜn h¨ng, m¸i L'a L'iW'n cÇu (nhi L'Jh) ch¨ cÇn m¸t s´ l·Ëng nhÈt L'nh h¨ng. V¸i c§c cung L·Ëng vdn chuyW'i h¨ng L'a dÜng, v¸i c·Ëc ph² vdn tÇi kh§c nhau, m¸c ti°u L'HÞra l¨ x§c L'nh ph·Ëhng §n vdn tÇi t´i ·Ëu. N·i c§ch kh§c, vÈn L'QL'HÞra l¨ cÇn x§c L'nh n°n vdn chuyW'i tõ m¸i L'a L'iW'n cung tõi m¸i L'a L'iW'n cÇu bao nhi°u L'hn v¸ h¨ng nh³m thoÇ m«n nhu cÇu c¸a tõng nhi L'Jh L'Ëng th¸i L'Ëi t´ng chi ph² vdn tÇi l¨ nh¸ nhÈt.

Ví dụ: Ta c· 3 L'iW'n cung cÈp h¨ng A, B, C v¨ 4 L'iW'n cÇu S, T, U v¨ V v¸i l·Ëng h¨ng cung v¨ cÇu tÜi m¸i L'iW'n cÌng nh·Ëc·Ëc ph² vdn tÇi tr°n m¸t L'hn v¸ h¨ng cho m¸i cung L·Ëng nh·Ëtrong bÇng II.1.

Bảng II.1. Các dữ liệu của bài toán vận tải

nÞi W'n cung	L·Ëng h¨ng
A	5000
B	6000
C	2500
T´ng	13500

nÞi W'n cÇu	L·Ëng h¨ng
S	6000
T	4000
U	2000
V	1500
T´ng	13500

Nhi L'i	C·Ëc ph² vdn chuyW'i/ L'hn v¸ h¨ng c_{ij} (USD) L'Jh)			
	S	T	U	V
A	3	2	7	6
B	7	5	2	3
C	2	5	4	5

T¸ L'iW'n cung i L'Jh L'iW'n cÇu j ta c· c·Ëc ph² vdn tÇi / m¸t L'hn v¸ h¨ng l¨ c_{ij} L'« biJJ, ch³ng hÜn nh·Ëc$_{11}$ l¨ 3USD / m¸t L'hn v¸ h¨ng. CÇn thiJJ lÞp ph·Ëhng §n vdn tÇi h¨ng L'§p ¸ng L·Ëc cung cÇu v¨ t´ng chi ph² vdn tÇi l¨ nh¸ nhÈt. ChÞ¼Ã r³ng b¨i to§n vdn tÇi L'ang x®t c· t´ng cung b³ng t´ng cÇu, n°n L·Ëc g¸i l¨ b¨i to§n vdn tÇi c©n b³ng thu ph§t. nÞ©y l¨ dÜng L'hn giÇn nhÈt trong c§c dÜng b¨i to§n vdn tÇi.

1.2. Tạo phương án vận tải xuất phát

Khái niệm bảng vận tải

Bảng vận tải có m hàng, n cột gồm m×n ô, mỗi số liệu cung, nhu số liệu cầu và các phí cij được ghi trong ô (i, j) cho cung được hàng (i, j). Khi m =3, n = 4 như trong ví dụ trên, ta có bảng vận tải II.2.

Bảng II.2. Bảng vận tải

3	2	7	6	Cung 1: 5000
7	5	2	3	Cung 2: 6000
2	5	4	5	Cung 3: 2500
Cầu1: 6000	Cầu 2: 4000	Cầu 3: 2000	Cầu 4: 1500	Tổng: 13500

Ta cần tìm phương án phân hàng vào các ô (i, j) sao cho tổng theo hàng hay cột được khớp với số liệu cung, cầu và tổng chi phí vận tải là nhỏ nhất. Mỗi ô (i, j) biểu diễn một cung được vận chuyển từ cung i vào cầu j.

Các phương pháp tạo phương án xuất phát

Có một số phương pháp để phương án xuất phát. Ta nghiên cứu hai phương pháp sau đây.

a. Phương pháp "góc tây bắc"

Phương pháp này được thực hiện như sau:

– Phân phát hàng từ ô góc trái của bảng.

– Sau khi (hàng) cung hoặc (cột) cầu đầu tiên thỏa mãn thì ta thu gọn bảng vận tải bằng cách bỏ đi hàng cung hoặc cột cầu vừa đầy (chỉ bỏ một trong hai thì hoặc hàng hoặc cột, gọi là trường hợp loại trừ, *OR exlusive*).

– Tiếp tục lặp lại hai bước trên cho tới khi hàng được phân phát vào cột (cột được phân hàng được gọi là số dương).

Bằng phương pháp góc tây bắc ta được các ô phương án A trong bảng II.3 với số dương (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3) và (3, 4).

Bảng II.3. Phương án xuất phát với phương pháp "góc tây bắc"

3		2		7	6
	5000				
7	1000	5	4000	2 1000	3
2		5		4 1000	5 1500

Tổng chi phí vận tải:

$$\Sigma CPVT = (3\times 5 + 7\times 1 + 5\times 4 + 2\times 1 + 4\times 1 + 5\times 1{,}5)\times 1000 = 55500.$$

b. Phương pháp cước phí tối thiểu

Ph¬Øng ph§p n¨y L:Å c ph§t bi Wi t¬Øng t¸ ph¬Øng ph§p "g· c t©y bdc" nh¬Øng ¬Øu ti°n ph©n ph§t h¨ng v¨o ¹ c· c ¬Ø c ph² b® nhÖi (nJJu c· nhiQu ¹ nh¬Øvdy th³ ch` n ¹ bÖi k³ trong s´ L·). L¼c n¨y ta c· ph¬Øng §n xuÖi ph§t l¨ ph¬Øng §n B cho trong b¡ng II.4.

Bäng II.4. Phương án xuất phát với phương pháp cước phí tối thiểu

3		2		7	6
	1000		4000		
7	2500	5		2 2000	3 1500
2	2500	5		4	5

T¨ ng chi ph² vdn t¡i:

$$\Sigma CPVT = (3\times 1 + 2\times 4 + 7\times 2{,}5 + 2\times 2 + 3\times 1{,}5 + 2\times 2{,}5)\times 1000 = 42000$$

Nhận xét

– Ph¬Øng ph§p c¬Ø c ph² t´ i thiWi th¬Ø ng cho ph¬Øng §n xuÖi ph§t t´ t hhn ph¬Øng ph§p ñg· c t©y bdcò.

– B¡ng vdn t¡i c· s´ ¹ s¸ d¸ ng l¨ 3 + 4 – 1 = 7 ï 1 = 6. M¸ t c§ch t¨ ng qu§t b¡ng vdn t¡i m h¨ng, n c¸ t c· s´ ¹ s¸ d¸ ng l¨ m + n ï 1.

– B¨i to§n vdn t¡i cÌ ng l¨ BTQHTT. Trong v² d¸ L'ang x®t, nJJu k² hi¨ u x_{ij} l¨ l¬Å ng h¨ng vdn chuyWi tr°n cung L:Å ng (i, j) th³ ch¼ng ta BTQHTT sau:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{34}x_{34} \rightarrow Min$$

v¸ i c§c r¨ng bu¸ c:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 6000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2500 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500 \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3; j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

H¨ c§c r¨ng bu¸ c c· 12 biJJn v¸ i 7 ph¬Øng tr³nh. N JJu lÖy t¨ ng 3 ph¬Øng tr³nh L'Fu tr¸ L:i t¨ ng 3 ph¬Øng tr³nh tiJJp theo th³ L:Å c ph¬Øng tr³nh cu´ i. C· thWkiWin nghi¨ m d¸ d¨ng, s´ ph¬Øng tr³nh L'¸ c ldp tuyJJn t²nh c¸ a h¨ l¨ 7 ï 1 = 6.

– Mỗi phương án xuất phát A hay B tạm lấy các cột a bởi toán viên tại chỉnh lý một phương án cực biên xuất phát khi giải BTQHTT. Bởi toán viên tại cố thể hoàn toàn giải lấy các bằng phương pháp lần hình. Tuy nhiên do cất trữ các lấy bít cột a mình, bởi toán viên tại cố thể giải bằng phương pháp lấy bít vỉ thuật toán chuyển đổi.

1.3. Phương pháp phân phối giải bài toán vận tải

Chúng ta áp dụng phương pháp ấy lấy lò (tìm đích tắt *Stepping Stone Method*), hay chỉnh thực hành cần giải lý phương pháp phân phối (*Distribution Method*) lấy giải bởi toán vận tải.

Phương pháp ấy lấy lò một quy trình tỉnh toán nhằm tăng bước các giải thích phương án vận tải lấy cố cung cấp tại ít.

Xác định hiệu suất của các ô chưa sử dụng

Quay lại bảng vận tải II.3 vỉ phương án xuất phát tạm lấy các theo phương pháp góc tây bắc. Trong bảng lấy chính các mạt sát lấy cung, ta coi chúng nhược các cấc hàn lấy nỉ lớn trong mạt cấi ao. Xét mạt ô (i, j) bất kỳ chưa sử dụng trong phương án lấy cấu. Ta cần tỉnh hiệu suất lấy, kỉ hiệu là e_{ij}, (e lý việt tắt của *effect*) theo cấc bước sau:

– Ấu tiên ta cần tạm mạt lượng lấi các tỉnh chất lấi qua mạt ô (i, j) chưa sử dụng (ô xuất phát) vỉ mạt sát ô cung, mỗi bước các phải lấi theo hướng hoặc theo cột xen kẽ nhau (không lược lấi liền hai bước các trên mạt hàng hay mạt cột) lấy cuối cùng quay vô ô (i, j). Điều nỉy giúng nhược lang trên thuyền, mún ra khỏi thuyền mỉ không được ta phải nhảy qua cấc hàn lấy nỉ lớn trong ao lấy cuối cùng lại quay vô thuyền (vì vậy phương pháp các trên lỉ phương pháp ấy lò). Mỗi lấi đều thỉ vỉ con lược nhảy trên cấc hàn lấy nhược vậy lỉ duy nhất.

Tìm lại xuất phát tại ô (1, 2) chẳng hạn, ta sẽ các lược lấi nhược sau: (1, 2) → (2, 2) → (2, 1) → (1, 1) → (1, 2), trên lược lấi nỉy chỉ duy nhất các mạt ô chưa sử dụng (xem bảng II.5).

Bảng II.5. Tính hiệu suất các ô chưa sử dụng

3 5000	2	7	6	5000
7 1000	5 4000	2 1000	3	6000
2 (–7)	5 (–2)	4 1000	5 1500	2500
6000	4000	2000	1500	

– Ấn nhanh dất lại cung trên xen kẽ tại cấc lỉnh trên lược lấi mỉ trong lấy ô chưa sử dụng lược cấc lỉnh dất lại ấn+ò. Giả sử ta cần lượn chuyển mạt lần vỉ hướng theo lược lấi lấy xấc lỉnh mỉ vượn thoát mảng lược cung cấu (tức cấc lỉ cấc ô mang dất lại ấn+ò: ô (1, 2) vỉ ô (2, 1) cố thể mạt lần vỉ hướng, cấc ô mang dất lại ấn–ò: ô (2, 2) vỉ ô (1, 1) rất bắt lấi mạt lần vỉ hướng). Lấc nỉy tỉng chi phí sẽ thay lỉ mạt lược tiền lỉ: $e_{12} = +c_{12} ï c_{22} + c_{21} – c_{11} = 2 – 5 + 7 – 3 = +1$. Nói cấch khấc, tỉng chi phí vận tải sẽ tăng thêm lên 1USD cho mỗi mạt lần vỉ hướng lượn

chuyWi theo LÈ ng Li tr°n. Ta g` i e_{12} l¨ *hiệu suất* c¸ a ¹ (1, 2).

T·Hng t¸ :

$$e_{13} = 7 – 2 + 7 – 3 = +9,$$

$$e_{14} = 6 – 5 + 4 – 2 + 7 – 3 = +7,$$

$$e_{24} = 3 – 5 + 4 – 2 = 0,$$

$$e_{31} = 2 – 7 + 2 – 4 = –7,$$

$$e_{32} = 5 – 5 + 2 – 4 = –2.$$

Ch" c· hai ¹ v¸ i hi' u suÏt ©n l ¨ ¹ (3, 1) v¨ ¹ (3, 2) (xem b Ïng II.5) c· thW¸ a ch` n LW LÈa v¨o s' d¸ ng trong ph·Hng §n m¸ i. Ta quyJ L' nh trong ph·Hng §n m¸ i sÈ ch` n ¹ (3, 2) LWLÈa v¨o s' d¸ ng, m¸ i LÈhn v' h¨ng LÈa v¨o s' d¸ ng tÜi ¹ (3, 2) sÈ l ¨m t" ng chi ph² giÏm 2USD. K² hi' u e = e_{32}.

Chú ý: C· thWch¸ ng minh LÈ c $e_{ij} = \Delta_{ij}$ v¸ i Δ_{ij} l¨ gi§ tr' tr°n h¨ng Δ¸ ng v¸ i c¸ t x_{ij} nJu giÏ b¨i to§n v¸ n tÏ b³ng ph·Hng ph§p LÈhn h³nh.

Xác định lượng hàng đưa vào ô chọn

NhHtr°n L« ph©n t²ch, m¸ t LÈhn v' h¨ng LÈa v¨o ¹ (3, 2) l¨m giÏm t" ng chi ph² v¸ n tÏ 2 USD. Ta c¸ n t³m q, lÈ ng h¨ng t´ i La c· thWLÈa v¨o ¹ (3, 2). n¸ È ng Li qua ¹ (3, 2) v¨ m¸ t s´ ¹ L« LÈ c s' d¸ ng l¨: (3, 2) → (2, 2) → (2, 3) → (3, 3) → (3, 2), v¸ i c§c ¹ LÈ c L§nh dÏu c¸ ng tr¸ xen kÈ (¹ (3, 2) mang dÏu +). LÈ ng h¨ng q LÈ c t²nh theo quy tc:

q = gi§ tr' nh¸ nhÏ c¸ a c§c l·È ng h¨ng tÜi c§c ¹ mang dÏu (–) = Min {l·È ng h¨ng tÜi ¹ (2, 2), l·È ng h¨ng tÜi ¹ (3, 3)} = Min {4000, 1000} = 1000.

V¸ y trong ph·Hng §n m¸ i, lÈ ng h¨ng tÜi c§c ¹ mang dÏu ñ+ò (c§c ¹ (3, 2), ¹ (2, 3)) LÈ c tÈng th°m 1000 LÈhn v' , c¸ n tÜi c§c ¹ mang dÏu ñï ñ (c§c ¹ (2, 2) v¨ ¹ (3, 3)) lÈ ng h¨ng giÏm Li 1000 LÈhn v' (xem bÏng II.6). PhHng §n m¸ i g°" m 6 ¹ s' d¸ ng (¹ (3, 3) ¸ ng v¸ i q =1000 L« b' loÜi ra).

Bảng II.6. Phương án vận tải sau hai bước

3 5000	2	7	6	5000
7 1000	5 3000	2 2000	3	6000
2 (–5)	5 1000	4	5 1500	2500
6000	4000	2000	1500	

T" ng chi ph² v¸ n tÏ:

$$\Sigma CPVT = (3\times 5 + 7\times 1 + 5\times 3 + 2\times 2 + 5\times 1 + 5\times 1{,}5)\times 1000 = 53500;$$

hoHc

$$\Sigma CPVT_{m¸ i} = \Sigma CPVT_{cÏ} – e \times q = 55500 – 2 \times 1000 = 53500.$$

Điều kiện tối ưu

Th¸c hiªn theo quy tr³nh tr°n cho t¸i khi tÖi cÇc §c hiªu suÖt $e_{ij} \geq 0\ \forall$ ¹ (i, j) l¨ c§c ¹ ch·a s¨ d¸ng. ¸n ©y ch²nh l¨ LiÔu kiªn t´i ·u hay LiÔu kiªn d¸ng. ¸n iÔu kiªn n¨y th¸c chÖt l¨ LiÔu kiªn $\Delta_{ij} \geq 0$ v¸i m¨i biÔn ngo¨i chu s¨ x_{ij} nÔu giÇi b¨i to§n b³ng ph·¬ng ph§p LÔn h³nh.

¸n WgiÇi tiÔp b¨i to§n, c Ñn t²nh c§c hiªu suÖt cho c§c ¹ ch ·a s¨ d¸ng trong ph·¬ng §n m¸i:

$e_{12} = 2 - 5 + 7 - 3 = +1$; $e_{13} = 7 - 2 + 7 - 3 = +19$;

$e_{14} = 6 - 5 + 5 - 5 + 7 - 3 = +5$; $e_{24} = 3 - 5 + 5 - 5 = -2$;

$e_{31} = 2 - 7 + 5 - 5 = -5$; $e_{33} = 4 - 5 + 5 - 2 = +2$.

Ta quyÔt LªnH s¨ d¸ng ¹ ch¨n (3, 1) trong ph·¬ng §n m¸i v³ $e_{31} = -5$. T³m LÖc q = 1000 theo quy t¾c LÖc biÔt. C· hai ¹ ¸ng v¸i q t ³m LÖc, ch½ng ta ch¨ b¸ LÖi ¹ (2, 1) c¸n phÇi gi¸ lÜi ¹ (3, 2)LÖWLÖa v¨o s¨ d¸ng. Ph·¬ng §n sau b·Ö c th¸ ba cho trong bÇng II.7.

Bảng II.7. Phương án vận tải sau ba bước

3 5000	2	7	6	5000
7	5 4000	2 2000	3 (–2)	6000
2 1000	5 0	4	5 1500	2500
6000	4000	2000	1500	

T¨ng chi ph² vÔn tÇi:

$$\Sigma CPVT = 53500 - 5 \times 1000 = 48500.$$

TiÔp t¸c t²nh c§c hiªu suÖt:

$e_{12} = +1$; $e_{13} = 7 - 2 + 5 - 5 + 4 = 9$;

$e_{14} = 6 - 5 + 2 - 3 = 0$; $e_{21} = 7 - 2 + 5 - 5$;

$e_{24} = 3 + 5 + 5 - 5 = -2$; $e_{33} = 4 - 5 + 5 - 2 = 2$.

Ch¨n ¹ (2, 4) LÖa v¨o s¨ d¸ng v¨ t²nh q = 1500. T¸ LÖ· c· ph·¬ng §n m¸i sau b´n b·Ö c nh·Ötrong bÇng II.8.

Bảng II.8. Phương án vận tải sau bốn bước

3 5000	2 (–4)	7	6	5000
7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
				2500

2 1000	5 1500	4	5
6000	4000	2000	1500

Tổng chi phí vận tải:

$$\Sigma CPVT = 48500 - 2 \times 1500 = 45500.$$

Tiếp tục tính các hệ số:

$e_{12} = 2 - 5 + 2 - 3 = -4;$ $e_{13} = 7 - 2 + 5 - 5 + 2 - 3 = 4;$

$e_{14} = 6 - 3 + 5 - 5 + 2 - 3 = 2;$ $e_{21} = 7 - 2 + 5 - 5 = 5;$

$e_{33} = 4 - 5 + 5 - 2 = 2;$ $e_{34} = 5 - 5 + 5 - 2 = 3;$

Ta có $e_{12} = -4$ và chọn ô (1, 2) làm ô chọn vào với $q = 1500$ và chuyển sang phương án mới như trong bảng II.9.

Bảng II.9. Phương án vận tải sau năm bước

3 3500	2 1500	7	6	5000
7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
2 2500	5	4	5	2500
6000	4000	2000	1500	

Tổng chi phí vận tải:

$$\Sigma CPVT = 45500 - 4 \times 1500 = 39500.$$

Lúc này $e_{ij} \geq 0$ với mọi ô (i, j) chưa sử dụng, nên kết luận là đã có tối ưu. Phương án vận tải tối ưu cho trong bảng II.9 với tổng chi phí nhỏ nhất là 39500.

Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Trường hợp tổng lượng cung lớn hơn tổng lượng cầu, cần bổ trợ thêm một điểm cầu giả mà mỗi chi phí vận tải liên lạc đều bằng 0.

Trường tự, nếu cầu vượt cung thì cần bổ trợ một điểm cung giả với mỗi chi phí vận chuyển là liên lạc bằng 0.

1.4. Phương pháp phân phối cải biên giải bài toán vận tải

Phương pháp ñaø lòò hay phương pháp phân phối cải biên là việc tính hệ số e_{ij} ngay trên bảng phân phối cải biên giải bài toán vận tải. Xét phương án xuất phát tối ưu cho trong

bÞng II.10 (v¸i tæng chi phÍ vËn tØi l¨ 42000).

Bảng II.10. Phương án vận tải xuất phát

3 1000	2 4000	7	6	5000
7 2500	5	2 2000	3 1500	6000
2 2500	5	4	5	2500
6000	4000	2000		1500

Ta c· $e_{13} = 7 - 2 + 7 - 3 = +9$. Ta t³m c§ch t²nh e_{13} b»ng c§ch kh§c nhanh hƠn nh©n tr³nh b¨y sau Ë©y.

TrªN c hÌng cÙn x©y d¸ng h¸ th´ng s´ thÌng v¨ c¸ t {(u_i, v_j), i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4}. C· thW§n cho m¸ t thÌng v¸ bËng k³ gi§ tr¸ 0 (hoƠc m¸ t gi§ tr¸ bËng k³ kh§c), thÌng v¸ n¨y th©N ng Ë©N c chÈ n´ h¨ng hay c¸ t c· nhiÊu ¹ s¸ d¸ng nhËng. Ch»ng hÜn chÈ n $u_2 = 0$.

C§c thÌng v¸ kh§c Ë©N c t²nh b¸ i c¹ ng th¸ c: $u_i + v_{ij} = c_{ij}$ $\forall$ ¹ (i, j) s¸ d¸ ng.

$u_2 = 0 \Rightarrow$ $v_1 = 7$ $(= c_{21} - u_2)$

$v_3 = 2$ $(= c_{23} - u_2)$

$v_4 = 3$ $(= c_{24} - u_2)$

$u_1 = -4$ $(= c_{11} - v_1)$

$u_3 = -5$ $(= c_{37} - v_1)$

$v_2 = 6$ $(= c_{12} - u_1)$

C¹ ng th¸ c t¸ ng qu§t ËW²nh c§c hi¸ u suËt cho c§c ¹ (i, j) ch©a s¸ d¸ ng l¨:

$e_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Ch»ng hÜn ta c· $e_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (-4 + 2) = 9$. C§c hi¸ u suËt kh§c Ë©N c t²nh t©N ng t¸ (xem bÞng II.11).

Bảng II.11. Tính toán các thế vị và các hiệu suất

	$v_1 = 7$	$v_2 = 6$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	
$u_1 = -4$	3 1000	2 4000	7	6	5000
$u_2 = 0$	7 2500	5 (–1)	2 2000	3 1500	6000
$u_3 = -5$					2500

2 2500	5	4	5
6000	4000	2000	1500

Trong bảng II.11 ta thấy $e_{22} = -1 < 0$. Chọn ô (2, 2) để đưa vào sử dụng với $q = 2500$, ta chuyển sang phương án mới và tính lại các chỉ tiêu nhằm trong bảng II.12.

Bảng II.12. Tính toán các thế vị và các hiệu suất cho phương án mới

	$v_1 = 6$	$v_2 = 6$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	
$u_1 = -3$	3 3500	2 1500	7	6	5000
$u_2 = 0$	7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
$u_3 = -4$	2 2500	5	4	5	2500
	6000	4000	2000	1500	

Chọn $u_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 5$ (= 5 – 0); $v_3 = 2$ (= 2 – 0); $v_4 = 3$ (= 3 – 0);

$u_1 = -3$ (= 2 – 5); $v_1 = 6$ (= 3 – (–3)); $u_3 = -4$ (= 2 – 6).

Tổng chi phí vận tải:

$$\Sigma CPVT = (3\times3{,}5 + 2\times1{,}5 + 5\times2{,}5 + 2\times2 + 3\times1{,}5 + 2\times2{,}5)\times1000$$

$$= 39500 \quad (\text{tính cả khác}, \ \Sigma CPVT_{mới} = 42000 - 1\times2500).$$

Tiếp tục tính toán các hiệu suất:

$$e_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (-3 + 2) = 8;$$

$$e_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 6 - (-3 + 3) = 6;$$

$$e_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 7 - (0+6) = 1;$$

$$e_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - (-4 + 5) = 4;$$

$$e_{33} = c_{33} - (u_3 + v_4) = 4 - (-4 + 2) = 6;$$

$$e_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 5 - (-4 + 3) = 6.$$

Ta thấy $e_{ij} \geq 0 \ \forall$ (i, j) của ô không kín tại đó là lời giải tối ưu. Phương án tại cho trong bảng II.12, với tổng chi phí vận tải nhỏ nhất là 39500.

Chú ý:

– Với bài toán vận tải cân bằng lại hoàn hảo mà tiêu chuẩn dùng sẽ

$e_{ij} \le 0 \ \forall$ ¹ (i, j) chÖa s d„ ng.

– n´ i v, i b¨i to§n vÐn tÇi c· ¹ cÜin (cung LÈ ng kh¹ ng LÈ c s d„ ng) th³ LÞu cÖc ph² M = +∞ cho c§c ¹ cÜin v, i b¨i to§n Min hoÞc M = –∞ v, i b¨i to§n Max.

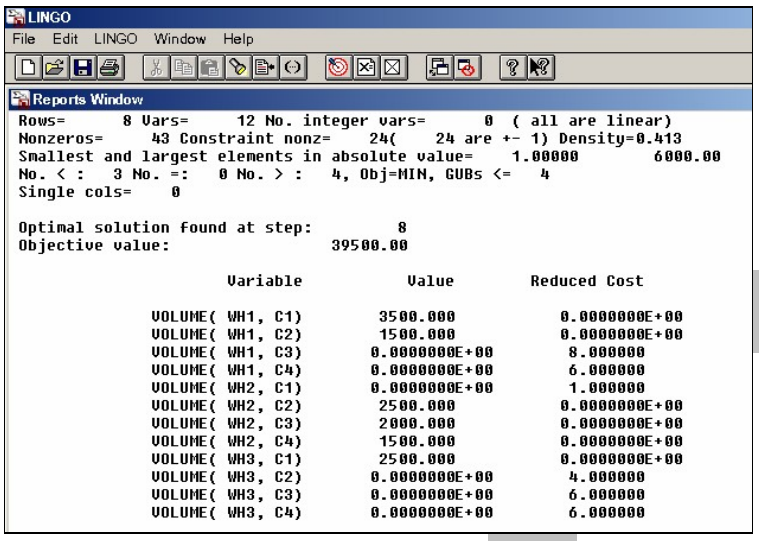
Giải bài toán vận tải bằng phần mềm Lingo

n Wgi Çi b¨i to§n vÐn tÇi trong Lingo, ta c· thWs d„ ng c§c b¨i to§n mXu b3ng c§ch nhÜp v¨o biWu tÈ ng Lingo v¨ th c hi n c§c l nh *File > Open > Tran.lng* LWv¨o b¨i to§n vÐn tÇi mXu. Sau L· nhÐp c§c s´ li u LÇu v¨o c„ a b¨i to§n cÇn giÇi, ch3ng hÜn, c„ a v² d„ L« x®t trong c§c m„ c tr°n thay cho c§c s´ li u c„ a b¨i to§n mXu (xem h³nh II.1).

```
LINGO - [D:\THAYTH~1\ATHANH\LINGO\LINGO\LINGO\SAMPLES\TRAN.LNG]
File  Edit  LINGO  Window  Help

MODEL:
! A 3 Warehouse, 4 Customer Transportation Problem;
SETS:
    WAREHOUSE / WH1, WH2, WH3/      : CAPACITY;
    CUSTOMER   / C1, C2, C3, C4/     : DEMAND;
    ROUTES( WAREHOUSE, CUSTOMER)        : COST, VOLUME;
ENDSETS


! Here are the parameters;
   DATA:
      CAPACITY =   5000, 6000, 2500 ;
      DEMAND =   6000, 4000, 2000, 1500 ;
      COST =    3,  2,  7,  6,
               7,  5,  2,  3,
               2,  5,  4,  5 ;
   ENDDATA

END
```

Hình II.1. Nhập số liệu cho bài toán vận tải

Sau L· ch¼ng ta th c hi n *LINGO>Solve*, kJt quÇ t²nh to§n sÉ hi n ra tr°n m¨n h³nh (xem h³nh II.2).



```
LINGO
File  Edit  LINGO  Window  Help
Reports Window
Rows=      8 Vars=     12 No. integer vars=      0  ( all are linear)
Nonzeros=     43 Constraint nonz=    24(    24 are +- 1) Density=0.413
Smallest and largest elements in absolute value=    1.00000        6000.00
No. < :   3 No. =:   0 No. > :   4, Obj=MIN, GUBs <=   4
Single cols=    0

Optimal solution found at step:          8
Objective value:                  39500.00

                     Variable           Value        Reduced Cost

            VOLUME( WH1, C1)        3500.000           0.0000000E+00
            VOLUME( WH1, C2)        1500.000           0.0000000E+00
            VOLUME( WH1, C3)       0.0000000E+00        8.000000
            VOLUME( WH1, C4)       0.0000000E+00        6.000000
            VOLUME( WH2, C1)       0.0000000E+00        1.000000
            VOLUME( WH2, C2)        2500.000           0.0000000E+00
            VOLUME( WH2, C3)        2000.000           0.0000000E+00
            VOLUME( WH2, C4)        1500.000           0.0000000E+00
            VOLUME( WH3, C1)        2500.000           0.0000000E+00
            VOLUME( WH3, C2)       0.0000000E+00        4.000000
            VOLUME( WH3, C3)       0.0000000E+00        6.000000
            VOLUME( WH3, C4)       0.0000000E+00        6.000000
```

Hình II.2. Kết quả của bài toán vận tải

2. Mô hình mạng PERT

(Program Evaluation and Review Technique)

2.1. Các khái niệm cơ bản về PERT

Vai trò của PERT

PERT cÒ thW LÈc hiWi lÈ phÒng phS§p hoHu kQ thuJt theo d»i vÈ LÈ§nh giS§ dÈ §n vÈ i mÈ c LÈch giÈ½p cho bÈ m§y quÈn lÈ trÈ È i cS§c cÈu hÈ i sau LÈ©y:

– DÈ §n sÈ hoÈn thÈnh khi nÈo?

– MÈ i hoÈt LÈ ng cÈ a dÈ §n nÈ°n LÈÈc bdt LÈ u vÈo thÈ i LiWn nÈo vÈ kJt thÈ½c vÈo thÈ i LiWn nÈo?

– NhÈ ng hoÈt LÈ ng nÈo cÈ a dÈ §n phÈ i kJt thÈ½c LÈ¼ng thÈ i hÈn LWtr§nh cho toÈn bÈ dÈ §n bÈ kJt thÈ½c chdm hhn so vÈ i kJhoÈch?

– LiÈ u cÒ thWchuyWi cS§c nguÈn dÈ trÈ (nh©n lÈ c, vdt lÈ c) tÈ cS§c hoÈt LÈ ng ñkh¹ ng gÈngò sang cS§c hoÈt LÈ ng ñgÈngò (cS§c hoÈt LÈ ng phÈ i hoÈn thÈnh LÈ¼ng tiJn LÈ) mÈ kh¹ ng ÈnhhÈ ng tÈ i thÈ i hÈn hoÈn thÈnh dÈ §n?

– NhÈ ng hoÈt LÈ ng nÈo cÈn tdp trung theo d»i?

ÈWbÈ c LÈu h³nh dung vQPERT, ch¼ng ta xÈ®t v² dÈ sau LÈ©y.

Ví dụ:

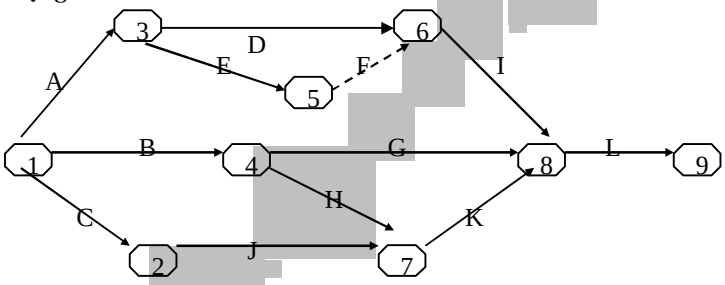
GiÈ s cÈn thÈ c hiÈ n mÈ t dÈ §n hoHu ch Èng tr³nh cÒ cS§c hoÈt LÈ ng LÈÈc liÈ t kÈ° trong bÈng II.13.

Bảng II.13. Các hoạt động của một dự án, thứ tự và thời gian thực hiện

HoÜt L¸ng	HoÜt L¸ng kQtr·Ę c	Th ̀ i gian th¸ c hi ̉ n (tuÇn)
A	–	2
B	–	2
C	–	2
D	A	3
E	A	4
F	E	0 (hoÜt L¸ng giÇ)
G	B	7
H	B	6
I	D, F	4
J	C	10
K	H, J	3
L	G, I, K	4

Ta cÇn lÞp kJhoÜch th¸ c hi ̉ n d¸ §n tr °n LWho¨n th¨nh to¨n b¸ c§c hoÜt L¸ng c„ a d¸ §n trong th ̀ i gian ngắn nhất, LỂng th ̀ i phÇi x§c L ̉ nh LÊ c nh¸ ng hoÜt L¸ng n¨o cÇn ch¼ tr ̀ ng (LÊ c hiWu l¨ c§c hoÜt L¸ng ñgÈngò).

Vẽ sơ đồ mạng PERT



Hình II.3. Sơ đồ mạng PERT

Tr°n h³nh II.3 ta th Ły m¨ng PERT l¨ m¸ t m¨ng c§c n¼t c· L§nh s´ LÊ c n´ i v„ i nhau b ̉ i c§c cung c· mÌ i t°n. M¸ i cung c· mÌ i t°n biWu di¸ n m¸ t hoÜt L¸ng c„ a d¸ §n, c¸ n m¸ i n¼t biWu di¸ n th ̀ i LiWn kJt th½c m¸ t s´ hoÜt L¸ng v¨ / hoHu th ̀ i LiWn bắt LÇu c„ a m¸ t s´ hoÜt L¸ng kh§c.

HoÜt L¸ng giÇ F LÊ c k² hi ̉ u b ̉ i cung mÌ i t °n v„ i n®r ̀ i c· th ̀ i gian th¸ c hi ̉ n b³ng 0, nh³m tr§nh cho hoÜt L¸ng D v¨ E c· c½ng n¼t bắt LÇu v¨ n¼t kJt th½c. Nh·Ęvdy, trong sH LỂ mÜng PERT ta bu¸ c phÇi tu©n theo quy ·Ę c: hai hoÜt L¸ng kh§c nhau th³ kh¹ ng LÊ c c· c½ng n¼t bắt LÇu cÌ ng nh·Ęn¼t kJt th½c.

Xác định thời gian tối thiểu thực hiện dự án

ęWx§c L ̉ nh th ̀ i gian t´ i thiWu th¸ c hi ̉ n d¸ §n, tr·Ę c hJt ch¼ng ta nghi°n c¸ u kh§i ni ̉ m th ̀ i LiWn bắt LÇu s„ m nhất v¨ th ̀ i LiWn kJt th½c s„ m nhất (EST v¨ EFT – *Earliest start time và Earliest finish time*) cho t¸ ng hoÜt L¸ ng.

Ví dụ: HoÜt L¸ ng A c· $EST_A = 0$ v¨ $EFT_A = 2$, v³

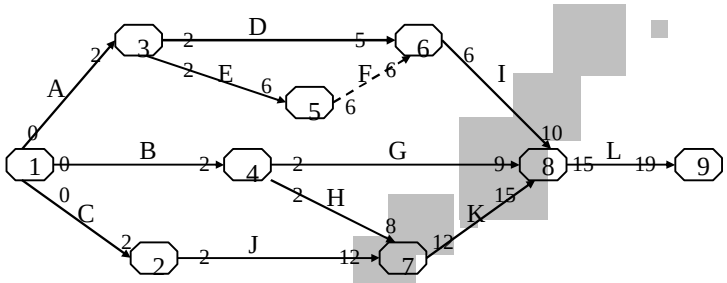
– Th ̀ i LiWn bắt LÇu s„ m nhất l¨ khi bắt LÇu kh ̉ i L¸ ng d¸ §n,

– Thời điểm kết thúc sớm nhất là sau 2 tuần.

Mối quan hệ giữa EST và EFT là:

EFT = EST + thời gian thực hiện hoạt động.

Một cách tổng quát, Lưu đồ xác định EST chúng ta có quy tắc *thời điểm bắt đầu sớm nhất*: thời điểm bắt đầu sớm nhất của một hoạt động *rời một nút nào đó* là thời điểm muộn nhất trong các thời điểm kết thúc sớm nhất của các hoạt động *đi vào nút đó*. Áp dụng quy tắc trên cho, có thể xác định $EST_K = 12$ (do $EFT_H = 8$, $EFT_J = 12$ và số lớn hơn là 12) và $EFT_K = 15$. Khi quan tâm EST và EFT cho các hoạt động sẽ xác *tính toán tiến* tới nút 1 đến nút 9 và các tác trong bảng II.14 và hình II.4. Vậy thời gian kết thúc sớm nhất dự án là sau 19 tuần.



Hình II.4. Tính EST và EFT cho các hoạt động của dự án

Bảng II.14. Tính EST, LST, EFT, LFT và tìm đường găng

Hoạt động	EST	LST	EFT	LFT	LST–EST (LFT–EFT)	Trên cung gắng
A	0	5	2	7	5	
B	0	4	2	6	4	
C	0	0	2	2	0	*
D	2	8	5	11	6	
E	2	7	6	11	5	
F	6	11	6	11	5	
G	2	8	9	15	6	
H	2	6	8	12	4	
I	6	11	10	15	5	
J	2	2	12	12	0	*
K	12	12	15	15	0	*
L	15	15	19	19	0	*

Bước tiếp theo là xác định thời điểm bắt đầu muộn nhất và thời điểm kết thúc muộn nhất (LST và LFT – *Latest start time và Latest finish time*) cho từng hoạt động.

Ví dụ: Hoạt động L có $LST_L = 15$ và $LFT_L = 19$, và

– Thời điểm kết thúc muộn nhất là sau 19 tuần (nếu ta bắt đầu sau 19 tuần thì kết thúc sau 19 tuần),

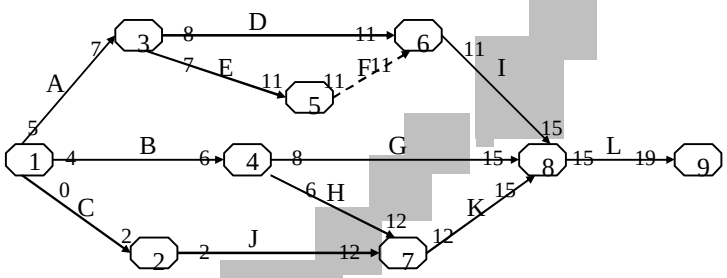
– Thời điểm bắt đầu muộn nhất là tuần 15 (do hoạt động cần thời gian 4 tuần để hoàn thành).

Mối quan hệ giữa LST và LFT là:

LST = LFT – thời gian thực hiện hoạt động.

Một cách tổng quát, LFX các nhà LFT chính là *thời điểm kết thúc muộn nhất* của một hoạt động *đi vào một nút nào đó* là thời điểm sớm nhất trong các thời điểm bắt đầu muộn nhất của các hoạt động *rời nút đó*.

Áp dụng quy tắc trên để tính LFT$_A$ = 7 (do LST$_D$ = 8, LST$_E$ = 7 và số bé hơn là 7) và LST$_A$ = 5. Khi quan sát LFT và LST cho các hoạt động đã *tính toán lùi* từ nút 9 về nút 1 và các tổng trong bảng II.14 và hình II.5.



Hình II.5. Tính LFT và LST cho các hoạt động của dự án

Chú ý: Mỗi cung có mỗi một trên là một hoạt động, nhưng có thể bao gồm nhiều hoạt động nhỏ khác. Nói các khác, bởi thời gian hoạt động của đồ án có thể là một PERT nhỏ.

Xác định hoạt động găng, đường găng

Hoạt động gầng là hoạt động mà

$$LST - EST = LFT - EFT = 0, \text{ hay } [EST, EFT] \equiv [LST, LFT]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} EST = LST \\ EFT = LFT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Slack = LST - EST = 0 \\ Slack = LFT - EFT = 0 \end{cases} \text{ (Lưu ý cho phép bằng 0).}$$

Giải thích: Slack ≡ Lưu ý lỏng (Lưu trữ).

Trong về đồ Lang xét, các hoạt động gầng là: C → J → K → L (xem bảng II.14) và tạo thành gầng (*Critical Path*). Vì vậy, phương pháp mạng PERT cổ điển là phương pháp gầng (*CPM – Critical Path Method*).

Xác định đường găng bằng phần mềm Lingo

Để xác định gầng bằng phần mềm Lingo, ta có thể sử dụng các biểu toán mẫu

bằng cách nhập vào biến môi trường Lingo và thực hiện các lệnh *File > Open > Pert.lng* để vào bài toán PERT mẫu. Sau đó nhập các số liệu vào các bài toán cần giải và thay các số liệu các bài toán mẫu, chẳng hạn nhập số liệu các ví dụ đã cho (xem hình II.6).

```
LINGO - [D:\THAYTH~1\ATHANH\LINGO\LINGO\LINGO\SAMPLES\PERT1.LNG]
File  Edit  LINGO  Window  Help

  ! For each task there is: Time, Early Start (ES),
    Late Start (LS), and Slack;
  TASK/ FIRST, A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L/: TIME, ES, LS, SLACK;

 ! Here are the precedence relations, the first task in the
   precedence relationship needs to be completed before the
   second task can be started;
  PRED( TASK, TASK)/    FIRST,A,    FIRST,B, FIRST,C,
        A,D,    A,E,    E,F,   B,G,    B,H,    D,I,
        F,I,  C,J,   H,K,  J,K,  G,L,   I, L, K,L/;
 ENDSETS

DATA: !  Here are the task times;
    TIME = 0, 2,2,2,3,4,0,7,6,4,10,3,4;
ENDDATA
```

Hình II.6. Nhập số liệu cho bài toán PERT

Sau đó chúng ta thực hiện *LINGO > Solve*, kết quả tính toán sẽ hiển trên màn hình (xem hình II.7).

```
LINGO
File  Edit  LINGO  Window  Help
Reports Window

SLACK( FIRST)        0.0000000E+00
SLACK( A)          5.000000
SLACK( B)          4.000000
SLACK( C)         0.0000000E+00
SLACK( D)          6.000000
SLACK( E)          5.000000
SLACK( F)          5.000000
SLACK( G)          6.000000
SLACK( H)          4.000000
SLACK( I)          5.000000
SLACK( J)         0.0000000E+00
SLACK( K)         0.0000000E+00
SLACK( L)         0.0000000E+00
```

Hình II.7. Kết quả tìm cung găng của bài toán PERT

2.2.Sơ đồ PERT với số liệu ngẫu nhiên

Thời gian thực hiện tương hoạt động của dự án nói chung là một biến ngẫu nhiên. Giả sử ta có các số liệu ước tính về thời gian thực hiện các hoạt động của dự án (xem bảng II.15) a, m, b. Lấy thời gian trung bình về lịch chuẩn thời gian thực hiện các hoạt động đến ước tính theo công

th¸c t $= \frac{a + 4m + b}{6}$.

Bảng II.15. Số liệu ước tính về thời gian thực hiện các hoạt động

HoÜt L¸ng	HoÜt L¸ng kQ tr©c	Th¶i gian ©c t²nh				
		a (s¬m nhËt)	m (nhiQu khÃn Łng xÃy ra nhËt)	b (mu¸n nhËt)	t (th¶i gian trung b³nh)	σ (L¸ l¹ch ti°u chu Xn, L¸ biJn thi°n)
A	–	1	2	3	2	1/3
B	–	1	2	3	2	1/3
C	–	1	2	3	2	1/3
D	A	1	2	9	3	4/3
E	A	2	3	10	4	4/3
F	E	0	0	0	0	0
G	B	3	6	15	7	2
H	B	2	5	14	6	2
I	D, F	1	4	7	4	1
J	C	4	9	20	10	8/3
K	H, J	1	2	9	3	4/3
L	G, I, K	4	4	4	4	0

B©c tiJp theo l¨ lÞp sÞ LÊ mÜng cho d¸n §n v¸i c§c th¶i gian trung b³nh t v¨ t³m LÞ©ng gŁng. n©ng gŁng l¨ C → J → K → L bao gồm c§c hoÜt L¸ng gŁng C, J, K v¨ L. C§c hoÜt L¸ng n¨y c· L¸ tr¸ cho ph®p b³ng 0, hay n· i c§ch kh§c, kh¹ng cho ph®p s¸ chÃm tr¸ n¨o. n©y l¨ c§c hoÜt L¸ng cÃn hJi s¸c ch¼ tr¸ng, vi¹c chÃm th¸c hi¹n bËt c¸ m¸t hoÜt L¸ng n¨o trong s´ n¨y LÒu k®o theo s¸ chÃm tr¸ trong tiJn L¸ c¸a cÃ d¸ §n. T¸ *Critical Path* (tiJng Anh) LÊc d¹ch sang tiJng Vi¹t l¨ LÊng gŁng v³ l² do L· .

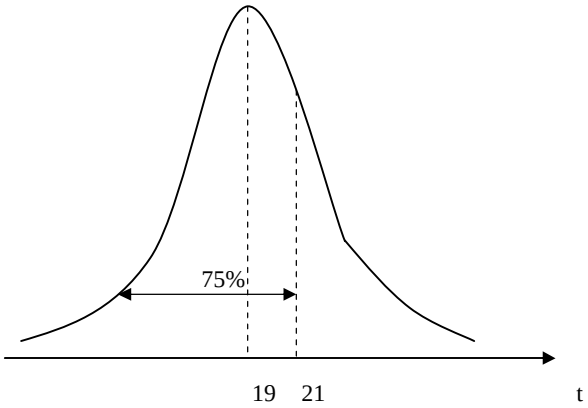
Th¶i gian th¸c hi¹n d¸ §n l¨ m¸t l©ng ngẫu nhi°n t²nh theo c¹ng th¸c: $T = T_C + T_J + T_K + T_L$. Ta t³m k³ v¸ng c¸a T (th¶i gian trung b³nh th¸c hi¹n d¸ §n) theo c¹ng th¸c: $m = m_T = t_C + t_J + t_K + t_L = 2 + 10 + 3 + 4 = 19$ (tu Ãn).

T²nh L¸ l¹ch chuẩn c¸a th¶i gian th¸c hi¹n d¸ §n:

$$\sigma = \sigma_T = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_J^2 + \sigma_K^2 + \sigma_L^2} = \sqrt{(1/3)^2 + (8/3)^2 + (4/3)^2 + 0} = 3.$$

Ta coi T (th¶i gian th¸c hi¹n d¸ §n) l¨ biJn ngẫu nhi°n tu©n theo luÂt chuẩn N(m = 19; σ = 3).

n©° th¸ h¨m mÂt L¸ x§c suËt c¸a T cho tr°n h³nh II.8.



ng WI²nh P, x§c suÊt th¸c hi©n d¸ §n trong v¸ng (kh¹ng v·Ò t qu§) 19 tuÇn, ta phÙi quy T vQbiÙn ngẫu nhi°n v¸ i ph©n ph´ i chuẩn tắc N(0, 1) nh·Ò cho trong ph¸l¸c 1. L¼c L·:

$$P(T \le 19) = P\left(\frac{T-m}{\sigma} \le \frac{19-19}{3}\right) = P(Z \le 0) = 0{,}5 \text{ (hay 50\%)},$$

‘ L©y Z = (T ï m)/σ l¨ biÙn ngẫu nhi°n tu©n theo ph©n ph´ i N(0, 1).

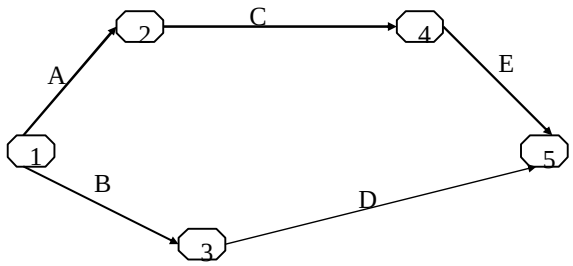
T·Ò ng t¸, x§c suÊt th¸c hi©n d¸ §n trong v¸ng (kh¹ng v·Ò t qu§) 21 tuÇn L·Ò c t²nh nh·Ò sau:

$$P(T \le 21) = P\left(\frac{T-m}{\sigma} \le \frac{21-19}{3}\right) = P(Z \le 0{,}666) = 75\%.$$

Ta chuyWI sang xem x®t vÊn L·QvQL¸ tin cËy c¸a th© i gian ho¨n th¨nh d¸ §n. ChÈng hÜn ch¼ng ta mu´ n trÙ Å i c©u h¸ i sau: Mu´ n th© i gian th¸ c hi©n d¸ §n c· L¸ tin cËy 90% th³ th© i gian t´ i thiWI (t²nh theo s´ tuÇn) l¨ bao nhi°u? ¸ n H·P (T ≤ t) = 90%. Tra b¶ng ph©n ph´ i chuẩn tắc N(0, 1), t³m L·Ò c z = 1,28. V³ z = (t – 19)/3 = 1,28 n°n t = 19 + 3. 1,28 ≈ 23 (tuÇn). Nh·Ò vËy, d¸ §n L·ang xem x®t c· khÙ nÈng ho¨n th¨nh v¸ i L¸ tin cËy t¸ i 90% trong v¸ ng (kh¹ ng v·Ò t qu§) 23 tuÇn.

2.3. Điều chỉnh dự án khi kế hoạch một số hoạt động bị phá vỡ

Ví dụ: ¸ n ¹ i khi trong qu§ tr³nh th¸ c hi©n d¸ §n, kÙho¶ch c¸ a m¸ t s´ ho¶t L¸ ng b¸ ph§ v¸ . Ch²nh v³ vËy, khi ph§t hi©n d¸ §n L·ang b¸ chËm so v¸ i kÙho¶ch L·QÙra ta cÇn L¸ nh lÜi th© i gian th¸ c hi©n (th© i gian r¼ g¸ n) m¸ t s´ ho¶t L¸ ng trong giai L·oÜn t¸ i. X®t c§c d¸ ki©n cho trong h³nh II.9 v¨ b¶ng II.16.



Hình II.9. Sơ đồ mạng PERT dự án cần điều chỉnh

Bảng II.16. Số liệu điều chỉnh khi kế hoạch bị phá vỡ

Hoạt động	Thời gian lạnh mạc	Thời gian rút gọn	Kinh phí bổ sung/ 1 đơn vị thời gian rút gọn (triệu đồng)
A	6	4	2
B	4	3	3
C	3	2	1
D	8	6	1,5
E	7	4	0,5

Sau khi cố thời gian lạnh mạc cho các hoạt động nhờ trong bảng II.16, dự đồng tổm lờ các thời gian tối thiểu cần thiết để hoàn thành kế hoạch là 16 (tuần). Tuy nhiên do yêu cầu mới, cần rút gọn thời gian hoàn thành dự án trong vòng (không vượt quá) 10 (tuần). Mời vậy ta thực hiện các bước sau:

– Tổm thời gian tối thiểu dự lạnh thực hiện dự án (16 tuần) và tổm lờng gảng.

– hạc tính thời gian rút gọn tối ưa (cột 3, bảng II.16)

– Khi rút gọn thời gian trên lờng gảng cảng phải chú trọng đến thời các công lờng kh§c.

Trên hình II.9, ta thấy cần thực hiện A, C và E với thời gian rút gọn tối ưa (4, 2, 4 để tổng các thời gian thực hiện các hoạt động là 10 tuần), để thời rút gọn các hoạt động B và D mới cho phép:

– Phương §n 1: rút bớt thời gianthực hiện hoạt động B một tuần và rút bớt D một tuần.

– Phương §n 2: không rút bớt B và rút bớt D hai tuần.

Vậy khi cần lựa chọn thời gian thực hiện dự án ta cần thay đổi khối lượng hoạt các công việc theo các bước lờ« n°u trên.

Tuy cố nhiều phương §n lựa chọn dự §n, nhưng trong việc phân vạch khối lượng hoạt các §n để đảm bảo tiến độ, mới cần chú ý vấn đề chi phí gia tăng để cố một phương §n tối ưa để bảo rút gọn lờ các thời gian thực hiện với chi phí nhỏ nhất. ối với việc tr°n ta chọn phương §n 2.

Cố thể áp dụng phương pháp tổng quát để lựa chọn theo các mục tiêu tr°n (phương pháp lờn hình cho BTQHTT lờn và mục tiêu) nhưng sẽ lờ các trình bày sau lờy.

2.4. Tính thời gian rút gọn tối ưu bằng phương pháp đơn hình

ng Wt²nh thß i gian r¼t g` n b³ng ph·Øng ph§p LÞn h³nh (c· th Wß d„ ng c§c phÞn mQm m§y t²nh th²ch h` p), ta phÞi L·Øa ra L·Ø c m¹ h³nh to§n h` c, hay c§ch kh§c, cÞn ph§t biWß L·Ø c BTQHTT (LÞn hay L'a m„ c ti°u).

Tr·Ø c hJÞ, cÞn x§c L' nh c§c biJÞn quyJÞ L' nh. G` i x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 l¨ c§c thß i LiWß m¨ c§c hoÜt L' ng xÞy ra (tÜi c§c n¼t); y_A, y_B, y_C, y_D, y_E l¨ thß i gian cÞn r¼t b' t cho c§c hoÜt L' ng LWy°u cÞu m' i vQ LXy nhanh tiJÞn L' L·Ø c thoÞ m«n. Ta c· BTQHTT L'a m„ c ti°u sau (cÞn c' c tiWß h· a cÞ thß i gian th' c hi' n d' §n lXn t¨ ng chi ph² gia t ŁÞng):

M„ c ti°u 1: $z_1 = x_5 \rightarrow \text{Min}$

M„ c ti°u 2: $z_2 = 2y_A + 3y_B + y_C + 1{,}5y_D + 0{,}5y_E \rightarrow \text{Min}$

v' i c§c r¨ng bu' c:

$$\begin{cases} x_2 \ge 6 - y_A + x_1 \\ x_4 \ge 3 - y_C + x_2 \\ x_3 \ge 4 - y_B + x_1 \\ x_5 \ge 7 - y_E + x_4 \\ x_5 \ge 8 - y_D + x_3 \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ y_j \ge 0, j = A, B, C, D, E \\ y_A \le 2, y_B \le 1, y_C \le 1, y_D \le 2, y_E \le 3 \\ x_5 \le x_1 + 10 \end{cases} \qquad (*)$$

C· 2 c§ch giÞi m¹ h³nh:

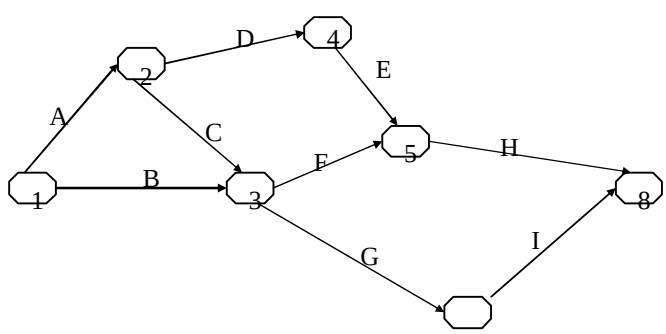
– ChuyWß m„ c ti°u 1 th¨ nh r¨ ng bu' c (*). NJÞu l¼c L· BTQHTT kh¹ ng c· ph·Øng §n khÞ thi th³ phÞi n' i l' ng dÞn (*): ch³ng hÜn thay (*) b' i $x_5 \le x_1 + 11$.

– ß Wnguy°n cÞ hai m„ c ti°u LWgiÞi theo ph·Øng ph§p BTQHTT L'a m„ c ti°u.

2.5. Áp dụng mạng PERT trong phân tích chi phí và quản lí tài chính dự án

Trong giai LoÜn LÞu „ ng d„ ng PERT v¨ CPM, c§c ph·Øng ph§p n¨ y th·Ø ng L·Ø c §p d„ ng cho b¨ i to§n t³m thß i gian t' i thiWß th' c hi' n d' §n, t ³m c§c hoÜt L' ng gŁng. Ch¼ng ²t khi L·Ø c §p d„ ng LWph©n t²ch chi ph², mHß d½ trong c§c d' §n th³ vi' c ph©n t²ch chi ph² (bao g` m chi ph² tr' c tiJÞp, gi§n tiJÞp v¨ chi ph² ti' n ²ch) cÌ ng rßI quan tr` ng. Tuy nhi°n ng¨ y nay, PERT v¨ CPM L·Ø c §p d„ ng rßI r' ng r «i cho c§c b¨ i to§n d Üng n¨ y.

Ví dụ: Ch¼ng ta xem x®t d' §n v' i c§c d' ki' n cho trong bÞng II.17 v ¨ h³nh II.10.



Hình II.10. Mạng PERT cho bài toán phân tích chi phí

Bảng II.17. Dữ kiện cho bài toán PERT chi phí

Hoạt động	EST	LST	Thời gian thực hiện (tháng)	Tổng chi phí (triệu đồng)	Chi phí / một tháng (triệu đồng)
A	0	0	3	30	10
B	0	8	2	200	100
C	3	9	1	40	40
D	3	3	4	20	5
E	7	7	5	75	15
F	4	10	2	100	50
G	4	10	1	75	75
H	12	12	3	18	6
I	5	11	4	240	60

Dựa thêm, thời gian tối thiểu để hoàn thành dự án là 15 (tháng).

Nguyên tắc điều hành tối chi phí một dự án:

– Luôn kinh phí phải điều chỉnh vào dễ dàng sao cho giảm điều chỉnh tiếp dự án.

– Nếu kinh phí điều vào thay hoặc thiếu (theo tiến độ) thì phải kịp thời điều chỉnh. Cần nhớ điều chỉnh: nếu hoạt động nào kéo dài kiến, nếu hoạt động sớm dùng kinh phí dự kiến, nếu hoạt động sớm nhiều hơn dự kiến thì cần điều chỉnh thích hợp.

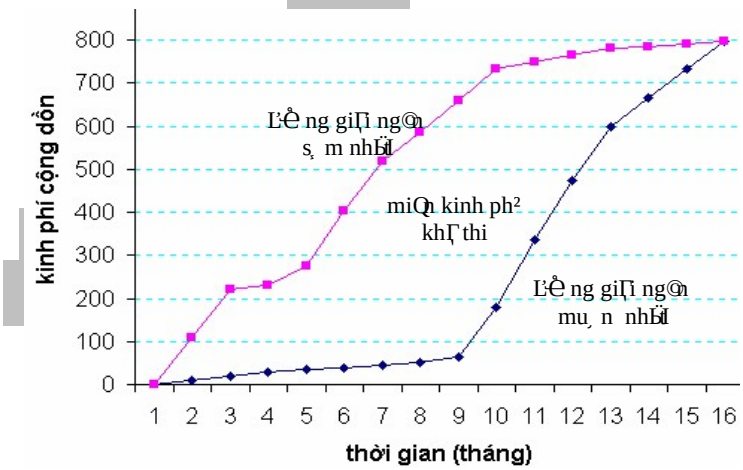
– Cố gắng phân bổ kinh phí cho phù hợp với sự điều chỉnh dự án vượt kinh phí.

Mấu chốt, trước hết cần lập biểu đồ theo dõi kinh phí cho dự án từ tháng 1 đến tháng 15 (xem bảng II.18). Phần trên các ô ngang là số liệu hoạt động giống nhau, phần dưới là số liệu giống nhau. Hai hàng cuối bảng dành cho kinh phí trong từng tháng và tổng kinh phí cần dùng cho từng tháng đối với hoạt động giống nhau và giống nhau.

Bảng II.18. Dữ kiện cho bài toán PERT chi phí

T.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	10	10	10												

	10	10	10												
B	100	100							100	100					
C				40						40					
D				55	55	55	55								
E								1515	1515	1515	1515	1515			
F					50	50					50	50			
G					75						75				
H													66	66	66
I						60	60	60	60			60	60	60	60
Σ	11010	11010	1010	455	1305	1155	655	7515	7115	1515	1540	1525	666	666	666
Σ+	11010	22020	23030	27535	40540	52045	58550	66065	73518	75033	76547	78060	78666	79273	79879



Hình II.11. Đồ thị miền kinh phí khả thi

D¸a v¨o bĮng II.18, c· thWvƐ LỀ c Lể th¸ miQn kinh ph² khĮ thi nhƠtr°n h³nh II.11. NJu tiJh L¸ giĮi ng©n n³m ngo¨i miQn kinh ph² khĮ thi th ³ cĮn gĐp r¼t LƠa ra c§c bi¸n ph§p

LiQu ch"nh tiJh L¸ giÇ¡i ng©n. Ngo¨i ra, cÌ ng c· thWLiQu ch"nh kinh ph² c§c hoÜt L¸ ng c¸ a d¸ §n d¸ a v¨o bÇng II.18.

Lưu ý

C§c vÉn LQcÑ bÇn cÇn giÇ¡i quyJt khi §p d¸ ng ph©Ñng ph§p PERT hay CPM trong theo d»i v¨ L§nh gi§ d¸ §n l¨:

– X§c L¸ nh LÈ c sÑ LÖ mÜng PERT c¸ a d¸ §n.

– T³m LÈ c LÈ ng gÉng v¨ c§c hoÜt L¸ ng gÉng.

– T²nh LÈ c L¸ tin cËy ¸ ng v¸ i c§c m´ c thÖ i hÜn ho ¨n th¨nh d¸ §n khi s´ li¸ u l¨ ngXu nhi°n.

– BiJt c§ch LiQu ch"nh thÖ i gian r¼ g¸ n khi tiJh L¸ th¸ c hi¸ n d¸ §n l¨ chÉm so v¸ i kJt hoÜch.

– Ph©n t²ch chi ph² v¨ LiQu h¨nh kinh ph² d¸ §n.

3. Một số mô hình mạng khác

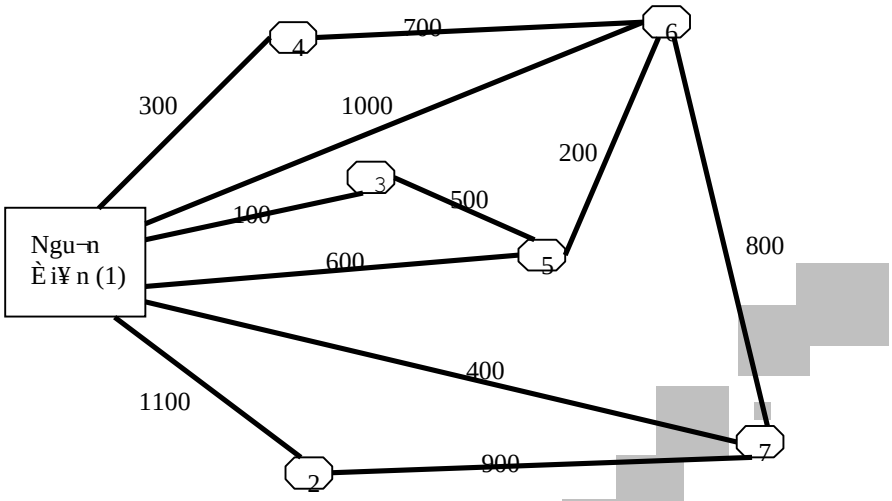
3.1. Bài toán cây khung tối thiểu

B¨i to§n c©y khung t´ i thiWu LÈ c nghi°n c¸ u v¨ ¸ ng d¸ ng trong nhiQu lÑnh v¸ c (C¹ ng ngh¸ th¹ ng tin, ¸ i¸ n l¸ c, Quy hoÜch thu¨ lÖ i,...). VÉn LQLÑ ra l¨ cÇn x§c L¸ nh m¸ t mÜng LÈ ng Li t¸ i m¸ i n¼ c¸ a mÜng xuÉt ph§t t¸ m¸ t n¼ n ¨o L· trong mÜng, sao cho t´ ng L¸ d¨i c§c cung LÈ ng n¨y l¨ ng nhÑ nhÉt. PhÑng ph§p t´ t nhÉt giÇ¡i b¨i to§n c©y khung t´ i thiWu thu¸ c vQR. Prim sÉ LÈ c tr³nh b¨y trong m¸ c n¨y.

Ví dụ: MÑc Li¸ n cho 7 x « trong huy¸ n t¸ ngu¸ n ph§t Li¸ n LJh LÈ c 7 x « v¸ i chi ph² LÈ ng d©y l¨ b®nh LÉt. SÑ LÖ khoÇng c§ch t¸ ngu¸ n cung cÉp Li¸ n t¸ i trÜm Li¸ n c§c x« nhÑ tr°n h³nh II.12.

B¨i to§n LÑ ra l¨ phÇ¡i ph§t triWu LÈ c c©y khung hay LÈ ng Li t´ i thiWu sao cho t´ ng chiQu d¨i c§c cung LÈ ng l¨ b®nh LÉt.

¸ WgiÇ¡i ta lÑp bÇng II.19 (chiQu d¨i c§c cung LÈ ng LÈ c quy g¸ n), trong L· M l¨ k² ki¸ u m¸ t s´ ≈ +∞, biWu th¸ cung LÈ ng kh¹ ng thWxÇ¡y ra tr °n th¸ c tJ M¸ i h¨ng hay m¸ i c¸ t c¸ a bÇng LQu biWu th¸ c§c n¼, ch³ng hÜn ¹ n³m tr °n giao c¸ a h¨ng 2 v¨ c¸ t 7 (cÌ ng g´ ng nhÑ ¹ n³m tr°n giao c¸ a h¨ng 7 v¨ c¸ t 2) LQu ch¸ a s´ 9, l¨ khoÇng c§ch gi¸ a hai n¼ 2 v¨ 7. M¸ t h¨ng v¨ m¸ t c¸ t LÈ c n· i l¨ li°n th¹ ng v¸ i nhau nJu ¹ n³m tr°n giao c¸ a h¨ng v¨ c¸ t n¨y ch¸ a gi§ tr¸ kh§c M.



Hình II.12. Sơ đồ khoảng cách từ nguồn điện tới các xã

Bảng II.19. B ảng khoảng cách các cung đường

	(N¼ h¨ng)	N¼ (c¸ t)						
		1√	2	3√	4	5	6	7
√	1	0	11	1	3	6	10	4
	2	11	0	M	M	M	M	9
√	3	1	M	0	M	5	M	M
√	4	3	M	M	0	M	7	M
	5	6	M	5	M	0	2	M
é	6	10	M	M	7	2	0	8
√	7	4	9	M	M	M	8	0

Thuật giải Prim

– B·Ę c khˆ i tŸb: LÆp bÏng khoÏng c§ch gi¸ a c§c n¼ mŸng. Trong bÏng tr°n, ch¯ n c¸ t bÏu k³ (*ví dụ cột 1, tức là ta chọn nút 1 để bắt đầu*), gŸch b¸ c¸ t v¸ a ch¯ n ra kh¸ i bÏng.

– C§c b·Ę c lHÞ:

Bước 1: ¸ §nh dÏu v¨o h¨ng t·Ęhng¸ ng (h¨ng c½ng ch¨ s´) v¸ i c¸ t v¸ a ch¯ n. Tr °n c§c h¨ng L« LÈ c L§nh dÏu t³m ¹ c· gi§ tr¯ nh¸ nhÏu.

Bước 2: Ch¯ n c¸ t t·Ęhng¸ ng v¸ i ¹ v¸ a t³m LÈ c (*cột 3 biểu diễn nút chọn mới, ghi cung đường vừa tìm được 1 → 3*), r¯ i gŸch b¸ n· Li (*gạch bỏ cột 3*). NJu trong bÏng v¥n c¸ n c§c c¸ t ch·Ęa gŸch b¸ hJu th³ quay vQb·Ę c 1, nJu tr§i lŸi chuyWi sang b·Ę c kJu th½c.

Comment [T3]:

– B·Ę c kJţ th¼c: NJţu tБІ cţ c§c c¸ t Ľ« b˙ gÜch b¸ hJţ th³ d¸ ng v¸ i tБІ cţ c§c cung Ľ·Ę ng li°n th¹ ng t³m Ľ·Ę c tÜo n°n c©y khung t´ i thiŴ.

Chú ý: Nh¸ ng c©u in nghi°ng minh hoÜ cho b·Ę c khˆ i tÜo v¨ b·Ę c lHţ Ľţu ti°n. Sau 6 b·Ę c lHţ, qu§ tr³nh giţ ĩ kJţ th¼c v¸ i c§c cung Ľ·Ę ng sau: 1 → 3, 1 → 4, 1 → 7, 3 → 5, 5 → 6 v¨ 7 → 2. T˝ ng Ľ¸ d¨ i c§c cung Ľ·Ę ng ç¸ a c©y khung t´ i thiŴ l¨ ∑ = 1 + 3 + 4 + 5 + 2 + 9 = 24. Ngo¨ i ra, c· th Wch˜ n n¼t khˆ i tÜo l¨ bБІ c¸ n¼t n¨ o.

Thuţt to§n Prim c¸ n Ľ·Ę c ¸ ng dţ ng trong c§c b¨ i to§n x§c Ľ˙ nh chi ph² t´ i thiŴ nhiQu dÜng kh§c. Vi˙ c ch¸ ng minh thuţt giţ ĩ tr°n xin d¨ nh lÜi cho ng·Ę i Ľ˙ c quan t©m nghi°n c¸ u c§c vБІ Ľ˙ vQ thuţt to§n.

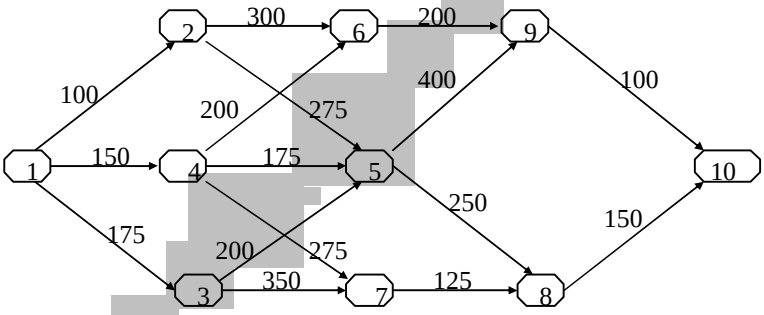
3.2. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất và quy hoạch động

Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

Trong b¨ i to§n t³m Ľ·Ę ng Ľi ngţn nhБІ, ch¼ng ta mu´ n x§c Ľ˙ nh h¨ nh tr³nh ngţn nhБІ t¸ m¸ t Ľ˙ a Ľi Ŵn xuБІ ph§t (Ľi Ŵn g´ c) Ľ Ŵ Ľi t¸ i Ľi Ŵn cţ n Ľ˙ Jh (Ľi Ŵn Ľ²ch) tr°n m¸ t mÜng li°n th¹ ng. ¸ Ŵ cho d¸ hiŴ, ch¼ng ta xem x®t v² dţ sau Ľ©y.

Ví dụ: B¨ i to§n ng·Ę i Ľi du l˙ ch.

C· m¸ t ng·Ę i Ľi du l˙ ch, xuБІ ph§t t¸ n¼t 1 v¨ kJţ th¼c h¨ nh tr³nh ˆ n¼t 10 theo h¨ nh tr³nh tr°n h³nh II.13.



Hình II.12. Sơ đồ hành trình đường đi

Ng·Ę i du l˙ ch xuБІ ph§t t¸ n¼t 1. Trong giai Ľo¨n Ľţu anh ta ch" Ľ·Ę c quyQn (v¨ bţt bu¸ c) ch˜ n m¸ t trong ba n¼t (th¨ nh ph´) 2, 3, 4 Ľ Ŵ v¨ o thŁm quan. Giai Ľo¨n tiţp theo, anh ta ch" Ľ·Ę c ch˜ n m¸ t trong ba n¼t 5, 6, 7 Ľ Ŵ du l˙ ch. Trong giai Ľo¨n tiţp n´ i, anh ta c· quyQn v¨ o m¸ t trong hai n¼t 8 ho Hţ 9 tr·Ę c khi kJţ th¼c h¨ nh tr³nh t¨ i n¼t 10.

Nh·Ę v ţy, trong m¸ i giai Ľo¨n ng·Ę i Ľi du l˙ ch ch" Ľ·Ę c quyQn Ľi v¨ o m¸ t th¨ nh ph´ (m¸ i th¨ nh ph´ Ľ·Ę c coi l¨ m¸ t trÜng th§i ç¸ a giai Ľo¨n Ľ·). H«y t³m c§ch x§c Ľ˙ nh Ľ·Ę ng Ľi ngţn nhБІ t¸ n¼t 1 t¸ i n¼t 10 thoĩ m «n c§c LiQu ki˙ n LHţ ra ç¸ a b¨ i to§n.

Nguyên tắc tối ưu Bellman trong quy hoạch động

Sử dụng nguyên tắc tối ưu Bellman trong quy hoạch động để giải bài toán ngược dư lịch, chúng ta chia bài toán thành nhiều giai đoạn, tức là thành nhiều bài toán nhỏ. Tùy mỗi giai đoạn ta cần tìm phương án tối ưu của bài toán tương ứng hiện có, xét trong mối quan hệ với các phương án tối ưu của các giai đoạn trước đó.

Ta có thể giải quyết bài toán định theo từng giai đoạn theo cách *tính toán tiến* hoặc *tính toán lùi*. Ở giải bài toán này, ta sẽ dùng cách tính toán lùi (*backward computing*) với các kết quả trong bảng II.20.

Bảng II.20. Các giai đoạn của bài toán quy hoạch động

Giai đoạn	Đầu vào	Đầu ra	Đường đi tối ưu	Khoảng cách tối đa
Giai đoạn I	8 9	10 10	$8 \to 10$ $9 \to 10$	150 100
Giai đoạn II	5 6 7	8 9	$5 \to 8$ $6 \to 9$ $7 \to 8$	400 300 275
Giai đoạn III	2 3 4	5 6 7	$2 \to 6$ $3 \to 5$ $4 \to 6$	600 600 500
Giai đoạn IV	1	2 3 4	$1 \to 2$ $1 \to 3$ $1 \to 4$	700 775 650

Giải thích: Sử dụng nguyên tắc tối ưu Bellman, để tính đường đi ngắn nhất từ nút 4 tới nút 10 chúng ta tính đường đi ngắn nhất từ nút 4 tới nút 6 cho giai đoạn III (lúc này d(4, 10) = d(4, 6) + Min d(6, 10) = 200 + 300 = 500). Điều này là do hai lựa chọn khác để đi từ nút 4 tới nút 5 hay 7 thì đều cho khoảng cách từ nút 4 tới đích là nút 10 lớn hơn (chẳng hạn nếu đi qua nút 5 thì d(4, 10) = d(4, 5) + Min d(5, 10) = 175 + 400 = 575).

Trong bảng II.20, tại giai đoạn IV, ta thấy khoảng cách ngắn nhất tới đích là 650. Điều ngược lại, từ điểm gốc tới đích ta xác định đường đi ngắn nhất là: $1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$ với tổng chiều dài là 650.

Quy trình tính toán tổng quát

– Trước hết, cần chọn các biến trạng thái (*state variables*) như mô tả trong bảng II.21.

Bảng II.21. Các biến trạng thái của bài toán quy hoạch động

BiJh	S´ trÜng th§i	C§c trÜng th§i (n¼t)	Gi§ tr˙ c· thWxIÇy ra c„ a c§c biJh trÜng th§i
x_4	1	1	$x_4 \equiv 1$
x_3	3	2, 3, 4	$x_3 = 2$; $x_3 = 3$; $x_3 = 4$
x_2	3	5, 6, 7	$x_2 = 5$; $x_2 = 6$; $x_2 = 7$
x_1	2	8, 9	$x_1 = 8$; $x_1 = 9$
x_0	1	10	$x_0 = 10$

BiJh trÜng th§i m¹ tÇ trÜng th§i c„ a h˙ th´ ng trong t„ ng giai LoÜn.

– X§c LÍnh h¨m m„ c ti°u: ¸ HÒ $F_i(x_i)$ l¨ khoÇng c§ch ngcÒn nhÖt t„ i L²ch t²nh tÜi giai LoÜn i. Theo bÇng II.20, ta thÖy:

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 150 & \text{v²i } x_1 = 8 \\ 100 & \text{v²i } x_1 = 9 \end{cases}$$

$$F_2(x_2) = \begin{cases} 400 & \text{v²i } x_2 = 5 \\ 300 & \text{v²i } x_2 = 6 \\ 275 & \text{v²i } x_2 = 7 \end{cases}$$

M„ c L²ch c„ a b¨i to§n l¨ cÇn t³m LÈ c gi§ tr˙ $F_4(x_4) = F_4(1)$.

– LÆp h¨m truy to§n: $F_{i+1}(x_{i+1}) = \text{Min}\,[F_i(x_i) + f_i(u_i)]$, Min t³m theo m˜ i t˙ h˚ p th²ch h˚ p x_i v¨ u_i, trong LÈ u_i l¨ biJh LiQu khiWi LWLiQu khiWi chuyWi trÜng th§i t„ trÜng th§i x_i sang x_{i+1} v¨ $f_i(u_i)$ l¨ hi˙ u „ ng c„ a biJh LiQu khiWi t§c L¸ ng l°n h¨m truy to§n (v¨ l°n h¨m m„ c ti°u, nJu t²nh LJh b¨i to§n cu´ i c½ng). Theo biWi th„ c c„ a h¨m truy to§n ta thÖy, nJu $F_i(x_i) + f_i(u_i)$ l¨ h¨m phi tuyJh th³ phÇi d½ng kÇthuÆt t´ i ¸u th²ch h˚ p LWi³m ra $F_{i+1}(x_{i+1})$.

Sau LÍy ch½ng ta Li t³m c§c h¨m truy to§n $F_{i+1}(x_{i+1})$ v¸ i quy tr³nh *tính toán lùi* LWgiÇi b¨i to§n theo t„ ng giai LoÜn, nh³m cu´ i c½ng t³m ra LÈ c $F_4(x_4) = F_4(1)$.

Giai đoạn 1: Trong giai LoÜn n¨y, mu´ n chuyWi t„ n¼t 10 ($x_0 = 10$) vQ n¼t 8 ($x_1 = 8$) ch³ng hÜn, th³ biJh LiQu khiWi u_0 phÇi c· gi§ tr˙ 150 ($u_0 = 150$). Hi˙ u „ ng gÍy n°n b˙ i u_0 l¨ $f(u_0) = 150$. ¸ iQu n¨y c· nghÆa l¨ nJu chuyWi t„ n¼t 10 ngÈ c vQ n¼t 8 th³ cÇn Li qu«ng LÈ ng c· chiQu d¨i l¨ 150.

$F_0(x_0) = 0$	$x_0 = 10$	u_0	$f_0(u_0)$	$F_1(x_1)$
$x_1 = 8$	$+ u_0 = 150$	150	150	150
$x_1 = 9$	$+ u_0 = 100$	100	100	100

Chú ý: Kh¹ ng phÇi b¨i to§n n¨o u „ i cÌ ng tr½ng v¸ i hi˙ u „ ng $f_i(u_i)$ c„ a n· . N· i chung, biJh LiQu khiWi u_i c· thWg©y ra hi˙ u „ ng $f_i(u_i)$ kh§c v¸ i u_i cÇ vQLÍ l¸ n cÌ ng nhÈLÇn v˙

Ľo.

Giai đoạn 2:

x_2	$x_1 = 8$	$x_1 = 9$	$F_1(x_1) + f_1(u_1)$		$F_2(x_2) =$ Min$[F_1(x_1) + f_1(u_1)]$
			$x_1 = 8$	$x_1 = 9$	
5	$+u_1 = 250$	$+u_1 = 400$	400	500	400 = 150 + 250
6	–	$+u_1 = 200$	–	300	300 = 100 + 200
7	$+u_1 = 125$	–	275	–	275 = 150 + 125

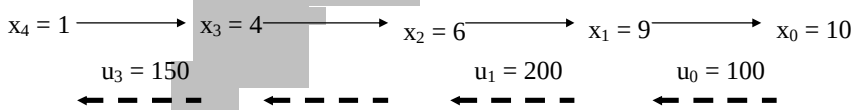
Giai đoạn 3:

x_3	x_2			$F_2(x_2) + f_2(u_2)$			$F_3(x_3) =$ Min $[F_2(x_2) + f_2(u_2)]$
	5	6	7	$x_2 = 5$	$x_2 = 6$	$x_2 = 7$	
2	$u_2 = 275$	$u_2 = 300$	–	675	600	–	600
3	$u_2 = 200$	–	$u_2 = 350$	600	–	625	600
4	$u_2 = 175$	$u_2 = 200$	$u_2 = 275$	575	500	550	500

Giai đoạn 4:

x_4	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$F_3(x_3) + f_3(u_3)$			$F_4(x_4) =$ Min $[F_3(x_3) + f_3(u_3)]$
				$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	
1	$u_3 = 100$	$u_3 = 175$	$u_3 = 150$	700	775	650	650

ị §p s´ : $F_4(x_4) = F_4(1) = 650$ v¸i LỂ ng Li ngắn nhBỉ tr°n h³nh II.14.



Hình II.14. Đường đi ngắn nhất 1 → 4 → 6 → 9 → 10

3.3. Áp dụng quy hoạch động cho một số bài toán ngành điện

Bài toán 1

CỊn ph©n ph´ i c¹ng suBỉt´ i ®a c¸ a n nh¨ m§y LỉÌ n v¸ i ph¸ tỊi t´ n thBỉ c´ LỉÌ nh. BiJỊ chi ph² c¸ a c§c nh¨ m§y l¨ h¨ m $f_i(p_i)$ ph¸ thu¸ c v¨ o c¹ng suBỉt p_i, v¸ i i = 1, 2, é , n. CỊn x§c LỉÌ nh c§c gi§ tr¸ c¸ a p_i sao cho t´ ng chi ph² l¨ c¸ c tiWỉ. VdỊy ta c· b¨ i to§n t´ i ®a sau:

H¨ m m¸ c ti°u:

$$z = f_1(p_1) + ... + f_n(p_n) \rightarrow \text{Min}$$

v¸ i c§c r¨ ng bu¸ c:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_n = P \\ 0 \le p_i \le P_{i,max} \end{cases}$$

trong L· P l¨ t˘ ng ph„ tÇi, $P_{i,\,max}$ l¨ c¹ ng suÈt t´ i La cho ph®p.

Ch¾ng h¨n, v„ i n = 3 ta c· BTQHTT (nguy °n) sau L©y:

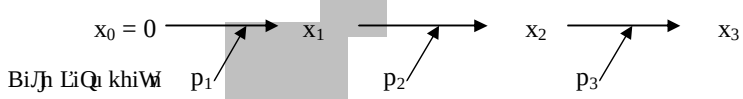
$$z = 3p_1 + 2p_2 + p_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 15 \\ 0 \le p_i \le 6;\ 0 \le p_2 \le 6;\ 0 \le p_3 \le 8 \end{cases}$$

nJu L« biJt:

$$\begin{cases} f_1(p_1) = 3p_1 \\ f_2(p_2) = 2p_2 \\ f_3(p_3) = p_3 \end{cases}$$

Ch¼ng ta x®t ph¬ng ph§p giÇi b¨ i to§n n¨ y v„ i giÇ thiJt c§c c¹ ng suÈt p_i l¨ nguy°n. „ H¬ c§c biJn tr¨ng th§i l¨ x_1, x_2, x_3 ; c§c biJn LiQu khiWi l¨ p_1, p_2, p_3 v„ i quan h¨ nh¬ sau: $x_1 = p_1$, $x_2 = p_1 + p_2$, $x_3 = p_1 + p_2 + p_3 = 15$. C§c hi¨ u „ ng g©y n°n b˘ i c§c biJn LiQu khiWi l¨ $f_i(p_i)$ v„ i i = 1, 2, 3.



ThiJt lÈp h¨ m truy to§n $F_{i+1}(x_{i+1}) = \text{Min}\,[F_i(x_i) + f_{i+1}(p_{i+1})]$. „ H¬ $F_0(x_0) = 0$, d„ thÈy: $F_1(x_1) = \text{Min} f_1(p_1)$, $F_2(x_2) = \text{Min}[f_1(p_1) + f_2(p_2)]$ v¨ $F_3(x_3) = \text{Min}[f_1(p_1) + f_2(p_2) + f_3(p_3)] = 3p_1 + 2p_2 + p_3$. M„ c ti°u cu´ i c½ng l¨ c„ c tiWi ho§ $z = F_3(x_3)$.

S¨ d„ ng nguy °n tc t´ i ¬u Bellman ta chia b¨ i to§n ra c§c giai LoÜn sau L©y *(với quy trình tính toán tiến).*

Giai LoÜn 1: ch¨ x®t c¹ ng suÈt p_1;

Giai LoÜn 2: ch¨ x®t c¹ ng suÈt p_1 v¨ p_2;

Giai LoÜn 3: x®t c§c c¹ ng suÈt p_1, p_2 v¨ p_3.

Giai đoạn 1: (Coi $F_0(x_0) = 0$)

x_1	$x_0 = 0$	$f_1(p_1) = 3p_1$	$F_1(x_1) = \text{Min}$ $[F_0(x_0) + f_1(p_1)]$

0	$p_1 = 0$	0	0
1	$p_1 = 1$	3	3
2	$p_1 = 2$	6	6
3	$p_1 = 3$	9	9
4	$p_1 = 4$	12	12
5	$p_1 = 5$	15	15
6	$p_1 = 6$	18	18

Giai đoạn 2:

x_2	x_1							$F_1(x_1) + f_2(p_2)$							$F_2(x_2) = \text{Min}[F_1(x_1) + f_2(p_2)]$
	0	1	2	3	4	5	6								
	p_2							0	1	2	3	4	5	6	
0	0	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	0
1	1	0	–	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–	–	2
2	2	1	0	–	–	–	–	4	5	6	–	–	–	–	4
3	3	2	1	0	–	–	–	6	7	8	9	–	–	–	6
4	4	3	2	1	0	–	–	8	9	10	11	12	–	–	8
5	5	4	3	2	1	0	–	10	11	12	13	14	15	–	10
6	6	5	4	3	2	1	0	12	13	14	15	16	17	18	12
7	–	6	5	4	3	2	1	–	15	16	17	18	19	20	15
8	–	–	6	5	4	3	2	–	–	18	19	20	21	22	18
9	–	–	–	6	5	4	3	–	–	–	21	22	23	24	21
10	–	–	–	–	6	5	4	–	–	–	–	24	25	26	24
11	–	–	–	–	–	6	5		–	–	–	–	27	28	27
12	–	–	–	–	–	–	6		–	–	–	–	–	30	30

Giai đoạn 3:

x_3	x_2								$F_2(x_2) + f_3(p_3)$						$F_3(x_3) = \text{Min}[F_2(x_2) + f_3(p_3)]$
	0		6	7	8	9	10	11	12							
	p_3									7	8	9	10	11	12	
15	–		–	8	7	6	5	4	3	23	25	27	29	31	33	23

Đáp số: T ng chi ph² L t gi§ tr c c tiW l 23, v i $p_1 = 1$, $p_2 = 6$, $p_3 = 8$.

$x_0 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 7 \rightarrow x_3 = 15$

BiJh LiQu khiW $p_1 = 1$ $p_2 = 6$ $p_3 = 8$

Lưu ý

C§c vÊn L¬Q ch¬ bÞn cÊn giÞi quyÞt khi §p dÔng ph¬Ên ng ph§p quy hoÜch L¬ ng theo nguy°n tÞc Bellman l¨:

– Chia b¨i to§n th¨nh nhiÒu giai L¬oÜn nh¬ L¬WgiÞi b¨i to§n t´ i ¬Êu cho t¬ ng giai L¬oÜn. C§c yÞu t´ cÔa b¨i to§n quy hoÜch L¬ ng l¨ biÞn trÜng th§i, biÞn L¬iÒu khiW¬, h¨m truy to§n v¨ h¨m mÔc ti°u.

– Khi chuyW¬t¬ m¬ t trÜng th§i n¨o L¬· (trong m¬ t giai L¬oÜn) sang trÜng th§i kh§c (giai L¬oÜn kh§c) cÊn c¬· biÞn L¬iÒu khiW¬.

– MÔi gi§ trÞ cÔa biÞn L¬iÒu khiW¬ g©y ra m¬ t hÞu ¬ng l°n h¨m mÔc ti°u.

– Tu8 theo c§c b¨i to§n t´ i ¬Êu ph§t sinh trong c§c giai L¬oÜn m¨ lÔa chÒn ph¬Ên ng ph§p t´ i ¬Êu th²ch hÞp.

Trong v² dÔ L¬ang x®t, khi c§c hÞu ¬ng $f_i(p_i)$ cho d¬Êi dÜng h¨m tuyÞn t²nh vÔi c§c biÞn p_i nhÒn c§c gi§ trÞ rÞi rÜc/nguy°n th³ h¨m truy to§n $F_{i+1}(x_{i+1}) = Min\,[F_i(x_i) + f_{i+1}(p_{i+1})]$ sÉ t²nh L¬Êc b³ng thuÒt giÞi dÔa tr°n bÞng liÞt k° (nh¬Êph¬Ên ng ph§p giÞi L« tr³nh b¨y). NÞu $f_i(p_i)$ phi tuyÞn vÔi c§c biÞn p_i nhÒn c§c gi§ trÞ li°n tÔc th³ L¬Wt³m $F_{i+1}(x_{i+1}) = Min[F_i(x_i) + f_{i+1}(p_{i+1})]$ ta c· hai c§ch:

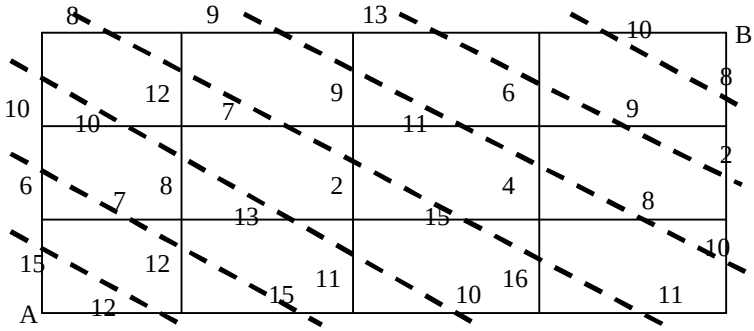
– C§ch 1: rÞi rÜc ho§ theo t¬ ng mÔc. Ch³ng hÜn vÔi $p_1 \in [0, 6]$, th³ coi $p_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

– C§ch 2: §p dÔng ph¬Ên ng ph§p t´ i ¬Êu th²ch hÞp vÔi biÞn li°n tÔc (xem ch¬Ên ng I) cho h¨m mÔc ti°u. Ch³ng hÜn, trong v² dÔ tr°n khi cÊn t³m $F_2(x_2) = Min\,[F_1(x_1)+ f_2(p_2)] = Min[f_1(p_1) + f_2(p_2)] = Min\,[3p_1 + 2p_2]$ vÔi L¬iÒu kiÞn r¨ng bu¬c: $p_1 + p_2 \le 15$ v¨ $0 \le p_1 \le 6$, $0 \le p_2 \le 6$, c· thW§p dÔng ph¬Ên ng ph§p L¬hn h³nh.

Bài toán 2

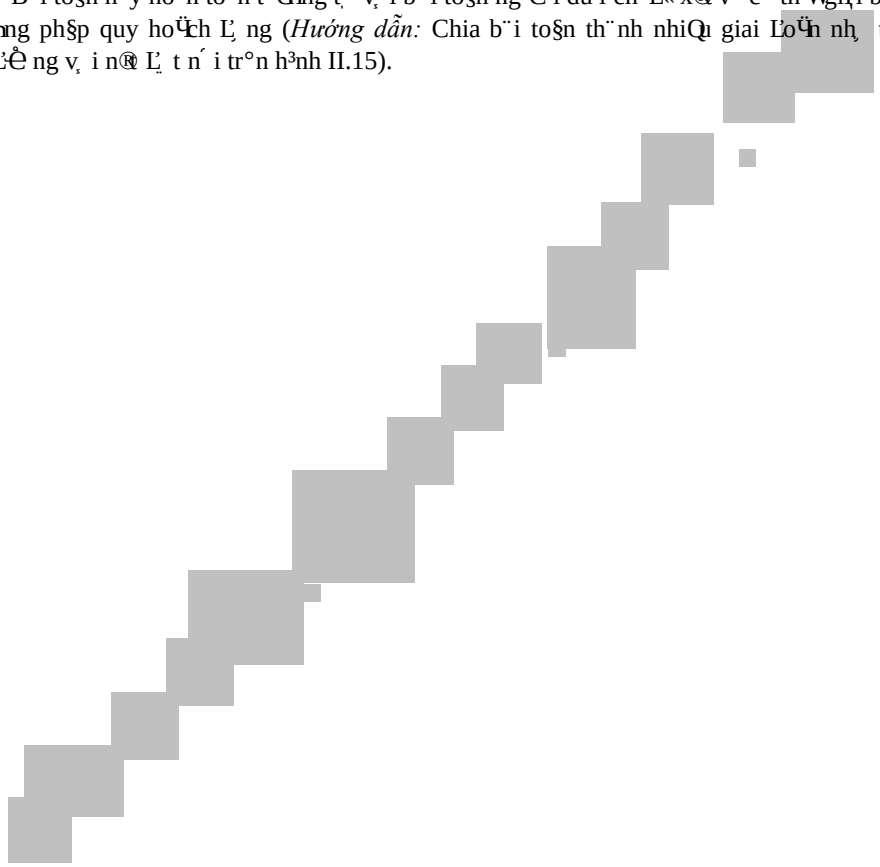
X§c L¬nh tuyÞn L¬Êng L¬i cÔa L¬Êng d©y truyÒn tÞi L¬iÞn tÔ L¬iWÞn A L¬Þn L¬iWÞn B, vÔi c§c ch¬Êng ngÜi vÒt kh§c nhau, sao cho tÞng chi ph² l¨ nh¬ nhÒt. C§c dÔ kiÞn cÔa b¨i to§n cho tr°n h³nh II.15.

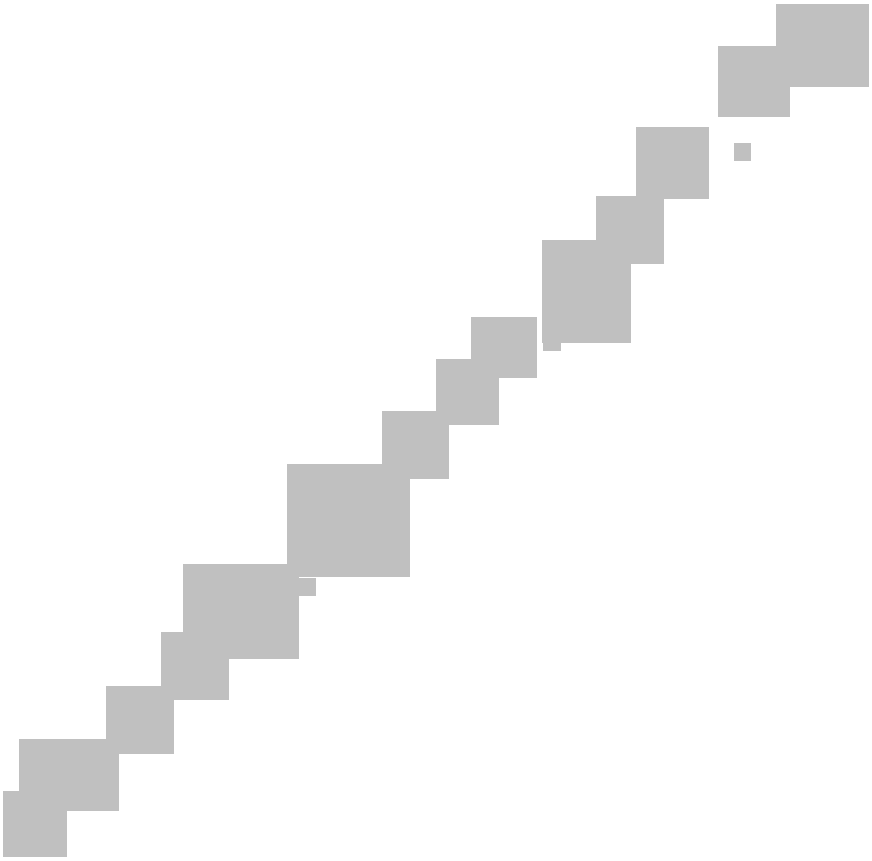
Nh¬Êv¬dy L¬WthiÞt lÒp sÒ L¬Êng truyÒn tÞi L¬iÞn th³ xuÒt ph§t tÔ A ta c· thWL¬nh tuyÞn L¬i cÔa L¬Êng truyÒn tÞi L¬iÞn tr¬Êc hÞt phÞi qua m¬ t trong hai L¬iWÞn s§t gÞn, theo h¬Êng bÒc hay h¬Êng L¹ ng, vÔi c§c chi ph² l¨ 15 v¨ 12. TÔ m¬ t trong hai L¬iWÞn n¨y, ch¼ng ta lÜi tiÞp tÔc x§c L¬nh tuyÞn L¬i cho L¬Êng truyÒn tÞi L¬iÞn, vÔi c§c chi ph² L« biÞt... VÒy ta c· b¨i to§n t³m L¬Êng L¬i vÔi chi ph² nh¬ nhÒt.



Hình II.15. Sơ đồ tuyến đi cho dây truyền tải điện

B¨i to§n n¨y ho¨n to¨n t-Øng t¸ v¸i b¨i to§n ng-Ëi du lÞch L«x®t v¨ c· th WgiÞi b³ng ph-Øng ph§p quy hoÜch L¸ng (*Hướng dẫn:* Chia b¨i to§n th¨nh nhiQu giai LoÜn nh¸ theo c§c L-Ëng v¸i n®t L¸t n´i tr°n h³nh II.15).





Chương III

GIỚI THIỆU LÍ THUYẾT MÔ PHỎNG VÀ MÔ HÌNH HÀNG CHỜ

1. Mục đích và các công cụ của mô phỏng

1.1. Khái niệm về mô phỏng ngẫu nhiên

M¹ ph¸ng (*Simulation*) L·Ề c¸ ng d¸ng r¸ng r«i trong kinh tÚ kỌ thuÊt v¨ nhiỌu lỌnh v¸ c kh§c. Theo *Từ điển chính xác Oxford*, bỊn 1976, "m¹ ph¸ng c· nghỌa l¨ giỊ c§ch, é , l¨m ra vỊ nh·Ể h¨nh L¸ng nh·Ể bỊt ch·Ể c gí ng v¸ i, mang h³nh th¸ c c¸ a, giỊ b¸ nh·Ể.., l¨m giỊ c§c LiỌu ki¸ n c¸ a t³nh hu¸ ng n¨o L· th¹ ng qua m¸ t m¹ h³nh v¸ i m¸ c L²ch huỸt luy¸ n hoỊt ti¸ n lỂ i".

VỌ mỊt nghỌa kỌ thuÊt, m¹ ph¸ ng (hay n· i L¼ng h Ịn, ph·Ể ng ph§p m¹ ph¸ ng) h¨m ch¸ a vi¸ c §p d¸ ng m¸ t m¹ h³nh n¨o L· LỊt ỦỌ ra kÚ quỊ, ch¸ kh¹ ng c· nghỌa l¨ th¸ nghi¸ m m¸ t h¸ th¸ ng th¸ c tÚ n¨o L· L¸ang cỊn nghi°n c¸ u hay khỊo s§t. NÚu m¹ h³nh c· ch¸ a c§c th¨nh phỊn hay yÚu t¸ ngẫu nhi °n th³ ch¼ng ta c· m¹ ph¸ ng ngẫu nhi °n.

ThuÊt ng¸ ñph·Ể ng ph§p Monte–Carloò xuỸt hi¸ n t¸ thÚ chiÚn th¸ hai khi tiÚn h¨nh c§c m¹ ph¸ ng ngẫu nhi°n trong qu§ tr³nh ph§t kiÚn bom nguy°n t¸ . Ng¨y nay, thuÊt ng¸ n¨y L¹ i khi cÌ ng L·Ề c d½ng L¸ ng nghỌa v¸ i thuÊt ng¸ ph·Ể ng ph§p m¹ ph¸ ng ngẫu nhi°n, nh·Ể khi ta n· i ph·Ể ng ph§p Monte–Carlo t²nh t²ch ph©n ch³ng hỦn, tuy nhi°n, n· kh¹ ng L·Ề c s¸ d¸ ng m¸ t c§ch r¸ ng r «i.

Ch¼ng ta x®t m¹ ph¸ ng tr°n hai quan LiỊm: ngh¸ thuÊt v¨ kỌ thuÊt (v¸ i t·Ể c§ch m¸ t c¹ ng c¸), m¨ trong m¸ t s¸ tr·Ề ng h¸ p rỦi kh· ph©n L¸ nh ranh gi¸ i rỦch r¸ i. Trong ch·Ể ng n¨y ch¼ng ta nghi°n c¸ u m¹ ph¸ ng ngẫu nhi°n vỌ ph·Ể ng di¸ n m¸ t s¸ kỌ thuÊt, c¹ ng c¸ th·Ề ng L·Ề c s¸ d¸ ng.

1.2. Các công cụ chủ yếu của mô phỏng

Nguồn ngẫu nhiên (Source of randomness)

ỊỊ WỦp d¸ ng m¹ ph¸ ng ngẫu nhi°n tr·Ể c hÚt cỊn phỊi c· L·Ề c m¸ t ngu¸ n c§c *số ngẫu nhiên*. C§c s¸ ngẫu nhi°n nh·Ể vÚy c· thWL·Ề c tỦo ra b¸ i c§c h¨m sinh s¸ ngẫu nhi°n.

Trong nhiỌu ng¹ n ng¸ lÊp tr³nh (nh·Ể Visual C++ 6.0, hay Builder C++ 5.0,...), ta sẽ thỦy c· m¸ t cỊp h¨m dỦng SRAND (*seed)* v¨ RANDOM LỊ ph§t sinh c§c s¸ (L·Ề c coi l¨) ngẫu nhi°n. H¨m SRAND, c· tham s¸ l¨ *seed* L·Ề c g¸ i l¨ *hạt mầm ngẫu nhi ên,* L· ng vai tr¸ kh¸ i tỦo d«y s¸ ngẫu nhi°n. C¸ n h¨m RANDOM l¨ h¨m sinh c§c s¸ ngẫu nhi°n sau khi c· gi§ tr¸ kh¸ i tỦo.

Th¹ ng th·Ề ng, c§c ngu¸ n n¨y L·Ề c coi nh·Ể t¸ n tỦi m¸ t c§ch L·Ể ng nhi°n. C©u h¸ i LỊt ra l¨ ch¼ng L·« "L¸ t¸ t" hay ch·Ể a? Trong gi§o tr³nh n¨y ch¼ng ta kh¹ ng Li s©u v¨o ph©n t²ch

vÖi LQtr°n. M¸t c§ch kh§i qu§t c· thWh· i r³ng, c§c s´ L·Ể c g¸i l¨ s´ ngẫu nhi°n L·Ể c tỦo ra nh·Ể vdy c¸n xa m¸i th¸ c s¸ l¨ ngẫu nhi°n. M¸t c§ch ch²nh x§c h hn, ch¼ng ch" c· thWg¸i l¨ c§c s´ *giả ngẫu nhiên* m¨ th¹i. ChÖl·Ể ng c¸a ngu¸n ngẫu nhi°n c· thW¸nh h·Ể ng rÖl¸n t¸i kJ quÇ nghi°n c¸u khi s¸ d¸ng ph·Ể hng ph§p m¹ ph¸ng ngẫu nhi°n.

X®t vQth¸c chÖl, c§c s´ giÇ ngẫu nhi °n l¨ c§c s´ c· t²nh chÖl tÖl L'nh (*deterministic*), nh·Ể ng ch¼ng c· t²nh chÖl gi´ ng v¸i m¸t d«y c§c gi§ tr¸ thWhi¸n c¸a c§c biJh ngẫu nhi°n L¸c ldp, c· ph©n ph´ i LQu. V² d¸, x®t d«y s´ : 13, 8, 1, 2, 11, 14, 7, 12, 13, 12, 17, 2, 11, 10, 3,... D«y s´ n¨y tr¹ng th³ c· vTngẫu nhi°n, nh·Ể ng th¸c chÖl l¨ tu©n theo m¸t quy tdc (h«y ph§t hi¸n ra quy tdc n¨y). Vi¸c t³m kiJm c§c thudt giÇi (hay c§c quy tdc tÖl L'nh) LWph§t sinh ra c§c s´ giÇ ngẫu nhi°n L¸, t´ t l¨ m¸t lỢnh v¸c nghi°n c¸u chuy°n s©u c¸a To§n h¸c v¨ Tin h¸c. MHu d½ trong th¸c tJ khi §p d¸ng m¹ ph¸ng ngẫu nhi°n, ng·Ể i ta ²t khi d½ng c§c s´ ngẫu nhi°n tu©n theo luDt ph©n ph´ i x§c suÖl LQu U[0, 1) tr°n [0, 1), nh·Ể ng ngu¸n s´ ngẫu nhi°n loỦi n¨y ch²nh l¨ ch s´ LWm¹ ph¸ng c§c ph©n ph´ i x§c suÖl kh§c (xem m¸c 1.3).

Mô hình ngẫu nhiên

Hai l² do ch²nh cho vi¸c §p d¸ng m¹ ph¸ng ngẫu nhi °n l¨:

– T¸ng h¸p d¸ li¸u theo s¸ ph©n loỦi nhÖl L'nh.

– n·Ể a ra c§c d¸ b§o.

Mu´ n §p d¸ng m¹ ph¸ng ngẫu nhi °n cÇn phÇi c· m¹ h³nh. Nh·Ể vdy, m¸c L²ch c¸a m¹ ph¸ng ngẫu nhi °n cÌ ng gÇn v¸i m¸c L²ch c¸a m¹ h³nh ho§ (*modelling).* C· hai loỦi m¹ h³nh th·Ể ng L·Ể c §p d¸ng, L· l¨: m¹ h³nh cơ chJ (*mechanistic model*) v¨ m¹ h³nh ti¸n d¸ng (*convenient model*). CÇ hai loỦi n¨y LQu c· thWL·Ể c s¸ d¸ng LWtr¸ gi¼p c§c c¹ng vi¸c nghi°n c¸u, khÇo s§t nh³m gia tÖng s¸ nhdn biJt v¨ t³m kiJm tri th¸c, d¸ b§o v¨ h¸ tr¸ vi¸c ra quyJ L'nh.

n¸ W¸ng d¸ng m¸t m¹ h³nh, ta c· hai s¸ l¸a ch¸n sau:

– TiJh h¨nh c§c ph©n t²ch vQmHu to§n h¸c LWt³m hiWu h¨nh vi c¸a m¹ h³nh. VÖi LQ n¨y nhiQu khi tr¸n °n rÖl ph¸c tỦp v¸i c§c h¸ phi tuyJn nhiQu biJn, do L· ch¼ng ta cÇn LHu ra th°m c§c giÇ thiJt. Tuy nhi°n nh¸ng giÇ thiJt "chHu chE qu§" c¸a to§n h¸c L¹i khi tr¸n °n "L§ng nghi ng¸" trong th¸c tJ

– Th² nghi¸m v¸i m¹ h³nh L'ang xem x®t. n´ i v¸i c§c m¹ h³nh ngẫu nhi°n c§c gi§ tr¸ phÇn h¸i (LÇu ra) sE biJn thi°n, v³ vdy ch¼ng ta cÇn tỦo ra h¨ng loỦi c§c thWhi¸n (d¸ li¸u nh©n tỦo) v¸i nh¸ng b¸ tham s´ kh§c nhau c¸a m¹ h³nh.

n¹i khi cÌ ng cÇn xem x®t t¸i s¸ l¸a ch¸n th¸ ba, L· l¨ tiJp cdn lai (*hybrid approach*) c¸a hai l¸a ch¸n tr°n.

1.3. Mô phỏng một số phân phối xác suất

Một số phân phối xác suất thường gặp

n¸ W§p d¸ng m¹ ph¸ng ngẫu nhi°n cÇn biJt m¸t s´ kiJn th¸c ch bÇn m¨ ch¼ng ta sE nhdc lỦi ngay sau L©y. BiJn ngẫu nhi°n l¨ m¸t kh§i ni¸m quan tr¸ng trong l² thuyJt x§c suÖl th´ ng k°. M¸t c§ch giÇn l·Ể c, biJn ngẫu nhi°n (*random variable*), c¸n g¸i l¨ LỦi l·Ể ng ngẫu nhi°n, L·Ể c hiWu l¨ biJn nhdn gi§ tr¸ tu8 thu¸c v¨o kJ quÇ c¸a ph®p th¸ (ph®p Lo,

quan s§t, th² nghi˙ m) m¨ kh¹ ng th WL'o§n tr·Ę c L:Ę c.

BiJn ngXu nhi°n chia l¨m hai loŸi ch²nh: r˚ i rŸc v¨ li°n t¸ c. BiJn r˚ i rŸc c· thWnhdn c§c gi§ tr˙ t¸ m¸ t tdp h˚ p (c· l¸ c l·Ę ng) h¸ u hŸn hoHu L'Jm L:Ę c. BiJn li°n t¸ c l¨ m¸ t kh§i ni˙ m to§n h˙ c vQloŸi biJn ngXu nhi°n c· thWnhdn c§c gi§ tr˙ d¨y s§t nhau tr°n m¸ t hoHu m¸ t s´ khoJng / L'oŸn s´ th¸ c n¨o L· (L'Wtr³nh b¨y vBi L'QL'hn giJn, ˆ L©y ch¼ng ta ch¨ n· i t¸ i biJn ngXu nhi°n nhdn c§c gi§ tr˙ l¨ s´ th¸ c). Trong th¸ c tJ, kh¹ ng c· m¸ t LŸi l·Ę ng ngXu nhi°n n¨o l¨ li°n t¸ c theo nghqa tuy˙ t L´ i, ch³ng qua l¨ ch¼ng ta kh¹ ng nhdn biJ L:Ę c (m¸ t c§ch c´ Ï hay kh¹ ng c´ Ï) khoJng c§ch gi¸ a c§c gi§ tr˙ rBi s§t nhau c¸ a n· mï th¹ i.

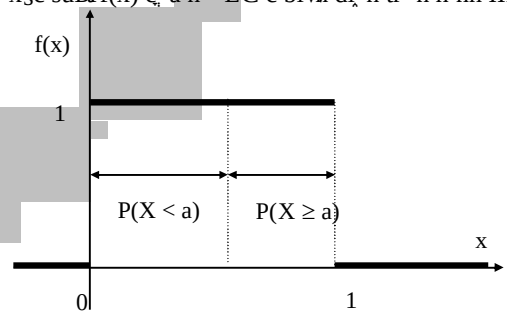
Ph©n ph´ i x§c suBt c¸ a biJn ngXu nhi °n r˚ i rŸc L:Ę c minh hoŸ qua v² d¸ sau: X® t biJn X c· thWhi v¨o m¸ t trong ba trŸng th§i L:Ę c L'nh l·Ę ng b˙ i c§c gi§ tr˙ 6, 9, 12 v¸ i c§c x§c suBt t·Ęhng¸ ng c¸ a c§c trŸng th§i l¨ 0,3, 0,4 v¨ 0,3. Ch¼Ï r³ng t´ ng c§c x§c suBt b³ng 1 (100%) L:Ę c ph©n ph´ i v¨o c§c gi§ tr˙ biJn ngXu nhi°n X c· thWlBy nh·Ętr³nh b¨y trong bJng sau L©y, L:Ę c g¸ i l¨ bJng ph©n ph´ i x§c suBt.

C§c gi§ tr˙ c¸ a X: x_i	6	9	12
X§c suBt t·Ęhng¸ ng: p_i	0,3	0,4	0,3

(Ch¼Ï : $\sum p_i = 1$)

M¸ t s´ ph©n ph´ i x§c suBt th·Ę ng d½ng c¸ a biJn ngXu nhi °n li°n t¸ c v¨ r˚ i rŸc L:Ę c li˙ t k° d·Ę i L©y.

Phân phối đều trong [0,1): X nhdn c§c gi§ tr˙ thu¸ c n¨ a khoJng [0,1) v¸ i khJ nLng ñnh·Ęnhauò. H¨m mdt L¸ x§c suBt f(x) c¸ a n· L:Ę c biW d¸ n tr°n h³nh III.1.



Hình III.1. Đồ thị hàm mật độ phân phối đều

Phân phối Poát–xông: V¸ i m¸ t h˙ th´ ng h¨ng ch˚ m¸ t k°nh (xem m¸ c 3), s´ l·Ę ng X t²n hi˙ u L'Jn trong m¸ t khoJng th˚ i gian l¨ m¸ t biJn ngXu nhi °n.

GiJ s˙ s´ t²n hi˙ u L'Jn trung b³nh trong m¸ t khoJng th˚ i gian L« biJ L:Ę c (k² hi˙ u λ), th³ v¸ i m¸ t s´ LiQu ki˙ n nhBi L'nh c· thWcoi X tu©n theo ludt ph©n ph´ i x§c suBt Po§t–x¹ ng (*Poisson*) nh·Ęsau:

C§c gi§ tr˙ c„ a X: x_i	0 1 .....x..... + ∞
X§c suÖt p_i t¬ng „ ng	$p(X = x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$$\Sigma p_i = e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^x}{x!}+\ldots\right] = e^{-\lambda}\times e^{\lambda} = 1 \quad .$$

Ch¼Ï r³ng s´ LÞu tr¬ng cho gi§ tr˙ trung b³nh c„ a biÙn ngẫu nhi°n X LÒc g˜i l¨ k³ v˜ ng. Trong ph©n ph´i Po§t–x¹ ng, k³ v˜ ng c„ a X l¨ λ. S´ LÞu tr¬ng cho L¸ ph©n t§n c§c gi§ tr˙ c„ a X xung quanh gi§ tr˙ k ³ v˜ ng c„ a n· LÒc g˜i l¨ L¸ l˙ ch chuẩn σ. V‚i ph©n ph´i Po§t–x¹ ng th³ $\sigma^2 = \lambda$.

Phân phối mũ: Tr°n L©y ta L« x®t ph©n ph´i Po§t–x¹ ng c„ a s´ c§c t²n hi˙u LÙn trong m¸t LÞn v˙ th˙i gian. M¸t kiW biÙn ngẫu nhi°n th¬ng x®t l¨ khoÙng th˙i gian gi¸a hai t²n hi˙u li°n tiÙp sÉ tu©n theo ph©n ph´i mÌ. ®y l¨ biÙn ngẫu nhi°n t„ c ch¨ nhËn c§c gi§ tr˙ kh¹ ng @m v‚i h¨m mËt L¸ x§c suÖt l¨ $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$. K² hi˙u biÙn ngẫu nhi°n LÞang x®t l¨ τ th³ x§c suÖt $P(\tau \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau$ c· thWhiW l¨ x§c suÖt c¸ng d°n cho t¸i t. Do L· h¨m ph©n ph´i x§c suÖt c„ a τ l¨: $F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = -e^{-\lambda\tau}\Big|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.

Phân phối chuẩn tắc N(0, 1): GiÙ s˙ X l¨ biÙn ngẫu nhi°n c· ph©n ph´i chuẩn tËc N(0,1). L¼c L· n· c· k³ v˜ ng m = 0 v¨ L¸ l˙ ch chuẩn σ = 1. H¨m ph©n ph´i x§c suÖt c„ a X c· dÜng:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} (1/\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2)dx \cdot$$

Cho X l¨ biÙn ngẫu nhi°n tu©n theo luËt ph©n ph´i chuẩn N(m, σ^2) c· k³ v˜ ng m, L¸ l˙ ch chuẩn σ. L¼c L· , th¸ c hi˙n ph®p L¸r i biÙn $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ th³ Z l¨ m¸t biÙn ngẫu nhi°n tu©n theo luËt ph©n ph´i chuẩn tËc N(0,1).

Mô phỏng các phân phối xác suất

Ví dụ 1: M¹ ph¸ng ph©n ph´i LÞu tr°n [0, 1)

Cách 1: D½ng biÙng s´ ngẫu nhi°n (xem ph„ l„ c 2A v¨ 2B). ®y l¨ c§c biÙng s´ ghi lÜi c§c s´ (giÙ) ngẫu nhi °n LÒc ph§t sinh nh˙ c§c h¨m sinh s´ ngẫu nhi°n trong m§y t²nh. Ch³ng hÜn, s˙ d„ ng ph„ l„ c 2B ch¼ng ta nhËn LÒc m¸t d«y s´ ngẫu nhi°n: 0,10; 0,09;

0,73; 0,25 é

Cách 2: S¨ d„ ng c§c h¨m sinh s´ ngX¾u nhi°n (*Random number generator*) L'« L'Ê c c¨i L'Hõ tr°n m§y t²nh.

D½d½ng bÏng s´ ngX¾u nhi°n hay s¨ d„ ng c§c h¨m sinh s´ ngX¾u nhi°n trong m§y t²nh, ta cÌ ng lÈy ra hoHõ t²nh L'Ê c li°n tiÌp c§c s´ ngX¾u nhi°n x_i trong [0, 1) v„ i i = 1, 2,..., n . TÈn s´ c§c gi§ tr¯ n¨y rÈi v¨o k khoÏng nh„ v„ i L„ d¨i b³ng nhau 1/k L'Ê c chia ra t„ [0, 1) l¨ gÈn nhÊnhau (≈ n/k). V„ i n l„ n th³ c§c tÈn s´ L'· c¨ng s§t gÈn n/k. V³ vÌy ta coi c§c gi§ tr¯ ph§t sinh L'Ê c l¨ c§c thWhi¯ n c„ a biÌn ngX¾u nhi°n X tu©n theo ph©n ph´ i L'Qu tr°n [0, 1).

Trong tr·Ê ng h¯ p cÈn m¹ ph„ ng biÌn Y ph©n ph´ i L'Qu tr°n [a, b), ta ch¨ vi¯ c t²nh y_i = a + (b – a)x_i. Ch¼Ï r³ng L'Wph§t sinh c§c s´ ngX¾u nhi°n nhÌn gi§ tr¯ nguy°n 0, 1, 2,..., N, ch¨ cÈn §p d„ ng c¹ ng th„ c y_i = [(N + 1)x_i], trong L'· vÌ phÏ l¨ phÈn nguy°n c„ a (N + 1)x_i. M„ t s´ bÏng s´ ngX¾u nhi°n nguy°n hay h¨m sinh s´ ngX¾u nhi°n nguy°n c¨i L'Hõ sÌu trong c§c h¯ m§y t²nh cÌ ng gi¼p giÏ quyÌt vÈn L'Qn¨y.

Ví dụ 2: M¹ ph„ ng ph©n ph´ i r¯ i rÜc v„ i luÌt ph©n ph´ i x§c suÈt sau

C§c gi§ tr¯ c„ a X: x_i	6	9	12
X§c suÈt p_i	0,3	0,4	0,3

Mu´ n m¹ ph„ ng ph©n ph´ i tr°n, tr·Ê c hÌt cÈn tÜo ra m„ t d«y c§c ch„ s´ ngX¾u nhi°n b³ng c§ch tra bÏng s´ ngX¾u nhi°n hay d½ng h¨m sinh s´ ngX¾u nhi°n L'« L'Ê c c¨i L'Hõ trong m§y t²nh. Ch³ng hÜn ta c· thWch¯ n d«y sau 1009732533 7652013586 3467354876 é lÈy t„ h¨ng L'ÈÈu bÏng s´ ngX¾u nhi °n trong ph„ „ l„ c 2B. Ta quy L'¯ nh nÌu c§c ch„ s´ 0, 1, 2 xuÈt hi¯ n th³ coi X = 6, n ÌU 3, 4, 5, 6 xuÈt hi¯ n th³ coi X = 9, c¸ n nÌU c· 7, 8, 9 xuÈt hi¯ n th³ coi X = 12. L¼c L'· „ ng v„ i 10 ch„ s´ LÈÈu ti°n c„ a d«y tr°n $a_1a_2...a_{10}$ = 1009732533 ta c· bÏng sau L'©y cho biÌt c§c gi§ tr¯ c„ a X c· thWlÈy:

a_i	1	0	0	9	7	3	2	5	3	3
C§c gi§ tr¯ c„ a X: x_i	6	6	6	12	12	9	6	9	9	9

NhÊvÌy, L'« c· 10 gi§ tr¯ (thWhi¯ n) c„ a X L'Ê c tÜo ra. T·Êng t„ , c· thWtÜo ra c§c thW hi¯ n kh§c c„ a X. Do tÈn suÈt (hay x§c suÈt th„ c nghi¯ m) c„ a m„ i ch„ s´ ngX¾u nhi °n t„ 0 t„ i 9 trong bÏng s´ ngX¾u nhi°n l¨ khoÏng 10% n°n tÈn suÈt (x§c suÈt th„ c nghi¯ m) X nhÌn gi§ tr¯ 6, 9 v¨ 12 theo th„ t„ l¨ 30%, 40% v¨ 30%. Do L'· c· thWcoi P(X = 6) = 30%, P(X = 9) = 40%, P(X = 12) = 30%.

Vậy muốn mô phỏng phân phối của X phải phát sinh ra một loạt các giá trị (các thể hiện) ***x_i*** *của biến ngẫu nhiên X tuân theo quy luật phân phối đã cho.*

Ví dụ 3: M¹ ph„ ng ph©n ph´ i mÌ.

GiÏ s¨ biÌn ngX¾u nhi°n τ tu©n theo ph©n ph´ i mÌ v„ i h¨m ph©n ph´ i x§c suÈt l¨ *F(t)*

$=P(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$. ®y chÞnh lÝ x§c suÊt LÞWτ nhËn gi§ trÞ khi ng lÊn hÞn m, t s´ t cho trÞc; λ lÝ tham s´ L« cho c„a ph©n ph´i mÙ.

NJu r lÝ biJh ngÞu nhi°n c· ph©n ph´i LÞu tr°n [0, 1) th³ $P(r \ge e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t} = P(\tau \le t)$ (xem h³nh III.1). Do L·, $P(\ln r \ge -\lambda t) = P(-\frac{1}{\lambda}\ln r \le t) = P(\tau \le t)$. VËy LÞWph§t sinh ra c§c gi§ trÞ ngÞu nhi°n (c§c th Whi' n) c„a τ th³ trÞc hJ cÞn ph§t sinh ra c§c gi§ trÞ ngÞu nhi°n r vÝ t²nh $\tau = -\frac{1}{\lambda}\ln r$. Ch³ng hÜn, t bÞng s´ ngÞu nhi°n (ph„ l„c 2B), nJu lÊy r = 0,10 vÝ $\lambda = 5$ th³ $\tau = -0,2 \times \ln r = -0,2 \times \ln 0,1 = 0,46$. TiJp theo, nJu lÊy r = 0,09 th³ $\tau = -0,2 \times \ln 0,09 = 0,482$. C„ nhÞvËy ta thu LÞc m, t d«y c§c th Whi' n c„a τ.

2. Áp dụng mô phỏng ngẫu nhiên

2.1. Vai trò của phương pháp mô phỏng

NhiÞu bÝi to§n th, c tJch„ a c§c yJu t´ ngÞu nhi°n, bÊt' n LÞnh kh¹ng giÞi LÞc b³ng c§c ph©ng ph§p giÞi t²ch. NJu ch¼ng ta §p d„ng c§c ph©ng ph§p giÞi t²ch, th³ trong nhiÞu tr©ng h°p bu, c phÞi c¹ng nhËn nh, ng giÞ thiJ chÞ chÉ kh¹ng LÞc thoÞm «n tr°n th, c tJ, vÝ do LÞ Å i giÞi t³m LÞc cÌng ²t c· gi§ trÞ th, c ti, n. Ph©ng ph§p m¹ ph, ng LÞc d½ng r, ng r«i LÞWgiÞi c§c bÝi to§n loÜi LÞ, nhÊt lÝ nh, ng bÝi to§n li°n quan LJh h' th´ng l, n, bÊt' n LÞnh, hÝm ch„ a nhiÞu yJu t´ ngÞu nhi°n.

Ch¼ng ta cÞn §p d„ng ph©ng ph§p m¹ ph, ng trong c§c t³nh hu´ng sau L©y:

– Khi kh¹ng t³m LÞc m¹ h³nh giÞi t²ch nÝo th²ch h°p.

– C§c hoÜi L, ng c„a h' th´ng th©ng b' ngËu qu«ng, L„ t LoÜn kh¹ng theo quy luËt nÝo cÞ.

– M¹ ph, ng lÝ ph©ng ph§p duy nhÊt cho chi ph² tiJ ki' m vÝ t´n ²t th Å i gian.

Tuy nhi°n ph©ng ph§p m¹ ph, ng c· m, t s´ LiWm hÜn chJ sau:

– Kh¹ng LÞa ra LÞc Å i giÞi ch²nh x§c.

– Kh· x§c LÞnh LÞc sai s´.

– M¹ ph, ng ch" s „ng khi m¹i tr©ng c· t²nh bÊt' n LÞnh.

– M¹ ph, ng ch" tÜo ra c§c ph©ng §n L§nh gi§ ch„ kh¹ng LÞa ra LÞc kÞthuËt t³m Å i giÞi t´i ©u.

– M¹ ph, ng LÞ¹i khi rÊt LËt tiÞn.

2.2. Các bước cần tiến hành khi áp dụng mô phỏng

– X§c LÞnh vÊn LÞhay h' th´ng cÞn m¹ ph, ng.

– X§c LÞnh m¹ h³nh m¹ ph, ng.

– ®o vÝ thu thËp s´ li' u cÞn thiJ cho m¹ h³nh.

– Chµy m¹ ph¸ ng.

– Ph©n t²ch kÕt quÞ m¹ ph¸ ng, nÕu cÇn th³ phÞi s¸ a lµi ph¬ng §n L«« L¬c L§nh gi§ qua chµy m¹ ph¸ ng.

– Chµy m¹ ph¸ ng L¬kiÓm ch¸ ng ph¬ng §n m¸ i.

– KiÓm tra t²nh L¼ng L¬n c¸ a m¸ i kÕt luËn vQh¸ th´ ng th¸ c tÕL¬c r¼t ra sau khi chµy m¹ ph¸ ng.

Tr°n L©y l¨ c§c b¬c c¸Fn l¨ m khi §p d¸ ng m¹ ph¸ ng ngÖu nhi °n L¬t³m ra c§c ph¬ng §n h¸ p l² cho c§c b¨ i to§n th¸ c tÕ Ngo¨ i ra, m¹ ph¸ ng c¸ n L¬c §p d¸ ng L¬giÞi quyÕt nhiÒu vÊn L¬kh§c.

2.3. Một số ví dụ về áp dụng phương pháp mô phỏng

Ví dụ 1: CÇn l¸ a chµ n m¸ t trong hai chiÕn l¬c L¬ph§t triÓi sÞn phÈm, v¸ i c§c s´ li¸ u thu thËp L¬c cho trong ba bÞng III.1, III.2 v ¨ III.3.

Bảng III.1. Xác suất thời gian phát triển sản phẩm

Th¸ i gian ph§t triÓi sÞn phÈm	X§c suÊt	
	ChiÕn l¬c I	ChiÕn l¬c II
6	0,2	0,4
9	0,3	0,4
12	0,5	0,2

Bảng III.2. Chi phí lợi nhuận

Chi ph²/gi§ b§n	ChiÕn l¬c I	ChiÕn l¬c II
Chi ph² c´ L¸nh	600.000	1.500.000
Chi ph² biÕn thi °n/L¸hn v¸	7,5	6,75
Gi§ b§n/L¸hn v¸ sÞn phÈm	10	10

Bảng III.3. Doanh số phụ thuộc thời gian phát triển sản phẩm

Doanh s´	X§c suÊt		
	6 th§ng	9 th§ng	12 th§ng
1.000.000	0,2	0,4	0,5
1.500.000	0,8	0,6	0,5

VÊn L¬QL¬Hu ra l¨ §p d¸ ng ph¬ng ph§p m¹ ph¸ ng L¬t²nh l¸ i nhuËn trung b³nh c¸ a t¸ ng chiÕn l¬c, sau L¬· kiÓm tra kÕt quÞ (so s§nh v¸ i kÕt quÞ l² thuyÕt).

Nh¬vËy c· nÞm ph©n ph´ i x§c suÊt cÇn m¹ ph¸ ng ¸ ng v¸ i nÞm biÕn ngÖu nhi °n: X_1 – th¸ i gian ph§t triÓi sÞn phÈm (theo chiÕn l¬c) I, X_2 – th¸ i gian ph§t triÓi sÞn phÈm II, X_3 – doanh s´ cho th¸ i gian 6 th§ng, X_4 – doanh s´ cho th¸ i gian 9 th§ng v ¨ X_5 – doanh s´ cho th¸ i gian 12 th§ng. Trong v² d¸ n¨ y, L¬tr³nh b¨ y L¬hn giÞn vQvÊn L¬Qm¹ ph¸ ng c§c

ph©n ph´ i x§c suÏt c¸a c§c biÙn tr °n, ta d½ng m·Ô i s´ ngÈu nhi °n, m¸i s´ g°m m·Ô i ch¸ s´ ngÈu nhi °n r¼t ra t¸ bÙng s´ ngÈu nhi °n – ph¸ l¸c 2A (v³ vÙy c§c ch¸ s´ 0, 1, 2,..., 9 m¸i s´ chiÙm khoÙng 10%).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	5	8	1	9	2	2	3	9	6
2	0	6	8	5	7	7	9	8	4
8	2	6	2	1	3	0	8	9	2
8	3	7	4	8	3	6	0	4	9
4	6	3	7	5	6	7	4	8	8
0	9	2	8	1	0	5	5	8	2
7	2	9	5	0	8	8	5	7	9
9	5	8	6	1	1	1	6	3	2
7	0	5	5	5	0	8	7	6	7
6	4	7	2	3	8	2	9	3	4

Ta quy L'nh a_1 ¸ng v¸i X_1, a_2 ¸ng v¸i X_2, a_6 ¸ng v¸i X_3, a_8 ¸ng v¸i X_4 v¨ a_{10} ¸ng v¸i X_5. Ngo¨i ra cÒn quy L'nh:

$$a_1 = \begin{cases} 0,1 & \text{th}^3\ X_1 = 6 \text{ th§ng (th¸ i gian ph§t triÙn s¸n phÈm I)} \\ 2,3,4 & \text{th}^3\ X_1 = 9 \text{ th§ng} \\ 5,6,7,8,9 & \text{th}^3\ X_1 = 12 \text{ th§ng} \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} 0,1,2,3 & \text{th}^3\ X_2 = 6 \text{ th§ng (th¸ i gian ph§t triÙn s¸n phÈm II)} \\ 4,5,6,7 & \text{th}^3\ X_2 = 9 \text{ th§ng} \\ 8,9 & \text{th}^3\ X_2 = 12 \text{ th§ng} \end{cases}$$

$$a_6 = \begin{cases} 0,1 & \text{th}^3\ X_3 = 10^6 \text{ (doanh s´ 6 th§ng ph§t triÙn s¸n phÈm)} \\ 2,3,\ldots,9 & \text{th}^3\ X_3 = 1,5.10^6 \end{cases}$$

$$a_8 = \begin{cases} 0,1,2,3 & \text{th}^3\ X_4 = 10^6 \text{ (doanh s´ 9 th§ng ph§t triÙn s¸n phÈm)} \\ 4,5,\ldots,9 & \text{th}^3\ X_4 = 1,5.10^6 \end{cases}$$

$$a_{10} = \begin{cases} 0,1,2,3,4 & \text{th}^3\ X_5 = 10^6 \text{ (doanh s´ 12 th§ng ph§t triÙn s¸n phÈm)} \\ 5,6,\ldots,9 & \text{th}^3\ X_5 = 1,5.10^6 \end{cases}$$

C§n nhËc lÜi m¸t s´ c¹ng th¸c trong lÜnh v¸c quÜn tr¸ kinh doanh nh Ësau:

+ Lợi nhuận = (Doanh số – Điểm hoà vốn) × (Lợi nhuận /đơn vị sản phẩm)

+ Điểm hoà vốn = (Chi phí cố định) / (Lợi nhuận / đơn vị sản phẩm)

+ Lợi nhuận / đơn vị sản phẩm = (Giá bán đơn vị sản phẩm) – (chi phí /đơn vị sản phẩm)

C§c t²nh to§n m¹ ph¸ng LÈ c ¨ng h¸ p trong b¶ng III.4.

Bảng III.4. Kết quả tính toán mô phỏng

S´ ngẫu nhi°n										Th¸ i gian		Doanh s´		L¸ i nhuận	
a_1	a_2				a_6		a_8		a_{10}	I	II	I	II	I	II
1	5	8	1	9	2	2	3	9	6	6	9	$1,5.10^6$	10^6	$3,15.10^6$	$1,75.10^6$
2	0	6	8	5	7	7	9	8	4	9	6	$1,5.10^6$	$1,5.10^6$	$3,15.10^6$	$3,38.10^6$
8	2	6	2	1	3	0	8	9	2	12	6	10^6	$1,5.10^6$	$1,9.10^6$	$3,38.10^6$
8	3	7	4	8	3	6	0	4	9	12	6	$1,5.10^6$	$1,5.10^6$	$3,15.10^6$	$3,38.10^6$
4	6	3	7	5	6	7	4	8	8	9	9	$1,5.10^6$	$1,5.10^6$	$3,15.10^6$	$3,38.10^6$
0	9	2	8	1	0	5	5	8	2	6	12	10^6	10^6	$1,9.10^6$	$1,75.10^6$
7	2	9	5	0	8	8	5	7	9	12	6	$1,5.10^6$	$1,5.10^6$	$3,15.10^6$	$3,38.10^6$
9	5	8	6	1	1	1	6	3	2	12	9	10^6	$1,5.10^6$	$1,9.10^6$	$3,38.10^6$
7	0	5	5	5	0	8	7	6	7	12	6	$1,5.10^6$	10^6	$3,15.10^6$	$1,75.10^6$
6	4	7	2	3	8	2	9	3	4	12	9	10^6	$1,5.10^6$	$1,9.10^6$	$3,38.10^6$

¸ iW¶n ho¨ v´ n c¸ a chiÜn lÈ c I = $\frac{600.000}{10 - 7,5} = 240.000$

¸ iW¶n ho¨ v´ n c¸ a chiÜn lÈ c II = $\frac{1.500.000}{10 - 6,75} = 461538$

Bảng III.5. So sánh lợi nhuận giữa chiến lược I và II

Tổng lợi nhuận	Chiến lược I	Chiến lược II
	$26,5 \times 10^6$	$28,91 \times 10^6$
Lợi nhuận trung bình (Σ lợi nhuận/ 10)	$2,65 \times 10^6$	$2,891 \times 10^6$

Cũng chú ý rằng trong bảng III.5 là kết quả tính toán khi chưa mở phạm vi 10 lần tương ứng với 10 sự kiện. Nếu ta lấy cường nhiễu sóng xung nhiễu thì lợi ích phân xạc lượng lớn cao. Vì vậy, nếu việc tính toán trên lợi ích lớn trong việc chưa trong mạng trường hợp, hướng người lớn thì lợi ích xạc sẽ rất cao.

Qua các phân tích trên ta thấy

Để tiến hành mô phỏng cần phải có:

– Cơ sở dữ liệu (DataBase)

– Cơ sở tri thức (KnowledgeBase)

Kiểm tra kết quả mô phỏng trên bằng các sách so sánh với kết quả thuyết lớn thắng như sau:

Doanh số chiến lược I = $0,2\times(0,2\times10^6 + 0,8\times1,5\times10^6) + 0,3\times(0,4\times10^6 + 0,6\times1,5\times10^6) + 0,5\times(0,5\times10^6 + 0,5\times1,5\times10^6) = 1,295\times10^6$. Lợi nhuận trung bình chiến lược I = (1,295 ÷ 0,24)$\times2,5\times10^6 = 2,637\times10^6$. Kết quả tính toán mới là $2,65\times10^6$ rất sát với kết quả.

Thông tin ta tính lược doanh số về lợi nhuận trung bình cho chiến lược II ($2,84\times10^6$), về rất lược kết luận về kết xạc của tính toán mới.

Ví dụ 2: Tìm xác suất để bao lồi của 4 điểm lấy bất kì trong vùng tròn lớn vô hạn tâm giác *(bài toán Sylvester)*.

Có các cách giải nhất giải bài toán ngẫu nhiên theo các bước sau đây:

i) Gán cho biến *Counter* giá trị ban đầu bằng 0.

ii) Tiến hành mở lần gieo ngẫu nhiên tám số thực $0 \le r_i \le 1$ và $0 \le \varphi_i \le 2\pi$ (lần gieo φ_i là lấy số ngẫu nhiên thuộc [0, 1) gieo lần đầu nhiên trong 2π), i = 1, 2, 3, 4. Đặt $x_i = r_i\sin\varphi_i$, $y_i = r_i\cos\varphi_i$, ta có 4 điểm nằm trong hình tròn vô hạn. Đặt A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3), D = (x_4, y_4).

iii) Tính diện tích 4 tam giác ABC, ABD, ACD và BCD. Nếu tất cả các tam giác bằng thì diện tích ba tam giác cùng lớn thì lấy bao lồi các bao lồi A, B, C và D là tam giác. Tăng giá trị các biến *Counter* lên thêm 1, nếu trái lại biến *Counter* giữ nguyên giá trị cũ và quay về bước ii).

Quá trình cần thiết để cho tới khi số lần gieo lớn tới trước (chẳng hạn 10000 lần hoặc 20000 lần, hoặc 100000 lần). Mỗi lần biến *Counter* sẽ có giá trị khác nhau. Lấy tổng số các lần số lần có bao lồi xuất hiện các điểm *"bao lồi của 4 điểm là tam giác"*. Số tiền suất này theo luật số lớn giá trị

gÐn L¼ng c¸a x§c suÊt cÐn t²nh.

Theo c§c t¨i li¹u chuy°n khÒo, Å i giÒi L¼ng c¸a b¨i to§n l¨: p = 35/(12π^2) ≈ 0,29552. R» r¨ng, trong tr·Ê ng h° p n¨y, ta n°n §p d¸ng m¹ ph¸ ng ngÖu nhi°n LÝt²nh ra tÐn suÊt (vi c *dê* th¸ c hi n), thay thJ cho vi c t²nh x§c suÊt theo l² thuyJt (vi c *khó* th¸ c hi n).

Sau L©y l¨ vÐn bÒn ch·Ê ng tr³nh m§y t²nh v¸ i ng¹ n ng¸ lÐp tr³nh C giÒi b¨i to§n Sylvester.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>

    #define PI 3.14159265358979
const double esp =4.5e –12;
struct diem {double x,y;};

/* Tao bo so ngau nhien bang cach tron – shuffling */
int rd(){return rand()%10;}
double radm()
{return rand()%100+0.1*rd()+0.001*rd()+0.0001*rd();}

/* Chuong trinh chinh */
void main()
{
clrscr(); long int count = 0, reps; diem d[4]; double r, goc;
printf("\n Provide number of repetitions:");
scanf("%ld",&reps); printf(" \n reps= %ld",reps); srand(19587);

/* Gieo ngau nhien 4 diem va tinh dien tich bon tam giac */
for(long int i=0;i<reps;i++)
{       for (int j=0;j<4;j++)
        {       r=radm(); goc=radm()/100;
                d[j].x=r*cos(goc); d[j].y=r*sin(goc);
        }
        double d12=sqrt(pow(d[0].x –d[1].x,2)+pow(d[0].y –d[1].y,2));
        double d13=sqrt(pow(d[0].x –d[2].x,2)+pow(d[0].y –d[2].y,2));
```

```
        double d14=sqrt(pow(d[0].x –d[3].x,2)+pow(d[0].y –d[3].y,2));
        double d23=sqrt(pow(d[1].x –d[2].x,2)+pow(d[1].y–d[2].y,2));
        double d24=sqrt(pow(d[1].x –d[3].x,2)+pow(d[1].y –d[3].y,2));
        double d34=sqrt(pow(d[2].x –d[3].x,2)+pow(d[2].y –d[3].y,2));
        double p123=(d12+d23+d13)/2;
        double p124=(d12+d24+d14)/2;
        double p134=(d13+d34+d14)/2;
        double p234=(d23+ d24+d34)/2;
        double s123=p123*(p123 –d12)*(p123–d13)*(p123–d23);
        double s124=p124*(p124 –d12)*(p124–d14)*(p124–d24);
        double s134=p134*(p134 –d13)*(p134–d14)*(p134–d34);
        double s234=p234*(p234 –d23)*(p234–d24)*(p234–d34);

        /* Cac truong hop bao loi cua  4 diem la tam giac */
        if(s123>0&&s123>0&&s134>0&&s234>0)
        {
        s123=sqrt(s123);s124=sqrt(s124);
        s134=sqrt(s134);s234=sqrt(s234);
        if(fabs(s123–(s124+s134+s234))<esp)
        count++;
        else if(fabs(s124 –(s123+s134+s234))<esp)
        count++;
        else if(fabs(s134 –(s123+s124+s234))<esp)
        count++;
        else if(fabs(s234 –(s123+s124+s134))<esp)
        count++;
        }
        else count++;
    }
    printf("\n Number of repetitions = %ld",reps);
    printf("\n Number of successes = %ld",count);
    printf("\n Probability to compute= %0.9f", count *1.0/reps);
    getch();
    }
```

C§c kJ‡ quÍ chÜy ch·Œng tr³nh trong b´ n lÊn nh·Œsau:

esp = 4.5e –12	esp = 4.5e –12	esp = 4.5e –12	esp = 4.5e –12

s´ lÇn lÆp 10000 s´ lÇn th¨nh c¹ng 3050 x§c suÈt: 0.30500	s´ lÇn lÆp 20000 s´ lÇn th¨nh c¹ng 5941 x§c suÈt: 0.29705	s´ lÇn lÆp 100000 s´ lÇn th¨nh c¹ng 29594 x§c suÈt: 0.29594	s´ lÇn lÆp 200000 s´ lÇn th¨nh c¹ng 58993 x§c suÈt: 0.294965

Ví dụ 3: GiÙi b¨i to§n t´ i ®u to¨n c„c sau (xem lÜi m„c 4.2 ch®Ng I vQb¨i to§n t´ i ®u to¨n c„c phi tuyÙn).

$$f(x) = 4x_1^2 - 2{,}1x_1^4 + x_1^6/3 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4 \ \rightarrow \text{Min}$$

v¸i LiÒu ki‚n r¨ng bu¸c (miÒn r¨ng bu¸c D):

$$\begin{cases} -2{,}5 \le x_1 \le 2{,}5 \\ -1{,}5 \le x_2 \le 1{,}5 \end{cases}$$

B¨i to§n tr°n L©y c· 4 c¸c tiW L'a ph®Ng v¨ 2 c¸c tiW to¨n c„c, c· t°n g¯i l¨ *"Bài toán lưng lạc đà*ò.

Ta t³m ph®Ng §n t´ i ®u to¨n c„c b²ng ph®Ng ph§p m¹ ph¸ng t¹i SA (*Simulated Annealing*). Ph®Ng ph§p (SA) m¹ ph¸ng qu§ tr³nh m¸t vÙt thWrÙn sau khi b˙ nung n· ng´ nhi‚t L¸ rÈi cao L®Ò c LWng¸i t¸ t¸ vQm¸t nhi‚t L¸ rÈi thÈp. L¼c L· h¨m nÈng l®Ò ng c„a vÙt thWsÈ L'Ü¹t m¸c thÈp nhÈt. ThuÙt giÙi SA §p d„ng m¹ ph¸ng ngÈu nhi°n (b²ng l² thuyÙt x²ch Markov, nh®s È tr³nh b¨y trong ch®Ng IV, c· thWch¸ng minh L®Ò c qu§ tr³nh SA sÈ h¸i t¸ theo x§c suÈt vQÌ i giÙi t´ i ®u to¨n c„c) nh®sau:

Bước khởi tạo

Ta xuÈt ph§t t¸ m¸t ph®Ng §n X bÈt k³ ban L'Ÿu thoÙ L'iÒu ki‚n r¨ng bu¸c. LÈy nhi‚t L¸ T = $T_{ban\ L'Ÿu}$ kh§ cao ($T_{ban\ L'Ÿu}$ =10000, ch²ng hÜn).

Các bước lặp

TÜi m¸i m¸c nhi‚t L¸ T th¸c hi‚n c§c b®Ò c sau:

i) Ch¯n Xô ∈ D v¨ thu¸c m¸t l©n cÙn L„ nh¸ c„a X.

ii) X® ∆f = f(Xô) ï f(X). NÙu ∆f < 0 th³ L'HÙX := Xô. NÙu tr§i lÜi khi ∆f > 0 th³ ch ÈÞ nhÙn X := Xô v¸i x§c suÈt $p = \exp(-\Delta f/(K_b \times T))$, trong L· K_b l¨ h²ng s´ Boltzmann (K_b = 1,38.10^{23}), T l¨ nhi‚t L¸ hi‚n th¯i trong qu§ tr³nh ngu¸i.

Quy tr³nh i) v¨ ii) lÆp lÜi m¸t s´ lÇn L L„ l¸n (ch²ng hÜn L = 200, 300, é).

Sau L· t²nh m¸c nhi‚t L¸ m¸i theo c¹ng th¸c T: = αT (α ≈ 1, ch²ng hÜn nh®α = 0,95 hay 0,99é). ThuÙt to§n d¸ng khi T ≤ $T_{cu´i}$ ($T_{cu´i}$ l¨ gi§ tr˙ L« ch¯n tr®Ò c ≈ 0).

Sau L©y l¨ vÈn bÙn ch®Ng tr³nh *annealing.cpp*:

```
/* Su dung ky  thuat annealing  – mo phong toi
giai bai toan toi  uu toan cuc co rang buoc */
```

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

/* Tinh gia tri ham so can cuc tieu hoa */
float f(float x,float y)
{
float fg = 4*pow(x,2) –2.1*pow(x,4)+pow(x,6)/3;
fg  = fg +x*y –4*pow(y,2)+4*pow(y,4);
return fg;
}

/* Kiem tra cac dieu kien rang buoc */
int constraint(float x,float y)
{	float fg;
	fg = x + 2.5;
	if (fg<0) goto ZERO;
	fg = 2.5 – x;
	if (fg<0) goto ZERO;
	fg = y + 1.5;
	if (fg<0) goto ZERO;
	fg = 1.5 – y;
	if (fg<0) goto ZERO;
	return 1;
	ZERO:  return 0;
}

/* Thu tuc tim diem thay the mo phong qua trinh annealing */
void sa(float x0,float y0,int k,float T,float Tlast,float alfa,float delta)
{
float x1,y1,deltaf,u,p,ux,uy;
int l=1; srand(27556);
printf("\n starting value of the function=%f",f(x0,y0)); getch();
```

```
printf("\n obtained at x=%f, y=%f",x0,y0);getch();
do
{       do
        {
        ux=float(random(10000))/10000 –0.5;
        x1=x0–delta*ux;
        uy=float(random(10000))/10000 –0.5;
        y1=y0–delta*uy;
        if(constraint(x1 ,y1)==1)
        {       deltaf=f(x1,y1)–f(x0,y0);
                if(deltaf<=0) {x0=x1;y0=y1;}
                else
                {       u=float(random(10000))/10000;
                        p=exp(–deltaf/T);
                        if(u<=p) {x0=x1;y0=y1;}
                }
        }
        l=l+1;
        }while(l<=k);
        T=T*alfa;
}while(T>Tlast);
printf("\n Optimal value fMin=%f",f(x0,y0)); getch();
printf("\n obtained at x=%f, y=%f",x0,y0);getch();
}
/* Chuong trinh chinh tim diem toi uu */
void main()
{       clrscr();
        float x0,y0,T,Tlast,k,alfa,delta;
        printf("\n Within the range –2.5 to 2.5 provide value x0=");
        scanf("%f",&x0);
        printf("\n Within the range –1.5 to 1.5 provide value y0=");
        scanf("%f",&y0);
        printf("\n Specify number of iterations at each T level=");
        scanf("%d",&k);
        printf("\n Specify a very high value for Tstart=");
```

```
        scanf("%f",&T);
        printf("\n Specify a very low value for Tlast=");
        scanf("%f",&Tlast);
        printf("\n Specify reduction coeffient alfa=");
        scanf("%f",&alfa);
        printf("\n Specify neighbourhood radius delta=");
        scanf("%f",&delta);
        sa(x0,y0,k,T,Tlast,alfa,delta);
        getch();
}
```

KJ quÇ chÜy ch·Øng tr³nh m§y t²nh v¸ i thuÆt giÇi SA l¨:

HÜt mÇm (Seed)	Ph·Øng §n ban LÇu	Ph·Øng §n t´ i ·Øu	Gi§ tr· f_{Min}
27556	(0, 0)	(–0.0898613, 0.7124848)	–1.0316283
19587	(0.1, 0.1)	(0.0898837, –0.7125957)	–1.0316284

(v¸ i alfa = 0.997, delta = 0. 01, $T_{ban\ LÇu}$ = 10000, L = 500, $T_{cu´\ i}$ = 0.0001).

3. Một số vấn đề về mô hình hàng chờ

3.1. Một số yếu tố cơ bản của hệ thống hàng chờ

NhØ L« biJ, trong nhiQu hoÜt L¸ ng sÇn xuÈt kinh doanh cÌ ng nhØ trong LÅ i s´ ng ch¼ng ta §p d¸ ng c§c h¹ d¹ ch v¸ L§m L¹ ng hay h¹ ph¸ c v¸ c¹ ng c¸ ng. Ch¼ng c· t°n g¸ i chung l¨ h¹ th´ ng h¨ ng chÅ (*Waiting Line System*). Ch³ng hÜn c§c x² nghi¹ p s¸ a ch¸ a m§y m· c, c§c c¸ a h¨ ng, c§c bJh xe, bJh cÇng, trÜm t¸ ng L¨ i, c§c h¹ th´ ng LÈi n t¸ vi¸ n th¹ ng, d¹ ch v¸ Internet,... l¨ c§c v² d¸ vQh¹ th´ ng h¨ ng chÅ .

Mô hình hàng chờ

Trong c§c h¹ th´ ng h¨ ng chÅ thØ ng xuy°n di¸ n ra hai qu§ tr³nh: qu§ tr³nh nÇy sinh c§c y°u cÇu (m¸ t y°u cÇu c¸ n LØ c coi l¨ m¸ t t²n hi¹ u cÇn LØ c ph¸ c v¸) v¨ qu§ tr³nh ph¸ c v¸ c§c y°u cÇu ÈY. Song trong qu§ tr³nh ph¸ c v¸ c¸ a c§c h¹ th´ ng, do nhiQu nguy°n nh©n kh§c nhau, thØ ng xÇy ra c§c t³nh trÜng sau: Trong nhiQu trØ ng h° p, qu§ tr³nh ph¸ c v¸ kh¹ ng L§p ¸ ng c§c y°u cÇu v¨ do L· dX¸ n LJh kJ quÇ l¨ nhiQu y°u cÇu phÇi chÅ LWLØ c ph¸ c v¸ . NgØ c lÜi, trong m¸ t s´ t ³nh hu´ ng kh§c, khÇ nÈng ph¸ c v¸ c¸ a h¹ th´ ng v·Ø t qu§ s´ y°u cÇu cÇn LØ c ph¸ c v¸ , v¸ i kJ quÇ l¨ h¹ th´ ng kh¹ ng s¸ d¸ ng hJ ph·Øng ti¹ n ph¸ c v¸ . V³ vÆy b¨ i to§n LÈra l¨:

– Ph©n t²ch bÇn chÈt c¸ a qu§ tr³nh di¸ n ra trong c§c h¹ th´ ng h¨ ng chÅ v¨ thiJ lÆp c§c m´ i li°n h¹ vQlØ ng gi¸ a c§c LÈu trØ ng c¸ a c§c qu§ tr³nh ÈY. ¸ iQu L· c· nghÈa l¨ cÇn thiJ lÆp hay l¸ a chÈ n m¸ t m¹ h³nh h¨ ng chÅ (*Waiting Line Model*) phÇn §nh LØ c bÇn chÈt c¸ a

h' th´ ng.

– Tr°n ch s´ c§c m´ i li°n h' L'« L'Ể c x©y d ng v¨ c§c s´ li' u thu L'Ể c t h' th´ ng, cƒn t²nh to§n, ph©n t²ch v¨ L'Ể a ra c§c quyƒt L' nh nh³m t³m ra c§c gi§ tr˙ th²ch h˚ p cho c§c tham s´ L'iƒu khiW / thiƒt kƒ c a h' th´ ng L'WthiƒT kƒhay L'iƒu khiW c§c hoÜt L' ng c a h' th´ ng hoÜt L' ng m t c§ch c· hi' u quƒ h hn.

Các phương pháp giải bài toán mô hình hàng chờ

n Wt³m l i giƒi cho m t m¹ h³nh h¨ng ch ng Ể i ta th Ể ng s d ng hai ph Ểnng ph§p: ph Ểnng ph§p giƒi t²ch v¨ ph Ểnng ph§p m¹ ph ng tr°n m§y t²nh. Ph Ểnng ph§p giƒi t²ch L'W giƒi m¹ h³nh h¨ng ch g˚ m c§c b Ể c sau:

Bước 1: Ph©n t²ch h' th´ ng, ch yƒu l¨ ph©n t²ch b ƒn chÜt c a d ng y°u cƒu / t²n hi' u L'ƒn v¨ c§c tr Üng th§i c a h' th´ ng.

Bước 2: ThiƒT lƒp h' ph Ểnng tr³nh tr Üng th§i cho c§c x§c suÜt tr Üng th§i (x§c suÜt L'W h' th´ ng ' m t tr Üng th§i n ¨o L· t Üi th i L'iW t).

Bước 3: Giƒi h' ph Ểnng tr³nh L'Wt³m c§c x§c suÜt tr Üng th§i. T L· thiƒT lƒp c§c m´ i quan h' gi a c§c ch" ti °u cƒn ph©n t²ch.

Bước 4: T²nh to§n, ph©n t²ch c§c ch" ti°u, tr°n ch s´ L· L'Ể a ra c§c nhƒn x®t v¨ c§c quyƒt L' nh.

Ph Ểnng ph§p giƒi t²ch th Ể ng s d ng c§c giƒ thiƒT rÜt chH chƐ c a To§n h c vQc§c L'Hu tr Ểng c a h' th´ ng, v³ vƒy n· c· m t s´ h Ün chƒnhÜt L' nh khi giƒi c§c b¨i to§n th c tƒ

Trong khi L· , ph Ểnng ph§p m¹ ph ng / m¹ ph ng ngX u nhi°n L'Wgiƒi m¹ h³nh h¨ng ch L'Ể c §p d ng cho c§c b¨i to§n d ch v L'§m L'¹ ng kh¹ ng giƒi L'Ể c b³n g c¹ ng c giƒi t²ch, nhÜt l¨ nh ng b¨i to§n li°n quan L'ƒn h' th´ ng l n, bÜt ˘ n L' nh, h¨m ch a nhiƒu yƒu t´ ngX u nhi°n, kh¹ ng tu©n theo c§c giƒ thiƒT qu§ chH chƐ c a To§n h c. Trong nhiƒu tr Ể ng h˚ p ph Ểnng ph§p m¹ ph ng cho ta tiƒT ki' m L'Ể c th i gian v¨ chi ph² nghi°n c u. Tuy ph Ểnng ph§p m¹ ph ng ch" t Üo ra c§c ph Ểnng §n L' t´ t L'WL'§nh gi§ hoÜt L' ng c a h' th´ ng ch kh¹ ng L'Ể a ra L'Ể c kƒ thuƒt t³m l i giƒi t´ t nhÜt, n· t ra rÜt th¨nh c¹ ng khi giƒi quyƒT nhiƒu b¨i to§n h¨ng ch nƒy sinh t th c ti n. C§c b Ể c cƒn tiƒn h ¨nh khi §p d ng ph Ểnng ph§p m¹ ph ng bao g˚ m:

Bước 1: X§c L' nh b¨i to§n hay h' th´ ng h¨ng ch cƒn m¹ ph ng v¨ m¹ h³nh m¹ ph ng.

Bước 2: n o v¨ thu thƒp s´ li' u cƒn thiƒT cƒn thiƒT L'WkhƒƒO s§t th´ ng k° c§c s´ L'Hu tr Ểng / c§c yƒu t´ ch b ƒn c a m¹ h³nh.

Bước 3: Ch Üy m¹ ph ng kiWn ch ng (*test simulation*) m¹ h³nh v¨ so s§nh kƒT quƒ kiWn ch ng v i c§c kƒT quƒ L'« biƒT L'Ể c trong th c tƒ Ph©n t²ch kƒT quƒ ch Üy m¹ ph ng kiWn ch ng, nƒu cƒn th³ phƒi s a lÜi ph Ểnng §n L'« L'Ể c L'§nh gi§ qua ch Üy m¹ ph ng.

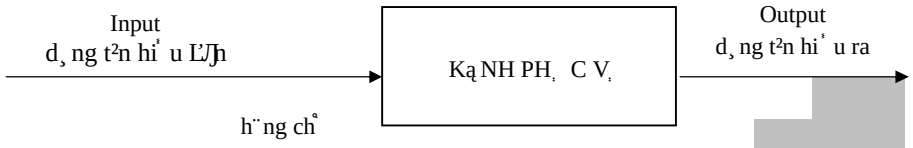
Bước 4: Ch Üy m¹ ph ng L'WkiWn ch ng ph Ểnng §n cu´ i c½ng v¨ kiWn tra t²nh L'¼ng L'ƒn c a m i kƒT luƒn vQh' th´ ng th c tƒ L'Ể c r¼t ra sau khi ch Üy m¹ ph ng. TriWi khai hoÜt L' ng c a h' th´ ng h¨ng ch d a tr°n ph Ểnng §n t³m L'Ể c.

T nh ng ph©n t²ch tr°n L'©y c· thWthÜy L² thuyƒT h¨ng ch *(Waiting Line Theory)* c n g i l¨ L² thuyƒT h' ph c v c¹ ng c ng hay L² thuyƒT h' d ch v L'§m L'¹ ng l¨ lƒnh v c

rÖi quan trọng của To§n ứng dụng / VđIn tr½h c. NhiQu b¨i to§n th¸c tJ trong c§c lQnh vực hệ thống dịch vụ, kQ thuđt, é L« LÊ c giÞi quyJt th¨nh c¹ng nhờ §p dụng ph¬ng ph§p m¹ ph¸ng m¹ h³nh h¨ng chờ.

Các yếu tố cơ bản của hệ thống hàng chờ

Hệ thống hàng chờ tổng quát được minh hoạ như trên hình III.2.



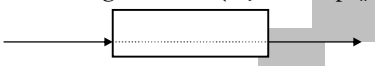
Hình III.2. Hệ thống hàng chờ

C§c yJu tố cÞ bÞn của hệ thống h¨ng chờ bao gồm:

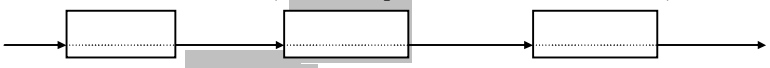
a. Bố trí vật lí của hệ thống

Hệ thống h¨ng chờ cỡ mẫu số dÖng bố tr² vđt l² *(phisical layout)* nh¬ minh hoÖ tr°n h³nh III.3.

Single Channel – Single Server (Mẫu t k°nh phục vụ, mẫu loÖi đ ch vụ)

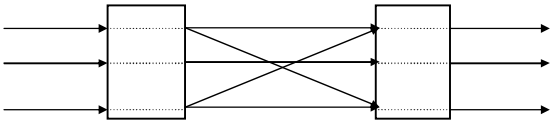


Single Channel – Multi Server (Mẫu t k°nh phục vụ, nhiQu loÖi đ ch vụ)



Multi Channel – Single Server (NhiQu k°nh phục vụ, mẫu loÖi đ ch vụ)

Multi Channel – Multi Server (NhiQu k°nh phục vụ, nhiQu loÖi đ ch vụ)



Hình III.3. Các dạng hệ thống hàng chờ

Tr°n h³nh III.3, c§c k°nh ph„ c v„ L·ể c hiW l¨ nh¸ ng thiJt b˙ kọthuDt hoHu con ng·ể i hoHu nh¸ ng t˙ h˚ p c§c thiJt b˙ kọthuDt v¨ con ng·ể i L·ể c t˙ ch¸ c quỊn l² m¸ t c§ch th²ch h˚ p nh³m ph„ c v„ c§c y°u cỊu / c§c t²n hi˙ u LỊJn h˙ th´ ng. Ch³ng hỦn, ´ c§c trỦm LỊi˙ n thoỦt t¸ L¸ ng, k°nh ph„ c v„ l¨ c§c L·ể ng d©y li°n lỦc c½ng c§c thiJt b˙ kọthuDt kh§c ph„ c v„ cho vi˙ c L¨ m thoỦt.

b. Nguyên tắc phục vụ

Nguy°n tDc ph„ c v„ (hay n¸ i quy) c„ a h˙ th´ ng l¨ c§ch th¸ c nhDn c§c y°u cỊu v¨ o c§c k°nh ph„ c v„ . Nguy°n tDc ph„ c v„ cho biJt tr·ể ng h˚ p n¨ o th³ y°u cỊu L·ể c nhDn v¨ o ph„ c v„ v¨ c§ch th¸ c ph©n b´ c§c y°u cỊu v¨ o c§c k°nh nh·ểthJn¨ o. n¸ ể ng th˚ i nguy°n tDc ph„ c v„ cÌ ng cho biJt trong tr·ể ng h˚ p n¨ o y°u cỊu b˙ t¸ ch´ i hoHu phỊi ch˚ v¨ gi¸ i hỦn c„ a th˚ i gian ch˚ .

M¸ t s´ nguy°n tDc ph„ c v„ th·ể ng L·ể c §p d„ ng trong c§c h˙ th´ ng h¨ ng ch˚ l¨ FIFO *(First in first out)* , LIFO *(Last in first out)* , FCFS *(First come first serve)* , c· ·ểu ti°n, kh¹ ng ·ểu ti°n,...

c. Các phân phối xác suất của các dòng tín hiệu, dòng phục vụ

S´ t²n hi˙ u LỊJn trong m¸ t khoỊng th˚ i gian cÌ ng nh·ểth˚ i gian ph„ c v„ t¸ ng t²n hi˙ u n· i chung l¨ nh¸ ng biJn ngẫu nhi°n, v¨ do L·, ch½ng tu©n theo c§c quy luDt ph©n ph´ i x§c suỦt. C§c quy luDt ph©n ph´ i x§c suỦt n¨ y L·ể c thiJt lDp cỊn c„ c§c s´ li˙ u th¸ c nghi˙ m thu thDp t¸ c§c quan s§t, th² nghi˙ m, hay t¸ c hs´ d¸ li˙ u sJu c· .

n´ i v¸ i d¸ ng t²n hi˙ u LỊu v¨ o, th¹ ng th·ể ng ch½ng ta giỊ s¸ r³ng s´ t²n hi˙ u LỊJn trong v¸ ng m¸ t khoỊng th˚ i gian n¨ o L· L·ể c Ủm L˙ nh tr·ẹc (1 ph½t, 3 ph½t, 5 ph½t, 30 ph½t,...) tu©n theo luDt ph©n ph´ i Po§t–x¹ ng $P(\lambda)$. ¸ L©y, tham s´ λ LHu tr·ểng cho s´ t²n hi˙ u LỊJn (trung b³nh) trong khoỊng th˚ i gian tr°n. V² d„ , s´ kh§ch v¨ o si°u th˙ (trung b³nh) l¨ 100 ng·ể i trong 1 gi˚ . C· nghĩa l¨ , s´ kh§ch v¨ o si°u th˙ l¨ bi JJn ngẫu nhi°n X c· ph©n ph´ i Po§t–x¹ ng v¸ i λ = 100. Ho Hu, v¸ i s´ cu¸ c g¸ i (trung b³nh) LỊJn t˙ ng L¨ i trong v¸ ng 1 ph½t l¨ 3 (t²n hi˙ u) th³ c· $X \sim P(3)$.

M¸ t c§ch ch²nh x§c h Hn, trong nh¸ ng tr·ể ng h˚ p tr°n, ta c· d¸ ng t²n hi˙ u LỊJn l¨ d¸ ng Po§t-x¹ ng d¸ ng (c¸ n g¸ i l¨ *dòng tối giản*) v¸ i c§c t²nh chỦt tr°n sau:

– *Tính không hậu quả:* M¸ t d¸ ng t²n hi˙ u c· t²nh kh¹ ng hDu quỊ nJJu x§c suỦt xuỦt hi˙ n m¸ t s´ t²n hi˙ u n¨ o L· trong m¸ t khoỊng th˚ i gian nhỦt L˙ nh kh¹ ng ph„ thu¸ c v¨ o vi˙ c L« c· bao nhi°u t²n hi˙ u L« xuỦt hi˙ n v¨ xuỦt hi˙ n nh·ểthJn¨ o tr·ẹc khoỊng th˚ i gian L· .

– *Tính đơn nhất*: D¸ ng t²n hi˙ u c· t²nh LHn nhỦt nJJu x®t trong khoỊng th˚ i gian kh§ b®th³ s¸ ki˙ n ñc· nhiQu hHn m¸ t t²n hi˙ u xuỦt hi˙ n nò hỊu nh·ểkh¹ ng xỊy ra. VQ mHu th˚ i gian ta c· thWxem d¸ ng t²n hi˙ u c· t²nh LHn nhỦt nJJu th˚ i LiWm xuỦt hi˙ n c§c t²n hi˙ u kh¹ ng tr½ng nhau.

– *Tính dừng:* D¸ ng t²n hi˙ u c· t²nh d¸ ng nJJu x§c suỦt xuỦt hi˙ n m¸ t s´ t²n hi˙ u n¨ o

L· trong khoÏng thß i gian τ ch" ph„ thu¸ c v¨o L¸ d¨i c„ a τ ch¸ kh¹ ng ph„ thu¸ c v¨o LÏWn kh´ i LÏFu c„ a τ.

3.2. Các chỉ số cần khảo sát

ÿ´ i v¸ i m¸ t h¹ th´ ng h¨ng chß , cÏFn t³m c§ch LÏWL§nh gi§ LÏß c c§c ch" s´ sau:

– A (*Arrival rate*): cÏß ng L¸ d¸ ng t²n hi¹ u LÏJh hay s´ t²n hi¹ u LÏJh trung b³nh trong m¸ t khoÏng thß i gian. V² d„ : A = 6 (6 kh§ch h¨ng LÏJh trong 2 tiJhg); A = 20 (20 c¼Li¹ n thoÏÿi LÏJh t¨ ng L¨i trong 1 ph¼).

– S (*Service rate*): cÏß ng L¸ ph„ c v¸ hay s´ t²n hi¹ u trung b³nh LÏß c ph„ c v¸ tr°n m¸ t LÏhn v¸ thß i gian. V² d„ : S = 7 (h¹ th´ ng c· thWph„ c v¸ 7 kh§ch trong 1 gß); S = 25 (t¨ ng L¨i ph„ c v¸ LÏß c 25 c¼Li¹ n thoÏÿi trong 2 ph¼).

– Lq (*Number in queue* hay *Length of queue*): s´ t²n hi¹ u trung b³nh trong h¨ng chß .

– Ls (*Number in system* hay *Length of system*): s´ t²n hi¹ u trung b³nh trong to¨n h¹ th´ ng (nhÏ©vdy Ls ≥ Lq).

– Wq (*Waiting time inqueue*): thß i gian chß trung b³nh trongh¨ng chß c„ a m¸ t t²nhi¹ u.

– Ws (*Waiting time in system*): thß i gian chß trung b³nh trong h¹ th´ ng c„ a m¸ t t²n hi¹ u.

– Pw (*Probability the system is busy*): x§c suÏÿt h¹ th´ ng bÏdn (LÏang hoÏÿi L¸ ng) hay c¸ n gß i l¨ h¹ s´ (ch" s´) s¹ d„ ng c„ a to¨n h¹ th´ ng (*Utilization factor*).

3.3. Tính toán các chỉ số

V¸ i m„ c L²ch t³m hiWi bÏß c LÏFu, sau L©y ch¼ng ta ch" x®t c§c h¹ th´ ng h¨ng chß v¸ i m¸ t loÏÿi d¹ ch v„ . BÏ¸ng phÏ©ng ph§p giÏ¸i t²ch (xem m„ c 3.1), c· thWt³m LÏß c c¹ ng th¸ c t²nh to§n c§c ch" s´ v¸ i LÏiQu ki¹ n: c§c giÏ¸ thiJt c„ a m¹ h ³nh LÏß c th¸ a m«n.

Mô hình một kênh phục vụ thoả mãn: số tín hiệu đến có phân phối Poát–xông, thời gian phục vụ có phân phối mũ

C§c c¹ ng th¸ c (I) sau L©y L« LÏß c ch¸ ng minh (bÏ¸ng phÏ©ng ph§p giÏ¸i t²ch):

$$Lq = \frac{A^2}{S(S-A)};\ Ls = \frac{A}{S-A};\ Lq = \frac{A}{S}.Ls;$$

$$Wq = \frac{A}{S(S-A)};\ Ws = \frac{1}{S-A};\ Pw = \frac{A}{S}.$$

ChÏ¸ng hÏÿn v¸ i A = 3, S = 4 th³:

$$Lq = \frac{9}{4(4-3)} = 2,25\ ;\ Ls = \frac{3}{1} = 3\ ;$$

$$Wq = \frac{3}{4} = 0,75;\ Ws = 1;\ Pw = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Mô hình một kênh phục vụ thoả mãn: số tín hiện đến là phân phối Poát–xông, thời gian phục vụ có phân phối bất kì.

C§c c¹ng th¸c (II) sau L©y L« LÈc chøng minh:

$$Lq = \frac{A^2\sigma^2 + (A/S)^2}{2(1 - A/S)}; \quad Ls = Lq + \frac{A}{S};$$

$$Wq = \frac{Lq}{A}; \quad Ws = Wq + \frac{1}{S}; \quad Pw = \frac{A}{S}.$$

Trong L· σ L¬ l¬nh chuXn th¶i gian ph¸c v¶ m¸t t²n hi¬u. Ch¼Ï r³ng, nJu th¶i gian ph¸c v¶ tu©n theo ph©n ph¸i mÌ th³ $\sigma = \frac{1}{S}$ v¨ cÌng l¨ th¶i gian trung b³nh ph¸c v¶ m¸t t²n hi¬u. C· thWnhdc lÜi r³ng:

$$m = \int_0^\infty t f(t)dt = \frac{1}{S} \text{ v¨ } \sigma = \sqrt{\int_0^\infty (t-m)^2 f(t)dt} = \frac{1}{S}.$$

L¼c n¨y c§c c¹ng th¸c (II) tr¬ vQ(I).

Mô hình một kênh phục vụ thoả mãn: số tín hiệu đến có phân phối Poát–xông, thời gian phục vụ có phân phối mũ, h àng chờ có giới hạn số tín hiệu tối đa M

C§c c¹ng th¸c (III) sau L« LÈc chøng minh:

$$P_0 = \frac{1 - A/S}{1 - (A/S)^{M+1}}; \quad Pw = 1 - P_0;$$

v¸i P_0 l¨ x§c suÈt kh¹ng c· t²n hi¬u n¨o trong h¬ th¬ng (h¬ s¬ kh¹ng s¬ d¸ng);

$P_M = (A/S)^M P_0$ l¨ t¨ l¬ % t²n hi¬u kh¹ng LÈc ph¸c v¶ do h¬ th¬ng ñLÇyò;

$$Ls = \frac{Pw - M(A/S)P_M}{1 - (A/S)}; \quad Lq = Ls - \frac{A(1 - P_M)}{S};$$

$$Ws = \frac{Ls}{A(1 - P_M)}; \quad Wq = Ws - \frac{1}{S}.$$

Ch¼Ï r³ng nJu $M = +\infty$ th³ (III) tr¬ vQ(I).

Mô hình nhiều kênh phục vụ thoả mãn: tín hiệu đến có phân phối Poát –xông, thời gian phục vụ là phân phối mũ.

P_0 – x§c suÈt tÈi cÇ c§c k°nh ph¸c v¶ LÇu kh¹ng c· t²n hi¬u, t³m LÈc b³ng c§ch tra ph¸ l¸c 3 d¸a tr°n t¨ s¬ A/kS (k s¬ k°nh ph¸c v¶) hoHc t²nh tr¸c tiJp t¸ c¹ng th¸c sau:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n}\left(\frac{A}{S}\right)^n + \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{S}\right)^k \frac{kA}{kA-S}} \text{ víi } kS > A;$$

$$Pw = \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{S}\right)^k \frac{kS}{kS-A} P_0;$$

$$Ls = \frac{AS(A/S)^k}{(k-1)!(kS-A)^2} P_0 + \frac{A}{S};\ Lq = Ls - \frac{A}{S};\ Ws = \frac{Ls}{A};\ Wq = \frac{Lq}{A}.$$

Một số điểm hạn chế của các mô hình hàng chờ

C§c m¹ h³nh h¨ng chÒ gi¸i thi¾u ´ tr°n l¨ nh¸ ng m¹ h³nh ti¾n lÝ i nhÈt LÀ c §p d¸ ng kh§ r¸ ng r«i. Tuy nhi°n, do c§c m¹ h³nh n¨y c¹ ng nh¸n c§c giÙ thiÙt ñqu§ chHu chÈò ²t xÙy ra tr°n th¸ c tÙ n°n c§c chuy°n gia trong l¶nh v¸ c To§n ¸ ng d¸ ng/V¶n tr½h¸ c/Khoa h¸ c quÙn l² cÌ ng L« LÝQxuÈt xem x®t nhiÒu m¹ h³nh kh§c. ¸n · l¨ c§c m¹ h³nh v¸ i c§c giÙ thiÙt nh¶ s´ t²n hi¾u cÙn ph¸ c v¸ l¨ h¸ u hÜn, d¸ ng t²n hi¾u LÙn kh¹ ng phÙi kiW Po§t–x¹ ng, c¶ ng L¸ ph¸ c v¸ ph¸ thu¸ c v¨o s´ t²n hi¾u trong h¨ng chÒ é v¨ vi¾c giÙi quyÙt nh¸ ng m¹ h³nh nh¶vÈy cÙn t¸ i s¸ tr° gi¼p c¸ a ph¶ng ph§p m¹ ph¸ ng ngÜu nhi°n.

Ngay cÙ khi c§c giÙ thiÙt kh§ chHu chÈ c¸ a b´ n m¹ h³nh L« n°u trong m¸ c n¨y (cÌ ng nh¶m¸ t s´ m¹ h³nh t¶ng t¸ kh§c) l¨ h° p l², th³ vi¾c c§c m¹ h³nh h¨ng chÒ LÀa ra c§c l° i giÙi v¸ i trÜng th§i v¸ ng (*steady state solutions*) cÌ ng ²t c· Ï nghÙa th¸ c tÙ Trong nhiÒu ¸ ng d¸ ng th¸ c ti¸ n, c§c h¾ th´ ng h¨ng chÒ kh¹ ng bao gÒ LÜt t¸ i c§c trÜng th§i v¸ ng. ChÜng hÜn, trong m¸ t h¾ th´ ng h¨ng chÒ , c¶ ng L¸ t²n hi¾u LÙn trung b³nh thay LÙ i nhiÒu lÙn trong ng¨y kh¹ ng cho ph®p h¾ th´ ng LÜt LÀ c trÜng th§i v¸ ng.

Do L· , LÝgiÙi quyÙt nhiÒu b¨i to§n h¨ng chÒ trong l¶nh v¸ c d¶ ch v¸ L§m L¹ ng v¨ c§c l¶nh v¸ c kh§c, cÙn §p d¸ ng ph¶ng ph§p m¹ ph¸ ng LÝt³m ra c§c Ì i giÙi c· t²nh th¸ c ti¸ n cho c§c m¹ h³nh h¨ng chÒ khi h¾ th´ ng kh¹ ng thWLÜt t¸ i trÜng th§i v¸ ng hoHu khi kh¹ ng c· c§c m¹ h³nh l² thuy ÙT th²ch h° p.

3.4. Áp dụng mô phỏng cho một số hệ thống hàng chờ

Ví dụ 1: B¨i to§n h¾ d¶ ch v¸ h¨ng chÒ ba k°nh v¸ i d¸ ng t´ i giÙn c· t¸ ch´ i.

Cho biÙt: d¸ ng t²n hi¾u LÙn l¨ d¸ ng Po§t–x¹ ng d¸ ng (c¸ n g¸ i l¨ *dòng tối giản*). Gi«n c§ch th¸ i gian gi¸ a th¸ i LiWm LÙn c¸ a hai nhu cÙu (t²n hi¾u) li°n tiÙp c· ph©n ph´ i mÌ v¸ i tham s´ µ = 5, t¸ c l¨ c· h¨m mÙt L¸ f(t) = 5e^{-5t}. NÙu t²n hi¾u xuÈt hi¾n m¨ c· ²t nhÈt m¸ t trong ba k°nh kh¹ ng bÙn (k°nh s´ 1 hoHu k°nh s´ 2 hoHu k°nh s´ 3 kh¹ ng bÙn) th³ t²n hi¾u LÀ c ph¸ c v¸ tÜt k°nh kh¹ ng bÙn v¸ i s´ th¸ t¸ nh¸ nhÈt; nÙu tr§i lÜi (khi cÙ ba k°nh LÝu bÙn) th³ t²n hi¾u b¶ t¸ ch´ i. BiÙt th¸ i gian ph¸ c v¸ m¸ i nhu cÙu l¨ 0,5 ph¼t, h«y x§c LÙ nh k³ v¸ ng to§n s´ nhu cÙu LÀ c ph¸ c v¸ trong khoÙng th¸ i gian 4 ph¼t.

Nh¶vÈy, cÙn §p d¸ ng m¹ h³nh h¨ng chÒ *MultiChannel – SingleServer System* (H¾ th´ ng nhiÒu k°nh ph¸ c v¸ ï m¸ t loÜi d¶ ch v¸) theo quy tÙc *First in first out* (FIFO: T²n hi¾u

LÆn trÞc LÈc phµc vµ xong trÞc). Thêi gian gi÷a hai t²n hiệu liên tiếp có phân phối mũ víi hàm mật độ xác suất $f(t) = 5e^{-5t}$. Trong biểu đồ (nhằm LÈn giản c©c bÞc t²nh toán) thêi gian phục vụ m¸i t²n hiệu LÈc coi lµ khh¹ng LÈ i vµ bằng 0,5 phút.

Chương ta sẽ §p dụng m¹ phỏng LÈx§c LÈnh sự nhu cầu trung bình cần LÈc phục vụ trong khoảng thời gian 4 phút nhÞtr³nh bµy sau LÈy.

Kí hiệu T_i lµ thời LiÊm LÆn cña t²n hiệu th¸i, T_{ki} lµ thời LiÊm kÆt thúc dÞch vụ cña t²n hiệu th¸i (nÆu có), tØi k °nh th¸k (k = 1, 2, 3). Thời LiÊm LÆn cña nhu cầu tiếp theo lµ $T_i = T_{i-1} + \tau_i$ víi τ tuân theo luật phân phối mũ có hµm mật LÈ $f(t) = 5e^{-5t}$ vµ hµm phân phối lµ $F(t) = 1 - e^{-5t} = P(\tau \le t)$.

LÊy $T_1 = 0$, $T_{11} = T_1 + 0,5$. KÆt quả nµy cho biết thời LiÊm LÆn cña t²n hiệu th¸ nhất lµ $T_1 = 0$ vµ LÈc k°nh 1 phục vụ. KÆt thúc phục vụ t²n hiệu 1 lúc thời LiÊm $T_{11} = T_1 + 0,5 = 0,5$. M§y LÆm ghi nhận 1 LÈn víi lµ s´ t²n hiệu LÈ« LÈc phục vụ.

¸p Wt³m T_2 theo c¹ng th¸c $T_2 = T_1 + \tau_2$, ta ph§t sinh τ_2 theo c§ch LÈ« biết ‘ mục 3.1.3: TrÞc hết, ph§t sinh s´ ngẫu nhi °n r_2 cÞ 2 chữ s´ sau dấu phẩy $0 \le r_i \le 1$ (theo bảng s´ ngẫu nhi°n ï phụ lục 2B) ta cÞ $r_2 = 0,10$. Sau LÈ· t²nh $\tau_2 = -\frac{1}{5}\ln r_2$ vµ $T_2 = T_1 - \frac{1}{5}\ln r_2 = 0$ ï $0,2\ln 0,1 = 0,46$. VËy t²n hiệu tiếp theo phải víi vµo k°nh 2 v³ k°nh 1 cần LÈng bận. M§y LÆm ghi th°m 1 LÈn víi thời LiÊm kÆt thúc phục vụ t²n hiệu 2 lµ $T_{22} = T_2 + 0,5 = 0,46 + 0,5 = 0,96$.

TiếP tục phục vụ ph§t sinh $r_3 = 0,09$, ta cÞ $\tau_3 = -0,2\ln 0,09 = 0,482$. Do LÈ· thời LiÊm LÆn cña t²n hiệu 3 lµ $T_3 = T_2 + \tau_3 = 0,46 + 0,482 = 0,942$. LÊy nµy k°nh 1 LÈ« LÈc giải phóng do LÈ« phục vụ xong t²n hiệu 1, n°n t²n hiệu 3 LÈc tiếp nhận vµo k°nh 1. TØi thời LiÊm kÆt thúc phục vụ t²n hiệu 3 lµ $T_{13} = T_3 + 0,5 = 0,942 + 0,5 = 1,442$ m§y LÆm lØi ghi tiếp 1 LÈn víi. Thục hiện t²nh to§n tương tự, kÆt quả tổng hợp LÈc ghi trong bảng III.6.

Bảng III.6. Tính toán mô phỏng tìm số nhu cầu được phục vụ

Th¸ t¹ t²n hi¹u	S´ ngẫu nhi°n r_i	$-\ln r_i$	$\tau_i = -1/5\ln r_i$	Th¶i LiWn LJn T_i	Th¶i LiWn T_{ki} kJt th¼c ph¬c v¬ tÜi k°nh k			n¸ JJn s´ t²n hi¹u	
					1	2	3	nhËn	bỏ
1				0	0,5			1	
2	0,10	2,30	0,46	0,46		0,96		1	
3	0,09	2,44	0,482	0,942	1,442			1	
4	0,73	0,32	0,064	1,006		1,506		1	
5	0,25	1,39	0,278	1,284			1,784	1	
6	0,33	1,11	0,222	1,506	2,006			1	
7	0,76	0,27	0,054	1,560		2,060		1	
8	0,52	0,65	0,13	1,690					1
9	0,01	4,6	0,92	2,61	3,11			1	
10	0,35	1,05	0,21	2,82		3,32		1	
11	0,86	0,15	0,03	2,85			3,35	1	
12	0,34	1,08	0,216	3,066					1
13	0,67	0,40	0,08	3,146	3,646			1	
14	0,35	1,05	0,21	3,356		3,856		1	
15	0,48	0,73	0,146	3,502			4,022	1	
16	0,76	0,27	0,054	3,556					1
17	0,80	0,22	0,044	3,600					1
18	0,95	0,05	0,01	3,61					1
19	0,9	0,10	0,02	3,63					1
20	0,91	0,09	0,018	3,648	4,148			1	
21	0,17	1,77	0,354	4,002				1	
								14	6

Ph©n t²ch kJt quÈ t²nh to§n ta thÜy trong 20 nhu cÈu LJn th³ ch¨ c· 14 nhu cÈu LÈc ph¬c v¬. T²nh to§n t¬ng t¸ 6 lÈn n¸a ta c· kJt quÈ:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
14	15	14	12	13	15

VÈy s´ nhu cÈu trung b³nh LÈc h¹ ph¬c v¬ trong v¸ng 4 ph¼t v¨o kho Èng

$$\bar{x} = (14 + 15 + 14 + 12 + 13 + 15)/6 = 13,83.$$

Giải bài toán dịch vụ ba kênh có từ chối trên máy tính

M¸t phÈn mÈm m§y t²nh v¸i t°n g¸i MOPHONG1 phi °n bÈn 1.0 L« LÈc thiJt kJd¸a tr°n ng¹n ng¸ Builder C++ 5.0 LWgiÈi b¨i to§n m¸t d¸ch v¬ v¸i nhiÈu k°nh ph¬c v¬ c· t¸

chÝ i nhËL« tr³nh b¨y trong v² d„ 1 v¸ i c§c LïiQu ki¸ n sau:

– S´ k°nh ph„ c v„ n c· thWLÖy gi§ tr¸ t¸ 2 t¸ i 10.

– D¸ ng t²n hi¸ u LïJn l¨ d¸ ng Po§t –x¹ ng, th¸ i gian d«n c§ch gi¸ a hai t²n hi¸ u li°n tiÏp tu©n theo ph©n ph´ i mÌ v¸ i h¨m mËt L¸ x§c suÖt l¨ f(t) = 5e^{-5t}.

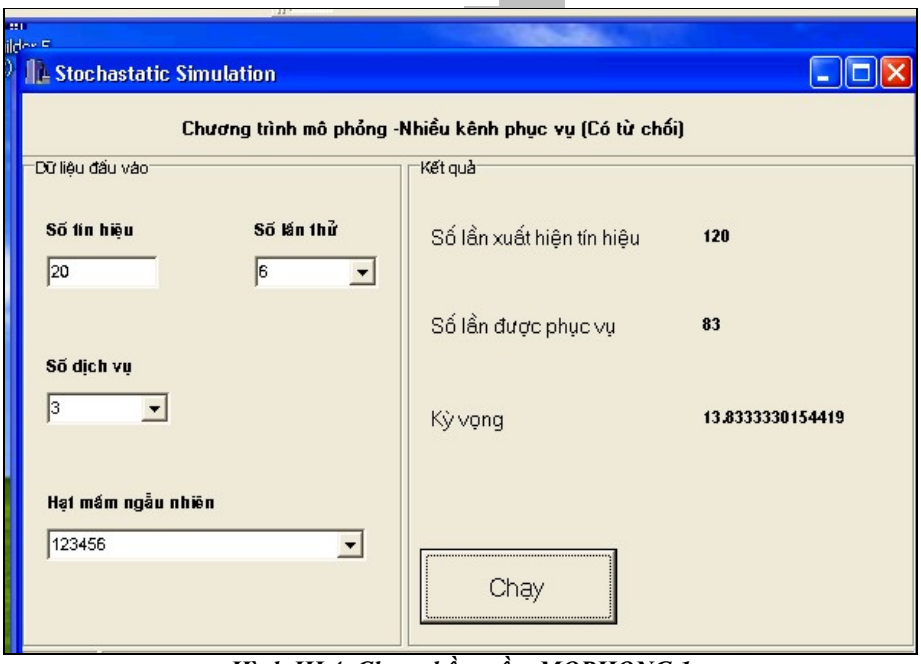
– Th¸ i gian trung b³nh ph„ c v„ (x¸ l²) m¸ t t²n hi¸ u l¨ 0,5 ph¼t.

– T²nh s´ t²n hi¸ u LËÊ c ph„ c v„ trong s´ m t²n hi¸ u LïJn (m c· thWLÖy gi§ tr¸ t¸ 10 t¸ i 100).

– Th¸ c hi¸ n k lÞn m¹ ph¸ ng (k lÞn th¸ , k c· thWLÖy gi§ tr¸ t¸ 4 t¸ i 10).

M„ c L²ch c„ a vi¸ c x©y d¸ ng phÞn mQm n¨y nh³m v¨o: ph„ c v„ dÜy v¨ h¸ c m¹ n M¹ ph¸ ng ngÙu nhi°n, cÌ ng nhËtiÏp t„ c n©ng cÖp phi°n bÞn 1.0 LWm¹ ph¸ ng LËÊ c h¸ nhiQu k°nh ph„ c v„ – nhiQu loÜi d¸ ch v„ c· t¸ ch´ i trong tr ËÊ ng h¸ p t¸ ng qu§t khi d¸ ng t²n hi¸ u LïJn v¨ th¸ i gian ph„ c v„ t²n h¸ u c· ph©n ph´ i bÖt k³.

n¸ WchÜy phÞn mQm MOPHONG1 ch¼ng ta cÞn c¨i LÍt Builder C++ 5.0 v¨o m§y t²nh. Sau khi k²ch chu¸ t v¨o biW¸ t ËÊ ng c„ a phÞn mQm, ch¸ n *File > Open Project > Look in > Mophong1* (*Thư mục lưu trữ phần mềm*) > *Mp1.bpr*. Sau LÌ ch¸ n *Run* tr°n thanh c¹ ng c„ LWchÜy phÞn mQm (xem h³nh III.4).



Hình III.4. Chạy phần mềm MOPHONG 1

Ch¼ng ta nh¸p s´ k°nh ph„ c v„ n = 3 v¨o ¹ s´ (k°nh) d¸ ch v„ , s´ t²n hi¸ u ph§t sinh m = 20 v¨o ¹ s´ t²n hi¸ u, s´ lÞn m¹ ph¸ ng k = 6 v¨o ¹ s´ lÞn th¸ . Ngo¨i ra ta phÞi ch¸ n hÜt

mÇm l¨ m¸ t s´ nguy°n (L¸ l¸ n) nh³m khˆ i tÜo h¨m sinh s´ ngØu nhi°n c· ph©n ph´ i LÇu trong [0, 1), ch³ng hÜn s´ 123456 LÇWghi v¨o ¹ hÜt mÇm ngØu nhi °n, nh³m t¸ L· m¹ ph¸ ng d¸ ng Po§t–x¹ ng c§c t²n hi¸ u LÇJh. Sau L· ch¼ng ta k²ch chu¸ t v¨o n¼t *Chạy* LÇWchÜy ch©hng tr³nh.

KJÇ quÇ ta thÜy t¨ ng c¸ ng s´ t²n hi¸ u LÇJh l¨ 120, trong L· c· 83 t²n hi¸ u LÇÈ c ph¸ c v¸ (do L· c· 37 t²n hi¸ u b¸ t¸ ch´ i). VÈy trung b³nh trong 20 t²n hi¸ u LÇJh c· 13,833 t²n hi¸ u LÇÈ c ph¸ c v¸ . KJÇ quÇ n¨y so v¸ i kJÇ quÇ t²nh to§n tr °n giÜy cho v² d¸ tr°n l¨ kh§ s§t nhau.

Chú ý: Vi¸ c t²nh to§n d¸ a v¨o bÇng s´ ngØu nhi°n cho trong ph¸ l¸ c hoÈc d¸ a v¨o h¨m sinh s´ ngØu nhi°n trong m§y t²nh kh¹ ng cho kJÇ quÇ ho¨n to¨n gi´ ng nhau trong c§c lÇn chÜy m¹ ph¸ ng kh§c nhau. ¸ iQu n¨y xÇy ra l¨ v³ c§c b¸ s´ ngØu nhi°n tÜo LÈ c kh¹ ng gi´ ng nhau. V¸ i c§c hÜt mÇm kh§c nhau th³ h¨m sinh s´ ngØu nhi°n cÌng cho c§c b¸ s´ ngØu nhi°n kh§c nhau v¨ do L· c§c kJÇ quÇ cu´ i c½ng cÌng kh¹ ng tr½ng nhau. Mu´ n kJÇ quÇ m¹ ph¸ ng ¨ n L¸ nh hhn cÇn chˆ n s´ t²n hi¸ u LÇJh m L¸ l¸ n.

Ngo¨i ra, ch¼ng ta c· th Wchˆ n s´ k °nh ph¸ c v¸ tu8Ï, ch³ng hÜn n = 5. KJÇ quÇ chÜy phÇn mQm v¸ i hÜt mÇm 123456 cho biJÇ trong s´ 20 t²n hi¸ u LÇJh trung b³nh c· 18,167 t²n hi¸ u LÇÈ c ph¸ c v¸ .

Ví dụ 2: M¸ t c¹ ng ti LiQu h¨nh m¸ t kho nguy°n li¸ u LÇWcÈÇ ph§t cho c§c L´ c c¹ ng c¸ a 10 ph©n xÉ ng. Hi¸ n tÜi, hai nh©n vi°n ph¸ c v¸ LÇang LÈ c c¹ ng ti giao cho nhi¸ m v¸ cÈÇ ph§t nguy°n li¸ u. B¸ phdn quÇn l² c¹ ng ti mu´ n c©n nhdc li¸ u c· n°n th°m m¸ t nh©n vi°n ph¸ c v¸ n¸ a hay kh¹ ng.

R» r¨ng r³ng s´ L´ c c¹ ng (t²n hi¸ u cÇn ph¸ c v¸) l¨ h¸ u hÜn, ph©n ph´ i c¸ a s´ t²n hi¸ u LÇJh trong m¸ t LÇhn v¸ thˆ i gian cÌng kh¹ ng theo kiWu Po§t–x¹ ng v¨ thˆ i gian ph¸ c v¸ t²n hi¸ u cÌng kh¹ ng tu©n theo luJt ph©n ph´ i mÌ. Do L· , kh¹ ng thWt³m ra LÈ c Î i giÇ¡ giÇ¡ t²ch th¹ ng qua m¸ t m¹ h³nh nhiQu k°nh ph¸ c v¸ v¸ i c§c giÇ thiJÇ nhÈvJy. PhÈhng ph§p ñduy nhÈÒ l¨ t³m c§ch §p d¸ ng m¹ ph¸ ng.

Số liệu thu thập được

– Quan s§t trong v¸ ng m¸ t th§ng v¨o c§c ng¨y l¨m vi¸ c, m¸ i ng¨y m¸ t gÈ v¨o c§c thˆ i LiWn ngØu nhi°n, c§c s´ li¸ u vQthˆ i gian ph¸ c v¸ m¸ t t²n hi¸ u v¨ tÇn suÈÒ tÈhng ¸ ng L« LÈ c thu thdp (bÇng III.7).

– T²nh thˆ i gian ph¸ c v¸ trung b³nh cho m¸ t t²n hi¸ u (t²nh k³ v¸ ng):

$$8\times0,1 + 9\times0,2 + 10\times0,3 + 11\times0,4 = 10 \text{ (ph¼t)}.$$

– Ngo¨i ra cÌng L« khÇo s§t LÈ c: gi«n c§ch thˆ i gian trung b³nh gi¸ a hai t²n hi¸ u li°n tiJp l¨ 5 ph¼t v¨ s´ lÈ ng t²n hi¸ n trung b³nh LÇJh trong m¸ t khoÇng 5 ph¼t l¨ m¸ t t²n hi¸ u.

Bảng III.7. Thời gian phục vụ một tín hiệu và tần suất

Thời gian phục vụ một tín hiệu (phút)	Số lượng	Tần suất/ Xác suất thực nghiệm
8	15	0,1
9	30	0,2
10	45	0,3
11	60	0,4
	Σ = 150	Σ = 1

Cần chú ý rằng, dựng tần hiệu lấy chọn tuân theo phân phối Poát–xông với thời gian phục vụ một tín hiệu không nhất thiết tuân theo phân phối mũ. Do lý, không sử dụng lượng cực đại các mẫu 3.3 mà phải dùng một phương lượng quyết vấn lấy bao nhiêu không phục vụ (nhân viên phục vụ) trong kho cấp phát nguyên liệu hỗ trợ nhất? Nhưng vấy một phương cố khăng xét sự ảnh hưởng, sự kiện nhưng trong thực tế xảy ra chục không theo các phân phối xác suất nhất lý nhay theo các hình vi g, ®p.

Mô phỏng hệ thống hàng chờ

– Một phương tần hiệu lấy: trung bình 5 phút cứ 1 tần hiệu lấy. Chúng ta dùng 24 số ngẫu nhiên sau lấy ra từ bảng số ngẫu nhiên (phụ lục 2A), mỗi số gồm 10 chữ số lấy một phương 24 khoảng 5 phút (nhưng vấy tương ứng 120 phút, mỗi số dùng lấy một phương một khoảng 5 phút từ 9h – 11h): 1581922396, 2068577984, 8262130892, 8374856049, 4637567488, 0928105582, 7295088579, 9586111652, 7055508767, 6472382984, 4112077556, 3440672486,..., 5973470495. Nhìn chữ số 7 xuất hiện trong số 10 chữ số lấy« chọn, ta coi như 1 tần hiệu lấy trong khoảng thời gian tương ứng (vì trung bình trong 5 phút có 1 tần hiệu lấy cùng giống như trung bình trong một số có 10 chữ số có một chữ số 7). Chẳng hạn trong khoảng 5 phút đầu không có tần hiệu nào, khoảng 5 phút thứ hai có 2 tần hiệu lấy.

Ta thấy số tần hiệu lấy chỉ có thể 0, 1, 2, 3, 4 tần hiệu. Thời điểm lấy một tần hiệu trong mỗi khoảng 5 phút được quy định như sau theo số tần hiệu lấy trong khoảng (bảng III.8). Chẳng hạn, nếu có hai tần hiệu lấy, thì thời điểm lấy lần vào đầu phút thứ nhất và lần phút thứ ba.

Bảng III.8. Quy định thời điểm đến của tín hiệu

Phút	1	2	3	4	5
Nếu 1 tần hiệu lấy	*				
Nếu 2 tần hiệu	*		*		
Nếu 3 tần hiệu	*		*		*
Nếu 4 tần hiệu		*	*	*	*

– Một phương thời gian phục vụ: Xét tần hiệu: Ta một phương phân phối xác suất bảng III.7 theo cách lấy biết. Trước khi lấy ba số ngẫu nhiên 10 chữ số: 9846413446,

8306646692, 0661684251 (h¨ng 4 t¸ d‹Ę i l°n, ph„ l„ c 2A). X = 8 ph¼t nJu xuĖt hi¹ n ch¸ s´ 0; X = 9 ph¼t nJu xuĖt hi¹ n ch¸ s´ 1, 2; X = 10 ph¼t nJu xuĖt hi¹ n ch¸ s´ 3, 4, 5; X = 11 ph¼t nJu xuĖt hi°n ch¸ s´ 6, 7, 8 hoĦ 9. BĮng III.9 t¨ ng h° p kJ quĮ m¹ ph¸ ng s´ t²n hi¹ u L'ến và thời gian phục vụ các tín hiệu.

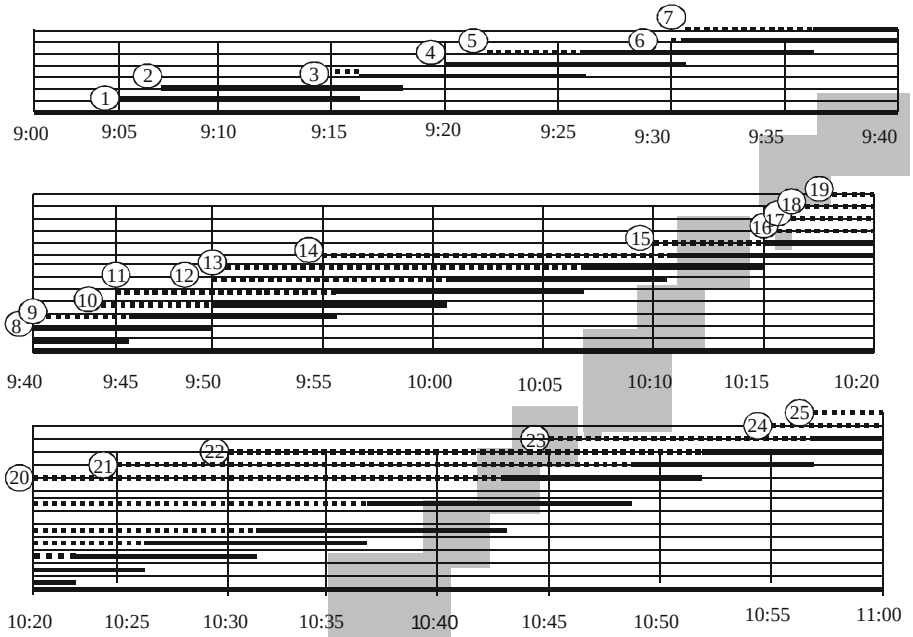
Bảng III. 9. Kết quả mô phỏng số tín hiệu đến và thời gian phục vụ tín hiệu

Chu k³	S´ ngXu nhi °n 10 ch¸ s´										S´ t²n hi¹ u L'Jh	Th° i gian ph„ c v„
1	1	5	8	1	9	2	2	3	9	6	0	
2	2	0	6	8	5	7	7	9	8	4	2	11, 11
3	8	2	6	2	1	3	0	8	9	2	0	
4	8	3	7	4	8	5	6	0	4	9	1	10
5	4	6	3	7	5	6	7	4	8	8	2	11, 10
6	0	9	2	8	1	0	5	5	8	2	0	
7	7	2	9	5	0	8	8	5	7	9	2	9, 10
8	9	5	8	6	1	1	1	6	5	2	0	
9	7	0	5	5	5	0	8	7	6	7	3	10, 10, 11
10	6	4	7	2	3	8	2	9	3	4	1	11
11	4	1	1	2	0	7	7	5	5	6	2	10, 8
12	3	4	4	0	6	7	2	4	8	6	1	11
13	1	8	8	2	4	1	2	9	6	3	0	
14	0	6	8	4	0	1	2	0	0	6	0	
15	0	9	3	3	1	4	7	9	1	4	1	11
16	7	4	5	7	4	7	7	4	6	8	4	10, 11, 11, 11
17	5	4	3	5	8	8	0	7	8	8	1	9
18	9	6	7	0	8	5	2	9	1	3	1	8
19	1	2	9	1	2	6	5	7	3	0	1	11
20	4	8	9	0	0	3	1	3	0	5	0	
21	0	0	9	9	5	2	0	8	5	8	0	
22	3	0	9	0	9	0	8	8	7	2	1	11
23	2	0	3	9	5	9	3	1	8	1	0	
24	5	9	7	3	4	7	0	4	9	5	2	9,11

ę WtiJh h¨nh minh hoŸ qu§ tr³nh t²nh to§n m¹ ph¸ ng cho s´ t²n hi¹ u L'Jh trong t¸ ng khoĮng th° i gian 5 ph¼t v¨ th° i gian ph„ c v„ m¸ i t²n hi¹ u, ch¼ng ta quyĘ c c§c k² hi¹ u sau:

T²n hi' u LJh Ch ¡ c ph¡ c v¡

H³nh III.5 t' ng h p kJ quÇ t²nh to§n m¹ ph¸ ng cho h' th´ ng ch hai k °nh ph¡ c v¡ ï m¸ t d ch v¡ .



H

ình III.5. T ổng hợp kết quả mô phỏng hệ thống chờ

Theo h³nh III.5 c· th WthLÿy, trong th i gian 120 ph¼ c· 25 t²n hi' u LJh (25 s´ 7 xuLÿ hi' n ´ c§c chu k³ 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24). T ˘ ng th i gian L i 213 ph¼, v³ v dy th i gian L i trung b³nh = $\frac{213}{25}$ = 8,52 ph¼.

Ch¼ng ta ph©n t²ch Ï nghÇa kinh tJ c¡ a t²nh to§n m¹ ph¸ ng nh Œsau: M¹ h³nh h¨ng ch tr°n c· hai k°nh ph¡ c v¡ (hai nh©n vi°n ph¡ c v¡). GiÇ s' r³ng l Œhng 7$/1 gi /1 nh©n vi°n ph¡ c v¡ , l Œhng c¡ a m¸ i L´ c c¹ ng l¨ 12$/1 gi /1 L´ c c¹ ng. Theo d¸ ki' n c¡ a b ¨i to§n, th i gian trung b³nh gi¸ a hai lÿn t²n hi' u LJh li°n tiJp l¨ 5 ph¼. Nh Œv dy, trong trong 8 gi c· 96 lÿn Li, v¨ phÇi L i 8,52 ph¼ m¸ i lÿn. Do L· , t˘ ng hao h¡ t / m¸ i ng¨y l¨m vi' c do th i gian L´ c c¹ ng l «ng ph² do phÇi L i l¨: (8,52 x 12$ x 96) / 60 = 163,56$. Ngo¨i ra, t˘ ng chi l Œhng / ng¨y cho hai nh©n vi°n ph¡ c v¡ l¨: 7$ × 8 × 2 ng Œi = 112$. T¸ L· , t˘ ng chi ph² / ng¨y cho h' th´ ng h¨ng ch tr°n l¨ $ 275,56.

T Œhng t¸ , nJu b´ tr² ba k °nh ph¡ c v¡ (ba nh©n vi °n ph¡ c v¡) th³ c· th Wt²nh L Œ c th i gian trung b³nh ch L i l¨ 1,88 ph¼ v¨ t˘ ng chi ph² cho h' th´ ng ba k°nh l¨ 204$. NJu d½ng b´ n k°nh ph¡ c v¡ th³ th i gian ch L i trung b³nh l¨ 0 ph¼, t˘ ng chi ph² l¨ 224$. V dy

h' th´ ng h¨ng chˆ tr°n n°n d½ng ba k°nh ph„ c v„ l¨ t´ t nhËt. N· i c§ch kh§c, ban LiQu h¨nh c¹ ng ti n°n LiQu th°m m¸ t nh©n vi°n ph„ c v„ t¸ i l¨m vi' c tÜi kho cËp ph§t nguy°n li' u nh³m giÍm b¸ t chi ph² ñcH h¸ iò.

So sánh với lời giải lí thuyết

So s§nh lˆ i giÍi d½ng m¹ ph¸ ng v¸ i lˆ i giÍi d¸ a tr °n l² thuyJt m¹ h³nh h¨ng chˆ (l¼c L· cÍn giÍ s' r³ng: s´ t²n hi' u LJn tu©n theo luËt Po§t –x¹ ng, thˆ i gian ph„ c v„ m¸ t t²n hi' u tu©n theo ph©n ph´ i mÌ).

Khi tra ph„ l„ c 3 t³m P_0 d¸ a v¨o t" s´ A/(kS) v¸ i k = 3 l¨ s´ k°nh ph„ c v„, ta LÒ c

$$P_0 = 0,11435 \ (A = 12, S = 6; A/(kS) = 0,66);$$

$$Ls = \frac{AS(A/S)^k}{(k-1)!(kS-A)^2}P_0 + \frac{A}{S} = 2,915; \ Lq = Ls - \frac{A}{S} = 0,915;$$

$$Wq = \frac{Lq}{A} = 0,076 \ (giˆ) = 4,5 \ ph¼t.$$

Trong khi L· theo kJt quÍ m¹ ph¸ ng th³ thˆ i gian chˆ trung b³nh l¨ 1,88 ph¼t. Tuy nhi°n, nJu chÜy m¹ ph¸ ng cho thˆ i gian d¨ i hÍn (10 t¸ i 15 giˆ) th¹ ng qua ch·Ên tr³nh tr°n m§y t²nh th³ c· kJt quÍ thˆ i gian chˆ trung b³nh l¨ 2,63 ph¼t t·Ên ng L´ i ¨ n L' nh.

T¸ c§c ph©n t²ch tr °n c· thWhËy, trong c§c t³nh hu´ ng ch½ng ta kh¹ ng x¸ l² LÒ c c§c LiQu ki' n to§n h¸ c ph„ c tÜp Xn ch„ a trong b¨ i to§n h¨ng chˆ, l¸ a chˆ n duy nhËt l¨ §p d„ ng m¹ ph¸ ng LWgiÍi b¨ i to§n.

Phần mềm mô phỏng hệ thống hàng chờ

PhÍn mQm m§y t²nh v¸ i t °n g¸ i MOPHONG2 phi °n bÍn 1.0 L« LÒ c thiJt kJd¸ a tr °n ng¹ n ng¸ Builder C++ 5.0 LWm¹ ph¸ ng h' th´ ng h¨ng chˆ nh·ÊL« tr³nh b¨ y trong v² d„ 2 v¸ i c§c LiQu ki' n sau:

– S´ k°nh ph„ c v„ n c· thWhËy gi§ tr' t¸ 2 t¸ i 10.

– D¸ ng t²n hi' u LJn theo quy luËt: c¸ trung b³nh 5 ph¼t c· m¸ t t²n hi' u LJn, nh·Êng ch·Êa biJt L©y c· phÍi l¨ ph©n ph´ i Po§t–x¹ ng hay kh¹ ng. Ngo¨ i ra, thˆ i LiWn LJn c„ a c§c t²n hi' u trong v¸ ng 5 ph¼t cÙ ng ch·Êa biJt r», n°n ch½ng LÒ c m¹ ph¸ ng cÍn c¸ bÍng III.8.

– Thˆ i gian ph„ c v„ (x¸ l²) m¸ t t²n hi' u tu©n theo ph©n ph´ i rˆ i rÜc L« biJt:

Thˆ i gian x¸ l² m¸ t t²n hi' u (ph¼t)	8	9	10	11
X§c suËt	0,1	0,2	0,3	0,4

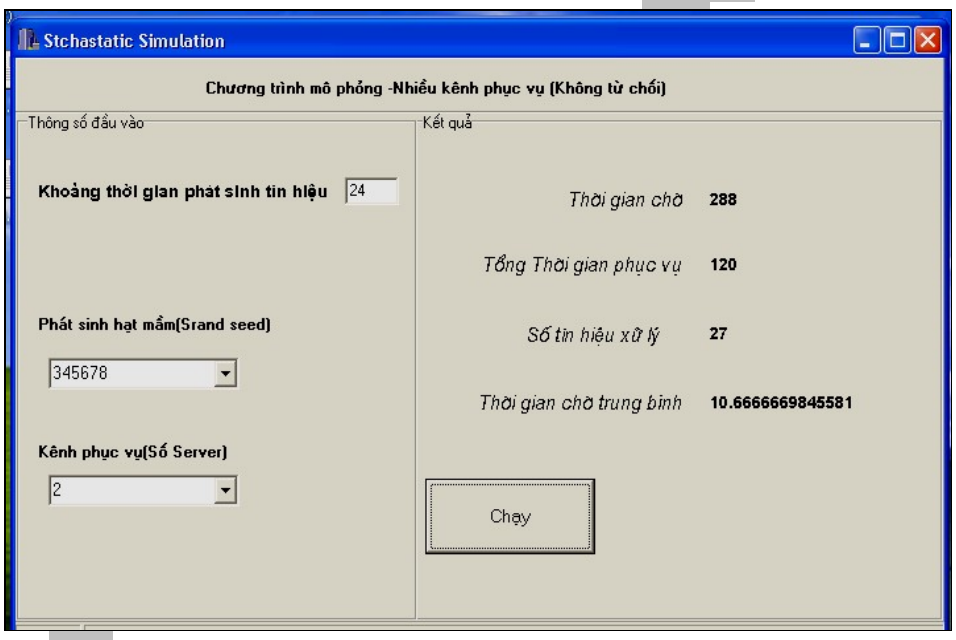
– KhoÍng thˆ i gian m¹ ph¸ ng c· thWchˆ n k chu k³, m¸ i chu k³ 5 ph¼t (k c· th Wchˆ n gi§ tr' 12, 24, 32, 48, é)

– CÍn t²nh thˆ i gian chˆ trung b³nh (ph¼t) cho m¸ i t²n hi' u Li LJn h' th´ ng d' ch v„ tr°n L©y.

Mỗi khách hàng sẽ được phân mức ưu tiên phục vụ, được vào hàng đợi theo mức ưu tiên, cùng nhóm ưu tiên thì theo thứ tự đến trước. Khi đến lượt phục vụ – nhiều luồng đồng thời khác nhau, cùng tại thời gian phục vụ tương quan khi đang tương ứng hệ thống gian phục vụ tương ứng phục vụ bằng k ³.

Ở chương phần mềm MOPHONG2, cùng tương tự như chương phần mềm MOPHONG1 chúng ta cần cài đặt Borland Builder C++ 5.0 vào máy tính. Sau khi khởi chạy vào biểu tượng của phần mềm, chọn *File > Open Project > Look in > Mophong2* (*Thư mục lưu trữ phần mềm*) > *Mp2.bpr*. Sau đó chọn *Run* trên thanh công cụ để chương phần mềm (xem hình III.6).

Chúng ta nhập số kênh phục vụ n = 3 vào ô số (kênh) đích vụ, khoảng thời gian mô phỏng với m = 24 chu kỳ 5 phút vào ô khoảng thời gian phát sinh tín hiệu. Ngoài ra, ta phải chọn hướng mẫu tương số ngẫu nhiên cho phù hợp trong [0, 1), chọng hướn số 345678 để vào hướng ngẫu nhiên. Sau đó chúng ta khởi chạy vào nút *Chạy* để chương trình.



Hình III.6. Chạy phần mềm MOPHONG2

Kết quả ta thấy tương ứng số 27 tín hiệu đích vụ, tương thời gian chờ 288 phút, nên trung bình một tín hiệu phải chờ 10,667 phút. Kết quả này so với kết quả tính toán trên giấy sử dụng bảng số ngẫu nhiên (phần lục 2A) là khác sát nhau.

Cần nhớ lưu ý rằng việc tính toán dựa vào bảng số ngẫu nhiên cho trong phần lục 2A vào hàm sinh số ngẫu nhiên trong máy tính khác nhau cho kết quả hoàn toàn giống nhau do các bộ số ngẫu nhiên tạo lên các khác nhau. Với các hướng mẫu khác nhau thì hàm sinh

s´ ngXu nhi°n cÌng cho c§c b¸ s´ ngXu nhi°n kh§c nhau v¨ do L· c§c kJI quÍ cu´ i c½ng cÌng kh¹ ng tr½ng nhau. ChÒng hÜn, nJu thay hÜt mÈm 345678 (cho kJI quÍ th¶ i gian chÕ trung b³nh 10,667 ph¼t) bÒng hÜt mÈm 456789 th³ th¶ i gian chÕ trung b³nh sε ch¨ l¨ 4,158 ph¼t. NJu lÜy trung b³nh c¸ a hai kJI quÍ n¨ y th³ LÖ c con s´ s§t hÈn v¸ i kJI quÍ t²nh to§n L« biJI d¸ a tr°n ph¸ l¸ c 2A.

T¸ c§c ph©n t²ch tr°n ta thÜy, mu´ n kJI quÍ m¹ ph¸ ng ¨ n L¶ nh hÈn cÈn ch¸ n s´ chu k³ m¹ ph¸ ng *m* L¸ l¸ n v¨ chÜy cho nhiQu hÜt mÈm kh§c nhau LW²nh gi§ tr¸ trung b³nh c¸ a kJI quÍ c§c lÈn chÜy L· . VÜi LQn¨ y th¸ c chÜI l¨ vÜi LQ*bố trí thí nghiệm mô phỏng* tr°n m§y t²nh, cÌng l¨ m¸ t h·Ö ng trong nghi°n c¸ u vQm¹ ph¸ ng ngXu nhi°n hi¸ n nay L¶ang LÖ c tiJh h¨nh trong nhiQu lQnh v¸ c.

Chương IV

PHÂN TÍCH MARKOV VÀ ỨNG DỤNG

1. Các khái niệm cơ bản về xích Markov

1.1. Một số định nghĩa

NhiQu m¹ h³nh ngXu nhi°n trong VdJn tr½ h̀ c, Kinh tJ, Kọ thudt, D@n s´ h̀ c, Di truyQn h̀ c,... d¸ a tr °n ch s´ l¨ qu§ tr³nh Markov. ¸n Hõ bi¨ t, hi¨ n tÜi m¸ t lọnh v¸ c m¸ i vQ Tin – Sinh h̀ c (*Bioinformatics*) chuy°n nghi°n c¸ u vQgene¸ ng d¸ ng rBI mÜnh c§c vBi LQ c¸ a l² thuyJ c§c qu§ tr³nh Markov. Trong ng¨nh Ch LÜ¨ n hi¨ n nay nhiQu chuy°n gia l² thuyJ v¨ th¸ c h¨nh cÌng rBI quan t@m t¸ i qu§ tr³nh Markov n·i chung, còng nh- c¸ c qu¸ tr×nh sinh–tö hay qu¸ tr×nh hải phôc nãi ri ªng.

Ví dụ: X® m¸ t h¨ th´ ng vdt l² tiJn triWi theo th̀ i gian. TÜi th̀ i LiWm t = 0, h¨ th´ ng c· thWrhi v¨o m¸ t trong ba trÜng th§i (hay v¨ tr²) 1, 2 hoHõ 3 m¸ t c§ch ngXu nhi°n. K² hi¨ u X(0) l¨ v¨ tr² c¸ a h¨ th´ ng tÜi th̀ i LiWm t = 0, th³ X(0) l¨ m¸ t biJn ngXu nhi °n, c· thWnhdn c§c gi§ tr¨ 1 hoHõ 2 hoHõ 3 v¸ i c§c x§c suBI nhBI L¨ nh. GiÍ s¨ r³ng cLn c¸ v¨o c§c kJ quÍ quan s§t hay nghi°n c¸ u, ch½ng ta c· bÍ ng ph@n ph´ i x§c suBI sau cho X(0):

C§c gi§ tr¨ c¸ a X(0)	1	2	3
X§c suBI t·Hng¸ ng	0,2	0,5	0,3

TÜi c§c th̀ i LiWm tiJp theo, ch³ng hÜn, t = 1, 2, 3, é v¨ tr² c¸ a h¨ th´ ng sE L·Hc m¹ tÍ b¨ i c§c biJn ngXu nhi °n X(1), X(2), X(3), é v¸ i c§c bÍ ng ph@n ph´ i x§c suBI t·Hng¸ ng. D¸ a tr°n v² d¸ n¨ y, ch½ng ta x® L¨ nh nghĩa sau vQqu§ tr³nh ngXu nhi°n.

Định nghĩa 1

X® m¸ t h¨ th´ ng vdt l² (hay m¸ t h¨ th´ ng sinh th§i, h¨ th´ ng d¨ ch v¸ ,é) tiJn triWi theo th̀ i gian. G̀ i X(t) l¨ v¨ tr² (t³nh trÜng) c¸ a h¨ tÜi th̀ i LiWm t. NhHvdy¸ ng v¸ i m¸ i th̀ i LiWm t, X(t) ch²nh l¨ m¸ t biJn ngXu nhi°n m¹ tÍ v¨ tr² (t³nh trÜng) c¸ a h¨ th´ ng. Qu§ tr³nh $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ LHc g̀ i l¨ m¸ t *quá trình ngẫu nhiên.*

Tdp h̀ p c§c v¨ tr² c· thWc· c¸ a h¨ g̀ i l¨ *không gian trạng thái*. Kh¹ ng gian trÜng th§i LHc k² hi¨ u l¨ S. Trong v² d¸ tr°n, nJu giÍ s¨ r³ng X(t) ch¨ c· thWnhdn m¸ t trong ba gi§ tr¨ 1, 2, 3 ∀t, th³ S = {1, 2, 3}.

GiÍ s¨ trHc th̀ i LiWm s, h¨ L«´ trÜng th§i n¨o L·, c¸ n tÜi th̀ i LiWm s, h¨ ´ trÜng th§i i. Ch½ng ta mu´ n L§nh gi§ x§c suBI LWtÜi th̀ i LiWm t (t >s), h¨ sE´ trÜng th§i j. NJu x§c suBI n¨ y ch¨ ph¸ thu¸ c v¨o b¸ b´ n (s, i, t, j), t¸ c l¨ P[X(t) = j/X(s) = i] = p(s, i, t, j) l¨ L½ng ∀i, ∀j, ∀s, ∀t th³ LiQu n¨ y c· nghĩa l¨, s¸ tiJn triWi c¸ a h¨ trong tHng lai ch¨ ph¸ thu¸ c

v¨o hi' n tÜi (t³nh trÜng c„ a h' tÜi th‚ i LiWm s), v¨ ho¨n to¨n L¸ c lÐp v¸ i qu§ kh„ (*tính không nhớ*). n¸ · ch²nh l¨ *tính Markov*. L¼c n¨y qu§ tr³nh ngXu nhi°n X(t) L·Ê c g¸ i l¨ *quá trình Markov*.

Trong v² d„ tr°n P[X(1) = 2/X(0) = 1] l¨ x§c suÐt c· LiQu ki' n c„ a s¸ ki' n X(1) = 2 (tÜi th‚ i LiWm t =1, h' th´ ng n³m tÜi v¸ tr² 2) v¸ i LiQu ki' n X(0) = 1 (tÜi th‚ i LiWm t = 0, h' th´ ng n³m tÜi v¸ tr² 1). NJu qu§ tr³nh ngXu nhi°n c· t²nh Markov th³ x§c suÐt n¨y ch" ph„ thu¸ c v¨o t³nh trÜng c„ a h' tÜi th‚ i LiWm s = 0 v¨ ho¨n to¨n L¸ c lÐp v¸ i c§c t³nh trÜng c„ a h' trong qu§ kh„ (tr·Ê c th‚ i LiWm s = 0).

Định nghĩa 2

NJu kh¹ ng gian trÜng th§i S g‚ m m¸ t s´ h¸ u hÜn hoHu v¹ hÜn LJm L·Ê c c§c trÜng th§i th³ qu§ tr³nh Markov X(t) L·Ê c g¸ i l¨ *xích Markov*. L¼c n¨y, c· thWk² hi' u S = {1, 2, 3,...}, t¸ c l¨ c§c trÜng th§i L·Ê c L§nh s´ . H hn n¸ a, nJu tÐp c§c gi§ tr¸ t kh¹ ng qu§ LJm L·Ê c (ch³ng hÜn, t = 0, 1, 2,...) th³ ta c· x²ch Marko v v¸ i *thời gian rời rạc* , hay x²ch Markov r‚ i rÜc. NJu t∈[0, ∞) th³ ta c· x²ch Markov v¸ i *thời gian liên tục*, hay x²ch Markov li°n t„ c.

Định nghĩa 3

X® m¸ t x²ch Markov. NJu x§c suÐt chuyWi trÜng th§i p(s, i, t, j) = p(s+h, i, t+h, j)∀i, ∀j, ∀s, ∀t v¨ ∀h > 0, th³ ta n· i r³ng x²ch Markov *thuần nhất theo thời gian* .

n¸ ©y l¨ m¸ t kh§i ni' m m¸ i v¨ sÊ L·Ê c giÇi th²ch ngay sau L©y trong m„ c 1.2. Ngo¨i ra v¸ i m„ c L²ch t³m hiWu b·Ê c LÇu, trong c§c m„ c 1.2 v¨ 1.3 ch¼ng ta sÊ ch" x® x²ch Markov r‚ i rÜc v¨ thuÇn nhÐt theo th‚ i gian. V² d„ vQx²ch Markov li °n t„ c sÊ L·Ê c xem x® trong m„ c 2.4 v¨ 2.5.

1.2. Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

Trong m„ c n¨y ch¼ng ta L·Ê a ra kh§i ni' m vQma trÐn x§c suÐt chuyWi trÜng th§i c„ a m¸ t x²ch Markov r‚ i rÜc v¨ thuÇn nhÐt theo th‚ i gian v¸ i kh¹ ng gian trÜng th§i g‚ m N phÇn t' . Trong tr·Ê ng h‚ p x²ch Markov r‚ i rÜc v¨ thuÇn nhÐt c· kh¹ ng gian trÜng th§i v¸ i s´ phÇn t' v¹ hÜn LJm L·Ê c, kh§i ni' m vQma trÐn x§c suÐt chuyWi trÜng th§i sÊ L·Ê c x©y d¸ ng m¸ t c§ch t·Êng t¸ .

Ví dụ: X® lÜi v² d„ L« c· trong m„ c 1.1, nh·Êng v¸ i m¸ t c§ch minh h‚ a kh§c trong lÐnh v¸ c d' ch v„ . Trong m¸ t khu ph´ 1000 d©n (kh§ch h¨ ng) c· 3 si°u th' l¨ A, B, v¨ C (A, B, C L·Ê c coi l¨ c§c v¸ tr² 1, 2, 3 c„ a h' th´ ng si°u th' n¨y). Gi Ç s' r³ng, trong t¸ ng th§ng m¸ i kh§ch h¨ ng lu¹ n trung th¨nh v¸ i m¸ t si°u th'. Ngo¨i ra, cÌ ng giÇ s' r³ng trong th§ng LÇu s´ kh§ch v¨o c§c si°u th' lÇn l·Ê t l¨ 200, 500 v¨ 300; t¸ c l¨ c· 20% kh§ch h¨ng v¨o si°u th' A, 50% v¨o B v¨ 30% v¨o C. Nh·Êvdy, c· thWd¸ Lo§n r³ng m¸ t kh§ch h¨ng v¨o A v¸ i x§c suÐt 0,2; v¨o B v¸ i x§c suÐt 0,5 v¨ v¨o C v¸ i x§c suÐt 0,3. n¸ Wm¹ tÇ t³nh trÜng ph©n chia th' phÇn trong th§ng LÇu (th§ng 0) c„ a h' th´ ng si°u th' tr°n, ch¼ng ta thiJt lÐp biJh ngXu nhi°n X(0) v¸ i quy tÐc: nJu kh§ch h¨ng mua h¨ ng ' si°u th' A th³ LÇHu X(0)=1, ' si °u th' B th³ LÇHu X(0) = 2, c¸ n ' si°u th' C th³ X(0) = 3. L¼c L·, X(0) c· bÇng ph©n ph´ i x§c suÐt sau:

C§c gi§ tr' c„ a X(0)	1	2	3
X§c suÐt t·Êng ¸ ng	0,2	0,5	0,3

K² hi' u P[X(0) = 1] = $\pi_1^{(0)}$, P[X(0) = 2] = $\pi_2^{(0)}$, P[X(0) = 3] = $\pi_3^{(0)}$, th³ v®c tH $\Pi^{(0)}$ = [$\pi_1^{(0)}$, $\pi_2^{(0)}$, $\pi_3^{(0)}$] = [0,2 0,5 0,3] L'ÊC g` i l¨ *véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm t = 0* hay *véc tơ phân phối ban đầu.* C§c th¨nh phÊn c„a $\Pi^{(0)}$ cho biÊt t" l' phÊn trŁm (%) kh§ch h¨ng v¨o c§c si°u th' A, B v¨ C.

Nh¸ ng th§ng sau, ta giÊ s' x§c suÊt L'Wm¸ t ng·Êi kh§ch, L'« v¨o mua h¨ng ' si°u th' A th§ng tr·Êc, v¨o lÜi A trong th§ng sau lu¹ n l¨ 0,8; chuyWi sang mua h¨ng ' B lu¹ n l¨ 0,1 v¨ chuyWi sang C lu¹ n l¨ 0,1. X§c suÊt L'Wm¸ t ng·Êi kh§ch, L'« v¨o mua h¨ng ' si°u th' B th§ng tr·Êc chuyWi sang A lu¹ n l¨ 0,07; v¨o lÜi B lu¹ n l¨ 0,9 v¨ chuyWi sang C lu¹ n l¨ 0,03. C¸ n x§c suÊt L'Wm¸ t ng·Êi kh§ch, L'« v¨o si°u th' C th§ng tr·Êc chuyWi sang A lu¹ n l¨ 0,083; chuyWi sang B lu¹ n l¨ 0,067 v¨ v¨o lÜi C lu¹ n l¨ 0,85. L¼c L'· c§c x§c suÊt chuyWi c„a kh§ch h¨ng L'ÊC cho th¹ ng qua *ma trận xác suất chuyển trạng thái P* (c¸ n g` i l¨ *ma trận chuyển* sau m¸ t b·Êc).

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix} = [p_{ij}]_{3\times 3}.$$

n¸ Wm¹ tÊ t³nh trÜng ph©n chia th' phÊn trong th§n g t (t = 1, 2, 3, é) c„a h' th´ ng si°u th' tr°n, c· thWthiÊt lÊp biÊn ngÊu nhi°n X(t) v„i quy tÊc t·Êng t¸ nh·Êkhi thiÊt lÊp X(0): nÊu kh§ch h¨ng mua h¨ng ' si°u th' A th³ L'HÊ X(t) = 1, ' si°u th' B th³ L'HÊ X(t) = 2, c¸ n ' si°u th' C th³ X(t) = 3. VÊi L'QL'HÊ ra l¨ X(t) c· bÊng ph©n ph´ i x§c suÊt nh·Êthi Ên¨o.

Tr·Êc hÊt ta L'i t³m bÊng ph©n ph´ i x§c suÊt cho X(1). X®t p_{12} = P[(X(1) = 2/X(0) = 1] = 0,1 l¨ x§c suÊt L'Wm¸ t ng·Êi kh§ch, L'« v¨o mua h¨ng ' si°u th' A th§ng 0 chuyWi sang mua h¨ng ' si°u th' B trong th§ng 1. Ngo¨i ra, P[X(t+1) = 2/X(t) = 1] = 0,1 $\forall$t l¨ s´ t¸ nhi°n, v³ theo giÊ thiÊt c„a b¨i to§n th³ x§c suÊt L'Wm¸ t ng·Êi kh§ch, L'« v¨o mua h¨ng ' si°u th' A th§ng tr·Êc chuyWi sang mua h¨ng ' B lu¹ n l¨ 0,1. VÊy p_{12} L'ÊC g` i l¨ *xác suất chuyển sau một bước* t¸ v' tr² 1 sang v' tr² 2, b' i vÊy c· thWd½ng k² hi' u $p_{12}^{(1)}$ L'Wch" r» L'©y l¨ x§c suÊt chuyWi sau m¸ t b·Êc. C§c phÊn t' p_{ij} $\forall$i = 1, 2, 3 v¨ $\forall$j = 1, 2, 3 c„a ma trÊn P c· Ï nghĩa t·Êng t¸ .

D„ thÊy r³ng trong th§ng 1 s´ kh§ch h¨ng mua h¨ng tÜi si°u th' A l¨ 200 × 0,8 + 500 × 0,07 + 300 × 0,083 = 219,9 (≈ 220); s´ kh§ch h¨ng mua h¨ng tÜi si°u th' B l¨ 200 × 0,1 + 500 × 0,9 + 300 × 0,067 = 490,1 (≈ 490); c¸ n s´ kh§ch h¨ng mua h¨ng tÜi si°u th' C sÊ l¨ 200 × 0,1 + 500 × 0,03 + 300 × 0,85 = 290. Do t' ng s´ kh§ch h¨ng l¨ 1000, n°n X(1) c· bÊng ph©n ph´ i x§c suÊt sau:

C§c gi§ tr' c„a X(1)	1	2	3
X§c suÊt t·Êng ¸ ng	0,2199	0,4901	0,2900

VÊy v®c tH ph©n ph´ i x§c suÊt tÜi th" i L'iWm t = 1 l¨ $\Pi^{(1)}$ = [$\pi_1^{(1)}$, $\pi_2^{(1)}$, $\pi_3^{(1)}$] cho biÊt t" l' phÊn trŁm kh§ch h¨ng v¨o c§c si°u th' A, B v¨ C trong th§ng 1. B³ng ph®p t²nh ma trÊn cÌ ng t³m L'ÊC $\Pi^{(1)}$ nh·Êsau:

$$\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} \times P = [0,2\ 0,5\ 0,3] \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix}$$

$$= [0,2199\ \ 0,4901\ \ 0,2900].$$

T¬Ñnng t¸ c· thW¹³m L¬Ñ c $\Pi^{(2)}$:

$$\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = [0,2199\ 0,4901\ 0,2900] \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix}$$

$$=[0,234297\ \ 0,48251\ \ 0,283193].$$

Sau L©y ta Li t³m ma trÐn x§c suÈt chuyW tr¨ng th§i sau hai b¬Ñc. K² hi¸u $p_{12}^{(2)}$ l¨ x§c suÈt chuyW t¸ v¸ tr² 1 sang v¸ tr² 2 sau hai b¬Ñc. Theo c¹ng th¸c x§c suÈt to¨n phÇn ta c· :

$$p_{12}^{(2)} = P[X(2)= 2 / X(0) =1] = P[X(1)= 1 / X(0)= 1] \times P[X(2)= 2 / X(1) = 1]$$

$$+ P[X(1) = 2 / X(0) = 1] \times P[X(2) = 2/X(1) = 2]$$

$$+ P[X(1) =3 / X(0) = 1] \times P[X(2) = 2 / X(1) = 3]$$

$$= p_{11}^{(1)}p_{12}^{(1)} + p_{12}^{(1)}p_{22}^{(1)} + p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} p_{1k}^{(1)} p_{k2}^{(1)} = 0,8 \times 0,1 + 0,1 \times 0,9 + 0,1 \times 0,067 = 0,1767.$$

M¸t c§ch ho¨n to¨n t¬Ñnng t¸, ta c· x§c suÈt chuyW t¸ v¸ tr² i sang v¸ tr² j sau hai b¬Ñc l¨ $p_{ij}^{(2)} = p_{i1}^{(1)}p_{1j}^{(1)} + p_{i2}^{(1)}p_{2j}^{(1)} + p_{i3}^{(1)}p_{3j}^{(1)} = \sum_{k=1}^{3} p_{ik}^{(1)}p_{kj}^{(1)}$. VÈy ta c· ma trÐn chuyW sau hai b¬Ñc l¨:

$$P^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}]_{3\times3} = P^{(1)} \times P^{(1)} = P \times P = P^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

D¸ thÈy $\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = \Pi^{(0)} \times P^2$. T¬Ñnng t¸, c· thW¬ch¸ng minh L¬Ñ c $\Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} \times P^{(m)}$, trong L· $\Pi^{(n+m)}$ v¨ $\Pi^{(n)}$ l¨ c§c v®c th¬ph©n ph´ i tÜi c§c th¸ i LiW¬n t = m + n v¨ t = n, c¸n $P^{(m)}$ l¨ ma trÐn x§c suÈt chuyW tr¨ng th§i sau m b¬Ñc.

Do $P^{(m)} = [p_{ij}^{(m)}]_{3\times3}$ n°n $P[X(m) = j / X(0) = i] = P[X(n + m) = j / X(n) = i] = P[X(nô + m) = j / X(nô) = i] = p_{ij}^{(m)}$, l¨ x§c suÈt chuyW t¸ v¸ tr² i sang v¸ tr² j sau m b¬Ñc. ¸n H¬n = s,

t = n+m và h = nguyên dương thì các xác suất P[X(t) = j / X(s) = i] = P[X(t + h) = j / X(s + h) = i], hay p(s, i, t, j) = p(s + h, i, t + h, j) luôn đúng ∀s, ∀t, ∀h. Từ các phân tích trên đây và chú ý đến định nghĩa 1, 2 và 3 mục 1.1, ta thấy quá trình ngẫu nhiên X(t) với t = 0, 1, 2, … trong xác định *một xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian.*

Nếu khảo sát các khảo nhiệm là ở trình bày, chúng ta xét Markov rời rạc thuần nhất theo thời gian X(t), t = 0, 1, 2, … với khoảng gian trạng thái gồm N phần tử và khác nhau là S = {1, 2, …, N}.

Định nghĩa 1

Giả sử tại thời điểm t = n, X(n) đang ở trạng thái 1, 2,…, N với các xác suất tương ứng là $\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_N^{(n)}$ ($\pi_1^{(n)} + \pi_2^{(n)} + \ldots + \pi_N^{(n)} = 1$) thì vectơ $\Pi^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_N^{(n)}]$ là *véc tơ phân phối tại thời điểm t = n*. Với t = 0 ta có *véc tơ phân phối ban đầu* $\Pi^{(0)} = [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \ldots, \pi_N^{(0)}]$.

Ma trận $P = [p_{ij}]_{N\times N}$, trong đó $p_{ij} = p(t, i, t + 1, j) = P[X(t + 1) = j/X(t) = i]$ ∀t là *xác suất chuyển trạng thái từ vị trí i sang vị trí j sau một bước*, ∀i = 1, 2, …, N và ∀j = 1, 2, …, N, là *ma trận xác suất chuyển trạng thái* hay *ma trận chuyển* sau một bước.

Ví dụ: Tiếp tục xét ví dụ trên, trong đó là $\Pi^{(1)}$ = [0,2199 0,4901 0,2900], $\Pi^{(2)}$ = =[0,234297 0,482510 0,283193]. Dễ thấy, các véc tơ phân phối xác suất $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(3)}$,... tại các thời điểm t = 1, 2, 3, … là các tính theo công thức: $\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} \times P$, $\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = \Pi^{(0)} \times P^2$... và $\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times P = \Pi^{(0)} \times P^{n+1}$, ∀ n. Sau 21 bước (21 tháng), ta có $\Pi^{(21)}$ = [0,272257 0,455523 0,272220].

Các véc tơ phân phối xác suất (hay tỉ lệ phần trăm khách hàng về các siêu thị A, B, C) sau 1, 2, 3,..., 21 tháng là các cho trong bảng IV.1.

Vấn đề là ở giới hạn lim $\Pi = \lim_{n\to\infty}\Pi^{(n)}$ có tồn tại khác với các nhóm bằng các khách hàng. Trong ví dụ, chúng ta sẽ tính là Π = [0,273 0,454 0,273], biểu thị cho tỉ lệ phần trăm cân bằng dừng (*stationary equilibrium*) số khách hàng về các siêu thị A, B, C sau một thời gian lâu dài.

Cách tính Π

Xuất phát từ $\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times P$, cho qua giới hạn cả hai vế khi $n \to \infty$ ta có: $\Pi = \Pi \times P$, hay $\Pi \times (I - P) = 0$.

Do P là ma trận ngẫu nhiên (ma trận chuyển) nên ma trận suy biến. Khi viết lại đẳng thức tương đương (3 ẩn, 3 phương trình) ta phải loại bớt một phương trình, với thêm vào thêm các $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ và ràng buộc $\pi_k \geq 0$ (k = 1, 2, 3). Kí hiệu x = π_1, y = π_2 và z = π_3, ta sẽ có hệ:

$$\begin{cases} 0,2x - 0,07y - 0,083z = 0 \\ -0,1x + 0,1y - 0,067z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,273 \\ y = 0,454 \\ z = 0,273 \end{cases}$$

Vậy Π = [0,273 0,454 0,273].

Bảng IV.1. Tỉ lệ phần trăm khách hàng vào các siêu thị

Tháng	*A*	*B*	*C*
1	0.2199	0.4901	0.29
2	0.234297	0.48251	0.283193
3	0.2447183	0.476662631	0.27861905
4	0.2522664	0.472135676	0.2755979
5	0.2577373	0.46861381	0.27364893
6	0.2617056	0.465860633	0.27243373
7	0.2645868	0.463698194	0.27171505
8	0.2666806	0.461991958	0.27132742
9	0.2682041	0.460639762	0.27115613
10	0.269314	0.459563657	0.27112231
11	0.2701238	0.45870389	0.27117228
12	0.2707156	0.458014426	0.27126994
13	0.2711489	0.457459633	0.27139144
14	0.2714668	0.457011789	0.27152141
15	0.2717005	0.456649225	0.27165023
16	0.2718729	0.456354922	0.27177223
17	0.2720002	0.456115454	0.27188433
18	0.2720947	0.455920181	0.27198516
19	0.2721649	0.455760634	0.27207446
20	0.2722173	0.45563005	0.2721526
21	0.2722566	0.455523004	0.27222035

Định nghĩa 2

X® x²ch Markov r ̊ i rÜc v¨ thuÊn nhÊt v¸ i ma tr-n chuyW¾ P = $[p_{ij}]_{N\times N}$. L¼c L·, v®c th ph©n ph´ i x§c suÊt Π = [π_1, π_2, é , π_N] th¸ a m«n L¸iQu ki ̈ n Π ×(I ï P) = 0 L·Ể c g¸ i l¨ *phân phối dừng* c¸ a x²ch Markov L«« cho.

C· thW¾hÊy ngay, ph©n ph´ i d¸ ng Π kh¹ ng ph¸ thu¸ c v¨o $\Pi^{(0)}$ m¨ ch ̈ ph¸ thu¸ c v¨o ma tr-n P.

M¸ t c§ch to§n h̀ c, ta n·i *mô hình xích Markov rời rạc thuần nhất* ch²nh l¨ b¸ ba ($X(t_n)$, S/Π, P). Ćp d¸ ng m¹ h³nh x²ch Markov L¾ph©n t²ch m¸ t vÊn L¾Qn¨o L· trong Kinh tJ Kọthu-t, Sinh h̀ c,... L·Ể c coi l¨ vi ̈ c *ứng dụng phân tích Markov.*

1.3. Các tính chất và định lí

X® x²ch Markov r ̊ i rÜc v¨ thuÊn nhÊt v¸ i ma tr-n chuyW¾ P = $[p_{ij}]_{N\times N}$. C· th W¾ch¸ ng minh L·Ể c c§c t²nh chÊt v¨ L ̈ nh l² sau:

Các tính chất

1/ $p^{(n+m)}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p^{(n)}_{ik} p^{(m)}_{kj}$ (L©y l¨ ph¬ng tr³nh *Chapman–Kolmogorov*).

2/ $P^{(2)} = P \times P = P^2$, $P^{(n)} = P^n$ v¨ $P^{(n+m)} = P^{(n)} \times P^{(m)}$.

3/ $\Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} \times P^{(m)}$.

Định lí

1/ GiÇ s P l¨ ma tr©n x§c suÈt chuyW¬i ch²nh quy, t c l¨ t n tÜi ch s n_0, sao cho $\forall$ i, j, th³ x§c su È chuyW¬i t i LÍJn j sau n_0 b¬Ëc l¨ m t s d¬Ëng: $p^{(n_0)}_{ij} > 0$. Khi LÍ· t n tÜi $\pi_1, \pi_2, é, \pi_N > 0$, v¨ $\pi_1 + \pi_2 + é + \pi_N = 1$ LÍWcho $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, kh¹ ng ph thu c v¨o i.

C§c s $\pi_1, \pi_2, é, \pi_N$ LÍËc t³m t h ph¬ng tr³nh

$$x_j = \sum_{k=1}^{N} x_k p_{kj}, j = 1, 2, ..., N; x_j \geq 0 \ \forall j \text{ v¨ } \sum_{j=1}^{N} x_j = 1.$$

2/ NJJu c· c§c s $\pi_1, \pi_2, é, \pi_N$ thoÇ m«n LÍiQu ki n $\pi_1 + \pi_2 + é + \pi_N = 1$ v¨ $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, kh¹ ng ph thu c v¨o i, th³ ma tr©n P l¨ ma tr©n ch²nh quy.

Lưu ý

Ph©n ph i $(\pi_1, \pi_2, é, \pi_N)$ thoÇ m«n LÍiQu ki n $\pi_1 + \pi_2 + é + \pi_N = 1$ v¨ $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, kh¹ ng ph thu c v¨o i, LÍËc g i l¨ ph©n ph i gi i hÜn. Ngo¨i ra, nJJu LÍiQu ki n $\pi_j > 0$, $\forall$j LÍËc th a m«n th³ ph©n ph i n¨y LÍËc g i l¨ *phân phối Ergodic*. C· thWch ng minh LÍËc r³ng, nJJu ph©n ph i gi i hÜn t n tÜi th³ LÍ· l¨ ph©n ph i d ng (duy nhÈt). Tuy nhi°n, LÍiQu ng¬Ëc lÜi kh¹ ng lu¹ n L¼ng.

2. Một số ứng dụng của phân tích Markov

Ph©n t²ch Markov c· nhiQu ng d ng trong Kinh tJ Kq thuÈt, Sinh h c, X« h i h c, C¹ ng ngh th¹ ng tin,é Trong m c n¨y, ch½ng ta sÊ xem x®t c§c ng d ng nh¬t³m c©n b³ng th ph Fn, x§c L nh ch²nh s§ch thay thJ vÈt t¬thiJ b , d b§o thÈt thu cho c§c h p L ng th c hi n tr¬Ëc, t³m ph©n ph i gi i hÜn c a m t h th ng kq thuÈt v ¨ m t ng d ng c a qu§ tr³nh sinh – t cho h th ng h¨ng ch .

2.1. Tìm cân bằng thị phần

Ta nhÈc lÜi m t c§ch vJn tÈt b¨i to§n cho m c 1.2: Trong m t khu ph 1000 d©n (kh§ch h¨ng) c· 3 si°u th l¨ A, B, v¨ C. GiÇ s , trong th§ng LÇu, s kh§ch v ¨o c§c si°u th lÇn l¬Ët l¨ 200, 500 v¨ 300. Nh ng th§ng sau LÍ· , ta giÇ s x§c suÈt LÍW m t kh§ch h¨ng (LÍ« v¨o si°u th A l¼c tr¬Ëc) v¨o lÜi A lu¹ n l¨ 0,8; chuy W¬i sang B lu¹ n l¨ 0,1 v¨ chuy W¬i sang C lu¹ n l¨ 0,1... C§c x§c su È chuyW¬i kh§c c a kh§ch h ¨ng ("tr lÜi" B, chuyW¬i sang A, chuyW¬i sang C...) LÍËc cho th¹ ng qua ma tr©n chuyW¬i P

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix}$$

L¼c L·, theo kJ quÇL« biJ, t" l' phÇn tÉm c©n b³ng d¸ ng (khi th° i gian L¸ đi) s´ kh§ch h¨ng v¨ o c§csi°u th A, B, C l' 27,3%, 45,4% v¨ 27,3% c· thW³m L·Ể c t¸ h' Π×(I ï P) = 0.

2.2. Chính sách thay thế vật tư thiết bị

Trong m¸ t h' th´ ng L¡' n kọ thuat, c§c thiJ b' c½ng m¸ t loÜi L·Ể c ph©n ra c§c t³nh trÜng sau L©y: v¸ a m¸ i thay, c¸ n t´ t, vXn d½ng L·Ể c v¨ L« b' h¸ ng. Theo s´ li' u th´ ng k° L·Ể c, ta c· ma trÉn x§c suÖt chuyWi trÜng th§i nh ·Ể sau:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1,0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

trong L·, sau m¸ i tuÇn (xem h¨ng LÇu ¸ a ma trÉn P) c· 0%, 80%, 20% v ¨ 0% s´ c§c thiJ b' m¸ i thay chuyWi sang t³nh trÜng m¸ i thay, c¸ n t´ t, vXn d½ng L·Ể c v¨ L« b' h¸ ng. C§c h¨ng kh§c ¸ a ma trÉn P L·Ể c giÇ' i th²ch m¸ t c§ch t·Ể ng t¸ . Ta L' i t³m ph©n ph´ i d¸ ng Π b³ng ph·Ể ng ph§p L« biJ.

XuÖt ph§t t¸ $\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times P$, cho qua gi¸ i hÜn cÇ hai vJ khi $n \to \infty$ ta c· : $\Pi = \Pi \times P$, hay $\Pi \times (I ï P) = 0$.

Do P l¨ ma trÉn LÇ bi' t (ma trÉn chuyWi x§c suÖt) n°n n· l¨ ma trÉn suy biJh. Khi viJ lÜi d·Ể i dÜng h' ph·Ể ng tr³nh (4 Xn, 4 ph·Ể ng tr³nh) ta phÇ' i loÜi b¸ t m¸ t ph·Ể ng tr³nh L' i, v¨ th°m v¨ o h' th¸ c $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$ v¨ r¨ ng bu¸ c $\pi_k \geq 0$ (k = 1, 2, 3, 4). K² hi' u $x_1 = \pi_1$, $x_2 = \pi_2$, $x_3 = \pi_3$ v¨ $x_4 = \pi_4$ ta s£ c· h' :

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ -0,8x_1 + 0,4x_2 = 0 \\ -0,2x_1 - 0,4x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ -0,5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 = \dfrac{1}{6} \\ x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vdy ph©n ph´ i d¸ ng Π = [1/6 1/3 1/3 1/6].

GiÇ' s' r³ng chi ph² thay m¸ i m¸ t thiJ b' l¨ 25 ngh³n (L°ng) v¨ thÖt thu khi m¸ i m¸ t thiJ b' h¸ ng l¨ 18,5 ngh³n, th³ m¸ i tuÇn h' th´ ng tr°n phÇ' i chi trung b ³nh tr°n m¸ t thiJ b' s´ tiQn l¨: $(1/6) \times 25 + (1/6) \times 18,5 = 7,25$ ngh³n / thiJ b' / tuÇn.

Ta x® ph·Ể ng §n th¸ hai cho vi' c thay thJ vdt t ·Ể thiJ b' v¸ i ma trÉn x§c suÖt chuyWi trÜng th§i sau L©y:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 1,0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma tr©n n¨y t©nh ng¸ ng v¸i ch²nh s§ch m¸i vQthay thJ vdt t©thiJ b˙ l¨: thay thJ m¸i thiJ b˙ m¸t khi kiWm tra v¨ ph§t hi¹n thiJ b˙ ´ t³nh trÜng vXn d½ng L©Ể c. ¸n iQu n¨y c· thW dXn t¸i vi¹c giÎm thiWt thÜt thu do thiJ b˙ h¸ng g©y n°n. Th©t vdy, ¸ng v¸i ma tr©n P tr°n L©y, ph©n ph´i d¸ng Π = [1/4 1/2 1/4]. L¼c n¨y, m¸i tuÎn h¹ th´ng tr°n phÎi chi trung b³nh tr°n m¸t thiJ b˙ s´ tiQn l¨: (1/4)× 25 + (0)×18,5 = 6,25 ngh³n / thiJ b˙ / tuÎn. Nh©vdy h¹ th´ng sÉ tiJ ki¹m L©Ể c 1 ngh³n / thiJ b˙ / m¸t tuÎn. NJu h¹ th´ng c· 2000 thiJ b˙, th³ nhÔ ch²nh s§ch thay thJ vdt t©m¸i, m¸i tuÎn h¹ th´ng sÉ tiJ ki¹m L©Ể c 2 tri¹u (LÔng).

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

M¸t c¹ng ti kinh doanh trong ng¨nh Li¹n chuy°n vQs¸a ch¸a v¨ thay thJ ph¸t ½ng LQ ra ch²nh s§ch t²n d¸ng: L§p¸ng y°u cÎu c¸a kh§ch h¨ng tr©Ể c, thanh to§n sau. PhÎn nhiQu h˚p LÔng sÉ L©Ể c thanh to§n L¼ng th¸i hÜn, m¸t t¨ l¹ nhÜt L¹nh sÉ L©Ể c c¹ng ti cho thanh to§n chdm, c¸n m¸t s´ ²t kh¹ng thanh to§n L©Ể c. Theo kinh nghi¹m, sau hai hay ba h˚p LÔng thanh to§n chdm c¸a m¸t kh§ch h¨ng n¨o L© l¨ h˚p LÔng kh¹ng thanh to§n L©Ể c sau m¸t th¸i gian d¨i, c¹ng ti coi L©y l¨ h˚p LÔng ñxÜò v¨ sÉ cdt b¸ ch²nh s§ch t²n d¸ng v¸i kh§ch h¨ng L© . Nh©vdy tÜi t¸ng th¸i LiWm c§c h˚p LÔng c· thWr hi v¨o m¸t trong c§c t³nh trÜng (trÜng th§i) sau:

– S_0: h˚p LÔng L©Ể c thanh to§n,

– S_1: h˚p LÔng kh¹ng L©Ể c thanh to§n,

– S_2: h˚p LÔng sÉ L©Ể c thanh to§n L¼ng th¸i hÜn,

– S_3: h˚p LÔng sÉ L©Ể c thanh to§n chdm.

Sau L©y l¨ ma tr©n x§c suÜt chuyWn trÜng th§i (sau t¸ng th§ng):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Hi¹n tÜi c¹ng ti c· c§c h˚p LÔng phÎi thanh to§n L¼ng hÜn v¸i t¨ng s´ 500 tri¹u, v¨ c§c h˚p LÔng cho thanh to§n chdm v¸i t¨ng s´ 100 tri¹u. H«y x§c L¹nh trong t¨ng tr°n c· bao nhi°u sÉ L©Ể c thanh to§n, c¸n bao nhi°u sÉ l¨ n˚ ñxÜò kh¹ng L¸i L©Ể c.

¸n ©y l¨ b¨i to§n kh§ ph¸c tÜp li°n quan t¸i ph©n loÜi c§c trÜng th§i c¸a x²ch Markov l¨ vÜm LQch¼ng ta sÉ kh¹ng tr³nh b¨y trong gi§o tr³nh n¨y. Tuy nhi°n, c· thWthÜy ngay r³ng c§c trÜng th§i S_0 v¨ S_1 l¨ c§c trÜng th§i ñhÜb th¸ò (*absorbing state*), t¸c l¨ m¸i h˚p LÔng d½ hi¹n L¸ang ´ trÜng th§i n¨o th³ cu´i c½ng sau m¸t th¸i gian nhÜt L¹nh cÌng sÉ rhi v¨o m¸t trong hai trÜng th§i tr°n. Trong khi L· c§c trÜng th§i S_2 v¨ S_3 L©Ể c g¸i l¨ c§c trÜng th§i

truyQn¨ ng (hay c§c trÜng th§i di chuyWI).

¤ Wt³m c©u trÎ Å i cho vÉi LÎQLÎHÞra, ch½ng ta cÊn th¸ c hi¸ n c§ c b·Ę c sau: Tr·Ę c hJÎ, ta chia ma tr¬n P theo kh´ i.

$$P = \begin{bmatrix} J & O \\ K & M \end{bmatrix} \text{ v¸ i } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Sau L·, ta t³m ma tr¬n R = I ï M v¨ ma tr¬n ngh¸ ch LÎo ¢¸ a n· R^{-1}, ´ L©y I l¨ ma tr¬n LÎhn v¸ c½ng c¸ v¸ i ma tr¬n M. Ta c·:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5254 & 0,3390 \\ 0,3390 & 1,1864 \end{bmatrix},$$

v¨ t²nh LÊ c:

$$R^{-1} \times K = \begin{bmatrix} 0,8983 & 0,1017 \\ 0,6441 & 0,3559 \end{bmatrix}.$$

C§c phÊn t´ trong ma tr¬n tr°n c· Ï ngh¢a LÎHÞ bi¸ t. Trong s´ c§c h¸ p LÊ ng hi¸ n tÜi ´ trÜng th§i S_2 (phÎ¡i thanh to§n L¼ng k³ hÜn) cu´ i c½ng sau m¸ t th¸ i gian nhÉi L¸ nh c· 89,83% sÉ rhi v¨o trÜng th§i S_0 (LÊ c thanh to§n) v¨ 10,17% sÉ rhi v¨o trÜng th§i S_1 (kh¹ ng d·Ę c thanh to§n). C¸ n trong s´ c§c h¸ p LÊ ng hi¸ n tÜi ´ trÜng th§i S_3 (thanh to§n ch¬m) cu´ i c½ng sau m¸ t th¸ i gian nhÉi L¸ nh c· 64,41% sÉ r hi v¨o trÜng th§i S_0 (LÊ c thanh to§n) v¨ 35,59% sÉ rhi v¨o trÜng th§i S_1 (kh¹ ng LÊ c thanh to§n).

Th¸ c hi¸ n ph®p t²nh:

$$[500\ 100] \times \begin{bmatrix} 0,8983 & 0,1017 \\ 0,6441 & 0,3559 \end{bmatrix} = [459,32\ \ 140,68],$$

ta thÉy trong 500 tri¸ u phÎ¡i thanh to§n L¼ng k³ hÜn v¨ 100 tri¸ u thanh to§n ch¬m cu´ i c½ng sÉ c· 459,32 tri¸ u LÊ c thanh to§n v¨ 140,68 tri¸ u l¨ n¸ ñxÉiò kh¹ ng L¸ i LÊ c. ¤ WcÎ¡i thi¸ n t³nh trÜng n¨ y, c¹ ng ti cÊn nghi°n ¢¸ u t³m ra m¸ t ch²nh s§ch t²n d¸ ng h¸ p l² hÞn.

Ngo¨ i ra, ma tr¬n R^{-1} c¸ n cho biÎ¡ c§c th¹ ng tin sau:

– T´ ng ¢¸ a c§c phÊn t´ tr°n h¨ ng th¸ nhÉi l¨ 1,8644 l¨ th¸ i gian trung b³nh (th§ng) m¨ m¸ t h¸ p LÊ ng dÜng phÎ¡i thanh to§n L¼ng k³ hÜn sÉ trÎ¡i qua tr·Ę c khi rhi v¨o m¸ t trong c§c trÜng th§i hÉi¡ th¸ , t¸ c l¨ tr´ th¨ nh h¸ p LÊ ng thanh to§n LÊ c hoÞ h¸ p LÊ ng ñxÉiò.

– T´ ng c§c phÊn t´ tr°n h¨ ng th¸ hai ¢¸ a R^{-1} cÌ ng c· Ï nghĩa t·Ęng t¸ L´ i v¸ i c§c h¸ p LÊ ng dÜng thanh to§n ch¬m.

– PhÊn t´ n³m tr°n h¨ ng 1 v¨ c¸ t 1 ¢¸ a R^{-1} cho biÎ¡ th¸ i gian trung b³nh (th§ng) m¨ m¸ t h¸ p LÊ ng dÜng phÎ¡i thanh to§n L¼ng hÜn sÉ ´ trong trÜng th§i S_2 tr·Ę c khi n· rhi v¨o m¸ t trong c§c trÜng th§i hÉi¡ th¸ , l ¨ 1,5254 th§ng. PhÊn t´ n³m tr°n h¨ ng 1 v¨ c¸ t 2 cho biÎ¡ th¸ i gian trung b³nh (th§ng) m¨ m¸ t h¸ p LÊ ng dÜng phÎ¡i thanh to§n L¼ng hÜn sÉ ´ trong

trÜng th§i S_3 tr·Ę c khi n· rÞi v¨o m¸ t trong c§c trÜng th§i hÈp th¸ l¨ 0,3390 th§ng.

– C§c phÉn t n³m tr°n h¨ng 2 c¸ a ma trÞn $R^{ï 1}$ c· Ï nghĩa t·Ęhng t¸ L´ i v¸ i m¸ t h° p L°ng dÜng L·Ę c thanh to§n chÞm.

Sau L©y, ch¼ng ta sÉ L·Ęa ra *một số công thức giải thích* c§c ph©n t²ch tr°n L©y cho tr·Ę ng h° p ma trÞn x§c suÈt chuyÙn tr ÜNg th§i c¸ a x²ch Markov c· dÜng sau:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \text{ (nh·Ętrong b¨i to§n tr°n),}$$

$$= \begin{bmatrix} J & O \\ K & M \end{bmatrix} \text{ v¸ i } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} p_{20} & p_{21} \\ p_{30} & p_{31} \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{bmatrix},$$

trong L· $\boldsymbol{p_{ij}}$ l¨ x§c suÈt chuyÙn t¸ trÜng th§i S_i sang trÜng th§i S_j sau m¸ t b·Ę c. Kh¹ ng gian trÜng th§i g° m b´ n trÜng th§i S_0, S_1, S_2 v¨ S_3; c§c trÜng th§i S_0 v¨ S_1 l¨ c§c trÜng th§i hÈp th¸ , c¸ n S_2 v¨ S_3 l¨ c§c trÜng th§i truyQn ¸ ng. Ch¼ng t a d½ng c§c k² hi¸ u:

$$U = \begin{bmatrix} u_{20} & u_{21} \\ u_{30} & u_{31} \end{bmatrix},$$

v¸ i $\boldsymbol{u_{ik}}$ l¨ x§c suÈt hÈp th¸ v¨o trÜng th§i S_k khi trÜng th§i banLÞu l¨ S_i, k = 0, 1, c¸ n i =2, 3.

$$V = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

v¸ i $\boldsymbol{v_i}$ l¨ th¸ i gian trung b³nh cho t¸ i khi rÞi v¨o m¸ t trong c§c trÜng th§i hÈp th¸ nJu trÜng th§i ban LÞu l¨ S_i, i = 2, 3.

$$W = \begin{bmatrix} w_{22} & w_{23} \\ w_{32} & w_{33} \end{bmatrix},$$

v¸ i $\boldsymbol{w_{ij}}$ l¨ th¸ i gian trung b³nh x²ch Markov ‘ trong trÜng th§i S_j tr·Ę c khi n· rÞi v¨o m¸ t trong c§c trÜng th§i hÈp th¸ nJu trÜng t h§i ban LÞu l¨ S_i, i = 2, 3. L¼c L· :

$$U = (I ï M)^{-1}, V = (I ï M)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ v¨ } W = (I ï M)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chú ý: Vi¸ c ch¸ ng minh c§c c¹ ng th¸ c tr°n cho tr·Ę ng h° p t¸ ng qu§t th¸ c ra cÌ ng kh¹ ng qu§ kh· , c· thWt³m thÈy trong c§c s§ch tham khÞo vQqu§ tr³nh Markov. C§ch ¸ ng d¸ ng ph©n t²ch Markov nh·Ętrong m¸ c n¨y c¸ n c· thWL·Ę c §p d¸ ng r¸ ng r«i trong nhiQu lĩnh v¸ c kh§c nh·ĘSinh h¸ c, X« h¸ i h¸ c, L² thuyJt nhÞn dÜng v¨ ThiJt kJc§c h¸ th´ ng kĩ thuÞt, trong L· c· KĩthuÞt LÞi¸ n.

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

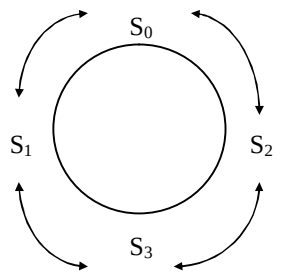
Một hệ thống kỹ thuật có hai chi tiết có thể bị hỏng khi làm việc. Tùy mỗi thời điểm hệ thống có thể rơi vào một trong những trạng thái sau (xem hình IV.1):

S_0: cả 2 chi tiết tốt;

S_1: chi tiết 1 hỏng, chi tiết 2 bình thường;

S_2: chi tiết 1 bình thường, chi tiết 2 hỏng;

S_3: cả hai chi tiết đều hỏng.



Hình IV.1. Sơ đồ các trạng thái

Với cách khảo sát, tùy mỗi thời điểm, biến X(t) có thể rơi vào một trong các giá trị / trạng thái S_0, S_1, S_2 và S_3. Chúng ta có xích Markov (thời gian) liên tục với không gian trạng thái $S = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$. Sau đây, chúng ta sẽ tìm các xác suất phân phối giới hạn (*long run distribution*) của $\{X(t)\}_{t\geq 0}$. Đây là một vấn đề quan trọng của chuỗi thời gian.

Trước hết ta nhắc lại về Quá trình Poisson mà ở đó, giả sử đang tăng hiểu đầy (hay xảy ra) tuân theo quá trình Poisson với $P(\lambda)$ và λ là số tăng hiểu đầy trung bình trong một khoảng thời gian nhất định (coi là một đơn vị thời gian), λ cũng là cường độ gần đúng của, của đang tăng hiểu đầy. Lúc đó, trong khoảng thời gian nhất định xảy ra sẽ nhận giá trị k với xác suất $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Ta gọi phần tử xác suất là xác suất xuất hiện (ít nhất) một ít trong khoảng thời gian Δt. Thật thế, do tính chất nhất quán Poisson, P cùng là xác suất xuất hiện lần một trong khoảng thời gian Δt. Theo cách thức của ở biểu thức $P = \lambda\Delta t$ (chính xác tại vô cùng bé(Δt)). Chẳng hạn, nếu $\lambda = 6$ tính hiểu/1 phút và $\Delta t = 2$ giây, ta sẽ có $P = \lambda\Delta t = 6 \times (1/30) = 1/5 = 0,2$. Tức là, ta thấy xác suất là có 1 tính hiểu trong khoảng thời gian 2 giây là 0,2.

Xét biến ngẫu nhiên T (chẳng hạn thời gian phục vụ) của một tính hiểu trong một hàng đợi (chẳng hạn vụ), có phân phối mũ $\varepsilon(\mu)$ với hàm mật độ là $f(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$. μ cũng là cường độ gần đúng là phục vụ hay cường độ là của *đồng phục vụ*. Hàm phân phối xác suất của T sẽ là

$$F(\tau) = P(T \le \tau) = \int_0^{\tau} f(t)dt = \int_0^{\tau} \mu e^{-\mu t}dt = 1 - e^{-\mu\tau}.$$

C¸n k³ v` ng to§n v¨ L¸ l' ch chuXn c¸ a biJh ngXu nhi°n T l¨

$$m_T = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} \mu t e^{-\mu t}dt = \frac{1}{\mu};\ \delta_T = \frac{1}{\mu}.$$

Ta nhdn thEy ngay r³ng:

$$P(0 \le T \le \Delta t) = F(\Delta t) ï F(0) = 1 - e^{-\mu\Delta t} ï [1 - e^{0}]$$

$$= 1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\,\Delta t \quad (\text{ch²nh x§c t¸ i v¹ c½ng b®o}(\Delta t)).$$

Chú ý: NJu d¸ ng t²n hi' u LJh c· ph©n ph´ i Po§t –x¹ ng $P(\lambda)$ th³ th` i gian gi¸ a hai t²n hi' u li°n tiJp c· ph©n ph´ i mÌ $\varepsilon(\lambda)$.

Ch½ng ta quay lÜi b¨i to§n L'ang x®t. G` i $\lambda_1$ s´ lFn chi tiJt 1 h¸ ng v¨ $\lambda_2$ s´ lFn chi tiJt 2 h¸ ng (t²nh trung b ³nh) tr°n 1 LÈhn v' th` i gian. L½c L·, ta c· thWcoi d¸ ng t²n hi' u chi tiJt 1 v¨ 2 h¸ ng l¨ d¸ ng Po§t–x¹ ng v¸ i c§c tham s´ λ_1 v¨ λ_2. G` i $T_1$ v¨ $T_2$ l¨ th` i gian s' a ch¸ a chi tiJt 1 v¨ 2, c· ph©n ph´ i mÌ v¸ i c§c k³ v` ng $tsc_1$ v¨ $tsc_2$ l¨ th` i gian s' a ch¸ a (trung b³nh) chi tiJt 1 v¨ chi tiJt 2. VdÈy T_1 v¨ T_2 c· ph©n ph´ i mÌ $\varepsilon(\mu_1)$ v¨ $\varepsilon(\mu_2)$, v¸ i $\mu_1 = 1/tsc_1$ v¨ $\mu_2 = 1/tsc_2$.

TÜi th` i LiWm t ta c· biJh ngXu nhi °n $X(t) = X_t$ v¸ i ph©n ph´ i x§c suEt sau L©y:

X_t	S_0	S_1	S_2	S_3
P	$\pi_0(t)$	$\pi_1(t)$	$\pi_2(t)$	$\pi_3(t)$

Ta t²nh $\pi_0(t + \Delta t)$ tÜi th` i LiWm tiJp theo $(t + \Delta t)$ trong hai tr·È ng h` p sau L©y:

– Tr·È ng h` p 1: TÜi th` i LiWm t, h' th´ ng ' trÜng th§i S_0 v¨ tÜi th` i LiWm $t + \Delta t$, h' th´ ng vXn ' trÜng th§i S_0 (kh¹ ng h¸ ng).

– Tr·È ng h` p 2: TÜi th` i LiWm t, h' th´ ng ' trÜng th§i S_1 hoHc S_2, c¸ n tÜi th` i LiWm $t + \Delta t$ h' th´ ng ' trÜng th§i S_0.

Do L·, $\pi_0(t + \Delta t) = \pi_0(t)[1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t] + \pi_1(t)\mu_1\Delta t + \pi_2(t)\mu_2\Delta t$ (*). ThdEt vdÈy, x§c suEt do tr·È ng h` p 2 g©y n °n l¨ $\pi_1(t)\mu_1\Delta t + \pi_2(t)\mu_2\Delta t$, v¸ i $\mu_1\Delta t = P(0 \le T_1 \le \Delta t)$ l¨ x§c suEt s' a ch¸ a xong chi tiJt 1 trong khoÈng th` i gian Δt v¨ $\mu_2\Delta t = P(0 \le T_2 \le \Delta t)$ l¨ x§c suEt s' a ch¸ a xong chi tiJt 2 trong khoÈng th` i gian $\Delta t$. Trong khi L·, x§c suEt do tr·È ng h` p 1 g©y n°n l¨ $\pi_0(t)[1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t]$, v¸ i $\lambda_1\Delta t$: x§c suEt h¸ ng chi tiJt 1 trong khoÈng Δt, c¸ n $\lambda_2\Delta t$: x§c suEt h¸ ng chi tiJt 2 trong khoÈng Δt.

N· i c§ch kh§c, ch½ng ta L« th¸ c hi' n c¹ ng th¸ c x§c suEt L¸Fy L¸ $\pi_0(t + \Delta t) = \pi_0(t)p_{00} + \pi_1(t)p_{10} + \pi_2(t)p_{20}$, trong L·: p_{i0} l¨ x§c suEt h' ' trÜng th§i S_i tÜi th` i LiWm t v¨ chuyWn sang trÜng th§i $S_0$ tÜi th` i LiWm $(t+ \Delta t)$.

T- (*) ta c· : $\dfrac{\pi_0(t+\Delta t)-\pi_0(t)}{\Delta t} = \pi_1(t)\mu_1 + \pi_2(t)\mu_2 - \pi_0(t)\lambda_1 - \pi_0(t)\lambda_2$.

Cho $\Delta t \to 0$ (vJphÏi kh¹ ng li°n quan v¸ i Δt) th³

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = \pi_1(t)\mu_1 + \pi_2(t)\mu_2 - \pi_0(t)\lambda_1 - \pi_0(t)\lambda_2$$

Khi t rÈi l¸ n (h¾ th´ ng hoÜt L¸ ng trong m¸ t khoÏng th¾ i gian L¸ d¨i) th³ h¾ th´ ng dÈn ˘ n L¾ nh v¸ i ph©n ph´ i gi¸ i hÜn c· thW t³m LÊ c, t¸ c l¨: $[\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t)] \to [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3]$. V dy ta c· :

$$\pi_1\mu_1 + \pi_1\mu_2 - \pi_0\lambda_1 - \pi_0\lambda_2 = 0 \ (\text{v}^3 \ \frac{d\pi_0(t)}{dt} = 0 \text{ khi t L¸ l¸ n}).$$

M¸ t c§ch t·Êng t¸ , ta LÏi LÏJn h¾ ph·Êng tr³nh:

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_0}{dt} = \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 - (\lambda_1+\lambda_2)\pi_0 = 0 \\ \dfrac{d\pi_1}{dt} = \lambda_1\pi_0 + \mu_2\pi_3 - (\lambda_2+\mu_1)\pi_1 = 0 \\ \dfrac{d\pi_2}{dt} = \lambda_2\pi_0 + \mu_1\pi_3 - (\lambda_1+\mu_2)\pi_2 = 0 \\ \dfrac{d\pi_3}{dt} = \lambda_2\pi_1 + \lambda_1\pi_2 - (\mu_1+\mu_2)\pi_3 = 0 \end{cases}$$

M¸ t c§ch t¨ ng qu§t, ph©n ph´ i gi¸ i hÜn LÊ c t³m t¸ h¾ ph·Êng tr³nh: $-\pi_j q_{jj} = \sum_{i\neq j} \pi_i q_{ij}$ hay $\sum_{i\in S} \pi_i q_{ij} = 0, \forall j \in S$ (**), v¨ $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$, trong L· – *q_{ii} là cường độ chuyển từ trạng thái i sang các trạng thái khác (không kể i), còn q_{ij} là cường độ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j, được định nghĩa như sau:*

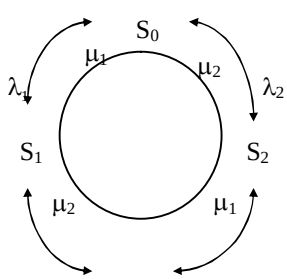
$$q_{ii} = -\lim_{\Delta t\to 0} (P[X(t+\Delta t) \neq i / X(t) = i] / \Delta t),$$

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t\to 0} (P[X(t+\Delta t) = j / X(t) = i] / \Delta t),$$

L¼c L· , Q = $[q_{ij}]$ LÊ c g¸ i l¨ *ma trận cường độ*. T- LiQu ki¾ n (**) ta thÈy, LWt³m ph©n ph´ i gi¸ i hÜn cÏn phÏi giÏi h¾ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]Q = 0$ hay $Q^T[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]^T = 0$.

Ví dụ: Cho $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$. T- sh LÊ c·Êng L¸ chuyWi trÜng th§i cho tr°n h³nh IV.2, c· th WÌ³m LÊ c ma trÌn cÊng L¸ Q, v¸ i Q^T c· dÜng sau:

$$Q^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$



Hình IV.2. Sơ đồ cường độ chuyển trạng thái

Giải thích: $q_{00} = -3$ v³ c·Ò ng L¸ chuyW¬i t¸ tr¬Ïng th§i S_0 sang c§c tr¬Ïng th§i kh§c l¨ $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$, c¸n $q_{10} = 2$ l¨ c·Ò ng L¸ chuyW¬i t¸ tr¬Ïng th§i S_1 v¨o tr¬Ïng th§i S_0.

GiÍi h¹ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]Q = 0$ hay $Q^T[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]^T = 0$ (v¸i LiQu ki¹n b¶ tr¶ $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$) c· kJt quÍ: $\pi_0 = 6/15 = 0,4$; $\pi_1 = 3/15 = 0,2$; $\pi_2 = 4/15 = 0,27$; $\pi_3 = 2/15 = 0,13$. CÍn ch¼Ï r³ng, h¹ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]Q = 0$ theo m¸t nghÍa nhÈt L¶nh l¨ t·Ò ng t¸ v¸i h¹ $\Pi \times (I - P) = 0$, nh·Ò L« tr³nh b¨y trong c§c m¸c 1.2 v¨ 2.1.

GiÍ s¶ l¶i nhuÈn / 1 L¶hn v¶ th¶i gian h¹ th´ng mang lÏi trong c§c tr·Ò ng h¶p c· thW xÍy ra nh·Ò sau: nJu h¹ th´ng trong tr¬Ïng th§i S_0 th³ l¶i nhuÈn l¨ 8 USD, t¬Ïi S_1 l¨ 3 USD, t¬Ïi S_2 l¨ 5 USD, t¬Ïi S_3 l¨ 0 USD. V¶y l¶i nhuÈn trung b³nh / 1 L¶hn v¶ th¶i gian l¨

$$8 \times 0,4 + 3 \times 0,2 + 5 \times 0,27 = 5,15 \text{ (USD)}.$$

Qua v² d¸ ta thÈy $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ L·Ò c x§c L¶nh cÈn c¸ v¨o c§c gi§ tr¶ L« biJt $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$.

λ_1, λ_2: s´ lÍn chi tiJt h¸ng (tu8 thu¸c h¹ th´ng c¸ thW),

μ_1, μ_2 : c§c tham s´ s¸a ch¸a cÍn L·Ò a v¨o.

L¶i nhuÈn cu´i c½ng c¸a h¹ th´ng ph¸ thu¸c v¨o $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ v¨ L·Ò c x§c L¶nh b³ng c§ch giÍi b¨i to§n t´i ·Ò u sau:

$$\text{L¶i nhuÈn } L = c_0\pi_0 + c_1\pi_1 + c_2\pi_2 \rightarrow \text{Max}$$

(c_0, c_1, c_2: lợi nhuận từng trạng thái)

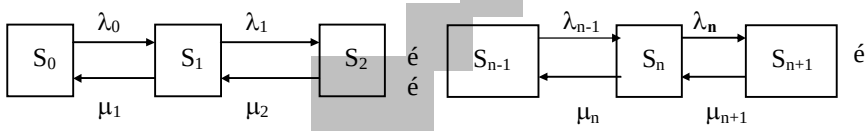
v¸i c§c r¨ng bu¸c:

$$\begin{cases} \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 = 0 \\ \lambda_1\pi_0 + \mu_2\pi_3 - (\lambda_2 + \mu_1)\pi_1 = 0 \\ \lambda_2\pi_0 + \mu_1\pi_3 - (\lambda_1 + \mu_2)\pi_2 = 0 \\ \lambda_2\pi_1 + \lambda_1\pi_2 - (\mu_1 + \mu_2)\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0;\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lưu ý: B¨i to§n tr°n L©y c· 6 biJn (λ_1, λ_2 L« biJ). Ta phI t³m L·Ò c μ_1, μ_2 t b¨i to§n LWc· ph·Ông h·Ò ng x©y d ng h' th´ ng v i l° i nhuJn l n nhBt.

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh–tử cho hệ thống hàng chờ

Qu§ tr³nh sinh – t l¨ tr·Ò ng h° p ri°ng c a x²ch Markov thuI n nhBt th i gian li °n t c, v i kh¹ ng gian tr¨ng th§i S kh¹ ng qu§ LJm L·Ò c S = {S_0, S_1, S_2,..., S_n, é } v¨ ma trJn c·Ò ng L Q = [q_{ij}] c· t²nh chBt q_{ij} = 0 v i $|i - j| \geq 2$. n iQu n¨y c· nghÇa l¨ vi c chuyWi tr¨ng th§i trong qu§ tr³nh sinh–t ch" c· thW i ñ1 L'hn v l°n hoHc xu´ ngò (xem h³nh IV.3).



Hình IV.3. Sơ đồ chuyển trạng thái trong quá trình sinh - tử

T tr¨ng th§i S_n t i th i L'iWm t h' X(t) ch" c· thWchuyWi t i m t trong c§c tr¨ng th§i S_{n+1}, S_n hoHc S_{n-1}. V³ vJy ch¼ng ta c· c§c c·Ò ng L chuyWi:

$$\mu_0 = \lambda_{-1} = 0,\ q_{00} = ï\ \lambda_0,\ q_{n,\,n+1} = \lambda_n,\ q_{n,\,n-1} = \mu_n\ v¨\ q_{n,\,n} = -(\lambda_n + \mu_n)\ \forall n.$$

Trong tr·Ò ng h° p λ_n, $\mu_n > 0$, $\forall n > 0$, theo L'nh l² L« L·Ò c ch ng minh, ph©n ph´ i gi i h¨n c· thW t³m L·Ò c b ng c§ch giI i h' : [π_0 π_1 π_2 π_3 é]Q = 0, v i ma trJn c·Ò ng L Q L« biJ.

Ma trJn chuyWi v c a Q c· d¨ng:

$$Q^T = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{10} & \cdots & q_{n0} & q_{n+1,0} & \cdots \\ q_{01} & q_{11} & \cdots & q_{n1} & q_{n+1,1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{0n} & q_{1n} & \cdots & q_{nn} & q_{n+1,n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Ta c· [π_0 π_1 π_2 π_3 é]Q = 0 $\Leftrightarrow$ Q^T[π_0 π_1 π_2 π_3 é]^T = 0 $\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} q_{00} & q_{10} & q_{20} & \dots \\ q_{01} & q_{11} & q_{21} & \dots \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}.$$

hay:

$$\begin{cases} q_{00}\pi_0 + q_{10}\pi_1 + q_{20}\pi_2 + \text{é} = 0, \\ q_{01}\pi_0 + q_{11}\pi_1 + q_{21}\pi_2 + \text{é} = 0, \\ q_{02}\pi_0 + q_{12}\pi_1 + q_{22}\pi_2 + \text{é} = 0, \\ \text{é} \ . \end{cases}$$

Do t²nh ch Ït LÏHõ bi¾t, nh·ºL« ph©n t²ch ´ tr°n, ç¸a ma tr¾n c·Ò ng L¸ Q ç¸a qu§ tr³nh sinh–t¯, h¾ tr°n L¹Ò c viÙt m¸ t c§ch t·Ò ng minh h¾n nh·ºsau:

$$\begin{cases} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 + \text{é} = 0, \\ \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 + \text{é} = 0, \\ \lambda_1\pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3 + \text{é} = 0, \\ \text{é} \end{cases}$$

T¯ L©y L¸ d¨ng t³m L¹Ò c $\pi_{n+1} = (\lambda_n/\mu_{n+1})\pi_n$, $\forall n = 1, 2, 3, \text{é}$ LWLi ¢¸ i c¹ ng th¸ c t²nh $\pi_i, \forall i$.

$$\begin{cases} \pi_1 = (\lambda_0/\mu_1)\pi_0, \\ \pi_2 = (\lambda_1/\mu_2)\pi_1 = (\lambda_1\lambda_0/\mu_2\mu_1)\pi_0, \\ \pi_3 = (\lambda_2/\mu_3)\pi_2 = (\lambda_2\lambda_1/\mu_3\mu_2)\pi_1 = (\lambda_2\lambda_1\lambda_0/\mu_3\mu_2\mu_1)\pi_0, \\ \text{é} \\ \pi_{n+1} = (\lambda_n/\mu_{n+1})\pi_n = \text{é} = (\lambda_n\lambda_{n-1}\text{é}\ \lambda_0/\mu_{n+1}\mu_n\text{é}\ \mu_1)\pi_0, \\ \text{é} \end{cases}$$

V¸ i LïQu ki¾ n $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$, cu´ i c½ng ta c· :

$$\pi_0 = 1/(1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k\lambda_{k-1}\text{é}\ \lambda_0/\mu_{k+1}\mu_k\text{é}\ \mu_1)).$$

¸ Hõ bi¾ t khi $\mu_n = 0$, $\forall n$, th³ qu§ tr³nh sinh–t¯ tr´ th¨nh qu§ tr³nh sinh thuÇn khiÙt (*pure birth process*). Qu§ tr³nh sinh thu Çn khiÙt v¸ i $\lambda_n = \lambda$ l¨ qu§ tr³nh Po§t –x¹ ng v¸ i tham

s´ λ.

Ví dụ: GiÇ¬s¯ d¸ng kh§ch h¨ng LÆJh mua v®‹ m¸t v£n ph¸ng b§n v®v¸ i M quÇy ph¸ c v¸ l¨ d¸ng Po§t–x¹ ng v¸ i tham s´ λ = 6 kh§ch h¨ng / 1 ph¼t (LiÇu n¨y cÌ ng c· nghÇa l¨ kh§ch h¨ng LÆJh ph¸ ng b§n v® v¸ i c§c th¶ i LiÇm LÆJh tu©n theo luÆt ph©n ph´ i mÌ v¸ i tham s´ λ = 6).

Ngo¨i ra, c¸n biÆt nguy°n tÆc ph¸ c v¸ l¨ FCFS (*First come first serve*) v¨ th¶ i gian ph¸ c v¸ tÜi m¸ i quÇy c· luÆt ph©n ph´ i mÌ v¸ i k ³ v¸ ng 1/3 (ph¼t).

CÇn trÇ¬Å i hai c©u h¸ i sau LÆ©y:

– S´ quÇy h¨ng t´ i thiÇu l¨ bao nhi°u LÇh¨ng ch¶ kh¹ ng tr‹ n°n d¨i v¹ hÜn?

– GiÇ¬s¯ N_t l¨ s´ kh§ch h¨ng LÆang ch¶ hay LÆang LÆÈ c ph¸ c v¸ tÜi th¶ i LiÇm t. Ch¸ n M = 4 v¨ m¸ t kh§ch h¨ng sÉ ch¶ LÇLÆÈ c ph¸ c v¸ nÆu $N_t \le 4$, ch¶ v¸ i x§c suÈt 0,5 nÆu $N_t = 5$ v¨ sÉ b¸ LÆi nÆu $N_t = 6$. H«y x§c LÆ¸nh ph©n ph´ i d¸ ng c¸ a qu§ tr ³nh n¨y?

TrÈ¸c hÆt, trong v² d¸ n¨y ch¼ng ta c· m¸ t qu§ tr³nh sinh–t¯ v¸ i kh¹ ng gian trÜng th§i S = { S_0, S_1, S_2, é , S_n, é }, trong LÆ· S_n l¨ trÜng th§i trong v£n ph¸ ng c· n kh§ch h¨ng. C§c cÈ ng LÆ¸ chuyÇi l¨ $\lambda_k = 6$ v¸ i k = 0, 1, 2,... c¸ n $\mu_k = 3k$ v¸ i k ≤ M v¨ $\mu_k = 3M$ v¸ i k > M (LiÇu n¨y l¨ do biÆt c¸ c tiÇu c¸ a c§c biÆt ngÈu nhi°n v¸ i ph©n ph´ i mÌ LÆ¸ c lÆp cÌ ng c· ph©n ph´ i mÌ v¸ i tham s´ b³ng t¯ ng c§c tham s´ c¸ a c§c ph©n ph´ i mÌ tÈ¸ng ¸ ng).

Do $\lambda_k / \mu_{k+1} = 6/3M < 1$ (khi k ≥ M) n°n v¸ i M ≥ 3 th³:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k \lambda_{k-1} \ldots \lambda_0 / \mu_{k+1} \mu_k \ldots \mu_1) < \infty.$$

B‹ i vÆy h¨ng LÆ¯ i sÉ kh¹ ng d¨i v¹ hÜn (nÆu tr§i lÜi, khi chu¸ i ph©n k³, th³ $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \ldots = 0$, n°n s´ kh§ch trong h¨ng LÆ¯ i sÉ dÇn t¸ i m¸ t s´ h¸ u hÜn khi t → ∞ v¸ i x§c suÈt b³ng 0).

Trong c©u h¸ i th¸ hai, ta c· $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 6$, $\lambda_5 = 3$. Theo c¹ ng th¸ c t²nh $\pi_0 = 1/(1 + \sum_{k=0}^{5} (\lambda_k \lambda_{k-1} \ldots \lambda_0 / \mu_{k+1} \mu_k \ldots \mu_1))$ ta c· ngay π_0 = 12/89. T¸ LÆ· t²nh ra π_1 = 24/89, π_2 = 24/89, π_3 = 16/89, π_4 = 8/89, π_5 = 4/89 v¨ π_6 = 1/89.

3. Mô phỏng xích Markov

3.1. Mô phỏng xích Markov thời gian rời rạc

Phương pháp 1

X²ch Markov r¶ i rÜc v¨ thuÇn nhÈt c¸ n c· thÇLÆÈ c k² hi¯ u l¨ X_0, X_1, X_2,... GiÇ¬s¯ kh¹ ng gian trÜng th§i l¨ S g¶m h¸ u hÜn trÜng th§i: S = {0, 1, 2,..., N} v¨ ma tr£n x§c suÈt chuyÇi trÜng th§i LÆ« LÆÈ c biÆt l¨ P = $[p_{ij}]_{N \times N}$. Ch¼ng ta sÉ m¹ ph¸ ng x²ch Markov r¶ i rÜc v¨ thuÇn nhÈt th¹ ng qua v² d¸ LÆ« tr³nh b¨y ‹ c§c m¸ c 1.2 v¨ 2.1 c¸ a chÈ¸ng n¨y.

Ta c· ph©n ph´ i ban L£u l¨:

X_0	1	2	3
$\Pi^{(0)}$	$\pi_1^{(0)} = 0,2$	$\pi_2^{(0)} = 0,5$	$\pi_3^{(0)} = 0,3$

ng Wm¹ ph¸ng X_0 ta §p d¸ng ph¬ng ph§p m¹ ph¸ng ph©n ph´ i r Ïc L« h c ch¬ng III. Tr°n m§y t²nh, ta ph§t sinh ra m¸ t s´ ngXu nhi°n r = RANDOM[0,1) theo luat ph©n ph´ i L£u U[0,1) trong [0,1). NJu r $\le 0,2$ ta lÊy $X_0 = 1$; nJu $0,2 < r \le 0,7$ th³ ta lÊy $X_0 = 2$; c¸n nJu $r > 0,7$ th³ L£y $X_0 = 3$. CÐn c¨ kJi quÞ m¹ ph¸ng X_0, ta m¹ ph¸ng X_1 d¸a tr°n ma trËn x§c suÊt chuyWn tr¹ng th§i:

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

GiÞ s´ L« biJt $X_0 = 2$, l¼c L· ta cÞn m¹ ph¸ng biJn ngXu nhiên X_1 cÐn c¨ ph©n ph´ i sau:

X_1	1	2	3
X§c suÊt t¬ng ¨ ng	$p_{21} = 0,07$	$p_{22} = 0,9$	$p_{23} = 0,03$

ng iQu n¨y c· th WL¬Ø c th¸ c hi¹ n t¬ng t¸ nh¬Ø khi m¹ ph¸ng X_0. CÞn ch¼Ï r³ng, trong h¨ng th¨ hai c¸a bÞng tr °n ta c· ph©n ph´ i x§c suÊt c· L£iQu ki¹ n c¸a X_1 v¸ i L£iQu ki¹ n $X_0 = 2$. C§c b¬Ø c tiJp theo m¹ ph¸ng $X_2, X_3,...$ L¬Ø c tiJn h¨nh t¬ng t¸ (cho t¸ i X_{500} ch³ng hÜn).

LÞp lÜi quy tr³nh n¨y bËt L£u t¸ X_0 cho m¸ t s´ b¬Ø c lÞp L L¸ l¸ n (ch³ng hÜn 1000 lÞn), ta sÉ c· m¸ t b¸ 1000 s´ li¹ u cho X_{500}. T¸ L· , c· th Wt³m L¬Ø c bÞng ph©n ph´ i tÞn suÊt (c¸n g¸ i l¨ x§c suÊt th¸ c nghi¹ m) c¸a X_{500} qua th² nghi¹ m m¹ ph¸ng tr °n L©y L´ i v¸ i X_{500}. Nh¬Ø vËy, ta t³m L¬Ø c v®c tr¸ ph©n ph´ i (x§c suÊt th¸ c nghi¹ m) $\Pi^{(500)}$. Cu´ i c½ng, ch¼ng ta c· kJi quÞ t³m gÞn L¼ng ph©n ph´ i d¸ ng l¨: $\Pi \approx \Pi^{(500)}$.

Chú ý:

– Trong v² d¸ tr°n L©y, ta thÊy c· thWd½ng m¹ ph¸ng L Wt³m ph©n ph´ i d¸ ng. Tuy nhi°n, m¸ c L²ch ch¸ yJu c¸a ph¬ng ph§p 1 l¨ nh³m m¹ ph¸ng c§c x²ch Markov r i rÏc thuÞn nhÊt, l¨ c§c qu§ tr³nh c· th WxÞy ra trong c§c h¹ th´ ng ph¸ c tÜp.

– Khi kh¹ ng gian tr¹ng th§i S g¸m m¸ t s´ l¸ n c§c tr¹ng th§i th³ ph¬ng ph§p m¹ ph¸ng tr °n y°u cÞu th¸ i gian chÜy m§y t²nh kh§ l¸ n. ng Wkhac ph¸ c L£iQu n¨y, ch¼ng ta xem x®t ph¬ng ph§p 2 sau L©y.

Phương pháp 2

X®t m¸ t h¹ th´ ng kqthuat L¬Ø c biWd¸ n b¹ i x²ch Markov r i rÏc thuÞn nhÊt $\{X_t\}$, t = 0, 1, 2,... v¸ i kh¹ ng gian tr¹ng th§i S c· N tr¹ng th§i (N kh§ l¸ n) v¨ ma trËn chuyWn tr¹ng th§i $P = [p_{ij}]_{N \times N}$. X®t th¸ i L£iWn n, tÜi th¸ i L£iWn n¨y giÞ s´ L« m¹ ph¸ng L¬Ø c $X_n = s$. Ta sÉ m¹ ph¸ng th¸ i gian T_n l¨ th¸ i gian t¸ i lÞn nhÞy tiJp theo s¸ m nhÊt m¨ $X_{t+Tn} \neq s$. Do x²ch

Markov l¨ r å i rÜc n °n T_n ch" c· thWnhhdn c§c gi§ tr• 1, 2, é ¸n Hop = p_{ss}, d¸ thÜy T_n c· ph©n ph´ i h³nh h` c nh·Ęsau:

Tn	1	2	...	k	...
X§c suÜt t·Ęhng¸ ng	1−p	(1−p)p	...	$(1-p)p^{k-1}$	...

M¹ ph¸ ng ph©n ph´ i n¨y ta t³m L·Ęc gi§ tr• T_n. C¸n X_{n+Tn} c· ph©n ph´ i x§c suÜt nh·Ęsau:

X_{n+Tn}	1	2	...	s	...	N
X§c suÜt t·Ęhng¸ ng	$p_{s1}/(1-p_{ss})$	$p_{s2}/(1-p_{ss})$	...	0	...	$p_{sN}/(1-p_{ss})$

C§ch m¹ ph¸ ng n¨y sÉ tiJt ki¾m hhn th å i gian chÜy m§y t²nh (khi N kh§ l¸ n), nh·Ęng vi¾c lDp tr³nh sÉ ph¸ c tÜp hhn ²t nhiQu.

X®t v² d¸ nh·ęL« tr³nh b¨y tr°n, nJu d½ng ph·Ęhng ph§p 2, m¸ t c§ch ho¨n to¨n t·Ęhng t¸ , ch¼ng ta cÌ ng t³m L·Ęc ph©n ph´ i d¸ ng $\Pi^{(*)} \approx \Pi^{(500)}$.

3.2. Mô phỏng xích Markov thời gian liên tục

X®t x²ch Markov th å i gian li°n t¸ c $\{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Gi¡ s¾ r³ng x²ch L·i v¨o tr¡ng th§i i tÜi th å i L·iWm n¨o L· , ch¾ng hÜn th å i L·iWm 0, v¨ kh¹ ng r å i kh¸ i tr¡ng th§i n¨y cho L·Jn th å i L·iWm s. L¼c L· , do t²nh ñkh¹ ng nh¸ ò c¸ a qu§ tr ³nh Markov, x§c su ÜtL·Wx²ch vXn tiJp t¸ c¾ nguy°n tr¡ng th§i L· cho t¸ i th å i L·iWm (t + s) sÉ l¨:

$$P\{(T_i > s + t)/(T_i > s)\} = P\{T_i > t\}$$

trong L· T_i l¨ th å i gian qu§ tr³nh d¸ ng lÜi¾ tr¡ng th§i i. D¸ thÜy, nJu T_i c· ph©n ph´ i mÌ v¸ i h¨m ph©n ph´ i $F(T_i < \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$ th³ L·Ęng th¸ c tr°n L·Ęc thoQ m«n. ¸ iQu ng·Ęc lÜi cÌ ng c· thWch¸ ng minh L·Ęc. VdJy T_i c· ph©n ph´ i mÌ .

T¸ nhdn x®t tr °n, ta c· thWL·Ęa ra m¸ t *định nghĩa khác cho xí ch Markov thời gian liên tục.* X²ch Markov th å i gian li°n t¸ c l¨ m¸ t qu§ tr³nh ngXu nhi°n c· c§c t²nh ch ÜtL sau m¸ i khi n· L·i v¨o tr¡ng th§i i:

– L·Ęng th å i gian T_i x²ch d¸ ng lÜi tÜi tr¡ng th§i i tr ·Ęc khi n· chuyWi sang tr¡ng th§i kh§c l¨ m¸ t biJn ngXu nhi °n v¸ i ph©n ph´ i mÌ c· tham s´ v_i (hay c· k³ v` ng $1/v_i$).

– M¸ t khi qu§ tr³nh r å i kh¸ i tr¡ng th§i i, n· sÉ L·i v¨o tr¡ng th§i j n¨o L· (L¸ c lDp v¸ i T_i) v¸ i c§c x§c suÜt p_{ij} thoQ m«n $\sum_j p_{ij} = 1, p_{ii} = 0, \forall i$.

VdJy L·Wm¹ ph¸ ng x²ch Markov th å i gian li°n t¸ c, ch¼ng ta cÇn m¹ ph¸ ng d«y τ_0, τ_1, τ_2,... (c§c l·Ęng th å i gian τ_r x²ch d¸ ng lÜi tÜi tr¡ng th§i J_r tr·Ęc khi n· chuyWi sang tr¡ng th§i kh§c) v¨ d«y J_0, J_1, J_2,... (c§c tr¡ng th§i m¨ x²ch chuyWi L·Jn). ¸ WJph§t sinh τ_r, nh·Ętr°n L« n· i, ta cÇn biJt tham s´ v $_{Jr}$ c¸ a ph©n ph´ i mÌ t·Ęhng¸ ng. C¸n L·Wph§t sinh tr¡ng th§i x²ch

Markov chuyWi L'Jh J_r ∀r, ch¼ng ta c· b Ţng ph@n ph´ i x§c suЫ sau:

TrÜng th§i L'Jh	1	2	...	i	...	N
X§c suЫ t·Θng ..ng	p_{i1}	p_{i2}	...	0	...	p_{iN}

Trong bŢng tr°n, i = J_r ï 1 l¨ trÜng th§i c„ a x²ch tÜi b·Θ c r – 1 (v‚ i c§c x§c suЫ p_{ij} thoŢ m«n $\sum_j p_{ij} = 1, p_{ii} = 0, \forall i$).

ņ Wh¸ c hi' n m¹ ph¸ ng x²ch Markov th° i gian li °n t„ c, c· thWs' d„ ng s´ li' u c„ a v² d„ L'« x®t trong m„ c 2.4 hay 2.5.

Phần bài tập

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. V¸i v² d¸ trong m¸c 1.2 ch¬ng I, h«y §p d¸ng ph¬ng ph§p Lªn h³nh LWi theo quy tr³nh $0 \to A \to B$ nh³m LÜt t¸i z_{max}.

2. Giµi BTQHTT sau L©y:

$$z = 6x_1 + 8x_2 \to Max$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Giµi BTQHTT sau L©y:

$$z = 40x_1 + 30x_2 \to Max$$

v¸i c§c r¨ng bu¸c

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 20 \\ \frac{1}{2}x_2 \le 5 \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \le 28 \\ x_1 \ge 30 \\ x_2 \ge 5 \\ (x_1, x_2 \ge 0) \end{cases}$$

Hướng dẫn: ¸n WLªa vQdÜng ch²nh tc, ta c¸n 5 biµn b ½(3 biµn b½thiµu v¨ 2 biµn b½ th¸a) v¨ 2 biµn giµ (s´ biµn giµ b³ng s´ biµn b ½th¸a).

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 20 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_4 = 5 \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + x_5 = 28 \\ x_1 - x_6 + x_7 = 30 \\ x_2 - x_8 + x_9 = 5 \\ x_1, x_2, x_3..., x_9 \geq 0 \end{cases}$$

H¨m m„c ti°u sƐl¨

$$z = 40x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 + 0x_8 - Mx_9.$$

4. Ch¼ng ta xem x®t m¸t d¸§n thiJt kJn©ng cÐp mÜng LÍn b³ng h¹ th´ng c§p ngÐm cho m¸t tr·Ê ng LÜi h¯c. MÜng LÍn LÊc thiJt kJcho ba tuyJn sau: khu h¨nh ch²nh, khu giÐng LÊ ng v¨ LÊ ng d©y bÐo v¹. Do y°u cÐu vQmHÞ kQthuJt gi§ m¸t m®t c§p ´ c§c tuyJn tr°n l¨ kh§c nhau v¨ lÐn l·Ê t nh·Êsau: 500, 400 v¨ 200 ngh³n LÅ° ng. G¯i x_i l¨ chiQu d¨i c§c tuyJn tr°n, theo LiQu kÍn thiJt kJc· c§c r¨ng bu¸c nh·Êsau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1900, \\ x_1 + x_2 \geq 1500, \\ x_1 + x_3 \geq 1400, \\ x_2 + x_3 \geq 900, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

H«y lÐp ph·Êng §n thiJt kJc· t´ ng chi ph² mua c§p nh¸ nhÖt v¸i c§c r¨ng bu¸c tr°n v¨ h¨m m„c ti°u sau:

$$z = 500x_1 + 400x_2 + 200x_3 \rightarrow \text{Min}.$$

5. Ph§t biW m¸t m¹ h³nh t´i ·Êu LÆa m„c ti°u (tuyJn t²nh hoHÞ phi tuyJn, t¸ hai LJn b´n m„c ti°u) ¸ng d„ng trong quÐn l² s¨ d„ng hay thiJt kJh¹ th´ng kQthuJt LÍn.

6. X®t b¨i to§n t´i ·Êu phi tuyJn ba m„c ti°u ph§t sinh trong qu§ tr³nh nghi°n c¸u c§c ÐnH h·Ê ng c„a c§c yJu t´ nhÍt t¸ X_1 (^{0}C) v¨ bQd¨y l¸p sÖy X_2 (cm) t¸i c§c ch" ti°u vQ h¨m l·Ê ng tinh dÐu Y_1, chi ph² n¥ng l·Ê ng Y_2 v¨ t´c L¸ sÖy Y_3. Sau L©y l¨ ph§t biW to§n h¯c c„a b¨i to§n cÆn c¸ kJt quÐ quy hoÜch th¸c nghi¹m L« tiJn h¨nh:

Y_1= 9,147247 ï 0,609964X_1 ï 0,679045X_2 ï 0,005767X_1X_2

ï 0,003268X_1^2 ï 0,007967X_2^2 (%) → Max

Y_2 = 38,2168 ï 1,1324X_1 ï 0,9554X_2 + 0,004166X_1X_2 + 0,01097X_1^2

$$+ 0{,}03909X_2^2 \text{ (Kwh/kg)} \rightarrow \text{Min}$$

$$Y_3 = -4{,}760179 + 0{,}110704X_1 + 0{,}023387X_2 + 0{,}0013666X_1X_2$$

$$- 0{,}002884X_1^2 - 0{,}006722X_2^2 \text{ (Kg}H_2O\text{/h)} \rightarrow \text{Max.}$$

H«y giÇi b¨i to§n tr°n b³ng phÊn mQm t²nh to§n th²ch h° p v¨ kiW¬m tra kJÌ quÇc §c g iÇi gi§ tr· th²ch h° p cho X_1 l¨ t¸ 44^0C t¸ i 51^0C, X_2 t¸ 9,5cm t¸ i 13,5cm.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Giải bài toán vận tải cho trong bảng sau:

7	11	8	13	110
21	17	12	10	100
8	18	13	16	50
50	70	60	80	Σ = 260

2. Giải bài toán phân công nhiệm vụ, với thời gian thực hiện (cột a mỗi kỹ sư đều ghi theo hướng) cho trong bảng sau:

32	18	32	16	1
22	14	12	16	1
24	30	26	24	1
26	30	28	20	1
1	1	1	1	

Tìm cách phân công nhiệm vụ (mỗi một trong số bốn kỹ sư được giao một nhiệm vụ) làm cực tiểu hoá tổng thời gian thực hiện.

Hướng dẫn: Bài toán trên cũng giải được theo phương pháp phân công (cũng bốn cột cùng nhóm bốn cột, với tổng cộng bằng tổng cột và bằng 4).

3. Hai máy biến áp đang lắp 580KVA và 650KVA hoà lưới làm thành cái cung cấp điện cho bốn nhóm máy A, B, C và C có cường suất tải lần lượt là 180, 270, 420 và 320. Qua khảo sát, chúng ta có các số liệu sau:

– Chi phí truyền tải một đơn vị cường suất máy biến áp thứ nhất là $C_{1A} = 250$, $C_{1B} = 300$, $C_{1C} = 320$ và $C_{1D} = 310$ đồng / đơn vị cường suất.

– Chi phí truyền tải một đơn vị cường suất máy biến áp thứ hai là $C_{2A} = 350$, $C_{2B} = 380$, $C_{2C} = 330$ và $C_{2D} = 340$ đồng / đơn vị cường suất.

Hãy tìm cường suất mỗi nhóm máy cần thiết các máy biến áp để cường chi phí truyền tải là nhỏ nhất.

4. Lập mạng PERT cho dự án với các hoạt động sau đây:

Hoạt động	Thời	Thời gian (tuần)

A	–	3
B	–	4
C	–	4
D	A	5
E	B	2
F	D, E	7
I	C, F	6

H«y t³m thời gian tới thiểu để hoàn thành dự án và xác định công việc phải ưu tiên chính trong.

Hướng dẫn: Kiểm tra kỹ quan t³m lên đường gồm A → D → F → I.

5. Xem xét một dự án với các dữ liệu sau:

Hoạt động	Hoạt động kế trước	Thời gian ước tính (ngày)		
		a	m	b
A	–	3	6	9
B	–	2	5	8
C	A	2	4	6
D	B	2	3	10
E	B	1	3	11
F	C, D	4	6	8
G	E	1	5	15

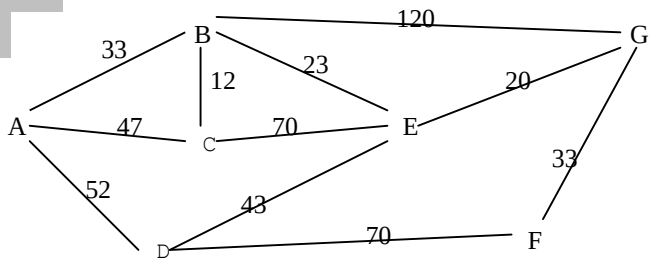
H«y giải quyết các vấn đề sau đây:

– Vẽ sơ đồ mạng.

– Tính thời gian (trung bình) hoàn thành dự án sớm nhất.

– T³m xác suất để dự án thực hiện trong vòng 20 ngày.

6. Xác định đường khung tối thiểu cho mạng lưới dưới sau về phương diện thực tiễn cần:



7. Cho một lưới gồm 15 (hơn với tiếp) cổ thể đến với các dự án sau: I, II, III

theo c§c m¸c 0, 3, 6, 9, 12, 15 v¸i m¸c lÞi nhuËn nh©sau:

S´ tiQn LÞu t©e	M¸c lÞi nhuËn		
	I	II	III
0	0	0	0
3	1	2	2
6	4	5	5
9	6	6	6
12	8	7	7
15	10	9	8

X§c LÞnh ph©hng §n chÒn danh m¸c LÞu t©v¨ m¸c LÞu t©sao cho t¨ng lÞi nhuËn l¨ l¸n nhËt.

8. H«y t³m ph©hng §n t´i ©u ph©n ph´i c¹ng suËt c¸a ba nh¨ m§y 1, 2 v¨ 3 v¸i ph¸ tQi v¨ t¨n thËt c´ LÞnh. BiJt chi ph² c¸a c§c nh¨ m§y l¨ h¨m ph¸ thu¸c v¨o c¹ng suËt $f_i(p_i)$, trong LÞ· p_i l¨ c¹ng suËt th¸c tJc¸a nh¨ m§y i, v¸i i = 1, 2, 3. GiQ s¸ ch¼ng ta LÞ« khQo s§t LÞÈc c§c s´ li¨u sau:

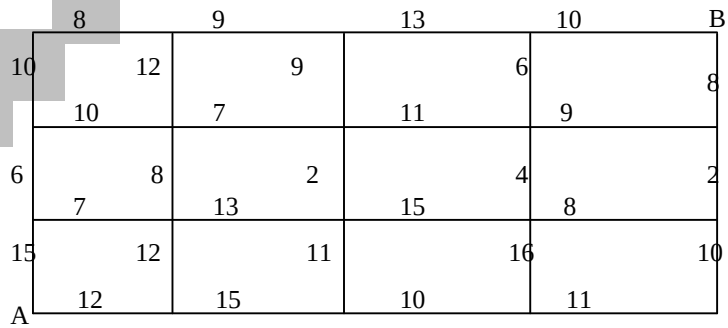
– T¨ng c¹ng suËt cQ ba nh¨ m§y cÞn cung cËp l¨ 18 (LÞn v¨ c¹ng suËt).

– $f_1(p_1) = 4p_1$, $f_2(p_2) = 3P_2$, $f_3(p_3) = 3P_3$.

– $0 \le p_1 \le P_{1MAX} = 7$, $0 \le p_2 \le P_{2MAX} = 8$, $0 \le p_3 \le P_{3MAX} = 6$.

Hướng dẫn: Áp d¸ng quy hoËch LÞ¸ng.

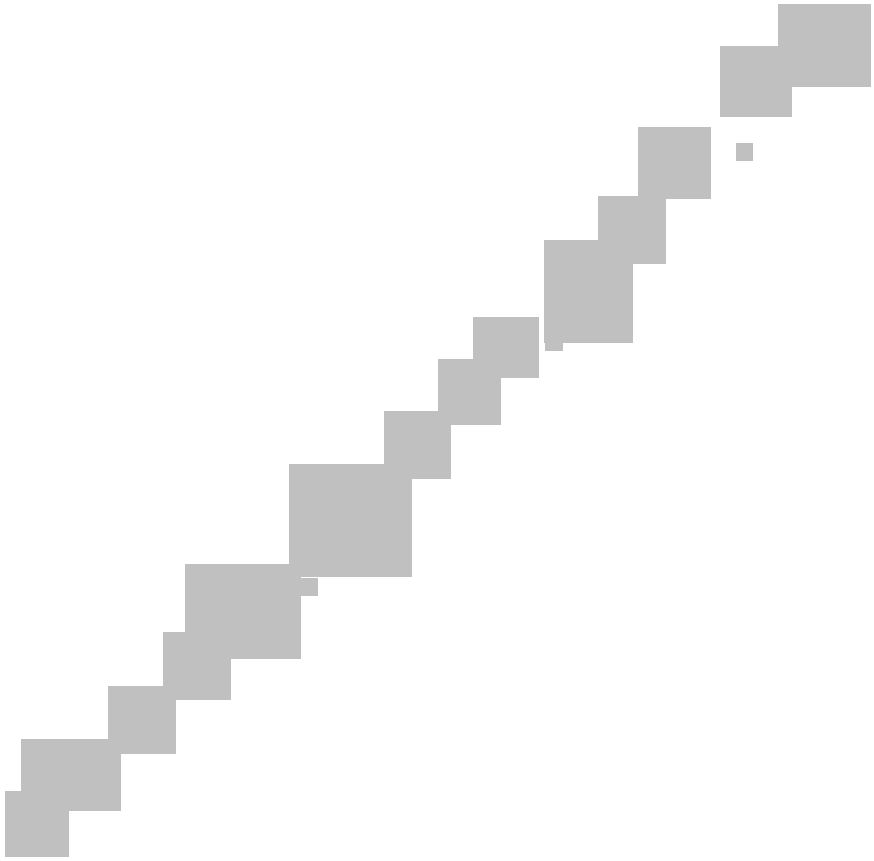
9. X§c LÞnh tuyJn LÞÈng LÞi c¸a LÞÈng d©y truyQn tQi LÞi¨n t¸ LiWn A LÞJn LiWn B, v¸i c§c ch©Ø ng ngËi vdt kh§c nhau, sao cho t¨ng chi ph² l¨ nh¸ nhËt. C§c d¸ ki¨n c¸a b¨i to§n nh©sau:



NhÈvdy LWthiJt ldp sh LÞÈng truyQn tQi LÞi¨n th³ xuËt ph§t t¸ A ta c· thWLÞnh tuyJn LÞi c¸a LÞÈng truyQn tQi LÞi¨n tr©c hJt qua m¸t trong hai LiWn s§t gÞn, theo h©Ø ng

bdc hay h·Ę ng L¹ ng, v¸ i c§c chi ph² l¨ 15 v¨ 12. T¯ m¸ t trong hai LiWn n¨y, ch¼ng ta lÜi tiJp t¸ c x§c L' nh tuyJh Li cho L²Ę ng truyQn tţi Li' n, v¸ i c§c chi ph² L« biJ,... VdÿY ta c· b¨i to§n t³m L²Ę ng Li v¸ i chi ph² nh¸ nhÖt.

Hướng dẫn: Chia b¨i to§n th¨nh nhiQu giai LoÜn nh¸ v¨ §p d¸ ng ph·Ęhng ph§p quy hoÜch L¸ ng.



BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Khảo sát 200 xung tần hiệu qua cổng vào LIFO khi xét chế độ hòa nhịp, người ta thấy trung bình 2 giây có một chuỗi xung. Số liệu đã cho về thời gian xung của các chuỗi xung như sau:

Thời gian xung (giây)	Số lần	Tần suất
3	50	0,25
4	40	0,20
5	50	0,25
6	60	0,30

Bằng phương pháp mô phỏng ngẫu nhiên (nhập các thông tin trình tự sự tự nhiên hệ xác định hệ số van LIFO (tại thời điểm) cần mô sao cho việc LIFO hòa nhịp chế độ hòa nhịp LIFO liên tục (nếu các khách, các chuỗi xung lưu lại LIFO phục vụ kịp thời).

2. Xét một hệ thống một kênh phục vụ thoả mãn: số tần hiệu LIFO có phân phối Poat–xưng, thời gian phục vụ có phân phối mũ. Giả sử A = 3 tần hiệu LIFO trung bình trong một phút, S = 4 tần hiệu LIFO trung bình trong một phút. Hãy xét trạng thái các kích quả sau về phân tích ý nghĩa các chỉ số: $L_q = 9/4(4-3) = 2,25$; $L_s = 3/1 = 3$; $W_q = 3/4 = 0,75$; $W_s = 1$; $P_w = 3/4 = 0,75$.

Tuy nhiên, với $P_w = 0,75$, ta thấy 75% số tần hiệu phải chờ trước khi LIFO phục vụ. Điều này có nghĩa là các cần thiết hàng chờ LIFO hiệu quả phục vụ LIFO tốt hơn. Một trong các biện pháp LIFO làm tăng hiệu quả phục vụ LIFO tốt hơn lên cao tốc độ phục vụ. Hãy lập bảng tần về so sánh khi các tham số khác của hàng đến, riêng S nhận các giá trị khác nhau S = 4, 6, 8 và 10.

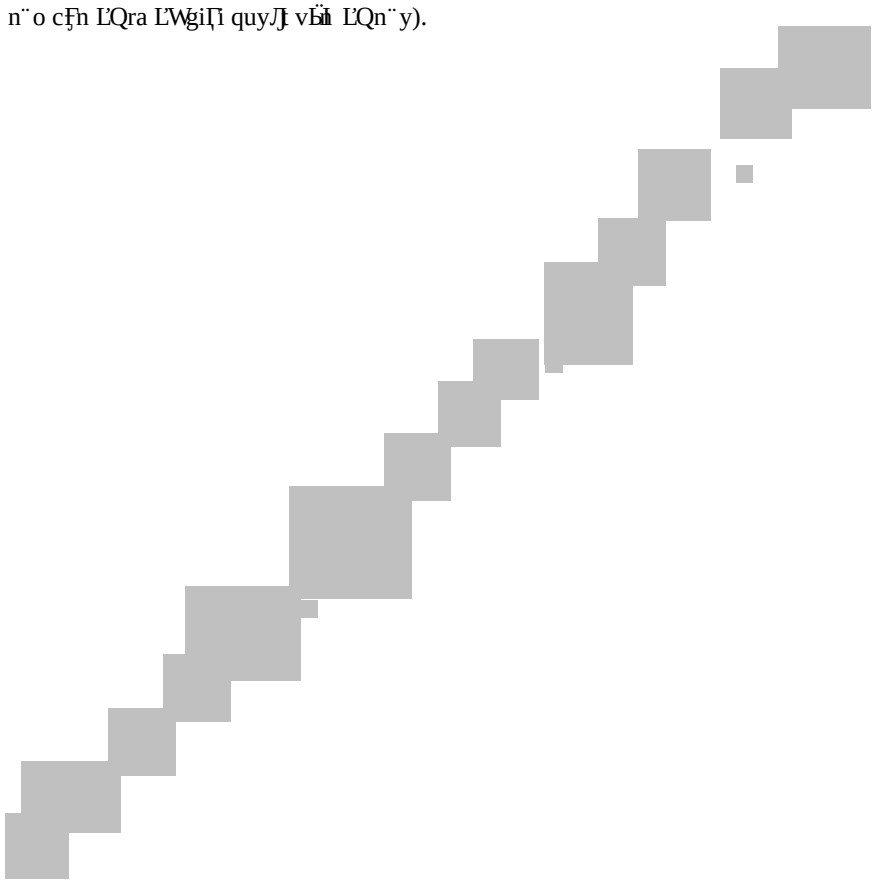
3. Xét một hệ thống nhiều kênh phục vụ với các giả thiết hệ trong bài tập trên (A = 3 và S = 4). Hãy tính các chỉ số của một hệ thống khi số kênh phục vụ k = 2, 3. Tại phân tích ý nghĩa các kết quả LIFO so sánh với kết quả khi sử dụng một hệ thống một kênh phục vụ.

4. Một trường bắn LIFO viện thống cấp 13 cổng. Thời gian phục vụ một khách hàng trung bình là 5 phút. Kết quả khảo sát thống kê cho biết số lượng tần hiệu LIFO trong một giờ, cần kết quả thu thập phiếu thăm dò ý kiến khách hàng cho biết thời gian trung bình (số phút) một khách hàng cần thời gian phục vụ nhau sau:

Các giai đoạn	Số tần hiệu / giờ	Thời gian cần thời điểm tại

Nhu cÇu cao	120	5
Nhu cÇu trung b³nh	60	5,5
Nhu cÇu thÈp	30	6

S¯ d¸ng m¹ph¸ ng ngÜu nhi °n, h«y x§c L¦nh quy tr³nh t²nh to§n t³m s´ c¨ ng t´ i thiWu cÇn m¨ trong m¸ i giai LoÜn LWL§p ¸ ng LÈc y°u cÇu c¸ a kh§ch h¨ ng (nh¸ ng giÝ thiJt n¨ o cÇn LQra LWgiÝ i quyJt vÈn LQn¨ y).



BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Ch" s´ ti °u th„ L¡i' n l¨ m¸ t l·Ể ng ngẪu nhi°n c· ph©n ph´ i tỮi th̉ i L¡iWm ban LỆu nh·Ể sau:

X_0	D·Ể i 50 s´	50 t¸ i 100	100 t¸ i 150	Tr°n 150
T" l' %	5%	40%	40%	15%

BiJt ma trẬn x§c suỂt chuyWm trỮng th§i l¨:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}85 & 0{,}08 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{bmatrix}$$

– H«y giỆi th²ch Ĩ nghĩa c„ a ma trẬn P.

– T³m ph©n ph´ i d¸ ng c„ a x²ch Markov th̉ i gian r̉ i rỮc tr °n L¡©y v¨ cho biJt Ĩ nghĩa c„ a kJt quỆ thu L¡Ể c.

2. Cho X_n l¨ m¸ t x²ch Markov v¸ i kh¹ ng gian trỮng th§i S = {1, 2, 3, é } v ¨ ma trẬn x§c suỂt chuyWm trỮng th§i:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & \dots \\ 0 & 7/8 & 0 & 1/8 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

H«y t³m v®c tẬ ph©n ph´ i bỂt biJn $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, é]$ sao cho $\Pi \times P = \Pi$.

Chú ý: ¸ n Wt²nh π_0 cỆn §p d„ ng ph·Ể nng ph§p t²nh gỆn L¼ng.

3. Cho $\{X_t\}_{t \geq 0}$ l¨ m¸ t x²ch Markov v¸ i ma trẬn c·Ể ng L¸ sau L¡©y:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

H«y t³m ph©n ph´ i gi¸ i hỮn cho x²ch Markov tr °n L¡©y.

4. M¸ t h' th´ ng d̉ ch v„ kỢ thuẬt c· hai k °nh. GiỆ s' r³ng th̉ i gian ph„ c v„ t²n hi ' u LỆJn c„ a hai k°nh n¨y c· ph©n ph´ i mỀ L¸ c lẬp v¸ i nhau v¸ i k³ v̀ ng l¨ 20 (gi©y), t¸ c l¨ µ = 1/20, khi trong h ' th´ ng kh¹ ng c· qu§ hai t²n hi' u. NJJu trong h ' th´ ng c· t¸ ba t²n hi' u tr´ l°n th³ µ = 1/30. Ngo¨i ra cỀ ng giỆ s' r³ng d¸ ng t²n hi' u LỆJn l¨ d¸ ng Po§t–x¹ ng v¸ i tham s´ λ = 1/10 khi h ' th´ ng c· ²t h Hn ba t²n hi ' u v¨ λ = 1/30 nJJu h'

th´ ng c· t¸ ba t²n hi¨u tr¨ l °n. T³m ph©n ph´ i gi¸ i hÜn c¸ a x²ch Markov X_t v¨ t³m x§c suÐt gi¸ i hÜn m¨ m¸ t t²n hi¨u phÙi chÕ tr·Ẹ c khi LÊ c ph¸ c v¸ .

5. X® x²ch Markov th¨ i gian r¨ i rÜc thuÊn nhÐt v¸ i kh¹ ng gian trÜng th§i S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. GiÙ s¨ qua khÙo s§t c§c mÔu th´ ng k° LÊ« biÙt LÊ c ma trÐn x§c suÐt chuyW trÜng th§i (sau m¸ i LÊn v¨ th¨ i gian, c· thW¨ ph¼t, tuÊn, nÐm, thÙh¨ é) nh·Ẹsau:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0 & 0{,}8 & 0{,}19 & 0 & 0 \\ 0{,}03 & 0 & 0 & 0{,}76 & 0{,}21 & 0 \\ 0{,}09 & 0 & 0 & 0 & 0{,}74 & 0{,}17 \\ 0 & 0{,}19 & 0 & 0 & 0 & 0{,}81 \end{bmatrix}$$

H«y trÙ¨ i c§c c©u h¸ i sau:

– C§c trÜng th§i n¨o l¨ trÜng th§i hÐp th¸ , c§c trÜng th§i n¨o l¨ trÜng th§i truyQn¸ ng? H«y t³m x§c suÐt LWqu§ tr³nh b¨ hÐp th¸ v¨o m¸ i m¸ t trÜng th§i hÐp th¸ khi qu§ tr ³nh xuÐt ph§t t¸ m¸ t trong c§c trÜng th§i truyQn¸ ng.

– T³m th¨ i gian trung b ³nh (k³ v¨ ng th¨ i gian) t¸ l¼c qu§ tr ³nh xuÐt ph§t (t¸ m¸ t trÜng th§i truyQn¸ ng n¨o LÊ·) cho t¸ i khi b¨ hÐp th¸ .

– T²nh th¨ i gian trung b³nh qu§ tr³nh rhi v¨o m¸ t trÜng th§i truyQn¸ ng LÊ« ch¨ n n¨o LÊ· trẹ c khi n· rhi v¨o trÜng th§i hÐp th¸ .

Hướng dẫn: Xem lÜi m¸ c 2.3.

CÙn ch¼Ï r³ng, vÐi LÊQnh·Ẹm¹ tÙ trong b¨i tÐp n¨y c· thWph§t sinh trong nhi Qu lQnh v¸ c nh·Ẹtrong h¨ th´ ng kQthuÐt LÊi¨ n – LÊi¨ n t¨ , kinh tÙJn¹ ng nghi¨ p (chuyWi d¨ ch c§c loÜi h³nh s¨ d¸ ng LÊÐt, quy m¹ s¨ d¸ ng LÊÐt, hay kinh tÙJh¸), sinh h¨ c (chuyWi d¨ ch tÙÊn s´ gene qua c§c thÙJh¨), x « h¸ i h¨ c, v¨ nhiQu lQnh v¸ c kh§c é

6. H«y ph§t bi W thuÐt giÙi LÊWm¹ ph¸ ng x²ch Markov trong c§c v² d¸ LÊ c tr³nh b¨y tÜi c§c m¸ c 2.4 v¨ 2.5.

Phần Phụ lục

Phụ lục 1. Bảng tìm xác su ất P(X<t) cho bi ến ngẫu nhiên X tuân theo phân ph ối chuẩn tắc ~ N(0,1)

t	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.93891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.97286	.87493	.87698	.87900	.88100	88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94815	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670

t	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99066	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99899	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99988	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99989	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Phụ lục 2A. Bảng 2500 chữ số ngẫu nhiên

1581922396	2068577984	8262130892	8374856049	4637567488
0928105582	7295088579	9586111652	7055508767	6472382934
4112077556	3440672486	1882412963	0684012006	0933147914
7457477468	5435810788	9670852913	1291265730	4890031305
0099320858	3090908872	2039593181	5973470495	9776135501
7245174840	2275698645	8416549348	4676463401	2229367983
6749420382	4832630032	5670984959	5432114610	2966095680
5503161011	7413686599	1198757695	0414294470	0140121598
7164238934	7666127259	5263097712	5133648980	4011966963
3593969525	0272759769	0385998136	9999989966	7544056852
4192054466	0700014629	5469439659	8408703469	1074373131
9697426117	6488888550	4031652526	8123543276	0927534537
2007950579	9564268448	3457416988	1534027886	7016633739
4384768758	2389278610	3859431781	3643768456	4141344518
3840145867	9120831830	7228567652	1267173884	4020651657
0190453442	4800088084	1165628559	5407921254	3768932478
6766554338	5583263145	5089052204	9780623691	2195448096
6315116284	9172824179	5544814339	0016943666	3828538786
3908771938	4035554324	0840126699	4942059208	1475623997
3370024586	9324732596	1186563397	4425443189	3216653251
2999997185	0133968938	7678931194	1354034403	6002561840
7864375912	8383232768	1892857070	2323673751	3188881718
7065492027	6349104233	3382569662	4579426926	1513082455
0654683246	4765404877	8149224168	5468634609	6474393896
7830555058	5255147182	3519287786	2481673649	8907598697
7626984369	4725370390	9641916289	5049082870	7463807244
4785048453	3646121751	8436077768	2928794356	9956043516
4627791048	5765558107	876259243	6185670830	6363845920
9376470693	0441608934	8749472723	2202274078	5897002653

1227991661	7936797054	9527542791	4711871173	8300978148
5582095589	5535798279	4764439855	6279247618	4446895088
4959397698	1056981450	8416606706	8234013222	6426813469
1824779358	1333750468	9434074212	5273692238	5902177065
7041092295	5726289716	3420847871	1820481234	0318831723
3555104281	0903099063	6827824899	6383872737	5901682626
9717595534	1634107293	8521057472	1471300754	3044151557
5571564123	7344613447	1129117244	3208461091	1699403490
4674262892	2809456764	5806554509	8224980942	5738031833
8461228715	0746980892	9285305274	6331989646	8764467686
1838538678	3049068967	6955157269	5482964330	2161984904
1834182305	6203476893	5937802079	3445280195	3694915658
1884227732	2923727501	8044389132	4611203081	6072112445
6791857341	6696243386	2219599137	3193884236	8224729704
3007929946	4031562749	5570757297	6273785046	1455349704
6085440624	2875556938	5496629750	4841817356	1443167141
7005051056	3496332071	5054070890	7303867953	6255181190
9846413446	8306646692	0661684251	8875127201	6251533454
0625457703	4229164694	7321363715	7051128285	1108468072
5457593922	9751489574	1799906380	1989141062	5595364247
4076486653	8950826528	4934582003	4071187742	1456207629

Phụ lục 2B. Bảng 1600 chữ số ngẫu nhiên

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76	80	95	90	91	17
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37	20	63	61	04	02
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60	15	95	33	47	64
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65	88	67	67	43	97
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53	98	95	11	68	77
66	06	57	47	17	34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
31	06	01	08	05	45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
85	26	97	76	02	02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
63	57	33	21	35	05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
73	79	64	57	53	03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
98	52	01	77	67	14	90	56	86	07	22	10	94	05	58	60	97	09	34	33
11	80	50	54	31	39	80	82	77	32	50	72	56	82	48	29	40	52	42	01
83	45	29	96	34	06	28	89	80	83	13	74	67	00	78	18	47	54	06	10
88	68	54	02	00	86	50	75	84	01	36	76	66	79	51	90	36	47	64	93
99	59	46	73	48	87	51	76	49	69	91	82	60	89	28	93	78	56	13	68
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74	73	03	95	71	86
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74	21	11	57	82	53
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10	45	52	16	42	37
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03	76	62	11	39	90
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88	96	29	77	88	22
91	49	91	45	23	68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
80	33	69	45	98	26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
44	10	48	19	49	85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
12	55	07	37	42	11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
63	60	64	93	29	16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82

61	19	69	04	46	26	45	74	77	74	51	92	43	37	29	65	39	45	95	93
15	47	44	52	66	95	27	07	99	53	59	36	78	38	48	82	39	61	01	18
94	55	72	85	73	67	89	75	43	87	54	62	24	44	31	91	19	04	25	92
42	48	11	62	13	97	34	40	87	21	16	86	84	87	67	03	07	11	20	59
23	52	37	83	17	73	20	88	98	37	68	93	59	14	16	26	25	22	96	63
04	49	35	24	94	75	24	63	38	24	45	86	25	10	25	61	96	27	93	35
00	54	99	76	54	64	05	18	81	59	96	11	96	38	96	54	69	28	23	91
35	96	31	53	07	36	89	80	93	54	33	35	13	54	62	77	97	45	00	24
59	80	80	83	91	45	42	72	68	42	83	60	94	97	00	13	02	12	48	92
46	05	88	52	36	01	39	09	22	86	77	28	14	40	77	93	91	08	36	47
32	17	90	05	97	87	37	92	52	41	05	56	70	70	07	86	74	31	71	57
69	23	46	14	06	20	11	74	52	04	15	95	66	00	00	18	74	39	24	23
19	56	54	14	30	01	75	87	53	79	40	41	92	15	85	66	67	43	68	06
45	15	51	49	38	19	47	60	72	46	43	66	79	45	43	59	04	79	00	33
94	86	43	19	94	36	16	81	08	51	34	88	88	15	53	01	54	03	54	56

Phụ lục 3. Tìm giá trị của P0 căn cứ số kênh k và tỉ số A/kS

$\frac{A}{kS}$	S´ k°nh k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
.02	.98000	.96078	.94176	.92312	.90484	.88692	.86936	.85214	.83527	.81873
.04	.96000	.92308	.88692	.85214	.81873	.78663	.75578	.72615	.69768	.65032
.06	.94000	.88697	.83562	.78663	.74082	.69768	.65705	.61878	.58275	.54881
.08	.92000	.85185	.78659	.72614	.67032	.61878	.57121	.52729	.48675	.44933
.10	.90000	.81818	.74074	.67031	.60653	.54881	.49659	.44933	.40657	.36788
.12	.85000	.78571	.69753	.61876	.54881	.48675	.43171	.38289	.33960	.30119
.14	.86000	.75439	.65679	.57116	.49657	.43171	.37531	.32628	.28365	.24660
.16	.84000	.72414	.61837	.52720	.44931	.38289	.32628	.27804	.23693	.20190
.18	.82000	.69492	.58214	.48660	.40653	.33959	.28365	.23693	.19790	.16530
.20	.80000	.66667	.54795	.44910	.36782	.30118	.24659	.20189	.16530	.13534
.22	.78000	.63934	.51567	.41445	.33277	.26711	.21437	.17204	.13807	.11080
.24	.76000	.61290	.48519	.38244	.30105	.23688	.18636	.14660	.11532	.09072
.26	.74000	.58730	.45640	.35284	.27233	.21007	.16200	.12492	.09632	.07427
.28	.72000	.56250	.42918	.32548	.24633	.18628	.14082	.10645	.08045	.06081
.30	.70000	.53846	.40346	.30017	.22277	.16517	.12241	.09070	.06720	.04978
.32	.68000	.51515	.37913	.27676	.20144	.14666	.10639	.07728	.05612	.04076
.34	.66000	.49254	.35610	.25510	.18211	.12981	.09247	.06584	.04687	.03337
.36	.64000	.47059	.33431	.23505	.16460	.11505	.08035	.05609	.03915	.02732
.38	.62000	.44928	.31367	.21649	.14872	.10195	.06981	.04778	.03269	.02236
.40	.60000	.42857	.29412	.19929	.13433	.09032	.06064	.04069	.02729	.01830
.42	.58000	.40854	.27559	.18336	.12128	.07998	.05267	.03465	.02279	.01498
.44	.56000	.38889	.25802	.16860	.10944	.07080	.04573	.02950	.01902	.01226
.46	.54000	.36986	.24135	.15491	.09870	.06265	.03968	.02511	.01587	.01003
.48	.52000	.35135	.22554	.14221	.08895	.05540	.03442	.02136	.01324	.00820
.50	.50000	.33333	.21053	.13043	.08010	.04896	.02984	.01816	.01104	.00671
.52	.48000	.31579	.19627	.11951	.07207	.04323	.02586	01544	.00920	.00548
.54	.46000	.29870	.18273	.10936	.06477	.03814	.02239	.01311	.00767	.00448
.56	.44000	.28205	.16986	.09994	.05814	.03362	.01936	.01113	.00638	.00366
.58	.42000	.26582	.15762	.09119	.05212	.02959	.01673	.00943	.00531	.00298

$\frac{A}{kS}$	S´ k°nh k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
.60	.40000	.25000	.14599	.08306	.04665	.02601	.01443	.00799	.00441	.00243
.62	.38000	.23457	.13491	.07750	.04167	.02282	.01243	.00675	.00366	.00198
.64	.36000	.21951	.12438	.06847	.03715	.01999	.01069	.00570	.00303	.00161
.66	.34000	.20482	.11435	.06194	.03304	.01746	.00918	.00480	.00251	.00131
.68	.32000	.19048	.10479	.05587	.02930	.01522	.00786	.00404	.00207	.00106
.70	.30000	.17647	.09569	.05021	.02590	.01322	.00670	.00338	.00170	.00085
.72	.28000	.16279	.08702	.04495	.02280	.01144	.00570	.00283	.00140	.00069
.74	.26000	.14943	.07875	.04006	.01999	.00986	.00483	.00235	.00114	.00055
.76	.24000	.13636	.07087	.03550	.01743	.00846	.00407	.00195	.00093	.00044
.78	.22000	.12360	.06335	.03125	.01510	.00721	.00341	.00160	.00075	.00035
.80	.20000	.11111	.05618	.02730	.01299	.00610	.00284	.00131	.00060	.00028
.82	.18000	.09890	.04933	.02362	.01106	.00511	.00234	.00106	.00048	.00022
.84	.16000	.08696	.04280	.02019	.00931	.00423	.00190	.00085	.00038	.00017
.86	.14000	.07527	.03656	.01700	.00772	.00345	.00153	.00067	.00029	.00013
.88	.12000	.06383	.03060	.01403	.00627	.00276	.00120	.00052	.00022	.00010
.90	.10000	.05263	.02491	.01126	.00496	.00215	.00092	.00039	.00017	.00007
.92	.08000	.04167	.01947	.00867	.00377	.00161	.00068	.00028	.00012	.00005
.94	.06000	.03093	.01427	.00627	.00268	.00113	.00047	.00019	.00008	.00003
.96	.04000	.02041	.00930	.00403	.00170	.00070	.00029	.00012	.00005	.00002
.98	.02000	.01010	.00454	.00194	.00081	.00033	00013	.00005	.00002	.00001

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

1. C½Ng c BaIc, *Nghiên cứu một số thông số cơ bản khi sấy quả hồi trong phòng thí nghiệm,* LuIn vŁn thÜc s: Khoa h c KqthuIt, Tr Ề ng ạ HNN I H¨ N i, 2002.
2. Nguy n VŁn C Ề ng, *Tối ưu hoá kết quả và hiệu quả kinh tế chăn nuôi cá nông hộ huyện Văn Giang, tỉnh Hưng Yên,* LuIn vŁn thÜc s: Kinh tJ N¹ ng nghi p, Tr Ề ng ạ HNN I H¨ N i, 2003.
3. TrŢn Th Nh H Ề ng, ạ Hng ThJ Huy, *Một số phương pháp toán học trong cơ học nông nghiệp*, Nxb N¹ ng Nghi p, 1987.
4. TrŢn Quang Kh§nh, *Toán ứng dụng cho chuyên ngành điện*, B¨i giŢng cho cao h c Li n, Khoa Ch Li n, Tr Ề ng ạ HNN I H¨ N i, 1998.
5. Nguy n ạ c Nghĩa, *Tối ưu hoá,* Nxb Gi§o d c, 2001.
6. Nguy n HŢi Thanh, *Quy hoạch tuyến tính v à một số ứng dụng trong kinh tế*, T¨i li u tham khŢo, Tr Ề ng ạ HNN I H¨ N i, 1997.
7. Nguy n HŢi Thanh, ñM t s´ m¹ h³nh t´ i Ưu d½ng trong n¹ ng nghi pò, *Kết quả nghiên cứu khoa học* Tr Ề ng ạ HNN I H¨ N i, QuyWi 3, trang 228–236, Nxb N¹ ng nghi p, 1997.
8. Nguy n HŢi Thanh, ñM t ph Ưng ph§p t Ưng t§c ng Ề i – m§y t²nh giŢi b¨i to§n v Ln tŢi c©n b³ng thu ph§t nhiQu m c ti°u trong m¹ i tr Ề ng m ò, *Hệ mờ và ứng dụng*, trang 64–72, Nxb Khoa h c v¨ KqthuIt, 1998.
9. Nguy n HŢi Thanh ñM t s´ ph Ưng ph§p giŢi b¨i to§n t´ i Ưu Ła m c ti°uò, *Kết quả nghiên cứu khoa học* Tr Ề ng ạ HNN I H¨ N i, QuyWi 4, trang 192–196, Nxb N¹ ng nghi p, 2000.
10. Nguy n HŢi Thanh, ñM¹ h³nh to§n t´ i Ưu x©y d ng ch cÜu c©y tr ngò, *Báo cáo tổng kết đề tài cấp Bộ* m« s´ B99–32–54 Ł« nghi m thu, 1999–2001.
11. Nguy n HŢi Thanh, ñX©y d ng h phŢn mQm m§y t²nh ph c v giŢng dÜy v¨ nghi°n c u khoa h c n¹ ng nghi pò, *Báo cáo tổng kết đề tài cấp Bộ* m« s´ B2001–32–23 Ł« nghi m thu, 2001–2003.
12. Nguy n HŢi Thanh, *Mô phỏng ngẫu nhiên,* B¨i giŢng cho cao h c kho§ 1 v ¨ 2, ng¨nh To§n – Tin ng d ng, Tr Ề ng ạ Ưi h c B§ch khoa H¨ N i, 2004.
13. Nguy n HŢi Thanh (ch bi°n) v¨ c§c t§c giŢ kh§c, *Tin học ứng dụng trong ngành nông nghiệp*, Nxb Khoa h c v¨ KqthuIt, 2005.
14. Nguy n Duy TiJh, *Các mô hình xác suất và ứng dụng, phần I: Xích Markov và ứng dụng*, Nxb ạ Ưi h c Qu´ c gia H¨ N i, 2001.
15. *Tạp chí ứng dụng Toán học,* H i ng d ng To§n h c Vi t Nam, 2003 ï 2005.

Tiếng Nga

16. Asmanov C. A., *Quy hoạch tuyến tính*, Nxb Nauka, 1981.

17. Vasiliev F. I., *Các phương pháp số giải các bài toán cực trị,* Nxb Nauka, 1980.

18. Gnedenko B.V., *Giáo trình lí thuyết xác suất*, Nxb Nauka, 1969.

19. Gnedenko B.V., Beliaev IU. K. v¨ Xoloviev A. D. *Những phương pháp toán học trong lí thuyết độ tin cậy,* Nxb Nauka, 1969.

20. Smarkov X. M., *Phương pháp Monte–Carlo và các vấn đề liên quan*, Nxb Nauka, 1975.

21. Smarkov X. M., *Giáo trình mô hình ngẫu nhiên* (d¨nh cho ng¨nh To§n ¨ ng d¨ ng c§c tr·Ở ng LŸi h` c Li°n X¹ tr·Ọ c L©y), Nxb Nauka, 1976.

Tiếng Anh

22. Bazarra M. S. and Shetti C. M., *Nonlinear programming: Theory and Algorithms,* John Wiley & Sons, New York, 1984.

23. Gillet B. E., *Introduction to Operations Research*, McGraw Hill, New York, 1990.

24. Isaacson D.L. and Madsen R.W., *Markov Chains Theory and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1975.

25. Kemeny J. G. and Snell J. L., *Finite Markov Chains*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1967.

26. Levin R. I., Rubin D. S. and Stinson J. P., *Quantitative approaches to management,* McGraw Hill, New York, 1986.

27. Mohan C. and Nguyen Hai Thanh, ñRDIM ï An interactive computer package for solving real life optimization problems in fuzzy environmentò, pp. 85–93, in *"Mathematics and its applications in engineering and industry"* (Editors Banir Singh et al.), Narosa Publishing House, London –New Delhi, 1997.

28. Mohan C. and Nguyen Hai Thanh, ñA fuzzifying approach to stochastic programmingò, *Opsearch,* Vol. 34, No. 2, pp. 73–96, 1997.

29. Mohan C. and Nguyen Hai Thanh, ñReference direction method for solving multiobjective fuzzy programmingò, *European Journal of Operational Research,* Vol. 107, pp. 599–613, 1998.

30. Mohan C. and Nguyen Hai Thanh, ñPreference level interactive method for solving multiobjective fuzzy programming problemsò, *Asia–Pacific Journal of Operational Research,* Vol. 16, pp. 63–86, 1999.

31. Mohan C. and Nguyen Hai Thanh, ñA controlled random search technique incorporating the simulated annealing concept for solving integer and mixed integer global optimization problemsò, *Computational Optimization and Applications,* Vol. 14, pp. 103–132, 1999.

32. Mohan C. and Nguyen Hai Thanh, ñAn interactive satisficing method for solving

multiobjective mixed fuzzy–stochastic programming problemsò, *International Journal for Fuzzy Sets and Systems* , Vol. 117, No.1, pp. 61 –79, 2001.

33. Nguyen Hai Thanh, ñOptimization in fuzzy–stochastic environment and its applications in industry and economicsò, *Proceedings of VJFUZZY'98: Vietnam–Japan bilatral symposium on fuzzy systems and applications,* pp. 342–349, 30/9 ï 2/10/1998.
34. Nguyen Hai Thanh, ñPRELIM ï An interactive computer package for solving realistic optimization problems in fuzzy environment*", Proceedings of VJFUZZY'98: Vietnam–Japan bilateral symposium on fuzzy systems and applications,* pp. 652 –659, 30/9 ï 2/10/1998.
35. Osyczka A., *Multicriterion Optimization in Engineering with Fortran Programs,* Ellis Horwood Limited, New York, 1984.
36. Ripley B. D., *Stochastic Simulation,* John Wiley & Sons, New York, 1987
37. Ross S. M., *Introduction to Probability Models,* Academic Press, Inc., Boston, 1995.
38. Sakawa M., *Fuzzy sets and multiobjective optimization* , Plenum Press, New York, 1993.
39. Steuer R. S., *Multiple criterion optimization: Theory, computation and application,* John Wiley & Sons, New York, 1986.
40. Taha H. A., *Operations Research,* MacMillan Publishing Company, New York, 1989.

***Chịu trách nhiệm xuất bản*:**
Gi§m Ľ c ṇINH NG̃ C Bự O
Tˇ ng bi°n tđp Lạ A

Biên tập nội dung:
NGUYwN TIɛ N TRUNG

Kĩ thuật vi tính:
TR̨ NH CAO KHự I

Trình bày bìa:
PHỹ M VI̤ T QUANG

TOÁN ỨNG DỤNG

In 2.000 cu´ n, kh˝ 19 × 27cm, tÿi
GiĿÿ ph®p xuĿÿt bΓn s´ : 1 –953/XB ï QLXB, k² ng¨y 20/6/2005.
In xong v¨ n¸ p l·Ѳu chiWu th§ng 8 nŁm 2005.