

CHU ĐỨC - HOÀNG CHÍ THÀNH

# TÍNH TỐÁN TRONG CÁC HỆ SINH THÁI



NHÀ XUẤT BẢN  
GIAO THÔNG VẬN TẢI

**CHU ĐỨC - HOÀNG CHÍ THÀNH**

# **TÍNH TOÁN TRONG CÁC HỆ SINH THÁI**

**NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI  
HÀ NỘI - 2006**

## LỜI MỞ ĐẦU

Khi nghiên cứu các hệ sinh thái, các mối quan hệ, các dạng mô hình và các phương pháp đánh giá, chúng ta thường gặp một số vấn đề có ảnh hưởng lớn đối với kết quả nghiên cứu. Đó là, các số liệu đưa vào để làm mô hình có đảm bảo độ tin cậy hay không, các mối quan hệ giữa chúng như thế nào và các thí nghiệm tiến hành đã hợp lý hay chưa. Hơn nữa, có thể xử lý sơ bộ để lấy thông tin ban đầu cho các quá trình nghiên cứu tiếp theo trên các hệ sinh thái đó.

Để đáp ứng một phần công nghệ xử lý thông tin đối với các hệ sinh thái, chúng tôi trình bày trong cuốn sách này các phương pháp tính toán trong các hệ sinh thái dựa vào các mô hình thống kê nhiều chiều. Các tính toán được chương trình hoá trên ngôn ngữ lập trình Turbo Pascal. Bạn đọc có thể sử dụng các chương trình cùng các bảng thống kê tương ứng ở phần Phụ lục để tính toán trên máy tính các bài toán cụ thể của mình. Nội dung cuốn sách bao gồm 8 chương và phần Phụ lục:

**Chương 1:** Các dạng sai số của các quan trắc

**Chương 2:** Ước lượng các giá trị chân thực

**Chương 3:** Kiểm định tính chuẩn của các sai số quan trắc

**Chương 4:** Quan hệ giữa các dãy quan trắc

**Chương 5:** Phân tích biến phân

**Chương 6:** Phân tích tương quan

**Chương 7:** Phương pháp đánh giá trọng số các thành phần của hệ

**Chương 8:** Phân tích phân biệt

**Phụ lục:** Các bảng thống kê.

Cuốn sách có thể dùng làm tài liệu học tập, nghiên cứu cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh các ngành khoa học Toán - Sinh học và Môi trường.

Mặc dù đã hết sức cố gắng song không thể tránh khỏi những thiếu sót, các tác giả chân thành cảm ơn những ý kiến đóng góp của bạn đọc để chất lượng cuốn sách ngày càng tốt hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: *Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội - 334 Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội.*

**Các tác giả**

## Chương 1

# SAI SỐ QUAN TRẮC

### 1.1. Phân loại sai số

Muốn nghiên cứu một đại lượng nào đấy trước hết ta phải đo đạc các quan trắc. Dù chính xác đến mức nào, vẫn có sự sai lệch khác nhau.

Ta gọi đại lượng đang xét là  $X$  và giả sử giá trị chân thực của đại lượng đó là  $a$ . Khi đó, giá trị  $|X - a|$  được gọi là *sai số quan trắc*. Sai số quan trắc thường không biết và giá trị chân thực cũng không biết một cách chính xác.

Bài toán đặt ra là: Hãy ước lượng giá trị gần đúng của  $a$  với sai số bé nhất.

Để làm được điều đó trước tiên ta cần xử lý các số liệu quan trắc. Có ba loại sai số có thể mắc phải:

- *Sai số thô*: Do vi phạm các điều kiện cơ bản của quan trắc hoặc do sơ suất của nhân viên kỹ thuật. Khi đó việc xử lý phải bỏ đi hoặc quan trắc lại.

- *Sai số hệ thống*: Do nhân viên kỹ thuật không để ý khi đo đạc dẫn đến các kết quả đều mắc phải sai số như nhau. Trường hợp này thường được phát hiện khi ta dùng một dụng cụ đo đạc khác hoặc kiểm tra ngẫu nhiên. Khi đó có thể hiệu chỉnh hàng loạt.

- *Sai số ngẫu nhiên*: Là sai số gây nên bởi rất nhiều yếu tố mà tác động của nó không tách riêng ra được. Việc tính ảnh hưởng của các yếu tố này chỉ có thể dựa vào các phân phối xác suất của chúng.

### 1.2. Phân phối của các sai số quan trắc ngẫu nhiên

Đặt  $Z = X - a$ . Khi đó sai số quan trắc  $Z$  là một định lượng ngẫu nhiên. Nó nhận giá trị thuộc  $(Z_1, Z_2)$  với một xác suất nào đó mà ta ký hiệu là  $P(Z_1 < Z < Z_2)$  hoặc là  $P(Z \in (Z_1, Z_2))$ .

Trong thực tế  $P(Z_1 < Z < Z_2)$  được tính gần đúng bằng tần suất xuất hiện của  $Z$  trong khoảng  $(Z_1, Z_2)$ . Tức là

$$P(Z_1 < Z < Z_2) \approx \frac{m}{n}$$

Nếu  $P(Z_1 < Z < Z_2)$  có thể biểu diễn dưới dạng

$$P(Z_1 < Z < Z_2) = \int_{Z_1}^{Z_2} p(t) dt$$

trong đó  $p(t) \geq 0$  và  $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1$ , thì hàm  $p(t)$  được gọi là *mật độ xác suất* của đại lượng  $Z$ .

**Định nghĩa 1:** Nếu  $p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  thì nó được gọi là *mật độ phân phối chuẩn* và hàm  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  được gọi là *tích phân xác suất* (Bảng II của Phụ lục). Hàm này có tính chất  $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

Hàm  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  được gọi là *hàm phân bố xác suất chuẩn* (hay *luật phân phối chuẩn*) ký hiệu là  $N(0,1)$  (Bảng III của Phụ lục).

**Định nghĩa 2:** Nếu hàm  $p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  thì hàm  $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$  được gọi là *luật phân phối chuẩn*  $(\mu, \sigma^2)$ , ký hiệu là  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Trong xác suất người ta đã chứng minh được rằng:

Nếu  $Z$  có phân phối chuẩn  $N(\mu, \sigma^2)$  có nghĩa là  $EZ = \mu$ ,  $DZ = \sigma^2$  (Ý nghĩa:  $\mu$  là trung bình của  $Z$  còn  $\sigma^2$  là sai số bình phương trung bình của  $Z$ ) thì khi đó  $\frac{Z-\mu}{\sigma}$  có phân phối chuẩn  $N(0,1)$ .

### 1.3. Phương pháp khử sai số

Khi nhận thấy có một kết quả quan trắc  $x_0$  khác xa với các kết quả quan trắc khác thì ta phải nghi ngờ ngay đến hiện tượng là đã mắc phải sai số thô. Khi đó, ta xem các quan trắc còn lại  $x_1, x_2, \dots, x_n$  như là tập hợp riêng còn  $x_0$  được xem như là quan trắc đột biến.

$$\text{Ta tính } \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Giả sử  $X$  là đại lượng ngẫu nhiên có luật phân phối chuẩn  $(\mu, \sigma^2)$ .

Nếu  $\sigma$  đã biết thì ta tính tiếp:

$$u = \frac{|x_0 - \bar{X}|}{\sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}},$$

với mức ý nghĩa  $\alpha$ . Tìm  $u_\alpha$  sao cho  $1 - 2\Phi(u_\alpha) = \alpha$  bằng cách tra bảng  $\Phi$

Thông thường ta tính ba cấp:  $\alpha = 0,05 \Rightarrow u_\alpha = 1,96$

$\alpha = 0,01 \Rightarrow u_\alpha = 2,58$

$\alpha = 0,001 \Rightarrow u_\alpha = 3,29$

Nếu  $u > u_\alpha$  thì bỏ giả thiết  $x_0 = \bar{X}$  và loại  $x_0$ .

Nếu  $u < u_\alpha$  thì ta nhận lại  $x_0$  (có nghĩa là  $x_0$  vẫn thuộc tập hợp dùng được).

Khi đó có nghĩa là ta đã loại  $x_0$  chứa sai số thô với mức ý nghĩa  $\alpha$  (hoặc độ tin cậy  $1 - \alpha$ ) hoặc là đã nhận lại  $x_0$  vì  $x_0$  không chứa sai số thô với mức ý nghĩa  $\alpha$  (hoặc độ tin cậy  $1 - \alpha$ ).

*Ví dụ 1.1:* Khi đo đặc 41 quan trắc độc lập với sai số bình phương trung bình là  $\sigma = 0,139$  ta phát hiện một quan trắc đột biến  $x_0 = 6,866$ ; còn 40 quan trắc còn lại có  $\bar{X} \approx 6,500$ . Hãy xét xem  $x_0$  có chứa sai số thô hay không.

Tính 
$$u = \frac{|6,866 - 6,500|}{0,139 \sqrt{\frac{41}{40}}} = 2,72 \quad (1)$$

Khi đó với mức ý nghĩa  $\alpha$  (tức là độ tin cậy  $\beta = 1 - \alpha$ ) ta tra Bảng II của Phụ lục để tìm  $u_\alpha$  từ đẳng thức:  $1 - 2\Phi(u_\alpha) = \alpha$ , hay  $\Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$ .

*Ví dụ 1.2:* Với mức ý nghĩa  $\alpha = 0,007$  ta có  $u_\alpha = 2,69$ ,  $u = 2,72 > u_\alpha = 2,69$ . Vậy ta phải loại  $x_0$  (tức là trong  $x_0$  có sai số thô).

Việc tra bảng như trên thường khá phức tạp, nên ta áp dụng quy tắc thực hành như sau:

Ta tính biểu thức (1) sau đó tra bảng

$$1 - 2\Phi(u) = 1 - 2\Phi(2,72) = 0,0066$$

nó nhỏ hơn 0,007 nên ta lấy mức ý nghĩa  $\alpha = 0,007$ . Nghĩa là, với độ tin cậy lớn hơn 0,993 thì  $x_0$  có sai số thô và ta loại bỏ (Bảng II của Phụ lục).

Trường hợp  $\sigma^2$  chưa biết:

Khi đó ta tính 
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

Tính 
$$t = \frac{|x_0 - \bar{X}|}{s} \quad (2)$$

Với độ tin cậy  $P = 0,95 ; 0,99 ; 0,90 \dots$

Tra bảng IV của Phụ lục ta được  $t_n(P)$  :

- Nếu  $t > t_n(P)$  thì ta bỏ  $x_0$  với độ tin cậy  $P$  ;
- Nếu  $t < t_n(P)$  thì ta nhận  $x_0$  (nghĩa là  $x_0$  không chứa sai số thô)

Ví dụ 1.3: Với thí nghiệm ở trên:  $t = 2,75 ; P = 0,99$ . Suy ra  $t_{40}(0,99) = 2,742$ .

Vậy  $t > t_{40}(0,99)$ , ta loại bỏ  $x_0$ .

Ví dụ 1.4: Khi đo trọng lượng các con só sinh tại một nhà hộ sinh được các kết quả:

| Các con só | $X_i$ | $X_i^2$ |
|------------|-------|---------|
| Bé 1       | 2,35  | 5,52    |
| Bé 2       | 2,41  | 5,80    |
| Bé 3       | 2,60  | 6,70    |
| Bé 4       | 2,73  | 7,45    |
| Bé 5       | 2,90  | 8,41    |
| Bé 6       | 3,11  | 9,67    |
| Bé 7       | 3,25  | 10,56   |
| Bé 8       | 3,45  | 11,90   |
| Bé 9       | 3,90  | 15,21   |
| Bé 10      | 4,10  | 81,22   |

$$\sum_{i=1}^9 X_i = 26,7$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 30,8 \quad \text{Suy ra } \bar{X} = 8,08$$

Dãy số liệu trên có sai số thô hay không?

Ta nghi ngờ  $X_{10} = 4,10$  có sai số thô.

Vậy ta loại nó ra và tính  $\bar{X} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i = 2,97$

$$S^2 = \frac{1}{9-1} \sum_{i=1}^9 (X_i - 2,97)^2 = \frac{1}{8} S_{xx}$$

Cũng có thể tính S bằng công thức khác đơn giản hơn.

Kí hiệu:  $S_{xx} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$ . Ta có  $S^2 = \frac{1}{n-1} S_{xx}$  (3)

Vậy  $S_{xx} = 81,22 - \frac{(26,7)^2}{9} = 81,22 - 79,21 = 2,01$

$$S^2 = 0,25$$

Tính  $t = \frac{4,10 - 2,97}{\sqrt{0,25}} = \frac{1,13}{0,5} = 2,26$

$$t_{\alpha}(0,95) = 2,43 \Rightarrow t < t_{\alpha}(0,95) \text{ . Thế thì ta nhận lại } X_{10} = 4,10.$$

Vậy với mức ý nghĩa 0,05 (hay độ tin cậy 0,95) ta không loại  $X_{10}$ .

*Ví dụ 1.5:* Giả sử một nhóm người Việt Nam có chiều cao tuân theo luật phân phối chuẩn với sai số bình phương trung bình  $\sigma = 0,01$ . Ta đo đạc 11 người và được dãy số liệu như sau:

Người 1: 1,75 m

Người 2: 1,65 m

Người 3: 1,55 m

Người 4: 1,60 m

Người 5: 1,70 m

Người 6: 1,85 m - Nghi ngờ có sai số thô

Người 7: 1,64 m

Người 8: 1,68 m

Người 9: 1,58 m

Người 10: 1,72 m

Người 11: 1,50 m

$$X_6 = 1,85$$

$$\bar{X} = 1,63$$



$$\text{Tính } u = \frac{1,85 - 1,63}{0,01 \sqrt{\frac{11}{10}}} = \frac{0,22}{0,01 \cdot 1,04} = \frac{0,22}{0,010} = 21,15$$

$$1 - 2 \cdot \Phi(21,15) = 0,0000006 < 0,0000007 = \alpha$$

Giá trị trên khá bé, vậy  $X_6$  phải bị loại vì nó chứa sai số với độ tin cậy gần bằng 1.

*Ví dụ 1.6:* Quan sát một đại lượng ta được các kết quả sau:

|                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| $x_1 = 5,12$             | $x_1^2 = 26,21$         |
| $x_2 = 5,30$             | $x_2^2 = 28,09$         |
| $x_3 = 5,56$             | $x_3^2 = 30,91$         |
| $x_4 = 5,90$             | $x_4^2 = 34,81$         |
| $x_5 = 6,43$             | $x_5^2 = 41,34$         |
| $x_6 = 7,99$             | $x_6^2 = 63,84$         |
| $x_7 = 7,94$             | $x_7^2 = 63,04$         |
| $x_8 = 9,02$             | $x_8^2 = 81,36$         |
| $\Sigma = 53,26$         | $\Sigma = 369,59$       |
| $x_9 = 0,36$ (nghỉ ngơi) | $x_9^2 = 0,13$          |
| $\Sigma x_i = 53,62$     | $\Sigma x_i^2 = 369,72$ |

$$\bar{X} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 X_i = 6,66$$

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} = 369,59 - \frac{(53,26)^2}{8} \\ &= 369,59 - \frac{2836,62}{8} = 15,01 \end{aligned}$$

354,57

$$s^2 = \frac{1}{7} S_{xx} = 2,14 \Rightarrow s = 1,46$$

$$t = \frac{|X_9 - \bar{X}|}{s} = \frac{|0,36 - 6,66|}{1,46} = 4,31$$

Tra bảng  $t_{\alpha}(0,95) = 2,51$  (Bảng IV của Phụ lục). Vậy  $t = 4,31 > t_{\alpha}(0,95) = 2,51$ .

Do đó, ta phải bỏ  $x_9 = 0,36$  vì nó có chứa sai số thô với mức ý nghĩa 0,05 (hay độ tin cậy 0,95).

**Bài tập 1.1:** Lập chương trình khử sai số tính test t.

Chương trình:

```

Program KHU_SAI_SO ;
uses CRT ;
const
    Nmax = 50 ;
var
    X , LECH : array[1 .. Nmax] of real ;
    n , i , lmax , k : integer ;
    Tong , Xtb , Lmax , Xo , s , t : real ;
    F : TEXT ;
    Alpha , Tk : array[1..5] of real ;

BEGIN
    ClrScr ;
    writeln(' NHAP DAY SO LIEU QUAN TRAC ' ) ;
    write('So luong : ' ) ; readln(n) ;
    for i := 1 to n do
        begin
            write('Quan trac thu ', i , ' : ' ) ;
            readln(X[i])
        end ;
    Tong := 0 ;
    for i := 1 to n do
        Tong := Tong + X[i] ;
    Xtb := Tong / n ;
    for i := 1 to n do
        LECH[i] := abs(x[i] - Xtb) ;
    Lmax := LECH[1] ;
    lmax := 1 ;
    for l := 2 to n do
        if Lmax < LECH[l] then
            begin Lmax := LECH[l] ; lmax := l end ;
    writeln;

```

```

writeln('Quan trac thu ', lmax, ' la : ', X[lmax]:0:3, ' co the co sai so tho ! ');
Xo := X[lmax];
Tong := Tong - X[lmax];
X[lmax] := X[n];
dec(n);
Xtb := Tong / n;
s := 0;
for i := 1 to n do
    s := s + sqr(X[i] - Xtb);
s := sqrt(s/n);
t := abs(Xo - Xtb) / s;
Assign(F,'BANG_4.TXT'); { Tra bang IV – Phu luc}
Reset(F);
for i := 1 to 4 do read(F, Alpha[i]);
readln(F);
while NOT SeekEOF(F) do
begin
    read(F, k);
    if k < n then readln(F)
    else
begin
    for i := 1 to 4 do read(F, Tk[i]);
    break
end
end;
Close(F);
For i := 1 to 4 do { Ket luan }
begin
    writeln('Voi muc y nghia ', Alpha[i]:6:3);
    if T > Tk[i] then
        writeln('- Bo ', Xo:10:3, ' vi co chua sai so tho !')
    else
        writeln('- Nhan lai ', Xo:10:3, ' vi khong chua sai so tho !');
    writeln
end;
readln;
END.

```

*Chú ý:* Trong chương trình có sử dụng dữ liệu của Bảng IV - Phụ lục được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_4.TXT' bao gồm 28 dòng:

- Dòng đầu có 4 số thực cách nhau một khoảng trống chỉ các giá trị của  $\mathcal{P}$ ;
- 27 dòng sau, mỗi dòng bắt đầu là số nguyên  $n$ , sau đó là 4 số thực chỉ giá trị tối hạn  $t_n(\mathcal{P})$ .

## 1.4. Ước lượng độ chính xác của các quan trắc

Sau khi khử những quan trắc có sai số thô, ta còn lại các quan trắc chỉ có sai số ngẫu nhiên. Giả sử các sai số ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn. Vậy thì độ chính xác của các quan trắc như thế nào? (Nghĩa là, độ chính xác của các dụng cụ đo đạc thế nào?). Khi đó ta cần ước lượng phương sai  $\sigma$  của luật phân phối này (luật phân phối của các  $x_i$ ).

1) Với một loạt  $n$  quan trắc

$$\begin{aligned}\sigma^2 \approx s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} S_{xx} = \frac{1}{n-1} \left( \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

2) Với  $m$  loạt quan trắc, mỗi loạt  $n_i$  quan trắc ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) và nếu  $m$  loạt cùng một dụng cụ đo đạc thì độ chính xác của quan trắc (tức là của dụng cụ) được ước lượng là

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + \dots + (n_m - 1)s_m^2}{(n_1 - 1) + \dots + (n_m - 1)} \quad (1)'$$

Đặc biệt nếu  $n_i = n$  với mọi  $i$  thì

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2 \quad (2)$$

3) Trường hợp  $m$  loạt quan trắc  $n_1, n_2, \dots, n_m$  với  $(n_1 + n_2 + \dots + n_m = N)$  mà ta chỉ biết giá trị trung bình  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$  thì ước lượng độ chính xác quan trắc sẽ bằng:

$$\sigma^2 \approx \tilde{s}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \quad (3)$$

trong đó  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i \bar{X}_i$ , với  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

Ví dụ 1.7: Trong Ví dụ 1.3 thì độ chính xác xấp xỉ bằng  $s = 1,46$ .

## 1.5. Số lượng quan trắc cần thiết

Để nghiên cứu một đại lượng nào đó, thường giá trị chân thực  $\alpha$  của nó thì ta chưa biết. Mà ta chỉ tiến hành một loạt quan trắc và đo được  $\bar{X}$ . Muốn cho  $\bar{X}$  sai

lệch với  $a$  không quá  $\varepsilon$  với độ tin cậy  $P$  thì số lần thí nghiệm  $n$  phải thoả mãn:

$$1) \text{ Với } \sigma \text{ đã biết: } n \geq \left[ \frac{t(P)}{\varepsilon} \right]^2 \sigma^2 = [u(P)]^2 \left( \frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad (1)$$

trong đó  $u(P) = t$  là giá trị thoả mãn 2.  $\Phi(t) = P$  (Bảng II của Phụ lục).

Tức là với  $P = 0,95 \rightarrow u(P) = 1,96$

$P = 0,99 \rightarrow u(P) = 2,58$  (2)

$P = 0,999 \rightarrow u(P) = 3,29$

2) Nếu  $\sigma^2$  chưa biết thì ta đưa vào một đại lượng mới  $q = \frac{\varepsilon}{d}$ , trong đó  $d$  là sai số tiêu chuẩn thực nghiệm (thường được cho bằng dung sai cho phép).

Khi biết  $\varepsilon, d$  thì ta tính được  $q$  và tra bảng sau đây để tìm  $n$ :

| $q$  | $P$  |      |      |      |       |
|------|------|------|------|------|-------|
|      | 0,90 | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,999 |
| 1,0  | 5    | 7    | 9    | 11   | 17    |
| 0,5  | 13   | 18   | 25   | 31   | 50    |
| 0,4  | 19   | 27   | 37   | 46   | 74    |
| 0,3  | 32   | 46   | 64   | 78   | 127   |
| 0,2  | 70   | 99   | 139  | 171  | 277   |
| 0,1  | 273  | 387  | 545  | 668  | 1089  |
| 0,05 | 1084 | 1540 | 2168 | 2659 | 4338  |

Ví dụ 1.8: Với  $\varepsilon = 0,005, d = 0,01$  thì  $q = 0,5$ .

Tra bảng trên ta được  $n > 13$  với độ tin cậy 90% ;

$n > 18$  với độ tin cậy 95% ;

$n > 25$  với độ tin cậy 98% ;

## Chương 2

# ƯỚC LƯỢNG GIÁ TRỊ CHÂN THỰC

### 2.1. Các loại ước lượng

Giả sử đại lượng cần quan trắc có một giá trị chân thực  $a$  nào đó thường là không biết. Ta tiến hành đo đạc được các quan trắc  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Vấn đề là, hãy dựa vào các kết quả quan trắc đó để ước lượng giá trị  $a$  sao cho sai số càng bé càng tốt. Có nghĩa là, tìm một hàm  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  làm ước lượng cho  $a$ .

Khi đó các khả năng sau đây có thể xảy ra:

#### 1. Ước lượng không chệch

Nếu kỳ vọng  $Eg = a$  thì  $g$  được gọi là ước lượng không chệch của  $a$ .

#### 2. Ước lượng vững

Nếu khi  $n \rightarrow \infty$  mà  $g \rightarrow a$  (theo xác suất) thì  $g$  là ước lượng vững của  $a$ .

Có nghĩa là:  $\forall \varepsilon > 0$ , khi  $n \rightarrow \infty$  thì  $P(|g - a| < \varepsilon) \rightarrow 1$ .

Vậy thì đến một số lượng quan sát nào đó thì giá trị của  $g$  sai khác  $a$  không lớn hơn  $\varepsilon$  là một điều chắc chắn.

#### 3. Ước lượng hiệu quả

Là ước lượng không chệch nhưng có độ phân tán bé nhất, có nghĩa là nó có  $\sigma$  bé nhất so với mọi ước lượng không chệch khác.

### 2.2. Cách tìm ước lượng

#### 1. Ước lượng điểm

Nếu tất cả các quan trắc của đại lượng có cùng độ chính xác. Không chứa sai số thô và sai số hệ thống khi đó  $a$  được ước lượng bằng

$$a \approx \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

ước lượng đó là không chệch và vững.

Nếu đại lượng tuân theo luật chuẩn thì ước lượng đó cũng là ước lượng hiệu quả.

#### 2. Ước lượng khoảng

Tức là chỉ ra một khoảng mà  $a$  nằm trong khoảng đó. Thường là ước lượng đối xứng

$$\bar{X} - \varepsilon < a < \bar{X} + \varepsilon$$

hoặc  $|a - \bar{X}| < \varepsilon$  trong đó  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  và  $\varepsilon$  được xác định để đảm bảo một độ tin cậy nào đó, chẳng hạn: 90%, 95%, 99%...

Sau đây là một số cách tìm  $\varepsilon$  tùy thuộc độ tin cậy.

1) Trong trường hợp biết trước độ chính xác các quan trắc (tức là biết  $\sigma$ ).

Khi đó với độ tin cậy  $P$ ,  $\varepsilon$  được xác định bằng  $u(P) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\text{Tức là } |a - \bar{X}| < u(P) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

trong đó:

|        |      |      |      |       |
|--------|------|------|------|-------|
| $P$    | 0,90 | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| $u(P)$ | 1,64 | 1,96 | 2,58 | 3,29  |

( $u(P)$  là điểm sao cho  $2.\Phi(u(P)) = P$ )

Ví dụ 2.1: Quan sát một đại lượng với 10 quan trắc ta được  $\bar{X} = 36,06$  và biết  $\sigma = 0,28$ . Hãy ước lượng giá trị chân thực  $a$  với độ tin cậy  $P = 0,99$ .

Ta có ước lượng khoảng  $|a - \bar{X}| = |a - 36,06| < 2,58 \frac{0,28}{\sqrt{10}} = 0,23$

Suy ra  $a \in (36,06 - 0,23; 36,06 + 0,23)$ .

2) Trường hợp không biết  $\sigma$ : Khi đó ước lượng (2) được thay bằng

$$|a - \bar{X}| < t(P, n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

trong đó  $t(P, n-1)$  là giá trị tương ứng với phân phối Student  $n-1$  bậc tự do, mức ý nghĩa  $\alpha = 1 - P$  (Bảng V của Phụ lục) và

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Ví dụ 2.2: Với ví dụ 2.1 ở trên  $\bar{X} = 36,06$ ;  $n = 10$ ;  $\sigma$  chưa biết. Hãy ước lượng giá trị chân thực  $a$  với  $P = 0,99$ .

Khi đó  $\alpha = 0,01$ . Thế thì  $|a - \bar{X}| < t(P, n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (3)$

Ta tính  $s = 0,25$ ,  $t(0,99; 9) = 3,250$  (Tra bảng IV của Phụ lục).

Suy ra  $|a - \bar{X}| = |a - 36,06| < 3,250 \cdot \frac{0,25}{\sqrt{10}} = 3,250 \cdot \frac{0,25}{3,16} = 0,26$

Vậy  $(36,06 - 0,26 < a < 36,06 + 0,26)$  với độ tin cậy 99%.

### 3) Quy tắc 3 xiema

Đây là ước lượng khoảng thông dụng nhất

- Với  $\sigma$  đã biết thì ước lượng có dạng

$$|a - \bar{X}| < \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

- Với  $\sigma$  chưa biết thì ước lượng bằng

$$|a - \bar{X}| < \frac{3s}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

### 4) Ước lượng khoảng khi các quan trắc không cùng độ chính xác.

Khi thực hiện nhiều loạt quan trắc, chẳng hạn  $n$  loạt. Trong mỗi loạt xem như có cùng độ chính xác và có số quan trắc là  $m_i$ . Các loạt quan trắc khác nhau có thể có độ chính xác khác nhau.

Khi đó ta có ước lượng

$$|a - \bar{X}| < t(P, k) \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

trong đó  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n m_i x_i$ ;  $N = \sum_{i=1}^n m_i$  và  $x_i$  xem như là giá trị trung bình của loạt quan trắc thứ  $i$  với  $m_i$  quan trắc,  $i = 1, 2, \dots, n$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n m_i (x_i - \bar{X})^2}$$

$$k = n - 1$$

$t(P, k)$  là giá trị của phân phối Student  $k$  bậc tự do và độ tin cậy  $P$  (Bảng IV của Phụ lục).

Ví dụ 2.3: Quan sát một đại lượng bằng 13 loạt quan trắc :

|                                                  |   | $m_i$       | $X_i$<br>các điểm chứa | $m_i x_i$ | $x_i - \bar{X}$ | $(x_i - \bar{X})^2$ | $m_i (x_i - \bar{X})^2$ |
|--------------------------------------------------|---|-------------|------------------------|-----------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| Quan trắc<br>thuộc khoảng<br>( $-\infty$ ; 8,30) | 1 | 1 quan trắc | $x_1 = 8,30$           | 8,30      | -0,34           | 0,12                | 0,12                    |
|                                                  | 2 | 2 quan trắc | $x_2 = 8,35$           | 16,70     | -0,29           | 0,08                | 0,16                    |
|                                                  | 3 | 4 quan trắc | $x_3 = 8,40$           | 33,60     | -0,24           | 0,06                | 0,24                    |
|                                                  | 4 | 5 quan trắc | $x_4 = 8,45$           | 42,25     | -0,19           | 0,04                | 0,20                    |
|                                                  | 5 | 8 quan trắc | $x_5 = 8,50$           | 68,0      | -0,14           | 0,02                | 0,16                    |



|                                       |    |              |                 |                                                   |       |        |        |
|---------------------------------------|----|--------------|-----------------|---------------------------------------------------|-------|--------|--------|
| 18 quan trắc<br>thuộc (8,55;<br>8,60) | 6  | 10 quan trắc | $x_6 = 8,55$    | 85,5                                              | -0,09 | 0,008  | 0,08   |
|                                       | 7  | 18 quan trắc | $x_7 = 8,60$    | 154,8                                             | -0,04 | 0,002  | 0,036  |
|                                       | 8  | 17 quan trắc | $x_8 = 8,65$    | 147,05                                            | 0,01  | 0,0001 | 0,0017 |
|                                       | 9  | 12 quan trắc | $x_9 = 8,70$    | 104,4                                             | 0,06  | 0,0036 | 0,043  |
|                                       | 10 | 9 quan trắc  | $x_{10} = 8,75$ | 78,75                                             | 0,11  | 0,012  | 0,108  |
|                                       | 11 | 7 quan trắc  | $x_{11} = 8,80$ | 61,6                                              | 0,16  | 0,026  | 0,182  |
|                                       | 12 | 6 quan trắc  | $x_{12} = 8,85$ | 53,1                                              | 0,21  | 0,044  | 0,264  |
|                                       | 13 | 1 quan trắc  | $x_{13} = 9,95$ | 9,95                                              | 1,31  | 1,716  | 1,716  |
|                                       |    | N = 100      |                 | 864                                               |       |        | 3,310  |
|                                       |    |              |                 | $\frac{864}{100} \Rightarrow$<br>$\bar{X} = 8,64$ |       |        |        |

Cần phải ước lượng giá trị chân thực  $a$ .

$$s = \sqrt{\frac{1}{12} 3,310} = \sqrt{0,275} = 0,525; n = 13$$

$$k = 13 - 1 = 12$$

với

$$P = 0,99$$

Tra bảng IV của Phụ lục ta được  $t(0,99; 12) = 3,055$

$$\text{Khi đó } |a - 8,64| < 3,055 \cdot \frac{0,525}{\sqrt{100}} = 3,055 \cdot \frac{0,525}{10} = 0,16$$

Vậy

$$8,64 - 0,16 < a < 8,64 + 0,16$$

$$(8,48 < a < 8,8) \text{ với độ tin cậy } 99\%$$

## 2.3. Ước lượng khoảng cho độ chính xác của các quan trắc

### 1. Trường hợp nhiều quan trắc

Khi đó ước lượng  $\sigma$ :  $s(1 - q) < \sigma < s(1 + q)$

trong đó  $q$  là giá trị bằng  $q(P, k)$  (Bảng XIII của Phụ lục)

$P$  là độ tin cậy,  $k$  là bậc tự do

$$\text{- Với một loạt quan trắc } k = n - 1 \text{ và } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - \bar{X})^2}$$

$$\text{- Trường hợp } m \text{ loạt quan trắc: } N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

khi đó  $k = m - 1$  và  $s = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2}$

- Trường hợp  $m$  loạt quan trắc nhưng  $n_i = n$  với mọi  $i$

khi đó  $k = N - m$  và  $s = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2}$

còn  $s_i^2 = \sqrt{\frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}$  trong đó  $x_{ij}$  là quan trắc thứ  $j$  của loạt  $i$

## 2. Trong trường hợp ít quan trắc

Ta ước lượng như sau

$$sz_1 < \sigma < sz_2 \quad (8)$$

trong đó  $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$

và  $z_1, z_2$  là các số sao cho

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= Z_1(P, k) \\ z_2 &= Z_2(P, k) \end{aligned} \right\} \text{ (Bảng XIII của Phụ lục)}$$

với bậc tự do  $k = n - 1$

Ví dụ 2.4: Quan trắc 10 kết quả ( $n = 10$ ), ta có  $\bar{X} = 36,06$ ;  $s = 0,263$ .

Khi đó với độ tin cậy  $P = 0,99$  và với  $k = n - 1 = 9$

Tra Bảng XIII của Phụ lục ta được  $z_1 = 0,618$

$$z_2 = 2,277$$

Do đó ta có ước lượng khoảng

$$0,163 = 2,263 \cdot 0,618 < \sigma < 2,263 \cdot 2,277 = 0,599$$

Vậy  $(0,163 < \sigma < 0,599)$  với độ tin cậy 99%.

Ví dụ 2.5: Tiến hành  $m = 20$  loạt quan trắc, trong mỗi loạt thực hiện 10 quan trắc.

Từ mỗi loạt quan trắc ta tính được  $s_i^2$ . Vậy tính được

$$s = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2} = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} s_i^2}$$

với  $P = 0,99$  còn  $k = n.m - m = N - m = 200 - 20 = 180$

Tra bảng XII của Phụ lục, ta có  $q(0,99; 180) = 0,143$ .

Vậy  $(0,857 s < \sigma < 1,143 s)$  với độ tin cậy 99%.

**Bài tập 2.1.** Lập chương trình tính khoảng tin cậy cho giá trị trung bình và độ chính xác của quan trắc  $\sigma$ .

Chương trình:

```
Program TINH_KHOANG_TIN_CAY ;
uses CRT ;
const
    Nmax = 30 ;
    Mmax = 50 ;
var
    X : array[1 .. Mmax , 1 .. Nmax] of real ;
    N : array[1 .. Mmax] of integer ;
    Xtb : array[1 .. Mmax] of real ;
    m , Nq , i , j : integer ;
    Tong , XB , s , t : real ;
BEGIN
    ClrScr ;
    writeln(' NHAP SO LIEU CAC LOAT QUAN TRAC ');
    write('So loat quan trac : ') ; readln(m) ;
    for i := 1 to m do
        begin
            writeln ;
            writeln('Nhap so lieu cua loat quan trac thu ', i , ' : ');
            write('So lan quan sat : ');
            readln(N[i]) ;
            for j := 1 to N[i] do
                begin write('Quan sat thu ', j , ' : ');
                    readln(X[i,j])
                end ;
            end ;
            FillChar(Xtb, sizeof(Xtb) ,0) ;
            Tong := 0 ;
            for i := 1 to m do
                begin
                    for j := 1 to N[i] do
                        Xtb[i] := Xtb[i] + X[i,j] ;
                    Tong := Tong + Xtb[i] ;
                    Xtb[i] := Xtb[i] / N[i] ;
                end ;
            Nq := 0 ;
            for i := 1 to m do Nq := Nq + N[i] ;
            XB := Tong / Nq ;
            s := 0 ;
            if m = 1 then
```

{ Mot loat quan trac }

```

begin
  for j := 1 to N[1] do s := s + sqr(X[1,j] - XB) ;
  s := sqrt(s/(N[1]-1))
end
else
begin
  { Nhieu loat quan trac }
  for i := 1 to m do
    s := s + N[i] * sqr(Xtb[i] - XB) ;
    s := sqrt(s/(m-1)) ;
  end ;
writeln('s = ', s :0:5) ;
readln ;
END .

```

## KIỂM ĐỊNH TÍNH CHUẨN CỦA SAI SỐ QUAN TRẮC

### 3.1. Tiêu chuẩn $\chi^2$

Thực ra các ước lượng được trình bày ở chương 2 đã sử dụng một giả thiết là sai số quan trắc là sai số ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.  $Z = X - a$  có phân phối chuẩn. Khi đó  $X = Z + a$  cũng phải là phân phối chuẩn.

Vì vậy ta cần kiểm định xem  $X$  có phân phối chuẩn không. Tiêu chuẩn thông thường là tiêu chuẩn  $\chi^2$ . Ta xem  $x_i$  là các quan trắc của  $X$ .

Ta nhóm các quan trắc  $x_i$  vào các khoảng, sao cho trong mỗi khoảng số quan trắc không ít hơn 5 (tốt nhất là lớn hơn 10) và tổng tất cả các khoảng phải phủ toàn trục số  $(-\infty, +\infty)$ . Giả sử có  $l$  khoảng, ta gọi  $m_i$  là số các quan trắc rơi vào khoảng  $(y_{i-1}, y_i)$ ;  $i = 0, 1, \dots, l$

Tính được 
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

và 
$$p_i = \Phi\left(\frac{y_i - \bar{X}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{y_{i-1} - \bar{X}}{s}\right)$$

trong đó

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Tính tổng:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \quad \text{với } n = m_1 + m_2 + \dots + m_l$$

Tra bảng VI (Phụ lục) với độ tin cậy  $P$  và bậc tự do  $k = l - 3$  ta được  $\chi^2(P, k)$

Nếu  $\chi^2 > \chi^2(P, k)$  thì kết luận  $X$  không phân phối chuẩn với độ tin cậy  $P$ .

Nếu  $\chi^2 < \chi^2(P, k)$  thì  $X$  có phân phối chuẩn.

Ví dụ 3.1: Điều tra trọng lượng 100 em bé lứa 10 tuổi ở thị trấn Bala - Bông Dò (Hà Đông) ta được các kết quả  $x_1, \dots, x_{100}$

Hãy kiểm định xem dãy số liệu trên có tuân theo luật phân phối chuẩn hay không.

Cách giải: Sắp xếp số liệu theo thứ tự tăng dần ta có

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{100}$$

$$x_1 = 8,30 \leq 8,35 \leq \dots \leq 9,95 = x_{100}$$

Chia khoảng  $(y_{i-1}, y_i)$  với bước 0,050 ta có bảng tính sau đây:

| Khoảng<br>$(y_{i-1}, y_i)$ | $m_i$   | $t_i = \frac{y_i - \bar{X}}{s}$ | $\Phi(t_i)$ | $p_i$  | $m_i - n.p_i$ | $\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$ |
|----------------------------|---------|---------------------------------|-------------|--------|---------------|-------------------------------|
| $(-\infty; 8,425)$         | 7       | -1,614                          | -0,4467     | 0,0533 | 1,67          | 0,523                         |
| $(8,425; 8,475)$           | 5       | -1,220                          | -0,3888     | 0,0579 | -0,79         | 0,108                         |
| $(8,475; 8,525)$           | 8       | -0,827                          | -0,2959     | 0,0929 | -1,29         | 0,179                         |
| $;8,575$                   | 10      | -0,433                          | -0,1676     | 0,1283 | -2,83         | 0,624                         |
| $;8,625$                   | 18      | -0,039                          | -0,0156     | 0,1520 | 2,80          | 0,516                         |
| $;8,675$                   | 17      | 0,354                           | 0,1383      | 0,1539 | 1,61          | 6,168                         |
| $;8,725$                   | 12      | 0,748                           | 0,2728      | 0,1345 | -1,45         | 0,157                         |
| $;8,775$                   | 9       | 1,142                           | 0,3733      | 0,1005 | -1,05         | 0,110                         |
| $;8,825$                   | 7       | 1,536                           | 0,4377      | 0,0644 | 0,56          | 0,048                         |
| $(8,825; \infty)$          | 7       | $+\infty$                       | 0,5000      | 0,0623 | 0,77          | 0,095                         |
| $\Sigma$                   | $n=100$ | -                               | -           | 1,000  | -             | $\Sigma=2,528 = \chi^2$       |

với số liệu trên ta tính  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} X_i = 8,63$

$$s = 0,127$$

$$t_i = \frac{y_i - \bar{X}}{s} = \frac{y_i - 8,63}{0,127}$$

Chẳng hạn  $t_1 = \frac{8,425 - 8,63}{0,127} = -1,614;$

$$\Phi(-1,614) = -0,4467$$

$$\Phi(-\infty) = -0,5$$

$$p_1 = -0,4467 + 0,5 = 0,0533$$

$$k = l - 3 = 10 - 3 = 7$$

với  $P = 0,90$ , Suy ra  $\chi^2(0,90; 7) = 12,02$

Vậy  $\chi^2 = 2,528 < \chi^2(0,90; 7)$ . Ta kết luận  $X$  tuân theo phân phối chuẩn.

*Chú ý:* Nếu giá trị  $\chi^2$  tính toán lớn hơn  $\chi^2$  trong bảng tới 5 lần thì độ nghi ngờ khá cao và nên làm lại thí nghiệm. Còn nếu chưa đến ngưỡng đó thì làm theo thí nghiệm đã xét.

## 3.2. Phương pháp đường Henri

*Bước 1:* Có các quan trắc  $x_1, x_2, \dots, x_n$  của đại lượng  $X$  được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và chia khoảng  $(y_{i-1}, y_i)$   $i = 1, 2, \dots, l$  sao cho số quan trắc trên mỗi khoảng lớn hơn 5.

*Bước 2:* Tính

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

và phân phối thực nghiệm theo các khoảng

$$p_i = \frac{n_i}{n}, \text{ trong đó } n_i \text{ là số quan trắc } < y_i.$$

*Bước 3:* Tra bảng  $\bar{\Phi}$  để xác định  $t_i$  sao cho:

$$\bar{\Phi}(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du = p_i$$

*Bước 4:* Vẽ đường có tọa độ  $(y_i, t_i)$

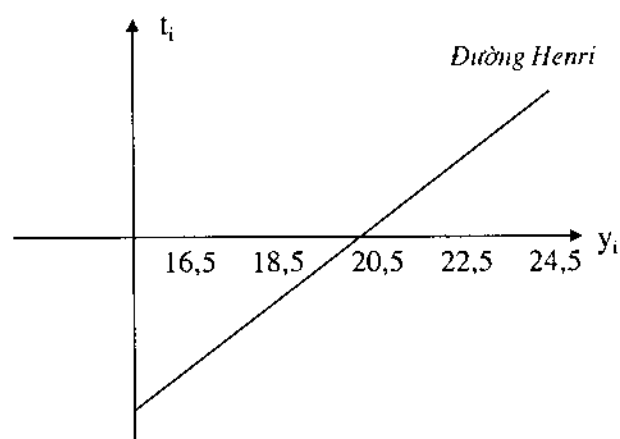
Nếu là đường thẳng thì kết luận  $X$  tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng  $\bar{X}$  và phương sai xấp xỉ  $s^2$ .

*Ví dụ 3.2:* Điều tra 815 trẻ em lứa tuổi 12 -13 ở thị xã Hà Đông ta được kết quả như sau:

| Nhóm cân | Số trẻ trong nhóm | Các điểm chứa $y_i$ | Tần số $n_{y_i}$ | Tần suất | $t_i$ |
|----------|-------------------|---------------------|------------------|----------|-------|
| 16       | 4                 | 16,5                | 4                | 0,0049   | -2,58 |
| 17       | 9                 | 17,5                | 13               | 0,0159   | -2,15 |
| 18       | 31                | 18,5                | 44               | 0,0539   | -1,61 |

|    |     |      |     |        |           |
|----|-----|------|-----|--------|-----------|
| 19 | 75  | 19,5 | 119 | 0,1460 | -1,00     |
| 20 | 183 | 20,5 | 302 | 0,3705 | -0,33     |
| 21 | 204 | 21,5 | 506 | 0,6208 | 0,31      |
| 22 | 157 | 22,5 | 663 | 0,8135 | 0,89      |
| 23 | 97  | 23,5 | 760 | 0,9325 | 1,50      |
| 24 | 40  | 24,5 | 800 | 0,9815 | 2,09      |
| 25 | 12  | 25,5 | 812 | 0,9963 | 2,68      |
| 26 | 3   | 26,5 | 815 | 1,000  | $+\infty$ |

Đồ thị  $(y_i, t_i)$



**Bài tập 3.1.** Lập chương trình kiểm định tính chuẩn bằng tiêu chuẩn  $\chi^2$ .

Chương trình:

```

Program KIEM_DINH_TINH_CHUAN ;
uses CRT ;
const
  Nmax = 100 ;
  Lmax = Nmax div 5 ;
var
  X : array[1 .. Nmax] of real ;
  P : array[1 .. Lmax] of real ;
  n , i , l , ml , k , k1 : integer ;
  Tong , Xtb , s , tg , Khi2 : real ;
  OK : boolean ;
  u1 , u2 , phi1 , phi2 , d1 , d2 : real ;
  Alpha , Kh : array[1 .. 12] of real ;

```



```

F : TEXT ;
BEGIN
ClrScr ;
writeln(' NHAP DAY SO LIEU QUAN TRAC ' ) ;
writeln ;
write('So luong quan trac : ' ) ; readln(n) ;
for i := 1 to n do
begin
write('Quan trac thu ', i , ' : ' ) ;
readln(X[i])
end ;
repeat
{ Sap xep lai cac quan trac de chia khoang }
OK := true ;
for i := 1 to n-1 do
if X[i] > X[i+1] then
begin tg := X[i] ; X[i] := X[i+1] ;
X[i+1] := tg ; OK := false
end ;
until OK ;
Tong := 0 ;
{ Tinh ky vong va phuong sai }
for i := 1 to n do
Tong := Tong + X[i] ;
Xtb := Tong / n ;
s := 0 ;
for i := 1 to n do
s := s + sqr(X[i] - Xtb) ;
s := sqrt(s/(n-1)) ;
l := n div 5 ;
tg := (X[1] - Xtb)/s ;
Assign(F,'BANG_2.TXT') ;
{ Tra bang II de tinh Pi }
reset(F) ;
readln(F, u2 , phi2) ;
while not SeekEOF(F) do
if tg > u2 then readln(F, u1 , phi1)
else
begin
u1 := u2 ;
phi1 := phi2 ;
readln(F, u2, phi2) ;
break
end ;
d1 := phi1 + (tg - u1)*(phi2 - phi1)/(u2 - u1) ;
close(F) ;
for i := 1 to l-1 do
begin
tg := (X[i*5+1] - Xtb)/s ;

```

```

reset(F) ;
readln(F, u2 , phi2) ;
while not SeekEOF(F) do
    if tg > u2 then readln(F, u2 , phi2)
    else
        begin
            u1 := u2 ;
            phi1 := phi2 ;
            readln(F, u2, phi2) ;
            break
        end ;
    d2 := phi1 + (tg - u1)*(phi2 - phi1)/(u2 - u1) ;
    close(F) ;
    P[i] := d2 - d1 ;
    d1 := d2
end ;
tg := (X[n] - Xtb)/s ;
reset(F) ;
readln(F, u2 , phi2) ;
while not SeekEOF(F) do
    if tg > u2 then readln(F, u2 , phi2)
    else
        begin
            u1 := u2 ;
            phi1 := phi2 ;
            readln(F, u2, phi2) ;
            break
        end ;
    d2 := phi1 + (tg - u1)*(phi2 - phi1)/(u2 - u1) ;
    close(F) ;
    P[i] := d2 - d1 ;
    ml := 5 + n mod 5 ;
    Khi2 := sqr(ml - n*P[i])/n/P[i] ;
    for i := 1 to l-1 do
        Khi2 := Khi2 + sqr(5 - n*P[i])/n/P[i] ;
    k := l - 3 ;
    Assign(F, 'BANG_6.TXT') ;
    reset(F) ;
    for i := 1 to 12 do read(F, Alpha[i]) ;
    readln(F) ;
    read(F, k1) ;
    while NOT SeekEOF(F) do
        if k > k1 then
            begin readln(F) ; read(F, k1) end
        else
            begin

```

{ Tinh Khi2 }

{ Tra bang VI de ket luan }

```

        for i := 1 to 12 do read(F, Kh[i]);
        readln(F);
        Close(F);
        break
    end ;
for i := 1 to 12 do
    begin
        writeln('Voi do tin cay ', Alpha[i]:4:1, '% ta ket luan : ');
        if Khi2 > kh[i] then writeln('- Dai luong X khong phan phoi chuan ! ')
        else writeln('- Dai luong X phan phoi chuan ! ');
    end ;
readln ;
END.

```

*Chú ý:* Trong chương trình có sử dụng số liệu của Bảng II và Bảng VI - Phụ lục.

Bảng II được lưu trong tệp văn bản 'BANG\_2.TXT' bao gồm 34 dòng, mỗi dòng có 11 số thực là  $x$  và các giá trị  $\Phi_j(x)$ .

Bảng VI được lưu trong tệp văn bản 'BANG\_6.TXT' bao gồm 38 dòng:

- Dòng đầu gồm 12 số thực chỉ các mức ý nghĩa  $\alpha$ .
- 37 dòng sau, mỗi dòng gồm 13 số: bắt đầu là số nguyên  $k$  còn 12 số thực sau là các giá trị của hàm  $Khi2$  tương ứng với các mức ý nghĩa  $\alpha$ .

## Chương 4

# QUAN HỆ GIỮA CÁC DÃY QUAN TRẮC

### 4.1. So sánh độ chính xác của các quan trắc

Giả sử có hai loạt quan trắc. Ta tính được phương sai thực nghiệm:

$s_1^2$  với bậc tự do  $k_1$

$s_2^2$  với bậc tự do  $k_2$

Khi đó có thể kết luận gì về độ chính xác của hai loạt quan trắc: khác nhau, tức là  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  hay bằng nhau, tức là  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Để làm điều đó ta lập:  $\text{Test} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = F$  nếu  $s_1^2 > s_2^2$ .

Với độ tin cậy  $P$  (với hai giá trị  $P = 0,95$  và  $0,99$ ), bậc tự do  $k_1, k_2$  ta tra bảng IX của Phụ lục để tìm  $F(P, k_1, k_2)$ .

Nếu  $\text{Test } F > F_{\text{bảng}}$  thì kết luận là  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  với độ tin cậy  $P$ .

Nếu  $\text{Test } F < F_{\text{bảng}}$  thì kết luận là  $\sigma_1 = \sigma_2$  hoặc làm thêm thí nghiệm.

*Ví dụ 4.1:* Cần quan sát một đại lượng với dụng cụ quan trắc cũ ta có dãy số liệu  $x_1, x_2, \dots, x_{15}$  ( $n = 15$ ) và phương sai thực nghiệm cũ  $s_1^2 = 3,82$ , phương sai thực nghiệm mới  $s_2^2 = 2,00$ . Có thể khẳng định rằng dụng cụ quan trắc mới chính xác hơn dụng cụ quan trắc cũ hay không?

$$\text{Lập} \quad \text{Test } F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3,82}{2,00} = 1,91$$

$$k_1 = 200 - 1 = 199$$

$$k_2 = 15 - 1 = 14$$

$$F(0,95; 199; 14) = 2,13$$

$F = 1,91 < F_{\text{bảng}} = 2,13$ , vậy chưa có cơ sở để kết luận khác nhau.

Ta làm thêm  $n_2 = 43$  quan trắc và phương sai thực nghiệm vẫn bằng  $s_2^2 = 200$ .

Khi đó  $k_2 = 43 - 1 = 42$  và  $F(0,95; 199; 42) = 1,475$  (Bảng IX của Phụ lục).

Vậy  $F = 1,91 > 1,475$  và ta có thể kết luận  $\sigma_1, \sigma_2$  khác nhau với độ tin cậy 95%. Phương sai của dụng cụ mới thực sự bé hơn phương sai của dụng cụ cũ. Do

đó, đo bằng dụng cụ quan trắc mới sẽ chính xác hơn.

## 4.2. So sánh giá trị trung bình

Cho hai dãy quan trắc  $x_1, x_2, \dots, x_{n1}$

$y_1, y_2, \dots, y_{n2}$

đó là thể hiện của hai đại lượng nào đó  $X$  và  $Y$  và là hai đối tượng cần nghiên cứu. Công việc đầu tiên của nhà nghiên cứu là loại bỏ những quan trắc có nghi ngờ mang sai số thô hoặc sai số hệ thống và chỉ còn lại sai số ngẫu nhiên vì không khử được. Vậy ta phải xét xem nó thuộc họ phân phối nào (chuẩn hay không chuẩn) khi đã xác định là thuộc luật chuẩn.

Đồng thời, vấn đề tiếp theo là nghiên cứu xem hai dãy số liệu trên có khác nhau thực sự không hay chỉ là ngẫu nhiên. Nếu khác nhau thực sự thì cần nghiên cứu đến bản chất của vấn đề là do phương pháp dẫn đến hay do các điều kiện bổ sung.

Để kiểm nghiệm sự khác nhau thực sự hay không, ta kiểm định giá trị trung bình của hai dãy trên.

### 1. Khi hai dãy quan trắc có cùng độ chính xác

Hai dãy có cùng phương sai  $\sigma_1 = \sigma_2$  (đã biết) và là theo luật chuẩn. Khi đó lập

$$\text{Test} = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (1)$$

với độ tin cậy  $P$  tra bảng II ta được  $u(P)$  sao cho  $2\Phi(u(P)) = P$ .

Ví dụ 4.2:  $P = 0,99$  tra bảng  $u(P) = 2,576$

$P = 0,95$  tra bảng  $u(P) = 1,960$

Nếu  $\text{Test} > u(P)$  thì xem như hai dãy khác nhau về giá trị trung bình với độ tin cậy  $P$ .

Nếu  $\text{Test} < u(P)$  thì không có cơ sở để kết luận là hai dãy khác nhau mà cũng có thể khác nhau là do ngẫu nhiên. Ta chấp nhận rằng giá trị trung bình không khác nhau với độ tin cậy  $P$  (và nếu với độ tin cậy  $P$  là vừa đủ đảm bảo cho việc nghiên cứu).

Ví dụ: Tiến hành hai loạt quan trắc  $n_1 = 25$  và  $n_2 = 50$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 1,0$

Tính toán được  $\bar{X} = 23,56; \bar{Y} = 22,80$

Khi đó 
$$Test = \frac{|23,56 - 22,80|}{\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{50}}} = \frac{0,76}{0,24} = 3,16$$

Tra bảng ta được  $t(0,99) = 2,576$  (Bảng II - Phụ lục).

Vậy  $Test = 3,16 > 2,576$ . Do đó ta có thể kết luận rằng giá trị trung bình của hai dãy khác nhau với độ tin cậy 99% hoặc hai dãy số liệu khác nhau thực sự.

## 2. Khi hai dãy không biết độ chính xác quan trắc

Khi đó ta tính được  $s_1^2, s_2^2$  với

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{X})^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{Y})^2$$

Lập 
$$Test = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

trong đó 
$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}$$

Tra bảng V (Phụ lục) ta có  $t(P, k)$ , trong đó  $P$  là độ tin cậy,  $k$  là bậc tự do và bằng  $n_1 + n_2 - 2$ .

- Nếu  $Test > t(P, k)$  thì kết luận các giá trị trung bình khác nhau với độ tin cậy  $P$ .

- Nếu  $Test < t(P, k)$  thì kết luận các giá trị trung bình như nhau, nếu  $P$  đủ đảm bảo để nghiên cứu.

Điều tra được hai loạt quan trắc  $n_1 = 25$  và  $n_2 = 50$

$$\bar{X} = 23,56; \bar{Y} = 22,80$$

$$s_1 = 1,10; s_2 = 1,25$$

Tính được 
$$S = \sqrt{\frac{24 \cdot (1,10)^2 + 49 \cdot (1,25)^2}{73}} = \sqrt{\frac{29,04 + 76,56}{73}} = 1,2$$

$$Test = \frac{|23,56 - 22,80|}{S \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{50}}} = \frac{0,76}{1,2 \cdot 0,24} = \frac{0,76}{0,288} = 2,64$$

Tra bảng V ta được  $t(0,99; 73) = 2,65$ , vậy không thể kết luận hai giá trị trung bình khác nhau.

Nếu ta hạ xuống  $t(0,98; 73) = 2,38$  thì  $Test = 2,64 > t(0,98; 73) = 2,38$  và khi đó có thể kết luận rằng sự khác nhau giữa hai giá trị trung bình là có ý nghĩa với độ tin cậy 98%.

*Chú ý:* Thực ra trong ví dụ 4.2 ở trên, ranh giới để kết luận hai giá trị trung bình là khác nhau hay không khác nhau chưa thật rõ ràng vì cận quá gần nhau. Vì vậy trong những trường hợp tương tự ta phải làm thêm thí nghiệm hoặc làm lại.

### 3. Khi không biết phân phối

Các tiêu chuẩn trên đều giả thiết là hai dãy quan trắc phải tuân theo luật chuẩn. Vậy thì, trong trường hợp không biết phân phối ta có thể kết luận được không? Khi đó ta có thể dùng tiêu chuẩn sau đây, gọi là tiêu chuẩn phi tham số Mann-Whitney.

Giả sử ta có hai dãy số liệu:  $\begin{cases} x_1 x_2 \dots x_n \\ y_1 y_2 \dots y_m \end{cases}$

Ta thực hiện các bước sau:

*Bước 1:* Sắp xếp hai dãy số liệu trên với  $n+m$  phần tử theo thứ tự tăng dần, ta được dãy:  $Z_1 < Z_2 < Z_3 < \dots < Z_{n+m}$ .

*Bước 2:* Tính hạng của từng phần tử.

Hạng của  $Z_i$ , ký hiệu là  $Rank Z_i$  và được định nghĩa như sau:

$$Rank Z_1 = 1$$

$$\text{Nếu } Z_{i-1} < Z_i = Z_{i+1} < Z_{i+2} \text{ thì } Rank Z_i = Rank Z_{i+1} = i + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Nếu } Z_{i-1} < Z_i = Z_{i+1} = Z_{i+2} < Z_{i+3} \text{ thì } Rank Z_i &= Rank Z_{i+1} = Rank Z_{i+2} \\ &= \frac{1}{3}(i + i+1 + i+2) = i+1 \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } Z_{i-1} < Z_i = Z_{i+1} = Z_{i+2} = \dots = Z_{i+l} < Z_{i+l+1} \text{ thì}$$

$$Rank Z_i = Rank Z_{i+1} = \dots = Rank Z_{i+l} = \frac{1}{l}(i + i+1 + \dots + i+l)$$

*Bước 3:* Tính  $R_k$  là tổng các hạng của các số liệu trong từng dãy  $k = 1, 2$ ;

$R_1$  là tổng các hạng của các  $Z_i$  trong dãy  $X_i$ ;

$R_2$  là tổng các hạng của các  $Z_i$  trong dãy  $Y_i$ ;

Bước 4: Tính 
$$u_1 = n.m + \frac{n(n+1)}{2} - R_1$$

$$u_2 = n.m + \frac{m(m+1)}{2} - R_2$$

Đặt 
$$u = \min(u_1, u_2)$$

Ta tính 
$$Eu = \frac{nm}{2}; Du = \frac{nm(n+m-1)}{12}$$

và 
$$u = \frac{u - Eu}{\sqrt{Du}}$$

Bước 5: So sánh với  $u(\alpha)$  là số mà  $\Phi(u(\alpha)) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$ , trong đó

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{Bảng II - Phụ lục}).$$

Ví dụ 4.3:

|       |      |      |      |
|-------|------|------|------|
| 0,001 | 0,01 | 0,05 | 0,1  |
| 3,3   | 2,58 | 1,96 | 1,64 |

Nếu  $|u| \geq u(\alpha)$  thì kết luận hai dãy có giá trị trung bình khác nhau với mức ý nghĩa  $\alpha$ .

Nếu  $|u| < u(\alpha)$  thì chấp nhận hai dãy có giá trị trung bình như nhau với mức ý nghĩa  $\alpha$ .

### 4.3. Quan hệ hàm giữa hai dãy quan trắc

#### 1. Phương pháp bình phương bé nhất

Giả sử có hai dãy quan trắc của hai đại lượng  $X, Y$  được cho như sau:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \dots x_n \\ y_1 y_2 \dots y_n \end{cases}$$

liệu giữa hai đại lượng  $X, Y$  có mối quan hệ hàm hay không và đó là hàm nào.

Giả sử trong hai loạt quan trắc ta đã loại trừ sai số thô và sai số hệ thống. Trước tiên là ta vẽ đồ thị với các điểm có tọa độ  $(x_i, y_i)$

Nếu đồ thị xấp xỉ đường thẳng thì có quan hệ tuyến tính  $Y = AX + B$  còn nếu chưa rõ ràng thì cần phải biến đổi. Thông thường có các dạng phụ thuộc sau đây:

$$y = ax + b; y = ae^{bx} + c; y = a + h \sin(\omega x + \varphi) \dots$$



Một cách tổng quát, ta cần phải tìm hàm  $y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$  sao cho khi  $x = x_k$  ta có giá trị lý thuyết  $y = f(x_k, a_0, a_1, \dots, a_n)$  sai khác giá trị  $y_k$  là ít nhất hoặc tổng các bình phương độ lệch tại các điểm quan trắc là bé nhất.

$$\sum_{k=1}^n [y_k - f(x_k, a_0, a_1, \dots, a_n)]^2 = \min$$

Nếu giữa  $X$  và  $Y$  có quan hệ tuyến tính thì hàm phụ thuộc được xác định như sau:

$$Y = aX + b \quad (1)$$

trong đó 
$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (2)$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = \frac{1}{n} \sum y_i - \frac{a}{n} \sum x_i \quad (3)$$

## 2. Kiểm tra sự phụ thuộc tuyến tính

Ta tính 
$$\delta(X, Y) = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} \cdot S_{YY}}} \quad (4)$$

trong đó 
$$S_{XY} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}$$

$$S_{XX} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

$$S_{YY} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

- Nếu  $|\delta(X, Y)| \approx 1$  thì  $X, Y$  phụ thuộc tuyến tính.

- Nếu  $\delta(X, Y) = 0$  thì  $X, Y$  không tương quan (có nghĩa là không có mối liên quan).

*Chú ý:* Hai đại lượng  $X, Y$  có thể không phụ thuộc tuyến tính, nhưng  $\ln X, Y$  hoặc  $X^2$  và  $\ln Y \dots$  lại có quan hệ tuyến tính. Khi đó ta cần thử với các trường hợp khác này.

*Ví dụ 4.4:* Xét sự hoà tan của  $\text{NaNO}_3$  trong nước phụ thuộc vào xúc tác của nhiệt độ  $T^\circ$ .

Ta có bảng số liệu :

|                  |           |            |            |            |            |             |
|------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| $T^\circ = X$    | $0^\circ$ | $20^\circ$ | $40^\circ$ | $60^\circ$ | $80^\circ$ | $100^\circ$ |
| $Y$ (độ hoà tan) | 70,7      | 88,3       | 104,9      | 124,7      | 148,0      | 176,0       |

Hãy tính  $\delta(X, Y) = 0,993 \approx 1$ . Vậy  $X, Y$  phụ thuộc tuyến tính

Tính tiếp ta được

$$\left. \begin{array}{l} a = 1,04 \\ b = 66,95 \end{array} \right\} \text{ và ta có phương trình } Y = 1,04 X + 66,95.$$

#### 4.4. Quan hệ hàm giữa ba dãy quan trắc

Giả sử có ba đại lượng  $Z, X, Y$  và ta nghĩ rằng chúng có mối quan hệ tuyến tính chẳng hạn:

$$Z - \bar{Z} = a.(X - \bar{X}) + b.(Y - \bar{Y}) \quad (5)$$

Khi đó ta tính

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (6)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (7)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

các hệ số  $a, b$  tính được từ hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} a \sum (x_i - \bar{X})^2 + b \sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) = \sum (x_i - \bar{X})(z_i - \bar{Z}) \\ a \sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) + b \sum (y_i - \bar{Y})^2 = \sum (y_i - \bar{Y})(z_i - \bar{Z}) \end{cases} \quad (9)$$

#### 4.5. Quan hệ hàm giữa nhiều dãy

1) Giả sử ta có  $k+1$  dãy khi thực hiện  $n$  loạt quan trắc, mỗi loạt  $k+1$  quan trắc.

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $y_1$    | $x_{11}$ | $x_{12}$ | ...      | $x_{1k}$ |
| $y_2$    | $x_{21}$ | $x_{22}$ | ...      | $x_{2k}$ |
| $y_3$    | $x_{31}$ | $x_{32}$ | ...      | $x_{3k}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_n$    | $x_{n1}$ | $x_{n2}$ | ...      | $x_{nk}$ |

Ta muốn lập quan hệ hàm tuyến tính giữa  $Y$  và  $X_1, X_2, \dots, X_k$

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k$$

Ký hiệu các ma trận như sau:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

thì ta có công thức để tính  $\beta = (X'X)^{-1}(X'Y)$

2) Kiểm tra sự phụ thuộc tuyến tính

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1: \beta_i \neq 0$$

$$\text{Test } f = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n-k-1}}$$

trong đó 
$$SSR = \beta^c X^c Y - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}$$

$$SSE = Y^c Y - \beta^c X^c Y$$

Tra bảng phân phối  $\chi^2$  với mức ý nghĩa  $\alpha$  và với  $k; n - k - 1$  bậc tự do (Bảng VI - Phụ lục).

Nếu  $f > F_{\alpha, k; n-k-1}$  thì loại bỏ  $H_0$ , nghĩa là có phụ thuộc tuyến tính với mức ý nghĩa  $\alpha$  hay là độ tin cậy  $1 - \alpha$ .

*Chú ý:* Nếu  $Y_1, X_1, \dots, X_k$  không phụ thuộc tuyến tính, thì có thể xét sang các dạng *loga* của chúng.

**Bài tập 4.1.** Lập chương trình so sánh  $\bar{X}$  và  $\bar{Y}$  của hai loạt quan trắc.

Chương trình:

```
Program SO_SANH_2_QUAN_TRAC ;
uses CRT ;
const Nmax = 50 ;
var
  X , Y : array[1..Nmax] of real ;
  n1 , n2 , i , j , k : integer ;
  Xtb , Ytb , S , Test , s1 , s2 , p , t : real ;
```

```

u , phi , u1 , phi1 , u2 , phi2 :real ;
TL : char ;
PK : array[1..4] of real ;
T1 , T2 : array[0..4] of real ;
F : TEXT ;

BEGIN
ClrScr ;
writeln(' NHAP DAY SO LIEU QUAN TRAC THU 1') ;
write('So luong quan trac : ') ; readln(n1) ;
S := 0 ;
for i := 1 to n1 do
begin
write('Quan trac thu ', i , ' : ') ;
readln(X[i]) ;
S := S + X[i] ;
end ;
Xtb := S / n1 ;
writeln(' NHAP DAY SO LIEU QUAN TRAC THU 2') ;
write('So luong quan trac : ') ; readln(n2) ;
S := 0 ;
for i := 1 to n2 do
begin
write('Quan trac thu ', i , ' : ') ;
readln(Y[i]) ;
S := S + Y[i] ;
end ;
Ytb := S / n2 ;
write('Hai day quan trac co cung do chinh xac hay khong ?(c/k) ') ;
readln(TL) ;
if Uppcase(TL) = 'C' then { Hai day co cung do chinh xac }
begin
write('Nhap phuong sai: ') ;
readln(S) ;
Test := abs(Xtb - Ytb)/S/sqrt(1/n1 + 1/n2) ;
Assign(F,'BANG_2.TXT') ;
repeat
write('Nhap do tin cay p : ') ;
readln(p) ;
phi := p/2 ;
reset(F) ;
readln(F, u2 , phi2) ;
while not SeekEOF(F) do
if phi > phi2 then readln(F, u2 , phi2)
else
begin

```

```

u1 := u2 ;
phi1 := phi2 ;
    readln(F, u2, phi2) ;
    break
end ;
u := u1 + (phi - phi1)*(u2 - u1)/(phi2 - phi1) ;
if Test > u then
    writeln(' Hai day khac nhau voi do tin cay ', p:4:2)
else writeln(' Hai day giong nhau voi do tin cay ', p:4:2) ;
write('Co nhap do tin cay khac khong ?(c/k) ');
readln(TL) ;
close(F) ;
until Upcase(TL) = 'K' ;
end
else { Khi khong biet do chinh xac cua 2 day }
begin
    S := 0 ;
    for i := 1 to n1 do S := S + sqr(X[i] - Xtb) ;
    s1 := sqrt(S/(n1-1)) ;
    S := 0 ;
    for i := 1 to n2 do S := S + sqr(Y[i] - Ytb) ;
    s2 := sqrt(S/(n2-1)) ;
    k := n1 + n2 - 2 ;
    S := sqrt((s1*s1*(n1-1) + s2*s2*(n2-1))/k) ;
    Test := abs(Xtb - Ytb) / S / sqrt(1/n1 + 1/n2) ;
    Assign(F, 'BANG_4.TXT') ;
    repeat
        write('Nhap do tin cay p (0.95 <= p <= 0.999) : ');
        readln(p) ;
        reset(F) ;
        for i := 1 to 4 do read(F, PK[i]) ;
        readln(F) ;
        j := 1 ;
        while p > PK[j] do inc(j) ;
        for i := 0 to 4 do read(F, T2[i]) ;
        readln(F) ;
        while not SeekEOF(F) do
            if k > T2[0] then
                begin
                    for i := 0 to 4 do read(F, T2[i]) ;
                    readln(F) ;
                end
            else
                begin
                    T1 := T2 ;
                    for i := 0 to 4 do read(F, T2[i]) ;

```

```

        readln(F) ;
        break
    end ;
    s1 := T1[j-1] + (p - PK[j]-1)*(T1[j] - T1[j]-1)/(PK[j] - PK[j-1]) ;
    s2 := T2[j-1] + (p - PK[j-1])*(T2[j] - T2[j-1])/(PK[j] - PK[j-1]) ;
    t := s1 + (k - T1[0]) * (s2 - s1) / (T2[0] - T1[0]) ;
    if Test > t then
        writeln(' Hai day khac nhau voi do tin cay ', p;4:2)
    else writeln(' Hai day giống nhau voi do tin cay ', p;4:2) ;
    write('Co nhap do tin cay khac khong ?(c/k) ');
    readln(TL) ;
    close(F) ;
    until Upcase(TL) = 'K' ;
end ;
Readln ;
END.

```

**Chú ý:** Trong chương trình có sử dụng số liệu của Bảng II và Bảng IV - Phụ lục. Bảng II được lưu trong tệp văn bản 'BANG\_2.TXT' bao gồm 34 dòng, mỗi dòng có 11 số thực  $x$  và các giá trị  $\Phi_i(x)$ .

Bảng IV được lưu trong tệp văn bản 'BANG\_4.TXT' bao gồm 28 dòng:

- Dòng đầu gồm 4 số thực chỉ giá trị của độ tin cậy  $\rho$ .
- 27 dòng sau, mỗi dòng gồm 5 số: bắt đầu là số nguyên  $n$ , bốn số thực sau là các giá trị của hàm  $t$  tương ứng với các giá trị của  $\rho$ .

#### **Bài tập 4.2.** Lập chương trình hồi quy tuyến tính hai dãy quan trắc.

##### **Tổ chức dữ liệu:**

Dữ liệu: Để trong tệp văn bản có tên 'HQT2.INP' bao gồm:

- Dòng đầu là số nguyên  $n$  chỉ kích thước của hai dãy quan trắc.
- $n$  dòng tiếp theo, mỗi dòng hai số thực  $X_i$  và  $Y_i$  chỉ cặp quan trắc.

Kết quả: Cát trong tệp văn bản 'HQT2.OUT' bao gồm: hệ số tương quan  $r$  và các hệ số hồi quy:  $a$ ,  $b$ .

Chẳng hạn: Tệp dữ liệu 'hqt2.inp'

```

6
0    70.7
20   88.3
40   104.9
60   124.7
80   148.0
100  176.0

```

Tệp kết quả 'hqt2.out'

```

r = 0.99478
a = 1.03629
b = 66.95238

```

Chương trình:

```
Program HOI_QUY_TT_2_DAY_QTRAC ;
{$B+}
uses CRT;
const
    MAX = 100 ;
    Tep_In : string = 'HQTT2.INP' ;
    Tep_Out: string = 'HQTT2.OUT' ;
var
    f : TEXT ;
    n : integer ;
    X, Y : array[1..MAX] of real ;
    ex, ey, sx, sy : real ;
    sxy, r : real;           { Hiep phuong sai va he so tuong quan cua 2 day }
    a, b : real;             { Cac he so hoi quy }

procedure Khoi_Tao(Ten_Tep : string) ;
var
    i : integer ;
begin
    clrscr;
    fillchar(X, sizeof(X), 0) ;
    fillchar(Y, sizeof(Y), 0) ;
    Assign(f, Ten_Tep) ;
    {$I-} reset(f) ; {$I+}
    readln(f, n) ;
    for i := 1 to n do readln(f, X[i], Y[i]) ;
    close(f) ;
    writeln(n) ;
    for i := 1 to n do writeln(X[i]:8:2, Y[i]:8:2) ;
    writeln ;
end ;

procedure Tinh_Toan ;
var
    i : integer;
begin
    ex := 0 ;
    ey := 0 ;
    sx := 0 ;
    sy := 0 ;
    for i := 1 to n do
        begin
            ex := ex + X[i] ;
            sx := sx + X[i] * X[i] ;
```

```

    ey := ey + Y[i] ;
    sy := sy + Y[i] * Y[i]
end;
ex := ex/n ;
sx := sx/n - ex*ex ;
ey := ey/n ;
sy := sy/n - ey*ey ;

{ Tinh hiep phuong sai cua 2 day }

sxy := 0 ;
for i := 1 to n do sxy := sxy + X[i] * Y[i] ;
sxy := sxy/n - ex*ey ;

{ Tinh he so tuong quan }

r := sxy/(sqrt(sx*sy)) ;
end ;

{ Uoc luong cac he so hoi quy tuyen tinh Y = aX + b }
procedure Uoc_Luong(var a, b : real) ;
begin
    a := r * sqrt(sy/sx) ;
    b := ey - a*ex ;
end;

procedure In_KQ ;
begin
    writeln('r = ', r:8:5) ;
    writeln('a = ', a:8:5) ;
    writeln('b = ', b:8:5) ;
    assign(f,Tep_Out) ;
    rewrite(f) ;
    writeln(f, 'r = ', r:8:5) ;
    writeln(f, 'a = ', a:8:5) ;
    writeln(f, 'b = ', b:8:5) ;
    close(f) ;
end ;

BEGIN
    Khoi_Tao(Tep_In) ;
    Tinh_Toan ;
    Uoc_Luong(a,b) ;
    In_KQ ;
    readln ;
END.

```

**Bài tập thực hành 4.3.** Lập chương trình hồi quy tuyến tính m biến.



## PHÂN TÍCH PHƯƠNG SAI

### 5.1. Mở đầu

Phân tích phương sai là phương pháp phân tích thống kê về mặt chất lượng và số lượng của sự ảnh hưởng của một hoặc nhiều yếu tố tới kết quả của đại lượng đang nghiên cứu. Phương pháp này được R.A. Fischer đề xuất và sau đó C. Eissenhart tiếp tục nghiên cứu. Phương pháp phương sai có hai mô hình cơ bản.

*Loại 1:* Mô hình với kết quả cố định;

*Loại 2:* Mô hình với kết quả ngẫu nhiên.

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày mô hình phân tích phương sai một và nhiều yếu tố.

### 5.2. Test - kiểm tra của Bartlett

Giả sử cần thực hiện  $m$  phương án thí nghiệm, mỗi phương án thực hiện  $n_i$ , ( $i = \overline{1, m}$ ) lần thí nghiệm lặp lại. Đối với mỗi phương án, đại lượng đang nghiên cứu tuân theo luật chuẩn.

Khi đó ta được các số liệu quan trắc là:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1n_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{m1} & \dots & Y_{mn_m} \end{pmatrix}$$

Kiểm định giả thiết

$H: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_m^2$  nghĩa là độ chính xác của  $m$  phương án là như nhau.

Ta tính 
$$Test \ T = \frac{1}{C} \left[ (N-m) \ln S^2 - \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \ln S_i^2 \right]$$

trong đó 
$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{n_i - 1} \right) - \frac{1}{N-m} \right]$$

$$N = \sum_{i=1}^m n_i$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{ik} - \bar{Y}_i)^2 \quad \text{với } \bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} Y_{ik}$$

$$\text{và} \quad S^2 = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2$$

Nếu  $H$  đúng thì  $T$  có phân phối  $\chi^2$  với  $m-1$  bậc tự do, khi  $n_i \rightarrow \infty, \dots, n_m \rightarrow \infty$ .

Do đó với độ tin cậy  $P = 1 - \alpha$  và  $m-1$  bậc tự do, ta tra bảng  $\chi^2_{1-\alpha, m-1}$  (Bảng VI - Phụ lục). Chẳng hạn:  $\alpha = 5\%$  thì  $1 - \alpha = P = 95\%$ ;  $m = 5$ . Vậy  $\chi^2_{0,95,4} = 9,49$ .

- Nếu  $Test\ T > \chi^2_{1-\alpha, m-1}$  thì bác bỏ  $H$ , nghĩa là các phương án có độ chính xác khác nhau.

- Nếu  $Test\ T < \chi^2_{1-\alpha, m-1}$  thì chấp nhận  $H$ , nghĩa là các phương án có độ chính xác như nhau.

Chú ý: Với  $m = 2$  ta có Test của Fischer

$$H: \sigma_1 = \sigma_2$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} (\text{giả sử } s_1^2 > s_2^2)$$

Tra bảng phân phối Fischer với  $(n_1 - 1)$  và  $(n_2 - 1)$  bậc tự do (Bảng IX - Phụ lục) với mức ý nghĩa  $\alpha$  (tức là độ tin cậy  $P = 1 - \alpha$ ).

Nếu  $F \geq F_{\alpha; n_1-1, n_2-1}$  thì bác bỏ  $H$ , nghĩa là độ chính xác khác nhau.

Nếu  $F < F_{\alpha; n_1-1, n_2-1}$  thì chấp nhận  $H$ , nghĩa là độ chính xác như nhau.

### 5.3. Mô hình phân tích biến phân loại 1 dạng đơn giản

#### 1. Định nghĩa

Để phân tích hiệu quả của yếu tố ảnh hưởng  $A$  trên  $m$  cấp lên kết quả của đại lượng đang nghiên cứu, ta làm thí nghiệm với  $A$  chia  $m$  bước và đo các kết quả  $y_{ik}$

$$i = 1, 2, \dots, m \text{ (m cấp)}$$

$$k = 1, 2, \dots, n_i \text{ (số lần lặp ở bước } i\text{)}$$

Ta có bảng số liệu :

|          | Lặp $k$  |          |     |            |
|----------|----------|----------|-----|------------|
| $i$      | 1        | 2        | ... | $n_i$      |
| 1        | $y_{11}$ | $y_{12}$ | ... | $y_{1n_1}$ |
| 2        | $y_{21}$ | $y_{22}$ | ... | $y_{2n_2}$ |
| $\vdots$ | ...      | ...      | ... | ...        |
| $m$      | $y_{m1}$ | $y_{m2}$ | ... | $y_{mn_m}$ |

## 2. Mô hình toán học

Có thể xem  $y_{ik}$  là thể hiện của đại lượng ngẫu nhiên sau đây:

$$Y_{ik} = \mu + \alpha_i + E_{ik} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n_i$$

trong đó

$\mu$  là giá trị chân thực của đại lượng  $Y$  khi không có các ảnh hưởng;

$\alpha_i$  là ảnh hưởng của yếu tố  $A$  ở cấp  $i$ ;

$E_{ik}$  là sai số có cùng phân phối chuẩn  $(0, \sigma^2)$  (tức là phải qua Test Barlett)

$$(E(E_{ik}) = 0, D(E_{ik}) = \sigma^2)$$

Khi đó, ta đặt  $\mu_i = \mu + \alpha_i$

Nếu xem ảnh hưởng của  $A$  ở các mức là như nhau có nghĩa là  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$  thì việc kiểm định giả thiết  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m$  được thay bằng kiểm định giả thiết:

$$H: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$$

Muốn vậy ta lập

$$Test F = \frac{N-m}{m-1} \cdot \frac{\sum n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{Y}_i)^2}$$

với

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} y_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} y_{ik}$$

Nếu  $H$  đúng thì  $F$  có phân phối Fischer với  $(m-1, N-m)$  bậc tự do. Ta tra bảng IX của Phụ lục để tìm  $F_{1-\alpha; m-1; N-m}$ .

Nếu  $F > F_{1-\alpha; m-1; N-m}$  thì bác bỏ  $H$ , tức là  $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \mu_m$  và có các mức ảnh hưởng khác nhau của yếu tố  $A$  với độ tin cậy  $P=1-\alpha$ .

Nếu  $F < F_{1-\alpha; m-1; N-m}$  thì chấp nhận  $H$ , tức là các mức ảnh hưởng là như nhau.

### 3. Thực hành

|                      |                                                                 |                             |                           |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| Nguyên nhân          | Thực hiện SQ                                                    | Bậc tự do                   | Thực hiện MQ              |
| Giữa các bậc của A   | $Sqa = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$        | $m - 1$                     | $mqa = \frac{Sqa}{m - 1}$ |
| Bên trong các bước A | $Sqr = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_{i.})^2$ | $N - m$                     | $mqr = \frac{Sqr}{N - m}$ |
| Tổng quát            | $Sqg = Sqa + Sqr$                                               | $N - 1 = (m - 1) + (N - m)$ |                           |

$$\text{Tính } F = \frac{mqa}{mqr}$$

Tra bảng  $F_{1-\alpha; m-1; N-m}$  (Bảng IX - Phụ lục).

Nếu  $F > F_{1-\alpha; m-1; N-m}$  thì các bỏ H, tức là các mức ảnh hưởng của A khác nhau lên kết quả với mức ý nghĩa  $\alpha$  hay là độ tin cậy  $P = 1 - \alpha$ .

Nếu  $F < F_{1-\alpha; m-1; N-m}$  thì chấp nhận H, tức là ảnh hưởng của A như nhau ở các mức.

*Ví dụ 5.1:* Nghiên cứu hiện tượng tai nạn phụ thuộc vào thời gian trong năm. Ta thực hiện trên 6 địa điểm tức là 6 lần lặp lại ( $n_i = 6$ ) với 12 mức là 12 tháng và A là thời gian. Khi đó ta có bảng số liệu:

**Bảng 5.1**

| k → | Hà Nội | Hải Phòng | Đà Nẵng | Nha Trang | Vinh | Tp HCM |
|-----|--------|-----------|---------|-----------|------|--------|
| i ↓ | %      | %         | %       | %         | %    | %      |
| 1   | 11,2   | 11,8      | 6,3     | 17,5      | 14,9 | 1,6    |
| 2   | 8,9    | 9,2       | 3,6     | 14,3      | 12,9 | 2,4    |
| 3   | 7,3    | 7,1       | 3,7     | 12,6      | 17,1 | 3,8    |
| 4   | 8,8    | 7,6       | 6,0     | 10,9      | 17,6 | 4,2    |
| 5   | 11,1   | 10,7      | 9,7     | 12,3      | 20,2 | 7,3    |
| 6   | 12,3   | 12,4      | 11,6    | 13,6      | 19,1 | 11,9   |
| 7   | 12,7   | 14,4      | 13,2    | 12,2      | 20,4 | 16,8   |
| 8   | 13,1   | 14,6      | 13,4    | 14,0      | 20,4 | 15,1   |
| 9   | 13,2   | 12,0      | 9,7     | 14,3      | 17,9 | 9,1    |
| 10  | 12,7   | 10,2      | 6,7     | 15,8      | 17,9 | 4,4    |
| 11  | 12,8   | 12,2      | 6,2     | 18,7      | 20,1 | 4,5    |
| 12  | 13,1   | 14,0      | 7,6     | 17,2      | 16,0 | 2,2    |

Bảng 5.2

|                    | SQ            | Bậc tự do SQ | MQ          |
|--------------------|---------------|--------------|-------------|
| Giữa các bước      | Sqa = 328,79  | 11           | mqa = 29,89 |
| Bên trong các bước | Sqr = 1311,60 | 60           | mqr = 21,86 |
| Tổng chung         | ng = 1640,39  | 71           |             |

$$F = \frac{mqa}{mqr} = 1,37$$

$F_{0,95;11,60} = 1,95$  (Bảng IX - Phụ lục)

Suy ra  $F = 1,37 < 1,95$ . Ta chấp nhận  $H_0$ , có nghĩa là có thể kết luận tai nạn không phụ thuộc theo thời gian trong năm (ở các tháng đều như nhau) với mức ý nghĩa  $\alpha$  hay là độ tin cậy 95%.

Xét thêm: Với Test Bartlett ta tính được

$$T = 8,27$$

$$\chi^2_{0,95;11} = 19,7 \text{ (Bảng VI - Phụ lục)}$$

Vậy  $T < \chi^2_{0,95;11}$ , do đó ta chấp nhận  $H_0$ , hay kết luận độ chính xác của các phương án là như nhau. Điều đó có nghĩa là sai số dao động về tai nạn ở các tháng là như nhau.

**Chú ý:** Mô hình mà  $n_i = n$  với mọi  $i$  được gọi là mô hình cân bằng hoặc là mô hình trực giao. Nếu ngược lại thì gọi là mô hình không cân bằng.

### **Bài tập 5.1.** Lập chương trình kiểm định

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$$

bằng ngôn ngữ Pascal (mô hình phân tích phương sai một yếu tố)

**Tổ chức dữ liệu:**

Số liệu của  $m$  phương án thí nghiệm được ghi trong tệp văn bản có tên 'PH\_SAI\_1.DAT' bao gồm:

- Dòng đầu là số nguyên  $m$  chỉ số phương án thí nghiệm.
- $m$  dòng sau, mỗi dòng bắt đầu là số nguyên  $n_i$  chỉ số thí nghiệm trong phương án  $i$ , tiếp sau là  $n_i$  số thực chỉ các thí nghiệm.

Chương trình:

```

Program PHAN_TICH_PHUONG_SAI_1 ;
uses CRT ;
const
    Mmax = 20 ;
    Nmax = 50 ;

```

```

var
  Y : array[1..Mmax , 1..Nmax] of real ;
  N : array[1..Mmax] of integer ;
  Ytb : array[1..Mmax] of real ;
  DL , F : TEXT ;
  m , Nt , i , j , k , k1 , k2 : integer ;
  Yn , Test , Ts , Ms : real ;
  DK1 : array[1..24] of integer ;
  F05 , F01 : array[1..24] of real ;

```

```

BEGIN
  ClrScr ;
  Assign(DL , 'PH_SAI_1.DAT') ;
  Reset(DL) ;
  readln(DL, m) ;
  i := 0 ;
  while not SeekEOF(DL) do
    begin
      inc(i) ;
      read(DL,N[i]) ;
      for j := 1 to N[i] do
        read(DL, Y[i,j]) ;
      readln(DL)
    end ;
  Yn := 0 ;
  FillChar(Ytb, sizeof(Ytb), 0) ;
  for i := 1 to m do
    begin
      for j := 1 to N[i] do
        Ytb[i] := Ytb[i] + Y[i,j] ;
      Yn := Yn + Ytb[i] ;
      Ytb[i] := Ytb[i]/N[i]
    end ;
  Nt := 0 ;
  for i := 1 to m do Nt := Nt + N[i] ;
  Yn := Yn / Nt ;
  Ts := 0 ;
  for i := 1 to m do
    Ts := Ts + N[i] * sqr(Ytb[i] - Yn) ;
  Ms := 0 ;
  k1 := m - 1 ;
  k2 := Nt - m ;
  for i := 1 to m do
    for j := 1 to N[i] do
      Ms := Ms + sqr(Y[i,j] - Ytb[i]) ;
  Test := k1 * Ts / k2 / Ms ;
  Assign(F, 'BANG_9.TXT') ;

```

```

Reset(F) ; { Doc du lieu tu Bang IX }
for i := 1 to 24 do read(F, DK1[i]) ;
readln(F) ;
while NOT SeekEOF(F) do
  begin
    read(F, k) ;
    if k2 > k then
      begin readln(F) ; readln(F) end
    else
      begin
        for j := 1 to 24 do read(F, F05[j]) ;
        readln(F) ;
        for j := 1 to 24 do read(F, F01[j]) ;
        readln(F) ;
        Close(F) ;
        break
      end
    end ;
  k := 2 ;
  while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
  Ts := F05[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F05[k] - F05[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
  Ms := F01[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F01[k] - F01[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
  if Test > Ts then
    writeln('- Cac muc anh huong khac nhau voi do tin cay 0.95 !')
  else
    writeln('- Cac muc anh huong giống nhau voi do tin cay 0.95 !') ;
  if Test > Ms then
    writeln('- Cac muc anh huong khac nhau voi do tin cay 0.99 !')
  else
    writeln('- Cac muc anh huong giống nhau voi do tin cay 0.99 !') ;
  Readln ;
END.

```

*Chú ý:* Chương trình sử dụng số liệu của bảng IX trong Phụ lục, được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_9.TXT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm 24 số nguyên chỉ các giá trị của  $k1$ .
- 104 dòng sau là các giá trị của hàm phân phối Fischer. Mỗi giá trị của  $k2$  tương ứng với hai dòng, dòng trên bắt đầu là số nguyên  $k2$  sau đó là 24 giá trị của hàm  $F_{05}$  còn dòng dưới là 24 giá trị của hàm  $F_{01}$ .

## 5.4. Mô hình phân tích biến phân loại 1 giao nhau

**1. Định nghĩa:** Nghiên cứu ảnh hưởng của hai yếu tố  $A$  và  $B$  với  $m$  mức,  $q$  mức lên kết quả của đại lượng đang nghiên cứu.

Tiến hành thí nghiệm được bảng số liệu  $y_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, m$

$$k = 1, \dots, q$$

| Các mức của A<br>$i$ | Các mức của B : k |          |     |          |
|----------------------|-------------------|----------|-----|----------|
|                      | 1                 | 2        | ... | q        |
| 1                    | $y_{11}$          | $y_{12}$ | ... | $y_{1q}$ |
| 2                    | ...               | ...      | ... | ...      |
| $\vdots$             | ...               | ...      | ... | ...      |
| m                    | $y_{m1}$          | $y_{m2}$ | ... | $y_{mq}$ |

## 2. Mô hình tính toán

Xem các số liệu  $y_{ik}$  là thể hiện của đại lượng ngẫu nhiên

$$Y_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta_k + E_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$k = 1, 2, \dots, q$$

$\mu$  là giá trị chân thực của  $Y$  khi không có tác động của  $A$  và  $B$ .

$\alpha_i$  là ảnh hưởng của  $A$  với mức  $i$ .

$\beta_k$  là ảnh hưởng của  $B$  với mức  $k$ .

Hãy xét xem có tồn tại các mức ảnh hưởng của  $A$  và  $B$  lên đại lượng đang xét hay không. Nghĩa là, ta cần kiểm định các giả thiết sau đây:

$H_A : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ , có nghĩa là mọi mức ảnh hưởng của  $A$  như nhau.

$H_B : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$ , có nghĩa là mọi mức ảnh hưởng của  $B$  là như nhau.

Lập *Test* kiểm tra

$$F_A = (q-1) \frac{q \sum_{i=1}^m (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q (y_{ik} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_k + \bar{Y}_{..})^2}$$

$$F_B = (m-1) \frac{m \sum_{k=1}^q (\bar{Y}_k - \bar{Y}_{..})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q (y_{ik} - \bar{Y}_i - \bar{Y}_k + \bar{Y}_{..})^2}$$

với

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y_{ik}; \bar{Y}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ik}; \bar{Y}_{..} = \frac{1}{mq} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q y_{ik}$$



Nếu  $H_A$  và  $H_B$  đúng thì  $F_A$  và  $F_B$  có phân phối Fischer với  $(m-1; (m-1)(q-1))$  bậc tự do và  $(q-1; (m-1)(q-1))$  bậc tự do tương ứng. Tra bảng  $F_{1-\alpha; m-1; (m-1)(q-1)}$  rồi so sánh với  $F_A$ .

Nếu  $F_A > F_{1-\alpha; m-1; (m-1)(q-1)}$  thì bác bỏ giả thiết  $H_A$ , có nghĩa là chấp nhận có ảnh hưởng của  $A$  ở các mức khác nhau với độ tin cậy  $1 - \alpha$ .

Nếu  $F_A < F_{1-\alpha; m-1; (m-1)(q-1)}$  thì nhận  $H_A$ , tức là các mức ảnh hưởng của  $A$  như nhau và bằng 0. Tra bảng  $F_{1-\alpha; q-1; (m-1)(q-1)}$ .

Nếu  $F_B > F_{1-\alpha; q-1; (m-1)(q-1)}$  thì bác bỏ  $H_B$ , có nghĩa là các mức ảnh hưởng của  $B$  khác nhau.

Nếu  $F_B < F_{1-\alpha; q-1; (m-1)(q-1)}$  thì nhận  $H_B$ , tức là các mức ảnh hưởng của  $B$  như nhau và bằng 0.

### 3. Thực hành

Cần kiểm định giả thiết:  $H_A: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

$H_B: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$

|                               | SQ                                                                                        | Bậc tự do                             | MQ                                 |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| Giữa các cấp A                | $Sqa = q \sum_{i=1}^m (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$                                    | $m - 1$                               | $mqa = \frac{Sqa}{m - 1}$          |
| Giữa các cấp B                | $Sqb = m \sum_{k=1}^q (\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..})^2$                                    | $q - 1$                               | $mqb = \frac{Sqb}{q - 1}$          |
| Ảnh hưởng qua lại giữa A và B | $Sqr = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q (y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..})^2$ | $(m - 1)(q - 1)$                      | $mqr = \frac{Sqr}{(m - 1)(q - 1)}$ |
| Tổng                          | $Sqg = Sqa + Sqb + Sqr = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q (y_{ik} - \bar{y}_{..})^2$             | $m.q-1 = (m-1) + (q-1) + (m-1).(q-1)$ |                                    |

$$F_A = \frac{mqa}{mqr}, \text{ tra bảng } F_{1-\alpha; m-1; (m-1)(q-1)}$$

$$F_B = \frac{mqb}{mqr}, \text{ tra bảng } F_{1-\alpha; q-1; (m-1)(q-1)}$$

Nếu  $F_A > F_{1-\alpha; m-1; (m-1)(q-1)}$  thì bác bỏ  $H_A$  có nghĩa là có ảnh hưởng của  $A$  khác nhau ở các mức.

Nếu  $F_A < F_{1-\alpha; m-1; (m-1)(q-1)}$  thì nhận  $H_A$  tức là có ảnh hưởng của  $A$  như nhau ở các mức và bằng 0.

Nếu  $F_B > F_{1-\alpha; q-1; (m-1)(q-1)}$  thì bác bỏ  $H_B$  có nghĩa là ảnh hưởng của  $B$  khác nhau ở các mức.

Nếu  $F_B < F_{1-\alpha; q-1; (m-1)(q-1)}$  thì nhận  $H_B$  có nghĩa là ảnh hưởng của  $B$  như nhau ở các mức và bằng 0.

*Vi dụ 5.2:* Nghiên cứu sự ảnh hưởng của việc trộn hai loại gas đến nhiệt lượng tỏa ra.

Ta có bảng số liệu:  $y_{ik}$  là nhiệt lượng cung cấp.

| Cấp của B<br>(gas II) → |    | Nồng độ |      |      |      |      |
|-------------------------|----|---------|------|------|------|------|
|                         |    | 1%      | 2%   | 3%   | 4%   | 5%   |
| Cấp của A<br>(gas I) ↓  |    | 1       | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 1%                      | 1  | 4201    | 4201 | 4197 | 4198 | 4196 |
| 2%                      | 2  | 4205    | 4206 | 4201 | 4201 | 4200 |
| 3%                      | 3  | 4207    | 4208 | 4202 | 4194 | 4197 |
| 4%                      | 4  | 4206    | 4201 | 4211 | 4203 | 4194 |
| 5%                      | 5  | 4212    | 4204 | 4201 | 4202 | 4198 |
| 6%                      | 6  | 4222    | 4209 | 4211 | 4203 | 4201 |
| 7%                      | 7  | 4221    | 4219 | 4213 | 4214 | 4201 |
| 8%                      | 8  | 4214    | 4216 | 4202 | 4193 | 4198 |
| 9%                      | 9  | 4226    | 4217 | 4214 | 4215 | 4201 |
| 10%                     | 10 | 4217    | 4218 | 4206 | 4214 | 4213 |

|                            | SQ      | Bậc tự do của SQ | MQ     |
|----------------------------|---------|------------------|--------|
| Giữa các cấp của A         | 1473,30 | 9                | 163,70 |
| Giữa các cấp của B         | 1096,88 | 4                | 274,22 |
| Ảnh hưởng qua lại<br>A ↔ B | 714,24  | 36               | 19,84  |
| Tổng                       | 3284,42 | 49               |        |

$$F_A = \frac{mq_a}{mqr} = 8,25 > F_{0,95; 9; 36} = 2,15 \text{ Tra bảng (Bảng IX - Phụ lục)}$$

$$F_B = \frac{mq_b}{mqr} = 13,82 > F_{0,95; 9; 36} = 2,63$$

Vậy bác bỏ  $H_A$  và  $H_B$ , tức là có ảnh hưởng ở các mức khác nhau của  $A$  và  $B$  (của sự trộn lẫn hai loại gas) đến nhiệt lượng tỏa ra.

**Bài tập 5.2.** Lập chương trình phân tích biến phân loại 2 dạng giao nhau.

**Tổ chức dữ liệu:**

Số liệu của  $m$  phương án thí nghiệm được ghi trong tệp văn bản có tên 'BIEN\_PH\_2.DAT' bao gồm:

- Dòng đầu là hai số nguyên  $m$  và  $q$  cách nhau một khoảng trống, chỉ số phương án thí nghiệm và số thí nghiệm trong các phương án.

-  $m$  dòng sau, mỗi dòng là  $q$  số thực chỉ các thí nghiệm.

Chương trình:

```
Program PHAN_TICH_PHUONG_SAI_2 ;
```

```
uses CRT ;
```

```
const
```

```
    Mmax = 20 ;
```

```
    Qmax = 50 ;
```

```
var
```

```
    Y : array[1..Mmax , 1..Qmax] of real ;
```

```
    Ytbl : array[1..Mmax] of real ;
```

```
    YtbK : array[1..Qmax] of real ;
```

```
    DL , F : TEXT ;
```

```
    m , q , i , k , k1 , k2 : integer ;
```

```
    Yn , Ts , Ms , FA , FB : real ;
```

```
    DK1 : array[1..24] of integer ;
```

```
    F05 , F01 : array[1..24] of real ;
```

```
BEGIN
```

```
    ClrScr ;
```

```
    Assign(DL , 'PH_SAI_2.DAT') ;
```

```
    Reset(DL) ;
```

```
    readln(DL, m, q) ;
```

```
    for i := 1 to m do
```

```
        begin
```

```
            for k := 1 to q do
```

```
                read(DL,Y[i,k]) ;
```

```
            readln(DL)
```

```
        end ;
```

```
    Yn := 0 ;
```

```
    FillChar(Ytbl, sizeof(Ytbl), 0) ;
```

```
    for i := 1 to m do
```

```
        begin
```

```
            for k := 1 to q do
```

```
                Ytbl[i] := Ytbl[i] + Y[i,k] ;
```

```
            Yn := Yn + Ytbl[i] ;
```

```
            Ytbl[i] := Ytbl[i] / q
```

```
        end ;
```

```
    Yn := Yn / m / q ;
```

```
    FillChar(YtbK, sizeof(YtbK), 0) ;
```

```
    for k := 1 to q do
```

```
        begin
```

```

    for i := 1 to m do
        YtbK[k] := YtbK[k] + Y[i,k] ;
        YtbK[k] := YtbK[k] / m
    end ;
    Ts := 0 ;
    for i := 1 to m do
        Ts := Ts + sqr(Ytbl[i] - Yn) ;
    Ms := 0 ;
    for i := 1 to m do
        for k := 1 to q do
            Ms := Ms + sqr(Y[i,k] - Ytbl[i] - YtbK[k] - Yn) ;
        FA := (q - 1) * Ts / Ms ;
        Ts := 0 ;
        for k := 1 to q do
            Ts := Ts + sqr(YtbK[k] - Yn) ;
        FB := (m - 1) * Ts / Ms ;
        k1 := m - 1 ;
        k2 := k1 * (q - 1) ;
        Assign(F, 'BANG_9.TXT') ;
        Reset(F) ;
        for k := 1 to 24 do read(F, DK1[k]) ;
        readln(F) ;
        while NOT SeekEOF(F) do
            begin
                read(F, k) ;
                if k2 > k then
                    begin readln(F) ; readln(F) end
                else
                    begin
                        for j := 1 to 24 do read(F, F05[j]) ;
                        readln(F) ;
                        for j := 1 to 24 do read(F, F01[j]) ;
                        readln(F) ;
                        Close(F) ;
                        break
                    end
                end ;
            k := 2 ;
            while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
            Ts := F05[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F05[k] - F05[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
            Ms := F01[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F01[k] - F01[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
            if FA > Ts then
                writeln(' Co anh huong cua A o muc khac nhau voi do tin cay 0.95 !')
            else
                writeln(' Cac muc anh huong cua A giong nhau voi do tin cay 0.95 !') ;
            if FA > Ms then

```

```

writeln(' Co anh huong cua A o muc khac nhau voi do tin cay 0.99 !')
else
writeln(' Cac muc anh huong cua A giống nhau voi do tin cay 0.99 !') ;
k1 := q - 1 ;
k := 2 ;
while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
Ts := F05[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F05[k] - F05[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
Ms := F01[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F01[k] - F01[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
if FB > Ts then
writeln(' Co anh huong cua B o muc khac nhau voi do tin cay 0.95 !')
else
writeln(' Cac muc anh huong cua B giống nhau voi do tin cay 0.95 !') ;
if FB > Ms then
writeln(' Co anh huong cua B o muc khac nhau voi do tin cay 0.99 !')
else
writeln(' Cac muc anh huong cua B giống nhau voi do tin cay 0.99 !') ;
Readln ;
END.

```

*Chú ý:* Chương trình sử dụng số liệu của bảng IX trong Phụ lục, được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_9.TXT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm 24 số nguyên chỉ các giá trị của  $k1$ .
- 104 dòng sau là các giá trị của hàm phân phối Fischer. Mỗi giá trị của  $k2$  tương ứng với hai dòng, dòng trên bắt đầu là số nguyên  $k2$  sau đó là 24 giá trị của hàm  $F_{05}$  còn dòng dưới là 24 giá trị của hàm  $F_{01}$ .

## 5.5. Mô hình biến phân loại 1 giao nhau có lặp

**1. Định nghĩa:** Nghiên cứu sự ảnh hưởng của  $A$  ( $m$  cấp) và của  $B(q_1, q_2, \dots, q_m$  cấp) tương ứng với  $m$  cấp của  $A$  và  $s$  lần lặp lại.

Ta có bảng số liệu:

| Cấp của $A$ : $i$                       | 1                          | 2                          | ... | $m$                        |
|-----------------------------------------|----------------------------|----------------------------|-----|----------------------------|
| Cấp của $B$ tương ứng với cấp $A$ : $k$ | 1 ... $q_1$                | 1 ... $q_2$                | ... | 1 ... $q_m$                |
| Lặp lại $i = 1$                         | $y_{111} \dots y_{1q_1 1}$ | $y_{211} \dots y_{2q_2 1}$ | ... | $y_{m11} \dots y_{mq_m 1}$ |
| $i = 2$                                 | $y_{112} \dots y_{1q_1 2}$ | $y_{212} \dots y_{2q_2 2}$ | ... | $y_{m12} \dots y_{mq_m 2}$ |
| ...                                     | ...                        | ...                        | ... | ...                        |
| $i = s$                                 | $y_{11s} \dots y_{1q_1 s}$ | $y_{21s} \dots y_{2q_2 s}$ | ... | $y_{m1s} \dots y_{mq_m s}$ |

## 2. Mô hình tính toán

Các số liệu  $y_{ike}$  của  $A$ :  $1, \dots, m$

$k$  cấp của  $B$ :  $1, \dots, q_i, \quad i = \overline{1, m}$

$l$  số lần lặp  $1, \dots, s$

là thể hiện của biến ngẫu nhiên  $Y$

$$Y_{ike} = \mu + \alpha_i + \beta_{ik} + E_{ike};$$

$$E_{ike} \in N(0, \sigma^2)$$

Khi đó cần kiểm định xem ảnh hưởng của yếu tố  $A$  cũng như của  $B$  trong các cấp của  $A$  tới kết quả như thế nào.

Để làm điều đó, ta kiểm định các giả thiết:

$H_A: \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$  có nghĩa sự ảnh hưởng của  $A$  với các cấp là như nhau và bằng 0.

$H_{B(A)}: \beta_{11} = \dots = \beta_{1q_1} = \dots = \beta_{m1} = \dots = \beta_{mq_m} = 0$  có nghĩa là sự ảnh của  $B$  tương ứng với  $A$  theo các cấp cũng như nhau và đều bằng 0.

Test kiểm tra:

$$F_A = \frac{q(s-1)}{m-1} \cdot \frac{s \sum_{i=1}^m q_i (\overline{Y_{i..}} - \overline{Y_{...}})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} \sum_{l=1}^s (Y_{ikl} - \overline{Y_{ik.}})^2}$$

Cũng như

$$F_{B(A)} = \frac{q(s-1)}{q-m} \cdot \frac{s \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} (\overline{Y_{ik.}} - \overline{Y_{i..}})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} \sum_{e=1}^s (Y_{ike} - \overline{Y_{ik.}})^2}$$

trong đó  $q = q_1 + q_2 + \dots + q_m$

Nếu  $H_A$  và  $H_{B(A)}$  đúng thì  $F_A$  có phân phối Fischer  $(m-1; q.(s-1))$  bậc tự do và  $F_{B(A)}$  có phân phối Fischer  $(q-m; q(s-1))$  bậc tự do.

Tra bảng  $F_{1-\alpha; (m-1); q(s-1)}$ .

Nếu  $F_A > F_{1-\alpha; (m-1); q(s-1)}$  thì bác bỏ giả thiết  $H_A$  còn nếu  $F_A < F_{1-\alpha; (m-1); q(s-1)}$  thì nhận  $H_A$ .

Tra bảng  $F_{1-\alpha; (q-m); q(s-1)}$

Nếu  $F_{B(A)} > F_{1-\alpha; (q-m); q(s-1)}$  thì bác bỏ  $H_{B(A)}$  còn nếu  $F_{B(A)} < F_{1-\alpha; (q-m); q(s-1)}$  thì nhận  $H_{B(A)}$ .

### 3. Thực hành

Kiểm định giả thiết

$$H_A : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$H_{B(A)} : \beta_{11} = \dots = \beta_{1q_1} = \dots = \beta_{m_1} = \dots = \beta_{mq_m} = 0$$

|                            | SQ                                                                                                                       | Bậc tự do                                      | MQ                                |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Giữa các cấp A             | $Sqa = s \cdot \sum_{i=1}^m q_i (\overline{y_{i..}} - \overline{y_{...}})^2$                                             | $m - 1$                                        | $mqa = \frac{Sqa}{(m - 1)}$       |
| Giữa các bậc của B trong A | $Sqb(a) = s \cdot \sum_{a=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} (\overline{y_{ik.}} - \overline{y_{i..}})^2$                             | $q - m$                                        | $mqb(a) = \frac{Sqb(a)}{(q - m)}$ |
| Lấp                        | $Sqr = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} \sum_{e=1}^s (\overline{y_{ikl}} - \overline{y_{ik.}})^2$                           | $q \cdot (s - 1)$                              | $mqr = \frac{Sqr}{q(s - 1)}$      |
| Tổng                       | $Sqg = Sqa + Sqb(a) + Sqr$<br>$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} \sum_{e=1}^s (\overline{y_{ikl}} - \overline{y_{...}})^2$ | $Sq - 1 = (m - 1) + (q - m) + q \cdot (s - 1)$ |                                   |

$$F_A = \frac{mqa}{mqr}$$

Tra bảng  $F_{1-\alpha; m-1; q(s-1)}$

$$F_{B(A)} = \frac{mqb(a)}{mqr} \quad F_{1-\alpha; q-m; q(s-1)}$$

Nếu  $F_A > F_{1-\alpha; m-1; q(s-1)}$  thì bác bỏ  $H_A$  còn nếu  $F_{B(A)} > F_{1-\alpha; q-m; q(s-1)}$  thì bác bỏ  $H_{B(A)}$ .

*Ví dụ 5.3:* Một hệ thống giao thông bao gồm 5 đường tàu hỏa (cấp của A). Mỗi đường được tiếp nối với  $q_i$  đường ô tô,  $i = 1, \dots, 5$  (cấp của B tương ứng với mỗi cấp của A). Hành khách từ tàu hỏa sẽ chuyển tiếp sang ô tô để đi.

- Bài toán thứ nhất: Số lượng xe ô tô cần bố trí trên một đơn vị thời gian có cần phải phụ thuộc vào khách của tàu hỏa hay không.

- Bài toán thứ hai: Số khách của các ô tô (ở mỗi đường tàu hỏa) có phụ thuộc vào đường tàu hỏa hay không.

Ta được bảng số liệu

Bảng 5.3

|                         | (1) | (2) |     | (3) |     |     | (4) |     | (5) |      |      |      |
|-------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| Cấp A : $i \rightarrow$ | 1   | 2   |     | 3   |     |     | 4   |     | 5   |      |      |      |
|                         | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [12] |
| Cấp B : $k \rightarrow$ | 1   | 1   | 2   | 1   | 2   | 3   | 1   | 2   | 1   | 2    | 3    | 4    |
| Tổng số<br>xe cần       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |      |      |
| $l = 1$                 | 2,8 | 2,9 | 2,6 | 3,3 | 2,4 | 2,8 | 1,8 | 2,4 | 2,8 | 2,7  | 1,2  | 2,4  |
| $l = 2$                 | 2,8 | 2,4 | 2,3 | 3,3 | 2,4 | 2,6 | 1,4 | 2,3 | 2,2 | 2,9  | 1,1  | 2,6  |
| $l = 3$                 | 2,9 | 3,3 | 3,2 | 3,2 | 3,0 | 2,7 | 1,7 | 2,7 | 2,4 | 3,2  | 1,5  | 3,3  |
| $l = 4$                 | 2,4 | 2,5 | 2,7 | 2,5 | 2,8 | 2,0 | 1,3 | 2,4 | 1,7 | 2,8  | 1,4  | 2,8  |

Bảng 5.4

| Giữa các cấp A             | SQ                  | Bậc tự do | MQ                  |
|----------------------------|---------------------|-----------|---------------------|
|                            | $S_{qa} = 3,899$    | 4         | $m_{qa} = 0,975$    |
| Giữa các cấp B trong mỗi A | $S_{qb(a)} = 8,459$ | 7         | $m_{qb(a)} = 1,208$ |
| Lập                        | $S_{qr} = 3,756$    | 36        | $m_{qr} = 0,104$    |
| Tổng                       | $S_{qg} = 16,114$   | 17        |                     |

$F_A = \frac{m_{qa}}{m_{qr}} = 9,375 > 3,89 = F_{0,99; 4; 36}$  nên ta bác bỏ  $H_A$ , có nghĩa là chấp nhận có sự phụ thuộc ảnh hưởng của các đường tàu hoả.

$F_{B(A)} = \frac{m_{qb(a)}}{m_{qr}} = 11,615 > 3,18 = F_{0,99; 7; 36}$  nên ta bác bỏ  $H_{B(A)}$ , nghĩa là chấp nhận có sự ảnh hưởng khác nhau giữa các đường ô tô nối với đường tàu hoả.

**Bài tập 5.3.** Lập chương trình cho mô hình phân tích biến phân loại 1 giao nhau có lập.

**Tổ chức dữ liệu:**

Số liệu được lưu trữ trong tệp văn bản có tên 'BIEN\_PH9.DAT' bao gồm:

Dòng đầu có hai số nguyên:  $m$  chỉ số cấp của A và  $s$  chỉ số lần lặp lại.

$m.s$  dòng sau biểu diễn các lần lập, mỗi lần lập ứng với  $m$  dòng, dòng thứ nhất có  $q_1$  số thực, dòng thứ hai có  $q_2$  số thực, ..., dòng thứ  $m$  có  $q_m$  số thực thể hiện các cấp của B ứng với A.



Chương trình:

```
Program PHAN_TICH_PHAN_TICH_PHUONG_SAI_N_CO_LAP ;
uses CRT ;
const
    Mmax = 10 ;
    Qmax = 20 ;
    Smax = 10 ;
var
    Y : array[1..Smax , 1..Mmax , 1..Qmax] of real ;
    Q : array[1..Mmax] of integer ;
    YIK : array[1..Mmax , 1..Qmax ] of real ;
    YI : array[1..Mmax] of real ;
    DL , F : TEXT ;
    m , s , i , k , l , Qt , k1 , k2 : integer ;
    YN , Ts , Ms , FA , FB : real ;
    DK1 : array[1..24] of integer ;
    F05 , F01 : array[1..24] of real ;

BEGIN
    ClrScr ;
    Assign(DL , 'PH_SAI_N.DAT') ;
    Reset(DL) ;
    readln(DL , m , s) ;
    for i := 1 to m do read(DL , Q[i]) ;
    readln(DL) ;
    for l := 1 to s do
        for i := 1 to m do
            begin
                for k := 1 to Q[i] do read(DL , Y[l,i,k]) ;
                readln(DL) ;
            end ;
        Qt := 0 ;
        for i := 1 to m do
            Qt := Qt + Q[i] ;

        YN := 0 ;
        FillChar(YIK , sizeof(YIK) , 0) ;
        FillChar(YI , sizeof(YI) , 0) ;
        for i := 1 to m do
            begin
                for k := 1 to Q[i] do
                    begin
                        for l := 1 to s do
                            YIK[i,k] := YIK[i,k] + Y[l,i,k] ;
                        YI[i] := YI[i] + YIK[i,k] ;
                    end
                end
            end
        end
```

```

        YIK[i,k] := YIK[i,k] / s ;
    end ;
    YN := YN + YI[i] ;
    YI[i] := YI[i] / Q[i] / s ;
end ;
YN := YN / Qt / s ;
Ts := 0 ;
for i := 1 to m do
    Ts := Ts + Q[i] * sqr(YI[i] - YN) ;
Ms := 0 ;
for l := 1 to s do
    for i := 1 to m do
        for k := 1 to Q[i] do
            Ms := Ms + sqr(Y[l,i,k] - YN) ;
FA := Qt * (s-1) * s * Ts / (m-1) / Ms ;
Ts := 0 ;
for i := 1 to m do
    for k := 1 to Q[i] do
        Ts := Ts + sqr(YIK[i,k] - YI[i]) ;
FB := Qt * (s-1) * s * Ts / (Qt-m) / Ms ;
k1 := m - 1 ;
k2 := Qt * (s-1) ;
Assign(F, 'BANG_9.TXT') ;
Reset(F) ;
for k := 1 to 24 do read(F, DK1[k]) ;
readln(F) ;
while NOT SeekEOF(F) do
    begin
        read(F, k) ;
        if k2 > k then
            begin readln(F) ; readln(F) end
        else
            begin
                for j := 1 to 24 do read(F, F05[j]) ;
                readln(F) ;
                for j := 1 to 24 do read(F, F01[j]) ;
                readln(F) ;
                Close(F) ;
                break
            end
        end ;
    end ;
k := 2 ;
while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
Ts := F05[k-1] + (k1 - DK1[k-1]) * (F05[k] - F05[k-1]) / (DK1[k] - DK1[k-1]) ;
Ms := F01[k-1] + (k1 - DK1[k-1]) * (F01[k] - F01[k-1]) / (DK1[k] - DK1[k-1]) ;
if FA > Ts then

```

{ Tinh FA }

{ Tinh FB }

{ Doc du lieu tu Bang IX Phu luc }

```

writeln(' - Anh huong cua A o cac cap la khac nhau voi do tin cay 0.95 !')
else
writeln(' - Anh huong cua A o cac cap la nhu nhau voi do tin cay 0.95 !') ;
if FA > Ms then
writeln(' - Anh huong cua A o cac cap la khac nhau voi do tin cay 0.99 !')
else
writeln(' - Anh huong cua A o cac cap la nhu nhau voi do tin cay 0.99 !') ;
k1 := Qt - m ;
k := 2 ;
while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
Ts := F05[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F05[k] - F05[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
Ms := F01[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F01[k] - F01[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
if FB > Ts then
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la khac nhau voi do tin cay 0.95 !')

else
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la nhu nhau voi do tin cay 0.95 !') ;
if FA > Ms then
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la khac nhau voi do tin cay 0.99 !')

else
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la nhu nhau voi do tin cay 0.99 !') ;

Readln ;
END.

```

*Chú ý:* Chương trình sử dụng số liệu của Bảng IX trong Phụ lục, được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_9.TXT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm 24 số nguyên chỉ các giá trị của  $k1$ .
- 104 dòng sau là các giá trị của hàm phân phối Fischer. Mỗi giá trị của  $k2$  tương ứng với hai dòng, dòng trên bắt đầu là số nguyên  $k2$  sau đó là 24 giá trị của hàm  $F_{05}$  còn dòng dưới là 24 giá trị của hàm  $F_{01}$ .

```

writeln('- Anh huong cua A o cac cap la khac nhau voi do tin cay 0.95 !')
else
writeln('- Anh huong cua A o cac cap la nhu nhau voi do tin cay 0.95 !') ;
if FA > Ms then
writeln('- Anh huong cua A o cac cap la khac nhau voi do tin cay 0.99 !')
else
writeln('- Anh huong cua A o cac cap la nhu nhau voi do tin cay 0.99 !') ;
k1 := Qt - m ;
k := 2 ;
while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
Ts := F05[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F05[k] - F05[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
Ms := F01[k - 1] + (k1 - DK1[k - 1]) * (F01[k] - F01[k - 1]) / (DK1[k] - DK1[k - 1]) ;
if FB > Ts then
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la khac nhau voi do tin cay 0.95 !')
else
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la nhu nhau voi do tin cay 0.95 !') ;
if FA > Ms then
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la khac nhau voi do tin cay 0.99 !')
else
writeln('Anh huong cua B tuong ung voi A theo cac cap
la nhu nhau voi do tin cay 0.99 !') ;
Readln ;
END.

```

*Chú ý:* Chương trình sử dụng số liệu của Bảng IX trong Phụ lục, được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_9.TXT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm 24 số nguyên chỉ các giá trị của  $k1$ .
- 104 dòng sau là các giá trị của hàm phân phối Fischer. Mỗi giá trị của  $k2$  tương ứng với hai dòng, dòng trên bắt đầu là số nguyên  $k2$  sau đó là 24 giá trị của hàm  $F_{05}$  còn dòng dưới là 24 giá trị của hàm  $F_{01}$ .

## PHÂN TÍCH TƯƠNG QUAN

### 6.1. Mở đầu

Phân tích tương quan là phương pháp phân tích thống kê về mặt số lượng đối với sự ảnh hưởng của một hay nhiều yếu tố ngẫu nhiên và một hoặc nhiều yếu tố không ngẫu nhiên tới các kết quả của đại lượng đang nghiên cứu.

Các yếu tố ngẫu nhiên được ký hiệu là  $A$  và  $B...$  với  $m, q \dots$  bước.

Các yếu tố không ngẫu nhiên, ký hiệu là  $W, Z, \dots$  bằng biến tương quan.

Kết quả quan sát của đại lượng nghiên cứu thường ký hiệu bằng  $Y...$

Phương pháp phân tích tương quan là sự tổng hợp của phương pháp phân tích biến phân và phân tích hồi quy. Nó được chia làm ba loại.

Dưới đây ta sẽ xét ba loại đặc trưng đó.

*Loại 1:* Yếu tố  $A$  và một biến tương quan  $W$ , tức là một yếu tố và một biến tương quan.

*Loại 2:* Hai yếu tố  $A$  và  $B$  với một biến tương quan  $W$ , tức là nhiều yếu tố và một biến tương quan.

*Loại 3:* Hai yếu tố  $A$  và  $B$  với hai biến tương quan  $W, Z$ , tức là nhiều yếu tố và nhiều biến tương quan.

*Ví dụ 6.1:* Xét sự cần thiết của dinh dưỡng đối với các đơn vị trọng lượng ( $W$ ) trong môi trường nước chảy nhanh và chảy chậm ( $A$ ).

### 6.2. Phân tích tương quan loại 1

**1. Định nghĩa:** Giả sử cần quan sát đại lượng  $Y$ , khi cho biến tương quan và trong điều kiện ngẫu nhiên  $A$  với  $m$  cấp và với số lần lặp lại thí nghiệm là  $n_i, i = 1, 2, \dots, m$ .

Vấn đề đặt ra là cần xét xem sự ảnh hưởng của  $A$  và  $W$  vào  $Y$  như thế nào ?

Ta điều tra thí nghiệm như bảng sau đây:

| Cấp của A<br>$i$ | Lấp k             |                   |                           |
|------------------|-------------------|-------------------|---------------------------|
|                  | 1                 | 2                 | ... n                     |
| 1                | $(y_{11} w_{11})$ | $(y_{12} w_{12})$ | $... (y_{1n_1} w_{1n_1})$ |
| 2                | $(y_{21} w_{21})$ | $(y_{22} w_{22})$ | $... (y_{2n_2} w_{2n_2})$ |
| $\vdots$         | ...               | ...               | ...                       |
| $m$              | $(y_{m1} w_{m1})$ | $(y_{m2} w_{m2})$ | $... (y_{mn_m} w_{mn_m})$ |

## 2. Mô hình tính toán

Các số liệu  $y_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$

$k = 1, 2, \dots, n_i$

được xem như là các thể hiện của đại lượng ngẫu nhiên  $Y$ .

$y_{ik}$  được biểu diễn dưới dạng

$$y_{ik} = \mu_i + \gamma(w_{ik} - \bar{w}) + E_{ik}$$

trong đó:

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} w_{ik}$$

$$n = \sum_{i=1}^m n_i$$

\*  $\gamma, \mu_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) là các số (chưa biết) và được gọi là tham số.

\*  $E_{ik}$  là đại lượng ngẫu nhiên độc lập phân phối chuẩn  $N(0, \sigma^2)$ .

\*  $\mu_i$  là thể hiện giá trị ảnh hưởng của yếu tố A, cấp  $i$  ở vị trí  $w_{ik}$  đã cho.

1) Bài toán 1: Xét xem có ảnh hưởng của đại lượng tương quan  $w$  vào kết quả của thí nghiệm hay không.

Khi đó, ta cần phải kiểm định giả thiết  $H: \gamma = 0$ .

Khi dùng Test sau đây:

$$T = \frac{SQR_{\gamma w} \sqrt{n-m-1}}{\sqrt{Sqr_{ww} SQR_{\gamma\gamma} - (SQR_{\gamma w})^2}} \quad (2)$$

trong đó:  $SQR_{\gamma\gamma} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (Y_{ik} - \bar{Y}_i)^2$

$$Sqr_{ww} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (w_{ik} - \bar{w}_i)^2$$

$$SQR_{Yw} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_i)(w_{ik} - \bar{w}_i)$$

Nếu  $H$  đúng thì  $T$  có phân phối Student  $(n - m - 1)$  bậc tự do, và ta có tiêu chuẩn với mức ý nghĩa  $\alpha$  (độ tin cậy  $P = 1 - \alpha$ ) như sau:

Nếu  $|T| > t_{1-\alpha/2; n-m-1}$  thì bác bỏ giả thiết  $H$  tức là chấp nhận có ảnh hưởng của  $w$  trong điều kiện  $m$  cấp của  $A$  tới  $Y$ .

Nếu  $|T| < t_{1-\alpha/2; n-m-1}$  thì chấp nhận  $H$  tức là không có ảnh hưởng của  $W$  lên  $Y$  trong điều kiện  $m$  cấp của  $A$ .

2) *Bài toán 2:* Xét xem có ảnh hưởng của  $A$  trên  $m$  mức đối với kết quả hay không.

*Ví dụ 6.2:* Xét xem mức dinh dưỡng  $Y$  của cá trong điều kiện yếu tố nước ( $A$ ) trong hai cấp (chảy nhanh và chảy chậm), với yếu tố tương quan ( $W$ ) là trọng lượng.

Ta có bảng số liệu:

Quan trắc trên 10 con cá với các trọng lượng khác nhau và đo lượng dinh dưỡng cần thiết của chúng, ta được:

| $i$ | Lặp $k$      |              |               |              |               |
|-----|--------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
|     | 1            | 2            | 3             | 4            | 5             |
| 1   | (766,8; 7,1) | (854,0; 7,0) | (1080,0; 7,5) | (954,6; 7,4) | (802,5; 7,5)  |
| 2   | (612,0; 7,2) | (942,0; 6,2) | (365,2; 4,4)  | (276,0; 4,0) | (731,5; 7,7)  |
|     | 6            | 7            | 8             | 9            | 10            |
| 1   | (862,5; 7,5) | (501,6; 4,4) | (417,6; 4,3)  | (595,2; 6,2) | (1033,2; 8,2) |
| 2   | (487,2; 5,6) | (369,2; 5,2) | (498,0; 5,3)  | (164,8; 5,6) | (667,4; 7,1)  |

$$\text{Tính } \bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} y_{ik} \quad \bar{y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} y_{ik} \quad \bar{w}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} w_{ik} \quad \bar{w}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} w_{ik}$$

|                          | SQ                                                                                                                                                                                                                                                 | SQ <sup>R</sup>                                                   | Bậc tự do | mq <sup>R</sup>               |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------|
| Giữa các bước của A      | $Sqa_{YY} = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$ $Sqa_{Y\omega} = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})(\bar{w}_i - \bar{w}_{..})$ $Sqa_{\omega\omega} = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{w}_i - \bar{w}_{..})^2$                            | $Sqa^R = Sqa_{YY} - \frac{(Sqa_{Y\omega})^2}{Sqa_{\omega\omega}}$ | m-1       | $mqa^R = \frac{Sqa^R}{m-1}$   |
| Bên trong các bước của A | $Sqr_{YY} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_i)^2$ $Sqr_{Y\omega} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_i)(w_{ik} - \bar{w}_i)$ $Sqr_{\omega\omega} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (w_{ik} - \bar{w}_i)^2$             | $Sqr^R = Sqr_{YY} - \frac{(Sqr_{Y\omega})^2}{Sqr_{\omega\omega}}$ | n-m-1     | $mqr^R = \frac{Sqr^R}{n-m-1}$ |
| Tổng                     | $Sgg_{YY} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_{..})^2$ $Sgg_{Y\omega} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (y_{ik} - \bar{y}_{..})(w_{ik} - \bar{w}_{..})$ $Sgg_{\omega\omega} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (w_{ik} - \bar{w}_{..})^2$ | $Sgr^R = Sgr_{YY} - \frac{(Sgr_{Y\omega})^2}{Sgr_{\omega\omega}}$ | n-2       |                               |
| Với                      | $Sqa_{YY} + Sqr_{YY} = Sgg_{YY}$ $Sqa_{Y\omega} + Sqr_{Y\omega} = Sgg_{Y\omega}$ $Sqa_{\omega\omega} + Sqr_{\omega\omega} = Sgg_{\omega\omega}$                                                                                                    | $Sg^R = Sga^R + Sgr^R$                                            |           |                               |

1) Để kiểm định giả thiết H:  $\gamma = 0$

Ta lập 
$$T = \frac{Sqr_{Y\omega}}{\sqrt{Sqr_{\omega\omega} \cdot mqr^R}} \quad (\text{dạng viết khác của (2)})$$

Tra bảng  $t_{1-\alpha; n-m-1}$  (Bảng V - Phụ lục)

Nếu  $|T| > t_{1-\alpha; n-m-1}$  thì bác bỏ H, có nghĩa là có ảnh hưởng của W lên kết quả.

2) Để kiểm định giả thiết

$$H_A: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$$

thì dùng 
$$Test F_A = \frac{mqa^R}{mqr^R}$$

rồi tra bảng  $F_{1-\alpha; m-1; n-m-1}$



Nếu  $F_A > F_{1-\alpha, m-1; n-m-1}$  thì bác bỏ  $H_A$ , có nghĩa là có ảnh hưởng của  $A$  ở các mức khác nhau.

Với ví dụ trên ta tính toán được bảng sau đây:

|                     | Sq                                                                                    | Sq <sup>R</sup>                                        | Bậc tự do | mqr <sup>R</sup>                    |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------|
| Giữa các cấp của A  | Sqa <sub>YY</sub> = 300501<br>Sqa <sub>Yw</sub> = 1079<br>Sqa <sub>ww</sub> = 3,872   | Sqa <sup>R</sup> = 66300,1                             | 1         | mqa <sup>R</sup> = Sqa <sup>R</sup> |
| Bên trong các cấp A | Sqr <sub>YY</sub> = 798857<br>Sqr <sub>Yw</sub> = 4104<br>Sqr <sub>ww</sub> = 29,510  | Sqr <sup>R</sup> = 228107                              | 17        | mqr <sup>R</sup> = 13418            |
| Tổng                | Sqg <sub>YY</sub> = 1099358<br>Sqg <sub>Yw</sub> = 5183<br>Sqg <sub>ww</sub> = 33,382 | Sqg <sup>R</sup> = Sqa <sup>R</sup> + Sqr <sup>R</sup> | 18        |                                     |

Khi đó  $T = \frac{Sqr_{Yw}}{\sqrt{Sqr_{ww} \cdot mqr^R}} = 6,52$ . Tra bảng V của Phụ lục ta có:  $t_{0,95;17} = 2,11$

Vậy  $|T| > 2,11$  nên ta bác bỏ giả thiết  $H$  có nghĩa là có ảnh hưởng của  $w$  trong điều kiện  $A$  trên 2 cấp lên mức dinh dưỡng cần thiết của cá.

$$\text{và } F_A = \frac{mqa^R}{mqr^R} = \frac{66300,1}{13418} = 4,94 > F_{0,95;1,17} = 4,45$$

Vậy ta bác bỏ  $H_A$  có nghĩa là có ảnh hưởng của  $A$  trên 2 cấp lên mức dinh dưỡng cần thiết của cá.

**Bài tập 6.1.** Lập chương trình cho mô hình phân tích tương quan loại 1.

**Tổ chức dữ liệu:**

Số liệu các thí nghiệm được lưu trữ trong tệp văn bản có tên 'T\_QUAN\_1.DAT' bao gồm:

- Dòng đầu là số nguyên  $m$  chỉ cấp của  $A$ .
- $m$  dòng sau, mỗi dòng bắt đầu là số nguyên  $n_i$  sau đó là  $2.n_i$  số thực chỉ  $y_{ik}$  và  $w_{ik}$  cách nhau một khoảng trống.

Chương trình:

```

Program PHAN_TICH_TUONG_QUAN_LOAI_1 ;
uses CRT ;
const
    Mmax = 20 ;
    Nmax = 15 ;

```

```

var
  Y , W : array[1..Mmax , 1..Nmax] of real ;
  Ni : array[1..Nmax] of integer ;
  Yi , Wi : array[1..Mmax] of real ;
  N , m , i , k , kN : integer ;
  SQRYy , SQRww , SQRYw , T : real ;
  DL , F : TEXT ;
  Alpha , Tk : array[1..5] of real ;
BEGIN
  ClrScr ;
  Assign(DL,'T_QUAN_1.DAT') ;           { Doc du lieu tu tep van ban }
  Reset(DL) ;
  readln(DL, m) ;
  N := 0 ;
  for i := 1 to m do
    begin
      read(DL, Ni[i]) ;
      N := N + Ni[i] ;
      for k := 1 to Ni[i] do
        read(DL, Y[i,k] , W[i,k]) ;
        readln(DL)
      end ;
    close(DL) ;
    FillChar(Yi, sizeof(Yi) ,0) ;      { Tinh cac trung binh cong Yi , Wi }
    FillChar(Wi, sizeof(Wi) ,0) ;
    for i := 1 to m do
      begin
        for k := 1 to Ni[i] do
          Yi[i] := Yi[i] + Y[i,k] ;
          Wi[i] := Wi[i] + W[i,k] ;
        end ;
        Yi[i] := Yi[i]/Ni[i] ;
        Wi[i] := Wi[i]/Ni[i] ;
      end ;
    end ;
    SQRYy := 0 ;
    SQRww := 0 ;
    SQRYw := 0 ;
    for i := 1 to m do
      for k := 1 to Ni[i] do
        begin
          SQRYy := SQRYy + sqr(Y[i,k] - Yi[i]) ;
          SQRww := SQRww + sqr(W[i,k] - Wi[i]) ;
          SQRYw := SQRYw + (Y[i,k] - Yi[i])*(W[i,k] - Wi[i])
        end ;
      end ;
    kN := N - m - 1 ;
    T := SQRYw * sqrt(kN) / sqrt(SQRYy * SQRww - SQRYw * SQRYw) ;
    Assign(F,'BANG_5.TXT') ;           { Tra bang V }

```

```

Reset(F) ;
for i := 1 to 5 do read(F, Alpha[i]) ;
readln(F) ;
while NOT SeekEOF(F) do
begin
    read(F, k) ;
    if k < kN then readln(F)
    else
        begin
            for i := 1 to 5 do read(F, Tk[i]) ;
            break
        end
    end ;
Close(F) ;
For i := 1 to 5 do                                     { Ket luan }
begin
    writeln('Voi muc y nghia ', Alpha[i]:6:3) ;
    if abs(T) > Tk[i] then
        writeln('- Co anh huong cua W voi cac cap cua A len Y ')
    else
        writeln('- Khong co anh huong cua W voi cac cap cua A len Y ') ;
    writeln
end ;
Readln ;
END.

```

*Chú ý:* Trong chương trình có sử dụng dữ liệu của Bảng V - Phụ lục được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_5.TXT' bao gồm 41 dòng:

- Dòng đầu có 5 số thực chỉ các giá trị của  $\alpha$ .
- 40 dòng sau, mỗi dòng bắt đầu là số nguyên  $k$ , sau đó là 5 số thực chỉ giá trị của hàm phân phối Student  $t_k(\alpha)$ .

### 6.3. Mô hình phân tích tương quan loại 2

**1. Định nghĩa:** Phân tích ảnh hưởng của hai yếu tố  $A, B$  và một biến tương quan  $W$  đối với kết quả thí nghiệm (Mô hình của K. C. Peng, 1967).

Điều tra số liệu ta có:

| Cấp của A: $i$ | Cấp của B: $k$     |                    |     |                    |
|----------------|--------------------|--------------------|-----|--------------------|
|                | 1                  | 2                  | ... | q                  |
| 1              | $(y_{11}, w_{11})$ | $(y_{12}, w_{12})$ | ... | $(y_{1q}, w_{1q})$ |
| 2              | $(y_{21}, w_{21})$ | $(y_{22}, w_{22})$ | ... | $(y_{2q}, w_{2q})$ |
| $\vdots$       | ...                | ...                | ... | ...                |
| $m$            | $(y_{m1}, w_{m1})$ | $(y_{m2}, w_{m1})$ | ... | $(y_{mq}, w_{mq})$ |

## 2. Mô hình toán

Xem các số liệu  $y_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, q$ , là thể hiện của một đại lượng ngẫu nhiên.

$Y_{ik}$  được biểu diễn dưới dạng:

$$Y_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta_k + \gamma(w_{ik} - \bar{w}) + E_{ik}.$$

với 
$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q w_{ik}$$

Chúng ta cần kiểm định các giả thiết sau đây:

$H$ :  $\gamma = 0$ , nghĩa là không có ảnh hưởng của  $w$  trong điều kiện  $A$  và  $B$ .

$H_A$ :  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ , nghĩa là không có ảnh hưởng của  $A$  ở các cấp trong điều kiện  $B$ ,  $w$ .

$H_B$ :  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$ , nghĩa là không có ảnh hưởng của  $B$  ở các cấp trong điều kiện  $A$ ,  $w$ .

## 3. Thực hành

Lập bảng tính toán:

| Giải thích                              | Thực hiện $SQ^R$                                                                                         | Bậc tự do     | $mq^R$                             |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------|
| Giữa các bước $A$                       | $Sqa^R = Sqa_{YY} + \frac{(Sqr_{Yw})^2}{Sqr_{ww}} - \frac{(Sqa_{Yw} + Sqr_{Yw})^2}{Sqa_{ww} + Sqr_{ww}}$ | $m - 1$       | $mqa^R = \frac{Sqa^R}{m - 1}$      |
| Giữa các bước $B$                       | $Sqb^R = Sqb_{YY} + \frac{(Sqr_{Yw})^2}{Sqr_{ww}} - \frac{(Sqb_{Yw} + Sqr_{Yw})^2}{Sqb_{ww} + Sqr_{ww}}$ | $q - 1$       | $mqb^R = \frac{Sqb^R}{q - 1}$      |
| Ảnh hưởng qua lại $A \leftrightarrow B$ | $Sqr^R = Sqr_{YY} - \frac{(Sqr_{Yw})^2}{Sqr_{ww}}$                                                       | $m.q - m - q$ | $mqr^R = \frac{Sqr^R}{mq - m - q}$ |
| Tổng                                    | $Sqg^R = Sqa^R + Sqb^R + Sqr^R$                                                                          | $m.q - 2$     |                                    |

Trong đó 
$$\bar{y}_i = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y_{ik}, i = \overline{1, m};$$

$$\overline{y_k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ik}, k = \overline{1, q}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{qm} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q y_{ik}$$

$$\overline{w_i} = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q w_{ik}, i = \overline{1, m};$$

$$\overline{w_k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_{ik}, k = \overline{1, q}$$

$$\overline{w} = \frac{1}{qm} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q w_{ik}$$

$$Sqr_{yw} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q (y_{ik} - \overline{y_i} - \overline{y_{.k}} + \overline{y_{..}})(w_{ik} - \overline{w_i} - \overline{w_{.k}} + \overline{w_{..}})$$

$$Sqr_{ww} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q (w_{ik} - \overline{w_i} - \overline{w_{.k}} + \overline{w_{..}})^2$$

$$Sqr_{YY} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q (Y_{ik} - \overline{Y_{i.}} - \overline{Y_{.k}} + \overline{Y_{..}})^2$$

$$Sqa_{yw} = q \sum_{i=1}^m (\overline{Y_{i.}} - \overline{Y_{..}})(\overline{w_i} - \overline{w_{..}})$$

$$Sqb_{yw} = m \sum_{k=1}^q (\overline{Y_{.k}} - \overline{Y_{..}})(\overline{w_{.k}} - \overline{w_{..}})$$

$$Sqa_{ww} = q \sum_{i=1}^m (\overline{w_i} - \overline{w_{..}})^2$$

$$Sqb_{ww} = m \sum_{k=1}^q (\overline{w_{.k}} - \overline{w_{..}})^2$$

$$Sqa_{YY} = q \sum_{i=1}^m (\overline{Y_{i.}} - \overline{Y_{..}})^2$$

$$Sqb_{YY} = m \sum_{k=1}^q (\overline{Y_{.k}} - \overline{Y_{..}})^2$$

1) Kiểm định giả thiết  $H : \gamma = 0$

Nếu  $Test \quad |T| = \frac{|Sqr_{yw}|}{\sqrt{Sqr_{ww} \cdot mqr^R}} > t_{1-\alpha; mq-m-q}$  thì bác bỏ  $H$  (Bảng V - Phụ lục).

2) Kiểm định giả thiết  $H_A : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Nếu  $Test \quad F_A = \frac{mqa^R}{mqr^R} > F_{1-\alpha; m-1, mq-m-q}$  thì bác bỏ  $H_A$  (Bảng IX - Phụ lục).

3) Kiểm định giả thiết  $H_B : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$ .

Nếu  $Test F_B = \frac{mqb^R}{mqr^R} > F_{1-\alpha; q-1, mq-m-q}$  thì bác bỏ  $H_B$  (Bảng IX - Phụ lục).

*Ví dụ 6.3:* Cần nghiên cứu sự tăng trọng của vật nuôi phụ thuộc vào tuổi tác, chế độ thức ăn và trọng lượng ban đầu như thế nào.

- Tuổi tác (yếu tố  $A$ ) = 4 cấp tuổi, nghĩa là  $m = 4$ .
- Chế độ thức ăn (yếu tố  $B$ ) = 6 cấp thức ăn, nghĩa là  $q = 6$ .
- Trọng lượng ban đầu ( $w$ ), trọng lượng hiện tại ( $y$ ).

Ta có bảng số liệu:

**Bảng 6.1**

| Cấp của $B$ : $k$ |           |           |           |           |           |           |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $i$               | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
| 1                 | (2,8; 50) | (1,9; 49) | (0,8; 51) | (0,5; 50) | (2,1; 50) | (0,9; 50) |
| 2                 | (3,0; 51) | (5,4; 53) | (2,8; 53) | (1,0; 50) | (0,5; 48) | (1,1; 48) |
| 3                 | (4,5; 52) | (0,9; 47) | (1,9; 51) | (0,1; 49) | (3,2; 52) | (3,2; 52) |
| 4                 | (2,3; 48) | (0,2; 45) | (3,3; 53) | 0,6; 48)  | (2,2; 50) | (2,8; 50) |

**Tính toán**

**Bảng 6.2**

|                               | $Sq^R$           | Bậc tự do | $mq^R$          |
|-------------------------------|------------------|-----------|-----------------|
| Giữa các cấp $A$              | $Sqa^R = 3,253$  | 3         | $mqa^R = 1,084$ |
| Giữa các cấp $B$              | $Sqb^R = 15,827$ | 5         | $mqb^R = 3,165$ |
| Qua lại $A \leftrightarrow B$ | $Sqr^R = 2,255$  | 14        | $mqa^R = 0,161$ |

$$Sqr_{Yw} = 38,40; Sqr_{ww} = 57,7 \Rightarrow T = \frac{Sqr_{Yw}}{\sqrt{Sqr_{ww} \cdot mqr^R}} = 12,60$$

Tra bảng  $t_{0,95;14} = 2,14$  vậy  $|T| > 2,14$  nên ta bác bỏ  $H$ , nghĩa là có ảnh hưởng của trọng lượng ban đầu trong điều kiện tuổi tác, chế độ thức ăn và trọng lượng đang xét với mức ý nghĩa  $\alpha = 5\%$ .

$F_A = \frac{mqa^R}{mqr^R} = \frac{1,084}{0,161} = 6,73 > 3,34 = F_{0,95;3;14}$  nên bác bỏ  $H_A$ , nghĩa là có ảnh hưởng của tuổi tác lên trọng lượng với mức ý nghĩa 5%.

$F_B = \frac{mqb^R}{mqr^R} = \frac{3,165}{0,161} = 19,65 > 2,96 = F_{0,95;5;14}$  nên bác bỏ  $H_B$ , nghĩa là có ảnh hưởng của chế độ thức ăn lên trọng lượng với mức ý nghĩa 5%.

**Bài tập 6.2.** Lập chương trình cho mô hình phân tích tương quan loại 2.

**Tổ chức dữ liệu:**

Các số liệu điều tra được lưu trữ trong tệp văn bản có tên 'T\_QUAN\_2.DAT' bao gồm:

- Dòng đầu là số nguyên  $m$  chỉ cấp của A và số nguyên  $q$  chỉ cấp của B.
- $m$  dòng sau, mỗi dòng có  $2.q$  số thực chỉ  $y_{ik}$  và  $w_{ik}$  cách nhau một khoảng trống.

Chương trình:

```
Program PHAN_TICH_TUONG_QUAN_LOAI_2 ;
uses CRT ;
const
    Mmax = 20 ;
    Qmax = 25 ;
var
    Y , W : array[1..Mmax , 1..Qmax] of real ;
    Yi , Wi : array[1..Mmax] of real ;
    Yk , Wk : array[1..Qmax] of real ;
    n , m , q , i , k , k1 , k2 : integer ;
    SqrYY , SqrWW , SqrYW , SqaYY , SqaWW , SqaYW , SqbYY , SqbWW ,
    SqbYW ,
    SqaR , SqbR , SqrR , mqaR , mqbR , mqrR , YN , WN , T , FA , FB : real ;
    DL , F : TEXT ;
    Alpha , Tk : array[1..5] of real ;
    DK1 : array[1..24] of integer ;
    F05 , F01 : array[1..24] of real ;
    Ts , Ms : real ;

BEGIN
    ClrScr ;
    Assign(DL,'T_QUAN_2.DAT') ;           { Doc du lieu tu tep van ban }
    Reset(DL) ;
    readln(DL, m, q) ;
    for i := 1 to m do
        begin
            for k := 1 to q do
                read(DL, Y[i,k] , W[i,k]) ;
            readln(DL)
        end ;
    close(DL) ;
    YN := 0 ;
    WN := 0 ;
    FillChar(Yi, sizeof(Yi) ,0) ;        { Tinh cac trung binh cong Yi , Wi }
```

```

FillChar(Wi, sizeof(Wi), 0);
for i := 1 to m do
begin
    for k := 1 to q do
    begin
        Yi[i] := Yi[i] + Y[i,k];
        Wi[i] := Wi[i] + W[i,k];
    end;
    Yi[i] := Yi[i]/q;
    Wi[i] := Wi[i]/q;
    YN := YN + Yi[i];
    WN := WN + Wi[i];
end;
YN := YN/m;
WN := WN/m;
FillChar(Yk, sizeof(Yk), 0);           { Tinh cac trung binh cong Yk , Wk }
FillChar(Wk, sizeof(Wk), 0);
for k := 1 to q do
begin
    for i := 1 to m do
    begin
        Yk[k] := Yk[k] + Y[i,k];
        Wk[k] := Wk[k] + W[i,k];
    end;
    Yk[k] := Yk[k]/m;
    Wk[k] := Wk[k]/m;
end;
SQRyy := 0;
SQRww := 0;
SQRyw := 0;
for i := 1 to m do
    for k := 1 to q do
    begin
        SQRyy := SQRyy + sqr(Y[i,k] - Yi[i] - Yk[k] + YN);
        SQRww := SQRww + sqr(W[i,k] - Wi[i] - Wk[k] + WN);
        SQRyw := SQRyw + (Y[i,k] - Yi[i] - Yk[k] + YN) * (W[i,k] - Wi[i] - Wk[k] + WN);
    end;
SqaYY := 0;
SqaWW := 0;
SqaYW := 0;
for i := 1 to m do
begin
    SqaYY := SqaYY + sqr(Yi[i] - YN);
    SqaWW := SqaWW + sqr(Wi[i] - WN);
    SqaYW := SqaYW + (Yi[i] - YN) * (Wi[i] - WN);
end;

```



```

SqaYY := SqaYY/q ;
SqaWW := SqaWW/q ;
SqaYW := SqaYW/q ;

SqbYY := 0 ;
SqbWW := 0 ;
SqbYW := 0 ;
for k := 1 to q do
    begin
        SqbYY := SqbYY + sqr(Yk[k] - YN) ;
        SqbWW := SqbWW + sqr(Wk[k] - WN) ;
        SqbYW := SqbYW + (Yk[k] - YN) * (Wk[k] - WN)
    end ;
SqbYY := SqbYY/m ;
SqbWW := SqbWW/m ;
SqbYW := SqbYW/m ;

SqaR := SqaYY + sqr(SqrYW)/SqrWW - sqr(SqaYW + SqrYW)/(SqaWW +
SqrWW) ;
mqaR := SqaR/(m-1) ;
SqbR := SqbYY + sqr(SqrYW)/SqrWW - sqr(SqbYW + SqrYW)/(SqbWW +
SqrWW) ; mqbR := SqbR/(q-1) ;
SqrR := SqrYY - sqr(SqrYW)/SqrWW ;
k2 := m*q - m - q ;
mqrR := SqrR/k2 ;
T := abs(SqrYW) / sqrt(SqrWW*mqrR) ;

Assign(F,'BANG_5.TXT') ;                               { Tra bang V }
Reset(F) ;
for i := 1 to 5 do read(F, Alpha[i]) ;
readln(F) ;
while NOT SeekEOF(F) do
    begin
        read(F , k) ;
        if k < k2 then readln(F)
        else
            begin
                for i := 1 to 5 do read(F, Tk[i]) ;
                break
            end
        end ;
    end ;
Close(F) ;
For i := 1 to 5 do                                       { Ket luan H }
    begin
        writeln('Voi muc y nghia ', Alpha[i]:6:3 ) ;
        if T > Tk[i] then

```

```

        writeln('- Co anh huong cua W trong dieu kien A va B len Y ');
    else
        writeln('- Khong co anh huong cua W trong dieu kien A va B len Y ');
    writeln
end ;

FA := mqaR / mqrR ;
k1 := m - 1 ;
Assign(F, 'BANG_9.TXT') ;
Reset(F) ;                                { Doc du lieu tu Bang IX Phu luc }
for k := 1 to 24 do read(F, DK1[k]) ;
readln(F) ;
while NOT SeekEOF(F) do
    begin
        read(F, k) ;
        if k < k2 then
            begin readln(F) ; readln(F) end
        else
            begin
                for i := 1 to 24 do read(F, F05[i]) ;
                readln(F) ;
                for i := 1 to 24 do read(F, F01[i]) ;
                readln(F) ;
                close(F) ;
                break
            end
        end ;
    k := 2 ;
    while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
    Ts := F05[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F05[k] - F05[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
    Ms := F01[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F01[k] - F01[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
                                                { Ket luan HA }
    if FA > Ts then
        writeln('-Co anh huong cua A o cac cap trong dieu kien B voi do tin cay 0.95!')
    else
        writeln('-Khong co anh huong cua A o cac cap trong dieu kien B ' +
            ' voi do tin cay 0.95 !') ;
    if FA > Ms then
        writeln('- Co anh huong cua A o cac cap trong dieu kien B voi do tin cay 0.99 !')
    else
        writeln('- Khong co anh huong cua A o cac cap trong dieu kien B ' +
            ' voi do tin cay 0.99 !') ;

FB := mqbR / mqrR ;
k1 := q - 1 ;
k := 2 ;
while k1 > DK1[k] do inc(k) ;

```

```

Ts := F05[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F05[k] - F05[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
Ms := F01[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F01[k] - F01[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
{ Ket luan HB }
if FB > Ts then
  writeln(' Co anh huong cua B o cac cap trong dieu kien A voi do tin cay 0.95 !')
else
  writeln(' Khong co anh huong cua B o cac cap trong dieu kien A ' +
    ' voi do tin cay 0.95 !') ;
if FB > Ms then
  writeln(' Co anh huong cua B o cac cap trong dieu kien A voi do tin cay 0.99 !')
else
  writeln(' Khong co anh huong cua B o cac cap trong dieu kien A ' +
    ' voi do tin cay 0.99 !') ;
Readln ;
END.

```

*Chú ý:* Trong chương trình có sử dụng dữ liệu của hai bảng. Bảng V - Phụ lục được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_5.TXT' bao gồm 41 dòng:

- Dòng đầu có 5 số thực chỉ các giá trị của  $\alpha$ .
- 40 dòng sau, mỗi dòng bắt đầu là số nguyên  $k$ , sau đó là 5 số thực chỉ giá trị của hàm phân phối Student  $t_k(\alpha)$ .

Số liệu của Bảng IX trong Phụ lục, được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_9.TXT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm 24 số nguyên chỉ các giá trị của  $k_1$ .
- 104 dòng sau là các giá trị của hàm phân phối Fischer. Mỗi giá trị của  $k_2$  tương ứng với hai dòng, dòng trên bắt đầu là số nguyên  $k_2$  sau đó là 24 giá trị của hàm  $F_{05}$  còn dòng dưới là 24 giá trị của hàm  $F_{01}$ .

## 6.4. Mô hình phân tích tương quan loại 3

**1. Định nghĩa:** Hai yếu tố ảnh hưởng  $A$  và  $B$ ; hai biến tương quan  $W, Z$ .

Điều tra số liệu dưới dạng bảng:

| Cấp của A (i) | Cấp của B: (k)             |                            |     |                            |
|---------------|----------------------------|----------------------------|-----|----------------------------|
|               | 1                          | 2                          | ... | q                          |
| 1             | $(y_{11}, w_{11}, z_{11})$ | $(y_{12}, w_{12}, z_{12})$ | ... | $(y_{1q}, w_{1q}, z_{1q})$ |
| 2             | $(y_{21}, w_{21}, z_{21})$ | $(y_{22}, w_{22}, z_{22})$ | ... | $(y_{2q}, w_{2q}, z_{2q})$ |
| ...           | ...                        | ...                        | ... | ...                        |
| m             | $(y_{m1}, w_{m1}, z_{m1})$ | $(y_{m2}, w_{m2}, z_{m2})$ | ... | $(y_{mq}, w_{mq}, z_{mq})$ |

## 2. Mô hình toán

Xem các số liệu  $y_{ik}$  như là thể hiện của đại lượng ngẫu nhiên sau đây:

$$Y_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta_k + \gamma_1(w_{ik} - \bar{w}) + \gamma_2(z_{ik} - \bar{z}) + E_{ik}$$

với

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q w_{ik}$$

$$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y_{ik}$$

$$\bar{w}_{i.} = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q w_{ik}$$

$$\bar{z}_{i.} = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q z_{ik}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q z_{ik}$$

$$\bar{y}_{.k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ik}$$

$$\bar{w}_{.k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_{ik}$$

$$\bar{z}_{.k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m z_{ik}$$

$$n = m.q$$

Vấn đề đặt ra là:

- Có ảnh hưởng của  $W$  cũng như  $Z$  hay không với các cấp của  $A$  và  $B$  đến kết quả thực nghiệm.

- Có ảnh hưởng của  $A$  cũng như  $B$  với các cấp hay không lên kết quả thực nghiệm.

Khi đó ta cần kiểm định các giả thiết:

$$H_1 : \gamma_1 = 0 ; H_2 : \gamma_2 = 0$$

$$\text{và} \quad H_A : \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 ; H_B : \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$$

Ta lập bảng tính toán:

|                   | Tính $SQ^R$                                                                                                                                                                      | Bậc tự do $SQ^R$  | $mq^R$                                 |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|----------------------------------------|
| Giữa các bước A   | $Sqa^R = Sqa_{YY} + \tilde{\gamma}_1 Sqr_{YW} + \tilde{\gamma}_2 Sqr_{YZ}$<br>$- \tilde{\gamma}_1^{HA} (Sqr_{YW} + Sqa_{YW})$<br>$- \tilde{\gamma}_2^{HA} (Sqr_{YZ} + Sqa_{YZ})$ | $m - 1$           | $mqa^R = \frac{Sqa^R}{m - 1}$          |
| Giữa các bước B   | $Sqb^R = Sqb_{YY} + \tilde{\gamma}_1 Sqr_{YW} + \tilde{\gamma}_2 Sqr_{YZ}$<br>$- \tilde{\gamma}_1^{HB} (Sqr_{YW} + Sqb_{YW})$<br>$- \tilde{\gamma}_2^{HB} (Sqr_{YZ} + Sqb_{YZ})$ | $q - 1$           | $mqb^R = \frac{Sqb^R}{q - 1}$          |
| Ảnh hưởng qua lại | $Sqr^R = Sqr_{YY} + \tilde{\gamma}_1 Sqr_{YW} + \tilde{\gamma}_2 Sqr_{YZ}$                                                                                                       | $m.q - m - q - 1$ | $mqr^R = \frac{Sqr^R}{mq - m - q - 1}$ |
| Tổng              | $Sqg^R = Sqa^R + Sqb^R + Sqr^R$                                                                                                                                                  | $m.q - 3$         |                                        |

Trong đó:

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{Sqr_{YW} \cdot Sqr_{ZZ} - Sqr_{YZ} \cdot Sqr_{WZ}}{Sqr_{WW} \cdot Sqr_{ZZ} - (Sqr_{ZZ})^2}$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{Sqr_{YZ} \cdot Sqr_{WW} - Sqr_{YW} \cdot Sqr_{ZZ}}{Sqr_{WW} \cdot Sqr_{ZZ} - (Sqr_{ZZ})^2}$$

$$Sqr_{YW} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q \left[ (y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..})(w_{ik} - \bar{w}_{i.} - \bar{w}_{.k} + \bar{w}_{..}) \right]$$

$$Sqr_{YZ} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q \left[ (y_{ik} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}_{..})(z_{ik} - \bar{z}_{i.} - \bar{z}_{.k} + \bar{z}_{..}) \right]$$

$$\tilde{\gamma}_1^{HA} = \frac{(Sqr_{YW} + Sqa_{YW})(Sqr_{ZZ} + Sqa_{ZZ}) - (Sqr_{YW} + Sqa_{YZ})(Sqr_{WZ} + Sqa_{WZ})}{(Sqr_{WW} + Sqa_{WW})(Sqr_{ZZ} + Sqa_{ZZ}) - (Sqr_{WZ} + Sqa_{WZ})^2}$$

$$\tilde{\gamma}_2^{HA} = \frac{(Sqr_{YZ} + Sqa_{YZ})(Sqr_{WW} + Sqa_{WW}) - (Sqr_{YW} + Sqa_{YW})(Sqr_{WZ} + Sqa_{WZ})}{(Sqr_{WW} + Sqa_{WW})(Sqr_{ZZ} + Sqa_{ZZ}) - (Sqr_{WZ} + Sqa_{WZ})^2}$$

$$\tilde{\gamma}_1^{HB} = \frac{(Sqr_{YZ} + Sqb_{YW})(Sqr_{ZZ} + Sqb_{ZZ}) - (Sqr_{YZ} + Sqb_{YZ})(Sqr_{WZ} + Sqb_{WZ})}{(Sqr_{WW} + Sqb_{WW})(Sqr_{ZZ} + Sqb_{ZZ}) - (Sqr_{WZ} + Sqb_{WZ})^2}$$

$$\tilde{\gamma}_2^{HB} = \frac{(Sqr_{YZ} + Sqb_{YZ})(Sqr_{WW} + Sqb_{WW}) - (Sqr_{YW} + Sqb_{YW})(Sqr_{WZ} + Sqb_{WZ})}{(Sqr_{WW} + Sqb_{WW})(Sqr_{ZZ} + Sqb_{ZZ}) - (Sqr_{WZ} + Sqb_{WZ})^2}$$

$$\text{với } Sqa_{YY} = q \sum_{i=1}^m (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2, \quad Sqa_{YW} = q \sum_{i=1}^m (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{w}_{i.} - \bar{w}_{..})$$

$$Sqr_{ww} = \sum \sum (W_{ik} - \bar{W}_i - \bar{W}_k + \bar{W})^2$$

$$Sqr_{zz} = \sum \sum (Z_{ik} - \bar{Z}_i - \bar{Z}_k + \bar{Z})^2$$

$$Sqr_{wz} = \sum \sum (W_{ik} - \bar{W}_i - \bar{W}_k + \bar{W})(Z_{ik} - \bar{Z}_i - \bar{Z}_k + \bar{Z})$$

$$Sqa_{YZ} = q \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})(\bar{z}_i - \bar{z}_{..}), \quad Sqa_{WW} = q \sum_{i=1}^m (\bar{w}_i - \bar{w}_{..})^2$$

$$Sqa_{wz} = q \sum_{i=1}^m (\bar{w}_i - \bar{w}_{..})(\bar{z}_i - \bar{z}_{..}), \quad Sqa_{ZZ} = q \sum_{i=1}^m (\bar{z}_i - \bar{z}_{..})^2$$

$$Sqby_{YY} = m \sum_{k=1}^q (\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..})^2, \quad Sqby_{YW} = m \sum_{k=1}^q (\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..})(\bar{w}_{.k} - \bar{w}_{..})$$

$$Sqby_{YZ} = m \sum_{k=1}^q (\bar{y}_{.k} - \bar{y}_{..})(\bar{z}_{.k} - \bar{z}_{..}), \quad Sqby_{WW} = m \sum_{k=1}^q (\bar{w}_{.k} - \bar{w}_{..})^2$$

$$Sqby_{wz} = m \sum_{k=1}^q (\bar{w}_{.k} - \bar{w}_{..})(\bar{z}_{.k} - \bar{z}_{..}), \quad Sqby_{ZZ} = m \sum_{k=1}^q (\bar{z}_{.k} - \bar{z}_{..})^2$$

Khi đó:

1) Đối với giả thiết  $H_1: \gamma_1 = 0$

ta lập 
$$T_1 = \frac{|Sqr_{YW} \cdot Sqr_{ZZ} - Sqr_{YZ} \cdot Sqr_{wZ}|}{\sqrt{[Sqr_{WW} \cdot Sqr_{ZZ} - (Sqr_{wZ})^2] Sqr_{ZZ} mqr^k}}$$

Nếu  $|T_1| > t_{1-\alpha; mq-m-q-1}$  thì bác bỏ  $H_1$   $t_{1-\alpha; mq-m-q-1}$  (tra Bảng V với  $\alpha$  hai phía).

2) Đối với giả thiết  $H_2: \gamma_2 = 0$

ta lập 
$$T_2 = \frac{|Sqr_{YZ} \cdot Sqr_{WW} - Sqr_{YW} \cdot Sqr_{wZ}|}{\sqrt{[Sqr_{WW} \cdot Sqr_{ZZ} - (Sqr_{wZ})^2] Sqr_{WW} mqr^k}}$$

Nếu  $|T_2| > t_{1-\alpha; mq-m-q-1}$  thì bác bỏ  $H_2$ .

3) Đối với giả thiết  $H_A: \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

$$H_B: \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$$

ta lập 
$$F_A = \frac{mqa^k}{mqr^k}; \quad F_B = \frac{mqb^k}{mqr^k}$$

Nếu  $F_A > F_{1-\alpha; m-1; mq-m-q-1}$  thì bác bỏ  $H_A$ .

Nếu  $F_B > F_{1-\alpha; q-1; mq-m-q-1}$  thì bác bỏ  $H_B$ .

Ngược lại thì chấp nhận  $H_A, H_B$  với mức ý nghĩa  $\alpha$ .

**Bài tập 6.3.** Lập chương trình cho mô hình phân tích tương quan loại 3.

**Tổ chức dữ liệu:**

Các số liệu điều tra được lưu trữ trong tệp văn bản có tên 'T\_QUAN\_3.DAT' bao gồm:

- Dòng đầu là số nguyên  $m$  chỉ cấp của A và số nguyên  $q$  chỉ cấp của B.
- $m$  dòng sau, mỗi dòng có  $3.q$  số thực chỉ  $y_{ik}$ ,  $w_{ik}$  và  $z_{ik}$  cách nhau một khoảng trống.

Chương trình:

```
Program PHAN_TICH_TUONG_QUAN_LOAI_3 ;
uses CRT ;
const
    Mmax = 15 ;
    Qmax = 20 ;
var
    Y , W , Z : array[1..Mmax , 1..Qmax] of real ;
    Yi , Wi , Zi : array[1..Mmax] of real ;
    Yk , Wk , Zk : array[1..Qmax] of real ;
    m , q , i , k , k1 , k2 : integer ;
    SqrYY, SqrWW, SqrZZ, SqrYW, SqrYZ , SqrWZ , SqaYY, SqaWW, SqaZZ :
real ;
    SqaYW, SqaYZ , SqaWZ , SqbYY, SqbWW, SqbZZ : real ;
    SqbYW , SqbYZ , SqbWZ : real ;
    gama_1 , gama_2 , gama_Ha1 , gama_Ha2 , gama_Hb1 , gama_Hb2 : real

    SqaR, SqbR, SqrR, mqaR, mqbR, mqrR, YN, WN , ZN , T1 , T2 ,FA , FB :
real ;
    DL , F : TEXT ;
    Alpha , Tk : array[1..5] of real ;
    DK1 : array[1..24] of integer ;
    F05 , F01 : array[1..24] of real ;
    Ts , Ms : real ;
BEGIN
    ClrScr ;
    Assign(DL,'T_QUAN_3.DAT') ;           { Doc du lieu tu tep van ban }
    Reset(DL) ;
    readln(DL, m, q) ;
    for i := 1 to m do
        begin
            for k := 1 to q do
                read(DL, Y[i,k] , W[i,k] , Z[i,k]) ;
            readln(DL)
        end ;
    close(DL) ;
```

```

YN := 0 ;
WN := 0 ;
FillChar(Yi, sizeof(Yi) ,0) ;      { Tinh cac trung binh cong Yi, Wi, Zi}
FillChar(Wi, sizeof(Wi) ,0) ;
FillChar(Zi, sizeof(Zi) ,0) ;
for i := 1 to m do
begin
    for k := 1 to q do
    begin
        Yi[i] := Yi[i] + Y[i,k] ;
        Wi[i] := Wi[i] + W[i,k] ;
        Zi[i] := Zi[i] + Z[i,k]
    end ;
    Yi[i] := Yi[i]/q ;
    Wi[i] := Wi[i]/q ;
    Zi[i] := Zi[i]/q ;
    YN := YN + Yi[i] ;
    WN := WN + Wi[i] ;
    ZN := ZN + Zi[i]
end ;
YN := YN/m ;
WN := WN/m ;
ZN := ZN/m ;
FillChar(Yk, sizeof(Yk) ,0) ;      { Tinh cac trung binh cong Yk, Wk, Zk }
FillChar(Wk, sizeof(Wk) ,0) ;
FillChar(Zk, sizeof(Zk) ,0) ;
for k := 1 to q do
begin
    for i := 1 to m do
    begin
        Yk[k] := Yk[k] + Y[i,k] ;
        Wk[k] := Wk[k] + W[i,k] ;
        Zk[k] := Zk[k] + Z[i,k]
    end ;
    Yk[k] := Yk[k]/m ;
    Wk[k] := Wk[k]/m ;
    Zk[k] := Zk[k]/m
end ;

SqrYY := 0 ;
SqrWW := 0 ;
SqrZZ := 0 ;
SqrYW := 0 ;
SqrYZ := 0 ;
SqrWZ := 0 ;
for i := 1 to m do

```



```

for k := 1 to q do
begin
  SqrYY := SqrYY + sqr(Y[i,k] - Yi[i] - Yk[k] + YN) ;
  SqrWW := SqrWW + sqr(W[i,k] - Wi[i] - Wk[k] + WN) ;
  SqrZZ := SqrZZ + sqr(Z[i,k] - Zi[i] - Zk[k] + ZN) ;
  SqrYW := SqrYW + (Y[i,k]-Yi[i]-Yk[k]+YN)*(W[i,k]-Wi[i]-Wk[k]+WN) ;
  SqrYZ := SqrYZ + (Y[i,k]-Yi[i]-Yk[k]+YN)*(Z[i,k]-Zi[i]-Zk[k]+ZN) ;
  SqrWZ := SqrWZ + (W[i,k]-Wi[i]-Wk[k]+WN)*(Z[i,k]-Zi[i]-Zk[k]+ZN)
end ;
SqaYY := 0 ;
SqaWW := 0 ;
SqaZZ := 0 ;
SqaYW := 0 ;
SqaYZ := 0 ;
SqaWZ := 0 ;
for i := 1 to m do
begin
  SqaYY := SqaYY + sqr(Yi[i] - YN) ;
  SqaWW := SqaWW + sqr(Wi[i] - WN) ;
  SqaZZ := SqaZZ + sqr(Zi[i] - ZN) ;
  SqaYW := SqaYW + (Yi[i] - YN)*(Wi[i] - WN) ;
  SqaYZ := SqaYZ + (Yi[i] - YN)*(Zi[i] - ZN) ;
  SqaWZ := SqaWZ + (Wi[i] - WN)*(Zi[i] - ZN)
end ;
SqaYY := SqaYY/q ;
SqaWW := SqaWW/q ;
SqaZZ := SqaZZ/q ;
SqaYW := SqaYW/q ;
SqaYZ := SqaYZ/q ;
SqaWZ := SqaWZ/q ;

SqbYY := 0 ;
SqbWW := 0 ;
SqbZZ := 0 ;
SqbYW := 0 ;
SqbYZ := 0 ;
SqbWZ := 0 ;
for k := 1 to q do
begin
  SqbYY := SqbYY + sqr(Yk[k] - YN) ;
  SqbWW := SqbWW + sqr(Wk[k] - WN) ;
  SqbZZ := SqbZZ + sqr(Zk[k] - ZN) ;
  SqbYW := SqbYW + (Yk[k] - YN)*(Wk[k] - WN) ;
  SqbYZ := SqbYZ + (Yk[k] - YN)*(Zk[k] - ZN) ;
  SqbWZ := SqbWZ + (Wk[k] - WN)*(Zk[k] - ZN) ;
end ;

```

```

SqbYY := SqbYY/m ;
SqbWW := SqbWW/m ;
SqbZZ := SqbZZ/m ;
SqbYW := SqbYW/m ;
SqbYZ := SqbYZ/m ;
SqbWZ := SqbWZ/m ;

{ Tinh cac Gama }
Ms := SqrWW * SqrZZ - sqr(SqrWZ) ;
gama_1 := (SqrYW*SqrZZ - SqrYZ*SqrWZ)/Ms ;
gama_2 := (SqrYZ*SqrWW - SqrYW*SqrWZ)/Ms ;
Ms := (SqrWW + SqaWW)*(SqrZZ + SqaZZ) - sqr(SqrWZ + SqaWZ) ;
gama_Ha1 := ((SqrYW+SqaYW)*(SqrZZ+SqaZZ) -
(SqrYW+SqaYZ)*(SqrWZ+SqaWZ))/Ms ;
gama_Ha2 := ((SqrYZ+SqaYZ)*(SqrWW+SqaWW) -
(SqrYW+SqaYW)*(SqrWZ+SqaWZ))/Ms ;
Ms := (SqrWW + SqbWW)*(SqrZZ + SqbZZ) - sqr(SqrWZ + SqbWZ) ;
gama_Hb1 := ((SqrYZ+SqbYW)*(SqrZZ+SqbZZ) -
(SqrYZ+SqbYZ)*(SqrWZ+SqbWZ))/Ms ;
gama_Hb2 := ((SqrYZ+SqbYZ)*(SqrWW+SqbWW) -
(SqrYW+SqbYW)*(SqrWZ+SqbWZ))/Ms ;

{ Tinh cac Sqr va mqr }
SqaR := SqaYY + gama_1 * SqrYW + gama_2 * SqrYZ
- gama_Ha1 * (SqrYW + SqaYW) - gama_Ha2 * (SqrYZ +
SqaYZ) ;
mqaR := SqaR/(m-1) ;
SqbR := SqbYY + gama_1 * SqrYW + gama_2 * SqrYZ
- gama_Hb1 * (SqrYW + SqbYW) - gama_Hb2 * (SqrYZ + SqbYZ)

mqbR := SqbR/(q-1) ;
SqrR := SqrYY + gama_1 * SqrYW + gama_2 * SqrYZ ;
k2 := m*q - m - q - 1 ;
mqrR := SqrR/k2 ;

Ms := sqrt((SqrWW * SqrZZ - sqr(SqrWZ)) * SqrZZ * mqrR) ;
Ts := abs(SqrYZ * SqrWW - SqrYZ * SqrWZ) ;
T1 := Ts/Ms ;
Ms := sqrt((SqrWW * SqrZZ - sqr(SqrWZ)) * SqrWW * mqrR) ;
T2 := Ts/Ms ;
Assign(F,'BANG_5.TXT') ; { Tra bang V - Phu luc }
Reset(F) ;
for i := 1 to 5 do read(F, Alpha[i]) ;
readln(F) ;

```

```

while NOT SeekEOF(F) do
begin
    read(F, k);
    if k < k2 then readln(F)
    else
        begin
            for i := 1 to 5 do read(F, Tk[i]);
            break
        end
    end;
Close(F);
For i := 1 to 5 do                                     { Ket luan H1 }
begin
    writeln('Voi muc y nghia ', Alpha[i]:6:3);
    if T1 > Tk[i] then
        writeln('- Co anh huong cua W voi cac cap cua A va B
                                                         den ket qua thuc nghiem ');
    else
        writeln('- Khong co anh huong cua W voi cac cap cua A va B
                                                         den ket qua thuc nghiem ');
    writeln
end;
For i := 1 to 5 do                                     { Ket luan H2 }
begin
    writeln('Voi muc y nghia ', Alpha[i]:6:3);
    if T2 > Tk[i] then
        writeln('- Co anh huong cua Z voi cac cap cua A va B
                                                         den ket qua thuc nghiem ');
    else
        writeln('- Khong co anh huong cua Z voi cac cap cua A va B
                                                         den ket qua thuc nghiem ');
    writeln
end;
FA := mqaR / mqrR;
FB := mqbR / mqrR;
k1 := m - 1;
Assign(F, 'BANG_9.TXT');
Reset(F);                                              { Doc du lieu tu Bang IX Phu luc }
for k := 1 to 24 do read(F, DK1[k]);
readln(F);
while NOT SeekEOF(F) do
begin
    read(F, k);
    if k < k2 then
        begin readln(F); readln(F) end
    else

```

```

begin
  for i := 1 to 24 do read(F, F05[i]) ;
  readln(F) ;
  for i := 1 to 24 do read(F, F01[i]) ;
  readln(F) ;
  close(F) ;
  break
end
end ;
k := 2 ;
while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
Ts := F05[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F05[k] - F05[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
Ms := F01[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F01[k] - F01[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
{ Ket luan HA }
if FA > Ts then
  writeln('- Co anh huong cua A o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.95 !')
else
  writeln('- Khong co anh huong cua A o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.95 !') ;
if FA > Ms then
  writeln('- Co anh huong cua A o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.99 !')
else
  writeln('- Khong co anh huong cua A o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.99 !') ;
k1 := q - 1 ;
k := 2 ;
while k1 > DK1[k] do inc(k) ;
Ts := F05[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F05[k] - F05[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
Ms := F01[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F01[k] - F01[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
{ Ket luan HB }
if FB > Ts then
  writeln('- Co anh huong cua B o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.95 !')
else
  writeln('- Khong co anh huong cua B o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.95 !') ;
if FB > Ms then
  writeln('- Co anh huong cua B o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.99 !')
else
  writeln('- Khong co anh huong cua B o cac cap len ket qua thuc nghiem
                                                    voi do tin cay 0.99 !') ;
Readln ;
END .

```

*Chú ý:* Trong chương trình có sử dụng dữ liệu của hai bảng. Bảng V - Phụ lục được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_5.TXT' bao gồm 41 dòng:

- Dòng đầu có 5 số thực chỉ các giá trị của  $\alpha$ .
- 40 dòng sau, mỗi dòng bắt đầu là số nguyên  $k$ , sau đó là 5 số thực chỉ giá trị của hàm phân phối Student  $t_k(\alpha)$ .

Số liệu của Bảng IX trong Phụ lục, được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_9.TXT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm 24 số nguyên chỉ các giá trị của  $k_1$ .
- 104 dòng sau là các giá trị của hàm phân phối Fischer. Mỗi giá trị của  $k_2$  tương ứng với hai dòng, dòng trên bắt đầu là số nguyên  $k_2$  sau đó là 24 giá trị của hàm  $F_{05}$  còn dòng dưới là 24 giá trị của hàm  $F_{01}$ .

## PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ TRỌNG SỐ CÁC THÀNH PHẦN CỦA HỆ

### 7.1. Đặt bài toán

Khi nghiên cứu các hệ sinh thái, một vấn đề đặt ra trước tiên là trong rất nhiều thành phần cấu tạo nên hệ ta nên chọn thành phần nào và bỏ qua thành phần nào. Do đó nảy sinh bài toán sau đây:

Cần đánh giá mức độ đóng góp của các thành phần vào hệ, hay là trọng số của các thành phần đối với hệ. Từ đó dẫn đến việc rút gọn các thành phần và rút gọn các thí nghiệm cần thực hiện khi tiến hành nghiên cứu.

Vấn đề này đã được Orloci trình bày trong [11]. Chúng tôi đã áp dụng để đánh giá các hệ di truyền ở Viện nghiên cứu bò sữa Dummerstrorf (CHLB Đức) và hướng dẫn một số luận án tiến sĩ về nhân chủng học tại Trường ĐHQG Hà Nội (xem [2], [3], [10]). Sau đây là nội dung cơ bản của phương pháp đó.

### 7.2. Phương pháp

#### *1. Bố trí thí nghiệm*

Xét một hệ sinh thái gồm  $v$  biến (biến trạng thái, ngoại sinh và điều khiển), điều tra số liệu trên hệ sinh thái đó bằng cách thu thập hoặc làm thí nghiệm. Mỗi thí nghiệm thực hiện trên toàn bộ hệ sinh thái ta được một véc tơ số liệu  $v$  thành phần:

$$X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iv}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Khi đó với  $N$  thí nghiệm ta có bảng số liệu sau:

Bảng 1:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{v1} & X_{v2} & \dots & X_{vN} \end{pmatrix}$$

Bài toán đặt ra là trong  $v$  biến đó, ta cần xác định vai trò đóng góp của từng biến đối với toàn hệ, nghĩa là xét trọng số của mỗi biến. Khi đó ta có thể tiến hành theo mô hình toán học như sau.

## 2. Mô hình toán học

**Bước 1:** Phân loại  $v$  biến thành các nhóm biến họ hàng gần gũi với nhau theo phương pháp phân loại trình bày trong mô hình cấu trúc (Chương 3 trong [3]). Chẳng hạn, phân thành  $K$  nhóm.

**Bước 2.** Trong từng nhóm có một số biến nhất định, chẳng hạn  $m$  biến. Khi đó ta rút ra tập số liệu của  $m$  biến đó tương ứng với  $N$  thí nghiệm, ta có:

Bảng 2:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mN} \end{pmatrix}$$

**Bước 2.1**

Tính  $\bar{X}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji}, j = 1, 2, \dots, m$

$$A = (A_{ij}) = (X_{ji} - \bar{X}_j), j = 1, \dots, m$$

$$i = 1, \dots, N$$

và tính ma trận hệ số tương quan

$$R^{(1)} = (r_{hj}^{(1)}) = \frac{\sum_{i=1}^N A_{hi} A_{ji}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N A_{hi}^2 \sum_{i=1}^N A_{ji}^2}}, h = 1, 2, \dots, m \text{ và } j = 1, 2, \dots, m$$

$$S_j^{(1)} = \sum_{h=1}^m \left( \frac{(r_{hj}^{(1)})^2}{r_{jj}^{(1)}} \right), j = 1, 2, \dots, m$$

Nếu  $S_{m1}^{(1)} = \max[S_j^{(1)}]$  thì đánh dấu biến  $m_1$ .

**Bước 2.1**

Thực hiện tương tự cho đến bước thứ  $l$  ta tính ma trận:

$$R^{(l)} = (r_{hj}^{(l)}) = r_{hj}^{(l-1)} - \frac{r_{hm_{l-1}}^{(l-1)} r_{jm_{l-1}}^{(l-1)}}{r_{m_{l-1}m_{l-1}}^{(l-1)}}$$

$$S_j^{(l)} = \frac{\sum_{h=1}^m [r_{hj}^{(l)}]^2}{r_{jj}^{(l)}}$$

$$S_{m_l}^{(l)} = \max[S_j^{(l)}], j = 1, 2, \dots, m$$

### Bước 2.m

Khi đến bước cuối cùng này ta tính trọng số của mỗi biến trong  $m$  biến như sau:

$$P_{m_l} = \frac{S_{m_e}^{(l)}}{\sum_{l=1}^m S_{m_e}^{(l)}}, l = 1, 2, \dots, m^{(*)}$$

$P_{m_l}$  chính là xác suất (trọng số tương đối của biến  $l$  đóng góp vào nhóm con  $m$  biến).

**Bước 3:** Trong mỗi nhóm ta chọn biến có trọng số cao nhất và bỏ đi những biến có trọng số thấp hơn. Cuối cùng ta nhận được  $K$  biến chính đóng góp vào hệ.

*Chú ý:*

1) Qua 3 bước trên ta được  $K$  biến chính đóng góp vào hệ. Mặt khác ta cũng có thể làm ngay từ đầu.

2) Bỏ qua bước 1, tiến hành ngay bước 2. Từ bước 2.1 đến bước cuối cùng là 2.m và ta bỏ qua những biến có trọng số bé tùy ý theo mong muốn của nhà nghiên cứu.

3) Nếu thực hiện cả 3 bước thì có ưu điểm là ta loại bỏ được những biến trùng nhau, hay nói một cách khác là sự khác nhau không có ý nghĩa.

## 7.3. Ví dụ áp dụng

Nghiên cứu 6 môi trường cùng cho một năng suất sữa bò. Mỗi môi trường ta xét 5 biến và nhận được bảng số liệu sau:

| Biến | Môi trường |     |     |     |     |     |
|------|------------|-----|-----|-----|-----|-----|
|      | 1          | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| LEM  | 449        | 398 | 457 | 318 | 390 | 411 |
| KM   | 256        | 220 | 259 | 221 | 215 | 223 |
| NT   | 8,8        | 5,1 | 7,7 | 4,7 | 4,8 | 4,8 |
| LT2  | 995        | 699 | 914 | 769 | 677 | 736 |
| NT2  | 568        | 388 | 527 | 417 | 373 | 400 |

---

(\*) *Chú ý:* Theo tính toán đầy đủ thì  $\sum_{l=1}^m S_{m_l}^l = m$  vì vậy đây cũng là đẳng thức để kiểm tra quá trình tính toán có đúng hay không.



Thực hiện qua 3 bước ta thu được kết quả trọng số của từng biến trong  $T$  biến như sau:

$$P_{LEM} = 0,0001 := P_1$$

$$P_{KM} = 0,9482 := P_2$$

$$P_{NT} = 0,0122 := P_3$$

$$P_{LT2} = 0,0027 := P_4$$

$$P_{NT2} = 0,0368 := P_5$$

Vậy nếu loại bỏ những biến có xác suất bé thì có thể lấy từ biến thứ 2 đến 5; bỏ qua biến 1. Có thể bỏ biến 1 và biến 4 thì hệ còn lại ba biến 2, 3, 5 tùy thuộc sự cần thiết nghiên cứu của nhà sinh thái học.

## 7.4. Áp dụng để rút gọn số thí nghiệm hoặc hệ sinh thái

1. Nếu trong bảng số liệu 1 ta lấy các hàng là các thí nghiệm và các cột là các biến thành phần của hệ thì không gian của hệ sẽ gồm các biến thành phần, còn các thí nghiệm được xem như là các thể hiện của hệ (thành phần trong mô hình 7.2). Khi đó, áp dụng phương pháp tương tự ta nhận được xác suất đóng góp vào hệ của mỗi thí nghiệm. Và từ đó ta có thể loại bỏ những thí nghiệm có vai trò quá bé đối với hệ đang xét, còn lại  $M$  thí nghiệm để xét.

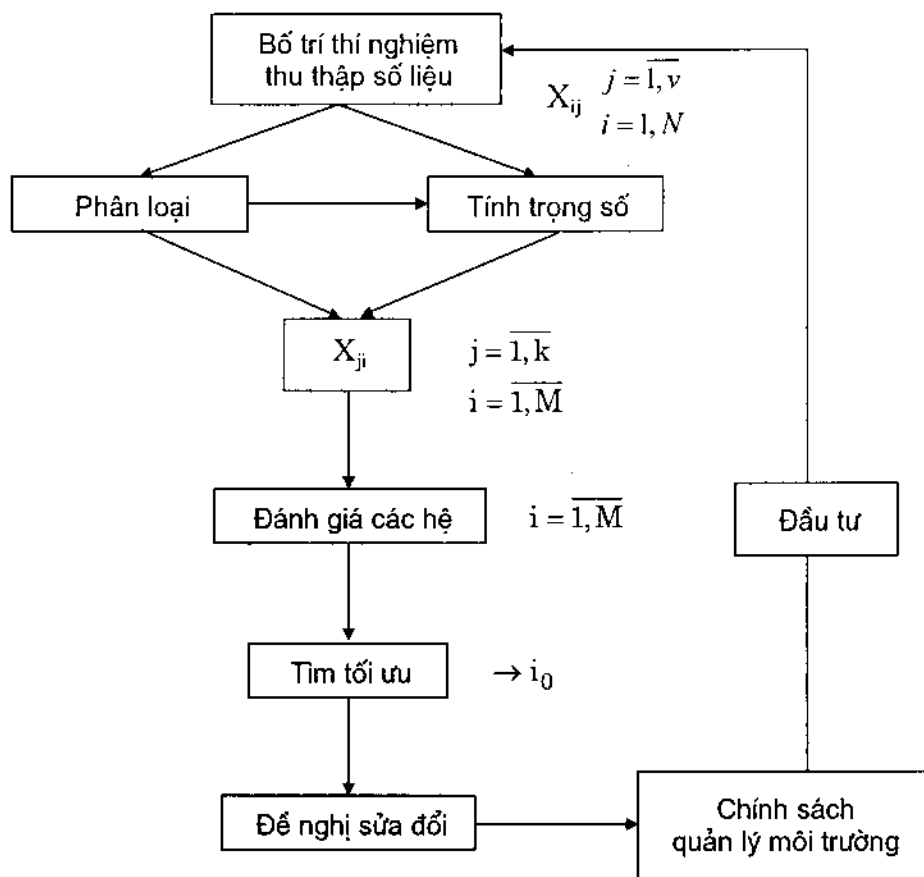
### 2. Thực hành

- Thực hiện các thí nghiệm như bảng 1 (chuyển vị của bảng 1).
- Áp dụng 3 bước hoặc 2 bước tùy thuộc nhà chuyên môn.
- Xây dựng thêm thí nghiệm nếu thấy chưa đủ.
- Kết hợp cả 2 mục 7.2 và 7.4.

*Chú ý:*

- 1) Có thể thay việc làm thí nghiệm bằng việc điều tra hệ sinh thái nhiều đợt.
- 2) Sau khi đã áp dụng phương pháp 7.2 và 7.4 ta chuyển sang đánh giá và tìm hệ sinh thái tối ưu (Chương 4 trong [3]) hoặc theo các phương pháp trong [1], [2].

Tóm lại, ta có thể thực hiện theo sơ đồ đánh giá hệ sinh thái sau đây:



## Chương 8

# PHÂN TÍCH PHÂN BIỆT

### 8.1. Mở đầu

Phân tích phân biệt còn được gọi là *phương pháp tách*. Đây là một phương pháp phân tích thống kê để phân nhóm các đối tượng nào đó thành hai hoặc nhiều tập hợp khác nhau. Bản chất của phương pháp là lập được một hàm tách tối ưu (hay là hàm phân biệt) để từ đó xác định một đối tượng thuộc vào lớp nào.

### 8.2. Phân tích phân biệt dạng hai lớp

#### 1. Xây dựng thí nghiệm

1) Từ  $P_1$  đối tượng của lớp I và từ  $P_2$  đối tượng của lớp II với  $q$  đặc điểm quan sát, ta lập hàm phân biệt. Khi đó với một đối tượng bất kì chưa biết thuộc lớp nào, ta sẽ dùng hàm phân biệt để xác định nó thuộc lớp nào với một độ tin cậy nào đó.

*Ví dụ 8.1:* Xét chất lượng của hai loại sợi với hai đặc điểm được quan sát là độ dài và độ xoắn. Với mỗi loại thực hiện 11 thí nghiệm.

Bài toán đặt ra là khi có mẫu sợi khác ta sẽ xác định nó thuộc lớp nào.

Ta lập bảng số liệu:

| Đối tượng | Lớp I                                                 | Lớp II                                                |
|-----------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $i = 1$   | $x_{11}$<br>$x_{12}$<br>$\vdots$<br>$x_{1q}$          | $y_{11}$<br>$y_{12}$<br>$\vdots$<br>$y_{1q}$          |
| $i = 2$   | $x_{21}$<br>$x_{22}$<br>$\vdots$<br>$x_{2q}$          | $y_{21}$<br>$y_{22}$<br>$\vdots$<br>$y_{2q}$          |
| $i = P_1$ | $x_{P_1 1}$<br>$x_{P_1 2}$<br>$\vdots$<br>$x_{P_1 q}$ | $\vdots$<br>$\vdots$<br>$\vdots$<br>$\vdots$          |
| $i = P_2$ |                                                       | $y_{P_2 1}$<br>$y_{P_2 2}$<br>$\vdots$<br>$y_{P_2 q}$ |

## 2. Mô hình toán học

Như vậy ta có hai dãy số liệu dưới dạng ma trận như sau:

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iq} \end{pmatrix} \quad y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iq} \end{pmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, P_1 \quad i = 1, 2, \dots, P_2$$

Khi đó

$$\bar{x}_. = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} \sum_{i=1}^{P_1} x_{i1} \\ \frac{1}{P_1} \sum_{i=1}^{P_1} x_{i2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{.q} \end{pmatrix} \text{ hay là kí hiệu } \bar{x}_. = \begin{pmatrix} \bar{x}_{.1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{.q} \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}_. = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_2} \sum_{i=1}^{P_2} y_{i1} \\ \frac{1}{P_2} \sum_{i=1}^{P_2} y_{i2} \\ \vdots \\ \frac{1}{P_2} \sum_{i=1}^{P_2} y_{iq} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y}_. = \begin{pmatrix} \bar{y}_{.1} \\ \vdots \\ \bar{y}_{.q} \end{pmatrix}$$

Ta lập

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1q} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{q1} & S_{q2} & \dots & S_{qq} \end{pmatrix}$$

Suy ra 
$$S = \frac{1}{P_1 + P_2 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{P_1} (x_i - \bar{x}_.)(x_i - \bar{x}_.)^T + \sum_{i=1}^{P_2} (y_i - \bar{y}_.)(y_i - \bar{y}_.)^T \right\}$$

Hay là tính theo thành phần:

$$S_{jj'} = S_{j'j} = \frac{1}{P_1 + P_2 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{P_1} \left( x_{ij} - \overbrace{\frac{1}{P_1} \sum_{i'=1}^{P_1} x_{i'j}}^{\bar{x}_{.j}} \right) \left( x_{ij'} - \overbrace{\frac{1}{P_1} \sum_{i'=1}^{P_1} x_{i'j'}}^{\bar{x}_{.j}} \right) \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{P_2} \left( y_{ij} - \underbrace{\frac{1}{P_2} \sum_{i=1}^{P_2} y_{ij}}_{\bar{y}_{.j}} \right) \left( y_{ij'} - \underbrace{\frac{1}{P_2} \sum_{i=1}^{P_2} y_{ij'}}_{\bar{y}_{.j'}} \right) \Bigg\} ; (i, j' = 1, \dots, q)$$

$$S_{jj'} = \frac{1}{P_1 + P_2 - 2} \sum_{i=1}^{P_1} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})(X_{ij'} - \bar{X}_{.j'}) + \frac{1}{P_1 + P_2 - 2} \sum_{i=1}^{P_2} (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})(Y_{ij'} - \bar{Y}_{.j'})$$

Hàm phân biệt được thiết lập như sau:

$$d(\xi) = (\bar{x} - \bar{y})^T S^{-1} \xi \quad \text{với} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_q \end{pmatrix}$$

### 3. Tiêu chuẩn

Nếu có một đối tượng chưa biết thuộc tập hợp nào, với q đặc điểm

$$\xi_1 = \xi_{10}, \xi_q = \xi_{q0} \quad \text{thì viết tắt} \quad \xi^0 = \begin{pmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \\ \vdots \\ \xi_{q0} \end{pmatrix}$$

Nếu  $d(\xi^0) - d\left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}\right) > 0$  thì đối tượng thuộc lớp I.

Nếu  $d(\xi^0) - d\left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}\right) < 0$  thì đối tượng thuộc lớp II.

Nếu  $d(\xi^0) = d\left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}\right)$  thì ta chưa có kết luận.

Để đi đến quy tắc phân biệt đó, trước tiên ta phải kiểm định xem việc phân loại có đúng không, hoặc với độ tin cậy là bao nhiêu.

### 4. Kiểm định sự phân lớp

Giả sử có hai lớp X và Y cần kiểm định các giả thiết sau:

H: hai lớp như nhau;

H<sub>1</sub>: hai lớp khác nhau.

Khi đó ta tính:

$$d_q^2 = d(\bar{x} - \bar{y}) = (\bar{x} - \bar{y})^T S^{-1} (\bar{x} - \bar{y})$$

và tính test: 
$$F = \frac{P_1 P_2 (P_1 + P_2 - q - 1)}{(P_1 + P_2)(P_1 + P_2 - 2)q} d_q^2$$

Tra bảng  $F_{1-\alpha; q; P_1 + P_2 - q - 1}$  (phân phối Fischer với bậc tự do  $q$  và  $P_1 + P_2 - q - 1$ ).

Nếu  $F > F_{1-\alpha; q; P_1 + P_2 - q - 1}$  thì bác bỏ  $H$ , tức là hai lớp khác nhau với mức ý nghĩa  $\alpha$ .

Nếu  $F \leq F_{1-\alpha; q; P_1 + P_2 - q - 1}$  thì chấp nhận  $H$ , tức là hai lớp như nhau với mức ý nghĩa  $\alpha$ .

**5. Ví dụ:** Có hai loại sợi có các đối tượng điển hình sau đây:

| Đối tượng | Sợi loại I | Sợi loại II | Đặc điểm |
|-----------|------------|-------------|----------|
| 1         | 63,6       | 60,0        | 1        |
|           | 2,096      | 1,952       | 2        |
| 2         | 59,2       | 56,0        | 1        |
|           | 2,048      | 1,856       | 2        |
| 3         | 59,2       | 56,4        | 1        |
|           | 2,144      | 1,984       | 2        |
| 4         | 64,4       | 57,6        | 1        |
|           | 2,256      | 1,920       | 2        |
| 5         | 64,0       | 59,6        | 1        |
|           | 2,064      | 2,032       | 2        |
| 6         | 65,6       | 57,2        | 1        |
|           | 2,264      | 2,016       | 2        |
| 7         | 66,4       | 56,4        | 1        |
|           | 2,144      | 1,984       | 2        |
| 8         | 66,8       | 54,4        | 1        |
|           | 1,984      | 1,984       | 2        |
| 9         | 67,2       | 50,4        | 1        |
|           | 2,192      | 1,776       | 2        |
| 10        | 67,6       | 45,6        | 1        |
|           | 2,240      | 1,616       | 2        |
| 11        | 67,2       | 54,8        | 1        |
|           | 2,032      | 1,680       | 2        |

ở đây

$$P_1 = P_2 = 11$$

$$q = 2 \quad (2 \text{ đặc điểm})$$

$$\bar{x}_{.1} = \frac{1}{P_1} \sum_{i=1}^{P_1} x_{i1} = \frac{1}{11} (63,6 + \dots + 67,2) = 64,7$$

$$\bar{x}_{.2} = \frac{1}{P_1} \sum_{i=1}^{P_1} x_{i2} = \frac{1}{11} (2,096 + \dots + 2,032) = 2,133$$

$$\bar{y}_{.1} = \frac{1}{P_2} \sum_{i=1}^{P_2} y_{i1} = \frac{1}{11} (60,0 + \dots + 54,8) = 55,3$$

$$\bar{y}_{.2} = \frac{1}{P_2} \sum_{i=1}^{P_2} y_{i2} = \frac{1}{11} (1,952 + \dots + 1,680) = 1,891$$

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{P_1 + P_2 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{P_1} (x_{i1} - \bar{x}_{.1})^2 + \sum_{i=1}^{P_2} (y_{i1} - \bar{y}_{.1})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{11 + 11 - 2} \left\{ (63,6 - 64,7)^2 + \dots + (67,2 - 64,7)^2 \right. \\ &\quad \left. + (60,0 - 55,3)^2 + \dots + (54,8 - 55,3)^2 \right\} = \frac{262,9}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{12} = s_{21} &= \frac{1}{P_1 + P_2 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{P_1} (x_{i1} - \bar{x}_{.1})(x_{i2} - \bar{x}_{.2}) + \sum_{i=1}^{P_2} (y_{i1} - \bar{y}_{.1})(y_{i2} - \bar{y}_{.2}) \right\} \\ &= \frac{1}{20} \left\{ (63,6 - 64,7)(2,096 - 2,133) + \dots + (67,2 - 64,7)(2,032 - 2,133) + \right. \\ &\quad \left. + (60,0 - 55,3)(1,952 - 1,891) + \dots + (54,8 - 55,3)(1,680 - 1,891) \right\} \\ &= \frac{5,118}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{22} &= \frac{1}{P_1 + P_2 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{P_1} (x_{i2} - \bar{x}_{.2})^2 + \sum_{i=1}^{P_2} (y_{i2} - \bar{y}_{.2})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{11 + 11 - 2} \left\{ (2,096 - 2,133)^2 + \dots + (2,032 - 2,133)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1,952 - 1,891)^2 + \dots + (1,680 - 1,891)^2 \right\} \\ &= \frac{0,2938}{20} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64,7 \\ 2,133 \end{pmatrix} ; \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55,3 \\ 1,891 \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{X} - \bar{Y}) = \begin{pmatrix} 11,4 \\ 0,212 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 262,9 & 5,118 \\ 5,118 & 0,2938 \end{pmatrix} ; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{thế thì} \quad d(\xi) = (\bar{x} - \bar{y})^T S^{-1} \xi = 0,5968\xi_1 + 6,078\xi_2$$

$$d_2^2 = (\bar{x} - \bar{y})^T S^{-1} (\bar{x} - \bar{y}) = 7,081$$

1) Nếu có một đối tượng khác  $\xi_0 = \begin{pmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Khi đó ta cần xét xem  $\xi_0$  thuộc loại I hay loại II.

$$\begin{aligned} \text{Muốn vậy ta xét } & \left\{ d(\xi_0) - d\left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}\right) \right\} \\ &= 0,5968 \underbrace{\xi_{10}}_{65} + 6,078 \underbrace{\xi_{20}}_2 - \underbrace{0,5968 \frac{64,7 + 55,3}{2} + 6,078 \frac{2,133 + 1,891}{2}}_{-48,037} = 50,95 \end{aligned}$$

Vậy  $d(\xi_0) - d\left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}\right) > 0$ , do đó đối tượng  $\xi$  thuộc loại I.

2) Bây giờ ta kiểm định xem việc phân loại trên có ý nghĩa không.

Ta tính

$$F = \frac{p_1 p_2 (p_1 + p_2 - q - 1)}{(p_1 + p_2)(p_1 + p_2 - 2)q} d_q^2 = 18,50 > 3,52 = F_{0,95;2;19}$$

nên ta bác bỏ giả thiết  $H$ , nghĩa là hai loại khác nhau với mức ý nghĩa 5%.

### 8.3. Phân tích phân biệt dạng N lớp ( $N > 2$ )

#### 1. Thực hiện thí nghiệm lấy số liệu của N lớp

| Đối tượng                      | Lớp I                                              | Lớp II                                             | ... | Lớp N                                              |
|--------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-----|----------------------------------------------------|
| $i = 1$                        | $x_{11}^{(1)}$<br>$\vdots$<br>$x_{1q}^{(1)}$       | $x_{11}^{(2)}$<br>$\vdots$<br>$x_{1q}^{(2)}$       | ... | $x_{11}^{(N)}$<br>$\vdots$<br>$x_{1q}^{(N)}$       |
| $i = 2$                        | $x_{21}^{(1)}$<br>$\vdots$<br>$x_{2q}^{(1)}$       | $x_{21}^{(2)}$<br>$\vdots$<br>$x_{2q}^{(2)}$       | ... | $x_{21}^{(N)}$<br>$\vdots$<br>$x_{2q}^{(N)}$       |
| $i = p_1, \dots, p_{N-1}, p_N$ | $x_{p_1 1}^{(1)}$<br>$\vdots$<br>$x_{p_1 q}^{(1)}$ | $x_{p_2 1}^{(2)}$<br>$\vdots$<br>$x_{p_2 q}^{(2)}$ | ... | $x_{p_N 1}^{(N)}$<br>$\vdots$<br>$x_{p_N q}^{(N)}$ |



## 2. Thực hành

Ta tính 
$$x_i^{(k)} = \begin{pmatrix} x_{i1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_{p_i q}^{(k)} \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{x_i}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{p_k} x_{i1}^{(k)} \\ \vdots \\ \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{p_k} x_{i q}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, p_k$$

$$j = 1, \dots, q$$

$$k = 1, \dots, N$$

và tính ma trận

$$S = \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_N - N} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{p_k} (x_i^{(k)} - \overline{x_i}^{(k)}) (\overline{x_i}^{(k)} - \overline{x_i}^{(k)})^T$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{q1} & \dots & s_{qp} \end{pmatrix}$$

trong đó

$$s_{ij} = s_{ji} = \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_N - N} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{p_k} \left( x_{ij}^{(k)} - \underbrace{\frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{p_k} x_{ij}^{(k)}}_{\overline{x_i}^{(k)}} \right) \left( x_{ij}^{(k)} - \underbrace{\frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^{p_k} x_{ij}^{(k)}}_{\overline{x_i}^{(k)}} \right) \quad (2)$$

$$i, j' = 1, \dots, q$$

$$s_{ij'} = \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_N - N} \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{i=1}^{p_k} (x_{ij}^{(k)} - \overline{x_i}^{(k)}) (x_{ij'}^{(k)} - \overline{x_i}^{(k)}) \right]$$

Chú ý:  $p_1 + p_2 + \dots + p_N > N$ .

Lập hàm  $d^{(k,k')}(\xi) = (\overline{x_i}^{(k)} - \overline{x_i}^{(k')})^T S^{-1} \xi$ ,  $k, k' = 1, \dots, N$ ;  $k > k'$

Giả sử có một đối tượng khác

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} \xi_{10} \\ \vdots \\ \xi_{q0} \end{pmatrix}$$

Khi đó ta tính

$$d(k, k', \xi_0) = \begin{cases} d^{(k, k')} \left( \xi_0 - \frac{1}{2} (\overline{x^{(k)}} + \overline{x^{(k')}}) \right) & \text{với } k > k' \\ -d^{(k, k')} \left( \xi_0 - \frac{1}{2} (\overline{x^{(k)}} + \overline{x^{(k')}}) \right) & \text{với } k < k' \end{cases}$$

Ý nghĩa:  $d(k, k', \xi_0)$  sẽ đổi dấu khi  $k, k'$  đổi thứ tự cho nhau.

- Nếu với  $k_0$  và  $\forall k' = 1, \dots, N$  ( $k' \neq k_0$ ) mà có  $d(k_0, k', \xi) > 0$  thì đối tượng  $\xi_0$  thuộc tập hợp thứ  $k_0$ .

Ví dụ 8.2: Với  $N = 3$

| $d(1, 2, \xi) > 0$ |                    |                    |                    | $d(2, 1, \xi) > 0$ |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $d(1, 3, \xi) > 0$ |                    | $d(3, 1, \xi) > 0$ |                    | $d(1, 3, \xi) > 0$ |                    | $d(3, 2, \xi) > 0$ |                    |
| $d(2, 3, \xi) > 0$ | $d(3, 2, \xi) > 0$ | $d(2, 3, \xi) > 0$ | $d(3, 2, \xi) > 0$ | $d(2, 3, \xi) > 0$ | $d(3, 2, \xi) > 0$ | $d(2, 3, \xi) > 0$ | $d(3, 2, \xi) > 0$ |
| ↓                  | ↓                  | ↓                  | ↓                  | ↓                  | ↓                  | ↓                  | ↓                  |
| Lớp I              | Chưa kết luận      | Chưa kết luận      | Lớp III            | Lớp II             | Chưa kết luận      | Lớp II             | Lớp III            |

Ví dụ 8.3: Có 3 loại cát với 4 đặc điểm có các giá trị trung bình như sau:

| Đặc điểm                       | Loại  |      |       |
|--------------------------------|-------|------|-------|
|                                | I     | II   | III   |
| SiO <sub>2</sub>               | 84,35 | 86,7 | 82,90 |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 5,96  | 4,2  | 10,28 |
| CaO                            | 0,44  | 0,60 | 0,01  |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 6,45  | 3,95 | 2,76  |

Ở đây  $N = 3, q = 4$

$$\left. \begin{matrix} (K) \\ X_{ij} \\ P_k \end{matrix} \right\}$$

Vậy ta có

$$\overline{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} 84,35 \\ 5,96 \\ 0,44 \\ 6,45 \end{pmatrix} \quad \overline{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 86,7 \\ 4,2 \\ 0,6 \\ 3,95 \end{pmatrix} \quad \overline{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 82,9 \\ 10,28 \\ 0,01 \\ 2,76 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x^{(1)}} - \overline{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2,35 \\ 1,76 \\ -0,16 \\ 2,50 \end{pmatrix}; \overline{x^{(1)}} - \overline{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 1,45 \\ -4,32 \\ 0,43 \\ 3,69 \end{pmatrix}; \overline{x^{(2)}} - \overline{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 3,8 \\ -6,08 \\ 0,59 \\ 1,19 \end{pmatrix}$$

và

$$\frac{\overline{x^{(1)}} + \overline{x^{(2)}}}{2} = \begin{pmatrix} 85,53 \\ 5,08 \\ 0,52 \\ 5,20 \end{pmatrix}; \frac{\overline{x^{(1)}} + \overline{x^{(3)}}}{2} = \begin{pmatrix} 83,63 \\ 8,12 \\ 0,23 \\ 4,61 \end{pmatrix}; \frac{\overline{x^{(2)}} + \overline{x^{(3)}}}{2} = \begin{pmatrix} 84,80 \\ 7,24 \\ 0,31 \\ 3,36 \end{pmatrix}$$

Để đơn giản ta cho bảng đã tính (tính theo công thức (2)):

$$S = \begin{pmatrix} 10,3041 & 0,8073 & 0,0057 & 0,1457 \\ 0,8073 & 0,1849 & 0,0009 & 0,0215 \\ 0,0057 & 0,0009 & 0,0001 & 0,0007 \\ 0,1457 & 0,0215 & 0,0007 & 0,0529 \end{pmatrix}$$

$$\text{Từ đó } S^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1490 & -0,6260 & -1,9483 & -0,1302 \\ -0,6260 & 8,4441 & -31,2564 & -1,2942 \\ -1,9483 & -31,2564 & 113,1385 & -31,6411 \\ -0,1302 & -1,2942 & -131,6411 & 21,5302 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy thì } d^{(12)}(\xi) = -1,4657 \xi_1 + 18,0982 \xi_2 - 2189,7515 \xi_3 + 72,9163 \xi_4$$

$$d^{(13)}(\xi) = 1,6020 \xi_1 - 55,6022 \xi_2 + 4511,4025 \xi_3 + 28,2429 \xi_4$$

$$d^{(23)}(\xi) = 3,0678 \xi_1 - 73,7003 \xi_2 + 6701,1539 \xi_3 - 44,6733 \xi_4$$

$$d(1,2,\xi) = -1,4657 \xi_1 + 18,0982 \xi_2 - 2189,7515 \xi_3 + 72,9163 \xi_4 + 792,9285$$

$$d(1,3,\xi) = 1,6022 \xi_1 - 55,6020 \xi_2 + 4511,4025 \xi_3 + 28,2429 \xi_4 - 850,3261$$

$$d(2,3,\xi) = 3,0678 \xi_1 - 73,7503 \xi_2 + 6701,1539 \xi_3 - 44,6733 \xi_4 - 1653,3147$$

$$\text{Xét một loại cát khác với các thành phần như sau: } \begin{cases} \xi_{10} = 85,03 \\ \xi_{20} = 11,04 \\ \xi_{30} = 0,05 \\ \xi_{40} = 2,86 \end{cases}$$

hỏi nó thuộc loại nào?

$$\text{Khi đó ta tính } d(1,2,\xi_0) = 967,1572; d(1,3,\xi_0) = -1021,5923;$$

$$d(2,3,\xi_0) = -1999,3189$$

$$\text{Từ đó suy ra } \left. \begin{matrix} d(1,2,\xi_0) > 0 \\ d(1,3,\xi_0) > 0 \\ d(2,3,\xi_0) > 0 \end{matrix} \right\} . \text{ Vậy } \xi_0 \text{ thuộc loại III.}$$

**Bài tập 8.1.** Lập chương trình phân tích phân biệt dạng 2 lớp.

**Tổ chức dữ liệu:**

Các số liệu điều tra được lưu trữ trong tệp văn bản có tên 'P\_BIET\_2.DAT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm ba số nguyên cách nhau một khoảng trống:  $p1$  là số các đối tượng của lớp 1,  $p2$  là số các đối tượng của lớp 2 và  $q$  là số các đặc điểm.
- $p1+p2$  dòng sau, mỗi dòng có  $q$  số thực cách nhau một khoảng trống thể hiện đặc điểm của các đối tượng của lớp 1 sau đó là lớp 2.

Chương trình:

```
Program PHAN_TICH_PHAN_BIET_2_LOP ;
uses CRT ;
const
    Pmax = 20 ;
    Qmax = 15 ;
type
    Doi_tuong = array[1..Qmax] of real ;
var
    X , Y : array[1..Pmax , 1..Qmax] of real ;
    p1 , p2 , q : integer ;
    XN , YN , ZN , XYN2 , Phi : Doi_tuong ;
    S : array[1..Qmax , 1..Qmax] of real ;
    i , j , k , k1 , k2 : integer ;
    TA , TB : boolean ;
    DL , F9 : TEXT ;
    DK1 : array[1..24] of integer ;
    F05 , F01 : array[1..24] of real ;
    Ts , Ms , d2q , c , F : real ;
Function D(Khi : Doi_tuong): real ;
var dk : real ;
    i , j : integer ;
begin
    dk := 0 ;
    for i := 1 to q do
        for j := 1 to q do
            dk := dk + S[i,j] * Khi[i] * Khi[j] ;
        D := dk
    end ;

BEGIN
    ClrScr ;
    Assign(DL,'P_BIET_2.DAT') ;           { Doc du lieu tu tep van ban }
    Reset(DL) ;
    .readln(DL, p1, p2, q) ;
```

```

for i := 1 to p1 do
  begin
    for j := 1 to q do
      read(DL, X[i,j]) ;
    readln(DL)
  end ;
for i := 1 to p2 do
  begin
    for j := 1 to q do
      read(DL, Y[i,j]) ;
    readln(DL)
  end ;
close(DL) ;
FillChar(XN, sizeof(XN), 0) ;
FillChar(YN, sizeof(YN), 0) ;
for j := 1 to q do
  begin
    for i := 1 to p1 do
      XN[j] := XN[j] + X[i,j] ;
    XN[j] := XN[j]/p1 ;
  end ;
for j := 1 to q do
  begin
    for i := 1 to p2 do
      YN[j] := YN[j] + Y[i,j] ;
    YN[j] := YN[j]/p2 ;
    ZN[j] := XN[j] - YN[j] ;
    XYN2[j] := (XN[j] + YN[j])/2
  end ;

  { Tinh cac trung binh cong Xj, Yj }

  { Xay dung ma tran S }
for j := 1 to q do
  for k := 1 to q do
    begin
      Ts := 0 ;
      for i := 1 to p1 do
        Ts := Ts + (X[i,j] - XN[j]) * (X[i,k] - XN[k]) ;
      Ms := 0 ;
      for i := 1 to p2 do
        Ms := Ms + (Y[i,j] - YN[j]) * (Y[i,k] - YN[k]) ;
      S[j,k] := (Ts + Ms)/(p1 + p2 - 2) ;
    end ;

    { Tinh ma tran nghich dao cua S }
for i := 1 to q do
  for j := q+1 to 2*q do
    if j = i+q then S[i,j] := 1 else S[i,j] := 0 ;
i := 1 ;
TA := true ;

```

```

while TA and (i<=q) do
begin
  if S[i,i] = 0 then
    begin
      TB := true ;
      k := i+1 ;
      while TB and (k<=q) do
        if S[k,i] <> 0 then
          begin
            for j := 1 to 2*q do
              begin
                c := S[i,j] ;
                S[i,j] := S[k,j] ;
                S[k,j] := c
              end ;
            TB := false
          end
        else inc(k) ;
      if k = q+1 then
        if S[i,k-1] = 0 then
          begin
            writeln('Ma tran suy bien ! ' ) ;
            TA := false ;
            Halt
          end
        end ;
    end ;
  if S[i,i] <> 0 then
    begin
      c := S[i,i] ;
      for j := 1 to 2*q do
        S[i,j] := S[i,j]/c ;
      end ;
    for k := 1 to q do
      if k <> i then
        begin
          c := S[k,i] ;
          for j := 1 to 2*q do
            S[k,j] := S[k,j] - S[i,j]*c ;
          end ;
        inc(i)
      end ;
    end ;
    { Kiem tra cac doi tuong thuoc lop nao }

  writeln ;
  writeln('KIEM TRA CAC DOI TUONG KHAC ' ) ;
  writeln ;
  Ms := D(XYN2) ;

```

```

repeat
  writeln('Cho mot doi tuong : ');
  for j := 1 to q do
    begin
      write('Dac diem thu ', j, ' = ');
      readln(Phi[j])
    end ;
  Ts := D(Phi) ;
  if Ts > Ms then writeln('Doi tuong thuoc lop 1 ')
    else if Ts < Ms then writeln('Doi tuong thuoc lop 2 ')
      else writeln('Chua the ket luan doi tuong thuoc lop nao ! ') ;
  write('Co kiem tra tiep nua khong ?(c/k)') ;
until Ucase(ReadKey) = 'K' ;

{ Tinh F }

d2q := D(ZN) ;
k1 := p1 + p2 ;
k2 := k1 - q - 1 ;
F := p1*p2*k2* d2q /k1/(k1-2)/q ;

Assign(F9 , 'BANG_9.TXT') ;
Reset(F9) ; { Doc du lieu tu Bang IX Phu luc }
for k := 1 to 24 do read(F9, DK1[k]) ;
readln(F9) ;
while NOT SeekEOF(F9) do
  begin
    read(F9, k) ;
    if k < k2 then
      begin readln(F9) ; readln(F9) end
    else
      begin
        for i := 1 to 24 do read(F9, F05[i]) ;
        readln(F9) ;
        for i := 1 to 24 do read(F9, F01[i]) ;
        readln(F9) ;
        close(F9) ;
        break
      end
    end ;
  k := 2 ;
  while q > DK1[k] do inc(k) ;
  Ts := F05[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F05[k] - F05[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
  Ms := F01[k-1] + (k1 - DK1[k-1])*(F01[k] - F01[k-1])/(DK1[k] - DK1[k-1]) ;
  { Ket luan H }
  if F > Ts then
    writeln('- Hai lop khac nhau voi muc y nghia 0.05 !')
  else

```

```

        writeln('- Hai lop nhu nhau voi muc y nghia 0.05 !') ;
if F > Ms then
    writeln('- Hai lop khac nhau voi muc y nghia 0.01 !')
else
    writeln('- Hai lop nhu nhau voi muc y nghia 0.01 !') ;
Readln ;
END.

```

*Chú ý:* Trong chương trình có sử dụng dữ liệu của hai bảng. Bảng IX - Phụ lục, được lưu trong tệp văn bản có tên 'BANG\_9.TXT' bao gồm:

- Dòng đầu gồm 24 số nguyên chỉ các giá trị của  $k_1$ .
- 104 dòng sau là các giá trị của hàm phân phối Fischer. Mỗi giá trị của  $k_2$  tương ứng với hai dòng, dòng trên bắt đầu là số nguyên  $k_2$  sau đó là 24 giá trị của hàm  $F_{0.5}$  còn dòng dưới là 24 giá trị của hàm  $F_{0.1}$ .

***Bài tập thực hành 8.2.*** Lập chương trình phân tích phân biệt dạng N lớp.



# PHỤ LỤC

## CÁC BẢNG THỐNG KÊ

**Bảng I - Bảng giá trị hàm số  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$**

| x   | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.3988 | 0.3989 | 0.3989 | 0.3988 | 0.3986 | 0.3984 | 0.3982 | 0.3980 | 0.3977 | 0.3973 |
| 0.1 | 0.3970 | 0.3965 | 0.3961 | 0.3956 | 0.3951 | 0.3945 | 0.3939 | 0.3932 | 0.3925 | 0.3918 |
| 0.2 | 0.3910 | 0.3902 | 0.3894 | 0.3885 | 0.3876 | 0.3867 | 0.3857 | 0.3847 | 0.3836 | 0.3825 |
| 0.3 | 0.3814 | 0.3802 | 0.3790 | 0.3778 | 0.3765 | 0.3752 | 0.3739 | 0.3725 | 0.3712 | 0.3697 |
| 0.4 | 0.3683 | 0.3668 | 0.3653 | 0.3637 | 0.3621 | 0.3605 | 0.3589 | 0.3572 | 0.3555 | 0.3538 |
| 0.5 | 0.3521 | 0.3503 | 0.3485 | 0.3467 | 0.3448 | 0.3429 | 0.3410 | 0.3391 | 0.3372 | 0.3352 |
| 0.6 | 0.3332 | 0.3312 | 0.3292 | 0.3271 | 0.3251 | 0.3230 | 0.3209 | 0.3187 | 0.3166 | 0.3144 |
| 0.7 | 0.3123 | 0.3101 | 0.3079 | 0.3056 | 0.3034 | 0.3011 | 0.2989 | 0.2966 | 0.2943 | 0.2920 |
| 0.8 | 0.2897 | 0.2874 | 0.2850 | 0.2827 | 0.2803 | 0.2780 | 0.2756 | 0.2732 | 0.2709 | 0.2685 |
| 0.9 | 0.2661 | 0.2637 | 0.2613 | 0.2589 | 0.2565 | 0.2541 | 0.2516 | 0.2492 | 0.2468 | 0.2444 |
| 1.0 | 0.2420 | 0.2396 | 0.2371 | 0.2347 | 0.2323 | 0.2299 | 0.2275 | 0.2251 | 0.2227 | 0.2203 |
| 1.1 | 0.2179 | 0.2155 | 0.2131 | 0.2107 | 0.2083 | 0.2059 | 0.2036 | 0.2012 | 0.1989 | 0.1965 |
| 1.2 | 0.1942 | 0.1919 | 0.1895 | 0.1872 | 0.1849 | 0.1826 | 0.1804 | 0.1781 | 0.1758 | 0.1736 |
| 1.3 | 0.1714 | 0.1691 | 0.1669 | 0.1647 | 0.1626 | 0.1604 | 0.1582 | 0.1561 | 0.1539 | 0.1518 |
| 1.4 | 0.1497 | 0.1476 | 0.1456 | 0.1435 | 0.1415 | 0.1394 | 0.1374 | 0.1354 | 0.1334 | 0.1315 |
| 1.5 | 0.1295 | 0.1276 | 0.1257 | 0.1238 | 0.1219 | 0.1200 | 0.1182 | 0.1163 | 0.1145 | 0.1127 |
| 1.6 | 0.1109 | 0.1092 | 0.1074 | 0.1057 | 0.1040 | 0.1023 | 0.1006 | 0.0989 | 0.0973 | 0.0957 |
| 1.7 | 0.0940 | 0.0925 | 0.0909 | 0.0893 | 0.0878 | 0.0863 | 0.0848 | 0.0833 | 0.0818 | 0.0804 |
| 1.8 | 0.0790 | 0.0775 | 0.0761 | 0.0748 | 0.0734 | 0.0721 | 0.0707 | 0.0694 | 0.0681 | 0.0669 |
| 1.9 | 0.0656 | 0.0644 | 0.0632 | 0.0620 | 0.0608 | 0.0596 | 0.0584 | 0.0573 | 0.0562 | 0.0551 |
| 2.0 | 0.0540 | 0.0529 | 0.0519 | 0.0508 | 0.0498 | 0.0488 | 0.0478 | 0.0468 | 0.0459 | 0.0449 |
| 2.1 | 0.0440 | 0.0431 | 0.0422 | 0.0413 | 0.0404 | 0.0396 | 0.0387 | 0.0379 | 0.0371 | 0.0363 |
| 2.2 | 0.0355 | 0.0347 | 0.0339 | 0.0332 | 0.0325 | 0.0317 | 0.0310 | 0.0303 | 0.0297 | 0.0290 |
| 2.3 | 0.0283 | 0.0277 | 0.0270 | 0.0264 | 0.0258 | 0.0252 | 0.0246 | 0.0241 | 0.0235 | 0.0229 |
| 2.4 | 0.0224 | 0.0219 | 0.0213 | 0.0208 | 0.0203 | 0.0198 | 0.0194 | 0.0189 | 0.0184 | 0.0180 |
| 2.5 | 0.0175 | 0.0171 | 0.0167 | 0.0163 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0151 | 0.0147 | 0.0143 | 0.0139 |
| 2.6 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0126 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 | 0.0107 |
| 2.7 | 0.0104 | 0.0101 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0093 | 0.0091 | 0.0088 | 0.0086 | 0.0084 | 0.0081 |
| 2.8 | 0.0079 | 0.0077 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0067 | 0.0065 | 0.0063 | 0.0061 |
| 2.9 | 0.0060 | 0.0058 | 0.0056 | 0.0055 | 0.0053 | 0.0051 | 0.0050 | 0.0048 | 0.0047 | 0.0046 |
| 3.0 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0042 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 | 0.0035 | 0.0034 |
| 3.1 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0025 |
| 3.2 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 |
| 3.3 | 0.0017 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 | 0.0013 | 0.0013 |
| 3.4 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 |
| 3.5 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 |
| 3.6 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 |
| 3.7 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 |
| 3.8 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 |
| 3.9 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 |

**Bảng II - Bảng giá trị của  $\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$**

| x   | 0       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | 0.00000 | 00399 | 00798 | 01197 | 01595 | 01994 | 02392 | 02790 | 03188 | 03586 |
| 0.1 | 03983   | 04380 | 04776 | 05172 | 05567 | 05962 | 06356 | 06749 | 07142 | 07535 |
| 0.2 | 07926   | 08317 | 08706 | 09095 | 09483 | 09871 | 10257 | 10642 | 11026 | 11409 |
| 0.3 | 11791   | 12172 | 12552 | 12930 | 13307 | 13683 | 14058 | 14431 | 14803 | 15173 |
| 0.4 | 15542   | 15910 | 16276 | 16640 | 17003 | 17364 | 17724 | 18082 | 18439 | 18793 |
| 0.5 | 19146   | 19497 | 19847 | 20194 | 20540 | 20884 | 21226 | 21566 | 21904 | 22240 |
| 0.6 | 22575   | 22907 | 23237 | 23565 | 23891 | 24215 | 24537 | 24857 | 25175 | 25490 |
| 0.7 | 25804   | 26115 | 26424 | 26730 | 27035 | 27337 | 27637 | 27935 | 28230 | 28524 |
| 0.8 | 28814   | 29103 | 29389 | 29673 | 29955 | 30234 | 30511 | 30785 | 31057 | 31327 |
| 0.9 | 31594   | 31859 | 32121 | 32381 | 32639 | 32894 | 32147 | 33398 | 33646 | 33891 |
| 1.0 | 34134   | 34375 | 34614 | 34850 | 35083 | 35314 | 35543 | 35769 | 35993 | 36214 |
| 1.1 | 36433   | 36650 | 36864 | 37067 | 37268 | 37493 | 37698 | 37900 | 38100 | 38298 |
| 1.2 | 38493   | 38686 | 38877 | 39065 | 39251 | 39435 | 39617 | 39796 | 39973 | 40147 |
| 1.3 | 40320   | 40490 | 40658 | 40824 | 40988 | 41149 | 41309 | 41466 | 41621 | 41774 |
| 1.4 | 41924   | 42073 | 42220 | 42364 | 42507 | 42647 | 42786 | 42922 | 43056 | 43189 |
| 1.5 | 43319   | 43448 | 43574 | 43699 | 43822 | 43943 | 44062 | 44179 | 44295 | 44408 |
| 1.6 | 44520   | 44630 | 44738 | 44845 | 44950 | 45053 | 45154 | 45254 | 45352 | 45449 |
| 1.7 | 45543   | 45637 | 45728 | 45818 | 45907 | 45994 | 46080 | 46164 | 46246 | 46327 |
| 1.8 | 46407   | 46485 | 46562 | 46638 | 46712 | 46784 | 46856 | 46926 | 46995 | 47062 |
| 1.9 | 47128   | 47193 | 47257 | 47320 | 47381 | 47441 | 47500 | 47558 | 47615 | 47670 |
| 2.0 | 47725   | 47778 | 47831 | 47882 | 47932 | 47982 | 48030 | 48077 | 18124 | 48169 |
| 2.1 | 48214   | 48257 | 48300 | 48341 | 48382 | 48422 | 48461 | 48500 | 48537 | 48574 |
| 2.2 | 48610   | 48645 | 48679 | 48731 | 48745 | 48778 | 48809 | 48840 | 48870 | 48899 |
| 2.3 | 48928   | 48956 | 48983 | 49010 | 49306 | 49061 | 49086 | 49111 | 49134 | 49158 |
| 2.4 | 49180   | 49202 | 49224 | 49245 | 49266 | 49286 | 49305 | 49324 | 49343 | 49361 |
| 2.5 | 49379   | 49396 | 49413 | 49430 | 49446 | 49461 | 49477 | 49492 | 49506 | 49520 |
| 2.6 | 49534   | 49547 | 49560 | 49573 | 49585 | 49598 | 49609 | 49621 | 49632 | 49643 |
| 2.7 | 49653   | 49664 | 49674 | 49683 | 49693 | 49702 | 49711 | 49720 | 49728 | 49736 |
| 2.8 | 49744   | 49752 | 49760 | 49767 | 49774 | 49781 | 49788 | 49795 | 49801 | 49807 |
| 2.9 | 49813   | 49819 | 49825 | 49801 | 49836 | 49841 | 49846 | 49851 | 49856 | 49861 |
| 3.0 | 0.49865 | 3.1   | 49903 | 3.2   | 49931 | 3.3   | 49952 | 3.4   | 49966 |       |
| 3.5 | 49977   | 3.6   | 49984 | 3.7   | 49869 | 3.8   | 49993 | 3.9   | 49995 |       |
| 4.0 | 499968  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 4.5 | 499997  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 5.0 | 4999997 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

**Bảng III - Hàm phân bố chuẩn**

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(t từ -2.9 đến 0)

| x         | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -0.0      | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| -0.1      | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| -0.2      | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| -0.3      | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| -0.4      | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| -0.5      | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| -0.6      | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| -0.7      | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| -0.8      | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| -0.9      | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| -1        | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| -1.1      | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.2      | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| -1.3      | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| -1.4      | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| -1.5      | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| -1.6      | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.7      | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.8      | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.9      | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| -2        | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -2.1      | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.2      | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.3      | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.4      | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.5      | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.6      | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.7      | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.8      | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.9      | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| t         | -3.0   | -3.1   | -3.2   | -3.3   | -3.4   | -3.5   | -3.6   | -3.7   | -3.8   | -3.9   |
| $\phi(t)$ | 0.0013 | 0.0010 | 0.0007 | 0.0005 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 | 0.000  |

**Bảng III - Hàm phân bố chuẩn**

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

(t từ 0 đến +2.9)

| x    | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0  | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1  | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2  | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3  | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4  | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5  | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6  | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7  | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8  | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9  | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1    | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1  | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2  | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3  | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4  | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5  | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6  | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7  | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8  | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9  | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2    | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1  | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2  | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3  | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4  | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5  | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6  | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7  | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8  | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9  | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| t    | 3.0    | 3.1    | 3.2    | 3.3    | 3.4    | 3.5    | 3.6    | 3.7    | 3.8    | 3.9    |
| Φ(t) | 0.9987 | 9990   | 9993   | 9995   | 9996   | 9997   | 9998   | 9999   | 9999   | 9999   |

**Bảng IV- Giá trị tới hạn  $t_n(P)$  để bác bỏ giá trị “đột biến”  $x$**   
( $n$  là số các kết quả nhận được,  $P$  là độ tin cậy của kết luận)

| n        | P     |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|
|          | 0,95  | 0,98  | 0,99  | 0,999 |
| 5        | 3,04  | 4,11  | 5,04  | 9,43  |
| 6        | 2,78  | 3,64  | 4,36  | 7,41  |
| 7        | 2,62  | 3,36  | 3,96  | 6,37  |
| 8        | 2,51  | 3,18  | 3,71  | 5,73  |
| 9        | 2,43  | 3,05  | 3,54  | 5,31  |
| 10       | 2,37  | 2,96  | 3,41  | 5,01  |
| 11       | 2,33  | 2,89  | 3,31  | 4,79  |
| 12       | 2,29  | 2,83  | 3,23  | 4,62  |
| 13       | 2,26  | 2,78  | 3,17  | 4,48  |
| 14       | 2,24  | 2,74  | 3,12  | 4,17  |
| 15       | 2,22  | 2,71  | 3,08  | 4,28  |
| 16       | 2,20  | 2,68  | 3,04  | 4,20  |
| 17       | 2,18  | 2,66  | 3,01  | 4,13  |
| 18       | 2,17  | 2,64  | 2,98  | 4,07  |
| 20       | 2,145 | 2,602 | 2,932 | 3,979 |
| 25       | 2,105 | 2,541 | 2,852 | 3,819 |
| 30       | 2,079 | 2,403 | 2,802 | 3,719 |
| 35       | 2,061 | 2,476 | 2,768 | 3,652 |
| 40       | 2,048 | 2,456 | 2,742 | 3,602 |
| 45       | 2,038 | 2,441 | 2,722 | 3,565 |
| 50       | 2,030 | 2,429 | 2,707 | 3,532 |
| 60       | 2,018 | 2,411 | 2,683 | 3,492 |
| 70       | 2,009 | 2,399 | 2,667 | 3,462 |
| 80       | 2,003 | 2,389 | 2,665 | 3,439 |
| 90       | 1,998 | 2,382 | 2,646 | 3,423 |
| 100      | 1,994 | 2,377 | 2,639 | 3,409 |
| $\infty$ | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,291 |

**Bảng V- Giá trị  $t_k(\alpha/2)$  và  $t_k(\alpha)$  của phân phối Student**

| Bậc tự<br>do $k$ | Mức ý nghĩa $\alpha$ (trường hợp 2 phía) |       |       |       |        |
|------------------|------------------------------------------|-------|-------|-------|--------|
|                  | 0,10                                     | 0,05  | 0,02  | 0,01  | 0,001  |
| 1                | 6,31                                     | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 636,62 |
| 2                | 2,92                                     | 4,30  | 6,97  | 9,92  | 31,60  |
| 3                | 2,35                                     | 3,18  | 4,54  | 5,84  | 12,92  |
| 4                | 2,13                                     | 2,78  | 3,75  | 4,60  | 8,61   |
| 5                | 2,01                                     | 2,57  | 3,37  | 4,03  | 6,87   |
| 6                | 1,94                                     | 2,45  | 3,14  | 3,71  | 5,96   |
| 7                | 1,89                                     | 2,36  | 3,00  | 3,50  | 5,41   |
| 8                | 1,86                                     | 2,31  | 2,90  | 3,36  | 5,01   |
| 9                | 1,83                                     | 2,26  | 2,82  | 3,25  | 4,78   |
| 10               | 1,81                                     | 2,23  | 2,76  | 3,17  | 4,50   |
| 11               | 1,80                                     | 2,20  | 2,72  | 3,11  | 4,44   |
| 12               | 1,78                                     | 2,18  | 2,68  | 3,05  | 4,32   |
| 13               | 1,77                                     | 2,16  | 2,65  | 3,01  | 4,22   |
| 14               | 1,76                                     | 2,14  | 2,62  | 2,98  | 4,14   |
| 15               | 1,75                                     | 2,13  | 2,69  | 2,85  | 4,07   |
| 16               | 1,75                                     | 2,12  | 2,58  | 2,92  | 4,01   |
| 17               | 1,71                                     | 2,11  | 2,57  | 2,90  | 3,96   |
| 18               | 1,73                                     | 2,10  | 2,55  | 2,88  | 3,92   |
| 19               | 1,73                                     | 2,09  | 2,54  | 2,86  | 3,88   |
| 20               | 1,73                                     | 2,09  | 2,53  | 2,85  | 3,85   |

**Bảng V (tiếp theo)**

| Bậc tự<br>do $k$ | Mức ý nghĩa $\alpha$ (trường hợp 2 phía) |       |      |       |        |
|------------------|------------------------------------------|-------|------|-------|--------|
|                  | 0,10                                     | 0,05  | 0,02 | 0,01  | 0,001  |
| 21               | 1,72                                     | 2,08  | 2,52 | 2,83  | 3,82   |
| 22               | 1,72                                     | 2,07  | 2,51 | 2,82  | 3,79   |
| 23               | 1,71                                     | 2,07  | 2,50 | 2,81  | 3,77   |
| 24               | 1,71                                     | 2,06  | 2,49 | 2,80  | 3,74   |
| 25               | 1,71                                     | 2,06  | 2,49 | 2,79  | 3,72   |
| 26               | 1,71                                     | 2,06  | 2,48 | 2,78  | 3,71   |
| 27               | 1,70                                     | 2,05  | 2,47 | 2,77  | 3,69   |
| 28               | 1,70                                     | 2,05  | 2,47 | 2,76  | 3,66   |
| 29               | 1,70                                     | 2,05  | 2,46 | 2,75  | 3,66   |
| 30               | 1,70                                     | 2,04  | 2,46 | 2,75  | 3,65   |
| 35               | 1,69                                     | 2,03  | 2,44 | 2,72  | 3,59   |
| 40               | 1,68                                     | 2,02  | 2,42 | 2,70  | 3,55   |
| 45               | 1,68                                     | 2,01  | 2,41 | 2,69  | 3,52   |
| 60               | 1,67                                     | 2,00  | 2,39 | 2,66  | 3,46   |
| 70               | 1,67                                     | 2,00  | 2,38 | 2,65  | 3,44   |
| 80               | 1,66                                     | 1,99  | 2,37 | 2,64  | 3,42   |
| 90               | 1,66                                     | 1,98  | 2,37 | 2,63  | 3,39   |
| 100              | 1,66                                     | 1,98  | 2,36 | 2,63  | 3,39   |
| 120              | 1,66                                     | 1,98  | 2,36 | 2,62  | 3,37   |
| VC               | 1,64                                     | 1,96  | 2,33 | 2,58  | 3,29   |
|                  | 0,05                                     | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0,0005 |
|                  | Mức ý nghĩa $\alpha$ (trường hợp 1 phía) |       |      |       |        |

**Bảng VI - Giá trị  $\chi^2_k(\alpha)$  của phân phối  $\chi^2$  với  $k$  bậc tự do**  
(mức ý nghĩa  $\alpha$  tính theo %)

| $\alpha \backslash k$ | 30    | 10    | 5     | 2,5   | 1     | 0,1   |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                     | 1,07  | 2,71  | 3,81  | 5,02  | 6,62  | 10,8  |
| 2                     | 2,41  | 4,61  | 5,99  | 7,38  | 9,21  | 13,8  |
| 3                     | 3,67  | 6,25  | 7,81  | 9,15  | 11,3  | 16,3  |
| 4                     | 4,88  | 7,78  | 9,49  | 11,1  | 13,3  | 18,5  |
| 5                     | 6,06  | 9,21  | 11,1  | 12,3  | 15,1  | 20,5  |
| 6                     | 7,23  | 10,6  | 12,6  | 14,1  | 16,8  | 22,5  |
| 7                     | 8,38  | 12,0  | 14,1  | 16,0  | 18,5  | 24,3  |
| 8                     | 9,52  | 13,4  | 15,5  | 17,5  | 20,1  | 26,1  |
| 9                     | 10,7  | 14,7  | 16,9  | 19,0  | 21,7  | 27,9  |
| 10                    | 11,8  | 16,0  | 18,3  | 20,5  | 23,2  | 29,6  |
| 11                    | 12,9  | 17,3  | 19,7  | 21,9  | 24,7  | 31,3  |
| 12                    | 14,0  | 18,5  | 21,0  | 23,3  | 26,2  | 32,9  |
| 13                    | 15,1  | 19,8  | 22,4  | 24,7  | 27,7  | 34,5  |
| 14                    | 16,2  | 21,1  | 23,7  | 26,1  | 29,1  | 36,1  |
| 15                    | 17,3  | 22,3  | 25,0  | 27,5  | 30,6  | 37,7  |
| 16                    | 18,4  | 23,5  | 26,3  | 28,8  | 32,0  | 39,3  |
| 17                    | 19,5  | 24,8  | 27,6  | 30,2  | 33,4  | 40,8  |
| 18                    | 20,6  | 26,0  | 28,9  | 31,5  | 34,8  | 42,3  |
| 19                    | 21,7  | 27,2  | 30,1  | 32,9  | 36,2  | 43,8  |
| 20                    | 22,8  | 28,4  | 31,4  | 34,2  | 37,6  | 45,3  |
| 21                    | 23,9  | 29,6  | 32,7  | 35,5  | 38,9  | 46,8  |
| 22                    | 24,9  | 30,8  | 33,9  | 36,8  | 40,3  | 48,3  |
| 23                    | 26,0  | 32,0  | 35,2  | 38,1  | 41,6  | 49,7  |
| 24                    | 27,1  | 33,2  | 36,4  | 39,4  | 43,0  | 51,2  |
| 25                    | 28,2  | 34,4  | 37,7  | 40,6  | 44,3  | 52,6  |
| 26                    | 29,2  | 35,6  | 38,9  | 41,9  | 45,6  | 54,1  |
| 27                    | 30,3  | 36,7  | 40,1  | 43,2  | 47,0  | 55,5  |
| 28                    | 31,4  | 37,9  | 41,3  | 44,5  | 48,3  | 56,9  |
| 29                    | 32,5  | 39,1  | 42,6  | 45,7  | 49,6  | 58,3  |
| 30                    | 33,5  | 40,3  | 43,8  | 47,0  | 50,9  | 59,7  |
| 40                    | 44,2  | 51,8  | 55,8  | 59,3  | 63,7  | 73,4  |
| 50                    | 54,7  | 63,2  | 57,5  | 71,4  | 76,2  | 86,7  |
| 60                    | 65,2  | 74,4  | 69,1  | 83,3  | 88,4  | 92,6  |
| 70                    | 75,1  | 85,5  | 90,5  | 95,0  | 100,4 | 121,3 |
| 80                    | 86,1  | 96,0  | 101,9 | 106,6 | 112,3 | 124,8 |
| 90                    | 96,5  | 107,6 | 113,1 | 118,1 | 124,1 | 137,2 |
| 100                   | 106,9 | 118,5 | 124,3 | 129,6 | 135,8 | 149,1 |



**Bảng VI - Giá trị  $\chi^2_k(\alpha)$  của phân phối  $\chi^2$  với  $k$  bậc tự do**  
(mức ý nghĩa  $\alpha$  tính theo %)(tiếp theo)

| $\alpha \backslash k$ | 99,0     | 97,5     | 95      | 90     | 70    | 50    |
|-----------------------|----------|----------|---------|--------|-------|-------|
| 1                     | 0,000157 | 0,000982 | 0,00393 | 0,0158 | 0,048 | 0,455 |
| 2                     | 0,0201   | 0,5060   | 0,103   | 0,211  | 0,713 | 1,39  |
| 3                     | 0,0115   | 0,216    | 0,352   | 0,584  | 1,42  | 2,37  |
| 4                     | 0,297    | 0,481    | 0,711   | 1,06   | 2,19  | 3,36  |
| 5                     | 0,554    | 0,381    | 1,15    | 1,61   | 3,00  | 4,35  |
| 6                     | 0,872    | 1,24     | 1,61    | 2,20   | 3,83  | 5,35  |
| 7                     | 1,24     | 1,69     | 2,17    | 2,83   | 4,67  | 6,35  |
| 8                     | 1,65     | 2,18     | 2,73    | 3,49   | 5,53  | 7,34  |
| 9                     | 2,09     | 2,70     | 3,33    | 4,17   | 6,39  | 8,34  |
| 10                    | 2,53     | 3,25     | 3,91    | 4,87   | 7,27  | 9,34  |
| 11                    | 3,05     | 3,82     | 4,57    | 5,58   | 8,15  | 10,3  |
| 12                    | 3,57     | 4,10     | 5,12    | 6,30   | 9,03  | 11,3  |
| 13                    | 4,11     | 5,01     | 5,89    | 7,04   | 9,93  | 12,3  |
| 14                    | 4,66     | 5,63     | 6,57    | 7,79   | 10,8  | 13,3  |
| 15                    | 5,23     | 6,26     | 7,26    | 8,55   | 11,7  | 14,3  |
| 16                    | 5,81     | 9,91     | 7,93    | 9,31   | 12,6  | 15,3  |
| 17                    | 6,11     | 7,56     | 8,67    | 10,1   | 13,5  | 16,3  |
| 18                    | 7,01     | 8,23     | 9,30    | 10,9   | 14,4  | 17,3  |
| 19                    | 7,63     | 8,91     | 10,1    | 11,7   | 15,4  | 18,3  |
| 20                    | 8,26     | 9,59     | 10,9    | 12,4   | 16,3  | 19,3  |
| 21                    | 8,90     | 10,3     | 11,6    | 13,2   | 17,2  | 20,3  |
| 22                    | 9,54     | 11,0     | 12,3    | 14,0   | 18,1  | 21,3  |
| 23                    | 10,2     | 11,7     | 13,1    | 14,8   | 19,0  | 22,3  |
| 24                    | 10,9     | 12,4     | 13,8    | 15,7   | 19,9  | 23,3  |
| 25                    | 44,5     | 13,1     | 14,6    | 16,5   | 20,9  | 24,3  |
| 26                    | 12,2     | 13,8     | 15,4    | 17,3   | 21,8  | 25,3  |
| 27                    | 12,9     | 14,6     | 16,2    | 18,1   | 22,7  | 26,3  |
| 28                    | 13,6     | 15,3     | 16,9    | 18,9   | 23,6  | 27,3  |
| 29                    | 14,3     | 16,0     | 17,7    | 19,8   | 24,6  | 28,3  |
| 30                    | 15,0     | 16,8     | 18,5    | 20,6   | 25,5  | 29,3  |
| 40                    | 22,2     | 24,4     | 26,5    | 29,1   | 34,9  | 39,3  |
| 50                    | 29,7     | 32,4     | 34,8    | 37,7   | 44,3  | 49,3  |
| 60                    | 35,5     | 40,5     | 43,2    | 46,5   | 53,8  | 59,3  |
| 70                    | 45,1     | 48,8     | 61,7    | 55,3   | 63,3  | 69,3  |
| 80                    | 53,5     | 57,2     | 60,4    | 64,3   | 72,9  | 79,3  |
| 90                    | 61,8     | 65,6     | 69,1    | 73,3   | 82,5  | 89,3  |
| 100                   | 70,1     | 74,2     | 77,9    | 82,4   | 92,1  | 99,3  |

**Bảng VII - Khoảng tin cậy của tỷ lệ  $p \leq 0,1$  hoặc  $p \geq 0,9$  ( với  $\alpha = 5\%$  )**  
( các giá trị của  $np_1$  và  $np_2$  khi  $p \leq 0,1$  )

| m  | 0             | 1              | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9             | 10            |
|----|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 00 |               | 0,025<br>5,572 | 0,24<br>7,22  | 0,62<br>8,76  | 1,09<br>10,24 | 1,62<br>11,67 | 2,20<br>13,06 | 2,31<br>14,42 | 3,45<br>15,76 | 4,12<br>17,08 |               |
| 10 | 4,8<br>18,4   | 5,5<br>19,7    | 6,2<br>21,0   | 6,2<br>21,0   | 7,6<br>23,6   | 8,3<br>24,9   | 9,0<br>26,1   | 9,8<br>27,3   | 10,6<br>28,5  | 11,4<br>29,7  |               |
| 20 | 12,2<br>30,9  | 13,0<br>32,1   | 13,8<br>33,3  | 13,8<br>33,3  | 15,4<br>35,7  | 16,2<br>36,9  | 17,0<br>38,1  | 17,8<br>39,3  | 18,6<br>40,5  | 19,9<br>41,7  |               |
| 30 | 20,2<br>42,8  | 21,0<br>44,0   | 21,8<br>45,2  | 21,8<br>45,2  | 23,5<br>47,5  | 24,4<br>48,6  | 25,2<br>49,8  | 26,1<br>50,9  | 26,9<br>52,1  | 57,8<br>55,3  |               |
| 40 | 28,6<br>54,4  | 29,5<br>55,5   | 30,3<br>56,7  | 30,3<br>56,7  | 32,0<br>59,0  | 32,9<br>60,1  | 33,7<br>61,3  | 34,6<br>62,5  | 35,4<br>63,6  | 36,3<br>64,7  |               |
| 50 | 37,1<br>65,9  | 38,0<br>67,0   | 38,8<br>68,2  | 38,8<br>68,2  | 40,5<br>70,5  | 41,4<br>71,6  | 42,3<br>72,7  | 43,1<br>73,9  | 44,0<br>75,0  | 44,9<br>76,1  |               |
| 60 | 45,8<br>77,2  | 46,6<br>78,4   | 47,5<br>79,5  | 47,5<br>79,5  | 49,3<br>81,8  | 40,2<br>82,9  | 51,0<br>84,0  | 51,9<br>85,1  | 52,8<br>86,2  | 53,7<br>87,3  |               |
| 70 | 54,6<br>88,4  | 55,5<br>89,5   | 53,3<br>90,7  | 53,3<br>90,7  | 58,1<br>92,9  | 58,0<br>94,0  | 59,9<br>95,1  | 60,8<br>96,2  | 61,7<br>97,3  | 62,6<br>98,4  |               |
| 80 | 63,4<br>99,6  | 64,3<br>100,7  | 65,5<br>101,8 | 66,1<br>102,9 | 67,0<br>104,0 | 67,9<br>107,3 | 68,8<br>106,2 | 69,7<br>107,3 | 70,8<br>108,4 | 71,5<br>109,5 |               |
| 90 | 72,4<br>110,6 | 73,3<br>111,7  | 74,2<br>112,8 | 75,1<br>113,9 | 76,0<br>155,0 | 76,9<br>116,1 | 77,8<br>117,2 | 78,7<br>118,3 | 79,6<br>119,4 | 80,5<br>120,5 | 81,4<br>121,6 |

**Bảng VIII - Khoảng tin cậy của tỷ lệ  $p = \frac{m}{n}$  của mẫu bé,**

**( $3 < n \leq 10$  với  $\alpha = 5\%$ )**

| $n \backslash m$ | 0         | 1           | 2           | 3            | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9             | 10            |
|------------------|-----------|-------------|-------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 4                | 0<br>60,2 | 0,6<br>80,6 | 6,8<br>93,2 | 19,4<br>99,4 | 30,9<br>100,0 |               |               |               |               |               |               |
| 5                | 0<br>52,5 | 0,5<br>71,1 | 5,3<br>85,3 | 14,7<br>94,7 | 28,4<br>99,5  | 47,8<br>100,0 |               |               |               |               |               |
| 6                | 0<br>45,9 | 0,4<br>64,1 | 4,3<br>77,7 | 11,8<br>88,2 | 22,3<br>95,7  | 35,9<br>99,6  | 54,1<br>100,0 |               |               |               |               |
| 7                | 0<br>41,0 | 0,4<br>57,9 | 3,7<br>71,0 | 9,9<br>80,6  | 18,4<br>90,1  | 29,0<br>96,3  | 42,1<br>99,6  | 59,0<br>100,0 |               |               |               |
| 8                | 0<br>36,9 | 0,3<br>52,7 | 3,2<br>65,2 | 8,5<br>75,5  | 15,7<br>84,3  | 24,5<br>91,5  | 34,8<br>96,8  | 47,3<br>99,7  | 63,1<br>100,0 |               |               |
| 9                | 0<br>33,6 | 0,3<br>48,3 | 2,8<br>60,0 | 7,5<br>70,1  | 13,7<br>78,8  | 21,2<br>86,3  | 29,9<br>92,5  | 40,0<br>97,2  | 51,7<br>99,7  | 66,4<br>100,0 |               |
| 10               | 0<br>30,8 | 0,3<br>44,5 | 2,5<br>55,6 | 6,7<br>65,2  | 12,2<br>73,8  | 18,7<br>81,3  | 26,2<br>87,8  | 34,8<br>93,3  | 44,4<br>97,5  | 55,5<br>99,7  | 69,2<br>100,0 |

**Bảng IX - Tìm giá trị  $F_{05}$  (hàng trên) và  $F_{01}$  (hàng dưới)**

| $k_1 \backslash k_2$ | 1            | 2            | 3            | 4            | 5            | 6            | 7            | 8            | 9            | 10           | 11           | 12           |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <b>1</b>             | <b>161</b>   | <b>250</b>   | <b>216</b>   | <b>225</b>   | <b>230</b>   | <b>234</b>   | <b>237</b>   | <b>239</b>   | <b>241</b>   | <b>242</b>   | <b>243</b>   | <b>214</b>   |
|                      | 4052         | 4999         | 5403         | 5625         | 5764         | 5859         | 5928         | 5981         | 6022         | 6056         | 6082         | 6106         |
| <b>2</b>             | <b>18,51</b> | <b>19,00</b> | <b>19,17</b> | <b>19,25</b> | <b>19,30</b> | <b>19,33</b> | <b>19,36</b> | <b>19,37</b> | <b>19,38</b> | <b>19,39</b> | <b>19,40</b> | <b>19,41</b> |
|                      | 98,49        | 99,00        | 99,17        | 99,25        | 99,30        | 99,33        | 99,34        | 99,36        | 99,38        | 99,40        | 99,41        | 99,42        |
| <b>3</b>             | <b>40,13</b> | <b>9,55</b>  | <b>9,28</b>  | <b>5,12</b>  | <b>9,01</b>  | <b>8,94</b>  | <b>3,88</b>  | <b>8,84</b>  | <b>8,81</b>  | <b>8,78</b>  | <b>8,76</b>  | <b>8,74</b>  |
|                      | 34,12        | 30,82        | 29,46        | 28,71        | 28,24        | 27,91        | 27,49        | 27,37        | 27,34        | 27,23        | 27,13        | 27,05        |
| <b>4</b>             | <b>7,71</b>  | <b>6,94</b>  | <b>6,59</b>  | <b>6,39</b>  | <b>6,26</b>  | <b>6,16</b>  | <b>6,09</b>  | <b>6,04</b>  | <b>6,00</b>  | <b>5,96</b>  | <b>5,93</b>  | <b>5,91</b>  |
|                      | 21,20        | 18,00        | 16,69        | 15,98        | 15,52        | 15,21        | 14,98        | 14,80        | 16,66        | 14,54        | 14,45        | 14,37        |
| <b>5</b>             | <b>6,61</b>  | <b>5,79</b>  | <b>5,41</b>  | <b>5,19</b>  | <b>5,05</b>  | <b>4,95</b>  | <b>4,88</b>  | <b>4,82</b>  | <b>4,78</b>  | <b>4,74</b>  | <b>4,70</b>  | <b>4,68</b>  |
|                      | 16,26        | 13,27        | 12,06        | 11,39        | 10,97        | 10,67        | 10,45        | 10,72        | 10,15        | 10,05        | 9,96         | 9,89         |
| <b>6</b>             | <b>5,99</b>  | <b>5,14</b>  | <b>4,76</b>  | <b>4,53</b>  | <b>4,39</b>  | <b>4,28</b>  | <b>4,21</b>  | <b>4,15</b>  | <b>4,10</b>  | <b>4,06</b>  | <b>4,03</b>  | <b>4,00</b>  |
|                      | 13,74        | 10,92        | 9,78         | 9,15         | 8,75         | 8,47         | 8,26         | 8,10         | 7,98         | 7,87         | 7,79         | 7,72         |
| <b>7</b>             | <b>5,59</b>  | <b>4,74</b>  | <b>4,35</b>  | <b>4,12</b>  | <b>3,97</b>  | <b>3,87</b>  | <b>3,79</b>  | <b>3,73</b>  | <b>6,68</b>  | <b>3,63</b>  | <b>3,60</b>  | <b>3,57</b>  |
|                      | 12,25        | 9,55         | 8,45         | 7,85         | 7,46         | 7,19         | 7,00         | 6,84         | 6,71         | 6,62         | 6,54         | 6,74         |
| <b>8</b>             | <b>5,32</b>  | <b>4,46</b>  | <b>4,07</b>  | <b>3,84</b>  | <b>3,69</b>  | <b>3,85</b>  | <b>3,50</b>  | <b>3,44</b>  | <b>3,39</b>  | <b>3,34</b>  | <b>3,31</b>  | <b>3,28</b>  |
|                      | 11,26        | 8,65         | 2,59         | 7,01         | 6,63         | 6,37         | 6,19         | 6,03         | 5,91         | 5,82         | 5,74         | 5,67         |
| <b>9</b>             | <b>5,12</b>  | <b>4,26</b>  | <b>3,86</b>  | <b>3,63</b>  | <b>3,48</b>  | <b>3,37</b>  | <b>3,29</b>  | <b>3,23</b>  | <b>3,18</b>  | <b>3,13</b>  | <b>3,10</b>  | <b>3,97</b>  |
|                      | 10,56        | 8,02         | 6,99         | 6,42         | 6,06         | 5,80         | 5,62         | 5,47         | 5,35         | 5,26         | 5,18         | 5,11         |
| <b>10</b>            | <b>4,96</b>  | <b>4,10</b>  | <b>3,71</b>  | <b>3,48</b>  | <b>3,33</b>  | <b>3,22</b>  | <b>3,14</b>  | <b>3,07</b>  | <b>3,02</b>  | <b>2,97</b>  | <b>2,94</b>  | <b>2,91</b>  |
|                      | 10, 04       | 7,56         | 5,55         | 5,99         | 5,64         | 5,39         | 5,21         | 5,06         | 4,95         | 4,85         | 4,78         | 4 71         |
| <b>11</b>            | <b>4,84</b>  | <b>3,98</b>  | <b>3,59</b>  | <b>3,36</b>  | <b>3,20</b>  | <b>3,09</b>  | <b>3,01</b>  | <b>2,95</b>  | <b>2,90</b>  | <b>2,86</b>  | <b>2,82</b>  | <b>2,79</b>  |
|                      | 9,65         | 7,20         | 6,22         | 5,67         | 5,32         | 5,07         | 4,88         | 4,74         | 4,63         | 4,54         | 4,46         | 4,40         |
| <b>12</b>            | <b>4,75</b>  | <b>3,88</b>  | <b>3,49</b>  | <b>3,26</b>  | <b>3,11</b>  | <b>3,00</b>  | <b>2,92</b>  | <b>2,85</b>  | <b>2,80</b>  | <b>2,76</b>  | <b>2,72</b>  | <b>2,69</b>  |
|                      | 9,33         | 6,93         | 5,95         | 5,41         | 5,06         | 4,82         | 4,65         | 4,50         | 4,39         | 4,30         | 4,22         | 4,16         |
| <b>13</b>            | <b>4,67</b>  | <b>3,80</b>  | <b>3,41</b>  | <b>3,18</b>  | <b>3,02</b>  | <b>2,92</b>  | <b>2,84</b>  | <b>2,77</b>  | <b>2,72</b>  | <b>2,67</b>  | <b>2,63</b>  | <b>2,60</b>  |
|                      | 9,07         | 6,70         | 5,74         | 5,20         | 1,86         | 4,62         | 4,44         | 4,30         | 4,19         | 4,10         | 4,02         | 3,96         |
| <b>14</b>            | <b>4,60</b>  | <b>3,74</b>  | <b>3,34</b>  | <b>3,11</b>  | <b>2,96</b>  | <b>2,85</b>  | <b>2,77</b>  | <b>2,60</b>  | <b>2,65</b>  | <b>2,60</b>  | <b>2,56</b>  | <b>2,53</b>  |
|                      | 8,86         | 6,51         | 5,56         | 5,03         | 4,69         | 4,46         | 4,28         | 4,14         | 1,03         | 3,94         | 3,86         | 3,80         |
| <b>15</b>            | <b>4,54</b>  | <b>3,88</b>  | <b>3,29</b>  | <b>3,06</b>  | <b>2,90</b>  | <b>2,79</b>  | <b>2,70</b>  | <b>2,64</b>  | <b>2,59</b>  | <b>2,55</b>  | <b>2,51</b>  | <b>2,45</b>  |
|                      | 8,68         | 6,36         | 5,42         | 4,89         | 4,56         | 4,32         | 4,14         | 4,00         | 4,89         | 3,80         | 3,73         | 3,67         |
| <b>16</b>            | <b>4,49</b>  | <b>3,63</b>  | <b>3,24</b>  | <b>3,01</b>  | <b>3,25</b>  | <b>2,74</b>  | <b>2,66</b>  | <b>2,59</b>  | <b>2,54</b>  | <b>2,49</b>  | <b>2,45</b>  | <b>2,42</b>  |
|                      | 8,53         | 6,23         | 5,29         | 4,77         | 4,44         | 4,20         | 4,3          | 3,89         | 3,78         | 3,69         | 3,61         | 3,55         |
| <b>17</b>            | <b>4,45</b>  | <b>3,59</b>  | <b>3,20</b>  | <b>2,96</b>  | <b>2,31</b>  | <b>2,70</b>  | <b>2,62</b>  | <b>2,55</b>  | <b>2,50</b>  | <b>2,45</b>  | <b>2,41</b>  | <b>2,38</b>  |
|                      | 8,40         | 6,11         | 5,18         | 4,67         | 4,34         | 4,10         | 3,93         | 3,79         | 3,68         | 3,59         | 3,52         | 3,45         |

**Bảng IX (tiếp theo)**

| $k_2 \backslash k_1$ | 14           | 16           | 20           | 24           | 30           | 40           | 50           | 75           | 100          | 200          | 500          | vc           |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <b>1</b>             | <b>245</b>   | <b>246</b>   | <b>248</b>   | <b>249</b>   | <b>250</b>   | <b>251</b>   | <b>252</b>   | <b>253</b>   | <b>253</b>   | <b>254</b>   | <b>254</b>   | <b>254</b>   |
|                      | 6142         | 6169         | 6208         | 6234         | 6258         | 6286         | 6302         | 6323         | 6334         | 6352         | 6361         | 6366         |
| <b>2</b>             | <b>19,42</b> | <b>19,43</b> | <b>19,44</b> | <b>19,45</b> | <b>19,46</b> | <b>19,47</b> | <b>19,47</b> | <b>19,48</b> | <b>19,49</b> | <b>19,49</b> | <b>19,50</b> | <b>19,50</b> |
|                      | 99,43        | 99,44        | 99,45        | 99,46        | 99,47        | 99,48        | 99,48        | 99,49        | 99,99        | 99,49        | 99,50        | 99,50        |
| <b>3</b>             | <b>8,71</b>  | <b>8,69</b>  | <b>8,66</b>  | <b>8,64</b>  | <b>8,62</b>  | <b>8,60</b>  | <b>8,58</b>  | <b>8,57</b>  | <b>8,56</b>  | <b>8,54</b>  | <b>8,54</b>  | <b>8,53</b>  |
|                      | 26,92        | 26,84        | 26,69        | 26,60        | 26,50        | 26,41        | 26,35        | 6,27         | 26,23        | 26,18        | 26,14        | 26,12        |
| <b>4</b>             | <b>5,87</b>  | <b>5,84</b>  | <b>5,80</b>  | <b>5,77</b>  | <b>5,74</b>  | <b>5,71</b>  | <b>5,70</b>  | <b>5,68</b>  | <b>5,66</b>  | <b>5,65</b>  | <b>5,64</b>  | <b>5,63</b>  |
|                      | 14,24        | 14,15        | 14,02        | 13,93        | 13,85        | 13,74        | 13,69        | 13,61        | 13,57        | 13,52        | 13,88        | 13,46        |
| <b>5</b>             | <b>4,64</b>  | <b>4,60</b>  | <b>4,56</b>  | <b>4,53</b>  | <b>4,50</b>  | <b>4,46</b>  | <b>4,44</b>  | <b>4,42</b>  | <b>4,40</b>  | <b>4,38</b>  | <b>4,37</b>  | <b>4,36</b>  |
|                      | 9,71         | 9,68         | 9,55         | 9,47         | 9,38         | 9,29         | 9,21         | 9,17         | 9,13         | 9,07         | 9,04         | 9,02         |
| <b>6</b>             | <b>3,96</b>  | <b>3,92</b>  | <b>3,87</b>  | <b>3,84</b>  | <b>3,81</b>  | <b>3,77</b>  | <b>3,75</b>  | <b>3,72</b>  | <b>3,71</b>  | <b>3,69</b>  | <b>3,68</b>  | <b>3,67</b>  |
|                      | 7,60         | 7,52         | 7,39         | 7,31         | 7,23         | 7,14         | 7,09         | 7,02         | 6,99         | 6,64         | 6,90         | 6,88         |
| <b>7</b>             | <b>3,52</b>  | <b>3,49</b>  | <b>3,44</b>  | <b>3,41</b>  | <b>3,38</b>  | <b>3,34</b>  | <b>3,32</b>  | <b>3,29</b>  | <b>3,28</b>  | <b>3,25</b>  | <b>3,24</b>  | <b>3,23</b>  |
|                      | 6,35         | 6,27         | 6,15         | 6,07         | 5,98         | 5,90         | 5,86         | 5,78         | 5,75         | 5,70         | 5,67         | 5,65         |
| <b>8</b>             | <b>3,23</b>  | <b>3,20</b>  | <b>3,15</b>  | <b>3,12</b>  | <b>3,08</b>  | <b>3,05</b>  | <b>3,03</b>  | <b>3,00</b>  | <b>2,98</b>  | <b>2,96</b>  | <b>2,94</b>  | <b>2,93</b>  |
|                      | 5,56         | 5,48         | 5,36         | 5,28         | 5,20         | 5,11         | 5,06         | 5,00         | 4,96         | 4,91         | 4,88         | 4,86         |
| <b>9</b>             | <b>3,02</b>  | <b>2,98</b>  | <b>2,93</b>  | <b>2,90</b>  | <b>2,86</b>  | <b>2,82</b>  | <b>2,80</b>  | <b>2,77</b>  | <b>2,76</b>  | <b>2,73</b>  | <b>2,72</b>  | <b>2,71</b>  |
|                      | 5,00         | 4,92         | 4,80         | 4,73         | 4,64         | 4,56         | 4,51         | 4,45         | 4,41         | 4,36         | 4,33         | 4,31         |
| <b>10</b>            | <b>2,86</b>  | <b>2,82</b>  | <b>2,77</b>  | <b>2,74</b>  | <b>2,70</b>  | <b>2,67</b>  | <b>2,64</b>  | <b>2,61</b>  | <b>2,59</b>  | <b>2,56</b>  | <b>2,55</b>  | <b>2,54</b>  |
|                      | 4,60         | 4,52         | 4,41         | 4,33         | 5,25         | 4,17         | 4,12         | 4,05         | 4,01         | 3,96         | 3,93         | 3,91         |
| <b>11</b>            | <b>2,74</b>  | <b>2,70</b>  | <b>2,65</b>  | <b>2,61</b>  | <b>2,57</b>  | <b>2,53</b>  | <b>2,50</b>  | <b>2,47</b>  | <b>2,45</b>  | <b>2,42</b>  | <b>2,41</b>  | <b>2,40</b>  |
|                      | 4,20         | 4,20         | 4,10         | 4,02         | 3,94         | 3,86         | 3,80         | 3,74         | 3,79         | 3,66         | 3,62         | 3,60         |
| <b>12</b>            | <b>2,64</b>  | <b>2,60</b>  | <b>2,54</b>  | <b>2,50</b>  | <b>2,46</b>  | <b>2,42</b>  | <b>2,40</b>  | <b>2,36</b>  | <b>2,35</b>  | <b>2,32</b>  | <b>2,31</b>  | <b>2,30</b>  |
|                      | 4,05         | 3,98         | 3,86         | 3,78         | 3,70         | 3,61         | 3,56         | 3,49         | 3,46         | 3,41         | 3,38         | 3,36         |
| <b>13</b>            | <b>3,85</b>  | <b>2,51</b>  | <b>2,46</b>  | <b>2,42</b>  | <b>2,38</b>  | <b>2,34</b>  | <b>2,32</b>  | <b>2,28</b>  | <b>2,26</b>  | <b>2,24</b>  | <b>2,22</b>  | <b>2,21</b>  |
|                      | 2,55         | 3,78         | 3,67         | 3,59         | 3,51         | 3,42         | 3,37         | 3,30         | 3,27         | 3,21         | 3,18         | 3,16         |
| <b>14</b>            | <b>2,48</b>  | <b>2,44</b>  | <b>2,39</b>  | <b>2,35</b>  | <b>2,31</b>  | <b>2,27</b>  | <b>2,24</b>  | <b>2,21</b>  | <b>2,19</b>  | <b>2,16</b>  | <b>2,14</b>  | <b>2,13</b>  |
|                      | 3,70         | 3,62         | 3,51         | 3,43         | 3,34         | 3,26         | 3,21         | 3,14         | 3,11         | 3,06         | 3,02         | 3,00         |
| <b>15</b>            | <b>2,43</b>  | <b>2,39</b>  | <b>2,33</b>  | <b>2,29</b>  | <b>2,25</b>  | <b>2,21</b>  | <b>2,18</b>  | <b>2,15</b>  | <b>2,12</b>  | <b>2,10</b>  | <b>2,08</b>  | <b>2,07</b>  |
|                      | 3,56         | 3,48         | 3,36         | 3,29         | 3,20         | 3,12         | 3,07         | 3,00         | 2,97         | 2,92         | 2,89         | 2,87         |
| <b>16</b>            | <b>2,37</b>  | <b>2,33</b>  | <b>2,28</b>  | <b>2,24</b>  | <b>2,20</b>  | <b>2,16</b>  | <b>2,13</b>  | <b>2,09</b>  | <b>2,07</b>  | <b>2,04</b>  | <b>2,02</b>  | <b>2,01</b>  |
|                      | 3,45         | 3,37         | 3,25         | 3,18         | 3,10         | 3,01         | 2,96         | 2,89         | 2,86         | 2,80         | 2,77         | 2,75         |
| <b>17</b>            | <b>2,33</b>  | <b>2,29</b>  | <b>2,23</b>  | <b>2,19</b>  | <b>2,15</b>  | <b>2,11</b>  | <b>2,08</b>  | <b>2,04</b>  | <b>2,02</b>  | <b>1,99</b>  | <b>1,97</b>  | <b>1,96</b>  |
|                      | 3,35         | 3,27         | 3,16         | 3,08         | 3,00         | 2,92         | 2,86         | 2,79         | 2,76         | 2,70         | 2,67         | 2,65         |

**Bảng IX (tiếp theo)**

| $k_1 \backslash k_2$ | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          | 11          | 12          |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <b>18</b>            | <b>4,41</b> | <b>3,55</b> | <b>3,16</b> | <b>2,93</b> | <b>2,77</b> | <b>2,66</b> | <b>2,58</b> | <b>2,51</b> | <b>2,46</b> | <b>2,41</b> | <b>2,37</b> | <b>2,34</b> |
|                      | 8,28        | 6,01        | 5,09        | 4,58        | 4,25        | 4,01        | 3,85        | 3,71        | 3,60        | 3,51        | 3,44        | 3,37        |
| <b>19</b>            | <b>4,38</b> | <b>3,52</b> | <b>3,13</b> | <b>2,90</b> | <b>2,74</b> | <b>2,63</b> | <b>2,55</b> | <b>2,48</b> | <b>2,43</b> | <b>2,38</b> | <b>2,34</b> | <b>2,31</b> |
|                      | 8,18        | 5,93        | 5,01        | 4,50        | 4,17        | 3,94        | 3,77        | 3,63        | 3,52        | 3,43        | 3,36        | 2,30        |
| <b>20</b>            | <b>4,35</b> | <b>3,49</b> | <b>3,10</b> | <b>2,87</b> | <b>2,71</b> | <b>2,60</b> | <b>2,52</b> | <b>2,45</b> | <b>2,40</b> | <b>2,35</b> | <b>2,31</b> | <b>2,28</b> |
|                      | 8,10        | 5,85        | 4,94        | 4,43        | 4,10        | 3,87        | 3,71        | 3,56        | 3,45        | 3,37        | 3,30        | 3,23        |
| <b>21</b>            | <b>4,32</b> | <b>3,47</b> | <b>3,07</b> | <b>2,34</b> | <b>2,68</b> | <b>2,57</b> | <b>2,49</b> | <b>2,42</b> | <b>2,37</b> | <b>2,32</b> | <b>2,28</b> | <b>2,25</b> |
|                      | 8,02        | 5,78        | 4,87        | 4,37        | 4,04        | 3,81        | 3,65        | 3,51        | 3,40        | 3,31        | 3,24        | 3,17        |
| <b>22</b>            | <b>4,30</b> | <b>3,44</b> | <b>3,05</b> | <b>2,82</b> | <b>2,66</b> | <b>2,55</b> | <b>2,47</b> | <b>2,40</b> | <b>2,35</b> | <b>2,30</b> | <b>2,26</b> | <b>2,23</b> |
|                      | 7,94        | 5,72        | 4,82        | 4,31        | 3,99        | 3,76        | 3,59        | 3,45        | 3,35        | 3,26        | 3,18        | 3,12        |
| <b>23</b>            | <b>4,28</b> | <b>3,42</b> | <b>3,03</b> | <b>2,80</b> | <b>2,64</b> | <b>2,53</b> | <b>2,45</b> | <b>2,36</b> | <b>2,32</b> | <b>2,28</b> | <b>2,24</b> | <b>2,20</b> |
|                      | 6,88        | 5,66        | 4,67        | 4,26        | 3,94        | 3,71        | 3,54        | 3,41        | 3,30        | 5,21        | 9,14        | 3,03        |
| <b>24</b>            | <b>4,26</b> | <b>3,40</b> | <b>3,01</b> | <b>2,78</b> | <b>2,62</b> | <b>2,51</b> | <b>2,43</b> | <b>2,36</b> | <b>2,30</b> | <b>2,26</b> | <b>2,22</b> | <b>2,18</b> |
|                      | 7,82        | 5,61        | 4,72        | 4,22        | 3,90        | 3,67        | 3,50        | 3,36        | 3,25        | 3,17        | 3,09        | 3,03        |
| <b>25</b>            | <b>4,24</b> | <b>3,38</b> | <b>2,99</b> | <b>2,76</b> | <b>2,60</b> | <b>2,49</b> | <b>2,41</b> | <b>2,34</b> | <b>2,28</b> | <b>2,24</b> | <b>2,20</b> | <b>2,16</b> |
|                      | 7,78        | 3,57        | 4,68        | 4,18        | 3,86        | 3,63        | 3,46        | 3,32        | 3,21        | 3,13        | 3,05        | 2,99        |
| <b>26</b>            | <b>4,22</b> | <b>3,37</b> | <b>2,94</b> | <b>1,74</b> | <b>2,59</b> | <b>2,47</b> | <b>2,39</b> | <b>2,32</b> | <b>2,27</b> | <b>2,22</b> | <b>2,18</b> | <b>2,15</b> |
|                      | 7,72        | 5,53        | 4,64        | 4,14        | 3,82        | 3,59        | 3,42        | 3,29        | 3,17        | 3,09        | 3,02        | 2,96        |
| <b>27</b>            | <b>4,21</b> | <b>3,35</b> | <b>2,96</b> | <b>2,73</b> | <b>2,57</b> | <b>2,46</b> | <b>2,37</b> | <b>2,30</b> | <b>2,25</b> | <b>3,20</b> | <b>2,16</b> | <b>2,13</b> |
|                      | 7,68        | 5,49        | 4,60        | 4,11        | 3,79        | 3,56        | 3,39        | 3,26        | 3,14        | 3,06        | 2,98        | 2,93        |
| <b>28</b>            | <b>4,20</b> | <b>3,34</b> | <b>2,95</b> | <b>2,71</b> | <b>2,56</b> | <b>2,44</b> | <b>2,36</b> | <b>2,29</b> | <b>2,24</b> | <b>2,19</b> | <b>2,15</b> | <b>2,12</b> |
|                      | 7,64        | 5,45        | 4,57        | 4,07        | 3,76        | 3,53        | 3,36        | 3,23        | 3,11        | 3,03        | 2,95        | 2,90        |
| <b>29</b>            | <b>4,13</b> | <b>3,33</b> | <b>2,93</b> | <b>2,70</b> | <b>2,54</b> | <b>2,43</b> | <b>2,35</b> | <b>2,28</b> | <b>2,22</b> | <b>2,18</b> | <b>2,14</b> | <b>2,10</b> |
|                      | 7,60        | 5,42        | 4,54        | 4,04        | 3,73        | 3,50        | 3,33        | 3,20        | 3,08        | 3,00        | 2,92        | 2,87        |
| <b>30</b>            | <b>4,17</b> | <b>3,32</b> | <b>2,92</b> | <b>2,69</b> | <b>2,53</b> | <b>2,42</b> | <b>2,34</b> | <b>2,27</b> | <b>2,21</b> | <b>2,16</b> | <b>2,12</b> | <b>2,00</b> |
|                      | 7,56        | 5,39        | 4,51        | 4,02        | 3,70        | 3,47        | 3,30        | 3,17        | 3,06        | 2,98        | 2,90        | 2,84        |
| <b>32</b>            | <b>4,15</b> | <b>3,30</b> | <b>2,90</b> | <b>2,67</b> | <b>2,51</b> | <b>2,40</b> | <b>2,32</b> | <b>2,25</b> | <b>2,19</b> | <b>2,14</b> | <b>2,10</b> | <b>2,07</b> |
|                      | 7,50        | 5,34        | 4,46        | 3,97        | 3,66        | 3,42        | 3,25        | 3,12        | 3,01        | 2,94        | 2,86        | 2,80        |
| <b>34</b>            | <b>4,13</b> | <b>3,28</b> | <b>2,38</b> | <b>2,65</b> | <b>2,49</b> | <b>2,38</b> | <b>2,30</b> | <b>2,23</b> | <b>2,17</b> | <b>2,12</b> | <b>2,08</b> | <b>2,05</b> |
|                      | 7,14        | 5,29        | 4,42        | 3,13        | 3,61        | 3,38        | 3,21        | 3,08        | 2,97        | 2,89        | 2,82        | 2,76        |
| <b>36</b>            | <b>4,11</b> | <b>3,26</b> | <b>2,86</b> | <b>2,63</b> | <b>2,48</b> | <b>2,36</b> | <b>2,28</b> | <b>2,21</b> | <b>2,15</b> | <b>2,10</b> | <b>2,06</b> | <b>2,03</b> |
|                      | 7,39        | 5,25        | 4,38        | 3,39        | 3,58        | 3,35        | 3,18        | 3,04        | 2,94        | 2,56        | 2,78        | 2,72        |
| <b>38</b>            | <b>4,10</b> | <b>3,25</b> | <b>2,35</b> | <b>2,82</b> | <b>2,46</b> | <b>2,35</b> | <b>2,26</b> | <b>2,19</b> | <b>2,14</b> | <b>2,09</b> | <b>2,05</b> | <b>2,02</b> |
|                      | 7,35        | 5,21        | 4,34        | 3,86        | 3,54        | 3,32        | 3,15        | 3,02        | 2,91        | 2,82        | 2,75        | 2,69        |

**Bảng IX (tiếp theo)**

| $k_1 \backslash k_2$ | 14          | 16          | 20          | 24          | 30          | 40          | 50          | 75          | 100         | 200         | 500         | $\infty$    |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <b>18</b>            | <b>2,29</b> | <b>2,25</b> | <b>2,79</b> | <b>2,15</b> | <b>2,11</b> | <b>2,07</b> | <b>2,04</b> | <b>2,00</b> | <b>1,98</b> | <b>1,95</b> | <b>1,93</b> | <b>1,92</b> |
|                      | 3,27        | 3,19        | 3,07        | 3,00        | 2,91        | 2,83        | 2,78        | 2,71        | 2,68        | 2,62        | 2,59        | 2,57        |
| <b>19</b>            | <b>2,26</b> | <b>2,21</b> | <b>2,15</b> | <b>2,11</b> | <b>2,07</b> | <b>2,02</b> | <b>2,00</b> | <b>1,96</b> | <b>1,94</b> | <b>1,91</b> | <b>1,90</b> | <b>1,88</b> |
|                      | 3,19        | 3,12        | 3,00        | 2,92        | 2,84        | 2,76        | 2,70        | 2,63        | 2,60        | 2,54        | 2,51        | 2,49        |
| <b>20</b>            | <b>2,23</b> | <b>2,18</b> | <b>2,12</b> | <b>2,08</b> | <b>2,04</b> | <b>1,99</b> | <b>1,96</b> | <b>1,92</b> | <b>1,90</b> | <b>1,87</b> | <b>1,85</b> | <b>1,84</b> |
|                      | 3,13        | 3,05        | 2,94        | 2,86        | 2,77        | 2,69        | 2,63        | 2,56        | 2,53        | 2,47        | 2,44        | 2,42        |
| <b>21</b>            | <b>2,20</b> | <b>2,15</b> | <b>2,09</b> | <b>2,05</b> | <b>2,00</b> | <b>1,96</b> | <b>1,93</b> | <b>1,89</b> | <b>1m8</b>  | <b>1,84</b> | <b>1,82</b> | <b>1,81</b> |
|                      | 3 07        | 2,99        | 2,88        | 2,80        | 2,72        | 2,63        | 2 58        | 2,51        | 2,47        | 2,42        | 2,38        | 2,36        |
| <b>22</b>            | <b>2,18</b> | <b>2,13</b> | <b>2,07</b> | <b>2,03</b> | <b>1,98</b> | <b>1,93</b> | <b>1,91</b> | <b>1,87</b> | <b>1,84</b> | <b>1,81</b> | <b>1,80</b> | <b>1,87</b> |
|                      | 3,02        | 2,94        | 2,83        | 2,675       | 2,67        | 2,58        | 2,53        | 2,46        | 2,42        | 2,37        | 2,33        | 2,31        |
| <b>23</b>            | <b>2,14</b> | <b>2,10</b> | <b>2,05</b> | <b>2,00</b> | <b>1,96</b> | <b>1,91</b> | <b>1,88</b> | <b>1,84</b> | <b>1,82</b> | <b>1,79</b> | <b>1,77</b> | <b>1,76</b> |
|                      | 2,97        | 2,89        | 2,78        | 2,70        | 2,62        | 2,53        | 2,48        | 2,41        | 2,37        | 2,32        | 2,28        | 2,26        |
| <b>24</b>            | <b>2,13</b> | <b>2,09</b> | <b>2,02</b> | <b>1,98</b> | <b>1,94</b> | <b>1,89</b> | <b>1,86</b> | <b>1,82</b> | <b>1,80</b> | <b>1,76</b> | <b>1,74</b> | <b>1,73</b> |
|                      | 2,93        | 2,85        | 2,74        | 2,66        | 2,58        | 2,49        | <b>2,44</b> | 2,36        | 2,33        | 2,27        | 2,23        | 2,21        |
| <b>25</b>            | <b>2,11</b> | <b>2,06</b> | <b>2,00</b> | <b>1,96</b> | <b>1,92</b> | <b>1,87</b> | <b>1,84</b> | <b>1,80</b> | <b>1,77</b> | <b>1,74</b> | <b>1,72</b> | <b>1,71</b> |
|                      | 2,89        | 2,81        | 2,70        | 2,62        | 2,54        | 2,45        | 2,40        | 2,32        | 2,29        | 2,23        | 2,19        | 2,17        |
| <b>26</b>            | <b>2,10</b> | <b>2,05</b> | <b>2,99</b> | <b>1,95</b> | <b>1,90</b> | <b>1,85</b> | <b>1,82</b> | <b>1,78</b> | <b>1,76</b> | <b>1,72</b> | <b>1,70</b> | <b>1,69</b> |
|                      | 2,86        | 2,77        | 2,66        | 2,58        | 2,50        | 2,41        | 2,36        | 2,28        | 2,25        | 2,19        | 2,15        | 2,13        |
| <b>27</b>            | <b>2,08</b> | <b>2,03</b> | <b>1,97</b> | <b>1,93</b> | <b>1,88</b> | <b>1,84</b> | <b>1,80</b> | <b>1,76</b> | <b>1,74</b> | <b>1,71</b> | <b>1,68</b> | <b>1,67</b> |
|                      | 2,83        | 2,74        | 2,63        | 2,55        | 2,47        | 2,38        | 2,33        | 2,25        | 2,21        | 2,16        | 2,12        | 2,10        |
| <b>28</b>            | <b>2,06</b> | <b>2,02</b> | <b>1,96</b> | <b>1,91</b> | <b>1,87</b> | <b>1,81</b> | <b>1,78</b> | <b>1,75</b> | <b>1,72</b> | <b>1,69</b> | <b>1,67</b> | <b>1,65</b> |
|                      | 2,80        | 2,71        | 2,60        | 2,52        | 2,44        | 2,35        | 2,30        | 2,22        | 2,18        | 2,13        | 2,09        | 2,06        |
| <b>29</b>            | <b>2,05</b> | <b>2,00</b> | <b>1,94</b> | <b>1,90</b> | <b>1,85</b> | <b>1,80</b> | <b>1,77</b> | <b>1,73</b> | <b>1,71</b> | <b>1,68</b> | <b>1,65</b> | <b>1,64</b> |
|                      | 2,77        | 2,68        | 2,57        | 2,49        | 2,41        | 2,32        | 2,27        | 2,19        | 2,15        | 2,10        | 2,06        | 2,03        |
| <b>30</b>            | <b>2,04</b> | <b>1,99</b> | <b>1,93</b> | <b>1,89</b> | <b>1,84</b> | <b>1,79</b> | <b>1,76</b> | <b>1,72</b> | <b>1,69</b> | <b>1,67</b> | <b>1,64</b> | <b>1,62</b> |
|                      | 2,74        | 2,66        | 2,55        | 2,47        | 2,38        | 2,29        | 2,24        | 2,16        | 2,13        | 2,07        | 2,03        | 2,01        |
| <b>32</b>            | <b>2,02</b> | <b>1,97</b> | <b>1,91</b> | <b>1,86</b> | <b>1,82</b> | <b>1,76</b> | <b>1,74</b> | <b>1,69</b> | <b>1,67</b> | <b>1,64</b> | <b>1,61</b> | <b>1,59</b> |
|                      | 3,70        | 2,62        | 2,61        | 2,42        | <b>2 34</b> | 2,25        | 2,20        | 2,12        | 2,08        | 2,02        | 1,98        | <b>1 96</b> |
| <b>34</b>            | <b>2,00</b> | <b>1,95</b> | <b>1,89</b> | <b>1,34</b> | <b>1,80</b> | <b>1,74</b> | <b>1,71</b> | <b>1,67</b> | <b>1,64</b> | <b>1,61</b> | <b>1,59</b> | <b>1,57</b> |
|                      | 2,66        | 2,58        | 2,47        | 2,38        | 2,30        | 2,21        | 2,15        | 2,08 1      | 2,04        | 1,98        | 1,94        | 1,91        |
| <b>36</b>            | <b>1,98</b> | <b>1,93</b> | <b>1,87</b> | <b>1,82</b> | <b>1,78</b> | <b>1,72</b> | <b>1,69</b> | <b>1,65</b> | <b>1,62</b> | <b>1,59</b> | <b>1,56</b> | <b>1,55</b> |
|                      | 2,62        | 2,54        | 2,43        | 2,35        | 2,28 j      | 2,17        | 2,12        | 2,04        | 2,00        | 1,94        | 1,90        | 1,88        |
| <b>38</b>            | <b>1,96</b> | <b>1,92</b> | <b>1,85</b> | <b>1,80</b> | <b>1,76</b> | <b>1,71</b> | <b>1,67</b> | <b>1,63</b> | <b>1,60</b> | <b>1,57</b> | <b>1,54</b> | <b>1,53</b> |
|                      | 32,59       | 2,51        | 2,40        | 2,32        | 1,22        | 1,14        | 2,08        | 2,00        | 1,97        | 1,90        | 1,86        | 1,84        |

**Bảng IX (tiếp theo)**

| $k_2 \backslash k_1$ | 1            | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7            | 8           | 9            | 10          | 11          | 12          |
|----------------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| <b>40</b>            | <b>4,080</b> | <b>3,23</b> | <b>2,84</b> | <b>2,61</b> | <b>2,45</b> | <b>2,34</b> | <b>2,25</b>  | <b>2,18</b> | <b>2,12</b>  | <b>2,07</b> | <b>2,04</b> | <b>2,00</b> |
|                      | 7,31         | 5,18        | 4,31        | 3,83        | 3,51        | 3,29        | 3,12         | 2,99,9      | 2,88         | 2,80        | 2,73        | 2,66        |
| <b>42</b>            | <b>4,07</b>  | <b>3,22</b> | <b>2,83</b> | <b>2,59</b> | <b>2,44</b> | <b>2,32</b> | <b>2,24</b>  | <b>2,17</b> | <b>12,11</b> | <b>2,06</b> | <b>2,02</b> | <b>1,99</b> |
|                      | 7,27         | 5,15        | 4,29        | 3,80        | 3,49        | 3,26        | 3,10         | 2,96        | 2,86         | 2,77        | 2,70        | 2,64        |
| <b>44</b>            | <b>4,06</b>  | <b>3,21</b> | <b>2,82</b> | <b>2,58</b> | <b>2,43</b> | <b>2,31</b> | <b>2,23</b>  | <b>2,10</b> | <b>2,10</b>  | <b>2,05</b> | <b>2,01</b> | <b>1,98</b> |
|                      | 7,24         | 5,12        | 4,26        | 3,78        | 3,46        | 3,24        | 3,07         | 2,94        | 2,84         | 2,75        | 2,68        | 2,62        |
| <b>46</b>            | <b>4,05</b>  | <b>3,20</b> | <b>2,81</b> | <b>2,57</b> | <b>2,42</b> | <b>2,30</b> | <b>2,22</b>  | <b>2,14</b> | <b>2,09</b>  | <b>2,04</b> | <b>2,00</b> | <b>1,97</b> |
|                      | 7,21         | 5,10        | 4,24        | 2,76        | 3,44        | 3,22        | 3,05         | 2,92        | 2,82         | 2,73        | 2,66        | 2,60        |
| <b>48</b>            | <b>4,04</b>  | <b>3,19</b> | <b>2,80</b> | <b>2,56</b> | <b>2,44</b> | <b>2,30</b> | <b>2,21</b>  | <b>2,14</b> | <b>2,08</b>  | <b>2,03</b> | <b>1,99</b> | <b>2,96</b> |
|                      | 7,19         | 5,08        | 4,22        | 3,74        | 3,42        | 3,20        | 3,04         | 2,90        | 2,80         | 2,71        | 2,64        | 1,58        |
| <b>50</b>            | <b>4,03</b>  | <b>3,18</b> | <b>2,79</b> | <b>2,56</b> | <b>2,40</b> | <b>2,29</b> | <b>2,20</b>  | <b>2,13</b> | <b>2,07</b>  | <b>2,02</b> | <b>1,98</b> | <b>1,95</b> |
|                      | 7,17         | 5,06        | 4,20        | 3,72        | 3,41        | 2,18        | 3,02         | 2,88        | 2,78         | 2,70        | 2,62        | 2,56        |
| <b>55</b>            | <b>4,02</b>  | <b>3,17</b> | <b>2,78</b> | <b>2,54</b> | <b>2,38</b> | <b>2,27</b> | <b>2,18</b>  | <b>2,11</b> | <b>2,05</b>  | <b>2,00</b> | <b>1,97</b> | <b>1,93</b> |
|                      | 7,08         | 5,01        | 6,16        | 3,68        | 3,37        | 3,15        | 2,98         | 2,85        | 2,75         | 2,66        | 2,59        | 2,53        |
| <b>60</b>            | <b>4,00</b>  | <b>3,15</b> | <b>2,76</b> | <b>2,52</b> | <b>2,37</b> | <b>2,25</b> | <b>2,17</b>  | <b>2,10</b> | <b>2,01</b>  | <b>1,99</b> | <b>1,95</b> | <b>1,92</b> |
|                      | 7,07         | 4,98        | 4,13        | 3,65        | 3,34        | 3,12        | 2,95         | 2,82        | 2,72         | 2,63        | 2,56        | 2,50        |
| <b>65</b>            | <b>3,98</b>  | <b>3,14</b> | <b>2,75</b> | <b>2,51</b> | <b>2,36</b> | <b>2,24</b> | <b>2,15</b>  | <b>2,08</b> | <b>2,02</b>  | <b>1,98</b> | <b>1,94</b> | <b>1,90</b> |
|                      | 7,04         | 4,95        | 4,10        | 3,62        | 3,31        | 3,09        | 2,93         | 2,79        | 2,70         | 2,61        | 2,54        | 2,47        |
| <b>70</b>            | <b>3,96</b>  | <b>3,13</b> | <b>2,74</b> | <b>2,50</b> | <b>2,35</b> | <b>2,23</b> | <b>2,14</b>  | <b>2,07</b> | <b>2,01</b>  | <b>1,97</b> | <b>2,93</b> | <b>1,89</b> |
|                      | 7,04         | 4,92        | 4,08        | 3,60        | 3,29        | 3,07        | 2,91         | 2,77        | 2,67         | 2,59        | 2,51        | 2,45        |
| <b>80</b>            | <b>3,96</b>  | <b>3,11</b> | <b>2,72</b> | <b>2,48</b> | <b>2,33</b> | <b>2,21</b> | <b>2,12</b>  | <b>2,05</b> | <b>1,99</b>  | <b>1,95</b> | <b>1,91</b> | <b>1,88</b> |
|                      | 6,96         | 4,88        | 4,04        | 3,56        | 3,25        | 3,04        | 2,87         | 2,74        | 2,64         | 2,55        | 2,48        | 2,44        |
| <b>100</b>           | <b>3,94</b>  | <b>3,09</b> | <b>2,70</b> | <b>2,46</b> | <b>2,30</b> | <b>2,19</b> | <b>2,10</b>  | <b>2,03</b> | <b>1,97</b>  | <b>0,92</b> | <b>1,88</b> | <b>1,85</b> |
|                      | 6,90         | 4,82        | 3,98        | 3,51        | 3,20        | 2,99        | 2,82         | 2,69        | 2,59         | 2,51        | 2,43        | 2,36        |
| <b>125</b>           | <b>3,92</b>  | <b>3,07</b> | <b>2,68</b> | <b>2,44</b> | <b>2,29</b> | <b>2,17</b> | <b>2,08</b>  | <b>2,01</b> | <b>1,95</b>  | <b>1,90</b> | <b>1,86</b> | <b>1,83</b> |
|                      | 6,84         | 4,78        | 3,94        | 3,47        | 3,17        | 2,95        | 2,79         | 2,65        | 2,56         | 2,47        | 2,40        | 2,33        |
| <b>150</b>           | <b>3,91</b>  | <b>3,06</b> | <b>2,67</b> | <b>3,43</b> | <b>2,27</b> | <b>2,16</b> | <b>2,97</b>  | <b>2,00</b> | <b>1,94</b>  | <b>1,89</b> | <b>1,85</b> | <b>1,82</b> |
|                      | 6,81         | 4,75        | 2,91        | 3,41        | 3,14        | 2,92        | 2,76         | 2,62        | 2,53         | 2,44        | 2,37        | 2,30        |
| <b>200</b>           | <b>3,89</b>  | <b>3,04</b> | <b>2,65</b> | <b>2,41</b> | <b>2,26</b> | <b>2,14</b> | <b>2,05</b>  | <b>1,98</b> | <b>21,92</b> | <b>1,37</b> | <b>1,83</b> | <b>2,80</b> |
|                      | 6,76         | 4,71        | 3,88        | 3,41        | 3,11        | 2,90        | 2,73         | 2,60        | 2,50         | 2,40        | 2,34        | 1,28        |
| <b>400</b>           | <b>3,86</b>  | <b>3,02</b> | <b>2,62</b> | <b>2,39</b> | <b>2,23</b> | <b>2,12</b> | <b>2,03</b>  | <b>1,96</b> | <b>1,90</b>  | <b>1,35</b> | <b>1,81</b> | <b>2,78</b> |
|                      | 6,70         | 4,66        | 3,83        | 3,36        | 3,06        | 2,85        | 2,69         | 2,55        | 2,46         | 2,37        | 2,29        | 1,23        |
| <b>1000</b>          | <b>3,85</b>  | <b>3,00</b> | <b>2,61</b> | <b>2,38</b> | <b>2,22</b> | <b>2,10</b> | <b>2,022</b> | <b>1,95</b> | <b>1,89</b>  | <b>1,34</b> | <b>1,80</b> | <b>1,76</b> |
|                      | 6,66         | 4,62        | 3,80        | 3,34        | 3,04        | 2,82        | 2,66         | 2,53        | 2,13         | 2,34        | 2,26        | 2,20        |
| <b>∞</b>             | <b>3,84</b>  | <b>2,99</b> | <b>2,60</b> | <b>2,37</b> | <b>2,21</b> | <b>2,09</b> | <b>2,01</b>  | <b>1,94</b> | <b>1,38</b>  | <b>1,33</b> | <b>1,79</b> | <b>2,75</b> |
|                      | 6,64         | 4,60        | 3,78        | 3,32        | 3,02        | 2,80        | 2,64         | 2,51        | 2,01         | 2,32        | 2,24        | 7,28        |



**Bảng IX (tiếp theo)**

| $k_1 \backslash k_2$       | 14    | 16   | 20   | 24   | 30   | 40   | 50   | 75   | 100  | 200  | 500  | $\infty$ |
|----------------------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| <b>40</b>                  | 1,95  | 1,90 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,69 | 1,61 | 1,59 | 1,55 | 1,53 | 1,51     |
|                            | 2,56  | 2,49 | 2,37 | 2,29 | 2,20 | 2,11 | 2,05 | 1,97 | 1,94 | 1,88 | 1,84 | 1,81     |
| <b>42</b>                  | 1,94  | 1,89 | 1,82 | 1,78 | 1,73 | 1,68 | 1,64 | 1,60 | 1,57 | 1,54 | 1,51 | 1,49     |
|                            | 2,54  | 2,46 | 2,35 | 2,26 | 2,17 | 2,08 | 2,02 | 1,94 | 1,91 | 1,85 | 1,80 | 1,78     |
| <b>44</b>                  | 1,92  | 1,88 | 1,81 | 1,76 | 1,72 | 1,66 | 1,63 | 1,58 | 1,56 | 1,52 | 1,50 | 1,48     |
|                            | 2,32  | 2,44 | 2,32 | 2,24 | 2,15 | 2,06 | 2,00 | 1,92 | 1,88 | 1,82 | 1,78 | 1,75     |
| <b>46</b>                  | 1,91  | 1,87 | 1,80 | 1,75 | 1,71 | 1,65 | 1,62 | 1,57 | 1,54 | 1,51 | 1,48 | 1,46     |
|                            | 2,50  | 2,42 | 2,30 | 2,22 | 2,13 | 2,04 | 1,98 | 1,90 | 1,96 | 1,80 | 1,76 | 1,72     |
| <b>48</b>                  | 1,90  | 1,86 | 1,79 | 1,74 | 1,70 | 1,64 | 1,61 | 1,56 | 1,53 | 1,50 | 1,47 | 1,45     |
|                            | 2,48  | 2,40 | 2,28 | 2,20 | 2,11 | 2,02 | 1,96 | 1,88 | 1,84 | 1,78 | 1,73 | 1,70     |
| <b>50</b>                  | 1,90  | 1,85 | 1,78 | 1,74 | 1,69 | 1,63 | 1,60 | 1,55 | 1,52 | 1,48 | 1,46 | 1,44     |
|                            | 2,46  | 2,39 | 2,26 | 2,18 | 2,10 | 2,00 | 1,94 | 1,86 | 1,82 | 1,76 | 1,71 | 1,68     |
| <b>55</b>                  | 1,88  | 1,83 | 1,76 | 1,72 | 1,67 | 1,61 | 1,58 | 1,52 | 1,50 | 1,46 | 1,43 | 1,41     |
|                            | 2,43  | 2,35 | 2,23 | 2,15 | 2,06 | 1,96 | 1,90 | 1,82 | 1,78 | 1,71 | 1,66 | 1,64     |
| <b>60</b>                  | 1,86  | 1,81 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,59 | 1,56 | 1,50 | 1,48 | 1,44 | 1,41 | 1,39     |
|                            | 2,40  | 2,32 | 2,20 | 2,12 | 2,03 | 1,93 | 1,87 | 1,79 | 1,74 | 1,68 | 1,63 | 1,60     |
| <b>65</b>                  | 1,85  | 1,80 | 1,73 | 1,68 | 1,63 | 1,57 | 1,54 | 1,49 | 1,46 | 1,42 | 1,39 | 1,37     |
|                            | 2,37  | 2,30 | 2,18 | 2,09 | 2,00 | 1,90 | 1,84 | 1,76 | 1,71 | 1,64 | 1,60 | 1,56     |
| <b>70</b>                  | 1,84  | 1,79 | 1,72 | 1,67 | 1,62 | 1,56 | 1,53 | 1,47 | 1,45 | 1,40 | 1,37 | 1,35     |
|                            | 2,35  | 2,28 | 2,15 | 2,07 | 1,98 | 1,88 | 1,82 | 1,74 | 1,69 | 1,62 | 1,56 | 1,53     |
| <b>80</b>                  | 1,82  | 1,77 | 1,70 | 1,65 | 1,60 | 1,54 | 1,51 | 1,45 | 1,42 | 1,38 | 1,35 | 1,32     |
|                            | 2,32  | 2,24 | 2,11 | 2,03 | 1,94 | 1,84 | 1,78 | 1,70 | 1,65 | 1,57 | 1,52 | 1,49     |
| <b>100</b>                 | 1,79  | 1,75 | 1,68 | 1,63 | 1,57 | 1,51 | 1,43 | 1,42 | 1,39 | 1,34 | 1,30 | 1,28     |
|                            | 2,26  | 2,19 | 2,06 | 1,98 | 1,89 | 1,79 | 1,73 | 1,64 | 1,59 | 1,51 | 1,46 | 1,43     |
| <b>125</b>                 | 1,77  | 1,72 | 1,65 | 1,60 | 1,55 | 1,49 | 1,45 | 1,39 | 1,36 | 1,31 | 1,27 | 1,25     |
|                            | 2,23  | 2,15 | 2,03 | 1,94 | 1,85 | 1,75 | 1,68 | 1,59 | 1,54 | 1,46 | 1,40 | 1,37     |
| <b>150</b>                 | 1,76  | 1,71 | 1,64 | 1,59 | 1,54 | 1,47 | 1,44 | 1,37 | 1,34 | 1,29 | 1,25 | 1,22     |
|                            | 6,20  | 2,12 | 2,00 | 1,91 | 1,83 | 1,72 | 1,66 | 1,56 | 1,51 | 1,43 | 1,37 | 1,33     |
| <b>200</b>                 | 1,74  | 1,69 | 1,62 | 1,57 | 1,52 | 1,45 | 1,42 | 1,35 | 1,32 | 1,26 | 1,22 | 1,19     |
|                            | 2,178 | 2,09 | 1,97 | 1,88 | 1,79 | 1,69 | 1,62 | 1,53 | 1,48 | 1,39 | 1,33 | 1,28     |
| <b>400</b>                 | 1,72  | 1,67 | 1,60 | 1,54 | 1,49 | 1,42 | 1,38 | 1,32 | 1,28 | 1,22 | 1,16 | 1,13     |
|                            | 2,12  | 2,04 | 1,92 | 1,84 | 1,74 | 1,64 | 1,57 | 1,47 | 1,42 | 1,32 | 1,24 | 1,19     |
| <b>1000</b>                | 1,70  | 1,65 | 1,58 | 1,53 | 1,47 | 1,41 | 1,36 | 1,30 | 1,26 | 1,19 | 1,13 | 1,08     |
|                            | 2,09  | 2,01 | 1,89 | 1,81 | 1,71 | 1,61 | 1,54 | 1,44 | 1,38 | 1,28 | 1,19 | 1,11     |
| <b><math>\infty</math></b> | 1,69  | 1,64 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,40 | 1,35 | 1,28 | 1,24 | 1,17 | 1,11 | 1,00     |
|                            | 2,07  | 1,99 | 1,87 | 1,79 | 1,69 | 1,59 | 1,52 | 1,41 | 1,36 | 1,25 | 1,15 | 1,00     |

**Bảng X – Bảng giá trị của  $\sum_{m=0}^k \frac{a^m e^{-a}}{m!}$**

| $\begin{matrix} a \\ \backslash \\ k \end{matrix}$ | 0,1      | 0,2      | 0,3      | 0,4      | 0,5      | 0,6      |
|----------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                                                  | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1                                                  | 0,995321 | 0,982477 | 0,963063 | 0,938448 | 0,909796 | 0,878099 |
| 2                                                  | 0,999845 | 0,998852 | 0,996390 | 0,992074 | 0,985612 | 0,977885 |
| 3                                                  | 0,999996 | 0,999943 | 0,999724 | 0,999224 | 0,998248 | 0,997642 |
| 4                                                  | 1,000000 | 0,999998 | 0,999724 | 0,999939 | 0,999828 | 0,999606 |
| 5                                                  | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999996 | 0,999986 | 0,999962 |
| 6                                                  | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 |
| 7                                                  | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |

| $\begin{matrix} a \\ \backslash \\ k \end{matrix}$ | 0,7      | 0,8      | 0,9      | 1,0      | 2,0      | 3,0      |
|----------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                                                  | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1                                                  | 0,844195 | 0,808792 | 0,772483 | 0,735759 | 0,406006 | 0,199148 |
| 2                                                  | 0,965858 | 0,952577 | 0,937144 | 0,919699 | 0,676677 | 0,423190 |
| 3                                                  | 0,994246 | 0,990920 | 0,988542 | 0,981012 | 0,857124 | 0,647232 |
| 4                                                  | 0,999214 | 0,998589 | 0,997657 | 0,996340 | 0,947348 | 0,815263 |
| 5                                                  | 0,999909 | 0,999816 | 0,999656 | 0,999406 | 0,983437 | 0,916082 |
| 6                                                  | 0,999990 | 0,999980 | 0,999958 | 0,999917 | 0,995467 | 0,966491 |
| 7                                                  | 0,999998 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999990 | 0,998904 | 0,988095 |
| 8                                                  | 1,000000 | 1,100000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999763 | 0,996196 |
| 9                                                  |          |          |          | 1,000000 | 0,999954 | 0,998897 |
| 10                                                 |          |          |          |          | 0,999992 | 0,999707 |
| 11                                                 |          |          |          |          | 0,999999 | 0,999928 |
| 12                                                 |          |          |          |          | 1,000000 | 0,999983 |
| 13                                                 |          |          |          |          |          | 0,999990 |
| 14                                                 |          |          |          |          |          | 0,999999 |
| 15                                                 |          |          |          |          |          | 1,000000 |

**Bảng X (tiếp theo)**

| $\begin{matrix} a \\ k \end{matrix}$ | 4,0      | 5,0      | 6,0      | 7,0      | 8,0      | 9,0      |
|--------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                                    | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1                                    | 0,091579 | 0,040428 | 0,017352 | 0,007295 | 0,003019 | 0,001234 |
| 2                                    | 0,238105 | 0,124652 | 0,061970 | 0,029636 | 0,013754 | 0,006232 |
| 3                                    | 0,433472 | 0,265066 | 0,151205 | 0,081765 | 0,042380 | 0,021228 |
| 4                                    | 0,628839 | 0,440493 | 0,285038 | 0,172991 | 0,099632 | 0,054963 |
| 5                                    | 0,785132 | 0,615960 | 0,445681 | 0,300708 | 0,191236 | 0,115690 |
| 6                                    | 0,889326 | 0,762183 | 0,606304 | 0,449711 | 0,313374 | 0,206780 |
| 7                                    | 0,948866 | 0,866628 | 0,743981 | 0,598714 | 0,452961 | 0,323896 |
| 8                                    | 0,978836 | 0,931806 | 0,847239 | 0,729091 | 0,592548 | 0,455652 |
| 9                                    | 0,991867 | 0,986172 | 0,916077 | 0,830496 | 0,716625 | 0,587408 |
| 10                                   | 0,997159 | 0,986205 | 0,957380 | 0,901479 | 0,815887 | 0,705988 |
| 11                                   | 0,999084 | 0,994547 | 0,979909 | 0,946650 | 0,888077 | 0,803008 |
| 12                                   | 0,999726 | 0,997981 | 0,991173 | 0,973000 | 0,936204 | 0,875773 |
| 13                                   | 0,999923 | 0,999202 | 0,996372 | 0,987188 | 0,965820 | 0,926149 |
| 14                                   | 0,999979 | 0,999774 | 0,988600 | 0,994282 | 0,982744 | 0,958533 |
| 15                                   | 0,999994 | 0,999931 | 0,999491 | 0,997593 | 0,991770 | 0,977964 |
| 16                                   | 0,999998 | 0,999980 | 0,999825 | 0,999041 | 0,996283 | 0,988894 |
| 17                                   | 0,999999 | 0,999994 | 0,999943 | 0,999637 | 0,998407 | 0,994680 |
| 18                                   | 0,999999 | 0,999998 | 0,999982 | 0,999869 | 0,999351 | 0,997573 |
| 19                                   | 0,999999 | 0,999999 | 0,999994 | 0,999955 | 0,999748 | 0,998943 |
| 20                                   | 1,000000 | 0,999999 | 0,99999  | 0,999985 | 0,999907 | 0,999560 |
| 21                                   |          | 1,000000 | 0,999998 | 0,999995 | 0,999967 | 0,999824 |
| 22                                   |          |          | 0,999999 | 0,999998 | 0,999989 | 0,999932 |
| 23                                   |          |          | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999974 |
| 24                                   |          |          |          | 0,999999 | 0,999999 | 0,999990 |
| 25                                   |          |          |          | 1,000000 | 0,999999 | 0,99999  |
| 26                                   |          |          |          |          | 1,000000 | 0,999996 |
| 27                                   |          |          |          |          |          | 0,999998 |
| 28                                   |          |          |          |          |          | 1,000000 |

**Bảng XI - Bảng giá trị của phân phối Poisson:  $P_k(a) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$**

| $k \backslash a$ | 0,1      | 0,2      | 0,3      | 0,4      | 0,5      | 0,6      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1                | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 |
| 2                | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 |
| 3                | 0,000151 | 0,001091 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 |
| 4                | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 |
| 5                |          | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 |
| 6                |          |          | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000035 |
| 7                |          |          |          |          | 0,0000   | 0,000003 |

| $k \backslash a$ | 0,7      | 0,8      | 0,9      | 1,0      | 2,0      | 3,0      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1                | 0,347610 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 |
| 2                | 0,121663 | 0,143785 | 0,164661 | 0,183940 | 0,270671 | 0,224042 |
| 3                | 0,028388 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 |
| 4                | 0,004968 | 0,007669 | 0,011115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 |
| 5                | 0,000695 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 |
| 6                | 0,000081 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 |
| 7                | 0,000008 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 |
| 8                |          | 0,00002  | 0,000004 | 0,000009 | 0,000859 | 0,008101 |
| 9                |          |          |          | 0,060001 | 0,000191 | 0,002701 |
| 10               |          |          |          |          | 0,000038 | 0,000810 |
| 11               |          |          |          |          | 0,000007 | 0,000221 |
| 12               |          |          |          |          | 0,000001 | 0,000055 |
| 13               |          |          |          |          |          | 0,000013 |
| 14               |          |          |          |          |          | 0,000003 |
| 15               |          |          |          |          |          | 0,000001 |

**Bảng XI (tiếp theo)**

| <div>k \ a</div> | 4,0      | 5,0      | 6,0      | 7,0      | 8,0      | 9,0      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1                | 0,073263 | 0,033690 | 0,014873 | 0,006383 | 9,002684 | 0,001111 |
| 2                | 0,146525 | 0,084221 | 0,044618 | 0,022341 | 0,010735 | 0,004998 |
| 3                | 0,195367 | 0,140371 | 0,089235 | 0,052129 | 0,028626 | 0,014994 |
| 4                | 0,195367 | 0,175467 | 0,133853 | 0,091226 | 0,057252 | 0,033737 |
| 5                | 0,156293 | 0,175467 | 0,160623 | 0,127717 | 0,091604 | 0,060727 |
| 6                | 0,104194 | 0,146223 | 0,160623 | 0,149003 | 0,122138 | 0,091090 |
| 7                | 0,059540 | 0,104445 | 0,137677 | 0,149003 | 0,139587 | 0,117116 |
| 8                | 0,029770 | 0,065278 | 0,103258 | 0,130377 | 0,139587 | 0,131756 |
| 9                | 0,013231 | 0,036266 | 0,068838 | 0,101405 | 0,121077 | 0,131756 |
| 10               | 0,005292 | 0,018133 | 0,041303 | 0,070983 | 0,099262 | 0,118580 |
| 11               | 0,001925 | 0,008242 | 0,022529 | 0,045171 | 0,072190 | 0,097020 |
| 12               | 0,000642 | 0,003434 | 0,011262 | 0,026350 | 0,048127 | 0,072765 |
| 13               | 0,000197 | 0,001321 | 0,005199 | 0,014188 | 0,029616 | 0,050376 |
| 14               | 0,000056 | 0,000472 | 0,002228 | 0,007094 | 0,016924 | 0,032384 |
| 15               | 0,000015 | 0,000157 | 0,000891 | 0,003311 | 0,009026 | 0,019431 |
| 16               | 0,000004 | 0,000049 | 0,000334 | 0,001448 | 0,004513 | 0,010930 |
| 17               | 0,000001 | 0,000014 | 0,000118 | 0,000596 | 0,002124 | 0,005786 |
| 18               |          | 0,000004 | 0,000039 | 0,000232 | 0,000944 | 0,002893 |
| 19               |          | 0,000001 | 0,000012 | 0,000085 | 0,000397 | 0,000137 |
| 20               |          |          | 0,000004 | 0,000030 | 0,000159 | 0,000617 |
| 21               |          |          | 0,000001 | 0,000010 | 0,000061 | 0,000264 |
| 22               |          |          |          | 0,000003 | 0,000022 | 0,000108 |
| 23               |          |          |          | 0,000001 | 0,000008 | 0,000042 |
| 24               |          |          |          |          | 0,000003 | 0,000016 |
| 25               |          |          |          |          | 0,000001 | 0,000006 |
| 26               |          |          |          |          |          | 0,000002 |
| 27               |          |          |          |          |          | 0,000001 |

**Bảng XII - Hệ số  $q = q(p,k)$**

| k  | p     |       |       | k   | p     |       |       |
|----|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
|    | 0,95  | 0,99  | 0,999 |     | 0,95  | 0,99  | 0,999 |
| 17 | 0,400 | 0,639 | 0,961 | 55  | 0,196 | 0,280 | 0,398 |
| 18 | 0,385 | 0,602 | 0,916 | 60  | 0,187 | 0,266 | 0,375 |
| 19 | 0,371 | 0,578 | 0,875 | 65  | 0,179 | 0,253 | 0,356 |
| 20 | 0,358 | 0,556 | 0,838 | 70  | 0,172 | 0,242 | 0,339 |
| 22 | 0,336 | 0,518 | 0,776 | 80  | 0,160 | 0,221 | 0,311 |
| 24 | 0,318 | 0,487 | 0,721 | 90  | 0,150 | 0,209 | 0,280 |
| 26 | 0,302 | 0,460 | 0,670 | 100 | 0,142 | 0,196 | 0,271 |
| 28 | 0,288 | 0,437 | 0,641 | 110 | 0,135 | 0,186 | 0,257 |
| 30 | 0,276 | 0,416 | 0,609 | 120 | 0,129 | 0,177 | 0,246 |
| 35 | 0,253 | 0,375 | 0,541 | 150 | 0,115 | 0,150 | 0,220 |
| 40 | 0,234 | 0,343 | 0,494 | 200 | 0,099 | 0,135 | 0,181 |
| 45 | 0,219 | 0,318 | 0,455 | 250 | 0,089 | 0,120 | 0,162 |
| 50 | 0,207 | 0,297 | 0,421 | 300 | 0,081 | 0,100 | 0,146 |

**Bảng XIII - Hệ số  $z_1(p,k)$  &  $z_2(p,k)$**

| k  | p     |       |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 0,90  |       | 0,95  |       | 0,98  |       | 0,99  |       |
|    | $z_1$ | $z_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_1$ | $z_2$ |
| 4  | 0,640 | 2,37  | 0,599 | 2,37  | 0,549 | 3,67  | 0,510 | 4,39  |
| 5  | 0,672 | 2,090 | 0,621 | 2,153 | 0,576 | 3,001 | 0,516 | 3,484 |
| 6  | 0,690 | 1,916 | 0,644 | 2,202 | 0,507 | 2,623 | 0,560 | 2,979 |
| 7  | 0,705 | 1,797 | 0,661 | 2,035 | 0,616 | 2,377 | 0,588 | 2,660 |
| 8  | 0,718 | 1,741 | 0,675 | 1,916 | 0,634 | 2,295 | 0,604 | 2,440 |
| 9  | 0,720 | 1,645 | 0,688 | 1,826 | 0,644 | 2,076 | 0,618 | 2,277 |
| 10 | 0,730 | 1,953 | 0,699 | 1,755 | 0,656 | 1,977 | 0,630 | 2,454 |
| 11 | 0,748 | 1,550 | 0,708 | 1,698 | 0,667 | 1,808 | 0,644 | 2,056 |
| 12 | 0,755 | 1,545 | 0,717 | 1,651 | 0,677 | 1,833 | 0,651 | 1,976 |
| 13 | 0,762 | 1,485 | 0,725 | 1,611 | 0,685 | 1,779 | 0,610 | 1,910 |
| 14 | 0,769 | 1,460 | 0,732 | 1,577 | 0,693 | 1,733 | 0,669 | 1,854 |
| 15 | 0,775 | 1,437 | 0,739 | 1,518 | 0,700 | 1,691 | 0,676 | 1,806 |
| 16 | 0,780 | 1,418 | 0,745 | 1,522 | 0,707 | 1,659 | 0,683 | 1,764 |
| 18 | 0,790 | 1,385 | 0,756 | 1,479 | 0,719 | 1,602 | 0,696 | 1,695 |
| 20 | 0,798 | 1,368 | 0,765 | 1,444 | 0,730 | 1,556 | 0,707 | 1,610 |
| 22 | 0,805 | 1,336 | 0,773 | 1,416 | 0,739 | 1,519 | 0,717 | 1,595 |
| 24 | 0,812 | 1,316 | 0,781 | 1,391 | 0,747 | 1,487 | 0,726 | 1,553 |
| 26 | 0,818 | 1,300 | 0,788 | 1,371 | 0,755 | 1,460 | 0,734 | 1,526 |
| 28 | 0,823 | 1,286 | 0,791 | 1,352 | 0,762 | 1,436 | 0,711 | 1,499 |
| 30 | 0,828 | 1,274 | 0,799 | 1,337 | 0,768 | 1,417 | 0,713 | 1,475 |
| 35 | 0,838 | 1,218 | 0,811 | 1,304 | 0,731 | 1,376 | 0,762 | 1,428 |
| 40 | 0,847 | 1,228 | 0,821 | 1,279 | 0,792 | 1,344 | 0,774 | 1,390 |
| 45 | 0,854 | 1,212 | 0,830 | 1,250 | 0,802 | 1,318 | 0,784 | 1,360 |
| 50 | 0,861 | 1,199 | 0,837 | 1,243 | 0,810 | 1,297 | 0,793 | 1,336 |
| 60 | 0,871 | 1,179 | 0,840 | 1,217 | 0,824 | 1,265 | 0,808 | 1,299 |

*Chú ý:* Các Bảng thống kê trong Phụ lục được sử dụng trong các chương trình tính toán ở cuối mỗi chương. Khi chạy các chương trình trên máy tính, cần lưu các Bảng thống kê này thành các tệp văn bản để trên ổ đĩa và trong cùng thư mục với chương trình, có tên gọi và cách lưu trữ đã được hướng dẫn ở cuối mỗi chương trình.



## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Chu Duc  
*Eine mathematische Methode zur Beurteilung von Ökosystemen und ihr Anwendung*, Forschungszentrum Dummerstorf - Rostock , 1992
2. Chu Duc  
*The three-stages method to reduce the numbers of trials in analysis data of the designing of experiments*, VNUH Report, 1995
3. Chu Đức  
*Mô hình toán các hệ thống sinh thái*  
NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001
4. Hoàng Chí Thành  
*Turbo Pascal : Ngôn ngữ - Thực hành - Bài tập*  
NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002
5. Ahrens. H  
*Varianzanalyse*, Berlin - Oxford - Braunschweig, 1968
6. Hannan E. J.  
*The statistical Theory of Linear Systems*, John Wilcy & Sons, 1988
7. Lauwerier. H. A.  
*Mathematical models of epidemic*, Amsterdam , 1984
8. Nollau. V.  
*Statistische Analysen*, Leipzig, 1975
9. Rumski. L. Z.  
*Phương pháp toán học xử lý các kết quả thực nghiệm*  
(Bản dịch tiếng Việt) Hà Nội , 1972
10. Weber. E.  
*Mathematische Grundlagen der Genetik*, Jena, 1978
11. Herrendorfer G.  
*Ergebnisse der Schatrung der G UW bei Marknalen der Mast und Schlachtleistung in der Michrindspopulation*, Dummerstorf, 1986
12. Orloci. L.  
*Ranking characters by a dispersion criterion*, Nature, Vol. 10. 1973

## MỤC LỤC

|                                                                     | Trang      |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| Lời mở đầu                                                          | 3          |
| <b>Chương 1 Sai số quan trắc</b>                                    | <b>5</b>   |
| 1.1. Phân loại sai số                                               | 5          |
| 1.2. Phân phối của các sai số quan trắc ngẫu nhiên                  | 5          |
| 1.3. Phương pháp khử sai số                                         | 6          |
| 1.4. Ước lượng độ chính xác của các quan trắc                       | 13         |
| 1.5. Số lượng quan trắc cần thiết                                   | 13         |
| <b>Chương 2 Ước lượng giá trị chân thực</b>                         | <b>15</b>  |
| 2.1. Các loại ước lượng                                             | 15         |
| 2.2. Cách tìm ước lượng                                             | 15         |
| 2.3. Ước lượng khoảng cho độ chính xác của các quan trắc            | 18         |
| <b>Chương 3 Kiểm định tính chuẩn của sai số quan trắc</b>           | <b>22</b>  |
| 3.1. Tiêu chuẩn $\chi^2$                                            | 22         |
| 3.2. Phương pháp đường Henri                                        | 24         |
| <b>Chương 4 Quan hệ giữa các dãy quan trắc</b>                      | <b>29</b>  |
| 4.1. So sánh độ chính xác của các quan trắc                         | 29         |
| 4.2. So sánh giá trị trung bình                                     | 30         |
| 4.3. Quan hệ hàm giữa hai dãy quan trắc                             | 33         |
| 4.4. Quan hệ hàm giữa ba dãy quan trắc                              | 35         |
| 4.5. Quan hệ hàm giữa nhiều dãy                                     | 35         |
| <b>Chương 5 Phân tích phương sai</b>                                | <b>42</b>  |
| 5.1. Mở đầu                                                         | 42         |
| 5.2. Test - kiểm tra của Bartlett                                   | 42         |
| 5.3. Mô hình phân tích biến phân loại 1 dạng đơn giản               | 43         |
| 5.4. Mô hình phân tích biến phân loại 1 giao nhau                   | 48         |
| 5.5. Mô hình biến phân loại 1 giao nhau có lặp                      | 54         |
| <b>Chương 6 Phân tích tương quan</b>                                | <b>61</b>  |
| 6.1. Mở đầu                                                         | 61         |
| 6.2. Phân tích tương quan loại 1                                    | 61         |
| 6.3. Mô hình phân tích tương quan loại 2                            | 67         |
| 6.4. Mô hình phân tích tương quan loại 3                            | 75         |
| <b>Chương 7 Phương pháp đánh giá trọng số các thành phần của hệ</b> | <b>86</b>  |
| 7.1. Đặt bài toán                                                   | 86         |
| 7.2. Phương pháp                                                    | 86         |
| 7.3. Ví dụ áp dụng                                                  | 88         |
| 7.4. Áp dụng để rút gọn số thí nghiệm hoặc hệ sinh thái             | 89         |
| <b>Chương 8 Phân tích phân biệt</b>                                 | <b>91</b>  |
| 8.1. Mở đầu                                                         | 91         |
| 8.2. Phân tích phân biệt dạng hai lớp                               | 91         |
| 8.3. Phân tích phân biệt dạng N lớp ( $N > 2$ )                     | 96         |
| <b>Phụ lục Các bảng thống kê</b>                                    | <b>105</b> |
| Tài liệu tham khảo                                                  | 129        |

# **TÍNH TOÁN TRONG CÁC HỆ SINH THÁI**

Chịu trách nhiệm xuất bản

**LÊ TỬ GIANG**

Biên tập và sửa bài

**VŨ VĂN BÁI**

**NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI**

**80B TRẦN HƯNG ĐẠO – HÀ NỘI**

**ĐT: 04.9423345 – FAX: 04.8224784**

MS:  $\frac{6X8(6V)}{GTVT-06}$  69/06-06

---

In 1.000 cuốn khổ 19 x 27cm tại Công ty In Giao thông.

Số đăng ký KHXB số: 151-2006/CXB/69-313-05/GTVT.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2006.



**Giá: 22.000đ**