

NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG - NGUYỄN VĂN VĨNH

LOGIC TOÁN

- ❑ TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG THƯỜNG XUYÊN
GIÁO VIÊN TRUNG HỌC .
- ❑ SỬ DỤNG CHO KỸ SƯ VÀ SINH VIÊN
CÁC NGÀNH : TOÁN • TOÁN TIN • KỸ THUẬT .



NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG – NGUYỄN VĂN VĨNH

LOGIC TOÁN

- TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG THƯỜNG XUYÊN
GIÁO VIÊN TRUNG HỌC .
- SỬ DỤNG CHO KỸ SƯ VÀ SINH VIÊN
CÁC NGÀNH : TOÁN • TOÁN TIN • KỸ THUẬT .

NHÀ XUẤT BẢN THANH HÓA

một : **MỞ**

TRONG CÁC LẬP LUẬN HÀNG NGÀY VÀ NÓI RIÊNG LÀ CÁC CHỨNG MINH TOÁN HỌC, CHÚNG TA RÚT RA MỘT KẾT LUẬN TỪ NHỮNG ĐIỀU ĐÃ CHO NHỜ VIỆC SỬ DỤNG CÁC QUY LUẬT TƯ DUY. NÓI CÁCH KHÁC, ĐÓ LÀ VIỆC SỬ DỤNG CÁC PHƯƠNG TIỆN CỦA LOGIC HỌC : KHOA HỌC VỀ CÁC QUY LUẬT VÀ CÁC HÌNH THỨC CỦA TƯ DUY.

NGƯỜI KHỞI XUỐNG LÝ THUYẾT LOGIC, VÀ SÁNG LẬP RA LOGIC HÌNH THỨC LÀ NHÀ TRIẾT HỌC CỔ HY LẬP ARISTOTE ; LOGIC HÌNH THỨC NGHIÊN CỨU CÁC HÌNH THỨC SUY LUẬN CỦA CON NGƯỜI KHI GẠT BỎ MỌI NỘI DUNG CỤ THỂ CỦA CÁC SUY LUẬN NÀY, NÓ TÌM KIẾM CÂU TRẢ LỜI CHO MỘT VẤN ĐỀ LỚN : CHÚNG TA ĐÃ, ĐANG VÀ SẼ LẬP LUẬN NHƯ THẾ NÀO ?

LOGIC HÌNH THỨC CỦA ARISTOTE ĐƯỢC NGHIÊN CỨU, PHÁT TRIỂN, BỔ SUNG, THAY ĐỔI VÀ HOÀN THIỆN DẦN DẦN TRONG SUỐT NHIỀU THẾ KỶ BỞI CÁC NHÀ TRIẾT HỌC THUỘC NHIỀU TRƯỜNG PHÁI KHÁC NHAU. TUY NHIÊN, KHOA HỌC LOGIC CHỈ THỰC SỰ PHÁT TRIỂN KHỞI SẮC VÀO THẾ KỶ 19 : KHI TRONG LOGIC HỌC HÌNH THỨC, NGƯỜI TA ÁP DỤNG CÁC PHƯƠNG PHÁP CỦA KHOA HỌC TOÁN HỌC.

DO VIỆC ÁP DỤNG CÁC PHƯƠNG PHÁP CỦA TOÁN HỌC VÀO LOGIC HÌNH THỨC, ĐÃ ĐƯA ĐẾN SỰ XUẤT HIỆN CỦA LOGIC TOÁN.

TÊN GỌI LOGIC TOÁN ĐƯỢC XEM XÉT TRÊN HAI KHÍA CẠNH.

THỨ NHẤT : LOGIC HÌNH THỨC ĐƯỢC XÂY DỰNG NHƯ MỘT LÝ THUYẾT TOÁN HỌC, ĐÓ CHÍNH LÀ LOGIC TOÁN, TỨC LÀ NGÀNH TOÁN LOGIC.

THỨ HAI : LOGIC TOÁN ĐƯỢC XEM XÉT NHƯ LÀ NGÔN NGỮ LOGIC CHÍNH XÁC CỦA TOÁN HỌC, ĐÓ ĐÓ VỀ MẶT NÀY LOGIC TOÁN CHÍNH LÀ LOGIC CỦA TOÁN HỌC.

TƯ TƯỢNG VỀ KHẢ NĂNG VÀ TÍNH HỢP LÝ CỦA VIỆC TOÁN HỌC HOẶC LOGIC HÌNH THỨC THUỘC VỀ NHÀ TOÁN HỌC ĐỨC LEIBNIZ (G.W.N 1646 - 1716).

LEIBNIZ ĐƯỢC COI LÀ NGƯỜI ĐẦU TIÊN TRONG LỊCH SỬ KHOA HỌC CÓ CÔNG TÌM CÁCH BIỂU DIỄN LOGIC HÌNH THỨC DƯỚI DẠNG NGÔN NGỮ CÁC PHÉP TOÁN ĐẠI SỐ.

TUY NHIÊN, CÔNG HIỆN NỔI BẬT NHẤT TRONG LĨNH VỰC LOGIC TOÁN PHẢI KỂ TỪ GIỮA THẾ KỶ 19 TRONG CÁC CÔNG TRÌNH CỦA G. BOOLE (1815 - 1864) NHÀ TOÁN HỌC IRELAND. TÁC PHẨM ĐẦU TIÊN CỦA BOOLE VỀ LOGIC TOÁN LÀ CUỐN SÁCH ĐƯỢC GỌI TÊN : TOÁN GIẢI TÍCH LOGIC XUẤT XỨ NĂM 1847 (XEM BOOLE.G. THE MATHEMATICAL ANALYSIS OF LOGIC, OXFORD 1948).

CÙNG TRONG THỜI KỶ NÀY, NHÀ TOÁN HỌC ANH A. DE MORGAN, CHO CÔNG BỐ CÔNG TRÌNH ĐẦU TIÊN VỀ LOGIC TOÁN. (XEM MORGAN, A. DE ; FORMAL LOGIC, LONDON 1926).

NĂM 1854, BOOLE CHO CÔNG BỐ CÔNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA ÔNG VỀ LOGIC : NGHIÊN CỨU CÁC QUY LUẬT CỦA TƯ DUY.

TRONG CÁC CÔNG TRÌNH CỦA BOOLE, CỦA DE MORGAN VÀ CỦA CÁC NHÀ KHOA HỌC KHÁC Ở THỜI KỶ NÀY, LOGIC TOÁN ĐƯỢC TRÌNH BÀY NHƯ MỘT BỘ PHẬN CỦA ĐẠI SỐ, ĐÓ LÀ ĐẠI SỐ LOGIC. SAU NÀY CÒN ĐƯỢC GỌI LÀ ĐẠI SỐ BOOLE. BOOLE ĐÃ ĐƯA VÀO LOGIC HÌNH THỨC CÁC PHƯƠNG PHÁP CỦA ĐẠI SỐ ĐANG PHÁT TRIỂN CỦA THỜI KỶ BẤY GIỜ, MÀ TRƯỚC HẾT LÀ VẤN ĐỀ LẬP VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH : PHƯƠNG TRÌNH LOGIC.

MỘT NHÀ LOGIC HỌC, NHÀ KINH TẾ HỌC NGƯỜI ANH KHÁC LÀ ZEVON (1835 - 1882) ĐÃ ĐƯA RA VÀ VẬN DỤNG CÁC PHÉP TÍNH LOGIC KHÁC CÒN ĐƠN GIẢN HƠN CÁC PHÉP TÍNH CỦA BOOLE. ĐỒNG THỜI ÔNG CŨNG CHẾ TẠO THÀNH CÔNG MÁY TÍNH ĐỂ THỰC HIỆN CÁC PHÉP TOÁN HẦU RÚT RA KẾT LUẬN LOGIC (MÁY TÍNH ZEVON).

HƯỚNG NGHIÊN CỨU VỀ ĐẠI SỐ LOGIC ĐƯỢC THỂ HIỆN TRƯỚC HẾT Ở ĐẠI SỐ CÁC TẬP HỢP. SAU ĐÓ MỚI ĐẾN ĐẠI SỐ CÁC MỆNH ĐỀ, VÀ ĐƯỢC PHÁT TRIỂN Ở TRÌNH ĐỘ CAO TRONG CÁC CÔNG TRÌNH CỦA NHÀ TOÁN ĐỨC CERDER (1853 - 1901), CỦA NHÀ TOÁN HỌC NGA PARESKY (1846 - 1907). PARESKY TRONG CÁC NĂM 1887 VÀ 1888, LẦN ĐẦU TIÊN Ở NƯỚC NGA, ÔNG ĐÃ ĐỌC CÁC BÀI GIẢNG VỀ LOGIC TOÁN Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC TỔNG HỢP CADAN. CÁC KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU CỦA ÔNG TRONG LĨNH VỰC LOGIC TẬP HỢP VÀ LOGIC MỆNH ĐỀ ĐƯỢC XEM LÀ MỘT CÁC THÀNH TỰU PHÁT TRIỂN NHẤT CỦA HƯỚNG ĐẠI SỐ LOGIC Ở CUỐI THẾ KỶ 19.

VỚI SỰ RA ĐỜI CỦA HÌNH HỌC LOBACHEVSKY (1793 - 1856) CHO THẤY SỰ ÁP DỤNG THÀNH CÔNG CỦA LOGIC TOÁN ĐỂ XÂY DỰNG CƠ SỞ CỦA TOÁN HỌC.

CÁC ĐÓI HỎI VỀ VIỆC XÂY DỰNG CƠ SỞ CỦA TOÁN HỌC, ĐUA ĐẾN SỰ PHÁT TRIỂN MẠNH MẼ HƠN NỮA CỦA LOGIC TOÁN. ĐIỀU ĐÓ ĐÃ DẪN ĐẾN SỰ XUẤT HIỆN CỦA MỘT LOẠT CÁC TƯ TƯỞNG MỚI, CÁC PHƯƠNG PHÁP MỚI, CÁC PHÉP TOÁN LOGIC MỚI CHO PHÉP ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ VÀ ĐẠI SỐ TẬP HỢP TÌM ĐƯỢC NHỮNG ỨNG DỤNG RỘNG RÃI HƠN TRONG NHIỀU LĨNH VỰC.

LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN CỦA LOGIC TOÁN THỜI KỲ NÀY GẮN LIỀN VỚI TÊN TUỔI NHÀ TOÁN HỌC ĐỨC G.FREGE (1848 - 1925).

NĂM 1879 FREGE, LẦN ĐẦU TIÊN TRÌNH BAY VIỆC XÂY DỰNG LOGIC TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TIỀN ĐỀ TRONG CUỐN SÁCH CÓ TÊN GỌI: CÁC PHÉP TOÁN VỀ KHÁI NIỆM. FREGE MONG MUỐN XÂY DỰNG MỘT NGÔN NGỮ LOGIC HOÀN THIỆN PHỤC VỤ CHO SỰ PHÁT TRIỂN CỦA TOÁN HỌC.

TRONG HỆ THỐNG LOGIC CỦA MÌNH, FREGE ĐẦU TƯ NHIỀU ĐỂ HOÀN THIỆN CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ VÀ CÁC PHÉP TOÁN LOGIC VỊ TỪ.

FREGE ĐỀ XUẤT MỘT HƯỚNG NGHIÊN CỨU MỚI: PHÁT TRIỂN LOGIC TOÁN, VẬN DỤNG VÀO LÝ THUYẾT CHỨNG MINH. ĐIỀU NÀY ĐƯỢC THỂ HIỆN TRONG CÔNG TRÌNH CÁC QUY LUẬT CƠ BẢN CỦA SỐ HỌC ĐƯỢC CÔNG BỐ DAN TRONG KHOẢNG THỜI GIAN TỪ 1893 ĐẾN 1903.

HƯỚNG NGHIÊN CỨU DO FREGE ĐỀ XUẤT, ĐÃ LÔI CUỐN SỰ CHÚ Ý VÀ THAM GIA CỦA MỘT LOẠT CÁC NHÀ TOÁN HỌC, LOGIC HỌC NỔI TIẾNG Ở CUỐI THẾ KỶ 19 VÀ ĐẦU THẾ KỶ 20 NHƯ NHÀ TOÁN HỌC, LOGIC HỌC ITALY J.PEANO (1858 - 1932), NHÀ TRIẾT HỌC, LOGIC HỌC ANH B.RUSSELL (1872), NHÀ LOGIC HỌC BA LAN J.LUKASIEWICZ NHÀ TOÁN HỌC ĐỨC HILLBERT, NHÀ TOÁN HỌC ÁO K.GODEL ...

CÁC NHÀ TOÁN HỌC NGA CŨNG CÓ NHỮNG ĐÓNG GÓP TỒI LỚN CHO SỰ PHÁT TRIỂN CỦA LÝ THUYẾT CHỨNG MINH CÓ THỂ KỂ RA Ở ĐÂY CÁC TÊN TUỔI LỚN NHƯ: JEGALKIN (1860 - 1947), GLIVECO (1896 - 1940), CONMOGOROV (1903 - 1985), NOVIKOV (1901), MARKOV (1903). HAI VIỆN SĨ THỐNG TẤN VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC LIÊN XÔ NHƯ MARKOV VÀ SANHIN ĐƯỢC XEM NHƯ NHỮNG NGƯỜI TIÊN PHONG TRONG LĨNH VỰC TOÁN HỌC KIẾN THIẾT VÀ LOGIC. NHƯNG THÀNH TỰU LỚN NHẤT CỦA TRƯỜNG PHAI TOÁN HỌC SOVIET PHẢI KỂ TỚI LÝ THUYẾT THUẬT TOÁN. CÁC CÔNG TRÌNH NGHIÊN CỨU TRONG LĨNH VỰC NÀY KHÔNG CHỈ CÓ Ý NGHĨA TỒI LỚN VỀ LÝ THUYẾT MÀ CÒN CÓ KHẢ NHIỀU CÁC VẬN DỤNG THỰC TIỄN LOGIC TOÁN VÀO KHOA HỌC KỸ THUẬT.

NGAY TỪ NĂM 1910, KHI CÒN GIẢNG DẠY VẬT LÝ Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA PETERBOURG, P.ERENPHEK (1880 - 1933) ĐÃ CHỈ RA RẰNG CÓ THỂ SỬ DỤNG ĐẠI SỐ BOOLE NHƯ MỘT CÔNG CỤ TOÁN HỌC ĐỂ NGHIÊN CỨU CẤU TRÚC LOGIC CỦA CÁC SƠ ĐỒ RELAY MẠNG ĐIỆN (NHƯ SƠ ĐỒ ĐIỆN THOẠI). NHƯNG CHỈ VÀO NHỮNG NĂM 30 CỦA THẾ KỶ 20, VIỆC ÁP DỤNG ĐẠI SỐ BOOLE NGHIÊN CỨU CÁC SƠ ĐỒ MẠNG ĐIỆN MỚI THỰC SỰ PHÁT TRIỂN NHỜ CÁC CÔNG TRÌNH CỦA NHÀ BÁC HỌC NGA SECTAKOV VÀ NHÀ BÁC HỌC MỸ SHANNON.

KỂ TỪ ĐÓ TRỞ ĐI : LOGIC TOÁN HỌC TRỞ THÀNH MỘT TRONG CÁC CƠ SỞ TOÁN HỌC CỦA LÝ THUYẾT ÔTÔ – MẮT, CHÍNH PHÁT TRIỂN CỦA LÝ THUYẾT ÔTÔ – MẮT TÁC ĐỘNG TRỞ LẠI ĐẾN SỰ PHÁT TRIỂN CỦA LOGIC TOÁN MỘT BƯỚC MỖI CÓ THỂ ĐƯỢC GỌI LÀ LOGIC KỸ THUẬT .

LOGIC KỸ THUẬT ĐƯỢC PHÁT TRIỂN RỘNG KHẮP TRÊN THẾ GIỚI VÀ NGÀY NAY TRỞ THÀNH MỘT TRONG NHỮNG CÔNG CỤ QUAN TRỌNG KHÔNG THỂ THIẾU ĐƯỢC TRONG LĨNH VỰC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN .

TRONG TÀI LIỆU NÀY , CHÚNG TÔI CỐ GẮNG TRÌNH BÀY NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN NHẤT CỦA LOGIC TOÁN , NHẪM CUNG CẤP CHO ĐỘC GIẢ CÁC PHƯƠNG TIỆN ĐỂ BIỂU DIỄN CÁC MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC MỘT CÁCH RÕ RÀNG, CHÍNH XÁC, CÙNG NHƯ TIẾN HÀNH CÁC SUY LUẬN ĐÚNG VẬN DỤNG VÀO DẠY HỌC .

THEO DÀ PHÁT TRIỂN CỦA CÁC NGÀNH TOÁN, KỸ THUẬT, KINH TẾ VÀ CÔNG NGHỆ THÔNG TIN... CHÚNG TÔI ĐÃ KIẾN TẠO THÊM MỘT SỐ HÌNH THỨC LOGIC ĐẶC CHỦNG : ĐỂ SỬ DỤNG CHUYÊN BIỆT CHO KỸ SƯ, SINH VIÊN CÁC NGÀNH TOÁN, KỸ THUẬT, KINH TẾ, TOÁN - TIN.

SÁCH SẼ LUÔN ĐẠT KHẢ NĂNG SỬ DỤNG TỐT CHO MỘT SỐ ĐỘC GIẢ CÓ YÊU CẦU TRONG CÁC KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA HAY QUỐC TẾ VỀ MÔN TOÁN RỜI RẠC Ở HAI CHƯƠNG 3 VÀ 4

SUỐT QUA TRÌNH VIẾT CHÚNG TÔI CỐ GẮNG CHỨNG MINH TẤT CẢ CÁC ĐỊNH LÝ VÀ TÍNH CHẤT VÌ TÍNH HIỂN NHIÊN CÓ THỂ THOẢ VỚI ĐỘC GIẢ NÀY, NHƯNG CHƯA HẸN ĐÃ HIỂN NHIÊN ĐỐI VỚI MỘT ĐỘC GIẢ KHÁC KHI XEM XÉT BỐI TƯỢNG ĐÓ TRÊN CÙNG MỘT BÌNH DIỆN.

DÙ ĐÃ CỐ GẮNG HẾT SỨC TRONG LẦN XUẤT BẢN NÀY, SÁCH VẪN CÓ THỂ CHỨA MỘT SỐ LỖI KHÁC QUAN VÀ BẰNG TÍNH THIỆN CỦA MỌI TÁC GIẢ KHI VIẾT SÁCH, CHÚNG TÔI MONG ĐÓN NHẬN SỰ GÓP Ý VÀ PHÊ BÌNH SÁCH TỪ QUÝ CAO NHÂN, QUÝ ĐỒNG NGHIỆP VÀ ĐỒNG ĐÀO ĐỘC GIẢ.

XIN DÀNH SỰ BIẾT ƠN ĐẾN NHÀ XUẤT BẢN THANH HÓA ĐÃ GIÚP ĐỖ NHIỀU MẶT ĐỂ QUYỂN SÁCH ĐƯỢC RA ĐÓI.

NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG - NGUYỄN VĂN VINH

Chương 1: ĐẠI SỐ LOGIC

§1 MỆNH ĐỀ

1.1 PHÁN ĐOÁN

Một suy nghĩ muốn khẳng định hoặc phủ định một điều gì đó có tính chất hoặc là đúng, hoặc là sai mà không thể vừa đúng lại vừa sai được gọi là một phán đoán.

1.2 MỆNH ĐỀ

Diễn đạt phán đoán bằng một câu ngữ pháp ta có một mệnh đề toán học. Nói cách khác, mệnh đề toán học là một câu có tính chất hoặc là đúng, hoặc là sai mà không thể vừa đúng lại vừa sai.

Như vậy có thể xem mệnh đề toán học là một đại lượng nhận một trong hai giá trị, hoặc là đúng, hoặc là sai.

- Một mệnh đề đúng có giá trị chân lý là 1.
- Một mệnh đề sai có giá trị chân lý là 0.

□ Ví dụ: Mệnh đề " $\sqrt{2}$ là vô số tỷ" có giá trị chân lý là 1

Mệnh đề: "8 là số nguyên tố" có giá trị chân lý là 0

Các khái niệm toán học là cơ sở quan trọng để phán đoán để xuất nhận thức mới, xây dựng các mệnh đề toán học mới.

§2 CÁC PHÉP TOÁN LOGIC CƠ BẢN

Cho trước các mệnh đề, ký hiệu bởi các chữ $x, y, z, \dots$. Chúng được gọi là các biến mệnh đề sơ cấp. Sử dụng các liên từ mệnh đề như: không, và, hoặc là, $\dots$ liên kết

các mệnh đề sơ cấp ta được các mệnh đề phức hợp . Ứng với mỗi liên từ , chúng ta có một phép toán logic

2.1 PHÉP PHỦ ĐỊNH (KHÔNG)

Phép phủ định là một phép toán logic cho ứng với mỗi Mệnh đề sơ cấp x , một mệnh đề sơ cấp mới ký hiệu là $\bar{x}$ được định nghĩa bằng bảng chân lý , gọi là bảng chân lý của phép phủ định :

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

Viết dưới dạng phương trình ta có : $\bar{1} = 0$, $\bar{0} = 1$

2.2 PHÉP HỘI (VÀ)

Phép hội là một phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp x và y , một mệnh đề mới , ký hiệu là $x \wedge y$, (hoặc viết gọn là xy) được xác định bằng bảng chân lí sau đây , gọi là bảng chân lí của phép hội :

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Viết dưới dạng phương trình ta có :

$$1 \wedge 1 = 1 , 1 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 0 , 0 \wedge 0 = 0$$

2.3 PHÉP TUYẾN (HOẶC LÀ)

Phép tuyến là một phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp x và y , một mệnh đề mới , ký hiệu là $x \vee y$ được xác định bằng bảng chân lí sau đây , gọi là bảng chân lí của phép tuyến :

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Viết dưới dạng phương trình ta có :

$$1 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 0 \vee 0 = 0$$

2.4 PHÉP KÉO THEO (NẾU ... THÌ ...)

Phép kéo theo là một phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp x và y, mệnh đề mới ký hiệu là $x \Rightarrow y$ (đọc là nếu x thì y) được xác định bằng bảng chân lý sau đây, gọi là bảng chân lý của phép kéo theo :

x	y	$x \Rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Viết dưới dạng phương trình ta có :

$$1 \Rightarrow 1 = 1, 1 \Rightarrow 0 = 0, 0 \Rightarrow 1 = 1, 0 \Rightarrow 0 = 1$$

2.5 PHÉP ĐẲNG GIÁ (ỨNG VỚI TỪ TƯƠNG ĐƯƠNG NÊN CÒN GỌI LÀ PHÉP TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC)

Phép đẳng giá là một phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp x và y, một mệnh đề mới ký hiệu là $x \Leftrightarrow y$ (hoặc $x \sim y$)

x	y	$x \Leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0

0	0	1
---	---	---

Viết dưới dạng phương trình ta có :

$$1 \Leftrightarrow 1 = 1, 1 \Leftrightarrow 0 = 0, 0 \Leftrightarrow 1 = 0, 0 \Leftrightarrow 0 = 1$$

2.6 PHÉP TUYỂN CHỌN (PHÉP CỘNG LOGIC)

Phép tuyển chọn là một phép toán logic cho ứng với hai mệnh đề sơ cấp x và y , một mệnh đề mới ký hiệu là $x \oplus y$ (hay $x + y$ hay $x \vee y$) và được xác định bằng bảng chân lí :

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Viết dưới dạng phương trình ta có

$$1 \oplus 1 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 0 \oplus 0 = 0$$

§3 CÔNG THỨC - LUẬT TRONG ĐẠI SỐ LOGIC

3.1 CÔNG THỨC

Từ các biến mệnh đề sơ cấp, nhờ các phép toán logic cơ bản, ta lập được các mệnh đề phức hợp, chúng được gọi là các công thức. Ta thường ký hiệu công thức bởi các chữ $F, G, H, R, \dots$ Chẳng hạn công thức sau :

- $F = ((xy) \Rightarrow z)$
- $G = (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$
- $R = (xy \vee z)$

3.2 CÔNG THỨC TƯƠNG ĐƯƠNG

Hai công thức F và G được gọi là tương đương logic nếu chúng nhận cùng giá trị chân lý với mọi hệ thống giá trị của các biến mệnh đề sơ cấp. Ký hiệu $F = G$

Chẳng hạn : Nếu $F = ((xy) \Rightarrow z)$ và $G = (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$

Thì : $F = G$

Thuật đoán đơn giản nhất để nhận biết sự tương đương logic của hai công thức F và G là cách lập bảng giá trị chân lý

□ Ví dụ :

x	y	z	xy	$y \Rightarrow z$	$((xy) \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Từ bảng chân lý này ta suy ra : $((xy) \Rightarrow z) = (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$

3.3 CÁC CÔNG THỨC TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC CƠ BẢN

(Chỉ chứa : $\wedge, \vee, -$)

Bằng cách lập bảng giá trị chân lý, chúng ta nhận được 13 công thức tương đương logic cơ bản sau đây :

1. $\overline{\overline{x}} = x$	8. $\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
----------------------------------	--

2. $xy = yx$	9. $\overline{(xy)} = \overline{x} \vee \overline{y}$
3. $x \vee y = y \vee x$	10. $x \vee x = x$
4. $(xy)z = x(yz)$	11. $xx = x$
5. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	12. $x.1 = x$
6. $x(y \vee z) = xy \vee xz$	13. $x \vee 0 = x$
7. $x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$	

□ Nhận xét :

a) Các công thức 2. , 3. , 4. , 5. chứng tỏ rằng , phép hội và phép tuyển có tính chất giao hoán và kết hợp .

Công thức 6. cho thấy phép hội có tính chất phân phối đối với phép tuyển (giống như phép nhân phân phối với phép cộng số học) công thức 7. cho thấy phép tuyển có tính chất phân phối đối với phép hội (ta không có phép cộng phân phối với phép nhân số học).

b) Quy ước về bỏ dấu ngoặc :

Thứ tự thực hiện các phép toán logic là phép hội , phép tuyển , phép kéo theo , phép đẳng giá .

Nếu có dấu phủ định trên công thức thì có thể bỏ các dấu ngoặc ở hai đầu công thức . Chẳng hạn: $\overline{(x \Rightarrow (yz))} = x \Rightarrow yz$

3.4 CÁC CÔNG THỨC TƯƠNG ĐƯƠNG KHÁC

$$14. x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x)$$

$$15. x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$$

$$16. x \oplus y = x.\overline{y} \vee \overline{x}.y$$

$$17. x \oplus y = y \oplus x$$

$$18. x \oplus (y \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z$$

$$19. x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

$$20. \bar{x} \oplus 1 = x$$

$$21. x \oplus 1 = \bar{x}$$

$$22. x \oplus x = 0$$

□ Nhận xét :

Nhờ các hệ thức 8. , 9. , 14. và 15. ta có thể đưa một công thức bất kỳ về dạng chỉ chứa hai phép toán . Hoặc là phép hội và phép phủ định , hoặc là phép tuyển và phép phủ định .

Sử dụng 22. công thức tương đương logic trên đây , chúng ta có thể rút gọn được nhiều công thức phức tạp . Chẳng hạn rút gọn :

$$1) x \vee xy = x.1 \vee x.y = x(1 \vee y) = x.1 = x$$

$$2) \bar{x} \vee xy = (\bar{x} \vee x)(\bar{x} \vee y) = 1(\bar{x} \vee y) = \bar{x} \vee y$$

$$3) x(x \vee y) = x.x \vee xy = x \vee xy = x \quad (\text{theo } \xi 1)$$

$$4) x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{xy}$$

$$5) x \vee \bar{x}.y = (x \vee \bar{x})(x \vee y) = 1.(x \vee y) = x \vee y$$

$$6) xy \vee x.\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x.1 = x$$

3.5 LUẬT LOGIC

Một công thức được gọi là hằng đúng nếu nó nhận giá trị 1 với mọi hệ thống giá trị của các biến mệnh đề sơ cấp

Mỗi một công thức hằng đúng cho ta một luật logic . Luật logic là cơ sở của phép suy luận đúng . Chúng ta xét ba luật logic cơ bản :

A - Luật đồng nhất (Dựa vào công thức $x \Rightarrow x = 1$)

Luật đồng nhất nói đến tính chất xác định của quá trình suy luận . Nó đòi hỏi , trong khi xem xét một đối tượng , phải luôn luôn suy nghĩ trong phạm vi (ngoại diện) của đối tượng đó . Không được đồng nhất các khái niệm có nội hàm và ngoại diện khác với khái niệm đang xem xét .

B - Luật bài trung (Dựa vào công thức $x \vee \bar{x} = 1$)

Theo luật bài trung, một sự vật hoặc là tồn tại, hoặc là không tồn tại, hoặc là đúng hoặc là sai.

Luật bài trung là cơ sở của phép chứng minh bằng Phương pháp phản chứng một mệnh đề toán học.

C - Luật phi mâu thuẫn (Dựa vào công thức $\overline{xx} = 1$)

Theo luật phi mâu thuẫn, một sự vật không thể vừa tồn tại, vừa không tồn tại, vừa đúng lại vừa sai.

Luật phi mâu thuẫn là cơ sở của phép bác bỏ khi muốn chứng minh một mệnh đề toán học nào đó là sai

3.6 HỆ QUẢ LOGIC

Nếu công thức $x \Rightarrow y = 1$ thì mệnh đề y được gọi là hệ quả logic của mệnh đề x

Nếu y là hệ quả logic của x và x lại là hệ quả của logic của y thì các mệnh đề x và y là tương đương logic

Trong các chứng minh toán học, chúng ta có thể thay thế một công thức này bằng công thức khác tương đương logic với công thức đó.

3.7 SƠ LƯỢC VỀ ĐẠI SỐ BOOLE (Nhà toán học Ireland : G.Boole 1815 – 1864)

Cho một tập hợp các phần tử có bản chất bất kỳ ký hiệu là $A, B, C \dots X, Y \dots$? Trong tập hợp này ta xác định một quan hệ bằng nhau, ký hiệu là "=" có các tính chất :

- i) Phản xạ : với mọi A ta có $A = A$
- ii) Đối xứng : với mọi A, B nếu $A = B$ thì $B = A$
- iii) bắc cầu : với mọi A, B, C Nếu $A = B$ và $B = C$ thì $A = C$

Trong tập hợp này ta xác định hai phép toán :

Phép toán cộng ký hiệu là " $\oplus$ "

Phép toán nhân ký hiệu là " $\odot$ "

Các phép toán này thoả mãn các điều kiện sau đây: (Tiên đề)

1. Tồn tại phần tử trung hoà đối với phép toán cộng , ký hiệu là 0 sao cho với mọi X , ta có : $X \oplus 0 = X$

2. Tồn tại phần tử trung hoà đối với phép toán nhân , ký hiệu là 1 sao cho với mọi X , ta có $X \odot 1 = X$

3. Phép cộng có tính chất giao hoán :

$$\forall X, Y \text{ ta có } X \oplus Y = Y \oplus X$$

4. Phép nhân có tính chất giao hoán :

$$\forall X, Y \text{ ta có } X \odot Y = Y \odot X$$

5. Phép nhân phân phối đối với phép toán cộng :

$$\forall X, Y, Z ; \text{ ta có : } X \odot (Y \oplus Z) = (X \odot Y) \oplus (X \odot Z)$$

6. Phép cộng phân phối đối với phép toán nhân :

$$\forall X, Y, Z ; \text{ ta có : } X \oplus (Y \odot Z) = (X \oplus Y) \odot (X \oplus Z)$$

Đối với mọi X , đều tồn tại $\bar{X}$ sao cho :

$$7. X \oplus \bar{X} = 1$$

$$8. X \odot \bar{X} = 0$$

(Tập hợp $\bar{X}$ hoàn toàn xác định bởi các tiên đề 7. và 8. , được gọi là phần bù của X)

Từ tám tiên đề này , ta chứng minh được hai tính chất cơ bản sau :

$$\bullet X \oplus X = X$$

$$\bullet X \odot X = X$$

Thật vậy :

$$\text{Ta có : } X \oplus (X \odot \bar{X}) \stackrel{(6)}{=} (X \oplus X) \odot (X \oplus \bar{X})$$

$$\text{Thay : } X \oplus (X \odot \bar{X}) \stackrel{(8)}{=} X \oplus 0 \stackrel{(1)}{=} X$$

$$\text{Thay : } (X \oplus X) \odot (X \odot \bar{X}) \stackrel{(7)}{=} (X \oplus X) \odot 1 \stackrel{(2)}{=} X \oplus X$$

$$\text{Suy ra : } X \oplus X = X$$

$$\text{Tương tự : } X \odot (X \oplus \bar{X}) = (X \odot X) \oplus (X \odot \bar{X})$$

$$X \odot 1 = (X \odot X) \oplus 0$$

$$X = X \odot X$$

$$\text{Vậy : } X \odot X = X$$

□ Nhận xét :

Đại số các tập hợp và đại số logic (Đại số các mệnh đề) là hai mô hình cụ thể đại số vừa được xây dựng trên đây . Thật vậy ta xét bảng so sánh sau đây :

ĐẠI SỐ Boole	ĐẠI SỐ Logic	ĐẠI SỐ Tập hợp
Các biến của đại số Boole : $A, B, C \dots X, Y$	Các biến mệnh đề sơ cấp : $A, B, C \dots X, Y$	Cho tập hợp P và $A, B, C \dots$ là các tập con của P
"=" bằng nhau của các biến $A, B, C \dots$	$\Leftrightarrow$ Sự tương đương logic của các biến mệnh đề sơ cấp	$(=)$ sự bằng nhau của các tập hợp
$\oplus$ Phép toán cộng	$\vee$: Phép toán tuyển	$\cup$: Phép hợp 2 tập hợp
$\odot$ Phép toán nhân	$\wedge$: Phép toán hội	$\cap$: Phép giao 2 tập hợp
$\bar{A}$: Phần bù của A	$\bar{A}$: Mệnh đề phủ định của A	$\bar{A}$: Phần bù của tập hợp A
0 : Phần tử trung hoà của phép cộng	0 : Mệnh đề hằng sai	$\emptyset$: Tập hợp rỗng
1 : Phần tử trung hoà của phép nhân	1 : Mệnh đề hằng đúng	P : Tập hợp toàn thể

Dễ dàng kiểm tra được rằng , đại số boole và các mô hình cụ thể của nó thoả mãn 13 công thức cơ bản trong bảng ở mục 3.3

§4 LUẬT ĐỔI NGẪU

Trong mục này chúng ta quy ước :

- Các biến mệnh đề sơ cấp sẽ được ký hiệu là $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Các công thức chỉ chứa ba phép toán logic cơ bản là phép tuyển, phép hội và phép phủ định

(4.1) CÁC ĐỊNH NGHĨA

- **ĐN₁** : Các phép toán logic hội và tuyển được gọi là hai phép toán đối ngẫu của nhau .
- **ĐN₂** : Hai công thức F và G được gọi là hai công thức đối ngẫu của nhau nếu công thức này được suy ra từ công thức kia bằng cách thay mọi phép toán tuyển và hội bằng phép toán đối ngẫu của nó .
ký hiệu công thức đối ngẫu của một công thức F cho trước là F^*

□ Ví dụ : Nếu $F = (x_1 \vee x_2) x_3$ thì $F^* = x_1 \cdot x_2 \vee x_3$

□ Nhận xét :

Trong công thức đối ngẫu F^* thay các biến sơ cấp x_1, x_2, x_3 bằng các biến phủ định $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ tương ứng thì ta được :

$$F^*(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \cdot x_2 \vee x_3}$$

$$\Rightarrow F^*(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} \vee \overline{\overline{x_3}}$$

$$\text{Lại xét : } \overline{F(x_1, x_2, x_3)} = \overline{(x_1 \vee x_2)x_3} = \overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{x_3}$$

$$= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_3} = \overline{x_1 \cdot x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$\Rightarrow F^*(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = \overline{F(x_1, x_2, x_3)}$$

Một cách tổng quát : nếu công thức F gồm n biến sơ cấp $x_1, x_2, \dots, x_n$ dựa vào công thức (8) và (9) ta có :

$$\overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} = F^*(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

Thay x_i bằng $\overline{x_i}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ ta có :

$$\overline{F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})} = F^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

4.2 LUẬT ĐỐI NGẪU

Điều kiện cần và đủ để $F = G$ là $F^* = G^*$

□ *Chứng minh :*

• **Điều kiện cần :** Vì $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow \overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \overline{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}} = \overline{\overline{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}}$$

$$\Rightarrow F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = G^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

• **Điều kiện đủ :**

$$\text{Giả sử : } F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = G^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow (F^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) = (G^*(x_1, x_2, \dots, x_n))^*$$

$$\Rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

§5 BÀI TOÁN GIẢI QUYẾT

☞ **Đặt vấn đề :**

$$\text{Cho hai công thức : } F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3}$$

Nhận thấy công thức $F(x_1, x_2, x_3)$ là công thức hằng đúng còn công thức $G(x_1, x_2, x_3)$ là công thức hằng sai .

Như vậy cho một công thức bất kỳ gồm n biến mệnh đề sơ cấp $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nếu công thức $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không đồng nhất sai thì ắt tồn tại một bộ các giá trị $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ để sao cho $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$. Khi đó công thức $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là công thức khả hiện .

☞ **Bài toán đặt ra là :**

Cho trước công thức $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không lập bảng giá trị chân lý, hãy tìm một thuật toán để xác định xem $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

có phải là công thức hằng đúng hay không ?

(5.1) TUYẾN SƠ CẤP - HỘI SƠ CẤP

5.1.1. Các định nghĩa :

Cho các biến mệnh đề sơ cấp $x_1, x_2, \dots, x_n$

- **ĐN₁ :** *Tuyến sơ cấp là tuyến của một số các biến mệnh đề sơ cấp trên đây hoặc là các biến mệnh đề sơ cấp phủ định của chúng .*

Chẳng hạn : $F = \overline{x_1} \vee x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$ là một tuyến sơ cấp của ba biến : x_1, x_2 và x_3

$G = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ là tuyến sơ cấp của bốn biến mệnh đề sơ cấp x_1, x_2, x_3 và x_4 .

- **ĐN₂ :** *Hội sơ cấp của các biến mệnh đề sơ cấp $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là hội của các biến sơ cấp trên đây hoặc là các biến sơ cấp phủ định của chúng .*

Chẳng hạn : $F = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$ là một hội sơ cấp của ba biến x_1, x_2, x_3 ; $G = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_1$ là hội sơ cấp của các biến mệnh đề sơ cấp x_1, x_2, x_3, x_4

5.1.2. Tính chất :

- **ĐL₁ :** *Tuyến sơ cấp là đồng nhất 1 khi và chỉ khi nó chứa một biến mệnh đề sơ cấp nào đó cùng với phủ định của biến đó.*

Chứng minh :

Điều kiện đủ : hiển nhiên vì ta có $x \vee \overline{x} = 1$

Điều kiện cần : Giả sử ngược lại , tồn tại một tuyến sơ cấp đồng nhất 1 mà tại không chứa một biến nào đó cùng với phủ định của biến đó . Như vậy , có thể cho mỗi biến có dấu phủ định giá trị chân lí là 1 , còn các biến không có dấu phủ định giá trị chân lí là 0 thì tuyến có giá trị là $0 \vee 0 \vee \dots \vee 0 = 0$

vô lí vì trái với giả thiết tuyến sơ cấp là đồng nhất 1.

Điều vô lí chứng tỏ không tồn tại một tuyển sơ cấp đồng nhất 1 mà tại không chứa một biến mệnh đề sơ cấp x_i cũng với phủ định của biến đó

- DL_2 : Một hội sơ cấp là đồng nhất 0 khi và chỉ khi nó chứa một biến mệnh đề sơ cấp nào đó cùng với biến phủ định của nó

Chứng minh : định lý 2 tương tự như định lý 1

5.2) DẠNG CHUẨN HỘI - DẠNG CHUẨN TUYẾN CỦA MỘT CÔNG THỨC

5.2.1. Các định nghĩa :

- DN_1 : Cho công thức F . Một công thức tương đương logic với F mà viết được dưới dạng tuyển của các hội sơ cấp thì gọi là dạng chuẩn tuyến của công thức F .
- DN_2 : Một công thức tương đương logic với F mà viết được dưới dạng hội của các tuyển sơ cấp được gọi là dạng chuẩn hội của công thức F .

5.2.2. Các ví dụ :

□ Ví dụ 1 :

Tìm dạng chuẩn hội và dạng chuẩn tuyến của công thức : $G = \overline{x_1} \vee x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2$

Giải

Biến đổi : $G = \overline{x_1} . \overline{x_2} \Leftrightarrow x_1 x_2$

$$\begin{aligned}
 &= (\overline{x_1} . \overline{x_2} \Rightarrow x_1 x_2)(x_1 x_2 \Rightarrow \overline{x_1} . \overline{x_2}) \\
 &= (\overline{\overline{x_1 . x_2} \vee x_1 x_2})(\overline{x_1 x_2 \vee x_1 x_2}) \\
 &= (x_1 \vee x_2 \vee x_1 x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1 . x_2}) \\
 &= (x_1 \vee (x_2 \vee x_2 x_1))[(\overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_2} \overline{x_1}))] \\
 &= (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})
 \end{aligned}$$

$$= x_1 \overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_2}$$

Khi đó, công thức : $G = (x_1 \vee x_2) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$ là dạng chuẩn hội của G và công thức $G = x_1 \overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_2}$ là dạng chuẩn tuyển của công thức G

□ Ví dụ 2 :

Tìm dạng chuẩn hội và dạng chuẩn tuyển của công thức : $F = x_1 \overline{x_2 x_3} . (x_4 \vee x_5)$

Giải

Biến đổi tương đương : $F = x_1 (\overline{x_2 \vee x_3}) (x_4 \vee x_5)$

$$= (x_1 \vee x_1)(\overline{x_2 \vee x_3}) (x_4 \vee x_5)$$

Công thức : $F = (x_1 \vee x_1) (\overline{x_2 \vee x_3}) (x_4 \vee x_5)$ là dạng chuẩn hội của F

Xét tiếp : $F = x_1 (\overline{x_2 \vee x_3}) (x_4 \vee x_5) = (x_1 \overline{x_2 \vee x_3}) (x_4 \vee x_5)$

$\Rightarrow F = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_3} x_5$ là dạng chuẩn tuyển của công thức F

□ Ví dụ 3 :

Tìm dạng chuẩn tuyển và dạng chuẩn hội của công thức : $R = x_1(x_1 \Rightarrow x_2)$.

Giải

Biến đổi : $R = x_1(\overline{x_1} \vee x_2) = x_1 \overline{x_1} \vee x_1 x_2$

Công thức $x_1 \overline{x_1} \vee x_1 x_2$ là dạng chuẩn tuyển của R

Xét : $R^* = (x_1 \vee \overline{x_1})(x_1 \vee x_2) = x_1 x_1 \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_1} x_1 \vee \overline{x_1} x_2$

$$\Rightarrow (R^*)^* = (x_1 \vee x_1) (x_1 \vee x_2) (\overline{x_1} \vee \overline{x_1})(\overline{x_1} \vee x_2)$$

$\Rightarrow R = (x_1 \vee x_1)(x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_1})(\overline{x_1} \vee x_2)$ là dạng chuẩn hội của công thức R

□ Nhận xét :

1/ Mọi công thức F cho trước đều có dạng chuẩn hội và dạng chuẩn tuyển .

2/ Các dạng chuẩn hội và dạng chuẩn tuyển của một công thức cho trước không phải là duy nhất , có thể có nhiều dạng chuẩn tuyển và nhiều dạng chuẩn hội cùng ứng với một công thức cho trước

Chẳng hạn : $F = x_1 \vee x_2 x_3$

Thì : $F = x_1 x_1 \vee x_2 x_3$ là một dạng chuẩn tuyển

Xét tiếp : $F = x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_3)$ là một dạng chuẩn hội của công thức F

Lại có : $F = (x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_3) = x_1 x_1 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_1 \vee x_2 x_3$ ta lại có một dạng chuẩn tuyển khác của công thức F .

Tất cả các dạng chuẩn tuyển này đều tương đương logic với nhau .

5.3 TÍNH CHẤT

5.3.1. DL₁ : Điều kiện cần và đủ để một công thức $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đồng nhất 1 là mỗi tuyển sơ cấp của dạng chuẩn hội của công thức F đều chứa một biến nào đó cùng với phủ định của biến đó.

5.3.2. DL₂ : Điều kiện cần và đủ để một công thức $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đồng nhất 0 là mỗi hội sơ cấp của dạng chuẩn tuyển của công thức F đều chứa một biến nào đó cùng với phủ định của biến đó.

□ Ví dụ :

Hãy kiểm tra xem các công thức sau đây là đồng nhất 1 hoặc là đồng nhất 0

$$1) F = (x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (\overline{x_2} \Rightarrow \overline{x_1})$$

$$2) G = x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

$$3) R = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$$

Giải

$$1) F = (x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (\overline{x_2} \Rightarrow \overline{x_1})$$

Biến đổi F về dạng chuẩn hội :

$$\begin{aligned} F &= (\overline{x_1} \vee x_2) \Rightarrow (\overline{x_2} \vee \overline{x_1}) = \overline{\overline{x_1} \vee x_2} \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_1}) \\ &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee (\overline{x_2} \vee \overline{x_1}) = (x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_1}) (\overline{x_2} \vee \overline{x_1}) \end{aligned}$$

Vậy công thức F là đồng nhất 1

$$2) G = x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \overline{x_2}$$

Đưa G về dạng chuẩn hội :

$$\begin{aligned} G &= x_2 \vee (x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) = x_2 \vee ((x_1 \vee \overline{x_1}) \cdot \overline{x_2}) \\ &= (x_2 \vee (x_1 \vee \overline{x_1})) (\overline{x_2} \vee x_2) = (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_1}) (\overline{x_2} \vee x_2) \end{aligned}$$

Vậy công thức G là đồng nhất 1

$$3) R = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$$

Trước hết nhận thấy R là không đồng nhất 0

Để biết xem R có đồng nhất 1 ta biến đổi :

$$\begin{aligned} R^* &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \\ &= (x_1 \overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \overline{x_2} \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \vee \\ &\quad \vee x_3 x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ &= (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \\ &\quad \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ &= (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ &= (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ &= (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ &= (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \\ &= (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{x_1 x_2} \quad \overline{x_1 \vee x_1} \quad \overline{x_2} \quad \overline{x_2 \vee x_1} \quad \overline{x_2} \quad \overline{x_3 \vee x_2} \quad \overline{x_1} \quad \overline{x_1 \vee x_2} \quad \overline{x_1} \quad \overline{x_2} \quad \vee \\
&\quad \vee \overline{x_2 x_1} \quad \overline{x_3 \vee x_1} \quad \overline{x_1 \vee x_3} \quad \overline{x_2} \quad \vee \overline{x_3 x_3} \\
&= \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_2} \quad \overline{x_3 \vee x_2} \quad \overline{x_1} \quad \overline{x_3 \vee x_3} \quad \overline{x_1 \vee x_3} \quad \overline{x_2} \quad \vee \overline{x_3 x_3} \\
\Rightarrow R = (R^*)^* &= (\overline{x_1 \vee x_2}) (\overline{x_1 \vee x_2}) (\overline{x_1 \vee x_2} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_2 \vee x_1} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_3} \\
&\quad \vee \overline{x_1}) (\overline{x_3 \vee x_2}) (\overline{x_3 \vee x_3})
\end{aligned}$$

Nhận thấy mỗi tuyến sơ cấp của dạng chuẩn hội của R không chứa một biến cùng phủ định của biến đó, do đó R không đồng nhất 1

Vậy công thức R là không đồng nhất 1, cũng không đồng nhất 0.

§6 BIỂU DIỄN MỘT HÀM LOGIC HAI TRỊ BẤT KÌ
 $F(x_1; x_2; \dots; x_n)$ BẰNG MỘT CÔNG THỨC

Quy ước : Ký hiệu $x^a = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \neq a \\ 1 & \text{nếu } x = a \end{cases}$

Ở đây x và a đều là các biến mệnh đề sơ cấp nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1.

Theo ký hiệu trên ta có : $x^1 = x$ và $x^0 = \overline{x}$

Nhận thấy : các biến mệnh đề sơ cấp $x_1, x_2, \dots, x_n$ có thể nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1. Khi đó một hàm logic $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có thể nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1

Phương pháp đơn giản nhất để cho hàm logic hai giá trị $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là phương pháp cho bằng bảng giá trị chân lí. Dựa vào bảng giá trị chân lí (bảng chân trị) chúng ta có thể biểu diễn $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thành một công thức đại số logic.

Dưới đây chúng ta xét phương pháp cơ sở của việc biểu diễn này.

6.1 DẠNG CHUẨN TUYẾN HOÀN TOÀN

6.1.1. DL: Mọi hàm logic hai trị $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng sau đây:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = V x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \cdot F(a_1, a_2, \dots, a_n) ; (1)$$

theo mọi bộ giá trị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

□ Chứng minh: Thật vậy, theo quy ước trên đây thì:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = 1 \Leftrightarrow x_i^{a_i} = 1 \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x_i = a_i \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n$$

Xét một bộ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tùy ý của bộ các biến số sơ cấp $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và giả sử $x_i = a_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$

Lúc đó: $VT_{(1)} = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Để rút gọn vế phải ta cần chú ý: $0 \vee x = x$ và

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = 1 \Leftrightarrow x_i = a_i \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n$$

Do đó vế phải của công thức 1 gồm tuyến của một số các số hạng có dạng:

$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ với các số hạng khác là 0,

Nên: $VT_{(1)} = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Từ đó ta suy ra định lý được chứng minh

6.1.2. HQ: Một hàm logic hai trị bất kỳ $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một công thức chỉ chứa các phép toán logic là phép tuyến, phép hội và phép phủ định.

□ Chứng minh: Xét hai trường hợp:

• **TH₁:** Nếu $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là đồng nhất 0 thì ta có thể biểu diễn: $F = x_1 \cdot \overline{x_1}$ (hoặc một biến x_i nào đó)

• **TH₂** : Nếu $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không đồng nhất 0

Từ công thức (1) :

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = V x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ theo mọi bộ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Suy ra : $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = V x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$, theo mọi bộ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ mà $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$

Hệ quả được chứng minh

6.1.3. **Dạng chuẩn tuyến hoàn toàn :**

Dạng : $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = V x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$, ứng với các bộ giá trị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của các biến sơ cấp $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ được gọi là dạng chuẩn tuyến hoàn toàn của công thức không đồng nhất sai $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Định nghĩa : Dạng chuẩn tuyến hoàn toàn của công thức không đồng nhất sai $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là dạng chuẩn tuyến chứa n và chỉ gồm n biến mệnh đề sơ cấp $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn các tính chất :

1. Trong biểu diễn không có hai tuyến nào giống nhau.
2. Không một hội nào của tuyến chứa hai biến giống nhau.
3. Không một hội nào của tuyến chứa một biến cùng với phủ định của biến đó.
4. Biến x_i hoặc $\overline{x_i}$ có mặt trong mỗi hội của dạng chuẩn tuyến (với $i = 1, 2, \dots, n$).

6.1.4/ Các ví dụ :

□ Ví dụ 1 :

Cho công thức $F(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$. Tìm dạng chuẩn tuyến hoàn toàn của $F(x_1, x_2)$?

Giải

- Lập bảng chân trị của công thức $F(x_1, x_2)$

x_1	x_2	$F(x_1x_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Ta có : $F(1, 1) = F(0, 1) = F(0, 0) = 1$

- Vậy ta có dạng chuẩn tuyển hoàn toàn của công thức :

$$F(x_1, x_2) = x_1^1x_2^1 \vee x_1^0x_2^1 \vee x_1^0x_2^0$$

$$F(x_1, x_2) = x_1x_2 \vee \overline{x_1}x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

□ Ví dụ 2 :

Cho công thức $F(x_1, x_2) = x_1 \Leftrightarrow x_2$. Tìm dạng chuẩn tuyển hoàn toàn của công thức đã cho ?

Giải

- Lập bảng chân trị của công thức $F(x_1, x_2)$:

x_1	x_2	$F(x_1x_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Ta có : $F(1, 1) = F(0, 0) = 1$

- Vậy dạng chuẩn tuyển hoàn toàn của công thức $F(x_1, x_2)$ là:

$$F(x_1, x_2) = x_1^1x_2^1 \vee x_1^0x_2^0 = x_1x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

□ Ví dụ 3 :

Cho công thức $G(x_1, x_2) = x_1 \cdot \overline{x_2} \Rightarrow (\overline{x_1} \Rightarrow x_2)$. Tìm dạng chuẩn tuyển hoàn toàn của công thức đã cho ?

Giải

- Lập bảng chân trị của công thức $G(x_1, x_2)$:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \Rightarrow x_2$	$G(x_1, x_2)$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1

- Ta có : $G(1,1) = G(1, 0) = G(0, 1) = G(0, 0) = 1$

- Vậy dạng chuẩn tuyến hoàn toàn của công thức $G(x_1, x_2)$ là

$$\begin{aligned}
 G(x_1, x_2) &= x_1^1 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^0 x_2^0 \\
 &= x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_2}
 \end{aligned}$$

□ Ví dụ 4 :

Cho công thức $R(x_1, x_2, x_3)$ xác định bằng bảng chân trị sau đây .Hãy tìm dạng chuẩn tuyến hoàn của công thức $R(x_1, x_2, x_3)$?

Giải

Từ bảng chân trị :

x_1	x_2	x_3	$R(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Ta có : $R(1,1,1) = R(1,0,1) = R(1,0,0) = R(0,0,1) = 1$

Vậy dạng chuẩn tuyến hoàn toàn của $R(x_1, x_2, x_3)$ là :

$$R(x_1, x_2, x_3) = x_1^1 x_2^1 x_3^1 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^0 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1 \\ \Rightarrow R(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3$$

□ **Nhận xét :** Một công thức không đồng nhất sai có thể có nhiều dạng chuẩn tuyến khác nhau, nhưng chỉ có một và chỉ một dạng chuẩn tuyến hoàn toàn.

6.2 DẠNG CHUẨN HỘI HOÀN TOÀN

6.2.1. Định lý: Mọi hàm logic hai trị $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không đồng nhất đúng đều có thể biểu diễn được dưới dạng :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge \left(\overline{x_1^{a_1}} \vee \overline{x_2^{a_2}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{a_n}} \right);$$

theo mọi bộ giá trị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của các biến để sơ cấp $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho :

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Định lý này được suy ra từ các định lý và hệ quả của Phần 6.1.1. và 6.1.2.

6.2.2. Định nghĩa : Dạng chuẩn hội hoàn toàn của công thức không đồng nhất đúng $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là dạng chuẩn hội thoả mãn :

1. Trong biểu diễn không có hai hội nào giống nhau.
2. Trong mỗi một tuyến sơ cấp của hội không có hai biến sơ cấp nào giống nhau.
3. Không một tuyến nào của hội chứa một biến cùng với phủ định của biến đó.
4. Biến x_i hoặc phủ định $\overline{x_i}$ có mặt trong mỗi tuyến của hội với : $i = 1, 2, \dots, n$

6.2.3. Các ví dụ :

□ Ví dụ 1 :

Tìm dạng chuẩn hội hoàn toàn của công thức :

$$F(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$$

Giải

- Lập bảng chân trị của công thức $F(x_1, x_2)$:

x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- Nhận thấy : $F(1 ; 0) = F(0 ; 1) = 0$

- Dạng chuẩn hội hoàn toàn của công thức $F(x_1 ; x_2)$ là

$$F(x_1 ; x_2) = (\overline{x_1^1} \vee \overline{x_2^0})(\overline{x_1^0} \vee \overline{x_2^1})$$

$$\Rightarrow F(x_1 ; x_2) = (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2})$$

□ Ví dụ 2 :

Tìm dạng chuẩn hội hoàn toàn của công thức :

$$G(x_1 ; x_2) = x_1 \oplus x_2$$

Giải

- Lập bảng chân trị của công thức $G(x_1 ; x_2)$:

x_1	x_2	$G(x_1; x_2)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- Nhận thấy : $G(1 ; 1) = 0 = G(0 ; 0)$
- Vậy dạng chuẩn hội hoàn toàn của công thức $G(x_1, x_2)$ là :

$$G(x_1 ; x_2) = (\overline{x_1}^1 \vee \overline{x_2}^1) (\overline{x_1}^0 \vee \overline{x_2}^0)$$

$$\Rightarrow G(x_1 ; x_2) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) (x_1 \vee x_2)$$

□ Ví dụ 3 :

Tìm dạng chuẩn hội hoàn toàn của công thức :

$R(x_1 ; x_2 ; x_3)$ cho bởi bảng chân trị trong Ví dụ 4 của Phần 6.1.4. ?

Giải

Dựa vào bảng chân trị ta có :

$$R(1,1,0) = R(0,1,1) = R(0,1,0) = R(0,0,0) = 0$$

Do đó dạng chuẩn hội hoàn toàn của công thức $R(x_1, x_2, x_3)$ là

$$R(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1}^1 \vee \overline{x_2}^1 \vee \overline{x_3}^0) (\overline{x_1}^0 \vee \overline{x_2}^1 \vee \overline{x_3}^1) \cdot (\overline{x_1}^0 \vee \overline{x_2}^1 \vee \overline{x_3}^0) (\overline{x_1}^0 \vee \overline{x_2}^0 \vee \overline{x_3}^0)$$

$$\Rightarrow R(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

§7 KHÁI NIỆM VỀ TÍNH ĐẦY ĐỦ CỦA MỘT HỆ CÁC PHÉP TOÁN LOGIC

7.1 ĐỊNH NGHĨA

Hệ thống Σ gồm các phép toán logic được gọi là một hệ đầy đủ nếu mọi hàm $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đều có thể viết được dưới dạng một công thức chỉ chứa các phép toán có trong hệ Σ .

7.2 CÁC VÍ DỤ

□ Ví dụ 1 :

Hệ $\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, -\}$ là một hệ đầy đủ. Thật vậy, theo hệ quả của định lý 6.1.2 : Một hàm $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bất kỳ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một công thức chỉ chứa các phép toán logic $(\vee, \wedge, -)$.

□ Ví dụ 2 :

Hệ $\Sigma_1 = \{\wedge, -\}$ và $\Sigma_2 = \{\vee, -\}$ là các hệ đầy đủ.

Thật vậy, vì hệ Σ_0 là hệ đầy đủ và : $x \vee y = \overline{\overline{x \wedge y}}$

$$x \wedge y = \overline{\overline{x \vee y}}$$

Nên suy ra Σ_1 và Σ_2 là các hệ đầy đủ.

□ Ví dụ 3 :

Hệ $\Sigma_3 = \{\wedge, \oplus, 1\}$ là một hệ đầy đủ. Thật vậy do hệ Σ_1 đầy đủ và nhờ công thức $x \oplus 1 = \overline{x}$, nên một trong hàm bất kỳ $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đều biểu diễn được bằng công thức chỉ chứa hai phép toán $\wedge, +$ và hằng 1

□ Áp dụng : Hãy biểu diễn các công thức sau đây trong hệ Σ_3

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x_1, x_2) &= x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \wedge x_2}} \\ &= \overline{(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 \\ &= (x_1 x_2 \oplus x_1 1 \oplus x_2 1 \oplus 1 \oplus 1.1) \oplus 1 \\ &= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus (1 \oplus 1) \\ &= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 0 \\ &= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } F(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$$

$$\text{b) } G(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

Áp dụng câu a , ta có :

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= (x_1 x_2)(\overline{x_1} \overline{x_2}) \oplus x_1 x_2 \oplus \overline{x_1} \overline{x_2} \\ &= 0 \oplus x_1 x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \\ &= x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \\ &= 0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \end{aligned}$$

Vậy : $G(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$

$$c) R(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_1 x_3)$$

Trước tiên ta rút gọn :

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_1)(\overline{x_2} \vee x_3) \\ \Rightarrow R(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_1 \vee x_2 \overline{x_2} \vee x_2 x_1)(\overline{x_2} \vee x_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(x_1, x_2, x_3) = x_1(\overline{x_2} \vee x_3)$$

$$\Rightarrow R(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} x_3 = x_1(x_2 \overline{x_3} \oplus 1)$$

$$\Rightarrow R(x_1, x_2, x_3) = x_1[x_2(x_3 \oplus 1) \oplus 1] = x_1(x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus 1)$$

$$\Rightarrow R(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1$$

$$\begin{aligned} d) H(x_1, x_2) &= x_1 \Rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \\ &= \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1(x_2 \oplus 1)} = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus 1 \end{aligned}$$

Vậy : $H(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$

7.3 ĐA THỨC JEGALKIN

7.3.1. Đơn thức : Một hằng (0, 1) hoặc là một hội của một số biến trong đó không có biến nào giống nhau được gọi là đơn thức

□ Ví dụ : 0, 1, x, xy, xyz là các đơn thức .

7.3.2. Đa thức Jegalkin : Một tổng logic (+) của các đơn thức từng cặp khác nhau được gọi là một đa thức Jegalkin

$$\text{Chẳng hạn : } F(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1$$

$$H(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$$

7.3.3. DL : Mọi hàm đại số logic $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức Jegalkin .

BÀI TẬP LOGIC Chương 1

Bài 1

Chứng minh các hệ thức sau :

$$1/ x \Rightarrow y = xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$2/ (x \Rightarrow y) \Rightarrow y = x \vee y$$

$$3/ (x \vee y) (x \vee \bar{y}) = x$$

$$4/ x(\bar{x} \vee y) = xy$$

$$5/ \overline{xy} \Rightarrow (\bar{y} \Rightarrow x) = \overline{x \Rightarrow y} \vee x \vee y$$

$$6/ xy \vee x\bar{y} = x$$

Hướng dẫn

$$1/ \text{Biến đổi : VP} = (x \vee \bar{x})y \vee \bar{x} \cdot \bar{y} = y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$= (y \vee \bar{x})(y \vee \bar{y}) = \bar{x} \vee y = x \Rightarrow y$$

$$2/ \text{Biến đổi vế trái bằng cách dùng công thức : } x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$$

$$3/ (x \vee y) (x \vee \bar{y}) = x \vee y \cdot \bar{y} = x$$

$$4/ \text{Biến đổi vế trái về vế phải}$$

$$5/ \text{Biến đổi đồng thời cả 2 vế :}$$

$$\text{VP} = \overline{\bar{x} \vee y \vee x \vee y} = x \cdot \bar{y} \vee x \vee y$$

$$\text{VT} = x \cdot \bar{y} \vee (y \vee x)$$

Từ đó suy ra điều chứng minh

Bài 2

Rút gọn các công thức sau

$$1/ A = x \vee xy \vee yz \vee \bar{x}z$$

$$2/ B = (x \vee y) (\bar{x} \cdot \bar{y} \vee z) \vee \bar{z} \vee (x \vee y) (s \vee t)$$

$$3/ C = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

Hướng dẫn

$$1/ \text{Áp dụng kết quả : } x \vee xy = x$$

$$\Rightarrow A = x \vee yz \vee \bar{x} \cdot z = (x \vee \bar{x})(x \vee z) \vee yz$$

$$\begin{aligned}
 &= x \vee z \vee yz = x \vee z \\
 2/ B &= (x \vee y)(\bar{x} \cdot \bar{y} \vee z \vee s \vee t) \vee \bar{z} \\
 &= (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \cdot \bar{y} \vee z \vee s \vee t \vee \bar{z}) = x \vee y \vee \bar{z} \\
 3/ C &= (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z) \\
 &= (x \vee (y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z}))(\bar{x} \vee y \vee z) \\
 &= (x \vee (y \cdot \bar{y}) \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z) \\
 &= (x \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z) \\
 &= xy \vee xz \vee \bar{z} \cdot \bar{x} \vee \bar{z} \cdot y
 \end{aligned}$$

Bài 3

Đưa vào các công thức sau đây về hệ Σ_0

$$\begin{aligned}
 1/ A &= \overline{x+y} \Rightarrow (x \Leftrightarrow y) \\
 2/ B &= (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow \bar{z}) \Rightarrow (z \Rightarrow \bar{x}) \\
 3/ C &= (x \Leftrightarrow y)(\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}) \Rightarrow (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})
 \end{aligned}$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned}
 1/ A &= (x+y) \vee (x \Leftrightarrow y) \\
 &= x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \vee (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \\
 &= x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee y \cdot x
 \end{aligned}$$

2/ và 3/ làm tương tự

Bài 4

Đưa các công thức sau đây về hệ Σ_1

$$\begin{aligned}
 1/ D &= x \vee y \Rightarrow (\bar{x} \Rightarrow z) & 2/ E &= (x \Leftrightarrow y)x \\
 3/ F &= \bar{x}y \Leftrightarrow x \cdot \bar{y}
 \end{aligned}$$

Hướng dẫn

$$2/ E = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x)x = \overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot x} \cdot x$$

1/ và 3/ làm tương tự

Bài 5

Đưa các công thức sau đây về hệ Σ_2

$$\begin{aligned}
 1/ G &= (x \Rightarrow z) \Rightarrow yz & 2/ H &= \overline{x \Rightarrow y} \vee (\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \\
 3/ R &= (x \Leftrightarrow y) \vee x & 4/ E &= (x \Leftrightarrow y)x
 \end{aligned}$$

Hướng dẫn

$$4/ E = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x)x = (\bar{x}\bar{x} \vee xy)(x \vee \bar{y})$$

$$= xy(x \vee \bar{y}) = xyx \vee xy\bar{y} = xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$$

Làm tương tự cho các câu 1,2,3

Bài 6 :

Tìm công thức đối ngẫu của các công thức :

$$1/ A = x \vee y \Rightarrow (\bar{x} \Rightarrow z)$$

$$2/ B = (x \Leftrightarrow y) \vee x$$

$$3/ C = \overline{x \Rightarrow y} \vee (\bar{x} \Rightarrow \bar{y})$$

$$4/ D = (xy \vee \overline{xy})z \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y).\bar{z}$$

Hướng dẫn

Trước hết cần rút gọn, đưa về công thức chỉ chứa các phép toán hội, tuyển, phủ định

$$D = z \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y)\bar{z} = (z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y)(z \vee \bar{z}) = z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$$

$\Rightarrow$ Công thức đối ngẫu

$$D^* = \overline{z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y}$$

Các câu 1, 2, 3 làm tương tự

Bài 7

Đưa các công thức sau đây về dạng chuẩn tuyển và dạng chuẩn hội

$$1/ A = x \vee y \Rightarrow \bar{x}.y$$

$$2/ B = \overline{xy} \vee (x \Rightarrow y)$$

$$3/ C = (x \vee y)z \Rightarrow \bar{x} \vee z$$

$$4/ D = x(x \Rightarrow y) \Rightarrow y$$

$$5/ E = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow z)$$

Hướng dẫn

$$A = \overline{x \vee y} \vee \bar{x}.y = \bar{x}.\bar{y} \vee \bar{x}.y$$

Ta có công thức $\bar{x}.\bar{y} \vee \bar{x}.y$ là dạng chuẩn tuyển của A

Xét tiếp : $A = \bar{x}(\bar{y} \vee y) = (\bar{x} \vee \bar{x})(\bar{y} \vee y)$ là dạng chuẩn hội của công thức A

Làm tương tự cho các câu 2, 3, 4, 5

Bài 8

Đưa các công thức sau đây về dạng chuẩn hội , từ đó suy ra đó là các công thức hằng đúng

1/ $A = (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((z \Rightarrow y) \Rightarrow (x \vee z \Rightarrow y))$

2/ $B = (xy \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$

3/ $C = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} A &= \overline{x \vee y \vee z \vee y \vee x \vee z \vee y} \\ &= x \cdot \bar{y} \vee z \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot \bar{z} \vee y = (y \vee x)(y \vee \bar{y}) \vee z \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot \bar{z} \\ &= (y \vee z \cdot \bar{y}) \vee (x \vee \bar{x} \cdot \bar{z}) = y \vee z \vee x \vee \bar{z} . \text{ Đây chính là } \end{aligned}$$

dạng chuẩn hội của A chứa biến z cùng với biến phủ định của nó . Vậy công thức A là hằng đúng .

Chứng minh tương tự cho các công thức B và C

Bài 9

Đưa các công thức sau đây về dạng chuẩn hội hoàn toàn .

1/ $A = x + y + z$

2/ $B = (x_1 \Rightarrow x_2 x_3) \Rightarrow x_2 \vee x_1$

3/ $C = x_1 x_3 \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot x_2$

Hướng dẫn

1/ Viết $A = (x \oplus y) + z$. Lập bảng chân trị

x	y	z	$x \oplus y$	$x \oplus y \oplus z$
1	1	1	0	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	0	1	1

0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Dạng chuẩn tuyến hoàn toàn

Ta có : $A(1,1,1) = A(1,0,0) = A(0,1,0) = A(0,0,1) = 1$

$$\Rightarrow A = x y z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$$

Dạng chuẩn hội hoàn toàn

Ta có : $A(1,1,0) = A(1,0,1) = A(0,1,1) = A(0,0,0) = 0$

$$\Rightarrow A = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)$$

Làm tương tự ta có

2/ Dạng chuẩn hội hoàn toàn

$$B = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

Dạng chuẩn hội hoàn toàn : $B = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

3/ Dạng chuẩn tuyến hoàn toàn

$$C = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$$

Dạng chuẩn hội hoàn toàn : $C = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

Bài 10

Tìm dạng chuẩn tuyến hoàn toàn và dạng chuẩn hội hoàn toàn của các công thức

1/ $(x \vee y)z \vee (x \vee \bar{z})(y \vee z)$

2/ $x \vee y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

3/ $\overline{x \cdot y} \Rightarrow (\bar{y} \Rightarrow x)$

4/ $\overline{x \Rightarrow y} \vee x \vee y$

5/ $(x \Rightarrow z)yz$

6/ $(x \Leftrightarrow y)x$

7/ $\bar{x} \cdot y \Rightarrow \bar{y} \cdot x$

Hướng dẫn

Đối với mỗi công thức, nếu rút gọn được mà không làm mất biến sơ cấp thì cần rút gọn về dạng đơn giản trước khi lập bảng chân trị để tìm dạng chuẩn tuyến và chuẩn hội hoàn toàn

Bài 11

Biểu diễn hàm $F(x_1, x_2, x_3)$ thành một công thức cho biết hàm này nhận giá trị 1 khi và chỉ khi hai trong ba biến nhận giá trị 1, biến còn lại nhận giá trị 0

Hướng dẫn

Lập bảng chân trị với biểu diễn F bằng một trong hai dạng : hoặc là dạng chuẩn tuyến hoàn toàn hoặc , hoặc là dạng chuẩn hội hoàn toàn

Đáp số : $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3$

Bài 12

Biểu diễn các hàm logic hai trị sau đây bằng một công thức

$$1/ F(1,1,0) = F(0,1,1) = F(0,1,0) = F(0,0,0) = 0$$

$$2/ G(1,1,1) = G(1,0,0) = G(0,1,0) = G(0,0,1) = 1$$

Bài 13

Biểu diễn hàm $F(x_1, x_2, x_3)$ thành một công thức cho biết hàm này nhận giá trị 1 khi và chỉ khi một trong ba biến nhận giá trị 1, hai biến còn lại nhận giá trị 0

Hướng dẫn

Lập bảng giá trị chân lý . Biểu diễn hàm F dưới dạng chuẩn hội hoàn toàn

Bài 14

Chứng minh rằng hệ hàm $\Sigma = \{\vee, \oplus, \Rightarrow\}$ là một hệ hàm đầy đủ

Hướng dẫn

Chú ý : $\overline{x} = x \oplus 1 = x \oplus (x \Rightarrow x)$

$$xy = \overline{x \Rightarrow y} = (x \Rightarrow \overline{y}) \oplus 1 = (x \Rightarrow (y \oplus (y \Rightarrow y))) \oplus (x \Rightarrow x)$$

Bài 15

Biểu diễn các công thức sau đây dưới dạng đa thức Jegalkin:

$$\begin{aligned} 1/ F &= (x \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_2 & 2/ G &= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \\ 3/ A &= x_1 \vee x_2 & 4/ B &= (x_1 \vee x_2) (\overline{x_2} \vee x_1 x_3) \end{aligned}$$

Bài 16

Giải phương trình logic (ẩn là X) : $\overline{\overline{X} \vee \overline{A} \vee \overline{X} \vee \overline{A}} = B$

Hướng dẫn

Phương trình 1 tương đương với :

$$\overline{X} \cdot \overline{A} \vee \overline{X} \cdot A = B$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} (\overline{A} \vee A) = B \Leftrightarrow \overline{X} = B$$

$$\text{Vậy : } X = \overline{B}$$

Bài 17

Cho dãy biến mệnh đề sơ cấp (A_n) được xác định bằng hệ thức truy toán sau đây : $A_n = A_{n-1} (A_{n-2} \vee A_{n-3})$ với $n > 3$. Với A_1, A_2, A_3 được xác định như sau :

A_1 và A_3 là mệnh đề đúng, còn A_2 là mệnh đề sai. Hỏi :

1/ Mệnh đề A_n được biểu diễn qua A_1, A_2, A_3 như thế nào ?

2/ Xác định giá trị chân lý của mệnh đề A_n .

Hướng dẫn

Nhận xét : $A_n = A_3 (A_2 \vee A_1)$ là mệnh đề đúng

$$\text{Xét : } A_5 = A_4 (A_3 \vee A_2) = (A_3 (A_2 \vee A_1)) (A_3 \vee A_2)$$

$$= A_3 (A_2 \vee A_1 A_3) = A_3 A_2 \vee A_1 A_3 = A_3 (A_2 \vee A_1) = A_4$$

Tương tự ta có : $A_6 = A_4$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp Toán học $A_n = A_4, \forall n > 3$

Thật vậy với : $n = 4, n = 5, n = 6 \Rightarrow$ khẳng định đúng với $A_{n-2},$

A_{n-1}, A_n

Xét : $A_{n+1} = A_n (A_{n-1} \vee A_{n-2}) = A_4(A_4 \vee A_4) = A_4$

Vậy : $A_n = A_4$ với mọi $n > 3$

$\Rightarrow A_n = A_3(A_2 \vee A_1)$ với mọi $n > 3$

1/ Với mọi $n > 3$ ta có A_n đúng

Bài 18

Trong một cuộc thử trí thông minh có ba học sinh Cúc, Mai và Lan thông minh ngang nhau. Ban giám khảo có 5 chiếc nón. trong đó có 2 nón xanh và 3 nón đỏ, trong phòng tối người ta đội cho 3 học sinh mỗi người một nón, còn lại thì cất đi. Các học sinh được yêu cầu nói màu nón của mình đang đội. Bạn Cúc và bạn Lan không đoán được màu nón của mình. Lúc đó bạn Mai đã đoán đúng được màu nón của mình. Hỏi bạn Mai đội nón màu gì và bạn mai đã suy luận như thế nào ?

Hướng dẫn

Gọi : $\checkmark A$ là mệnh đề : Cúc đội nón xanh

$\checkmark B$ là mệnh đề : Lan đội nón xanh

$\checkmark C$ là mệnh đề : Mai đội nón xanh

Ta có : $ABC = 0$

Bởi vì Cúc không đoán được màu nón của mình, nên chúng ta có $BC =$

Bởi vì Lan không đoán được màu nón của mình, nên chúng ta có $C = 0 \Rightarrow \bar{C} = 1 \Rightarrow$ Mai đội nón màu đỏ

Bài 19

Ba tên Cam ; Quýt và Cuội bị tố cáo là đã tham gia vào một vụ cướp nhà băng. Bọn chúng lẩn trốn bằng xe riêng. Trong một cuộc điều tra :

- Tên Cam khai : Bọn chúng đi trên chiếc TOYOTA màu xanh
- Tên Quýt khai : Đó là chiếc MERCEDES màu đen.
- Riêng tên Cuội thì cam đoan rằng : Chúng bỏ chạy trên chiếc xe FORD không phải màu xanh.

Giả sử rằng , trong các lời khai trên đây của mỗi tên chỉ đúng : hoặc là màu xe , hoặc là nhãn hiệu Ôtô . Hỏi chiếc Ôtô đó màu gì của hãng xe nào ?

Hướng dẫn

Chúng ta xét các mệnh đề sơ cấp sau đây :

- ✓ A : Ôtô màu Xanh
- ✓ B : Ôtô hãng TOYOTA
- ✓ C : Ôtô màu Đen
- ✓ D : Ôtô hãng MERCEDES
- ✓ E : Ôtô hãng FORD

Từ giả thiết ta suy ra : $A \vee B = 1$, $C \vee D = 1$, $\bar{A} \vee E = 1$

$$\Rightarrow (A \vee B)(C \vee D)(\bar{A} \vee E) = 1$$

$$\Rightarrow AC\bar{A} \vee ACE \vee BC\bar{A} \vee BCE \vee BD\bar{A} \vee BDE \vee ADE \vee AD\bar{A} = 1$$

Bởi vì : $AC\bar{A} = 0$, $ACE = 0$, $BCE = 0$, $AD\bar{A} = 0$, $ADE = 0$, $BD\bar{A} = 0$, $BDE = 0$

$$\Rightarrow BC\bar{A} = 1 \Rightarrow B = 1, C = 1, \bar{A} = 1$$

$\Rightarrow$ Ôtô hãng TOYOTA màu đen .

Bài 20

Trong vụ cướp nhà băng , một trong ba tên Cam , Quýt , Cuội là kẻ chủ mưu . Trong cuộc điều tra , bọn chúng đã khai như sau :

- Cam khẳng định : **Hắn không làm điều này , chính cuội là kẻ chủ mưu**
- Quýt thì khai : **Cuội không có tội , Chính Cam chủ mưu .**
- Cuội vào hùa theo : **Tôi không làm điều này , Quýt cũng không làm điều đó**

Theo điều tra riêng , toà biết được rằng ; trong 3 lời khai trên : Một tên 2 lần nói dối , một tên 2 lần nói đúng , tên

còn lại 1 lần nói dối 1 lần nói đúng .Bạn hãy giúp toà làm rõ : Ai là kẻ chủ mưu ?

Hướng dẫn

Đưa vào các mệnh đề sơ cấp sau đây

✓ A: Cam chủ mưu

✓ B: Quýt chủ mưu

✓ C: Cuội chủ mưu

Bằng cách lập bảng , xét các trường hợp có thể xảy ra :

	Hai lần nói dối	Một lần nói dối	Hai lần nói thật
1	Cam	Quýt	Cuội
2	Cam	Cuội	Quýt
3	Quýt	Cuội	Cam
4	Quýt	Cam	Cuội
5	Cuội	Cam	Quýt
6	Cuội	Quýt	Cam

Bằng phép loại trừ , ta thấy chỉ có trường hợp thứ 3 là hợp lý.

Vậy Cuội là kẻ chủ mưu vụ cướp

Bài 21

Ba phát súng được bắn vào mục tiêu .Gọi các mệnh đề sơ cấp :

$$A_k = \{ \text{Phát thứ } k \text{ trúng đích} \} \text{ với } k = 1, 2, 3$$

Các mệnh đề phức hợp sau đây có nghĩa là gì

$$1/ A_1 \vee A_2 \vee A_3$$

$$2/ A_1 A_2 A_3$$

$$3/ A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \vee \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \vee \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$$

$$4/ A_1 A_2 \vee \overline{A_1} A_2 A_3 \vee A_1 \overline{A_2} A_3$$

Hướng dẫn

- 1/ Có ít nhất một phát trúng đích
- 2/ Cả ba phát trúng đích
- 3/ Một và chỉ một trúng đích
- 4/ Có ít nhất hai phát trúng đích

Bài 22

Sau khi làm bài kiểm tra , trên đường về nhà .

- *Bạn An nói : Mình được điểm 10 .*
- *Bạn Bình khẳng định mình được 6 .*
- *Còn bạn Cúc về không tự tin : Mình không được điểm 10*

Sau khi thấy giáo trả bài : Một trong ba bạn được 6 điểm , một bạn được 10 điểm . So với dự đoán lúc đầu thì có hai người đúng là và một người sai . Hỏi điểm bài kiểm tra của mỗi bạn ?

Hướng dẫn

Có thể lập bảng sau đây :

	An	Bình	Cúc
1	10	6	8
2	10	8	6
3	6	8	10
4	6	10	8
5	8	6	10
6	8	10	6

Chỉ có trường hợp thứ hai là hợp lý

Bài 23

Bốn đội bóng A , B , C , D tham gia vào một cuộc thi đấu để xếp hạng .

- *Một người dự đoán : B hạng nhì , C hạng ba*

• Người thứ hai dự đoán : A hạng nhì , C hạng tư

• Người thứ ba dự đoán : B hạng nhất , D hạng nhì

Kết quả xếp loại cho thấy mỗi người có một phần đúng và một phần sai . Vậy kết quả xếp hạng như thế nào ?

Hướng dẫn

Gọi : $\checkmark x_1$ là mệnh đề : B hạng nhì

$\checkmark x_2$ là mệnh đề : C hạng ba

$\checkmark x_3$ là mệnh đề : A hạng nhì

$\checkmark x_4$ là mệnh đề : C hạng tư

$\checkmark x_5$ là mệnh đề : B hạng nhất

$\checkmark x_6$ là mệnh đề : D hạng nhì

Từ giả thiết ta có : $x_1 \vee x_2 = 1$, $x_3 \vee x_4 = 1$, $x_5 \vee x_6 = 1$

$$\Rightarrow (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)(x_5 \vee x_6) = 1$$

Khai triển ra và rút gọn lại các hội của tuyển có giá trị 1, ta được : $x_2x_3x_5 = 1$

$\Rightarrow x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_5 = 1 \Rightarrow$ B hạng nhất , A hạng nhì , C hạng ba và D hạng tư .

Bài 24 (THI HSG TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 8 1963)

Năm đội bóng A ; B ; C ; D ; E tham gia vào một cuộc thi đấu để xếp hạng. Bạn An dự đoán kết quả theo thứ tự là A,B ,C,D,E . Bạn Bình dự đoán kết quả sẽ là D, A , E, C, B . Kết quả thi đấu cho thấy , bạn An đoán sai cả về thứ tự xếp hạng của từng đội , cả về thứ tự của từng cặp liên nhau (ví dụ : C không xếp ngay sau B)

Bạn Bình đoán đúng thứ tự của hai đội và đoán đúng thứ tự của hai cặp liên nhau . Hỏi kết quả thi đấu là như thế nào ?

Hướng dẫn

• Dự đoán của An là : A B C D E

- Dự đoán của Bình là : D A E C B

Nhận thấy , nếu đoán đúng thứ tự liên nhau của 1 cặp đồng thời lại đoán đúng vị trí (thứ tự xếp hạng) của một trong hai đội đó thì cũng biết được vị trí của đội kia .

Do đó , tương tự dự đoán của Bình , hai đội được đoán đúng vị trí thì phải xếp hạng liên nhau , vì nếu giả sử ngược lại , hai đội không đứng liên nhau thì sẽ có tới 3 đội được đoán đúng vị trí .Điều này vô lý vì trái với giả thiết .

Hai đội được đoán đúng vị trí này và xếp hạng liên nhau thì phải là D, A hoặc là CB (bởi vì nếu ngược lại , sẽ có đến 3 đội được đoán đúng vị trí)

Ta xét hai trường hợp

- TH₁ : Thứ tự xếp hạng D nhất A nhì .

Với ba đội còn lại , thứ tự xếp hạng lại có thể là :

✓ Nếu là ECB thì thứ tự xếp hạng sẽ là DAECEB , tức là dự đoán của Bình sẽ đúng hoàn toàn (vô lý) .

✓ Nếu là BEC thì thứ tự xếp hạng sẽ là DABEC , do đó dự đoán của An có phần đúng về thứ tự 2 đội liên nhau (B xếp hạng sau A) : Vô lý

✓ Nếu là CBE thì thứ tự xếp hạng sẽ là DACBE , do đó dự đoán của An có phần đúng (E xếp cuối) vô lý vì trái với giả thiết .

Do đó trường hợp 1 không thể xảy ra

- TH₂ : Thứ tự xếp hạng C thứ tư và B thứ năm bằng cách loại bỏ khả năng , chẳng hạn DAECEB , ta thấy chỉ còn trường hợp EDACB là hợp lý .

Bài 25

Năm người A,B,C,D,E là kí giả hoặc là kẻ buôn gian bán lận bao giờ cũng nói dối như nhau :

1/ D nói E là kí giả

2/ B nói A là nhà buôn

3/ C nói D không phải là nhà buôn

4/ E nói B không phải là ký giả

5/ A nói C và D có nghề nghiệp khác nhau .

Hỏi có bao nhiêu kí giả , bao nhiêu nhà buôn ?

Hướng dẫn

D có thể là ký giả , hoặc có thể là nhà buôn

✓ Nếu D là kí giả : Theo 1 và giả thiết ta có E là ký giả , theo 4 suy ra B là nhà buôn vì B là nhà buôn , nên theo 2 ta có A là ký giả vì A là ký giả , nên theo 5 ta có C và D có nghề nghiệp khác nhau , tức là C là nhà buôn vì C là nhà buôn , nên theo 3 ta suy ra D là nhà buôn . Điều này mâu thuẫn với giả thiết D là kí giả . Vậy trường hợp này không xảy ra

✓ Vì D không là kí giả nên D là nhà buôn theo 3 , suy ra C là nhà buôn cũng theo 1 suy ra E là nhà buôn , cũng theo 1 suy ra E là nhà buôn theo 4 suy ra B là kí giả , theo 2 , suy ra A là nhà buôn .

Vậy B là ký giả . Bốn người còn lại là nhà buôn .

Bài 26 (Thi vào chuyên Toán - Tin học năm 1993 - 1994 ĐHTH Tp HCM)

Bốn bạn nữ Mỹ , Mận , Mai , Mơ đang ở trong một căn phòng của ký túc xá . Một cô đang sửa áo , một cô đang chải đầu , một cô đang viết thư và một cô đang đọc sách . Biết thêm rằng :

- Mỹ không sửa áo và không đọc sách
- Mận không viết thư và không sửa áo
- Nếu Mỹ không viết thư thì Mơ không sửa áo
- Mai không đọc sách và không sửa áo
- Mơ không đọc sách và không viết thư

Hãy nói chính xác , mỗi cô đang làm gì

Hướng dẫn

Bằng cách lập bảng , xét các khả năng , ta có :

- ✓ Cô Mỹ đang viết thư
- ✓ Cô Mận đang đọc sách
- ✓ Cô Mai đang chải đầu
- ✓ Cô Mơ đang sửa áo

Bài 27

Ba cô Hồng , Bích , Hoàng mặc áo màu đỏ , xanh vàng cùng đến một buổi dạ hội . Ba cô nhìn ác của nhau và cô mặc áo xanh nói với cô Hoàng : *Lạ không ! Chúng ta chẳng có ai mặc áo đúng với màu tên mình . Hỏi màu áo mỗi cô đã mặc ?*

Hướng dẫn

Bằng cách lập bảng , dùng phương pháp loại dần , ta có kết quả : Cô Hồng mặc áo xanh

Cô Bích mặc áo vàng

Cô Hoàng mặc áo đỏ

Bài 28

Trong trại hè Đà Lạt , có năm em tên là : Hà , Trang , Dũng , Chí và Bằng sống ở Hà Nội , Huế , Đà Nẵng , Buôn Mê Thuột , Thành phố Hồ Chí Minh , ngồi quanh một bàn tròn , chuyện trò vui vẻ

Em ở Hà Nội ngồi giữa em ở Buôn Mê Thuột và em Bằng . Em ở Huế ngồi giữa em Hà và em Trang đồng thời trước mặt em là Dũng và em sống ở Thành phố Hồ Chí Minh

Em Chí chưa bao giờ đến Huế . Em Hà đã có dịp đến thăm Đà Nẵng , nhưng chưa đến Buôn Mê Thuột và em Trang thì vẫn thường viết thư cho nhau . Hỏi ai sống ở thành phố nào ?

Hướng dẫn

Bằng cách lập bảng , sử dụng phương pháp loại dần

Ta có : Em Bằng sống ở Huế

Em Hà sống ở Buôn Mê Thuột

Em Trang ở Đà Nẵng

Em Chí ở Thành phố Hồ Chí Minh

Bài 29 (THI HSG TP HỒ CHÍ MINH 1992)

Có 8 bạn đi chơi với nhau . Biết rằng , trong bất cứ nhóm 3 người nào của 8 bạn đó cũng có một người quen với 2 người kia . Chứng minh rằng có thể xếp họ đi chơi trên 4 xe , mỗi xe có 2 người quen nhau .

Hướng dẫn

Lấy một nhóm 3 bạn bất kỳ . theo giả thiết có 2 người quen nhau , ta xếp 2 bạn này đi cùng một xe .

Lại lấy một nhóm 3 bạn bất kỳ trong 6 người còn lại , theo giả thiết có 2 người quen nhau nên ta xếp 2 bạn này đi cùng 1 xe . Còn lại 4 bạn , Chẳng hạn là A , B , C , D

Nếu cả bốn bạn đều quen nhau thì xếp thế nào cũng thỏa mãn

Nếu có hai bạn không quen nhau , chẳng hạn A không quen B . Khi đó theo giả thiết , với nhóm 3 bạn A,B,C thì C phải quen cả A và B , với nhóm 3 bạn A, B, C thì D phải quen cả A và B

Khi đó có thể xếp A và C đi một xe ; B và D đi một xe

Bài 30 (THI HSG MOSCOW 1972)

Trong một hội nghị quốc tế , có 1000 đại biểu từ nhiều nước đến dự . Mỗi đại biểu đều biết một số thứ tiếng . Bất kỳ 1 nhóm 3 đại biểu nào cũng có 1 người có thể nói chuyện với 2 người còn lại Chứng minh rằng : Có thể

xếp các đại biểu vào ở 500 phòng , một phòng 2 người mà họ có thể nói chuyện với nhau được

Hướng dẫn

Giải tương tự như Bài 29

Bài 31 (THI HSG MOSCOW 1980)

Có 12 vận động viên thi đấu quần vợt . Mỗi người đấu một trận với tất cả những người khác . kết quả của trận đấu chỉ có thắng - thua không có hoà . Biết rằng , không có cây vợt nào thắng tất cả các trận . Chứng minh rằng : phải có 3 cây vợt A, B, C mà A thắng B, B thắng C và C thắng A .

Hướng dẫn

Giả sử A là một trong những người có nhiều trận thắng nhất
Vì không ai thắng tất cả các trận nên ít nhất có 1 người , chẳng hạn là C thắng A

Giả sử B là một trong những người thua A khi đó phải có là C thua B , bởi vì ngược lại thì C sẽ có nhiều trận thắng hơn A vô lí vì trái với giả sử .

Vậy phải có 3 người A, B, C thoả mãn

Bài 32

Có 8 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn , mỗi bạn phải đấu một trận với các bạn còn lại . Chứng minh rằng bao giờ cũng sắp xếp được cả 8 bạn thành một hàng dọc sao cho , người đứng trước thắng người đứng kế sau .

Hướng dẫn

Xét tất cả các cách sắp xếp một số bạn thành hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kế sau .

Cách sắp xếp này bao giờ cũng tồn tại và do cách sắp xếp chỉ là hữu hạn nên phải chọn được cách sắp xếp có nhiều bạn

nhất và chứng minh cách sắp xếp đó có mặt tất cả 8 bạn học sinh

Thật vậy, giả sử ngược lại, cách sắp xếp này chỉ có k bạn với $k < 8$

Đánh số thứ tự các bạn là: $A_1, A_2, \dots, A_k$

Xét một bạn B không có trong hàng

Theo luật thi đấu, B phải đấu với tất cả $A_1, A_2, \dots, A_k$

Nhận thấy: B không thắng A_1 , vì nếu B thắng A_1 thì khi đó có cách sắp xếp $B, A_1, A_2, \dots, A_k$ gồm $k + 1$ bạn vô lý, vì trái với giả thiết các cách sắp xếp $A_1, A_2, \dots, A_k$ là nhiều học sinh nhất thoả mãn bài ra

Như vậy B phải thua A_1 . Nhận thấy B không thắng A_2 vì nếu ngược lại, ta có cách sắp xếp $A_1, B, A_2, \dots, A_k$ nhiều học sinh hơn giả thiết

Do đó B thua A_2 . lập luận tương tự, ta có B thua A_k , do đó ta có cách sắp xếp $A_1, A_2, \dots, A_k, B$ gồm nhiều học sinh hơn giả sử đầu bài. Vậy $k = 8$

Bài 33

Có 10 người đi họp. Mỗi người quen với ít nhất là 5 người khác. Chứng tỏ rằng, nếu cần sắp xếp 4 người vào một bàn tròn gồm 4 chỗ ngồi thì có thể sắp xếp sao cho người nào cũng ngồi giữa hai người quen của mình.

Hướng dẫn

Nếu cả 10 người đều quen nhau thì sắp xếp thế nào cũng đạt yêu cầu

Giả sử có 2 người A và B không quen nhau trong số 8 người còn lại, A quen ít nhất là 5 người và B quen ít nhất là 5 người, do đó A và B phải quen nhau chung 2 người, Giả sử đó là C và D . Khi đó ta sắp xếp như sau:

- A và B ngồi đối diện

- C và D ngồi đối diện

Bài 34 (THI HSG BA LAN 1966 – 1967)

Trong phòng có 100 người quen với ít nhất là 67 người khác . Chứng minh rằng trong phòng phải có 4 người từng đôi một quen nhau

Hướng dẫn

Xét A là một người bất kì trong phòng . Bởi vì A quen ít là 67 người khác , nên nếu ta mời tất cả những ai không quen A ra ngoài phòng thì số người phải nhiều nhất là : 32 người

Khi đó trong phòng có 68 người gồm A và ít nhất là 67 người

quen A

Gọi B là người khác A trong số 68 người còn lại ở trong phòng . Ta mời tất cả những ai không quen B ra ngoài .

Khi đó trong phòng còn lại ít nhất là : $68 - 32 = 36$ người

Lại gọi C là người khác A và B trong số 36 người còn lại trong phòng .

Lại mời tất cả người không quen C ra ngoài trong phòng còn lại ít nhất là $36 - 32 = 4$ người . Tức là ngoài A , B , C trong phòng còn 1 người là D

Xét 4 người A , B , C , D . Rõ ràng , trong 4 người này , từng đôi một là quen nhau

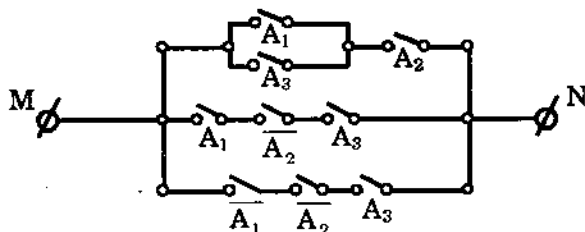
PHỤ LỤC *Chương 1*

Giữa các Đại số logic và Sơ đồ mạng điện có một sự liên hệ được xác lập bằng cách sau đây :

- Mỗi một Contact điện được đặt tương ứng với một mệnh đề .
Nên khoá điện đóng thì ta có mệnh đề đúng , còn khoá điện mở thì nhận được mệnh đề sai
- Trên sơ đồ mạng điện , các cấu tạo (khóa) sẽ được ký hiệu bằng chính các chữ cái tương ứng với các mệnh đề của chúng
- Các cấu tạo nối song song với nhau được đặt tương ứng với tuyển của các mệnh đề
- Các cấu tạo dao mắc nối tiếp với nhau được đặt tương ứng với phép hội các mệnh đề . Nếu hai khóa làm việc thỏa mãn : một trong hai khóa đóng , khóa còn lại mở và ngược lại chúng ta đặt tương ứng với các mệnh đề A và $\bar{A}$.
- Mỗi một sơ đồ mạng điện sẽ được tương ứng với mệnh đề phức hợp , mệnh đề này đúng khi và chỉ khi có dòng điện đi qua mạng

Như vậy chúng ta có thể sử dụng các phương tiện của Đại số logic để nghiên cứu các sơ đồ mạng điện nhằm thu gọn hệ thống các khóa điện mà không làm thay đổi chức năng hoạt động của mạng

□ Ví dụ 1 : Hãy đơn giản sơ đồ mạng điện cho dưới đây

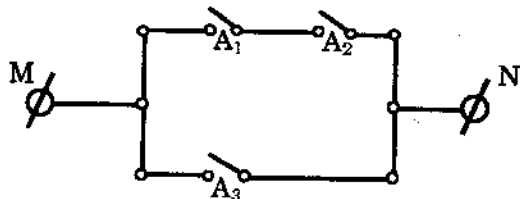


Giải

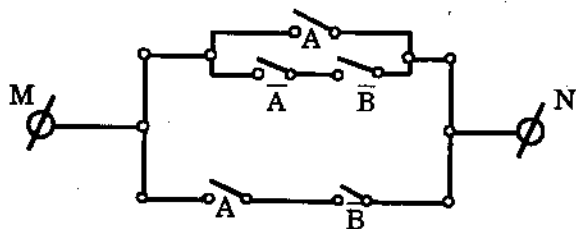
Mạng điện trên đây có thể đặt tương ứng với mệnh đề sau đây :

$$\begin{aligned} & ((A_1 \vee A_3) \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3) \vee (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge A_3) = \\ & = ((A_1 \vee A_3) \wedge A_2) \vee \overline{A_2} \wedge A_3 \wedge (A_1 \vee \overline{A_1}) = \\ & = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_3 \wedge A_2) \vee (\overline{A_2} \wedge A_3) \\ & = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_2 \vee \overline{A_2}) \wedge A_3 = (A_1 \wedge A_2) \vee A_3 \end{aligned}$$

Như vậy mạng điện trên có thể mắc như sau mà không làm thay đổi chức năng hoạt động



□ Ví dụ 2 : Hãy đơn giản sơ đồ mạng điện sau đây :

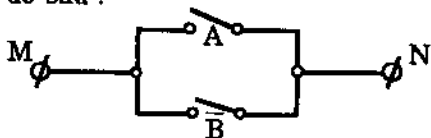


Giải

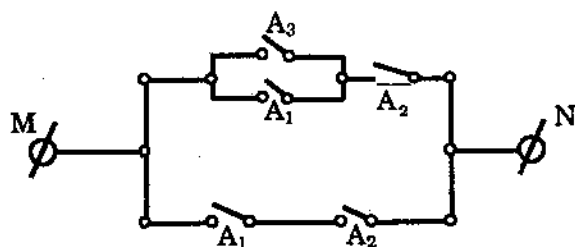
Sơ đồ mạng điện đã cho có thể viết như sau :

$$\begin{aligned} & (A \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})) \vee (A \wedge \overline{B}) = \\ & = A \vee ((\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{B})) = A \vee (\overline{B} \wedge (\overline{A} \vee A)) = A \vee \overline{B} \end{aligned}$$

Ta nhận được sơ đồ sau :



□ Ví dụ 3 : Hãy đơn giản mạng điện sau đây :

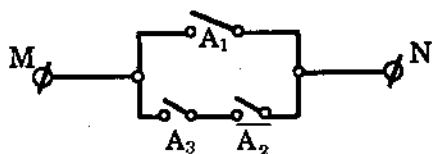


Giải

Sơ đồ mạng điện đã cho có thể viết :

$$\begin{aligned}
 & (A_1 \wedge A_2) \vee ((A_3 \vee A_1) \wedge \overline{A_2}) \\
 &= (A_1 \wedge A_2) \vee ((A_3 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \overline{A_2})) \\
 &= (A_1 \wedge (A_2 \vee \overline{A_2})) \vee (A_3 \wedge \overline{A_2}) = A_1 \vee (A_3 \wedge \overline{A_2})
 \end{aligned}$$

Ta được sơ đồ sau đây có cùng chức năng :



Chương 2: LOGIC VỊ TỬ

§1 HÀM MỆNH ĐỀ (Vị từ)

Mệnh đề không xác định là một câu có chứa biến và không phải là mệnh đề nhưng sẽ trở thành mệnh đề khi ta thay biến bằng một phần tử cụ thể thuộc một tập hợp xác định

Chẳng hạn, mệnh đề không xác định một biến $\{x \text{ là một số nguyên tố}\}$ xác định trên tập hợp các số tự nhiên N

Mệnh đề không xác định: “ phương trình $\sin x = a + b$ vô nghiệm ” là mệnh đề không xác định hai biến a, b xác định trên tập hợp số thực $a, b, \in R$. Các mệnh đề không xác định còn được gọi là các hàm mệnh đề hoặc vị từ

1.1 HÀM MỆNH ĐỀ MỘT BIẾN

Cho tập hợp A khác rỗng.

Ánh xạ: $F: A \longrightarrow \{0;1\}$

$$x \longmapsto F(x)$$

là một hàm mệnh đề một biến xác định trên tập hợp A .

Ký hiệu: $x \in A, F(x)$ hoặc $F(x), x \in A$.

□ Ví dụ: $F(x) = \{x^2 - 3x + 2 = 0\}, x \in R$.

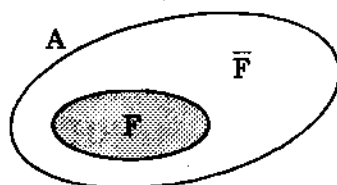
- Phần tử $a \in A$ được gọi là thoả mãn hàm mệnh đề $F(x), x \in A$ nếu $F(a) = 1$

- Phần tử $b \in A$ được gọi là không thoả mãn hàm mệnh đề $F(x), x \in A$ nếu $F(b) = 0$

Ký hiệu tập hợp: $F = \{a \in A : F(a) = 1\}$ được gọi là tập đúng của hàm mệnh đề $F(x)$

Gọi: $\bar{F} = A \setminus F = \{x \in A : F(x) = 0\}$

Ta có biểu đồ :



□ Nhận xét :

Mỗi hàm mệnh đề $F(x)$, $x \in A$ xác định một tập con của tập hợp A là $F = \{x \in A : F(x) = 1\}$ tức là xác định một tính chất nào đó của tập hợp A .

1.2 HÀM MỆNH ĐỀ HAI BIẾN

Cho hai tập hợp khác rỗng A và B

Ánh xạ $F : A \times B \longrightarrow \{0, 1\}$

$$(x, y) \longmapsto F(x, y)$$

được gọi là một hàm mệnh đề hai biến xác định trên các tập hợp A và B .

Ký hiệu : $x \in A, y \in B, F(x, y)$

Phần tử $(a, b) \in A \times B$ sao cho $F(a, b) = 1$ được gọi là thỏa mãn hàm mệnh đề $F(x, y)$

Ta cũng gọi $F = \{(a, b) \in A \times B : F(a, b) = 1\}$ là tập hợp đúng của hàm mệnh đề : $F(x, y), x \in A, y \in B$

Nhận xét : $(a, b) \in F \Leftrightarrow F(a, b) = 1$, do đó hàm mệnh đề $F(x, y)$ trên A và B xác định một tập hợp con của tập tích Decaster $A \times B$ tức là xác định một quan hệ hai ngôi δ trên $A \times B$

Ta có : $a \delta b \Leftrightarrow F(a, b) = 1$

Tương tự ta có khái niệm hàm mệnh đề 3, 4, ..., n biến

□ Ví dụ : $F(x, y) = \{x; y \in M : x < y\}$ với $M = \{3; 4; 5; 6\}$

Khi đó ta có : $F = \{(3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 6)\}$

§2 CÁC PHÉP TOÁN LOGIC TRÊN CÁC HÀM MỆNH ĐỀ

2.1 PHÉP PHỦ ĐỊNH

Cho hàm mệnh đề một biến $F(x)$ xác định trên tập hợp A hàm mệnh đề phủ định của hàm mệnh đề $F(x)$, ký hiệu là $\overline{F(x)}$ cũng xác định trên tập hợp A và nhận giá trị 1 với các phần tử x thuộc A nếu như $F(x)$ nhận giá trị 0.

Như vậy, hàm mệnh đề $F(x)$ phân tập A thành hai tập con:

$$F = \{x \in A : F(x) = 1\}$$

$$\overline{F} = \{x \in A : F(x) = 0\} = \{x \in A : \overline{F(x)} = 1\}$$

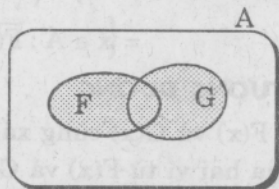
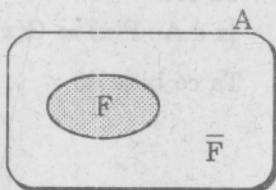
2.2 PHÉP TUYỂN

Cho hai hàm mệnh đề $F(x)$ và $G(x)$ cùng xác định trên tập hợp A . Tuyển của hai vị từ $F(x)$, $G(x)$ là một vị từ, ký hiệu là $F(x) \vee G(x)$ mà $F(x) \vee G(x)$ nhận giá trị 0 với các phần tử $x \in A$ sao cho cả hai vị từ $F(x)$ và $G(x)$ đều nhận giá trị 0.

Ta có:

$$\{x \in A : F(x) \vee G(x) = 1\} = \{x \in A : F(x) = 1\} \cup \{x \in A : G(x) = 1\}$$

Ta có biểu đồ sau:



2.3 PHÉP HỘI

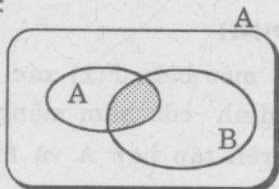
Cho hai vị từ $F(x)$ và $G(x)$ cùng xác định trên tập hợp A . Hội của hai vị từ $F(x)$ và $G(x)$ là một vị trí, ký hiệu là $F(x) \wedge G(x)$

mà vị từ $F(x) \wedge G(x)$ nhận giá trị 1 với các phần tử $x \in A$ sao cho cả hai vị từ $F(x)$ và $G(x)$ nhận giá trị 1.

Ta có :

$$\{x \in A : F(x) \wedge G(x) = 1\} = \{x \in A : F(x) = 1\} \cap \{x \in A, G(x) = 1\}$$

Ta có biểu đồ sau :



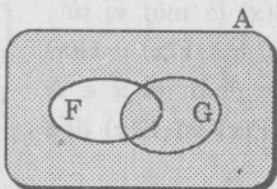
2.4 PHÉP KÉO THEO

Cho hai vị từ $F(x)$ và $G(x)$ cùng xác định trên tập hợp A vị từ kéo theo của $F(x)$ và $G(x)$, ký hiệu là $F(x) \Rightarrow G(x)$ mà vị từ $F(x) \Rightarrow G(x)$ nhận giá trị 0 nếu với $x \in A$ ta có $F(x)$ nhận giá trị 1 còn $G(x)$ nhận giá trị 0

Ta có :

$$\{x \in A : F(x) \Rightarrow G(x) = 0\} = \{x \in A : F(x) = 1\} \cap \{x \in A : G(x) = 0\}$$

Ta có biểu đồ :



Với chú ý là ta cũng có : $F(x) \Rightarrow G(x) = \overline{F(x)} \vee G(x)$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \{x \in A : F(x) \Rightarrow G(x) = 1\} &= \{x \in A : \overline{F(x)} \vee G(x) = 1\} \\ &= \{x \in A : \overline{F(x)} = 1\} \cup \{x \in A : G(x) = 1\} \end{aligned}$$

2.5 PHÉP TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho hai vị từ $F(x)$ và $G(x)$ cùng xác định trên tập hợp A vị từ tương đương của hai vị từ $F(x)$ và $G(x)$ là một vị từ, ký hiệu là $F(x) \Leftrightarrow G(x)$ mà vị từ này nhận giá trị 1 nếu với $x \in A$ mà cả hai vị từ $G(x)$, $F(x)$ nhận giá trị 1 hoặc cùng nhận giá trị 0.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } \{x \in A : F(x) \Leftrightarrow G(x) = 1\} &= \\
 &= \{x \in A : F(x) \Rightarrow G(x) = 1\} \cap \{G(x) \Rightarrow F(x) = 1\} \\
 &= \{x \in A : F(x) \Rightarrow G(x) = 1\} \cap \{x \in A : G(x) \Rightarrow F(x) = 1\}
 \end{aligned}$$

□ Ví dụ :

Cho hai vị từ hai biến : $F(x, y) \equiv \{x < y\}$ $G(x, y) \equiv \{x = y\}$
 cùng xác định trên tập hợp A^2 , với $A = \{1; 2; 3; 4\}$

Ta có :

$$\begin{aligned}
 \{(x; y) : F(x; y) = 1\} &= \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\} \\
 \{(x; y) : G(x; y) = 1\} &= \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}
 \end{aligned}$$

Khi đó :

$$\begin{aligned}
 &\{(x; y) : F(x; y) \vee G(x; y) = 1\} \\
 &= \{(x; y) : F(x; y) = 1\} \cup \{(x; y) : G(x; y) = 1\} \\
 &= \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\} \cup \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\} \\
 &= \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}
 \end{aligned}$$

§3 LƯỢNG TỪ

3.1 Cho vị từ $F(x)$ xác định trên tập hợp A . Chúng ta quan tâm đến hai khẳng định sau đây :

- Vị từ $F(x)$ nhận giá trị 1 với mọi phần tử $x \in A$.
- Vị từ $F(x)$ nhận giá trị 1 với ít nhất là một phần tử $x \in A$, tức là tồn tại $x \in A$ sao cho $F(x)$ nhận giá trị 1.

Ta sử dụng hai kí hiệu sau đây : dấu $\forall$ và dấu $\exists$ (với mọi và tồn tại) để ghi các khẳng định trên đây như sau :

- $\forall x \in A, F(x)$
- $\exists x \in A, F(x)$

Ký hiệu : $\forall x \in A$ được gọi là ký hiệu của phép lượng hóa phổ dụng liên kết biến trên x trên A .

Ký hiệu : $\exists x \in A$ được gọi là ký hiệu của phép lượng hóa tồn tại liên kết biến x tập hợp A

□ Chú ý₁ :

Mỗi cách viết : $\forall x \in A; F(x)$
 $\exists x \in A; F(x)$ là một mệnh đề . Chẳng hạn :

Gọi $F(x)$ là hàm mệnh đề : $F(x) \equiv \{x^2 - 3x + 2 = 0\}$ trên $\mathbf{R}$.

Khi đó ta có :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $F(x)$ là mệnh đề nhận giá trị 0

$\exists x \in \mathbf{R}$, $F(x)$ là mệnh đề nhận giá trị 1

Gọi $G(x)$ là hàm mệnh đề . $G(x) \equiv \{x \text{ là số nguyên tố}\}$ xác định trên tập hợp số tự nhiên $\mathbf{N}$

Khi đó ta có : $\forall x \in \mathbf{N}$, $G(x)$ là mệnh đề nhận giá trị 0

$\exists x \in \mathbf{N}$, $G(x)$ là mệnh đề nhận giá trị 1

Như vậy , các phép lượng hóa phổ dụng và lượng hóa tồn tại cho phép biến đổi một hàm mệnh đề xác định trên tập hợp A thành các mệnh đề đúng hoặc sai .

Mệnh đề $\exists x \in A$, $F(x)$ là đúng nếu tập F khác rỗng và là mệnh đề sai nếu $F = \emptyset$.

Mệnh đề $\forall x \in A$, $F(x)$ là đúng nếu $F = A$ là sai nếu $\bar{F}$ khác rỗng .

□ Chú ý₂ :

Khi A là tập hợp hữu hạn , giả sử $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ thì ta có

$$\forall x \in A, F(x) = F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n)$$

$$\exists x \in A, F(x) = F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n)$$

Như vậy phép lượng hóa phổ dụng có thể xem như là sự tổng quát của phép hội và phép lượng hoá tồn tại là tổng quát của phép tuyển.

3.2) MỘT SỐ CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI CỦA LOGIC VỊ TỪ

3.2.1. Công thức :

1. Tất cả các công thức của đại số logic là công thức của logic vị từ
2. Mỗi một vị từ hoặc các vị từ tạo thành bởi các phép toán $\wedge, \vee, -, \Rightarrow$ là công thức của logic vị từ
3. Nếu $F(\dots x_i \dots)$ là một công thức thì : $\forall x_i ; F(\dots x_i \dots)$ và $\exists x_i ; F(\dots x_i \dots)$ là những công thức
4. Các công thức trên đây liên hệ với nhau bởi các phép toán logic cơ bản là công thức của logic vị từ

□ Ví dụ :

Ký hiệu $(\exists x, \forall y P(x; y) \vee (\forall z, S(z)) \wedge A$ là một công thức của logic vị từ.

Thật vậy : + Theo định nghĩa 1 thì A là một công thức

+ Theo định nghĩa 2 thì $P(x; y)$ và $S(z)$ là các công thức

+ $\forall y, P(x; y)$ và $\forall z, S(z)$ là các công thức theo **DN₃**

+ $\exists x, \forall y, P(x; y)$ là công thức theo định nghĩa 3

+ $(\exists x, \forall y, p(x, y) \vee (\forall z, S(z)) \wedge A$ là công thức theo **DN₄**

3.2.2. Công thức tương đương :

Hai công thức F và G của logic vị từ được gọi là tương đương nếu chúng biểu thị cho cùng một hàm logic

3.2.3. Một số công thức tương đương :

- 1) Giả sử $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $F(x)$ là vị từ xác định trên A ta có

$$\forall x \in A, F(x) = \overline{F(a_1)} \wedge \dots \wedge \overline{F(a_n)} = \overline{F(a_1)} \vee \overline{F(a_2)} \vee \dots \vee \overline{F(a_n)}$$

$$= \exists x \in A, \overline{F(x)}$$

Tổng quát : $\overline{\forall x \in A, F(x)} = \exists x \in A, \overline{F(x)}$

Thật vậy :

VT (đúng) $\Leftrightarrow \forall x \in A, F(x)$ sai

$\Leftrightarrow$ ít nhất một phần tử $x \in A$ mà $F(x)$ sai.

$\Leftrightarrow$ có ít nhất một phần tử $x \in A$ mà $\overline{F(x)}$ đúng .

$\Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{F(x)}$ đúng .

Vậy ta có điều phải chứng minh .

Xét tiếp : khi $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$

$$\begin{aligned} \overline{\exists x \in A, F(x)} &= \overline{F(a_1) \vee F(a_1) \vee \dots \vee F(a_n)} = \\ &= \overline{F(a_1)} \wedge \overline{F(a_2)} \wedge \dots \wedge \overline{F(a_n)} = \forall x \in A, \overline{F(x)} \end{aligned}$$

Tổng quát : $\overline{\exists x \in A, F(x)} = \forall x \in A, \overline{F(x)}$

Thật vậy :

VT (đúng) $\Leftrightarrow$ mệnh đề $\exists x \in A, F(x)$ sai

$\Leftrightarrow$ với mọi x ta có $F(x)$ sai $\Leftrightarrow$ với mọi $x \in A$ thì $\overline{F(x)}$ đúng

$\Leftrightarrow$ mệnh đề $\forall x \in A, \overline{F(x)}$ đúng .

Suy ra đều phải chứng minh.

□ **Chú ý :**

Áp dụng công thức $\overline{\forall x \in A, F(x)} = \exists x \in A, \overline{F(x)}$ ta thấy để bác bỏ mệnh đề $\forall x \in A, F(x)$, tức là chứng minh cho mệnh đề này sai ta chỉ cần ra sự tồn tại $a \in A$ sao cho $\overline{F(a)}$ đúng tức là $F(a)$ sai . Phần tử $a \in A$ có tính chất như vậy gọi là **một phản ví dụ**

Chẳng hạn , để bác bỏ mệnh đề $\forall x \in \mathbb{N}^*; x^2 + x + 41$ là số nguyên tố ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ $a = 40$

Để bác bỏ mệnh đề $\forall x \in \mathbb{N}^*, F(x) = 1 + 2^{2^x}$ là một số nguyên tố, Euler (Nhà toán học Thụy sĩ. 1732) đã chỉ ra một phản ví dụ khi chọn $n = 5$ thì $F(5)$ là một hợp số

2) Ta có :

$$\forall x \in A; F(x) \wedge G(x) = (\forall x \in A; F(x)) \wedge (\forall x \in A; G(x))$$

$$\exists x \in A; F(x) \vee G(x) = (\exists x \in A; F(x)) \vee (\exists x \in A; G(x))$$

$$3) \overline{\exists x \in A; \exists y \in B; F(x; y)} = \exists x \in A; \overline{\exists y \in B; F(x; y)} =$$

$$= \exists x \in A; \forall y \in B; \overline{F(x; y)}$$

$$\overline{\forall x \in A; \forall y \in B; F(x; y)} = \forall x \in A; \overline{\forall y \in B; F(x; y)}$$

$$= \forall x \in A; \exists y \in B; \overline{F(x; y)}$$

4) Chú ý, ta không có các công thức tương đương sau đây :

$$\exists x \in A; F(x) \wedge G(x) \neq (\exists x \in A; F(x)) \wedge (\exists x \in A; G(x))$$

$$\forall x \in A; F(x) \vee G(x) \neq (\forall x \in A; F(x)) \vee (\forall x \in A; G(x))$$

Chẳng hạn, gọi : $F(x)$ là vị từ : $F(x) = \{x \text{ là số chẵn}\}$

$G(x)$ là vị từ : $G(x) = \{x \text{ là số lẻ}\}$

$F(x)$ và $G(x)$ cùng xác định trên $\mathbb{N}$

Khi đó :

$\exists x \in A; F(x) \wedge G(x)$ là mệnh đề sai.

$(\exists x \in A; F(x)) \wedge (\exists x \in A; G(x))$ là mệnh đề đúng

+ Mệnh đề : $\forall x \in \mathbb{N}, F(x) \vee G(x)$ là mệnh đề đúng

+ Mệnh đề : $\forall x \in \mathbb{N}, F(x)$ là mệnh đề sai

+ Mệnh đề : $\forall x \in \mathbb{N}, G(x)$ là mệnh đề sai

Do đó : $(\forall x \in \mathbb{N}; F(x)) \vee (\forall x \in \mathbb{N}; G(x))$ là mệnh đề sai

$$5) \overline{\forall x \in A; \overline{F(x)}} = \exists x \in A; F(x)$$

$$\overline{\exists x \in A; \overline{F(x)}} = \forall x \in A; F(x)$$

6) Nếu G là một vị từ không chứa x , hoặc là một mệnh đề thì

$$(\forall x \in A ; F(x)) \vee G = \forall x \in A ; (F(x) \vee G)$$

$$(\exists x \in A ; F(x)) \wedge G = \exists x \in A ; (F(x) \wedge G)$$

§4 PHÉP SUY LUẬN HAI TIỀN ĐỀ – – TAM ĐOẠN LUẬN

Phép suy luận hai tiền đề là hai phép suy luận từ hai phán đoán cho trước đi suy ra một phán đoán mới. Trong phần này, ta xem xét các tam đoạn luận , hệ thống suy diễn tiên đề cổ điển nhất do Aristote xây dựng thông qua ngôn ngữ và kí hiệu của logic vị từ .

Trong logic hình thức Aristote người ta xem xét dạng phán đoán sau đây :

A : Phán đoán khẳng định chung : mọi S là P , kí hiệu là : S_aP

E : Phán đoán phủ định chung : mọi S đều không là P , kí hiệu là : S_eP

I : Phán đoán khẳng định bộ phận : một số S là P , kí hiệu là : S_iP

O : Phán đoán phủ định bộ phận : một số S không là P , kí hiệu là : S_oP

Trong mỗi tam đoạn luận , có ba thuật ngữ ký hiệu là S, M, P . Thuật ngữ M được gọi là thuật ngữ giữa , có mặt trong hai tiền đề : Tiền đề nhỏ chứa S và M ; Tiền đề lớn chứa P và M

Trong kết luận không có thuật ngữ giữa M , chỉ có hai thuật ngữ S và P

Có hai cách sắp xếp thứ tự các thuật ngữ P và M trong tiền đề lớn và hai cách sắp xếp thứ tự các thuật ngữ S và M trong tiền đề nhỏ .Do đó ta có 4 cách sắp xếp hai tiền đề , tức là có bốn loại hình tam đoạn luận :

LOẠI 1	LOẠI 2	LOẠI 3	LOẠI 4
M P	P M	M P	P M
$\frac{S M}{S P}$	$\frac{S M}{S P}$	$\frac{M S}{S P}$	$\frac{M S}{S P}$

Các phán đoán có thể nhận một trong bốn dạng A , E , I , O . Như thế mỗi loại hình có $4^3 = 64$ kiểu và cả bốn loại hình có : $4 \times 64 = 256$ kiểu . Nhưng Aristot chỉ ra rằng chỉ có 24 kiểu là đúng . Tên gọi của các kiểu do Peter (Tây ban nha) , đặt ra như sau :

LOẠI 1

Barbara , Celarent , Darii , Ferio , Barbara , Celarent
(a,a,a) (e,a,e) (a,i,i) (e,i,o) (a,a,i) (e,a,o)

LOẠI 2

Cesare , Camestres , Festino , Baroco , Cesaro , Camestrol
(e,a,e) (a,e,e) (e,i,o) (a,o,o) (e,a,o) (a,e,o)

LOẠI 3

Darapti , Disamis , Datisi , Felapton , Bocardo , Ferison
(a,a,i) (i,a,i) (a,i,i) (e,a,o) (o,a,o) (e,i,o)

LOẠI 4

Bamalip , Calemes , Dimatis , Fesapo , Fresison , Calemos
(a,a,i) (a,e,e) (i,a,i) (e,a,o) (e,i,o) (a,e,o)

Trong mỗi tên gọi trên đây đều có đúng ba nguyên âm được dùng để chỉ các kiểu phán đoán .

Chẳng hạn :

$M_a P$

+ Tam đoạn luận Barbara có dạng : $\frac{S_a M}{S_a P}$ thuộc loại hình 1.

Cả ba phán đoán của kiểu này đều là khẳng định chung

$$M_e P$$

+ Tam đoạn luận Ferio (Loại hình 1) có dạng : $\frac{S_i M}{S_o P}$

$$P_i M$$

+ Tam đoạn luận Dímatis có dạng : $\frac{M_a s}{S_i P}$

Để chứng minh 24 tam đoạn luận thuộc bốn loại hình trên đây, Aristote xem hai tam đoạn luận Barara và Celarel của loại hình 1 là hiển nhiên đúng (tiên đề). Từ đó chứng minh các tam đoạn luận khác của loại hình 1 cũng đúng. Để chứng minh các tam đoạn luận của ba loại hình còn lại, Aristote dùng các phép suy luận một tiên đề để chuyển các tiên đề của tam đoạn luận đang xét sang các tiên đề ở kiểu tương ứng trong loại hình 1. Từ đó theo quy tắc của loại hình 1 ta được các kết luận. Lại dùng tính chất logic từ kết luận để suy ra các khẳng định cần chứng minh. Trong nhiều trường hợp, có thể chuyển sang ngôn ngữ tập hợp, phép chứng minh thuận và lợi hơn nhờ sử dụng biểu đồ Venn - Euler.

Gọi : $S(x)$ là vị từ : phần tử x có tính chất S

$P(x)$ là vị từ : phần tử x có tính chất P

+ Phán đoán khẳng định chung $S_a P$ có dạng :

$$\forall x, S(x) \Rightarrow P(x) \quad S \subset P$$

(với mọi x , nếu x có tính chất S thì x có tính chất P)

+ Phán đoán phủ định chung $S_o P$ có dạng :

$$\forall x, S(x) \Rightarrow \overline{P(x)} \quad S \cap P = \emptyset$$

+ Phán đoán khẳng định bộ phận $S_i P$ có dạng :

$$\exists x, S(x) \wedge P(x) \quad S \cap P \neq \emptyset$$

+ Phán đoán khẳng định bộ phận $S_o P$ có dạng :

$$\exists x, S(x) \wedge \overline{P(x)} \quad S \cap \overline{P} \neq \emptyset$$

Nhận thấy :

$$\overline{\forall x, S(x) \Rightarrow P(x)} = \exists x, \overline{S(x) \Rightarrow P(x)} = \exists x; S(x) \wedge \overline{P(x)}$$

$$\overline{\forall x, S(x) \Rightarrow \overline{P(x)}} = \exists x, \overline{S(x) \Rightarrow \overline{P(x)}} = \exists x; S(x) \wedge P(x)$$

Nghĩa là S_aP và S_oP là phủ định của nhau, còn S_eP và S_iP là phủ định của nhau.

Như vậy ta có công thức sau đây :

• **Luật phủ định :**

$$1) A : \forall x, S(x) \Rightarrow P(x) = \overline{\exists x, S(x) \wedge \overline{P(x)}}$$

$$2) E : \forall x, S(x) \Rightarrow \overline{P(x)} = \overline{\exists x, S(x) \wedge P(x)}$$

$$3) I : \exists x, S(x) \wedge P(x) = \overline{\forall x, S(x) \Rightarrow \overline{P(x)}}$$

$$4) O : \exists x, S(x) \wedge \overline{P(x)} = \overline{\forall x, S(x) \Rightarrow P(x)}$$

• **Luật đảo ngược :**

$$1) \overline{\exists x, S(x) \wedge P(x)} = \overline{\exists x, P(x) \wedge S(x)}$$

$$2) \exists x, S(x) \wedge P(x) = \exists x, P(x) \wedge S(x)$$

BÀI TẬP LOGIC Chương 2

Bài 35

Tìm số A có hai chữ số, sao cho trong bốn mệnh đề sau đây có hai mệnh đề đúng, hai mệnh đề sai.

$$P = \{A \text{ chia hết cho } 5\}$$

$$Q = \{A \text{ chia hết cho } 23\}$$

$$R = \{A + 7 \text{ là số chính phương}\}$$

$$S = \{A - 10 \text{ là số chính phương}\}$$

Hướng dẫn

Dễ dàng nhận thấy rằng : các cặp $(P ; Q)$, $(P ; R)$, $(Q ; R)$ không thể cùng đúng .

Do vậy chỉ cần xác định A sao cho các cặp $(P ; S)$, $(Q ; S)$, $(R ; S)$ cùng đúng là xong .

Ta có : • Cặp $(P ; S)$ cùng đúng nếu : $A = 10 \vee A = 35$

• Cặp $(Q ; S)$ cùng đúng nếu : $A = 46$

• Cặp $(R ; S)$ cùng đúng nếu : $A = 74$

Như vậy : có bốn số $A = 10$, 35 , 46 , 74 thoả mãn

Bài 36

Cho ba mệnh đề :

$$\bullet P = \{a \text{ là số nguyên}\}$$

$$\bullet Q = \{a^2 - 4a \text{ là số nguyên âm}\}$$

$$\bullet R = \{a + \frac{2}{a} \text{ là số nguyên dương}\}$$

Hãy tìm số thực a để cho một và chỉ một mệnh đề là sai , hai mệnh đề còn lại đúng

Hướng dẫn

Xét ba trường hợp :

- TH_1 : P ; Q đúng , còn R sai

$$\text{Ta có : } a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow a(a - 4) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 4$$

Mà : a là số nguyên , suy ra : $a = 1 ; 2 ; 3$

Chỉ có : $a = 3$ thì R sai

- TH_2 : P ; R đúng , còn Q sai

Vì : P ; R đúng nên a là ước số nguyên dương của 2 $\Rightarrow a = 1 ; 2$

Cả hai giá trị này đều làm cho Q đúng $\Rightarrow$ Không có a thoả mãn TH_2

- TH_3 : Q ; R đúng , còn P sai

$$\text{Ta có : } a^2 - 4a = (a - 2)^2 - 4 \geq -4$$

Mà : $a^2 - 4a$ là số nguyên âm , nên : $a^2 - 4a \in \{-1, -2, -3, -4\}$

Trong bốn khả năng này , chỉ có :

$$a^2 - 4a = -2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = +\sqrt{2} \\ a = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết luận : $a \in \{3; 2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\}$

Bài 37

Cho ba mệnh đề :

$$P = \{x \text{ là số nguyên}\}$$

$$Q = \{x^2 - 3x \text{ là số nguyên âm}\}$$

$$R = \left\{x + \frac{1}{x} \text{ là số nguyên dương}\right\}$$

Tìm tất cả các số thực x sao cho chỉ có một mệnh đề sai , hai mệnh đề còn lại đúng .

Đáp số

$$\text{Làm tương tự bài trên ta có : } x \in \left\{2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Bài 38

Cho hai số nguyên dương a và b . Biết rằng trong bốn mệnh đề P, Q, R, S dưới đây chỉ có duy nhất một mệnh đề sai

$$\begin{aligned} P &= \{a = 2b + 5\} & Q &= \{a + 1 \text{ chia hết cho } b\} \\ R &= \{a + b \text{ chia hết cho } 3\} & S &= \{a + 7b \text{ là số nguyên tố}\} \end{aligned}$$

1/ Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong bốn mệnh đề trên (có giải thích)

2/ Hãy tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b thoả mãn ba mệnh đề đúng còn lại.

Hướng dẫn

1/ Nhận xét : • $a + b = 3b + 5$

$$\bullet a + 7b = (a + b) + 6b$$

Do đó nếu mệnh đề R đúng thì cả P và S đều sai : (vô lý).

Vậy : R phải sai, ba mệnh đề P, Q, S đúng.

2/ Vì : Q đúng, nên : $a + 1$ chia hết cho $b \Leftrightarrow a + 1 = nb$

Với n là số nguyên dương. Do đó : $b(n - 2) = 6$

$$\text{Suy ra : } b \in \text{US}(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

Chỉ có : $b = 2, b = 6$ thoả mãn

Thay vào ta tính được : $a \in \{9, 17\}$

Đáp số : $(a; b) = (9; 2)$ và $(17; 6)$

Bài 39

Cho a là số nguyên dương. Biết rằng trong ba mệnh đề P, Q, R sau đây chỉ có duy nhất một mệnh đề sai. Tìm A ?

$$P = \{A + 51 \text{ là một số chính phương}\}$$

$$Q = \{A \text{ có chữ số tận cùng là } 1\}$$

$$R = \{A - 38 \text{ là một số chính phương}\}$$

Hướng dẫn

Nếu Q đúng thì $A + 51$ tận cùng là 2 còn $A - 38$ tận cùng là 3.

Nên cả P và R đều sai : (vô lý).

Vậy : Q sai còn P và R đúng.

Ta có : • $A + 51 = x^2$

$$\bullet A - 38 = y^2 \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 89 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 89 = 1.89$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 89 \end{cases} \Rightarrow x = 45 \Rightarrow A = 1974$$

Đáp số : $A = 1974$

Bài 40

Tìm số nguyên dương B cho biết trong ba mệnh đề P, Q, R dưới đây, chỉ có duy nhất một mệnh đề sai.

$P = \{B + 45 \text{ là bình phương của một số tự nhiên}\}$

$Q = \{B \text{ tận cùng là chữ số } 7\}$

$R = \{B - 44 \text{ là bình phương của một số tự nhiên}\}$

Hướng dẫn

Ta có : Q sai còn P, R đúng

$$\text{Đặt : } B + 45 = x^2 \text{ và } y^2 = B - 44 \quad (x, y \in \mathbb{N}) \Rightarrow x^2 - y^2 = 89$$

Suy ra : $B = 1980$

Bài 41

Cho ba mệnh đề :

$$A = \left\{ \text{Phương trình } x + \frac{1}{x} = a \text{ vô nghiệm} \right\}$$

$$B = \left\{ \text{Đẳng thức } \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3 - a \text{ đúng} \right\}$$

$$C = \left\{ \text{Bất phương trình } \frac{x^3 + ax - 2}{x^2 - x + 1} > -3 \text{ đúng với mọi } x \right\}$$

1/ Xác định a để cho hai và chỉ có hai trong ba mệnh đề A, B, C đúng

2/ Xác định a để trong ba mệnh đề $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ có ít nhất hai mệnh đề đúng.

Hướng dẫn

1/ Mệnh đề A đúng $\Leftrightarrow a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$

Bởi vì: $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = |a - 3|$, nên B đúng khi và chỉ khi $a \leq 3$

Mệnh đề C đúng $\Leftrightarrow -1 < a < 7$

Do đó, hai trong ba mệnh đề đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a \leq -1 \\ 2 < a \leq 3 \end{cases}$

2/ Trong ba mệnh đề $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ có ít nhất hai mệnh đề đúng nếu:

$$\begin{cases} a \leq -2 \\ a > 3 \end{cases}$$

Bài 42

Cho ba mệnh đề P, Q, R như sau

$P = \{ \text{Phương trình } x + \sqrt{x} = a \text{ vô nghiệm} \}$

$Q = \{ \text{Phương trình } \sqrt{x^2 - 1} = a - x \text{ có nghiệm} \}$

$R = \{ \text{Bất phương trình } (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0 \text{ đúng } \forall x \}$

Xác định a để cho có hai và chỉ hai trong ba mệnh đề này đúng?

Hướng dẫn

• Nếu $a \geq 0$ thì dễ thấy phương trình $x + \sqrt{x} = a$ có nghiệm.

• Nếu $a < 0$ thì phương trình $x + \sqrt{x} = a$ vô nghiệm.

Do đó P đúng $\Leftrightarrow a < 0$

Xét phương trình: $\sqrt{x^2 - 1} = a - x$

Δ Khi $a = 0$: phương trình vô nghiệm

Δ Khi $a \neq 0$: $\sqrt{x^2 - 1} = a - x \Rightarrow x^2 - 1 = (a - x)^2$
 $\Rightarrow x^2 - 1 = a^2 - 2ax + x^2$

$$\Rightarrow 2ax = a^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{a^2 + 1}{2a}.$$

Thử nghiệm tìm được vào hai vế của phương trình, ta có :

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 + 1}{2a}\right)} - 1 = a - \frac{a^2 + 1}{2a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{a^2 - 1}{a}\right)^2} = \frac{a^2 - 1}{a} \Rightarrow \left|\frac{a^2 - 1}{a}\right| = \frac{a^2 - 1}{a}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : } \frac{a^2 - 1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq a < 0 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } Q \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq a < 0 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

Xét mệnh đề R

- Nếu $a = 1$: bất phương trình $0.x + 2 > 0$ đúng $\forall x$
- Nếu $a = -1$: bất phương trình $-4x + 2 > 0$ không thoả mãn $\forall x$
- Nếu $a \neq 1 \wedge a \neq -1$:

Bất phương trình bậc hai : $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$.

Để bất phương trình này thoả mãn $\forall x$, điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} (a - 1)^2 - 2(a^2 - 1) < 0 \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 3 > 0 \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } R \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

Do đó hai và chỉ hai trong ba mệnh đề P, Q, R đúng

$$\Leftrightarrow P.Q.\bar{R} \vee P.\bar{Q}.R \vee \bar{P}.Q.R = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \\ -1 \leq a < 0 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

Bài 43

Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = b \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$ (a, b là tham số)

Xác định a để phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của b .

Hướng dẫn

Rút y từ phương trình đầu và thế vào phương trình sau :

$$x^2 - 4(b - ax)^2 = 1 \Leftrightarrow (1 - 4a^2)x^2 + 8abx - 4b^2 - 1 = 0$$

• Nếu : $1 - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 0,5$ ta nhận được phương trình :

$$0.x^2 + (\pm 4b)x = 4b^2 + 1$$

Khi : $b = 0$ thì phương trình vô nghiệm

• Nếu : $1 - 4a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0,5 \wedge a \neq -0,5$ ta có phương trình bậc hai của x

Điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm là :

$$16a^2b^2 + (4b^2 + 1)(1 - 4a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 4a^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4b^2 + (1 - 4a^2) \geq 0 \quad (*)$$

Bất phương trình (*) muốn đúng $\forall b$; nói riêng khi $b = 0$ thì :

$$1 - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Do } a \neq \frac{1}{2} \wedge a \neq -\frac{1}{2} ; \text{ nên : } |a| < \frac{1}{2}$$

Tóm lại : để hệ phương trình có nghiệm với mọi giá trị của tham số b thì : $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

Bài 44

Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-6)x + 2by = c+1 \end{cases} \quad (a, b, c \text{ là các}$$

tham số)

Với giá trị nào của tham số a để sao cho với mọi giá trị của tham số b , luôn luôn tìm được số C sao cho hệ đã cho có ít nhất là một nghiệm

Hướng dẫn

Để hệ luôn luôn có nghiệm không phụ thuộc vào các giá trị của tham số a và C , cần phải có định thức : $D = \begin{vmatrix} b & -1 \\ b-6 & 2b \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (2b - 3)(b + 2) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -2 \wedge b \neq \frac{3}{2}$$

Do đó khi : $b \neq -2 \wedge b \neq \frac{3}{2}$ thì hệ luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số a . Xét :

□ Khi $b = -2$, ta nhận được hệ :

$$\begin{cases} -2x - y = ac^2 \\ -8x - 4y = c + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 4y = 4ac^2 \\ -8x - 4y = c + 1 \end{cases}$$

Muốn hệ có nghiệm thì : $4ac^2 = c + 1 \Leftrightarrow 4ac^2 - c - 1 = 0$

• Với $a = 0 \Rightarrow c = -1$

• Với $a \neq 0$, để tồn tại c thì : $\Delta = 1 + 16a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{16}$

□ Khi $b = \frac{3}{2}$, ta nhận được hệ :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2ac^2 \\ -9x + 6y = 2c + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 6y = -6ac^2 \\ -9x + 6y = 2c + 2 \end{cases}$$

Do đó, để hệ có nghiệm thì : $6ac^2 + 2c + 2 = 0$

• Với $a = 0$ ta có $2c + 2 = 0 \Leftrightarrow c = -1$

• Với $a \neq 0$, để có nghiệm với c , ta phải có :

$$\Delta = 1 - 12a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{12}$$

Kết luận : với $-\frac{1}{16} \leq a \leq \frac{1}{12}$ thì với mọi b ta luôn luôn tìm được số c để hệ phương trình đã cho có ít nhất là một nghiệm

Bài 45

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2by = a \\ bx + (1-b)y = c^2 + c \end{cases}$ (a, b, c là các tham số).

Xác định a , để sao cho với mọi b , ta luôn luôn tìm được một số c để hệ đã cho có ít nhất là 1 nghiệm ?

Đáp số

Giải tương tự bài trên. Ta có : $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{4}$

Bài 46

Tìm tất cả các cặp số (x, y) sao cho ba mệnh đề sau đây đều đúng.

$$P = \{2x^2 - xy + 9 = 0\}$$

$$Q = \{2x^2 + y^2 \leq 81\}$$

$$R = \{x \text{ là số nguyên}\}$$

Hướng dẫn

Vì P đúng $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{2x+9}{x}$ thế vào Q

$$\text{Ta có : } 2x^2 + \left(2x + \frac{9}{x}\right)^2 \leq 81 \Leftrightarrow 6x^2 + \frac{81}{x^2} \leq 45$$

$$\Rightarrow 6x^2 < 45 \Rightarrow x^2 < \frac{45}{6}$$

$$\text{Do : } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Nếu : } x^2 = 1 &\Leftrightarrow |x| = 1 \Rightarrow |y| = 11 \\ &\Rightarrow 2x^2 + y^2 = 123 > 81 \end{aligned}$$

Vậy : $x^2 = 1$ bị loại

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Nếu : } x^2 = 4 &\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow |y| = \frac{17}{2} \\ &\Rightarrow 2x^2 + y^2 = 8 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 < 81 \end{aligned}$$

$$\text{Bởi vì } x \text{ và } y \text{ cùng dấu nên có : } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = \frac{17}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

Bài 47

Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thoả mãn cả ba mệnh đề sau đây đều đúng

$$P = \{x^2 - 2xy + 12 = 0\}$$

$$Q = \{x^2 + 4y^2 \leq 60\}$$

$$R = \{x \text{ là số nguyên}\}$$

Hướng dẫn

Vì P đúng $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 12}{2x}$. Thế vào Q và làm tương tự

như bài trên. Đáp số: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = \frac{7}{2} \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Bài 48

Một giải bóng đá có n đội tham dự. các đội thi đấu vòng tròn một lượt. Trong mỗi trận, đội thắng được hai điểm. Đội hoà được 1 điểm và đội thua được không điểm. Các đội có cùng số điểm sẽ được xếp hạng theo các chỉ số phụ nào đó. Kho kết thúc giải, đội vô địch được 8 điểm, đội xếp thứ nhì được 6 điểm, đội xếp thứ ba được 5 điểm. Các đội còn lại có số điểm khác nhau. hãy cho biết số đội đã tham dự giải và số điểm các đội còn lại (có giải thích rõ)

Hướng dẫn

Theo thể thức thi đấu đã cho, số điểm của n đội bóng là $n(n-1)$.

Các đội còn lại, trừ ba đội đầu bảng có tổng số điểm trong các trận đấu với nhau sẽ là: $(n-3)(n-4)$

Theo giả thiết ta lập được bảng sau đây:

Thứ hạng	1	2	3	4	5	... n
Số điểm	8	6	5	x	y	... t

Ta có: $5 \geq x > y > \dots > t$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} (n-3)(n-4) \leq n(n-1) - 19 \\ n(n-1) - (8+6+5) < 5(n-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 5\frac{1}{6} > 5 \\ (n-3)^2 < 13 < 4^2 \end{cases} \Rightarrow 5 < n < 7 \Rightarrow n = 6$$

Tổng số điểm thi đấu của sáu đội là $6.5 = 30$

$\Rightarrow$ ba đội còn lại có số điểm là $30 - 19 = 11$

Xét các cách phân tích : $11 = 1 + 5 + 5 = 2 + 4 + 5 = 3 + 4 + 4$

Nhận thấy chỉ có khả năng : $11 = 2 + 4 + 5$, tức là số điểm của ba đội còn lại là 2 , 4 , 5 , là hợp lý .

Vậy có tất cả 6 đội tham dự giải

Số điểm của 6 đội là : 8 , 6 , 5 , 5 , 4 , 2

Bài 49

Trên một tấm bảng thứ nhất , người ta viết tổng của hai số nguyên dương . Trên tấm bảng thứ hai , người ta viết tổng các phương trình của hai số đó . Người ta đưa cho học sinh An riêng tấm bảng thứ nhất và tấm bảng thứ hai thì đưa riêng cho Bình .

An và Bình chỉ được trao đổi với nhau như sau :

- *Bình : Tôi không đoán được đó là hai số nào ?*
- *An : Tôi cho cậu biết là tổng của hai số đó lớn hơn 10*
- *Bình : À ! nếu vậy thì mình biết được đó là hai số nào rồi , và Bình đã nói đúng hai số đó .*

Hỏi : Bình đã suy luận như thế nào để tìm được hai số đó. Hãy cho biết đó là hai số nào ?

Hướng dẫn

Gọi hai số đó là a và b . Ta có bạn An biết được : $A = a + b$, còn bạn Bình thì biết được : $B = a^2 + b^2$

Theo giả thiết ta suy ra : $B = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$; với : $a + b > 10$; $c + d \leq 10$; a, b, c, d là các số nguyên dương .

Ta có : $c \leq 10 - d \Rightarrow c^2 + d^2 \leq (10 - d)^2 + d^2$

$\Rightarrow c^2 + d^2 \leq 2(d^2 - 10d + 9) + 82 = 2(d - 1)(d - 9) + 82 \Rightarrow B \leq 82$

Ta có : $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 2.82 = 164 < 13^2$

$$\Rightarrow 10 < a + b < 13 \Rightarrow a + b = 11 \text{ hoặc } a + b = 12$$

$$\text{Giả sử: } b \leq a \Rightarrow 12 = a + b \leq a + a = 2a \Rightarrow a \geq 6$$

$$\text{Mặt khác: } a^2 + b^2 \leq 82 \Rightarrow a^2 < 81 \Rightarrow a < 9$$

$$\text{Nên: } 6 \leq a < 9 \Rightarrow a = 6; 7; 8$$

Trường hợp $a + b = 11$, lập luận tương tự ta cũng có $a \in \{6, 7, 8\}$

Bằng cách lập bảng xét các trường hợp, ta thấy: $a = 7, b = 4$ thoả mãn: $a + b = 11 > 10$ và $a^2 + b^2 = 7^2 + 4^2 = 65 = 8^2 + 1^2 = 65$

Đáp số: 2 số đó là 7 và 4

Bài 50

Một lần Sherlock Holmes đến chơi nhà bác sĩ Watson họ ngồi trong phòng khách, cạnh một cửa sổ nhìn ra vườn. Từ ngoài vườn, vang lên tiếng cười đùa của một đám trẻ con

- "Anh được mấy cháu?" Sherlock Holmes hỏi

- Bác sĩ Watson: "trong đám trẻ con này không phải chỉ có con nhà tôi mà có trẻ của những 4 gia đình. Trẻ nhà tôi đông nhất. Trẻ nhà con cậu em tôi đông thứ nhì, trẻ con nhà cô em gái đông thứ ba, cuối cùng là trẻ con nhà ông chú ít nhất. Chúng quây như vậy vì cả đám không đủ để chia thành hai nhóm, mỗi nhóm 9 người. Nếu nhận 4 số chỉ trẻ con của các nhà thì được kết quả chính là số nhà của tôi mà anh đã biết"

- Sherlock Holmes là một thám tử tài ba, có khả năng suy diễn logic rất tốt nên sau vài phút suy nghĩ ông bèn nói: "Anh cho thiếu giả thiết nếu không thể biết chính xác được số trẻ con của mỗi gia đình. Xin hãy cho biết thêm, ông chú anh có một con hay nhiều hơn"

- Bác sĩ Watson trả lời thêm (Điều này chúng ta không biết)

Sau đó thì ngay lập tức, Sherlock Holmes đã nói chính xác số trẻ con của mỗi gia đình.

Hỏi : • Số nhà của bác sĩ Watson số nào ?

• Mỗi gia đình có mấy con .

Hướng dẫn

Gọi số trẻ con của các gia đình : Bác sĩ Watson , người Em trai, người Em gái và của Ông chú theo thứ tự là : a, b, c, d

Ta có : $a + b + c + d < 18$ và $a > b > c > d$

Số nhà của bác sĩ Watson là : $N = abcd$.

Ta có : $d < 3$ vì nếu $d \geq 3 \Rightarrow c \geq 4, b \geq 5, a \geq 6$

$\Rightarrow a + b + c + d \geq 18$ (vô lý)

Vậy : $d = 1 \vee d = 2$

Nếu : $d = 2$ thì chỉ có 7 khả năng sau đây xảy ra :

d	c	b	a	d + c + b + a	N
2	3	4	5	14	120
2	3	4	6	15	144
2	3	4	7	16	168
2	3	4	8	17	192
2	3	5	6	16	180
2	3	5	7	17	210
2	4	5	6	17	240

Trong cả bảy trường hợp này , các tích N nhận được là khác nhau , trong khi đó Sherlock Holmes vẫn chưa biết chính xác kết quả số trẻ của mỗi gia đình, chúng ta phải xét trường hợp : $d = 1$

Rõ ràng chỉ cần xét các trường hợp sao cho tích $N = abcd \geq 120$ (Đó là tích bé nhất khi $d = 2$)

Do đó khi : $d = 1$, ta chỉ cần xét bốn trường hợp sau :

d	c	b	a	d + c + b + a	N
1	3	5	8	17	120
1	3	6	7	17	126

1	4	5	6	16	120
1	4	5	7	17	149

Nếu số nhà bác sĩ Watson khác 120 thì Sherlock Holmes đã có thể nói ngay số trẻ con của mỗi nhà mà không cần thêm điều kiện gì .

Do vậy , số nhà của bác sĩ Watson phải là 120 .

Khi $N = 120$ ta có 3 khả năng :

$$\bullet 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$\bullet 1 \times 3 \times 5 \times 8 = 120$$

$$\bullet 1 \times 4 \times 5 \times 6 = 120$$

Khi được biết thêm số trẻ con nhà Ông chú thôi mà Sherlock Holmes nói được ngay kết quả thì điều đó có thể là : $d = 2$, $c = 3$, $b = 4$, $a = 5$

Bài 51

Sau một thời gian dài xa cách , hai người bạn cũ gặp lại nhau . Một trong hai người đó thông báo là anh ta có 3 người con trai mà tích các tuổi của chúng bằng 36 , còn tổng các tuổi thì bằng số cửa sổ của ngôi nhà cạnh chỗ họ đang gặp nhau .

Nghe xong , người thứ hai nói rằng , anh ta không thể xác định được tuổi của chúng . Do đó người thứ nhất nói thêm rằng : đứa con trai đầu của anh ta có tóc màu hung đỏ .

Sau đó , người thứ hai lập tức đọc ngay được số tuổi của đám trẻ con một cách chính xác .

Hỏi tuổi của mỗi đứa trẻ ?

Hướng dẫn

Gọi : a , b , c là tuổi của ba người con trai

Giả sử : $a \geq b \geq c \geq 1$. Ta xét các trường hợp :

c	b	a	$c + b + a$	$c b a$
1	2	18	21	36
1	2	18	21	36
1	3	12	16	36
1	4	9	14	36
1	6	6	13	36
2	2	9	13	36
2	3	6	11	36
3	3	4	10	36

Nếu số cửa sổ của ngôi nhà khác 13 thì người bạn đã có thể nói ngay được số tuổi ba người con trai .

Chính anh ta không nói được ngay , nên số cửa sổ của ngôi nhà là 13 . Lúc đó hai khả năng .

Nhưng chỉ sau khi nghe bạn nói , anh ta có con trai đầu , anh ta nói ngay được số tuổi của ba đứa trẻ , điều đó chứng tỏ rằng tuổi của ba người con là : 2 , 2 , 9

Bài 52

Khách và Chủ nói chuyện với nhau :

- " Ông được mấy cháu ? Các cháu lên mấy tuổi ? " Khách hỏi .

- " So với tinh thần "dân số học" tôi nhiều hơn một cháu nghĩa là tôi có 3 cháu . Tích các số chỉ số tuổi các cháu bằng 72 và tổng số tuổi các cháu thì bằng số nhà của tôi đấy "

Khách ngẫm nghĩ một lúc rồi nói : Bài toán này không xác định

- " Đúng ! " Chủ nhà trả lời . " Nhưng tôi vẫn hy vọng rằng cháu lớn nhất của tôi sẽ được đi dự trại hè toàn quốc tổ chức cho các cháu học sinh phổ thông giỏi toàn toàn diện vào cuối năm đấy "

Hãy cho biết số tuổi của từng con người ?

Bài 53

Học sinh A rất giỏi Toán . Có lần , thầy giáo đố A đoán hai số nguyên dương mà thầy đã viết bỏ trong phong bì dán kín , nhưng chỉ cho A biết tổng các bình phương của hai số ấy .

• A trả lời : " Em chịu , không đoán được ! " .

• Thầy giáo liền cho biết thêm : " Hai số ấy có tổng lớn hơn 12 " .

• Khi đó A nói : " Em đoán ra rồi và đưa ra kết quả đúng " .

Bạn hãy cho biết A đã lập luận thế nào để tìm ra hai số đó ?

Bài 54

An ; Bình ; Dung mỗi người nhận một trong các vật sau đây : 1 quả bóng ; 1 cái vòng ; 1 con xúc xắc . Sau đó ba bạn trao đổi với nhau như sau :

1/ An không có bóng hoặc là Bình có vòng

2/ Bình không có vòng hoặc là Dung có xúc xắc

3/ Dung có xúc xắc và An có bóng

4/ An có bóng và Bình không có bóng có vòng .

Hãy xét xem có thể xảy ra các trường hợp sau đây không :

a) Cả bốn câu đều đúng .

b) Chỉ 3 câu đúng .

c) Chỉ có 1 câu đúng .

d) Không có câu nào đúng .

Hướng dẫn

Lập bảng xét các khả năng . Ký hiệu : Bóng (B) ; Vòng (V) ; Xúc xắc (X)

An	Bình	Dung	Các câu đúng	Các câu sai
B	V	X	1 ; 2 ; 3	4
B	X	V	2 ; 4	1 ; 3
V	B	X	1 ; 2	3 ; 4

V	X	B	1 ; 2	3 ; 4
X	B	V	1 ; 2	3 ; 4
X	V	B	1	2 ; 3 ; 4

Như vậy , chỉ có thể xảy ra các trường hợp b , c , d .

Bài 55

Cho định lý : "Nếu đường thẳng c bất kỳ của một phẳng đã cắt đường thẳng a thì cũng cắt đường thẳng b , thì 2 đường thẳng a và b song song với nhau "

1/ Viết cấu trúc logic của định lý đã cho .

2/ Sử dụng hình thức phản đảo , chứng minh định lý đó .

Hướng dẫn

1/ Cấu trúc logic của định lý

$$\forall c, ((c \cap a \neq \emptyset) \Rightarrow (c \cap b \neq \emptyset)) \Rightarrow (a \cap b = \emptyset)$$

2/ Ta có mệnh đề trên tương đương với mệnh đề sau đây :

$$\begin{aligned} \overline{a \cap b = \emptyset} &\Rightarrow \forall c; ((c \cap a \neq \emptyset) \Rightarrow (c \cap b \neq \emptyset)) \\ &= \overline{a \cap b = \emptyset} \Rightarrow \exists c; c \cap a \neq \emptyset \Rightarrow c \cap b \neq \emptyset \\ &= a \cap b \neq \emptyset \Rightarrow \exists c, (c \cap a \neq \emptyset) (\overline{c \cap b \neq \emptyset}) \\ &= a \cap b \neq \emptyset \Rightarrow \exists c (c \cap a \neq a \cap b \neq \emptyset) (c \cap b = \emptyset) \end{aligned}$$

Như vậy định lý trên đây tương đương với mệnh đề phản đảo là định lý : " Nếu đường thẳng a cắt đường thẳng b thì tồn tại đường thẳng c sao cho c cắt a và c không cắt b "

Thật vậy chỉ việc lấy trên đường thẳng a một điểm c song song với đường thẳng b .

Bài 56

Có tất cả 105 học sinh làm một đề kiểm tra . Đề kiểm tra gồm 1 bài toán Đại số , 1 bài toán Hình học và 1 bài toán Lượng giác.

Biết rằng : 70 học sinh giải được bài toán Đại số ; 59 em giải được bài toán Hình học và 62 em giải được bài toán Lượng giác ; 90 em học sinh làm được bài toán Đại số

hoặc bài toán Hình học ; 89 học sinh giải được bài toán Hình học hoặc Lượng giác ; 91 học sinh giải được bài toán Đại số hoặc Lượng giác ; còn 6 em không làm được bài toán nào .

Hỏi có bao nhiêu em học sinh giải được cả ba bài toán của đề kiểm tra ?

Đáp số

Có tất cả 20 học sinh

Bài 57

Một giáo viên chủ nhiệm tính số điểm 10 mà lớp mình phụ trách đạt được trong học kỳ I nhận thấy có : 40 học sinh đạt ít nhất là một điểm 10 ; 27 học sinh đạt học sinh đạt ít nhất là hai điểm 10 ; 19 học sinh đạt ít nhất là ba điểm 10 ; 14 học sinh đạt ít nhất là bốn điểm 10 và không có học sinh nào đạt năm điểm 10 . Hỏi cả lớp có bao nhiêu điểm 10 ?

Đáp số

Tổng số điểm 10 của cả lớp là 100

Bài 58

Đầu năm học , khi điều tra nguyện vọng của 40 học sinh , cô giáo chủ nhiệm nhận thấy có : 24 em có nguyện vọng được bồi dưỡng thêm về Toán ; 19 em xin được bồi dưỡng thêm về Văn và 16 em về Ngoại ngữ ; có 12 em xin bồi dưỡng cả hai môn Văn và Toán ; có 7 em xin bồi dưỡng cả Toán và Ngoại ngữ ; có 5 em xin bồi dưỡng hai môn Văn và Ngoại ngữ ; có 2 em xin được bồi dưỡng cả ba môn .
Hỏi :

1/ Có bao nhiêu em chỉ xin bồi dưỡng văn mà không bồi dưỡng toán ?

2/ Có bao nhiêu em chỉ xin bồi dưỡng một môn ?

3/ Có bao nhiêu em không xin bồi dưỡng thêm môn nào cả ?

Đáp số

1/ Số em xin bồi dưỡng Văn mà không bồi dưỡng Toán (có thể vẫn bồi dưỡng thêm Ngoại ngữ) là : $19 - (10 + 2) = 7$

2/ Có 4 em chỉ xin bồi dưỡng môn Văn ; 7 em chỉ xin bồi dưỡng môn Ngoại ngữ .

3/ Có 3 em không xin bồi dưỡng thêm môn nào ?

Bài 59

Một lớp có 45 học sinh . Trong đó có : 20 em thích đá bóng ; 16 em thích chơi bóng bàn ; 12 em thích chơi cầu lông . Trong đó có 8 em vừa thích bóng bàn , vừa thích chơi đá bóng . Có 6 em vừa thích chơi đá bóng vừa thích chơi cầu lông . Có 7 em vừa thích chơi cầu lông vừa thích chơi bóng bàn . Đặc biệt có 3 em thích chơi cả ba môn . Hỏi có bao nhiêu em học sinh của lớp :

1/ Chỉ thích chơi đá bóng ?

2/ Chỉ thích chơi bóng bàn ?

3/ Chỉ thích chơi cầu lông ?

4/ Không tham gia chơi một môn thể thao nào ?

Hướng dẫn

Sử dụng biểu đồ Venn - Euler

Bài 60

Một lớp học sinh có 50 em . Trong số đó có 24 em tham gia vào câu lạc bộ người yêu thơ , có 32 em tham gia sinh hoạt câu lạc bộ những người phát minh trẻ , có 8 em không tham gia sinh hoạt .

Hỏi có bao nhiêu em tham gia cả hai loại hình sinh hoạt trên đây ?

Hướng dẫn

Số học sinh tham gia sinh hoạt là $50 - 8 = 42$

Số học sinh chỉ tham gia câu lạc bộ người yêu thơ $42 - 32 = 10$

Số học sinh tham gia cả 2 loại hình sinh hoạt là $24 - 10 = 14$

Bài 61.

Cho bất phương trình : $kx + l^2 > 0$. Với giá trị nào của tham số k , các mệnh đề sau đây đúng :

$P = \{ \text{với mọi } l, \text{ bất phương trình có ít nhất là một nghiệm} \}$

$Q = \{ \text{Tồn tại } l \text{ để cho bất phương trình đúng với mọi } x \}$

$R = \{ \text{Với mọi } l, \text{ bất phương trình đúng với mọi } x \}$

$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tồn tại } l \text{ để cho bất phương trình có ít} \\ \text{nhất là một nghiệm} \end{array} \right\}$

Hướng dẫn

P đúng với mọi k khác 0

Q đúng chỉ khi $k = 0$

R sai với mọi k

S đúng với mọi k

Dễ dàng thấy : $\bar{P} = Q$; $S = \bar{R}$

Bài 62

Hãy phát biểu định nghĩa : " Số a không là giới hạn của dãy số (x_n) "

Hướng dẫn

- Trước hết phát biểu dưới dạng ngôn ngữ kí hiệu : $\lim x_n \neq a$

- Do đó : $\lim x_n \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N$

Ta có : $|x_n - a| \geq \varepsilon$

Bài 63

Cho định nghĩa : " Dãy số (x_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu tồn tại số dương c sao cho $|x_n| < c ; \forall n$ "

Hãy phát biểu định nghĩa dãy số không bị chặn

Bài 64

Phát biểu định nghĩa hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thuộc $(a ; b)$

Chương 3: HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

§1 CÁC LÝ THUYẾT TIỀN ĐỀ HÓA PHI HÌNH THỨC

1.1 PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG

1.1.1. Quy định các từ (các ký hiệu) nguyên thủy

1.1.2. Quy định các tiên đề :

Đó là các mệnh đề xuất phát về các từ nguyên thủy. Các từ nguyên thủy thì không định nghĩa các tiên đề được coi là các định lý xuất phát để tiến hành suy diễn

1.1.3. Phép chứng minh : Mệnh đề T được gọi là định lý hay là mệnh đề chứng minh được, nếu tồn tại một dãy hữu hạn các mệnh đề $S_1, S_2, \dots, S_k$ trong đó :

$$\bullet T = S_k$$

• Mỗi S_i với $1 \leq i \leq k$ hoặc là một tiên đề, hoặc là mệnh đề được suy ra từ một hoặc một số mệnh đề S_j với $j < i$ bằng suy luận hợp logic.

Dãy các mệnh đề $S_1, S_2, \dots, S_k = T$ được gọi là một phép chứng minh định lý T

Quy ước : Mỗi tiên đề là một định lý của một phép chứng minh chỉ gồm một bước.

Ký hiệu : $\vdash T$

Mở rộng khái niệm về mệnh đề chứng minh được :

Cho $M = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ là một tập hợp hữu hạn các mệnh đề của lý thuyết tiên đề hóa phi hình thức

Ta gọi T là một mệnh đề chứng minh được từ M

Ký hiệu : $M \vdash$; hoặc là : $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash T$

Trong đó $A_1, A_2, \dots, A_m$ được gọi là tiên đề (giả thiết)

Nếu như có một dãy hữu hạn các mệnh đề $S_1, S_2, \dots, S_k$ trong đó :

$$\bullet T = S_k$$

• Mỗi S_i với $1 \leq i \leq k$ hoặc là tiên đề, hoặc là giả thiết, hoặc là một mệnh đề có được từ một hoặc một số mệnh đề S_j ($j < i$) bằng suy luận hợp logic

Mệnh đề T được gọi là định lý, còn dãy các mệnh đề $S_1, S_2, \dots, S_k$ được gọi là một phép chứng minh định lý T

Nếu $M = \emptyset$ thì ta có $\vdash T$

1.2. VÍ DỤ VỀ LÝ THUYẾT TIÊN ĐỀ HOÁ PHI HÌNH THỨC XÉT LÝ THUYẾT NHÓM

1.2.1. Quy định từ nguyên thủy:

Tập hợp $G \neq \emptyset$. Một phép toán hai ngôi gọi là phép nhân, ký hiệu là: .

Một phần tử $e \in G$ gọi là phần tử đơn vị

1.2.2. Quy định các tiên đề: Gồm bốn tiên đề

1.2.2a. Với mọi $a, b \in G$ ta có tích $a.b \in G$ và là phần tử xác định duy nhất.

1.2.2b. Với mọi $a, b, c \in G$ ta có: $a(b.c) = (a.b).c$

1.2.2c. Với mọi $a \in G$ ta có: $a.e = e.a = a$

1.2.2d. Với mọi $a \in G$, đều tồn tại phần tử $a' \in G$ sao cho:
 $a.a' = a'.a = e$

1.2.3. Phép chứng minh định lý T : "Trong nhóm G , có duy nhất một phần tử đơn vị" như sau:

(S_1 : Giả sử trong nhóm G có 2 phần tử đơn vị e_1, e_2)

S_2 : Với mọi $a \in G$ ta có $e_1.a = a$

S_3 : Với mọi $a \in G$ ta có $a.e_2 = a$

S_4 : Vì $e_2 \in G$ ta có $e_1.e_2 = e_2$

S_5 : Vì $e_1 \in G$ ta có $e_1.e_2 = e_1$

S_6 : Với mọi $a, b \in G$ ta có tích $a.b$ được xác định duy nhất, tức là tích $e_1.e_2$ xác định duy nhất

S_7 : $e_1 = e_2$

S_8 : Nếu trong G có hai phần tử đơn vị e_1 và e_2 thì $e_1 = e_2$

Ta có: dãy hữu hạn các mệnh đề $S_1, S_2, \dots, S_8$ là một phép chứng minh định lý T :

Trong dãy các mệnh đề $S_1, S_2, S_3, \dots, S_8$ thì : S_1 là giả thiết
 S_2, S_3, S_6 là các tiên đề

Mệnh đề S_4 được suy ra từ S_2

Mệnh đề S_5 được suy ra từ S_3 .

Mệnh đề S_7 được suy ra từ S_4, S_5, S_6 .

Mệnh đề S_8 được suy ra từ S_1, S_7 .

1.3 NHẬN XÉT

Trong lý thuyết tiên đề hoá phi hình thức, có nhiều nội dung gắn liền với ngôn ngữ tự nhiên, với suy luận hợp logic mà mọi người mặc nhiên thừa nhận. (Chẳng hạn câu : có được nhờ suy luận hợp logic, suy ra được ...)

§2 CÁC LÝ THUYẾT TIÊN ĐỀ HOÁ HÌNH THỨC

Một hệ hình thức được đặc trưng bởi.

2.1 MỘT NGÔN NGỮ CỦA HỆ HÌNH THỨC GỒM

- Một bảng các chữ cái
- Các quy tắc để từ các chữ cái xây dựng nên các công thức của hệ (chẳng hạn như quy tắc về ghép các chữ cái để có được các từ trong bảng tiếng Việt, tiếng Anh, ...)

2.2 MỘT HỆ TIÊN ĐỀ

Đó là các công thức suy diễn được ban đầu, hãy là những định lý xuất phát.

2.3 CÁC QUY TẮC SUY DIỄN

Để từ các công thức suy diễn được ban đầu, chúng ta nhận được các công thức khác của hệ hình thức

2.4 CHÍNH XÁC HOÁ CÁC KHÁI NIỆM

2.4.1. Phép suy diễn :

Cho $M = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ là một tập hợp hữu hạn các công thức của hệ hình thức.

Ta nói rằng : Công thức B là công thức suy diễn được từ M , ký hiệu là $M \vdash B$, hay là $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$.

(Các $A_1, A_2, \dots, A_m$ được gọi là giả thiết hay tiên đề khi có một dãy hữu hạn các công thức $S_1, S_2, \dots, S_k$. Trong đó :

- $S_k = B$
- Mỗi công thức S_i với $1 \leq i \leq k$ hoặc là tiên đề, hoặc là giả thiết, hoặc là công thức có được từ một hoặc là một số S_j ($i < j$) nhờ một trong các quy tắc suy diễn đã quy định.

Dãy các công thức $S_1, S_2, \dots, S_k$ được gọi là một phép suy diễn của công thức $B = S_k$.

2.4.2. Phép chứng minh :

Trong trường hợp M là tập hợp rỗng thì công thức B được gọi là công thức chứng minh được, hay còn gọi là định lý. Ký hiệu : $\vdash B$.

Dãy hữu hạn các công thức $S_1, S_2, \dots, S_k$ được gọi là một phép chứng minh của định lý $B = S_k$, trong đó mỗi công thức S_i với $1 \leq i \leq k$ hoặc là tiên đề, hoặc là công thức có được từ một hoặc một số công thức S_j ($j < i$) nhờ một trong các quy tắc suy diễn đã quy định.

Mọi tiên đề là định lý mà phép chứng minh ứng với $k = 1$

§3 HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ

3.1 NGÔN NGỮ CỦA HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ BAO GỒM

• Biến mệnh đề : $A ; B ; C ; D \dots$

• Ký hiệu logic : $\wedge ; \vee ; \neg ; \rightarrow$

• Dấu ngoặc : $()$

Công thức của hệ toán mệnh đề được xác định như sau :

• Mỗi biến mệnh đề là một công thức

• Nếu A và B là các công thức thì ta cũng có các công thức sau : $(A \wedge B) ; (A \vee B) ; \neg A ; (A \rightarrow B)$

Ngoài ra không có công thức nào khác

Chẳng hạn ta có công thức sau đây :

$((C \wedge D) \rightarrow (A \vee B))$ là một công thức của hệ toán mệnh đề vì :

- Do C, D là công thức nên $(C \wedge D)$ là công thức .
- Do A, B là công thức nên $(A \vee B)$ là công thức .
- Do $(C \wedge D)$ và $(A \vee B)$ là công thức nên :
 $((C \wedge D) \rightarrow (A \vee B))$ là công thức .

Các ký hiệu như $(A \vee B ; \wedge A ; B \rightarrow C)$ đều không phải là các công thức của hệ toán mệnh đề .

Chúng ta có 3 quy ước sau đây :

1. Quy ước về bỏ dấu ngoặc ở hai đầu của một công thức
Chẳng hạn ta viết $A \vee B$ thay cho $(A \vee B)$. Ta viết $A \wedge B$ thay cho $(A \wedge B)$
2. Quy ước về thứ tự thực hiện các dấu : $\wedge, \vee \rightarrow$
 - Dấu $\wedge$ được thực hiện trước các dấu $\vee, \rightarrow$
 - Dấu $\vee$ được thực hiện trước dấu $\rightarrow$
3. Quy ước về thay ký hiệu : $\neg A$ bằng $\overline{A}$; thay $\neg(A \wedge B)$ bằng $\overline{A \wedge B}$; thay $\neg(A \vee B)$ bằng $\overline{A \vee B}$, ...

Chẳng hạn , ta có thể viết như sau :

$$(\neg A \vee (B \rightarrow (C \wedge D))) = \overline{A} \vee (B \rightarrow C \wedge D)$$

3.2 HỆ TIỀN ĐỀ

Là các định lý xuất phát , tức là các công thức suy diễn được ban đầu của hệ toán mệnh đề .

Có nhiều cách chọn hệ tiên đề cho hệ toán mệnh đề . Hệ tiên đề được trình bày trong tài liệu này là hệ tiên đề theo Nôvikốp (Nhà toán học Nga)

Gồm 11 tiên đề :

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \wedge B \rightarrow A$
4. $A \vee B \rightarrow B$
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

$$6. A \rightarrow A \vee B$$

$$7. B \rightarrow A \vee B$$

$$8. (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

$$9. (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$$

$$10. A \rightarrow \bar{\bar{A}}$$

$$11. \bar{\bar{A}} \rightarrow A$$

3.3 QUY TẮC SUY DIỄN

3.3.1. Quy tắc thay thế :

Nếu công thức M chứa chữ cái A là công thức suy diễn được thì công thức có được bằng cách thay A khắp nơi trong M bằng chữ cái B cũng là công thức suy diễn được. Quy tắc thay thế được ký hiệu là : $\mathcal{L}_A^B(M)$

Chẳng hạn :

Vì $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ là công thức suy diễn được (tiên đề 1) nên công thức :

$\mathcal{L}_A^C(A \rightarrow (B \rightarrow A)) = C \rightarrow (B \rightarrow C)$ cũng là công thức suy diễn được.

Hoặc công thức

$\mathcal{L}_B^A(B \rightarrow A \vee B) = A \rightarrow A \vee A$ là công thức suy diễn được

Công thức : $\mathcal{L}_B^{CVD}(A \rightarrow (B \rightarrow A)) = A \rightarrow (C \vee D \rightarrow A)$ là công thức suy diễn được

3.3.2. Quy tắc kết luận (modusponens) :

Nếu các công thức M và $M \rightarrow N$ là các công thức suy diễn được thì công thức N cũng là công thức suy diễn được. ký hiệu quy tắc kết luận là $M.P$

3.4 MỘT SỐ ĐỊNH LÝ

Dưới đây, bằng hai quy tắc suy diễn, từ hệ tiên đề đã cho chúng ta chứng minh một số các công thức suy diễn thông dụng trong hệ toán mệnh đề.

• **Định lý 1 :**

Chứng minh rằng : $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$

Giải

Ta có :

$$(S_1) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \text{ (T.Đ2)}$$

$$(S_2) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)) \text{ (} S_1 ; \mathcal{L}_C^A \text{)}$$

$$(S_3) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \text{ (T.Đ1)}$$

$$(S_4) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A) \text{ (} S_2 ; S_3 ; \text{M.p)}$$

Dãy S_1, S_2, S_3, S_4 là phép chứng minh định lý

$$(S_4) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A).$$

• **Định lý 2 :**

Chứng minh rằng : $\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

Giải

Ta có :

$$(S_1) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)) \text{ (T.Đ5)}$$

$$(S_2) \vdash (A \wedge B \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge C))$$

$$; (S_1 ; \mathcal{L}_A^{A \wedge B})$$

$$(S_3) \vdash (A \wedge B \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge A)$$

$$; (S_2 ; \mathcal{L}_C^A)$$

$$(S_4) \vdash A \wedge B \rightarrow B \text{ (T.Đ4)}$$

$$(S_5) \vdash (A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge A) \text{ (} S_3, S_4, \text{M.P)}$$

$$(S_6) \vdash A \wedge B \rightarrow A \text{ (T.Đ3)}$$

$$(S_7) \vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A \text{ (} S_5, S_6, \text{M.P)}$$

Dãy $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ là một phép chứng minh định lý : $\vdash A \wedge B \rightarrow A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

• **Định lý 3 :** Chứng minh rằng : $\vdash B \rightarrow D$. Trong đó D là một công thức suy diễn được

Giải

$$(S_1) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \text{ (T.Đ1)}$$

$$(S_2) \vdash D \rightarrow (B \rightarrow D) \quad (S_1; \mathcal{L}_A^D(M))$$

$$(S_3) \vdash D \quad (\text{giả thiết})$$

$$(S_4) \vdash B \rightarrow D \quad (S_2; S_3; \text{M.P})$$

Dãy S_1, S_2, S_3, S_4 là phép chứng minh định lý :

$$(S_4) : \vdash B \rightarrow D$$

• **Định lý 4 :** Chứng minh rằng : $\vdash A \rightarrow A$

Giải

$$(S_1) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (\text{Định lý 1})$$

$$(S_2) \vdash (A \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (S_1, \mathcal{L}_B^D)$$

$$(S_3) \vdash A \rightarrow D \quad (\text{định lý 3}, \mathcal{L}_B^A)$$

$$(S_4) \vdash A \rightarrow A \quad (S_2, S_3, \text{M.p})$$

Dãy S_1, S_2, S_3, S_4 là phép chứng minh định lý 4

3.5 PHÉP SUY DIỄN

Trong hệ toán mệnh đề , khái niệm về phép suy diễn có thể được biết cụ thể như sau :

Công thức B được gọi là suy diễn được từ các tiên đề $A_1; A_2; \dots; A_m$ ký hiệu : $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$ có nghĩa một trong ba khả năng sau xảy ra

• $SD_1 : A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A_k ; 1 \leq k \leq m$

• $SD_2 : A_1, A_2, \dots, A_m \vdash D$; với D là một công thức suy diễn được của hệ toán mệnh đề .

• $SD_3 : \text{Nếu } A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A \text{ và } A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A \rightarrow B$

Thì $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$

Các công thức $A_1, A_2, \dots, A_m$ được gọi là các tiên đề hay giả thiết của phép suy diễn

□ **Chú ý :** Ký hiệu SD viết tắt của từ suy diễn

• Trong cách viết $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$ thì thứ tự của các tiên đề là không quan trọng

• Nếu $M \vdash B$ thì $M, A \vdash B$ với A là một công thức bất kỳ của hệ toán mệnh đề

3.6 ỨNG DỤNG

✓ **Áp dụng 1 :** Chứng minh rằng : $A \vdash B \rightarrow A$

Giải

Ta có :

$$(S_1) A \vdash A \quad (SD1)$$

$$(S_2) A \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (SD2)$$

$$(S_3) A \vdash B \rightarrow A \quad (S_1; S_2; S.D3)$$

✓ **Áp dụng 2 :** Chứng minh rằng : $A, B \vdash A \wedge B$

Giải

Ta có :

$$(S_1) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)) \quad (T.D5)$$

$$(S_2) \vdash (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B)) \quad (S_1; \mathcal{L})$$

$$(S_3) \vdash A \rightarrow A \quad (\mathcal{D}L4)$$

$$(S_4) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B) \quad (S_2, S_3, M.p)$$

$$(S_5) A, B \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B) \quad (S_4, SD_2)$$

$$(S_6) A, B \vdash B \quad (SD_1)$$

$$(S_7) A, B \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (SD2)$$

$$(S_8) A, B \vdash A \rightarrow B \quad (SD3)$$

$$(S_9) A, B \vdash A \rightarrow A \wedge B \quad (S_5, S_6, SD3)$$

$$(S_{10}) A, B \vdash A \quad (SD_1)$$

$$(S_{11}) A, B \vdash A \wedge B \quad (SD_3, S_9, S_{10})$$

Vậy : $A, B \vdash A \wedge B$

✓ **Áp dụng 3 :** Chứng minh rằng

$$1/ A \wedge B \vdash A$$

$$2/ A \wedge B \vdash B$$

Giải

Ta có :

$$(S_1) A \wedge B \vdash A \wedge B \rightarrow A \text{ (SD}_2\text{)}$$

$$(S_2) A \wedge B \vdash A \wedge B \quad (S_1, S_2, \text{SD3})$$

Tương tự ta có : $A \wedge B \vdash B$

3.7 ĐỊNH LÝ SUY DIỄN

Cho A, B là hai công thức bất kỳ của hệ toán mệnh đề , còn $M = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ là một tập hợp các công thức của hệ toán mệnh đề .

Chứng minh rằng : nếu $M, A \vdash B$ thì $M \vdash A \rightarrow B$

(xem ở Phần Bài tập - Bài 66)

3.8 MỘT SỐ ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ SUY DIỄN

✓ **Áp dụng 1 :** Chứng minh rằng : $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

Giải

Ta có :

$$(S_1) A, B \vdash A \wedge B \quad (\text{Áp dụng 2 ở phần trên})$$

$$(S_2) A \vdash B \rightarrow A \wedge B \quad (S_1, \text{ĐLSĐ}).$$

$$(S_3) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B) \quad (S_2, \text{ĐLSĐ}).$$

✓ **Áp dụng 2 :**

Chứng minh rằng : $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Giải

Ta có :

$$(S_1) A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash A \quad (\text{SD1})$$

$$(S_2) A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash A \rightarrow B \quad (\text{SD1})$$

$$(S_3) A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash B \quad (S_1, S_2, \text{SD3})$$

$$(S_4) A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash B \rightarrow C \quad (\text{SD1})$$

$$(S_5) A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C \quad (S_3, S_4, \text{SD3})$$

$$(S_6) A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C \quad (S_5, \text{ĐLSĐ})$$

$$(S_7) A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (S_6, \text{ĐLSĐ})$$

$(S_8) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (S_7, \text{DLSD})$

✓ **Áp dụng 3** : Cho B là một công thức bất kỳ, còn A là công thức suy diễn được.

Nếu $A \vdash B \rightarrow A$ thì $B \rightarrow A$ là công thức suy diễn được

Giải

Ta có :

$(S_1) A \vdash B \rightarrow A$

$(S_2) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (S_1, \text{DLSD})$

$(S_3) \vdash A \quad (\text{Giả thiết})$

$(S_4) \vdash B \rightarrow A \quad (S_3, S_2, \text{MP})$

BÀI TẬP LOGIC *Chương 3*

Bài 65

Chứng minh rằng các công thức sau đây là suy diễn được :

1/ $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

2/ $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$

3/ $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

Hướng dẫn

1/ Công thức suy diễn được trong bài này được gọi là quy tắc hoán vị tiền đề

Ta xuất phát từ $(S_1) : A \rightarrow (B \rightarrow C) ; A \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) ;$ sử dụng quy tắc kết luận và định lý suy diễn.

2/ Công thức suy diễn trong bài này được gọi là quy tắc kết hợp tiền đề

Ta xuất phát từ $(S_1) : A \wedge B \vdash A \wedge B \rightarrow A$

Dùng quy tắc kết luận và định lý suy diễn

3/ Công thức suy diễn được trong bài này gọi là quy tắc tách tiên đề. Xuất phát từ:

$$(S_1) A, B \vdash A \wedge B$$

$$(S_2) A \wedge B \rightarrow C, A, B \vdash A \wedge B$$

$$(S_3) A \wedge B \rightarrow C, A, B \vdash A \wedge B \rightarrow C$$

$$(S_4) A \wedge B \rightarrow C, A, B \vdash C$$

$$(S_5) A \wedge B \rightarrow C, A \vdash B \rightarrow C$$

$$(S_6) A \wedge B \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$(S_7) \vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Bài 66

Chứng minh định lý suy diễn:

$$\text{Nếu } M, A \vdash B \text{ thì } M \vdash A \rightarrow B$$

Hướng dẫn

Bởi vì $M, A \vdash B$ nên tồn tại phép suy diễn: $S_1, S_2, \dots, S_n$ trong đó $S_n = B$.

Sau đó ta chứng minh: $M \vdash A \rightarrow S_n$ bằng phương pháp quy nạp toán học theo n .

Bài 67

Chứng minh rằng: (Quy tắc bắc cầu)

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

Bài 68

Người ta có thể xây dựng hệ toán mệnh đề với cơ sở xuất phát sau đây:

1/ Ký hiệu logic gồm $\vee$ và $\neg$ còn các ký hiệu $\wedge$ và $\rightarrow$ được định nghĩa: $A \wedge B = \overline{\overline{A \vee B}}$; $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$

2/ Hệ tiên đề gồm bốn tiên đề:

$$1. A \vee A \rightarrow A$$

$$3. A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$2. A \rightarrow A \vee B$$

$$4. (A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)$$

3/ Quy tắc suy diễn gồm quy tắc thế và quy tắc kết luận. Hãy chứng minh rằng các công thức sau đây là suy diễn được

$$a) A \rightarrow A$$

$$b) A \vee \bar{A}$$

Hướng dẫn

a)

$$(S_1) \vdash A \vee A \rightarrow A$$

$$(S_2) \vdash (A \vee A \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \vee (A \vee A) \rightarrow \bar{A} \vee A)$$

$$(S_3) \vdash \bar{A} \vee (A \vee A) \rightarrow \bar{A} \vee A$$

$$(S_4) \vdash (A \rightarrow A \vee A) \rightarrow (A \rightarrow A)$$

$$(S_5) \vdash A \rightarrow A \vee A$$

$$(S_6) \vdash A \rightarrow A$$

b)

$$(S_1) \vdash A \rightarrow A$$

$$(S_2) \vdash \bar{A} \vee A$$

$$(S_3) \vdash \bar{A} \vee A \rightarrow A \vee \bar{A}$$

$$(S_4) \vdash A \vee \bar{A}$$

Bài 69

Người ta có thể xây dựng hệ toán mệnh đề với cơ sở xuất phát như sau

1/ Ký hiệu logic bao gồm : - và $\rightarrow$. Các ký hiệu logic $\vee$ và $\wedge$ được định nghĩa : $A \vee B = \bar{A} \rightarrow B$; $A \wedge B = \overline{A \rightarrow B}$

2/ Hệ tiên đề chỉ gồm 3 tiên đề :

$$\bullet A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\bullet (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\bullet (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow A)$$

Hãy chứng minh công thức $A \rightarrow A$ là suy diễn được

Hướng dẫn

Trong Tiên đề 2 thế B bằng $A \rightarrow A$, thế C bằng A.

Trong Tiên đề 1 thế B bằng $A \rightarrow A$, thế B bằng A.

Dùng quy tắc kết luận để suy ra điều cần chứng minh

Bài 70

Cho hệ tiên đề gồm 10 tiên đề :

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $A \wedge B \rightarrow A$
4. $A \wedge B \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
6. $A \rightarrow A \vee B$
7. $B \rightarrow A \vee B$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$
9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A})$
10. $\bar{\bar{A}} \rightarrow A$

Hãy chứng minh rằng :

- 1/ $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$
- 2/ $\vdash (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow A)$

Chương 4 : LOGIC và VẤN ĐỀ DẠY HỌC TOÁN HỌC



VẤN ĐỀ DẠY HỌC CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC

§1 VAI TRÒ CỦA CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC

1.1 KHÁI NIỆM VỪA LÀ NÚT CỦA QUÁ TRÌNH NHẬN THỨC, VỪA LÀ SỰ TỔNG KẾT NHẬN THỨC, LÀ VẬT LIỆU CƠ BẢN ĐỂ XÂY DỰNG MỘT NGÀNH KHOA HỌC.

1.1.1. Hình thành khái niệm là một quá trình tâm lý phức tạp : người ta thường chia quá trình này thành hai giai đoạn (hai trình độ) :

□ *Giai đoạn cảm tính* : bao gồm việc tạo ra cảm giác, tri giác và biểu tượng .

□ *Giai đoạn logic* : bao gồm ở việc chuyển từ biểu tượng tới khái niệm.

Nhờ cảm giác, tri giác và biểu tượng, những thông tin ban đầu về sự vật và hiện tượng được cung cấp và giữ lại trong óc người.

Trên cơ sở đó, trong giai đoạn logic , con người tiến hành các hoạt động tư duy như so sánh và đối chiếu, phân tích và tổng hợp, trừu tượng hóa và khái quát hóa để chuyển từ biểu tượng sang khái niệm.

Trong quá trình hình thành khái niệm, trình độ cảm tính tương ứng với giai đoạn thứ nhất của nhận thức nói chung, tức là "trực quan sinh động". Ở trình độ này đòi hỏi phải sử dụng rộng rãi trực quan.

Nếu chưa bao giờ chỉ cho học sinh xem một mô hình của khối lập phương, các vật thể có hình khối lập phương thì học sinh sẽ không có biểu tượng về khối lập phương và do đó ở học sinh cũng sẽ không có khái niệm về khối lập phương.

1.1.2. Bất kỳ một quá trình hình thành khái niệm nào cũng là kết quả của sự trừu tượng hóa và khái quát hóa :

Nhờ phân tích, con người tách ra các thuộc tính của các đối tượng, còn nhờ tổng hợp con người hợp nhất lại các thuộc tính bản chất, tách chúng ra khỏi các thuộc tính còn lại, không bản chất, đưa các thuộc tính bản chất này vào một thể thống nhất, đó là khái niệm.

Có thể nói khái niệm là sự tái tạo lại các đối tượng ở trong óc. Ngoài trừu tượng hóa, ở đây còn có cả một quá trình khái quát hóa, khi đó ở trong tập hợp các đối tượng đang xem xét, con người tìm thấy các thuộc tính chung có mặt trong tất cả các phần tử của tập hợp đã cho.

Trong toán học, khái niệm thường được ký hiệu không chỉ bằng thuật ngữ (một từ hoặc một nhóm từ), bằng một tên gọi mà còn cả bằng ký hiệu.

Chẳng hạn : trong tập hợp các đa giác, chúng ta nhóm lại những hình có các thuộc tính chung, bản chất như : hình tứ giác, các cặp cạnh đối diện song song, hai cạnh kề bằng nhau, đặt cho các đối tượng này một tên, thì ở đây chúng ta đã hình thành thành một khái niệm mới **Hình thoi**.

1.1.3. Khi trình bày bất kỳ một khoa học nào, việc trước tiên là cần phải xác định rõ ràng và chính xác tất

cả các khái niệm cơ bản , khái niệm dẫn xuất của khoa học đó .

Chẳng hạn khi xây dựng hình học Euclide , việc đầu tiên thường làm là phải chọn các khái niệm cơ bản sau đây :

- **Đối tượng cơ bản gồm** : điểm, đường thẳng, mặt phẳng.

- **Quan hệ cơ bản gồm** : quan hệ liên thuộc, quan hệ thứ tự, quan hệ toàn đẳng .

1.2 BẤT KỲ MỘT KHÁI NIỆM MỚI NÀO RA ĐỜI , CÙNG ĐỀU THÚC ĐẨY NGÀNH KHOA HỌC ĐÓ PHÁT TRIỂN.

Trong toán học, các khái niệm là cơ sở để suy diễn bởi lẽ toán học được trình bày là một khoa học suy diễn có hệ thống , mà phần lớn các khái niệm toán học thì lại được trình diễn thông qua hệ thống các định nghĩa.

1.3 HÌNH THÀNH CÁC KHÁI NIỆM LÀ MỘT TRONG NHỮNG VẤN ĐỀ TRUNG TÂM CỦA LÝ LUẬN DẠY HỌC MÔN TOÁN.

Muốn nâng cao chất lượng của việc dạy học môn Toán thì không thể không nâng cao chất lượng của việc hình thành cho học sinh những khái niệm toán học cơ bản nhất , quan trọng nhất vì :

□ **Chất lượng của việc nắm vững kiến thức cơ bản phụ thuộc vào việc nắm vững các khái niệm** , nhất là chúng ta điều biết rằng các khái niệm toán học được trình bày trong chương trình môn Toán ở trường Phổ thông phần lớn là những khái niệm cơ bản nhất , quan trọng nhất .

□ **Quá trình hình thành các khái niệm Toán học là một quá trình trừu tượng hóa và có tính sáng tạo** . Do đó nó góp phần quan trọng vào việc rèn tư duy logic , trí thông minh , khả năng sáng tạo cho học sinh , việc dạy học các khái niệm phải nhằm phục vụ cho nhiệm vụ quan trọng đó.

Chúng ta không nên quên rằng : *quá trình hình thành các khái niệm sẽ chỉ có hiệu quả nếu như quá trình này phải định hướng cho học sinh tới việc khái quát hóa và trừu tượng hóa những thuộc tính bản chất của khái niệm đang hình thành* .

Chẳng hạn : Xét *quá trình hình thành khái niệm hình vuông* , người ta chỉ cho học sinh Lớp 1 nhiều đối tượng khác nhau về hình dạng , kích thước , màu sắc , vật liệu ... Thêm vào đó , trong các đối tượng này , có một số có hình dạng vuông , các đối tượng còn lại có các hình dạng khác (như : hình tròn , tam giác , chữ nhật , hình thoi ...) . Sau đó chúng ta lấy ra một hình vuông và thông báo cho các em biết rằng : hình đã cho có tên gọi là **Hình vuông** . Tiếp theo, chúng ta yêu cầu các em lấy tiếp ra các hình vuông khác còn lẫn trong các đối tượng . (các hình vuông có các màu sắc khác nhau, chất liệu làm ra chúng khác nhau, kích thước khác nhau ...) .

Ở đây chúng ta đã hướng dẫn các em tách ra từ các đối tượng đã cho , một lớp con mà ta gọi là **Hình vuông** chỉ căn cứ vào hình dạng bên ngoài . (các em còn chưa biết được tính chất của hình vuông, học sinh chỉ nhận thức về hình vuông căn cứ theo **hình dạng**) .

Bước tiếp theo của *quá trình hình thành khái niệm Hình vuông* là phân tích hình dạng này với mục đích giải thích rõ các tính chất của nó . Chúng ta yêu cầu học sinh bằng quan sát hãy tìm xem có cái gì chung cho các hình vuông vừa được chọn . Các hình này được phân biệt với các hình còn lại như tam giác , hình tròn ... ở chỗ nào ? Các em có thể có nhận xét : mỗi hình vuông có bốn đỉnh , bốn cạnh . Khi đó có thể chỉ cho học sinh thấy ở một số hình như hình chữ nhật , hình thoi , ... cũng có bốn đỉnh , bốn cạnh mà các hình này không được xếp vào loại hình vuông .

Vấn đề là ở chỗ : bốn cạnh của hình vuông thì bằng nhau (phân biệt với hình chữ nhật) , bốn góc của hình vuông thì vuông (phân biệt với hình thoi).

Bước còn lại là tạo ra khái niệm hình vuông , biểu tượng tới khái niệm bằng con đường trừu tượng hóa , tức là tách ra các thuộc tính chung ; bản chất khỏi các thuộc tính không bản chất khác.

Cố nhiên, trong giai đoạn đầu của việc dạy học , chúng ta chưa thể nói về trừu tượng hóa hoàn toàn những thuộc tính này, bởi lẽ đối với học sinh ở Lớp 1 , chúng ta chưa thể tạo ra một khái niệm hình vuông dưới dạng thuần khiết , chưa thể đưa cho các em một định nghĩa hình thức khái niệm hình vuông . Còn học sinh thì cũng chưa thể thấy được hình vuông bên trong hình chữ nhật hoặc bên trong hình thoi .

Ví dụ trên đây cho thấy , quá trình hình thành khái niệm là một quá trình tâm lý phức tạp, lâu dài . Quá trình này tạo điều kiện phát triển năng lực khái quát hóa và trừu tượng hóa cho học sinh .

Tuy nhiên chúng ta cũng cần lưu ý là : *quá trình hình thành các khái niệm Toán học không phải bao giờ cũng diễn ra theo sơ đồ trên đây, mọi việc đều bắt đầu bằng cảm giác.*

Đối với việc hình thành các khái niệm Toán học có liên quan tới phạm trù vô hạn (như khái niệm : đường thẳng, mặt phẳng, giới hạn của dãy số và hàm số, về tính trù mật của tập hợp số hữu tỷ...) , thì trình độ cảm tính đóng vai trò rất nhỏ, bởi lẽ chúng ta không ở trong trạng thái lĩnh hội cái vô hạn và thực tiễn dạy học cũng cho thấy trong các trường hợp này trực quan đôi khi lại là vật cản.

Chẳng hạn đối với học sinh THCS , khi nghiên cứu về tập số hữu tỷ thì việc sử dụng trực quan để minh họa cho tính vô hạn của tập hợp các số hữu tỷ nằm giữa hai số hữu tỷ bất kỳ không những không có tác dụng củng cố mà ngược lại còn bị bác bỏ bằng tri giác , cụ thể về một đoạn thẳng hữu hạn chứa tập hợp số này. Như ta thấy , tính chất trù mật của tập hợp các số hữu tỷ không thể phát hiện ra bằng con đường thực nghiệm, nó không thể được khẳng định bằng các biểu tượng hình học trực quan mà chỉ thiết lập được bằng con đường logic.

Đưa ra ví dụ trên đây, chúng tôi muốn lưu ý trong quá trình dạy học môn Toán việc tri giác các tài liệu trực quan không phải bao giờ cũng đóng vai trò tích cực mà đôi khi có cả tiêu cực.

§2 NỘI HÀM VÀ NGOẠI DIỆN CỦA KHÁI NIỆM

2.1 VẤN ĐỀ THUỘC TÍNH

Mỗi một đối tượng, mỗi một quan hệ mà chúng ta nghiên cứu đều có những thuộc tính. Chẳng hạn:

- Hình vuông có các thuộc tính: 4 cạnh bằng nhau, 4 góc bằng nhau.
- Tứ giác ngoại tiếp một đường tròn có thuộc tính: tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Trong số các thuộc tính này có những thuộc tính bản chất, thuộc tính không bản chất, thuộc tính chung, thuộc tính đặc trưng.

2.1.1. Thuộc tính bản chất là thuộc tính gắn liền với một đối tượng. Nếu mất thuộc tính đó thì đối tượng đã cho sẽ trở thành một đối tượng khác. Thuộc tính bản chất là điều kiện cần thiết để phân biệt đối tượng này với đối tượng khác.

Chẳng hạn:

- Thuộc tính "các góc bằng nhau" là thuộc tính bản chất của khái niệm hình chữ nhật. Nếu một tứ giác không có các góc bằng nhau thì tứ giác đó không thể là hình chữ nhật.

- Thuộc tính "ẩn x nằm trong dấu căn thức" là thuộc tính bản chất của khái niệm "phương trình vô tỷ". Cần lưu ý là phương trình: $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ không phải là phương trình vô tỷ.

• Khái niệm "phương trình mũ" có các thuộc tính bản chất : ẩn x nằm trên số mũ , cơ số dương . Phân biệt rõ điều này có ý nghĩa cực kỳ quan trọng . Cụ thể với bài toán : *Giải phương trình mũ* : $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$; thì điều kiện đầu tiên phải xét là x dương. Mất điều kiện này phương trình đã cho không phải là phương trình mũ.

• Thuộc tính "cơ số a dương" là thuộc tính bản chất của hàm số mũ : $y = a^x$, còn thuộc tính a lớn hoặc a nhỏ là những thuộc tính không bản chất.

• Thuộc tính "đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác" là thuộc tính bản chất của khái niệm : "đường trung bình của tam giác" . Thuộc tính đoạn thẳng đó dài hay ngắn là thuộc tính không bản chất.

2.1.2. Thuộc tính đặc trưng là thuộc tính chỉ đối tượng đó mới có . Thuộc tính đặc trưng là điều kiện cần và đủ của khái niệm.

Chú ý : thông thường , nhiều thuộc tính bản chất hợp lại thành thuộc tính đặc trưng .

Chẳng hạn :

- Khái niệm "Hình bình hành" có các thuộc tính bản chất
 1. Hình tứ giác
 2. Các cạnh đối diện song song.
 3. Các cạnh đối diện bằng nhau.
 4. Hai đường chéo giao nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mỗi một thuộc tính i ($i = 1 ; 2 ; 3 ; 4$) là điều kiện cần của khái niệm hình bình hành nhưng chưa là điều kiện đủ. Hội các thuộc tính (1 ; 2) hoặc (1 ; 3) hoặc (1 ; 4) mới là điều kiện đủ của khái niệm hình bình hành. Các cặp thuộc tính (1 ; 2) hoặc (1 ; 3) hoặc (1 ; 4) là các thuộc tính đặc trưng .

- Khái niệm "Hình chóp đều" có các thuộc tính bản chất :
 1. Hình chóp
 2. Đáy là đa giác đều
 3. Đáy là đa giác có cạnh bằng nhau
 4. Các cạnh bên bằng nhau

5. Hình chiếu vuông góc của đỉnh trùng với tâm của đa giác đáy .

Các cặp thuộc tính (1 ; 2 ; 5) hoặc (1 ; 3 ; 4) là các thuộc tính đặc trưng của khái niệm "*Hình chóp đều*"

□ **Chú ý :** Nhờ cách phân biệt này mà ta hiểu được cùng một khái niệm có thể có nhiều cách định nghĩa khác nhau. Khi đã định nghĩa khái niệm theo một số thuộc tính bản chất thì các thuộc tính bản chất khác được suy ra từ định nghĩa đã cho .

Ví dụ, nếu chúng ta định nghĩa khái niệm: "*Hình chóp đều*" là hình chóp có đáy là đa giác đều và hình chiếu vuông góc của đỉnh trùng với tâm của đa giác đáy, thì các thuộc tính bản chất 3 và 4 được suy ra từ định nghĩa trên đây.

2.1.3. Thuộc tính chung là thuộc tính mà nhiều đối tượng cùng có .

Ví dụ : • *Tam giác đều và hình vuông đều có thuộc tính chung là các cạnh bằng nhau , các góc bằng nhau.*

• *Hình chữ nhật, hình thoi và hình vuông đều có các thuộc tính chung : hình tứ giác , các cạnh đối diện song song , các cạnh đối diện bằng nhau , ...*

2.2 VẤN ĐỀ KHÁI NIỆM

Khái niệm là sự suy nghĩ phản ánh thuộc tính chung , thuộc tính bản chất của các đối tượng .

Theo *Angel* : "*Khái niệm là những kết quả, trong đó được khái quát hóa những dữ kiện của thực nghiệm*" (chống Duy – Rinh)

Khái niệm là một hình thức của kiến thức khoa học, trong đó những mặt cơ bản nhất , có tính quy luật nhất của các sự vật , hiện tượng được vạch ra dưới dạng khái quát và được diễn tả bằng những lời khúc triết rõ ràng . Khái niệm bao giờ cũng là sự khái quát hoá.

Chẳng hạn :

• Khi chúng ta nói đến khái niệm "*Số nguyên tố*" thì ta hiểu nó đại diện cho một lớp các số thực có các thuộc tính sau đã được khái quát hóa : số nguyên dương, chỉ có hai ước số tầm thường là số 1 và chính nó .

• Khi chúng ta nói đến khái niệm "*Hình lăng trụ*" thì ta hiểu khái niệm này phản ánh cho một lớp các khối đa diện có các thuộc tính chung và bản chất : có hai mặt song song với nhau, các giao tuyến của những cặp mặt khác đều song song với nhau.

□ **Chú ý** : bên cạnh thuộc tính chung, thuộc tính bản chất , cần chú ý tới tính phát triển biến chứng của một số khái niệm toán học như khái niệm hàm, khái niệm tiếp tuyến ... đều đã trải qua những biến đổi và phát triển rất sâu sắc về mặt nội dung .

2.3 NỘI HÀM VÀ NGOẠI DIỆN CỦA KHÁI NIỆM

2.3.1. Nội hàm (còn gọi là nội dung) : *Nội hàm của một khái niệm là tập hợp những thuộc tính chung và bản chất của các đối tượng thoả mãn định nghĩa của khái niệm .*

□ **Ví dụ** :

• *Khái niệm "Hình bình hành" có nội hàm là tập hợp các thuộc tính sau đây :*

1. *Hình tứ giác*
2. *Hình có các cạnh đối diện song song*
3. *Hình có các cạnh đối diện bằng nhau*
4. *Hình có hai đường chéo nhau tại điểm giữa của mỗi đường ...*

• *Khái niệm "Hình thoi" có nội hàm là tập hợp các thuộc tính có trong nội hàm của khái niệm "Hình bình hành" đồng thời còn có thêm các thuộc tính :*

5. *Hình có hai đường chéo vuông góc với nhau*
6. *Hình có các cạnh kề bằng nhau*
7. *Hình có các đường chéo chia đôi các góc*

• **Nội hàm của khái niệm "Số nguyên tố" là tập hợp các thuộc tính :**

1. Số nguyên dương

2. Chỉ có hai ước số là 1 và nó

2.3.2. Ngoại diên (Còn gọi là phạm vi) : Ngoại diên của một khái niệm là tập hợp tất cả các đối tượng thoả mãn định nghĩa khái niệm đó.

□ **Chẳng hạn :**

• Ngoại diên của khái niệm "*Hình bình hành*" là các hình : Hình bình hành thường , Hình chữ nhật , Hình thoi , Hình vuông .

• Ngoại diên của khái niệm "*Số nguyên tố*" là tập hợp tất cả các số nguyên tố .

□ **Chú ý :**

- Ngoại diên của một khái niệm có thể là một tập hữu hạn , có thể là một tập hợp vô hạn , có thể là một tập hợp rỗng .

- Ngoại diên của khái niệm : " *nghiệm thực của phương trình $x^2 + 2x + 3 = 0$* " là tập hợp rỗng

- Có những khái niệm mà ngoại diên của nó trong một thời gian dài người ta không thể xác định được lực lượng của nó.đó là khái niệm "*Nghiệm nguyên của phương trình $x^n + y^n = z^n$, n là số nguyên dương lớn hơn 2*"(Định lý lớn Fermat) . Mãi tới thời gian gần đây , nhà toán học trẻ người Đức G.Flaltings đã chứng minh được giả thuyết Mordell mà từ giả thuyết này có thể suy ra được phương trình Fermat chỉ có thể có một số hữu hạn nghiệm nguyên .

• **Nếu ngoại diên của một khái niệm chỉ có một phần tử thì khái niệm đã cho được gọi là khái niệm duy nhất.**

Các khái niệm sau đây đều là khái niệm duy nhất : Tập hợp rỗng , Không gian Euclide ba chiều , Đạo hàm của hàm số : $y = \sin x$ tại $\frac{\pi}{6}$,

Tâm trái đất . . .

• Nếu ngoại diên của một khái niệm có nhiều hơn một phần tử thì khái niệm đã cho được gọi là khái niệm chung .

Chẳng hạn các khái niệm : Điểm , Phương trình , Định lý ... đều là các khái niệm chung .

Ở đây không nên nhầm lẫn các khái niệm duy nhất với các khái niệm cụ thể (phản ánh các đồ vật cụ thể)

2.3.3/ Mối quan hệ giữa nội hàm và ngoại diên : Ngoại diên của khái niệm càng rộng thì nội hàm của nó càng hẹp (nghèo nàn) .

Chẳng hạn , ngoại diên của khái niệm "Hình thoi " rộng hơn ngoại diên khái niệm "Hình vuông " thế thì nội hàm của khái niệm "Hình thoi " (Tất cả các cạnh bằng nhau) hẹp hơn (nghèo nàn hơn) nội hàm của khái niệm "Hình vuông " (Tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc đều bằng góc vuông)

§3 QUAN HỆ GIỮA CÁC KHÁI NIỆM

Muốn xem xét quan hệ giữa các khái niệm , chúng ta căn cứ vào quan hệ của ngoại diên các khái niệm đó .

Giả sử cho hai khái niệm :

- Khái niệm thứ nhất có ngoại diên là tập hợp A .
- Khái niệm thứ hai có ngoại diên là tập hợp B .

Có thể xảy ra các quan hệ :

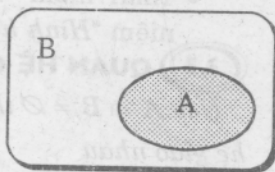
3.1 QUAN HỆ LỆ THUỘC (HAY QUAN HỆ BAO TRÙM)

Nếu $A \subset B$ thì khái niệm thứ nhất được gọi là lệ thuộc khái niệm thứ hai . (khái niệm thứ hai bao trùm khái niệm thứ nhất) .

Khái niệm thứ hai được gọi là **khái niệm loại** của khái niệm thứ nhất , lúc đó khái niệm thứ nhất được gọi là **khái niệm chủng** của khái niệm thứ hai

□ **Chẳng hạn :**

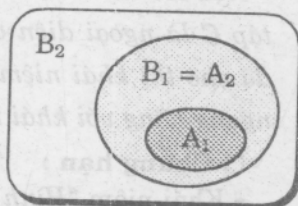
- Khái niệm “Số nguyên dương” là khái niệm loại của khái niệm chung “Số nguyên tố”
- Khái niệm “Khối đa diện” là khái niệm loại của khái niệm chung “Hình chóp”



Trong các mối quan hệ Loại – Chung (để chỉ quan hệ lệ thuộc), chúng ta cần phân biệt **loại gần nhất** và các **loại bậc tiếp sau**.

Biểu đồ Venn – Euler cho thấy :

- Khái niệm loại B_1 là **khái niệm loại gần nhất** của **khái niệm chung** A_1 (chứ không phải của khái niệm loại B_2)



- Khái niệm loại B_2 là **khái niệm loại gần nhất** của **khái niệm chung** A_2 (chứ không phải của khái niệm chung A_1)

Chẳng hạn : A_1 là “Số nguyên”; B_1 và A_2 là “Số hữu tỷ” còn B_2 là “Số thực”

Sự chuyển dịch các mối quan hệ Loại – Chung của các khái niệm theo bậc thang hướng từ chung tới loại, dẫn đến việc mở rộng khái quát hóa khái niệm, còn nếu theo sự chuyển đổi ngược lại sẽ dẫn đến việc giới hạn, thu hẹp các khái niệm

3.2 QUAN HỆ ĐỒNG NHẤT

Nếu $A = B$ thì khái niệm thứ nhất được gọi là đồng nhất với khái niệm thứ hai

□ **Chẳng hạn :**

- Khái niệm “Hình bình hành có một góc vuông” đồng nhất với khái niệm “Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau”

- Khái niệm “Hình hộp chữ nhật” đồng nhất với khái niệm “Hình hộp có các đường chéo bằng nhau”

3.3 QUAN HỆ GIAO NHAU

Nếu $A \cap B \neq \emptyset$ thì 2 khái niệm đã cho được gọi là có quan hệ giao nhau

□ **Chẳng hạn :**

- Khái niệm “Hình hộp có đáy là hình thoi” và khái niệm “Hình hộp có đáy là hình chữ nhật” có quan hệ giao nhau.

3.4 QUAN HỆ NGANG HÀNG

Nếu $A \cap B = \emptyset$, thêm vào đó A và B là tập con thực sự của tập C là ngoại diện của khái niệm loại của cả hai khái niệm đã cho thì khái niệm có ngoại diện A được gọi là có quan hệ ngang hàng với khái niệm có ngoại diện B .

□ **Chẳng hạn :**

- Khái niệm “Hình chóp” và khái niệm “Hình lăng trụ” có quan hệ ngang hàng. Chúng có chung khái niệm loại khái niệm “Khối đa diện”.
- Khái niệm “Số nguyên tố” và khái niệm “Hợp số” có quan hệ ngang hàng.

3.5 QUAN HỆ MÂU THUẪN

Nếu $A \cap B = \emptyset$ và thêm vào đó $A \cup B = C$; với C là ngoại diện của khái niệm loại, chung của cả hai khái niệm đã cho thì khái niệm có ngoại diện A được gọi là quan hệ mâu thuẫn với khái niệm có ngoại diện B

□ **Chẳng hạn :**

- Khái niệm “Số hữu tỷ” và khái niệm “Số vô tỷ” có quan hệ mâu thuẫn
- Khái niệm “Hình hộp đứng” và “Hình hộp xiên” có quan hệ mâu thuẫn.

§4 ĐỊNH NGHĨA KHÁI NIỆM

Định nghĩa khái niệm là giai đoạn kết thúc của việc hình thành khái niệm.

4.1 ĐỊNH NGHĨA KHÁI NIỆM LÀ GÌ ?

Định nghĩa khái niệm là một thao tác logic dùng để tách sự vật cần định nghĩa từ những sự vật tiếp cận với nó sao cho trong phạm vi của định nghĩa phải vạch ra được những thuộc tính cơ bản chung tạo nên nội hàm của khái niệm. Nhờ các thuộc tính này có thể tách ra được tất cả các đối tượng có các thuộc tính đó và chỉ những đối tượng đó được hợp nhất vào một thể thống nhất nhờ khái niệm đã cho.

Có thể hiểu rõ những điều vừa nói ở trên qua định nghĩa khái niệm "Số nguyên tố": Số nguyên tố là một số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ có hai ước số là 1 và chính nó (Toán 6 - NXBGD - 1986)

4.2 CÁC CÁCH ĐỊNH NGHĨA KHÁI NIỆM

4.2.1. Các định nghĩa khái niệm có thể thực hiện các chức năng khác nhau, có thể có các công dụng khác nhau. Có thể chia các định nghĩa thành các nhóm cơ bản sau đây theo công dụng của chúng.

☛ Nhóm 1:

Các định nghĩa để chính xác hóa nghĩa của thuật ngữ đã quen thuộc với học sinh, chẳng hạn các định nghĩa của: phương trình, bất phương trình, cách giải bất phương trình, số hữu tỷ...

☛ Nhóm 2:

Các định nghĩa để đưa vào khái niệm mới, chẳng hạn định nghĩa: hàm số, căn số học, logarithm, các hình hình học...

☞ Nhóm 3 :

Các định nghĩa để mở rộng một khái niệm đã đưa vào trước đó . chẳng hạn định nghĩa : lũy thừa với số mũ không , lũy thừa với số mũ nguyên âm , lũy thừa với số mũ phân . . .

Tất nhiên việc chia ra các nhóm như vậy có tính chất tương đối

Chẳng hạn , một định nghĩa bất kỳ của nhóm thứ ba có thể xếp vào nhóm thứ hai . Tuy nhiên , việc tách các định nghĩa của giáo trình Toán và sắp xếp vào ba nhóm trên đây phần nào nói lên nét đặc thù của các định nghĩa , thể hiện ở các cách định nghĩa khái niệm mà ta sẽ xem xét sau đây .

4.2.2. Định nghĩa qua khái niệm loại gần nhất và sự khác biệt của chúng

Đây là hình thức định nghĩa phổ biến nhất được sử dụng trong các sách Toán để đưa vào khái niệm mới . Cần thiết hướng tới tìm kiếm một khái niệm loại gần nhất cho định nghĩa bởi lẽ chỉ có trong trường hợp như vậy chúng ta mới tiếp cận gần hơn đến khái niệm được định nghĩa , đến ngoại diên của nó và nhờ điều này sẽ giảm được tập hợp các thuộc tính của chúng trong định nghĩa .

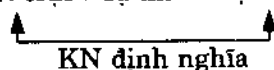
Theo cách này muốn định nghĩa một khái niệm , cần đưa nó vào một khái niệm khác rộng hơn (khái niệm loại) và chỉ ra được những thuộc tính cơ bản nhất cho phép phân biệt được , nhận biết được đối tượng mà ta cần xác định .

Mỗi định nghĩa như vậy gồm hai bộ phận :

- Khái niệm được định nghĩa (khái niệm mới cần định nghĩa)
- Khái niệm định nghĩa (khái niệm đã biết dùng định nghĩa)

Có thể biểu diễn các cấu trúc của định nghĩa bằng công thức :

$$\text{KN được định nghĩa} \stackrel{\text{def}}{=} \text{KN loại} + \text{sự khác biệt về chúng}$$



(definition: sự định nghĩa)

□ Ví dụ :

- Hình thoi $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hình bình hành} + \text{hai cạnh kề bằng nhau}$

• Hình vuông $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hình chữ nhật} + \text{hai cạnh kề bằng nhau}$

• Số nguyên tố $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Số tự nhiên} + \text{lớn hơn } 1 + \text{chỉ có } 2 \text{ ước số}$

Trong các định nghĩa này, các khái niệm như : *Hình bình hành* ; *Hình chữ nhật* ; *Số tự nhiên* là những khái niệm loại dùng để định nghĩa các khái niệm mới : hình thoi, hình vuông, số nguyên tố.

Các thuộc tính : hai cạnh kề bằng nhau là thuộc tính khác biệt của khái niệm chủng "*Hình thoi*" và "*Hình vuông*".

Các thuộc tính lớn hơn 1 và chỉ có hai ước số là thuộc tính khác biệt của khái niệm chủng "*Số nguyên tố*".

Các thuật ngữ : *Hình thoi*, *Hình vuông*, *Số nguyên tố* được gọi là các **thuật ngữ mới** dùng để đặt tên cho các khái niệm chủng vừa mới đưa vào.

□ Chú ý₁ :

Trong các định nghĩa qua, khái niệm loại gần nhất và sự khác biệt của chúng, chẳng hạn ở ví dụ trên : khái niệm hình thoi là khái niệm được định nghĩa, còn những khái niệm định nghĩa là : hình bình hành, hai cạnh kề bằng nhau.

Những khái niệm này lại được định nghĩa thông qua những khái niệm đã biết trước đó, chẳng hạn :

Hình bình hành $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Tứ giác} + \text{hai cặp cạnh đối song song}$.

Những khái niệm như : Hình tứ giác, cạnh đối song song... lại được định nghĩa thông qua những khái niệm đã biết trước đó : Đường gấp khúc, Đoạn thẳng, Khép kín...

Như vậy đến một lúc nào đó tất yếu phải có những khái niệm không định nghĩa, đó là những **khái niệm cơ bản** hoặc là các **khái niệm dẫn xuất** từ các khái niệm cơ bản

Có thể mô tả theo sơ đồ sau đây : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow \dots$ Ở đó A là khái niệm cơ bản, không định nghĩa, còn B, C, D... là những khái niệm dẫn xuất hoặc khái niệm được định nghĩa.

□ Chú ý₂ :

Sơ đồ trên đây cho thấy khái niệm cần định nghĩa D có thể được định nghĩa thông qua khái niệm loại B hoặc C. Tuy nhiên

để khái niệm mới được định nghĩa gọn gàng, khúc triết ta mong muốn tìm một khái niệm loại gần nhất là C chứ không là B.

Chẳng hạn cần định nghĩa :

- Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau mà không nên định nghĩa.
- Hình vuông là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song và có một góc vuông với hai cạnh kề bằng nhau.

□ Chú ý₃ :

Cấu trúc logic của định nghĩa qua khái niệm loại gần nhất và sự khác biệt của chúng. Có hai cách viết :

$$\text{☞ Cách 1 : } A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in B : P(x)\}$$

Với : • B là khái niệm loại gần nhất.

• P là sự khác biệt của chúng.

$$\text{☞ Cách 2 : } x \in A \stackrel{\text{def}}{\iff} x \in B \wedge P(x)$$

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{\iff} B(x) \wedge P(x)$$

(Đối tượng x có tính chất A khi và chỉ khi x có tính chất B và tính chất P)

□ Chú ý₄ :

Trong quá trình dạy học cần cố gắng tạo ra những tình huống sư phạm giúp học sinh phát hiện ra những nét đặc trưng của hệ thống các khái niệm toán học gắn liền với xây dựng suy diễn lý thuyết. Để làm được điều đó, có thể sử dụng chất liệu cụ thể khác nhau. Chẳng hạn có thể xây dựng một hệ thống các định nghĩa :

$$F : \text{Hình vuông} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hình thoi} + \text{góc vuông}$$

$$E : \text{Hình thoi} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hình bình hành} + \text{các cạnh kề bằng nhau}$$

$$D : \text{Hình bình hành} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tứ giác} + \text{hai cặp cạnh đối song song}$$

$$C : \text{Hình tứ giác} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Đa giác} + \text{bốn cạnh}$$

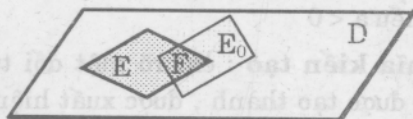
$$B : \text{Đa giác} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hình giới hạn bởi đường gấp khúc khép kín}$$

A : Hình $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Tập hợp điểm}$

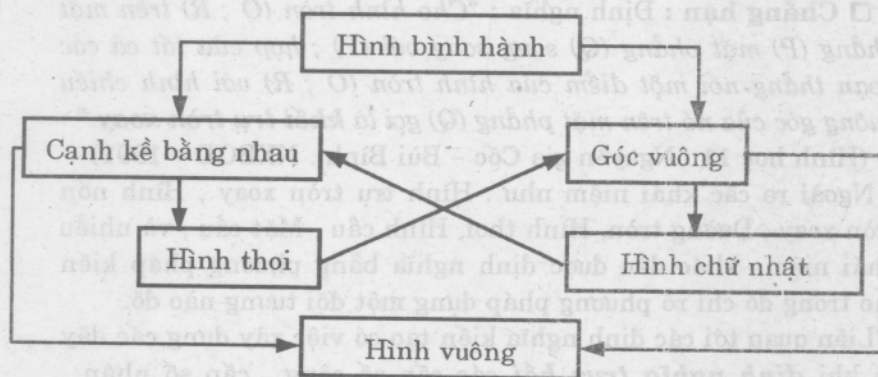
Qua ví dụ này chúng ta thấy hai sơ đồ suy diễn sau đây :

• Sơ đồ 1 : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$

• Sơ đồ 2 :



E_0 : Hình chữ nhật $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hình bình hành} + \text{góc vuông}$



4.2.3. Định nghĩa bằng quy ước : nhằm nêu rõ ý nghĩa của ký hiệu mà ta muốn đưa vào . Các định nghĩa này được biểu diễn một cách tiện lợi bằng ngôn ngữ ký hiệu dưới dạng các đẳng thức

□ **Chẳng hạn :**

1. $(-a)(-b) = +ab$

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (b \neq 0 ; d \neq 0)$

3. $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, \text{ nguyên dương})$

5. $\text{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi : n - \text{số nguyên})$

6. $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$8. |a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

4.2.4. Định nghĩa kiến tạo : chỉ rõ một đối tượng hoặc một hiện tượng đã cho được tạo thành , được xuất hiện như thế nào . Chính vì vậy còn được gọi là định nghĩa phát sinh (nêu rõ nguồn gốc)

□ **Chẳng hạn :** Định nghĩa : “Cho hình tròn $(O ; R)$ trên mặt phẳng (P) mặt phẳng (Q) song song với (P) ; hợp của tất cả các đoạn thẳng nối một điểm của hình tròn $(O ; R)$ với hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng (Q) gọi là **khối trụ tròn xoay** ”

(Hình học 11 . Nguyễn gia Cốc – Bùi Bình . NXBGD – 1991)

Ngoài ra các khái niệm như : Hình trụ tròn xoay , Hình nón tròn xoay , Đường tròn, Hình thoi, Hình cầu , Mặt cầu , và nhiều khái niệm khác đều được định nghĩa bằng phương pháp kiến tạo trong đó chỉ rõ phương pháp dựng một đối tượng nào đó.

Liên quan tới các định nghĩa kiến tạo có việc xây dựng các dãy số khi **định nghĩa truy hồi** các cấp số cộng , cấp số nhân . Trong các định nghĩa này người ta chỉ rõ phương pháp nhận được một số hạng bất kỳ của dãy số từ số hạng đứng trước nó trừ số hạng đầu tiên . các định nghĩa như vậy được gọi là **định nghĩa quy nạp**.

4.2.5. Định nghĩa gián tiếp nhờ hệ thống các tiên đề

Chẳng hạn trong hình học các tiên đề vạch ra các tính chất và các mối quan hệ của những khái niệm cơ bản nguyên thủy như “Điểm” ; “Đường thẳng” ; “Mặt phẳng” ; “Khoảng cách”, còn trong số học đó là khái niệm số (định nghĩa các số tự nhiên như hệ tiên đề Peano , định nghĩa tiên đề trường các số thực . . .)

Ở phổ thông , đặc biệt là ở các lớp dưới , người ta thường phối hợp phương pháp này với phương pháp mô tả khái niệm , hoặc là phối hợp phương pháp đã nêu với việc vạch ra ý nghĩa của thuật ngữ bằng con đường liệt kê ra các đối tượng tạo thành biểu tượng về ngoại diễn và nội hàm của khái niệm .

Trong trường hợp thứ nhất, việc mô tả khái niệm có thể không chỉ thay thế định nghĩa, mà còn bổ sung thêm khái niệm bằng thông tin cụ thể hóa khái niệm, mở rộng mối liên hệ với những khái niệm khác, vạch ra đầy đủ hơn nội hàm mà khái niệm, giúp cho học sinh hiểu sâu hơn và nắm chắc hơn khái niệm mới.

Chẳng hạn, như dạy học khái niệm “Đường thẳng”, việc phối hợp hai phương pháp đã nói ở trên được tiến hành như sau:

- Đường đơn giản nhất là đường thẳng
- Sợi chỉ căng thẳng, nét chì vạch theo cạnh thước thẳng trên trang giấy trắng là hình ảnh của đường thẳng.

Để sử dụng khái niệm đó ta xem “Đường thẳng”, dường như được xem xét bằng các tính chất sau đây:

- Mọi hình bằng với đường thẳng là một đường thẳng
- Một đường thẳng có thể trùng khít lên một đường thẳng khác sao cho một điểm tùy ý của đường thẳng thứ nhất trùng với một điểm bất kỳ của đường thẳng thứ hai.
- Có một đường thẳng và chỉ có một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Trong trường hợp thứ hai có thể thấy rõ qua ví dụ dạy học khái niệm số tự nhiên.

“Các số 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9, 10, 11, ... là **số tự nhiên**. Số 1 là số tự nhiên liền sau số 0 số 2 là số tự nhiên liền sau số 1, ... Mỗi số tự nhiên có một số liền sau duy nhất. 0 là số tự nhiên đầu tiên” (Toán 6. Lê hải Châu NXBGD - 1986)

4.2.6. Một số kiểu định nghĩa khác

□ Ví dụ 1: “Đường thẳng và mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau khi đường thẳng vuông góc với đường thẳng bất kỳ nằm trên mặt phẳng” (HÌNH HỌC 11. NGUYỄN GIA CỐC - BÙI BÌNH NXBGD 1991)

Viết dưới dạng ngôn ngữ ký hiệu ta có:

$$a \perp \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \forall b (b \subset \alpha \Rightarrow a \perp b)$$

□ Ví dụ 2: “Số a gọi là chia hết cho số b khác 0 nếu tồn tại số c sao cho $a = b.c$; a, b, c là các số nguyên”

$$a : b \stackrel{\text{def}}{=} \exists c (a = b \cdot c)$$

$$\square \text{ Ví dụ 3 : } (a : b) = c \stackrel{\text{def}}{=} a : c ; b : c, \forall d (a : d ; b : d \Rightarrow c : d)$$

Trong ba ví dụ này, quan hệ mới được định nghĩa qua các quan hệ đã biết trước đó :

- Quan hệ vuông góc của đường thẳng với mặt phẳng được định nghĩa qua tính vuông góc của các đường thẳng .
- Quan hệ chia hết cho được định nghĩa qua quan hệ tích số .
- Quan hệ ước chung lớn nhất được định nghĩa qua quan hệ chia hết cho

Tất cả các định nghĩa này là rất rõ ràng nhưng trong đó không thể tách ra loại gần nhất và sự khác biệt của chúng . Chúng ta cũng khó có thể sắp xếp vào một số cách định nghĩa khác đã nêu ở trên .

Trong một số sách còn đề cập tới kiểu định nghĩa “qua trừu tượng hoá” chẳng hạn như : “ Số tự nhiên có thể coi là cái gì chung cho mọi tập hợp hữu hạn tương đương ” hoặc “ Tất cả những gì có một tập hợp các tính chất đã được thiết lập được gọi là đại lượng ”.

Một số người nghiên cứu về lý luận dạy học môn Toán lại cho rằng không thể gọi các phát biểu này là định nghĩa . Thực ra không có cơ sở khi tách ra một kiểu đặc biệt định nghĩa khái niệm “qua trừu tượng hoá”, bởi lẽ trừu tượng hoá đóng vai trò thực sự khi đưa vào tất cả khái niệm toán học cho dù bằng các định nghĩa cũng như bằng con đường mô tả .

§5 CÁC QUY TẮC ĐỊNH NGHĨA KHÁI NIỆM - NHỮNG SAI LẦM TRONG CÁC ĐỊNH NGHĨA - PHẦN VÍ DỤ

5.1 CÁC QUY TẮC ĐỊNH NGHĨA

5.1.1. Định nghĩa phải tương xứng : ngoại diên của khái niệm được định nghĩa và ngoại diên của khái niệm định nghĩa phải bằng nhau .

5.1.2. Định nghĩa không được vòng quanh : không dựa vào một khái niệm chưa được định nghĩa để định nghĩa khái niệm khác và ngược lại . Không được định nghĩa khái niệm A qua khái niệm B , khái niệm B qua khái niệm C , khái niệm C qua khái niệm D còn khái niệm D lại được định nghĩa qua khái niệm A .

5.1.3. Định nghĩa không được phủ định : định nghĩa bằng phủ định chỉ được dùng khi khái niệm loại được phân chia thành hai khái niệm chủng có quan hệ mâu thuẫn nhau .

5.1.4. Định nghĩa phải ngắn gọn : trong định nghĩa không được nêu ra các thuộc tính có thể suy ra được từ các thuộc tính khác đã nêu trong định nghĩa .

5.1.5. Không sử dụng khái niệm loại vượt cấp : dùng khái niệm **loại gần nhất** của khái niệm chủng cần định nghĩa

□ **Chú ý :** Vì nhiều lý do , trong khi trình bày sách giáo khoa có thể bỏ qua các yêu cầu 3 , 4 , 5 sang các yêu cầu 1 và 2 là có tính chất bắt buộc phải tuân thủ đảm bảo tính khoa học của các khái niệm .

5.2 NHỮNG SAI LẦM TRONG CÁC ĐỊNH NGHĨA PHẦN VÍ DỤ

Học sinh thường không hiểu những thuộc tính nào được đưa vào trong định nghĩa khái niệm ; do đó dẫn tới các sai lầm khi định nghĩa , những sai lầm ấy thường rơi vào các trường hợp sau :

5.2.1. Định nghĩa quá rộng : ngoại diên của khái niệm định nghĩa rộng hơn ngoại diên khái niệm được định nghĩa .

□ **Chẳng hạn :**

- Định nghĩa : “Số vô tỷ là phân số thập phân vô hạn ” là quá rộng vì các phân số thập phân vô hạn tuần hoàn là các số hữu tỷ .
- Định nghĩa : “Đường kính là đoạn thẳng nối hai điểm trên đường tròn ” là quá rộng .

5.2.2. Định nghĩa quá hẹp : ngoại diên của khái niệm định nghĩa hẹp hơn ngoại diên khái niệm được định nghĩa .

□ **Chẳng hạn :**

- Định nghĩa : “Số vô tỷ là căn số các số hữu tỷ trong trường hợp các số này không khai căn được ” ; định nghĩa này không đưa được các số e , π , ... , vào ngoại diên của khái niệm “Số vô tỷ”.

5.2.3. Định nghĩa vòng quanh : Chẳng hạn , định nghĩa “Góc vuông là góc bằng 90° ” và “ 1° là $\frac{1}{90}$ của góc vuông ” ; định nghĩa : “Góc vuông là góc mà hai cạnh thẳng góc với nhau ” và “Hai đường thẳng là vuông góc nếu chúng là hai cạnh của một góc vuông ” ; định nghĩa “Số vô tỷ là số thực nhưng không phải là số hữu tỷ ” và “Số hữu tỷ và số vô tỷ được gọi là số thực ”.

Để tránh được các sai sót trên đây , học sinh cần phải tuân theo một hệ thống xác định việc đưa vào các khái niệm toán học đã được thừa nhận trong một bộ sách Toán ổn định .

5.2.4. Định nghĩa sự lặp từ trong các định nghĩa : đối tượng được định nghĩa qua chính bản thân nó mặc dù là ở trong các cách thể luận khác .

□ **Chẳng hạn :** “Phép toán số học trong đó một số chia hết cho một số khác được gọi là phép chia” ; hoặc : “Các đa giác được gọi là đồng dạng nếu chúng đồng dạng với nhau ”.

5.2.5. Định nghĩa không hoàn thiện về mặt logic : Trong định nghĩa có nhiều thuộc tính phụ thuộc vào nhau , một số thuộc tính là hệ quả logic của các thuộc tính khác .

Ví dụ như : “Hình bình hành là một tứ giác phẳng các các cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau ” ; hoặc : “Hai tam giác được gọi là đồng dạng với nhau nếu có góc tương ứng bằng nhau , các cạnh tương ứng tỷ lệ ” Trong định nghĩa này thuộc tính các cạnh tương ứng tỷ lệ là hệ quả logic của các thuộc tính các góc tương ứng bằng nhau , và ngược lại .

Mặc dù ở loại này , việc đưa thừa các thuộc tính vào trong định nghĩa không làm thay đổi nội hàm và ngoại diễn của khái niệm , tuy nhiên nó cho thấy trình độ logic các kiến thức Toán học của học sinh là chưa cao , chưa hoàn thiện .

Để khắc phục sai lầm trên đây , cần thiết hướng dẫn học sinh sửa chữa các sai sót trong phát biểu , các **phản ví dụ** có thể được xem là các phương tiện dạy học hữu hiệu .

□ **Chẳng hạn :**

- Đối với định nghĩa : “*Phương trình chứa ẩn số với lũy thừa hai được gọi là phương trình bậc hai*” , Giáo viên có thể dẫn ra các phản ví dụ : $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$, và $3x^2 - \frac{2}{x} + 5 = 0$
- Đối với các định nghĩa : “*Góc lớn hơn góc vuông được gọi là góc tù*” , Giáo viên có thể dẫn ra các phản ví dụ góc 200° , 250° , 180°
- Đối với các định nghĩa : “*Hai phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu tất cả các nghiệm của phương trình thứ nhất là nghiệm của phương trình thứ hai*” , Giáo viên có thể sử dụng phản ví dụ : $2x - 8 = 0$, và $x^2 - 4x = 0$.

5.3 NHỮNG NGUYÊN TẮC SỬ DỤNG TÊN ĐẶT KHI HÌNH THÀNH KHÁI NIỆM

Các biểu thức ngôn ngữ đã được xác định như các ký hiệu của ngôn ngữ nhân tạo , các thuật ngữ , các từ hoặc là nhóm từ của ngôn ngữ tự nhiên thì thực thi chức năng ký hiệu . Chúng so sánh , đối chiếu các lớp đối tượng với tư cách là tên gọi , đặt tên

Quan hệ giữa tên gọi với các đối tượng được ký hiệu , được đặt tên phản ánh mối quan hệ giữa tư duy và ngôn ngữ . Việc hình thành các khái niệm chỉ có thể thực hiện được với điều kiện là gán cho các khái niệm này những tên gọi nhất định .

Chúng ta xét ba nguyên tắc sử dụng tên gọi sau đây

5.3.1. Nguyên tắc tính đối tượng : chỉ nói về các đối tượng mà các tên gọi của chúng có mặt trong mệnh đề chứ không nói về các tên gọi

□ **Chẳng hạn :**

- Mệnh đề : “ $3 < 5$ ” nói về số được ký hiệu bởi chữ số 3 thì nhỏ hơn số thực ký hiệu bằng chữ số 5 , mà không nói về các tên gọi của chúng có trong mệnh đề
- Mệnh đề : “*1 tam giác là một đa giác*” nói về lớp các đối tượng được ký hiệu bằng thuật ngữ “tam giác” là một lớp con của lớp các đối tượng được ký hiệu bằng thuật ngữ “đa giác”

5.3.2. Nguyên tắc tính đơn trị : mỗi một ký hiệu (thuật ngữ) được sử dụng để đặt tên thì không được chỉ nhiều hơn một đối tượng . Nói cách khác , mỗi một tên có không nhiều hơn một ý nghĩa .

Tại sao lại không nói mỗi một tên có đúng một ý nghĩa (giá trị) . Có thể xem xét điều này qua ví dụ sau : “ Trong khi khẳng định rằng số a không thể chia cho số 0 , chúng ta lại không khẳng định là việc ghi “ $a : 0$ ” là không được ” . Cách ghi trên đây cũng có thể được chấp nhận như là cách ghi “ $a : 2$ ” ở đây chỉ xác nhận là không có đối tượng nào mà tên được đặt cho nó là biểu thức ngôn ngữ “ $a : 0$ ” . Nói cách khác , tên gọi đã cho là không có ý nghĩa (giá trị) .

Việc vi phạm nguyên tắc tính đơn trị có thể dẫn tới những hậu quả nghiêm trọng bởi lẽ , vi phạm nguyên tắc này đồng nghĩa với việc sử dụng một tên gọi với nhiều hơn một ý nghĩa (đa nghĩa, đa trị) đưa tới rối loạn và làm nhiều các khái niệm .

Chẳng hạn việc sử dụng ký hiệu “ $f(x)$ ” để chỉ đồng thời các đối tượng “ Hàm số ” và “ giá trị ” trong định nghĩa : “ Cho D là một tập con của tập R các số thực , ta gọi hàm số $f(x)$ với miền xác định D là một quy tắc cho tương ứng mỗi số thực $x \in D$ với một số thực duy nhất $f(x) \in R$, x gọi là biến số $f(x)$ gọi là giá trị của hàm số tại x . Ta thường viết $y = f(x)$ và thay vì gọi hàm số $f(x)$, ta còn gọi hàm số $y = f(x)$ ” .

Một ví dụ khác : việc sử dụng ký hiệu “AB” để đặt tên đồng thời cho các đối tượng sau đây : “ Đường thẳng đi qua hai điểm AB đoạn thẳng với các đầu mút A và B ; độ dài đoạn thẳng AB ; tia đi qua B với điểm đầu A ” (Toán lớp 6 , tập 2 NXBGD - 1986) cũng là một minh chứng cho sự vi phạm nguyên tắc tính đơn trị .

Trong các mệnh đề được ghi dưới ngôn ngữ tự nhiên , để tránh sự nhầm lẫn trong cách đọc , người ta thường viết thêm vào ký hiệu “ AB ” tên gọi của các đối tượng được ký hiệu , chẳng hạn : “ đường thẳng AB ” ; “ đoạn thẳng AB ” ; “ độ dài đoạn thẳng AB ” ; “ tia AB ” .

Tuy nhiên việc làm đó lại không phù hợp với việc ghi bằng ký hiệu các mệnh đề Toán học , có lẽ rất ít người viết “đường thẳng $AB \perp$ đường thẳng CD ” hoặc “đoạn thẳng $AB <$ đoạn thẳng CD ” hoặc “ độ dài đoạn thẳng $AB <$ độ dài đoạn thẳng CD ”

Trong trường hợp này , lối thoát có vẻ hợp lý theo chúng tôi là cần xem xét việc đưa vào ngay từ cuối lớp 6 khi học sinh bắt đầu được học Hình học , hệ thống các ký hiệu sau đây để đặt tên cho các khái niệm :

- “Đường thẳng AB” . ký hiệu là AB
- “Đoạn thẳng AB” ký hiệu là $[AB]$
- “Độ dài đoạn thẳng AB” ký hiệu là $|AB|$
- “Tia AB” ký hiệu là (AB)

như đã ký hiệu “ vectơ $\overrightarrow{AB}$ ” là $\overrightarrow{AB}$

Nguyên tắc tính đơn trị khẳng định rằng : mỗi một tên có thể được đặt cho không nhiều hơn một đối tượng . Tuy nhiên cùng một đối tượng có thể có nhiều tên khác nhau (tức ký hiệu) Chẳng hạn các cách ghi sau đây : “ $5 - 3$ ” , “ $8.2 - 14$ ” “ $2^5 : 2^4$ ” . có thể được xem như những cách đặt tên khác nhau của số “ 2 ” . Đẳng thức “ $5 - 3 = 8.2 - 14$ ” phản ánh một sự kiện là các tên gọi ở các vế trái và vế phải của đẳng thức thì ký hiệu cho cùng một đối tượng có cùng một ý nghĩa (giá trị) đó là số có tên là “ 2 ” . Nếu trong vế trái , chúng ta thay “ $5 - 3$ ” bằng “ 2 ” có cùng giá trị thì sẽ nhận được một đẳng thức đúng “ $2 = 8.2 - 14$ ”

5.3.3. Nguyên tắc thay thế tên gọi : mệnh đề toán học sẽ không thay đổi giá trị chân lý nếu như một trong số các tên có trong mệnh đề được thay thế bằng một tên gọi khác đồng nghĩa với nó.

Việc đặt các tên khác nhau cho cùng một đối tượng nghiên cứu được giải thích ở chỗ do chính các thông tin khác nhau về đối tượng , và chúng ta thường nói rằng : các tên gọi này có cùng một ý nghĩa (giá trị) nhưng với những ý tưởng khác nhau (nói một cách thô bạo thì với ý đồ , mục đích khác nhau) .

Chẳng hạn , với cùng một đường thẳng có thể được đặt tên (ký hiệu) bằng chữ cái “ a ” hoặc là “ AB ” , tên “ a ” là tên đơn giản dành cho một đường thẳng tùy ý (có thể ký hiệu chính đường thẳng đó bằng một chữ cái khác , ví dụ “ d ”) được nhìn nhận như một thể không chia cắt được , còn tên “ AB ” là một **tên phức hợp** chứa hai **tên bộ phận** khác nhau là “ A ” và “ B ” và chỉ cả phép dựng phản ánh phương pháp mà theo đó tên đã được ký hiệu cho đối tượng . (Đường thẳng đi qua hai điểm A và B) . Hoàn toàn dễ hiểu là tên phức hợp “ AB ” có giá trị lớn hơn về mặt nhận thức . Nó thông báo cho chúng ta đường thẳng được ký hiệu bởi tên này đi qua hai điểm A và B .

Như vậy , trong quan hệ đặt tên cho các đối tượng có ba khái niệm khác nhau tham gia vào đó là : “ tên gọi ” ; “ ý nghĩa của tên gọi ” và “ ý đồ của tên gọi ” . Người ta nói rằng : **tên gọi gợi ra ý nghĩa và phản ánh ý tưởng của việc đặt tên cho đối tượng.**

Những điều vừa được trình bày ở trên cho thấy sự cần thiết phải phân biệt hai biểu thức ngôn ngữ sau đây : “ không có ý tưởng ” và “ không có ý nghĩa ” .

Chẳng hạn , trong tập hợp các số tự nhiên thì tên gọi đặt cho : “ *nghiệm của phương trình $x + 5 = 3$* ” là không có ý nghĩa (ở đây là giá trị) , trong khi đó việc đặt tên đó lại phản ánh ý tưởng rõ ràng : đó là số mà khi ta thay nó cho x trong phương trình đã cho thì về trái và về phải nhận được tên gọi cho cùng một số .

Hoàn toàn tương tự như vậy, trong tập hợp các số thực thì tên " $\sqrt{-4}$ " không có ý nghĩa (giá trị) nhưng lại phản ánh một ý tưởng rõ ràng: đó là số mà sau khi nâng lên lũy thừa hai thì nhận được số " -4 "; tên gọi " $3:0$ " là không có ý nghĩa nhưng lại có ý tưởng rõ ràng: đó là số mà khi nhân nó với " 0 " thì được " 3 ".

Trong việc dạy học môn Toán cần thiết theo dõi chặt chẽ việc sử dụng các thuật ngữ và ký hiệu trong các sách Toán để hiểu biết được ý nghĩa của chúng cùng những ý đồ, ý tưởng của các tác giả khi sử dụng.

§6 PHÂN CHIA KHÁI NIỆM

6.1 THỰC CHẤT CỦA PHÂN CHIA KHÁI NIỆM

Khi nghiên cứu các khái niệm, đôi khi xuất hiện nhiệm vụ là phải phân loại sắp xếp các đối tượng thuộc ngoại diên của khái niệm vào các nhóm tách biệt nhau.

Phân chia khái niệm được hiểu là chia ngoại diên của khái niệm thành các tập con thoả mãn một số đòi hỏi nhất định.

6.2 CÁC QUY TẮC PHÂN CHIA KHÁI NIỆM

6.2.1. Phân chia phải triệt để: điều này có nghĩa ngoại diên của khái niệm đem phân chia phải bằng hợp các ngoại diên các khái niệm chủng.

□ **Chẳng hạn:** $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$; ở đó A là ngoại diên của khái niệm đem phân chia, còn $A_1, A_2, \dots, A_n$ là ngoại diên các khái niệm chủng.

6.2.2. Phân chia không giao nhau: các khái niệm chủng đôi một không có phần tử chung.

$$A_i \cap A_j = \emptyset; \forall i, j, \text{ ở đó } i \neq j$$

6.2.3. Phân chia phải có cơ sở : điều này có nghĩa phân chia phải được tiến hành căn cứ vào cùng một dấu hiệu

6.2.4. Phân chia phải liên tục : điều này có nghĩa việc phân chia phải chuyển sang khái niệm chung gần nhất trong quan hệ với khái niệm loại

Trong việc phân chia khái niệm , người ta phân biệt ba thành phần :

1. **Khái niệm được phân chia :** khái niệm mà ngoại diên của nó cần được chia ra thành tập con
2. **Cơ sở của phân chia :** dấu hiệu căn cứ vào đó tiến hành phân chia
3. **Các khái niệm chung :** các lớp được tạo ra do việc phân chia

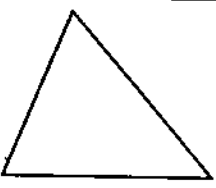
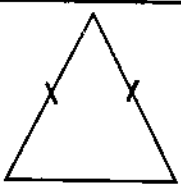
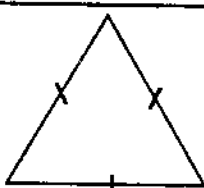
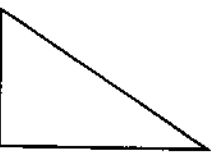
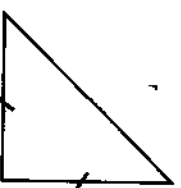
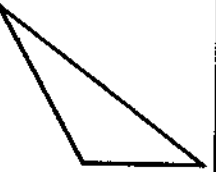
Chẳng hạn , ở Lớp 6 học sinh đã làm quen với việc phân chia khái niệm : “ Chia tập hợp các phân số thành hai lớp : các phân số bằng nhau và các phân số không bằng nhau ” . Cơ sở để phân chia là quan hệ “ nhỏ hơn ” , “ lớn hơn ” , hoặc “ bằng nhau ” giữa các tử số và mẫu số của phân số : Do việc phân chia đã tạo ra các lớp phân số bằng nhau và không bằng nhau .

Cơ sở của phân chia khái niệm là thao tác logic chia các phần tử của khái niệm loại thành chung căn cứ vào dấu hiệu phản ánh các tính chất của các phần tử của khái niệm chung hợp nhất trong một khái niệm loại

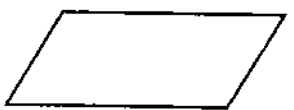
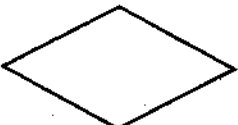
6.3 CÁC HÌNH THỨC PHÂN CHIA

6.3.1. Phân chia theo dấu hiệu biến dạng : các phần tử của khái niệm được phân chia có một số thuộc tính , có thể sử dụng các thuộc tính khác nhau làm cơ sở để phân chia . Khi thay đổi cơ sở phân chia , chúng ta nhận được sự phân chia khái niệm theo dấu hiệu biến dạng .

□ Ví dụ 1: Phân chia khái niệm tam giác theo các cạnh và các góc :

Theo cạnh Theo góc	3 cạnh khác nhau	2 cạnh bằng nhau	
		Chỉ có 2 cạnh bằng nhau	Cả 3 cạnh bằng nhau
3 góc nhọn			
1 góc vuông			không có
1 góc tù			không có

□ Ví dụ 2 : Phân chia hình bình hành theo cạnh và góc :

Góc kẻ Cạnh kẻ	Khác nhau	Bằng nhau
Khác nhau		
Bằng nhau		

□ Ví dụ 3 : *Phương trình đại số có thể được phân loại theo hai cơ sở :*

- **Số lượng ẩn số :** ta có phương trình 1 ẩn số , phương trình 2 ẩn , ...
- **Lũy thừa cao nhất của ẩn số :** ta có phương trình bậc nhất , phương trình bậc 2 , ...

Sử dụng đồng thời hai cơ sở phân loại này chúng ta được lớp các phương trình bậc nhất với hai ẩn số , hoặc là lớp các phương trình bậc 2 với một ẩn số ...

□ Ví dụ 4 : *Nếu phân chia khái niệm số tự nhiên đồng thời theo hai cơ sở : theo dấu hiệu chia hết cho 2 và dấu hiệu chia hết cho 3 thì chúng ta nhận được lớp các số tự nhiên chia hết cho 6.*

□ Chú ý :

- Việc lựa chọn dấu hiệu để phân chia phụ thuộc vào mục đích của phân chia , phụ thuộc vào nhiệm vụ dạy học , trong đó có việc giải quyết các nhiệm vụ do thực tế đời sống đặt ra .

- Một đòi hỏi quan trọng nhất đối với cơ sở để phân chia khái niệm là **tính khách quan** . Chẳng hạn không thể chia các cuốn sách thành các cuốn sách hay và không hay ; không thể chia các định lý thành các định lý dễ và khó , bởi lẽ các cơ sở để phân chia này mang tính chất **chủ quan** . Trong thực tế dạy học điều dễ nhận thấy là một định lý có thể dễ đối với một số học sinh song lại khó đối với nhiều học sinh khác .

6.3.2. Phép nhị phân : chia ngoại diễn của khái niệm được phân chia thành hai khái niệm chúng có quan hệ mâu thuẫn nhau , trong đó một trong hai khái niệm chúng này có thuộc tính P , khái niệm chúng còn lại không có thuộc tính P .

Giả sử khái niệm a được phân chia có ngoại diễn là A và x là một phần tử của A . Nếu x có tính chất P_1 ta viết $P_1(x)$ còn nếu x không có tính chất P_1 ta viết $\overline{P_1}(x)$

Phân chia A theo dấu hiệu P_1 ta nhận được hai lớp con :

$$A_1 = \{x \in A : P_1(x)\} \quad \text{và} \quad \overline{A_1} = \{x \in A : \overline{P_1}(x)\}$$

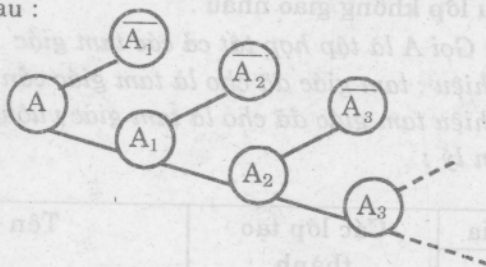
Hiển nhiên : $A_1 \cap \overline{A_1} = \emptyset$ và $A_1 \cup \overline{A_1} = A$. Phép nhị phân thỏa mãn tất cả các đòi hỏi đối với việc phân chia khái niệm.

Giả sử cũng với phép nhị phân, chúng ta chia được tập A_1 thành hai lớp con căn cứ vào dấu hiệu P_2 :

$$A_2 = \{x \in A_1 : P_2(x)\} \quad \text{và} \quad \overline{A_2} = \{x \in A_1 : \overline{P_2(x)}\}$$

Để thấy : $A_2 \cap \overline{A_2} = \emptyset$ và $A_2 \cup \overline{A_2} = A_1$

Tiếp tục quá trình này chúng ta nhận được phép phân chia khái niệm **đa giai đoạn** dựa trên cơ sở phép nhị phân biểu diễn bằng sơ đồ sau :



□ Ví dụ 1 : Phân chia tập hợp các hình chóp thành : các hình chóp đều và các hình chóp không đều.

□ Ví dụ 2 : Phân chia các đường thẳng trong không gian thành hai lớp : lớp các đường thẳng chéo nhau các đường thẳng nằm trong một phẳng.

□ Ví dụ 3 : Phân chia tập hợp các phương trình thành các phương trình bậc nhất và phương trình không bậc nhất.

□ Chú ý₁ : Phép nhị phân có ưu điểm là bảo đảm bốn quy tắc bắt buộc đối với một phân chia khái niệm.

□ Chú ý₂ : Nhược điểm của phép nhị phân là sau khi phân chia ngoại diện của khái niệm loại thành hai khái niệm chúng có quan hệ mâu thuẫn nhau thì một trong hai khái niệm chúng này có ngoại diện rất khó xác định.

Chẳng hạn nếu chia phương trình lượng giác thành phương trình lượng giác cơ bản và phương trình lượng giác không cơ

bản thì ngoại diên của khái niệm chúng : phương trình lượng giác không cơ bản quá là khó xác định .

□ **Chú ý :** *Phép nhị phân cũng thường được sử dụng khi phân hoạch tập hợp các đối tượng đồng thời theo một số dấu hiệu .*

Giả sử phân chia tập A theo dấu hiệu P_1 ta nhận được hai tập con là A_1 và $\overline{A_1}$, còn khi phân chia tập A theo dấu hiệu P_2 ta nhận được hai tập con là B_1 và $\overline{B_1}$. Ở đó P_1 và P_2 là hai dấu hiệu độc lập với nhau. Vấn đề đặt ra là hai phép phân chia này tạo ra bao nhiêu lớp không giao nhau.

☞ Xét ví dụ : Gọi A là tập hợp tất cả các tam giác .

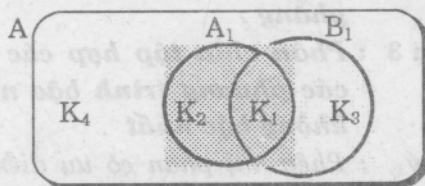
• P_1 là dấu hiệu : tam giác đã cho là tam giác cân .

• P_2 là dấu hiệu tam giác đã cho là tam giác vuông .

Lập bảng chân lý :

Cơ sở phân chia		Các lớp tạo thành	Tên gọi
P_1	P_2		
1	1	$K_1 = A_1 \cap B_1$	Tam giác vuông cân
1	0	$K_2 = A_1 \cap \overline{B_1}$	Tam giác cân không vuông
0	1	$K_3 = \overline{A_1} \cap B_1$	Tam giác vuông không cân
0	0	$K_4 = \overline{A_1} \cap \overline{B_1}$	Tam giác không vuông, cân

Biểu đồ Venn Euler :



Dễ dàng kiểm tra thấy rằng : $K_i \cap K_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ ($i, j = \overline{1,4}$)

$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = A$$

Nhận xét :

– Nếu phân chia tập hợp A theo một dấu hiệu P_1 thì sẽ tạo thành hai lớp không giao nhau A_1 và $\overline{A_1}$ mà $A_1 \cup \overline{A_1} = A$

– Khi phân chia tập A theo hai dấu hiệu độc lập P_1 và P_2 sẽ

tạo thành bốn lớp đôi một không giao nhau và :

$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = A$$

☞ Một cách tổng quát ta có định lý : nếu phân hoạch tập hợp A theo n dấu hiệu độc lập $P_1, P_2, \dots, P_n$ thì sẽ tạo thành 2^n lớp con đôi một không giao nhau (n là số nguyên dương).

Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp toán học :

- Với $n=1$ theo nhận xét trên đây định lý đúng.
- Giả sử đúng với $n=k$: Nếu phân hoạch tập A theo k dấu hiệu độc lập $P_1, P_2, \dots, P_k$ thì sẽ tạo thành 2^k lớp con đôi một không giao nhau.

- Cần chứng minh định lý cũng đúng với : $n=k+1$

Giả sử chúng ta thêm vào k dấu hiệu $P_1, P_2, \dots, P_k$ một dấu hiệu mới P_{k+1} . Dấu hiệu này tạo ra hai lớp con là A_{k+1} và $\overline{A_{k+1}}$ ở đó $A_{k+1} = \{x \in A : P_{k+1}(x)\}$, $\overline{A_{k+1}} = \{x \in A : \overline{P_{k+1}(x)}\}$, hai lớp con này giao với tất cả các lớp đã có. Có tất cả 2^k lớp giao với A_{k+1} và 2^k lớp giao nhau với $\overline{A_{k+1}}$.

Do đó có tổng cộng $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Tức nếu phân hoạch tập A theo $k+1$ dấu hiệu độc lập sẽ tạo thành 2^{k+1} lớp con

Kết luận : Định lý đã cho đúng với mọi n

☞ Nhận xét : định lý trên đây có thể được áp dụng vào giải các bài toán bằng cách sử dụng một cách hợp lý biểu đồ Venn-Euler minh họa cho việc phân hoạch một tập hợp ra các lớp con.

6.4 VAI TRÒ CỦA PHÂN CHIA KHÁI NIỆM

6.4.1. Cho học sinh làm quen với phân chia khái niệm, đồng thời biết tiến hành phân chia khái niệm, phân hoạch tập hợp các đối tượng ra các lớp có một vai trò quan trọng trong việc hình thành khái niệm và phát triển tư duy logic cho học sinh

Phân chia khái niệm có giá trị nhận thức to lớn về các đối tượng và hiện tượng bởi vì việc tách ra những khái niệm chung

mà chúng ta quan tâm cho phép nghiên cứu chúng một cách sâu sắc hơn , đầy đủ hơn . Chính do việc nghiên cứu sâu các khái niệm chung mà chúng ta được hình dung rõ ràng hơn đầy đủ hơn các khái niệm loại .

Chẳng hạn , khi giải phương trình bậc hai chúng ta phân ra thành các dạng đầy đủ và không đầy đủ , và sau những việc làm như vậy ở học sinh hình thành được sự hình dung đầy đủ hơn về lớp các phương trình bậc hai .

6.4.2. Sử dụng phương pháp phân chia khái niệm trong các bài toán hình học (dựng hình , xét vị trí tương đối . . .) giúp chúng ta biện luận được triệt để , không bỏ sót các trường hợp . Qua đó rèn luyện tính linh hoạt trong tư duy .

Phương pháp phân chia khái niệm sử dụng các Bài toán Số học và Đại số có chứa tham số giúp cho việc giải và biện luận vừa triệt để ; cách trình bày lại rõ ràng , sáng sủa và hợp lý .

§7 ĐƯA CÁC KHÁI NIỆM VÀO GIÁO TRÌNH TOÁN

7.1 ĐỊNH NGHĨA LÀ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN ĐỂ ĐƯA VÀO CÁC KHÁI NIỆM

Khái niệm “Số” là khái niệm cơ bản , ban đầu của số học . Khái niệm số được đưa vào từ những giờ học đầu tiên ở Lớp 1 như là một khái niệm – thuật ngữ . Điều đó được kéo dài cho hết Cấp I và không cần bất kỳ sự mô tả nào .

Ngoại diễn của khái niệm “Số” được mở rộng dần dần trong quá trình dạy học . Như ta thấy , thuật ngữ “Số” được sử dụng lúc đầu là chưa chính xác : nó chỉ tạm thời bao gồm số 0 và các số tự nhiên . Cho tới hết Lớp 4 , đối với học sinh là chưa có khái niệm – thuật ngữ “Số tự nhiên” .

Nguyên nhân không chỉ ở chỗ thuật ngữ “Số” vừa tiện lợi vừa đỡ công kênh hơn thuật ngữ “Số tự nhiên” mà còn là ở chỗ học

sinh còn chưa hiểu được sự cần thiết phải bổ sung vào thuật ngữ "Số" từ "tự nhiên".

Trong Chương I Toán Lớp 5, lần đầu tiên khái niệm - thuật ngữ "Số tự nhiên" được đưa vào qua khái niệm ban đầu "Số" như sau: "Các số 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9, 10, 11... là các số tự nhiên. Số 0 là số tự nhiên bé nhất. Thêm 1 vào một số tự nhiên ta được số tự nhiên liền sau số đó".

Việc đưa vào thuật ngữ "Số tự nhiên" ở thời điểm này là thực sự cần thiết để chuẩn bị cho việc vào trong Chương II sau đó khái niệm "Số thập phân Phân số".

Sau khi hệ thống hoá, bổ sung và nghiên cứu sâu hơn về số tự nhiên và các phân số đơn giản nhất, ở Lớp 5, Lớp cuối Cấp I, Học sinh học tương đối kỹ về số thập phân và các phép tính về số thập phân. Việc nghiên cứu sâu về số thập phân trước các phân số thường (các phép tính về phân số thường chỉ được học kỹ ở Lớp 6 - cấp II) là hoàn toàn hợp lý, phản ánh một tình hình là: Các số thập phân và các số tự nhiên có cấu trúc thập phân thống nhất, có thuật toán thực hiện phép tính tương tự và do đó có thể sử dụng tính kế thừa này để nghiên cứu các số thập phân ngay sau khi học sinh học về số tự nhiên (Xem các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân. Toán 5 trang 73 - 76 - 80 - 83 - 92 - 94)

Ở Lớp 7, học sinh được học về tập hợp các số nguyên và tập hợp các số hữu tỷ. Việc hình thành các khái niệm số vô tỷ và số thực được hoàn thiện ở Lớp 9.

"Một số vô tỷ là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn".

"Tập hợp các số hữu tỷ và vô tỷ gọi là số thực"

(Đại số 9, trang 17, 18 - NXBGD - 1977)

Tập hợp các số thực được định nghĩa bằng phương pháp kiến tạo: khái niệm số thực được kiến tạo do sự phối hợp các khái niệm số hữu tỷ và số vô tỷ. Tập hợp các số hữu tỷ cũng có thể được định nghĩa bằng phương pháp kiến tạo: hợp của các số nguyên và các phân số.

Khái niệm "Số" là một khái niệm toán học quan trọng nhất việc mở rộng có hệ thống khái niệm này là một trong những tư

tương cơ bản phát triển giáo trình Toán học ở trường Phổ thông mà bất kỳ một Giáo viên Toán nào không thể không nắm được .

7.2) PHƯƠNG PHÁP SUY DIỄN TRỪU TƯỢNG

Phương pháp suy diễn trừu tượng được sử dụng để đưa vào khái niệm khi mà khái niệm mới hoàn toàn được chuẩn bị do việc nghiên cứu các khái niệm có trước , trong số đó có khái niệm loại gần nhất và sự khác biệt của chúng là đơn giản và dễ hiểu đối với Học sinh .

Đôi khi việc chứng minh sự tồn tại của khái niệm vừa được đưa vào cùng với sự duy nhất của nó cũng được áp dụng ở Phổ thông .

Chẳng hạn , tính duy nhất của đường thẳng đi qua một điểm cho trước và song song với một đường thẳng chỉ được khẳng định qua tiên đề Euclide (Hình học 7 – trang 25 NXBGD 1987) .

Cũng trong Hình học 7 , Bài toán 2 trang 23 : “ *Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau* ” để khẳng định các đường thẳng song song là thực sự tồn tại .

7.3) PHƯƠNG PHÁP QUY nạp - CỤ THỂ

Được áp dụng để đưa vào khái niệm mới gắn liền với việc xem xét các ví dụ cụ thể và bằng các hoạt động tự duy phân tích , so sánh , trừu tượng hoá , khái quát hoá , tổng hợp dần dần Học sinh tới khái niệm mới .

Chẳng hạn việc đưa vào khái niệm đại lượng tỷ lệ thuận ở Lớp 5 được bắt đầu từ việc xem xét bảng chứa các cặp các giá trị tương ứng của thời gian và quãng đường trong một chuyển động đều .

7.4) PHƯƠNG PHÁP CÁC BÀI TOÁN HỢP LÝ

Nhờ bài toán được lựa chọn một cách đặc biệt , Học sinh có thể đi tới kết luận về việc cần thiết phải đưa vào một khái niệm mới và tên gọi gắn liền với khái niệm đó .

Ở Phổ thông phương pháp này có ý nghĩa quan trọng bởi lẽ nó có thể chỉ cho Học sinh thấy được logic phát triển bên trong Toán học , nâng cao hứng thú học Toán cho Học sinh .

Nhờ các bài toán hợp lý , Học sinh tiếp cận tới các khái niệm như “ *Phương trình* ” ; “ *nghiệm của phương trình* ” ; “ *các phép toán cộng , trừ , nhân , chia trên các số tự nhiên , các phân số thập phân . phân số thường , các số âm , số dương . . .* ” .

Chẳng hạn , phương pháp các bài toán hợp lý được sử dụng khi mở rộng khái niệm phép nhân khi học về phân số . Nó giải thích sự cần thiết phải đưa vào khái niệm mới “ nhân phân số ” bởi lẽ định nghĩa phép nhân như là phép cộng các số hạng bằng nhau trong hợp nhân các phân số là không có nghĩa . Toán 6 đã sử dụng bài toán “ *Tính diện tích một hình chữ nhật có chiều dài $\frac{4}{5}$ m và chiều rộng $\frac{2}{3}$ m* ” trước khi đi tới quy tắc nhân phân số



SUY LUẬN TOÁN HỌC

§1 HAI LOẠI SUY LUẬN

1.1 SUY LUẬN

Suy luận là một quá trình suy nghĩ để rút ra một mệnh đề mới từ một hoặc nhiều mệnh đề đã có trước. Các mệnh đề đã có trước gọi là tiền đề của suy luận. Mệnh đề mới rút ra được gọi là hệ quả hay là kết luận.

Một suy luận bất kỳ nói chung có cấu trúc logic $A \Rightarrow B$, trong đó A là tiền đề, B là kết luận. Cấu trúc logic phản ánh cách thức rút ra kết luận tức là cách lập luận.

1.2 SUY DIỄN

Một trong những khác biệt giữa Toán học và một số khoa học khác như Vật lý, Hoá học, đó là sự xây dựng lý thuyết suy diễn.

Suy diễn là một suy luận hợp logic đi từ cái đúng chung đến kết luận cho các riêng.

Nét đặc trưng của suy diễn là suy luận theo những quy tắc logic tổng quát, xác nhận rằng nếu tiền đề là đúng thì kết luận rút ra cũng đúng.

Xét suy luận với cấu trúc logic $A \Rightarrow B$. Nếu mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$ hằng đúng thì suy luận được gọi là suy luận hợp logic. Lúc đó B được gọi là hệ quả logic hoặc kết luận logic.

Trong suy luận hợp logic, nếu A đúng thì B đúng, còn nếu A sai thì B có thể đúng cũng có thể sai. Như vậy, đối với một suy luận hợp logic, kết luận logic có thể đúng và cũng có thể sai.

Để đảm bảo tính chất đúng đắn của một suy diễn thì: các tiền đề của suy luận phải đúng và đồng thời suy luận phải hợp logic.

Một suy luận hợp logic dạng $A \Rightarrow B$; hoặc $A_1 A_2 \dots A_n \Rightarrow B$
 được ký hiệu : $\frac{A}{B}$; $\frac{A_1 ; A_2 ; \dots ; A_n}{B}$

Chúng ta xét một số ví dụ

□ Ví dụ 1 : Xét suy luận , ta biết rằng nếu một tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác nội tiếp được đường tròn . Bởi vì , hình vuông có tổng hai góc đối diện bằng 180° , nên hình vuông nội tiếp được một đường tròn . Suy luận này có cấu trúc logic : $(A \Rightarrow B) A \Rightarrow B$. Đây là một suy luận hợp logic

□ Ví dụ 2: Xét suy luận , ta biết rằng một tứ giác đều thì ngoại tiếp được một đường tròn . Bởi vì , tứ giác ABCD ngoại tiếp được một đường tròn , do đó ABCD là tứ giác đều . Suy luận trên đây có cấu trúc logic : $(A \Rightarrow B) B \Rightarrow A$. Đây không phải là một suy luận hợp logic

□ Ví dụ 3 : Xét suy luận , ta biết rằng một hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau thì nó là hình thoi . Bởi vì , hình bình hành ABCD có hai đường chéo không vuông góc , cho nên hình bình hành ABCD không là hình thoi . Suy luận trên đây có cấu trúc logic : $(A \Rightarrow B) \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$. Đây không phải là suy luận hợp logic cho dù kết luận là đúng .

Các quy tắc suy diễn thông dụng :

1/ Quy tắc phản đảo : $\frac{A \Rightarrow B}{B \Rightarrow A}$

2/ Hoán vị tiên đề : $\frac{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}{B \Rightarrow (A \Rightarrow C)}$

3/ Kết hợp tiên đề : $\frac{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}{AB \Rightarrow C}$

4/ Tách tiên đề : $\frac{AB \Rightarrow C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}$

$$5/ \frac{A \Rightarrow BC}{A \Rightarrow B}, \frac{A \Rightarrow BC}{A \Rightarrow C}$$

$$6/ \frac{A, B}{A \Rightarrow B}, \frac{A, B}{AB}$$

$$7/ \text{Phản đảo mở rộng} : \frac{AB \Rightarrow C}{A\bar{C} \Rightarrow \bar{B}}$$

$$8/ \frac{AB}{A}, \frac{AB}{B}$$

$$9/ \frac{A \vee B, \bar{A}}{B}; \frac{A \vee B, \bar{B}}{A}$$

$$10/ \frac{A \Rightarrow B, C \Rightarrow B}{A \vee C \Rightarrow B}$$

$$11/ \text{Nếu} : \frac{M, A}{B} \text{ thì } \frac{M}{A \Rightarrow B}$$

$$12/ \text{Nếu} : \frac{M, A}{B} \text{ và } \frac{M, A}{B} \text{ thì } \frac{M}{A}$$

$$13/ \text{Modusponens} : \frac{A \Rightarrow B, A}{B}$$

$$14/ \text{Modustollens} : \frac{A \Rightarrow B, \bar{B}}{A}$$

$$15/ \text{Bắc cầu (tam đoạn luận giả định)} : \frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

1.3 QUY NẠP (RÉCURRENCE)

Chúng ta gọi các kết luận được rút ra trên cơ sở các quan sát và thực nghiệm, tức là những kết quả nhận được bằng con đường xem xét các trường hợp riêng và sau đó khái quát lên thành những kết luận có tính quy Luật cho các trường hợp tổng quát là suy luận quy nạp.

1.3.1. Quy nạp hoàn toàn :

Phương pháp quy nạp hoàn toàn được sử dụng rộng rãi để chứng minh định lý và giải toán

Trong phương pháp quy nạp hoàn toàn, khẳng định chung được chứng minh là đúng trong mỗi một trường hợp riêng có thể

xảy ra, do đó, mặc dù được gọi là quy nạp, nhưng ta vẫn phải xem quy nạp hoàn toàn là suy luận thuộc loại suy diễn.

Thật vậy để có thể áp dụng được phương pháp suy luận này, chúng ta phải đưa về việc phân chia các trường hợp chung thành một số hữu hạn các trường hợp riêng có thể có và chứng minh khẳng định là đúng trong tất cả các trường hợp riêng

□ Ví dụ 1: *Chứng minh rằng với mọi số thực a và b , ta đều có: $|a + b| \leq |a| + |b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?*

Giải

Xét bốn trường hợp sau đây:

• Nếu $a \geq 0, b \geq 0$. Khi đó: $a + b \geq 0$; do đó:

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng

• Nếu $a \geq 0; b < 0$. Khi đó: $b \leq a + b \leq a$

Do đó: $|a + b|$ không thể vượt quá số lớn nhất trong hai số $|a|$ và $|b|$. Vậy: $|a + b| < |a| + |b|$.

• Nếu $a < 0, b \geq 0$. Lập luận tương tự như trường hợp thứ hai, ta có: $|a + b| < |a| + |b|$

• Nếu $a < 0, b < 0$. Khi đó: $a + b < 0$

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

Vậy bất đẳng thức đúng

Tóm lại với mọi a, b ta có: $|a + b| \leq |a| + |b|$ (đpcm).

Trong chứng minh trên đây ta thấy, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b cùng dấu

□ Ví dụ 2: *Chứng minh rằng phương trình sau đây không có nghiệm số thực:*

$$1999x^4 + 1998x^3 + 2000x^2 + 1997x + 1999 = 0$$

Giải

Xét ba trường hợp:

• Nếu $x > 0$: vế trái là tổng của các số dương. Vậy phương trình vô nghiệm

• Nếu: $-1 \leq x < 0$. Khi đó: $x + 1 \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$1999x^4 + 1998x^3(x+1) + 2x^2 + 1997(x+1) + 2 = 0$$

Vế trái của phương trình dương . Vậy phương trình vô nghiệm

• Nếu : $x < -1$. Khi đó : $x + 1 < 0 \Rightarrow x(x+1) > 0$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$x^4 + 1998x^3(x+1) + 3x^2 + 1997x(x+1) + 1999 = 0$$

Vế trái của phương trình dương , vậy phương trình vô nghiệm

Trong mọi trường hợp ta đều có phương trình vô nghiệm (dpcm)

1.3.2. Quy nạp không hoàn toàn :

Quy nạp không hoàn toàn là phép suy luận đi từ cái đúng riêng đến kết luận cho các chung đi từ một hiện tượng đơn nhất đến kết luận cho các hiện tượng phổ biến .

Nét đặc trưng của suy luận là ở chỗ không có quy tắc chung cho quá trình suy luận mà chỉ dựa trên cơ sở nhận xét và kiểm nghiệm .

□ Ví dụ 1 : *Xuất phát từ nhận xét :*

$$2^{2^1} + 1 = 5 \text{ là một số nguyên tố}$$

$$2^{2^2} + 1 = 17 \text{ là một số nguyên tố}$$

Fermat đã đi tới nhận xét tổng quát : $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

□ Ví dụ 2 : *Xuất phát từ nhận xét*

$$\text{Với } a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \text{ ta có : } a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2} = \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_1}$$

Người ta đi đến kết luận tổng quát:

Với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n$ không âm , ta có bất đẳng thức :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_n a_1}$$

□ Ví dụ 3 : *Xuất phát từ nhận xét :*

$$4 = 2 + 2 ; 6 = 3 + 3 ; 8 = 3 + 5 \dots$$

Nhà toán học Đức - Golbach đi tới kết luận tổng quát : Một số chẵn bất kỳ lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố .

□ Ví dụ 4 : *Xuất phát từ nhận xét*

$$7 = 2 + 2 + 3 ; 9 = 2 + 2 + 5 ; \dots$$

Nhà toán học Thụy sĩ – Euler đi tới kết luận tổng quát :
Một số lẻ bất kỳ lớn hơn 5 đều là tổng của ba số nguyên tố

Nhận thấy , các kết luận rút ra từ phép quy nạp không hoàn toàn có thể đúng , có thể sai , nó có tính chất dự đoán

- Nếu bằng suy diễn , ta chứng minh được dự đoán đó là đúng thì dự đoán đó trở thành một định lý (ví dụ 2)

- Nếu bằng một phản ví dụ , ta chỉ ra dự đoán là sai thì có thể bác bỏ được dự đoán . Nhà toán học Thụy sĩ – Euler – Viện sĩ viện hàn lâm khoa học Petersbourg (thế kỷ 18) đã chỉ ra rằng ; khi $n = 5$ thì số $2^{2^5} + 1$ là một hợp số vì nó chia hết cho 641.

- Nếu chưa chứng minh được là đúng hoặc là sai thì dự đoán trở thành một giả thuyết .

Trong Ví dụ 3 và Ví dụ 4 , chúng ta nhận được hai giả thuyết Gold Bach và giả thuyết Euler. Giả thuyết Gold Bach và giả thuyết Euler cho đến nay vẫn còn được chứng minh một cách triệt để .

Nhà toán học Nga – Viện sĩ VINOGRADOV chứng minh được rằng : **Một số chẵn đủ lớn đều là tổng của bốn số nguyên tố** .

Trải qua các thời kỳ phát triển khác nhau , Toán học có rất nhiều các giả thuyết . Chính các giả thuyết này đã góp phần không nhỏ thúc đẩy sự phát triển mạnh mẽ của Toán học

Đối với phép quy nạp không hoàn toàn , đặc biệt hóa và khái quát hóa được xem là các thủ thuật logic tư duy chủ yếu có ý nghĩa cực kỳ quan trọng trong khi tiến hành suy luận .

Khái quát hóa có ý nghĩa là sự chuyển những kiến thức đã có lên một mức độ cao hơn dựa trên cơ sở xác định được tính chất chung hoặc là các quan hệ phổ biến nhất của các đối tượng đang xét . Chính vì vậy trong khi tiến hành khái quát hóa yêu cầu phải thấy được những nét chung duy nhất các mệnh đề riêng biệt.

Khái quát hóa bao giờ cũng gắn liền với trừu tượng hóa , trừu tượng hóa chính là để khái quát hoá và ngược lại , sẽ không khái quát hóa được theo những phương hướng đúng đắn nếu không nắm được phương pháp trừu tượng hóa. Trong khi thực hiện phép quy nạp không hoàn toàn tùy theo khuynh hướng của

sự trừu tượng hóa, chúng ta có thể có những cách khác nhau khi tiến hành khái quát hóa.

□ Ví dụ 1 : Chứng minh rằng với mọi số thực không âm

$$a_1 \text{ và } a_2 \text{ ta đều có : } \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

• Nếu xét theo hướng : trung bình cộng và trung bình nhân ta có thể khái quát hoá như sau.

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức Cauchy : $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

• Nếu xét theo hướng :

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 \geq a_1^{\frac{1}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a_1})^2}{2} + \frac{(\sqrt{a_2})^2}{2} \geq (\sqrt{a_1})(\sqrt{a_2}) \end{aligned}$$

$$\text{Quan tâm đến dấu hiệu : } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 ; \sqrt{a_1} \geq 0 ; \sqrt{a_2} \geq 0$$

Chúng ta có bài toán sau đây :

Giả sử a và b là hai số thoả mãn điều kiện $a > 1, b > 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Khi đó với mọi $u, v \geq 0$; ta có bất đẳng thức :

$$\frac{u^a}{a} + \frac{v^b}{b} \geq uv. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } u^a = v^b$$

(Bất đẳng thức Hölder)

□ Ví dụ 2 :

Chứng minh rằng, nếu x và y là hai số thực thoả mãn $0 \leq x, y \leq \pi$ thì ta luôn có bất đẳng thức :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}$$

Chúng ta đề xuất bài toán khái quát : Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số thực thoả mãn điều kiện : $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \pi$ thì ta luôn có :

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n}$$

Lại có bài toán : Chứng minh rằng nếu x, y là hai số thoả mãn $-\frac{\pi}{2} \leq x; y \leq \frac{\pi}{2}$ thì luôn có bất đẳng thức :

$$\cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \frac{\cos x + \cos y}{2}$$

Chúng ta lại đề xuất bài toán khái quát : Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số thực thoả mãn $-\frac{\pi}{2} \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \frac{\pi}{2}$ thì ta luôn có :

$$\cos \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \geq \frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n}{n}$$

Sau khi chứng minh tính chất đúng đắn của hai bài toán khái quát trên đây, nếu chúng ta chỉ quan tâm tới tính chất các hàm số xác định liên tục trên đoạn $[a; b]$ thoả mãn điều kiện $f \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ với x_1, x_2 thuộc $[a; b]$ thì chúng ta có

thể đề xuất bài toán khái quát sau đây :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thoả mãn : $f \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ với mọi x_1, x_2 thuộc $[a; b]$.

Chứng minh rằng khi đó ta cũng có bất đẳng thức :

$$f \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b] \quad (\text{BĐT Jensen})$$

Trong phép quy nạp không hoàn toàn, khi tiến hành một phép thử thì chúng ta đã đặc biệt hóa dự đoán trong một trường hợp riêng đó. Đối với các giả thuyết của bài toán khái quát hóa, đặc biệt hóa có tác dụng như sau : Nếu bằng đặc biệt hóa ta được một mệnh đề đúng thì càng thêm tin tưởng vào giả thuyết là đúng, còn nếu qua đặc biệt hóa ta nhận được một mệnh đề sai thì ta có thể hoàn toàn bác bỏ dự đoán.

Phép tương tự có thể được xem là một hình thức biểu hiện của quy nạp không hoàn toàn. Thật vậy, phép tương tự là phép suy

luận đi từ một số thuộc tính giống nhau của hai đối tượng để rút ra kết luận về những thuộc tính giống nhau khác của hai đối tượng đó . Kết luận của phép tương tự có thể đúng , có thể sai , nó có tính chất dự đoán .

Sơ đồ của phép suy luận tương tự như sau :

- Đối tượng A có các thuộc tính $a_1 ; a_2 ; a_3$.
- Đối tượng B có các thuộc tính $a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4$.

Kết luận đối tượng A có thuộc tính a_4 .

Phép quy nạp không hoàn toàn với các hình thức thể hiện của nó như phép tương tự , khái quát hóa , đặc biệt hóa đôi khi còn gọi là suy luận nghe có lý , tức là các suy luận dựa vào thực nghiệm .

Trong Toán học cũng như trong các Khoa học tự nhiên khác , người ta thường sử dụng quan sát và các suy luận nghe có lý để đưa ra các giả thuyết khoa học , khám phá ra các quy luật . Nói cách khác , các suy luận nghe có lý quan hệ mật thiết với nhau , bổ sung cho nhau trong quá trình tìm tòi và phát minh khoa học

Các phép suy luận nghe có lý thường hợp tác với nhau một cách rất tự nhiên trong việc giải quyết nhiều vấn đề của Toán học . Trong quá trình dạy học môn Toán ở trường Phổ thông , Giáo viên cần suy nghĩ tìm tòi thông qua các ví dụ đã được lựa chọn cẩn thận và hợp lý làm cho học sinh hiểu được thế nào là đặc biệt hóa và tương tự , cần chú trọng đặc biệt tới các phép tương tự .

Nhà sư phạm và là nhà Toán học nổi tiếng người Mỹ (gốc Hungari) - Polya có nhận xét : "*Trong Toán học sơ cấp cũng như trong Toán học cao cấp , phép tương tự có lẽ là có mặt trong mọi phát minh . Trong một số phát minh , phép tương tự chiếm vai trò quan trọng hơn cả .*"

Còn đối với nhà thiên văn học tài ba Kepler (người Đức) , người đã phát minh ra ba định luật nổi tiếng trong thiên văn học mang tên Kepler thì : "*Tôi vô cùng biết ơn các phép tương tự , những người thầy đáng tin cậy nhất của tôi . Các phép tương tự*

đã giúp tôi khám phá ra các bí mật của tự nhiên , đã giúp tôi vượt qua được mọi trở ngại "

Quá trình khái quát hóa dựa trên sự vận dụng phép tương tự gắn liền với "phòng thí nghiệm" của tư duy sáng tạo . Có thể nói , đó là một trong những phương tiện quan trọng nhất của việc tự giáo dục tức là tự mở rộng và đào sâu các kiến thức đã có .

Để có thể nắm một cách sâu sắc các khái niệm mới phương pháp giải quyết không thể chỉ là việc đưa vào các bài toán khó mà trước hết phải là sự trình bày một cách đồng thời các bài toán đã được khái quát hoá , các bài toán được rút ra từ phép tương tự mà việc giải quyết những bài toán này đòi hỏi sự nỗ lực của bản thân người học trên cơ sở nắm vững phương pháp và đường lối giải quyết các bài toán trước đó .

Trong dạy học môn Toán , người Thầy muốn rèn luyện cho Học sinh trí thông minh , khả năng độc lập sáng tạo thì cần phải biết tận dụng mọi cơ hội dạy cho học sinh biết cách quan sát , biết các dự đoán , biết cách khái quát , biết cách suy luận tương tự .

Quan sát có mục đích để phát hiện một sự kiện Toán học lặp lại đều đặn , một lược đồ , hay một quy tắc nào đó .

Quan sát với sự chỉ đạo của một tư tưởng nhất định có nhiều may mắn dẫn tới các kết quả đáng chú ý .

Quan sát có thể dùng làm bàn đạp cho sự suy rộng và cho những giả định , học thuyết dự báo . Nhưng đó không phải là sự chứng minh . Cần phải bắt đầu từ quan sát , rồi nhờ các phép tương tự quy nạp , khái quát hoá , đặc biệt hóa mà tập dượt nghiên cứu , sáng tạo và phát minh trong Toán học .

Chúng ta xét một ví dụ

□ Ví dụ 1 : *Cho hình vuông ABCD . I là một điểm bất kỳ trên cạnh AB (I khác A và B) . Tia DI cắt tia CB tại E . Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M . Chứng minh rằng , đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM .*

Giải

Trên tia đối của tia AB, lấy điểm J sao cho $AJ = BE$

Ta có : $\triangle EBA = \triangle JAD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AE \perp DJ$$

Ta có : $\triangle JBC = \triangle ECD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow JC \perp DE$$

Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AE và JC thì H là trực tâm của tam giác DEJ, Dễ thấy I là trực tâm của tam giác CEJ ; do đó đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng JE.

Suy ra CM song song với DH.

Tam giác EDH có $IM \parallel DH$, suy ra : $\frac{ME}{MH} = \frac{IE}{ID}$ (1)

Tam giác ECD có $IB \parallel DC$, suy ra : $\frac{BE}{BC} = \frac{IE}{ID}$ (2)

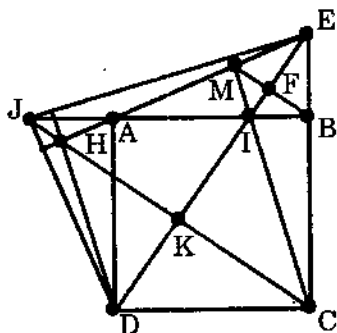
Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{ME}{MH} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BM \parallel CH$.

$$\left. \begin{array}{l} BM \parallel CH \\ CH \perp DE \end{array} \right\} \Rightarrow BM \perp DE.$$

Sau khi giải xong Ví dụ 1, ta có nhận xét : vì I là điểm bất kì lấy trên cạnh AB (I khác A và B), ta luôn luôn nhận được kết quả là BM vuông góc với DE tại F.

Nói cách khác, nếu hình vuông ABCD cố định, điểm I lưu động trên cạnh AB (I khác A và B) thì $\widehat{BFD} = 90^\circ$, do đó điểm F chạy trên đường tròn đường kính BD. Với cách nhìn nhận như vậy, chúng ta đi tới

□ Ví dụ 2 : Cho hình vuông ABCD cố định. I là một điểm lưu động trên cạnh AB (I khác A và B). tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F. Tìm quỹ tích điểm F.



(Quỹ tích điểm F là một phần tư đường tròn, đường kính BD loại trừ các điểm A và B).

Sau khi giải xong Ví dụ 2, một vấn đề đặt ra : Nếu lấy điểm I trên cạnh AB thì $\widehat{BFD} = 90^\circ$, vậy thì : nếu I là một điểm bất kì trên tia AB (I khác A), kết quả còn đúng hay không ? Câu trả lời : kết quả vẫn còn đúng và ta có

□ Ví dụ 3 : Cho hình vuông $ABCD$ cố định. I là một điểm thay đổi trên tia AB (I khác A) . Tia DI cắt tia CB tại E . Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M . Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F . Tìm quỹ tích điểm F ?

Trong trường hợp điểm B nằm giữa hai điểm A, I ta chọn điểm J trên cạnh AB sao cho : $AJ = BE$.

Sau đó chứng minh tương tự như Ví dụ 1 sẽ nhận được kết quả : $\widehat{BFD} = 90^\circ$. Quỹ tích là nửa đường tròn đường kính BD (trừ A) .

Việc chuyển từ Ví dụ 1 sang các Ví dụ 2 và Ví dụ 3 sẽ được định hình ngay, nếu như ta sử dụng phương pháp tọa độ để giải Ví dụ 1.

Thật vậy, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, và để cho gọn ta chọn đơn vị : $DA = DC = 1$

Đặt : $\widehat{CDE} = m$

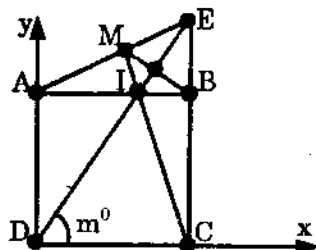
Ta có, trong hệ trục tọa độ đã chọn các điểm sẽ có tọa độ :

$A(0; 1)$, $B(1; 1)$, $C(1; 0)$, $D(0; 0)$, $E(1; \operatorname{tg} m)$, $I(\cot m; 1)$.

Khi đó, phương trình của đường thẳng AE là :

$$\frac{y-1}{\operatorname{tg} m - 1} = \frac{x-0}{1-0} \Leftrightarrow y = (\operatorname{tg} m - 1)x + 1$$

Phương trình đường thẳng CI là :



$$\frac{y-1}{0-1} = \frac{x-\cot gm}{1-\cot gm} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{\cot gm-1}$$

Từ đó suy ra giao điểm M của các đường thẳng AE và CI có tọa độ : $x = \frac{\cot gm}{\cot gm + \operatorname{tg} m - 1}$; $y = \frac{1 - \operatorname{tg} m}{(\cot gm - 1)(\cot gm + \operatorname{tg} m - 1)}$

Viết phương trình đường thẳng BM, ta suy ra được đường thẳng BM có hệ số góc là $-\cot gm$.

Đường thẳng DE có hệ số góc là $\operatorname{tg} m$

Bởi vì : $(-\cot gm) \cdot \operatorname{tg} m = -1$ nên đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM.

Sử dụng phương pháp tọa độ để giải Ví dụ 1, ta thấy ngay được, góc $\widehat{CDE} = m$ có thể được xác định một cách tùy ý chỉ cần $m \neq 90^\circ$ và $m \neq 0^\circ$ để $\operatorname{tg} m$ và $\cot gm$ xác định ta vẫn có hai đường thẳng DE và BM vuông góc với nhau. Chúng ta đi tới :

□ Ví dụ 4 : **Cho hình vuông ABCD cố định . I là một điểm chuyển động trên đường thẳng AB (I khác A). Đường thẳng DI cắt đường thẳng CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F. Tìm quỹ tích điểm F ?**

(Quỹ tích là đường tròn đường kính BD).

Bây giờ chúng ta xét bài toán dưới một góc độ khác . Xét một vị trí của điểm I trên tia đối của tia AB.

Nếu thay đổi cách xem xét cấu trúc của hình vẽ, xem BD là phân giác của góc vuông IBE của tam giác IBE, còn BF là đường cao thuộc cạnh huyền , chúng ta đi tới Ví dụ 5 sau đây.

□ Ví dụ 5 : **Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{C} = 90^\circ$). vẽ phân giác CD và đường cao CH. Từ D dựng DE và DF lần lượt vuông góc với cạnh CB và cạnh CA. (Điểm E trên cạnh CB và điểm F trên cạnh CA) . Chứng minh rằng các đường thẳng CH , AE và BF đồng quy tại một điểm.**

(Sử dụng định lý đảo của định lý Céva có ngay kết quả).

1.4 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1.4.1. Khái niệm về phương pháp quy nạp toán học

Giả sử A_n là một khẳng định phụ thuộc vào số tự nhiên n và chúng ta cần phải chứng minh A_n đúng với mọi n .

Trong trường hợp này, ta không thể sử dụng phép quy nạp hoàn toàn, bởi vì tập hợp số tự nhiên là vô hạn và không thể tiến hành việc kiểm tra tất cả các trường hợp riêng. Chúng ta cũng không thể sử dụng phép quy nạp không hoàn toàn bởi vì, như đã nhận xét, kết luận của phép quy nạp không hoàn toàn chỉ có tính chất dự đoán.

Để khắc phục khó khăn này, người ta sử dụng một phương pháp suy luận đặc biệt được gọi là phương pháp quy nạp toán học và tiến hành chứng minh như sau :

- Trước tiên, ta kiểm tra rằng khẳng định A_1 đúng.
- Sau đó chứng tỏ rằng, từ tính chất đúng dẫn của khẳng định A_k ($k \geq 1$) cũng suy ra được A_{k+1} đúng

Khi đó, khẳng định A_n được coi là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Thật vậy, ta có, nếu A_1 thì A_2 đúng, nhưng A_2 đúng thì A_3 đúng, ... Tiếp tục lý luận như vậy, ta có A_n đúng $\forall n \geq 1$.

Phương pháp chứng minh trên đây được gọi là phương pháp quy nạp toán học. Cơ sở của phương pháp chứng minh trên đây là nguyên lý quy nạp toán học.

1.4.2. Nguyên lý quy nạp toán học

Cơ sở của nguyên lý quy nạp toán học là tiên đề thứ 5 (còn gọi là tiên đề quy nạp) của hệ tiên đề PÉANO về tập hợp số tự nhiên được xây dựng từ cuối Thế kỉ 19

- **Tiên đề 1 :** 1 là số tự nhiên
- **Tiên đề 2 :** với mọi số tự nhiên a , có một số tự nhiên a^* đi liền sau a .
- **Tiên đề 3 :** số 1 không đi liền sau số tự nhiên nào. Nói cách khác, với mọi số tự nhiên a , ta có $a^* \neq 1$.
- **Tiên đề 4 :** nếu $a^* = b^*$ thì $a = b$. Số tự nhiên đi liền sau số a là duy nhất.

- **Tiên đề 5 : (Tiên đề Quy nạp)** nếu một tập hợp M các số tự nhiên có tính chất : M chứa 1, nếu M chứa a thì M cũng chứa a^* . Khi đó M trùng với tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$.

1.4.3. Một số hình thức khác của phương pháp quy nạp toán học

Giả sử A_n là một khẳng định phụ thuộc vào biến n .

☞ Hình thức 1

- **Bước 1 :** chứng minh cho A_1 đúng
- **Bước 2 :** giả sử khẳng định A_k đúng ($k \geq 1$). Ta suy ra được A_{k+1} cũng đúng.
- **Bước 3 :** Kết luận A_n đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

☞ Hình thức 2

- **Bước 1 :** chứng minh cho A_{n_0} đúng với n_0 là một số nguyên nào đó.
- **Bước 2 :** giả sử khẳng định A_k đúng ($k \geq n_0$) ta suy ra được A_{k+1} cũng đúng.
- **Bước 3 :** Kết luận A_n đúng với mọi số nguyên $n \geq n_0$.

☞ Hình thức 3

- **Bước 1 :** chứng minh cho A_1 đúng .
- **Bước 2 :** giả sử các khẳng định $A_1, A_2, \dots, A_k$ đúng, ta suy ra được A_{k+1} cũng đúng.
- **Bước 3 :** Kết luận A_n đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$

☞ Hình thức 4

- **Bước 1 :** chứng minh cho $A(n_0)$ và A_{n_0+1} đúng với $n_0 \in \mathbb{N}$
- **Bước 2 :** giả sử A_{k-1} và A_k đúng . Ta suy ra được A_{k+1} cũng đúng.
- **Bước 3 :** Kết luận A_n đúng với mọi $n \geq n_0$.

1.4.4 Các ví dụ

- **Ví dụ 1 :** *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq -2$, ta có : $A_n = 6^{2n+1} + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ chia hết cho 11.*

Giải

- Với : $n = -2$, ta có $A_{-2} = 11$ chia hết cho 11.

Vậy khẳng định đúng khi : $n = -2$.

- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq -2$, nghĩa là :

$$A_k = 6^{2k+4} + 3^{k+4} + 3^{k+2} \text{ chia hết cho } 11$$

$$\begin{aligned} \text{Xét : } A_{k+1} &= 6^{2(k+1)+4} + 3^{k+1+4} + 3^{k+1+2} \\ &= 33 \cdot 6^{2k+4} + 3(6^{2k+4} + 3^{k+4} + 3^{k+2}) = 33 \cdot 6^{2k+4} + 3A_k. \end{aligned}$$

Bởi vì 33 và A_k đều chia hết cho 11, ta suy ra $A_{k+1} : 11$.

Kết luận : A_n chia hết cho 11 với mọi $n \geq -2$

□ Ví dụ 2 : **Chứng minh rằng : với mọi số tự nhiên n ta có số : $B_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133.**

Giải

- Khi $n = 0$ ta có : $B_0 = 11^2 + 12 = 133$ chia hết cho 133.

Vậy khẳng định đúng với : $n = 0$

- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 0$, nghĩa là số :

$$B_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1} \text{ chia hết cho } 133.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét : } B_{k+1} &= 11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1} = 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} \\ &= 11(11^{k+1} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} \\ &= 11 B_k + 133 \cdot 12^{2k+1} \end{aligned}$$

Bởi vì B_k chia hết cho 133 nên suy ra B_{k+1} chia hết cho 133.

Nói cách khác khẳng định đúng với : $n = k + 1$.

- Kết luận : B_n chia hết cho 133 với mọi số tự nhiên n .

□ Ví dụ 3 : **Chứng minh rằng : mọi số tự nhiên $n \geq 2$ đều phân tích được thành tích của một hoặc nhiều thừa số nguyên tố.**

Giải

Gọi A_n là khẳng định : Số tự nhiên n phân tích được thành tích của một hoặc nhiều thừa số nguyên tố

- Khi $n = 2 \Rightarrow A_2 = 2.1$: khẳng định đúng .

• Giả sử $A_2, A_3, \dots, A_k$ đúng . Ta cần chứng minh cho A_{k+1} cũng đúng.

Xét số tự nhiên $k + 1$. Có hai khả năng có thể xảy ra.

• Nếu $k + 1$ là số nguyên tố thì : $A_{k+1} = (k + 1).1$ tức là khẳng định A_{k+1} đúng.

• Nếu $k + 1$ là hợp số thì $k + 1 = a_1.a_2$ với các số tự nhiên: $2 \leq a_1 ; a_2 \leq k$

Theo giả thiết quy nạp, a_1 và a_2 có thể phân tích được thành tích của một hoặc nhiều thừa số nguyên tố.

Khi đó : $A_{k+1} = k+1 = a_1.a_2$ phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố . Nói cách khác , khẳng định A_{k+1} cũng đúng.

• **Kết luận** : mọi số nguyên $n \geq 2$ đều phân tích được thành tích của một hoặc nhiều các thừa số nguyên tố .

□ Ví dụ 4 :

Chứng minh rằng $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$
với mọi số tự nhiên $n \geq 1$

Giải

- Khi $n = 1$ ta có $S_1 = 1 = 1^2$, khẳng định đúng.
- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có :

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét : } S_{k+1} &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \end{aligned}$$

tức là khẳng định đúng với $n = k + 1$.

- Kết luận với mọi $n \geq 1$ ta có : $S_n = n^2$.

□ Ví dụ 5 :

Tính tổng : $S_n = 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n(2n - 1)$ với
 n là số tự nhiên , $n \geq 1$.

Giải

- B_1 : Sử dụng quy nạp không hoàn toàn dự đoán kết quả

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = -1 + 3 = 2$$

$$S_3 = -1 + 3 - 5 = -3$$

$$S_4 = -1 + 3 - 5 + 7 = 4$$

Dự đoán : $S_n = (-1)^n.n$ với mọi $n \geq 1$

- B_2 : Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh dự đoán .

- Khi $n = 1$ ta có $S_1 = -1$. Khẳng định đúng .

• Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$. Nghĩa là :

$$S_k = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^k(2k - 1) = (-1)^k \cdot k$$

Ta cần chứng minh khẳng định cũng đúng với : $n = k + 1$.

$$\text{Tức là : } S_{k+1} = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^k(2k - 1) + (-1)^{k+1}(2k + 1) = (-1)^{k+1} \cdot (k+1).$$

Thật vậy :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+1}(2k + 1) \\ &= (-1)^k \cdot k + (-1)^k \cdot (-1) \cdot (2k + 1) \\ &= (-1)^k(k - 2k - 1) = (-1)^k(-k - 1) \\ &= (-1)^{k+1}(k + 1) \end{aligned}$$

Nói cách khác, khẳng định đúng với : $n = k + 1$

Kết luận : khẳng định đúng với mọi số tự nhiên n khác 0 .

□ Ví dụ 6 : Với những số tự nhiên nào , ta có bất đẳng thức : $2^n > 2n + 1$ đúng .

Giải

Khi : $n = 1$, ta có : $2^1 > 2 \cdot 1 + 1$ (sai)

$n = 2$, ta có : $2^2 > 2 \cdot 2 + 1$ (sai)

$n = 3$, ta có : $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ (đúng)

$n = 4$, ta có : $2^4 > 2 \cdot 4 + 1$ (đúng)

Ta dự đoán : bất đẳng thức $2^n > 2n + 1$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp toán học

• Khi : $n = 3$; ta có : $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, bất đẳng thức đúng .

• Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 3$, nghĩa là bất đẳng thức $2^k > 2k + 1$ đúng .

• Ta cần phải chứng minh bất đẳng thức : $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$ cũng đúng .

Thật vậy , ta có $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1)$ (1)

Mặt khác : $2(2k + 1) = 2(2k + 1) + 1 + 2k - 1 > 2(k + 1) + 1$

Suy ra : $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$ (đúng)

Kết luận : $2^n > 2n+1$ đúng với mọi $n \geq 4$.

□ Ví dụ 7 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \neq 0$ ta có bất đẳng thức :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$$

Giải

• Khi : $n = 1$, ta có : $S_1 = 1 > \frac{1}{2}$, tức là bất đẳng thức đúng

khi $n = 1$.

• Giả sử rằng, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có : $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} > \frac{k}{2}$.

Ta cần phải chứng minh

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{k+1}{2}$$

Thật vậy, ta có :

$$S_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow S_{k+1} = S_k + E$$

$$\text{(với : } E = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\text{)}$$

Nhận thấy, E là tổng của 2^k phân số, có tử số bằng 1, còn mẫu số là $2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1$, mỗi một mẫu số này đều nhỏ hơn 2^{k+1} , suy ra

$$\frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k + 1} > \frac{1}{2^{k+1}}, \dots, \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\Rightarrow E > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

Theo giả thiết quy nạp, $S_k > \frac{k}{2}$, suy ra :

$$S_{k+1} = S_k + E > \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

Tức là khẳng định đúng với : $n = k + 1$.

Kết luận : $S_n > \frac{n}{2}$ với mọi $n \geq 1$.

□ Ví dụ 8 : Chứng minh rằng nếu $a > -1$ thì ta có bất đẳng thức : $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

Giải

• Khi $n = 1$ ta có $(1 + a)^1 \geq 1 + a$ khẳng định đúng

• Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$.

Nghĩa là ta có : $(1 + a)^k \geq 1 + ka$

• Ta cần phải chứng minh : $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$

Thật vậy, vì : $a > -1 \Rightarrow a + 1 > 0$, do đó :

$$\begin{aligned}(1 + a)^{k+1} &= (1 + a)^k(1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a) \\ &= 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a\end{aligned}$$

Suy ra : $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$

Kết luận : nếu $a > -1$ thì $(1 + a)^n \geq 1 + na$ với mọi số tự nhiên $n \neq 0$

Bất đẳng thức trên đây được gọi là bất đẳng thức Bernoulli (U. Bernoulli – nhà toán học Thụy Sĩ thế kỷ 17)

□ Ví dụ 9 : *Chứng minh rằng hàm số $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, với $x \in [-1; 1]$ và $n \in \mathbb{N}$ là một đa thức bậc n của x*

Giải

• Với $n = 0$ ta có $T_0(x) = 1$ là đa thức bậc 0.

• Với $n = 1$ ta có $T_1(x) = x$ là đa thức bậc 1.

Giả sử $T_{k-1}(x)$ và $T_k(x)$ là các đa thức bậc $k-1$ và bậc k .

$$\begin{aligned}\text{Xét : } T_{k+1}(x) &= \cos[(k + 1) \arccos x] \\ &= \cos[k \cdot \arccos x + \arccos x] \\ &= \cos(k \cdot \arccos x) \cos(\arccos x) - \\ &\quad - \sin(k \cdot \arccos x) \sin(\arccos x)\end{aligned}$$

$$= T_k(x) \cdot x - \frac{1}{2} [T_{k-1}(x) - T_{k+1}(x)]$$

$\Rightarrow T_k(x) = 2x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x)$ có bậc là $k + 1$, tức là khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Kết luận : $T_n(x)$ là đa thức bậc n của x với mọi n .

□ Ví dụ 10 : *Tìm số miền của một phẳng bị chia bởi n đường thẳng đôi một cắt nhau và không có 3 đường thẳng nào đồng quy.*

Giải

Trước hết, ta sử dụng phép quy nạp không hoàn toàn để dự đoán kết quả. Gọi A_n là số miền của mặt phẳng thỏa điều kiện đầu bài.

$$\begin{aligned}
& - \text{Với : } n = 1, \text{ ta có } A_1 = 2 = 1 + 1 \\
& - \text{Với : } n = 2, \text{ ta có } A_2 = 4 = 1 + 1 + 2 \\
& - \text{Với : } n = 3, \text{ ta có } A_3 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3 \\
& - \text{Với : } n = 4, \text{ ta có } A_4 = 11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 \\
& \text{Ta dự đoán : } A_n = A_{n-1} + n = 1 + 1 + 2 + \dots + n \\
& \Rightarrow A_n = A_{n-1} + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Ta chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp toán học

§2 CHỨNG MINH - BẮC BỎ

2.1 THỰC CHẤT CỦA KHÁI NIỆM CHỨNG MINH

Yêu cầu của bất kì một bài toán chứng minh nào cũng là ở chỗ, phải làm sáng tỏ một kết luận của bài toán đã cho là đúng. Điều này có nghĩa gì?

Trong cuộc sống hàng ngày, khi nói đến vấn đề chứng minh, chúng ta thường thấy có một dạng đơn giản là kiểm tra tính chất đúng đắn của một khẳng định nào đó.

Trong Toán học, vấn đề kiểm tra và vấn đề chứng minh tuy rằng có một sự liên hệ nào đó nhưng là hai vấn đề khác nhau.

Chẳng hạn với bài toán : *Chứng minh rằng trong một tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền*. Nếu ta vẽ một tam giác vuông, đo độ dài trung tuyến thuộc cạnh huyền và so sánh với nửa cạnh huyền. Kết quả nhận được có thể cho thấy, trung tuyến bằng hay không bằng nửa cạnh huyền. Nhưng ngay cả trường hợp, trung tuyến bằng nửa cạnh huyền thì kết quả nhận được cũng chỉ là sự kiểm tra xem trung tuyến AM có bằng nửa cạnh huyền BC hay không? (Hình vẽ có chính xác không) còn việc làm đó, hoàn toàn không thể được xem là chứng minh bài toán đã cho.

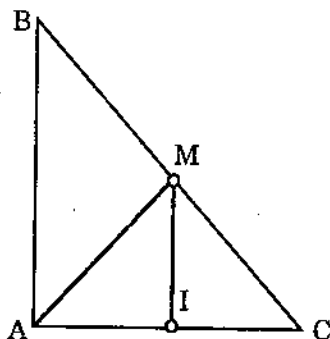
Để chứng minh bài toán trên, ta có thể làm như sau :

- Vẽ MI song song với AB, ta nhận được MI vuông góc với AC, và $IA = IC$.

- Do đó đường thẳng MI là đường trung trực của đoạn thẳng AC.

- Do đó : $MA = MC$. Mặt khác : $MB = MC$

- Vậy : $AM = \frac{BC}{2}$



Phân tích kĩ phép chứng minh trên đây, ta thấy thực chất của phép chứng minh là chỉ ra một dãy các mệnh đề đúng. Các mệnh đề này có thể là một tiên đề, một định nghĩa hoặc một định lý đã được chứng minh, còn kết luận cần chứng minh chính là hệ quả logic của các mệnh đề đúng đã biết.

Nói cách khác, chứng minh là quá trình dùng các quy tắc kết luận logic để từ các tiên đề đúng, khẳng định một mệnh đề nào đó là đúng.

Mỗi một bước của bất kì phép chứng minh nào cũng thường có cấu trúc sau đây :

- Các mệnh đề đúng đã được chứng minh.
- Giả thiết của bài toán
- Hệ quả logic của các mệnh đề đúng khi chúng ta tác động vào giả thiết các quy tắc kết luận logic.

Chẳng hạn, trong chứng minh bài toán trên có một bước là chứng minh cho $MA = MC$. Ta có thể phân tích rõ cấu trúc của bước đó như sau :

- Khẳng định chung : Mọi điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
- Giả thiết : MI vuông góc với đoạn thẳng AC tại trung điểm I của AC (tức là MI là đường trung trực của AC)
- Hệ quả logic : $MA = MC$.

2.2 CHÍNH XÁC HÓA KHÁI NIỆM CHỨNG MINH

Một phép chứng minh là một dãy hạn hữu các mệnh đề $A_1, A_2, \dots, A_n$ trong đó : mỗi một A_k ($k \leq n$) hoặc là một tiên đề, hoặc là

giả thiết, hoặc là một định lý đã biết, hoặc là một mệnh đề được suy ra từ một hoặc một số các mệnh đề A_i ($i < k$) bằng suy luận hợp logic. Mệnh đề A_n được gọi là mệnh đề cần chứng minh (Mệnh đề được chứng minh)

□ **Chú ý :** mỗi một tiên đề là định lý của phép chứng minh chỉ gồm một bước .

2.3 CÁC YÊU CẦU CỦA MỘT CHỨNG MINH

Mỗi một chứng minh gồm ba bộ phận sau đây :

- **Luận đề :** Mệnh đề cần chứng minh
- **Luận cứ :** Các mệnh đề đúng đã biết như là tiên đề , định nghĩa , định lý . . .
- **Luận chứng :** Các quy tắc kết luận logic.

Mỗi một chứng minh phải đạt ba yếu cầu sau đây :

1. **Yêu cầu 1 :** *Luận cứ phải chân thực . Những tiên đề dùng trong chứng minh phải đúng , người ta thường đặt câu hỏi “ dựa vào đâu để chứng minh ? ” khi đó phải kiểm tra tiên đề .*
2. **Yêu cầu 2 :** *Luận chứng phải hợp logic . Các phép suy luận dùng trong chứng minh phải là các phép suy luận hợp logic . Người ta thường đặt câu hỏi : Sử dụng phép suy luận nào để chứng minh ?*
3. **Yêu cầu 3 :** *Không được đánh tráo luận đề . Không được thay thế mệnh đề cần chứng minh bằng những mệnh đề không tương đương với nó . Người ta thường đặt câu hỏi : Chứng minh cái gì ?*

Dưới đây chúng ta xét một ví dụ về việc mắc phải cái sai lầm do vi phạm một trong ba yêu cầu trên đây

2.3.1. Sai lầm do vi phạm yêu cầu 1 :

Đó là sai lầm về mặt luận cứ . trong một phép chứng minh, luận cứ phải chân thực , điều này có nghĩa là chỉ được phép đưa vào các tiên đề mà tính chất đúng đắn của nó đã được xác định.

Sai lầm thuộc loại này là do dựa vào trực giác, dựa vào các mệnh đề chưa được chứng minh là đúng, dựa vào mệnh đề sai do ngộ nhận, dựa vào mệnh đề tương đương với mệnh đề cần chứng minh.

□ Ví dụ 1 : Hai số thực bất kỳ đều bằng nhau.

Thật vậy, với mọi a, b ta đều có $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

Lấy căn bậc hai số học hai vế, ta có :

$a - b = b - a$. Do đó : $2a = 2b$ hay $a = b$

Sai lầm trong chứng minh trên đây là do khi lấy căn số học của số x^2 ta đã thừa nhận $\sqrt{x^2} = x$ tức là đã đưa vào mệnh đề sai : Các bình phương bằng nhau thì các cơ số bằng nhau

□ Ví dụ 2 : Xuất phát từ đẳng thức đúng : $\sin 30^\circ = \sin 30^\circ$

Lấy logarit cơ số 10 hai vế : $\lg \sin 30^\circ = \lg \sin 30^\circ$

Do đó : $2 \lg \sin 30^\circ > \lg \sin 30^\circ$

Hay : $\lg(\sin 30^\circ)^2 > \lg \sin 30^\circ$

Nên : $\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ (!)

Sai lầm trong chứng minh trên đây là dựa vào mệnh đề :

$2a > a$ mệnh đề này sai khi $a < 0$

2.3.2. Sai lầm do vi phạm yêu cầu 2 :

Đó là các sai lầm về mặt luận chứng. Sai lầm thuộc loại này có thể tìm thấy trong các chứng minh sử dụng các suy luận không hợp logic

□ Ví dụ 1 : Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có bất đẳng thức : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Giải

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

Vì bất đẳng thức cuối cùng đúng, nên ta suy ra :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (!)$$

□ Ví dụ 2 : Chứng minh đồng nhất thức :

$$8\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cotg 10^\circ$$

Giải

$$\text{Thay : } \cotg 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}, \text{ ta có :}$$

$$8\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow 8 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\Rightarrow 4 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos 10^\circ \Rightarrow 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

Bởi vì $80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$ nên đẳng thức cuối cùng đúng . Suy ra ta có : $8\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cotg 10^\circ \quad (!)$

Trong cả hai ví dụ trên đây , sai lầm trong chứng minh đều là ở chỗ dựa vào suy luận không hợp logic : $\frac{A \Rightarrow B, B}{A}$ Nhầm lẫn

Modusponens

2.3.3. Sai lầm do vi phạm yêu cầu thứ ba (đánh tráo luận đề)

□ Ví dụ 1 : Giải bất phương trình $\frac{2}{x^2 + x} > 1$

Giải

$$\frac{2}{x^2 + x} > 1 \Leftrightarrow 2 > x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1 \quad (!)$$

□ Ví dụ 2 : Giải phương trình :

$$4 \log_x \sqrt{x} + 2 \log_{4x} x^2 = 3 \log_{2x} x^3 \quad (1)$$

Giải

Đổi về cơ số x ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4 \log_x \sqrt{x}}{\log_x \frac{x}{2}} + \frac{2 \log_x x^2}{\log_x 4x} = \frac{3 \log_x x^3}{\log_x 2x} \quad (2)$$

Trong cả hai ví dụ trên đây , sai lầm trong chứng minh đều là ở chỗ thay thế mệnh đề cần chứng minh bằng một mệnh đề không tương đương với nó .

2.4 VẤN ĐỀ PHÂN TÍCH MỘT CHỨNG MINH

Phân tích một chứng minh có nghĩa là chỉ ra được trong phép chứng minh này , chúng ta đã sử dụng những tiền đề nào , sử dụng các phép suy luận nào .

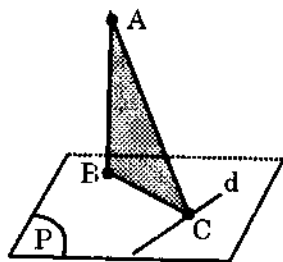
Trong khi tiến hành phân tích một chứng minh chúng ta nhận thấy có thể thực hiện cùng một phép chứng minh theo hai cách : chứng minh theo nội dung và chứng minh theo hình thức

□ Ví dụ 1 : *Chứng minh định lý ba đường vuông góc :*
Cho đường thẳng d thuộc một phẳng P , AC là một đường xiên . Gọi BC là hình chiếu của AC . Chứng minh rằng : nếu d vuông góc với BC thì d vuông góc với AC

Giải

A/ Chứng minh theo nội dung

1. $BC = hc(AC) \Rightarrow AB \perp mp P$
2. $AB \perp mp P, d \subset mp P \Rightarrow AB \perp d$
3. $d \perp AB, d \perp BC \Rightarrow d \perp (ABC)$
4. $d \perp (ABC), AC \subset (ABC) \Rightarrow d \perp AC$



D. N .h.c

g.t

$$1, 2, \frac{A \Rightarrow B, A}{B}$$

g.t

$$3, 4, \frac{A, B}{AB}$$

D. N

$$b, c, \frac{A = B, A}{B}$$

B/ Chứng minh theo hình thức

1. $BC = hc(AC) \Rightarrow AB \perp mp P$
2. $BC = hc(AC)$
3. $AB \perp mp P$
4. $d \subset mp P$
5. $AB \perp mp P$ và $d \subset mp P$
6. $AB \perp mp P$ và $d \subset mp P \Rightarrow d \perp AB$
7. $d \perp AB$

8. $d \perp BC$ g.t
 9. $d \perp AB$ và $d \perp BC$ 7, 8, $\frac{A, B}{AB}$
 10. $d \perp AB$ và $d \perp BC \Rightarrow d \perp (ABC)$ ĐL
 11. $d \perp (ABC)$ 9, 10, $\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$
 12. AC thuộc (ABC) T, Đề
 13. $d \perp (ABC)$ và AC thuộc (ABC) 11, 12, $\frac{A, B}{AB}$
 14. $d \perp (ABC)$ và AC thuộc $(ABC) \Rightarrow d \perp AC$ Đ.N
 15. $d \perp AC$ 13, 14, $\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$

□ Ví dụ 2 : Chứng minh định lý : $(a > 0)$ và $(b > 0)$ và $(a \neq b)$

$$\text{thì : } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Giải

A/ Chứng minh theo nội dung

1. $a \neq b \Rightarrow (a - b)^2 > 0$
2. $(a - b)^2 > 0 \Rightarrow (a + b)^2 > 4ab$
3. $(a + b)^2 > 4ab$ và $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 2\sqrt{ab}$
4. $a + b > 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

B/ Chứng minh theo hình thức

1. $(a > 0), (b > 0), (a \neq b)$ g.t
2. $(a \neq b)$ 1, $\frac{AB}{A}$
3. $(a \neq b) \Rightarrow (a - b)^2 > 0$ Đ.L
4. $(a - b)^2 > 0 \Rightarrow (a + b)^2 > 4ab$ Đ. L
5. $(a \neq b) \Rightarrow (a + b)^2 > 4ab$ 3, 4 Bắc cầu
6. $(a + b)^2 > 4ab$ 2, 5, $\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$

$$7. (a > 0), (b > 0)$$

$$1. \frac{AB}{A}$$

$$8. (a + b)^2 > 4ab, (a > 0), (b > 0)$$

$$6, 7, \frac{A, B}{AB}$$

$$9. (a + b)^2 > 4ab, (a > 0), (b > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$D. L$$

$$10. \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$8, 9, \frac{A \Rightarrow B, A}{B}$$

$$11. (a > 0), (b > 0), (a + b) \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad 1, 10, \frac{A, B}{A \Rightarrow B}$$

2.5 VẤN ĐỀ BÁC BỎ

Quá trình suy diễn để khẳng định một mệnh đề nào đó là sai được gọi là một bác bỏ. Bác bỏ một mệnh đề A có nghĩa là phải chứng minh cho A sai.

Như vậy, mỗi một bác bỏ cũng gồm 3 bộ phận như một phép chứng minh, đó là

- **Luận đề** : Mệnh đề cần bác bỏ.
- **Luận cứ** : Những mệnh đề đúng đã biết sử dụng trong quá trình bác bỏ.
- **Luận chứng** : Những quy tắc kết luận logic sử dụng trong quá trình bác bỏ.

Mỗi một bác bỏ cũng phải bảo đảm đúng 3 yêu cầu như đối với một chứng minh. Xét các ví dụ :

□ Ví dụ 1 : Hãy bác bỏ mệnh đề : “ Có một số hữu tỉ bình phương bằng 3 “.

Giải

Giả sử có một phân số tối giản $\frac{m}{n}$ thỏa mãn $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$ (m và n là các số nguyên, n khác 0).

$$\text{Từ : } \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3 \Rightarrow m^2 = 3n^2.$$

Suy ra : $m^2 : 3$, hay $m : 3$; tức là : $m = 3k$; ($k \in \mathbb{Z}$).

Ta có : $m^2 = 9k^2 \Rightarrow 9k^2 = 3n^2 \Rightarrow n^2 = 3k^2 \Rightarrow n^2 : 3$

Do đó : $n : 3$, $n = 3\ell$; ($\ell \in \mathbb{Z}$).

Như vậy , ta có : $m = 3k$, $n = 3\ell$, mâu thuẫn với giả sử phân số $\frac{m}{n}$ tối giản.

Điều vô lí đó chứng tỏ, mệnh đề đã cho là sai, nói cách khác ta bác bỏ được mệnh đề : “ Có số hữu tỉ bình phương bằng 3 ”.

Cơ sở của phép bác bỏ này là quy tắc kết luận logic Modustollens :

$$\frac{A \Rightarrow B, \bar{B}}{A}$$

□ Ví dụ 2 : Hãy bác bỏ mệnh đề : “*Tồn tại số nguyên dương n sao cho phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ không tối giản*” .

Giải

Thật vậy, bởi vì phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ không tối giản, nên :

$$(21n + 4, 14n + 3) = d > 1.$$

Suy ra : $21n + 4 = da$ và $14n+3 = db$.

$$\Rightarrow 1 = d(3b-2a) \Rightarrow d \text{ là ước của } 1 \text{ (vô lí)}$$

Điều vô lí chứng tỏ : có số tự nhiên n để phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$

không tối giản là sai ; nói cách khác chúng ta bác bỏ được mệnh đề : “*Tồn tại số nguyên dương n sao cho phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ không tối giản*” .

§3 CHỨNG MINH TRỰC TIẾP

Nếu chúng ta xuất phát từ một mệnh đề đúng cho trước, bằng các phép suy luận hợp logic để chứng minh tính chất đúng đắn

của kết luận thì ta nói rằng đã chứng minh trực tiếp mệnh đề đã cho.

Trong chứng minh trực tiếp, các mệnh đề đúng có trước tác động vào giả thiết trong từng bước của chứng minh để cuối cùng rút ra kết luận cần chứng minh. Xét các ví dụ :

□ Ví dụ 1 : *Chứng minh rằng nếu a và b là hai số thực thoả mãn : $a + b \geq 2$ thì $a^4 + b^4 \geq 2$.*

Giải

Từ giả thiết : $2 \leq a + b \Rightarrow 4 \leq (a + b)^2$

Mà : $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Rightarrow 4 \leq 2(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow 2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow 4 \leq (a^2 + b^2)^2 \leq 2(a^4 + b^4) \Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2$.

□ Ví dụ 2 : *Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau :*

$$a) \quad \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$$

$$b) \quad \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

$$c) \quad \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq a + b + c.$$

Giải

$$a) \text{ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy : } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b$$

b) Áp dụng Câu a ; ta có :

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$$

$$\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức ta có :

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

$$c) \text{ Ta có : } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b^3 + c^3}{2bc} \geq \frac{b + c}{2}$$

$$\frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{c + a}{2}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức, ta có :

$$\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c.$$

□ Ví dụ 3: Cho $a > 0$; $b > 0$ thỏa mãn $a + b \geq 2$. Chứng minh bất đẳng thức : $a^3 + b^3 \geq a^2 + b^2$.

Giải

$$\text{Vì : } a > 0 ; b > 0 ; \text{ nên : } a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0$$

$$\text{Theo giả thiết : } a + b \geq 2 \Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq 2(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + b^2$$

$$\text{Vậy : } a^3 + b^3 \geq a^2 + b^2$$

§4 CHỨNG MINH GIÁN TIẾP

4.1 CHỨNG MINH LOẠI DẪN

□ Ví dụ 1 : Cho $a > 0$ và $a < 1$. Giải phương trình mũ :

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Biến đổi phương trình : } \Leftrightarrow \stackrel{(1)}{\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x} + 1 = \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1$$

Nhận xét với : $x = 2$; ta có đẳng thức đúng :

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 = 1$$

Vậy : $x = 2$ là một nghiệm .

• Nếu $x < 2$

Bởi vì : $a > 0$; $a < 1$; nên : $\frac{1+a^2}{1+a^2}$ và $\frac{2a}{1+a^2}$ đều dương và nhỏ hơn 1.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x &> \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 ; \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x > \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x &> \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Như vậy mọi x nhỏ hơn 2 đều không là nghiệm.

Nếu : $x > 2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x &< \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2 ; \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x < \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x &< 1. \end{aligned}$$

Như vậy mọi $x > 2$ đều không là nghiệm

Kết luận : $x = 2$ là nghiệm duy nhất

□ Ví dụ 2 : Giải phương trình : $8 + 2^{3-x} = x + x.2^x$ (1)

Giải

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} \quad &\Leftrightarrow 8 + \frac{8}{2^x} = x + x.2^x \\ &\Leftrightarrow (2^x + 1)(8 - x.2^x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 8 - x.2^x = 0 \quad ; \text{(vì : } 2^x + 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x.2^x = 8 \end{aligned}$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm , do đó :

$$\text{Phương trình : } x.2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = \frac{8}{x} \quad (x \neq 0)$$

• Nếu $x = 2$; ta có đẳng thức đúng : $2^2 = \frac{8}{2}$

• Nếu $x > 2 \Rightarrow \frac{8}{x} < 4 = 2^2 < 2^x \Rightarrow 2^x > \frac{8}{x}$

Do đó mọi $x > 2$ không phải là nghiệm.

• Nếu $0 < x < 2 \Rightarrow \frac{8}{x} > 4 = 2^2 > 2^x$

Vậy : $2^x < \frac{8}{x}$; tức là $\forall x$ ta có $\frac{8}{x} > 2^x$

Do đó mọi $x : 0 < x < 2$ đều không là nghiệm.

• Nếu $x < 0 \Rightarrow \frac{8}{x} < 0 < 2^x \Rightarrow 2^x > \frac{8}{x}$

Vậy mọi $x < 0$ đều không phải là nghiệm.

Kết luận : phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

□ Ví dụ 3 : **Giải phương trình :** $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ (1)

Giải

Nhận thấy $x = 3$ là 1 nghiệm vì $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Là đẳng thức đúng.

• Nếu $x < 3$: phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x = 1$

Ta có : $\left(\frac{3}{6}\right)^x > \left(\frac{3}{6}\right)^3$; $\left(\frac{4}{6}\right)^x > \left(\frac{4}{6}\right)^3$; $\left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1.$

Điều này chứng tỏ mọi $x < 3$ đều không phải là nghiệm

• Nếu $x > 3$ thì : $\left(\frac{3}{6}\right)^x < \left(\frac{3}{6}\right)^3$, $\left(\frac{4}{6}\right)^x < \left(\frac{4}{6}\right)^3$, $\left(\frac{5}{6}\right)^x < \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x < \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1$

Điều này chứng tỏ mọi $x > 3$ đều không phải là nghiệm

Cơ sở logic : giả sử T là tập hợp các mệnh đề đúng đã biết.

Gọi $P \Rightarrow Q_1$ là mệnh đề cần chứng minh. Ta

cần chứng minh $T \Rightarrow (P \Rightarrow Q_1)$ là đúng.

Biến đổi : $T \Rightarrow (P \Rightarrow Q_1) = T.P \Rightarrow Q_1.$

Gọi $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ là tất cả các trường hợp phân biệt với Q_1 sao cho tuyển của n mệnh đề $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ thuộc T , tức là $\bigvee_{i=1}^n Q_i \in T$.

Sau đó ta chứng minh cho mỗi một khả năng còn lại $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ đều dẫn đến mâu thuẫn. Do đó ta có các khẳng định $\overline{Q_2}, \overline{Q_3}, \dots, \overline{Q_n}$ đúng.

Suy ra : $\overline{Q_2} \wedge \overline{Q_3} \wedge \dots \wedge \overline{Q_n} = \bigwedge_{i=2}^n \overline{Q_i} = \overline{\bigvee_{i=2}^n Q_i}$ đúng.

Như vậy ta có $Q_1 \vee (\bigvee_{i=2}^n Q_i)$ và $\bigvee_{i=2}^n Q_i$ đúng.

Từ đó suy ra Q_1 đúng. (theo quy tắc : $\frac{A \vee B, \overline{B}}{A}$)

□ Ví dụ 4 : Chứng minh định lý : “ Nếu một mặt phẳng a bất kì đã cắt đường thẳng a mà cũng cắt đường thẳng b thì các đường thẳng a và b song song với nhau ”.

Giải

Kí hiệu : mặt phẳng α cắt đường thẳng a là $\alpha \times a$.

Gọi : Q_1 là mệnh đề : $a // b$

Q_2 là mệnh đề $a \times b$

Q_3 là mệnh đề : $a \equiv b$ (a trùng b).

Định lí đã cho có cấu trúc : $\Gamma \Rightarrow (P \Rightarrow Q_1)$:

$\Gamma \Rightarrow \forall \alpha (\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b) \Rightarrow a // b$

Hay là : $\Gamma, P \Rightarrow Q_1 : \Gamma, \forall \alpha (\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b) \Rightarrow a // b$.

Ta có : $Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$ thuộc Γ .

Giả sử có Q_2 : a cắt b . Khi đó tồn tại một mặt phẳng α qua b và α cắt a : $\exists \alpha (\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b})$

Mà : $\exists \alpha (\alpha \times a \wedge \overline{\alpha \times b}) = \overline{\forall \alpha (\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b)}$

Như vậy ta có $Q_2 \Rightarrow \overline{P} : a \times b \Rightarrow \overline{\forall \alpha (\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b)}$

Ở đây ta có : $Q_2 \Rightarrow \overline{P} \wedge P$.

Vậy phải có $\overline{Q_2} : a \times b$ tức là a không cắt b .

Giả sử có Q_3 : a trùng b . Lập luận tương tự ta có :

$$Q_3 \Rightarrow \bar{P} : a \equiv b \Rightarrow \overline{\forall \alpha (\alpha \times a \Rightarrow \alpha \times b)}$$

(Gọi α là mặt phẳng qua b và một điểm của đường thẳng a).

- Từ : $Q_3 \Rightarrow \bar{P} \wedge P$. Vậy phải có $\overline{Q_3} : a$ không trùng b .

- Từ : $\overline{Q_2}$ và $\overline{Q_3}$; ta có : $\overline{Q_2} \wedge \overline{Q_3} = \overline{Q_2 \vee Q_3}$

- Từ : $Q_1 \vee (Q_2 \vee Q_3)$ và $\overline{Q_2 \vee Q_3}$; ta có $Q_1 : a$ song song với b .

4.2 CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

4.2.1. Khái niệm : một mệnh đề toán học là đúng, hoặc là sai mà không thể đồng thời vừa đúng lại vừa sai.

Muốn chứng minh mệnh đề đúng, ta chứng minh cho nó không sai. Nói cách khác, nếu giả sử mệnh đề mà sai thì sẽ dẫn đến một điều vô lí. Phương pháp chứng minh như vậy được gọi là chứng minh bằng phản chứng.

4.2.2. Các bước của phép chứng minh bằng phản chứng

Một phép chứng minh bằng phản chứng gồm các bước :

• **Bước 1 :**

Bước giả định : Giả sử mệnh đề cần chứng minh là sai.

• **Bước 2 :**

Bước truy nguyên : Xuất phát từ giả sử mệnh đề sai ta dẫn đến một điều vô lý (hoặc là trái với giả thiết, hoặc là mâu thuẫn với một định lý, tiên đề, một kết luận đã chứng minh là đúng, hoặc là dẫn đến hai mâu thuẫn khác nhau)

• **Bước 3 :**

Bước kết luận : Điều vô lý chứng tỏ rằng mệnh đề đã cho không sai, tức là mệnh đề đã cho là đúng

□ **Chú ý :** Phương pháp chứng minh bằng phản chứng thường được sử dụng để chứng minh các định lý đảo, định lý về sự tồn tại và tính duy nhất.

4.3.3. Cơ sở logic

Giả sử I là tập hợp các mệnh đề đúng đã biết như tiên đề, định nghĩa, các định lý đã được chứng minh, các khẳng định đúng được suy ra từ tiên đề, định nghĩa.

Gọi T là mệnh đề cần chứng minh. Khi đó $\bar{T}$ là giả thiết của chứng minh phản chứng.

Trong bước truy nguyên, ta nhận được cấu trúc logic

$T, \bar{T} \Rightarrow \bar{A}$ trong đó A thuộc Γ .

Như vậy ta có : $\Gamma, \bar{T} \Rightarrow A$ và $\Gamma, \bar{T} \Rightarrow \bar{A}$

Do đó : $\Gamma \Rightarrow \bar{\bar{T}}$; tức là : $\Gamma \Rightarrow T$

Và do đó mệnh đề T được chứng minh.

Trong bước truy nguyên, đôi khi chúng ta thường gặp cấu trúc sau : $\Gamma, \bar{T} \Rightarrow A, \bar{A}$

Mệnh đề hội $A, \bar{A}$ là hằng sai, do đó mệnh đề $\bar{\bar{A.A}}$ là hằng đúng.

Do đó ta có đồng thời : $\Gamma, \bar{T} \Rightarrow A, \bar{A}$ và $\Gamma, \bar{T} \Rightarrow \bar{\bar{A.A}}$

Do đó : $\Gamma \Rightarrow \bar{\bar{T}}$ tức là T được chứng minh.

Nếu định lí T có dạng một mệnh đề kéo theo :

$T = A \Rightarrow B$ thì $\bar{T} = \bar{A \Rightarrow B} = A, \bar{B}$

4.2.4. Các ví dụ

□ Ví dụ 1 : Cho a, b, c là 3 đường thẳng phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng. Giả sử ta cần chứng minh mệnh đề có dạng : $P \Rightarrow Q : (a // c) \wedge (b // c) \Rightarrow (a // b)$ (1)

Ta có : $P \wedge \bar{Q} : (a // c) \wedge (b // c) \wedge (\bar{a // b})$ (2)

Suy ra : $P : (a // c) \wedge (b // c)$ (3)

$\bar{Q} : (\bar{a // b})$ (4)

Theo định nghĩa hai đường thẳng song song ta có :

$\bar{Q} \Rightarrow R : \bar{a // b} \Rightarrow \exists M : (M \in a \wedge M \in b)$ (5)

Từ (4) & (5) suy ra : $R : \exists M : (M \in a \wedge M \in b)$ (6)

Từ (3) & (6) suy ra :

$P \wedge R : (a // c) \wedge (b // c) \wedge \exists M : (M \in a \wedge M \in b)$ (7)

Từ tiên đề Euclide ta có :

$P \wedge \bar{Q} : (a // c) \wedge (b // c) \wedge \exists M (M \in a \wedge M \in b)$ (8)

Từ (7) & (8) suy ra : $(P \wedge Q) \wedge (\bar{P \wedge Q})$

Vậy ta chứng minh được mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

□ Chú ý : Trong bước truy nguyên, có thể sử dụng một trong 5 hình thức có cấu trúc logic sau đây:

1. $A. \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
2. $A. \bar{B} \Rightarrow C. \bar{C}$ (C là một mệnh đề nào đó)
3. $A. \bar{B} \Rightarrow S$ (S là mệnh đề hằng sai)
4. $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
5. $A. \bar{B} \Rightarrow B$

□ Ví dụ 2 : Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh CD lấy điểm M . Tia phân giác của góc BAM cắt cạnh BC tại E . Tia phân giác của góc DAM cắt cạnh CD tại F . Chứng minh AM vuông góc với EF tại K

Giải

Giả sử ngược lại AM không vuông góc với EF tại K .

Vẽ EP vuông góc với AM tại P

Suy ra : $\triangle ABE = \triangle APE \Rightarrow AP = AB \Rightarrow AP = AD$

Suy ra : $\triangle ADF = \triangle APF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{APF} = \widehat{ADF} \Rightarrow \widehat{APF} = 90^\circ$.

Mà : $\widehat{APE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EPF} = 180^\circ \Rightarrow E, P, F$ thẳng hàng $\Rightarrow P = K$
 $\Rightarrow AM \perp EF$ tại K . Vô lí vì trái với giả sử AM không vuông góc với EF .

Điều vô lí đó chứng tỏ AM vuông góc với EF tại K .

□ Ví dụ 3 : Chứng minh rằng không tồn tại các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời các bất đẳng thức :

$$|a| < |b - c| \quad (1)$$

$$|b| < |c - a| \quad (2)$$

$$|c| < |a - b| \quad (3)$$

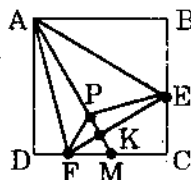
Giải

Giả sử ngược lại, tồn tại các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời (1), (2), (3)

$$- \text{Từ (1)} \Rightarrow a^2 < (b - c)^2 \Rightarrow (a + b - c)(a - b + c) < 0 \quad (4)$$

$$- \text{Từ (2)} \Rightarrow b^2 < (c - a)^2 \Rightarrow (b + c - a)(b - c + a) < 0 \quad (5)$$

$$- \text{Từ (3)} \Rightarrow c^2 < (a - b)^2 \Rightarrow (c + a - b)(c - a + b) < 0 \quad (6)$$



- Từ (4), (5), (6) $\Rightarrow (a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2 < 0$ (vô lí)

Điều vô lí đó chứng tỏ không tồn tại các số a, b, c thỏa mãn đồng thời các bất đẳng thức (1), (2), (3).

□ Ví dụ 4 : Cho ba số dương khác không là a, b, c thoả

$$\text{mãn đồng thời : } \begin{cases} abc < 0 & (1) \\ ab + bc + ca > 0 & (2) \text{ Chứng} \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} & (3) \end{cases}$$

minh rằng cả ba số a, b, c đều âm

Giải

Từ (1) suy ra một trong ba số a, b, c phải có một số âm.

Giả sử $a < 0 \Rightarrow bc > 0 \Rightarrow b$ và c cùng dương hoặc cùng âm

Nếu b và c cùng dương thì từ (3) ta có :

$$\frac{a+b+c}{abc} > 0 \Rightarrow a+b+c < 0 \Rightarrow a < -(b+c)$$

$$\Rightarrow a(b+c) < -(b+c)^2 \Rightarrow ab+ac < -b^2-2bc-c^2$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca < -b^2-bc-c^2 < 0.$$

Vô lý vì trái với giả thiết : $ab+bc+ca > 0$.

Điều vô lý chứng tỏ b và c cùng âm. Vậy a, b, c cùng âm.

□ Ví dụ 5 : **Chứng minh rằng a, b, c, p, q, r là các số thực thoả mãn hệ thức : $ar - 2bq + cp = 0$ và : $ac - b^2 > 0$ thì : $pr - q^2 \leq 0$**

Giải

$$\text{Giả sử ngược lại : } pr - q^2 > 0 \Rightarrow pr > q^2$$

$$\text{Từ : } ac - b^2 > 0 \Rightarrow ac > b^2 \Rightarrow acpr > b^2 q^2$$

$$\text{Từ : } ar - 2bq + cp = 0 \Rightarrow ar + cp = 2bq$$

$$\Rightarrow (ar + cp)^2 = 4b^2 q^2 < 4acpr$$

$$\Rightarrow (ar - cp)^2 < 0 \text{ (vô lý)}$$

Điều vô lý chứng tỏ rằng : $pr - q^2 \leq 0$

□ Ví dụ 6 : **Chứng minh rằng : nếu các số $2^m - 1$ và $2^n - 1$ nguyên tố cùng nhau (m, n là số nguyên dương) thì m và n cùng là các số nguyên tố cùng nhau .**

Giải

Giả sử ngược lại $(m, n) \neq 1 \Rightarrow (m, n) = d > 1$

$\Rightarrow m = dq$ và $n = dp \Rightarrow 2^m - 1 = 2^{dq} - 1 = (2^d)^q - 1$

$\Rightarrow 2^d - 1 \mid 2^m - 1$

Tương tự ta có : $2^d - 1 \mid 2^n - 1 \Rightarrow (2^m - 1 ; 2^n - 1) \neq 1$. Vô lý vì trái với giả thiết : $(2^m - 1 ; 2^n - 1) = 1$

Điều vô lý đó chứng tỏ : $(m, n) = 1$.

□ Về việc sử dụng phương pháp chứng minh gián tiếp , ta cần lưu ý một số điều sau đây :

1. Nếu dùng phương pháp chứng minh lại dẫn thì cần phải xem xét thật đầy đủ những khả năng có thể xảy ra của cùng một vấn đề .

Chẳng hạn , cho một số thức a thì có ba khả năng có thể xảy ra là a dương , a âm hoặc $a = 0$

Trong quan hệ về mặt độ dài giữa hai đoạn thẳng AB và CD có ba khả năng có thể xảy ra : $AB < CD$; $AB = CD$ hoặc $AB > CD$

2. Cùng một mệnh đề toán học có thể chứng minh trực tiếp hoặc chứng minh gián tiếp .

Cần biết lựa chọn và sử dụng các ví dụ một cách hợp lý để giúp cho học sinh thấy được tính ưu việt của mỗi một loại chứng minh nhằm góp phần phát triển tính linh hoạt của tư duy .

3. Để sử dụng tốt phương pháp chứng minh bằng phản chứng , một điều hết sức quan trọng là phải dạy cho học sinh biết cách phủ định một mệnh đề cho trước , nhất là đối với các mệnh đề có chứa các lượng từ : với mọi , tồn tại .

Cuối cùng , trong phần này chúng ta xét thêm hai vấn đề , đó là vấn đề ngộ biện và vấn đề ngụy biện

• Trong quá trình chứng minh hay bác bỏ , các sai lầm mắc phải do sự thiếu hiểu biết được gọi là **ngộ biện**

• Trong quá trình chứng minh hay bác bỏ , các sai lầm mắc phải do có sự cố ý của tác giả nhằm phục vụ cho một mục đích nào đó được gọi là **ngụy biện** (*SOPHISM* hoặc *FALLACY*)

Chỉ rõ một **ngụy biện** hay một **ngụy biện** , có nghĩa là phải chỉ rõ những sai lầm đã mắc phải do vô tình hoặc cố ý của người làm toán , nói cách khác phải bác bỏ cái gọi là “*Phép chứng minh*” đó

Khi nói về vai trò của các ngụy biện , V.I.LENIN đã viết :
“*Cần phải có những tuyển tập về các ngụy biện Toán học , chúng rất có ích đối với các em học sinh*”.

Trong dạy môn Toán ở trường Phổ thông cần thiết phải đưa vào các loại bài tập về các ngụy biện Toán học . Đối với những loại bài tập này , bản thân học sinh muốn tìm ra chân lý thì cần phải suy nghĩ , phân tích cẩn thận các lập luận đã đưa ra , biết vận dụng một cách linh hoạt và sâu sắc những kiến thức đã học để tìm ra được điểm sai lầm trong toàn bộ lập luận , từ đó mà bác bỏ được các kết luận vô lý .

Sự cố gắng giải quyết những bài tập thuộc loại này đôi khi còn nhiều hơn với các dạng bài tập thông thường khác . Chính thông qua những loại bài tập như vậy , mà óc phê phán , khả năng suy luận Toán học cũng như các phương pháp tư duy không ngừng được mở mang phát triển , kiến thức toán học cũng được đào sâu , củng cố nâng cao .

§5 MỆNH ĐỀ THUẬN ĐẢO – ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ

5.1 MỆNH ĐỀ THUẬN ĐẢO

Các định lý Toán học dù được phát biểu dưới hình thức nào , thì về cơ bản đều có thể tách ra thành hai phần A và B , đồng thời có cấu trúc logic là mệnh đề kéo theo : $A \Rightarrow B$

Mệnh đề A được gọi là giả thiết . Mệnh đề B được gọi là kết luận .

Nếu gọi mệnh đề $A \Rightarrow B$ (1) là mệnh đề thuận thì :

- Mệnh đề : $B \Rightarrow A$ (2) gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề (1)
- Mệnh đề : $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ (3) được gọi là mệnh đề phản của (1)
- Mệnh đề : $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (4) được gọi là mệnh đề phản đảo của (1)

Ta chứng minh được :

$$A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$$

$$B \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$$

5.2 ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ

• **Nếu mệnh đề (1) đúng** thì ta nói rằng A là điều kiện đủ để có B (Để có B thì có A là đủ , có B khi có A . . .)

• **Nếu mệnh đề (3) đúng** thì ta nói rằng A là điều kiện cần để có B (không có A thì không có B , có B chỉ khi có A . . .)

$$\text{Bởi vì : } A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$$

$$B \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$$

Cho nên :

• **Nếu** A là điều kiện đủ để có B thì B chính là điều kiện cần để có A .

• **Nếu** A là điều kiện cần để có B thì B chính là điều kiện đủ để có A .

• **Nếu** các mệnh đề (1) và (2) cùng đúng thì A được gọi là điều kiện cần và đủ để có B (có B khi và chỉ khi có A , có B nếu và chỉ nếu có A) .

• **Nếu** mệnh đề (1) đúng nhưng mệnh đề (2) sai thì A được gọi là điều kiện đủ nhưng không cần để có B .

• **Nếu** mệnh đề (1) sai nhưng mệnh đề (2) đúng thì A được gọi là điều kiện cần nhưng không đủ để có B .

Các hệ thức tương đương trên đây cho thấy , muốn chứng minh A là điều kiện cần và đủ để có B ta có thể chứng minh một trong bốn cặp mệnh đề sau : (1 ; 2) , (1 ; 3) , (4 ; 2) hoặc (4 ; 3) là đúng

□ **Chú ý :** Mỗi một định nghĩa khái niệm bằng cách thông qua khái niệm loại và thuộc tính đặc trưng của khái niệm chúng là một điều kiện cần và đủ .

5.3 ĐỊNH LÝ CÔBE

Như đã biết , nếu mệnh đề thuận $A \Rightarrow B$ đúng thì mệnh đề đảo $B \Rightarrow A$ có thể đúng mà cũng có thể sai .

Một vấn đề đặt ra là trong điều kiện nào, nếu mệnh đề thuận đúng mà không phải đi xem xét tính đúng, sai có thể kết luận ngay được mệnh đề đảo cũng đúng. Định lý sau đây cho ta cần giải đáp của vấn đề đã đặt ra.

5.3.1. Định lý GôBe : *Giả sử chúng ta có một dãy n các mệnh đề đúng : $A_i \Rightarrow B_i$ với $i = 1 ; 2 ; \dots ; n$ thoả mãn các điều kiện sau :*

- 1 Các giả thiết A_i ($i = 1 ; 2 ; \dots ; n$) là những tình hình có thể xảy ra của cùng một vấn đề không tương thích, nghĩa là A_i và A_j ($i \neq j$) không thể đồng thời cùng đúng và bao giờ cũng có một cái đúng*
- 2 Các kết luận B_i ($i = 1 ; 2 ; \dots ; n$) cũng là tất cả những tình hình có thể xảy ra của cùng một vấn đề không tương thích.*

Khi đó n mệnh đề đảo $B_i \Rightarrow A_i$ ($i = 1 ; 2 ; \dots ; n$) cũng đúng.

□ Chứng minh

Giả sử ngược lại $B_1 \Rightarrow A_1$ sai. theo định nghĩa của phép kéo theo ta có B_1 đúng và A_1 sai.

Theo điều kiện 1, phải tồn tại A_i đúng ($i \neq 1$)

Mà $A_i \Rightarrow B_i$ đúng nên B_i đúng.

Như vậy ta có B_1 và B_i cũng đúng với $i \neq 1$. Vô lý vì trái với giả thiết 2

Điều vô lý chứng tỏ mệnh đề $B_1 \Rightarrow A_1$ đúng

Chứng minh tương tự ta có $B_2 \Rightarrow A_2$ đúng, ..., $B_n \Rightarrow A_n$ đúng

5.2.2. Các ví dụ

□ Ví dụ 1 : Ta có định lý hàm cosin : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Như vậy :

- Nếu góc A nhọn thì : $a^2 < b^2 + c^2$
- Nếu góc A vuông thì : $a^2 = b^2 + c^2$
- Nếu góc A tù thì : $a^2 > b^2 + c^2$

Ta có ba hình tính : $\widehat{A}$ nhọn, $\widehat{A}$ vuông, $\widehat{A}$ tù đôi một không tương thích ; ba kết luận cũng đôi một không tương thích. Theo định lý GôBe, ta có các mệnh đề đảo sau đây đúng :

- Nếu : $a^2 < b^2 + c^2$ thì góc A nhọn

• Nếu : $a^2 = b^2 + c^2$ thì góc A vuông

• Nếu : $a^2 > b^2 + c^2$ thì góc A tù

□ Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC . Ta có các mệnh đề đúng sau đây :

• Nếu $b = c$ thì $\widehat{B} = \widehat{C}$

• Nếu $b > c$ thì $\widehat{B} > \widehat{C}$

• Nếu $b < c$ thì $\widehat{B} < \widehat{C}$

Các điều kiện của định lý GôBe được thoả mãn , do đó chúng ta có ba mệnh đề đảo sau đây đúng

• Nếu : $\widehat{B} = \widehat{C}$ thì $b = c$

• Nếu : $\widehat{B} < \widehat{C}$ thì $b > c$

• Nếu : $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì $b < c$.

□ Ví dụ 3 : Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Ta chứng minh được ba mệnh đề sau đây đúng

• Nếu : $\widehat{A} = 90^\circ$ thì $AM = \frac{BC}{2}$

• Nếu : $\widehat{A} > 90^\circ$ thì $AM < \frac{BC}{2}$

• Nếu : $\widehat{A} < 90^\circ$ thì $AM > \frac{BC}{2}$

Các điều kiện của định lý GôBe được thoả mãn , do đó chúng ta có ba mệnh đề đảo sau đây đúng :

• Nếu : $AM = \frac{BC}{2}$ thì $\widehat{A} = 90^\circ$

• Nếu : $AM < \frac{BC}{2}$ thì $\widehat{A} > 90^\circ$

• Nếu : $AM > \frac{BC}{2}$ thì $\widehat{A} < 90^\circ$

□ Ví dụ 4 : Nếu từ một điểm A ở ngoài đường thẳng d . Ta vẽ đường vuông góc AH và hai đường xiên AB , AC . Gọi : $a = AB$, $b = AC$, $a' = HB$, $b' = HC$. Ta có ba mệnh đề sau đây đúng :

• Nếu : $a = b$ thì $a' = b'$

• Nếu : $a > b$ thì $a' > b'$

- Nếu : $a < b$ thì $a' < b'$

Các điều kiện của định lý GöBe được thoả mãn , nên ta có ba mệnh đề đảo sau đây cũng đúng .

- Nếu : $a' = b'$ thì $a = b$
- Nếu : $a' > b'$ thì $a > b$
- Nếu : $a' < b'$ thì $a < b$

5.4 CÁC MỆNH ĐỀ CÓ ĐIỀU KIỆN ĐỀ PHỨC TẠP

5.4.1. Mệnh đề $A_1A_2 \Rightarrow B$

Rất nhiều định lý có cấu trúc logic $A_1A_2 \Rightarrow B$. Ví dụ :

- ☞ Nếu đường thẳng a song song với những đường thẳng b và đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng P thì đường thẳng b cũng vuông góc với mặt phẳng P
- ☞ Hai đoạn thẳng chắn giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau .
- ☞ Nếu một số chia hết cho 2 và chia hết cho 3 thì số đó chia hết cho 6 .

Mệnh đề $A_1A_2 \Rightarrow B$ có hai hình thức tương đương là :

$$A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B) \text{ và } A_2 \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B)$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy : } A_1A_2 \Rightarrow B &= \overline{A_1A_2} \vee B = (\overline{A_1} \vee \overline{A_2}) \vee B \\ &= \overline{A_1} \vee (\overline{A_2} \vee B) = A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B) \\ &= \overline{A_2} \vee (\overline{A_1} \vee B) = A_2 \Rightarrow (A_1 \Rightarrow B) \end{aligned}$$

Mệnh đề thuận $A_1A_2 \Rightarrow B$ có các hình thức đảo sau :

1. Đảo toàn bộ : $B \Rightarrow A_1A_2$
2. Đảo bộ phận : $BA_1 \Rightarrow A_2$
3. Đảo bộ phận : $BA_2 \Rightarrow A_1$

☐ Chú ý : Nếu một định lý có cấu trúc logic $A_1A_2 \Rightarrow B$ mà mệnh đề đảo toàn bộ $B \Rightarrow A_1A_2$ cũng đúng thì ta có định lý đảo của định lý đã cho . Các hình thức đảo bộ phận khi đó cũng đúng nhưng không được gọi là định lý đảo của định lý thuận $A_1A_2 \Rightarrow B$

Mệnh đề thuận $A_1 A_2 \Rightarrow B$ có ba hình thức phản đảo tương đương logic với nhau :

$$1. \bar{B} \Rightarrow (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2)$$

$$2. A_1 . \bar{B} \Rightarrow \bar{A}_2$$

$$3. A_2 . \bar{B} \Rightarrow \bar{A}_1$$

Người ta thường sử dụng một trong ba hình thức phản đảo này để chứng minh bằng phản chứng mệnh đề thuận có cấu trúc logic $A_1 A_2 \Rightarrow B$

Xét ví dụ : Chứng minh rằng nếu đường thẳng a song song với một phẳng P thì mọi đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng P đều vuông góc với đường thẳng a

Giải

Mệnh đề cần chứng minh trên đây có cấu trúc logic : $A_1 A_2 \Rightarrow B$

Giả sử ngược lại b không vuông góc với a

Bởi vì a song song với mặt phẳng P suy ra tồn tại đường thẳng $a' \subset mp(P)$ sao cho a song song với a' .

Bởi vì b không vuông góc với a' . Vô lý vì trái với giả thiết b vuông góc với mặt phẳng P .

Điều vô lý đó chứng tỏ b vuông góc với a .

□ **Chú ý :** Trong chứng minh trên ta sử dụng hình thức phản đảo : $\bar{B} . A_1 \Rightarrow \bar{A}_2$.

5.4.2. Mệnh đề $A \Rightarrow B_1 B_2$

Trước hết ta nhận thấy :

$$A \Rightarrow B_1 B_2 = \bar{A} \vee B_1 B_2 = (\bar{A} \vee B_1)(\bar{A} \vee B_2) = (A \Rightarrow B_1)(A \Rightarrow B_2)$$

Như vậy, nếu một định lý có cấu trúc logic $A \Rightarrow B_1 B_2$ thì chúng ta có thể phát biểu tách thành hai định lý có cấu trúc logic $A \Rightarrow B_1$ và $A \Rightarrow B_2$. Chẳng hạn, đối với định lý : “Đường kính vuông góc với một dây cung thì nó chia dây cung và cung bị chắn thành hai cung bằng nhau”, có thể phát biểu thành hai định lý.

□ **DL₁ :** Đường kính vuông góc với một dây cung thì chia đôi dây cung.

□ **DL₂** : Đường kính vuông góc với một dây cung thì chia cung bị chắn thành hai cung bằng nhau .

Mệnh đề thuận $A \Rightarrow B_1 B_2$ có ba hình thức đảo đôi một không tương đương logic, đó là :

$$1. B_1 B_2 \Rightarrow A$$

$$2. B_1 \Rightarrow A$$

$$3. B_2 \Rightarrow A$$

Mệnh đề thuận $A \Rightarrow B_1 B_2$ có ba hình thức phản đảo

$$1. \overline{B_2} \vee \overline{B_1} \Rightarrow \overline{A}$$

$$2. \overline{B_1} \Rightarrow \overline{A}$$

$$3. \overline{B_2} \Rightarrow \overline{A}$$

5.4.3. Mệnh đề $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$

$$\begin{aligned} \text{Nhận thấy : } A_1 \vee A_2 \Rightarrow B &= \overline{A_1 \vee A_2} \vee B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \vee B = \\ &= (\overline{A_1} \vee B) (\overline{A_2} \vee B) = (A_1 \Rightarrow B)(A_2 \Rightarrow B) \end{aligned}$$

Như vậy nếu một định lý có cấu trúc logic $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$ thì có thể phát biểu tách thành hai định lý có cấu trúc logic : $A_1 \Rightarrow B$ và $A_2 \Rightarrow B$

Chẳng hạn đối với định lý : “ Trong một tam giác phân giác trong hoặc phân giác ngoài chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng đó ” . Chúng ta có thể tách thành hai định lý :

□ **DL₁** : Trong một tam giác , phân giác trong chia hai cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng đó

□ **DL₂** : Trong một tam giác , phân giác ngoài chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng đó .

Mệnh đề thuận $A_1 \vee A_2 \Rightarrow B$ có ba hình thức đảo sau đây là không tương đương và không độc lập với nhau :

$$1. B \Rightarrow A_1 \vee A_2$$

$$2. B \Rightarrow A_1$$

$$3. B \Rightarrow A_2$$

5.5 VẤN ĐỀ DẠY HỌC TOÁN QUỸ TÍCH

Ở trường Phổ thông, khái niệm quỹ tích được định nghĩa như sau : “ Quỹ tích là một hình gồm toàn thể những điểm cùng có chung một tính chất nào đó và chỉ những điểm đó mà thôi ” (Hình học 8 – NXBGD – 1976)

Giả sử hình F là quỹ tích của những điểm có chung một tính chất (a) . Gọi M là tập hợp những điểm có tính chất (a) . Từ định nghĩa quỹ tích trên đây, chúng ta phải chứng minh $F = M$.

Như vậy, để chứng minh hình F là quỹ tích của những điểm có tính chất (a) thì về mặt lý thuyết tập hợp cần phải chứng minh hai phần :

1. Phần thuận ($M \subset F$) : Những điểm có tính chất (a) thì nằm trên hình F .

2. Phần đảo ($F \subset M$) : Những điểm nằm trên hình F thì có tính chất (a)

- Phần thuận bảo đảm tính chất không thiếu của quỹ tích
- Phần đảo bảo đảm tính chất không thừa của quỹ tích

Phần thuận của bài toán quỹ tích có cấu trúc logic $A \Rightarrow B$, trong đó A là mệnh đề : “ Điểm M có tính chất a ” và B là mệnh đề : “ Điểm M thuộc hình F ”.

Phần đảo của bài toán quỹ tích có cấu trúc logic $B \Rightarrow A$. Để giải một bài toán quỹ tích, chúng ta cần phải chứng minh cặp mệnh đề $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$ là đúng

$$\text{Bởi vì : } A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$$

$$B \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$$

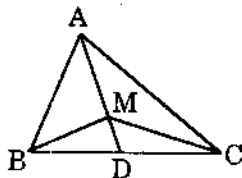
Do đó có bốn cách chứng minh một bài toán quỹ tích

- Cách 1 : Dùng cặp Thuận – Đảo .
- Cách 2 : Dùng cặp Thuận – Phản .
- Cách 3 : Dùng cặp Phản – Đảo .
- Cách 4 : Dùng cặp phản Đảo – Phản .

Cách 1 và Cách 2 thường được sử dụng để giải các bài toán quỹ tích có câu hỏi : “ Tìm quỹ tích ”.

Cách 3 và Cách 4 thường được sử dụng để giải các bài toán quỹ tích với câu hỏi : “*Chứng minh quỹ tích những điểm có tính chất a là hình F*”

Chẳng hạn , có thể sử dụng Cách 3 để giải bài toán : “*Cho tam giác ABC có trung tuyến AD . Chứng minh rằng , quỹ tích những điểm M nằm trong tam giác ABC thoả mãn $S_{AMB} = S_{AMC}$ là trung tuyến AD*” .



☞ **Phản đảo** : Giả sử điểm M thuộc AD

Ta có : $S_{BMD} = S_{CMD}$

Mà : $S_{ABD} = S_{ACD}$

Suy ra : $S_{ABD} - S_{BMD} = S_{ACD} - S_{CMD}$ hay $S_{AMB} = S_{AMC}$

☞ **Phản đảo** : điểm M không thuộc AD thì M có thể nằm bên trong một trong hai tam giác : $\triangle ABD$; $\triangle ACD$.

• Nếu M nằm trong tam giác ABD thì $S_{AMB} < S_{AMC}$

• Nếu M nằm trong tam giác ACD thì $S_{AMB} > S_{AMC}$

Từ đó suy ra mệnh đề được chứng minh

Nếu mệnh đề thuận của bài toán quỹ tích có cấu trúc logic : $A_1 A_2 \Rightarrow B$ (Điểm M có các tính chất a_1, a_2) . Phản đảo phải có cấu trúc $B \Rightarrow A_1 A_2$ (Đảo toàn bộ) .

Thay cho hình thức $B \Rightarrow A_1 A_2$, người ta thường sử dụng một trong hai hình thức sau đây :

$$1. (B \Rightarrow A_1) \wedge (B \Rightarrow A_2)$$

$$2. (B \Rightarrow A_1) \wedge (BA_1 \Rightarrow A_2) \text{ hoặc } (B \Rightarrow A_2) \wedge (BA_2 \Rightarrow A_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy : } B \Rightarrow A_1 A_2 &= \bar{B} \vee A_1 A_2 = (\bar{B} \vee A_1) \wedge (\bar{B} \vee A_2) = \\ &= (B \Rightarrow A_1) \wedge (B \Rightarrow A_2) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác : } (B \Rightarrow A_1) \wedge (BA_1 \Rightarrow A_2) = (\bar{B} \vee A_1) \wedge (\overline{BA_1} \vee A_2)$$

$$= (\bar{B} \vee A_1) \wedge (\bar{B} \vee \bar{A_1} \vee A_2) = \bar{B} \vee (A_1 \wedge \bar{A_1} \vee A_2) =$$

$$= \bar{B} \vee A_1 A_2 = B \Rightarrow A_1 A_2$$

Vậy ta có ba hình thức trên là tương đương logic

Trong ba hình thức trên đây , người ta thường sử dụng hình thức $(B \Rightarrow A_1) (BA_1 \Rightarrow A_2)$, để chứng minh phần đảo của bài toán quỹ tích và được trình bày như sau :

- Lấy điểm M bất kỳ thuộc hình F , bằng phép dựng hình ta chỉ ra điểm M có tính chất (a_1) (có chứng minh) .
- Sau đó sử dụng các giả thiết M thuộc hình F và M có tính chất (a_1) , ta chứng minh cho điểm M có tính chất (a_2)

Xét ví dụ : Cho trước đường tròn tâm O , bán kính R và một điểm P cố định bên trong đường tròn . Một điểm A di động trên đường tròn . Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn thẳng AP .

Giải

Phần thuận :

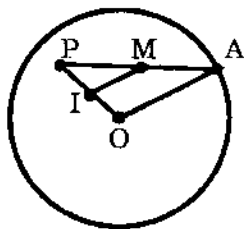
Gọi I là trung điểm OP

Vì : O, P cố định suy ra I cố định

Xét : $\triangle OAP$, có IM là đường trung bình

$$\text{Nên : } IM = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$$

Suy ra M thuộc đường tròn tâm I , bán kính $\frac{R}{2}$



Phần đảo :

Sử dụng hình thức $(B \Rightarrow A_1) (BA_1 \Rightarrow A_2)$; ta làm như sau :

Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường tròn tâm I bán kính $\frac{R}{2}$. Nối

PM trên tia đối của tia MP lấy điểm A sao cho $MA = MP$. Cần chứng minh A thuộc đường tròn tâm O , bán kính R .

Thật vậy , vì M thuộc đường tròn tâm I , bán kính $\frac{R}{2}$

Nên : $IM = \frac{R}{2}$. Xét $\triangle OAP$ có $IO = IP$; $MA = MP$

Suy ra : IM là đường trung bình , do đó : $OA = 2IM$; tức là : $OA = R \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm O bán kính R

Kết luận : quỹ tích những điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $\frac{R}{2}$.

5.6 TÌM KẾT LUẬN LOGIC TỪ CÁC TIÊN ĐỀ CHO TRƯỚC

5.6.1. Đặt vấn đề

Cho các công thức : $A \Rightarrow B$; $C \Rightarrow D$; $A \vee C$. Hãy xét xem công thức $B \vee D$ có phải là hệ quả logic của các tiên đề là các công thức đã cho hay không ?

Muốn vậy , ta cần xét xem công thức :

$F = (A \Rightarrow B) (C \Rightarrow D) (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$ có là công thức hằng đúng hay không ?

Dùng phép biến đổi tương đương logic công thức F

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} \vee B)(\bar{C} \vee D)(A \vee C) \vee (B \vee D) \\ \Rightarrow F &= A.\bar{B} \vee C.\bar{D} \vee \bar{A}.\bar{C} \vee B \vee D \\ \Rightarrow F &= (B \vee A.\bar{B}) \vee (D \vee C.\bar{D}) \vee \bar{A}.\bar{C} \\ \Rightarrow F &= (B \vee A) \vee (D \vee C) \vee \bar{A}.\bar{C} \\ \Rightarrow F &= (B \vee D \vee C) \vee (A \vee \bar{A}.\bar{C}) \\ \Rightarrow F &= (B \vee D \vee C) \vee (A \vee \bar{C}) = 1 \end{aligned}$$

Vậy ta có : $\frac{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, A \vee C}{B \vee D}$

Công thức $B \vee D$ là hệ quả logic từ các tiên đề đã cho

5.6.2. Thuật toán tìm hệ quả của logic

Cho bài toán : Tìm hệ quả của logic từ các tiên đề cho trước : $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $A \Rightarrow B$

Giải

- **Bước 1 :** Đặt $F = (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) (A \Rightarrow B)$
- **Bước 2 :** Biến đổi F về dạng chuẩn hội hoàn toàn
 $F = (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) (\bar{A} \vee B \vee C) (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$
- **Bước 3 :** Xét tất cả các khả năng hệ quả logic có thể là các công thức

$$1. \bar{A} \vee \bar{B} \vee C ; \bar{A} \vee B \vee C ; \bar{A} \vee B \vee \bar{C}$$

$$2. (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee C)$$

$$3. (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}).$$

$$4. (\bar{A} \vee B \vee C)(\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$$

$$5. (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee C)(\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$$

• **Bước 4 :** Đánh giá để chọn hệ quả logic không tầm thường ; rút gọn . Nhận thấy các hệ quả logic 1. ; 4. ; 5. là tầm thường

$$2. \Leftrightarrow \bar{A} \vee ((\bar{A} \vee C)(B \vee C)) = \bar{A} \vee (C \vee B\bar{A}) = \bar{A} \vee C = A \Rightarrow C$$

$$3. \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))(A \Rightarrow (C \Rightarrow B)).$$

§6 HAI PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

6.1 PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP

6.1.1. KN : Chứng minh một mệnh đề toán học bằng cách đi từ mệnh đề đúng đã biết , suy diễn tới mệnh đề cần chứng minh được gọi là chứng minh bằng phương pháp tổng hợp .

6.1.2. Sơ đồ cấu trúc logic

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \dots \Rightarrow Y \Rightarrow X$. Trong đó A là mệnh đề đúng đã biết , còn X là mệnh đề cần chứng minh .

Cơ sở của phương pháp tổng hợp là Modusponens : $\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$

□ Ví dụ : Chứng minh rằng nếu x và y là nghiệm thực của phương trình : $x^2 + y^2 = 1$ thì ta có bất đẳng thức : $|x + y| \leq \sqrt{2}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có với mọi } x, y : (x - y)^2 &\geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &\geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow (x + y)^2 &\leq 2 \Rightarrow |x + y| < \sqrt{2} \end{aligned}$$

6.2 PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

6.2.1. Phương pháp phân tích đi lên

Giả sử cần phải chứng minh mệnh đề X đúng . Ta xuất phát ngay từ X và xem X là hệ quả logic của mệnh đề Y nào đó .

Tiếp tục quá trình đó để cuối cùng biết được các mệnh đề trung

gian là hệ quả logic của một mệnh đề đúng đã biết A nào đó . Từ đó ta suy ra được X được chứng minh .

Sơ đồ cấu trúc logic của phương pháp phân tích đi lên là :

$$X \Leftarrow Y \Leftarrow \dots \Leftarrow C \Leftarrow B \Leftarrow A$$

Cơ sở của phương pháp phân tích đi lên là Modusponens . Sử dụng phương pháp phân tích đi lên để chứng minh mệnh đề X ta thường trình bày như sau : “ Muốn chứng minh X ta cần chứng minh Y . Muốn chứng minh Y ta cần chứng minh C Muốn chứng minh B ta cần chứng minh A ”

Bởi vì A là mệnh đề đúng đã biết , nên từ đó suy ra X được chứng minh .

□ **Chú ý :** Phối hợp phương pháp tổng hợp và phương pháp phân tích đi lên để trình bày chứng minh mệnh đề X ta có phương pháp biến đổi tương đương là phương pháp rất hay được sử dụng trong các chứng minh Toán học .

□ **Ví dụ 1 :** Chứng minh rằng : với mọi số thực a, b ta luôn luôn có bất đẳng thức : $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ (1)

Giải

$$\text{Ta có : } \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Bởi vì bất đẳng thức (2) đúng , nên suy ra (1) được chứng minh

□ **Ví dụ 2 :** Chứng minh rằng với mọi x, y khác không ,

$$\text{ta có bất đẳng thức : } x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \quad (1)$$

Giải

$$\text{Ta có : } \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 y^2 (x^4 + y^4) \leq x^8 + y^8 \quad (\text{vì } x^2, y^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^8 + y^8 - x^6 y^2 - x^2 y^6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^6(x^2 - y^2) - y^6(x^2 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x^6 - y^6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x^2 - y^2)(x^4 + x^2 y^2 + y^4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 (x^4 + x^2 y^2 + y^4) \geq 0 \quad (2)$$

Bởi vì (2) đúng nên suy ra (1) được chứng minh .

6.2.2. Phương pháp phân tích đi xuống

Giả sử là mệnh đề cần xác định tính chất đúng hoặc là sai

Phương pháp phân tích đi xuống có tác dụng như sau :

- 1/ *Bác bỏ mệnh đề X, tức là chứng minh X sai*
- 2/ *Nếu X là mệnh đề cần chứng minh thì nó cho phép tìm ra được tiền đề mà ta cần xuất phát để có thể chứng minh được X*

Sơ đồ cấu trúc logic của phương pháp phân tích đi xuống :

$$X \Rightarrow Y \Rightarrow Z \Rightarrow \dots \Rightarrow B \Rightarrow A$$

- *Nếu A sai thì X sai, tức là bác bỏ X*
- *Nếu A đúng thì có thể dùng A làm tiền đề xuất phát chứng minh trong trường hợp ta suy được $A \Rightarrow B \dots \Rightarrow Z \Rightarrow Y \Rightarrow X$ thì X được chứng minh.*

BÀI TẬP LOGIC Chương 4

Bài 71

Chứng minh rằng :

$$1/ (6^{2n-1}) : 35$$

$$2/ (2^{5n+3} + 5^n + 3^{n+2}) : 17$$

$$3/ (7^{n+2} + 8^{2n+1}) : 57$$

$$4/ (2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}) : 37$$

Hướng dẫn

Sử dụng phương pháp quy nạp toán học .

Bài 72

1/ *Chứng minh rằng nếu P là một số nguyên tố thì ta có tất cả các số $C_p^1 ; C_p^2 ; C_p^3 \dots C_p^{p-1}$ đều chia hết cho P*

2/ *Chứng minh rằng phương pháp quy nạp toán học , khẳng định sau đây là đúng : với mọi số tự nhiên n khác 0 ta có : $A_n = n^p - n$ chia hết cho p , với p là một số nguyên tố .*

3/ *Tìm cách khác chứng minh khẳng định đã cho .*

Giải

1/ Trước tiên dễ thấy C_n^k được xác định ở trong bài là một số tự nhiên với n , k là số tự nhiên mà $1 \leq k \leq n$

Giả sử P là số nguyên tố : $1 \leq k \leq p-1$

$$\text{Ta có : } C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k}$$

Vì p là một số nguyên tố, cho nên p không chia hết cho bất kỳ số nào từ $1, 2, \dots, k$ có ở mẫu số.

Do C_p^k là số tự nhiên, suy ra : $(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)$ chia hết cho tích $1.2\dots k$. Từ đó ta có C_p^k chia hết cho p với mọi k nhận các giá trị từ 1 đến $p-1$

2/ • Khi : $n = 1$, ta có : $A_1 = 1^p - 1 = 0$ chia hết cho p

• Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $A_k = k^{p-k}$ chia hết cho p .

• Cần phải chứng minh : $A_{k+1} = (k+1)^p - (k+1)$ cũng chia hết cho p

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu : } A_{k+1} - A_k &= (k+1)^p - (k+1) - (k^p - k) \\ &= (k+1)^p - 1 - k^p \end{aligned}$$

$$\text{Thay : } (k+1)^p = C_p^0 k^p + C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} k + C_p^p$$

Ta có :

$$A_{k+1} - A_k = k^p + C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} k + 1 - 1 - k^p$$

$$\Rightarrow A_{k+1} - A_k = C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} k \quad (1) \quad (\text{vì } C_p^0 = C_p^p = 1)$$

Theo câu 1 ta có : $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{p-1}$ đều chia hết cho p , do đó vế phải của (1) chia hết cho p .

Tức là $A_{k+1} - A_k$ chia hết cho p , theo giả thiết quy nạp A_k chia hết cho p . Vậy : A_{k+1} chia hết cho p .

• Kết luận : $A_n = n^p - n$ chia hết cho p , với mọi $n \geq 1$

$$3/ \text{ Ta có : } A_n = n(n^{p-1} - 1)$$

$$\text{Nếu } p = 2 \text{ hiển nhiên } n^2 - n = n(n-1) : 2$$

Xét $p > 2$; có 2 trường hợp :

□ TH₁ : Với $n : p$ hiển nhiên $A_n : p$

□ TH₂ : $(n, p) = 1$. Xét dãy $(p-1)$ số : $n, 2n, \dots, (p-1)n$

Không có số hạng nào của dãy số này chia hết cho p , vì vậy khi chia các số này cho p ta nhận được các số dư từ 1 đến $p-1$

$$n = q_1 \cdot p + r_1$$

$$2n = q_2 \cdot p + r_2$$

.....

$$(p-1)n = q_{p-1} \cdot p + r_{p-1}$$

Để thấy các số dư $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$, đôi một khác nhau (vì giả sử ngược lại có 2 số dư bằng nhau sẽ dẫn tới vô lý)

Xét tích của các vế trong $(p-1)$ đẳng thức :

$$1.2. \dots (p-1).n^{p-1} = B.p + 1.2. \dots (p-1)$$

Suy ra : $n^{p-1} - 1$ chia hết cho p

Vậy : $A_n = n(n^{p-1} - n) : p$

Bài 73

Chứng minh rằng : với mọi số tự nhiên n ta có

1/ $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9

2/ $3^{2n+2} - 24n + 37$ chia hết cho 64

3/ $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ chia hết cho 25.

Bài 74

Chứng minh rằng với mọi số n khác không ta có :

1/ $4 \cdot 6^n + 5^n - 4$ chia hết cho 5

2/ $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ chia hết cho 13

3/ $5^{2n+1} + 4^{n+2}$ chia hết cho 21

4/ $5^{2n+5} + 7^{2n} + 6$ chia hết cho 9

5/ $5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$ chia hết cho 19

6/ $3^{2n+2} + 2^{2n+1}$ chia hết cho 11

7/ $2 \cdot 7^n + 1$ chia hết cho 3

8/ $8^n + 6$ chia hết cho 7.

Hướng dẫn

1/ Biểu diễn : $4 \cdot 6^n + 5^n - 4 = 5^n + 4(6^n - 1)$

2/ Biểu diễn : $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4(16^n - 3^n) + 13 \cdot 3^n$

3/ Biểu diễn : $5^{2n+1} + 4^{n+2} = 5(25^n - 4^n) + 21 \cdot 4^n$

Bài 75

Tính các tổng sau đây bằng cách :

* Dùng phép quy nạp không hoàn toàn để dự đoán kết quả.

* Dùng phương pháp quy nạp toán học chứng minh kết quả dự đoán

1/ $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

2/ $S_n = \frac{1}{1.4} - \frac{1}{4.7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

3/ $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2$

Hướng dẫn

Dự đoán quy nạp không hoàn toàn .

$$1/ S_n = \frac{n}{2n+1} ; \quad 2/ S_n = \frac{n}{3n+1}$$

$$3/ S_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Bài 76

Chứng minh các khẳng định sau là đúng :

$$1/ 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2/ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3/ 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

$$4/ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$5/ 1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \dots + (3n-2)(3n+1) = n(n+1)^2$$

$$6/ (n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$$

$$7/ \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Bài 77

Tính các tích sau đây bằng cách .

- Dùng phép quy nạp không hoàn toàn để dự đoán kết quả .

- Dùng phương pháp quy nạp toán học chứng minh dự đoán

$$1/ P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$2/ P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$3/ P_n = \left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right)$$

Hướng dẫn

$$1/ P_n = \frac{1}{n+1}$$

2/ • Bước 1 : Dự đoán kết quả

$$P_1 = \frac{3}{4} = \frac{1+2}{2(1+1)}$$

$$P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2+2}{2(2+1)}$$

$$P_3 = \frac{4}{6} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8} = \frac{3+2}{2(3+1)}$$

$$\text{Dự đoán : } P_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

• **Bước 2 : Chứng minh**

• Khi : $n = 1$ $P_1 = \frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$ khẳng định đúng

• Giả sử khẳng định đúng với : $n = k \geq 1$, tức là : $P_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$

Cần chứng minh khẳng định cũng đúng với : $n = k + 1$

$$\text{Thấy vậy : } P_{k+1} = P_k \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2} \right) = \frac{k+2}{2(k+1)} \cdot \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2}$$

$$\Rightarrow P_{k+1} = \frac{(k+2)(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)^2}$$

$$\Rightarrow P_{k+1} = \frac{k+3}{2(k+2)} \text{ khẳng định đúng}$$

• **Kết luận :** $P_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

$$3/ P_1 = 1 - \frac{4}{1} = -\frac{3}{1} = -\frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 1 - 1}$$

$$P_2 = \frac{3}{1} \left(1 - \frac{4}{9} \right) = -\frac{5}{3} = -\frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 - 1}$$

$$P_3 = -\frac{5}{3} \left(1 - \frac{4}{25} \right) = -\frac{7}{5} = -\frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3 - 1}$$

$$\text{Dự đoán : } P_n = -\frac{2n+1}{2n-1}$$

Chứng minh kết quả dự đoán bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bài 78

Tìm tất cả các số tự nhiên n để các bất đẳng thức sau luôn luôn đúng :

$$1/2^n > n$$

$$2/2^n > n^3$$

Hướng dẫn

Đáp số : $1/n \geq 5$

$$2/n \geq 10$$

Bài 79

Chứng minh các bất đẳng thức sau đây :

$$1/1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$$

$$2/ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

$$3/ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{4} \text{ với } n \geq 2$$

Bài 80

Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số cùng dấu và lớn hơn -1 thì ta có bất đẳng thức :

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Giải

- Khi $n = 1$ ta có : $1 + x_1 \geq 1 + x_1$ khẳng định đúng
- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$

Tức là : $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$

Ta cần phải chứng minh khẳng định cũng đúng với : $n = k + 1$

Tức là : $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}$

Theo giả thiết quy nạp, ta có :

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

Nhân cả hai vế với $1 + x_{k+1} > 0$ ta có :

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_{k+1})(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ + x_k \geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1}(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)$$

Vế phải thu gọn và nhóm thành :

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}) + (x_{k+1}x_1 + x_{k+1}x_2 + \dots + x_{k+1}x_k)$$

Theo giả thiết $x_1, x_2, \dots, x_n$ cùng dấu, do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 81

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, số Fermat

$F_n = 2^{2^n} + 1$ có 1 chữ số tận cùng là 7.

Hướng dẫn

$$F_{k+1} = (F_k - 1)^2 + 1 \text{ với mọi } k \geq 2$$

Bài 82

Chứng minh rằng : $\forall x > 0 ; \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ta có :}$

$$e^x > \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (1)$$

Với $n! = 1.2 \dots n$ và $0! = 1$

Giải

$$\text{BĐT (1)} \Leftrightarrow f_n(x) = e^x - \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) > 0 ; \forall x > 0 \quad (2)$$

Và ta chứng minh (2) bằng quy nạp :

• **Bước 1 :** Ta chứng minh (2) với $n = 1$:

Lúc đó : (1) $\Leftrightarrow f_1(x) = e^x - 1 - x > 0 ; \forall x > 0$

Để ý : $f_1'(x) = e^x - 1 = e^x > 0 ; \forall x > 0$

$\Rightarrow$ Hàm f_1 đồng biến trên $(0 ; +\infty)$

Xét : $x > 0 \Rightarrow f_1(x) > f_1(0) ; \text{ mà } f_1(0) = 0$

$\Rightarrow f_1(x) > 0$

Hay $e^x - 1 - x > 0 ; \forall x > 0$

Vậy BĐT (2) được chứng minh với $n = 1$

• **Bước 2 :** Giả sử BĐT (2) đúng với $n = k$; nghĩa là :

$$f_k(x) = e^x - \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \right) > 0 ; \forall x > 0$$

• **Bước 3 :** chứng minh (2) đúng với $n = k + 1$

Xét hàm đặc trưng :

$$f_{k+1}(x) = e^x - \left[\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right]$$

$$\Rightarrow f_{k+1}'(x) = e^x - \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \right)$$

$\Rightarrow f_{k+1}'(x) = f_k(x) > 0 ; \forall x > 0$ (do giả thiết quy nạp bước k)

$\Rightarrow f_{k+1}$ đồng biến trên $(0 ; +\infty)$

Xét : $x > 0 \Rightarrow f_{k+1}(x) > f_{k+1}(0) ; \text{ mà } f_{k+1}(0) = 0$

$$\Rightarrow f_{k+1}(x) > 0 ; \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2} \right)$$

Vậy BĐT (2) đúng với $n = k + 1 \Rightarrow$ (đpcm).

□ Cách khác :

Ta chứng minh (*) bằng nguyên lý quy nạp toán học :

- Khi $n = 1$ ta có : $e^y > 1$; $\forall y \in (0 ; x]$

$$\Rightarrow \int_0^x e^y dy > \int_0^x dy \text{ hay } e^x - 1 > x$$

$$\Rightarrow e^x > 1 + x ; \forall x > 0$$

Vậy bất đẳng thức (*) đúng khi $m = 1$

- Giả sử $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$; $\forall x > 0$; $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ (1)

Như vậy ta có giả thiết quy nạp

$$e^y > 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^k}{k!} ; \forall y \in (0 ; 1] \quad (2)$$

Từ (2), ta cần chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy :

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \int_0^x e^y dy > \int_0^x \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^k}{k!} \right) dy$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > \left(y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \dots + \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} \right) \Bigg|_0^x$$

$$\Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad (3)$$

Do (3) suy ra bất đẳng thức đã cho cũng đúng khi $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, (*) được chứng minh xong.

$$\text{Vậy : } e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} ; \forall n > 0 ; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Bài 83

Cho n hình vuông bất kỳ. Chứng minh rằng có thể cắt chúng ra làm nhiều mảnh để khi ghép lại thành một hình vuông mới

Giải

□ GD₁ : Khi $n = 1$ mệnh đề trên hiển nhiên cho trường hợp tầm thường của bài toán.

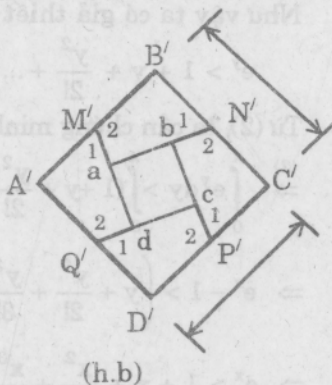
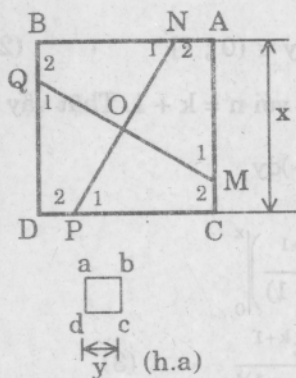
Ta chứng minh khi $n = 2$ mệnh đề vẫn đúng.

Lần lượt gọi độ dài các cạnh của hai hình vuông cho trước ABCD và abcd là x và y ($x \geq y$).

Trên các cạnh của hình vuông ABCD (h.a) ta lấy các đoạn $AM = BN = CP = DQ = \frac{x+y}{2}$.

Cắt hình vuông dọc theo các đường thẳng MP và NQ, dễ thấy rằng MP và NQ vuông góc với nhau và chia hình vuông thành bốn mảnh bằng nhau tại tâm O của nó.

Bây giờ ghép các mảnh với hình vuông thứ hai như trong h.b, ta được một hình vuông vì M', N', P', Q' các góc bù nhau, $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{C'}, \widehat{D'}$ là các góc vuông và $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$.



□ **GD₂**: Giả sử mệnh đề được chứng minh với n hình vuông (1) và ta có : n + 1 hình vuông $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$.

□ **GD₃**: Lấy ra hai hình bất kỳ, chẳng hạn K_n, K_{n+1} , nhờ **GD₂** ta có thể cắt một trong hai hình vuông này và ghép các mảnh của với hình vuông thứ hai để có hình vuông mới K' .

Khi đó nhờ giả thiết quy nạp (1) ta có thể cắt n hình vuông $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K_n$ tạo nên một hình vuông mới từ những mảnh cắt này (đpcm).

Bài 84

Cho $\triangle ABC$, qua C vẽ (n - 1) đường thẳng $CM_1, CM_2, CM_3, \dots, CM_{n-1}$, chia tam giác thành n tam giác nhỏ hơn $\triangle ACM_1, \triangle M_1CM_2, \dots, \triangle M_{n-1}CB$. Gọi $r_1, r_2, \dots, r_n$ và $\rho_1, \rho_2, \dots$

Thật vậy :

ρ_n lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của các tam giác này (tất cả các đường tròn bàng tiếp đều nằm trong góc C của tam giác, xem h.6a). Gọi r và ρ lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và bàng tiếp (góc C) của ΔABC . Chứng minh rằng :

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \dots \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$$

Giải

Gọi S ta diện tích của ΔABC và p là nửa chu vi. Khi đó, như đã biết $S = pr$. Mặt khác, nếu O là tâm đường tròn bàng tiếp của ΔABC (h.b) thì :

$$S = S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OCB} - S_{\Delta OAB} \\ \Rightarrow S = \frac{1}{2}bp + \frac{1}{2}ap - \frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}(b+a-c)p = (p-c)\rho$$

$$\text{Do đó : } pr = (p-c)\rho \text{ và } \frac{r}{\rho} = \frac{p-c}{p}$$

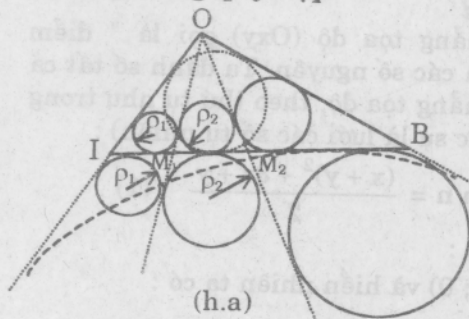
Hơn nữa từ định lý hàm tang

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{và} \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

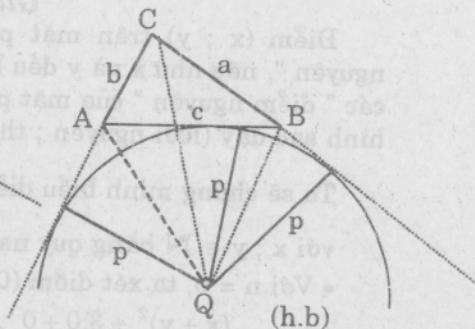
Ta có :

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)(p-a)(p-c)}{p(p-a)p(p-b)}} = \frac{p-c}{p} = \frac{r}{\rho} \quad (1)$$

Sau những nhận xét sơ bộ này ta trở lại chứng minh định lý bằng quy nạp.



(h.a)



(h.b)

□ **GD₁** : Khi $n = 1$ mệnh đề (1) đúng hiển nhiên với trường hợp tam thường. Ta chứng minh nó đúng với $n = 2$. Ở đây đường thẳng CM chia ΔABC thành hai tam giác nhỏ hơn ΔACM và ΔCMB .

Nhờ công thức (1) :

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{CMA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{CMB}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

$$= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{CMA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ - CMA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{\rho}.$$

□ **GD₂** : Giả sử mệnh đề đúng với $n - 1$ đường thẳng và có n đường thẳng $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$ chia ΔABC làm $(n + 1)$ tam giác nhỏ hơn $\Delta ACM_1, \Delta M_1CM_2, \dots, \Delta M_nCB$. Xét hai trong các tam giác này, chẳng hạn ΔACM_1 và ΔM_1CM_2 . Như đã biết ở **GD₁** :

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r_{12}}{\rho_{12}}; r_{12}; \rho_{12} \text{ là bán kính đường tròn nội tiếp và}$$

bàng tiếp (góc C) của ΔACM_2 . Nhưng với n tam giác $\Delta ACM_2, \Delta M_2CM_3, \dots, \Delta M_nCB$ ta có :

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}} \cdot \frac{r_3}{\rho_3} \dots \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \dots \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 85

Cho n là số tự nhiên : $n \in \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$. Chứng minh rằng nó có thể biểu diễn nó duy nhất dưới dạng :

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2};$$

ở đây x và y là các số tự nhiên.

Giải

Điểm $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) gọi là "điểm nguyên", nếu như x và y đều là các số nguyên. Ta đánh số tất cả các "điểm nguyên" của mặt phẳng tọa độ, theo thứ tự như trong hình sau đây (lưới nguyên; thực sự là lưới các số tự nhiên) :

$$\text{Ta sẽ chứng minh biểu diễn } n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} \quad (1)$$

với $x; y \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp :

• Với $n = 0$, ta xét điểm $(0; 0)$ và hiển nhiên ta có :

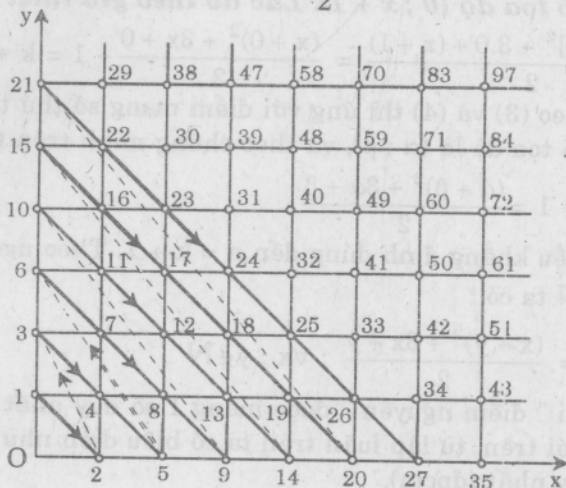
$$0 = \frac{(x+y)^2 + 3.0 + 0}{2} \quad (\text{điểm } (0; 0) \text{ được mang số } 0)$$

• Với $n = 1$, ta xét điểm $(0; 1)$ và tương tự ta có :

$$1 = \frac{(x+y)^2 + 3 \cdot 0 + 1}{2} \quad (\text{điểm } (0; 1) \text{ được mang số } 1)$$

• Với $n = 2$, ta xét điểm mang số 2, đó là điểm $(1; 0)$ và có

$$2 = \frac{(x+y)^2 + 3 \cdot 1 + 0}{2}$$



Như vậy với các số 0 ; 1 ; 2 tương ứng ta đã chọn các điểm mang số 0 ; 1 ; 2 dưới dạng xếp đặt ziczac và lúc bấy giờ đẳng thức cần chứng minh là đúng, trong đó $(x; y)$ là tọa độ của các điểm tương ứng.

Giả thiết qui nạp là điều khẳng định của bài toán đã đúng đến k , tức là ứng với điểm mang số thứ tự k có tọa độ $(x; y)$ thì ta có :

$$k = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} \quad (2)$$

Xét số $(k + 1)$. Tương ứng việc ta xét điểm mang số thứ tự $(k + 1)$. Có hai khả năng xảy ra.

□ Nếu $y \neq 0$: ở đây $(x; y)$ là tọa độ của điểm mang số thứ tự k . Theo cách đánh số như trên thì điểm mang số thứ tự $k + 1$ sẽ có tọa độ là $(x + 1; y)$.

Ta có :

$$\frac{[(x+1) + (y-1)]^2 + 3(x+1) + (y-1)}{2} = \frac{(x+y)^2 + 3x + y + 2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{[(x+1)+(y-1)]^2 + 3(x+1) + (y-1)}{2} = 1 + \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} \\ = 1 + k \quad (3)$$

□ Nếu $y = 0$. Theo cách đánh số thì điểm mang số thứ tự $k+1$ sẽ có tọa độ $(0; x+1)$. Lúc đó theo giả thiết qui nạp :

$$\frac{[0+(x+1)]^2 + 3 \cdot 0 + (x+1)}{2} = \frac{(x+0)^2 + 3x + 0}{2} + 1 = k+1 \quad (4)$$

□ Vậy theo (3) và (4) thì ứng với điểm mang số thứ tự $k+1$ thì điểm đó có tọa độ là $(\alpha; \beta)$, và theo chứng minh trên ta luôn có :

$$k+1 = \frac{(\alpha + \beta)^2 + 3\alpha + \beta}{2}$$

Vậy điều khẳng định đúng đến $n = k+1$. Theo nguyên lý qui nạp $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có :

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}; \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

Do mỗi " điểm nguyên " được mang 1 số duy nhất trong cách đánh số nói trên, từ lập luận trên ta có biểu diễn như ở giả thiết luôn là duy nhất (đpcm).

Bài 86

1/ Chứng minh rằng :

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x| \quad (1); \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2/ Chứng minh rằng :

$$(n+1)\cos \frac{\pi}{n+1} - n\cos \frac{\pi}{n} > 1; \quad \forall n \geq 2$$

Giải

1/ Ta chứng minh bất đẳng thức (1) bằng phương pháp quy nạp :

• Khi $n = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 0 \leq 0$ (đúng $\forall x \in \mathbb{R}$)

Vậy (1) được chứng minh xong khi $n = 0$.

Tương tự : $n = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |\sin x| \leq |\sin x|$.

Nghĩa là hai trường hợp tầm thường đã được chứng minh xong ; $\forall x$.

• Giả định (1) đúng với $n = k$; $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là ta có :

$$|\sin(kx)| \leq k|\sin x| \quad (2)$$

• Xét : $|\sin(k+1)x| = |\sin(kx + x)|$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |\sin(k+1)x| &= |\sin(kx) \cos x + \sin x \cos(kx)| \leq \\
&\leq |\sin(kx) \cos x| + |\sin x \cos(kx)| \\
\Rightarrow |\sin(k+1)x| &\leq |\sin(kx)| |\cos x| + |\sin x| |\cos(kx)| \leq \\
&\leq |\sin(kx)| + |\sin x| \leq k|\sin x| + |\sin x| : \text{do (2)} \\
\Rightarrow |\sin(k+1)x| &= (k+1)|\sin x| \\
\Rightarrow (1) \text{ đúng với } n &= k+1
\end{aligned}$$

Vậy (1) được chứng minh xong bằng quy nạp.

$$2/ \text{ Xét } (n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \left[n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{\pi}{n} \right) > 1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right. \\
\left. n \sin \frac{\pi}{2n(n+1)} \sin \frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \right]
\end{aligned}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức cuối cùng là đúng. Chỉ cần chứng minh :

$$a/ \sin \frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin \frac{\pi 2n}{2n(n+1)} = \sin \frac{\pi}{(n+1)} > \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(với $n \geq 2$, với các cung ở đây đều ở trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số sin đồng biến).

$$b/ n \sin \frac{\pi}{2n(n+1)} \geq \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$$\text{Đặt : } \frac{\pi}{2n(n+1)} = \alpha ; \text{ ta có : } n \sin \alpha \geq \sin n\alpha.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp qui nạp.

- Với $n = 2 \Rightarrow 2 \sin \alpha \geq \sin 2\alpha$
 $\Rightarrow 2 \sin \alpha \geq 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (vì $\cos \alpha \leq 1$)
- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ tức là : $k \sin \alpha \geq \sin k\alpha$
- Cần phải chứng minh : $(k+1) \sin \alpha \geq \sin(k+1)\alpha$

Thật vậy : $k \sin \alpha \geq \sin k\alpha$

$$\Leftrightarrow k \sin \alpha + \sin \alpha \geq \sin k\alpha + \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow (k+1) \sin \alpha \geq 2 \sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cos \frac{(k-1)\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\text{Bất đẳng thức (1) đúng vì : } \cos \frac{(k+1)\alpha}{2} < \cos \frac{(k-1)\alpha}{2}$$

(các cung $\frac{(k+1)\alpha}{2}$; $\frac{(k-1)\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số cosin nghịch biến)

$$\text{Ta có : } (k+1)\sin\alpha \geq 2 \sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cos \frac{(k+1)\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)\sin\alpha \geq \sin(k+1)\alpha \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 87

1/ *Tính tích phân* : $I = \int_0^1 (2x-1)e^{x-x^2} dx$

2/ *Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng :*

$$\int_0^1 (2x-1)^{2n+1} e^{x-x^2} dx = 0$$

Giải

1/ Xét : $I = \int_0^1 (2x-1)e^{x-x^2} dx$ (1)

$$\Rightarrow I = - \int_0^1 e^{x-x^2} d(x-x^2) = - e^{x-x^2} \Big|_0^1 = 0 \text{ (ycbt)}$$

• **Ghi chú :** Trong (1) nếu đổi biến $t = x - x^2$, thì sai khi tính :

$$I = - \int_0^0 e^t dt = 0, \text{ do vi phạm điều kiện } t \text{ không đơn điệu trên } [0; 1].$$

2/ Xét : $I_n = \int_0^1 (2x-1)^{2n+1} e^{x-x^2} dx = 0$ (1); $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp, ta có :

• $n = 1 \Rightarrow I_1 = \int_0^1 (2x-1)^3 e^{x-x^2} dx$

Đặt : $\begin{cases} u = (2x-1)^2 & \Rightarrow du = 4(2x-1)dx \\ dv = (2x-1)e^{x-x^2} & \Rightarrow v = -e^{x-x^2} \text{ (do câu 1/)} \end{cases}$

Lúc đó : $I_1 = -(2x-1)e^{x-x^2} \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 (2x-1)e^{x-x^2} dx$

$$\Rightarrow I_1 = -(1-1) + I_1 = 0 \text{ (do câu a)}$$

Vậy : (1) được kiểm tra đúng với $n = 1$.

- Giả sử biểu thức trên đúng với $n = k \geq 1$; $\forall k \in \mathbb{Z}^+$

Ta có : $I_k = \int_0^1 (2x-1)^{2k+1} e^{x-x^2} dx = 0$ (2) (luôn đúng)

- Ta cần chứng minh biểu thức trên đúng với : $n = k + 1$, thật vậy xét :

$$I_{k+1} = \int_0^1 (2x-1)^{2k+3} e^{x-x^2} dx$$

Lại đặt : $\begin{cases} u = (2x-1)^{2k+2} & \Rightarrow du = (2k+2) \cdot 2(2x-1)^{2k+1} dx \\ dv = (2x-1)e^{x-x^2} dx & \Rightarrow v = -e^{x-x^2} \text{ (do câu n)} \end{cases}$

$$I_{2k+1} = - (2x-1)^{2k+2} e^{x-x^2} \Big|_0^1 + 4(k+1) \int_0^1 (2x-1)^{2k+1} e^{x-x^2} dx$$

$$I_{2k+1} = 0 + 4(k+1)I_k = 0 \text{ (do (2)) (ycbt)}$$

Vậy : công thức trên đúng với $n = k + 1$. Theo lý quy nạp ta có $I_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

- **Ghi chú :** Khi kết hợp hai kết quả câu 1/ và câu 2/ của bài toán, ta có : $I_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài 88

Chứng minh rằng : $(n^2 + 4n + 3) : 8$ (1) (với $n \in \mathbb{Z}^+$; n lẻ)

Giải

- $n = 1$ (số lẻ đầu tiên) $\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 8 : 8$ khẳng định đúng với $n = 1$
- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1 \forall k \in \mathbb{Z}^+$; k lẻ. Từ là ta có : $(k^2 + 4k + 3) : 8$ (2); $\forall k$ lẻ lớn hơn hay bằng 1
- Cần chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 2$ (vì $k + 2$ là số lẻ liền sau k) .

Tức là phải chứng minh : $[(k+2)^2 + 4(k+2) + 3] : 8$ (3)

Thật vậy : $(\text{SỐ BỊ CHIA})_{(3)} = k^2 + 4k + 4 + 4k + 8 + 3$

$$\Rightarrow (\text{SỐ BỊ CHIA})_{(3)} = \underbrace{(k^2 + 4k + 3)}_{:8 \text{ do (2)}} + \underbrace{4(k+3)}_{:8}$$

Vậy (3) được chứng minh .

Theo phép chứng minh quy nạp ta có : $(n^2 + 4n + 3) : 8 : \forall n \in \mathbb{Z}^+$; n lẻ.

Bài 89

Tìm sai lầm trong “ Chứng minh ” khẳng định sau đây số $A_n = 2n + 1$ là một số chẵn với mọi số tự nhiên n .

Giải

Giả sử khẳng định đúng với : $n = k + 1$

Thật vậy : $A_{k+1} = 2(k + 1) = 1(2k + 1) + 2$

Suy ra : $A_{k+1} = A_k + 2$ theo giả thiết quy nạp A_k là số chẵn , suy ra $a_k + 2$ là chẵn tức là khẳng định đúng với $n = k + 1$

Kết luận : $A_n = 2n + 1$ là một số chẵn (!)

Bài 90

Chứng minh rằng : $\forall m > 1 ; m \in \mathbb{N}$ nếu $(m - 1)! + 1$ chia hết cho m thì m là số nguyên tố

Giải

• Giả sử ngược lại m không là số nguyên tố

Vì $M > 1$ suy ra m là hợp số, tức là : $m = a.b$; với $a < a$, $b < m$

Ta có : $(m - 1)! = 1.2.3....a.b...(m - 1)$ chia hết cho a và b tức là $(m - 1)!$ chia hết cho m .

Suy ra : $(m - 1)! + 1$ không chia hết cho m . Vô lý vì trái với giả thiết.

• Điều vô lý đó chứng tỏ rằng : m là số nguyên tố

Bài 91

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có phân số $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ là phân số tối giản.

Giải

• Giả sử ngược lại phân số $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ là chưa tối giản với một số tự nhiên n nào đó.

• Khi đó : $(21n + 4, 14n + 3) = d > 1$

Suy ra : $21n + 4 = dq$ và $14n + 3 = dp$

☞ Từ : $21n + 4 = dq$ suy ra : $42n + 8 = 2dq$ (1)

☞ Từ : $14n + 3 = dp$ suy ra : $42n + 9 = 3dp$ (2)

Xét hiệu của (2) và (1) : $1 = 3dp - 2dq$

Do đó : $d(3p - 2q) = 1$ và $d \nmid 1$. Vô lý vì trái với giả sử $d > 1$

• Điều vô lý chứng tỏ rằng : phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài 92

Chứng minh rằng : không tồn tại các số nguyên a, b, c, d thoả mãn các đẳng thức :

$$abcd - a = 1961$$

$$abcd - a = 961$$

$$abcd - c = 61$$

$$abcd - d = 1$$

(THI HỌC SINH GIỎI MOSCOW - 1961)

Giải

• Giả sử ngược lại có các số nguyên a, b, c, d thoả mãn

• Từ $abcd - a = 1961 \Rightarrow a(bcd - 1) = 1961 \Rightarrow a$ là số lẻ.

Lập luận tương tự từ các đẳng thức thứ 2, thứ 3 và thứ 4 ta suy ra : b, c, d là các số lẻ.

Khi a, b, c, d lẻ ta suy ra : $abcd$ là số lẻ, do đó $abcd - d$ không thể là số lẻ (vô lý)

(vì hiệu của hai số lẻ là một số chẵn).

• Điều vô lý chứng tỏ rằng : không tồn tại các số nguyên a, b, c, d thoả mãn các đẳng thức đã cho.

Bài 93

Chứng minh rằng : tồn tại một số tự nhiên n sao cho có số A trong biểu diễn thập phân gồm n chữ số 1 mà A chia hết cho 1993.

Giải

Xét dãy số : $1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{111\dots 11}_{1993 \text{ chữ số } 1}$

Trong dãy số này ắt phải tồn tại một số chia hết cho 1993.

• Giả sử ngược lại : không có số nào của dãy số đã cho chia hết cho 1993.

• Khi chia 1993 số hạng của dãy số đã cho với 1993 ta nhận được 1992 số dư từ 1 đến 1992.

Theo nguyên tắc Dirichlet ắt tồn tại hai số hạng có cùng số dư. Giả sử là :

$$A_k = 11\dots 11 \text{ (k chữ số 1)}$$

$$A_l = 11\dots 11 \text{ (l chữ số 1) với } 1 \leq l < k < 1993$$

Nhưng nếu vậy thì hiệu :

$A_k - A_l = \underbrace{11\dots1}_{k-1} \underbrace{100\dots00}_{l \text{ chữ số } 0}$ chia hết cho 1993 .

$A_k - A_l = \underbrace{111\dots11}_{k-1 \text{ chữ số } 1} \times 10^l$ chia hết cho 1993

Vì : $(10, 1993) = 1$ nên $(10^l, 1993) = 1$, do đó :

$A = \underbrace{111\dots11}_{k-1 \text{ chữ số } 1}$ chia hết cho 1993 với $1 < k - l < 1993$ là một số

nào đó của dãy số đã cho vô lý vì trái với giả sử của chúng ta .

• Điều vô lý đó chứng tỏ rằng trong dãy số đã cho có một số chia hết cho 1993 . Khẳng định được chứng minh

Bài 94

Chứng minh rằng nếu $(a, b) = 1$ thì :

$$1/ (a, a + b) = 1$$

$$2/ (b, a + b) = 1$$

$$3/ (a, a - b) = 1$$

$$4/ (b, a - b) = 1$$

Bài 95

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c, d thoả mãn đồng thời các đẳng thức :

$$abcd - a = \underbrace{77\dots77}_{1991 \text{ chữ số } 7}$$

$$abcd - b = \underbrace{77\dots77}_{1992 \text{ chữ số } 7}$$

$$abcd - c = \underbrace{77\dots77}_{1993 \text{ chữ số } 7}$$

$$abcd - d = \underbrace{77\dots77}_{1994 \text{ chữ số } 7}$$

Bài 96

Cho 7 chữ số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 . Giả sử A và B là hai số khác nhau nào đó gồm 7 chữ số khác nhau lập từ 7 chữ số trên đây. Chứng minh không có số nào chia hết cho số còn lại.

Hướng dẫn

• Giả sử : $A > B$ và $A = n.B$ ($n \in \mathbb{N}$) .

• Tổng các chữ số A và B đều bằng 28

Nên : $A = 9q + 1$ và $B = 9p + 1$. Suy ra : $A = 9np + n$, do đó $n \geq 10$ vì n là bội số của 9 cộng 1, $A \geq 10B$ (vô lý)

Bài 97

Khẳng định sau đúng hay sai.

1/ Nếu phân số $\frac{a}{b}$ tối giản thì phân số $\frac{a-b}{a+b}$ cũng tối giản.

2/ Điều ngược lại đúng hay sai . Vì sao ?

Hướng dẫn

2/ Sai . Chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ .

Bài 98

Giả sử a và b là hai số nguyên dương . Chứng minh rằng nếu d là số nguyên dương bé nhất thoả mãn

$d = ax + by$ (với x và y là các số nguyên) thì d là ước số chung nhỏ nhất của a và b .

Giải

Cần chứng minh hai điều :

1. d là một ước chung của a và b .
2. Mọi ước số của a và b đều là ước số của d

Bước 1

• Giả sử d không là ước số của a

• Khi đó $a = dq + r$ $0 < r < d$

Do đó $r = a - dq = q - q(ax + by)$

$$\Rightarrow r = a(1 - qx) + b(-qy) : \text{ vô lý}$$

(vì trái với giả thiết d bé nhất) .

Vậy : $d \mid a$

Chứng minh tương tự ta có : $d \mid b \Rightarrow d$ là ước chung của a và b

Bước 2

Giả sử c là một ước số chung tuỳ ý của a và b

$$\left. \begin{array}{l} c \mid a \Rightarrow c \mid ax \\ c \mid b \Rightarrow c \mid by \end{array} \right\} \Rightarrow c \mid ax + by = d$$

Kết luận : $(a, b) = d$.

Bài 99

Một người bán hàng có 25kg táo . Để thuận tiện cho khách hàng . Ông ta dự định xếp táo vào các hộp nhựa loại nhỏ mỗi hộp đựng 1 kg , loại vừa mỗi hộp đựng 3kg và loại lớn mỗi hộp đựng 5kg . Người bán hàng có tất cả 10 hộp nhựa các loại . Hỏi ông ta có thể xếp hết 25kg táo vào 10 hộp để bán cho khách hàng hay không ?

Hướng dẫn

- Giả sử xếp được và có a hộp 1 kg ; b hộp 3kg ; c hộp 5kg
 - Khi đó ta có : $a + b + c = 10$ và : $a + 3b + 5c = 25$
 - Suy ra điều vô lý .
- Vậy người bán hàng không thể thực hiện được dự định

Bài 100

Có hay không số tự nhiên A biết rằng nếu gạch đi một chữ số đầu tiên (kể từ bên trái) của A thì số này giảm đi 58 lần .

Hướng dẫn

- Giả sử có số A . Gọi x là chữ số bị gạch , B là số còn lại và k là chữ số của số A .
 - Ta có : $A = x \cdot 10^k + B = 58B \Rightarrow x \cdot 10^k = 57B$
- Đẳng thức cuối dẫn ra điều vô lý vì : $1 \leq x \leq 9$.

Bài 101

Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có dạng : $n = x^2 + 5y^2$ với x, y là các số nguyên .

1/ Chứng minh rằng nếu n và m là 2 số thuộc M thì $n.m$ cũng thuộc M .

2/ Số a thuộc M được gọi là số cơ bản nếu a không chia hết cho bất kỳ số nào khác thuộc M , trừ hai số là 1 và a . Có thể tìm được hay không có các số thuộc M chúng có thể biểu diễn thành tích của hai số cơ bản bằng hai phương pháp khác nhau .

3/ Chứng minh rằng tồn tại trong M vô số các số cơ bản .

Hướng dẫn

1/ Giả sử ta có : $n = a^2 + 5b^2$ và $m = c^2 + 5d^2$

$$\text{Đề thấy } n.m. = (ac - 5bd)^2 + 5(ad + bc)^2$$

2/ Có thể tìm được , chẳng hạn : $84 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 2^2 + 5 \cdot 4^2$

Ở đó :

$$4 = 2^2 + 5 \cdot 0^2 ; 6 = 1^2 + 5 \cdot 1^2 ; 14 = 3^2 + 5 \cdot 1^2 ; 21 = 4^2 + 5 \cdot 1^2$$

Sau đó chỉ cần chứng tỏ rằng các số 4, 6, 14, 21 là các số cơ bản của tập hợp M . Tất cả các số thuộc M nhỏ hơn 21 chỉ là 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 14 ; 16 ; 20 ; 21 trong đó 16 và 20 không phải là số cơ bản .

3/ • Giả sử ngược lại chỉ có n số cơ bản : $b_1, b_2, \dots, b_n$

• Gọi : $B = 1 + 5(b_1b_2 \dots b_n)^2$ thì B thuộc tập M . B không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số cơ bản $b_1, b_2, \dots, b_n$. Do đó B là số cơ bản , hơn nữa B khác tất cả các số $b_1, b_2, \dots, b_n$: Vô lý

• Suy ra : trong M có vô số các số cơ bản .

Bài 102

Chứng minh rằng không thể biểu diễn bất kỳ một số nguyên tố nào thành tổng các bình phương của hai số tự nhiên theo hai cách khác nhau .

Giải

Giả sử ngược lại , tồn tại số nguyên tố P thoả mãn :

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \text{ với } a \neq b ; c \neq d \text{ và } a \neq c .$$

Không làm mất tính chất tổng quát có thể giả sử rằng :

$$a > b ; c > d \text{ và } a > c$$

$$\text{Xét : } p^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \quad (1)$$

$$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \quad (2)$$

$$= (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 \quad (3)$$

$$\text{Xét tích : } (ac + bd)(ad + bc) = (a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab$$

$$\text{Hay : } (ac + bd)(ad + bc) = p(ab + cd)$$

$$\text{Suy ra : } p \mid ac + bd \text{ hoặc } p \mid ad + bc$$

$$\square \text{ TH}_1 : p \mid ac + bc \Rightarrow p^2 \mid (ad + bc)^2$$

$$\text{Theo (3) ta có : } p^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 \Rightarrow p^2 \mid (ac - bd)^2 .$$

$$\text{Nếu : } (ac - bd)^2 \neq 0 \text{ thì vô lý .}$$

$$\text{Vậy : } (ac - bd)^2 = 0 \Rightarrow ac - bd = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{c} . \text{ Vô lý vì trái với}$$

$$\text{giả sử } a > b \text{ và } c > d$$

$$\square \text{ TH}_2 : p \mid ac + bd \Rightarrow p^2 \mid (ac + bd)^2$$

$$\text{Theo (2) ta có : } p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$\Rightarrow p^2 \mid (ad - bc)^2 \Rightarrow (ad - bc)^2 = 0$$

$$\Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\text{Vì } a > c \Rightarrow b > d \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2 + d^2 . \text{ Vô lý vì trái với giả sử : } p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

Điều vô lý chứng tỏ : không thể biểu diễn bất kỳ số nguyên tố nào thành tổng các bình phương của hai số tự nhiên bằng cách khác nhau .

Bài 103

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có :

$$B = n^2 + 3n + 5 \text{ không chia hết cho } 121 .$$

Hướng dẫn

Giả sử ngược lại có số a để cho : $B = a^2 + 3a + 5$ là bội số của 121.

Khi đó : $a^2 + 3a + 5 = 121b$ hay $(2a + 3)^2 = 11(44b - 1)$ (vô lý)

□ Cách khác : $B = (a + 7)(a - 4) + 33$.

Nếu : $B : 121$, thì : $B : 11 \Rightarrow (a + 7)(a - 4) : 11$

$\Rightarrow (a + 7) : 11$ và $(a - 4) : 11$ Vô lý.

(vì 11 là nguyên tố và $(a + 7) - 9a - 4 = 11$).

Bài 104

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có :

1/ $n^2 + 11n - 10$ không chia hết cho 49.

2/ $n^2 + n + 10$ không chia hết cho 9.

3/ $n^2 + 9n + 12$ không chia hết cho 121.

Hướng dẫn

Biểu diễn : $1/(n + 9)(n + 2) - 28$

$2/(n + 2)(n - 1) + 12$

Bài 105

Giải bằng hai cách :

• Chứng minh trực tiếp.

• Chứng minh gián tiếp.

Bài toán sau : Giả sử a, b, m, n là các số thực thoả mãn hệ thức $a^2 + b^2 = 1$ và $m^2 + n^2 = 1$. Chứng minh : $-1 < am + bn \leq 1$

Bài 106

Hãy chứng minh bằng ba phương pháp :

• Tổng hợp

• Phân tích đi lên

• Phản chứng

Mệnh đề : “ Nếu x và y là hai số thực thuộc đoạn

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ thì ta có bất đẳng thức $\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos y \leq \cos \frac{x+y}{2}$ ”

Bài 107

Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, chứng minh rằng : Nếu bốn số thực $a_1; a_2; b_1; b_2$ thoả mãn điều kiện : $a_1a_2 = 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình : $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ hoặc $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ phải có nghiệm.

Hướng dẫn

Giả sử có : $a_1a_2 = 2(b_1 + b_2)$; mà : $a_1^2 < 4b_1$; $a_2^2 < 4b_2$

Ta suy ra điều vô lý

Bài 108

Trong một quyển vở bài tập ngoại khóa của một học sinh Lớp 10, người ta đọc thấy những dòng ghi chép sau đây :

1/ Để trong ba số a, b, c có ít nhất hai số bằng nhau cần và đủ là : $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

2/ Để một tứ giác là hình chữ nhật cần và đủ là tứ giác đó có các đường chéo bằng nhau

3/ Tích : $ab = 0$ chỉ khi $a = 0$

4/ Để tích hai số là một số lẻ . điều kiện cần là một trong hai số đó là số lẻ .

5/ Để hàm số : $y = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của x , điều kiện cần và đủ là $2a, a + b, c$ là các số nguyên .

6/ Bất đẳng thức : $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$ đúng chỉ khi $(x ; y)$ là nghiệm thực của phương trình : $2x + 4y = 1$

7/ Phương trình bậc hai : $x^2 - 2x + a = 0$ có hai nghiệm dương khi và chỉ khi a dương

8/ Phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt đều âm chỉ khi $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} < 0$

9/ Phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối nhưng trái dấu khi và chỉ khi $b = 0$

10/ Một tứ giác có 2 đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi tổng các bình phương hai cạnh đối diện bằng nhau .

Hãy cho biết trong 10 mệnh đề trên , mệnh đề nào đúng , mệnh đề nào sai ? Tại sao ?

Bài 109

Tìm sai lầm trong chứng minh sau :

$$\text{Chứng minh rằng : } \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

Hướng dẫn

$$\text{Thật vậy , biến đổi : } VT = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nhân cả hai vế với } \sin \frac{\pi}{5} : 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\text{Do đó : } \cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5}$$

Bởi vì : $\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi$ nên đẳng thức cuối cùng đúng . Từ đó suy ra đẳng thức được chứng minh

Bài 110

Một học sinh giải phương trình : $2^x \cdot 27^{\frac{x}{x+2}} = 6$ như sau :

$$2^x \cdot 3^{\frac{3x}{x+2}} = 2.3 \Rightarrow 2^{x-1} \cdot 3^{\frac{3x}{x+2}-1} = 1 \Rightarrow 2^{x-1} \cdot x^{\frac{2x-2}{x+2}} = 1$$

$$\text{Do đó : } 2^{x-1} = 1 \text{ và } 3^{\frac{2x-2}{x+2}} = 1$$

Kết luận : $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Hãy chỉ rõ sai lầm trong cách giải trên . Sai lầm do phạm yêu cầu nào của một chứng minh toán học . Hãy đưa ra một cách giải đúng .

Bài 111

Dùng phương pháp phản chứng , chứng minh rằng :

1/ Nếu $a ; b ; c$ là ba số thực thoả mãn đồng thời : $A = a + b + c$, $B = ab + bc + ca$ và $C = abc$ là các số dương thì cả ba số $a ; b ; c$ đều dương

2/ Nếu $a ; b ; c$ là ba số thực thoả mãn đồng thời $A = a + b + c < 0$; $B = ab + bc + ca > 0$ và $C = abc < 0$ thì cả ba số a, b, c đều âm

Bài 112

Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương, chứng minh rằng :

1/ Với mọi $a ; b ; c$ ta có : $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(c + b)$

2/ Với mọi số thực không âm $a ; b ; c$ ta có :

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

3/ Với $a \geq 1, b \geq 2$ ta có bất đẳng thức : $ab \geq a + b$

4/ Với mọi a ta có : $(a - 1)(a - 3)(a - 4)(a - 6) + 10 > 0$

5/ Với mọi a ta có : $4a^2 - 4a^3 + 5a^2 - 2a + 1 \geq 0$

6/ Với mọi $a ; b ; c$ ta có : $(a + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

7/ Với mọi $x ; y ; z > 0$ và $z \geq y \geq x$ ta có :

$$y \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) + \frac{x+z}{y} \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) (x+z)$$

8/ Với mọi a, b thoả mãn : $|a| \leq 1 ; |b| < 1$ ta có :

$$|a + b| \leq |1 + ab|$$

Bài 113

Dùng phương pháp phân tích đi xuống, giải bài toán sau đây :

Cho đường tròn $(O ; R)$ và hai đường kính AB vuông góc với CD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AO và OB ; CN cắt đường tròn tâm O tại I ; IM cắt đường tròn tâm O tại J ; CM cắt đường tròn tâm O tại A . Chứng minh rằng các đường thẳng CM và IM không vuông góc với nhau

Bài 114

Giải các bài toán :

1/ Các đường chéo AC và BD của hình thang cân $ABCD$ ($AD \parallel BC$) cắt nhau tại O tạo thành $\widehat{AOD} = 60^\circ$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OB, CD . Chứng minh tam giác MNP đều

2/ Cho ngũ giác $ABCDE$ có $AE = a$. Gọi $M; N; P; Q$ lần lượt là trung điểm của các đường thẳng $AB; BC; CD$ và DE . Gọi $S; R$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng MP và QN . Chứng minh rằng SR song song với AE và $SR = \frac{a}{4}$

3/ Với giá trị nào của tham số a phương trình :

$3x^2 + 4(a - 1)x + a^2 - 4a + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $\sin$ và $\cos$ của cùng một góc

4/ Chứng minh các góc nhọn thoả mãn hệ thức :

$\sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha$ thì $\alpha < \beta$

Bài 115

Cho bài toán :

Dựng một đường tròn đi qua hai điểm $A; B$ phân biệt cho trước đồng thời tiếp xúc với một đường thẳng d cho trước

Hãy giải bài toán trên và sử dụng phương pháp phân chia khái niệm để biện luận về số nghiệm hình ?

Bài 116

Hãy giải và sử dụng phương pháp phân chia khái niệm để biện luận về số nghiệm hình của bài toán sau :

Cho ba đoạn thẳng bằng nhau AB, CD, EF . Hãy dựng một điểm M sao cho các tam giác AMB, CMD, EMF có diện tích bằng nhau.

Bài 117

Cho các vị từ $F(y)$ và $G(y)$ xác định trên tập hợp A gồm tất cả các tam thức bậc 2 : $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$

$F(y) = \{ \text{Tam thức bậc 2 : } y = ax^2 + bx + c > 0, \forall x \}$

$G(y) = \{ \text{Tam thức bậc 2 : } y = ax^2 + bx + c \text{ có } b^2 - 4ac < 0 \}$

Các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là định lý :

1/ $\forall y \in A, F(y) \Rightarrow G(y)$

2/ $\forall y \in A, G(y) \Rightarrow F(y)$

Chương 5: HÀM LOGIC MỜ VÀ HÀM LOGIC ĐA TRỊ

§1 MỖI MỘT LẦN NỀN TẢNG TOÁN HỌC BỊ KHỦNG HOẢNG LÀ MỘT BƯỚC PHÁT TRIỂN

Trong chương trình Trung học nước nhà ngay từ lớp 6 và cụ thể hơn nữa ở lớp 10, hệ thống sách giáo khoa thống nhất trên toàn cõi Việt Nam đã trình bày cơ bản về các tập hợp cổ điển (ensemble ; set) như một khái niệm không được định nghĩa.

Xuyên suốt từ đó đến những năm đầu của bậc đại học và ngay cả đến các bậc sau đại học : gọi X là tập hợp các phần tử đang xét và để chỉ một phần tử x của X thuộc vào một tập A nào đó ta viết $x \in A$ và nếu phần tử đó không thuộc tập A ta cũng viết $x \notin A$.

Với thiên tài G.CANTOR và tập thể nhiều nhà toán học đương thời với ông đã đem hết tài năng và trí lực dồn vào công việc xây dựng một mô hình Toán học tổng quát (la mathématique) mang tính hiện đại hầu thay thế các mô hình Toán được cho là rời rạc và cổ điển (les mathématiques). Lý thuyết tập hợp đã được xây dựng thành công và đã được đánh giá là một sự khởi đầu rạng rỡ !

Công việc đang trôi chảy tốt đẹp thì gặp một cản trở vào năm 1897, BURALI-FORTI khi nghiên cứu về lý thuyết các bản số và các số xếp thứ tự (Théorie des cardinaux et des ordinaux) đã lưu ý rằng có hiện tượng xảy ra PARADOXES (sự nghịch lý) : Nghĩa là không thể có một tập hợp được thành lập bởi các

Ferdinand louis Philippe Cantor với tên gọi thân thương, Geoger Cantor : sinh ngày 03-03-1845 ở Saint-Petersbourg , trong một gia đình nghệ sĩ gốc Do thái, hồi bé ở Nga ; lớn lên học tập tốt nghiệp và thành công ở Đức. Ông mất ngày 06-01-1918 ở Halle trong một bệnh viện điều trị bệnh căng thẳng tinh thần.

ordinaux (còn gọi là thứ số) : bởi vì tập này có tính chất tối thứ tự (bien ordonné) và như vậy tập này sẽ đẳng hình (isomorphe) với một trong các đoạn (segments) của chính nó. Điều này vô lý khi nói về tập các cardinaux (còn gọi là chính số) hay khi nói về tập hợp của các tập hợp!

Ví dụ G.BONLIGAND : để cụ thể chúng ta xét một thí dụ đơn giản của G.Bonligand về tập hợp của các tập hợp như sau về một tập hợp nào đó có tính chất p nếu nó nhận chính nó làm một phần tử.

Chẳng hạn mọi bảng mục lục (index) của một quyển sách đều có ghi chính nó trong bảng mục lục ấy : là một trong các chương (bài, phần, ...) đã được in trong sách đó. Chúng ta gọi $\bar{p}$ là một mệnh đề trái ngược với p (nghĩa là bảng mục lục của một quyển sách nào đó không ghi chính nó vào bảng mục lục của chính quyển sách đó).

Bây giờ ta gọi P là tập hợp của các tập hợp $\bar{P}$ có tính chất $\bar{p}$. Liệu P có tính chất p hay không ? Ta xét hai khả năng sau :

□ Giả sử (câu trả lời là không) P không có tính chất p , tức là có tính chất $\bar{p}$ nên P là một trong các tập $\bar{P}$ và do đó P có tính chất p (dẫn đến nghịch lý !).

□ Giả sử (câu trả lời là có) P có tính p , tức là sẽ phải nhận chính P là một phần tử và do đó P là một trong các tập $\bar{P}$, như vậy P có tính chất $\bar{p}$ (cũng dẫn đến nghịch lý !).

➤ **Kết luận** : từ hai khả năng trên chúng ta đều đi tới PARADOXE một sự nghịch lý.

➤ Đứng trước sự đe dọa lý thuyết tập hợp của mình bị sụp đổ, khoảng tháng 9 năm 1899 trong bức thư gửi R.DEDEKIND, chính G.CANTOR đã xác nhận rằng : chúng ta sẽ đi đến một nghịch lý khi nói tới tập của các cardinaux (chính số). Và rất cần một số bổ sung !

Richard Dedekind sinh ngày 06-10-1831 ở Đức, tốt nghiệp Đại học Göttingen. Năm 21 tuổi bảo vệ thành công luận án Tiến sỹ Toán học. Ông mất năm 1916, thọ 85 tuổi, để lại cho đời sau các công trình khảo sát lý thuyết tập hợp cùng với Cantor, và cấu tạo số vô tỷ bằng lát cắt Dedekind trên $\mathbb{Q}$.

Đối với các nhà toán học bảo thủ khác với trường phái Cantor thì họ đã vui mừng cho rằng sự hiện diện của **PARADOXE** là hiện tượng tương tự đối kháng như hình học Euclide và hình học phi Euclide : muốn giải quyết nghịch lý chỉ cần đặt vào lý thuyết tập hợp một tiên đề (axiome) đầy đủ và đúng vị trí là đủ !

Và, người ta đã đề nghị ra nhiều tiên đề chọn (axiome du choix) cho lý thuyết tập hợp theo kiểu của VON NEUMANN, ZEREMELO-FRAEUKEL . Còn bản thân G.CANTOR lại đề nghị phân biệt hai loại tập hợp : các bội tập (les multiplucités) và các tập hợp thông thường (les ensembles) và như vậy luôn tránh được hiện tượng **PARADOXE**.

Tiếp theo sau đó chính hai ông G.CANTOR và VON NEUMANN cùng phân biệt hai loại tập : những tập hợp (les ensembles) và những lớp (les classes), vì những lớp phân biệt với những tập ở chỗ những lớp không thể bị đặt bên trái dấu $\in$ muôn thuở.

Khởi đầu từ năm 1925 (tập I) đến năm 1927 (tập II, III) tác phẩm Principia Mathematica được hoàn thành, ở Đại học Cambrigde do cặp đôi A.N.WHITEHEAD và B.RUSSELL với những trần trở : **không thể để lý thuyết tập hợp bị kém tổng quát do con người tự đưa vào đó sự giới hạn khi phải phân ra hai loại tập hợp**. Và cặp đôi đó đã chỉ ra trong lý thuyết tập hợp luôn luôn không có các nghịch lý như đã được đưa ra suốt từ năm 1897. Cụ thể là việc định nghĩa các tập hợp chứa nghịch lý trong ví dụ của G.BOULIGAND đã vi phạm nguyên lý (principe) " **một phần tử mà sự định nghĩa hàm súc toàn thể các phần tử của một tập hợp thì không thể thuộc về tập hợp ấy** ", và chính B.Russell đã nêu ra ví dụ sau :

" Một bác thợ hớt tóc trong một thôn tuyên bố rằng bác ta đã cạo mặt cho tất cả quý ông trong thôn ngoại trừ những quý ông tự cạo mặt lấy. Muốn tiện lợi gọi ta gọi lớp quý ông trong thôn phải nhờ đến bác thợ cạo mặt là A và lớp quý ông trong thôn tự cạo mặt lấy cho mình là B. Câu hỏi được đặt ra là : **Bác thợ có tự cạo mặt lấy cho mình hay không ?**

Hiển nhiên là tồn tại hai khả năng trả lời :

□ Nếu trả lời là bác thợ tự cạo mặt lấy như vậy bác thuộc lớp B, nên theo lời tuyên bố thì chính bác sẽ không cạo mặt cho quý ông nào cả : nghịch lý !

□ Nếu trả lời là bác thợ không tự cạo mặt lấy như vậy bác thuộc lớp A, nên theo lời tuyên bố thì bác lại tự cạo mặt cho chính mình : ta lại có sự nghịch lý !

Bằng thí dụ đơn giản trên chính RUSSELL đã cất được sự nghịch lý bằng nguyên lý nêu trên, thực vậy chính phần tử " bác thợ hớt tóc " mà sự định nghĩa hàm súc toàn thể các phần tử trong thôn, nên bác thợ hớt tóc không thể thuộc về tập ấy !

Thê rồi bằng tính thiện của loài người khi ta đi nghiên cứu toán ; dạy toán và làm các dịch vụ về toán . . . đại đa số người đã gạt đi và để ra một bên các nghịch lý ngỡ hầu duy trì sự nghiệp của tiên nhân trong truyền thống đạo lý là phải phát triển toán học hiện đại. Chính HILBERT đã nói " không ai có quyền đuổi chúng ta ra khỏi cái thiên đường mà G.CANTOR đã tạo ra ". Cũng chính bằng mọi lý lẽ của tính thiện, con người đã đẩy lý thuyết tập hợp bước một bước đầy đà nữa rất dài như vô tận.

Trở lại với toán sử, mọi nền tảng của toán học luôn luôn do chính con người đặt ra vào bao giờ cũng gặp sự khủng hoảng tạo ra từ các nghịch lý . . . , khó khăn đó đã xảy ra mọi nơi và đã được loài người đồng cảm và hiểu được có lẽ khoảng từ thời PYTHAGORE khi gặp phải các đại lượng không đo được là đường chéo hình vuông vô tỷ, chu vi đường tròn Xuyên suốt đến ngày nay con người đã tưởng sẽ tìm ra được nền tảng vững chắc cho Toán học, nhưng kết quả vẫn vô hiệu vì sự xuất hiện của các nghịch lý. Do đó đến giây phút này câu kết luận về nền tảng của toán vẫn là :

" Không thể sát nhập toán học vào một hình thức luận được (formalisme logique) " (Phóng tác bài đọc của một nhà sư phạm GS DINH ĐỨC MẬU)

§2 MỘT BƯỚC PHÁT TRIỂN THỰC DỤNG CỦA LÝ THUYẾT TẬP HỢP

Từ trước ta đã nghiên cứu các hàm logic mệnh đề ; logic cổ điển mà cả biến và hàm đều nhận một trong hai chân giá trị đúng (được viết là 1) hoặc sai (được viết là 0). Trên nền tảng các tập hợp cổ điển được xây dựng phát triển suốt từ thời G.Cantor.

Nhưng thế giới thực của chúng ta rất phức tạp , cái phức tạp cơ bản mà ta cần bàn đến ở đây là do những thông tin kém chính xác về định lượng và định tính hoặc do những từ ngữ sử dụng lúc định nghĩa các khái niệm mà tự bản thân nó chứa đựng sự mập mờ về ý nghĩa hay không rõ ràng ; đó là chưa kể việc khó mà mô tả được một cách chính xác một từ ngữ mờ ngay cả việc đôi khi phải vận dụng một lúc đến hàng tỷ dữ liệu, và khả năng sử lý chúng vượt quá khả năng của mọi ngôn ngữ hiện đại kể cả ngôn ngữ máy. Chẳng hạn :

- Khi chúng ta nói đến “ *một nhóm học sinh khá* ”. với quy ước các dải điểm tổng kết trung bình từ “ 6,6 đến 8,5 ” Vậy thế nào đúng là khá ? Khái niệm : “ *Một nhóm học sinh khá* ” như vậy đã không được định nghĩa một cách rõ ràng như các khái niệm thông thường về tập hợp (tập hợp cổ điển).

- Cũng như thế khi phân biệt hai vật là “*đen*” hay “*trắng*” ; “*lớn*” hay “*nhỏ*” để thành lập các tập hợp (tập hợp phát triển) thì quả thật là khó . Vì nếu có những vật không hẳn là “*đen*” hay những vật không hẳn là “*trắng*” , tệ hại hơn nếu một vật có thể là “*lớn*” đối với một người này nhưng lại được xem là “*nhỏ*” đối với người khác. Như thế các khái niệm “*đen-trắng*” ; “*lớn - nhỏ*” đó là những khái niệm mập mờ chưa được định nghĩa chính xác.

- Chúng ta hãy để ý một cách tương tự khi nói đến một “*đồng phế liệu*” , một “*đàn chim bay*” “*tập hợp các học sinh ngoan trong lớp*” , “*tập hợp các em học sinh yêu toán của trường*” , “*tập hợp các phân số có giá trị gần đúng π* ” ,

" tập hợp các phương án sản xuất đáp ứng nhu cầu thương trường của một xí nghiệp " . . . với những ý tưởng tương tự, ta sẽ được một khái niệm mới : Tập mờ và Logic mờ .

Khi con người đem lý thuyết tập hợp vào các ứng dụng thực tế, có thể kể đến từ khi nhà toán học Mỹ LOTFI ZADEN mạnh mẽ khởi xướng, mãi cho đến năm 1965 : chính ông đã đưa ra khái niệm hàm thuộc tính (membership function) để định nghĩa tập mờ. Từ đó lại có một hướng mới cho lý thuyết tập hợp. Việc nghiên cứu tập mờ và logic mờ trở thành một lĩnh vực mới mẻ của Toán học và Tin học, ta còn gọi là Toán học mờ (Fuzzy Mathematics).

Hiện nay, chủ tịch Hội toán học mờ Quốc tế bầu được ông D.DUBOIS một nhà toán học Pháp làm chủ tịch và Hội đã thu hút đông đảo các nước hội viên trên thế giới. Mỗi nước hội viên luôn có hội Toán học mờ riêng biệt. Hàng năm trong Hội đã đạt số báo cáo thành công đến hàng nghìn công trình khoa học và các ứng dụng như : Logic mờ, Thông tin mờ, Topô mờ, Độ đo mờ, Quản trị mờ, . . . , tiếp nữa là các Lý thuyết vận trù học, Lý thuyết khả năng, Lý thuyết trí tuệ nhân tạo, Lý thuyết quy hoạch, Lý thuyết quyết định, Lý thuyết đối thoại giữa chủ và computer (intepactive methods), Lý thuyết tối ưu phi tuyến, Lý thuyết điều khiển, Lý thuyết hệ thống, Lý thuyết xấp xỉ . . . trong môi trường mờ.

Ngoài ra Lý thuyết tập mờ làm chủ đạo trong hệ thống mờ đã được ứng dụng với hiệu quả thành công đột biến trong mọi lĩnh vực công nghệ : quản lý, kinh tế, môi trường, y học, công nghiệp, nông nghiệp, . . . , tin học !

§§ TẬP MỜ (TẬP FUZZY)

3.1) VÍ DỤ MỜ ĐẦU

Khi xét tập hợp A các học sinh trong một lớp học của một trường học, thì với một học sinh x của trường đó hiển nhiên luôn xảy ra hai khả năng : $x \in A$ hoặc $x \notin A$.

Nhưng khi xét tập F các học sinh ngoan của chính trường học đó, một học sinh x của trường thì hai khả năng $x \in F$ hoặc $x \notin F$ không còn là việc hiển nhiên. Lý giải điều ấy thật đơn giản : đó là vì khái niệm " ngoan " không thể định nghĩa tuyệt đối đúng để mọi người hiểu nó một cách tuyệt đối chính xác. Lúc đó ta nói " ngoan " là một khái niệm mờ.

Khi xét đến khái niệm " *mờ* " hay những khái niệm " *không được hay không có phương tiện định nghĩa một cách rõ ràng* " thì các phần tử của chúng không đạt được một tiêu chuẩn chính xác về tính " *thuộc về* " (thuộc về một tập hợp nào đó) hay thuộc tính của chúng. Nhưng đó lại chính là những khái niệm cơ bản ban đầu để xây dựng TẬP MỜ hay tập TẬP FUZZY .

Tập mờ F trong không gian các đối tượng X được đặc trưng bằng hàm thuộc tính (hoặc hàm hội viên) đối với những tính chất chủ yếu của x là : $p_1 ; p_2 ; \dots ; p_n$ và hàm thuộc tính được ký hiệu :

$$\rho_F(x = (p_1 ; p_2 ; \dots ; p_n))$$

Trở lại ví dụ mở đầu với các tính chất tương tự như tính chất " ngoan " được ký hiệu là $\rho_F(x)$ lúc đó người ta gán cho x (mỗi học sinh x) một độ $\rho_F(x)$ nhất định :

$$\rho_F : X \longrightarrow [0 ; 1]$$

$$x \longmapsto \rho_F(x)$$

với : $\left\{ \begin{array}{l} \rho_F \text{ là hàm membership (hàm hội viên, hàm thuộc tính)} \\ X \text{ là tập các đối tượng } x \in F \end{array} \right.$

Hàm ρ_F có tập giá trị là đoạn $[0 ; 1]$; hay giá trị $\rho_F(x)$ tương ứng đó dao động trên đoạn $[0 ; 1]$; nó chỉ mức độ thuộc tính (mức độ phụ thuộc) của phần tử x trong tập mờ F .

Do định nghĩa trên khi xét một tập mờ F tùy ý và một phần tử x cũng tùy ý có thuộc vào F hay không và mức độ thuộc F ra sao ? sẽ được thể hiện như sau :

- $\rho_F(x) = 1 \Rightarrow x$ được xem là chắc chắn thuộc F

• $\rho_F(x) = 0 \Rightarrow x$ được xem là chắc chắn không thuộc F

• $0 < \rho_F(x) < 1 \Rightarrow x$ được xem là thuộc F với mức độ $\rho_F(x)$

3.2 ĐỊNH NGHĨA TẬP MỜ-TẬP MỨC ĐỘ MỜ (TẬP MỨC)

□ ĐN₁ : Tổng quát tập mờ F là tập hợp tất cả các cặp thứ tự :

$$F = \{(x ; \rho_F(x)) | x \in X\}$$

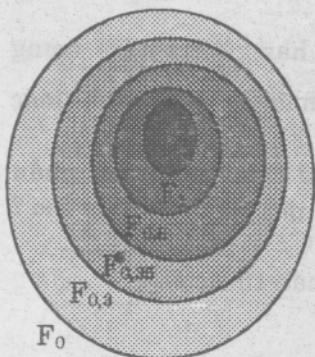
Riêng trong F các cặp thứ tự $(x ; \rho_F(x))$, với $\rho_F(x) = 0$ thường được bỏ qua mà không cần liệt kê hay mô tả.

Dù thế nào đi nữa việc xác định và gán cho học sinh x độ ngoại $\rho_F(x)$ không phải là dễ dàng, nó phải dựa vào các dữ liệu quản lý khách quan và chủ quan của BGH, GVCN, GVBM, ... Nhưng khẳng định với khái niệm tập mờ luôn giúp cho việc phân loại học sinh tương đối chính xác và linh hoạt hơn. Vấn đề tiếp theo là việc biểu diễn tập mờ bằng các hình thức sơ cấp như thế nào ?

□ ĐN₂ : Cho tập mờ F , nếu tồn tại số thực $\alpha \in [0 ; 1]$, ta định nghĩa tập mức (tập mức độ mờ) F_α của F như sau : $F_\alpha = \{(x ; \rho_F(x)) \geq \alpha\}$

➤ Từ định nghĩa của tập mức F_α , ta có ngay F_α là những tập cổ điển thông thường (set) ; $\forall \alpha \in [0 ; 1]$.

➤ Nếu có $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots < \alpha_n < \dots < 1$
 $\Rightarrow F_0 \supset F_{\alpha_1} \supset F_{\alpha_2} \supset \dots \supset F_{\alpha_k} \supset \dots \supset F_{\alpha_n} \dots \supset F_1$



Ví dụ₁ : Ta minh họa các tập mức : $F_0 ; F_{0.3} ; F_{0.35} ; F_{0.8} ; F_1$ với $F_0 \supset F_{0.3} \supset F_{0.35} \supset F_{0.8} \supset F_1$ và độ đậm sẽ mô tả mức độ thuộc tính của $x \in X$ vào tập mờ F , độ đậm mờ dần từ trong ra ngoài, từ F_1 đến F_0 .

Ví dụ₂ :

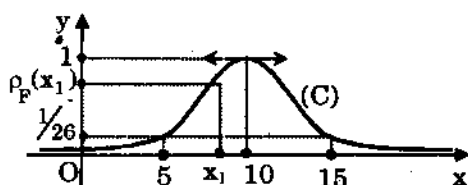
Một tập mờ F gồm các số thực gần bằng 10 được định

nghĩa bởi hàm thuộc tính có

công thức $\rho_F(x) = \frac{1}{1 + (x - 10)^2}$;

và đồ thị (C) : $y = \rho_F(x)$ cho

bởi hình vẽ bên :



Ví dụ₃ :

Một tập mờ F các số nguyên gần bằng 20 có thể được cho bởi cách liệt kê như sau :

$$F = \{(17 ; 0,1), (23 ; 0,1), (18 ; 0,15), (12 ; 0,15), (19 ; 0,8), (21 ; 0,8), (10 ; 1)\}$$

Sự liệt kê này xác định hàm $\rho_F(x)$.

3.3 BIỂU DIỄN TẬP MỜ

Để chặt chẽ, giả sử chúng ta đang xem xét các đối tượng hay các phần tử nào đó trong không gian X

Nếu X gồm n phần tử $X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n$ lúc đó ta viết :

$$\{X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n \text{ thay cho } X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$$

$$\{X = X_1 \odot X_2 \odot \dots \odot X_n \text{ thay cho } X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$$

Tương tự một tập mờ F có thể viết như sau :

$$F = \rho_1/X_1 \oplus \rho_2/X_2 \oplus \rho_3/X_3 \oplus \dots \oplus \rho_n/X_n \quad (1)$$

Như thế cách viết ở (1) là cách liệt kê toán học các phần tử khác nhau ở cùng một mức độ thuộc tính đối với tập mờ F

Ta có biểu diễn thu gọn $\Rightarrow F = \sum_F^{(1)} \rho_F(X_i)/X_i ; \forall i \in \overline{1; n}$

Do đó ta được hai trường hợp đặc biệt như sau :

$$\rho_0(x) = 0 \text{ và } \rho_F(x) = 1 ; \forall x \in X$$

3.4 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP MỜ

Dựa trên các đề xuất của LOTFI ZADEN với mỗi phần tử x trong không gian X ta định nghĩa và ký hiệu các phép toán $\cup$ (hội) ; $\cap$ (giao) và $\bar{A}$ (phần bù) cho hai tập mờ A và B trong X bằng các giá trị

$\rho_{A \cup B}(x)$; $\rho_{A \cap B}(x)$; $\rho_{\bar{A}}(x)$ như sau :

$$\square \rho_{A \cup B}(x) = \rho_A(x) \vee \rho_B(x) = \max\{\rho_A(x) \vee \rho_B(x)\}$$

$$\square \rho_{A \cap B}(x) = \rho_A(x) \wedge \rho_B(x) = \min\{\rho_A(x) \wedge \rho_B(x)\}$$

$$\square \rho_{\bar{A}}(x) = 1 - \rho_A(x)$$

Thí dụ : Cho $X = \{a; b; \square; \Omega; d\}$ và $A; B$ là các tập trong X như sau :

$$A = 1/b \oplus 0,3/\square \oplus 0,5/\Omega \oplus 0,125/d$$

$$B = 0,35/a \oplus 0,75/b \oplus 0,75/\Omega \oplus 0,215/d$$

$$C = 0,35/a \oplus 0,5/\square \oplus 1/\Omega \oplus 0,35/d$$

1/ Xác định $\bar{A}$; $\bar{B}$; $\bar{C}$; $A \cup B$; $A \cap C$; $A \setminus B$; và $\bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C})$

2/ Kiểm tra định luật DEMORGAN còn đúng hay không :

$$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \text{ và } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Giải

1/ Để đơn giản cho quá trình thực hiện phép tính được chính xác ta thành lập bảng xếp các phần tử theo cột , như sau :

	a	b	$\square$	Ω	d
A	0,000	1,000	0,003	0,500	0,125
B	0,350	0,750	0,000	0,750	0,215
C	0,350	0,000	0,500	1,000	0,350

$$\bullet \bar{A} = 1/a \oplus 0,997/\square \oplus 0,500/\Omega \oplus 0,875/d \quad (1)$$

$$\bullet \bar{B} = 0,650/a \oplus 0,250/b \oplus 1/\square \oplus 0,250/\Omega \oplus 0,785/d \quad (2)$$

$$\bullet \bar{C} = 0,650/a \oplus 1/b \oplus 0,500/\square \oplus 0,650/d$$

$$\bullet A \cup B = 0,350/a \oplus 1/b \oplus 0,003/\square \oplus 0,750/\Omega \oplus 0,215/d \quad (3)$$

$$\bullet A \cap B = 0,750/b \oplus 0,500/\Omega \oplus 0,125/d \quad (4)$$

$$\bullet A \setminus B = A \cap \bar{B} = 0,250/b \oplus 0,003/\square \oplus 0,250/\Omega \oplus 0,125/d$$

$$\bullet \bar{B} \cap \bar{C} = 0,650/a \oplus 0,250/b \oplus 0,500/\square \oplus 0,650/d$$

$$\Rightarrow \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) = 1,000/a \oplus 0,250/b \oplus 0,997/\square \oplus 0,500/\Omega \oplus 0,875/d$$

$$2/ \text{ Từ }^{(3)} \bar{A \cup B} = 0,650/a \oplus 0,997/\square \oplus 0,250/\Omega \oplus 0,785/d$$

(5)

$$\Rightarrow^{(1)(2)} \bar{A} \cap \bar{B} = 0,650/a \oplus 0,997/\square \oplus 0,250/\Omega \oplus 0,785/d \quad (6)$$

$$\text{So sánh (4) và (5)} \Rightarrow \bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (7)$$

$$\text{Tương tự : } A \cap B = 0,750/b \oplus 0,500/\Omega \oplus 0,125/d$$

$$\text{Tương tự } \Rightarrow^{(3)} \overline{A \cap B} = 1/a \oplus 0,250/b \oplus 1/\square \oplus 0,500/\Omega \oplus 0,875/d \quad (8)$$

$$\Rightarrow^{(1)(2)} \bar{A} \cup \bar{B} = 1/a \oplus 0,250/b \oplus 1/\square \oplus 0,500/\Omega \oplus 0,875/d \quad (9)$$

$$\text{So sánh (7) và (8)} \Rightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (10)$$

Từ (6) và (9) cho ta định luật DE MORGAN được kiểm chứng vẫn đúng đối với trường hợp các tập mờ (ycbt).

□ Đến đây chúng ta kiểm chứng được sự đúng đắn của các phép toán như sau (phần chứng minh độc giả xem như bài tập) :

$$\bullet_1 \bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\bullet_2 \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bullet_3 A \cup \bar{A} \neq X$$

$$\bullet_4 A \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

Vậy Định luật DE MORGAN vẫn đúng đối với tập mờ (do $\bullet_1$ và $\bullet_2$).

Đặc biệt đối với các tập mờ A của X; phần bù $\bar{A}$ và A có thể đâm lên nhau (do $\bullet_3$ và $\bullet_4$); nghĩa là tính rời nhau của chúng không còn đúng.

§4 LOGIC MỜ (LOGIC FUZZY) – – LOGIC m LỚP

Thực tế phát triển toán và toán ứng dụng vũ bão, không những logic toán chỉ nghiên cứu những hàm logic hai trị mà còn phải nghiên cứu kịp thời đến hệ thống hàm logic đa trị và hàm logic – m lớp. Chẳng hạn sau này khi xét đến đại số chuyển mạch các vectơ : mỗi vectơ nhị phân n thứ nguyên có thể lấy một trong các giá trị của đoạn $[0 ; 2^n - 1]$ hay nói một cách khác đi, lúc đó chúng ta đã nghiên cứu logic 2^n trị.

Tương tự như ở §3, khi nghiên cứu logic mờ và logic m lớp, người ta đã đưa ra các phép toán max và min thay cho hai phép toán or và and (tương ứng). Lúc đó trong logic nguyên thủy (hai hoặc đa trị) mỗi một đại lượng được gán một giá trị khách quan xác định (hoặc xác suất) còn trong logic mờ mỗi một đại lượng lại được gán một giá trị chủ quan dao động giữa đúng và sai.

Các giá trị được gán đó gọi là độ tin cậy (chỉ mức độ đúng) của mệnh đề. Nếu ký hiệu giá trị tin cậy của mệnh đề p là $\mathcal{T}(p)$, ta có : $0 \leq \mathcal{T}(p) \leq 1$

Lúc đó các phép toán mệnh đề trong logic mờ được định nghĩa như sau, và thường được sử dụng trong các lập luận tính toán xấp xỉ :

- $\mathcal{T}(\bar{p}) = 1 - \mathcal{T}(p)$
- $\mathcal{T}(p \vee q) = \max \{ \mathcal{T}(p); \mathcal{T}(q) \}$
- $\mathcal{T}(p \wedge q) = \min \{ \mathcal{T}(p); \mathcal{T}(q) \}$
- $\mathcal{T}(p \Rightarrow q) = \mathcal{T}(\bar{p} \vee q) = \max \{ \mathcal{T}(\bar{p}); \mathcal{T}(q) \}$

Thí dụ : Cho 3 mệnh đề tùy ý : p, q, r với độ tin cậy tương ứng theo thứ tự là $0,2 ; 0,75 ; 0,6$. Hãy cho biết độ tin cậy của các mệnh đề :

$$1/ (p \vee q) \wedge r$$

$$2/ (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

3/ Nhận xét các kết quả trên ?

Giải

$$1/ \text{Ta có : } \tau(p \vee q) = \max \{ \tau(p); \tau(q) \}$$

$$\tau(p \vee q) = \max \{0,2; 0,75\} = 0,75$$

$$\Rightarrow \tau((p \vee q) \wedge r) = \min \{ \tau(p \vee q); \tau(r) \} \\ = \min \{0,75; 0,6\}$$

$$\Rightarrow \tau((p \vee q) \wedge r) = 0,6 \quad (1)$$

$$2/ \text{Tương tự : } \begin{cases} \tau(p \wedge r) = \min \{ \tau(p); \tau(r) \} = \min \{0,2; 0,6\} = 0,2 \\ \tau(q \wedge r) = \min \{ \tau(q); \tau(r) \} = \min \{0,75; 0,6\} = 0,6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) = \max \{ \tau(p \wedge r); \tau(q \wedge r) \}$$

$$\Rightarrow \tau((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) = \max \{0,2; 0,6\}$$

$$\Rightarrow \tau((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) = 0,6 \quad (2)$$

$$3/ \text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow (p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Nghĩa là luật phân phối của phép $\wedge$ đối với phép $\vee$ vẫn còn đúng trong logic mờ.

§5 ĐẠI SỐ MỜ (ĐẠI SỐ FUZZY)

5.1 ĐỊNH NGHĨA : Đại số mờ (Đại số Fuzzy) là hệ thống đại số $(\oplus; \odot; -)$ mà trong đó :

(i) : B là một tập mờ nào đó

(i²) : Hai phép toán hội giao " $\oplus$ " và " $\odot$ " được định nghĩa như sau trên B :

$$\begin{cases} x \oplus y = \max\{x; y\}; \forall x; y \in B \\ x \odot y = \min\{x; y\}; \forall x; y \in B \end{cases}$$

(i³) : Riêng phép toán phủ định " $-$ " được định nghĩa là :

$$\bar{x} = 1 - x; \forall x \in B$$

5.2 TÍNH CHẤT : từ định nghĩa đại số mờ $(B; \oplus, \odot, -)$, ta chứng minh được một số tính chất sau ; $\forall x_1; x_2; x_3 \in B$:

- ₁ : $x \oplus x = x$
- ₂ : $x \odot x = x$
- ₃ : $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
- ₄ : $x_1 \odot (x_2 \odot x_3) = (x_1 \odot x_2) \odot x_3$
- ₅ : $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
- ₆ : $x_1 \odot x_2 = x_2 \odot x_1$
- ₇ : $x_1 \odot (x_2 \oplus x_3) = \overline{x_1 \odot x_2} \oplus x_1 \odot x_3$
- ₈ : $\overline{x_1 \oplus x_2} = \overline{x_1} \odot \overline{x_2}$
- ₉ : $\overline{x_1 \odot x_2} = \overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$
- ₁₀ : $x \oplus \overline{x} = \max \{x; \overline{x}\}$
- ₁₁ : $x \odot \overline{x} = \min \{x; \overline{x}\}$
- ₁₂ : $x_1 \odot (x_1 \oplus x_2) = x_1$

§6 HÀM MỜ

Xét một ánh xạ trong đại số mờ $(B; \oplus; \odot; -)$ như sau $f: B \rightarrow B$ thì f sẽ được gọi là hàm logic mờ hay hàm mờ

□ **Thí dụ 1** : Xét biểu thức hàm mờ f như sau :

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1 \odot x_2 \odot x_3 \oplus \overline{x_1 \odot x_1 \odot x_2 \odot x_3} \oplus \overline{x_1 \odot x_2} \odot x_2 \quad (1)$$

Thì ta cần chú ý trong (1), chúng ta không được rút gọn f theo kiểu :

$$\begin{cases} x \oplus \overline{x} = x_2 \oplus \overline{x_2} = 1 \\ \overline{x_1 \odot x_1 \odot x_2 \odot x_3} = \overline{x_1 \odot x_2} \odot x_2 = 0 \end{cases}$$

Nhưng đối với một hàm biến mờ tùy ý ta luôn luôn nhận được các quan hệ sau đây để rút gọn biểu thức hàm đó (độc giả tự chứng minh, như một bài tập) :

$$\begin{aligned} x \oplus \overline{x} &\geq 0,5 \\ x \odot \overline{x} &\leq 0,5 \end{aligned}$$

□ Thí dụ 2₁ : $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \odot \overline{x_2} (x_3 \oplus \overline{x_3}) = x_2 \odot x_2$

□ Thí dụ 2₂ : Và $\Rightarrow^{(1)} f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \odot (x_1 \odot x_3 \oplus \overline{x_1} \odot \overline{x_3})$

§7 ĐẠI SỐ m LỚP

Giả thiết luôn cho một hàm mờ f có tập giá trị là đoạn $[0 ; 1]$, và để ý thấy đoạn giá trị đó luôn liên tục ; nên ta có thể phân hoạch chúng thành nhiều đoạn nhỏ thành phần . Mỗi đoạn con trong phép phân hoạch tập giá trị $[0 ; 1]$, sẽ tương ứng với một lớp các giá trị của hàm mờ đối với hàm tương ứng .

Giả sử có các số thực $\alpha < \alpha_{m-1} < \alpha_{m-2} < \dots < \alpha_2 < \alpha_1 < 1$, lúc đó ta thành lập được các lớp phân hoạch :

- Lớp thứ nhất : $\alpha_1 < x \leq 1$
- Lớp thứ hai : $\alpha_2 < x \leq \alpha_1$
- :
- Lớp thứ m : $0 \leq x \leq \alpha_{m-1}$

Trong các lớp đó, ta luôn luôn xác định được các hàm mờ theo biến mờ tương ứng trong từng lớp.

Mặt khác việc phân hoạch $[0 ; 1]$ thành lớp cho phép ta nghiên cứu logic mờ như logic đa trị sau này . Nghĩa là khi đó ta có thể gán cho từng lớp các với ý nghĩa , và yêu cầu thực tế khác nhau trong lớp đó.

Sự phân hoạch đoạn $[0 ; 1]$ thành m lớp khác nhau với các nhiệm vụ khác nhau dẫn đến khái niệm về đại số logic m lớp và hàm logic m lớp .

7.1 ĐỊNH NGHĨA : Đại số logic m lớp là đại số Fuzzy, những các giá trị của biến được xác định bằng các lớp (chứ không phải bằng các giá trị cố định).

Tương tự :

Hàm logic m lớp là hàm Fuzzy và các giá trị của biến luôn được xác định bằng các lớp (chứ không phải bằng các giá trị cố định).

Vậy chúng ta phải đi tìm các điều kiện mà những biến mờ $x_i \in x$ thỏa, để cho hàm Fuzzy thuộc một lớp m nào đó : việc

làm vừa rồi gọi là phân tích các hàm logic m lớp.

Trong thuật phân tích hàm logic mờ m lớp, người ta sử dụng hai dạng : *tổng của các tích* ; *tích của các tổng* , và các bước phân tích của cả hai dạng đó là như nhau (ngang nhau), nên thông thường ta chỉ xét một trong hai dạng khi phân tích là đủ.

Để đơn giản hóa lý thuyết của quá trình phân tích , chúng ta chỉ cần xét một vài ví dụ cụ thể là đủ . Và các ví dụ đều được tham khảo và học tập từ các bài giảng của TS NGUYỄN XUÂN QUỲNH.

7.2 THÍ DỤ

□ Thí dụ 1 : Cho hàm logic mờ :

$f(x_1; x_2; x_3) = x_1 \odot x_2 \oplus x_2 \odot x_3$. Hãy tìm các điều kiện của biến mờ $x_1; x_2; x_3$ để cho hàm mờ f thuộc lớp $\mathcal{M}$ hay ($f \in \mathcal{M}$).

Giải

Yêu cầu bài toán tương đương việc tìm điều kiện để :

$$a_{\mathcal{M}} \leq f(x_1; x_2; x_3) < a_{\mathcal{M}-1} \Leftrightarrow a_{\mathcal{M}} \leq x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \leq a_{\mathcal{M}-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 \geq a_{\mathcal{M}} \\ x_2 \leq 1 - a_{\mathcal{M}} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 \geq a_{\mathcal{M}} \\ x_3 \leq 1 - a_{\mathcal{M}} \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 < a_{\mathcal{M}-1} \\ x_2 > 1 - a_{\mathcal{M}} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 < a_{\mathcal{M}-1} \\ x_3 > 1 - a_{\mathcal{M}-1} \end{cases} \end{cases} \quad (*)$$

□ Thí dụ 2 : Tìm các điều kiện của biến mờ để cho hàm mờ f có công thức :

$f(x_1; x_2; x_3) = x_1 \odot x_2 \odot x_3 \oplus x_1 \odot x_3$ thuộc lớp $\mathcal{M}$

Giải

$$f \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 \geq a_{\mathcal{M}} \\ x_2 \leq 1 - a_{\mathcal{M}} \\ x_3 \geq a_{\mathcal{M}} \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 \leq 1 - a_{\mathcal{M}} \\ x_3 \geq 1 - a_{\mathcal{M}} \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 < a_{\mathcal{M}-1} \\ x_2 > 1 - a_{\mathcal{M}-1} \\ x_3 < a_{\mathcal{M}-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 > a_{\mathcal{M}} \\ x_3 > 1 - a_{\mathcal{M}-1} \end{cases} \end{cases} \quad (**)$$

Sau khi giải hệ (*) ; (**) việc phân tích hàm logic m lớp được xem là đã giải quyết xong

§8 HÀM LOGIC ĐA TRỊ

Cũng tương tự như hàm logic hai trị (nhị phân) đã xét ở chương 1, hàm logic đa trị cũng có thể có hai cách biểu diễn :

- Bảng bảng thực trị
- Bảng biểu thức hợp thành từ các hàm cơ bản .

Một bảng thực trị muốn được gọi là biểu diễn được hàm logic m trị phải có m^m hàng , nhưng số lượng hàm đạt đến m^m .

□ **Thí dụ 1 :** Chỉ có $2^{2^2} = 16$ hàm logic 2 biến 2 trị ,
nhưng lại có đến $3^{3^2} = 19683$ hàm logic 2
biến 3 trị :

Nhận thấy hàm logic đa trị rất nhiều về số lượng và đồng thời lại nằm trong một cấu trúc đại số phức tạp . Dẫn đến việc phân tích hàm logic đa trị rất khó khăn . Trong phạm vi của quyển sách này chúng ta chỉ phân tích những hàm logic đa trị đối xứng là một trường hợp đặc biệt mà thôi, (thật ra ngay ở chương trình sau đại học, việc phân tích hàm logic đa trị không đối xứng cũng còn là một khó khăn ; việc đó mách bảo mỗi người chúng ta đã học và làm logic cần suy nghĩ và nếu đầu tư vào việc phân tích một hàm logic đa trị tùy ý cũng là một hướng mà các luận văn sau Đại học luôn chờ đón)

8.1

ĐỊNH NGHĨA : Hàm logic n biến , m trị f có biểu thức hàm : $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ là đối xứng khi và chỉ khi :

$$f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_j; \dots; x_n) = f(x_1; \dots; x_j; \dots; x_i; \dots; x_n)$$

- **DL :** Biểu thức $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ của hàm logic n biến m trị là đối xứng khi và chỉ khi nó thoả mãn đồng thời

$$\begin{cases} f(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n) = f(x_2; x_1; x_3; \dots; x_n) & (i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n) = f(x_1; x_3; x_2; \dots; x_n) & (i^2) \end{cases}$$

□ Chứng minh

($\Rightarrow$): Điều kiện cần là hiển nhiên theo định nghĩa của hàm đối xứng.

($\Leftarrow$): Để chứng minh điều kiện đủ, ta chứng minh với x_i và x_j tùy ý, hàm f đối xứng với các cặp $x_1; x_2$ và $x_2; x_j$.

Thật vậy áp dụng (i-2) lần đẳng thức (i²) cho hàm f , ta được: $f(x_1; x_2; \dots; x_n) = f(x_1; x_i; \dots; x_{i-2}; x_{i-1})$ (1)

Từ (i²) $\Rightarrow f(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n) = f(x_1; x_i; \dots; x_{i-2}; x_{i-1})$ (2)

Áp dụng (i²) vào (2) cho đến khi x_2 nằm tiếp theo x_i

(2) $\Rightarrow f(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n) = f(x_i; x_2; \dots; x_1; \dots; x_n)$

$\Rightarrow$ hàm f đối xứng với $x_1; x_i$

Một cách tương tự ta chứng minh được $x_2; x_j$ bất kỳ

8.2) ĐỊNH NGHĨA: Vector $a = (a_0; a_1; \dots; a_{m-n})$ trong đó a_i là số lượng giá trị của i của biến gọi là vector của tổ hợp giá trị các biến x_i .

□ **Thí dụ 2:** Cho hàm 3 biến - 3 trị là 0; 1; 2; với tổ hợp các giá trị $(x_1; x_2; x_3) = (1; 1; 0)$ thì: $a = (1; 2; 0)$.

6.2.1. DL: Biểu thức hàm $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ n biến với m trị là biểu thức hàm của hàm đối xứng f khi và chỉ khi giá trị của hàm số đối với tất cả tổ hợp các giá trị của biến có cùng vector a như nhau (độc tự chứng minh như một bài tập)

□ **Thí dụ 3:** Cho hàm đối xứng 2 biến, 3 trị như sau:

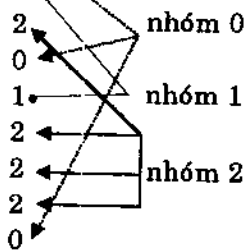
$$f(x_1; x_2) = \sum_i (1; 3) \cup \sum_j (2; 5; 6; 7)$$

Trong đó:

$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \text{ là tổng của các hội sơ cấp mà hàm } f \text{ nhận giá trị 1} \\ \sum_j \text{ là tổng của các hội sơ cấp mà hàm } f \text{ nhận giá trị 2} \end{array} \right.$

Lúc đó hàm f có thể biểu diễn như trong bảng:

Số thập phân	x_1	x_2	Vectơ a	Giá trị hàm f
0	0	0	(2 ; 0 ; 0)	0
1	0	1	(1 ; 1 ; 0)	1
2	0	2	(1 ; 0 ; 1)	2
3	1	0	(1 ; 1 ; 0)	0
4	1	1	(0 ; 2 ; 0)	1
5	1	2	(0 ; 1 ; 1)	2
6	2	0	(1 ; 0 ; 1)	2
7	2	1	(0 ; 1 ; 1)	2
8	2	2	(0 ; 0 ; 2)	0



6.2.2. DL : Có tất cả $m \cdot C_{m-1}^{m+n-1}$ hàm đối xứng n biến m trị (độc giả có thể xem sách **ĐẠI SỐ BOOLE** và **ĐẠI SỐ CHUYỂN MẠCH CÁC VECTƠ** của cùng nhóm tác giả).

§9 THUẬT NHẬN DẠNG HÀM ĐỐI XỨNG ĐA TRỊ

9.1 ĐỊNH NGHĨA : Toán tử $\sim x$ được định nghĩa như bảng sau :

x	$\sim x$
0	1
1	2
2	3
$\vdots$	$\vdots$
$m-2$	$m-1$
$m-1$	0

Lúc đó ta ký hiệu : $\underbrace{\sim(\sim(\dots \sim(\sim x) \dots))}_{k \text{ lần}}^{(k)} x$

9.2 ĐỊNH NGHĨA : Hàm f có biểu thức hàm $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ gọi là hàm đối xứng trộn nếu tồn tại một bộ các số nguyên $k = (k_1; k_2; \dots; k_n)$ sao cho hàm đặc trưng sau có biểu thức hàm như sau là đối xứng :

$$f(\underbrace{x_1}_{(k_1)}; \underbrace{x_2}_{(k_2)}; \dots; \underbrace{x_n}_{(k_n)}) \quad (1)$$

Trong (1) thì : $0 \leq k_i \leq m - 1$ và $\exists k_i \neq 0$

9.3 ĐỊNH NGHĨA : Nhóm j là tập hợp tất cả các hàm của bảng thực trị được những (tương ứng) vào giá trị j ; ở đây : $0 \leq j \leq m - 1$

Khi hàm f là đối xứng thì tập này tương ứng với tập tất cả các hàng có cùng vectơ a .

9.4 ĐỊNH NGHĨA : Đối với cột i của mỗi nhóm j trong bảng thực trị ta có vectơ Ratio được định nghĩa như sau :

$$r_i^{(j)} = (\gamma_{i_0}^{(j)}; \gamma_{i_1}^{(j)}; \dots; \gamma_{i_{m-1}}^{(j)})$$

Trong đó $\gamma_{(i)}^{(j)}$ là số lượng l trong cột i của nhóm j ; $0 \leq j \leq m - 1$

9.5 ĐỊNH NGHĨA : Dấu hiệu $M_{a_i}^{(j)}$ là số lượng hàng của bảng thực trị trong nhóm j có cùng vectơ $a_{(i)}^{(j)}$.

9.6 THUẬT TOÁN : Với những khái niệm trên, đủ để ta giới thiệu thuật toán nhận dạng hàm đối xứng và đối xứng trộn m trị như sau ; qua các bước cơ bản :

- B_1 : Đối với mỗi nhóm xác định vectơ Ratio r cho n co
- B_2 : Đối với mỗi nhóm j ; $\forall j \in \overline{0; m-1}$ lấy một vectơ Ratio r bất kỳ chẳng hạn $r_1^{(j)}$ và nếu $r_1^f = r_1^{(j)}$;
 $\forall i \in \overline{2; n}$ thì hàm f đã cho có khả năng là hàm đối xứng.
- B_3 : Xác định $M_{a_i}^{(f)}$ (1) và tính $M_{a_i}^{(j)}$ theo công thức :

$$M_{a_1}^{(j)} = C_{a_0^{(j)}}^n C_{a_1^{(j)}}^{n-a_0^{(j)}} \dots C_{a_{m-1}^{(j)}}^{n-\sum_{k=1}^{m-2} a_k^{(j)}} \quad (2).$$

- **B₄** : So sánh các kết quả từ (1) và (2), nếu tất cả các kết quả trên đều bằng nhau $\forall a_1^{(j)}; j \in \overline{1;n}$ thì hàm f đã cho đối xứng
- **B₅** : Khi **B₄** không thỏa mãn (các kết quả không đồng nhất) ta dùng thủ thuật giữ nguyên cột thứ nhất, thay cột thứ 2 bằng cột : $\sim x_2$ và lập lại 4 bước trên
- **B₆** : Lập lại **B₄** cho tất cả các tổ hợp : $\binom{(k_2)}{x_2}, \binom{(k_3)}{x_3}; \dots; \binom{(k_n)}{x_n}$ với $0 \leq k \leq m-1$.

Nếu tồn tại một tập hợp : $\{ x_1; \binom{(k_2)}{x_2}; \binom{(k_3)}{x_3}; \dots; \binom{(k_n)}{x_n} \}$

thỏa hai bước (**B₂**) và (**B₄**) thì f là hàm đối xứng

□ **Thí dụ 1** : *Áp dụng thuật toán ra trên cho hàm $f(x_1; x_2)$ ở Thí dụ 3 – 8§ Kết quả tính toán theo các bước cho ở bảng sau :*

Bảng 1 :

Biểu diễn thập phân	Hệ đếm 3		$a_1^{(j)} = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)})$	$M_{a_1}^{(j)}$ theo định nghĩa	$M_{a_1}^{(j)} = C_{a_1^{(j)}}^n C_{a_0^{(j)}}^{n-a_1^{(j)}} C_{a_2^{(j)}}^{n-a_0^{(j)}-a_1^{(j)}}$
	x_1	x_2			
Nhóm 0 vectors r_0	0	0	$a_1^{(0)} = (2; 0; 0)$	1	$C_2^2 \cdot C_0^{2-2} \cdot C_0^{2-2} = 1$ $C_0^2 \cdot C_0^{2-0} \cdot C_0^{2-2} = 1$ $C_0^2 \cdot C_0^2 \cdot C_0^2 = 1$
	4	1	$a_2^{(0)} = (0; 2; 0)$	1	
	8	2	$a_3^{(0)} = (0; 0; 2)$	1	
	(1,1,1) (1,1,1)				
Nhóm 1 vector r	1	0	$a_1^{(1)} = (1; 1; 0)$	2	$C_1^2 \cdot C_1^{2-1} C_0^{2-1-1} = 2$
	3	1	$a_2^{(1)} = (1; 1; 0)$		
	(1,1,0) (1,1,0)				
Nhóm 2 vector r	2	0	$a_1^{(2)} = (1; 0; 1)$	2	$C_1^2 C_0^{2-1} C_1^{2-1} = 2$ $C_0^2 C_1^{2-0} C_1^{2-1} = 2$
	5	1	$a_2^{(2)} = (0; 1; 1)$		
	6	2	$a_3^{(2)} = (1; 0; 1)$		
	7	2	$a_4^{(2)} = (0; 1; 1)$		
	(1,1,2) (1,1,2)				

Từ các kết quả nhận được ở bảng 1 ở trên chúng ta thấy ngay rằng hàm $f(x_1; x_2)$ là đối xứng.

□ **Thí dụ 2 :**

Xét hàm $f(x_1; x_2) = \sum_1 (2; 4) \cup \sum_2 (0; 3; 7; 8)$. Các kết quả tính toán cho ở **Bảng 2**. Trước hết là các vectơ trong mỗi nhóm 1 và 2 không như nhau. Do vậy chúng ta giữ nguyên x_1 và xác định $\sim x_1$. Một lần nữa vectơ ở nhóm trên cũng không như nhau và do đó chúng ta lại tìm $\sim (\sim x_2)$. Lần này chúng ta nhận được các kết quả như ở thí dụ 1 - 75 nghĩa là hàm $f(x_1; \sim(\sim x_2))$ đối xứng.

Điều này có nghĩa rằng hàm $f(x_1; x_2)$ đã cho ở trên là đối xứng trộn. Trên cơ sở các tính chất của vectơ x và tính chất của hàm đối xứng chúng ta có thể thu gọn bảng thực trị mô tả hàm đối xứng m^n hàng còn C_{m-1}^{n+m-1} hàng.

Nói cách khác, chúng ta đã gạch bớt những hàng có vectơ a lặp lại trong bảng thực trị ban đầu. Khi đó ta có hệ số thu gọn K_r như sau :

Bảng 2

$x_1 x_2$	a	x_1	$\sim x_2$	a	x_1	$\sim(\sim x_2)$	a
Nhóm 0 $\begin{cases} 0\ 1 \\ 1\ 2 \\ 2\ 0 \end{cases}$	(1,1,0)	0	2	(1,0,1)	0	0	(2,0,0)
	(0,1,1)	1	0	(1,1,0)	1	1	(0,2,0)
	(1,0,1)	2	1	(0,1,1)	2	2	(0,0,2)
Vectơ $r(1,1,1)(1,1,1)$		(1,1,1)	(1,1,1)		(1,1,1)	(1,1,1)	
Nhóm 1 $\begin{cases} 0\ 2 \\ 1\ 1 \end{cases}$	(1,0,1)	0	0	(2,0,0)	0	1	(1,1,0)
	(0,2,0)	1	2	(0,1,1)	1	0	(1,1,0)
Vectơ $r(1,1,0)(0,1,1)$		(1,1,0)	(1,0,2)		(1,1,0)	(1,1,0)	
Nhóm 2 $\begin{cases} 0\ 0 \\ 1\ 0 \\ 2\ 1 \\ 2\ 2 \end{cases}$	(2,0,0)	0	1	(1,1,0)	0	2	(1,1,0)
	(1,1,0)	1	1	(0,2,0)	1	2	(0,1,1)
	(0,1,1)	2	2	(0,2,2)	2	0	(1,0,1)
	(0,0,2)	2	0	(1,0,1)	2	1	(0,1,1)
Vectơ $r(1,1,2)(2,1,1)$		(1,1,2)	(1,2,1)		(1,1,2)	(1,2,1)	

Bảng 3 :

m	n	$K_r(m, n)$
3	2	0,67
3	3	0,37
4	3	0,31
3	4	0,19
4	4	0,14
4	5	0,055
5	5	0,044

$$K_r = \frac{C_{m-1}^{n+m-1}}{m^n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!m^n} \quad (1)$$

Từ công thức (1) ta có thể suy ra rằng với giá trị cố định $n = n_0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} K_r = 0$ và với giá trị cố định $m = m_0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} K_r = 0$.

Nói cách khác là K_r giảm khi m và n tăng lên. Bảng 3 cho ta một số giá trị mà K_r ứng với các cặp giá trị khác nhau của m và n . Rõ ràng bằng thực tế biểu diễn hàm logic được thu gọn rất nhiều khi số lượng biến (n) và số lượng giá trị (m) tăng lên.

BÀI TẬP LOGIC *Chương 5*

Bài 117

Cho 3 tập mờ như sau trong không gian $X = \{x; y; z; t\}$

$$A = \frac{0,12}{x} \oplus \frac{0,55}{y} \oplus \frac{0,20}{z}$$

$$B = \frac{0,75}{x} \oplus \frac{0,30}{y} \oplus \frac{0,12}{z} \oplus \frac{0,75}{t}$$

$$C = \frac{0,25}{x} \oplus \frac{0,30}{y} \oplus \frac{0,12}{z} \oplus \frac{0,75}{t}$$

- 1/ Kiểm chứng $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2/ Tìm $(\overline{A} \cup B) \cup \overline{C}$ và $(A \cup \overline{B}) \cup \overline{C}$

Bài 118

Những hàm nào trong các hàm số hai biến ba trị sau đây là đối xứng, đối xứng trộn?

a/ $\sum_1(1; 3) \cup \sum_2(2; 5; 6; 7)$

b/ $\sum_1(0; 2; 6) \cup \sum_2(1; 3)$

c/ $\sum_1(2; 4; 6) \cup \sum_2(5; 7; 8)$

d/ $\sum_1(0; 2; 4; 5; 7) \cup \sum_2(3; 6; 8)$

e/ $\sum_1(0; 1; 5; 8) \cup \sum_2(2; 6)$

f/ $\sum_1(0; 2; 5) \cup \sum_2(6; 8)$

Bài 119

Những hàm số nào trong các hàm số 3 biến ba trị sau đây là đối xứng, đối xứng trộn?

a/ $\sum_1(0; 4; 12; 13; 14; 16; 22; 26) \cup$

$\sum_2(1; 3; 5; 7; 9; 11; 15; 17; 19; 21; 23; 25)$

b/ $\sum_1(1; 3; 4; 5; 7; 13; 17; 18; 22) \cup$

$\sum_2(0; 1; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 19; 21; 23; 25)$

Bài 120

Tối thiểu hoá các hàm logic m lớp sau đây:

a/ $f(x_1; x_2; x_3) = x_1 \odot x_2 \odot \overline{x_2} \odot x_3 \oplus x_1 \odot x_2 \oplus$
 $\oplus x_1 \odot \overline{x_2} \odot x_3 \oplus x_1 \odot x_2 \odot \overline{x_3}$

b/ $f(x_1; x_2; x_3) = x_2 \odot x_3 \odot x_3 \odot \overline{x_4} \oplus x_1 \odot x_3 \odot \overline{x_4} \oplus$
 $\oplus x_1 \odot \overline{x_2} \odot x_4 \oplus x_2 \odot x_3 \odot x_3 \odot x_4 \oplus x_1 \odot x_2 \odot \overline{x_4}$

Bài 121

Tìm các tập điều kiện của các biến để các hàm số logic mờ m lớp sau đây nằm trong lớp $M: \alpha_m \leq f \leq \alpha_{m-1}$

a/ $f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \odot x_2 \oplus x_2 \odot x_3 \oplus x_3 \odot x_1)$

b/ $f(x_1; x_2; x_3; x_4) = x_2 \odot \overline{x_4} (x_1 \oplus \overline{x_2} \odot x_3 \oplus \overline{x_4})$
 $(\overline{x_1} \oplus \overline{x_2} \odot x_3 \odot x_4).$

THUẬT (xếp theo năm xuất bản)

1. PEANO , G , *Formulaire mathématique, I*, Turin 1895 - 1905.
2. POST , E . L , *Introduction to a general theory of propositions* , *Americ . Journal of Mathem .* , 43 . 1921.
3. SCHONFINKEL , M , *Über die Bausteine der mathematischen Logik* , *Math . Annalen* 42 , 1925 .
4. MORGAN , A . DE , *Formal Logic* , London 1926 .
5. CONSETH . F , *Les fondements des mathématiques* , Paris 1926 .
 - *Qu'est - ce que la Logique* . Paris 1937 .
 - *Les entretiens de Zürich sur les fondements et la methode des sciences mathematiques* , Zürich , 1941.
6. WHITEHEAD , A . N . and RUSSELL, B , *Principia Mathematica* , Cambridge I , 1925 , II - III , 1927 .
7. GODEL , K , *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* , *Monatshefte Math.Phys* 38 , 1930 .
8. LUKASIEWICZ , S , *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen system des Aussagenkalkuels* , *Biên bản của Hội Khoa học và Văn chương Varsovie* , 1930 .
 - *Zur Geschichte der Aussagenlogik* , *Erkenntnis* 5 . 1935/6 .
 - *The Logik und Grundlagenproblem* , trong F . Gonseth , *Entretiens* , 1941 .
9. GENTZEN , G , *Untersuchungen über das logische Schliessen* , *Math . Zeitsch* , 39 . 1934

10. JASKOVSKI , S , *On the rules of suppositions in Formal Logic* . Warsaw 1934 .
 - *Recherches sur le système de la logique intuitionniste* Act . du Congr . intern . de Philos . scient , Paris 1936 .
11. RUSSELL B . A . W , *The Principles of Mathematics* , I . , Cambridge 1938 .
 - *Introduction à la philosophie mathématique* . tr . de G . Moreau , Paris 1928 (xem Whitehead) .
12. HILBERT, D , Und ACKERMANN W , *Grundzüge der theoretischen Logik* , Berlin ., 1938 .
 - *Grundlagen der Mathematik* , Berlin I , 1934 , II , 1939.
13. BOOLE G , *An Investgation into the Laws of Thought*, Open Court. Chicago, 1854 / 1940.
14. BOOLE G , *The mathematical Analysis of Logic* , Oxford , 1948 .
15. DOPP , J, *Leçons de Logique formelle* , Louvain , 1949 et 1950 .
16. BERUNAN ,G , AND K . D . FRYER , *Introduction to Combinatorial Analysis* . John Wiley and Sons, Inc ., New York 1958.
17. SKERNIAKOV , L.A , *Complemented Modular Lattices and Regular Rings* . Goz . Izd ., Mat ., Lit ., Moscow 1961 .
18. BERGE , C , *The Theory of Graphs and Its Applications*. John Wiley and Sons, Inc ., New York 1962.
19. SIKORSKI, R, *Boolean Algebras* . Springer - Verlag , New York 1964 .
20. LOGIC TOÁN LÀ GÌ ? - Kalysnhin - 1964.
21. ZADEL L.A . *Fuzzy Sets , Information and Control* , Vol.8 , 1965 .
22. BIRKOFF , G , *Lattice . Theory* , American Mathematical Society , Providence , R . I ., 1967 .

23. ABBOTT, J. C. *Sets, Lattices, and Boolean Algebras*. Boston 1969.
24. BIRKOFF, G, AND T. C. BARTEE. *Modern Applied Algebra*. Mc Graw - Hill Book Company, New York 1970.
25. KAMENDA, T, AND P. WEINER. *On the State Minimization of Nondeterministic Finite Automata*. *IEEE Trans. Comp* No 7/1970.
26. LOGIC HỌC - Gorki - NXBGD - 1974.
27. LOGIC TOÁN - Novikov - NXBGD - 1974.
28. LEE, S.C, *Vector Boolean Algebra and Calculus*. *IEEE Trans. Comp*., September 1976.
29. LOGIC VÀ CÁC VẤN ĐỀ DẠY HỌC - Farber - 1977 (bản tiếng Nga).
30. XUAN QUYNH N, *Fault Identification in Logical Sequential Networks and Design of Fault - Self detectable Asynchronous Networks*. R. N. No. 20, Printed in Poland 1979.
31. LOGIC TOÁN - Ersov và Palutrin - 1979.
32. XUAN QUYNH N, *Generation of Fault - Test Sequences for Logical Asynchronous Networks*. *Pospety Cybernetyki* No.1, 1980. Polish Academy of Sciences Press.
33. CÁC BÀI GIẢNG VỀ LLDH MÔN TOÁN - Nguyễn Văn Vinh - giáo trình ĐHSP TP. Hồ Chí Minh - 1986
34. LOGIC TOÁN - Nguyễn Mạnh Trình - NXBGD - 1989.
35. LÝ THUYẾT MẠCH LOGIC VÀ KỸ THUẬT SỐ - Nguyễn Xuân Quỳnh - NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, 1991
36. NHẬP MÔN VỀ LẬP LUẬN SUY DIỄN Ở TRƯỜNG THCS - Gilbert và các Tác giả khác - NXBGD - 1995
37. TOÁN HỌC VÀ NHỮNG SUY LUẬN CÓ LÝ - G. Polya - NXBGD - 1995

38. ACKERMANN, W , *Ein System der Typenfreien Logik* , Leipzig , 1996 .
39. **ĐẠI CƯƠNG VỀ TOÁN HỌC HỮU HẠN** -- Hoàng Chúng -- NXBGD -- 1997
40. **TÍCH PHÂN - QUY NẠP - TỔ HỢP** - Nguyễn Đức Đồng - Lê Hoàn Hoá - Võ Khắc Thương - Lê Quang Tuấn - Nguyễn Văn Vĩnh - Nhà xuất bản Trẻ - 1999.

Mục Lục

□	MỘT : MỞ (Lời nói đầu)	3
□	HAI : GIEO hai (5 chương)	6
✓	Chương 1 : ĐẠI SỐ LOGIC	6
	§1 MỆNH ĐỀ	6
	§2 CÁC PHÉP TOÁN LOGIC CƠ BẢN	6
	§3 CÔNG THỨC - LUẬT TRONG	
	ĐẠI SỐ LOGIC	9
	§4 LUẬT ĐỐI NGẪU	15
	§5 BÀI TOÁN GIẢI QUYẾT	17
	§6 BIỂN DIỄN MỘT HÀM LOGIC HAI TRỊ	23
	BẤT KÌ $F(x_1; x_2; \dots; x_n)$ BẰNG MỘT CÔNG THỨC	
	§7 KHÁI NIỆM VỀ TÍNH ĐẦY ĐỦ CỦA	30
	MỘT HỆ CÁC PHÉP TOÁN LOGIC	
□	BÀI TẬP LOGIC CHƯƠNG 1	33
□	PHỤ LỤC CHƯƠNG 1	52
✓	Chương 2 : LOGIC VỊ TỪ	55
	§1 HÀM MỆNH ĐỀ (Vị từ)	55
	§2 CÁC PHÉP TOÁN LOGIC TRÊN CÁC	57
	HÀM MỆNH ĐỀ	
	§3 LƯỢNG TỪ	59
	§4 PHÉP SUY LUẬN HAI TIỀN ĐỀ	64
	TAM ĐOẠN LUẬN	
□	BÀI TẬP LOGIC CHƯƠNG 2	68
✓	Chương 3 : HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ	88
	§1 CÁC LÝ THUYẾT TIỀN ĐỀ HÓA	
	PHI HÌNH THỨC	88

§2 CÁC LÝ THUYẾT TIỀN ĐỀ	90
HÓA HÌNH THỨC	
§3 HỆ TOÁN MỆNH ĐỀ	91
□ BÀI TẬP LOGIC CHƯƠNG 3	98
✓ Chương 4 : LOGIC – VÀ VẤN ĐỀ	
DẠY TOÁN HỌC	102
A - VẤN ĐỀ DẠY HỌC CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC	102
§1 VAI TRÒ CỦA CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC	102
§2 NỘI HÀM VÀ NGOẠI DIỄN CỦA KHÁI NIỆM	107
§3 QUAN HỆ GIỮA CÁC KHÁI NIỆM	112
§4 ĐỊNH NGHĨA KHÁI NIỆM	115
§5 CÁC QUY TẮT ĐỊNH NGHĨA KHÁI NIỆM	123
NHỮNG SAI LÂM TRONG CÁC ĐỊNH NGHĨA	
PHẢN VÍ DỤ	
§6 PHÂN CHIA KHÁI NIỆM	129
§7 ĐƯA CÁC KHÁI NIỆM VÀO	
GIÁO TRÌNH TOÁN	136
B - SUY LUẬN TOÁN HỌC	140
§1 HAI LOẠI SUY LUẬN	140
§2 CHỨNG MINH - BÁC BỎ	160
§3 CHỨNG MINH TRỰC TIẾP	168
§4 CHỨNG MINH GIÁN TIẾP	170
§5 MỆNH ĐỀ THUẬN ĐẢO –	
ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ	179
§6 HAI PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH	190
□ BÀI TẬP LOGIC CHƯƠNG 4	192

✓ Chương 5 : HÀM LOGIC MỜ VÀ	219
HÀM LOGIC ĐA TRỊ	
§1 MỖI MỘT LẦN NỀN TẢNG TOÁN HỌC	219
BỊ KHỦNG HOẢNG LÀ MỘT BƯỚC	
PHÁT TRIỂN	
§2 MỘT BƯỚC PHÁT TRIỂN THỰC DỤNG	223
CỦA LÝ THUYẾT TẬP HỢP	
§3 TẬP MỜ (TẬP FUZZY)	224
§4 LOGIC MỜ (LOGIC FUZZY) - LOGIC m-LỚP	230
§5 ĐẠI SỐ MỜ	231
§6 HÀM MỜ	232
§7 ĐẠI SỐ m LỚP	233
§8 HÀM LOGIC ĐA TRỊ	235
§9 THUẬT NHẬN DẠNG HÀM	
ĐỐI XỨNG ĐA TRỊ	237
□ BÀI TẬP LOGIC CHƯƠNG 5	241
▣ BA : KẾT (Thư tịch)	243
▣ Mục lục	247

LOGIC TOÁN

Chủ Biên : NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG – NGUYỄN VĂN VĨNH

Chịu trách nhiệm xuất bản

NGUYỄN THOA

Biên tập : BỘI HUYỀN

Sửa bản in : Ý NHI

Bìa : TÙNG HẢI

In 1000 bản, khổ 14,5×20,5 cm tại xí nghiệp in Tuần Báo Văn Nghệ. Số đăng ký XB 55/264 CXB của Cục Xuất bản ngày 02/03/2001. Số trích ngang : 03 XBTH cấp ngày 11/06/2001. In xong và nộp lưu chiểu tháng 08/2001.



Phát hành tại :
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

ĐC : 20 Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP. HCM

ĐT : 08083021 - 8242716 - 8239998 Fax : (08) 08083017

*Nhà sách chúng tôi luôn có chế độ ưu đãi
dành cho quý khách đến mua tại địa chỉ trên.*

LOGIC TOÁN

2 010400 026263

S020 18/02/06 15.000

Giá: 15.000