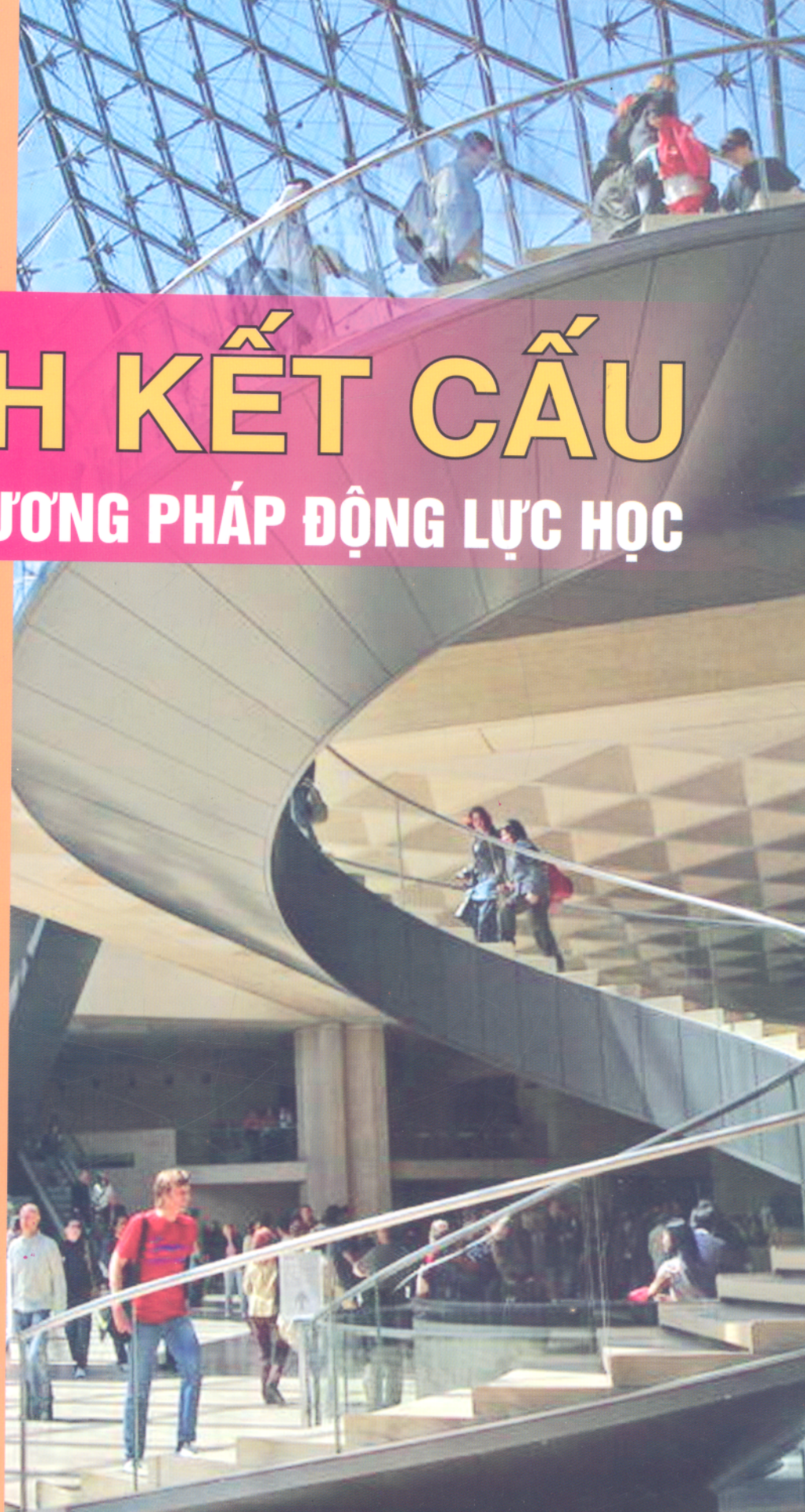
GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU

THEO PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LỰC HỌC



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU
THEO PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LỰC HỌC

- SÁCH TRÌNH BÀY DƯỚI DẠNG MA TRẬN
- NHIỀU VÍ DỤ MINH HỌA LÝ THUYẾT
- CUỐI SÁCH CÓ CÁC CHƯƠNG TRÌNH TÍNH THEO NGÔN NGỮ PASCAL 7.0
- SÁCH DÙNG CHO SINH VIÊN ĐẠI HỌC, SINH VIÊN CAO HỌC, NGHIÊN CỨU SINH VÀ KỸ SƯ NGÀNH XÂY DỰNG

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2006

LỜI MỞ ĐẦU

Sách giới thiệu một số khái niệm cơ bản về phương pháp động lực học, áp dụng cho các kết cấu, từ loại đơn giản nhất một bậc tự do đến loại phức tạp nhiều bậc tự do như nhà nhiều tầng, dầm, giàn, khung. Nội dung trình bày dưới dạng ma trận để được ngắn gọn và tiện cho việc lập trình. Định luật Newton, nguyên lý Hamilton, nguyên lý công ảo và các thành tựu toán học được vận dụng để suy ra các công thức cơ bản. Bài toán động lực học khá phức tạp so với các bài toán trong lĩnh vực tĩnh lực học, nó đòi hỏi nhiều thời gian tính toán, do đó tác giả đã biên soạn một số chương tính theo ngôn ngữ Turbo Pascal 7.0.

Sách gồm các chương:

Chương một: Hệ một bậc tự do không có lực cản.

Chương hai: Hệ một bậc tự do có lực cản.

Chương ba: Hệ một bậc tự do dưới tác dụng của tải trọng điều hoà.

Chương bốn: Hệ chịu tác dụng của tải trọng khái quát.

Chương năm: Chuỗi Fourier áp dụng vào việc tính các tải trọng chu kỳ.

Chương sáu: Các toạ độ khái quát và phương pháp Rayleigh.

Chương bảy: Nhà chịu cắt nhiều tầng.

Chương tám: Dao động tự do của nhà chịu cắt.

Chương chín: Dao động cưỡng bức của nhà chịu cắt.

Chương mười: Dao động của dầm.

Chương mười một: Dao động của khung phẳng.

Chương mười hai: Dao động của hệ dầm trực giao.

Chương mười ba: Dao động của khung không gian.

Chương mười bốn: Dao động của giàn.

Do các nguyên nhân chủ quan và khách quan, không thể tránh khỏi các thiếu sót, mong bạn đọc phê bình và góp ý.

Cuối cùng, tác giả chân thành cảm ơn Trưởng ban Biên tập Trần Cường đã hết lòng giúp đỡ và cổ vũ để hoàn thành tốt việc biên soạn sách.

Hà Nội, ngày 30 tháng 5 năm 2006

Tác giả

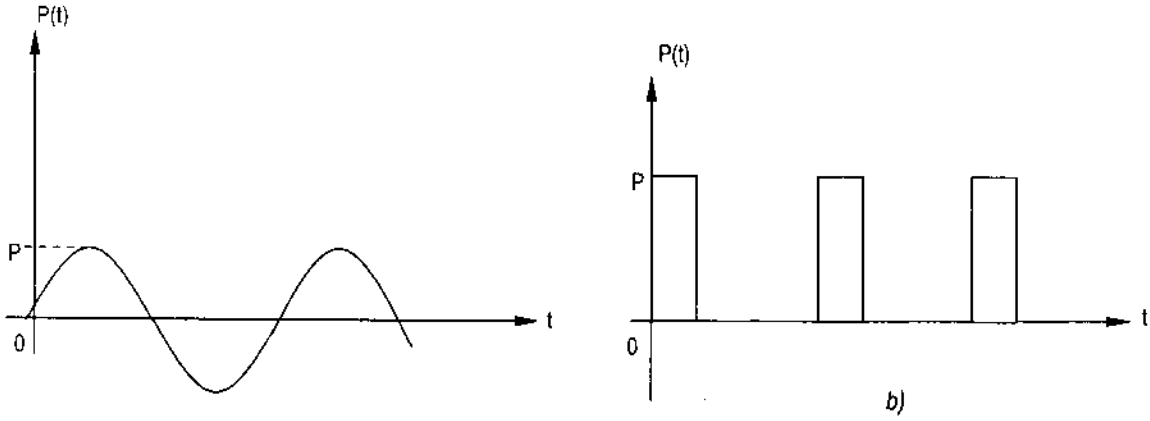
Chương 1
HỆ MỘT BẬC TỰ DO KHÔNG CÓ LỰC CẢN

§1.1. Khái niệm về động lực học

Động lực học nghiên cứu sự làm việc của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng động. Khác với tải trọng tĩnh, tải trọng động có giá trị, phương hướng và tác dụng thay đổi theo thời gian hoặc tốc độ gia tải quá nhanh đến mức sản sinh lực quán tính, gây ra dao động. Trong thực tế, chủ yếu có các loại tải trọng động sau đây:

1. Tải trọng điều hoà, thay đổi theo quy luật hình sin hoặc hình cosin (hình 1.1a) chẳng hạn như tải trọng máy đang hoạt động.

2. Tải trọng chu kỳ, cứ sau một chu kỳ, lặp lại hình dạng ban đầu (hình 1.1.b), chẳng hạn như tải trọng búa đập lên đỉnh cọc.



Hình 1.1

3. Tải trọng xung kích, tác dụng trong thời gian rất ngắn, tải trọng tăng lên và giảm xuống cực nhanh như trong trường hợp nổ mìn. Ngoài ra, có những tải trọng động khác biến đổi theo quy luật không nhất định chẳng hạn như lực động đất, lực gió, lực sóng.

Nếu đặt tải trọng lên kết cấu rồi sau đó cất đi một cách đột ngột thì kết cấu tiếp tục dao động, ta gọi là *dao động tự do*. Nếu kết cấu dao động dưới tác dụng của tải trọng động, ta gọi là *dao động cưỡng bức*.

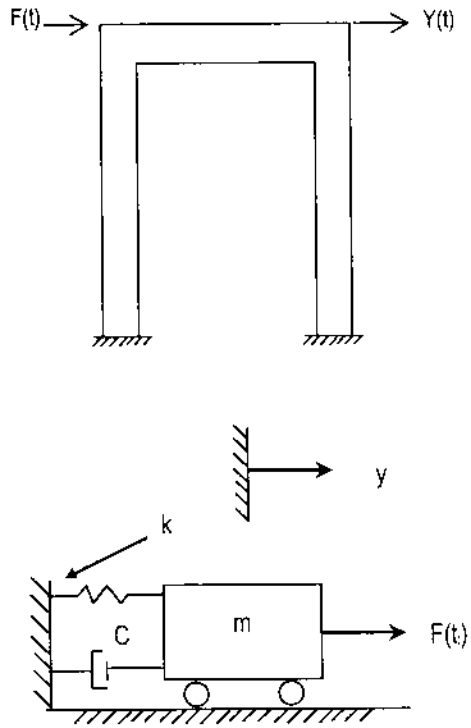
Môi trường xung quanh có thể ảnh hưởng đến trạng thái dao động của kết cấu, đó là lực cản gây ra bởi ma sát trong các nút, trong các vết nứt, sự ma sát bên trong vật liệu, môi trường nhớt như không khí, nước, dầu... Khi có lực cản có thể bỏ qua, ta gọi là dao động không có lực cản.

Việc tính toán kết dấu dưới tác dụng của tải trọng động là một vấn đề rất phức tạp vì trong thực tế, kết cấu gồm các vật rắn liên kết lại nên có vô số bậc tự do. Tuy nhiên, trên cơ sở các giả thiết và mô hình toán học hợp lý đồng thời sử dụng các thành tựu hiện đại trong lĩnh vực toán học, cơ học, tin học, ta có thể có những lời giải gần đúng trong bài toán động lực học.

§1.2. Khái niệm về bậc tự do (BTD)

Ta định nghĩa bậc tự do là các tọa độ độc lập cần thiết để biểu thị hình dạng hoặc vị trí của kết cấu tại một thời điểm nào đó. Nói chung, một kết cấu liên tục có vô số bậc tự do. Tuy nhiên, nhờ sử dụng mô hình toán học hợp lý, ta có thể đưa nó về một hệ có ít bậc tự do, thậm chí chỉ có một bậc tự do.

Chẳng hạn khung trên hình (1.2) được đưa về hệ chỉ có một thành phần chuyển vị, nghĩa là chỉ có một bậc tự do. Mô hình toán học của hệ một bậc tự do biểu thị trong trường hợp tổng quát như trên hình 1.3, trong đó có các phần tử sau đây:



Hình 1.3

1. Khối lượng (m) tượng trưng cho các đặc trưng quán tính.

2. Lò xo k tượng trưng cho lực khôi phục đàn hồi và thế năng của kết cấu.

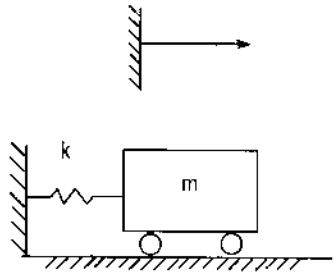
3. Phần tử c tượng trưng cho lực cản và sự mất mát năng lượng của kết cấu.

4. Lực kích thích F(t) là ngoại lực tác dụng lên kết cấu, nó là hàm của thời gian. Mỗi một phần tử trên đều có những chức năng riêng biệt. Mô hình toán học không tồn tại trong thế giới vật lý, nó chỉ có tính chất đơn giản hoá và lý tưởng hoá kết cấu thực tế, cung cấp cho ta những thông tin gần đúng nhưng khá đầy đủ và khá an toàn về trạng thái làm việc của kết cấu.

§1.3. Hệ không có lực cản

Ta bắt đầu nghiên cứu một hệ đơn giản, không có lực cản và không có lực kích thích. Trong những điều kiện này, sự dao động của hệ bị khống chế bởi các điều kiện ban đầu, tức là chuyển vị và vận tốc ban đầu ở thời điểm t = 0. Mô hình toán học của hệ có lực cản biểu thị trên hình 1.4.

Khối lượng m khống chế bởi lò xo k và dao động bị hạn chế trên phương trục tọa độ. Ở đây, ta chỉ nghiên cứu loại lò xo tuyến tính nghĩa là lực tác dụng lên lò xo tỷ lệ với chuyển vị của nó.



Hình 1.4

Nói cách khác, ta có mối quan hệ:

$$F_s = k.y \qquad (1.1)$$

Trong đó:

F_s - lực tác dụng lên lò xo;

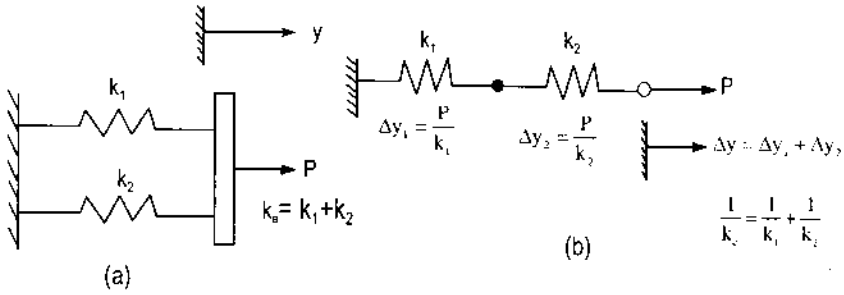
k - hằng số lò xo;

y - chuyển vị của lò xo.

Sở dĩ trong tính toán động lực học ta dùng lò xo tuyến tính vì nó đơn giản trong việc phân tích về mặt toán học, hơn nữa chuyển vị của kết cấu thực tế thường rất bé, điều này cho phép ta xem chúng làm việc ở trạng thái tuyến tính.

§1.4. Lò xo nối song song hoặc nối tiếp

Đôi khi, cần xác định hằng số lò so tương đương trong trường hợp hệ có những lò xo nối song song (hình 1.5a) hoặc những lò xo nối tiếp (hình 1.5b).



Hình 1.5

Trong trường hợp hai lò xo nối song song, tổng lực cần để sản sinh chuyển vị tương đối bằng đơn vị tại các đầu mút của chúng bằng tổng các hằng số lò xo.

Theo định nghĩa, tổng lực này là hằng số lò xo tương đương k_c được biểu thị bằng công thức sau đây:

$$k_c = k_1 + k_2 \qquad (1.2)$$

Trong trường hợp tổng quát, nếu có n lò xo nối song song, ta có công thức:

$$k_c = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (1.3)$$

Trong trường hợp hai lò xo mắc nối tiếp (hình 1.5b) lực P sản sinh ra các chuyển vị tương đối trong các lò xo như sau:

$$\Delta y_1 = \frac{P}{k_1}$$

$$\Delta y_2 = \frac{P}{k_2}$$

Vậy tổng chuyển vị y tại đầu tự do của các lò xo nối tiếp bằng: $y = \Delta y_1 + \Delta y_2$. Thay các giá trị trên vào, ta có:

$$y = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \tag{1.4}$$

Tóm lại, lực cần thiết để sản sinh ra chuyển vị bằng đơn vị (tức là hằng số lò xo tương đương) bằng:

$$k_c = \frac{P}{k}$$

Thay y từ hệ thức trên vào (1.4), ta có giá trị nghịch đảo của hằng số lò xo tương đương:

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{1.5}$$

Trong trường hợp tổng quát, nếu có n lò xo nối tiếp, ta có:

$$\frac{1}{k_c} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k_i} \tag{1.6}$$

§1.5. Định luật Newton về chuyển động

Theo định luật thứ hai của Newton về chuyển động, ta có hệ thức:

$$F = m.a \tag{1.7}$$

Trong đó:

F là lực tác dụng trên một phần tử có khối lượng m và a là gia tốc. Cần hiểu rằng (1.7) biểu thị mối quan hệ vectơ giữa lực và gia tốc, chúng được biểu thị trên các trục tọa độ x, y, z như sau:

$$\sum F_x = m.a_x \tag{1.8a}$$

$$\sum F_y = m.a_y \tag{1.8b}$$

$$\sum F_z = m.a_z \tag{1.8c}$$

Trong đó: F_x - hình chiếu của lực F trên trục x;

F_y - hình chiếu của lực F trên trục y;

F_z - hình chiếu của lực F trên trục z;

a_x, a_y, a_z - lần lượt là hình chiếu của gia tốc a trên các trục x, y, z.

Đối với chuyển động phẳng của một vật rắn đối xứng với mặt phẳng chuyển động tham chiếu (mặt phẳng x-y) định luật Newton về chuyển động cho ta các phương trình sau:

$$\sum F_x = m.(a_G)_x \quad (1.9a)$$

$$\sum F_y = m.(a_G)_y \quad (1.9b)$$

$$\sum F_G = I_G\alpha \quad (1.9c)$$

Trong đó: $(a_G)_x, (a_G)_y$ là các thành phần gia tốc dọc theo trục x và trục y của trung tâm khối lượng G của vật rắn, α là gia tốc góc, IG là mô men quán tính khối lượng của vật rắn đối với một trục đi qua G, trung tâm khối lượng ; ΣMG là tổng mô men của toàn bộ các lực tác dụng lên vật rắn đối với một trục đi qua G, vuông góc với mặt phẳng x- y. Chuyển động tổng quát của một vật rắn được mô tả bằng hai phương trình vectơ, một phương trình biểu thị mối quan hệ giữa lực và gia tốc của trung tâm khối lượng, còn phương trình kia thì biểu thị mối liên hệ giữa các mô men của các lực và chuyển động xoay của vật thể.

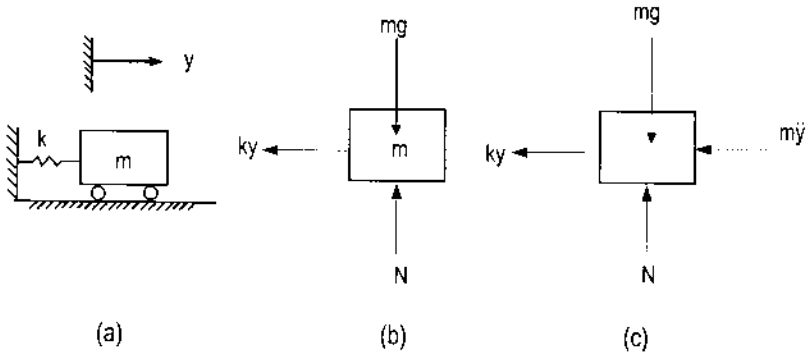
§1.6. Sơ đồ vật tự do

Trong bài toán động lực học, công việc đầu tiên và quan trọng là thiết lập sơ đồ vật tự do. Sơ đồ này có được bằng cách tách một vật ra khỏi các vật khác và biểu thị các lực tác dụng lên nó (hình1.6).

Ví dụ trên hình 1.6b, có khối lượng m, lực lò xo ky, trọng lượng mg và phản lực N. Vật dao động trên phương y nên các lực thẳng đứng không tham gia vào phương trình chuyển động. Trên hình 1.6c, ta có lực lò xo ky và lực quán tính $m\ddot{y}$. Từ điều kiện cân bằng trên phương y, ta có:

$$-ky = m\ddot{y} \quad (1.10)$$

Trong đó: lực lò xo mang dấu âm vì tác dụng trên chiều âm.



Hình 1.6

a) Hệ một bậc tự do; b) Các ngoại lực tác dụng lên vật tự do; c) Các ngoại lực và lực quán tính

§1.7. Nguyên lý Alenbert

Để có được phương trình (1.10) ta có thể dùng nguyên lý D'Alenbert, nguyên lý này được phát biểu như sau: Để hệ ở trạng thái cân bằng động lực học, ta cần thêm vào các ngoại lực ảo gọi là lực quán tính. Trên hình 1.6c, lực quán tính được biểu thị bằng $m\ddot{y}$, lực này bằng khối lượng nhân với gia tốc và luôn có chiều ngược lại với chiều tọa độ. Nguyên lý D'Alenbert cho phép ta dùng phương trình cân bằng để thiết lập phương trình chuyển động. Chẳng hạn, trên hình 1.6c tổng các lực trên phương y cho ta:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \tag{1.11}$$

Phương trình trên tương đương với phương trình (1.10)

Cần chú ý nguyên lý D'Alenbert chỉ áp dụng cho các trường hợp đơn giản. Như sau này ta sẽ thấy, nguyên lý công ảo sẽ là một công cụ có hiệu lực để giải những bài toàn phức tạp hơn.

§1.8. Lời giải của phương trình vi phân chuyển động

Bước tiếp theo là tìm lời giải của phương trình vi phân (1.1).

Trước hết, cần phân loại phương trình vi phân này. Vì biến phụ thuộc y và đạo hàm cấp 2 của nó $\ddot{y}$ đều ở bậc nhất trong (1.11), phương trình này được xếp vào loại tuyến tính bậc 2. Đồng thời, các hệ số của y và $\ddot{y}$ là những hằng số và vế phải của phương trình là số 0 nên ta xếp vào loại phương trình thuần nhất với các hệ số không đổi.

Căn cứ vào sự phân tích trên, lời giải của (1.11) là:

$$Y = A\cos\omega t \tag{1.12}$$

Hoặc

$$y = B\sin\omega t \tag{1.13}$$

Trong đó:

A, B là các hằng số, phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu của chuyển động, ω là một đại lượng biểu thị đặc trưng vật lý của hệ (sẽ định nghĩa sau). Thay (1.12) vào (1.11) ta có:

$$\left(-m\omega^2 + k\right)A\cos\omega t = 0 \tag{1.14}$$

Nếu phương trình trên được thoả mãn ở bất kỳ thời điểm nào, đại lượng trong dấu ngoặc phải triệt tiêu, nghĩa là: $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ (1.15)

Nghiệm của phương trình (1.15):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.16}$$

gọi là tần số vòng tự nhiên của hệ

Vì (1.12) và (1.13) đều là lời giải của (1.11) hơn nữa phương trình vi phân có tính chất tuyến tính nên sự cộng tác dụng của hai lời giải nói trên cũng là lời giải tổng quát của phương trình vi phân bậc 2.

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{1.17}$$

Để tính vận tốc $\dot{y}$, ta lấy đạo hàm (1.17):

$$\dot{y} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{1.18}$$

Các hàm số A và B xác định từ các điều kiện ban đầu tức là các giá trị chuyển vị và vận tốc ở thời điểm bắt đầu dao động.

Tha $y = y_0$ (chuyển vị ban đầu) và $\dot{y} = v_0$ (vận tốc ban đầu) tại thời điểm $t = 0$ vào (1.17) và (1.18), ta được:

$$y_0 = A \tag{1.19a}$$

$$v_0 = B\omega \tag{1.19b}$$

Cuối cùng, thay A và B từ (1.19) vào (1.17) ta được lời giải cuối cùng của phương trình vi phân

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{1.20}$$

§1.9. Tần số và chu kỳ

Phương trình (1.20) cho ta thấy chuyển động được mô tả bằng một phương trình có tính chất điều hoà do đó có tính chất chu kỳ nghĩa là được biểu thị bằng hàm sin hoặc hàm cosin với cùng một tần số ω. Vì các hàm sin và cosin đều có chu kỳ bằng 2π nên chu kỳ T được xác định bằng hệ thức ;

$$\omega T = 2\pi$$

Do đó: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (1.21)

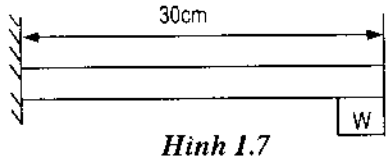
Chu kỳ được tính bằng giây/chu kỳ hoặc bằng giây nhưng phải hiểu rằng đó là giây trên chu kỳ. Nghịch đảo của chu kỳ là tần số tự nhiên f. Theo (1.21).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.22}$$

Chu trình tự nhiên f thường được tính bằng Hertz hoặc chu trình trên giây (cps). Vì đại lượng ω chỉ khác với tần số tự nhiên f ở hệ số không đổi 2π nên đôi khi ta cũng gọi ω là tần số tự nhiên. Để phân biệt hai đại lượng f và ω ta gọi ω là tần số vòng tự nhiên hoặc tần số góc tự nhiên, f biểu thị bằng cps như trong phần trên đã trình bày còn ω được biểu thị bằng radian/giây (rad/sec).

Ví dụ 1.1.

Một dầm côngxon chịu tác dụng của một trọng lượng W = 230N tại đầu mút (hình 1.7). Mặt cắt dầm có kích thước 2,5cm x 0,6cm. Chiều dài của dầm bằng 30cm. Tính tần số tự nhiên của hệ. $E = 21 \times 10^6 kN/m^2$.



Hình 1.7

Giải:

Chuyển vị của dầm tại đầu mút dưới tác dụng của tải trọng w bằng.

$$\Delta = \frac{W.L^3}{3EI}$$

Do đó, hằng số lò so:

$$k = \frac{W}{\Delta} = \frac{3EI}{L^3}$$

Trong đó: $I = \frac{1}{12} \times 2,5 \times 0,6^2 = 0,045\ cm^4$

Vậy: $k = \frac{3 \times 21 \times 10^6 \times 0,045}{30^3} = 105\ N/cm$

$m = \frac{W}{g}$; g là gia tốc trọng trường

Từ (1.16) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{105 \times \frac{980}{230}} = 21,152$ rad/sec

Từ (1.22): $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{21,152}{2 \times \pi} = 3,36$ cps

§1.10. Biên độ dao động

Sự biến đổi lượng giác đơn giản đối với phương trình (1.20) cho phép ta viết phương trình đó dưới dạng tương đương.

$$y = C\sin(\omega t + \alpha) \tag{1.23}$$

Hoặc

$$y = C\cos\sin(\omega t - \beta) \tag{1.24}$$

Trong đó:

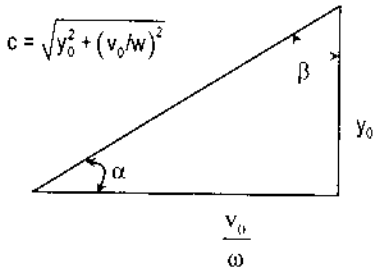
$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \tag{1.25}$$

$$\tan\alpha = \frac{y_0}{\frac{V_0}{\omega}} \tag{1.26}$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{v_o}{\omega}}{y} \qquad (1.27)$$

Cách đơn giản để được phương trình (1.23) hoặc (1.24) là nhân và chia phương trình (1.20) cho hệ số C (phương trình 1.25) và xác định α hoặc β theo (1.26) hoặc (1.27). Vậy:

$$y = C\left(\frac{y_0}{C}\cos\omega t + \frac{\frac{v_o}{\omega}}{C}\sin\omega t\right) \qquad (1.28)$$



Hình 1.8

Qua hình (1.8), ta thấy rằng:

$$\sin\alpha = \frac{y_0}{C} \qquad (1.29)$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{v_o}{\omega}}{C} \qquad (1.30)$$

Thay (1.29) và (1.30) vào (1.28), ta được:

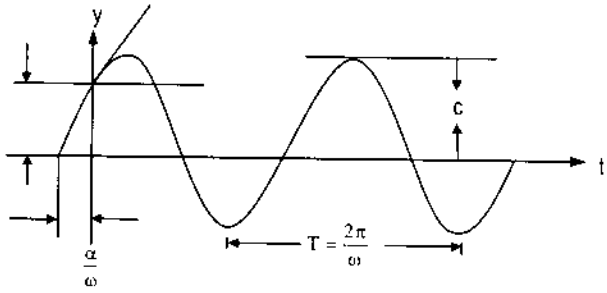
$$y = C(\sin\alpha\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t) \qquad (1.31)$$

Biểu thức trong dấu ngoặc của (1.31) chính là $\sin(\omega t + \alpha)$ trong phương trình (1.23)

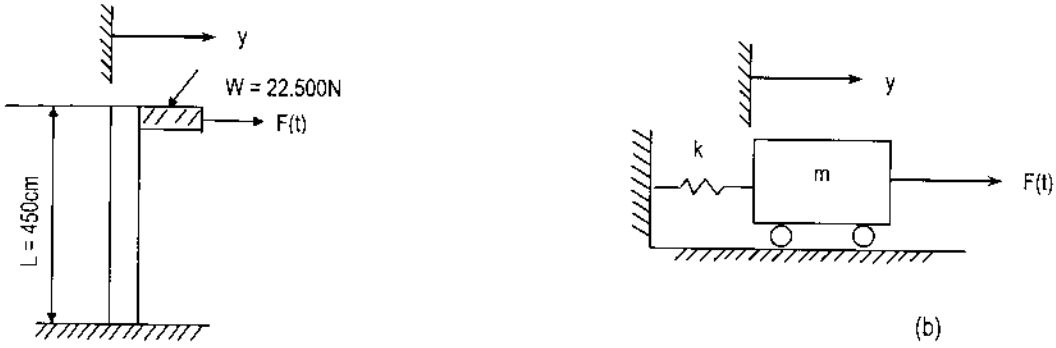
Giá trị C trong (1.23) hoặc (1.24) gọi là biên độ dao động và α hoặc β gọi là góc pha. Lời giải của bài toán đối với hệ dao động tự do một bậc tự do không có lực cản biểu thị trên hình (1.9).

Ví dụ 1.2:

Một cột trên hình (1.10a). Nó làm bằng thép cứng, trên đỉnh có một trọng lượng W = 22.500N. Yêu cầu xác định tần số tự nhiên. Khối lượng của cột bỏ qua. Cột có mô men quán tính I = 6864cm^4. Modun đàn hồi E = 21 × 10^6 N/cm^2.



Hình 1.9



Hình 1.10

Giải:

Ta đưa cột về mô hình đơn giản như trên (1.10b). Trong đó, m là khối lượng tác dụng ở đỉnh cột và k là hằng số lò xo, y là chuyển vị của đỉnh cột. Theo cơ học kết cấu:

$$y = \frac{PL^3}{12EI}$$

Do đó:

$$k = \frac{P}{y} = \frac{12EI}{l^3} = \frac{12 \times 21 \times 10^6 \times 6864}{(450)^2} = 18981,93 \text{ N/cm}$$

Theo (1.16) và (1.22), ta có:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k.g}{W}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{18981,93 \times 980}{22500}} = 4,576 \text{ cps}$$

Chương 2
HỆ MỘT BẬC TỰ DO CÓ LỰC CẢN

Như trong chương 1 đã trình bày, ta thấy rằng hệ một bậc tự do không có lực cản, một khi có lực kích thích tác dụng, dao động không ngừng với biên độ không đổi. Kinh nghiệm cho thấy một hệ như vậy không tồn tại trong thực tế vì bao giờ cũng xuất hiện lực cản trong quá trình dao động, nó tạo thành một cơ cấu làm cho cơ năng, động năng và thế năng của hệ biến thành các dạng năng lượng khác chẳng hạn như nhiệt. Sự thay đổi năng lượng hoặc biến mất năng lượng do lực cản gây ra rất phức tạp và cho đến nay ta vẫn chưa tìm hiểu được hết. Do đó, cần nêu lên một số giả thiết về lực can trên cơ sở thí nghiệm.

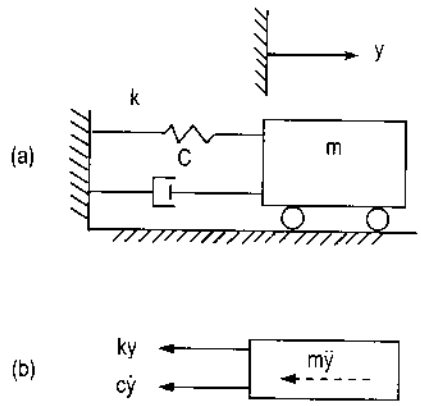
§2.1. Lực cản nhớt

Trong quá trình phân tích động lực học kết cấu, ta thường giả thiết rằng lực cản tỷ lệ với giá trị vận tốc và ngược chiều với phương chuyển động. Ta gọi lực cản này là lực cản nhớt bao quanh. Giả thiết này được dùng rộng rãi vì nó làm cho việc phân tích toán học tương đối đơn giản.

§2.2. Phương trình chuyển động

Ta đưa hệ một bậc tự do có lực cản về mô hình đơn giản như trên hình (2.1). Trong đó, m là khối lượng, k là hằng số lò xo, c là hệ số cản nhớt. Giống như trong chương một, ta lập sơ đồ vật tự do và ứng dụng định luật Newton để thiết lập phương trình vi phân về chuyển động.

Trên hình (2.16), biểu thị lực quán tính $m\ddot{y}$, lực khôi phục đàn hồi ky và lực cản $c\dot{y}$. Áp dụng nguyên lý D'Alembert, ta thiết lập điều kiện cân bằng trên phương y để được phương trình vi phân về chuyển động.



Hình 2.1

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \qquad (2.1)$$

Lời giải của (2.1) là hàm số mũ $y = Ce^{pt}$. Thay nó vào (2.1), ta được:

$$mCp^2e^{pt} + cCpe^{pt} + kCe^{pt} = 0$$

Sau khi bỏ thừa số chung, ta có phương trình đặc trưng

$$mp^2 + cp + k = 0 \tag{2.2}$$

Nghiệm của phương trình bậc hai trên là:

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.3}$$

Lời giải tổng quát của (2.1) là sự cộng tác dụng của hai lời giải

$$y(t) = C_1 e^{pt} + C_2 e^{pt} \tag{2.4}$$

Trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân, được xác định từ các điều kiện ban đầu.

Dạng cuối cùng của (2.4) phụ thuộc vào dấu trước dấu căn trong (2.3). Ba trường hợp riêng biệt có thể xảy ra: đại lượng dưới dấu căn có thể triệt tiêu, dương hoặc âm. Trường hợp triệt tiêu sẽ được giải quyết trước, ta gọi là lực cản tới hạn.

§2.3. Hệ có lực cản tới hạn

Đối với hệ có lực cản tới hạn, đại lượng dưới dấu căn trong (2.3) triệt tiêu nghĩa là:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \tag{2.5}$$

Hay

$$c_{th} = 2\sqrt{k.m} \tag{2.6}$$

Trong đó c_{th} là hệ số cản tới hạn. Vì tần số vòng tự nhiên trong trường hợp hệ không có lực cản là $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, hệ số cản tới hạn trong (2.6) có thể biểu thị bằng:

$$c_{th} = 2m\omega = \frac{2k}{m} \tag{2.7}$$

Trong hệ có lực cản tới hạn, theo (2.3), nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$p_1 = p_2 = -\frac{C_{th}}{2m} \tag{2.8}$$

Vì 2 nghiệm bằng nhau, lời giải tổng quát của (2.4) chỉ có một hằng số tích phân độc lập, tức là một lời giải độc lập

$$y_1(t) = C_1 e^{-\left(\frac{C_{ct}}{2m}\right)t} \tag{2.9}$$

Một lời giải độc lập khác có thể xác định từ hàm

$$y_2(t) = C_2 + y_1(t) = C_2 t.e^{-\left(\frac{C_{ct}}{2m}\right)t} \tag{2.10}$$

Phương trình trên cũng thoả mãn phương trình vi phân (2.1). Lời giải tổng quát trong trường hợp hệ có lực cản tới hạn là sự cộng tác dụng của hai lời giải nói trên, tức là:

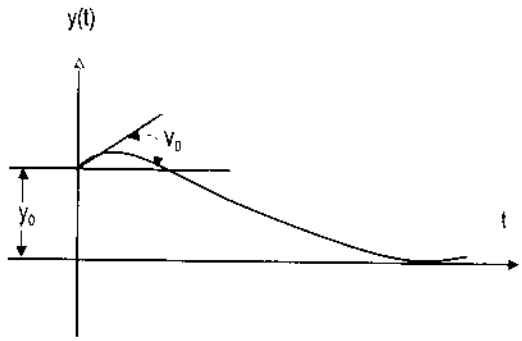
$$y(t) = \left(C_1 + C_2\right)e^{-\left(\frac{C_{ct}}{2m}\right)t} \qquad (2.11)$$

§2.4. Hệ có lực cản lớn hơn lực cản tới hạn

Đối với hệ có lực cản lớn hơn lực cản tới hạn, hệ số cản lớn hơn hệ số cản tới hạn tức là:

$$C > C_{th} \qquad (2.12)$$

Như vậy biểu thức dưới dấu căn trong (2.3) là dương tức là 2 nghiệm của phương trình đặc trưng đều là số thực và khác nhau, do đó lời giải được biểu thị trực tiếp bằng phương trình (2.4).Cần chú ý rằng trong trường hợp hệ có lực cản lớn hơn lực cản tới hạn, chuyển động của hệ không còn tính chất dao động nữa mà mức độ dao động suy giảm dần theo thời gian cho đến khi triệt tiêu. Hình (2.2) biểu thị trường hợp dao động có lực cản tới hạn. Trường hợp dao động có lực cản lớn hơn lực cản tới hạn cũng tương tự như vậy.



Hình 2.2

§2.5. Hệ có lực cản bé hơn lực cản tới hạn

Trong trường hợp hệ có lực cản bé hơn lực cản tới hạn, biểu thức dưới dấu căn mang dấu âm, nghiệm của phương trình đặc trưng (2.3) là những số phức liên hợp nghĩa là:

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{C}{2m}\right)^2} \qquad (2.13)$$

Trong đó: $i = \sqrt{-1}$ là đơn vị ảo

Trong trường hợp này, ta dùng phương trình Euler biểu thị mối liên hệ giữa hàm mũ và hàm lượng giác

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Thay các nghiệm p_1, p_2 từ (2.13) và (2.4) và căn cứ vào (2.14) ta được lời giải tổng quát trong trường hợp lực cản bé hơn lực cản tới hạn.

$$y(t) = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right) \tag{2.15}$$

Trong đó A và B là các hằng số tích phân trong trường hợp có lực cản và

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \tag{2.16}$$

Hoặc

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \tag{2.17}$$

Ta được (2.17) bằng cách thay vào phương trình (2.16) biểu thức tần số vòng tự nhiên trong trường hợp không có lực cản:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.18}$$

Ta định nghĩa tỷ số cản của hệ là: $\xi = \dfrac{c}{c_{th}}$ (2.19)

Trong đó c_{th} tính theo (2.6)

Cuối cùng, sau khi đưa vào các điều kiện ban đầu y_0 (chuyển vị) và v_0 (gia tốc) tại thời điểm t = 0, ta tính được các hằng số tích phân do đó lời giải có dạng.

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\left(y_0\cos\omega_D t + \frac{v_0 + y_0\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t\right) \tag{2.20}$$

Biểu thức trên có thể viết:

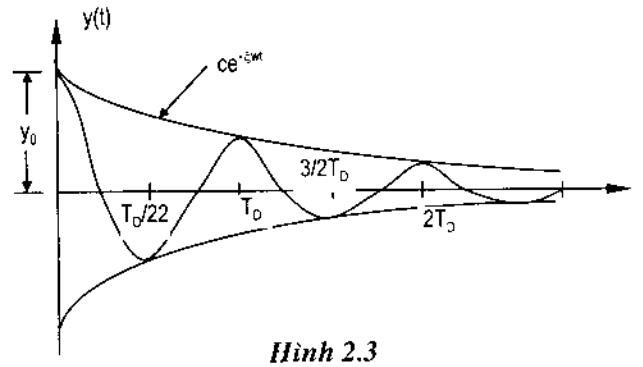
$$y(t0 = Ce^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \alpha) \tag{2.21}$$

Trong đó:

$$C = \sqrt{y_0^2 + \frac{\left(v_0 + y_0\xi\omega\right)^2}{\omega_D^2}} \tag{2.22}$$

và $$\tan\alpha = \frac{\left(v_0 + y_0\xi\omega\right)^2}{\omega_D^2}$$

Hình (2.3) biểu thị biểu đồ dao động của hệ có lực cản bé hơn lực cản tới hạn với chuyển vị ban đầu y_0 và vận tốc ban đầu bằng 0. Ta thấy rằng chuyển động có tính chất dao động nhưng không có tính chất chu kỳ.



Hình 2.3

Biên độ dao động không còn là hằng số, sau các chu kỳ liên tiếp nó giảm dần. Tuy nhiên, dao động xuất hiện trong từng quãng thời gian bằng nhau. Ta gọi quãng thời gian đó là chu kỳ dao động có lực cản, biểu thức của nó như sau:

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.24}$$

Giá trị hệ số cản đối với kết cấu trong thực tế bé hơn nhiều hệ số cản tới hạn và thường được xếp trong phạm vi giữa 2% đến 10% giá trị hệ số cản tới hạn. Thay giá trị $\xi = 0{,}10$ vào (2.17), ta được:

$$\omega_D = 0{,}995\omega \tag{2.25}$$

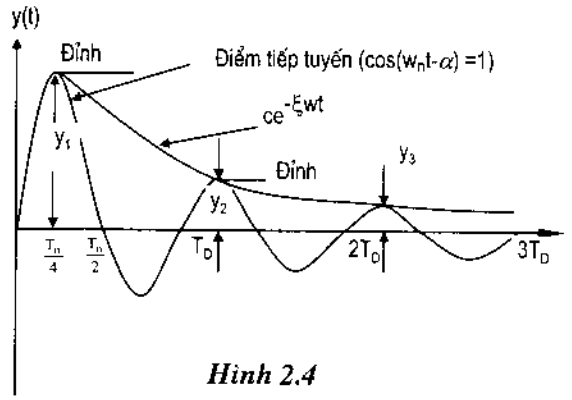
Từ biểu thức trên ta thấy rằng đối với hệ có hệ số cản bằng 10% hệ số cản tới hạn, tần số dao động hầu như bằng tần số vòng tự nhiên của hệ không có lực cản. Do vậy, trong thực tế tần số vòng tự nhiên đối với hệ có lực cản có thể lấy bằng tần số vòng tự nhiên của hệ không có lực cản.

§2.6. Độ giảm Logarit

Một phương pháp thực tế để xác định bằng thí nghiệm hệ số cản của hệ là thực hiện dao động tự do để ghi lại biểu đồ dao động như trên hình (2.4) và đo tốc độ giảm sút của biên độ dao động.

Sự giảm sút này có thể biểu thị bằng độ giảm logarit δ, được xác định bằng logarit tự nhiên của tỷ số giữa hai biên độ ở hai đỉnh liên tiếp (hình 2.4), tức là:

$$\delta = \ln\frac{y_1}{y_2} \tag{2.26}$$



Hình 2.4

Trên biểu đồ dao động có lực cản trên hình (2.4), theo (2.21), ta có phương trình:

$$y(t) = Ce^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \alpha)$$

Ta nhận thấy rằng khi hệ số cosin bằng đơn vị, chuyển vị nằm trên các điểm của đường cong $y(t) = Ce^{-\xi\omega t}$ (hình 2.4). Tuy nhiên, các điểm này nằm gần chứ không nằm trên vị trí biên độ cực đại. Các điểm trên đường cong đó nằm gần bên phải các điểm có biên độ cực đại. Trong các bài toán thực tế, ta có thể bỏ qua sự khác biệt đó và đường cong chuyển vị có thể giả thiết trùng với biên độ ở đỉnh của đường cong $y(t) = Ce^{-\xi\omega t}$. Do đó, tại hai đỉnh liên tiếp, biên bộ y_1 tại thời điểm t_t và y_2 tại thời điểm $t + t_D$ có thể viết:

$$y_1(t) = Ce^{-\xi\omega t_1}$$

$$y_2(t) = Ce^{-\xi\omega(t_1+t_D)}$$

Chia biên độ y_1 cho biên độ y_2 và lấy logarit tự nhiên, ta được:

$$\delta = \ln\frac{y_1}{y_2} = \xi\omega T_D \tag{2.27}$$

Thay chu kỳ của T_D từ (2.24) vào (2.27) ta được:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.28}$$

Như vậy là tỷ số cản được tính theo (2.28) sau khi xác định bằng phương pháp thực nghiệm biên độ ở hai đỉnh liên tiếp (hình 2.24) trong hệ dao động tự do. Đối với giá trị bé của tỷ số cản (2.28) có thể tính gần đúng như sau:

$$\delta = 2\pi\xi \tag{2.29}$$

Ví dụ 2.1: Một hệ với trọng lượng W = 44,5N và hằng số lò xo là k = 3.500N/m có lực cản nhớt, tỷ số giữa hai biên độ liên tiếp là $\frac{1,00}{0,85}$. Xác định:

a. Tần số vòng tự nhiên của hệ không có lực cản;

b. Độ giảm logarit;

c. Tỷ số cản;

d. Hệ số cản;

e. Tần số vòng tự nhiên trong trường hợp có lực cản.

Giải:

a) Tần số vòng tự nhiên của hệ không có lực cản tính theo công thức:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{3500\times\frac{9,80}{44,5}} = 27,76 \text{ rad/sec}$$

Tần số dao động:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{27,76}{2\pi} = 4,42 \text{ cps}$$

b) Độ sụt giảm logarit xác định theo (2.26)

$$\delta = \ln\frac{y_1}{y_2} = \ln\frac{0,100}{0,85} = 0,163$$

c) Theo (2.29) tỷ số cản được xác định gần đùng bằng:

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,163}{2\pi} = 0,026$$

d) Hệ số cản xác định từ (2.6) và (2.19)

$$c = \xi c_{th} = 2 \times 0,026\sqrt{44,5 \times \frac{3500}{9,80}} = 6,56\frac{N-sec}{m}$$

e) Tần số vòng tự nhiên của hệ có lực cản tính theo (2.17)

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 27,76\sqrt{1-(0,026)^2} = 27,75\ rad/sec$$

Ví dụ 2.2: Một bệ có trọng lượng W = 17792N đỡ 4 cột như nhau chôn vào móng. Bằng phương pháp thí nghiệm, người ta đặt một tải trọng tĩnh F = 4448N tác dụng lên phương nằm ngang vào bệ và đo được chuyển vị bằng Δ = 0,254cm. Hệ số cản vào khoảng 5% hệ số cản tới hạn. Xác định

a) Tần số vòng tự nhiên trong trường hợp không có lực cản

b) Hệ số cản tuyệt đối

c) Độ giảm logarit

d) Số chu trình và thời gian cần thiết để biên độ dao động giảm từ giá trị ban đầu 0,254cm đến 0,00254cm.

Giải:

a) Hằng số lò xo bằng:

$$k = \frac{F}{\Delta} = \frac{4448}{0,254} = 17511,81\ N/cm$$

Tần số vòng tự nhiên không có lực cản là:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{17511,81 \times 980}{17792}} = 31,06\ rad/sec$$

Hệ số cản tới hạn:

b) $C_{th} = 2\sqrt{k.m} = 2\sqrt{\frac{17511,81 \times 17792}{980}} = 4805\frac{N.sec}{cm}$

Hệ số cản tuyệt đối: $C = \xi C_{th} = 0,05 \times 4805 = 240,25\frac{N.sec}{cm}$

c) Độ giảm logarit tính gần đúng bằng:

$$\delta = \ln\left(\frac{y_0}{y_1}\right) = 2\pi\xi = 2\pi \text{ x } 0,05 = 0,314$$

d)Tỷ số giữa biên độ thứ nhất y_0 và biên độ y_n sau n chu trình có thể xác định như sau:

$$\frac{y_0}{y_k} = \frac{y_0}{y_1}.\frac{y_1}{y_2}....\frac{y_{n-1}}{y_n}$$

Lấy logarit tự nhiên, ta được: $\ln\frac{y_0}{y_n} = \delta + \delta + ... + \delta = n\delta$

Vậy $\ln\frac{0,1}{0,01} = 0,314n$; $n = \frac{\ln(10)}{0,314} = 7,33 \approx 8$ chu trình

Tần số vòng tự nhiên có lực cản:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 31,06\sqrt{1-0,05^2} = 31,02 \text{ rad/sec}$$

Chu kỳ có lực cản: $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{31,02} = 0,2025 \text{ sec}$

Thời gian cho 8 chu trình là:

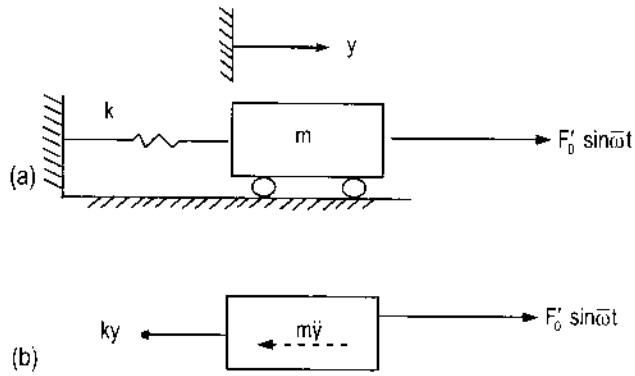
$t \text{ (chu trình)} = 8 \times T_D = 8 \times 0,2025 = 1,62 \text{ sec}$

Chương 3
HỆ MỘT BẬC TỰ DO DƯỚI TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG ĐIỀU HÒA

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu dao động của hệ một bậc tự do, chịu tác dụng của tải trọng điều hoà là tải trọng biến đổi theo quy luật hàm sin hoặc cosin theo thời gian. Loại tải tọng này thường xảy ra trong dao động cơ học, nó do sự xoay của khối lượng lệch tâm của máy sản sinh ra.

§3.1. Hệ một bậc tự do không có lực cản dưới tác dụng của tải trọng điều hoà

Mô hình của hệ một bậc tự do không có lực cản chịu tác dụng của tải trọng điều hoà như trên hình (3.1a). Lực kích thích có dạng $F_0 \sin\bar{\omega}t$ trong đó F_0 là biên độ lớn nhất và $\bar{\omega}$ là tần số của lực tính bằng radia/s. Sơ đồ vật tự do biểu thị trên hình (3.1b). Thiết lập điều kiện cân bằng trên phương y, ta được phương trình vi phân:



Hình 3.1

$$m\ddot{y} + ky = F_0 \sin\bar{\omega}t \tag{3.1}$$

Lời giải của (3.1) có dạng: $y(t) = y_c + y_p(t)$ (3.2)

Trong đó: $y_c(t)$ là lời giải bù thoả mãn phương trình vi phân thuần nhất (vế phải bằng 0), y_p là lời giải riêng thoả mãn phương trình vi phân không thuần nhất (vế phải khác 0). Theo (1.17)

$$Y_c(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{3.3}$$

Trong đó: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Lời giải riêng có dạng:

$$y_p(t) = Y \sin\bar{\omega}t$$

Trong đó Y là giá trị lớn nhất của lời giải riêng. Thay (3.4) vào (3.1) ta được:

$$-m\bar{\omega}^2 Y + kY = F_0 \tag{3.4}$$

Do đó: $$Y = \frac{F_0}{k - m\bar{\omega}^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - r^2} \tag{3.5}$$

Trong đó: r biểu thị tỷ số giữa tần số của lực tác dụng và tần số vòng tự nhiên của hệ:

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \tag{3.6}$$

Căn cứ vào (3.2), (3.3) và (3.5), ta có:

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - r^2}\sin\omega t \tag{3.7}$$

Từ (3.7), nếu các điều kiện biên $y = y_0$ và $v = v_0 = 0$ ở thời điểm $t = 0$, ta xác định được các hằng số tích phân.

$$A = 0\,; \quad B = \frac{r\frac{F_0}{k}}{1 - r^2}$$

Thay các biểu thức trên vào (3.7), ta được:

$$y(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - r^2}(\sin\bar{\omega}t - r\sin\omega t) \tag{3.8}$$

Phương trình trên cho ta thấy lời giải tổng quát là sự cộng tác dụng của hai số hạng điều hoà có tần số khác nhau, do đó chuyển động không còn tính chất điều hoà. Tuy nhiên, trong thực tế, sự xuất hiện của lực cản làm cho số hạng thứ hai trong dấu ngoặc của (3.8) biến mất, do đó ta gọi nó là số hạng nhất thời, lời giải còn lại là:

$$y(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - r^2}\sin\bar{\omega}t \tag{3.9}$$

Ta gọi lời giải trên là lời giải ở trạng thái ổn định. Trong trường hợp hệ không có lực cản, số hạng thứ hai trong (3.8) vẫn tồn tại do đó lời giải vẫn là (3.8).

Từ (3.8) hoặc (3.9) ta thấy rằng nếu tần số lực tác dụng $\bar{\omega}$ bằng tần số vòng tự nhiên ω của hệ (tức là $r = 1$) thì biên độ dao động vô cùng lớn. Ta gọi hiện tượng này là hiện tượng cộng hưởng. Tuy nhiên vật liệu được sử dụng trong thực tế có những hạn chế về độ bền, do đó sự phá hoại của kết cấu thường xảy ra sớm trước khi biên độ dao động trở thành vô hạn.

§3.2. Hệ có lực cản dưới tác dụng của tải trọng điều hòa

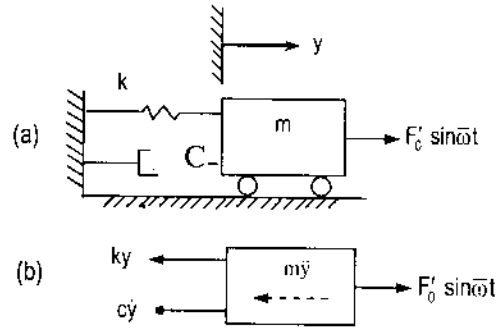
Bây giờ ta hãy xét trường hợp hệ một bậc tự do có lực cản dưới tác dụng của tải trọng điều hoà. Mô hình toán học biểu thị trên hình (3.2a) và sơ đồ vật tự do biểu thị trên hình (3.2b). Lập phương trình cân bằng trên phương chuyển động, ta được

$$m\ddot{y} + c\dot{y} = F_0 \sin\bar{\omega}t$$

(3.10)

Lời giải của phương trình trên gồm lời giải bù $y_c(t)$ và lời giải riêng $y_p(t)$. Lời giải bù trong trường hợp hệ số cản bé hơn hệ số cản tới hạn ($c < c_{th}$) được xác định từ các phương trình (2.15) và (2.19):

$$y_p(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right) \qquad (3.11)$$



Hình 3.2

Lời giải riêng có dạng:

$$y_p(t) = C_1 \sin\bar{\omega}t + C_2 \cos\bar{\omega}t \qquad (3.12)$$

Áp dụng hệ thức Euler:

$$e^{i\bar{\omega}t} = \cos\bar{\omega}t + i\sin\bar{\omega}t$$

(3.10) có thể viết

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 e^{i\bar{\omega}t} \qquad (3.13)$$

Lời giải riêng của (3.13) có thể viết

$$y_p = Ce^{i\bar{\omega}t} \qquad (3.14)$$

Thay (3.14) vào (3.13), ta được

$$-m\bar{\omega}^2 C + i\bar{\omega}C + kC = F_0$$

Do đó: $$C = \frac{F_0}{k - m\bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega}}$$

$$y_p = \frac{F_0 e^{i\bar{\omega}t}}{k - m\bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega}}$$

Dưới dạng toạ độ cực, mẫu số phức trong (3.15), có thể viết:

$$y_1 = \frac{F_0 e^{i\bar{\omega}t}}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}.e^{i\theta}} \qquad (3.16)$$

Hoặc: $$\frac{F_0 e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}}{\sqrt{\left(k - m\bar{\omega}^2\right)^2 + \left(c\bar{\omega}\right)^2}}$$

Trong đó: $$\tan\theta = \frac{c\bar{\omega}}{k - m\bar{\omega}^2} \qquad (3.17)$$

Thành phần ảo của $F_0 e^{i\bar{\omega}t}$ bây giờ là thành phần ảo của (3.16)

$$y_p = \frac{F_0 \sin(\bar{\omega} - \theta)}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}} \qquad (3.18)$$

Hoặc $$y_p = \bar{Y}\sin(\bar{\omega}t - \theta) \tag{3.19}$$

$$Y = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega}^2)}}$$

Trong đó Y là biên độ dao động ở trạng thái ổn định. Các phương trình (3.18) và (3.17) có thể viết dưới dạng tỷ số không có thứ nguyên.

$$y_p = \frac{y_{st} + \sin(\bar{\omega} - \theta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \tag{3.20}$$

$$\tan\theta = \frac{2\xi r}{1 - r^2} \tag{3.21}$$

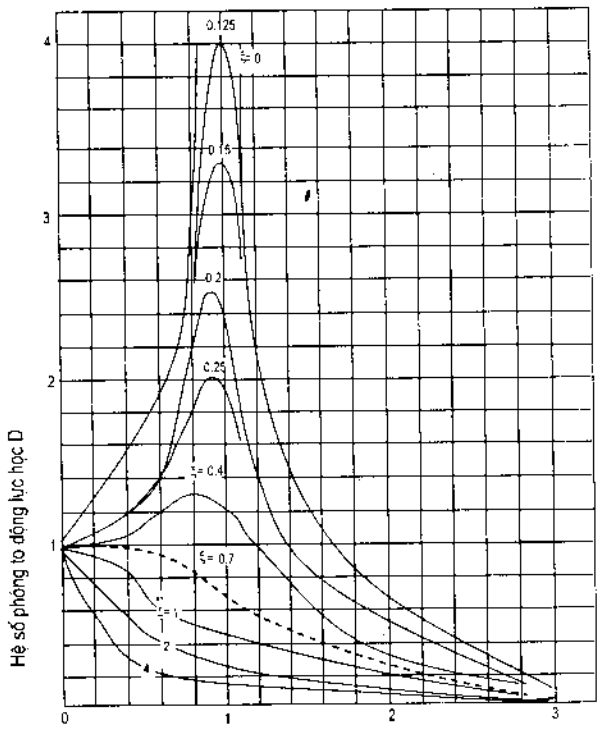
Trong đó $y_{st} = \frac{F_0}{k}$ được xem như chuyển vị tĩnh của lò xo đặt lực F_0:

$\xi = \frac{C}{C_{th}}$ là tỷ số cản và $r = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ là tỷ số tần số. Lời giải tổng quát bây giờ là tổng của lời giải bù (nhất thời), từ (3.11) và lời giải ở trạng thái ổn định từ (3.20).

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right) + \frac{y_{st}\left(\sin\bar{\omega}t - \theta\right)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 - \left(2r\xi\right)^2}} \tag{3.22}$$

Cần chú ý rằng các hằng số tích phân A và B trong (3.22) không được tính từ các điều kiện ban đầu và cũng không được tính từ thành phần nhất thời trong (3.11). Khi khảo sát thành phần nhất thời, ta thấy rằng thừa số mũ $e^{-\xi\omega t}$ chính là nguyên nhân làm cho nó biến mất do đó chỉ còn lại dao động ở trạng thái ổn định biểu thị bởi phương trình (3.20).

Tỷ số giữa biên độ ở trạng thái ổn định trong $y_p(t)$ và chuyển vị tĩnh y_{st} được gọi là hệ số phóng to động lực học. D_l nó được biểu thị trong các phương trình (3.19) và (3.20)



Hình 3.3

$$D = \frac{Y}{y_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2r\xi\right)^2}} \tag{3.23}$$

Từ hình (3.3), ta thấy rằng hệ số phóng to động lực học thay đổi theo tỷ số tần số r và tỷ số cản ξ.

Từ hình (3.4), ta thấy rằng góc pha θ trong (3.21) cũng biến đổi theo các đại lượng trên.

Từ hình (3.3), ta chú ý rằng đối với hệ có lực cản bé, biên độ cực đại xuất hiện ứng với tỷ số tần số gần bằng đơn vị có nghĩa là hệ số phóng to động lực học có giá trị cực đại khi xảy ra hiện tượng cộng hưởng (r =1).

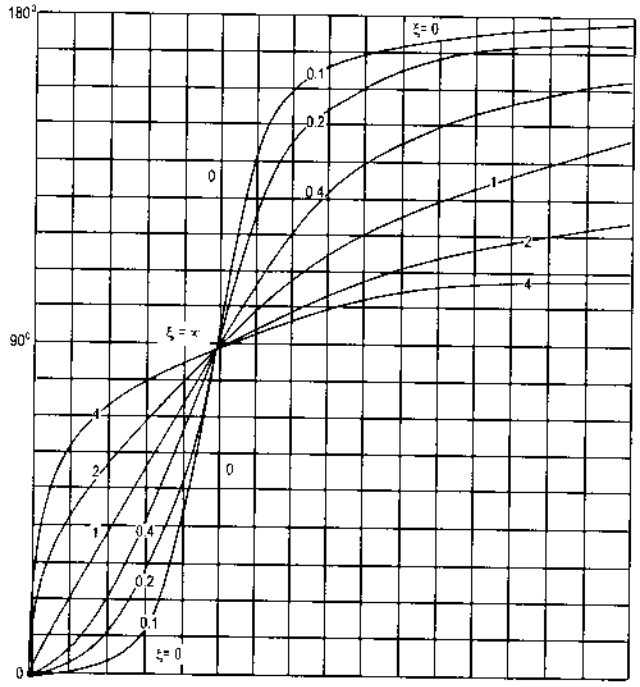
Từ phương trình (3.23), ta cũng thấy rằng khi xảy ra hiện tượng cộng hưởng, hệ số phóng to động lực học nghịch đảo với tỷ số cản nghĩa là:

$$D(r=1)=\frac{1}{2\xi} \tag{3.24}$$

Mặc dầu hệ số phóng to động lực học hầu như đạt đến giá trị cực đại khi xảy ra hiện tượng cộng hưởng, giá trị đó không phải là chính xác đối với hệ có lực cản. Tuy nhiên, trong việc ước tính một cách hợp lý lực cản, người ta thấy rằng sự khác biệt giữa giá trị gần đúng trong (3.24) và giá trị cực đại chính xác có thể bỏ qua.

Ví dụ 3.1:

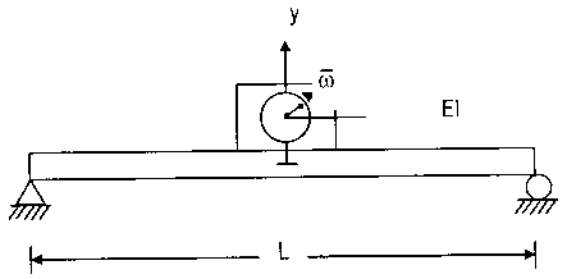
Một dầm đơn giản đỡ một máy có trọng lượng 71,168N ở trung tâm. Dầm có nhịp L = 365,8cm và mô men quán tính I = 5344,41cm^4. Động cơ quay 300 vòng/phút, rô tơ của nó mất cân bằng ở mức độ W'= 177,92N ứng với bán kính l_0 = 2,54cm. Hỏi biên độ ở trạng thái ổn định là bao nhiêu nếu hệ số cản tương đương của hệ bằng 10% hệ số cản tới hạn. Đầu đề bài toán biểu thị trên hình (3.5). Mô hình toán học và sơ đồ vật tự do biểu thị trên hình (3.6). E = 21×10^6 N/cm^2.



Hình 3.4

Giải:

Hệ có lực cản và khối lượng phân bố của dầm có thể bỏ qua so với khối lượng lớn của máy. Lực ở trung tâm của dầm đơn giản cần thiết để cho điểm đó chuyển vị bằng đơn vị (tức là hệ số độ cứng) được xác định bằng công thức.



Hình 3.5

$$k = \frac{48E}{L^3} = \frac{48 \times 21.10^6 \times 5344,41}{(365,8)^3} = 110059,92 N/m$$

Tần số vòng tự nhiên của hệ:

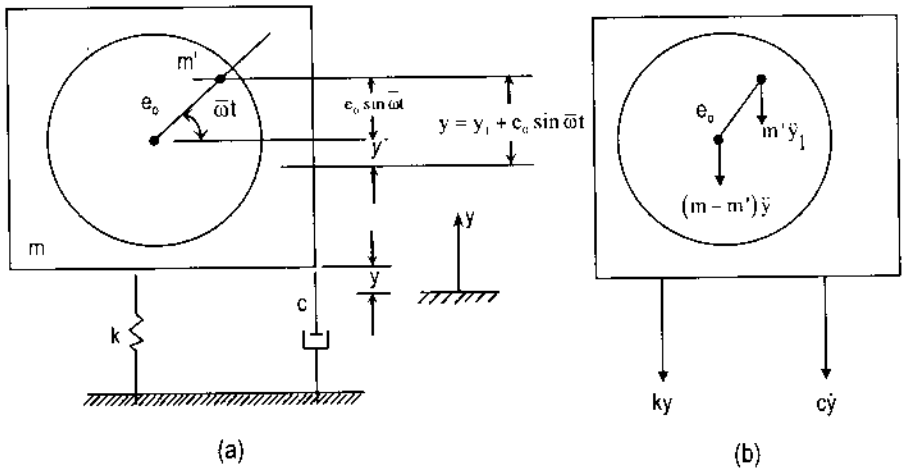
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{110059,92 \times 980}{71168}} = 38,93 \text{ rad/sec}$$

Tần số của máy:

$$\bar{\omega} = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 31,41 \text{ rad/sec}$$

Tỷ số tần số: $r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{31,41}{38,93} = 0,807$

Từ hình (3.6) giả sử m là toàn bộ khối lượng của động cơ và m' là khối lượng xoay không cân bằng.



Hình 3.6

Vậy nếu y là chuyển vị thẳng đứng của khối lượng không xoay (m - m') thì chuyển vị y_1 của khối lượng m' là (xem hình 3.6)

$$y_1 = y + e_0 \sin\bar{\omega}t \qquad \text{(a)}$$

Phương trình chuyển động được xác định bằng cách cộng tất cả các lực trên phương thẳng đứng trên sơ đồ vật tự do (hình 3.6b) trong đó có lực quán tính của khối lượng không xoay (m-m') $\ddot{y}$ và lực quán tính của khối lượng không cân bằng $m'\ddot{y}_1$:

$$(m-m')\ddot{y}+m'\ddot{y}_1+C\dot{y}+ky=0 \qquad (b)$$

Thay y_1 từ phương trình (a) vào phương trình trên

$$(m-m')\ddot{y}+m'(\ddot{y}-e_0\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t)+C\dot{y}+ky=0$$

Sau khi xếp đặt lại các số hạng, ta được:

$$m\ddot{y}+C\dot{y}+ky=m'e_0\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t \qquad (c)$$

Phương trình trên có dạng như phương trình (3.10) được dùng cho hệ có lực cản và chịu tác dụng của tải trọng điều hoà có biên độ:

$$F_0=m'e_0\bar{\omega}^2 \qquad (d)$$

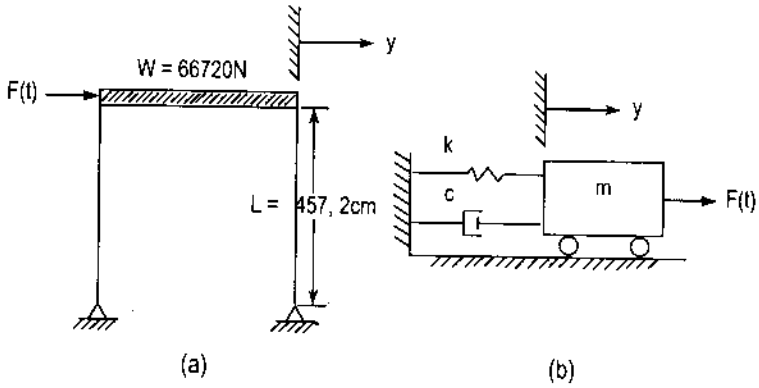
Thay các giá trị tương ứng vào (d) ta được:

$$F_0=177,92\times 25,4\times\frac{31,41^2}{980}=4549,55\ \text{N/cm}$$

Từ (3.19) biên bộ ở trạng thái ổn định bằng :

$$Y=\frac{\dfrac{4549,55}{110059,92}}{\sqrt{(1-0,807^2)+(2\times 0,807\times 0,1)^2}}=0,108\text{cm}$$

Ví dụ 3.2. Một khung thép đỡ 1 động cơ quay tác động vào dầm một lực nằm ngang F(t) = 889,60sin 5,3t. Dầm có trọng lượng W = 66720 N. Mỗi cột có mô men quán tính I = 2880,32cm^4. Chiều dài của cột bằng 457,2 cm.



Hình 3.7

Giả sử hệ số cản của hệ bằng 5% hệ số tới hạn, hỏi biên độ dao động ở trạng thái ổn định là bao nhiêu ? E = 21 × 10^6 N/cm^2

Giải:

Mô hình toán học của hệ như trên hình (3.7b)

Chuyển vị nằm ngang ở các đỉnh cột bằng:

$$\Delta=\frac{P.L^3}{3E\times 2I}$$,do đó hệ số độ cứng (hằng số lò xo).

$$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{3E \times 2I}{L^3} = \frac{3 \times 21 \times 10^6 \times 2880,32}{(457,2)^3} = 3797,45 N/cm$$

$$\xi = 0,05$$

$$y_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{889,60}{3797,45} = 0,234 cm$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3797,45 \times 980}{66729}} = 7,47 \text{ rad/sec}$$

$$r = \frac{\overline{\omega}}{\omega} = \frac{5,3}{7,47} = 0,71$$

Căn cứ vào (3.19) và (3.20) biên độ ở trạng thái ổn định

$$Y = \frac{y_{st}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 (2r\xi)^2}} = \frac{0,234}{\sqrt{\left(1-0,71^2\right)^2 + \left(2 \times 0,71 \times 0,05\right)^2}}$$

$$Y = 0,467 cm$$

§3.3. Ảnh hưởng của dao động nền móng đến kết cấu

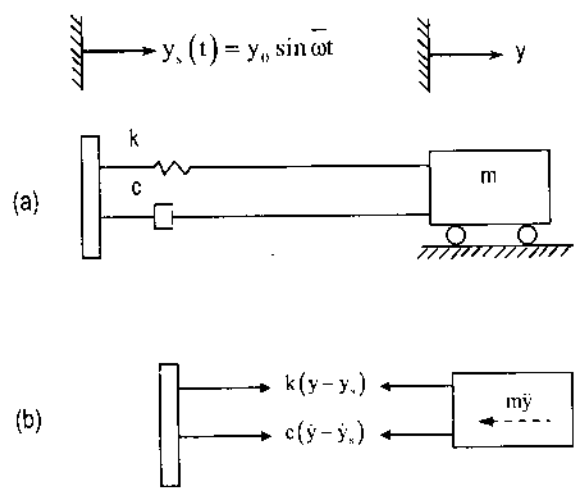
Có nhiều trường hợp nền móng hoặc gối tựa của kết cấu dao động theo thời gian. Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu kết cấu chịu tác dụng của lực động đất, lực xung kích như nổ mìn hoặc lực máy móc.

Ta hãy nghiên cứu gối tựa của kết cấu chịu tác dụng của một tải trọng điều hoà (hình 3.8a)

$$y_{st} = y_0 \sin \overline{\omega} t \qquad (3.25)$$

Trong đó y_0 là biên độ cực đại và $\overline{\omega}$ là tần số vòng dao động ở gối tựa.

Sơ đồ vật tự do của hệ biểu thị trên hình (3.8b). Sau khi thiết lập điều kiện cân bằng của các lực trên phương chuyển động ta được phương trình vi phân



Hình 3.8

$$m\ddot{y} + C(\dot{y} - \dot{y}_s) + k(y - y_s) = 0 \qquad (3.26)$$

Thay (3.25) vào (3.26), ta có

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = ky_0 \sin \overline{\omega} t + C\overline{\omega} y_0 \cos \overline{\omega} t \qquad (3.27)$$

Hai tần số vòng $\overline{\omega}$ trong vế phải của phương trình trên có thể kết hợp với nhau để cho ta phương trình.

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = F_0 \sin(\overline{\omega}t + \beta) \tag{3.28}$$

Trong đó:

$$F_0 = y_0\sqrt{k^2 + (c\overline{\omega})^2} = y_0 k\sqrt{1 + (2r\xi)^2} \tag{3.29}$$

Và $\tan\beta = \dfrac{c\overline{\omega}}{k} = 2r\xi$ (3.30)

Như vậy phương trình (3.28) là phương trình vi phân trong trường hợp hệ chịu lực điều hoà $F_0 \sin(\overline{\omega}t + \beta)$, nó giống như phương trình (3.10).

Lời giải ở trạng thái ổn định của phương trình (3.28) được xác định như phương trình (3.20) chỉ khác là cộng thêm góc β trong hàm sin

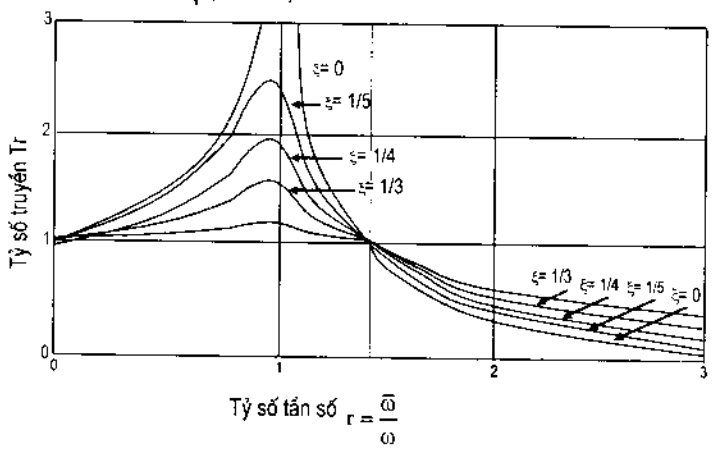
$$y(t) = \frac{\dfrac{F_0}{k}\sin(\overline{\omega}t + \beta - \theta)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \tag{3.31}$$

Thay F_0 từ (3.29) vào phương trình trên.

$$\frac{y(t)}{y_0} = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}}\sin(\overline{\omega}t + \beta - \theta) \tag{3.32}$$

Phương trình (3.32) biểu thị sự truyền tương đối từ dao động của gối tựa đến dao động của hệ. Đây là vấn đề quan trọng liên quan đến việc cách ly dao động nghĩa là bảo vệ kết cấu để tránh các dao động có hại của nền móng. Mức độ cách ly tương đối gọi là tỷ số truyền tức là tỷ số giữa biên độ dao động Y của hệ và biên độ dao động y_0 của nền móng. Từ phương trình (3.32) hệ số truyền có thể viết:

$$T_r = \frac{Y}{y_0} = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \tag{3.33}$$



Hình 3.9

Tỷ số truyền phụ thuộc vào tỷ số tần số $r = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$ và tỷ số cản, nó được biểu thị bằng các đường cong trên hình (3.9).

Tất cả các đường cong hầu như đi qua điểm tại đó tỷ số tần số $r = \sqrt{2}$

Từ hình (3.9) ta có thể thấy rằng lực cản có xu hướng giảm tỷ số truyền đối với các tỷ số tần số $r > \sqrt{2}$.

Phương trình (3.32) cho ta lời giải đối với hệ chịu tác dụng của lực điều hoà ở nền móng. Ta có thể giải phương trình vi phân (3.26) theo các số hạng biểu thị chuyển động tương đối giữa khối lượng m và nền móng:

$$u = y = y_s \tag{3.34}$$

Thay phương trình trên vào (3.26), ta được:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{eff}(t) \tag{3.35}$$

Trong đó $F_{eff}(t) = -m\ddot{y}_s$ được xem như tải trọng có hiệu lực tác dụng vào khối lượng m của hệ, chuyển vị của nó được biểu thị bằng tọa độ u.

Thay $\ddot{y}_s$ từ (3.25) vào (3.35), ta được:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = my_0\overline{\omega}^2 \sin\overline{\omega}t \tag{3.36}$$

(3.36) tương tự như phương trình (3.10) với $F = my_0\overline{\omega}^2$. Từ (3.20) lời giải ở trạng thái ổn định được xác định như sau:

$$U(t) = \frac{\dfrac{my_0\overline{\omega}^2}{k}\sin(\overline{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \tag{3.37}$$

Thay

$$\frac{\overline{\omega}^2}{\dfrac{k}{m}} = \frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} = r^2$$

vào phương trình trên, ta được:

$$\frac{U(t)}{y_0} = \frac{r^2 \sin(\overline{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \tag{3.38}$$

Trong đó: θ được xác định bằng phương trình (3.21)

Ví dụ 3.3: Cho một khung như trong ví dụ (3.2) (hình 3.7). Giả sử nền móng của khung chịu lực hình sin $y_s(t) = 889{,}6 \sin 5{,}3t$. Xác định tỷ số truyền dao động lên dầm.

Giải:

Trong ví dụ (3.2) ta đã tính được k = 3797,45N/m ; $\xi = 0,05$; $y_{st} = 0,234$cm ; $\omega = 7,47$ rad/sec ; $\bar{\omega} = 5,3$ rad/sec ; r = 0,71.

Tỷ số truyền xác định từ (3.33):

$$T_r = \sqrt{\frac{1+(2r\xi)^2}{(1-r^2)^2+(2r\xi)^2}} = \sqrt{\frac{1+(2\times 0,05\times 0,71)^2}{(1-0,71^2)^2+(2\times 0,05\times 0,71)^2}}$$

$$T_r = 2,0$$

§3.4. Ảnh hưởng của dao động kết cấu đến nền móng

Trong mục này sẽ nghiên cứu ảnh hưởng của đao động kết cấu đến nền móng. Vấn đề là kết cấu chịu tác dụng của tải trọng điều hoà $F(t) = F_0 \sin\bar{\omega}t$ trong trường hợp có lực cản (xem hình 3.2), ta hãy tìm xem lực truyền xuống nền móng là bao nhiêu ? Phương trình chuyển động có dạng:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin\bar{\omega}t$$

Theo (3.20) lời giải ở trạng thái ổn định là:

$$y = Y\sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

Trong đó:

$$Y = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\xi)^2}} \tag{3.39}$$

$$\tan\theta = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

Lực truyền xuống nền móng qua lò xo là ky và qua phần tử cản là $\dot{y}$ (hình 3.2). Vậy toàn bộ lực truyền xuống F_T bằng:

$$F_T = ky + c\dot{y} \tag{3.40}$$

Lấy đạo hàm (3.19) và thay vào (3.40), ta được:

$$F_T = Y\left[k\sin(\bar{\omega}t-\theta) + c\bar{\omega}\cos(\bar{\omega}t-\theta)\right]$$

Hay

$$F_T = Y\sqrt{k^2+c^2\bar{\omega}^2}\sin(\bar{\omega}t-\theta+\beta) \tag{3.41}$$

$$F_T = Y\sqrt{k^2 + c^2\bar{\omega}^2}\,\sin\left(\bar{\omega}t - \Phi\right) \tag{3.42}$$

Trong đó:

$$\tan\beta = \frac{c\bar{\omega}}{k} = 2\xi r$$
$$\Phi = \theta - \beta \tag{3.44}$$

Từ (3.39) và (3.42), lực cực đại A_T truyền xuống nền móng là:

$$A_T = F_0\sqrt{\frac{1+\left(2r\xi\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2r\xi\right)^2}} \tag{3.45}$$

Trong trường hợp này, tỷ số truyền T_r cũng được định nghĩa là tỷ số giữa biên độ của lực truyền xuống nền móng trên biên độ của lực tác dụng.

$$T_r = \frac{A_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1+\left(2r\xi\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}} \tag{3.46}$$

Cần chú ý rằng tỷ số truyền từ nền móng đến kết cấu và tỷ số truyền từ kết cấu xuống nền móng đều được xác định bằng các hàm hoàn toàn như nhau (3.33) và (3.46). Vậy các đường cong trên hình (3.9) đều có thể biểu thị bất cứ tỷ số truyền nào nói trên. Tổng góc Φ trong (3.42) có thể xác định bằng cách lấy hàm tiếp tuyến đối với hai vế của (3.41)

$$\tan\Phi = \frac{\tan\Phi - \tan\beta}{1+\tan\Phi\tan\beta}$$

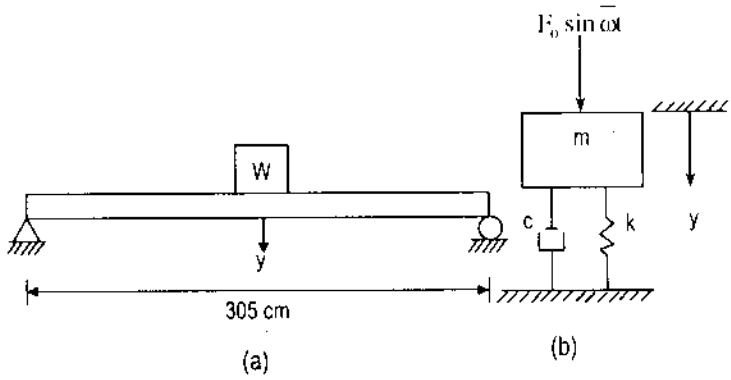
Thay $\tan\theta$ và $\tan\beta$ từ (3.21) và (3.43) vào phương trình trên, ta có:

$$\tan\theta = \frac{2\xi r^3}{1-r^2+4\xi^2r^2} \tag{3.47}$$

Ví dụ 3.4:

Một động cơ có trọng lượng W = 17169,28N được đặt trên một dầm đơn giản như trên hình (3.10a). Động cơ sản sinh lực điều hoà có độ lớn 31136N và có tần số vòng $\bar{\omega}$ = 60rad/sec.

Mô men quán tính của dầm I = 4,995cm^4 ; E = 21 × 10^6 N/cm^2. Bỏ qua trọng lượng của dầm và giả thiết tỷ số cản 10%. Xác định:



Hình 3.10

a. Biên độ chuyển động của máy

b. Lực truyền xuống gối tựa.

c. Góc pha tương ứng

Giải:

Mô hình toán học biểu thị trên hình (3.10b). Đã tính được các trị số sau:

$$k = \frac{48EI}{l^3} = 175100N/cm$$

$$\omega = \frac{k}{m} = 100\ rad/sec$$

$$\xi = 0,1$$

$$r = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 0,6$$

$$y_{st} = \frac{F_0}{k} = 0,18\ cm$$

Theo (3.19) biên độ dao động bằng:

$$Y = \frac{y_{st}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2r\xi\right)^2}} = 0,27\ cm$$

Theo (3.21) góc pha được xác định như sau:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2r\xi}{1-r^2} = 10,6^0$$

b. Từ (3.46) hệ số truyền:

$$T_r = \frac{A_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1+\left(2r\xi\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2r\xi\right)^2}}$$

Do đó, biên độ của lực truyền xuống nền móng là:

$$A_T = F_0\, T_r = 48,158N$$

c. Theo (3.47) góc pha tương ứng

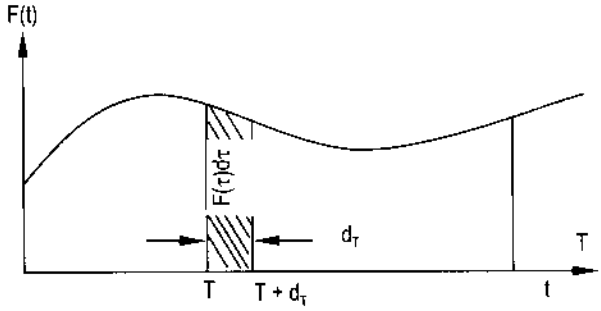
$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\xi r^3}{1-r^2+\left(2r\xi\right)^2} = 3,78^0$$

Chương 4
HỆ CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG ĐỘNG KHÁI QUÁT

Trong chương trước, ta đã nghiên cứu dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hoà. Mặc dầu tải trọng đó có tính chất quan trọng nhưng trong thực tế, kết cấu còn chịu tác dụng của các tải trọng khác không mang tính chất điều hoà. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của lực khái quát. Ta sẽ thấy rằng lời giải có thể xác định dưới dạng tích phân tính được bằng phương pháp giải tích trong một số trường hợp đơn giản. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, ta có thể dùng phương pháp tích phân bằng số.

§4.1. Tải trọng xung kích và tích phân Duhamel

Tải trọng xung kích là tải trọng tác dụng trong một thời gian rất ngắn. Ta định nghĩa xung lực là tích của tải trọng đó nhân với thời gian tác dụng của nó. Chẳng hạn xung lực của lực $F(\tau)$ trên hình (4.1) tác dụng trong quãng thời gian $d\tau$ là tích $F(\tau)d\tau$ biểu thị bằng hình gạch chéo



Hình 4.1

Xung lực này tác dụng lên vật thể có khối lượng m, sản sinh ra sự biến đổi vận tốc được xác định bằng định luật về chuyển động.

$$\frac{mdv}{d\tau} = F(\tau)$$

Hay

$$dv = \frac{F(\tau)d\tau}{m} \tag{4.1}$$

Trong đó $F(\tau)d\tau$ là xung lực và dv là số gia của vận tốc. Số gia vận tốc có thể xem như vận tốc ban đầu của khối lượng ở thời điểm τ. Bây giờ ta hãy xét xung lực $F(\tau)\,d\tau$ tác dụng lên kết cấu là hệ không có lực cản. Ở thời điểm τ hệ chịu sự biến đổi vận tốc được xác định theo công thức (4.1). Nếu đưa sự biến đổi vận tốc này vào phương trình (1.20), nó được xem như vận tốc ban dầu v_0. Kết hợp với chuyển vị ban đầu $y_0 = 0$ ở thời điểm τ, một chuyển vị được sản sinh ở thời điểm t như sau:

$$dy(t) = \frac{F(\tau)d\tau}{m\omega}\sin\omega\left(t-\tau\right) \tag{4.2}$$

Hàm tải trọng có thể xem như một loạt các xung lực ngắn ứng với các số gia liên tiếp của thời gian dτ, mỗi số gia thời gian sản sinh chuyển vị ở thời gian t dưới dạng phương trình (4.2). Vậy ta có thể kết luận rằng tổng chuyển vị ở thời điểm t do tác dụng liên tục của lực F(τ) gây ra được xác định bằng tổng tích phân của các vi chuyển vị dy(t) từ thời gian t = 0 đến thời gian t, nghĩa là:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (4.3)$$

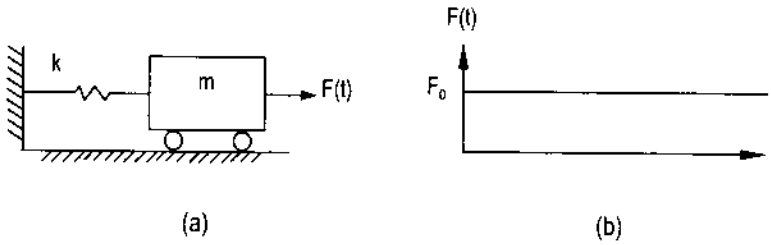
Tích phân trong phương trình trên gọi là tích phân Duhamel. Phương trình (4.3) biểu thị tổng chuyển vị do lực kích thích F(τ) gây ra trong một hệ không có lực cản, nó bao gồm thành phần ở trạng thái ổn định và thành phần nhất thời trong quá trình dao động có các điều kiện ban đầu triệt tiêu $y_0 = 0$ và $v_0 = 0$. Nếu hàm F(τ) không thể tính được bằng phương pháp giải tích, tích phân trong phương trình (4.3) bao giờ cũng có thể xác định gần đúng bằng phương pháp số hợp lý. Để xét đến ảnh hưởng của chuyển vị ban đầu y_0 và vận tốc ban đầu v_0, ở thời điểm t = 0, ta cần cộng vào phương trình (4.3) lời giải cho bởi phương trình (1.20). Vậy tổng chuyển vị của hệ một bậc tự do không có lực cản chịu tác dụng của một tải trọng bất kỳ, được biểu thị bằng phương trình:

$$y(t) = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega\left(t-\tau\right)d\tau \qquad (4.4)$$

Dưới đây sẽ trình bày một vài trường hợp đơn giản, trong đó có thể tính tích phân trực tiếp trong phương trình (4.4)

§4.2. Lực không đổi

Ta hãy xét trường hợp một lực không đổi có độ lớn F_0 đặt đột ngột lên hệ không có lực cản ở thời điểm t = 0 biểu thị như trên hình (4.2).



Hình 4.2

Nếu cả chuyển vị ban đầu và vận tốc ban đầu đều triệt tiêu, áp dụng phương trình (4.4), ta được:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega\left(t-\tau\right)d\tau$$

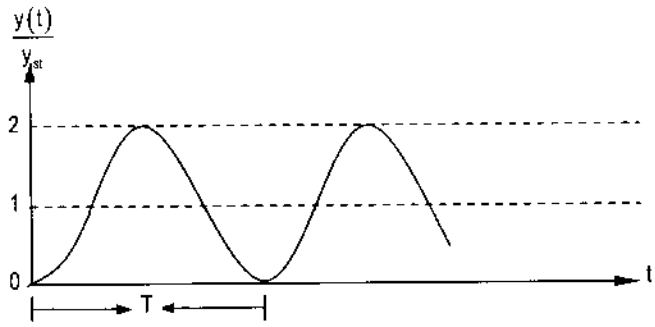
Sau khi tính tích phân, ta được:

$$y(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}\left|\cos\omega\left(t-\tau\right)\right|_0^t$$

Hay $y(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos\omega t) = y_{st}(1 - \cos\omega t)$ (4.5)

Trong đó : $y_{st} = \frac{F_0}{k}$

Dao động của hệ một bậc tự do không có lực cản, chịu tác dụng của một lực không đổi đặt đột ngột, biểu thị trên hình (4.3).



Hình 4.3

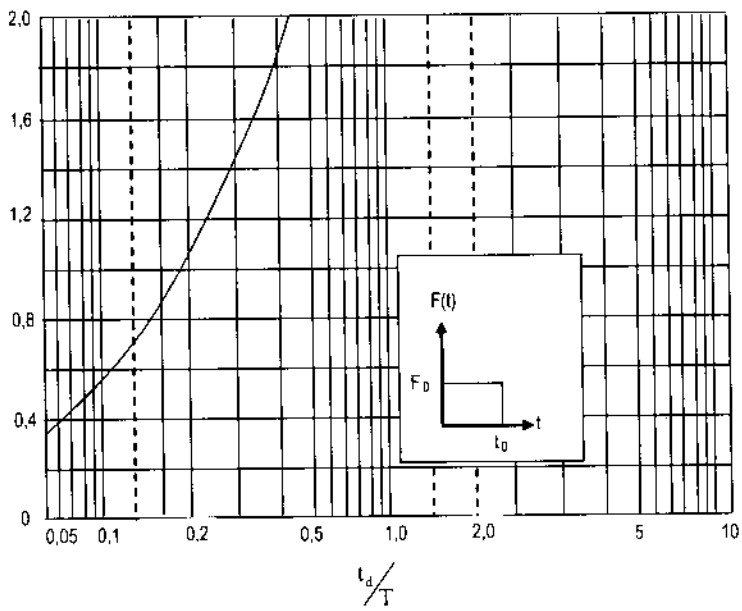
Ta thấy rằng dao động này giống với dao động tự do của hệ không có lực cản. Điều khác biệt cơ bản là trục tọa độ dời một khoảng bằng y_{st}. Hơn nữa, chuyển vị cực đại y_{st} đúng là gấp đôi chuyển vị y_{st} do tải trọng tĩnh F_0 đặt lên kết cấu một cách từ từ và chậm rãi. Như vậy, ta rút ra một kết luận quan trọng là nếu hệ đàn hồi tuyến tính chịu tác dụng của một lực đặt đột ngột thì chuyển vị cực đại của nó gấp đôi chuyển vị gây ra bởi lực đó khi nó đặt lên từ từ và chậm rãi. Kết luận này cũng đúng với nội lực và ứng suất trong kết cấu.

§4.3. Tải trọng hình chữ nhật

Bây giờ ta hãy xét trường hợp tải trọng không đổi F_0 đặt đột ngột lên kết cấu trong một thời gian rất ngắn t_d (hình 4.4). Cho đến thời điểm t_d, phương trình (4.5) vẫn áp dụng được và ở thời điểm đó, chuyển vị và vận tốc được biểu thị bằng các phương trình sau:

$$y_d = \frac{F_0}{k}(1 - \cos\omega t_d)$$

$$v_d = \frac{F_0}{k}\omega \sin\omega t_d$$



Hình 4.4

Sau thời điểm t_d, ta áp dụng phương trình (1.20) (dao động tự do), lấy các điều kiện ban đầu là chuyển vị và vận tốc ở thời điểm t_d. Sau khi thay $t = t - t_d$, y_0 và v_0 bằng y_d và v_d, ta được:

$$y(t)=\frac{F_0}{k}\left(1-\cos\omega t_d\right)\cos\omega\left(t-t_d\right)+\frac{F_0}{k}\sin\omega t_d\sin\omega\left(t-t_d\right)$$

Sau khi đơn giản hoá:

$$y(t)=\frac{F_0}{k}\cos\omega\left(t-t_d\right)-\cos\omega t \qquad (4.6)$$

Nếu hệ số tải trọng động (HTĐ) được định nghĩa là tỷ số giữa chuyển vị ở bất cứ thời điểm t nào trên chuyển vị tĩnh $y_{st}=\frac{F_0}{k}$ thì ta có thể viết phương trình (4.5) và (4.6) như sau:

$$\text{HTĐ} = 1-\cos 2\pi\frac{t}{T'} \qquad t\le t_d$$

$$\text{HTĐ} = \cos\omega\left(t-t_d\right)-\cos\omega t \qquad t>t_d \qquad (4.7)$$

Thông thường, người ba biểu thị thời gian bằng một tham số không thứ nguyên bằng cách dùng chu kỳ tự nhiên thay cho tần số vòng tự nhiên ($\omega = 2\pi/T$), do đó (4.7) có thể viết:

$$\text{HTĐ} = 1-\cos 2\pi\frac{t}{T'} \qquad t\le t_d$$

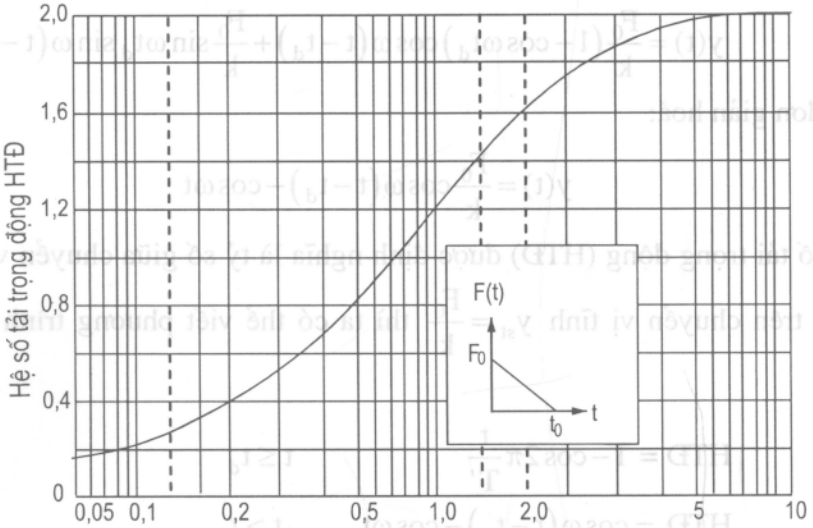
$$\text{HTĐ} = \cos\omega\left(\frac{t}{T}-\frac{t_d}{T}\right)-\cos 2\pi\frac{t}{T'} \qquad t>t_d \qquad (4.8)$$

Hệ số tải trọng động lớn nhất $(\text{HTĐ})_{max}$ có được bằng cách cực đại hoá phương trình (4.8) nó được biểu thị trên hình (4.4). Ta nhận thấy rằng hệ số tải trọng động cực đại đối với các tải trọng tác dụng trong thời gian $\frac{t_d}{T}\ge 0,5$ hầu như giống nhau như khi tải trọng tác dụng trong thời gian vô hạn. Đồ thị trên hình (4.4) rất có ích cho việc thiết kế, nó thường áp dụng cho các tải trọng xung kích tác dụng trong thời gian ngắn đối với hệ không có lực cản. Đối với các tải trọng tác dụng trong thời gian ngắn, lực cản không có ảnh hưởng đáng kể đến hệ. Hệ số tải trọng động cực đại thường ứng với giá trị cực đại đầu tiên và người ta thấy rằng tổng lực cản trong kết cấu chưa đủ để làm giảm giá trị đó.

§4.4. Tải trọng tam giác

Đây là trường hợp hệ không có lực cản, ban đầu ở trạng thái tĩnh, sau đó chịu tác dụng của một lực F(t) có giá trị ban đầu là F_0 rồi giảm dần tuyến tính xuống giá trị 0 ở thời điểm t_d (hình 4.5). Lời giải có thể tính bằng phương trình (4.4) qua hai giai đoạn. Trong giai đoạn đầu $\tau \le t_d$, lực được xác định bằng phương trình:

$$F(\tau)=F_0\left(1-\frac{\tau}{t_d}\right)$$



Hình 4.5

Điều kiện ban đầu tương ứng là: $y_0 = 0$; $v_0 = 0$

Thay các giá trị trên vào (4.4) và tích phân, ta được:

$$y = \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\omega t + \frac{F_0}{kt_d}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega} - t\right)\right) \tag{4.9}$$

Hệ số tải trọng động với các tham số không thứ nguyên

$$\text{HTĐ} = \frac{y}{y_{st}} = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) + \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{2\pi t_d}{T}\right)} - \frac{t}{t_d} \tag{4.10}$$

Hệ số trên ứng với thời gian trước thời điểm t_d. Trong giai đoạn 2 ($t > t_d$) từ (4.9), ta có chuyển vị và vận tốc ở thời điểm t_d:

$$y_d = \frac{F_0}{k}\left(\frac{\sin\omega t_d}{\omega t_d} - \cos\omega t_d\right)$$

$$v_d = \frac{F_0}{k}\left(\omega\sin\omega t_d + \frac{\cos\omega t_d}{t_d} - \frac{1}{t_d}\right) \tag{4.11}$$

Các giá trị trên được xem như các điều kiện ban đầu ở thời điểm $t = t_d$ trong giai đoạn 2. Thay $t = t_d$, $y_0 = y_d$ và $v_0 = v_d$ vào (1.20) và chú ý rằng $F_{(t)} = 0$ trong giai đoạn này, ta được:

$$y = \frac{F_0}{k\omega t_d}\left(\sin\omega t - \sin\omega\left(t - t_d\right)\right) - \frac{F_0}{k}\cos\omega t$$

Chia phương trình trên cho $y_{st} = \frac{F_0}{k}$ ta được :

$$HTĐ = \frac{1}{\omega t_d}\left(\sin\omega t - \sin\omega\left(t - t_d\right)\right) - \cos\omega t \tag{4.12}$$

Dùng tham số thời gian khong thứ nguyên, phương trình trên có thể viết

$$HTĐ = \frac{1}{2\pi\frac{t_d}{T}}\left\{\sin\frac{2\pi t}{T} - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T}\right)\right\} - \cos 2\pi\frac{t}{T} \tag{4.13}$$

Đồ thị các đường cong biểu thị hệ số tải trọng động là hàm của thời gian tỷ đối $\frac{t_d}{T}$ đối với hệ không có lực cản, chúng được biểu thị trên hình (4.5). Từ đồ thị này, ta nhận thấy rằng giá trị cực đại của hệ số tải trọng động xấp xỉ bằng 2 khi $\frac{t_d}{T}$ rất lớn.

Trong phần trên, ta đã nghiên cứu dao động của hệ không có lực cản trong 2 trường hợp đơn giản: tải trọng chữ nhật và tải trọng tam giác. Trong các trường hợp này, ta có thể thực hiện tích phân trực tiếp.

Trong phần sau, ta sẽ nghiên cứu các hàm lực không cho phép tính trực tiếp tích phân Duhamel. Trong các trường hợp này, ta phải dùng phương pháp tích phân bằng số.

§4.5. Phương pháp số áp dụng cho tích phân Duhamel đối với hệ không có lực cản

Trong nhiều trường hợp thực tế, hàm tải trọng chỉ được biết qua các số liệu thực nghiệm, chẳng hạn như lực động đất, do đó lời giải phải được xác định bằng phương pháp số. Trong phương pháp này, ta thay hằng đẳng thức lượng giác $\sin\omega(t - \tau) = \sin\omega t\cos\omega\tau - \cos\omega t\sin\omega\tau$ vào tích phân Duhamel.

Giả sự các điều kiện ban đầu triệt tiêu, ta có tích phân Duhamel trong phương trình (4.4) như sau:

$$y(t) = \sin\omega t\frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\cos\omega\tau d\tau - \cos\omega t\frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

Hay

$$y(t) = \frac{\left(A(t)\sin\omega t - B(t)\cos\omega t\right)}{m\omega} \tag{4.14}$$

Trong đó:

$$A(t) = \int_0^t F(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$$B(t) = \int_0^t F(\tau)\sin\omega\tau d\tau \tag{4.15}$$

Việc tính tích phân Duamel yêu cầu phải tính được bằng số các tích phân A(t) và B(t).

Có nhiều kỹ thuật tính tích phân bằng số để giải quyết vấn đề trên.

Chẳng hạn các tích phân được thay bằng tổng của các hàm dưới dấu tích phân và tính cho n số gia thời gian bằng nhau $\Delta\tau$. Phương pháp phổ biến nhất là áp dụng quy tắc hình thang hoặc quy tắc Simpson. Giả sử có tích phân của một hàm khái quát.

$$A(t) = \int_0^t F(\tau)d\tau \tag{4.15}$$

Theo quy tắc hình thang:

$$A(t) = \Delta r\frac{1}{2}\left(I_0 + 2I_1 + 2I_2 + ... + 2I_{n-1} + I_n\right) \tag{4.16}$$

Theo quy tắc Simpson

$$A(t) = \Delta r\frac{1}{3}\left(I_0 + 4I_1 + 2I_2 + ... + 4I_{n-1} + I_n\right) \tag{4.17}$$

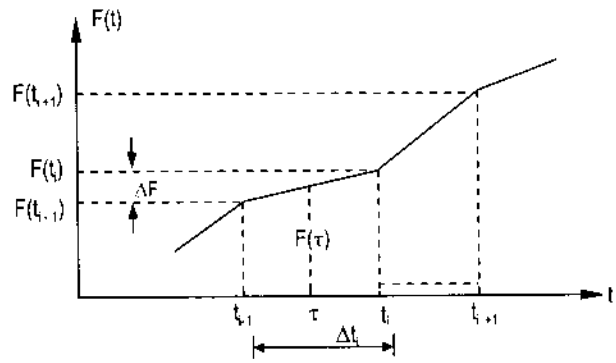
Trong đó $n = \frac{t}{\Delta r}$ phải là một số chẵn đối với quy tắc Simpson.

Các quy tắc trên có tính chất gần đúng vì chúng được thực hiện bằng cách thay hàm $F(\tau)$ bằng hàm tuyến tính gồm các đoạn thẳng đối với quy tắc hình thang hoặc thay bằng hàm Parabon trong từng đoạn đối với quy tắc Simpson. Một phương pháp khác dựa trên cơ sở chia hàm tải trọng thành một loạt các đoạn thẳng liên tiếp.

Theo phương pháp này, hàm $F(\tau)$ được thay gần đúng bằng hàm tuyến tính gồm các đoạn thẳng như trên hình (4.6). Ta biểu thị tích phân trong phương trình (4.15) dưới dạng tổng hai số hạng:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\cos\omega\tau d\tau \tag{4.18}$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\sin\omega\tau d\tau \tag{4.19}$$



Hình 4.6

Trong đó $A(t_i)$ và $B(t_i)$ biểu thị các giá trị của các tích phân trong phương trình (4.15) ở thời điểm t_i. Từ hình (4.16), ta có thể viết:

$$F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\left(\tau - t_{i-1}\right) \qquad t_{i-1} \le \tau \le t_i \tag{4.20}$$

Trong đó:

$$\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

Thay (4.20) vào (4.18) ta được:

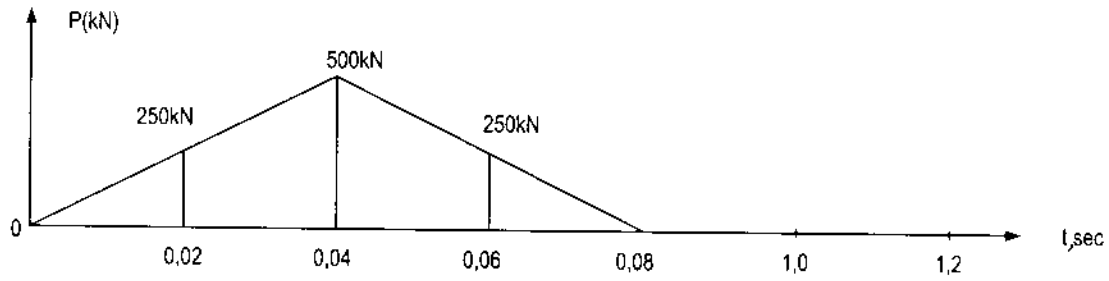
$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \left(F_{t_{i-1}} + t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right)(\sin\omega t_{i-1} - \sin\omega t_i)/\omega$$
$$+\frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i}\{\cos\omega t_i - \cos\omega t_{i-1} + \omega(t_i \sin\omega t_i - t_{i-1} - \sin\omega t_{i-1})\} \quad (4.21)$$

Tương tự, từ (4.19)

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \left(F_{t_{i-1}} + t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right)(\cos\omega t_{i-1} - \cos\omega t_i)/\omega$$
$$+\frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i}\{\sin\omega t_i - \sin\omega t_{i-1} + \omega(t_i \cos\omega t_i - t_{i-1} - \cos\omega t_{i-1})\} \quad (4.22)$$

Các phương trình (4.21) và (4.22) là những công thức truy hồi để xác định tích phân trong (4.15) ở thời điểm $t = t_i$

Ví dụ 4.1: Một kết cấu một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng xung kích như trên hình (4.7). Hệ số độ cứng (hằng số lò xo) k = 200kN/cm, khối lượng m = 0,2 kNsec^2/cm. Tải trọng động biến đổi như trên hình (4.7). Giả sử có 6 quãng thời gian với số gia thời gian Δt = 0,02 giây. Tính chuyển vị theo các thời điểm quy định trên.



Hình 4.7

Giải:

Theo công thức (1.16), tính tần số vòng:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0,02}} = \sqrt{1000} = 31,62 \text{rad/sec}$$

Theo (4.21), (4.22) ta tính các đại lượng A(t), B(t) và theo (4.14), tính chuyển vị y(t). Các đại lượng này thống kê trong bảng (4.1).

Cần chú ý rằng vụ nổ kết thúc ở thời điểm t = 0,08 giây và bắt đầu từ thời điểm đó, các đại lượng A và B có giá trị không đổi. Vậy theo (4.14), phương trình chuyển động như sau:

y(t) = (5,26 sin 31,62t - 16,26 cos 31,62t)/6,324

Hay y(t) = 0,83 sin31,62t - 2,63 cos31,62t

Bảng 4.1

Thời điểm t (giây)	Tải trọng P (kN)	A(t)	B(t)	Chuyển vị y(t) cm
0,00	0	0	0	0
0,02	250	2,26	1,01	0,08
0,0,4	500	6,34	7,16	0,62
0,06	250	6,53	14,54	1,71
0,08	0	5,26	16,66	2,63
0,10	0	5,26	16,66	2,62
0,12	0	5,26	16,66	1,59

§4.6. Phương pháp số áp dụng cho tích phân Duhamel đối với hệ có lực cản

Cách tính tích phân Duhamel bằng phương pháp số trong trường hợp hệ số lực cản tương tự như đã trình bày trong mục trước. Tuy nhiên, phải thay vận tốc ban dầu $dv = \frac{F(\tau)d\tau}{m}$ vào phương trình dao động có lực cản. Đặt $y_0 = 0$, $v_0 = F(\tau)d\tau/m$ và thay t bằng t - τ vào phương trình (2.20) dao động tự do có lực cản, ta có phương trình vi phân ở thời điểm t.

$$dy(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)}\frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_D}\sin\omega_D(t-\tau) \tag{4.23}$$

Lấy tích phân biểu thức trên:

$$dy(t) = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)d\tau \tag{4.24}$$

Trên đây là lời giải áp dụng cho tích phân Duhamel đối với hệ có lực cản.

Ta tiến hành phương pháp tích phân bằng số như trong trường hợp hệ không có lực cản.

Căn cứ vào phương trình (4.24), ta có:

$$y(t) = \left\{A_D(t)\sin\omega_D t - B_D(t)\cos\omega_D t\right\}\frac{e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \tag{4.25}$$

Trong đó:

$$A_{D(t_i)} = A_D(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)e^{\xi\omega\tau}\cos\omega_D d\tau \tag{4.26}$$

$$B_{D(t_i)} = B_D(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)e^{\xi\omega\tau}\sin\omega_D d\tau \tag{4.27}$$

Trong trường hợp hàm tải trọng được thay bằng các đoạn thẳng, ta thay F(τ) từ (4.20) vào các phương trình (4.26) và (4.27). Do đó cần tính các tích phân sau:

$$I_1 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau}\cos\omega_D\tau d\tau = \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2+\omega_D^2}\left(\xi\omega\cos\omega_D\tau+\omega_D\sin\omega_D\tau\right)\Bigg|_{t_{i-1}}^{t_i} \tag{4.28}$$

$$I_2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\xi\omega\tau}\sin\omega_D\tau d\tau = \frac{e^{\xi\omega\tau}}{(\xi\omega)^2+\omega_D^2}\left(\xi\omega\sin\omega_D\tau-\omega_D\cos\omega_D\tau\right)\Bigg|_{t_{i-1}}^{t_i} \tag{4.29}$$

$$I_3 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau}\sin\omega_D\tau d\tau = \left(\tau-\frac{e^{\xi\omega}}{(\xi\omega)^2+\omega_D^2}\right)I_2' + \frac{\omega_D}{(\xi\omega)^2+\omega_D^2}I_1'\Bigg|_{t_{i-1}}^{t_i} \tag{4.30}$$

$$I_4 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau e^{\xi\omega\tau}\cos\omega_D\tau d\tau = \left(\tau-\frac{\xi\omega}{(\xi\omega)^2+\omega_D^2}\right)I_1' - \frac{\omega_D}{(\xi\omega)^2+\omega_D^2}I_2'\Bigg|_{t_{i-1}}^{t_i} \tag{4.31}$$

Trong đó I_1' ; I_2' là các tích phân trong (4.28) và (4.29) trước khi tính theo các cận. Sau khi thay (4.20) vào (4.26) và (4.27), ta được:

$$A_D(t_i) = A_D(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right)I_1 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}I_4 \tag{4.32}$$

$$B_D(t_i) = B_D(t_{i-1}) + \left(F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right)I_2 + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}I_3 \tag{4.33}$$

Cuối cùng, thay (4.32) và (4.33) vào (4.25), ta được chuyển vị ở thời điểm t:

$$y(t_i) = \frac{e^{-\xi\omega t_i}}{m\omega_D}\left\{A_D(t_i)\sin\omega_D t_i - B_{D(t_i)}\cos\omega_D t_i\right\} \tag{4.34}$$

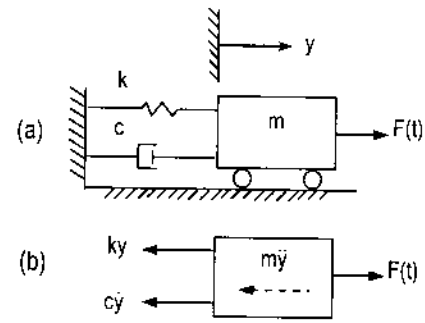
§4.7 Lời giải bằng phương pháp tích phân trực tiếp

Chuyển động đối với hệ một bậc tự do có lực cản biểu thị trên hình (4.8). Mô hình toán học như trên hình (4.8a), sơ đồ vật tự do như trên hình (4.8b).

Phương trình vi phân có dạng:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t) \tag{4.35}$$

Trong đó hàm F (t) là lực tác dụng lên khối lượng m



Hình 4.8

Khi kết cấu chịu tác dụng của một lực kích thích ở gối tựa như trên hình (4.9) từ sơ đồ vật tự do trên hình (4.9b), ta có phương trình chuyển động:

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{y}_s) + k(y - y_s) = 0 \qquad (4.36)$$

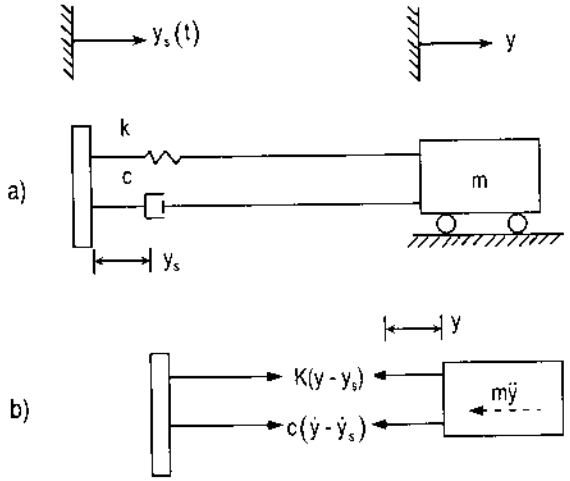
Trong trường hợp này, ta biểu thị chuyển vị tương đối giữa chuyển vị của khối lượng với chuyển vị của gối tựa y_s:

$$u = y - y_s \qquad (4.37)$$

Thay u và đạo hàm của nó từ (4.37) vào (4.36), ta được:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y}(t) \qquad (4.38)$$

So sánh (4.35) và (4.38) , ta thấy rằng các vế phải của chúng tương đương về mặt toán học nếu vế phải của (4.38) được thay bằng:



Hình 4.9

$$F_{eff}(t) = -m\ddot{y}_s(t) \qquad (4.39)$$

Phương trình (4.38) bây giờ có thể viết:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{eff}(t) \qquad (4.40)$$

§4.8. Lời giải của phương trình chuyển động

Lời giải của phương trình vi phân chuyển động là chính xác nếu lực kích thích được biểu thị bằng các đoạn thẳng. Quá trình giải yêu cầu tính lực kích thích tại những quãng thời gian bằng nhau Δt. Kết quả được thực hiện bằng cách nội suy tuyến tính giữa các điểm biểu thị lực kích thích. Như vậy quãng thời gian kích thích (bao gồm thời gian kéo dài thêm sau ngưỡng kích thích) được chia cho N quãng thời gian bằng nhau Δt. Trong mỗi quãng Δt, ta xét đến các điều kiện ban đầu ứng với quãng thời gian đó và sự kích thích tuyến tính trong quãng thời gian đó. Các điều kiện ban đầu là chuyển vị và vận tốc ở điểm cuối của quãng thời gian trước. Giả sử hàm kích thích F(t) được biểu thị gần đúng bằng các đoạn thẳng như trên hình (4.6), hàm F(t) có thể viết:

$$F(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{\Delta t}\right)F_i + \left(\frac{t - t_i}{\Delta t}\right)F_{t_{i-1}} \quad t_i \le t \le t_{i+1} \qquad (4.41)$$

Trong đó: $t_i = i\Delta t$ đối với các quãng thời gian bằng nhau Δt và i = 1, 2, 3...n

Phương trình vi phân (4.35) bây giờ là:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \left(1 - \frac{t - t_i}{\Delta t}\right)F_i + \left(\frac{t - t_i}{\Delta t}\right)F_{i+1} \quad t_i \le t \le t_{i+1} \qquad (4.42)$$

Lời giải của (4.42) là tổng của lời giải bù y_c (vế phải triệt tiêu) và lời giải riêng y_p tức là:

$$y = y_s + y_p$$

Trong quãng thời gian $t_i \le t \le t_i + \Delta t$, lời giải bù được xác định bằng phương trình (2.15).

$$y_c = e^{-\xi\omega(t-t_i)}\left[C_i \cos\omega_D(t-t_i) + D_i \sin\omega_D(t-t_i)\right] \tag{4.44}$$

Mặt khác, lời giải riêng của (4.42), có dạng:

$$y_p = B_i + A_i(t-t_i) \tag{4.45}$$

Thay nó vào (4.42), ta có:

$$cA_i + k\left[B_i + A_i\left(t-t_i\right)\right] = \left(1 - \frac{t-t_i}{\Delta t}\right)F_i + \left(\frac{t-t_i}{\Delta t}\right)F_{i+1}$$

Trong đó: A_i; B_i là các hằng số trong quãng thời gian $t_i \le t \le t_i + \Delta t$ và $F_i = F(t_i)$; $F_{i+1} = F(t_i+\Delta t)$. Giải các phương trình trên, ta được:

$$A_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{k.\Delta t}$$
$$B_i = \frac{F_i - cA_i}{k} \tag{4.46}$$

Thay lời giải bù từ (4.44) vào (4.43) và lời giải riêng y_p từ (4.45) ta có lời giải tổng quát:

$$y_c = e^{-\xi\omega(t-t_i)}\left[C_i \cos\omega_D(t-t_i) + D_i \sin\omega_D(t-t_i)\right] + B_i + A_i\left(t-t_1\right) \tag{4.47}$$

Lấy đạo hàm phương trình trên, ta được vận tốc:

$$\dot{y} = e^{-\xi\omega(t-t_i)}\left[\omega D_i - \xi\omega C_i\right]\cos\omega_D(t-t_i) - \left[\omega_D C_i + \xi\omega D_i\right]\sin\omega_D(t-t_i) + A_i \tag{4.48}$$

Các hằng số tích phân C_i và D_i được xác định từ các phương trình (4.47), (4.48), đồng thời đưa vào các điều kiện ban đầu là chuyển vị y_i và vận tốc $\dot{y}_i$ ở khởi điểm của quãng thời gian Δt tức là thời điểm t_i. Như vậy, sau khi đưa vào (4.47) và (4.48) các điều kiện ban đầu và giải các hệ thức trên, ta được:

$$C_i = y_i - B_i$$
$$D_i = \frac{y_i - A_i - \xi\omega C_i}{\omega_D} \tag{4.49}$$

Việc tính các phương trình (4.47) , (4.48) ở thời điểm $t_i + \Delta t$ cho ta chuyển vị y_{i+1} và vận tốc $\dot{y}_{i+1}$ tại thời điểm t_{i+1}.

$$y_{i+1} = e^{-\xi\omega\Delta t}\left[C_i \cos\omega_D\Delta t + D_i \sin\omega_D\Delta t\right] + B_i + A_i\Delta t \tag{4.50}$$

$$\dot{y}_{i+1} = e^{-\xi\omega\Delta t}\left[D_i\omega_D \cos\omega_D\Delta t - \xi\omega \sin\omega_D\Delta t\right) -$$
$$C_i\left(\xi\omega\cos\omega_D\Delta t + \omega_D \sin\omega_D\Delta t\right] + A_i \tag{4.51}$$

Cuối cùng, gia tốc ở thời điểm $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ được xác định trực tiếp sau khi thay y_{i+1} và $\dot{y}_{i+1}$ từ (4.50) và (4.51) vào (4.35) và đặt $t = t_i + \Delta t$:

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{1}{m}\left[F_{i+1} - c\dot{y}_{i+1} - ky_{i+1}\right] \tag{4.52}$$

Ví dụ 4.2: Một kết cấu một bậc tự do có lực cản chịu tác dụng của tải trọng xung kích như trên hình (4.7). Hệ số độ cứng (hằng số lò xo) k = 200kN/cm, khối lượng m = 0,2 kN sec²/cm, tỷ số cản $\zeta = 0{,}20$. Có 6 quãng thời gian với số gia thời gian $\Delta t = 0{,}02$ giây. Tính:

1. Các đại lượng A, B, C, D;
2. Chuyển vị, vận tốc, gia tốc tại các thời điểm quy định trên.

Giải:

Bảng 4.2

Thời gian t (giây)	Tải trọng P (kN)	Chuyển vị (cm)	Vận tốc (cm/sec)	Gia tốc (cm/sec²)	A(t)	B(t)	C(t)	D(t)
0,00	0	0	0	0	6,25	-0,79	0,79	-,18
0,02	250	0,46	44,2	231,4	6,25	0,46	-4,55	0,59
0,04	500	1,71	62,5	$9{,}6 \times 10^{-10}$	-6,25	3,29	-1,58	4,30
0,06	250	2,04	-25,9	-462,9	-6,25	2,04	0	1,18
0,08	0	0,79	-62,5	$-1{,}87 \times 10^{-9}$	0	0	0,79	-2,18
0,10	0	0	-18,3	231,4	0	0	0	-0,59
0,12	0	0	0	0	0	0	0	0

Theo (1.16), tính:

Tần số vòng: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0{,}2}} = \sqrt{1000} = 31{,}62 \text{rad/sec}$

Theo(2.17) tính:

Tần số cản: $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 31{,}62.\sqrt{1-0{,}2^2} = 30{,}98 \text{rad/sec}$

Hệ số cản $c = c_D\zeta = 2\sqrt{k.m}.\xi = 2\sqrt{200 \text{ x } 0{,}02} \times 0{,}2$

$c = 2{,}53$

Cuối cùng tính các đại lượng A(t), B(t), C(t), D(t) theo các công thức (4.46) và (4.49), tính chuyển vị, vận tốc, gia tốc theo các công thức (4.50), (4.51), (4.52).

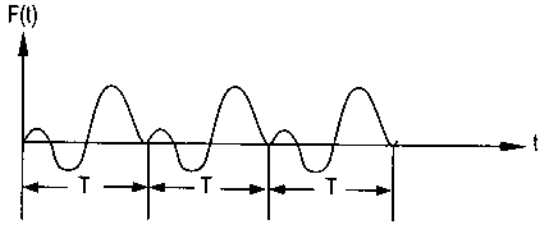
Kết quả thống kê trong bảng 4.2.

Chương 5
CHUỖI FOURIER ÁP DỤNG VÀO VIỆC TÍNH CÁC TẢI TRỌNG CHU KỲ

Trong chương trình, ta sẽ áp dụng chuỗi Fourier để tìm lời giải cho hệ chịu tải trọng chu kỳ.

§5.1. Sự khai triển chuỗi Fourier

Chuỗi Fourier có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học và toán học. Trước hết ta hãy nghiên cứu một hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng chu kỳ. Tải trọng chu kỳ là tải trọng cứ sau một chu kỳ lặp lại hình dáng ban đầu. Một hàm chu kỳ như vậy có thể biểu thị bằng tổng của vô số số hạng sin và cosin gọi là chuỗi Fourier.



Hình 5.1

Đối với hàm chu kỳ như trên hình (5.1), chuỗi Fourier có thể viết:

$$F(t) = a_0 + a_1\cos\bar{\omega}t + a_2\cos 2\bar{\omega}t + a_3\cos 3\bar{\omega}t + ... + a_n\cos n\bar{\omega}t + ...$$
$$+ b_1\sin\bar{\omega}t + b_2\sin 2\bar{\omega}t + b_3\sin 3\bar{\omega}t + ... + a_n\sin n\bar{\omega}t + ... \quad (5.1)$$

Hoặc: $F(t) = a_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t\}$ (5.2)

Trong đó: $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$ là tần số vòng và T là chu kỳ của hàm số. Các hệ số a_0, a_n, b_n đối với hàm đã cho F(t) được xác định bằng các biểu thức như sau:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\cos n\bar{\omega}tdt \quad (5.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\sin n\alpha\bar{\omega}tdt$$

Trong đó, cận dưới t_1 của tích phân có thể lấy bất cứ giá trị thời gian nào, nhưng thường ta lấy bằng - T/2 hoặc bằng 0. Hằng số a_0 biểu thị giá trị trung bình của hàm chu kỳ F(t).

§5.2. Lời giải trong trường hợp tải trọng được biểu thị bằng chuỗi Fourier

Trong trường hợp hệ một bậc tự do chịu tải trọng chu kỳ, lời giải biểu thị bằng chuỗi Fourier là sự cộng tác dụng các thành phần trong chuỗi. Khi bỏ qua lời giải nhất thời, lời giải của hệ không có lực cản ứng với một số hạng sin bất kỳ nào của chuỗi được xác định bằng phương trình (3.9).

$$y_n(t) = \frac{\frac{b_n}{k}}{1 - r_n^2} \sin n\bar{\omega}t \tag{5.4}$$

Trong đó $r_n = \frac{n\bar{\omega}}{\omega}$ và $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Một cách tương tự lời giải đối với số hạng cosin bất kỳ $y_n(t) = \frac{\frac{a_n}{k}}{1 - r_n^2} \cos n\bar{\omega}t$ (5.5)

Lời giải của hệ một bậc tự do không có lực cản được biểu thị bằng sự cộng tác dụngcủa toàn bộ các số hạng trong chuỗi bao gồm lời giải ổn định a_0/k.

Vậy ta có:

$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_n^{\infty} \frac{1}{1 - r_n^2} \left(\frac{a_0}{k} \cos n\bar{\omega}t + \frac{b_0}{k} \sin n\bar{\omega}t \right) \tag{5.6}$$

Khi xét đến lực cản, lời giải ở trạng thái ổn định ứng với số hạng sin tổng quát của chuỗi được xác định bằng phương trình (3.20)

$$y_n(t) = \frac{\frac{b_n}{k} \sin\left(n\bar{\omega}t - \theta\right)}{\sqrt{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\xi\right)^2}} \tag{5.7}$$

Hay:

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k} . \frac{\sin n\bar{\omega}t \cos\theta - \cos n\bar{\omega}t \sin\theta}{\sqrt{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\xi\right)^2}}$$

Thay sinθ và cos0 từ (3.21)

$$y_n(t) = \frac{b_n}{k} . \frac{\left(1 - r_n^2\right) \sin n\bar{\omega}t - 2r_n\xi \cos n\bar{\omega}t}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\xi\right)^2} \tag{5.8}$$

Tương tự, ta có số hạng cosin của chuỗi

$$y_n(t) = \frac{a_n}{k} . \frac{\left(1 - r_n^2\right) \cos n\bar{\omega}t + 2r_n\xi \sin n\bar{\omega}t}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\xi\right)^2} \tag{5.9}$$

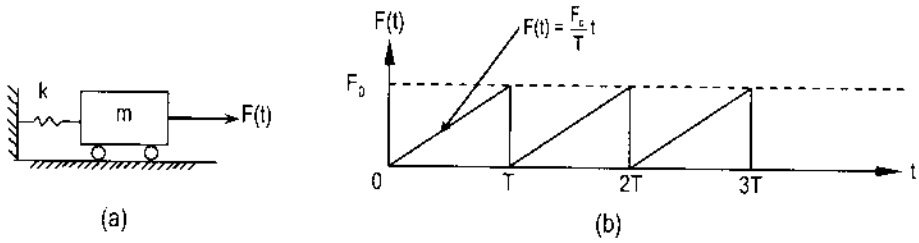
Cuối cùng, lời giải tổng quát được xác định bằng sự cộng tác dụng các số hạng biểu thị bởi (5.8) và (5.9), cùng với số hạng hằng số của chuỗi.

Vậy ta có lời giải tổng quát của hệ một bậc tự do không có lực cản như sau:

$$y(t)=\frac{a_0}{k}.\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n 2r_n\xi+b_n\left(1-r_n^2\right)}{\left(1-r_n^2\right)^2+\left(2r_n\xi\right)^2}\sin n\bar{\omega}t+\frac{a_n\left(1-r_n^2\right)-b_n 2r_n\xi}{\left(1-r_n^2\right)^2+\left(2r_n\xi\right)^2}\cos n\bar{\omega}t\right\} \quad (5.10)$$

Ví dụ 5.1: Một hệ một bậc tự do có lực cản như trên hình (5.2a). Lực tác dụng có tính chất chu kỳ biểu thị trên hình (5.2b).

Khai triển lực chu kỳ thành chuỗi Fourier và viết lời giải của phương trình vi phân.



Hình 5.2

Giải:

Bước đầu tiên là khai triển làm F(t) thành chuỗi Fourier. Các hệ số tương ứng được xác định theo (5.3) như sau:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{F_0}{T}tdt=\frac{F_0}{2} \quad (5.4)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{F_0}{T}t\cos n\bar{\omega}tdt=0 \quad (5.5)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{F_0}{T}t\sin n\bar{\omega}tdt=-\frac{F_0}{n\pi} \quad (5.6)$$

Lời giải của hệ không có lực cản được xác định theo (5.6):

$$y(t)=\frac{F_0}{2k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_0\sin n\bar{\omega}t}{n\pi k\left(1-r_n^2\right)} \quad (5.7)$$

hoặc ở dạng khai triển:

$$y(t)=\frac{F_0}{2k}-\frac{F_0\sin\bar{\omega}t}{\pi k\left(1-r_1^2\right)}-\frac{F_0\sin 2\bar{\omega}t}{2\pi k\left(1-4r_1^2\right)}-\frac{F_0\sin 3\bar{\omega}t}{3\pi k\left(1-9r_1^2\right)}-\cdots \quad (5.8)$$

Trong đó: $r_1=\frac{\bar{\omega}}{\omega}$ (5.9) ; $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$; $\bar{\omega}=\frac{2\pi}{T}$ (5.10)

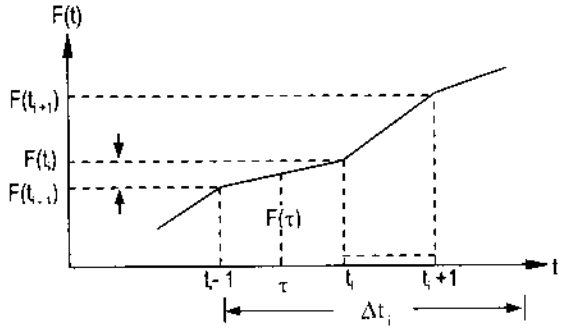
§5.3. Các hệ số Fourier dưới dạng các hàm tuyến tính gồm các đoạn thẳng

Giống như khi tính tích phân Duhamel ta biểu thị hàm lực dưới dạng hàm tuyến tính gồm các đoạn thẳng như trên hình (5.3).

Trong các hệ số Fourier tính ở (5.3) ta tính tổng các tích phân cho mỗi đoạn thẳng của hàm lực:

$$a_0 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} F(t)dt \qquad (5.11)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t)\cos n\bar{\omega}t dt \qquad (5.12)$$



Hình 5.3

$$b_n = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(t)\sin n\bar{\omega}t dt \qquad (5.13)$$

Trong đó N là số đoạn của hàm lực tuyến tính hoá. Hàm lực trong bất kỳ quãng thời gian nào $t_{i-1} \le t \le t_i$ được xác định bằng phương trình (4.20).

$$F(t) = F(t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\left(t - t_{i-1}\right) \qquad (5.14)$$

Trong đó: $\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$ và $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Các tích phân trong các biểu thức của a_n và b_n đã được xác định từ các phương trình (4.21), (4.22) và được đặt tên là A(t) và B(t) trong các biểu thức truy hồi (4.18) và (4.19).

Áp dụng các phương trình (4.18) - (4.22), ta xác định được các hệ số a_n và b_n như sau:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{N}\Bigg\{ & \frac{1}{n\bar{\omega}}\left(F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right)\left(\sin n\beta\bar{\omega}t_i - \sin n\bar{\omega}t_{i-1}\right) \\ & + \frac{\Delta F_i}{n^2\bar{\omega}^2\Delta t_i}\left(\cos n\bar{\omega}t_i - \cos n\bar{\omega}t_{i-1}\right) \\ & + n\bar{\omega}\left(t_i \sin n\bar{\omega}t_i - t_{i-1}\sin n\bar{\omega}t_{i-1}\right)\Bigg\} \end{aligned} \qquad (5.15)$$

$$\begin{aligned} b_n = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{N}\Bigg\{ & \frac{1}{n\bar{\omega}}\left(F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right)\left(\cos n\bar{\omega}t_{i-1} - \cos n\bar{\omega}t_i\right) \\ & + \frac{\Delta F_i}{n^2\bar{\omega}^2\Delta t_i}\left(\sin n\bar{\omega}t_i - \sin n\bar{\omega}t_{i-1}\right) \\ & - n\bar{\omega}\left(t_i \cos n\bar{\omega}t_i - t_{i-1}\cos n\bar{\omega}t_{i-1}\right)\Bigg\} \end{aligned} \qquad (5.16)$$

Tích phân xuất hiện trong hệ số a_0 của phương trình (5.3) được xác định bằng cách thay F(t) từ (5.14) vào (5.11):

$$a_0 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\left\{\Delta t_i \frac{\left(F_i + F_{i-1}\right)}{2}\right\} \qquad (5.17)$$

Chương 6
CÁC TỌA ĐỘ KHÁI QUÁT VÀ PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH

Trong các chương trước, ta đã nghiên cứu dao động của hệ một bậc tự do có lực cản hoặc không có lực cản. Trong thực tế, kết cấu gồm nhiều vật rắn liên kết với nhau, tạo thành hệ có khối lượng phân bố và có vô số bậc tự do. Trong chương này, ta sẽ áp dụng nguyên lý công ảo để đưa một hệ phức tạp về hệ một bậc tự do. Trước hết, ta hãy tìm hiểu nguyên lý công ảo.

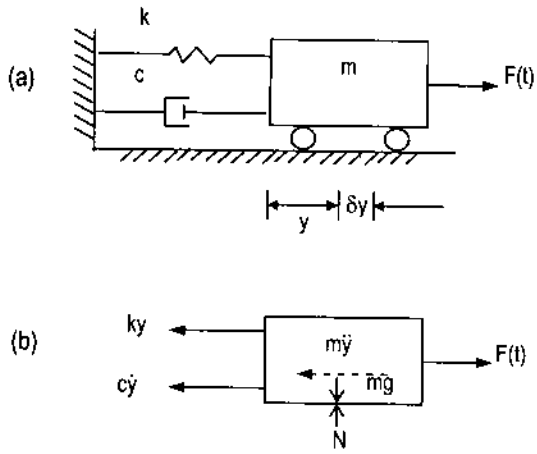
§6.1. Nguyên lý công ảo

Nguyên lý công ảo đặc biệt có ích cho một hệ kết cấu tương đối phức tạp gồm nhiều bộ phận liên kết với nhau. Trước hết, nguyên lý công ảo được áp dụng cho một hệ cân bằng. Tuy nhiên, nguyên lý này cũng có thể áp dụng cho một hệ động lực học khi dùng nguyên lý D'Alenbert để thiết lập sự cân bằng.

Nguyên lý công ảo phát biểu như sau: Đối với một hệ cân bằng, công làm bởi toàn bộ các lực trên các chuyển vị ảo bằng không, các chuyển vị ảo này tương thích với các ràng buộc của hệ. Nói chung, các phương trình chuyển động được xác định bằng cách đưa vào các chuyển vị ảo tương ứng với mỗi bậc tự do, sau đó triệt tiêu toàn bộ công đã được thực hiện.

Để thuyết minh nguyên lý này, ta hãy xét mô hình của hệ một bậc tự do trên hình (6.1a), sơ đồ vật tự do biểu thị trên hình (6.1b).

Vì lực quán tính được đưa vào cùng với các ngoại lực khác, hệ ở trạng thái cân bằng động lực học, do đó có thể áp dụng nguyên lý công ảo. Giả sử có một chuyển vị ảo δy (hình 6.1a)



Hình 6.1

Tổng công làm bởi các lực trên chuyển vị ảo phải triệt tiêu:

$$m\ddot{y}\delta y + c\dot{y}\delta y + ky\delta y - F(t)\delta y = 0$$

Hay

$$\{ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - F(t)\}\,\delta y = 0 \qquad (6.1)$$

Vì δy có giá trị bất kỳ khác không, biểu thức trong dấu ngoặc phải bằng 0 nghĩa là:

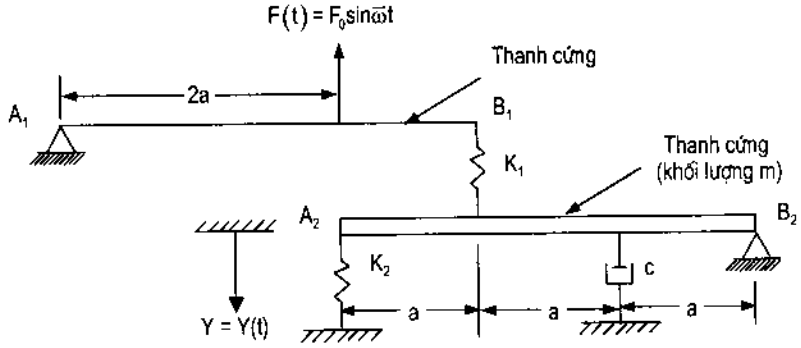
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - F(t) = 0 \qquad (6.2)$$

Phương trình (6.2) chính là phương trình vi phân đối với hệ một bậc tự do có lực cản.

§6.2. Vật rắn đưa về hệ khái quát có một bậc tự do

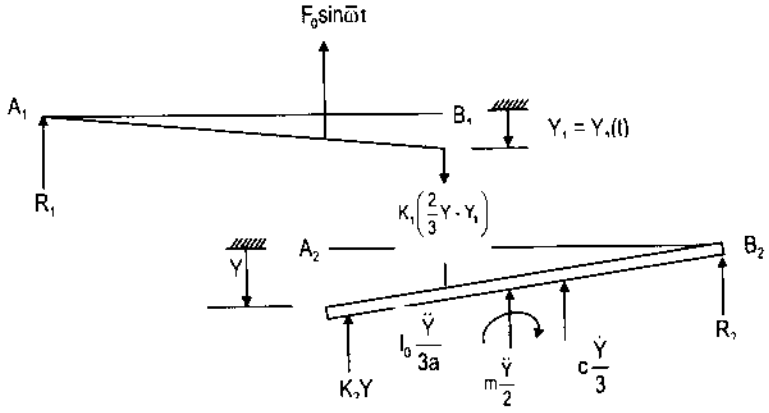
Một hệ động lực học thường được biểu thị bằng các tọa độ chỉ vị trí tuyến tính hoặc vị trí góc của phần tử tạo thành hệ. Tuy nhiên, các tọa độ này không nhất thiết ứng với các chuyển vị, chúng là những đại lượng độc lập về số lượng để biểu thị vị trí của toàn bộ các thành phần của hệ. Những tọa độ này thường được gọi là tọa độ khái quát và số lượng của chúng là số lượng các bậc tự do của hệ. Mục đích của chúng ta là đưa một hệ phức tạp trong thực tế về hệ một bậc tự do có các tham số tương đương.

Cho một hệ như trên hình (6.2). Thanh trên được liên kết với thanh dưới bằng một lò xo, thanh dưới được liên kết với mặt đất bằng một lò xo và một vật cản.



Hình 6.2

Sơ đồ vật tự do của hệ biểu thị trên hình (6.3), trong đó có toàn bộ các lực bao gồm lực quán tính và mô men quán tính



Hình 6.3

Tọa độ khái quát là Y(t) và chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong hệ đều được biểu thị qua chuyển vị đó. Tuy nhiên, để thuận tiện cho việc tính toàn, ta chọn thêm một tọa độ phụ $Y_1(t)$ biểu thị trên hình (6.3).

Tổng của các mômen đối với điểm A_1 của tòan bộ các lực tác dụng trên thanh A - B_1 là:

$$k_1\left(\frac{2}{3}Y - Y_1\right).3a = 2aF_0 \sin\bar{\omega}t \qquad (6.1)$$

Tổng của các mômen đối với điểm B_2 của toàn bộ các lực tác dụng trên thanh A_2 - B_{21}là:

$$\frac{I_0}{3a}\ddot{Y} + \frac{3}{4}ma\ddot{Y} + \frac{a}{3}c\ddot{Y} + k_1\left(\frac{2}{3}Y - Y_1\right)2a + 3ak_2Y = 0 \qquad (6.2)$$

Thay Y_1 từ phương trình (6.1) vào phương trình (6.2), ta được phương trình vi phân chuyển động của hệ, biểu thị qua tọa độ khái quát Y(t) như sau:

$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + K^*Y(t) = F^*(t)$$

Trong đó các đại lượng khái quát:

$$M^* = \frac{I_0}{3a^2} + \frac{3m}{4}$$

$$C^* = \frac{c}{3}$$

$$k^* = 3k_2$$

$$F^*(t) = -\frac{4}{3}F_0 \sin\bar{\omega}t$$

Trong đó: M^*, C^*, k^*, F^* lần lượt là khối lượng khái quát, hệ số cản khái quát, hệ số độ cứng khái quát, lực tác dụng khái quát ứng với một hệ tương đương có một bậc tự do.

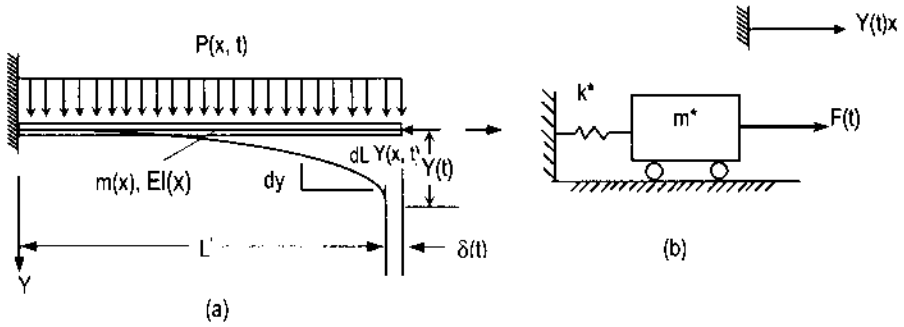
§6.3. Hệ có khối lượng phân bố đưa về một hệ khái quát có một bậc tự do

Trong mục trước, ta đã đưa một hệ phức tạp (hình 6.2) về một hệ khái quát có một bậc tự do vì một trong hai thanh không có trọng lượng, do đó có thể dùng một tọa độ khái quát để biểu thị phương trình vi phân chuyển động của hệ. Trong thực tế, các thanh không cứng mà có thể bị uốn, do đó hệ có vô số bậc tự do. Tuy nhiên, ta cũng có thể đưa một hệ như vậy về hệ khái quát có một bậc tự do bằng cách dùng chuyển vị tại một điểm để xác định chuyển vị của toàn bộ kết cấu.

Để minh họa vấn đề này, ta hãy nghiên cứu một dầm côngxon biểu thị trên hình (6.4).

Các đặc trưng vật lý của dầm là độ cứng chống uốn EI(t) và khối lượng của nó trên đơn vị dài m(x).

Lực phân bố trên dầm là một hàm p(x,t) và lực nén dọc trục N. Để đưa về hệ có một tọa độ khái quát, ta giả thiết rằng trong quá trình dao động hệ có một hình dạng cho trước.



Hình 6.4

Giả sử $\Phi(x)$ là hàm mô tả hình dạng đó và $Y(t)$ là hàm biểu thị tọa độ khái quát tại đầu tự do của dầm. Chuyển vị tại một điểm bất kỳ x dọc theo dầm được xác định bằng công thức:

$$y(x,t) = \Phi(x)\,Y(t) \tag{6.3}$$

Trong đó: $\Phi(L) = 1$

Hệ tương đương một bậc tự do trên hình (6.4b) được xem như một hệ trong đó động năng, thế năng (tức là năng lượng biến dạng) và công của ngoại lực bất cứ lúc nào cũng có giá trị như nhau đối với cả hai hệ.

Căn cứ vào (6.3), động năng T của dầm trên hình (6.4a) bằng:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) V(t)^2 = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) \left\{\Phi(x)\dot{Y}(t)\right\}^2 dx \tag{6.4}$$

Cân bằng động năng của dầm T với động năng của hệ tương đương một bậc tự do $\frac{1}{2}M^*\dot{Y}(t)^2$ sau khi đơn giản hóa, ta được khối lượng tương đương

$$M^* = \int_0^L m(x)\Phi^2(x)dx \tag{6.5}$$

Theo các công thức quen thuộc của một sức bền vật liệu, đối với dầm chịu uốn, ta có các công thức sau đây:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \tag{6.6}$$

Hay

$$d\theta = \frac{M(x)}{EI}dx \tag{6.7}$$

Trong đó: y là chuyển vị, θ là góc xoay, M(x) là mô men uốn.

Vì $\frac{dy}{dx} = \theta$ rất bé nên năng lượng biến dạng của dầm có thể viết:

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} M(x)d\theta \tag{6.8}$$

Thay (6.6), (6.7) vào (6.8), ta được:

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \tag{6.9}$$

Cuối cùng, căn cứ vào (6.3), cân bằng năng lượng biến dạng trong (6.9) với năng lượng biến dạng của hệ tương đương, ta được:

$$\frac{1}{2} K^* Y(t)^2 = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \left\{ \ddot{\Phi}(x) Y(t) \right\}^2 dx$$

$$K^* = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \left\{ \ddot{\Phi}(x) \right\}^2 dx \tag{6.10}$$

Trong đó: $\ddot{\Phi}(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$;

K^*- hệ số độ cứng (hằng số lò xo) của hệ tương đương.

Lực khái quát $F^*(t)$ có thể xác định từ chuyển vị ảo $\delta Y(t)$ của tọa độ khái quát $Y(t)$ sau đó cân bằng công của các ngoại lực trên chuyển vị ảo đó trong kết cấu với công của lực khái quát trong hệ tương đương một bậc tự do. Công của lực phân bố trên chuyển vị ảo bằng:

$$w = \int_0^L p(x,t) \delta y dx$$

Từ (6.3), ta có $\delta y = \Phi(x)\, \delta Y$ và $w = \int_0^L p(x,t) \Phi(x) \delta y dx$ (6.11)

Công thực hiện bởi lực khái quát $F^*(t)$ trong hệ tương đương trên chuyển vị ảo δY của tọa độ khái quát bằng:

$$W^* = F^*(t)\, \delta Y \tag{6.12}$$

Cân bằng (6.12) và (6.11) và đơn giản hóa, ta được:

$$F^*(t) = \int_0^L p(x,t) \Phi(x) dx \tag{6.13}$$

Một cách tương tự, để xác định hệ số cản khái quát, ta cân bằng công của các lực cản trong kết cấu và công của lực cản trong hệ tương đương một bậc tự do.

$$C^* \dot{Y} \delta Y = \int_0^L c(x) \dot{y} \delta y dx$$

Trong đó $c(x)$ là hệ cố cản phân bố trên đơn vị dài của dầm. Thay $\delta y = \Phi(x)\, \delta Y$ và $\dot{y} = \Phi(x) \dot{Y}$ từ (6.3), ta được: $C^* = \int_0^L c(x) \left[\Phi(x) \right]^2 dx$ (6.14)

Trên đây là biểu thức của hệ số cản khái quát.

Để tính thế năng của lực dọc N, lực này không thay đổi trong quá trình dao động của dầm, ta cần tính thành phần nằm ngang của chuyển động δ(t) tại đầu mút tự do của dầm (hình 6.4a). Muốn vậy, ta xét một phần tử vi phân có chiều dài dL dọc theo dầm trên hình (6.4a). Chiều dài của phần tử này là:

$$dL = \left[dx^2 + dy^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Hay

$$dL = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \qquad (6.15)$$

Bây giờ tích phân trên hình chiếu nằm ngang của chiều dài dầm (L') và khai triển nhị thức, ta được:

$$L = \int_0^{L'} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^{L'} \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \ldots\right\} dx$$

Giữ lại hai số hạng đầu tiên của chuỗi, ta được:

$$L = L' + \int_0^{L} \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \qquad (6.16)$$

Hay

$$\delta(t) = L - L' = \int_0^{L} \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \qquad (6.17)$$

Trên đây là một cách tính gần đúng vì cận trên của tích phân trong (6.16) lấy bằng L chứ không phải bằng L'

Bây giờ ta định nghĩa một hệ số độ cứng mới gọi là độ cứng hình học khái quát K_G^*, độ cứng này được xem như độ cứng của hệ tương đương. Cân bằng thế năng của hệ tương đương và thế năng của dầm, ta được:

$$\frac{1}{2} K_G^* Y(t) = N\delta(t)$$

Thay δ(t) từ (6.17) và đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ từ (6.3) vào biểu thức trên, ta được:

$$\frac{1}{2} K_G^* Y(t)^2 = \frac{1}{2} N \int_0^{L} \left\{Y(t)\frac{d\Phi}{dx}\right\}^2 dx$$

Hay

$$K_G^* = N\int_0^L \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 dx \qquad (6.18)$$

Các phương trình (6.5), (6.10), (6.13), (6.14) và (6.18) lần lượt là các biểu thức khái quát của khối lượng, độ cứng, lực, hệ số cản và độ cứng hình học trong một hệ tương đương một bậc tự do với dầm có khối lượng phân bố.

Trong trường hợp lực dọc trong dầm là lực nén, thế năng trong dầm giảm làm giảm độ cứng của dầm. Thông thường, độ cứng hình học được xác định trong trường hợp có lực nén, do đó độ cứng khái quát của hệ tương đương bằng:

$$K_C^* = K^* - K_G^* \qquad (6.19)$$

Cuối cùng, phương trình vi phân viết cho hệ tương đương như sau:

$$M^*\ddot{Y}(t) + C^*\dot{Y}(t) + K_C^* Y(t) = F^*(t) \qquad (6.20)$$

Lực tới hạn N_{th} xảy ra khi độ cứng trong hệ tương đương triệt tiêu nghĩa là: $K_C^* = K^* - K_G^* = 0$

Thay K^* và G^* từ (6.10) và (6.18) vào biểu thức trên, ta có:

$$\int EI\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)^2 dx - N_{th}\int EI\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = 0$$

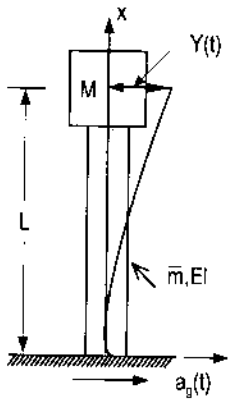
Do đó:

$$N_{th} = \frac{\int_0^L EI\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 dx}$$

Ví dụ 6.1: Một tháp nước như trên hình (6.5) có khối lượng phân bố đều $\bar{m}$ và độ cứng EI dọc theo chiều dài, trên đỉnh tháp có một tải trọng tập trung $M = \bar{m}L$. Tháp chịu động đất ở nền móng với gia tốc $a_g(t)$ và chịu lực nén dọc do trọng lượng của khối lượng phân bố và khối lượng tập trung ở đỉnh tháp. Bỏ qua lực cản và giả thiết tháp có dạng.

$$\Phi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L} \qquad (6.22)$$

Yêu cầu biểu thị khối lượng, độ cứng và lực tác dụng trong hệ tương đương.



Hình 6.5

Giải:

Ta chọn chuyển vị ngang Y(t) ở đỉnh tháp làm tọa độ khái quát như trên hình (6.5). Chuyển vị tại một điểm bất kỳ được xác định như sau:

$$y(x,t) = Y(t)\Phi(x) = Y(t)\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{6.23}$$

Khối lượng khái quát và độ cứng khái quát của tháp được xác định theo các phương trình (6.5) và (6.10).

$$M^* = \bar{m}L + \bar{m}\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx \tag{6.24}$$

$$M^* = \frac{mL}{2\pi}(5\pi - 8)$$

$$K^* = \int_0^L EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)\cos^2\frac{\pi x}{2L}dx$$

$$K^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \tag{6.25}$$

Lực dọc do trọng lượng của tháp nằm trên tiết diện đang xét bao gồm trọng lượng tập trung ở đỉnh, tính như sau:

$$N(x) = \bar{m}Lg\left(2 - \frac{x}{L}\right) \tag{6.26}$$

Trong đó g là gia tốc trọng trường. Vì lực dọc trong trường hợp này là một hàm của x nên khi dùng phương trình (6.18) cần đưa N(x) vào trong dấu tích phân. Hệ số độ cứng hình học K_G^* bây giờ là:

$$K_G^* = \int_0^L \bar{m}Lg\left(2 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \sin^2\frac{\pi x}{2L}dx$$

Sau khi tính tích phân, ta được:

$$K_G^* = \frac{\bar{m}g}{16}\left(3\pi^2 - 4\right) \tag{6.27}$$

Do đó, căn cứ vào (6.25) và (6.27) độ cứng khái quát của hệ tương đương là:

$$K_C^* = K^* - K_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} - \frac{\bar{m}g}{16}\left(3\pi^2 - 4\right) \tag{6.28}$$

Sau khi triệt tiêu K^*, ta được:

$$\frac{\pi^4 EI}{32L^3} - \frac{\bar{m}g}{16}\left(3\pi^2 - 4\right) = 0$$

Do đó, lực tới hạn

$$\left(\bar{m}g\right)_{th} = \frac{\pi^4 EI}{2\left(3\pi^2 - 4\right)L^3} \tag{6.29}$$

Phương trình chuyển động tính theo chuyển vị tương đối $u = y(t) - y_g(t)$ được xác định bằng phương trình (3.38) đối với hệ không có lực cản:

$$M^* \ddot{u} + K_C^* u = F_{eff}^*(t) \tag{6.30}$$

Trong đó:

M^* được xác định bằng phương trình (6.24), K_C^* bằng phương trình (6.28), lực $F_{eff}^*(t)$ được xác định bằng phương trình (6.13) đối với lực phân bố có hiệu lực và bằng $\overline{m}La_g(t)$ đối với lực tập trung có hiệu lực ở đỉnh tháp. Vậy:

$$F_{eff}^* = \int_0^L -\overline{m}a_g(t)\Phi(x)dx - \overline{m}La_g(t)$$

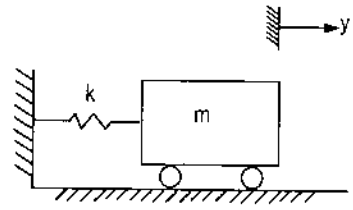
Thay $\Phi(x)$ từ phương trình (6.22) vào phương trình trên, ta được:

$$F_{eff}^{\&*} = \frac{2\overline{m}a_g(t)L}{\pi}(\pi - 1) \tag{6.31}$$

§6.4. Phương pháp Rayleigh

Trong các mục trước, ta đã áp dụng nguyên lý công ảo để nghiên cứu sự cân bằng động lực học. Tuy nhiên, ta cũng có thể áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng để nghiên cứu một hệ dao động tự do không có lực cản. Nguyên lý này phát biểu như sau: Nếu không có ngoại lực tác dụng lên hệ và nếu không có sự tiêu tan năng lượng do lực cản thì toàn bộ năng lượng của hệ phải là một hằng số trong suốt quá trình dao động, do đó đạo hàm của nó đối với thời gian phải triệt tiêu.

Để minh họa nguyên lý này, ta hãy xét một hệ có khối lượng liên kết với lò xo như trên hình (6.6). Toàn bộ năng lượng bao gồm tổng động năng của khối lượng và thế năng của lò xo. Động năng T có thể viết:



Hình 6.6

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{6.32}$$

Trong đó: $\dot{y}$ là vận tốc tức thời của khối lượng.

Khi lò xo chuyển vị y đơn vị từ vị trí cân bằng, lực trong lò xo bằng ky và công làm bởi lực đó trên một chuyển vị phụ gia dy là -kydy.

Công mang dấu âm vì lực tác dụng lên khối lượng ngược chiều với số gia chuyển vị dy có chiều dương. Vậy tổng thế năng V trong lò xo ứng với chuyển vị cuối cùng y bằng:

$$V = \int_0^y kydy = \frac{1}{2}ky^2 \tag{6.33}$$

Cộng phương trình (6.32) với phương trình (6.33) và cho tổng này bằng một hằng số, ta có:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = C_0 \tag{6.34}$$

Lấy đạo hàm phương trình trên đối với thời gian, ta có:

$$m\dot{y}\ddot{y} + ky\dot{y} = 0$$

Vì $\ddot{y}$ không thể triệt tiêu đối với mọi giá trị của thời gian t nên:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \tag{6.35}$$

Phương trình trên giống với phương trình (1.11) ở chương một, ta có phương trình này khi áp dụng định luật Newton về chuyển động. Bây giờ ta lại tiếp tục xét hình (6.6) và giả sử chuyển động có tính chất điều hòa. Giả thiết này đưa đến phương trình chuyển động:

$$y = C\sin(\omega t + \alpha) \tag{6.36}$$

Và vận tốc: $\dot{y} = \omega C\cos(\omega t + \alpha)$ (6.37)

Trong đó:

C là chuyển vị cực đại và ωC là vận tốc cực đại. Lúc bấy giờ ở vị trí trung hòa (y = 0) không có lực trong lò xo và thế năng triệt tiêu. Do đó, toàn bộ năng lượng bằng động năng và

$$T_{max} = \frac{1}{2}m(\omega C)^2 \tag{6.38}$$

Khi chuyển vị đạt giá trị cực đại, vận tốc của khối lượng triệt tiêu và toàn bộ năng lượng bằng thế năng và toàn bộ năng lượng bằng thế năng.

$$T_{max} = \frac{1}{2}kC^2 \tag{6.39}$$

Năng lượng của hệ thay đổi trong khoảng một phần tử chu kỳ, từ động năng thuần túy xác định từ phương trình (6.38) đến thế năng thuần túy xác định từ phương trình (6.39). Nếu không có năng lượng được cộng thêm hoặc không có năng lượng bị mất đi trong quãng một phần tư chu kỳ thì hai loại năng lượng trên phải bằng nhau, tức là:

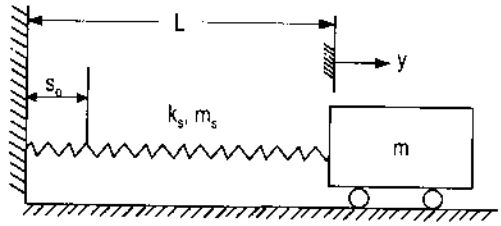
$$\frac{1}{2}m\omega^2C^2 = \frac{1}{2}kC^2 \tag{6.40}$$

Từ phương trình trên ta rút ra:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.41}$$

Trong đó, ω là tần số vòng tự nhiên ta đã suy ra từ trước. Phương pháp trong đó tần số vòng tự nhiên được suy ra bằng cách cân bằng động năng cực đại, với thế năng cực đại gọi là phương pháp Rayleigh.

Ví dụ 6.2. Trong các phần trước ta đã giả thiết rằng khối lượng của lò xo rất bé nên ảnh hưởng của nó đến tần số vòng tự nhiên có thể bỏ qua. Giá trị thực của khối lượng lò xo có thể tính gần đúng bằng phương pháp Rayleigh.



Hình 6.7

Để xác định khối lượng phân bố của lò xo, ta giả thiết chuyển vị của lò xo dọc theo chiều dài của nó có tính chất tuyến tính. Ta hãy xét lò xo trên hình (6.7), nó có chiều dài bằng L và khối lượng bằng m. Hãy dùng phương pháp Rayleigh xác định phần khối lượng lò xo được cộng thêm vào khối lượng dao động.

Giải:

Chuyển vị tại một tiết diện bất kỳ của lò xo cách gối tựa khoảng cách s bằng $u = \frac{sy}{L}$.

Giả sử chuyển động của khối lượng m có tính chất điều hòa, từ (6.36) ta được:

$$u = \frac{s}{L}y = \frac{s}{L}C\sin(\omega t + \alpha) \tag{6.42}$$

Thế năng của lò xo dãn đều được xác định bằng (6.33), giá trị cực đại của nó bằng:

$$V_{max} = \frac{1}{2}kC^2 \tag{6.43}$$

Đối với phần tử của lò xo có chiều dài d_s và có khối lượng bằng $m_s d_s/L$, vận tốc cực đại $\dot{u}_{max} = \omega U_{max} = \omega s\frac{C}{L}$. Vậy tổng động năng cực đại trong hệ là:

$$T_{max} = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{m_s}{L}d_s\left(\omega\frac{s}{L}C\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2C^2 \tag{6.44}$$

Sau khi tính tích phân (6.44) và cân bằng nó với (6.43), ta được:

$$\frac{1}{2}kC^2 = \frac{1}{2}\omega^2C^2\left(m + \frac{m_s}{3}\right) \tag{6.45}$$

Từ (6.45) rút ra tần số vòng tự nhiên

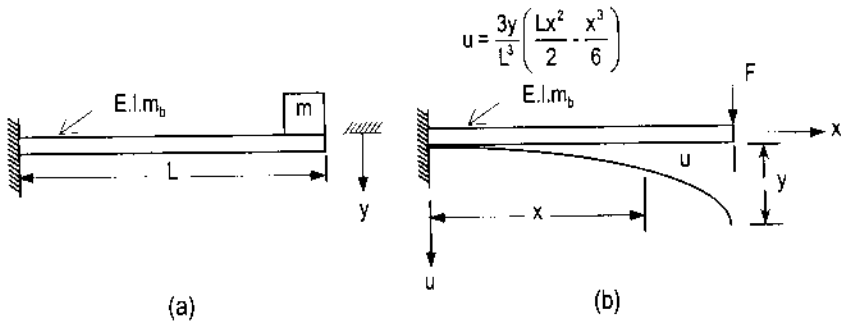
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}}} \tag{6.46}$$

Hoặc tần số vòng tính bằng chu kỳ/giây (cps)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}}} \tag{6.47}$$

Phương pháp Rayleigh cũng có thể áp dụng để tính tần số vòng tự nhiên của hệ liên tục với điều kiện cho trước sơ đồ biến dạng của nó trong quá trình dao động. Sơ đồ biến dạng đó có thể giả thiết một cách tùy ý. Tuy nhiên khi sơ đồ đó càng gần với sơ đồ thực tế thì kết quả tính toán càng chính xác. Sau khi xác định được sơ đồ biến dạng, ta tính động năng cực đại và thế năng cực đại theo phương trình (6.4) và (6.9). Nếu sơ đồ biến dạng được xác định bằng cách đặt các tải trọng tĩnh thì việc tính công của các ngoại lực đơn giản hơn. Trong trường hợp này, cân bằng động năng cực đại với công của các tải trọng tĩnh. Ta sẽ dùng ví dụ sau đây để minh hoạ vấn đề phân tích ở trên.

Ví dụ 6.3. Một dầm côngxon như trên hình (6.8). Dầm có một khối lượng tập trung m ở đầu tự do và khối lượng phân bố.



Hình 6.8

Tổng khối lượng của dầm là m_b, chiều dài của nó là L, độ cứng chống uốn là EI. Yêu cầu xác định tần số vòng tự nhiên.

Giải:

Trước hết, ta xác định sơ đồ biến dạng của dầm bằng cách đặt tải trọng tĩnh F ở đầu tự do của nó (hình 6.8b). Dưới tác dụng của tải trọng tĩnh đó, độ võng của dầm cách gối tựa khoảng cách x là:

$$u = \frac{3y}{L^3}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{6.48}$$

Trong đó y là độ võng ở đầu tự do của dầm. Sau khi thay $y = C\sin(\omega t + \alpha)$ vào (6.48), ta được:

$$u = \frac{3x^2L - x^2}{2L^3}C\sin(\omega t + \alpha) \tag{6.49}$$

Thế năng bằng công của lực F tăng dần từ 0 đến giá trị F. Công này bằng $\frac{1}{2}F.y$ do đó thế năng cực đại bằng:

$$V_{max} = \frac{1}{2}FC = \frac{3EI}{2L^3}C^2 \tag{6.50}$$

Theo công thức của sức bền vật liệu, độ võng cực đại do lực F gây ra là:

$$y_{max} = C = \frac{FL^3}{3EI} \tag{6.51}$$

Động năng do khối lượng phân bố của dầm gây ra là:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{m_b}{L}\right)\dot{u}^2 dx \tag{6.52}$$

Căn cứ vào (6.49) tổng động năng cực đại là:

$$T_{max} = \frac{m_b}{2L}\int_0^L \left(\frac{3x^2L - x^3}{2L^3}\omega C\right)^2 dx + \frac{m}{2}\omega^2 C^2 \tag{6.53}$$

Sau khi tính tích phân (6.53) và cân bằng nó với (6.50), ta được:

$$\frac{3EI}{2L^3}C^2 = \frac{1}{2}\omega^2 C^2\left(m + \frac{33}{140}m_b\right) \tag{6.54}$$

Do đó, tần số tự nhiên:

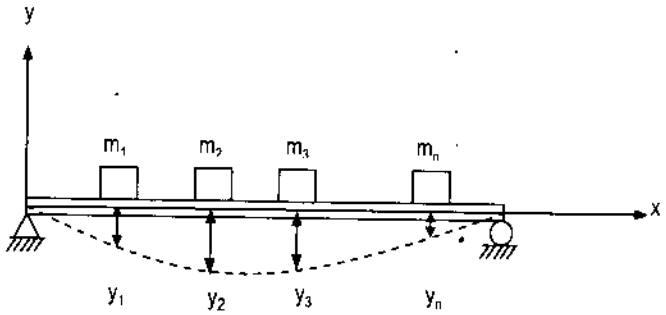
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{L^3\left(m + \frac{33}{140}m_b\right)}} \tag{6.55}$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng $\frac{33}{140}$ của khối lượng dầm được thêm vào khối lượng tập trung ở đầu dầm, kết quả này chính xác hơn so với khi bỏ qua khối lượng của dầm. Trong thực tế, ta có thể lấy tròn phân số $\frac{33}{140}$ thành $\frac{1}{4}$, do đó tần số tự nhiên của dầm côngxôn là:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{L^3\left(m + \frac{1}{4}m_b\right)}} \tag{6.56}$$

Ví dụ 6.4:

Một dầm mang các khối lượng tập trung biểu thị trên hình (6.9). Bỏ qua khối lượng của dầm. Hãy tính tần số vòng tự nhiên bằng phương pháp Raylcigh.



Hình 6.9

Giải:

Để áp dụng phương pháp Rayleigh, cần phải chọn trước sơ đồ biến dạng của dầm trong quá trình dao động. Tốt nhất là chọn hình dạng do các lực dưới đây gây ra: $W_1 = m_1g$, $W_2 = m_2g$ .... $W_N = m_Ng$, trong đó g là gia tốc trọng trường. Độ võng tĩnh dưới tác dụng các trọng lượng này là $y_1, y_2, \ldots y_N$. Thế năng bây giờ là công của các lực nói trên trong quá trình gia tải trọng:

$$V_{max} = \frac{1}{2}W_1y_1 + \frac{1}{2}W_2y_2 + \ldots + W_Ny_N \tag{6.57}$$

Đối với chuyển động điều hòa trong dao động tự do, vận tốc cực đại dưới các trọng lượng nói trên là $\omega y_1, \omega y_2 \ldots \omega y_N$. Vậy động năng cực đại là:

$$T_{max} = \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}(\omega y_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{W_2}{g}(\omega y_2)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{W_N}{g}(\omega y_N)^2 \tag{6.58}$$

Cân bằng thế năng cực đại trong (6.57) và động năng cực đại trong (6.58), ta được tần số vòng tự nhiên:

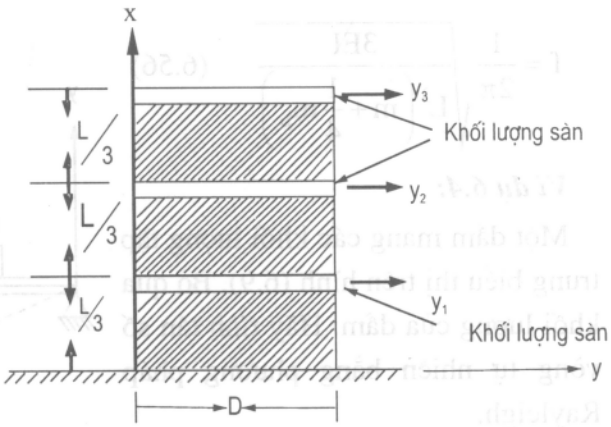
$$\omega = \sqrt{\frac{g(W_1y_1 + W_2y_2 + \ldots + W_Ny_N)}{W_1y_1^2 + W_2y_2^2 + \ldots + W_Ny_N^2}} \tag{6.59}$$

Hay:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{N} W_iy_i}{\sum_{i=1}^{N} W_iy_i^2}}$$

§6.5. Tường chịu cắt

Các lực nằm ngang chẳng hạn như lực động đất, lực gió thường do tường nhà chống đỡ gọi là tường chịu cắt. Loại kết cấu này thường làm bằng bê tông cốt thép và được cố định vào nền móng. Một tường chịu cắt kiểu côngxon có thể xem như một cấu kiện chịu uốn nếu chiều cao trên chiều rộng > 2. Đối với những tường ngắn hơn (chiều cao trên chiều dài < 2) lực cắt chiếm ưu tiên và cả biến dạng uốn và biến dạng cắt đều được xét đến trong quá trình tính toán.



Hình 6.9

Khi hệ sàn của nhà nhiều tầng tuyệt đối cứng, trọng lượng kết cấu hoặc khối lượng mỗi sàn được xem như tập trung như trên hình (6.9). Lời giải là một hàm của các khối lượng đó và của độ cứng của tường chịu cắt.

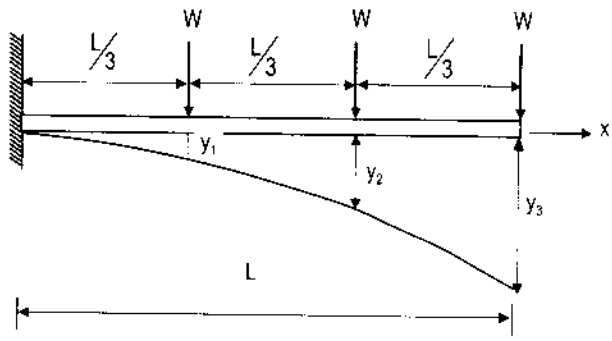
Trong thực tế, khối lượng cũng như độ cứng của kết cấu được phối hợp ở mỗi sàn. Tần số cơ bản (tần số tự nhiên thấp nhất) có thể tính bằng phương pháp Rayleigh như sẽ được trình bày trong ví dụ dưới đây:

Ví dụ 6.5. Một nhà 3 tầng như trên hình (6.9). Tất cả các sàn đều có trọng lượng như nhau W. Bỏ qua khối lượng của tường và chỉ xét đến biến dạng uốn (chiều cao trên chiều rộng > 2). Xác định tần số vòng tự nhiên theo phương pháp Rayleigh.

Giải:

Tần số vòng tự nhiên tính theo công thức (6.59)

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{N} W_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} W_i y_i^2}}$$



Hình 6.10

Giả thiết phương trình của sơ đồ biến dạng là đường cong của dầm công xôn do ba lực tập trung W sản sinh như trên hình (6.10)

Theo các công thức của sức bền vật liệu, các chuyển vị y_1, y_2, y_3 do tải trọng tĩnh gây ra tính như sau:

$$y_1 = \frac{15}{162}\frac{WL^3}{EI} = 0,0926\frac{WL^3}{EI}$$

$$y_2 = \frac{49}{162}\frac{WL^3}{EI} = 0,3025\frac{WL^3}{EI}$$

$$y_3 = \frac{92}{162}\frac{WL^3}{EI} = 0,5679\frac{WL^3}{EI} \qquad \text{(b)}$$

Tần số vòng tự nhiên tính theo (6.59)

$$\omega = \sqrt{\frac{(0,0926+0,3025+0,5679)}{\left(0,0926^2+0,3025^2+0,5679^2\right)}\cdot\frac{EI}{WL^3}}$$

$$= 29,66\sqrt{\frac{EI}{WL^3}}\ \text{rad/sec}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,72\sqrt{\frac{EI}{WL^3}}\ \text{cps}$$

Ví dụ 6.6. Nhà 3 tầng biểu thị như trên hình (6.9). Xác định tổng chuyển vị ngang của mỗi sàn bằng cách xét cả biến dạng uốn và biến dạng cắt.

Giải:

Nếu chỉ xét biến dạng cắt của một đoạn dầm có chiều dài Δx, chuyển vị ngang Δy_s tính theo công thức:

$$\Delta y_s = \frac{V.\Delta x}{\alpha AG} \qquad (a)$$

Trong đó:

V- lực cắt;

A - diện tích tiết diện;

α - hằng số hình dạng ($\alpha = 1,2$ đối với tiết diện hình chữ nhật);

G - môđun đàn hồi cắt.

Ở tầng 1 , V = 3W. Theo (a)

$$y_{s1} = \frac{3W\left(\frac{L}{3}\right)}{\alpha AG} = \frac{WL}{\alpha AG} \qquad (b)$$

Ở tầng hai, biến dạng cắt bằng biến dạng cắt ở tầng một cộng với biến dạng tỷ đối giữa hai sàn:

$$y_{s2} = y_{s1} + \frac{2W\left(\frac{L}{3}\right)}{\alpha AG} = \frac{5WL}{3\alpha AG} \qquad (c)$$

Ở tầng ba:

$$y_{s3} = y_{s2} + \frac{W\left(\frac{L}{3}\right)}{\alpha AG} = \frac{6WL}{3\alpha AG} \qquad (d)$$

Tổng biến dạng được xác định bằng cách cộng thêm vào các giá trị trên (biến dạng cắt) các biến dạng uốn đã được xác định trong ví dụ (6.5)

$$y_1 = \frac{15}{162}\frac{WL^3}{EI} + \frac{WL}{\alpha AG}$$

$$y_2 = \frac{49}{162}\frac{WL^3}{EI} + \frac{5WL}{3\alpha AG}$$

$$y_3 = \frac{92}{162}\frac{WL^3}{EI} + \frac{6WL}{3\alpha AG} \qquad (e)$$

Đặt các số hạng đầu tiên trong (c) làm thừa số chung, ta sẽ thấy tính chất quan trọng của biến dạng cắt:

$$y_1 = \frac{15}{162}\frac{WL^3}{EI}\left[1 + 1,875\left(\frac{D}{L}\right)^2\right]$$

$$y_2 = \frac{49}{162}\frac{WL^3}{EI}\left[1 + 0,957\left(\frac{D}{L}\right)^2\right]$$

$$y_3 = \frac{92}{162}\frac{WL^3}{EI}\left[1 + 0,611\left(\frac{D}{L}\right)^2\right]$$

Đối với tường có mặt cắt hình chữ nhật với D là bề rộng, t là bề dày, ta có: $A = D \times t$; $\frac{E}{G} = 2,5$; $I = \frac{tD^3}{12}$; $\alpha = 1,2$.

Chương 7
NHÀ CHỊU CẮT NHIỀU TẦNG

Trong phần trước, ta đã nghiên cứu các kết cấu được mô hình hoá thành hệ một bậc tự do. Trong thực tế, không phải lúc nào cũng có thể mô hình hoá kết cấu thành hệ một bậc tự do chẳng hạn như những kết cấu có tính chất liên tục và có vô số bậc tự do. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu một trong những loại kết cấu có nhiều bậc tự do, đó là nhà chịu cắt nhiều tầng.

§7.1 Các phương trình độ cứng của nhà chịu cắt nhiều tầng

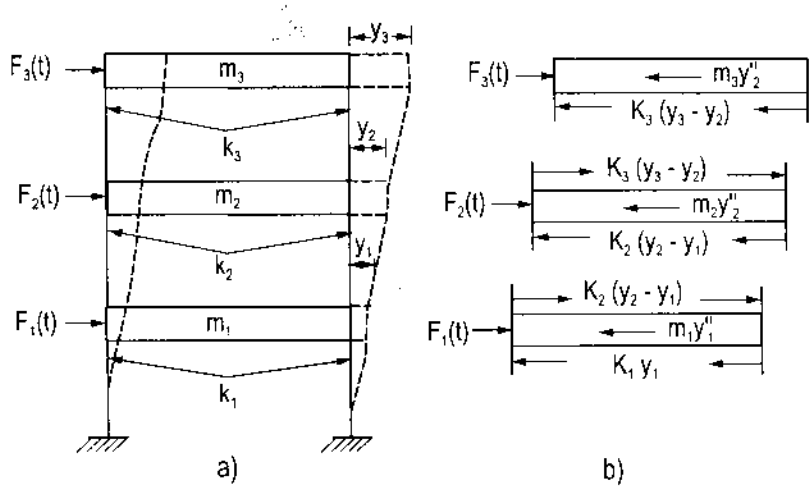
Nhà chịu cắt được định nghĩa là một kết cấu trong đó không có góc xoay tại tiết diện ngang ở mức các sàn. Vì vậy, nhà biến dạng như một dầm côngxon biến dạng chỉ do lực cắt. Với nhà chịu cắt, ta có các giả thiết sau đây:

1. Tổng khối lượng các kết cấu tập trung ở mức các sàn.
2. Các dầm trên sàn tuyệt đối cứng so với cột.
3. Biến dạng của kết cấu không phụ thuộc vào lực dọc trong các cột.

Với các giả thiết trên, nếu kết cấu có bao nhiêu khối lượng tập trung ở mức các sàn thì sẽ có bấy nhiêu bậc tự do trong bài toán động lực học. Chẳng hạn, nhà 3 tầng trên hình (7.1a) có 3 bậc tự do nghĩa là có 3 chuyển vị ngang ở mức cái sàn

Với giải thiết thứ hai, góc xoay ở các nút liên kết cột với sàn triệt tiêu. Với giả thiết thứ ba, các dầm cứng vẫn nằm ngang trong quá trình dao động.

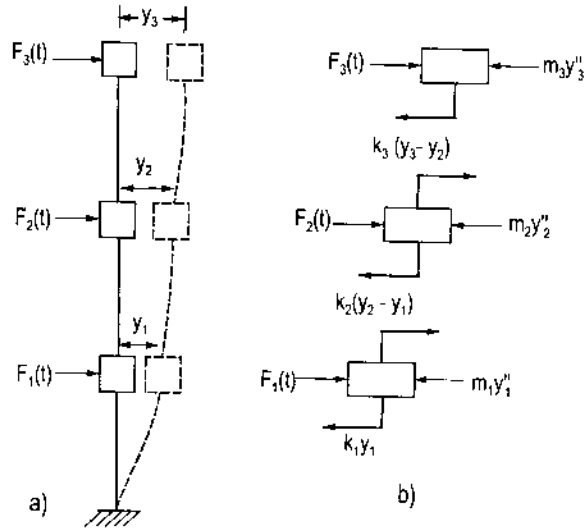
Cần chú ý rằng nhà có thể có nhiều nhịp nhưng để tiện cho việc phân tích ta chỉ nghiên cứu nhà một nhịp.



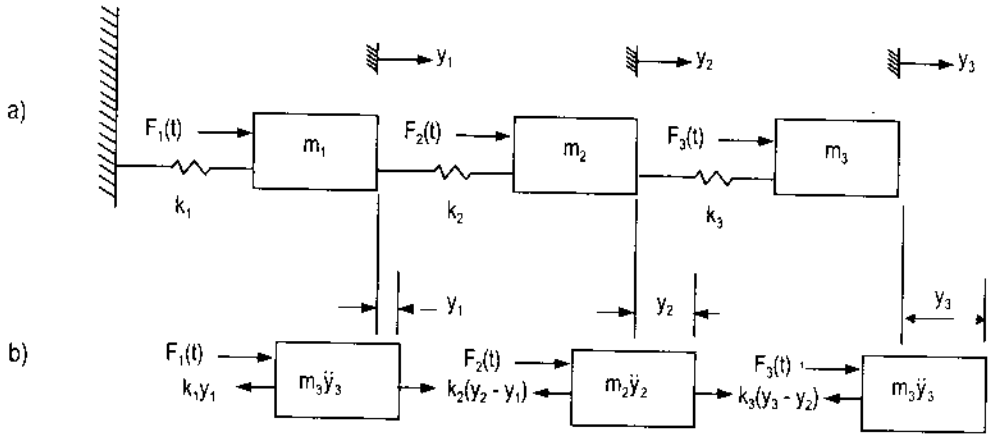
Hình 7.1

Bây giờ ta có thể mô hình hoá nhà chịu cắt thành một cột có khối lượng tập trung ở mức các sàn (hình 7.2a). Một phương án khác là mô hình các khối lượng liên kết với các lò xo như trên hình (7.3).

Đối với bất kỳ một mô hình nào trên 3 mô hình trên, các hệ số độ cứng hoặc hằng số lò xo k_i nằm giữa 2 khối lượng liên tiếp là lực cần để sản sinh một chuyển vị đơn vị tương đối giữa 2 mức sàn kề nhau.



Hình 7.2



Hình 7.3

Đối với một cột đồng đều có 2 đầu không xoay, hằng số lò xo được xác định bằng công thức:

$$k = \frac{12\,EI}{L^3} \tag{7.1a}$$

Đối với cột 1 đầu cố định, một đầu khớp:

$$k = \frac{3\,EI}{L^3} \tag{7.1b}$$

Trong đó: E - mô đun đàn hồi của vật liệu;

I - mô men quán tính của mặt cắt ngang;

L - chiều dài của cột.

Rõ ràng là 3 mô hình trình bày trên các hình (7.1), (7.2), (7.3) đều tương đương với nhau. Vì vậy, có thể căn cứ vào bất cứ mô hình nào trong 3 mô hình trên để suy ra các

phương trình chuyển động của nhà chịu cắt 3 tầng. Lập điều kiện cân bằng các lực trên sơ đồ vật tự do, ta có:

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) - F_1(t) = 0 \\ &m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) - k_3(y_3 - y_2) - F_2(t) = 0 \\ &m_3\ddot{y}_3 - k_3(y_3 - y_2) - F_3(t) = 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Hệ các phương trình trên tạo thành biểu thức độ cứng của các phương trình chuyển động đối với nhà chịu cắt 3 tầng. Dưới dạng ma trận, các phương trình trên có thể viết:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = [F] \tag{7.3}$$

Trong đó: [M] và [K] lần lượt là các ma trận khối lượng và ma trận độ cứng:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

Và $\{y\}$, $\{\ddot{y}\}$, [F] lần lượt là vectơ chuyển vị , vectơ gia tốc và vectơ lực:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \tag{7.6}$$

Cần chú ý rằng ma trận khối lượng trong phương trình (7.4) là ma trận chéo. Các phần tử trong ma trận độ cứng (7.5) gọi là các *hệ số độ cứng*. Nói chung, hệ số độ cứng k_{ij} được định nghĩa là lực tại tọa độ i cần thiết để sản sinh một chuyển vị bằng đơn vị tại tọa độ j trong khi các toạ độ khác được giữ cố định. Chẳng hạn hệ số ở hàng thứ 2 và cột thứ 2 trong (7.5) $k_{22} = k_2 + k_3$ là lực ở sàn thứ 2 cần thiết để sản sinh một chuyển vị bằng đơn vị tại sàn đó.

§7.2. Phương trình độ mềm đối với nhà chịu cắt

Một phương pháp khác dùng biểu thức độ mềm để biểu thị các phương trình chuyển động đối với nhà chịu cắt. Trong phương pháp này, ta dùng các hệ số độ mềm được định nghĩa là chuyển vị sản sinh bởi một tải trọng bằng đơn vị đặt tại một trong các tọa độ. Chẳng hạn hệ số độ mềm f_{ij} được định nghĩa là chuyển vị tại tọa độ i sản sinh bởi một lực tĩnh bằng đơn vị đặt tại tọa độ j. Hình (7.4) biểu thị các hệ số độ mềm, ứng với lực bằng đơn vị đặt tại một trong các mức sàn của nhà chịu cắt. Dùng các hệ số đó và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, chuyển vị tại bất kỳ một tọa độ nào cũng có thể tính bằng tổng của các tích hệ số độ mềm tại tọa độ đang xét nhân với các lực tương ứng.

Các lực tác dụng trên nhà chịu cắt 3 tầng (bao gồm lực quán tính) biểu thị trên hình (7.5). Chuyển vị đối với nhà 3 tầng có thể biểu thị bằng các hệ số độ mềm như sau:

$$y_1 = \left(F_1(t) - m_1\ddot{y}_1\right)f_{11} + \left(F_2(t) - m_2\ddot{y}_2\right)f_{12} + \left(F_3(t) - m_3\ddot{y}_3\right)f_{13}$$

$$y_2 = \left(F_1(t) - m_1\ddot{y}_1\right)f_{21} + \left(F_2(t) - m_2\ddot{y}_2\right)f_{22} + \left(F_3(t) - m_3\ddot{y}_3\right)f_{23}$$

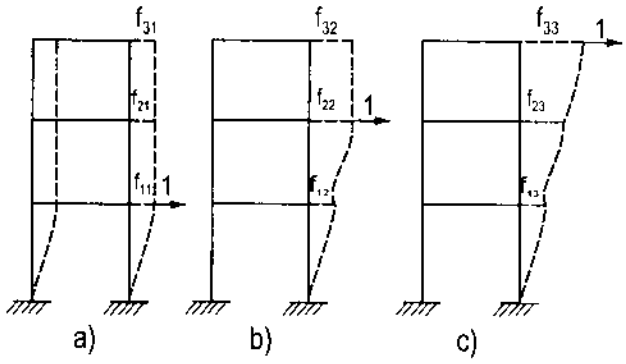
$$y_3 = \left(F_1(t) - m_1\ddot{y}_1\right)f_{31} + \left(F_2(t) - m_2\ddot{y}_2\right)f_{32} + \left(F_3(t) - m_3\ddot{y}_3\right)f_{33}$$

Xếp đặt lại các số hạng trong các phương trình trên và dùng ký hiệu ma trận ta được:

$$\{y\} = [f]\{f\} - [F][M]\{\ddot{y}\} \qquad (7.7)$$

Trong đó [M] là ma trận khối lượng [f] là ma trận độ mềm như sau:

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$



Hình 7.4

{y}, { ÿ } và {F} lần lượt là các vectơ chuyển vị, vectơ gia tốc và vectơ lực trong (7.6).

§7.3. Mối liên hệ giữa ma trận độ cứng và ma trận độ mềm

Những định nghĩa về hệ số độ cứng và độ mềm dựa trên cơ sở tĩnh học nghĩa là chuyển vị được sản sinh bởi các lực tĩnh. Để có mối quan hệ giữa lực tĩnh và chuyển vị, ta triệt tiêu vectơ gia tốc { ÿ } trong (7.3) hoặc (7.7):

$$[K]\{y\} = \{F\} \qquad (7.9)$$

$$[f]\{F\} = \{y\} \qquad (7.10)$$

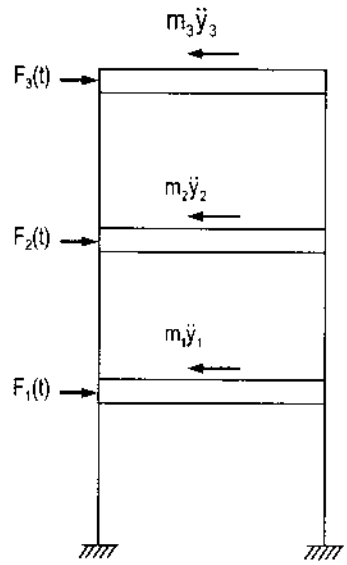
Từ các hệ thức trên, ta thấy rằng ma trận độ cứng [K] và ma trận độ mềm [F] nghịch đảo nhau nghĩa là:

$$[K] = [f]^{-1}$$

hoặc $$[f] = [K]^{-1} \qquad (7.11)$$

Vậy là ma trận độ mềm [f] đối với nhà chịu cắt có thể xác định bằng nghịch đảo của ma trận độ cứng hoặc tính trực tiếp từ các hệ số độ mềm. Nếu dùng cách thử 2, đối với nhà chịu cắt 3 tầng trên hình (7.4a), ta có:

$$k_1 f_{11} = 1$$



Hình 7.5

$$f_{11} = f_{21} = f_{31} = \frac{1}{k_1}$$

Một cách tương tự từ hình (7.4b) và (7.4c), ta có:

$$f_{22} = f_{32} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad f_{12} = \frac{1}{k_1}$$

Và $$f_{33} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}; \quad f_{23} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}; \quad f_{13} = \frac{1}{k_1}$$

vì đối với các lò xo nối tiếp, các hệ số độ mềm được xác định bằng tổng của các giá trị nghịch đảo của hằng số lò xo.

Đưa các biểu thức trên vào ma trận độ mềm (7.8), ta có:

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Từ (7.12), ta thấy rằng ma trận độ mềm có thể mở rộng cho nhà chịu cắt nhiều tầng.

Ví dụ 7.1: Một khung chịu cắt 4 tầng cùng các đặc trưng cơ học và hình học biểu thị như trên hình (7.6).

Đặc trưng hình học và cơ học cho tất cả các tầng.

Tổng mô men quán tính:

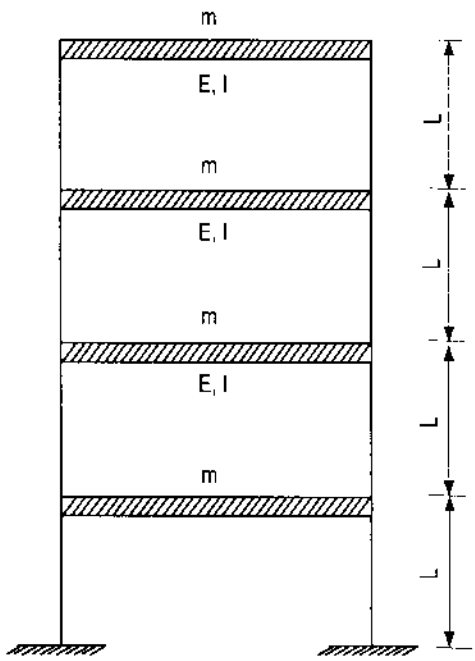
$$I = 33 \times 10^{-6}\ m^4$$

Mô đun đàn hồi $E = 13{,}8 \times 10^6\ kN/m^2$

Khối lượng $m = 0{,}175\ kN\ sec^2/m$

Chiều cao $L = 4{,}5m$

Lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn bộ khung



Hình 7.6

Giải:

Hệ số độ cứng cho mỗi tầng tính theo công thức:

$$k_i = \frac{12.E_i.I_i}{L_i^3}$$

Tầng 1: $k_1 = \dfrac{12 \times 13,8 \times 10^6 \times 33 \times 10^{-6}}{(4,5)^2} = 59,97 kN/m$

Tầng 2: $k_2 = 59,97$ kN/m

Tầng 3: $k_3 = 59,97$ kN/m

Tầng 4: $k_4 = 59,97$ kN/m

Lập ma trận độ cứng theo (7.4):

$$S = \begin{bmatrix} 119,941 & -59,970 & 0 & 0 \\ & 119,941 & -59,97 & 0 \\ & & 119,941 & -59,97 \\ \text{đối xứng} & & & 59,97 \end{bmatrix}$$

Lập ma trận khối lượng theo (7.5):

$$m = \begin{bmatrix} 0,175 & & \mathbf{0} & \\ & 0,175 & & \\ \mathbf{0} & & 0,175 & \\ & & & 0,175 \end{bmatrix}$$

Chương 8
DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA NHÀ CHỊU CẮT

Ta gọi là dao động tự do khi trong quá trình chuyển động của kết cấu, không có lực kích thích bên ngoài tác dụng. Chuyển động của kết cấu do các điều kiện ban đầu khống chế. Trường hợp kết cấu dao động tự do hiếm có, nhưng việc tính toán kết cấu ở trạng thái dao động tự do cung cấp cho ta những tính chất động lực học rất quan trọng, chẳng hạn như tần số tự nhiên và các dạng mô đơ. Ta sẽ bắt đầu nghiên cứu các phương trình chuyển động, đó là các phương trình độ cứng, phương trình độ mềm.

§8.1. Tần số vòng tự nhiên và các mô đơ chuẩn

Trong bài toán dao động tự do, ta cần triệt tiêu véc tơ lực {F} trong các phương trình độ cứng (7.3) hoặc phương trình độ mềm (7.7) Phương trình độ cứng với {F} = 0 có thể viết:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \tag{8.1}$$

Đối với kết cấu dao động tự do không có lực cản, lời giải của (8.1) có dạng:

$$y_i = a_i \sin(\omega t - \alpha) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Hoặc dưới dạng ma trận

$$\{y\} = \{a\}\sin(\omega t - \alpha) \tag{8.2}$$

Trong đó a_i là biên độ dao động ở tọa độ thứ i và n là số bậc tự do.

Thay (8.2) vào (8.1), ta có:

$$-\omega^2[M]\{a\}\sin(\omega t - \alpha) + [k]\{a\}\sin(\omega t - \alpha) = 0$$

Sau khi sắp đặt lại các số hạng, biểu thức trên có dạng:

$$\left[[k] - \omega^2[M]\right]\{a\} = \{0\} \tag{8.3}$$

Trên đây là phương trình vi phân thuần nhất với n chuyển vị a_i chưa biết và một tham số chưa biết là ω^2. Biểu thức (8.3) là một bài toán quan trọng trong toán học gọi là bài toán *giá trị riêng*. Để tránh lời giải tầm thường nghĩa là lời giải trong đó toàn bộ $a_i = 0$, định thức của ma trận các thừa số của {a} phải bằng không tức là:

$$\left|[K] - \omega^2[M]\right| = 0 \tag{8.4}$$

(8.4) là một phương trình đa thức bậc n, được thoả mãn với n giá trị của ω^2. Ta gọi đa thức trên là *đa thức đặc trưng* của hệ. Ứng với mỗi giá trị của ω^2 thoả mãn phương trình đặc trưng, ta có thể giải phương trình (8.3) để được các giá trị chuyển vị a_1, a_2 .....a_n.

Một cách tương tự đối với biểu thức độ mềm, từ (7.7) với $\{F\} = 0$, ta có:

$$\{y\} + [f][M]\{\ddot{y}\} = \{0\} \tag{8.5}$$

Giả sử chuyển động cũng có tính chất điều hoà như trong (8.2). Thay (8.2) và (8.5), ta được.

$$\{a\} = \omega^2 [f][M]\{a\} \tag{8.6}$$

hay

$$1/\omega^2 \{a\} = [D]\{a\}$$

Trong đó [D] gọi là *ma trận động lực học*, nó có dạng

$$[D] = [f][M] \tag{8.8}$$

Phương trình (8.7) có thể viết:

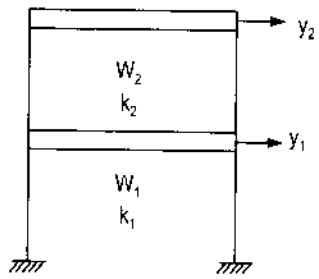
$$\{[D] - 1/\omega^2[I]\}\{a\} = 0 \tag{8.9}$$

Trong đó [I] là ma trận đơn vị. Để tránh lời giải tầm thường, định thức của ma trận các thừa số của {a} phải triệt tiêu nghĩa là:

$$\left|[D] - \frac{1}{\omega}[I]\right| = 0 \tag{8.10}$$

(8.10) là một đa thức bậc n của $1/\omega^2$. Đây là phương trình đặc trưng của hệ khi tính theo biểu thức độ mềm. Ứng với lời giải $1/\omega^2$ trong phương trình (8.10), từ phương trình (8.9), ta có thể xác định được giá trị các biên độ a_i (i =1,2, …,n).

Ví dụ: 8.1: Một nhà bằng khung cứng bằng thép như trên hình (8.9). Trọng lượng của sàn và tường: được biểu thị trên hình (8.1).



Hình 8.1

Tầng 1: $W_1 = 233520N$

Tầng 2: $W_2 = 113424N$

Hệ số độ cứng (xác định từ điều kiện: $k = \frac{12E(2I)}{L^3}$)

Tầng 1: $K_1 = 57755,70N/cm$

Tầng 2: $K_2 = 7756,93N/cm$

Xác định các tần số vòng tự nhiên và các biên độ tương ứng.

Giải:

Mô hình khung biểu thị trên hình (8.2), các khối lượng tính như sau:

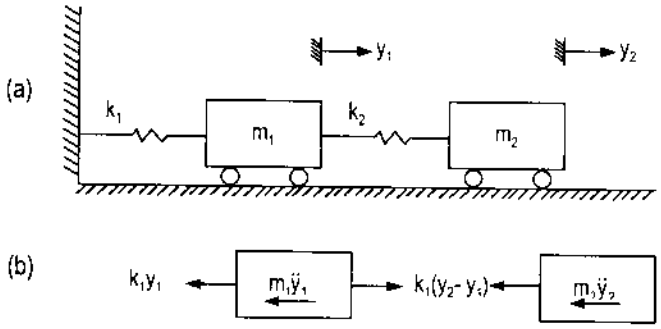
$$m_1 = \frac{W_1}{980} = 238,29\,N - sec^2/cm$$

$$m_2 = 115,74\,N - sec^2/cm$$

Từ hình (8.2b), sau khi xét điều kiện cân bằng, ta có phương trình chuyển động của hệ như sau:

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) = 0$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = 0$$



Hình 8.2

Vì dao động tự do có tính chất điều hoà, ta có:

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t - \alpha)$$
$$y_2 = a_2 \sin(\omega t - \alpha) \qquad (8.11)$$

Do đó, gia tốc có dạng:

$$\ddot{y}_1 = -a_1\omega^2 \sin(\omega t - \alpha)$$
$$\ddot{y}_2 = -a_2\omega^2 \sin(\omega t - \alpha)$$

Dưới dạng ma trận, ta có:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8.12)$$

Để tránh lời giải tầm thường, định thức của ma trận các thừa số phải triệt tiêu nghĩa là:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.13)$$

Khai triển định thức trên, ta được phương trình bậc 4 với biến là ω^2:

$$m_1 m_2 \omega^4 - ((k_1 + k_2)m_2 + m_1 k_2)\omega^2 + k_1 k_2 = 0 \qquad (8.14)$$

Thay các giá trị bằng số vào phương trình trên, ta có:

$$27578,98\omega^4 - 8967778,11\omega^2 + 416979202 = 0 \qquad (8.15)$$

Nghiệm của đa thức trên là:

$$\omega_1^2 = 140$$
$$\omega_2^2 = 1082$$

Vì vậy, tần số vòng tự nhiên của kết cấu là:

$$\omega_1 = 11,83 \text{ rad/sec}$$
$$\omega_2 = 32,89 \text{ rad/sec}$$

Tần số tự nhiên bằng chu trình/giây là:

$$f_1 = \omega_1/2\pi = 1,88 \text{ cps}$$
$$f_2 = \omega_2/2\pi = 5,24 \text{ cps}$$

Chu kỳ tự nhiên tương ứng là:

$$T_1 = 1/f_1 = 0,532 \text{ sec}$$
$$T_2 = 1/f_2 = 0,199 \text{ sec}$$

Để xác định các biên độ a_1 và a_2, ta giải phương trình (8.12), nhưng cần chú ý rằng khi triệt tiêu định thức trong (8.13), trong 2 phương trình chỉ còn lại 1 phương trình độc lập. Xét phương trình đầu tiên trong (8.12) và thay tần số vòng tự nhiên đầu tiên ω_1 = 11,8 rad/sec vào phương trình đó, ta được:

$$55960\, a_{11} - 44300\, a_{21} = 0 \qquad (8.16)$$

Trong (8.16), biên độ có 2 chỉ số ij, chỉ số i biểu thị số thứ tự các bậc tự do, chỉ số j biểu thị số thứ tự của tần số vòng tự nhiên. Vì có 2 biến và 1 phương trình, để giải (8.16), ta dùng giá trị tương đối giữa a_{21} và a_{11}. Giá trị tương đối này gọi là *mô đơ chuẩn* hoặc *dạng mô đơ* ứng với tần số đầu tiên. Vậy từ (8.16), ta có:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = 1,263$$

Để có được mô đơ chuẩn, ta thường gán giá trị đơn vị cho một trong các biên độ. Vậy đối với mô đơ đầu tiên, ta gán cho a_{11} giá trị đơn vị, do đó:

$$a_{11} = 1,000$$
$$a_{21} = 1,263 \qquad (8.17)$$

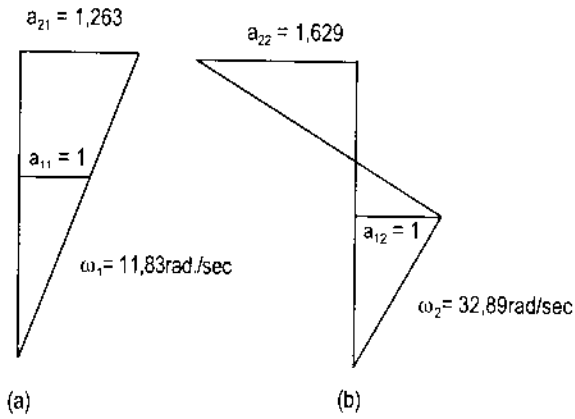
Một cách tương tự, thay tần số vòng tự nhiên thứ 2 ω_2 = 32,9 rad/sec vào (8.12) ta được môđơ chuẩn thứ 2:

$$a_{12} = 1,000$$
$$a_{22} = -1,629 \qquad (8.18)$$

Cần chú ý rằng tuy các biên độ được tính bằng tỷ số nhưng chúng vẫn có thể xác định được bằng các điều kiện ban đầu.

Từ trên, ta thấy rằng các khối lượng chuyển động ở pha cùng tần số ω_1 hoặc ω_2. Một chuyển động như vậy của hệ không có lực cản gọi là *môđơ dao động tự nhiên* hoặc *mô đơ dao động chuẩn*. Các tỷ số a_{21}/a_{11} hoặc a_{22}/a_{12} gọi là các dạng môđơ chuẩn hoặc dạng môđơ ứng với các tần số vòng tự nhiên ω_1 hoặc ω_2. Cả 2 môđơ được tình bày trên hình (8.3).

Thông thường, ta dùng môđơ thứ nhất hay môđơ cơ bản để chỉ môđơ ứng với tần số vòng thấp nhất. Các môđơ khác đôi khi được gọi là *mô đơ điều hoà* hoặc môđơ điều hoà cao hơn.



Hình 8.3

Rõ ràng là các mô đơ dao động, mỗi mô đơ có tần số riêng thể hiện hệ một bậc tự do. Chuyển động tổng thể của hệ hay nói cách khác lời giải tổng thể của phương trình chuyển động (8.1) được xác định bằng cách cộng tác dụng các dao động điều hoà môđơ:

$$y_1(t) = C_1' a_{11} \sin(\omega_1 t - \alpha_1) + C_2' a_{12} \sin(\omega_2 t - \alpha_2)$$
$$y_2(t) = C_1' a_{21} \sin(\omega_1 t - \alpha_1) + C_2' a_{22} \sin(\omega_2 t - \alpha_2) \qquad (8.19)$$

Trong đó C'_1 và C'_2 cũng như α_1 và α_2 là 4 hằng số tích phân cần được xác định từ các điều kiện ban đầu và vận tốc ban đầu cho mỗi khối lượng của hệ. Đối với hệ 2 bậc tự do, các điều kiện ban đầu đó là:

$$y_1(0) = y_{01} \;;\quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_{01}$$
$$y_2(0) = y_{02} \;;\quad \dot{y}_2(0) = \dot{y}_{02} \tag{8.20}$$

Mục đích tính toán, ta khử các góc α_1 và α_2 trong phương trình (8.19). Khai triển các hàm lượng giác và đổi tên các hằng số, ta được:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1a_{11}\sin\omega_1 t + C_2a_{11}\cos\omega_1 t + C_3a_{12}\sin\omega_2 t + C_4a_{12}\cos\omega_2 t \\ y_2(t) &= C_1a_{21}\sin\omega_1 t + C_2a_{21}\cos\omega_1 t + C_3a_{22}\sin\omega_2 t + C_4a_{22}\cos\omega_2 t \end{aligned} \tag{8.21}$$

Trong đó C_1, C_2, C_3, C_4 là các hằng số tích phân mới. Từ 2 điều kiện ban đầu trong (8.20), ta có 2 phương trình:

$$\begin{aligned} y_{01} &= C_2a_{11} + C_4a_{12} \\ y_{02} &= C_2a_{21} + C_4a_{22} \end{aligned} \tag{8.22}$$

Vì các mô đơ độc lập nhau, bao giờ cũng tính được C_2 và C_4 từ các phương trình trên. Một cách tương tự, thay các giá trị vận tốc ở thời điểm t = 0 vào phương trình (8.20), ta được:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{01} &= \omega_1c_1a_{11} + \omega_3c_3a_{12} \\ \dot{y}_{02} &= \omega_1c_1a_{21} + \omega_3c_3a_{22} \end{aligned} \tag{8.23}$$

Vậy là 2 hệ phương trình trên cho phép ta biểu thị chuyển động của hệ qua 2 dao động mô đơ, mỗi dao động có tần số riêng, dao động này độc lập với dao động kia, các biên độ và pha được xác định bằng các điều kiện ban đầu.

§8.2. Tính chất trực giao của các mô đơ chuẩn

Dưới đây, sẽ giới thiệu một tính chất quan trọng của các môđơ chuẩn, đó là *tính chất trực giao*. Tính chất này tạo thành cơ sở của một trong những phương pháp hấp dẫn nhất để giải các bài toán động lực học đối với hệ có nhiều bậc tự do. Bây giờ ta nhắc lại phương trình dao động tự do trong (8.3).

$$[K]\{a\} = \omega^2[M]\{a\} \tag{8.24}$$

Đối với hệ 2 bậc tự do, từ (8.12), ta có:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)a_1 - k_2a_2 &= m_1\omega^2a_1 \\ -k_2a_1 + k_2a_2 &= m_2\omega^2a_2 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Các phương trình trên giống như phương trình (8.12) nhưng được viết dưới dạng các phương trình tĩnh học. Trong đó, các lực có độ lớn $m_1\omega^2a_1$ và $m_2\omega^2a_2$ tác dụng trên các khối lượng m_1 và m_2 Các dạng môđơ bây giờ có thể xem như là các chuyển vị tĩnh học

do các lực ở vế phải của (8.25) gây ra. Bài toán tĩnh học này cho phép ta dùng các kết quả của lý thuyết tĩnh học đối với kết cấu tuyến tính. Đặc biệt, ta có thể dùng định lý Betti được phát biểu như sau: Đối với một kết cấu trong đó có 2 hệ tải trọng và chuyển vị tương ứng, công của hệ tải trọng thứ nhất trên những chuyển vị của hệ thứ 2 bằng công của hệ tải trọng thứ 2 trên những chuyển vị của hệ thứ nhất. 2 hệ tải trọng và chuyển vị tương ứng như sau:

Hệ I:

Lực: $\omega_1^2 a_{11} m_1,\ \omega_1^2 a_{21} m_2$

Chuyển vị tương ứng: $a_{11},\ a_{21}$

Hệ I:

Lực: $\omega_2^2 a_{12} m_1,\ \omega_2^2 a_{22} m_2$

Chuyển vị tương ứng: $a_{12},\ a_{22}$

Áp dụng định luật Betti, ta có:

$$\omega_1^2 m_1 a_{11} a_{12} + \omega_1^2 m_2 a_{21} a_{22} = \omega_2^2 m_1 a_{12} a_{11} + \omega_2^2 m_2 a_{22} a_{21}$$

hay

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)(m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22}) = 0 \qquad (8.26)$$

Nếu các tần số vòng tự nhiên khác nhau ($\omega_1 \neq \omega_2$), từ (8.26) ta phải có:

$$m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = 0$$

Hệ thức trên gọi là hệ thức trực giao giữa các dạng môđơ của hệ có 2 bậc tự do. Đối với hệ có n bậc tự do trong đó ma trận khối lượng là ma trận chéo, điều kiện trực giao giữa 2 mô đơ bất kỳ i và j có thể biểu thị như sau:

$$\sum_{k=1}^{m} m_k a_{ki} a_{kj} = 0 \qquad i \neq j \qquad (8.27)$$

Một cách tổng quát, đối với hệ có n bậc tự do, dưới dạng ma trận, ta có:

$$\{a_i\}\,[M]\,\{a_j\} = 0 \quad i \neq j \qquad (8.28)$$

Trong đó $\{a_i\}$và $\{a_j\}$ là 2 vectơ môđơ bất kỳ và [M] là ma trận khối lượng. Biên độ dao động trong một môđơ chuẩn được biểu thị bằng các giá trị tỷ đối, chúng được chuẩn hóa như sau:

$$\Phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\{a_i\}^T [M] \{a_j\}}} \qquad (8.29)$$

Đối với hệ có ma trận khối lượng chéo, hệ thức trên có thể viết:

$$\Phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} m_k a_{kj}^2}} \qquad (8.30)$$

Đối với các vectơ riêng được chuẩn hoá, điều kiện trực giao được biểu thị như sau:

$$\{\Phi\}_i^T [M]\{\Phi\}_j = 0 \quad i \neq j$$
$$= 1 \quad i = j \tag{8.31}$$

Ta có một điều kiện trực giao khác nếu viết (8.24) dưới dạng

$$[K]\{\Phi\}_j = \omega^2 [M]\{\Phi\}_j \tag{8.32}$$

Nhân bên trái biểu thức (8.32) với $\{\Phi\}_i^T$, ta có điều kiện trực giao giữa các vectơ riêng.

$$\{\Phi\}_i^T [K]\{\Phi\}_j = 0 \quad i \neq j$$
$$= \omega_i^2 \quad i = j \tag{8.33}$$

Ví dụ 8.2: Đối với các khung chịu cắt có hai bậc tự do trong ví dụ (8.1), xác định các dạng mô đơ chuẩn và kiểm tra điều kiện trực giao giữa các mô đơ.

Giải:

Thay (8.17) và (8.18) cùng với các giá trị của khối lượng trong ví dụ (8.1) vào hệ số chuẩn hoá trong (8.30), ta được:

$$\sqrt{(136)(1,00)^2 + (66)(1,263)^2} = \sqrt{241,31}$$
$$\sqrt{(136)(1,00)^2 + (66)(-1,629)^2} = \sqrt{311,08}$$

Do đó, các mô đơ chuẩn hoá bằng:

$$\Phi_{11} = \frac{1,00}{\sqrt{241,31}} = 0,06437, \qquad \Phi_{12} = \frac{1,00}{\sqrt{311,08}} = 0,0567$$
$$\Phi_{21} = \frac{1,263}{\sqrt{241,31}} = 0,0813, \qquad \Phi_{22} = \frac{-1,6287}{\sqrt{311,08}} = -0,0924$$

Các mô đơ chuẩn hoá có thể xếp đặt theo từng cột trong ma trận sau gọi là *ma trận mô đơ* của hệ. Đối với hệ có n bậc tự do, ma trận mô đơ có dạng.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \ldots\Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \ldots\Phi_{2n} \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \ldots\Phi_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.34}$$

Điều kiện trực giao có thể biểu thị dưới dạng tổng quát bằng hệ thức:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

Trong đó $[\Phi]^T$ là chuyển vị của ma trận $[\Phi]$ và $[M]$ là ma trận khối lượng của hệ. Ở đây, hệ có 2 bậc tự do, ma trận môđơ có dạng:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,06437 & 0,0567 \\ 0,0813 & -0,0924 \end{bmatrix} \tag{8.36}$$

Để kiểm tra điều kiện trực giao, ta thay các mô đơ chuẩn từ (8.36) vào (8.35):

$$\begin{bmatrix} 0,06437 & 0,0813 \\ 0,0567 & -0,0924 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 136 & 0 \\ 0 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,06437 & 0,0567 \\ 0,0813 & -0,0924 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong đó: ma trận ở vế phải là ma trận đơn vị. Vậy điều kiện trực giao đã được thực hiện.

Trong phần trên, ta đã xác định được tần số vòng tự nhiên và các môđơ chuẩn trong quá trình dao động của một hệ kết cấu. Đồng thời, ta đã giải bài toán vectơ riêng và giá trị riêng. Phương pháp trực tiếp dựa trên cơ sở khai triển định thức và giải phương trình đặc trưng chỉ hạn chế cho những hệ có ít bậc tự do. Đối với hệ có nhiều bậc tự do, ta không thể dùng phương pháp trực tiếp. Đã có nhiều phương pháp số dùng để giải bài toán vectơ riêng và giá trị riêng, trong đó phương pháp Jacobi đã tỏ ra có hiệu lực.

Chương 9
DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA NHÀ CHỊU CẮT

Trong chương trước, ta đã thấy rằng dao động tự do của một hệ có thể biểu thị qua các mô đơ dao động chuẩn. Trong chương này, ta sẽ chứng minh rằng dao động cưỡng bức của một hệ như vậy cũng có thể biểu thị qua các mô đơ dao động chuẩn, rằng các mô đơ chuẩn có thể dùng để biến đổi hệ các phương trình vi phân phụ thuộc thành hệ phương trình vi phân độc lập, trong đó mỗi phương trình chỉ chứa một biến.

Phương pháp này đưa bài toán tìm lời giải của hệ nhiều bậc tự do về bài toán xác định lời giải của hệ một bậc tự do.

§9.1. Phương pháp cộng tác dụng mô đơ

Ta đã thấy rằng dao động tự do của bất kỳ một hệ nhiều bậc tự do nào cũng có thể hiểu thị qua các mô đơ dao động chuẩn. Ta sẽ chứng minh rằng dao động cưỡng bức cũng có thể biểu thị qua các môđơ dao động chuẩn. Ta quay về phương trình (7.3) áp dụng cho trường hợp nhà chịu cắt hai bậc tự do:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 &= F_1(t) \\ m_2\ddot{y}_2 - k_2y_1 + k_2y_2 &= F_2(t) \end{aligned} \tag{9.1}$$

Ta tìm cách biến hệ phương trình phụ thuộc trên thành một hệ phương trình độc lập, trong đó mỗi phương trình chỉ chứa một hàm thời gian chưa biết. Trước hết, cần biểu thị lời giải qua các môđơ chuẩn, sau đó nhân chúng với một số hệ số nào đó. Trong trường hợp dao động tự do, các hệ số đó là hàm sin của thời gian. Trong trường hợp dao động cưỡng bức, các hệ số đó là một hàm thời gian nào đó mà ta gọi là z(t). Như vậy lời giải của (9.1) có dạng:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t) \\ y_2(t) &= a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t) \end{aligned} \tag{9.2}$$

Thay các hệ thức trên vào (9.1), ta được:

$$\begin{aligned} &m_1a_{11}\ddot{z}_1 + (k_1 + k_2)a_{11}z_1 - k_2a_{21}\ddot{z}_1 + m_1a_{12}\ddot{z}_2 + (k_1 + k_2)a_{12}z_2 - k_2a_{22}z_2 = F_1(t) \\ &m_2a_{21}\ddot{z}_1 - k_2a_{11}z_1 + k_2a_{21}z_1 + m_2a_{22}\ddot{z}_2 - k_2a_{12}z_2 + k_2a_{22}z_2 = F_2(t) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Để xác định các hệ số $z_1(t)$ và $z_2(t)$, cần sử dụng các hệ thức trực giao để tách rời các môđơ. Ta lợi dụng các hệ thức trực giao này bằng cách nhân phương trình thứ nhất trong

(9.3) với a_{11} và nhân phương trình thứ hai trong (9.3) với a_{21}. Căn cứ vào các phương trình (8.25), (8.27),sau khi thực hiện phép nhân và cộng hai phương trình trong (9.3), ta được:

$$\left(m_1a_{11}^2+m_2a_{21}^2\right)\ddot{z}_1+\omega_1^2\left(m_1a_{11}^2+m_2a_{21}^2\right)z_1=a_{11}F_1(t)+a_{21}F_2(t) \qquad (9.4a)$$

Một cách tương tự, sau khi thực hiện phép nhân phương trình thứ nhất trong (9.3) với a_{12} và nhân phương trình thứ hai với a_{22} rồi cộng hai phương trình lại, ta được:

$$\left(m_1a_{12}^2+m_2a_{22}^2\right)\ddot{z}_2+\omega_2^2\left(m_1a_{12}^2+m_2a_{22}^2\right)z_2=a_{12}F_1(t)+a_{22}F_2(t) \qquad (9.4b)$$

Về mặt toán học, ta đã thực hiện việc tách rời hệ phương trình vi phân gốc bằng cách thay đổi biến số. Như vậy, một trong các phương trình (9.4a) hoặc (9.4b) tương ứng với hệ một bậc tự do, trong đó các phương trình vi phân có thể viết:

$$\begin{aligned} M_1\ddot{z}_1+k_1z_1&=P_1(t)\\ M_2\ddot{z}_2+k_2z_2&=P_2(t)\end{aligned} \qquad (9.5)$$

Trong đó: $M_1=m_1a_{11}^2+m_2a_{21}^2$ và $M_2=m_1a_{12}^2+m_2a_{22}^2$, $k_1=\omega_1^2M_1$, $k_2=\omega_2^2M_2$. Ta gọi M_1, M_2 là các *khối lượng mô đơ*, k_1, k_2 là các hằng số lò xo mô đơ ; $P_1(t)=a_{11}F_1(t)+a_{21}F_2(t)$ và $P_2(t)=a_{12}F_1(t)+a_{22}F_2(t)$. Ta gọi: $P_1(t)$ và $P_2(t)$ là các *lực mô đơ.*

Nếu sử dụng (8.29) hoặc (8.30) các phương trình trên có thể viết:

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_1+\omega_1^2Z_1&=P_1(t)\\ \ddot{Z}_2+\omega_2^2Z_2&=P_2(t)\end{aligned} \qquad (9.6)$$

Trong đó: P_1 và P_2 có dạng như sau:

$$\begin{aligned} P_1&=\Phi_{11}F_1(t)+\Phi_{21}F_2(t)\\ P_2&=\Phi_{12}F_1(t)+\Phi_{22}F_2(t)\end{aligned} \qquad (9.7)$$

Ta có thể xác định lời giải của các phương trình vi phân độc lập (9.5) hoặc (9.6) theo các phương pháp đã được trình bày trong các chương trước. Đặc biệt, tích phân Duhamel cho ta lời giải tổng quát đối với phương trình đó, dù cho hàm mô tả lực tác dụng lên kết cấu như thế nào. Các giá trị cực đại ứng với mỗi phương trình mô đơ cũng có thể xác định bằng cách sử dụng các đồ thị có sẵn. Tuy nhiên, sự cộng tác dụng các cực đại môđơ là một vấn đề nan giải. Sự thực là các giá trị cực đại môđơ đó, nói chung không xuất hiện đồng thời. Để giải quyết khó khăn này, cần dùng phương pháp gần đúng. Phương pháp thứ nhất là tính các chuyển vị cực đại theo công thức sau:

$$\begin{aligned} y_{1max}&=\left|\Phi_{11}Z_{1max}\right|+\left|\Phi_{12}Z_{2max}\right|\\ y_{2max}&=\left|\Phi_{21}Z_{1max}\right|+\left|\Phi_{22}Z_{2max}\right|\end{aligned} \qquad (9.9)$$

Kết quả tính theo (9.8) cho những giá trị cực đại cao. Phương pháp thứ hai được chấp nhận rộng rãi hơn và cho những giá trị cực đại hợp lý. Theo phương pháp này, các chuyển vị cực đại được tính theo công thức sau:

$$y_{1max} = \sqrt{(\Phi_{11}Z_{1max})^2 + (\Phi_{12}Z_{2max})^2}$$
$$y_{2max} = \sqrt{(\Phi_{21}Z_{1max})^2 + (\Phi_{22}Z_{2max})^2} \quad (9.9)$$

Sự biến đổi từ hệ hai phương trình vi phân phụ thuộc lẫn nhau (9.1) sang hệ hai phương trình vi phân độc lập (9.6), có thể mở rộng cho hệ có N bậc tự do. Dưới dạng ma trận, phương trình chuyển động của hệ tuyến tính có N bậc tự do như sau:

$$[M]\{\ddot{y}\} = [K]\{y\} = \{F(t)\} \quad (9.10)$$

Trong đó: [M] và [K] lần lượt là ma trận khối lượng và ma trận độ cứng của hệ, {F(t)} là véc tơ ngoại lực, {y} là véc tơ chuyển vị chưa biết:

$$\{y\} = [\Phi]\{z\} \quad (9.11)$$

Trong đó: Φ là ma trận mô đơ của hệ.

Tiếp tục thay (9.11) vào (9.10), ta được:

$$[M][\Phi]\{\ddot{z}\} + [K][\Phi]\{z\} = \{F(t)\} \quad (9.12)$$

Nhân bên trái phương trình (9.12) với chuyển vị của véc tơ mô đơ thứ i $\{\Phi\}_i^T$, ta được:

$$\{\Phi\}_i^T[M][\Phi]\{\ddot{z}\} + \{\Phi\}_i^T[K][\Phi]\{z\} = \{\Phi\}_i^T\{F(t)\} \quad (9.13)$$

Do các điều kiện trực giao giữa các mô đơ chuẩn thể hiện trong các phương trình (8.31) và (8.33), ta có:

$$\{\Phi\}_i^T[M]\{\Phi\} = 1 \quad (9.14)$$

$$\{\Phi\}_i^T[M]\{\Phi\} = \omega_i^2 \quad (9.15)$$

Do đó, phương trình (9.13) có thể viết:

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 Z_i = P(t) \quad (i = 1,2,3...) \quad (9.16)$$

Trong đó, lực mô đơ $P_i(t)$ được xác định bằng công thức:

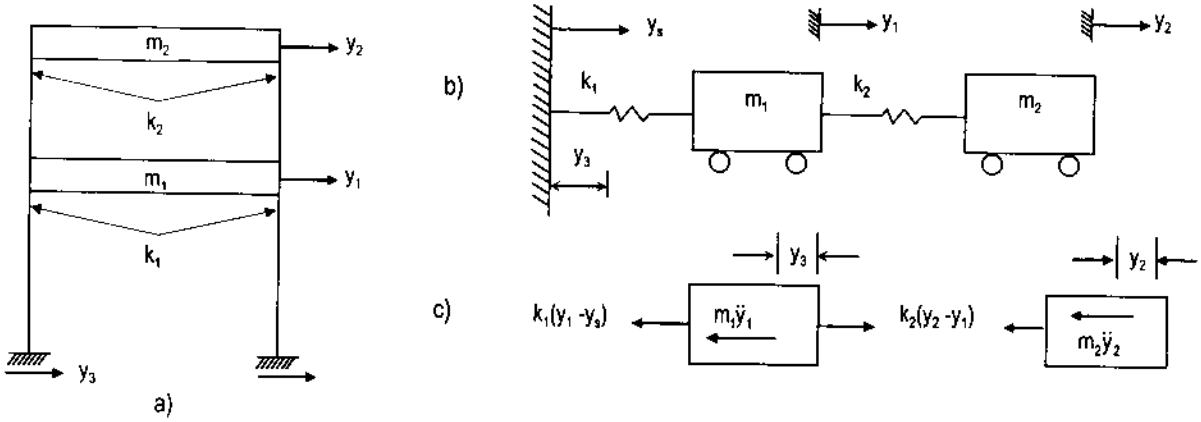
$$P_i(t) = \Phi_{1i}F_1(t) + \Phi_{2i}F_2(t) + ... + \Phi_{Ni}F_N(t) \quad (9.17)$$

Phương trình (9.16) tạo thành N phương trình chuyển động độc lập, chúng được biểu thị qua các toạ độ mô đơ Z_i. Các phương trình độc lập này được biểu thị qua các tần số vòng tự nhiên ω_i và véc tơ mô đơ $\{\Phi\}_i$, những đại lượng này để được xác định trong bài toán giá trị riêng ở chương 8.

§9.2. Nhà chịu tác dụng của tải trọng động ở nền móng

Khung hai tầng trên hình (9.1a), được mô hình hoá trên hình (9.1b) và đưa về sơ đồ vật tự do như trên hình (9.1c). Chuyển vị ở mức sàn thứ nhất là y_1, ở mức sàn thứ hai là y_2, ở nền móng là y_s. Lập phương trình cân bằng trên sơ đồ vật tự do, ta được:

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_s) - k_2(y_2 - y_1) = 0$$
$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = 0 \qquad (9.18)$$



Hình 9.1

Biểu thị chuyển vị của sàn qua chuyển vị tương đối giữa sàn và nền móng, ta có:

$$u_1 = Y_1 - Y_s$$
$$u_2 = Y_2 - Y_s \qquad (9.19)$$

Sau khi lấy đạo hàm, ta được:

$$\ddot{y}_1 = \ddot{u}_1 + \ddot{y}_s$$
$$\ddot{y}_2 = \ddot{u}_2 + \ddot{y}_s \qquad (9.20)$$

Thay (9.19) vào (9.20), ta được:

$$m_1\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = -m_1\ddot{y}_s(t)$$
$$m_2\ddot{u}_2 - k_2u_1 + k_2u_2 = -m_2y_s(t) \qquad (9.21)$$

Ta chú ý rằng vế phải của hệ phương trình (9.21) tỷ lệ với hàm số của thời gian $\ddot{y}_s(t)$. Điều này đơn giản hơn so với phương trình (9.6), trong đó vế phải là những hàm thời gian khác nhau. Trong trường hợp nhà chịu cắt chịu tác dụng của tải trọng động ở nền móng, phương trình (9.4) có thể viết:

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 Z_1 = -\frac{m_1a_{11} + m_2a_{21}}{m_1a_{11}^2 + m_2a_{21}^2}$$
$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2 Z_2 = -\frac{m_1a_{12} + m_2a_{22}}{m_1a_{12}^2 + m_2a_{22}^2} \qquad (9.22)$$

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 Z_1 = \Gamma_1\ddot{y}_s(t)$$
$$\ddot{z}_2 + \omega_2^2 Z_2 = \Gamma_2\ddot{y}_s(t) \qquad (9.23)$$

Trong đó: Γ_1 và Γ_2 là các hệ số tham gia, chúng có dạng:

$$\Gamma_1 = -\frac{m_1 a_{11} + m_2 a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2}$$
$$\Gamma_2 = -\frac{m_1 a_{12} + m_2 a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2} \quad (9.24)$$

Từ (9.2) mối liên hệ giữa các chuyển vị mô đơ Z_1 , Z_2 và các chuyển vị tương đối u_1 và u_2 như sau:

$$u_1 = a_{11} Z_1 + a_{12} Z_2$$
$$u_2 = a_{21} Z_1 + a_{22} Z_2 \quad (9.25)$$

Ta đưa vào sự biến đổi biến số trong phương trình (9.23) sao cho các vế thứ 2 trong các phương trình đó bằng $\ddot{y}_s(t)$. Muốn vậy, ta đặt:

$$Z_1 = \Gamma_1 g_1$$
$$Z_2 = \Gamma_2 g_2 \quad (9.26)$$

Thay các hệ thức trên vào (9.23), ta có:

$$\ddot{g}_1 + \omega_1^2 g_1 = \ddot{y}_s(t)$$
$$\ddot{g}_2 + \omega_2^2 g_2 = \ddot{y}_s(t) \quad (9.27)$$

Cuối cùng, giải $g_1(t)$ và $g_2(t)$ từ các phương trình độc lập (9.27) và thay chúng vào (9.25) và (9.26), ta được:

$$u_1(t) = \Gamma_1 a_{11} g_1(t) + \Gamma_2 a_{12} g_2(t)$$
$$u_2(t) = \Gamma_1 a_{21} g_1(t) + \Gamma_2 a_{22} g_2(t) \quad (9.28)$$

Khi đã xác định được các mô đơ cực đại g_{1max}, g_{2max} từ đồ thị đường cong, ta tính giá trị cực đại u_{1max} và u_{2max} từ phương trình (9.9):

$$u_{1max} = \sqrt{(\Gamma_1 a_{11} g_{1max})^2 + (\Gamma_1 a_{12} g_{2max})^2}$$
$$u_{2max} = \sqrt{(\Gamma_1 a_{21} g_{1max})^2 + (\Gamma_2 a_{22} g_{2max})^2} \quad (9.29)$$

Đối với nhà chịu cắt N tầng chịu tác dụng của tải trọng động ở nền móng, ta lập phương trình cân bằng trên sơ đồ vật tự do trên hình (9.3b) như sau:

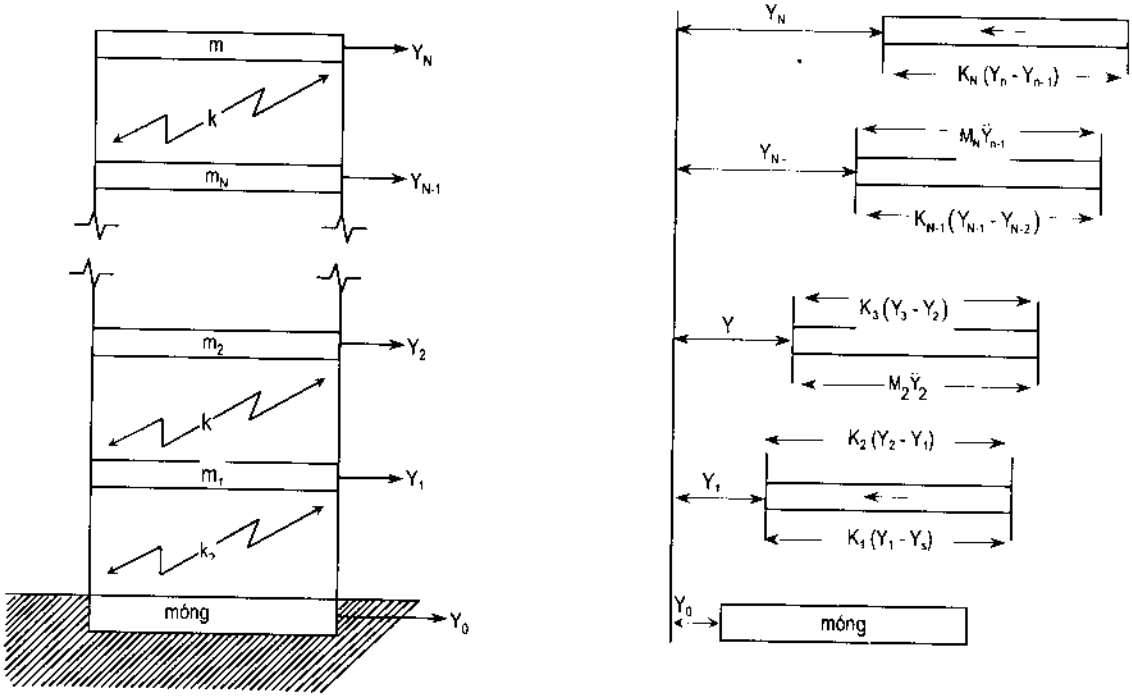
$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 (y_1 - y_s) - k_2 (y_2 - y_1) = 0$$
$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) = 0$$
$$m_{N-1} \ddot{y}_{N-1} + k_{N-1} (y_{N-1} - y_{N-2}) - k_N (y_N - y_{N-1}) = 0$$
$$m_N \ddot{y}_N + k_N (y_N - y_{N-1}) = 0 \quad (9.30)$$

Đưa hệ thức sau vào (9.30)

$$u_i = y_i - y_s \ (i = 1, 2, ..., N) \quad (9.31)$$

Ta được:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 - k_2(u_2 - u_1) = -m_1\ddot{y}_s \\
&m_2\ddot{u}_2 + k_2u_2 - k_3(u_3 - u_2) = -m_2\ddot{y}_s \\
&m_{N-1}\ddot{u}_{N-1} + k_{N-1}(u_{N-1} - u_{N-2}) - k_N(u_N - u_{N-1}) = -m_{N-1}\ddot{y}_s \\
&m_N\ddot{u}_N + k_N(u_N - u_{N-1}) = -m_N\ddot{y}_s
\end{aligned}
\tag{9.32}
$$



Hình 9.2

Trong đó, $\ddot{y}_s = \ddot{y}_s(t)$ là hàm gia tốc kích thích ở nền móng.

Phương trình (9.32) có thể viết dưới dạng ma trận.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{I\}\ddot{y}_s(t) \tag{9.33}$$

Trong đó: [M] là ma trận khối lượng (ma trận chéo) ; [K] là ma trận độ cứng đối xứng, {I} là véc tơ cột với toàn bộ các phần tử bằng đơn vị, $\ddot{y}_s = \ddot{y}_s(t)$ là gia tốc áp dặt tại nền móng của nhà, {u} và $\{\ddot{u}\}$ lần lượt là véc tơ chuyển vị và véc tơ gia tốc tương đối giữa sàn và nền móng.

Như đã chứng minh trong phần trước, hệ phương trình (9.33) có thể trở thành hệ độc lập qua sự biến đổi thể hiện trong phương trình (9.11).

$$\{u\} = [\Phi]\{Z\} \tag{9.34}$$

Trong đó: [Φ] là ma trận mô đơ được xác định từ lời giải của bài toán giá trị riêng $\left[[K] - \omega^2[M]\right]\{\Phi\} = \{0\}$. Sau khi thay (9.34) vào (9.33) sau đó nhân bên trái hai vế của phương trình với chuyển vị của véc tơ riêng thứ i $\{\Phi\}_i^T$, ta được:

$$\{\Phi\}_i^T [M][\Phi]_i \{\ddot{z}\} + \{\Phi\}_i^T [K][\Phi]_i \{z\} = -\{\Phi\}_i^T [M]\{I\} \ddot{y}_s(t) \qquad (9.35)$$

Lợi dụng tính trực giao của các véc tơ riêng chuẩn, các phương trình (9.14), (9.15) trở thành các phương trình mô đơ:

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 Z_i = \Gamma_i \ddot{y}_s(t) \qquad (i = 1, 2, ..., N) \qquad (9.36)$$

Trong đó hệ số tham gia Γ có dạng:

$$\Gamma_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \Phi_{ji}}{\sum_{j=1}^{N} m_j \Phi_{ji}^2} \qquad (9.37)$$

Vì các mô đơ được chuẩn hoá, mẫu thức trong (9.37) bằng 1 nên:

$$\Gamma_i = -\sum_{j=1}^{N} m_j \Phi_{ji} \quad (i = 1, 2, 3, ..., N) \qquad (9.38)$$

Giá trị cực đại của chuyển vị và gia tốc tính theo các công thức sau:

$$u_{i\,max} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left(\Gamma_i \Phi_{ji} S_{Dj}\right)^2} \qquad (9.39)$$

$$\ddot{u}_{i\,max} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left(\Gamma_i \Phi_{ji} S_{Aj}\right)^2} \qquad (9.40)$$

Trong đó:

S_{Dj} và S_{Aj} lần lượt là chuyển vị và gia tốc ứng với mô đơ thứ j. Các hệ số tham gia Γ_i trong phương trình (9.37) và (9.38) là các hệ số của hàm kích thích $\ddot{y}_s(t)$ trong phương trình (9.36).

Ví dụ 9.1: Một khung chịu cắt 2 tầng chịu tác dụng của gia tốc không đổi ở nền móng. Cho biết các đặc trưng sau đây ở trạng thái dao động tự do.

Gia tốc gt = 2,7m/sec^2

Tần số vòng: ω_1 = 11,83rad/sec $\qquad$ ω_2 = 32,89 rad/sec

Véc tơ riêng:

a_{11} = 1,000 $\qquad$ a_{12} = 1,000

a_{21} = 1,263 $\qquad$ a_{22} = -1,629

Khối lượng:

m_1 = 24 kNsec^2/m $\qquad$ m_2 = 12kNsec^2/m

Giả sử chia thành 10 quãng thời gian với số gia thời gian Δt = 0,01 giây. Yêu cầu xác định các chuyển vị tương đối giữa sàn và móng tại các thời điểm quy định trên.

Giải:

Ma trận khối lượng dạng: $m = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$

$$a = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 \\ 1,263 & -1,629 \end{bmatrix}$$

$$f_{(j)} = \sqrt{\{a_j\}^T [m] \{a_j\}}$$

$[a_j]$ là véc tơ riêng ở cột thứ j của ma trận a. Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$f_{(1)} = 6,568$$
$$f_{(2)} = 7,473$$

Theo (8.29), chuẩn hoá các phần tử của ma trận a. Các phần tử của ma trận mô đơ tính như sau:

$$\Phi_{(1,1)} = \frac{a_{(1,1)}}{F_{(1)}} = \frac{1}{6,568} = 0,152$$

$$\Phi_{(2,1)} = \frac{a_{(2,1)}}{6,568} = \frac{1,263}{6,568} = 0,192$$

$$\Phi_{(1,2)} = \frac{a_{(1,2)}}{7,473} = \frac{1}{7,473} = 0,134$$

$$\Phi_{(2,2)} = \frac{a_{(2,2)}}{7,473} = \frac{-1,629}{7,473} = -0,218$$

Vậy ma trận mơ đơ có dạng:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,152 & 0,134 \\ 0,192 & -0,218 \end{bmatrix}$$

Từ (9.27), ta tính được:

$$g_1(t) = \frac{gt}{\omega_1^2}\left(1 - \cos\omega_1 t\right) = 0,0193\left(1 - \cos(11,83t)\right)$$

$$g_2(t) = \frac{gt}{\omega_2^2}\left(1 - \cos\omega_2 t\right) = 0,0025\left(1 - \cos(32,89t)\right)$$

Từ (9.38), tính được:

$$\Gamma_1 = -\sum_{i=1}^{2} m_i \Phi_{i1} = -24 \times 0,152 - 12 \times 0,192 = 5,952$$

$$\Gamma_2 = -\sum m_i \Phi_{i2} = -24 \times 0,134 - 12 \times (-0,218) = -0,600$$

Từ (9.25) và (9.26), tính chuyển vị tương đối:

$$u_1(t) = \sum_{j=1}^{2} \Gamma_i \Phi_{1j} \cdot g_j(t)$$

$$u_2(t) = \sum_{j=1}^{2} \Gamma_{2j} \cdot g_j(t)$$

Do đó:

$$u_1(t) = -5,592 \times 0,152 \times 0,0193\left(1 - \cos(11,83t)\right) - 0,60 \times 0,0025\left(1 - \cos(32,89t)\right)$$

$$u_2(t) = -5,592 \times 0,192 \times 0,0193\left(1 - \cos(11,83t)\right) - 0,60 \times \left(-0,218\right) \times 0,0025\left(1 - \cos(32,89t)\right)$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta được:

$$u_i(t) = -0,0142\left(1 - \cos(31,89t)\right)$$
$$u_2(t) = -0,022\left(1 - \cos(11,83t)\right) + 0,00033\left(1 - \cos(32,89t)\right)$$

Chuyển vị tương đối ứng với các thời điểm quy định ở trên thống kê trong bảng (9.1):

Bảng 9.1

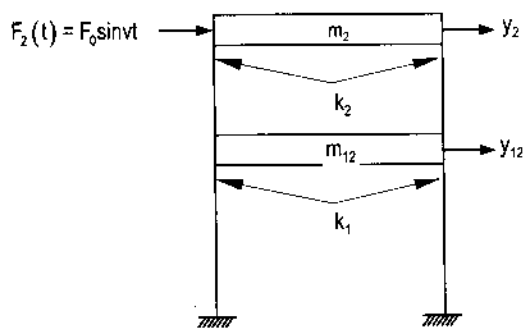
Thời gian t (giây)	Chuyển vị u_1(m)	Chuyển vị u_2(m)
0,01	0	0
0,02	$-1,06 \times 10^{-5}$	$1,73 \times 10^{-5}$
0,03	$-4,15 \times 10^{-5}$	$6,76 \times 10^{-5}$
0,04	$-8,93 \times 10^{-5}$	0,0001
0,05	-0,0001	0,0002
0,06	-0,0002	0,0003
0,07	-0,0003	0,0004
0,08	-0,00033	0,0005
0,09	-0,0004	0,0006
0,10	-0,00042	0,00064
0,11		

§9.3. Nhà chịu cắt chịu tác dụng của tải trọng điều hoà

Khi nhà chịu cắt chịu tác dụng của tải trọng điều hoà (tức hàm sin hoặc cosin) việc phân tích sẽ đơn giản hơn nhiều.

Ta hãy xét nhà chịu cắt 2 tầng chịu tác dụng của lực điều hoà $F(t) = F_o \sin \bar{\omega} t$ đặt tại mức sàn thứ hai.

Trong trường hợp này, phương trình (9.1) với $F_1(t) = 0$ và $F_2(t) = F_0 \sin \bar{\omega} t$ trở thành:



Hình 9.4

$$m_1\ddot{y}_1(k_1+k_2)y_1-k_2y_2=0$$
$$m_2\ddot{y}_2-k_2y_2-k_2y_1+k_2\ddot{y}_2=F_0\sin\bar{\omega}t \qquad (9.41)$$

Lời giải ở trạng thái ổn định của hệ phương trình trên có dạng:

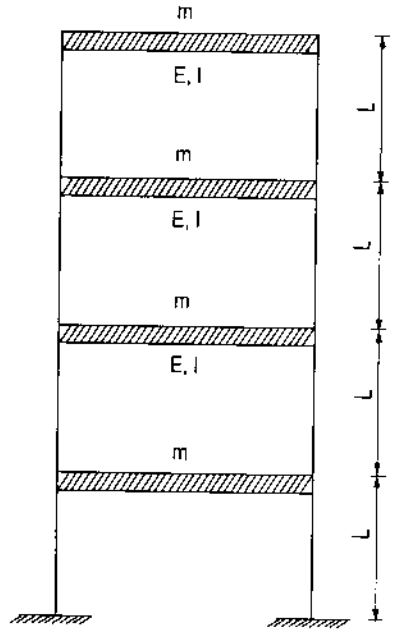
$$y_1=Y_1\sin\bar{\omega}t$$
$$y_2=Y_2\sin\bar{\omega}t \qquad (9.42)$$

Sau khi thay (9.42) vào (9.41) và đơn giản hoá, ta được:

$$\left(k_1+k_2-m_1\bar{\omega}^2\right)Y_1-k_2Y_2=0$$
$$-k_2Y_1\left(k_2-m_2\bar{\omega}^2\right)Y_2=F_0 \qquad (9.43)$$

Hệ phương trình trên có hai ẩn Y_1,Y_2. Hệ này bao giờ cũng có lời giải duy nhất, trừ khi định thức của các hệ số của các ẩn số triệt tiêu tức là tần số của lực kích thích $\bar{\omega}$ bằng một trong các tần số vòng tự nhiên (tức là xảy ra hiện tượng cộng hưởng).

Ví dụ 9.2: Một khung chịu cắt 4 tầng cùng với các đặc trưng hình học và cơ học biểu thị như trên hình (9.4). Khung chịu tác dụng của các tải trọng điều hoà như trên hình vẽ.



Hình 9.4

Đối với toàn bộ các tầng

Mô đun đàn hồi $E = 13,8 \times 10^6$ kN/m^2

Tổng mô men quán tính $I = 33 \times 10^{-6}$ m^4

Khối lượng m = 0,175 kN sec^2/m

Chiều cao L = 4,5m

Tải trọng điều hòa

F_2 = 3sin30t (tầng 2)

F_4 = 1sin30t (tầng 4)

Yêu cầu xác định các biên độ dao động và phương trình chuyển động của khung.

Giải:

Hệ số độ cứng:

Tầng 1: $k_1=\dfrac{12\times13,8\times10^6\times33\times10^{-6}}{(4,5)^2}=59,97\text{kN/m}$

Tầng 2: k_2= 59,97 kN/m

Tầng 3: k_3= 59,97 kN/m

Tầng 4: k_4= 59,97 kN/m

Lập ma trận độ cứng của toàn bộ khung theo (7.4):

$$S = \begin{bmatrix} 119,94 & -59,97 & 0 & 0 \\ & 119,94 & -59,97 & 0 \\ & & 119,94 & -59,97 \\ \text{đối xứng} & & & 59,97 \end{bmatrix}$$

Lập ma trận khối lượng của toàn bộ khung theo (7.5):

$$m = \begin{bmatrix} 0,175 & & \mathbf{0} & \\ & 0,175 & & \\ \mathbf{0} & & 0,175 & \\ & & & 0,175 \end{bmatrix}$$

Theo (9.43), lập ma trận a để giải hệ phương trình tuyến tính:

$$a = \begin{bmatrix} -37,56 & -59,97 & 0 & 0 \\ & -37,56 & -59,97 & 0 \\ & & -37,56 & -59,97 \\ \text{đối xứng} & & & -97,53 \end{bmatrix}$$

Nếu biên độ dao động ở các tầng là Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, căn cứ vào các tải trọng điều hoà, theo (9.43), ta có hệ phương trình tuyến tính:

$$[a].\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$Y_1 = -0,017m$$
$$Y_2 = 0,011m$$
$$Y_3 = -0,04m$$
$$Y_4 = 0,014m$$

Vậy phương trình chuyển động của khung như sau:

$$y_1 = -0,017\sin 30t$$
$$y_2 = 0,011\sin 30t$$
$$y_3 = -0,040\sin 30t$$
$$y_4 = 0,014\sin 30t$$

Chương 10
DAO ĐỘNG CỦA DẦM

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu dao động của dầm là loại kết cấu chủ yếu chịu tác dụng của tải trọng vuông góc với trục dầm. Những tải trọng này sản sinh ứng suất uốn và chuyển vị ngang. Ta bắt đầu nghiên cứu các tính chất tĩnh học của một đoạn dầm, sau đó giới thiệu các tác động động học do lực quán tính gây ra. Hai phương pháp gần đúng sẽ được trình bày:

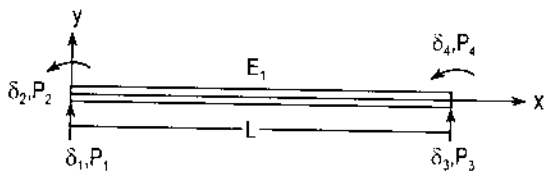
1. Phương pháp khối lượng tập trung,trong đó khối lượng phân bố được giả thiết tập trung tại từng điểm;

2. Phương pháp khối lượng có xét đến ảnh hưởng quán tính của sự xoay.

Phương pháp thứ hai phù hợp với các chuyển vị đàn hồi tĩnh học của dầm

§10.1 Các tính chất tĩnh học của một đoạn dầm

Ta hãy xét một đoạn dầm có mặt cắt không đổi như trên hình (10.1).



Hình 10.1

Dầm có mô men quán tính của tiết diện là I, có chiều dài là L và có mô men đàn hồi của vật liệu là E. Ta sẽ thiết lập mối quan hệ giữa các lực tĩnh học, mô men tĩnh học P_1, P_2, P_3, P_4 và các chuyển vị thẳng, chuyển vị xoay tương ứng δ_1, δ_2, δ_3, δ_4. Tất cả các đại lượng này biểu thị ở các đầu dầm như trên hình (10.1). Mối quan hệ trên sẽ được trình bày dưới dạng ma trận, ta gọi nó là ma trận độ cứng của một đoạn dầm. Các lực P_i và chuyển vị δ_i tương ứng đặt tại các tọa độ nút.

Theo các công thức sức bền vật liệu, khi chuyển vị ngang của dầm khá bé, ta có phương trình vi phân như sau:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{10.1}$$

Trong đó: M(x) - mô men uốn tại tiết diện dầm và y là chuyển vị ngang.

Phương trình vi phân (10.1) đối với một đoạn dầm có tiết diện không đổi, tương đương với các hệ thức sau:

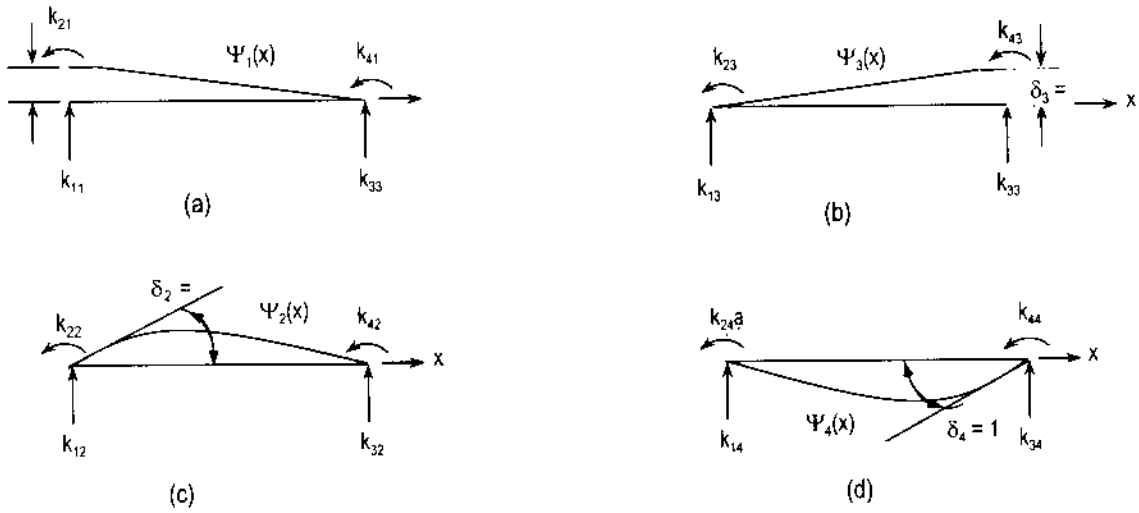
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = p(x) \tag{10.2}$$

Vì $$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \qquad (10.3)$$

Nên $$\frac{dV(x)}{dx} = p(x)$$

Trong đó: p(x) - là tải trọng phân bố trên đơn vị dài của dầm và V(x) là lực cắt.

Bây giờ ta hãy định nghĩa thế nào là hệ số độ cứng k_{ij}. Nó là lực tại tọa độ nút i do chuyển vị bằng đơn vị tại tọa độ nút j gây ra trong khi chuyển vị tại toàn bộ các toạ độ nút khác bằng không.



Hình 10.2

Hình (10.2) biểu thị các đường cong chuyển vị tương ứng với các chuyển vị bằng đơn vị tại một trong 4 tọa độ nút, đồng thời cũng biểu thị các hệ số độ cứng k_{ij}. Để xác định biểu thức của các hệ số độ cứng, ta sẽ tìm phương trình của các đường cong chuyển vị trên hình (10.2).

Trước hết, ta xét đoạn dầm không có tải trọng trên hình (10.1). Vì p(x) = 0 nên phương trình (10.2) có dạng:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \qquad (10.4)$$

Lần lượt tính tích phân phương trình (10.4), ta được:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1x + C_2 \qquad (10.5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$y = \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 \qquad (10.6)$$

Trong đó: C_1, C_2, C_3, C_4 - các hằng số tích phân, chúng được xác định từ các điều kiện biên. Chẳng hạn, để xác định hàm Ψ_1 (x) đối với đường cong trên hình (10.2a), ta dùng các điều kiện biên sau:

Tại $x = 0$; $y(0) = 1$ và $\frac{dy(0)}{dx} = 0$ (10.7)

Tại $x = L$; $y(L) = 0$ và $\frac{dy(L)}{dx} = 0$ (10.8)

Đưa các điều kiện biên trên vào các phương trình (10.5) và (10.6), ta được hệ 4 phương trình đại số để xác định các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4.

Thay các hằng số trên vào phương trình (10.6), ta được phương trình của đường cong chuyển vị trên hình (10.2a) như sau:

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad (10.9a)$$

Ở trên ta đã dùng $\Psi_1(x)$ để thay cho y(x) ứng với điều kiện chuyển vị được áp đặt $\delta_1 = 1$. Một cách tương tự, ta có phương trình của các đường cong chuyển vị khác như sau:

$$\Psi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \qquad (10.9b)$$

$$\psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad (10.9c)$$

$$\Psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \qquad (10.9d)$$

Vì $\Psi_1(x)$ là độ võng ứng với chuyển vị bằng đơn vị δ_1, độ võng do chuyển vị bất kỳ δ_1 là $\Psi_1(x)\,\delta_1$. Một cách tương tự, độ võng do các chuyển vị bất kỳ δ_2, δ_3, δ_4 lần lượt $\Psi_2(x)\,\delta_2$; $\Psi_3(x)\,\delta_3$; $\Psi_4(x)\,\delta_4$. Vậy tổng độ võng y(x) tại tọa độ x do các chuyển vị bất kỳ tại các tọa độ nút của dầm là:

$$y(x) = \Psi_1(x)\delta_1 + \Psi_2(x)\delta_2 + \Psi_3(x)\delta_3 + \Psi_4(x)\delta_4 \qquad (10.10)$$

Các phương trình độ võng trong (10.9) ứng với các chuyển vị bằng đơn vị tại tọa độ nút, có thể dùng để xác định các biểu thức hệ số độ cứng. Chẳng hạn xét dầm trên hình (9.2b) ở thế cân bằng cùng với các lực sản sinh ra chuyển vị $\delta_2 = 1{,}0$. Đối với đoạn dầm nói trên, ta giả thiết một chuyển vị ảo ứng với đường cong độ võng trên hình (9.2a). Ta áp dụng nguyên lý công ảo như sau: đối với hệ đàn hồi ở thế cân bằng, công ảo của các ngoại lực bằng công ảo của các nội lực. Để áp dụng nguyên lý này, ta chú ý rằng công của ngoại lực W_{ng} bằng tích của lực k_{12} nhân với chuyển vị $\delta_1 = 1$, tức là:

$$W_{ng} = k_{12}\delta_1 \tag{10.11}$$

Công của nội lực là:

$$W_n = \int_0^L M(x)d\theta \tag{10.12}$$

Trong đó: M(x) là mô men uốn tại tiết diện x và dθ là chuyển vị xoay tương đối của tiết diện đó.

Đối với chuyển vị ảo đang xét, độ võng của dầm thể hiện bởi phương trình (10.9b) liên quan đến mô men uốn trong phương trình (10.1). Thay đạo hàm thứ hai $\Psi_2''(x)$ của phương trình (10.9b) vào (9.1), ta có:

$$EI\Psi_2''(x) = M(x) \tag{10.13}$$

Góc xoay dθ sản sinh trong quá trình chuyển vị ảo liên quan đến độ võng của dầm $\Psi_1(x)$, do đó:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2} = \Psi_1''(x)$$

Vậy $d\theta = \Psi''(x)\,dx$ (10.14)

Sau khi thay M(x) và dθ từ phương trình (10.13), (10.14) vào (10.12) sau đó cân bằng ngoại lực với nội lực, ta được kết quả:

$$k_{12} = \int_0^L EI\Psi_1''(x)\Psi_2''(x) \tag{10.15}$$

Một cách tổng quát, hệ số độ cứng bất kỳ có thể biểu thị bằng công thức:

$$k_{ij} = \int_0^L EI\Psi_j''(x)\Psi_j''dx \tag{10.16}$$

Từ công thức trên, có thể thấy rằng $k_{ij} = k_{ji}$ vì chẳng qua là sự thay đổi chỗ giữa $\Psi_i''(x)$ và $\Psi_j''(x)$. Đẳng thức $k_{ij} = k_{ji}$ là trường hợp đặc biệt của định lý Betti, ta gọi nó là *định lý nghịch Maxwell*.

Cần nhấn mạnh rằng tuy các hàm chuyển vị trong các phương trình (10.9) đã được áp dụng cho dầm có mặt cắt không đổi, nhưng chúng cũng có thể dùng để xác định các hệ số độ cứng cho dầm có mặt cắt thay đổi.

Bây giờ xét dầm có mặt cắt không đổi với chiều dài L và mô men quán tính tiết diện bằng I. Từ các phương trình (10.16) và (10.9), ta có thể tính bất kỳ một hệ số độ cứng nào. Chẳng hạn, đối với hệ số độ cứng k_{12}, ta tính như sau. Từ phương trình (10.9a), ta được:

$$\Psi_1''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

Từ (10.9b) $\Psi_2''(x) = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}$

Thay các biểu thức trên vào (10.15), ta được:

$$k_{12} = EI\int_0^L \left(\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)\left(\frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right)dx$$

Sau khi tính tích phân, ta được:

$$k_{12} = \frac{6EI}{L^2}$$

Vì hệ số cứng k_{ij} là lực tại tọa độ nút 1 do chuyển vị bằng đơn vị tại tọa độ nút j gây ra, các lực tại tọa độ 1 do các chuyển vị δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 tại 4 tọa độ nút gây ra lần lượt bằng $k_{11}\delta_1$, $k_{12}\delta_2$, $k_{13}\delta_3$, $k_{14}\delta_4$. Do đó, tổng lực P_1 tại tọa độ nút 1 do các chuyển vị tại các nút trên gây ra bằng:

$$P_1 = k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4$$

Một cách tương tự, tổng lực tại các tọa độ nút khác bằng:

$$\begin{aligned} P_2 &= k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4 \\ P_3 &= k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4 \\ P_4 &= k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_4 \end{aligned} \tag{10.17}$$

Dưới dạng ma trận, các phương trình trên có thể viết:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \tag{10.18}$$

Hệ thức ma trận trên có thể viết dưới dạng

$$\{p\} = [k]\{\delta\} \tag{10.19}$$

Trong đó:

$\{p\}$ và $\{\delta\}$ lần lượt là vec tơ lực và véc tơ chuyển vị tại các tọa độ nút của dầm và [k] là ma trận độ cứng của dầm.

Từ phương trình (10.16), ta có thể xác định được toàn bộ các hệ số độ cứng cho một đoạn dầm có mặt cắt không đổi như sau:

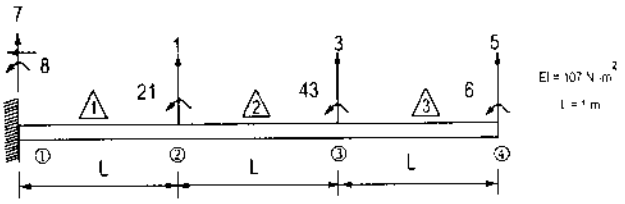
$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \tag{10.20}$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{p\} = [k]\{\delta\} \tag{10.21}$$

§10.2 Ma trận độ cứng tổng thể

Trong phần trên, ta đã thành lập ma trận độ cứng [k] cho một đoạn dầm, ta gọi là ma *trận độ cứng cục bộ*. Thực ra, dầm gồm nhiều đoạn nên ta cần phải xác định ma trận độ cứng toàn hệ, ta gọi là *ma trận độ cứng tổng thể*.



Hình 10.3

Để làm được việc này, ta thực hiện các bước sau:

1. Chia toàn bộ dầm thành nhiều đoạn và đánh số các đoạn chia.

Chẳng hạn dầm trên hình (10.3) được chia thành 3 đoạn,được đánh số là 1, 2, 3.

2. Đánh số các tọa độ nút. Tại mỗi nút, có hai bậc tự do là chuyển vị thẳng và góc xoay. Trước hết, đánh số các bậc tự do có chuyển vị thẳng, các bậc tự do ứng với chuyển vị xoay đánh số sau. Chẳng hạn trên hình (10.3), có 6 bậc tự do có chuyển vị, ta đánh số là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2 bậc tự do không có chuyển vị đánh số là 7, 8.

3. Ghép các ma trận độ cứng cục bộ thành ma trận độ cứng tổng thể. Một hệ số độ cứng bất kỳ k_{ij} của toàn hệ có thể xác định bằng cách cộng lại các hệ số độ cứng cùng có các chỉ số như nhau. Chẳng hạn, đối với hệ số độ cứng k_{33}, ta cộng lại các hệ số này ở đoạn dầm 2 và 3 ứng với nút thứ 3. Vậy $k_{33} = k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)}$. Chỉ số trên biểu thị số thứ tự của đoạn chia, các chỉ số dưới biểu thị các chỉ số của hệ số độ cứng trong ma trận độ cứng tổng thể.

Đối với dầm trên hình (10.3), căn cứ vào phương trình (10.20), ta có ma trận độ cứng của đoạn 2 như sau:

$$\left[k^{(2)}\right] = 10^7 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \tag{10.22}$$

Đối với đoạn dầm này số thứ tự bậc tự do ghi ở trên và bên phải ma trận là 1, 2, 3, 4. Đối với đoạn dầm thứ nhất, số thứ tự bậc tự do là 7, 8 , 1, 2 ; đối với đoạn dầm thứ 3 là 3, 4, 5, 6 (hình 10.3). Các ma trận độ cứng của các đoạn dầm 1 và 3 với số thứ tự các bậc tự do tương ứng (ghi ở trên và bên phải) như sau:

$$\left[k^{(1)}\right]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & -6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{array} \tag{10.23}$$

$$\left[k^{(3)}\right]=10^7\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \tag{10.24}$$

Để ghép các ma trận độ cứng cục bộ (10.22), (10.23), (10.24), ta cộng với nhau các hệ số độ cứng cùng có chỉ số như nhau trong ma trận độ cứng tổng thể. Chẳng hạn hệ số độ cứng;

$k_{43}=k_{43}^{(2)}+k_{43}^{(3)}=-6\times10^7+6\times10^7=0$; $k_{33}=k_{33}^{(2)}+k_{33}^{(3)}=12\times10^7+12\times10^7=24\times10^7$.

Các số thứ tự bậc tự do không có chuyển vị đánh số 7, 8 không cần xét đến vì chúng liên quan đến những chuyển vị không cần phải tìm. Bằng cách làm trên, ta có ma trận độ cứng tổng thể như sau:

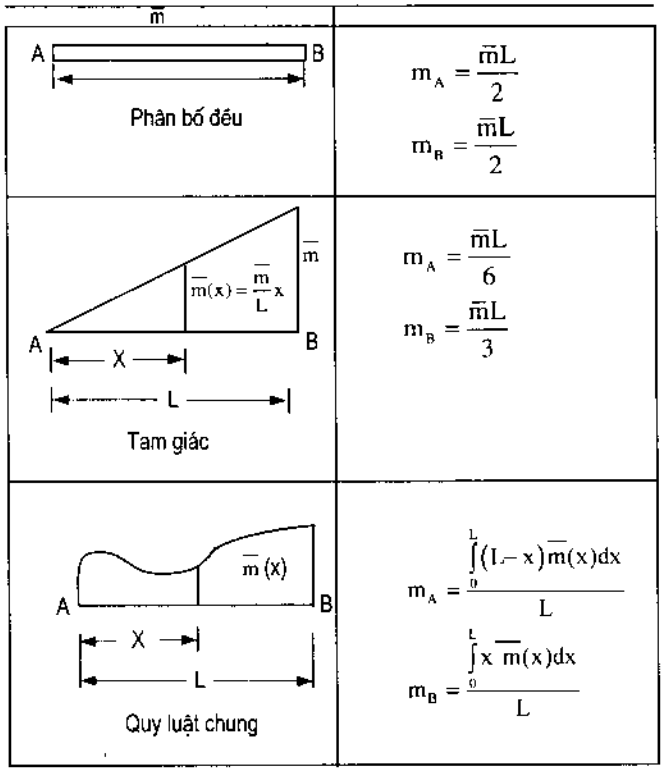
$$[k]=10^7\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \tag{10.25}$$

Ma trận (10.25) bậc 6 x 6 là ma trận biểu thị mối quan hệ giữa các thành phần lực và các thành phần chuyển vị tại các tọa độ nút trên dầm côngxon ở hình (10.3).

§10.3 Các đặc trưng quán tính - Khối lượng tập trung

Khi xét đến các đặc trưng quán tính của một hệ động lực học, phương pháp đơn giản nhất là giả thiết khối lượng tập trung tại các tọa độ nút, tại đó có các chuyển vị thẳng. Phương pháp này gọi là phương pháp khối lượng tập trung tại từng điểm. Sự phân bố khối lượng được xác định theo phương pháp tĩnh học.

Hình (10.4) biểu thị các công thức khối lượng tập trung ở hai đầu dầm trong trường hợp dầm có chiều dài L, khối lượng phân bố trên đơn vị dài theo các quy luật phân bố đều, phân bố theo hình tam giác và phân bố theo quy luật bất kỳ.



Hình 10.4

Ma trận khối lượng đối với toàn bộ kết cấu được xác định bằng cách đưa các khối lượng tập trung vào các tọa độ nút tại đó có chuyển vị thẳng.

Trong phương pháp này, ta không xét đến ảnh hưởng quán tính của các chuyển vị xoay. Nếu xét đến ảnh hưởng quán tính của góc xoay, chẳng hạn đối với dầm có mặt cắt không đổi, ta tính mô men quán tính của khối lượng trên nửa dầm tại mỗi nút như sau:

$$I_A = I_B = \frac{1}{3}\left(\frac{\bar{m}L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Trong đó, $\bar{m}$ là khối lượng trên đơn vị dài của dầm. Đối với dầm côngxon trên hình (10.3), khi chỉ xét đến ảnh hưởng quán tính của các chuyển vị thẳng, ma trận khối lượng của toàn hệ là một ma trận chéo, nó có dạng như sau:

$$[M] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & 0 & & & \mathbf{0} & \\ & & m_3 & & & \\ & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & m_5 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad (10.26)$$

Trong đó:

$$m_1 = \frac{\bar{m}L_1}{2} + \frac{\bar{m}L_2}{2}$$

$$m_3 = \frac{\bar{m}L_2}{2} + \frac{\bar{m}L_3}{2}$$

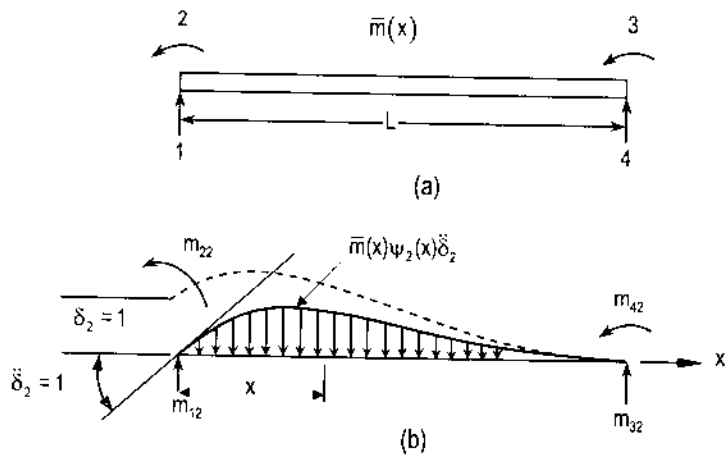
$$m_5 = \frac{\bar{m}L_3}{2}$$

Nếu dùng ký hiệu đặc biệt $\lceil\rfloor$ để chỉ ma trận chéo, (10.26) có thể viết như sau:

$$[M] = \lceil m_1 \quad 0 \quad m_2 \quad 0 \quad m_3 \quad 0 \rfloor \tag{10.27}$$

§10.4: Các đặc trưng quán tính. Khối lượng tập trung có xét đến ảnh hưởng quán tính của góc xoay

Các hệ số khối lượng ứng với tọa độ nút của dầm có thể xác định tương tự như khi tính các hệ số độ cứng. Trước hết ta định nghĩa hệ số khối lượng m_{ij} là lực tại tọa độ nút i do gia tốc bằng đơn vị tại tọa độ nút j gây ta, trong khi gia tốc tại các tọa độ nút khác đều bằng không.



Hình 10.5

Xét đoạn dầm trên hình (10.5) với tải trọng phân bố $\bar{m}(x)$ trên đơn vị dài. Trong phương pháp này, ta vẫn giả thiết các đường cong chuyển vị được biểu thị bằng các hàm $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$, các hàm này đã được suy ra bằng phương pháp tĩnh học.

Giả sử có một gia tốc bằng đơn vị sản sinh tại một trong các tọa độ nút, chẳng hạn $\ddot{\delta}_2 = 1$, gia tốc nằm ngang ứng với chuyển vị ngang phát triển dọc theo chiều dài của dầm là đạo hàm bậc hai đối với thời gian của phương trình (10.10).

Trong trường hợp này, với $\ddot{\delta}_1 = \ddot{\delta}_2 = \ddot{\delta}_3 = 0$, ta có:

$$\ddot{y}_2(x) = \Psi_2(x)\ddot{\delta}_2 \tag{10.28}$$

Lực quán tính $f_1(x)$ trên đơn vị dài của dầm do gia tốc trên gây ra bằng:

$$f_1(t) = \bar{m}(x)\ddot{y}(x)$$

Thay (10.28) vào phương trình trên:

$$f_1(t) = \bar{m}(x)\Psi_2(x)\ddot{\delta}_2$$

vì $\ddot{\delta}_2 = 1$, nên:

$$f_1(x) = \bar{m}(x)\Psi_2(x) \tag{10.29}$$

Để xác định hệ số khối lượng m_{12}, ta tạo ra một chuyển vị ảo ứng với chuyển vị $\delta_1 = 1$ (hình 10.5b) và áp dụng nguyên lý công ảo. Công của ngoại lực trên chuyển vị ảo bằng:

$$W_{ng} = m_{12}\delta_1 = m_{12} \tag{10.30}$$

Công của nội lực trên chuyển vị ảo bằng:

$$\delta w_1 = f_1(x)\Psi_1(x)$$

Từ (10.29), ta có:

$$\delta w_1 = \bar{m}(x)\Psi_2(x)\Psi_1(x)$$

Đối với toàn bộ dầm, ta có:

$$w_1 = \int_0^{\ell} \bar{m}(x)\Psi_2(x)\Psi_1(x)dx \tag{10.31}$$

Cân bằng công của ngoại lực với công của nội lực, từ các phương trình (10.30) và (10.31), ta có:

$$m_{12} = \int_0^{\ell} \bar{m}(x)\Psi_2(x)\Psi_1(x)dx \tag{10.32}$$

Một cách tổng quát, khi xét đến ảnh hưởng quán tính của góc xoay, hệ số khối lượng tính theo công thức:

$$m_{ij} = \int_0^{L} \bar{m}(x)\Psi_i(x)\Psi_j(x)dx \tag{10.33}$$

Từ công thức trên, ta thấy rằng $m_{ij} = m_{ji}$ vì chẳng qua là sự thay đổi chỗ giữa $\Psi_i(x)$ và $\Psi_j(x)$.

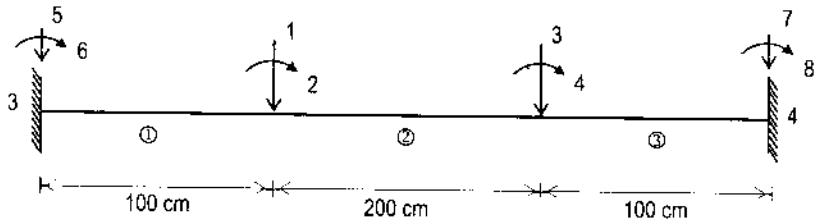
Trong thực tế, các phương trình bậc 3(10.9) có thì dùng để tính hệ số khối lượng của bất kỳ một dầm thẳng nào. Trong trường hợp đặc biệt, dầm có khối lượng phân phối đều, phương trình (10.33) cho ta hệ thức giữa các lực quán tính và các gia tốc tại các tọa độ nút như sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \end{Bmatrix} \qquad (10.34)$$

Ma trận khối lượng trong (10.34) chỉ áp dụng cho một đoạn dầm. Muốn có ma trận khối lượng của toàn bộ dầm, ta phải ghép chúng lại như đã làm đối với các ma trận độ cứng.

Phương pháp khối lượng tập trung không xét đến ảnh hưởng quán tính của góc xoay đơn giản hơn nhiều so với khi xét đến ảnh hưởng quán tính của góc xoay vì các lý do sau đây: Trong phương pháp thứ nhất, ma trận khối lượng là ma trận chéo hơn nữa trên đường chéo chính, có những phần tử triệt tiêu do không xét đến ảnh hưởng quán tính của góc xoay; Trong phương pháp thứ hai, ma trận khối lượng không phải là ma trận chéo vì có nhiều phần tử không triệt tiêu.Tuy nhiên, phương pháp thứ hai cho những kết quả chính xác hơn.

Ví dụ 10.1: Cho một dầm như trên hình (10.6). Yêu cầu lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn bộ dầm:



Hình 10.6

Các đặc trưng cơ học như sau:

Mô men đàn hồi $E = 2000\ kN/cm^2$

Mô men quán tính $I = 2,3 \times 10^5\ cm^4$

Diện tích $A = 1350\ cm^2$

Khối lượng phân bố $\bar{m} = 0,00785\ kN\ sec^2/cm$

Giải:

Trước hết, cần phải xếp số thứ tự cho các bậc tự do. Có tất cả 8 bậc tự do trong đó có 4 bậc tự do có chuyển vị và 4 bậc tự do không có chuyển vị. Xếp trước số thứ tự cho các bậc tự do có chuyển vị 1, 2, 3, 4 và xếp sau số thứ tự cho các bậc tự do không có chuyển vị là 5, 6, 7, 8 (xem hình 10.6).

Ở phía trên và bên phải các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng, có các chỉ số thứ tự các bậc tự do ứng với từng đoạn dầm.

Theo (8.20), ta có các ma trận độ cứng cho từng đoạn dầm như sau:

$$\text{Đoạn 1: } [S_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5520 & 276000 & -5520 & 276000 \\ & 184 \times 10^5 & -276000 & 92 \times 10^5 \\ & & 5520 & -276000 \\ & \text{đối xứng} & & 184 \times 10^5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\text{Đoạn 2: } [S_2] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 690 & 69000 & -690 & 69000 \\ & 92 \times 10^5 & -69000 & 46 \times 10^5 \\ & & 690 & -69000 \\ & \text{đối xứng} & & 92 \times 10^5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\text{Đoạn 3: } [S_3] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5520 & 276000 & -5520 & 276000 \\ & 184 \times 10^5 & -276000 & 92 \times 10^5 \\ & & 5520 & -276000 \\ & \text{đối xứng} & & 92 \times 10^5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Theo các nguyên tắc đã trình bày trong phần trước, ghép các ma trận trên để được ma trận độ cứng tổng thể.

$$[S] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6210 & -207000 & -690 & 69000 \\ & 276 \times 10^5 & -69000 & 46 \times 10^5 \\ & & 6210 & 207000 \\ & \text{đối xứng} & & 276 \times 10^5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Theo (10.34), lập ma trận khối lượng cho từng đoạn dầm như sau:

$$\text{Đoạn 1 : } [m_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 393,62 & 5551,07 & 136,25 & -3280,18 \\ 5551,07 & 100928,57 & 3280,18 & -756946,43 \\ & & 393,62 & 5551,07 \\ & \text{đối xứng} & 5551,07 & 100928,37 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\text{Đoạn 2}: [m_2] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 787,24 & 22204,29 & 272,51 & -13120,7 \\ & 807428,57 & 13120,71 & -6065571,43 \\ & & 787,24 & 22204,29 \\ \text{đối xứng} & & & 807428,57 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\text{Đoạn 3}: [m_3] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 393,62 & 5551,07 & 136,25 & -3280,18 \\ & 100928,57 & 3280,19 & -75696,43 \\ & & 939,62 & 5551,07 \\ \text{đối xứng} & & & 100928,57 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Ghép các ma trận trên để được ma trận khối lượng tổng thể:

$$[m] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1180,86 & 27755,36 & 272,51 & -1320,71 \\ & 908357,14 & 13120,71 & -605571,43 \\ & & 1180,86 & 27755,36 \\ \text{đối xứng} & & & 908357,14 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

§10.5 Các đặc trưng về lực cản

Ta định nghĩa hệ số cản c_{ij} là lực tại tọa độ nút i do vận tốc bằng đơn vị tại nút j gây ra. Nếu có thể xác định được các lực cản phân bố trên kết cấu, các hệ số cản trong các bộ phận khác nhau của kết cấu sẽ được dùng để tính hệ số cản ứng với hệ. Chẳng hạn, hệ số cản c_{ij} đối với một phần tử của hệ, có dạng:

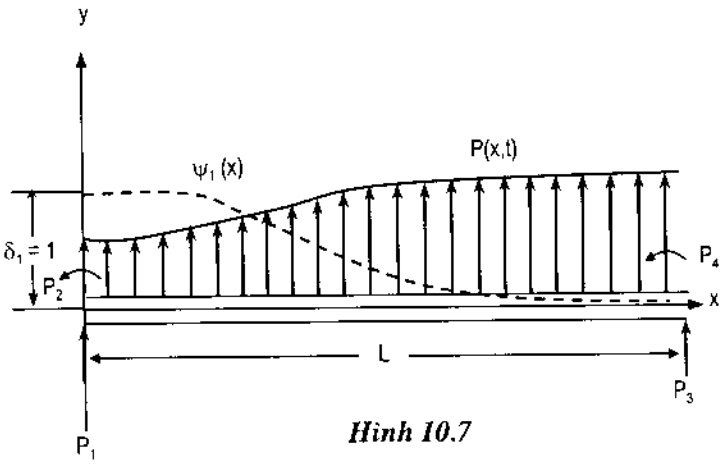
$$c_{ij} = \int_0^L c(x)\Psi_i(x)\Psi_j(x)dx \tag{9.35}$$

Trong đó c(x) là hệ số cản phân bố trên đơn vị dài . Nếu có thể tính được ma trận cản của một doạn dầm, ta ghép chúng lại để được ma trận cản tổng thể như đã làm đối với ma trận độ cứng tổng thể. Trong thực tế, không thể ước tính được hệ số cản phân bố c(x). Vì lý do đó, lực cản thường được biểu thị bằng tỷ số cản xác định bằng thí nghiệm chứ không dùng công thức (9.35) để xác định ma trận cản. Các tỉ số cản được ước tính đối với mỗi mô đơ dao động tự nhiên.

§. 10.6. Ngoại lực

Khi các tải trọng động tác dụng lên kết cấu bao gồm các lực tập trung và mô men đặt tại các tọa độ nút, ta có thể viết trực tiếp vectơ tải trọng.

Tuy nhiên, nói chung, tải trọng có thể đặt tại những điểm khác với tọa độ nút. Hơn nữa, ngoại lực có thể bao gồm lực phân bố. Trong trường hợp này, vectơ tải trọng ứng với các tọa độ nút bao gồm các lực tương đương. Ở đây, ta vẫn giả thiết các hàm độ võng biểu thị như trong các phương trình (10.9) và áp dụng nguyên lý công ảo.



Hình 10.7

Xét đoạn dầm trên hình (10.7), chịu tác dụng của một lực phân bố p(x,t), lực này là một hàm của vị trí, đồng thời là một hàm của thời gian. Ta tạo ra chuyển vị ảo ứng với chuyển vị bằng đơn vị $\delta_1 = 1$ (hình 10.7).

Ta tìm lực tương đương P_1 bằng cách cân bằng công của ngoại lực và công của nội lực trên chuyển vị ảo. Công ảo của ngoại lực bằng:

$$W_{ng} = P_1\delta_1 = P_1 \tag{10.36}$$

Công ảo của nội lực trên đơn vị dài của dầm là $p(x,t)\,\psi_1(x)$, vậy tổng công nội lực là:

$$W_n = \int_0^L p(x,t)\psi_1(x)dx \tag{10.37}$$

Sau khi cân bằng công ảo của ngoại lực với công ảo của nội lực, ta được:

$$P_1(t) = \int_0^L p(x,t)\psi_1(x)dx \tag{10.38}$$

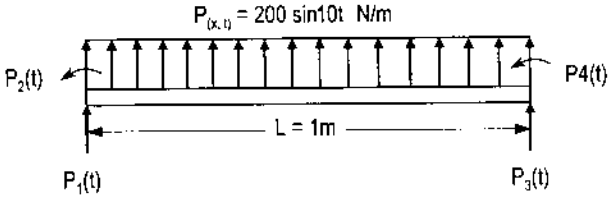
Một cách tổng quát, lực tương đương tại tọa độ nút i có dạng:

$$P_i(t) = \int_0^L p(x,t)\psi_i(x)dx \tag{10.39}$$

Ví dụ 10.2: Một đoạn dầm như trên hình (10.8). Dầm chịu lực phân bố đều.

$$P_{(x,t)} = 200\sin 10t\ ,\ (N/m)$$

Yêu cầu xác định các lực tương đương tại các tọa độ nút.



Hình 10.8

Giải:

Đưa vào các giá trị bằng số vào các hàm chuyển vị (10.9), sau đó thay vào (10.39), ta được:

$$P_1(t) = 200\int_0^1 \left(1 - 3x^2 + 2x^3\right)dx \sin 10t = 100 \sin 10t$$

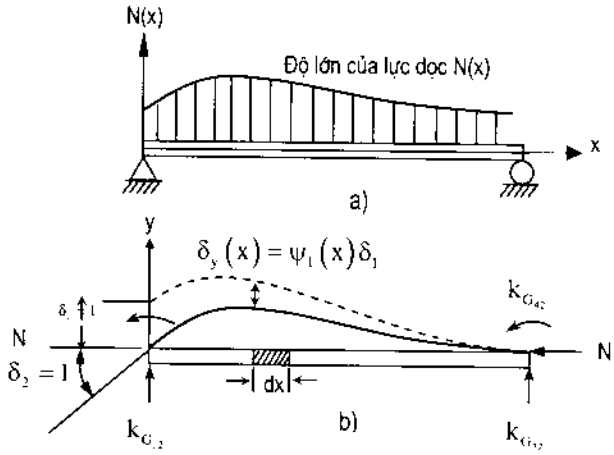
$$P_2(t) = 200\int_0^1 x(1-x)^2\, dx \sin 10t = 16,67 \sin 10t$$

$$P_3(t) = 200\int_0^1 \left(3x^2 - 2x^3\right)dx \sin 10t = 100 \sin 10t$$

$$P_4(t) = 200\int_0^1 x^2(x-1)\, dx \sin 10t = -16,67 \sin 10t$$

§.10.7. Độ cứng hình học

Khi một đoạn dầm chịu tác dụng của lực dọc ngoài lực uốn, các hệ số độ cứng sẽ thay đổi do sự xuất hiện của lực dọc. Ta định nghĩa độ cứng hình học k_{Gij} là lực tại tọa độ nút i do chuyển vị bằng đơn vị tại nút j gây ra, chuyển vị này do các lực dọc trong kết cấu sản sinh. Hệ số hình học có thể xác định từ nguyên lý công ảo. Xét một đoạn dầm chịu tác dụng của lực dọc phân bố trên đơn vị dài N/(x) như trên hình (10.9a).



Hình 10.9

Trên hình (10.9b), dầm xoay một góc $\delta_2 = 1$ ở nút bên trái. Theo định nghĩa, các lực do chuyển vị bằng đơn vị đó gây ra là các hệ số độ cứng hình học, chẳng hạn như lực thẳng đứng k_{G12} tại nút bên trái. Giả sử chuyển vị ảo được biểu thị bởi đường cong ứng với $\delta_1 = 1$ (hình 10.9b) .

Tổng của ngoại lực trên chuyển vị ảo là:

$$W_{ng} = k_{G12}\,\delta_1$$
$$W_{ng} = k_{G12}$$

Vì $\delta_1 = 1$

Để tính công ảo của nội lực, ta xét một đoạn dầm có chiều dài dx, nó được phóng to trên hình (10.10). Công của nội lực trên chuyển vị ảo bằng:

$$dw = N(x)\delta_e \qquad (10.41)$$

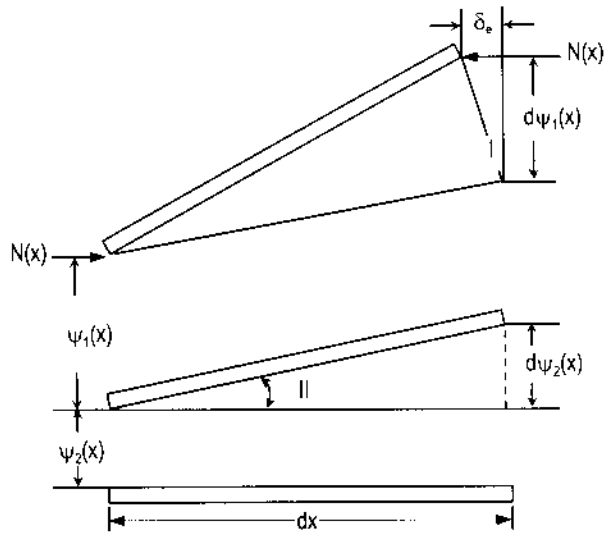
Trong đó δ_e là chuyển vị tương đối do lực dọc N(x) gây ra trên đoạn dầm dx. Do tính chất đồng dạng của 2 tam giác I và II trên hình (10.10):

$$\frac{\delta_e}{d\psi_1(x)} = \frac{d\psi_2(x)}{dx}$$

$$\delta_e = \frac{d\psi_1}{dx}\frac{d\psi_2}{dx}dx$$

$$\delta_e = \psi_1'(x)\psi_2'(x)$$

Trong đó $\Psi_1'(x)$ và $\Psi_2'(x)$ là các đạo hàm đối với x của các hàm chuyển vị (10.9).



Hình 10.10

Thay δ_e vào (10.41), ta được:

$$dw_n = N(x)\Psi_1'(x)\Psi_2'(x)dx \tag{10.42}$$

Sau khi tính tích phân (10.42) và cân bằng công ảo của nội lực với công ảo của ngoại lực, ta có:

$$k_{G12} = \int_0^l N(x)\Psi_1'(x)\Psi_2'(x)dx \tag{10.43}$$

Trong trường hợp tổng quát, hệ số độ cứng hình học tính theo công thức:

$$k_{Gij} = \int_0^l N(x)\Psi_i'(x)\Phi_j'(x)dx \tag{10.44}$$

Khi lực dọc là một hằng số dọc theo chiều dài của dầm, từ các phương trình (10.44) và (10.9), ta có phương trình độ cứng hình học như sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \frac{N}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \tag{10.45}$$

Ma trận trong (10.45) gọi là *ma trận độ cứng hình học*. Cách ghép chúng thành ma trận độ cứng hình học tổng thể hoàn toàn giống như đã làm đối với ma trận độ cứng. Thông thường, ta xác định ma trận độ cứng hình học với giả thiết lực dọc là lực nén. Điều này làm giảm độ cứng của toàn hệ, sự giảm này thể hiện ở công thức sau đây:

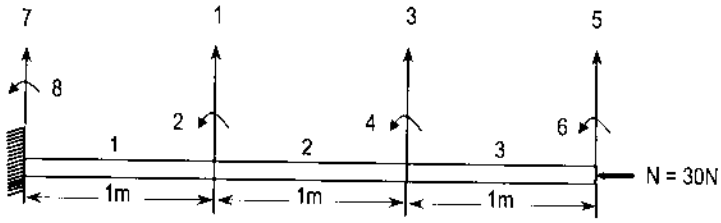
$$[K_e] = [K] - [K_G] \tag{10.46}$$

Trong đó:

$[K]$ - ma trận độ cứng đàn hồi của toàn hệ;

$[K_G]$ - ma trận độ cứng hình học .

Ví dụ 10.2: Một dầm côngxon như trên hình (10.11). Một lực dọc không đổi N = 30N đặt tại đầu dầm. Yêu cầu xác định ma trận độ cứng hình học.



Hình 10.11

Giải:

Thay các giá trị bằng số vào phương trình (10.45), ma trận độ cứng hình học của một đoạn dầm bất kỳ như sau:

$$[K_G]=\begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sau khi ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ cứng hình học tổng thể:

$$[K_G]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 72 & 0 & -36 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ -36 & -3 & 72 & 0 & -36 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 8 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -36 & -3 & 36 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

§10.8. Các phương trình chuyển động

Các phương trình chuyển động có thể xác lập từ các điều kiện cân bằng động lực học, giữa các lực quán tính $\{F_i(t)\}$, các lực cản $\{F_D(t)\}$, các lực đàn hồi $\{F_s(t)\}$ và các ngoại lực $\{F(t)\}$:

$$\{F_i(t)\}+\{F_D(t)\}+\{F_S(t)\}=\{F(t)\} \qquad (10.47)$$

Các lực ở bên trái của (10.47) được biểu thị bằng các ma trận khối lượng tổng thể, ma trận cản tổng thể và ma trận độ cứng tổng thể.

$$\{F_i(t)\} = [M]\{\ddot{y}\} \tag{10.48}$$

$$\{F_D(t)\} = [C]\{\dot{y}\} \tag{10.49}$$

$$\{F_s(t)\} = [K]\{y\} \tag{10.50}$$

Thay lực ở bên trái của (10.47), ta được phương trình vi phân chuyển động:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\} \tag{10.51}$$

Nếu xét đến ảnh hưởng của lực dọc, ta phải biến đổi (10.51) sao cho:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K_c]\{y\} = \{F(t)\} \tag{10.52}$$

Trong đó:

$$[K_c] = [K] - [K_G] \tag{10.53}$$

Tìm lời giải bằng tay các phương trình (10.51) hoặc (10.52) rất phức tạp nên ta phải dựa vào các chương trình máy tính.

§10.9 Lực tại các toạ độ nút

Sau khi tính được các chuyển vị tại các tọa độ nút, ta tính lực tại các nút đó bằng cách cộng với nhau các lực quán tính $\{P_I\}$, lực cản $\{P_D\}$, lực đàn hồi $\{P_s\}$ rồi trừ đi lực tương đương $\{P_E\}$ (nếu có ngoại lực phân bố). Vậy ta có thể viết:

$$\{P\} = \{P_I\} + \{P_D\} + \{P_s\} - \{P_E\}$$

Hay

$$\{P\} = [m]\{\ddot{\delta}\} + [c]\{\dot{\delta}\} + [k]\{\delta\} - \{P_E\} \tag{10.68}$$

Trong phương trình trên, lực quán tính, lực cản, lực đàn hồi có thể viết:

$$\begin{aligned} \{P_I\} &= [m]\{\ddot{\delta}\} \\ \{P_D\} &= [c]\{\dot{\delta}\} \\ \{P_S\} &= [k]\{\delta\} \end{aligned} \tag{10.69}$$

Trong đó: [m] - ma trận khối lượng;

[c] - ma trận cản;

[k] - ma trận độ cứng.

$\{\delta\}, \{\dot{\delta}\}, \{\ddot{\delta}\}$ lần lượt là véc tơ chuyển vị, véc tơ vận tốc, véc tơ gia tốc.

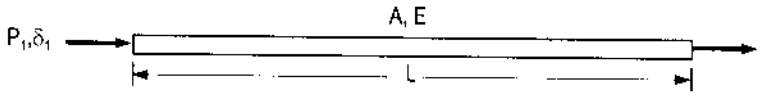
Chương 11
DAO ĐỘNG CỦA KHUNG PHẲNG

Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu cách giải bài toán giao động của khung phẳng. Như đã biết, khung phẳng là hệ trong đó các thanh và tải trọng đều nằm trong cùng một mặt phẳng. Khác với dầm, khung phẳng bắt buộc phải xét đến lực dọc. Hơn nữa, các thanh của khung có các hướng khác nhau nên ta phải xét hai hệ toạ độ: hệ *toạ độ cục bộ* và *hệ toạ độ tổng thể*. Giống với dầm, ta phải thành lập các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, ma trận cản.

§11.1. Ma trận độ cứng của một phần tử khung

Như trên đã nói, trong ma trận độ cứng của khung, có thể lợi dụng các kết quả đã tính được đối với dầm. Ngoài ra, phải xét đến ảnh hưởng của lực dọc, do đó cần phải xác định thêm hệ số độ cứng đối với lực dọc.

Xét một phần tử của thanh như trên hình (11.1). Có các lực dọc P_1 và P_2 sản sinh các chuyển vị δ_1 và δ_2 tại hai mút của phần tử.



Hình 11.1

Đối với phần tử khung có mặt cắt không đổi, có chiều dài L và diện tích tiết diện A, có thể áp dụng định luật Hook để có hệ thức giữa độ cứng và lực dọc. Nếu chuyển vị δ_1 do lực P_1 tác dụng tại nút 1 gây ra, trong khi nút 2 được giữ cố định ($\delta_2 = 0$) thì:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{AE} \tag{11.1}$$

Từ phương trình (11.1) và định nghĩa của hệ số độ cứng k_{11} (lực tại nút 1 để sản sinh chuyển vị bằng đơn vị tại nút 1), ta có:

$$k_{11} = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{AE}{L} \tag{11.2a}$$

Do điều kiện cân bằng của đoạn dầm, phải có lực k_{21} xuất hiện tại đầu kia, nghĩa là:

$$k_{21} = -k_{11} = -\frac{AE}{L} \tag{11.2b}$$

Một cách tương tự, ta có các hệ số độ cứng khác:

$$k_{22} = \frac{AE}{L} \tag{11.2c}$$

$$k_{12} = -\frac{AE}{L} \tag{11.2d}$$

Các hệ số độ cứng trong (11.2) là những phần tử của ma trận độ cứng liên quan đến lực dọc. Đối với dầm có tiết diện không đổi, hệ thức ma trận giữa các lực dọc và các chuyển vị tương ứng như sau:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Bổ sung các hệ thức ma trận độ cứng của dầm đã được xác định trong chương 10, ta có ma trận độ cứng của một thành phần của khung như sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & & & & & \\ 0 & 12 & & \text{đối xứng} & & \\ 0 & 6L & 4L^2 & & & \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & & \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \tag{11.4}$$

Dưới dạng viết gọn, hệ thức ma trận trên có thể viết:

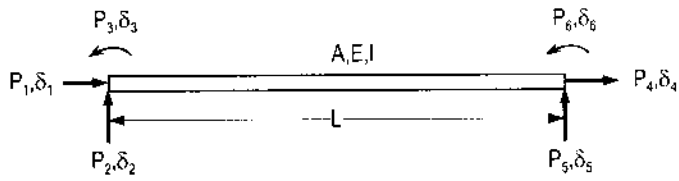
$$\{P\} = [K]\{\delta\} \tag{11.5}$$

§11.2. Ma trận khối lượng

Có hai phương pháp xác định ma trận khối lượng của khung:

1. Phương pháp khối lượng tập trung;
2. Phương pháp khối lượng có xét đến ảnh hưởng quán tính của lực dọc.

Trong phương pháp thứ nhất, khối lượng tập trung được xác định theo phương pháp tĩnh học. Đối với thành phần khung có tiết diện không đổi (hình 11.1), ta giả thiết một nửa toàn bộ khối lượng dầm tập trung tại mỗi nút. Do đó, hệ thức ma trận giữa các lực dọc tại nút và các gia tốc tương ứng như sau:



Hình 11.2

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.6}$$

Trong đó: $\bar{m}$ - khối lượng trên đơn vị dài.

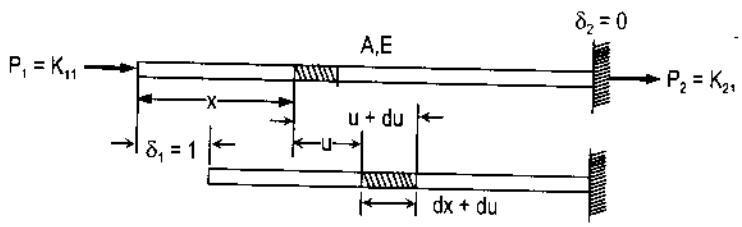
Nếu phối hợp lực dọc và lực cắt, ma trận khối lượng của thành phần khung trên hình (11.2) là một ma trận chéo như sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \end{Bmatrix} \tag{11.7}$$

Trong phương pháp thứ hai, ta cần xác định hàm chuyển vị ứng với một chuyển vị bằng đơn vị dọc theo trục tại một trong các tọa độ nút. Xét thành phần khung trên hình (11.3) trên đó có chuyển vị $\delta_1 = 1$ tại nút 1 trong khi chuyển vị tại nút 2 được giữ bằng không tức là $\delta_2 = 0$. Nếu $u = u(x)$ là chuyển vị tại mặt cắt x, chuyển vị tại mặt cắt $x + dx$ sẽ là $u + du$.

Rõ ràng là ở vị trí mới, phần tử dx thay đổi một đoạn bằng du, do đó có biến dạng tỷ đối là du/dx. Theo định luật Hook, ta có thể viết:

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{AE} \tag{11.8}$$



Hình 11.3

Sau khi tính tích phân, ta được:

$$u = \frac{P}{AE}x + C \tag{11.9}$$

Trong đó:

C - hằng số tích phân

Từ các điều kiện biên $u = 1$ tại $x = 0$ và $u = 0$ tại $x = L$, ta có hàm chuyển vị $u_1(x)$ ứng với chuyển vị $\delta_1 = 1$ như sau:

$$u_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \tag{11.10}$$

Một cách tương tự, hàm chuyển vị $u_2(t)$ ứng với chuyển vị bằng đơn vị $\delta_2 = 1$ như sau:

$$u_2(x) = \frac{x}{L} \tag{11.11}$$

Bây giờ ta áp dụng nguyên lý công ảo để tính các hệ số độ cứng. Chẳng hạn xét thành phần của khung trên hình (11.3) ở thế cân bằng cùng với các lực $P_1 = k_{11}$ và $P_2 = k_{21}$. Giả sử tạo ra chuyển vị ảo ứng với $\delta_2 = 1$.

Công ảo ngoại lực trên chuyển vị ảo bằng:

$$W_{ng} = k_{21}\delta_2$$

$$W_{ng} = k_{21} \text{ vì } \delta_2 = 1$$

Từ phương trình (11.8), ta có nội lực P(x) tại tiết diện bất kỳ x như sau:

$$P(x) = AE\ u_1'(x)$$

Trong đó: $u_1'(x) = \dfrac{du_1}{dx}$.

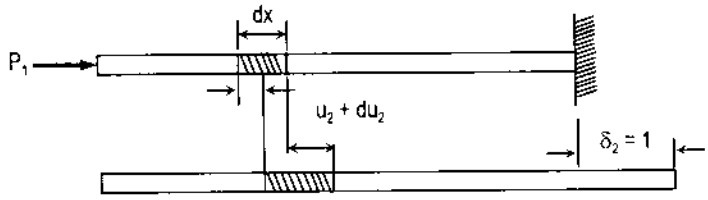
Chuyển vị tương đối của phần tử dx trong quá trình chuyển vị ảo (xem hình 11.4) là:

$$du_2 = \frac{du_2}{dx}dx \tag{11.14}$$

Từ (11.13) và (11.14) công của nội lực trên chuyển vị ảo bằng:

$$dW_n = AEu_1'(x)u_2'(x)dx$$

Đối với thành phần khung có chiều dài L, tổng công nội lực:



Hình 11.4

$$W_n = \int_0^L AEu_1'(x)u_2'(x)dx \tag{11.15}$$

Cuối cùng cân bằng công của ngoại lực với công của nội lực, từ (11.12) và (11.15), ta được:

$$k_{21} = \int_0^L AEu_1'(x)u_2'(x)dx \tag{11.16}$$

Một cách tổng quát, hệ số độ cứng k_{ij} do ảnh hưởng của lực dọc có thể viết:

$$k_{ij} = \int_0^L AEu_i'(x)u_j'(x) \tag{11.17}$$

Ta có thể dùng công thức (11.17) để kiểm tra kết quả có được từ phương trình (11.3) đối với dầm có mặt cắt không đổi. Tuy nhiên, (11.17) cũng có thể dùng cho thành phần khung có tiết diện thay đổi. Trong đó AE là một hàm của x. Chuyển vị y(x,t) tại tiết diện bất kỳ x do các chuyển vị động lực học $\delta_1(t)$ và $\delta_2(t)$ gây ra, được xác định từ nguyên lý cộng tác dụng:

$$y(x,t) = u_1(x)\delta_1(t) + u_2(x)\delta_2(t) \tag{11.8}$$

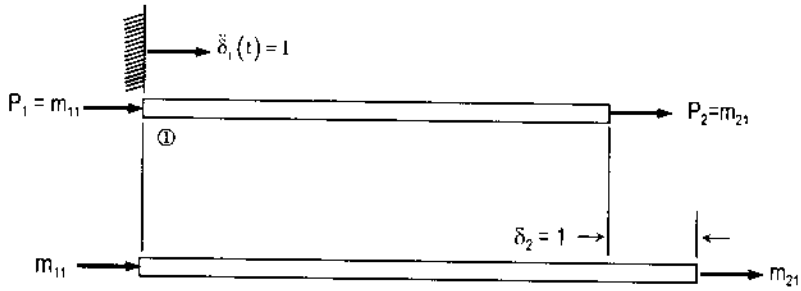
Trong đó:

$u_1(x)$ và $u_2(x)$ được xác định từ các phương trình (11.10) và (11.11).

Bây giờ ta xét thành phần khung trên hình (11.5), nó chịu một gia tốc bằng đơn vị $\ddot{\delta}_1(t) = 1$.

Từ (11.8), ta có:

$$\ddot{u}_1(x,t) = u_1(x)\ddot{\delta}_1(t)$$



Hình 11.5

Hay

$$\ddot{u}_1(x,t) = u_1(x) \text{ vì } \ddot{\delta}_1(t) = 1$$

Lực quán tính trên đơn vị dài của dầm do gia tốc bằng đơn vị trên gây ra bằng:

$$f = \bar{m}(x)u_1(x) \tag{11.19}$$

Trong đó: $\bar{m}(x)$ - khối lượng trên đơn vị dài của dầm. Bây giờ ta hãy xác định hệ số khối lượng m_{21}. Ta tạo ra chuyển vị ảo ứng với chuyển vị $\delta_2 = 1$ trên hình (11.5). Công của ngoại lực trên chuyển vị ảo là:

$$W_{ng} = m_{21}\delta_2$$

Hay

$$W_{ng} = m_{21} \text{ vì } \delta_2 = 1$$

Công của nội lực trên đơn vị dài của dầm do lực quán tính f thực hiện trên chuyển vị ảo là:

$$\delta W_n = f(x)u_2(x)$$

Từ (11.19)

$$\delta W_n = \bar{m}(x)u_1(x)u_2(x)$$

Vậy tổng công của nội lực là:

$$W_n = \int_0^L \bar{m}(x)u_1(x)u_2(x)dx \tag{11.21}$$

Cuối cùng, cân bằng công của ngoại lực và công của nội lực, ta có:

$$m_{21} = \int_0^L \bar{m}(x)u_1(x)u_2(x)dx \tag{11.22}$$

Một cách tổng quát, ta có:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x)u_i(x)u_j(x)dx \tag{11.23}$$

Áp dụng công thức (11.23) cho trường hợp dầm có tiết kiện không đổi, ta có:

$$m_{11} = \int_0^L \bar{m}\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{\bar{m}L}{3} \tag{11.24}$$

Tương tự: $m_{22} = \dfrac{\bar{m}L}{3}$

$$m_{12} = m_{21} = \int_0^L \bar{m}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right) dx = \frac{\bar{m}L}{6} \tag{11.25}$$

Dưới dạng ma trận, đối với dầm có tiết diện không đổi, lực dọc quán tính được biểu thị như sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.26}$$

Cuối cùng, kết hợp ma trận khối lượng (10.34) trong trường hợp xét đến ảnh hưởng của góc xoay với ma trận khối lượng (11.26) trong trường hợp xét đến ảnh hưởng của lực dọc, ta có quan hệ giữa các lực và các gia tốc tại các toạ độ nút như sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420}\begin{bmatrix} 140 & & & & & \\ 0 & 156 & & & & \\ 0 & 22L & 4L^2 & & & \\ 70 & 0 & 0 & 140 & & \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \end{Bmatrix} \tag{11.27}$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{P\} = [M_c]\{\ddot{\delta}\}$$

Trong đó: $[M_c]$ - ma trận khối lượng khi có xét đến ảnh hưởng của lực dọc.

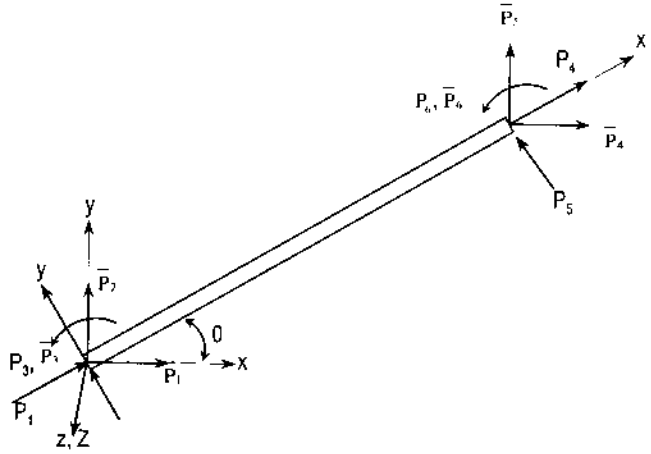
§11.3. Sự biến đổi hệ tọa độ

Ma trận độ cứng trong phương trình (11.4) cũng như ma trận khối lượng trong phương trình (11.27) đều được biểu thị trong hệ tọa độ cục bộ ứng với từng thành phần của khung. Vì các thanh của khung có các hướng khác nhau, ta phải dùng hệ tọa độ chung cho toàn bộ kết cấu, ta gọi là *hệ tọa độ tổng thể*. Chẳng hạn trên hình (11.6) các trục x, y, z biểu thị hệ tọa độ cục bộ, các lực P_1, P_2, P_3....P_6 nằm trên phương các trục này.

Các trục X, Y, Z thuộc hệ tọa độ tổng thể, các lực $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3 ... \bar{P}_6$ nằm trên phương các trục này. Mục đích của ta là chuyển các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng từ hệ tọa độ cục bộ sang *hệ tọa độ tổng thể*.

Làm như vậy để toàn bộ các ma trận đều thuộc về hệ tọa độ tổng thể và do đó tiện cho việc ghép chúng.

Ta bắt đầu biểu thị các lực $\{P_1\ P_2\ P_3\}$ qua các lực $\{\overline{P}_1\ \overline{P}_2\ \overline{P}_3\}$. Vì hai lực này tương đương với nhau. Từ hình (11.6), ta có các hệ thức như sau:



Hình 11.6

$$P_1 = \overline{P}_1 \cos\theta + \overline{P}_2 \sin\theta$$
$$P_2 = -\overline{P}_1 \sin\theta + \overline{P}_2 \cos\theta \quad (11.28)$$
$$P_3 = \overline{P}_3$$

Hai phương trình đầu tiên của (11.28) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.29}$$

Một cách tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} P_4 &= \overline{P}_4 \cos\theta + \overline{P}_5 \sin\theta \\ P_5 &= -\overline{P}_4 \sin\theta + \overline{P}_5 \cos\theta \\ P_6 &= \overline{P}_6 \end{aligned} \tag{11.30}$$

Các phương trình (11.28), (11.30) có thể biểu thị trong ma trận sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 \\ \overline{p}_3 \\ \overline{p}_4 \\ \overline{p}_5 \\ \overline{p}_6 \end{Bmatrix} \tag{11.31}$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{P\} = [T]\{\overline{P}\} \tag{11.32}$$

Trong đó: $\{P\}$ - véc tơ tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ;

$\{\overline{P}\}$ - véc tơ tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể;

$\{T\}$ - ma trận biến đổi (11.31).

Lặp lại quá trình như trên, ta có hệ thức ma trận giữa véc tơ chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ và véc tơ chuyển vị trong hệ toạ độ tổng thể như sau:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \\ \bar{\delta}_5 \\ \bar{\delta}_6 \end{Bmatrix} \tag{11.33}$$

Thay {P} từ (11.32) và {δ} từ (11.34) vào phương trình (11.5), ta được:

$$[T]\{\bar{P}\} = [K][T]\{\delta\} \tag{11.34}$$

Hay

$$\{\bar{P}\} = [T]^{-1}[K][T]\{\delta\} \tag{11.35}$$

Trong đó: $[T]^{-1}$ - Nghịch đảo của ma trận [T]

Tuy nhiên, ta có thể kiểm tra để thấy rằng ma trận biến đổi [T] trong (11.31) là ma trận trực giao nghĩa là:

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

Vậy:

$$\{\bar{P}\} = [T]^T[K][T]\{\bar{\delta}\} \tag{11.36}$$

Dưới dạng viết gọn: $\{\bar{P}\} = [\bar{K}]\{\bar{\delta}\}$ (11.37)

$$[\bar{K}] = [T]^T[K][T] \tag{11.38}$$

Trong đó: $[\bar{K}]$ - ma trận độ cứng của một thành phần khung trong hệ tọa độ tổng thể.

Lặp lại quá trình trên đối với ma trận khối lượng (11.7) hoặc ma trận khối lượng (11.27), ta có hệ thức sau đây:

$$\{\bar{P}\} = [\bar{M}]\{\ddot{\bar{\delta}}\}$$

Trong đó:

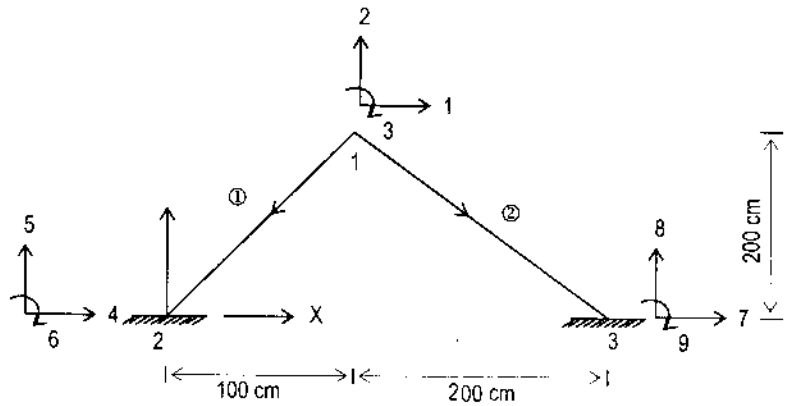
$$[\bar{M}] = [T]^T[M][T] \tag{11.39}$$

Trong đó: $\bar{M}$ - ma trận khối lượng của một thành phần khung trong hệ tọa độ tổng thể;

[T] - ma trận biến đổi (11.33).

Ví dụ 11.1: Một khung phẳng với các đặc trưng hình học và cơ học như trên hình (11.6). Yêu cầu:

1. Lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn hệ;
2. Tính các tần số vòng và các véc tơ riêng ở trạng thái tự do.



Hình 11.7

Modun đàn hồi

$E = 2000\ kN/cm^2$

Mô men quán tính

$I = 3 \times 10^5\ cm^4$

Diện tích $A = 1500cm^2$

Khối lượng phân bố

$m = 0{,}00785\ kN\ sec^2/cm$

Giải:

1. Khung có tất cả 9 bậc tự do trong đó có 3 bậc tự do không có chuyển vị và 6 bậc tự do có chuyển vị. Trước hết, xếp số thứ tự cho các bậc tự do có chuyển vị là 1, 2, 3, sau đó xếp số thứ tự cho các bậc tự do không có chuyển vị là 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Từ (11.31), ta có các ma trận biến đổi

Thanh 1:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -0{,}447 & -0{,}894 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}894 & -0{,}447 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}447 & -0{,}894 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}894 & -0{,}447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thanh 2:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}707 & 0{,}707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}707 & -0{,}707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (11.4), (11.31) và (11.38), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận độ cứng của các thanh trong hệ toạ độ tổng thể như sau:

Thanh 1:

$$
[S_1] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
3198,47 & 5108,97 & -64398,76 & -3198,47 & -5108,97 & -64398,76 \\
 & 10861,92 & 32199,38 & -5108,17 & -1086,92 & 32199,38 \\
 & & 10763126,29 & 64398,76 & -32199,38 & 536656,15 \\
 & \text{đối xứng} & & 3198,47 & -5108,97 & 64398,76 \\
 & & & & 10861,92 & -32199,38 \\
 & & & & & 10733126,29
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

Thanh 2:

$$
[S_2] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
6462,4 & -5144,2 & -31819,81 & -5462,4 & 5144,2 & -31819,81 \\
 & 5462,4 & -31819,81 & 5144,2 & -5462,4 & -31819,81 \\
 & & 8485281,37 & 31818,81 & 31819,81 & 4242640,69 \\
 & \text{đối xứng} & & 5462,4 & 5144,2 & 31819,81 \\
 & & & & 5462,4 & 31819,81 \\
 & & & & & 8485281,37
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
$$

Sau khi ghép hai ma trận S_1 và S_2, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ:

$$
[S] = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
8660,87 & -35,23 & -96218,56 \\
 & 16324 & 379,57 \\
\text{đối xứng} & & 19218407,67
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
$$

Căn cứ vào (11.27), (11.31) và (11.39), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận khối lượng của các thanh trong hệ toạ độ tổng thể như sau:

Thanh 1:

$$
[m_1] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0,117 & -0,027 & 18,389 & 0,059 & 0027 & -10,87 \\
 & 0,598 & -9,194 & 0,117 & 0,279 & 5,433 \\
 & & 835,86 & 0 & -5,43 & -626,89 \\
 & \text{đối xứng} & & 0,117 & -0,027 & -18,388 \\
 & & & & 0,598 & 9,194 \\
 & & & & & 835,86
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

Thanh 2:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
[m_2] = \begin{bmatrix}
0,782 & 0,042 & 23,26 & 0,328 & -0,042 & -13,74 \\
 & 0,782 & 23,26 & 0,328 & -13,74 & -16,74 \\
 & & 1691,67 & 8,591 & 13,745 & -1268,75 \\
 & & & 0,782 & 0,042 & -23,26 \\
 & \text{đối xứng} & & & 0782 & -23,26 \\
 & & & & & 1691,67
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\end{array}
$$

Sau khi ghép 2 ma trận m_1 và m_2, ta được ma trận khối lượng của toàn bộ khung trong hệ tọa độ tổng thể.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
[m] = \begin{bmatrix}
0,899 & 0,016 & 41,65 \\
 & 1,38 & 14,07 \\
\text{đối xứng} & & 2527,53
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}
$$

2. Căn cứ vào ma trận độ cứng tổng thể S và ma trận khối lượng tổng thể m, từ công thức (8.4), ta khai triển định thức.

$$\left|[S] - \lambda[m]\right| = 0$$

và tìm nghiệm của phương trình đặc trưng. Kết quả như sau:

Các giá trị riêng:

$$\lambda_1 = 4323,195 \qquad \lambda_2 = 11719,03 \qquad \lambda_3 = 108615,46$$

Do đó các tần số vòng là:

$$\omega_1 = \sqrt{4323,195} = 65,75 \text{rad/sec}$$

$$\omega_2 = \sqrt{11719,03} = 108,25 \text{rad/sec}$$

$$\omega_3 = \sqrt{108615,46} = 329,57 \text{rad/sec}$$

Thay giá trị của các giá trị riêng vào phương trình (8.3):

$$\left[[s] - \lambda[m]\right].\{a\} = 0$$

Ta được các véc tơ riêng:

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,068 \\ 0,023 \end{Bmatrix} \qquad a_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3,05 \\ 0,00065 \end{Bmatrix} \qquad a_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,21 \\ -0,19 \end{Bmatrix}$$

Trong đó: a_1, a_2, a_3 là các véc tơ cột và các chỉ số 1, 2, 3 lần lượt ứng với các tần số vòng ω_1, ω_2, ω_3.

Ví dụ 11.2: Một khung như trên hình (11.7). Nó chịu tác dụng của một tải trọng đột ngột F = -500kN trên phương bậc tự do 2 (xem hình vẽ). Giả sử có 10 quãng thời gian với số gia thời gian $\Delta t = 0,01$ giây. Tính chuyển vị của khung tại các thời điểm quy định trên.

Giải:

Như trên đã tính:

$$\omega_1 = 65,75 \text{ rad/sec} \quad ; \quad \omega_2 = 108,25\text{rad/sec} \quad ; \quad \omega_3 = 329,57\text{rad/sec}$$

Ma trận véc tơ riêng:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,068 & -3,05 & 0,21 \\ 0,023 & 0,00065 & -0,19 \end{bmatrix}$$

Theo (8.29) tính:

$$f_j = \sqrt{\{a_j\}^T [m] \{a_j\}}$$

$$f_1 = \sqrt{\{a_1\}.[m].\{a_1\}}$$

$$f_2 = \sqrt{\{a_2\}.[m].\{a_2\}}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và khai căn, ta được:

$$f_1 = 2,050$$
$$f_2 = 3,693$$
$$f_3 = 0,429$$

Lần lượt chia các véc tơ riêng $\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\}$ cho f_1, f_2, f_3, ta được ma trận mô đơ:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,488 & 0,271 & 2,330 \\ 0,033 & -0,826 & 0,490 \\ 0,011 & 0,0002 & -0,044 \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp kết cấu chịu tác dụng của tải trọng đặt đột ngột, phương trình dao động có dạng:

$$\ddot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = P_n \tag{11.40}$$

Trong đó: $P_i = \sum_{j=1}^{3} \Phi_{ji} F_j$ (11.41)

Căn cứ vào đề bài:

$$F_1 = 0 \quad ; \quad F_2 = -500\text{kN} \quad ; \quad F_3 = 0$$

Vậy:

$$P_1 = 0,488.0 + 0,003.(-500) + 0,011.0 = -16,460 \text{ kN}$$

$$P_2 = 0,271.0 + (-0,826).(-500) + 0,0002.0 = 412,943 \text{ kN}$$

$$P_3 = 2,330.0 + 0,490.(-500) + 0,004.0 = -244,757 \text{ kN}$$

Lời giải của phương trình (11.40) là:

$$Z_i = \frac{P_i}{\omega_i}(1 - \cos\omega_i t) \tag{11.42}$$

Vậy:

$$Z_1 = \frac{-16,46}{(65,75)^2}(1 - \cos 65,75t)$$

$$= -0,0038(1 - \cos 65,75t)$$

$$Z_2 = \frac{412,943}{(108,25)^2}(1 - \cos 108,25t)$$

$$= 0,0352(1 - \cos 108,25t)$$

$$Z_3 = \frac{-244,757}{(329,57)^2}(1 - \cos 329,57t)$$

$$= -0,0023(1 - \cos 329,57t)$$

Cuối cùng, chuyển vị tính theo công thức:

$$\{y\} = [\Phi]\{z\} \tag{11.43}$$

Hay:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,488 & 0,271 & 2,330 \\ 0,033 & -0,826 & 0,490 \\ 0,011 & 0,0002 & 0,044 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,0038(1 - \cos 65,75t) \\ 0,0352\,(1 - \cos 108,25t) \\ -0,0023(1 - \cos 329,75t) \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và tính chuyển vị tại các thời điểm quy định ở trên, ta được kết quả thống kê trong bảng (11.1)

Bảng 11.1

Thời gian t (giây)	Chuyển vị y_1 (cm)	Chuyển vị y_2 (cm)	Chuyển vị y_3 (rad)
0	0	0	0
0,01	- 0,006	- 0,018	0,0002
0,02	0,014	- 0,0046	$- 1,75 \times 10^{-5}$
0,03	0,006	- 0,060	0,0001
0,04	0,009	- 0,040	$- 5,31 \times 10^{-5}$
0,05	- 0,0092	- 0, 012	$8,87 \times 10^{-5}$
0,06	- 0,005	0,01	$- 3,25 \times 10^{-5}$
0,07	- 0,003	- 0,0023	0,001
0,08	0,012	- 0,051	$5,69 \times 10^{-5}$
0,09	0,0123	- 0,058	0,0001
0,10	0,006	- 0,035	0,00012

Ví dụ 11.3: Một khung như trên hình (11.7). Nó chịu tác dụng của một tải trọng điều hoà F_{01} = 100 sin20t trên phương tự do bậc 1 (xem hình vẽ). Hãy viết phương trình dao động của khung.

Giải:

Trong các ví dụ (11.1) và (11.2), ta đã tính được:

$$\omega_1 = 65,75 \text{ rad/sec} \qquad \omega_2 = 108,25\text{rad/sec} \qquad \omega_3 = 329,57\text{rad/sec}$$

Ma trận mô đơ:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,488 & 0,271 & 2,330 \\ 0,033 & -0,826 & 0,490 \\ 0,011 & 0,0002 & -0,044 \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp kết cấu chịu tác dụng của tải trọng điều hoà, phương trình dao động có dạng:

$$\ddot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = P_n \sin\overline{\omega}t \tag{11.44}$$

Trong đó: $P_i = \sum_{j=1}^{3} \Phi_{ji} F_{0j}$ (11.45)

Theo đầu đề, các biên độ tải trọng bằng

$$F_{01} = 10\text{kN} \qquad F_{02} = 0 \text{ kN} \qquad F_{03} = 0 \text{ kN}$$

Tần số tải trọng điều hòa: $\overline{\omega}$ = 20 rad/sec

Vậy:

$$P_1 = 0,488.100 + 0,033.0 + 0,011.0 = 48,8 \text{ kN}$$

$$P_2 = 0,271.100 + (-0,826).0 + 0,0002.0 = 27,10 \text{ kN}$$

$$P_3 = 2,330.100 + 0,490.0 - 0,004.0 = 233,0 \text{ kN}$$

Lời giải của (11.44) là:

$$Z_i = \frac{P_i \sin 20t}{\omega_i^2 - \overline{\omega}^2} \quad (i = 1,2,3) \tag{11.46}$$

Vậy:

$$Z_1 = \frac{48,8 \sin 20t}{(65,75)^2 - 20^2} = 0,0124 \sin 20t$$

$$Z_2 = \frac{27,10 \sin 20t}{(108,25)^2 - 20^2} = 0,0024 \sin 20t$$

$$Z_3 = \frac{233,0 \sin 20t}{(329,57)^2 - 20^2} = 0,0022 \sin 20t$$

Phương trình dao động có dạng:

$$\{y\} = [\Phi].\{z\} \text{ hay}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,488 & 0,271 & 2,330 \\ 0,033 & -0,826 & 0,490 \\ 0,011 & 0,0002 & -0,044 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0,0124\sin 20t \\ 0,0024\sin 20t \\ 0,0022\sin 20t \end{Bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$y_1 = 0,0117\sin 20t$$

$$y_2 = -0,00051\sin 20t$$

$$y_3 = 4,45 \times 10^5 \sin 20t$$

Chương 12
DAO ĐỘNG CỦA HỆ DẦM TRỰC GIAO

Hệ dầm trực giao là hệ trong đó các dầm giao nhau và tải trọng vuông góc với mặt phẳng của hệ. Trong trường hợp này, có 3 thành phần chuyển vị tại các nút: Chuyển vị thẳng trên phương trục z (vuông góc với hệ) và 2 chuyển vị xoay quanh trục x và trục y.

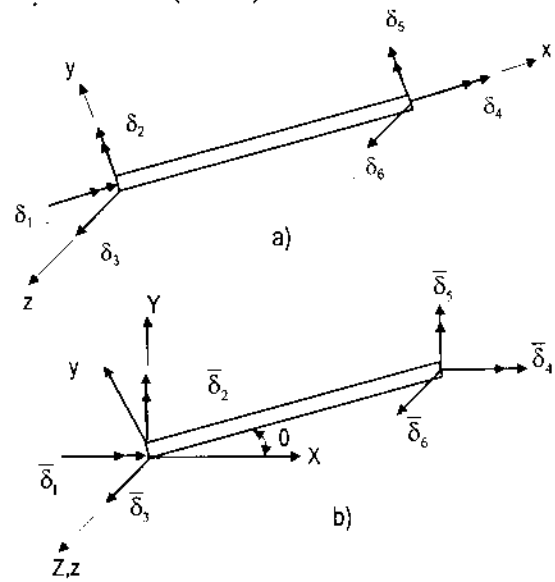
§12.1. Hệ toạ độ cục bộ và hệ toạ độ tổng thể

Hệ tọa độ cục bộ của dầm trực giao biểu thị trên hình (12.1a).

Trục x trùng với trục của dầm, trục y vuông góc với dầm và nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục z vuông góc với mặt phẳng của hệ dầm. Ta giả thiết trung tâm cắt của mặt cắt ngang trùng với trọng tâm của nó.

Hệ tọa độ tổng thể như trên hình (12.1b) trong đó các trục tọa độ được biểu thị bằng các chữ hoa X, Y, Z.

Ta nhận thấy rằng trục z trong hệ tọa độ cục bộ cùng phương với trục Z trong hệ tọa độ tổng thể.



Hình 12.1

§12.2. Ảnh hưởng của lực xoắn

Việc suy ra các hệ số độ cứng và hệ số khối lượng tương tự như đã làm đối với khung. Trong bài toán xét đến ảnh hưởng của lực dọc trong khung, từ (11.8), ta có phương trình vi phân của hàm chuyển vị như sau:

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$$

Một cách tương tự, phương trình vi phân của chuyển vị xoắn là:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{JG} \qquad (12.1)$$

Trong đó:

θ - chuyển vị xoắn;

T - mô men xoắn;

G - mô men đàn hồi cắt;

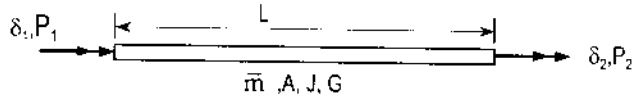
J - hằng số xoắn của mặt cắt ngang (mô men quán tính cực đối với mặt cắt hình tròn).

Vì tính chất tương tự giữa hai phương trình (11.8) và (12.1) ta có thể lợi dụng các kết quả đã suy ra khi xét đến ảnh hưởng của lực dọc. Hàm chuyển vị đối với lực xoắn cũng tương tự như hàm chuyển vị đối với lực dọc. Do đó, tương tự với các phương trình (11.10) và (11.11), ứng với các tọa độ nút trên hình (12.2), ta có:

$$\theta_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{12.2}$$

$$\theta_2(x) = \frac{x}{L} \tag{12.3}$$

Trong đó: Hàm chuyển vị xoắn $\theta_1(x)$ tương ứng với chuyển vị xoắn bằng đơn vị $\delta_1 = 1$ tại nút 1 ; hàm chuyển vị xoắn $\theta_2(x)$ tương ứng với chuyển vị xoắn bằng đơn vị $\delta_2 = 1$ tại nút 2.



Hình 12.2

Tương tự như phương trình (11.17), hệ số độ cứng khi xét đến lực xoắn có dạng như sau:

$$k_{ij} = \int_0^L JG\theta_i'(x)\theta_j'(x)dx \tag{12.4}$$

Trong đó: θ_1', θ_2' - các đạo hàm đối với x của các hàm chuyển vị $\theta_1(x)$ và $\theta_2(x)$.

Cũng tương tự như phương trình (11.23), hệ số khối lượng khi xét đến lực xoắn có dạng như sau:

$$m_{ij} = \int_0^L I_m\theta_i(x)\,\theta_j(x)dx \tag{12.5}$$

Trong đó: I_m - Mô men quán tính cực của khối lượng trên đơn vị dài của dầm. Mô men quán tính có thể tính bằng tích của khối lượng $\bar{m}$ trên đơn vị dài nhân với bình phương của bán kính quay k^2. Bán kính quay tính bằng tỷ số $\frac{I_0}{A}$. Do đó, mô men quán tính cực của khối lượng trên đơn vị dài I_m tính theo công thức:

$$I_m = \bar{m}\frac{I_0}{A} \tag{12.6}$$

Trong đó:

I_0 - Mô men quán tính cực của mặt cắt ngang;

A - Diện tích tiết diện.

Đối với dầm có mặt cắt không đổi, căn cứ vào phương trình (12.4) và (12.5), ta có các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng như sau:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \frac{JG}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \tag{12.7}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \frac{I_m L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{Bmatrix} \tag{12.8}$$

Trong đó: I_m - tính theo (12.6);

T_1, T_2 - các mô men xoắn tại các đầu dầm như trên hình (12.2).

§12.3. Ma trận độ cứng của một phần tử trong hệ dầm trực giao

Kết hợp ma trận độ cứng khi xét đến lực xoắn trong (12.7) với ma trận độ cứng khi xét đến lực uốn trong (10.20), ta có ma trận độ cứng của một phần tử trong hệ dầm trực giao trong hệ toạ độ cục bộ như sau:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{JGL^2}{EI} & & & & & \text{đối xứng} \\ 0 & 4L^2 & & & & \\ 0 & -6L & 12 & & & \\ \frac{JGL^2}{EI} & 0 & 0 & \frac{JGL^2}{EI} & & \\ 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 4L^2 & \\ 0 & 6L & -12 & 0 & 6L & 12 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \tag{12.9}$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \tag{12.10}$$

§12.4. Ma trận khối lượng của một phần tử trong hệ dầm trực giao khi xét đến lực uốn và lực xoắn

Kết hợp ma trận khối lượng khi xét đến lực uốn trong (10.34) với ma trận khối lượng khi xét đến lực xoắn trong (12.8), ta được ma trận khối lượng của một phần tử trong hệ dầm trực giao trong hệ tọa độ cục bộ như sau:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} \frac{140I_0}{A} & & & & & \\ 0 & 4L^2 & & \text{đối xứng} & & \\ 0 & 22L & 156 & & & \\ \frac{70I_0}{A} & 0 & 0 & \frac{140I_0}{A} & & \\ 0 & -3L^2 & -13L & 0 & 4L^2 & \\ 0 & 13L & 54 & 0 & -22L & 156 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \end{Bmatrix} \tag{12.11}$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{P\} = [M]\{\delta\} \tag{12.12}$$

Trong đó: [M] - ma trận khối lượng của một phần tử trong hệ dầm trực giao trong hệ tọa độ cục bộ.

§12.5. Ma trận khối lượng tập trung của một phần tử trong hệ dầm trực giao

Khối lượng tập trung tại các nút của một phần tử trong hệ dầm trực giao được xác định bằng phương pháp tĩnh học. Đối với một phần tử có mặt cắt không đổi và có khối lượng phân bố đều, khối lượng tập trung bằng một nửa toàn bộ khối quay $I_{\bar{m}}L$. Khi xét đến lực xoắn, ma trận khối lượng tập trung có dạng như sau:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \frac{I_{\bar{m}}L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} \tag{12.13}$$

Kết hợp với ma trận khối lượng tập trung khi xét đến lực xoắn trong (12.13) với ma trận khối lượng tập trung khi xét đến lực uốn, ta có hệ thức ma trận giữa các lực và gia tốc tại các nút như sau:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{2} \begin{bmatrix} \frac{I_0}{A} & & & & & \\ & 0 & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{I_0}{A} & & \\ & \mathbf{0} & & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \end{Bmatrix} \tag{12.14}$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{P\} = [M_L]\{\ddot{\delta}\} \tag{12.15}$$

Trong đó: $[M_L]$ - ma trận khối lượng tập trung của một phần tử trong hệ dầm trực giao.

§12.6. Sự biến đổi hệ tọa độ

Vì các phần tử của hệ dầm trực giao có các phương khác nhau nên mỗi phần tử có một hệ tọa độ riêng gọi là hệ tọa độ cục bộ. Các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng đã trình bày ở trên đều thuộc về hệ tọa độ cục bộ. Để ghép chúng lại với nhau, ta phải biến đổi hệ tọa độ cục bộ thành hệ tọa độ tổng thể. Như trên đã trình bày, trục z trong hệ tọa độ cục bộ cùng phương với trục Z trong hệ tọa độ tổng thể. Do đó, chỉ cần thực hiện một phép xoay trong mặt phẳng x - y.

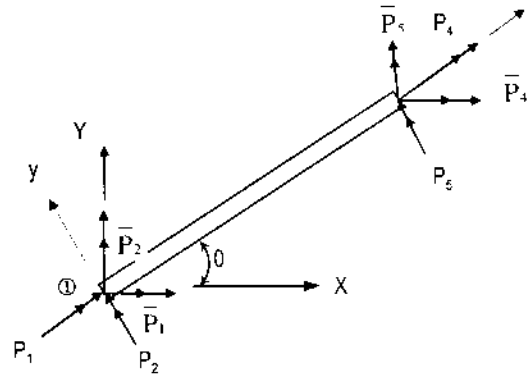
Hệ thức giữa các lực trong hệ tọa độ cục bộ và các lực trong hệ tọa độ tổng thể như sau (xem hình (12.3).

Tại nút 1:

$$P_1 = \overline{P}_1 \cos\theta + \overline{P}_2 \sin\theta$$

$$P_2 = -\overline{P}_1 \sin\theta + \overline{P}_2 \cos\theta$$

$$P_3 = \overline{P}_3 \qquad (12.11a)$$



Hình 12.3

Tại nút 2:

$$\overline{P}_4 = \overline{P}_4 \cos\theta + \overline{P}_5 \sin\theta$$

$$P_5 = -P_4 \sin\theta + P_5 \cos\theta \qquad (12.11b)$$

$$P_6 = \overline{P}_6$$

Các hệ thức (12.16) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \\ \overline{P}_3 \\ \overline{P}_4 \\ \overline{P}_5 \\ \overline{P}_6 \end{Bmatrix} \qquad (12.17)$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{P\} = [T]\{\overline{P}\} \qquad (12.18)$$

Trong đó: $\{P\}$ và $\{\overline{P}\}$ - các véc tơ lực tại các tọa độ nút trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể, [T] là ma trận biến đổi.

Một cách tương tự, véc tơ chuyển vị tại các nút trong hệ tọa độ cục bộ cũng có thể biểu thị qua véc tơ chuyển vị tại các nút trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\{\delta\} = [T]\{\overline{\delta}\} \qquad (12.19)$$

Trong đó:

$\{\delta\}$ và $\{\overline{\delta}\}$ - véc tơ chuyển vị tại các nút trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể.

Thay (12.18) và (12.19) vào (12.10), ta được:

$$[T]\{\overline{P}\} = [K][T]\{\delta\}$$

Vì [T] là ma trận trực giao nên:

$$\{\overline{P}\} = [T]^T [K][T]\{\overline{\delta}\}$$

Ta định nghĩa:

$$[\overline{K}] = [T]^T [K][T] \qquad (12.20)$$

là ma trận độ cứng tổng thể

Do đó: $\{P\} = [\overline{K}]\{\overline{\delta}\}$ (12.21)

Một cách tương tự, ta có:

$$\{\overline{P}\} = [\overline{M}]\{\ddot{\overline{\delta}}\} \qquad (12.22)$$

Trong đó: $[\overline{M}] = [T]^T [M][T]$ (12.23)

Với [M] - ma trận khối lượng trong hệ tọa độ tổng thể.

Ví dụ 12.1: Cho một hệ dầm trực giao với các đặc trưng hình học và cơ học như trên hình (12.4). Yêu cầu:

1. Lập các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn hệ
2. Tính các tần số vòng và véc tơ riêng

Giải:

Các BTD 3, 6, 9 vuông góc với mặt phẳng hình

Mô đun đàn hồi

$E = 14 \times 10^6$ kN/m^2

Diện tích $A = 0{,}02$m^2

Mô đun trượt

$G = 6{,}36 \times 10^6$ kN/m^2

Mô men quán tính $I = 2 \times 10^{-4}$m^4

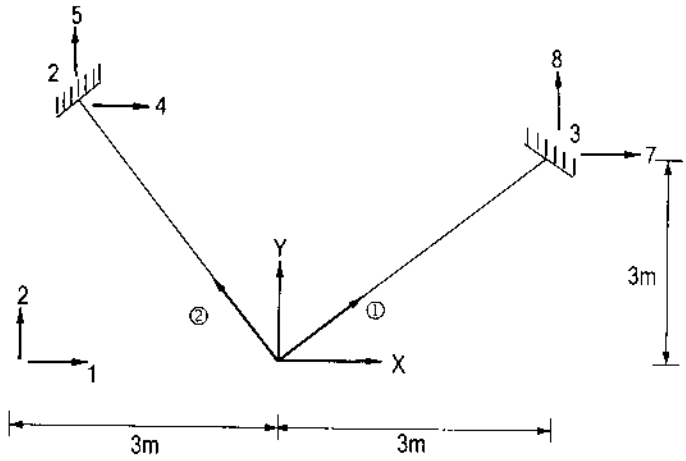
Mô men quán tính độc cực

$I_0 = 52 \times 10^{-6}$ m^4

Mô men xoắn $J = 30 \times 10^{-6}$ m^4

Khối lượng phân bố

m = 7850 kN scc^2/m



Hình 12.4

Giải:

1. Căn cứ vào (12.9), (12.17), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận độ cứng của các thanh trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

Thanh 1:

$$[S_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1297,45 & -1342,42 & 659,97 & -682,45 & -637,48 & -659,97 \\ & 1297,45 & -659,97 & 637,48 & 682,45 & 659,97 \\ & & 439,98 & -659,97 & -659,97 & -439,98 \\ & & & -1297,45 & -1342,42 & -659,97 \\ & & & & 1297,45 & 659,97 \\ \text{đối xứng} & & & & & 439,98 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Thanh 2:

$$[S_2] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1297,47 & -1342,42 & 659,97 & -682,45 & -637,48 & -659,97 \\ & 1297,45 & -659,97 & 637,48 & 682,45 & 659,97 \\ & & 439,98 & -659,97 & -659,97 & -439,98 \\ & & & -1297,45 & -1342,42 & -659,97 \\ & & & & 1297,45 & 659,97 \\ \text{đối xứng} & & & & & 439,98 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Ghép hai ma trận $[S_1]$ và $[S_2]$, ta được ma trận độ cứng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể:

$$[S] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2594,89 & -2684,84 & 1319,93 \\ & 2594,89 & -1319,93 \\ \text{đối xứng} & & 879,93 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Căn cứ vào (12.11), (12.17), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận khối lượng của các thanh trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

Thanh 1:

$$[m_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2840,26 & -286912 & -5233,6 & 0 & 0 & 0 \\ & 2840,26 & 5233,6 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12370,33 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Thanh 2

$$[m_2]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2840,26 & -2869,12 & -5233,6 & 0 & 0 & 0 \\ & 2840,26 & 5233,6 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12370,33 & 0 & 0 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Sau khi ghép hai ma trận $[m_1]$ và $[m_2]$, ta được ma trận khối lượng của toàn hệ trong hệ trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$[m]=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -5680,52 & -5738,25 & -10467,20 \\ & 5680,52 & 10467,20 \\ \text{đối xứng} & & 24740,66 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

2. Sau khi tìm nghiệm của phương trình đặc trưng (8.4)

$$\left|[S]-\lambda[m]\right|=0$$

Ta được:

Các giá trị riêng:

$$\lambda_1 = 3,089 \quad ; \quad \lambda_2 = 0,440 \quad ; \quad \lambda_3 = 0,0135$$

Vậy các tần số vòng tương ứng bằng:

$$\omega_1 = \sqrt{3,089} = 1,758\,\text{rad/sec}$$

$$\omega_2 = \sqrt{0,440} = 0,663\,\text{rad/sec}$$

$$\omega_3 = \sqrt{0,0135} = 0,116\,\text{rad/sec}$$

Thay các giá trị riêng đã tính được vào phương trình (8.3)

$$\left[[S]-\lambda[m]\right].\{a\}=0$$

Ta được véc tơ riêng:

$$[a_1]=\begin{Bmatrix} 1 \\ -339,398 \\ 151,240 \end{Bmatrix} \qquad [a_2]=\begin{Bmatrix} 1 \\ -3,3913 \\ -0,107 \end{Bmatrix} \qquad [a_3]=\begin{Bmatrix} 1 \\ 57,457 \\ -100,915 \end{Bmatrix}$$

Các chỉ số 1, 2, 3 lần lượt ứng với các tần số vòng ω_1, ω_2, ω_3 và ứng với các cột thứ nhất, thứ hai, thứ ba của ma trận véc tơ.

Vậy ma trận véc tơ riêng có dạng:

$$[a]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 339,398 & -3,913 & 57,457 \\ 151,240 & -0,107 & -100,915 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 12.2: Một dầm trực giao như trên hình (12.4). Nó chịu tác dụng của một tải trọng đột ngột F_3= -500kN trên phương bậc tự do thứ 3 (vuông góc với hình vẽ). Giả sử có 10 quãng thời gian với số gia thời gian $\Delta t = 0{,}01$ giây. Hãy tính chuyển vị của hệ tại các thời điểm nói trên.

Giải:

Trong ví dụ (11.2), ta đã tính được:

$\omega_1 = 1{,}758$ rad/sec $\qquad \omega_2 = 0{,}663$rad/sec $\qquad \omega_3 = 0{,}116$

Ma trận véc tơ riêng:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 339{,}398 & -3{,}913 & 57{,}457 \\ 151{,}240 & -0{,}107 & -100{,}915 \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (8.29), tính:

$$f_j = \sqrt{\{a_j\}^T [m].\{a_j\}} \qquad j = 1,2,3$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$f_1 = 370{,}800$$
$$f_2 = 370{,}800$$
$$f_3 = 19871{,}026$$

Lần lượt chia các véc tơ cột $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$ cho f_1, f_2, , f_3, ta được ma trận mô đơ như sau:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 8{,}265\times10^{-5} & 0{,}0027 & 5{,}032\times10^{-5} \\ -0{,}028 & -0{,}011 & -0{,}003 \\ 0{,}012 & 0{,}0003 & 0{,}005 \end{bmatrix}$$

Theo (11.40), phương trình dao động có dạng

$$\ddot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = P_n$$

Trong đó: $P_i = \sum_{j=1}^{3} \Phi_{ji} F_j$

Theo đầu đề, các tải trọng như sau:

$F_1 = 0 \qquad F_2 = 0 \qquad F_3 = -500$kN

Vậy:

$$P_1 = 8{,}625\times10^{-5}\times0 - 0{,}028\times0 + 0{,}0012\times(-500) = -6{,}25 \text{ kN}$$
$$P_2 = 0{,}0027\times0 - 0{,}011\times0 + 0{,}0003\times(-500) = -0{,}144 \text{ kN}$$
$$P_3 = 5{,}032\times10^{-5}\times0 - 0{,}003\times0 - 0{,}005\times(-500) = 2{,}539 \text{ kN}$$

Theo (11.42)

$$Z_i = \frac{P_i}{\omega_i^2}\left(1-\cos\omega_i t\right) \quad i = 1,2,3$$

$$Z_1 = \frac{-6,25}{(1,758)^2}\left(1-\cos(1,758t)\right) = -2,022(1-\cos(1,758t)$$

$$Z_2 = \frac{0,144}{(0,663)^2}\left(1-\cos(0,663t)\right) = 0,328(1-\cos(0,663t)$$

$$Z_3 = \frac{2,539}{(0,116)^2}\left(1-\cos(0,116t)\right) = 188,708(1-\cos(0,116t)$$

Theo (11.43):

$$\{y\} = [\Phi].\{z\}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,265\times10^{-5} & 0,0027 & 5,032\times10^{-5} \\ -0,028 & -0,011 & -0,003 \\ 0,012 & 0,0003 & 0,005 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -2,022\left(1-\cos(1,758t)\right) \\ 0,328\left(1-\cos(0,663t)\right) \\ 188,708\left(1-\cos(0,116t)\right) \end{Bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và tính toán, ta được các giá trị chuyển vị tại các thời điểm quy định ở trên. Kết quả thống kê trong bảng (12.1).

Bảng 12.1

Thời gian t (giây)	Chuyển vị y_1 (radian)	Chuyển vị y_2 (radian)	Chuyển vị y_3 (m)
0	0	0	0
0,01	$1,89 \times 10^{-11}$	$8,32 \times 10^{-6}$	$-4,55 \times 10^{-6}$
0,02	$8,31 \times 10^{-11}$	$3,33 \times 10^{-5}$	$-1,82 \times 10^{-5}$
0,03	$2,14 \times 10^{-10}$	$7,49 \times 10^{-5}$	$-4,09 \times 10^{-5}$
0,04	$4,46 \times 10^{-10}$	0,0001	$-7,28 \times 10^{-5}$
0,05	$8,30 \times 10^{-10}$	0,0002	- 0,0001
0,06	$1,43 \times 10^{-9}$	0,0003	- 0,0002
0,07	$2,32 \times 10^{-9}$	0,0004	- 0,00022
0,08	$3,61 \times 10^{-6}$	0,0005	- 0,0003
0,09	$5,38 \times 10^{-9}$	0,0007	- 0,0004
0,10	$7,76 \times 10^{-9}$	0,0008	- 0,0005

Ví dụ 12.3: Một khung như trên hình (12.4). Nó chịu tác dụng của một tải trọng điều hòa F_{03} = -100sin20t trên phương bậc tự do thứ ba (vuông góc với mặt phẳng hình vẽ). Hãy viết phương trình dao động của hệ dầm trực giao.

Giải:

Trong các ví dụ (12.1) và (12.2), ta đã tính được:

$\omega_1 =$ 1,758 rad/sec ; $\omega_2 =$ 0,663rad/sec ; $\omega_3 =$ 0,116 rad/sec

Ma trận mô đơ:

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} 8,625\times10^{-5} & 0,0027 & 5,032\times10^{-5} \\ -0,028 & -0,011 & -0,003 \\ 0,012 & 0,0003 & 0,005 \end{bmatrix}$$

Theo (11.44) phương trình dao động có dạng:

$$\ddot{Z}_n+\omega_n^2 Z_n=P_n\sin\overline{\omega}t$$

Trong đó: $P_i=\sum_{j=1}^{3}\Phi_{ji}F_{0j} \quad i=1,2,3$

Theo đầu đề:

$$F_{01}=0 \quad ; \quad F_{02}=0 \quad ; \quad F_{03}=-100kN$$

Vậy:

$$P_1=8,625\times10^{-5}\times0-0,028\times0+0,012\times(-100)=-1,25$$
$$P_2=0,0027\times0-0,011\times0-0,0003\times(-100)=0,029$$
$$P_3=5,032\times10^{-5}\times0-0,003\times0-0,005\times(-100)=0,508$$

Theo (11.36):

$$Z_i=\frac{P_i\sin\overline{\omega}t}{\omega_i^2-\overline{\omega}^2}$$

Vậy:

$$Z_1=\frac{-1,25\sin20t}{(1,758)^2-(20)^2}=0,003\sin20t$$
$$Z_2=\frac{0,029\sin20t}{(0,663)^2-(20)^2}=-7,22\times10^{-5}\sin20t$$
$$Z_3=\frac{0,508\sin20t}{(0,116)^2-(20)^2}=-0,001$$

Theo (11.47), phương trình dao động như sau:

$$\{y\}=[\Phi].\{z\}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 8,625\times10^{-5} & 0,0027 & 5,032\times10^{-5} \\ -0,028 & -0,011 & -0,003 \\ 0,012 & 0,0003 & 0,005 \end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix} 0,003\sin20t \\ -7,22\times10^{-5}\sin20t \\ -0,001\sin20t \end{Bmatrix}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận, ta được:

$y_1 = 1,61 \times 10^{-9} \sin 20t$ (rad)

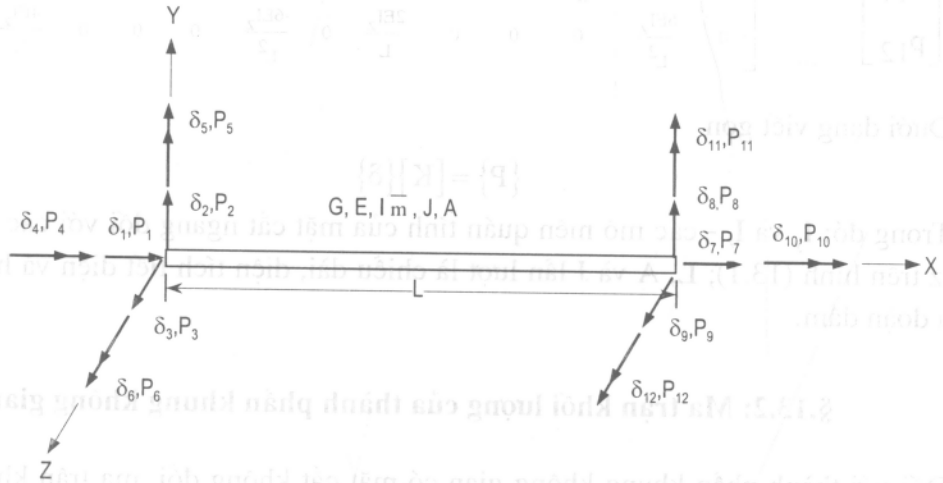
$y_2 = -8,39 \times 10^{-5}\sin 20t$(rad)

$y_3 = 4,58 \times 10^{-5} \sin 20t$ (m)

Chương 13
DAO ĐỘNG CỦA KHUNG KHÔNG GIAN

Những kết quả nhiên cứu trong các chương mười một và mười hai có thể mở rộng trong chương này. Ta nhận thấy rằng khung phẳng cũng như hệ dầm trực giao có 3 BTD ở mỗi nút. Khung không gian có 6 BDT tại mỗi nút: 3 thành phần chuyển vị trên phương 3 trục x, y, z và 3 thành phần góc xoay quanh các trục nói trên. Vì vậy, mỗi phần tử của khung không gian có tất cả 12 BTD, bài toán trở nên phức tạp và đòi hỏi nhiều thời gian tính toán. Tuy nhiên, cách nghiên cứu cũng tương tự như đã trình bày trong các chương trước.

§13.1. Ma trận độ cứng của một thành phần của khung không gian



Hình 13.1

Các thành phần lực và thành phần chuyển vị của một thành phần khung không gian biểu thị trên hình (13.1). Số thứ tự các thành phần chuyển vị được đánh số trước, các thành phần góc xoay được đánh số sau, tiếp đến nút thứ hai cũng làm tương tự như trên. Trên hình (13.1) các mũi tên đơn áp dụng cho các thành phần chuyển vị thẳng.

Đối với thành phần khung không gian có mặt cắt không đổi, ma trận độ cứng là sự kết hợp giữa ma trận độ cứng của khung phẳng (phương trình 11.3), ma trận độ cứng của hệ dầm trực giao (phương trình12.6) và ma trận độ cứng của dầm (phương trình 10.20). Ma trận độ cứng uốn được dùng đến 2 lần đối với thành phần khung không gian để xét đến các hiệu quả uốn trong hai mặt phẳng chính của mặt cắt ngang. Bằng cách kết hợp nói trên, ta có ma trận độ cứng của một thành phần khung không gian có mặt cắt không đổi như sau:

$$
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}
= \frac{\overline{m}L}{420}
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & & & & & & \\
\frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & \\
0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & \\
0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \\ \ddot{\delta}_7 \\ \ddot{\delta}_8 \\ \ddot{\delta}_9 \\ \ddot{\delta}_{10} \\ \ddot{\delta}_{11} \\ \ddot{\delta}_{12} \end{bmatrix}
$$

đối xứng

Dưới dạng viết gọn

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \tag{13.2}$$

Trong đó: I_y và I_z - các mô men quán tính của mặt cắt ngang đối với các trục chính y và z trên hình (13.1); L, A và J lần lượt là chiều dài, diện tích tiết diện và hằng số xoắn của đoạn dầm.

§.13.2: Ma trận khối lượng của thành phần khung không gian

Đối với thành phần khung không gian có mặt cắt không đổi, ma trận khối lượng tập trung là một ma trận chéo. Trong đó chỉ xét đến các chuyển vị thẳng và chuyển vị xoắn, không xét đến chuyển vị xoay do uốn.

Ma trận khối lượng tập trung đối với đoạn dầm có mặt cắt không đổi, với khối lượng phân bố $\overline{m}$ và mô men quán tính cực của khối lượng $I_m = \frac{mI_0}{A}$ trên đơn vị dài như sau:

$$[M_L] = \frac{\overline{m}L}{2}\left[1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{I_0}{A} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{I_0}{A} \quad 0 \quad 0\right] \tag{13.3}$$

Trong đó I_0 là mô men quán tính cực mặt cắt ngang có diện tích A.

Đối với thành phần khung không gian có mặt cắt không đổi, ma trận khối lượng có xét đến lực dọc, lực xoắn và lực uốn được xác định bằng cách kết hợp các phương trình (11.26) ,(11.8) và (10.34):

$$
\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix}
= \frac{\bar{m}L}{420}
\begin{bmatrix}
140 & & & & & & & & & & & \\
0 & 156 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 156 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 140I_0/A & & & & & & & & \\
0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & & & & & & & \\
0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & & & & & & \\
70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & & & \\
0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & & & & \\
0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & & & \\
0 & 0 & 0 & 70I_0/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140I_0/A & & \\
0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & \\
0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \\ \ddot{\delta}_7 \\ \ddot{\delta}_8 \\ \ddot{\delta}_9 \\ \ddot{\delta}_{10} \\ \ddot{\delta}_{11} \\ \ddot{\delta}_{12} \end{bmatrix}
\quad (13.4)
$$

đối xứng

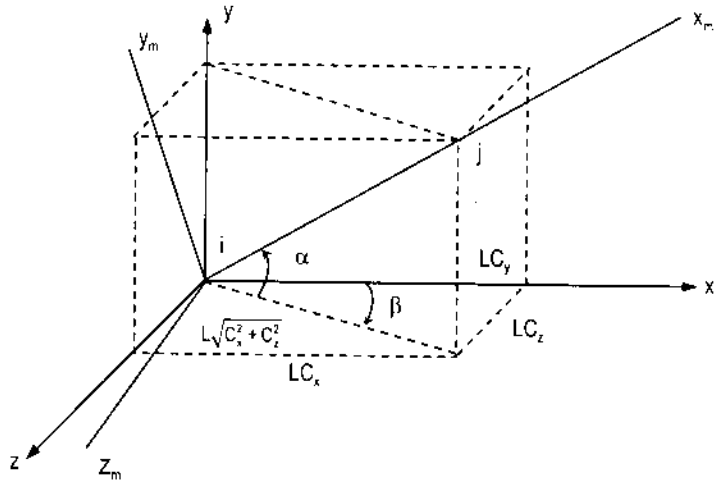
Dưới dạng viết gọn: $\{P\} = [M]\{\ddot{\delta}\}$ (13.5)

§.13.3. Ma trận cản của một thành phần khung không gian

Ma trận cản của một thành phần khung không gian có thể suy ra tương tự như ma trận độ cứng (13.1) và ma trận khối lượng (13.4). Tuy nhiên, như trong phần trước đã nói, lực cản thường được biểu thị qua các tỷ số cản đối với mỗi mô đơ dao động. Vì vậy, các tỷ số cản được trực tiếp đưa vào phương trình mô đơ.

§13.4. Ma trận xoay (Ma trận biến đổi)

Ta có thể suy ra ma trận xoay bằng cách ứng dụng các nguyên lý về đại số véc tơ hoặc dùng phương pháp xoay dần các trục tọa độ. Ở đây, ta sẽ dùng phương pháp thứ hai.



Hình 13.2. Vị trí bất kỳ của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ tổng thể

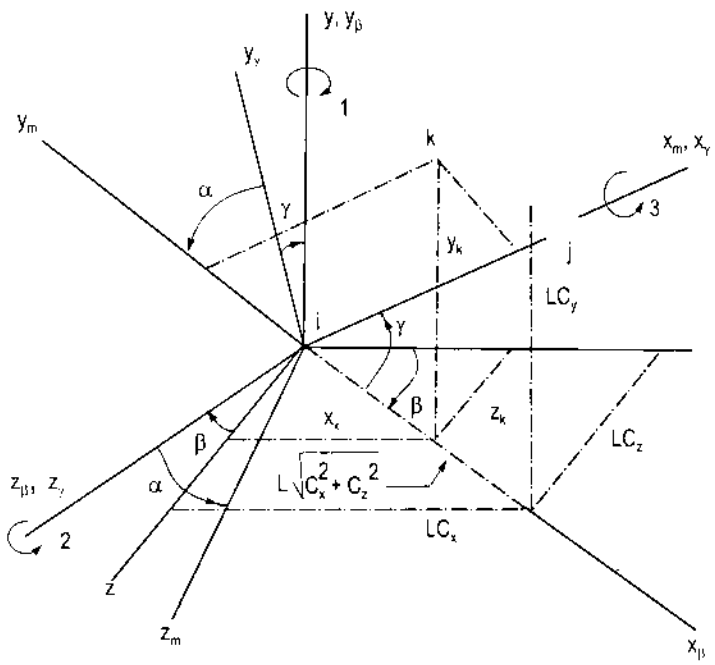
Hình 13.2 trình bày vị trí bất kỳ của trục dầm 3 chiều x_m và các quan hệ hình học trong hệ tọa độ tổng thể x, y, z.

Các trục của hệ tọa độ tổng thể sẽ được xoay dần quanh các trục y, z, x sao cho cuối cùng, hệ tọa độ tổng thể hoàn toàn trùng với hệ tọa độ cục bộ.

Quá trình xoay các trục tọa độ biểu thị trên hình (13.3). Trước hết, ta xoay trục x quanh trục y một góc β. Như vậy, trục x có vị trí mới là trục x_β, trục này là hình chiếu của trục dầm x_m lên mặt phẳng x- z. Nói một cách khác trục x_β bây giờ là giao tuyến giữa mặt phẳng y - x_m và mặt phẳng x -z Bằng cách xoay như vậy, trục z chiếm vị trí trục z_β còn trục y vẫn không thay đổi. Các thành phần véc tơ A_1, A_2, A_3 trong hệ tọa độ x, y, z có thể tổ hợp thành véc tơ $A_{1\beta}$, $A_{2\beta}$, $A_{3\beta}$ trong hệ tọa độ mới x_β, y_β, z_β theo hệ thức sau:

$$\begin{Bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \tag{13.6}$$

Trong đó, cos β và sinβ có thể biểu thị bằng các côsin định hướng của trục dầm x_m đối với các trục x, y, z như sau:



Hình 13.3. *Phương pháp xoay dần các trục tọa độ*

$$\cos\beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \tag{13.7}$$

$$\sin\beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \tag{13.8}$$

$$C_x = \frac{x_j - x_i}{L}, C_y = \frac{y_j - y_i}{L}, C_z = \frac{z_j - z_i}{L} \tag{13.9}$$

$$L = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2} \tag{13.10}$$

Trong đó: C_x, C_z - côsin định hướng của trục dầm x_m đối với các trục x và z;

x_i, x_j - tọa độ của điểm i và j trên tục x;

y_j, y_i - tọa độ của điểm i và j trên tục y;

z_i, z_j - tọa độ điểm i và j trên trục z;

L - chiều dài của dầm ij.

Sau khi xoay quanh trục y một góc β, từ (13.6), ta có ma trận biến đổi hoặc ma trận xoay:

$$\left[T_\beta\right] = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \tag{13.11}$$

Tiếp tục xoay các trục x_β, y_β quanh trục z_β một góc γ sao cho trục x_β trùng với trục dầm x_m, trục y_β (tức trục y) dời đến vị trí trục y_γ, trục z_β không thay đổi ; lúc bấy giờ, mặt phẳng y_γ- z_γ chứa các trục y_m và z_m của dầm 3 chiều. Các thành phần véc tơ $A_{1\gamma}$, $A_{2\gamma}$, $A_{3\gamma}$ trên phương các trục mới x_γ, y_γ, z_γ như sau:

$$\begin{Bmatrix} A_{1\gamma} \\ A_{2\gamma} \\ A_{3\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{Bmatrix} \tag{13.12}$$

Vậy sau khi xoay góc γ, căn cứ vào (13.12), ta có ma trận biến đổi:

$$\left[T_\gamma\right] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13.13}$$

Các số hạng trong (13.13) là các côsin định hướng của các trục x_γ,y_γ,z_γ đối với các trục x_β, y_β, z_β. Từ hình (13.3), ta có:

$$\cos\gamma = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \tag{13.14}$$

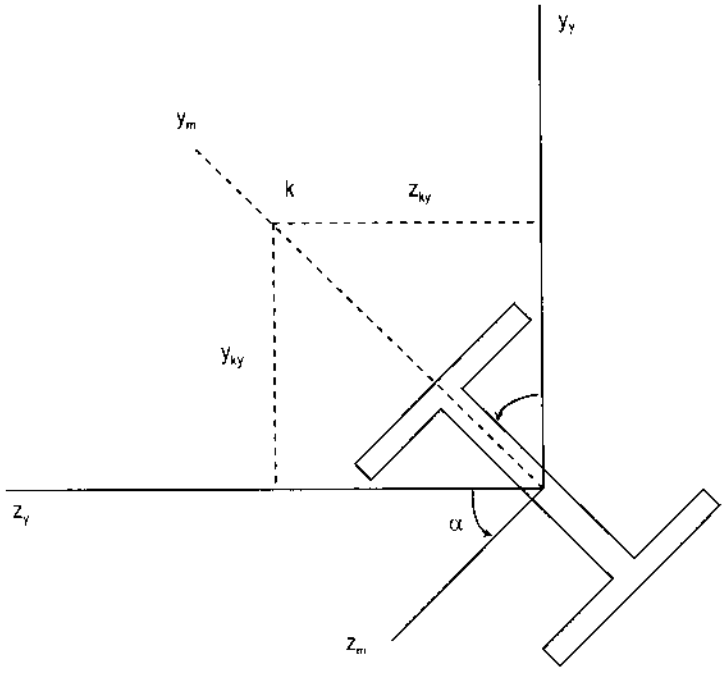
$$\sin\gamma = C_y$$

Vậy $[T_\gamma]$ có thể viết: -

$$\left[T_\gamma\right]=\begin{bmatrix}\sqrt{C_x^2+C_z^2} & C_y & 0\\ -C_y & \sqrt{C_x^2+C_z^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (13.15)$$

Cuối cùng, ta xoay quanh trục x_m các trục y_γ, z_γ một góc α sao cho trục y_γ trùng với trục y_m và trục z_γ trùng với trục x_m hình (13.3).

Hình 13.4 cho ta thấy mặt cắt ngang của dầm cùng vị trí của các trục y_m và z_m, trục x_m vuông góc với mặt phẳng của tờ giấy.



Hình 13.4

Mặt phẳng x_m - y_m là một mặt phẳng thẳng đứng đi qua trục dầm và xác định góc giữa $y_\gamma$và y_m hoặc góc giữa z_γ và z_m (tức là góc α được đo từ mặt phẳng đó đến một trong các trục chính của mặt cắt ngang hình 13.4).

Cuối cùng, các thành phần véc tơ A_{1m}, A_{2m}, A_{3m} trên các trục x_m, y_m, z_m được biểu thị bằng các thành phần véc tơ $A_{1\gamma}$, $A_{2\gamma}$, $A_{3\gamma}$ trên các trục x_γ, y_γ, z_γ như sau:

$$\begin{Bmatrix}A_{1m}\\ A_{2m}\\ A_{3m}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{1\gamma}\\ A_{2\gamma}\\ A_{3\gamma}\end{Bmatrix} \qquad (13.16)$$

Sau khi xoay góc α, căn cứ vào (13.16), ta có ma trận biến đổi:

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{13.17}$$

Các phần tử trong (13.17) là các côsin định hướng của các trục x_m, y_m, z_m đối với các trục x_γ, y_γ, z_γ (hình 13.3).

Kết hợp các phương trình (13.11), (1313), (13.15), các thành phần véc tơ trong hệ tọa độ cục bộ x_m,y_m, z_m có thể biểu thị bằng các thành phần véc tơ trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\{A_m\} = [T_\alpha].[T_\gamma].[T_\beta].\{A\} \tag{13.18}$$

$$\{A_m\} = [T].\{A\}$$

Trong đó: $[T] = [T_\alpha].[T_\gamma].[T_\beta]$; (13.20)

$\{A_m\}$ là véc tơ cột biểu thị các thành phần véc tơ trong hệ tọa độ cục bộ ;$\{A\}$ là véc tơ cột biểu thị các thành phần véc tơ trong hệ tọa độ tổng hể. Các thành phần véc tơ ở đây có thể là chuyển vị hoặc tải trọng.

Thay (13.11), (13.13), (13.15) vào (13.20), ta có:

$$[T] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \dfrac{-C_xC_y\cos\alpha - C_z\sin\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & \sqrt{C_x^2+C_z^2}\cos\alpha & \dfrac{-C_yC_z\cos\alpha + C_x\sin\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \\ \dfrac{-C_xC_y\sin\alpha - C_z\cos\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2+C_z^2}\sin\alpha & \dfrac{C_yC_z\sin\alpha + C_x\cos\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \end{bmatrix} \tag{13.21}$$

Từ (13.18), ta có thể viết: $\{A_m\} = [T].\{A\}$ (13.22)

Trong đó [T] là ma trận biến đổi cấp 3 × 3

Trong ma trận biến đổi [T] trong (13.21), chỉ còn góc α là chưa được xác định. Để làm điều này, ta chọn một điểm k nằm trong mặt phẳng x_m- y_m nhưng không nằm trên trục x_m (hình 13.3 và 13.4). Giả sử tọa độ của điểm k trong hệ tọa độ tổng thể là x_K, y_K, z_K. Các thành phần của véc tơ ik trong hệ tọa độ tổng thể là:

$$x_{Ki} = x_K - x_i \tag{10.24}$$

$$y_{Ki} = y_K - y_i$$

$$z_{Ki} = z_K - z_i$$

Giả sử $x_{k\gamma}$, $y_{k\gamma}$, $z_{k\gamma}$ là các hình chiếu của véc tơ ik trên các trục x_γ, y_γ, z_γ. Áp dụng hai phép biến đổi đầu tiên, ta có hệ thức:

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = \left[T_\gamma\right].\left[T_\beta\right].\begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \qquad (13.25)$$

Sau khi đơn giản hóa:

$$x_{k\gamma} = C_x x_{ki} + C_y y_{ki} + C_z z_{ki}$$

$$y_{k\gamma} = -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}.x_{ki} + \sqrt{C_x^2 + C_z^2}.y_{ki} - \frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}.z_{ki} \qquad (13.26)$$

$$z_{k\gamma} = \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}.x_{ki} + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}.z_{ki}$$

Như vậy ta đã xác định được tọa độ $y_{k\gamma}$, $z_{k\gamma}$ của điểm k trong mặt phẳng y_m - z_m. Từ hình (13.4), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{Z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \qquad (13.27a)$$

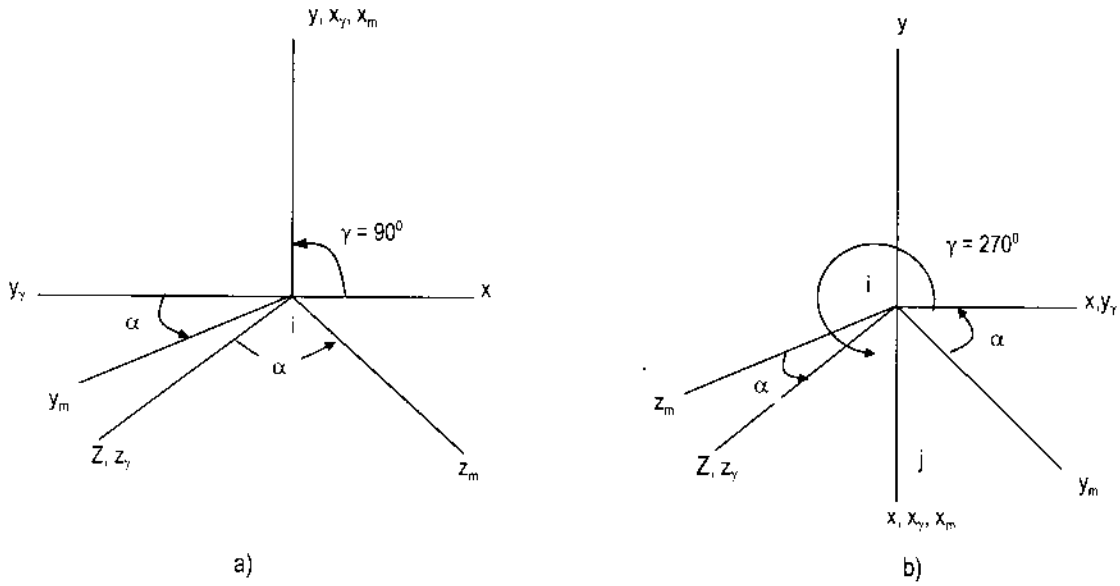
$$\cos\alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \qquad (13.27b)$$

Trong đó, $y_{k\gamma}$ và $z_{k\gamma}$ tính theo (13.26). Vậy là ma trận biến đổi [T] trong (13.21) hoàn toàn được xác định.

Cần chú ý rằng hệ thức nói trên không thể áp dụng cho trường hợp trục của dầm 3 chiều x_m nằm trên phương thẳng đứng nghĩa là song song với trục y trong hệ tọa độ tổng thể.

Trong trường hợp này (hình 13.5), C_x và C_z đều triệt tiêu, điều này không thể đưa đến những kết quả chính xác.

Sau đây, ta xét 2 trường hợp: Trục x_m cùng chiều với trục y và x_m ngược chiều với trục y. Ta thực hiện 2 phép xoay: Trước hết, xoay 1 góc $\gamma = 90^0$ (hình 13.5a) hoặc $\gamma = 270^0$ (hình 13.5b). Khi $\gamma = 90^0$, trục x trùng với trục x_m (thẳng đứng) và trục y chuyển đến vị trí y_γ, $C_y = 1$(hình 13.5a). Khi $\gamma = 270^0$, trục x trùng với trục x_m (ngược chiều với trục y), trục y chuyển đến vị trí trục y_γ, $C_y = -1$. Tiếp theo, quay một góc α quanh trục x_m để trục y_γ trùng với trục y_m và trục z trùng với trục z_m.



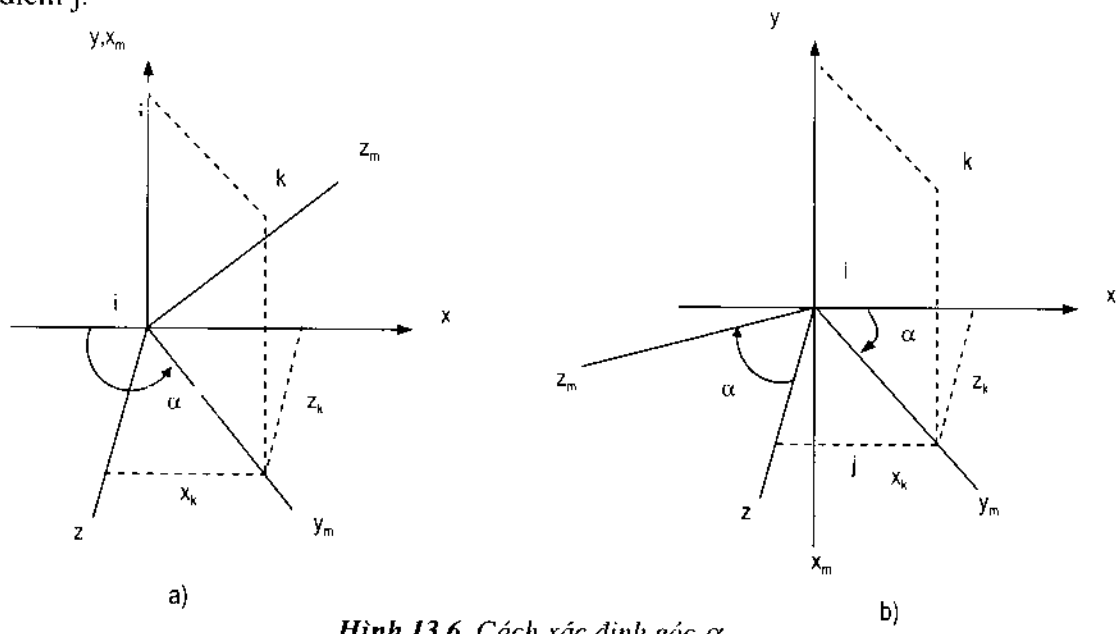
Hình 13.5

a) Trục dầm cùng chiều với trục y ; b) Trục dầm ngược chiều với trục y

Từ hình (13.5), ta có ma trận biến đổi

$$[T\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ C_y \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (13.28)$$

Góc α trong (13.28) được xác định bằng cách tìm vị trí của điểm k nằm trong mặt phẳng uốn chính. Hình (13.6a) biểu thị một thanh đứng có nút dưới tại điểm i và nút trên tại điểm j.



Hình 13.6. *Cách xác định góc α*

Tọa độ của điểm k trên hình (13.6a) đều dương và góc α nằm giữa 90^0 và 180^0. Từ quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \tag{13.29}$$

Hình (13.6b) biểu thị một thanh đứng có nút trên là i và nút dưới là j. Trong trường hợp này, các tọa độ của điểm k đều dương và góc α nằm giữa 0^0 và 90^0. Từ các quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \tag{13.30}$$

Kết hợp (13.29) và (13.30), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} C_y \tag{13.31}$$

Trong đó C_y là côsin định hướng của thanh ij đối với trục y. Nó có giá trị bằng +1 (hình 13.6a) hoặc bằng -1 (hình 13.6b).

Thay các giá trị sinα và cosα từ (13.31) vào (13.28), ta xác định được ma trận biến đổi [T] cấp 3 x 3 trong trường hợp đặc biệt trục dầm song song với trục y của hệ tọa độ tổng thể.

Đối với một đoạn dầm trong khung không gian, sự biến đổi các véc tơ chuyển vị dẫn đến sự biến đổi véc tơ chuyển vị thẳng và véc tơ chuyển vị xoay tại mỗi nút. Vì vậy đối với một đoạn dầm trong khung không gian, cần biến đổi 4 véc tơ chuyển vị tại 2 đầu dầm. Hệ thức giữa các chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ và véc tơ chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể là:

$$\{\delta\} = [R]\{\bar{\delta}\} \tag{13.32}$$

Vì ở hai đầu dầm có tất cả 4 véc tơ chuyển vị (2 véc tơ chuyển vị thẳng và 2 véc tơ chuyển vị xoay) nên ma trận biến đổi [R] có dạng:

$$[R] = \begin{bmatrix} [T] & & & 0 \\ & [T] & & \\ & & [T] & \\ 0 & & & [T] \end{bmatrix} \tag{13.33}$$

[R] có bậc 12 × 12.

[R] gọi là ma trận xoay hoặc ma trận biến đổi.

Một cách tương tự, hệ thức giữa véc tơ lực trong hệ tọa độ cục bộ và véc tơ lực trong hệ tọa độ tổng thể, có dạng:

$$\{P\} = [R]\{\bar{P}\} \tag{13.34}$$

Cuối cùng, để được ma trận độ cứng $\left[\overline{K}\right]$ và ma trận khối lượng $\left[\overline{M}\right]$ trong hệ tọa độ tổng thể, ta thay $\{\delta\}$ từ (13.32) và $\left[\overline{P}\right]$ từ (13.34) vào (13.2):

$$[R]\{\overline{P}\} = [K][R]\{\overline{\delta}\} \tag{13.35}$$

Hay

$$\{\overline{P}\} = [R]^{-1}[K][R]\{\overline{\delta}\}$$

Vì [R] là một ma trận trực giao nên $[R]^{-1} = [R]^T$

Từ (13.35), có thể viết:

$$\{\overline{P}\} = \left[\overline{K}\right]\{\overline{\delta}\} \tag{13.36}$$

Trong đó:

$$\left[\overline{K}\right] = [R]^T[K][R] \tag{13.37}$$

$\left[\overline{K}\right]$ gọi là ma trận độ cứng tổng thể.

Một cách tương tự, ta có ma trận khối lượng tổng thể:

$$\left[\overline{M}\right] = [R]^T[M][R] \tag{13.38}$$

Ma trận cản tổng thể

$$\left[\overline{C}\right] = [R]^T[C][R] \tag{13.39}$$

§13.5. Phương trình vi phân chuyển động

Các ma trận độ cứng (13.37), ma trận khối lượng (13.38), ma trận cản (13.39) trong hệ tọa độ tổng thể sẽ được ghép như đã làm trong các chương trước. Cuối cùng, phương trình vi phân chuyển động sẽ được thành lập trên điều kiện cân bằng giữa các lực quán tính, lực đàn hồi, lực cản và ngoại lực.

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + K\{y\} = [F(t)] \tag{13.40}$$

Trong đó:

[M], [C], [K] lần lượt là các ma trận khối lượng tổng thể, ma trận cản tổng thể và ma trận độ cứng tổng thể;

$\{\ddot{y}\}, \{\dot{y}\}, \{y\}$ lần lượt là véc tơ gia tốc, véc tơ vận tốc, véc tơ chuyển vị ;

$\{F(t)\}$ là véc tơ lực bao gồm các lực đặt tại các nút, lực tương đương tại các nút trong trường hợp ngoại lực có tính chất phân bố.

Nếu phương trình vi phân chuyển động có tính chất tuyến tính, ta giải bài toán véc tơ riêng để đưa các phương trình vi phân về dạng phương trình độc lập như đã làm trong phần trước. Nếu là dao động tự do, chỉ cần giải bài toán giá trị riêng và xác định các dạng mô đơ.

Ví dụ 13.1: Một khung không gian cùng các đặc trưng hình học và cơ học biểu thị trên hình (13.7). Hãy lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể.

Số thanh st = 3

Số bậc tự do sbt = 6

Mô đun đàn hồi $E = 21\times10^3$ kN/cm^2

Mô men quán tính

$mqx = 2{,}67cm^4$

$mqy = 2{,}33cm^4$

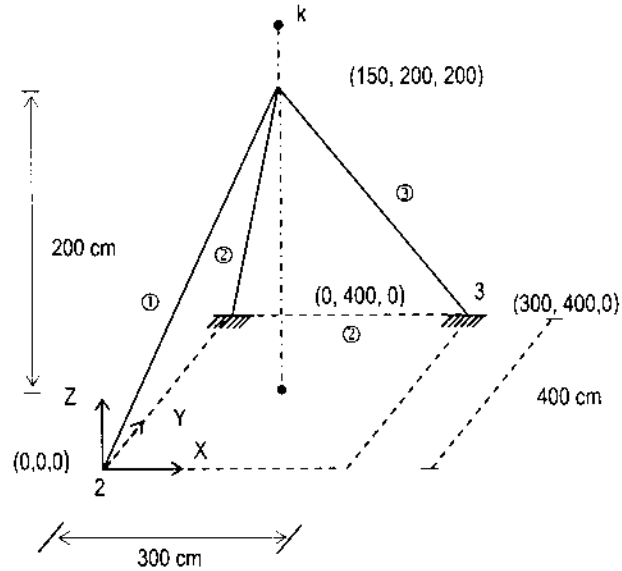
$mqz = 1{,}33cm^4$

Mô đun xoắn $J = 3000$ cm^4

Mô men quán tính độc cực $I_0 = 5200$ cm^4

Khối lượng phân bố

$\overline{m} = 0{,}00785$ kN sec^2/cm



Hình 13.7

Giải:

Đây là bài toán phức tạp, đòi hỏi nhiều thời gian tính toán, do đó không thể tính bằng tay mà phải nhờ vào sự hỗ trợ của chương trình tính. Dựa vào chương trình PGR12 và PGR13, nhập các số liệu và cho chạy chương trình để được kết quả. Máy tính sẽ lần lượt thực hiện các bước sau:

1. Lập ma trận độ cứng của từng thanh trong hệ tọa độ cục bộ (theo 13.2)

2. Lập ma trận khối lượng của từng thanh trong hệ tọa độ cục bộ (theo 13.4).

3. Lập ma trận biến đổi cho các loại thanh không song song với trục Y (theo 13.21 và 13.33).

4. Lập ma trận biến đổi cho các loại thanh cùng phương với trục Y (theo 13.28 và 13.33).

5. Lập ma trận độ cứng của từng thanh trong hệ tọa độ tổng thể (theo 13.37)

6. Lập ma trận khối lượng của từng thanh trong hệ tọa độ tổng thể (theo 13.38).

7. Ghép các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng trong hệ tọa độ tổng thể.

Để chạy chương trình, ngoài các số liệu trên hình vẽ, còn phải nhập thêm các số liệu sau:

Số thanh không cùng chiều với trục Y: 3

Số thanh cùng phương với trục Y: 0

Thanh	Tọa độ								
	x_j (cm)	y_j (cm)	z_j (cm)	x_i (cm)	y_i (cm)	z_i (cm)	x_k (cm)	y_k (cm)	z_k (cm)
1	150	200	200	0	0	0	150	200	250
2	150	200	200	0	400	0	150	200	250
3	150	200	200	300	400	0	150	200	250

Thanh	Số thứ tự các bậc tự do											
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	2	3	4	5	6	19	20	21	22	23	24
3	1	2	3	4	5	6	13	14	15	16	17	18

Sau khi chạy chương trình, ta được kết quả như sau:

Ma trận độ cứng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
[S] = & \begin{bmatrix}
172,79 & -230,34 & -230,37 & -2,52 & -0,92 & -0,97 \\
 & 306,32 & 306,86 & 2,12 & -4,05 & -0,71 \\
 & & 305,82 & -0,80 & -0,42 & 8,24 \\
 & & & 2025,85 & 1307,72 & 243,24 \\
 & \text{đối xứng} & & & 864,21 & 158,69 \\
 & & & & & 65,85
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

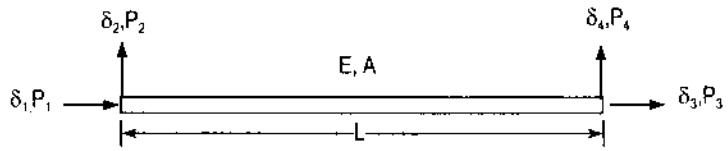
Ma trận khối lượng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
[m] = & \begin{bmatrix}
4,39 & -1,80 & -0,40 & 2,62\times10^{-11} & -14,28 & 14,28 \\
 & 2,69 & -1,17 & -14,29 & -1,7\times10^{-11} & -10,71 \\
 & & 1,04 & -14,27 & -10,71 & -5,65\text{x}\,10^{-12} \\
 & & & 717,19 & 956,25 & 956,25 \\
 & \text{đối xứng} & & & 1275,00 & 1275,00 \\
 & & & & & 275,00
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Chương 14
DAO ĐỘNG CỦA GIÀN

Khi giàn chịu tác dụng của các tải trọng tĩnh, nó là một hệ gồm các thanh chỉ có lực dọc. Nhưng khi chịu lực tác dụng của tải trọng động, lực quán tính phát sinh trong các thanh giàn làm cho chúng chịu các lực uốn ngoài lực dọc. Tuy nhiên, mô men uốn ở các đầu thanh giàn vẫn bằng không nếu không có các mô men ngoại lực đặt tại nút giàn. Đối với giàn, bài toán động lực học cũng tương tự như khi tính khung, nghĩa là phải thiết lập mối quan hệ giữa ngoại lực, lực đàn hồi, lực cản, lực quán tính và các thành phần chuyển vị, vận tốc, gia tốc tại các nút. Để làm được điều này, cần phải xác định được ma trận độ cứng, ma trận cản, ma trận khối lượng đối với mọi thanh giàn. Việc ghép các ma trận trên và tìm lời giải cho phương trình vi phân chuyển động tương tự như đã làm trong các phần trước.

§14.1. Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của giàn phẳng



Hình 14.1

Một thanh giàn có hai tọa độ nút tại mỗi đầu, nghĩa là có tất cả 4 tọa độ nút (hình 14.1). Khi chuyển vị bé, có thể giả thiết rằng hệ thức giữa lực và chuyển vị dọc theo trục thanh giàn không phụ thuộc vào các chuyển vị ngang tại các tọa độ nút 2 và 4. Giả thiết trên tương đương với giả thiết chuyển vị dọc theo các tọa độ nút 1 và 3 không sản sinh ra lực tại các tọa độ nút 2 và 4 và ngược lại.

Các hệ số độ cứng và hệ số khối lượng ứng với lực dọc đã được suy ra trong phương trình (11.17) và phương trình (11.23) (chương 11).

Áp dụng các phương trình trên vào một thanh giàn có mặt cắt không đổi và sử dụng các ký hiệu trên hình (14.1), ta được:

$$k_{11} = k_{33} = \frac{AE}{L} \quad ; \quad k_{13} = k_{31} = -\frac{AE}{L} \tag{14.1}$$

$$m_{11} = m_{33} = \frac{\bar{m}L}{3} \quad ; m_{13} = m_{31} = \frac{\bar{m}L}{6} \tag{14.2}$$

Trong đó: $\bar{m}$ - khối lượng trên đơn vị dài;

A - diện tích tiết kiện;

L - chiều dài của thanh giàn.

Đối với thanh giàn có khớp ở 2 đầu, các hệ số độ cứng ứng với các toạ độ nút 2 và 4 bằng không vì không cần có lực để sản sinh các chuyển vị tại các nút đó. Vì vậy, sau khi sắp xếp các hệ số trong (14.1), ta có ma trận độ cứng đối với thanh giàn có mặt cắt không đổi như sau:

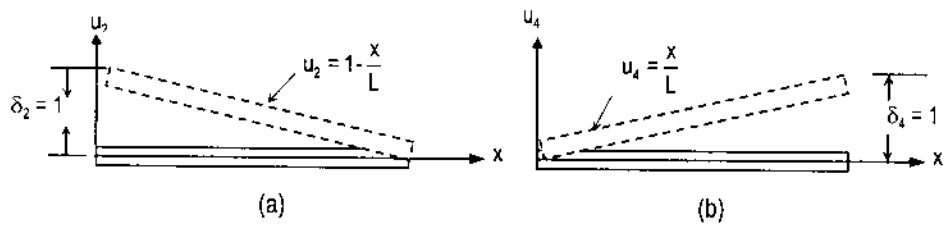
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \tag{14.3}$$

Dưới dạng viết gọn:

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \tag{14.4}$$

Trong đó: [K] - ma trận độ cứng của thanh giàn.

Đối với ma trận khối lượng, khi áp dụng nguyên lý công ảo, ta dùng các hàm chuyển vị xác định theo phương pháp tĩnh học.



Hình 14.2

Các hàm chuyển vị ứng với các chuyển vị bằng đơn vị tại các nút 2 và 4 (hình 14.2) như sau:

$$u_2 = 1 - \frac{x}{L} \tag{14.5}$$

$$u_4 = \frac{x}{L} \tag{14.6}$$

Các hệ số khối lượng được xác định theo (11.23) là:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x)u_i(x)u_j(x)dx \tag{14.7}$$

Đối với thanh giàn có mặt cắt không đổi và có khối lượng trên đơn vị dài $\bar{m}$, sau khi thay (14.5) và (14.6) vào (14.7), ta được:

$$\begin{aligned} m_{22} &= m_{44} = \frac{\bar{m}L}{3} \\ m_{24} &= m_{42} = \frac{\bar{m}L}{6} \end{aligned} \tag{14.8}$$

Cuối cùng, kết hợp các hệ số khối lượng từ các phương trình (14.2) và (14.8), ta có ma trận khối lượng của một thanh giàn có mặt cắt không đổi như sau:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \end{Bmatrix} \tag{14.9}$$

Hay

$$\{P\} = [M]\{\ddot{\delta}\} \tag{14.10}$$

Trong đó: [M] - ma trận khối lượng;

{P} - vec tơ lực;

$\{\ddot{\delta}\}$ - véc tơ gia tốc.

§14.2. Sự biến đổi hệ tọa độ

Các ma trận độ cứng (14,3) và ma trận khối lượng (14,9) đều được suy ra trong hệ trục tọa độ cục bộ. Các thanh giàn có các phương khác khau, mỗi hệ tọa độ cục bộ gắn liền với mỗi thanh. Do đó, cần đưa các hệ tọa độ cục bộ về hệ tọa độ chung gọi là hệ tọa độ tổng thể. Dựa vào phương trình (11.31) ta có hệ thức giữa vectơ lực trong hệ tọa độ cục bộ và vectơ lực trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_3} \\ \overline{P_4} \end{Bmatrix} \tag{14.11}$$

Dưới dạng viết gọn: $\{P\} = [T]\{\overline{P}\}$ (14.12)

Trong đó: {P} và $\{\overline{P}\}$ là các vectơ lực trong hệ tọa độ cục bộ và trong hệ tọa độ tổng thể [T] là mà trận biến đổi, nó cũng dùng để biến đổi vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ thành vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể.

$$\{\delta\} = [T]\{\overline{\delta}\} \tag{14.13}$$

Thay (14.12) và (14.13) vào (14.4) ta được:

$$[T]\{\overline{P}\} = [K][T]\{\overline{\delta}\}$$

vì [T] là ma trận trực giao, $[T]^{-1} = [T]^T$ nên $\{\overline{P}\} = [T]^T[K][T]\{\overline{\delta}\}$

hay $$\{\overline{P}\} = [\overline{K}]\{\overline{\delta}\} \tag{14.14}$$

Trong đó: $$[\overline{K}] = [T]^T [K][T] \tag{14.15}$$

$[\overline{K}]$ là ma trận độ cứng trong hệ tọa độ tổng thể. Một cách tương tự, thay (14.12) và (14.13) vào (14.10), ta được:

$$\{\overline{P}\} = [T]^T [M][T]\{\overline{\delta}\} \tag{14.16}$$

$$\{\overline{P}\} = [\overline{M}]\{\overline{\delta}\} \tag{14.17}$$

$$[\overline{M}] = [T]^T [M][T] \tag{14.18}$$

Trong đó: $[\overline{M}]$ - ma trận khối lượng trong hệ tọa độ tổng thể. Tuy nhiên, không cần phải dùng (14.18) để tính ma trận $[\overline{M}]$. Ma trận này bằng ma trận [M] trong hệ tọa độ cục bộ. Để kiểm tra điều này, ta thay ma trận [M] và ma trận [T] từ (14.9) và (14.11) vào (14.18) cuối cùng ta được:

$$[\overline{M}] = \frac{\overline{m}L}{6}\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$[\overline{M}] = \frac{\overline{m}L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [M] \tag{14.19}$$

Trong đó ta dùng các ký hiệu $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$.

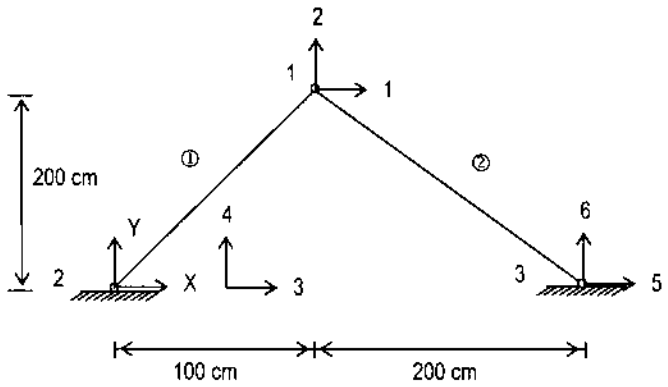
Một cách tương tự, ta được ma trận căn:

$$[\overline{C}] = [T]^T [C][T] \tag{14.20}$$

Trong đó: $[\overline{C}]$ và [C] - các ma trận cản trong hệ tọa độ tổng thể và trong hệ tọa độ cục bộ.

Ví dụ 14.1: Cho một giàn phẳng cùng với các đặc trưng hình học và cơ học như trên hình (14.3). Yêu cầu:

1. Lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể.
2. Tính các tần số vòng và véc tơ riêng ở trạng thái dao động tự do.



Hình 14.3

Mô đun đàn hồi :

$$E = 2 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Diện tích $A = 12\text{cm}^2$

Khối lượng phân bố :

$$\bar{m} = 0{,}0075\text{kN sec}^2/\text{cm}$$

Giải:

Theo (14.3), (14.11), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận độ cứng của từng thanh trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

Thanh 1:

$$[S_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 214{,}66 & 429{,}33 & -214{,}66 & -429{,}33 \\ & 858{,}65 & -429{,}33 & -858{,}65 \\ & & 214{,}66 & 429{,}66 \\ \text{đối xứng} & & & 858{,}65 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Thanh 2:

$$[S_2] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 424{,}26 & -424{,}26 & -424{,}26 & 424{,}26 \\ & 424{,}26 & 424{,}26 & -424{,}26 \\ & & 424{,}26 & -424{,}26 \\ \text{đối xứng} & & & 424{,}26 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Sau khi ghép hai ma trận $[S_1]$ và $[S_2]$, ta được ma trận độ cứng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể:

$$[S] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 638{,}93 & 5{,}06 \\ \text{đối xứng} & 1282{,}91 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Theo (14.9) ta được ma trận khối lượng của từng thanh trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

Thanh 1:

$$[m_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,59 & 0 & 0,293 & 0 \\ & 0,858 & 0 & 0,293 \\ & & 0,858 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & 0,858 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Thanh 2:

$$[m_2] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,740 & 0 & 0,37 & 0 \\ & 0,74 & 0 & 0,37 \\ & & 0,74 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & 0,74 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Sau khi ghép 2 ma trận $[m_1]$ và $[m_2]$, ta được ma trận khối lượng của toàn hệ trong hệ tạo độ tổng thể:

$$[m] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,33 & 0 \\ \text{đối xứng} & 33 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

2. Khai triển định thức (8.4)

$$\left| [S] - \lambda [m] \right| = 0$$

và tìm nghiệm của phương trình đặc trưng, ta được:

Giá trị riêng:

$$\lambda_1 = 480,36 \qquad \lambda = 964.62$$

Do đó, ta có các tần số vòng

$$\omega_1 = \sqrt{480,36} = 21,917 \ \text{rad/sec}$$

$$\omega_2 = \sqrt{964,62} = 31,06 \ \text{rad/sec}$$

Thay các giá trị của λ vào phương trình (8.3)

$$\{[S] - \lambda [m]\}\{a\} = 0$$

ta tìm được các véc tơ riêng:

$$\{a_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,0079 \end{Bmatrix} \qquad \{a_2\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 127,28 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 14.2: Một giàn phẳng cùng các đặc trưng hình học và cơ học như trên hình (14.3). Nó chịu tác dụng của một tải trọng đột ngột F_2 = -500 kN trên phương bậc tự do thứ 2 (xem hình vẽ). Giả sử chia thành 10 quãng thời gian với số gia thời gian $\Delta t = 0{,}01$ giây. Hãy tính chuyển vị của toàn hệ tại các thời điểm quy định trên.

Giải:

Theo (8.29), ta tính: $f_j = \sqrt{\{a_j\}[m]\{a_j\}} \qquad j = 1,2$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và khai căn, ta được:

$$f_1 = 1{,}153$$
$$f_2 = 146{,}85$$

Lần lượt chia các véc tơ cột $\{a_1\}$ và $\{a_2\}$ đã tính trong ví dụ (14.1) cho f_1 và f_2, ta được ma trận mô đơ như sau:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}867 & 0{,}0068 \\ -0{,}0068 & 0{,}867 \end{bmatrix}$$

Phương trình dao động có dạng:

$$\ddot{Z}_n + \omega_n^2 Z_j = P_n \qquad n = 1,2$$

Trong đó

$$P_n = \sum_{j=1}^{2} \Phi_{jn} F_j \qquad j = 1,2$$

Theo đầu đề, ta có:

$$F_1 = 0 \qquad F_2 = -500\text{kN}$$

Vậy:

$$P_1 = 0{,}867 \times 0 - 0{,}0069 \times (-500) = +3{,}38$$
$$P_2 = 0{,}0068 \times 0 + 0{,}867 \times (-500) = -433{,}54$$

Theo (11.42)

$$Z_i = \frac{P_i}{\omega_i^2}\left(1 - \cos\omega_i t\right) \qquad i = 1,2$$

Vậy:

$$Z_1 = \frac{3{,}38}{(21{,}917)^2}\left(1 - \cos(21{,}917t)\right) = 0{,}0069\left(1 - \cos(21{,}917)\right)$$
$$Z_2 = \frac{-433{,}54}{(31{,}06)^2}\left(1 - \cos(31{,}06t)\right) = -0{,}449\left(1 - \cos(31{,}06)\right)$$

Theo (1143), phương trình dao động như sau:

$$\{y\} = [\Phi]\{z\}$$

Hay

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}867 & 0{,}0068 \\ -0{,}0069 & 0{,}867 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}0069\left(1 - \cos(21{,}917t)\right) \\ -0{,}449\left(1 - \cos(21{,}06t)\right) \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và tính toán, chuyển vị tại các thời điểm quy định thống kê trong bảng (14.1).

Bảng 14.1

Thời gian t (giây)	Chuyển vị y_1 (cm)	Chuyển vị Y_2 (cm)
0	0	0
0,01	$1,4 \times 10^{-4}$	-0,019
0,02	$1,26 \times 10^{-5}$	-0,073
0,03	$5,33 \times 10^{-5}$	-0,157
0,04	0,0002	-0,264
0,05	0,0003	-0,383
0,06	0,0007	-0,502
0,07	0,001	-0,611
0,08	0,002	-0,698
0,09	0,003	-0,758
0,10	0,004	-0,779

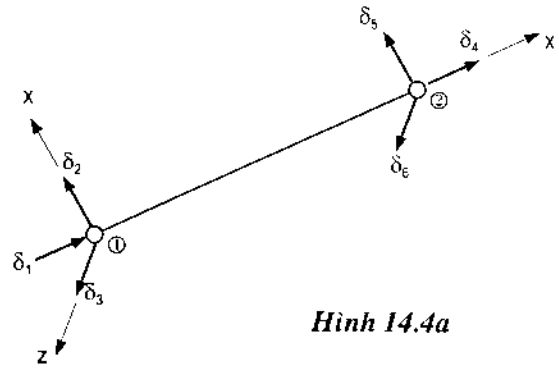
§14.3. Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của giàn không gian

Các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của giàn phẳng có thể mở rộng cho giàn không gian. Một thành giàn không gian biểu thị như trên hình (14.4). Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ như trên hình (14.4a). Trục x trung với trục của thanh giàn, hai trục còn lại y và z tạo thành các phương chính của mặt cắt ngang của thanh giàn. Hệ trục tọa độ tổng thể như trên hình (14.4b). Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể đều có dấu gạch ngang ở trên đầu.

Sau khi mở rộng ma trận độ cứng (14.3) và ma trận khối lượng (14.9) ta có các ma trận sau cho một thanh giàn không gian có mặt cắt không đổi.

Ma trận độ cứng:

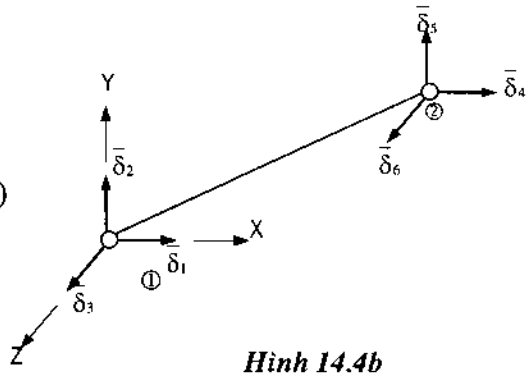
$$[K] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.21)$$



Hình 14.4a

Ma trận khối lượng:

$$[M_c] = \frac{\bar{m}L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (14.22)$$



Hình 14.4b

Ma trận khối lượng tập trung:

$$[M_l] = \frac{\bar{m}L}{2}\lceil 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \rfloor \qquad (14.23)$$

Ma trận biến đổi $[T_l]$ xác định theo (13.8):

$$[T_l] = \begin{bmatrix} \cos xX & \cos xY & \cos xZ \\ \cos yX & \cos yY & \cos yZ \\ \cos zX & \cos zY & \cos zZ \end{bmatrix} \qquad (14.24)$$

Các cosin định hướng ở hàng đầu tiên trong (14.24), $C_1 = \cos xX$, $C_2 = \cos xY$, $C_3 = \cos xZ$ có thể tính từ tọa độ của hai điểm P_1 (X_1, Y_1, Z_1) và P_2 (X_2, Y_2, Z_2) tại 2 đầu thanh giàn.

$$C_1 = \frac{X_1 - X_2}{L} \; ; \; C_2 = \frac{Y_2 - Y_1}{L} \; ; C_3 = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \qquad (14.25)$$

Với $L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$ (14.26)

Ma trận biến đổi đối với 6 tọa độ nút ở hai đầu thanh giàn không gian có thể viết:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_l] & [0] \\ [0] & [T_l] \end{bmatrix} \qquad (14.27)$$

Trong đó:

$[T_l]$ tính theo (14.24)

Ma trận độ cứng $\left[\overline{K}\right]$ và ma trận khối lượng $\left[\overline{M}\right]$ trong hệ tọa độ tổng thể tính như sau:

$$\left[\overline{K}\right] = [T]^T [K][T] \qquad (14.28)$$

$$\left[\overline{M}\right] = [T]^T [M][T] \qquad (14.29)$$

Trong trường hợp thanh giàn không gian, chỉ cần tính cosin định hướng của trục thanh giàn (công thức 14.25). Các cosin định hường còn lại trong (14.24) không xuất hiện trong biểu thức cuối cùng của ma trận độ cứng [K].

Ta có thể kiểm tra điều này bằng cách thay (14.24) và (14.27) vào (14.28), sau cùng thực hiện các phép nhân như trong phương trình cuối cùng. Sau các phép tính, ta được ma trận độ cứng trong hệ toạ độ tổng thể:

$$\left[\overline{K}\right]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & -c_1^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 & -c_2c_1 & -c_2^2 & -c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 & -c_3c_1 & -c_3c_2 & -c_3^2 \\ -c_1^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 & c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ -c_2c_1 & -c_2^2 & -c_2c_3 & c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 \\ -c_3c_1 & -c_3c_2 & -c_3^2 & c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{bmatrix} \tag{14.30}$$

Như vậy là khi tính ma trận độ cứng của thanh giàn không gian trong hệ tọa độ tổng thể, ta chỉ cần tính cosin định hướng của trục thanh giàn theo (14.25) là đủ.

Tương tự như phương trình (14.19) đối với thanh giàn phẳng, ma trận khối lượng $\left[\overline{M}\right]$ của thanh giàn không gian trong hệ tọa độ tổng thể bằng ma trận khối lượng [M] của nó trong hệ tọa độ cục bộ. Vì vậy, không cần phải thực hiện các phép tính như trong (14.29), Thay [M] từ (14.22) và [T] từ (14.24) và (14.27) vào (14.29), ta được:

$$\left[\overline{M}\right]=\left[M\right] \tag{14.31}$$

§14.4. Phương trình chuyển động của giàn không gian

Trên cơ sở các điều kiện cân bằng động lực học, ta có phương trình vi phân chuyển động của giàn không gian như sau:

$$\left[M\right]\left\{\ddot{y}\right\}+\left[C\right]\left\{\dot{y}\right\}+\left[K\right]\left\{y\right\}=\left\{F(t)\right\} \tag{14.32}$$

Trong đó:

$\left\{\ddot{y}\right\},\left\{\dot{y}\right\},\left\{y\right\}$ lần lượt là các véc tơ gia tốc, véc tơ vận tốc, véc tơ chuyển vị tại các tọa độ nút của thanh giàn không gian;

$\left\{F(t)\right\}$ là véc tơ ngoại lực.

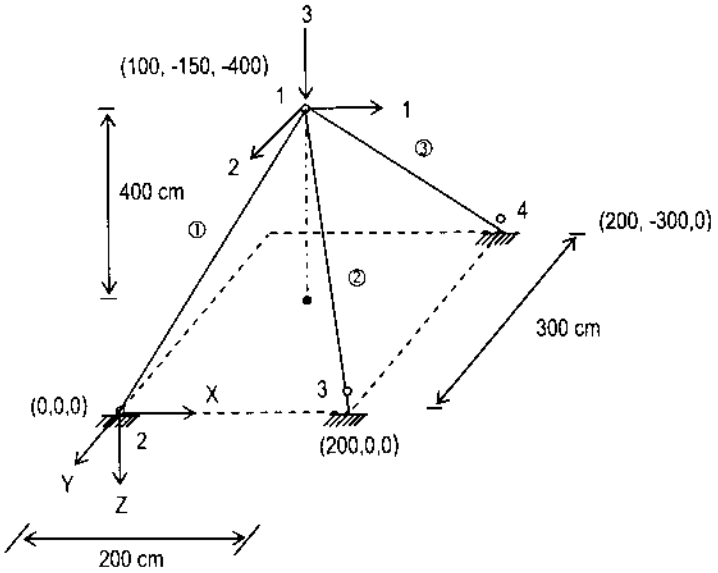
$\left[\overline{M}\right],\left[C\right],\left[\overline{K}\right]$ là các ma trận khối lượng, ma trận cản, ma trận độ cứng trong hệ tọa độ tổng thể.

Để giải phương trình (14.32), tương tự như đã trình bày trong các phần trước, ta phải tính các tần số vòng tự nhiên, các véc tơ riêng, sau đó chuẩn hoá các véc tơ riêng và cuối cùng thiết lập các phương trình mô đơ để tính chuyển vị tại các nút.

Ví dụ 14.3: Một giàn không gian cùng các đặc trưng hình học và cơ học biểu thị như trên hình (14.5). Yêu cầu:

1. Lập các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn hệ trong tọa độ tổng thể.

2. Tính các tần số vòng và véc tơ riêng ở trạng thái dao động tự do.



Diện tích $A = 20cm^2$

Mô đun đàn hồi

$E = 2,1 \times 10^4\ kN/cm^2$

Khối lượng phân bố:

$\bar{m} = 0,00785 kN/sec^2/cm$

Hình 14.5

Giải:

1. Theo (11.30), ta được ma trận độ cứng của từng thanh trong hệ tọa độ tổng thể:

Thanh 1:

$$[S_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 49,73 & -74,59 & -198,91 & -49,73 & 74,59 & 198,91 \\ & 111,89 & 298,37 & 74,59 & -111,89 & -298,38 \\ & & 795,65 & 198,91 & -298,37 & -795,65 \\ & & & 49,73 & 74,59 & 198,91 \\ & \text{đối xứng} & & & 111,89 & 298,37 \\ & & & & & 795,65 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Thanh 2:

$$[S_2] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 49,73 & 74,59 & 198,91 & -49,73 & -74,59 & -198,91 \\ & 111,89 & 298,37 & -74,59 & -111,89 & -298,38 \\ & & 795,65 & -198,91 & -298,37 & -795,65 \\ & & & 49,73 & -74,59 & -198,91 \\ & & & & 111,89 & 298,37 \\ & \text{đối xứng} & & & & 795,65 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Thanh 3:

$$
[S_3] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
49,73 & -74,59 & 198,91 & -49,73 & 74,59 & -198,91 \\
 & 111,89 & -298,37 & 74,59 & -111,89 & 298,38 \\
 & & 795,65 & 198,91 & 298,37 & -795,65 \\
 & & & 49,73 & 74,59 & -198,91 \\
 & & & & 111,89 & -298,37 \\
\text{đối xứng} & & & & & 795,65
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}
\end{array}
$$

Sau khi ghép các ma trận $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$, ta được ma trận độ cứng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể:

$$
[S] = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
149,18 & -74,59 & 198,91 \\
 & 335,67 & 298,37 \\
\text{đối xứng} & & 2386,94
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}
$$

Theo (14.22), ta được ma trận khối lượng của từng thanh trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

Thanh 1:

$$
[m_1] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1,148 & 0 & 0 & 0,574 & 0 & 0 \\
 & 1,148 & 0 & 0 & 0,574 & 0 \\
 & & 1,148 & 0 & 0 & 0,574 \\
 & & & 1,148 & 0 & 0 \\
 & & & & 1,148 & 0 \\
\text{đối xứng} & & & & & 1,148
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Thanh 2:

$$
[m_2] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1,148 & 0 & 0 & 0,574 & 0 & 0 \\
 & 1,148 & 0 & 0 & 0,574 & 0 \\
 & & 1,148 & 0 & 0 & 0,574 \\
 & & & 1,148 & 0 & 0 \\
 & & & & 1,148 & 0 \\
\text{đối xứng} & & & & & 1,148
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\end{array}
$$

Thanh 3:

$$[m_3] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,148 & 0 & 0 & 0,574 & 0 & 0 \\ & 1,148 & 0 & 0 & 0,574 & 0 \\ & & 1,148 & 0 & 0 & 0,574 \\ & & & 1,148 & 0 & 0 \\ & & & & 1,148 & 0 \\ \text{đối xứng} & & & & & 1,148 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}$$

Sau khi ghép 3 ma trận $[m_1]$, $[m_2]$, $[m_3]$, ta được ma trận khối lượng của toàn hệ trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$[m] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3,44 & 0 & 0 \\ & 3,44 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 3,44 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

2. Thay ma trận [S] và [m] vào phương trình

$$\left\| [S] - \lambda [m] \right\| = 0$$

và tìm được nghiệm của phương trình đặc trưng như sau:

Giá trị riêng:

$$\lambda_1 = 710,653 \quad ; \quad \lambda = 99,545 \quad ; \quad \lambda_3 = 24,621$$

Do đó, các tần số vòng

$$\omega_1 = \sqrt{710,653} = 26658 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = \sqrt{99,545} = 9,977 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = \sqrt{24,621} = 4,962 \text{ rad/sec}$$

Thay các giá trị của λ vào phương trình

$$\{[S] - \lambda [m]\} . \{a\} = 0$$

Ta được các véc tơ riêng như sau:

$$\{a_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,687 \\ 12,173 \end{Bmatrix} \qquad \{a_2\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,052 \\ 0.202 \end{bmatrix} \qquad \{a_3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,471 \\ -0,147 \end{Bmatrix}$$

Ví dụ 14.4: Một giàn không gian cùng với các đặc trưng hình học và cơ học biểu thị như trên hình (14.5). Nó chịu tác dụng của một tải trọng đặt đột ngột F_3 = 1000 kN trên phương bậc tự do thứ 3 (xem hình vẽ). Giả sử có 10 quãng thời gian với số gia thời gian Δt = 0,01 giây. Hãy tính chuyển vị của các hệ tại các thời điểm nói trên.

Giải:

Trong ví dụ (14.3), ta đã tính được:

Tần số vòng:

$\omega_1 = 26{,}658$ rad/sec ; $\omega_2 = 9{,}977$ rad/sec ; $\omega_3 = 4{,}962$ rad/sec

Ma trận véc tơ riêng:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1{,}687 & -2{,}052 & 0{,}471 \\ 12{,}173 & 0{,}202 & -0{,}147 \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (8.29), tính:

$$f_i = \sqrt{\{a_j\}^T [m] \{a_j\}} \quad j = 1,2,3$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và khai căn, ta được:

$$f_1 = 22{,}869$$
$$f_2 = 4{,}250$$
$$f_3 = 2{,}068$$

Lần lượt chia các véc tơ cột $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $[a_3]$ cho f_1, f_2, f_3, ta được ma trận mô đơ:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}044 & 0{,}235 & 0{,}484 \\ 0{,}074 & -0{,}483 & 0{,}228 \\ 0{,}532 & 0{,}048 & -0{,}071 \end{bmatrix}$$

Phương trình dao động có dạng:

$$\ddot{Z}_n + \omega_n^2 Z_n = P_n$$

Trong đó: $P_n = \sum_1^n \Phi_{jn}.F_j$

Theo đầu đề, ta có:

$F_1 = 0$; $F_2 = 0$; $F_3 = 1000$kN

Vậy:

$$P_1 = 0{,}044 \times 0 + 0{,}074 \times 0 + 0{,}532 \times 1000 = 532$$
$$P_2 = 0{,}235 \times 0 - 0{,}483 \times 0 + 0{,}048 \times 1000 = 48$$
$$P_3 = 0{,}484 \times 0 + 0{,}228 \times 0 - 0{,}071 \times 1000 = -71$$

Theo (11.42), ta có:

$$Z_i = \frac{P_i}{\omega_i^2}(1 - \cos\omega_i t) \quad i = 1,2,3$$

Vậy:

$$Z_1 = \frac{532}{(26,658)^2}\left(1-\cos(26,658t)\right) = 0,749\left(1-\cos(26,658t)\right)$$

$$Z_2 = \frac{48}{(9,977)^2}\left(1-\cos(9,977t)\right) = 0,427\left(1-\cos(9,977t)\right)$$

$$Z_3 = \frac{-71,076}{(4,962)^2}\left(1-\cos(4,962t)\right) = -2,887\left(1-\cos(4,962t)\right)$$

Theo (11.43):

$$\{y\} = [\Phi].\{z\}$$

Hay

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,044 & 0,235 & 0,484 \\ 0,074 & -0,483 & 0,228 \\ 0,532 & 0,048 & -0,071 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} 0,749\left(1-\cos(26,658t)\right) \\ 0,427\left(1-\cos(9,977t)\right) \\ -2,877\left(1-\cos(4,962t)\right) \end{Bmatrix}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận và tính toán, ta được giá trị các chuyển vị tại các thời điểm quy định trên. Kết quả thống kê trong bảng 14.2.

Bảng 14.2

Thời gian t (giây)	Chuyển vị y_1 (cm)	Chuyển vị y_2 (cm)	Chuyển vị y_3 (cm)
0	0	0	0
0,01	$-2,38 \times 10^{-6}$	$-3,69 \times 10^{-6}$	0,0144
0,02	$-9,26 \times 10^{-5}$	-0,0001	0,0568
0,03	-0,0005	-0,0008	0,1241
0,04	-0,0017	-0,0025	0,2118
0,05	-0,0040	-0,0060	0,3138
0,06	-0,0082	-0,0122	0,4231
0,07	-0,0048	-0,0219	0,5323
0,08	-0,0244	-0,0360	0,6339
0,09	-0,0377	-0,0553	0,7212
0,10	-0,0550	-0,0804	0,7883

PHỤ LỤC

CÁC CHƯƠNG TRÌNH TÍNH THEO NGÔN NGỮ TURBO PASCAL 7.0

Chương trình PGR 1: Phương pháp số tính tích phân Duhamel hệ 1 BTD không có lực cản

Chương trình này phục vụ cho việc tính chuyển vị của hệ một BTD không có lực cản trong quá trình một vụ nổ.

Các số liệu cần nhập:

1. Hệ số độ cứng (hằng số lò xo) k
2. Khối lượng m
3. Số quãng thời gian s
4. Số gia thời gian Δt

```
***********************************
Program 1 Phuong_phap_so_tinh_tich_fan_Duhamel_he_mot_BTD_khong_co_luc_can;
 Uses crt;
Type
  mang = array[1..10] of real;
  Var
  t, f, a, b, c, d, e, ff, g, h, y:mang;   n, s, i : integer;  m, k, tsv, sgt : real;

Begin  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
writeln ('khoiluong');
readln (m);
writeln ('he so do cung');
readln (k);
writeln ('so gia thoi gian');
readln (sgt);
writeln ('so doan thoi gian ');
readln (s);
writeln ('tai trong');
for i : =2 to s+1 do
readln (f[i]);

tsv := sqrt(k/m);   a[1] : =0; b[1] : =0;  y[1] : =0;   t[1] : =0;   f[1] : =0;
for n : =2 to s+1 do
begin
t[n] : = (n-1)*sgt;  c[n] : = f[n-1] - (t[n-1]*(f[n]-f[n-1]))/sgt;
d[n] : = (sin(tsv*t[n])-sin(tsv*t[n-1]))/tsv;
```

```
e[n] : = (f[n]-f[n-1])/(sqr(tsv)* sgt);
h[n] : = cos(tsv*t[n])-cos(tsv*t[n-1])+tsv*(t[n]*sin(tsv*t[n])-
t[n-1]*sin(tsv*t[n-1]));
ff[n] : = (cos(tsv*t[n-1])-cos(tsv*t[n]))/tsv;
g[n] : = sin(tsv*t[n])-sin(tsv*t[n-1])-tsv*(t[n]*cos(tsv*t[n])-
t[n-1] *cos (tsv*t[n-1]));

a[n] : =a[n-1]+c[n]*d[n]+e[n]*h[n];
b[n] : =b[n-1]+c[n]*ff[n]+e[n]*g[n];
y[n] : =(a[n]*sin(tsv*t[n])-b[n]*cos(tsv*t[n]))/(m*tsv);
end;

for i : =2 to s+1 do
begin
writeln(a[i] : 12 : 8);
writeln(b[i] : 12 : 8);
writeln(y[i] : 12 : 8);
end;
readln;
end.
```

Chương trình PGR 2: Phương pháp số tính tích phân trực tiếp hệ 1 BTD có lực cản

Chương trình này phục vụ cho việc tính chuyển vị, vận tốc, gia tốc của một hệ 1 BTD có lực cản trong quá trình một vụ nổ.

Các số liệu cần nhập như trong PGR1

```
************************************
Program 2 Fuong_fap_so_tinh_tich_fan_truc_tiep_he_mot_BTD_co_luc_can;
Uses crt;
Type
  mang =array[1..10] of real;

  Var
  a, b, c, d, e, f, g, h, cv, vt, gt, ff:mang;  n,s,i:integer;  kx,tsv,sgt,tsc,hc,k,m:real;
Begin  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
writeln ('he so do cung');
readln (k);
writeln ('khoi luong');
readln (m);
writeln ('ti so can');
readln (kx);
```

```
writeln ('so doan thoi gian ');
readln (s);
writeln ('so gia thoi gian');
readln (sgt);
writeln ('tai trong');
for i : =1 to s+1 do
readln (f[i]);

tsv : =sqrt(k/m); hc : =2*(sqrt(k*m))*kx; tsc : =tsv*sqrt(1-sqr(kx));
cv[1] : =0; vt[1]:=0; gt[1]:=0;
for n  :=1 to s+1 do
begin
e[n] : = exp(-kx*tsv*sgt); ff[n] : =c[n]*cos(tsc*sgt)+d[n]*sin(tsc*sgt);
g[n] : = d[n]*(tsc*cos(tsc*sgt)-kx*tsv*sin(tsc*sgt));
h[n] : = kx*tsv*cos(tsc*sgt)+tsc*sin(tsc*sgt);

a[n] : = (f[n+1]-f[n])/(k*sgt);  b[n]:=(f[n]-hc*a[n])/k;
c[n] : = cv[n]-b[n];
d[n] : = (vt[n]-a[n]-kx*tsv*c[n])/tsc;
cv[n+1] : = e[n]*ff[n]+b[n]+a[n]*sgt;
vt[n+1] : = e[n]*g[n]-c[n]*h[n]+a[n];
gt[n+1] : = (f[n+1]-hc*vt[n+1]-k*cv[n+1])/m;
end;
writeln('chuyen vi');
for i : = 1 to s+1 do
writeln(cv[i]);
writeln('van toc');
for i : = 1 to s+1 do
writeln(vt[i]);
writeln('gia toc');
for i : = 1 to s+1 do
writeln(gt[i]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 3: Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng nhà chịu cắt nhiều tầng

Chương trình này phục vụ cho việc tính ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của nhà chịu cắt nhiều tầng.

Các số liệu cần nhập:

1. Số tầng n

2. Mô đun đàn hồi E (mỗi tầng)

3. Tổng mô men quán tính I (mỗi tầng)

4. Chiều cao l (mỗi tầng)

5. Khối lượng m (mỗi tầng)

```
**********************************
Program Ma_tran_do_cung_va_ma_tran_khoi_luong_nha_chiu_cat_nhieu_tang;
Uses crt;
Type
  mang1 =array[1..10] of real;
   mang2 =array[1..10, 1..10] of real;
Var  n, i, j:integer;  m, k, md, mq, h : mang1; mdc, mkl : mang2;

Begin  (*Nguoi lap trinh : Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
writeln ('so tang');
readln(n);
writeln ('khoiluong');
for i : =1 to n do
readln (m[i]);
writeln ('mo dun dan hoi');
for i : = 1 to n do
readln (md[i]);
writeln ('momen quan tinh');
for i : = 1 to n do
readln (mq[i]);
writeln ('chieu cao tang');
for i :=1 to n do
readln (h[i]);

for i:= 1 to n do    k[i]:=(12*md[i]*mq[i])/(sqr(h[i])*h[i]);
for i:= 1 to n do
for j:= i to n do
begin
mdc[i,i]:=k[i]+k[i+1];
mdc[i,i+1]:=-k[i+1];
if(j>i+1) then mdc[i,j]:= 0;
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
mdc[i,j]:=mdc[j,i];
```

```
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
if(i=j) then  mkl[i,j]:=m[i];  if(i<>j) then mkl[i,j]:=0;
end;
writeln ('ma tran do cung ');
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
writeln(mdc[i,j]);
writeln ('ma tran khoi luong');
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
writeln(mkl[i,j]);
readln;
  end.


readln;
end.
```

Chương trình PGR 4: Nhà chịu cắt nhiều tầng chịu tác dụng của tải trọng điều hòa

Chương trình này phục vụ cho việc tính chuyển vị của nhà chịu cắt nhiều tầng dưới tác dụng của tải trọng điều hòa .

Các số liệu cần nhập:

1. Số tầng
2. Mô đun đàn hồi E (mỗi tầng)
3. Tổng mô men quán tính I (mỗi tầng)
4. Chiều cao (mỗi tầng)
5. Biên độ tải trọng điều hòa F_0
6. Tần số tải trọng điều hòa $\overline{\omega}$

```
*******************************
Program 4 Nha_chiu_cat_nhieu_tang_chiu_tac_dung_cua_tai_trong_dong_dieu_hoa;
Uses crt;
Type
  mt2 =array[1..10] of real;
  mt1 =array[1..10,1..10] of real;
Var  n,i,j,s:integer; bd,m,b,md,mq,h,k:mt2; a,mdc:mt1; tst,q,r:real;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
```

```
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
        s:=s+1;
        for i:= s+1 to n do
          Begin
            if(a[s,s]<>0) then
            q:=a[s,i]/a[s,s];
            for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
        End
UNTIL(s= n -1);
 x[n]:=b[n]/a[n,n];
 for i:= n -1  downto 1 do
        Begin
            r :=0;
            for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
            if(a[i,i]<>0) then
            x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
        End;
end;

Begin  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
  writeln ('so tang');
readln(n);
writeln ('khoiluong');
for i :=1 to n do
readln (m[i]);
writeln ('mo dun dan hoi');
for i :=1 to n do
readln (md[i]);
writeln ('momen quan tinh');
for i :=1 to n do
readln (mq[i]);
writeln ('chieu cao tang');
```

```
for i :=1 to n do
readln (h[i]);
writeln ('bien do tai trong');
for i :=1 to n do
readln(b[i]);
writeln ('tan so vong');
readln (tst);

for i:= 1 to n do
begin   if (sqr(h[i])*h[i]<>0) then
k[i]:=(12*md[i]*mq[i])/(sqr(h[i])*h[i]);
end;
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
begin
mdc[i,i]:=k[i]+k[i+1];
mdc[i,i+1]:=-k[i+1];
if(j>i+1) then mdc[i,j]:= 0;
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
mdc[i,j]:=mdc[j,i];
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
begin
a[i,i]:=mdc[i,i]-m[i]*sqr(tst);
if(i<>j) then  a[i,j]:=mdc[i,j];
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
a[i,j]:=a[j,i];

(*Goi chuong trinh con de giai he fuong trinh*);
GHFT(a,b,bd,n);
writeln ('bien do dao dong');
for i:=1 to n do
writeln(bd[i]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 5: Nhà nhiều tầng chịu tác dụng của gia tốc không đổi ở móng

Chương trình này phục vụ cho việc tính các chuyển vị tương đối giữa sàn và móng tại các thời điểm khác nhau trong một nhà chịu cắt nhiều tầng dưới tác dụng của gia tốc không đổi ở nền móng.

Các số liệu cần nhập:

1. Số tầng
2. Trị số gia tốc
3. Tần số vòng
4. Khối lượng
5. Số quãng thời gian S
6. Số gia thời gian Δt

```
*******************************
Program 5 Nha_nhieu_tang_chiu_tac_dung_cua_gia_toc_khong_doi_o_mong;
Uses crt;
Type
  mt2 =array[1..20] of real;
  mt1 =array[1..20,1..20] of real;
Var  n,i,j,s,k,p:integer; bd,m,b,tsv,f,gl,g,t,x:mt2; a,mdm,vtr,fi,u:mt1;
     gt,sgt:real;

Begin  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
  Clrscr;
writeln ('so tang');
readln(n);
writeln ('so doan thoi gian');
readln(s);
writeln ('so gia thoi gian');
readln(sgt);
writeln ('gia toc');
readln(gt);
writeln ('khoi luong');
for i:=1 to n do
readln(m[i]);
writeln ('tan so vong');
for i:=1 to n do
readln(tsv[i]);
```

```
writeln ('ma tran vec to rieng');
for j :=1 to n do
for i :=1 to n do
readln(vtr[i,j]);

for p:=2 to s+1 do    t[p]:=(p-1)*sgt;   t[1]:=0;
for j:=1 to n do
begin  f[j]:=0;
for k:=1 to n do
f[j]:= f[j]+m[k]*sqr(vtr[k,j]);
end;
for j:=1 to n do    x[j]:=sqrt(f[j]);
for j:=1 to n do
for i:=1 to n do
fi[i,j]:=vtr[i,j]/x[j];
for i:=1 to n do
begin   gl[i]:=0;
for j:=1 to n do
gl[i]:=gl[i]-m[j]*fi[j,i];
end;
for i:=1 to n do
g[i]:=gt/sqr(tsv[i]);
for i:=1 to n do
for p:=1 to s+1 do
u[i,p]:=gl[j]*fi[i,j]*g[j]*(1-cos(tsv[j]*t[p]));
writeln ('chuyen vi tuong doi');
for i:=1 to n do
for p:=1 to s+1 do
writeln(u[i,p]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 6: Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của dầm

Chương trình này phục vụ cho việc xác lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của dầm.

Các số liệu cần nhập:

1. Số thanh st
2. Số bậc tự do sbt

3. Mô đun đàn hồi E (mỗi đoạn dầm)

4. Mô men quán tính I (mỗi đoạn dầm)

5. Diện tích A (mỗi đoạn dầm)

6. Chiều dài (từng đoạn dầm)

7. Khối lượng phân bổ $\overline{m}$

****

```
Program 6 Ma_tran_do_cung_va_ma_tran_khoi_luong_cua_dam;
  Uses crt;
Type mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,tbt:integer; d1, d2, d3, d4:array[1..10] of integer;
      z, m1, m2, m3, m4, m5, m6, c1, c2, c3, c4, cd, cd3, dt, mq, e, y, vtr1, a1, a2, a3, a4, a5,
      a6,a7,a8,a9,a10,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,kfb:mt2;
      s,m,a,u,b,x:mt1;
      tt,gtrbn,c:real;


Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap chieu dai ');
for i:=1 to st do  readln(cd[i]);
writeln('dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap momem quan tinh');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
```

```
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln(' khoi luong fan bo');
for i:=1 to st do readln(kfb[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng*);
for i:=1 to st do
begin
   cd3[i]:=sqr(cd[i])*cd[i];
   if(((cd3[i]<>0)and(sqr(cd[i])<>0))and(cd[i]<>0)) then
   begin
   c1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i];  c2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
   c3[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i];    c4[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
   end;
a1[i]:=c1[i]; a2[i]:=c2[i];a3[i]:=-c1[i]; a4[i]:=c2[i]; a5[i]:=c3[i];
a6[i]:=-c2[i]; a7[i]:=c4[i]; a8[i]:=c1[i]; a9[i]:=-c2[i]; a10[i]:=c3[i];

s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+a1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+a2[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+a3[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+a4[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+a5[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+a6[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+a7[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+a8[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+a9[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+a10[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do    m[i,j]:=m[j,i];

writeln ('ma tran do cung');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(s[i,j]);
writeln ('ma tran khoi luong');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
```

```
writeln(m[i,j]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 7: Ma trận độ cứng của khung

Chương trình này phục vụ cho việc xác lập ma trận độ cứng của khung phẳng

1. Số thanh st
2. Số bậc tự do sbt
3. Mô đun đàn hồi E (cho mỗi thanh)
4. Mô men quán tính I (cho mỗi thanh)
5. Diện tích A (cho mỗi thanh)
6. Tọa độ x, y ở mỗi đầu thanh
7. Số thứ tự BTD d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 (ứng với mỗi thanh)

```
************************************
Program 7 Ma_tran_do_cung_cua_khung;
  Uses crt;
Type
   mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,tbt,n:integer; d1,d2,d3,d4,d5,d6:array[1..10] of integer;
      c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,cd3,mq,g1,g2,g3,g4,cd,dt,e,y,vtrn,l,mm,
      x1,x2,y1,y2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,
      a18,a19,a20,a21,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,b11,b12,b13,b14,b15,
      b16,b17,b18,b19,b20,b21,kfb,u:mt2;
      s,m,me,mc,r,a,b,t,tc,x:mt1;
      tt,gtrln,c:real;
Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(x1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
```

```
for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap momen quan tinh');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap BTD d5');
for i:=1 to st do  readln(d5[i]);
writeln('nhap BTD d6');
for i:=1 to st do  readln(d6[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng*);
 for i:=1 to st do
 begin
    cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
    l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
    cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
    if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
    begin
    g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
    g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
    end;
    c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(mm[i]);
    c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*mm[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(mm[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
    c4[i]:=g2[i]*mm[i];  c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i];  c7[i]:=2*g4[i];
    a1[i]:=c1[i]; a2[i]:=c2[i]; a3[i]:=c4[i]; a4[i]:=-c1[i]; a5[i]:=-c2[i];
    a6[i]:=c4[i]; a7[i]:=c3[i];  a8[i]:=-c5[i];a9[i]:=-c2[i]; a10[i]:=-c3[i];
    a11[i]:=-c5[i]; a12[i]:=c6[i];a13[i]:=-c4[i]; a14[i]:=c5[i];
    a15[i]:=c7[i];a16[i]:=c1[i]; a17[i]:=-c2[i]; a18[i]:=-c4[i];
    a19[i]:=c3[i];  a20[i]:=c5[i];a21[i]:=c6[i];
```

```
    s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+a1[i];
    s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+a2[i];
    s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+a3[i];
    s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+a4[i];
    s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+a5[i];
    s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+a6[i];
    s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+a7[i];
    s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+a8[i];
    s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+a9[i];
    s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+a10[i];
    s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+a11[i];
    s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+a12[i];
    s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+a13[i];
    s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+a14[i];
    s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+a15[i];
    s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+a16[i];
    s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+a17[i];
    s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+a18[i];
    s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+a19[i];
    s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+a20[i];
    s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+a21[i];
  end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

writeln('ma tran do cung');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(s[i,j]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 8: Ma trận khối lượng của khung

Chương trình này phục vụ cho việc xác lập ma trận khối lượng của khung phẳng:

Các số liệu cần nhập:

1. Số thanh st
2. Số bậc tự do sbt
3. Khối lượng phân bố $\bar{m}$

4. Tọa độ x, y ở mỗi đầu thanh

5. Số thứ tự BTD d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 (ứng với mỗi thanh)

```
************************************
Program 8 Ma_tran_khoi_luong_cua_khung;
  Uses crt;
Type
   mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,tbt,n:integer; d1,d2,d3,d4,d5,d6:array[1..10] of integer;
     c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,cd3,mq,g1,g2,g3,g4,cd,dt,e,y,vtrn,l,mm,
     x1,x2,y1,y2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,
     a18,a19,a20,a21,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,b11,b12,b13,b14,b15,
     b16,b17,b18,b19,b20,b21,kfb,u:mt2;
     s,m,me,mc,r,a,b,t,tc,x:mt1;
     tt,gtrln,c:real;
Begin    clrscr;(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap BTD d5');
for i:=1 to st do  readln(d5[i]);
writeln('nhap BTD d6');
for i:=1 to st do  readln(d6[i]);
writeln('toa do x1 ');
for i:=1 to st do  readln(x1[i]);
writeln('nhap toa do  x2');
for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('nhap BTD y1');
for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
```

```
writeln('nhap BTD y2');
for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
writeln('khoi luong fan bo');
for i:=1 to 2 do  readln(kfb[i]);

(*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *)

for k:=1 to st do
begin
   cd[k]:=sqrt(sqr(x2[k]-x1[k])+sqr(y2[k]-y1[k]));
   l[k]:=(x2[k]-x1[k])/cd[k]; mm[k]:=(y2[k]-y1[k])/cd[k];
   for i:=1 to 6 do
   for j:=1 to 6 do
   begin  t[1,1]:=l[k];  t[1,2]:=mm[k]; t[2,1]:=-mm[k];  t[2,2]:=l[k];
   t[3,3]:=1;t[4,4]:=l[k]; t[4,5]:=mm[k]; t[5,4]:=-mm[k]; t[5,5]:=l[k];
   t[6,6]:=1;
   end;
   u[k]:=kfb[k]*cd[k]/420;
   for i:=1 to 6 do
   for j:=i to 6 do
   begin  me[1,1]:=140*u[k];  me[1,4]:=70*u[k];
          me[2,2]:=156*u[k]; me[2,3]:=22*cd[k]*u[k];   me[2,5]:=54*u[k];
          me[2,6]:=-13*cd[k]*u[k];    me[3,3]:=4*sqr(cd[k])*u[k];
          me[3,5]:=13*cd[k]*u[k];  me[3,6]:=-3*sqr(cd[k])*u[k];
          me[4,4]:=140*u[k]; me[5,5]:=156*u[k]; me[5,6]:=-22*cd[k]*u[k];
          me[6,6]:=4*sqr(cd[k])*u[k];
  end;
          for i:=1 to 6 do
          for j:=1 to i-1 do      me[i,j]:=me[j,i];
          for i:=1 to 6 do
          for j:=1 to 6 do      tc[i,j]:=t[j,i];
          for i:=1 to 6 do
          for j:=1 to 6 do
          begin
          r[i,j]:=0;  for p:=1 to 6 do  r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*me[p,j];
          mc[i,j]:=0;  for p:=1 to 6 do  mc[i,j]:=mc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
          end;
          for i:=1 to 6 do
          for j:=i to 6 dO
          begin
```

```
        b1[k]:=mc[1,1]; b2[k]:=mc[1,2]; b3[k]:=mc[1,3]; b4[k]:=mc[1,4];
        b5[k]:=mc[1,5]; b6[k]:=mc[1,6]; b7[k]:=mc[2,2]; b8[k]:=mc[2,3];
        b9[k]:=mc[2,4]; b10[k]:=mc[2,5]; b11[k]:=mc[2,6];b12[k]:=mc[3,3];
        b13[k]:=mc[3,4]; b14[k]:=mc[3,5]; b15[k]:=mc[3,6]; b16[k]:=mc[4,4];
        b17[k]:=mc[4,5]; b18[k]:=mc[4,6]; b19[k]:=mc[5,5]; b20[k]:=mc[5,6];
        b21[k]:=mc[6,6];
        end;
      m[d1[k],d1[k]]:=s[d1[k],d1[k]]+b1[k];
      m[d1[k],d2[k]]:=m[d1[k],d2[k]]+b2[k];
      m[d1[k],d3[k]]:=m[d1[k],d3[k]]+b3[k];
      m[d1[k],d4[k]]:=m[d1[k],d4[k]]+b4[k];
      m[d1[k],d5[k]]:=m[d1[k],d5[k]]+b5[k];
      m[d1[k],d6[k]]:=m[d1[k],d6[k]]+b6[k];
      m[d2[k],d2[k]]:=m[d2[k],d2[k]]+b7[k];
      m[d2[k],d3[k]]:=m[d2[k],d3[k]]+b8[k];
      m[d2[k],d4[k]]:=m[d2[k],d4[k]]+b9[k];
      m[d2[k],d5[k]]:=m[d2[k],d5[k]]+b10[k];
      m[d2[k],d6[k]]:=m[d2[k],d6[k]]+b11[k];
      m[d3[k],d3[k]]:=m[d3[k],d3[k]]+b12[k];
      m[d3[k],d4[k]]:=m[d3[k],d4[k]]+b13[k];
      m[d3[k],d5[k]]:=m[d3[k],d5[k]]+b14[k];
      m[d3[k],d6[k]]:=m[d3[k],d6[k]]+b15[k];
      m[d4[k],d4[k]]:=m[d4[k],d4[k]]+b16[k];
      m[d4[k],d5[k]]:=m[d4[k],d5[k]]+b17[k];
      m[d4[k],d6[k]]:=m[d4[k],d6[k]]+b18[k];
      m[d5[k],d5[k]]:=m[d5[k],d5[k]]+b19[k];
      m[d5[k],d6[k]]:=m[d5[k],d6[k]]+b20[k];
      m[d6[k],d6[k]]:=m[d6[k],d6[k]]+b21[k];
end;
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to i-1 do    m[i,j]:=m[j,i];

writeln('ma tran khoi luong');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(m[i,j]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 9: Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của hệ dầm trực giao

Chương trình này phục vụ cho việc xác lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của hệ dầm trực giao.

Các số liệu cần nhập:

1. Số thanh st
2. Số bậc tự do sbt
3. Mô đun đàn hồi E (cho mỗi thanh)
4. Diện tích A (cho mỗi thanh)
5. Mô đun trượt G (cho mỗi thanh)
6. Mô men quán tính I (cho mỗi thanh)
7. Mô men quán tính độc cực I_0 (cho mỗi thanh)
8. Mô đun xoắn J
9. Khối lượng phân bố $\overline{m}$
10. Tọa độ x, y ở mỗi đầu thanh
11. Số thứ tự BTD d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 (ứng với mỗi thanh)

```
************************************
Program 9 Ma_tran_do_cung_va_ma_tran_khoi_luong_cua_he_dam_truc_giao;
uses crt;
type  mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
mt3=array[1..10] of integer;
Var i,j, k,sn,sbn,st,sbt,tbt,w,p:integer;
l,mm,cd3,xx1,xx2,yy1,yy2,kfb,e,mq,mqc,cd,dt,mt,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,
a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,a18,a19,a20,a21,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,
b10,b11,b12,b13,b14,b15,b16,b17,b18,b19,b20,b21,u,v,cd2,mx:mt2;
d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,tgd:mt3;
s,m,se,me,sc,mc,t,tc,r:mt1;

begin  clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(xx1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(xx2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
for i:=1 to st do  readln(yy1[i]);
```

```
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(yy2[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh doc cuc');
for i:=1 to st do  readln(mqc[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh ');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap mo dun xoan');
for i:=1 to st do  readln(mx[i]);

writeln('nhap mo dun truot');
for i:=1 to st do  readln(mt[i]);
writeln('khoi luong fan bo');
for i:=1 to st do  readln(kfb[i]);
writeln('d1');  for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('d2');  for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('d3');  for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('d4');  for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('d5');  for i:=1 to st do  readln(d5[i]);
writeln('d6');  for i:=1 to st do  readln(d6[i]);

for k:=1 to st do
begin
cd[k]:=sqrt(sqr(xx1[k]-xx2[k])+sqr(yy1[k]-yy2[k]));cd2[k]:=sqr(cd[k]);
l[k]:=(xx1[k]-xx2[k])/cd[k];
mm[k]:=(yy1[k]-yy2[k])/cd[k];
cd3[k]:= cd2[k]*cd[k];
for i:=1 to 6 do
for j:=i to 6 do
begin
if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
begin
u[k]:=e[k]*mq[k]/cd3[k];se[1,1]:=(mx[k]*mt[k]*cd2[k]/(e[k]*mq[k]))*u[k];
se[1,4]:=-se[1,1];se[2,2]:=4*cd2[k]*u[k]; se[2,3]:=-6*cd[k]*u[k];se[2,5]:=
2*cd2[k]*u[k];se[2,6]:=6*cd[k]*u[k];se[3,3]:=12*u[k]; se[3,5]:=se[2,3];
se[3,6]:=-se[3,3];se[4,4]:=se[1,1]; se[5,5]:=se[2,2]; se[5,6]:=-se[2,3];
se[6,6]:=se[3,3];
```

```
end;
end;
end;
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to i-1 do
se[i,j]:=se[j,i];
(*ma tran do mem trong he tua do cuc bo *);
for k:=1 to st do
begin
for i:=1 to 6 do
for j:=i to 6 do
begin
if(sqr(dt[i])<>0) then
begin
v[k]:=kfb[k]*cd[k]/420;
me[1,1]:=(140*mqc[k]/dt[k])*v[k]; me[1,4]:=(70*mqc[k]/dt[k])*v[k];
me[2,2]:=4*cd2[k]*v[k];me[2,3]:=22*cd[k]*v[k];me[2,5]:=-3*cd2[k]*v[k];
me[2,6]:=13*cd[k]*v[k];me[3,3]:= 156*v[k];
me[3,5]:=-me[2,6];me[3,6]:=54*v[k]; me[4,4]:=me[1,1];
me[5,5]:=me[2,2];me[5,6]:=-me[2,3]; me[6,6]:=me[3,3];
end;
end;
end;
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to i-1 do
me[i,j]:=me[j,i]
(*ma tran bien doi*);
for k:=1 to st do
begin
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 6 do
begin t[1,1]:=l[k]; t[1,2]:=mm[k]; t[2,1]:=-mm[k]; t[2,2]:=l[k];
t[3,3]:=1; t[4,4]:=l[k]; t[4,5]:=mm[k]; t[5,4]:=-mm[k]; t[5,5]:=l[k];
t[6,6]:=1;
end;
end;
for j:=1 to 6 do
for i:=1 to 6 do
tc[i,j]:=t[i,j];
for k:=1 to st do
begin
for i:=1 to 6 do
```

```
for j:=1 to 6 do
begin
r[i,j]:=0;  for p:=1 to 6 do  r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*se[p,j];
end;
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 6 do
begin
sc[i,j]:=0;  for p:=1 to 6 do  sc[i,j]:=sc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
end;
end;
for k:=1 to st do
begin
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 6 do
begin
r[i,j]:=0;  for p:=1 to sbt do  r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*me[p,j];
end;
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 6 do
begin
mc[i,j]:=0;  for p:=1 to sbt do  mc[i,j]:=sc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
end;
for i:=1 to 6 do
for j:=i to 6 do
begin
a1[k]:=sc[1,1];a2[k]:=sc[1,2];a3[k]:=sc[1,3];a4[k]:=sc[1,4];
a5[k]:=sc[1,5];a6[k]:=sc[1,6]; a7[k]:=sc[2,2];a8[k]:=sc[2,3];
a9[k]:=sc[2,4]; a10[k]:=sc[2,5]; a11[k]:=sc[2,6]; a12[k]:=sc[3,3];
a13[k]:=sc[3,4]; a14[k]:=sc[3,5]; a15[k]:=sc[3,6]; a16[k]:=sc[4,4];
a17[k]:=sc[4,5];a18[k]:=sc[4,6]; a19[k]:=sc[5,5];a20[k]:=sc[5,6];
a21[k]:=sc[6,6];
end;
end;
(*ma tran do cung trong he toa do tong the*);
for k:=1 to st do
begin
s[d1[k],d1[k]]:=s[d1[k],d1[k]]+a1[k];
s[d1[k],d2[k]]:=s[d1[k],d2[k]]+a2[k];
s[d1[k],d3[k]]:=s[d1[k],d3[k]]+a3[k];
s[d1[k],d4[k]]:=s[d1[k],d4[k]]+a4[k];
s[d1[k],d5[k]]:=s[d1[k],d5[k]]+a5[k];
s[d1[k],d6[k]]:=s[d1[k],d6[k]]+a6[k];
```

```
s[d2[k],d2[k]]:=s[d2[k],d2[k]]+a7[k];
s[d2[k],d3[k]]:=s[d2[k],d3[k]]+a8[k];
s[d2[k],d4[k]]:=s[d2[k],d4[k]]+a9[k];
s[d2[k],d5[k]]:=s[d2[k],d5[k]]+a10[k];
s[d2[k],d6[k]]:=s[d2[k],d6[k]]+a11[k];
s[d3[k],d3[k]]:=s[d3[k],d3[k]]+a12[k];
s[d3[k],d4[k]]:=s[d3[k],d4[k]]+a13[k];
s[d3[k],d5[k]]:=s[d3[k],d5[k]]+a14[k];
s[d3[k],d6[k]]:=s[d3[k],d6[k]]+a15[k];
s[d4[k],d4[k]]:=s[d4[k],d4[k]]+a16[k];
s[d4[k],d5[k]]:=s[d4[k],d5[k]]+a17[k];
s[d4[k],d6[k]]:=s[d4[k],d6[k]]+a18[k];
s[d5[k],d5[k]]:=s[d5[k],d5[k]]+a19[k];
s[d5[k],d6[k]]:=s[d5[k],d6[k]]+a20[k];
s[d6[k],d6[k]]:=s[d6[k],d6[k]]+a21[k];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do
s[i,j]:=s[j,i];

for k:=1 to st do
begin
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 6 do
begin
r[i,j]:=0;  for p:=1 to sbt do  r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*me[p,j];
end;
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 6 do
begin
mc[i,j]:=0;  for p:=1 to sbt do  mc[i,j]:=mc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
end;
for i:=1 to 6 do
for j:=i to 6 do
begin
b1[k]:=mc[1,1];b2[k]:=mc[1,2];b3[k]:=mc[1,3];b4[k]:=mc[1,4];
b5[k]:=mc[1,5];b6[k]:=mc[1,6]; b7[k]:=mc[2,2];b8[k]:=mc[2,3];
b9[k]:=mc[2,4]; b10[k]:=mc[2,5]; b11[k]:=mc[2,6]; b12[k]:=mc[3,3];
b13[k]:=mc[3,4]; b14[k]:=mc[3,5]; b15[k]:=mc[3,6]; b16[k]:=mc[4,4];
b17[k]:=mc[4,5];b18[k]:=mc[4,6]; b19[k]:=mc[5,5];b20[k]:=mc[5,6];
b21[k]:=mc[6,6];
end;
```

```
end;
(*ma tran khoi luong trong he toa do mem tong the*);
for k:=1 to st do
begin
m[d1[k],d1[k]]:=s[d1[k],d1[k]]+b1[k];
m[d1[k],d2[k]]:=m[d1[k],d2[k]]+b2[k];
m[d1[k],d3[k]]:=m[d1[k],d3[k]]+b3[k];
m[d1[k],d4[k]]:=m[d1[k],d4[k]]+b4[k];
m[d1[i],d5[k]]:=m[d1[k],d5[k]]+b5[k];
m[d1[k],d6[k]]:=m[d1[k],d6[k]]+b6[k];
m[d2[k],d2[k]]:=m[d2[k],d2[k]]+b7[k];
m[d2[k],d3[k]]:=m[d2[k],d3[k]]+b8[k];
m[d2[k],d4[k]]:=m[d2[k],d4[k]]+b9[k];
m[d2[k],d5[k]]:=m[d2[k],d5[k]]+b10[k];
m[d2[k],d6[k]]:=m[d2[k],d6[k]]+b11[k];
m[d3[k],d3[k]]:=m[d3[k],d3[k]]+b12[k];
m[d3[k],d4[k]]:=m[d3[k],d4[k]]+b13[k];
m[d3[k],d5[k]]:=m[d3[k],d5[k]]+b14[k];
m[d3[k],d6[k]]:=m[d3[k],d6[k]]+b15[k];
m[d4[k],d4[k]]:=m[d4[k],d4[k]]+b16[k];
m[d4[k],d5[k]]:=m[d4[k],d5[k]]+b17[k];
m[d4[k],d6[k]]:=m[d4[k],d6[k]]+b18[k];
m[d5[k],d5[k]]:=m[d5[k],d5[k]]+b19[k];
m[d5[k],d6[k]]:=m[d5[k],d6[k]]+b20[k];
m[d6[k],d6[k]]:=m[d6[k],d6[k]]+b21[k];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do
m[i,j]:=m[j,i];

writeln('ma tran do cung tong the');
for i:=1 to st do
for i:=1 to 6 do
for j:=i to 6 do
writeln(se[i,j]);
writeln('ma tran khoi luong tong the');
for i:=1 to st do
for i:=1 to 6 do
for j:=i to 6 do
writeln(me[i,j]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 10: Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của giàn phẳng

Chương trình này phục vụ cho việc xác lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của giàn phẳng.

Các số liệu cần nhập:

1. Số thanh st
2. Số bậc tự do sbt
3. Mô đun đàn hồi E (cho mỗi thanh)
4. Diện tích A (cho mỗi thanh)
5. Khối lượng phân bố (cho mỗi thanh)
6. Tọa độ x, y ở mỗi đầu thanh
7. Số thứ tự BTD d_1, d_2, d_3, d_4, (ứng với mỗi thanh)

```
****************************************
Program 10 Ma_tran_do_cung_va_ma_tran_khoi_luong_cua_gian_fang;
Uses crt;
Type
      mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var   i,j,k,p,sn,st,sbt,tbt,n:integer; d1,d2,d3,d4:array[1..10] of integer;
      cd,dt,l,mm,x1,x2,y1,y2,kfb,e,u,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,b1,b2,
      b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10:mt2;
      s,m,se,t,tc,r,sc,mc:mt1;

Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(x1[i]);
writeln('toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('toa do y1');
for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
```

```
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('khoi luong fan bo');
for i:=1 to st do
readln(kfb[i]);

for k:=1 to st do
begin
cd[k]:=sqrt(sqr(x2[k]-x1[k])+sqr(y2[k]-y1[k]));
l[k]:=(x2[k]-x1[k])/cd[k];
mm[k]:=(y2[k]-y1[k])/cd[k];
end;
(*ma tran do cung trong he toa do cuc bo*);
for k:=1 to st do
begin
if((cd[i])<>0) then
begin
u[k]:=e[k]*dt[k]/cd[k];
a1[k]:=sqr(l[k])*u[k]; a2[k]:=l[k]*mm[k]*u[k];  a3[k]:=-a1[k];
a4[k]:=-a2[k];  a5[k]:= sqr(mm[k])*u[k]; a6[k]:= -a2[k];
a7[k]:=-a5[k];  a8[k]:=a1[k]; a9[k]:=a2[k];
a10[k]:=a5[k];
end;
s[d1[k],d1[k]]:=s[d1[k],d1[k]]+a1[k];
s[d1[k],d2[k]]:=s[d1[k],d2[k]]+a2[k];
s[d1[k],d3[k]]:=s[d1[k],d3[k]]+a3[k];
s[d1[k],d4[k]]:=s[d1[k],d4[k]]+a4[k];
s[d2[k],d2[k]]:=s[d2[k],d2[k]]+a5[k];
s[d2[k],d3[k]]:=s[d2[k],d3[k]]+a6[k];
s[d2[k],d4[k]]:=s[d2[k],d4[k]]+a7[k];
```

```
s[d3[k],d3[k]]:=s[d3[k],d3[k]]+a8[k];
s[d3[k],d4[k]]:=s[d3[k],d4[k]]+a9[k];
s[d4[k],d4[k]]:=s[d4[k],d4[k]]+a10[k];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do
s[i,j]:=s[j,i];
(*ma tran do mem trong he toa do mem tong the*);
for k:=1 to st do
begin
b1[k]:= kfb[k]*cd[k]/3; b2[k]:=0; b3[k]:=kfb[k]*cd[k]/6; b4[k]:=0;
b5[k]:=b1[K]; b6[k]:=0;b7[k]:=b3[k]; b8[k]:=b1[k]; b9[k]:=0; b10[k]:=
b1[k];

m[d1[k],d1[k]]:=s[d1[k],d1[k]]+b1[k];
m[d1[k],d2[k]]:=m[d1[k],d2[k]]+b2[k];
m[d1[k],d3[k]]:=m[d1[k],d3[k]]+b3[k];
m[d1[k],d4[k]]:=m[d1[k],d4[k]]+b4[k];
m[d2[k],d2[k]]:=m[d2[k],d2[k]]+b5[k];
m[d2[k],d3[k]]:=m[d2[k],d3[k]]+b6[k];
m[d2[k],d4[k]]:=m[d2[k],d4[k]]+b7[k];
m[d3[k],d3[k]]:=m[d3[k],d3[k]]+b8[k];
m[d3[k],d4[k]]:=m[d3[k],d4[k]]+b9[k];
m[d4[k],d4[k]]:=m[d4[k],d4[k]]+b10[k];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do
m[i,j]:=m[j,i];

writeln('ma tran do cung ');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(s[i,j]);
writeln('ma tran khoi luong ');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(m[i,j]);
 readln;
 end.
```

Chương trình PGR 11: Ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của giàn không gian

Chương trình này phục vụ cho việc xác lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của giàn không gian.

Các số liệu cần nhập:

1. Số thanh st
2. Số bậc tự do sbt
3. Diện tích A (cho mỗi thanh)
4. Mô đun đàn hồi E (cho mỗi thanh)
5. Khối lượng phân bố $\overline{m}$ (cho mỗi thanh)
6. Tọa độ x, y ở mỗi đầu thanh
7. Số thứ tự BTD d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 (cho mỗi thanh)

```
************************************
Program 11 Ma_tran_do_cung_va_ma_tran_khoi_luong_cua_gian_khong_gian;
uses   crt;
type   mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
       mt3=array[1..20]of integer;
Var i,j, k,tbt,st,sbn,sbt:integer;
x1,x2,y1,y2,z1,z2,a,b,l,mm,n,cd,dt,kfb,e,u,t,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,
a10,a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,a18,a19,a20,a21 ,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,
b9,b10,b11,b12,b13,b14,b15,b16,b17,b18,b19,b20,b21:mt2;
d1,d2,d3,d4,d5,d6:mt3;
s,m:mt1;

begin  clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap x1'); for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('nhap x2'); for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('nhap y1'); for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('nhap y2'); for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap z1'); for i:=1 to st do  readln(z1[i]);
writeln('nhap z2'); for i:=1 to st do readln(z2[i]);
writeln('nhap dien tich'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap khoi luong fan bo'); for i:=1 to st do readln(kfb[i]);
```

```
writeln('nhap thu tu bac tu do');
writeln('nhap  d1[i]');  for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap  d2[i]');  for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap  d3[i]');  for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap  d4[i]');  for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap  d5[i]');  for i:=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('nhap  d6[i]');  for i:=1 to st do readln(d6[i]);

for i:=1 to st do
begin
cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i])+sqr(z2[i]-z1[i]));
if(cd[i]<>0) then
begin
l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
n[i]:=(z2[i]-z1[i])/cd[i];
end;
u[i]:=e[i]*dt[i]/cd[i]; a1[i]:=sqr(l[i])*u[i]; a2[i]:=l[i]*mm[i]*u[i];
a3[i]:=l[i]*n[i]*u[i];a4[i]:=-a1[i]; a5[i]:=-a2[i]; a6[i]:=-a3[i];
a7[i]:=sqr(mm[i])*u[i]; a8[i]:=mm[i]*n[i]*u[i];a9[i]:=-a2[i];
a10[i]:=-a7[i]; a11[i]:=-a8[i];a12[i]:=sqr(n[i])*u[i]; a13[i]:=-a3[i];
a14[i]:=-a8[i]; a15[i]:=-a12[i];  a16[i]:=a1[i]; a17[i]:=-a2[i];
a18[i]:=-a3[i]; a19[i]:=a7[i];  a20[i]:=a8[i];  a21[i]:=a12[i];

s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+a1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+a2[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+a3[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+a4[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+a5[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+a6[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+a7[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+a8[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+a9[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+a10[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+a11[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+a12[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+a13[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+a14[i];
```

```
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+a15[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+a16[i];
s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+a17[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+a18[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+a19[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+a20[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+a21[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do        s[i,j]:=s[j,i];
(*Ghep cac ma tran do mem rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
t[i]:=kfb[i]*cd[i]/6; b1[i]:=2*t[i]; b2[i]:=0;b3[i]:=0;b4[i]:=t[i];
b5[i]:=0; b6[i]:=0; b7[i]:=b1[i]; b8[i]:=0;b9[i]:=0; b10[i]:=b4[i];
b11[i]:=0;b12[i]:=b1[i]; b13[i]:=0;b14[i]:=0; b15[i]:=b4[i];
b16[i]:=b1[i]; b17[i]:=0;b18[i]:=0; b19[i]:=b1[i]; b20[i]:=0;
b21[i]:=b1[i];

m[d1[i],d1[i]]:=m[d1[i],d1[i]]+b1[i];
m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+b2[i];
m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+b3[i];
m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+b4[i];
m[d1[i],d5[i]]:=m[d1[i],d5[i]]+b5[i];
m[d1[i],d6[i]]:=m[d1[i],d6[i]]+b6[i];
m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+b7[i];
m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+b8[i];
m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+b9[i];
m[d2[i],d5[i]]:=m[d2[i],d5[i]]+b10[i];
m[d2[i],d6[i]]:=m[d2[i],d6[i]]+b11[i];
m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+b12[i];
m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+b13[i];
m[d3[i],d5[i]]:=m[d3[i],d5[i]]+b14[i];
m[d3[i],d6[i]]:=m[d3[i],d6[i]]+b15[i];
m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+b16[i];
m[d4[i],d5[i]]:=m[d4[i],d5[i]]+b17[i];
```

```
m[d4[i],d6[i]]:=m[d4[i],d6[i]]+b18[i];
m[d5[i],d5[i]]:=m[d5[i],d5[i]]+b19[i];
m[d5[i],d6[i]]:=m[d5[i],d6[i]]+b20[i];
m[d6[i],d6[i]]:=m[d6[i],d6[i]]+b21[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do        m[i,j]:=m[j,i];

writeln('ma tran do cung');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(s[i,j]);
writeln('ma tran khoi luong');
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(m[i,j]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 12: Ma trận độ cứng của khung không gian

Mục đích là xác lập ma trận độ cứng của khung không gian.
Vấn đề nhập số liệu, xem ví dụ (13.1)

```
*********************************
Program 12 Ma_tran_do_cung_cua_khung_khong_gian;
Uses  crt;
Type  mt1=array[1..20,1..20] of real;  mt2=array[1..20] of real;
        mt3=array[1..20] of integer;
var   k1,k2,l,l1,l2,l3,m,m1,m2,m3,s,t,t1,t2,r,r1,r2,rc1,rc2,aa1:mt1;
      cx,cy,cz,xi,yi,zi,xk,yk,zk,xj,yj,zj,xkj,ykj,zkj,xkg,ykg,zkg,s1,s2,
      c1,c2,c3,d,x1,dt,cd,cd2,cd3,mqx,mqy,mqz,mx,aa,b,c,nl,q,qc,qt,f,fn,b1,b2,
      p1,o,cf,ct,pt,pf,v1,v2,v3,v4,v5,v6:mt2;
      g,d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12,n:mt3;
      i,j,k,p,st,sbt,tbt,sbk,x,y,z,w,ss,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,
    z1,z2,z3,z4,z5:integer;   h,e:real;
Begin Clrscr;
```

```
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('so thanh');
readln(st);
writeln('so bac tu do');
readln(sbt);
writeln('modun dan hoi');
readln(e);
writeln('so thanh khong song song voi truc Y');
readln(x);
writeln('so thanh cung chieu voi truc Y');
readln(w);
writeln('dien tich');
for i:=1 to st do
readln(dt[i]);
writeln('modun xoan');
for i:=1 to st do
readln(mx[i]);
writeln('momen quan tinh x');
for i:=1 to st do
readln(mqx[i]);
writeln('momen quan tinh y');
for i:=1 to st do
readln(mqy[i]);
writeln('momen quan tinh z');
for i:=1 to st do
readln(mqz[i]);
writeln('xj');
for i:=1 to st do
readln(xj[i]);
writeln('yj');
for i:=1 to st do
readln(yj[i]);
writeln('zj');
for i:=1 to st do
readln(zj[i]);
writeln('xi');
for i:=1 to st do
```

```
readln(xi[i]);
writeln('yi');
for i:=1 to st do
readln(yi[i]);
writeln('zi');
for i:=1 to st do
readln(zi[i]);
writeln('toa do diem xk');
for i:=1 to st do
readln(xk[i]);
writeln('toa do diem yk');
for i:=1 to st do
readln(yk[i]);
writeln('toa do diem zk');
for i:=1 to st do
readln(zk[i]);
writeln('BTD d1');
for i:=1 to st do
readln(d1[i]);
writeln('BTD d2');
for i:=1 to st do
readln(d2[i]);
writeln('BTD d3');
for i:=1 to st do
readln(d3[i]);
writeln('BTD d4');
for i:=1 to st do
readln(d4[i]);
writeln('BTD d5');
for i:=1 to st do
readln(d5[i]);
writeln('BTD d6');
for i:=1 to st do
readln(d6[i]);
writeln('BTD d7');
for i:=1 to st do
readln(d7[i]);
writeln('BTD d8');
for i:=1 to st do
```

```
readln(d8[i]);
writeln('BTD d9');
for i:=1 to st do
readln(d9[i]);
writeln('BTD d10');
for i:=1 to st do
readln(d10[i]);
writeln('BTD d11');
for i:=1 to st do
readln(d11[i]);
writeln('BTD d12');
for i:=1 to st do
readln(d12[i]);

if(x<>0) then for k:=1 to x do
begin
cd[k]:=sqrt(sqr(xj[k]-xi[k])+sqr(yj[k]-yi[k])+
sqr(zj[k]-zi[k]));cd3[k]:=sqr(cd[k])*cd[k]; cd2[k]:=sqr(cd[k]);
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do
begin
k1[1,1]:=e*dt[k]/cd[k];k1[1,7]:=-k1[1,1];k1[2,2]:=12*e*mqz[k]/cd3[k];
k1[2,6]:=6*e*mqz[k]/cd2[k]; k1[2,8]:=-k1[2,2]; k1[2,12]:=k1[2,6];
k1[3,3]:=12*e*mqy[k]/cd3[k]; k1[3,5]:=-6*e*mqy[k]/cd2[k]; k1[3,9]:=-k1[3,3]; k1[3,10]:=0;
k1[3,11]:=k1[3,5];k1[4,4]:=mx[k]*mqx[k]/cd[k]; k1[4,10]:=-k1[4,4];
k1[5,5]:=4*e*mqy[k]/cd[k];k1[5,9]:=6*e*mqy[k]/cd2[k];k1[5,11]:=
2*e*mqy[k]/cd[k];k1[6,6]:=4*e*mqz[k]/cd[k]; k1[6,8]:=-6*e*mqz[k]/cd2[k];
k1[6,12]:=2*e*mqz[k]/cd[k];k1[7,7]:=k1[1,1];k1[8,8]:=k1[2,2]; k1[8,12]:=-
k1[6,8];k1[9,9]:=k1[3,3]; k1[9,11]:=k1[5,9];k1[10,10]:=k1[4,4];k1[11,11]
:=k1[5,5];k1[12,12]:=k1[6,6];
end;
        for i:=1 to 12 do
         for j:=1 to i-1 do   k1[i,j]:=k1[j,i];
         cx[k]:=(xj[k]-xi[k])/cd[k];
         cy[k]:=(yj[k]-yi[k])/cd[k];
         cz[k]:=(zj[k]-zi[k])/cd[k];
```

```
        xkj[k]:=xk[k]-xj[k];
        ykj[k]:=yk[k]-yj[k]; zkj[k]:=zk[k]-zj[k];
        aa[k]:=sqrt(sqr(cx[k])+sqr(cz[k])); xkg[k]:=cx[k]*
        xkj[k]+cy[k]*ykj[k]+cz[k]*zkj[k];
        ykg[k]:=(cx[k]*cy[k]*xkj[k])/aa[k]+aa[k]*ykj[k]-
        (cy[k]*cz[k]*zkj[k])/aa[k]; zkg[k]:=-(cz[k]*
        xkj[k])/aa[k]+(cx[k]*zkj[k])/aa[k];
        b[k]:=sqrt(sqr(ykg[k])+sqr(zkg[k])); s1[k]:=zkg[k]/b[k];
        c1[k]:=ykg[k]/b[k];
        for i:=1 to 3 do
        for j:=1 to 3 do
        begin
        t1[1,1]:=cx[k]; t1[1,2]:=cy[k]; t1[1,3]:=cz[k];
        t1[2,1]:=-(cx[k]*cy[k]*c1[k]-cz[k]*s1[k])/aa[k];
        t1[2,2]:=aa[k]*c1[k];
        t1[2,3]:=-(cy[k]*cz[k]*c1[k]+cx[k]*s1[k])/aa[k];
        t1[3,1]:=(cx[k]*cy[k]*s1[k]-cz[k]*c1[k])/aa[k];
        t1[3,2]:=-aa[k]*s1[k];
        t1[3,3]:=(cy[k]*cz[k]*s1[k]+cx[k]*c1[k])/aa[k];
        end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
r1[1,1]:=t1[1,1]; r1[1,2]:=t1[1,2]; r1[1,3]:=t1[1,3];r1[2,1]:=t1[2,1];
r1[2,2]:=t1[2,2]; r1[2,3]:=t1[2,3];r1[3,1]:=t1[3,1]; r1[3,2]:=t1[3,2];
r1[3,3]:=t1[3,3]; r1[4,4]:=abs(t1[1,1]);r1[4,5]:=abs(t1[1,2]);r1[4,6]:=
abs(t1[1,3]);r1[5,4]:=abs(t1[2,1]);r1[5,5]:=abs(t1[2,2]);r1[5,6]:=
abs(t1[2,3]);r1[6,4]:=abs(t1[3,1]);r1[6,5]:=abs(t1[3,2]);r1[6,6]:=
abs(t1[3,3]);r1[7,7]:=t1[1,1];r1[7,8]:=t1[1,2];r1[7,9]:=t1[1,3];
r1[8,7]:=t1[2,1]; r1[8,8]:=t1[2,2];r1[8,9]:=t1[2,3];r1[8,10]:=0;
r1[9,7]:=t1[3,1]; r1[9,8]:=t1[3,2];r1[9,9]:=t1[3,3];r1[10,10]:=abs(t1[1,1]);
r1[10,11]:=abs(t1[1,2]);r1[10,12]:=abs(t1[1,3]); r1[11,10]:=abs(t1[2,1]);
r1[11,11]:=abs(t1[2,2]);r1[11,12]:=abs(t1[2,3]); r1[12,10]:=abs(t1[3,1]);
r1[12,11]:=abs(t1[3,2]);r1[12,12]:=abs(t1[3,3]);
end;
```

```
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
        begin
        rc1[i,j]:=r1[j,i]; l1[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
        l1[i,j]:=l1[i,j]+rc1[i,p]*k1[p,j];
        end;
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
        begin
        m1[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
        m1[i,j]:=m1[i,j]+l1[i,p]*r1[p,j];
        end;
end;

z4:=x+1; z5:=x+w;
for k:=z4 to z5 do
begin
        b1[k]:=sqrt(sqr(xk[k])+sqr(zk[k])); s2[k]:=zk[k]/b1[k];
        c2[k]:=xk[k]/b1[k];
        for i:=1 to 3 do
        for j:=1 to 3 do
        begin
        t2[1,1]:=0; t2[1,2]:=1; t2[1,3]:=0;
        t2[2,1]:=-c2[k];t2[2,2]:=0; t2[2,3]:=s2[k]; t2[3,1]:=s2[k];
        t2[3,2]:=0; t2[3,3]:=c2[k];
        end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
r2[1,1]:=t2[1,1]; r2[1,2]:=t2[1,2]; r2[1,3]:=t2[1,3];r2[1,11]:=0;
r2[1,12]:=0;r2[2,1]:=t2[2,1];  r2[2,2]:=t2[2,2]; r2[2,3]:=t2[2,3];
r2[3,1]:=t2[3,1]; r2[3,2]:=t2[3,2];r2[3,3]:=t2[3,3]; r2[4,4]:=abs(t2[1,1]);
r2[4,5]:=abs(t2[1,2]);r2[4,6]:=abs(t2[1,3]); r2[5,4]:=abs(t2[2,1]);
r2[5,5]:=abs(t2[2,2]); r2[5,6]:=abs(t2[2,3]); r2[5,7]:=0; r2[5,8]:=0;
r2[6,4]:=abs(t2[3,1]);r2[6,5]:=abs(t2[3,2]);r2[6,6]:=abs(t2[3,3]);
r2[7,7]:=t2[1,1];r2[7,8]:=t2[1,2];r2[7,9]:=t2[1,3];r2[7,10]:=0;r2[7,11]:=0;
```

```
r2[8,7]:=t2[2,1];  r2[8,8]:=t2[2,2];r2[8,9]:=t2[2,3];r2[9,7]:=t2[3,1];
r2[9,8]:=t2[3,2];r2[9,9]:=t2[3,3]; r2[10,10]:=abs(t2[1,1]);
r2[10,11]:=abs(t2[1,2]);r2[10,12]:=abs(t2[1,3]); r2[11,10]:=abs(t2[2,1]);
r2[11,11]:=abs(t2[2,2]);r2[11,12]:=abs(t2[2,3]); r2[12,10]:=abs(t2[3,1]);
r2[12,11]:=abs(t2[3,2]);r2[12,12]:=abs(t2[3,3]);
end;
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
        begin
        rc2[i,j]:=r2[j,i]; l2[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
        l2[i,j]:=l2[i,j]+rc2[i,p]*k1[p,j];
        end;
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
        begin
        m2[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
        m2[i,j]:=m2[i,j]+l2[i,p]*r2[p,j];
        end;
end;
for k:=1 to st do
begin
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do
m3[i,j]:=m1[i,j]+m2[i,j];
      s[d1[k],d1[k]]:= s[d1[k],d1[k]]+m3[1,1];
      s[d1[k],d2[k]]:= s[d1[k],d2[k]]+m3[1,2];
      s[d1[k],d3[k]]:= s[d1[k],d3[k]]+m3[1,3];
        s[d1[k],d4[k]]:= s[d1[k],d4[k]]+m3[1,4];
        s[d1[k],d5[k]]:= s[d1[k],d5[k]]+m3[1,5];
        s[d1[k],d6[k]]:= s[d1[k],d6[k]]+m3[1,6];
        s[d1[k],d7[k]]:= s[d1[k],d7[k]]+m3[1,7];
        s[d1[k],d8[k]]:= s[d1[k],d8[k]]+m3[1,8];
        s[d1[k],d9[k]]:= s[d1[k],d9[k]]+m3[1,9];
        s[d1[k],d10[k]]:= s[d1[k],d10[k]]+m3[1,10];
        s[d1[k],d11[k]]:= s[d1[k],d11[k]]+m3[1,11];
        s[d1[k],d12[k]]:= s[d1[k],d12[k]]+m3[1,12];
```

```
s[d2[k],d2[k]]:= s[d2[k],d2[k]]+m3[2,2];
s[d2[k],d3[k]]:= s[d2[k],d3[k]]+m3[2,3];
s[d2[k],d4[k]]:= s[d2[k],d4[k]]+m3[2,4];
s[d2[k],d5[k]]:= s[d2[k],d5[k]]+m3[2,5];
s[d2[k],d6[k]]:= s[d2[k],d6[k]]+m3[2,6];
s[d2[k],d7[k]]:= s[d2[k],d7[k]]+m3[2,7];
s[d2[k],d8[k]]:= s[d2[k],d8[k]]+m3[2,8];
s[d2[k],d9[k]]:= s[d2[k],d9[k]]+m3[2,9];
s[d2[k],d10[k]]:= s[d2[k],d10[k]]+m3[2,10];
s[d2[k],d11[k]]:= s[d2[k],d11[k]]+m3[2,11];
s[d2[k],d12[k]]:= s[d2[k],d12[k]]+m3[2,12];
s[d3[k],d3[k]]:= s[d3[k],d3[k]]+m3[3,3];
s[d3[k],d4[k]]:= s[d3[k],d4[k]]+m3[3,4];
s[d3[k],d5[k]]:= s[d3[k],d5[k]]+m3[3,5];
s[d3[k],d6[k]]:= s[d3[k],d6[k]]+m3[3,6];
s[d3[k],d7[k]]:= s[d3[k],d7[k]]+m3[3,7];
s[d3[k],d8[k]]:= s[d3[k],d8[k]]+m3[3,8];
s[d3[k],d9[k]]:= s[d3[k],d9[k]]+m3[3,9];
s[d3[k],d10[k]]:= s[d3[k],d10[k]]+m3[3,10];
s[d3[k],d11[k]]:= s[d3[k],d11[k]]+m3[3,11];
s[d3[k],d12[k]]:= s[d3[k],d12[k]]+m3[3,12];
s[d4[k],d4[k]]:= s[d4[k],d4[k]]+m3[4,4];
s[d4[k],d5[k]]:= s[d4[k],d5[k]]+m3[4,5];
s[d4[k],d6[k]]:= s[d4[k],d6[k]]+m3[4,6];
s[d4[k],d7[k]]:= s[d4[k],d7[k]]+m3[4,7];
s[d4[k],d8[k]]:= s[d4[k],d8[k]]+m3[4,8];
s[d4[k],d9[k]]:= s[d4[k],d9[k]]+m3[4,9];
s[d4[k],d10[k]]:= s[d4[k],d10[k]]+m3[4,10];
s[d4[k],d11[k]]:= s[d4[k],d11[k]]+m3[4,11];
s[d4[k],d12[k]]:= s[d4[k],d12[k]]+m3[4,12];
s[d5[k],d5[k]]:= s[d5[k],d5[k]]+m3[5,5];
s[d5[k],d6[k]]:= s[d5[k],d6[k]]+m3[5,6];
s[d5[k],d7[k]]:= s[d5[k],d7[k]]+m3[5,7];
s[d5[k],d8[k]]:= s[d5[k],d8[k]]+m3[5,8];
s[d5[k],d9[k]]:= s[d5[k],d9[k]]+m3[5,9];
s[d5[k],d10[k]]:= s[d5[k],d10[k]]+m3[5,10];
```

```
s[d5[k],d11[k]]:= s[d5[k],d11[k]]+m3[5,11];
s[d5[k],d12[k]]:= s[d5[k],d12[k]]+m3[5,12];
s[d6[k],d6[k]]:= s[d6[k],d6[k]]+m3[6,6];
s[d6[k],d7[k]]:= s[d6[k],d7[k]]+m3[6,7];
s[d6[k],d8[k]]:= s[d6[k],d8[k]]+m3[6,8];
s[d6[k],d9[k]]:= s[d6[k],d9[k]]+m3[6,9];
s[d6[k],d10[k]]:= s[d6[k],d10[k]]+m3[6,10];
s[d6[k],d11[k]]:= s[d6[k],d11[k]]+m3[6,11];
s[d6[k],d12[k]]:= s[d6[k],d12[k]]+m3[6,12];
s[d7[k],d7[k]]:= s[d7[k],d7[k]]+m3[7,7];
s[d7[k],d8[k]]:= s[d7[k],d8[k]]+m3[7,8];
s[d7[k],d9[k]]:= s[d7[k],d9[k]]+m3[7,9];
s[d7[k],d10[k]]:= s[d7[k],d10[k]]+m3[7,10];
s[d7[k],d11[k]]:= s[d7[k],d11[k]]+m3[7,11];
s[d7[k],d12[k]]:= s[d7[k],d12[k]]+m3[7,12];
s[d8[k],d8[k]]:= s[d8[k],d8[k]]+m3[8,8];
s[d8[k],d9[k]]:= s[d8[k],d9[k]]+m3[8,9];
s[d8[k],d10[k]]:= s[d8[k],d10[k]]+m3[8,10];
s[d8[k],d11[k]]:= s[d8[k],d11[k]]+m3[8,11];
s[d8[k],d12[k]]:= s[d8[k],d12[k]]+m3[8,12];
s[d9[k],d9[k]]:= s[d9[k],d9[k]]+m3[9,9];
s[d9[k],d10[k]]:= s[d9[k],d10[k]]+m3[9,10];
s[d9[k],d11[k]]:= s[d9[k],d11[k]]+m3[9,11];
s[d9[k],d12[k]]:= s[d9[k],d12[k]]+m3[9,12];
s[d10[k],d10[k]]:= s[d10[k],d10[k]]+m3[10,10];
s[d10[k],d11[k]]:= s[d10[k],d11[k]]+m3[10,11];
s[d10[k],d12[k]]:= s[d10[k],d12[k]]+m3[10,12];
s[d11[k],d11[k]]:= s[d11[k],d11[k]]+m3[11,11];
s[d11[k],d12[k]]:= s[d11[k],d12[k]]+m3[11,12];
s[d12[k],d12[k]]:= s[d12[k],d12[k]]+m3[12,12];
end;

for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do
s[i,j]:=s[j,i];
```

```
writeln('ma tran do cung');
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do
writeln(s[i,j]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 13: Ma trận khối lượng của khung không gian

Mục đích là xác lập ma trận khối lượng của khung không gian
Vấn đề nhập số liệu, xem ví dụ (13.1).

```
*********************************
Program 13 Ma_tran_khoi_luong_cua_khung_khong_gian;
Uses  crt;
Type  mt1=array[1..20,1..20] of real;  mt2=array[1..20] of real;
      mt3=array[1..20] of integer;
var   k2,l,l1,l2,m,m1,m2,m3,s,t,t1,t2,r,r1,r2,rc1,rc2,aa1:mt1;
      cx,cy,cz,xi,yi,zi,xk,yk,zk,xj,yj,zj,xkj,ykj,zkj,xkg,ykg,zkg,s1,s2,
      c1,c2,c3,d,x1,dt,cd,cd2,cd3,aa,b,c,nl,q,qc,qt,f,fn,b1,b2,v,mqc,kfb:mt2;
      g,d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12,n:mt3;
      i,j,k,p,st,sbt,tbt,sbk,x,y,z,w,ss,z1,z2,z3,z4,z5:integer;  h,e:real;
Procedure  Tinhs;
begin
for k:=1 to st do
begin
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do
m3[i,j]:=m1[i,j]+m2[i,j];
        s[d1[k],d1[k]]:= s[d1[k],d1[k]]+m3[1,1];
        s[d1[k],d2[k]]:= s[d1[k],d2[k]]+m3[1,2];
        s[d1[k],d3[k]]:= s[d1[k],d3[k]]+m3[1,3];
        s[d1[k],d4[k]]:= s[d1[k],d4[k]]+m3[1,4];
        s[d1[k],d5[k]]:= s[d1[k],d5[k]]+m3[1,5];
        s[d1[k],d6[k]]:= s[d1[k],d6[k]]+m3[1,6];
        s[d1[k],d7[k]]:= s[d1[k],d7[k]]+m3[1,7];
        s[d1[k],d8[k]]:= s[d1[k],d8[k]]+m3[1,8];
        s[d1[k],d9[k]]:= s[d1[k],d9[k]]+m3[1,9];
```

```
s[d1[k],d10[k]]:= s[d1[k],d10[k]]+m3[1,10];
s[d1[k],d11[k]]:= s[d1[k],d11[k]]+m3[1,11];
s[d1[k],d12[k]]:= s[d1[k],d12[k]]+m3[1,12];
s[d2[k],d2[k]]:= s[d2[k],d2[k]]+m3[2,2];
s[d2[k],d3[k]]:= s[d2[k],d3[k]]+m3[2,3];
s[d2[k],d4[k]]:= s[d2[k],d4[k]]+m3[2,4];
s[d2[k],d5[k]]:= s[d2[k],d5[k]]+m3[2,5];
s[d2[k],d6[k]]:= s[d2[k],d6[k]]+m3[2,6];
s[d2[k],d7[k]]:= s[d2[k],d7[k]]+m3[2,7];
s[d2[k],d8[k]]:= s[d2[k],d8[k]]+m3[2,8];
s[d2[k],d9[k]]:= s[d2[k],d9[k]]+m3[2,9];
s[d2[k],d10[k]]:= s[d2[k],d10[k]]+m3[2,10];
s[d2[k],d11[k]]:= s[d2[k],d11[k]]+m3[2,11];
s[d2[k],d12[k]]:= s[d2[k],d12[k]]+m3[2,12];
s[d3[k],d3[k]]:= s[d3[k],d3[k]]+m3[3,3];
s[d3[k],d4[k]]:= s[d3[k],d4[k]]+m3[3,4];
s[d3[k],d5[k]]:= s[d3[k],d5[k]]+m3[3,5];
s[d3[k],d6[k]]:= s[d3[k],d6[k]]+m3[3,6];
s[d3[k],d7[k]]:= s[d3[k],d7[k]]+m3[3,7];
s[d3[k],d8[k]]:= s[d3[k],d8[k]]+m3[3,8];
s[d3[k],d9[k]]:= s[d3[k],d9[k]]+m3[3,9];
s[d3[k],d10[k]]:= s[d3[k],d10[k]]+m3[3,10];
s[d3[k],d11[k]]:= s[d3[k],d11[k]]+m3[3,11];
s[d3[k],d12[k]]:= s[d3[k],d12[k]]+m3[3,12];
s[d4[k],d4[k]]:= s[d4[k],d4[k]]+m3[4,4];
s[d4[k],d5[k]]:= s[d4[k],d5[k]]+m3[4,5];
s[d4[k],d6[k]]:= s[d4[k],d6[k]]+m3[4,6];
s[d4[k],d7[k]]:= s[d4[k],d7[k]]+m3[4,7];
s[d4[k],d8[k]]:= s[d4[k],d8[k]]+m3[4,8];
s[d4[k],d9[k]]:= s[d4[k],d9[k]]+m3[4,9];
s[d4[k],d10[k]]:= s[d4[k],d10[k]]+m3[4,10];
s[d4[k],d11[k]]:= s[d4[k],d11[k]]+m3[4,11];
s[d4[k],d12[k]]:= s[d4[k],d12[k]]+m3[4,12];
s[d5[k],d5[k]]:= s[d5[k],d5[k]]+m3[5,5];
s[d5[k],d6[k]]:= s[d5[k],d6[k]]+m3[5,6];
s[d5[k],d7[k]]:= s[d5[k],d7[k]]+m3[5,7];
s[d5[k],d8[k]]:= s[d5[k],d8[k]]+m3[5,8];
s[d5[k],d9[k]]:= s[d5[k],d9[k]]+m3[5,9];
```

```
        s[d5[k],d10[k]]:= s[d5[k],d10[k]]+m3[5,10];
        s[d5[k],d11[k]]:= s[d5[k],d11[k]]+m3[5,11];
        s[d5[k],d12[k]]:= s[d5[k],d12[k]]+m3[5,12];
        s[d6[k],d6[k]]:= s[d6[k],d6[k]]+m3[6,6];
        s[d6[k],d7[k]]:= s[d6[k],d7[k]]+m3[6,7];
        s[d6[k],d8[k]]:= s[d6[k],d8[k]]+m3[6,8];
        s[d6[k],d9[k]]:= s[d6[k],d9[k]]+m3[6,9];
        s[d6[k],d10[k]]:= s[d6[k],d10[k]]+m3[6,10];
        s[d6[k],d11[k]]:= s[d6[k],d11[k]]+m3[6,11];
        s[d6[k],d12[k]]:= s[d6[k],d12[k]]+m3[6,12];
        s[d7[k],d7[k]]:= s[d7[k],d7[k]]+m3[7,7];
        s[d7[k],d8[k]]:= s[d7[k],d8[k]]+m3[7,8];
        s[d7[k],d9[k]]:= s[d7[k],d9[k]]+m3[7,9];
        s[d7[k],d10[k]]:= s[d7[k],d10[k]]+m3[7,10];
        s[d7[k],d11[k]]:= s[d7[k],d11[k]]+m3[7,11];
        s[d7[k],d12[k]]:= s[d7[k],d12[k]]+m3[7,12];
        s[d8[k],d8[k]]:= s[d8[k],d8[k]]+m3[8,8];
        s[d8[k],d9[k]]:= s[d8[k],d9[k]]+m3[8,9];
        s[d8[k],d10[k]]:= s[d8[k],d10[k]]+m3[8,10];
        s[d8[k],d11[k]]:= s[d8[k],d11[k]]+m3[8,11];
        s[d8[k],d12[k]]:= s[d8[k],d12[k]]+m3[8,12];
        s[d9[k],d9[k]]:= s[d9[k],d9[k]]+m3[9,9];
        s[d9[k],d10[k]]:= s[d9[k],d10[k]]+m3[9,10];
        s[d9[k],d11[k]]:= s[d9[k],d11[k]]+m3[9,11];
        s[d9[k],d12[k]]:= s[d9[k],d12[k]]+m3[9,12];
        s[d10[k],d10[k]]:= s[d10[k],d10[k]]+m3[10,10];
        s[d10[k],d11[k]]:= s[d10[k],d11[k]]+m3[10,11];
        s[d10[k],d12[k]]:= s[d10[k],d12[k]]+m3[10,12];
        s[d11[k],d11[k]]:= s[d11[k],d11[k]]+m3[11,11];
        s[d11[k],d12[k]]:= s[d11[k],d12[k]]+m3[11,12];
        s[d12[k],d12[k]]:= s[d12[k],d12[k]]+m3[12,12];
end;
end;
Begin Clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('so thanh');
readln(st);
writeln('so BTD co chuyen vi');
```

```
readln(sbt);
writeln('so thanh khong song song voi truc Y');
readln(x);
writeln('so thanh cung chieu voi truc Y');
readln(w);
writeln('dien tich');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('khoi luong fan bo');
for i:=1 to st do readln(kfb[i]);
writeln('momem quan tinh doc cuc');
for i:=1 to st do
readln(mqc[i]);
writeln('xj');
for i:=1 to st do
readln(xj[i]);
writeln('yj');
for i:=1 to st do
readln(yj[i]);
writeln('zj');
for i:=1 to st do
readln(zj[i]);
writeln('xi');
for i:=1 to st do
readln(xi[i]);
writeln('yi');
for i:=1 to st do
readln(yi[i]);
writeln('zi');
for i:=1 to st do
readln(zi[i]);
writeln('toa do diem xk');
for i:=1 to st do
readln(xk[i]);
writeln('toa do diem yk');
for i:=1 to st do
readln(yk[i]);
```

```
writeln('toa do diem zk');
for i:=1 to st do
readln(zk[i]);
writeln('BTD d1');
for i:=1 to st do
readln(d1[i]);
writeln('BTD d2');
for i:=1 to st do
readln(d2[i]);
writeln('BTD d3');
for i:=1 to st do
readln(d3[i]);
writeln('BTD d4');
for i:=1 to st do
readln(d4[i]);
writeln('BTD d5');
for i:=1 to st do
readln(d5[i]);
writeln('BTD d6');
for i:=1 to st do
readln(d6[i]);
writeln('BTD d7');
for i:=1 to st do
readln(d7[i]);
writeln('BTD d8');
for i:=1 to st do
readln(d8[i]);
writeln('BTD d9');
for i:=1 to st do
readln(d9[i]);
writeln('BTD d10');
for i:=1 to st do
readln(d10[i]);
writeln('BTD d11');
for i:=1 to st do
readln(d11[i]);
writeln('BTD d12');
```

```
for i:=1 to st do
readln(d12[i]);

if(x<>0) then for k:=1 to x do
begin
cd[k]:=sqrt(sqr(xj[k]-xi[k])+sqr(yj[k]-yi[k])+
sqr(zj[k]-zi[k])); v[k]:=kfb[k]*cd[k]/420;
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do
begin
k2[1,1]:=140*v[k];k2[1,7]:=70*v[k];k2[2,2]:=156*v[k];  k2[2,6]:=
22*cd[k]*v[k]; k2[2,8]:=54*v[k];k2[2,12]:=-13*v[k];k2[3,3]:=k2[2,2];
k2[3,5]:=-k2[2,6];k2[3,9]:=k2[2,8];k2[3,11]:=-k2[2,12];k2[4,4]:=
140*mqc[k]*v[k]/dt[k];k2[4,10]:=70*mqc[k]/dt[k];k2[5,5]:=4*cd2[k]*v[k];
k2[5,9]:=k2[2,12];k2[5,11]:=-3*cd2[k]*v[k];k2[6,6]:=k2[5,5]; k2[6,8]:=
-k2[2,12];k2[6,12]:=k2[5,11];k2[7,7]:=k2[1,1];k2[8,8]:=k2[2,2]; k2[8,12]:=
-k2[2,6];k2[9,9]:=k2[2,2]; k2[9,11]:=k2[2,6];k2[10,10]:=k2[4,4];k2[11,11]:=
k2[5,5];k2[12,12]:=k2[5,5];
end;
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to i-1 do  k2[i,j]:=k2[j,i];
        cx[k]:=(xj[k]-xi[k])/cd[k];
        cy[k]:=(yj[k]-yi[k])/cd[k];
        cz[k]:=(zj[k]-zi[k])/cd[k];
        xkj[k]:=xk[k]-xj[k];
        ykj[k]:=yk[k]-yj[k]; zkj[k]:=zk[k]-zj[k];
        aa[k]:=sqrt(sqr(cx[k])+sqr(cz[k])); xkg[k]:=cx[k]*
        xkj[k]+cy[k]*ykj[k]+cz[k]*zkj[k];
        ykg[k]:=(cx[k]*cy[k]*xkj[k])/aa[k]+aa[k]*ykj[k]-
        (cy[k]*cz[k]*zkj[k])/aa[k]; zkg[k]:=-(cz[k]*
        xkj[k])/aa[k]+(cx[k]*zkj[k])/aa[k];
        b[k]:=sqrt(sqr(ykg[k])+sqr(zkg[k]));  s1[k]:=zkg[k]/b[k];
        c1[k]:=ykg[k]/b[k];
        for i:=1 to 3 do
        for j:=1 to 3 do
        begin
        t1[1,1]:=cx[k];  t1[1,2]:=cy[k]; t1[1,3]:=cz[k];
        t1[2,1]:=-(cx[k]*cy[k]*c1[k]-cz[k]*s1[k])/aa[k];
```

```
        t1[2,2]:=aa[k]*c1[k];
        t1[2,3]:=-(cy[k]*cz[k]*c1[k]+cx[k]*s1[k])/aa[k];
        t1[3,1]:=(cx[k]*cy[k]*s1[k]-cz[k]*c1[k])/aa[k];
        t1[3,2]:=-aa[k]*s1[k];
        t1[3,3]:=(cy[k]*cz[k]*s1[k]+cx[k]*c1[k])/aa[k];
        end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
r1[1,1]:=t1[1,1]; r1[1,2]:=t1[1,2]; r1[1,3]:=t1[1,3];r1[2,1]:=t1[2,1];
r1[2,2]:=t1[2,2]; r1[2,3]:=t1[2,3];r1[3,1]:=t1[3,1]; r1[3,2]:=t1[3,2];
r1[3,3]:=t1[3,3];;r1[4,4]:=abs(t1[1,1]);r1[4,5]:=abs(t1[1,2]);r1[4,6]:=
abs(t1[1,3]);r1[5,4]:=abs(t1[2,1]);r1[5,5]:=abs(t1[2,2]);r1[5,6]:=
abs(t1[2,3]);r1[6,4]:=abs(t1[3,1]);r1[6,5]:=abs(t1[3,2]);r1[6,6]:=
abs(t1[3,3]);r1[7,7]:=t1[1,1];r1[7,8]:=t1[1,2];r1[7,9]:=t1[1,3];r1[8,7]:=
t1[2,1];r1[8,8]:=t1[2,2];r1[8,9]:=t1[2,3];r1[9,7]:=t1[3,1]; r1[9,8]:=
t1[3,2];r1[9,9]:=t1[3,3];r1[10,10]:=abs(t1[1,1]);r1[10,11]:=abs(t1[1,2]);
r1[10,12]:=abs(t1[1,3]); r1[11,10]:=abs(t1[2,1]);r1[11,11]:=abs(t1[2,2]);
r1[11,12]:=abs(t1[2,3]); r1[12,10]:=abs(t1[3,1]);r1[12,11]:=abs(t1[3,2]);
r1[12,12]:=abs(t1[3,3]);
end;
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
        begin
        rc1[i,j]:=r1[j,i]; l1[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
        l1[i,j]:=l1[i,j]+rc1[i,p]*k2[p,j];
        end;
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
        begin
        m1[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
        m1[i,j]:=m1[i,j]+l1[i,p]*r1[p,j];
        end;
end;
z4:=x+1; z5:=x+w;
for k:=z4 to z5 do
begin
cd[k]:=sqrt(sqr(xj[k]-xi[k])+sqr(yj[k]-yi[k])+
sqr(zj[k]-zi[k])); v[k]:=kfb[k]*cd[k]/420;
```

```
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do
begin
k2[1,1]:=140*v[k];k2[1,7]:=70*v[k];k2[2,2]:=156*v[k];  k2[2,6]:=
22*cd[k]*v[k]; k2[2,8]:=54*v[k];k2[2,12]:=-13*v[k];k2[3,3]:=k2[2,2];
k2[3,5]:=-k2[2,6];k2[3,9]:=k2[2,8];k2[3,11]:=-k2[2,12];k2[4,4]:=
140*mqc[k]*v[k]/dt[k];k2[4,10]:=70*mqc[k]*v[k]/dt[k];k2[5,5]:=4*cd2[k]*v[k];
k2[5,9]:=k2[2,12];k2[5,11]:=-3*cd2[k]*v[k];k2[6,6]:=k2[5,5]; k2[6,8]:=
-k2[2,12];k2[6,12]:=k2[5,11];k2[7,7]:=k2[1,1];k2[8,8]:=k2[2,2]; k2[8,12]:=
-k2[2,6];k2[9,9]:=k2[2,2]; k2[9,11]:=k2[2,6];k2[10,10]:=k2[4,4];
k2[11,11]:=k2[5,5];k2[12,12]:=k2[5,5];
end;

        b1[k]:=sqrt(sqr(xk[k])+sqr(zk[k])); s2[k]:=zk[k]/b1[k];
        c2[k]:=xk[k]/b1[k];
        for i:=1 to 3 do
        for j:=1 to 3 do
        begin
        t2[1,1]:=0; t2[1,2]:=1; t2[1,3]:=0;
        t2[2,1]:=-c2[k];t2[2,2]:=0; t2[2,3]:=s2[k]; t2[3,1]:=s2[k];
        t2[3,2]:=0; t2[3,3]:=c2[k];
        end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
r2[1,1]:=t2[1,1]; r2[1,2]:=t2[1,2]; r2[1,3]:=t2[1,3];r2[2,1]:=t2[2,1];
r2[2,2]:=t2[2,2]; r2[2,3]:=t2[2,3];r2[3,1]:=t2[3,1]; r2[3,2]:=t2[3,2];
r2[3,3]:=t2[3,3];r2[4,4]:=abs(t2[1,1]);r2[4,5]:=abs(t2[1,2]);r2[4,6]:=
abs(t2[1,3]); r2[5,4]:=abs(t2[2,1]);r2[5,5]:=abs(t2[2,2]); r2[5,6]:=
abs(t2[2,3]);r2[6,4]:=abs(t2[3,1]);r2[6,5]:=abs(t2[3,2]);r2[6,6]:=
abs(t2[3,3]);r2[7,7]:=t2[1,1];r2[7,8]:=t2[1,2];r2[7,9]:=t2[1,3];r2[8,7]:=
t2[2,1];  r2[8,8]:=t2[2,2];r2[8,9]:=t2[2,3];r2[9,7]:=t2[3,1]; r2[9,8]:=
t2[3,2];r2[9,9]:=t2[3,3]; r2[10,10]:=abs(t2[1,1]);r2[10,11]:=abs(t2[1,2]);
r2[10,12]:=abs(t2[1,3]); r2[11,10]:=abs(t2[2,1]);r2[11,11]:=abs(t2[2,2]);
r2[11,12]:=abs(t2[2,3]); r2[12,10]:=abs(t2[3,1]);r2[12,11]:=abs(t2[3,2]);
r2[12,12]:=abs(t2[3,3]);
end;
      for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 12 do
```

```
    begin
    rc2[i,j]:=r2[j,i]; l2[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
    l2[i,j]:=l2[i,j]+rc2[i,p]*k2[p,j];
    end;
    for i:=1 to 12 do
    for j:=1 to 12 do
    begin
    m2[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
    m2[i,j]:=m2[i,j]+l2[i,p]*r2[p,j];
    end;
end;
TINHS;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do
s[i,j]:=s[j,i];

writeln('ma tran khoi luong');
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do
writeln(s[i,j]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 14: Tính kết cấu chịu tác dụng của tải trọng không đổi đặt đột ngột

Phục vụ cho việc tính chuyển vị tại các thời điểm khác nhau một kết cấu bất kỳ chịu tác dụng của tải trọng đặt đột ngột.

Các số liệu cần nhập:

1. Số bậc tự do sbt
2. Tần số vòng (ứng với mỗi bậc tự do)
3. Các véc tơ riêng (ứng với mỗi tần số vòng)
4. Tải trọng đặt đột ngột F_i
5. Các phần tử của ma trận khối lượng.

```
*********************************
Program 14 Tinh_ket_cau_chiu_tac_dung_cua_tai_trong_khong_doi_dat_dot_ngot;
Uses  crt;
Type
mt2 =array[1..20] of real;
mt1 =array[1..20,1..20] of real;
```

```
Var  n,i,j,k,s,pp:integer; tsv,f,e,t,l,p,z,x:mt2; y,m,vtr,fi:mt1;
      sgt:real;

Begin  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
 Clrscr;
writeln ('so BTD');
readln(n);
writeln ('so doan thoi gian');
readln(s);
writeln ('so gia thoi gian');
readln(sgt);
writeln ('ma tran khoi luong');
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
readln(m[i,j]);
writeln ('tan so vong');
for i:=1 to n do
readln(tsv[i]);
writeln ('tai trong');
for i:=1 to n do
readln(l[i]);
writeln ('ma tran vec to rieng');
for j :=1 to n do
for i :=1 to n do
readln(vtr[i,j]);
for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
m[i,j]:=m[j,i];
for pp:=2 to s+1 do    t[pp]:=(pp-1)*sgt;   t[1]:=0;
for j:=1 to n do
begin
for k:=1 to n do
begin
e[k]:=0;
for i:=1 to n do
e[k]:=e[k]+vtr[i,j]*m[i,k];
end;
f[j]:=0; for k:=1 to n do
```

```
f[j]:=f[j]+e[k]*vtr[k,j];
end;
for j:=1 to n do
x[j]:=sqrt(f[j]);
for j:=1 to n do
for i:=1 to n do
begin
if(x[j]<>0) then
fi[i,j]:= vtr[i,j]/x[j]
end;
for i:=1 to n do
begin
p[i]:=0;
for j:=1 to n do
p[i]:=p[i]+fi[j,i]*l[j];
end;
for j:=1 to n do
if(sqr(tsv[j])<>0) then
z[j]:=(p[j]/sqr(tsv[j]));
for i:=1 to n do
begin
for pp:=1 to s+1 do
begin  y[i,pp]:=0; for j:=1 to n do
y[i,pp]:=y[i,pp]+fi[i,j]*z[j]*(1-cos(tsv[j]*t[pp]));
end;
end;
writeln('chuyen vi tai cac thoi diem');
for i:=1 to n do
for pp:=1 to s+1 do
writeln(y[i,pp]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 15: Tính kết cấu chịu tác dụng của tải trọng điều hòa

Phục vụ cho việc lập phương trình dao động của một kết cấu bất kỳ chịu tác dụng của tải trọng điều hòa.

Các số liệu cần nhập:

1. Số bậc tự do
2. Tần số vòng ứng với mỗi BTD

3. Các véc tơ riêng ứng với các tần số vòng

4. Biên độ tải trọng điều hòa F_0

5. Tần số vòng tải trọng điều hòa $\overline{\omega}$

6. Các phần tử ma trận khối lượng.

```
*******************************
Program 15 Tinh_ket_cau_chiu_tac_dung_cua_tai_trong_dieu_hoa;
Uses  crt;
Type
      mt2 =array[1..20] of real;
      mt1 =array[1..20,1..20] of real;
Var  n,i,j,k,s,pp:integer; tsv,f,e,t,fo,p,z,x,bd,u:mt2; y,m,vtr,fi:mt1;
      sgt,tst:real;

Begin  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
Clrscr;
writeln ('so BTD');
readln(n);
writeln ('tan so vong');
for i:=1 to n do
readln(tsv[i]);
writeln ('tan so tai trong');
readln(tst);
writeln (' bien do tai trong');
for i:=1 to n do
readln(fo[i]);
writeln ('ma tran vec to rieng');
for j :=1 to n do
for i :=1 to n do
readln(vtr[i,j]);
writeln ('ma tran khoi luong');
for i :=1 to n do
for j :=i to n do
readln(m[i,j]);

for i :=1 to n do
for j :=1 to i-1 do
m[i,j]:=m[j,i];
for j:=1 to n do
```

```
begin
for k:=1 to n do
begin
e[k]:=0;
for i:=1 to n do
e[k]:=e[k]+vtr[i,j]*m[i,k];
end;
f[j]:=0; for k:=1 to n do
f[j]:=f[j]+e[k]*vtr[k,j];
end;
for j:=1 to n do
x[j]:=sqrt(f[j]);
for j:=1 to n do
for i:=1 to n do
begin
if(x[j]<>0) then
fi[i,j]:= vtr[i,j]/x[j]
end;

for i:=1 to n do
begin
p[i]:=0;
for j:=1 to n do
p[i]:=p[i]+fi[j,i]*fo[j];
end;
for i:=1 to n do
begin   u[i]:=sqr(tsv[i])-sqr(tst);
z[i]:=p[i]/u[i];
end;
for i:=1 to n do
begin bd[i]:=0;
for j:=1 to n do
bd[i]:=bd[i]+fi[i,j]*z[j];
end;

writeln('bien do dao dong tai cac thoi diem');
for i:=1 to n do
writeln(bd[i]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 16: Tính giá trị riêng lớn nhất và véc tơ riêng tương ứng của kết cấu

Phục vụ cho việc tính giá trị riêng lớn nhất và véc tơ tương ứng của một kết cấu bất kỳ.

Số liệu cần nhập:

1. Số bậc tự do n
2. Các phần tử của ma trận độ cứng
3. Các phần tử của ma trận khối lượng

```
**********************************

Program 16 Tinh_GTRLN_va_vec_to_rieng_tuong_ung_cua_ket_cau;

Uses  crt;
Type
      mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4:array[1..10] of integer;
     c1,c2,b1,e1,d,cd,dt,e,y,vtr,l,mm,x1,x2,y1,y2:mt2;
     s,m,a,u,b,x:mt1;
     tt,gtrln,c,z:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;n:integer);
   Var            i,j,p :integer;   c:real;
begin
                 p:=0;
REPEAT
                 p:=p+1;
                 if(a[p,p]<>0)then
                 c:=1/a[p,p];
                 for j:=1 to n do
                    begin
                          a[p,j]:=a[p,j]*c;
                          U[p,j]:=U[p,j]*c;
                     end;
                 for i:=1 to n do
                 if(i<>p) then
                     begin
                     c:=a[i,p];
                     for j:=1 to n do
                       begin
                       a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
                      U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
                     end;
                  end;

   UNTIL(p=n);
   end;
```

```
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
   begin
    k:=0;
    REPEAT
                k:=k+1;
                for i:=1 to n do
                  begin
                    B[i,k]:=0;
                    for p:=1 to n do
                    B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
                  end;
                if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
                for i:=1 to n do
                begin
                   if(Y[k]<>0) then
                  X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
                end;
                z:=(Y[k]-Y[k-1])/Y[k];
   UNTIL abs(z)<=1E-12;
   for i:=1 to sbt do    VTR[i]:=X[i,k+1];
                GTRLN:=Y[k];
end;
Begin           clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so BTD ');
readln(sbt);
writeln('ma tran do cung');
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do
readln(s[i,j]);
writeln('ma tran khoi luong');
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do
readln(m[i,j]);

for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do
begin
  s[i,j]:=s[j,i];
   m[i,j]:=m[j,i];
end;
(*Goi chuong trinh con de ngich dao MT m*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
```

```
if(i=j) then u[i,j]:=1;
if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(m,u,sbt);

(*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
   a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
   a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;
(*Goi chuong trinh con de tinh gia tri riêng lon nhat*);
for i:=1 to sbt do x[i,1]:=1;
TGTRLN(a,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
writeln('vecto rieng ');
for i:=1 to sbt do
writeln(VTR[i]);
writeln('Gia tri rieng lon nhat');
writeln(GTRLN);
readln;
end.
```

Chương trình PGR 17: Tính giá trị riêng và véc tơ riêng cho ma trận cấp 2

Phục vụ cho việc tính giá trị riêng và véc tơ riêng của một ma trận cấp 2

Số liệu cần nhập:

1. Số bậc tự do n
2. Giá trị riêng lớn nhất tính từ chương trình PGR16
3. Véc tơ riêng tương ứng tính từ chương trình PGR16
4. Các phần tử của ma trận đồ cứng
5. Các phần tử của ma trận khối lượng

```
*********************************
Program 17 Tinh_cac_gia_tri_rieng_va_vec_to_rieng_cho_ma_tran_cap_2;
uses   crt;
type   mt1=array[1..20,1..20] of real ;  mt2=array[1..20] of real ;
var    t1,t2,t1n,t2n,e1,e2,f1,f2,a,c,b,x,s,m,u:mt1;
vtr1,vtr2,vtr3,vc1,z1,z2,z3,vtr,vc,y:mt2;
                    i,j,n,p,k:integer;   gtr1,gtr2,gtr3,h1,h3,h2,gtr,z:real;
```

```
Procedure NDMT(var a,u:mt1;n:integer);
Var    i,j,p :integer;  c:real;
begin
p:=0;
REPEAT
              p:=p+1;
              if(a[p,p]<>0)then
              c:=1/a[p,p];
              for j:=1 to n do
                 begin
                   a[p,j]:=a[p,j]*c;
                  U[p,j]:=U[p,j]*c;
                end;
              for i:=1 to n do
              if(i<>p) then
                 begin
                  c:=a[i,p];
                  for j:=1 to n do
                  begin
                     a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
                    U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
                  end;
                end;

UNTIL(p=n);
end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1);
begin
   k:=0;
   REPEAT
         k:=k+1;
         for i:=1 to n do
              begin
                B[i,k]:=0;
                for p:=1 to n do
                B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
             end;
         if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
         for i:=1 to n do
         begin
              if(Y[k]<>0) then
              X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
          end;
```

```
            z:=(Y[k]-Y[k-1])/Y[k];
      UNTIL abs(z)<=1E-12;
      for i:=1 to n do    vtr[i]:=X[i,k+1];
            gtr:=Y[k];
end;
begin clrscr;
(*Nguoilap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap cap ma tran vuong');
readln (n);
writeln('nhap ma tran do cung');
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
readln (s[i,j]);
writeln('ma tran khoi luong');
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
readln (m[i,j]);
writeln('nhap gia tri rieng 1');
readln (gtr1);
writeln('vec to rieng 1');
for i:=1 to n do
readln (vtr1[i]);

for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
begin
s[i,j]:=s[j,i];
m[i,j]:=m[j,i];
end;
(*Goi chuong trinh con de ngich dao MT m*);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
if(i=j) then u[i,j]:=1;
if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(m,u,n);
(*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
    a[i,j]:=0; for k:=1 to n do
    a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;
(*Tinh gia tri rieng thu hai va vecto rieng tuong ung*);
for i:=1 to n do
```

```
for j:=1 to n do
begin
t1[1,1]:=1;  t1[2,1]:=vtr1[2]; t1[2,2]:=1;  t1[1,2]:=0;
t1n[1,1]:=1;  t1n[2,1]:=-vtr1[2]; t1n[1,2]:=0; t1n[2,2]:=1;
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin   e1[i,j]:=0;  for p:=1 to n do  e1[i,j]:=e1[i,j]+t1n[i,p]*a[p,j];
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
f1[i,j]:=0;  for p:=1 to n do  f1[i,j]:=f1[i,j]+e1[i,p]*t1[p,j];
end;
gtr2:=f1[2,2];
for i:=1 to 2 do
begin
vtr2[1]:=1;  vtr2[2]:=a[2,1]/(gtr2-a[2,2]);
end;

    (*Doc ket qua*);
    writeln('gia tri rieng 2');
    writeln(gtr2);
    writeln('vecto rieng 2');
    for i:=1 to n do
    writeln(vtr2[i]);
    readln;
    end.
```

Chương trình PGR 18: Tính giá trị riêng và véc tơ riêng cho ma trận cấp 3

Số liệu cần nhập:

1. Số bậc tự do n
2. Giá trị riêng lớn nhất tính từ chương trình PGR16
3. Véc tơ riêng tương ứng tính từ chương trình PGR16
4. Các phần tử của ma trận đồ cứng
5. Các phần tử của ma trận khối lượng

```
**********************************
Program 18 Tinh_cac_gia_tri_rieng_va_vec_to_rieng_cho_ma_tran_cap_3;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real ;  mt2=array[1..20] of real ;
var   t1,t2,t1n,t2n,e1,e2,f1,f2,a,c,b,x,s,m,u:mt1;
```

```
vtr1,vtr2,vtr3,vc1,y,z1,z2,z3,z,vtr,vc:mt2;
i,j,n,p,k:integer;   gtr1,gtr2,gtr3,h1,h2,gtr,v:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;n:integer);
 Var              i,j,p :integer;  c:real;
begin
p:=0;
REPEAT
          p:=p+1;
          if(a[p,p]<>0)then
          c:=1/a[p,p];
          for j:=1 to n do
               begin
                  a[p,j]:=a[p,j]*c;
                 U[p,j]:=U[p,j]*c;
               end;
          for i:=1 to n do
          if(i<>p) then
               begin
                 c:=a[i,p];
                 for j:=1 to n do
                 begin
                    a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
                    U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
                end;
          end;

 UNTIL(p=n);
 end;

 Procedure TGTRLN(a,x:mt1);
   begin
    k:=0;
    REPEAT
              k:=k+1;
              for i:=1 to n do
                begin
                   B[i,k]:=0;
                   for p:=1 to n do
                   B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
                end;
              if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
              for i:=1 to n do
              begin
```

```
                if(Y[k]<>0) then
                X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
            end;
            v:=(Y[k]-Y[k-1])/Y[k];
    UNTIL abs(v)<=1E-12;
    for i:=1 to n do    vtr[i]:=X[i,k+1];
          gtr:=Y[k];
end;
begin clrscr;
(*Nguoilap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap cap ma tran vuong');
readln (n);
writeln('gia tri rieng 1');
readln (gtr1);
writeln('vec to rieng 1');
for i:=1 to n do
readln (vtr1[i]);
writeln('nhap ma tran do cung');
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
readln (s[i,j]);
writeln('ma tran khoi luong');
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
readln (m[i,j]);

for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
begin
s[i,j]:=s[j,i];
m[i,j]:=m[j,i];
end;
(*Goi chuong trinh con de ngich dao MT m*);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
if(i=j) then u[i,j]:=1;
if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(m,u,n);
(*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
```

```
begin
   a[i,j]:=0; for k:=1 to n do
   a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
t1[1,1]:=1;  for i:=2 to n do t1[i,1]:=vtr1[i];  for j:=2 to n do
        t1[1,j]:=0;
        for i:=2 to n do
        for j:=2 to n do
        begin
        if(i=j)  then  t1[i,j]:=1;  if(i<>j) then t1[i,j]:=0;
        end;
t1n[1,1]:=1;  for i:=2 to n do t1n[i,1]:=-vtr1[i];  for j:=2 to n do
        t1n[1,j]:=0;
        for i:=2 to n do
        for j:=2 to n do
        begin
        if(i=j)  then  t1n[i,j]:=1;  if(i<>j) then t1n[i,j]:=0;
        end;
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin   e1[i,j]:=0;
for p:=1 to n do  e1[i,j]:=e1[i,j]+t1n[i,p]*a[p,j];
end;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin   f1[i,j]:=0;
f1[i,j]:=0;  for p:=1 to n do  f1[i,j]:=f1[i,j]+e1[i,p]*t1[p,j];
end;
for i:=1 to n-1 do
for j:=1 to n-1 do                c[i,j]:=f1[i+1,j+1];
(*Goi chuong trinh con de tinh GTRLN cua ma tran c*);
for i:=1 to n-1 do x[i,1]:=1;
TGTRLN(c,x);
gtr2:=gtr; for i:=1 to n-1 do vtr[i]:=vtr[i];
for i:=2 to n do   Vc[i]:=vtr[i-1];
(*Tinh vec to rieng thu hai*);
   h1:=0;  for p:= 2 to n do   h1:=h1+f1[1,p]*vc[p];
   if((gtr1-gtr2)<>0) then vc[1]:=-h1/(gtr1-gtr2);
```

```
    for i:=1 to n do
    begin
    vc1[i]:=0;  for p:= 1 to n do vc1[i]:=vc1[i]+t1[i,p]*vc[p];
    end;
  if(vc1[1]<>0) then
  begin  for i:=1 to n do
  vtr2[i]:=vc1[i]/vc1[1];
  end;

(*Tinh gia tri rieng thu ba va vecto rieng tuong ung*);
for i:=1 to n-1 do
for j:=1 to n-1 do
begin
t2[1,1]:=1;  t2[2,1]:=vtr[2]; t2[1,2]:=0; t2[2,2]:=1;
t2n[1,1]:=1;  t2n[2,1]:=-vtr[2]; t2n[1,2]:=0; t2n[2,2]:=1;
end;
for i:=1 to n-1 do
for j:=1 to n-1 do
begin  e2[i,j]:=0;   for p:=1 to n-1 do
e2[i,j]:=e2[i,j]+t2n[i,p]*c[p,j];
end;
for i:=1 to n-1 do
for j:=1 to n-1 do
begin  f2[i,j]:=0;   for p:=1 to n-1 do
f2[i,j]:=f2[i,j]+e2[i,p]*t2[p,j];
end;
gtr3:=f2[2,2];
for i:=1 to 2 do
begin
z1[1]:=1;  z1[2]:=c[2,1]/(gtr3-c[2,2]);
end;
for i:=2 to n do   z2[i]:=z1[i-1];
h2:=0; for p:=2 to n do h2:=h2+f1[1,p]*z2[p];
if((gtr1-gtr3)<>0) then   z2[1]:=-h2/(gtr1-gtr3);
for i:=1 to n do
begin
z3[i]:=0; for j:=1 to n do z3[i]:=z3[i]+t1[i,j]*z2[j];
end;
for i:=1 to n do
begin
if(z3[1]<>0)  then vtr3[i]:=z3[i]/z3[1];
end;
```

```
(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri rieng 2');
writeln(gtr2);
writeln('vecto rieng 2');
for i:=1 to n do
writeln(vtr2[i]);
writeln('gia tri rieng 3');
writeln(gtr3);
writeln('vecto rieng 3');
for i:=1 to n do
writeln(vtr3[i]);
readln;
end.
```

Chương trình PGR19: Tính giá trị riêng và véc tơ riêng theo phương pháp Jacobi

Phục vụ cho việc tính các giá trị riêng và véc tơ riêng theo phương pháp Jacobi

Số liệu cần nhập:

1. Số bậc tự do n
2. Các phần tử của ma trận đồ cứng
3. Các phần tử của ma trận khối lượng.

```
*********************************
Program  19 Tinh_cac_gia_tri_rieng_va_vecto_rieng_theo_fuong_fap_Jacobi ;
 Uses crt;
Type
   mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,n:integer; gtr,tsv,l,z,r,v2:mt2; s,ss,m,mm,vtr,vtr1,v1:mt1;
a,b,c,d,e,alf,bet,u,v,x:real;
Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('so bac tu do');
readln(n);
writeln('ma tran do cung');
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
readln(s[i,j]);
writeln(' ma tran khoi luong');
for i:=1 to n do
for j:=i to n do
readln(m[i,j]);
```

```
for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
begin
s[i,j]:=s[j,i];
m[i,j]:=m[j,i];
end;

for i:=1 to n do
l[i]:=s[i,i]/m[i,i];
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
if(i=j)then vtr[i,j]:=1;
if(i<>j)then vtr[i,j]:=0;
end;
REPEAT
for j:=1 to n-1 do
for k:=j+1 to n do
begin
a:=s[j,j]*m[j,k]-m[j,j]*s[j,k]; b:=s[k,k]*m[j,k]-m[k,k]*s[j,k];
c:=s[j,j]*m[k,k]-s[k,k]*m[j,j]; d:=0.25*sqr(c)+a*b; e:=sqrt(d);
if(c<0) then e:=-e; alf:=b/(-0.5*c+e); bet:=-a/(-0.5*c+e);

for i:=1 to j-1 do
begin
s[i,j]:=s[i,j]+bet*s[i,k];
m[i,j]:=m[i,j]+bet*m[i,k];

s[i,k]:=s[i,k]+alf*s[i,j];
m[i,k]:=m[i,k]+alf*m[i,j];
end;
for i:=k+1 to n do
begin
s[i,j]:=s[i,j]+bet*s[i,k];
m[i,j]:=m[i,j]+bet*m[i,k];
s[i,k]:=s[i,k]+alf*s[i,j];
m[i,k]:=m[i,k]+alf*m[i,j];
end;
```

```
for i:=1 to j-1 do
begin
s[j,i]:=s[j,i]+bet*s[k,i];
m[j,i]:=m[j,i]+bet*m[k,i];
s[k,i]:=s[k,i]+alf*s[j,i];
m[k,i]:=m[k,i]+alf*m[j,i];
end;
for i:=k+1 to n do
begin
s[j,i]:=s[j,i]+bet*s[k,i];
m[j,i]:=m[j,i]+bet*m[k,i];
s[k,i]:=s[k,i]+alf*s[j,i];
m[k,i]:=m[k,i]+alf*m[j,i];
end;
ss[j,j]:=s[j,j]; mm[j,j]:=m[j,j]; ss[k,k]:=s[k,k]; mm[k,k]:=m[k,k];
s[j,j]:=s[j,j]+2*bet*s[j,k]+sqr(bet)*ss[k,k];
m[j,j]:=m[j,j]+2*bet*m[j,k]+sqr(bet)*mm[k,k];
s[k,k]:=s[k,k]+2*alf*s[j,k]+sqr(alf)*ss[j,j];
m[k,k]:=m[k,k]+2*alf*m[j,k]+sqr(alf)*mm[j,j];
for i:=1 to n do z[i]:=s[i,i]/m[i,i];
for i:=1 to n do
begin
v1[i,j]:=vtr[i,j];  v1[i,k]:=vtr[i,k];
vtr[i,j]:=vtr[i,j]+bet*v1[i,k];
vtr[i,k]:=vtr[i,k]+alf*v1[i,j];
end;
for i:=1 to n do  x:=(z[i]-l[i])/l[i];
u:=sqr(s[j,k])/s[j,j]*s[k,k];  v:=sqr(m[j,k])/m[j,j]*m[k,k];
end;
UNTIL  x<=1E-12;    u:=(1E-24);  v:=(1E-24);

for i:=1 to n do
for j:=1 to i-1 do
begin
s[i,j]:=s[j,i];
m[i,j]:=m[j,i];
end;
```

```
for i :=1 to n do
begin
gtr[i]:=s[i,i]/m[i,i];
tsv[i]:=sqrt(gtr[i]);
end;
for j:=1 to n do
for k:=1 to n do
begin
vtr[k,j]:=vtr[k,j]/sqrt(abs(m[j,j]));
vtr1[k,j]:=vtr[k,j]/vtr[1,j];
end;

writeln('gia tri rieng');
for i:=1 to n do
writeln(gtr[i]);
writeln('tan so vong');
for i:=1 to n do
writeln(tsv[i]);
writeln('ma tran vtr');
for j:=1 to n do
for k:=1 to n do
writeln(vtr1[k,j]);
readln;
end.
```

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Văn Quý, Lều Thọ Trình. *Động lực học công trình*. năm 1979
2. Võ Như Cầu. *Tính kết cấu theo phương pháp mà trận*. Nhà xuất bản Xây dựng 2004.
3. Võ Như Cầu. *Tính kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn*. Nhà xuất bản Xây dựng 2005.
4. Biggs, J.M. (1989). *Elements of Structural Dynamics*. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, NJ.
5. Biggs, J.M. (1964). *Introductiom to Structural Dynamics*. McGraw - Hill, New York .
6. *Mario Paz Structural Dynamics, Theory and Computation third Ed*ition. Van Nostrand Reinhold, New York.
7. Richard L. Burden, J. Douglas Faires. *Numerical Analysis sixth Edition*. Brook/Cole Publishing Company.
8. J.H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965.

MỤC LỤC

Trang

TÍNH KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LỰC HỌC

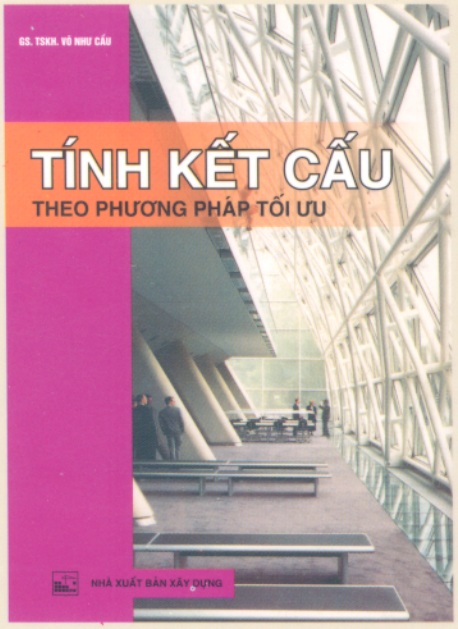
Chịu trách nhiệm xuất bản:
BÙI HỮU HẠNH

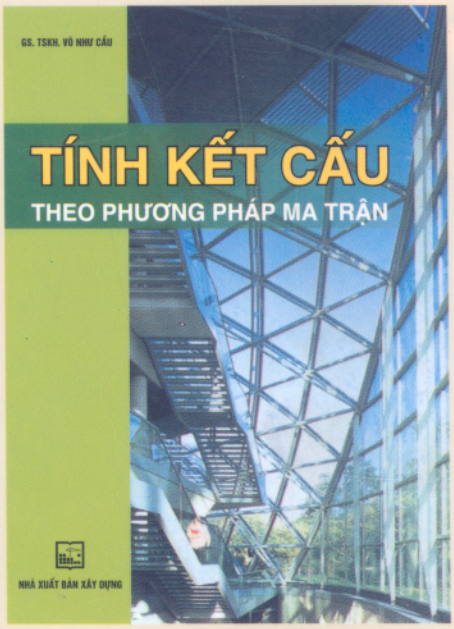
Biên tập: TRẦN CƯỜNG
Chế bản: PHẠM HỒNG LÊ
Sửa bản in: HUY HOÀNG
Trình bày bìa: NGUYỄN HỮU TÙNG

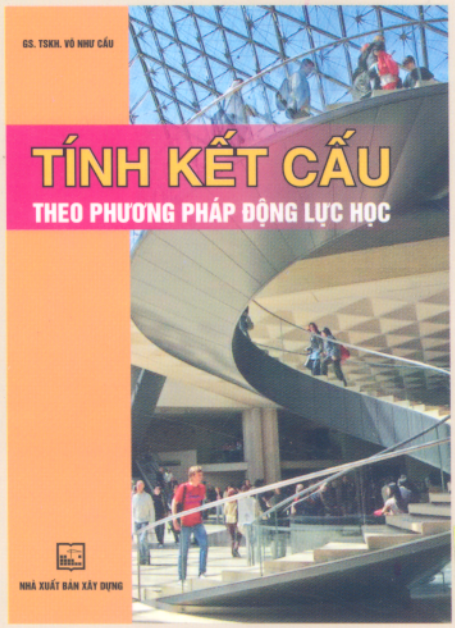
In 1000 cuốn khổ 19 × 27cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng kí kế hoạch xuất bản số 142-2006/CXB/58-10/XD ngày 24/2/2006. In xong và nộp lưu chiểu tháng 8/2006.

1956 - 2006
1966 - 2006

KỈ NIỆM 50 NĂM ĐÀO TẠO, 40 NĂM THÀNH LẬP
TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG







6X6-6X2 / XD- 2006 142 - 2006

Giá : 43.000đ