NGUYỄN DOÃN PHƯỚC - PHAN XUÂN MINH - HÁN THÀNH TRUNG

Lý Thuyết
ĐIỀU KHIỂN PHI TUYẾN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh, Hán Thành Trung

LÝ THUYẾT
ĐIỀU KHIỂN PHI TUYẾN

(IN LẦN THỨ HAI, CÓ SỬA ĐỔI VÀ BỔ SUNG)

Sách chào mừng 50 năm
thành lập trường Đại học Bách khoa Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Hà Nội 2006

Authors: Nguyen Doan Phuoc, Phan Xuan Minh and Han Thanh Trung

Department of Automatic Control, Electrical Faculty, Hanoi University of Technologie

Title: **Theory of Nonlinear Control**

This book presents fundamental methodologies of nonlinear control, such as the conventional methods like Lyapunov, Popov stability, harmonic linearization, sliding mode control and exact linearization, what recent develoments in last 15 years. Many examples and simulations are given to illustrate the theory and ideas. The book is written for a course at the graduate level for electrical engineering. It is assumed that the reader already has good knowledge in theory of linear control.

Chịu trách nhiệm xuất bản:	**PGS. TS. Tô Đăng Hải**
Biên tập:	**Nguyễn Đăng**
Trình bày và chế bản:	**Tác giả**
Vẽ bìa:	**Hương Lan**

In tại: Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Số lượng: 700 cuốn, khuôn khổ 16 x 24cm
Giấy phép xuất bản số: 150-61CXB ngày 4/2/2005
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2006.

Lời nói đầu

__Lý thuyết điều khiển phi tuyến__ luôn thu hút được sự quan tâm của những người làm việc trong lĩnh vực kỹ thuật hệ thống. Những phương pháp phân tích và tổng hợp hệ thống trên cơ sở lý thuyết điều khiển phi tuyến đưa con người đến gần hơn nữa trong các ứng dụng thực tế. Nó chính là chiếc cầu nối giữa lý thuyết và ứng dụng thực tiễn. Chính vì thế, chỉ 15 năm gần đây, điều khiển phi tuyến đã có những bước nhảy vọt về chất lượng, cả trong lý thuyết lẫn ứng dụng. Nền móng cho sự phát triển này là phép đổi trục tọa độ vi phôi (diffeomorphism) xây dựng trên nền hình học vi phân, do Isidori đưa ra đã tạo ra khả năng nghiên cứu, phân tích, điều khiển hệ phi tuyến theo hướng tận dụng các kết quả đã có của điều khiển tuyến tính, mà điển hình trong số đó là phương pháp thiết kế bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác, phương pháp phân tích động học không của hệ phi tuyến .... Cũng như vậy, Sontag cùng các đồng sự đưa ra khái niệm hàm điều khiển Lyapunov (Control Lyapunov Function-CLF) giúp cho việc giải quyết bài toán thiết kế các bộ điều khiển ổn định được chặt chẽ hơn, rõ ràng hơn, nhất là khi đối tượng có mô hình bất định (uncertainties), hoặc bị thay đổi ngẫu nhiên không biết trước ....

Bên cạnh sự phát triển mới về chất lượng trên, trường phái điều khiển phi tuyến kinh điển cũng được bổ sung thêm nhiều kỹ thuật thiết kế hữu ích như kỹ thuật gain–scheduling, kỹ thuật cuốn chiếu (backstepping technique), đa tạp trung tâm (center manifold), điều khiển trượt (Sliding Mode Control-SMC) .... Không những thế, điều khiển phi tuyến đã được ứng dụng thành công cho lớp đối tượng phi tuyến có tính chất động học đặc biệt như các hệ thụ động, các hệ hồi tiếp chặt tham số, hệ tiêu tán ....

Sự tiến bộ to lớn đó của điều khiển phi tuyến cần phải được phổ cập, cần phải được nhanh chóng ứng dụng vào thực tiễn công nghiệp Việt Nam. Đó cũng chính là lý do đã cuốn sách đã thu hút được sự quan tâm của nhiều độc giả. Nên chỉ chưa đầy hai năm cuốn sách __Lý thuyết điều khiển phi tuyến__ này đã được nhà xuất bản KH&KT đề nghị tái bản. Trong lần này, chúng tôi đã sắp xếp lại nội dung của cuốn sách một cách hệ thống đi từ đơn giản đến phức tạp, để dễ dàng hơn cho độc giả trong tự nghiên cứu.

Quyển sách được bố cục thành các chương:

- *Chương mở đầu giới thiệu chung về hệ phi tuyến và các đặc điểm cũng như nhiệm vụ phân tích và tổng hợp chúng.*
- *Chương 2 tập trung vào các phương pháp điều khiển phi tuyến kinh điển như phân tích mặt phẳng pha, tính ổn định tuyệt đối, cân bằng điều hòa, điều khiển trượt ....*
- *Nội dung của chương 3 là toàn bộ lý thuyết Lyapunov trong phân tích và tổng hợp hệ thống.*

- *Chương 4 trình bày các phương pháp điều khiển phi tuyến được xây dựng trên nền lý thuyết điều khiển tuyến tính, như tuyến tính hóa xấp xỉ, phân tích hệ thống nhờ đa tạp trung tâm, điều khiển tuyến tính hình thức, kỹ thuật gain-scheduling ....*
- *Chương 5 được dành hoàn toàn cho việc trình bày các phương pháp phân tích, tổng hợp điều khiển phi tuyến trên nền hình học vi phân. Trọng tâm của chương là các phương pháp xác định phép đổi trục tọa độ vi phôi cũng như thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái, phục vụ việc tuyến tính hóa chính xác hệ phi tuyến.*

Quyển sách có mục đích là giới thiệu với bạn đọc những phương pháp phân tích cơ bản và thiết kế bộ điều khiển để can thiệp vào hệ phi tuyến. Do mong muốn được cùng bạn đọc trao đổi tiếp, nên sau mỗi phần trình bày một phương pháp, chúng tôi còn viết thêm các suy nghĩ của mình về khả năng mở của phương pháp dưới dạng các lời bàn. Cũng nhân đây, chúng tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các bạn đọc đã góp ý cho cuốn sách ngày càng được hoàn thiện hơn. Chúng tôi mong nhận được nhiều hơn nữa những đóng góp chân tình của các bạn đọc gần xa.

Quyển sách ***Lý thuyết điều khiển phi tuyến*** *được viết với sự cảm thông, giúp đỡ vô cùng to lớn của gia đình các tác giả. Nếu không có sự hy sinh, sự cổ vũ, khuyến khích của những người thân gia đình chắc chắn quyển sách không thể hoàn thành được. Bởi vậy, lời cảm ơn đầu tiên của chúng tôi là gửi đến họ.*

Những lời cảm ơn chân thành tiếp theo xin được đến các bạn bè, đồng nghiệp những người đã luôn ủng hộ, khuyến khích và chia sẻ khó khăn với chúng tôi.

Rất mong nhận được nhiều hơn nữa những góp ý của bạn đọc. Thư góp ý xin gửi về:

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Bộ môn Điều khiển Tự động
Số 1 Đại Cồ Việt. C9/305–306
Tel. (04) 8680451 / 8692985

Hà Nội, ngày 6.1.2006
Các tác giả

Mục lục

1 NHẬP MÔN

1.1 Giới thiệu hệ phi tuyến

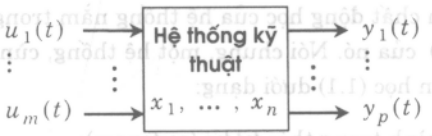
1.1.1 Mô hình toán học

Xét hệ MIMO, viết tắt của nhiều vào/nhiều ra (*Multi Inputs–Multi Outputs*) với m tín hiệu vào $u_1(t)$, $u_2(t)$, ... , $u_m(t)$ và p tín hiệu ra $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... , $y_p(t)$ như hình 1.1 mô tả. Nếu viết chung các tín hiệu vào/ra thành vector:

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, \qquad \underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

thì mô hình hệ thống được quan tâm ở đây là *mô hình toán học* mô tả quan hệ giữa vector tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và vector tín hiệu ra $\underline{y}(t)$, tức là mô tả ánh xạ $T: \underline{u}(t) \mapsto \underline{y}(t)$. Ánh xạ (hay chính xác hơn là *toán tử*) này được viết như sau:

$$\underline{y}(t) = T\{\underline{u}(t)\} \tag{1.1}$$



Hình 1.1: Sơ đồ khối một hệ thống kỹ thuật có nhiều tín hiệu vào và ra.

Nhờ có mô hình toán học (1.1) trên ta luôn xác định được vector tín hiệu đầu ra $\underline{y}(t)$ của hệ thống nếu như đã biết trước vector các tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và (khi cần thiết) các trạng thái tức thời $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_n(t)$ của nó. Để gọn trong cách viết, n biến trạng thái này sẽ được ghép chung lại thành vector $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

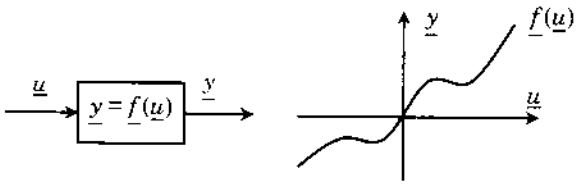
Mô hình của hệ tĩnh

Một hệ thống được gọi là tĩnh, nếu tín hiệu ra $\underline{y}(t_0)$ ở thời điểm $t=t_0$ được xác định trực tiếp từ tín hiệu đầu vào $\underline{u}(t_0)$ tại đúng thời điểm đó. Như vậy mô hình toán học (1.1) của hệ tĩnh sẽ chỉ là một quan hệ đại số và người ta thường viết nó dưới dạng hàm:

$$\underline{y} = \underline{f}(\underline{u})$$

trong đó hàm $\underline{f}(\underline{u})$ có thể là một công thức tường minh, song cũng có thể chỉ là một bảng tra hoặc một đường đồ thị như minh họa ở hình 1.2.

Hình 1.2: Mô tả hệ phi tuyến tĩnh bằng các hàm đại số



Mô hình của hệ động

Một hệ thống được gọi là động, nếu để xác định tín hiệu ra $\underline{y}(t_0)$ tại thời điểm $t=t_0$ người ta cần phải có các giá trị của tín hiệu đầu vào $\underline{u}(t)$ ở tất cả các thời điểm trước đó $t \le t_0$. Như vậy, để mô tả một hệ động, mô hình toán học (1.1) của nó không thể chỉ là một quan hệ đại số mà nó còn phải có cả các quan hệ giải tích khác như vi phân hay tích phân. Khác với hệ tĩnh, trong mô hình của hệ động có cả sự tham gia của các biến trạng thái, đơn giản là vì trạng thái của hệ thống là đại lượng mang thông tin về tính động học của hệ.

Bản chất động học của hệ thống nằm trong quan hệ giữa tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và trạng thái $\underline{x}(t)$ của nó. Nói chung, một hệ thống, cùng với vector biến trạng thái $\underline{x}(t)$ sẽ có mô hình toán học (1.1) dưới dạng:

1) Mô hình trạng thái *tự trị* (*autonom*):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x},\underline{u}) \end{cases} \tag{1.2}$$

2) Mô hình trạng thái không tự trị (*non–autonom*):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x},\underline{u},t) \end{cases} \tag{1.3}$$

3) Mô hình trạng thái *không tường minh* (*implicit*):

$$\begin{cases} \underline{f}(\frac{d\underline{x}}{dt}, \underline{x}, \underline{u}, t) = \underline{0} \\ \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}, t) = \underline{0} \end{cases}$$

Với mô hình trạng thái người ta có thể xác định được nghiệm $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$ mô tả sự thay đổi trạng thái và tín hiệu ra của hệ thống theo thời gian dưới tác động của kích thích $\underline{u}(t)$ và điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$ được giả thiết là đã biết.

Ví dụ 1.1: Xây dựng mô hình trạng thái

Xét hệ cơ như hình 1.3 mô tả gồm 1 lò xo, một vật có khối lượng m và khâu suy giảm vận tốc d. Tín hiệu vào của hệ là lực $u(t)$, tín hiệu ra là quãng đường mà vật đi được, ký hiệu là $y(t)$.

Khi vật dịch chuyển một khoảng cách $y(t)$, lò xo sẽ sinh ra một lực F_{lx} có hướng ngược lại chiều chuyển động của vật. Lực này phụ thuộc chỉ vào một mình biến y nên được viết thành:

$$F_{lx} = f(y)$$

Khâu suy giảm vận tốc d cũng sinh ra một lực F_d cản sự chuyển động của vật và có độ lớn phụ thuộc tuyến tính vào vận tốc của vật:

$$F_d = g(\frac{dy}{dt})$$

trong đó d là hằng số được xác định từ vật liệu của khâu suy giảm.

Như vậy phương trình cân bằng lực sẽ là:

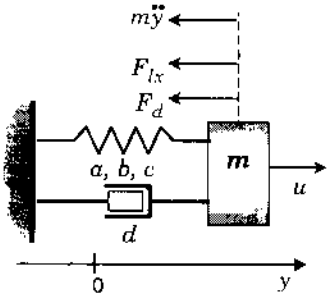
$$m\frac{d^2y}{dt^2} + g(\frac{dy}{dt}) + f(y) = u$$

Đặt tiếp:

$$y = x_1 \quad \text{và} \quad \frac{dy}{dt} = x_2$$

ta sẽ có

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m}(-f(x_1) - g(x_2) + u) \end{cases}$$



Hình 1.3: Minh họa ví dụ 1.1.

và đó chính là phần động học của mô hình trạng thái mô tả hệ cơ đã cho. ❐

Bản chất phi tuyến: Tính không thỏa mãn nguyên lý xếp chồng

Một hệ thống được gọi là *thỏa mãn nguyên lý xếp chồng* nếu mô hình (1.1) của nó là một toán tử tuyến tính, tức là:

$$T\{a\underline{u}'+b\underline{u}''\} = aT\{\underline{u}'\}+bT\{\underline{u}''\} \tag{1.4}$$

với a, b là hai số thực. Như vậy, khi đã biết các tín hiệu ra $\underline{y}'$, $\underline{y}''$ của hệ ứng với hai tín hiệu đầu vào $\underline{u}'$, $\underline{u}''$ khác nhau, thì ta cũng xác định được tín hiệu đầu ra cho trường hợp ở đầu vào có $\underline{u}=a\underline{u}'+b\underline{u}''$ và đó là $\underline{y}=a\underline{y}'+b\underline{y}''$.

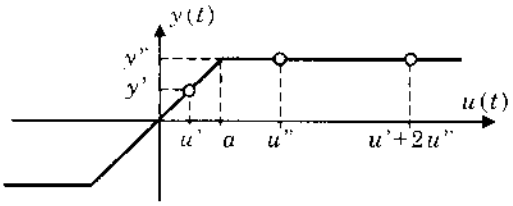
Các hệ thống mà mô hình toán học (1.1) của nó thỏa mãn nguyên lý xếp chồng (1.4) được gọi là *hệ tuyến tính*. Ngược lại nếu mô hình của hệ *không* thỏa mãn nguyên lý xếp chồng (1.4) thì hệ được gọi *phi tuyến*. Phần lớn các hệ thống có trong tự nhiên đều mang tính phi tuyến. Chẳng hạn đơn giản như hệ rơ-le, những hệ sinh học, hệ thủy khí, hệ vật lý có cấu trúc hỗn hợp, hay các hệ thống nhiệt động học là những hệ phi tuyến, điện trở cũng là hệ phi tuyến ...

Ví dụ 1.2: Hệ phi tuyến tĩnh

Xét một hệ thống có một tín hiệu vào $u(t)$ và một tín hiệu ra $y(t)$. Ánh xạ

$$T: u(t) \mapsto y(t)$$

mô tả quan hệ giữa đầu vào và ra của nó được biểu diễn ở hình 1.4.



Hình 1.4: Minh họa ví dụ 1.2.

Từ đường đặc tính vào/ra này ta thấy hệ thống không thỏa mãn nguyên lý xếp chồng. Thật vậy nếu gọi:

$$y' = T(u') \quad \text{và} \quad y'' = T(u'')$$

với hai điểm u', u'' như ở hình 1.4, thì ứng với kích thích $u=u'+2u''$ hệ sẽ có đáp ứng:

$$y = T(u'+2u'') \neq y'+2y''$$

Vậy nó là một hệ phi tuyến.

Từ đường đặc tính của hệ ta cũng có được phương trình biểu diễn ánh xạ T:

$$y = \begin{cases} ka\,\mathrm{sgn}(u) & \text{khi} \quad |u| > a \\ ku & \text{khi} \quad |u| < a \end{cases}$$

với k là hệ số góc của đoạn thẳng đi qua tâm gốc tọa độ và $\mathrm{sgn}(u)$ là phép tính xác định dấu của u:

$$\mathrm{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad u > 0 \\ -1 & \text{nếu} \quad u < 0 \end{cases}$$

Tại điểm $u=0$, hàm $\mathrm{sgn}(u)$ không có một giá trị rõ ràng (từ -1 đến 1) và trong thực tế điều đó cũng không có một ý nghĩa gì đặc biệt. ❐

Ví dụ 1.3: Hệ phi tuyến động

Xét lại hệ cơ đã cho ở ví dụ 1.1 với $|y|$ tương đối lớn có:

$$f(y) = ay + by^3 \quad \text{và} \quad g\left(\frac{dy}{dt}\right) = c\,\frac{dy}{dt} \qquad \text{trong đó } a, b, c \in \mathbf{R}$$

Suy ra:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ay + by^3 = u \tag{1.5}$$

Rõ ràng (1.5) không thỏa mãn nguyên lý xếp chồng vì:

$$(y')^3 + (y'')^3 \neq (y' + y'')^3$$

nên nó là hệ thống phi tuyến. ❐

Chú ý: Việc phân biệt một hệ thống là tuyến tính hay phi tuyến được thực hiện dựa vào mô hình toán học (1.1) của hệ. Song trong thực tế, do thường chỉ quan tâm tới bản chất động học của hệ thống nên người ta cũng chỉ sử dụng riêng phần mô hình động học mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và trạng thái $\underline{x}(t)$, chẳng hạn như trong mô hình tự trị (1.3) người ta chỉ sử dụng riêng:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \tag{1.6}$$

Tương ứng, để kiểm tra xem hệ là tuyến tính hay phi tuyến từ (1.6), người ta sẽ kiểm tra nó theo nghĩa toán tử:

$$\underline{x}(t) = T_x\{\underline{u}\}$$

có thỏa mãn nguyên lý xếp chồng hay không. Nói cách khác, nếu có:

$$T_x\{a\underline{u}' + b\underline{u}''\} = aT_x\{\underline{u}'\} + bT_x\{\underline{u}''\} \tag{1.7}$$

thì phần động học (1.6) được gọi là *tuyến tính*, *ngược lại thì gọi là phi tuyến*. Điều này thường dẫn đến việc trong một hệ thống có thể tồn tại cả hai loại mô hình động học tuyến tính và phi tuyến.

Ví dụ 1.4: Một hệ được mô tả động học bằng cả hai mô hình tuyến tính và phi tuyến

Xét hệ có thành phần động học trong mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = e^{-x_1}(x_2 + u) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = e^{x_1} + x_2 \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được ngay là mô hình này không thỏa mãn nguyên lý xếp chồng (1.7) hay nó là một *mô hìnhđộng học phi tuyến*.

Thay biến $z_1 = e^{x_1}$ và $z_2 = x_2$ thì mô hình trên trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_2 + u \\ \dfrac{dz_2}{dt} = z_1 + z_2 \end{cases}$$

và nó là một *mô hình tuyến tính* theo nghĩa (1.7). □

1.1.2 Quỹ đạo trạng thái và ý nghĩa trong phân tích hệ thống

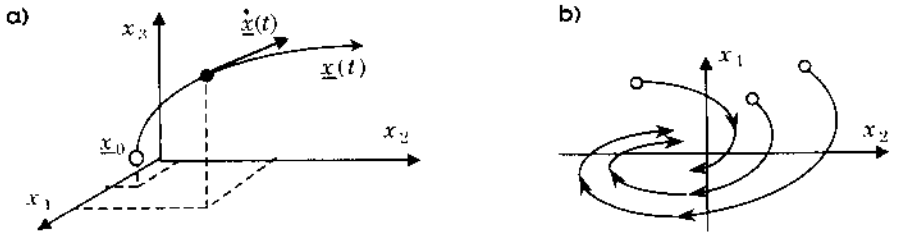
Xét hệ có mô hình động học tự trị (1.2). Gọi $\underline{x}(t)$ là nghiệm của nó ứng với $\underline{u}=\underline{0}$ và $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ cho trước, gọi là *quỹ đạo trạng thái tự do* (vì có $\underline{u}=\underline{0}$), tức là nghiệm của phương trình vi phân:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} =: \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) \tag{1.8}$$

Biểu diễn nghiệm đó trong không gian trạng thái $\mathbb{R}^n$ ta sẽ được đồ thị phụ thuộc tham số t, như mô tả ở hình 1.5a) với chiều mũi tên chỉ chiều tăng của t. Tập tất cả các quỹ đạo trạng thái tự do ứng với những điểm trạng thái ban đầu $\underline{x}_0$ khác nhau được gọi là *họ các quỹ đạo trạng thái tự do* (hình 1.5b).

Họ các quỹ đạo trạng thái tự do này chứa đựng đầy đủ thông tin về bản chất động học của hệ thống. Bởi vậy, một trong những phương pháp đơn giản để phân tích hệ thống, khảo sát các đặc tính động học vốn có trong hệ thống, là thông qua dạng các đường quỹ đạo trạng thái tự do này. Nhưng làm cách nào để có thể có được các quỹ đạo trạng thái tự do mà không cần phải tìm nghiệm $\underline{x}(t)$ của (1.8). Để trả lời, ta xét trường

hợp khi mà hệ không bị kích thích (1.8) chỉ có hai biến trạng thái, hay $\underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Trong trường như vậy, người ta gọi quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ đơn giản là quỹ đạo pha.



Hình 1.5: Mô tả hệ phi tuyến nhờ:

a) Quỹ đạo trạng thái của hệ có ba biến trạng thái.

b) Họ các quỹ đạo trạng thái của hệ có hai biến trạng thái.

Xây dựng quỹ đạo pha bằng phương pháp đường đẳng tà

Sau đây ta sẽ xét một phương pháp xây dựng quỹ đạo pha của hệ phi tuyến với hai biến trạng thái x_1, x_2 mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \underline{u}) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \underline{u}) \end{cases} \tag{1.9}$$

Từ mô hình hệ thống (1.9) và tín hiệu kích thích $\underline{u}(t)=\underline{0}$ là đã biết ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \underline{u})\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \tilde{f}_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \underline{u})\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \tilde{f}_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Chia hai phương trình trên cho nhau theo từng vế rồi xem nó như một hằng số k ta được

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\tilde{f}_1(x_1, x_2)}{\tilde{f}_2(x_1, x_2)} = \tilde{f}(x_1, x_2) = k$$

Tiếp theo ta xây dựng các đường đồ thị biểu diễn hàm

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = k \tag{1.10}$$

trong mặt phẳng pha với k là một số thực được chọn trước. Do

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \tilde{f}(x_1, x_2) = k$$

nên mọi quỹ đạo pha $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ của hệ khi cắt đường đồ thị của (1.10) sẽ phải có cùng một độ nghiêng φ thỏa mãn $\tan\varphi = k$. Nói cách khác, đồ thị (1.10) là tập hợp tất cả các điểm trạng thái mà khi đi qua nó các quỹ đạo pha phải có cùng một độ nghiêng. Chính vì vậy đồ thị của (1.10) được gọi là *đường đẳng tà* (cùng một độ nghiêng).

Chú ý: Đường đẳng tà (1.10) chỉ là tập hợp các điểm trạng thái mà tại đó các quỹ đạo pha phải có cùng một độ nghiêng. Điều đó hoàn toàn không nói rằng các điểm trạng thái đó phải thuộc cùng một quỹ đạo trạng thái.

Tương ứng với một giá trị k nhất định ta có một đường đẳng tà. Cho k thay đổi ta được nhiều đường đẳng tà. Lớp của nhiều đường đẳng tà ứng với những giá trị k khác nhau tạo ra trong mặt phẳng pha một tập hợp các đường đẳng tà. Từ tập các đường đẳng tà này, ta có thể xây dựng một cách gần đúng quỹ đạo pha của hệ thống với điểm đầu $\underline{x}_0$ bất kỳ bằng cách xuất phát từ $\underline{x}_0$, thiết kế một đường đường cong cắt các đường đẳng tà sao cho tại giao điểm với đường đẳng tà ứng với một giá trị k nhất định thì phải có độ nghiêng đúng bằng φ tính theo $\tan\varphi = k$. Để cho việc xây dựng đường cong được dễ dàng, nên vẽ sẵn trên đường đẳng tà k các vạch chéo có độ nghiêng là $\tan\varphi$.

Ví dụ 1.5: Xây dựng quỹ đạo pha theo phương pháp đường đẳng tà

Xét hệ có mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1^3 - 0.2x_2 + u \end{cases} \tag{1.11}$$

Từ phương trình trạng thái trên ta thấy ngay được hệ chỉ có một điểm cân bằng là gốc tọa độ $\underline{0}$. Đường đẳng tà k cho trường hợp hệ không bị kích thích ($u = 0$) sẽ là:

$$k = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1^3 - 0.2x_2}{x_2}$$

Suy ra

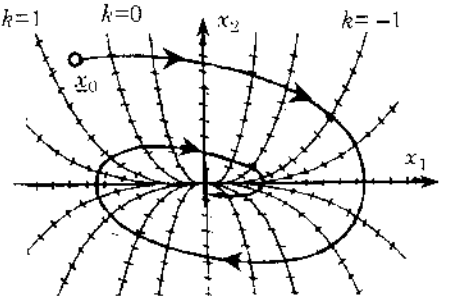
$$x_2 = -\frac{x_1^3}{k + 0.2} \qquad \text{nếu } k \neq 0.2$$

$$x_1 = 0 \qquad \text{nếu } k = 0.2$$

$$x_2 = 0 \qquad \text{nếu } k = \infty$$

Như vậy tập những đường đẳng tà của hệ sẽ là các đường cong bậc 3 khi $k \neq 0,2$ và trục hoành ứng với $k = \infty$, trục tung ứng với $k = 0,2$. Trên các đường đẳng tà đó ta vẽ sẵn những vạch nhỏ biểu diễn góc nghiêng φ có $\tan\varphi = k$. Chẳng hạn trên trục hoành là các vạch vuông góc với nó (có $\varphi = \frac{\pi}{2}$) vì $\tan\frac{\pi}{2} = k = \infty$ (hình 1.6).

Sau khi đã có các đường đẳng tà, ta xây dựng quỹ đạo pha của hệ. Giả sử ta phải vẽ quỹ đạo pha đi từ điểm trạng thái $\underline{x}_0$ nằm phía trên trục hoành. Do $\underline{x}_0$ nằm phía trên trục hoành và $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ nên quỹ đạo pha đi qua nó phải có chiều từ trái sang phải, tức là chiều tăng của x_1. Khi gặp đường đẳng tà đầu tiên là đường có $k = 0$, ta vẽ quỹ đạo trạng thái tại đó có góc nghiêng đúng bằng 0 (song song với trục hoành). Cứ như vậy, dựa vào các đường đẳng tà đó ta có được đầy đủ quỹ đạo pha chứa $\underline{x}_0$ của hệ như ở hình 1.6. ❐



Hình 1.6 : Xây dựng quỹ đạo pha theo phương pháp đường đẳng tà. Minh hoa ví dụ 1.5.

Xây dựng quỹ đạo pha bằng phương pháp tách biến

Phương pháp tách biến được sử dụng để xây dựng quỹ đạo pha cho hệ thống có hai biến trạng thái mô tả bởi (1.9). Giống như đã làm ở phương pháp đường đẳng tà, nếu $\underline{u}(t) = \underline{0}$ là cho trước thì chia hai phương trình trên cho nhau theo từng vế, ta sẽ có:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\tilde{f}_1(x_1, x_2)}{\tilde{f}_2(x_1, x_2)} = \tilde{f}(x_1, x_2) \tag{1.12}$$

Giả thiết cho việc ứng dụng được phương pháp tách biến là vế phải của phương trình trên phải có dạng:

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2) \tag{1.13}$$

tức là nó tách được thành tích của hai hàm một biến $g(x_1)$ và $h(x_2)$.

Để xây dựng quỹ đạo pha xuất phát từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$, ta phân biệt hai trường hợp:

1) Khi $g(x_1)=0$. Phương trình $\frac{dx_1}{dx_2}=0$ có nghiệm $x_1=x_1(0)$ là hằng số.

2) Khi $g(x_1)\neq 0$ thì từ (1.12) và (1.13) ta có

$$\frac{dx_1}{g(x_1)} = h(x_2)dx_2.$$

Tích phân hai vế sẽ được

$$\int_{x_1(0)}^{x_1} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_2(0)}^{x_2} h(\gamma)d\gamma + k \quad \text{với} \quad k \text{ là hằng số phụ thuộc } \underline{x}_0. \tag{1.14}$$

Theo lý thuyết về phương trình vi phân, khi hệ thỏa mãn điều kiện Lipschitz thì bao giờ cũng tồn tại trong lân cận $\underline{x}_0$ hàm $x_1(x_2)$ và đó chính là phương trình mô tả quỹ đạo pha đi qua $\underline{x}_0$ của hệ thống. Họ các quỹ đạo pha với điểm xuất phát $\underline{x}_0$ khác nhau cũng sẽ thu được từ (1.14) với các giá trị k khác nhau.

Ví dụ 1.6: Xây dựng quỹ đạo pha theo phương pháp tách biến

Xét hệ với hai biến trạng thái x_1, x_2 có mô hình

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -a\,\mathrm{sgn}\,x_1 - bx_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + u \end{cases} \tag{1.15}$$

trong đó $a, b>0$. Thay $u=0$ rồi chia hai phương trình trên cho nhau theo từng vế ta được

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-a\,\mathrm{sgn}\,x_1 - bx_2}{x_1} = \begin{cases} \dfrac{-a-bx_2}{x_1} & \text{nếu } x_1>0 \\ \dfrac{a-bx_2}{x_1} & \text{nếu } x_1<0 \end{cases}$$

Suy ra:

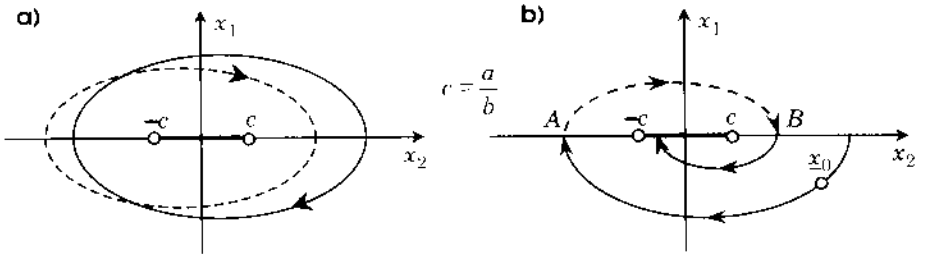
1) Khi $x_1>0$ thì

$$x_1dx_1 = -(a+bx_2)dx_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + \frac{(a+bx_2)^2}{b} = k \tag{1.16}$$

2) Khi $x_1<0$ thì

$$x_1dx_1 = -(-a+bx_2)dx_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + \frac{(-a+bx_2)^2}{b} = k \tag{1.17}$$

trong đó k là hằng số dương được xác định từ những giá trị đầu $\underline{x}_0$.



Hình 1.7: Xây dựng quỹ đạo pha theo phương pháp tách biến. Minh họa cho ví dụ 1.6.

Phương trình (1.16) có đồ thị dạng hình ellipse với các tâm là $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix}0\\-c\end{pmatrix}$, trong đó $c = \frac{a}{b}$. Nó được biểu diễn trên hình 1.7a) bằng đường rời nét. Do có điều kiện $x_1 > 0$ của (1.16) nên chỉ có phần nửa đường ellipse này nằm phía trên trục hoành (trục x_2) là thuộc về quỹ đạo pha. Hơn nữa, vì có $\frac{dx_2}{dt} = x_1 > 0$ nên đoạn quỹ đạo pha đó phải có chiều từ trái sang phải (chỉ chiều tăng của x_2).

Tương tự, hình ellipse nét liền với các tâm $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$ là đồ thị của phương trình (1.17). Do bị ràng buộc bởi điều kiện $x_1 < 0$ nên chỉ có nửa phía dưới trục hoành của đường ellipse này là thuộc về quỹ đạo pha. Nó có chiều từ phải sang trái là chiều chỉ chiều giảm của x_2 (hình 1.7a).

Dựa vào hai nửa các đường ellipse trên ta có thể xây dựng hoàn chỉnh một quỹ đạo pha xuất phát từ điểm đầu $\underline{x}_0$ nào đó cho trước. Chẳng hạn với $\underline{x}_0$ cho trước như ở hình 1.7b) thì do $\underline{x}_0$ nằm phía dưới trục hoành, quỹ đạo pha khi đi qua $\underline{x}_0$ phải thuộc về đường ellipse nét liền. Theo chiều mũi tên cho tới khi gặp trục hoành (điểm A trên hình 1.7b) thì quỹ đạo pha sẽ chuyển sang đường ellipse nét rời để đi lên phía trên trục hoành. Theo đường nét rời phía trên trục hoành cho tới khi gặp trục hoành (điểm B) thì quỹ đạo pha lại chuyển sang đường nét liền .... Quá trình đó được tiếp tục cho tới khi quỹ đạo pha gặp trục hoành nằm trong đoạn từ $-c$ đến c (đoạn được tô đậm trong hình 1.7) thì dừng lại, vì trong đoạn này không còn có đồ thị hình ellipse nào nữa của phương trình (1.16) và (1.17). ❐

Ứng dụng trong việc xác định điểm cân bằng của hệ thống

Xét hệ có mô hình trạng thái không tự trị (1.3). Một điểm trạng thái $\underline{x}_e$ được gọi là điểm cân bằng (*equilibrium point*) nếu như khi đang ở điểm trạng thái $\underline{x}_e$ và không có một tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó. Căn cứ theo định nghĩa như vậy thì điểm cân bằng $\underline{x}_e$ của hệ thống phải là nghiệm của phương trình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t)\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \underline{0}$$

Điều này cũng dễ hiểu, vì theo định nghĩa, điểm cân bằng là điểm mà hệ thống sẽ nằm im tại đó, tức là trạng thái của nó không bị thay đổi ($\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{0}$) khi không có sự tác động từ bên ngoài ($\underline{u} = \underline{0}$).

Có thể thấy ngay được rằng điểm cân bằng sẽ được xác định từ họ các quỹ đạo trạng thái tự do của hệ thống qua: "*Điểm trạng thái mà tại đó các quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ có vận tốc bằng 0 đều là điểm cân bằng $\underline{x}_e$ của hệ*".

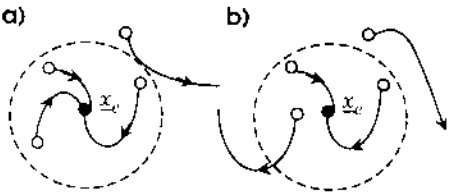
Ví dụ 1.7: Xác định điểm cân bằng từ họ các quỹ đạo pha

Quay lại ví dụ 1.6. Ở đó ta thấy mọi đạo pha của hệ khi gặp đoạn trục hoành nằm trong đoạn từ $-c$ đến c (đoạn được tô đậm trong hình 1.7) đều dừng lại. Điều này chứng tỏ hệ có các điểm cân bằng $\underline{x}_e = \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix}$ là những điểm thỏa mãn $|x_{e2}| \le c$. ❐

Ứng dụng trong việc xác định tính ổn định tại một điểm cân bằng

Một hệ thống được gọi là *ổn định (tiệm cận) tại điểm cân bằng* $\underline{x}_e$ nếu như có một tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi $\underline{x}_e$ và đưa tới điểm $\underline{x}_0$ thuộc một lân cận nào đó của $\underline{x}_e$ thì sau đó hệ có khả năng tự quay về được điểm cân bằng $\underline{x}_e$ ban đầu.

Theo định nghĩa trên thì ta có thể nhận biết được hệ có ổn định tiệm cận hay không tại một điểm cân bằng thông qua dạng họ các đường quỹ đạo trạng thái của nó. Nếu hệ ổn định tiệm cận tại một điểm cân bằng $\underline{x}_e$ nào đó thì mọi đường quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ xuất phát từ một điểm $\underline{x}_0$ thuộc lân cận của $\underline{x}_e$ đều phải kết thúc tại $\underline{x}_e$ (hình 1.8).



Hình 1.8: a) Điểm cân bằng ổn định.
b) Điểm cân bằng không ổn định.

Ví dụ 1.8: Kiểm tra tính ổn định

Hệ đã xét ở ví dụ 1.5 với họ các quỹ đạo trạng thái tự do được xây dựng theo phương pháp đường đẳng tà trong hình 1.6 cho thấy hệ (1.11) chỉ có một điểm cân bằng là gốc tọa độ và hệ ổn định tiệm cận tại gốc, vì mọi quỹ đạo trạng thái tự do của nó đều tiến về 0 và kết thúc tại đó. ❐

Ý nghĩa trong việc phân tích khả năng tồn tại dao động điều hòa

Giống như hệ tuyến tính, hệ thống phi tuyến cũng có khả năng *dao động điều hòa*. Chúng được thể hiện ở dạng đường quỹ đạo trạng thái tự do khép kín, tức là những quỹ đạo ứng với $\underline{u}=0$ mà nếu xuất phát từ một điểm trên đó thì sau một *khoảng thời gian hữu hạn* sẽ lại quay về điểm ban đầu. Các *quỹ đạo trạng thái tự do* khép kín này được mô tả bởi những nghiệm tuần hoàn của phương trình trạng thái hệ tự trị (1.2):

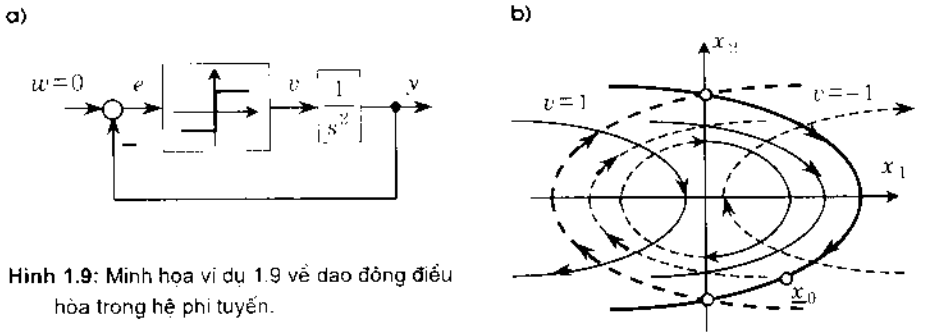
$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x})$$

hoặc hệ không tự trị (1.3):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t)\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x},t)$$

Ví dụ 1.9: Phân tích khả năng tồn tại dao động

Xét hệ có sơ đồ khối như ở hình 1.9a). Hệ có đối tượng là khâu tích phân bậc 2 và bộ điều khiển là khâu phi tuyến hai vị trí.



Hình 1.9: Minh họa ví dụ 1.9 về dao động điều hòa trong hệ phi tuyến.

Đối tượng tích phân bậc 2 là khâu tuyến tính có hàm truyền đạt:

$$S(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v(t)$$

Bởi vậy, nếu đặt

$$y = x_1 \quad \text{và} \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{1.18}$$

thì do $x_1 = y = -e$ nên

$$\frac{dx_2}{dt} = v(t) \quad \text{trong đó} \quad v(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x_1 < 0 \\ -1 & \text{khi } x_1 > 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Như vậy hệ có mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = v = -\text{sgn}(x_1) \end{cases} \tag{1.20}$$

Phương trình (1.20) trên có nghiệm tuần hoàn, tức là hệ có dao động điều hòa. Điều đó ta có thể nhận thấy từ (1.18) và (1.19) là do $v(t)$ chỉ nhận giá trị hằng số ± 1 nên khi chia hai vế của chúng cho nhau sẽ được (xây dựng quỹ đạo pha bằng phương pháp tách biến):

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{v} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{x_2^2}{2v} + k$$

với k là hằng số được xác định từ giá trị đầu $x_1(0) = y(0)$ cũng như $x_2(0) = \dfrac{dy(0)}{dt}$. Đây cũng chính là phương trình mô tả quỹ đạo trạng thái dạng parabol của hệ thống khi không bị kích thích. Hình 1.9b) biểu diễn quỹ đạo trạng thái của hệ. Đường liền nét ứng với $v = -1$, đường rời nét ứng với $v = 1$. Chiều mũi tên chỉ hướng quỹ đạo trạng thái được xác định từ quan hệ $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$, tức là phía trên trục tung ($x_2 > 0$) nó chỉ chiều tăng của x_1 và dưới trục tung thì chỉ chiều ngược lại.

Giả sử hệ đang ở trạng thái $\underline{x}_0$ phía bên phải trục x_2. Do có $x_1 > 0$ nên từ $\underline{x}_0$ hệ sẽ đi theo đường nét liền cho tới khi gặp trục x_2 thì đổi hướng chuyển sang đường rời nét vì kể từ lúc đó $x_1 < 0$. Theo đường rời nét đến khi gặp trục x_2 thì lại đổi hướng chuyển sang đường nét liền. Cứ như vậy hệ sẽ đi theo đường quỹ đạo trạng thái khép kín xác nhận sự tồn tại dao động điều hòa autonom trong hệ. ❐

Mở rộng bài toán xác định sự tồn tại của dao động trong hệ phi tuyến, người ta đã đi đến bài toán là làm thế nào để xác định được hệ có quỹ đạo trạng thái khép kín hay không mà không cần phải xây dựng các quỹ đạo trạng thái của nó. Câu hỏi này là có lý vì hai lý do:

- Thứ nhất là việc có được họ các quỹ đạo trạng thái một cách chính xác cho hệ thống phụ thuộc rất nhiều vào dạng mô hình trạng thái của hệ. Ta chỉ có thể xây dựng được quỹ đạo trạng thái của hệ theo phương pháp giải tích cho một số hệ đặc biệt. Chẳng hạn như việc xây dựng quỹ đạo pha cho hệ có hai biến trạng thái theo phương pháp tách biến chỉ thực hiện được nếu như mô hình của hệ thỏa mãn điều kiện (1.13).
- Thứ hai là khi sử dụng các công cụ mô phỏng ta chỉ nhận được một số quỹ đạo trạng thái riêng biệt gần đúng ứng với những điểm xuất phát $\underline{x}_0$ khác nhau, chứ không có được dạng chung của tất cả các quỹ đạo trạng thái. Nếu như hệ có dao động điều hòa, song dao động đó lại rất "nhạy cảm" với điểm trạng thái $\underline{x}_0$ được chọn ban đầu thì việc chọn ra được $\underline{x}_0$ thích hợp để từ đó có được quỹ đạo $\underline{x}(t)$ khép kín là hoàn toàn may rủi và mò mẫm.

Phụ giúp cho câu trả lời về khả năng tồn tại quỹ đạo trạng thái khép kín trong hệ có hai biến trạng thái (quỹ đạo pha khép kín) mà không cần phải có đồ thị của họ các quỹ đạo pha là điều kiện cần của *Bendixson* phát biểu như sau:

Định lý 1.1 (Bendixson): Xét hệ bậc 2 có mô hình không bị kích thích:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \underline{u})\big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \tilde{f}_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \underline{u})\big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \tilde{f}_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Nếu trong một miền $\mathcal{D}$ giới nội của mặt phẳng pha (x_1, x_2) hai hàm $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ liên tục cùng đạo hàm của nó và hàm

$$g(x_1, x_2) = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2} \tag{1.21}$$

không đổi dấu cũng như không đồng nhất bằng 0 trong tất cả các miền con $\mathcal{D}_c$ thuộc $\mathcal{D}$ thì hệ sẽ không có quỹ đạo pha khép kín trong $\mathcal{D}$.

Chứng minh:

Giả sử rằng hệ có quỹ đạo pha khép kín c trong $\mathcal{D}$. Gọi miền được bao kín bởi quỹ đạo pha đó là $\mathcal{D}_c$. Vậy thì theo công thức tích phân của Gauss cho hàm (1.21) ta có:

$$\iint_{\mathcal{D}_c} g(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}_c} \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_c \left(-\tilde{f}_2 dx_1 + \tilde{f}_1 dx_2 \right)$$

$$= \oint_c \left(-\tilde{f}_2 \frac{dx_1}{dt} + \tilde{f}_1 \frac{dx_2}{dt} \right) dt = \oint_c \left(-\tilde{f}_2 \tilde{f}_1 + \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \right) dt = 0$$

Như vậy, trong $\mathcal{D}_r$ hàm $g(x_1, x_2)$ phải hoặc đã đổi dấu hoặc phải đồng nhất bằng 0 và điều này trái với giả thiết. Vậy điều giả sử là sai. ❐

Định lý của Bendixson chỉ là điều kiện cần cho việc xác định sự tồn tại của quỹ đạo pha khép kín, song cũng là gợi ý cho việc khoanh những vùng không có quỹ đạo pha khép kín. Trên tư tưởng đó và để khẳng định rõ ràng sự tồn tại quỹ đạo pha khép kín, ta sẽ loại ra những miền $\mathcal{D}$ thỏa mãn định lý Bendixson và chỉ tập trung vào các miền giới nội khác ký hiệu là $\mathcal{S}$ mà ở đó hàm $g(x_1, x_2)$ đổi dấu, trong đó $g(x_1, x_2)$ được xác định theo công thức (1.21) cho trường hợp hệ phi tuyến hai trạng thái với mô hình không bị kích thích. Điều này dẫn ta đến định lý Poincaré–Bendixson. Nó được xem như hệ quả của Bendixson và phát biểu như sau:

Định lý 1.2 (Poincaré–Bendixson): Cho hệ bậc 2 không bị kích thích với mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \underline{u})\big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \tilde{f}_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \underline{u})\big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \tilde{f}_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Nếu có một miền $\mathcal{S}$ kín, giới nội của mặt phẳng pha (x_1, x_2) không chứa điểm cân bằng và một quỹ đạo pha $\underline{x}(t)$ xuất phát từ bên trong $\mathcal{S}$ song không rời bỏ $\mathcal{S}$ thì trong $\mathcal{S}$ phải tồn tại ít nhất một quỹ đạo pha khép kín (dao động điều hòa autonom).

Ví dụ 1.10: Phân tích khả năng tồn tại dao động

Xét hệ cân bằng tại gốc với mô hình:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \tag{1.22}$$

Miền $\mathcal{S}$ ta xét ở đây là hình vành khuyên có biên là hai đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính là $k_{\min}$, $k_{\max}$, tức là:

$$\mathcal{S} = \{ x_1^2 + x_2^2 = k^2 \mid 0 < k_{\min} \le k \le k_{\min} \} \tag{1.23}$$

Rõ ràng $\mathcal{S}$ không chứa điểm cân bằng. Vấn đề bây giờ là xác định $k_{\min}$, $k_{\max}$.

Từ mô hình (1.22) ta có:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - x_2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1)}{-x_1(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) + x_2} \tag{1.24}$$

Mặt khác từ phương trình (1.23) mô tả $\mathcal{S}$ ta cũng có:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} \tag{1.25}$$

Bởi vậy một quỹ đạo pha $\underline{x}(t)$ xuất phát từ bên trong $\mathcal{S}$ và không ra khỏi $\mathcal{S}$ phải là quỹ đạo có góc nghiêng (1.24) giống như (1.25), tức là:

$$\frac{x_1 + x_2(x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2 - 1)}{-x_1(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) + x_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 1 = 0$$

Thay

$$x_1^2 + x_2^2 = k^2 \quad \text{và} \quad x_1 = k\cos\varphi \quad \text{cũng như} \quad x_2 = k\sin\varphi$$

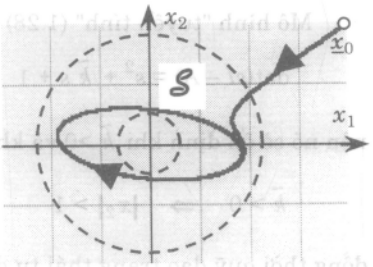
vào phương trình trên (đổi sang tọa độ cực) ta được:

$$k^2(1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = \frac{2}{2 + \sin 2\varphi}$$

Từ đây suy ra:

$$k_{\min} = \min_{\varphi} \sqrt{\frac{2}{2 + \sin 2\varphi}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

và $$k_{\max} = \max_{\varphi} \sqrt{\frac{2}{2 + \sin 2\varphi}} = \sqrt{2}$$



Hình 1.10: Minh họa ví dụ 1.10.

Vậy trong miền:

$$\mathcal{S} = \left\{ x_1^2 + x_2^2 = k^2 \;\middle|\; \sqrt{\frac{2}{3}} \le k \le \sqrt{2} \right\}$$

hệ có quỹ đạo pha khép kín $\underline{x}(t)$. Hình 1.10 là quỹ đạo pha của hệ (1.22) thu được nhờ công cụ mô phỏng. □

Ví dụ 1.11: Phân tích khả năng tồn tại dao động

Xét hệ có quan hệ vào–ra được mô tả bởi phương trình vi phân Van der Pol:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 1\right)\frac{dy}{dt} + y = u \quad \text{với} \quad k > 0 \tag{1.26}$$

trong đó $u(t)$ là tín hiệu vào và $y(t)$ là tín hiệu ra của hệ.

Định nghĩa thêm các biến trạng thái:

$$x_1 = y \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{dy}{dt}$$

thì quan hệ vào–ra (1.26) sẽ được biến đổi thành phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - k(x_2^2 - 1)x_2 + u \end{cases} \tag{1.27}$$

Hệ có điểm cân bằng duy nhất là gốc tọa độ $\underline{0}$. Xem tích $k(x_2^2 - 1)$ như một tham số $\tilde{k} = k(x_2^2 - 1)$ thì mô hình trạng thái (1.27) sẽ có dạng *giống như mô hình tuyến tính* có tham số thay đổi như sau:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\tilde{k} \end{pmatrix}}_{A} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \,. \tag{1.28}$$

Mô hình "tuyến tính" (1.28) có phương trình đặc tính:

$$\det(sI - A) = s^2 + \tilde{k}\, s + 1$$

nên nó sẽ ổn định khi $\tilde{k} > 0$ và không ổn định khi $\tilde{k} \leq 0$. Nếu (1.28) ổn định thì phải có:

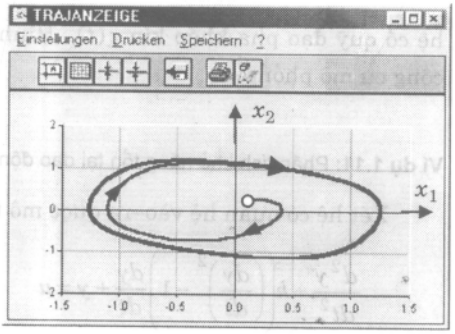
$$\tilde{k} > 0 \quad \Rightarrow \quad |x_2| > 1$$

đồng thời quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ của hệ là tắt dần, hay $x_2(t)$ tiến dần về 0. Trong quá trình $x_2(t)$ tiến về 0 sẽ có thời điểm mà kể từ lúc đó có:

$$|x_2| < 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{k} < 0$$

tức là kể từ thời điểm đó hệ (1.28) lại trở thành không ổn định và do đó $\underline{x}(t)$ tăng dần, hay giá trị của $x_2(t)$ cũng lớn dần. Khi giá trị $x_2(t)$) lớn dần và vượt quá giá trị 1, hệ (1.28) lại trở thành ổn định kéo theo $x_2(t)$ lại giảm dần.

Cứ như vậy ta thấy quá trình tự do $\underline{x}(t)$ sẽ không vượt quá được ra ngoài một miền nào đó có $|x_2|$ sai khác tương đối lớn so với 1, chẳng hạn như (ước lượng gần đúng):



Hình 1.11: Minh họa ví dụ 1.11.

$0.2 < |x_2| < 1.5$

Theo cách tương tự ta cũng sẽ chỉ ra được $\underline{x}(t)$ không ra khỏi miền nào đó có (ước lượng):

$-2 < x_1 < 2$

Như vậy thì khi một quỹ đạo pha $\underline{x}(t)$ ứng với $u=0$ đã xuất phát từ bên trong miền:

$$\mathcal{S} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < 2 \ , \ 0.5 < |x_2| < 1.5 \}$$

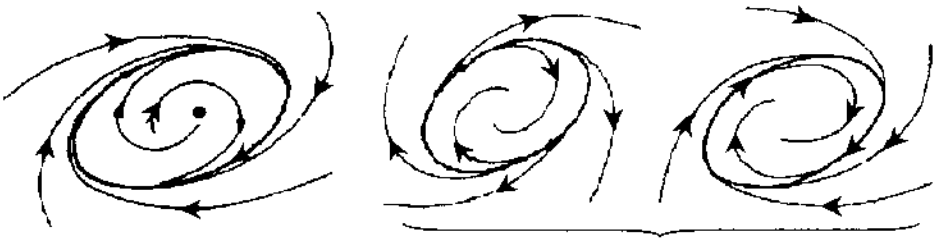
sẽ không ra khỏi đó nữa. Ngoài ra do $\mathcal{S}$ giới nội và không chứa điểm cân bằng $\underline{0}$ nên theo định lý 1.2 hệ Van der Pol (1.27) phải có một dao động điều hòa autonom trong $\mathcal{S}$.

Hình 1.11 là quỹ đạo pha của hệ Van der Pol cho trường hợp $u=0$ và $k=1$ thu được nhờ công cụ mô phỏng. □

Chú ý: Cả hai định lý 1.1 và 1.2 phụ giúp cho việc khẳng định sự tồn tại quỹ đạo trạng thái (dao động điều hòa autonom) trong hệ phi tuyến chỉ được phát biểu cho hệ bậc 2. Sự mở rộng định lý cho hệ bậc cao hơn là không có cơ sở và cho tới nay cũng chưa có một sự mở rộng nào được chấp nhận.

Ý nghĩa trong việc phân tích tính ổn định của dao động điều hòa

So sánh với điểm cân bằng của hệ thống, ta thấy các quỹ đạo trạng thái khép kín cũng có một tính chất tương tự là khi không có sự thay đổi tác động bên ngoài, hệ sẽ giữ nguyên trạng thái (khép kín) đó. Bởi vậy, cũng giống như khái niệm về tính ổn định của hệ phi tuyến tại một điểm cân bằng, đối với các quỹ đạo trạng thái khép kín mà ở đây được xem như "tập hợp các điểm cân bằng", ta cũng có: "*Dao động điều hòa của hệ được gọi là ổn định nếu hệ bị tác động tức thời đánh bật ra khỏi chế độ dao động điều hòa đó và bị đưa tới điểm trạng thái $\underline{x}_0$ khác nhưng nằm trong một lân cận nào đó của quỹ đạo trạng thái khép kín thì hệ lại tự quay về được chế độ dao động điều hòa này*"



Hình 1.12: Minh họa khái niệm dao động điều hòa ổn định và không ổn định.

Theo định nghĩa trên, ta có thể thông qua dạng họ quỹ đạo trạng thái của hệ để nhận biết tính ổn định của dao động điều hòa. Cụ thể là dao động sẽ ổn định nếu *mọi* quỹ đạo trạng thái khi đi qua lân cận của *quỹ đạo khép kín* ứng với dao động đang xét đều có xu hướng tiến về quỹ dạo khép kín đó và kết thúc trên nó (hình 1.12).

Tương tự khái niệm miền ổn định của hệ phi tuyến, tính ổn định của một dao động trong hệ phi tuyến chỉ có ý nghĩa ứng dụng nếu đi kèm với nó ta còn chỉ ra được miền ổn định $\mathcal{O}$, tức là phải chỉ ra được lân cận mà các quỹ đạo trạng thái khi đi qua một trong các điểm thuộc lân cận đó thì sẽ đều kết thúc trên quỹ đạo trạng thái khép kín này.

Ý nghĩa trong việc phân tích hiện tượng hỗn loạn (chaos)

Ở hệ phi tuyến luôn tồn tại một tập con $\mathcal{Z}$ giới nội của không gian trạng thái $\mathbb{R}^n$ mà khi quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ đã xuất phát từ một điểm bên trong $\mathcal{Z}$ thì sẽ không bao giờ ra khỏi đó nữa. Ngoài ra, khi đã ở bên trong $\mathcal{Z}$ thì quỹ đạo $\underline{x}(t)$ sẽ không kết thúc ở bất cứ một điểm trạng thái nào, nó đi mãi và đi qua mọi điểm $\underline{x}_{\mathcal{Z}}$ (hoặc lân cận của nó) thuộc $\mathcal{Z}$. Nói cách khác, khi đã ở bên trong $\mathcal{Z}$ thì sẽ luôn tồn tại điểm thời gian t_0 mà quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ sẽ đi vào lân cận của $\underline{x}_{\mathcal{Z}}$ (thậm chí đi qua $\underline{x}_{\mathcal{Z}}$). Hơn nữa, do $\mathcal{Z}$ giới nội nên $\underline{x}(t)$ bị chặn và vì $\underline{x}(t)$ bị chặn nên bao giờ cũng tồn tại dãy điểm t_0, t_1, t_2, ... để $\underline{x}(t_0)$, $\underline{x}(t_1)$, $\underline{x}(t_2)$, ... hội tụ (theo định lý Weierstrass-Bolzano). Như vậy, $\mathcal{Z}$ là tập kín, liên thông và khi đã ở trong $\mathcal{Z}$, quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ luôn có một dãy giá trị thời gian t_0, t_1, t_2, ... để:

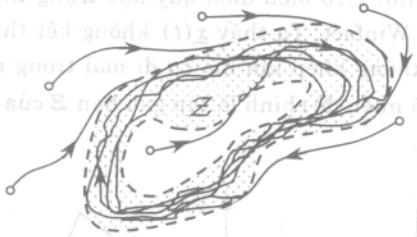
$$\|\underline{x}(t_i) - \underline{x}_{\mathcal{Z}}\| < \varepsilon$$

với ε là một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước.

Ta có thể thấy:

- Điểm cân bằng $\underline{x}_e$ của hệ là một tập $\mathcal{Z}$ đặc biệt, tức là $\mathcal{Z}=\{\underline{x}_e\}$.
- Tập các điểm trạng thái thuộc một quỹ đạo trạng thái khép kín (dao động điều hòa) cũng là một tập $\mathcal{Z}$ theo nghĩa trên.

Nếu tập $\mathcal{Z}$ không thuộc hai trường hợp đặc biệt trên thì người ta nói, hệ có *hiện tượng hỗn loạn* (*hiện tượng chaos*). Tập $\mathcal{Z}$ của hiện tượng hỗn loạn có tên gọi là *tập giới hạn*. Tập giới hạn $\mathcal{Z}$ của hệ phi tuyến được gọi là *ổn định*, hay *tập giới hạn hấp dẫn* (*attractor*), nếu *mọi* quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ khi đi qua lân cận của $\mathcal{Z}$ thì sẽ bị hút vào $\mathcal{Z}$ ở lại trong đó (hình 1.13).



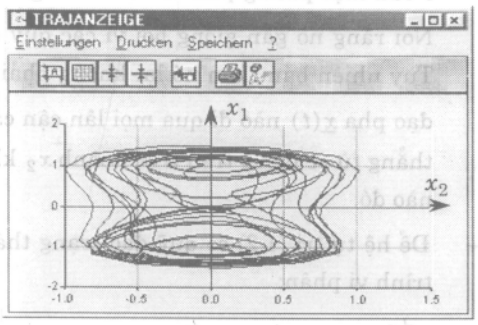
Hình 1.13: Tập giới hạn hấp dẫn (attractor), hay còn gọi tập giới hạn ổn định.

Ví dụ 1.12: Phân tích hiện tượng hỗn loạn

Xét hệ có mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -0{,}18x_2 - x_1^3 + x_1 + u \end{cases}$$

Sử dụng chương trình vẽ mô phỏng Winfact để vẽ quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ ứng với giá trị đầu $\underline{x}_0=\underline{0}$ khi được kích thích bằng tín hiệu $u(t) = -0{,}3\sin(t)$ ở đầu vào ta có hình 1.14. Kết quả mô phỏng này cho thấy $\underline{x}(t)$ luôn đi mãi, không dừng lại ở bất cứ một điểm cân bằng (hoặc điểm dừng) cũng như không kết thúc tại một đường cong khép kín nào. Hơn nữa, nếu tăng thời gian mô phỏng lên vô cùng thì quỹ đạo $\underline{x}(t)$ sẽ tô kín một vùng và đó chính là tập giới hạn $\mathcal{Z}$ của hệ trong trường hợp được cưỡng bức bằng tín hiệu $u(t)=-0{,}3\sin(t)$ ở đầu vào. ❐



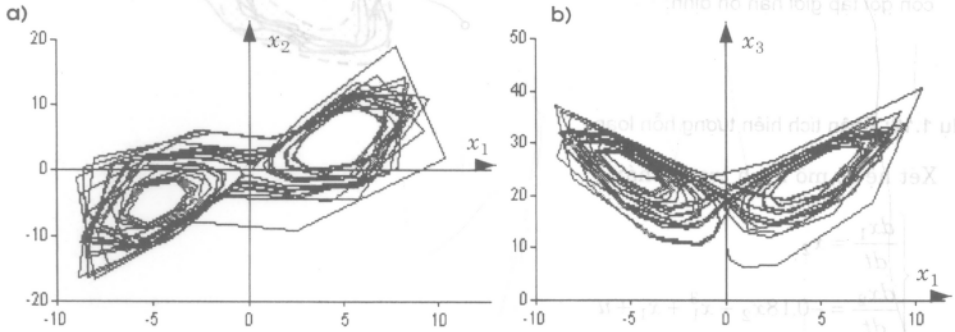
Hình 1.14: Minh họa ví dụ 1.12 về hiện tượng chao (hỗn loạn) trong hệ phi tuyến.

Ví dụ 1.13: Phân tích hiện tượng hỗn loạn

Xét hệ Lorenz với mô hình không bị kích thích ($\underline{u}=\underline{0}$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3(-x_1 + x_2) \\ x_1(26 - x_3) - x_2 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix} \quad \text{trong đó} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hình 1.15 biểu diễn quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ được vẽ nhờ chương trình mô phỏng Winfact. Ta thấy $\underline{x}(t)$ không kết thúc tại bất cứ ở một điểm trạng thái nào. Nó cũng không khép kín mà cứ đi mãi trong một miền kín, giới nội của không gian trạng thái và miền đó chính là tập giới hạn $\mathcal{Z}$ của hiện tượng hỗn loạn trong hệ Lorenz. ❐



Hình 1.15: a) Biểu diễn quỹ đạo trạng thái trong mặt phẳng (x_1, x_2)
b) Biểu diễn quỹ đạo trạng thái trong mặt phẳng (x_1, x_3).

Cuối cùng, về hiện tượng hỗn loạn và tập giới hạn $\mathcal{Z}$ trong nó, ta cần lưu ý thêm:

– Tập giới hạn $\mathcal{Z}$ phải chứa quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ. Chẳng hạn ở ví dụ 1.6 và hình 1.7 vẽ quỹ đạo trạng thái của hệ (1.15) ta thấy đoạn trục hoành từ $-c$ đến c của mặt phẳng pha có tính chất *gần giống* như tập giới hạn hấp dẫn $\mathcal{Z}$ của hệ. Nói rằng nó gần giống bởi vì các quỹ đạo pha đều có xu hướng kết thúc trên nó. Tuy nhiên bản thân nó lại không phải là tập giới hạn $\mathcal{Z}$ vì không tồn tại một quỹ đạo pha $\underline{x}(t)$ nào đi qua mọi lân cận các điểm thuộc trong nó. Nói cách khác đoạn thẳng từ $-c$ đến c trên trục hoành x_2 không được "vẽ" lên bởi một quỹ đạo pha $\underline{x}(t)$ nào đó.

– Để hệ tự trị (1.2) có quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ thỏa mãn $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ thì phương trình vi phân:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) \tag{1.29}$$

phải có nghiệm. Đủ cho điều đó là hàm $\underline{\tilde{f}}(\underline{x})$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz (sẽ được trình bày ở mục 1.2 dưới đây). Nếu đã thỏa mãn điều kiện Lipschitz, phương trình vi phân (1.29) luôn có nghiệm $\underline{x}(t)$ với $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ *duy nhất*, và như vậy quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ sẽ không thể tự cắt nó. Một quỹ đạo trạng thái không tự

cắt nó mà lại đi qua được lân cận của mọi điểm thuộc tập giới hạn $\mathcal{Z}$ chỉ có thể có được khi tập $\mathcal{Z}$ nằm trong không gian có số chiều ít nhất là 3. Nói cách khác, hiện tượng hỗn loạn ứng với $\underline{u}=\underline{0}$ (hệ không bị kích thích) chỉ có thể tồn tại ở những hệ có bậc không nhỏ hơn 3.

Ý nghĩa trong việc phân tích hiện tượng phân nhánh (bifurcation)

Việc phân tích, đánh giá chất lượng hệ phi tuyến thường được bắt đầu bằng việc xác định các điểm cân bằng (điểm dừng). Hiển nhiên chất lượng động học của hệ phụ thuộc vào số lượng các điểm cân bằng. Song số những điểm cân bằng của hệ phi tuyến, lại không bất biến. Ở nhiều hệ phi tuyến, sự phụ thuộc này lại đặc biệt tới mức chỉ một thay đổi nhỏ nào đó trong hệ thống, chẳng hạn như sự thay đổi tham số mô hình, đã có thể kéo theo sự thay đổi về số lượng, vị trí các điểm cân bằng, quỹ đạo trạng thái giới hạn ... và do đó cũng kéo theo sự thay đổi bản chất, chất lượng của hệ.

Hiện tượng thay đổi bản chất và chất lượng hệ thống mang tính đột biến và được nhận biết qua sự thay đổi về số lượng, vị trí cũng như tính chất các điểm cân bằng được gọi là *hiện tượng phân nhánh* (*bifurcation*) trong hệ phi tuyến.

Ví dụ 1.13: Minh họa hiện tượng phân nhánh

Xét hệ bậc 2 (hệ *Duffing*) có mô hình trạng thái phụ thuộc tham số

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_2 \\ kx_1 - x_1^3 - x_2 + u \end{pmatrix}$$

trong đó $\underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ và k là tham số của mô hình. Để xác định điểm cân bằng thì theo định nghĩa về nó, ta phải tìm nghiệm $\underline{x}_e$ của

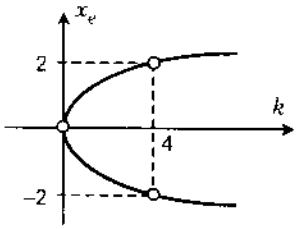
$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ kx_1 - x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Khi đó, hệ sẽ có một điểm cân bằng $x_{e1}=\underline{0}$ nếu $k\leq 0$ và ba điểm cân bằng

$$x_{e1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{e2}=\begin{pmatrix} \sqrt{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{e3}=\begin{pmatrix} -\sqrt{k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{nếu} \quad k>0$$

Như vậy, khi k thay đổi từ âm sang dương, số các điểm cân bằng của hệ sẽ nhảy vọt từ 1 lên 3. Hình 1.25 biểu diễn số và vị trí các điểm cân bằng phụ thuộc theo tham số k của mô hình hệ Duffing. Cùng với sự thay đổi về số lượng các điểm cân bằng này mà bản

chất phi tuyến hệ, nhận biết được thông qua dạng các quỹ đạo trạng thái, cũng sẽ th. đổi theo.



Hình 1.16: Số lượng và vị trí các điểm cân bằng của hệ Duffing phụ thuộc theo tham số k của mô hình.

1.2 Những công cụ toán học cần thiết

1.2.1 Đại số ma trận và ánh xạ tuyến tính

Ma trận là một tập hợp A gồm hữu hạn $m \times n$ các số thực ($\mathbb{R}$), hoặc phức ($\mathbb{C}$) ký hiệu là a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$, được sắp xếp theo hàng/cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{hàng thứ } 2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\uparrow \text{cột thứ } n$$

Theo cách sắp xếp như vậy thì phần tử a_{ij} của A sẽ nằm ở hàng thứ i và cột thứ j.

Do A có $m \times n$ phần tử thuộc $\mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$) như vậy mà nhiều khi người ta còn dùng ký hiệu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (hoặc $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$) để chỉ một ma trận A có m hàng, n cột (có kiểu $m \times n$). Nếu như cách biểu diễn hàng/cột ở trên đã được thống nhất và không sợ bị nhầm ta có thể viết một ma trận A ngắn gọn hơn:

$$A = (a_{ij}), \quad i=1,2,\ldots,m \text{ và } j=1,2,\ldots,n.$$

Một ma trận $A=(a_{ij})$ có số hàng bằng số cột được gọi là *ma trận vuông*. Đường chéo nối các phần tử a_{ii} (chỉ số hàng bằng chỉ số cột) trong ma trận vuông được gọi là đường chéo chính. Đường chéo còn lại được gọi là *đường chéo phụ*.

Một ma trận vuông $A=(a_{ij})$ có $a_{ij}=0$ khi $i \neq j$, tức là các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0, được gọi là *ma trận đường chéo*. Ma trận đường chéo được ký hiệu bởi $A = \text{diag}(a_{ii})$.

Ma trận đường chéo I = diag(1) được gọi là *ma trận đơn vị*.

Một vector $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ có n phần tử được xem là ma trận có n hàng và 1 cột. Nếu ghép chung các phần tử trên cột thứ j của ma trận $A=(a_{ij})$, $i=1,2, \ldots, m$; $j=1,2, \ldots, n$ lại với nhau để thành vector $\underline{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, gọi là *vector cột*, thì A sẽ có dạng:

$$A = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_n).$$

Các phép tính với ma trận

1) *Phép cộng / trừ*: Cho hai ma trận $A=(a_{ij})$ và $B=(b_{ij})$ cùng có m hàng n cột. Tổng hay hiệu của chúng được định nghĩa là $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$.

   Rõ ràng là phép cộng/trừ chỉ thực hiện được với những ma trận có cùng số hàng và cùng số cột. Những ma trận như vậy được gọi là ma trận cùng kiểu.

2) *Phép nhân với số thực (phức)*: Cho ma trận $A=(a_{ij})$ có m hàng, n cột và một số vô hướng thực (phức) x tùy ý. Tích xA được hiểu là ma trận $xA=(xa_{ij})$ và Ax được hiểu là $Ax=(a_{ij}x)$. Hiển nhiên có $xA=Ax$.

3) *Phép chuyển vị*: Ma trận chuyển vị của ma trận $A=(a_{ij})$ với m hàng, n cột là ma trận $A^T=(a_{ji})$ có n hàng, m cột, được tạo từ A qua việc hoán chuyển hàng thành cột và ngược lại cột thành hàng. Như vậy ta luôn có $(A^T)^T=A$.

   Một ma trận A thỏa mãn $A=A^T$ được gọi là *ma trận đối xứng*. Một ma trận đối xứng phải là ma trận vuông.

   Nếu ghép chung các phần tử trên hàng thứ i của ma trận $A=(a_{ij})$ lại với nhau thành vector $\underline{h}_i^T=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, gọi là *vector hàng*, thì ma trận A sẽ viết được thành $A = \begin{pmatrix} \underline{h}_1^T \\ \vdots \\ \underline{h}_m^T \end{pmatrix}$ hay $A^T = (\underline{h}_1, \underline{h}_2, \cdots, \underline{h}_n)$.

4) *Phép nhân*: Cho ma trận $A=(a_{ik})$ có m hàng p cột và ma trận $B=(b_{kj})$ có p hàng n cột. Tích $AB=C=(c_{ij})$ của chúng là một ma trận có m hàng, n cột với các phần tử

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \underline{a}_i^T \underline{b}_j$$

trong đó $\underline{a}_i$ là vector hàng thứ i của A và $\underline{b}_j$ là vector cột thứ j của B (hàng thứ i của A nhân với cột thứ j của B). Hai ma trận A, B chỉ có thể được nhân với nhau thành AB nếu số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.

Có thể thấy ngay được tập các ma trận, kết hợp với phép cộng / nhân ma trận và phép nhân với số thực (phức) tạo thành một *đại số*. Đó cũng là lý do tại sao người ta gọi *đại số ma trận*.

Một ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được gọi là *ma trận trực giao* nếu $A^T A = A A^T = I$. Hai vector $\underline{a}$ và $\underline{b}$ được gọi là *trực giao với nhau* nếu $\underline{a}^T \underline{b} = 0$. Vector $\underline{e}_i$ chỉ có phần tử thứ i bằng 1, các phần tử khác bằng 0, được gọi là *vector đơn vị*.

Phép nhân ma trận thường không giao hoán. Nó có tính chất:

- $(AB)^T = B^T A^T$
- $A(B+C) = AB + AC$ và $(A+B)C = AC + BC$.
- $A = AI = IA$, với I là ma trận đơn vị.
- $\underline{e}_i^T A \underline{e}_j = a_{ij}$, tức là bằng phần tử thứ ij của A.
- $A\underline{e}_j = \underline{c}_j$, tức là bằng vector cột thứ j của A.
- $\underline{e}_i^T A = \underline{h}_i^T$, tức là bằng vector hàng thứ i của A.

Hạng của ma trận

Xét một ma trận $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ bất kỳ (có kiểu $m \times n$) và gọi $\underline{h}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ là các vector hàng cũng như $\underline{c}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ là các vector cột của A. Nếu trong số m vector hàng $\underline{h}_i$ có nhiều nhất $p \le m$ vector độc lập tuyến tính và trong số n vector cột $\underline{c}_j$ có nhiều nhất $q \le n$ vector độc lập tuyến tính thì *hạng của ma trận* được hiểu là:

$$\text{Rank}(A) = \min\{p, q\}$$

Một ma trận vuông A kiểu $(n \times n)$ sẽ được gọi là không suy biến nếu $\text{Rank}(A) = n$. Ngược lại nếu $\text{Rank}(A) < n$ thì A được nói là *ma trận suy biến*.

Hạng của ma trận có các tính chất sau:

- $\text{Rank}(A) = \min\{p, q\} = p = q$.
- $\text{Rank}(AB) \le \text{Rank}(A)$ và $\text{Rank}(AB) \le \text{Rank}(B)$.

- $\text{Rank}(A+B) \le \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$.
- Nếu A không suy biến thì $\text{Rank}(AB) = \text{Rank}(B)$.
- Nếu A thuộc kiểu $(m \times n)$ với $m \le n$ và $\text{Rank}(A)=m$ thì tích AA^T là ma trận vuông kiểu $(m \times m)$ không suy biến với $\text{Rank}(AA^T)=m$.

Định thức của ma trận

Cho ma trận vuông $A=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\ldots,n$ kiểu $(n \times n)$. Giá trị thực (phức)

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

được gọi là *định thức* của ma trận A, trong đó A_{ij} là ma trận kiểu $(n-1 \times n-1)$ thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j, tức là bỏ đi hàng và cột chứa phần tử a_{ij}. Ví dụ:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \Rightarrow \quad A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Công thức tính định thức trên được gọi là *công thức tổng quát*. Chỉ có ma trận vuông mới có định thức. Theo công thức tổng quát thì định thức của ma trận vuông có n hàng và cột được xác định truy hồi từ định thức các ma trận có số hàng cột ít hơn là $n-1$. Bắt đầu từ ma trận kiểu (1×1) ta có

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

Định thức của một ma trận vuông $A=(a_{ij})$ thuộc kiểu $(n \times n)$ có các tính chất sau:

1) A là ma trận suy biến khi và chỉ khi $\det(A) = 0$. Như vậy, nếu A có hai hàng hoặc hai cột phụ thuộc tuyến tính (ví dụ giống nhau) thì $\det(A) = 0$. Từ đây và cùng với công thức tính định thức tổng quát, ta có:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\det(A_{ij}) = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu} \quad k = i \\ 0 & \text{nếu} \quad k \ne i \end{cases}$$

2) Một ma trận vuông $A=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\ldots,n$ có $a_{ij} = 0$ khi $i>j$ (hoặc $i<j$) được gọi là ma trận tam giác, vì có các phần tử nằm dưới (hoặc trên) đường chéo chính đều bằng 0. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

3) (Công thức của Schur) Nếu A_1, A_2, A_3, A_4 là các ma trận là những ma trận có kiểu phù hợp và Θ là ma trận có các phần tử 0, thì

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \Theta & A_4 - A_3A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix} = \det(A_1)\det(A_4 - A_3A_1^{-1}A_2).$$

4) $\det(A) = \det(A^T)$.

5) $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.

6) Gọi A' là ma trận thu được từ A bằng cách đổi chỗ hai vector hàng hoặc hai vector cột thì $\det(A) = -\det(A')$.

7) Gọi A'' là ma trận thu được từ A bằng cách nhân các phần tử của một cột hoặc một hàng với số thực (hoặc phức) λ thì $\det(A'') = \lambda\det(A)$.

8) Cho ma trận vuông A có kiểu $(n\times n)$ và một số thực (phức) λ. Vậy thì

$$\det(\lambda A) = \lambda^n\det(A).$$

Ma trận nghịch đảo

Cho ma trận $A=(a_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$, trong đó a_{ij} là những số thực (hoặc phức), nói cách khác $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ (hoặc $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$). Nếu tồn tại một ma trận B thỏa mãn:

$$AB = BA = I \text{ (ma trận đơn vị)},$$

thì ma trận B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A và ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Do phải tồn tại cả hai phép nhân AA^{-1} và $A^{-1}A$ cho ra kết quả có cùng kiểu nên ma trận A phải là một ma trận vuông, tức là phải có $m=n$. Hơn nữa do $\det(I)=1\neq 0$ nên A phải là ma trận không suy biến.

Ma trận nghịch đảo A^{-1} của A có các tính chất sau:

1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ và $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

2) Nếu $A = \mathrm{diag}(a_i)$ và không suy biến thì $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{a_i}\right)$.

3) $A^{-1} = \dfrac{A_{adj}}{\det(A)}$, trong đó A_{adj} là ma trận có các phần tử $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ với A_{ji} là ma trận thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ j và như cột thứ i (phần tử ở vị trí đối xứng với $\tilde{a}_{ij}$).

4) (Công thức Frobenius) Cho ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ không suy biến, trong đó A_1, A_2, A_3, A_4 cũng là các ma trận. Khi đó sẽ có:

a) Nếu A_1 không suy biến và $B = A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2$ cũng không suy biến thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 B^{-1} A_3 A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 B^{-1} \\ -B^{-1} A_3 A_1^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

b) Nếu A_4 không suy biến và $C = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ cũng không suy biến thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & -C^{-1} A_2 A_4^{-1} \\ -A_4^{-1} A_3 C^{-1} & A_4^{-1} + A_4^{-1} A_3 C^{-1} A_2 A_4^{-1} \end{pmatrix}.$$

Vết của ma trận

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ kiểu $(n \times n)$. Vết của A được hiểu là tổng giá trị các phần tử trên đường chéo chính của A và được ký hiệu bằng trace(A):

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Vết của ma trận có các tính chất:

- $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.
- $\text{trace}(S^{-1}AS) = \text{trace}(A)$, với S là ma trận vuông không suy biến bất kỳ.

Ánh xạ tuyến tính

Xét ánh xạ $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Người ta vẫn thường viết $\underline{f} : \underline{x} \mapsto \underline{y}$, hay $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ và gọi $\underline{x}$ là phần tử gốc, $\underline{y}$ là phần tử ảnh của $\underline{f}$. Ánh xạ $\underline{f}$ được gọi là *tuyến tính* nếu:

$$\underline{f}(a_1 \underline{x}_1 + a_p \underline{x}_2 + \cdots + a_p \underline{x}_p) = a_1 \underline{f}(\underline{x}_1) + a_2 \underline{f}(\underline{x}_2) + \cdots + a_p \underline{f}(\underline{x}_p)$$

trong đó $a_1, a_2, \cdots, a_p$ là những số thực/phức (hoặc phần tử của một trường K).

Bây giờ ta xét hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n ẩn

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = y_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = y_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = y_m.$$

Sử dụng ký hiệu nhân ma trận với các vector $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, hệ phương trình trên viết được thành

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{\underline{y}} \quad \Leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{y}.$$

Như vậy, ở đây ma trận A đã đóng vai trò ánh xạ tuyến tính $A : \underline{x} \mapsto \underline{y}$. Cho $\underline{x}$ chạy khắp trong $\mathbb{R}^n$ thì ảnh của nó sẽ là một tập hợp nằm trong $\mathbb{R}^m$. Tập hợp đó được gọi là miền ảnh $\mathrm{Im}(A)$. Cũng tương tự, ta ký hiệu $\mathrm{Ker}(A)$ là tập hợp các điểm $\underline{x}$ trong $\mathbb{R}^n$ có ảnh là điểm gốc tọa độ $\underline{0}$ trong $\mathbb{R}^m$. Rõ ràng rằng hệ phương trình ở trên chỉ có thể có nghiệm $\underline{x}$ nếu $\underline{y} \in \mathrm{Im}(A)$.

Hai tập hợp $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ và $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ có các tính chất sau:

1) $\mathrm{Im}(A)$ là một không gian vector con trong $\mathbb{R}^m$. Nói cách khác nếu có $\underline{y}_1 \in \mathrm{Im}(A)$ và $\underline{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)$ thì cũng phải có $a\underline{y}_1 + b\underline{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)$, trong đó a, b là hai số thực bất kỳ.
2) $\mathrm{Rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.
3) $\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n$.
4) Với ma trận vuông A kiểu $(n \times n)$, $\mathrm{Im}(A)$ và $\mathrm{Ker}(A)$ đều là hai không gian con của $\mathbb{R}^n$. Mọi phần tử $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ đều phân tích được thành tổng $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$, trong đó $\underline{x}_1 \in \mathrm{Im}(A)$ và $\underline{x}_2 \in \mathrm{Ker}(A)$. Hơn nữa việc phân tích đó là duy nhất.
5) Nếu ma trận vuông A có kiểu $(n \times n)$ là đối xứng thì $\mathrm{Im}(A)$ và $\mathrm{Ker}(A)$ trực giao với nhau, tức là với mọi phần tử $\underline{y} \in \mathrm{Im}(A)$, $\underline{x} \in \mathrm{Ker}(A)$ ta luôn có $\underline{y}^T \underline{x} = x^T \underline{y} = 0$.

Nếu sử dụng cách biểu diễn $A = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_n)$ theo các vector cột của nó thì $\mathrm{Im}(A)$ chính là không gian của tất cả các vector phụ thuộc tuyến tính theo $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_n$. Người ta viết

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_n).$$

Ký hiệu span($\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ⋯ , $\underline{a}_n$) là chỉ tập hợp tất cả các vector phụ thuộc tuyến tính theo $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ⋯ , $\underline{a}_n$. Tập hợp đó cũng là một không gian vector. Như đã nói, để phương trình $A\underline{x} = \underline{y}$ có nghiệm $\underline{x}$ khi biết trước $\underline{y}$ thì $\underline{y} \in \mathrm{Im}(A)$, tức là $\underline{y}$ phải phụ thuộc tuyến tính theo $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ⋯ , $\underline{a}_n$. Suy ra:

$$\begin{aligned} \underline{y} \in \mathrm{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{y} \in \mathrm{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_n) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_n) = \mathrm{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_n, \underline{y}) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(A, \underline{y}) \end{aligned}$$

Ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$ (tự đồng cấu). Đặt ngược lại vấn đề là ánh xạ tự đồng cấu $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ đã cho trước và ta phải tìm ma trận mô tả nó. Trước hết trong $\mathbb{R}^n$ có n vector đơn vị $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, ... , $\underline{e}_n$. Mọi vector $\underline{x}$ trong nó đều biểu diễn được dưới dạng phụ thuộc tuyến tính theo các vector đơn vị này:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \cdots + x_n \underline{e}_n$$

Do đó ảnh của nó sẽ là

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \cdots + x_n \underline{e}_n) \\ &= x_1 \underline{f}(\underline{e}_1) + x_2 \underline{f}(\underline{e}_2) + \cdots + x_n \underline{f}(\underline{e}_n) = \underbrace{\left(\underline{f}(\underline{e}_1), \underline{f}(\underline{e}_2), \cdots, \underline{f}(\underline{e}_n) \right)}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

và A là ma trận mô tả ánh xạ tự đồng cấu $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ đã cho.

Phép biến đổi tương đương

Ta đã được biết ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là một hình thức biểu diễn ánh xạ tự đồng cấu $\underline{f}$. Tuy nhiên cách biểu diễn đó phụ thuộc vào bộ các vector cơ sở $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, ... , $\underline{e}_n$ được chọn. Với những bộ cơ sở khác nhau ta có các ma trận A khác nhau. Tất cả các ma trận A đó là tương đương vì chúng cùng biểu diễn cho một ánh xạ $\underline{f}$.

Giả sử $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$, ... , $\underline{s}_n$ là một cơ sở khác của $\mathbb{R}^n$ ngoài $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, ... , $\underline{e}_n$. Mỗi vector $\underline{s}_i$ lại có dạng biểu biễn theo cơ sở cũ $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, ... , $\underline{e}_n$ như sau:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{s}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vì $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ là n vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$ nên mọi vector $\underline{x}$ trong $\mathbb{R}^n$ đều có dạng phụ thuộc tuyến tính theo chúng, tức là

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = r_1\underline{s}_1 + r_2\underline{s}_2 + \dots + r_n\underline{s}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{s}_1 & \underline{s}_2 & \cdots & \underline{s}_n \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Bộ số thực $r_1, r_2, \dots, r_n$ được gọi là tọa độ của $\underline{x}$ theo cơ sở mới $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$. Vậy muốn biểu diễn $\underline{x}$ theo tọa độ mới ta có phép biến đổi

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Với cách biểu diễn $\underline{x}$ theo cơ sở mới này, ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cũng có dạng mới

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(\underline{e}_1) & f(\underline{e}_2) & \cdots & f(\underline{e}_n) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

nói cách khác AS cũng là ma trận mô tả $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nhưng theo cơ sở $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ trong $\mathbb{R}^n$ cho $\underline{x}$.

Tuy $\underline{x}$ đã được biểu diễn theo cơ sở mới $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ nhưng ảnh $\underline{y}$ của nó lại vẫn theo cơ sở cũ $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$. Để chuyển $\underline{y}$ theo cơ sở $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ ta lại làm giống như đã làm với $\underline{x}$ và đi đến dạng tương đương cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ theo cơ sở mới $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ như sau

$$S^{-1}AS.$$

Các phép biến đổi ma trận A thành $S^{-1}AS$, trong đó S là một ma trận vuông không suy biến bất kỳ, được gọi là *phép biến đổi tương đương*.

Giá trị riêng và vector riêng

Cho ma trận A. Một số thực (phức) λ được gọi là *giá trị riêng* và vector $\underline{x}$ được gọi là *vector riêng bên phải* ứng với giá trị riêng λ của A, nếu chúng thỏa mãn:

$$\lambda\underline{x} = A\underline{x} \quad \text{đúng với mọi } \underline{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A)\underline{x} = \underline{0}$$

Để cho phương trình trên có nghiệm $\underline{x} \neq \underline{0}$ thì $(\lambda I - A)$ phải là ma trận suy biến, tức là λ phải làm cho định thức của ma trận $(\lambda I - A)$ bằng 0. Định thức

$$\det(\lambda I - A)$$

của ma trận $(\lambda I - A)$ được gọi là *đa thức đặc tính* của ma trận A.

Giá trị riêng và vector riêng của ma trận A có những tính chất sau:

1) (Định lý Cayley–Hamilton) Nếu đa thức đặc tính của ma trận A có dạng:

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

thì cũng có

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = \Theta,$$

trong đó $\boldsymbol{\Theta}$ là ma trận có các phần tử đều bằng 0.

2) Nếu khai triển đa thức đặc tính thành

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

thì

$$a_0 = (-1)^n \det(A) \quad \text{và} \quad a_{n-1} = -\mathrm{trace}(A).$$

Điều này cũng nói rằng $\det(A)$ và $\mathrm{trace}(A)$ là hai đại lượng bất biến với việc chọn cơ sở nên chúng là những đại lượng đặc trưng cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

3) Hai ma trận tương đương A và $S^{-1}AS$ luôn có cùng các giá trị riêng, nói cách khác giá trị riêng của ma trận bất biến với phép biến đổi tương đương.

4) Các giá trị riêng của ma trận bất biến với phép chuyển vị.

$$\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I).$$

5) Vector riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính với nhau.

6) Nếu A không suy biến thì AB và BA có cùng các giá trị riêng.

7) Nếu A là ma trận đối xứng ($A^T = A$) thì các vector riêng ứng với những giá trị riêng khác nhau sẽ trực giao với nhau.

8) Cho ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:

   a) $A^T = A$ và tất cả các giá trị riêng của A là những số thực dương.

   b) $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$ với mọi $\underline{x} \neq \underline{0}$.

   c) $A^T = A$ và $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$ với mọi $\underline{x} > \underline{0}$.

1.2.2 Không gian hàm số

Không gian metric

Cho tập hợp các hàm $\underline{x}(t)$, ký hiệu là X. Định nghĩa phép tính cộng:

$$(\underline{x}+\underline{y})(t)=\underline{x}(t)+\underline{y}(t)$$

và phép tính nhân với một số thực a (không gian vector trên trường số thực):

$$(a\underline{x})(t)=a\underline{x}(t).$$

Khi đó, rõ ràng không gian X là không gian vector có phần tử không $\underline{x}(t)\equiv\underline{0}$.

Nếu trong không gian vector X ta định nghĩa thêm số thực $d(\underline{x},\underline{y})$ để xác định khoảng cách giữa hai phần tử $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$, được gọi là metric, và số thực này thỏa mãn:

1) $d(\underline{x},\underline{y})=0$ khi và chỉ khi $\underline{x}(t)=\underline{y}(t)$

2) $d(\underline{x},\underline{y})=d(\underline{y},\underline{x})$

3) $d(\underline{x},\underline{y})+d(\underline{y},\underline{z})\geq d(\underline{x},\underline{z})$

thì không gian vector X được gọi là *không gian metric*.

Hai không gian metric X với độ đo $d(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ và Y với độ đo $d(\underline{y}_1,\underline{y}_2)$ thỏa mãn:

$$d(\underline{x}_1,\underline{x}_2)=a\,d(\underline{y}_1,\underline{y}_2),\quad a\in\mathbb{R}$$

sẽ được gọi là *tương đương*.

Việc đưa thêm độ đo metric $d(\underline{x},\underline{y})$ vào không gian vector X đã làm cho X có thêm tính giải tích. Chẳng hạn như:

- Phần tử $\underline{y}$ được gọi là thuộc lân cận ε của phần tử $\underline{x}$ nếu $d(\underline{x},\underline{y})\leq\varepsilon$.
- Tập $\mathcal{O}_\varepsilon=\{\underline{y}\in X \mid d(\underline{x},\underline{y})<\varepsilon\}$ được gọi là lân cận mở của $\underline{x}$.
- Tập $\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon=\{\underline{y}\in X \mid d(\underline{x},\underline{y})\leq\varepsilon\}$ được gọi là lân cận đóng của $\underline{x}$.
- Dãy $\{\underline{x}_n\}$ thuộc X được gọi là *hội tụ* tới $\underline{x}\in X$, ký hiệu là $\underline{x}_n\to\underline{x}$, hay $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{x}_n=\underline{x}$ nếu $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n>n_0\Rightarrow d(\underline{x},\underline{x}_n)<\varepsilon$.
- Phần tử $\underline{x}\in X$ được gọi là điểm trong của X nếu tồn tại một lân cận O_ε của nó nằm hoàn toàn bên trong X.
- Một tập con $Y\subseteq X$ được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm $\underline{y}\in Y$ đều là điểm trong của Y.
- Nếu trong không gian metric X có dãy $\{\underline{x}_n\}$ hội tụ thì:

a) Phần tử giới hạn $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x} \in X$ là duy nhất và $d(\underline{x}, \underline{x}_n) \to \underline{0}$.

b) Mọi dãy con của $\{\underline{x}_n\}$ cũng hội tụ tới $\underline{x}$.

c) Các phần tử $\underline{x}_n$ là bị chặn, tức là với mọi $\underline{y} \in X$ luôn có $d(\underline{y}_n, \underline{y}) \to d(\underline{x}, \underline{y})$.

d) Nếu dãy $\{\underline{x}_n\}$ thuộc X hội tụ thì $\lim_{m\to\infty} d(\underline{x}_m, \underline{x}_n) = \underline{0}$ trong đó $n > m$. Chú ý rằng điều ngược lại không đúng.

Không gian đủ

Xét không gian metric X. Nếu có dãy $\{\underline{x}_n\}$ thuộc X thỏa mãn:

$$\lim_{m\to\infty} d(\underline{x}_m, \underline{x}_n) = \underline{0} \qquad (n > m)$$

thì dãy $\{\underline{x}_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy*.

Khác với trường số thực $\mathbb{R}$, mà ở đó mọi dãy Cauchy đều hội tụ (tới giá trị giới hạn $\underline{x}$ nào đó cũng thuộc $\mathbb{R}$), thì trong không gian metric X nói chung là chưa được đảm bảo.

Một không gian metric X được gọi là không gian đủ (*complete*), nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ (tới một phần tử cũng thuộc X). Tập con M của X được gọi là tập con đủ nếu mọi dãy Cauchy trong M đều hội tụ tới một phần tử cũng thuộc M.

Không gian compact

Một không gian metric X được gọi là *không gian compact*, nếu mọi dãy $\{\underline{x}_n\}$ trong nó đều chứa một dãy con hội tụ.

Về không gian compact ta có những phát biểu sau:

- Không gian compact là một không gian đủ, giới nội và tách được, tức là trong nó có một tập con trù mật, đếm được.
- Một tập con A của không gian compact X cũng sẽ là compact khi và chỉ khi A đóng.

Không gian chuẩn

Trong không gian vector X xác định trên trường số thực $\mathbb{R}$, nếu có thêm ánh xạ (không nhất thiết phải tuyến tính) $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

a) $\|\underline{x}\| \geq 0$ và $\|\underline{x}\| = 0$ khi và chỉ khi $\underline{x}$ là phần tử không của X.

b) $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{x}\|$ đúng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và $\underline{x} \in X$,

c) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ với mọi $\underline{x}, \underline{y} \in X$.

thì giá trị thực $\|\underline{x}\|$ được gọi là chuẩn của phần tử $\underline{x}$ và không gian vector X được gọi là không gian chuẩn.

Do X là không gian vector nên từ chuẩn $\|\underline{x}\|$ của nó ta cũng có được metric:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Ngược lại, một không gian metric cũng sẽ là không gian chuẩn với $\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, \underline{0})$, nếu metric của nó còn thỏa mãn thêm:

- $d(\underline{x}+\underline{z}, \underline{y}+\underline{z}) = d(\underline{x}, \underline{y})$, tức là metric bất biến với phép dịch chuyển vector.
- $d(a\underline{x}, a\underline{y}) = |a| \cdot d(\underline{x}, \underline{y})$, tức là nó thuần nhất (*homogen*).

Trong một không gian X có thể có nhiều loại chuẩn. Hai chuẩn $\|\underline{x}\|_a$ và $\|\underline{x}\|_b$ của nó được gọi là *tương đương* nếu tồn tại hai số thực m và M để luôn có:

$$m\|\underline{x}\|_b \le \|\underline{x}\|_a \le M\|\underline{x}\|_b$$

Các không gian chuẩn thường gặp gồm có:

1) Không gian $L_p[a,b]$ là tập hợp các tín hiệu $x(t)$ thực, xác định trên khoảng kín $[a,b]$, có chuẩn được định nghĩa là:

$$\|x\|_p := \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{trong đó } 1 \le p < \infty.$$

2) Không gian $\mathcal{L}_\infty[a,b]$ là tập hợp các tín hiệu $x(t)$ thực, xác định trên khoảng kín $[a,b]$, có chuẩn được định nghĩa là:

$$\|x\|_\infty := \sup_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

Đặc biệt, chuẩn $\|\cdot\|_p$ với $1 \le p \le \infty$ còn thỏa mãn:

a) $\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q$ nếu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (định lý Hölder)

b) $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ (định lý Minkovski)

3) Không gian E gồm các vector hàm $\underline{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T$ có n phần tử cùng với chuẩn Euclid, được định nghĩa là độ dài của vector:

$$\|\underline{x}\|_E := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2}.$$

4) Không gian Hom($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$), là tập hợp của tất cả các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ (*homomorphism*), tức là tập hợp của các ma trận $A=(a_{ij})$ kiểu $m \times n$, cùng với một trong các chuẩn sau:

a) *Chuẩn Frobenius*: Là vết của ma trận $A^H A$, hay:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^H A)}$$

b) *Chuẩn bậc* 1: Là tổng lớn nhất trong số tổng modul các phần tử nằm trong cùng một cột, hay:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

c) *Chuẩn bậc hai*: Là giá trị riêng lớn nhất của ma trận $A^H A$, hay:

$$\|A\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \bar{\sigma}(A)$$

d) *Chuẩn vô cùng*: Là tổng lớn nhất trong số tổng modul các phần tử nằm trong cùng một hàng, hay:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Không gian Banach

Một không gian chuẩn X được gọi là *không gian Banach*, nếu với metric được suy ra từ chuẩn của nó là $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ sẽ có được mọi dãy Cauchy $\{\underline{x}_n\}$ trong nó là hội tụ.

Về không gian Banach ta có những phát biểu sau:

- Không gian Banach là không gian đủ.
- Không gian chuẩn compact là một không gian Banach, điều ngược lại không đúng.

Không gian Hilbert

Một không gian chuẩn Banach X được gọi là *không gian Hilbert*, nếu chuẩn của nó còn thỏa mãn thêm tính chất hình bình hành (*parallelogram*):

$$\|\underline{x} - \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = 2(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2)$$

Điều đặc biệt của không gian Hilbert là trong nó tồn tại phép tính *tích vô hướng*, ký hiệu là $<\underline{x}, \underline{y}>$, thỏa mãn:

1) $<\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}> = <\underline{x}, \underline{z}> + <\underline{y}, \underline{z}>$ với mọi $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in X$

2) $<\underline{x}, \underline{y}> = \overline{<\underline{y}, \underline{x}>}$ trong đó $\overline{c}$ là ký hiệu chỉ số phức liên hợp của c.

3) $<\underline{x}, a\underline{y}> = a<\underline{x}, \underline{y}>$ với $a \in \mathbb{C}$. Điều này là tương đương với $<a\underline{x}, \underline{y}> = \overline{a}<\underline{x}, \underline{y}>$.

4) $<\underline{x}, \underline{x}>$ với $\underline{x} \neq \underline{0}$ luôn là một số thực dương.

Giữa tích vô hướng $<\underline{x}, \underline{y}>$ và chuẩn $\|\underline{x}\|$ có quan hệ:

$$\|\underline{x}\| = <\underline{x}, \underline{x}> \tag{1.30}$$

Với phép tính tích vô hướng trên thì trong không gian Hilbert còn có thêm một quan hệ mới giữa hai phần tử $\underline{x}$, $\underline{y}$ được gọi là *quan hệ trực giao*. Hai phần tử $\underline{x}$, $\underline{y}$ là *trực giao* với nhau nếu có $<\underline{x}, \underline{y}>=0$. Hai không gian Hilbert X, Y được gọi là *trực giao* với nhau nếu $<\underline{x}, \underline{y}>=0$ đúng với mọi $\underline{x} \in X$ và $\underline{y} \in Y$. Khi đó người ta viết:

$$Y = X^{\perp}.$$

Một không gian X mới chỉ có tích vô hướng $<\underline{x}, \underline{y}>$ trên nó thì được gọi là *không gian tiền Hilbert*. Một không gian tiền Hilbert sẽ là không gian Hilbert nếu như nó còn là không gian đủ (không gian Banach) theo chuẩn (1.30).

Ngoài ra, về không gian Hilbert ta còn có các phát biểu sau:

- Cần và đủ để một không gian tiền Hilbert X là không gian Hilbert là với mọi không gian M con, đóng của X luôn có $M = M^{\perp\perp}$.
- Nếu M là một không gian Hilbert con, đóng của không gian Hilbert X thì sẽ có $X = M \oplus M^{\perp}$, tức là ứng với mỗi phần tử $\underline{x} \in X$ luôn có duy nhất cặp phần tử $\underline{x}_1 \in M$, $\underline{x}_2 \in M^{\perp}$ thỏa mãn $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$. Phần tử $\underline{x}_1$ được gọi là hình chiếu của $\underline{x} \in X$ lên M.
- Nếu A là một tập lồi con, đủ của không gian Hilbert X thì ứng với mỗi $\underline{x} \in X$ luôn tồn tại duy nhất một phần tử $\underline{x}_0 \in A$ thỏa mãn $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| = \inf\limits_{\underline{y} \in A} \|\underline{x} - \underline{y}\| = d$. Giá trị d này được gọi là *khoảng cách* từ $\underline{x} \in X$ tới tập A.
- Gọi A, B là hai tập con của không gian Hilbert X. Vậy thì:
  a) $A^{\perp}$ là không gian Hilbert con, đóng của X.
  b) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ và $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$
  c) Nếu có $A \subseteq B$ thì sẽ có $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

Không gian các ánh xạ liên lục

Cho hai không gian chuẩn X và Y và $\underline{f}: X \to Y$ là (vector) ánh xạ từ X vào Y. Khi đó ánh xạ $\underline{f}: X \to Y$ sẽ được gọi là:

a) *Liên tục tại* $\underline{x}_0 \in X$, nếu từ mọi dãy $\{\underline{x}_n\}$ hội tụ tới $\underline{x}_0$ trong X cũng có dãy $\{\underline{f}(\underline{x}_n)\}$ hội tụ tới $\underline{f}(\underline{x}_0)$ trong Y.

b) *Liên tục trong X*, nếu nó liên tục tại mọi điểm $\underline{x}$ thuộc X.

c) *Thỏa mãn điều kiện Lipschitz* $\underline{x}_0 \in X$, nếu tồn tại hằng số thực dương $a>0$ để có:

$$\| \underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0) \| < a \| \underline{x} - \underline{x}_0 \| \quad \text{với mọi } \underline{x} \text{ thuộc một lân cận nào đó của } \underline{x}_0.$$

Khi $\underline{f}(\underline{x})$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz, phương trình vi phân

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x})$$

với điều kiện đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ luôn *có nghiệm duy nhất*. Như vậy, nếu $\underline{f}(\underline{x})$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz với mọi $\underline{x}_0$ thì hệ luôn có quỹ đạo trạng thái tự do và các quỹ đạo trạng thái đó sẽ không cắt nhau.

d) *Tuyến tính*, nếu

$$\underline{f}(a_1\underline{x}_1 + a_p\underline{x}_2 + \cdots + a_p\underline{x}_p) = a_1\underline{f}(\underline{x}_1) + a_2\underline{f}(\underline{x}_2) + \cdots + a_p\underline{f}(\underline{x}_p)$$

trong đó $a_1, a_2, \cdots, a_p$ là những số thực/phức.

e) *Bị chặn*, nếu nó biến một tập con M giới nội trong X thành tập con

$$\underline{f}(M) = \{ \underline{y} = \underline{f}(\underline{x}) \mid \underline{x} \in M \subset X \}$$

cũng giới nội trong Y.

Ta có thể thấy với (vector) ánh xạ $\underline{f}: X \to Y$ giữa hai không gian chuẩn X và Y, tức là $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$, giá trị:

$$\| \underline{f} \| = \sup_{\underline{x} \in X} \frac{\|\underline{f}(\underline{x})\|}{\|\underline{x}\|} = \sup_{\underline{x} \in X} \frac{\|\underline{y}\|}{\|\underline{x}\|} \tag{1.31}$$

chính là chuẩn của ánh xạ $\underline{f}$. Hơn thế nữa nếu $\underline{f}$ còn là *tuyến tính* thì công thức tính chuẩn (1.31) còn được viết lại thành dạng đơn giản hơn như sau:

$$\| \underline{f} \| = \sup_{\|\underline{x}\| = 1} \| \underline{f}(\underline{x}) \|$$

Ngoài ra, người ta còn thường phân loại $\underline{f}: X \to Y$ thành:

1) *Đồng cấu* (*homomorphism*), nếu nó là tuyến tính. Thông thường tên gọi này chỉ được dùng khi $\underline{f}$ là ánh xạ giữa các nhóm.

2) *Nội xạ (injective)*, nếu $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ thì cũng sẽ có $\underline{f}(\underline{x}_1) \neq \underline{f}(\underline{x}_2)$.

3) *Đơn ánh (monomorphism)*, nếu nó vừa là tuyến tính, vừa là nội xạ.

4) *Toàn ánh (surjective)*, nếu ứng với mỗi một phần tử $\underline{y}$ bất kỳ thuộc Y có một phần tử ảnh $\underline{x}$ tương ứng trong X để $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$.

5) *Song ánh (bijective)*, nếu nó vừa là toàn ánh, vừa là nội xạ.

6) *Toàn cấu (epimorphism)*, nếu nó vừa là tuyến tính, vừa là toàn ánh.

7) *Đẳng cấu (isomorphism)*, nếu nó vừa là tuyến tính, vừa là song ánh.

8) *Tự đồng cấu (endomorphism)*, nếu là đồng cấu (tuyến tính) và có không gian các phần tử gốc cũng là không gian các phần tử ảnh, tức là $\underline{f}: X \to X$.

9) *Tự đẳng cấu (automorphism)*, nếu là tự đồng cấu và song ánh.

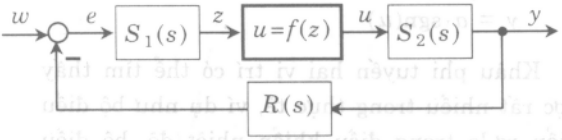
10) *Vi phôi (diffeomorphism)*, nếu nó song ánh và khả vi.

2 HỆ CÓ KHÂU PHI TUYẾN TĨNH VÀ TUYẾN TÍNH ĐỘNG

2.1 Giới thiệu hệ thống

2.1.1 Sơ đồ khối, mô hình NL và LN

Thường gặp trong thực tế là các hệ thống phi tuyến với một tín hiệu vào, một tín hiệu ra (gọi là hệ SISO, chữ viết tắt của *single input, single output*), mà ở đó tính phi tuyến của hệ chỉ quy tụ lại trong một khâu đơn giản duy nhất (hình 2.1). Tính đơn giản của khâu phi tuyến thể hiện ở giá trị tín hiệu ra u của nó phụ thuộc vào giá trị tín hiệu vào z tại cùng thời điểm t, tức là $u = f(z)$ trong đó $f(z)$ là hàm đại số (không có tích phân hay vi phân). Như vậy tín hiệu ra $u(t)$ phụ thuộc tĩnh vào tín hiệu $z(t)$ ở đầu vào. Những khâu phi tuyến như vậy được gọi là *khâu phi tuyến tĩnh*.



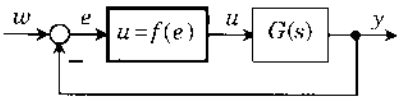
Hình 2.1: Hệ có khâu phi tuyến tĩnh hoặc khâu phi tuyến cơ bản.

Ngoài khâu phi tuyến tĩnh này, các khâu còn lại trong hệ đều là tuyến tính và được mô tả bởi hàm truyền đạt. Chẳng hạn trong hình 2.1 là những khâu với các hàm truyền đạt $S_1(s)$, $S_2(s)$, đại diện cho thành phần tuyến tính có trong đối tượng phi tuyến và $R(s)$ là đại diện cho bộ điều khiển tuyến tính.

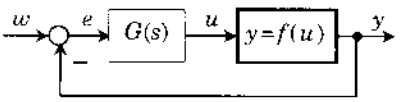
Đơn giản hơn hệ hồi tiếp có cấu trúc sơ đồ khối như ở hình 2.1 là những hệ hồi tiếp thực với mô hình hệ hở chỉ gồm hai khâu duy nhất (hình 2.2 và 2.3):

- khâu phi tuyến tĩnh
- và khâu tuyến tính.

Mô hình mà ở đó khâu phi tuyến tĩnh đứng trước khâu tuyến tính $G(s)$ được gọi là mô hình *Hammerstein*, hay *NL* (nonlinear – linear). Ngược lại nếu khâu tuyến tính $G(s)$ đứng trước khâu phi tuyến, được gọi là mô hình *Wiener*, hay *LN* (linear – nonlinear).



Hình 2.2: Hệ hồi tiếp thực với mô hình Hammerstein (NL) của hệ hở.



Hình 2.3: Hệ hồi tiếp thực với mô hình Wiener (LN) của hệ hở.

2.1.2 Một số khâu phi tuyến điển hình

Trong các hệ thống điều khiển kỹ thuật ta thường gặp một số thành phần phi tuyến đặc trưng mang tính phổ biến. Chúng được xếp vào loại các khâu phi tuyến cơ bản.

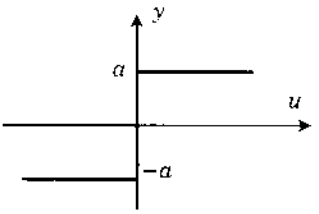
Khâu hai vị trí

Khâu hai vị trí chính là một khâu rơ-le. Mô hình khâu phi tuyến hai vị trí (hình 2.4a) có dạng:

$$y = \begin{cases} a & \text{khi} \quad u > 0 \\ -a & \text{khi} \quad u < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Sử dụng ký hiệu $\text{sgn}(u)$ để lấy dấu của u thì (2.1) được viết đơn giản thành:

$$y = a \cdot \text{sgn}(u)$$



Hình 2.4: Khâu phi tuyến hai vị trí

Khâu phi tuyến hai vị trí có thể tìm thấy được rất nhiều trong thực tế, ví dụ như bộ điều khiển rơ-le trong điều khiển nhiệt độ, bộ điều khiển tối ưu tác động nhanh .... Nhược điểm chính hạn chế việc ứng dụng khâu hai vị trí là khi u dao động nhanh xung quanh điểm 0, khâu này sẽ phải làm việc với tần số rất lớn dễ làm hỏng thiết bị. Bởi vậy trong những trường hợp tương tự người ta hay thường sử dụng khâu hai vị trí có khoảng trượt, hay còn gọi khâu khuếch đại bão hòa.

Khâu khuếch đại bão hòa

Khâu khuếch đại bão hòa là khâu SISO phi tuyến tĩnh có đặc tính vào/ra thuộc nhóm tuyến tính từng đoạn được mô tả trong hình 2.5.

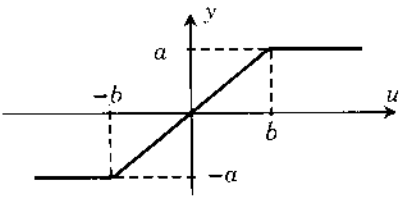
Trong khoảng $|u| \leq b$ giá trị ra y thay đổi tuyến tính với đầu vào u và ngoài khoảng này y có giá trị không đổi hoặc bằng a hoặc $-a$.

Khi $|b|$ rất nhỏ, khâu khuếch đại bão hòa có dạng gần giống khâu hai vị trí nên khâu khuếch đại bão hòa còn hay được gọi là *khâu hai vị trí có khoảng trượt*. Những

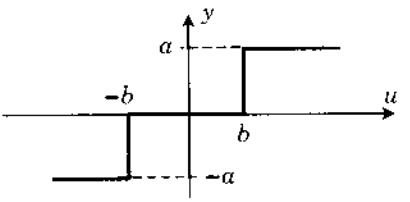
khâu kiểu này thường được sử dụng khi phải thiết kế bộ điều khiển khuếch đại có để ý đến giới hạn trên, dưới cho tín hiệu đầu vào của đối tượng.

Phương trình toán học mô tả đặc tính vào/ra của khâu khuếch đại bão hòa như sau:

$$y = \begin{cases} a\,\mathrm{sgn}(u) & \text{khi} \quad |u| > b \\ \dfrac{a}{b}u & \text{khi} \quad |u| \le b \end{cases} \tag{2.2}$$



Hình 2.5: Khâu khuếch đại bão hòa



Hình 2.6: Khâu ba vị trí.

Khâu ba vị trí

Với những hệ sử dụng bộ điều khiển hai vị trí có nhiễu nhỏ (xung quanh điểm 0) tác động ở đầu vào đối tượng, người ta thường dùng bộ điều khiển ba vị trí (hình 2.6) thay cho hai vị trí để loại bỏ ảnh hưởng nhiễu vào hệ. Phương trình toán học mô tả đặc tính vào/ra của khâu ba vị trí có dạng:

$$y = \begin{cases} a\,\mathrm{sgn}(u) & \text{khi} \quad |u| > b \\ 0 & \text{khi} \quad |u| < b \end{cases} \tag{2.3}$$

Khâu khuếch đại có miền chết (không nhạy)

Hình 2.7 mô tả đặc tính quan hệ vào/ra của khâu khuếch đại có miền chết (vùng không nhạy). Những khâu này có thể tìm thấy ví dụ như trong mô hình quan hệ vận tốc v mà vật chuyển động dưới tác động một lực F có để ý đến lực ma sát tĩnh. Phương trình toán học mô tả đặc tính vào/ra của khâu khuếch đại có miền không nhạy như sau:

$$y = \begin{cases} m(u - b\,\mathrm{sgn}(u)) & \text{khi} \quad |u| > b \\ 0 & \text{khi} \quad |u| \le b \end{cases} \tag{2.4}$$

trong đó $m = \tan(\varphi)$.

Khâu hai vị trí có trễ

Mọi bộ điều khiển rơ-le hai vị trí trong thực tế không có tính lý tưởng tới mức là chuyển đổi ngay được trạng thái từ $-a$ sang a khi đầu vào u đi từ -0 tới $+0$ và ngược lại.

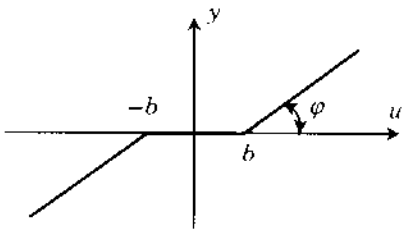
Nguyên nhân nằm ở tính quán tính, tính ỳ, tính trễ của thiết bị. Thiết bị chỉ có thể chuyển đổi trạng thái khi u đi đã qua điểm 0 được một "đoạn" b nào đó. Trong "khoảng chờ đợi" chuyển trạng thái, thiết bị giữ nguyên giá trị cũ. Như vậy giá trị đầu ra y của thiết bị hai vị trí có trễ không những phụ thuộc vào u mà trong chừng mực nào đó còn phụ thuộc vào cả đạo hàm $\frac{du}{dt}$ của tín hiệu đầu vào và nếu biểu diễn sự phụ thuộc đó chỉ trong mặt phẳng (u, y) sẽ có được đường đồ thị của một hàm đa trị (hình 2.8).

Phương trình toán học mô tả đặc tính vào/ra của khâu hai vị trí có trễ như sau:

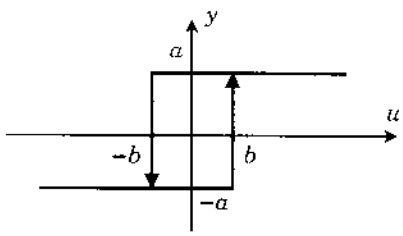
$$y = \begin{cases} a\,\mathrm{sgn}(u) & \text{khi} \quad |u| > b \\ -a\,\mathrm{sgn}(\frac{du}{dt}) & \text{khi} \quad |u| < b \end{cases}$$

hoặc có thể được viết gọn lại thành:

$$y = a\,\mathrm{sgn}\left(u - b\,\mathrm{sgn}(\frac{du}{dt})\right) \tag{2.5}$$



Hình 2.7: Khâu khuếch đại có miền chết.



Hình 2.8: Khâu hai vị trí có trễ.

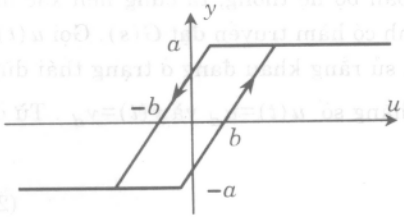
Khâu khuếch đại bão hòa có trễ

Những thiết bị truyền động có khe hở đều thuộc nhóm khâu khuếch đại có trễ. Phương trình toán học mô tả đặc tính vào/ra của khâu khuếch đại bão hòa có trễ như sau:

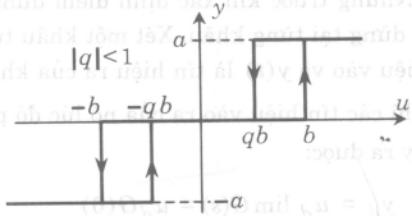
$$y = \begin{cases} F(u-b) & \text{khi} \quad \frac{du}{dt} > 0 \\ F(u+b) & \text{khi} \quad \frac{du}{dt} \le 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

với $\quad F(u) = \begin{cases} a\,\mathrm{sgn}(u) & \text{khi} \quad |u| > b \\ \frac{a}{b}u & \text{khi} \quad |u| < b \end{cases}$

là quan hệ vào/ra của khâu khuếch đại bão hòa (hình 2.9).



Hình 2.9: Khâu khuếch đại bão hòa có trễ.



Hình 2.10: Khâu ba vị trí có trễ.

Khâu ba vị trí có trễ

Dạng tổng quát của các khâu phi tuyến hai, ba vị trí có hoặc không có trễ là khâu ba vị trí có trễ với đặc tính quan hệ vào/ra được mô tả trong hình 2.10. Dễ thấy ngay là khi $q=1$, khâu ba vị trí có trễ trở thành khâu ba vị trí bình thường, hoặc khi $q=-1$, khâu ba vị trí có trễ trở thành khâu hai vị trí có trễ. Phương trình toán học mô tả đặc tính vào/ra của khâu ba vị trí có trễ như sau:

$$y = \begin{cases} F(u - \frac{1-q}{2}b) & \text{khi} \quad \frac{du}{dt} > 0 \\ F(u + \frac{1-q}{2}b) & \text{khi} \quad \frac{du}{dt} < 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

trong đó $0 \leq q \leq 1$ và $F(u)$ là quan hệ vào/ra của khâu ba vị trí không có trễ:

$$F(u) = \begin{cases} a\,\mathrm{sgn}(u) & \text{khi} \quad |u| > \frac{1+q}{2}b \\ 0 & \text{khi} \quad |u| < \frac{1+q}{2}b \end{cases}$$

2.1.3 Xác định điểm cân bằng, điểm dừng

Một điểm trạng thái $\underline{x}_e$ của hệ thống được gọi là điểm cân bằng (*equilibrium point*) nếu như khi đang ở điểm trạng thái $\underline{x}_e$ và không có một tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó. Về bản chất thì điểm cân bằng chỉ là loại điểm dừng đặc biệt, tức là điểm dừng ứng với tín hiệu đầu vào $\underline{w}(t) = \underline{0}$.

Điểm cân bằng hay điểm dừng có ý nghĩa quan trọng trong việc phân tích hệ phi tuyến, vì một lý do là thông thường người ta hay quan tâm tới tính chất động học của hệ trong lân cận các điểm trạng thái này.

Không mất tính tổng quát nếu sau đây ta chỉ đề cập đến phương pháp xác định điểm dừng cho hệ thống hồi tiếp có khâu phi tuyến tĩnh với sơ đồ khối cho ở hình 2.1.

Nhưng trước khi xác định điểm dừng của toàn bộ hệ thống, ta cũng nên xác định điểm dừng tại từng khâu. Xét một khâu tuyến tính có hàm truyền đạt $G(s)$. Gọi $u(t)$ là tín hiệu vào và $y(t)$ là tín hiệu ra của khâu. Giả sử rằng khâu đang ở trạng thái dừng, vậy thì các tín hiệu vào ra của nó lúc đó phải là hằng số $u(t)=u_d$ và $y(t)=y_d$. Từ đây ta suy ra được:

$$y_d = u_d \lim_{s \to 0} G(s) = u_d G(0) \tag{2.8}$$

Quay lại hệ có sơ đồ khối cho ở hình 2.1. Nếu hệ đang ở điểm dừng thì các tín hiệu trong hệ phải đang xác lập ở một giá trị hằng. Gọi các giá trị hằng số đó của tín hiệu là:

$$w(t) = w_d, \quad e(t) = e_d, \quad z(t) = z_d, \quad u(t) = u_d, \quad y(t) = y_d$$

thì với công thức (2.8) ta được

$$e_d = w_d - y_d R(0), \quad z_d = e_d S_1(0), \quad y_d = u_d S_2(0)$$

Suy ra

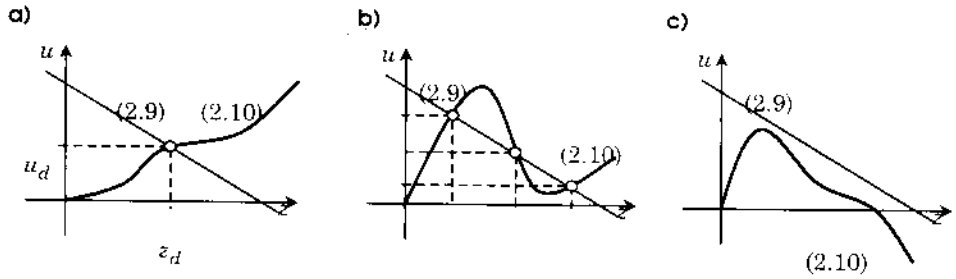
$$u_d = \frac{w_d S_1(0) - z_d}{S_1(0) S_2(0) R(0)} \tag{2.9}$$

Mặt khác, do khâu phi tuyến là khâu tĩnh có mô hình $u=f(z)$ nên tại điểm dừng còn có:

$$u_d = f(z_d) \tag{2.10}$$

Bởi vậy điểm dừng $\begin{pmatrix} z_d \\ u_d \end{pmatrix}$ chính là nghiệm của (2.9) và (2.10).

Phương trình (2.9) có đồ thị là đường thẳng trong mặt phẳng (z, u) và phương trình (2.10) có đồ thị $u=f(z)$ của khâu phi tuyến. Giao điểm của hai đồ thị là điểm dừng của hệ thống (hình 2.11). Nếu hai đồ thị không cắt nhau thì hệ không có điểm dừng.



Hình 2.11: Xác định điểm dừng của hệ có khâu phi tuyến tĩnh.
a) Hệ có một điểm dừng b) Hệ có ba điểm dừng c) Hệ không có điểm dừng

2.2 Phương pháp phân tích mặt phẳng pha

2.2.1 Nhiệm vụ của công việc phân tích

Nhiệm vụ chính của công việc phân tích là phải từ mô hình hoặc sơ đồ khối của hệ thống rút ra được những kết luận cơ bản về tính chất động học của hệ thống cần thiết cho việc tổng hợp sau này. Ta sẽ đồng ý với nhau rằng khó mà có thể phân tích để có tất cả những điều chưa biết về hệ thống. Vì vậy công việc phân tích sẽ được gọi là tạm hoàn thành nếu như ta đã có thêm được một vài điều bổ ích chưa biết về hệ thống mà những điều đó sẽ đủ để ta bắt đầu được công việc tổng hợp bộ điều khiển. Nhưng những điều gì sẽ được gọi là cần thiết và tạm đủ cho công việc tổng hợp. Đó là:

1) *Điểm cân bằng hoặc điểm dừng của hệ.*

2) *Tính ổn định và xác định miền ổn định $\mathcal{O}$ tương ứng của hệ* (tại một điểm cân bằng hoặc điểm dừng). Một hệ thống được gọi là *ổn định (tiệm cận) tại điểm cân bằng* $\underline{x}_e$ nếu như có một tác động tức thời (chẳng hạn như nhiễu tức thời) đánh bật hệ ra khỏi $\underline{x}_e$ và đưa tới điểm $\underline{x}_0$ thuộc một lân cận $\mathcal{O}$ nào đó của $\underline{x}_e$ thì sau đó hệ có khả năng tự quay về được điểm cân bằng $\underline{x}_e$ ban đầu.

3) *Khả năng tồn tại dao động.* Một hệ thhống được gọi là có khả năng dao động nếu nó có đường quỹ đạo trạng thái khép kín, tức là những quỹ đạo mà nếu xuất phát từ một điểm trạng thái trên đó thì sau một *khoảng thời gian hữu hạn* sẽ lại quay về điểm ban đầu.

Như vậy, dạng quỹ đạo trạng thái của hệ nói lên được rất nhiều tính chất hệ thống và nếu như bằng cách nào đó ta đã xây dựng họ các quỹ đạo trạng thái của hệ ứng với $\underline{u}(t)=\underline{0}$ thì chỉ cần dựa vào dạng các đường cong quỹ đạo trạng thái đó ta cũng sẽ có ngay được những kết luận về chất lượng hệ phi tuyến. Ví dụ điểm cân bằng $\underline{x}_e$ sẽ là điểm mà tại đó tốc độ của các quỹ đạo trạng thái bằng 0, hay hệ sẽ ổn định tại $\underline{x}_e$ nếu tất cả quỹ đạo trạng thái trong lân cận của $\underline{x}_e$ đều có hướng tiến về $\underline{x}_e$ và kết thúc tại đó ....

Tuy rằng đơn giản, song phương pháp phân tích chất lượng động học của hệ thống trên cơ sở phân tích dạng các đường quỹ đạo trạng thái có hạn chế chỉ áp dụng được cho những hệ thống có tối đa hai biến trạng thái, vì ta cũng chỉ có thể xây dựng được (vẽ được) đồ thị đường cong trong mặt phẳng một cách tương đối chính xác.

Quỹ đạo trạng thái của một hệ thống có số biến trạng thái không nhiều hơn 2 được gọi là *quỹ đạo pha* và không gian trạng thái khi đó được gọi là *mặt phẳng pha.*

Mục này sẽ trình bày các phương pháp xây dựng quỹ đạo pha để phục vụ việc phân tích những hệ thống mà tính phi tuyến của nó chỉ nằm ở một khâu phi tuyến cơ bản duy nhất. Nguyên tắc chung để có được quỹ đạo pha cho hệ là ta sẽ chia mặt phẳng pha

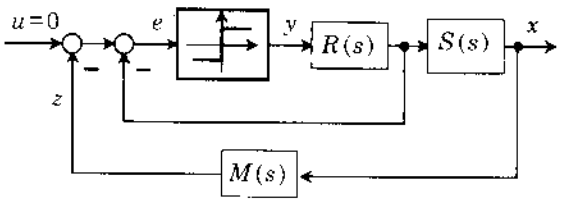
thành những vùng khác nhau sao cho trong mỗi vùng đó, khâu phi tuyến lại thay được bởi một khâu khuếch đại (tuyến tính) hoặc một giá trị hằng số của tín hiệu đầu ra. Cách chia mặt phẳng pha như vậy còn được gọi là *phương pháp phân điểm* mặt phẳng pha.

2.2.2 Hệ với khâu phi tuyến hai vị trí

Trước tiên ta cũng cần thống nhất với nhau rằng sẽ có rất nhiều hệ phi tuyến mà tính phi tuyến của nó chỉ thể hiện ở khâu hai vị trí. Chúng được phân biệt với nhau không chỉ ở các khâu tuyến tính $S(s)$, $R(s)$ có trong hệ mà còn ở cả cấu trúc sơ đồ khối lẫn số lượng các khâu tuyến tính đó. Bởi vậy ta không thể đưa ra được kết luận chung về chất lượng của tất cả các hệ có khâu phi tuyến hai vị trí chỉ từ việc phân tích một hệ cụ thể có cấu trúc sơ đồ cho ở hình 2.12 dưới đây. Song điều đó không phải là trọng tâm mà quan trọng hơn cả là thông qua việc phân tích hệ có sơ đồ khối cụ thể như vậy ta nắm bắt được phương pháp chung, các bước phải tiến hành khi gặp bài toán phân tích và khảo sát hệ thống có khâu phi tuyến hai vị trí bất kỳ nào đó.

Xét hệ cho trong hình 2.12 với khâu hai vị trí là khâu phi tuyến duy nhất, các khâu còn lại đều là tuyến tính và được mô tả bằng hàm truyền đạt:

- $R(s) = \dfrac{1}{s}$ là phần tuyến tính của bộ điều khiển phi tuyến.
- $S(s) = \dfrac{1}{Ts}$ là mô hình của đối tượng tuyến tính.
- $M(s) = k$ là mô hình của thiết bị đo tín hiệu phản hồi về được giả thiết là tuyến tính và không có quán tính.



Hình 2.12: Hệ thống có khâu phi tuyến hai vị trí và không bị kích thích.

Từ sơ đồ khối của hệ cũng như hàm truyền đạt của các khâu tuyến tính, ta có:

$$y = \mathrm{sgn}(e) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e > 0 \\ -1 & \text{nếu } e < 0 \end{cases}$$

$$T\frac{d^2x}{dt^2} = y$$

và $e = u - z - \qquad = -kx - \qquad = -(kx + \qquad)$

Suy ra

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & \text{nếu} \quad kx + T\dfrac{dx}{dt} < 0 \\ -\dfrac{1}{T} & \text{nếu} \quad kx + T\dfrac{dx}{dt} > 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Căn cứ vào (2.11) ta xác định được mặt phẳng pha sẽ phải là mặt phẳng với hai trục tọa độ x và $\frac{dx}{dt}$. Phân chia mặt phẳng pha này thành hai miền điểm bởi đường thẳng

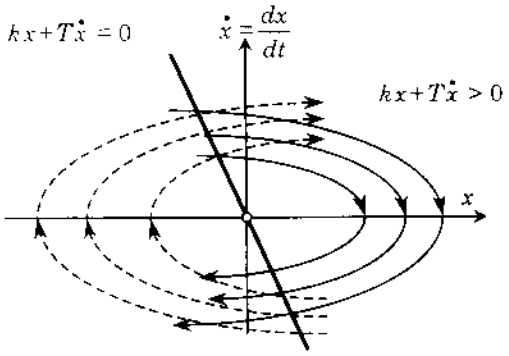
$$kx + T\frac{dx}{dt} = 0 \tag{2.12}$$

(hình 2.13) thì miền phía trên đường thẳng là miền mà ở đó có

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{T} \quad \text{(hằng số)} \tag{2.13}$$

và miền phía dưới ứng với

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{T} \quad \text{(cũng là hằng số).} \tag{2.14}$$



Hình 2.8: Phân điểm mặt phẳng pha.

Từ phương trình (2.13) cho phần phía trên đường thẳng (2.12) có

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{T} + c_1$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{t^2}{2T} + c_1 t + c_2 = -\frac{T}{2}\left(-\frac{t}{T} + c_1\right)^2 + \underbrace{\left(c_2 + \frac{Tc_1^2}{2}\right)}_{k_1} = -\frac{T}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k_1 \tag{2.15}$$

trong đó c_1, c_2, là những hằng số phụ thuộc vào các giá trị đầu $x(0)$, $\frac{dx(0)}{dt}$ và như vậy k_1 cũng là hằng số phụ thuộc vào $x(0)$, $\frac{dx(0)}{dt}$. Họ đồ thị phương trình (2.15) cho những giá trị k_1 khác nhau có dạng parabol và được biểu diễn trong hình 2.13 bằng *đường nét liền*. Chiều của các parabol này được xác định từ điều hiển nhiên rằng khi $\frac{dx}{dt} > 0$ thì x phải có xu hướng tăng và ngược lại khi $\frac{dx}{dt} < 0$ thì x phải có xu hướng giảm.

Một cách tương tự, từ (2.14) ta cũng có

$$x = \frac{T}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + k_2 \tag{2.16}$$

trong đó k_2 là hằng số phụ thuộc vào $x(0)$, $\frac{dx(0)}{dt}$. Những *đường parabol rời nét* trong hình 2.13 là đồ thị của (2.16).

Bây giờ ta đã có thể xây dựng một quỹ đạo pha đi từ điểm đầu tuỳ ý nhưng cho trước trong mặt phẳng pha. Chẳng hạn đó là điểm A như ở hình 2.14. Do điểm A này nằm ở phần mặt phẳng pha có

$$kx + T\frac{dx}{dt} > 0$$

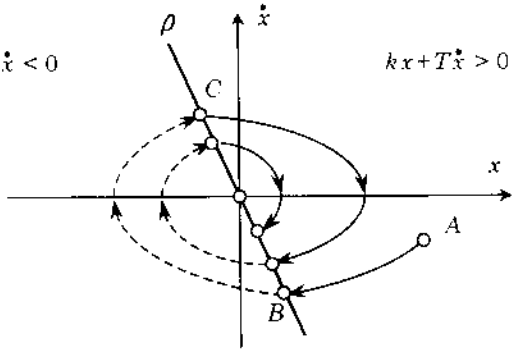
nên quỹ đạo pha đi qua nó phải đi theo đường parabol nét liền. Dọc theo đường nét liền đó cho tới khi gặp đường thẳng ρ phân chia hai miền điểm (hình 2.14)

$$\rho:\ kx + T\frac{dx}{dt} = 0$$

tức là đến điểm B, thì quy đạo pha sẽ phải chuyển sang đường parabol nét rời vì kể từ lúc này nó đã đi vào miền mặt phẳng pha có

$$kx + T\frac{dx}{dt} < 0.$$

Theo đường parabol nét rời, quỹ đạo pha đi từ B tới điểm C là điểm gặp đường ρ phân điểm mặt phẳng pha thì lại chuyển sang đường parabol nét liền .... Cứ theo nguyên lý chuyển từ đường parabol nét liền sang đường parabol nét rời và từ parabol nét rời lại trở về parabol nét liền ... mỗi khi gặp đường ρ phân chia miền điểm, ta xây dựng được hoàn chỉnh quỹ đạo pha của hệ đi từ điểm xuất phát A như ở hình 2.9 mô tả.



Hình 2.14: Xây dựng quỹ đạo pha.

Từ dạng quỹ đạo pha dần có xu hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó, ta rút ra được những kết luận sau về chất lượng của hệ thống:

- Hệ có một điểm cân bằng là gốc tọa độ trong mặt phẳng pha (x, $\frac{dx}{dt}$).
- Hệ không có dao động điều hòa, không có hiện tượng hỗn loạn.
- Hệ ổn định tại gốc tọa độ.
- Hệ có miền ổn định $\mathcal{O}$ là toàn bộ mặt phẳng pha (ổn định toàn cục).

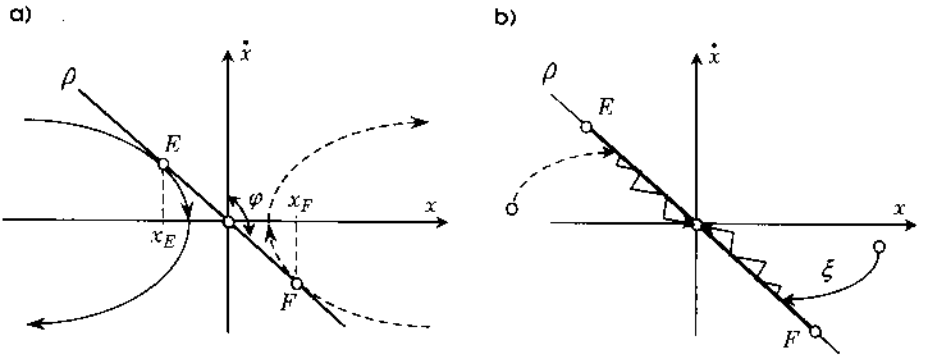
Ngoài các kết luận trên, ở hệ đang xét còn có một hiện tượng rất đặc trưng có tên gọi là *hiện tượng trượt*, hay còn gọi *bang–bang*, hay *chattering*. Hiện tượng này xuất hiện khi mà quỹ đạo pha đi vào phần đường phân điểm ρ mà ở đó đường parabol nét rời sẽ không còn nằm phía dưới của ρ cũng như parabol nét liền không còn nằm phía trên ρ. Nó chính là đoạn thẳng trên ρ nằm giữa điểm tiếp xúc E của ρ với parabol nét liền (2.15) và điểm tiếp xúc F của ρ với parabol nét rời (2.16) – hình 2.15a. Hai điểm tiếp xúc này được xác định như sau:

1) Điểm E là điểm tiếp xúc của đường parabol nét liền (2.15) với đường phân điểm ρ (2.12) có góc nghiêng $\tan\varphi = -\frac{T}{k}$ nên tại E đường nét liền (2.15) phải thỏa mãn

$$-T\frac{dx_E}{dt} = -\frac{T}{k} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx_E}{dt} = \frac{1}{k}. \tag{2.17}$$

Thay (2.17) vào (2.12) được $x_E = \frac{-T}{k^2}$.

2) Tương tự, điểm F sẽ có hoành độ $x_F = \frac{T}{k^2}$.



Hình 2.15: Giải thích hiện tượng trượt.

a) Xác định khoảng trượt b) Hiện tượng quỹ đạo pha trượt về gốc tọa độ.

Xét đoạn quỹ đạo pha ξ đang đi theo parabol nét liền (hình 2.15b) thì gặp đường phân điểm ρ nằm trong khoảng $\overline{EF}$ (được gọi là *khoảng trượt*). Khi đó nó sẽ chuyển sang đường parabol nét rời. Song đoạn đường parabol nét rời này lại nằm trong phần mặt phẳng pha ứng với đường parabol nét liền nên ngay sau khi chuyển sang đường parabol nét rời, quỹ đạo pha lại phải chuyển sang đường parabol nét liền. Theo đường parabol nét liền nó quay trở về đường phân điểm ρ và gặp lại đường ρ tại một điểm khác cũng trong khoảng trượt $\overline{EF}$ nhưng gần gốc tọa độ hơn. Từ đây nó lại phải chuyển sang đường parabol nét rời .... Cứ như vậy quỹ đạo pha chuyển động zick zack xung quanh đường ρ để tiến về gốc tọa độ. Nếu như khâu phi tuyến hai vị trí cho phép chuyển đổi từ −1 sang 1 và ngược lại trong khoảng thời gian gần bằng 0 thì đoạn quỹ đạo pha zick zack trên sẽ có dạng *trượt* về gốc tọa độ dọc theo đoạn $\overline{EF}$. Hiện tượng *trượt* sẽ trơn khi thời gian chuyển đổi bằng 0.

Đường phân điểm ρ, do nó có chức năng chuyển quỹ đạo pha từ đường parabol nét rời sang đường parabol nét liền và ngược lại, nên người ta còn thường gọi nó là *đường chuyển đổi*.

Độ dốc $\frac{T}{k}$ của đường phân điểm (hay đường chuyển đổi) ρ quy định độ dài cho khoảng trượt $\overline{EF}$. Thông qua tham số k hay T ta có thể thay đổi độ dốc của ρ. Đường ρ có độ dốc càng lớn, khoảng trượt $\overline{EF}$ sẽ càng dài làm cho hiện tượng trượt trong hệ xảy ra càng lâu.

Hiện tượng trượt trong hệ vừa xét là một gợi ý cho việc thiết kế bộ điều khiển sử dụng khâu hai vị trí nhằm làm ổn định tuyệt đối đối tượng theo nguyên tắc trượt về gốc tọa độ. Về nguyên lý thiết kế bộ điều khiển trượt ta sẽ quay lại sau trong mục 2.5.

2.2.3 Hệ với khâu phi tuyến hai vị trí có trễ

Giống như đã làm với hệ có khâu phi tuyến hai vị trí, sau đây ta cũng sẽ làm quen với phương pháp phân tích và khảo sát trong mặt phẳng pha hệ với khâu phi tuyến hai vị trí có trễ thông qua một ví dụ cụ thể.

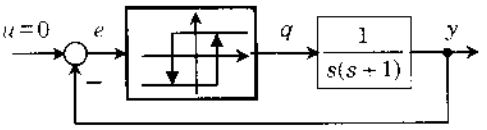
Xét hệ phi tuyến, kín, phản hồi âm, với sơ đồ cấu trúc cho ở hình 2.16. Hệ gồm hai khâu: khâu phi tuyến hai vị trí có trễ với đường đặc tính vào ra

$$q = \begin{cases} \operatorname{sgn}(e) & \text{khi} \quad |e| > 1 \\ -\operatorname{sgn}(\dfrac{de}{dt}) & \text{khi} \quad |e| < 1 \end{cases}$$

và khâu tuyến tính với hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Tín hiệu đầu vào $u(t)$ của hệ được giả thiết là đồng nhất bằng 0.



Hình 2.16: Sơ đồ khối của hệ có khâu phi tuyến hai vị trí có trễ.

Vì $G(s)$ là hàm truyền bậc hai mô tả khâu có quan hệ vào ra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = q \tag{2.18}$$

nên mặt phẳng pha được chọn ở đây sẽ là mặt phẳng với hai trục tọa độ y và $\dfrac{dy}{dt}$.

Bây giờ ta sẽ chia mặt phẳng pha ra thành từng miền điểm riêng biệt mà ở đó tín hiệu q có giá trị là hằng.

Do có $y = -e$ nên

1) Tín hiệu q có giá trị 1 khi

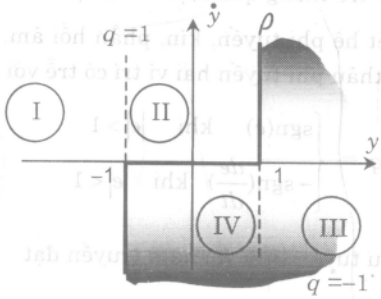
   a) $e > 1$, tức là khi $y < -1$ (vùng I trên hình 2.17).

   b) hoặc khi $|e| < 1$ và $\dfrac{de}{dt} < 0$, tức là khi $|y| < 1$ và $\dfrac{dy}{dt} > 0$ (vùng II trên hình 2.17).

2) Tín hiệu q có giá trị -1 khi

a) $e<-1$, tức là khi $y>1$ (vùng III trên hình 2.17).

b) hoặc khi $|e|<1$ và $\frac{de}{dt}>0$, tức là khi $|y|<1$ và $\frac{dy}{dt}<0$ (vùng IV trên hình 2.17).



Hình 2.17: Phân điểm mặt phẳng pha bằng đường phân điểm ρ (đường chuyển đổi).

Như vậy, mặt phẳng pha $(y, \frac{dy}{dt})$ đã được phân thành hai miền: Miền thứ nhất gồm các vùng I, II ứng với $q=1$ và miền thứ hai gồm vùng III, IV ứng với $q=-1$. Ranh giới giữa hai miền là đường phân điểm (hay đường chuyển đổi) ρ.

Khi $q=1$ thì từ (2.18) ta có

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=\dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2}=1-\dfrac{dy}{dt}=1-z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dz}=\frac{z}{1-z}$$

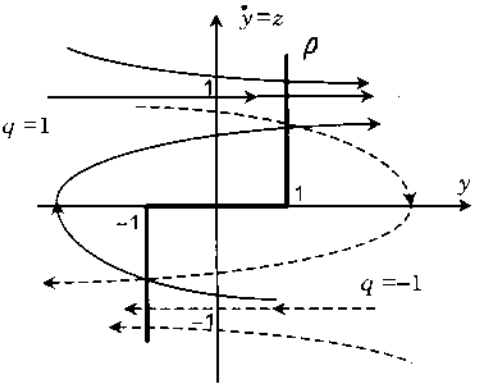
$$\Rightarrow \quad dy=\frac{zdz}{1-z} \quad \Rightarrow \quad y=-z-\ln|z-1|+k. \tag{2.19}$$

trong đó k là hằng số được xác định từ các giá trị đầu $y(0)$ và $\frac{dy(0)}{dt}$.

Tương tự, khi $q=-1$ ta cũng có

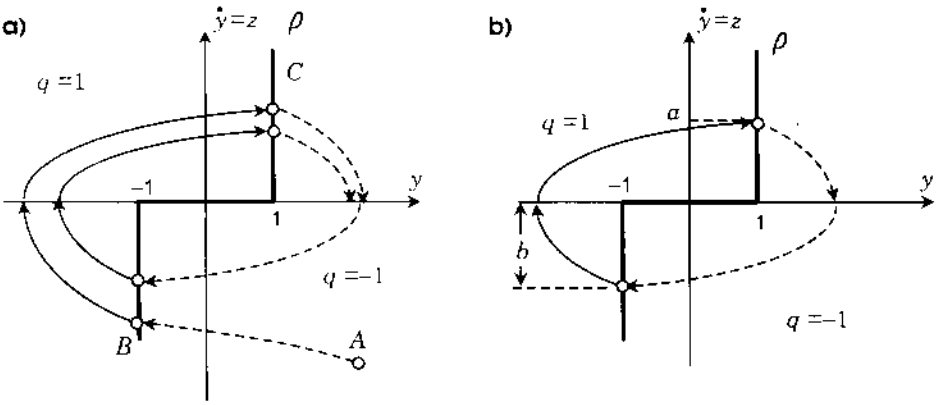
$$y=-z+\ln|z+1|+k. \tag{2.20}$$

Hình 2.18 biểu diễn đồ thị của hai hàm số (2.19) và (2.20). Chúng được xây dựng bằng cách cộng, trừ đồ thị các đường $-z$ và $\ln|z+1|+k$ hay $\ln|z-1|+k$. Đường nét liền là đồ thị của (2.19), tức là cho trường hợp $q=1$ còn đường nét rời là của (2.20) khi $q=-1$. Những đồ thị này được đánh dấu chiều theo chiều tăng của biến thời gian t. Phần đồ thị nằm phía trên trục hoành có chiều từ trái sang phải vì với $z=\frac{dy}{dt}>0$, giá trị của y phải tăng theo t, còn phía dưới trục hoành thì giảm.



Hình 2.18: Xây dựng đồ thị hàm (2.19) và (2.20).

Sau khi đã có đồ thị của hai hàm số (2.19) và (2.20) ta đã có thể xây dựng quỹ đạo pha của hệ thống đi từ một điểm trạng thái ban đầu nào đó, chẳng hạn là điểm A như ở hình 2.19a. Do điểm A nằm trong miền ứng với $q = -1$ nên quỹ đạo pha đi qua nó phải là đường nét rời. Theo đường nét rời cho tới khi gặp đường chuyển đổi ρ (tại điểm B) thì nó chuyển sang đường nét liền vì lúc đó quỹ đạo pha đã đi vào miền có $q = 1$. Cứ như vậy, ta xây dựng được hoàn chỉnh quỹ đạo pha theo nguyên tắc là mỗi khi gặp đường chuyển đổi ρ, nó sẽ chuyển từ đường nét liền sang đường nét rời và ngược lại.



Hình 2.19: Xây dựng quỹ đạo pha.
a) Quỹ đạo pha đi từ A. b) Quỹ đạo pha khép kín.

Trực quan từ quỹ đạo pha thu được ta thấy sau một khoảng thời gian quá độ nhất định, quỹ đạo pha đi vào đường khép kín chứng tỏ hệ có dao động điều hòa (autonom). Để khẳng định lại một cách chính xác điều nhận xét này, sau đây ta sẽ phải chỉ ra rằng tồn tại một đường đồ thị nét liền của hàm số (2.19)

$$y = -z - \ln|z-1| + k_1$$

và một đường đồ thị nét rời của (2.20)

$$y = -z + \ln|z+1| + k_2$$

mà khi ghép lại với nhau, chúng tạo ra được một đường cong khép kín (hình 2.19b). Nói cách khác ta phải chỉ ra sự tồn tại các số a, b, k_1, k_2 cùng thỏa mãn:

$$1 = -a - \ln|a-1| + k_1 \tag{2.21}$$

$$1 = -a + \ln|a+1| + k_2 \tag{2.22}$$

$$-1 = -b - \ln|b-1| + k_1 \tag{2.23}$$

$$-1 = -b + \ln|b+1| + k_2 \tag{2.24}$$

trong đó a và b là hoành độ của điểm nối hai đường đồ thị đó. Tất nhiên các điểm nối này phải nằm trên đường chuyển đổi ρ.

Trừ hai vế của (2.21) và (2.23) cho nhau được

$$(1+a)+(1-b) = \ln\left|\frac{b-1}{a-1}\right|$$

Trừ hai vế của (2.22) và (2.24) ta có

$$(1+a)+(1-b) = \ln\left|\frac{a+1}{b+1}\right| \tag{2.25}$$

Suy ra

$$\ln\left|\frac{b-1}{a-1}\right| = \ln\left|\frac{a+1}{b+1}\right| \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \tag{2.26}$$

Thay (2.26) vào (2.25) và vào (2.24) rồi so sánh với (2.21) ta đi đến

$$\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| = 2(1+a) \quad \text{và} \quad k_1 = -k_2 \tag{2.27}$$

Do phương trình

$$\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| = 2(1+a)$$

có nghiệm a nên cùng với (2.26) và (2.27) cũng tồn tại b, k_1, k_2 và đó chính là điều phải chứng minh.

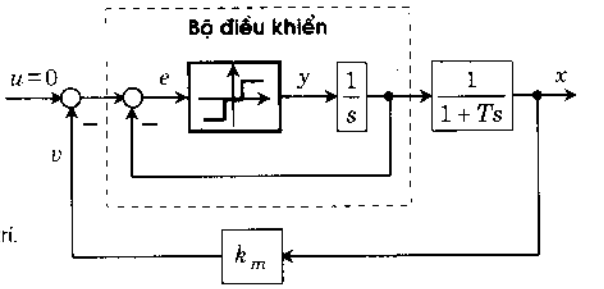
Cuối cùng, từ dạng quỹ đạo pha ta rút ra được những kết luận sau về chất lượng động học của hệ thống:

– Hệ có dao động điều hòa autonom.

– Dao động là ổn định. Miền ổn định của dao động là toàn bộ mặt phẳng pha.

2.2.4 Hệ với khâu phi tuyến ba vị trí

Để làm quen với việc phân tích, khảo sát hệ phi tuyến có khâu ba vị trí bằng phương pháp phân tích mặt phẳng pha, ta xét một ví dụ cụ thể.



Hình 2.20: Hệ có khâu phi tuyến ba vị trí.

Xét hệ phi tuyến với sơ đồ cấu trúc cho ở hình 2.20. Hệ có thành phần tuyến tính của bộ điều khiển ghép chung với đối tượng cũng tuyến tính thành

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s(1+Ts)} \quad \Leftrightarrow \quad T\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = y\,.$$

Thiết bị đo được xấp xỉ tuyến tính bằng khâu khuếch đại k_m. Bộ điều khiển có khâu phi tuyến ba vị trí với đường đặc tính vào ra

$$y = \begin{cases} a\,\mathrm{sgn}(e) & \text{khi} \quad |e| > b \\ 0 & \text{khi} \quad |e| < b \end{cases}$$

và khâu tích phân $\frac{1}{s}$. Suy ra

$$e = -v - \int_0^t y\,dt = -x - \left(T\frac{dx}{dt} + x\right)$$

và
$$T\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \begin{cases} a & \text{khi} \quad T\frac{dx}{dt} + (k_m+1)x < -b \\ -a & \text{khi} \quad T\frac{dx}{dt} + (k_m+1)x > b \\ 0 & \text{khi} \quad \left|T\frac{dx}{dt} + (k_m+1)x\right| < b \end{cases} \tag{2.28}$$

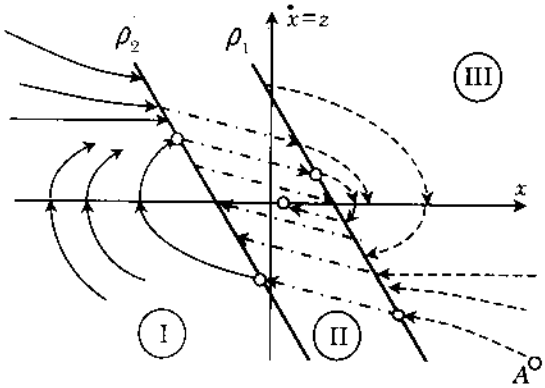
Định nghĩa mặt phẳng pha là mặt có trục hoành là x, trục tung là $z = \frac{dx}{dt}$, sau đó chia mặt phẳng thành ba miền điểm khác nhau bởi hai đường thẳng

$$\rho_1: \quad Tz + (k_m + 1)x = b \tag{2.29}$$

$$\rho_2: \quad Tz + (k_m + 1)x = -b \tag{2.30}$$

thì trong mỗi miền như vậy, biểu thức vế trái của (2.28) sẽ có giá trị hằng (hình 2.21). Cụ thể là:

$$T\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \begin{cases} a & \text{trong miền I} \\ -a & \text{trong miền III} \\ 0 & \text{trong miền II} \end{cases} \tag{2.31}$$



Hình 2.21: Phân điểm mặt phẳng pha.

1) Trong miền I

$$x = -z - a\ln|z - a| + k \tag{2.32}$$

với k là hằng số phụ thuộc các giá trị đầu $x(0)$ và $\frac{dx(0)}{dt}$. Họ các đồ thị của nó (phụ thuộc vào k) là những đường cong nét liền trong hình 2.21.

2) Trong miền II

$$x = -z + k \tag{2.33}$$

Họ các đồ thị của nó là những đường thẳng nét gạch chấm trong hình 2.21.

3) Trong miền III

$$x = -z + a\ln|z + a| + k \tag{2.34}$$

Họ các đồ thị của nó là những đường cong nét rời trong hình 2.21.

Những đường cong nét liền và rời nét là của hàm số (2.32), (2.34). Chúng được xây dựng theo cách cộng, trừ đồ thị các đường

$-z$ và $a\ln|z+a|+k$ (cho đường nét rời)

$-z$ và $a\ln|z-a|+k$ (cho đường nét liền).

Chiều của các đường đồ thị này được đánh dấu chiều theo chiều tăng của t. Phần đồ thị nằm phía trên trục hoành có chiều từ trái sang phải vì với $z=\dfrac{dx}{dt}>0$, giá trị của x phải tăng theo t, còn phía dưới trục hoành thì ngược lại.

Bây giờ ta đã có thể xây dựng quỹ đạo pha của hệ thống đi từ một điểm trạng thái ban đầu nào đó, chẳng hạn là điểm A như ở hình 2.21. Do điểm A nằm trong miền III nên quỹ đạo pha đi qua nó phải là đường nét rời. Theo đường nét rời cho tới khi gặp đường chuyển đổi ρ_1 thì nó chuyển sang đường nét gạch chấm để đi tiếp vào miền II. Quỹ đạo pha đi theo đường nét gạch chấm cho tới khi gặp ρ_2 thì chuyển sang đường nét liền để đi tiếp vào miền I. Từ miền I theo đường liền nó sẽ quay lại đường chuyển đổi ρ_2 và chuyển sang đường nét gạch chấm để vào miền II .... Cứ như vậy, ta xây dựng được hoàn chỉnh quỹ đạo pha theo nguyên tắc là mỗi khi gặp đường chuyển đổi ρ_1, nó sẽ chuyển từ đường nét rời sang đường nét gạch chấm hoặc ngược lại cũng như mỗi khi gặp đường chuyển đổi ρ_2 thì chuyển từ đường nét gạch chấm sang đường nét liền hoặc ngược lại. Quỹ đạo pha sẽ kết thúc (dừng lại) khi gặp đoạn trục hoành nằm giữa hai đường chuyển đổi ρ_1 và ρ_2.

Từ dạng quỹ đạo pha của hệ, ta rút ra được những kết luận sau về chất lượng động học của nó:

- Hệ có các điểm cân bằng là toàn bộ đoạn trục hoành nằm giữa hai đường chuyển đổi ρ_1 và ρ_2.
- Hệ không ổn định tại bất cứ một điểm cân bằng nào, vì khi bị đánh bật ra khỏi một điểm cân bằng nào đó và đưa tới một điểm cân bằng khác trong lân cận của nó thì hệ sẽ nằm lại đó và không quay về điểm cân bằng ban đầu.
- Mọi quỹ đạo pha khác đều có xu hướng kết thúc tại một điểm cân bằng.

2.2.5 Hệ có khâu khuếch đại bão hòa

Ở mục 2.2.2 ta đã đề cập đến hệ phi tuyến có khâu hai vị trí. Hệ này có một đặc điểm "không bình thường" là khi quỹ đạo pha đi vào khoảng $\overline{EF}$ trên đường chuyển đổi ρ thì xảy ra hiện tượng (xem lại hình 2.15 về khoảng $\overline{EF}$):

- trượt dọc theo đường chuyển đổi về gốc tọa độ nếu như khâu hai vị trí có thời gian chuyển đổi bằng 0,
- hoặc chuyển động zick zack xung quanh đường chuyển đổi để về gốc tọa độ nếu khâu hai vị trí có thời gian chuyển đổi lớn hơn 0.

Do trong quá trình chuyển dịch về gốc dọc theo đoạn $\overline{EF}$, khâu hai vị trí phải chuyển trạng thái (từ 1 sang –1 và ngược lại) với tốc độ nhanh và rất nhiều lần, gây ra những tiếng động "không bình thường" mang tính đặc trưng của hệ nên hiện tượng này trong hệ vẫn còn thường được gọi theo tiếng động *không bình thường* đó như:

- hiện tượng bang–bang,
- hay hiện tượng chattering (tiếng lạch cạch).

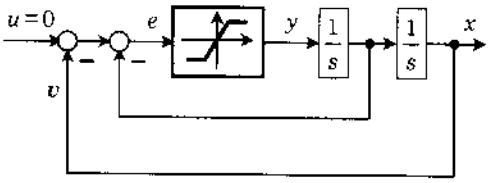
Tiếp sau đây, ta sẽ xét vai trò của khâu khuếch đại bão hòa trong hệ trên, đặc biệt là sự ảnh hưởng của nó tới hiện tượng bang–bang (hay chattering), như là một ví dụ về khảo sát hệ phi tuyến có khâu khếch đại bão hòa bằng phương pháp mặt phẳng pha.

Xét hệ phi tuyến có khâu khuếch đại bão hòa với sơ đồ cấu trúc cho ở hình 2.22. Hệ có đối tượng được giả thiết là tuyến tính và có hàm truyền đạt được xấp xỉ bằng khâu tích phân bậc hai

$$S(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \int_0^t y dt .$$

Khâu khuếch đại bão hòa được mô tả bởi

$$y = \text{sat}(e) = \begin{cases} \text{sgn}(e) & \text{nếu} \quad |e| > 1 \\ e & \text{nếu} \quad |e| \le 1 \end{cases}$$



Hình 2.22: Hệ có khâu phi tuyến khuếch đại bão hòa.

Tín hiệu sai lệch e, đồng thời cũng là tín hiệu đầu vào của khâu khuếch đại bão hòa, được xác định như sau:

$$e = -v - \int_0^t y dt = -(x + \frac{dx}{dt})$$

Suy ra

$$y = \frac{d^2x}{dt^2} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x + \dfrac{dx}{dt} < -1 \\ -1 & \text{nếu} \quad x + \dfrac{dx}{dt} > 1 \\ e & \text{nếu} \quad \left| x + \dfrac{dx}{dt} \right| \le 1 \end{cases}$$

Bởi vậy nếu ta chia mặt phẳng pha, là mặt có trục hoành x, trục tung $z = \dfrac{dx}{dt}$, thành ba miền với hai đường chuyển đổi (hình 2.23):

ρ_1: $x + z = -1$

ρ_2: $x + z = 1$

thì trong miền I hệ được mô tả bởi

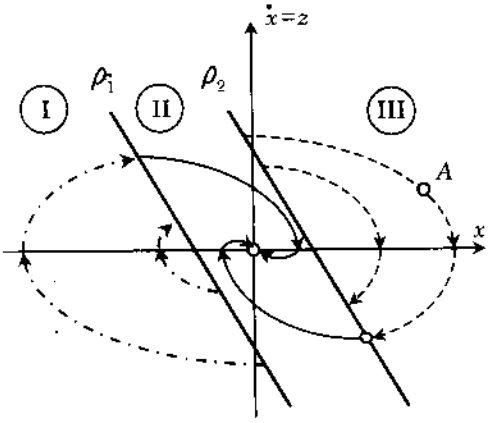
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1$$

trong miền III hệ được mô tả bởi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -1$$

và trong miền II được thay bằng

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(x + \frac{dx}{dt}\right)$$



Hình 2.23: Chia mặt phẳng pha thành ba miền.

Phương trình quỹ đạo pha trong miền I và III có dạng

$$x = \begin{cases} \dfrac{z^2}{2} + k & \text{cho miền I} \\ \dfrac{-z^2}{2} + k & \text{cho miền III} \end{cases}$$

với k là hằng số được xác định từ giá trị đầu $x(0)$ và $z(0) = \dfrac{dx(0)}{dt}$. Như vậy trong hai miền này, quỹ đạo pha sẽ có dạng parabol ngược chiều nhau. Hình 2.23 biểu diễn dạng quỹ đạo pha trong miền I (đường gạch chấm) và III (đường nét rời).

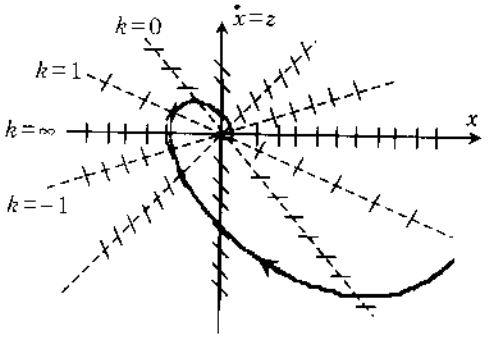
Riêng trong miền II, khâu khuếch đại bão hoà trở thành khâu khuếch đại (tuyến tính) bình thường nên bản thân hệ thống cũng là tuyến tính. Hệ tuyến tính này có

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(x + \frac{dx}{dt}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -x-z \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

với phương trình đặc tính

$$\det(sI - A) = s^2 + s + 1$$

nên ổn định, hay quỹ đạo pha $x(z)$ của nó phải tiến về gốc tọa độ. Hình 2.24 là quỹ đạo pha của hệ trong miền II. Nó được xác định từ các đường đẳng tà $\frac{dx}{dz} = -\frac{z}{x+z} = k$.



Hình 2.24: Dạng quỹ đạo pha của hệ trong miền II.

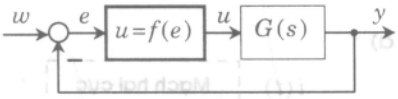
Sau khi đã có đầy đủ họ các quỹ đạo pha cho từng miền, ta có thể xây dựng hoàn chỉnh một quỹ đạo pha của hệ đi từ một điểm trạng thái đầu tùy ý. Quỹ đạo pha cho trong hình 2.23 đi từ điểm trạng thái A thuộc miền III là một ví dụ. Do A nằm trong miền III nên quỹ đạo pha bắt đầu từ nó phải đi theo đường parabol nét rời. Dọc theo đường nét rời cho tới khi gặp đường chuyển đổi ρ_2 thì chuyển sang đường nét liền có dạng như ở hình 2.24 để đi tiếp vào miền II. Theo đường nét liền quỹ đạo pha sẽ hoặc tiến về gốc tọa độ, hoặc sẽ phải chuyển sang đường parabol nét gạch chấm để đi tiếp vào miền I nếu gặp đường chuyển đổi ρ_1. Trong trường hợp chuyển vào miền I, quỹ đạo pha đi theo đường parabol gạch chấm và sẽ chuyển về đường nét liền khi một lần nữa gặp đường chuyển đổi ρ_1 để quay lại miền II .... Cứ như vậy ta có được hoàn chỉnh quỹ đạo pha của hệ đi từ điểm trạng thái A.

Căn cứ theo dạng các đường quỹ đạo pha thu được ta có những kết luận sau về chất lượng hệ thống:

- Hệ có một điểm cân bằng duy nhất là gốc tọa độ.
- Hệ ổn định tại điểm cân bằng và có miền ổn định $\mathcal{O}$ là toàn bộ mặt phẳng pha.
- Trong hệ không còn hiện tượng bang–bang (hay trượt, hay chattering).

2.3 Tính ổn định tuyệt đối

Hệ phi tuyến Hammerstein cho ở hình 2.25 được gọi là *ổn định tuyệt đối* nếu nó ổn định với một lớp các hàm phi tuyến tĩnh $u=f(e)$.



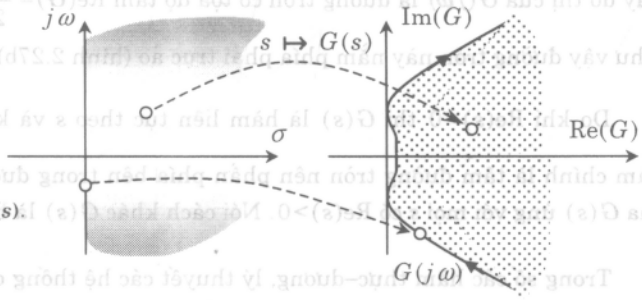
Hình 2.25: Hệ kín với hệ hở có mô hình Hammerstein (NL).

2.3.1 Khái niệm hàm thực–dương và hệ thụ động

Việc phân tích tính ổn định tuyệt đối của hệ Hammerstein liên quan đến khái niệm hàm thực–dương (*positive real*) mà trong nhiều tài liệu còn gọi là hàm hai cực, được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1: Một hàm phức $G(s)$ với biến phức s được gọi là hàm thực–dương (*positive real*) nếu $\mathrm{Re}(s)>0$ thì cũng có $\mathrm{Re}(G)>0$, trong đó $\mathrm{Re}(\cdot)$ là ký hiệu chỉ phần thực của một số phức. Nó được gọi là thực–dương chặt (*strickly positive real*) nếu $\mathrm{Re}(s)\geq 0$ thì cũng có $\mathrm{Re}(G)>0$.

Như vậy, nếu xem hàm $G(s)$ dưới góc độ ánh xạ $s \mapsto G(s)$ thì hàm thực–dương chính là ánh xạ biến đổi toàn bộ nửa mặt phẳng bên phải của mặt phẳng phức có hai trục tọa độ σ và ω, trong đó $s=\sigma+j\omega$, sang thành một miền thuộc nửa mặt phẳng bên phải của mặt phẳng phức với hai trục tọa độ là $\mathrm{Re}(G)$ và $\mathrm{Im}(G)$ (hình 2.26).

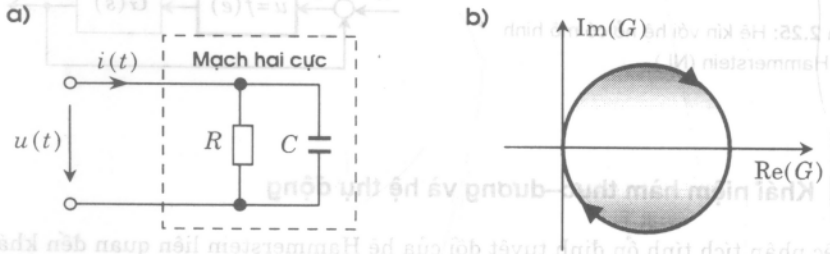


Hình 2.26: Hàm thực–dương $G(s)$.

Ký hiệu $\mathrm{Im}(\cdot)$ trong hình 2.26 là chỉ phần ảo của một số phức. Hàm thực–dương $G(s)$ như vậy là đã được định nghĩa, song nó đại diện cho những hệ thống như thế nào. Để trả lời ta hãy bắt đầu bằng một ví dụ.

Ví dụ 2.1: Minh họa ý nghĩa hàm thực dương

Cho một hệ tiêu thụ điện có dạng mạch hai cực như ở hình 2.27a). Biết trước giá trị C của tụ điện và R của điện trở là những phần tử trong mạch điện. Hãy xác định mô hình của hệ nếu dòng cung cấp $i(t)$ được xem là tín hiệu đầu vào và điện áp $u(t)$ giữa hai đầu cực của hệ là tín hiệu đầu ra.



Hình 2.27: Minh họa cho ví dụ 2.1.

Để cho tiện, ta chuyển sang miền phức nhờ toán tử Laplace. Ký hiệu ảnh Laplace cho các tín hiệu bằng chữ in hoa thì:

$$U = \frac{R}{1+RCs} I \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{U}{I} = \frac{R}{1+RCs}$$

Thay $s = j\omega$ rồi biến đổi để có phần thực và ảo riêng biệt ta được

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{R}{1+(RC\omega)^2}}_{\mathrm{Re}G} - j\underbrace{\frac{R^2C\omega}{1+(RC\omega)^2}}_{\mathrm{Im}G} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Re}G - \frac{R}{2}\right)^2 + (\mathrm{Im}G)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

hay đồ thị của $G(j\omega)$ là đường tròn có tọa độ tâm $\mathrm{Re}(G) = \frac{R}{2}$, $\mathrm{Im}(G) = 0$ và bán kính $\frac{R}{2}$. Như vậy đường tròn này nằm phía phải trục ảo (hình 2.27b).

Do khi $\mathrm{Re}(s) > 0$ thì $G(s)$ là hàm liên tục theo s và khi $s = \frac{1}{RC} > 0$ thì giá trị của hàm chính là tâm đường tròn nên phần phía bên trong đường tròn phải là miền giá trị của $G(s)$ ứng với mọi s có $\mathrm{Re}(s) > 0$. Nói cách khác $G(s)$ là hàm thực–dương. ❐

Trong số các hàm thực–dương, lý thuyết các hệ thống điều khiển đặc biệt quan tâm tới những hàm $G(s)$ có dạng thực–hữu tỷ và hợp thức, tức là

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}, \quad \left(0 \le \frac{b_0}{a_0} \text{ và } m \le n\right) \tag{2.36}$$

với $A(s), B(s)$ là hai đa thức có các hệ số a_i, b_j là những số thực. Những hàm này đều có giá trị thực khi s là số thực.

Định lý 2.1: Nếu hàm thực–hữu tỷ $G(s)$ cho trong công thức (2.36) là hàm thực–dương và hai đa thức $A(s)$, $B(s)$ nguyên tố cùng nhau thì $G(s)$ sẽ có các tính chất sau:

a) Không có điểm không nằm bên phải trục ảo, tức là nghiệm của $B(s)=0$ phải có phần thực bằng 0 hoặc âm.

b) Không có điểm cực nằm bên phải trục ảo, tức là nghiệm của $A(s)=0$ phải có phần thực bằng 0 hoặc âm.

c) Phải có $\mathrm{Re}G(j\omega)\geq 0$ với tất cả những giá trị ω làm cho $G(j\omega)$ là số hữu hạn.

d) Các điểm cực và điểm không *phức* trên trục ảo của $G(s)$ phải là nghiệm đơn.

e) Hiệu $n-m$ giữa bậc của đa thức tử số $A(s)$ và của đa thức mẫu số $B(s)$ phải bằng 0 hoặc 1.

Chứng minh:

a) Nếu $B(s)=0$ có nghiệm s_k với $\mathrm{Re}s_k>0$ thì $G(s_k)=0$ không thỏa mãn điều kiện hàm thực–dương là $\mathrm{Re}G(s_k)>0$.

b) Do hai hàm $G(s)$ và $\dfrac{1}{G(s)}$ có phần thực cùng dấu nên khi $G(s)$ là hàm thực–dương thì $\dfrac{1}{G(s)}$ cũng vậy. Kết hợp với tính chất a) nhưng cho $\dfrac{1}{G(s)}$ ta có khẳng định b).

c) Do $G(s)$ là hàm bảo giác nên đường cong $G(j\omega)$, $-\infty\leq\omega\leq\infty$, chính là ảnh của trục ảo $s=j\omega$, chia mặt phẳng phức $G(s)$ thành hai miền ký hiệu là $\mathcal{O}^+$ và $\mathcal{O}^-$, trong đó $\mathcal{O}^+$ là miền ảnh ứng với $\mathrm{Re}\{s\}>0$. Hiển nhiên rằng miền $\mathcal{O}^+$ chỉ có thể nằm về một phía của trục ảo. Do có điều kiện $0\leq G(0)$ nên $\mathcal{O}^+$ phải nằm bên phải trục ảo. Từ đây suy ra biên của nó là $G(j\omega)$ không thể đi sang bên trái trục ảo, hay $\mathrm{Re}G(j\omega)\geq 0$ (hình 2.26).

d) Giả sử $G(s)$ có điểm cực $s_k=j\omega_k$ bội q nằm trên trục ảo. Chọn số phức s có phần thực dương và nằm trong đường tròn tâm $s_k=j\omega_k$, bán kính $\sigma>0$ đủ nhỏ. Khi đó với:

$$G(s) = (s-s_k)^q G_1(s)$$

và

$$s-s_k = \sigma e^{j\varphi} \quad \text{trong đó} \quad \frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

ta có

$$G(s) = \sigma^q e^{jq\varphi}|G_1(s_k)| \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\{G(s)\} = \sigma^q|G_1(s_k)|\cos(q\varphi)$$

Vậy để $\mathrm{Re}G(s)>0$ với mọi $\sigma>0$ đủ nhỏ và $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ thì q lớn nhất chỉ có thể bằng 1.

Ngoài ra, do các điểm cực của $G(s)$ cũng là điểm không của hàm thực–dương $\frac{1}{G(s)}$ nên ta có kết luận tương tự cho điểm cực của $G(s)$.

e) Do khi $G(s)$ là hàm thực–dương thì $G(s^{-1})$ cũng là hàm thực–dương nên với

$$G(s^{-1}) = s^{n-m}\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

cũng như kết quả của d) thì hiệu $n-m$ chỉ có thể có ba giá trị -1, 0 hoặc 1. Nhưng vì $n \geq m$ nên trường hợp $n-m=-1$ bị loại. ❐

Ví dụ 2.2: Minh họa hàm thực dương

Xét mạch hai cực tiêu thụ điện ở hình 2.28a). Điện áp $u(t)$ giữa hai đầu cực của hệ được xem là tín hiệu đầu ra và dòng $i(t)$ là tín hiệu đầu vào. Khi đó thì

$$U(s) = \left(R_1 + \frac{R_2}{1+R_2Cs} + \frac{R_3Ls}{R_3+Ls}\right)I(s)$$

$$= \left[R_1 + \frac{R_2R_3 + (R_2+R_3)Ls + R_2R_3LCs^2}{R_3 + (L+R_2R_3C)s + R_2LCs^2}\right]I(s)$$

Như vậy, mạch hai cực đó có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = R_1 + \frac{R_2R_3 + (R_2+R_3)Ls + R_2R_3LCs^2}{R_3 + (L+R_2R_3C)s + R_2LCs^2}$$

Xét tiếp với những giá trị cụ thể của R_1, R_2, R_3, C và L sao cho có được

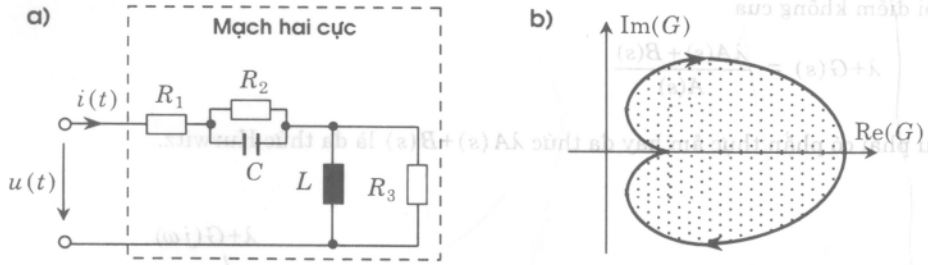
$$G(s) = 1 + \frac{1}{(1+s)^2} \quad \Rightarrow \quad G(s) = 1 + \frac{1}{(1+\sigma+j\omega)^2}$$

trong đó $s=\sigma+j\omega$, thì

$$\mathrm{Re}(G) = 1 + \frac{(1+\sigma)^2 - \omega^2}{((1+\sigma)^2-\omega^2)^2 + 4(1+\sigma)^2\omega^2} > 0$$

với mọi $\sigma>0$, $-\infty<\omega<\infty$, hay $G(s)$ là hàm thực–dương.

Rõ ràng $G(s)$ thỏa mãn các tính chất nêu trong định lý 2.1. Chẳng hạn như điểm cực $s=-1$ của $G(s)$ không nằm bên phải trục ảo. Đường quỹ đạo $G(j\omega)$ không đi vào phần mặt phẳng bên trái trục ảo (hình 2.28b). Hiệu $n-m$ có giá trị bằng 0. ❐



Hình 2.28: Minh họa cho ví dụ 2.2.

Định lý 2.1 cũng như ví dụ 2.2 đã cho biết hàm thực–hữu tỷ, thực–dương $G(s)$ có những tính chất gì. Nhưng dựa vào đó ta chưa thể xác định được hàm thực–hữu tỷ $G(s)$ nào sẽ là hàm thực–dương ngoại trừ một điều rằng nếu nó không thỏa mãn bất cứ một tính chất nào như định lý 2.1 đã nêu thì nó không thể là hàm thực–dương.

Sẽ rất khó khăn nếu ta dựa vào định nghĩa để xác định tính thực–dương của một hàm phức $G(s)$ vì phải xét ảnh của nó khi s chạy khắp trong nửa mặt phẳng phức bên phải trục ảo. Bởi vậy cần phải có những công cụ đơn giản hơn và định lý sau đây là một ví dụ giúp ta thực hiện được điều đó.

Định lý 2.2: Để hàm thực–hữu tỷ, hợp thức $G(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$, trong đó hai đa thức $A(s), B(s)$ không có chung nghiệm, là hàm thực–dương thì cần và đủ là:

a) $\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}\geq 0$ với tất cả những giá trị $\omega\geq 0$ làm cho $G(j\omega)$ là số hữu hạn.

b) $\lambda A(s)+B(s)$ với số thực dương λ tùy ý, là đa thức Hurwitz, tức là mọi nghiệm của nó đều nằm bên trái trục ảo.

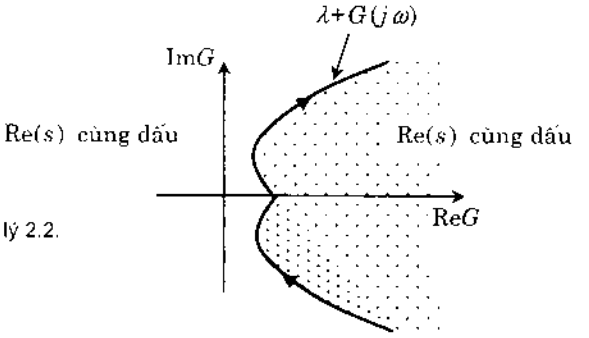
Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Nếu $G(s)$ đã là hàm thực–dương thì theo định lý 2.1, câu c), không có một đoạn đường cong nào của $G(j\omega)$ khi ω chạy từ $-\infty$ đến ∞ lại nằm bên trái trục ảo. Nhưng do các hệ số của hàm thực–hữu tỷ $G(s)$ là những số thực nên đường cong $G(j\omega)$ có dạng đối xứng qua trục thực (nghiệm của $G(s)=0$ phân bố đối xứng qua trục thực). Bởi vậy $G(j\omega)$ cũng sẽ không đi vào phần mặt phẳng bên trái khi ω chỉ chạy từ 0 đến ∞, hay $\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}\geq 0$ khi $0\leq\omega<\infty$.

Đường cong $G(j\omega)$ của hàm thực–dương $G(s)$ không đi vào phần mặt phẳng phức bên trái trục ảo. Nó có thể tiếp xúc với trục ảo. Suy ra đường cong $\lambda+G(j\omega)$ sẽ không thể tiếp xúc với trục ảo, hay $\lambda+G(s)$ không thể có điểm không trên trục ảo (có phần thực bằng 0). Mặt khác, do $G(s)$ đã là hàm thực–dương thì $\lambda+G(s)$ cũng là hàm thực–dương nên mọi điểm không của nó phải có phần thực không dương (định lý 2.1, câu a). Suy ra mọi điểm không của

$$\lambda+G(s) = \frac{\lambda A(s)+B(s)}{A(s)}$$

đều phải có phần thực âm hay đa thức $\lambda A(s)+B(s)$ là đa thức Hurwitz.



Hình 2.29: Minh họa chứng minh định lý 2.2.

Bây giờ ta chuyển sang điều kiện đủ. Do có điều kiện a) và tính chất đối xứng qua trục thực của $G(j\omega)$ nên toàn bộ đường cong $G(j\omega)$ khi $-\infty<\omega<\infty$ sẽ không đi sang phần mặt phẳng bên trái trục ảo (hình 2.29). Điều này cũng đúng với đường cong $G(j\omega)$. Từ đây suy ra đường cong $\lambda+G(j\omega)$ hoàn toàn không tiếp xúc với trục ảo. Do $\lambda+G(s)$ là hàm liên tục theo s nên đường $\lambda+G(j\omega)$ này chia mặt phẳng thành hai miền riêng biệt là các miền điểm ảnh của ánh xạ $\lambda+G(s)$ khi $\mathrm{Re}(s)$ cùng dấu, tức là một miền là tập điểm ảnh của $\lambda+G(s)$ khi s có phần thực dương, còn miền kia là tập điểm ảnh của $\lambda+G(s)$ khi s có phần thực âm. Như vậy để chứng minh ta chỉ cần chỉ ra rằng miền hoàn toàn nằm bên phải đường $\lambda+G(j\omega)$, tính theo chiều tăng của ω, là miền ứng với $\mathrm{Re}(s)>0$.

Giả sử điều ngược lại là miền hoàn toàn nằm bên đường $\lambda+G(j\omega)$ lại là miền ứng với $\mathrm{Re}(s)<0$. Khi đó miền còn lại sẽ ứng với $\mathrm{Re}(s)>0$. Do miền còn lại này chứa cả phần mặt phẳng nằm bên trái trục ảo nên ta có thể chọn một điểm s_k nào đó có phần thực dương mà ở đó $\lambda+G(s_k)$ có phần thực âm, chẳng hạn $\lambda+G(s_k)=-1$. Suy ra

$$\lambda+G(s_k)=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda A(s_k)+B(s_k)}{A(s_k)} = 0 \Leftrightarrow \lambda A(s_k)+B(s_k) = 0 \qquad (2.37)$$

Nhưng kết luận (2.37) lại trái với giả thiết là nghiệm của $\lambda A(s)+B(s)=0$ chỉ có thể có phần thực âm. Vậy điều giả sử là sai. ❐

Điều đặc biệt của hàm thực–dương $G(s)$, như hai ví dụ 2.1 và 2.2 đã minh họa là nó luôn được mô phỏng bằng một mạch hai cực cấu tạo bởi các linh kiện điện trở, cuộn cảm và tụ điện lý tưởng. Ngược lại hàm truyền đạt của mạch hai cực có các điện trở, cuộn cảm, tụ điện lý tưởng sẽ là hàm thực–dương. Chính vì vậy hàm thực–dương còn được gọi là *hàm hai cực*.

Đặc biệt nữa, các mạch hai cực này đều có chung một tính chất là không bao giờ tự sinh ra năng lượng. Sự thay đổi năng lượng bên trong nó không thể lớn hơn sự thay đổi năng lượng từ bên ngoài đã đưa vào. Những hệ có tính chất giống như tính chất này của mạch hai cực được gọi là *hệ thụ động* (passive). Nói cách khác *hệ thụ động tuyến tính là hệ có hàm truyền đạt là hàm thực–dương*.

Định nghĩa 2.2: Hệ tuyến tính, có *số tín hiệu đầu vào bằng số tín hiệu đầu ra*, mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}, \qquad \underline{u} \in \mathbf{R}^m,\ \underline{y} \in \mathbf{R}^m \tag{2.38}$$

được gọi là *hệ thụ động* (*passive*), nếu hàm truyền đạt của nó:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B \tag{2.39}$$

thỏa mãn (khi đó được gọi là *ma trận thực–dương*):

$$\mathrm{Re}\{\underline{v}^H G(s)\underline{v}\} = \frac{1}{2}\underline{v}^H\left[G(s)+G^H(s)\right]\underline{v} > 0 \tag{2.40}$$

với mọi $\underline{v} \neq \underline{0}$ và mọi s có $\mathrm{Re}(s)>0$, trong đó ký hiệu $G^H=\overline{G}^T$ chỉ phép chuyển vị và lấy liên hợp, gọi là *phép tính Hermite*.

Ngoài ra, giữa tính thụ động của hệ (2.38) và tính thực–dương của ma trận $G(s)$ tính theo (2.39) còn có mối quan hệ sau:

Định lý 2.3 (Popov–Kalman–Yakubovish): Để ma trận truyền đạt (2.39) của hệ tuyến tính (2.38) là thực–dương, hay để hệ (2.38) là thụ động, thì cần và đủ là tồn tại hai ma trận P, L, trong đó P phải *xác định dương*, sao cho:

$$A^TP+PA = -L^TL \qquad \text{(đối xứng, xác định bán âm)} \tag{2.41}$$

$$C^T = PB \tag{2.42}$$

Chứng minh:

Trước hết ta thấy P phải là ma trận đối xứng $P^T=P$. Đi từ (2.41) với:

$$\bar{s}P - A^TP + sP - PA = L^TL + 2\mathrm{Re}(s)P = Q$$

$$\Leftrightarrow \quad (\bar{s}I - A)^TP + P(sI - A) = Q$$

ta thấy

$$Q = L^TL + 2\mathrm{Re}(s)P$$

là ma trận xác định dương với mọi giá trị s có phần thực dương. Nhân cả hai vế với $B^T[(\bar{s}I-A)^T]^{-1}$ về phái trái và với $(sI-A)^{-1}B$ về phía phải sẽ được

$$B^TP(sI-A)^{-1}B + B^T[(\bar{s}I-A)^T]^{-1}PB = B^T[(\bar{s}I-A)^T]^{-1}Q(sI-A)^{-1}B.$$

Thay (2.42) vào đẳng thức thu được, có để ý đến tính đối xứng của P, sẽ đi đến:

$$C(sI-A)^{-1}B + B^T[(\bar{s}I-A)^T]^{-1}C^T = B^T[(\bar{s}I-A)^T]^{-1}Q(sI-A)^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow \quad G(s) + G^T(\bar{s}) = B^T[(\bar{s}I-A)^T]^{-1}Q(sI-A)^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{v}^H[G(s)+G^H(s)]\underline{v} = \underline{v}^HB^T[(\bar{s}I-A)^T]^{-1}Q(sI-A)^{-1}B\underline{v}$$

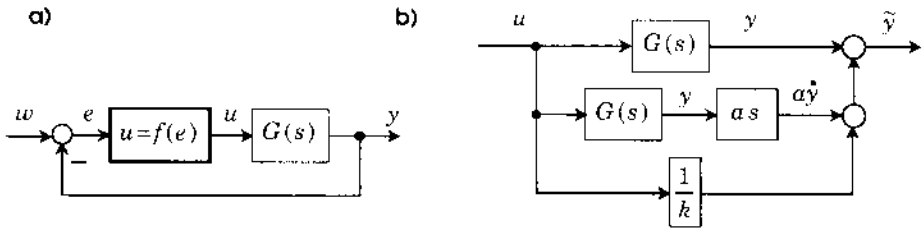
$$\Leftrightarrow \quad \underline{v}^H[G(s)+G^H(s)]\underline{v} = \underline{w}^HQ\underline{w}$$

trong đó

$$\underline{w} = (sI-A)^{-1}B\underline{v}$$

Vì khi $\underline{w} \neq \underline{0}$ thì $\underline{w}^HQ\underline{w} > 0$ với mọi s có $\mathrm{Re}(s) > 0$ nên $G(s)$ là hàm thực–dương. Tương tự ta có điều ngược lại là khi $G(s)$ thực–dương thì cũng có (2.41) và (2.42). ❐

2.3.2 Tiêu chuẩn Popov



Hình 2.30: Xét tính ổn định hệ kín với hệ hở có mô hình Hammerstein (NL).

Khái niệm *ổn định tuyệt đối* của hệ cho ở hình 2.30a) được hiểu là hệ ổn định với một lớp các khâu phi tuyến $u=f(e)$ có cùng cấu trúc. Đại diện cho các tiêu chuẩn xét tính ổn định tuyệt đối là *điều kiện đủ của Popov*.

Định lý 2.4 (Popov): Hệ kín trong hình 2.30a) với khâu tuyến tính $G(s)$ và khâu phi tuyến tĩnh $u=f(e)$ liên tục từng đoạn có $f(0)=0$ sẽ ổn định tuyệt đối, nếu:

a) Tồn tại một số $k>0$ sao cho $0<\dfrac{f(e)}{e}<k$ với $e\neq 0$.

b) Tồn tại một số thực $a\geq 0$ sao cho hàm phức

$$F(s) = (1+as)G(s)+\frac{1}{k}$$

là hàm thực–dương.

Chứng minh:

Lời chứng minh được trình bày sau đây có sử dụng một định lý chưa được nói tới từ đầu quyển sách tới giờ. Đó là tiêu chuẩn ổn định Lyapunov sẽ được trình bày sau ở chương 3 (định lý 3.1 và định lý 3.3). Bạn đọc có thể tạm thời công nhận chúng.

Trước hết, do có

$$F(s) = (1+as)G(s)+\frac{1}{k}$$

nên đầu ra $\tilde{y}$ của khâu có hàm truyền đạt $F(s)$ sẽ là (hình 2.30b):

$$\tilde{y} = y + a\frac{dy}{dt}+\frac{1}{k}u$$

Suy ra, nếu ta gọi

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x}+\underline{b}u \\ \tilde{y} = \underline{c}^T\underline{x}+du\end{cases}, \qquad \underline{x}\in\mathbb{R}^n \tag{2.43}$$

là mô hình trạng thái của nó thì từ tính thực–dương của $F(s)$, hệ (2.43) phải có tính thụ động, tức là sự thay đổi năng lượng bên trong nó không lớn hơn phần năng lượng được cung cấp từ ngoài vào. Bởi vậy, nếu đo sự thay đổi năng lượng bên trong hệ bằng hàm

$\underline{x}^TQ\underline{x}$, $\quad Q$ là ma trận xác định dương

ta sẽ có

$$\frac{d}{dt}\underline{x}^TQ\underline{x}\leq u\tilde{y} = u\left(y+a\frac{dy}{dt}+\frac{1}{k}u\right) \tag{2.44}$$

Mặt khác, vì Q xác định dương, hàm $f(e)$ với $e>0$ cũng là một số dương nên hàm

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^TQ\underline{x}+a\int_0^e f(e)de$$

với $a \geq 0$ xác định dương trên toàn bộ không gian trạng thái. Đạo hàm của nó theo hệ (2.43) có dạng

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\underline{x}^T Q\underline{x} + a\frac{\partial}{\partial e}\left(\int_0^e f(e)de\right)\frac{de}{dt} \tag{2.45}$$

Kết hợp (2.44) với (2.45) ta có

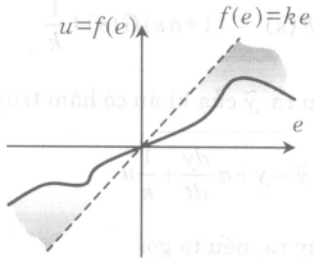
$$\frac{dV}{dt} \leq u\left(y + a\frac{dy}{dt} + \frac{1}{k}u\right) - af(e)\frac{dy}{dt} = \frac{-f(e)e}{k}\left(k - \frac{f(e)}{e}\right) \leq 0$$

vì $e=-y$ và $0 < \frac{f(e)}{e} < k$ hay e và $f(e)$ luôn cùng dấu. Dấu bằng chỉ xảy ra nếu $\underline{x}=\underline{0}$ cũng như $f(e)=0$. Vậy theo tiêu chuẩn Lyapunov (định lý 4.1), hệ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ với một lớp các khâu phi tuyến có $0 < \frac{f(e)}{e} < k$. ❐

Định lý 2.4 của Popov chỉ rằng hệ Hammerstein sẽ ổn định với tất cả các khâu phi tuyến có $u=f(e)$ với đường đồ thị $f(e)$ đi qua gốc tọa độ và nằm trong phần có hệ số góc thuộc khoảng $(0,k)$, gọi là *góc ổn định*, như mô tả ở hình 2.31.

Ngoài ra, nếu hệ ổn định với khâu phi tuyến $u=f(e)$ thì nó cũng ổn định với khâu:

$$u = \tilde{f}(e) = ke - f(e).$$



Hình 2.31: Minh họa lớp các khâu phi tuyến làm hệ phi tuyến Hammerstein ổn định tuyệt đối.

Ví dụ 2.3: Minh họa tiêu chuẩn Popov

Xét hệ kín như hình 2.30a) mô tả với

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)}.$$

Chọn $a = 1$, ta có với $s=\sigma+j\omega$:

$$F(s) = (1+as)G(s) + \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2} + \frac{1}{k}}_{\mathrm{Re}\,F} - j\underbrace{\frac{\omega}{\sigma^2+\omega^2}}_{\mathrm{Im}\,F}$$

Như vậy $F(s)$ là hàm thực–dương với mọi $k>0$. Theo tiêu chuẩn Popov, hệ kín ổn định với mọi khâu phi tuyến có $u=f(e)$ nằm trong góc mặt phẳng phần tư thứ nhất và thứ ba, tức là ổn định với $k=\infty$, hay hệ là ổn định tuyệt đối với góc ổn định $(0,\infty)$. Chẳng hạn khâu có $f(e)=e^3$ thỏa mãn điều kiện này. ❐

Ví dụ 2.4: Minh họa tiêu chuẩn Popov

Cho hệ kín như hình 2.30a) với khâu tuyến tính có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{b_0}{1+a_1 s+a_2 s^2} \quad , \quad a_2>0$$

Câu hỏi được đặt ra là khâu phi tuyến $u=f(e)$ phải thỏa mãn điều kiện gì để hệ ổn định tuyệt đối với góc ổn định $(0,\infty)$.

Theo định lý 2.4, đủ để hệ ổn định với

$$0 < \frac{f(e)}{e} < \infty \text{ khi } e \neq 0$$

là có một số thực $a \geq 0$ làm cho

$$F(s) = (1+as)G(s) = \frac{b_0(1+as)}{1+a_1 s+a_2 s^2} = \frac{b_0+ab_0 s}{1+a_1 s+a_2 s^2}$$

là hàm thực–dương.

Lại theo định lý 2.2, $F(s)$ là hàm thực–dương khi và chỉ khi:

1) $\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} > 0$ với mọi $0 \leq \omega < \infty$. Điều này dẫn đến

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \frac{(ab_0 a_1 - b_0 a_2)\omega^2 + b_0}{(1-a_2\omega^2)^2 + a_1^2\omega^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab_0 a_1 - b_0 a_2 > 0$$

2) $(1+a_1 s+a_2 s^2)+(b_0+ab_0 s) = (1+b_0)+(a_1+ab_0)s+a_2 s^2$

là đa thức Hurwitz

Từ đây ta suy ra được một điều kiện đủ để hệ Hammerstein được ổn định tuyệt đối với góc ổn định $(0,\infty)$ là các hệ số b_0, a_1, a_2 phải dương. ❐

2.3.3 Bàn thêm về tiêu chuẩn Popov

Điều kiện đối với khâu tuyến tính

Tiêu chuẩn Popov đòi hỏi tính thực–dương của hàm

$$F(s) = (1+as)G(s)+\frac{1}{k}$$

Giả sử hàm truyền đạt của khâu tuyến tính có dạng thực hữu tỷ $G(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$. Khi đó thì

$$F(s) = \frac{k(1+as)B(s)+A(s)}{kA(s)}$$

Vậy, theo định lý 2.1 về những tính chất phải có của một hàm thực–dương, ta thấy đa thức $A(s)$ không được có nghiệm nằm bên phải trục ảo, tức là $F(s)$ không được có điểm cực nằm bên phải trục ảo và các nghiệm phức của $A(s)$ nằm trên trục ảo phải là nghiệm đơn.

Dạng hình học của tiêu chuẩn

Sau đây, ta xét riêng trường hợp hàm truyền đạt $G(s)$ có $G(0)\geq 0$ của khâu tuyến tính thỏa mãn:

1) Là hàm hợp thức chặt (*strictly proper*).
2) Là hàm bền (*stable*), hay khâu tuyến tính là ổn định (không có điểm cực nằm trên cũng như nằm bên phải trục ảo).

Với những giả thiết này thì đường cong $F(j\omega)$ cho $-\infty<\omega<\infty$ là liên tục, vì $F(s)$ không có điểm cực trên trục ảo. Nó bắt đầu từ điểm hữu hạn

$$F(0) = G(0)+\frac{1}{k} = \frac{b_0}{a_0}+\frac{1}{k}$$

và cũng kết thúc tại điểm hữu hạn

$$F(\infty) = \lim_{s\to\infty}(1+as)G(s)+\frac{1}{k} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m<n-1 \\ \dfrac{ab_m}{a_n} & \text{nếu} \quad m=n-1 \end{cases}$$

do đó sẽ không đi ra vô cùng (về hai phía của trục ảo).

Miền mặt phẳng mà khi đi dọc trên $F(j\omega)$ theo chiều tăng của ω luôn nằm phía phải của $F(j\omega)$ là miền giá trị của $F(s)$ ứng với s có phần thực dương (s nằm bên phải trục ảo $j\omega$). Bởi vậy để $F(s)$ là hàm thực–dương, ta chỉ cần xác định k và a để miền này nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng phức bên phải là đủ, tức là phải chọn k, a sao cho

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{(1+ja\omega)G(j\omega)+\frac{1}{k}\} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\{(1+ja\omega)G(j\omega)\} > \frac{-1}{k} \quad \Leftrightarrow \quad aX(\omega)-R(\omega) < \frac{1}{k} \tag{2.46}$$

trong đó

$$X(\omega) = \omega\cdot\mathrm{Im}G(j\omega) \quad \text{và} \quad R(\omega) = \mathrm{Re}G(j\omega) \tag{2.47}$$

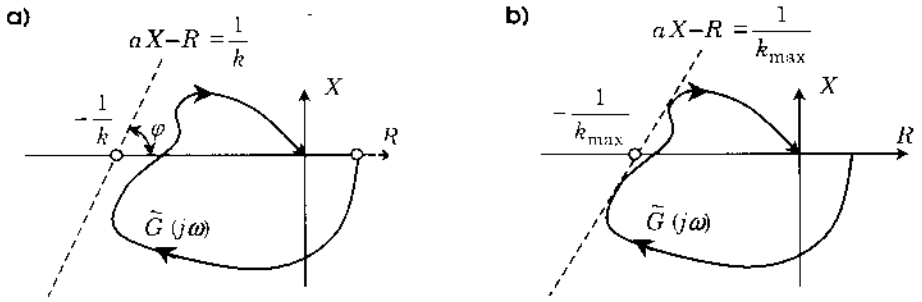
Nếu ta định nghĩa $\tilde{G}(j\omega)$ theo (2.47), tức là

$$\tilde{G}(j\omega) = R + jX = \mathrm{Re}G(j\omega) + j\omega \mathrm{Im}G(j\omega) \tag{2.48}$$

thì rõ ràng để có được điều kiện (2.46), đường đồ thị $\tilde{G}(j\omega)$ phải nằm bên phải đường thẳng (hình 2.32a)

$$aX - R = \frac{1}{k} \tag{2.49}$$

Đường thẳng (2.49), có tên là *đường thẳng Popov*. Nó cắt trục R tại điểm $\frac{-1}{k}$ và có độ nghiêng là $\tan\varphi = \frac{1}{a}$ (hình 2.32). Đường đồ thị $\tilde{G}(j\omega)$, $0 \le \omega < \infty$ định nghĩa theo (2.48) được gọi là *đặc tính tần số biến dạng* hay *đặc tính tần số Popov*. Đường đặc tính tần số biến dạng $\tilde{G}(j\omega)$ có phần thực trùng với đặc tính tần số $G(j\omega)$ của khâu tuyến tính, phần ảo bằng phần ảo của $G(j\omega)$ nhân với ω.



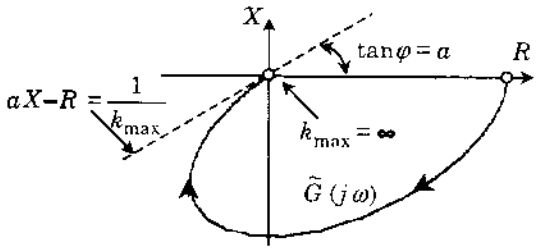
Hình 2.32: Mô tả tiêu chuẩn Popov bằng đồ thị.

Cuối cùng, ta đi đến:

Định lý 2.5: Hệ Hammerstein trong hình 2.30a) với khâu tuyến tính có hàm truyền đạt $G(s)$ hợp *thức chặt và bền*, sẽ ổn định tuyệt đối với mọi khâu phi tuyến tĩnh $u = f(e)$ liên tục từng đoạn có $f(0) = 0$, thỏa mãn $0 < \frac{f(e)}{e} < k$ khi $e \neq 0$, trong đó $\frac{-1}{k}$ là giao điểm giữa trục R với một đường thẳng (2.49) nào đó có hệ số góc dương và nó phải được chọn (thông qua k) sao cho đường đặc tính tần biến dạng $\tilde{G}(j\omega)$, $0 \le \omega < \infty$ của khâu tuyến tính, xác định theo (2.48), nằm hoàn toàn bên phải đường thẳng này.

Tất nhiên rằng tính ổn định bền vững của hệ càng cao nếu hằng số k tìm được càng lớn. Gọi k_{max} là hằng số k lớn nhất có thể có được từ tiêu chuẩn Popov thì để có k_{max} ta

phải xác định đường thẳng (2.49) với hệ số góc dương có giao điểm $\frac{-1}{k_{max}}$ với trục R gần trục X nhất bằng cách chọn đường thẳng (2.49) tiếp xúc với đường $\tilde{G}(j\omega)$ nhưng phải đảm bảo $\tilde{G}(j\omega)$ vẫn còn hoàn toàn nằm bên phải nó (hình 2.32b).



Hình 2.33: Xác định hai hằng số k và a từ đồ thị đặc tính tần biến dạng.

Ví dụ 2.5: Minh họa dạng hình học của tiêu chuẩn Popov

Xét hệ Hammerstein ở hình 2.30a) với khâu tuyến tính có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{1+2s+4s^2} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1-4\omega^2}{(1-4\omega^2)^2+4\omega^2} + j\frac{-2\omega}{(1-4\omega^2)^2+4\omega^2}$$

Như vậy $G(s)$ thỏa mãn các điều kiện để có thể áp dụng được định lý 2.5 là hợp thức chặt và bền.

Hàm $F(j\omega)$ có

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{(1+ja\omega)G(j\omega)+\frac{1}{k}\} = \frac{(2a-4)\omega^2+1}{(1-4\omega^2)^2+4\omega^2}+\frac{1}{k}$$

Bởi vậy nếu chọn $a \geq 2$ thì $\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}>0$ với mọi $k>0$, hay giá trị k_{max} lớn nhất là ∞. Điều này chỉ rằng hệ ổn định với mọi $u=f(e)$ liên tục từng đoạn và nằm trong góc $(0,\infty)$, tức là trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba:

$$0 < \frac{f(e)}{e} < \infty, \quad e \neq 0.$$

Kết quả trên ta cũng có thể thu được thông qua hàm đặc tính tần biến dạng

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{1-4\omega^2}{(1-4\omega^2)^2+4\omega^2} + j\frac{-2\omega^2}{(1-4\omega^2)^2+4\omega^2} = R+jX$$

Hình 2.33 biểu diễn đồ thị hàm $\tilde{G}(j\omega)$ và mô tả cách xác định hai tham số k và a từ đồ thị đường $\tilde{G}(j\omega)$ trong mặt phẳng phức với hai trục tọa độ R và X. Từ đây ta cũng có được $k_{max}=\infty$. ❐

Ví dụ 2.6: Minh họa dạng hình học của tiêu chuẩn Popov

Xét hệ Hammerstein ở hình 2.30a) với khâu tuyến tính có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

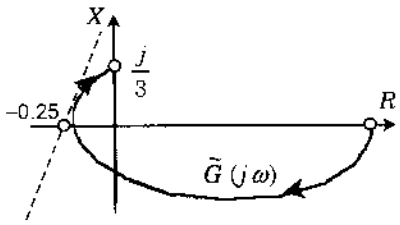
Như vậy $G(s)$ thỏa mãn các điều kiện để có thể áp dụng được định lý 2.5 là hợp thức chặt và bền.

Thay $s=j\omega$ vào hàm truyền đạt trên, sau đó tách phần thực và phần ảo của $G(j\omega)$, nhân phần ảo với tần số ω để thu được đặc tính tần số biến dạng $\tilde{G}(j\omega)$

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{1-2\omega^2}{1-2\omega^2+3\omega^4} + j\,\frac{\omega^2(\omega^2-2)}{1-2\omega^2+3\omega^4} = R+jX$$

Biểu diễn $\tilde{G}(j\omega)$ trong mặt phẳng phức với hai trục tọa độ R và X ta được hình 2.34. Tiếp theo, từ bên trái của biểu đồ đặc tính tần số $\tilde{G}(j\omega)$ ta kẻ một đường thẳng có độ nghiêng dương thích hợp sao cho đường thẳng này tiếp xúc với biểu đồ đặc tính tần số $\tilde{G}(j\omega)$ và cắt trục hoành tại một điểm có khoảng cách nhỏ nhất so với gốc tọa độ. Đó là điểm $-\frac{1}{k_{max}} \approx -0{,}25$.

Suy ra, hệ sẽ ổn định tuyệt đối với những bộ điều khiển (tĩnh) có đường đặc tính là hàm phi tuyến $f(e)$, đi qua điểm 0, liên tục từng đoạn, cùng dấu với đối số e, và có hệ số k thỏa mãn $0<k<k_{max}\approx 4$. ❐

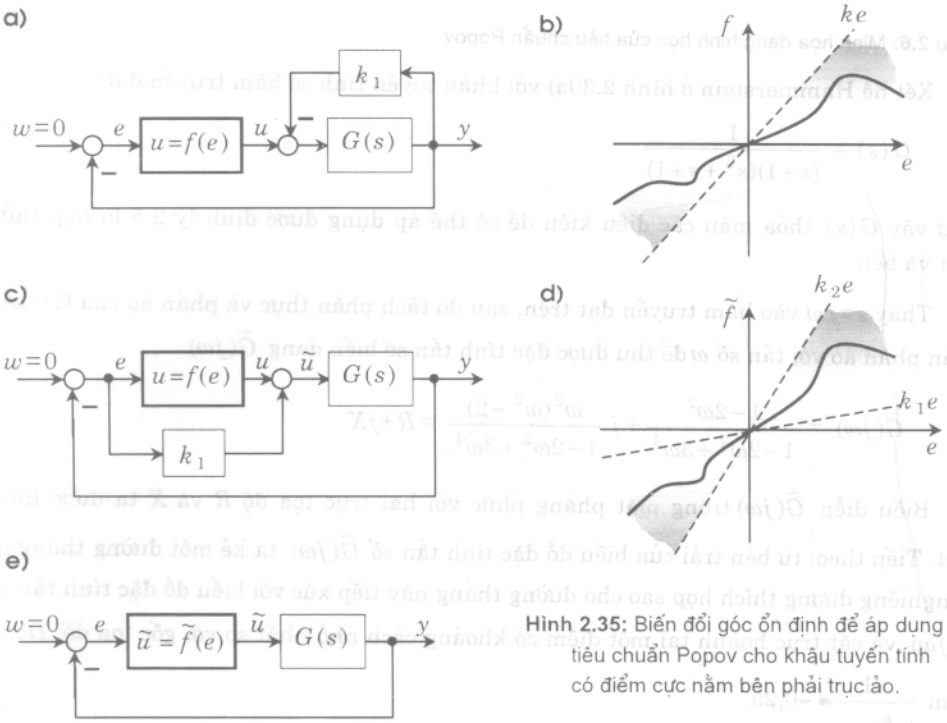


Hình 2.34: Xác định hai hằng số k và α từ đồ thị đặc tính tần biến dạng.

Về góc ổn định và phương pháp biến đổi

Việc sử dụng trực tiếp tiêu chuẩn Popov đòi hỏi hàm truyền đạt $G(s)$ của khâu tuyến tính phải thỏa mãn một số điều kiện, chẳng hạn $G(s)$ không được có điểm cực nằm bên phải trục ảo. Điều này làm hạn chế khả năng ứng dụng của tiêu chuẩn.

Nhằm mở rộng miền ứng dụng cho tiêu chuẩn Popov cho cả một số hàm $G(s)$ có điểm cực nằm bên phải trục ảo, người ta đã nghĩ đến phương pháp biến đổi góc ổn định từ $(0,k)$ thành (k_1,k_2). Ý tưởng của phương pháp như sau:



Hình 2.35: Biến đổi góc ổn định để áp dụng tiêu chuẩn Popov cho khâu tuyến tính có điểm cực nằm bên phải trục ảo.

1) *Bước* 1: Tìm một hằng số k_1 (có thể âm hoặc dương) sao cho cùng với nó trong vai trò bộ điều khiển phản hồi, khâu tuyến tính trở thành (hình 2.35a)

$$S(s) = \frac{G(s)}{1+k_1G(s)}$$

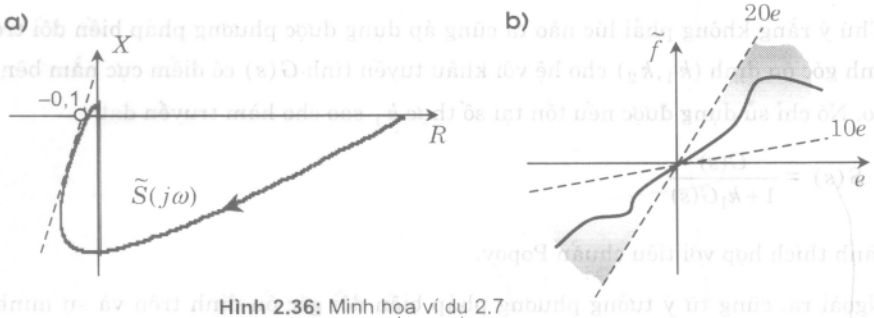
hợp thức chặt và bền.

2) *Bước* 2: Sử dụng dạng hình học của tiêu chuẩn Popov để xác định $u=f(e)$ liên tục từng đoạn có $f(0)=0$, thỏa mãn $0 < \frac{f(e)}{e} < k$ với $e \neq 0$, để hệ Hammestein với khâu tuyến tính $S(s)$ ổn định tuyệt đối với góc ổn định $(0,k)$ như hình 2.35b) mô tả.

3) *Bước* 3: Chuyển bộ điều khiển phản hồi đầu ra k_1 của khâu tuyến tính thành bộ bù cho khâu phi tuyến (hình 2.35c), tức là nó được nối song song với khâu $u=f(e)$. Khi đó giữa tín hiệu e và $\tilde{u} = u + k_1 e$ sẽ có quan hệ mới

$$\tilde{u} = f(e) + k_1 e = \tilde{f}(e)$$

và với bộ điều khiển này, hệ kín (hình 2.35e) có miền ổn định là góc (k_1, k_2), trong đó $k_2 = k + k_1$ (hình 2.35d).



Hình 2.36: Minh họa ví dụ 2.7

Ví dụ 2.7: Sử dụng tiêu chuẩn Popov cho đối tượng không ổn định

Giả sử hệ Hammerstein ở hình 2.30a) với khâu tuyến tính có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)^2} = \frac{1}{s^3+5s^2+3s-9}$$

Vì $G(s)$ có điểm cực $s_1=1$ nằm bên phải trục ảo nên ta không áp dụng được trực tiếp tiêu chuẩn Popov. Chọn $k_1=10$ thì

$$S(s) = \frac{G(s)}{1+k_1G(s)} = \frac{1}{s^3+5s^2+3s+1}$$

và hàm truyền đạt này thỏa mãn các điều kiện cho phép sử dụng tiêu chuẩn Popov.

Biến đổi $S(j\omega)$ thành

$$S(j\omega) = \frac{1-5\omega^2}{(1-5\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2} + j\,\frac{(\omega^2-3)\omega}{(1-5\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2}$$

ta có đường đặc tính tần biến dạng của nó

$$\tilde{S}(j\omega) = \underbrace{\frac{1-5\omega^2}{(1-5\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2}}_{R} + j\,\underbrace{\frac{(\omega^2-3)\omega^2}{(1-5\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2}}_{X}$$

Biểu diễn $\tilde{S}(j\omega)$ trong mặt phẳng phức rồi áp dụng dạng đồ thị của tiêu chuẩn Popov ta thu được một giá trị k (hình 2.36a)

$$\frac{-1}{k} = -0{,}1 \quad \Rightarrow \quad k = 10.$$

Vậy hệ kín có khâu tuyến tính $G(s)$ đã cho sẽ ổn định tuyệt đối với mọi khâu phi tuyến $\tilde{f}(e)$, liên tục từng đoạn và nằm trong góc $(k_1,\ k+k_1) = (10\ ,\ 20)$, như mô tả ở hình 2.36b). ❐

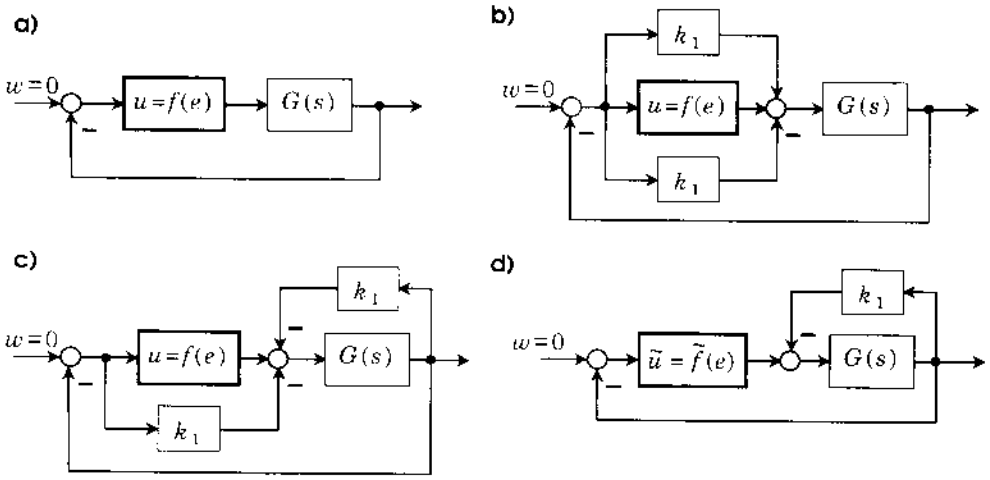
Chú ý rằng không phải lúc nào ta cũng áp dụng được phương pháp biến đổi trên để xác định góc ổn định (k_1, k_2) cho hệ với khâu tuyến tính $G(s)$ có điểm cực nằm bên phải trục ảo. Nó chỉ sử dụng được nếu tồn tại số thực k_1 sao cho hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)}$$

trở thành thích hợp với tiêu chuẩn Popov.

Ngoài ra, cũng từ ý tưởng phương pháp biến đổi góc ổn định trên và sự minh họa trực quan của hình 2.37 với bốn hệ tương đương nhau ta còn có được kết luận sau:

Định lý 2.6: Hệ gồm khâu phi tuyến $u = f(e)$ và khâu tuyến tính $G(s)$ ổn định tuyệt đối với góc ổn định $(0, k)$ khi và chỉ khi hệ gồm khâu phi tuyến $\tilde{u} = \tilde{f}(e) = f(e) - k_1 e$ và khâu tuyến tính $S(s) = \dfrac{G(s)}{1 + k_1 G(s)}$ ổn định tuyệt đối với góc ổn định $(-k_1, k - k_1)$.



Hình 2.37: Các hệ tương đương nhau. Chứng minh định lý 2.6

2.3.4 Tiêu chuẩn đường tròn

Tiêu chuẩn đường tròn là một sự mở rộng của tiêu chuẩn Popov cho hệ có cấu trúc như trong hình 2.38 với khâu phi tuyến

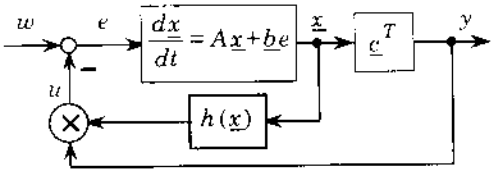
$$u = h(\underline{x})y \tag{2.50}$$

nằm trong nhánh phản hồi. Khâu tuyến tính SISO có mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}e \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.51}$$

và cũng từ đó là hàm truyền đạt dạng hợp thức chặt

$$G(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b}$$



Hình 2.38: Hệ có khâu phản hồi trạng thái phi tuyến.

Giống như tiêu chuẩn Popov, tiêu chuẩn đường tròn cũng chỉ là *điều kiện đủ*. Nó xác định tính ổn định tuyệt đối của hệ cho một lớp các khâu phi tuyến ở nhánh phản hồi. Mặt tiến bộ của tiêu chuẩn đường tròn so với tiêu chuẩn Popov là nó không cần dựa vào biểu đồ đặc tính tần số biến dạng $\tilde{G}(j\omega)$ mà dựa trực tiếp vào biểu đồ đặc tính tần số $G(j\omega)$ của khâu tuyến tính.

Định lý 2.7: Hệ phi tuyến ở hình 2.38 với khâu tuyến tính (2.51) và khâu phi tuyến tĩnh (2.50) trong nhánh phản hồi sẽ ổn định tuyệt đối tại $\underline{0}$ nếu:

a) Tồn tại hai số k_1 và k_2 để có $k_1 < h(\underline{x}) < k_2$ với mọi $\underline{x}$

b) Hàm phức $F(s) = \dfrac{1 + k_1 G(s)}{1 + k_2 G(s)}$ là hàm thực–dương.

Chứng minh:

Tương tự như đã làm với định lý 2.4 của Popov, lời chứng minh được trình bày sau đây cũng sử dụng tiêu chuẩn ổn định Lyapunov (định lý 3.1 và định lý 3.3) chưa được nói tới từ đầu quyển sách tới giờ. Bạn đọc có thể tạm thời công nhận chúng.

Hàm $F(s)$ được xem như hàm truyền đạt của khâu tuyến tính có mô hình

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = (A - k_2 \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}^T)\underline{x} + \underline{b} \cdot v \\ \tilde{y} = (k_1 - k_2)\underline{c}^T \underline{x} + v \end{cases} \tag{2.52}$$

trong đó các tín hiệu v, $\tilde{y}$ có quan hệ với những tín hiệu khác trong hình 2.38 khi $w = 0$ như sau

$$v = e + k_2 y, \qquad \tilde{y} = e + k_1 y$$

Do $F(s)$ là hàm thực–dương nên hệ (2.52) là thụ động. Do đó phải tồn tại ma trận xác định dương Q để có

$$\frac{d}{dt}\underline{x}^T Q \underline{x} \le v\,\tilde{y}$$

Với Q như vậy, hàm $V(\underline{x}) = \underline{x}^T Q \underline{x}$ xác định dương và

$$\frac{dV}{dt} \le \left[-h(\underline{x})y + k_2 y\right]\left[-h(\underline{x})y + k_1 y\right] = \left[k_1 - h(\underline{x})\right]\left[k_2 - h(\underline{x})\right]y^2$$

$$\le 0 \quad \text{(dấu bằng chỉ xảy ra khi } y = 0\text{)}$$

nên theo tiêu chuẩn Lyapunov, hệ là ổn định. □

Vấn đề còn lại là khi nào $F(s)$ sẽ là hàm hai cực?. Để trả lời ta sử dụng định lý 2.2. Trước hết $\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} \ge 0$ khi $\omega \ge 0$.

Gọi hàm đặc tính tần khâu tuyến tính là

$$G(j\omega) = R(\omega) + j \cdot X(\omega) \tag{2.53}$$

ta sẽ được điều kiện thứ nhất cần phải có

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 (R^2 + X^2) + (k_1 + k_2)R + 1 \ge 0 \tag{2.54}$$

Biểu diễn (2.53) trên mặt phẳng có hai trục tọa độ R, X cùng với đường tròn

$$\left[R + \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2}\right]^2 + X^2 = \left(\frac{k_2 - k_1}{2k_1 k_2}\right)^2 \tag{2.55}$$

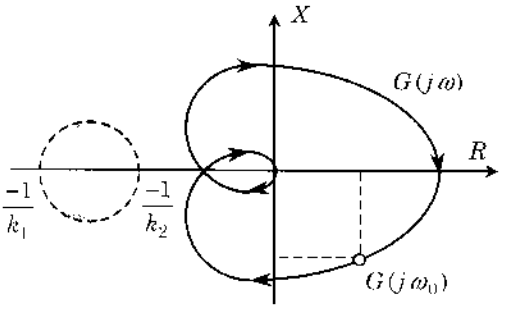
$$\Leftrightarrow \quad R^2 + R\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} + \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2}\right)^2 + X^2 = \left(\frac{k_2 - k_1}{2k_1 k_2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 + X^2 + R\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2} = 0$$

rồi so sánh với điều kiện (2.54) ta đến được các kết luận sau:

- Khi có một điểm $G(j\omega_0)$ của $G(j\omega)$ nằm trên đường tròn (2.55) thì điều kiện (2.54) được thỏa mãn tại đó với dấu bằng.
- Nếu có một điểm $G(j\omega_0)$ của $G(j\omega)$ nằm bên trong đường tròn (2.55) thì điều kiện (2.54) được thỏa mãn tại đó khi $k_1 k_2 < 0$.
- Nếu có một điểm $G(j\omega_0)$ của $G(j\omega)$ nằm bên ngoài đường tròn (2.55) thì điều kiện (2.54) được thỏa mãn tại đó khi $k_1 k_2 > 0$

Hình 2.39 mô tả trường hợp khi mà $k_1k_2>0$, bất đẳng thức (2.54), tức là điều kiện thứ nhất, sẽ được thỏa mãn với mọi $\omega \geq 0$ nếu như đường quỹ đạo $G(j\omega)$ nằm hoàn toàn bên ngoài đường tròn (2.55).



Hình 2.39: Minh họa tiêu chuẩn đường tròn.

Đường tròn (2.55) như vậy đã được chọn là cơ sở để kiểm tra điều kiện thứ nhất. Đường tròn này có tâm là $R_0 = -\dfrac{k_1-k_2}{2k_1k_2}$, $X_0=0$ và bán kính là $\dfrac{k_2-k_1}{2k_1k_2}$ (hình 2.39).

Tiếp theo, để kiểm tra điều kiện thứ hai của định lý 2.2, ta ký hiệu $B(s)$ là đa thức tử số và $A(s)$ là đa thức mẫu số của $G(s)$. Vậy điều kiện thứ hai tương đương với việc kiểm tra xem tổng đa thức tử số và mẫu số của $F(s)$ có phải là đa thức Hurwitz hay không ($\lambda=1$). Từ đây ta được

$$F(s) = \frac{A(s)+k_1B(s)}{A(s)+k_2B(s)}$$

và do đó để $F(s)$ là hàm hai cực, thì đa thức

$$(k_1+k_2)B(s)+2A(s)$$

phải là đa thức Hurwitz. Điều này tương đương với sự ổn định của hệ

$$\frac{2A(s)}{(k_1+k_2)B(s)+2A(s)} = \frac{1}{1+\dfrac{k_1+k_2}{2}G(s)} \tag{2.56}$$

Nếu thêm giả thiết là $G(s)$ không có điểm cực nằm bên phải trục ảo và điểm trên trục ảo chỉ là nghiệm đơn $s=0$, thì theo tiêu chuẩn Nyquist, hệ (2.56) sẽ ổn định khi đường $G(j\omega)$ với $0\leq\omega<\infty$ không bao điểm $-\dfrac{2}{k_1+k_2}$. Nhưng vì điểm này sẽ nằm trong đường tròn (2.55) khi $k_1k_2>0$ nên kết hợp điều kiện 1, hệ sẽ ổn định tuyệt đối nếu quỹ đạo đường $G(j\omega)$ với $0\leq\omega<\infty$ không bao đường tròn (2.55). Tương tự như vậy hệ sẽ ổn

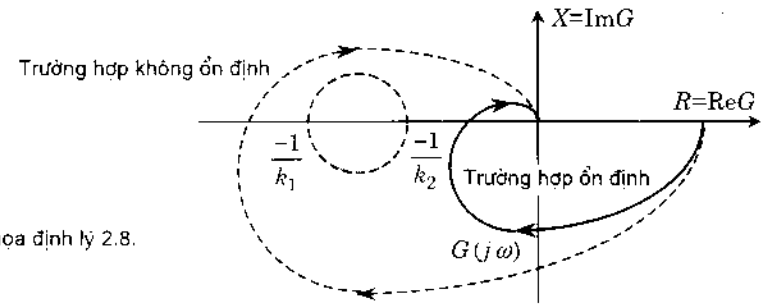
định với $k_1k_2<0$ khi đường đặc tính $G(j\omega)$, $0\le\omega<\infty$ không ra khỏi đường tròn (2.55) vì điểm $-\dfrac{2}{k_1+k_2}$ lúc này nằm ngoài đường tròn.

Tổng kết lại, ta đến được khẳng định sau:

Định lý 2.8: (Dạng đồ thị của tiêu chuẩn đường tròn): Xét hệ phi tuyến ở hình 2.38 với khâu tuyến tính (2.51) và khâu phi tuyến tĩnh (2.50) trong nhánh phản hồi. Gọi $G(s)$ là hàm truyền đạt của khâu tuyến tính. Nếu $G(s)$ *không có điểm cực nằm bên phải trục ảo*, điểm trên trục ảo chỉ là nghiệm đơn $s=0$, thì hệ sẽ ổn định tuyệt đối với một lớp các khâu phi tuyến $u=h(\underline{x})y$ thỏa mãn điều kiện $k_1<h(\underline{x})<k_2$, trong đó hai hằng số k_1, k_2 được chọn sao cho đường đặc tính tần số $G(j\omega)$, $0\le\omega<\infty$ của đối tượng (hình 2.40):

a) Không bao đường tròn (2.55) nếu $k_1k_2>0$, hoặc

b) Không ra khỏi đường tròn (2.55) nếu $k_1k_2<0$.



Hình 2.40: Minh họa định lý 2.8.

Ví dụ 2.8: Minh họa tiêu chuẩn đường tròn

Xét hệ cho ở hình 2.38 với khâu tuyến tính

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{A}x+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{b}}u, \qquad y = x_1 = \underbrace{(1\quad 0)}_{\underline{c}^T}$$

Như vậy, nó có hàm truyền đạt

$$G(s) = \underline{c}^T(sI-A)^{-1}\underline{b} = (1\quad 0)\begin{pmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Với hàm truyền đạt không có điểm cực nằm bên phải trục ảo này, ta được:

$$G(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2+1} + j\frac{-1}{\omega(\omega^2+1)} = R + jX$$

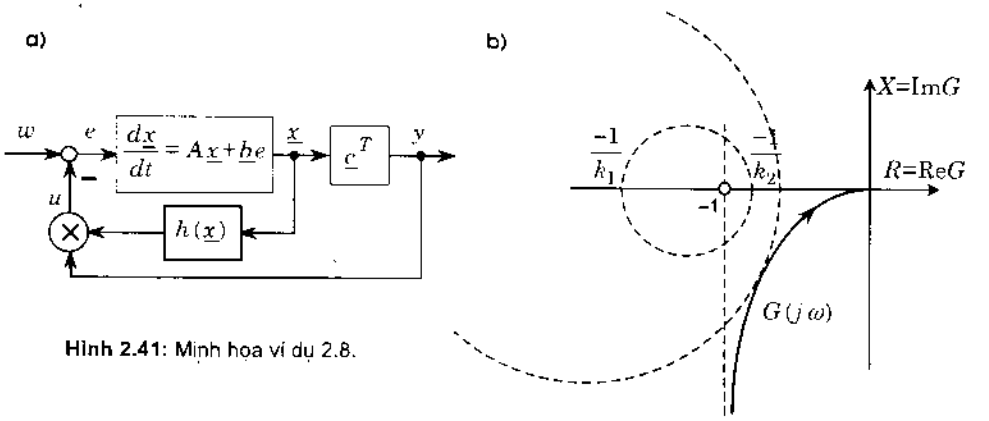
Hình 2.41b) biểu diễn đồ thị của $G(j\omega)$. Dựng một đường tròn tuỳ ý về phía trái của $G(j\omega)$ và gọi $\frac{-1}{k_1}$, $\frac{-1}{k_2}$, $0<k_1<k_2$ là hai giao điểm của đường tròn đó với trục thực R=ReG. Vậy thì theo nội dung định lý 2.8, hệ kín có sơ đồ cấu trúc 2.41a) sẽ ổn định tuyệt đối với mọi khâu phi tuyến $u=h(\underline{x})y$ thỏa mãn $k_1<h(\underline{x})<k_2$.

Tuy nhiên, để nâng cao tính bền vững cho hệ, ta cần phải chọn một đường tròn nào đó tạo ra được khoảng cách k_2-k_1 lớn nhất. Ta cũng có thể chọn đường tròn tiếp xúc với $G(j\omega)$ và có bán kính bằng ∞. Do có bán kính bằng ∞ nên phần cung đường tròn xung quanh điểm tiếp xúc sẽ có dạng như một đường thẳng tiếp xúc (hình 2.41b) và từ đó ta đọc ra được

$$\frac{-1}{k_1} = -\infty, \quad \frac{-1}{k_2} = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad k_1=0 \quad \text{và} \quad k_2=1.$$

Vậy hệ ổn định tuyệt đối với mọi khâu phi tuyến có $h(\underline{x})$ thỏa mãn:

$0 < h(\underline{x}) < 1$.



Hình 2.41: Minh họa ví dụ 2.8.

Chẳng hạn hàm

$$h(\underline{x}) = h(x_1) = h(y) = e^{-|y|}$$

thỏa mãn điều kiện trên. Suy ra, khâu phi tuyến trong nhánh phản hồi có đường đặc tính:

$$u = f(y) = h(y)y = e^{-|y|}y$$ □

Ví dụ 2.9: Minh hoa tiêu chuẩn đường tròn

Cho hệ mô tả ở hình 2.42a). Biết rằng

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ và } \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hãy xác định lớp các khâu phi tuyến $g(\underline{x}, u)$ thích hợp để hệ ổn định tuyệt đối.

Ta sẽ sử dụng dạng đồ thị của tiêu chuẩn đường tròn để xác định khâu phi tuyến $g(\underline{x}, u)$ và muốn làm được như vậy thì phải có giả thiết rằng không có điểm cực nào của hàm truyền đạt

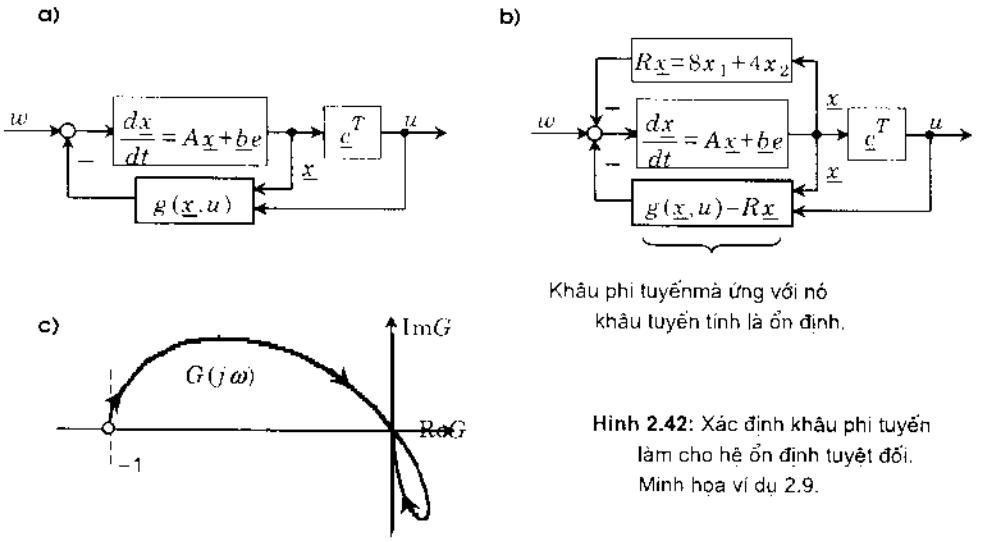
$$G(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b}$$

của khâu tuyến tính được phép nằm bên phải trục ảo.

Nhưng do khâu tuyến tính cho ban đầu với $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ không thỏa mãn điều kiện này, vì A có hai giá trị riêng là

$$\det(sI - A) = \det\begin{pmatrix} s-3 & -2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} = (s-3)(s+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = 3 \text{ và } s_2 = -1$$

nên công việc đầu tiên phải làm là xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái R để dịch chuyển tất cả các điểm cực của A sang phía trái trục ảo (hình 2.42b).



Hình 2.42: Xác định khâu phi tuyến làm cho hệ ổn định tuyệt đối. Minh họa ví dụ 2.9.

Sử dụng phương pháp modal để chuyển $s_1 = 3$ tới vị trí mới là $\lambda_1 = -1$ ta có

$$R = (8 \quad 4).$$

Nhờ có bộ điều khiển phản hồi trạng thái R, khâu tuyến tính trở thành

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - \underline{b}R)\underline{x} + \underline{b}w = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

với hàm truyền đạt mới

$$G(s) = (1 \quad 1)\begin{pmatrix} s-3 & -2 \\ 8 & s+5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s-1}{(s+1)^2}$$

có cả hai điểm cực đều nằm bên trái trục ảo.

Mặt khác, vì $G(j\omega)$ có phần thực là (hình 2.42c)

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{-1+3\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \geq -1$$

nên chắc chắn đường quỹ đạo biên–pha của nó sẽ nằm hoàn toàn bên phải đường tròn có tâm trên trục thực và cắt trục thực tại $\frac{-1}{k_1} = -\infty$, $\frac{-1}{k_2} = -1$.

Từ đây, ta suy ra được theo tiêu chuẩn đường tròn là hệ sẽ ổn định tuyệt đối với mọi khâu phi tuyến có

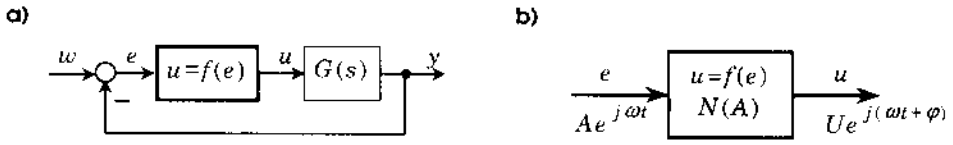
$$\tilde{g}(\underline{x}, u) = g(\underline{x}, u) - R\underline{x} = h(\underline{x})u \qquad \text{trong đó} \qquad k_1 = 0 < h(\underline{x}) < k_2 = 1$$

hay khâu phi tuyến cần tìm có dạng

$$g(\underline{x}, u) = h(\underline{x})u + (8x_1 + 4x_2) \qquad \text{với} \qquad 0 < h(\underline{x}) < 1.$$ ❐

2.4 Phương pháp cân bằng điều hòa

Phương pháp cân bằng điều hòa, hay còn gọi là *phương pháp tuyến tính hóa điều hòa* trình bày sau đây là một công cụ cho phép khảo sát sự tồn tại của dao động có trong hệ Hammerstein cho ở hình 2.43a). Hơn nữa, nếu có dao động, nó cũng giúp ta xác định được tính ổn định của dao động đó theo nghĩa: "*Một quỹ đạo trạng thái khép kín mô tả chế độ dao động điều hòa của hệ được gọi là ổn định nếu sau khi hệ bị tác động tức thời đánh bật ra khỏi chế độ dao động điều hòa đó và bị đưa tới điểm trạng thái khác nhưng nằm trong một lân cận nào đó của dao động thì hệ có khả năng tự quay về được chế độ dao động điều hòa này*".



Hình 2.43: Xấp xỉ khâu phi tuyến bằng hệ số khuếch đại phức.

2.4.1 Hệ số khuếch đại phức

Xét hệ có sơ đồ khối cho ở hình 2.43a) và giả sử rằng trong hệ có dao động điều hòa. Nếu hệ đang ở chế độ dao động điều hòa thì không riêng biến trạng thái $\underline{x}(t)$, các tín hiệu khác trong hệ như $e(t)$, $u(t)$, $y(t)$, cũng phải là những hàm tuần hoàn theo biến t, do đó chúng đều biểu diễn được dưới dạng *chuỗi Fourier*. Chẳng hạn:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t),\ \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.57}$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\ ,\quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)dt \quad \text{và} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)dt \tag{2.58}$$

Giả thiết rằng khâu tuyến tính trong hệ có khả năng lọc các thành phần tín hiệu có tần số cao, khi đó tín hiệu vào ra $e(t)$, $u(t)$ của khâu phi tuyến với công thức khai triển chuỗi dạng (2.57) có thể được xấp xỉ bởi

$$e(t) = A\sin\omega t \tag{2.59}$$

$$u(t) = f(e) = a_0 + a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t \tag{2.60}$$

Định lý 2.9: Nếu khâu phi tuyến $u=f(e)$ có $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ thì $a_0=0$.

Chứng minh:

Do $f(e)$ có dạng đối xứng qua gốc tọa độ nên $f(e) = -f(-e)$. Bởi vậy, với tín hiệu đầu vào $e(t) = A\sin\omega t$ của khâu phi tuyến ta sẽ có

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\sin\tau)d\tau \qquad (\text{thay } \omega t = \tau \text{ với } \omega T = 2\pi)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(A\sin\tau)d\tau + \int_{\pi}^{2\pi} f(A\sin\tau)d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(A\sin\tau)d\tau + \int_0^{\pi} f(A\sin(\mu+\pi))d\mu\right), \qquad \text{(thay } \mu = \tau - \pi)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(A\sin\tau)d\tau + \int_0^{\pi} f(-A\sin\mu)d\mu\right) = 0. \qquad \square$$

Sau đây ta sẽ giới hạn sự quan tâm ở các khâu phi tuyến có $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ.

Khi có $a_0=0$, tín hiệu đầu ra (2.60) của khâu phi tuyến ứng với đầu vào (2.59) sẽ là

$$u(t) = a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t = U\sin(\omega t + \varphi) \tag{2.61}$$

trong đó

$$a_1 = U\cos\varphi, \quad b_1 = U\sin\varphi.$$

Nhằm tổng quát hóa hơn nữa hai công thức xấp xỉ (2.59) và (2.60) cho cả trường hợp khác, chẳng hạn như khi tín hiệu đầu vào của khâu phi tuyến là

$$e(t) = A\cos\omega t$$

người ta đã phức hóa chúng thành

$$\tilde{e}(t) = Ae^{j\omega t} \tag{2.62}$$

$$\tilde{u}(t) = Ue^{j(\omega t + \varphi)} \tag{2.63}$$

Với hai tín hiệu phức trên, các công thức (2.59), (2.62) viết được thành

$$e(t) = \mathrm{Im}\{\tilde{e}(t)\} = \mathrm{Im}\{Ae^{j\omega t}\} = A\sin\omega t$$

$$u(t) = \mathrm{Im}\{\tilde{u}(t)\} = \mathrm{Im}\{Ue^{j(\omega t+\varphi)}\} = U\cos\varphi\sin\omega t + U\sin\varphi\cos\omega t$$

$$= a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t$$

và trong trường hợp $e(t) = A\cos\omega t$ thì

$$e(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{e}(t)\} = \mathrm{Re}\{Ae^{j\omega t}\} = A\cos\omega t$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{u}(t)\} = \mathrm{Re}\{Ue^{j(\omega t-\varphi)}\} = U\cos\varphi\cos\omega t - U\sin\varphi\sin\omega t$$

$$= a_1 \cos\omega t - b_1 \sin\omega t$$

Như vậy, rõ ràng là từ hai hằng số a_1, b_1 ta luôn xác định được tín hiệu ra $u(t)$ của khâu phi tuyến từ tín hiệu vào $e(t)$ của nó. Cụ thể hơn nữa, nếu như đã biết biên độ A của $e(t)$ và hai hằng số a_1, b_1 ta luôn xác định được tín hiệu ra $u(t)$. Như vậy hai hằng

số a_1 , b_1 mang đầy đủ tính chất của mô hình mô tả khâu phi tuyến trong chế độ dao động điều hòa.

Định nghĩa 2.3: Hệ số khuếch đại phức

$$N(A) = \frac{\tilde{u}(t)}{\tilde{e}(t)} = \frac{Ue^{j(\omega t+\varphi)}}{Ae^{j\omega t}} = \frac{Ue^{j\varphi}}{A} = \frac{a_1}{A} + j\frac{b_1}{A} = N_R + jN_I$$

là mô hình xấp xỉ trong lân cận dao động điều hòa của khâu phi tuyến $u=f(e)$ có $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ, trong đó N_R là ký hiệu chỉ phần thực và N_I là phần ảo của $N(A)$.

Định lý 2.10: Xét khâu phi tuyến $u=f(e)$ có $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ và được mô tả bằng hệ số khuếch đại phức

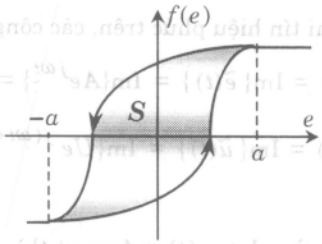
$$N(A) = \frac{a_1}{A} + j\frac{b_1}{A} = N_R + jN_I$$

a) Nếu khâu phi tuyến là tĩnh và không có trễ thì $N(A)$ là số thực.

b) Nếu khâu phi tuyến là có trễ đồng thời $f(e)$ bao một miền có diện tích bằng S thì (hình 2.44)

$$N_I = \mathrm{Im}\{N(A)\} = \pm\frac{S}{\pi A^2}$$

trong đó dấu + cho trường hợp chiều trễ theo chiều kim đồng hồ và dấu – khi chiều trễ ngược với chiều kim đồng hồ.



Hình 2.44: Khâu phi tuyến có trễ. Minh họa định lý 2.10.

Chứng minh:

a) Nếu $f(e)$ là đơn trị (khâu phi tuyến là tĩnh và không có trễ) thì khi $e(t)=A\sin\omega t$ và với phép thế biến $\omega t=\tau$ trong (2.58) ta có

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\sin\tau)\cos\tau\, d\tau = \frac{1}{A\pi}\int_{A}^{A} f(e)de = 0.$$

b) Nếu $f(e)$ là đường đặc tính đa trị (không có tính chất hàm), ví dụ như khâu phi tuyến kiểu từ trễ (hình 2.44) và với giả thiết là tín hiệu $e(t)=A\sin\omega t$ có biên độ dao động che kín miền trễ (đoạn từ $-a$ đến a), thì do đường lấy tích phân tạo thành vòng kín ta sẽ có

$$\oint f(e)de = \pm S$$

trong đó S là diện tích bao bởi đường cong $f(e)$ và dấu + cho trường hợp S luôn nằm bên phải khi đi theo chiều của $f(e)$, tức là theo chiều kim đồng hồ, còn dấu – khi S luôn nằm bên trái khi đi theo chiều của $f(e)$, hay ngược chiều kim đồng hồ.

Từ đây và với phép thế biến $\omega t = \tau$ trong (2.58) ta suy ra được

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\sin\tau)\cos\tau\, d\tau = \frac{1}{A\pi}\oint f(e)de = \pm\frac{S}{\pi A}$$

$$\Leftrightarrow \qquad N_I = \mathrm{Im}\{N(A)\} = \frac{b_1}{A} = \pm\frac{S}{\pi A^2}. \qquad \square$$

2.4.2 Xác định hệ số khuếch đại phức cho các khâu phi tuyến cơ bản

Mục 2.1.2 đã trình bày rõ từng khâu phi tuyến cơ bản, trong đó khâu phi tuyến ba vị trí có trễ mang nhiều nét đại diện tiêu biểu cho những khâu phi tuyến cơ bản khác. Bởi vậy ta nên bắt đầu với việc xác định hệ số khuếch đại phức của khâu này.

Khâu ba vị trí có trễ

Giả sử trong chế độ dao động điều hòa, khâu phi tuyến có tín hiệu đầu vào

$$e(t) = A\sin\omega t \quad \text{với} \quad A \geq b.$$

Do hàm $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ, có phần trễ được bao kín bởi đường cong ngược chiều kim đồng hồ (hình 2.45) nên theo định lý 2.10 có ngay

$$N_I = \mathrm{Im}\{N(A)\} = -\frac{S}{\pi A^2} = -\frac{2a(b-qb)}{\pi A^2} = -\frac{2ab(1-q)}{\pi A^2}.$$

Như vậy, ta chỉ còn phải xác định phần thực của $N(A)$ là N_R. Từ định nghĩa 2.3 và hình 2.45 có

$$N_R = \frac{a_1}{A} = \frac{2}{TA}\int_0^T u(t)\sin\omega t dt = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\tau)\sin\tau\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi A}\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a\sin\tau\, d\tau - \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} a\sin\tau\, d\tau\right) = \frac{a}{\pi A}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 + \cos\varphi_4 - \cos\varphi_3)$$

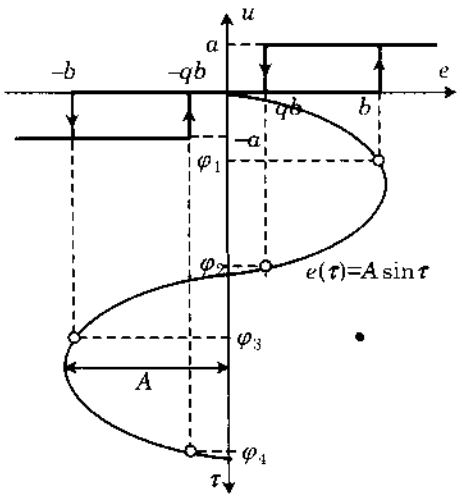
$$= \frac{2a}{\pi A}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_4), \qquad \text{vì} \quad \varphi_3 = \pi + \varphi_1 \quad \text{và} \quad \varphi_4 = \pi + \varphi_2$$

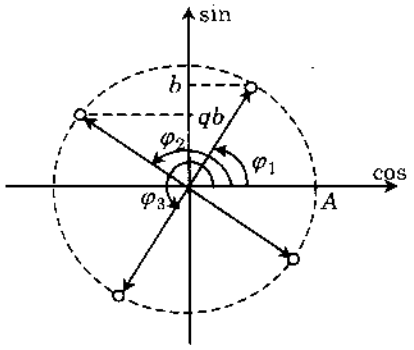
Ngoài ra do $\sin\varphi_1 = \dfrac{b}{A}$, $\sin\varphi_4 = \dfrac{qb}{A}$ nên cuối cùng ta được:

$$N_R = \frac{2a}{\pi A}\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{qb}{A}\right)^2}\right)$$

Suy ra

$$N(A) = \frac{2a}{\pi A}\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{qb}{A}\right)^2}\right) - j\,\frac{2ab(1-q)}{\pi A^2} \tag{2.64}$$





Hình 2.45: Xác định hệ số khuếch đại phức cho khâu ba vị trí có trễ.

Khâu ba vị trí

Với hình 2.6 mô tả đường đặc tính $f(e)$ của khâu ba vị trí ta thấy nó chính là một trường hợp riêng của khâu ba vị trí có trễ ở hình 2.10, hay hình 2.45 khi $q=1$.

Bởi vậy từ hệ số khuếch đại phức (2.64) của khâu ba vị trí có trễ, ở đây ta suy ra được ngay

$$N(A) = \frac{4a}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} \tag{2.65}$$

Ta thấy công thức (2.65) phù hợp với nội dung định lý 2.10 ở chỗ phần ảo của $N(A)$ bằng 0 vì đường $f(e)$ của khâu ba vị trí không khép kín.

Khâu hai vị trí có trễ

Hình 2.8 là đường đặc tính $u=f(e)$ của khâu hai vị trí có trễ. So sánh với đường đặc tính của khâu ba vị trí có trễ đã cho ở hình 2.10 hay hình 2.45 thì rõ ràng khâu hai vị trí

có trễ chỉ là một trường hợp riêng ứng với $q = -1$. Do đó, để có hệ số khuếch đại phức $N(A)$ của khâu hai vị trí có trễ ta chỉ cần thay $q=-1$ vào công thức (2.64) là được:

$$N(A) = \frac{4a}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2} - j\,\frac{4ab}{\pi A^2} \tag{2.66}$$

Khâu hai vị trí

Từ hình 2.4 biểu diễn đường đặc tính $u=f(e)$ của khâu hai vị trí thì rõ ràng nó là trường hợp đặc biệt của khâu hai vị trí có trễ (hình 2.8) khi $b=0$. Thay $b=0$ vào công thức (2.66) ta có được hệ số khuếch đại phức của khâu hai vị trí:

$$N(A) = \frac{4a}{\pi A} \tag{2.67}$$

Khâu khuếch đại bão hòa có trễ

Xét khâu khuếch đại bão hòa có trễ với đường đặc tính cho ở hình 2.46, trong đó

$$d = \frac{a}{k} + b, \qquad c = \frac{-a}{k} + b \tag{2.68}$$

và k là hệ số khuếch đại.

Như vậy thì

$$u = f(e) = \begin{cases} k(e-b) & \text{nếu } c \le e \le d \\ a & \text{nếu } d \le e \text{ hoặc } -c \le e \le d \text{ và } \dfrac{de}{dt} < 0 \\ k(e+b) & \text{nếu } -d \le e \le -c \\ -a & \text{nếu } e \le -d \text{ hoặc } -d \le e \le c \text{ và } \dfrac{de}{dt} > 0 \end{cases}$$

Vì $f(e)$ theo chiều ngược kim đồng hồ bao một miền có diện tích đúng bằng

$$S = 2a(c+d) = 4ab$$

nên từ định lý 2.10 ta có ngay được phần ảo của hệ số khuếch đại phức

$$N_I = \mathrm{Im}\{N(A)\} = \frac{-S}{\pi A^2} = \frac{-4ab}{\pi A^2} \tag{2.69}$$

Do đó chỉ còn phải xác định phần thực của $N(A)$ là N_R. Với tín hiệu đầu vào của khâu khuếch đại bão hòa

$$e(t) = A\sin\omega t \quad , \quad A \ge d.$$

thì từ các quan hệ $\varphi_3 = \pi + \varphi_1$, $\varphi_4 = \pi + \varphi_2$ ta được:

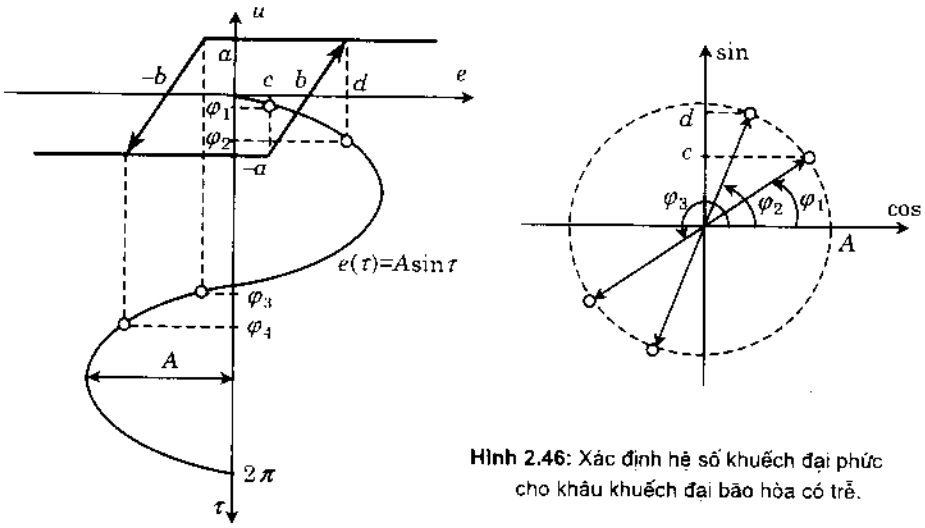
$$N_R = \frac{a_1}{A} = \frac{2}{TA}\int_0^T u(t)\sin\omega t dt = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\tau)\sin\tau\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi A}\left(\int_0^{\varphi_1} -a\sin\tau\, d\tau + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} k(e-b)\sin\tau\, d\tau + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} a\sin\tau\, d\tau + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} k(e+b)\sin\tau\, d\tau + \int_{\varphi_4}^{2\pi} -a\sin\tau\, d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{\pi A}\left[(a-kb)(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_3) + (a+kb)(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_4) + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ke\sin\tau\, d\tau + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} ke\sin\tau\, d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{\pi A}\left[2(a-kb)\cos\varphi_1 + 2(a+kb)\cos\varphi_2 + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} kA\sin^2\tau\, d\tau + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} kA\sin^2(\mu+\pi)\, d\mu\right]$$

trong đó $\mu = \tau - \pi$.



Hình 2.46: Xác định hệ số khuếch đại phức cho khâu khuếch đại bão hòa có trễ.

Ngoài ra, do có $\sin(\mu+\pi) = -\sin\mu$ nên:

$$N_R = \frac{2}{\pi A}\left[(a-kb)\cos\varphi_1 + (a+kb)\cos\varphi_2 + kA\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^2\tau\, d\tau\right]$$

$$= \frac{2}{\pi A}\left[(a-kb)\cos\varphi_1 + (a+kb)\cos\varphi_2 - \frac{kA}{2}(\cos x(\sin x + 1))\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi A}\left[\left(a - kb + \frac{kA}{2} + \frac{kA\sin\varphi_1}{2}\right)\cos\varphi_1 + \left(a + kb - \frac{kA}{2} - \frac{kA\sin\varphi_2}{2}\right)\cos\varphi_2\right]$$

Thay tiếp

$$\sin\varphi_1 = \frac{c}{A} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi_1 = \sqrt{1-\left(\frac{c}{A}\right)^2}$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{d}{A} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi_2 = \sqrt{1-\left(\frac{d}{A}\right)^2}$$

vào công thức trên và cùng với quan hệ (2.68) ta đi đến

$$N_R = \frac{2}{\pi A}\left[\left(a-kb+\frac{kA}{2}+\frac{kc}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{c}{A}\right)^2}+\left(a+kb-\frac{kA}{2}-\frac{kd}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{d}{A}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{k}{\pi A}\left[(A-c)\sqrt{1-\left(\frac{c}{A}\right)^2}+(d-A)\sqrt{1-\left(\frac{d}{A}\right)^2}\right] \tag{2.70}$$

Cuối cùng, ghép chung (2.70) và (2.69) lại với nhau, được:

$$N(A) = \frac{k}{\pi A}\left[(A-c)\sqrt{1-\left(\frac{c}{A}\right)^2}+(d-A)\sqrt{1-\left(\frac{d}{A}\right)^2}\right]-j\,\frac{4ab}{\pi A^2} \tag{2.71}$$

Khâu khuếch đại bão hòa

Từ đường đặc tính $u=f(e)$ của khâu khuếch đại bão hoà cho ở hình 2.5 ta thấy nó chính là một trường hợp riêng của khâu khuếch đại bão hòa có trễ ứng với $b=0$. Thay $b=0$ vào công thức (2.71) và để ý rằng $d=-c$ cũng như $a=kd$ ta sẽ có hệ số khuếch đại phức của khâu khuếch đại bão hòa như sau:

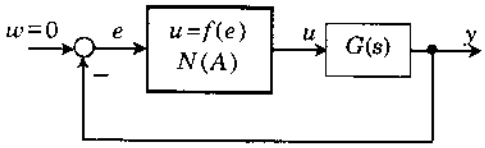
$$N(A) = \frac{2a}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{d}{A}\right)^2}$$

2.4.3 Xác định tính ổn định của dao động điều hòa trong hệ kín

Xét hệ Hammerstein có sơ đồ cho ở hình 2.47, trong đó khâu phi tuyến được giả thiết là có $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ.

Nếu trong hệ có dao động điều hòa thì không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng đó là dao động điều hòa autonom, tức là ứng với $w=0$. Trong lân cận dao động điều hòa khâu phi tuyến $u=f(e)$ được thay xấp xỉ bởi hệ số khuếch đại phức của nó

$$N(A) = \frac{\tilde{u}(t)}{\tilde{e}(t)} = N_R + jN_I$$



Hình 2.47: Thay khâu phi tuyến bằng hệ số khuếch đại phức trong lân cận dao động điều hòa.

Tiếp tục, từ quan hệ

$$\tilde{e}(t) = -\tilde{y}(t) = \tilde{u}(t)G(j\omega) = -N(A)Ae^{j\omega t}G(j\omega)$$

ta suy ra được

$$\mathrm{Re}\{\tilde{e}(t)\} = \mathrm{Re}\{-N(A)AG(j\omega)e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow \qquad A\cos\omega t = -A\left[\mathrm{Re}\big(N(A)G(j\omega)\big)\right]\cos\omega t + A\left[\mathrm{Im}\big(N(A)G(j\omega)\big)\right]\sin\omega t$$

Do đẳng thức trên phải đúng với mọi t nên qua so sánh các hệ số của hai vế trong đẳng thức trên với nhau ta được

$$0 = 1 + \mathrm{Re}\{N(A)G(j\omega)\}$$

$$0 = \mathrm{Im}\{N(A)G(j\omega)\}$$

hay

$$1 + N(A)G(j\omega) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \tag{2.72}$$

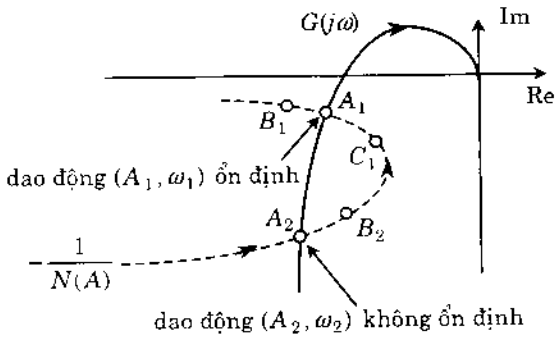
Công thức (2.72) là điều kiện để tồn tại chế độ hệ tự dao động (dao động điều hòa autonom). Nếu hệ tự dao động thì phải tồn tại ω và A thỏa mãn (2.72).

Định lý 2.11: Hệ Hammestein cho ở hình 2.47 với khâu phi tuyến $u=f(e)$ có $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ và khâu tuyến tính lọc tần số cao có hàm truyền $G(s)$, sẽ dao động điều hòa với biên độ A và tần số ω thỏa mãn (2.72).

Nghiệm A, ω của phương trình (2.72) có thể tìm được theo phương pháp đồ thị trong mặt phẳng phức như ở hình 2.48 mô tả, trong đó đường nét rời là đồ thị của $-\frac{1}{N(A)}$ với chiều mũi tên chỉ chiều tăng của A, đường nét liền là đồ thị của $G(j\omega)$ với chiều mũi tên chỉ chiều tăng của ω. Giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của (2.72). Chẳng hạn trong trường hợp ở hình 2.48 thì phương trình (2.72) có hai nghiệm là (A_1, ω_1) và (A_2, ω_2).

Điều kiện (2.72) có dạng giống như tiêu chuẩn Nyquist, trong đó điểm −1 trong tiêu chuẩn Nyquist nay được thay bằng − . Bởi vậy nếu có giả thiết thêm là khâu tuyến

tính $G(s)$ không những lọc được tần số cao mà còn *không có các điểm cực nằm bên phải trục ảo*, điểm trên trục ảo chỉ là nghiệm đơn $s=0$, thì ta có thể sử dụng tiêu chuẩn Nyquist để xét tính ổn định của dao động điều hòa autonom trong hệ.



Hình 2.48: Xác định chế độ tự dao động và tính ổn định của nó theo phương pháp cân bằng điều hòa.

Nhằm minh họa ta hãy xét dao động điều hòa (A_1, ω_1). Giả sử hệ đang ở chế độ dao động điều hòa này thì bị một nhiễu tức thời đánh bật nó ra khỏi chế độ dao động đó và đưa tới điểm B_1 có biên độ dao động lớn hơn (hình 2.48). Nhưng do đường $G(j\omega)$ khi đó không bao điểm B_1 nên hệ kín ổn định, tức là dao động tại B_1 có xu hướng tắt dần, hay biên độ của dao động giảm dần trở về A_1. Ngược lại nếu nhiễu lại đưa hệ từ A_1 tới C_1 có biên độ dao động nhỏ hơn thì do $G(j\omega)$ bao điểm C_1 nên hệ kín là không ổn định, tức là dao động tại C_1 có xu hướng lớn dần đưa hệ trở lại trở về A_1. Như vậy rõ ràng dao động điều hòa tại (A_1, ω_1) là dao động ổn định.

Lý luận tương tự cho dao động điều hòa tại (A_2, ω_2) ta sẽ thấy dao động đó là không ổn định. Chẳng hạn nhiễu tức thời đã đánh bật hệ ra khỏi A_2 và đưa tới B_2 thì do $G(j\omega)$ bao điểm B_2 nên hệ kín là không ổn định. Điều này làm cho biên độ của dao động ngày càng tăng. Theo chiều mũi tên của đường $-\frac{1}{N(A)}$ chỉ chiều tăng của biên độ dao động, điểm B_2 sẽ dần dịch chuyển ngày càng xa A_2 và kết thúc tại dao động ổn định A_1 chứ không quay lại điểm A_2 ban đầu.

Tổng kết lại ta đi đến kết luận:

Định lý 2.12: Hệ Hammerstein cho ở hình 2.47 với khâu phi tuyến $u=f(e)$ có $f(e)$ đối xứng qua gốc tọa độ và khâu tuyến tính lọc tần số cao có hàm truyền $G(s)$ không có điểm cực nào nằm bên phải trục ảo, điểm trên trục ảo chỉ là nghiệm đơn $s=0$, sẽ

dao động điều hòa ổn định tại giao điểm của đường đồ thị $-N^{-1}(A) = -\dfrac{1}{N(A)}$ với đường $G(j\omega)$ nếu ở giao điểm đó $-N^{-1}(A)$ cắt $G(j\omega)$ theo hướng từ trong ra ngoài. Ngược lại, *dao động sẽ không ổn định* nếu ở giao điểm đó $-N^{-1}(A)$ cắt $G(j\omega)$ theo hướng từ ngoài vào trong (hình 2.48).

Ví dụ 2.10: Minh họa phương pháp cân bằng điều hòa

Cho hệ Hammerstein với khâu phi tuyến là khâu ba vị trí có đường đặc tính:

$$u = f(e) = \begin{cases} a\,\mathrm{sgn}(e) & \text{nếu} \quad |e| > b \\ 0 \quad \text{nếu} & |e| < b \end{cases}$$

và khâu tuyến tính có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{k}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

Thay $G(s)$ này và hệ số khuếch đại phức $N(A)$ của khâu phi tuyến ba vị trí được lấy từ (2.65), vào phương trình (2.72) sẽ có

$$\frac{j\omega(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)}{k} = -\frac{4a}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{k}\left[-(T_1+T_2)\omega^2 + j\omega(1-T_1T_2\omega^2)\right] = -\frac{4a}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}$$

sau đó cân bằng hai vế theo phần thực và phần ảo riêng biệt, được:

$$\begin{cases} 1 - T_1T_2\omega^2 = 0 \\ \pi A^2(T_1+T_2)\omega^2 = 4ak\sqrt{A^2-b^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega^2 = \dfrac{1}{T_1T_2} \\ A^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda^2 b^2}}{2\lambda^2} \end{cases}$$

với $\lambda = \dfrac{\pi(T_1+T_2)}{4akT_1T_2}$. Vậy, điều kiện để hệ có dao động điều hòa là

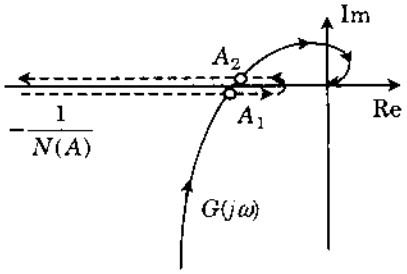
$$1 - 4\lambda^2 b^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2b} \geq \lambda \quad \Leftrightarrow \quad k \geq \frac{\pi(T_1+T_2)b}{2aT_1T_2}$$

và với điều kiện này, hệ sẽ có hai dao động cùng tần số

$$\omega =$$

nhưng với hai biên độ dao động khác nhau

$$A_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2 b^2}}{2\lambda^2}} \quad \text{và} \quad A_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4\lambda^2 b^2}}{2\lambda^2}}$$



Hình 2.49: Xác định tính ổn định của dao động điều hòa cho hệ ở ví dụ 2.10.

Các nghiệm trên cũng có thể được tìm theo phương pháp đồ thị như hình 2.49 minh họa, tức là trong mặt phẳng phức ta dựng hai đường đồ thị của $-\frac{1}{N(A)}$ và của $G(j\omega)$ rồi tìm giao điểm của chúng. Do hệ số khuếch đại phức $N(A)$ của khâu ba vị trí là số thực nên đường đồ thị $-\frac{1}{N(A)}$ luôn bám trên trục thực.

Cũng từ hình 2.49 và do cả ba điểm cực $s_1 = 0$, $s_2 = \frac{-1}{T_1}$, $s_3 = \frac{-1}{T_2}$ của hàm truyền đạt $G(s)$ đều không nằm bên phải trục ảo, nên theo tinh thần định lý 2.12, ta còn nhận thấy chỉ có dao động điều hòa ứng với biên độ A_2 là ổn định ($A_2 > A_1$). ❐

2.5 Điều khiển trượt

2.5.1 Gợi ý ban đầu: Điều khiển đối tượng tích phân kép

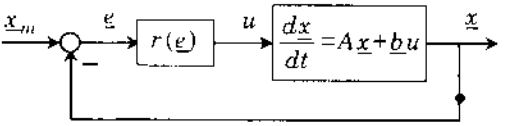
Điều khiển phản hồi trạng thái

Hiện tượng hệ thống trượt (sliding) về gốc tọa độ đã được biết đến mục 2.2.2. Sau đây, ta sẽ xét bài toán ngược của nó là thiết kế bộ điều khiển $u = r(\underline{e})$ để đưa vector trạng thái $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$ của đối tượng tuyến tính, tích phân kép có mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad , \qquad y = x_1$$

với $|u| \le 1$, về được vị trí mẫu mong muốn $\underline{x}_m$.

Vector trạng thái mẫu $\underline{x}_m$ có thể là vector hằng nếu trạng thái đích mong muốn đã được xác định cụ thể, song cũng có thể là một vector hàm theo thời gian nếu bài toán có nhiệm vụ tổng quát hơn là đưa trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ bám theo một quỹ đạo mẫu $\underline{x}_m(t)$ mong muốn nào đó.



Hình 2.50: Thiết kế bộ điều khiển trượt cho đối tượng tích phân kép.

Để đạt được mục đích đề ra là $\underline{x}(t)\rightarrow\underline{x}_m(t)$ thì bộ điều khiển $u=r(\underline{e})$ cần phải tạo ra được $\underline{e}(t)\rightarrow\underline{0}$. Ngoài ra, do giữa hai phần tử $x_1(t)$ và $x_2(t)$ của vector trạng thái $\underline{x}(t)$ có quan hệ $\frac{dx_1}{dt}=x_2$ nên giữa hai phần tử của vector tín hiệu chủ đạo $\underline{x}_m=\begin{pmatrix}x_{m1}\\x_{m2}\end{pmatrix}$ cũng phải có quan hệ tương ứng là $\frac{dx_{m1}}{dt}=x_{m2}$ và điều này kéo theo quan hệ phải có $\frac{de_1}{dt}=e_2$ giữa hai phần tử $e_1(t)$ và $e_2(t)$ của vector sai lệch trạng thái.

Xét hàm

$$s(\underline{e}) = ke_1+e_2= ke_1+\frac{de_1}{dt} \qquad \text{với} \qquad k>0 \tag{2.73}$$

ta thấy do có $k>0$ nên phương trình vi phân $s(\underline{e})=0$ có đa thức đặc tính

$$A(p) = k+p$$

là đa thức Hurwitz. Do đó nghiệm $e_1(t)$ cũng như $\underline{e}(t)$ của nó luôn tiến về 0 (nghiệm ổn định). Bởi vậy, cuối cùng bộ điều khiển $u=r(\underline{e})$ cũng chỉ cần làm cho $s(\underline{e})\rightarrow 0$ là đủ.

Hiển nhiên rằng để làm được điều này, bộ điều khiển phải tạo ra được dấu của hàm $s(\underline{e})$ luôn ngược với dấu của đạo hàm của nó là $\frac{ds(\underline{e})}{dt}$, nói cách khác khi $s(\underline{e})>0$ thì phải tạo ra được $\frac{ds}{dt}<0$ để làm giảm giá trị của nó, ngược lại khi $s(\underline{e})<0$ thì phải tăng giá trị nó lên bằng cách tạo ra $\frac{ds}{dt}>0$, hay

$$\frac{ds}{dt}\,\mathrm{sgn}(s) < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (k\frac{de_1}{dt}+\frac{de_2}{dt})\,\mathrm{sgn}(ke_1+e_2)<0 \tag{2.74}$$

Bất phương trình (2.74) chính là điều kiện để thiết kế bộ điều khiển trượt $u=r(\underline{e})$ sao cho trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ thống bám được theo quỹ đạo mẫu $\underline{x}_m(t)$.

Từ (2.74) ta có thể dễ dàng có được các bộ điều khiển khác nhau. Chẳng hạn như

$$(k\frac{de_1}{dt}+\frac{de_2}{dt})\operatorname{sgn}(s)<0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[k\frac{de_1}{dt}+\left(\frac{dx_{m2}}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\right)\right]\operatorname{sgn}(s)<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[k\frac{de_1}{dt}+\left(\frac{dx_{m2}}{dt}-u\right)\right]\operatorname{sgn}(s)<0 \quad \Leftrightarrow \quad k\frac{de_1}{dt}+\frac{dx_{m2}}{dt}-u=\begin{cases}<0 & \text{nếu } s(\underline{e})>0\\ >0 & \text{nếu } s(\underline{e})<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad u=r(\underline{e})=\begin{cases}>\left(k\dfrac{de_1}{dt}+\dfrac{dx_{m2}}{dt}\right) & \text{nếu } s(\underline{e})>0\\ <\left(k\dfrac{de_1}{dt}+\dfrac{dx_{m2}}{dt}\right) & \text{nếu } s(\underline{e})<0\end{cases} \tag{2.75}$$

và nếu như không bị ràng buộc bởi điều kiện $|u|\leq 1$ thì từ (2.75) ta còn có

$$u=r(\underline{e})=\left(k\frac{de_1}{dt}+\frac{dx_{m2}}{dt}\right)+\lambda\operatorname{sgn}(s(\underline{e})),\ \text{với mọi } \lambda>0 \tag{2.76}$$

Vector tín hiệu mẫu là hằng số

Khi vector tín hiệu mẫu $\underline{x}_m(t)$ có dạng hằng số thì không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là gốc tọa độ $\underline{x}_m=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Từ điều kiện (2.74) ta có

$$(k\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt})\operatorname{sgn}(ke_1+e_2)>0 \quad \Leftrightarrow \quad (kx_2+u)\operatorname{sgn}(ke_1+e_2)>0$$

$$\Leftrightarrow \quad kx_2\operatorname{sgn}(ke_1+e_2)+u\operatorname{sgn}(ke_1+e_2)>0 \tag{2.77}$$

và nếu kết hợp với điều kiện $|u|\leq 1$ ta có thể chọn u như sau

$$u=r(\underline{e})=\operatorname{sgn}(\underbrace{ke_1+e_2}_{s(\underline{e})})=\begin{cases}-1 & \text{nếu } s(\underline{e})<0\\ 1 & \text{nếu } s(\underline{e})>0\end{cases} \tag{2.78}$$

Chú ý: Không phải lúc nào điều kiện (2.77) và bộ điều khiển (2.78) cũng tương đương nhau. Riêng với bài toán đối tượng là tích phân kép thì từ (2.78) và sau một khoảng thời gian đủ lớn ta cũng suy ra được (2.77) nhờ có:

$$= u$$

Thật vậy, chẳng hạn với

$$s(\underline{e}) = ke_1 + e_2 > 0$$

tức là khi $u=1$, giá trị của x_2 sẽ luôn tăng với tốc độ không đổi nên sau một khoảng thời gian đủ lớn sẽ có $x_2 \geq 0$. Điều này kéo theo

$$kx_2 \operatorname{sgn}(s) > 0$$

hay cũng có (2.77).

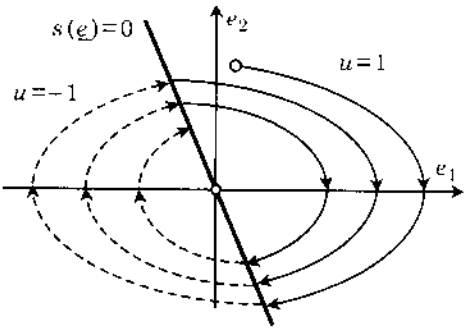
Ngoài ra, từ mô hình trạng thái của đối tượng và với một giá trị u cố định ($u=\pm 1$), x_1 có quan hệ với x_2 xác định theo phương pháp tách biến như sau:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{u} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{x_2^2}{2u} + c\,. \tag{2.79}$$

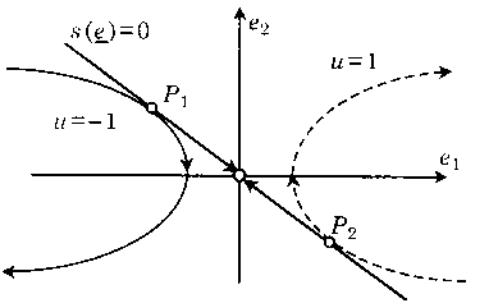
trong đó c là hằng số phụ thuộc vào giá trị ban đầu của x_1 và x_2.

Từ phương trình (2.79) và với quan hệ $x_1 = -e_1$, $x_2 = -e_2$ ta được

$$e_1 = -\frac{e_2^2}{2u} - c\,. \tag{2.80}$$



Hình 2.51: Đồ thị quỹ đạo sai lệch trạng thái.



Hình 2.52: Hiện tượng trượt về gốc tọa độ.

Hình 2.51 là các đường parabol rời nét (ứng với $u=-1$) và liền nét (ứng với $u=1$) mô tả phương trình (2.80). Các parabol rời hoặc liền nét này đều có chiều mũi tên chỉ chiều tăng giá trị của e_1 nếu nó nằm phía trên trục hoành (có $e_2 = \frac{de_1}{dt} > 0$) hoặc chỉ chiều giảm giá trị của e_1 nếu nó nằm phía dưới trục hoành vì lúc đó có $e_2 = \frac{de_1}{dt} < 0$. Quỹ đạo sai lệch

trạng thái của hệ là sự ghép nối của các đoạn parabol rời nét và liền nét mỗi khi nó đi qua đường ranh giới phân chia miền giá trị ±1 của u là $s(\underline{e})=0$. Khi quỹ đạo trạng thái đi vào đoạn $\overline{P_1P_2}$ giữa hai điểm tiếp xúc của đường trượt với các parabol (2.80) thì nó sẽ trượt dọc theo đường trượt về gốc tọa độ (hình 2.52). Hiện tượng trượt về gốc tọa độ còn được gọi là *hiện tượng bang–bang* hay *chattering* (xem lại mục 2.2.2). Độ dốc k của đường trượt xác định độ dài $\overline{P_1P_2}$. Độ dốc k càng lớn, khoảng trượt $\overline{P_1P_2}$ sẽ càng nhỏ.

Rõ ràng quỹ đạo sai lệch trạng thái của hệ luôn có xu hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó. Điều này chỉ rằng hệ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ với miền ổn định là toàn bộ không gian trạng thái (ổn định tuyệt đối).

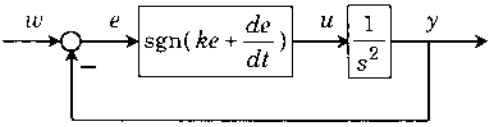
Để ý tiếp quan hệ giữa tín hiệu ra $y(t)$ với hai trạng thái $x_1(t)$ và $x_2(t)$ của khâu tuyến tính, tích phân kép

$$y = x_1 , \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2$$

tức là $e_2 = \dfrac{de_1}{dt}$, thì hệ điều khiển trượt đối tượng tích phân kép *theo nguyên tắc phản hồi tín hiệu ra* (chứ không phải phải hồi trạng thái) với cấu trúc cho ở hình 2.53 sẽ có bộ điều khiển theo công thức (2.78) là

$$u = r(e) = \operatorname{sgn}(\underbrace{ke + \frac{de}{dt}}_{s(e)})$$

trong đó $e_1 = e$, hay $e = w - y$



Hình 2.53: Điều khiển trượt đối tượng tích phân kép theo nguyên tắc phản hồi tín hiệu ra.

Điều khiển phản hồi tín hiệu ra

Để điều khiển trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ thống bám theo được vector tín hiệu chủ đạo $\underline{x}_m(t)$ khi không bị ràng buộc bởi điều kiện $|u| \le 1$, ta đã có bộ điều khiển (2.76) làm việc theo nguyên tắc phản hồi trạng thái $\underline{x}(t)$ như sau

$$u = \left(k\frac{de_1}{dt} + \frac{dx_{m2}}{dt} \right) + \lambda \ \operatorname{sgn}(s(\underline{e})), \text{ với mọi } \lambda > 0$$

Nhằm chuyển bộ điều khiển trên cho việc điều khiển phản hồi tín hiệu ra, ta sử dụng các mối quan hệ

$$w = x_{m1}, \quad e = w - y,$$

tức là

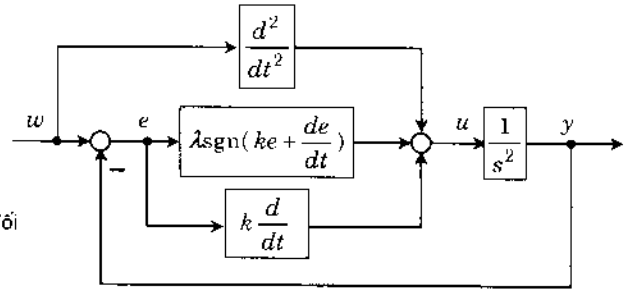
$$\frac{de_1}{dt} = \frac{de}{dt}, \quad \frac{dx_{m2}}{dt} = \frac{d^2 x_{m1}}{dt^2} = \frac{d^2 w}{dt^2}$$

và

$$s(\underline{e}) = ke + \frac{de}{dt}$$

thì sẽ đi đến (hình 2.54)

$$u = \left(k\frac{de}{dt} + \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + \lambda \operatorname{sgn}(ke + \frac{de}{dt}), \qquad \lambda > 0$$



Hình 2.54: Điều khiển trượt bám đối tượng tích phân kép.

2.5.2 Tổng quát hóa: Nguyên tắc chung của điều khiển trượt

Sau phần tìm hiểu nguyên lý điều khiển trượt cho đối tượng tích phân kép ta đã có thể tổng kết lại và rút ra được ba điểm cơ bản về bài toán thiết kế bộ điều khiển trượt cho đối tượng SISO như sau (hình 2.55):

1) Mục đích của điều khiển là tạo ra $e \to 0$ với $e(t)$ là sai lệch giữa tín hiệu chủ đạo $w(t)$ và tín hiệu đầu ra $y(t)$ của hệ thống.

2) Để đạt được $e \to 0$, trong điều khiển trượt người ta sử dụng hàm (gọi là *hàm trượt*)

$$s(e) = a_0 e + a_1 \frac{de}{dt} + \cdots + a_{n-2}\frac{d^{n-2}e}{dt^{n-2}} + \frac{d^{n-1}e}{dt^{n-1}} \tag{2.81}$$

trong đó n là bậc của mô hình đối tượng điều khiển và các hệ số a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-2} phải được chọn sao cho phương trình vi phân $s(e)=0$ có đa thức đặc tính

$$A(p) = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-2}p^{n-2} + p^{n-1} \tag{2.82}$$

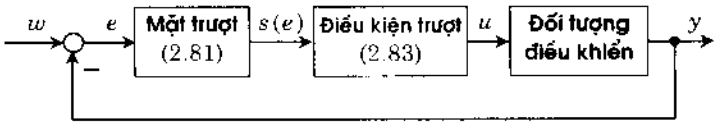
là đa thức Hurwitz. Điều này sẽ đảm bảo rằng không phụ thuộc vào giá trị đầu $e(0)$, $\frac{de(0)}{dt}$, ..., $\frac{d^{n-2}e(0)}{dt^{n-1}}$ nghiệm $e(t)$ của $s(e)=0$ luôn tiến về 0.

Phương trình mô tả mặt phẳng $s(e)=0$ có tên gọi là *mặt trượt* (*sliding surface*) trong không gian n chiều có các trục tọa độ e, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d^2e}{dt^2}$, ..., $\frac{d^{n-1}e}{dt^{n-1}}$.

3) Với hàm trượt $s(e)$, nhiệm vụ của bộ điều khiển lúc này nay được cụ thể rõ ràng hơn là phải tạo ra được $s \to 0$ để có $e \to 0$ và điều này tương đương với

$$\frac{ds}{dt}\operatorname{sgn}(s) < 0 \tag{2.83}$$

Điều kiện (2.83) vẫn còn thường được gọi là *điều kiện trượt* (*sliding condition*).



Hình 2.72: Minh họa nguyên lý chung của điều khiển trượt phản hồi tín hiệu ra đối tượng SISO.

Nhưng vấn đề khó khăn thực chất như ta đã thấy trong bài toán điều khiển đối tượng tích phân kép ở mục trước là làm thế nào để tìm được bộ điều khiển $u=r(s)$ có cấu trúc đơn giản mà lại thỏa mãn (2.83). Tiếp theo đây, và cũng để minh họa những kết luận trên về bài toán thiết kế bộ điều khiển trượt, ta sẽ xét bài toán điều khiển đối tượng SISO bậc n có mô hình truyền ngược qua các khâu tích phân:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + u \end{cases} \tag{2.84}$$

và $$y = x_1 \tag{2.85}$$

Gọi a_0, a_1, ..., a_{n-2} là bộ các hằng số làm cho đa thức $A(p)$ trong (2.82) là đa thức Hurwitz, khi đó ta sẽ có hàm trượt xác định theo (2.81) là

$$s(e) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i e}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i w}{dt^i} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y}{dt^i} \qquad \text{với} \qquad a_{n-1} = 1 \tag{2.86}$$

Đặt

$$\tilde{w}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i w}{dt^i} \tag{2.87}$$

rồi cùng với mô hình của đối tượng, hàm trượt (2.86) trở thành

$$s(e) = \tilde{w}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} \tag{2.88}$$

Thay (2.88) vào điều kiện trượt (2.83) ta đi đến

$$\left(\frac{d\tilde{w}}{dt} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{dx_{i+1}}{dt} \right) \operatorname{sgn}(s) < 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left[\frac{d\tilde{w}}{dt} - \sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+2} - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - u \right] \operatorname{sgn}(s) < 0$$

Nếu có thêm giả thiết tín hiệu chủ đạo $w(t)$ là hằng số (không phải là bài toán điều khiển tracking) thì theo (2.87) ta sẽ có

$$\frac{d\tilde{w}}{dt} = 0$$

Suy ra

$$\left[\sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+2} + f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + u \right] \operatorname{sgn}(s) > 0 \tag{2.89}$$

và một trong những bộ điều khiển thỏa mãn điều kiện trượt (2.89) nêu trên là

$$u = \begin{cases} 1 - \left(\sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+2} + f(x_1, \cdots, x_n) \right) & \text{nếu} \quad s(e) > 0 \\ -1 - \left(\sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+2} + f(x_1, \cdots, x_n) \right) & \text{nếu} \quad s(e) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad u = -\left(\sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+2} + f(x_1, \cdots, x_n) \right) + \operatorname{sgn}(s) \tag{2.90}$$

Bộ điều khiển (2.90) rõ ràng là có cấu trúc rất phức tạp. Tuy nhiên nếu còn có thêm được giả thiết là $|u| \le u_{max}$ về tín hiệu vào của đối tượng cũng như

$$|f(x_1, \cdots, x_n)| \le u_{\max} - \delta \qquad \text{trong đó } \delta > 0 \tag{2.91}$$

thì ta có thể chọn bộ điều khiển đơn giản hơn như sau

$$u = u_{\max}\,\mathrm{sgn}(s(e)). \tag{2.92}$$

Vì chẳng hạn khi có $s(e)>0$, ta sẽ có $u = u_{\max}$. Điều này kéo theo

$$\frac{dx_n}{dt} = f(x_1, \cdots, x_n) + u \ge \delta > 0$$

tức là x_n luôn tăng với vận tốc dương. Do đó sau khoảng thời gian đủ lớn sẽ có $x_n > 0$. Từ đây, với các quan hệ $\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}$ của đối tượng và với điều kiện phải có $a_i > 0$, thì sau một khoảng thời gian đủ lớn ta cũng có $x_i > 0$, hay

$$\sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+2} + f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + u > 0$$

Suy ra

$$\left[\sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+2} + f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + u\right] \mathrm{sgn}(s) > 0.$$

Ta đi đến định lý:

Định lý 2.13: Đối tượng mô tả bởi (2.84) và (2.85) với $|u| \le u_{\max}$, nếu thỏa mãn thêm điều kiện (2.91) thì sẽ điều khiển trượt được bằng bộ điều khiển (2.92).

Chú ý: Định lý trên chỉ là một điều kiện đủ. Điều đó nói rằng có thể có những đối tượng (2.84), (2.85) với $|u| \le u_{\max}$ không thỏa mãn điều kiện ràng buộc (2.91) song vẫn điều khiển trượt được bằng bộ điều khiển (2.92).

Ví dụ 2.11: Minh họa phương pháp điều khiển trượt

Xét đối tượng có mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sin(x_1 + x_2) + u \end{cases} \qquad \text{và} \qquad y = x_1$$

trong đó $|u| \le 2$.

Do đối tượng là bậc 2 nên hàm trượt (2.81) có dạng:

$$s(e) = ke + \frac{de}{dt}$$

trong đó $k>0$ để phương trình vi phân $s(e)=0$ có đa thức đặc tính:

$$A(p) = k+p$$

là đa thức Hurwitz. Ngoài ra, do

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1+x_2)$$

thỏa mãn điều kiện (2.91) nên ta có thể chọn bộ điều khiển trượt (2.92) là

$$u = 2\mathrm{sgn}(ke + \frac{de}{dt})$$

❐

3 LÝ THUYẾT LYAPUNOV

3.1 Hàm Lyapunov và hàm điều khiển Lyapunov

3.1.1 Tính ổn định Lyapunov và hàm Lyapunov (LF)

Xác định điểm cân bằng và điểm làm việc

Xét hệ thống không tự trị (*nonautonom*) mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t) \tag{3.1}$$

trong đó $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ là vector các tín hiệu trạng thái (hệ có n biến trạng thái) và $\underline{u} \in \mathbf{R}^m$ là vector các tín hiệu điều khiển (hệ có m tín hiệu đầu vào).

Như đã giải thích ở chương trước, điểm trạng thái $\underline{x}_e$ cân bằng của hệ (3.1) là điểm mà hệ sẽ nằm nguyên tại đó khi không bị một tác động nào từ bên ngoài ($\underline{u}=\underline{0}$). Như vậy, các *trạng thái xác lập* của hệ (3.1) cũng là điểm cân bằng $\underline{x}_e$ của nó. Căn cứ theo định nghĩa trên thì điểm trạng thái cân bằng $\underline{x}_e$ phải là nghiệm của:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t)\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} =: \underline{\tilde{f}}(\underline{x},t) = \underline{0} \tag{3.2}$$

Do phương trình (3.2) có thể có nhiều nghiệm hoặc cũng có thể vô nghiệm nên hệ phi tuyến (3.1) có thể có nhiều điểm cân bằng, nhưng cũng có thể không có một điểm cân bằng nào. Điều này là hoàn toàn mới so với hệ tuyến tính. Ta có thể thấy hệ tuyến tính tham số hằng với mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x}+B\underline{u} \tag{3.3}$$

luôn cân bằng tại gốc tọa độ $\underline{x}_e=\underline{0}$. Ngoài ra, nếu ma trận A suy biến thì nó không những cân bằng tại gốc $\underline{0}$ mà còn tại tất cả các điểm thuộc không gian nhân Ker(A). Nếu ma trận A còn là không suy biến (khả nghịch) thì hệ tuyến tính (3.3) chỉ có một điểm cân bằng duy nhất là gốc tọa độ.

Ví dụ 3.1: Xác định điểm cân bằng

Hệ phi tuyến bậc 2 (có hai biến trạng thái):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2(x_1+2)+u \end{pmatrix} \qquad \text{trong đó} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

cân bằng tại những điểm trạng thái là nghiệm của:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2(x_1+2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.$$

Nói cách khác hệ cân bằng trên toàn bộ trục x_1. ❐

Ví dụ 3.2: Xác định điểm cân bằng

Xét hệ với mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = k_1x_1 - k_2x_1^3 - k_3x_2 + u \end{cases}$$

Hệ có các điểm cân bằng là nghiệm của:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ k_1x_1 - k_2x_1^3 - k_3x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ k_1x_1 - k_2x_1^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}} \quad \text{nếu} \quad \dfrac{k_1}{k_2} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{và} \qquad x_2 = 0.$$

Như vậy số các điểm cân bằng sẽ là:

- một khi $\dfrac{k_1}{k_2} < 0$ và
- ba trong trường hợp ngược lại. ❐

Ví dụ 3.3: Xác định điểm cân bằng

Hệ Lorenz với mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3(-x_1+x_2) \\ x_1(26-x_3)-x_2 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{trong đó} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

có các điểm cân bằng là nghiệm của:

$$\begin{cases} 3(-x_1 + x_2) = 0 \\ x_1(26 - x_3) - x_2 = 0 \\ x_1 x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{e2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{e3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}.$$ ❐

Tương tự như khái niệm về điểm cân bằng $\underline{x}_e$ nhưng ứng với một tác động $\underline{u}(t)=u_d$ cố định không đổi và cho trước ta còn có khái niệm về *điểm dừng* được định nghĩa như sau: "Một điểm trạng thái $\underline{x}_d$ được gọi là *điểm dừng* của hệ (3.1) nếu như hệ đang ở điểm trạng thái $\underline{x}_d$ và với tác động $\underline{u}(t)=u_d$ cố định cho trước thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó."

Rõ ràng, điểm dừng theo định nghĩa vừa nêu sẽ là nghiệm của:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t)\Big|_{\underline{u}=\underline{u}_d} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}_d,t) = \underline{0}$$

trong đó $\underline{u}_d$ là cho trước.

Ví dụ 3.4: Xác định điểm dừng

Hệ phi tuyến với mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1^3 + u \\ x_1 + \sin x_2 \end{pmatrix} \quad \text{trong đó} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

khi được kích thích bằng tín hiệu $u(t)=1(t)$ cố định và cho trước sẽ có điểm dừng là nghiệm của

$$\begin{cases} x_1^3 + 1 = 0 \\ x_1 + \sin x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ \sin x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases} \quad \text{với} \quad k \in \mathbf{Z}.$$ ❐

Định nghĩa ổn định Lyapunov

Một trong những điều kiện, hay tiêu chuẩn chất lượng đầu tiên mà bộ điều khiển cần phải mang đến được cho hệ thống là *tính ổn định*. Đây là tính chất động học đảm

bảo rằng sau khi bị một tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi điểm cân bằng $\underline{x}_e$ thì sau đó hệ có khả năng *tự tìm về điểm cân bằng ban đầu* (hoặc ít nhất thì cũng về được lân cận khác của nó). Nói cách khác, nếu sau khi bị nhiễu tức thời đánh bật ra khỏi điểm cân bằng $\underline{x}_e$ và đưa tới một điểm trạng thái $\underline{x}_0$ không mong muốn nào đó mà hệ:

- Tự quay được về một lân cận của $\underline{x}_e$ thì được gọi là *ổn định* tại $\underline{x}_e$ (*stable*).
- Tự quay về được đúng điểm cân bằng $\underline{x}_e$ ban đầu thì được gọi là *ổn định tiệm cận* tại $\underline{x}_e$ (*asymtotically stable*).

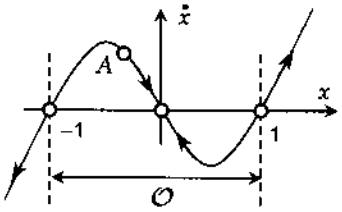
Ví dụ 3.5: Xác định tính ổn định tại các điểm cân bằng

Xét hệ bậc nhất có mô hình

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2-1)+u$$

Hệ có ba điểm cân bằng là nghiệm của

$$x(x^2-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{e1} = -1 \\ x_{e2} = 0 \\ x_{e3} = 1 \end{cases}$$



Hình 3.1: Xác định tính ổn định tại các điểm cân bằng. Minh họa ví dụ 3.5

Hình 3.1 biểu diễn các điểm cân bằng trong mặt phẳng ($\frac{dx}{dt}$, x) và quỹ đạo trạng thái tự do (ứng với tác động $u=0$). Chiều mũi tên trên quỹ đạo trạng thái được xác định từ sự hiển nhiên rằng nếu $\frac{dx}{dt}>0$ thì x phải có xu hướng tăng và ngược lại khi $\frac{dx}{dt}<0$ thì x có xu hướng giảm giá trị. Theo chiều mũi tên như vậy, ta có thể thấy được rằng hệ ổn định tiệm cận tại điểm cân bằng $x_{e2}=0$ và không ổn định tại hai điểm cân bằng còn lại. Chẳng hạn sau khi bị đánh bật ra khỏi x_{e2} và đưa tới A thì theo chiều mũi tên, hệ lại quay trở về x_{e2}. Ngoài ra, tại x_{e2} hệ ổn định với miền ổn định:

$$\mathcal{O} = \{\ x \in \mathbb{R} \ \mid\ |x| < 1\ \}$$ □

Quay lại khái niệm ổn định vừa trình bày. Ở đó, điều kiện *tự tìm về được điểm cân bằng ban đầu* có ý nói rằng không cần bất kỳ một tác động cưỡng bức nào từ bên ngoài để dẫn nó về $\underline{x}_e$, tức là không cần tín hiệu điều khiển, hay tín hiệu điều khiển được xem là bằng $\underline{0}$. Điều này cho thấy, hệ là ổn định nếu như nghiệm $\underline{x}(t)$ của phương trình vi phân (3.1) ứng với $\underline{u}=\underline{0}$, gọi là *quỹ đạo trạng thái tự do*, tức là nghiệm của:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\dot{\underline{x}},\underline{u},t)\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x},t) \tag{3.4}$$

thỏa mãn điều kiện đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0 \in \mathcal{O}$, luôn có xu hướng tiến về $\underline{x}_e$.

Do hệ phi tuyến (3.1) có thể có nhiều điểm cân bằng, nên khái niệm ổn định của hệ phi tuyến cũng phải gắn liền với điểm cân bằng $\underline{x}_e$ được xét. Hệ (3.1) có thể ổn định tại điểm cân bằng này, song lại không ổn định ở những điểm cân bằng khác. Điều này cũng là mới so với hệ tuyến tính. *Một hệ tuyến tính đã ổn định tại một điểm cân bằng nào đó thì cũng sẽ ổn định tại mọi điểm cân bằng khác.*

Định nghĩa 3.1: Giả sử hệ (3.1) cân bằng tại gốc tọa độ $\underline{0}$, tức là $\underline{f}(\underline{0},\underline{0},t) = \underline{0}$. Gọi $\mathcal{O}$ là một lân cận nào đó đủ lớn của $\underline{0}$. Khi đó hệ (3.1) sẽ là:

a) *Ổn định tại* $\underline{0}$ (*stable*) nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ bao giờ cũng tồn tại δ phụ thuộc ε sao cho quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ của nó, tức là nghiệm của (3.4), với điều kiện đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0 \in \mathcal{O}$, thỏa mãn:

$$\|\underline{x}_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq 0$$

b) *Ổn định tiệm cận tại* $\underline{0}$ (*asymtotically stable*) nếu nó ổn định tại $\underline{0}$ và thỏa mãn:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$$

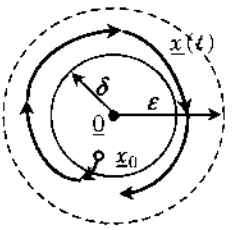
Lân cận $\mathcal{O}$ khi đó được gọi là *miền ổn định*. Nếu miền ổn định $\mathcal{O}$ là toàn bộ không gian trạng thái thì tính ổn định còn được gọi là *ổn định toàn cục* (*global*).

Định nghĩa trên nói rằng nếu cho trước một lân cận ε của $\underline{0}$, tức là tập các điểm $\underline{x}$ trong không gian trạng thái thỏa mãn $\|\underline{x}(t)\| < \varepsilon$ với ε là một số thực dương tùy ý nhưng cho trước, thì phải tồn tại một lân cận δ cũng của $\underline{0}$ sao cho mọi đường quỹ đạo trạng thái tại thời điểm $t=0$ đi qua một điểm $\underline{x}_0$ thuộc lân cận δ thì kể từ thời điểm đó sẽ nằm hoàn toàn trong lân cận ε (hình 3.2). Vì $\underline{x}_0=\underline{x}(0)$ nên để có được $\|\underline{x}(0)\| < \varepsilon$, lân cận δ phải nằm trong lân cận ε.

Tuy rằng khái niệm ổn định Lyapunov chỉ phát biểu cho trường hợp điểm cân bằng là gốc toạ độ $\underline{0}$, song điều này hoàn toàn không hạn chế tính tổng quát của nó. Chẳng hạn để xét tính ổn định của hệ (3.1) tại một điểm cân bằng $\underline{x}_e \neq \underline{0}$ nào đó, thì thông qua biến mới:

$$\underline{x} - \underline{x}_e = \underline{\tilde{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt}$$

việc xét tính ổn định của nó tại $\underline{x}_e$ nay sẽ trở thành



Hình 3.2: Minh họa khái niệm ổn định Lyapunov.

việc xét tính ổn định của:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{\tilde{x}} + x_e, t) = \underline{h}(\underline{\tilde{x}}, t) \tag{3.5}$$

tại điểm gốc tọa độ $\underline{\tilde{x}} = \underline{0}$.

Ví dụ 3.6: Minh họa việc xét tính ổn định tại điểm cân bằng không phải là gốc tọa độ

Cho hệ có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, u) = \begin{pmatrix} x_2^2 - 1 \\ x_2(x_1 + 1) + u \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Khi không bị kích thích ($u = 0$), mô hình của hệ trở thành:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2^2 - 1 \\ x_2(x_1 + 1) \end{pmatrix}$$

Hệ có các điểm cân bằng là nghiệm của

$$\begin{cases} x_2^2 - 1 = 0 \\ x_2(x_1 + 1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{x}_{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Như vậy thì việc xét tính ổn định của hệ (3.6) đã cho tại điểm cân bằng $\underline{x}_{e_1}$ sẽ tương đương với bài toán xét tính ổn định tại $\underline{0}$ của:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} (\tilde{x}_2 + 1)^2 - 1 \\ (\tilde{x}_2 + 1)((\tilde{x}_1 - 1) + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_2 \\ (\tilde{x}_2 + 1)\tilde{x}_1 \end{pmatrix}$$

và tính ổn định của (3.6) tại $\underline{x}_{e_2}$ sẽ tương đương với tính ổn định của hệ sau tại $\underline{0}$:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} (\tilde{x}_2 - 1)^2 - 1 \\ (\tilde{x}_2 - 1)((\tilde{x}_1 - 1) + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_2 \\ (\tilde{x}_2 - 1)\tilde{x}_1 \end{pmatrix}.$$

□

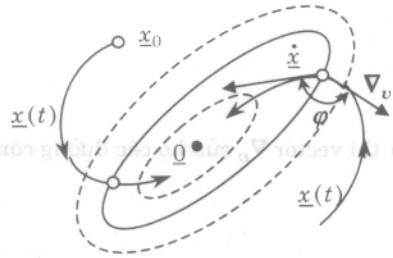
Tiêu chuẩn Lyapunov

Để việc tiếp cận tới tiêu chuẩn Lyapunov được đơn giản, ta sẽ bắt đầu với *hệ tự trị* (*autonom*) có mô hình trạng thái không bị kích thích ($\underline{u} = \underline{0}$) của nó là:

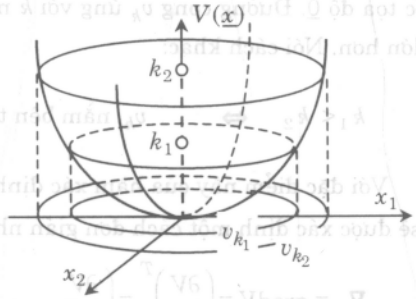
$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} := \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) \tag{3.7}$$

Giả thiết rằng hệ cân bằng tại gốc tọa độ $\underline{0}$. Khi đó, để xét tính ổn định của hệ tại $\underline{0}$, định nghĩa 3.1 về tính ổn định Lyapunov tại $\underline{0}$ đã gợi ý cho ta một hướng khá đơn

giản thông qua dạng *quỹ đạo trạng thái tự do* $\underline{x}(t)$ của nó, tức là nghiệm của (3.7) với một giá trị đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0\in\mathcal{O}$ thích hợp. Chẳng hạn bằng cách nào đó ta đã có được họ các đường cong khép kín v bao quanh gốc tọa độ $\underline{0}$. Vậy thì để kiểm tra hệ có ổn định tại $\underline{0}$ hay không ta chỉ cần kiểm tra xem nghiệm $\underline{x}(t)$ của (3.7) đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$ có cắt các đường cong v này theo hướng từ ngoài vào trong hay không (hình 3.3). Nếu $\underline{x}(t)$ cắt mọi đường cong họ v theo chiều từ ngoài vào trong thì hiển nhiên $\underline{x}(t)$ tiến về $\underline{0}$ và do đó hệ sẽ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$.



Hình 3.3: Một gợi ý về việc kiểm tra tính ổn định của hệ tại $\underline{0}$.



Hình 3.4: Tạo họ các đường cong kín bao điểm cân bằng $\underline{0}$.

Rõ ràng là cần và đủ để quỹ đạo pha $\underline{x}(t)$ của hệ không cắt bất cứ một đường cong khép kín thuộc họ v theo chiều từ trong ra ngoài là tại điểm cắt đó, tiếp tuyến của $\underline{x}(t)$ phải tạo với vector ∇_v, được định nghĩa là vector vuông góc với đường cong đó theo hướng từ trong ra ngoài, một góc φ không nhỏ hơn hơn 90^0. Nói cách khác, hệ sẽ ổn định tại $\underline{0}$ nếu như có được điều kiện:

$$0 \geq |\nabla_v| \cdot \left|\frac{d\underline{x}}{dt}\right| \cdot \cos\varphi = \nabla_v^T \frac{d\underline{x}}{dt} \tag{3.8}$$

tại mọi giao điểm của $\underline{x}(t)$ với các đường cong thuộc họ v.

Vấn đề còn lại là làm thế nào để có được họ các đường cong v sao cho việc kiểm tra điều kiện (3.8) được thuận tiện. Câu trả lời là sử dụng *hàm xác định dương* $V(\underline{x})$, được hiểu là một hàm trơn, thỏa mãn:

$$\gamma_1(|\underline{x}|) \leq V(\underline{x}) \leq \gamma_2(|\underline{x}|) \tag{3.9}$$

với mọi $\underline{x}$, trong đó $\gamma_1(r)$ và $\gamma_2(r)$ là hàm *thuộc lớp* $\mathcal{K}$, tức là những hàm $\gamma(r)$ thực, *không âm, đơn điệu tăng*, thỏa mãn $\gamma(0)=0$, của biến thực $r\geq 0$. Nếu còn có thêm $\lim_{r\to\infty}\gamma(r)=\infty$, thì hàm $\gamma(r)$ được gọi là *thuộc lớp* $\mathcal{K}_\infty$.

Hình 3.4 là một ví dụ về hàm *xác định dương tự trị* trong toàn bộ không gian trạng thái. Hàm xác định dương $V(\underline{x})$ này có phương trình mô tả

$$V(\underline{x}) = a\,x_1^2 + b\,x_2^2 = \underline{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{Q} \underline{x} \qquad \text{với } a,\ b \text{ là hai số thực dương}$$

và có tính chất là khi ta cắt nó bằng một mặt phẳng $V=k$ song song với đáy (không gian pha) và chiếu thiết diện xuống đáy thì ta sẽ được một đường cong khép kín υ_k chứa điểm gốc tọa độ $\underline{0}$. Đường cong υ_k ứng với k nhỏ hơn thì nằm bên trong đường cong υ_k ứng với k lớn hơn. Nói cách khác:

$$k_1 < k_2 \quad \Leftrightarrow \quad \upsilon_{k_1} \text{ nằm bên trong } \upsilon_{k_2}.$$

Với đặc điểm này của hàm xác định dương $V(\underline{x})$ thì vector ∇_υ của họ các đường cong υ sẽ được xác định một cách đơn giản như sau:

$$\nabla_\upsilon = \text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^T$$

vì vector gradient grad$V$ luôn vuông góc với đường cong υ_k và chỉ chiều tăng theo giá trị k của $V(\underline{x})=k$, tức là chỉ chiều từ trong ra ngoài của đường cong υ_k.

Từ đây, điều kiện (3.8) trở thành:

$$0 \geq \nabla_\upsilon^T \frac{d\underline{x}}{dt} = (\text{grad}V)^T \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \frac{dV}{dt}$$

trong đó ký hiệu $\dfrac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{\tilde{f}}(\underline{x})$ đôi khi còn được viết thành

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = L_{\underline{\tilde{f}}} V \tag{3.10}$$

và gọi là phép tính *Lie* (lấy theo tên của nhà toán học Ý Sophus Lie).

Một cách tổng quát, ta đi đến định lý phát biểu chung cho hệ phi tuyến không tự trị như sau:

Định lý 3.1: Hệ phi tuyến không tự trị, cân bằng tại gốc tọa độ và khi không bị kích thích thì được mô tả bởi mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}, t) \tag{3.11}$$

sẽ *ổn định* tại $\underline{0}$ với miền ổn định $\mathcal{O}$ nếu:

a) Trong $\mathcal{O}$ tồn tại một hàm xác định dương $V(\underline{x},t)$.

b) Đạo hàm của nó dọc theo (3.11) có giá trị không dương trong $\mathcal{O}$, tức là:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \tilde{\underline{f}}(\underline{x},t)}_{L_{\tilde{\underline{f}}}V} \leq 0 \quad \text{với mọi } \underline{x} \in \mathcal{O}. \tag{3.12}$$

Hàm $V(\underline{x},t)$ khi đó được gọi là *hàm Lyapunov* (CF, *Lyapunov function*).

Ngoài ra, nếu dấu bằng trong (3.12) xảy ra khi và chỉ khi $\underline{x}=\underline{0}$ thì tính ổn định đó còn là *ổn định tiệm cận* tại $\underline{0}$.

Chứng minh:

Vì $V(\underline{x},t)$ xác định dương nên từ tính chất hợp thức luôn tồn tại hai hàm $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ thuộc lớp $\mathcal{K}$ để có:

$$\gamma_1(|\underline{x}|) \leq V(\underline{x},t) \leq \gamma_2(|\underline{x}|) \qquad \forall t \geq 0$$

Suy ra, dọc theo quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$, hàm $V(\underline{x},t)$ không tăng theo t. Vậy cũng phải có với mọi t:

$$V(\underline{x}(t),t) \leq V(\underline{x}(0),0) = V(\underline{x}_0,0)$$

Bây giờ ta chọn một số dương ε tùy ý. Vì $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ thuộc lớp $\mathcal{K}$ nên luôn tồn tại một hằng số dương δ khác thỏa mãn:

$$\gamma_1(\varepsilon) \geq \gamma_2(\delta)$$

Giả sử $\underline{x}(t)$ là một quỹ đạo trạng thái có điểm đầu $\underline{x}_0$ thỏa mãn $\|\underline{x}_0\| < \delta$. Vậy thì:

$$\gamma_1(\varepsilon) \geq \gamma_2(\delta) \geq V(\underline{x}_0,0) \geq V(\underline{x}(t),t)$$

Nói cách khác, quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ đi từ $\underline{x}_0$ không thể ra ngoài lân cận ε được nữa, vì nếu không, với $|\underline{x}| > \varepsilon$ ta sẽ thu được điều nghịch lý:

$$V(\underline{x},t) \geq \gamma_1(|\underline{x}|) > \gamma_1(\varepsilon)$$

Vậy hệ ổn định tại $\underline{0}$ (đ.p.c.m). ❐

Ví dụ 3.7: Kiểm tra tính ổn định nhờ tiêu chuẩn Lyapunov

Xét hệ không bị kích thích với mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \qquad \text{với} \quad a > 0.$$

Sử dụng hàm xác định dương $V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ ta có:

$$L_{\underline{\tilde{f}}}V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = -2a\,(x_1^2 + x_2^2)^2 \leq 0 \qquad \text{với mọi } x_1 \neq 0 \text{ và } x_2 \neq 0$$

Vậy hệ ổn định tiệm cận Lyapunov tại $\underline{0}$. Hệ có miền ổn định $\mathcal{O}$ là toàn bộ không gian trạng thái nên nó là ổn định toàn cục. ❐

Ví dụ 3.8: Kiểm tra tính ổn định nhờ tiêu chuẩn Lyapunov

Xét hệ không bị kích thích với mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_1^3 x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Sử dụng hàm xác định dương

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

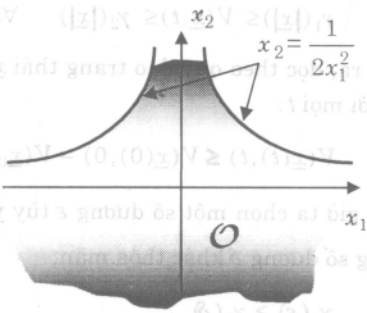
ta có:

$$L_{\underline{\tilde{f}}}V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\underline{\tilde{f}} = -2x_1^2(1 - 2x_1^2 x_2) - 2x_2^2$$

Bởi vậy hệ sẽ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ nếu có $1 - 2x_1^2 x_2 > 0$. Nói cách khác, mọi quỹ đạo trạng thái xuất phát từ một điểm bên trong miền (hình 3.5):

$$\mathcal{O} = \{\, \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 1 - 2x_1^2 x_2 > 0 \,\}$$

sẽ kết thúc tại $\underline{0}$. ❐



Hình 3.5: Miền ổn định của hệ cho trong ví dụ 3.8.

Vài điều bàn thêm xung quanh tiêu chuẩn ổn định Lyapunov

1) *Phương trình Lyapunov*:

Ta xét dạng đặc biệt của tiêu chuẩn Lyapunov, phát biểu cho hệ MIMO tuyến tính tham số hằng (3.3), có mô hình trạng thái không bị kích thích ($\underline{u} = \underline{0}$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} \tag{3.13}$$

với A là ma trận n hàng, n cột có phần tử là những số thực, tức là $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Sử dụng hàm xác định dương:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x} \tag{3.14}$$

với $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận *xác định dương* (ma trận đối xứng, có tất cả các giá trị riêng là những số thực dương). Khi đó sẽ có:

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^T P\underline{x} + \underline{x}^T P\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right) = (A\underline{x})^T P\underline{x} + \underline{x}^T P(A\underline{x})$$

$$= \underline{x}^T (A^T P + PA)\underline{x}$$

Vậy, hệ tuyến tính (3.13) sẽ ổn định tiệm cận (tại $\underline{0}$), nếu:

$$A^T P + PA = -Q \tag{3.15}$$

là ma trận xác định âm, hay Q là ma trận xác định dương.

Một trong các công cụ khá tiện ích để kiểm tra tính xác định dương của một ma trận là định lý Sylvester. Nó phát biểu như sau: "*Cần và đủ để ma trận đối xứng xác định dương là toàn bộ n ma trận con nằm dọc theo đường chéo chính của nó có định thức dương*". Như vậy, để kiểm tra tính xác định dương của ma trận đối xứng:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & & & \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

ta chỉ cần kiểm tra:

$$q_{11} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix} > 0, \cdots \tag{3.16}$$

Phương trình (3.15) của ẩn số P khi A và Q là cho trước, được gọi là *phương trình Lyapunov*.

Định lý 3.2: Phương trình Lyapunov (3.15) với Q là ma trận xác định dương (đối xứng, có các giá trị riêng là số thực dương) sẽ có nghiệm P duy nhất xác định dương khi và chỉ khi A là ma trận bền (có các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo).

Chứng minh:

Trước tiên ta chứng minh điều kiện cần, tức là khi phương trình Lyapunov (3.15) với Q xác định dương có nghiệm P cũng xác định dương thì A phải là ma trận bền.

Sử dụng hàm xác định dương $V(\underline{x})$ xác định theo (3.14). Khi đó, do có (3.15) với Q xác định dương nên đạo hàm $\frac{dV}{dt}$ dọc theo quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ của hệ tuyến tính có mô hình không bị kích thích (3.13) là xác định âm. Vậy theo tiêu chuẩn Lyapunov (định lý 3.1), hệ tuyến tính (3.13) là ổn định tiệm cận. Suy ra A phải là ma trận bền.

Chuyển sang điều kiện đủ, ta phải chứng minh khi A là ma trận bền thì phương trình Lyapunov (3.15) với Q xác định dương sẽ có nghiệm P duy nhất cũng xác định dương. Trước tiên ta đặt:

$$\frac{dJ(t)}{dt} = A^T J + JA \tag{3.17}$$

thỏa mãn điều kiện đầu $J(0)=Q$. Khi đó, từ lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng thì phương trình trên có nghiệm:

$$J(t) = e^{A^T t} Q e^{At}$$

Tích phân hai vế của (3.17) theo t và để ý tới tính bền của ma trận A, tức là $\lim_{t\to\infty} e^{At} = \Theta$, trong đó Θ là ký hiệu chỉ ma trận có tất cả các phần tử bằng 0, sẽ được

$$\int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt = -Q = A^T \int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt + \int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt \cdot A$$

Bởi vậy, qua so sánh với phương trình Lyapunov (3.15), ta đến được nghiệm P:

$$P = \int_0^\infty \frac{dJ}{dt} dt = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \tag{3.18}$$

và dễ dàng thấy nghiệm này là xác định dương.

Để chứng minh nghiệm (3.18) là duy nhất, ta giả sử ngoài nó ra còn có một nghiệm P_0 khác. Khi đó, với:

$$A^T P_0 + P_0 A = -Q$$

ta cũng có được từ (3.18) cũng như tính giao hoán được của $Ae^{At} = e^{At}A$:

$$P = -\int_0^\infty e^{A^T t}\left(A^T P_0 + P_0 A\right) e^{At} dt = -\int_0^\infty \left(e^{A^T t} A^T P_0 e^{At} + e^{A^T t} P_0 A e^{At}\right) dt$$

$$= -\int_0^\infty \left(A^T e^{A^T t} P_0 e^{At} + e^{A^T t} P_0 A e^{At}\right) dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^T t} P_0 e^{At}\right) dt = P_0$$

và đó chính là điều phải chứng minh. ❐

2) <u>*Khái niệm ổn định đều*</u> (*uniformly stable*):

Khái niệm này được bắt nguồn từ dạng quỹ đạo trạng thái tự do của hệ tuyến tính tham số hằng (3.3) có A là ma trận bền (hệ ổn định), tức là nghiệm của (3.13) với:

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 \quad \Rightarrow \quad |\underline{x}(t)| = |e^{At}\underline{x}_0| \le e^{\|A\|t}|\underline{x}_0| \le |\underline{x}_0| \tag{3.19}$$

Chuyển sang hệ phi tuyến (3.1) người ta nói: "*Hệ là ổn định đều trong miền $\mathcal{O}$ nếu có*

$$|\underline{x}(t)| \le \gamma(|\underline{x}_0|) \qquad \text{với mọi} \quad t \ge 0,\ \underline{x}_0 \in \mathcal{O} \text{ và } \gamma \in \mathcal{K}\text{"}$$

Như vậy, hệ (3.1) sẽ ổn định đều trong miền $\mathcal{O}$ nếu khi tiến về $\underline{0}$, khoảng cách giữa quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ so với điểm gốc $\underline{0}$ là không tăng.

Ký hiệu thêm $\mathcal{L}$ là lớp các hàm thực một biến $\delta(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$ đơn điệu giảm và thỏa mãn $\lim_{r\to\infty} \delta(r) = 0$. Cũng như vậy ta ký hiệu $\mathcal{KL}$ là lớp các hàm hai biến $\beta(z,t)$, $z,t \in \mathbb{R}^+$ nếu khi t cố định thì nó thuộc lớp $\mathcal{K}$ và khi z cố định thì nó thuộc lớp $\mathcal{L}$. Với các ký hiệu này thì rõ ràng *hệ* (3.1) *sẽ ổn định đều và tiệm cận về* $\underline{0}$ (*uniformly asymtotically stable*) *trong $\mathcal{O}$ nếu ở đó có*:

$$|\underline{x}(t)| \le \beta(|\underline{x}_0|, t) \qquad \text{với mọi} \quad t \ge 0,\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathcal{O} \text{ và } \beta \in \mathcal{KL} \tag{3.20}$$

Nói cách khác, hệ sẽ ổn định tiệm cận đều trong miền $\mathcal{O}$ nếu khi tiến về $\underline{0}$, khoảng cách giữa quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ so với gốc $\underline{0}$ luôn đơn điệu giảm theo thời gian.

3) <u>*Khái niệm ổn định theo hàm mũ*</u> (*exponentialy stable*):

Khái niệm này cũng được bắt nguồn từ dạng quỹ đạo trạng thái tự do (3.19) của hệ tuyến tính ổn định tham số hằng (3.3). Chuyển sang cho hệ phi tuyến (3.1), người ta định nghĩa: "*Hệ* (3.1) *được gọi là ổn định theo hàm mũ, nếu nó ổn định tiệm cận đều theo nghĩa* (3.20) *và ở đó có* $\beta(|\underline{x}_0|, t) = a|\underline{x}_0|e^{-bt}$ *với a, b là hai số dương*".

4) <u>*Tính đủ của tiêu chuẩn Lyapunov và miền ổn định $\mathcal{O}$*</u>:

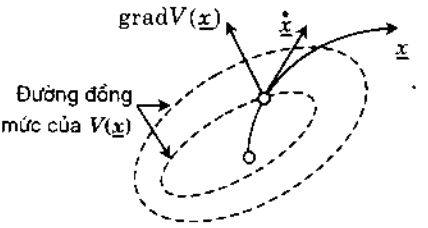
Về ý nghĩa sử dụng thì tiêu chuẩn Lyapunov phát biểu trong định lý 3.1 chỉ là một công cụ đủ. Điều đó nói rằng khi ta tìm được một hàm $V(\underline{x},t)$ như yêu cầu thì sẽ khẳng định được hệ ổn định tại $\underline{0}$. Song nếu ta không tìm được một hàm như vậy, *mà rất có thể là nó vẫn tồn tại*, thì điều đó chưa đủ để kết luận rằng hệ không ổn định.

Tương tự về miền ổn định tiệm cận $\mathcal{O}$. Ta chỉ khẳng định được mọi quỹ đạo trạng thái xuất phát từ bên trong $\mathcal{O}$ sẽ kết thúc tại $\underline{0}$ chứ không thể kết luận được là một quỹ đạo xuất phát từ bên ngoài $\mathcal{O}$ sẽ không tiến về $\underline{0}$ và kết thúc tại đó.

5) *Tiêu chuẩn kiểm tra tính không ổn định*:

Mặc dù không khẳng định được hệ (3.1) có ổn định hay không khi ta không tìm ra được một hàm Lyapunov $V(\underline{x},t)$ cụ thể, song hoàn toàn tương tự như ta có thể đưa ra một điều kiện đủ để kiểm tra tính *không ổn định* của hệ.

Hệ (3.1) sẽ không ổn định tại $\underline{0}$ nếu có ít nhất một quỹ đạo trạng thái của nó xuất phát từ lân cận $\underline{0}$ nhưng không kết thúc tại $\underline{0}$. Hình 3.6 lại cho thấy nếu đạo hàm $\dfrac{dV}{dt}$ của hàm xác định dương $V(\underline{x},t)$, tính dọc theo quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ của hệ, cũng xác định dương, tức là:



Hình 3.6: Giải thích về điều kiện để kiểm tra tính không ổn định.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + L_{\tilde{\underline{f}}}V > 0 \tag{3.21}$$

thì không những có một mà là mọi quỹ đạo trạng thái xuất phát từ lân cận $\underline{0}$ đều không kết thúc tại $\underline{0}$ (cắt các đường đồng mức của $V(\underline{x},t)$ từ trong ra ngoài). Nói cách khác: "*Hệ (3.1) sẽ không ổn định Lyapunov tại $\underline{0}$ nếu tồn tại một lân cận $\mathcal{O}$ của $\underline{0}$ sao cho trong $\mathcal{O}$ tồn tại một hàm xác định dương $V(\underline{x},t)$ và đạo hàm (3.21) của nó cũng xác định dương trong trong $\mathcal{O}$*"

6) *Một hệ quả của tiêu chuẩn Lyapunov: Định lý LaSalle*:

Tương tự như định lý 3.1, LaSalle đã đưa ra kết luận sau:

Định lý 3.3: Xét hệ tự trị mô tả bởi mô hình không bị kích thích

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \tilde{\underline{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Gọi $V(\underline{x})$ là hàm trơn, xác định dương theo nghĩa (3.9), tức là:

$$\gamma_1(|\underline{x}|) \le V(\underline{x}) \le \gamma_2(|\underline{x}|) \quad \text{với} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K} \tag{3.23}$$

Khi đó:

a) Nếu hàm $V(\underline{x})$ thỏa mãn

$$L_{\tilde{\underline{f}}}V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\tilde{\underline{f}}(\underline{x}) \le -W(\underline{x}) \le 0 \tag{3.24}$$

trong đó $W(\underline{x})$ là một hàm liên tục, thì hệ đã cho là ổn định (theo nghĩa Lyapunov), đồng thời nghiệm $\underline{x}(t)$ là bị chặn với:

$$\lim_{t\to\infty} W(\underline{x}(t)) = 0 \qquad (3.25)$$

b) Nếu hàm $W(\underline{x})$ trong (3.24) còn là xác định dương thì tính ổn định sẽ là ổn định tiệm cận toàn cục tại gốc $\underline{0}$.

Chứng minh:

Rõ ràng nội dung của định lý trên được suy ra từ định lý 3.1, riêng kết luận (3.25) khi đã có điều kiện (3.24) là còn phải chứng minh.

Trước hết ta thấy ngay được từ tính ổn định của hệ có mô hình không bị kích thích (3.22) là quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)$ ứng với giá trị đầu $\underline{x}_0$ hữu hạn phải là một hàm bị chặn, hay $|\underline{x}(t)|\le a$, $\forall t\ge 0$, trong đó $a>0$ là một số hữu hạn. Kết hợp với (3.23) thì $V(\underline{x})$ cũng là hàm bị chặn với mọi $\underline{x}(t)$. Suy ra:

$$\int_0^\infty W(\underline{x})dt = -\int_0^\infty \frac{dV}{dt}dt = V(\underline{x}_0)-V_\infty$$

cũng là một số hữu hạn, hay tích phân vô hạn $\int_0^\infty W(\underline{x})dt$ hội tụ. Vậy thì theo định lý của Babalas, hàm dưới dấu tích phân $W(\underline{x})$ phải tiến tới 0 và đó chính là điều phải chứng minh (3.25). ❐

3.1.2 Một số phương pháp tìm hàm Lyapunov

Có thể thấy ý nghĩa ứng dụng của tiêu chuẩn Lyapunov là không những kiểm tra được tính ổn định của hệ phi tuyến, mà còn chỉ ra được miền ổn định $\mathcal{O}$ của hệ. Tuy nhiên để có thể áp dụng được tiêu chuẩn Lyapunov ta cần phải đi tìm hàm $V(\underline{x},t)$ xác định dương theo nghĩa (3.9), phù hợp với hệ đã cho.

Sau đây ta sẽ làm quen với một số phương pháp điển hình thường được sử dụng để xác định hàm $V(\underline{x},t)$.

Phương pháp Krasovski

Xét hệ tự trị khi không bị kích thích thì được mô tả bởi mô hình (3.22). Giả sử rằng hệ cân bằng tại gốc tọa độ $\underline{0}$. Để tìm một hàm Lyapunov, Krasowski đã đề nghị sử dụng hàm xác định dương

$$V(\underline{x}) = \underline{\tilde{f}}^T Q \underline{\tilde{f}}$$

trong đó Q là ma trận $n \times n$ xác định dương. Khi đó

$$L_{\underline{\tilde{f}}}V = \left(\frac{d\underline{\tilde{f}}}{dt}\right)^T Q\underline{\tilde{f}} + \underline{\tilde{f}}^T Q\left(\frac{d\underline{\tilde{f}}}{dt}\right) = \left(\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^T Q\underline{\tilde{f}} + \underline{\tilde{f}}^T Q\left(\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\underline{\tilde{f}}\right)^T Q\underline{\tilde{f}} + \underline{\tilde{f}}^T Q\left(\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\underline{\tilde{f}}\right) = \underline{\tilde{f}}^T\left[\left(\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\right)^T Q + Q\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\right]\underline{\tilde{f}}$$

với

$$\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{f}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\tilde{f}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\tilde{f}_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\tilde{f}_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

là ký hiệu chỉ ma trận Jacobi của $\underline{\tilde{f}}(\underline{x})$. Như vậy $L_{\underline{\tilde{f}}}V$ thỏa mãn (3.24) khi và chỉ khi ma trận

$$K(\underline{x}) = \left(\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\right)^T Q + Q\left(\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\underline{x}}\right) \tag{3.27}$$

xác định bán âm trong $\mathcal{O}$.

Từ đây ta được:

Định lý 3.4: Hệ với mô hình không bị kích thích (3.22) sẽ ổn định tại gốc tọa độ $\underline{0}$ với miền ổn định $\mathcal{O}$ nếu tồn tại ma trận Q xác định dương và làm cho ma trận (3.27) xác định bán âm trong $\mathcal{O}$. Nếu ma trận (3.27) còn xác định âm thì hệ sẽ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$.

Chú ý: Miền ổn định tiệm cận là tập điểm trạng thái $\mathcal{O}$ mà tại đó ma trận $K(\underline{x})$ xác định âm. Với những ma trận Q khác nhau ta có các miền ổn định $\mathcal{O}$ khác nhau. Ma trận Q tốt nhất sẽ là ma trận có miền ổn định $\mathcal{O}$ lớn nhất.

Ví dụ 3.9: Minh họa định lý 3.4

Cho hệ có mô hình không bị kích thích

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1^3 \end{pmatrix}$$

Từ mô hình ta có

$$\underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\tilde{f}}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nếu $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{pmatrix}$ là một ma trận xác định dương thì

$$K(\underline{x}) = \left(\frac{\partial \underline{\tilde{f}}}{\partial \underline{x}}\right)^T Q + Q\left(\frac{\partial \underline{\tilde{f}}}{\partial \underline{x}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -3x_1^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 6q_3x_1^2 & 3q_2x_1^2 - q_1 + q_3 \\ 3q_2x_1^2 - q_1 + q_3 & 2(q_2 - q_3) \end{pmatrix}$$

Như vậy, theo Sylvester (3.16), để Q xác định dương và $K(\underline{x})$ xác định âm, ta phải chọn q_1, q_2, q_3 thỏa mãn

$$q_1 > 0, \quad q_1q_2 - q_3^2 > 0, \quad q_3 > 0 \quad \text{và} \quad 12q_3(q_2 - q_3)x_1^2 - (3q_2x_1^2 - q_1 + q_3)^2 > 0$$

Chẳng hạn các giá trị

$$q_1 = \frac{1}{12}, \quad q_2 = \frac{1}{3}, \quad q_3 = \frac{1}{12}$$

Suy ra

$$\frac{1}{4}x_1^2 - x_1^4 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x_1| < \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$. Tất cả các quỹ đạo pha, nếu đi qua một điểm thuộc miền $\mathcal{O}$ xác định bởi $|x_1| < \frac{1}{2}$ đều kết thúc tại gốc tọa độ. □

Ví dụ 3.10: Minh họa định lý 3.4

Xét lại hệ với mô hình không bị kích thích

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_1^3x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Chọn $Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$. Do

$$\underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_1^3x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\tilde{f}}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 6x_1^2x_2 - 1 & 2x_1^3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ta có

$$K(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 6x_1^2x_2 - 1 & 0 \\ 2x_1^3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6x_1^2x_2 - 1 & 2x_1^3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix} q_1(1 - 6x_1^2x_2) & -q_1x_1^3 \\ -q_1x_1^3 & q_2 \end{pmatrix}$$

Theo Sylvester (3.16) thì đủ để Q xác định dương và $K(\underline{x})$ xác định âm là

$$\begin{cases} q_1 = 1 > 0 \\ q_2 = 1 > 0 \\ q_1(1 - 6x_1^2x_2) > 0 \\ q_1q_2(1 - 6x_1^2x_2) - (q_1x_1^3)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 = 1 \\ 1 - 6x_1^2x_2 > x_1^6 \end{cases}$$

Vậy mọi quỹ đạo trạng thái, khi bắt đầu từ một điểm trạng thái bên trong miền ổn định

$$\mathcal{O} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - 6x_1^2x_2 > x_1^6 \}$$

thì sẽ kết thúc tại $\underline{0}$. ❐

Phương pháp Schultz–Gibson

Phương pháp Krasowski xuất phát từ hàm xác định dương $V(\underline{x})$ để tìm miền ổn định tiệm cận $\mathcal{O}$ trên cơ sở áp dụng tiêu chuẩn Sylvester sao cho $L_{\tilde{\underline{f}}}V$ xác định âm trong $\mathcal{O}$. Ngược lại, phương pháp Schultz–Gibson mô tả dưới đây lại đi từ hàm $L_{\tilde{\underline{f}}}V$ xác định âm để tìm miền ổn định tiệm cận $\mathcal{O}$ sao cho trên đó có $V(\underline{x})$ xác định dương.

Cho hệ tự trị cân bằng tại gốc $\underline{0}$ có mô hình không bị kích thích mô tả bởi phương trình trạng thái (3.22). Nếu $V(\underline{x})$ là hàm Lyapunov của hệ thì

$$L_{\tilde{\underline{f}}}V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\,\tilde{\underline{f}}(\underline{x}) = (\text{grad}V)^T\,\tilde{\underline{f}}(\underline{x}) \leq 0$$

với mọi $\underline{x} \in \mathcal{O}$, trong đó dấu bằng chỉ xảy ra khi $\underline{x} = \underline{0}$.

Để kiểm tra tính ổn định tiệm cận của hệ tại $\underline{0}$, Schultz và Gibson đã xét lớp các hàm nhiều biến $V(\underline{x})$ có vector gradient dạng

$$\text{grad}V = Q\underline{x} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

trong đó Q không bắt buộc là ma trận hằng nhưng phải thỏa mãn:

1) $L_{\underline{\tilde{f}}}V = (\text{grad}V)^T \ \underline{\tilde{f}}(\underline{x})$ là ma trận xác định âm.

2) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}$ đúng với mọi i, k.

Như vậy ta sẽ chọn Q là ma trận đối xứng $Q^T = Q$. Sau khi đã tìm được Q, hàm $V(\underline{x})$ được xác định theo

$$V(\underline{x}) = \int_0^{\underline{x}} \text{grad}V d\underline{x}$$

với một đường lấy tích phân thích hợp. Thông thường và để cho đơn giản, người ta hay tính $V(\underline{x})$ từ grad$V$ bằng phương pháp tích phân trực tiếp theo từng biến. Cuối cùng, xác định miền ổn định $\mathcal{O}$ sao cho trên nó hàm $V(\underline{x})$ xác định dương.

Ví dụ 3.11: Minh họa phương pháp Schultz–Gibson

Cho hệ không kích thích mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 - \sin x_1 \end{pmatrix}$$

Hệ cân bằng tại $\underline{0}$. Sử dụng ma trận đối xứng $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{pmatrix}$ thì theo (3.28) ta có

$$\text{grad}V = \begin{pmatrix} \partial V / \partial x_1 \\ \partial V / \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 x_1 + q_3 x_2 \\ q_3 x_1 + q_2 x_2 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Suy ra

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = (\text{grad}V)^T \ \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = (q_1 x_1 + q_3 x_2 \quad , \quad q_3 x_1 + q_2 x_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 - \sin x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(q_1 - q_3 - q_2 \frac{\sin x_1}{x_1} \right) x_1 x_2 + (q_3 - q_2) x_2^2 - q_3 \frac{\sin x_1}{x_1} x_1^2$$

Nếu chọn

$$q_1 = q_3 + q_2 \frac{\sin x_1}{x_1}, \quad q_2 = 2, \quad \text{và} \quad q_3 \text{ là hằng số và thỏa mãn } 0 < q_3 < q_2 = 2 \tag{3.30}$$

thì $\dfrac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{\tilde{f}}(\underline{x})$ sẽ xác định âm khi

$$\frac{\sin x_1}{x_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad |x_1| < 2\pi. \tag{3.31}$$

Để tính $V(\underline{x})$ ta đi từ

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = q_3 x_1 + q_2 x_2 = q_3 x_1 + 2x_1$$

và được

$$V(\underline{x}) = q_3 x_1 x_2 + x_2^2 + k(x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = q_3 x_2 + \frac{d}{dx_1} k(x_1)$$

thay ngược lại vào (3.29) rồi so sánh với (3.30) ta đi đến

$$\frac{d}{dx_1} k(x_1) = q_1 x_1 = q_3 x_1 + 2\sin x_1 \quad \Rightarrow \quad k(x_1) = \frac{1}{2} q_3 x_1^2 + 2(1 - \cos x_1),$$

Suy ra

$$V(\underline{x}) = q_3 x_1 x_2 + x_2^2 + \frac{1}{2} q_3 x_1^2 + 2(1 - \cos x_1)$$

$$= \left(\frac{q_3}{2} x_1 + x_2\right)^2 + \frac{q_3}{2}\left(1 - \frac{q_3}{2}\right) + 2(1 - \cos x_1)$$

và hàm này xác định dương với mọi $\underline{x}$. Kết hợp cùng với (3.31) thì miền ổn định $\mathcal{O}$ của hệ sẽ gồm các điểm trạng thái có $|x_1| < 2\pi$. ❐

Ví dụ 3.12: Minh họa phương pháp Schultz–Gibson

Cho hệ không kích thích mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^2 x_2 - x_1^3 \end{pmatrix}$$

Hệ cân bằng tại $\underline{0}$. Chọn $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng có các phần tử q_1, q_2, q_3 là những hàm theo $\underline{x}$ ta sẽ có

$$\text{grad}V = \begin{pmatrix} \partial V / \partial x_1 \\ \partial V / \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 x_1 + q_3 x_2 \\ q_3 x_1 + q_2 x_2 \end{pmatrix}$$

Để

$$L_{\underline{\tilde{f}}} V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = (q_1 - q_3 x_1^2 - q_2 x_1^2) x_1 x_2 + (q_3 - q_2 x_1^2) x_2^2 - q_3 x_1^4$$

xác định âm ta có thể chọn

$$q_3 = 0, \; q_2 = 1 \quad \text{và} \quad q_1 = x_1^2.$$

Với các giá trị này thì từ

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = q_3 x_1 + q_2 x_2 = x_2$$

ta suy ra được

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + k(x_1) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1}k(x_1)$$

Thay vào

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = q_1 x_1 + q_3 x_2 = x_1^3$$

ta đi đến

$$\frac{d}{dx_1}k(x_1) = x_1^3 \qquad \Rightarrow \qquad k(x_1) = \frac{1}{4}x_1^4 .$$

Với kết quả này, hàm

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^4$$

xác định dương với mọi $\underline{x}$, nên hệ là ổn định tiệm cận toàn cục. □

Phương pháp Aiserman

Trong khi hai phương pháp của Krasovski và của Schulz–Gibson có thể áp dụng cho một hệ phi tuyến bất kỳ thì phương pháp Aiserman chỉ ứng dụng được cho hệ có mô hình không bị kích thích dạng

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = (A + E(\underline{x}))\underline{x} \tag{3.32}$$

trong đó A là ma trận hằng và E là ma trận phụ thuộc tham số $\underline{x}$. Giả thiết thêm là vector $E(\underline{x})\underline{x}$ trong một lân cận của $\underline{0}$ có modul rất nhỏ. Giả thiết này sẽ được thỏa mãn nếu như

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{0}} E(\underline{x}) = \Theta \tag{3.33}$$

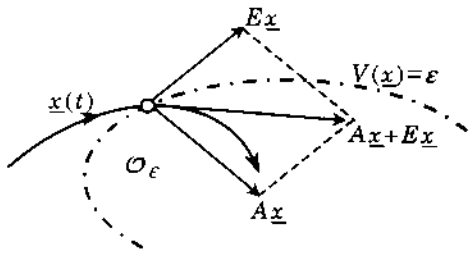
với Θ, như đã nói, là ký hiệu chỉ ma trận có các phần tử 0. Như vậy, rõ ràng là trong lân cận gốc tọa độ, hệ có thể được xấp xỉ bằng mô hình tuyến tính tham số hằng

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} \tag{3.34}$$

Giả sử hệ cân bằng tại gốc. Gọi $V(\underline{x})$ là hàm Lyapunov của (3.32); tức là bản thân nó xác định dương và xác định âm. Khi đó đường đồng mức $V(\underline{x}) = \varepsilon$ sẽ chính là

biên một lân cận gốc tọa độ (điểm cân bằng) và lân cận này là tập các điểm trạng thái thỏa mãn (hình 3.7)

$$\mathcal{O}_{\varepsilon} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid V(\underline{x}) < \varepsilon \}. \tag{3.35}$$



Hình 3.7: Mô tả phương pháp của Aiserman.

Hệ (3.32) sẽ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ khi vector $A\underline{x}+E\underline{x}$, là vector tiếp tuyến của quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$, luôn có hướng chỉ vào phía trong đường đồng mức $V(\underline{x})=\varepsilon$, tức là tại giao điểm của quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ với biên của $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ vector $A\underline{x}+E\underline{x}$ phải nằm hoàn toàn bên trong $\mathcal{O}_{\varepsilon}$.

Giả thiết rằng hệ tuyến tính tham số hằng (3.34) ổn định. Vậy thì các giá trị riêng s_i của A phải có phần thực âm và điều này tương đương với việc tại giao điểm với đường đồng mức $V(\underline{x})=\varepsilon$ vector định hướng $A\underline{x}$ nằm hoàn toàn bên trong miền $\mathcal{O}_{\varepsilon}$. Ta chọn

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$$

trong đó $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận xác định dương. Theo định lý 3.2, vector định hướng $A\underline{x}$ nằm hoàn toàn bên trong miền $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ khi và chỉ khi ma trận Q định nghĩa bởi

$$Q = -(A^T P + PA) \tag{3.36}$$

cũng xác định dương.

Do có giả thiết (3.33) nên với mọi ε đủ nhỏ vector $A\underline{x}+E\underline{x}$ cũng sẽ nằm bên trong $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ giống như $A\underline{x}$ hay hệ (3.32) là ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$. Vấn đề còn lại là $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ được phép lớn bao nhiêu để $A\underline{x}$ và $A\underline{x}+E\underline{x}$ cùng nằm trong nó.

Thay $\tilde{A} = A+E$ vào (3.36) thì điều kiện để vector vector $A\underline{x}+E\underline{x}$ nằm được bên trong $\mathcal{O}_{\varepsilon}$ với ε bất kỳ là tính xác định âm của ma trận

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} \tag{3.37}$$

Từ đây ta có được hai bước của thuật toán Aiserman nhằm xác định miền ổn định $\mathcal{O}$ cho hệ (3.32) như sau:

1) Cho trước Q xác định dương. Giải phương trình (3.36) để tìm P xác định dương. Nếu phương trình vô nghiệm thì hệ không ổn định tại $\underline{0}$.
2) Thay P vừa tìm được vào (3.37) và áp dụng tiêu chuẩn Sylvester (3.16) để tìm tập điểm $\underline{x}$ mà ở đó ma trận (3.37) xác định âm.

Ví dụ 3.13: Minh họa phương pháp Aiserman

Cho hệ không kích thích mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2^2 \\ -x_1^3 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Hệ cân bằng tại $\underline{0}$. Tách mô hình thành hai phần theo (3.32)

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & x_2 \\ -x_1^2 & -2 \end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_1^2 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}$$

sẽ thấy do có

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_1^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nên ta áp dụng được phương pháp Aiserman.

Chọn $Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ xác định dương và giả sử $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}$, thì từ (3.36) với

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ta được nghiệm

$$2\begin{pmatrix} -p_1 & -p_3 \\ -2p_3 & -2p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thay ma trận P xác định dương vừa tìm được vào (3.37)

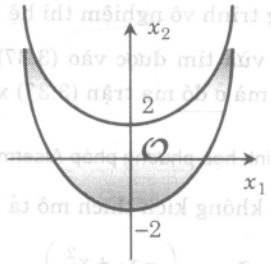
$$\begin{pmatrix} -1 & -x_1^2 \\ x_2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & x_2 \\ -x_1^2 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 & x_1^2 - 2x_2 \\ x_1^2 - 2x_2 & 4 \end{pmatrix}$$

sẽ thấy, để ma trận trên xác định âm thì theo tiêu chuẩn Sylvester (3.16) phải có

$$16 - (x_1^2 - 2x_2)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}x_1^2 + 2 > x_2 > \frac{1}{2}x_1^2 - 2$$

hay miền ổn định $\mathcal{O}$ là tập điểm (hình 3.8):

$$\mathcal{O} = \{\ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ \frac{1}{2}x_1^2 + 2 > x_2 > \frac{1}{2}x_1^2 - 2\ \}$$



Hình 3.8: Minh họa ví dụ 3.13.

3.1.3 Hàm điều khiển Lyapunov (CLF)

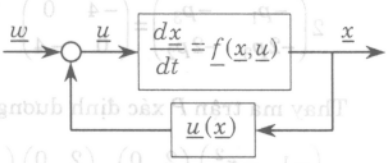
Mặc dù có xuất xứ ban đầu là để kiểm tra tính ổn định của hệ phi tuyến (3.1), song người ta lại biết đến lý thuyết Lyapunov nhiều nhờ ý nghĩa ứng dụng của nó trong việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái làm ổn định đối tượng phi tuyến, gọi là *phương pháp thiết kế Lyapunov*. Có thể nói, cho tới nay phương pháp thiết kế Lyapunov này không những là một công cụ đơn giản nhưng toàn năng để thiết kế bộ điều khiển, mà còn là một gợi ý tiền đề cho nhiều các phương pháp điều khiển phi tuyến khác như điều khiển ổn định ISS trong điều khiển thích nghi, điều khiển thụ động (passive), thiết kế bộ quan sát trạng thái ....

Để minh họa phương pháp thiết kế Lyapunov, trước tiên ta xét đối tượng tự trị:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) \tag{3.38}$$

và giả sử nó được điều khiển bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái $\underline{u}(\underline{x})$. Khi đó hệ kín (hình 3.9) trong trường hợp không bị kích thích ($\underline{w}=\underline{0}$) sẽ có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}(\underline{x}))$$



Hình 3.9: Ứng dụng tiêu chuẩn Lyapunov để thiết kế bộ điều khiển.

Gọi $V(\underline{x})$ là hàm trơn, xác định dương thích hợp. Như vậy, theo định lý 3.1, để hệ kín *ổn định tiệm cận* với miền ổn định $\mathcal{O}$ thì bộ điều khiển cần tìm $\underline{u}(\underline{x})$ phải làm cho:

$$L_{\underline{f}}V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x},\underline{u}(\underline{x}))$$

xác định âm với mọi $\underline{x} \in \mathcal{O}$, tức là phải tìm một quan hệ $\underline{u}(\underline{x})$ để có (định lý 3.3):

$$\begin{cases} L_{\underline{f}}V = \dfrac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}(\underline{x})) \le -W(\underline{x}) \\ \rho_1(|\underline{x}|) \le W(\underline{x}) \le \rho_2(|\underline{x}|) \quad \text{với} \quad \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K} \text{ và } \underline{x} \in \mathcal{O} \end{cases} \tag{3.39}$$

Một hàm trơn, xác định dương $V(\underline{x})$ nào đó mà với nó tồn tại ít nhất một quan hệ $\underline{u}(\underline{x})$ thỏa mãn (3.39), được gọi là *hàm điều khiển Lyapunov* (CLF–*Control Lyapunov Function*). Nói cách khác, một hàm trơn, xác định dương $V(\underline{x})$ bất kỳ sẽ được gọi là hàm CLF của đối tượng (3.38) nếu như nó thỏa mãn:

$$\inf_{\underline{u}} L_{\underline{f}}V = \inf_{\underline{u}} \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \right) < 0 \qquad \forall \underline{x} \in \mathcal{O} \text{ và } \underline{x} \ne \underline{0}$$

Định nghĩa này cũng cho thấy *cần và đủ* để một đối tượng *điều khiển ổn định tiệm cận được tại gốc* bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái là với nó tồn tại một hàm CLF.

Định lý 3.5: Xét hệ nhiều đầu vào có cấu trúc affine:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u} \tag{3.40}$$

trong đó $\underline{u} \in \mathbf{R}^m$ là vector tín hiệu điều khiển và $H(\underline{x})$ là ma trận hàm với các vector cột $\underline{h}_1(\underline{x}), \underline{h}_2(\underline{x}), \ldots, \underline{h}_m(\underline{x})$. Gọi $V(\underline{x})$ là một hàm trơn, xác định dương, hợp thức tùy ý. Ký hiệu:

$$\underline{a}(\underline{x}) = (L_{\underline{h}_1}V(\underline{x}), \cdots, L_{\underline{h}_m}V(\underline{x}))^T$$

và

$$\mathcal{Z} = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\underline{a}(\underline{x})| = 0 \} \tag{3.41}$$

Nếu trong miền $\mathcal{Z}$ hàm $L_{\underline{f}}V(\underline{x})$ xác định âm, tức là:

$$\underline{x} \in \mathcal{Z} \text{ và } \underline{x} \ne \underline{0} \quad \Rightarrow \quad L_{\underline{f}}V(\underline{x}) < 0 \tag{3.42}$$

thì nó cũng sẽ là hàm CLF của (3.40) và một trong các bộ điều khiển phản hồi trạng thái $\underline{u}(\underline{x})$ tương ứng làm đối tượng ổn định tiệm cận toàn cục là:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{-\eta(\underline{x}) - L_{\underline{f}}V}{|\underline{a}(\underline{x})|^2} \underline{a}(\underline{x}) & \text{nếu } \underline{x} \notin \mathcal{Z} \\ \text{tùy ý} \quad \text{nếu } \underline{x} \in \mathcal{Z} \end{cases} \tag{3.43}$$

trong đó $\eta(\underline{x})$ là một hàm xác định dương được chọn bất kỳ.

Chứng minh:

Ngoài điều kiện (3.42) xác nhận tính xác định âm của $L_{\underline{f}}V(\underline{x})$ khi $\underline{x} \in \mathcal{Z}$ thì khi $\underline{x} \notin \mathcal{Z}$ ta cũng có từ (3.43):

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\left[\underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u}\right] = L_{\underline{f}}V + (L_{\underline{h}_1}V, \cdots, L_{\underline{h}_m}V)\frac{-\eta(\underline{x}) - L_{\underline{f}}V}{|\underline{a}(\underline{x})|^2}\underline{a}(\underline{x})$$

$$= -\eta(\underline{x})$$

□

Ví dụ 3.14: Minh họa khái niệm hàm điều khiển Lyapunov

Cho đối tượng phi tuyến với mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1x_2 \\ -x_1^2 + u \end{pmatrix}$$

Chọn hàm $V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ xác định dương, ta có:

$$L_{\underline{f}}V = 2(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -x_1 + x_1x_2 \\ -x_1^2 + u \end{pmatrix} = -2x_1^2 + 2ux_2$$

Vậy, để có được $L_{\underline{f}}V$ xác định âm (trong toàn bộ không gian trạng thái), ta có thể chọn $u = -x_2$ hay bộ điều khiển làm ổn định đối tượng đã cho sẽ là $u(\underline{x}) = -x_2$ và do đó hàm $V(\underline{x})$ đã chọn cũng là một hàm CLF của đối tượng. □

Ví dụ 3.15: Minh họa khái niệm hàm điều khiển Lyapunov

Xét đối tượng có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) = \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_2(x_1 + 4) + u \end{pmatrix}$$

Hệ cân bằng trên toàn bộ trục x_1, tức là cân bằng tại $x_2 = 0$, x_1 tùy ý. Như vậy hiển nhiên hệ không ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$.

Sử dụng hàm $V(\underline{x}) = \dfrac{kx_1^2 + x_2^2}{2}$, $k > 0$ thì:

$$L_{\underline{f}}V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\underline{f} = (kx_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_2(x_1 + 4) + u \end{pmatrix} = -kx_1^4 + x_2(kx_1 + u) - x_2^2(x_1 + 4)$$

Bởi vậy nếu ta chọn bộ điều khiển là $u(\underline{x}) = -kx_1$ thì do có

$$L_{\underline{f}}V = -kx_1^4 - x_2^2(x_1 + 4) \quad \text{xác định âm khi } x_1 > -4$$

nên hệ sẽ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ với miền ổn định

$$\mathcal{O} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > -4 \}$$

và do đó $V(\underline{x})$ đã chọn là một hàm CLF của đối tượng. ❐

3.2 Phương pháp thiết kế cuốn chiếu (backstepping)

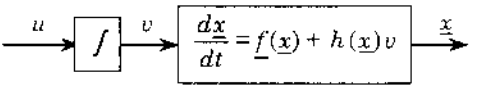
Tuy rằng được biết đến trong điều khiển phi tuyến như một công cụ toàn năng để thiết kế bộ điều khiển làm hệ ổn định tiệm cận, song cho tới nay vẫn chưa có một phương pháp tổng quát nào giúp ta xác định được hàm CLF một cách nhanh chóng và đơn giản. Người ta mới chỉ có được một số ít các phương pháp dành cho những hệ có cấu trúc đặc biệt và cuốn chiếu (*backstepping*) là một phương pháp thuộc trong những số ít đó. Phương pháp này cho phép ta xác định được hàm CLF của hệ từ hàm CLF của hệ con nằm bên trong hệ đã cho.

3.2.1 Cuốn chiếu hệ truyền thẳng qua khâu tích phân

Cho đối tượng phi tuyến dạng truyền thẳng qua khâu tích phân (hình 3.10):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})v \\ \dfrac{dv}{dt} = u \end{cases} \tag{3.44}$$

Hình 3.10: Đối tượng truyền thẳng với một khâu tích phân và một khâu phi tuyến affine mắc nối tiếp.



Giả sử với khâu phi tuyến affine con bên trong nó là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})v \qquad \text{trong đó} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R},\ \underline{f}(\underline{0}) = \underline{0} \tag{3.45}$$

ta đã có hàm điều khiển Lyapunov $V(\underline{x})$ cũng như bộ điều khiển $v = r(\underline{x})$ tương ứng. Vấn đề đặt ra ở đây là từ $V(\underline{x})$ và $r(\underline{x})$ đó ta phải tìm hàm điều khiển Lyapunov $V_c(\underline{x}, v)$ cũng như bộ điều khiển $u(\underline{x}, v)$ cho đối tượng truyền thẳng (3.44) ban đầu.

Định lý 3.6: Xét đối tượng truyền thẳng (3.44). Nếu khâu phi tuyến con (3.45) bên trong nó có *hàm điều khiển Lyapunov* $V(\underline{x})$ và bộ điều khiển ổn định, khả vi $v = r(\underline{x})$

tương ứng thỏa mãn $r(\underline{0})=0$ thì một trong các hàm điều khiển Lyapunov $V_c(\underline{x},v)$ có thể có của đối tượng (3.44) ban đầu là:

$$V_c(\underline{x},\underline{v}) = V(\underline{x}) + \frac{1}{2}[v - r(\underline{x})]^2 \tag{3.46}$$

Tương ứng với nó là bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$u(\underline{x},v) = -k[v - r(\underline{x})] + \frac{\partial r(\underline{x})}{\partial \underline{x}}[\underline{f}(\underline{x}) + h(\underline{x})v] - L_{\underline{h}}V(\underline{x}) \tag{3.47}$$

trong đó $k>0$ là một hằng số tuỳ ý.

Chứng minh:

Nếu $V(\underline{x})$ là hàm điều khiển Lyapunov và $v=r(\underline{x})$ là tín hiệu điều khiển tương ứng của hệ con (3.45) thì sẽ có:

$$\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial \underline{x}}[\underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})r(\underline{x})] < 0 \qquad \text{khi} \quad x \neq 0$$

Tiếp theo, đặt $z = v - r(\underline{x})$ thì do

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f} + \underline{h}v = \underline{f} + \underline{h}(z+r)$$

và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{\partial r}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = u - \frac{\partial r}{\partial \underline{x}}[\underline{f} + \underline{h}(z+r)]$$

ta sẽ có với (3.46) khi $x \neq 0$:

$$\frac{dV_c(\underline{x},v)}{dt} = \frac{dV}{dt} + (v-r)\frac{d(v-r)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + \underline{h}r + \underline{h}z) + z\left[u - \frac{\partial r}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + \underline{h}(r+z))\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + \underline{h}r)}_{<0} + z\left[u - \frac{\partial r}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + \underline{h}\underbrace{(r+z)}_{v}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\underline{h}}_{L_{\underline{h}}V}\right]$$

Như vậy, để chỉ $V_c(\underline{x},v)$ là hàm điều khiển Lyapunov cho đối tượng (3.44) ban đầu, ta chỉ cần chỉ rằng tồn tại ít nhất một tín hiệu $u=r_c(\underline{x},v)$ làm cho $\frac{dV_c(\underline{x},v)}{dt}<0$ và đó chính là u xác định theo (3.47), vì với nó có:

$$\frac{dV_c(\underline{x},v)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + \underline{h}r)}_{<0} - kz^2 < 0 \quad \text{khi } x \neq 0 \quad \text{(đ.p.c.m).}$$

❑

Ví dụ 3.16: Minh họa phương pháp cuốn chiếu qua khâu tích phân

Xét đối tượng truyền thẳng bao gồm một khâu phi tuyến affine con:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ -x_1^2 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{h}(\underline{x})} v$$

và một khâu tích phân $\frac{dv}{dt} = u$ mắc nối tiếp.

Theo kết quả của ví dụ 3.14, khâu phi tuyến có hàm điều khiển Lyapunov

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

và tương ứng với nó là bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$u = r(\underline{x}) = -x_2.$$

Vậy, theo nội dung định lý 3.6, đối tượng truyền thẳng đã cho sẽ có hàm điều khiển Lyapunov

$$V_c(\underline{x}, v) = V(\underline{x}) + \frac{1}{2}[v - r(\underline{x})]^2 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(v + x_2)^2$$

và tương ứng với nó là bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$u = r_c(\underline{x}, v) = -k[v - r(\underline{x})] + \frac{\partial r(\underline{x})}{\partial \underline{x}}[\underline{f}(\underline{x}) + h(\underline{x})v] - L_{\underline{h}}V(\underline{x})$$

$$= -(k+1)v - (k+2)x_2 + x_1^2 \qquad (k > 0).$$

□

3.2.2 Cuốn chiếu hệ truyền thẳng qua khâu tuyến tính

Tiếp theo và cũng tổng quát hơn, ta sẽ xét một đối tượng truyền thẳng khác mà ở đó thay cho khâu tích phân là một khâu tuyến tính có một tín hiệu vào và một tín hiệu ra (khâu SISO). Nói cách khác, đối tượng được xét bao gồm một khâu phi tuyến affine

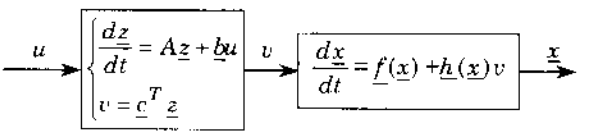
$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})v \quad \text{trong đó} \quad \underline{x} \in \mathbf{R}^n,\ v \in \mathbf{R},\ \underline{f}(\underline{0}) = \underline{0} \tag{3.48}$$

và một khâu tuyến tính SISO, hợp thức chặt

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z} + \underline{b}u \\ v = \underline{c}^T \underline{z} \end{cases} \quad \text{trong đó} \quad \underline{z} \in \mathbf{R}^m,\ u \in \mathbf{R}, \tag{3.49}$$

mắc nối tiếp (hình 3.11).

Hình 3.11: Đối tượng phi tuyến truyền thẳng với một khâu tuyến tính và một khâu phi tuyến affine mắc nối tiếp.



Giả sử khâu phi tuyến ổn định tại $\underline{0}$. Bài toán đặt ra là xác định hàm điều khiển Lyapunov $V_c(\underline{x},\underline{z})$ cho đối tượng truyền thẳng từ hàm Lyapunov $V(\underline{x})$ của khâu phi tuyến con (3.48) bên trong nó.

Bài toán nêu trên, có tên gọi là bài toán *cuốn chiếu qua khâu tuyến tính* (3.49), hiện mới chỉ có lời giải cho trường hợp khâu tuyến tính là *thụ động* (passive) và *ổn định*.

Như đã được biết từ chương 2 trước đây, nếu khâu tuyến tính hợp thức chặt với mô hình (3.49) là *thụ động* (*passive*) thì:

1) Hàm truyền đạt của nó:

$$G(s) = \underline{c}^T(sI-A)^{-1}\underline{b} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

trong đó $A(s)$, $B(s)$ là hai đa thức theo biến s, phải là hàm thực–dương (positive real), tức là khi có $\mathrm{Re}(s)>0$ thì cũng có $\mathrm{Re}(G)>0$.

2) Hàm truyền đạt $G(s)$ của nó phải có bậc tương đối bằng 1 (vì là hàm thực dương và hợp thức chặt). Điều này tương đương với $\underline{c}^T\underline{b}\neq 0$.

3) Đa thức $A(s)+B(s)$ là Hurwitz và $\mathrm{Re}[G(j\omega)]\geq 0$ với mọi ω.

4) Các điểm không và điểm cực của $G(s)$ phải nằm bên trái hoặc nằm trên trục ảo. Những điểm không và điểm cực nằm trên trục ảo phải là nghiệm đơn.

5) $$\int_0^\infty uv\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(-j\omega)V(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(-j\omega)U(j\omega)G(j\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |U(j\omega)|^2 \underbrace{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}_{\geq 0} d\omega \geq 0.$$

6) Tồn tại ma trận xác định dương Q để có:

$$\frac{d}{dt}(\underline{z}^T Q\underline{z}) \leq uv \tag{3.50}$$

7) Luôn tồn tại ma trận xác định dương, đối xứng P và ma trận L để có (định lý Kalman–Popov–Yakubovish):

$$\begin{cases} A^TP + PA = -L^TL \text{ (ma trận xác định bán âm)} \\ \underline{c} = P\underline{b} \end{cases} \tag{3.51}$$

Định lý 3.7: Cho đối tượng truyền thẳng, bao gồm một khâu phi tuyến (3.48) *ổn định* và khâu tuyến tính *thụ động*, và cũng *ổn định* (3.49) mắc nối tiếp (hình 3.11). Gọi $V(\underline{x})$ là hàm Lyapunov (LF) của khâu phi tuyến thì một trong các hàm điều khiển Lyapunov $V_c(\underline{x},\underline{z})$ có thể có của đối tượng truyền thẳng ban đầu sẽ là:

$$V_c(\underline{x},\underline{z}) = V(\underline{x}) + \underline{z}^T P \underline{z} \tag{3.52}$$

trong đó P là ma trận xác định dương thỏa mãn (3.51) của khâu tuyến tính.

Một trong các bộ điều khiển phản hồi trạng thái làm nó ổn định là:

$$u = r_c(\underline{x}) = -\frac{1}{2} L_{\underline{h}} V(\underline{x}) \tag{3.53}$$

Chứng minh:

Vì khâu phi tuyến là ổn định và $V(\underline{x})$ là hàm Lyapunov của nó nên $V(\underline{x})$ xác định dương và $L_{\underline{f}} V(\underline{x})$ xác định âm. Ngoài ra, vì ma trận P xác định dương nên hàm $V_c(\underline{x},\underline{z})$ tính theo (3.52) cũng xác định dương.

Tính đạo hàm $\dfrac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt}$ dọc theo quỹ đạo trạng thái của đối tượng truyền thẳng khi $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + \underline{h}u) + \left(\frac{d\underline{z}}{dt}\right)^T P\underline{z} + \underline{z}^T P \frac{d\underline{z}}{dt} \\
&= \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} [\underline{f} + \underline{h}(\underline{c}^T\underline{z})] + (A\underline{z} + \underline{b}u)^T P\underline{z} + \underline{z}^T P(A\underline{z} + \underline{b}u) \\
&= L_{\underline{f}} V + (\underline{c}^T\underline{z}) L_h V + \underline{z}^T (A^T P + PA)\underline{z} + (u\underline{b}^T P\underline{z} + u\underline{z}^T P\underline{b}) \\
&= L_{\underline{f}} V + (\underline{c}^T\underline{z}) L_h V - \underline{z}^T L^T L\underline{z} + 2u\underline{b}^T P\underline{z} \qquad \text{(vì } P \text{ đối xứng)} \\
&= L_{\underline{f}} V + \underline{z}^T(-L^T L)\underline{z} + (\underline{c}^T\underline{z}\, L_{\underline{h}} V + 2\underline{b}^T P\underline{z}u) \\
&= \underbrace{L_{\underline{f}} V}_{<0} + \underbrace{\underline{z}^T(-L^T L)\underline{z}}_{\leq 0} + \underline{c}^T\underline{z}(L_{\underline{h}} V + 2u) \qquad \text{(vì } \underline{c} = P\underline{b}) \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

ta thấy, do tồn tại tín hiệu $u = -\frac{1}{2} L_{\underline{h}} V$ làm cho $\dfrac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt} < 0$, nên $V_c(\underline{x},\underline{z})$ là hàm điều khiển Lyapunov của đối tượng cascade đã cho. ❐

Định lý 3.7 cho thấy, khác với bài toán cuốn chiếu qua khâu tích phân, ở đây phải có giả thiết rằng khâu phi tuyến là ổn định. Nhờ đó, thêm giả thiết thụ động và ổn định của khâu tuyến tính, ta luôn tìm được một bộ điều khiển phản hồi trạng thái $u = r_c(\underline{x})$

không sử dụng các biến trạng thái $\underline{z}$ của khâu tuyến tính (phản hồi trạng thái không hoàn toàn) nhưng vẫn làm ổn định được đối tượng truyền thẳng đã cho.

Ví dụ 3.17: Minh họa phương pháp cuốn chiếu qua khâu tuyến tính thụ động, ổn định

Xét đối tượng truyền thẳng, gồm một khâu phi tuyến:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(x_1+1)^2 x_2 - x_1^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

và một khâu tuyến tính

$$\frac{dz}{dt} = -z + u, \qquad v = z$$

mắc nối tiếp.

Từ hàm truyền đạt của khâu tuyến tính:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

ta thấy, nó là một khâu tuyến tính ổn định và thụ động (hàm truyền đạt $G(s)$ là hàm thực–dương). Công thức (3.51) của khâu tuyến tính này có $P=1$, tức là

$$A^T P + PA = -L^T L \quad \text{ứng với} \quad A=-1,\ P=1 \text{ và } L=\sqrt{2}$$

$$\underline{c} = P\underline{b} \quad \text{ứng với} \quad \underline{c}=1,\ P=1 \text{ và } \underline{b}=1$$

Ngoài ra, ta có thể dễ dàng kiểm tra được rằng khâu phi tuyến con là ổn định với hàm LF

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Do vậy, khi áp dụng định lý 3.7, ta đến được hàm điều khiển Lyapunov $V_c(\underline{x},\underline{z})$ của đối tượng truyền thẳng đã cho:

$$V_c(\underline{x},\underline{z}) = V(\underline{x}) + \underline{z}^T P \underline{z} = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 + z^2$$

cũng như bộ điều khiển phản hồi trạng thái làm ổn định đối tượng:

$$u = r_c(x) = -\frac{1}{2} L_{\underline{h}} V = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^3 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{x_1^3}{2}$$ ❐

Mở rộng ra, ta thấy chất lượng ổn định (tại gốc tọa độ $\underline{0}$) của một hệ thống sẽ được gọi là tốt nếu quỹ đạo trạng thái hệ thống có tốc độ tiến về $\underline{0}$ cao. Theo nội dung tiêu chuẩn Lyapunov, thước đo cho tốc độ tiến về $\underline{0}$ của các quỹ đạo trạng thái hệ thống chính

là $\left|\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt}\right|$. Giá trị $\left|\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt}\right|$ tại một điểm trạng thái cố định $\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{z}\end{pmatrix}$ càng lớn, tốc độ tiến về $\underline{0}$ của quỹ đạo trạng thái tại đó càng cao.

Mặt khác, từ một hàm điều khiển Lyapunov $V_c(\underline{x},\underline{z})$ có thể có rất nhiều bộ điều khiển tương ứng làm cho hàm $\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt}$ xác định âm, tức là làm cho hệ kín ổn định (tại gốc tọa độ $\underline{0}$). Bộ điều khiển $u=r_c(\underline{x})$ được tính theo (3.53) chỉ là một trong số đó.

Hai nhận xét trên cho thấy khả năng tồn tại một bộ điều khiển khác có chất lượng ổn định tốt hơn bộ điều khiển (3.53). Để tìm bộ điều khiển đó, ta bắt đầu từ (3.54):

$$\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt} = L_{\underline{f}}V + \underline{z}^T(-L^TL)\underline{z} + \underline{c}^T\underline{z}(L_{\underline{h}}V + 2u)$$

và thấy nếu chọn:

$$L_{\underline{h}}V + 2u = -k(\underline{c}^T\underline{z})^p \qquad \text{với } p \text{ là số nguyên lẻ và } p \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \qquad u = -\frac{1}{2}\left[L_{\underline{h}}V + k(\underline{c}^T\underline{z})^p\right] = -\frac{1}{2}(L_{\underline{h}}V + kv^p)$$

sẽ có

$$\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt} = \underbrace{L_{\underline{f}}V}_{<0} + \underbrace{\underline{z}^T(-L^TL)\underline{z}}_{\leq 0} + \underbrace{-k(\underline{c}^T\underline{z})^{p+1}}_{<0}.$$

Rõ ràng giá trị $\left|\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt}\right|$ này lớn hơn là khi sử dụng bộ điều khiển (3.53).

Ta đi đến kết luận:

Định lý 3.8: Nếu khâu phi tuyến (3.48) của đối tượng truyền thẳng ở hình 3.11 là ổn định với hàm Lyapunov $V(\underline{x})$ và khâu tuyến tính (3.49) là *thụ động, ổn định* thì hàm điều khiển Lyapunov của đối tượng truyền thẳng đó sẽ là

$$V_c(\underline{x},\underline{z}) = V(\underline{x}) + \underline{z}^TP\underline{z} \tag{3.55}$$

trong đó P là ma trận xác định dương thỏa mãn (3.51) của khâu tuyến tính. Bộ điều khiển phản hồi trạng thái tương ứng là:

$$u = r_c(\underline{x},v) = -\frac{1}{2}(L_{\underline{h}}V + kv^p) \tag{3.56}$$

với p là số nguyên lẻ ($p \neq -1$) và $k \geq 0$ là hằng số chọn tùy ý. Hằng số k càng lớn, chất lượng ổn định của hệ càng cao.

Tiếp theo, ta sẽ mở rộng nội dung định lý 3.7 và 3.8 cho trường hợp khâu tuyến tính (3.49) chưa ổn định và cũng chưa thụ động. Tổng quát thì phương pháp cuốn chiếu không áp dụng được cho mọi khâu tuyến tính bất kỳ mà chỉ được giới hạn cho những khâu *có thể thụ động được bằng một bộ điều khiển phản hồi R* (khâu FPR–*feedback positive real*), tức là nó tạo ra hệ kín

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{z}}{dt} = (A + \underline{b}R)z + \underline{b}\,w \\ v = \underline{c}^T \underline{z} \end{cases}$$

là một hệ tuyến tính ổn định và thụ động. Khi đó, theo tính chất (3.51) của hệ thụ động, ổn định thì

$$\begin{cases} (A + \underline{b}R)^T P + P(A + \underline{b}R) = -L^T L \text{ là ma trận xác định âm} \\ \underline{c} = P\underline{b} \end{cases} \tag{3.57}$$

Định lý 3.9: Nếu khâu tuyến tính (3.49) có khả năng thụ động, ổn định được bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái R (khâu FPR), tức là tồn tại R để có (3.57), và khâu phi tuyến (3.48) là ổn định với hàm Lyapunov $V(\underline{x})$ thì hàm điều khiển Lyapunov của đối tượng truyền thẳng ở hình 3.11 sẽ là

$$V_c(\underline{x},\underline{z}) = V(\underline{x}) + \underline{z}^T P \underline{z} \tag{3.58}$$

với P là ma trận xác định dương thỏa mãn (3.57). Bộ điều khiển tương ứng là:

$$u = r_c(\underline{x}, v) = R\underline{z} - \frac{1}{2}(L_{\underline{h}}V + kv^p) \tag{3.59}$$

trong đó p là số nguyên lẻ ($p \neq -1$) và $k \geq 0$ là hằng số chọn tùy ý.

Chứng minh:

Trước hết R phải là một vector hàng vì khâu tuyến tính chỉ có một tín hiệu vào. Bây giờ ta tính đạo hàm $\dfrac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt}$ dọc theo quỹ đạo trạng thái của đối tượng.

Bắt đầu từ (5.14a):

$$\begin{aligned} \frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + \underline{h}v) + (A\underline{z} + \underline{b}u)^T P\underline{z} + \underline{z}^T P(A\underline{z} + \underline{b}u) \\ &= L_{\underline{f}}V + v\,L_{\underline{h}}V + \underline{z}^T(A^T P + PA)\underline{z} + \underbrace{(\underline{b}^T P\underline{z} + \underline{z}^T P\underline{b})}_{2v}u \\ &= L_{\underline{f}}V + v(L_{\underline{h}}V + 2u) + \underline{z}^T[(A + \underline{b}R)^T P + P(A + \underline{b}R)]\underline{z} - \\ &\qquad - \underline{z}^T[(\underline{b}R)^T P + P(\underline{b}R)]\underline{z} \end{aligned}$$

$$= L_{\underline{f}}V + \underline{z}^T(-L^TL)\underline{z} + v(L_{\underline{h}}V + 2u) - \underline{z}^T(R^T\underline{c}^T + \underline{c}R)\underline{z}$$

$$= L_{\underline{f}}V + \underline{z}^T(-L^TL)\underline{z} + v(L_{\underline{h}}V + 2u) - 2\underline{z}^T\underline{c}R\underline{z}$$

$$= L_{\underline{f}}V + \underline{z}^T(-L^TL)\underline{z} + v(L_{\underline{h}}V + 2u - 2R\underline{z})$$

Do đó nếu chọn:

$$L_{\underline{h}}V + 2u - 2R\underline{z} = -kv^p$$

$$\Leftrightarrow \quad u = r_c(\underline{x}, v) = R\underline{z} - \frac{1}{2}(L_{\underline{h}}V + kv^p) = -\frac{1}{2}(L_{\underline{h}}V + kv^p)$$

sẽ được

$$\frac{dV_c(\underline{x},\underline{z})}{dt} = \underbrace{L_{\underline{f}}V}_{<0} + \underbrace{\underline{z}^T(-L^TL)\underline{z}}_{\leq 0} + \underbrace{(-kv^{p+1})}_{<0}$$

và đó chính là điều phải chứng minh. ❐

3.2.3 Cuốn chiếu hệ truyền thẳng qua khâu phi tuyến

Khái niệm hệ phi tuyến thụ động

Khái niệm hệ phi tuyến thụ động (passive) được lấy từ tính chất bản chất (3.50) của hệ tuyến tính với định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3.2: Cho hệ phi tuyến affine, cân bằng tại $\underline{0}$ mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}) \end{cases} \tag{3.60}$$

Gọi $Q(\underline{x})$ là *hàm không âm* thỏa mãn $Q(\underline{0})=0$. Khi đó hệ (3.60) sẽ được gọi là:

a) *Thụ động* (passive), nếu

$$\frac{dQ(\underline{x})}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + H\underline{u}) \leq \underline{y}^T\underline{u} \tag{3.61}$$

b) *Thụ động chặt* (strickly passive), nếu

$$\frac{dQ(\underline{x})}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \underline{x}}(\underline{f} + H\underline{u}) < \underline{y}^T\underline{u} \qquad \text{khi } \underline{x} \neq \underline{0} \tag{3.62}$$

So sánh với tính chất (3.50) của hệ tuyến tính thì ở định nghĩa trên có một thay đổi là hàm $Q(\underline{x})$ chưa cần phải là xác định dương. Sự thay đổi này là để phù hợp với bản

chất thụ động của hệ. Một hệ thụ động chưa chắc đã ổn định tiệm cận–theo nghĩa Lyapunov. Chẳng hạn ở hệ tuyến tính, nếu nó là thụ động thì ma trận truyền đạt của nó là thực–dương (positive real) nên nó vẫn có thể có các điểm cực nằm trên trục ảo (hệ ở biên giới ổn định).

Tuy nhiên, nếu hệ phi tuyến thụ động, có hàm $Q(\underline{x})$ không những không âm mà còn *xác định dương*, thì hệ đó sẽ ổn định tại gốc tọa độ theo nghĩa Lyapunov, vì khi không bị kích thích ($\underline{u}=\underline{0}$) bất đẳng thức (3.61) trở thành:

$$\frac{dQ(\underline{x})}{dt} = L_{\underline{f}}Q(\underline{x}) \le 0$$

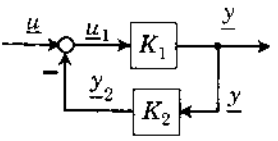
Cũng như vậy nếu nó là thụ động chặt và hàm $Q(\underline{x})$ xác định dương thì nó ổn định tiệm cận tại gốc $\underline{0}$, vì từ (3.62) có:

$$\frac{dQ(\underline{x})}{dt} = L_{\underline{f}}Q(\underline{x}) < 0 \qquad \text{khi } \underline{x} \ne \underline{0}$$

Bây giờ ta xét hệ gồm hai khâu phi tuyến K_1 và K_1 mắc hồi tiếp (hình 3.12):

$$K_1: \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{f}_1(\underline{x}_1) + H_1(\underline{x}_1)\underline{u}_1 \\ \underline{y} = \underline{g}_1(\underline{x}_1) \end{cases}$$

$$K_2: \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_2}{dt} = \underline{f}_2(\underline{x}_1) + H_2(\underline{x}_2)\underline{y} \\ \underline{y}_2 = \underline{g}_2(\underline{x}_2) \end{cases}$$



Hình 3.12: Hệ gồm hai khâu phi tuyến mắc hồi tiếp.

Khi đó với $\underline{u}_1 = \underline{u} - \underline{y}_2$ ta có:

Định lý 3.10: Hệ phi tuyến gồm hai khâu phi tuyến con K_1 và K_2 nối hồi tiếp âm như ở hình 3.12 sẽ:

a) *Thụ động*, nếu cả hai khâu K_1 và K_2 đều thụ động.

b) *Thụ động chặt*, nếu cả hai khâu K_1 và K_2 đều thụ động chặt.

Chứng minh:

Giả sử K_1 và K_2 đều thụ động. Gọi $Q_1(\underline{x})$ và $Q_2(\underline{x})$ là những hàm không âm xác định tính thụ động của chúng theo định nghĩa 3.2. Vậy thì:

$$\frac{dQ_1(\underline{x})}{dt} \le \underline{y}^T \underbrace{(\underline{u} - \underline{y}_2)}_{\underline{u}_1} \qquad \text{và} \qquad \frac{dQ_2(\underline{x})}{dt} \le \underline{y}_2^T \underline{y}$$

Do đó nếu cộng hai bất đẳng thức đó lại với nhau theo từng vế sẽ được:

$$\frac{d}{dt}\,[\,\underbrace{Q_1(\underline{x})+Q_2(\underline{x})}_{Q(\underline{x})}\,] \le \underline{y}^T\underline{u}$$

Vì hàm $Q(\underline{x})$ không âm giống như $Q_1(\underline{x})$ và $Q_2(\underline{x})$ nên ta có được đ.p.c.m a). Kết luận b) cũng được chứng minh tương tự. ❐

Hệ phi tuyến thụ động được

Cho khâu phi tuyến SISO mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u \\ y = g(\underline{x}) \end{cases} \tag{3.63}$$

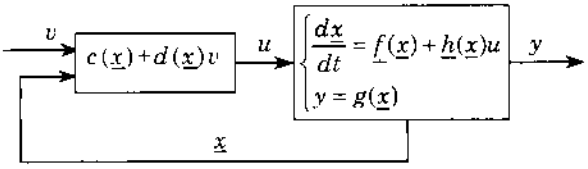
với $g(\underline{0})=0$. Gọi:

$$u = r(\underline{x}, v) = c(\underline{x}) + d(\underline{x})v \tag{3.64}$$

là bộ điều khiển phản hồi trạng thái của nó (hình 3.13). Khi đó hệ kín sẽ có mô hình:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})c(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})d(\underline{x})v \\ y = g(\underline{x}) \end{cases} \tag{3.65}$$

Định nghĩa 3.3: Hệ phi tuyến (3.63) được gọi là *thụ động được* (FP–*feedback passive*) bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái (3.64) nếu hệ kín (3.65) là một hệ thụ động. Nếu hệ kín (3.65) còn là thụ động chặt thì hệ ban đầu (3.63) được gọi là thụ động chặt được (FSP–*feedback strickly passive*).



Hình 3.13: Giải thích khái niệm hệ FP và FSP.

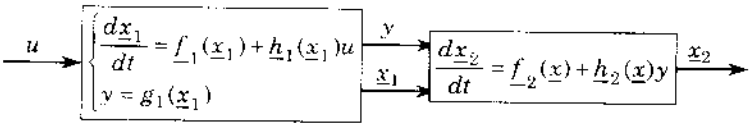
Cuốn chiếu qua khâu phi tuyến

Ở bài toán sau ta sẽ xét hệ có n biến trạng thái $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2)^T \in \mathbb{R}^n$ gồm một khâu phi tuyến thụ động được:

$$H_1: \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{f}_1(\underline{x}_1) + \underline{h}_1(\underline{x}_1)u \\ y = g_1(\underline{x}_1) \end{cases} \quad \text{trong đó} \quad \underline{g}_1(\underline{0}) = \underline{0} \tag{3.66}$$

mắc nối tiếp (cả tín hiệu ra và trạng thái) với một khâu phi tuyến ổn định (hình 3.14):

$$H_2:\ \frac{d\underline{x}_2}{dt} = \underline{f}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2) + \underline{h}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2)y \qquad \text{trong đó} \qquad \underline{f}_2(\underline{x}_1,\underline{0}) = \underline{0} \tag{3.67}$$



Hình 3.14: Đối tượng nghiên cứu của phương pháp cuốn chiếu qua khâu phi tuyến.

Công cụ để tìm hàm CLF cho đối tượng cũng như bộ điều khiển phản hồi trạng thái tương ứng cho hệ trên là định lý sau:

Định lý 3.11: Xét đối tượng gồm hai khâu H_1 và H_2 mắc nối tiếp (hình 3.14). Gọi

$$u = r(\underline{x}_1, v) = c(\underline{x}_1) + d(\underline{x}_1)v \tag{3.68}$$

là bộ điều khiển phản hồi trạng thái làm cho khâu phi tuyến thứ nhất (3.66) là H_1 trở thành thụ động và ổn định, tức là tồn tại hàm xác định dương $Q(\underline{x}_1)$ thỏa mãn:

$$uy \geq \frac{dQ(\underline{x}_1)}{dt}$$

Nếu khâu phi tuyến thứ hai (3.67) là H_2 ổn định với hàm Lyapunov $V(\underline{x}_2)$, tức là $V(\underline{x}_2)$ xác định dương và

$$\frac{\partial V(\underline{x}_2)}{\partial \underline{x}_2}\underline{f}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = L_{\underline{f}_2}V \leq 0 \tag{3.69}$$

thì đối tượng gồm hai khâu phi tuyến đó mắc nối tiếp (hình 3.14) sẽ được ổn định bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$r_c(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = c(\underline{x}_1) - d(\underline{x}_1)\, L_{\underline{h}_2}V(\underline{x}_2) \tag{3.70}$$

và hệ kín ổn định đó có hàm Lyapunov:

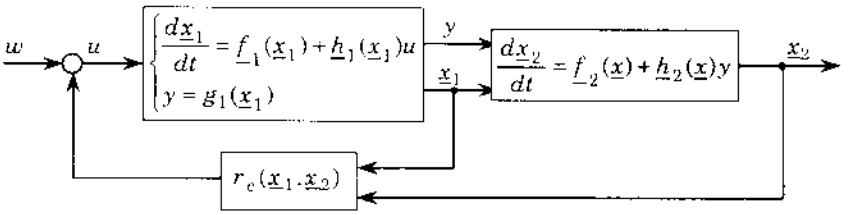
$$V_c(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = V(\underline{x}_2) + Q(\underline{x}_1)$$

Hệ kín sẽ ổn định tiệm cận nếu hoặc có khâu H_1 là thụ động chặt được, tức là:

$$uy > \frac{dQ(\underline{x}_1)}{dt} \qquad \text{khi} \quad \underline{x}_1 \neq \underline{0}$$

hoặc có khâu H_2 là ổn định tiệm cận, tức là

$$\frac{\partial V(\underline{x}_2)}{\partial \underline{x}_2}\,\underline{f}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = L_{\underline{f}_2}V < 0 \qquad \text{khi} \quad \underline{x}_2 \neq \underline{0} \qquad (\text{với mọi } \underline{x}_1)$$



Hình 3.15: Minh họa định lý 3.11.

Chứng minh:

Đặt

$$v = -L_{\underline{h}_2}V_2(\underline{x}_2)$$

thì bộ điều khiển (3.70) trở về dạng (3.68). Do đó hệ kín ở hình 3.15 có mô hình:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{f}_1(\underline{x}_1) + \underline{h}_1(\underline{x}_1)c(\underline{x}_1) + \underline{h}_1(\underline{x}_1)d(\underline{x}_1)v \\ \dfrac{d\underline{x}_2}{dt} = \underline{f}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2) + \underline{h}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2)y \\ y = g_1(\underline{x}_1) \\ v = -L_{h_2}V(\underline{x}_2) \end{cases}$$

Hệ kín trên có thể được xem như mạch hồi tiếp âm (hình 3.12) của hai khâu:

$$K_1: \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_1}{dt} = \underline{f}_1(\underline{x}_1) + \underline{h}_1(\underline{x}_1)c(\underline{x}_1) + \underline{h}_1(\underline{x}_1)d(\underline{x}_1)v \\ y = g_1(\underline{x}_1) \end{cases}$$

$$K_2: \begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_2}{dt} = \underline{f}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2) + \underline{h}_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2)y \\ z = L_{h_2}V(\underline{x}_2) \end{cases}$$

trong đó $z = -v$.

Do có giả thiết rằng khâu phi tuyến (3.66) là thụ động được bằng bộ điều khiển (3.68) nên khâu K_1 là thụ động. Ngoài ra, từ (3.69) còn có:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}_2}(\underline{f}_2 + \underline{h}_2 y) = \underbrace{L_{\underline{f}_2}V}_{\leq 0} + \underbrace{L_{\underline{h}_2}V}_{z}\,y \leq zy$$

nên khâu K_2 cũng thụ động. Từ đây suy ra, theo định lý 3.10, hệ kín ở hình 3.15 là thụ động cùng hàm xác định dương:

$$V_c(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = V(\underline{x}_2)+Q(\underline{x}_1)$$

Hơn nữa,vì $V_c(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ xác định dương nên hệ kín là ổn định. ❐

Ví dụ 3.18: Minh họa định lý 3.11

Cho đối tượng gồm hai khâu H_1 và H_2 mắc nối tiếp theo sơ đồ cho ở hình 3.14. Hai khâu đó có mô hình như sau:

$$H_1: \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad \text{và} \quad H_2: \ \frac{dx_2}{dt} = -x_2(1+x_1^2)+x_1 y$$

Khâu H_1 là thụ động được, vì theo định nghĩa 3.2, ở đây tồn tại bộ điều khiển phản hồi trạng thái (3.64)

$$u = r(x_1, v) = c(x_1)+d(x_1)v = -x_1^2 + v$$

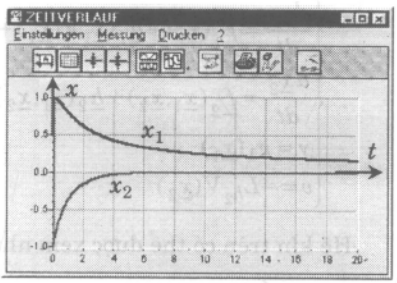
để biến nó thành (3.65)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + v \\ y = x_1 \end{cases}$$

có hàm xác định dương $Q(\underline{x}_1)=\dfrac{x_1^2}{2}$ thỏa mãn

$$\frac{dQ}{dt} = x_1(-x_1^3+v) = -x_1^4+x_1 v$$

$$\leq x_1 v = yv$$



Hình 3.16: Minh họa ví dụ 3.18

Khâu H_1 là ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ vì nó có hàm Lyapunov:

$$V(x_2)=\frac{x_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = -x_2^2(1+x_1^2)<0 \qquad \text{khi} \quad x_2 \neq 0$$

Vậy, theo định lý 3.11, đối tượng được ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái (3.70):

$$r_c(x_1, x_2) = c(x_1)-d(x_1)\, L_{\underline{h}_2} V(x_2) = -x_1^2 - x_1 x_2$$

Hình 3.16 là đồ thị trạng thái đi từ điểm đầu $x_1(0)=1$ và $x_2(0)=-1$, thu được bằng mô phỏng. Nó xác nhận tính ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ của hệ. ❐

3.2.4 Cuốn chiếu hệ truyền ngược

Phương pháp thiết kế chung

Hệ truyền ngược được định nghĩa là hệ có mô hình:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_{n-1}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, x_n) = \underline{f}(\underline{x}) & (3.71) \\ \dfrac{dx_n}{dt} = g(\underline{x}) + u & (3.72) \end{cases}$$

trong đó

$$\underline{x}_{n-1} = (x_1, x_2, \ \dots \ , x_{n-1})^T$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ \dots \ , x_n)^T = \underline{x}_n$$

$$\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \ \dots \ , f_{n-1}(\underline{x}))^T$$

Như vậy, ở hệ truyền ngược, trạng thái x_n có vai trò như *tín hiệu đầu vào ảo của hệ con* (3.71) bên trong nó và hệ con này có các biến trạng thái là $x_1, x_2, \ \dots \ , x_{n-1}$.

Định lý 3.12: Gọi $V_1(\underline{x}_{n-1})$ là hàm CLF của hệ con (3.71) cũng như $x_n = v(\underline{x}_{n-1})$, thỏa mãn $v(\underline{0}) = 0$, là bộ điều khiển phản hồi trạng thái làm nó ổn định tiệm cận toàn cục tại gốc (bộ điều khiển GAS – *global asymptotic stable*). Khi đó:

$$V(\underline{x}) = V(\underline{x}_{n-1}, x_n) = V_1(\underline{x}_{n-1}) + \mu(\underline{x}) \tag{3.73}$$

với $\mu(\underline{x})$ là *hàm không âm* thỏa mãn:

$$\mu(\underline{x}_{n-1}, v(\underline{x}_{n-1})) = 0, \qquad \frac{\partial \mu(\underline{x})}{\partial x_n} = 0 \iff x_n = v(\underline{x}_{n-1})$$

sẽ là hàm CLF của hệ chung gồm (3.71) và (3.72), đồng thời:

$$u(\underline{x}) = \begin{cases} -\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial x_n}\right)^{-1} \left[\eta(\underline{x}) + \dfrac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_{n-1}} \left(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, v) \right) + \dfrac{\partial \mu}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} \right] & \text{khi } \underline{x} \notin \mathcal{V} \\ \text{bất kỳ khi } \underline{x} \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{3.74}$$

trong đó

$$\mathcal{V} = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_n = v(\underline{x}_{n-1}) \}$$

và $\eta(\underline{x})$ là hàm được chọn tùy ý, miễn là không âm và thỏa mãn

$$\eta(\underline{x}_{n-1}, v(\underline{x}_{n-1})) = 0$$

là một bộ điều khiển phản hồi trạng thái GAS tương ứng của nó.

Chứng minh:

Trước tiên có thể thấy được ngay rằng hàm $V(\underline{x})$ xác định theo (3.73) là xác định dương.

Theo giả thiết có $V_1(\underline{x}_{n-1})$ là hàm CLF của (3.71) và $x_n = \upsilon(\underline{x}_{n-1})$ là bộ điều khiển khả vi tương ứng, nên cũng phải có:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_{n-1}} \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, \upsilon) < -W(\underline{x}_{n-1})$$

trong đó $W(\underline{x}_{n-1})$ là hàm xác định dương.

Khi $\underline{x} \in \mathcal{V}$ thì do có (3.73) nên cũng có $V(\underline{x}) = V_1(\underline{x}_{n-1})$, hay

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) + u \end{pmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_{n-1}} \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, \upsilon) \le -W(\underline{x}_{n-1})$$

với mọi u. Dấu bằng của bất đẳng thức trên chỉ xảy ra khi $\underline{x}_{n-1} = \underline{0}$ và lúc đó cũng có $x_n = \upsilon(\underline{0}) = 0$. Vậy hệ truyền ngược (3.71), (3.72) là ổn định tiệm cận tại gốc $\underline{0}$.

Với $\underline{x} \notin \mathcal{V}$, do $\dfrac{\partial \mu(\underline{x})}{\partial x_n} \neq 0$, ta được:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_{n-1}} \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, x_n) + \frac{\partial \mu}{\partial \underline{x}_{n-1}} \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, x_n) + \frac{\partial \mu}{\partial x_n} [g(\underline{x}) + u]$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_{n-1}} \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, \upsilon) + \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_{n-1}} [\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, \upsilon)] + \frac{\partial \mu}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} + \frac{\partial \mu}{\partial x_n} u$$

$$\le -W(\underline{x}_{n-1}) - \eta(\underline{x}) + \eta(\underline{x}) + \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_{n-1}} [\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_{n-1}, \upsilon)] + \frac{\partial \mu}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix} + \frac{\partial \mu}{\partial x_n} u$$

Bởi vậy, cùng với bộ điều khiển (3.74) cũng như hàm $\eta(\underline{x})$ được chọn thỏa mãn điều kiện đã nêu trong định lý, thì sẽ được tính xác định âm của:

$$\frac{dV}{dt} \le -W(\underline{x}_{n-1}) - \eta(\underline{x}) \le 0$$

Điều này chứng tỏ rằng $V(\underline{x})$ là hàm CLF của hệ truyền ngược đã cho. □

Thiết kế bộ điều khiển cuốn chiếu nhờ phép đổi biến vi phôi

Mô hình (3.71), (3.72) của hệ truyền ngược, khi viết ra một cách chi tiết cho từng hệ con bên trong (3.71) cũng có dạng truyền ngược, sẽ là:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + x_2 \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) + x_n \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) + u \end{cases} \tag{3.75}$$

Như vậy, ta có thể thấy là từng biến trạng thái x_k, $k=2,3, \ldots, n$ của nó giữ vai trò như một *tín hiệu đầu vào ảo* của những hệ con bên trong nó.

Trước tiên, ta xét một hệ truyền ngược đơn giản có mô hình:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = -z_1 + z_2 \\ \vdots \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dt} = -z_{n-1} + z_n \\ \dfrac{dz_n}{dt} = \varphi(\underline{z}) + u \end{cases} \tag{3.76}$$

với $\underline{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$.

Dễ dàng thấy được là hệ truyền ngược này có hàm CLF:

$$V(\underline{z}) = z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^2$$

và bộ điều khiển phản hồi trạng thái làm nó ổn định tiệm cận toàn cục tại gốc:

$$u(\underline{z}) = \frac{-z_n}{2} - \varphi(\underline{z}) \tag{3.77}$$

vì với nó, ta có tính xác định âm của:

$$\frac{dV}{dt} = 2(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) \begin{pmatrix} -z_1 + z_2 \\ \vdots \\ -z_{n-1} + z_n \\ \varphi(\underline{z}) + u \end{pmatrix}$$

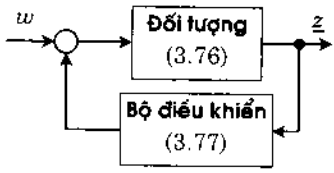
$$= -z_1^2 - (z_1 - z_2)^2 - \cdots - (z_{n-1} - z_n)^2 + 2z_n\left[\frac{z_n}{2} + \varphi(\underline{z}) + u\right]$$

$$= -z_1^2 - (z_1 - z_2)^2 - \cdots - (z_{n-1} - z_n)^2$$

Ngoài ra, ta còn thấy bộ điều khiển (3.77) đã biến đổi đối tượng (3.75) cho ban đầu thành (hình 3.17):

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \tag{3.78}$$

và như vậy, nó đã làm hệ kín trở thành tuyến tính. Khi đó, người ta gọi nó là *bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác*.



Hình 3.17: Bộ điều khiển GAS tìm được còn là một bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác.

Quay lại bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái GAS (*ổn định tiệm cận toàn cục – global asymptotic stable*) cho hệ phi tuyến truyền ngược (3.75). Dựa vào kết quả đã có (3.77) cho hệ (3.76), ta sẽ thực hiện bài toán này qua hai bước:

- Xác định phép đổi biến vi phôi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$, tức là một ánh xạ trơn và khả nghịch, để chuyển hệ truyền ngược (3.75) ban đầu về dạng (3.76).
- Xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái GAS $u(\underline{x})$ theo cấu trúc (3.77).

Định lý 3.13: Ký hiệu:

$$\underline{x}_k = (x_1, x_2, \cdots, x_k)^T$$

$$\underline{\xi}_k(\underline{x}_{k+1}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}_1) + x_2 \\ \vdots \\ f_k(\underline{x}_k) + x_{k+1} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Khi đó phép đổi biến $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$:

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + a_1(\underline{x}_1) \\ \vdots \\ x_n + a_{n-1}(\underline{x}_{n-1}) \end{pmatrix}}_{\underline{m}(\underline{x})} \tag{3.79}$$

với các hàm $a_k(\underline{x}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ được xác định truy hồi theo:

$$\begin{cases} a_1(\underline{x}_1) = x_1 + f_1(\underline{x}_1) \\ a_i(\underline{x}_i) = x_i + a_{i-1}(\underline{x}_{i-1}) + L_{\underline{\xi}_{i-1}} a_{i-1} + f_i(\underline{x}_i)\ , \quad i = 2, \ \dots\ , n-1 \end{cases} \tag{3.80}$$

là khả nghịch và sẽ chuyển hệ truyền ngược (3.75) về dạng (3.76) với:

$$\varphi(\underline{z}) = f_n(\underline{x}) + L_{\underline{\xi}_{n-1}} a_{n-1} \tag{3.81}$$

Do đó bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$u = \frac{-z_n}{2} - \varphi(\underline{z}) = \frac{-x_n - a_{n-1}(\underline{x}_{n-1})}{2} - f_n(\underline{x}) - L_{\underline{\xi}_{n-1}} a_{n-1} \tag{3.82}$$

sẽ làm hệ (3.75) *ổn định tiệm cận toàn cục tại* $\underline{0}$.

Hơn nữa (3.82) còn là bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác đối tượng (3.75) khi được biểu diễn theo biến $\underline{z}$, mà cụ thể là hệ kín của nó ở hình 3.18 sẽ có mô hình tuyến tính theo công thức (3.78).

Chứng minh:

Bắt đầu từ $z_1 = x_1$ của phép đổi biến (3.79) ta có:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = f_1(\underline{x}_1) + x_2 = -z_1 + z_2$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = z_1 + f_1(\underline{x}_1) + x_2 = x_2 + \underbrace{x_1 + f_1(\underline{x}_1)}_{a_1(\underline{x}_1)}$$

Tiếp theo, từ:

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial a_1}{\partial \underline{x}_1}\frac{d\underline{x}_1}{dt} = x_3 + f_2(\underline{x}_2) + L_{\underline{\xi}_1} a_1 = -z_2 + z_3$$

ta lại có:

$$z_3 = x_3 + f_2(\underline{x}_2) + L_{\underline{\xi}_1} a_1 + z_2 = x_3 + \underbrace{f_2 + L_{\underline{\xi}_1} a_1 + x_2 + a_1}_{a_2(\underline{x}_2)}$$

Và cứ tiếp tục như vậy sẽ đi đến:

$$\frac{dz_3}{dt} = \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial a_2}{\partial \underline{x}_2}\frac{d\underline{x}_2}{dt} = f_3(\underline{x}_3) + x_4 + L_{\underline{\xi}_2} a_2 = -z_3 + z_4$$

$$\Rightarrow \quad z_4 = x_4 + f_3(\underline{x}_3) + L_{\underline{\xi}_2} a_2 + z_3 = x_4 + \underbrace{f_3 + L_{\underline{\xi}_2} a_2 + x_3 + a_2}_{a_3(\underline{x}_3)}$$

$$\vdots$$

với các hàm $\alpha_k(\underline{x}_k)$, $k=1, 2, \ldots, n-1$ cho trong (3.80).

Hơn nữa, do ma trận Jacobi của phép đổi biến (3.79) có dạng tam giác:

$$\frac{\partial \underline{m}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \times & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \times \text{ là ký hiệu của một hàm nào đó của } \underline{x},$$

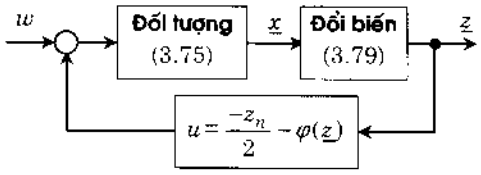
có định thức bằng 1 (không suy biến), nên phép đổi biến (3.79) là khả nghịch.

Ngoài ra, từ:

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \underline{x}_{n-1}} \frac{d\underline{x}_{n-1}}{dt} = f_n(\underline{x}) + u + L_{\underline{f}_{n-1}} \alpha_{n-1} = \varphi(\underline{z}) + u$$

ta cũng có (3.81).

Cuối cùng, theo kết quả (3.77) của hệ (3.76), thì bộ điều khiển GAS cho hệ truyền ngược (3.75) chính là (3.82) và nó làm cho hệ ở hình 3.18 trở thành tuyến tính với mô hình trạng thái (3.78) khi được biểu diễn theo biến trạng thái $\underline{z}$ ❐



Hình 3.18: Bộ điều khiển GAS và phép đổi biến tìm được đã tuyến tính hóa chính xác đối tượng phi tuyến truyền ngược.

4 ĐIỀU KHIỂN CẬN TUYẾN TÍNH

Do thỏa mãn nguyên lý xếp chồng nên việc khảo sát, phân tích hệ tuyến tính nói chung rất tiện lợi, chẳng hạn chỉ cần dựa vào tính chất hàm trọng lượng, hàm quá độ ... là ta đã xác định được đặc tính động học của toàn bộ hệ thống. Sử dụng mô hình tuyến tính để mô tả, phân tích cũng như tổng hợp bộ điều khiển có rất nhiều ưu điểm như:

- Mô hình càng đơn giản, càng tốn ít chi phí. Các tham số mô hình tuyến tính dễ dàng xác định được bằng các phương pháp thực nghiệm (nhận dạng) mà không cần phải đi từ những phương trình hóa lý phức tạp mô tả hệ.
- Tập các phương pháp tổng hợp bộ điều khiển tuyến tính rất phong phú và không tốn nhiều thời gian để thực hiện.
- Cấu trúc đơn giản của mô hình cho phép dễ dàng theo dõi được kết quả điều khiển và chỉnh định lại mô hình cho phù hợp.

Từ những ưu điểm nổi bật đó của mô hình tuyến tính cũng như với mong muốn sử dụng được các thành tựu của *Lý thuyết điều khiển tuyến tính*, nên trong khá nhiều trường hợp, khi điều kiện cho phép, người ta thường tìm cách chuyển thể mô hình phi tuyến sang dạng có thể áp dụng được các phương pháp phân tích và thiết kế bộ điều khiển của Lý thuyết điều khiển tuyến tính. Đó cũng là nội dung của *điều khiển cận tuyến tính*.

4.1 Tuyến tính hóa trong lân cận điểm làm việc

4.1.1 Tuyến tính hóa mô hình trạng thái

Về bản chất của tuyến tính hóa xấp xỉ mô hình hệ thống xung quanh điểm làm việc $\underline{x}_L$ ta có thể hình dung giống như việc thay một đoạn đường cong $f(x)$ trong lân cận điểm x_0 bằng một đoạn thẳng tiếp xúc với đường cong đó tại x_0. Như vậy, việc tuyến tính hóa một hệ phi tuyến xung quanh điểm làm việc đồng nghĩa với sự xấp xỉ gần đúng hệ phi tuyến trong lân cận điểm trạng thái cân bằng hoặc điểm dừng bằng một mô hình tuyến tính.

Sau đây, khái niệm điểm làm việc $\underline{x}_L$ sẽ được hiểu chung là điểm cân bằng $\underline{x}_e$ hoặc điểm dừng $\underline{x}_d$. Điều này có nghĩa là khi không bị kích thích, tức là khi tín hiệu vào

$\underline{u}(t)=\underline{0}$ thì điểm làm việc $\underline{x}_v$ sẽ chính là điểm cân bằng $\underline{x}_e$ và trong trường hợp ngược lại với $\underline{u}(t)=\underline{u}_0$ là hằng số thì $\underline{x}_v$ chính là điểm dừng $\underline{x}_d$.

Sau đây ta sử dụng ký hiệu $\begin{pmatrix}\underline{x}_v\\ \underline{u}_0\end{pmatrix}$ để chỉ điểm làm việc. Với ký hiệu này thì điểm cân bằng sẽ là $\begin{pmatrix}\underline{x}_e\\ \underline{0}\end{pmatrix}$.

Cho một hệ phi tuyến tự trị có mô hình:

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u})\\ \underline{y}=\underline{g}(\underline{x},\underline{u})\end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó

- $\underline{x}(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ là vector biến trạng thái
- $\underline{u}(t) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$ là vector các tín hiệu đầu vào
- $\underline{y}(t) = (y_1, y_2, \ldots, y_r)^T$ là vector các tín hiệu đầu ra
- $\underline{f}(\underline{x},\underline{u}) = (f_1(\underline{x},\underline{u}), f_2(\underline{x},\underline{u}), \ldots, f_n(\underline{x},\underline{u}))^T$ và

  $\underline{g}(\underline{x},\underline{u}) = (g_1(\underline{x},\underline{u}), g_2(\underline{x},\underline{u}), \ldots, g_r(\underline{x},\underline{u}))^T$ là các vector hệ thống

Giả thiết rằng hệ có điểm làm việc $\begin{pmatrix}\underline{x}_v\\ \underline{u}_0\end{pmatrix}$, tức là tại đó có:

$$\underline{f}(\underline{x}_v,\underline{u}_0) = \underline{0}$$

với

$$\underline{x}_v = (x_1^v, x_2^v, \ldots, x_n^v)^T \quad \text{và} \quad \underline{u}_0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_r^0)^T$$

là những vector hằng (phần tử là hằng số). Chú ý, ký hiệu v hay 0 ở vị trí luỹ thừa của x_k^v và u_i^0 không phải là số mũ mà chỉ đơn giản muốn nói rằng nó là phần tử của các vector $\underline{x}_v$ và $\underline{u}_0$.

Khai triển các hàm $f_1(\underline{x},\underline{u}), \ldots, f_n(\underline{x},\underline{u})$ thuộc vector $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$ cũng như các hàm $g_1(\underline{x},\underline{u}), g_2(\underline{x},\underline{u}), \ldots, g_r(\underline{x},\underline{u})$ của (4.1) thành chuỗi Taylor tại điểm $\underline{x}_v,\underline{u}_0$, sau đó với giả thiết sai lệch $\underline{x}-\underline{x}_v$ và $\underline{u}-\underline{u}_0$ là đủ nhỏ để có thể bỏ qua tất cả các thành phần bậc cao trong chuỗi, cũng như $\underline{f}(\underline{x}_v,\underline{u}_0)=\underline{0}$, ta sẽ được:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A(\underline{x} - \underline{x}_o) + B(\underline{u} - \underline{u}_0) \\ \underline{y} - \underline{g}(\underline{x}_o, \underline{u}_0) = C(\underline{x} - \underline{x}_o) + D(\underline{u} - \underline{u}_0) \end{cases} \tag{4.2}$$

trong đó:

$$A = \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right)_{\underline{x}_o, \underline{u}_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\underline{x}_o, \underline{u}_0} \quad . \quad B = \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right)_{\underline{x}_o, \underline{u}_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{pmatrix}_{\underline{x}_o, \underline{u}_0}$$

$$C = \left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right)_{\underline{x}_o, \underline{u}_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_s}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_s}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\underline{x}_o, \underline{u}_0} \quad . \quad D = \left(\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}}\right)_{\underline{x}_o, \underline{u}_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_s}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_s}{\partial u_r} \end{pmatrix}_{\underline{x}_o, \underline{u}_0}$$

và được gọi chung là *ma trận Jacobi* của các vector hàm $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$, $\underline{g}(\underline{x},\underline{u})$.

Nếu để ý tiếp rằng $\underline{x}_o$ là vector hằng (phần tử của chúng là hằng số), tức là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d(\underline{x} - \underline{x}_o)}{dt}$$

cũng như sử dụng các ký hiệu:

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_o \quad , \quad \tilde{\underline{u}} = \underline{u} - \underline{u}_0 \quad \text{và} \quad \tilde{\underline{y}} = \underline{y} - \underline{g}(\underline{x}_o, \underline{u}_0)$$

thì từ (4.2), ta sẽ trở về dạng mô hình tuyến tính dạng quen biết trong *Lý thuyết điều khiển tuyến tính* [19]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\tilde{\underline{x}} + B\tilde{\underline{u}} \\ \tilde{\underline{y}} = C\tilde{\underline{x}} + D\tilde{\underline{u}} \end{cases} \tag{4.3}$$

Chú ý: Để có được mô hình tuyến tính (4.3) từ mô hình phi tuyến (4.1) bằng cách xấp xỉ trong lân cận điểm làm việc $\begin{pmatrix} \underline{x}_o \\ \underline{u}_0 \end{pmatrix}$ như trên thì cần thiết các vector hàm $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$ và $\underline{g}(\underline{x},\underline{u})$ phải khả vi tại $\underline{x}_o$, $\underline{u}_0$.

Ví dụ 4.1: Tuyến tính hóa mô hình trạng thái

Xét hệ Lorenz không bị kích thích với hai tín hiệu vào u_1 và u_2 mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3(-x_1 + x_2) + u_1 \\ x_1(26 - x_3) - x_2 \\ x_1 x_2 - x_3 + u_2 \end{pmatrix} \quad \text{trong đó} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Ở ví dụ 3.3 của chương trước ta đã được biết hệ Lorenz này có các điểm cân bằng:

$$\underline{x}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{e2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{e3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Từ phương trình trạng thái của hệ ta có các ma trận Jacobi

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 26 - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra hệ Lorenz (4.4) ban đầu có các mô hình tuyến tính gần đúng tại các điểm cân bằng $\underline{x}_{e1}$, $\underline{x}_{e2}$, $\underline{x}_{e3}$ như sau:

1) Tại $\begin{pmatrix} \underline{x}_{e1} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 26 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{u}} = A_1 \tilde{\underline{x}} + B \tilde{\underline{u}}$$

với $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_{e1} = \underline{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{x}$, $\quad \tilde{\underline{u}} = \underline{u} - \underline{u}_0 = \underline{u}$

2) Tại $\begin{pmatrix} \underline{x}_{e2} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{u}} = A_2 \tilde{\underline{x}} + B \tilde{\underline{u}}$$

với $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_{e2} = \underline{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\quad \tilde{\underline{u}} = \underline{u} - \underline{u}_0 = \underline{u}$

3) Tại $\begin{pmatrix} \underline{x}_{e3} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{u}} = A_3 \tilde{\underline{x}} + B \tilde{\underline{u}}$$

với $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_{e3} = \underline{x} -$. $\quad \tilde{\underline{u}} = \underline{u} - \underline{u}_0 = \underline{u}$

Ví dụ 4.2: Tuyến tính hóa mô hình trạng thái

Xét hệ không autonom có một tín hiệu vào $u(t)$ và hai biến trạng thái $x_1(t)$, $x_2(t)$ với mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + t)\cdot x_2 \\ x_2 + t^2 u \end{pmatrix}$$

Có thể thấy ngay là hệ chỉ có một điểm cân bằng $\underline{x}_e$ là gốc tọa độ $\underline{0}$. Thay giá trị điểm cân bằng $\underline{x}_e = \underline{0}$ cũng như $u_0 = 0$ vào các ma trận Jacobi

$$A = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 + t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{và} \qquad B = \frac{\partial \underline{f}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

của hệ ta được mô hình tuyến tính tương đương thuộc lân cận $\underline{x}_e = \underline{0}$ như sau (mô hình tuyến tính không dừng)

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \tilde{u}$$

trong đó

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_e = \underline{x} \quad \text{và} \quad \tilde{u} = u - u_0 = u.$$

□

4.1.2 Phân tích hệ thống

Phân tính tính ổn định nhờ mô hình tuyến tính tương đương

Với mô hình tuyến tính tương đương (4.3) trong lân cận điểm làm việc thì việc phân tích chất lượng hệ phi tuyến có mô hình trạng thái (4.1) có thể được thực hiện bằng các công cụ quen biết và đơn giản của *Lý thuyết điều khiển tuyến tính*.

Tuy nhiên do có sự hạn chế rằng mô hình tuyến tính (4.3) chỉ thay thế được cho mô hình phi tuyến (4.1) ban đầu trong một lân cận $\mathcal{O}_\varepsilon$ đủ nhỏ nào đó của điểm làm việc nên các kết luận rút ra được từ công việc phân tích trên cũng chỉ đúng trong lân cận $\mathcal{O}_\varepsilon$ đó.

Định lý 4.1: Cho hệ phi tuyến (4.1) với điểm cân bằng $\underline{x}_e$ có mô hình tuyến tính tương đương trong lân cận $\underline{x}_e$ là (4.3). Khi đó, tính ổn định của hệ phi tuyến (4.1) tại $\underline{x}_e$ sẽ được xác định từ vị trí các giá trị riêng của ma trận A của mô hình (4.3) như sau:

a) Hệ phi tuyến (4.1) ổn định tiệm cận tại $\underline{x}_e$ khi và chỉ khi *tất cả* các giá trị riêng của A *nằm bên trái trục ảo*.

b) Hệ phi tuyến (4.1) không ổn định tại $\underline{x}_e$ nếu có ít nhất một giá trị riêng của A *nằm bên phải trục ảo.*

c) Sẽ không đưa ra được một kết luận gì về tính ổn định tiệm cận của (4.1) tại $\underline{x}_e$ nếu ma trận A có ít nhất một giá trị riêng nằm trên trục ảo và các giá trị riêng còn lại nằm bên trái trục ảo.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng điểm cân bằng $\underline{x}_e$ là gốc tọa độ ($\underline{x}_e=0$). Khi đó sẽ có $\tilde{\underline{x}} = \underline{x}$. Như vậy, khi phân tích $\tilde{\underline{f}}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})\big|_{\underline{u}=\underline{0}}$ thành chuỗi Taylor ta có:

$$\tilde{\underline{f}}(\underline{x}) = \left(\frac{\partial \tilde{\underline{f}}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)_{\underline{x}=\underline{0}} \underline{x}+O(\underline{x}) = A\underline{x}+O(\underline{x})$$

trong đó $O(\underline{x})$ là đa thức theo $\underline{x}$ có bậc thấp nhất là 2, phần còn lại của chuỗi Taylor.

Gọi $s_1, s_2, \ldots, s_n$ là các giá trị riêng của A. Không mất tính tổng quát nếu ta giả sử A có dạng ma trận đường chéo $A=\mathrm{diag}(s_i)$. Khi đó thì với hàm xác định dương

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

ta có

$$L_{\tilde{\underline{f}}}V = 2\underline{x}^T[A\underline{x}+O(\underline{x})] = 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n} s_k x_k^2}_{p(\underline{x})} + 2\underline{x}^T O(\underline{x})$$

Nếu tất cả giá trị $s_1, s_2, \ldots, s_n$ đều nằm bên trái trục ảo, hàm $p(\underline{x})$ sẽ xác định âm. Trong lân cận $\underline{0}$, giá trị của đa thức bậc thấp nhất là ba $\underline{x}^T O(\underline{x})$ là có thể bỏ qua so với giá trị của đa thức bậc hai $p(\underline{x})$ nên $L_{\tilde{\underline{f}}}V$ cũng xác định âm, hay hệ là ổn định tiệm cận (theo nghĩa Lyapunov).

Tương tự ta cũng có đượckhẳng định thứ hai và ba. □

Ví dụ 4.3: Minh họa định lý 4.1

Cho hai hệ phi tuyến không bị kích thích có mô hình

$$\text{Hệ 1: } \frac{d\underline{x}}{dt} = \tilde{\underline{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_1x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \text{Hệ 2: } \frac{d\underline{x}}{dt} = \tilde{\underline{f}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

Cả hai hệ này đều cân bằng tại $\underline{0}$ và tại đó cùng có mô hình tuyến tính tương đương

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}$$

Ma trận A của mô hình tuyến tính tương đương của chúng có một điểm cực 0 nằm trên trục ảo, điểm cực còn lại là -1 nằm bên trái trục ảo.

Hệ 1 ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ vì tồn tại hàm xác định dương $V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ với:

$$L_{\tilde{f}}V = 2(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_1x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^4$$

xác định âm trong toàn bộ không gian trạng thái. Trong khi đó, hệ 2 lại không ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ vì ngoài điểm $\underline{0}$ nó còn cân bằng tại mọi điểm trạng thái khác có $x_1 = 0$, do đó nếu bị nhiễu tức thời đánh bật ra khỏi điểm $\underline{0}$ và đưa tới $\underline{x}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ có $a \neq 0$, thuộc lân cận $\underline{0}$, thì hệ sẽ nằm lại đó mà không quay về $\underline{0}$ vì $\underline{x}_e$ cũng là một điểm cân bằng. ❐

Ví dụ 4.4: Minh họa định lý 4.1

Quay lại hệ có mô hình trạng thái dạng phương trình vi phân Lorenz đã được xét đến ở ví dụ 4.1 là

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3(-x_1 + x_2) + u_1 \\ x_1(26 - x_3) - x_2 \\ x_1x_2 - x_3 + u_2 \end{pmatrix} \qquad \text{với} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Hệ có ba điểm cân bằng

$$\underline{x}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_{e2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_{e3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Mô hình tuyến tính tương đương của hệ tại điểm cân bằng thứ nhất $\underline{x}_{e1}$ là

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 26 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\tilde{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{\underline{u}} = A_1\tilde{\underline{x}} + B\tilde{\underline{u}}$$

Do A_1 có đa thức đặc tính

$$\det(sI - A_1) = (s+1)(s^2 + 4s - 75)$$

không phải là đa thức Hurwitz (các hệ số không cùng dấu) và cũng không có nghiệm trên trục ảo, nên tất cả các nghiệm của nó sẽ không cùng nằm bên trái trục ảo. Vậy hệ Lorenz không ổn định tại $\underline{x}_{e1}$.

Tương tự, từ mô hình tuyến tính tương đương tại $\underline{x}_{e2}$ và $\underline{x}_{e3}$ của hệ:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \underline{\tilde{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\tilde{u}} = A_2 \underline{\tilde{x}} + B \underline{\tilde{u}}$$

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \underline{\tilde{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\tilde{u}} = A_3 \underline{\tilde{x}} + B \underline{\tilde{u}}$$

với $\det(sI - A_2) = \det(sI - A_3) = s^3 + 5s^2 + 29s + 150$

không phải là đa thức Hurwitz và cũng không có nghiệm trên trục ảo (có thể kiểm tra lại nhờ bảng Routh), nên hệ Lorenz không ổn định tiệm cận tại $\underline{x}_{e2}$ và $\underline{x}_{e3}$. ❐

Ví dụ 4.10: Minh họa định lý 4.1

Xét hệ có mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 4x_1 - x_1^3 - x_2 + u \end{pmatrix}$$

Hệ có các điểm cân bằng

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \underline{x}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{e2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{e3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

và các ma trận Jacobi

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 + 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \underline{f}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tương ứng là các mô hình tuyến tính tương đương cùng những kết luận từ đó:

1) Tại $\underline{x}_{e1}$: $\dfrac{d\underline{x}}{dt} = A_1 \underline{x} + \underline{b} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$\Rightarrow \quad \det(sI - A_1) = s^2 + s - 4$ không phải là Hurwitz nên hệ không ổn định tiệm cận tại $\underline{x}_{e1}$.

2) Tại $\underline{x}_{e2}$ và $\underline{x}_{e3}$: $\dfrac{d\underline{x}}{dt} = A_{2,3} \underline{x} + \underline{b} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$\Rightarrow \quad \det(sI - A_{2,3}) = s^2 + s + 8$ không phải là Hurwitz nên hệ không ổn định tiệm cậntại $\underline{x}_{e2}$ và $\underline{x}_{e3}$ ❐

Phân tích tính ổn định nhờ đa tạp trung tâm

Quay lại hệ phi tuyến cân bằng tại $\underline{0}$, mô tả bởi (4.1) và trong trường hợp không bị kích thích, nó có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})\Big|_{\underline{u}=\underline{0}} = \underline{\tilde{f}}(\underline{x}) = A\underline{x}+O(\underline{x}) \tag{4.5}$$

trong đó

$$A=\left(\frac{\partial \underline{\tilde{f}}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)_{\underline{x}=\underline{0}} \quad \text{và } O(\underline{x}) \text{ là đa thức có bậc thấp nhất là } \underline{x}^2.$$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp mà định lý 4.1 chưa giải quyết được là ma trận A *có các giá trị riêng nằm trên hoặc nằm bên trái trục ảo.*

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng ma trận A có cấu trúc:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & \Theta \\ \Theta & A^- \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta & \Theta \\ \Theta & A^- \end{pmatrix}}_{A_2} \tag{4.6}$$

trong đó

- $A_0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là ma trận con của A có tất cả các giá trị riêng nằm trên trục ảo,
- $A^- \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ là ma trận con bền của A.

Vậy thì khi viết tách vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ thành $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix}$ với $\underline{x}_1 \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ mô hình (4.5) sẽ trở thành:

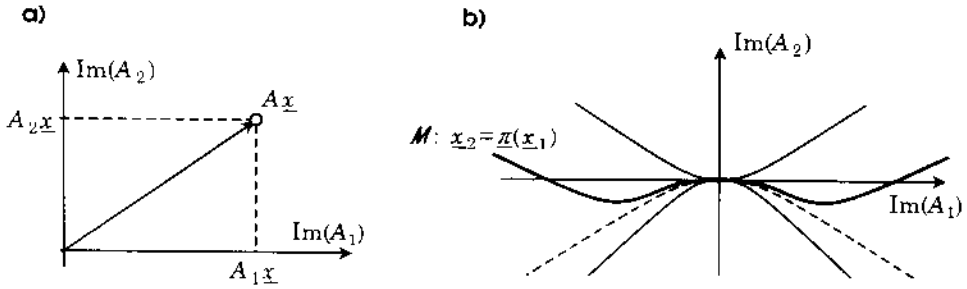
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}_1}{dt} = A_0\underline{x}_1+O_1(\underline{x}_1,\underline{x}_2), & \text{giá trị riêng của } A_0 \text{ nằm trên trục ảo} \\ \dfrac{d\underline{x}_2}{dt} = A^-\underline{x}_2+O_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2), & \text{giá trị riêng của } A^- \text{ nằm bên trái trục ảo} \end{cases}$$

Định nghĩa 4.1: Một đa tạp $\mathcal{M}$ được gọi là đa tạp trung tâm nếu:

a) Chứa gốc tọa độ $\underline{0}$.

b) Bất biến địa phương với hệ (4.5), tức là tại mọi $\underline{x}_0 \in \mathcal{M}$ luôn tồn tại khoảng thời gian T để nghiệm $\underline{x}(t)$ của hệ (4.5) nằm trong $\mathcal{M}$ khi $-T \le t \le T$.

c) Nhận $\mathrm{Im}(A_1)$ là không gian vector tiếp tuyến tại $\underline{0}$, trong đó $A_1 = \begin{pmatrix} A_0 & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}$.



Hình 4.1: Mô tả đa tạp trung tâm.

Theo định nghĩa như trên thì một hệ phi tuyến (4.5) có thể có nhiều đa tạp trung tâm. Hình 4.1b) minh họa một số đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$ có thể có của hệ.

Vì Im(A_1), Im(A_2) là hai không gian vector con bất biến trong $\mathbf{R}^n$, theo nghĩa

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A_1) \quad \Rightarrow \quad A\underline{x} = A\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A_1)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A_2) \quad \Rightarrow \quad A\underline{x} = A\begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A_2)$$

nên đôi khi người ta còn ký hiệu $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ cho các trục tọa độ thay vì Im(A_1), Im(A_2). Hình 4.1a) minh họa việc tách một phần tử của không gian vector Im(A) thành tổng của hai phần tử thuộc không gian vector con Im(A_1) và Im(A_2). Ngoài ra, vì

$$\mathrm{Im}(A_1) \cap \mathrm{Im}(A_2) = \{\underline{0}\}$$

tức là tập giao chỉ có một phần tử $\underline{0}$ duy nhất, nên việc tách thành tổng trên cũng là duy nhất (tổng trực tiếp):

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A_1) \oplus \mathrm{Im}(A_2)$$

Tại mỗi điểm $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix}$ của đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$ luôn có quan hệ nhất định giữa $\underline{x}_1$ và $\underline{x}_2$. Ký hiệu quan hệ đó là vector hàm

$$\mathcal{M}: \quad \underline{x}_2 = \underline{\pi}(\underline{x}_1)$$

ta sẽ có:

Định lý 4.2: Vector hàm $\underline{x}_2=\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ mô tả đa tạp trung tâm thỏa mãn:

a) $\underline{\pi}(\underline{0})=\underline{0}$

b) $\dfrac{\partial\underline{\pi}(\underline{0})}{\partial\underline{x}_1}=\Theta$ (ma trận có các phần tử bằng 0)

c) $\dfrac{\partial\underline{\pi}}{\partial\underline{x}_1}\left[A_0\underline{x}_1+O_1(\underline{x}_1,\underline{\pi}(\underline{x}_1))\right]=A^-\underline{\pi}(\underline{x}_1)+O_2(\underline{x}_1,\underline{\pi}(\underline{x}_1))$

Chứng minh:

a) Vì $\boldsymbol{M}$ chứa gốc tọa độ nên hiển nhiên có $\underline{\pi}(\underline{0})=\underline{0}$.

b) Do tiếp tuyến với $\boldsymbol{M}$ tại $\underline{0}$ là không gian vector $\mathrm{Im}(A_1)$ nên mọi vector cột của

$$\left.\frac{\partial\underline{\pi}(\underline{x}_1)}{\partial\underline{x}_1}\right|_{\underline{x}_1=\underline{0}}$$

phải nằm trong $\mathrm{Im}(A_1)$. Như vậy thì với $\underline{x}_1=\underline{0}$ hay $\underline{x}=\begin{pmatrix}\underline{0}\\ \underline{x}_2\end{pmatrix}$, mọi vector cột sẽ là

$$A_1\begin{pmatrix}\underline{0}\\ \underline{x}_2\end{pmatrix}=\underline{0}.$$

c) Xét quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ (4.5) có một đoạn ứng với $-T\le t\le T$ nằm trong $\boldsymbol{M}$. Khi đó thì với (4.6) có

$$\frac{d\underline{x}_2}{dt}=A^-\underline{x}_2+O_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2)=A^-\underline{\pi}(\underline{x}_1)+O_2(\underline{x}_1,\underline{\pi}(\underline{x}_1))$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{d\underline{x}_2}{dt}=\frac{\partial\pi}{\partial\underline{x}_1}\frac{d\underline{x}_1}{dt}=\frac{\partial\pi}{\partial\underline{x}_1}\left[A_0\underline{x}_1+O_1(\underline{x}_1,\underline{x}_2)\right]=\frac{\partial\underline{\pi}}{\partial\underline{x}_1}\left[A_0\underline{x}_1+O_1(\underline{x}_1,\underline{\pi}(\underline{x}_1))\right]$$

Suy ra

$$A^-\underline{\pi}(\underline{x}_1)+O_2(\underline{x}_1,\underline{\pi}(\underline{x}_1))=\frac{\partial\underline{\pi}}{\partial\underline{x}_1}\left[A_0\underline{x}_1+O_1(\underline{x}_1,\underline{\pi}(\underline{x}_1))\right]$$ ❐

Định lý 4.2 xác nhận sự tồn tại của đa tạp trung tâm $\boldsymbol{M}$, đồng thời là tiền đề cho việc xây dựng vector hàm $\underline{x}_2=\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ mô tả $\boldsymbol{M}$ phục vụ việc xét tính ổn định của hệ (4.64) sau này. Chú ý rằng vector hàm $\underline{x}_2=\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ không bắt buộc phải khả vi vô hạn lần như $\underline{f}(\underline{x})$ hay như $O_1(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ và $O_2(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$.

Tiếp tục, khi thay vector hàm $\underline{x}_2=\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ mô tả đa tạp trung tâm $\boldsymbol{M}$ vào mô hình hệ thống ta sẽ thu được

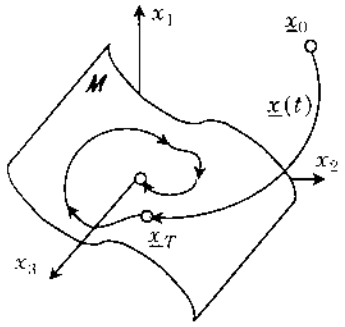
$$\frac{d\underline{x}_1}{dt} = A_0\underline{x}_1 + O_1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = A_0\underline{x}_1 + O_1(\underline{x}_1, \underline{\pi}(\underline{x}_1)) \tag{4.7}$$

$$\frac{d\underline{x}_2}{dt} = A^-\underline{x}_2 + O_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = A^-\underline{x}_2 + O_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \tag{4.8}$$

Rõ ràng, do tất cả các giá trị riêng của A^- nằm bên trái trục ảo, nên hệ con (4.8) là ổn định tiệm cận tại $\underline{x}_2 = \underline{0}$. Bởi vậy:

Định lý 4.3: Hệ phi tuyến bậc n (4.5) ổn định tại gốc tọa độ $\underline{x} = \underline{0}$ khi và chỉ khi hệ con (4.7) của nó với bậc $m < n$ cũng ổn định tại gốc tọa độ tại $\underline{x}_1 = \underline{0}$.

Hơn nữa, vì hệ con (4.8) là ổn định tiệm cận, nên mọi quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ (4.5) phải có xu hướng quy tụ về quỹ đạo trạng thái tương ứng của hệ con (4.7). Nơi quy tụ đó chính là đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$. Nói cách khác, sau một thời kỳ "quá độ", hệ (4.5) sẽ "xác lập" trên đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$ như được minh họa ở hình 4.2.



Hình 4.2: Các quỹ đạo trạng thái của hệ (4.5) luôn có xu hướng tiến về đa tạp trung tâm và kết thúc tại đó.

Theo định lý 4.3 thì việc xét tính ổn định tại gốc tọa độ $\underline{0}$ của hệ phi tuyến bậc n có mô hình không bị kích thích (4.5) sẽ được chuyển về việc xét tính ổn định cũng tại gốc tọa độ $\underline{0}$ của hệ có bậc thấp hơn $m \le n$ là (4.7). Vấn đề còn lại là xác định vector hàm $\underline{x}_2 = \underline{\pi}(\underline{x}_1)$ cho đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$.

Để xác định hàm $\underline{x}_2 = \underline{\pi}(\underline{x}_1)$, định lý 4.2 cung cấp cho ta những thông tin đầu tiên. Tuy nhiên các thông tin đó là chưa đầy đủ, phần cũng là do một hệ (4.5) có thể có nhiều đa tạp trung tâm. Bởi vậy, trong ứng dụng, người ta thường chỉ áp dụng phương pháp đa tạp trung tâm cho một số hệ (4.5) mà ở đó số các giá trị riêng của ma trận A nằm trên trục ảo là không nhiều, tức là ma trận A_0 có số chiều m nhỏ, hay bậc của hệ con (4.7) tương ứng của nó là thấp, cũng như số các phần tử của vector $\underline{x}_1$ là tương đối ít.

Một cách làm khác cũng hay được sử dụng là xấp xỉ $\underline{x}_2 = \underline{\pi}(\underline{x}_1)$ dưới dạng đa thức có bậc thấp nhất của $\underline{x}_1$ phải là hai. Lý do cho điều đó là:

1) Thứ nhất, thành phần

$$O_1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = O_1(\underline{x}_1, \underline{\pi}(\underline{x}_1))$$

của hệ con (4.7) có m biến trạng thái, chỉ được phép chứa những đa thức theo $\underline{x}_1$ từ bậc hai trở lên.

2) Thứ hai, đa thức $\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ phải thỏa mãn nội dung định lý 4.2, tức là phải khả vi ít nhất là một lần và $\underline{\pi}(\underline{0}) = \underline{0}$, $\left.\dfrac{\partial \underline{\pi}}{\partial \underline{x}_1}\right|_{\underline{x}_1 = \underline{0}} = \Theta$.

Nếu ký hiệu

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{\pi}(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix} \pi_1(\underline{x}_1) \\ \vdots \\ \pi_{n-m}(\underline{x}_1) \end{pmatrix}$$

thì có thể thấy

$$\pi_k(\underline{x}_1) = \underline{x}_1^T Q_k \underline{x}_1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-m \tag{4.9}$$

là một trong những đa thức có bậc thấp nhất của $\underline{x}_1$ bằng hai, thỏa mãn hai điều kiện vừa nêu. Ma trận Q_k sẽ được chọn sao cho toàn bộ $n-m$ đa thức (4.9) thỏa mãn thêm điều kiện c) của định lý 4.2. Nói cách khác, điều kiện c) là điểm bắt đầu để xác định các ma trận Q_k cho đa thức (4.9).

Xét riêng trường hợp $m=1$ và $n=2$, tức là hệ phi tuyến (4.5) với ma trận A chỉ có một giá trị riêng nằm trên trục ảo, giá trị riêng còn lại nằm bên trái trục ảo. Vậy thì với các phần tử của ma trận A là những số thực, bản thân hai ma trận A_0, A^- cũng phải là số thực ($A_0 \in \mathbb{R}$, $A^- \in \mathbb{R}$), hơn nữa $A_0 = 0$. Hệ con bậc m với mô hình (4.7) trở thành:

$$\frac{dx_1}{dt} = O_1(x_1, x_2) = O_1(x_1, \pi(x_1)) \tag{4.10}$$

trong đó $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ đã được thay bằng những ký hiệu không có dấu gạch chân x_1, x_2, $\pi(x_1)$ để nhấn mạnh rằng chúng là các đại lượng vô hướng khi $m=1$, $n=2$.

Nếu sử dụng đa thức $\pi(x_1)$ có bậc thấp nhất của x_1 bằng hai với cấu trúc

$$\pi(x_1) = q\, x_1^2 \tag{4.11}$$

thì từ điều kiện c) của định lý 4.2 ta được:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} O_1(x_1, \pi(x_1)) = A^- \pi(x_1) + O_2(x_1, \pi(x_1))$$

$$\Leftrightarrow \quad 2q x_1 O_1(x_1, q\, x_1^2) = A^- q\, x_1^2 + O_2(x_1, q\, x_1^2) \tag{4.12}$$

Tương tự, nếu sử dụng đa thức $\pi(x_1)$ có bậc thấp nhất của x_1 bằng hai với cấu trúc

$$\pi(x_1) = q_1 x_1^2 + q_2 x_1^3 \tag{4.13}$$

thì

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} O_1(x_1, \pi(x_1)) = A^- \pi(x_1) + O_2(x_1, \pi(x_1))$$

$$\Leftrightarrow \quad (2q_1 x_1 + 3q_2 x_1^2) O_1(x_1, (q_1 x_1^2 + q_2 x_1^3)) =$$

$$= A^-(q_1 x_1^2 + q_2 x_1^3) + O_2(x_1, (q_1 x_1^2 + q_2 x_1^3)) \tag{4.14}$$

Từ phương trình (4.12) hoặc (4.14), bằng cách cân bằng hệ số bậc thấp nhất theo x_1 của hai vế có chứa q, hoặc q_1, q_2 và bỏ qua những thành phần bậc cao của x_1 ta sẽ có được các tham số q, hoặc q_1, q_2. Việc bỏ qua các thành phần đa thức bậc cao của x_1 không làm thay đổi kết luận sau này về tính ổn định tại gốc tọa độ $\underline{0}$ của hệ thống, vì để xét tính ổn định, ta chỉ cần xét $\underline{x}$ trong lân cận $\underline{0}$ là đủ (có $|x_1|$ và $|x_2|$ tương đối nhỏ).

Tuy nhiên, sự bỏ qua những thành phần bậc cao này của x_1 cũng sẽ làm thay đổi xấp xỉ mô hình hệ thống, tức là không có được thực sự $x_2 = \pi(x_1)$ mà chỉ là $x_2 \approx \pi(x_1)$. Điều này kéo theo là ta không thực sự có được (4.10) mà cũng chỉ là

$$\frac{dx_1}{dt} \approx O_1(x_1, \pi(x_1))$$

Do đó để bù, ta phải đưa thêm vào cho mô hình (4.10) thành phần sai lệch (có thể không cần phải xác định) tiến về 0 nhanh hơn bản thân mô hình xấp xỉ. Nếu mô hình xấp xỉ tiến về 0 nhanh như x_1^p thì thành phần bù đó sẽ được ký hiệu bằng $O^p(x_1)$, là đa thức có bậc thấp nhất bằng x_1^p. Mô hình được bù có dạng như sau:

$$\frac{dx_1}{dt} = O_1(x_1, \pi(x_1)) + O^p(x_1)$$

Nhằm làm rõ hơn ý tưởng trên, ta xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 4.6: Xác định mô hình bù

Cho hệ phi tuyến không bị kích thích với mô hình

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1x_2 - x_1^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + bx_1x_2 + cx_1^2 \end{cases}$$

Hệ có

$$A_0=0, \quad A^-=-1, \quad O_1(x_1, x_2)= ax_1x_2-x_1^3, \quad O_2(x_1, x_2) = bx_1x_2 + c\,x_1^2$$

Đặt $\pi(x_1)= q\,x_1^2$ thì từ phương trình (4.12) được

$$2q\,x_1^4(aq-1) = (c-q)\,x_1^2+bq\,x_1^3$$

Cân bằng hệ số của x_1^2 ở hai vế và bỏ qua các thành phần bậc cao x_1^3 và x_1^4 ta có

$$c-q=0 \quad \Leftrightarrow \quad c=q \quad \Leftrightarrow \quad \pi(x_1) = c\,x_1^2$$

Suy ra mô hình hệ con (4.10) có cùng tính ổn định tại $\underline{0}$ là

$$\frac{dx_1}{dt} = O_1(x_1,\pi(x_1)) = (ac-1)\,x_1^3+O^3(x_1)$$

và $O^3(x_1)$ là thành phần bù sai lệch, nó phải tiến về 0 nhanh hơn x_1^3. □

Ví dụ 4.7: Xác định mô hình bù

Xét hệ có mô hình

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1x_2 - x_1^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_1x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

Đây là trường hợp đặc biệt của hệ đã cho ở ví dụ 4.6 ứng với $a=b=c=1$. Do đó nếu đặt $\pi(x_1)=q\,x_1^2$ thì theo kết quả của ví dụ 4.6, tính ổn định của hệ tại $\underline{0}$ sẽ tương đương với tính ổn định cũng tại $\underline{0}$ của

$$\frac{dx_1}{dt} = O^3(x_1), \quad \text{đa thức có bậc thấp nhất bằng } x_1^3$$

Nhưng vì $O^3(x_1)$ là thành phần bù sai lệch chưa được xác định và ngoài thông tin rằng nó phải tiến về 0 nhanh hơn x_1^3 ta không được biết thêm gì về nó, nên cũng chưa thể xác định được tính ổn định của hệ. Bởi vậy cần phải có một đa tạp trung tâm $x_2=\pi(x_1)$ khác thích hợp hơn.

Thử với $\pi(x_1)=q_1\,x_1^2+ q_2\,x_1^3$ thì theo công thức (4.14) ta có:

$$(2q_1x_1+3q_2x_1^2)((q_1-1)x_1^3+q_2x_1^4) = (1-q_1)x_1^2+(q_1-q_2+1)x_1^3+q_2x_1^4$$

$\Rightarrow$ $q_1=1$ và $q_2=1$ (cân bằng hệ số của x_1^2 và x_1^3 ở cả hai vế)

hay

$$\pi(x_1)= x_1^2+x_1^3$$

Suy ra

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1^4+O^4(x_1)$$

và $O^4(x_1)$ là thành phần bù sai lệch, nó tiến về 0 nhanh hơn x_1^4. ❐

Ví dụ 4.8: Xác định mô hình bù

Xét hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -x_2-x_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hệ trên có

$$A_0=0\ ,\ A^-=-1,\quad O_1(x_1,x_2)=x_1x_2,\quad O_2(x_1,x_2)=-x_1^2$$

Đặt $\pi(x_1)=q\,x_1^2$. Vậy thì từ phương trình (4.12) được

$$2q^2x_1^4 = -(q+1)x_1^2$$

Cân bằng hệ số của x_1^2 ở hai vế và bỏ qua các thành phần bậc cao x_1^4 ta có

$$q+1\approx 0 \quad\Leftrightarrow\quad q=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \pi(x_1) = -x_1^2.$$

Suy ra mô hình hệ con (4.7) có cùng tính ổn định tại $\underline{0}$ với hệ đã cho là

$$\frac{dx_1}{dt}=O_1(x_1,\pi(x_1))= -x_1^3+O^3(x_1)$$ ❐

Sau khi đã sử dụng đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$ với vector hàm $\underline{x}_2=\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ mô tả nó để đưa bài toán xét tính ổn định tại $\underline{0}$ của hệ phi tuyến bậc n với mô hình không bị kích thích (4.5) về bài toán tương đương là xét tính ổn định cũng tại $\underline{0}$ của hệ bậc $m<n$ với mô hình (4.7) thì việc thực hiện giải bài toán đó sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều. Lý do một phần là vì hệ con (4.7) có bậc m thường nhỏ hơn nhiều so với hệ gốc (4.5) ban đầu, phần nữa mô hình hệ (4.7) có dạng rất tiện cho việc khảo sát tính ổn định như các ví dụ 4.6, 4.7 và 4.8 đã minh họa.

Định lý 4.4: Giả sử hệ phi tuyến bậc n (4.5) cân bằng tại $\underline{0}$ với ma trận A chỉ có một giá trị riêng nằm trên trục ảo ($m=1$), các giá trị riêng còn lại đều nằm bên trái trục ảo. Vậy thì với đa tạp trung tâm $\underline{x}_2=\underline{\pi}(x_1)$, mô hình hạ bậc (4.7) của nó sẽ có dạng

$$\frac{dx_1}{dt} = a\,x_1^p + O^p(x_1) \quad \text{và} \quad p \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Khi đó:

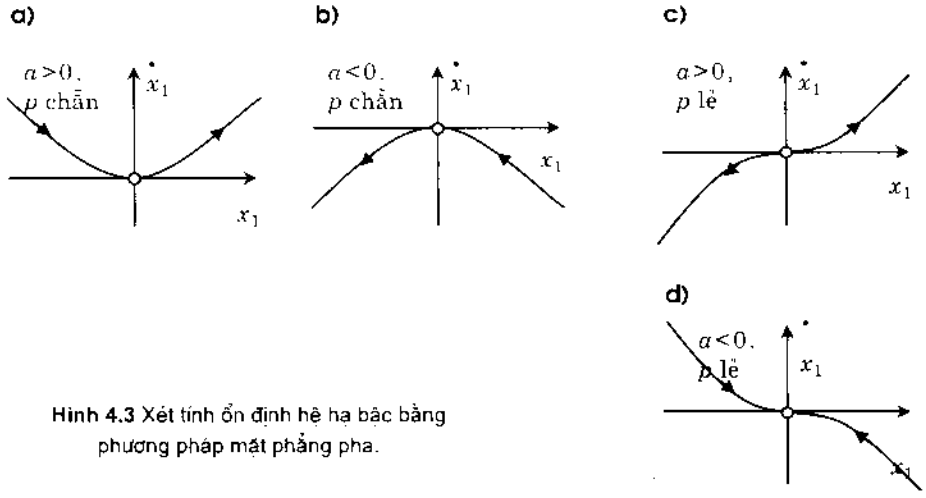
a) Hệ (4.5) sẽ ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ khi $a<0$ và p là số lẻ.

b) Hệ (4.5) sẽ không ổn định tại $\underline{0}$ khi $a>0$ hoặc khi $a<0$ và p là số chẵn.

c) Không kết luận được gì nếu $a=0$.

Chứng minh:

Ta không xét đến trường hợp c) vì khi đó hàm bù sai lệch $O^p(x_1)$ là chưa được xác định. Khi $a\neq 0$ thì do $O^p(x_1)$ tiến về 0 nhanh hơn bản thân x_1^p nên trong lân cận gốc tọa độ, quỹ đạo trạng thái của hệ con (4.15) sẽ có dạng của x_1^p cho ở hình 4.3, ứng với những trường hợp khác nhau như $a>0$ hay $a<0$ hoặc p là số chẵn hay số lẻ. Chiều của quỹ đạo trạng thái được xác định từ điều hiển nhiên rằng nếu $\frac{dx_1}{dt}>0$ thì x_1 phải tăng và khi $\frac{dx_1}{dt}<0$ thì x_1 phải giảm. Với hình minh họa 4.3 đó ta thấy được ngay rằng hệ (4.15) ổn định tại $\underline{0}$ khi và chỉ khi $a<0$ và p là số lẻ. Theo nội dung định lý 4.3 thì kết luận này cũng đúng cho hệ (4.5). ❐



Hình 4.3 Xét tính ổn định hệ hạ bậc bằng phương pháp mặt phẳng pha.

Từ định lý 4.4 ta thấy:

- Hệ xét ở ví dụ 4.6 là ổn định (tiệm cận) tại $\underline{0}$ khi $ac-1<0$.
- Hệ xét ở ví dụ 4.7 là không ổn định tại $\underline{0}$.
- Hệ xét ở ví dụ 4.8 là ổn định (tiệm cận) tại $\underline{0}$.

Vài điều bàn thêm

Với đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$ ta đã có thể kết luận được tính ổn định tại $\underline{0}$ cho một số hệ phi tuyến mà mô hình tuyến tính tương đương của nó tại $\underline{0}$ ở biên giới ổn định. Tuy nhiên việc xác định $x_2=\pi(x_1)$ cho đa tạp trung tâm $\mathcal{M}$ lại được thực hiện "khá mò mẫm" và dựa nhiều vào "kinh nghiệm". Chẳng hạn, thông thường người ta hay bắt đầu bằng giả thiết đa thức bậc hai (4.11) cho $x_2=\pi(x_1)$. Song nếu giả thiết đó lại đưa đến mô hình (4.15) có $a=0$ thì lại phải bắt đầu lại với dạng đa thức bậc ba (4.13) phức tạp hơn. Tiếp tục, nếu dạng đó của $x_2=\pi(x_1)$ lại vẫn cho ra kết quả $a=0$ thì lại phải thử tiếp với dạng đa thức bậc cao hơn nữa của $x_2=\pi(x_1)$.

Bởi vậy, cho một khả năng ứng dụng hiệu quả thì ở đây còn thiếu sự gợi ý về cấu trúc có thể có của $\underline{x}_2=\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ từ mô hình (4.5) đã biết của hệ thống. Thiết nghĩ, sự thiết hụt đó cũng là một vấn đề mở cho chúng ta nghiên cứu tiếp về đa tạp trung tâm. Chẳng hạn như tìm câu trả lời cho: "*Những hệ phi tuyến nào mới có thể có đa tạp trung tâm* $\underline{x}_2=\underline{\pi}(\underline{x}_1)$ *dạng đa thức và nếu có thì bậc tối thiểu của đa thức phải là bao nhiêu*". Câu hỏi trên là hoàn toàn có lý vì không phải mọi hệ phi tuyến phẳng nào cũng có đa tạp trung tâm dạng đa thức như ta thấy ở ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4.9: Hệ không có đa tạp trung tâm dạng đa thức

Xét hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hệ có

$$A_0=0\ ,\quad A^-=-1,\quad O_1(x_1,x_2)=x_1x_2,\quad O_2(x_1,x_2)=0$$

Giả sử rằng hàm $x_2=\pi(x_1)$ của hệ có dạng đa thức. Khi đó, với mục đích rằng tích $\frac{dx_1}{dt}=x_1x_2$ của hệ hạ bậc có cấu trúc dạng (4.15) thì hàm $x_2=\pi(x_1)$ phải là

$$\pi(x_1)=a\,x_1^{p-1} \qquad \text{với} \qquad p\geq 3 \ \text{ và } \ a\neq 0$$

Thay công thức trên của $\pi(x_1)$ vào điều kiện c) trong định lý 4.2 ta đi đến:

$$a^2(p-1)\,x_1^{2(p-1)} = -a\,x_1^{p-1}.$$

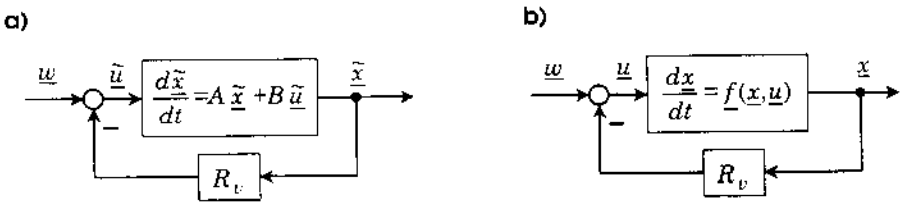
Song đẳng thức trên không thỏa mãn với mọi $p \geq 3$ và $a \neq 0$. Vậy điều giả sử là sai, hay hàm mô tả đa tạp trung tâm $x_2 = \pi(x_1)$ của hệ không thể là đa thức. ❐

4.1.3 Thiết kế bộ điều khiển

Theo kết quả của định lý 4.1, hệ phi tuyến (4.1) ổn định tiệm cận Lyapunov tại $\underline{x}_e$ khi và chỉ khi mô hình tuyến tính tương đương tại $\underline{x}_e$ của nó là (4.3) có các giá trị riêng của ma trận A nằm bên trái trục ảo, tức là khi và chỉ khi (4.3) là ổn định. Nếu mô hình tuyến tính tương đương (4.3) không ổn định, ta có thể áp dụng các phương pháp thiết kế bộ điều khiển R_v tĩnh, phản hồi trạng thái để ổn định hóa hệ (hình 4.4a), tức là xác định R_v sao cho $A - BR_v$ là ma trận bền.

Để tìm R_v ta có thể:

- Sử dụng các phương pháp gán điểm cực $s_1, s_2, \ldots, s_n$ cho trước nằm bên trái trục ảo như modal, Roppenecker hay Ackermann (xem thêm tài liệu [19]).
- Sử dụng phương pháp thiết kế bộ điều khiển tối ưu của bài toán LQR (*linear quadratic regulator*).



Hình 4.4: Thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái làm ổn định hệ phi tuyến.

Vấn đề còn lại là bộ điều khiển tuyến tính R_v đó có thực sự làm ổn định hệ phi tuyến (4.1) đã cho ban đầu hay không (hệ ở hình 4.4b có ổn định hay không).

Định lý 4.5: Nếu hệ phi tuyến (4.1) điều khiển được trong lân cận $\underline{x}_e$ và bộ điều khiển phản hồi (âm) trạng thái R_v làm cho hệ tuyến tính tương đương của nó tại $\underline{x}_e$ là (4.3) ổn định thì nó cũng sẽ làm cho hệ (4.1) ổn định tiệm cận tại $\underline{x}_e$.

Chứng minh:

Trước hết ta thấy ngay được là hệ kín gồm khâu phi tuyến (4.1) và bộ điều khiển phản hồi trạng thái R_ℓ (hình 4.4b) khi không bị kích thích sẽ được mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, -R_\ell \underline{x}) \tag{4.16}$$

Hệ kín này cũng có điểm cân bằng $\underline{x}_e$, đồng thời tại điểm cân bằng đó nó có mô hình tuyến tính tương đương (khi không bị kích thích)

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = (A - BR_\ell)\,\tilde{\underline{x}} \tag{4.17}$$

Do hệ tuyến tính (4.17) ổn định nên theo định lý 4.1, hệ (4.16) cũng ổn định tại $\underline{x}_e$ và đó là điều phải chứng minh. ❐

Chú ý: Do bộ điều khiển R_ℓ được tìm trên cơ sở sử dụng mô hình tuyến tính tương đương (4.3) trong lân cận $\underline{x}_e$ của hệ phi tuyến (4.1) nên tính ổn định mà nó mang lại cho hệ phi tuyến (4.1) cũng chỉ được khẳng định trong lân cận $\underline{x}_e$. Nếu lân cận đó quá nhỏ thì ý nghĩa ổn định đó cũng không có giá trị gì. Bởi vậy, để đánh giá chất lượng thực sự mà bộ điều khiển R_ℓ đã mang lại cho hệ phi tuyến (4.1), nhất thiết ta phải xác định miền ổn định $\mathcal{O}$ kèm theo. Miền ổn định $\mathcal{O}$ càng lớn, ý nghĩa sử dụng của bộ điều khiển R_ℓ đối với hệ phi tuyến (4.1) càng cao.

Ví dụ 4.10: Minh họa định lý 4.5

Xét hệ có hai biến trạng thái mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) = \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ x_2(x_1 + 2) + u \end{pmatrix}$$

Hệ cân bằng tại gốc $\underline{0}$. Hệ có mô hình tuyến tính tương đương tại gốc tọa độ $\underline{0}$:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\,\tilde{\underline{x}} + B\,\tilde{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{u}}$$

Ma trận A của mô hình tuyến tính tương đương này có một giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ nằm bên phải trục ảo nên theo định lý 4.1, hệ phi tuyến đã cho là không ổn định tại gốc $\underline{0}$.

Sử dụng phương pháp Ackermann (xem thêm tài liệu [19] về các phương pháp thiết kế bộ điều khiển cho trước điểm cực) để chuyển các điểm cực $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ của mô hình tuyến tính tương đương tới những vị trí mới là $s_1 = -1$, $s_2 = -2$ ta được bộ điều khiển:

$$R_u = (2\ ,\ 5)$$

Với bộ điều khiển này, hệ kín ở hình 4.4b) gồm bộ điều khiển R_u tìm được và đối tượng phi tuyến đã cho, có mô hình không bị kích thích (ứng với $w=0$ và do đó có $u=-R_u\underline{x}=-2x_1-5x_2$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},-R_u\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

Sử dụng hàm xác định dương $V(\underline{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$ ta thấy

$$L_{\underline{f}}V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\ \underline{f}(\underline{x},-R_u\underline{x}) = (4x_1\ ,\ 2x_2)\begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = -4x_1^4 + 2x_2^2(x_1 - 3)$$

xác định âm khi $x_1<3$. Vậy bộ điều khiển R_u tìm được đã làm hệ phi tuyến ổn định tiệm cận tại gốc tọa độ với miền ổn định

$$\mathcal{O} = \{\ \underline{x} \in \mathbb{R}^2\ \mid\ x_1<3\ \}$$ □

Ví dụ 4.11: Minh họa định lý 4.5

Cho đối tượng phi tuyến

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1(x_2+1)+u \\ x_1^2 - x_2 - x_2^3 + u \end{pmatrix}$$

Có thể thấy được ngay rằng đối tượng cân bằng tại gốc tọa độ.

Mô hình tuyến tính tương đương trong lân cận gốc tọa độ của nó là:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\,\tilde{\underline{x}} + B\,\tilde{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tilde{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\tilde{\underline{u}}$$

Từ mô hình tuyến tính tương đương đó thì theo định lý 4.1, đối tượng phi tuyến đã cho là không ổn định tại điểm cân bằng $\underline{0}$, vì:

$$\det(sI-A)=0 \qquad \Rightarrow \qquad s^2-1=0$$

có nghiệm $\lambda_1=1$ nằm bên phải trục ảo.

Bằng phương pháp Roppenecker [19] ta xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái để ổn định đối tượng thông qua việc gán hai điểm cực $s_1=-2$, $s_2=-3$ và đi đến:

$$R_u = (6\ ,\ -1)$$

Với bộ điều khiển này thì hệ kín ở hình 4.4b) bao gồm đối tượng phi tuyến đã cho cùng với bộ điều khiển phản hồi âm trạng thái R_v tìm được, trong trường hợp không bị kích thích sẽ có mô hình (ứng với $w=0$ và do đó có $u=-R_v\underline{x}=-6x_1+x_2$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_1(x_2+1)-6x_1+x_2 \\ x_1^2-x_2-x_2^3-6x_1+x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_1x_2-5x_1+x_2 \\ x_1^2-x_2^3-6x_1 \end{pmatrix}$$

Sử dụng hàm xác định dương $V(\underline{x})=6x_1^2+x_2^2$ ta có:

$$L_{\underline{f}}V=\frac{dV}{dt}=2(6x_1 \;,\; x_1)\begin{pmatrix} x_1x_2-5x_1+x_2 \\ x_1^2-x_2^3-6x_1 \end{pmatrix}=x_1^2(16x_2-60)-2x_2^4$$

xác định âm khi $x_2<\frac{15}{4}$. Vậy bộ điều khiển R_v tìm được đã làm hệ phi tuyến ổn định tiệm cận tại gốc tọa độ với miền ổn định:

$$\mathcal{O}=\{\ \underline{x}\in\mathbb{R}^2 \mid x_2<\frac{15}{4}\ \}$$ □

4.2 Phương pháp gain-scheduling

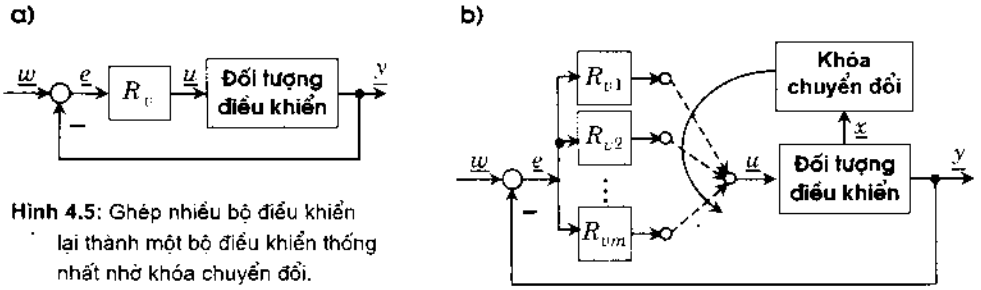
4.2.1 Tư tưởng chính của phương pháp

Mục 4.1 vừa trình bày nguyên lý thiết kế bộ điều khiển R_v điều khiển phản hồi trạng thái cho đối tượng phi tuyến (4.1) thông qua mô hình tuyến tính tương đương (4.3) của nó trong lân cận điểm cân bằng $\begin{pmatrix}\underline{x}_e \\ \underline{0}\end{pmatrix}$, hay điểm làm việc $\begin{pmatrix}\underline{x}_r \\ \underline{u}_0\end{pmatrix}$.

Tất nhiên rằng nguyên lý sử dụng mô hình tuyến tính tương đương (4.3) để thiết kế bộ điều khiển cho đối tượng tuyến tính (4.1) như ở mục 4.1 không chỉ dừng lại ở phản hồi trạng thái mà hoàn toàn còn được mở rộng ra cho cả việc thiết kế những bộ điều khiển khác như phản hồi đầu ra, hoặc bộ điều khiển ở mạch truyền thẳng (hình 4.5a).

Song do hai mô hình (4.1) và (4.3) chỉ được xem là tương đương trong một lân cận $\mathcal{O}_v$ đủ nhỏ của điểm làm việc $\begin{pmatrix}\underline{x}_r \\ \underline{u}_0\end{pmatrix}$ nên khi áp dụng cho đối tượng phi tuyến gốc (4.1) thì chất lượng của hệ thống cũng chỉ được đảm bảo trong lân cận đó. Điều này nói rằng ở những điểm làm việc khác nhau $\begin{pmatrix}\underline{x}_{r1} \\ \underline{u}_{01}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\underline{x}_{r2} \\ \underline{u}_{02}\end{pmatrix}$, ... ta phải thiết kế những bộ điều khiển R_{v1}, R_{v2}, ... khác nhau. Nếu như số điểm làm việc là hữu hạn thì từ hữu hạn các bộ

điều khiển ứng với từng điểm làm việc đó ta phải ghép chúng lại chung lại với nhau nhờ khóa chuyển đổi (hình 4.5b) để có được một bộ điều khiển thống nhất.



Hình 4.5: Ghép nhiều bộ điều khiển lại thành một bộ điều khiển thống nhất nhờ khóa chuyển đổi.

Tuy nhiên việc sử dụng khóa chuyển đổi như trên cũng có nhược điểm của nó:

- Thứ nhất là khóa chuyển đổi phải làm việc cùng với trạng thái thực để xác định điểm làm việc tức thời hiện có của đối tượng nên trong nó phải có bộ quan sát trạng thái. Điều này làm cho cấu trúc bộ điều khiển trở nên phức tạp.
- Thứ hai là không thể áp dụng được cho trường hợp đối tượng có rất nhiều điểm làm việc, chẳng hạn là vô số.

Ví dụ sau xác nhận trường hợp một đối tượng có cấu trúc đơn giản nhưng đã có vô số điểm làm việc.

Ví dụ 4.12: Hệ phi tuyến có vô số điểm làm việc

Xét đối tượng phi tuyến có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 1 - e^{-x_2} + u \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad y = x_1 \tag{4.18}$$

Ứng với một giá trị tín hiệu vào $u = u_0 > -1$ cố định nào đó thì từ

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 1 - e^{-x_2} + u_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 = -\ln(1 + u_0) \end{cases}$$

ta có được điểm làm việc $\begin{pmatrix} \underline{x}_v \\ \underline{u}_0 \end{pmatrix}$ với

$$\underline{x}_v = \begin{pmatrix} x_1^v \\ x_2^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln\sqrt{1 + u_0} \\ -\ln(1 + u_0) \end{pmatrix}, \quad u = u_0 > -1$$

Xem

$$x_1^v = -\ln\sqrt{1+u_0} = v \tag{4.19}$$

là tham số tùy ý thì điểm làm việc trên trở thành

$$\underline{x}_v = \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad u_0 = e^{-2v} - 1 \tag{4.20}$$

Như vậy, điểm làm việc của đối tượng được biểu diễn thành hàm của v theo công thức (4.20). Với những giá trị v khác nhau ta có những điểm làm việc (4.20) khác nhau và tham số v này có quan hệ (4.19) với điểm làm việc của hệ (4.18). ❐

Quay lại bài toán thiết kế bộ điều khiển. Như đã nói, việc sử dụng khóa chuyển đổi để tạo ra một bộ điều khiển thống nhất từ vô số các bộ điều khiển R_{v1}, R_{v2}, ... là không thể. Nhằm khắc phục nhược điểm đó, người ta đã nghĩ tới việc xác định một bộ điều khiển thống nhất chung $\underline{u}=\underline{r}(\underline{w},\underline{x},\underline{y})$, sao cho tại các điểm làm việc $\begin{pmatrix} \underline{x}_{v1} \\ \underline{u}_{01} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \underline{x}_{v2} \\ \underline{u}_{02} \end{pmatrix}$, ... nó sẽ chính là R_{v1}, R_{v2}, ... Phương pháp thiết kế bộ điều khiển phi tuyến $\underline{u}=\underline{r}(\underline{w},\underline{x},\underline{y})$ như vậy được gọi là *gain-scheduling*.

4.2.2 Thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái gán điểm cực

Trước tiên ta giả sử là đã xác định được họ các điểm làm việc $\begin{pmatrix} \underline{x}_v \\ \underline{u}_0 \end{pmatrix}$ của đối tượng phi tuyến (4.1) thông qua việc giải phương trình:

$$\underline{f}(\underline{x}_v, \underline{u}_0) = \underline{0} \tag{4.21}$$

cũng như đã tham số hóa họ các điểm làm việc đó thành:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_v \\ \underline{u}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_v(\underline{v}) \\ \underline{u}_0(\underline{v}) \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

với vector tham số $\underline{v}$ phụ thuộc trạng thái $\underline{x}$, tín hiệu vào $\underline{u}$ hoặc ra $\underline{y}$ của đối tượng:

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}) \tag{4.23}$$

Khi đó, bằng phương pháp tuyến tính hóa xấp xỉ hệ (4.1) trong lân cận điểm làm việc (4.22) theo các bước đã trình bày ở mục 4.1.1 trước đây, ta sẽ đến được mô hình tuyến tính tương đương giống như (4.2), nhưng phụ thuộc tham số $\underline{v}$ như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A(\underline{v})\tilde{\underline{x}} + B(\underline{v})\tilde{\underline{u}} \\ \tilde{\underline{y}} = C(\underline{v})\tilde{\underline{x}}_v + D(\underline{v})\tilde{\underline{u}} \end{cases} \tag{4.24}$$

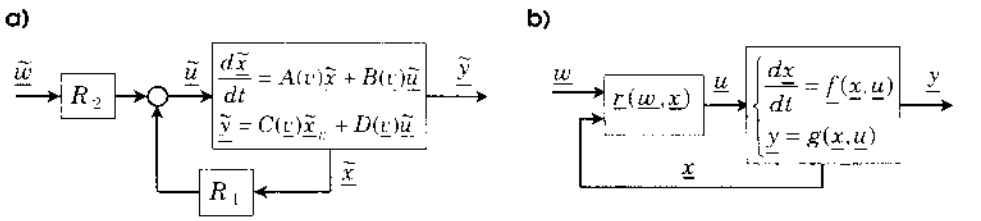
trong đó

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{x}_v, \quad \tilde{\underline{u}} = \underline{u} - \underline{u}_0, \quad \tilde{\underline{y}} = \underline{y} - \underline{g}(\underline{x}_v, \underline{u}_0) \tag{4.25}$$

và $$\frac{d\underline{x}_v(\underline{v})}{dt} = \underline{0} \tag{4.26}$$

để có $$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = \frac{d(\underline{x} - \underline{x}_v)}{dt} = \frac{d\underline{x}}{dt}$$

Tiếp theo, sử dụng các thuật toán thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực của *Lý thuyết điều khiển tuyến tính*, ta xác định được bộ điều khiển phản hồi trạng thái R_1 và bộ tiền xử lý R_2 dưới dạng các ma trận (bộ điều khiển tĩnh). Tất nhiên các bộ điều khiển này cũng phụ thuộc tham số $\underline{v}$ (hình 4.6a).



Hình 4.6: Thiết kế bộ điều khiển tĩnh bằng phương pháp gain–scheduling

Hai bộ điều khiển R_1, R_2 phải thực hiện các nhiệm vụ:

- Gán cho hệ kín ở hình 4.6a) các điểm cực $s_1, s_2, \ldots, s_n$ cho trước nằm bên trái trục ảo. Điều này đồng nghĩa với:

$$\det(sI - A(\underline{v}) - B(\underline{v})R_1) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) \tag{4.27}$$

- Tạo ra hệ kín không có sai lệch tĩnh, hay $\tilde{\underline{y}} \to \tilde{\underline{w}}$. Nếu ký hiệu $\tilde{\underline{w}} = \underline{w} - \underline{w}_v$ giống như ở công thức (4.25) thì điều này tương tương với:

$$\underline{w}_v = \underline{g}(\underline{x}_v, \underline{u}_0) \tag{4.28}$$

- Chúng phải là những giá trị của bộ điều khiển chung $\underline{u} = \underline{r}(\underline{w}, \underline{x})$ ở hình 4.6b) khi được tuyến tính hóa tại điểm làm việc, tức là chúng phải thỏa mãn:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial \underline{r}(\underline{w},\underline{x})}{\partial \underline{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{w}}\frac{\partial \underline{w}}{\partial \underline{v}} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{x}}\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{v}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \underline{v}} = R_2 \frac{\partial \underline{w}_v}{\partial \underline{v}} + R_1 \frac{\partial \underline{x}_v}{\partial \underline{v}} \tag{4.29}$$

Từ đây ta đi đến các bước thiết kế bộ điều khiển gain–scheduling $\underline{u}=\underline{r}(\underline{w},\underline{x})$ bao gồm:

1) Xác định các điểm làm việc $\begin{pmatrix} \underline{x}_v \\ \underline{u}_0 \end{pmatrix}$ của đối tượng (4.1) từ phương trình (4.21).

2) Tham số hóa tất các các điểm làm việc đó theo vector tham số $\underline{v}$ có cấu trúc (4.23).

3) Xác định mô hình tuyến tính tương đương (4.24) của đối tượng tại điểm làm việc.

4) Sử dụng các phương pháp thiết kế bộ điều khiển tuyến tính để xác định các bộ điều khiển R_1, R_2 phụ thuộc tham số $\underline{v}$ thỏa mãn (4.27), (4.29)

5) Thay lại quan hệ (4.23) và (4.28) vào R_1, R_2 để có bộ điều khiển chung:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + R_2(\underline{w}-\underline{w}_v) + R_1(\underline{x}-\underline{x}_v) \tag{4.30}$$

chỉ còn phụ thuộc vào $\underline{w}$ và $\underline{x}$.

Ví dụ 4.13: Thiết kế bộ điều khiển gain–scheduling

Quay lại đối tượng phi tuyến đã xét trong ví dụ 4.12

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 1 - e^{-x_2} + u \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad y = x_1$$

mà ở đó ta đã có được điểm làm việc biểu diễn theo tham số v như sau

$$\underline{x}_v = \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix}, \quad u_0 = e^{-2v} - 1 \quad , \quad w_v = \underline{g}(\underline{x}_v, \underline{u}_0) = v \tag{4.31}$$

với quan hệ

$$v = x_1 \tag{4.32}$$

Đối tượng có các ma trận Jacobi

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & e^{-x_2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nên mô hình tuyến tính tương đương của nó tại các điểm làm việc sẽ là

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}_v}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & e^{-2v} \end{pmatrix}}_{A(v)} \tilde{\underline{x}}_v + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B(v)} \tilde{\underline{u}}_v$$

Giả sử các điểm cực của hệ kín (tại điểm làm việc) đã cho trước là

$$s_1 = s_2 = -4$$

Vậy thì với các điểm làm việc (4.31), ta có

$$\frac{\partial u_0}{\partial v} = -2e^{-2v} \quad , \quad \frac{\partial \underline{x}_v}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \frac{\partial w_v}{\partial v} = 1$$

Suy ra, các phương trình (4.27) và (4.29) chính là:

$$\begin{cases} \det\left(sI - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & e^{-2v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} R_1 \right) = (s+4)^2 = s^2 + 8s + 16 \\ -2e^{-2v} = R_2 + R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Do đối tượng có một tín hiệu vào, hai biến trạng thái nên R_2 là đại lượng vô hướng và R_1 là ma trận một hàng hai cột. Đặt $R_1 = (a \ , \ b)$. Khi đó hệ phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -a & s - e^{-2v} - b \end{pmatrix} = s^2 + 8s + 16 \\ -2e^{-2v} = R_2 + a + 2b \end{cases}$$

và nó có nghiệm:

$$R_2 = 16 \quad , \quad R_1 = (a \ , \ b) = (-4 \ , \ -6 - e^{-2v})$$

Vậy, cùng với điểm làm việc (4.31) và công thức tham số hóa (4.32), bộ điều khiển gain–scheduling (4.30) cần tìm sẽ là:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + R_2(w - w_v) + R_1(\underline{x} - \underline{x}_v) \\ &= e^{-2v} - 1 + 16(w - w_v) + (-4 \ , \ -6 - e^{-2v}) \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-2v} - 1 + 16(w - v) - 4(x_1 - v) - (6 + e^{-2v})(x_2 - 2v) \\ &= e^{-2x_1} - 1 + 16(w - x_1) - (6 + e^{-2x_1})(x_2 - 2x_1) \end{aligned}$$

□

Ví dụ 4.14: Thiết kế bộ điều khiển gain–scheduling

Xét đối tượng có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1 - u \\ -x_1^3 + x_2 + u \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad y = x_1 + x_2$$

Nó có điểm làm việc ứng với tín hiệu vào $u = u_0$ trong chế độ dừng là nghiệm của:

$$\begin{cases} x_1 - u_0 = 0 \\ -x_1^3 + x_2 + u_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = u_0 \\ x_2 = u_0^3 - u_0 \end{cases} \quad \text{và} \quad y = x_1 + x_2 = u_0^3$$

Nếu tham số hóa điểm làm việc trên thành:

$$\underline{x}_v = \begin{pmatrix} v \\ v^3 - v \end{pmatrix}, \quad u_0 = v, \quad y_v = v^3 \quad \text{và} \quad w_v = y_v$$

ta sẽ có hai công thức biểu diễn sự tham số hóa đó ở chế độ dừng như sau:

1) $v = x_1$ (4.33)

2) $y = w$ (không có sai lệch tĩnh) $\Rightarrow$ $v = \sqrt[3]{w}$ (4.34)

Tuyến tính hóa đối tượng trong lân cận các điểm làm việc, được

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}_v}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3v^2 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{x}}_v + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{\underline{u}}_v \tag{4.35}$$

và giả sử các điểm cực mong muốn của hệ kín là $s_1 = -1$ và $s_2 = -2$. Vậy thì với các điểm làm việc trên cũng như mô hình tuyến tính (4.35) của đối tượng ta có các phương trình (4.27) và (4.29) như sau:

$$\begin{cases} \det\left(sI - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3v^2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} R_1\right) = s^2 + 3s + 2 \\ 1 = R_2 3v^2 + R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3v^2 - 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_2 = \frac{10 - 3v^2}{3v^2(2 - 3v^2)} \quad \text{và} \quad R_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{14 - 15v^2}{2 - 3v^2} & \dfrac{4}{2 - 3v^2} \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u &= u_0 + R_2(w - w_v) + R_1(\underline{x} - \underline{x}_v) \\ &= v + \frac{10 - 3v^2}{3v^2(2 - 3v^2)}(w - v^3) - \frac{(14 - 15v^2)(x_1 - v)}{2 - 3v^2} + \frac{4(x_2 - v^3 + v)}{2 - 3v^2} \end{aligned} \tag{4.36}$$

Cuối cùng, thay một trong hai công thức tham số hóa (4.33) hoặc (4.34) vào (4.36) ta sẽ được hai bộ điều khiển gain–scheduling khác nhau là:

$$1)\quad u = x_1 + \frac{10-3x_1^2}{3x_1^2(2-3x_1^2)}(w-x_1^3) + \frac{4(x_2-x_1^3+x_1)}{2-3x_1^2}$$

$$2)\quad u = \sqrt[3]{w} - \frac{(10-3\sqrt[3]{w^2})(x_1-w)}{3\sqrt[3]{w^2}(2-3\sqrt[3]{w^2})} + \frac{4(x_2-w+\sqrt[3]{w})}{2-3\sqrt[3]{w^2}}$$ □

Kết quả của ví dụ trên cho thấy thêm rằng bộ điều khiển gain–scheduling thu được còn phụ thuộc vào công thức mô tả tham số $\underline{v}$, gọi là công thức tham số hóa. *Với những kiểu tham số hóa khác nhau, ta có các bộ điều khiển khác nhau.*

4.2.3 Vài điều bàn thêm về phương pháp gain-scheduling

Chất lượng động học chung của hệ thống

Bộ điều khiển gain–scheduling là một bộ điều khiển phi tuyến được thiết kế từ họ các bộ điều khiển tuyến tính đã thu được bằng các phương pháp tổng hợp tuyến tính cho những mô hình tuyến tính tương đương của đối tượng tại các điểm làm việc. Chính vì thế kỹ thuật gain–scheduling đã thừa hưởng được tính ưu việt của lý thuyết điều khiển tuyến tính với rất nhiều các phương pháp thiết kế khác nhau.

Việc xác định bộ điều khiển (phi tuyến) gain–scheduling từ một họ các bộ điều khiển tuyến tính là không một–một. Từ một họ các bộ điều khiển tuyến tính ta có thể thu được rất nhiều các bộ điều khiển gain–scheduling khác nhau. Yếu tố quyết định cho điều này là công thức tham số hóa điểm làm việc của đối tượng. Các bộ điều khiển này cũng không mang lại cho hệ thống một chất lượng động học giống nhau. Biết được điều đó, song cho tới nay người ta vẫn chưa đưa ra được bất cứ một sự chỉ dẫn nào về cách tham số hóa điểm làm việc để với nó ta sẽ thu được một bộ điều khiển gain–scheduling có chất lượng động học tốt nhất. Việc tham số hóa điểm làm việc thường vẫn được thực hiện theo kinh nghiệm là chính.

Ngoài ra, ta còn thấy điều kiện (4.26) cần phải được thỏa mãn là hoàn toàn không được xét tới trong quá trình thiết kế bộ điều khiển (hoặc không thể xét được). Điều này làm cho bộ điều khiển gain–scheduling thu được, về mặt lý thuyết, chỉ có thể đảm bảo được chất lượng động học cho hệ thống khi mà sự "*dịch chuyển điểm làm việc*" $\underline{x}_L(t)$ là *tương đối chậm*. Song qua kinh nghiệm ứng dụng thực tế của phương pháp gain–scheduling, người ta thấy, chất lượng động học của hệ thống có sử dụng bộ điều khiển gain–scheduling nói chung là chấp nhận được, ngay cả khi đối tượng có tính phi tuyến lớn và quá trình chuyển đổi trạng thái tương đối nhanh (theo [5]).

Tính ổn định toàn cục (global)

Từ những nhận định trên đây về chất lượng động học chung của hệ thống có sử dụng bộ điều khiển gain–scheduling thì rõ ràng tính ổn định toàn cục của hệ thống là không được đảm bảo, mặc dù bộ điều khiển gain–scheduling đã chắc chắn mang đến cho hệ thống tính ổn định địa phương (với miền ổn định $\mathcal{O}$ là lân cận tương đối nhỏ xung quanh các điểm làm việc).

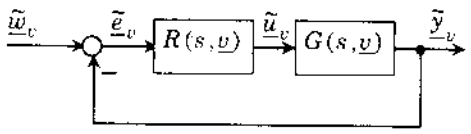
Để kiểm tra tính ổn định toàn cục (global) hay tính ổn định tuyệt đối ta có thể sử dụng tiêu chuẩn Lyapunov. Nhưng điều này cũng có hạn chế của nó vì tiêu chuẩn Lyapunov hoàn toàn không được để ý tới trong quá trình thiết kế bộ điều khiển gain–scheduling. Nói cách khác nếu như sau này có đi đến kết luận rằng hệ kín không ổn định toàn cục thì kết luận đó cũng chẳng giúp ích gì cho công việc hiệu chỉnh bộ điều khiển gain–scheduling đã có. Công cụ kiểm tra tính ổn định toàn cục của hệ thống (ở mức độ hạn chế) trong quá trình thiết kế hiện thường dùng là mô phỏng.

Khả năng thiết kế trong miền phức

Trong điều khiển tuyến tính thì các phương pháp thiết kế bộ điều khiển trong miền phức là khá phổ biến. Một phần là do nguồn gốc lịch sử, phần nữa là vì các phương pháp thiết kế trong miền phức là khá đơn giản song cũng đi đến được những bộ điều khiển có chất lượng cao.

Để sử dụng được các phương pháp thiết kế bộ điều khiển trong miền phức của lý thuyết điều khiển tuyến tính vào kỹ thuật gain–scheduling, khi mà điều kiện cho phép, người ta đã tiến hành (hình 4.7):

1) Chuyển mô hình trạng thái tuyến tính tương đương (4.24) của đối tượng tại các điểm làm việc $\begin{pmatrix} \underline{x}_0(\underline{v}) \\ \underline{u}_0(\underline{v}) \end{pmatrix}$ thành hàm (hoặc ma trận) truyền đạt $G(s,\underline{v})$ và tất nhiên các hàm truyền đạt này cũng phụ thuộc vector tham số $\underline{v}$.
2) Thiết kế bộ điều khiển tuyến tính $R(s,\underline{v})$ cho đối tượng $G(s,\underline{v})$ từ yêu cầu phải có về chất lượng hệ kín.
3) Xác định bộ điều khiển (phi tuyến) mà mô hình tuyến tính tương đương của nó tại các điểm làm việc (điểm dừng) của hệ kín có hàm truyền đạt là $R(s,\underline{v})$.
4) Thay quan hệ tham số hóa vào bộ điều khiển vừa xác định được để có bộ điều khiển gain–scheduling.



Hình 4.7: Minh họa việc thiết kế bộ điều khiển gain–scheduling trong miền phức.

Tư tưởng thực hiện việc thiết kế bộ điều khiển gain–scheduling trong miền phức như vậy là đã rõ ràng. Tuy nhiên, để tư tưởng đó là khả thi thì còn nhiều vấn đề cần phải được làm rõ, chẳng hạn:

- Khi nào thì sẽ tồn tại một bộ điều khiển phi tuyến mà mô hình tuyến tính của nó tại điểm làm việc sẽ có hàm truyền đạt $R(s,\underline{v})$ cho trước.
- Nếu đã tồn tại một bộ điều khiển phi tuyến như vậy thì có phương pháp hữu hiệu nào để xác định nó, hay
- Làm thế nào để có thể thiết kế được một bộ điều khiển tuyến tính phụ thuộc tham số $R(s,\underline{v})$ cho đối tượng cũng phụ thuộc tham số $G(s,\underline{v})$ mà chất lượng hệ kín thì lại không phụ thuộc tham số ....

Đáng tiếc là cho đến nay những câu hỏi trên mới chỉ được trả lời từng phần chứ chưa được hoàn toàn trọn vẹn. Chẳng hạn, người ta cũng mới chỉ biết được rằng để tồn tại một bộ điều khiển phi tuyến mà mô hình tuyến tính tương đương của nó tại các điểm làm việc $\begin{pmatrix} \underline{x}_r(\underline{v}) \\ \underline{u}_0(\underline{v}) \end{pmatrix}$ chính là hàm truyền đạt phụ thuộc tham số $R(s,\underline{v})$ thì cần phải có:

$$\frac{\partial u_0(\underline{v})}{\partial \underline{v}} = R(0,\underline{v})\frac{\partial e_v(\underline{v})}{\partial \underline{v}}$$

chứ chưa biết được là điều kiện đó đã đủ hay chưa.

Cũng như vậy, khi mà đã có các bộ điều khiển $R(s,\underline{v})$, và để tìm bộ điều khiển gain–scheduling $u=r(w,\underline{x},\underline{y})$ tương ứng, thì cho đến nay người ta vẫn lại phải quay trở về miền thời gian với các mô hình trạng thái của $R(s,\underline{v})$ rồi sau đó sử dụng phương pháp thiết kế trong không gian trạng thái đã được trình bày trong mục trước, chứ chưa có được khả năng thực hiện chúng hoàn toàn trong miền phức.

4.3 Điều khiển tuyến tính hình thức

Trong lớp các mô hình phi tuyến không tự trị:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x},\underline{u},t) \end{cases} \tag{4.37}$$

phương pháp *điều khiển tuyến tính hình thức* đặc biệt thích hợp với những hệ thống (đối tượng) phi tuyến mà mô hình trạng thái của nó có dạng:

(4.38)

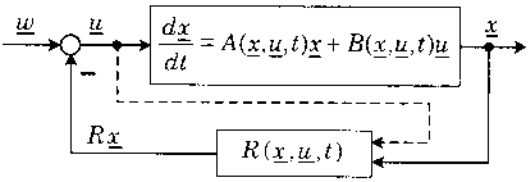
trong đó $A(\underline{x},\underline{u},t)$, $B(\underline{x},\underline{u},t)$, $C(\underline{x},\underline{u},t)$ là các ma trận có phần tử là hàm số của $\underline{x}$, $\underline{u}$ và t. Kiểu mô hình (4.38) ta đã được gặp trong phương pháp Aiserman để thiết kế hàm Lyapunov (mục 3.1.2) nhưng ở khuôn khổ hẹp hơn.

Dạng mô hình (4.38) có tên gọi là *tuyến tính hình thức* (*formal linear*), vì trong trường hợp đặc biệt, khi các ma trận trong mô hình (4.38) không còn phụ thuộc $\underline{x}$, $\underline{u}$ và trở thành $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ thì nó chính là mô hình của hệ tuyến tính (không dừng).

Bài toán điều khiển tuyến tính hình thức mà ta quan tâm ở đây là tìm cách can thiệp vào hệ thống, chẳng hạn như bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái (hình 4.12)

$$\underline{u} = \underline{w} - R(\underline{x},\underline{u},t)\underline{x} \tag{4.39}$$

để hệ có được chất lượng như mong muốn.



Hình 4.8: Điều khiển tuyến tính hình thức bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái.

Chất lượng đầu tiên mà ta thường nghĩ đến là tìm bộ điều khiển (4.39), sao cho với nó, hệ kín với mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\left(A(\underline{x},\underline{u},t) - B(\underline{x},\underline{u},t)R(\underline{x},\underline{u},t)\right)}_{\tilde{A}(t)}\underline{x} + B(\underline{x},\underline{u},t)\underline{w} \tag{4.40}$$

có ma trận $\tilde{A}(t)$ không còn phụ thuộc $\underline{x}$, $\underline{u}$. Khi đó hệ (4.40) khi không bị kích thích sẽ trở thành tuyến tính.

Ví dụ 4.15: Thiết kế bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác

Xét đối tượng phi tuyến có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2x_2 + 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}u \qquad \text{với} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

Nếu chọn bộ điều khiển phản hồi trạng thái

$$\underline{u} = \underline{w} - \underbrace{(x_1^2x_2 \quad k)}_{R}\underline{x} \tag{4.42}$$

với k là hằng số tùy ý, thì hệ kín sẽ trở thành

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A-BR)\underline{x}+Bw = \left[\begin{pmatrix} x_1^2x_2+1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^2x_2 & k \end{pmatrix}\right]\underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w$$

Như vậy, bộ điều khiển (4.42) đã *tuyến tính hóa chính xác* đối tượng (4.41). ❐

Ta có thể thấy bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái (4.42) để *tuyến tính hóa chính xác* hệ, như ví dụ 4.15 đã minh họa, không phải lúc nào cũng có lời giải. Bởi vậy, trong rất nhiều ứng dụng người ta thường thỏa mãn nếu như bộ điều khiển (4.42) mang đến ít nhiều một số tính chất, chất lượng, định hướng theo một hệ tuyến tính nào đó.

4.3.1 Công cụ toán học cần thiết

Công việc thiết kế bộ điều khiển tuyến tính hình thức mà ta sẽ xét dưới đây liên quan nhiều tới một số công cụ toán học, bao gồm:

- Tích Kronecker của hai ma trận và toán tử vector hóa ma trận.
- Phép tính giao hoán hàng, cột của ma trận.

Tích Kronecker

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kiểu $m\times n$ (có m hàng và n cột) và $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ kiểu $p\times q$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

Tích Kronecker của hai ma trận A, B ký hiệu bởi $A\otimes B$, được hiểu là

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}$$

Tích Kronecker có những tính chất sau:

- $A\otimes B \neq B\otimes A$ (không giao hoán)
- $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$ (có tính kết hợp)
- $A\otimes(B+C) = A\otimes B + B\otimes C$
- $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)\cdots(A_n\otimes B_n) = (A_1A_2\cdots A_n)\otimes(B_1B_2\cdots B_n)$

- $(A \otimes B)^n = A^n \otimes B^n$
- $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- $(A_1 B_1) \otimes (A_2 B_2) \otimes \cdots \otimes (A_n B_n) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)(B_1 \otimes \cdots \otimes B_n)$
- $(AB)^{\otimes n} = A^{\otimes n} B^{\otimes n}$, trong đó $\otimes n$ là ký hiệu chỉ lũy thừa Kronecker.

Toán tử vector hóa ma trận

Toán tử vector hoá ma trận

$$A = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

thực chất là sự sắp xếp lại các phần tử trong A theo thứ tự vector cột $\underline{c}_i$ của nó như sau:

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{pmatrix} \underline{c}_1 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix}$$

Toán tử vector hóa $\mathrm{vec}(A)$ có những tính chất sau:

- $\mathrm{vec}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \mathrm{vec}(A_1) + \mathrm{vec}(A_2) + \cdots + \mathrm{vec}(A_n)$
- $\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}(B)$

  trong đó phép tính nhân ABC là có nghĩa.

Một ứng dụng của tích Kronecker: Tìm nghiệm phương trình Sylvester

Phương trình Sylvester là trường hợp tổng quát của phương trình Lyapunov (3.15) đã biết ở chương 3, mục 3.1.1. Nó có dạng như sau:

$$PM - NP = -Q \tag{4.43}$$

trong đó $P \in \mathbf{R}^{n \times m}$ là ẩn số và các ma trận vuông $M \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $N \in \mathbf{R}^{n \times n}$ cũng như $Q \in \mathbf{R}^{n \times m}$ là đã cho trước.

Nhân cả hai vế của phương trình Sylvester (4.43) với I_n về phía trái và với I_m về phía phải, trong đó I_n là ký hiệu chỉ ma trận đơn vị kiểu $n \times n$, ta được

$$I_n(PM - NP)I_m = I_n PM - NPI_m = -I_n Q\, I_m$$

Từ đây và các theo tính chất của toán tử vector hóa thì nghiệm của (4.43) sẽ là

$$\mathrm{vec}(I_n PM - NPI_m) = \mathrm{vec}(-I_n QI_m)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{vec}(I_n PM) - \mathrm{vec}(NPI_m) = -\mathrm{vec}(I_n QI_m)$$

$$\Leftrightarrow \quad (M^T \otimes I_n)\mathrm{vec}(P) - (I_m^T \otimes N)\mathrm{vec}(P) = -(I_m^T \otimes I_n)\mathrm{vec}(Q)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{vec}(P) = -(M^T \otimes I_n - I_m^T \otimes N)^{-1}(I_m^T \otimes I_n)\mathrm{vec}(Q)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{vec}(P) = -(M^T \otimes I_n - I_m \otimes N)^{-1}\,\mathrm{vec}(Q) \tag{4.44}$$

vì tích Kronecker của hai ma trận đơn vị lại là một ma trận đơn vị, tức là:

$$I_m^T \otimes I_n = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

và hai ma trận $M^T \otimes I_n$ và $I_m \otimes N$ đều là ma trận vuông có số hàng/cột bằng nm.

Với công thức nghiệm (4.44) của phương trình Sylvester (4.43) ta cũng có được nghiệm của phương trình Lyapunov (3.15) dạng tường minh bằng cách thay $M=A$, $N=-A^T$ vào (4.44) và đi đến:

$$\mathrm{vec}(P) = -(A^T \otimes I_n + I_n \otimes A)^{-1}\,\mathrm{vec}(Q)$$

Phép tính giao hoán hàng/cột của ma trận

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{h}_1^T \\ \underline{h}_2^T \\ \vdots \\ \underline{h}_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \cdots & \underline{c}_n \end{pmatrix}$$

Từ đại số ma trận ([19], [21]) ta đã được biết đến một số công thức biểu diễn phép giao hoán hàng hay cột của A nhờ ma trận I_{ik} là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị I sau khi đổi chỗ hai hàng thứ i và k (hoặc hai cột). Chẳng hạn như:

- Việc hoán đổi vị trí vector hàng thứ i với hàng thứ k của A tương đương phép nhân I_{ik} với A về phía trái. Ví dụ

$$I_{25}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{h}_1^T \\ \underline{h}_2^T \\ \underline{h}_3^T \\ \underline{h}_4^T \\ \underline{h}_5^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{h}_1^T \\ \underline{h}_5^T \\ \underline{h}_3^T \\ \underline{h}_4^T \\ \underline{h}_2^T \end{pmatrix}$$

- Việc hoán đổi vị trí vector cột thứ i với cột thứ k của A tương đương phép nhân I_{ik} với A về bên phải. Ví dụ

$$AI_{25} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \underline{c}_3 & \underline{c}_4 & \underline{c}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1 & \underline{c}_5 & \underline{c}_3 & \underline{c}_4 & \underline{c}_2 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo đây ta sẽ làm quen với một công thức tương tự mô tả phép chuyển vị từ A thành A^T. Công thức này liên quan đến ma trận E_{ik} là ma trận mà phần tử thứ ik của nó bằng 1 và các phần tử còn lại đều bằng 0. Chẳng hạn những ma trận E_{ik} thuộc kiểu ba hàng hai cột (3×2) có dạng:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ tất cả các ma trận E_{ik} cùng kiểu $m \times n$, tức là $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$, người ta xây dựng ma trận $U_{n,m}$ kiểu $nm \times nm$ như sau:

$$U_{n,m} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} & \cdots & E_{m1} \\ E_{12} & E_{22} & \cdots & E_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{1n} & E_{2n} & \cdots & E_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{trong đó} \quad E_{ik} \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

Rõ ràng $U_{n,m}$ là ma trận vuông nm hàng và cột. Đó cũng là lý do tại sao nó có ký hiệu n, m ở chỉ số. Với ma trận $U_{n,m}$ được định nghĩa như trên thì:

- $U_{n,m} U_{m,n} = I_{nm}$
- $U_{n,m}^{-1} = U_{m,n}$
- $\mathrm{vec}(A^T) = U_{m,n}\mathrm{vec}(A)$ trong đó A có kiểu là $m \times n$
- $A \otimes B = U_{m,p}(B \otimes A) U_{q,n}$ trong đó $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ và $B \in \mathbf{R}^{p \times q}$

4.3.2 Phương pháp thiết kế định hướng hình thức theo giá trị riêng

Thực chất, ý tưởng của phương pháp *định hướng hình thức theo giá trị riêng* là từ phương pháp thiết kế bộ điều khiển theo nguyên tắc điểm cực đặt trước quen biết của điều khiển tuyến tính.

Cho đối tượng có mô hình tuyến tính hình thức:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(\underline{x})\underline{x}+B(\underline{x})\underline{u} \tag{4.45}$$

trong đó $A(\underline{x})$, $B(\underline{x})$ là những ma trận có các phần tử là hàm của $\underline{x}$.

Bài toán được đặt ra ở đây là phải thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái $R(\underline{x})$ cũng giả tuyến tính

$$R(\underline{x}) = \begin{pmatrix} r_{11}(\underline{x}) & r_{12}(\underline{x}) & \cdots & r_{1n}(\underline{x}) \\ r_{21}(\underline{x}) & r_{22}(\underline{x}) & \cdots & r_{2n}(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{r1}(\underline{x}) & r_{r2}(\underline{x}) & \cdots & r_{rn}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

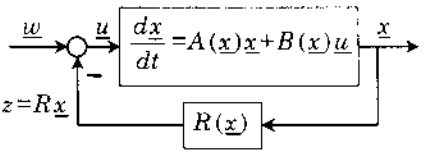
để với tín hiệu ra của nó (hình 4.9)

$$\underline{z} = R(\underline{x})\underline{x}$$

hệ kín thu được với mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A(\underline{x})-B(\underline{x})R(\underline{x}))\underline{x}+B(\underline{x})\underline{w}$$

nhận những giá trị $s_1, s_2, \cdots, s_n$ cho trước làm điểm cực. Các giá trị $s_1, s_2, \cdots, s_n$ cho trước này được xác định từ chất lượng mong muốn mà hệ kín phải có.



Hình 4.9: Thiết kế bộ điều khiển theo nguyên tắc cho trước điểm cực.

Như vậy, nhiệm vụ thiết kế được cụ thể bằng cách tìm $R(\underline{x})$ để có được sự cân bằng hai đa thức

$$\det(sI-A(\underline{x})+B(\underline{x})R(\underline{x})) = (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n) \tag{4.46}$$

Công thức (4.46) cho thấy ta có thể xác định nghiệm $R(\underline{x})$ một cách đơn giản bằng cách cân bằng hệ số của hai đa thức ở hai vế. Do cả hai đa thức cùng có bậc bằng n và

đều có hệ số của s^n bằng 1, nên từ việc cân bằng hệ số hai đa thức của hai vế ta sẽ có được n phương trình cho nr ẩn $r_{ij}(\underline{x})$, $i=1,2,\ \dots\ ,r$; $j=1,2,\ \dots\ ,n$. Bởi vậy *khi đối tượng là điều khiển được* thì bài toán thiết kế bộ điều khiển $R(\underline{x})$ định hướng hình thức theo các giá trị riêng $s_1,\ s_2,\ \dots\ ,\ s_n$ cho trước với tiêu chí (4.46) luôn có lời giải, trong trường hợp $r>1$ thậm chí còn là vô số.

Ví dụ 4.16: Thiết kế bộ điều khiển định hướng tuyến tính theo giá trị riêng

Xét đối tượng có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}}_{A(\underline{x})}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{x}}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}u \qquad (\text{có } n=2 \text{ và } r=1)$$

Khi đó bộ điều khiển phản hồi trạng thái giả tuyến tính sẽ có dạng

$$R(\underline{x}) = (r_1(\underline{x})\ ,\ r_2(\underline{x}))$$

Giả sử rằng hai giá trị riêng mong muốn là $s_1=-1$, $s_2=-2$. Vậy thì công thức tính (4.46) sẽ trở thành

$$\det\begin{pmatrix} s-x_2 & -1 \\ r_1-x_1 & s+r_2-x_2 \end{pmatrix}=(s-s_1)(s-s_2)=s^2+3s+2$$

$$\Leftrightarrow \quad s^2+s(r_2-2x_2)-x_2(r_2-x_2)+(r_1-x_1)=s^2+3s+2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2^2-r_2x_2+r_1-x_1=2 \\ r_2-2x_2=3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1=2+x_1+3x_2+x_2^2 \\ r_2=3+2x_2 \end{cases}$$

Hay tín hiệu vào của đối tượng trong hệ kín sẽ là

$$\begin{aligned} u &= w-R(\underline{x})\underline{x} = w-r_1(\underline{x})x_1-r_2(\underline{x})x_2 \\ &= w-(2+x_1+3x_2+x_2^2)x_1-(3+x_2)x_2 \end{aligned}$$

❐

Ví dụ 4.17: Thiết kế bộ điều khiển định hướng tuyến tính theo giá trị riêng

Xét đối tượng có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(\underline{x}) & a_{12}(\underline{x}) \\ a_{21}(\underline{x}) & a_{22}(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{A(\underline{x})}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{x}}+\underbrace{\begin{pmatrix} b_1(\underline{x}) \\ b_2(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{B(\underline{x})}u \qquad (\text{có } n=2 \text{ và } r=1)$$

Gọi s_1, s_2 là hai giá trị riêng mong muốn của hệ kín. Vậy thì phải có

$$\det(sI-A+BR) = (s-s_1)(s-s_2) = s^2-(s_1+s_2)s+s_1s_2$$

với $\quad R(\underline{x}) = (r_1(\underline{x}) \;,\; r_2(\underline{x}))$

Từ đây suy ra được

$$\det\begin{pmatrix} s-a_{11}+b_1r_1 & b_1r_2-a_{12} \\ b_2r_1-a_{21} & s-a_{22}+b_2r_2 \end{pmatrix} = s^2-(s_1+s_2)s+s_1s_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_1r_1+b_2r_2-a_{11}-a_{22} = -(s_1+s_2) \\ (a_{12}b_2-a_{22}b_1)r_1+(a_{21}b_1-a_{11}b_2)r_2+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = s_1s_2 \end{cases}$$

Ta phân biệt các trường hợp sau:

1) Hai phần tử $b_1(\underline{x})$ và $b_2(\underline{x})$ không thể đồng thời bằng 0, vì nếu như vậy đối tượng sẽ không thể điều khiển được.

2) Nếu $b_1(\underline{x})=0$ và $b_2(\underline{x})\neq 0$. Khi đó cũng phải có $a_{12}(\underline{x})\neq 0$ để đối tượng là điều khiển được. Suy ra

$$\begin{cases} b_2r_2-a_{11}-a_{22} = -(s_1+s_2) \\ -(b_2r_2-a_{22})a_{11}+(b_2r_1-a_{21})a_{12} = s_1s_2 \end{cases}$$

$$r_2 = \frac{a_{11}+a_{22}-s_1-s_2}{b_2}, \qquad r_1 = \frac{(b_2r_2-a_{22})a_{11}+s_1s_2+a_{12}a_{21}}{b_2a_{12}}$$

3) Nếu $b_2(\underline{x})=0$ và $b_1(\underline{x})\neq 0$. Khi đó, để đối tượng điều khiển được còn phải có thêm $a_{21}(\underline{x})\neq 0$. Suy ra

$$r_1 = \frac{a_{11}+a_{22}-s_1-s_2}{b_1}, \qquad r_2 = \frac{(b_1r_1-a_{11})a_{22}+s_1s_2+a_{12}a_{21}}{b_1a_{21}}$$

4) Nếu $b_1(\underline{x})\neq 0$ và $b_2(\underline{x})\neq 0$. Khi đó thì $r_1(\underline{x})$, $r_2(\underline{x})$ là nghiệm của:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{12}b_2-a_{22}b_1 & a_{21}b_1-a_{11}b_2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}}_{\underline{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+a_{22}-s_1-s_2 \\ s_1s_2-a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21} \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Hệ phương trình trên sẽ có nghiệm nếu ma trận A là không suy biến. Ta có thể thấy điều kiện này tương đương với điều kiện đối tượng là điều khiển được. Khi đó:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\underline{b}$$

với $A^{-1} = \dfrac{1}{b_1(a_{21}b_1-a_{11}b_2)-b_2(a_{22}b_1-a_{12}b_2)}\begin{pmatrix} a_{21}b_1-a_{11}b_2 & -b_2 \\ a_{22}b_1-a_{12}b_2 & b_1 \end{pmatrix}$

Xét trường hợp cụ thể cho trường hợp đối tượng có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

và hai giá trị riêng cho trước $s_1 = s_2 = -2$. Vậy thì do $b_2(\underline{x}) = 0$ ta được:

$$r_1 = \frac{a_{11} + a_{22} - s_1 - s_2}{b_1} = 5\, e^{-x_2}$$

$$r_2 = \frac{(b_1 r_1 - a_{11}) a_{22} + s_1 s_2 + a_{12} a_{21}}{b_1 a_{21}} = (4 + x_1)\ e^{-x_2}$$

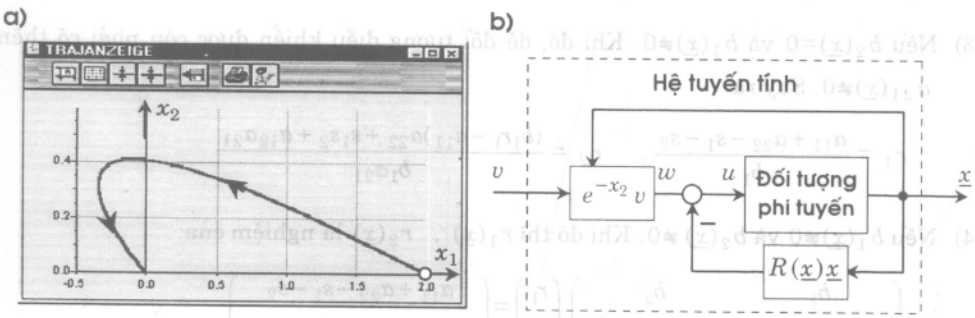
hay bộ điều khiển phản hồi âm trạng thái giả tuyến tính $R(\underline{x})$ có dạng

$$R(\underline{x}) = (\, 5\, e^{-x_2}\ ,\ (4 + x_1)\, e^{-x_2}\,)$$

Tín hiệu đầu vào của đối tượng trong hệ kín là

$$u = w - R(\underline{x})\underline{x} = w - r_1 x_1 - r_2 x_2 = w - 5\, e^{-x_2} x_1 - (4 + x_1)\, e^{-x_2} x_2$$

Dạng quỹ đạo trạng thái của hệ kín đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ khi không bị kích thích trong hình 4.10a) xác nhận tính ổn định của hệ.



Hình 4.10: Tuyến tính hóa chính xác đối tượng phi tuyến bằng bộ điều khiển định hướng hình thức theo giá trị riêng. Minh hoạ ví dụ 4.17.

Để ý thêm rằng với bộ điều khiển tìm được, hệ kín có mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} w$$

Do đó, nếu như ta sử dụng thêm bộ tiền xử lý:

$$w = e^{-x_2} v$$

thì cuối cùng hệ trở thành tuyến tính (đối tượng được tuyến tính hóa chính xác):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v$$ ❐

4.3.3 Khả năng thiết kế định hướng hệ tuyến tính

Nguyên tắc chung

Xét đối tượng phi tuyến có mô hình giả tuyến tính

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(\underline{x})\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{với} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^r \text{ và } B \in \mathbb{R}^{n \times r} \tag{4.47}$$

Khác với đối tượng (4.45) đã xét ở mục 4.3.2, ở đây phải có thêm giả thiết rằng B là ma trận hằng. Nhiệm vụ thiết kế được đặt ra là xác định bộ điều khiển $R(\underline{x})$ thuộc kiểu $r \times n$ phản hồi âm trạng thái sao cho hệ kín (hình 4.11) với mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A(\underline{x}) - BR(\underline{x}))\underline{x} + B\underline{w} \quad \text{với} \quad \underline{w} \in \mathbb{R}^r$$

có được chất lượng giống như chất lượng của hệ tuyến tính mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = S\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{với} \quad S \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^r \tag{4.48}$$

Việc thiết kế định hướng theo hệ tuyến tính (4.48) được hiểu là tìm $R(\underline{x})$ để có

$$\| [A(\underline{x}) - BR(\underline{x})] - S \| \rightarrow \min \tag{4.49}$$

Sử dụng công cụ toán học đã trình bày ở mục 4.3.1 thì lý tưởng nhất ta có thể tìm $R(\underline{x})$ như sau:

$$A(\underline{x}) - BR(\underline{x}) = S \quad \Leftrightarrow \quad \text{vec}(A - BR) = \text{vec}(S)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{vec}(A) - \text{vec}(BR) = \text{vec}(S) \quad \Leftrightarrow \quad \text{vec}(A) - \text{vec}(BRI_n) = \text{vec}(S)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{vec}(A) - (I_n \otimes B)\text{vec}(R) = \text{vec}(S) \quad \Leftrightarrow \quad (I_n \otimes B)\text{vec}(R) = \text{vec}(A) - \text{vec}(S)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{vec}(R) = T_p \text{vec}(A - S)$$

trong đó T_p là một ma trận giả nghịch đảo (pseudo–inverse) bên trái của:

$$T = I_n \otimes B \quad (\text{thuộc kiểu } n^2 \times nr)$$

Nếu như $r < n$ và T có hạng bằng nr, tức là Rank$(T) = nr$ thì một trong vô số các ma trận giả nghịch đảo (pseudo–inverse) T_p bên trái của T sẽ là:

$$T_p = (T^T T)^{-1} T^T$$

Tuy nhiên, một điều ta có thể thấy được ngay là chất lượng bộ điều khiển tìm được *phụ thuộc rất nhiều vào ma trận giả nghịch đảo* T_p mà ta đã chọn. Để minh họa ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 4.18: Chất lượng động học phụ thuộc vào ma trận giả nghịch đảo được chọn

Cho đối tượng phi tuyến có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_2 & -1 \\ 0 & x_1^2 \end{pmatrix}}_{A(\underline{x})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u \qquad \text{(tức là có } n=2 \text{ và } r=1\text{)}$$

và một hệ tuyến tính được được sử dụng để định hướng cho việc thiết kế $R(\underline{x})$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S} \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

Áp dụng lần lượt các bước thiết kế trên

$$T = I_2 \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{p1} = (T^T T)^{-1} T^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{vec}(R_1) = T_{p1}\,\mathrm{vec}(A-S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{vec}\begin{pmatrix} -x_2+4 & 3 \\ -1 & x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

ta có bộ điều khiển $R_1(\underline{x})$ tìm theo T_{p1} là:

$$R_1(\underline{x}) = (-1 \;\; , \; x_1^2)$$

vì $R_1(\underline{x})$ phải là ma trận thuộc kiểu 1×2. Hình 4.11a) là quỹ đạo của hệ đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ khi không bị kích thích ứng với bộ điều khiển $R_1(\underline{x})$. Dạng khép kín của nó trong hình chỉ rõ hệ không ổn định tiệm cận.

Bên cạnh T_{p1} ta còn có một ma trận giả nghịch đảo khác của T là:

$$T_{p2} = \begin{pmatrix} x_2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tương ứng là bộ điều khiển:

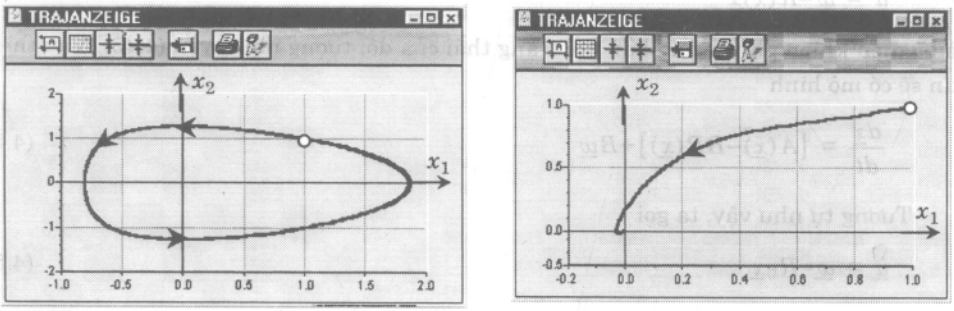
$$\text{vec}(R_2) = \begin{pmatrix} x_2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{vec}\begin{pmatrix} -x_2+4 & 3 \\ -1 & x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2^2+4x_2-4 \\ -x_2+4+x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_2(\underline{x}) = (-x_2^2+4x_2-4\ ,\ -x_2+4+x_1^2)$$

Đặc biệt, khác với $R_1(\underline{x})$, bộ điều khiển thứ hai $R_2(\underline{x})$ này lại làm cho hệ kín ổn định tiệm cận tại gốc tọa độ với một chất lượng khá tốt. Hình 4.11b) là quỹ đạo của hệ đi từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ khi không bị kích thích ứng với bộ điều khiển $R_2(\underline{x})$.

Dạng của nó xác nhận tính ổn định tiệm cận tại $\underline{0}$ của hệ kín. ❐

a) b)



Hình 4.11: Minh họa ví dụ 4.18 cho hai trường hợp không ổn định và ổn định.

Kết quả minh họa của ví dụ 4.18 xác nhận lại nhận định ban đầu của ta về bộ điều khiển $R(\underline{x})$ tìm được theo phương pháp *định hướng trực tiếp* theo hệ tuyến tính (4.48) nhờ tiêu chuẩn so sánh (4.49) rằng chất lượng bộ điều khiển thu được phụ thuộc rất nhiều vào ma trận giả nghịch đảo T_p của T mà ta đã chọn. Sự phụ thuộc này thậm chí còn cả tính ổn định. Bởi vậy, để hoàn thiện phương pháp định hướng trực tiếp này thì cần có thêm sự hỗ trợ cho việc lựa chọn một ma trận T_p thích hợp trong vô số các ma trận giả nghịch đảo bên trái của T và một trong những phương pháp như vậy là phương pháp thiết kế của Sieber.

Phương pháp thiết kế Sieber

Xét đối tượng dừng, có mô hình tuyến tính hình thức

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(\underline{x})\underline{x}+B\underline{u} \tag{4.50}$$

trong đó, khác với mô hình tổng quát (4.45), ở đây ma trận B được giả thiết là *ma trận hằng*. Giả thiết này sẽ không hạn chế khả năng ứng dụng của phương pháp, vì với phép biến đổi trạng thái $\underline{x} \mapsto \tilde{\underline{x}}$ cũng như tín hiệu vào $\underline{u} \mapsto \tilde{\underline{u}}$ thích hợp ta luôn đưa được mô hình (4.45) cho trường hợp dừng về dạng (4.50).

Dễ thấy là đối tượng (4.50) cân bằng tại gốc tọa độ $\underline{0}$ và trong một lân cận đủ nhỏ xung quanh gốc, nó có mô hình tuyến tính tương đương

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A_0\underline{x}+B\underline{u} \tag{4.51}$$

trong đó $A_0 = A(\underline{0})$ là ma trận hằng.

Gọi

$$\underline{u} = \underline{w}-R(\underline{x})\underline{x}$$

là bộ điều khiển phi tuyến phản hồi trạng thái của đối tượng phi tuyến (4.45). Vậy thì hệ kín sẽ có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = [A(\underline{x})-BR(\underline{x})]+B\underline{w} \tag{4.52}$$

Tương tự như vậy, ta gọi

$$\underline{u} = \underline{w}-R_0\underline{x} \tag{4.53}$$

là bộ điều khiển tuyến tính (R_0 là ma trận hằng) phản hồi trạng thái của đối tượng tuyến tính (4.51). Bộ điều khiển tuyến tính R_0 này là đã biết, hoặc đã được thiết kế theo các phương pháp của lý thuyết điều khiển tuyến tính (bộ điều khiển cho trước điểm cực, bộ điều khiển tối ưu ...).

Chú ý rằng bộ điều khiển R_0 là đã được thiết kế cho mô hình tuyến tính (4.51) theo một chất lượng xác định trước. Bởi vậy, nếu sử dụng nó cho đối tượng phi tuyến (4.50) thì chất lượng định trước đó chỉ được đảm bảo trong lân cận nhỏ xung quanh gốc $\underline{0}$.

Mô hình hệ kín gồm đối tượng tuyến tính (4.51) và bộ điều khiển (4.53) là

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A_0-BR_0)\underline{x}+B\underline{w} \tag{4.54}$$

Xuất phát từ tư tưởng thiết kế định hướng theo hệ tuyến tính, Sieber đã đề xuất tìm bộ điều khiển (phi tuyến) $R(\underline{x})$ cho đối tượng (4.50) sao cho với nó, quỹ đạo trạng

thái của hệ kín (4.52) khi không bị kích thích có *tính chất gần giống* như quỹ đạo trạng thái của hệ tuyến tính (4.54) dưới tác động của R_0. Khái niệm *tính chất gần giống nhau* giữa hai quỹ đạo trạng thái sẽ được đánh giá bằng một phiếm hàm mục tiêu.

Không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng cả hai quỹ đạo trạng thái của hai hệ (4.52) và (4.54) cùng đi từ một điểm trạng thái đầu tùy ý $\underline{x}_0$ và cùng kết thúc tại gốc tọa độ $\underline{0}$. Như vậy thì phải có:

$$R(\underline{0}) = R_0 \tag{4.55}$$

Tiếp theo, để xây dựng một phiếm hàm S làm cơ sở đánh giá sự *gần giống* nhau về chất lượng của hai quỹ đạo trạng thái của hệ kín phi tuyến (4.52) và của hệ kín tuyến tính (4.54), Sieber sử dụng hàm Lyapunov với

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x} \tag{4.56}$$

trong đó P là ma trận (không bắt buộc phải là hằng số) *đối xứng, xác định dương*.

Đạo hàm của hàm xác định dương (4.56) theo hệ tuyến tính (4.54), ta được

$$L_{A_0\underline{x}}V = -\underline{x}^T\left[(BR_0-A_0)^T P+P(BR_0-A_0)\right]\underline{x} = \underline{x}^T(-Q_0)\underline{x}$$

trong đó

$$Q_0 = (BR_0-A_0)^T P+P(BR_0-A_0) \tag{4.57}$$

Do hệ kín tuyến tính (4.54) là ổn định (chất lượng mà bộ điều khiển R_0 đã mang lại cho hệ thống) nên theo tiêu chuẩn Lyapunov, ma trận Q_0 phải *xác định dương*.

Tương tự, ta đạo hàm của hàm xác định dương (4.56) theo hệ phi tuyến (4.52):

$$L_{A\underline{x}}V = -\underline{x}^T\left[(BR(\underline{x})-A(\underline{x}))^T P+P(BR(\underline{x})-A(\underline{x}))\right]\underline{x} = \underline{x}^T(-Q(\underline{x}))\underline{x}$$

trong đó

$$Q(\underline{x}) = (BR(\underline{x})-A(\underline{x}))^T P+P(BR(\underline{x})-A(\underline{x})) \tag{4.58}$$

và khác với Q_0 ma trận $Q(\underline{x})$ là ma trận hàm.

Từ điều kiện (4.55) ta suy ra được $Q(\underline{0})=Q_0$. Như vậy thì trong một lân cận đủ nhỏ nào đó xung quanh gốc tọa độ $\underline{0}$ ma trận $Q(\underline{x})$ cũng xác định dương. Suy ra, hệ kín phi tuyến (4.52) với bộ điều khiển $R(\underline{x})$ thỏa mãn (4.55) cũng sẽ ổn định (tiệm cận Lyapunov) tại gốc tọa độ.

Công thức (4.58) chỉ rõ sự phụ thuộc của $Q(\underline{x})$ vào bộ điều khiển cần tìm $R(\underline{x})$. Để đánh giá sai lệch của chất lượng hai quỹ đạo trạng thái cùng đi từ $\underline{x}_0$ và cùng kết thúc tại gốc tọa độ $\underline{0}$, của hệ kín phi tuyến (4.52) và của hệ kín tuyến tính (4.54), Sieber đã

xây dựng phiếm hàm so sánh chuẩn của ma trận $Q(\underline{x})$ cho trong (4.58) với chuẩn của ma trận Q_0 cho trong (4.57) như sau:

$$S = \| Q(\underline{x}) - Q_0 \| \tag{4.59}$$

và đặt ra chỉ tiêu so sánh là bộ điều khiển $R(\underline{x})$ sẽ được gọi là tốt nhất nếu nó đem đến cho hàm S giá trị nhỏ nhất.

Như vậy, bài toán thiết kế bộ điều khiển $R(\underline{x})$ tuyến tính hình thức, phản hồi trạng thái cho đối tượng phi tuyến (4.50) có chất lượng được định hướng theo chất lượng hệ kín tuyến tính (4.54), đã được chuyển thể thành bài toán tối ưu: "*Tìm $R(\underline{x})$ thích hợp để S có giá trị nhỏ nhất*".

Để nhìn rõ được sự phụ thuộc vào bộ điều khiển $R(\underline{x})$ cần tìm của phiếm hàm S trong công thức (4.59), ta thay

$$Q(\underline{x}) = (BR(\underline{x}) - A(\underline{x}))^T P + P(BR(\underline{x}) - A(\underline{x}))$$

vào $Q(\underline{x}) - Q_0$ và được

$$Q - Q_0 = R^T B^T P - A^T P + PBR - PA - Q_0$$

trong đó, để đơn giản cho cách viết, ta đã bỏ đi đối số $\underline{x}$.

Sử dụng toán tử vector hóa hai vế đẳng thức trên sẽ có

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(Q - Q_0) &= \mathrm{vec}(R^T B^T P - A^T P + PBR - PA - Q_0) \\ &= \mathrm{vec}(R^T B^T P) + \mathrm{vec}(PBR) - \mathrm{vec}(A^T P + PA + Q_0) \\ &= \mathrm{vec}(I_n R^T B^T P) + \mathrm{vec}(PBRI_n) - \mathrm{vec}(A^T P + PA + Q_0) \end{aligned}$$

Nếu chỉ sử dụng ma trận P đối xứng ($P = P^T$) thì theo tính chất của toán tử vector hóa, tức là:

$$\mathrm{vec}(I_n R^T B^T P) = \mathrm{vec}(I_n R^T B^T P^T) = [(PB) \otimes I_n]\mathrm{vec}(R^T)$$

và

$$\mathrm{vec}(PBRI_n) = [I_n \otimes (PB)]\mathrm{vec}(R)$$

thì công thức trên sẽ được biến đổi thành:

$$\mathrm{vec}(Q - Q_0) = [(PB) \otimes I_n]\mathrm{vec}(R^T) + [I_n \otimes (PB)]\mathrm{vec}(R) - \mathrm{vec}(A^T P + PA + Q_0)$$

Tiếp tục, ta sử dụng phép biến đổi hàng cột của ma trận cho $R(\underline{x})$ thuộc kiểu $r \times n$ (vì đối tượng có r tín hiệu vào và n biến trạng thái):

$$\mathrm{vec}(R^T) = U_{r,n}\mathrm{vec}(R)$$

sẽ đi đến

$$\mathrm{vec}(Q-Q_0) = H\mathrm{vec}(R) - \mathrm{vec}(A^TP+PA+Q_0)$$

trong đó

$$H = I_n \otimes (PB) + [(PB)\otimes I_n]U_{r,n} \tag{4.60}$$

Quay lại bài toán tối ưu (4.59). Nếu sử dụng chuẩn Euclid của ma trận thì do

$$\|Q-Q_0\|_E = \|\mathrm{vec}(Q-Q_0)\|_E$$

bài toán đó sẽ trở thành:

$$\|H\mathrm{vec}(R) - \mathrm{vec}(A^TP+PA+Q_0)\|_E \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow \quad H\mathrm{vec}(R) = \mathrm{vec}(A^TP+PA+Q_0) \tag{4.61}$$

vì chuẩn là một số không âm.

Ma trận H trong (4.61) nói chung không phải là ma trận vuông. Nó có n^2 hàng và nr cột, tức là thuộc kiểu $n^2 \times nr$. Bởi vậy để giải phương trình (4.61) trong trường hợp phổ biến $r<n$ ta phải sử dụng ma trận giả nghịch đảo bên trái của H (pseudo–inverse), tức là một ma trận H_p nào đó thuộc kiểu $nr \times n^2$ để

$$H_pH = I_{nr}$$

Khi đó thì từ (4.61) ta có được nghiệm $R(\underline{x})$:

$$\mathrm{vec}(R) = H_p\mathrm{vec}(A^TP+PA+Q_0) \tag{4.62}$$

Cuối cùng, tổng kết lại ta đi đến thuật toán thiết kế bộ điều khiển $R(\underline{x})$ cho đối tượng phi tuyến (4.50) gồm các bước như sau:

1) Thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái R_0 cho đối tượng tuyến tính (4.51), trong đó $A_0 = A(\underline{0})$.

2) Chọn một ma trận P đối xứng và xác định dương. Xác định Q_0 theo công thức (4.57).

3) Xác định ma trận H theo công thức (4.60) và xác định một ma trận giả nghịch đảo bên trái H_p nào đó của H.

4) Tính $R(\underline{x})$ theo (4.62).

Ví dụ 4.19: Minh họa phương pháp thiết kế Sieber

Cho đối tượng phi tuyến với mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & x_2\\ x_1 & x_2^3\end{pmatrix}}_{A(\underline{x})}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{\underline{x}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}_{B}u \qquad (\text{có } n=2 \text{ và } r=1) \tag{4.63}$$

Bài toán đặt ra là phải tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái $R(\underline{x})$ sao cho với nó, hệ thu được ở hình 4.12a) khi không bị kích thích sẽ có chất lượng được định hướng theo hệ tuyến tính mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u \tag{4.64}$$

Trong ví dụ này ta bỏ qua bước thiết kế bộ điều khiển R_0 cho mô hình tuyến tính tương đương của đối tượng phi tuyến (4.63) là

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{A(\underline{0})=A_0}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{\underline{x}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}_{B}u \tag{4.65}$$

Nói cách khác (4.64) chính là mô hình hệ kín bao gồm đối tượng tuyến tính (4.65) và một bộ điều khiển phản hồi trạng thái R_0 nào đó để có

$$A_0-BR_0=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Chọn ma trận P đối xứng, xác định dương

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Khi đó thì

$$Q_0=(BR_0-A_0)^TP+P(BR_0-A_0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$H=I_2\otimes(PB)+\left[(PB)\otimes I_2\right]U_{1,2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$H_p=(H^TH)^{-1}H^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{vec}(A^T P + PA + Q_0) = \mathrm{vec}\begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2x_2^3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_2^3 + 2 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\mathrm{vec}(R) = H_p \mathrm{vec}(A^T P + PA + Q_0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_2^3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^3 + 1 \end{pmatrix}$$

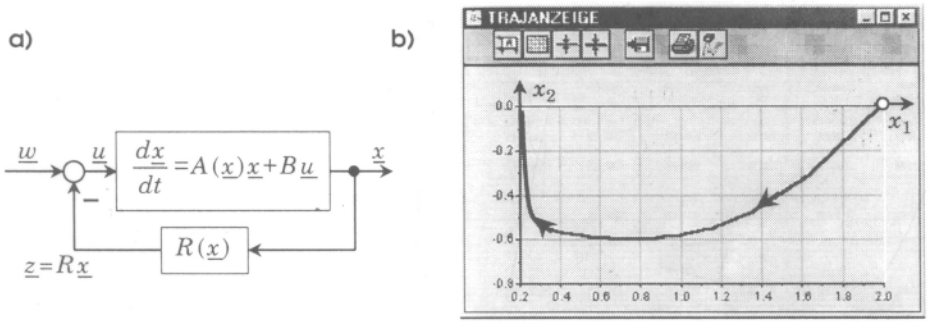
$$\Leftrightarrow \quad R(\underline{x}) = (x_1 + x_2 \quad , \quad x_2^3 + 1) \tag{4.66}$$

vì $R(\underline{x})$ phải có kiểu 1×2.

Như vậy hệ kín sẽ có tín hiệu sai lệch u là (hình 4.12a)

$$u = w - R(\underline{x})\underline{x} = w - (x_1 + x_2)x_1 - (x_2^3 + 1)x_2$$

Hình 4.12b) là quỹ đạo trạng thái của hệ kín khi không bị kích thích và có trạng thái đầu $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dạng quỹ đạo trạng thái kết thúc tại gốc tọa độ $\underline{0}$ xác nhận tính ổn định của hệ.



Hình 4.12: Minh họa ví dụ 4.19.

Trên đây là các bước thiết kế bộ điều khiển $R(\underline{x})$ được minh họa theo thuật toán. Theo đó ta thu được kết quả (4.66). Tuy nhiên riêng với hệ có hai biến trạng thái và một tín hiệu vào, tức là bộ điều khiển có dạng

$$R(\underline{x}) = (r_1 \ , \ r_2)$$

thì ta cũng có thể đến được bộ điều khiển đó một cách đơn giản hơn như sau:

– Tính $Q(\underline{x}) = (BR-A)^T P + P(BR-A) = \begin{pmatrix} 2 & r_1 - x_1 - x_2 \\ r_1 - x_1 - x_2 & 2r_2 - 2x_2^3 \end{pmatrix}$

– Để có $\min\limits_{R(\underline{x})} \| Q(\underline{x}) - Q_0 \|$ ta chỉ cần xác định r_1 . r_2 sao cho $Q(\underline{x}) = Q_0$ và đi đến:

$$\begin{pmatrix} 2 & r_1 - x_1 - x_2 \\ r_1 - x_1 - x_2 & 2r_2 - 2x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 - x_1 - x_2 = 0 \\ 2r_2 - 2x_2^3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = x_1 + x_2 \\ r_2 = x_2^3 + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad R(\underline{x}) = (x_1 + x_2 \ , \ x_2^3 + 1) \qquad \square$$

5 ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH HÓA CHÍNH XÁC

5.1 Giới thiệu chung

5.1.1 Hệ có cấu trúc mô hình affine

Thông qua nội dung của những chương trước đây ta có thể thấy nổi lên một bàn khoăn là tuy có nhiều chỉ tiêu chất lượng được đặt ra cho công việc phân tích hệ phi tuyến như tính ổn định, tính điều khiển được, quan sát được, khả năng tự dao động, hiện tượng hỗn loạn, phân nhánh ... nhưng số phương pháp hữu hiệu phục vụ trực tiếp các công việc đó lại không nhiều. Thường dùng nhất là phương pháp phân tích gián tiếp thông qua mô hình tuyến tính tương đương của hệ phi tuyến trong lân cận đủ nhỏ xung quanh điểm làm việc của hệ, song phương pháp này lại không cung cấp được thông tin một cách đầy đủ của hệ thống trong toàn bộ không gian trạng thái. Còn đối với những phương pháp phân tích trực tiếp thì ngoại trừ tiêu chuẩn Lyapunov cho việc phân tích ổn định và phương pháp mặt phẳng pha giới hạn ở hệ phi tuyến NL có hai biến trạng thái, cho tới nay ta chưa có một phương pháp cụ thể nào khác.

Gần đây, với *công cụ hình học vi phân* (*differential geometric tools*) người ta đã đi đến được một số phương pháp, bù đắp phần nào sự khiếm khuyết trên, cụ thể là phương pháp phân tích tính điều khiển được (*controllable*), quan sát được (*obsersable*), phân tích tính động học không (*zero dynamic*) cũng như xác định tính pha cực tiểu (*minimum phase*) của hệ phi tuyến có cấu trúc affine:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.1}$$

trong đó $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$ là các vector hàm, còn $H(\underline{x})$ là ma trận hàm theo biến $\underline{x}$, có số chiều phù hợp với số các tín hiệu vào $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$, ra $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$ và trạng thái $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, tức là:

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{pmatrix}, \qquad \underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_p(\underline{x}) \end{pmatrix}, \qquad H(\underline{x}) = \begin{pmatrix} h_{11}(\underline{x}) & \cdots & h_{1m}(\underline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}(\underline{x}) & \cdots & h_{nm}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Nhằm tạo ra môi trường thích hợp với công cụ hình học vi phân, ở đây người ta đã giả thiết các vector tín hiệu vào/ra $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$ là *khả vi vô hạn lần*, tức là thuộc tập C^{∞}. Điều này đòi hỏi các phần tử của $\underline{f}(\underline{x})$, $H(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$ cũng phải khả vi vô hạn lần theo $\underline{x}$, đồng thời vector tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ cũng phải thuộc tập C^{∞} (cũng khả vi vô hạn lần).

Việc phải thỏa mãn tính khả vi vô hạn lần của các phần tử của $\underline{f}(\underline{x})$, $H(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$ cũng là một hạn chế vì ta có thể thấy, tất cả các khâu phi tuyến cơ bản đã được trình bày trong chương 2 đều không thỏa mãn điều kiện này.

Tuy nhiên, ta cũng có thể được an ủi rằng giả thiết mô hình hệ phải có dạng (5.1) hoàn toàn không hạn chế miền ứng dụng của nó. Thật vậy, với hệ tự trị tổng quát có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$$

thì chỉ bằng việc định nghĩa lại biến vào $\underline{w}(t)$:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{w}(t)$$

ta sẽ trở về được dạng mô hình affine (5.1) quen thuộc:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{f}(\underline{x},\underline{u})\\ \underline{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Theta\\ I\end{pmatrix}\underline{w}$$

Hệ affine với mô hình (5.1) có những tính chất cơ bản sau:

1) *Bất biến với phép đổi biến vi phôi:*

Gọi

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} m_1(\underline{x})\\ \vdots \\ m_n(\underline{x})\end{pmatrix}$$

là một phép đổi biến vi phôi (song ánh và khả vi). Khi đó mô hình (5.1) biểu diễn theo biến mới là $\underline{z}$ cũng có dạng affine:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{z}}{dt} = \tilde{\underline{f}}(\underline{z}) + \tilde{H}(\underline{z})\,\underline{u} \\ \underline{y} = \tilde{\underline{g}}(\underline{z}) \end{cases}$$

trong đó

$$\tilde{\underline{f}}(\underline{z}) = \frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}}\underline{f}\Big|_{\underline{x}=\underline{m}^{-1}(\underline{z})}, \quad \tilde{H}(\underline{z}) = \frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}}H\Big|_{\underline{x}=\underline{m}^{-1}(\underline{z})}, \quad \tilde{\underline{g}}(\underline{z}) = \underline{g}\left(m^{-1}(\underline{z})\right)$$

2) *Bất biến với cấu trúc song song, nối tiếp và hồi tiếp:*

Hình 5.1 biểu diễn hệ có cấu trúc song song và hồi tiếp của hai hệ con affine:

$$\text{Hệ 1:}\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}_1}{dt}=\underline{f}_1(\underline{x}_1)+H_1(\underline{x}_1)\underline{u}\\ \underline{y}_1=\underline{g}_1(\underline{x}_1)\end{cases}\quad\text{và}\quad\text{Hệ 2:}\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}_2}{dt}=\underline{f}_2(\underline{x}_2)+H_2(\underline{x}_2)\underline{u}\\ \underline{y}_2=\underline{g}_2(\underline{x}_2)\end{cases}$$

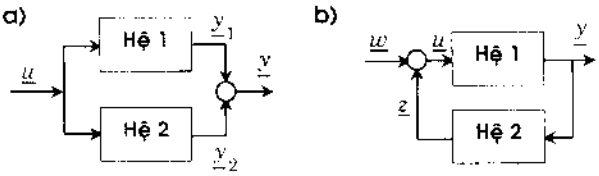
Khi đó, ở trường hợp có cấu trúc song song (hình 5.1a), hệ lớn cũng có mô hình affine:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}_1\\ \underline{x}_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{f}_1(\underline{x}_1)\\ \underline{f}_2(\underline{x}_2)\end{bmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})}+\underbrace{\begin{bmatrix}H_1(\underline{x}_1)\\ H_2(\underline{x}_2)\end{bmatrix}}_{H(\underline{x})}\underline{u}\\ \underline{y}=\underline{y}_1+\underline{y}_2=\underbrace{\underline{g}_1(\underline{x}_1)+\underline{g}_2(\underline{x}_2)}_{\underline{g}(\underline{x})}\end{cases}$$

và ở trường hợp hồi tiếp (hình 5.1b) cũng vậy:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{x}_1\\ \underline{x}_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{f}_1(\underline{x}_1)+H_1(\underline{x}_1)\underline{g}_2(\underline{x}_2)\\ \underline{f}_2(\underline{x}_2)-H_2(\underline{x}_2)\underline{g}_1(\underline{x}_1)\end{bmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})}+\underbrace{\begin{bmatrix}H_1(\underline{x}_1)\\ \Theta\end{bmatrix}}_{H(\underline{x})}\underline{w}$$

Tương tự cho những cấu trúc khác như nối tiếp, hệ ngược, ta có được kết luận về tính bất biến của mô hình affine.



Hình 5.1: Hệ cấu thành bởi các hệ affine thành phần cũng là một hệ affine

Xét hệ (5.1) khi không bị kích thích ($\underline{u}=\underline{0}$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x}) \tag{5.2}$$

Gọi $\underline{x}(t)$ là quỹ đạo trạng thái tự do của hệ thỏa mãn điều kiện đầu $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$. Ứng với những điểm trạng thái đầu khác nhau $\underline{x}_0$ ta có các quỹ đạo trạng thái tự do khác nhau $\underline{x}(t)$. Ký hiệu phép biến đổi điểm trạng thái ban đầu $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$ thành quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ là toán tử Φ_t^f, tức là:

$$\underline{x}(t) = \Phi_t^f(\underline{x}_0) \quad \text{hay} \quad \Phi_t^f : \underline{x}_0 \mapsto \underline{x}(t) \tag{5.3}$$

ta sẽ có:

Định lý 5.1: Toán tử $\Phi_t^f(\underline{x}_0)$ biến đổi một điểm trạng thái $\underline{x}_0$ thành hàm thời gian $\underline{x}(t)$ thỏa mãn (5.2) với $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ có các tính chất sau:

a) $\Phi_0^f(\underline{x}) = \underline{x}$

b) $\Phi_{t+\tau}^f(\underline{x}) = \Phi_t^f\left(\Phi_\tau^f(\underline{x})\right) = \Phi_\tau^f\left(\Phi_t^f(\underline{x})\right)$

c) $(\Phi_t^f)^{-1}(\underline{x}) = \Phi_{-t}^f(\underline{x})$

Chứng minh:

Từ định nghĩa toán tử $\Phi_t^f(\underline{x}_0)=\underline{x}(t)$ ta có ngay $\Phi_0^f(\underline{x}_0)=\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ đúng với mọi $\underline{x}_0$ và đó là kết luận a). Tương tự, từ $\underline{x}(\tau)=\Phi_\tau^f(\underline{x}_0)$, $\underline{x}(t+\tau)=\Phi_{t+\tau}^f(\underline{x}_0)$ và $\underline{x}(t+\tau)=\Phi_t^f\left(\underline{x}(\tau)\right)$ đúng với mọi $\underline{x}_0$ ta cũng có b). Cuối cùng, khẳng định c) được suy ra từ b) với $\underline{x}=\Phi_0^f(\underline{x})=\Phi_{t-t}^f(\underline{x})=\Phi_t^f\left(\Phi_{-t}^f(\underline{x})\right) \Rightarrow \Phi_{-t}^f(\underline{x})=(\Phi_t^f)^{-1}(\underline{x})$. ❐

Ví dụ 5.1: Minh họa định lý 5.1

Để minh họa định lý 5.1 ta xét trường hệ (5.2) là tuyến tính tham số hằng với $\underline{f}(\underline{x})=A\underline{x}$. Khi đó có:

$$\Phi_t^f(\underline{x}) = \Phi_t^{A\underline{x}}(\underline{x}) = e^{At}\underline{x}_0$$

Rõ ràng toán tử này ánh xạ này thỏa mãn những tính chất nêu trong định lý 5.1:

- $\Phi_0^f(\underline{x}) = e^{A0}\underline{x} = I\underline{x} = \underline{x}$
- $(\Phi_t^f)^{-1}(\underline{x}) = (e^{At})^{-1}\underline{x} = e^{-At}\underline{x} = \Phi_{-t}^f(\underline{x})$
- $\Phi_{t+\tau}^f(\underline{x}) = e^{A(t+\tau)}\underline{x} = e^{At}e^{A\tau}\underline{x} = e^{A\tau}e^{At}\underline{x} = \Phi_\tau^f\left(\Phi_t^f(\underline{x})\right)$ ❐

Ngoài ra, nếu $\underline{f}(\underline{x})$ là hàm giải tích thì $\Phi_t^f(\underline{x})$ cũng giải tích. Do đó trong lân cận t, hàm $\underline{x}(t+\tau)=\Phi_t^f\left(\underline{x}(\tau)\right)$ xấp xỉ được bởi công thức "tuyến tính" với hai thành phần đầu tiên trong công thức khai triển Taylor của nó:

$$\Phi_t^f\left(\underline{x}(\tau)\right) = \underline{x}(t+\tau) = \underline{x}(t) + \frac{d\underline{x}}{dt}\tau \tag{5.4}$$

Định lý 5.2: Cho vector liên tục $\underline{\lambda}(\underline{x})$ với $\underline{x}(t)$ chạy dọc trên quỹ đạo trạng thái $\Phi_t^f(\underline{x})$. Gọi $\mathcal{O}_x$ là một lân cận của $\underline{x}(t)$. Giả sử $\underline{x}_T=\underline{x}(t+T)$ là một điểm trên $\Phi_t^f(\underline{x})$ thuộc $\mathcal{O}_x$, tức là $\underline{x}_T=\Phi_T^f(\underline{x})\in\mathcal{O}_x$ và $\Phi_{-T}^f(\underline{x}_T)=(\Phi_T^f)^{-1}(\underline{x}_T)$ là ánh xạ ngược biến $\underline{x}_T$ thành $\underline{x}$. Khi đó với T đủ nhỏ sẽ có:

a) $\underline{x}(t+T) = \underline{x}_T = \underline{x}(t)+\dfrac{d\underline{x}}{dt}T$, tức là $\Phi_T^f(\underline{x}) = \underline{x}+\underline{f}(\underline{x})\,T$

b) $\underline{\lambda}(\underline{x}_T) = \underline{\lambda}(\underline{x}) + \dfrac{\partial\underline{\lambda}(\underline{x})}{\partial\underline{x}}(\underline{x}_T-\underline{x}) = \underline{\lambda}(\underline{x}) + \dfrac{\partial\underline{\lambda}(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\underline{f}(\underline{x})\,T$

c) $\dfrac{\partial\Phi_{-T}^f}{\partial\underline{x}}\underline{\lambda}(\underline{x}) = \underline{\lambda}(\underline{x}) - \dfrac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{x}}\underline{\lambda}(\underline{x})T$

Chứng minh:

Khẳng định a) được suy trực tiếp từ (5.4) với $\tau=T$. Để có b) ta khai triển $\underline{\lambda}(\underline{x}_T)$ thành chuỗi Taylor trong lân cận $\underline{x}$ rồi chỉ giữ lại hai thành phần đầu tiên với:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\underline{x}(t+T)-\underline{x}(t)}{T} = \underline{f}(x).$$

Cuối cùng, kết luận c) được suy từ khẳng định a) với $\Phi_{-T}^f(\underline{x}) = \underline{x}-\underline{f}(\underline{x})\,T$ như sau:

$$\frac{\partial\Phi_{-T}^f}{\partial\underline{x}} = I-\frac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{x}}T \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\Phi_{-T}^f}{\partial\underline{x}}\underline{\lambda}(\underline{x}) = \underline{\lambda}(\underline{x}) - \frac{\partial\underline{f}}{\partial\underline{x}}\underline{\lambda}(\underline{x})T$$ ❐

5.1.2 Công cụ toán học: Hình học vi phân

Đạo hàm của hàm vô hướng (Đạo hàm Lie)

Cho một hàm vô hướng $v(\underline{x})$. Đạo hàm của nó dọc theo quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)=\Phi_t^f(\underline{x}_0)$ của hệ không bị kích thích (5.2) được hiểu là:

$$L_{\underline{f}}v = \frac{\partial v}{\partial\underline{x}}\underline{f} \quad\Rightarrow\quad L_{\underline{f}}v(\underline{x}) = \frac{\partial v}{\partial\underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) \tag{5.5}$$

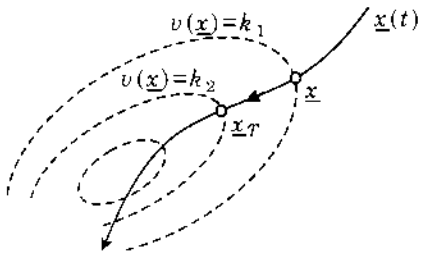
Có thể thấy phép tính đạo hàm $L_{\underline{f}}v$ của $v(\underline{x})$ đã được biết đến từ chương 3 khi nói về tiêu chuẩn Lyapunov. Nó đo sự thay đổi giá trị của $v(\underline{x})$ dọc theo $\underline{x}(t)=\Phi_t^f(\underline{x}_0)$.

Như vậy $L_{\underline{f}}v(\underline{x})$ cũng là hàm vô hướng giống như $v(\underline{x})$. Hình 5.2 minh họa phép tính . Những đường nét rời trong hình là các đường đồng mức của $v(\underline{x})$, tức là tập

các điểm trong $\mathbb{R}^n$ mà tại đó hàm $v(\underline{x})$ có cùng một giá trị k. Chẳng hạn đường nét rời chứa điểm $\underline{x}$ trong hình là tập các điểm trạng thái thỏa mãn $v(\underline{x}) = k_1$ còn đường rời nét chứa $\underline{x}_T$ là tập các điểm trạng thái có $v(\underline{x}_T) = k_2$. Khi đó, tốc độ thay đổi giá trị của $v(\underline{x})$ dọc theo quỹ đạo $\underline{x}(t)$, bắt đầu từ điểm $\underline{x}$ cho tới điểm $\underline{x}_T = \Phi_T^f(\underline{x})$, sẽ là:

$$L_f v(\underline{x}) = \lim_{T\to 0} \frac{k_2 - k_1}{T} = \lim_{T\to 0} \frac{v(\underline{x}_T) - v(\underline{x})}{T} = \lim_{T\to 0} \frac{v\left(\Phi_T^f(\underline{x})\right) - v(\underline{x})}{T}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} \lim_{T\to 0} \frac{\Phi_T^f(\underline{x}) - \underline{x}}{T} = \frac{\partial v(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial v(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x})$$



Hình 5.2: Minh họa phép tính đạo hàm của hàm vô hướng $v(\underline{x})$ dọc theo quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$.

Phép đạo hàm $L_{\underline{f}} v$ có những tính chất:

1) Cho một vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$ và hai hàm vô hướng $v(\underline{x})$, $w(\underline{x})$. Khi đó sẽ có:

$$L_{w\underline{f}} v = L_{\underline{f}} v \cdot w \quad \text{vì } L_{w\underline{f}} v = \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} \left(w\underline{f}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial \underline{x}} \underline{f}\right) w$$

2) Cho hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$ và một hàm vô hướng $v(\underline{x})$. Vậy thì:

$$L_{\underline{g}} L_{\underline{f}} v(\underline{x}) = L_{\underline{g}}\left(L_{\underline{f}} v(\underline{x})\right) = \frac{\partial\left(L_f v(\underline{x})\right)}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{g}(\underline{x})$$

3) Cho vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, một hàm vô hướng $v(\underline{x})$ và một số nguyên k. Vậy thì

$$L_{\underline{f}}^k v(\underline{x}) = \frac{\partial\left(L_{\underline{f}}^{k-1} v(\underline{x})\right)}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{f}(\underline{x})$$

Ví dụ 5.2: Minh họa đạo hàm Lie

Xét trường hợp hệ là tuyến tính tham số hằng

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x}+B\underline{u} \qquad \text{với} \qquad \underline{f}(\underline{x}) = A\underline{x} \qquad \text{và} \qquad \Phi_t^{A\underline{x}}(\underline{x}) = e^{At}\underline{x}$$

Theo công thức định nghĩa (5.5) với $v(\underline{x})=V\underline{x}$ và V là ma trận hằng, sẽ có

$$L_{A\underline{x}}v(\underline{x}) = \frac{\partial v(\underline{x})}{\partial \underline{x}}A\underline{x} = VA\underline{x}$$

Ta cũng đi đến được kết quả trên từ bản chất rằng $L_{A\underline{x}}v(\underline{x})$ đo tốc độ thay đổi của $v(\underline{x})$ dọc theo quỹ đạo trạng thái $\Phi_t^{A\underline{x}}(\underline{x})$ như sau:

$$L_{A\underline{x}}v(\underline{x}) = \lim_{T\to 0}\frac{v\left(\Phi_T^f(\underline{x})\right)-v(\underline{x})}{T} = \lim_{T\to 0}\frac{V\Phi_T^f(\underline{x})-V\underline{x}}{T} = \lim_{T\to 0}\frac{Ve^{AT}\underline{x}-V\underline{x}}{T}$$

Suy ra

$$L_{A\underline{x}}v(\underline{x}) = V\left(\lim_{T\to 0}\frac{e^{AT}-I}{T}\right)\underline{x} = VA\underline{x}$$

□

Phép nhân Lie, hay đạo hàm của vector

Cho hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$ và $\underline{g}(\underline{x})$. *Phép nhân Lie* của chúng được hiểu là:

$$ad_{\underline{f}}\underline{g} = [\,\underline{f}\,,\underline{g}\,] = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\underline{f} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\underline{g} \tag{5.6}$$

Song song cùng với tên gọi phép nhân Lie, người ta còn gọi nó là *ngoặc vuông Lie* (Lie bracket) do có ký hiệu $[\,\underline{f}\,,\underline{g}\,]$.

Như vậy kết quả của phép nhân Lie của hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$ và $\underline{g}(\underline{x})$ lại là một vector hàm. Nó đo tốc độ thay đổi giá trị của vector $\underline{g}(\underline{x})$ tính dọc theo quỹ đạo trạng thái tự do $\underline{x}(t)=\Phi_t^f(\underline{x}_0)$ là nghiệm của hệ (5.2).

Phép tính nhân Lie có những tính chất sau:

1) Cho hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$ và một số nguyên k. Vậy thì:

$$[\,\underline{f}\,,\underline{g}\,] = -[\,\underline{g}\,,\underline{f}\,], \quad \text{tức là} \quad ad_{\underline{f}}\underline{g} = -ad_{\underline{g}}\underline{f} \quad \text{(phản đối xứng)}$$

$$ad_{\underline{f}}^k\underline{g} = ad_{\underline{f}}\left(ad_{\underline{f}}^{k-1}\underline{g}\right) = [\,\underline{f}\,,ad_{\underline{f}}^{k-1}\underline{g}\,]$$

2) Cho hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$, và hàm vô hướng $v(\underline{x})$. Vậy thì:

$$L_{[\underline{f},\underline{g}]}v = \qquad = L_{\underline{f}}L_{\underline{g}}v - L_{\underline{g}}L_{\underline{f}}v$$

3) Cho hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$, hai hàm vô hướng $v(\underline{x})$, $w(\underline{x})$. Vậy thì:

$$[v\underline{f}, w\underline{g}] = vw[\underline{f}, \underline{g}] + (L_{\underline{f}}w)\, v\underline{g} - (L_{\underline{g}}v)\, w\underline{f}$$

4) Với các vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$, $\underline{h}(\underline{x})$ và hai số thực a, b luôn có:

$$[a\underline{f} + b\underline{g}, \underline{h}] = a[\underline{f}, \underline{h}] + b[\underline{g}, \underline{h}]$$

$$[\underline{h}, a\underline{f} + b\underline{g}] = a[\underline{h}, \underline{f}] + b[\underline{h}, \underline{g}]$$

5) Ba vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$, $\underline{h}(\underline{x})$ luôn thỏa mãn tính *đồng dạng Jacobi*:

$$[\underline{f}, [\underline{g}, \underline{h}]](\underline{x}) + [\underline{g}, [\underline{h}, \underline{f}]](\underline{x}) + [\underline{h}, [\underline{f}, \underline{g}]](\underline{x}) = \underline{0}$$

6) Nếu hai vector $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$ tiếp tuyến với một đa tạp thì $[\underline{f}, \underline{g}](\underline{x}) = ad_{\underline{f}}\underline{g}(\underline{x})$ cũng là một vector tiếp tuyến với đa tạp đó.

Hàm mở rộng (distribution)

Dưới khái niệm hàm mở rộng của hình học vi phân người ta hiểu một ánh xạ Δ gán mỗi phần tử $\underline{x}$ của không gian vector n chiều $\mathbb{R}^n$ thành một không gian vector con $\Delta(\underline{x})$ với d chiều ($d \leq n$) trong $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta: \underline{x} \mapsto \Delta(\underline{x})$$

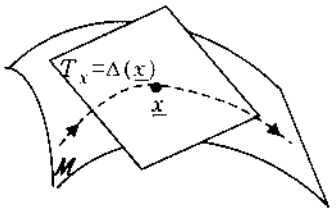
Vì là một không gian vector có số chiều bằng d nên trong $\Delta(\underline{x})$ phải tồn tại d vector $\underline{f}_1(\underline{x})$, $\underline{f}_2(\underline{x})$, ..., $\underline{f}_d(\underline{x})$ độc lập tuyến tính sao cho $\Delta(\underline{x})$ là tập hợp của tất cả các vector $\underline{f}(\underline{x})$ dạng tổ hợp tuyến tính của chúng, tức là

$$\underline{f}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\underline{x})\underline{f}_i(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x})$$

với mọi hàm vô hướng $a_i(\underline{x})$

Nói cách khác, khi $\underline{x}$ cố định thì

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}(\underline{f}_1(\underline{x}), \underline{f}_2(\underline{x}), \ldots, \underline{f}_d(\underline{x}))$$



Hình 5.3: Hàm mở rộng là mặt tiếp tuyến với đa tạp trạng thái M.

Hàm mở rộng thường được dùng để biểu diễn không gian tiếp tuyến T_x với đa tạp M tại điểm $\underline{x}$ (hình 5.3). Hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ được gọi là trơn nếu

các $\underline{f}_1(\underline{x})$, $\underline{f}_2(\underline{x})$, ... , $\underline{f}_d(\underline{x})$ là những vector hàm khả vi

Hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ có các tính chất sau:

1) Hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ được gọi là không suy biến tại $\underline{x}$ nếu ở đó có $\dim(\Delta(\underline{x}))>0$.

2) Cho hai hàm mở rộng trơn $\Delta_1(\underline{x})$ và $\Delta_2(\underline{x})$. Tổng $\Delta(\underline{x})$ của chúng, định nghĩa bởi:

$$\Delta(\underline{x}) = \{ \underline{f}(\underline{x}) = \underline{g}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x}) \mid \underline{g}(\underline{x}) \in \Delta_1(\underline{x}) \text{ và } \underline{h}(\underline{x}) \in \Delta_2(\underline{x}) \}$$

cũng là một hàm mở rộng trơn.

3) Giao $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$ của hai hàm mở rộng trơn $\Delta_1(\underline{x})$ và $\Delta_2(\underline{x})$ là một hàm mở rộng trơn (điều ngược lại không đúng).

4) **Khái niệm hàm mở rộng xoắn:** Hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ có số chiều d với bộ cơ sở $\underline{f}_1(\underline{x})$, $\underline{f}_2(\underline{x})$, ... , $\underline{f}_d(\underline{x})$ trong lân cận $\underline{x}$, được gọi là xoắn (*involutive*) nếu tích Lie của hai phần tử bất kỳ thuộc $\Delta(\underline{x})$ cũng thuộc $\Delta(\underline{x})$.

Ngoài ra, cần và đủ để:

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}(\underline{f}_1(\underline{x}), \underline{f}_2(\underline{x}), \ldots, \underline{f}_d(\underline{x}))$$

là hàm mở rộng xoắn là

$$[\underline{f}_i(\underline{x}), \underline{f}_j(\underline{x})] \in \Delta(\underline{x}) \qquad \text{với mọi} \quad 1 \le i, j \le d.$$

5) **Hàm mở rộng trực giao:** Cho $\Delta(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ có số chiều bằng d

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}(\underline{f}_1(\underline{x}), \underline{f}_2(\underline{x}), \ldots, \underline{f}_d(\underline{x}))$$

Hàm mở rộng trực giao của $\Delta(\underline{x})$, ký hiệu bởi $\Delta^{\perp}(\underline{x})$, được hiểu là hàm mở rộng gồm các phần tử $\underline{g}(\underline{x})$ thỏa mãn:

$$\Delta^{\perp}(\underline{x}) = \{ \underline{g}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n \mid \underline{g}^T \underline{f} = 0 \text{ và } \underline{f}(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x}) \}$$

Vậy thì $\dim\Delta^{\perp}(\underline{x}) = n-d$ và nếu ký hiệu:

$$\Delta^{\perp}(\underline{x}) = \text{span}(\underline{g}_{d+1}(\underline{x}), \underline{g}_{d+2}(\underline{x}), \ldots, \underline{g}_n(\underline{x}))$$

sẽ còn có thêm:

$$\underline{g}_{d+k}^T(\underline{x})\, \underline{f}_i(\underline{x}) = 0 \qquad \text{với mọi } 1 \le k \le n-d \text{ và } 1 \le i \le d.$$

6) **Tiêu chuẩn Frobenius:** Xét hàm mở rộng $\Delta(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ có số chiều bằng d. Nếu tồn tại $n-d$ hàm vô hướng $m_{d+1}(\underline{x})$, $m_{d+2}(\underline{x})$, ... , $m_n(\underline{x})$ sao cho:

$$\Delta^{\perp}(\underline{x}) = \text{span}\left(\left(\frac{\partial m_{d+1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T, \left(\frac{\partial m_{d+2}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T, \ldots, \left(\frac{\partial m_n(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \right)$$

thì $\Delta(\underline{x})$ gọi là *tích phân được hoàn toàn*. Theo Frobenius, *cần và đủ để* $\Delta(\underline{x})$ *tích phân được hoàn toàn là nó phải xoắn*.

7) **Hàm mở rộng bất biến:** Cho hàm mở rộng $\Delta(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ có số chiều bằng d và một vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$. Khi đó $\Delta(\underline{x})$ được gọi là *bất biến* với $\underline{f}(\underline{x})$ nếu tích Lie giữa $\underline{f}(\underline{x})$ với một vector $\underline{g}(\underline{x})$ tuỳ ý thuộc $\Delta(\underline{x})$ lại thuộc $\Delta(\underline{x})$. Nói cách khác, từ $\underline{g}(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x})$ suy ra được $[\,\underline{f}(\underline{x}), \underline{g}(\underline{x})\,] \in \Delta(\underline{x})$. Như vậy, nếu có:

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}(\,\underline{f}_1(\underline{x}), \underline{f}_2(\underline{x}), \ldots, \underline{f}_d(\underline{x})\,)$$

thì cần và đủ để $\Delta(\underline{x})$ *bất biến* với $\underline{f}(\underline{x})$ là:

$$[\,\underline{f}(\underline{x}), \underline{f}_i(\underline{x})\,] \in \Delta(\underline{x}) \qquad \text{với mọi} \qquad 1 \le i \le d$$

8) Nếu hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ bất biến với cả hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$ và $\underline{g}(\underline{x})$ thì nó cũng bất biến với vector hàm $[\,\underline{f}(\underline{x}), \underline{g}(\underline{x})\,] = ad_{\underline{f}}\underline{g}(\underline{x})$.

5.2 Phân tích hệ affine

5.2.1 Xác định phép đổi biến để tách hệ

Trước tiên ta xét một *hàm mở rộng xoắn* $\Delta(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ có số chiều bằng d và $\Delta^{\perp}(\underline{x})$ là hàm mở rộng trực giao của nó. Do $\Delta(\underline{x})$ là *hàm mở rộng xoắn* nên theo Frobenius, luôn tồn tại $n-d$ hàm vô hướng $m_{d+1}(\underline{x})$, $m_{d+2}(\underline{x})$, ... , $m_n(\underline{x})$ thỏa mãn:

$$\Delta^{\perp}(\underline{x}) = \text{span}\left(\left(\frac{\partial m_{d-1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T, \left(\frac{\partial m_{d+2}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T, \ldots, \left(\frac{\partial m_n(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T \right) \tag{5.7}$$

Sử dụng phép đổi biến:

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} m_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ m_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

với d các hàm được cho thêm vào là:

$$m_1(x)=x_1\ ,\quad m_2(x)=x_2\ ,\ \ldots\ ,\ m_d(x)=x_d$$

nói cách khác

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \left(x_1, \ldots, x_d, m_{d+1}(x), \ldots, m_n(x)\right)^T \tag{5.8}$$

thì một vector hàm $\underline{v}(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x})$ tùy ý, khi được chuyển sang biến mới theo công thức:

$$\underline{\tilde{v}}(\underline{z}) = \left(\frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}}\underline{v}(\underline{x})\right)_{\underline{x}=m^{-1}(\underline{z})}$$

sẽ phải có $n-d$ phần tử cuối đồng nhất bằng 0, hay:

$$\underline{\tilde{v}}(\underline{z})^T = \left(\tilde{v}_1(\underline{z}), \ldots, \tilde{v}_d(\underline{z}), 0, \ldots, 0\right)^T \tag{5.9}$$

Ta còn dễ dàng thấy được điều ngược lại cũng đúng. Vậy:

Định lý 5.3: Cho một hàm mở rộng $\Delta(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ có số chiều bằng d và xoắn. Gọi $\Delta^{\perp}(\underline{x})$ xác định theo (5.7) là hàm mở rộng trực giao của $\Delta(\underline{x})$ cũng như $\underline{v}(\underline{x})$ là một vector hàm tùy ý trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, để $\underline{v}(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x})$ thì *cần và đủ* là ảnh $\underline{\tilde{v}}(\underline{z})$ của nó qua phép đổi biến (5.8) phải có $n-d$ phần tử cuối đồng nhất bằng 0, tức là $\underline{\tilde{v}}(\underline{z})$ phải có cấu trúc như trong (5.9).

Bây giờ ta xét hệ affine (5.1) có mô hình không bị kích thích (5.2):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

và giả sử là vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$ của nó bất biến với hàm mở rộng $\Delta(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ có số chiều bằng d và xoắn. Ký hiệu $\underline{\tilde{f}}(\underline{z})$ là ảnh của nó qua phép đổi biến (5.8), tức là:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \left(\frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x})\right)_{\underline{x}=m^{-1}(\underline{z})} = \underline{\tilde{f}}(\underline{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\underline{z}) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(\underline{z}) \end{pmatrix}$$

Gọi $\underline{z}_k$, $k=1, 2, \ldots, n$ là bộ vector cơ sở trong $\mathbb{R}^n$ theo biến $\underline{z}$, thỏa mãn:

$$\underline{z}_k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{phần tử thứ } k}}{1}, 0, \ldots, 0)^T$$

Như vậy, theo định lý 5.3, tất cả các vector $\underline{z}_k$ có $k<d$ đều là ảnh qua phép đổi biến (5.8) của một vector nào đó thuộc $\Delta(\underline{x})$.

Xét tích Lie:

$$[\,\underline{\tilde{f}}(\underline{z}),\ \underline{z}_k\,] = \frac{\partial \underline{z}_k}{\partial \underline{z}}\underline{\tilde{f}}(\underline{z}) - \frac{\partial \underline{\tilde{f}}(\underline{z})}{\partial \underline{z}}\underline{z}_k = -\frac{\partial \underline{\tilde{f}}(\underline{z})}{\partial \underline{z}}\underline{z}_k$$

$$= -\left(\frac{\partial \tilde{f}_1(\underline{z})}{\partial z_k}, \frac{\partial \tilde{f}_2(\underline{z})}{\partial z_k}, \ldots, \frac{\partial \tilde{f}_n(\underline{z})}{\partial z_k}\right)^T$$

ta thấy do có giả thiết $\underline{f}(\underline{x})$ bất biến với $\Delta(\underline{x})$ nên $[\,\underline{\tilde{f}}(\underline{z}), \underline{z}_k\,]\big|_{\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})}$ với $k\le d$ sẽ là phần tử của $\Delta(\underline{x})$. Bởi vậy khi $k\le d$ thì $[\,\underline{\tilde{f}}(\underline{z}),\ \underline{z}_k\,]$ phải có $n-d$ phần tử cuối đồng nhất bằng 0, hay:

$$\frac{\partial \tilde{f}_i(\underline{z})}{\partial z_k} = 0 \quad \text{với mọi } 0\le k\le d \text{ và } i>d$$

và đó cũng chính là lời chứng minh của định lý sau:

Định lý 5.4: Xét hệ không bị kích thích (5.10) bậc n. Nếu tồn tại một hàm mở rộng *xoắn* $\Delta(\underline{x})$ với số chiều bằng d sao cho vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$ của hệ (5.10) *bất biến* với $\Delta(\underline{x})$ thì phép đổi biến (5.8), trong đó $n-d$ hàm $m_{d+1}(x), \ldots, m_n(x)$ được lấy từ hàm mở rộng trực giao $\Delta^{\perp}(\underline{x})$ xác định theo (5.7), sẽ chuyển hệ (5.10) về dạng:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}, \ldots, z_n) \\ \vdots \\ \tilde{f}_d(z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}, \ldots, z_n) \\ \tilde{f}_{d+1}(z_{d+1}, \ldots, z_n) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(z_{d+1}, \ldots, z_n) \end{pmatrix}$$

Ví dụ 5.3: Phép đổi biến cho hệ không bị kích thích

Cho hệ không bị kích thích với mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_3x_4 - x_1x_2x_3 \\ \sin x_3 + x_2^3 + x_1x_3 \end{pmatrix}$$

Xét hàm mở rộng với số chiều $d=2$

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}(\underline{v}_1(\underline{x}),\ \underline{v}_2(\underline{x})) \quad \text{với} \quad \underline{v}_1(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Do có

$$[\underline{v}_1(\underline{x}), \underline{v}_2(\underline{x})] = \underline{0} \in \Delta(\underline{x})$$

nên $\Delta(\underline{x})$ là xoắn. Hơn nữa vì

$$[\underline{f}(\underline{x}), \underline{v}_1(\underline{x})] = \underline{0} \in \Delta(\underline{x}) \quad \text{và} \quad [\underline{f}(\underline{x}), \underline{v}_2(\underline{x})] = -\underline{v}_1(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x})$$

nên $\Delta(\underline{x})$ là bất biến với $\underline{f}(\underline{x})$.

Theo Frobenius, từ tính xoắn của $\Delta(\underline{x})$, phải tồn tại hai hàm vô hướng $m_3(\underline{x})$, $m_4(\underline{x})$ để có

$$\Delta^{\perp}(\underline{x}) = \text{span}\left(\left(\frac{\partial m_3(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T, \left(\frac{\partial m_4(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T\right)$$

tức là hai hàm đó phải thỏa mãn

$$\left(\frac{\partial m_3(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)\underline{v}_1(\underline{x}) = \left(\frac{\partial m_3(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)\underline{v}_2(\underline{x}) = \left(\frac{\partial m_4(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)\underline{v}_1(\underline{x}) = \left(\frac{\partial m_4(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)\underline{v}_2(\underline{x}) = 0$$

Ta có thể thấy một trong những cặp hàm vô hướng $m_3(\underline{x})$, $m_4(\underline{x})$ đó là

$$\left(\frac{\partial m_3(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right) = (0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0) \quad \text{và} \quad \left(\frac{\partial m_4(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right) = (-x_2\ ,\ -x_1\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

hay

$$m_3(\underline{x}) = x_4 \quad \text{và} \quad m_4(\underline{x}) = -x_1x_2 + x_4$$

Kết hợp thêm với

$$m_1(\underline{x}) = x_1 \quad \text{và} \quad m_2(\underline{x}) = x_2$$

ta có được phép đổi trục

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1x_2 + x_4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{m}^{-1}(\underline{z}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_1z_2 + z_4 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_2 & -x_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\underline{z}}{dt} = \underline{\tilde{f}}(\underline{z}) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_3 z_1 \\ \sin z_3 \end{pmatrix}$$ ❐

Tiếp tục, mở rộng định lý 5.4 ta còn có hệ quả sau:

Định lý 5.5 (Hệ quả của định lý 5.4): Cho hệ affine:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u} \qquad \text{với} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \ , \ \underline{u} \in \mathbb{R}^m \tag{5.11}$$

Nếu tồn tại một hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ có số chiều d, chứa tất cả các vector cột $\underline{h}_1(\underline{x})$, $\underline{h}_2(\underline{x})$, ... , $\underline{h}_m(\underline{x})$ của ma trận $H(\underline{x})$, xoắn và bất biến với vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, thì cũng sẽ tồn tại một phép đổi biến $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ đưa hệ về dạng "tách" như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{z}_1}{dt} = \underline{\tilde{f}}_1(\underline{z}_1, \underline{z}_2) + \tilde{H}_1(\underline{z}_1, \underline{z}_2)\underline{u} \\ \dfrac{d\underline{z}_2}{dt} = \underline{\tilde{f}}_2(\underline{z}_2) \end{cases} \tag{5.12}$$

trong đó

$$\underline{z}_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{z}_2 = \begin{pmatrix} z_{d+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Chứng minh:

Do $\Delta(\underline{x})$ chứa $\underline{h}_1(\underline{x})$, $\underline{h}_2(\underline{x})$, ... , $\underline{h}_m(\underline{x})$ và xoắn nên nó bất biến với các vector đó. Theo nội dung định lý 5.4, khi đó phải tồn tại phép đổi biến $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ để tách $\underline{f}(\underline{x})$ thành $\underline{\tilde{f}}_1(\underline{z}_1, \underline{z}_2) \in \mathbb{R}^d$, $\underline{\tilde{f}}_2(\underline{z}_2) \in \mathbb{R}^{n-d}$ và ma trận $H(\underline{x})$ thành $\tilde{H}_1(\underline{z}_1, \underline{z}_2) \in \mathbb{R}^{d \times m}$ và $\tilde{H}_2(\underline{z}_2) \in \mathbb{R}^{n-d \times m}$. Nhưng vì $\underline{h}_1(\underline{x})$, $\underline{h}_2(\underline{x})$, ... , $\underline{h}_m(\underline{x})$ thuộc $\Delta(\underline{x})$ nên khi chuyển sang biến $\underline{z}$, chúng phải có $n-d$ phần tử cuối bằng 0. Vậy $\tilde{H}_2(\underline{z}_2) = \Theta$ (ma trận có các phần tử bằng 0). ❐

Ví dụ 5.4: Minh họa định lý 5.5

Xét hệ affine có:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x_1x_3 + x_2e^{x_2} \\ x_3 \\ x_4 - x_2x_3 \\ x_3^2 + x_2x_4 - x_2^2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} u$$

và hàm mở rộng với số chiều $d=2$

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}(\underline{v}_1(\underline{x}),\ \underline{v}_2(\underline{x})) \quad \text{trong đó} \quad \underline{v}_1(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \underline{v}_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hàm mở rộng này chứa $\underline{h}(\underline{x})$ và bất biến với $\underline{f}(\underline{x})$ vì:

$$ad_{\underline{f}}\underline{v}_1(\underline{x}) = [\underline{f}(\underline{x}), \underline{v}_1(\underline{x})] = \underline{v}_2(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x})$$

$$ad_{\underline{f}}\underline{v}_2(\underline{x}) = [\underline{f}(\underline{x}), \underline{v}_2(\underline{x})] = \underline{0} \in \Delta(\underline{x})$$

Hơn nữa nó là hàm mở rộng xoắn bởi có:

$$ad_{\underline{v}_1}\underline{v}_2(x) = [\underline{v}_1(\underline{x}), \underline{v}_2(\underline{x})] = \underline{0} \in \Delta(\underline{x})$$

nên theo Frobenius, phải tồn tại hai hàm vô hướng $m_3(\underline{x})$, $m_4(\underline{x})$ để

$$\Delta^{\perp}(\underline{x}) = \text{span}\left(\left(\left(\frac{\partial m_3(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T, \left(\frac{\partial m_4(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)^T\right)\right)$$

Ta thấy một trong những cặp hàm vô hướng $m_3(\underline{x})$, $m_4(\underline{x})$ đó là

$$m_3(\underline{x}) = x_3 \quad \text{và} \quad m_4(\underline{x}) = -x_2x_3 + x_4$$

Như vậy, ta có phép đổi trục theo (5.8) là:

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_2x_3 + x_4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{m}^{-1}(\underline{z}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_2z_3 + z_4 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Suy ra

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{m}^{-1}(\underline{z})) + \frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}} H(\underline{m}^{-1}(\underline{z}))u = \begin{pmatrix} z_1z_3 + z_2e^{z_2} \\ z_3 \\ z_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{5.14}$$

Rõ ràng, với phép đổi trục (5.13), hệ affine cho ban đầu đã trở thành dạng "tách" với mô hình (5.14), trong đó

$$\underline{\tilde{f}}_1(\underline{z}_1,\underline{z}_2)=\begin{pmatrix} z_1z_3+z_2e^{x_2} \\ z_3 \end{pmatrix},\quad \underline{\tilde{f}}_2(\underline{z}_2)=\begin{pmatrix} z_4 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \tilde{H}_1(\underline{z}_1,\underline{z}_2)=\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

và

$$\underline{z}_1=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},\quad \underline{z}_2=\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

□

5.2.2 Phân tích tính điều khiển được

Tính điều khiển được của một hệ thống là gì và tại sao phải quan tâm tới nó. Để trả lời ta hãy xét bài toán là thiết kế bộ điều khiển để ổn định hóa được hệ thống, tức là bộ điều khiển phải tạo ra được tín hiệu điều khiển đưa hệ thống từ một điểm trạng thái $\underline{x}_0$ nào đó (điểm mà tín hiệu nhiễu đã đưa hệ tới đó) quay được về điểm cân bằng $\underline{x}_e$ ban đầu. Nếu như rằng không tồn tại bất cứ một tín hiệu điều khiển nào có thể làm được việc này thì sự cố gắng tổng hợp hay xây dựng bộ điều khiển ổn định hóa sẽ trở nên vô nghĩa (bài toán không có lời giải). Bởi vậy để công việc xây dựng bộ điều khiển có thể có kết quả ta phải biết được rằng có tồn tại hay không ít nhất một tín hiệu điều khiển có thể đưa được hệ thống từ $\underline{x}_0$ nào đó về $\underline{x}_e$. Nếu như tồn tại một tín hiệu điều khiển làm được việc đó thì ta nói hệ thống điều khiển được hoàn toàn tại điểm trạng thái $\underline{x}_0$.

Định nghĩa 5.1: Cho các điểm trạng thái $\underline{x}_0$ và $\underline{x}_T$. Hệ:

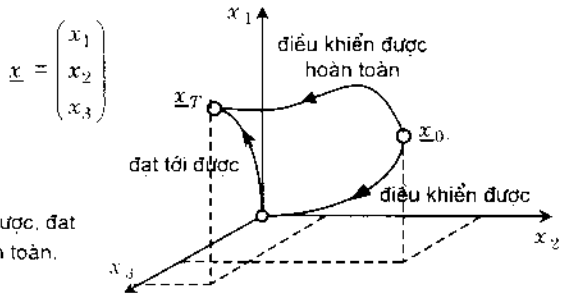
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u},t) \\ \underline{y}=\underline{g}(\underline{x},\underline{u},t) \end{cases}$$

được gọi là (hình 5.4):

a) *Điều khiển được* tại điểm trạng thái $\underline{x}_0$, nếu tồn tại vector điều khiển $\underline{u}(t)$ để có đường quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ tương ứng xuất phát từ $\underline{x}_0$ và kết thúc tại gốc tọa độ trong *khoảng thời gian hữu hạn*.

b) *Đạt tới được* điểm trạng thái $\underline{x}_T$, nếu tồn tại vector điều khiển $\underline{u}(t)$ để có đường quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ tương ứng xuất phát từ gốc tọa độ và kết thúc tại $\underline{x}_T$ *trong khoảng thời gian hữu hạn*.

c) *Điều khiển được hoàn toàn* tại điểm trạng thái $\underline{x}_0$ nếu với điểm $\underline{x}_T$ bất kỳ, nhưng xác định cho trước, tồn tại $\underline{u}(t)$ để có quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ tương ứng xuất phát từ $\underline{x}_0$ và kết thúc tại $\underline{x}_T$ *trong khoảng thời gian hữu hạn*.



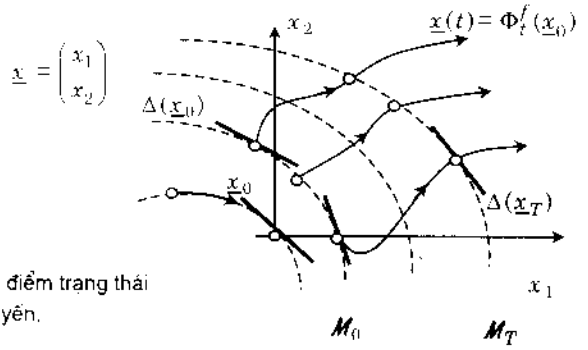
Hình 5.4: Các khái niệm điều khiển được, đạt tới được và điều khiển được hoàn toàn.

Chú ý rằng trong định nghĩa vừa phát biểu luôn có điều kiện *trong khoảng thời gian hữu hạn*. Đây là yêu cầu mà sự cần thiết của nó gần như là hiển nhiên, vì nếu hệ có thể đưa được về trạng thái đích $\underline{x}_e$ mong muốn nhưng phải trong khoảng thời gian vô cùng lớn thì cũng chẳng có ý nghĩa gì cho bài toán điều khiển. Thậm chí có nhiều hệ không điều khiển được nhưng vẫn có khả năng tự quay được về $\underline{x}_e$, tuy nhiên là trong khoảng thời gian vô hạn (ví dụ khi hệ ổn định tại $\underline{x}_e$).

Đa tạp các điểm trạng thái đạt tới được

Nhiệm vụ của công việc xác định tính điều khiển được hoàn toàn cho hệ phi tuyến affine (5.11) liên quan tới việc xác định tập các điểm trạng thái mà với chúng hệ có thể đạt tới được bằng một tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ nào đó, tức là xác định đa tạp $\boldsymbol{M}_T$ gồm các điểm trạng thái $\underline{x}_T$ mà hệ có thể đạt tới được bằng những tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ khác nhau trong khoảng thời gian hữu hạn T từ điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0$ thuộc đa tạp $\boldsymbol{M}_0$ đã biết (hình 5.5). Hệ sẽ là điều khiển được hoàn toàn nếu như đa tạp $\boldsymbol{M}_T$ là toàn bộ không gian trạng thái, hay:

$$\dim \boldsymbol{M}_T = n$$



Hình 5.5: Xác định đa tạp các điểm trạng thái đạt tới được cho hệ phi tuyến.

Tiêu chuẩn điều khiển được hoàn toàn

Công việc xác định đa tạp $\boldsymbol{M}_T$ sẽ đơn giản hơn nhiều nếu ta chuyển hệ phi tuyến affine (5.11) cho ban đầu thành cấu trúc với hai phần riêng biệt (5.12) nhờ phép đổi biến $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ nêu trong định lý 5.4 và định lý 5.5, vì khi đó, đa tạp $\boldsymbol{M}_T$ gồm các điểm trạng thái đạt tới được sẽ được xác định từ không gian con chứa $\underline{z}_1$ trong thành phần thứ nhất và tập các điểm $\underline{z}_2(T)$ đạt tới được một cách tự do (không phụ thuộc vào tín hiệu điều khiển) sau khoảng thời gian hữu hạn T. Nói cách khác, với mô hình dạng tách (5.12):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{z}_1}{dt} = \underline{\tilde{f}}_1(\underline{z}_1,\underline{z}_2) + \tilde{H}_1(\underline{z}_1,\underline{z}_2)\underline{u} \\ \dfrac{d\underline{z}_2}{dt} = \underline{\tilde{f}}_2(\underline{z}_2) \end{cases}$$

ta thấy ngay được tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ chỉ có tác dụng *lái* được hướng đi của phần biến trạng thái $\underline{z}_1(t)$ chứ không tác động được tới $\underline{z}_2(t)$. Điều này dẫn tới đa tạp $\boldsymbol{M}_T$ các điểm trạng thái đạt tới được của hệ chỉ có thể có số chiều nhiều nhất là d.

Song việc tách hệ (5.11) thành (5.12), như định lý 5.4 và 5.5 đã trình bày, lại được quyết định bởi sự tồn tại của hàm mở rộng:

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}(\underline{v}_1(\underline{x}),\ \underline{v}_2(\underline{x}),\ \ldots,\ \underline{v}_d(\underline{x}))$$

thỏa mãn:

- Chứa tất cả các vector cột $\underline{h}_1(\underline{x}),\ \underline{h}_2(\underline{x}),\ \ldots,\ \underline{h}_m(\underline{x})$ của ma trận $H(\underline{x})$.
- Bất biến với vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$.
- Xoắn (involutive).

Bởi vậy, công việc đầu tiên cần phải làm khi phân tích tính điều khiển được là xác định hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ thỏa mãn những điều kiện vừa nêu.

Điều đầu tiên có thể biết được ngay về $\Delta(\underline{x})$ là nó không thể có số chiều vượt quá n, vì bản thân nó là một không gian vector con trong $\mathbb{R}^n$.

$$\dim\Delta(\underline{x}) \le n$$

Để $\Delta(\underline{x})$ chứa được tất cả các vector cột $\underline{h}_1(\underline{x}),\ \underline{h}_2(\underline{x}),\ \ldots,\ \underline{h}_m(\underline{x})$ của ma trận $H(\underline{x})$ thì

$$\text{span}(\underline{h}_1(\underline{x}),\ \underline{h}_2(\underline{x}),\ \ldots,\ \underline{h}_m(\underline{x})) \subseteq \Delta(\underline{x}) \tag{5.15}$$

Tiếp theo, để $\Delta(\underline{x})$ bất biến với $\underline{f}(\underline{x})$, nó phải chứa cả những vector

$$[\underline{f}(\underline{x}), \underline{h}_i(\underline{x})] = ad_{\underline{f}}\underline{h}_i(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x}) \qquad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Nhưng khi đã chứa $ad_{\underline{f}}\underline{h}_i(\underline{x})$ và lại bất biến với $\underline{f}(\underline{x})$ thì đương nhiên nó cũng phải chứa

$$[\underline{f}(\underline{x}), [\underline{f}(\underline{x}), \underline{h}_i(\underline{x})]] = ad_{\underline{f}}^2\underline{h}_i(\underline{x})$$

$$[\underline{f}(\underline{x}), [\underline{f}(\underline{x}), [\underline{f}(\underline{x}), \underline{h}_i(\underline{x})]]] = ad_{\underline{f}}^3\underline{h}_i(\underline{x})$$

$$\vdots$$

$$[\underline{f}(\underline{x}), [\underline{f}(\underline{x}), [\underline{f}(\underline{x}), \cdots, [\underline{f}(\underline{x}), \underline{h}_i(\underline{x})] \cdots]] = ad_{\underline{f}}^k\underline{h}_i(\underline{x})$$

trong đó k là một số nguyên nào đó thỏa mãn: Nếu đã có

$$ad_{\underline{f}}^k\underline{h}_i(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x}) \qquad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

thì cũng có

$$ad_{\underline{f}}^{k+1}\underline{h}_i(\underline{x}) \in \Delta(\underline{x}) \qquad \text{với mọi} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

và giá trị k lớn nhất có thể có là $k = n-1$. Từ đây ta suy ra được:

$$\text{span}\left(ad_{\underline{f}}^k\underline{h}_i(\underline{x}) \,\middle|\, i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right) \subseteq \Delta(\underline{x}) \tag{5.16}$$

trong đó ta đã sử dụng quy ước:

$$ad_{\underline{f}}^0\underline{h}_i(\underline{x}) = \underline{h}_i(\underline{x})$$

và như vậy, trong (5.16) có luôn cả (5.15)

Ta đi đến khẳng định:

Định lý 5.6: Hệ phi tuyến affine:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u} \qquad \text{với} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \ \underline{u} \in \mathbb{R}^m$$

sẽ điều khiển được hoàn toàn, nếu có:

$$\dim \text{span}\left(ad_{\underline{f}}^k\underline{h}_i(\underline{x}) \,\middle|\, i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right) = n$$

trong đó $\underline{h}_1(\underline{x}), \underline{h}_2(\underline{x}), \ldots, \underline{h}_m(\underline{x})$ là các vector cột của ma trận $H(\underline{x})$.

Ví dụ 5.4: Minh họa định lý 5.7

Cho hệ tuyến tính với

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \qquad \text{tức là} \quad \underline{f}(\underline{x}) = A\underline{x} \quad \text{và} \quad H(\underline{x}) = B \text{ (ma trận hằng).}$$

Gọi $\underline{b}_i$ là các vector cột của B, hay $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_m)$ ta sẽ có

$$ad_{\underline{b}_i}^k \underline{b}_j = \underline{0} \qquad \text{vì } \underline{b}_i \text{ là các vector hằng}$$

và

$$ad_{\underline{f}} \underline{b}_i = \frac{\partial \underline{b}_i}{\partial \underline{x}} \underline{f} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \underline{b}_i = -\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \underline{b}_i = -A\underline{b}_i$$

$$ad_{\underline{f}}^2 \underline{b}_i = ad_{\underline{f}}(-A\underline{b}_i) = A^2 \underline{b}_i$$

$$\vdots$$

$$ad_{\underline{f}}^{n-1} \underline{b}_i = (-1)^{n-1} A^{n-1} \underline{b}_i$$

Từ đây suy ra

$$\text{span}(ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_i(\underline{x}) \mid i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n-1) =$$

$$= \text{span}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, ad_{\underline{f}} \underline{b}_1, \ldots, ad_{\underline{f}} \underline{b}_m, \ldots, ad_{\underline{f}}^{n-1} \underline{b}_1, \ldots, ad_{\underline{f}}^{n-1} \underline{b}_m)$$

$$= \text{span}(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$$

và kết luận của định lý 5.9 chính là tiêu chuẩn Kalman quen biết trong lý thuyết điều khiển tuyến tính. ❐

Ví dụ 5.5: Minh họa định lý 5.6

Cho hệ xác định trong $\mathbb{R}^2$ (có $n = 2$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -ax_1 + bx_1x_2 \\ -bx_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{với} \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -ax_1 + bx_1x_2 \\ -bx_1x_2 \end{pmatrix}, \ \underline{h}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b \neq 0$$

Ở đây ta có:

$$\text{span}(\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x})) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bx_1 \\ bx_1 \end{pmatrix}\right)$$

vì

$$ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{h}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) - \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -bx_1 \\ bx_1 \end{pmatrix}$$

Do

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -bx_1 \\ 1 & bx_1 \end{pmatrix} = bx_1$$

nên hai vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bx_1 \\ bx_1 \end{pmatrix}$ là độc lập tuyến tính với nhau mọi điểm trạng thái $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ có $x_1 \neq 0$, hay

$$\dim \operatorname{span}(\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})) = 2 \quad \text{khi } x_1 \neq 0$$

Vậy hệ điều khiển được hoàn toàn tại mọi điểm trạng thái $\underline{x}$ có $x_1 \neq 0$. ❐

Ví dụ 5.6: Minh họa định lý 5.6

Cho hệ xác định trong $\mathbb{R}^4$ $(n=4)$:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u \quad \text{với} \quad \underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1x_3 + x_2e^{x_2} \\ x_3 \\ x_4 - x_2x_3 \\ x_3^2 + x_2x_1 - x_2^2x_3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{h}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Từ đây ta có:

$$ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -e^{x_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad ad_{\underline{f}}^2\underline{h}(\underline{x}) = ad_{\underline{f}}^3\underline{h}(\underline{x}) = \underline{0}$$

Vậy

$$\dim \operatorname{span}(\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}^2\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}^3\underline{h}(\underline{x}))$$

$$= \dim \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{x_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 < 4 = n$$

nên hệ là không điều khiển được. ❐

5.2.3 Xác định bậc tương đối

Bậc tương đối của hệ affine SISO

Để dễ tiếp cận tới khái niệm bậc tương đối, ta xét trường hợp đặc biệt với đối tượng tuyến tính được mô tả bằng hàm truyền đạt hợp thức chặt (*strickly proper*):

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} \qquad \text{trong đó} \qquad m < n$$

Khi đó, *bậc tương đối* được hiểu là hiệu $r = n - m \geq 1$.

Giả sử rằng đối tượng, bên cạnh hàm truyền đạt trên, còn có mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases}$$

Vậy thì bậc tương đối r cũng được xác định từ mô hình trạng thái theo (xem [19]):

$$\underline{c}^T A^k \underline{b} = \begin{cases} = 0 & \text{khi} \quad 0 \leq k \leq r-2 \\ \neq 0 & \text{khi} \quad k = r-1 \end{cases} \tag{5.17}$$

Chuyển sang hệ phi tuyến và với sự gợi ý của công thức tính (5.17), khái niệm bậc tương đối của hệ ALI có một tín hiệu vào, một tín hiệu ra, được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 5.2: Cho hệ afffine SISO

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x}) \cdot u \\ y = g(\underline{x}) \end{cases}$$

Bậc tương đối tại điểm trạng thái $\underline{x}$ của hệ là số tự nhiên r mà trong lân cận $\underline{x}$ thỏa mãn:

$$L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{khi} \quad 0 \leq k \leq r-2 \\ \neq 0 & \text{khi} \quad k = r-1 \end{cases} \tag{5.18}$$

Có thể thấy được ngay rằng trong trường hợp hệ tuyến tính, tức là với $\underline{f}(\underline{x}) = A\underline{x}$, $\underline{h}(\underline{x}) = \underline{b}$, $g(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x}$, hai công thức (5.17) và (5.18) sẽ đồng nhất, vì:

$$L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}) = \underline{c}^T A^k \underline{x} \qquad \Rightarrow \qquad L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}) = \underline{c}^T A^k \underline{b}$$

Ví dụ 5.7: Minh họa bậc tương đối

Xét hệ Van der Pol với mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ ax_2(1-bx_1^2)-x_1 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{h}(\underline{x})} u \quad \text{và} \quad y = g(\underline{x}) = x_1$$

Khi đó thì do

$$L_{\underline{h}} g(\underline{x}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{h}(\underline{x}) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \frac{\partial (L_f g)}{\partial \underline{x}} \underline{h}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left(\frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{f}\right) h(\underline{x})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\left[(1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_2 \\ ax_2(1-bx_1^2)-x_1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

nên bậc tương đối của hệ bằng 2 (tại mọi $\underline{x}$). □

Chú ý: Hệ phi tuyến affine có thể có bậc tương đối khác nhau ở những điểm trạng thái khác nhau. Ngoài ra, khác với hệ tuyến tính, không phải ở bất cứ một điểm trạng thái $\underline{x}$ nào trong không gian trạng thái, hệ cũng có bậc tương đối. Chẳng hạn, hệ sẽ không có bậc tương đối tại điểm trạng thái $\underline{x}_0$ mà trong lân cận của nó có

$$L_{\underline{h}} g(\underline{x}) \neq 0, \quad L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) \neq 0, \quad \cdots, \quad L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}) \neq 0, \quad \cdots$$

song lại có

$$L_{\underline{h}} g(\underline{x}_0) = L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}_0) = \cdots = L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}_0) = \cdots = 0$$

Ngoài ra, từ công thức (5.18) tính bậc tương đối của hệ SISO, ta còn có:

Định lý 5.7: Cho hai vector hàm $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{h}(\underline{x})$ và một hàm vô hướng $g(\underline{x})$. Vậy thì hai điều kiện sau sẽ là tương đương:

a) $L_{\underline{h}} g(\underline{x}) = L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \cdots = L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}) = 0$

b) $L_{\underline{h}} g(\underline{x}) = L_{ad_{\underline{f}} \underline{h}} g(\underline{x}) = \cdots = L_{ad_{\underline{f}}^k \underline{h}} g(\underline{x}) = 0$

Chứng minh:

Từ $L_{\underline{h}} g(\underline{x}) = L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = 0$ ta có theo tính chất của phép nhân Lie điều phải chứng minh thứ nhất:

$$L_{ad_{\underline{f}} \underline{h}} g(\underline{x}) = L_{\underline{f}} L_{\underline{h}} g(\underline{x}) - L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = 0$$

Với phương pháp quy nạp ta cũng có các điều còn lại $L_{ad_{\underline{f}}^k \underline{h}} g(\underline{x}) = 0 \ (k > 1)$, vì:

$$L_{ad_{\underline{f}}^k \underline{h}} g(\underline{x}) = L_f L_{ad_{\underline{f}}^{k-1} \underline{h}} g(\underline{x}) - L_{ad_{\underline{f}}^{k-1} \underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) .$$

❐

Ví dụ 5.8: Minh họa bậc tương đối

Xét lại hệ Van der Pol của ví dụ trước nhưng với tín hiệu ra y bây giờ là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ kx_2(1 - x_1^2) - x_1 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{H(\underline{x})} u \qquad \text{và} \qquad y = g(\underline{x}) = \sin x_2$$

Vậy thì do

$$L_{\underline{h}} g(\underline{x}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{h}(\underline{x}) = (0 \quad \cos x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos x_2$$

hệ sẽ không có bậc tương đối tại mọi điểm trạng thái $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mà ở đó có:

$$x_2 = \frac{(2l+1)\pi}{2}$$

❐

Ví dụ 5.8 ([9]): Minh họa bậc tương đối

Cho hệ bậc bốn

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{h}(\underline{x})} u \qquad \text{và} \qquad y = g(\underline{x}) = x_1$$

Hệ này có

$$L_{\underline{h}} g(\underline{x}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{h}(\underline{x}) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2$$

$$L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = \frac{\partial L_f g}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = (2x_1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 2+2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(1+x_3) \neq 0 \quad \text{khi} \quad x_3 \neq -1$$

nên nó sẽ có bậc tương đối $r=2$ tại những điểm trạng thái có $x_3 \neq -1$. ❐

Bậc tương đối tối thiểu của hệ affine MISO

Từ lý thuyết điều khiển tuyến tính (xem [19]) ta đã được biết hệ MISO:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ y = \underline{c}^T\underline{x} \end{cases}$$

có $r_1, r_2, \ldots, r_m$ bậc tương đối cho từng kênh với đầu vào u_i và đầu ra y được tính theo công thức (5.17), mà cụ thể là

$$\underline{c}^T A^k \underline{b}_i = \begin{cases} = 0 & \text{khi} \quad 0 < k \leq r_i - 2 \\ \neq 0 & \text{khi} \quad k = r_i - 1 \end{cases}$$

trong đó $\underline{b}_i$ là vector cột thứ i của ma trận B. Khi đó bậc tương đối tối thiểu r được định nghĩa bởi giá trị nhỏ nhất của $r_1, r_2, \ldots, r_m$:

$$r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}.$$

Như vậy, nó chính là:

$$\underline{c}^T A^k \underline{b}_i = \begin{cases} = 0 & \text{với mọi } 1 \leq i \leq m \text{ và } 0 \leq k \leq r-2 \\ \neq 0 & \text{cho một giá trị } i \text{ và } k = r-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{c}^T A^k B = \begin{cases} = \underline{0}^T & \text{khi} \quad 0 \leq k < r-2 \\ \neq \underline{0}^T & \text{khi} \quad k = r-1 \end{cases}$$

Một cách hoàn toàn tương tự, khái niệm bậc tương đối tối thiểu của đối tượng MISO phi tuyến afffine được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 5.3: Cho đối tượng MISO bậc n có m tín hiệu vào ($n \geq m$)

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x}) \cdot \underline{u} = \underline{f}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \underline{h}_i(\underline{x})u_i \\ y = g(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.19}$$

trong đó

$$\underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \qquad H(\underline{x})=\left(\underline{h}_1(\underline{x}), \underline{h}_2(\underline{x}), \cdots, \underline{h}_m(\underline{x})\right)$$

Bậc tương đối tối thiểu tại điểm trạng thái $\underline{x}$ của đối tượng là số tự nhiên r trong lân cận $\underline{x}$ thỏa mãn:

$$L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{với mọi } 1 \le i \le m \text{ và } 0 \le k \le r-2 \\ \ne 0 & \text{cho một giá trị } i \text{ và } k = r-1 \end{cases} \tag{5.20}$$

Ví dụ 5.8: Minh họa bậc tương đối

Cho đối tượng bậc ba ($n=3$) có hai tín hiệu vào ($m=2$), được mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3^2 \\ x_3 - x_1^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{và} \quad y = x_1$$

Như vậy thì với

$$\underline{h}_1(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{h}_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(\underline{x}) = x_1,$$

ta có

$$L_{\underline{h}_1} g(\underline{x}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{h}_1(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{h}_2} g(\underline{x}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{h}_2(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3^2 \\ x_3 - x_1^3 \end{pmatrix} = x_2$$

$$L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \frac{\partial L_f g}{\partial \underline{x}} \underline{h}_1(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \frac{\partial L_f g}{\partial \underline{x}} \underline{h}_2(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \ne 0$$

Suy ra *bậc tương đối tối thiểu* của đối tượng là $r=2$. ❐

Bậc tương đối tối thiểu r có những tính chất sau:

Định lý 5.8: Nếu r là bậc tương đối tối thiểu của đối tượng MISO có m tín hiệu vào, mô tả bởi (5.19) thì

a) $L_{\underline{h}_i} g(\underline{x}) = L_{ad_{\underline{f}} \underline{h}_i} g(\underline{x}) = \cdots = L_{ad_{\underline{f}}^{r-2} \underline{h}_i} g(\underline{x}) = 0$ với mọi $1 \le i \le m$

b) Tồn tại một chỉ số l để các vector $\underline{h}_l(\underline{x})$, $ad_{\underline{f}} \underline{h}_l(\underline{x})$, ..., $ad_{\underline{f}}^{r-1} \underline{h}_l(\underline{x})$ là độc lập tuyến tính.

c) Các vector hàng $\dfrac{\partial g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$, $\dfrac{\partial L_{\underline{f}} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$, ..., $\dfrac{\partial L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$ là độc lập tuyến tính.

d) $r \le n$

Chứng minh:

Khẳng định a) được suy ra ngay từ định nghĩa 5.3 về bậc tối thiểu và nội dung định lý 5.7. Để chứng minh b) và c) trước hết ta thấy:

$$r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\},$$

trong đó các giá trị r_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ được xác định từ

$$L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{khi } 0 \le k \le r_i - 2 \\ \ne 0 & \text{khi } k = r_i - 1 \end{cases}$$

Chọn chỉ số l thỏa mãn $r = r_l$ sau đó lập ma trận:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \\ \dfrac{\partial L_{\underline{f}} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \end{pmatrix}}_{D_1} \underbrace{\left(ad_{\underline{f}}^{r-1} \underline{h}_l(\underline{x}) \; \ldots \; ad_{\underline{f}} \underline{h}_l(\underline{x}) \; \underline{h}_l(\underline{x}) \right)}_{D_2} = D$$

Khi đó $D = (d_{kl})$ là ma trận vuông thuộc kiểu $r \times r$ có các phần tử:

$$d_{kl} = \frac{\partial L_{\underline{f}}^{l-1} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \, ad_{\underline{f}}^{r-k} \underline{h}_l(\underline{x})$$

Do

$$L_{ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_l} g(\underline{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{khi} \quad 0 < k < r-2 \\ \neq 0 & \text{khi} \quad k = r-1 \end{cases}$$

và

$$\frac{\partial L_{\underline{f}}^{i+1} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \, ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_l(\underline{x}) \;=\; L_{\underline{f}}\left(\frac{\partial L_{\underline{f}}^{i} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_l(\underline{x}) \right) - L_{ad_{\underline{f}}^{k-1} \underline{h}} \left(L_{\underline{f}}^{i} g(\underline{x}) \right)$$

cũng như

$$L_{ad_{\underline{f}}^k \underline{h}} g(\underline{x}) \;=\; L_{\underline{f}}\left(L_{ad_{\underline{f}}^{k-1} \underline{h}} g(\underline{x}) \right) - L_{ad_{\underline{f}}^{k-1} \underline{h}} \left(L_{\underline{f}} g(\underline{x}) \right)$$

tức là

$$\frac{\partial L_{\underline{f}}^{i} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \, ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_l(\underline{x}) \;=\; \begin{cases} = 0 & \text{nếu} \quad k+i \le n-2 \\ \neq 0 & \text{nếu} \quad k+i = n-1 \end{cases}$$

nên D sẽ có dạng tam giác với các phần tử nằm trên đường chéo chính khác 0. Bởi vậy D không suy biến. Suy ra các vector hàng của ma trận D_1 thuộc kiểu $r \times n$ cũng như các vector cột của ma trận D_2 kiểu $n \times r$ là độc lập tuyến tính.

Khẳng định d) là đương nhiên, vì nếu không ta sẽ có được điều vô lý là trong không gian n chiều $\mathbb{R}^n$ chứa các vector cột $ad_{\underline{f}}^{r-1} \underline{h}_l(\underline{x})$, ... , $ad_{\underline{f}} \underline{h}_l(\underline{x})$, $\underline{h}_l(\underline{x})$ của D_2 ta lại có số các vector độc lập tuyến tính là r nhiều hơn số chiều là n. Cũng vô lý tương tự là không gian vector n chiều chứa D_1 sẽ có số chiều nhỏ hơn số các vector độc lập tuyến tính trong nó là các vector hàng $\dfrac{\partial g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \dfrac{\partial L_{\underline{f}} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \ldots, \dfrac{\partial L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$. ❐

Ví dụ 5.9: Minh họa định lý 5.8

Quay lại đối tượng bậc ba ($n=3$) với hai tín hiệu vào ($m=2$), đã được xét ở ví dụ 5.7 Vì có $L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) \neq 0$ nên $l=2$ và $r=r_2=2$. Hiển nhiên có $r=2<n=3$ và

$$L_{\underline{h}_1} g(\underline{x}) = L_{\underline{h}_2} g(\underline{x}) = 0$$

Ngoài ra, rõ ràng hai vector hàng:

$$\frac{\partial g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = (1 \quad 0 \quad 0) \quad \text{và} \quad \frac{\partial L_{\underline{f}} g(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = (0 \quad 1 \quad 0)$$

là độc lập tuyến tính. ❐

Vector bậc tương đối tối thiểu của hệ affine MIMO

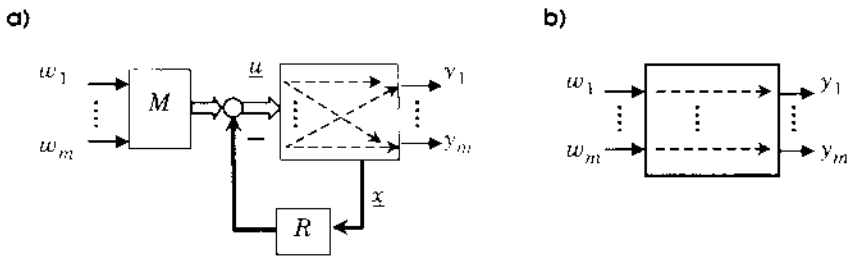
Từ lý thuyết điều khiển tuyến tính (xem [19]), hệ tuyến tính:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \tag{5.21}$$

với số tín hiệu vào bằng số tín hiệu ra và cùng là m, có *vector bậc tương đối tối thiểu* $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$, được xác định theo công thức:

$$\underline{c}_j^T A^k B = \begin{cases} = \underline{0}^T & \text{khi} \quad 0 \le k \le r_j - 2 \\ \ne \underline{0}^T & \text{khi} \quad k = r_j - 1 \end{cases} \tag{5.22}$$

trong đó $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_m$ là các vector hàng của ma trận C.



Hình 5.6: Thiết kế bộ điều khiển tách kênh cho đối tượng tuyến tính.

Ngoài ra, cũng được biết từ lý thuyết điều khiển tuyến tính [19], nếu ma trận:

$$L = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T A^{r_1 - 1} B \\ \vdots \\ \underline{c}_m^T A^{r_m - 1} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^T A^{r_1 - 1} \underline{b}_1 & \cdots & c_1^T A^{r_1 - 1} \underline{b}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m^T A^{r_m - 1} \underline{b}_1 & \cdots & c_m^T A^{r_m - 1} \underline{b}_m \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

không suy biến, thì ta luôn tìm được một bộ điều khiển tiền xử lý M và một bộ điều khiển phản hồi trạng thái R (hình 5.6a) để đưa đối tượng MIMO (5.21) ban đầu về dạng tách thành m kênh riêng biệt (hình 5.6b):

$$\underline{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_m(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(s) \\ \vdots \\ W_m(s) \end{pmatrix}$$

Chuyển các điều kiện (5.22) và (5.23) một cách tương tự sang cho hệ phi tuyến affine, khái niệm *vector bậc tương đối tối thiểu* được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 5.4: Cho hệ affine MIMO với m tín hiệu vào/ra và n biến trạng thái ($n \geq m$):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x}) \cdot \underline{u} = \underline{f}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \underline{h}_i(\underline{x}) u_i \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.24}$$

trong đó

$$H(\underline{x}) = \left(\underline{h}_1(\underline{x}), \underline{h}_2(\underline{x}), \cdots, \underline{h}_m(\underline{x})\right) \quad \text{và} \quad \underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Vector bậc tương đối tối thiểu của hệ là m số tự nhiên $r_1, r_2, \ldots, r_m$ thỏa mãn:

a) $L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^{k} g_j(\underline{x}) = 0$ khi $k \leq r_j - 2$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$. (5.25)

b) Ma trận

$$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m} L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}}^{r_2-1} g_2(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}}^{r_2-1} g_2(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m} L_{\underline{f}}^{r_2-1} g_2(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}}^{r_m-1} g_m(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}}^{r_m-1} g_m(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m} L_{\underline{f}}^{r_m-1} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

là không suy biến.

Ví dụ 5.10: Minh họa vector bậc tương đối tối thiểu

Cho đối tượng bậc ba ($n = 3$) có hai tín hiệu vào/ra ($m = 2$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3 - x_1^3 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{H(\underline{x})} \underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{g}(\underline{x})}$$

Như vậy thì

$$\underline{h}_1(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{h}_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_1(\underline{x}) = x_1, \quad g_2(\underline{x}) = x_2 + x_3.$$

– Khi $j=1$, $i=1$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_1} g_1(\underline{x}) = \dfrac{\partial g_1}{\partial \underline{x}} \underline{h}_1(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0$

$(k=1)$: $L_f g_1(\underline{x}) = \dfrac{\partial g_1}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix}x_2\\-x_1+x_3^2\\-x_1^3\end{pmatrix} = x_2$

$$\Rightarrow \quad L_{h_1} L_f g_1(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

– Khi $j=1$, $i=2$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_2} g_1(\underline{x}) = \dfrac{\partial g_1}{\partial \underline{x}} \underline{h}_2(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = 0$

$(k=1)$: $L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = 3 \neq 0$

– Khi $j=2$, $i=1$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_1} g_2(\underline{x}) = \dfrac{\partial g_2}{\partial \underline{x}} \underline{h}_1(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 3 \neq 0$

– Khi $j=2$, $i=2$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_2} g_2(\underline{x}) = \dfrac{\partial g_2}{\partial \underline{x}} \underline{h}_2(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = 7 \neq 0$

Điều này chứng tỏ rằng $r_1=2$, $r_2=1$. Tiếp theo ta thấy ma trận

$$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{h}_1} g_2(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} g_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

không suy biến. Vậy *vector bậc tương đối tối thiểu* của đối tượng là $(r_1=2,\ r_2=1)$. ❐

Một điều cần phải chú ý thêm là để có được vector bậc tương đối $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ ta phải có đồng thời cả hai điều kiện (5.25) và (5.26).

Ví dụ 5.11: Minh họa vector bậc tương đối tối thiểu

Xét đối tượng đã cho ở ví dụ 5.7, nhưng có vector tín hiệu ra khác là:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3 - x_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Như vậy thì ở đây ta cũng có $r_1=2$, $r_2=1$, vì

$$\underline{f}(\underline{x})=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3-x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{h}_1(\underline{x})=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{h}_2(\underline{x})=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_1(\underline{x})=x_1, \quad g_2(\underline{x})=x_2.$$

– Khi $j=1$, $i=1$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_1}g_1(\underline{x})=(1 \quad 0 \quad 0)\underline{h}_1(\underline{x})=0$

$(k=1)$: $L_{\underline{f}}g_1(\underline{x})=\underline{f}(\underline{x})=(1 \quad 0 \quad 0)\,\underline{f}(\underline{x})=x_2$

$\Rightarrow \quad L_{\underline{h}_1}L_{\underline{f}}g_1(\underline{x})=(0 \quad 1 \quad 0)\underline{h}_1(\underline{x})=1\neq 0$

– Khi $j=1$, $i=2$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_2}g_1(\underline{x})=(1 \quad 0 \quad 0)\underline{h}_2(\underline{x})=0$

$(k=1)$: $L_{\underline{h}_2}L_{\underline{f}}g_1(\underline{x})=(0 \quad 1 \quad 0)\underline{h}_2(\underline{x})=3\neq 0$

– Khi $j=2$, $i=1$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_1}g_2(\underline{x})=(0 \quad 1 \quad 0)\underline{h}_1(\underline{x})=1\neq 0$

– Khi $j=2$, $i=2$ có $(k=0)$: $L_{\underline{h}_2}g_2(\underline{x})=(0 \quad 1 \quad 0)\underline{h}_2(\underline{x})=3\neq 0$

Song do ma trận

$$L(\underline{x})=\begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1}L_{\underline{f}}g_1(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2}L_{\underline{f}}g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{h}_1}g_2(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2}g_2(\underline{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

có định thức bằng 0 nên suy biến. Bởi vậy $(r_1=2,\ r_2=1)$ *không phải là vector bậc tương đối tối thiểu* của đối tượng. ❐

Định lý 5.9: Nếu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ là vector bậc tương đối tối thiểu của hệ (5.24) thì:

a) $L_{\underline{h}_i}g_j(\underline{x})=L_{ad_{\underline{f}}\underline{h}_i}g_j(\underline{x})=\cdots=L_{ad_{\underline{f}}^{r_j-2}\underline{h}_i}g_j(\underline{x})=0$ với mọi $1\le i\le m$, $1\le j\le m$

b) Các vector hàng
$$\frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \frac{\partial L_{\underline{f}}g_1(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \ldots, \frac{\partial L_{\underline{f}}^{r_1-1}g_1(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$$
$$\frac{\partial g_2(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \frac{\partial L_{\underline{f}}g_2(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \ldots, \frac{\partial L_{\underline{f}}^{r_2-1}g_2(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial g_m(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \frac{\partial L_{\underline{f}}g_m(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \ldots, \frac{\partial L_{\underline{f}}^{r_m-1}g_m(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$$

là độc lập tuyến tính.

c) $r = \sum_{k=1}^{m} r_k \le n$

Chứng minh:

Theo định lý 5.7, thì từ điều kiện (5.25) của vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ ta suy ra ngay được khẳng định a).

Điều phải chứng minh c) là hệ quả trực tiếp của b) vì số các vector hàng trong b) đúng bằng $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ và mỗi vector lại có n phần tử thuộc không gian các vector hàng n chiều. Nếu b) đúng, thì c) cũng phải đúng vì số các vector độc lập tuyến tính không thể nhiều hơn số chiều của không gian đó là n. Vậy chỉ còn lại b) là phải chứng minh.

Trước hết ta thấy do

$$L_{\underline{h}_j} L_{\underline{f}}^{r_i - 1} g_i(\underline{x}) = \underbrace{\frac{\partial L_{\underline{f}}^{r_i - 1} g_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}}_{dL_{\underline{f}}^{r_i - 1} g_i(\underline{x})} \underline{h}_j(\underline{x})$$

nên ma trận $L(\underline{x})$ trong định nghĩa 5.4 ở công thức (5.26) còn viết được thành

$$L(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} dL_{\underline{f}}^{r_1 - 1} g_1(\underline{x}) \\ dL_{\underline{f}}^{r_2 - 1} g_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ dL_{\underline{f}}^{r_m - 1} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{P(\underline{x})} \underbrace{(\underline{h}_1(\underline{x}), \underline{h}_2(\underline{x}), \cdots, \underline{h}_m(\underline{x}))}_{H(\underline{x})} \tag{5.27}$$

trong đó $P(\underline{x})$ là ma trận thuộc kiểu $m \times n$, còn $H(\underline{x})$ thuộc kiểu $n \times m$. Vì $L(\underline{x})$ không suy biến nên các vector hàng của $P(\underline{x})$ là

$$d\left(L_{\underline{f}}^{r_1 - 1} g_1(x)\right), d\left(L_{\underline{f}}^{r_2 - 1} g_2(x)\right), \cdots, d\left(L_{\underline{f}}^{r_m - 1} g_m(x)\right) \tag{5.28}$$

phải độc lập tuyến tính.

Ngoài ra, theo định lý 5.8 ta còn có m nhóm, mỗi nhóm, ứng với một chỉ số j cố định, có r_j vector hàng

$$\underbrace{\frac{\partial g_j(\underline{x})}{\partial \underline{x}}}_{dg_j(\underline{x})}, \underbrace{\frac{\partial L_{\underline{f}} g_j(\underline{x})}{\partial \underline{x}}}_{dL_{\underline{f}} g_j(\underline{x})}, \cdots, \underbrace{\frac{\partial L_{\underline{f}}^{r_j - 1} g_j(\underline{x})}{\partial \underline{x}}}_{dL_{\underline{f}}^{r_j - 1} g_j(\underline{x})} \tag{5.29}$$

độc lập tuyến tính.

Kết hợp m nhóm các vector hàng (5.29) độc lập tuyến tính đó lại với nhau ($j=1,2,\ldots,m$) bằng điều kiện (5.28) ta đến được điều phải chứng minh b). ❐

Ví dụ 5.12: Minh họa định lý 5.9

Xét lại đối tượng đã cho ở ví dụ 5.11. Với kết quả thu được ($r_1=2,\ r_2=1$) ta có

$$r = r_1+r_2 = 3 = n$$

Tiếp theo ta cũng thấy $L_{\underline{h}_1}g_1(\underline{x}) = L_{\underline{h}_2}g_1(\underline{x}) = 0$ và các vector hàng

$$dg_1(\underline{x})=(1\quad 0\quad 0),\quad d\left(L_{\underline{f}}g_1(\underline{x})\right)=(0\quad 1\quad 0),\quad dg_2(\underline{x})=(0\quad 1\quad 1)$$

là độc lập tuyến tính. ❐

Từ phần chứng minh định lý 5.9, đặc biệt là quan hệ giữa hai ma trận $L(\underline{x})$ và $H(\underline{x})$ ở công thức (5.27) ta còn rút ra được:

Định lý 5.10 (Hệ quả của định lý 5.9): Cần để đối tượng affine (5.24) có vector bậc tương đối tối thiểu ($r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_m$) là các vector cột $\underline{h}_1(\underline{x}),\ \underline{h}_2(\underline{x}),\ \cdots,\ \underline{h}_m(\underline{x})$ của $H(\underline{x})$ phải độc lập tuyến tính.

5.2.4 Phép đổi trục tọa độ đưa hệ về dạng chuẩn

Xét hệ phi tuyến SISO có mô hình

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})\cdot u \\ y = g(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.30}$$

Gọi r là bậc tương đối của nó tại $\underline{x}$. Như vậy, theo công thức (5.18) ở định nghĩa 5.2 thì

$$L_{\underline{h}}g(\underline{x}) = L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = \cdots = L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^{r-2}g(\underline{x}) = 0 \qquad \text{và} \qquad L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^{r-1}g(\underline{x}) \neq 0$$

Cùng với điều kiện trên, từ mô hình (5.30) của hệ ta có

$$y = g(\underline{x}),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}}\left[\underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u\right] = L_{\underline{f}}g(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}}g(\underline{x})}_{=0}u = L_{\underline{f}}g(\underline{x})$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial L_{\underline{f}} g}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial L_{\underline{f}} g}{\partial \underline{x}} \left[\underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x}) u \right] = L_{\underline{f}}^2 g(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x})}_{=0} u = L_{\underline{f}}^2 g(\underline{x})$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}} = L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{r-2} g(\underline{x})}_{=0} u = L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x})$$

$$\frac{d^r y}{dt^r} = L_{\underline{f}}^r g(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x})}_{\neq 0} u$$

Bởi vậy, nếu chọn phép đổi biến $\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} m_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ m_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$ thỏa mãn:

1) $m_k(\underline{x}) = L_{\underline{f}}^{k-1} g(\underline{x})$ với $k = 1, 2, \ldots, r$

2) $n-r$ hàm còn lại $m_k(\underline{x})$, $k = r+1, \ldots, n$ được chọn sao cho $L_{\underline{h}} m_k(\underline{x}) = 0$.

ta sẽ được:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial m_1}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}} g(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} g(\underline{x})}_{=0} u = L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = m_2(\underline{x}) = z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial m_2}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial L_{\underline{f}} g}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}}^2 g(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x})}_{=0} u = L_{\underline{f}}^2 g(\underline{x}) = m_3(\underline{x}) = z_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{dz_{r-1}}{dt} = \frac{\partial L_{\underline{f}}^{r-2} g}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{r-2} g(\underline{x})}_{=0} u = L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x}) = m_r(\underline{x}) = z_r$$

$$\frac{dz_r}{dt} = L_{\underline{f}}^r g(\underline{x}) + L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x}) u = \underbrace{L_{\underline{f}}^r g(\underline{m}^{-1}(\underline{z}))}_{a(\underline{z})} + \underbrace{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{m}^{-1}(\underline{z}))}_{b(\underline{z})} u = a(\underline{z}) + b(\underline{z}) u$$

$$\frac{dz_{r+1}}{dt} = \frac{\partial m_{r+1}}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}} m_{r+1}(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} m_{r+1}(\underline{x})}_{=0} u = \underbrace{L_{\underline{f}} m_{r+1}(\underline{m}^{-1}(\underline{z}))}_{c_1(\underline{z})} = c_1(\underline{z})$$

$$\vdots$$

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{\partial m_n}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}} m_n(\underline{x}) + \underbrace{L_{\underline{h}} m_n(\underline{x})}_{=0} u = \qquad = c_{n-r}(\underline{z})$$

Suy ra

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\underline{z}} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\right\} \text{dạng tuyến tính} \\ a(\underline{z}) + b(\underline{z})u \\ c_1(\underline{z}) \\ \vdots \\ c_{n-r}(\underline{z}) \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

$$y = g(\underline{x}) = z_1 \tag{5.32}$$

Cuối cùng ta đi đến:

Định lý 5.11: Phép đổi biến vi phôi (*diffeomorphism*)

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}g(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r-1}g(\underline{x}) \\ m_{r+1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ m_n(\underline{x}) \end{pmatrix} \qquad \text{trong đó} \quad L_{\underline{h}}m_k(\underline{x}) = 0 \ , \ k = r+1, \ \dots \ , n$$

sẽ chuyển hệ phi tuyến affine (5.30) với bậc tương đối r về dạng *dạng chuẩn*, mô tả bởi (5.31) và (5.32).

Ví dụ 5.13: Minh họa định lý 5.11

Xét hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{h}(\underline{x})} u \qquad \text{và} \qquad y = g(\underline{x}) = x_3$$

Hệ này có bậc tương đối $r = 2$ vì

$$L_{\underline{h}}g(\underline{x}) = \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = \frac{\partial g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\,\underline{f}(\underline{x}) = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2$$

$$\Rightarrow \qquad L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = \frac{\partial L_f g(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\,\underline{h}(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Như vậy, phép đổi trục tọa độ cần tìm $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ ứng với định lý 5.11 sẽ có hai phần tử đầu tiên là

$$z_1 = m_1(\underline{x}) = g(\underline{x}) = x_3$$

$$z_2 = m_2(\underline{x}) = L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = x_2$$

Ta xác định phần tử thứ ba $m_3(\underline{x})$ từ điều kiện:

$$L_{\underline{h}}m_3(\underline{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial m_3(\underline{x})}{\partial x_1}e^{x_2} + \frac{\partial m_3(\underline{x})}{\partial x_2} = 0$$

Trong vô số các hàm $m_3(\underline{x})$ thỏa mãn điều kiện trên ta chọn một hàm nào đó sao cho kết hợp với $m_1(\underline{x})$ và $m_2(\underline{x})$ sẽ có được phép đổi trục vi phôi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$. Chẳng hạn:

$$m_3(\underline{x}) = 1 + x_1 - e^{x_2}$$

Suy ra

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}}_{\underline{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ 1 + x_1 - e^{x_2} \end{pmatrix}}_{\underline{m}(\underline{x})} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 + e^{z_2} + z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}}_{\underline{m}^{-1}(\underline{z})}$$

Với phép đổi trục trên, hệ đã cho trở thành

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} z_2 \\ a(\underline{z}) + b(\underline{z})u \\ c_1(\underline{z}) \end{pmatrix}$$

với

$$a(\underline{z}) = L_{\underline{f}}^2 g(\underline{m}^{-1}(\underline{z})) = (-1 + z_3 + e^{z_2})z_2$$

$$b(\underline{z}) = L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{m}^{-1}(z)) = 1$$

$$c_1(\underline{z}) = L_{\underline{f}}m_3(\underline{m}^{-1}(\underline{z})) = (1 - z_3 - e^{z_2})(1 + z_2 e^{z_2})$$

□

Chú ý: Không bắt buộc lúc nào ta cũng phải xác định $n-r$ hàm $m_k(\underline{x})$ thỏa mãn $L_{\underline{h}}m_k(\underline{x})=0$, $k=r+1, \ldots, n$ cho phép đổi trục tọa độ $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$. Hơn nữa việc xác định như vậy thường khá phức tạp vì phải giải $n-r$ phương trình đạo hàm riêng

$$L_{\underline{h}}m_k(\underline{x}) = \frac{\partial m_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x})=0, \qquad k=r+1, \ldots, n \tag{5.33}$$

Nếu như $n-r$ hàm $m_k(\underline{x})$, $k=r+1, \ldots, n$ không thỏa mãn (5.33) mà chỉ làm cho $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ là một vi phôi (địa phương) thì sau khi chuyển sang hệ trục tọa độ mới, hệ affine (5.30) ban đầu sẽ có dạng

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ a(\underline{z})+b(\underline{z})u \\ a_1(\underline{z})+b_1(\underline{z})u \\ \vdots \\ a_{n-r}(\underline{z})+b_{n-r}(\underline{z})u \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

$$y = g(\underline{x}) = z_1 \tag{5.35}$$

Khác với (5.31) và (5.32), dạng mô hình (5.34), (5.35) trên *không được gọi là dạng chuẩn*, vì tín hiệu điều khiển u xuất hiện trong nhiều phương trình vi phân (ở dạng chuẩn, tín hiệu u chỉ được phép xuất hiện trong một phương trình vi phân duy nhất).

Ví dụ 5.14: Phép đổi biến không chuẩn

Xét lại hệ đã cho ở ví dụ 5.8. Hệ có bậc tương đối $r=2$ tại những điểm trạng thái có $x_3 \neq -1$ nên phép đổi trục tọa độ vi phôi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ trong lân cận các điểm đó sẽ có hai phần tử đầu tiên là

$$z_1=m_1(\underline{x})=g(\underline{x})=x_4$$

$$z_2=m_2(\underline{x})= L_f g(\underline{x})= x_1^2 + x_2$$

Để xác định hai phần tử tiếp theo $m_3(\underline{x})$ và $m_4(\underline{x})$ ta có thể bắt đầu từ phương trình vi phân đạo hàm riêng (5.33). Tuy nhiên, ta cũng có thể sử dụng

$$z_3=m_3(\underline{x})=x_3$$

$$z_4=m_4(\underline{x})=x_1$$

vì khi đó

$$\underline{z}=\underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1^2 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

có $M(\underline{x})$ không suy biến với mọi $\underline{x}$, hay $\underline{m}(\underline{x})$ cũng đã là một phép biến đổi vi phôi.

Với phép biến đổi trên ta sẽ có

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_4 + 2z_4[z_4(z_2 - z_4^2) - z_4^3] + 2(1+z_3)u \\ -z_3 + u \\ -2z_4^3 + z_2 z_4 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Cuối cùng còn một điều cần làm rõ trước khi kết thúc mục này. Đó là điều kiện để phép biến đổi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ là khả nghịch, tức là để ma trận:

$$M(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{m}}{\partial \underline{x}} \quad \text{không suy biến.} \tag{5.36}$$

Một cách trực quan, để có (5.36) thì không thể chỉ dựa vào việc chọn một mình $n-r$ phần tử cuối $m_k(\underline{x})$, $k=r+1, \ldots, n$ của $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$. Chẳng hạn nếu như r phần tử đầu tiên $m_i(\underline{x})$, $i=1,2, \ldots, r$ của $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ có các vector hàng $\frac{\partial m_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$, $i=1,2, \ldots, r$ phụ thuộc tuyến tính thì sẽ không có (5.36) với mọi $n-r$ hàm $m_k(\underline{x})$, $k=r+1, \ldots, n$. Song, theo [9], [18] thì khi $m_i(\underline{x})$, $i=1,2, \ldots, r$ được xác định từ

$$m_i(\underline{x}) = L_{\underline{f}}^{i-1} g(\underline{x})$$

ta luôn có:

$$\frac{\partial m_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}, \; i=1,2, \ldots, r \qquad \text{độc lập tuyến tính}$$

Bởi vậy vấn đề còn lại chỉ là xác định $n-r$ phần tử cuối $m_k(\underline{x})$, $k=r+1, \ldots, n$ của $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ như ta đã làm ở trên.

5.2.5 Phân tích tính động học không và khái niệm hệ pha cực tiểu

Tính động học không của hệ tuyến tính

Khái niệm động học không (zero dynamic) của hệ tuyến tính SISO có mối liên quan tới điểm không của hàm truyền đạt hệ thống.

Xét hệ hợp thức chặt với tín hiệu vào $u(t)$, tín hiệu ra $y(t)$ có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k\,\frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1}s^{m-1} + s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \qquad (m<n) \tag{5.37}$$

Rõ ràng nếu $m>0$ thì $G(s)$ sẽ có điểm không. Nói cách khác, hệ sẽ có điểm không nếu có bậc tương đối $r=n-m$ thỏa mãn $r<n$.

Gọi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u \\ y = \underline{c}^T\underline{x} \end{cases} \tag{5.38}$$

là mô hình trạng thái của hệ trên (có bậc tối thiểu). Vậy thì giữa hai mô hình (5.37) và (5.38) mô tả cùng một hệ thống có quan hệ:

$$G(s) = \underline{c}^T(sI-A)^{-1}\underline{b} \tag{5.39}$$

$$\Rightarrow \qquad \det(sI-A) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

Có thể thấy được rằng tương ứng với một hàm truyền đạt (5.37) tồn tại vô số mô hình trạng thái dạng (5.38). Chẳng hạn như mô hình chuẩn điều khiển:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}^T = (b_0\ ,\ b_1\ ,\ \cdots\ ,\ b_{m-1}\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ \cdots\ ,0)$$

Tất nhiên rằng tính chất động học của hệ không thay đổi nếu ta biến đổi mô hình trạng thái của nó bằng những phép biến đổi tương đương như phép đổi trục tọa độ không suy biến (có phép biến đổi ngược) như sau:

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \underline{c}^T\underline{x} \\ \underline{c}^T A\underline{x} \\ \vdots \\ \underline{c}^T A^{r-1}\underline{x} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi này đưa mô hình (5.38) thành dạng tương đương:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz_1}{dt} = z_2 \\
\dfrac{dz_2}{dt} = z_3 \\
\vdots \\
\dfrac{dz_{r-1}}{dt} = z_r \\
\dfrac{dz_r}{dt} = \underline{r}^T \underline{\xi} + \underline{s}^T \underline{\eta} + k u \\
\dfrac{d\underline{\eta}}{dt} = P \underline{\xi} + Q \underline{\eta}
\end{cases}
\tag{5.40}
$$

$$y(t) = z_1(t)$$

trong đó

$$
\underline{\xi} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}, \qquad \underline{\eta} = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{m-1} \end{pmatrix}
$$

và vector hàng $\underline{r}^T$, $\underline{s}^T$, cũng như ma trận P được suy ra từ A, $\underline{b}$, $\underline{c}^T$, $\underline{m}(\underline{x})$ giống như Q, nhưng ở đây không được ta tính cụ thể vì chúng không có vai trò gì trong việc xét tính động học không.

Giữa (5.40) và hàm truyền đạt (5.37) cũng có quan hệ (5.39), tức là nếu viết lại (5.40) thành:

$$
\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \end{pmatrix}}_{\underline{z}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \Theta \\ \hline \underline{r}^T & \underline{s}^T \\ P & Q \end{array}\right)}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{b}}} u
$$

$$
y = z_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{c}}^T} \begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \end{pmatrix}
$$

thì cũng có

$$G(s) = \qquad (sI - \tilde{A})^{-1}$$

Định nghĩa 5.5: Nếu hệ (5.40) có ít nhất một điểm trạng thái đầu $\underline{z}_0 = \begin{pmatrix} \underline{\xi}_0 \\ \underline{\eta}_0 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ và ứng với nó là tín hiệu điều khiển $u_0(t)$ sao cho tín hiệu đầu ra $y(t)$ đồng nhất bằng 0 thì hệ được gọi là *có tính động học không* (zero dynamic).

Giả sử rằng hệ (5.40) có tính động học không. Vậy thì phải có

$$y = z_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\xi}(t) = \underline{\xi}_0 = \underline{0}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{\eta}}{dt} = Q\,\underline{\eta}, \quad \underline{\eta}_0 \text{ tuỳ ý} & (5.41) \\ u_0(t) = -\dfrac{1}{k}\underline{s}^T\,\underline{\eta}(t) & (5.42) \end{cases}$$

Nói cách khác, khi đang ở trạng thái đầu $\underline{z}_0 = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{\eta}_0 \end{pmatrix}$, $\underline{\eta}_0$ tuỳ ý, và được kích thích bằng tín hiệu $u_0(t)$ tính theo (5.42), trong đó $\underline{\eta}(t)$ là nghiệm của (5.41), thì tín hiệu đầu ra của hệ (5.40) sẽ đồng nhất bằng không, mặc dù trạng thái của nó lại khác không, thậm chí còn tiến tới vô cùng nếu ma trận Q có ít nhất một giá trị riêng nằm bên phải trục ảo. Khi ở chế độ động học không, dạng của quỹ đạo trạng thái $\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{\eta}(t) \end{pmatrix}$ của hệ được quyết định bởi giá trị riêng của ma trận Q và ta thấy đó chính là điểm không của hàm truyền đạt (5.37), vì

$$\det(sI - Q) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + s^m$$

Tiếp tục, ta xét hệ (5.40) có ma trận Q với ít nhất một giá trị riêng nằm bên phải trục ảo. Khi đó quỹ đạo trạng thái $\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{\eta}(t) \end{pmatrix}$ của nó ở chế độ động học không sẽ tiến tới vô cùng. Bởi vậy theo tiêu chuẩn Lyapunov ngược, phải tồn tại một hàm xác định dương $V(\underline{z})$ để $\underline{z}(t)$ luôn cắt các đường đồng mức của $V(\underline{z})$ theo hướng từ trong ra ngoài (xem lại chương 3), hay

$$\frac{dV(\underline{z})}{dt} > 0 = u_0 y.$$

Suy ra, hệ (5.40) có ma trận Q với ít nhất một giá trị riêng nằm bên phải trục ảo *không thể là một hệ thụ động*. Điều này là hoàn toàn phù hợp với kết luận cho rằng hệ thụ động phải có hàm truyền đạt $G(s)$ là hàm thực–dương (chương 2).

Chú ý rằng kết luận trên chỉ được phát biểu cho một chiều, vì một hệ hợp thức chặt, không có điểm không nào nằm bên phải trục ảo, chưa chắc đã là hệ thụ động. *Hàm truyền đạt của hệ thụ động hợp thức chặt phải có bậc tương đối bằng một và không có điểm cực cũng như điểm không nằm bên phải trục ảo.*

Kết luận trên cũng cho thấy một hệ ổn định, có tính động học không, vẫn có thể có quỹ đạo trạng thái tiến tới vô cùng (dưới kích thích của một tín hiệu vào $u_0(t)$ thích hợp). Đây cũng là một hiện tượng khó chịu của hệ tuyến tính có tính động học không. Bởi vậy trong điều khiển, người ta thường hay giả thiết hệ có quỹ đạo trạng thái bị chặn hoặc tiệm cận về gốc tọa độ $\underline{0}$ ngay cả khi ở chế độ động học không.

Một hệ SISO tuyến tính, nếu có quỹ đạo trạng thái tiến về gốc tọa độ ở chế độ động học không thì mọi điểm cực cũng như điểm không của nó đều phải nằm bên trái trục ảo. Như vậy nó sẽ là một hệ pha cực tiểu (*minimum phase*).

Tổng kết chung lại, ta đi đến:

Định lý 5.12: Xét hệ tuyến tính SISO với hàm truyền đạt (5.37).

a) Nếu hệ có bậc tương đối r nhỏ hơn bậc của hệ là n thì hệ sẽ có tính động học không.

b) Nếu ma trận Q của mô hình tương đương (5.40) của nó có ít nhất một giá trị riêng nằm bên phải trục ảo, thì hệ không phải là một hệ thụ động. Quỹ đạo trạng thái $\underline{z}(t)=\begin{pmatrix}\underline{0}\\ \underline{\eta}(t)\end{pmatrix}$ của nó ở chế độ động học không sẽ tiến tới vô cùng.

c) Nếu hệ là pha cực tiểu thì quỹ đạo trạng thái $\underline{z}(t)$ của nó ở chế độ động học không sẽ tiệm cận về gốc tọa độ $\underline{0}$.

Động học không hệ phi tuyến

Xét hệ phi tuyến SISO có mô hình trạng thái

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x})+\underline{h}(\underline{x})u\\ y=g(\underline{x})\end{cases} \tag{5.43}$$

Tính động học không (zero dynamic) của hệ (5.43) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 5.6: Nếu hệ (5.43) có ít nhất một điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0\neq\underline{0}$ và ứng với nó là tín hiệu điều khiển $u_0(t)$ sao cho tín hiệu đầu ra $y(t)$ đồng nhất bằng 0 thì hệ được gọi là *có tính động học không* (zero dynamic).

Ta có thể thấy được là để hệ có tính động học không thì cần thiết phải có $g(\underline{x}_0)=0$. Giả sử rằng hệ (5.43) có bậc tương đối là r, tức là

$$L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{k} g(\underline{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{nếu} \quad 0 \le k \le r-2 \\ \neq 0 & \text{nếu} \quad k = r-1 \end{cases}$$

Khi đó, với phép đổi trục tọa độ vi phôi (định lý 5.11)

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r-2} g(\underline{x}) \\ L_f^{r-1} g(\underline{x}) \\ m_{r+1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ m_n(\underline{x}) \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad L_{\underline{h}} m_k(\underline{x}) = 0, \quad k = r+1, \ldots, n \tag{5.44}$$

hệ (5.43) đã cho sẽ được đưa về dạng chuẩn

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ a(\underline{z}) + b(\underline{z})u \\ c_1(\underline{z}) \\ \vdots \\ c_{n-r}(\underline{z}) \end{pmatrix}, \quad y = z_1 \tag{5.45}$$

trong đó

$$a(\underline{z}) = L_{\underline{f}}^{r} g(\underline{m}^{-1}(\underline{z})), \quad b(\underline{z}) = L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{m}^{-1}(\underline{z})), \quad c_i(\underline{z}) = L_{\underline{f}} m_{r+i}(m^{-1}(\underline{z}))$$

Sử dụng ký hiệu

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad \underline{\xi} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}, \quad \underline{\eta} = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{c}(\underline{z}) = \begin{pmatrix} c_1(\underline{z}) \\ \vdots \\ c_{n-r}(\underline{z}) \end{pmatrix}$$

thì mô hình (5.45) được viết lại thành

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ \underline{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ a(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + b(\underline{\xi}, \underline{\eta})u \\ \underline{c}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \end{pmatrix}, \quad y = z_1 \tag{5.46}$$

Giả sử rằng hệ (5.43) có tính động học không ứng với trạng thái đầu $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ và tín hiệu điều khiển $u_0(t)$ thích hợp. Vậy thì từ $y(t) = z_1(t) = 0$ ta suy ra được

$$z_1(t) = \cdots = z_r(t) = 0$$

và do đó là $\underline{\xi} = 0$. Điều này dẫn đến:

$$a(\underline{0},\underline{\eta}) + b(\underline{0},\underline{\eta})\, u_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_0(t) = -\frac{a(\underline{0},\underline{\eta})}{b(\underline{0},\underline{\eta})} \tag{5.47}$$

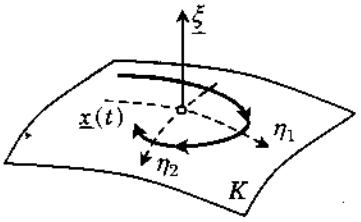
$$\frac{d\underline{\eta}}{dt} = \underline{c}(0, \underline{\eta}) \tag{5.48}$$

Đó cũng là hai phương trình phân tích tính động học không của hệ (5.43) thông qua mô hình chuẩn tương đương (5.46) của nó. Từ $\underline{\xi}(t) = 0$ cũng như phép đổi trục tọa độ (5.44) và hai phương trình (5.47), (5.48) ta thấy, ở chế độ động học không, quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ phải thỏa mãn:

$$g(\underline{x}) = L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \cdots = L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x}) = 0$$

Nói cách khác $\underline{x}(t)$ của động học không sẽ chỉ nằm trong đa tạp (hình 5.7)

$$K = \{\, \underline{x} \in \mathbf{R}^n \mid g(\underline{x}) = L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = \cdots = L_{\underline{f}}^{r-1} g(\underline{x}) = 0 \,\}$$



Hình 5.7: Quỹ đạo trạng thái của hệ phi tuyến, khi đang ở chế độ động học không, luôn nằm trong đa tạp K.

Tuy rằng nằm trong đa tạp K, song việc quỹ đạo $\underline{x}(t)$ ở chế độ động học không (ứng với tín hiệu điều khiển $u_0(t)$ thích hợp) có tiến về gốc tọa độ $\underline{0}$ hay không thì chưa được đảm bảo và điều này cũng không được quyết định bởi hệ phi tuyến (5.43) có ổn định hay không. Nó chỉ có thể tiến về $\underline{0}$ nếu như hệ (5.48) là ổn định tiệm cận Lyapunov, tức là phải tồn tại một hàm xác định dương $Q(\underline{\eta})$ sao cho:

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{\eta}}\, \underline{c}(0, \underline{\eta}) < 0 \qquad \text{khi} \qquad \underline{\eta} \neq \underline{0}.$$

Định nghĩa 5.6: Hệ (5.43) được gọi là pha cực tiểu (*minimum phase*) nếu nó có tính động học không và quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ của nó ở chế độ động học không tiệm cận về gốc tọa độ.

Ví dụ 5.15: Tính động học không của hệ phi tuyến affine

Cho hệ có mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{và} \quad y = x_1$$

Hệ này có

$$L_{\underline{h}} g(\underline{x}) = 0, \qquad L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = x_3 - x_2, \qquad L_{\underline{h}} L_{\underline{f}} g(\underline{x}) = 2$$

nên bậc tương đối của nó bằng 2. Sử dụng phép đổi trục tọa độ:

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ L_f g(\underline{x}) \\ m_3(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \quad \text{có } m_3(\underline{x}) \text{ thỏa mãn } L_{\underline{h}} m_3(\underline{x}) = 0$$

ta được

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} z_2 \\ a(\underline{z}) + b(\underline{z})u \\ z_1^2 - z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1^2 - z_2 + 2u \\ z_1^2 - z_3 \end{pmatrix}$$

Suy ra, động học không của hệ sẽ xuất hiện nếu hệ đang ở trạng thái đầu:

$$\underline{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{30} \end{pmatrix}, \quad z_{30} \text{ tùy ý}$$

thì bị kích thích bằng tín hiệu $u_0(t) = 0$. Quỹ đạo trạng thái ở chế độ động học không được mô tả bởi:

$$\frac{dz_3}{dt} = -z_3 \quad \Leftrightarrow \quad z_3(t) = z_{30} e^{-t}.$$

Theo định nghĩa 5.6 thì hệ đang xét là pha cực tiểu vì có $\lim_{t \to \infty} z_3(t) = 0$.

Muốn quay lại hệ trục tọa độ cũ, ta sử dụng phép biến đổi ngược:

$$\underline{x} = \underline{m}^{-1}(\underline{z}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2z_1 \\ z_3 - z_2 \\ z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

rồi đi đến:

$$\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix}, \ \omega \text{ tùy ý} \quad \text{và} \quad \underline{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega e^{-t} \\ \omega e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Quỹ đạo trạng thái này nằm trọn trong đa tạp:

$$K = \{ \ \underline{x} \in \mathbf{R}^3 \mid x_2 = x_3 \ \}.$$ □

Tương tự như ở hệ tuyến tính, ở đây, đối với hệ phi tuyến (5.43) ta cũng có:

Định lý 5.13: Cho hệ phi tuyến SISO mô tả bởi mô hình (5.43).

a) Nếu hệ có bậc tương đối r nhỏ hơn bậc của hệ là n thì hệ sẽ có tính động học không.

b) Nếu hệ con tương đương của nó là (5.48) không ổn định thì nó không phải là hệ thụ động.

Ứng dụng trong nghịch đảo hệ thống

Tổng quát hơn việc phân tích tính động học không là bài toán nghịch đảo hệ thống (*system invertion*). Nó được phát biểu như sau: "*Hãy xác định điểm trạng thái đầu* $\underline{x}_0$ *và tín hiệu đầu vào* $u(t)$, *để tín hiệu đầu ra của hệ thống đúng như hàm* $y(t)$ *mẫu cho trước*". Đây là dạng bài toán khá phổ biến trong lĩnh vực điều khiển tùy động (*servomechanism*) hay điều khiển bám (*tracking*).

Giả sử hệ được mô tả bởi mô hình (5.43) và có bậc tương đối $r<n$. Sử dụng phép đổi biến vi phôi (5.44), hệ sẽ được đưa về dạng chuẩn (5.46). Rõ ràng để có được tín hiệu ra $y(t)$ là một hàm mẫu cho trước thì trạng thái $\underline{\xi}(t)$ và tín hiệu đầu vào $u(t)$ phải thỏa mãn:

$$z_1(t) = y(t), \quad z_2(t) = \frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt}, \quad \cdots \quad , z_r(t) = \frac{dz_{r-1}(t)}{dt} = \frac{d^{r-1}y(t)}{dt^{r-1}}$$

$$\frac{dz_r(t)}{dt} = \frac{d^r y(t)}{dt^r} = a(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + b(\underline{\xi}, \underline{\eta})\, u \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = \frac{y^{(r)}(t) - a(\underline{\xi}(t), \underline{\eta}(t))}{b(\underline{\xi}(t), \underline{\eta}(t))}$$

trong đó $\underline{\eta}(t)$ là nghiệm của:

$$\frac{d\underline{\eta}}{dt} = \underline{c}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \qquad \text{với} \qquad \underline{\eta}(0) \text{ tùy ý}$$

Các công thức trên chỉ rõ, bài toán nghịch đảo hệ thống chỉ có lời giải khi:

$$\underline{\xi}(0)=\begin{pmatrix} z_1(0) \\ \vdots \\ z_r(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(r-1)}(0) \end{pmatrix}.$$

Cuối cùng, tổng kết lại, ta sẽ đi đến:

Định lý 5.14: Nghiệm của bài toán nghịch đảo hệ thống mô tả bởi mô hình (5.43), và khi được chuyển về hệ trục tọa độ mới bằng phép biến đổi vi phôi (5.44) thành dạng chuẩn (5.46), sẽ là:

$$u = \frac{y^{(r)} - \alpha(\underline{\xi},\underline{\eta})}{b(\underline{\xi},\underline{\eta})}$$

trong đó:

a) $y(t)$ là tín hiệu đầu ra mong muốn của hệ (đã cho trước),

b) $\underline{\xi}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \end{pmatrix}$

c) $\underline{\eta}(t)$ là nghiệm của $\dfrac{d\underline{\eta}}{dt}=\underline{c}(\underline{\xi},\underline{\eta})$ với $\underline{\eta}(0)$ tùy ý.

Ví dụ 5.16: Minh họa phương pháp nghịch đảo hệ thống

Xét hệ mô tả bởi:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underline{f}(\underline{x})+\underline{h}(\underline{x})u=\begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}u \qquad \text{và} \qquad y=g(\underline{x})=x_2-x_3$$

Hệ này có

$$L_{\underline{h}}g(\underline{x})=0, \qquad L_{\underline{f}}g(\underline{x})=x_1-x_2, \qquad L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x})=-1$$

nên bậc tương đối của nó là $r=1$.

Sử dụng phép đổi trục tọa độ vi phôi:

$$\underline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\underline{m}(\underline{x})=\begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ L_f g(\underline{x}) \\ m_3(\underline{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2-x_3 \\ x_1-x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{có } m_3(\underline{x}) \text{ thỏa mãn } L_{\underline{h}}m_3(\underline{x})=0$$

với phép biến đổi ngược

$$\underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\underline{m}^{-1}(\underline{z})=\begin{pmatrix} z_3 \\ -z_2+z_3 \\ -z_1-z_2+z_3 \end{pmatrix}$$

thì hệ sẽ được đưa về mô hình chuẩn:

$$\frac{d\underline{z}}{dt}=\begin{pmatrix} z_2 \\ (-z_2+z_3)(-z_1-z_2+z_3)-z_3-u \\ (-z_2+z_3)(-z_1-z_2+z_3) \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad y=z_1$$

Giả sử đầu ra mong muốn của hệ là $y=\cos(t)$. Khi đó, theo định lý 5.14 thì với:

$$z_1=\cos(t), \quad z_2=-\sin(t),$$

tín hiệu đầu vào phải là:

$$u=\cos(t)+[-\sin(t)+z_3][-\cos(t)+\sin(t)+z_3]-z_3$$

trong đó $z_3(t)$ là nghiệm của:

$$\frac{dz_3}{dt}=[-\sin(t)+z_3][-\cos(t)+\sin(t)+z_3] \quad \text{với giá trị đầu } z_{30} \text{ tùy ý.}$$ ❐

5.3 Điều khiển tuyến tính hóa chính xác

Đây là bài toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái hay phản hồi tín hiệu ra cho đối tượng phi tuyến sao cho với nó hệ kín trở thành tuyến tính. Khác với việc tuyến tính hóa xấp xỉ trong lân cận điểm làm việc (chương 4), bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác *đảm bảo tính chất tuyến tính cho hệ thống trong toàn bộ không gian trạng thái*. Ở nhiều bài toán đơn giản, nhiệm vụ tuyến tính hóa này đã được giải quyết ngay từ khâu đổi biến $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$, mà thực chất cũng được xem như là một bộ điều khiển (xem lại ví dụ 1.4 ở chương 1).

Ngoài phương pháp cuốn chiếu cho hệ truyền ngược cũng đưa đến bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác (xem lại mục 3.2.4 của chương 3), trong chương mục này ta sẽ làm quen với một phương pháp tổng quát, xác định phép đổi biến cho một đối tượng phi tuyến affine, cũng như xác định bộ điều khiển phản hồi trạng thái thích hợp cho phép đổi biến đó, nhằm đưa toàn bộ hệ thống trở thành tuyến tính.

5.3.1 Tuyến tính hóa chính xác hệ SISO

Tuyến tính hóa quan hệ vào–ra

Quay lại mục 5.2.4 với định lý 5.11 về phép đổi biến vi phôi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ đưa đối tượng (5.30) có bậc tương đối $r\le n$ về dạng chuẩn (5.31) hoặc không chuẩn (5.34) ta thấy, nếu

như có $r=n$ trong toàn bộ không gian trạng thái, hai dạng đó sẽ đồng nhất. Điều này dẫn ta tới ý tưởng thiết kế bộ điều khiển tạo ra được:

$$w = a(\underline{z}) + b(\underline{z})u$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \frac{-a(\underline{z})+w}{b(\underline{z})} = \underbrace{\frac{-L_f^n g(\underline{x})}{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{n-1} g(\underline{x})}}_{p(\underline{x})} + \underbrace{\frac{1}{L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{n-1} g(\underline{x})}}_{q(\underline{x})} w \tag{5.49}$$

Khi đó, hệ (5.30) trở thành tuyến tính với mô hình chuẩn điều khiển (xem hình 5.8):

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w = A\underline{z} + \underline{b}w \\ y = z_1 = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)\underline{z} = \underline{c}^T \underline{z} \end{cases} \tag{5.50}$$

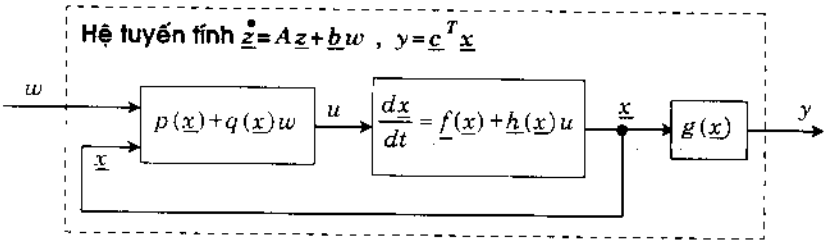
Tóm tắt lại, ta đi đến:

Định lý 5.15: Nếu đối tượng affine

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u \\ y = g(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.51}$$

có bậc tương đối $r=n$, thì bộ điều khiển phản hồi trạng thái (5.49) sẽ tuyến tính hóa chính xác được đối tượng thành (5.50). Giữa biến trạng thái cũ $\underline{x}$ của đối tượng và biến trạng thái mới $\underline{z}$ của hệ kín có quan hệ:

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ L_f g(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} g(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.52}$$



Hình 5.8: Điều khiển tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–ra đối tượng phi tuyến.

Mở rộng, nếu để ý thêm tới định lý 5.7 thì ta còn có điều tương tự như sau:

Định lý 5.16: Nếu đối tượng affine (5.51) thỏa mãn:

$$L_{\underline{h}}g(\underline{x}) = L_{ad_{\underline{f}}\underline{h}}g(\underline{x}) = \cdots = L_{ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h}}g(\underline{x}) = 0 \ , \qquad L_{ad_{\underline{f}}^{n-1}\underline{h}}g(\underline{x}) \neq 0$$

thì bộ điều khiển phản hồi trạng thái (5.49) sẽ tuyến tính hóa chính xác được đối tượng thành (5.50). Giữa biến trạng thái cũ $\underline{x}$ của đối tượng và biến trạng thái mới $\underline{z}$ của hệ kín có quan hệ (5.52).

Ví dụ 5.17: Minh họa phương pháp tuyến tính hóa chính xác

Cho đối tượng phi tuyến bậc hai ($n=2$):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{h}(\underline{x})} u \ . \qquad y = g(\underline{x}) = x_1$$

Vì

$$L_{\underline{h}}g(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} = x_2 \quad \Rightarrow \quad L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$L_{\underline{f}}^2 g(\underline{x}) = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_2 \end{pmatrix} = -\sin x_2$$

nên đối tượng có bậc tương đối $r=2$ trong toàn bộ không gian trạng thái. Vậy, đối tượng sẽ được tuyến tính hóa chính xác bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái

$$u = p(\underline{x}) + q(\underline{x})w$$

với

$$p(\underline{x}) = \frac{-L_{\underline{f}}^2 g(\underline{x})}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x})} = \sin x_2 \ , \qquad q(\underline{x}) = \frac{1}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x})} = 1$$

Cùng với bộ điều khiển tìm được, hệ kín sẽ trở thành tuyến tính với mô hình

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \ , \qquad y = z_1 = (1 \quad 0)\underline{z} \ .$$

Giữa biến trạng thái cũ $\underline{x}$ và biến trạng thái mới $\underline{z}$ có quan hệ:

$$\underline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ L_f g(\underline{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$ □

Ví dụ 5.18: Minh họa phương pháp tuyến tính hóa chính xác

Xét đối tượng SISO bậc ba ($n=3$) có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2^2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})}+\underbrace{\begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{h}(\underline{x})}u \quad \text{và} \quad y=g(\underline{x})=x_3$$

Vì

$$L_{\underline{h}}g(\underline{x})=0$$

$$L_{\underline{f}}g(\underline{x})=x_1-x_2 \quad \Rightarrow \quad L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x})=0$$

$$L_{\underline{f}}^2g(\underline{x})=-x_1-x_2^2 \quad \Rightarrow \quad L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2g(\underline{x})=-e^{x_2}(1+2x_2)\neq 0 \quad \text{nếu} \quad 1+2x_2\neq 0$$

$$L_{\underline{f}}^3g(\underline{x})=-2x_1(x_1+x_2^2)$$

nên trong tập U thuộc không gian trạng thái với $1+2x_2\neq 0$, đối tượng có bậc tương đối $r=3$. Rõ ràng U là tập trù mật trong không gian trạng thái.

Vậy, đối tượng sẽ được tuyến tính hóa chính xác trong U bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái

$$u=p(\underline{x})+q(\underline{x})w$$

với

$$p(\underline{x})=\frac{-L_{\underline{f}}^3g(\underline{x})}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2g(\underline{x})}=\frac{-2x_2(x_1+x_2^2)}{(1+2x_2)e^{x_2}}, \qquad q(\underline{x})=\frac{1}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2g(\underline{x})}=\frac{-1}{(1+2x_2)e^{x_2}}$$

Hệ kín gồm đối tượng và bộ điều khiển trên có mô hình

$$\frac{d\underline{z}}{dt}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{z}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}w, \qquad y=z_1=(1 \quad 0 \quad 0)\underline{z}.$$

Giữa biến trạng thái cũ $\underline{x}$ của đối tượng phi tuyến affine đã cho và biến trạng thái mới $\underline{z}$ của hệ tuyến tính thu được có quan hệ:

$$\underline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(\underline{x}) \\ L_f g(\underline{x}) \\ L_f^2 g(\underline{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \end{pmatrix}.$$ □

Mối liên hệ giữa khả năng tuyến tính hóa chính xác và tính điều khiển được

Định lý 5.15 và 5.16 khẳng định, mọi đối tượng SISO bậc n mô tả bởi (5.51), khi có bậc tương đối $r=n$ đều chuyển được về dạng tuyến tính (5.50) nhờ bộ điều khiển phản hồi trạng thái (5.49) và phép đổi biến vi phôi (5.52). Điều đặc biệt ở đây là dạng tuyến tính (5.50) của hệ kín với

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

là điều khiển được, vì

$$\text{Rank}(b, A\underline{b}, \ \cdots \ , A^{n-1}\underline{b}) = \text{Rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}=n$$

trong khi đó, ở cả hai định lý trên lại không có yêu cầu gì về tính điều khiển được của đối tượng phi tuyến (5.51).

Đối tượng (5.51) không thể là không điều khiển được, vì nếu điều đó xảy ra ta sẽ thu được điều nghịch lý là đã điều khiển tuyến tính hóa chính xác được đối tượng không điều khiển được. Vậy, giữa tính điều khiển được của đối tượng và bậc tương đối $r=n$ của nó phải có một mối liên quan. Đó là:

Định lý 5.17: Nếu đối tượng phi tuyến affine bậc n mô tả bởi (5.51) có bậc tương đối $r=n$ thì nó cũng sẽ điều khiển được. Nói cách khác, từ:

$$L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^k g(\underline{x})=0 \quad \text{khi} \quad k<n-1 \quad \text{và} \quad L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{n-1} g(\underline{x}) \neq 0 \tag{5.53}$$

sẽ suy ra được:

$$\dim \text{span}\{\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}), \ \ldots \ , ad_{\underline{f}}^{n-1}\underline{h}(\underline{x})\}=n \tag{5.54}$$

Chứng minh:

Theo nội dung định lý 5.7, điều kiện (5.53) là tương đương với

$$L_{\underline{h}}g(\underline{x}) = L_{ad_{\underline{f}}\underline{h}}g(\underline{x}) = \cdots = L_{ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h}}g(\underline{x}) = 0 \quad , \qquad L_{ad_{\underline{f}}^{n-1}\underline{h}}g(\underline{x}) \neq 0 \tag{5.55}$$

Theo tính chất của phép tính nhân Lie và bằng phương pháp quy nạp, ta được:

$$L_{ad_{\underline{f}}\underline{h}}g(\underline{x}) = L_{\underline{f}}L_{\underline{h}}g(\underline{x}) - L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \qquad L_{ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}}g(\underline{x}) = L_{\underline{f}}\left(L_{ad_{\underline{f}}^{k-1}\underline{h}}g(\underline{x})\right) - L_{ad_{\underline{f}}^{k-1}\underline{h}}\left(L_{\underline{f}}g(\underline{x})\right)$$

$$\Rightarrow \qquad L_{ad_{\underline{f}}^{k-1}\underline{h}}\left(L_{\underline{f}}g(\underline{x})\right) = \begin{cases} = 0 & \text{nếu} \quad k \le n-2 \\ \neq 0 & \text{nếu} \quad k = n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad L_{ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}}\left(L_{\underline{f}}^{i}g(\underline{x})\right) = \begin{cases} = 0 & \text{nếu} \quad k+i \le n-2 \\ \neq 0 & \text{nếu} \quad k+i = n-1 \end{cases}$$

cũng như

$$L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}g(\underline{x}) = L_{\underline{f}}L_{\underline{h}}g(\underline{x}) - L_{ad_{\underline{f}}\underline{h}}g(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial\left(L_{f}g(\underline{x})\right)}{\partial\underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = L_{\underline{f}}\left(\frac{\partial g(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\underline{h}(\underline{x})\right) - L_{ad_{\underline{f}}\underline{h}}g(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \qquad <\text{grad}(\, L_{\underline{f}}g\,, \underline{h}> \; = L_{\underline{f}} <\text{grad}(g), \underline{h}> - L_{ad_{\underline{f}}\underline{h}}g$$

$$\Rightarrow \qquad <\text{grad}(\, L_{\underline{f}}^{i+1}g\,), \, ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h} > \; = \; L_{\underline{f}} <\text{grad}(\, L_{\underline{f}}^{i}g\,), \, ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h} > - L_{ad_{\underline{f}}^{k+1}\underline{h}}\left(L_{\underline{f}}^{i}g\right)$$

trong đó ký hiệu $<\underline{a},\underline{b}>$ chỉ tích vô hướng của hai vector $\underline{a}$ và $\underline{b}$. Bởi vậy, từ (5.55) với một dạng khác biểu diễn theo tích vô hướng

$$<\text{grad}(g), \underline{h}> \; = <\text{grad}(g), \, ad_{\underline{f}}\underline{h} > \; = \cdots = <\text{grad}(g), \, ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h} > = 0$$

và $\qquad <\text{grad}(g), \, ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h} > \; \neq 0$

sẽ có:

$$<\text{grad}(\, L_{\underline{f}}^{i}g\,), \, ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h} > \; = \begin{cases} = 0 & \text{nếu} \quad k+i \le n-2 \\ \neq 0 & \text{nếu} \quad k+i = n-1 \end{cases}$$

Gọi $D=(d_{ki})$ là ma trận thuộc kiểu $n \times n$ có

$$d_{ki} = <\text{grad}(\, L_{\underline{f}}^{i-1}g\,), \, ad_{\underline{f}}^{n-k}\underline{h} >$$

thì D sẽ là ma trận tam giác có các phần tử nằm trên đường chéo chính khác 0, tức là D không suy biến và $\text{Rank}D=n$. Nhưng do ma trận D còn viết được thành:

$$D = \begin{pmatrix} \text{grad}^T g \\ \text{grad}^T L_{\underline{f}} g \\ \vdots \\ \text{grad}^T L_{\underline{f}}^{n-1} g \end{pmatrix} (ad_{\underline{f}}^{n-1} \underline{h} \ , \ \dots \ , ad_{\underline{f}} \underline{h} \ , \ \underline{h})$$

nên $(ad_{\underline{f}}^{n-1} \underline{h}(\underline{x}) \ , \ \dots \ , ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x}) \ , \ \underline{h}(\underline{x}))$ cũng phải là ma trận không suy biến và đó chính là điều kiện (5.54) phải chứng minh. ❐

Ví dụ 5.19: Minh họa định lý 5.17

Xét đối tượng SISO tuyến tính:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u \\ y = \underline{c}^T \underline{x} \end{cases}$$

Nếu đối tượng có bậc tương đối là r thì từ điều kiện:

$$\underline{c}^T A^k \underline{b} = \begin{cases} = 0 & \text{khi} \quad 0 \le k \le r-2 \\ \ne 0 & \text{khi} \quad k = r-1 \end{cases}$$

ta suy ra được:

$$\begin{pmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \\ \vdots \\ \underline{c}^T A^{r-1} \end{pmatrix} (A^{r-1}\underline{b} \ , \ A^{r-2}\underline{b} \ , \ \dots \ , \ \underline{b}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{c}^T A^{r-1}\underline{b} & 0 & \cdots & 0 \\ \underline{c}^T A^{r}\underline{b} & \underline{c}^T A^{r-1}\underline{b} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{c}^T A^{2r-2}\underline{b} & \underline{c}^T A^{2r-3}\underline{b} & \cdots & \underline{c}^T A^{r-1}\underline{b} \end{pmatrix}}_{D}$$

ta thấy, rõ ràng D là một ma trận tam giác không suy biến. ❐

Tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–trạng thái

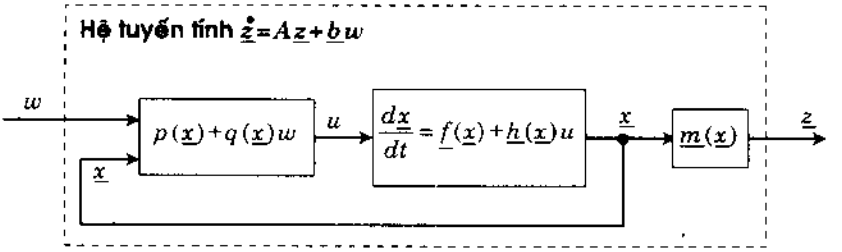
Ở những bài toán tuyến tính hóa quan hệ vào–ra mà hệ phi tuyến affine đã cho ban đầu (5.51) không có được bậc tương đối r thỏa mãn điều kiện $r=n$ người ta thường nghĩ tới việc thay tín hiệu ra $y=g(\underline{x})$ của hệ bằng một tín hiệu ra ảo khác $\tilde{y}=\lambda(\underline{x})$ để với nó, hệ có tín hiệu ra thay thế $\tilde{y}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u \\ \tilde{y} = \lambda(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.56}$$

có được bậc tương đối $r=n$, tức là

$$L_{\underline{h}} L_{\underline{f}}^{k} \lambda(\underline{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{khi} \quad 0 \le k \le n-2 \\ \neq 0 & \text{khi} \quad k = n-1 \end{cases} \tag{5.57}$$

Nếu làm được như vậy, ta lại hoàn toàn tuyến tính hóa chính xác được nó, nhưng tất nhiên là chỉ riêng phần quan hệ vào–trạng thái (hình 5.9).



Hình 5.9: Điều khiển tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–trạng thái đối tượng phi tuyến.

Định lý 5.18: Cho đối tượng affine:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u \tag{5.58}$$

Cần và đủ để tồn tại hàm $\lambda(\underline{x})$ thỏa mãn (5.57) là:

a) Đối tượng điều khiển được, tức là:

$$\dim \operatorname{span}\{\underline{h}(\underline{x}),\ ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}),\ \ldots,\ ad_{\underline{f}}^{n-1}\underline{h}(\underline{x})\} = n$$

b) Hàm mở rộng sau phải xoắn:

$$\Delta(\underline{x}) = \operatorname{span}\{\underline{h}(\underline{x}),\ ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}),\ \ldots,\ ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h}(\underline{x})\}$$

Khi đó hàm vô hướng $\lambda(\underline{x})$ là nghiệm của:

$$\frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\left(\underline{h}(\underline{x}),\ ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}),\ \ldots,\ ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h}(\underline{x})\right) = \underline{0}^{T} \tag{5.59}$$

đồng thời hệ (5.58) sẽ tuyến tính tính hóa chính xác thành

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z}+\underline{b}w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\underline{z}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}w \tag{5.60}$$

nhờ bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$u = p(\underline{x})+q(\underline{x})w = \frac{-L_{\underline{f}}^{n}\lambda(\underline{x})}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^{n-1}\lambda(\underline{x})}+\frac{1}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^{n-1}\lambda(\underline{x})}w \tag{5.61}$$

và phép đổi biến vi phôi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$:

$$\underline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}=\underline{m}(\underline{x})=\begin{pmatrix} \lambda(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}\lambda(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{n-1}\lambda(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

Chứng minh:

Trước hết ta thấy khi đối tượng (5.58) đã tuyến tính hóa chính xác được bởi bộ điều khiển (5.61) và phép đổi biến vi phôi (5.62) thì theo nội dung định lý 5.15, hàm vô hướng $\lambda(\underline{x})$ phải thỏa mãn (5.57). Do đó cùng với tín hiệu đầu ra hình thức $\tilde{y}=\lambda(\underline{x})$, đối tượng (5.56) có bậc tương đối $r=n$. Từ đây ta có ngay được a) nhờ vào định lý 5.17.

Tiếp tục, theo định lý 5.7, thì từ (5.57) ta suy ra được:

$$\left(\frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}h(\underline{x}), \frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}), \cdots, \frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h}(\underline{x})\right)=\underline{0}^T$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}(\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h}(\underline{x}))$$

và do phương trình trên có nghiệm $\lambda(\underline{x})$ nên theo Frobenius, hàm mở rộng:

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}\{\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{n-2}\underline{h}(\underline{x})\}$$

phải xoắn và đó là điều kiện b).

Chuyển sang điều kiện đủ. Khi đã có a) thì hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$, sẽ có số chiều $d=n-1$. Vì có b) nên theo tiêu chuẩn Frobenius, hàm mở rộng $\Delta(\underline{x})$ là tích phân được hoàn toàn, tức là tồn tại $n-d=1$ hàm vô hướng $\lambda(\underline{x})$ thỏa mãn

$$\Delta^{\perp}(\underline{x}) = \text{span}\left(\frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\right) \tag{5.63}$$

Nhưng do $\Delta^{\perp}(\underline{x})$ và $\Delta(\underline{x})$ là hai hàm mở rộng trực giao với nhau nên hàm $\lambda(\underline{x})$ trong (5.63) đương nhiên là thỏa mãn điều kiện (5.57) và do đó, theo định lý 5.7, cũng thỏa mãn điều kiện (5.59).

Cuối cùng, khi hệ với tín hiệu ra ảo (5.56) đã có bậc tương đối $r=n$ thì theo định lý 5.15, nó sẽ tuyến tính hóa chính xác được bằng bộ điều khiển (5.61) và phép đổi biến vi phôi (5.62). ❐

Ví dụ 5.20 ([9]): Minh họa định lý 5.18

Xét đối tượng bậc ba ($n=3$) có một tín hiệu vào:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x_2 \\ (1-\ln x_3)x_2 \\ -2x_1x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad \text{với} \quad x_1,\ x_2,\ x_3 > 0$$

Trước hết ta kiểm tra tính điều khiển được của đối tượng. Do có

$$ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\ln x_3 & -\dfrac{x_2}{x_3} \\ -2x_3 & 0 & -2x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{x_2}{x_3} \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\underline{f}}^2\underline{h}(\underline{x}) = \frac{\partial ad_{\underline{f}}\underline{h}}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_2}{x_3} \\ \dfrac{4x_1x_2}{x_3} \\ 2x_2 + 4x_1^2 \end{pmatrix}$$

nên

$$\mathcal{C} = \operatorname{span}\{\underline{h}(\underline{x}),\ ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}),\ ad_{\underline{f}}^2\underline{h}(\underline{x})\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{x_2}{x_3} \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dfrac{x_2}{x_3} \\ \dfrac{4x_1x_2}{x_3} \\ 2x_2 + 4x_1^2 \end{pmatrix}\right\}$$

với

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{x_2}{x_3} \\ 0 & \dfrac{x_2}{x_3} & \dfrac{4x_1x_2}{x_3} \\ 1 & 2x_1 & 2x_2 + 4x_1^2 \end{pmatrix} = \frac{x_2^2}{x_3^2} \neq 0 \quad \text{với mọi} \qquad x_2,\ x_3 \neq 0$$

có số chiều bằng 3, tức là $\dim\mathcal{C}=3$, và do đó đối tượng là điều khiển được.

Tiếp tục, ta kiểm tra tính xoắn của

$$\Delta(\underline{x}) = \text{span}\{\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{x_2}{x_3}\\ 2x_1\end{pmatrix}\right\}$$

Do có

$$[\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})] = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{x_3} & -\dfrac{x_2}{x_3}\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{x_2}{x_3^2}\\ 0\end{pmatrix}$$

và

$$\det\left(\underline{h}(\underline{x}),\ ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}),\ [\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})]\right) = \det\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{x_2}{x_3} & -\dfrac{x_2}{x_3^2}\\ 1 & 2x_1 & 0\end{pmatrix} = 0$$

nên $[\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})]$ là phụ thuộc tuyến tính vào $\underline{h}(\underline{x})$ và $ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})$, hay

$$[\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})] \in \Delta(\underline{x})$$

và như vậy $\Delta(\underline{x})$ là hàm mở rộng xoắn.

Tiếp tục, để tìm $\lambda(\underline{x})$, ta đi từ (5.59) với

$$\frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\left(\underline{h}(\underline{x}),\ ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x})\right) = \frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{x_2}{x_3}\\ 0\end{pmatrix}\right) = \underline{0}^T$$

Do cả hai vector cơ sở trong $\Delta(\underline{x})$ đều có phần tử đầu bằng 0 nên chỉ cần xác định một hàm $\lambda(\underline{x})$ có $\dfrac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}}$ với phần tử thứ nhất khác 0, hai phần tử sau bằng 0 là đủ. Chẳng hạn ta có thể chọn

$$\frac{\partial\lambda(\underline{x})}{\partial\underline{x}} = (1\quad 0\quad 0) \quad\Rightarrow\quad \lambda(\underline{x}) = x_1.$$

Với cách chọn hàm vô hướng $\lambda(\underline{x})$ như vậy ta có:

$$L_{\underline{f}}\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial\lambda}{\partial\underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) = (1\quad 0\quad 0) \qquad\qquad = x_2$$

$$L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial L_{\underline{f}}\lambda}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_2 \\ (1-\ln x_3)x_2 \\ -2x_1x_3 \end{pmatrix} = (1-\ln x_3)x_2$$

$$L_{\underline{f}}^3\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial L_{\underline{f}}^2\lambda}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) = (0 \quad (1-\ln x_3) \quad -\frac{x_2}{x_3})\begin{pmatrix} x_2 \\ (1-\ln x_3)x_2 \\ -2x_1x_3 \end{pmatrix} = (1-\ln x_3)^2x_2 + 2x_1x_2$$

$$L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial L_{\underline{f}}^2\lambda}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = (0 \quad (1-\ln x_3) \quad -\frac{x_2}{x_3})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{x_2}{x_3}$$

$$p(\underline{x}) = \frac{-L_{\underline{f}}^3\lambda(\underline{x})}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x})} = -(1-\ln x_3)^2x_3 + 2x_1x_3$$

$$q(\underline{x}) = \frac{1}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x})} = -\frac{x_3}{x_2}$$

Suy ra, bộ điều khiển phản hồi trạng thái (5.61) là

$$u = p(\underline{x}) + q(\underline{x})w = -(1-\ln x_3)^2x_3 + 2x_1x_3 - \frac{x_3}{x_2}w$$

và phép đổi trục tọa độ vi phôi (5.62) là

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \lambda(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}\lambda(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (1-\ln x_3)x_2 \end{pmatrix}$$ ❐

Ví dụ 5.21: Minh họa định lý 5.18

Xét đối tượng bậc ba:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u = \begin{pmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}u$$

Trước hết ta kiểm tra tính điều khiển được của đối tượng. Do có

$$ad_{\underline{f}}\underline{h}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\underline{h}(\underline{x})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 1+x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1+x_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ -(1+x_1)(1+2x_2) \end{pmatrix}$$

$$ad_{\underline{f}}^2 \underline{h}(\underline{x}) = \frac{\partial ad_{\underline{f}} \underline{h}}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}) - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} (1+x_2)(1+2x_2)(1+x_1) - x_1 x_3 \\ x_3(1+x_2) \\ -x_3(1+x_2)(1+2x_2) - 3x_1(1+x_1) \end{pmatrix}$$

và trong lân cận gốc tọa độ $\underline{x}=\underline{0}$ thì

$$\mathcal{C} = \text{span}\{\underline{h}(\underline{0}), ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{0}), ad_{\underline{f}}^2 \underline{h}(\underline{0})\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

với

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

nên tại đó $\dim \mathcal{C} = 3$, hay đối tượng là điều khiển được trong lân cận gốc tọa độ.

Ta cũng có thể kiểm tra được rằng trong lân cận $\underline{0}$, vector $[\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x})]$ có phần tử đầu tiên bằng 0 giống như $\underline{h}(\underline{x})$ và $ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x})$, tức là

$$[\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x})] = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

bởi vậy

$$[\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x})] \in \Delta(\underline{x}) = \text{span}\{\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x})\}$$

hay $\Delta(\underline{x})$ là một hàm mở rộng xoắn.

Tiếp theo, để tìm $\lambda(\underline{x})$, ta đi từ

$$\frac{\partial \lambda(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \left(\underline{h}(\underline{x}), ad_{\underline{f}} \underline{h}(\underline{x}) \right) = \frac{\partial \lambda(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+x_2 & x_1 \\ -x_3 & -(1+x_1)(1+2x_2) \end{pmatrix} = \underline{0}^T$$

và có được

$$\frac{\partial \lambda(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = (1 \quad 0 \quad 0) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\underline{x}) = x_1.$$

Với hàm $\lambda(\underline{x})$ tìm được thì

$$L_{\underline{f}}\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial\lambda}{\partial\underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) = x_3(1+x_2)$$

$$L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial L_{\underline{f}}\lambda}{\partial\underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) = x_1x_3+x_2(1+x_1)(1+x_2)$$

$$L_{\underline{f}}^3\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial L_{\underline{f}}^2\lambda}{\partial\underline{x}}\underline{f}(\underline{x}) = x_3^2(1+x_2)+x_2x_3(1+x_2)^2+(1+3x_2)(1+x_1)x_1$$

$$L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x}) = \frac{\partial L_{\underline{f}}^2\lambda}{\partial\underline{x}}\underline{h}(\underline{x}) = (1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2)-x_1x_3$$

$$p(\underline{x}) = \frac{-L_{\underline{f}}^3\lambda(\underline{x})}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x})} = \frac{-x_3^2(1+x_2)-x_2x_3(1+x_2)^2-(1+3x_2)(1+x_1)x_1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2)-x_1x_3}$$

$$q(\underline{x}) = \frac{1}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x})} = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2)-x_1x_3}$$

Suy ra, bộ điều khiển phản hồi trạng thái (5.61) là

$$u = p(\underline{x})+q(\underline{x})w = \frac{-x_3^2(1+x_2)-x_2x_3(1+x_2)^2-(1+3x_2)(1+x_1)x_1+w}{(1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2)-x_1x_3}$$

và phép đổi trục tọa độ vi phôi (5.62) là

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \lambda(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}\lambda(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}^2\lambda(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3(1+x_2) \\ x_1x_3+x_2(1+x_1)(1+2x_2) \end{pmatrix}$$ □

Tuyến tính hóa chính xác và gán điểm cực

Nhìn lại mô hình hệ tuyến tính thu được (5.60) ta thấy nó không ổn định vì hệ có điểm cực $s=0$ bội n. Để tạo ra được hệ tuyến tính (5.60) ổn định với những điểm cực:

$$s_1, s_2, \dots, s_n$$

đặt trước, ta dễ dàng thấy là chỉ cần sửa đổi chút ít trong bộ điều khiển (5.61) thành:

$$u = \frac{-L_{\underline{f}}^n\lambda(\underline{x})}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^{n-1}\lambda(\underline{x})} + \frac{1}{L_{\underline{h}}L_{\underline{f}}^{n-1}\lambda(\underline{x})}\Big[w-\sum_{i=0}^{n-1}a_i\underbrace{L_{\underline{f}}^i\lambda(\underline{x})}_{z_{i+1}}\Big] \tag{5.64}$$

trong đó các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ được xác định từ:

$$(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n) = a_0+a_1s+\cdots+a_{n-1}s^{n-1}+s^n \tag{5.65}$$

Khi đó, hệ tuyến tính (5.60) trở thành:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z}+\underline{b}w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}\underline{z}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}w \tag{5.66}$$

Định lý 5.19: Nếu đối tượng affine (5.58) có tín hiệu ra ảo $\tilde{y} = \lambda(\underline{x})$ thỏa mãn (5.59) thì bộ điều khiển phản hồi trạng thái (5.64) với các hệ số a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ được tính từ những điểm cực đặt trước s_1, s_2, ..., s_n theo (5.65), cùng phép đổi biến (5.62), sẽ tuyến tính hóa chính xác nó thành hệ tuyến tính mô tả bởi (5.66).

5.3.2 Tuyến tính hóa chính xác hệ MIMO

Tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–ra

Xét đối tượng phi tuyến affine bậc n với m tín hiệu vào và ra, mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\cdot\underline{u} = \underline{f}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m}\underline{h}_i(\underline{x})u_i \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.67}$$

trong đó $\underline{h}_1(\underline{x})$, $\underline{h}_2(\underline{x})$, ..., $\underline{h}_m(\underline{x})$ là các vector cột của $H(\underline{x})$. Giả sử rằng vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ của nó thỏa mãn:

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$$

Khi đó, phép đổi trục tọa độ

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} m_1^1(\underline{x}) \\ \vdots \\ m_{r_1}^1(\underline{x}) \\ \vdots \\ m_1^m(\underline{x}) \\ \vdots \\ m_{r_m}^m(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_1-1}g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_m(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_m-1}g_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

trong đó $g_1(\underline{x})$, ... $g_m(\underline{x})$ là các phần tử của vector $\underline{g}(\underline{x})$, sẽ có ma trận Jacobi tính theo như sau:

$$\frac{\partial \underline{m}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} dg_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ dL_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ dg_m(\underline{x}) \\ \vdots \\ dL_{\underline{f}}^{r_m-1} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}, \qquad \text{với ký hiệu} \quad dL_{\underline{f}}^{k} g_i(\underline{x}) = \frac{\partial L_{\underline{f}}^{k} g_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$$

không suy biến (định lý 5.9) nên là một phép vi phôi (*diffeomorphism*).

Với phép đổi trục tọa độ vi phôi (5.68) ta được

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial m_1^1}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} g_1(\underline{x})}_{=0} u_i = L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) = z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial m_2^1}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}} g_1(\underline{x})}_{=0} u_i = L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x}) = z_3$$

$$\frac{dz_{r_1-1}}{dt} = \frac{\partial m_{r_1-1}^1}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^{r_1-2} g_1(\underline{x})}_{=0} u_i = L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) = z_{r_1}$$

$$\frac{dz_{r_1}}{dt} = L_{\underline{f}}^{r_1} g_1(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x})}_{\neq 0} u_i \tag{5.69}$$

$$\frac{dz_{r_1+1}}{dt} = \frac{\partial m_1^2}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}} g_2(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} g_2(\underline{x})}_{=0} u_i = L_{\underline{f}} g_2(\underline{x}) = z_{r_1+2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dz_{r_2-1}}{dt} = \frac{\partial m_{r_2-1}^2}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}}^{r_2-1} g_2(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^{r_2-2} g_2(\underline{x})}_{=0} u_i = L_{\underline{f}}^{r_2-1} g_2(\underline{x}) = z_{r_2}$$

$$\frac{dz_{r_2}}{dt} = L_{\underline{f}}^{r_2} g_2(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^{r_2-1} g_2(\underline{x})}_{\neq 0} u_i \tag{5.70}$$

$$\frac{dz_{r_2+1}}{dt} = \frac{\partial m_1^3}{\partial \underline{x}} \frac{d\underline{x}}{dt} = L_{\underline{f}} g_3(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} g_3(\underline{x})}_{=0} u_i = L_{\underline{f}} g_3(\underline{x}) = z_{r_2+2}$$

Bởi vậy, nếu trong các công thức (5.69), (5.70) ta đặt:

$$w_k = L_{\underline{f}}^{r_k} g_k(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^{r_k-1} g_k(\underline{x}) u_i$$

cho toàn bộ các chỉ số $k = 1, 2, \ldots, m$, tức là

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_{\underline{f}}^{r_1} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_m} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{\underline{p}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m} L_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}}^{r_m-1} g_m(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m} L_{\underline{f}}^{r_m-1} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{L(\underline{x})} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}}_{\underline{u}} \tag{5.71}$$

thì toàn bộ các quan hệ trên sẽ được viết gọn lại thành dạng tuyến tính như sau:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & \Theta & \cdots & \Theta \\ \Theta & A_2 & \cdots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \cdots & A_m \end{pmatrix}}_{A} \underline{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{b}_2 & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{b}_m \end{pmatrix}}_{B} \underline{w} \tag{5.72}$$

trong đó Θ là ma trận gồm toàn các phần tử 0 và

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{thuộc kiểu} \quad r_k \times r_k$$

$$\underline{b}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{thuộc kiểu} \quad r_k \times 1$$

Vấn đề còn lại chỉ là tạo ra được vector tín hiệu điều khiển $\underline{u}$ từ vector tín hiệu $\underline{w}$ mà ta đã đặt trong (5.71) cũng như từ vector trạng thái $\underline{x}$ của đối tượng. Điều này rất đơn giản, vì đã có giả thiết rằng ma trận $L(\underline{x})$ không suy biến. Suy ra:

$$\underline{u} = L^{-1}(\underline{x})\left[\underline{w} - \begin{pmatrix} L_{\underline{f}}^{r_1} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_m} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}\right] = \underbrace{-L^{-1}(\underline{x}) \begin{pmatrix} L_{\underline{f}}^{r_1} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_m} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{\underline{a}(\underline{x})} + L^{-1}(\underline{x})\underline{w} \tag{5.73}$$

$$= \underline{a}(\underline{x}) + L^{-1}(\underline{x})\underline{w}$$

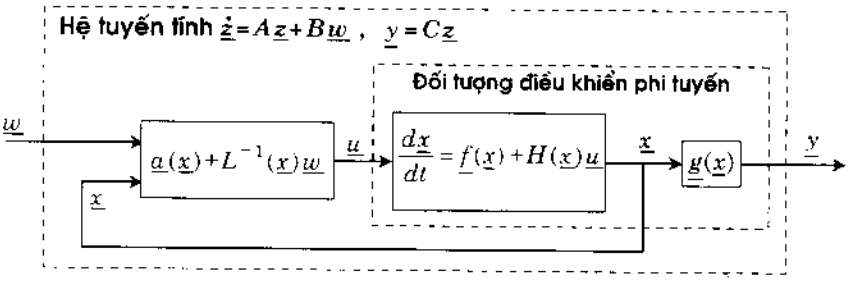
Đây chính là bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác cho đối tượng (5.67).

Giữa vector tín hiệu ra $\underline{y}$ và biến trạng thái mới $\underline{z}$ có quan hệ được suy ra từ phép đổi biến (5.68) như sau:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_m(\underline{x}) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{c}_1^T & \underline{0}^T & \cdots & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{c}_2^T & \cdots & \underline{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \cdots & \underline{c}_m^T \end{pmatrix}}_{C} \underline{z} \tag{5.74}$$

trong đó $\underline{c}_k^T$ là vector hàng với r_k phần tử có dạng:

$$\underline{c}_k^T = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0), \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$



Hình 5.10: Điều khiển tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–ra đối tượng MIMO phi tuyến.

Tổng kết lại, ta đi đến kết luận (hình 5.10):

Định lý 5.20: Nếu đối tượng MIMO phi tuyến mô tả bởi (5.67) có vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ thỏa mãn $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$ thì nó sẽ tuyến tính hóa chính xác được thành hệ tuyến tính (5.72), (5.74) bằng bộ điều khiển phản hồi trạng

thái (5.73). Giữa vector trạng thái cũ là $\underline{x}$ với vector trạng thái mới là $\underline{z}$ có quan hệ $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ xác định theo (5.68).

Ví dụ 5.22: Minh họa định lý 5.20

Xét đối tượng đã cho ở ví dụ 5.10:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3-x_1^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}.$$

Cũng trong ví dụ 5.10 ta đã được biết đối tượng trên có vector bậc tương đối tối thiểu ($r_1=2$, $r_2=1$). Suy ra phép đổi biến vi phôi sẽ là:

$$\underline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\underline{m}(\underline{x})=\begin{pmatrix} g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}g_1(\underline{x}) \\ g_2(\underline{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$$

Với phép đổi trục tọa độ trên, ta được:

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{\partial g_1}{\partial \underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt}=(1\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3-x_1^3 \end{pmatrix}+(1\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underline{u}=x_2$$

$$\frac{dz_2}{dt}=\frac{\partial L_{\underline{f}}g_1}{\partial \underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{(0\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3-x_1^3 \end{pmatrix}}_{L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x})}+(0\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underline{u}=\underbrace{x_3^2+(1\quad 3)}_{w_1}\underline{u}$$

$$\frac{dz_3}{dt}=\frac{\partial g_2}{\partial \underline{x}}\frac{d\underline{x}}{dt}=\underbrace{(0\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3-x_1^3 \end{pmatrix}}_{L_{\underline{f}}g_2(\underline{x})}+(0\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\underline{u}=\underbrace{x_3^2+x_3-x_1^3+(3\quad 7)}_{w_2}\underline{u}$$

Bởi vậy nếu đặt:

$$\underline{w}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} x_3^2 \\ x_3^2+x_3-x_1^3 \end{pmatrix}}_{\underline{p}(\underline{x})}+\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}}_{L(\underline{x})}\underline{u}$$

ta sẽ có bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$\underline{u} = -\underbrace{\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{-1}(\underline{x})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_3^2 \\ x_3^2 + x_3 - x_1^3 \end{pmatrix}}_{\underline{p}(\underline{x})} + \underbrace{\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{-1}(\underline{x})} \underline{w}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_3^2 - 1{,}5x_3 + 1{,}5x_1^3 \\ -x_3^2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_1^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}5 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \underline{w}$$

Với bộ điều khiển trên, đối tượng cho ban đầu trở thành tuyến tính và có mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underline{z} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \underline{w}$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underline{z}$$

□

Ví dụ 5.23 ([9]): Minh họa định lý 5.20

Xét đối tượng bậc năm ($n=5$) có hai tín hiệu vào/ra ($m=2$), được mô tả bởi mô hình vào–trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2(1+x_2) \\ x_3 - x_1(x_1 - x_5) \\ x_2x_4 + x_5(x_1 - x_5) \\ x_5 \\ x_2^2 \end{pmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ x_1 - x_5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H(\underline{x})} \underline{u} \quad . \qquad \underline{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - x_5 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\underline{g}(\underline{x})}$$

Như vậy thì:

$$\underline{h}_1(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 - x_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{h}_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_1(\underline{x}) = x_1 - x_5 \ , \qquad g_2(\underline{x}) = x_4 \ .$$

Từ đây ta có:

1) Khi $j=1$:

$$L_{\underline{h}_1} g_1(\underline{x}) = L_{\underline{h}_2} g_1(\underline{x}) = 0$$

$$L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) = x_2 \quad \Rightarrow \quad L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) = L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) = 0$$

$$L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x}) = x_3 - x_4(x_1 - x_5) \quad \Rightarrow \qquad L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x}) = x_1 - x_5$$

hay đối tượng có $r_1 = 3$ tại các điểm trạng thái thỏa mãn $x_1 \neq x_5$.

2) Khi $j=2$:

$$L_{\underline{h}_1} g_2(\underline{x}) = L_{\underline{h}_2} g_2(\underline{x}) = 0$$

$$L_{\underline{f}} g_2(\underline{x}) = x_5 \quad \Rightarrow \quad L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} g_2(\underline{x}) = 1 \neq 0$$

hay đối tượng có $r_2 = 2$ tại mọi điểm trạng thái.

Tiếp theo ta thấy ma trận:

$$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}} g_2(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} g_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

không suy biến khi $x_1 \neq x_5$.

Từ đây ta có:

$$L^{-1}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1 - x_5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy đối tượng có vector bậc tương đối tối thiểu là $(r_1 = 3,\ r_2 = 2)$. Hơn nữa nó còn thỏa mãn điều kiện cần $r_1 + r_2 = 5 = n$.

Lập vector

$$\underline{p}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{\underline{f}}^3 g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}^2 g_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

ta sẽ có được bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác đối tượng, được xây dựng theo công thức (5.73) như sau:

$$\underline{u} = \underbrace{-L^{-1}(\underline{x})\underline{p}(\underline{x})}_{\underline{a}(\underline{x})} + L^{-1}(\underline{x})\underline{w} = -\begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1 - x_5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{w}$$

Cùng với bộ điều khiển trên, đối tượng đã cho trở thành tuyến tính và được mô tả bằng mô hình:

$$\frac{d\underline{z}}{dt}=\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\underline{z}+\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\underline{w}$$

$$\underline{y}=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\underline{z}$$

Giữa biến trạng thái cũ $\underline{x}$ và biến trạng thái mới $\underline{z}$ có quan hệ vi phôi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$:

$$\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})=\begin{pmatrix} g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}g_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}^2 g_1(\underline{x}) \\ g_2(\underline{x}) \\ L_{\underline{f}}g_2(\underline{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-x_5 \\ x_2 \\ x_3-x_4(x_1-x_5) \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$ □

Một số nhận xét về phương pháp tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–ra

Về phương pháp tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–ra hệ phi tuyến affine MIMO ta có mấy điều bổ sung thêm như sau:

1) Khi đã được tuyến tính hóa chính xác, hệ kín (tuyến tính) với mô hình trạng thái (5.72), (5.74) sẽ có ma trận truyền đạt:

$$\underline{Y}(s)=C(sI-A)^{-1}B\underline{W}(s)=\begin{pmatrix} \underline{c}_1^T(sI-A_1)^{-1}\underline{b}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underline{c}_m^T(sI-A_m)^{-1}\underline{b}_m \end{pmatrix}\underline{W}(s)$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{s^{r_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{s^{r_m}} \end{pmatrix}\underline{W}(s)$$

Điều này chứng tỏ rằng tín hiệu ra $y_k(t)$ chỉ còn phụ thuộc vào tín hiệu đầu vào $u_k(t)$. Nói cách khác, bộ điều khiển (5.73) và phép đổi biến (5.68) không những đã tuyến tính hóa được đối tượng mà còn tách được nó thành m kênh riêng biệt. Vì lẽ đó, trong nhiều tài liệu, phương pháp điều khiển tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–ra đối tượng MIMO phi tuyến còn được gọi là *điều khiển tách kênh* (*noninteracting control*).

2) Vì có (xem phần chứng minh định lý 5.17):

$$L_{\underline{h}_i} L_{\underline{f}}^{r_j-1} g_j(\underline{x}) = (-1)^{r_j-1} L_{ad_{\underline{f}}^{r_j-1}\underline{h}_i} g_j(\underline{x})$$

nên từ tính không suy biến của ma trận $L(\underline{x})$ ta cũng suy ra được là ma trận

$$M(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{ad_{\underline{f}}^{r_1-1}\underline{h}_1} g_1(\underline{x}) & L_{ad_{\underline{f}}^{r_1-1}\underline{h}_2} g_1(\underline{x}) & \cdots & L_{ad_{\underline{f}}^{r_1-1}\underline{h}_m} g_1(\underline{x}) \\ L_{ad_{\underline{f}}^{r_2-1}\underline{h}_1} \lambda_2(\underline{x}) & L_{ad_{\underline{f}}^{r_2-1}\underline{h}_2} g_2(\underline{x}) & \cdots & L_{ad_{\underline{f}}^{r_2-1}\underline{h}_m} g_2(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{ad_{\underline{f}}^{r_m-1}\underline{h}_1} g_m(\underline{x}) & L_{ad_{\underline{f}}^{r_m-1}\underline{h}_2} g_m(\underline{x}) & \cdots & L_{ad_{\underline{f}}^{r_m-1}\underline{h}_m} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

cũng không suy biến.

3) Tương tự như ở phần chứng minh định lý 5.17, ở đây ta cũng có cho mọi j

$$L_{ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}_i}\left(L_{\underline{f}}^{l} g_j\right) = 0 \quad \text{nếu} \quad k+l \le r_j - 2$$

4) Có thể thấy nếu làm tương tự như ở phần chứng minh định lý 5.17 về việc xây dựng ma trận D không suy biến thì ta cũng sẽ đến được $D = D_h D_c$, trong đó

$$D_h = \begin{pmatrix} dg_1(\underline{x}) \\ dL_{\underline{f}} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ dL_{\underline{f}}^{r_1-1} g_1(\underline{x}) \\ dg_2(\underline{x}) \\ dL_{\underline{f}} g_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ dL_{\underline{f}}^{r_2-1} g_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ dg_m(\underline{x}) \\ dL_{\underline{f}} g_m(\underline{x}) \\ \vdots \\ dL_{\underline{f}}^{r_m-1} g_m(\underline{x}) \end{pmatrix}, \qquad D_c = \begin{pmatrix} ad_{\underline{f}}^{r_1-1}\underline{h}_1(\underline{x}), & ad_{\underline{f}}^{r_1-2}\underline{h}_1(\underline{x}), & \cdots, & \underline{h}_1(\underline{x}) \\ ad_{\underline{f}}^{r_2-1}\underline{h}_2(\underline{x}), & ad_{\underline{f}}^{r_2-2}\underline{h}_2(\underline{x}), & \cdots, & \underline{h}_2(\underline{x}) \\ \vdots & & & \\ ad_{\underline{f}}^{r_m-1}\underline{h}_m(\underline{x}), & ad_{\underline{f}}^{r_m-2}\underline{h}_1(\underline{x}), & \cdots, & \underline{h}_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Từ đây suy ra các vector cột trong D_c là độc lập tuyến tính.

5) Những kết quả trên về việc tuyến tính hóa chính xác đối tượng (5.67) còn có thể mở rộng cho cả những trường hợp mà ở đó không cần phải có giả thiết rằng đối tượng có số các tín hiệu vào bằng số các tín hiệu ra. Khi đó, điều kiện ma trận $L(\underline{x})$ theo

(5.26) *không suy biến*, sẽ được thay *bởi hạng của nó phải bằng số các tín hiệu đầu ra* và *số các tín hiệu đầu ra không được lớn hơn số các tín hiệu vào*. Nếu như vậy, do sẽ có vô số ma trận giả nghịch đảo $L_p(\underline{x})$ của $L(\underline{x})$ thay vì chỉ có một $L^{-1}(\underline{x})$, ta sẽ xác định được vô số bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác thay vì chỉ có một bộ điều khiển (5.73).

Tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–trạng thái

Giống như đã làm với đối tượng SISO trước đây, chúng ta cũng sẽ bàn về khả năng điều khiển tuyến tính hóa chính xác đối tượng phi tuyến (5.67) mà ở đó vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ không thỏa mãn điều kiện cần $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$.

Tất nhiên rằng bài toán điều khiển tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–trạng thái vừa nêu sẽ trở thành bài toán tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–ra đã được xét và giải quyết trọn vẹn ở mục vừa rồi, nếu như ta tìm được m tín hiệu ra hình thức cho nó là $\lambda_j(\underline{x})$, $j=1,2,\ldots,m$ sao cho đối tượng vào–ra hình thức:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\cdot\underline{u} \\ \underline{\tilde{y}} = \underline{\lambda}(\underline{x}) \end{cases} \qquad \text{với} \qquad \underline{\lambda}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.75}$$

có được vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ thỏa mãn:

$$r_1+r_2+\cdots+r_m=n \tag{5.76}$$

Rõ ràng bài toán điều khiển tuyến tính hóa chính xác đối tượng vào–trạng thái là bài toán tổng quát. Tính tổng quát nằm ở chỗ khi đối tượng vào–ra (5.67) đã cho có bậc tương đối tối thiểu không thỏa mãn yêu cầu (5.76) thì ta vẫn có thể tuyến tính hóa chính xác được nó bằng cách thay các tín hiệu ra $\underline{y}=\underline{g}(\underline{x})$ ban đầu bằng các tín hiệu ra hình thức khác $\underline{\tilde{y}}=\underline{\lambda}(\underline{x})$ sao cho lại có được (5.76). Khi đó, theo định lý 5.20, đối tượng (5.75) sẽ được tuyến tính hóa chính xác bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái:

$$\underline{u} = L^{-1}(\underline{x})\left[\underline{w} - \begin{pmatrix} L_{\underline{f}}^{r_1}\lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_m}\lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix}\right] \tag{5.77}$$

và phép đổi biến vi phôi (mà thực chất cũng có vai trò như một bộ điều khiển (xem hình 5.10):

$$\underline{z} = \underline{m}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_1-1}\lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \lambda_m(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_m-1}\lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.78}$$

trong đó:

$$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1}L_{\underline{f}}^{r_1-1}\lambda_1(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m}L_{\underline{f}}^{r_1-1}\lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\underline{h}_1}L_{\underline{f}}^{r_m-1}\lambda_m(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m}L_{\underline{f}}^{r_m-1}\lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{5.79}$$

Như vậy, vấn đề còn lại chỉ là xác định vector:

$$\underline{\lambda}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

sao cho hệ (5.75) có được điều kiện (5.76).

Định lý 5.21: Xét đối tượng có quan hệ vào–trạng thái mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u}$$

trong đó các vector cột $\underline{h}_1(\underline{x}), \underline{h}_2(\underline{x}), \cdots, \underline{h}_m(\underline{x})$ của ma trận $H(\underline{x})$ là độc lập tuyến tính và $n \geq 2m$. Gọi:

$$G_0 = \text{span}(\underline{h}_1, \underline{h}_2, \cdots, \underline{h}_m)$$

$$G_k = G_{k-1} + \text{span}(ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_i(\underline{x}) \mid i = 1, 2, \ldots, m)$$

Vậy thì cần và đủ cho sự tồn tại của m hàm $\lambda_1(\underline{x}), \lambda_2(\underline{x}), \ldots, \lambda_m(\underline{x})$ sao cho đối tượng có tín hiệu ra hình thức $\underline{\tilde{y}} = \underline{\lambda}(\underline{x})$ mô tả bởi (5.75) có vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ thỏa mãn (5.76) là:

a) Các hàm mở rộng G_k, $k = 0, 1, \ldots, n-2$ phải xoắn và có số chiều hằng.

b) $\dim G_{n-1} = n$.

Chứng minh:

. Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử đã có $\underline{\lambda}(\underline{x})$ để với nó đối tượng (5.75) có vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ thỏa mãn (5.76). Không mất tính tổng quát nếu ta cho rằng:

$$r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_m$$

Từ

$$L_{ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_i}\left(L_{\underline{f}}^l \lambda_j\right) = 0 \quad \text{nếu} \quad k+l \leq r_j - 2 \quad \text{với mọi } j$$

ta có

$$\text{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^l \lambda_j\right)^T \mid k+l \leq r_j - 2 \; ; j = 1, 2, \ldots, m\right) \subseteq G_k^{\perp} \tag{5.80}$$

Ngoài ra, do tất cả các vector cột:

$$\underline{h}_1(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{r_1-1} \underline{h}_1(\underline{x}),$$

$$\underline{h}_2(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{r_1-1} \underline{h}_2(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{r_2-1} \underline{h}_2(\underline{x}).$$

$$\vdots$$

$$\underline{h}_m(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{r_1-1} \underline{h}_m(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{r_2-1} \underline{h}_m(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^{r_m-1} \underline{h}_m(\underline{x})$$

cũng như các vector hàng

$$dL_{\underline{f}}^{r_1-1} \lambda_1(\underline{x}), \ldots, dL_{\underline{f}} \lambda_1(\underline{x}), d\lambda_1(\underline{x}).$$

$$dL_{\underline{f}}^{r_2-1} \lambda_2(\underline{x}), \ldots, dL_{\underline{f}}^{r_1-1} \lambda_2(\underline{x}), \ldots, dL_{\underline{f}} \lambda_2(\underline{x}), d\lambda_2(\underline{x}),$$

$$\vdots$$

$$dL_{\underline{f}}^{r_m-1} \lambda_m(\underline{x}), \ldots, dL_{\underline{f}}^{r_2-1} \lambda_m(\underline{x}), \ldots, dL_{\underline{f}}^{r_1-1} \lambda_m(\underline{x}), \ldots, dL_{\underline{f}} \lambda_m(\underline{x}), d\lambda_m(\underline{x}),$$

độc lập tuyến tính, và $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$ nên

– Khi $k < r_1$ hàm mở rộng G_k sẽ có cơ sở là

$$\underline{h}_1(\underline{x}), \ldots, \underline{h}_m(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_1(\underline{x}), \ldots, ad_{\underline{f}}^k \underline{h}_m(\underline{x}),$$

hay $\quad \dim G_k = m(k+1)$

và $\quad \dim \text{span}\left(\quad \mid k+l \leq r_j - 2 \; ; j = 1, 2, \ldots, m\right) = n - m(k+1)$

hay $\quad \dim G_k + \dim \operatorname{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j\right)^T \mid k+l \le r_j - 2 \ ; j=1,2, \ \dots \ ,m\right) = n$

– Khi $r_1 \le k < r_2$ hàm mở rộng G_k sẽ có cơ sở là

$$\underline{h}_1(\underline{x}), \ \dots \ , \underline{h}_m(\underline{x}), \ \dots \ , ad_{\underline{f}}^{r_1-1}\underline{h}_1(\underline{x}), \ \dots \ , ad_{\underline{f}}^{r_1-1}\underline{h}_1(\underline{x}),$$

$$\dots \ , ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}_2(\underline{x}), \ \dots \ , ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}_m(\underline{x}),$$

hay $\quad \dim G_k = m r_1 + (m-1)(k - r_1)$

và $\quad \dim \operatorname{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j\right)^T \mid k+l \le r_j - 2 \ ; j=1,2, \ \dots \ ,m\right) = n-(m-1)k-r_1$

hay $\quad \dim G_k + \dim \operatorname{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j\right)^T \mid k+l \le r_j - 2 \ ; j=1,2, \ \dots \ ,m\right) = n$

$\vdots$

Bởi vậy, suy ra một cách tổng quát cho mọi $0 \le k < n$ ta luôn có:

$$\dim G_k + \dim \operatorname{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j\right)^T \mid k+l \le r_j - 2 \ ; j=1,2, \ \dots \ ,m\right) = n \tag{5.81}$$

Kết hợp (5.80) với (5.81) ta đi đến:

$$G_k^{\perp} = \operatorname{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j\right)^T \mid k+l \le r_j - 2 \ ; j=1,2, \ \dots \ ,m\right) \tag{5.82}$$

Do đó, theo tiêu chuẩn Frobenius, các hàm mở rộng G_k phải xoắn.

Ở đây ta còn có nhận xét thêm

$$\dim G_{r_m - 1} = r_1 + r_2 + \ \cdots \ + r_m = n$$

Suy ra

$$G_{r_m - 1} = G_{r_m} = G_{r_m + 1} = \cdots = G_{n-1}$$

Bây giờ ta chuyển sang chứng minh điều kiện đủ và để đơn giản trong trình bày, ở đây ta giả sử $r_1, \ r_2, \ \cdots \ , \ r_m$ được sắp xếp theo chiều ngược lại:

$$r_1 \ge r_2 \ge \ \cdots \ \ge r_m$$

Vì có:

$$\dim G_0 = m, \ \dim G_{n-1} = n \quad \text{và} \quad G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ \cdots \ \subseteq G_{n-1}$$

nên số chiều của G_k, $k=0,1,\ \dots\ ,n-1$ tăng dần theo k từ m đến n. Nói cách khác, khi cho k chạy ngược từ $n-1$ về 0, ta luôn tìm được một chỉ số p sao cho:

$$\dim G_{p-1}=n \quad , \qquad \dim G_{p-2}< n.$$

Do

$$G_{p-1}=\operatorname{span}(ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}_i(\underline{x}) \mid i=1,2,\ \dots\ ,p-1)$$

hay G_{p-1} là bao tuyến tính của mp vector, nên:

$$n = \dim G_{p-1}\leq mp. \tag{5.83}$$

Gọi

$$m_1=n-\dim G_{p-2}$$

thì ta phải có $m_1\leq m$ vì số chiều bị giảm là m_1 không thể nhiều hơn số các vector đã bị bớt đi là m.

Do G_{p-2} xoắn nên theo tiêu chuẩn Frobenius, ta luôn tìm được m_1 hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j=1,2,\ \dots\ ,m_1$ để có $\left(d\lambda_j(\underline{x})\right)^T \in G_{p-2}^{\perp}$. Nhưng vì:

$$G_0\subseteq G_1\subseteq\ \cdots\ \subseteq G_{p-2} \quad \text{tức là} \quad G_0^{\perp}\supseteq G_1^{\perp}\supseteq\ \cdots\ \supseteq G_{p-2}^{\perp}$$

nên ta cũng có $\left(d\lambda_j(\underline{x})\right)^T \in G_k^{\perp}$ với mọi $k\leq p-2$. Suy ra:

$$L_{ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}_i}\lambda_j = \frac{\partial\lambda_j}{\partial\underline{x}}\, ad_{\underline{f}}^{k}\underline{h}_i = 0$$

đúng với mọi $k\leq p-2$; $j=1,2,\ \dots\ ,m_1$ và $i=1,2,\ \dots\ ,m$. Từ đây, và kết hợp với nội dung định lý 5.7 ta được:

$$L_{\underline{h}_i}L_{\underline{f}}^{k}\lambda_j(\underline{x})=0 \qquad \text{khi} \quad k\leq p-2\ ;\ j=1,2,\ \dots\ ,m_1 \ \text{ và } \ i=1,2,\ \dots\ ,m.$$

Ngoài ra, vì $\dim G_{p-1}=n$ nên ma trận kiểu $m_1\times m$

$$L_1(\underline{x})=\begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_1(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_1(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{h}_1}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_2(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_2(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_2(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\underline{h}_1}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_{m_1}(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_{m_1}(\underline{x}) & \cdots & L_{\underline{h}_m}L_{\underline{f}}^{p-1}\lambda_{m_1}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

phải có hạng m_1. Giả sử rằng $m_1=m$. Vậy, theo định nghĩa 5.4, đối tượng sẽ có:

$$r_1=r_2=\cdots=r_m=p$$

Do tổng các bậc tương đối tối thiểu không thể lớn hơn bậc mô hình (định lý 5.9), tức là phải có $mp\leq n$ nên khi kết hợp với (5.83) ta được $mp=n$, hay:

$$r_1+r_2+\cdots+r_m=mp=n$$

Nói cách khác, trong trường hợp $m_1=m$ các hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j=1,2,\ldots,m_1$ tìm được theo (5.83) đã làm cho đối tượng với tín hiệu ra hình thức $\underline{\tilde{y}}=\underline{\lambda}(\underline{x})$ thỏa mãn yêu cầu cần có để có thể tuyến tính hóa được chính xác.

Nếu như $m_1<m$. Vậy thì đối tượng sẽ có m_1 bậc tương đối tối thiểu:

$$r_1=r_2=\cdots=r_{m_1}=p$$

đồng thời, do có quan hệ (5.82), tức là:

$$\text{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j\right)^T \mid k+l\leq r_1-2\ ;\ j=1,2,\ldots,m_1\right)\subset G_k^{\perp}$$

nên cũng có:

$$\text{span}\left(\left(dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j(\underline{x})\right)^T \mid l\leq 1\ ;\ j=1,2,\ldots,m_1\right)\subset G_{p-3}^{\perp}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cho chỉ số k tiếp tục giảm từ p về 0 ta sẽ đến được chỉ số tiếp theo là $q<p$ sao cho:

$$\dim G_{q-1}=\dim G_{p-2}\ ,\qquad \dim G_{q-2}<\dim G_{p-2}.$$

Khi đó nếu đặt

$$m_2=\dim G_{p-2}-\dim G_{q-2}$$

thì do tính xoắn của G_{q-2} ta cũng sẽ tìm được $v=m_2-2m_1$ hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j=m_1+1,\ldots,m_1+v$ bổ sung thêm vào m_1 hàm đã có, tức là:

$$L_{\underline{h}_i}L_{\underline{f}}^{k}\lambda_j(\underline{x})=0\ ,\quad k\leq q-2\ ,\ j=m_1+1,\ldots,m_1+v \text{ và } i=1,2,\ldots,m.$$

Ở đây ta cần phải chọn các hàm mới này độc lập tuyến tính với toàn bộ $2m_1$ các đạo hàm $dL_{\underline{f}}^{l}\lambda_j(\underline{x})$, $l\leq 1$; $j=1,2,\ldots,m_1$ đã có. Điều này là hoàn toàn có thể vì

$\subset$ và

$$\dim G_{q-2}^{+} = m_1 + m_2.$$

Lại giả sử $m_1 + m_2 = m$. Khi đó đối tượng sẽ có vector bậc tương đối:

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{m_1} = p$$

$$r_{m_1+1} = r_{m_1+2} = \cdots = r_m = q$$

và vector bậc tương đối này cũng thỏa mãn:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = m_1 p + m_2 q = n$$

vì, một mặt tổng các bậc tương đối tối thiểu không được lớn hơn n (định lý 5.9), tức là

$$m_1 p + m_2 q \le n,$$

mặt khác:

$$\begin{aligned} m_1 p + m_2 q &= m_1 p + (m - m_1) q = m_1 (p-q) + mq \\ &\ge m_1 (p-q) + \dim G_{q-1} && (G_{q-1} \text{ là bao tuyến tính của } mq \text{ vector}) \\ &= m_1 (p-q) + \dim G_{p-2} && (\dim G_{q-1} = \dim G_{p-2}) \\ &= m_1 (p-q) + n - m_1 \\ &\ge m_1 + n - m_1 = n && (p > q). \end{aligned}$$

Nếu $m_1 + m_2 < m$, tức là đối tượng mới chỉ có các bậc tương đối tối thiểu:

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{m_1} = p$$

$$r_{m_1+1} = r_{m_1+2} = \cdots = r_{m_1+m_2} = q$$

ta lại cho k giảm tiếp tục từ q về 0 để đến được hằng số mới $l < q$ thỏa mãn:

$$\dim G_{l-1} = \dim G_{q-2}, \qquad \dim G_{l-2} < \dim G_{q-2}$$

nhằm tìm tiếp các hàm $\lambda_j(\underline{x})$ bổ sung thêm vào những hàm đã có .... Cứ như vậy ta sẽ có được toàn bộ m hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$ mà với nó đối tượng có được vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ thỏa mãn (5.76). ❐

Định lý 5.21 đã được chứng minh. Phần chứng minh định lý cũng là một sự bổ sung thêm cho việc xác định cụ thể các hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Ta đến được thuật toán xác định $\lambda_j(\underline{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$ gồm các bước như sau:

1) Kiểm tra tính độc lập tuyến tính của $\underline{h}_1(\underline{x})$, $\underline{h}_2(\underline{x})$, $\cdots$, $\underline{h}_m(\underline{x})$ là m các vector cột của ma trận $H(\underline{x})$.

2) Xây dựng các hàm mở rộng G_k, $k=0,1,\ \ldots\ ,n-1$ theo công thức:

$$G_0 = \text{span}(\underline{h}_1\ ,\ \underline{h}_2\ ,\ \cdots\ ,\ \underline{h}_m)$$

$$G_k = G_{k-1} + \text{span}(ad_f^k \underline{h}_i(\underline{x}) \mid i=1,2,\ \ldots\ ,m)$$

3) Kiểm tra tính xoắn của G_k, $k=0,1,\ \ldots\ ,n-2$

4) Kiểm tra điều kiện $\dim G_{n-1}=n$.

5) Gán $p=n-1$, $l=v=0$.

6) Giảm k từ p về 0 cho tới khi có được chỉ số $k=q<p$ thỏa mãn:

$$\dim G_{q-1} = \dim G_{p-2}\ , \qquad \dim G_{q-2} < \dim G_{p-2}.$$

7) Tính

$$s = \dim G_{p-2} - \dim G_{q-2}$$

cũng như $s-v$ hàm tương ứng $\lambda_j(\underline{x})$, $j=l+1,\ \ldots\ ,l+s-v$ từ công thức

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \underline{x}}\ ad_f^k \underline{h}_i = 0, \qquad i=1,2,\ \ldots\ ,m$$

sao cho $d\lambda_j(\underline{x})$ của các hàm mới này là độc lập tuyến tính với $d\lambda_j(\underline{x})$ và $dL_f\lambda_j(\underline{x})$ của những hàm đã có.

8) Gán:

$$r_{l+1} = r_{l+2} = \cdots = r_{l+s} = q$$

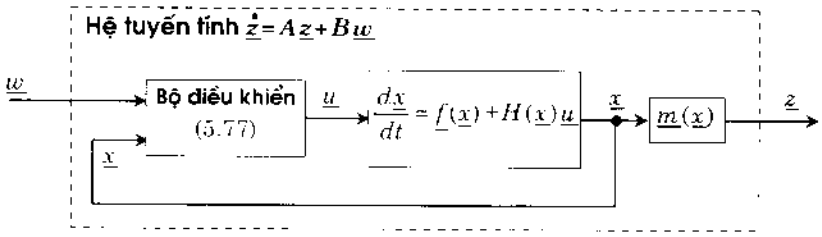
$$l := l+s-v,\ p := q,\ v := v+s$$

Kiểm tra nếu $l=m$ hoặc $p=0$ thì dừng thuật toán. Ngược lại thì quay về bước 6).

9) Xác định

$$\underline{p}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_f^{r_1}\lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r_m}\lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \text{ và } L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{h_1}L_f^{r_1-1}\lambda_1(\underline{x}) & \cdots & L_{h_m}L_f^{r_1-1}\lambda_1(\underline{x}) \\ & \ddots & \vdots \\ L_{h_1}L_f^{r_m-1}\lambda_m(\underline{x}) & \cdots & L_{h_m}L_f^{r_m-1}\lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix}.$$

10) Xây dựng bộ điều khiển (5.77) và phép đổi trục tọa độ vi phôi $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ theo (5.78):



Hình 5.11: Điều khiển tuyến tính hóa chính xác quan hệ vào–trạng thái đối tượng MIMO phi tuyến

Ví dụ 5.24 ([9]): Minh họa định lý 5.21

Xét đối tượng được mô tả bởi mô hình vào–trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u} = \begin{pmatrix} x_2 + x_5^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}$$

Ta có thể thấy ngay được rằng hai vector cột của $H(\underline{x})$

$$\underline{h}_1(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{h}_2(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

là độc lập tuyến tính tại mọi điểm trạng thái có $\cos(x_1 - x_5) \neq 0$. Đối tượng có

$$ad_{\underline{h}_1}\underline{h}_2 = \underline{0}$$

$$ad_{\underline{f}}\underline{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x_1 - x_5) \\ -x_2\sin(x_1 - x_5) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad ad_{\underline{f}}\underline{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -(x_1 - x_5) \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\underline{f}}^2\underline{h}_1 = ad_{\underline{h}_1}ad_{\underline{f}}\underline{h}_2 = ad_{\underline{h}_2}ad_{\underline{f}}\underline{h}_1 = ad_{\underline{f}}^2\underline{h}_2 = \underline{0}$$

$$[\, ad_{\underline{f}}\underline{h}_1 \,,\, ad_{\underline{f}}\underline{h}_2 \,] = ad_{ad_{\underline{f}}\underline{h}_1}ad_{\underline{f}}\underline{h}_2 = \tan(x_1 - x_5)\underline{h}_1(\underline{x})$$

Suy ra:

$G_0 = \text{span}(\underline{h}_1, \underline{h}_2)$ xoắn và có $\dim G_0 = 2$

$G_1 = \text{span}(\underline{h}_1, \underline{h}_2, ad_{\underline{f}}\underline{h}_1, ad_{\underline{f}}\underline{h}_2)$ xoắn và có $\dim G_1 = 4$

$\dim G_2 = \dim G_3 = \dim G_4 = 5 = n$.

Vậy đối tượng là có thể tuyến tính hóa chính xác được.

Bắt đầu với $l = v = 0$ và cho k chạy từ 4 về 0, ta thấy khi $k = p = 3$ có

$$\dim G_{p-2} = \dim G_1 = 4 < 5 = \dim G_2 = \dim G_{p-1}$$

nên $r_1 = p = 3$. Tiếp tục, vì

$$s = n - \dim G_1 = 5 - 4 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dim G_1^{\perp} = s = 1$$

nên phải có ít nhất $s - v = 1$ hàm $\lambda_1(\underline{x})$ thỏa mãn:

$$\text{span}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \underline{x}}\right) \subseteq G_1^{\perp} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \underline{x}}\underline{h}_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \underline{x}}\underline{h}_2 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \underline{x}} ad_{\underline{f}}\underline{h}_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \underline{x}} ad_{\underline{f}}\underline{h}_2 = 0.$$

Có thể thấy một trong các hàm đó là

$$\lambda_1(\underline{x}) = x_1 - x_5.$$

Gán $l := l + s - v = 1$, $v := v + s = 1$ và cho k chạy tiếp từ 3 về 0 ta lại được với $k = p = 2$:

$$\dim G_{p-2} = \dim G_0 = 2 < 4 = \dim G_1 = \dim G_{p-1}$$

do đó $r_2 = p = 2$. Hơn nữa, vì

$$s = \dim G_1 - \dim G_0 = 4 - 2 = 2$$

nên phải có ít nhất $s - v = 1$ hàm $\lambda_2(\underline{x})$ bổ sung thêm và hàm này phải độc lập tuyến tính với

$$d\lambda_1(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)$$

và với

$$dL_{\underline{f}}\lambda_1(\underline{x}) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

cũng như phải thỏa mãn:

$$\text{span}\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial \underline{x}}\right) \subset G_0^{\perp} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial \underline{x}}\underline{h}_1 = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \underline{x}}\underline{h}_2 = 0.$$

Ta thấy một trong các hàm $\lambda_2(\underline{x})$ đó là:

$\lambda_2(\underline{x}) = x_5$

Thuật toán dừng ở đây vì đã có $l+s-v=2=m$. Vậy với hai hàm tìm được là $\lambda_1(\underline{x})=x_1-x_5$, $\lambda_2(\underline{x})=x_4$ đối tượng có mô hình vào–trạng thái đã cho sẽ tuyến tính hóa được chính xác cùng với hai tín hiệu ra hình thức

$$\underline{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} \lambda_1(\underline{x}) \\ \lambda_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_5 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Nó có vector bậc tưởng đối $(r_1, r_2)=(3,2)$. □

Bàn về điều kiện $n \geq 2m$ và vấn đề mở

Xét đối tượng vào–trạng thái bậc n có m tín hiệu vào và được mô tả bằng mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \underline{h}_i(\underline{x})u_i$$

Ký hiệu:

$$G_0 = \text{span}(\underline{h}_1, \underline{h}_2, \cdots, \underline{h}_m)$$

$$G_k = G_{k-1} + \text{span}(ad_f^k \underline{h}_i(\underline{x}) \mid i=1,2, \ldots, m)$$

trong đó $k=1,2, \ldots, n-1$. Vậy sẽ có:

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_{n-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad G_0^{\perp} \supseteq G_1^{\perp} \supseteq \cdots \supseteq G_{n-1}^{\perp}$$

Suy ra, khi kết hợp với một hàm $\lambda_j(\underline{x})$ bất kỳ nào đó có $\left(d\lambda_j(\underline{x})\right)^T \in G_p^{\perp}$, đối tượng MISO ($m$ tín hiệu vào, một tín hiệu ra) mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \underline{h}_i(\underline{x})u_i \\ y_j = \lambda_j(\underline{x}) \end{cases} \tag{5.84}$$

sẽ có bậc tương đối tối thiểu r_j không nhỏ hơn $p+2$, tức là $r_j \geq p+2$. Mở rộng ra, nếu có

$$d\lambda_j(\underline{x}) \in G_p^{\perp} \quad \text{và} \quad d\lambda_j(\underline{x}) \notin G_{p-1}^{\perp}$$

thì bậc tương đối tối thiểu r_j của (5.84) sẽ đúng bằng $p+2$, tức là $r_j = p+2$.

Định lý 5.21 đã được chứng minh dựa vào nhận xét trên. Đó cũng là lý do tại sao phải có điều kiện $n \geq 2m$. Tuy nhiên, những cách chứng minh khác cho định lý 5.21 trong các tài liệu [3], [18] lại không sử dụng điều kiện này. Nó chứng tỏ tính đúng đắn

của định lý 5.21 được mở rộng cho cả các trường hợp mà ở đó điều kiện $n \geq 2m$ bị vi phạm. Song khác với phần chứng minh mà ta đã tiến hành, những chứng minh này không nêu lên được phương thức xác định các hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j=1, \ldots, m$ cho việc thiết kế bộ điều khiển.

Theo thuật toán được xây dựng từ phần chứng minh định lý 5.21. Ta chỉ có thể xác định được nhiều nhất $n-m$ hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j=1, \ldots, n-m+1$ ứng với $n-m$ bậc tương đối tối thiểu r_j, $j=1, \ldots, n-m+1$.

Nhưng theo nhận xét trên, các hàm còn lại có thể được bổ sung từ việc chọn:

$$\left(d\lambda_j(\underline{x})\right)^T \notin G_0^{\perp}, \; j= n-m+2, \ldots, m \tag{5.85}$$

Khi đó hệ MISO (5.84) ứng với các hàm $\lambda_j(\underline{x})$ này sẽ có bậc tương đối tối thiểu $r_j=1$, $j=n-m+2, \ldots, m$.

Vấn đề còn lại chỉ là xác định các hàm $\lambda_j(\underline{x})$, $j= n-m+2, \ldots, m$ thế nào để toàn bộ tất cả m bậc tương đối tối thiểu tạo thành được vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$, tức là để cho ma trận $L(\underline{x})$ xác định theo (5.79) không suy biến. Cho tới nay, lời giải của bài toán này vẫn đang bị bỏ ngỏ, tức là vẫn chưa có một thuật toán tổng quát tìm các hàm bổ sung $\lambda_j(\underline{x})$ theo (5.85) để $L(\underline{x})$ không suy biến.

Ví dụ 5.25: Xác định tín hiệu đầu ra ảo cho bài toán không thỏa mãn giả thiết của định lý 5.21

Cho đối tượng có mô hình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_3 - x_1^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underline{u}$$

tức là có $n=3$ và $m=2$. Đối tượng này có:

$$G_0 = \text{span}(\underline{h}_1, \underline{h}_2) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

xoắn vì $ad_{\underline{h}_1} \underline{h}_2(\underline{x}) = \underline{0}$ và có $\dim G_0 = 2$ hay $\dim G_0^{\perp} = 3 - \dim G_0 = 1$

Các hàm mở rộng còn lại là G_1, G_2 đều có $\dim G_1 = \dim G_2 = 3$ nên theo sự mở rộng định lý 5.21, đối tượng là tuyến tính hóa chính xác được, mặc dù ở đây điều kiện $n \geq 2m$ là không được thỏa mãn.

Trước hết ta tìm hàm $\lambda_1(\underline{x})$ thỏa mãn $(d\lambda_1(\underline{x}))^T \in G_0$. Hàm này sẽ mang đến cho đối tượng bậc tương đối tối thiểu $r_1=2$:

$$(d\lambda_1(\underline{x}))^T \in G_0^{\perp} \quad \Rightarrow \quad d\lambda_1(\underline{x}) = (1 \quad 0 \quad 0) \Rightarrow \quad \lambda_1(\underline{x}) = x_1 \tag{5.86}$$

Ứng với $\lambda_1(\underline{x})$ tìm được ta có:

$$L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}} \lambda_1(\underline{x}) = 1 \qquad \text{và} \qquad L_{\underline{h}_2} L_{\underline{f}} \lambda_1(\underline{x}) = 3$$

Hàm $\lambda_2(\underline{x})$ còn lại ta xác định từ:

$$(d\lambda_2(\underline{x}))^T \notin G_0^{\perp} \qquad \text{hay} \qquad \text{grad}\lambda_2(\underline{x}) \in G_0$$

tức là phải có:

$$\frac{\partial \lambda_2(\underline{x})}{\partial x_1} = 0 \tag{5.87}$$

và hàm này sẽ mang đến cho đối tượng bậc tương đối tối thiểu $r_2=1$.

Để $(r_1, r_2)=(2,1)$ tạo thành vector bậc tương đối tối thiểu thì ma trận:

$$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{\underline{h}_1} L_{\underline{f}} \lambda_1(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} L_f \lambda_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{h}_1} \lambda_2(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} \lambda_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ L_{\underline{h}_1} \lambda_2(\underline{x}) & L_{\underline{h}_2} \lambda_2(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

phải không suy biến. Ta có thể chọn trước, chẳng hạn như:

$$L_{\underline{h}_1} \lambda_2(\underline{x}) = 0 \quad \text{và} \quad L_{\underline{h}_2} \lambda_2(\underline{x}) = 2$$

Khi đó, kết hợp cùng với (5.87) sẽ được:

$$d\lambda_2(\underline{x}) H(\underline{x}) = (0 \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_3}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (0 \quad 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_3}) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (0 \quad 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_3}) = (0 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = (0 \quad -1) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (2 \quad -1)$$

Suy ra một trong các hàm $\lambda_2(\underline{x})$ đó là

$$\lambda_2(\underline{x}) = 2x_2 - x_3 \tag{5.88}$$

Vậy với hai hàm tìm được (5.86) và (5.88) đối tượng có mô hình vào–trạng thái đã cho sẽ tuyến tính hóa được chính xác cùng với hai tín hiệu ra hình thức:

$$\underline{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} \lambda_1(\underline{x}) \\ \lambda_2(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Nó mang đến cho hệ vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2) = (2, 1)$. ❐

Tuyến tính hóa chính xác và gán điểm cực

Nhìn lại kết quả (5.72) ta thấy tuy rằng đã được tuyến tính hóa chính xác, song hệ tuyến tính thu được lại không ổn định vì có điểm cực $s = 0$ bội n.

Để có được kết quả tuyến tính hóa chính xác là một hệ tuyến tính ổn định với mô hình:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z} + B\underline{w} \tag{5.89}$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \Theta & \cdots & \Theta \\ \Theta & A_2 & \cdots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \cdots & A_m \end{pmatrix} \quad \text{có} \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \cdots & -a_{kr_k} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{b}_2 & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{b}_m \end{pmatrix} \quad \text{có} \quad \underline{b}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và a_{ki}, $k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, r_k$ là những hệ số được xác định từ các điểm cực cho trước s_{ki}, $k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, r_k$ cần phải gán cho hệ tuyến tính (5.89) được tính theo:

$$(s - s_{k1})(s - s_{k2}) \cdots (s - s_{kr_k}) = c_{k1} + c_{k2}s + \cdots + c_{kr_k}s^{r_k - 1} + s^{r_k}$$

ta chỉ cần sửa lại bộ điều khiển (5.77), cũng như (5.71) sao cho có được:

$$\underline{w} - \tilde{A}\,\underline{z} = \underline{p}(\underline{x}) + L(\underline{x})\,\underline{u}$$

với

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{m1} & \cdots & a_{mr_m} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{p}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} L_{\underline{f}}^{r_1} \lambda_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{f}}^{r_m} \lambda_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Điều này dẫn đến bộ điều khiển thích hợp là:

$$\underline{u} = L^{-1}(\underline{x})\left[\underline{w} - \underline{p}(\underline{x}) - \tilde{A}\,\underline{m}(\underline{x})\right] \tag{5.90}$$

và ta có được khẳng định:

Định lý 5.22: Nếu đối tượng bậc n với m tín hiệu vào:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x})\underline{u}$$

có m tín hiệu ra ảo, ghép chung lại thành vector $\underline{\tilde{y}} = \underline{\lambda}(\underline{x})$, sao cho vector bậc tương đối tối thiểu $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + H(\underline{x}) \cdot \underline{u} \\ \underline{\tilde{y}} = \underline{\lambda}(\underline{x}) \end{cases}$$

thỏa mãn $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$, thì bộ điều khiển phản hồi trạng thái (5.90) và phép đổi biến (5.78) sẽ tuyến tính hóa chính xác nó thành (5.89) với các điểm cực s_{ki}, $k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, r_k$ là những giá trị tùy ý cho trước.

5.4 Khả năng quan sát trạng thái

Xác định trạng thái $\underline{x}(t)$ của hệ thống là một trong những bài toán thường gặp của điều khiển. Nhiệm vụ của nó là xác định giá trị trạng thái $\underline{x}(t_0)$ tại thời điểm t_0 từ việc đo các tín hiệu vào $\underline{u}(t)$, ra $\underline{y}(t)$ của hệ thống trong một khoảng thời gian T hữu hạn.

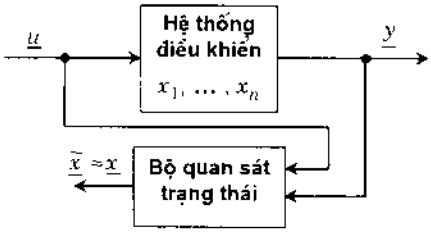
Để minh họa cho sự cần thiết của công việc này ta hãy quay lại vấn đề xây dựng bộ điều khiển phản hồi trạng thái ổn định hóa hệ thống. Nếu sau khi đã biết là công việc xây dựng bộ điều khiển có thể có kết quả (hệ điều khiển được tại $\underline{x}_0$) thì công việc tiếp theo là phải xác định được $\underline{x}_0$ để từ đó bộ điều khiển có thể tạo ra được tín hiệu điều khiển thích hợp đưa hệ từ $\underline{x}_0$ về điểm cân bằng $\underline{x}_e$ ban đầu. Công việc xác định điểm trạng thái $\underline{x}_0$ có thể được tiến hành bằng cách đo trực tiếp (nhờ các bộ cảm biến, sensor) hoặc quan sát khi không thể đo được trực tiếp $\underline{x}_0$, chẳng hạn như gia tốc không thể đo

được trực tiếp mà phải được suy ra từ việc đo tốc độ trong một khoảng thời gian. Nói cách khác khái niệm quan sát được hiểu là thông qua các tín hiệu đo được khác (thường là các tín hiệu vào/ra) mà suy ra $\underline{x}_0$. Điểm trạng thái $\underline{x}_0$ của một hệ phi tuyến sẽ được nói là quan sát được nếu ta có thể xác định được nó thông qua việc đo các tín hiệu vào/ra trong một khoảng thời gian hữu hạn. Yêu cầu phải đo trong khoảng thời gian hữu hạn là rất quan trọng. Khoảng thời gian quan sát càng ngắn sẽ càng tốt cho công việc điều khiển sau này. Nếu thời gian quan sát quá lớn, điểm trạng thái $\underline{x}_0$ vừa xác định được sẽ mất ý nghĩa ứng dụng cho bài toán điều khiển, ví dụ khi có được $\underline{x}_0$ thì có thể hệ đã chuyển đến một điểm trạng thái mới cách rất xa điểm trạng thái $\underline{x}_0$.

Hình 5.12 mô tả nguyên tắc xác định các biến trạng thái $\underline{x}(t)$. Hệ thống giao tiếp với môi trường bên ngoài thông qua các tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và ra $\underline{y}(t)$. Trạng thái $\underline{x}(t)$ có thể không được thể hiện ra bên ngoài, nhưng có mối liên hệ với $\underline{u}(t)$ và $\underline{y}(t)$. Bộ quan sát trạng thái có nhiệm vụ sử dụng mối liên hệ đó để xác định $\underline{x}(t)$ từ tín hiệu đo được $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$. Một bộ quan sát có khoảng thời gian quan sát T càng nhỏ sẽ được đánh giá là có chất lượng càng tốt.

Bài toán quan sát này ta gặp thường xuyên trong cuộc sống đời thường chứ không riêng gì ở hệ thống kỹ thuật. Chẳng hạn như:

- Bác sỹ chẩn đoán bệnh thông qua tác động của mình vào người bệnh (tín hiệu vào) và triệu chứng thể hiện ra bên ngoài của bệnh nhân ứng với tác động đó (tín hiệu ra).
- Giáo viên xác định trình độ của học sinh thông qua việc đặt ra câu hỏi (tín hiệu vào) và kết quả câu trả lời của học sinh (tín hiệu ra).



Hình 5.12: Quan sát trạng thái.

Định nghĩa 5.7: Xét hệ có các tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và các tín hiệu ra $\underline{y}(t)$, mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = f(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{cases} \tag{5.91}$$

Hệ sẽ được gọi là:

a) *Quan sát được tại thời điểm* t_0, nếu tồn tại ít nhất một giá trị thời gian hữu hạn $T>t_0$ để điểm trạng thái $\underline{x}(t_0)=\underline{x}_0$ xác định được một cách chính xác thông qua việc quan sát vector các tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian hữu hạn $[t_0,T]$.

b) *Quan sát được hoàn toàn tại thời điểm* t_0, nếu với mọi giá trị thời gian $T>t_0$, điểm trạng thái $\underline{x}_0=\underline{x}(t_0)$ luôn xác định được một cách chính xác từ việc quan sát vector các tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian $[t_0,T]$.

Ở hệ tuyến tính ta đã được biết đến hai bộ quan sát trạng thái cơ bản. Đó là bộ quan sát Luenberger và bộ quan sát Kalman (còn gọi bộ lọc Kalman). Ngay từ cuối những năm 1970, cấu trúc hai bộ quan sát này đã được chuyển thể sang cho hệ phi tuyến. Chúng được biết đến dưới những cái tên như bộ quan sát Luenberger mở rộng, và bộ lọc Kalman mở rộng.

5.4.1 Bộ quan sát Luenberger mở rộng

Được gợi ý từ bộ quan sát Luenberger của điều khiển tuyến tính, ở đây, cho đối tượng phi tuyến (5.91), người ta cũng sử dụng bộ quan sát với mô hình:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = \underline{f}(\tilde{\underline{x}},\underline{u}) + \underline{l}(\tilde{\underline{x}},\underline{u},\underline{y}) \tag{5.92}$$

Bài toán thiết kế được đặt ra ở đây là tìm vector hàm $\underline{l}(\tilde{\underline{x}},\underline{u},\underline{y})$ sao cho có được $\tilde{\underline{x}} \to \underline{x}$. Tất nhiên rằng trước hết $\underline{l}(\tilde{\underline{x}},\underline{u},\underline{y})$ phải thỏa mãn:

$$\lim_{\tilde{\underline{x}} \to \underline{x}} \underline{l}(\tilde{\underline{x}},\underline{u},\underline{y})=\underline{0} \qquad \text{hay} \qquad \underline{l}(\underline{x},\underline{u},\underline{y})=\underline{0}$$

Với bộ quan sát (5.92) thì phương trình động học mô tả sai lệch $\underline{e}=\tilde{\underline{x}}-\underline{x}$, có tên gọi là sai số động học (*error dynamic*), sẽ là:

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = \underline{f}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u}) - \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) + \underline{l}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u},\underline{y}) \tag{5.93}$$

Như vậy, vấn đề thiết kế đã được cụ thể hóa hơn. Ta phải xác định vector $\underline{l}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u},\underline{y})$ sao cho có được $\lim_{t\to\infty}\underline{e}(t)=\underline{0}$ với tốc độ càng nhanh càng tốt và điều này không được phụ thuộc vào $\underline{x}$, $\underline{u}$ cũng như $\underline{y}$. Hiện nay, bài toán này mới chỉ có lời giải cho từng trường hợp ứng dụng cụ thể. Lý do là vì người ta còn dựa khá nhiều vào kinh nghiệm chứ chưa

thực sự xác định được cụ thể mối liên quan giữa cấu trúc $\underline{f}(\underline{x},\underline{u})$ đã có của đối tượng với cấu trúc phải có của $\underline{l}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u},\underline{y})$

Phương pháp tìm kiếm $\underline{l}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u},\underline{y})$ thường được áp dụng là Lyapunov. Tức là từ một hàm $V(\underline{e})$ xác định dương được chọn trước, người ta xây dựng $\underline{l}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u},\underline{y})$ sao cho đạo hàm Lie của nó:

$$\frac{dV(\underline{e})}{dt} = \frac{\partial V(\underline{e})}{\partial \underline{e}}\left[\underline{f}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u}) - \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) + \underline{l}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u},\underline{y})\right]$$

xác định âm với mọi $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\underline{y}$. Ngay ở đây ta đã thấy, việc chọn trước hàm $V(\underline{e})$ có vai trò quyết định tới công việc tìm kiếm $\underline{l}(\underline{e}+\underline{x},\underline{u},\underline{y})$. Nếu "khéo" chọn $V(\underline{e})$, bài toán sẽ có nghiệm đơn giản.

Ví dụ 5.26: Mô hình chuẩn

Xét lớp các đối tượng có mô hình trạng thái dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{a}(\underline{u},\underline{y}) \\ \underline{y} = \underline{g}(C\underline{x}) \end{cases}$$

trong đó A, C là hai ma trận hằng quan sát được (thỏa mãn tiêu chuẩn Kalman, xem tài liệu [19]) và $\underline{a}(\underline{u},\underline{y})$, $\underline{g}(C\underline{x})$ là hai vector hàm phi tuyến, $\underline{u}$ là vector tín hiệu vào, $\underline{y}$ là vector tín hiệu ra. Giả thiết tiếp vector hàm $\underline{g}(C\underline{x})$ là nghịch đảo được, tức là tồn tại:

$$C\underline{x} = \underline{g}^{-1}(\underline{y})$$

Sử dụng vector hàm $\underline{l}(\tilde{\underline{x}},\underline{u},\underline{y}) = L(\underline{g}^{-1}(\underline{y}) - C\tilde{\underline{x}})$, tức là sử dụng bộ quan sát:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\tilde{\underline{x}} + \underline{a}(\underline{u},\underline{y}) + L(\underline{g}^{-1}(\underline{y}) - C\tilde{\underline{x}})$$

trong đó L là ma trận hằng cần xác định, thì phương trình sai số động học (5.93) sẽ là:

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = (A - LC)\underline{e}$$

Như vậy ta lại quay trở về bài toán thiết kế bộ quan sát trạng thái Luenberger quen biết của điều khiển tuyến tính. Ta chỉ cần xác định ma trận L sao cho tất cả các giá trị riêng λ_i của $(A-LC)$ nằm bên trái trục ảo. Chúng nằm càng xa trục ảo về phía trái, tốc độ hội tiến về $\underline{0}$ của $\underline{e}(t)$ càng nhanh, dẫn đến là thời gian cần thiết để quan sát sẽ càng ngắn. ❐

Ví dụ 5.27: Bộ quan sát Luenberger mở rộng

Xét lớp các đối tượng mô tả bởi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x}+\underline{a}(\underline{x})+\underline{b}(\underline{u},\underline{y}) \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

với A, C là hai ma trận hằng, được giả thiết là quan sát được, $\underline{u}$ là vector tín hiệu vào, $\underline{y}$ là vector tín hiệu ra và $\underline{a}(\underline{x})$, $\underline{b}(\underline{u},\underline{y})$ là những vector hàm phi tuyến.

Sử dụng vector hàm $\underline{l}(\tilde{\underline{x}},\underline{u},\underline{y})=L(\underline{y}-C\tilde{\underline{x}})$, tức là sử dụng bộ quan sát:

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\tilde{\underline{x}}+\underline{a}(\tilde{\underline{x}})+\underline{b}(\underline{u},\underline{y})$$

trong đó L là ma trận hằng cần xác định, thì phương trình sai số động học (5.93) sẽ là

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = (A-LC)\underline{e}+\underline{a}(\underline{e}+\underline{x})-\underline{a}(\underline{x})$$

Nếu như thành phần phi tuyến $\underline{a}(\underline{e}+\underline{x})-\underline{a}(\underline{x})$ còn bị chặn trên theo nghĩa

$$\|\underline{a}(\underline{e}+\underline{x})-\underline{a}(\underline{x})\|_\infty \leq \gamma$$

thì ta chỉ cần xác định ma trận L sao cho tất cả các giá trị riêng λ_i của $(A-LC)$ nằm đủ xa trục ảo về phía trái

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A-LC)\} < \gamma$$

là sẽ đạt được mục đích đặt ra của bài toán thiết kế:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{e}(t)=\underline{0}$$

❐

5.4.2 Quan sát theo nguyên lý trượt (sliding mode observer)

Xét lớp các hệ bất định có mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = Ax+\underline{a}(\underline{u},\underline{y})+B\underline{\theta}(\underline{x},\underline{u}) \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \tag{5.94}$$

có n biến trạng thái $\underline{x}$, m tín hiệu vào $\underline{u}$, và s tín hiệu ra $\underline{y}$, cặp ma trận (A,C) là quan sát được, q thành phần bất định $\underline{\theta}(\underline{x},\underline{u})$ là chặn trên theo $\underline{x}$, tức là tồn tại hàm $\rho(\underline{u})$ thỏa mãn:

$$\|\underline{\theta}(\underline{x},\underline{u})\| \leq \rho(\underline{u})$$

còn $\underline{a}(\underline{u},\underline{y})$ là vector hàm đã biết của mô hình.

Giả sử rằng bộ quan sát trạng thái được mô tả *một cách hình thức* bởi

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = A\,\underline{\tilde{x}} + \underline{a}(\underline{u},\underline{y}) + B\rho(\underline{u})\frac{B^T P(\underline{x}-\underline{\tilde{x}})}{\left\|B^T P(\underline{x}-\underline{\tilde{x}})\right\|} + L(\underline{y} - C\,\underline{\tilde{x}}) \tag{5.95}$$

trong đó $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận xác định dương được chọn tuỳ ý và L là ma trận còn cần phải được xác định. Ta gọi (5.95) là *hình thức* vì trong công thức trên nó có chứa trạng thái $\underline{x}$ không được phép.

Để khử trạng thái $\underline{x}$ không được phép trong (5.95), ta giải phương trình:

$$B^T P = EC \tag{5.96}$$

nhằm tìm nghiệm $E \in \mathbb{R}^{q\times s}$ rồi thay vào (5.95) sẽ được:

$$\frac{d\underline{\tilde{x}}}{dt} = A\,\underline{\tilde{x}} + \underline{a}(\underline{u},\underline{y}) + B\rho(\underline{u})\frac{E(\underline{y}-C\underline{\tilde{x}})}{\left\|E(\underline{y}-C\underline{\tilde{x}})\right\|} + L(\underline{y} - C\,\underline{\tilde{x}}) \tag{5.97}$$

Có thể thấy khi $s<n$ thì phương trình (5.96) có vô số nghiệm E.

Với bộ quan sát (5.97), phương trình sai số động học (5.93) sẽ là

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = (A-LC)\underline{e} - B\left[\underline{\rho}(\underline{u})\frac{E(\underline{y}-C\underline{\tilde{x}})}{\left\|E(\underline{y}-C\underline{\tilde{x}})\right\|} + \underline{\theta}(\underline{x},\underline{u})\right] \tag{5.98}$$

Từ phương trình sai số động học đó, ta thấy với hàm xác định dương

$$V(\underline{e}) = \underline{e}^T P\underline{e} \tag{5.99}$$

sẽ có

$$\frac{dV(\underline{e})}{dt} = -\underline{e}^T Q\underline{e} \underbrace{-2\rho(\underline{u})\,\|EC\underline{e}\| - 2(EC\underline{e})^T\underline{\theta}}_{\leq 0 \text{ vì } \rho \geq \|\underline{\theta}\|} \tag{5.100}$$

trong đó

$$-Q = (A-LC)^T P + P(A-LC) \tag{5.101}$$

Như vậy, (5.101) chính là phương trình Lyapunov (định lý 3.2) và nó khẳng định rằng khi $(A-LC)$ là ma trận bền, ta luôn tìm được ma trận P đối xứng xác định dương cho hàm xác định dương $V(\underline{e})$ theo công thức (5.99) để với nó có được đạo hàm (5.100) xác định âm và do đó cũng sẽ có được $\underline{e}(t) \to \underline{0}$.

Cuối cùng, nhìn lại mô hình (5.98) ta thấy ở trường hợp đặc biệt $s=1$, tức là khi hệ chỉ có một tín hiệu ra, hay $C=\underline{c}^T$ thì do bộ quan sát có chứa thành phần

$$\frac{E(y-\underline{c}^T\tilde{\underline{x}})}{\left\|E(y-\underline{c}^T\tilde{\underline{x}})\right\|} \cong \operatorname{sgn}(y-\underline{c}^T\tilde{\underline{x}})$$

tương tự như một điều kiện trượt với mặt trượt $y-c^T\tilde{\underline{x}}$, nên nó được gọi là *bộ quan sát trạng thái theo nguyên lý trượt* (sliding mode observer).

5.4.3 Bộ quan sát có hệ số khuếch đại lớn (high gain observer)

Xét lớp các hệ SISO có mô hình trạng thái:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{z}}{dt} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \varphi(\underline{z},u) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underline{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \varphi(\underline{z},u) \\ y = \underline{c}^T\underline{z} \end{cases}$$

với

$$\underline{c}^T = (1, 0, \ldots, 0).$$

Có thể thấy đây chính là mô hình trạng thái chuẩn (*normal form*) của các hệ affine có bậc tương đối $r=n$. Hơn nữa, cho mọi hệ phi tuyến có cấu trúc truyền ngược ta đều tìm được một phép đổi biến $\underline{z}=\underline{m}(\underline{x})$ để đưa nó về dạng trên (xem [21]).

Sử dụng bộ quan sát trạng thái

$$\frac{d\tilde{\underline{z}}}{dt} = A\,\tilde{\underline{z}} + \underbrace{\begin{pmatrix} h_1\varepsilon^{-1} \\ \vdots \\ h_n\varepsilon^{-n} \end{pmatrix}}_{\underline{h}} (y-\underline{c}^T\tilde{\underline{z}})$$

trong đó ε là hằng số đủ nhỏ cho trước và $h_1, \ldots, h_n$ là những hằng số còn phải được xác định, ta sẽ có phương trình động học mô tả sai lệch $\underline{e}=\tilde{\underline{z}}-\underline{z}$ như sau:

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = (A+\underline{h}\underline{c}^T)\underline{e} - \underline{b}\,\varphi(\underline{z},u) = \tilde{A}\,\underline{e} - \underline{b}\,\varphi(\underline{z},u)$$

trong đó

$$\tilde{A} = A + \underline{h}\underline{c}^T = \begin{pmatrix} -h_1\varepsilon^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -h_2\varepsilon^{-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -h_{n-1}\varepsilon^{-(n-1)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -h_n\varepsilon^{-n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Như vậy ta cần phải chọn các hằng số $h_1, \ldots, h_n$ sao cho

$$\det(sI - \tilde{A}) \equiv s^n + h_1 s^{n-1} + \cdots + h_n$$

là đa thức Hurwitz. Khi đó thì do

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Re}\{\lambda_i(\tilde{A})\} = -\infty$$

với λ_i là giá trị riêng của ma trận $\tilde{A}$, ta sẽ luôn tìm được một hằng số ε đủ nhỏ để tất cả các giá trị riêng λ_i của $\tilde{A}$ nằm đủ xa trục ảo về phía trái, làm cho sự ảnh hưởng của thành phần phi tuyến $\underline{b}\varphi(\underline{z}, u)$ tới tốc độ tiến về $\underline{0}$ của $\underline{e}(t)$ là bỏ qua được. Điều đó dẫn đến $\tilde{\underline{z}} \to \underline{z}$.

5.4.4 Nguyên lý tách (separation principle)

Để có được *bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra* cho đối tượng phi tuyến, nhằm mang lại cho nó một chất lượng mong muốn, chẳng hạn như ổn định, bền vững, tách nhiễu .... người ta thường tiến hành hai bước thiết kế như sau:

- Bước 1 là thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái trên cơ sở giả thiết rằng tất cả các biến trạng thái $\underline{x}$ của đối tượng là đo được. Kết quả của bước này là phải mang lại cho hệ thống tất cả mọi chất lượng mong muốn đã đặt ra.
- Bước 2 là thiết kế bộ quan sát trạng thái $\tilde{\underline{x}}(t)$ trên cơ sở đo tín hiệu vào, ra của đối tượng, nhằm cung cấp cho bộ điều khiển phản hồi trạng thái có từ bước 1 giá trị trạng thái xấp xỉ $\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t)$ của đối tượng.

Khi ghép bộ điều khiển phản hồi trạng thái và bộ quan sát trạng thái chung lại với nhau ta sẽ có được bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra.

Tuy nhiên, cũng cần phải nói thêm rằng khác với hệ tuyến tính, không phải lúc nào ta cũng có thể dễ dàng kết hợp những bộ quan sát trạng thái phi tuyến với bộ điều khiển phản hồi trạng thái như bộ điều khiển tuyến tính hóa chính xác, bộ điều khiển cuốn chiếu ... để có được một bộ điều khiển phản hồi đầu ra mà vẫn giữ được chất lượng giống như một mình bộ điều khiển phản hồi trạng thái đã mang đến cho hệ thống (ví dụ như

tính ổn định toàn cục, tách nhiễu ...). Lý do là tính không thỏa mãn nguyên lý tách (*separation principle*) của hệ phi tuyến mà điển hình, như ta đã thấy tại các mục trước, hệ gồm hai khâu phi tuyến ổn định mắc nối tiếp, chưa chắc đã ổn định.

Từ vấn đề đặt ra như vậy của nguyên lý tách, một câu hỏi đặt ra ở đây là những phương pháp thiết kế bộ quan sát trạng thái như thế nào thì có thể ghép chung được với bộ điều khiển phản hồi trạng thái đã có mà không làm thay đổi chất lượng của hệ thống. Cũng như vậy là những phương pháp thiết kế bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra như thế nào thì có thể tách được thành hai bài toán con là thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái và thiết kế bộ quan sát trạng thái, mà vẫn đạt được chất lượng điều khiển mong muốn.

Trong quá trình tìm câu trả lời, một hướng nghiên cứu mới đã xuất hiện (khoảng 10 năm gần đây) là điều khiển tách được (separation principle control). Đóng góp đầu tiên của hướng nghiên cứu mới này là kết quả của Teel và Praly [28]. Kết quả này cho thấy *nếu đối tượng là quan sát được hoàn toàn, đều* (uniformly completely observable, UCO) *và bộ điều khiển phản hồi trạng thái đã mang đến cho hệ thống chất lượng ổn định tiệm cận toàn cục* (global) *thì sẽ tồn tại bộ quan sát trạng thái để khi được ghép chung với bộ điều khiển phản hồi trạng thái đã có thành bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra, hệ sẽ có tính ổn định bán toàn cục* (semi-global), tức là ổn định với miền ổn định là tập kín, lớn tùy ý, song không phải là toàn bộ không gian trạng thái.

Theo định nghĩa về tính quan sát được (hoàn toàn) của một hệ phi tuyến thì khả năng xác định được $\underline{x}(0)=\underline{x}_0$ từ tín hiệu vào $\underline{u}(\tau)$ và tín hiệu ra $\underline{y}(\tau)$ trong khoảng thời gian $0<\tau\leq T$ được hiểu là sự tồn tại của một hàm $\Phi(\cdot)$ để có:

$$\underline{x}(t_0)=\Phi(\underline{u}(\tau),\underline{y}(\tau)) \qquad \text{với} \qquad 0<\tau\leq T$$

Nếu:

- T không được nhỏ hơn một hằng số cho trước thì hệ là *quan sát được*.
- T là tùy ý, chỉ cần lớn hơn 0 thì hệ được gọi là *quan sát được hoàn toàn*.

Trong kết luận của mình, Teel và Praly sử dụng tới khái niệm quan sát được hoàn toàn và đều (UCO). Khái niệm này là sự mở rộng của định nghĩa trên. Một hệ phi tuyến với vector trạng thái $\underline{x}(t)$, tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và tín hiệu ra $\underline{y}(t)$, được gọi là UCO nếu tồn tại hai số nguyên dương v, r và hàm $\Phi(\cdot)$ để có:

$$\underline{x}(t) = \Phi(\underline{u}(t), \ \ldots \ , \underline{u}^{(v)}(t), \ \underline{y}(t), \ \ldots \ , \underline{y}^{(r)}(t)).$$

Những hệ affine có bậc tương đối $r=n$ đều là UCO. Kết quả của Teel và Praly đã chỉ ra sự tồn tại của bộ quan sát trạng thái, song lại không nêu lên được phương pháp thiết kế nó. Cũng chính vì vậy, nó đã kích thích sự ra đời của một loạt các nghiên cứu điều

khiển tách được mà trọng tâm là các phương pháp ghép bộ điều khiển phản hồi trạng thái với một bộ quan sát trạng thái thích hợp. Điển hình có thể kể đến là công trình của Atassi và Khalil [1]. Nó chỉ rằng lớp các đối tượng quan sát được hoàn toàn và đều (UCO) mô tả bởi:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix}\underline{\xi}\\ \underline{\eta}\end{pmatrix}}_{\underline{x}}=\begin{pmatrix}A\underline{\xi}+B\underline{\phi}(\underline{\xi},\underline{\eta},\underline{u})\\ \underline{\varphi}(\underline{\xi},\underline{\eta},\underline{u})\end{pmatrix},\qquad \underbrace{\begin{pmatrix}\underline{y}_1\\ \underline{y}_2\end{pmatrix}}_{\underline{y}}=\begin{pmatrix}C\underline{\xi}\\ \underline{q}(\underline{\xi},\underline{\eta})\end{pmatrix},$$

$$\underline{u}\in\mathbf{R}^m,\ \underline{\xi}\in\mathbf{R}^n,\ \underline{\eta}\in\mathbf{R}^l,\ \underline{y}_1\in\mathbf{R}^p,\ \underline{y}_2\in\mathbf{R}^s,$$

trong đó

$$A=\mathrm{diag}(A_k)\in\mathbf{R}^{r\times r},\quad A_k=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1\\ 0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{r_i\times r_i}$$

$$B=\mathrm{diag}(B_k)\in\mathbf{R}^{r\times p},\quad B_k=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{r_i\times 1}$$

$$C=\mathrm{diag}(C_k)\in\mathbf{R}^{p\times r},\quad C_k=(1,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^{1\times r_i},$$

sẽ được ổn định bán toàn cục bằng bộ điều khiển phản hồi đầu ra, gồm *bộ điều khiển phản hồi trạng thái động không hoàn toàn*:

$$\begin{cases}\dfrac{d\underline{\vartheta}}{dt}=\underline{\mu}(\underline{\vartheta},\underline{\tilde{\xi}},\underline{y}_2)\\ \underline{u}=\underline{\gamma}(\underline{\vartheta},\underline{\tilde{\xi}},\underline{y}_2)\end{cases}$$

và *bộ quan sát trạng thái có hệ số khuếch đại lớn*:

$$\frac{d\underline{\tilde{\xi}}}{dt}=A\underline{\tilde{\xi}}+B\underline{\phi}(\underline{\tilde{\xi}},\underline{\eta},\underline{u})+H(\underline{y}_1-C\underline{\tilde{\xi}})$$

với

$$H=\mathrm{diag}(H_k),\qquad H_k=\begin{pmatrix}h_{1,k}\varepsilon^{-1}\\ \vdots\\ h_{r_i,k}\varepsilon^{-r_i}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{r_i\times 1}$$

$s^{r_i}+h_{1,k}s^{r_i-1}+\cdots+h_{1,r_i}$ là đa thức Hurwitz.

Hiện nay, hướng nghiên cứu này vẫn còn đang được tiếp tục. Chẳng hạn công trình của Maggiore, Passino [16], [17] và của Shim, Teel [24]. Nó mở rộng kết quả của Atassi và Khalil cho cả những đối tượng phi tuyến quan sát được hoàn toàn nhưng không đều, hoặc quan sát được nhưng không hoàn toàn.

Tài liệu tham khảo

[1] **Atassi, A.N. and Khalil, H.K.**: A Separation Principle for Stabilization of a Class of Nonlinear Systems. IEEE trans. on AC, Vol. 44, No. 9, pp. 1672–1687, September 1999.

[2] **Burmeister, H.L.**: Automatische Steuerung. VEB Verlag Technik Berlin, 1976.

[3] **Cyrot, D.N. and Fossard, A.J** (Chủ biên): Nonlinear Systems. Chapman & Hall, London, Weinheim, New York, Paris, Tokyo, Melbourge, Madras, 1997.

[4] **Doyle,J.; Francis, B. and Tannenbaum,A.**: Feedback Control Theory. Macmillan Publishing C0., 1990.

[5] **Engell, S.** (Chủ biên): Entwurf nichtlinearer Regelungen. Oldenburg Verlag, 1995.

[6] **Fichtenholz, G.M.**: Differential– und Intergralrechnung 1, 2, 3. Verlag Harri Deutsch, 1992.

[7] **Föllinger, O.**: Nichtlineare Regelungen, I, II, R. Oldenbourg Verlag, 1998.

[8] **Gantmacher, F.R.**: Matrizentheorie. Springer Verlag, 1966.

[9] **Isidori, A.**: Nonlinear Control Systems 1, 2 (xuất bản lần 3). Springer Verlag, 1999.

[10] **Katsuhito Ogata**: Modern Control Engineering. Prentice–Hall International Inc., 1995.

[11] **Kheir, N.,A.**: Systems Modeling and Computer Simulation. Marcel Deckker New York, 1996.

[12] **Krichman, M.; Sontag, E.D.; Wang,Y.**: Input–Output–to–State Stability. SIAM Journal on Control and Optimization. Vol. 39, pp. 1874–1928, 2001.

[13] **Krstic,M.; Kanellakopoulos,I.; Kokotovic,P.**: Nonlinear and Adaptive Control Design. John Wiley & Sohn Inc., 1995.

[14] **Liberzon, D. and Morse, S.**: Output–Input Stability and Minimum–Phase Nonlinear Systems. IEEE trans. on AC, Vol. 47, No. 3, pp. 422–436, March 2002.

[15] **Lunze, J.**: Regelungstechnik 1,2. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

[16] **Maggiore, M. and Passino, K.**: A Separation Principle for Non–UCO Systems. Submitted to IEEE trans. on AC, 2000.

[17] **Maggiore, M. and Passino, K.**: Output Feedback Control for stabilizable and incompletely Observable nonlinear Systems. Submitted to IEEE trans. on AC, 2001.

[18] **Nijmeijer, H. and Schaft, A.**: Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer Verlag, 1990.

[19] **Phước, N.D**: Lý thuyết điều khiển tuyến tính. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2002.

[20] **Minh, P.X. và Phước, N.D.** : Lý thuyết điều khiển mờ (xuất bản lần 3). Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2002.

[21] **Phước, N.D.**: Lý thuyết điều khiển nâng cao. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2005.

[22] **Phước, N.D. và Minh, P.X.**: Hệ phi tuyến (xuất bản lần 2). Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2000.

[23] **Phước, N.D. và Minh, P.X.**: Nhận dạng hệ thống điều khiển. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2001.

[24] **Shim, H. and Teel, A.R.**: Further Results on the Nonlinear Separation Principle: The general asymptotically controllable's Case. Proc. of IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design, pp 1543–1648, 2001.

[25] **Sontag, E. D.**: Mathematical Control Theory. Springer Verlag New York, 1990.

[26] **Sontag, E. D. and Wang, Y**: New Characterizations of Input to State Stability. IEEE trans. on AC. Vol. 41, pp. 1283–1294, 1996.

[27] **Sastry, S**: Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. Springer Verlag 1999.

[28] **Teel, A. and Praly, L.**: Global Stabilization and Observability imply Semi-global Stability by Output Feedback. Systems & Control. Letters, Vol 22, pp. 313–325, 1995.

[29] **Unbehauen, R.**: Systemtheorie (xuất bản lần 6). R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1993.

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

50 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

1956 - 2006