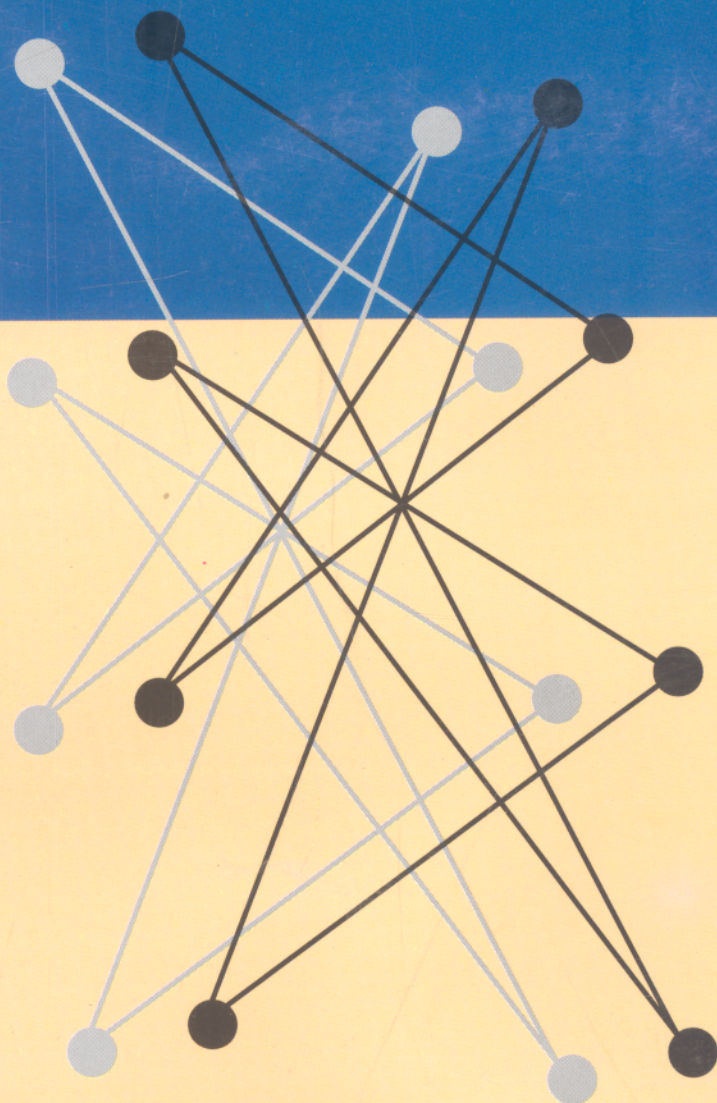


Cơ sở lý thuyết TRUYỀN TIN

TẬP HAI

ĐẶNG VĂN CHUYẾT
NGUYỄN TUẤN ANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

ĐẶNG VĂN CHUYẾT (chủ biên) – NGUYỄN TUẤN ANH

CƠ SỞ LÝ THUYẾT TRUYỀN TIN

Tập hai

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

008 86

Mục lục

Lời nói đầu	3
9 KÊNH VÀ THÔNG LƯỢNG CỦA KÊNH	9
9-1 Mô hình kênh và thông lượng kênh	9
9-1-1 Các mô hình kênh	10
9-1-2 Thông lượng kênh	12
9-1-3 Sử dụng các tín hiệu trực giao trong truyền thông	16
9-1-4 Hàm an toàn của kênh	18
9-2 Mã hóa ngẫu nhiên	19
9-2-1 Mã hóa ngẫu nhiên dựa vào tín hiệu mã nhị phân M mức	19
9-2-2 Mã hóa ngẫu nhiên dựa vào tín hiệu đa biên độ M mức	23
9-2-3 So sánh R_0^* với thông lượng của kênh AWGN	25
9-3 Thiết kế hệ thống truyền tin dựa vào tốc độ giới hạn	26
10 MÃ HÓA KÊNH	32
10-1 Mã khối tuyến tính	32
10-1-1 Ma trận sinh và ma trận kiểm tra parity	34
10-1-2 Một số loại mã khối tuyến tính	36
10-1-3 Mã vòng	37
10-1-4 Giải mã xác định mềm tối ưu đối với mã khối tuyến tính	48
10-1-5 Giải mã xác định cứng	52
10-1-6 So sánh về hiệu quả của hai phương pháp giải mã	57
10-1-7 Giới hạn về khoảng cách tối thiểu của mã khối tuyến tính	61
10-1-8 Mã khối không nhị phân và mã khối ghép	62
10-1-9 Ghép mã số liệu đối với kênh có nhiễu chùm	65
10-2 Mã chập	65
10-2-1 Hàm truyền của mã chập	68
10-2-2 Giải mã tối ưu mã chập-Thuật toán Viterbi	71
10-2-3 Xác suất lỗi của giải mã xác định mềm	73
10-2-4 Xác suất lỗi của giải mã xác định cứng	74
10-2-5 Các tính chất về khoảng cách của mã chập	76
10-2-6 Mã kép k không nhị phân và mã ghép	79
10-2-7 Thuật toán Fano	81
10-2-8 Một số vấn đề trong thực tế của việc áp dụng mã chập	83
10-3 Mã điều chế cho kênh có dải tần hạn chế	85

11 TÍN HIỆU TRÊN KÊNH CÓ BẢNG TẦN HỮU HẠN	93
11-1 Đặc trưng của kênh có bảng tần hữu hạn	93
11-2 Tín hiệu cho kênh có dải tần hữu hạn	95
11-2-1 Thiết kế tín hiệu có độ rộng phổ hữu hạn để không có ISI	96
11-2-2 Thiết kế tín hiệu có độ rộng phổ hữu hạn để ISI điều khiển được	99
11-2-3 Xác định số liệu trong trường hợp ISI điều khiển được	102
11-2-4 Tín hiệu cho kênh có suy hao	105
11-3 Xác suất lỗi khi sử dụng tín hiệu PAM	107
11-3-1 Xác suất lỗi khi không có ISI	107
11-3-2 Xác suất lỗi khi sử dụng tín hiệu đáp ứng từng phần	108
11-3-3 Xác suất lỗi trên kênh có suy hao	109
11-4 Mã điều chế làm nhọn phổ tín hiệu	110
12 TRUYỀN TIN QUA KÊNH TUYẾN TÍNH CÓ BẢNG TẦN HỮU HẠN	115
12-1 Bộ thu tối ưu cho kênh có ISI và nhiễu AWGN	115
12-1-1 Bộ thu ML tối ưu	115
12-1-2 Mô hình rời rạc cho kênh ISI	117
12-1-3 Thuật toán Viterbi cho mô hình rời rạc tương đương có nhiễu trắng	119
12-1-4 Hiệu quả của ước lượng ML đối với kênh ISI	121
12-2 Cân bằng tuyến tính	127
12-2-1 Tiêu chuẩn suy hao dinh	128
12-2-2 Tiêu chuẩn trung bình bình phương sai số	131
12-2-3 Hiệu quả của bộ ước lượng MSE	134
12-2-4 Bộ cân bằng FS	136
12-3 Cân bằng hồi tiếp	139
12-3-1 Tối ưu hệ số	139
12-3-2 Hiệu quả của bộ cân bằng hồi tiếp	140
12-3-3 Bộ cân bằng hồi tiếp dự đoán	141
12-4 Cân bằng tuyến tính thích nghi	143
12-4-1 Thuật toán ZF	143
12-4-2 Thuật toán LMS	145
12-4-3 Tính hội tụ của thuật toán LMS	147
12-4-4 MSE phụ trội trong ước lượng gradient	148
12-4-5 Bộ cân bằng tuyến tính băng tần cơ sở và thông dải	149
12-5 Cân bằng hồi tiếp thích nghi	149
12-6 Bộ ước lượng kênh thích nghi đối với xác định ML	152
12-7 Thuật toán bình phương tối thiểu	153
12-7-1 Thuật toán bình phương tối thiểu (Kalman)	155
12-7-2 Dự đoán tuyến tính và bộ lọc Lattice	158
12-8 Cân bằng tự khôi phục	160
12-8-1 Cân bằng tự khôi phục trên tiêu chuẩn ML	161
12-8-2 Thuật toán gradient ngẫu nhiên	163
12-8-3 Thuật toán tự cân bằng dựa trên thống kê bậc cao	166
13 HỆ THỐNG TRUYỀN TIN NHIỀU KÊNH VÀ NHIỀU SÓNG MANG	169
13-1 Hệ thống truyền tin nhiều kênh trong kênh AWGN	169
13-1-1 Tín hiệu nhị phân	170
13-1-2 Tín hiệu trực giao M mức	171
13-2 Hệ thống truyền tin nhiều sóng mang	173
13-2-1 Thông lượng kênh tuyến tính không lý tưởng	173
13-2-2 Hệ thống nhiều sóng mang sử dụng FFT	174

14 HỆ THỐNG TRUYỀN TIN DÙNG TÍN HIỆU TRÁI PHỔ	177
14-1 Mô hình hệ thống truyền tin dùng tín hiệu trái phổ	178
14-2 Tín hiệu trái phổ DS	179
14-2-1 Hiệu quả bộ giải mã	180
14-2-2 Một số ứng dụng của tín hiệu trái phổ DS	188
14-2-3 Ảnh hưởng loại xung trong tín hiệu trái phổ DS	191
14-2-4 Tạo dây PN	192
14-3 Tín hiệu trái phổ FH	194
14-3-1 Hiệu quả của tín hiệu trái phổ FH trong kênh AWGN	195
14-3-2 Hiệu quả của tín hiệu trái phổ khi có ảnh hưởng từng phần trên kênh	197
14-4 Đồng bộ trong hệ thống trái phổ	201
15 TRUYỀN TIN QUA KÊNH CÓ FADING NHIỀU ĐƯỜNG	208
15-1 Đặc trưng của kênh có fading nhiều đường	208
15-1-1 Hàm tương quan của kênh và phổ công suất	210
15-1-2 Mô hình thống kê của kênh có fading	213
15-2 Lựa chọn mô hình kênh theo đặc điểm tín hiệu	214
15-3 Kênh fading chậm không chọn lọc theo tần số	216
15-4 Các kỹ thuật chống fading	218
15-4-1 Tín hiệu nhị phân	218
15-4-2 Tín hiệu đa pha	223
15-4-3 Tín hiệu trực giao M mức	224
15-5 Kênh fading chậm có chọn lọc	230
15-5-1 Mô hình kênh kiểu dây trễ (Tapped-Delay-Line)	230
15-5-2 Bộ giải điều chế RAKE	232
15-5-3 Hiệu quả bộ thu RAKE	233
15-6 Mã hóa trong kênh có fading	238
15-6-1 Xác suất lỗi của giải mã xác định mềm cho mã khối nhị phân tuyến tính	240
15-6-2 Xác suất lỗi của giải mã xác định cứng cho mã khối nhị phân tuyến tính	241
15-6-3 Hiệu quả của mã chập cho kênh fading Raleigh	242

Lời nói đầu

Kể từ những năm 1970, sự thâm nhập lẫn nhau của hai lĩnh vực khoa học máy tính và truyền thông đã làm thay đổi sâu sắc các lĩnh vực công nghệ và sản xuất, và kết quả tất yếu là một ngành công nghiệp máy tính-truyền thông (Computer-Communication) ra đời. Chính nhờ sự hòa trộn mang tính cách mạng này, rất nhiều lĩnh vực khoa học, công nghệ đã có những cơ sở để phát triển mạnh mẽ. Trong bối cảnh của sự phát triển bùng nổ này, những hiểu biết về lý thuyết thông tin (Information Theory), về truyền thông ngày càng quan trọng và cần được xem xét trong hoàn cảnh mới.

Qua nhiều năm làm công tác giảng dạy, với tham vọng có một tài liệu làm giáo trình cho sinh viên chuyên ngành Điện tử-Viễn thông và Công nghệ Thông tin, tài liệu tham khảo cho các kỹ sư thuộc những chuyên ngành trên, chúng tôi cố gắng biên soạn cuốn sách này.

Chúng tôi giả thiết rằng các độc giả xem cuốn sách này là những người đã có cơ sở nhất định về Giải tích, về Đại số tuyến tính và Xác suất. Những cơ sở toán học theo chúng tôi là hết sức quan trọng và được dùng trong suốt cả cuốn sách hoặc từng phần sẽ được chúng tôi trình bày trong cuốn sách này. Cơ sở toán học của cuốn sách này là xác suất và quá trình ngẫu nhiên với những luật phân bố xác suất hết sức quan trọng trong việc trình bày các vấn đề của cuốn sách.

Cuốn sách này được chia làm hai tập. Sau khi trình bày chung về hệ thống truyền tin và các khái niệm chung liên quan, chúng tôi sẽ trình bày các vấn đề của cuốn sách theo trật tự là các vấn đề chung trước, các vấn đề cụ thể sau. Khi trình bày các vấn đề chung, chúng tôi sẽ theo trật tự: nguồn tin trước, kênh tin sau. Các vấn đề phối hợp giữa nguồn với kênh sẽ được xét sau khi đã có những hiểu biết về nguồn và kênh.

Cấu trúc cuốn sách như sau:

Chương 1 : **Những khái niệm chung.** Chương này giới thiệu những khái niệm cơ bản và các vấn đề cơ bản trong lý thuyết truyền tin.

Chương 2 : **Xác suất và quá trình ngẫu nhiên,** trong chương này ta xây dựng những cơ sở toán học cần thiết cho việc khảo sát các hệ thống truyền tin.

Chương 3 : **Thông tin và lượng tin,** trình bày vấn đề định lượng thông tin của các nguồn tin.

Chương 4 : **Mã hiệu.** Trong chương này ta tập trung vào các khái niệm và định nghĩa về mã, các điều kiện và yêu cầu đối với mã hiệu.

Chương 5 : **Mã hóa nguồn,** nghiên cứu vấn đề mã hóa nguồn trên cơ sở mô hình toán học của nguồn và các khái niệm về lượng tin đã xét trong chương 3.

Chương 6 : **Tín hiệu và hệ thống truyền tin.** Chương này trình bày các tín hiệu và hệ thống thường gặp khi truyền thông tin qua kênh truyền thông cùng việc biểu diễn các tín hiệu điều chế và các đặc điểm về phổ của chúng.

Chương 7 : **Cấu trúc thu tối ưu cho kênh có nhiễu cộng gaussian,** nghiên cứu việc thiết kế và đánh giá độ hiệu quả của các bộ thu tối ưu cho các phương pháp điều chế trong kênh có nhiễu cộng gaussian.

Chương 8 : **Đồng bộ.** Chương này nghiên cứu các phương pháp đồng bộ vật mang và đồng bộ ký hiệu ở đầu thu.

Chương 9 : **Kênh và thông lượng của kênh,** trình bày về thông lượng của một số mô hình kênh và vấn đề mã hóa ngẫu nhiên.

Chương 10 : **Mã hóa kênh.** Chương này giới thiệu về mã hóa và giải mã đối với hai loại mã là mã khối và mã chập.

Chương 11 : **Tín hiệu trên kênh có băng tần hữu hạn.** Chương này tập trung vào việc thiết kế tín hiệu cho các kênh có băng tần hữu hạn và vấn đề làm nhọn phổ tín hiệu.

Chương 12 : **Truyền tín qua kênh tuyến tính có băng tần hữu hạn.** Chương này tìm hiểu các kỹ thuật giải điều chế và xác định tín hiệu bị ảnh hưởng chéo trong quá trình truyền.

Chương 13 : **Hệ thống truyền tín nhiều kênh và nhiều sóng mang,** trình bày các kỹ thuật điều chế dùng nhiều vật mang và truyền trong nhiều kênh.

Chương 14 : **Hệ thống truyền tín dùng tín hiệu trải phổ.** Chương này trình bày các vấn đề về tín hiệu và hệ thống trải phổ và các ứng dụng thực tế.

Chương 15 : **Truyền tín qua kênh có fading nhiều đường,** trình bày về truyền thông qua các kênh có fading. Việc thiết kế tín hiệu, cấu trúc thu và hiệu quả của của các bộ thu cho kênh có fading là nội dung của chương này.

Do hạn chế về thời gian, lần đầu tiên biên soạn cuốn sách này, chúng tôi không tránh khỏi các thiếu sót, rất mong các độc giả thông cảm và góp ý để cho những lần biên soạn sau sẽ tốt hơn.

Cuối cùng, xin lưu ý độc giả về cách đánh số các tiêu đề để tiện cho việc tra cứu, ví dụ 3-2 chỉ mục lớn hai trong chương 3; 3-2-4 chỉ mục bốn của mục lớn hai trong chương 3. Các công thức và hình vẽ được đánh số bằng ba số, số đầu chỉ chương, số thứ hai chỉ mục lớn, số thứ ba chỉ thứ tự của công thức hay hình vẽ trong mục đó.

Chúng tôi chân thành cảm ơn ông Nguyễn Thúc Hải, bà Hồ Anh Túy đã dành thời gian đóng góp những ý kiến quý báu cho chúng tôi khi biên soạn cuốn sách này.

Các tác giả

Chương 9

KÊNH VÀ THÔNG LƯỢNG CỦA KÊNH

Trong chương 7, chúng ta đã xét tới vấn đề điều chế số bằng việc sử dụng $M = 2^k$ tín hiệu, mỗi tín hiệu mang k bit thông tin, trong đó một vài phương pháp điều chế có hiệu quả hơn một số phương pháp khác. Đặc biệt, ta đã biết rằng bằng cách sử dụng tín hiệu trực giao, ta có thể làm cho xác suất xác định sai nhỏ tùy ý khi $M \rightarrow \infty$ nếu SNR từng bit $\gamma_b \geq -1,6dB$. Ta có thể truyền tin ở tốc độ bằng thông lượng trên kênh có nhiễu cộng gaussian trắng với giới hạn là hệ số mở rộng dải thông $B_e = W/R \rightarrow \infty$. Nhưng thông thường người ta không muốn như vậy bởi vì B_e tăng theo hàm mũ của k và dẫn tới sử dụng dải thông của kênh không hiệu quả.

Trong chương này và chương sau, ta xét các tín hiệu tạo ra bởi các dãy nhị phân hoặc không phải nhị phân. Kết quả là các tín hiệu tạo ra được đặc trưng bởi hệ số mở rộng dải thông tăng tuyến tính theo k . Như vậy là các tín hiệu mã có dải tần hiệu quả lớn hơn các tín hiệu trực giao M mức. Chúng ta còn thấy rằng các tín hiệu mã không chỉ có hiệu quả hơn ở các ứng dụng công suất hữu hạn khi $R/W < 1$ mà còn ở các hệ thống có dải tần hữu hạn khi $R/W > 1$.

9-1 Mô hình kênh và thông lượng kênh

Trong mô hình một hệ thống truyền thông, ta thấy rằng bộ phát gồm khối rời rạc hóa đầu vào, khối mã hóa đầu vào đã rời rạc và khối điều chế. Chức năng của khối mã hóa kênh rời rạc là thêm vào dãy thông tin nhị phân một số thông tin phụ (còn gọi là thông tin điều khiển) để phía thu sử dụng để khắc phục các ảnh hưởng trên đường truyền. Quá trình mã hóa lấy từng khối k bit thông tin và chuyển thành dãy duy nhất n bit, gọi là từ mã. Lượng thông tin dư thừa trong quá trình mã hóa số liệu được đo bằng tỷ số n/k và k/n gọi là tốc độ mã.

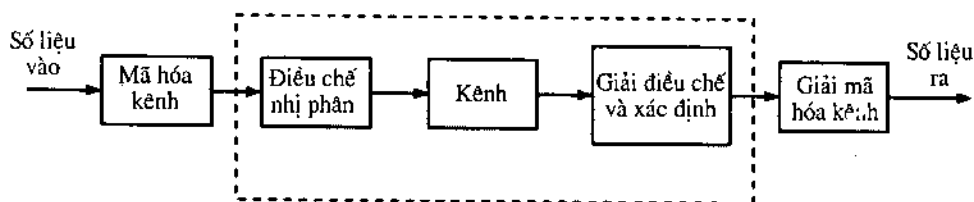
Dãy thông tin nhị phân ở đầu ra của bộ mã hóa kênh sẽ vào bộ điều chế. Bộ điều chế chuyển các bit thành một trong hai tín hiệu hay chuyển từng khối q bit thành một trong $M = 2^q$ tín hiệu.

Ở đầu thu của hệ thống truyền thông, bộ giải điều chế xử lý các ảnh hưởng trên kênh và chuyển tín hiệu nhận được thành một số hay một vectơ. Bộ xác định sẽ quyết định bit thông tin tương ứng là 0 hay 1. Khi đó ta nói rằng bộ xác định đã thực hiện một quyết định cứng (hard decision). Nếu xét trên quan điểm lượng tử thì bộ xác định sẽ lượng tử số liệu nhận được thành $Q \geq 2$ mức (bộ xác định Q mức). Nếu tín hiệu là M mức và $Q > M$, ta nói rằng bộ xác định đã thực hiện một quyết định mềm (soft decision). Đầu ra của bộ xác định đưa vào đầu vào của bộ giải mã hóa kênh, bộ này có nhiệm vụ là dựa vào thông tin dư thừa để khắc phục các ảnh hưởng trên kênh.

9-1-1 Các mô hình kênh

Phần này sẽ trình bày các mô hình kênh hay được sử dụng để thiết kế mã. Kênh đơn giản nhất là kênh nhị phân đối xứng (Binary Symetric Channel-BSC), tương ứng với $M = 2$ và bộ xác định thực hiện quyết định cứng.

Kênh nhị phân đối xứng Xét kênh có nhiều cộng và bộ điều chế, giải điều chế, xác định là một phần của kênh. Nếu bộ điều chế sử dụng các tín hiệu nhị phân và bộ xác định thực hiện quyết định cứng thì kênh phức hợp trên hình 9-1-1 có dây thông tin vào là nhị phân rời rạc và dây thông tin ra cũng là dây thông tin nhị phân rời rạc. Kênh như vậy được đặc trưng bởi tập các giá trị đầu vào $X = \{0, 1\}$ và tập hợp các giá trị đầu ra $Y = \{0, 1\}$ và tập hợp các xác suất có điều kiện liên hệ giữa các ký hiệu trên đầu vào và đầu ra.

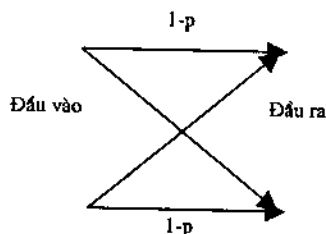


Hình 9-1-1: Kênh phức hợp đầu vào và đầu ra rời rạc

Nếu nhiễu trên kênh và các ảnh hưởng khác tạo ra các sai lầm độc lập thống kê với xác suất trung bình p thì:

$$\begin{aligned} P(Y = 0|X = 1) &= P(Y = 1|X = 0) = p \\ P(Y = 1|X = 1) &= P(Y = 0|X = 0) = 1 - p \end{aligned} \quad (9-1-1)$$

Như vậy chúng ta đã chuyển một hệ thống gồm bộ điều chế nhị phân, kênh tín hiệu, bộ giải điều chế và xác định tín hiệu thành một kênh rời rạc theo thời gian tương đương được biểu diễn bằng sơ đồ khối như trên hình 9-1-2. Kênh như thế gọi là kênh nhị phân đối xứng. Do các bit đầu ra chỉ phụ thuộc vào các bit đầu vào tương ứng nên kênh là không nhớ.



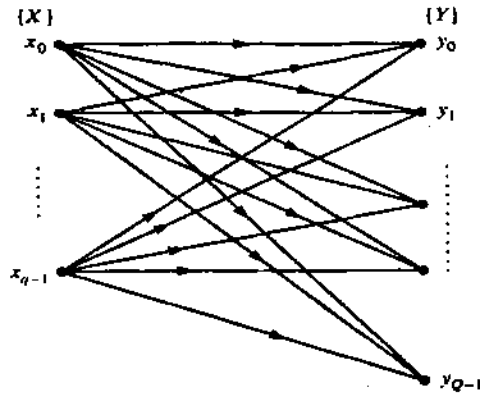
Hình 9-1-2: Kênh nhị phân đối xứng

Các kênh rời rạc không nhớ Kênh BSC là một trường hợp đặc biệt trong số các kênh có đầu vào và đầu ra rời rạc. Giả thiết đầu ra của bộ mã hóa kênh là các ký hiệu q mức, tức là đầu vào của bộ điều chế là tập hợp $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ và ở đầu ra của bộ xác định là các ký hiệu Q mức, với $Q \geq M = 2^n$. Nếu kênh và bộ điều chế là không nhớ thì quan hệ giữa đầu ra và đầu vào của kênh phức hợp được biểu diễn bởi qQ xác suất có điều kiện:

$$P(Y = y_i|X = x_j) \equiv P(y_i|x_j) \quad (9-1-2)$$

với $i = 0, 1, \dots, Q - 1$ và $j = 0, 1, \dots, q - 1$. Kênh như vậy gọi là kênh rời rạc không nhớ (Discret Memoryless Channel-DMC), như trên hình 9-1-3. Như vậy nếu đầu vào của kênh DMC là dãy n ký hiệu $u_1, u_2, \dots, u_n$ thuộc X và dãy ra tương ứng $v_1, v_2, \dots, v_n$ thuộc Y thì:

$$P(Y_1 = v_1, Y_2 = v_2, \dots, Y_n = v_n | X_1 = u_1, X_2 = u_2, \dots, X_n = u_n) = \prod_{k=1}^n P(Y = v_k | X = u_k) \quad (9-1-3)$$



Hình 9-1-3: Kênh rời rạc q đầu vào, Q đầu ra.

Tổng quát, các xác suất có điều kiện $\{P(y_i|x_j)\}$ đặc trưng cho kênh DMC tạo thành ma trận $\mathbf{P} = [p_{ji}]$ với $p_{ji} \equiv P(y_i|x_j)$. $\mathbf{P}$ gọi là ma trận xác suất chuyển đổi của kênh.

Kênh đầu vào rời rạc, đầu ra liên tục Giả thiết đầu vào của bộ điều chế là các ký hiệu trong tập hợp hữu hạn $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ và đầu ra của bộ xác định là không lượng tử ($Q = \infty$). Như vậy đầu vào của bộ giải mã kênh nhận các giá trị trên trục thực ($Y = \{-\infty, \infty\}$). Ta định nghĩa một kênh phức hợp không nhớ rời rạc theo thời gian đặc trưng bởi đầu vào X rời rạc, đầu ra Y liên tục và tập hợp các hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện:

$$p(y|X = x_k), k = 0, 1, \dots, q - 1$$

Kênh quan trọng nhất trong số các kênh thuộc loại này là kênh AWGN, với:

$$Y = X + G \quad (9-1-4)$$

ở đây G là biến ngẫu nhiên gaussian giá trị trung bình bằng 0 và sai phương σ^2 , $X = x_k, k = 0, 1, \dots, q - 1$. Với $X = x_k$, Y là biến ngẫu nhiên có giá trị trung bình x_k và sai phương σ^2 . Như vậy:

$$p(Y|X = x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-x_k)^2/2\sigma^2} \quad (9-1-5)$$

Với mỗi dãy vào X_i , dãy ra tương ứng là:

$$Y_i = X_i + G_i \quad (9-1-6)$$

Điều kiện để kênh là không nhớ là:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n | X_1 = u_1, X_2 = u_2, \dots, X_n = u_n) = \prod_{i=1}^n p(y_i | X_i = u_i) \quad (9-1-7)$$

Kênh tương tự Chúng ta có thể tách bộ điều chế và giải điều chế khỏi kênh vật lý và xét mô hình kênh với tín hiệu vào và tín hiệu ra là liên tục. Giả thiết kênh có dải thông W và đáp ứng tần số lý tưởng $C(f) = 1$ trong dải thông, tín hiệu vào bị ảnh hưởng bởi nhiễu cộng gaussian trắng. Giả thiết tín hiệu vào $x(t)$ là tín hiệu có dải tần hữu hạn và tín hiệu ra tương ứng là $y(t)$, thế thì:

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (9-1-8)$$

với $n(t)$ là một thể hiện cụ thể của quá trình nhiễu cộng. Ta biểu diễn $x(t), y(t), n(t)$ thành tổ hợp tuyến tính của một tập hợp đầy đủ các hàm trực giao như sau:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_i y_i f_i(t) \\ x(t) &= \sum_i x_i f_i(t) \\ n(t) &= \sum_i n_i f_i(t) \end{aligned} \quad (9-1-9)$$

ở đây $\{y_i\}, \{x_i\}$ và $\{n_i\}$ là tập hợp các hệ số trong khai triển, có nghĩa là:

$$y_i = \int_0^T y(t) f_i^* dt = \int_0^T [x(t) + n(t)] f_i^*(t) dt = x_i + n_i \quad (9-1-10)$$

Các hàm $\{f_i(t)\}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\int_0^T f_i(t) f_j^*(t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (9-1-11)$$

Do nhiễu trắng là gaussian nên mọi tập hợp đầy đủ các hàm trực giao đều có thể sử dụng trong khai triển 9-1-9. Bây giờ chúng ta có thể sử dụng các hệ số trong khai triển để đặc trưng cho kênh. Do $y_i = x_i + n_i$ với n_i là biến ngẫu nhiên gaussian nên:

$$p(y_i | x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-(y_i - x_i)^2 / 2\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9-1-12)$$

Do các hàm $\{f_i(t)\}$ trong khai triển là trực chuẩn nên $\{n_i\}$ là không tương quan. Do chúng là các biến ngẫu nhiên gaussian nên chúng độc lập thống kê. Do đó:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_N | x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N p(x_i | y_i) \quad (9-1-13)$$

với mọi N . Như vậy kênh tương tự đã được chuyển thành kênh rời rạc tương đương được đặc trưng bởi xác suất có điều kiện trong 9-1-12.

Khi nhiễu cộng là gaussian trắng có phổ mật độ công suất $\frac{1}{2}N_0$, sai phương $\sigma_i^2 = \frac{1}{2}N_0$ với mọi i thì $x(t)$ và $y(t)$ có thể được lấy mẫu theo tốc độ Nyquist là $2W$ mẫu/s, như vậy $x_i = x(i/2W)$ và $y_i = y(i/2W)$. Do nhiễu là trắng nên các mẫu của nhiễu là độc lập thống kê. Như vậy 9-1-12 và 9-1-13 đặc trưng thống kê cho các mẫu tín hiệu.

Việc lựa chọn mô hình kênh phụ thuộc vào mục tiêu nghiên cứu của chúng ta. Nếu chúng ta quan tâm tới việc thiết kế là phân tích độ hiệu quả của bộ mã hóa và giải mã hóa kênh rời rạc thì ta xét mô hình kênh trong đó bộ điều chế và giải điều chế là một phần của kênh phức hợp. Nếu ta muốn thiết kế và phân tích độ hiệu quả của các bộ điều chế và giải điều chế số thì ta sử dụng mô hình kênh là tương tự.

9-1-2 Thông lượng kênh

Giả thiết ta có kênh DMC với bộ kí hiệu vào $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ và bộ kí hiệu ra $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{q-1}\}$ và tập hợp các xác suất chuyển đổi $P(y_i | x_j)$. Giả thiết kí hiệu x_j được phát đi và phía thu nhận được

KÊNH VÀ THÔNG LƯỢNG CỦA KÊNH

13

kí hiệu y_i thì lượng tin tương hỗ được tính là $\log[P(y_i|x_j)/P(y_i)]$ với:

$$P(y_i) \equiv P(Y = y_i) = \sum_{k=0}^{q-1} P(x_k)P(y_i|x_k) \quad (9-1-14)$$

Lượng thông tin tương hỗ trung bình giữa đầu ra Y và đầu vào X là:

$$I(X; Y) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{Q-1} P(x_j)P(y_i|x_j) \log \frac{P(y_i|x_j)}{P(y_i)} \quad (9-1-15)$$

Tính chất của kênh xác định bởi xác suất chuyển đổi $P(y_j|x_i)$ nhưng xác suất các kí hiệu vào được xác định bởi bộ mã hóa kênh. Giá trị cực đại của $I(X; Y)$ theo phân bố xác suất các kí hiệu đầu vào $P(x_j)$ là một giá trị chỉ phụ thuộc vào tính chất của kênh DMC. Ta cũng gọi giá trị đó là thông lượng của kênh và cũng kí hiệu là C . Như vậy:

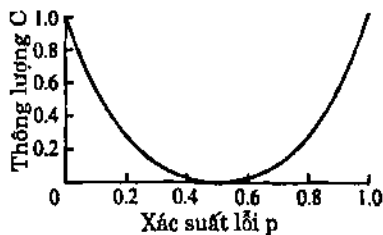
$$C = \max_{P(x_j)} I(X; Y) = \max_{P(x_j)} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{Q-1} P(x_j)P(y_i|x_j) \log \frac{P(y_i|x_j)}{P(y_i)} \quad (9-1-16)$$

Đơn vị của C là bit trên một kí hiệu đưa vào kênh (ký hiệu là bit/kí hiệu). Nếu một kí hiệu đưa vào kênh trong τ_s giây, thì thông lượng của kênh là bit/s.

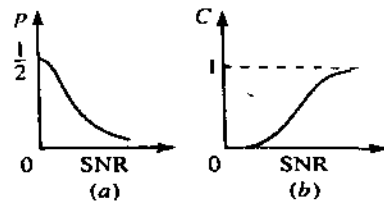
Ví dụ 9-1-1 Cho một kênh BSC với xác suất chuyển đổi $P(0|1) = P(1|0) = p$, lượng tin tương hỗ trung bình cực đại khi xác suất các kí hiệu 0 và 1 là đồng đều $P(0) = P(1) = 1/2$. Khi đó thông lượng của kênh BSC là:

$$C = p \log 2p + (1-p) \log 2(1-p) = 1 - H(p) \quad (9-1-17)$$

Biểu diễn C theo p trên hình 9-1-4. Khi $p = 0$ thì thông lượng của kênh là 1 bit/kí hiệu. Khi $p = \frac{1}{2}$ lượng tin tương hỗ trung bình bằng 0 hay thông lượng của kênh bằng 0. Khi $\frac{1}{2} < p < 1$ ta có thể đảo vị trí các ký hiệu 0 và 1 ở đầu ra của kênh, như vậy C là đối xứng qua điểm $p = \frac{1}{2}$. Như ta đã biết, p biến thiên đơn điệu theo SNR như trên hình 9-1-5(a). Khi vẽ C theo SNR thì C đơn điệu tăng theo SNR (hình 9-1-5).



Hình 9-1-4: Thông lượng của kênh BSC theo p



Hình 9-1-5: Biểu diễn thông lượng của kênh theo SNR

Xét kênh AWGN không nhớ rời rạc theo thời gian được biểu diễn bởi các hàm mật độ phân bố xác suất chuyển đổi có điều kiện như (9-1-5). Lượng tin tương hỗ trung bình giữa đầu vào $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ với đầu ra $Y = \{-\infty, \infty\}$ hay thông lượng của kênh là:

$$C = \max_{P(x_i)} \sum_{i=0}^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|x_i)P(x_i) \log_2 \frac{p(y|x_i)}{p(y)} dy \quad (9-1-18)$$

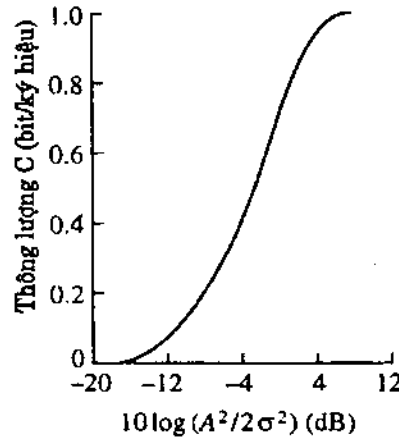
với

$$p(y) = \sum_{k=0}^{q-1} p(y|x_k)P(x_k) \quad (9-1-19)$$

Ví dụ 9-1-2 Xét một kênh AWGN không nhớ đầu vào nhị phân với hai kí hiệu $X = A$ và $X = -A$. Lượng tin tương hỗ trung bình được cực đại hóa khi $P(X = A) = P(X = -A) = \frac{1}{2}$. Như vậy thông lượng của kênh theo đơn vị bit/kí hiệu là:

$$C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|A) \log_2 \frac{p(y|A)}{p(y)} dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|-A) \log_2 \frac{p(y|-A)}{p(y)} dy \quad (9-1-20)$$

Hình 9-1-6 biểu diễn C theo tỷ số $A^2/(2\sigma^2)$. Chú ý rằng C tăng liên tục từ 0 tới 1 bit/ký hiệu theo chiều tăng của tỷ số này.



Hình 9-1-6: Thông lượng kênh AWGN không nhớ đầu vào rời rạc được biểu diễn theo tỷ số $A^2/2\sigma^2$

Chú ý rằng với hai mô hình kênh xét ở trên, lượng tin tương hỗ trung bình cực đại khi xác suất các ký hiệu ở đầu vào là đồng đều và thông lượng C của kênh cũng vậy. Điều này không hoàn toàn đúng đối với kênh (9-1-16) và (9-1-18). Tuy nhiên đối với hai mô hình kênh đã xét ở trên, khi xác suất chuyển đổi trên kênh có dạng đối xứng thì thông lượng kênh sẽ cực đại.

Tổng quát, điều kiện cần và đủ để tập hợp các xác suất đầu vào $\{P(x_j)\}$ làm cực đại $I(X;Y)$ hay thông lượng kênh DMC là:

$$\begin{aligned} I(x_j;Y) &= C && \text{với mọi } j \text{ và } P(x_j) > 0 \\ I(x_j;Y) &\leq C && \text{với mọi } j \text{ và } P(x_j) = 0 \end{aligned} \quad (9-1-21)$$

với C là thông lượng của kênh và:

$$I(x_j;Y) = \sum_{i=0}^{Q-1} P(y_i|x_j) \log \frac{P(y_i|x_j)}{P(y_i)} \quad (9-1-22)$$

Bây giờ ta xét một kênh tương tự có dải tần hạn chế với nhiễu cộng trắng gaussian. Thông lượng của kênh trong một đơn vị thời gian được Shannon định nghĩa như sau:

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{p(x)} \frac{1}{T} I(X;Y) \quad (9-1-23)$$

với lượng tin tương hỗ trung bình $I(X;Y)$. Một cách tương đương, chúng ta có thể sử dụng các mẫu hay các hệ số $\{y_i\}$, $\{x_i\}$ và $\{n_i\}$ trong khai triển của $y(t)$, $x(t)$, $n(t)$, để xác định lượng tin tương hỗ

trung bình giữa $\mathbf{x}_N = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ và $\mathbf{y}_N = [y_1, y_2, \dots, y_N]$, với $N = 2WT$, $y_i = x_i + n_i$ và $p(y_i|x_j)$ được xác định bởi (9-1-12). Lượng tin tương hỗ trung bình giữa $\mathbf{x}_N$ và $\mathbf{y}_N$ đối với kênh AWGN là:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}_N; \mathbf{Y}_N) &= \int_{\mathbf{x}_N} \dots \int \int_{\mathbf{y}_N} \dots \int p(\mathbf{y}_N|\mathbf{x}_N) p(\mathbf{x}_N) \log \frac{p(\mathbf{y}_N|\mathbf{x}_N)}{p(\mathbf{y}_N)} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} p(y_i|x_i) p(x_i) \log \frac{p(y_i|x_i)}{p(x_i)} dy_i dx_i \end{aligned} \quad (9-1-24)$$

với

$$p(y_i|x_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(y_i - x_i)^2 / N_0} \quad (9-1-25)$$

Giá trị cực đại của $I(X; Y)$ theo các hàm mật độ phân bố xác suất $p(x_i)$ đạt được khi $\{x_i\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê và có giá trị trung bình bằng 0:

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x_i^2 / 2\sigma_x^2} \quad (9-1-26)$$

với σ_x^2 là sai phương của x_i^2 . Như vậy từ (9-1-24) ta có:

$$\begin{aligned} \max_{p(x_i)} I(\mathbf{X}_N; \mathbf{Y}_N) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{2\sigma_x^2}{N_0}\right) \\ &= \frac{1}{2} N \log\left(1 + \frac{2\sigma_x^2}{N_0}\right) \\ &= WT \log\left(1 + \frac{2\sigma_x^2}{N_0}\right) \end{aligned} \quad (9-1-27)$$

Giả sử công suất trung bình của $x(t)$ giới hạn bởi P_{av} thì:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T E[x^2(t)] dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N E(x_i^2) = \frac{N\sigma_x^2}{T} \quad (9-1-28)$$

Mà:

$$\sigma_x^2 = \frac{TP_{av}}{N} = \frac{P_{av}}{2W} \quad (9-1-29)$$

Thay vào (9-1-27) ta có:

$$\max_{p(x)} I(\mathbf{X}_N; \mathbf{Y}_N) = WT \log\left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0}\right) \quad (9-1-30)$$

Như vậy, thông lượng của kênh tính theo giây là:

$$C = W \log\left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0}\right) \quad (9-1-31)$$

Đó là công thức cơ bản về thông lượng của kênh đối với kênh AWGN tương tự có dải tần hạn chế và công suất tín hiệu vào hạn chế.

Thông lượng của kênh được chuẩn hóa theo W về theo tỷ số P_{av}/WN_0 trên hình 9-1-7. Thông lượng tăng liên tục theo SNR. Như vậy, đối với kênh có dải tần hữu hạn, thông lượng kênh tăng nếu ta tăng công suất trung bình của tín hiệu. Mặt khác, nếu công suất trung bình của tín hiệu cố định, thông lượng kênh tăng nếu tăng độ rộng dải thông W . Khi W tiến tới vô hạn, thông lượng kênh tiến tới:

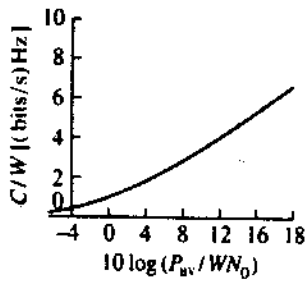
$$C_{\infty} = \frac{P_{av}}{N_0} \log_2 e = \frac{P_{av}}{N_0 \ln 2} \text{ bit/s} \quad (9-1-32)$$

Do:

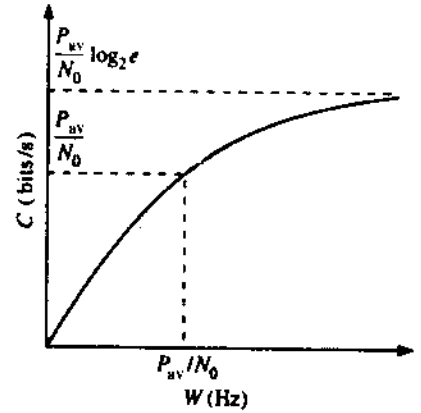
$$P_{av} = C\xi_b \quad (9-1-33)$$

với ξ_b là năng lượng một bit nên:

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{C}{W} \frac{\xi_b}{N_0} \right) \quad (9-1-34)$$



Hình 9-1-7: Thông lượng của kênh chuẩn hóa được vẽ theo SNR đối với kênh có dải tần hữu hạn



Hình 9-1-8: Thông lượng của kênh theo độ rộng dải thông của kênh với công suất phát trung bình cố định

Như vậy:

$$\frac{\xi_b}{N_0} = \frac{2^{C/W} - 1}{C/W} \quad (9-1-35)$$

Khi $C/W = 1$, $\xi_b/N_0 = 1$. Khi $C/W \rightarrow \infty$:

$$\frac{\xi_b}{N_0} \approx \frac{2^{C/W}}{C/W} \approx \exp \left(\frac{C}{W} \ln 2 \right) - \ln \frac{C}{W} \quad (9-1-36)$$

Như vậy ξ_b/N_0 tăng theo hàm mũ khi $C/W \rightarrow \infty$. Mặt khác, khi $C/W \rightarrow 0$:

$$\frac{\xi_b}{N_0} = \lim_{C/W \rightarrow 0} \frac{2^{C/W} - 1}{C/W} = \ln 2 \quad (9-1-37)$$

chính là -1,6 dB. Biểu diễn C/W theo ξ_b/N_0 trên hình 7-2-17.

Thông lượng của kênh cho chúng ta **giới hạn trên** của tốc độ truyền để truyền thông an toàn bảo đảm trên kênh có nhiễu.

Định lý về mã hóa trên kênh có nhiễu Tồn tại một loại mã hóa kênh và bộ giải mã tương ứng để có thể truyền thông an toàn bảo đảm với xác suất sai nhỏ tùy ý nếu tốc độ truyền $R < C$. Nếu $R > C$, không tồn tại phương pháp mã hóa để xác suất sai nhầm tiến tới 0.

9-1-3 Sử dụng các tín hiệu trực giao trong truyền thông

Trong phần 7-2 ta đã sử dụng giới hạn hợp để chứng tỏ rằng với các tín hiệu trực giao thì xác suất sai nhầm có thể nhỏ tùy ý khi $M \rightarrow \infty$ miễn là $\xi_b/N_0 > 2 \ln 2$. Từ (7-2-21) ta có:

$$1 - [1 - Q(y)]^{M-1} \leq (M-1)Q(y) < Me^{-y^2/2} \quad (9-1-38)$$

Đây là giới hạn hợp, nó chặt khi y lớn, có nghĩa là với $y > y_0$, y_0 phụ thuộc vào M . Với y nhỏ, ta có:

$$1 - [1 - Q(y)]^{M-1} \leq 1 \quad (9-1-39)$$

với mọi y . Như vậy:

$$P_M < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_0} e^{-(y-\sqrt{2\gamma})^2/2} dy + \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-(y-\sqrt{2\gamma})^2/2} dy \quad (9-1-40)$$

Giá trị y_0 làm cực tiểu giới hạn trên tìm được bằng cách lấy đạo hàm của vế phải và đặt bằng 0. Nghiệm y_0 là:

$$e^{y_0^2/2} = M \quad (9-1-41)$$

hay:

$$y_0 = \sqrt{2 \ln M} = \sqrt{2 \ln 2 \log_2 M} = \sqrt{2k \ln 2} \quad (9-1-42)$$

Để xác định y_0 , ta tính giới hạn trên của tích phân trong (9-1-40). Đối với tích phân thứ nhất, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_0} e^{-(y-\sqrt{2\gamma})^2/2} dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)/\sqrt{2}} e^{-x^2} dx \\ &= Q(\sqrt{2\gamma} - y_0), \quad y_0 \leq \sqrt{2\gamma} \\ &< e^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)^2/2}, \quad y_0 \leq \sqrt{2\gamma} \end{aligned} \quad (9-1-43)$$

Tích phân thứ hai có giới hạn trên là:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-(y-\sqrt{2\gamma})^2/2} dy &= \frac{M}{\sqrt{2\pi}} e^{-\gamma/2} \int_{y_0-\sqrt{\gamma/2}}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &< \begin{cases} M e^{-\gamma/2} & (y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}) \\ M e^{-\gamma/2} e^{-(y_0-\sqrt{\gamma/2})^2} & (y_0 \geq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}) \end{cases} \end{aligned} \quad (9-1-44)$$

Kết hợp hai tích phân và thay M bởi $e^{y_0^2/2}$, ta nhận được:

$$P_M < \begin{cases} e^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)^2/2} + e^{(y_0^2-\gamma)/2} & (0 \leq y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}) \\ e^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)^2/2} + e^{(y_0^2-\gamma)/2} e^{-(y_0-\sqrt{\gamma/2})^2} & (\sqrt{\frac{1}{2}\gamma} \leq y_0 \leq \sqrt{2\gamma}) \end{cases} \quad (9-1-45)$$

Trong khoảng $0 \leq y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}$, giới hạn được viết lại là:

$$\begin{aligned} P_M &< e^{(y_0^2-\gamma)/2} (1 + e^{-(y_0-\sqrt{\gamma/2})^2}) \\ &< 2e^{(y_0^2-\gamma)/2}, \quad 0 \leq y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma} \end{aligned} \quad (9-1-46)$$

Trong khoảng $\sqrt{\frac{1}{2}\gamma} \leq y_0 \leq \sqrt{2\gamma}$, hai thành phần trong (9-1-45) là giống nhau nên:

$$P_M < 2e^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)^2/2}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}\gamma} \leq y_0 \leq \sqrt{2\gamma} \quad (9-1-47)$$

Do $y_0 = \sqrt{2 \ln M} = \sqrt{2k \ln 2}$ và $\gamma = k\gamma_b$ nên:

$$P_M < \begin{cases} 2e^{-k(\gamma_b-2 \ln 2)/2} & (\ln M \leq \frac{1}{4}\gamma) \\ 2e^{-k(\sqrt{\gamma_b}-\sqrt{\ln 2})^2} & (\frac{1}{4}\gamma \leq \ln M \leq \gamma) \end{cases} \quad (9-1-48)$$

Giới hạn trên thứ nhất chính là giới hạn hợp, giới hạn này không chặt khi M lớn. Giới hạn dưới chặt hơn khi M lớn. Chú ý rằng $P_M \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$ hay $M \rightarrow \infty$ nếu $\gamma_b > \ln 2$. Nhưng $\ln 2$ là giới hạn của SNR từng bit để truyền thông an toàn với tốc độ bằng thông lượng C trên kênh AWGN có dải thông hữu hạn. Khi thay

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{2k \ln 2} = \sqrt{2RT \ln 2} \\ \gamma &= \frac{TP_{av}}{N_0} = TC_\infty \ln 2 \end{aligned} \quad (9-1-49)$$

vào (9-1-46) và (9-1-47), ta nhận được:

$$P_M < \begin{cases} 2.2^{-T(\frac{1}{2}C_\infty - R)} & (0 \leq R \leq \frac{1}{4}C_\infty) \\ 2.2^{-T(\sqrt{C_\infty} - \sqrt{R})^2} & (\frac{1}{4}C_\infty \leq R \leq C_\infty) \end{cases} \quad (9-1-50)$$

Chúng ta đã biểu diễn giới hạn theo C_∞ và tốc độ truyền. Rõ ràng xác suất sai có thể nhỏ tùy ý nếu $T \rightarrow \infty$ hay $M \rightarrow \infty$ nếu bảo đảm rằng $R < C_\infty = P_{av}/(N_0 \ln 2)$. Hơn nữa, ta biết rằng các tín hiệu trực giao có thể dùng để truyền ở tốc độ bằng thông lượng khi $M \rightarrow \infty$ nếu thỏa mãn $R < C_\infty$.

9-1-4 Hàm an toàn của kênh

Ta biểu diễn (9-1-50) như sau:

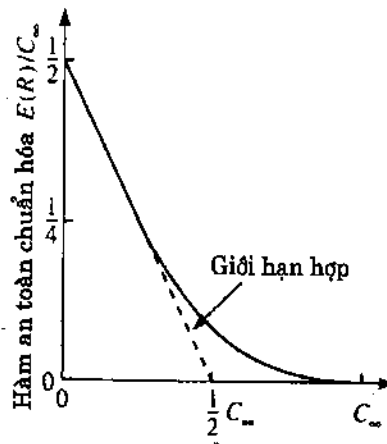
$$P_M < 2.2^{-TE(R)} \quad (9-1-51)$$

Thành phần mũ

$$E(R) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_\infty - R & (0 \leq R \leq \frac{1}{4}C_\infty) \\ (\sqrt{C_\infty} - \sqrt{R})^2 & (\frac{1}{4}C_\infty \leq R \leq C_\infty) \end{cases} \quad (9-1-52)$$

gọi là hàm an toàn của kênh đối với kênh AWGN có dải thông hữu hạn. Đường biểu diễn $E(R)/C_\infty$ trên hình 9-1-9. Cũng trên hình đó ta cũng vẽ giới hạn hợp của P_M trong (7-2-27) được biểu diễn thành

$$P_M \leq \frac{1}{2} 2^{-T(\frac{1}{2}C_\infty - R)}, \quad 0 \leq R \leq \frac{1}{2}C_\infty \quad (9-1-53)$$



Hình 9-1-9: Hàm an toàn của kênh đối với kênh AWGN có dải thông hữu hạn

Người ta chứng minh được rằng không tồn tại một hàm an toàn khác $E_1(R)$ mà $E_1(R) > E(R)$ với mọi R . Xác suất sai bị chặn trên và chặn dưới như sau:

$$K_l 2^{-TE(R)} \leq P_e \leq K_u 2^{-TE(R)} \quad (9-1-54)$$

các hằng số K_u và K_l biến thiên chậm theo T .

Do các tín hiệu trực giao có hiệu quả giống như tín hiệu đơn hình tối ưu với M lớn, nên giới hạn dưới của (9-1-54) đúng với mọi tín hiệu. Như vậy hàm an toàn $E(R)$ đặc trưng cho xác suất sai khi truyền trên kênh AWGN có dải thông hữu hạn.

Mặc dù xác suất sai có thể nhỏ tùy ý bằng cách tăng số tín hiệu nếu $R < C_\infty$ nhưng có một độ chênh lệch lớn giữa hiệu quả thực tế đạt được so với kết quả trong lý thuyết. Ví dụ như trong hình 7-2-17, tập hợp $M = 16$ tín hiệu trực giao xác định liên kết với SNR từng bit khoảng 7,5 dB có xác suất sai $P_e = 10^{-5}$, nhưng lý thuyết chỉ ra rằng với $C/W = 0,5$ truyền an toàn có thể đạt được khi SNR là -0,8 dB, như vậy có thể tìm được những tín hiệu sử dụng có hiệu quả hơn. Ta sẽ thấy rằng những tín hiệu mã sẽ có hiệu quả hơn.

Độ chênh lệch về hiệu quả cũng xảy ra trong miền có dải tần hữu hạn $R/W > 1$. Trong miền này chúng ta không thể tăng độ rộng dải thông như trong miền có công suất hữu hạn. Các kỹ thuật mã hóa cho truyền thông trên kênh có dải thông hữu hạn được xét tới trong chương 10.

9-2 Mã hóa ngẫu nhiên

Việc thiết kế mã điều chế cho truyền thông trên kênh có thể chia ra hai phương pháp cơ bản. Một là phương pháp đại số mà việc thiết kế các bộ mã hóa và giải mã hóa cho một số loại mã loại này ta sẽ xét trong chương 10. Phương pháp thứ hai là phương pháp xác suất với việc phân tích độ hiệu quả của lớp tổng quát các tín hiệu mã. Phương pháp này đưa ra các giới hạn về xác suất sai khi truyền tin trên kênh. Trong phần này ta xét phương pháp mã thứ hai và gọi là *mã hóa ngẫu nhiên*.

9-2-1 Mã hóa ngẫu nhiên dựa vào tín hiệu mã nhị phân M mức

Xét một tập hợp M tín hiệu mã được xây dựng từ tập hợp các từ mã nhị phân n chiều:

$$\mathbf{C}_i = [c_{i1} c_{i2} \dots c_{in}], \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (9-2-1)$$

với c_{ij} bằng 0 hoặc 1. Mỗi bit được ánh xạ thành một tín hiệu PSK nhị phân thì tín hiệu tương ứng với từ mã $\mathbf{C}_i$ được biểu diễn là:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (9-2-2)$$

ở đây

$$s_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\xi_c} & \text{khi } c_{ij} = 1 \\ -\sqrt{\xi_c} & \text{khi } c_{ij} = 0 \end{cases} \quad (9-2-3)$$

và ξ_c là năng lượng của tín hiệu ứng với một bit. Như vậy các tín hiệu $s_i(t)$ tương ứng với các vectơ n chiều:

$$\mathbf{s}_i = [s_{i1} s_{i2} \dots s_{in}], \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (9-2-4)$$

Giả thiết tốc độ thông tin vào bộ mã hóa là R bit/s và mã hóa từng khối k bit thành một trong M tín hiệu. Như vậy $k = RT$ và $M = 2^k = 2^{RT}$ tín hiệu cần thiết. Định nghĩa

$$D = \frac{n}{T} \text{ chiều/s} \quad (9-2-5)$$

và như vậy $n = DT$ là số chiều của không gian tín hiệu.

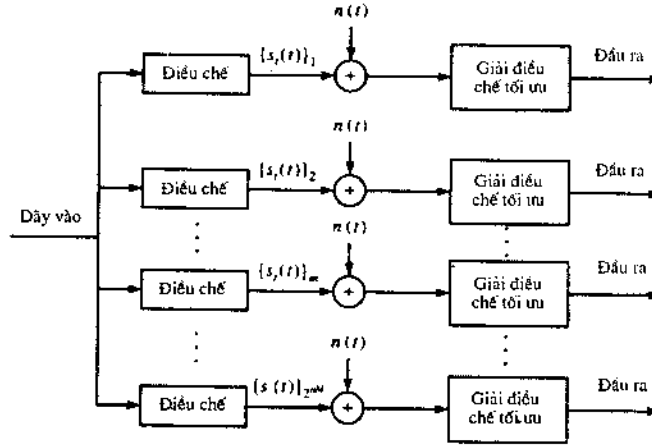
Ta có tất cả $2^n = 2^{DT}$ vectơ, trong số đó $M = 2^{RT}$ vectơ được sử dụng để truyền thông tin. Ta có

$$F = \frac{2^k}{2^n} = \frac{2^{RT}}{2^{DT}} = 2^{-(D-R)T} \quad (9-2-6)$$

Rõ ràng nếu $D > R$ thì $F \rightarrow 0$ khi $T \rightarrow \infty$.

Vấn đề đặt ra là liệu chúng ta có thể chọn $M = 2^{RT}$ vector trong số $2^n = 2^{DT}$ vector có thể để xác suất sai $P \rightarrow 0$ khi $T \rightarrow \infty$ hay $n \rightarrow \infty$ được không. Rõ ràng khi $T \rightarrow \infty$ thì $F \rightarrow 0$ nên có thể chọn M tín hiệu có khoảng cách tối thiểu tăng dần khi $T \rightarrow \infty$ hay $P_e \rightarrow 0$.

Chúng ta có $(2^n)^M$ cách chọn M vector từ 2^n vector. Với mỗi cách chọn trong số 2^{nM} cách chọn, ta có một hệ thống truyền thông có thể thiết kế sao cho tối ưu với tập hợp M tín hiệu đã chọn. Mỗi hệ thống truyền thông được đặc trưng bởi xác suất sai.



Hình 9-2-1: Tập hợp 2^{nM} hệ thống truyền thông

Giả sử chúng ta chọn M tín hiệu mã một cách ngẫu nhiên trong số 2^{nM} tín hiệu mã có thể. Như vậy đối với tín hiệu thứ m , ký hiệu là $\{s_i\}_m$, xuất hiện với xác suất:

$$P(\{s_i\}_m) = 2^{-nM} \quad (9-2-7)$$

và xác suất lỗi tương ứng với tín hiệu mã này là $P_e(\{s_i\}_m)$. Như vậy xác suất lỗi trung bình với cả tập hợp tín hiệu mã chọn được là:

$$\bar{P}_e = \sum_{m=1}^{2^{nM}} P_e(\{s_i\}_m) P(\{s_i\}_m) = 2^{-nM} \sum_{m=1}^{2^{nM}} P_e(\{s_i\}_m) \quad (9-2-8)$$

Rõ ràng có một số lựa chọn có xác suất sai lớn. Ví dụ M dãy k bit cùng được gán cho một vector sẽ có xác suất sai rất lớn. Trong những trường hợp như vậy $P_e(\{s_i\}_m) > \bar{P}_e$. Tuy nhiên cũng có những cách chọn khác mà $P_e(\{s_i\}_m) < \bar{P}_e$. Như vậy, nếu chúng ta xác định được giới hạn trên của $\bar{P}_e$, giới hạn này sẽ đúng với các bộ mã mà $P_e(\{s_i\}_m) < \bar{P}_e$. Hơn nữa, nếu $\bar{P}_e \rightarrow 0$ khi $T \rightarrow \infty$ thì chúng ta có thể kết luận rằng với những bộ mã đó, $P_e(\{s_i\}_m) \rightarrow 0$ khi $T \rightarrow \infty$.

Để xác định giới hạn trên của $\bar{P}_e$, ta xét việc truyền một bản tin k bit $\mathbf{X}_k \equiv [x_1 x_2 \dots x_k]$, với $x_j = 0$ hoặc 1. Xác suất lỗi có điều kiện trung bình trong cả tập hợp mã là:

$$\overline{P_e(\mathbf{X}_k)} = \sum_{\text{mọi mã}} P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m) P(\{s_i\}_m) \quad (9-2-9)$$

với $P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m)$ là xác suất lỗi có điều kiện của một dãy k bit thông tin $\mathbf{X}_k$ được truyền đi bởi mã $\{s_i\}_m$. Với mã thứ m , xác suất lỗi $P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m)$ bị giới hạn trên như sau:

$$P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m) \leq \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M P_{2m}(s_l, s_k) \quad (9-2-10)$$

với $P_{2m}(s_l, s_k)$ là xác suất lỗi của hệ thống truyền thông nhị phân sử dụng hai vectơ tín hiệu s_l và s_k để truyền một trong 2 dãy k bit có xác suất giống nhau. Như vậy:

$$\overline{P_e(\mathbf{X}_k)} \leq \sum_{\text{mọi mã}} P_e(\{s_i\}_m) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M P_{2m}(s_i, s_k) \quad (9-2-11)$$

Hoán đổi thứ tự lấy tổng ta có:

$$\overline{P_e(\mathbf{X}_k)} \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \left[\sum_{\text{mọi mã}} P_e(\{s_i\}_m) P_{2m}(s_i, s_k) \right] \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \overline{P_2(s_i, s_k)} \quad (9-2-12)$$

với $\overline{P_2(s_i, s_k)}$ là trung bình theo tập hợp của $P_{2m}(s_i, s_k)$ theo 2^{nM} bộ mã.

Với kênh có nhiễu cộng gaussian trắng, xác suất sai $P_{2m}(s_l, s_k)$ là:

$$P_{2m}(s_l, s_k) = Q \left(\sqrt{\frac{d_{lk}^2}{2N_0}} \right) \quad (9-2-13)$$

$d_{lk}^2 = |s_l - s_k|^2$. Nếu s_l và s_k khác nhau d tọa độ thì:

$$d_{lk}^2 = |s_l - s_k|^2 = \sum_{j=1}^n (s_{lj} - s_{kj})^2 = d(2\sqrt{\xi_c})^2 = 4d\xi_c \quad (9-2-14)$$

Như vậy:

$$P_{2m}(s_l, s_k) = Q \left(\sqrt{\frac{2d\xi_c}{N_0}} \right) \quad (9-2-15)$$

Bây giờ ta có thể lấy trung bình $P_{2m}(s_l, s_k)$ theo tập hợp các mã. Do mọi mã là đồng xác suất, hai vectơ tín hiệu s_l và s_k là đồng xác suất và độc lập thống kê. Như vậy $P(s_{li} = s_{ki}) = \frac{1}{2}$ và $P(s_{li} \neq s_{ki}) = \frac{1}{2}$, độc lập với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Xác suất để s_l và s_k khác nhau d tọa độ là:

$$P(d) = \left(\frac{1}{2} \right)^n \binom{n}{d} \quad (9-2-16)$$

Như vậy:

$$\overline{P_2(s_l, s_k)} = \sum_{d=0}^n P(d) Q \left(\sqrt{\frac{2d\xi_c}{N_0}} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{d=0}^n \binom{n}{d} Q \left(\sqrt{\frac{2d\xi_c}{N_0}} \right) \quad (9-2-17)$$

Do:

$$Q \left(\sqrt{\frac{2d\xi_c}{N_0}} \right) < e^{-d\xi_c/N_0}$$

nên

$$\overline{P_2(s_l, s_k)} \leq 2^{-n} \sum_{d=0}^n \binom{n}{d} e^{-d\xi_c/N_0} \leq 2^{-n} (1 + e^{-\xi_c/N_0})^n \leq \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\xi_c/N_0}) \right]^n \quad (9-2-18)$$

Thay (9-2-18) vào (9-2-12) ta nhận được:

$$\overline{P_e(\mathbf{X}_k)} \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \overline{P_2(s_i, s_k)} = (M-1) \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\xi_c/N_0}) \right]^n < M \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\xi_c/N_0}) \right]^n \quad (9-2-19)$$

Cuối cùng, xác suất lỗi trung bình trong điều kiện $\bar{P}_e$ nhận được bằng cách lấy trung bình của $\overline{P_e(\mathbf{X}_k)}$ với mọi dãy k bit thông tin có thể

$$\bar{P}_e = \sum_k \overline{P_e(\mathbf{X}_k)} P(\mathbf{X}_k) < M \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\xi_c/N_0}) \right]^n \sum_k P(\mathbf{X}_k) < M \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\xi_c/N_0}) \right]^n \quad (9-2-20)$$

Ta biểu diễn kết quả này dưới dạng thuận tiện để sử dụng hơn. Gọi R_0 là tốc độ giới hạn, có đơn vị bit/s và:

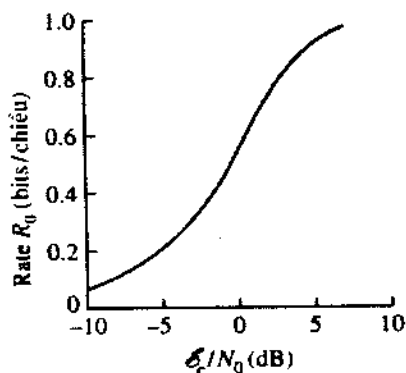
$$R_0 = \log_2 \frac{2}{1 + e^{-\xi_c/N_0}} = 1 - \log_2 (1 + e^{-\xi_c/N_0}) \quad (9-2-21)$$

Khi đó (9-2-19) trở thành:

$$\bar{P}_e < M 2^{-nR_0} = 2^{RT} 2^{-nR_0} \quad (9-2-22)$$

Do $n = DT$ nên:

$$\bar{P}_e < 2^{-T(DR_0 - R)} \quad (9-2-23)$$



Hình 9-2-2: Tốc độ giới hạn R_0 là hàm của SNR từng chiều tính theo đơn vị dB

Tham số R_0 theo ξ_c/N_0 được vẽ trên hình 9-2-2. Ta nhận thấy rằng $0 \leq R_0 \leq 1$ và $\bar{P}_e \rightarrow 0$ khi $T \rightarrow \infty$ nếu $R < DR_0$.

Mặt khác, (9-2-21) có thể được biểu diễn thành:

$$\bar{P}_e < 2^{-n(R_0 - R/D)} \quad (9-2-24)$$

Tỷ số R/D có đơn vị bit/s và ta định nghĩa:

$$R_c = \frac{R}{D} = \frac{R}{n/T} = \frac{RT}{n} = \frac{k}{n} \quad (9-2-25)$$

Như vậy, R_c là tốc độ mã và

$$\bar{P}_e < 2^{-n(R_0 - R_c)} \quad (9-2-26)$$

Như vậy khi $R_c < R_0$, xác suất sai trung bình $\bar{P}_e \rightarrow 0$ khi độ dài từ mã $n \rightarrow \infty$, như vậy tồn tại phương pháp mã hóa trong số 2^{nM} phương pháp để xác suất sai không lớn hơn $\bar{P}_e$.

Tới đây ta có thể kết luận rằng tồn tại loại mã tốt theo nghĩa xác suất sai nhỏ nhất. Mặc dù thông thường ta không chọn mã một cách ngẫu nhiên nhưng một vấn đề là liệu một mã được chọn ngẫu nhiên có phải là một bộ mã tốt hay không. Chú ý rằng $\bar{P}_e$ là xác suất sai trung bình theo tập hợp với mọi bộ mã. Nếu một mã được chọn ngẫu nhiên, xác suất để xác suất sai $P_e > \alpha \bar{P}_e$ nhỏ hơn $1/\alpha$.

Người ta thấy rằng ít hơn 10% số bộ mã có xác suất sai lớn hơn $10\bar{P}_e$ và ít hơn 1% số bộ mã có xác suất sai lớn hơn $100\bar{P}_e$. Giả sử xác suất sai trung bình $\bar{P}_e < 10^{-10}$ có được bằng cách dùng bộ mã có số chiều n_0 khi $R_0 > R_c$. Nếu chúng ta chọn được một bộ mã có xác suất sai trung bình $\bar{P}_e = 10^{-7}$,

chúng ta có thể khắc phục bằng cách tăng n từ n_0 thành $10n_0/7$. Như vậy ta sẽ có một bộ mã có xác suất sai trung bình $\bar{P}_e < 10^{-10}$. Như vậy ta có thể dễ dàng có một bộ mã tốt bằng cách chọn ngẫu nhiên.

Ta biểu diễn xác suất sai trung bình trong (9-2-25) theo SNR từng bit. Ta có:

$$\xi = n\xi_c = k\xi_b \quad (9-2-27)$$

Như vậy $n = k\xi_b/\xi_c$ và ta chú ý rằng $R_c\xi_b/\xi_c = 1$ và ta có:

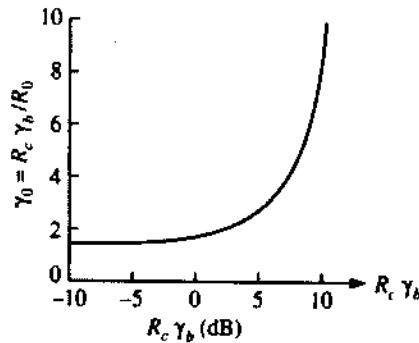
$$\bar{P}_e < 2^{-k(\gamma_b/\gamma_0-1)} \quad (9-2-28)$$

với

$$\gamma_0 = \frac{R_c}{R_0}\gamma_b = \frac{R_c\gamma_b}{1 - \log_2(1 + e^{-R_c\gamma_b})} \quad (9-2-29)$$

Chú ý rằng $\bar{P}_e \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$ và SNR từng bit $\gamma_b > \gamma_0$.

Tham số γ_0 là hàm của $R_c\gamma_b$ được vẽ trên hình 9-2-3. Chú ý rằng $\gamma_0 \rightarrow 2\ln 2$ khi $R_c\gamma_b \rightarrow 0$. Như vậy xác suất sai của tín hiệu mã nhị phân M mức tương đương với xác suất sai nhận được trong giới hạn hợp đối với các tín hiệu trực giao M mức, miễn là số chiều của tín hiệu đủ lớn để $\gamma_0 \approx 2\ln 2$.



Hình 9-2-3: Giới hạn dưới của SNR từng bit đối với tín hiệu mã nhị phân

Cuối cùng, ta chú ý rằng tín hiệu mã nhị phân là thích hợp trong sử dụng khi SNR từng chiều là nhỏ, $\xi_c/N_0 < 10$. Khi $\xi_c/N_0 > 10$, R_0 bão hòa ở giá trị 1 bit/chiều. Như vậy thì tốc độ mã phải nhỏ hơn R_0 và tín hiệu mã nhị phân không hiệu quả khi $\xi_c/N_0 > 10$. Trong trường hợp này ta dùng tín hiệu mã không phải nhị phân để tăng số bit theo chiều.

9-2-2 Mã hóa ngẫu nhiên dựa vào tín hiệu đa biên độ M mức

Giả thiết chúng ta sử dụng tín hiệu mã không phải là nhị phân với các từ mã trong (9-2-1), với các ký hiệu mã c_{ij} là một giá trị trong tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$. Mỗi ký hiệu mã được chuyển thành một trong q giá trị biên độ. Như vậy chúng ta đã xây dựng các tín hiệu ứng với các vectơ $\{s_i\}$ trong không gian n chiều, trong đó các thành phần $\{s_{ij}\}$ nhận một trong q giá trị biên độ. Như vậy ta có q^n tín hiệu, trong đó ta chọn ra $M = 2^{RT}$ tín hiệu mang các khối k bit thông tin. q giá trị biên độ tương ứng với các ký hiệu mã $\{0, 1, \dots, q-1\}$ được ký hiệu là $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ với các xác suất tương ứng là $\{p_i\}$. Các giá trị biên độ giả thiết là phân bố đều trong khoảng $[-\sqrt{\xi_c}, \sqrt{\xi_c}]$, các giá trị biên độ kề nhau khác nhau là $2\sqrt{\xi_c}/(q-1)$. Điều này bảo đảm cho các thành phần s_{ij} có năng lượng đỉnh giới hạn là $\sqrt{\xi_c}$ và năng lượng mỗi từ mã thỏa mãn điều kiện:

$$|s_i|^2 < n\xi_c$$

Tương tự như phần trước, ta thấy rằng xác suất sai trung bình bị giới hạn trên như sau

$$\bar{P}_e < M2^{-nR_0} = RT2^{-nT_0} = 2^{-n(R_0 - R/D)} \quad (9-2-30)$$

với R_0 là

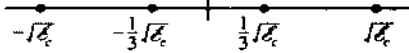
$$R_0 = -\log_2 \left(\sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q p_l p_m e^{-d_{lm}^2/4N_0} \right) \quad (9-2-31)$$

và

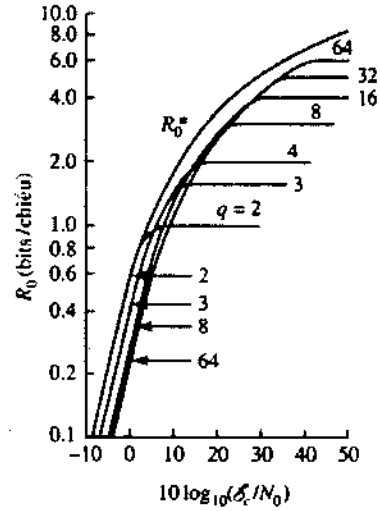
$$d_{lm} = |a_l - a_m|, \quad l, m = 1, 2, \dots, q \quad (9-2-32)$$

Trong trường hợp đặc biệt, khi mọi giá trị biên độ là đồng xác suất $p_l = p_m = 1/q$ thì

$$R_0 = -\log_2 \left(\frac{1}{q^2} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q e^{-d_{lm}^2/4N_0} \right) \quad (9-2-33)$$



Hình 9-2-4: Tín hiệu bốn mức biên độ



Hình 9-2-5: Tốc độ giới hạn R_0 trong điều chế biên độ q mức cách đều đồng xác suất

Ví dụ khi $q = 2$ và $a_1 = -\sqrt{\xi_c}$, $a_2 = \sqrt{\xi_c}$, ta có $d_{11} = d_{22} = 0$, $d_{12} = d_{21} = 2\sqrt{\xi_c}$ và

$$R_0 = \log_2 \frac{2}{1 + e^{-\xi_c/N_0}}, \quad q = 2$$

Với $q = 4$, $a_1 = -\sqrt{\xi_c}$, $a_2 = -\sqrt{\xi_c}/3$, $a_3 = \sqrt{\xi_c}/3$, $a_4 = \sqrt{\xi_c}$ ta có $d_{mm} = 0$ với $m = 1, 2, 3, 4$, $d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{21} = d_{32} = d_{43} = 2\sqrt{\xi_c}/3$, $d_{13} = d_{31} = d_{24} = d_{42} = 4\sqrt{\xi_c}/3$, $d_{41} = d_{14} = 2\sqrt{\xi_c}$. Như vậy

$$R_0 = \log_2 \frac{8}{2 + 3e^{-\xi_c/9N_0} + 2e^{-4\xi_c/9N_0} + e^{-\xi_c/N_0}}, \quad q = 4 \quad (9-2-34)$$

Ta thấy rõ ràng rằng R_0 bây giờ bão hòa ở 2 bit/chiều khi ξ_c/N_0 tăng.

Đồ thị của R_0 theo ξ_c/N_0 với các giá trị biên độ cách đều nhau và đồng xác suất trên hình 9-2-5 với $q = 2, 3, 4, 8, 16, 32, 64$. Ta thấy mức bão hòa là $\log_2 q$ bit/chiều.

Nếu ta bỏ ràng buộc về năng lượng đỉnh của các phần tử nhưng giữ ràng buộc về năng lượng trung bình trong mỗi từ mã, ta có thể nhận được giới hạn trên lớn hơn về số bit theo chiều, đó là kết quả của Shannon:

$$R_0^* = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_c}{N_0} - \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_c}{N_0} \right)^2} \right] \log_2 e + \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_c}{N_0} \right)^2} \right) \right] \quad (9-2-35)$$

Đồ thị của R_0^* theo SNR từng chiều cũng ở trên hình 9-2-5. Giá trị R_0 đạt được của chúng ta như đã làm còn kém giá trị tối ưu. Tuy nhiên các tín hiệu mà này dễ tạo ra trong thực tế và hay được sử dụng.

9-2-3 So sánh R_0^* với thông lượng của kênh AWGN

Thông lượng của kênh AWGN với dải thông hữu hạn có công suất tín hiệu vào hạn chế là:

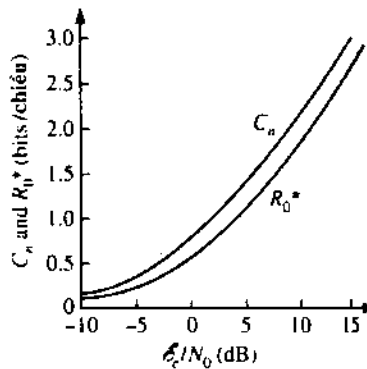
$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0} \right) \quad \text{bit/s} \quad (9-2-36)$$

ta biểu diễn thông lượng của kênh theo bit/chiều và công suất trung bình theo năng lượng/chiều. Với $D = 2W$ và $\xi_c = \frac{P_{av}T}{n} = \frac{P_{av}}{n}$ ta có

$$P_{av} = \frac{n}{T} \xi_c = D \xi_c \quad (9-2-37)$$

Đặt $C_n = C/2W = C/D$, (9-2-36) được biểu diễn thành:

$$C_n = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + 2 \frac{\xi_c}{N_0} \right) = \frac{1}{2} \log_2 (1 + 2R_c \gamma_b) \quad \text{bit/chiều} \quad (9-2-38)$$



Hình 9-2-6: So sánh tốc độ giới hạn R_0^* với thông lượng của kênh AWGN

Biểu thức về thông lượng chuẩn này có thể so sánh với R_0^* như trên hình 9-2-6. Do C_n là giới hạn trên thực của tốc độ truyền R/D nên $R_0^* < C_n$. Ta cũng thấy rằng với những giá trị ξ_c/N_0 nhỏ, độ chênh lệch giữa R_0^* và C_n là khoảng 3 dB. Như vậy, sử dụng mã ngẫu nhiên nhiều mức biên độ, công suất trung bình hạn chế tối ưu, tốc độ giới hạn sẽ nhỏ hơn khoảng 3 dB so với thông lượng kênh. Người ta cũng chứng minh được rằng xác suất sai có thể làm nhỏ tùy ý nếu $R < DC_n = 2WC_n = C$.

9-3 Thiết kế hệ thống truyền tin dựa vào tốc độ giới hạn

Trong phần trước, chúng ta đánh giá bộ mã hóa, điều chế bằng xác suất sai. Đó là một tiêu chuẩn hay được sử dụng trong thiết kế hệ thống. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, tính xác suất sai là rất phức tạp, như trong các phép xử lý phi tuyến (trong lượng tử hóa tín hiệu thông qua việc xử lý tín hiệu ở bộ thu) hay nhiều không phải là gaussian.

Thay cho việc tính chính xác xác suất sai đối với một loại mã nào đó, chúng ta có thể sử dụng xác suất sai trung bình theo tập hợp đối với mã ngẫu nhiên. Giả thiết đầu vào kênh có q ký hiệu $\{0, 1, \dots, q-1\}$ và đầu ra kênh có Q ký hiệu $\{0, 1, \dots, Q-1\}$ và các xác suất chuyển đổi $P(i|j)$ với $j = 0, 1, \dots, q-1, i = 0, 1, \dots, Q-1$, và $Q \geq q$. Các ký hiệu vào có xác suất $\{p_j\}$ và giả thiết là độc lập thống kê. Hơn nữa, giả thiết nhiễu trên kênh là độc lập thống kê theo thời gian, như vậy không có sự phụ thuộc nào giữa các ký hiệu nhận được. Trong những điều kiện như vậy, xác suất sai trung bình theo tập hợp đối với mã ngẫu nhiên là có thể xác định được, đối với kênh DMC là:

$$\bar{P}_e < 2^{-n(R_Q - R/D)} \quad (9-3-1)$$

với n là độ dài từ mã, R là tốc độ thông tin, đơn vị bit/s, D là số chiều truyền đi trong một đơn vị thời gian, R_Q là tốc độ giới hạn đối với bộ lượng tử hóa mức Q mức

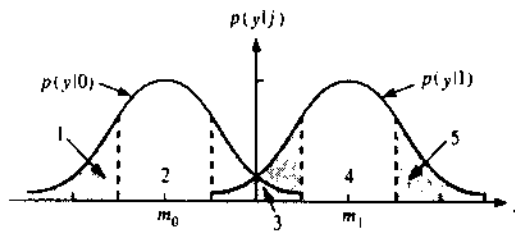
$$R_Q = \max_{\{p_i\}} \left\{ -\log_2 \sum_{i=0}^{Q-1} \left[\sum_{j=0}^{q-1} p_j \sqrt{P(i|j)} \right]^2 \right\} \quad (9-3-2)$$

Nhìn từ quan điểm thiết kế mã, sự tích hợp của bộ điều chế, kênh, bộ giải điều chế tạo thành một kênh rời rạc q ký hiệu vào và Q ký hiệu ra. Các xác suất chuyển đổi $\{P(i|j)\}$ phụ thuộc vào tính chất nhiễu trên kênh, số mức lượng tử và kiểu lượng tử. Ví dụ với kênh AWGN đầu vào nhị phân, đầu ra của bộ tương quan tại thời điểm lấy mẫu có hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện là:

$$p(y|j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-m_j)^2/2\sigma^2}, \quad j = 0, 1 \quad (9-3-3)$$

$m_0 = -\sqrt{\xi_c}, m_1 = \sqrt{\xi_c}, \sigma^2 = \frac{1}{2}N_0$. Hai hàm mật độ phân bố xác suất được vẽ trên hình 9-3-1. Ta có thể chia trục thực ra 5 miền như hình vẽ. Với mỗi cách chia, ta có thể tính các xác suất chuyển đổi và lựa chọn tối ưu giá trị cận để cực đại hóa R_Q với mỗi giá trị Q . Như vậy

$$P(i|j) = \int_{r_i} p(y|j) dy \quad (9-3-4)$$



Hình 9-3-1: Ví dụ về lượng tử hóa đầu ra bộ giải điều chế thành 5 mức

Giá trị R_Q khi $Q \rightarrow \infty$ là tốc độ giới hạn của bộ của bộ giải mã không lượng tử. Trong trường hợp như thế và sử dụng tín hiệu PSK hay PAM, tốc độ giới hạn là:

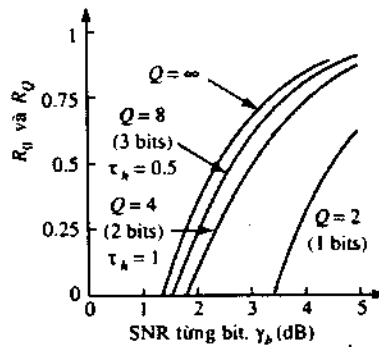
$$R_0 = \max_{\{p_i\}} \left\{ -\log_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\sum_{j=0}^{q-1} p_j \sqrt{p(y|j)} \right]^2 \right\} \quad (9-3-5)$$

với p_j là xác suất của ký hiệu thứ j .

Các kết quả trong (9-3-5) và (9-3-2) cho phép so sánh hiệu quả các bộ thu với số mức lượng tử hóa khác nhau.

Ví dụ 9-3-1 Ta so sánh hiệu quả của các bộ thu với tín hiệu vào kênh AWGN là PSK nhị phân và $Q = 2, 4, 8$. Để đơn giản, các mức lượng tử ở đầu ra bộ giải điều chế là $0, \pm\tau_h, \pm2\tau_h, \dots, \pm(2^{b-1} - 1)\tau_h$ với τ_h là bước lượng tử và b là số bit của bộ lượng tử hóa. τ_h được chọn để tối thiểu hóa SNR từng bit γ_b cần thiết để hoạt động ở tốc độ R_0 . Điều đó có nghĩa là τ_h phải tối ưu hóa đối với mỗi giá trị SNR. Nhưng người ta thấy τ_h thay đổi không đáng kể đối với những thay đổi nhỏ của SNR. Như vậy có thể dùng giá trị của τ_h đối với một giá trị SNR cho một dải giá trị khá rộng của SNR.

Giá trị R_Q được tính với $b = 1$ (giải mã xác định cứng), $b = 2, 3$. Kết quả được vẽ trên hình 9-3-2.



Hình 9-3-2: Ảnh hưởng của bộ lượng tử hóa khi hệ thống hoạt động ở tốc độ $R = R_0$ hay $R = R_Q$ với tín hiệu PSK nhị phân trên kênh AWGN.

Khi ta sử dụng mã không phải là nhị phân cùng với tín hiệu M mức ($M = q$) tín hiệu nhận được ở đầu ra của M bộ lọc phối hợp được biểu diễn bởi vectơ $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]$. Tốc độ giới hạn của kênh M đầu vào, M đầu ra này là:

$$R_0 = \max_{\{p_i\}} \left\{ -\log_2 \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} p_j p_i \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p(\mathbf{y}|j)p(\mathbf{y}|i)} d\mathbf{y} \right\} \quad (9-3-6)$$

với $p(\mathbf{y}|j)$ là hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện của vectơ $\mathbf{y}$ khi tín hiệu thứ j được truyền đi.

Giả sử M tín hiệu vào là trực giao thì M tín hiệu ra tương ứng sẽ độc lập thống kê, như vậy

$$p(\mathbf{y}|j) = p_{s+n}(y_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M-1} p_n(y_i) \quad (9-3-7)$$

với $p_{s+n}(y_j)$ là hàm mật độ phân bố xác suất của đầu ra của bộ lọc phối hợp ứng với tín hiệu đã truyền đi và $p_n(y_j)$ tương với các đầu ra chỉ có thành phần nhiễu của $M - 1$ bộ lọc. Như vậy, phối hợp (9-3-7)

và (9-3-6) ta có

$$R_0 = \max_{\{p_j\}} \left\{ -\log_2 \left[\sum_{j=0}^{M-1} p_j^2 + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M-1} p_i p_j \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{p_{s+n}(y) p_n(y)} \right)^2 \right] \right\} \quad (9-3-8)$$

Giá trị cực đại của R_0 đối với phân bố xác suất đều vào đạt được khi $p_j = 1/M$. Như vậy:

$$\begin{aligned} R_0 &= \log_2 \left\{ \frac{M}{1 + (M-1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p_{s+n}(y) p_n(y)} dy \right]^2} \right\} \\ &= \log_2 M - \log_2 \left\{ 1 + (M-1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p_{s+n}(y) p_n(y)} dy \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (9-3-9)$$

Với việc xác định pha liên kết cho tín hiệu trực giao M mức, các hàm mật độ phân bố xác suất tương ứng là:

$$\begin{aligned} p_{s+n}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-m)^2/2\sigma^2} \\ p_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} \end{aligned} \quad (9-3-10)$$

ở đây $m = \sqrt{\xi}$ và $\sigma^2 = \frac{1}{2} N_0$. Thay vào (9-3-9) và tính tích phân ta thu được:

$$\begin{aligned} R_0 &= \log_2 \left[\frac{M}{1 + (M-1) e^{-\xi/2N_0}} \right] \\ &= \log_2 \left[\frac{M}{1 + (M-1) e^{-R_w \gamma_b/2}} \right] \end{aligned} \quad (9-3-11)$$

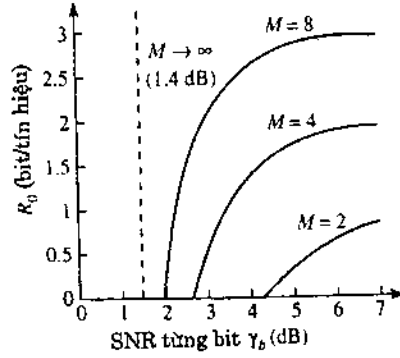
với ξ là năng lượng của một tín hiệu nhận được, R_w là tốc độ thông tin tính theo bit/tín hiệu và $\gamma_b = \xi_b/N_0$ là SNR từng bit. Với $M = 2$ và mã là nhị phân thì ta có $R_w = R_c$, nếu mã là nhị phân và $M = 2^v$ thì mỗi tín hiệu trong M tín hiệu mang lượng thông tin $R_w = v R_c$. Nếu mã là nhị phân và $M = 2$ thì (9-3-11) đơn giản thành:

$$R_0 = \log_2 \left(\frac{2}{1 + e^{-R_c \gamma_b/2}} \right), \quad M = 2 \text{ tín hiệu trực giao} \quad (9-3-12)$$

Loại tín hiệu này tồi hơn tín hiệu đảo pha 3 dB đối với tốc độ giới hạn. Nếu ta đặt $R_w = R_0$ trong (9-3-11) ta nhận được

$$\gamma_b = \frac{2}{R_0} \ln \left(\frac{M-1}{2^{-R_0} M - 1} \right) \quad (9-3-13)$$

Đồ thị của R_0 theo γ_b được vẽ trên hình 9-3-3. Chú ý rằng R_0 bảo hòa ở giá trị $\log_2 M$.



Hình 9-3-3: SNR từng bit cần thiết để hoạt động ở tốc độ R_0 bằng tín hiệu trực giao xác định liên kết trên kênh AWGN

Khi $M \rightarrow \infty$, (9-3-11) trở thành:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} R_0 = \frac{\xi}{2N_0 \ln 2} \text{ bit/tín hiệu} \quad (9-3-14)$$

Do $\xi = P_{av}T$ nên

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{R_0}{T} = \frac{P_{av}}{2N_0 \ln 2} = \frac{1}{2} C_\infty \quad (9-3-15)$$

Như vậy khi $M \rightarrow \infty$ thì tốc độ giới hạn là một nửa thông lượng kênh AWGN có dải thông vô hạn. Mặt khác, nếu ta thay $\xi = R_0 \xi_b$ vào (9-3-14) dẫn tới $\gamma_b = 2 \ln 2$ (1,4 dB), đó là SNR tối thiểu để hoạt động ở tốc độ R_0 (khi $M \rightarrow \infty$), lớn hơn giới hạn Shannon 3 dB.

Giá trị R_0 trong (9-3-11) với việc sử dụng tín hiệu trực giao M mức rõ ràng là không tối ưu khi M nhỏ. Tập hợp các tín hiệu đơn hình cho giá trị R_0 cực đại. Trong trường hợp này ta có:

$$R_0 = \log_2 \left[\frac{M}{1 + (M-1)e^{-M\xi/2(M-1)N_0}} \right] \quad (9-3-16)$$

So sánh kết quả này với biểu thức trong (9-3-11) ta thấy tín hiệu đơn hình có hiệu quả về năng lượng hơn $M/(M-1)$ lần.

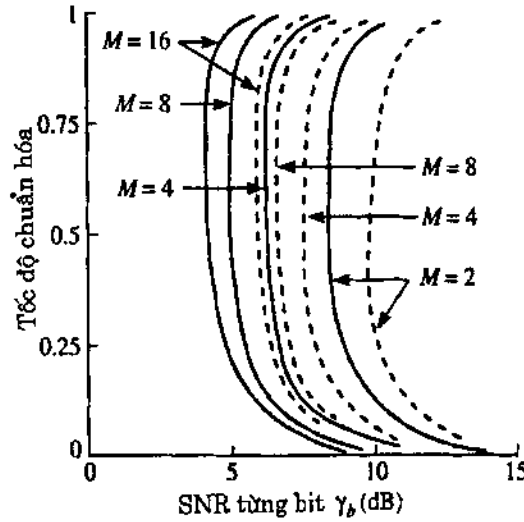
Trong trường hợp xác định không liên kết, các hàm mật độ phân bố xác suất là:

$$\begin{aligned} p_{s+n}(y) &= ye^{-(y^2+a^2)/2} I_0(ay), y \geq 0 \\ p_n(y) &= ye^{-y^2/2}, y \geq 0 \end{aligned} \quad (9-3-17)$$

$a = \sqrt{2\xi/N_0}$. Tốc độ giới hạn R_0 chuẩn hóa với tín hiệu trực giao M mức xác định không liên kết được vẽ trên hình 9-3-4. Để so sánh, ta vẽ tốc độ giới hạn đối với giải mã xác định cứng ($Q = M$) đối với các ký hiệu M mức. Trong trường hợp này ta có;

$$R_Q = \log_2 \left\{ \frac{M}{\left[\sqrt{1 - P_M} + \sqrt{(M-1)P_M} \right]^2} \right\}, Q = M \quad (9-3-18)$$

với P_M là xác suất sai ký hiệu, và độ chênh lệch giữa xác định cứng và xác định mềm là khoảng 2 dB.



Hình 9-3-4: SNR từng bit cần thiết để hoạt động ở tốc độ R_0 với tín hiệu trực giao M mức xác định không liên kết trên kênh AWGN

BÀI TẬP

9-1 Chứng tỏ rằng hai quan hệ sau:

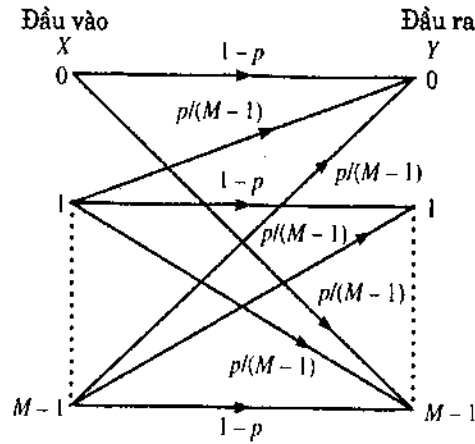
$$\begin{aligned} I(x_j; Y) &= C & \text{với mọi } j \text{ thỏa mãn } P(x_j) > 0 \\ I(x_j; Y) &\leq C & \text{với mọi } j \text{ thỏa mãn } P(x_j) = 0 \end{aligned}$$

với C là thông lượng của kênh và

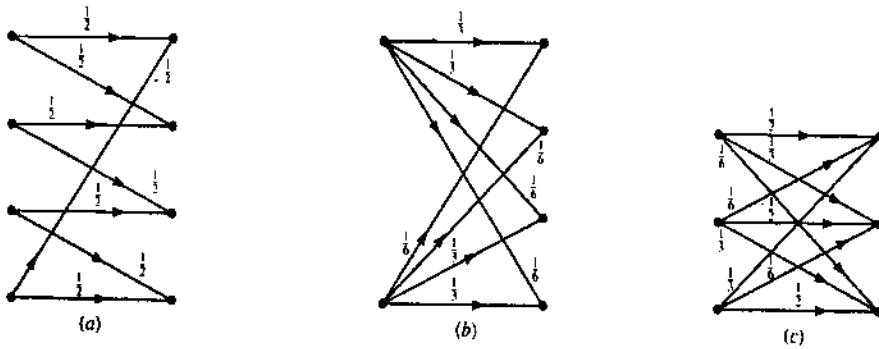
$$I(x_j; Y) = \sum_{i=0}^{Q-1} P(y_i | x_j) \log \frac{P(y_i | x_j)}{P(y_i)}$$

là điều kiện cần và đủ để tập hợp xác suất đầu vào $\{P(x_j)\}$ cực đại $I(X; Y)$

9-2 Hình sau biểu diễn kênh DMC M mức đối xứng với các xác suất chuyển đổi $P(y|x) = 1 - p$ khi $x = y = k$ với $k = 0, 1, \dots, M-1$ và $P(y|x) = p/(M-1)$ khi $x \neq y$. Chứng tỏ rằng kênh này thỏa mãn điều kiện trong bài 9-1 khi $P(x_k) = 1/M$. Xác định và vẽ thông lượng của kênh theo p .

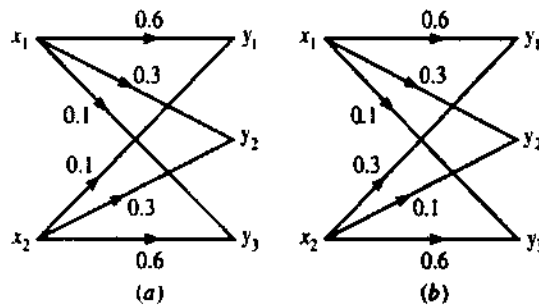


9-3 Xác định thông lượng của các kênh trong hình sau



9-4 Một kênh điện thoại có độ rộng dải thông $W=300$ Hz và tỷ số tín hiệu trên nhiễu là 26 dB. Giả thiết rằng kênh này là kênh tương tự AWGN có dải thông hạn chế với $P_{av}/WN_0=400$. Xác định thông lượng của kênh theo đơn vị bit/s. Liệu kênh này có đủ để truyền tín hiệu tiếng nói được lấy mẫu và mã hóa theo luật loga PCM hay không?

9-5 Xét hai kênh trong hình sau. Chứng tỏ rằng nếu các ký hiệu vào đồng xác suất sẽ cực đại hóa tốc độ thông tin truyền qua kênh.



Chương 10

MÃ HÓA KÊNH

Trong chương trước, chúng ta đã xét việc mã hóa và giải mã hóa một cách tổng quát và ta đã thấy rằng, việc mã hóa bằng cách lựa chọn ngẫu nhiên các từ mã cũng cho một loại mã hiệu suất cao. Với các tín hiệu trực giao, ta có thể thiết kế được một bộ mã hoạt động ở tốc độ bằng thông lượng kênh khi số lượng tín hiệu tiến tới vô hạn. Trong chương này ta sẽ xét một số loại mã và đánh giá hiệu quả của các loại mã trên kênh AWGN.

10-1 Mã khối tuyến tính

Với mã khối mỗi từ mã được coi là một vectơ có độ dài cố định. Mã khối là một tập hợp các vectơ này. Độ dài của một từ mã là số lượng các ký hiệu mã có trong từ mã và ký hiệu là n . Mỗi ký hiệu mã nhận một giá trị trong bộ ký hiệu có q phần tử. Khi $q = 2$ thì bộ mã là nhị phân. Khi $q > 2$ thì bộ mã không phải là nhị phân. Đặc biệt khi $q = 2^b$ với b là số nguyên dương thì mỗi ký hiệu mã trong từ mã tương đương với một từ mã nhị phân có q bit. Như vậy mã không nhị phân độ dài N trong trường hợp này tương đương với một từ mã nhị phân độ dài $n = bN$.

Ta có thể tạo được 2^n tổ hợp nhị phân có độ dài n . Trong đó ta có thể chọn ra $M = 2^k$ từ mã ($k < n$) để tạo ra bộ mã và có thể coi khối dài k bit là khối thông tin được mã hóa. Như vậy khối k bit thông tin được ánh xạ thành một từ mã độ dài n trong tập M từ mã. Ta gọi mã khối đó là mã khối (n, k) và $R_c \equiv k/n$ là tốc độ mã. Số lượng ký hiệu khác 0 trong một từ mã gọi là trọng lượng của từ mã và tập hợp các giá trị trọng lượng của các từ mã có trong một bộ mã tạo thành sự phân bố về trọng lượng của bộ mã. Khi M từ mã có cùng trọng lượng thì gọi là bộ mã có trọng lượng cố định.

Việc mã hóa và giải mã hóa thực hiện các phép toán cộng và nhân số học trên các từ mã. Các phép toán số học tuân theo các quy ước của trường đại số với các phần tử là các ký hiệu trong bộ ký hiệu. Trường F là một tập hợp các phần tử mà trên tập hợp này ta định nghĩa được hai phép toán số học gọi là phép cộng và phép nhân thỏa mãn các điều kiện sau:

Phép cộng

1. Tập hợp F là đóng đối với phép cộng, có nghĩa là nếu $a, b \in F$ thì $a + b \in F$.
2. Phép cộng có tính kết hợp, có nghĩa là nếu $a, b, c \in F$ thì $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Phép cộng có tính giao hoán, có nghĩa là $a + b = b + a$.
4. Trong tập hợp F có một phần tử gọi là phần tử không ký hiệu là 0 mà $a + 0 = a$ với mọi $a \in F$.

5. Mọi phần tử trong tập hợp đều có phần tử đối. Nếu b là một phần tử thì phần đối, ký hiệu là $-b$. Phép trừ giữa hai phần tử $a - b$ được định nghĩa là $a + (-b)$.

Phép nhân

1. Tập hợp F là đóng đối với phép nhân, có nghĩa là nếu $a, b \in F$ thì $ab \in F$.

2. Phép nhân có tính kết hợp, có nghĩa là $a(bc) = (ab)c$.

3. Phép nhân có tính giao hoán, $ab = ba$.

4. Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, có nghĩa là $(a + b)c = ac + bc$.

5. Tập hợp F có một phần tử gọi là phần tử đơn vị, ký hiệu là 1 mà $a1 = a$ với mọi $a \in F$.

6. Mọi phần tử thuộc F , khác 0 đều có nghịch đảo, nếu $b \in F$, $b \neq 0$ thì nghịch đảo của b ký hiệu là b^{-1} và $bb^{-1} = 1$. Phép chia giữa hai phần tử a và b được định nghĩa là ab^{-1} .

Bộ mã được xây dựng từ một trường có hữu hạn phần tử và trường hữu hạn có q phần tử gọi là trường Galois và ký hiệu là $GF(q)$. Mọi trường đều có hai phần tử 0 và 1. Như vậy trường đơn giản nhất là trường $GF(2)$. Phép cộng và phép nhân trên trường $GF(q)$ được định nghĩa theo modulo q và ký hiệu là $(\text{mod } q)$. Nếu $q = p^m$ với m là số nguyên dương thì ta có thể mở rộng trường $GF(p)$ thành trường $GF(p^m)$ và gọi là trường mở rộng của trường $GF(p)$. Phép cộng và phép nhân trên trường mở rộng dựa trên số học modulo p .

Giả sử có hai từ mã C_i và C_j trong mã khối (n, k) . Sự khác nhau giữa các ký hiệu tương ứng hay các vị trí tương ứng gọi là **khoảng cách Hamming giữa hai từ mã** và ký hiệu là d_{ij} . Với $i \neq j$ thì $0 < d_{ij} \leq n$. Giá trị nhỏ nhất trong tập hợp $\{d_{ij}\}$ gọi là khoảng cách tối thiểu giữa hai từ mã và ký hiệu là d_{min} (còn gọi là khoảng cách Hamming của bộ mã).

Một bộ mã có thể là tuyến tính hay không tuyến tính. Giả sử C_i và C_j là hai từ mã của bộ mã khối (n, k) và α_1 và α_2 là hai phần tử nào đó thuộc bộ ký hiệu. Bộ mã là tuyến tính nếu và chỉ nếu $\alpha_1 C_i + \alpha_2 C_j$ cũng là một từ mã. Như vậy mọi bộ mã tuyến tính đều chứa từ mã **0** (là từ mã chỉ có các ký hiệu mã là 0). Như vậy mã có trọng lượng cố định là mã phi tuyến.

Giả sử có một bộ mã khối tuyến tính và ký hiệu C_i , $i = 1, 2, \dots, M$ là các từ mã. Ký hiệu C_1 là từ mã **0**, $C_1 = [00 \dots 0]$ và ω_r là trọng lượng của từ mã thứ r . Như vậy thì ω_r chính là khoảng cách Hamming giữa C_r và C_1 . Khoảng cách giữa hai từ mã C_i và C_j là trọng lượng của từ mã tổng của C_i và C_j . Như vậy sự phân bố của trọng lượng của một bộ mã tuyến tính hoàn toàn đặc trưng cho khoảng cách Hamming của bộ mã. Khoảng cách tối thiểu của bộ mã là:

$$d_{min} = \min_{r \neq 1} \{\omega_r\} \quad (10-1-1)$$

Tập hợp tất cả các vectơ n chiều tạo nên một không gian vectơ n chiều. Nếu ta chọn một tập hợp ($k < n$) vectơ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ S (là không gian vectơ được xây dựng bởi tất cả các tổ hợp mã có độ dài n cùng với các phép toán tương ứng) và xây dựng tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vectơ này thì ra sẽ tạo nên không gian con S_c của không gian S có số chiều là k . Mọi tập hợp k vectơ độc lập tuyến tính trong S_c đều tạo nên cơ sở của không gian vectơ. Xét tất cả các vectơ trong S trực giao với cơ sở của S_c (tức là trực giao với mọi vectơ trong S_c) thì tập hợp đó tạo ra một không gian con của S và gọi là **không gian không** của S_c . Số chiều của S_c là k thì số chiều của không gian không là $n - k$. Không gian không của S_c là một mã tuyến tính khác, có số phần tử là 2^{n-k} và trong mỗi từ mã hay mỗi vectơ có $n - k$ bit thông tin.

10-1-1 Ma trận sinh và ma trận kiểm tra parity

Xét $x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mk}$ là k bit thông tin được mã hóa thành một từ mã C_m . Vector k bit thông tin đưa vào bộ mã hóa được ký hiệu là:

$$\mathbf{X}_m = [x_{m1} x_{m2} \dots x_{mk}]$$

và đầu ra của bộ mã hóa là vector:

$$\mathbf{C}_m = [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}]$$

Quá trình mã hóa trong một bộ mã hóa khối tuyến tính có thể được biểu diễn bởi n phương trình:

$$c_{mj} = x_{m1}g_{1j} + x_{m2}g_{2j} + \dots + x_{mk}g_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10-1-2)$$

với g_{ij} bằng 0 hoặc 1. Các phương trình (10-1-2) được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{X}_m \mathbf{G} \quad (10-1-3)$$

$\mathbf{G}$ gọi là ma trận sinh của mã là:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \dots & g_{kn} \end{bmatrix} \quad (10-1-4)$$

Vậy từ mã là tổ hợp tuyến tính của các vector $\{\mathbf{g}_i\}$ của $\mathbf{G}$:

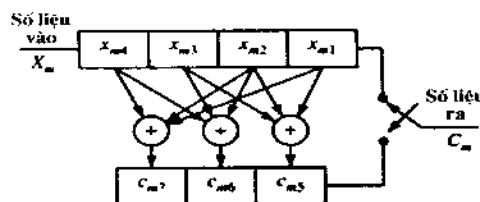
$$\mathbf{C}_m = x_{m1}\mathbf{g}_1 + x_{m2}\mathbf{g}_2 + \dots + x_{mk}\mathbf{g}_k \quad (10-1-5)$$

Do mã tuyến tính (n, k) gồm 2^k từ mã là không gian có số chiều là k , các hàng của ma trận sinh $\mathbf{G}$ phải độc lập tuyến tính. Như vậy $\{\mathbf{g}_i\}$ phải là cơ sở của mã (n, k) . Ma trận sinh $\mathbf{G}$ có thể chuyển về dạng "hệ thống" như sau:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n-k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kn-k} \end{bmatrix} \quad (10-1-6)$$

$\mathbf{I}_k$ là ma trận đơn vị $k \times k$ và $\mathbf{P}$ là ma trận $k \times (n - k)$ xác định $n - k$ bit còn lại hay các bit kiểm tra parity. Chú ý rằng ma trận sinh dạng hệ thống tạo ra mã khối tuyến tính có k bit đầu tiên chính là các bit mang thông tin và $n - k$ bit còn lại là tổ hợp tuyến tính của các bit mang thông tin gọi là các bit kiểm tra parity. Mã (n, k) được tạo ra từ ma trận sinh dạng hệ thống gọi là mã có tính hệ thống.

Mã (n, k) tạo ra từ ma trận sinh không có dạng hệ thống gọi là mã không có dạng hệ thống. Tuy nhiên một ma trận sinh sẽ tương đương với một ma trận sinh dạng hệ thống. Hai mã như vậy gọi là hai mã tương đương. Như vậy mọi mã tuyến tính (n, k) đều tương đương với một mã tuyến tính có tính hệ thống (n, k)



Hình 10-1-1: Thanh ghi dịch tuyến tính tạo ra mã nhị phân (7,4)

Ví dụ 10-1-1

Xét mã (7,4) có ma trận sinh:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_4 \mathbf{P}] \quad (10-1-7)$$

Một từ mã được biểu diễn là:

$$\mathbf{C}_m = [x_{m1} x_{m2} x_{m3} x_{m4} c_{m5} c_{m6} c_{m7}]$$

với $\{x_{mi}\}$ là các bit thông tin và $\{c_{mi}\}$ là ba bit kiểm tra parity, được xác định qua:

$$\begin{aligned} c_{m5} &= x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} \\ c_{m6} &= x_{m2} + x_{m3} + x_{m4} \\ c_{m7} &= x_{m1} + x_{m2} + x_{m4} \end{aligned} \quad (10-1-8)$$

Một bộ mã hóa khối tuyến tính hệ thống sử dụng một thanh ghi dịch k bit và $n-k$ bộ cộng modulo 2. $n-k$ bộ cộng tạo ra các bit parity và được lưu trữ tạm thời trong một thanh ghi dịch khác độ dài $n-k$. Việc mã hóa dùng các thanh ghi dịch trong ví dụ này có thể trình bày như trên hình 10-1-1.

Cùng với mã khối tuyến tính (n, k) là mã kép có số chiều $n-k$. Mã kép này là mã $(n, n-k)$ với 2^{n-k} vectơ, là không gian không của mã (n, k) . Ma trận sinh của mã kép, ký hiệu $\mathbf{H}$ gồm $n-k$ vectơ độc lập tuyến tính trong không gian không. Một từ mã $\mathbf{C}_m$ thuộc mã (n, k) sẽ trực giao với mọi mã trong mã kép, có nghĩa là sẽ trực giao với mọi hàng trong ma trận $\mathbf{H}$ ($\mathbf{H}'$ là ma trận chuyển vị của ma trận $\mathbf{H}$):

$$\mathbf{C}_m \mathbf{H}' = \mathbf{0} \quad (10-1-9)$$

với $\mathbf{0}$ là vectơ hàng $n-k$ phần tử 0. Do (10-1-9) đúng với mọi từ mã trong bộ mã (n, k) nên:

$$\mathbf{G} \mathbf{H}' = \mathbf{0} \quad (10-1-10)$$

Giả thiết mã (n, k) là mã hệ thống và ma trận $\mathbf{G}$ có dạng hệ thống. Do $\mathbf{G} \mathbf{H}' = \mathbf{0}$ nên:

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{P}' \mathbf{I}_{n-k}] \quad (10-1-11)$$

Dấu trừ có thể bỏ qua nếu mã là nhị phân bởi vì phép trừ modulo 2 chính là phép cộng modulo 2.

Ví dụ 10-1-2

Mã hệ thống (7,4) tạo ra từ ma trận sinh $\mathbf{G}$ trong (10-1-7), ma trận $\mathbf{H}$ tương ứng là:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-12)$$

Tích $\mathbf{C}_m \mathbf{H}'$ tạo ra ba phương trình:

$$\begin{aligned} x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + c_{m5} &= 0 \\ x_{m2} + x_{m3} + x_{m4} + c_{m6} &= 0 \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m4} + c_{m7} &= 0 \end{aligned} \quad (10-1-13)$$

Ma trận $\mathbf{H}$ được sử dụng trong bộ giải mã để kiểm tra các từ mã nhận được có thỏa mãn điều kiện (10-1-13) hay không. Do vậy ma trận $\mathbf{H}$ gọi là ma trận kiểm tra parity của mã (n, k) .

Tích $\mathbf{C}_m \mathbf{H}'$ với $\mathbf{C}_m$ khác 0 là tổ hợp tuyến tính các cột của $\mathbf{H}'$. Do $\mathbf{C}_m \mathbf{H}' = \mathbf{0}$ nên các vectơ cột của $\mathbf{H}$ là độc lập tuyến tính. Gọi $\mathbf{C}_j$ là từ mã có trọng lượng nhỏ nhất trong mã tuyến tính (n, k) . Do

trọng lượng nhỏ nhất cũng là khoảng cách tối thiểu nên d_{min} các cột của $\mathbf{H}$ là độc lập tuyến tính. Như vậy không nhiều hơn $d_{min} - 1$ cột của $\mathbf{H}$ là phụ thuộc tuyến tính. Do hạng của $\mathbf{H}$ là $n - k$ nên:

$$d_{min} \leq n - k + 1 \quad (10-1-14)$$

Một mã tuyến tính nhị phân (n, k) với khoảng cách tối thiểu d_{min} ta có thể tạo ra mã tuyến tính nhị phân $(n+1, k)$ bằng cách thêm 1 bit parity vào mỗi từ mã. Bit parity là 0 nếu số ký hiệu 1 trong từ mã là chẵn và là 1 nếu số ký hiệu 1 trong từ mã là lẻ. Như vậy, nếu trọng lượng tối thiểu hay khoảng cách tối thiểu của bộ mã là lẻ thì bit parity sẽ tăng khoảng cách tối thiểu lên 1 đơn vị. Ta gọi mã $(n+1, k)$ là mã mở rộng và ma trận kiểm tra parity là:

$$\mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \mathbf{H} & & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-15)$$

Mã hệ thống (n, k) có thể thu hẹp lại bằng cách đặt một số ký hiệu mang thông tin bằng 0. Như vậy mã tuyến tính (n, k) gồm k bit mang thông tin và $n - k$ bit kiểm tra có thể thu hẹp lại thành mã tuyến tính $(k - l, n - l)$ bằng cách đặt l bit đầu tiên bằng 0. Do

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{X}_m \mathbf{G}$$

nên việc đặt l bit của $\mathbf{X}_m$ bằng 0 tương đương với việc giảm số hàng của $\mathbf{G}$ đi l hàng đầu tiên. Mặt khác

$$\mathbf{C}_m \mathbf{H}' = 0$$

ta có thể bỏ đi l cột đầu tiên của $\mathbf{H}$. Mã $(n - l, k - l)$ gồm 2^{k-l} từ mã. Khoảng cách tối thiểu của bộ mã này ít nhất cũng bằng khoảng cách tối thiểu của bộ mã (n, k) .

10-1-2 Một số loại mã khối tuyến tính

Mã Hamming Có cả mã Hamming nhị phân và không nhị phân và chúng ta chỉ xét mã nhị phân. Mã Hamming gồm lớp các bộ mã thỏa mãn điều kiện:

$$(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m) \quad (10-1-16)$$

trong đó m là số nguyên dương.

Ma trận kiểm tra parity $\mathbf{H}$ có tính chất đặc biệt giúp chúng ta mô tả mã dễ dàng hơn. Đối với mã Hamming (n, k) , $n = 2^m - 1$ cột gồm tất cả các vectơ có $m = n - k$ phần tử trừ vectơ $\mathbf{0}$. Ví dụ như mã $(7, 4)$ trong ví dụ 10-1-1 là mã Hamming. Ma trận kiểm tra parity gồm 7 vectơ cột là tất cả các vectơ có độ dài 3 trừ vectơ $\mathbf{0}$. Nếu ta muốn tạo mã Hamming có tính hệ thống thì ta có thể dễ dàng sắp xếp để có được ma trận kiểm tra parity $\mathbf{H}$ và từ đó có ma trận sinh $\mathbf{G}$. Ta nhận thấy rằng không có hai cột khác nhau nào của ma trận $\mathbf{H}$ là phụ thuộc tuyến tính. Tuy nhiên với $m > 1$, có thể tìm được 3 cột của $\mathbf{H}$ có tổng bằng $\mathbf{0}$. Như vậy $d_{min} = 3$ đối với mã Hamming.

Bằng cách thêm bit parity, mã Hamming (n, k) có thể mở rộng thành mã $(n+1, k)$ với $d_{min} = 4$. Mặt khác, mã Hamming có thể thu hẹp lại thành mã $(n-l, k-l)$ bằng cách bỏ đi l hàng trong ma trận sinh $\mathbf{G}$ hay bỏ đi l cột trong ma trận kiểm tra parity $\mathbf{H}$. Phân bố trọng lượng của mã Hamming (n, k) được biểu diễn thành dạng đa thức như sau:

$$A(z) = \sum_{i=1}^n A_i z^i = \frac{1}{n+1} [(1+z)^n + n(1+z)^{(n-1)/2} (1-z)^{(n+1)/2}] \quad (10-1-17)$$

với A_i là số lượng các từ mã có trọng lượng i .

Mã Hadamard Mã Hadamard nhận được từ các hàng của ma trận Hadamard. Ma trận Hadamard M_n là ma trận $n \times n$ (n chẵn), các phần tử là 0 hoặc 1, một hàng bất kỳ khác các hàng khác chỉ ở $\frac{1}{2}n$ vị trí. Một hàng của ma trận gồm toàn phần tử 0 còn các hàng khác gồm $\frac{1}{2}n$ phần tử 0 và $\frac{1}{2}n$ phần tử 1.

Với $n = 2$, ma trận Hadamard là:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-18)$$

Từ ma trận M_n , ta có thể tạo ra ma trận M_{2n} theo quan hệ:

$$M_{2n} = \begin{bmatrix} M_n & M_n \\ M_n & \overline{M}_n \end{bmatrix} \quad (10-1-19)$$

với $\overline{M}_n$ là ma trận bù của M_n bằng cách thay phần tử 0 bằng phần tử 1 và ngược lại. Ta có:

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10-1-20)$$

Ma trận bù của M_4 là:

$$\overline{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-21)$$

Từ các hàng của M_4 và $\overline{M}_4$ ta tạo ra 8 từ mã độ dài 4. Khoảng cách tối thiểu $d_{min} = \frac{1}{2}n = 2$. Ta có thể tạo ra các từ mã có độ dài $n = 2^m$, $k = \log_2 2n = m + 1$, $d_{min} = \frac{1}{2}n = 2^{m-1}$ với m là số nguyên dương.

Mã Golay Mã Golay là mã tuyến tính nhị phân (23,12) với $d_{min} = 7$. Mở rộng mã Golay bằng cách thêm vào bit parity để trở thành mã nhị phân tuyến tính (24,12) và $d_{min} = 8$. Bảng 10-1-1 liệt kê sự phân bố về trọng lượng của các từ mã trong mã Golay (23,12) và (24,12).

Bảng 10-1-1 Sự phân bố trọng lượng của mã Golay

Trọng lượng	Mã (23,12)	Mã (24,12)
0	1	1
7	253	0
8	506	759
11	1288	0
12	1288	2576
15	506	0
16	253	759
23	1	0
24	0	1

10-1-3 Mã vòng

Mã vòng là tập con của lớp mã tuyến tính và thỏa mãn tính chất dịch vòng như sau: nếu $C = [c_{n-1}c_{n-2} \dots c_1c_0]$ là một từ mã thuộc bộ mã vòng thì $[c_{n-2}c_{n-3} \dots c_0c_{n-1}]$ nhận được bằng cách dịch

vòng các phần tử của $\mathbf{C}$ cũng là một từ mã. Như vậy mọi dịch vòng của $\mathbf{C}$ đều là từ mã. Chúng ta xét một số đặc điểm của mã này.

Đối với mã vòng thì mỗi từ mã $\mathbf{C} = [c_{n-1}c_{n-2}\dots c_1c_0]$ tương ứng với một đa thức $C(p)$, có bậc không quá $n-1$ và được định nghĩa là:

$$C(p) = c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2} + \dots + c_1p + c_0 \quad (10-1-22)$$

Đối với mã nhị phân thì mỗi hệ số nhận một trong hai giá trị là 0 hoặc 1.

Ta lập đa thức:

$$pC(p) = c_{n-1}p^n + c_{n-2}p^{n-1} + \dots + c_1p^2 + c_0p$$

Đa thức này không biểu diễn một từ mã do bậc của nó là n khi $c_{n-1} = 1$. Nếu ta chia $pC(p)$ cho $p^n + 1$, ta nhận được:

$$\frac{pC(p)}{p^n + 1} = c_{n-1} + \frac{C_1(p)}{p^n + 1} \quad (10-1-23)$$

với

$$C_1(p) = c_{n-2}p^{n-1} + c_{n-3}p^{n-2} + \dots + c_0p + c_{n-1}$$

Chú ý rằng $C_1(p)$ biểu diễn từ mã $\mathbf{C}_1 = [c_{n-2}\dots c_0c_{n-1}]$, chính là từ mã $\mathbf{C}$ dịch vòng một vị trí. Do $C_1(p)$ là phần dư khi chia $pC(p)$ cho $p^n + 1$ nên:

$$C_1(p) = pC(p) \bmod (p^n + 1) \quad (10-1-24)$$

Tương tự, nếu $C(p)$ là một từ mã trong bộ mã vòng thì $p^iC(p) \bmod (p^n + 1)$ cũng là một từ mã trong bộ mã vòng:

$$p^iC(p) = Q(p)(p^n + 1) + C_i(p) \quad (10-1-25)$$

đa thức dư $C_i(p)$ biểu diễn một từ mã thuộc bộ mã vòng và đa thức $Q(p)$ là đa thức thương.

Ta có thể tạo ra mã vòng nhờ đa thức sinh $g(p)$ bậc $n-k$. Đa thức sinh của mã vòng (n, k) là một thừa số khi khai triển $p^n + 1$ và có dạng như sau:

$$g(p) = p^{n-k} + g_{n-k-1}p^{n-k-1} + \dots + g_1p + 1 \quad (10-1-26)$$

Ta định nghĩa đa thức mang tin $X(p)$ là:

$$X(p) = x_{k-1}p^{k-1} + x_{k-2}p^{k-2} + \dots + x_1p + x_0 \quad (10-1-27)$$

trong đó $[x_{k-1}x_{k-2}\dots x_0]$ thể hiện k bit thông tin. Tích của $X(p)g(p)$ là một đa thức có bậc không vượt quá $n-1$ và có thể biểu diễn cho một từ mã. Chúng ta có 2^k đa thức $X_i(p)$ và có 2^k từ mã có thể tạo ra từ $g(p)$. Ta ký hiệu các từ mã này là:

$$C_m(p) = X_m(p)g(p), \quad m = 1, 2, \dots, 2^k \quad (10-1-28)$$

Để chứng tỏ các từ mã trong công thức (10-1-28) thỏa mãn tính chất dịch vòng, ta xét một từ mã $C(p)$, một dịch vòng của $C(p)$ tạo ra:

$$C_1(p) = pC(p) + c_{n-1}(p^n + 1) \quad (10-1-29)$$

và do $g(p)$ chia hết cả $C(p)$ và $p^n + 1$ nên nó cũng chia hết $C_1(p)$, có nghĩa là $C_1(p)$ có thể biểu diễn thành

$$C_1(p) = X_1(p)g(p)$$

Như vậy dịch vòng của mọi từ mã trong (10-1-28) đều tạo ra một từ mã khác. Đa thức sinh $g(p)$ gọi là đa thức sinh của mã vòng (n, k) và mã vòng là không gian con S_c của không gian vectơ S . Không gian vectơ S_c có số chiều là k .

Ví dụ 10-1-3

Xét mã khối độ dài 7. Đa thức $p^7 + 1$ khai triển như sau:

$$p^7 + 1 = (p + 1)(p^3 + p^2 + 1)(p^3 + p + 1) \quad (10-1-30)$$

Để tạo ra mã vòng (7,4), ta có thể sử dụng một trong hai đa thức sinh:

$$\begin{aligned} g_1(p) &= p^3 + p^2 + 1 \\ g_2(p) &= p^3 + p + 1 \end{aligned} \quad (10-1-31)$$

Mã tạo ra bởi $g_1(p)$ và $g_2(p)$ là tương đương. Các từ mã trong bộ mã (7,4) được tạo ra bởi đa thức $g_1(p)$ được ghi trong bảng 10-1-2.

Bảng 10-1-2: Mã vòng (7,4), đa thức sinh $g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$

Các bit thông tin				Từ mã							
p^3	p^2	p^1	p^0	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p^1	p^0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	
1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	

Tổng quát, đa thức $p^n + 1$ có thể phân tích thành:

$$p^n + 1 = g(p)h(p)$$

với $g(p)$ là ký hiệu đa thức sinh bộ mã vòng (n, k) và $h(p)$ là ký hiệu của đa thức parity có bậc là k . Ta định nghĩa đa thức phối hợp với $h(p)$ như sau:

$$\begin{aligned} p^k h(p^{-1}) &= p^k (p^{-k} + h_{k-1} p^{-k+1} + \dots + h_1 p^{-1} + 1) \\ &= 1 + h_{k-1} p + h_{k-2} p^2 + \dots + h_1 p^{k-1} + p^k \end{aligned} \quad (10-1-32)$$

Rõ ràng đa thức phối hợp cũng là một thừa số khi khai triển $p^k + 1$. Như vậy $p^k h(p^{-1})$ là đa thức sinh của mã vòng $(n, n - k)$. Mã vòng này là mã kép của mã vòng (n, k) được tạo ra từ đa thức $g(p)$. Mã kép $(n, n - k)$ tạo nên không gian không của mã vòng (n, k) .

Ví dụ 10-1-4

Xét mã kép của mã vòng (7,4) được tạo ra trong ví dụ trên. Mã kép này là mã vòng (7,3) gắn với đa thức parity

$$\begin{aligned} h_1(p) &= (p + 1)(p^3 + p + 1) \\ &= p^4 + p^3 + p^2 + 1 \end{aligned} \quad (10-1-33)$$

Đa thức phối hợp là

$$p^4 h(p^{-1}) = 1 + p + p^2 + p^4$$

Đa thức này tạo ra mã kép (7,3) trong bảng 10-1-3.

Bảng 10-1-3: Mã kép (7,3) với đa thức sinh $p^4 h(p^{-1}) = p^4 + p^2 + p + 1$

Các bit thông tin			Từ mã							
p^2	p^1	p^0	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p^1	p^0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	

Ta đặt câu hỏi là từ đa thức sinh của mã vòng (n, k) ta có thể tạo được ma trận sinh bằng cách nào? Ta đã biết rằng ma trận sinh của mã (n, k) được xây dựng từ tập hợp k từ mã mà các vectơ mã tương ứng là độc lập tuyến tính. Như vậy từ đa thức sinh $g(p)$, ta có thể dễ dàng tạo ra k từ mã độc lập tuyến tính là các từ mã tương ứng với các đa thức độc lập tuyến tính sau

$$p^{k-1}g(p), p^{k-2}g(p), \dots, pg(p), g(p)$$

Do mọi đa thức bậc không quá $n-1$ và chia hết cho $g(p)$ đều có thể biểu diễn thành một tổ hợp tuyến tính của các đa thức trên, như vậy các đa thức trên sẽ tạo ra cơ sở của không gian vectơ k chiều. Tóm lại, các từ mã tương ứng với các đa thức trên tạo ra cơ sở của mã vòng (n, k) .

Ví dụ 10-1-5

Bốn hàng của ma trận sinh mã vòng (7,4) với đa thức sinh $g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$ nhận được từ các đa thức $p^i g_1(p)$, $i = 3, 2, 1, 0$. Ma trận đó là:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-34)$$

Tương tự, ma trận sinh đối với đa thức $g_2(p) = p^3 + p + 1$ là:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-35)$$

Các ma trận kiểm tra parity có thể xây dựng tương tự từ các đa thức phối hợp.

Ma trận sinh nhận được theo phương pháp trên không có tính hệ thống. Ta có thể tạo ra ma trận sinh của mã vòng có dạng hệ thống $G = [I_k | P]$ từ đa thức sinh như sau. Hàng thứ l của G tương ứng với đa thức có dạng $p^{n-l} + R_l(p)$ và

$$\frac{p^{n-l}}{g(p)} = Q_l(p) + \frac{R_l(p)}{g(p)}, \quad l = 1, 2, \dots, k$$

hay

$$p^{n-l} = Q_l(p)g(p) + R_l(p) \quad (10-1-36)$$

Nhưng $p^{n-l} + R_l(p)$ tương ứng với một từ mã của bộ mã vòng nên đa thức tương ứng với hàng thứ l của ma trận $\mathbf{G}$ là $p^{n-l} + R_l(p)$.

Ví dụ 10-1-6

Với mã vòng (7,4) được tạo ra từ đa thức sinh $g_2(p) = p^3 + p + 1$ ta có:

$$\begin{aligned} p^6 &= (p^3 + p + 1)g_2(p) + p^2 + 1 \\ p^5 &= (p^2 + 1)g_2(p) + p^2 + p + 1 \\ p^4 &= pg_2(p) + p^2 + p \\ p^3 &= g_2(p) + p + 1 \end{aligned}$$

Ma trận sinh của bộ mã có tính hệ thống là

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-37)$$

và ma trận kiểm tra parity tương ứng là

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10-1-38)$$

Ta cũng chứng minh được rằng bộ mã tạo ra bởi ma trận sinh (10-1-35) giống bộ mã được tạo ra từ ma trận sinh (10-1-37).

Phương pháp tạo ra ma trận sinh $\mathbf{G}$ có tính hệ thống cũng chỉ ra rằng mã vòng có tính hệ thống có thể được tạo ra trực tiếp từ ma trận $g(p)$. Ta nhân đa thức $X(p)$ với p^{n-k} sẽ nhận được:

$$p^{n-k}X(p) = x_{k-1}p^{n-1} + x_{k-2}p^{n-2} + \dots + x_1p^{n-k+1} + x_0p^{n-k}$$

Trong mã hệ thống, đa thức này biểu diễn k bit thông tin trong từ mã $C(p)$. Đa thức này phải thêm vào $n - k$ bit parity. Chia $p^{n-k}X(p)$ cho $g(p)$, ta nhận được:

$$\frac{p^{n-k}X(p)}{g(p)} = Q(p) + \frac{r(p)}{g(p)}$$

hay tương đương là:

$$p^{n-k}X(p) = Q(p)g(p) + r(p) \quad (10-1-39)$$

Rõ ràng $Q(p)g(p)$ là một từ mã thuộc bộ mã vòng. Như vậy cộng $r(p)$ vào cả hai vế của (10-1-39) ta sẽ nhận được mã có tính hệ thống.

Do $p^n + 1 = g(p)h(p)$ hay $g(p)h(p) = 0 \pmod{p^n + 1}$ nên ta nói rằng hai đa thức $g(p)$ và $h(p)$ là trực giao với nhau, và tương tự, hai đa thức $p^i g(p)$ và $p^j h(p)$ là trực giao với mọi i, j . Nhưng hai vectơ tương ứng với hai đa thức $g(p)$ và $h(p)$ là trực giao nếu các phần tử của một trong hai vectơ là đảo ngược lại. Thực ra, nếu đa thức parity $h(p)$ được sử dụng để tạo ra mã kép $(n, n - k)$ thì tập hợp các từ mã nhận được nếu đảo ngược lại sẽ giống bộ mã tạo ra bởi đa thức phối hợp. Điều đó nói lên rằng ma trận sinh của mã kép nhận được từ đa thức phối hợp $p^k h(p^{-1})$ có thể nhận được một cách gián tiếp từ $h(p)$. Do ma trận kiểm tra parity $\mathbf{H}$ của mã (n, k) là ma trận sinh của mã kép nên $\mathbf{H}$ có thể nhận được từ $h(p)$.

Vi dụ 10-1-7

Mã kép của mã vòng (7,4) được tạo ra bởi đa thức sinh $g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$ là mã kép (7,3) được tạo ra từ đa thức phối hợp $p^4 h_1(p^{-1}) = p^4 + p^2 + p + 1$. Tuy nhiên ta có thể sử dụng $h_1(p)$ để tạo ra ma trận sinh của mã kép. Ma trận tương ứng với các đa thức $p^i h_1(p)$, $i = 1, 2, 3$ là

$$G_{h1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận sinh của mã kép (7,3) là ma trận kiểm tra parity của mã (7,4), gồm các hàng của G_{h1} đảo ngược thứ tự

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta dễ dàng thấy rằng $G_1 H_1' = 0$. Chú ý rằng các vectơ cột của H gồm 7 vectơ có độ dài 3 trừ vectơ 0. Nhưng đây chính là ma trận kiểm tra parity của mã Hamming (7,4). Như vậy mã vòng (7,4) tương đương với mã Hamming.

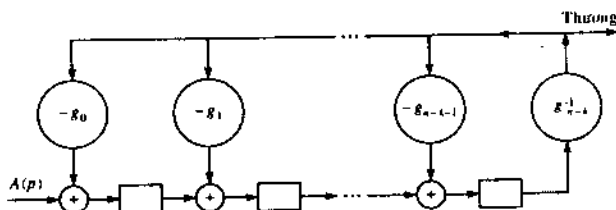
Bộ mã hóa tạo mã vòng

Bộ mã hóa có thể thực hiện bằng thanh ghi dịch có phản hồi sử dụng hoặc đa thức sinh hoặc đa thức kiểm tra parity. Trước tiên ta xét đa thức sinh.

Việc tạo ra mã vòng gồm ba bước. Nhân đa thức tương ứng với bản tin $X(p)$ với p^{n-k} , chia cho $g(p)$ và cuối cùng là cộng thêm đa thức dư. Đa thức bị chia là đa thức $A(p) = p^{n-k} X(p)$ và đa thức chia là

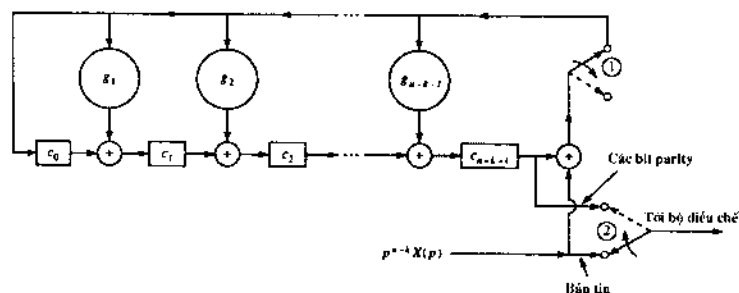
$$g(p) = g_{n-k} p^{n-k} + g_{n-k-1} p^{n-k-1} + \dots + g_1 p + g_0$$

Quá trình chia được thực hiện bằng thanh ghi dịch có $(n-k)$ nhịp phản hồi như trên hình 10-1-2. Đầu tiên thanh ghi dịch chứa toàn số liệu 0. Các hệ số của $A(p)$ được dịch chuyển theo từng nhịp vào thanh ghi từng bit một. Sau k lần dịch, ký hiệu đầu tiên của thương khác 0 xuất hiện ở đầu ra. Với mỗi hệ số của thương, ta phải trừ đi đa thức $g(p)$ nhân với hệ số này.



Hình 10-1-2: Thanh ghi dịch có phản hồi để chia hai đa thức

Bộ mã hóa để tạo mã vòng như trên hình 10-1-3. k bit đầu tiên ở đầu ra của bộ mã hóa là k bit thông tin. k bit này được đưa theo nhịp từng bit một vào thanh ghi dịch. Sau khi k bit đã vào hết trong thanh ghi, chuyển mạch chuyển vị trí và theo sau là $n-k$ bit parity.

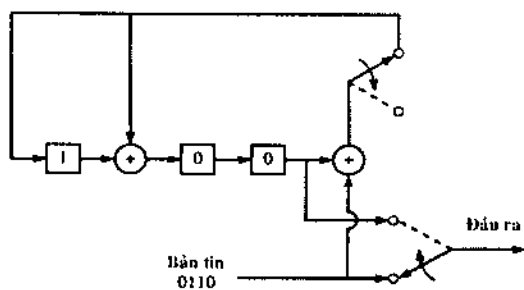


Hình 10-1-3: Bộ mã hóa tạo mã vòng sử dụng đa thức sinh $g(p)$

Ví dụ 10-1-8

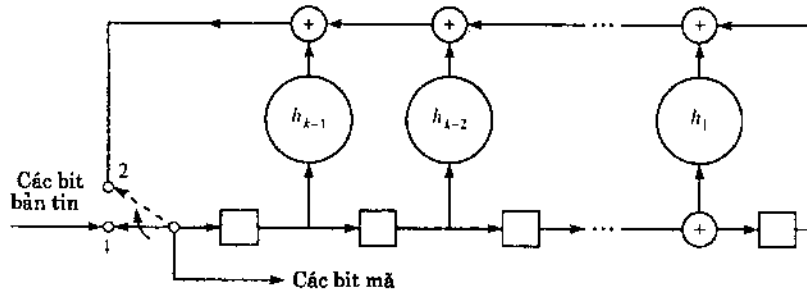
Thanh ghi dịch để tạo mã vòng (7,4) với đa thức sinh $g(p) = p^3 + p + 1$ được trình bày trên hình 10-1-4. Giả sử các bit của bản tin là 0110 thì số liệu trong thanh ghi dịch là như sau:

Số liệu vào	Số lần dịch	Số liệu trong thanh ghi dịch
	0	0 0 0
0	1	0 0 0
1	2	1 1 0
1	3	1 0 1
0	4	1 0 0

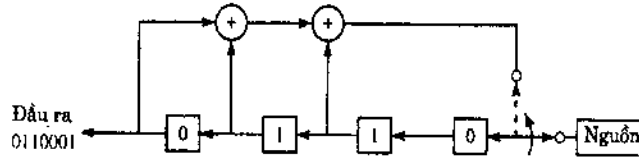


Hình 10-1-4: Bộ mã hóa mã vòng (7,4) dùng đa thức sinh $g(p) = p^3 + p + 1$

Như vậy, các bit parity là 100 tương ứng với $c_5 = 0, c_6 = 0, c_7 = 1$. Chúng ta cũng có thể dùng đa thức parity để tạo ra mã vòng. Bộ mã hóa như trên hình 10-1-5. Đầu tiên k bit thông tin được đưa vào thanh ghi dịch và sau $n - k$ lần dịch thì sẽ tạo ra $n - k$ bit parity.



Hình 10-1-5: Bộ mã hóa tạo mã vòng sử dụng đa thức sinh $g(p)$



Hình 10-1-6: Bộ mã hóa tạo mã vòng (7,4) sử dụng đa thức kiểm tra parity

Ví dụ 10-1-9

Đa thức parity của mã vòng (7,4) được tạo ra bởi đa thức sinh $g(p) = p^3 + p + 1$ là $h(p) = p^4 + p^2 + p + 1$. Bộ mã hóa dựa vào đa thức này được trình bày như trên hình 10-1-6. Nếu đầu vào bộ mã hóa là bản tin 0110 thì các bit parity là $c_5 = 0, c_6 = 0, c_7 = 1$. Ta cũng cần lưu ý rằng khi $n - k < k$ thì bộ mã hóa dựa vào đa thức sinh sẽ đơn giản hơn (tức là $R_c > \frac{1}{2}$), và khi $n - k > k$ hay $R_c < \frac{1}{2}$ thì bộ mã hóa dựa vào đa thức parity sẽ đơn giản hơn.

Mã vòng Hamming là một lớp mã vòng bao gồm mã Hamming có độ dài từ mã $n = 2^m - 1$ và $n - k = m$ bit parity. Mã vòng Hamming tương đương với mã Hamming mà ta đã mô tả.

Mã vòng Golay (23,12) Mã Golay tuyến tính (23,12) có thể được tạo ra như mã vòng với đa thức sinh

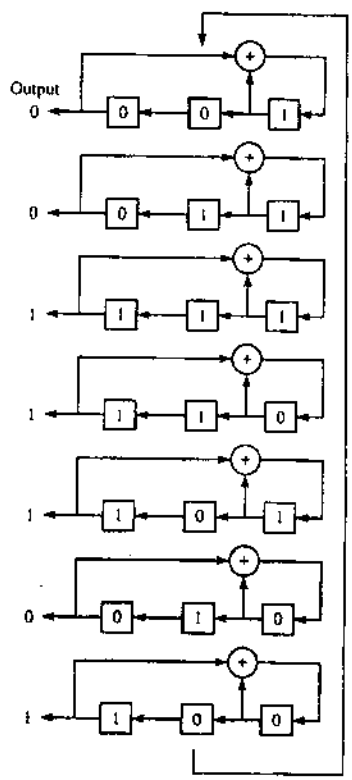
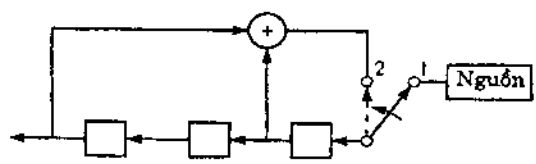
$$g(p) = p^{11} + p^9 + p^7 + p^6 + p^5 + p + 1 \quad (10-1-40)$$

Bộ mã có khoảng cách Hamming tốt nhất $d_{min} = 7$.

Mã ghi dịch độ dài cực đại Mã ghi dịch độ dài cực đại là một lớp mã vòng với

$$(n, k) = (2^m - 1, m) \quad (10-1-41)$$

Các từ mã được tạo ra bởi thanh ghi dịch phản hồi m nhịp và dựa vào đa thức parity. Với mỗi từ mã, các bit thông tin được đưa vào thanh ghi dịch, số liệu trong thanh ghi dịch được dịch chuyển trong $2^m - 1$ nhịp. Bộ mã tạo ra có tính hệ thống và có độ dài $n = 2^m - 1$. Ví dụ như trên hình 10-1-7 và số liệu được ghi trong bảng 10-1-4.



Hình 10-1-7: Thanh ghi dịch ba nhịp tạo ra mã ghi dịch có độ dài cực đại Hình 10-1-8: Bảy trạng thái của thanh ghi dịch với $m = 3$

Bảng 10-1-4 Mã ghi dịch có độ dài cực đại với $m = 3$

Các bit thông tin			Từ mã							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0

Chú ý rằng ngoại trừ từ mã 0, mọi từ mã tạo ra không phải là dịch vòng của một từ mã duy nhất. Điều đó có thể nhận thấy từ sơ đồ trạng thái của thanh ghi dịch như trên hình 10-1-8. Khi thanh ghi dịch được nạp số liệu và dịch trong $n = 2^m - 1$ lần, nó sẽ vòng qua tất cả $2^m - 1$ trạng thái. Như vậy thanh ghi dịch trở về trạng thái ban đầu của nó sau $2^m - 1$ lần dịch. Như vậy đây là tuần hoàn với chu kỳ $n = 2^m - 1$. Do có $2^m - 1$ trạng thái, độ dài này tương ứng với chu kỳ lớn nhất có thể. Như vậy $2^m - 1$ từ mã không phải là dịch vòng của một từ mã.

Mã ghi dịch độ dài cực đại tồn tại với mọi m dương. Trong bảng 10-1-5 ghi các tham số của mã với $2 \leq m \leq 32$.

Bảng 10-1-5: Thanh ghi dịch để tạo mã ghi dịch có độ dài cực đại

m	Số nhị pháp nối với bộ cộng modulo 2	m	Số nhị pháp nối với bộ cộng modulo 2	m	Số nhị pháp nối với bộ cộng modulo 2
2	1,2	13	1,10,11,13	24	1,18,23,24
3	1,3	14	1,5,9,14	25	1,23
4	1,4	15	1,15	26	1,21,25,26
5	1,4	16	1,5,14,16	27	1,23,26,27
6	1,6	17	1,15	28	1,26
7	1,7	18	1,12	29	1,28
8	1,5,6,7	19	1,15,18,19	30	1,8,29,30
9	1,6	20	1,18	31	1,29
10	1,8	21	1,20	32	1,11,31,32
11	1,10	22	1,22	33	1,21
12	1,7,9,12	23	1,19	34	1,8,33,34

Một tính chất khác của mã ghi dịch có độ dài cực đại là trừ từ mã 0, tất cả các từ mã khác đều có 2^{m-1} ký hiệu 1 và 2^{m-1} ký hiệu 0. Như vậy các từ mã này có trọng lượng giống nhau và bằng khoảng cách tối thiểu $d_{min} = 2^{m-1}$.

Chú ý rằng mã ghi dịch có độ dài cực đại là mã kép của mã Hamming vòng $(2^m - 1, 2^m - 1 - m)$. Thanh ghi dịch để tạo ra mã ghi dịch có độ dài cực đại có thể sử dụng để tạo ra dãy nhị phân có chu kỳ $n = 2^m - 1$. Dãy nhị phân này có hàm tự tương quan tuần hoàn và $\phi(m) = n$ với $m = 0, \pm n, \pm 2n, \dots$ và $\phi(m) = -1$ với mọi giá trị khác. Hàm tự tương quan có dạng xung như vậy có phổ mật độ công suất gần như trắng và tương tự như nhiễu trắng. Như vậy dãy có độ dài cực đại được gọi là dãy giả nhiễu (PN).

Mã BCH (Bose-Chaudhuri-Hocquenghem) Mã BCH là một lớp rộng mã vòng gồm cả mã nhị phân và không nhị phân. Mã BCH nhị phân có các tham số như sau:

$$\begin{aligned} n &= 2^m - 1 \\ n - k &\leq mt \\ d_{min} &= 2t + 1 \end{aligned} \quad (10-1-42)$$

với m và t ($m \geq 3$) là các số nguyên dương tùy ý. Đa thức sinh của mã BCH là một thừa số của $p^{2^m-1} + 1$. Bảng 10-1-6 liệt kê các hệ số của đa thức sinh với $3 \leq m \leq 8$ và các hệ số này ở dạng cơ số 8.

Bảng 10-1-6: Các hệ số của đa thức sinh (cơ số 8) đối với mã BCH

n	k	t	g(p)
7	4	1	13
15	11	1	23
	7	2	721
	5	3	2467
31	26	1	45
	21	2	3551
	16	3	107657
	11	5	5423325
	6	7	313365047

Bảng 10-1-6: Các hệ số của đa thức sinh (cơ số 8) đối với mã BCH (tiếp)

n	k	t	g(p)
63	57	1	103
	51	2	12471
	45	3	1701317
	39	4	166623567
	36	5	1033500423
	30	6	157464165547
	24	7	17323260404441
	18	10	1363026512351725
	16	11	6331141367235453
	10	13	472622305527250155
	7	15	5231045543503271737
127	120	1	211
	113	2	41567
	106	3	11554743
	99	4	3447023271
	92	5	624730022327
	85	6	130704476322273
	78	7	26230002166130115
	71	9	6255010713253127753
	64	10	1206534025570773100045
	57	11	335265252505705053517721
	50	13	54446512523314012421501421
	43	14	17721772213651227521220574343
	36	15	3146074666522075044764574721735
	29	21	403114461367670603667530141176155
	22	23	123376070404722522435445626637647043
	15	27	22057042445604554770523013762217604353
	8	31	7047264052751030651476224271567733130217
255	247	1	435
	239	2	267543
	231	3	156720665
	223	4	75626641375
	215	5	23157564726421
	207	6	16176560567636227
	199	7	7633031270420722341
	199	8	2663470176115333714567
	187	9	52755313540001322236351
	179	10	22624710717340432416300455
	171	11	1541621421234235607706163067
	163	12	7500415510075602551574724514601
	155	13	3757513005407665015722506464677633
	147	14	1642130173537165525304165305441011711
	139	15	461401732060175561570722730247453567445
	131	18	215713331471510151261250277442142024165471
	123	19	120614052242066003717210326516141226272506267
	115	21	60526665572100247263636404600276352556313472737
	107	22	22205772322066256312417300235347420176574750154441
	99	23	10656667253473174222741416201574332252411076432303431

Bảng 10-1-6: Các hệ số của đa thức sinh (cơ số 8) đối với mã BCH (tiếp)

n	k	t	g(p)
91	25		6750265030327444172723631724732511075550762720724344561
87	26		110136763414743236435231634307172046206722545273311721317
79	27		66700035637657500020270344207366174621015326711766541342355
71	29		24024710520644321515554172112331163205444250362557643221706035
63	30		10754475055163544325315217357707003666111726455267613656702543301
55	31		73154252035011001330152753060320543254143267550105570444260354736 17
47	42		25335420170626465630330413774062331751233341454460450050660245525 43173
45	43		15202056055234161131101346376423701563670024470762373033202157025 051541
37	45		51363302550670074141774472454375304207357061743234323476443547374 03044003
29	47		3025715536673071465527064012361377115342242324201174114060254757 410403565037
21	55		12562152570603326560017731536076121032273414056530745425211531216 14466513473725
13	59		46417320050525645444265737142500660043306774454765614031746772135 7026134460500547
9	63		1572602521747246320103104325535513461416236721204407454511276611554 7705561677516057

10-1-4 Giải mã xác định mềm tối ưu đối với mã khối tuyến tính

Trong phần này, chúng ta xác định hiệu quả của mã khối tuyến tính trên kênh AWGN khi quá trình giải mã là xác định mềm tối ưu (không lượng tử) được thực hiện ở bộ thu. Chúng ta xét tín hiệu PSK nhị phân (hay QPSK) xác định liên kết và tín hiệu FSK nhị phân xác định liên kết hoặc không liên kết. Ký hiệu ξ là năng lượng của một từ mã và ξ_c là năng lượng để truyền 1 bit trong từ mã. Giả sử từ mã có độ dài n , trong đó có k bit thông tin thì năng lượng để truyền 1 bit thông tin là:

$$\xi_b = \frac{\xi}{k} = \frac{n}{k} \xi_c = \frac{\xi_c}{R_c} \quad (10-1-43)$$

Các từ mã giả thiết là có xác suất tiên nghiệm giống nhau và bằng $1/M$.

Giả sử các bit của từ mã được truyền đi bằng tín hiệu PSK nhị phân. Như vậy mỗi từ mã tương ứng với một trong M tín hiệu. Chúng ta biết rằng bộ thu tối ưu trên kênh AWGN có thể thực hiện bằng băng song song gồm M bộ lọc phối hợp với mỗi tín hiệu có thể truyền đi. Đầu ra của M bộ lọc ở thời điểm cuối của mỗi chu kỳ tín hiệu gồm n bit của từ mã và từ mã ứng với đầu ra lớn nhất của các bộ lọc sẽ được chọn. Chú ý rằng ta cũng có thể sử dụng M bộ tương quan chéo. Gọi $r_j, j = 1, 2, \dots, n$ là n mẫu thu được ở đầu ra của bộ lọc phối hợp ứng với một từ mã. Do tín hiệu là PSK xác định liên kết nên

$$r_j = \sqrt{\xi_c} + n_j \quad (10-1-44)$$

khi bit thứ j của từ mã là 1 và

$$r_j = -\sqrt{\xi_c} + n_j \quad (10-1-45)$$

khi bit thứ j của từ mã là 0. Các biến ngẫu nhiên $\{n_j\}$ là các mẫu nhiễu cộng gaussian trắng có giá trị trung bình 0 và sai phương $\frac{1}{2}N_0$. Bộ giải mã tối ưu lập M độ đo tương quan:

$$CM_i = C(\mathbf{r}, \mathbf{C}_i) = \sum_{j=1}^n (2c_{ij} - 1)r_j, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (10-1-46)$$

với c_{ij} là ký hiệu bit thứ j trong từ mã thứ i . Như vậy độ đo tương quan ứng với từ mã thực sự truyền đi có giá trị trung bình $\sqrt{\xi_c}n$, trong khi đó $M-1$ độ đo tương quan khác nhỏ hơn. Chú ý rằng mặc dù độ đo tính khá đơn giản nhưng sẽ không dễ dàng trong thực tế khi số lượng tín hiệu là rất lớn ($M > 2^{10}$). Khi đó người ta có các kỹ thuật để loại bỏ bớt các từ mã không có khả năng mà không cần tính các độ đo tương quan.

Để xác định xác suất lỗi của mã khối tuyến tính, khi các từ mã được truyền đi trên kênh nhị phân đối xứng AWGN với giải mã xác định mềm tối ưu thì xác suất lỗi của từ mã thứ m là như nhau với mọi m . Để đơn giản, giả thiết từ mã C_1 là từ mã 0 được truyền đi. Để giải mã đúng là C_1 , độ đo tương quan CM_1 phải lớn hơn tất cả các độ đo tương quan khác. Mọi biến CM đều có phân bố gaussian và giá trị trung bình của CM_1 là $\sqrt{\xi_c}n$ trong khi giá trị trung bình của các độ đo khác là $\sqrt{\xi_c}n(1-2w_n/n)$. Sai phương của các biến là $\frac{1}{2}N_0$. Các hệ số tương quan chéo giữa C_1 và $M-1$ từ mã khác là:

$$\rho_m = 1 - 2w_n/n, \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (10-1-47)$$

Chúng ta sử dụng giới hạn hợp. Xác suất để $CM_m > CM_1$ là:

$$P_2(m) = Q\left(\sqrt{\frac{\xi}{N_0}(1-\rho_m)}\right) \quad (10-1-48)$$

Thay ρ_m từ (10-1-47) và $\xi = k\xi_b$ ta có:

$$\begin{aligned} P_2(m) &= Q\left(\sqrt{\frac{2\xi_b}{N_0}R_c w_m}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}\right) \end{aligned} \quad (10-1-49)$$

với γ_b là SNR từng bit và R_c là tốc độ mã. Xác suất trung bình được giới hạn trên bởi:

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{m=2}^M p_2(m) \\ &\leq \sum_{m=2}^M Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}\right) \end{aligned} \quad (10-1-50)$$

Việc tính xác suất xác định sai theo công thức trên đòi hỏi phải biết phân bố trọng lượng của bộ mã. Chúng ta có thể sử dụng giới hạn kém chặt hơn như sau

$$Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}\right) \leq Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c d_{\min}}\right) < \exp(-\gamma_b R_c d_{\min}) \quad (10-1-51)$$

và

$$P_M \leq (M-1)Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c d_{\min}}\right) < \exp(-\gamma_b R_c d_{\min} + k \ln 2) \quad (10-1-52)$$

Giới hạn này được sử dụng khi không biết phân bố trọng lượng của bộ mã. Khi so sánh giới hạn trong (10-1-52) với hiệu quả của hệ thống PSK nhị phân không dùng mã hóa, chúng ta thấy đối với tín hiệu mã có độ khuếch đại về độ hiệu quả khoảng $10 \log(R_c d_{\min} - k \ln 2 / \gamma_b)$. Chúng ta gọi đó là *độ khuếch đại mã hóa*. Chúng ta chú ý rằng giá trị này phụ thuộc vào tham số của bộ mã và SNR từng bit γ_b .

Biểu thức của xác suất xác định sai đối với các tín hiệu có độ tương quan tương đương cũng có thể có được đối với tín hiệu đơn hình cho chúng ta một ước lượng thứ ba về xác suất xác định sai từ mã đối với tín hiệu mã. Hệ số tương quan chéo cực đại đối với một cặp tín hiệu mã là

$$\rho_{\max} = 1 - \frac{2}{n}d_{\min} \quad (10-1-53)$$

Trong trường hợp tồi nhất, M từ mã có hệ số tương quan chéo bằng ρ_{max} thì từ đó ta có giới hạn trên là

$$P_M \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v+\sqrt{4\gamma_b R_c d_{min}}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} dv \quad (10-1-54)$$

Giới hạn trên về độ hiệu quả của mã khối tuyến tính ta xét ở trên là đối với một từ mã. Đối với tín hiệu trực giao, xác suất sai bit P_b bằng P_M nhân với $2^{k-1}/(2^k - 1)$. Hệ số này là 1 khi $k = 1$ và tiến tới $\frac{1}{2}$ khi k lớn. Đối với tín hiệu mã thì có phức tạp hơn nhưng ta có thể coi rằng khi một từ mã bị sai thì một nửa trong số k bit thông tin cũng bị sai. Như vậy $P_b \leq \frac{1}{2} P_M$.

Các giới hạn trên trong (10-1-50), (10-1-52) và (10-1-54) cũng có thể áp dụng cho tín hiệu QPSK do tín hiệu QPSK có thể coi là hai tín hiệu PSK nhị phân độc lập được truyền trong pha vuông góc. Các giới hạn này chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tối thiểu của bộ mã nên có thể áp dụng cho mã khối nhị phân phi tuyến.

Nếu ta sử dụng tín hiệu FSK nhị phân trực giao để truyền các từ mã trên kênh AWGN thì bộ thu tối ưu có thể thực hiện bằng hai bộ lọc phối hợp, một bộ ứng với tần số dùng để truyền bit 0 và một bộ ứng với tần số truyền bit 1, và tiếp theo là bộ giải mã tạo ra M độ đo tương quan tương ứng với M từ mã. Quá trình xác định ở bộ thu có thể là liên kết hay không liên kết. Trong cả hai trường hợp, gọi r_{0j} và r_{1j} là đầu ra của hai bộ lọc phối hợp. Các độ đo tương quan là:

$$CM_i = \sum_{j=1}^n [c_{ij} r_{1j} + (1 - c_{ij}) r_{0j}], \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (10-1-55)$$

với c_{ij} là bit thứ j của từ mã thứ i . Từ mã tương ứng với độ đo lớn nhất được chọn trong bộ xác định.

Nếu việc xác định tín hiệu FSK nhị phân là liên kết, do các biến ngẫu nhiên $\{r_{0j}\}$ và $\{r_{1j}\}$ là gaussian nên các độ đo tương quan cũng là các biến ngẫu nhiên gaussian. Giả thiết từ mã C_1 là từ mã 0 được truyền đi thì

$$\left. \begin{aligned} r_{0j} &= \sqrt{\xi_c} + n_{0j} \\ r_{1j} &= n_{1j} \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10-1-56)$$

ở đây $\{n_{ij}\}$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê đồng thời có giá trị trung bình 0 và sai phương $\frac{1}{2}N_0$. Do đó CM_1 là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình $\sqrt{\xi_c}n$ và sai phương $\frac{1}{2}N_0$ còn các độ đo tương quan khác có giá trị trung bình $\sqrt{\xi_c}n(1 - w_m/n)$ và sai phương $\frac{1}{2}nN_0$. Do $\{CM_m\}$ là tương quan nên ta sử dụng giới hạn hợp. Các hệ số tương quan là

$$\rho_m = 1 - w_m/n \quad (10-1-57)$$

và xác suất để $CM_m > CM_1$ là

$$P_2(m) = Q\left(\sqrt{\gamma_b R_c w_m}\right) \quad (10-1-58)$$

So sánh kết quả này với (10-1-49) ta thấy tín hiệu PSK xác định liên kết cần SNR ít hơn 3 dB để có cùng một độ hiệu quả. Ta kết luận rằng để các giới hạn trong (10-1-50), (10-1-52) và (10-1-54) đúng với tín hiệu FSK nhị phân trực giao thì ta cần phải thay γ_b bằng $\frac{1}{2}\gamma_b$.

Nếu luật xác định bình phương đối với tín hiệu FSK nhị phân trực giao được thực hiện ở phía thu thì độ hiệu quả còn giảm hơn nữa. Giả sử từ mã 0 được truyền đi thì

$$\left. \begin{aligned} r_{0j} &= |\sqrt{\xi_c} + N_{0j}|^2 \\ r_{1j} &= |N_{1j}|^2 \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10-1-59)$$

với $\{N_{0j}\}$ và $\{N_{1j}\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian giá trị phức độc lập thống kê đồng thời có giá trị trung bình 0 và sai phương N_0 . Ta có:

$$CM_1 = \sum_{j=1}^n r_{0j} \quad (10-1-60)$$

trong khi các độ đo tương quan ứng với các từ mã có trọng lượng w_m về mặt thống kê tương đương với từ mã trong đó $c_{mj} = 1$ với $1 \leq j \leq w_m$ và $c_{mj} = 0$ với $w_m + 1 \leq j \leq n$. Do đó CM_m có thể biểu diễn là

$$CM_m = \sum_{j=1}^{w_m} r_{1j} + \sum_{j=w_m+1}^n r_{0j} \quad (10-1-61)$$

Độ chênh lệch giữa CM_1 và CM_m là

$$CM_1 - CM_m = \sum_{j=1}^{w_m} (r_{0j} - r_{1j}) \quad (10-1-62)$$

và xác suất lỗi là xác suất để $CM_1 - CM_m < 0$. Nhưng độ chênh lệch này là dạng đặc biệt của các biến ngẫu nhiên giá trị phức có dạng bình phương tổng quát và

$$P_2(m) = \frac{1}{2^{2w_m-1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_b R_c w_m\right) \sum_{i=0}^{w_m-1} K_i \left(\frac{1}{2}\gamma_b R_c w_m\right)^i \quad (10-1-63)$$

với định nghĩa

$$K_i = \frac{1}{i!} \sum_{r=0}^{w_m-1-i} \binom{2w_m-1}{r} \quad (10-1-64)$$

Giới hạn hợp nhận được bằng cách lấy tổng của $P_2(m)$ với $2 \leq m \leq M$.

Ta có thể dùng khoảng cách tối thiểu để nhận được giới hạn trên không được chính xác bằng nhưng trong nhiều trường hợp để xác định hơn.

$$P_M \leq \frac{M-1}{2^{2d_{min}-1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_b R_c d_{min}\right) \sum_{i=0}^{d_{min}-1} K_i \left(\frac{1}{2}\gamma_b R_c d_{min}\right)^i \quad (10-1-65)$$

Sự kém hiệu quả của xác định bình phương đối với việc sử dụng tín hiệu FSK nhị phân có thể thấy được trong hình 14-1-1 với d_{min} thay cho L . Sự kém hiệu quả trong trường hợp n tín hiệu nhị phân FSK được xác định liên kết và sau đó được đưa vào để tính độ đo tương quan trong (10-1-55) rồi xác định bình phương hay xác định đường bao là

$$P_2(m) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_b R_c w_m\right) \quad (10-1-66)$$

và từ đó

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M p_2(m)$$

Nếu sử dụng d_{min} thay cho sự phân bố trọng lượng mã, giới hạn hợp của xác suất xác định sai từ mã là:

$$P_M \leq \frac{1}{2}(M-1) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_b R_c d_{min}\right) \quad (10-1-67)$$

Nếu các tín hiệu PSK được sử dụng để truyền các bit nhị phân trong từ mã và độ rộng dải thông cần thiết để truyền các tín hiệu mã là

$$W = \frac{1}{T/n} = \frac{n}{k/R} = \frac{R}{R_c} \quad (10-1-68)$$

Như vậy hệ số mở rộng dải thông B_e đối với tín hiệu mã là

$$B_e = \frac{W}{R} = \frac{n}{k} = \frac{1}{R_c} \quad (10-1-69)$$

Mặt khác, nếu tín hiệu FSK nhị phân được sử dụng để truyền các từ mã và quá trình xác định là không liên kết thì $W \approx 2n/T$ và như vậy hệ số mở rộng dải thông tăng lên khoảng 2 lần so với khi sử dụng tín hiệu PSK nhị phân. Ta so sánh độ rộng dải thông cần thiết để truyền tín hiệu mã với tín hiệu trực giao. So sánh giá trị P_M trong (7-2-21) với (10-1-54) ta thấy rằng tín hiệu mã kém hơn nhiều nhất là $10 \log(n/2d_{min})$ dB so với tín hiệu trực giao có cùng số lượng tín hiệu. Nếu ta bù lại sự suy hao về SNR do việc mã hóa bằng cách tăng số lượng từ mã để cho số tín hiệu mã là $M_c = 2^{k_0}$ và tín hiệu trực giao cần 2^{k_0} tín hiệu thì hiệu quả nhận được đối với hai tập tín hiệu khi SNR tương đối cao là gần bằng nhau nếu:

$$k_0 = 2R_c d_{min} \quad (10-1-70)$$

Trong điều kiện này, hệ số mở rộng dải thông đối với tín hiệu trực giao là

$$B_{eo} = \frac{M_0}{2 \log_2 M_0} = \frac{2^{k_0}}{2k_0} = \frac{2^{2R_c d_{min}}}{4R_c d_{min}} \quad (10-1-71)$$

trong khi đó, đối với tín hiệu mã, ta có $B_{ec} = 1/R_c$ và

$$\frac{B_{eo}}{B_{ec}} = \frac{2^{2R_c d_{min}}}{4d_{min}} \quad (10-1-72)$$

Công thức này cho phép ta đánh giá độ rộng dải thông giữa tín hiệu trực giao và tín hiệu PSK nhị phân xác định liên kết.

10-1-5 Giải mã xác định cứng

Các giới hạn trong phần 10-1-4 mà ta đã đưa ra dựa trên giả thiết rằng các mẫu từ bộ lọc phối hợp hay từ bộ tương quan chéo là không lượng tử hóa. Mặc dù phương pháp này cho độ hiệu quả cao nhưng giới hạn cơ bản của phương pháp này là độ phức tạp tính toán là rất lớn khi số lượng tín hiệu M lớn.

Để giảm khối lượng tính toán, các mẫu tương tự được lượng tử hóa và được giải mã xác định cứng. Ta xét trường hợp khi mỗi mẫu tương ứng với một bit trong từ mã và được lượng tử hóa thành hai mức 0 và 1. Như vậy ta có một kênh BSC rời rạc theo thời gian với xác suất chuyển đổi chéo p (kênh này gồm bộ điều chế, kênh AWGN và bộ giải điều chế). Nếu sử dụng tín hiệu PSK xác định liên kết thì

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2\xi_c}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\gamma_b R_c}\right) \quad (10-1-73)$$

Nếu ta sử dụng tín hiệu FSK để truyền các bit trong từ mã và xác định liên kết thì

$$p = Q\left(\sqrt{\gamma_b R_c}\right) \quad (10-1-74)$$

và nếu xác định là không liên kết thì

$$p = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_b R_c\right) \quad (10-1-75)$$

Giải mã ML (khoảng cách tối thiểu) n bit tương ứng với từ mã nhận được sau bộ giải điều chế được so sánh với M từ mã có thể bằng khoảng cách Hamming và từ mã gần nhất được chọn. Luật giải mã dựa trên tiêu chuẩn khoảng cách Hamming tối thiểu là tối ưu theo nghĩa nó tối thiểu hóa sai lầm trên kênh BSC.

Một cách khác trong giải mã xác định cứng có hiệu quả hơn (nhanh hơn) là sử dụng ma trận kiểm tra parity $\mathbf{H}$. Giả sử $\mathbf{C}_m$ là từ mã truyền đi và $\mathbf{Y}$ là từ mã nhận được ở đầu ra của bộ giải điều chế. Ta có

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_m + \mathbf{e}$$

với e là vectơ sai.

$$YH' = (C_m + e)H' = C_mH' + eH' = eH' = S \quad (10-1-76)$$

S là vectơ có $(n - k)$ phần tử và được gọi là *syndrome của mẫu lỗi*. Nói cách khác, vectơ S có các phần tử là 0 ứng với các phương trình kiểm tra parity được thỏa mãn và các phần tử 1 ứng với các phương trình kiểm tra parity không thỏa mãn. Ta chú ý rằng syndrome S đặc trưng cho mẫu lỗi chứ không đặc trưng cho từ mã truyền đi và có cả thấy 2^n mẫu lỗi trong khi ta chỉ có 2^{n-k} syndrome. Như vậy các mẫu lỗi khác nhau có thể tạo ra cùng syndrome.

Ta xây dựng một bảng giải mã như sau. Liệt kê tất cả các từ mã (2^k) trong hàng thứ nhất của bảng, với phần tử đầu tiên là từ mã 0 . Từ mã này cũng biểu diễn mẫu lỗi toàn ký hiệu 0 . Trong cột thứ nhất, ta liệt kê các mẫu lỗi e_i trọng lượng 1. Nếu $n < 2^{n-k}$ ta chọn thêm các mẫu lỗi 2 ký hiệu và sau đó là các mẫu lỗi 3 ký hiệu ... cho tới khi cột thứ nhất có đủ 2^{n-k} phần tử. Số lượng này chính bằng số lượng syndrome ta có. Sau đó ta điền phần còn lại của bảng theo qui tắc như trong bảng sau:

C_1	C_2	C_3	...	C_{2^k}
e_2	$C_2 + e_2$	$C_3 + e_2$	...	$C_{2^k} + e_2$
e_3	$C_2 + e_3$	$C_3 + e_3$	...	$C_{2^k} + e_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$e_{2^{n-k}}$	$C_2 + e_{2^{n-k}}$	$C_3 + e_{2^{n-k}}$	...	$C_{2^k} + e_{2^{n-k}}$

Bảng này ta gọi là *bảng chuẩn* hay *bảng các lớp kề*. Mỗi hàng ta gọi là một *lớp kề* và phần tử đầu tiên của mỗi hàng ta gọi là *phần tử tạo lớp kề*. Như vậy một lớp kề gồm tất cả các phần tử có thể nhận được ứng với cùng một mẫu lỗi.

Ví dụ 10-1-10

Xây dựng bảng chuẩn cho mã hệ thống được tạo bởi ma trận sinh

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mã này có khoảng cách tối thiểu là 3. Bảng chuẩn được ghi trong bảng 10-1-7. Chú ý rằng trong bảng, có 5 mẫu lỗi trọng lượng 1 và hai mẫu lỗi trọng lượng 2 (tất nhiên là có nhiều mẫu lỗi trọng lượng 2 nhưng chỉ đủ chỗ cho 2 mẫu). Hai mẫu lỗi này phải ứng với các syndrome khác các mẫu lỗi trọng lượng 1.

Giả sử e_i là vectơ lỗi và C_m là từ mã truyền đi. Ta sẽ nhận được từ mã $Y = C_m + e_i$ và syndrome là:

$$S = (C_m + e_i)H' = e_iH'$$

Rõ ràng các từ mã trong cùng một lớp kề có cùng syndrome và các lớp kề có syndrome khác nhau. Như vậy khi ta nhận được vectơ mã Y , ta tính syndrome $S = YH'$ và ta tìm vectơ lỗi tương ứng (nhiều khả năng nhất) và từ mã thực sự được truyền đi là

$$C_m = Y + e_m$$

Ví dụ 10-1-11

Xét mã (5,2) với bảng chuẩn trong bảng 10-1-7. Các syndrome ứng với các lỗi hay xảy ra nhất được cho trong bảng 10-1-8. Với một vectơ lỗi trên kênh $e = [10100]$, ta tính ra syndrome $S = [001]$. Khi đó vectơ lỗi theo bảng là $\hat{e} = [00001]$. Như vậy giải mã sẽ bị sai. Nói cách khác, mã (5,2) sửa sai các lỗi 1 ký hiệu và sửa sai 2 lỗi hai ký hiệu là $[1\ 1\ 0\ 0\ 0]$ và $[1\ 0\ 0\ 1\ 0]$.

Bảng 10-1-7: Bảng chuẩn của mã (5,2)

Từ mã			
00000	01011	10101	11110
00001	01010	10100	11111
00010	01001	10111	11100
00100	01111	10001	11010
01000	00011	11101	10110
10000	11011	00101	01110
11000	10011	01101	00110
10010	11001	00111	01100

Bảng 10-1-8: Bảng syndrome đối với mã (5,2)

Syndrome	Mẫu lỗi
0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1	0 0 0 0 1
0 1 0	0 0 0 1 0
1 0 0	0 0 1 0 0
0 1 1	0 1 0 0 0
1 0 1	1 0 0 0 0
1 1 0	1 1 0 0 0
1 1 1	1 0 0 1 0

Giải mã syndrome cho mã vòng Đối với mã vòng việc tính syndrome có thể thực hiện bằng thanh ghi dịch giống như quá trình mã hóa. Ta biểu diễn vectơ mã nhận được $\mathbf{Y}$ bằng đa thức $Y(p)$. Nói chung, $\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{e}$.

$$Y(p) = C(p) + e(p) = X(p)g(p) + e(p) \quad (10-1-77)$$

Chia $Y(p)$ cho đa thức sinh $g(p)$ ta nhận được

$$Y(p) = Q(p)g(p) + R(p) \quad (10-1-78)$$

Đa thức dư $R(p)$ có bậc cực đại là $n - k - 1$. Kết hợp (10-1-77) và (10-1-78) ta nhận được

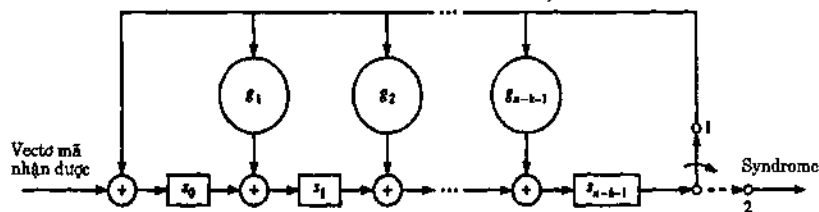
$$e(p) = [X(p) + Q(p)]g(p) + R(p) \quad (10-1-79)$$

Như vậy $R(p)$ chỉ phụ thuộc vào $e(p)$ và $R(p)$ là syndrome tương ứng với mẫu lỗi $\mathbf{e}$. Như vậy

$$Y(p) = Q(p)g(p) + S(p) \quad (10-1-80)$$

với $S(p)$ là đa thức syndrome $S(p) = R(p)$. Nếu $S(p) = 0$ thì việc giải mã sẽ cho kết quả $\mathbf{C}_m = \mathbf{Y}$

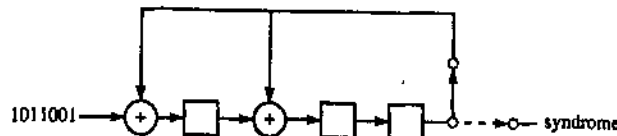
Quá trình chia $Y(p)$ cho đa thức sinh $g(p)$ có thể thực hiện bằng thanh ghi dịch. Vectơ $\mathbf{Y}$ nhận được được dịch vào thanh ghi dịch $(n - k)$ nhị phân như trên hình 10-1-9.

Hình 10-1-9: Thanh ghi dịch để tính syndrome $(n - k)$ nhị phân

Ví dụ 10-1-12

Xét mã vòng Hamming được tạo ra bởi đa thức sinh $g(p) = p^3 + p + 1$. Giả thiết vectơ nhận được $Y = [1001101]$. Vectơ này được đưa vào thanh ghi dịch 3 nhip như trên hình 10-1-10. Sau 7 lần dịch, số liệu trong thanh ghi dịch là 110 ứng với syndrome là $S = [011]$. Vectơ lỗi nhiều khả năng nhất ứng với syndrome này là $e = [0001000]$ và

$$C_m = Y + e = [1000101]$$



Hình 10-1-10: Tính syndrome cho mã vòng (7,4) với đa thức sinh $g(p) = p^3 + p + 1$ và vectơ nhận được là $Y = [1001101]$

Việc giải mã bằng bảng như vậy chỉ thuận tiện khi $n - k$ là nhỏ và nhiều thuật toán giải mã xác định cứng được phát triển cho mã BCH là một lớp của mã vòng. Như vậy tồn tại các phương pháp mã hóa và giải mã để tạo mã BCH có độ dài lớn và mã BCH hay được sử dụng trong thực tế truyền thông số.

Khả năng phát hiện lỗi và sửa lỗi Do độ phân biệt tối thiểu giữa hai từ mã trong một bộ mã là d_{min} nên nếu một mẫu lỗi có trọng lượng d_{min} thì nó sẽ chuyển một từ mã này thành một từ mã khác và ta không thể phát hiện được lỗi. Nếu vectơ lỗi có trọng lượng nhỏ hơn d_{min} thì syndrome sẽ có trọng lượng khác 0 và ta sẽ phát hiện được là có lỗi. Tổng quát, mã khối (n, k) có khả năng phát hiện được $d_{min} - 1$ lỗi.

Khả năng sửa lỗi cũng phụ thuộc vào khoảng cách tối thiểu. Tuy nhiên số lỗi sửa được bị giới hạn bởi số lượng syndrome. Để xác định số lỗi có thể sửa được của mã (n, k) , ta biểu diễn 2^k từ mã trong không gian n chiều. Mỗi từ mã là trung tâm của một siêu cầu có bán kính t . Giá trị t lớn nhất để các siêu cầu không giao nhau là $t = \lfloor \frac{1}{2}(d_{min} - 1) \rfloor$. Trong mỗi siêu cầu có tất cả các từ mã có khoảng cách tối tâm không vượt quá t . Như vậy nếu nhận được một từ mã nằm trong một siêu cầu nào đó, ta sẽ giải mã nó thành từ mã trung tâm của siêu cầu. Như vậy bộ mã (n, k) có khoảng cách Hamming tối thiểu d_{min} có thể sửa được $t = \lfloor \frac{1}{2}(d_{min} - 1) \rfloor$ lỗi. Tổng quát, một bộ mã có khoảng cách tối thiểu d_{min} có thể phát hiện e_d lỗi và sửa được e_c lỗi với $e_d + e_c \leq d_{min} - 1$ và $e_c \leq e_d$.

Xác suất lỗi khi sửa lỗi Với bộ giải mã tối ưu trên kênh BSC, khi số lỗi không vượt quá một nửa giá trị d_{min} thì ta có thể sửa chính xác các lỗi này. Do kênh BSC là không nhớ nên xác suất để xuất hiện m lỗi trong khối n bit là

$$P(m, n) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad (10-1-81)$$

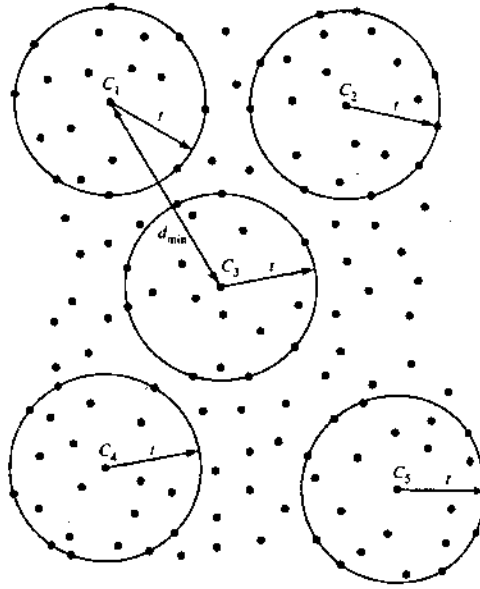
và xác suất lỗi khi giải mã bị giới hạn trên là

$$P_M \leq \sum_{m=t+1}^n P(m, n) \quad (10-1-82)$$

Dạng thức xảy ra khi mã khối tuyến tính là mã hoàn thiện. Để có thể mô tả tính chất cơ bản của mã hoàn thiện, ta lập các siêu cầu quanh mỗi từ mã trong không gian n chiều, mỗi siêu cầu có bán kính t

và trong mỗi siêu cầu có các từ mã có khoảng cách tới tâm không vượt quá t . Số lượng các từ mã nằm trong một siêu cầu là

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{t} = \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$



Hình 10-1-11: Biểu diễn các từ mã trong không gian (trung tâm các siêu cầu)

Do có tất cả $M = 2^k$ từ mã và số lượng từ mã trong tất cả 2^k siêu cầu không thể vượt quá tổng số từ mã là 2^n nên

$$2^k \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \leq 2^n \quad \text{hay} \quad 2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (10-1-83)$$

Một mã hoàn thiện có tính chất là mọi từ mã có thể nhận được đều nằm trong 2^k siêu cầu. Khi đó thì trong công thức (10-1-83) ta có đẳng thức. Mã Golay (23,12) có $d_{min} = 7$ và $t = 3$, mã Hamming có các tham số $n = 2^{n-k} - 1$, $d_{min} = 3$, $t = 1$ là hai loại mã khối nhị phân hoàn thiện duy nhất. Các loại mã này là tối ưu trên kênh BSC theo nghĩa xác suất lỗi là tối thiểu trong số các loại mã có cùng chiều dài từ mã và cùng số bit thông tin.

Tính chất tối ưu định nghĩa ở trên cũng đúng với mã gần hoàn thiện. Mã gần hoàn thiện là một bộ mã có tính chất là tất cả các siêu cầu bán kính t xung quanh M từ mã là không giao nhau và mọi từ mã nhận được đều có khoảng cách lớn nhất là $t + 1$ tới một từ mã nào đó là trung tâm của một siêu cầu. Bộ mã như thế có thể sửa được số sai tới t và một số mẫu sai $t + 1$. (10-1-82) là giới hạn trên của xác suất lỗi và giới hạn dưới là

$$P_M \geq \sum_{m=t+2}^n P(m, n) \quad (10-1-84)$$

Mã gần hoàn thiện có thể được đánh giá về độ hiệu quả một cách chi tiết hơn khi ta sử dụng bất đẳng thức (10-1-83). Số lượng các từ mã nằm ngoài 2^k siêu cầu là

$$N_{t+1} = 2^n - 2^k \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

Nếu số lượng từ mã này được chia đều thành 2^k tập hợp và mỗi tập hợp gắn với một trong 2^k siêu cầu thì mỗi siêu cầu được mở rộng ra bởi số lượng từ mã là

$$\beta_{t+1} = 2^{n-k} - \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (10-1-85)$$

Như vậy trong số các mẫu lỗi có khoảng cách $t+1$ tới từ mã truyền đi, ta có thể sửa thêm β_{t+1} mẫu lỗi. Xác suất lỗi trong việc giải mã đối với mã gần hoàn thiện là

$$P_M = \sum_{m=t+2}^n P(m, n) + \left[\binom{n}{t+1} - \beta_{t+1} \right] p^{t+1} (1-p)^{n-t-1} \quad (10-1-86)$$

Chúng ta biết nhiều mã gần hoàn thiện, mặc dù nó không tồn tại với mọi n và k . Do các loại mã này là tối ưu đối với kênh BSC nên mọi mã khối tuyến tính đều có xác suất lỗi ít nhất là (10-1-86). Như vậy, (10-1-86) là giới hạn dưới về xác suất lỗi khi giải mã của mã khối tuyến tính với t là số nguyên lớn nhất để $\beta_{t+1} \geq 0$.

Một cặp giới hạn trên và giới hạn dưới khác ta cũng có được nếu xét tới khoảng cách Hamming tối thiểu giữa hai từ mã. P_M không thể nhỏ hơn xác suất lỗi khi giải mã của một từ mã truyền đi thành một từ mã gần kề nó nhất. Như vậy:

$$P_M \geq \sum_{m=[d_{min}/2]+1}^{d_{min}} \binom{d_{min}}{m} p^m (1-p)^{d_{min}-m} \quad (10-1-87)$$

Mặt khác, P_M không thể lớn hơn $M-1$ lần xác suất giải mã sai một từ mã truyền đi thành từ mã gần kề với nó nhất. Đó là giới hạn hợp

$$P_M \leq (M-1) \sum_{m=[d_{min}/2]+1}^{d_{min}} \binom{d_{min}}{m} p^m (1-p)^{d_{min}-m} \quad (10-1-88)$$

Khi M lớn, các giới hạn trong (10-1-87) và (10-1-88) sai lệch rất nhiều. Giới hạn trên chặt của P_M có thể nhận được khi ta sử dụng giới hạn Chernoff. Giả sử từ mã 0 được truyền đi, bằng cách so sánh từ mã nhận được với từ mã 0 và từ mã có trọng lượng w_m thì xác suất giải mã sai bị giới hạn trên là

$$P_2(w_m) \leq [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (10-1-89)$$

và ta có kết quả sau khi dùng giới hạn hợp

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (10-1-90)$$

Một công thức khác cho (10-1-90) nếu ta thay w_m bởi d_{min} :

$$P_M \leq (M-1)[4p(1-p)]^{d_{min}/2} \quad (10-1-91)$$

Tất nhiên (10-1-90) là giới hạn chặt hơn (10-1-91).

10-1-6 So sánh về hiệu quả của hai phương pháp giải mã

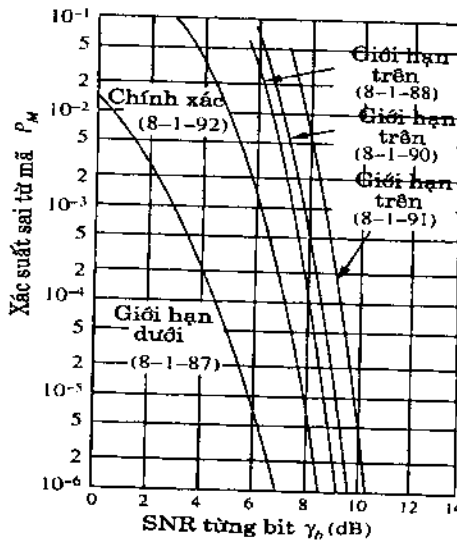
Chúng ta sẽ so sánh giới hạn về độ hiệu quả của hai phương pháp giải mã (giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm) trên kênh AWGN. Để mô tả, chúng ta sử dụng mã Golay (23,12) là loại mã có hàm phân bố trọng lượng tương đối đơn giản. Như đã biết, đối với loại mã này ta có $d_{min} = 7$.

Đầu tiên ta so sánh các giới hạn của xác suất lỗi đối với phương pháp giải mã xác định cứng. Do mã Golay (23,12) là mã hoàn thiện nên xác suất lỗi chính xác của giải mã xác định cứng là

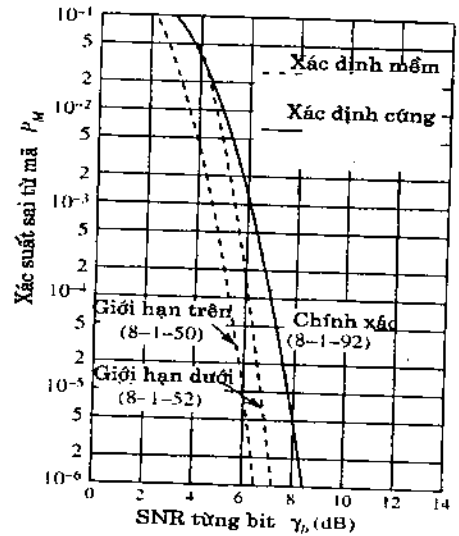
$$P_M = \sum_{m=4}^{23} \binom{23}{m} p^m (1-p)^{23-m} = 1 - \sum_{m=0}^3 \binom{23}{m} p^m (1-p)^{23-m} \quad (10-1-92)$$

với p là xác suất chuyển đổi chéo của kênh BSC. Tín hiệu PSK nhị phân (hay QPSK) xác định liên kết thì giá trị của p được xác định trong (10-1-73). Cùng với xác suất lỗi chính xác, chúng ta cũng có giới hạn dưới và ba giới hạn trên trong (10-1-87), (10-1-88), (10-1-90) và (10-1-91).

Các giới hạn về xác suất lỗi và giá trị chính xác được vẽ trên hình 10-1-12. Chúng ta thấy giới hạn dưới sai số rất nhiều. Giới hạn trên trong (10-1-88) là chặt nhất và giới hạn Chernoff với khoảng cách Hamming tối thiểu là sai số nhiều nhất.



Hình 10-1-12: So sánh các giới hạn với giá trị chính xác về xác suất lỗi của giải mã xác định cứng đối với mã Golay (23,12)



Hình 10-1-13: So sánh giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm đối với mã Golay (23,12)

Chúng ta cũng so sánh xác suất lỗi của giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm. Ta sử dụng giới hạn về xác suất lỗi trong (10-1-52), (10-1-50) với xác suất lỗi chính xác trong (10-1-92). Chúng ta thấy rằng sự chênh lệch giữa giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm là khoảng 2 dB trong khoảng $10^{-2} < P_M < 10^{-6}$. Trong khoảng $P_M > 10^{-2}$, giới hạn đối với giải mã xác định mềm là kém do đường ứng với giá trị chính xác cắt đường giới hạn trong (10-1-52). Sự chênh lệch 2 dB không phải chỉ đúng với mã Golay mà là kết quả của các loại mã trên kênh AWGN. Điều này được rút ra từ việc tính thông lượng của kênh AWGN với giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm.

Thông lượng của kênh BSC tính theo đơn vị bit/ký hiệu là

$$C = 1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p) \quad (10-1-93)$$

Giả sử tín hiệu PSK xác định liên kết được sử dụng thì p được tính theo (10-1-73). Đặt $C = R_c$ trong công thức (10-1-93) và ta xác định giá trị γ_b thỏa mãn phương trình này. Kết quả được vẽ trên hình 10-1-14.

Đâu là giới hạn của SNR khi tốc độ mã tiến tới 0? Với những giá trị R_c nhỏ, p có thể xấp xỉ như sau:

$$p \approx \frac{1}{2} - \sqrt{\gamma_b R_c / \pi} \quad (10-1-94)$$

và do $\log_2(1+x) \approx (x - \frac{1}{2}x^2)/\ln 2$ nên (10-1-93) trở thành

$$C = \frac{2}{\pi \ln 2} \gamma_b R_c \quad (10-1-95)$$

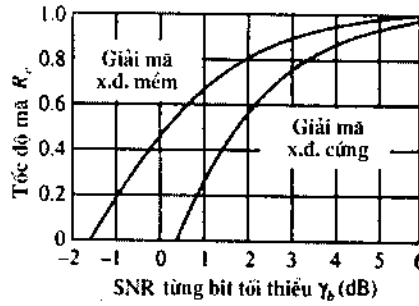
Đặt $C = R_c$ và khi R_c tiến tới 0 thì ta nhận được

$$\gamma_b = \frac{1}{2} \pi \ln 2 = 0,37 \text{ dB} \quad (10-1-96)$$

Thông lượng của kênh AWGN đầu vào nhị phân với giải mã xác định mềm được tính tương tự. Thông lượng của kênh tính theo đơn vị bit/ký hiệu là

$$C = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} p(y|k) \log_2 \frac{p(y|k)}{p(y)} dy \quad (10-1-97)$$

với $p(y|k)$ là hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện của số liệu ở đầu ra của bộ giải điều chế khi các bit truyền đi tương ứng là 0 và 1.



Hình 10-1-14: Biểu diễn tốc độ mã theo SNR từng bit đối với hai loại giải mã

Đối với kênh AWGN ta có:

$$p(y|k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-m_k)^2/2\sigma^2}, \quad k = 0, 1 \quad (10-1-98)$$

$m_0 = -\sqrt{\xi_c}$, $m_1 = \sqrt{\xi_c}$, $\sigma^2 = \frac{1}{2} N_0$, $\xi_c = R_c \gamma_b$. Hàm mật độ phân bố xác suất $p(y)$ là nửa tổng của $p(y|0)$ và $p(y|1)$. Khi R_c tiến tới 0, thông lượng của kênh xấp xỉ bằng

$$C \approx \gamma_b R_c / \ln 2 \quad (10-1-99)$$

Đặt $C = R_c$ thì khi $R_c \rightarrow 0$, giá trị SNR tối thiểu để có thể truyền với tốc độ bằng thông lượng là

$$\gamma_b = \ln 2 \quad (10-1-100)$$

Kết hợp (10-1-98) và (10-1-97) và đặt $C = R_c$ ta có kết quả vẽ trên hình 10-1-14.

Ta thấy rằng khi $R_c \rightarrow 0$ thì độ chênh lệch về SNR γ_b đối với giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm là 2 dB, và khi R_c tăng tới đơn vị thì độ chênh lệch giảm đi. Đồ thị còn cho ta thấy giá trị SNR tối thiểu để có thể truyền ở một tốc độ nào đó. Ví dụ với $R_c = 0,8$ thì đối với giải mã xác định mềm ta cần SNR là 2 dB để sai số nhỏ tùy ý. Đối với mã PSK nhị phân không mã hóa thì giá trị SNR cần thiết cho tốc độ này là 9,6 dB. Như vậy là ta có độ khuếch đại mã hóa là 7,6 dB. Nhưng để thực hiện được độ khuếch đại như vậy thì độ dài từ mã sẽ rất lớn, rất phức tạp.

Thay cho việc so sánh giữa giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm trên cơ sở thông lượng của kênh, ta có thể so sánh dựa trên các tham số của mã ngẫu nhiên. Ta biết rằng xác suất lỗi trung bình theo tập hợp của mã hóa nhị phân ngẫu nhiên là

$$\bar{P}_e < 2^{-n(R_0 - R_c)} \quad (10-1-101)$$

với $R_c = k/n$ là tốc độ mã và tốc độ giới hạn R_c thể hiện giới hạn trên của R_c là $\bar{P}_e \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Đối với giải mã xác định mềm, R_0 được cho bởi

$$R_0 = \log_2 \frac{2}{1 + e^{-\xi_c/N_0}} \quad (10-1-102)$$

$\xi_c/N_0 = R_c \gamma_b$ là SNR trên một bậc tự do (một chiều).

Mặt khác, nếu đầu ra của bộ giải điều chế được lượng tử hóa Q mức, thì ta có thể sử dụng giới hạn Chernoff để xác định giới hạn trên của xác suất lỗi trung bình theo tập hợp $P_2(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_m)$. Kết quả thu được là

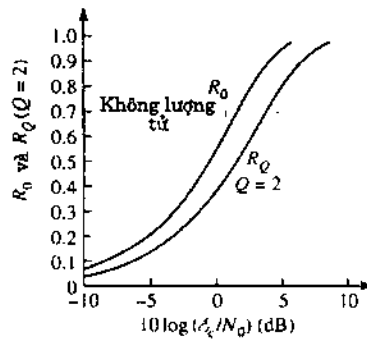
$$R_Q = \max_{\{p_i\}} \left\{ -\log_2 \sum_{i=0}^{Q-1} \left[\sum_{j=0}^1 p_j \sqrt{P(i|j)} \right]^2 \right\} \quad (10-1-103)$$

Trong (10-1-103), $\{p_j\}$ là xác suất tiên nghiệm của hai ký hiệu đầu vào của kênh và $\{P(i|j)\}$ là xác suất chuyển đổi của kênh. Đối với kênh BSC, $p_1 = p_0 = \frac{1}{2}$ thì

$$R_Q = \log_2 \frac{2}{1 + \sqrt{4p(1-p)}}, \quad Q = 2 \quad (10-1-104)$$

với

$$p = Q \left(\sqrt{2\gamma_b R_c} \right) \quad (10-1-105)$$



Hình 10-1-15: So sánh R_0 (giải mã xác định mềm) với R_Q (giải mã xác định cứng) theo SNR từng chiều

Biểu diễn R_Q theo $10 \log(\xi_c/N_0)$ với $Q = 2$ và $Q = \infty$ trên hình 10-1-15. Ta thấy độ chênh lệch khoảng 2 dB. Chúng ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng khi $\xi_c/N_0 \rightarrow 0$ thì sự suy hao về độ hiệu quả đối với giải mã xác định cứng là $10 \log_1 0 \frac{1}{2} \pi \approx 2$ dB. Ta cũng chú ý rằng khoảng 1 dB có thể khôi phục được nếu như ta lượng tử hóa đầu ra của bộ giải điều chế thành 3 mức và độ chênh lệch 2 dB này còn giảm hơn nữa khi lượng tử hóa nhiều mức hơn ở đầu ra của bộ giải điều chế.

10-1-7 Giới hạn về khoảng cách tối thiểu của mã khối tuyến tính

Biểu thức về xác suất lỗi đối với mã khối tuyến tính cho ta thấy rõ tầm quan trọng của tham số khoảng cách tối thiểu trong bộ mã. Ví dụ với giải mã xác định mềm, giới hạn trên của xác suất lỗi (10-1-52) cho ta thấy với một tốc độ mã xác định, xác định lỗi trên kênh AWGN suy giảm theo hàm mũ đối với d_{min} . Khi giới hạn này kết hợp với giới hạn dưới của d_{min} , ta có thể xác định được giới hạn trên của P_M có thể thực hiện được đối với nhiều loại mã. Đối với giải mã xác định cứng (10-1-82), ta có thể xác định được giới hạn trên của xác suất lỗi đối với mã khối tuyến tính trên kênh BSC.

Mặt khác, giới hạn trên của d_{min} được sử dụng để xác định giới hạn dưới của xác suất lỗi có thể thực hiện được đối với mã tốt nhất.

Một giới hạn trên đơn giản đối với khoảng cách tối thiểu của mã khối tuyến tính hay không tuyến tính (n, k) là $d_{min} \leq n - k + 1$. Ta chuẩn hóa khoảng cách này bằng cách chia cho n

$$\frac{d_{min}}{n} \leq (1 - R_c) + \frac{1}{n} \quad (10-1-106)$$

Nếu bộ mã là có khoảng cách tối thiểu, tức là $d_{min} = n - k + 1$ thì bộ mã được gọi là có khoảng cách tối thiểu cực đại. Ngoại trừ mã truy hồi, không có mã nhị phân có khoảng cách tối thiểu cực đại. Với mã không nhị phân thì tồn tại mã có khoảng cách tối thiểu cực đại, ví dụ như mã Reed-Solomon là một lớp con của mã BCH.

Cùng với giới hạn trên, có một số giới hạn về khoảng cách tối thiểu của mã khối tuyến tính. Lấy loga cả hai vế của (10-1-83) ta có

$$1 - R_c \geq \frac{1}{n} \log_2 \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (10-1-107)$$

Giới hạn này gọi là *giới hạn trên Hamming*. Với mỗi giá trị n , gọi t_0 là giá trị t lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức trên. Người ta chứng minh được rằng khi $n \rightarrow \infty$, tỷ số t_0/n đối với mã khối (n, k) không vượt quá t_0/n với t_0/n thỏa mãn bất đẳng thức

$$1 - R_c = H(t_0/n) \quad (10-1-108)$$

và $H(x)$ là hàm entropi nhị phân $H(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$. Tổng quát hóa giới hạn Hamming cho mã không nhị phân là

$$1 - R_c \geq \frac{1}{n} \log_q \left[\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i \right] \quad (10-1-109)$$

Một giới hạn khác là *giới hạn Plotkin*. Số lượng ký hiệu kiểm tra cần thiết để có được khoảng cách tối thiểu trong mã khối tuyến tính (n, k) thỏa mãn

$$n - k \geq \frac{qd_{min} - 1}{q - 1} - 1 - \log_q d_{min} \quad (10-1-110)$$

Khi bộ mã là nhị phân thì ta có

$$\frac{d_{min}}{n} \left(1 - \frac{1}{2d_{min}} \log_2 d_{min} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - R_c + \frac{2}{n} \right)$$

Khi $n \rightarrow \infty$ và $d_{min}/n \leq 1/2$, (10-1-110) đơn giản thành

$$d_{min}/n \leq \frac{1}{2}(1 - R_c) \quad (10-1-111)$$

Một giới hạn khác là *giới hạn Elias*:

$$d_{min}/n \leq 2A(1-A) \quad (10-1-112)$$

với A thỏa mãn

$$R_c = 1 + A \log_2 A + (1-A) \log_2 (1-A), \quad 0 \leq A \leq \frac{1}{2} \quad (10-1-113)$$

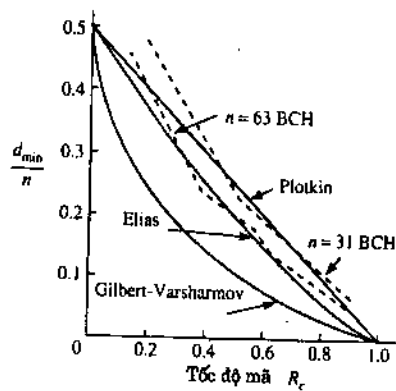
Giới hạn dưới về khoảng cách tối thiểu của mã khối tuyến tính (n, k) cũng tồn tại. Đặc biệt, tồn tại mã khối nhị phân có khoảng cách tối thiểu chuẩn hóa thỏa mãn

$$d_{min}/n \geq \alpha \quad (10-1-114)$$

và α được xác định như sau:

$$R_c = 1 - H(\alpha) = 1 + \alpha \log_2 \alpha + (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1/2 \quad (10-1-115)$$

Giới hạn này là một trường hợp đặc biệt của *giới hạn dưới Gilbert và Varsharmov* áp dụng cho mã khối nhị phân và không nhị phân.



Hình 10-1-16: Giới hạn trên và giới hạn dưới của khoảng cách tối thiểu chuẩn hóa

Các giới hạn được vẽ trên hình (10-1-16) và khoảng cách tối thiểu tính theo tốc độ mã của mã BCH với $n = 31$ và $n = 63$. Ta thấy rằng khoảng cách tối thiểu chuẩn hóa giảm sát tới giới hạn dưới Gilbert-Varsharmov. Khi n tăng lên thì hiệu quả của mã BCH giảm đi, và d_{min}/n tiến tới 0 khi n tiến tới vô hạn. Như vậy mã BCH (là một lớp mã quan trọng nhất của mã vòng) không hiệu quả khi độ dài của từ mã lớn.

10-1-8 Mã khối không nhị phân và mã khối ghép

Mã khối không nhị phân là một loại mã có độ dài cố định mà các ký hiệu mã nhận một trong q giá trị có thể, ký hiệu là $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$. Thông thường $q = 2^k$ và như vậy k bit thông tin có thể được chuyển thành một ký hiệu trong tập q ký hiệu. Độ dài từ mã của mã không nhị phân được ký hiệu là N và số ký hiệu mang thông tin trong một từ mã được ký hiệu là K . Khoảng cách tối thiểu của mã không nhị phân được ký hiệu là D_{min} .

Trong số nhiều loại mã khối tuyến tính không nhị phân, mã Reed-Solomon được sử dụng nhiều trong thực tế. Như đã nói, loại mã này là lớp con của mã BCH và như vậy là một lớp mã vòng. Các

thông số của mã này là

$$\begin{aligned} N &= q - 1 = 2^k - 1 \\ K &= 1, 2, 3, \dots, N - 1 \\ D_{\min} &= N - K + 1 \\ R_c &= K/N \end{aligned} \quad (10-1-116)$$

Loại mã này có khả năng sửa sai tới

$$t = \left\lfloor \frac{1}{2}(D_{\min} - 1) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}(N - K) \right\rfloor \quad (10-1-117)$$

ký hiệu bị lỗi.

Sự phân bố về trọng lượng $\{A_i\}$ của loại mã này có thể tính được. Các hệ số của đa thức trọng lượng là

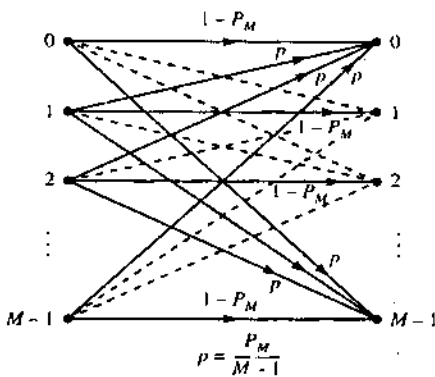
$$A_i = \binom{N}{i} (q-1) \sum_{j=0}^{i-D} (-1)^j \binom{i-1}{j} q^{i-j-D}, \quad i \geq D_{\min} \quad (10-1-118)$$

với $D \equiv D_{\min}, q = 2^k$.

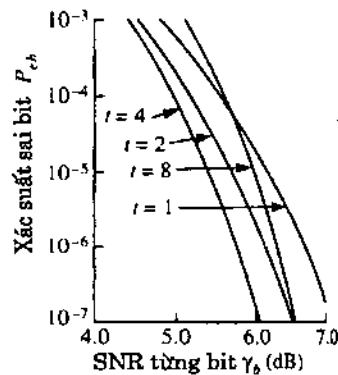
Mã Reed-Solomon là một loại mã quan trọng vì đặc điểm về khoảng cách tối thiểu của nó. Một lý do khác là tồn tại các thuật toán giải mã xác định cũng có hiệu quả cho phép tạo ra bộ mã có độ dài lớn để sử dụng trong thực tế.

Mã không nhị phân là mã tương ứng với kỹ thuật điều chế M mức để truyền 2^k ký hiệu có thể. Ta có thể sử dụng tín hiệu FSK M mức. Mỗi ký hiệu trong số 2^k ký hiệu được ánh xạ thành một trong $M = 2^k$ tín hiệu trực giao. Như vậy việc truyền một từ mã tương ứng với việc truyền N tín hiệu trực giao và mỗi tín hiệu trực giao là một trong số $M = 2^k$ tín hiệu có thể.

Bộ giải điều chế tối ưu trên kênh AWGN gồm có M bộ lọc phối hợp (hay bộ tương quan chéo) và đầu ra được đưa tới bộ giải mã. Nếu giải mã là xác định cũng thì xác suất sai ký hiệu P_M và các thông số của mã đủ để đặc trưng hóa hiệu quả của mã. Chúng ta thấy, bộ điều chế, kênh AWGN và bộ giải điều chế tương đương với một kênh rời rạc M đầu vào, M đầu ra rời rạc, kênh là không nhớ đối xứng với xác suất chuyển đổi là $P_c = 1 - P_M$ và $P_M/(M-1)$. Kênh này là tổng quát hóa của kênh BSC.



Hình 10-1-17: Kênh không nhớ đối xứng M đầu vào và M đầu ra



Hình 10-1-18: Hiệu quả của mã Reed-Solomon trong một số trường hợp

Độ hiệu quả của việc giải mã xác định cũng được cho bởi giới hạn trên của xác suất lỗi một từ mã

$$P_e \leq \sum_{i=t+1}^N \binom{N}{i} P_M^i (1 - P_M)^{N-i} \quad (10-1-119)$$

Khi một từ mã đã bị sai thì xác suất sai của một ký hiệu là

$$P_{es} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N i \binom{N}{i} P_M^i (1 - P_M)^{N-i} \quad (10-1-120)$$

Khi các ký hiệu được chuyển thành nhị phân thì xác suất sai bit tương ứng là:

$$P_{eb} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_{es} \quad (10-1-121)$$

Ví dụ 10-1-13

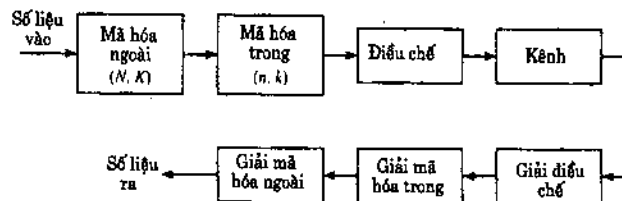
Chúng ta tính độ hiệu quả của mã Reed-Solomon $N = 2^5 - 1 = 31$ với $D_{min} = 3, 5, 9, 17$. Các giá trị K tương ứng là 29, 27, 23, 15. Ta sử dụng $M = 32$ tín hiệu FSK và xác định không liên kết.

Xác suất sai ký hiệu trong (7-4-46) là

$$P_M = \frac{1}{M} e^{-\gamma} \sum_{n=2}^M (-1)^n \binom{M}{n} e^{\gamma/n} \quad (10-1-122)$$

γ là SNR từng ký hiệu. Sử dụng (10-1-120), (10-1-122) và (10-1-121) ta tính được xác suất sai bit. Chú ý rằng bộ mã càng mạnh (D_{min} lớn) thì độ hiệu quả càng kém với các giá trị SNR nhỏ. Mặt khác, độ hiệu quả lại càng lớn với SNR lớn.

Nếu việc giải mã là xác định mềm thì sẽ có $q^K = 2^{kK}$ độ đo tương quan, mỗi độ đo tương ứng với một trong số q^K từ mã và có một bộ lấy tổng N đầu ra của bộ lọc phối hợp tương ứng với từ mã độ dài N . Các đầu ra của M bộ lọc có thể được xác định liên kết hay không liên kết. Nếu việc xác định là liên kết và kênh là AWGN thì xác suất lỗi là mở rộng của trường hợp nhị phân.



Hình 10-1-19: Sơ đồ khối của hệ thống sử dụng mã khối ghép

Mã khối ghép Mã khối ghép gồm có hai mã riêng biệt ghép lại thành một bộ mã lớn hơn. Thông thường một bộ mã là nhị phân và một bộ mã là không nhị phân. Mã không nhị phân tạo nên mã ngoài và mã nhị phân tạo nên mã trong. Các từ mã được tạo ra bằng cách chia khối kK bit thông tin thành K nhóm, gọi là các ký hiệu, mỗi ký hiệu gồm k bit. K ký hiệu k bit được mã hóa thành một từ mã độ dài N bởi bộ mã hóa ngoài, bộ mã hóa trong lấy từng ký hiệu k bit để mã hóa thành mã khối nhị phân độ dài n . Như vậy mã khối ghép có độ dài Nn bit và trong đó có Kk bit thông tin. Như vậy là đã tạo ra mã khối nhị phân (Nn, Kk) tương đương. Khoảng cách Hamming tối thiểu của bộ mã là $D_{min}d_{min}$ và tốc độ mã là Kk/Nn .

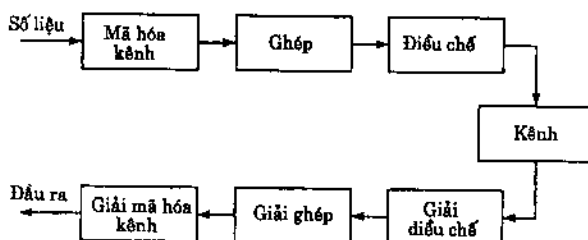
Bộ giải mã xác định cứng cho mã ghép được chia thành bộ giải mã trong và bộ giải mã ngoài. Bộ giải mã trong xác định từng khối n bit dựa trên xác định ML. k bit thông tin biểu diễn một ký hiệu của bộ mã ngoài. Khi nhận được một khối N ký hiệu k bit từ bộ giải mã trong, bộ giải mã ngoài xác định cứng K ký hiệu k bit dựa trên tiêu chuẩn ML.

Giải mã xác định mềm cũng có thể thực hiện ở bộ giải mã trong khi số lượng từ mã 2^k không lớn. Cũng có thể thực hiện giải mã xác định mềm ở cả hai bộ giải mã và độ hiệu quả sẽ tăng lên nhưng độ phức tạp cũng sẽ tăng lên theo.

Ví dụ 10-1-14 Giả sử mã Hamming trong ví dụ 10-1-1 và 10-1-2 được sử dụng ở bộ mã hóa trong và bộ mã hóa ngoài là mã Reed-Solomon. Từ $k = 4$, ta chọn độ dài của mã Reed-Solomon là $N = 2^4 - 1$. Số ký hiệu mang thông tin K có thể chọn $1 \leq K \leq 14$ để có được tốc độ mã phù hợp.

10-1-9 Ghép mã số liệu đối với kênh có nhiều chùm

Phần lớn các loại mã mà chúng ta đã xét đến được sử dụng để nâng cao độ hiệu quả khi truyền tin trên kênh có nhiều độc lập. Tuy nhiên có những kênh có nhiều chùm (sai tương quan) tạo ra các sai nhầm không độc lập thống kê, ví dụ như kênh có fading hay khi ghi thông tin lên băng từ hay đĩa từ.



Hình 10-1-20: Sơ đồ khối của hệ thống ghép mã số liệu

Một sai chùm độ dài b được định nghĩa là một dãy b bit bị sai, với ký hiệu đầu tiên và ký hiệu cuối cùng là 1. Khả năng sửa sai chùm của một bộ mã là độ dài dãy bị sai lớn nhất mà bộ mã có thể sửa được. Đối với mã hệ thống (n, k) thì có thể sửa được dãy sai độ dài $b = \lfloor \frac{1}{2}(n - k) \rfloor$. Một phương pháp có hiệu quả để khắc phục loại sai này là ghép mã số liệu để chuyển sai chùm thành sai độc lập và khi đó có thể sử dụng các loại mã thông thường cho việc thiết kế mã.

Sơ đồ khối của hệ thống ghép mã số liệu trên hình 10-1-20. Số liệu đã được mã hóa được sắp xếp lại nhờ bộ ghép và được truyền đi. Ở phía thu sẽ giải ghép số liệu và sau đó là giải mã bình thường. Bộ ghép có thể có cấu trúc khối hay cấu trúc chấp. Một bộ ghép có cấu trúc khối sắp xếp số liệu trong một mảng. Các hàng của mảng là các từ mã độ dài n . Bộ ghép bậc m gồm có m hàng. Các bit được đọc ra theo cột và được truyền đi. Như vậy sai tương quan độ dài $l = mb$ được chia thành m sai chùm độ dài b . Bộ ghép chấp tương ứng với loại mã chấp mà ta sẽ xét trong phần sau.

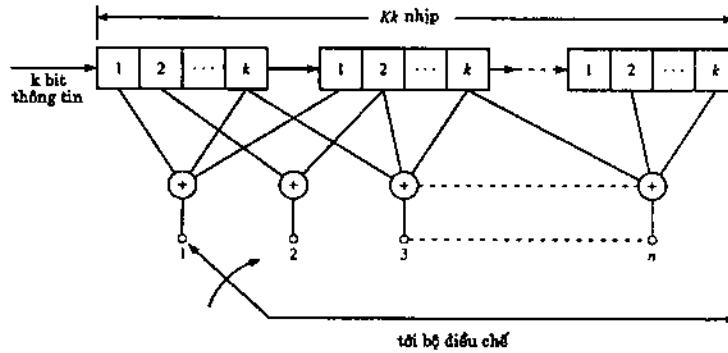


Hình 10-1-21: Sơ đồ bộ ghép khối

10-2 Mã chấp

Mã chấp được tạo ra bằng cách cho dãy thông tin qua một thanh ghi dịch tuyến tính có hữu hạn trạng thái. Tổng quát, thanh ghi dịch gồm có K nhịp, mỗi nhịp gồm có k bit và n bộ tạo hàm đại số tuyến

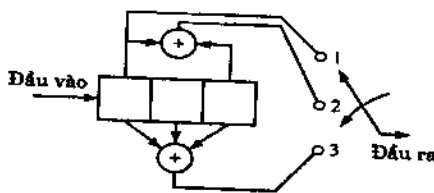
tính. Giả sử số liệu là nhị phân đi vào bộ mã hóa, theo từng nhịp, mỗi nhịp k bit. Đầu ra tương ứng với k bit đầu vào gồm n bit. Như vậy tốc độ mã là $R_c = k/n$ và tham số K gọi là *độ dài ràng buộc* của mã chập.



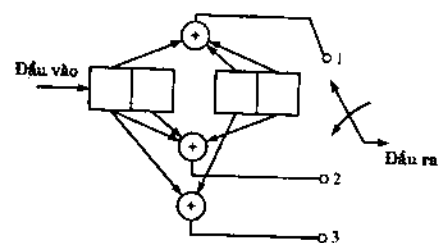
Hình 10-2-1: Bộ mã hóa chập

Một phương pháp để mô tả mã chập là dùng ma trận sinh. Tổng quát, ma trận sinh của mã chập là vô hạn một phía do dây thông tin đầu vào cũng là vô hạn một phía. Một phương pháp khác là ta có thể sử dụng n vectơ, mỗi vectơ tương ứng với một bộ cộng modulo 2. Mỗi vectơ có Kk chiều và vị trí thứ i là 1 nếu vị trí tương ứng trong thanh ghi dịch nối với bộ cộng modulo 2 và là 0 nếu như không nối với bộ cộng.

Xét bộ mã hóa chập với $K = 3, k = 1, n = 3$ như trên hình 10-2-2. Khởi đầu, số liệu trong thanh ghi dịch là toàn bit 0. Giả sử bit đầu tiên là bit 1 và 3 bit ra là 111. Bit thứ 2 vào là 0 thì 3 bit ra là 001. Nếu bit thứ 3 là 1 thì 3 bit đầu ra sẽ là 100 ... Giả sử ta đánh số các bộ tạo hàm tạo ra 3 bit đầu ra là 1, 2, 3 và các bit đầu ra cũng như thế thì các bộ tạo hàm theo thứ tự là $g_1 = [100], g_2 = [101], g_3 = [111]$. Các bộ tạo hàm cho mã này có thể biểu diễn ở dạng cơ số 8 là (4, 5, 7).



Hình 10-2-2: Bộ mã hóa chập
 $K = 3, k = 1, n = 3$

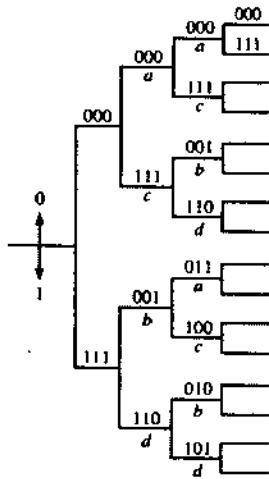


Hình 10-2-3: Bộ mã hóa chập
 $K = 2, k = 2, n = 3$

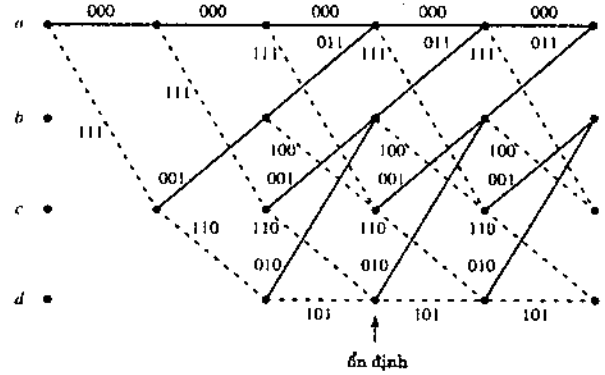
Ví dụ 10-2-1

Xét mã chập tốc độ 2/3 như trên hình 10-2-3. Đối với mã này, từng cặp 2 bit được đưa vào thanh ghi dịch trong một nhịp. Các bộ tạo hàm là $g_1 = [1011], g_2 = [1101], g_3 = [1010]$

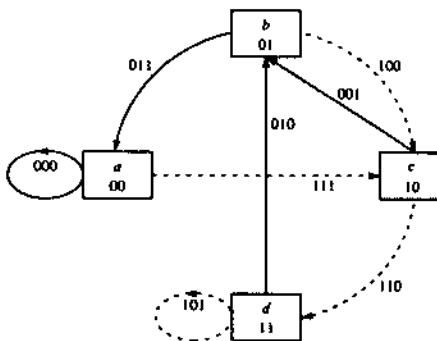
Có ba phương pháp thường dùng để biểu diễn mã chập, đó là cấu trúc cây, sơ đồ lưới và lưu đồ trạng thái. Ví dụ cấu trúc cây của mã trong hình 10-2-2 như hình 10-2-4.



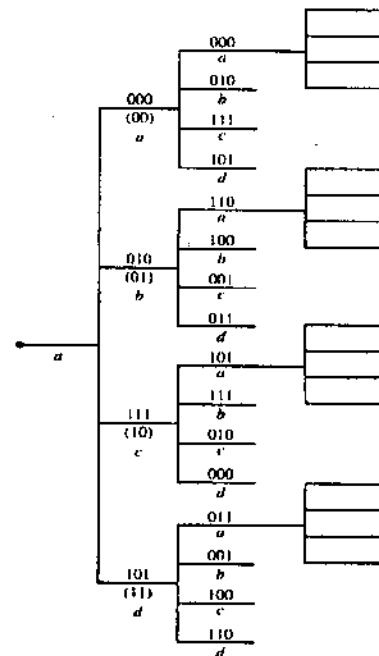
Hình 10-2-4: Cấu trúc cây của mã chập $K = 3, 1/3$



Hình 10-2-5: Sơ đồ lưới của mã chập $K = 3, 1/3$



Hình 10-2-6: Lưu đồ trạng thái của mã chập $K = 3, 1/3$



Hình 10-2-7: Cấu trúc cây của mã chập $K = 2, k = 2, n = 3$

Do đầu ra của bộ mã hóa được xác định bởi đầu vào và các trạng thái của thanh ghi dịch nên ta thu được lưu đồ trạng thái. Tương ứng với ví dụ trên là lưu đồ trạng thái trong hình 10-2-6.

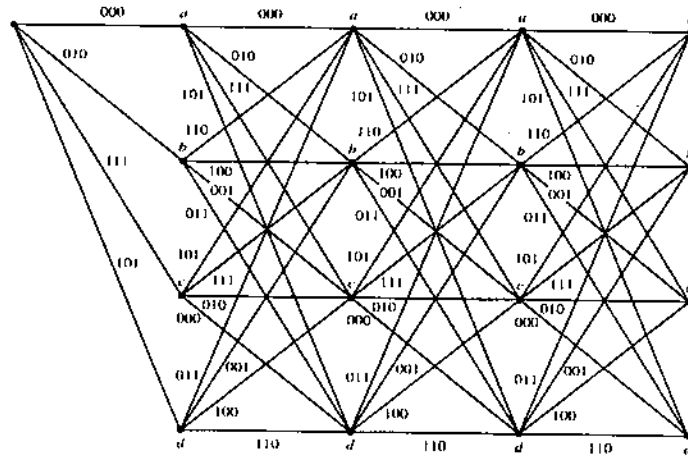
Ví dụ 10-2-2

Xét mã chập $k = 2, n = 3, K = 2$ trong ví dụ 10-2-1. Cấu trúc cây trong hình 10-2-7 và sơ đồ lưới trong hình 10-2-8. Do độ dài ràng buộc $K = 2$, ta thấy rằng cấu trúc cây lặp lại sau hai nhịp.

Tổng quát hóa, mã chập có độ dài ràng buộc K , tốc độ k/n được đặc trưng bởi 2^k nhánh xuất phát từ một nút trong cấu trúc cây và $2^{k(K-1)}$ trạng thái trong lưu đồ trạng thái. Ba phương pháp biểu diễn nói trên có thể dùng cho mã chập không nhị phân. Khi một ký hiệu nhận một trong $q = 2^k$ giá trị có thể thì mã không nhị phân có thể được biểu diễn bằng mã nhị phân tương đương.

Ví dụ 10-2-3

Xét mã chập tạo ra bởi bộ mã hóa như trên hình 10-2-10, các tham số mã là $K = 2, k = 2, n = 4, R_c = 1/2$ và các hàm tạo mã là $g_1 = [1010], g_2 = [0101], g_3 = [1110], g_4 = [1001]$. Trừ sự khác nhau về tốc độ, mã này tương tự như mã trong ví dụ 10-2-1.



Hình 10-2-8: Sơ đồ lưới của mã chập $K = 2, k = 2, n = 3$

Bộ mã tạo ra trong ví dụ này có thể được biểu diễn bằng mã không nhị phân một ký hiệu vào bốn mức và hai ký hiệu ra bốn mức.

10-2-1 Hàm truyền của mã chập

Các tính chất về khoảng cách và tốc độ sai của mã chập có thể thu được từ lưu đồ trạng thái. Do mã chập là tuyến tính nên tập hợp các khoảng cách từ các dây mã tạo ra tới dây mã toàn ký hiệu 0 giống như tập hợp các khoảng cách tới một dây mã bất kỳ khác. Do đó, hoàn toàn không mất tính tổng quát, ta giả thiết đầu vào của bộ mã hóa là dây mã toàn ký hiệu 0.

Ta sử dụng lưu đồ trạng thái trong hình 10-2-6 để mô tả phương pháp để nhận được các tính chất về khoảng cách của mã chập. Đầu tiên ta ký hiệu các nhánh của lưu đồ trạng thái là $D_0 = 1, D^1, D^2, D^3$ với số mũ của D là khoảng cách Hamming của dây tạo ra tới dây tạo ra bởi dây vào toàn ký hiệu 0. Vòng lặp tại nút a có thể bỏ qua và nút a được chia làm hai, một nút thể hiện đầu vào và một nút thể hiện đầu ra của lưu đồ trạng thái. Các phương trình trạng thái là:

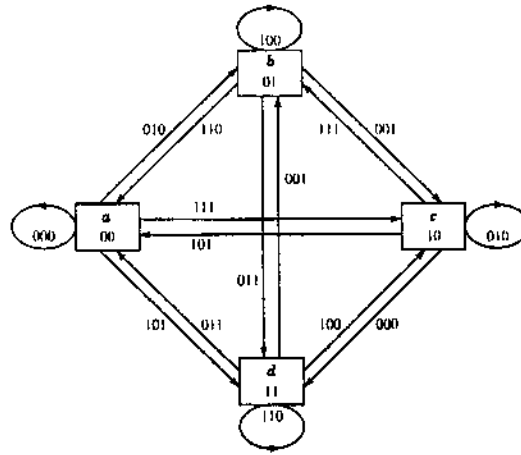
$$\begin{aligned} X_c &= D^3 X_a + D X_b \\ X_b &= D X_c + D X_d \\ X_d &= D^2 X_c + D^2 X_d \\ X_e &= D^2 X_b \end{aligned} \quad (10-2-1)$$

Hàm truyền của mã được định nghĩa là $T(D) = X_e/X_a$, ta có

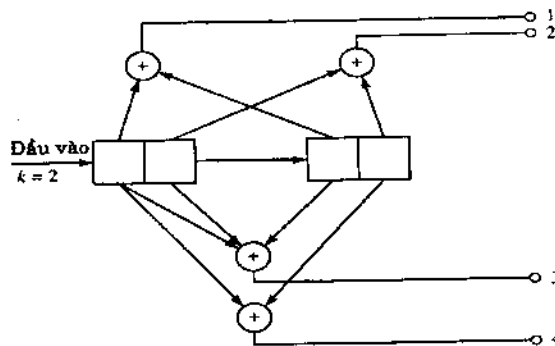
$$T(D) = \frac{D^6}{1-2D^2} = D^6 + 2D^8 + 4D^{10} + 8D^{12} + \dots = \sum_{d=6}^{\infty} a_d D^d \quad (10-2-2)$$

và

$$a_d = \begin{cases} 2^{(d-6)/2} & (d \text{ chẵn}) \\ 0 & (d \text{ lẻ}) \end{cases} \quad (10-2-3)$$



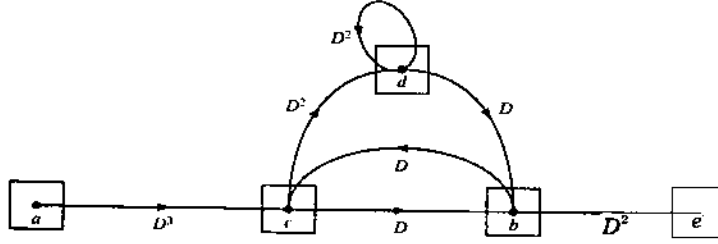
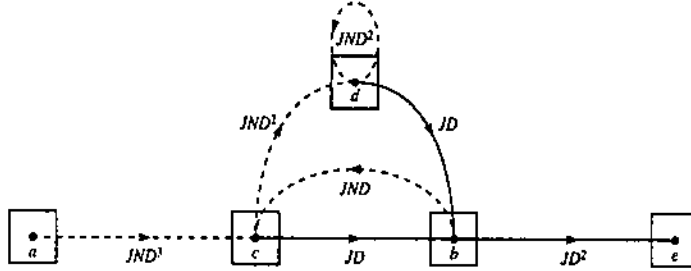
Hình 10-2-9: Lưu đồ trạng thái của mã chập $K = 2, k = 2, n = 3$



Hình 10-2-10: Bộ mã hóa mã chập $K = 2, k = 2, n = 4$

Hàm truyền đạt của mã này chỉ ra rằng có một đường với khoảng cách Hamming là 6 tới đường toàn 0 và nhập lại vào đường toàn 0 ở một nút nào đó. Trong lưu đồ trạng thái và sơ đồ lưới trong hình 10-2-6 và 10-2-5 ta thấy đường đó là $acbe$. Không còn đường nào khác có khoảng cách Hamming là 6. Có hai đường từ a tới e có khoảng cách Hamming là 8. Khoảng cách tối thiểu của mã được gọi là *khoảng cách tự do ngắn nhất* và ký hiệu là d_{free} . Trong ví dụ vừa xét, $d_{free} = 6$.

Chúng ta thêm hệ số N vào mọi nhánh tạo ra bởi ký hiệu 1 và như vậy khi đi qua những nhánh này, số mũ của N tăng lên 1 đơn vị. Chúng ta thêm hệ số J vào mọi nhánh trong lưu đồ trạng thái và như thế thì số mũ của J sẽ chỉ ra số nhánh đi qua từ nút a tới nút e .

Hình 10-2-11: Lưu đồ trạng thái cho mã chập $K = 3, 1/3$ Hình 10-2-12: Lưu đồ trạng thái cho mã chập $K = 3, 1/3$

$$\begin{aligned}
 X_c &= JND^3 X_a + JND X_b \\
 X_b &= JDX_c + JDX_d \\
 X_d &= JND^2 X_c + JND^2 X_d \\
 X_e &= JD^2 X_b
 \end{aligned} \tag{10-2-4}$$

$$\begin{aligned}
 T(D, N, J) &= \frac{J^3 ND^6}{1 - JND^2(1 + J)} \\
 &= J^3 ND^6 + J^4 N^2 D^8 + J^5 N^2 D^8 + J^5 N^3 D^{10} \\
 &\quad + 2J^6 N^3 D^{10} + J^7 N^3 D^{10} + \dots
 \end{aligned} \tag{10-2-5}$$

Khi chúng ta truyền dãy rất dài, có thể coi là vô hạn và muốn bỏ qua tham số J thì ta có thể đặt $J = 1$

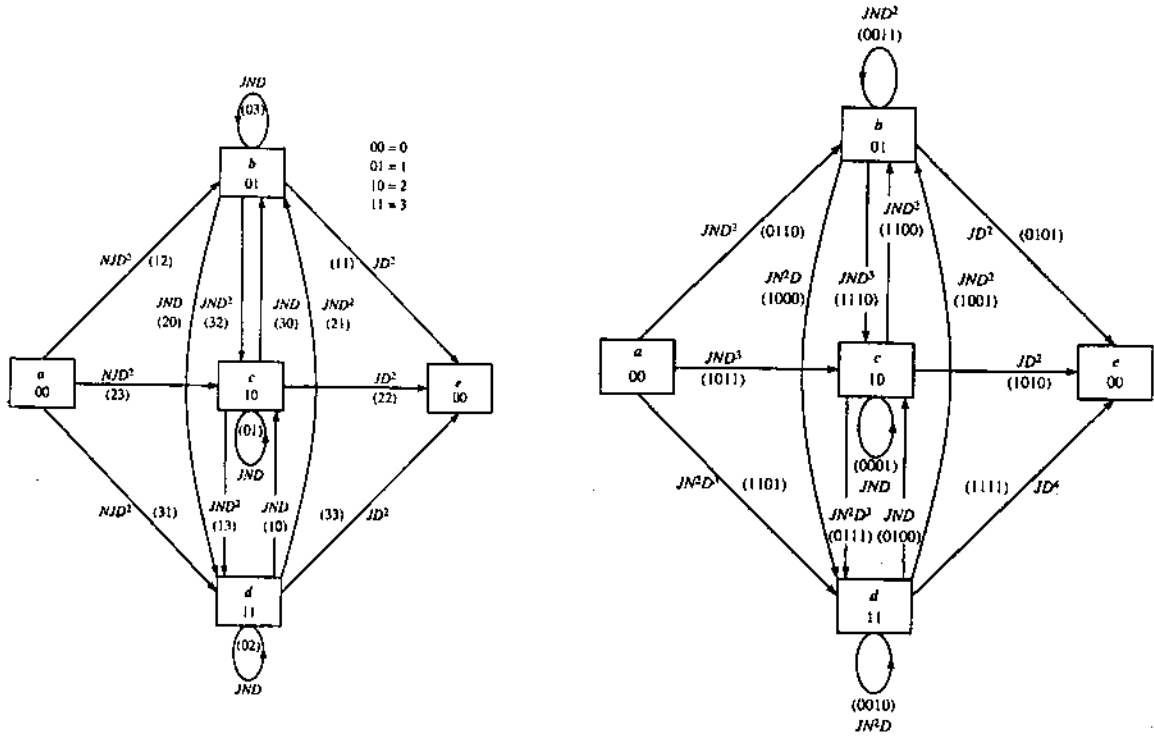
$$\begin{aligned}
 T(D, N, 1) &= \frac{ND^6}{1 - 2ND^2} \\
 &= ND^6 + 2N^2 D^8 + 4N^3 D^{10} + \dots = \sum_{d=6}^{\infty} a_d N^{(d-4)/2} D^d
 \end{aligned} \tag{10-2-6}$$

Ví dụ 10-2-4 Xét mã chập trong hình 10-2-10 và coi mã là bốn mức thì khoảng cách từ 0111 tới 0000 là 2. Khi ký hiệu vào 01 được giải mã thành 11 thì đó là sai nhầm 1 ký hiệu. Lưu đồ trạng thái trên hình 10-2-13 và

$$\begin{aligned}
 X_b &= NJD^2 X_a + NJDX_b + NJDX_c + NJD^2 X_d \\
 X_c &= NJD^2 X_a + NJD^2 X_b + NJDX_c + NJDX_d \\
 X_d &= NJD^2 X_a + NJDX_b + NJD^2 X_c + NJDX_d \\
 X_e &= JD^2(X_b + X_c + X_d)
 \end{aligned} \tag{10-2-7}$$

Hàm truyền là

$$T(D, N, J) = \frac{3NJ^2D^4}{1 - 2NJD - NJD^2} \quad (10-2-8)$$



Hình 10-2-13: Lưu đồ trạng thái cho mã chập $K = 2, k = 2, n = 4$ Hình 10-2-14: Lưu đồ trạng thái cho mã chập $K = 2, k = 2, n = 4$ với đầu ra nhị phân

Một số loại mã chập khi sử dụng trên kênh BSC thì có một số lượng hữu hạn sai nhầm sẽ dẫn tới vô hạn lần giải mã sai. Nhưng những loại mã như vậy rất dễ nhận ra và không được sử dụng trong thực tế.

10-2-2 Giải mã tối ưu mã chập-Thuật toán Viterbi

Giống như với mã khối, bộ mã hóa mã chập tạo ra các từ mã có độ dài hữu hạn n về cơ bản là một hệ có số trạng thái hữu hạn và do đó bộ giải mã tối ưu là bộ ước lượng dây cực đại khả năng (MLSE). Quá trình giải mã tối ưu mã chập là tìm trong lưới dây có khả năng lớn nhất. Phụ thuộc vào quá trình giải mã là xác định mềm hay xác định cứng mà ta có các độ đo tương quan khác nhau. Chúng ta sử dụng mã chập trong sơ đồ lưới hình 10-2-5 để mô tả thuật toán.

Xét hai đường trong lưới bắt đầu từ trạng thái a và nhập lại trạng thái a sau 3 chuyển đổi, tương ứng với hai dãy thông tin là 000 và 100, các dãy truyền đi tương ứng là 000, 000, 000 và 111, 001, 011. Ta ký hiệu các bit truyền đi là $\{c_{jm}, j = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3\}$ với j là nhánh thứ j và m là bit thứ m trong nhánh. Ta cũng ký hiệu $\{r_{jm}, j = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3\}$ là đầu ra của bộ giải điều chế. Nếu bộ xác định thực hiện xác định cứng thì đầu ra của mỗi bit là 1 hoặc 0, và nếu việc xác định là mềm và tín hiệu truyền đi là PSK xác định liên kết thì đầu ra của bộ xác định mềm là

$$r_{jm} = \sqrt{\xi_c}(2c_{jm} - 1) + n_{jm} \quad (10-2-9)$$

n_{jm} biểu diễn nhiều trắng và ξ_c là năng lượng của mỗi bit mà truyền đi. Độ đo được định nghĩa cho nhánh thứ j trong đường thứ i là

$$\mu_j^{(i)} = \log P(Y_j | C_j^{(i)}), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (10-2-10)$$

Như vậy độ đo cho đường thứ i gồm có B nhánh là

$$PM^{(i)} = \sum_{j=1}^B \mu_j^{(i)} \quad (10-2-11)$$

Nguyên tắc lựa chọn giữa hai đường là chọn đường có độ đo lớn hơn. Nguyên tắc này cực đại hóa xác suất xác định đúng hay cực tiểu hóa xác suất xác định sai. Ví dụ với giải mã xác định cứng với dãy nhận được là $\{101000100\}$. Ta ký hiệu $i = 0$ là nhánh toàn ký hiệu 0 và $i = 1$ là nhánh xuất phát từ trạng thái a và trở về trạng thái a sau ba chuyển đổi. Độ đo tương ứng với hai đường này là

$$\begin{aligned} PM^{(0)} &= 6 \log(1-p) + 3 \log p \\ PM^{(1)} &= 4 \log(1-p) + 5 \log p \end{aligned} \quad (10-2-12)$$

Giả sử $p < \frac{1}{2}$ thì ta thấy $PM^{(0)} > PM^{(1)}$. Khoảng cách từ đường dẫn toàn 0 tới dãy nhận được là $d = 3$ còn từ đường kia tới dãy nhận được là $d = 5$. Như vậy khoảng cách Hamming là độ đo tương ứng với giải mã xác định cứng.

Giải mã xác định mềm được thực hiện và kênh có nhiễu cộng gaussian thì đầu ra của bộ giải điều chế được mô tả thống kê bởi

$$p(r_{jm} | c_{jm}^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{[r_{jm} - \sqrt{\xi_c}(2c_{jm}^{(i)} - 1)]^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (10-2-13)$$

$\sigma^2 = \frac{1}{2}N_0$ là sai phương của nhiễu trắng và từ đó độ đo của nhánh thứ j trong đường thứ i được biểu diễn là

$$\mu_j^{(i)} = \sum_{m=1}^n r_{jm}(2c_{jm}^{(i)} - 1) \quad (10-2-14)$$

và trong ví dụ của ta thì độ đo tương ứng với hai đường là

$$\begin{aligned} CM^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 r_{jm}(2c_{jm}^{(0)} - 1) \\ CM^{(1)} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 r_{jm}(2c_{jm}^{(1)} - 1) \end{aligned} \quad (10-2-15)$$

Bây giờ ta xét thuật toán Viterbi. Ta chú ý rằng nếu $CM^{(0)} > CM^{(1)}$ thì mọi nhánh tiếp theo xuất phát từ trạng thái a đều được cộng thêm lượng không đổi là $CM^{(0)}$ hoặc $CM^{(1)}$. Do đó đường ứng với $CM^{(1)}$ có thể bỏ đi và ta có *đường còn lại*. Tương tự, một trong hai đường nhập lại ở nút b, c, d có thể bỏ qua. Thủ tục này được lặp lại ở mỗi nhịp.

Tổng quát, với mã chập nhị phân $k = 1$ thì ta có 2^{K-1} trạng thái, có 2^{K-1} đường còn lại ở mỗi nhịp và 2^{K-1} độ đo. Hơn nữa, với mã chập nhị phân với k bit được đưa vào thanh ghi dịch trong một nhịp thì sơ đồ lưới sẽ có $2^{k(K-1)}$ trạng thái. Như vậy bộ giải mã cần giữ $2^{k(K-1)}$ đường còn lại và $2^{k(K-1)}$ độ đo và ở mỗi nhịp có 2^k đường tới một nút. Do đó số lượng phép tính cần thực hiện tăng theo hàm mũ củ k và K .

Độ trễ giải mã và dung lượng bộ nhớ của bộ giải mã sử dụng theo thuật toán này thường rất lớn trong đa số các ứng dụng thực tế. Tuy nhiên ta có thể sửa đổi thuật toán này như trong phần 7-1-4 là độ trễ δ bit mới nhất thỏa mãn điều kiện $\delta \geq 5K$ sẽ cho ta kết quả tương đối đúng và chấp nhận được.

10-2-3 Xác suất lỗi của giải mã xác định mềm

Để biểu diễn xác suất xác định sai của mã chấp, ta sử dụng tính chất tuyến tính để việc biểu diễn được đơn giản. Giả thiết dây toàn ký hiệu 0 được truyền đi và ta xác định xác suất xác định sai dây này. Giả thiết ta sử dụng tín hiệu PSK nhị phân (hoặc bốn mức) và quá trình xác định là liên kết. Độ đo tương quan ứng với mỗi đường là

$$CM^{(i)} = \sum_{j=1}^B \mu_j^{(i)} = \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n r_{jm} (2c_{jm}^{(i)} - 1) \quad (10-2-16)$$

B là số nhánh trong đường. Ví dụ với đường toàn ký hiệu 0 ký hiệu là $i = 0$ có độ đo là

$$CM^{(0)} = \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n (-\sqrt{\xi_c} + n_{jm})(-1) = \sqrt{\xi_c} Bn + \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n n_{jm} \quad (10-2-17)$$

Chú ý rằng mã chấp có thể có độ dài vô hạn và ta định nghĩa xác suất sai của sự kiện thứ nhất là xác suất để một đường khác nhập lại với đường dẫn toàn ký hiệu 0 ở nút B có độ đo lớn hơn độ đo của đường toàn ký hiệu 0. Giả sử đường ký hiệu $i = 1$ có khoảng cách tới đường toàn ký hiệu 0 là d , có nghĩa là có d ký hiệu 1 trong đường $i = 1$, còn các ký hiệu khác là 0.

$$\begin{aligned} P_2(d) &= P(CM^{(1)} \geq CM^{(0)}) \\ &= P(CM^{(1)} - CM^{(0)} \geq 0) \\ &= P \left[2 \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n r_{jm} (c_{jm}^{(1)} - c_{jm}^{(0)}) \geq 0 \right] \end{aligned} \quad (10-2-18)$$

Do các mã bit trong hai đường là giống nhau trừ d vị trí nên (10-2-18) có thể đơn giản thành:

$$P_2(d) = P \left(\sum_{l=1}^d r'_l \geq 0 \right) \quad (10-2-19)$$

với $\{r'_l\}$ biểu diễn đầu vào bộ giải mã với d bit này

Do $\{r'_l\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê có phân bố giống nhau, giá trị trung bình $-\sqrt{\xi_c}$ và sai phương $\frac{1}{2}N_0$, như vậy xác suất lỗi để hai đường khác nhau d bit là

$$P_2(d) = Q \left(\sqrt{\frac{2\xi_c}{N_0} d} \right) = Q \left(\sqrt{2\gamma_b R_c d} \right) \quad (10-2-20)$$

ở đây $\gamma_b = \xi_b/N_0$ là SNR từng bit nhận được và R_c là tốc độ mã.

Chúng ta đã tính xác suất sai của sự kiện thứ nhất của một đường có khoảng cách là d so với đường toàn 0 và nhập lại với đường toàn 0 tại một nút B nào đó. Ta có thể lấy tổng của (10-2-20) theo tất cả các đường dẫn có thể và thu được giới hạn trên của xác suất lỗi của sự kiện thứ nhất.

$$P_e \leq \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d P_2(d) \leq \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d Q \left(\sqrt{2\gamma_b R_c d} \right) \quad (10-2-21)$$

Có hai lý do để (10-2-21) là giới hạn trên của xác suất lỗi của sự kiện thứ nhất. Đầu tiên, ta thấy các sự kiện cho xác suất sai $\{P_2(d)\}$ là không đồng thời. Điều này ta có thể thấy được trên lưới. Thứ hai, tổng được lấy theo mọi khả năng $d \geq d_{free}$ với giả thiết mã chấp có độ dài vô hạn. Nếu bộ mã được cắt tuần hoàn sau B nút thì ta có thể lấy tổng theo $d \leq d_{free} \leq B$.

Giới hạn trên trong công thức trên có thể biểu diễn theo cách khác nếu ta chú ý đến

$$Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c d}\right) \leq e^{-\gamma_b R_c d} = D^d|_{D=e^{-\gamma_b R_c}} \quad (10-2-22)$$

và

$$P_e < T(D)|_{D=e^{-\gamma_b R_c}} \quad (10-2-23)$$

Ta xét xác suất sai bit. Giả sử đường sai được lựa chọn và các bit thông tin trong đường này bị sai sẽ khác với các bit thông tin tương ứng trong đường dẫn đúng. Số mũ của N trong hàm truyền $T(D, N)$ chỉ ra số bit thông tin bị lỗi trong đường sai. Nếu ta nhân $P_2(d)$ với số bit thông tin bị giải mã sai trong đường sai tại nút mà hai đường nhập lại thì ta nhận được tốc độ sai bit trong đường này. Xác suất sai bit trung bình được tính bằng cách nhân mỗi giá trị $P_2(d)$ với số bit bị giải mã sai và lấy tổng theo d . Hệ số nhân tương ứng với số bit thông tin bị sai với mỗi đường bị lựa chọn sai là đạo hàm của $T(D, N)$ theo N

$$T(D, N) = \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d D^d N^{f(d)} \quad (10-2-24)$$

Lấy đạo hàm của $T(D, N)$ theo N và cho $N = 1$ ta nhận được

$$\frac{dT(D, N)}{dN}|_{N=1} = \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d f(d) D^d = \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d D^d \quad (10-2-25)$$

Như vậy khi $k = 1$ thì xác suất sai bit bị giới hạn trên bởi

$$P_b < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d P_2(d) = \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d Q\left(\sqrt{2\gamma_b R_c d}\right) \quad (10-2-26)$$

Nếu ta sử dụng giới hạn của hàm Q trong công thức (10-2-22) thì

$$P_b < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d D^d|_{D=e^{-\gamma_b R_c}} = \frac{dT(D, N)}{dN}|_{N=1, D=e^{-\gamma_b R_c}} \quad (10-2-27)$$

Khi $k > 1$ thì xác suất sai bit tương đương nhận được bằng cách chia (10-2-26) và (10-2-27) cho k .

Việc tính toán các xác suất lỗi ở trên được thực hiện với giả thiết là các bit trong từ mã được truyền đi bằng tín hiệu PSK nhị phân xác định liên kết. Kết quả cũng đúng khi tín hiệu là QPSK xác định liên kết. Khi ta sử dụng các kỹ thuật điều chế và giải điều chế khác thì chỉ ảnh hưởng tới việc tính $P_2(d)$ chứ không ảnh hưởng tới quá trình tính P_b . Khi các ký hiệu là k bit thì xác suất sai bit tương đương được nhân thêm với hệ số $2^{k-1}/(2^k - 1)$ như đã nói trong chương 7.

10-2-4 Xác suất lỗi của giải mã xác định cứng

Ta xét hiệu quả của thuật toán Viterbi trên kênh BSC. Trong trường hợp giải mã xác định cứng, các độ đo là các khoảng cách Hamming giữa dãy nhận được và $2^{k(K-1)}$ dãy còn lại tại mỗi nút trên lưới.

Cũng như phần trên, ta bắt đầu bằng cách xác định xác suất lỗi của sự kiện thứ nhất. Giả sử đường toàn 0 là đường được truyền đi. Đường dẫn được so sánh với đường toàn 0 tại một nút B nào đó có khoảng cách d so với đường toàn 0. Nếu d lẻ thì đường sẽ được lựa chọn nếu số sai trong dãy nhận được nhỏ hơn $\frac{1}{2}(d+1)$. Xác suất lựa chọn đường sai là

$$P_2(d) = \sum_{k=(d+1)/2}^d \binom{d}{k} p^k (1-p)^{d-k} \quad (10-2-28)$$

Nếu d chẵn thì giải mã sẽ bị sai khi số bit sai vượt quá $\frac{1}{2}d$. Nếu số sai bằng $\frac{1}{2}d$ thì sự lựa chọn sẽ là ngẫu nhiên nên xác suất sai khi đó là một nửa. Như vậy trong trường hợp d chẵn thì

$$P_2(d) = \sum_{k=d/2+1}^d \binom{d}{k} p^k (1-p)^{d-k} + \frac{1}{2} \binom{d}{\frac{1}{2}d} p^{d/2} (1-p)^{d/2} \quad (10-2-29)$$

Do có nhiều đường với khoảng cách khác nhau nhập với đường toàn 0 tại một nút nào đó nên giới hạn trên của xác suất lỗi sẽ là

$$P_e < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d P_2(d) \quad (10-2-30)$$

Chúng ta cũng có thể sử dụng giới hạn

$$P_2(d) < [4p(1-p)]^{d/2} \quad (10-2-31)$$

cho trong 10-1-5, ta sẽ nhận được giới hạn kém chặt hơn.

$$P_e < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d [4p(1-p)]^{d/2} = T(D) \big|_{D=\sqrt{4p(1-p)}} \quad (10-2-32)$$

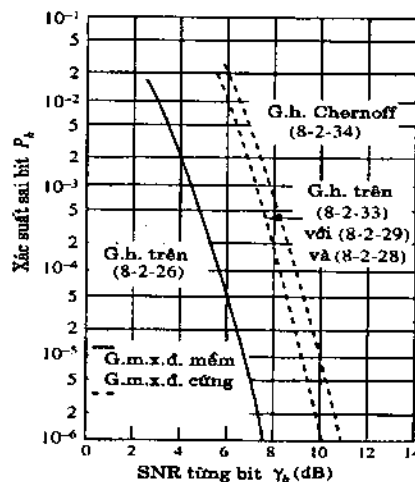
Bây giờ ta xác định xác suất sai bit. Ta sử dụng số mũ của N trong hàm truyền $T(D, N)$. Lấy đạo hàm của hàm này theo N và đặt $N = 1$ và chúng ta có:

$$P_b < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (10-2-33)$$

Sử dụng giới hạn kém chặt của $P_2(d)$ ta sẽ thu được

$$P_b < \frac{dT(D, N)}{dN} \big|_{N=1, D=\sqrt{4p(1-p)}} \quad (10-2-34)$$

So sánh xác suất sai của việc giải mã mã chập 1/3, $K = 3$ của hai phương pháp trên hình 10-2-15.



Hình 10-2-15: So sánh giải mã cứng và giải mã mềm đối với mã chập 1/3, $K = 3$

Cuối cùng, tốc độ sai trung bình theo tập hợp của mã chập trên kênh rời rạc không nhớ được biểu diễn theo tốc độ giới hạn R_0

$$\bar{P}_b < \frac{(q-1)q^{-KR_0/R_c}}{[1 - q^{-(R_0-R_c)/R_c}]^2}, R_c \leq R_0$$

10-2-5 Các tính chất về khoảng cách của mã chập

Trong phần này ta ghi ra một số giá trị về khoảng cách tối thiểu, các hàm sinh của một số mã chập nhị phân có độ dài hữu hạn với một số giá trị về tốc độ mã. Các mã nhị phân này là tối ưu theo nghĩa với một tốc độ và độ dài xác định, chúng có d_{free} lớn nhất. Ta có giới hạn trên đơn giản của khoảng cách tự do tối thiểu của mã chập $1/n$ là

$$d_{free} \leq \min_{l \geq 1} \left\lfloor \frac{2^l - 1}{2^l - 1} (K + l - 1)n \right\rfloor \quad (10-2-35)$$

Bảng 10-2-1: Mã tốc độ $1/2$ có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh		d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}	
3	5	7	5	5	5
4	15	17	6	6	6
5	23	35	7	8	8
6	53	75	8	8	8
7	133	171	10	10	10
8	247	371	10	11	11
9	561	753	12	12	12
10	1167	1545	12	13	13
11	2335	3661	14	14	14
12	4335	5723	15	15	15
13	10533	17661	16	16	16
14	21675	27123	16	17	17

Bảng 10-2-2: Mã tốc độ $1/3$ có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh		d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}	
3	5	7	7	8	8
4	13	15	17	10	10
5	25	33	37	12	12
6	47	53	75	13	13
7	133	145	175	15	15
8	225	331	367	16	16
9	557	663	711	18	18
10	1117	1365	1633	20	20
11	2353	2671	3175	22	22
12	4767	5723	6265	24	24
13	10533	10675	17661	24	24
14	21645	35661	37133	26	26

Bảng 10-2-3: Mã tốc độ 1/4 có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh				d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
3	5	7	7	7	10	10
4	13	15	15	17	13	15
5	25	27	33	37	16	16
6	53	67	71	75	18	18
7	135	135	147	163	20	20
8	235	275	313	357	22	22
9	463	535	733	745	24	24
10	1117	1365	1633	1653	27	27
11	2387	2353	2671	3175	29	29
12	4767	5723	6265	7455	32	32
13	11145	12477	15537	16727	33	33
14	21113	23175	35527	35537	36	36

Bảng 10-2-4: Mã tốc độ 1/5 có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh					d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
3	7	7	7	5	5	13	13
4	17	17	13	15	15	16	16
5	37	27	33	25	35	20	20
6	75	71	73	65	57	22	22
7	175	131	135	135	147	25	25
8	257	233	323	271	357	28	28

Bảng 10-2-5: Mã tốc độ 1/6 có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh				d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
3	7	7	7	7	16	16
	7	5	5			
4	17	17	13	13	20	20
	13	15	15			
5	37	35	27	27	24	24
	33	25	35			
6	73	75	55	57	27	27
	65	47	57			
7	173	151	135	137	30	30
	135	163	137			
8	253	375	331	357	34	34
	235	313	357			

Bảng 10-2-6: Mã tốc độ 1/7 có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh				d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
3	7	7	7	7	18	18
	5	5	5			
4	17	17	13	13	23	23
	13	15	15			
5	35	27	25	27	28	28
	33	35	37			
6	53	75	65	75	32	32
	47	67	57			
7	165	145	173	135	36	36
	135	147	137			
8	275	253	375	331	40	40
	235	313	357			

Bảng 10-2-7: Mã tốc độ 1/8 có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh				d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
3	7	7	5	5	21	21
	5	7	7	7		
4	17	17	13	13	26	26
	13	15	15	17		
5	37	33	25	25	32	32
	35	33	27	37		
6	57	73	51	65	36	36
	75	47	67	57		
7	153	111	165	173	40	40
	135	135	147	137		
8	275	275	253	371	45	45
	331	235	313	357		

Bảng 10-2-8: Mã tốc độ 2/3 có khoảng cách tự do lớn nhất

K	Hàm sinh			d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
2	17	6	15	3	4
3	27	75	72	5	6
4	236	155	337	7	7

Bảng 10-2-9: Mã tốc độ $k/5$ có khoảng cách tự do lớn nhất

Tốc độ	K	Hàm sinh				d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
2/5	2	17	7	11	12	4	6
	3	27	71	52	65	57	10
	4	247	366	171	266	373	12
3/5	2	35	23	75	61	47	5
4/5	2	237	274	156	255	337	3

508
509

Bảng 10-2-10: Mã tốc độ $k/7$ có khoảng cách tự do lớn nhất

Tốc độ	K	Hàm sinh				d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
2/7	2	5	6	12	15	9	9
		15	13	17			
	3	33	55	72	47	14	14
		25	53	75			
	4	312	125	247	366	18	18
3/7	2	45	21	36	62	8	8
		57	43	71			
	4/7	2	130	67	237	274	6
4/7	2	156	255	337			7

Bảng 10-2-11: Mã tốc độ 3/4 và 3/8 có khoảng cách tự do lớn nhất

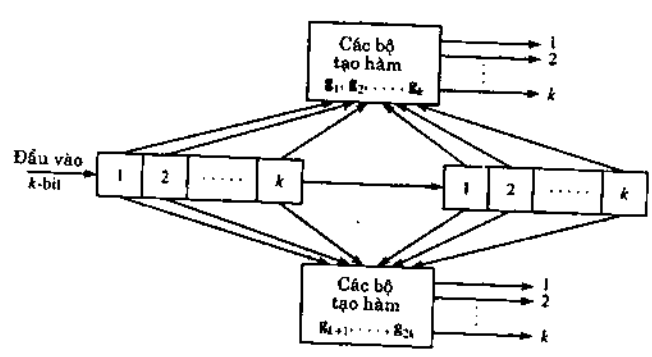
Tốc độ	K	Hàm sinh				d_{free}	Giới hạn trên của d_{free}
3/4	2	13	25	61	47	4	4
3/8	2	15	42	23	61	8	8
		51	36	75	47		

10-2-6 Mã kép k không nhị phân và mã ghép

Các vấn đề về mã chập chúng ta xem xét tới nay chủ yếu tập trung vào mã nhị phân sử dụng trên kênh có khả năng sử dụng tín hiệu PSK nhị phân hoặc QPSK xác định liên kết. Tuy nhiên trong thực tế có những ứng dụng trong đó không thể hay không tiện sử dụng các loại tín hiệu này. Trong những trường hợp đó ta sử dụng các kỹ thuật điều chế khác như FSK M mức và quá trình giải điều chế là không liên kết. Mã không nhị phân sẽ tương ứng với tín hiệu M mức và giải điều chế không liên kết.

Trong phần này ta trình bày một lớp mã không nhị phân gọi là mã kép k (*dual k -codes*). Loại mã này có thể giải mã tương đối dễ bằng thuật toán Viterbi với giải mã xác định mềm hoặc cứng. Loại mã này cũng thích hợp sử dụng làm mã trong và mã ngoài trong mã ghép.

Bộ mã hóa chập tạo ra mã kép k tốc độ 1/2 được trình bày trên hình 10-2-16. Nó gồm có hai thành ghi dịch k bit ($K = 2$) và $n = 2k$ hàm sinh. Đầu ra của bộ mã hóa là hai ký hiệu k bit. Chú ý rằng mã trong ví dụ 10-2-3 là mã chập kép 2.



Hình 10-2-16: Bộ mã hóa tạo ra mã kép tốc độ 1/2

$2k$ hàm sinh của mã chập kép được cho dưới dạng

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_k \mathbf{I}_k] \\ \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{k+1} \\ \mathbf{g}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{2k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I}_k & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10-2-36)$$

Dạng tổng quát của hàm truyền của mã kép k tốc độ $1/2$ là

$$T(D, N, J) = \frac{(2^k - 1)D^4 J^2 N}{1 - NJ[2D + (2^k - 3)D^2]} = \sum_{i=4}^{\infty} a_i D^i N^{f(i)} J^{h(i)} \quad (10-2-37)$$

trong đó D là khoảng cách Hamming giữa các ký hiệu q mức ($q = 2^k$), $f(i)$ là số lượng ký hiệu thông tin có lỗi do lựa chọn sai đường trong lưới, $h(i)$ là số nhánh trong đường. Chú ý rằng khoảng cách tự do tối thiểu $d_{free} = 4$ ký hiệu ($4k$ bit).

Mã kép k tốc độ thấp có thể tạo ra theo nhiều cách khác nhau, cách đơn giản nhất là lặp lại các ký hiệu tạo ra bởi tốc độ $1/2$ r lần, $r = 1, 2, \dots, m$. Nếu ký hiệu trong một nhánh nào đó được lặp lại r lần thì khoảng cách tương ứng sẽ tăng từ D lên D^r . Như vậy hàm truyền của mã kép k tốc độ $1/2r$ là

$$T(D, N, J) = \frac{(2^k - 1)D^{4r} J^2 N}{1 - NJ[2D^r + (2^k - 3)D^{2r}]} \quad (10-2-38)$$

Nếu độ dài của dây thông tin lớn thì tham số độ dài đường J có thể đặt bằng 1. Lấy đạo hàm của $T(D, N)$ theo N và đặt $N = 1$ ta có:

$$\frac{dT(D, N)}{dN} \Big|_{N=1} = \frac{(2^k - 1)D^{4r}}{[1 - 2D^r - (2^k - 3)D^{2r}]^2} = \sum_{i=4r}^{\infty} \beta_i D^i \quad (10-2-39)$$

trong đó β_i là số ký hiệu sai gần với đường có khoảng cách D^i tới đường toàn 0. Biểu thức trên được sử dụng để tính xác suất sai của mã kép k trên kênh.

Hiệu quả của mã kép k Giả sử mã kép k được sử dụng cùng với tín hiệu trực giao M mức và $M = 2^k$, kênh có nhiễu cộng trắng gaussian và bộ giải điều chế gồm có M bộ lọc phối hợp.

Nếu quá trình giải mã là xác định cứng thì hiệu quả của bộ mã được tính bằng xác suất sai ký hiệu P_M . Xác suất này được tính trong chương 7 với xác định liên kết và không liên kết. Từ P_M ta có thể tính được $P_2(d)$ theo (10-2-28) và (10-2-29). Xác suất sai bit được giới hạn trên bởi

$$P_b < \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{d=4r}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (10-2-40)$$

Nếu quá trình giải mã là xác định mềm theo luật bình phương thì xác suất sai bit cũng được giới hạn trên theo công thức (10-2-40) nhưng

$$P_2(d) = \frac{1}{2^{2d}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_b R_c d\right) \sum_{i=0}^{d-1} K_i \left(\frac{1}{2}\gamma_b R_c d\right) \quad (10-2-41)$$

và $K_i = \frac{1}{i!} \sum_{l=0}^{d-1-i} \binom{2d-1}{l}$, $R_c = 1/2r$. Biểu thức này là kết quả trong (10-1-63).

Mã ghép Ta xét mã ghép gồm mã khối và mã chập hay hai mã chập với nhau.

Như đã trình bày, mã ngoài thường là mã không nhị phân, mỗi ký hiệu có thể có $q = 2^k$ giá trị. Mã này có thể là mã khối (Reed-Solomon) hay mã chập kép k . Mã trong có thể là nhị phân hay không phải nhị phân và có thể là mã khối hay mã chập. Nếu mã trong là mã chập có độ dài ngắn thì thuật toán Viterbi cho phép quá trình giải mã có hiệu quả. Nếu mã trong là mã khối và bộ giải mã tương ứng xác định mềm thì bộ giải mã hóa ngoài có thể cũng là xác định mềm. Nếu bộ giải mã hóa trong thực hiện xác định cứng sau khi nhận được từ mã và đưa kết quả tới bộ giải mã hóa ngoài thì bộ giải mã hóa ngoài phải thực hiện xác định cứng. Xét ví dụ sau.

Ví dụ 10-2-5

Giả thiết ta có mã ghép gồm có mã kép 5 tốc độ $1/2$ là mã ngoài và mã Hadamard (16,5) là mã trong. Mã kép có khoảng cách tự do tối thiểu $D_{free} = 4$ và mã Hadamard có khoảng cách tối thiểu $d_{min} = 8$. Như vậy mã ghép có khoảng cách tối thiểu là 32. Do mã Hadamard có 32 từ mã và mã ngoài có 32 ký hiệu, như vậy mỗi ký hiệu của bộ mã ngoài được chuyển thành một từ mã của mã Hadamard.

Xác suất sai ký hiệu của bộ giải mã mã trong được xác định trong phần 10-1-4 và 10-1-5. Giả thiết giải mã ở bộ giải mã trong là xác định cứng và P_{32} là xác suất sai từ mã (một ký hiệu ở bộ mã ngoài) thì hiệu quả của bộ mã ngoài và của mã ghép được tính theo (10-2-37).

10-2-7 Thuật toán Fano

Thuật toán Viterbi là thuật toán giải mã tối ưu (thuật toán ML cho toàn bộ dãy) cho mã chập. Tuy nhiên thuật toán này đòi hỏi phải tính 2^{kK} độ đo tại mỗi nút của lưới và lưu trữ $2^{k(K-1)}$ dãy còn lại, mỗi dãy còn lại có độ dài $5kK$ bit. Độ phức tạp tính toán và khối lượng thông tin cần lưu trữ làm cho thuật toán không có hiệu quả khi độ dài ràng buộc lớn.

Thuật toán giải mã dãy Fano tìm đường có nhiều khả năng nhất trong lưới hay cây bằng cách kiểm tra từng đường. Độ đo được tăng lên theo từng nhánh tương ứng với xác suất của tín hiệu nhận được từ nhánh đó giống như thuật toán Viterbi ngoại trừ một hằng số âm được thêm vào cho mỗi nhánh. Giá trị của hằng số được chọn sao cho độ đo tương ứng với nhánh đúng bình quân sẽ tăng còn các nhánh không đúng sẽ giảm bình quân. Bằng cách so sánh độ đo của các nhánh với giá trị ngưỡng thay đổi liên tục, thuật toán sẽ phát hiện và loại bỏ các đường dẫn không đúng.

Xét một kênh không nhớ, độ đo của đường thứ i trong cây hay lưới từ nhánh đầu tiên tới nhánh thứ B được biểu diễn bởi:

$$CM^{(i)} = \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n \mu_{jm}^{(i)} \quad (10-2-42)$$

với

$$\mu_{jm}^{(i)} = \log_2 \frac{p(r_{jm}|c_{jm}^{(i)})}{p(r_{jm})} - K \quad (10-2-43)$$

Trong (10-2-43), r_{jm} là dãy ra của bộ giải điều chế, $p(r_{jm}|c_{jm}^{(i)})$ là hàm mật độ phân bố xác suất của r_{jm} với điều kiện mã bit $c_{jm}^{(i)}$ của bit thứ m trong nhánh thứ j của đường thứ i và K là một hằng số

đương. K được chọn để độ đo của các đường sai sẽ giảm dần và của đường đúng sẽ tăng dần một cách trung bình. Chú ý rằng $p(r_{jm})$ là độc lập với dãy mã và có thể coi là hằng số.

Độ đo trong công thức (10-2-43) áp dụng cho cả giải mã xác định cứng và mềm nhưng sẽ đơn giản hơn trong giải mã xác định cứng. Giả sử kênh là BSC thì

$$\mu_{jm}^{(i)} = \begin{cases} \log_2[2(1-p)] - R_c & \text{nếu } \tilde{r}_{jm} = c_{jm}^{(i)} \\ \log_2 2p - R_c & \text{nếu } \tilde{r}_{jm} \neq c_{jm}^{(i)} \end{cases} \quad (10-2-44)$$

$\tilde{r}_{jm}$ là đầu ra của bộ giải điều chế xác định cứng và $c_{jm}^{(i)}$ là bit mã thứ m của nhánh thứ j trong đường thứ i . Ta thấy rằng để tính các độ đo thì cần phải biết (hoặc xấp xỉ) xác suất lỗi.

Ví dụ 10-2-6

Giả sử mã nhị phân chập tốc độ 1/3 được truyền trên kênh BSC với $p = 0,1$, ta có

$$\mu_{jm}^{(i)} = \begin{cases} 0,52 & \text{nếu } \tilde{r}_{jm} = c_{jm}^{(i)} \\ -2,65 & \text{nếu } \tilde{r}_{jm} \neq c_{jm}^{(i)} \end{cases} \quad (10-2-45)$$

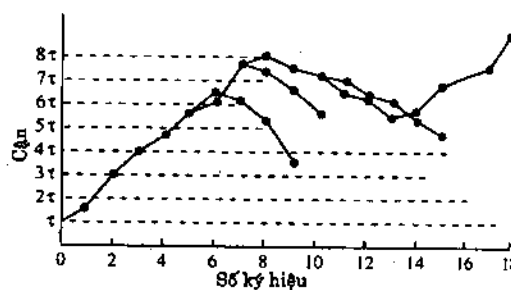
Để đơn giản việc tính toán, các độ đo trong công thức (10-2-45) được chuẩn hóa và xấp xỉ thành:

$$\mu_{jm}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \tilde{r}_{jm} = c_{jm}^{(i)} \\ -5 & \text{nếu } \tilde{r}_{jm} \neq c_{jm}^{(i)} \end{cases} \quad (10-2-46)$$

Do tốc độ mã là 1/3 nên có ba bit ở đầu ra của bộ mã hóa ứng với mỗi bit đầu vào nên độ đo của một nhánh là $\mu_j^{(i)} = 3 - 6d$ hay

$$\mu_j^{(i)} = 1 - 2d \quad (10-2-47)$$

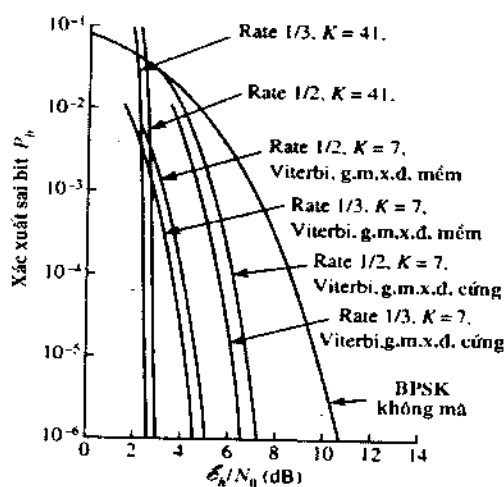
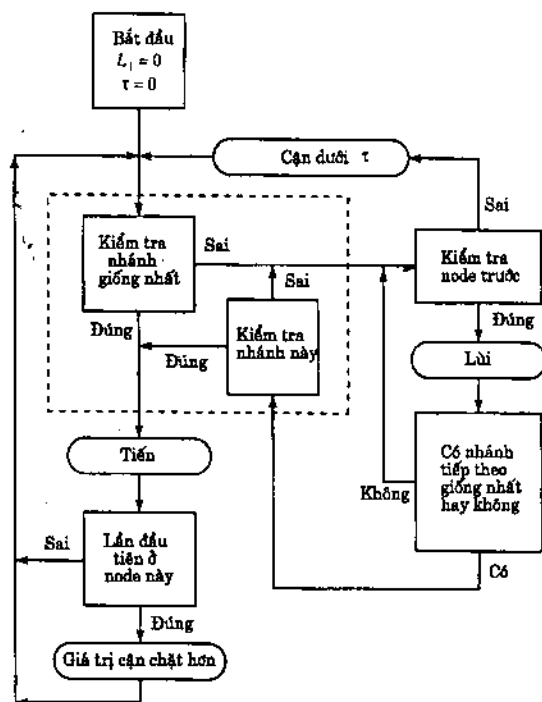
với d là khoảng cách Hamming giữa ba bit nhận được với ba bit của nhánh. Như vậy $\mu_j^{(i)}$ tương ứng với khoảng cách Hamming giữa các bit nhận được với các bit trong nhánh thứ j của đường thứ i .



Hình 10-2-17: Ví dụ về thuật toán Fano

Khởi đầu bộ giải mã được bắt đầu với một đường đúng bằng cách truyền đi vài bit xác định trước. Sau đó nó sẽ tiến từ nút này tới nút khác, lấy nhánh có xác suất lớn nhất tại mỗi nút và tăng giá trị cận lên sao cho giá trị cận này không vượt quá một giá trị xác định trước τ . Bây giờ giả thiết rằng nhiều trắng (đối với giải mã xác định mềm) hay lỗi giải điều chế do nhiễu (đối với giải mã xác định cứng) làm cho bộ giải mã chọn một đường không đúng (hình 10-2-17). Do các giá trị độ đo ứng với đường sai giảm một cách trung bình thì độ đo sẽ nhỏ hơn giá trị cận hiện thời (τ_0). Khi điều này xảy ra thì bộ giải mã sẽ quay trở lại và lấy một đường khác sao cho có độ đo vượt τ_0 . Nếu chọn được đường đúng, nó sẽ tiếp tục theo đường này, nếu không, giá trị cận bị giảm đi τ và quay trở lại đường ban đầu. Nếu

đường ban đầu không có độ đo vượt giá trị cận thì bộ giải mã sẽ quay ngược trở lại và tìm một đường khác. Quá trình này cứ lặp lại cho tới khi tìm được đường đúng. Sơ đồ khối của thuật toán được vẽ trong hình 10-2-18.



Hình 10-2-18: Sơ đồ khối thuật toán Fano

Hình 10-2-19: Hiệu quả của mã tốc độ 1/2 và 1/3 với hai thuật toán giải mã

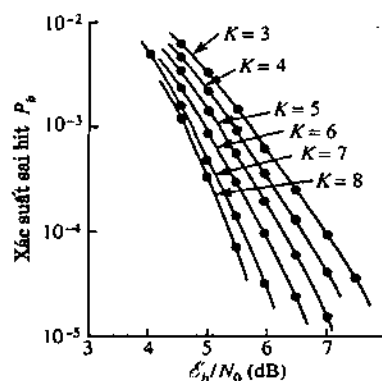
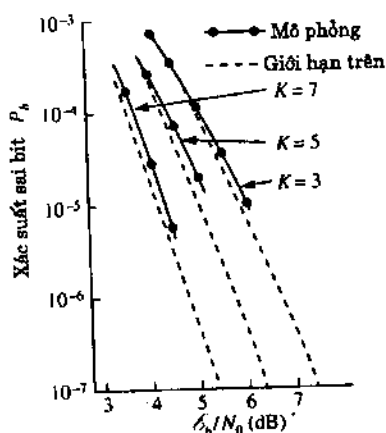
Thuật toán giải mã này cần bộ đệm trong bộ giải điều chế để lưu trữ số liệu giải mã được. Khi quá trình tìm kiếm kết thúc, bộ giải mã phải xử lý các bit đã giải mã đủ nhanh để xóa bộ đệm và lặp lại quá trình tìm kiếm. Tốc độ giới hạn R_0 có ý nghĩa quan trọng trong giải mã dây. Nó là tốc độ để số lượng phép tính ứng với một bit giải mã được tiến tới vô hạn và được gọi là *thời gian tính toán giới hạn* R_{comp} . Thực tế thì bộ giải mã thường hoạt động ở tốc độ gần R_0 .

So sánh thuật toán giải mã dây Fano với thuật toán Viterbi thì thuật toán Fano có độ trễ giải mã lớn hơn, tuy nhiên yêu cầu về bộ nhớ cần để lưu trữ thì nhỏ hơn và có hiệu quả với độ dài ràng buộc lớn.

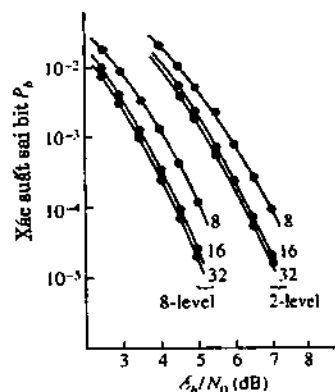
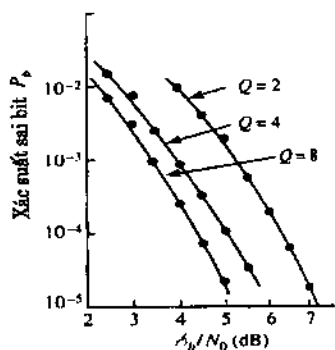
10-2-8 Một số vấn đề trong thực tế của việc áp dụng mã chập

Từ xác suất sai của giải mã xác suất mềm trong (10-2-26), ta thấy rằng độ tăng ích mã hóa đối với hệ thống sử dụng tín hiệu PSK hay QPSK không mã hóa là: độ tăng ích mã hóa $\leq 10 \log_{10}(R_0 d_{free})$. Ta cũng thấy rằng khoảng cách tự do tối thiểu d_{free} có thể tăng lên bằng cách giảm tốc độ mã hay tăng độ ràng buộc hay cả hai. Bảng 10-2-12 cho giới hạn trên của độ tăng ích mã hóa với một số mã chập. Bảng 10-2-13 liệt kê độ tăng ích mã hóa thực tế và giới hạn trên của độ dài ràng buộc của một số mã chập dùng thuật toán Viterbi để giải mã.

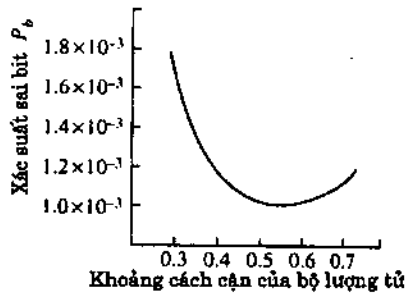
Hình 10-2-19 biểu diễn tốc độ sai của một số mã chập.



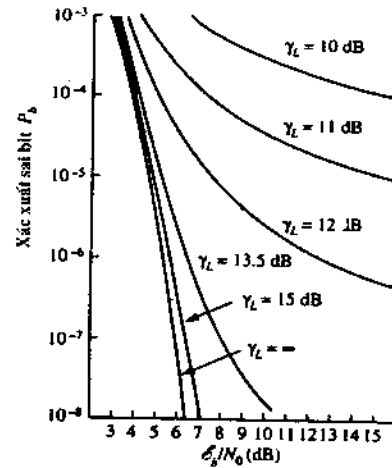
Hình 10-2-20: Xác suất sai bit của mã tốc độ 1/2, thuật toán Viterbi với lượng tử hóa 8 mức ở đầu ra của bộ giải mã và bộ nhớ đường 32 bit. **Hình 10-2-21:** Hiệu quả của mã tốc độ 1/2, giải mã Viterbi xác định cứng với bộ nhớ đường 32 bit



Hình 10-2-22: Hiệu quả của mã tốc độ 1/2, K=5, lượng tử hóa 2,4,8 mức ở đầu vào bộ giải mã Viterbi với bộ nhớ đường 32 bit. **Hình 10-2-23:** Hiệu quả của mã tốc độ 1/2, K=5, lượng tử hóa 2,8 mức với bộ nhớ đường 8, 16, 32 bit



Hình 10-2-24: Tốc độ sai của mã tốc độ 1/2, $K=5$, giải mã Viterbi, $\xi_b/N_0 = 3,5$ dB, lượng tử hóa 8 mức tính theo bước lượng tử (bộ lượng tử có các bước lượng tử đều)



Hình 10-2-25: Hiệu quả của mã tốc độ 1/2, $K=7$, lượng tử hóa 8 mức dùng thuật toán Viterbi theo ξ_b/N_0

Bảng 10-2-12: Giới hạn trên của độ tăng ích mã hóa đối với giải mã xác định mềm

Mã tốc độ 1/2			Mã tốc độ 1/3		
K	d_{free}	Giới hạn trên dB	K	d_{free}	Giới hạn trên dB
3	5	3,98	3	8	4,26
4	6	4,77	4	10	5,23
5	7	5,44	5	12	6,02
6	8	6,02	6	13	6,37
7	10	6,99	7	15	6,99
8	10	6,99	8	16	7,27
9	12	7,78	9	18	7,78
10	12	7,78	10	20	8,24

Bảng 10-2-13: Độ tăng ích mã hóa với thuật toán Viterbi xác định mềm (dB)

ξ_b/N_0		$R_c = 1/3$		$R_c = 1/2$			$R_c = 2/3$		$R_c = 3/4$	
P_b	Không mã hóa (dB)	K=7		K=5			K=6		K=6	
		K=7	K=8	K=5	K=6	K=7	K=6	K=8	K=6	K=9
10^{-3}	6,8	4,2	4,4	3,3	3,5	3,8	2,9	3,1	2,6	2,6
10^{-5}	9,6	5,7	5,9	4,3	4,6	5,1	4,2	4,6	3,6	4,2
10^{-7}	11,3	6,2	6,5	4,9	5,3	5,8	4,7	5,2	3,9	4,8

10-3 Mã điều chế cho kênh có dải tần hạn chế

Đối với mã khối và mã chập mà chúng ta xét ở các phần trước thì độ hiệu quả của các loại mã này có thể tăng lên do việc mở rộng phổ của tín hiệu. Ví dụ độ hiệu quả của mã khối nhị phân (n, k) giải mã

xác định mềm hơn khoảng $10 \log_1 0(R_c d_{min} - k \ln 2 / \gamma_b)$ so với tín hiệu PSK nhị phân hoặc bốn mức không mã hóa. Khi $\gamma_b = 10$, mã Golay mở rộng (24,12) có độ tăng ích mã hóa là 5 dB. Độ tăng ích mã hóa này phải trả giá là tăng gấp đôi độ rộng phổ của tín hiệu và làm cho bộ thu phức tạp thêm. Như vậy việc mã hóa là thuận lợi trong miền công suất hạn chế ($R/W < 1$) nhưng sẽ làm tăng độ rộng phổ tín hiệu và làm tăng độ phức tạp của hệ thống.

Trong phần này ta xét việc sử dụng tín hiệu mã cho kênh có dải tần hạn chế. Đối với các kênh như vậy, hệ thống truyền thông được thiết kế để sử dụng các phương pháp điều chế đa mức hay đa pha có độ rộng phổ hẹp như PAM, PSK, DPSK, QAM và hoạt động trong miền $R/W > 1$. Khi việc mã hóa được sử dụng trong miền có dải tần hạn chế thì độ tăng ích đạt được phải không làm tăng độ rộng phổ tín hiệu, và điều này được thực hiện bằng cách nâng số lượng tín hiệu so với hệ thống không mã hóa để bù lại sự dư thừa trong mã.

Thí dụ một hệ thống không mã hóa sử dụng tín hiệu PSK bốn mức, $R/W = 2$ bit/s/Hz với xác suất sai là 10^{-6} , SNR từng bit là 10,5 dB. Ta có thể giảm SNR từng bit bằng cách sử dụng tín hiệu mã nhưng không tăng độ rộng phổ tín hiệu. Ta có thể chọn mã tốc độ $R_c = 2/3$ và tăng số tín hiệu lên thành 8 (mỗi ký hiệu 3 bit). Như vậy mã tốc độ $2/3$ sử dụng cùng với tín hiệu 8 mức để cho cùng một tốc độ truyền số liệu thực tế so với việc sử dụng tín hiệu PSK bốn mức không mã hóa. Tuy nhiên do việc tăng số lượng tín hiệu, ta phải tăng công suất tín hiệu lên khoảng 4 dB để có cùng một xác suất sai. Nếu quá trình điều chế được xử lý độc lập với quá trình mã hóa, ta phải sử dụng các loại mã có hiệu quả cao để bù lại vấn đề công suất tín hiệu và có độ tăng ích mong muốn. Mặt khác, nếu coi quá trình điều chế là một bộ phận của quá trình mã hóa, để tăng khoảng cách euclide tối thiểu giữa các tín hiệu thì độ suy hao do việc mở rộng tập hợp tín hiệu sẽ dễ dàng khắc phục được với một độ tăng ích mã hóa mong muốn. Chìa khóa của quá trình này là ánh xạ các bit mã thành các tín hiệu sao cho khoảng cách euclide tối thiểu giữa các tín hiệu là cực đại, phương pháp này được gọi là ánh xạ bằng cách phân lớp tập hợp tín hiệu.

Ví dụ 10-3-1 Tín hiệu PSK 8 mức.

Ta phân lớp tập hợp tín hiệu PSK 8 mức pha trên hình 10-3-1 thành các tập hợp con để tăng khoảng cách euclide tối thiểu. Tám tín hiệu nằm trên đường tròn bán kính $\sqrt{\xi}$ có khoảng cách tối thiểu là

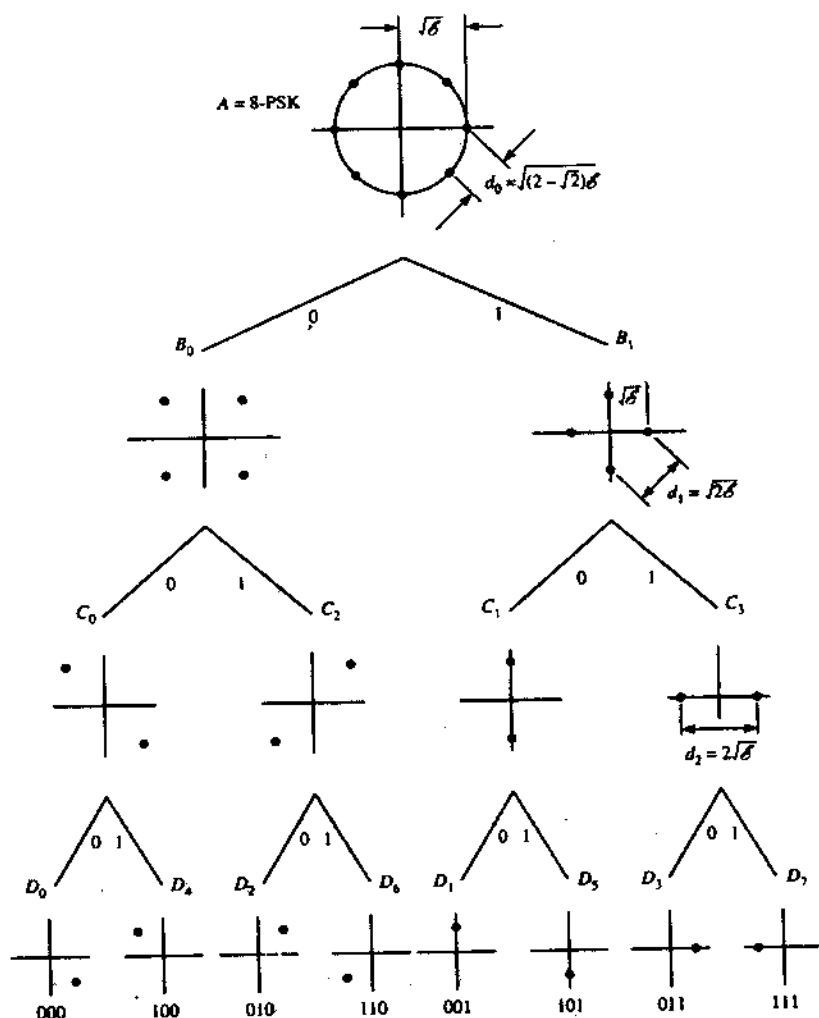
$$d_0 = 2\sqrt{\xi} \sin \frac{1}{8}\pi = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\xi} = 0,765\sqrt{\xi}$$

Qua một lần phân lớp, 8 tín hiệu được chia thành hai tập con và khoảng cách tối thiểu được tăng lên thành $d_1 = \sqrt{2}\xi$. Qua lần phân lớp thứ hai thì khoảng cách tăng lên thành $d_2 = 2\sqrt{\xi}$. Ta thấy rằng quá trình phân lớp làm tăng khoảng cách tối thiểu giữa các tín hiệu.

Ví dụ 10-3-2 Tín hiệu QAM 16 mức.

Tín hiệu 16 mức hình chữ nhật trên hình 10-3-2 được phân lớp và khoảng cách tối thiểu tăng lên $\sqrt{2}$ lần sau mỗi lần phân lớp.

Nói chung thì không phải lúc nào ta cũng phân lớp cho tới khi mỗi tập con còn một tín hiệu. Số lần phân lớp phụ thuộc vào tính chất của bộ mã. Xét quá trình mã hóa tổng quát trong hình 10-3-3. m bit thông tin được chia thành hai nhóm có độ dài k_1 và k_2 . k_1 bit được mã hóa thành từ mã n bit và k_2 bit để nguyên không mã hóa. Sau đó n bit được sử dụng để chọn một trong 2^n tập con các tín hiệu và k_2 bit được sử dụng để chọn một trong 2^{k_2} tín hiệu trong mỗi tập con.

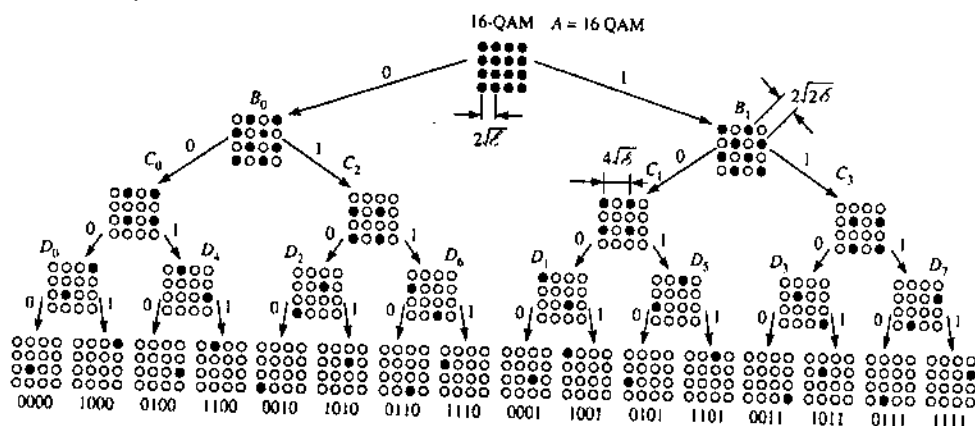


Hình 10-3-1: Phân lớp tín hiệu PSK 8 mức

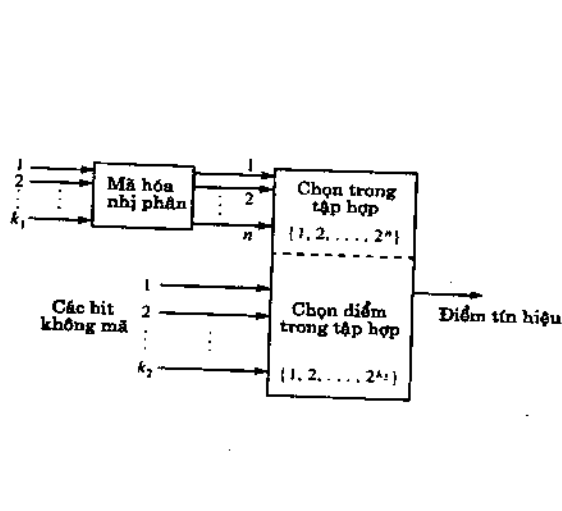
Ví dụ 10-3-3

Sử dụng mã chập tốc độ $1/2$ để mã hóa một bit thông tin và bit thứ hai không mã hóa. Khi quá trình này sử dụng đồng thời với tín hiệu 8 mức (PSK hay QAM), hai bit mã được sử dụng để chọn một trong bốn tập hợp và bit thông tin còn lại được sử dụng để chọn một tín hiệu trong tập hợp con có hai tín hiệu. Trong trường hợp này $k_1 = 1$ và $k_2 = 1$. Lưới bốn trạng thái trong hình 10-3-4(b) gồm có lưới của bộ mã hóa mã chập tốc độ $1/2$ kèm theo một đường song song trong mỗi nhánh tương ứng với bit không mã hóa c_3 . Hai tín hiệu trong một tập con có khoảng cách $d_2 = 2\sqrt{\epsilon}$ nên khoảng cách giữa hai đường song song là $d_2 = 2\sqrt{\epsilon}$. Chúng ta cũng có thể sử dụng mã chập tốc độ $2/3$ như trong hình 10-3-5 để mã hóa cả hai bit thông tin. Kết quả là sẽ tạo ra lưới mã 8 trạng thái có hiệu quả cao hơn nhưng quá trình giải điều chế sẽ phức tạp hơn.

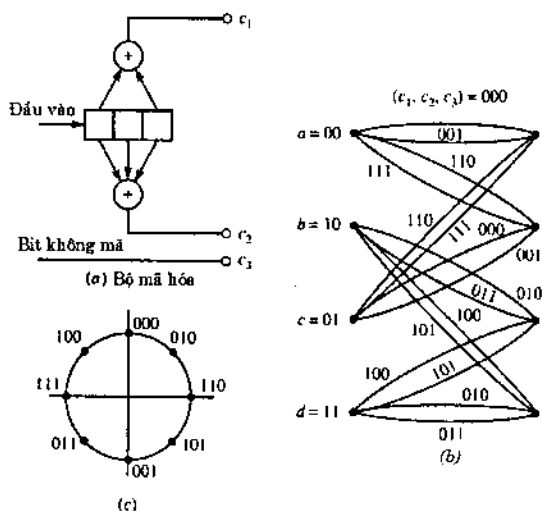
Mặc dù mã khối và mã chập đều có thể sử dụng cùng với việc phân lớp tín hiệu nhưng mã chập có độ tăng ích mã hóa cao hơn và thuật toán Viterbi giải mã xác định mềm đơn giản hơn nên ta chỉ xét việc sử dụng mã chập.



Hình 10-3-2: Phân lớp tín hiệu QAM 16 mức



Hình 10-3-3: Cấu trúc chung của bộ mã hóa/điều chế

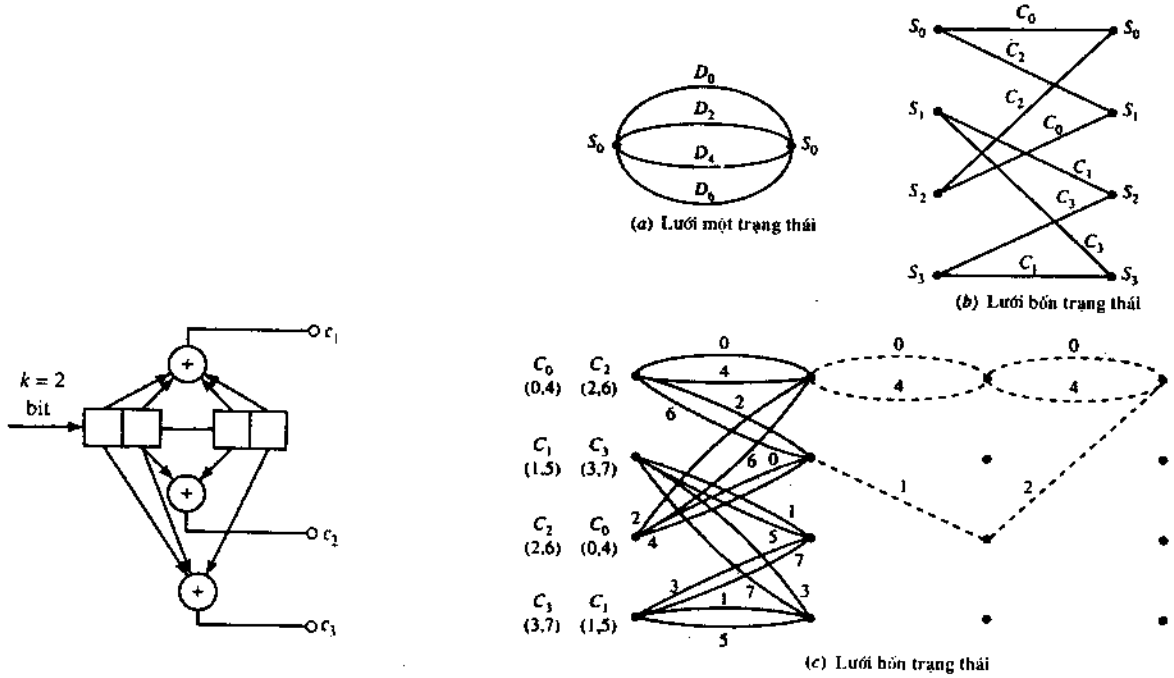


Hình 10-3-4: Lưới mã bốn trạng thái, tín hiệu PSK 8 mức

Lưới mã Xét việc sử dụng tín hiệu PSK tám mức với mã lưới. Tín hiệu PSK bốn mức không mã hóa được sử dụng để tham khảo về độ tăng ích mã hóa. Hệ thống PSK bốn mức không mã hóa sử dụng các tín hiệu trong tập con B_0 hoặc B_1 trong hình 10-3-1. Chú ý rằng tín hiệu này tương ứng với lưới một trạng thái gồm có bốn chuyển đổi song song.

Đối với hệ thống PSK 8 mức mã hóa, chúng ta có thể sử dụng lưới bốn trạng thái trong hình 10-3-6(b). Mỗi nhánh trong lưới tương ứng với một trong bốn tập con C_0, C_1, C_2, C_3 . Với 8 tín hiệu, mỗi tập con sẽ gồm hai điểm tín hiệu. Như vậy trạng thái C_0 gồm có hai điểm tín hiệu tương ứng các bit là (000, 100) hay (0, 4) trong dạng biểu diễn bát phân. Tương tự như vậy đối với các tập hợp khác. Như vậy mỗi chuyển đổi trong lưới bốn trạng thái gồm có hai đường song song như trong hình 10-2-6(c).

Chú ý rằng hai đường tín hiệu tách ra từ một trạng thái nào đó và nhập lại cùng một trạng thái sau ít nhất là hai chuyển đổi có bình phương khoảng cách euclide là $d_0^2 + 2d_1^2 = d_0^2 + d_2^2$. Ví dụ như đường tín hiệu 0, 0, 0 và 2, 1, 2 có độ phân tách là $d_0^2 + d_2^2 = [(0,765)^2 + 4]\xi = 4,585\xi$. Mặt khác, bình phương khoảng cách euclide giữa hai chuyển đổi song song là $d_2^2 = 4\xi$. Như vậy khoảng cách euclide tối thiểu giữa hai đường tách ra từ một trạng thái và nhập lại sau đó trong lưới bốn trạng thái là $d_2 = 2\sqrt{\xi}$. Khoảng cách tối thiểu trong mã lưới được gọi là *khoảng cách euclide tự do* và được ký hiệu là D_{fed} .



Hình 10-3-5: Bộ mã hóa mã chập 2/3 để mã hóa hai bit thông tin

Hình 10-3-6: Hệ thống PSK 4 mức không mã hóa và mã lưới PSK 8 mức

Trong lưới bốn trạng thái như trong hình 10-3-6(b), $D_{fed} = 2\sqrt{\xi}$, khi ta so sánh với khoảng cách $d_0 = \sqrt{2\xi}$ trong hệ thống điều chế PSK bốn mức không mã hóa, ta thấy rằng mã lưới bốn trạng thái cho độ tăng ích mã hóa là 3 dB. Mã lưới bốn trạng thái trong ví dụ trên là tối ưu theo nghĩa nó cho khoảng cách euclide tự do lớn nhất. Không có loại mã lưới bốn trạng thái nào có D_{fed} lớn hơn.

Việc xây dựng mã lưới bốn trạng thái tối ưu với việc sử dụng 8 tín hiệu tuân theo những qui tắc cơ bản sau:

- Các chuyển đổi song song (khi xảy ra) được gán cho điểm tín hiệu có khoảng cách euclide cực đại $d_2 = 2\sqrt{\xi}$ trong bốn tập con C_0, C_1, C_2, C_3 .
- Sự chuyển đổi từ một trạng thái và nhập lại cùng một trạng thái được gán cho các tập hợp con (C_0, C_2) hay (C_1, C_3) có khoảng cách cực đại là $d_1 = \sqrt{2\xi}$.
- Các điểm tín hiệu có cùng xác suất xuất hiện.

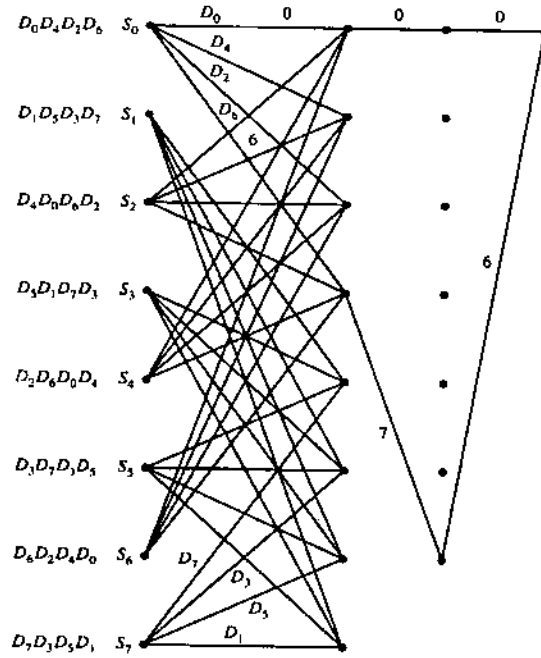
Việc ánh xạ theo một thứ tự khác các mã bit thành các điểm tín hiệu trong hình 10-3-1 cũng có thể cho tính chất về khoảng cách mà ta đã khảo sát. Trong mã lưới bốn trạng thái, các nhánh song song có khoảng cách euclide là $2\sqrt{\xi}$ giống như D_{fed} , như vậy độ tăng ích mã hóa 3 dB bị giới hạn bởi khoảng cách của các chuyển đổi song song. Độ tăng ích mã hóa có thể tăng lên nữa nếu ta sử dụng mã lưới nhiều trạng thái hơn (khi đó ta có thể không dùng tới các chuyển đổi song song).

Trong hình 10-3-7 ta dùng mã lưới tám trạng thái cùng với tín hiệu PSK 8 mức. Các chuyển đổi trạng thái để cho khoảng cách euclide tự do cực đại cũng tuân theo các qui tắc đã nói ở trên. Trong

trường hợp này, bình phương khoảng cách euclide tối thiểu là

$$D_{fed}^2 = d_0^2 + 2d_1^2 = 4,585\xi$$

cho độ tăng ích mã hóa là 3,6 dB so với hệ thống PSK 4 mức không mã hóa.



Hình 10-3-7: Mã lưới 8 trạng thái và tín hiệu PSK 8 mức

Các nguyên tắc về phân lớp tập hợp tín hiệu có thể áp dụng cho tín hiệu PSK nhiều mức hơn để thu được băng thông hiệu quả lớn hơn. Ví dụ $R/W = 3$ bit/s/Hz có thể thực hiện bằng hệ thống PSK 8 mức không mã hóa hay mã lưới PSK 16 mức.

Giải mã Viterbi xác định mềm được thực hiện theo hai bước. Do mỗi nhánh trong lưới tương ứng với một tập hợp con các tín hiệu nên bước thứ nhất là xác định điểm tín hiệu nhận được gần với điểm tín hiệu trong tập con nào nhất. Ta có thể gọi bước này là *giải mã tập con*. Bước thứ hai căn cứ vào bước thứ nhất và bình phương độ đo khoảng cách để xác định đường tín hiệu qua lưới có tổng bình phương khoảng cách tới dãy tín hiệu nhận được nhỏ nhất.

Tốc độ sai của tín hiệu mã lưới được tính theo thủ tục như trong phần 10-2. Tuy nhiên với các giá trị SNR lớn, xác suất sai của sự kiện thứ nhất được xấp xỉ thành

$$P_e \approx N_{fed} Q \left(\sqrt{\frac{D_{fed}^2}{2N_0}} \right)$$

với N_{fed} là số lượng các dãy tín hiệu có khoảng cách D_{fed} tách ra và sau đó nhập lại sau một hay nhiều chuyển đổi.

Trong quá trình tính độ tăng ích mã hóa thực hiện bởi mã lưới, chúng ta thường tập trung vào vấn đề tăng D_{fed} và bỏ qua ảnh hưởng của N_{fed} . Tuy nhiên mã lưới nhiều trạng thái thường có giá trị N_{fed} lớn và không thể bỏ qua được khi tính toán độ tăng ích mã hóa một cách toàn diện hơn.

Cùng với mã lưới PSK, chúng ta cũng có các loại mã lưới sử dụng các tín hiệu khác như PAM hay QAM. Các bảng sau cho độ tăng ích mã hóa với việc sử dụng các loại tín hiệu khác nhau.

Bảng 10-3-1: Độ tăng ích mã hóa (dB) của mã lưới dùng tín hiệu PAM

Số trạng thái	k_1	R_c $k_1/(k_1 + 1)$	$m=1$ PAM 4 mức so với PAM 2 mức không mã hóa	$m=2$ PAM 8 mức so với PAM 4 mức không mã hóa	$m \rightarrow \infty$	$m \rightarrow \infty$ N_{fed}
4	1	1/2	2,55	3,31	3,52	4
8	1	1/2	3,01	3,77	3,97	4
16	1	1/2	3,42	4,18	4,39	8
32	1	1/2	4,15	4,91	5,11	12
64	1	1/2	4,47	5,23	5,44	36
128	1	1/2	5,05	5,81	6,02	66

Bảng 10-3-2: Độ tăng ích mã hóa (dB) của mã lưới dùng tín hiệu PSK 16 mức

Số trạng thái	k_1	R_c $k_1/(k_1 + 1)$	$m=3$ PSK 16 mức so với PSK 8 mức không mã	$m \rightarrow \infty$ N_{fed}
4	1	1/2	3,54	4
8	1	1/2	4,01	4
16	1	1/2	4,44	8
32	1	1/2	5,13	8
64	1	1/2	5,33	2
128	1	1/2	5,33	2
256	2	2/3	5,51	8

Bảng 10-3-3: Độ tăng ích mã hóa (dB) của mã lưới dùng tín hiệu QAM

Số trạng thái	k_1	R_c $k_1/(k_1 + 1)$	$m=3$ QAM 16 mức so với QAM 8 mức không mã	$m=4$ QAM 32 mức so với QAM 16 mức không mã	$m=5$ QAM 64 mức so với QAM 32 mức không mã	$m \rightarrow \infty$	N_{fed}
4	1	1/2	3,01	3,01	2,8	3,01	4
8	2	2/3	3,98	3,98	3,77	3,98	16
16	2	2/3	4,77	4,77	4,56	4,77	56
32	2	2/3	4,77	4,77	4,56	4,77	16
64	2	2/3	5,44	5,44	4,23	5,44	56
128	2	2/3	6,02	6,02	5,81	6,02	344
256	2	2/3	6,02	6,02	5,81	6,02	44

Kết quả trong các bảng trên chỉ ra rằng có thể nâng độ tăng ích mã hóa bằng cách sử dụng các loại mã lưới. Độ tăng ích mã hóa 6 dB là gần với tốc độ giới hạn R_0 đối với tập hợp các tín hiệu đã xét. Nâng cao thêm nữa độ tăng ích sẽ dẫn tới tốc độ truyền gần sát tới thông lượng kênh là rất khó thực hiện nếu không làm phức tạp thêm đáng kể các bộ mã hóa và giải mã hóa.

Do thông lượng của kênh xác định giới hạn trên về độ hiệu quả của bộ mã, chúng ta có thể kết luận rằng nếu tiếp tục phân lớp các tập hợp tín hiệu lớn thì độ phân tách giữa các điểm tín hiệu trong một tập con sẽ vượt quá khoảng cách euclide tự do của bộ mã. Thông thường việc phân lớp tập hợp tám tín hiệu là đủ để đạt được độ tăng ích mã hóa 5-6 dB với tốc độ mã 1/2 hay 2/3 với mã lưới tốc độ 1/2 hay 2/3 có 64 hay 128 trạng thái.

BÀI TẬP

10-1 Ma trận sinh của mã nhị phân tuyến tính là

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Biểu diễn $\mathbf{G}$ thành dạng hệ thống b. Xác định ma trận kiểm tra $\mathbf{H}$ cho mã này c. Xây dựng bảng syndrome cho mã này d. Xác định khoảng cách tối thiểu của bộ mã

10-2 Liệt kê các từ mã tạo ra bởi các ma trận (10-1-35) và (10-1-37) và chứng tỏ rằng các ma trận sinh này tạo ra cùng một bộ mã.

10-3 Đa thức $g(p) = p^4 + p + 1$ là đa thức sinh của mã nhị phân Hamming (15,11). Xác định ma trận sinh $\mathbf{G}$ ở dạng hệ thống, xác định đa thức sinh của mã kép.

10-4 Mã Hamming vòng (7,4) với đa thức sinh $g(p) = p^3 + p^2 + 1$, hãy xây dựng mã mở rộng của mã này và xác định d_{min} .

10-5 Xây dựng ma trận kiểm tra parity $\mathbf{H}_1$ và $\mathbf{H}_2$ tương ứng với các ma trận sinh $\mathbf{G}_1$ và $\mathbf{G}_2$ trong (10-1-34) và (10-1-35).

10-6 Xây dựng mã mở rộng (8,4) từ mã Hamming (7,4) bằng cách xác định ma trận sinh và ma trận kiểm tra parity.

10-7 Mã hệ thống (6,3) có ma trận sinh như sau

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Xây dựng ma trận chuẩn và xác định các mẫu sửa sai và các syndrome tương ứng

10-8 Một mã chập được mô tả bởi các hàm sinh

$$\mathbf{g}_1 = [100], \mathbf{g}_2 = [101], \mathbf{g}_3 = [111]$$

a. Vẽ bộ mã hóa của mã này b. Vẽ lưu đồ chuyển đổi trạng thái c. Vẽ sơ đồ lưới của mã d. Tìm hàm truyền và khoảng cách tự do của mã

10-9 Mã chập trong bài trên được sử dụng để truyền trên kênh AWGN với giải mã xác định cứng. Đầu ra của bộ giải điều chế là dãy ký hiệu (101001011110111...). Sử dụng thuật toán Viterbi tìm dãy đã truyền đi.

Chương 11

TÍN HIỆU TRÊN KÊNH CÓ BĂNG TẦN HỮU HẠN

Trong các chương trước, chúng ta xét việc truyền thông tin số qua kênh có nhiễu cộng gaussian và không có một ràng buộc về độ rộng phổ nào đối với tín hiệu. Trong chương này, ta xét việc thiết kế tín hiệu khi kênh có dải tần hữu hạn trong phạm vi W Hz.

11-1 Đặc trưng của kênh có băng tần hữu hạn

Trong số các kênh được sử dụng để truyền thông số thì kênh điện thoại được sử dụng nhiều nhất. Các kênh này được mô hình hóa bằng các bộ lọc tuyến tính có dải thông hữu hạn. Đối với chúng ta, các kênh có dải tần hữu hạn như kênh điện thoại được đặc trưng hóa bởi một bộ lọc tuyến tính có đáp ứng tần số thấp tương đương $C(f)$. Như vậy, nếu tín hiệu

$$s(t) = \text{Re} [v(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (11-1-1)$$

được truyền qua kênh thì tín hiệu nhận được ở miền tần số thấp tương đương là

$$r_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)c(t-\tau)d\tau + z(t) \quad (11-1-2)$$

trong đó $z(t)$ biểu diễn nhiễu cộng. Mặt khác, tín hiệu nhận được cũng có thể được biểu diễn ở miền tần số là $V(f)C(f)$ với $C(f)$ là đáp ứng tần số của kênh.

Khi kênh có dải tần hữu hạn $C(f) = 0$ với $|f| > W$ thì chúng ta phải giới hạn độ rộng phổ của tín hiệu cũng trong độ rộng W . Trong dải thông của kênh, ta có thể biểu diễn đáp ứng tần số của kênh như sau:

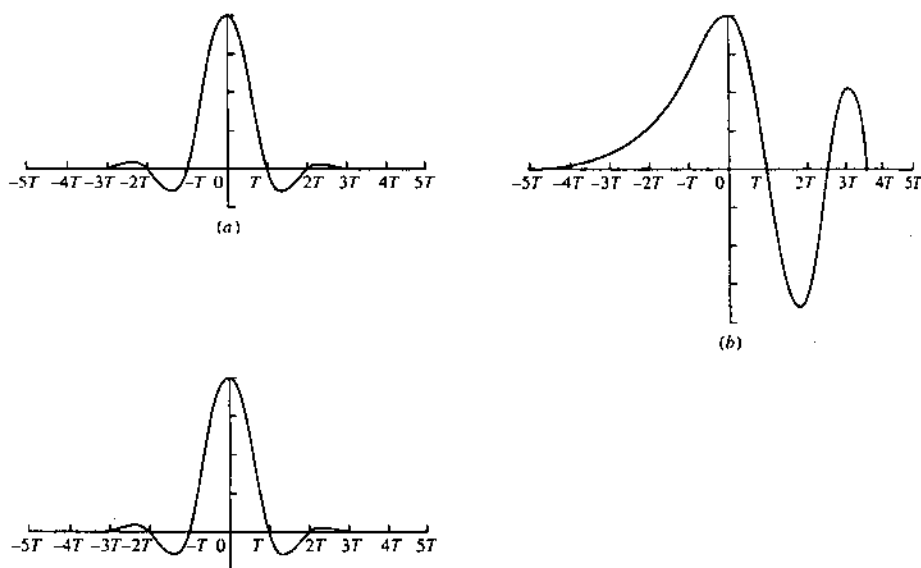
$$C(f) = |C(f)|e^{j\theta(f)} \quad (11-1-3)$$

$|C(f)|$ là đáp ứng biên độ còn $\theta(f)$ là đáp ứng pha. *Trễ đường bao* được định nghĩa là

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} \quad (11-1-4)$$

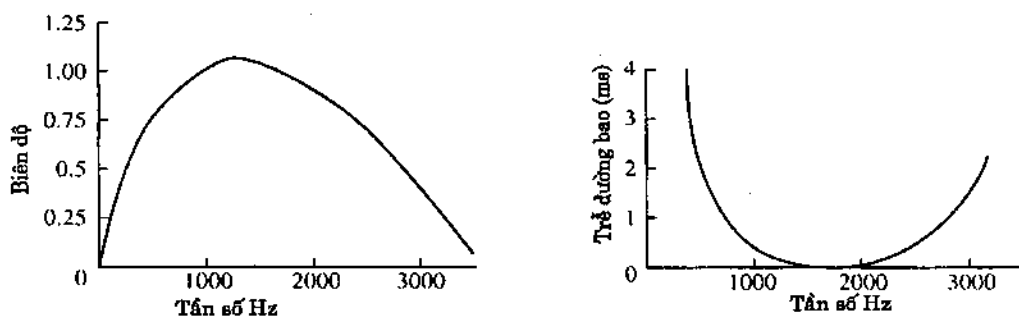
Kênh được gọi là *không suy hao* hay *lý tưởng* nếu như đáp ứng biên độ $|C(f)|$ là hằng số trong khoảng $|f| \leq W$ và $\theta(f)$ là hàm tuyến tính theo tần số hay $\tau(f)$ là hằng số với $|f| \leq W$. Trái lại nếu $|C(f)|$ không phải là hằng số trong khoảng $|f| \leq W$ thì kênh là có suy hao về biên độ, nếu $\tau(f)$ không phải là hằng số trong khoảng $|f| \leq W$ thì kênh là có suy hao về pha hay là có trễ.

Sự suy hao về biên độ hay về pha là do đáp ứng tần số của kênh không lý tưởng, các xung truyền đi với tốc độ (về mặt độ lớn) bằng độ rộng dải thông W sẽ bị dịch chuyển làm cho chúng không còn phân tách với nhau một cách rõ ràng ở phía thu, chúng sẽ bị trùm lên nhau và gây ra hiện tượng nhiễu ký hiệu (intersymbol interference-ISI). Chúng ta cũng có thể bù lại sự không lý tưởng của đáp ứng tần số của kênh bằng các bộ cân bằng ở bộ giải điều chế. Hình 11-1-1 là một ví dụ về tín hiệu vào có dải tần hạn chế, tín hiệu ra và tín hiệu ra bộ cân bằng.



Hình 11-1-1: Tín hiệu vào, tín hiệu ra và tín hiệu ở đầu ra bộ cân bằng

Hình 11-1-2 thể hiện độ suy hao về biên độ và về pha của kênh điện thoại theo tần số và đáp ứng xung của kênh. Thời gian đáp ứng khoảng 10 ms và nếu ta truyền với tốc độ xung từ 2000 tới 3000 xung một giây thì ISI sẽ kéo dài khoảng 20-30 ký hiệu. Ngoài sự suy hao tuyến tính, tín hiệu truyền trên kênh còn chịu nhiều ảnh hưởng khác như suy hao phi tuyến, di tần, nhiễu xung và nhiễu nhiệt ...



Hình 11-1-2: Suy hao về biên độ, pha và đáp ứng xung của kênh thoại

Ngoài kênh thoại, các kênh vật lý khác có thể có hiện tượng tán xạ và gây ra ISI. Các kênh radio sử dụng sóng ngắn truyền lan qua tầng điện ly hay tầng đối lưu là hai ví dụ. Trong các kênh này, sự tán

xạ và ISI là do có nhiều đường truyền lan với thời gian trễ khác nhau giữa hai phía thu phát. Số lượng đường truyền và khoảng thời gian trễ thay đổi theo thời gian nên các kênh này được gọi là các kênh đa đường thay đổi theo thời gian (time-variant multipath channels). Do tính đa đường thay đổi theo thời gian nên đáp ứng tần số của kênh cũng thay đổi theo thời gian. Trong chương này ta chỉ xét các kênh có dải tần hữu hạn được mô hình hóa toán học hay đặc trưng hóa bởi bộ lọc tuyến tính bất biến theo thời gian.

11-2 Tín hiệu cho kênh có dải tần hữu hạn

Tín hiệu tần số thấp tương đương dùng cho các kỹ thuật điều chế số có dạng tổng quát như sau:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n g(t - nT) \quad (11-2-1)$$

$\{I_n\}$ là dãy ký hiệu mang thông tin rời rạc và $g(t)$ là tín hiệu xung có đáp ứng tần số trong một dải tần hữu hạn, có nghĩa là $G(f) = 0$ với $|f| > W$. Tín hiệu này truyền qua kênh cũng có đáp ứng tần số hữu hạn $|f| \leq W$. Tín hiệu nhận được ở phía thu là

$$r_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n h(t - nT) + z(t) \quad (11-2-2)$$

trong đó

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) c(t - \tau) d\tau \quad (11-2-3)$$

Tín hiệu nhận được trước hết cho qua một bộ lọc rồi được lấy mẫu với tốc độ $1/T$ mẫu/s. Chúng ta sẽ thấy ở phần sau rằng bộ lọc tối ưu để xác định tín hiệu là bộ lọc phối hợp với xung tín hiệu nhận được. Như vậy đáp ứng tần số của bộ lọc thu là $H^*(f)$. Ta ký hiệu tín hiệu đầu ra bộ lọc thu là

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(t - nT) + v(t) \quad (11-2-4)$$

$x(t)$ là đáp ứng xung của bộ lọc thu đối với xung $h(t)$ và $v(t)$ là nhiễu nhận được sau bộ lọc thu. Nếu $y(t)$ được lấy mẫu tại các thời điểm $t = kT + \tau_0$, $k = 0, 1, \dots$ thì

$$y(kT + \tau_0) \equiv y_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(kT - nT + \tau_0) + v(kT + \tau_0) \quad (11-2-5)$$

hay một cách tương đương

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (11-2-6)$$

τ_0 là trễ truyền lan qua kênh. Các giá trị mẫu có thể biểu diễn thành

$$y_k = x_0 \left(I_k + \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} \right) + v_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (11-2-7)$$

x_0 là một hệ số tùy ý và đặt bằng 1. Vậy

$$y_k = I_k + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k \quad (11-2-8)$$

Thành phần I_k là ký hiệu thông tin ở thời điểm thứ k , còn thành phần trong dấu tổng thể hiện ISI và v_k là nhiễu cộng gaussian ở thời điểm thứ k .

11-2-1 Thiết kế tín hiệu có độ rộng phổ hữu hạn để không có ISI

Trong phần này và trong phần 11-2-2, ta giả thiết rằng kênh có băng tần hữu hạn có đáp ứng tần số lý tưởng hay $C(f) = 1$ với $|f| \leq W$. Khi đó $X(f) = |G(f)|^2$ và

$$x(t) = \int_{-W}^W X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (11-2-9)$$

Chúng ta cần xác định tính chất về phổ của $x(t)$ và xung $g(t)$ để không có ISI. Do

$$y_k = I_k + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k \quad (11-2-10)$$

nên điều kiện để không có ISI là

$$x(t = kT) \equiv x_k = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \quad (11-2-11)$$

Dưới đây ta đưa ra điều kiện cần và đủ của $X(f)$ để $x(t)$ thỏa mãn điều kiện trên. Điều kiện này gọi là tiêu chuẩn Nyquist để không có ISI.

Tiêu chuẩn Nyquist

Điều kiện cần và đủ để

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (11-2-12)$$

là

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) = T \quad (11-2-13)$$

Chứng minh Ta có

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (11-2-14)$$

Tại thời điểm lấy mẫu $t = nT$, quan hệ trên trở thành

$$\begin{aligned} x(nT) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f nT} df \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)/2T}^{(2m+1)/2T} X(f) e^{j2\pi f nT} df \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f + m/T) e^{j2\pi f nT} df \\ &= \int_{-1/2T}^{1/2T} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) \right] e^{j2\pi f nT} df \\ &= \int_{-1/2T}^{1/2T} B(f) e^{j2\pi f nT} df \end{aligned} \quad (11-2-16)$$

trong công thức này, ta định nghĩa $B(f)$ là

$$B(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) \quad (11-2-17)$$

$B(f)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $1/T$ và do đó nó có thể khai triển theo chuỗi Fourier với các hệ số $\{b_n\}$

$$B(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j2\pi n f T} \quad (11-2-18)$$

$$b_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} B(f) e^{-j2\pi n f T} df \quad (11-2-19)$$

Số sánh (11-2-19) và (11-2-16) ta nhận được

$$b_n = T x(-nT) \quad (11-2-20)$$

Do đó điều kiện cần và đủ để (11-2-10) thỏa mãn là

$$b_n = \begin{cases} T & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (11-2-21)$$

Thay vào (11-2-18) dẫn tới

$$B(f) = T \quad (11-2-22)$$

hay

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) = T \quad (\text{dpcm}) \quad (11-2-23)$$

Bây giờ giả thiết kênh có độ rộng dải thông W và $C(f) = 0, X(f) = 0$ với $|f| > W$. Ta xét ba trường hợp:

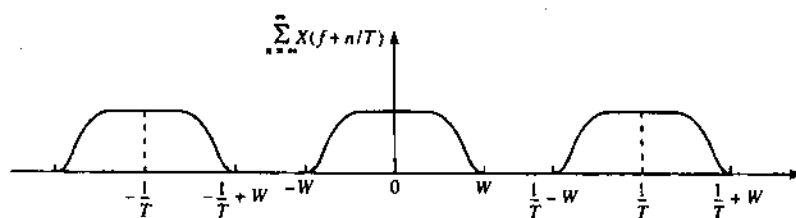
1. Khi $T < 1/2W$, $B(f)$ được vẽ trên hình 11-2-1 và ta không thể chọn được $X(f)$ để $B(f) = T$ và như vậy không thể thiết kế hệ thống không có ISI.

2. Khi $T = 1/2W$ và hình vẽ $B(f)$ trong hình 11-2-2. Trong trường hợp này chỉ có một giá trị của $X(f)$ để $B(f) = T$ là

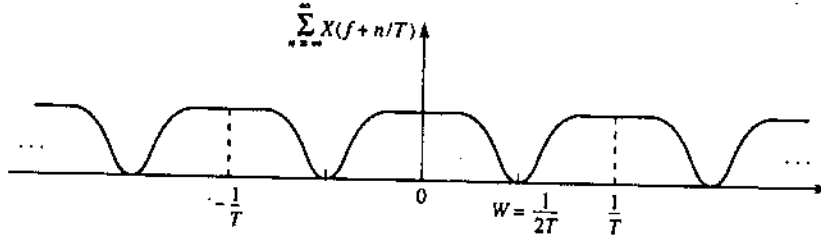
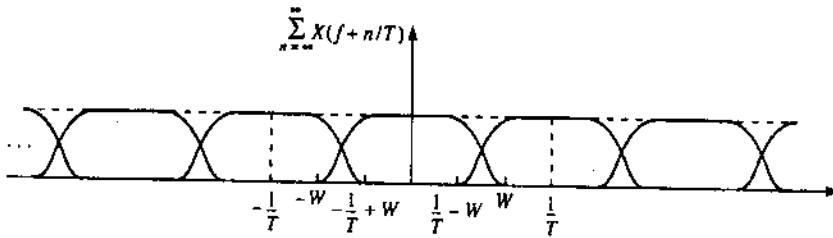
$$X(f) = \begin{cases} T & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases} \quad (11-2-24)$$

và đáp ứng xung tương ứng là

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (11-2-25)$$



Hình 11-2-1: $B(f)$ trong trường hợp $T < 1/2W$

Hình 11-2-2: $B(f)$ trong trường hợp $T = 1/2W$ Hình 11-2-3: $B(f)$ trong trường hợp $T > 1/2W$

Điều này nói lên rằng giá trị T nhỏ nhất để quá trình truyền không bị ISI là $T = 1/2W$ và khi đó $x(t)$ là hàm sinc. Hàm sinc là hàm không nhân quả và do đó không thể thực hiện trong thực tế được. Để có thể thực hiện được, người ta thường dùng hàm $\text{sinc}[\pi(t - t_0)/T]$ và t_0 được chọn sao cho với $t < 0$ thì $\text{sinc}[\pi(t - t_0)] \approx 0$. Với hàm $x(t)$ như vậy thì thời điểm lấy mẫu sẽ là $mT + t_0$. Vấn đề phức tạp thứ hai ở đây là độ sắc của xung suy giảm tới 0 chậm. Do phần đuôi của $x(t)$ suy giảm theo $1/t$ nên sẽ có một lượng sai nhầm nhỏ khi lấy mẫu ở đầu ra của bộ lọc phối hợp ở bộ giải điều chế, đây ISI dài vô hạn và đây này không hội tụ.

3. Khi $T > 1/2W$ và hình vẽ $B(f)$ trong hình 11-2-3. Trường hợp này tồn tại nhiều giá trị của $X(f)$ để $B(f) = T$.

Trong trường hợp $T > 1/2W$, một loại xung có phổ dạng xung cosin hay được sử dụng trong thực tế là

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} T & \left(0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T}\right) \\ \frac{T}{2} \left\{1 + \cos \left[\frac{\pi T}{\beta} \left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right]\right\} & \left(\frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T}\right) \\ 0 & \left(|f| > \frac{1+\beta}{2T}\right) \end{cases} \quad (11-2-26)$$

β là một hệ số nằm trong khoảng $0 \leq \beta \leq 1$ và tín hiệu $x(t)$ có phổ dạng xung cosin là

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - 4\beta^2 t^2/T^2} = \text{sinc}(\pi t/T) \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - 4\beta^2 t^2/T^2} \quad (11-2-27)$$

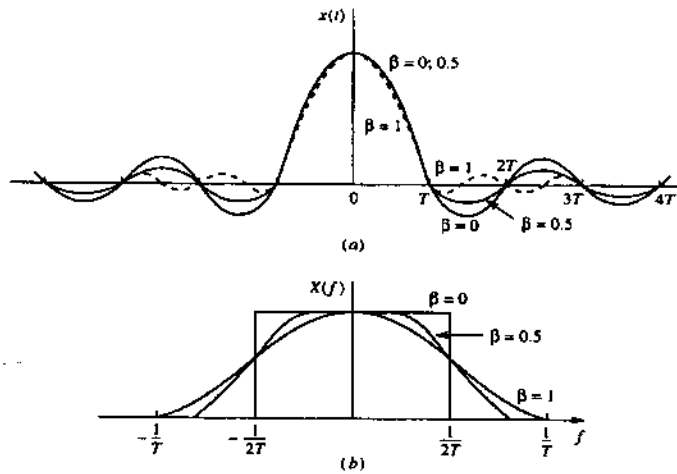
Chú ý rằng $x(t)$ được chuẩn hóa sao cho $x(0) = 1$. Nói chung thì phần đuôi của $x(t)$ suy giảm theo $1/t^3$ nên sai số khi lấy mẫu đầu ra của bộ lọc phối hợp sẽ tạo nên đây ISI hội tụ tới một giá trị hữu hạn. Do xung cosin là trơn nên ta có thể thiết kế các bộ lọc trong bộ phát và bộ thu có đáp ứng tần số gần giống với dạng xung này. Trong trường hợp kênh là lý tưởng ta có

$$X_{rc}(f) = G_T(f)G_R(f) \quad (11-2-28)$$

$G_T(f)$ và $G_R(f)$ là đáp ứng tần số của hai bộ lọc. Trong trường hợp này nếu bộ lọc thu là phối hợp với bộ lọc phát và ta có $X_{rc}(f) = G_T(f)G_R(f) = |G_T(f)|^2$. Lý tưởng thì

$$G_T(f) = \sqrt{|X_{rc}(f)|} e^{-j2\pi f t_0} \quad (11-2-29)$$

và $G_R(f) = G_T^*(f)$, t_0 là thời gian trễ để có thể thực hiện được các bộ lọc.



Hình 11-2-4: Xung có phổ dạng xung cosin

11-2-2 Thiết kế tín hiệu có độ rộng phổ hữu hạn để ISI điều khiển được

Như trong phần thiết kế tín hiệu để không có ISI ta đã xét, tốc độ truyền ký hiệu $1/T$ phải nhỏ hơn tốc độ Nyquist $2W$ để có thể thực hiện được các bộ lọc phát và thu. Mặt khác, nếu ta bỏ đi điều kiện không có ISI thì ta có thể truyền ở tốc độ Nyquist $2W$. Giả sử rằng ta thiết kế tín hiệu có độ rộng phổ hữu hạn để có thể điều khiển được lượng ISI tại một thời điểm bất kỳ. Đối với điều kiện không có ISI thì $x(nT) = 0$ với $n \neq 0$, còn trong trường hợp này, ta vẫn cho phép $x(nT)$ khác 0 với $n \neq 0$. Lượng ISI khác 0 nhưng xác định hay điều khiển được và do đó có thể xử lý ở bộ thu. Một trường hợp mà có thể thực hiện được các bộ lọc ở hai phía là

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \neq 0, 1) \end{cases} \quad (11-2-30)$$

Sử dụng (11-2-20) ta nhận được

$$b_n = \begin{cases} T & (n = 0, -1) \\ 0 & (n \neq 0, -1) \end{cases} \quad (11-2-31)$$

Thay vào (11-2-18) dẫn tới

$$B(f) = T + T e^{-j2\pi f T} \quad (11-2-32)$$

Như chúng ta đã thấy, không thể thực hiện được $B(f)$ theo công thức trên khi $T < 1/2W$. Khi $T = 1/2W$ thì

$$\begin{aligned} X(f) &= \begin{cases} \frac{1}{2W}(1 + e^{-j\pi f/W}) & (|f| < W) \\ 0 & (|f| \geq W) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{W} e^{-j\pi f/2W} \cos \frac{\pi f}{2W} & (|f| < W) \\ 0 & (|f| \geq W) \end{cases} \end{aligned} \quad (11-2-33)$$

Như vậy, $x(t)$ là

$$x(t) = \text{sinc}(2\pi Wt) + \text{sinc}\left[2\pi\left(Wt - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (11-2-34)$$

Tín hiệu này gọi là *xung nhị phân kép*, được vẽ trên hình 11-2-5. Phổ tín hiệu suy giảm tới 0 từ từ nên ta có thể thực hiện các bộ lọc có đáp ứng tần số gần giống hệt với dạng phổ này. Do đó ta có thể thực hiện truyền ở tốc độ Nyquist.

Một loại tín hiệu khác có thể sử dụng trong thực tế có các mẫu là

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & (n = -1) \\ -1 & (n = 1) \\ 0 & (\text{các giá trị khác}) \end{cases} \quad (11-2-35)$$

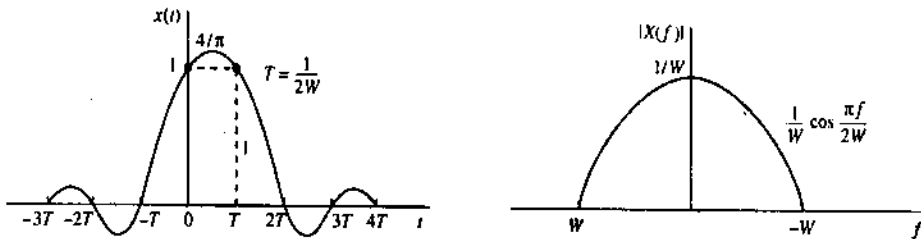
Xung $x(t)$ tương ứng là

$$x(t) = \text{sinc}\left[\frac{\pi(t+T)}{T}\right] - \text{sinc}\left[\frac{\pi(t-T)}{T}\right] \quad (11-2-36)$$

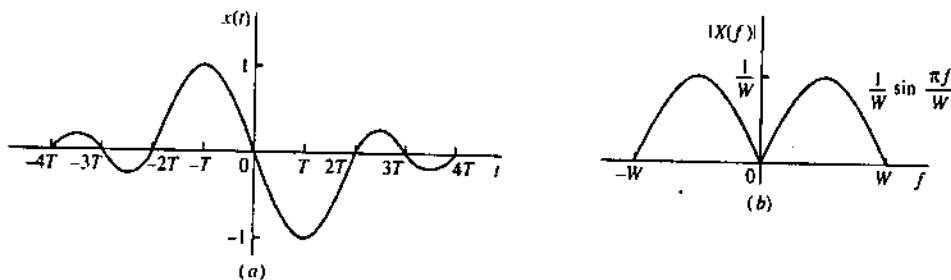
và phổ tín hiệu này là

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W}(e^{j\pi f/W} - e^{-j\pi f/W}) = \frac{j}{W} \sin \frac{\pi f}{W} & |f| \leq W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \quad (11-2-37)$$

Tín hiệu này cùng phổ được vẽ trên hình 11-2-6. Tín hiệu này được gọi là *xung nhị phân kép sửa đổi*.



Hình 11-2-5: Xung nhị phân kép



Hình 11-2-6: Xung nhị phân kép sửa đổi

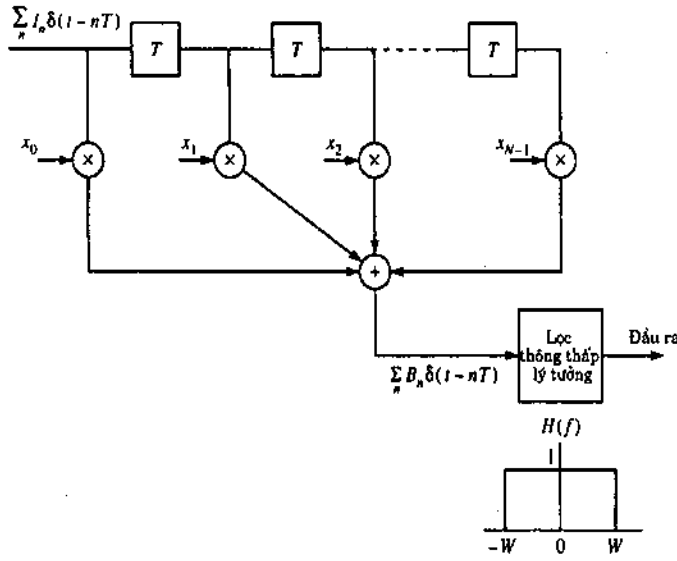
Tổng quát, lớp tín hiệu có độ rộng phổ hữu hạn có dạng

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right] \quad (11-2-38)$$

và phổ của chúng là

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) e^{-jn\pi f/W} & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases} \quad (11-2-39)$$

được gọi là tín hiệu đáp ứng từng phần có thể được sử dụng để có lượng ISI điều khiển được bằng cách chọn hai hay nhiều mẫu khác 0 trong tập hợp $\{x(n/2W)\}$. Việc xác định ký hiệu nhận được trong trường hợp lượng ISI điều khiển được như sau.



Hình 11-2-7: Tạo tín hiệu đáp ứng từng phần

Giả sử tín hiệu đáp ứng từng phần được tạo ra theo hình 11-2-7 bằng cách cho dãy rời rạc $\{I_n\}$ qua một bộ lọc với các hệ số $x_n = x(n/2W)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ và sử dụng dãy ra $\{B_n\}$ làm đầu vào một bộ lọc tương tự có đáp ứng xung $\text{sinc}(2\pi Wt)$. Tín hiệu đầu ra giống với tín hiệu trong công thức (11-2-38). Do

$$B_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k I_{n-k} \quad (11-2-40)$$

nên dãy ký hiệu $\{B_n\}$ là có tương quan và điều này là do việc lọc dãy $\{I_n\}$. Hàm tự tương quan của dãy $\{B_n\}$ là

$$\phi(m) = E(B_n B_{n+m}) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_k x_l E(I_{n-k} I_{n+m-l}) \quad (11-2-41)$$

Khi dãy vào có giá trị trung bình 0 và trắng

$$E(I_{n-k} I_{n+m-l}) = \delta_{m+k-l} \quad (11-2-42)$$

(chúng ta đã chuẩn hóa $E(I_n^2) = 1$) và thay vào (11-2-41) ta có

$$\phi(m) = \sum_{k=0}^{N-1-|m|} x_k x_{k+|m|}, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1) \quad (11-2-43)$$

Phổ mật độ công suất là

$$\Phi(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \phi(m)e^{-j2\pi f m T} = \left| \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j2\pi f m T} \right|^2 \quad (11-2-44)$$

với $T = 1/2W$ và $|f| \leq W$.

11-2-3 Xác định số liệu trong trường hợp ISI điều khiển được

Trong phần này ta xét hai phương pháp xác định các ký hiệu mang thông tin ở bộ thu khi tín hiệu nhận được có ISI nhưng điều khiển được. Phương pháp thứ nhất là xác định trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu, tương đối đơn giản. Phương pháp thứ hai là xác định dãy ký hiệu dựa vào tiêu chuẩn ML. Phương pháp thứ hai tối thiểu hóa xác suất sai nhầm nhưng khó thực hiện hơn. Chúng ta giả thiết rằng $|G_T(f)| = |G_R(f)| = |X(f)|^{1/2}$. Việc xử lý dựa vào tín hiệu PAM nhưng có thể dễ dàng mở rộng cho các tín hiệu khác như QAM hay PSK.

Xác định trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu Đối với xung nhị phân kép, $x(nT) = 1$ chỉ với $n = 0, 1$. Các mẫu ở đầu ra của bộ lọc thu có dạng

$$y_m = B_m + v_m = I_m + I_{m-1} + v_m \quad (11-2-45)$$

Bây giờ ta tạm thời không xét tới nhiễu và đối với trường hợp nhị phân $I_m = \pm 1$ đồng xác suất. Như vậy B_m nhận một trong ba giá trị $-2, 0, 2$ với xác suất $1/4, 1/2, 1/4$. Nếu I_{m-1} là ký hiệu xác định được tại thời điểm thứ $(m-1)$ có ảnh hưởng tới ký hiệu trong khoảng thời gian thứ m nhưng có thể loại bỏ sự ảnh hưởng này bằng một phép trừ đơn giản và xác định được I_m .

Vấn đề cơ bản trong thủ tục này là sai nhầm. Khi I_{m-1} xác định sai thì ta không thể loại bỏ được sự sai nhầm này khi xác định I_m và quá trình xác định sai xảy ra liên tục theo sau đó. Loại sai nhầm này gọi là sai nhầm truyền lan. Sai nhầm truyền lan có thể tránh được bằng cách tiền mã hóa số liệu ở phía phát. Việc tiền mã hóa được thực hiện trên dãy số liệu nhị phân trước khi điều chế. Từ dãy số liệu nhị phân $\{D_n\}$ ta tạo ra một dãy mới $\{P_n\}$, gọi là dãy tiền mã hóa. Đối với xung nhị phân kép, dãy tiền mã hóa được xác định theo công thức

$$P_m = D_m \oplus P_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (11-2-46)$$

sau đó chúng ta tạo ra dãy truyền đi $\{I_m\}$ theo công thức $I_m = 2P_m - 1$.

Các mẫu tín hiệu không nhiễu ở đầu ra của bộ lọc thu là

$$B_m = I_m + I_{m-1} = 2(P_m + P_{m-1} - 1) \quad (11-2-47)$$

và

$$P_m + P_{m-1} = \frac{1}{2}B_m + 1 \quad (11-2-48)$$

Do $D_m = P_m \oplus P_{m-1}$ nên

$$D_m = \frac{1}{2}B_m + 1 \pmod{2} \quad (11-2-49)$$

Nếu $B_m = \pm 2$ thì $D_m = 0$ và nếu $B_m = 0$ thì $D_m = 1$. Trong trường hợp có nhiễu cộng thì $y_m = B_m + v_m$ được so sánh với hai cận là 1 và -1. Dãy $\{D_n\}$ được xác định theo luật

$$D_m = \begin{cases} 1 & (|y_m| < 1) \\ 0 & (|y_m| \geq 1) \end{cases} \quad (11-2-50)$$

Mở rộng tín hiệu PAM nhị phân thành tín hiệu PAM M mức cũng không có gì khác biệt cơ bản. Trong trường hợp không nhiễu thì đây

$$B_m = i_m + I_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (11-2-51)$$

có $2M - 1$ mức giá trị cách đều nhau. Các giá trị biên độ được xác định từ quan hệ

$$I_m = 2P_m - (M - 1) \quad (11-2-52)$$

$\{P_m\}$ là dãy tiền mã hóa được xác định từ dãy số liệu $\{D_m\}$ theo công thức

$$P_m = D_m \oplus P_{m-1} \pmod{M} \quad (11-2-53)$$

Khi không có nhiễu, các mẫu đầu ra của bộ lọc thu là

$$B_m = I_m + I_{m-1} = 2[P_m + P_{m-1} - (M - 1)] \quad (11-2-54)$$

nên

$$P_m + P_{m-1} = \frac{1}{2}B_m + (M - 1) \quad (11-2-55)$$

Do $D_m = P_m + P_{m-1} \pmod{M}$ nên

$$D_m = \frac{1}{2}B_m + (M - 1) \pmod{M} \quad (11-2-56)$$

Khi có nhiễu thì tín hiệu nhận được sẽ được lượng tử hóa thành một mức tín hiệu gần nhất và sử dụng luật ở trên để khôi phục số liệu.

Trong trường hợp xung nhị phân kép sửa đổi, các mẫu không nhiễu ở đầu ra bộ lọc thu là

$$B_m = I_m - I_{m-2} \quad (11-2-57)$$

Dãy $\{I_m\}$ M mức được xác định theo công thức (11-2-52) và

$$P_m = D_m \oplus P_{m-2} \pmod{M} \quad (11-2-58)$$

Trong trường hợp không nhiễu thì

$$D_m = \frac{1}{2}B_m \pmod{M} \quad (11-2-59)$$

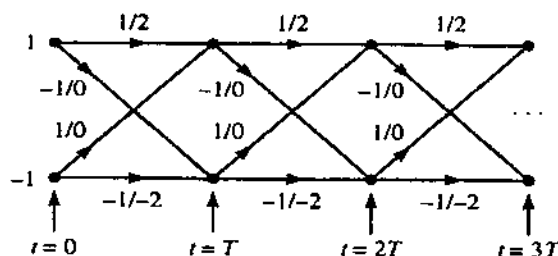
Như vậy bằng cách tiền mã hóa số liệu ở phía phát, ta có thể xác định số liệu ở phía thu trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu mà không dựa vào ký hiệu nhận được ở thời điểm trước. Như vậy sai nhầm truyền lan có thể loại bỏ được.

Việc xác định trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu không phải là tối ưu đối với tín hiệu đáp ứng từng phần do tín hiệu nhận được là có nhớ. Tuy nhiên xác định theo phương pháp này đơn giản và hay được sử dụng trong thực tế.

Xác định dãy ML Tín hiệu đáp ứng từng phần là tín hiệu có nhớ và do đó việc biểu diễn bằng sơ đồ lưới sẽ có nhiều thuận lợi. Ví dụ lưới cho tín hiệu đáp ứng từng phần nhị phân kép cho việc truyền số liệu nhị phân được vẽ trên hình 11-2-8. Đối với điều chế nhị phân thì lưới có hai trạng thái tương ứng với hai giá trị vào $I_m = \pm 1$.

Tín hiệu nhị phân kép là có nhớ với độ dài $L = 1$. Đối với điều chế nhị phân, lưới có $S_L = 2$ trạng thái. Đối với điều chế M mức thì lưới có M^L trạng thái.

Xác định dãy ML lựa chọn trong lưới một đường có nhiều khả năng nhất dựa trên dãy số liệu nhận được $\{y_m\}$ tại các thời điểm lấy mẫu $t = mT$ và thuật toán Viterbi.



Hình 11-2-8: Lưới cho tín hiệu đáp ứng từng phần nhị phân kép

Đối với tín hiệu đáp ứng từng phần, dãy nhận được $\{y_m\}$, $1 \leq m \leq N$ được đặc trưng thống kê bởi hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(y_N | I_N)$ với $y_N = [y_1 y_2 \dots y_N]^T$ và $I_N = [I_1 I_2 \dots I_N]^T$, $N > L$. Khi nhiễu là nhiễu cộng gaussian có giá trị trung bình 0 thì $p(y_N | I_N)$ là hàm mật độ phân bố xác suất của nhiễu biến ngẫu nhiên gaussian và

$$p(y_N | I_N) = \frac{1}{(2\pi \det C)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (y_N - B_N)^t C^{-1} (y_N - B_N) \right] \quad (11-2-60)$$

trong công thức này thì $B_N = [B_1 B_2 \dots B_N]^T$ là trung bình của y_N và C là ma trận hiệp biến cỡ $N \times N$ của y_N . Như vậy, xác định ML là tìm dãy trong lưới làm cực đại hóa $p(y_N | I_N)$. Lấy loga của $p(y_N | I_N)$ ta có

$$\ln p(y_N | I_N) = -\frac{1}{2} N \ln(2\pi \det C) - \frac{1}{2} (y_N - B_N)^t C^{-1} (y_N - B_N) \quad (11-2-61)$$

Với một dãy số liệu nhận được $\{y_m\}$, dãy số liệu $\{I_m\}$ làm cực đại $\ln p(y_N | I_N)$ cũng chính là dãy thông tin $\{I_N\}$ làm cực tiểu $(y_N - B_N)^t C^{-1} (y_N - B_N)$:

$$\hat{I}_N = \underset{I_N}{\arg \min} [(y_N - B_N)^t C^{-1} (y_N - B_N)] \quad (11-2-62)$$

Việc tính toán độ đo trong lưới là phức tạp do phải tính tương quan của các mẫu nhiễu. Đối với tín hiệu đáp ứng từng phần có độ nhớ L thì tương quan của dãy nhiễu thỏa mãn điều kiện $E[v_m v_{m+k}] = 0$ với $k > L$. Để đơn giản tính toán, ta bỏ qua tương quan của nhiễu bằng cách giả thiết $E[v_m v_{m+k}] = 0$ với $k > 0$. Khi đó $C = \sigma_v^2 \mathbf{1}_N$ với $\sigma_v^2 = E[v_m^2]$. (11-2-62) đơn giản thành

$$\begin{aligned} \hat{I}_N &= \underset{I_N}{\arg \min} [(y_N - B_N)^t (y_N - B_N)] \\ &= \underset{I_N}{\arg \min} \left[\sum_{m=1}^N \left(y_m - \sum_{k=0}^L x_k I_{m-k} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11-2-63)$$

$B_m = \sum_{k=0}^L x_k I_{m-k}$. Độ đo ở mỗi nút của lưới có dạng

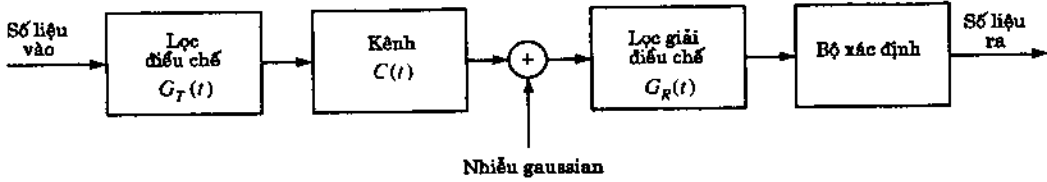
$$DM_M(I_m) = DM_{M-1}(I_{m-1}) + \left(y_m - \sum_{k=0}^L x_k I_{m-k} \right)^2 \quad (11-2-64)$$

$DM_m(I_m)$ là độ đo khoảng cách tại thời điểm $t = mT$ còn phần kia là độ đo tăng thêm khi nhận được một mẫu mới y_m .

Quá trình xác định dãy ML có thể khi xác định dãy thông tin truyền đi. Trong thực tế, độ trễ này có thể bỏ qua hay là một giá trị cố định bằng cách giới hạn dãy còn lại tới N_t ký hiệu gần nhất với $N_t \gg 5L$.

11-2-4 Tín hiệu cho kênh có suy hao

Trong phần 11-2-1 và 11-2-2 ta đã trình bày vấn đề thiết kế tín hiệu cho các bộ lọc thu phát khi kênh là lý tưởng. Trong phần này ta xét việc thiết kế tín hiệu cho kênh không lý tưởng, có làm suy hao tín hiệu. Tiêu chuẩn để tối ưu hóa các bộ lọc là cực đại hóa SNR của tín hiệu đầu ra của bộ lọc giải điều chế hay tương đương là tín hiệu ở đầu vào bộ xác định. Nhiễu cộng trên kênh giả thiết là gaussian với phổ mật độ công suất $\Phi_{nn}(f)$. Hình 11-2-9 trình bày sơ đồ khối của cả hệ thống.



Hình 11-2-9: Hệ thống các bộ lọc thu phát

Ta có:

$$G_T(f)C(f)G_R(f) = X_d(f)e^{-j2\pi ft_0}, \quad |f| \leq W \quad (11-2-65)$$

$X_d(f)$ là đáp ứng tần số mong muốn của hệ thống nối tiếp gồm bộ điều chế, kênh, bộ giải điều chế và t_0 là độ trễ để có thể thực hiện được các bộ lọc thu phát. Ta có thể chọn $X_d(f)$ để không có ISI hoặc lượng ISI điều khiển được. Giả sử ta xét trường hợp không có ISI và khi đó $X_d(f) = X_{rc}(f)$.

Nhiều ở đầu ra của bộ lọc giải điều chế là

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t - \tau)g_R(\tau)d\tau \quad (11-2-66)$$

Do $g(t)$ là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 nên $v(t)$ cũng là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình 0 và phổ mật độ công suất là

$$\Phi_{vv}(f) = \Phi_{nn}(f)|G_R(f)|^2 \quad (11-2-67)$$

Để đơn giản hóa khi trình bày, ta xét việc truyền thông tin bằng tín hiệu PAM nhị phân. Các mẫu ở đầu ra của bộ lọc phối hợp là

$$y_m = x_0 I_m + v_m = I_m + v_m \quad (11-2-68)$$

x_0 được chuẩn hóa bằng đơn vị, $I_m = \pm d$. v_m là thành phần nhiễu có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nn}(f)|G_R(f)|^2 df \quad (11-2-69)$$

Xác suất lỗi là

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d/\sigma_v}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = Q\left(\sqrt{d^2/\sigma_v^2}\right) \quad (11-2-70)$$

Xác suất lỗi được tối thiểu hóa bằng cách cực đại hóa SNR d^2/σ_v^2 hay tối thiểu hóa σ_v^2/d^2 . Nhưng ta có

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{E(I_m^2)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \frac{d^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt \\ \frac{1}{d^2} &= \frac{1}{P_{av}T} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df \end{aligned} \quad (11-2-71)$$

$G_T(f)$ có thể chọn để thỏa mãn điều kiện không có ISI

$$|G_T(f)| = \frac{|X_{rc}(f)|}{|C(f)||G_R(f)|}, \quad |f| \leq W \quad (11-2-72)$$

và $G_T(f) = 0$ với $|f| > W$. Từ đó

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{P_{av}T} \int_{-W}^W \frac{|X_{rc}(f)|^2}{|C(f)|^2 |G_R(f)|^2} df \quad (11-2-73)$$

Như vậy σ_v^2/d^2 được tối thiểu hóa theo $|G_R(f)|$ với $|f| \leq W$ là

$$\frac{\sigma_v^2}{d^2} = \frac{1}{P_{av}T} \int_{-W}^W \Phi_{nn}(f) |G_R(f)|^2 df \int_{-W}^W \frac{|X_{rc}(f)|^2}{|C(f)|^2 |G_R(f)|^2} df \quad (11-2-74)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_1(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |U_2(f)|^2 df \geq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |U_1(f)| |U_2(f)| df \right]^2 \quad (11-2-75)$$

với

$$\begin{aligned} |U_1(f)| &= |\sqrt{\Phi_{nn}(f)}| |G_R(f)| \\ |U_2(f)| &= \frac{|X_{rc}(f)|}{|C(f)| |G_R(f)|} \end{aligned} \quad (11-2-76)$$

Giá trị tối thiểu trong (11-2-74) có được khi $|U_1(f)|$ tỷ lệ với $|U_2(f)|$ hay khi

$$|G_R(f)| = K \frac{|X_{rc}(f)|^{1/2}}{[\Phi_{nn}(f)]^{1/4} |C(f)|^{1/2}}, \quad |f| \leq W \quad (11-2-77)$$

K là một hệ số tùy ý. Khi đó đáp ứng biên độ của bộ lọc điều chế là

$$|G_T(f)| = \frac{1}{K} \frac{|X_{rc}(f)|^{1/2} [\Phi_{nn}(f)]^{1/4}}{|C(f)|^{1/2}}, \quad |f| \leq W \quad (11-2-78)$$

Cuối cùng, giá trị cực đại của SNR khi đã tối ưu hóa các bộ lọc thu phát là

$$\frac{d^2}{\sigma_v^2} = \frac{P_{av}T}{\left\{ \int_{-W}^W |X_{rc}(f)| [\Phi_{nn}(f)]^{1/2} |C(f)|^{-1} df \right\}^2} \quad (11-2-79)$$

Các đáp ứng pha của $G_T(f)$, $G_R(f)$ được lựa chọn để thỏa mãn điều kiện sau

$$\Theta_T(f) + \Theta_R(f) + \Theta_c(f) = 2\pi f t_0 \quad (11-2-80)$$

Trong trường hợp đặc biệt khi nhiễu cộng ở đầu vào bộ giải điều chế là gaussian với phổ mật độ công suất $\frac{1}{2}N_0$ thì

$$\begin{aligned} |G_R(f)| &= K_1 \frac{|X_{rc}(f)|^{1/2}}{|C(f)|^{1/2}} \\ |G_T(f)| &= K_2 \frac{|X_{rc}(f)|^{1/2}}{|C(f)|^{1/2}} \end{aligned} \quad |f| \leq W \quad (11-2-81)$$

Chú ý rằng trong trường hợp này $|G_R(f)|$ là bộ lọc phối hợp với $|G_T(f)|$. Giá trị SNR đơn giản thành

$$\frac{d^2}{\sigma_v^2} = \frac{2P_{av}T}{N_0} \left[\int_{-W}^W \frac{|X_{rc}(f)|}{|C(f)|} df \right]^{-2} \quad (11-2-82)$$

Vi dụ 11-2-1

Xác định các bộ lọc tối ưu thu phát cho một hệ thống truyền thông nhị phân hoạt động ở tốc độ 4800 bit/s qua một kênh có đáp ứng biên độ

$$|C(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/W)^2}}, \quad |f| \leq W \quad (11-2-83)$$

với $W = 4800$ bit/s. Nhiều cộng là gaussian trắng, giá trị trung bình bằng 0, phổ mật độ công suất $\frac{1}{2}N_0 = 10^{-15}$ W/Hz.

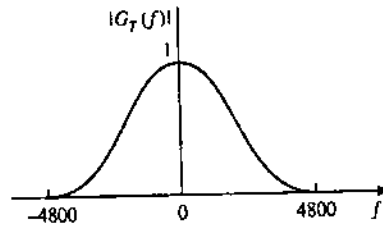
Do $W = 1/T$, ta sử dụng tín hiệu xung có phổ dạng xung cosin với hệ số $\beta = 1$

$$X_{rc}(f) = \frac{1}{2}T[1 + \cos(\pi T|f|)] = T \cos^2\left(\frac{\pi|f|}{9600}\right) \quad (11-2-84)$$

Như vậy

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = \left[1 + \left(\frac{f}{4800}\right)^2\right]^{1/4} \cos\left(\frac{\pi|f|}{9600}\right), \quad |f| \leq W \quad (11-2-85)$$

và $|G_T(f)| = |G_R(f)| = 0$ với $|f| > W$



Hình 11-2-10: Đáp ứng tần số của bộ lọc thu phát tối ưu

11-3 Xác suất lỗi khi sử dụng tín hiệu PAM

Trong phần này ta xác định hiệu quả bộ thu xác định số liệu khi tín hiệu là PAM M mức.

11-3-1 Xác suất lỗi khi không có ISI

Khi không có ISI, mẫu tín hiệu nhận được ở đầu ra của bộ lọc thu là

$$y_m = x_0 I_m + v_m \quad (11-3-1)$$

và

$$x_0 = \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df = \xi_g \quad (11-3-2)$$

v_m là nhiễu cộng gaussian trắng có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương

$$\gamma_v^2 = \frac{1}{2}\xi_g N_0 \quad (11-3-3)$$

I_m có thể nhận một trong M giá trị biên độ cách đều nhau và đồng xác suất. Với một mức biên độ cụ thể nào đó, vấn đề đặt ra là xác định xác suất lỗi. Xác suất lỗi của tín hiệu PAM M mức cũng giống xác suất lỗi xác định sai tín hiệu PAM trong phần 7-2 và bằng

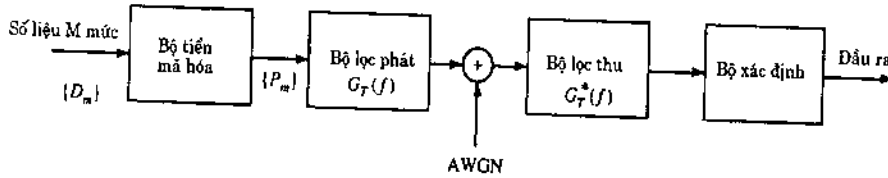
$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{2\xi_g/N_0}\right) \quad (11-3-4)$$

Nhưng $\xi_g = 3\xi_{av}/(M^2 - 1)$, $\xi_{av} = k\xi_{bav}$ là năng lượng trung bình một ký hiệu và một bit. Như vậy dẫn tới

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(\log_2 M)\xi_{bav}}{(M^2 - 1)N_0}}\right) \quad (11-3-5)$$

11-3-2 Xác suất lỗi khi sử dụng tín hiệu đáp ứng từng phần

Phần này ta xác định xác suất lỗi của việc xác định tín hiệu PAM số M mức sử dụng xung nhị phân kép hay xung nhị phân kép sửa đổi. Kênh giả thiết là có dải tần hữu hạn lý tưởng có nhiễu cộng gaussian trắng. Mô hình của hệ thống trên hình 11-3-1.



Hình 11-3-1: Mô hình hệ thống truyền thông sử dụng tín hiệu đáp ứng từng phần

Xác định ký hiệu-ký hiệu Ở phía phát, dãy số liệu M mức $\{D_m\}$ được tiền mã hóa. Đầu ra của bộ tiền mã hóa là M giá trị mức biên độ có thể. Đầu ra của bộ lọc phát là

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g_T(t - nT) \quad (11-3-6)$$

Hàm đáp ứng từng phần $X(f)$ được chia đều giữa bộ lọc phát và bộ lọc thu, như vậy là bộ lọc thu là phối hợp với xung phát đi và ta có

$$|G_T(f)G_R(f)| = |X(f)| \quad (11-3-7)$$

Đầu ra của bộ lọc được lấy mẫu tại các thời điểm $t = nT = n/2W$ và các mẫu được đưa vào bộ giải mã. Đối với tín hiệu nhị phân kép, các mẫu tín hiệu là

$$y_m = I_m + I_{m-1} + v_m = B_m + v_m \quad (11-3-8)$$

trong đó v_m là thành phần nhiễu. Khi tín hiệu là nhị phân kép sửa đổi thì

$$y_m = I_m - I_{m-2} + v_m = B_m + v_m \quad (11-3-9)$$

Khi tín hiệu là hai mức, $I_m = \pm d$ và các giá trị của B_m là $2d, 0, -2d$. Đối với tín hiệu PAM M mức, khi $I_m = \pm d, \pm 3d, \pm 5d, \dots, \pm(M-1)d$ thì các mức tín hiệu nhận được là $B_m = 0, \pm 2d, \pm 4d, \dots, \pm 2(M-1)d$, số mức tín hiệu nhận được là $2M-1$ và khi đó hệ số d tương đương với $x_0 = \xi_0$. Các ký hiệu $\{I_m\}$ giả thiết là đồng xác suất, khi không có nhiễu, đối với cả hai loại tín hiệu thì các mức tín hiệu nhận được sẽ có qui luật phân bố như sau

$$P(B = 2md) = \frac{M - |m|}{M^2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1) \quad (11-3-10)$$

B là mức tín hiệu nhận được không có nhiễu.

Ta giả thiết rằng sai ký hiệu xảy ra khi biên độ nhiễu cộng lớn hơn d . Các thành phần nhiễu v_m là gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2} N_0 \int_{-W}^W |G_R(f)|^2 df = \frac{1}{2} N_0 \int_{-W}^W |X(f)|^2 df = 2N_0/\pi \quad (11-3-11)$$

đối với cả hai loại tín hiệu nhị phân kép và nhị phân kép sửa đổi. Giới hạn trên của xác suất sai ký hiệu là

$$\begin{aligned}
 P_M &< \sum_{m=-(M-2)}^{M-2} P(|y - 2md| > d | B = 2md) P(B = 2md) \\
 &\quad + 2P(y + 2(M-1)d > d | B = -2(M-1)d) P(B = -2(M-1)d) \\
 &= P(|y| > d | b = 0) \left[2 \sum_{m=0}^{M-1} P(B = 2md) - P(B = 0) - P(B = -2(M-1)d) \right] \\
 &= (1 - M^{-2}) P(|y| > d | B = 0)
 \end{aligned} \tag{11-3-12}$$

Nhưng

$$P(|y| > d | B = 0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \int_d^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_v^2} dx = 2Q\left(\sqrt{\pi d^2/2N_0}\right) \tag{11-3-13}$$

nên xác suất sai ký hiệu trung bình bị giới hạn trên bởi

$$P_M < 2(1 - M^{-2})Q\left(\sqrt{\pi d^2/2N_0}\right) \tag{11-3-14}$$

Tham số d có thể bỏ qua khi chúng ta biểu diễn công thức trên theo công suất trung bình. Đối với tín hiệu PAM M mức đồng xác suất, công suất trung bình ở đầu ra của bộ lọc phát là

$$P_{av} = \frac{E(I_m^2)}{T} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df = \frac{E(I_m^2)}{T} \int_{-W}^W |X(f)|^2 df = \frac{4}{\pi T} E(I_m^2) \tag{11-3-15}$$

$E(I_m^2)$ là trung bình bình phương của M mức tín hiệu và bằng

$$E(I_m^2) = \frac{1}{3} d^2 (M^2 - 1) \tag{11-3-16}$$

Nhưng

$$d^2 = \frac{3\pi P_{av} T}{4(M^2 - 1)} \tag{11-3-17}$$

và thay vào (11-3-14) ta thu được giới hạn trên của xác suất sai ký hiệu là

$$P_M < 2 \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) Q\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{6}{M^2 - 1} \frac{\xi_{av}}{N_0}}\right) \tag{11-3-18}$$

Khi so sánh với tín hiệu PAM M mức không có ISI, ta thấy độ hiệu quả trong trường này kém hơn 2,1 dB. Sự suy hao trong SNR như vậy là do bộ xác định thực hiện các quyết định trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu và bỏ qua tính nhớ trong tín hiệu nhận được ở đầu vào bộ xác định.

Xác định dãy ML Bộ xác định dãy ML tìm trong lưới dãy $\{I_m\}$ có nhiều khả năng nhất như trong phần 11-2-3. Độ hiệu quả của bộ xác định được tính dựa vào xác suất sai, dựa trên khoảng cách euclide như trong phần giải mã xác định mềm cho mã chập. Đối với tín hiệu nhị phân kép hay nhị phân kép sửa đổi thì không có độ suy hao 2,1 dB như trong phương pháp xác định ký hiệu-ký hiệu.

11-3-3 Xác suất lỗi trên kênh có suy hao

Trong phần 11-2-4, ta đã xác định đáp ứng của bộ lọc điều chế và giải điều chế cực đại hóa SNR ở đầu vào bộ xác định khi kênh có suy hao. Khi các bộ lọc được thiết kế để không có ISI ở các thời điểm lấy mẫu thì xác suất lỗi của tín hiệu PAM M mức là

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{d^2/\sigma_v^2}\right) \tag{11-3-19}$$

Tham số d liên hệ với công suất phát trung bình theo công thức

$$P_{av} = \frac{E(I_m^2)}{T} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df = \frac{(M^2 - 1)d^2}{3T} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df \quad (11-3-20)$$

và sai phương của nhiễu được xác định trong công thức (11-2-69). Đối với kênh AWGN, (11-3-19) được biểu diễn thành

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6\xi_{av}}{(M^2-1)N_0} \left[\int_{-W}^W \frac{|X_{rc}(f)|}{|C(f)|} df \right]^2} \right) \quad (11-3-21)$$

Ta thấy từ công thức trên rằng độ suy hao về độ hiệu quả do kênh có suy hao là

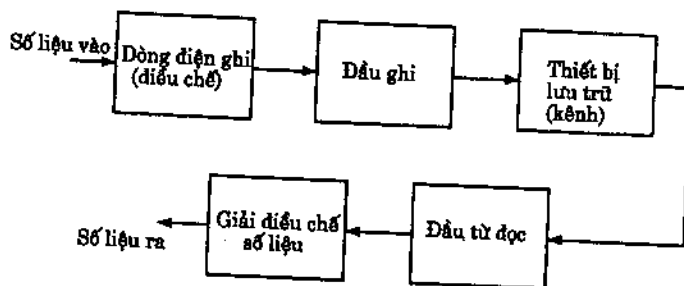
$$20 \log_{10} \left[\int_{-W}^W \frac{|X_{rc}(f)|}{|C(f)|} df \right] \quad (11-3-22)$$

11-4 Mã điều chế làm nhon phổ tín hiệu

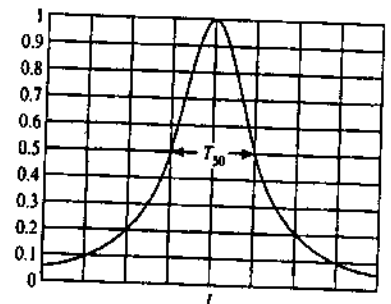
Ta thấy rằng phổ mật độ công suất của tín hiệu có thể làm nhon bằng cách chọn tín hiệu xung $g(t)$ và bằng cách mã hóa để giảm nhỏ độ suy hao trên kênh và nhiễu trong khi truyền. Mã hóa làm nhon phổ tín hiệu là làm cho tính chất về phổ của tín hiệu phù hợp với đáp ứng tần số của kênh.

Mã điều chế làm nhon phổ tín hiệu thường được gọi là mã đường truyền, nó tạo ra các nguyên tắc về dây bit đưa vào bộ điều chế, tạo ra sự tương quan hay tính nhớ trong tín hiệu truyền đi. Mã điều chế thường được sử dụng khi ghi thông tin lên băng từ, đĩa từ hay truyền thông tin qua hệ thống truyền cáp để làm nhon phổ tín hiệu hay loại bỏ thành phần một chiều (dc) trong tín hiệu băng cơ sở. Khi ghi thông tin vào băng từ, mã được thiết kế để tăng khoảng cách về thời gian giữa các lần chuyển đổi tín hiệu để giảm hiện tượng ISI.

Xét hệ thống ghi băng từ như trong hình 11-4-1. Dây số liệu nhị phân được sử dụng để tạo ra dòng điện ghi và dòng điện này có thể coi là đầu ra của bộ điều chế. Thông thường dây bit được chuyển thành dòng điện theo mã NRZI.



Hình 11-4-1: Hệ thống ghi đọc băng từ



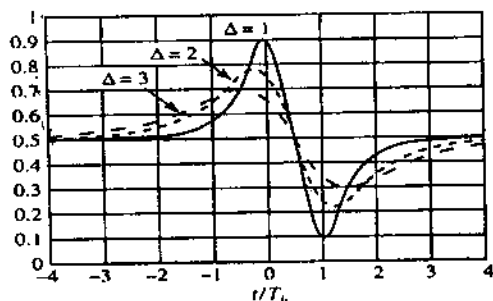
Hình 11-4-2: Xung đọc lại trong hệ thống ghi đọc băng từ

Xét các chuyển đổi từ A thành $-A$ hay từ $-A$ thành A với xác suất $\frac{1}{2}$ với mọi bit số liệu. Tín hiệu đọc lại ứng với chuyển đổi dương ($-A \rightarrow A$) là tín hiệu được mô hình hóa toán học (tất nhiên là gần đúng) là

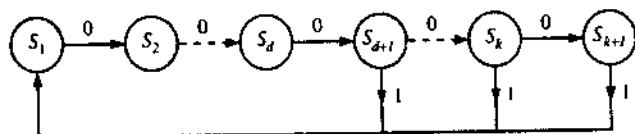
$$g(t) = \frac{1}{1 + (2t/T_{50})^2} \quad (11-4-1)$$

T_{50} là độ rộng xung tín hiệu ở mức 50% giá trị biên độ. Tương tự, tín hiệu đọc lại với chuyển đổi âm là $-g(t)$.

Giả sử ta ghi một chuyển đổi dương và ngay sau đó là một chuyển đổi âm, khoảng thời gian giữa hai chuyển đổi là T_b , tương ứng với chuyển đổi từ xung $p(t)$ thành $-p(t - T_b)$. Tham số $\Delta = T_{50}/T_b$ gọi là *mật độ chuẩn hóa*.



Hình 11-4-3: Chuyển đổi giữa hai xung dương và âm



Hình 11-4-4: Máy tạo mã (d, k)

Ta thấy rằng khi Δ tăng thì đỉnh biên độ của tín hiệu đọc lại giảm đi và tăng độ dịch thời gian so với thời điểm chính xác. Như vậy khi Δ tăng thì các xung sẽ ảnh hưởng lẫn nhau và ta phải giảm mật độ ghi. Vấn đề là phải thiết kế mã điều chế làm cho các chuyển đổi cách càng xa nhau càng tốt. Một loại mã hay dùng là mã NRZI. Một vấn đề khác về mã điều chế là phải tránh thành phần dc do đáp ứng tần số của hệ thống ghi đọc và trong cả các hệ thống truyền cáp.

Mã (d, k) Mã này có qui định về số ký hiệu 0 hay 1 liên tiếp nhau. d là số lượng cực tiểu các ký hiệu 0 liên tiếp giữa hai ký hiệu 1 trong dãy và k là số lượng cực đại các ký hiệu 0 liên tiếp giữa hai ký hiệu 1. Giả sử dùng mã NRZI, ảnh hưởng của d là khoảng cách giữa hai lần chuyển đổi đủ lớn để không (hay giảm nhỏ) ảnh hưởng của các tín hiệu liên tiếp. Tham số k để xác định khoảng thời gian cực đại giữa hai lần chuyển đổi, từ đó bảo đảm tính đồng bộ tín hiệu giữa phía thu với phía phát.

Mã (d, k) được biểu diễn bởi một máy có $k + 1$ trạng thái, ký hiệu là $S_i, i = 1, 2, \dots, k + 1$. Bit số liệu ra là 0 ứng với chuyển đổi từ trạng thái S_i thành $S_{i+1}, i \leq k$. Bit số liệu 1 ứng với chuyển đổi từ trạng thái nào đó về trạng thái S_1 .

Máy tạo mã (d, k) có thể biểu diễn bởi ma trận chuyển đổi trạng thái, ký hiệu là D , là ma trận vuông $(k + 1) \times (k + 1)$ với các phần tử là d_{ij} mà

$$\begin{aligned} d_{i1} &= 1 \quad (i \geq d + 1) \\ d_{ij} &= \begin{cases} 1 & (j = i + 1) \\ 0 & (\text{các giá trị khác}) \end{cases} \end{aligned} \quad (11-4-2)$$

Ví dụ 11-4-1

Xây dựng ma trận chuyển đổi trạng thái cho mã $(d, k) = (1, 3)$. ma trận đó là

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11-4-3)$$

Một tham số quan trọng của mã (d, k) là số dãy độ dài n nào đó thỏa mãn điều kiện của mã. Khi n tăng, số dãy $N(n)$ thỏa mãn điều kiện của mã cũng tăng lên và số lượng bit thông tin có thể biểu diễn

bởi một các dãy $N(n)$ là

$$k = \lfloor \log_2 N(n) \rfloor$$

Tốc độ mã là $R_c = k/n$.

Thông lượng của mã (d, k) được định nghĩa là

$$C(d, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 N(n) \quad (11-4-4)$$

Shannon đã chứng minh được rằng

$$C(d, k) = \log_2 \lambda_{\max} \quad (11-4-5)$$

với $\lambda_{\max}$ là giá trị riêng thực lớn nhất của ma trận $\mathbf{D}$.

Ví dụ 11-4-2

Xác định thông lượng của mã $(d, k) = (1, 3)$. Sử dụng ma trận chuyển đổi trạng thái trong ví dụ trên, ta có

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \end{aligned} \quad (11-4-6)$$

Nghiệm thực cực đại là $\lambda_{\max} = 1,4656$, như vậy thông lượng $C(1, 3) = \log_2 \lambda_{\max} = 0,5515$.

Xét việc xây dựng mã (d, k) . Mã có thể là mã đều hay mã không đều. Khi mã là đều thì mỗi khối k được mã hóa thành khối n bit. Trong tập hợp 2^n từ mã, ta chọn ra tập hợp con các từ mã thỏa mãn điều kiện của mã (d, k) . Trong tập con này, ta lại bỏ đi các từ mã mà khi ghép liền với nhau không thỏa mãn điều kiện của mã (d, k) .

Ví dụ 11-4-3

Ta xây dựng mã $(0, 2)$ có độ dài 3 và xác định độ hiệu quả. Ta chọn được 5 từ mã thỏa mãn các điều kiện đã nêu là (010), (011), (101), (110), (111). Chọn bốn từ mã nào đó để mã hóa cho bốn khối 2 bit thông tin. Như vậy tốc độ mã là $k/n = 2/3$. Mã có độ dài cố định trong ví dụ này có độ hiệu quả không cao lắm. Thông lượng của mã là $C(0, 2) = 0,8791$ và mã này có độ hiệu quả là

$$\frac{R_c}{C(d, k)} = \frac{2/3}{0,8791} = 0,76$$

Ví dụ 11-4-4

Xây dựng mã $d = 1, k = \infty$ có độ dài $n = 5$. Có 8 từ mã độ dài 5 thỏa mãn các điều kiện của mã (d, k) và như vậy mỗi từ mã mã hóa cho 3 bit thông tin. Tốc độ mã là $R_c = 3/5$ và thông lượng của mã $C(1, \infty) = 0,6942$ và độ hiệu quả là 0,864.

Ví dụ 11-4-5

Ta xây dựng mã $(2, 7)$ có độ dài từ mã thay đổi. Chú ý rằng bảng mã sau không phải là duy nhất, tốc độ mã là $R_c = 1/2$ đối với mọi từ mã nên mã này gọi là mã có tốc độ cố định. Độ hiệu quả của mã là 0,966 và mã thỏa mãn điều kiện prefix.

Bảng 11-4-1: Mã (2, 7) có độ dài thay đổi

Các bit thông tin vào	Từ mã
10	1000
11	0100
011	000100
010	001000
000	100100
0011	00100100
0010	00001000

Chuyển các bit mã thành các tín hiệu Đầu ra của bộ mã hóa được cho vào bộ điều chế để tạo tín hiệu truyền trên kênh. Mã NRZI là loại mã thông thường được sử dụng. Việc mã hóa vi sai được thực hiện ở khâu tiền mã hóa và được mô tả toán học là $p_k = d_k \oplus p_{k-1}$, trong đó $\{d_k\}$ là dãy vào bộ tiền mã hóa, còn $\{p_k\}$ là dãy sau tiền mã hóa.

BÀI TẬP

11-1 Kênh được gọi là không suy hao nếu đáp ứng $y(t)$ với đầu vào $x(t)$ là $Kx(t - t_0)$ với K và t_0 là hằng số. Chứng tỏ rằng nếu đáp ứng tần số của kênh là $A(f)e^{j\theta(f)}$ với $A(f)$ và $\theta(f)$ thực thì điều kiện cần và đủ để truyền không có suy hao là $A(f) = K$ và $\theta(f) = 2\pi ft_0 \pm n\pi, n = 0, 1, \dots$

11-2 Xét xung có phổ dạng cosin trong (11-2-26). Chứng tỏ rằng đáp ứng xung tương ứng được biểu diễn trong (11-2-27). Xác định biến đổi Hilbert của $x(t)$ là $\hat{x}(t)$ khi $\beta = 1$. Liệu $\hat{x}(t)$ có tính chất giống $x(t)$ để truyền số liệu không?

11-3 a. Chứng tỏ rằng (dạng tổng Poisson)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t)h(t - kT) \rightarrow X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right) G\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

b. Sử dụng kết quả trong câu a, chứng minh các công thức sau:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T}\right) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \exp(-j2\pi kTf) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

c. Biểu diễn điều kiện để không có ISI (theo tiêu chuẩn Nyquist) bằng cách sử dụng dạng tổng Poisson.

11-4 Giả sử một hệ thống truyền thông số sử dụng xung dạng gaussian $x(t) = \exp(-\pi a^2 t^2)$. Để giảm lượng ISI, ta đặt điều kiện $x(T) = 0,01$ với T là khoảng thời gian ký hiệu. Độ rộng phổ W của $x(t)$ được định nghĩa là giá trị W để $X(W)/X(0) = 0,01$. Xác định giá trị W và so sánh với phổ dạng cosin khi $\beta = 1$.

11-5 Một tín hiệu có dải tần hữu hạn trong khoảng W được biểu diễn bởi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin[2\pi W(t - n/2W)]}{2\pi W(t - n/2W)}$$

a. Xác định phổ $X(f)$ và biểu diễn hình học $|X(f)|$ trong các trường hợp sau

$$x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = -1, x_n = 0, \quad n \neq 0, 1, 2$$

$$x_{-1} = -1, x_0 = 2, x_1 = -1, x_n = 0, \quad n \neq -1, 0, 1$$

b. Vẽ $x(t)$ trong hai trường hợp này

c. Nếu ta sử dụng các tín hiệu này cho việc truyền các tín hiệu nhị phân, xác định số mức tín hiệu có thể nhận được tại các thời điểm lấy mẫu $t = nT = n/2W$ và xác suất xuất hiện các mức tín hiệu này. Giả thiết các ký hiệu nhị phân truyền đi là đồng xác suất

11-6 Chứng tỏ rằng với mọi β ta luôn có $\int_{-\infty}^{\infty} X_{rc}(f)df = 1$

11-7 Dây đầu vào bộ tiền mã hóa là 10010110010, dây đầu ra được điều chế sử dụng tín hiệu nhị phân kép. Xây dựng dây tiền mã hóa, các mức biên độ truyền đi và dây giải mã.

11-8 Cũng như bài trên với tín hiệu là xung nhị phân kép sửa đổi.

Chương 12

TRUYỀN TIN QUA KÊNH TUYẾN TÍNH CÓ BĂNG TẦN HỮU HẠN

Trong chương trước, ta tập trung vào việc thiết kế các bộ lọc điều chế và giải điều chế sử dụng trên kênh có băng tần hữu hạn. Trong quá trình thiết kế ta giả thiết rằng đáp ứng của kênh là đã biết. Nhưng trong thực tế thì nói chung là ta không biết trước các đặc điểm của kênh hoặc chỉ biết một số đặc điểm của kênh nhưng không đầy đủ, điều đó chủ yếu là do đáp ứng của kênh thay đổi theo thời gian, dẫn tới ta không thể thiết kế bộ lọc giải điều chế tối ưu cố định được.

Trong chương này ta xét việc thiết kế bộ thu cho kênh có suy hao, đáp ứng không biết trước và nhiễu AWGN. Kênh như vậy sẽ có ISI và để bù lại ở bộ thu, ta sử dụng các bộ cân bằng.

12-1 Bộ thu tối ưu cho kênh có ISI và nhiễu AWGN

Trong phần này ta trình bày cấu trúc bộ giải điều chế và xác định tối ưu cho tín hiệu truyền qua kênh không lý tưởng, có nhiễu cộng gaussian và có băng tần hữu hạn. Giả sử tín hiệu truyền đi được cho bởi công thức (11-2-1) thì tín hiệu nhận được (hay tín hiệu tần số thấp tương đương) là

$$r_I(t) = \sum_n h(t - nT) + z(t) \quad (12-1-1)$$

$h(t)$ biểu diễn đáp ứng của kênh với tín hiệu vào là xung $g(t)$ và $z(t)$ là nhiễu cộng gaussian trắng.

12-1-1 Bộ thu ML tối ưu

Khai triển tín hiệu $r_I(t)$ thành dạng chuỗi

$$r_I(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) \quad (12-1-2)$$

trong đó $\{f_k(t)\}$ là tập hợp đầy đủ các hàm trực chuẩn và $\{r_k\}$ là các biến ngẫu nhiên thu được bằng cách chiếu $r_I(t)$ lên các hàm $\{f_k(t)\}$. Ta có

$$r_k = \sum_n I_n h_{kn} + z_k \quad (12-1-3)$$

h_{kn} và z_k là hình chiếu của $h(t - nT)$ và $z(t)$ lên họ hàm trực chuẩn. Dãy $\{z_k\}$ là gaussian, có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương

$$\frac{1}{2}E(z_k^* z_m) = N_0 \delta_{km} \quad (12-1-4)$$

Hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $\mathbf{r}_N \equiv [r_1 r_2 \dots r_N]$ với điều kiện dãy truyền đi $\mathbf{I}_p \equiv [I_1 I_2 \dots I_p]$ với $p \leq N$ là

$$p(\mathbf{r}_N | \mathbf{I}_p) = \left(\frac{1}{2\pi N_0} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2N_0} \sum_{k=1}^N \left| r_k - \sum_n I_n h_{kn} \right|^2 \right) \quad (12-1-5)$$

Khi số lượng các biến ngẫu nhiên quan sát được N tiến tới vô hạn thì loga của $p(\mathbf{r}_N | \mathbf{I}_p)$ tỷ lệ với độ đo $PM(\mathbf{I}_p)$ được định nghĩa là

$$\begin{aligned} PM(\mathbf{I}_p) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left| r_l(t) - \sum_n I_n h(t - nT) \right|^2 dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} |r_l(t)|^2 dt + 2\text{Re} \sum_n \left[I_n^* \int_{-\infty}^{\infty} r_l(t) h^*(t - nT) dt \right] \\ &\quad - \sum_n \sum_m I_n^* I_m \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t - nT) h(t - mT) dt \end{aligned} \quad (12-1-6)$$

Ước lượng ML dãy $I_1 I_2 \dots I_p$ là dãy làm cực đại độ đo trên. Chú ý rằng $|r_l(t)|^2$ là không đổi với mọi độ đo nên có thể bỏ qua. Một tích phân khác cho ta

$$y_n \equiv y(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} r_l(t) h^*(t - nT) dt \quad (12-1-7)$$

Các biến ngẫu nhiên này có thể tạo ra bằng cách cho $r(t)$ qua một mạch lọc phối hợp với $h(t)$ và lấy mẫu đầu ra với tốc độ $1/T$. Tập hợp các mẫu $\{y_n\}$ tạo nên một tập hợp có đủ các tính chất thống kê để tính các độ đo $PM(\mathbf{I}_p)$ hay các độ đo tương quan:

$$CM(\mathbf{I}_p) = 2\text{Re} \left(\sum_n I_n^* y_n \right) - \sum_n \sum_m I_n^* I_m x_{n-m} \quad (12-1-8)$$

$x(t)$ là đáp ứng của bộ lọc phối hợp khi tín hiệu vào là $h(t)$

$$x_n \equiv x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t + nT) dt \quad (12-1-9)$$

Như vậy $x(t)$ biểu diễn đầu ra của bộ lọc có đáp ứng xung $h^*(-t)$ với tín hiệu kích thích là $h(t)$ hay $x(t)$ là hàm tự tương quan của $h(t)$.

Thay (12-1-1) vào (12-1-7) ta có

$$y_k = \sum_n I_n x_{k-n} + v_k \quad (12-1-10)$$

v_k biểu diễn nhiễu cộng ở đầu ra bộ lọc phối hợp

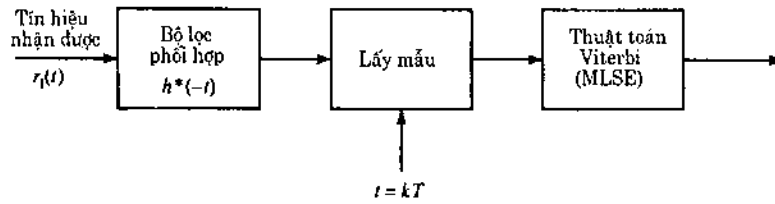
$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) h^*(t - nT) dt \quad (12-1-11)$$

Đầu ra của bộ giải điều chế tại thời điểm lấy mẫu bị ISI theo công thức (12-1-10). Trong thực tế, ta có thể giả thiết ISI chỉ ảnh hưởng tới một số hữu hạn các ký hiệu hay $x_n = 0$ với $|n| > L$. Như vậy lượng

ISI nhận được có thể coi là đầu ra của một máy có hữu hạn trạng thái nên có thể biểu diễn đầu ra của kênh bằng sơ đồ lưới và ước lượng ML dãy thông tin $\{I_1 I_2 \dots I_p\}$ là tìm một đường dẫn trong lưới nhiều khả năng nhất ứng với dãy nhận được $\{y_n\}$. Rõ ràng thuật toán Viterbi vẫn có thể áp dụng một cách có hiệu quả trong trường hợp này.

Các độ đo trong quá trình ước lượng ML dãy $\{I_k\}$ trong (12-1-8) có thể tính một cách truy hồi theo quan hệ

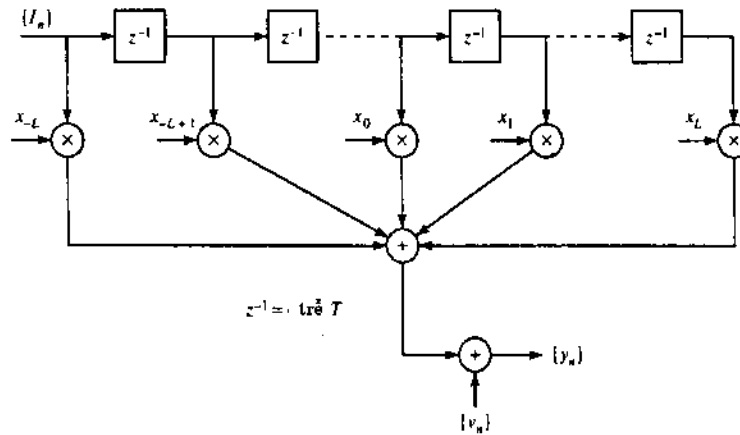
$$CM_n(I_n) = CM_{n-1}(I_{n-1}) + \text{Re} \left[I_n^* \left(2y_n - x_0 I_n - 2 \sum_{m=1}^L x_m I_{n-m} \right) \right] \quad (12-1-12)$$



Hình 12-1-1: Sơ đồ bộ thu tối ưu cho kênh AWGN với ISI

12-1-2 Mô hình rời rạc cho kênh ISI

Do phía phát truyền các ký hiệu một cách rời rạc theo thời gian và các mẫu nhận được ở đầu ra của bộ lọc phối hợp ở phía thu cũng rời rạc theo thời gian với tốc độ $1/T$ mẫu/s, ta thấy rằng quá trình ghép nối tiếp bộ lọc tương tự ở phía phát có đáp ứng xung $g(t)$, kênh với đáp ứng $c(t)$, bộ lọc phối hợp ở phía thu có đáp ứng $h^*(-t)$ và bộ lấy mẫu có thể biểu diễn một cách tương đương bằng một bộ lọc với các hệ số $\{x_k\}$. Như vậy chúng ta có một bộ lọc tương đương hoạt động trong khoảng thời gian $2LT$ giây. Đầu vào của bộ lọc này là các ký hiệu thông tin $\{I_k\}$ và đầu ra là dãy $\{y_k\}$. Sơ đồ bộ lọc tương đương được vẽ trên hình 12-1-2.



Hình 12-1-2: Mô hình kênh tương đương rời rạc theo thời gian có ISI

Sử dụng mô hình tương đương rời rạc theo thời gian trong việc tính độ hiệu quả của các phương pháp cân bằng là do sự tương quan của dãy nhiễu $\{v_k\}$ ở đầu ra bộ lọc phối hợp. Dãy $\{v_k\}$ có phân bố

gaussian, giá trị trung bình bằng 0 và hàm tự tương quan

$$\frac{1}{2}E(v_k^* v_j) = \begin{cases} N_0 x_{k-j} & (|k-j| \leq L) \\ 0 & (|k-j| > L) \end{cases} \quad (12-1-13)$$

Như vậy dãy nhiễu là có tương quan trừ khi $x_k = 0, k \neq 0$. Do ta thường tính toán với dãy nhiễu trắng khi tính độ hiệu quả nên ta sẽ làm trắng dãy nhiễu này bằng một bộ lọc gọi là *bộ lọc làm trắng nhiễu*. Bộ lọc làm trắng nhiễu được mô tả như sau.

Gọi $X(z)$ là biến đổi z của dãy tự tương quan $\{x_k\}$:

$$X(z) = \sum_{k=-L}^{k=L} x_k z^{-k} \quad (12-1-14)$$

Do $x_k = x_{-k}^*$ nên $X(z) = X^*(-z)$ và $2L$ nghiệm của $X(z)$ là đối xứng theo nghĩa nếu ρ là nghiệm thì $1/\rho^*$ cũng là nghiệm. Như vậy $X(z)$ có thể tách thành hai thành phần

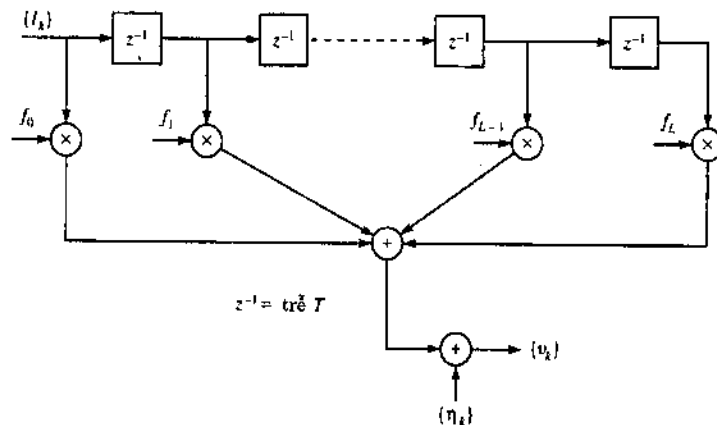
$$X(z) = F(z)F^*(z^{-1}) \quad (12-1-15)$$

$F(z)$ là đa thức bậc L có các nghiệm là $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ còn $F^*(-z)$ cũng là đa thức bậc L có các nghiệm là $1/\rho_1^*, 1/\rho_2^*, \dots, 1/\rho_L^*$. Khi đó bộ lọc làm trắng nhiễu có biến đổi z là $1/F^*(z^{-1})$. Do có 2^L khả năng lựa chọn các nghiệm của $F^*(z^{-1})$, các lựa chọn đều cho đáp ứng biên độ của bộ lọc giống nhau và chỉ khác nhau ở đáp ứng pha nên ta có thể chọn để $F^*(z^{-1})$ có pha tối thiểu. Điều đó có nghĩa là tất cả các nghiệm của $F^*(z^{-1})$ đều nằm trong đường tròn đơn vị và như vậy thì $1/F^*(z^{-1})$ là một bộ lọc rời rạc, ổn định, nhân quả. Cho dãy $\{y_k\}$ qua bộ lọc làm trắng nhiễu $1/F^*(z^{-1})$ thì đầu ra bộ lọc nhận được dãy $\{v_k\}$

$$v_k = \sum_{n=0}^L f_n I_{k-n} + \eta_k \quad (12-1-16)$$

$\{\eta_k\}$ là dãy nhiễu gaussian trắng và $\{f_k\}$ là tập hợp các hệ số của bộ lọc rời rạc tương đương có hàm truyền $F(z)$.

Tóm lại, ghép nối tiếp bộ lọc phát $g(t)$, kênh $c(t)$, bộ lọc phối hợp $h^*(-t)$, bộ lấy mẫu và bộ lọc làm trắng nhiễu $1/F^*(z^{-1})$ có thể biểu diễn bằng bộ lọc rời rạc tương đương có tập hệ số $\{f_k\}$. Dãy nhiễu $\{\eta_k\}$ là nhiễu cộng gaussian trắng có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương N_0 . Ta gọi mô hình này là mô hình rời rạc tương đương có nhiễu trắng và được vẽ trên hình 12-1-3.



Hình 12-1-3: Mô hình rời rạc tương đương có nhiễu trắng

Ví dụ 12-1-1

Giả sử bộ phát tạo ra xung $g(t)$ có độ rộng T và năng lượng đơn vị. Tín hiệu xung nhận được là $h(t) = g(t) + ag(t - T)$. Xác định mô hình rời rạc tương đương có nhiễu trắng.

Các mẫu của hàm tự tương quan là

$$x_k = \begin{cases} a^* & (k = -1) \\ 1 + |a|^2 & (k = 0) \\ a & (k = 1) \end{cases} \quad (12-1-17)$$

Biến đổi z của x_k là

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-1}^1 x_k z^{-k} \\ &= a^* z + (1 + |a|^2) + az^{-1} \\ &= (az^{-1} + 1)(a^* z + 1) \end{aligned} \quad (12-1-18)$$

Giả thiết $|a| > 1$ và ta chọn $F(z) = az^{-1} + 1$ thì bộ lọc tương đương có hai hệ số $f_0 = 1, f_1 = a$ và

$$x_k = \sum_{n=0}^{L-k} f_n^* f_{n+k}, \quad k = 0, 1, \dots, L \quad (12-1-19)$$

Khi đáp ứng xung của kênh thay đổi chậm theo thời gian thì bộ lọc phối hợp của bộ thu cũng trở nên thay đổi theo thời gian. Khi đó thì bộ lọc rời rạc tương đương cũng thay đổi theo thời gian và lượng ISI cũng thay đổi theo thời gian.

12-1-3 Thuật toán Viterbi cho mô hình rời rạc tương đương có nhiễu trắng

Chúng ta dựa vào dãy $\{v_k\}$ để ước lượng ML dãy thông tin $\{I_k\}$. Khi lượng ISI ảnh hưởng $L + 1$ ký hiệu (L thành phần ảnh hưởng), tiêu chuẩn MLSE tương đương với ước lượng trạng thái của một máy rời rạc có trạng thái hữu hạn. Trong trường hợp này máy là kênh rời rạc tương đương có tập hệ số $\{f_k\}$, trạng thái tại một thời điểm được xác định bằng L tín hiệu vào gần nhất. Trạng thái ở thời điểm thứ k là

$$S_k = (I_{k-1}, I_{k-2}, \dots, I_{k-L}) \quad (12-1-20)$$

$I_k = 0$ với $k \leq 0$. Nếu các ký hiệu thông tin có M mức thì kênh có M^L trạng thái và được mô tả bằng lưới có M^L trạng thái.

Ta bắt đầu với các mẫu $v_1, v_2, \dots, v_{L+1}$, từ đó ta tính M^{L+1} độ đo:

$$\sum_{k=1}^{L+1} \ln p(v_k | I_k, I_{k-1}, \dots, I_{k-L}) \quad (12-1-21)$$

M^{L+1} dãy có thể $I_{L+1}, I_L, \dots, I_2, I_1$ được chia thành M^L nhóm tương ứng với M^L trạng thái $(I_{L+1}, I_L, \dots, I_2)$. M dãy trong mỗi nhóm khác nhau ở ký hiệu I_1 . Từ M dãy trong mỗi nhóm, ta chọn ra dãy có xác suất lớn nhất (theo I_1) và đó là dãy còn lại với độ đo

$$\begin{aligned} PM_1(I_{L+1}) &\equiv PM_1(I_{L+1}, I_L, \dots, I_2) \\ &= \max_{I_1} \sum_{k=1}^{L+1} \ln p(v_k | I_k, I_{k-1}, \dots, I_{k-L}) \end{aligned} \quad (12-1-22)$$

Dựa vào v_{L+2} , M^L dãy còn lại được mở rộng ra một nhịp và các độ đo còn lại được tăng thêm một lượng là $\ln p(v_{L+2} | I_{L+2}, I_{L+1}, \dots, I_2)$. Tiếp theo, M^{L+1} dãy lại được chia thành M^L nhóm tương ứng

với M^L trạng thái $(I_{L+2}, \dots, I_3)$ và quá trình làm tương tự như trên. Tổng quát, khi nhận được v_{L+k} , độ đo

$$PM_k(I_{L+k}) = \max_{I_k} [\ln p(v_{L+k}|I_{L+k}, \dots, I_k) + PM_{k-1}(I_{L+k-1})] \quad (12-1-23)$$

được tính. Như vậy khi nhận được một ký hiệu mới thì thuật toán Viterbi trước tiên sẽ tính M^{L+1} xác suất

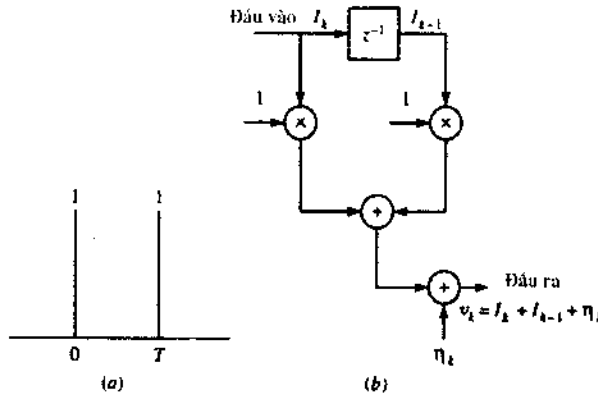
$$\ln p(v_{L+k}|I_{L+k}, \dots, I_k) + PM_{k-1}(I_{L+k-1}) \quad (12-1-24)$$

Như đã biết, độ trễ khi xác định mỗi ký hiệu thông tin không phải là một số cố định, nhưng trong thực tế có thể coi độ trễ là hằng số nếu ta cắt dây còn lại chỉ gồm q ký hiệu gần nhất, $q \geq 5L$.

Vi dụ 12-1-2

Giả sử tín hiệu nhị phân kép được sử dụng để truyền tín hiệu PAM 4 mức. Mỗi ký hiệu là một số trong tập hợp $\{-3, -1, 1, 3\}$. Lượng ISI điều khiển được đối với tín hiệu đáp ứng từng phần này được biểu diễn bởi mô hình kênh rời rạc tương đương như trên hình 12-1-4. Giả sử ta nhận được v_1, v_2

$$\begin{aligned} v_1 &= I_1 + \eta_1 \\ v_2 &= I_2 + I_1 + \eta_2 \end{aligned} \quad (12-1-25)$$



Hình 12-1-4: Mô hình kênh rời rạc tương đương có ISI sử dụng xung nhị phân kép

Chúng ta tính 16 độ đo

$$PM_1(I_2, I_1) = - \sum_{k=1}^2 \left(v_k - \sum_{j=0}^1 I_{k-j} \right)^2 \quad I_1, I_2 = \pm 1, \pm 3 \quad (12-1-26)$$

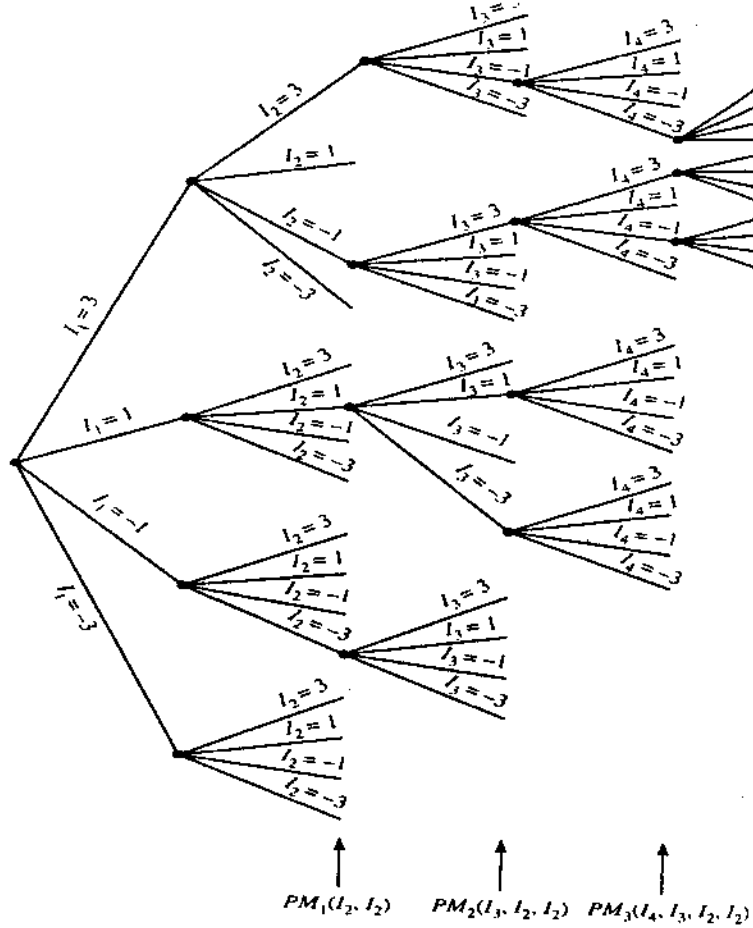
$I_k = 0$ khi $k \leq 0$. Với mỗi tín hiệu nhận được sau đó không ảnh hưởng tới I_1 nên ta có thể bỏ đi 12 cặp $\{I_1, I_2\}$. Như vậy độ đo ứng với dây còn lại là

$$PM_1(I_2 = 3, I_1) = \max_{I_1} \left[- \sum_{k=1}^2 \left(v_k - \sum_{j=0}^1 I_{k-j} \right)^2 \right]$$

Quá trình này lặp lại cho mỗi tập hợp bốn đường kết thúc với $I_2 = 1, I_2 = -1, I_2 = -3$. Như vậy bốn đường và các độ đo còn lại sau khi nhận được v_1, v_2 . Khi nhận được v_3 , các đường còn lại được mở

rộng tạo ra 16 đường và 16 độ đo tương ứng

$$PM_2(I_3, I_2, I_1) = PM_1(I_2, I_1) - \left(v_3 - \sum_{j=0}^1 I_{3-j} \right)^2 \quad (12-1-27)$$



Hình 12-1-5: Cấu trúc cây của giải mã Viterbi của ví dụ 10-1-2

12-1-4 Hiệu quả của ước lượng ML đối với kênh ISI

Ta xác định xác suất lỗi của ước lượng ML khi thông tin được truyền đi bằng tín hiệu PAM và nhiễu cộng là gaussian. Các độ đo mà thuật toán Viterbi sử dụng là

$$PM_{k-L}(\mathbf{I}_k) = PM_{k-L-1}(\mathbf{I}_{k-1}) - \left(v_k - \sum_{j=0}^L f_j I_{k-j} \right)^2 \quad (12-1-28)$$

$\{I_n\}$ có thể nhận các giá trị $\pm d, \pm 3d, \dots, \pm(M-1)d$ và $2d$ là khoảng cách giữa các mức liên tiếp. Lưới có M^L trạng thái và trạng thái thứ k ký hiệu là

$$S_k(I_{k-1}, I_{k-2}, \dots, I_{k-L}) \quad (12-1-29)$$

Các ký hiệu ước lượng qua thuật toán Viterbi ký hiệu là $\{\tilde{I}_n\}$ và trạng thái ước lượng được thứ k là

$$\tilde{S}_k = (\tilde{I}_{k-1}, \tilde{I}_{k-2}, \dots, \tilde{I}_{k-L}) \quad (12-1-30)$$

Giả sử đường ước lượng được tách ra từ đường đúng tại thời điểm thứ k và nhập lại vào đường đúng tại thời điểm thứ $k+l$. Như vậy $\tilde{S}_k = S_k$ và $\tilde{S}_{k+l} = S_{k+l}$, nhưng $\tilde{S}_m \neq S_m, k < m < k+l$ nên ta gọi hiện tượng này là sự kiện lỗi. Do kênh có ISI với độ dài $L+1$ nên $l \geq L+1$.

Với một sự kiện lỗi như trên, ta có $\tilde{I}_k \neq I_k, \tilde{I}_{k+l-L-1} \neq I_{k+l-L-1}$, nhưng $\tilde{I}_m = I_m$ với $k-L \leq m \leq k-1$ và $k+l-L \leq m \leq k+l-1$. Ta định nghĩa một vectơ sai ε cho sự kiện sai này là

$$\varepsilon = [\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} \dots \varepsilon_{k+l-L-1}] \quad (12-1-31)$$

trong đó

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2d}(I_j - \tilde{I}_j), \quad j = k, k+1, \dots, k+l-L-1 \quad (12-1-32)$$

Chuẩn hóa $2d$ trong công thức trên dẫn tới các phần tử ε_j nhận các giá trị $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1)$. Các vectơ còn được đặc trưng bởi $\varepsilon_k \neq 0, \varepsilon_{k+l-L-1} \neq 0$ và không có dãy L phần tử liên tục nào bằng 0. Tương ứng với vectơ sai là đa thức bậc $l-L+1$

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}z^{-1} + \varepsilon_{k+2}z^{-2} + \dots + \varepsilon_{k+l-L-1}z^{-(l-L-1)} \quad (12-1-33)$$

Ta muốn xác định xác suất của sự kiện sai tại thời điểm thứ k được đặc trưng bởi vectơ sai ε . Ta dựa theo phương pháp của Forney. Khi sự kiện sai ε xảy ra thì ba sự kiện E_1, E_2, E_3 sau phải xảy ra:

E_1 : tại thời điểm k , $\tilde{S}_k = S_k$

E_2 : các ký hiệu thông tin $I_k, I_{k+1}, \dots, I_{k+l-L-1}$ khi cộng thêm dãy sai số $2d(\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{k+l-L-1})$ phải tạo ra dãy $\tilde{I}_k, \tilde{I}_{k+1}, \dots, \tilde{I}_{k+l-L-1}$ có giá trị trong tập $(\pm d, \pm 3d, \dots, \pm(M-1)d)$

E_3 : với $k \leq m \leq k+l$ tổng độ do trên các nhánh của đường ước lượng được phải lớn hơn tổng độ do trên các nhánh của đường đúng.

Xác suất của sự kiện E_3 là

$$P(E_3) = P \left[\sum_{i=k}^{k+l-1} \left(v_i - \sum_{j=0}^L f_j \tilde{I}_{i-j} \right)^2 < \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(v_i - \sum_{j=0}^L f_j I_{i-j} \right)^2 \right] \quad (12-1-34)$$

Nhưng

$$v_i = \sum_{j=0}^L f_j I_{i-j} + \eta_i \quad (12-1-35)$$

$\{\eta_i\}$ là dãy nhiễu gaussian trắng giá trị thực. Thay (12-1-35) vào (12-1-34) ta có

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P \left[\sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\eta_i + 2d \sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \right)^2 < \sum_{i=k}^{k+l-1} \eta_i^2 \right] \\ &= P \left[4d \sum_{i=k}^{k+l-1} \eta_i \left(\sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \right) < -4d^2 \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (12-1-36)$$

$\varepsilon_j = 0$ khi $j < k$ và $j > k+l-L-1$. Nếu ta định nghĩa

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j} \quad (12-1-37)$$

thì (12-1-36) được biểu diễn lại thành

$$P(E_3) = P\left(\sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i \eta_i < -d \sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i^2\right) \quad (12-1-38)$$

Công thức (12-1-38) là xác suất của một tổ hợp tuyến tính các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê nhỏ hơn một số âm nào đó. Như vậy

$$P(E_3) = Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0} \sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i^2}\right) \quad (12-1-39)$$

Ta định nghĩa

$$\delta^2(\varepsilon) = \sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i^2 = \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\sum_{j=0}^L f_j \varepsilon_{i-j}\right)^2 \quad (12-1-40)$$

$\varepsilon_j = 0$ khi $j < k$ và $j > k+l-L-1$. $\{\alpha_i\}$ là tổng chập của $\{f_i\}$ và $\{\varepsilon_i\}$ và là các hệ số của đa thức

$$\alpha(z) = F(z)\varepsilon(z) = \alpha_k + \alpha_{k+1}z^{-1} + \dots + \alpha_{k+l-1}z^{-(l-1)} \quad (12-1-41)$$

Hơn nữa, $\delta^2(\varepsilon)$ là hệ số của z^0 trong đa thức

$$\alpha(z)\alpha(z^{-1}) = F(z)F(z^{-1})\varepsilon(z)\varepsilon(z^{-1}) = X(z)\varepsilon(z)\varepsilon(z^{-1}) \quad (12-1-42)$$

Ta gọi $\delta^2(\varepsilon)$ là trọng lượng euclide của sự kiện sai ε .

Một phương pháp khác là biểu diễn dưới dạng ma trận $\alpha = \mathbf{e}\mathbf{f}$ trong đó α là vectơ l chiều, $\mathbf{f}$ là vectơ $L+1$ chiều, $\mathbf{e}$ là ma trận $l \times (L+1)$, được định nghĩa là

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_{k+l-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_L \end{bmatrix} \\ \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_k & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{k+1} & \varepsilon_k & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{k+2} & \varepsilon_{k+1} & \varepsilon_k & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{k+l-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{k+l-L-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-1-43)$$

Như vậy thì

$$\delta^2(\varepsilon) = \alpha' \alpha = \mathbf{f}' \mathbf{e}' \mathbf{e} \mathbf{f} = \mathbf{f}' \mathbf{A} \mathbf{f} \quad (12-1-44)$$

$\mathbf{A}$ là ma trận $(L+1) \times (L+1)$ có dạng

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}' \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_L \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{L-1} \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \dots & \beta_{L-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_L & \dots & \dots & \dots & \beta_0 \end{bmatrix} \quad (12-1-45)$$

và

$$\beta_m = \sum_{i=k}^{k+l-1-m} \varepsilon_i \varepsilon_{i+m} \quad (12-1-46)$$

Ta có thể sử dụng (12-1-40), (12-1-41) hay (12-1-45), (12-1-46) để tính xác suất lỗi. Ta có

$$P(E_3) = Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\delta^2(\varepsilon)\right) = Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}\gamma_{av}\delta^2(\varepsilon)\right) \quad (12-1-47)$$

ở đây ta sử dụng quan hệ

$$d^2 = \frac{3}{M^2-1}TP_{av}, \gamma_{av} = TP_{av}/N_0 \quad (12-1-48)$$

Xác suất của sự kiện E_2 chỉ phụ thuộc vào tính chất thống kê của dãy vào. Ta giả thiết các ký hiệu mang thông tin đồng xác suất và được truyền đi một cách độc lập thống kê. Như vậy với một lỗi có dạng $|\varepsilon_i| = j$, $j = 1, 2, \dots, M-1$, có $M-j$ giá trị của I_i mà

$$I_i = \bar{I}_i + 2d\varepsilon_i$$

Như vậy

$$P(E_2) = \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \quad (12-1-49)$$

Xác suất của sự kiện E_1 khó tính chính xác do nó phụ thuộc vào sự kiện E_3 . Tuy nhiên $P(E_1|E_3) = 1 - P_M$ với P_M là xác suất sai ký hiệu nên $P(E_1|E_3)$ có thể ước lượng một cách xấp xỉ khi xác suất sai ký hiệu thấp. Cuối cùng, xác suất sự kiện sai ε được giới hạn trên xấp xỉ bằng:

$$P(\varepsilon) \leq Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}\gamma_{av}\delta^2(\varepsilon)\right) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \quad (12-1-50)$$

Gọi E là tập hợp tất cả các sự kiện sai ε bắt đầu tại thời điểm thứ k và $w(\varepsilon)$ là số lượng các ký hiệu sai trong mỗi sự kiện sai ε . Khi đó xác suất sai ký hiệu bị giới hạn trên bởi

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{\varepsilon \in E} w(\varepsilon)P(\varepsilon) \\ &\leq \sum_{\varepsilon \in E} w(\varepsilon)Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}\gamma_{av}\delta^2(\varepsilon)\right) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \end{aligned} \quad (12-1-51)$$

Gọi D là tập hợp tất cả các giá trị $\delta(\varepsilon)$. Với mỗi $\delta \in D$, gọi E_δ là tập con gồm các sự kiện lỗi mà $\delta(\varepsilon) = \delta$. Như vậy thì (12-1-51) được viết lại thành

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{\delta \in D} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}\gamma_{av}\delta^2\right) \left[\sum_{\varepsilon \in E_\delta} w(\varepsilon) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \right] \\ &\leq \sum_{\delta \in D} K_\delta Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}\gamma_{av}\delta^2\right) \end{aligned} \quad (12-1-52)$$

với

$$K_\delta = \sum_{\varepsilon \in E_\delta} w(\varepsilon) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M-|i|}{M} \quad (12-1-53)$$

Biểu thức về xác suất sai (12-1-52) tương tự như xác suất sai của mã chập khi giải mã xác định mềm (10-2-26). Ta có

$$P_M \approx K_{\delta_{min}} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}\gamma_{av}\delta_{min}^2\right) \quad (12-1-54)$$

$$K_{\delta_{min}} = \sum_{\varepsilon \in E_{\delta_{min}}} w(\varepsilon) \prod_{i=0}^{L-1} \frac{M-|i|}{M} \quad (12-1-55)$$

Nói chung, $\delta_{min}^2 \leq 1$ và $10 \log_{10} \delta_{min}^2$ biểu diễn sự suy hao về SNR do ISI. Giá trị nhỏ nhất của δ có thể xác định bằng (12-1-40) hay (12-1-44) với các dãy lỗi khác nhau.

Ví dụ 12-1-3

Xét kênh hai đường ($L = 1$) với $f_0^2 + f_1^2 = 1$. Hàm truyền của kênh là

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} \quad (12-1-56)$$

Với một sự kiện lỗi độ dài n thì

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z^{-1} + \dots + \varepsilon_{n-1} z^{-(n-1)}, \quad n \geq 1 \quad (12-1-57)$$

$$\alpha(z) = F(z)\varepsilon(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n} \quad (12-1-58)$$

Do $\varepsilon_0 \neq 0, \varepsilon_{n-1} \neq 0$ và

$$\delta^2(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \quad (12-1-59)$$

dẫn tới

$$\delta_{min}^2 \geq f_0^2 + f_1^2 = 1$$

Như vậy $\delta_{min}^2 = 1$ khi một lỗi xảy ra, $\varepsilon(z) = \varepsilon_0$. Chúng ta có thể kết luận rằng không có suy hao về SNR trong ước lượng ML dãy ký hiệu thông tin khi sự tán xạ của kênh có độ dài 2.

Ví dụ 12-1-4

ISI điều khiển được đối với hệ thống dùng tín hiệu đáp ứng từng phần có thể coi như được tạo ra bởi kênh có tán xạ theo thời gian. Như vậy ISI do xung nhị phân kép có thể biểu diễn (chuẩn hóa) bằng hàm truyền của kênh:

$$F(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-1} \quad (12-1-60)$$

Tương tự đối với xung nhị phân kép sửa đổi:

$$F(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-2} \quad (12-1-61)$$

Khoảng cách tối thiểu $\delta_{min}^2 = 1$ đối với mọi sự kiện sai có dạng

$$\varepsilon(z) = \pm(1 - z^{-1} - z^{-2} - \dots - z^{-(n-1)}), \quad n \geq 1 \quad (12-1-62)$$

đối với kênh (12-1-60) do $\alpha(z) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-n}$ và

$$\varepsilon(z) = \pm(1 + z^{-2} + z^{-4} + \dots + z^{-2(n-1)}), \quad n \geq 1 \quad (12-1-63)$$

đối với kênh (12-1-61) và $\delta_{min}^2 = 1$ do $\alpha(z) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-2n}$.

Như vậy MLSE đối với cả hai loại tín hiệu này không bị suy hao SNR. Hằng số $K_{\delta_{min}}$ với cả hai tín hiệu này cũng tính được dễ dàng. Số ký hiệu sai gần với các sự kiện sai trong (12-1-62) và (12-1-63) là 2 nên

$$K_{\delta_{min}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M-1}{M} \right)^n = 2(M-1) \quad (12-1-64)$$

Khi không tiền mã hóa, các sự kiện sai tạo ra n ký hiệu sai nên

$$K_{\delta_{min}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{M-1}{M} \right)^n = 2M(M-1) \quad (12-1-65)$$

Bây giờ ta tính δ_{min}^2 từ dạng bậc hai trong (12-1-44). Do ma trận A là xác định dương nên các giá trị riêng cũng dương. Nếu $\{\mu_k(\varepsilon)\}$ là các giá trị riêng và $\{v_k(\varepsilon)\}$ là các vectơ riêng trực chuẩn tương ứng của A đối với sự kiện lỗi ε thì

$$\delta^2(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{L+1} \mu_k(\varepsilon) [f' v_k(\varepsilon)]^2 \quad (12-1-66)$$

Nói cách khác thì $\delta^2(\varepsilon)$ là tổ hợp tuyến tính của bình phương hình chiếu của f trên các vectơ riêng của A . Như vậy

$$\delta_{min}^2 = \min_{\varepsilon} \delta^2(\varepsilon) \quad (12-1-67)$$

Chú ý rằng kênh tồi nhất có độ dài $L+1$ nhận được bằng cách tìm vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng nhỏ nhất. Nếu $\mu_{min}(\varepsilon)$ là giá trị riêng nhỏ nhất với sự kiện lỗi ε và $v_{min}(\varepsilon)$ là vectơ riêng tương ứng thì

$$\mu_{min} = \min_{\varepsilon} \mu_{min}(\varepsilon)$$

$$f = \min_{\varepsilon} v_{min}(\varepsilon)$$

$$\delta_{min}^2 = \mu_{min}$$

Ví dụ 10-1-5

Xác định kênh tồi nhất có độ dài 3 ($L=2$) bằng cách tìm giá trị riêng tối thiểu của ma trận A với các sự kiện lỗi khác nhau.

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$$

với f_0, f_1, f_2 là các thành phần của vectơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng nhỏ nhất. Một sự kiện lỗi có dạng

$$\varepsilon(z) = 1 - z^{-1}$$

có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

có các giá trị riêng $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2 + \sqrt{2}, \mu_3 = 2 - \sqrt{2}$. Vectơ riêng ứng với μ_3 là

$$v'_3 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \right]$$

Ta xét sự kiện lỗi kép

$$\varepsilon(z) = 1 + z^{-1}$$

và ma trận tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ma trận này có các giá trị riêng giống ma trận trên và vectơ sinh ứng với $\mu_3 = 2 - \sqrt{2}$ là

$$v'_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Mọi sự kiện sai khác đều tạo ra giá trị lớn hơn μ_{min} và trường hợp tối nhất của kênh là một trong hai trường hợp:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

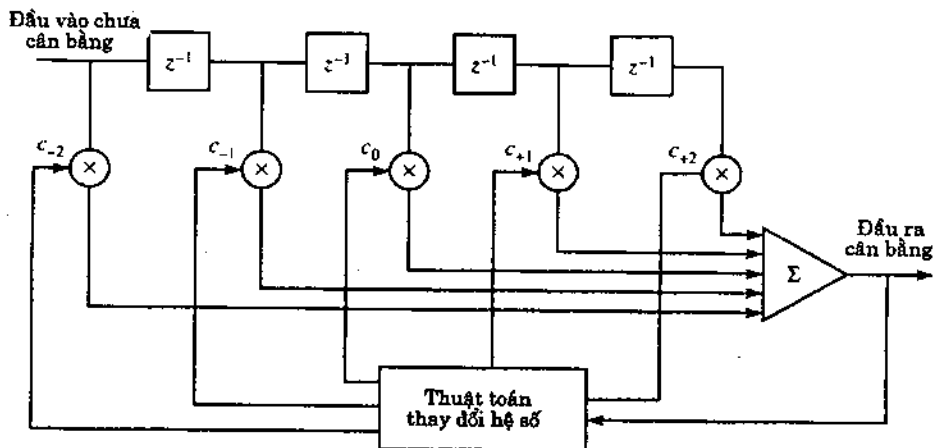
12-2 Cân bằng tuyến tính

Ước lượng ML cho kênh có ISI có độ phức tạp tính toán cao. Nếu bộ ký hiệu có M ký hiệu và số ký hiệu bị ISI là L thì thuật toán Viterbi phải tính M^{L+1} độ đo với mỗi ký hiệu mới nhận được. Trong đa số trường hợp trong thực tế điều này rất khó thực hiện. Trong phần này và phần sau, ta sẽ trình bày hai phương pháp cân bằng gần tối ưu để bù lại ISI. Một phương pháp là dùng bộ lọc tuyến tính, có độ phức tạp tính toán là hàm tuyến tính theo L .

Bộ lọc tuyến tính thường được sử dụng có sơ đồ khối như trên hình 12-2-1. Đầu vào là dãy $\{v_k\}$ trong (12-1-16) và đầu ra là ước lượng của dãy thông tin $\{\hat{I}_k\}$:

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \quad (12-2-1)$$

với $\{c_j\}$ là $2L + 1$ hệ số của bộ lọc. Giá trị ước lượng được $\hat{I}_k$ được lượng tử về ký hiệu thông tin gần nhất và giá trị xác định được là $\tilde{I}_k$.



Hình 12-2-1: Bộ lọc tuyến tính

Do hiệu quả của một hệ thống truyền thông số thường được đánh giá bởi xác suất lỗi trung bình nên người ta có thể lựa chọn một cách tối ưu các giá trị $\{c_j\}$ để tối thiểu hóa chỉ số đánh giá độ hiệu quả. Tuy nhiên xác suất lỗi là hàm phi tuyến của $\{c_j\}$ nên thông thường người ta không dùng phương pháp vừa nêu mà dùng một trong hai tiêu chuẩn: *Tiêu chuẩn suy hao định* và *Tiêu chuẩn trung bình bình phương sai số*.

12-2-1 Tiêu chuẩn suy hao đỉnh

Suy hao đỉnh được định nghĩa là trường hợp ISI tồi nhất ở đầu ra của bộ cân bằng. Tối thiểu hóa chỉ số hiệu quả này gọi là *tiêu chuẩn suy hao đỉnh*.

Bộ cân bằng độ dài vô hạn Việc ghép nối tiếp mô hình kênh tuyến tính có đáp ứng xung $\{f_n\}$ với bộ cân bằng có đáp ứng xung $\{c_n\}$ có thể biểu diễn bởi một bộ lọc tương đương có đáp ứng xung

$$q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} \quad (12-2-2)$$

Đầu ra của bộ cân bằng tại thời điểm lấy mẫu thứ k là

$$\hat{I}_k = q_0 I_k + \sum_{n \neq k} I_n q_{k-n} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \eta_{k-j} \quad (12-2-3)$$

Thành phần đầu tiên trong công thức trên là ký hiệu thông tin mong muốn, ta có thể chuẩn hóa $q_0 = 1$. Thành phần thứ hai là ISI. Giá trị đỉnh của nó gọi là suy hao đỉnh

$$D(c) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |q_n| = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} \right| \quad (12-2-4)$$

$D(c)$ gọi là hàm trọng lượng các hệ số của bộ cân bằng.

Chúng ta có thể chọn các hệ số để $D(c) = 0$ hay $q_n = 0$ với mọi n trừ $n = 0$, điều đó có nghĩa là có thể loại trừ hoàn toàn ISI. Các hệ số được xác định qua quan hệ:

$$q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (12-2-5)$$

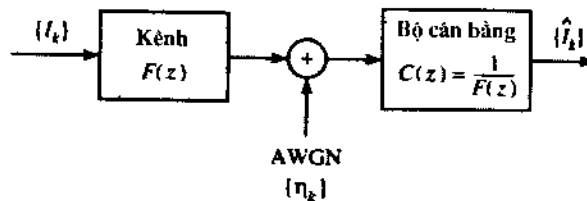
Lấy biến đổi z của (12-2-5) ta có

$$Q(z) = C(z)F(z) = 1 \quad (12-2-6)$$

hay

$$C(z) = \frac{1}{F(z)} \quad (12-2-7)$$

Bộ cân bằng như vậy có hàm truyền $C(z)$ chính là bộ lọc đảo của $F(z)$. Chúng ta gọi bộ lọc này là *bộ lọc ZF* (zero-forcing filter). Hình 12-2-2 biểu diễn bộ lọc này.



Hình 12-2-2: Sơ đồ khối của kênh với bộ cân bằng ZF

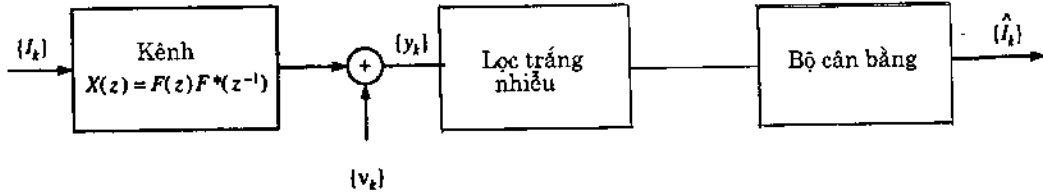
Ghép nối tiếp của bộ lọc làm trắng nhiễu có hàm truyền $1/F^*(z^{-1})$ và bộ lọc ZF có hàm truyền $1/F(z)$ tạo nên bộ cân bằng ZF tương đương có hàm truyền

$$C'(z) = \frac{1}{F(z)F^*(z^{-1})} = \frac{1}{X(z)} \quad (12-2-8)$$

như trên hình 12-2-3. Bộ lọc tương đương này có đầu vào là dãy $\{y_k\}$ chính là các mẫu của bộ lọc phối hợp trong (12-1-10). Đầu ra của bộ lọc tương đương là các ký hiệu chỉ bị ảnh hưởng bởi nhiễu cộng gaussian có giá trị trung bình bằng 0. Đáp ứng xung của bộ lọc là

$$c'_k = \frac{1}{2\pi j} \oint C'(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{k-1}}{X(z)} dz \quad (12-2-9)$$

tích phân được lấy theo một đường khép kín trong miền hội tụ của $C'(z)$. Do $X(z)$ là đa thức có $2L$ nghiệm như đã nói trong phần trước nên $C'(z)$ phải hội tụ trong miền chứa đường tròn đơn vị. Như vậy tích phân có thể lấy theo đường tròn đơn vị.



Hình 12-2-3: Kênh và bộ cân bằng ZF tương đương

Để đánh giá hiệu quả của bộ cân bằng ta chuẩn hóa năng lượng của tín hiệu nhận được bằng đơn vị. Điều đó có nghĩa là $q_0 = 1$ và giá trị trung bình của $|I_k|^2$ cũng là đơn vị. Khi đó SNR chính là nghịch đảo của sai phương nhiễu ở đầu ra bộ cân bằng.

Giá trị của σ_n^2 xác định được bằng cách quan sát dãy nhiễu $\{v_k\}$ ở đầu vào của bộ cân bằng ZF tương đương. Nhiễu có giá trị trung bình bằng 0 và phổ mật độ công suất là

$$\Phi_{vv}(\omega) = N_0 X(e^{j\omega T}), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (12-2-10)$$

Do $C'(z) = 1/X(z)$ nên nhiễu ở đầu ra bộ cân bằng có phổ mật độ công suất

$$\Phi_{nn}(\omega) = \frac{N_0}{X(e^{j\omega T})}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (12-2-11)$$

Từ đó sai phương của nhiễu ở đầu ra bộ cân bằng là

$$\sigma_n^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_{nn}(\omega) d\omega = \frac{TN_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{X(e^{j\omega T})} \quad (12-2-12)$$

và SNR của bộ cân bằng ZF là

$$\gamma_\infty = 1/\sigma_n^2 = \left[\frac{TN_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{X(e^{j\omega T})} \right]^{-1} \quad (12-2-13)$$

Ta thấy $X(e^{j\omega T})$ có liên hệ với bộ lọc tương tự $H(\omega)$ ở bộ thu. Do quan hệ Parseval nên

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t + kT) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega kT} d\omega \quad (12-2-14)$$

Nhưng tích phân trong (12-2-14) có thể biểu diễn thành dạng

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H \left(\omega + \frac{2\pi n}{T} \right) \right|^2 \right] e^{j\omega kT} d\omega \quad (12-2-15)$$

Biến đổi Furiê của $\{x_k\}$ là

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega kT} \quad (12-2-16)$$

và biến đổi ngược là

$$x_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega kT} d\omega \quad (12-2-17)$$

So sánh (12-2-15) và (12-2-17) ta nhận được qua hệ giữa $H(\omega)$ và $X(e^{j\omega T})$:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H \left(\omega + \frac{2\pi n}{T} \right) \right|^2, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (12-2-18)$$

Như vậy $X(e^{j\omega T})$ là xếp chồng của $|H(\omega)|^2$. Chúng ta cũng thấy rằng $|H(\omega)|^2 = X(\omega)$. Thay $X(e^{j\omega T})$ trong (12-2-13) sử dụng (12-2-18) cho ta

$$\gamma_{\infty} = \left[\frac{T^2 N_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega + 2\pi n/T)|^2} \right]^{-1} \quad (12-2-19)$$

Chúng ta thấy rằng mẫu số trong công thức trên có những điểm 0, khi đó tích phân tiến tới vô hạn và SNR tiến tới 0. Như vậy hiệu quả bộ cân bằng rất thấp khi xếp chồng phổ bằng 0 hay rất nhỏ. Điều này là do cùng với việc loại bỏ ISI thì bộ cân bằng cũng làm tăng nhiễu cộng. Một kênh lý tưởng và tín hiệu được thiết kế để không có ISI sẽ có xếp chồng phổ thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H \left(\omega + \frac{2\pi n}{T} \right) \right|^2 = T \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (12-2-20)$$

Trong trường hợp này, SNR đạt giá trị cực đại

$$\gamma_{\infty} = \frac{1}{N_0} \quad (12-2-21)$$

Bộ cân bằng độ dài hữu hạn Xét bộ cân bằng có $2K+1$ hệ số. Như vậy $c_j = 0$ với $|j| > K$ và tổng chấp của $\{c_n\}$ với $\{f_n\}$ bằng 0 ngoài khoảng $-K \leq n \leq K+L-1$. Với q_0 chuẩn hóa bằng đơn vị thì suy hao dinh là

$$D(c) = \sum_{\substack{n=-K \\ n \neq 0}}^{K+L-1} |q_n| = \sum_{\substack{n=-K \\ n \neq 0}}^{K+L-1} \left| \sum_j c_j f_{n-j} \right| \quad (12-2-22)$$

Mặc dù bộ cân bằng có $2K+1$ hệ số có thể thay đổi được nhưng có $2K+L$ giá trị khác 0 trong $\{q_n\}$. Như vậy nói chung không thể loại bỏ hoàn toàn ISI ở đầu ra bộ cân bằng. Vấn đề chỉ là tối thiểu $D(c)$ theo các hệ số $\{c_j\}$.

Độ suy hao dinh trong công thức (12-2-22) người ta chứng minh được là hàm lồi và như vậy nó có một cực tiểu toàn cục và không có cực tiểu địa phương nào. Việc tối thiểu hóa có thể thực hiện bằng

phương pháp số. Tuy nhiên trong một trường hợp đặc biệt nhưng quan trọng thì người ta biết nghiệm của bài toán tối ưu. Đó là trường hợp suy hao ở đầu vào bộ cân bằng được định nghĩa là

$$D_0 = \frac{1}{|f_0|} \sum_{n=1}^L |f_n| \quad (12-2-23)$$

nhỏ hơn 1. Trong trường hợp này, suy hao định $D(c)$ được tối thiểu hóa bằng cách chọn các hệ số để $q_n = 0, 1 \leq |n| \leq K$ và $q_0 = 1$. Tuy nhiên các giá trị $\{q_n\}$ với $K+1 \leq n \leq K+L-1$ là khác 0. Điều này tạo ra ISI ở đầu ra của bộ cân bằng.

12-2-2 Tiêu chuẩn trung bình bình phương sai số

Trong tiêu chuẩn MSE, các hệ số $\{c_j\}$ được lựa chọn để tối thiểu hóa trung bình bình phương sai số

$$\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k \quad (12-2-24)$$

Khi các ký hiệu mang thông tin $\{I_k\}$ là phức thì chỉ số hiệu quả của tiêu chuẩn MSE, ký hiệu là J , được định nghĩa là

$$J = E|\varepsilon_k|^2 = E|I_k - \hat{I}_k|^2 \quad (12-2-25)$$

Mặt khác, khi các ký hiệu mang thông tin là thực thì chỉ số hiệu quả chỉ là bình phương phần thực của ε_k . Sau đây ta xét việc tối ưu hóa hàm phức trong (12-2-25)

Bộ cân bằng độ dài vô hạn Ta có

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j} \quad (12-2-26)$$

Thay (12-2-26) vào (12-2-25) và khai triển kết quả tạo ra hàm bậc hai của $\{c_j\}$. Hàm này có thể tối thiểu hóa theo $\{c_j\}$ bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính theo $\{c_j\}$. Mặt khác, hệ phương trình tuyến tính cũng có thể nhận được bằng cách sử dụng tính trực giao trong MSE, có nghĩa là ta sẽ chọn $\{c_j\}$ sao cho sai số ε_k trực giao với dãy tín hiệu $\{v_{k-l}^*\}$ với $-\infty < l < \infty$.

$$E(\varepsilon_k v_{k-l}^*) = 0, \quad -\infty < l < \infty \quad (12-2-27)$$

Thay ε_k vào (12-2-27) dẫn tới

$$E \left[\left(I_k - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j} \right) v_{k-l}^* \right] = 0$$

hay tương đương là

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E(v_{k-j} v_{k-l}^*) = E(I_k v_{k-l}^*), \quad -\infty < l < \infty \quad (12-2-28)$$

Để tính các momen trong (12-2-28) ta sử dụng biểu thức của v_k trong (12-1-16) và nhận được

$$\begin{aligned} E(v_{k-j} v_{k-l}^*) &= \sum_{n=0}^L f_n^* f_{n+l-j} + N_0 \delta_{lj} \\ &= \begin{cases} x_{l-j} + N_0 \delta_{lj} & (|l-j| \leq L) \\ 0 & (|l-j| > L) \end{cases} \end{aligned} \quad (12-2-29)$$

và

$$E(I_k v_{k-l}^*) = \begin{cases} f_{-l}^* & (-L \leq l \leq 0) \\ 0 & (\text{các giá trị khác}) \end{cases} \quad (12-2-30)$$

Thay (12-2-29), (12-2-30) vào (12-2-28) lấy biến đổi z cả hai vế ta nhận được

$$C(z)[F(z)F^*(z^{-1}) + N_0] = F^*(z^{-1}) \quad (12-2-31)$$

Như vậy hàm truyền của bộ cân bằng dựa trên tiêu chuẩn MSE là

$$C(z) = \frac{F^*(z^{-1})}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} \quad (12-2-32)$$

Khi bộ lọc làm trắng nhiễu được ghép với $C(z)$ ta có hàm truyền của bộ cân bằng tương đương là

$$C'(z) = \frac{1}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} = \frac{1}{X(z) + N_0} \quad (12-2-33)$$

So sánh hai tiêu chuẩn chúng ta thấy khi N_0 rất nhỏ so với tín hiệu thì các hệ số của bộ cân bằng là xấp xỉ nhau. Để xác định lượng ISI và nhiễu cộng, ta tính giá trị tối thiểu của J , ký hiệu là J_{min} khi $C(z)$ tính theo (12-2-32). Từ $J = E|\varepsilon_k|^2 = E(\varepsilon_k I_k^*) - E(\varepsilon_k \hat{I}_k^*)$ và $E(\varepsilon_k \hat{I}_k^*) = 0$ do điều kiện trực giao nên

$$\begin{aligned} J_{min} &= E(\varepsilon_k I_k^*) \\ &= E|I_k|^2 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E(v_{k-j} I_k^*) \\ &= 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{-j} \end{aligned} \quad (12-2-34)$$

Dạng như trên của J_{min} không thuận tiện khi sử dụng mà thường người ta chuyển sang dạng tần số. Gọi $\{b_k\}$ là tổng chập của hai dãy $\{c_j\}$, $\{f_j\}$ thì tổng trong (12-2-34) bằng b_0 . Biến đổi z của dãy $\{b_k\}$ là

$$B(z) = C(z)F(z) = \frac{F(z)F^*(z^{-1})}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} = \frac{X(z)}{X(z) + N_0} \quad (12-2-35)$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{B(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(z)}{z[X(z) + N_0]} dz \quad (12-2-36)$$

Bằng cách đổi biến ta tìm được

$$b_0 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \quad (12-2-37)$$

Cuối cùng, thay (12-2-37) vào (12-2-34) ta có

$$\begin{aligned} J_{min} &= 1 - \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega + 2\pi n/T)|^2 + N_0} d\omega \end{aligned} \quad (12-2-38)$$

Khi không có ISI, $X(e^{i\omega T}) = 1$ dẫn tới

$$J_{min} = \frac{N_0}{N_0 + 1} \quad (12-2-39)$$

Ta nhận thấy rằng $0 \leq J_{min} \leq 1$ và mối quan hệ giữa J_{min} và γ_∞ (chuẩn hóa năng lượng đơn vị) phải là

$$\gamma_\infty = \frac{1 - J_{min}}{J_{min}} \quad (12-2-40)$$

Hơn nữa, quan hệ giữa J_{min} và γ_∞ trên cũng đúng khi có ISI và nhiễu cộng.

Bộ cân bằng độ dài hữu hạn Đầu ra bộ cân bằng tại thời điểm thứ k là

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \quad (12-2-41)$$

Chỉ số hiệu quả của phương pháp MSE, ký hiệu là $J(K)$ là

$$J(K) = E|I_k - \hat{I}_k|^2 = E \left| I_k - \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \right|^2 \quad (12-2-42)$$

Tối thiểu hóa $J(K)$ theo $\{c_j\}$ là làm cho sai số $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ trực giao với các mẫu tín hiệu v_{j-l}^* , $|l| \leq K$, tạo nên các phương trình:

$$\sum_{j=-K}^K c_j G_{lj} = \xi_l, \quad |l| \leq K \quad (12-2-43)$$

với

$$G_{lj} = \begin{cases} x_{l-j} + N_0 \delta_{lj} & (|l-j| \leq L) \\ 0 & (|l-j| > L) \end{cases} \quad (12-2-44)$$

$$\xi_l = \begin{cases} f_{-l}^* & (-L \leq l \leq 0) \\ 0 & (\text{các giá trị khác}) \end{cases} \quad (12-2-45)$$

Ta biểu diễn hệ phương trình tuyến tính dưới dạng ma trận.

$$\mathbf{GC} = \xi \quad (12-2-46)$$

$\mathbf{C}$ là vectơ cột gồm $2L + 1$ hệ số. $\mathbf{G}$ là ma trận $(2K + 1) \times (2K + 1)$, là ma trận hiệp biến Hermitian và ξ là vectơ cột $2K + 1$ phần tử. Nghiệm của (12-2-46) là

$$\mathbf{C}_{opt} = \mathbf{G}^{-1} \xi \quad (12-2-47)$$

Các hệ số được tối ưu trong (12-2-47) sẽ làm tối thiểu chỉ số hiệu quả $J(K)$ và

$$J_{min}(K) = 1 - \sum_{j=-K}^0 c_j f_{-j} = 1 - \xi^{t*} \mathbf{G}^{-1} \xi \quad (12-2-48)$$

12-2-3 Hiệu quả của bộ ước lượng MSE

Trong phần này ta xét độ hiệu quả của bộ cân bằng tuyến tính được tối ưu hóa bằng tiêu chuẩn MSE. Cả tối thiểu hóa MSE lẫn xác suất sai đều được sử dụng để tính độ hiệu quả trong một số kênh truyền thông.

Ví dụ 12-2-1

Xét mô hình kênh rời rạc tương đương có hai thành phần f_0, f_1 và được chuẩn hóa $|f_0|^2 + |f_1|^2 = 1$. Như vậy

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} \quad (12-2-49)$$

$$X(z) = f_0 f_1^* z + 1 + f_0^* f_1 z^{-1} \quad (12-2-50)$$

Đáp ứng tần số tương ứng là

$$X(e^{j\omega T}) = f_0 f_1^* e^{j\omega T} + 1 + f_0^* f_1 e^{-j\omega T} = 1 + 2|f_0||f_1| \cos(\omega T + \theta) \quad (12-2-51)$$

θ là góc của $f_0 f_1^*$. Chú ý rằng đáp ứng tần số của kênh bằng 0 khi $\omega = \pi/T$ với $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Tính tích phân trong (12-2-38) cùng với (12-2-51) ta có kết quả

$$\begin{aligned} J_{min} &= \frac{N_0}{\sqrt{N_0^2 + 2N_0(|f_0|^2 + |f_1|^2) + (|f_0|^2 - |f_1|^2)^2}} \\ &= \frac{N_0}{\sqrt{N_0^2 + 2N_0 + (|f_0|^2 - |f_1|^2)^2}} \end{aligned} \quad (12-2-52)$$

Trong trường hợp $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ thì $J_{min} = N_0/\sqrt{N_0^2 + 2N_0}$ và SNR đầu ra tương ứng là

$$\gamma_{\infty} = \sqrt{1 + \frac{2}{N_0}} - 1 \approx \left(\frac{2}{N_0}\right)^{1/2}, \quad N_0 \ll 1 \quad (12-2-53)$$

Khi không có ISI thì SNR là $1/N_0$. Rõ ràng có sự suy hao đáng kể về SNR đối với kênh này.

Ví dụ 12-2-2

Xét $f_k = \sqrt{1 - a^2} a^k, k = 0, 1, \dots$ với $a < 1$. Biến đổi Furiê của dãy này là

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos \omega T} \quad (12-2-54)$$

hàm này cực tiểu tại $\omega = \pi/T$. SNR đầu ra của kênh là

$$\gamma_{\infty} = \left(\sqrt{1 + 2N_0 \frac{1 + a^2}{1 - a^2}} + N_0^2 - 1 \right)^{-1} \approx \frac{1 - a^2}{(1 + a^2)N_0}, \quad N_0 \ll 1 \quad (12-2-55)$$

Như vậy suy hao về SNR do có ISI là

$$10 \log_{10} \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2} \right)$$

Xác suất lỗi của bộ cân bằng MSE tuyến tính Ta biết rằng J_{min} hay γ không liên quan trực tiếp tới xác suất lỗi, đó là do bộ cân bằng tuyến tính MSE vẫn có ISI tại đầu ra. Lượng ISI này không phải được đặc trưng hoàn toàn bằng nhiễu cộng gaussian và như vậy SNR đầu ra không thể chuyển một cách đơn giản thành xác suất lỗi được.

Ta xét phương pháp tính xác suất sai sau đây. Giả sử ta sử dụng tín hiệu PAM và các ký hiệu thông tin nhận một giá trị trong tập giá trị $2n - M - 1, n = 1, 2, \dots, M$ đồng xác suất. Xét việc xác định ký hiệu I_n :

$$\hat{I}_n = q_0 I_n + \sum_{k \neq n} I_k q_{n-k} + \sum_{j=-K}^K c_j \eta_{n-j} \quad (12-2-56)$$

$$q_n = \sum_{k=-K}^K c_k f_{n-k} \quad (12-2-57)$$

Tín hiệu vào bộ cân bằng là

$$v_k = \sum_{j=0}^L f_j I_{k-j} + \eta_k \quad (12-2-58)$$

Thành phần thứ nhất trong vế phải của (12-2-56) là ký hiệu mong muốn, thành phần giữa là ISI và thành phần còn lại là nhiễu gaussian. Sai phương của nhiễu là

$$\sigma_n^2 = N_0 \sum_{j=-K}^K c_j^2 \quad (12-2-59)$$

Với bộ cân bằng có $2K + 1$ hệ số và đáp ứng của kênh có trong vòng $L + 1$ ký hiệu thì số ký hiệu bị ISI là $2K + L$. Ta định nghĩa

$$D = \sum_{k \neq n} I_k q_{n-k} \quad (12-2-60)$$

Với một dãy $2K + L$ ký hiệu thông tin, ký hiệu I_J thì thành phần $D \equiv D_J$ là cố định. Xác suất lỗi với một giá trị D_J cố định là

$$\begin{aligned} P_M(D_J) &= 2 \frac{M-1}{M} P(N + D_J > q_0) \\ &= 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{(q_0 - D_J)^2}{\sigma_n^2}} \right) \end{aligned} \quad (12-2-61)$$

N là thành phần nhiễu cộng. Xác suất lỗi trung bình có thể nhận được bằng cách lấy trung bình $PM(D_J)$ theo mọi dãy có thể:

$$\begin{aligned} PM &= \sum_{I_J} P_M(D_J) P(I_J) \\ &= 2 \frac{M-1}{M} \sum_{I_J} Q \left(\sqrt{\frac{(q_0 - D_J)^2}{\sigma_n^2}} \right) P(I_J) \end{aligned} \quad (12-2-62)$$

Khi mọi dãy là đồng khả năng

$$P(I_J) = \frac{1}{M^{2K+L}} \quad (12-2-63)$$

Thành phần $P_M(D_J)$ được xác định bằng dãy có giá trị D_J lớn nhất. Điều này xảy ra khi $I_n = \pm(M-1)$ và dấu của ký hiệu thông tin là dấu của q_n . Như vậy

$$D_J^* = (M-1) \sum_{k \neq 0} |q_k|$$

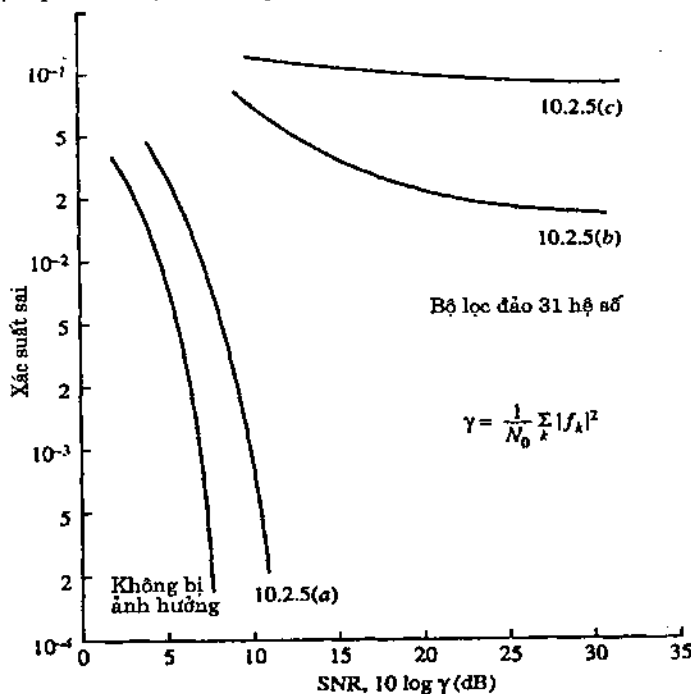
và

$$P_M(D_J^*) = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{q_0^2}{\sigma_n^2} \left(1 - \frac{M-1}{q_0} \sum_{k \neq 0} |q_k| \right)^2} \right) \quad (12-2-64)$$

Như vậy giới hạn trên của xác suất lỗi trung bình khi đây các ký hiệu đồng khả năng là

$$P_M \leq P_M(D_J^*) \quad (12-2-65)$$

Giới hạn về độ hiệu quả của bộ cân bằng tuyến tính khi ISI lớn được vẽ trên hình 12-2-4.



Hình 12-2-4: Xác suất sai của bộ cân bằng tuyến tính

12-2-4 Bộ cân bằng FS

Cấu trúc của bộ cân bằng tuyến tính là các hệ số đặt cách nhau một khoảng là nghịch đảo của tốc độ ký hiệu. Bộ cân bằng như thế là tối ưu nếu bộ lọc phối hợp với xung truyền qua kênh. Khi không biết đặc điểm của kênh, bộ lọc thu thường là phối hợp với xung tín hiệu truyền đi và thời điểm lấy mẫu được tối ưu hóa cho bộ lọc gần tối ưu này. Nói chung, phương pháp này tạo ra bộ cân bằng rất nhạy cảm với thời điểm lấy mẫu.

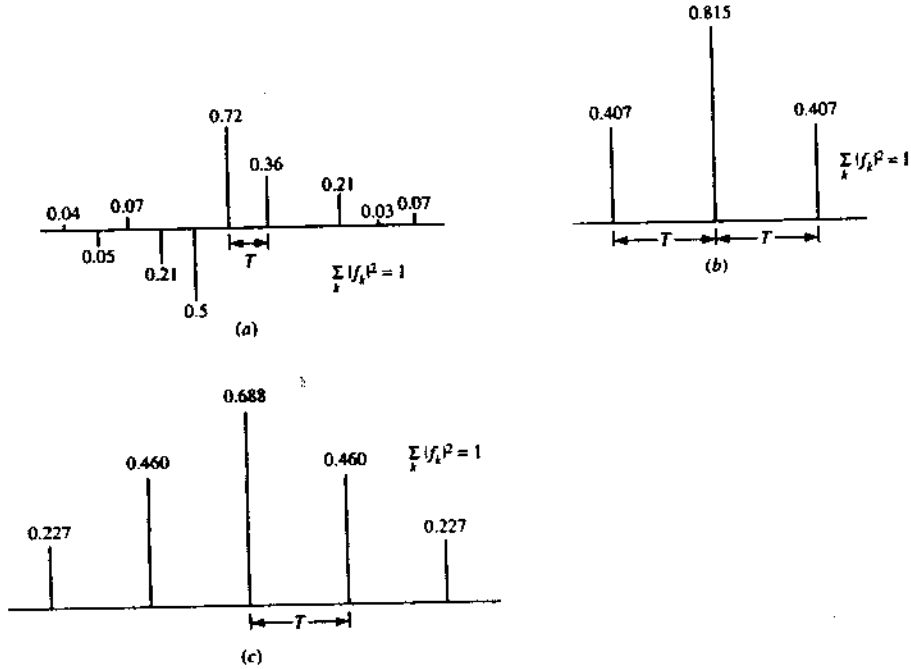
Giới hạn của bộ cân bằng tuyến tính thể hiện rất rõ trong miền tần số. Từ (11-2-5), phổ tín hiệu ở đầu vào bộ cân bằng là

$$Y_T(f) = \frac{1}{T} \sum_n X \left(f - \frac{n}{T} \right) e^{j2\pi(f-n/T)\tau_0} \quad (12-2-66)$$

Ta thấy $Y_T(f)$ là xếp chồng phổ với tần số là $1/2T$. Phổ tín hiệu nhận được phụ thuộc vào độ trễ khi lấy mẫu τ_0 . Phổ tín hiệu ở đầu ra bộ cân bằng là $C_T(f)Y_T(f)$,

$$C_T(f) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{-j2\pi f k T} \quad (12-2-67)$$

Rõ ràng là bộ cân bằng tuyến tính chỉ bù cho đáp ứng tần số của tín hiệu nhận được và không bù cho sự suy hao của kênh trong $X(f)e^{j2\pi f\tau_0}$.



Hình 12-2-5: Ba kênh rời rạc theo thời gian

Bộ cân bằng FS (fractionally spaced equalizer) dựa trên việc lấy mẫu tín hiệu nhận được với tốc độ ít nhất bằng tốc độ Nyquist. Ví dụ tín hiệu truyền đi gồm các xung có phổ dạng cosin với hệ số β , giá trị cực đại của phổ là $F_{max} = (1 + \beta)/2T$ thì tín hiệu sẽ được lấy mẫu ở phía thu với tốc độ (hay tần số):

$$2F_{max} = \frac{1 + \beta}{T} \quad (12-2-68)$$

và được cho qua bộ cân bằng với các hệ số cách nhau một khoảng là $T/(\beta + 1)$. Tổng quát, bộ cân bằng FS có các hệ số cách nhau MT/N với M, N là các số nguyên và $N > M$. Thông thường bộ cân bằng $\frac{1}{2}T$ được sử dụng trong thực tế. Đáp ứng tần số của bộ cân bằng FS là

$$C_{T'}(f) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{-j2\pi f k T'} \quad (12-2-69)$$

với $T' = MT/N$, dẫn tới $C_{T'}(f)$ có thể cân bằng phổ tín hiệu nhận được dưới tần số Nyquist $f = 1/2T$ thành $f = (1 + \beta)/T = N/MT$. Phổ của tín hiệu đã cân bằng là

$$\begin{aligned} C_{T'}(f)Y_{T'}(f) &= C_{T'}(f) \sum_n X\left(f - \frac{n}{T'}\right) e^{j2\pi(f - n/T')\tau_0} \\ &= C_{T'}(f) \sum_n X\left(f - \frac{nN}{MT}\right) e^{j2\pi(f - nN/MT)\tau_0} \end{aligned} \quad (12-2-70)$$

Do $X(f) = 0$ với $|f| > N/MT$ nên (12-2-70) được biểu diễn thành

$$C_{T'}(f)Y_{T'}(f) = C_{T'}(f)X(f)e^{j2\pi f\tau_0}, \quad |f| \leq \frac{1}{2T'} \quad (12-2-71)$$

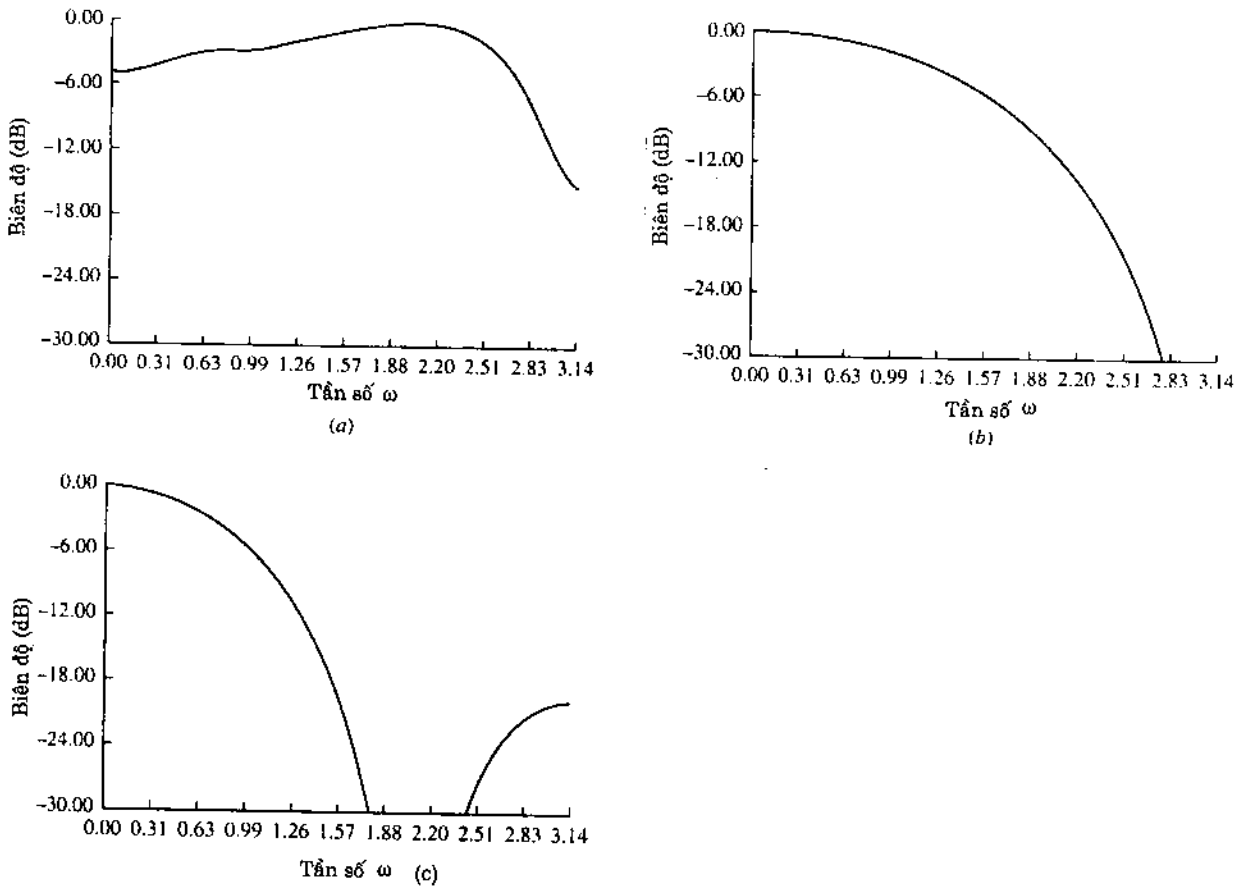
Như vậy bộ cân bằng FS bù lại sự suy hao trên kênh trong tín hiệu nhận được trước khi sự nhập nhằng ảnh hưởng tới tốc độ lấy mẫu ký hiệu. Nói cách khác, $C_{T'}(f)$ có thể bù lại các dịch chuyển về pha.

Đầu ra của bộ cân bằng FS được lấy mẫu ở tốc độ ký hiệu $1/T$ và có phổ

$$\sum_n C_{T'} \left(f - \frac{k}{T} \right) X \left(f - \frac{k}{T} \right) e^{j2\pi(f-k/T)\tau_0} \quad (12-2-72)$$

Bây giờ ta xét sự thay đổi các hệ số của bộ cân bằng FS. Đầu vào bộ cân bằng FS có thể biểu diễn dưới dạng:

$$y \left(\frac{kMT}{N} \right) = \sum_n I_n x \left(\frac{kMT}{N} - nT \right) + v \left(\frac{kMT}{N} \right) \quad (12-2-73)$$



Hình 12-2-6: Đặc tuyến biên tần của các kênh trong hình 12-2-5

Trong mỗi khoảng thời gian ký hiệu, ký hiệu ước lượng được là

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-K}^K c_n y \left(kT - \frac{nMT}{N} \right) \quad (12-2-74)$$

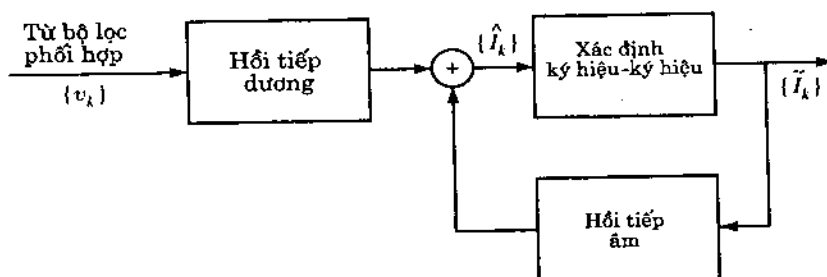
ở đây các hệ số được lựa chọn để tối thiểu hóa MSE. Từ đó ta có hệ phương trình tuyến tính có nghiệm là

$$\mathbf{C}_{opt} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{\alpha} \quad (12-2-75)$$

A là ma trận hiệp biến của số liệu vào và α là vectơ tương quan chéo.

12-3 Cân bằng hồi tiếp

Bộ cân bằng hồi tiếp (decision-feedback equalizer-DFE) được vẽ trên hình 12-3-1, gồm có hai bộ lọc hồi tiếp, một bộ hồi tiếp dương và một bộ hồi tiếp âm. Cả hai bộ đều có các hệ số cách nhau khoảng thời gian bằng khoảng thời gian ký hiệu. Đầu vào của phần hồi tiếp dương là dãy ký hiệu nhận được $\{v_k\}$ và bộ lọc này giống hệt với bộ lọc trong bộ cân bằng tuyến tính. Đầu vào của bộ hồi tiếp âm là dãy ký hiệu đã xác định được trước đó. Về mặt chức năng thì bộ lọc hồi tiếp âm được sử dụng để loại bỏ lượng ISI trong ký hiệu hiện thời do các ký hiệu trước gây ra.



Hình 12-3-1: Cấu trúc bộ cân bằng hồi tiếp

12-3-1 Tối ưu hệ số

Đầu ra của bộ cân bằng được biểu diễn bởi

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K_1}^0 c_j v_{k-j} + \sum_{j=1}^{K_2} c_j \tilde{I}_{k-j} \quad (12-3-1)$$

Ở đây ta giả thiết bộ cân bằng có $K_1 + 1$ hệ số trong phần hồi tiếp dương và K_2 hệ số trong phần hồi tiếp âm. Bộ cân bằng là phi tuyến do phần hồi tiếp âm có chứa các ký hiệu đã xác định trước $\{\tilde{I}_k\}$.

Cả hai tiêu chuẩn suy hao dinh và tối thiểu hóa MSE đều có thể sử dụng để tối ưu các hệ số của bộ cân bằng hồi tiếp. Do tiêu chuẩn MSE dễ thực hiện hơn trong thực tế nên ta tập trung vào tiêu chuẩn này. Giả thiết các ký hiệu xác định được trong các thời điểm trước là đúng, việc tối thiểu hóa MSE

$$J(K_1, K_2) = E|I_k - \hat{I}_k|^2 \quad (12-3-2)$$

dẫn tới hệ phương trình tuyến tính của các hệ số bộ lọc hồi tiếp dương

$$\sum_{j=-K_1}^0 \psi_{lj} c_j = f_{-l}^*, \quad l = -K_1, \dots, 0 \quad (12-3-3)$$

trong đó

$$\psi_{lj} = \sum_{m=0}^{-l} f_m^* f_{m+l-j} + N_0 \delta_{lj}, \quad l, j = -K_1, \dots, 0 \quad (12-3-4)$$

Các hệ số của bộ lọc hồi tiếp âm được xác định qua các hệ số của bộ hồi tiếp dương

$$c_k = - \sum_{j=-K_1}^0 c_j f_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots, K_2 \quad (12-3-5)$$

Các hệ số của bộ lọc hồi tiếp âm có thể loại bỏ hoàn toàn ISI miễn là các ký hiệu xác định trước là đúng và $K_2 \gg L$.

12-3-2 Hiệu quả của bộ cân bằng hồi tiếp

Khi việc xác định không gặp lỗi, Giá trị MSE tối thiểu là

$$J_{min}(K_1) = 1 - \sum_{j=-K_1}^0 c_j f_{-j} \quad (12-3-6)$$

Khi $K_1 \rightarrow \infty$ thì MSE sẽ tối thiểu và ký hiệu giá trị đó là J_{min} và người ta tìm được

$$J_{min} = \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} \right] d\omega \right\} \quad (12-3-7)$$

Giá trị SNR ở đầu ra tương ứng là

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} &= \frac{1 - J_{min}}{J_{min}} \\ &= -1 + \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{X(e^{j\omega T}) + N_0}{N_0} \right] d\omega \right\} \end{aligned} \quad (12-3-8)$$

Ta nhận thấy rằng khi không có ISI, $X(e^{j\omega T}) = 1$ thì $J_{min} = N_0/(1 + N_0)$ và $\gamma_{\infty} = 1/N_0$.

Ví dụ 12-3-1

Ta so sánh giá trị J_{min} của hai bộ cân bằng hồi tiếp và tuyến tính MSE. Xét kênh rời rạc tương đương có hai hệ số f_0 và f_1 . Giá trị MSE tối thiểu cho kênh này là

$$\begin{aligned} J_{min} &= \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0}{1 + N_0 + 2|f_0||f_1| \cos(\omega T + \theta)} \right] d\omega \right\} \\ &= N_0 \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + N_0 + 2|f_0||f_1| \cos \omega) d\omega \right] \\ &= \frac{2N_0}{1 + N_0 + \sqrt{(1 + N_0)^2 - 4|f_0 f_1|^2}} \end{aligned} \quad (12-3-9)$$

Chú ý rằng J_{min} đạt cực đại khi $|f_0| = |f_1| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ nên

$$J_{min} = \frac{2N_0}{1 + N_0 + \sqrt{(1 + N_0)^2 - 1}} \approx 2N_0, \quad N_0 \ll 1 \quad (12-3-10)$$

Giá trị SNR tương ứng là

$$\gamma_{\infty} \approx \frac{1}{2N_0}, \quad N_0 \ll 1 \quad (12-3-11)$$

Như vậy là có sự suy hao 3 dB khi có ISI và độ hiệu quả suy giảm nghiêm trọng đối với cân bằng tuyến tính. SNR đầu ra được cho bởi (12-2-53) là $\gamma_{\infty} \approx (2/N_0)^{1/2}$, $N_0 \ll 1$.

Ví dụ 12-3-2

Xét một kênh có đặc tính suy hao theo hàm mũ như sau

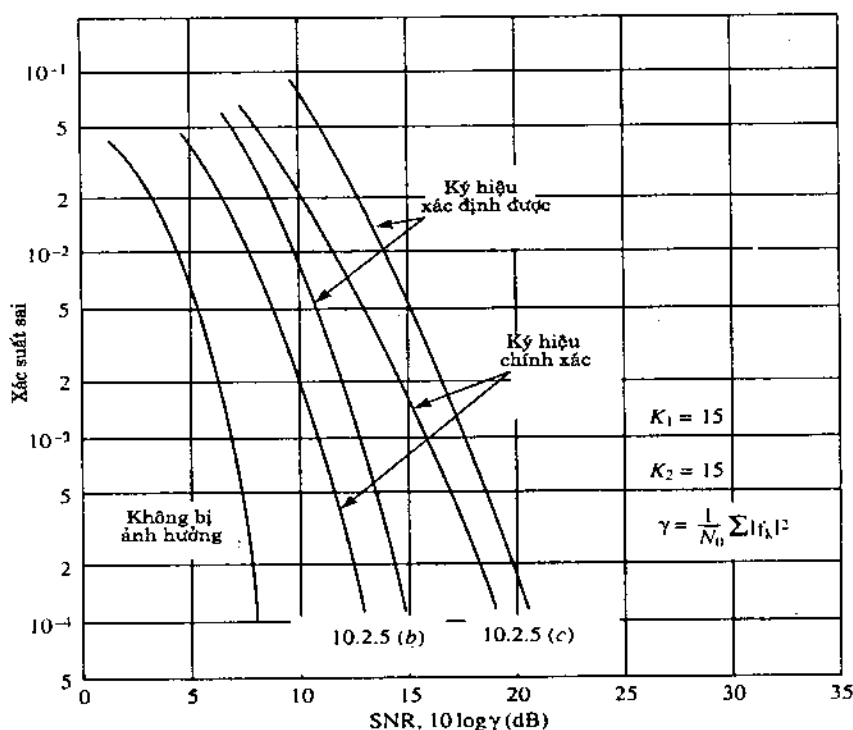
$$f_k = (1 - a^2)^{1/2} a^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12-3-12)$$

với $a < 1$. SNR đầu ra của bộ cân bằng hồi tiếp là

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} &= -1 + \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left[\frac{1 + a^2 + (1 - a^2)/N_0 - 2a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \right] d\omega \right\} \\ &= -1 + \frac{1}{2N_0} \left\{ 1 - a^2 + N_0(1 + a^2) + \sqrt{[1 - a^2 + N_0(1 + a^2)]^2 - 4a^2 N_0^2} \right\} \\ &\approx \frac{(1 - a^2)[1 + N_0(1 + a^2)/(1 - a^2)] - N_0}{N_0} \\ &\approx \frac{1 - a^2}{N_0}, \quad N_0 \ll 1 \end{aligned} \quad (12-3-13)$$

Như vậy độ suy hao về SNR là $10 \log_{10}(1 - a^2)$ dB, bộ cân bằng tuyến tính có giá trị tương ứng là $10 \log_{10}[(1 - a^2)/(1 + a^2)]$ dB.

Sự so sánh đánh giá của bộ cân bằng hồi tiếp và tuyến tính được vẽ trên hình 12-3-2. Ta thấy rằng bộ cân bằng hồi tiếp có độ hiệu quả hơn đáng kể so với bộ cân bằng tuyến tính có cùng số hệ số. Điều thứ hai ta thấy là độ hiệu quả vẫn còn kém đối với bộ cân bằng hồi tiếp do vẫn còn lượng ISI, đặc biệt trên các kênh có suy hao lớn như kênh trên hình 12-2-5(c). Cuối cùng độ hiệu quả giảm khoảng 2 dB do việc xác định ký hiệu bị sai.



Hình 12-3-2: Hiệu quả bộ cân bằng hồi tiếp

12-3-3 Bộ cân bằng hồi tiếp dự đoán

Người ta đã đưa ra một mô hình DFE khác tương đương với mô hình trong hình 12-3-1 với điều kiện bộ lọc hồi tiếp dương có vô hạn hệ số. Cấu trúc này gồm có một bộ FSE làm bộ hồi tiếp dương và một bộ dự đoán tuyến tính làm bộ hồi tiếp âm. Cấu trúc bộ DFE mới được vẽ trên hình 12-3-3.

Nhiều đầu ra của bộ lọc hồi tiếp dương (có vô hạn hệ số) có phổ mật độ công suất là

$$\frac{N_0 X(e^{j\omega T})}{|N_0 + X(e^{j\omega T})|^2}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (12-3-14)$$

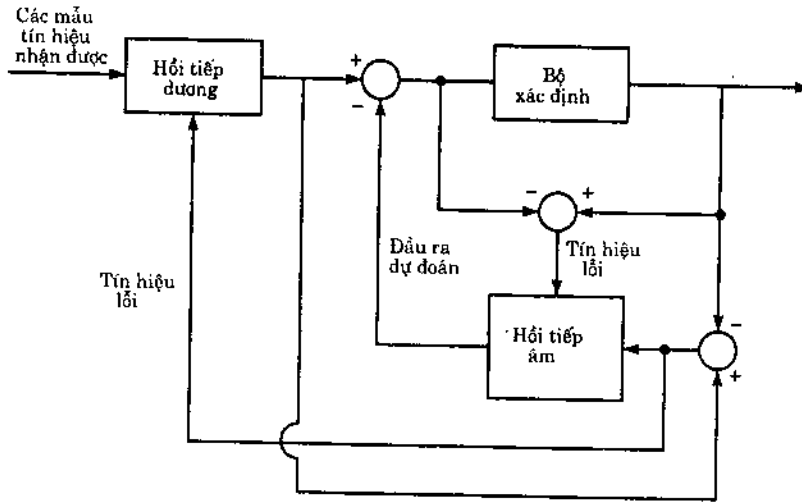
Lượng ISI có phổ mật độ công suất là

$$\left| 1 - \frac{X(e^{j\omega T})}{N_0 + X(e^{j\omega T})} \right|^2 = \frac{N_0^2}{|N_0 + X(e^{j\omega T})|^2}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (12-3-15)$$

Tổng của hai phổ thể hiện phổ mật độ công suất của cả hai loại nhiễu ở đầu ra của bộ lọc hồi tiếp dương. Cộng (12-3-14) và (12-3-15) ta nhận được

$$E(\omega) = \frac{N_0}{N_0 + X(e^{j\omega T})}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (12-3-16)$$

Khi kênh là lý tưởng $X(e^{j\omega T}) = 1$, không thể giảm MSE hơn nữa. Khi kênh có suy hao, công suất của dãy nhiễu ở đầu ra của bộ lọc hồi tiếp dương có thể giảm đi nhờ bộ dự đoán tuyến tính trên các giá trị trước của dãy sai số.



Hình 12-3-3: Bộ DFE dự đoán

Gọi $B(\omega)$ là đáp ứng tần số của bộ dự đoán tuyến tính

$$B(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-j\omega n T} \quad (12-3-17)$$

thì nhiễu ở đầu ra của bộ dự đoán là

$$E(\omega) - E(\omega)B(\omega) = E(\omega)[1 - B(\omega)] \quad (12-3-18)$$

Tối thiểu hóa MSE của sai số này có nghĩa là tối thiểu

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |1 - B(\omega)|^2 |E(\omega)|^2 d\omega \quad (12-3-19)$$

theo các hệ số của bộ dự đoán $\{b_n\}$, dẫn tới bộ dự đoán tối ưu

$$B(\omega) = 1 - \frac{G(\omega)}{g_0} \quad (12-3-20)$$

trong đó $G(\omega)$ được xác định qua

$$G(\omega)G^*(-\omega) = \frac{1}{|E(\omega)|^2} \quad (12-3-21)$$

và;

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-j\omega nT} \quad (12-3-22)$$

Dầu ra của bộ dự đoán là dãy nhiễu trắng có phổ mật độ công suất $1/g_0^2$ và giá trị MSE tối thiểu tương ứng được cho trong (12-3-7). Như vậy độ hiệu quả theo chỉ số MSE đối với hai cấu trúc DFE là như nhau. Điều này chỉ có được khi số lượng hệ số của các bộ lọc là vô hạn. Bộ DFE dự đoán là gần tối ưu nếu độ dài hai bộ lọc là hữu hạn. Tính tối ưu của bộ DFE bình thường là dễ hiểu do việc tối ưu các hệ số của hai bộ lọc được thực hiện đồng thời còn trong bộ DFE dự đoán được thực hiện một cách riêng biệt.

12-4 Cân bằng tuyến tính thích nghi

Trong các phần trước, ta đã trình bày các bộ thu tối ưu và gần tối ưu để bù lại lượng ISI khi truyền tin trên kênh có băng tần hữu hạn không lý tưởng, nhưng đối với ba phương pháp cân bằng đã xét, ta phải biết đáp ứng xung hay đáp ứng tần số của kênh ở phía thu. Tuy nhiên trong thực tế đối với các kênh phải sử dụng hệ thống cân bằng, các đặc điểm của kênh thường không biết trước và trong nhiều trường hợp các đặc điểm này là thay đổi theo thời gian. Khi đó thì các bộ cân bằng cũng được thiết kế để thích nghi với sự thay đổi của kênh. Từ phần này tới cuối chương, ta tập trung trình bày các thuật toán tự động thay đổi các hệ số của bộ cân bằng để bù lại một cách thích nghi sự thay đổi của kênh và do đó sẽ tối ưu chỉ số hiệu quả của bộ thu. Chúng ta cũng phân tích các đặc điểm của thuật toán, tốc độ hội tụ và độ phức tạp tính toán.

Đối với bộ cân bằng tuyến tính, ta đã biết là có hai tiêu chuẩn để tìm các hệ số của bộ cân bằng $\{c_k\}$. Một tiêu chuẩn là tối thiểu hóa suy hao dinh và tiêu chuẩn kia là tối thiểu hóa trung bình bình phương sai số (MSE) ở đầu ra của bộ cân bằng. Trong phần này ta sẽ trình bày hai thuật toán thích nghi tự động.

12-4-1 Thuật toán ZF

Trong tiêu chuẩn suy hao dinh, độ suy hao dinh $D(c)$ trong (12-2-22) được tối thiểu hóa bằng cách chọn các hệ số $\{c_k\}$. Nói chung không có một thuật toán đơn giản nào để tối ưu hóa, trừ khi độ suy hao dinh ở đầu ra của bộ cân bằng được định nghĩa là D_0 trong (12-2-23) nhỏ hơn 1. Khi đó độ suy hao được tối thiểu hóa bằng cách chọn các hệ số để $q_n = 0$ với $1 \leq |n| \leq K$ và $q_0 = 1$. Khi đó một thuật toán đơn giản gọi là thuật toán ZF (Zero-Forcing) sẽ làm thỏa mãn các điều kiện này.

Lời giải của thuật toán ZF có được bằng cách làm cho độ tương quan chéo giữa dãy sai số $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ và dãy thông tin $\{I_k\}$ bằng 0 trong khoảng $0 \leq |n| \leq K$. Chúng ta có

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_k I_{k-j}^*) &= E[(I_k - \hat{I}_k) I_{k-j}^*] \\ &= E(I_k I_{k-j}^*) - E(\hat{I}_k I_{k-j}^*), \quad j = -K, \dots, K \end{aligned} \quad (12-4-1)$$

Ta giả thiết là các ký hiệu thông tin không tương quan, có nghĩa là $E(I_k I_j^*) = \delta_{kj}$ và dãy thông tin không tương quan với dãy nhiễu cộng $\{\eta_k\}$. Với $\hat{I}_k$, ta sử dụng biểu thức (12-2-41). Sau khi lấy giá trị

trung bình trong (12-4-1) ta nhận được

$$E(\varepsilon_k I_{k-j}^*) = \delta_{j0} - q_j, \quad j = -K, \dots, K \quad (12-4-2)$$

Như vậy điều kiện

$$E(\varepsilon_k I_{k-j}^*) = 0, \quad j = -K, \dots, K \quad (12-4-3)$$

được thỏa mãn khi $q_0 = 1$ và $q_n = 0, 1 \leq |n| \leq K$.

Khi không biết đáp ứng của kênh, các độ tương quan chéo cũng không biết và sự phức tạp có thể được khắc phục bằng cách gửi một dãy ký hiệu thử $\{I_k\}$ tới phía thu. Các ký hiệu này được sử dụng để ước lượng các độ tương quan chéo bằng cách thay các giá trị trung bình theo thời gian cho các giá trị trung bình theo tập hợp trong (12-4-1). Sau khi khởi đầu bằng việc gửi một dãy xác định trước có độ dài ít nhất bằng độ dài của bộ cân bằng, ta sẽ xác định được các hệ số của bộ cân bằng thỏa mãn (12-4-3).

Thuật toán truy hồi đơn giản để thay đổi các hệ số của bộ cân bằng là

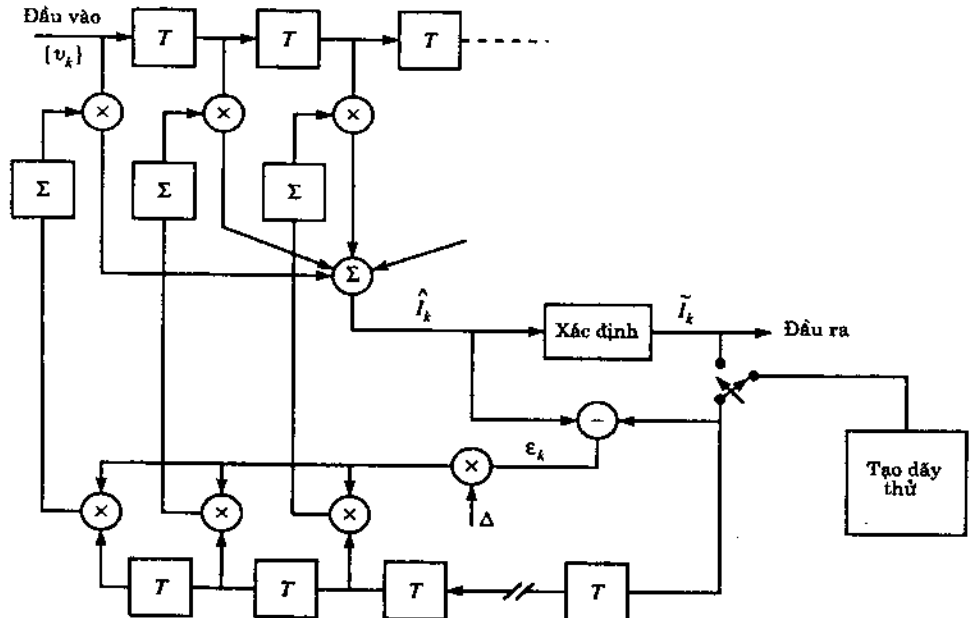
$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \varepsilon_k + I_{k-j}^*, \quad j = -K, \dots, K \quad (12-4-4)$$

với $c_j^{(k)}$ là giá trị của hệ số thứ j tại thời điểm thứ $k, t = kT, \varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ là sai số ở thời điểm $t = kT$ và Δ là hệ số để điều chỉnh tốc độ thay đổi các hệ số. Đây là thuật toán ZF. Thành phần $\varepsilon_k I_{k-j}^*$ là ước lượng của độ đo tương quan chéo (trung bình theo tập hợp) $E(\varepsilon_k I_{k-j}^*)$. Việc lấy trung bình độ đo tương quan chéo được thực hiện truy hồi là thuật toán đạo hàm bậc 1 như trong phương trình (12-4-4).

Sau giai đoạn thử và các hệ số của bộ cân bằng có giá trị tối ưu thì việc xác định ở đầu ra bộ xác định là đủ tin cậy để có thể tiếp tục thực hiện quá trình thích nghi các hệ số. Việc thích nghi này gọi là *chế độ xác định trực tiếp*. Các độ đo tương quan trong (12-4-4) được thực hiện dựa vào tín hiệu lỗi $\varepsilon_k = \hat{I}_k - I_k$ và dãy xác định ở đầu ra $\tilde{I}_{k-j}, j = -K, \dots, K$. Như vậy trong chế độ thích nghi này, (12-4-4) trở thành

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \tilde{\varepsilon}_k \tilde{I}_{k-j}^* \quad (12-4-5)$$

Hình 12-4-1 trình bày bộ cân bằng ZF trong chế độ thử và chế độ hoạt động thích nghi.



Hình 12-4-1: Bộ cân bằng ZF thích nghi

12-4-2 Thuật toán LMS

Khi tối thiểu hóa MSE, ta thấy rằng các hệ số của bộ cân bằng tối ưu được xác định qua hệ phương trình tuyến tính, được biểu diễn dưới dạng ma trận là

$$\mathbf{G}\mathbf{C} = \xi \quad (12-4-6)$$

trong đó $\mathbf{G}$ là ma trận hiệp biến cỡ $(2K+1) \times (2K+1)$ của các mẫu tín hiệu $\{v_k\}$, $\mathbf{C}$ là vectơ cột $2K+1$ chiều các hệ số của bộ cân bằng, ξ là vectơ cột $2K+1$ chiều các hệ số của bộ lọc tương ứng với kênh. Các hệ số của bộ cân bằng tối ưu $\mathbf{C}_{opt}$ được xác định theo (12-2-47) và thủ tục tính toán được thực hiện theo thuật toán Levinson-Durbin.

Một phương pháp lặp khác được sử dụng để tránh tính nghịch đảo trực tiếp ma trận $\mathbf{G}$. Có lẽ thủ tục lặp đơn giản nhất là phương pháp giảm theo bước, bắt đầu bởi một vectơ $\mathbf{C}$ ngẫu nhiên nào đó, ký hiệu là $\mathbf{C}_0$. Sự lựa chọn khởi đầu của các hệ số tương ứng với một điểm nào đó trong mặt phẳng MSE trong không gian $2K+1$ chiều các hệ số. Vectơ gradient $\mathbf{G}_0$ có $2K+1$ thành phần là $\frac{1}{2} \partial J / \partial c_{0k}$, $k = -K, \dots, K$ được tính trong mặt phẳng MSE và các hệ số của bộ cân bằng được thay đổi theo hướng ngược lại với chiều của thành phần gradient tương ứng. Sự thay đổi ở hệ số thứ j tỷ lệ với thành phần thứ j của vectơ gradient. Như vậy các hệ số của vectơ $\mathbf{C}$ được thay đổi trong các bước theo công thức

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k - \Delta \mathbf{G}_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12-4-7)$$

với vectơ gradient $\mathbf{G}_k$ là

$$\mathbf{G}_k = \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\mathbf{C}_k} = \mathbf{G}\mathbf{C}_k - \xi = -E(\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*) \quad (12-4-8)$$

Vectơ $\mathbf{C}_k$ thể hiện tập hợp hệ số ở lần lặp thứ k , $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ là tín hiệu lỗi ở lần lặp thứ k , $\mathbf{V}_k$ là vectơ các mẫu tín hiệu nhận được mà từ đó tạo ra ước lượng $\hat{I}_k$, $\mathbf{V}_k = [v_{k+K} \dots v_k \dots v_{k-K}]^T$ và Δ là số dương đủ nhỏ để bảo đảm tính hội tụ của quá trình lặp. Nếu MSE nhỏ nhất đạt được tại lần lặp $k = k_0$ và $\mathbf{G}_k = 0$ thì các hệ số không cần phải thay đổi nữa. Nói chung, $J_{min}(K)$ không thể đạt được khi k_0 là hữu hạn đối với phương pháp này, tuy nhiên có thể sát gần tùy ý với giá trị k_0 hữu hạn.

Khó khăn cơ bản của phương pháp này là không biết đầy đủ về vectơ gradient $\mathbf{G}_k$, nó phụ thuộc cả vào ma trận hiệp biến $\mathbf{G}$ và vectơ ξ . Các giá trị này phụ thuộc vào các hệ số $\{f_k\}$ của mô hình kênh rời rạc tương đương, sai phương của dây thông tin và nhiễu cộng, tất cả có thể không biết ở phía thu. Để giải quyết các vấn đề này ta có thể sử dụng phương pháp ước lượng vectơ gradient. Như vậy thuật toán thay đổi các hệ số của bộ cân bằng có thể biểu diễn dưới dạng

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k - \Delta \hat{\mathbf{G}}_k \quad (12-4-9)$$

trong đó $\hat{\mathbf{G}}_k$ là ước lượng của vectơ gradient $\mathbf{G}_k$ và $\hat{\mathbf{C}}_k$ là ước lượng của vectơ các hệ số. Từ (12-4-8) chúng ta thấy rằng

$$\hat{\mathbf{G}}_k = -\varepsilon_k \mathbf{V}_k^* \quad (12-4-10)$$

Do $E(\hat{\mathbf{G}}_k) = \mathbf{G}_k$ nên $\hat{\mathbf{G}}_k$ là ước lượng không sai lệch của $\mathbf{G}_k$. Kết hợp (12-4-10) và (12-4-9) ta có thuật toán

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \varepsilon_k \mathbf{V}_k^* \quad (12-4-11)$$

Đó là cơ sở của thuật toán LMS (trung bình bình phương tối thiểu) để thay đổi các hệ số của bộ cân bằng. Sơ đồ khối của bộ cân bằng được vẽ trên hình 12-4-2.

Một số sự thay đổi của thuật toán trên được sử dụng trong thực tế, ví dụ như dấu của tín hiệu sai số ε_k hay trong $\mathbf{V}_k$. Như vậy có thể có ba sự thay đổi là

$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \text{sgn}(\varepsilon_k) v_{k-j}^*, \quad j = -K, \dots, K \quad (12-4-12)$$

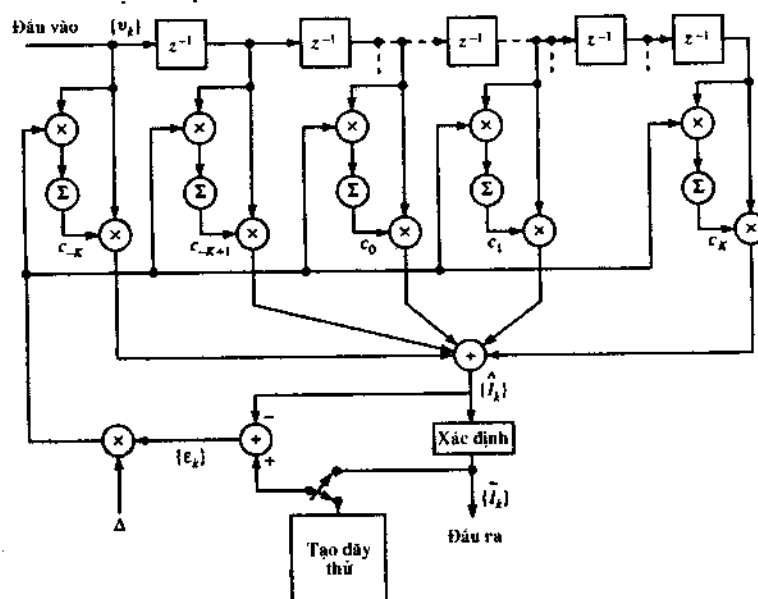
$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \varepsilon_k \text{sgn}(v_{k-j}^*), \quad j = -K, \dots, K \quad (12-4-13)$$

$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta (\text{sgn}(\varepsilon_k) \text{sgn}(v_{k-j}^*)), \quad j = -K, \dots, K \quad (12-4-14)$$

trong đó $\text{csgn}(x)$ được định nghĩa là

$$\text{csgn}(x) = \begin{cases} 1 + j & (\text{Re}(x) > 0, \text{Im}(x) > 0) \\ 1 - j & (\text{Re}(x) > 0, \text{Im}(x) < 0) \\ -1 + j & (\text{Re}(x) < 0, \text{Im}(x) > 0) \\ -1 - j & (\text{Re}(x) < 0, \text{Im}(x) < 0) \end{cases} \quad (12-4-15)$$

Chú ý rằng trong (12-4-15) thì j là đơn vị ảo.



Hình 12-4-2: Bộ cân bằng tuyến tính thích nghi dựa trên tiêu chuẩn MSE

Một sự thay đổi khác của thuật toán là lấy trung bình hay lọc vectơ gradient qua một số lần lặp trước khi thay đổi các hệ số của bộ lọc. Ví dụ lấy trung bình N vectơ gradient là

$$\bar{\mathbf{G}}_{mN} = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_{mN+n} \mathbf{V}_{mN+n}^* \quad (12-4-16)$$

và phương trình truy hồi tương ứng dùng để thay đổi các hệ số bộ lọc là

$$\hat{\mathbf{C}}_{(k+1)N} = \hat{\mathbf{C}}_{kN} - \Delta \bar{\mathbf{G}}_{kN} \quad (12-4-17)$$

Người ta cũng thấy rằng việc lấy trung bình như công thức (12-4-16) làm giảm nhiễu ước lượng vectơ gradient.

Một phương pháp khác là lọc vectơ gradient bằng bộ lọc thông thấp và sử dụng đầu ra của bộ lọc làm vectơ gradient ước lượng được, ví dụ bộ lọc thông thấp tạo ra đầu ra là

$$\tilde{\mathbf{G}}_k = w \tilde{\mathbf{G}}_{k-1} + (1-w) \hat{\mathbf{G}}_k, \quad \tilde{\mathbf{G}}(0) = \hat{\mathbf{G}}(0) \quad (12-4-18)$$

$0 \leq w < 1$ xác định độ rộng dải thông của bộ lọc thông thấp. Với các vectơ gradient được lọc trong (12-4-18), ta có thuật toán LMS lọc gradient là

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k - \Delta \tilde{\mathbf{G}}_k \quad (12-4-19)$$

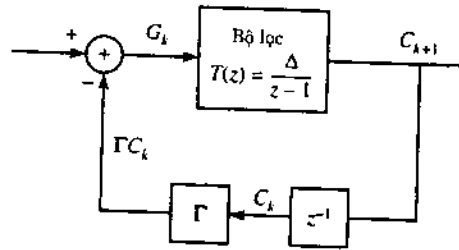
Khi trình bày ở trên ta giả thiết rằng phía thu đã biết dãy thông tin truyền đi để tạo ra các tín hiệu lỗi giữa ký hiệu nhận được và ước lượng của nó. Điều này có thể thực hiện dễ dàng bằng cách truyền thử một dãy ký hiệu xác định trước. Độ dài của dãy ký hiệu truyền thử phải ít nhất bằng số lượng hệ số của bộ cân bằng để phổ của tín hiệu truyền đi phủ kín độ rộng dải thông của kênh được cân bằng. Trong thực tế dãy ký hiệu thử thường là dãy giả ngẫu nhiên tuần hoàn như dãy thanh ghi dịch có độ dài cực đại, chu kỳ N bằng độ dài của bộ cân bằng ($N = 2K + 1$).

12-4-3 Tính hội tụ của thuật toán LMS

Tính hội tụ của thuật toán LMS (12-4-11) được xác định bởi tham số Δ . Ta xét việc lựa chọn tham số này để bảo đảm tính hội tụ của thuật toán (12-4-7).

Từ (12-4-7) và (12-4-8) ta có

$$C_{k+1} = C_k - \Delta G_k = (I - \Delta G)C_k + \Delta \xi \quad (12-4-20)$$



Hình 12-4-3: Hệ thống phản hồi biểu diễn phương trình truy hồi trong (12-4-20)

Quan hệ truy hồi trong (12-4-20) được biểu diễn bởi hệ thống điều khiển đóng như trong hình 12-4-3. Nhưng $2K + 1$ phương trình vi phân bậc 1 trong (12-4-20) phụ thuộc vào ma trận tự tương quan G . Để giải hệ phương trình này ta chú ý rằng ma trận G là ma trận Hermitian và do đó có thể biểu diễn thành

$$G = U \Lambda U^{t*} \quad (12-4-21)$$

Λ là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng của G và U là ma trận thể thức chuẩn hóa của G . Thay (12-4-21) vào (12-4-20) và ta định nghĩa vectơ biến đổi (trực giao) $C_k^o = U^{t*} C_k$ và $\xi^o = U^{t*} \xi$, ta nhận được

$$C_{k+1}^o = (I - \Delta \Lambda) C_k^o + \Delta \xi^o \quad (12-4-22)$$

Sự hội tụ của thuật toán phụ thuộc vào phương trình

$$C_{k+1}^o = (I - \Delta \Lambda) C_k^o \quad (12-4-23)$$

Quan hệ truy hồi sẽ hội tụ khi tất cả các điểm cực nằm trong đường tròn đơn vị, có nghĩa là

$$|1 - \Delta \lambda_k| < 1, \quad k = -K, \dots, K \quad (12-4-24)$$

với $\{\lambda_k\}$ là tập hợp $2K + 1$ giá trị riêng của G . Do G là ma trận tự tương quan nên nó xác định dương và $\lambda_k > 0$ với mọi k . Như vậy sự hội tụ của quan hệ truy hồi sẽ bảo đảm nếu Δ thỏa mãn bất đẳng thức

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (12-4-25)$$

λ_{max} là giá trị riêng lớn nhất của ma trận G .

Do giá trị riêng lớn nhất của ma trận xác định dương nhỏ hơn tổng tất cả các giá trị riêng của ma trận và ta có giới hạn trên của λ_{max}

$$\begin{aligned}\lambda_{max} &< \sum_{k=-K}^K \lambda_k = \text{tr} \mathbf{G} = (2K+1)G_{kk} \\ &= (2K+1)(x_0 + N_0)\end{aligned}\quad (12-4-26)$$

Từ (12-4-23) và (12-4-24) ta thấy rằng tốc độ hội tụ sẽ lớn khi $|1 - \Delta\lambda_k|$ nhỏ, nhưng ta không thể thực hiện được điều này mà vẫn thỏa mãn (12-4-25) nếu có sự khác nhau nhiều giữa giá trị riêng nhỏ nhất và lớn nhất của ma trận.

12-4-4 MSE phụ trội trong ước lượng gradient

Thuật toán truy hồi trong (12-4-11) sử dụng ước lượng không sai lệch vectơ gradient. Nhiều trong các ước lượng này tạo nên sự thay đổi ngẫu nhiên lên các hệ số của bộ cân bằng so với giá trị tối ưu và dẫn tới giá trị MSE sẽ tăng lên ở đầu ra của bộ cân bằng. Giá trị MSE cuối cùng sẽ là $J_{min} + J_{\Delta}$ với J_{Δ} là sai phương của nhiều ước lượng. Thành phần J_{Δ} gọi là MSE phụ trội (excess means-square error).

Tổng cộng lượng MSE ở đầu ra của một bộ cân bằng được biểu diễn là

$$J = J_{min} + (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{opt})^T \mathbf{G} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{opt}) \quad (12-4-27)$$

trong đó $\mathbf{C}_{opt}$ là tập hợp tối ưu các hệ số trong (12-4-6). Áp dụng biến đổi tuyến tính trực giao ta có

$$J = J_{min} + \sum_{k=-K}^K \lambda_k E|c_k^o - c_{kopt}^o|^2 \quad (12-4-28)$$

trong đó $\{c_k^o\}$ là tập hợp các hệ số của bộ cân bằng đã qua biến đổi. Phụ trội MSE là giá trị trung bình của thành phần thứ hai, có nghĩa là

$$J_{\Delta} = \sum_{k=-K}^K \lambda_k E|c_k^o - c_{kopt}^o|^2 \quad (12-4-29)$$

Người ta đã chứng minh được rằng

$$J_{\Delta} = \Delta^2 J_{min} \sum_{k=-K}^K \frac{\lambda_k^2}{1 - (1 - \Delta\lambda_k)^2} \quad (12-4-30)$$

Biểu thức trên có thể trở nên đơn giản hơn khi ta chọn Δ để $\Delta\lambda_k \ll 1$ với mọi k . Khi đó

$$\begin{aligned}J_{\Delta} &\approx \frac{1}{2} \Delta J_{min} \sum_{k=-K}^K \lambda_k \\ &\approx \frac{1}{2} \Delta J_{min} \text{tr} \mathbf{G} \\ &\approx \frac{1}{2} \Delta (2K+1) J_{min} (x_0 + N_0)\end{aligned}\quad (12-4-31)$$

Thành phần $x_0 + N_0$ là tín hiệu nhận được và công suất nhiễu.

Ta muốn có $J_{\Delta} < J_{min}$ nên ta chọn Δ thỏa mãn

$$\frac{J_{\Delta}}{J_{min}} \approx \frac{1}{2} \Delta (2K+1) (x_0 + N_0) < 1$$

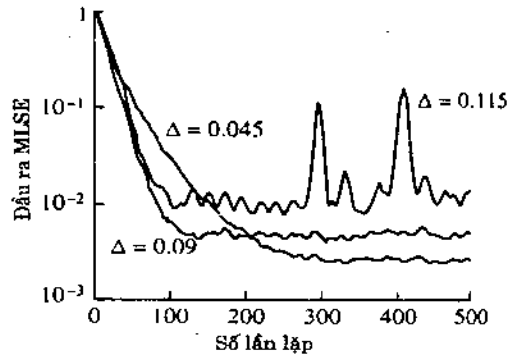
hay tương đương là

$$\Delta < \frac{2}{(2K+1)(x_0 + N_0)} \quad (12-4-32)$$

Việc ta phân tích ở trên về MSE phụ trội dựa trên cơ sở là giá trị trung bình các hệ số của bộ cân bằng hội tụ về giá trị tối ưu C_{opt} . Trong điều kiện này, Δ cần thỏa mãn giới hạn trong (12-4-32). Mặt khác ta cũng đã xác định rằng sự hội tụ của vectơ hệ số đòi hỏi $\Delta < 2/\lambda_{max}$.

Ví dụ 12-4-1

Thuật toán LMS được sử dụng để cân bằng thích nghi một kênh truyền thông với ma trận tự tương quan có các giá trị riêng thỏa mãn điều kiện $\lambda_{max}/\lambda_{min} = 11$. Số hệ số của bộ cân bằng được chọn là $2K+1 = 11$. $x_0 + N_0$ được chuẩn hóa thành đơn vị. Như vậy giới hạn trên của Δ trong (12-4-32) là 0,18. Hình 12-4-4 biểu diễn đặc điểm hội tụ khởi đầu của thuật toán.



Hình 12-4-4: Đặc điểm hội tụ khởi đầu của thuật toán.

12-4-5 Bộ cân bằng tuyến tính băng tần cơ sở và thông dải

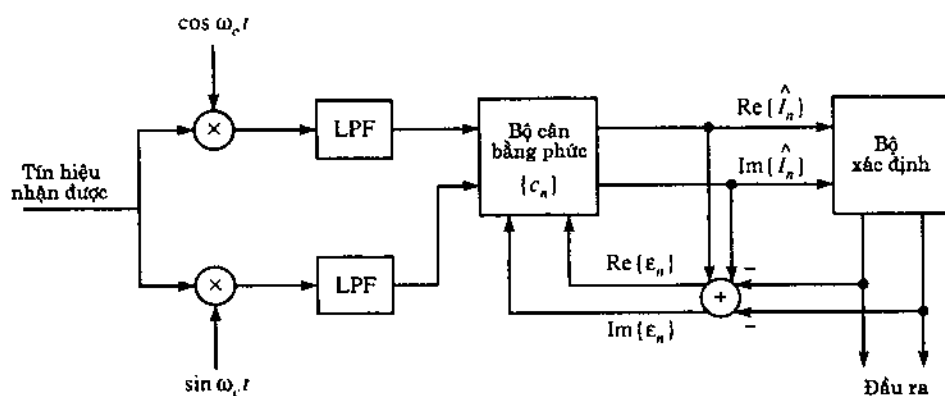
Việc xử lý về bộ cân bằng tuyến tính thích nghi ta đã xét là trên cơ sở tín hiệu được biểu diễn là tín hiệu tần số thấp hay tín hiệu tần số thấp tương đương. Trong thực tế bộ cân bằng tuyến tính thích nghi có thể thực hiện ở băng tần cơ sở hay thông dải. Hình 12-4-5 thể hiện quá trình giải điều chế tín hiệu QAM (hay tín hiệu PSK đa mức) bằng cách dịch chuyển tín hiệu về tín hiệu tần số thấp tương đương và cân bằng tín hiệu này bằng bộ cân bằng có các hệ số phức. Thực ra bộ cân bằng phức với tín hiệu vào phức tương đương với bốn bộ cân bằng song song có các hệ số thực như trong hình 12-4-6. Mặt khác, ta cũng có thể cân bằng tín hiệu thông dải. Hình 12-4-7 biểu diễn bộ cân bằng cho tín hiệu hai chiều QAM hay PSK.

12-5 Cân bằng hồi tiếp thích nghi

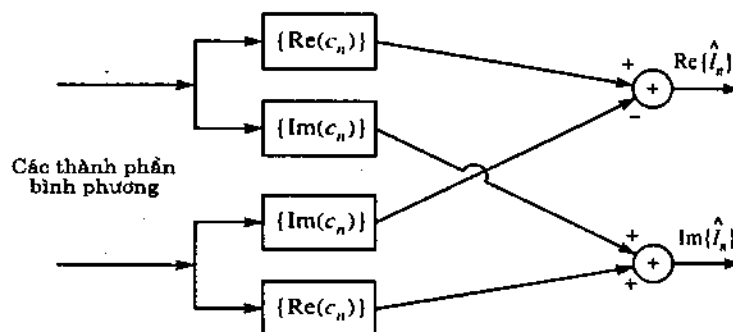
Cũng như trong bộ cân bằng tuyến tính thích nghi, các hệ số của các bộ lọc trong bộ cân bằng hồi tiếp thích nghi cũng được thay đổi một cách truy hồi. Dựa trên việc tối thiểu hóa MSE ở đầu ra của bộ DFE, thuật toán giảm bậc có dạng

$$C_{k+1} = C_k + \Delta E(\epsilon_k V_k^*) \quad (12-5-1)$$

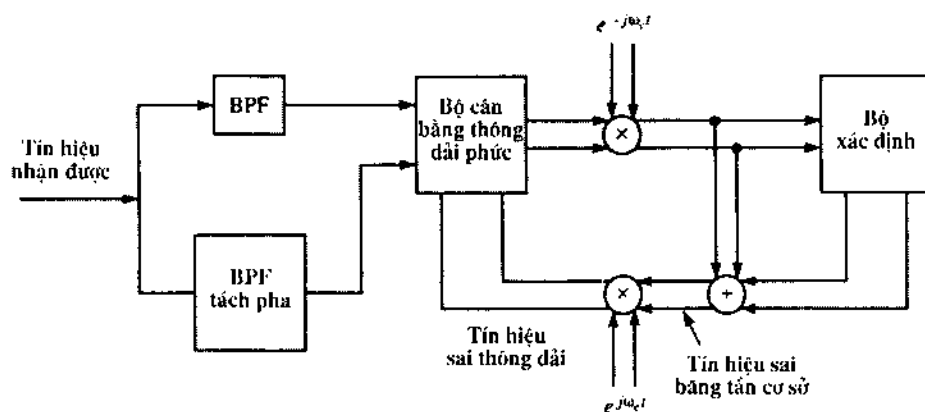
trong đó C_k là các hệ số của bộ cân bằng tại thời điểm thứ k , $E(\epsilon_k V_k^*)$ là tương quan chéo giữa tín hiệu lỗi $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ với V_k và $V_k = [v_{k+K_1} \dots v_k I_{k-1} \dots I_{k-K_2}]^T$ là tín hiệu ở các bộ lọc hồi tiếp dương và hồi tiếp âm tại thời điểm thứ k . Giá trị MSE được tối thiểu hóa khi vectơ tương quan chéo $E(\epsilon_k V_k^*) = 0$ khi $k \rightarrow \infty$.



Hình 12-4-5: Bộ giải điều chế tín hiệu QAM



Hình 12-4-6: Bộ cân bằng phức bằng cơ sở cho tín hiệu QAM



Hình 12-4-7: Bộ cân bằng thông dải cho tín hiệu QAM hay PSK

Do không biết vectơ tương quan chéo tại các thời điểm, ta phải ước lượng vectơ $\varepsilon_k \mathbf{V}_k^*$ và lấy trung bình nhiều ước lượng qua phương trình truy hồi

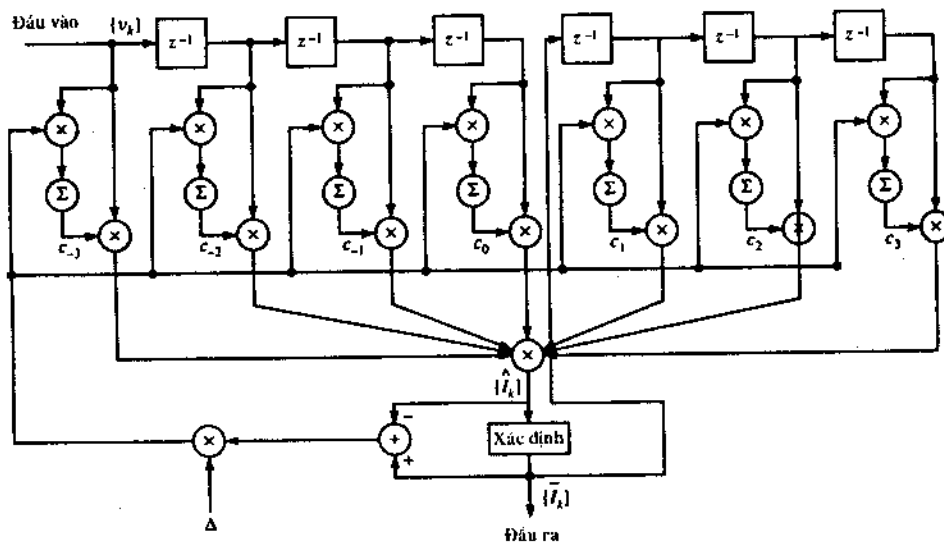
$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \varepsilon_k \mathbf{V}_k^* \quad (12-5-2)$$

Đây là thuật toán LMS cho bộ DFE.

Ta sử dụng một dây thử để thay đổi các hệ số khi khởi đầu. Do tính hội tụ tới tập hợp các hệ số tối ưu, ta có thể chuyển sang chế độ xác định trực tiếp khi việc xác định ở đầu ra của bộ xác định được sử dụng để tạo ra các tín hiệu lỗi ε_k và đưa vào bộ lọc hồi tiếp âm. Đây là chế độ thích nghi của DFE. Hình 12-5-1 trình bày bộ DFE thích nghi. Phương trình truy hồi để thay đổi các hệ số của bộ cân bằng trong trường hợp này là

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \tilde{\varepsilon}_k \mathbf{V}_k^* \quad (12-5-3)$$

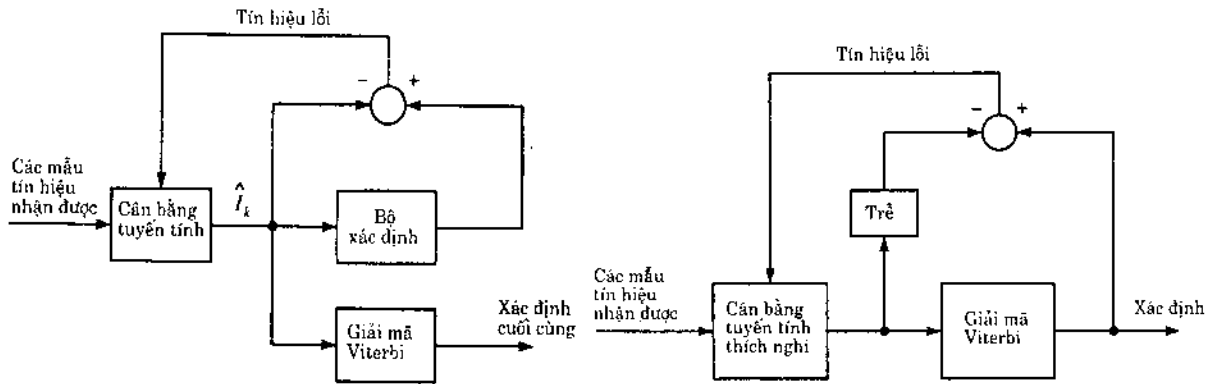
Hiệu quả của thuật toán LMS cho DFE cũng giống như cho bộ cân bằng tuyến tính thích nghi đã trình bày trong phần trước.



Hình 12-5-1: Bộ cân bằng hồi tiếp thích nghi

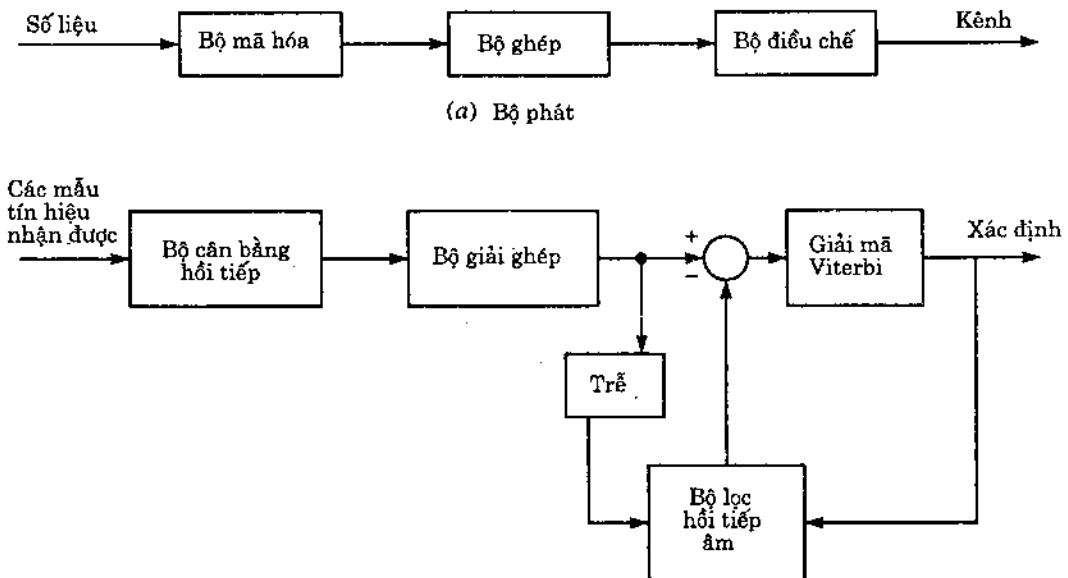
Tín hiệu điều chế mã lưới trong phần (10-3) có bảng thông hiệu quả thường được sử dụng trong các hệ thống truyền số qua kênh thoại để giảm SNR từng bit với một tốc độ sai nhất định. Sự suy hao của kênh đối với tín hiệu mã lưới bắt buộc chúng ta phải cân bằng thích nghi để giảm ISI. Đầu ra của bộ cân bằng được đưa vào đầu vào của bộ giải mã Viterbi, từ đó giải mã xác định mềm tín hiệu mã lưới.

Vấn đề đặt ra là làm thế nào để bộ thu có thể thay đổi thích nghi trong chế độ truyền số liệu như thế. Một khả năng là bộ cân bằng tự thực hiện việc xác định ở đầu ra của nó để tạo ra tín hiệu lỗi, từ đó thực hiện việc thay đổi các hệ số, sơ đồ khối được vẽ trên hình 12-5-2. Vấn đề cơ bản của phương pháp này là thiếu độ tin cậy do việc tiền giải mã ký hiệu mã có SNR tương đối nhỏ. Tốc độ sai lệch cao sẽ gây ra sự sai lệch đáng kể trong sự hoạt động của bộ cân bằng. Một phương pháp khác là sử dụng việc xác định sau giải mã từ bộ giải mã Viterbi, có độ tin cậy cao hơn để thay đổi các hệ số của bộ cân bằng. Phương pháp này hay được sử dụng khi bộ cân bằng tuyến tính ghép trước bộ giải mã Viterbi. Độ trễ giải mã do thuật toán Viterbi có thể được cố định do việc thay đổi các hệ số như trong hình 12-5-3. Nhược điểm cơ bản do thêm vào độ trễ là tham số Δ trong thuật toán LMS phải giảm đi để có sự ổn định trong hệ thống.



Hình 12-5-2: Bộ cân bằng hồi tiếp thích nghi dựa trên cơ sở tự xác định Hình 12-5-3: Bộ cân bằng hồi tiếp thích nghi dựa trên sự xác định của bộ giải mã Viterbi

Khi kênh có một hay nhiều dải chắn thì bộ cân bằng tuyến tính không còn phù hợp nữa và ta phải sử dụng bộ DFE thích nghi. Nhưng DFE cần phải có việc xác định có độ tin cậy cao trong bộ lọc hồi tiếp âm để loại bỏ ISI từ các ký hiệu được xác định trước. Nhưng bộ DFE thông thường không mắc nối tiếp với bộ giải mã Viterbi mà người ta dùng bộ DFE dự đoán như trong hình 12-5-4. Để khắc phục trễ giải mã người ta dùng bộ *chèn/giải chèn* (interleaver/deinterleaver) có cùng độ trễ như bộ giải mã Viterbi.



Hình 12-5-4: Bộ DFE dự đoán với bộ chèn, giải chèn và điều chế mã lưới

12-6 Bộ ước lượng kênh thích nghi đối với xác định ML

Tiêu chuẩn xác định dãy ML với thuật toán Viterbi yêu cầu cần phải biết về các hệ số của $\{f_k\}$ của kênh rời rạc tương đương. Để xử lý trong trường hợp không biết các hệ số này hay các hệ số thay đổi

chậm theo thời gian, ta có thể thêm bộ ước lượng kênh mắc song song với bộ giải mã như trên hình 12-6-1. Bộ ước lượng kênh trong hình 12-6-2 có cấu trúc giống cấu trúc của bộ cân bằng tuyến tính như trong phần 12-4. Các hệ số, ký hiệu là $\{\hat{f}_k\}$ được thay đổi một cách truy hồi để tối thiểu hóa MSE giữa dãy nhận được và dãy đầu ra của bộ ước lượng. Ví dụ thuật toán giảm bước trong chế độ xác định trực tiếp là

$$\hat{\mathbf{f}}_{k+1} = \hat{\mathbf{f}}_k + \Delta \varepsilon_k \bar{\mathbf{I}}_k^* \quad (12-6-1)$$

trong đó $\hat{\mathbf{f}}_k$ là vectơ hệ số trong lần lặp thứ k , Δ là bước, $\varepsilon_k = v_k - \hat{v}_k$ là tín hiệu lỗi, $\bar{\mathbf{I}}_k$ là vectơ các ký hiệu thông tin xác định được trong bộ ước lượng kênh trong lần lặp thứ k .

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng khi MSE giữa v_k và $\hat{v}_k$ được tối thiểu hóa thì các hệ số của bộ ước lượng kênh sẽ là các hệ số của mô hình kênh rời rạc tương đương. Giả thiết các ký hiệu thông tin xác định $\{\bar{\mathbf{I}}_k\}$ được là chính xác hay $\{\bar{\mathbf{I}}_k = \{\mathbf{I}_k\}$. Điều giả thiết này là hợp lý khi hệ thống có xác suất sai nhỏ. Như vậy MSE giữa tín hiệu nhận được $\{v_k\}$ và tín hiệu xác định được $\{\hat{v}_k\}$ là

$$J(\hat{\mathbf{f}}) = E \left(\left| v_k - \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j I_{k-j} \right|^2 \right) \quad (12-6-2)$$

Các hệ số $\{\hat{f}_k\}$ tối thiểu hóa $J(\hat{\mathbf{f}})$ trong (12-6-2) thỏa mãn N phương trình tuyến tính

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j \phi_{kj} = d_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (12-6-3)$$

với

$$\phi_{kj} = E(I_k I_j^*), \quad d_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \phi_j \quad (12-6-4)$$

Từ (12-6-3) và (12-6-4) ta kết luận rằng khi dãy ký hiệu thông tin $\{I_k\}$ không tương quan thì các hệ số tối ưu sẽ bằng các hệ số của mô hình kênh rời rạc tương đương. Khi số lượng hệ số N của bộ ước lượng kênh lớn hơn hay bằng $L+1$ thì các hệ số tối ưu $\{\hat{f}_k\}$ sẽ bằng các hệ số $\{f_k\}$ thậm chí khi dãy ký hiệu thông tin có tương quan. Với các điều kiện ở trên thì giá trị MSE tối thiểu bằng sai phương nhiều là N_0 .

12-7 Thuật toán bình phương tối thiểu

Thuật toán LMS trong phần 12-5 và 12-6 dùng để thay đổi một cách thích nghi các hệ số của bộ cân bằng tuyến tính hay DFE có cơ sở là thuật toán giảm bậc, trong đó vectơ gradient thực được xấp xỉ bởi một ước lượng có được từ số liệu.

Ưu điểm cơ bản của thuật toán giảm bậc là nó đơn giản trong tính toán nhưng nhược điểm cơ bản là tốc độ hội tụ chậm, đặc biệt khi ma trận tự tương quan $\mathbf{G}$ có các giá trị riêng mà $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$. Nhìn theo khía cạnh khác thì thuật toán gradient là thuật toán thay đổi chỉ một tham số Δ để điều khiển tốc độ hội tụ. Tốc độ hội tụ chậm là do bản chất của thuật toán. Để có tốc độ hội tụ cao hơn thì ta phải phát triển các thuật toán phức tạp hơn, sử dụng tới nhiều tham số hơn. Cụ thể hơn, nếu ma trận $\mathbf{G}$ là ma trận $N \times N$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ thì ta có thể dùng thuật toán có N tham số. Sự lựa chọn tối ưu các tham số này để cho tốc độ hội tụ cao là mục tiêu của phần này.

Chúng ta quan tâm trực tiếp tới số liệu nhận được do việc tối thiểu hóa chỉ số hiệu quả bình phương chứ không phải là trung bình bình phương sai số. Điều đó có nghĩa là chỉ số về độ hiệu quả được biểu diễn theo thời gian trung bình chứ không phải là trung bình thống kê nữa.

Ta biểu diễn thuật toán bình phương tối thiểu dưới dạng ma trận. Ta thay đổi một số ký hiệu. Việc ước lượng ký hiệu thông tin tại thời điểm t với t là số nguyên, từ bộ cân bằng tuyến tính bây giờ được

12-7-1 Thuật toán bình phương tối thiểu (Kalman)

Ước lượng bình phương tối thiểu (Recursive Least-Squares Algorithm-RLS) được xây dựng như sau. Giả sử ta quan sát được vectơ $\mathbf{Y}_N(t)$, $n = 0, 1, \dots, t$ và ta muốn xác định vectơ hệ số $\mathbf{C}_N(t)$ của bộ cân bằng (tuyến tính hay hồi tiếp) làm tối thiểu trung bình bình phương sai số theo thời gian

$$O_N^{LS} = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |e_N(n, t)|^2 \quad (12-7-4)$$

trong đó sai số được định nghĩa là

$$e_N(n, t) = I(n) - \mathbf{C}_N^t(t) \mathbf{Y}_N(n) \quad (12-7-5)$$

w là một hệ số trọng lượng, $0 < w < 1$. Như vậy chúng ta đã dùng hàm mũ để biểu diễn số liệu cũ, thích hợp khi kênh có các thông số thay đổi theo thời gian. Tối thiểu hóa O_N^{LS} theo $\mathbf{C}_N(t)$ dẫn tới hệ phương trình tuyến tính

$$\mathbf{R}_N(t) \mathbf{C}_N(t) = \mathbf{D}_N(t) \quad (12-7-6)$$

$\mathbf{R}_N(t)$ là ma trận tương quan, được định nghĩa là

$$\mathbf{R}_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} \mathbf{Y}_N^*(n) \mathbf{Y}_N^t(n) \quad (12-7-7)$$

$\mathbf{D}_N(t)$ là vectơ tương quan chéo

$$\mathbf{D}_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} I(n) \mathbf{Y}_N^*(n) \quad (12-7-8)$$

Nghiệm của (12-7-6) là

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{R}_N^{-1}(t) \mathbf{D}_N(t) \quad (12-7-9)$$

Ma trận $\mathbf{R}_N(t)$ có quan hệ với ma trận tự tương quan $\mathbf{G}_N$ và vectơ $\mathbf{D}_N(t)$ cũng có quan hệ với vectơ tương quan chéo ξ_N được định nghĩa trước đây. Tuy nhiên ta chú ý rằng ma trận $\mathbf{R}_N(t)$ không phải là ma trận Toeplitz và với t nhỏ, ma trận $\mathbf{R}_N(t)$ có ảnh hưởng rất nhỏ và thông thường để khởi đầu, người ta cộng ma trận $\delta \mathbf{I}_N$ với $\mathbf{R}_N(t)$, δ là một hằng số dương nhỏ. Với việc mũ hóa, ảnh hưởng của việc cộng thêm ma trận này sẽ mất dần theo thời gian.

Giả thiết ta có lời giải (12-7-9) tại thời điểm $t-1$ tức là $\mathbf{C}_N(t-1)$ và ta muốn tính $\mathbf{C}_N(t)$. Nói chung người ta không giải một hệ phương trình mới với mỗi thành phần tín hiệu nhận được. Để tránh điều này, trước hết ta tính truy hồi $\mathbf{R}_N(t)$

$$\mathbf{R}_N(t) = w \mathbf{R}_N(t-1) + \mathbf{Y}_N^*(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \quad (12-7-10)$$

Ta gọi (12-7-10) là phương trình cập nhật $\mathbf{R}_N(t)$ theo thời gian. Nghịch đảo của $\mathbf{R}_N(t)$ là

$$\mathbf{R}_N^{-1}(t) = \frac{1}{w} \left[\mathbf{R}_N^{-1}(t-1) - \frac{\mathbf{R}_N^{-1}(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{R}_N^{-1}(t-1)}{w + \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{R}_N^{-1}(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t)} \right] \quad (12-7-11)$$

Như vậy $\mathbf{R}_N^{-1}(t)$ được tính truy hồi theo thời gian.

Ta định nghĩa $\mathbf{P}_N(t) = \mathbf{R}_N^{-1}(t)$ và một vectơ N chiều, gọi là vectơ Kalman:

$$\mathbf{K}_N(t) = \frac{1}{w + \mu_N(t)} \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \quad (12-7-12)$$

trong đó $\mu_N(t)$ là vô hướng được định nghĩa là

$$\mu_N(t) = \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \quad (12-7-13)$$

Với những định nghĩa này, (12-7-11) trở thành

$$\mathbf{P}_N(t) = \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1)] \quad (12-7-14)$$

Nhân cả hai vế của (12-7-14) với $\mathbf{Y}_N^*(t)$ thì

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N(t) \mathbf{Y}_N^*(t) &= \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t)] \\ &= \frac{1}{w} \{ [w + \mu_N(t)] \mathbf{K}_N(t) - \mathbf{K}_N(t) \mu_N(t) \} \\ &= \mathbf{K}_N(t) \end{aligned} \quad (12-7-15)$$

Như vậy vectơ Kalman cũng có thể được định nghĩa là $\mathbf{P}_N(t) \mathbf{Y}_N(t)$.

Bây giờ ta tìm phương trình để tính $\mathbf{C}_N(t)$ từ $\mathbf{C}_N(t-1)$. Do

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{P}_N(t) \mathbf{D}_N(t)$$

và

$$\mathbf{D}_N(t) = w \mathbf{D}_N(t-1) + I(t) \mathbf{Y}_N^*(t) \quad (12-7-16)$$

chúng ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_N(t) &= \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1)] [w \mathbf{D}_N(t-1) + I(t) \mathbf{Y}_N^*(t)] \\ &= \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{D}_N(t-1) + \frac{1}{w} I(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \\ &\quad - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{D}_N(t-1) \\ &\quad - \frac{1}{w} I(t) \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \\ &= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) [I(t) - \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1)] \end{aligned} \quad (12-7-17)$$

Ta chú ý rằng $\mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1)$ là đầu ra bộ cân bằng tại thời điểm t , có nghĩa là

$$\hat{I}(t) = \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1) \quad (12-7-18)$$

và

$$e_N(t, t-1) = I(t) - \hat{I}(t) \equiv e_N(t) \quad (12-7-19)$$

Như vậy $\mathbf{C}_N(t)$ được cập nhật một cách truy hồi theo quan hệ

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) e_N(t) \quad (12-7-20)$$

Lượng MSE gặp phải qua quá trình tối ưu hóa là

$$O_{Nmin}^{LS} = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |I(n)|^2 - \mathbf{C}_N^t(t) \mathbf{D}_N^*(t) \quad (12-7-21)$$

Tóm lại, giả sử ta có $\mathbf{C}_N(t-1)$ và $\mathbf{P}_N(t-1)$ thì khi nhận được một thành phần tín hiệu mới, chúng ta có $\mathbf{Y}_N(t)$ và việc tính toán truy hồi để có được $\mathbf{C}_N(t)$ và $\mathbf{P}_N(t)$ diễn ra như sau:

- Tính đầu ra: $\hat{I}(t) = \mathbf{Y}_N^t(t) \mathbf{C}_N(t-1)$

- Tính sai số: $e_N(t) = I(t) - \hat{I}(t)$

- Tính vectơ Kalman:

$$\mathbf{K}_N(t) = \frac{\mathbf{P}_N(t-1)\mathbf{Y}_N^t(t)}{w + \mathbf{Y}_N^t(t)\mathbf{P}_N(t-1)\mathbf{Y}_N^*(t)}$$

- Cập nhật ma trận tương quan

$$\mathbf{P}_N(t) = \frac{1}{w}[\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t)\mathbf{Y}_N^t(t)\mathbf{P}_N(t-1)]$$

- Cập nhật các hệ số

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_N(t) &= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t)e_N(t) \\ &= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{P}_N(t)\mathbf{Y}_N^*(t)e_N(t) \end{aligned} \quad (12-7-22)$$

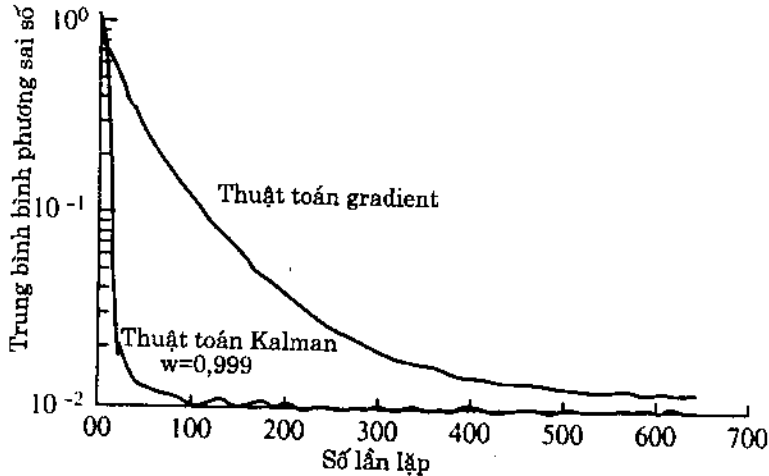
Thuật toán (12-7-22) gọi là thuật toán Kalman hay thuật toán RLS trực tiếp.

Chú ý rằng các hệ số của bộ cân bằng thay đổi theo thời gian bằng $e_N(t)$ nhân với vectơ Kalman $\mathbf{K}_N(t)$. Do $\mathbf{K}_N(t)$ là vectơ N chiều nên thực ra mỗi hệ số của bộ cân bằng được điều chỉnh bởi một phần tử của vectơ Kalman. Như vậy tốc độ hội tụ sẽ nhanh. Đối với thuật toán giảm bậc được ký hiệu như với thuật toán Kalman thì

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{C}_N(t-1) + \Delta \mathbf{Y}_N^*(t)e_N(t) \quad (12-7-23)$$

chỉ có một tham số là bước Δ .

Hình 12-7-1 vẽ tốc độ hội tụ khởi đầu với hai thuật toán, kênh có các hệ số định $f_0 = 0,26, f_1 = 0,93, f_2 = 0,26$, bộ cân bằng tuyến tính với 11 hệ số. Kênh này có $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$. Các hệ số của bộ cân bằng khởi đầu bằng 0 và thuật toán giảm bậc có $\Delta = 0,02$. Ta thấy rõ ưu điểm của thuật toán Kalman và đặc biệt hữu hiệu khi theo dõi các kênh biến đổi theo thời gian.



Hình 12-7-1: So sánh tốc độ hội tụ hai thuật toán

Tuy có ưu điểm về tốc độ hội tụ nhưng thuật toán Kalman có hai nhược điểm cơ bản là độ phức tạp tính toán và sai số tích lũy khi thực hiện truy hồi và điều này có thể dẫn tới sự không ổn định của thuật toán.

Số lượng phép tính của thuật toán này tỷ lệ với N^2 , phần lớn trong số này là do việc cập nhật $\mathbf{P}_N(t)$. Nhưng chính việc cập nhật này lại dễ dẫn tới sai số tích lũy. Để tránh vấn đề này, người ta không tính $\mathbf{P}_N(t)$ theo (12-7-14) mà phân tích $\mathbf{P}_N(t)$ thành

$$\mathbf{P}_N(t) = \mathbf{S}_N(t)\mathbf{\Lambda}_N(t)\mathbf{S}_N^t(t) \quad (12-7-24)$$

trong đó $S_N(t)$ là ma trận tam giác dưới có các phần tử trên đường chéo bằng 1, còn $\Lambda_N(t)$ là ma trận đường chéo. Người ta cập nhật hai ma trận này chứ không cập nhật trực tiếp $P_N(t)$.

12-7-2 Dự đoán tuyến tính và bộ lọc Lattice

Vấn đề dự đoán tuyến tính có thể phát biểu như sau: cho một tập hợp số liệu $y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-p)$ và cần dự đoán giá trị số liệu tiếp theo $y(t)$. Bộ dự đoán bậc p là

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=1}^p a_{pk} y(t-k) \quad (12-7-25)$$

Tối thiểu hóa MSE được định nghĩa là

$$\xi_p = E[y(t) - \hat{y}(t)]^2 = E \left[y(t) - \sum_{k=1}^p a_{pk} y(t-k) \right]^2 \quad (12-7-26)$$

theo các hệ số của bộ dự đoán $\{a_{pk}\}$ dẫn tới hệ phương trình tuyến tính

$$\sum_{k=1}^p a_{pk} \phi(k-l) = \phi(l), \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (12-7-27)$$

với

$$\phi(l) = E[y(t)y(t+l)]$$

Các phương trình này gọi là các phương trình Yule-Walker hay các phương trình chuẩn hóa.

Ma trận Φ với các phần tử là $\phi(k-l)$ là ma trận Toeplitz và do đó có thể dùng thuật toán Levinson-Durbin để giải một cách truy hồi bắt đầu từ bộ dự đoán bậc 1 tới bộ dự đoán bậc p . Các quan hệ truy hồi của thuật toán Levinson-Durbin là

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\phi(1)}{\phi(0)}, \quad \xi_0 = \phi(0) \\ a_{mm} &= \frac{\phi(m) - \mathbf{A}_{m-1}^t \phi_{m-1}^r}{\xi_{m-1}} \\ a_{mk} &= a_{m-1k} - a_{mm} a_{m-1m-k} \\ \xi_m &= \xi_{m-1} (1 - a_{mm}^2) \end{aligned} \quad (12-7-28)$$

với $m = 1, 2, \dots, p$, $\mathbf{A}_{m-1}$ và ϕ_{m-1}^r được định nghĩa là

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{m-1} &= [a_{m-11} \ a_{m-12} \ \dots \ a_{m-1m-1}]^t \\ \phi_{m-1}^r &= [\phi(m-1) \ \phi(m-2) \ \dots \ \phi(1)]^t \end{aligned}$$

Bộ lọc dự đoán tuyến tính có thể được thực hiện như bộ lọc có hàm truyền đạt là

$$A_m(z) = 1 - \sum_{k=1}^m a_{mk} z^{-k} \quad (12-7-29)$$

Đầu vào của nó là dãy số liệu $\{y(t)\}$ và đầu ra của nó là sai số $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$. Bộ lọc dự đoán cũng có thể được thực hiện dưới dạng lattice mà ta sẽ trình bày ngay sau đây.

Điểm bắt đầu của chúng ta là sử dụng thuật toán Levinson-Durbin để dự đoán các hệ số a_{mk} trong (12-7-29). Thay vào chúng ta có

$$\begin{aligned} A_m(z) &= 1 - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{m-1k} - a_{mm} a_{m-1m-k}) z^{-k} - a_{mm} z^{-m} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1k} z^{-k} - a_{mm} z^{-m} \left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1k} z^k \right) \\ &= A_{m-1}(z) - a_{mm} z^{-m} A_{m-1}(z^{-1}) \end{aligned} \quad (12-7-30)$$

Như vậy chúng ta đã biểu diễn hàm truyền đạt của bộ dự đoán bậc m theo hàm truyền đạt của bộ dự đoán bậc $m-1$.

Bây giờ ta định nghĩa một bộ lọc có hàm truyền đạt $G_m(z)$ là

$$G_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \quad (12-7-31)$$

Thế thì (12-7-30) được viết lại thành

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) - a_{mm} z^{-1} G_{m-1}(z) \quad (12-7-32)$$

Chú ý rằng $G_{m-1}(z)$ là bộ lọc với các hệ số $(-a_{m-1m-1}, -a_{m-1m-2}, \dots, -a_{m-11}, 1)$, giống hệt các hệ số của $A_{m-1}(z)$ chỉ có điều bị đảo ngược thứ tự.

Mối quan hệ giữa $A_m(z)$ và $G_m(z)$ còn thấy rõ hơn khi xét tới đầu ra của hai bộ lọc này khi đầu vào là $y(t)$. Dùng biến đổi z ta có

$$A_m(z)Y(z) = A_{m-1}(z)Y(z) - a_{mm} z^{-1} G_{m-1}(z)Y(z) \quad (12-7-33)$$

Ta định nghĩa đầu ra của các bộ lọc là

$$\begin{aligned} F_m(z) &= A_m(z)Y(z) \\ B_m(z) &= G_m(z)Y(z) \end{aligned} \quad (12-7-34)$$

Thế thì (12-7-33) trở thành

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) - a_{mm} z^{-1} B_{m-1}(z) \quad (12-7-35)$$

Trong miền thời gian, quan hệ (12-7-35) trở thành

$$f_m(t) = f_{m-1}(t) - a_{mm} b_{m-1}(t-1), \quad m \geq 1 \quad (12-7-36)$$

với

$$f_m(t) = y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk} y(t-k) \quad (12-7-37)$$

$$b_m(t) = y(t-m) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk} y(t-m+k) \quad (12-7-38)$$

$f_m(t)$ trong (12-7-37) biểu diễn sai số ở bộ dự đoán trước bậc m , $b_m(t)$ biểu diễn sai số ở bộ dự đoán sau bậc m .

Quan hệ (12-7-36) là một trong hai đặc trưng của bộ lọc lattice. Đặc trưng thứ hai nhận được từ $G_m(z)$ như sau

$$\begin{aligned} G_m(z) &= z^{-m} A_m(z^{-1}) \\ &= z^{-m} [A_{m-1}(z^{-1}) - a_{mm} z^m A_{m-1}(z)] \\ &= z^{-1} G_{m-1}(z) - a_{mm} A_{m-1}(z) \end{aligned} \quad (12-7-39)$$

Nhân cả hai vế của (12-7-39) với $Y(z)$ và biểu diễn kết quả theo $F_m(z)$ và $B_m(z)$ thì

$$B_m(z) = z^{-1} B_{m-1}(z) - a_{mm} F_{m-1}(z) \quad (12-7-40)$$

Chuyển quan hệ trên sang miền thời gian chúng ta nhận được đặc trưng thứ hai của bộ lọc lattice

$$b_m(t) = b_{m-1}(t-1) - a_{mm} f_{m-1}(t), \quad m \geq 1 \quad (12-7-41)$$

Điều kiện khởi đầu là

$$f_0(t) = b_0(t) = y(t) \quad (12-7-42)$$

Bộ lọc lattice được mô tả bởi quan hệ truy hồi trong (12-7-36) và (12-7-41) được biểu diễn trên hình 12-7-2, mỗi nhịp được đặc trưng bởi hệ số nhân a_{ii} được định nghĩa trong thuật toán Levinson-Durbin. Sai số trước và sai số sau $f_m(t)$ và $b_m(t)$ có trung bình bình phương có tính chất

$$\xi_m = E[f_m^2(t)] = E[b_m^2(t)] \quad (12-7-43)$$

ξ_m được tính một cách truy hồi như trong thuật toán

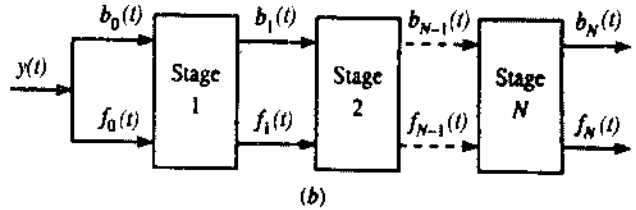
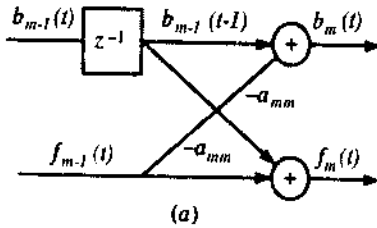
$$\xi_m = \xi_{m-1}(1 - a_{mm}^2) = \xi_0 \prod_{i=1}^m (1 - a_{ii}^2) \quad (12-7-44)$$

$f_m(t)$ và $b_m(t)$ thỏa mãn một số tính chất, trong đó đáng chú ý là tính chất trực giao sau

$$\begin{aligned} E[b_m(t)b_n(t)] &= \xi_m \delta_{mn} \\ E[f_m(t+m)f_n(t+n)] &= \xi_m \delta_{mn} \end{aligned} \quad (12-7-45)$$

Tương quan chéo giữa $f_m(t)$ và $b_n(t)$ là

$$E[f_m(t)b_n(t)] = \begin{cases} a_{nn}\xi_m & (m \geq n) \\ 0 & (m < n) \end{cases} \quad n, m \geq 0 \quad (12-7-46)$$



Hình 12-7-2: Bộ lọc lattice

Do tính chất trực giao của các thành phần sai số mà ta có thể thêm vào hay bỏ bớt đi một hay nhiều nhịp cuối cùng trong bộ lọc lattice mà không ảnh hưởng tới các tham số của các nhịp còn lại. Do ξ_m giảm liên tục theo số nhịp nên nó có thể dùng làm chỉ số hiệu quả để xác định khi nào bộ lọc lattice có thể kết thúc.

Chúng ta thấy rằng bộ lọc dự đoán tuyến tính có thể xây dựng như một bộ lọc tuyến tính hay bộ lọc lattice. Bộ lọc lattice là truy hồi theo bậc còn các hệ số của bộ lọc tuyến tính nhận được qua tiêu chuẩn RLS là độc lập. Khi thay đổi cơ bộ lọc thì các hệ số cũng thay đổi theo. Như vậy thuật toán Kalman là truy hồi theo thời gian chứ không theo bậc.

12-8 Cân bằng tự khôi phục

Trong các bộ cân bằng ZF hay bộ cân bằng tối thiểu MSE, người ta dùng một dãy ký hiệu biết trước để khởi đầu chế độ thích nghi của các bộ cân bằng. Tuy nhiên trong một số ứng dụng, ví dụ như mạng truyền tin đa điểm, người ta muốn phía thu đồng bộ nó với tín hiệu nhận được và thay đổi các hệ số bộ cân bằng mà không biết đó là dãy ký hiệu thử ban đầu. Kỹ thuật cân bằng trên cơ sở khởi đầu việc thay đổi các hệ số mà không cần tới dãy ký hiệu thử gọi là cân bằng tự khôi phục.

12-8-1 Cân bằng tự khôi phục trên tiêu chuẩn ML

Trong phần này ta sử dụng mô hình kênh rời rạc tương đương đã nói tới trong phần 12-1-2. Đầu ra của mô hình kênh này với ISI là

$$v_n = \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} + \eta_n \quad (12-8-1)$$

trong đó $\{f_k\}$ là các hệ số của mô hình kênh rời rạc tương đương, $\{I_n\}$ là dãy ký hiệu thông tin, $\{\eta_n\}$ là dãy nhiễu gaussian trắng.

Với một khối N số liệu nhận được, hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của vector số liệu nhận được $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \dots v_N]^t$ với điều kiện đã biết vector đáp ứng xung $\mathbf{f} = [f_0 f_1 \dots f_L]^t$ và vector số liệu $\mathbf{I} = [I_1 I_2 \dots I_N]^t$ là

$$p(\mathbf{v}|\mathbf{f}, \mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \left| v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} \right|^2 \right) \quad (12-8-2)$$

Ước lượng ML đồng thời $\mathbf{f}$ và $\mathbf{I}$ là các vector làm cực đại hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(\mathbf{v}|\mathbf{f}, \mathbf{I})$ hay làm cực tiểu thành phần mũ. Như vậy lời giải ML là các giá trị của hai vector là tối thiểu độ đo sau

$$DM(\mathbf{f}, \mathbf{I}) = \sum_{n=1}^N \left| v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} \right|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|^2 \quad (12-8-3)$$

với $\mathbf{A}$ được gọi là ma trận số liệu và được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_2 & I_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I_N & I_{N-1} & I_{N-2} & \dots & I_{N-L} \end{bmatrix} \quad (12-8-4)$$

Ta có một số nhận xét. Trước hết, nếu vector $\mathbf{I}$ hay ma trận $\mathbf{A}$ được biết thì cũng giống như trong trường hợp dãy ký hiệu thử được biết ở phía thu, ước lượng ML đáp ứng xung của kênh nhận được bằng cách tối thiểu hóa (12-8-3) theo $\mathbf{f}$ là

$$\mathbf{f}_M L(\mathbf{I}) = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{v} \quad (12-8-5)$$

Mặt khác, khi biết đáp ứng xung của kênh $\mathbf{f}$, xác định tối ưu ML cho dãy số liệu $\mathbf{I}$ được thực hiện bằng thuật toán Viterbi trong lưới cho kênh có ISI.

Khi không biết $\mathbf{f}$ và $\mathbf{I}$, việc tối thiểu hóa độ đo $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ được thực hiện đồng thời với $\mathbf{I}$ và $\mathbf{f}$. Một cách khác, $\mathbf{f}$ có thể được ước lượng từ hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện $p(\mathbf{v}|\mathbf{f})$, có thể nhận được qua việc lấy trung bình $p(\mathbf{v}, \mathbf{f}|\mathbf{I})$ theo mọi dãy số liệu có thể. Như vậy

$$p(\mathbf{v}|\mathbf{f}) = \sum_m p(\mathbf{v}, \mathbf{I}^{(m)}|\mathbf{f}) = \sum_m p(\mathbf{v}|\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}) P(\mathbf{I}^{(m)}) \quad (12-8-6)$$

Ước lượng kênh trên cơ sở trung bình dãy số liệu. Như đã nói, khi $\mathbf{I}$ và $\mathbf{f}$ không biết, ta có thể ước lượng $\mathbf{f}$ sau khi lấy trung bình $p(\mathbf{v}, \mathbf{I}|\mathbf{f})$ với mọi dãy số liệu có thể. Như vậy ta có

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v}|\mathbf{f}) &= \sum_m p(\mathbf{v}|\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}) P(\mathbf{I}^{(m)}) \\ &= \sum_m \left[\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2} \right) \right] P(\mathbf{I}^{(m)}) \end{aligned} \quad (12-8-7)$$

Như vậy ước lượng $\mathbf{f}$ là làm cực đại $p(\mathbf{v}|\mathbf{f})$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial p(\mathbf{v}|\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} = \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)})$$

$$(\mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f} - \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v}) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2} \right) = 0 \quad (12-8-8)$$

Như vậy ước lượng của $\mathbf{f}$ là

$$\mathbf{f} = \left[\sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)} g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}) \right]^{-1} \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v} \quad (12-8-9)$$

trong đó

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}) = \exp \left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2} \right) \quad (12-8-10)$$

Nghiệm tối ưu của $\mathbf{f}$ ký hiệu là $\mathbf{f}_{ML}$.

Phương trình (12-8-9) là phương trình phi tuyến nên khó có thể tìm được nghiệm tối ưu trực tiếp. Chúng ta có thể dùng phương pháp số để giải. Ta có

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \left[\sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)} g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}^{(k)}) \right]^{-1} \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{f}^{(k)}) \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v} \quad (12-8-11)$$

Khi $\mathbf{f}_{ML}$ nhận được từ (12-8-9) hay (12-8-11), ta có thể sử dụng ước lượng trong việc tối thiểu hóa độ đo $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$ với mọi dãy số liệu có thể. Như vậy $\mathbf{I}_{ML}$ là dãy $\mathbf{I}$ làm tối thiểu hóa $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$, có nghĩa là

$$\min_{\mathbf{I}} DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML}) = \min_{\mathbf{I}} \|\mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{f}_{ML}\|^2 \quad (12-8-12)$$

Tối đây ta có thể sử dụng thuật toán Viterbi để tối thiểu hóa $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$ theo $\mathbf{I}$.

Thuật toán này có hai trở ngại là tính truy hồi theo (12-8-11) là phức tạp và ước lượng $\mathbf{f}_{ML}$ không tốt bằng ước lượng ML $\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I})$ nhận được khi $\mathbf{I}$ không biết. Như vậy tốc độ sai của ước lượng trên cơ sở $\mathbf{f}_{ML}$ kém hơn so với ước lượng trên cơ sở $\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I})$.

Ước lượng đồng thời kênh và số liệu Ta ước lượng đồng thời $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ trong (12-8-3). Do các phần tử của $\mathbf{f}$ là liên tục và các phần tử của $\mathbf{I}$ là rời rạc nên ta có thể xác định ước lượng ML của $\mathbf{f}$ với mỗi dãy số liệu có thể và chọn ra dãy số liệu làm tối thiểu $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ với mỗi ước lượng kênh tương ứng. Như vậy ước lượng kênh tương ứng với dãy số liệu thứ m là

$$\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)}) = (\mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{A}^{(m)})^{-1} \mathbf{A}^{(m)t} \mathbf{v} \quad (12-8-13)$$

Với dãy số liệu thứ m , độ đo $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ là

$$DM(\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)})) = \|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)})\|^2 \quad (12-8-14)$$

Như vậy từ tập hợp M^N dãy có thể, ta chọn ra dãy làm tối thiểu hóa (12-8-14), có nghĩa là ta xác định

$$\min_{\mathbf{I}^{(m)}} DM(\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)})) \quad (12-8-15)$$

Phương pháp trên có độ phức tạp tính toán cao, số lượng phép tính tỷ lệ với mũ hóa của độ dài dãy số liệu. Chúng ta có thể chọn $N = L$ và ta có một ước lượng kênh với mỗi dãy còn lại trong số M^L dãy.

12-8-2 Thuật toán gradient ngẫu nhiên

Một phương pháp cân bằng tự khôi phục khác là cân bằng gradient ngẫu nhiên sử dụng tính không nhớ phi tuyến ở đầu ra của bộ lọc cân bằng tuyến tính FIR để tạo ra đáp ứng mong muốn trong mỗi lần lặp.

Các hệ số khởi đầu của bộ cân bằng tối ưu ký hiệu là $\{c_n\}$ và tích chập của đáp ứng kênh với đáp ứng của bộ cân bằng là

$$\{c_n\} * \{f_n\} = \{\delta_n\} + \{e_n\} \quad (12-8-16)$$

trong đó $\{\delta_n\}$ là dãy xung đơn vị và $\{e_n\}$ là dãy lỗi tạo ra từ việc khởi đầu các hệ số của bộ cân bằng. Lấy tích chập của đáp ứng xung của bộ cân bằng với dãy nhận được $\{v_n\}$ ta có

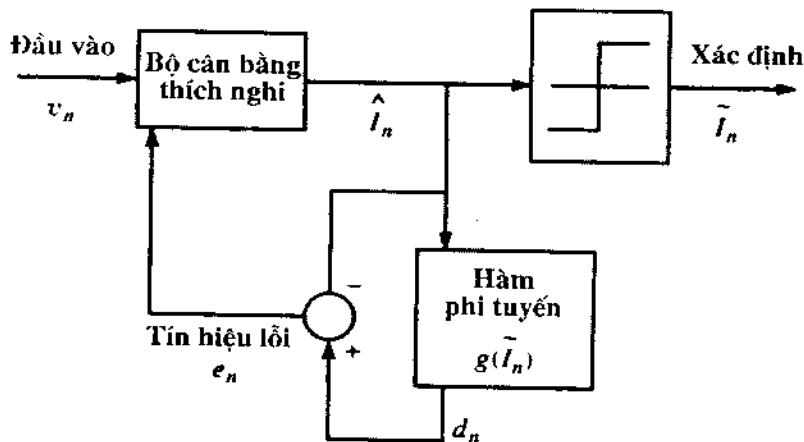
$$\begin{aligned} \{\hat{I}_n\} &= \{v_n\} * \{c_n\} \\ &= \{I_n\} * \{f_n\} * \{c_n\} + \{\eta_n\} * \{c_n\} \\ &= \{I_n\} * (\{\delta_n\} + \{e_n\}) + \{\eta_n\} * \{c_n\} \\ &= \{I_n\} + \{I_n\} * \{e_n\} + \{\eta_n\} * \{c_n\} \end{aligned} \quad (12-8-17)$$

Thành phần $\{I_n\}$ thể hiện dãy số liệu mong muốn, $\{I_n\} * \{e_n\}$ thể hiện ISI, $\{\eta_n\} * \{c_n\}$ là nhiễu cộng. Chúng ta cần giải chập dãy $\{\hat{I}_n\}$ để tìm ra ước lượng tốt nhất, ký hiệu $\{d_n\}$. Trong trường hợp cân bằng thích nghi dùng dãy ký hiệu thì $\{I_n\} = \{d_n\}$. Trong chế độ cân bằng tự khôi phục, chúng ta phải tạo ra đáp ứng mong muốn từ $\{\hat{I}_n\}$.

Tiêu chuẩn MSE được sử dụng để tìm ra ước lượng tốt nhất của dãy $\{I_n\}$ từ dãy quan sát được $\{\hat{I}_n\}$. Do dãy truyền đi $\{I_n\}$ có hàm mật độ phân bố xác suất không phải là gaussian, ước lượng MSE là biến đổi phi tuyến của $\{\hat{I}_n\}$. Nói chung, ước lượng tốt nhất $\{d_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned} d_n &= g(\hat{I}_n) && \text{(không nhớ)} \\ d_n &= g(\hat{I}_n, \hat{I}_{n-1}, \dots, \hat{I}_{n-m}) && \text{(có nhớ bậc } m) \end{aligned} \quad (12-8-18)$$

g là một hàm phi tuyến. Dãy $\{d_n\}$ sau đó được sử dụng để tạo ra tín hiệu lỗi và được đưa ngược trở lại bộ lọc cân bằng thích nghi như trong hình 12-8-1.



Hình 12-8-1: Bộ cân bằng tự khôi phục với thuật toán gradient ngẫu nhiên

Có một vấn đề điển hình trong ước lượng như sau. Nếu đầu ra của bộ cân bằng $\{\hat{I}_n\}$ được biểu diễn bởi

$$\hat{I}_n = I_n + \tilde{\eta}_n \quad (12-8-19)$$

trong đó giả thiết $\tilde{\eta}_n$ là nhiễu cộng gaussian có giá trị trung bình bằng 0, $\{I_n\}$ và $\{\tilde{\eta}_n\}$ giả thiết là độc lập thống kê, $\{I_n\}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê có phân bố giống nhau thì ước lượng MSE của $\{I_n\}$ là

$$d_n = E(I_n | \hat{I}_n) \quad (12-8-20)$$

là một hàm phi tuyến của đầu ra của bộ cân bằng khi $\{I_n\}$ không phải là gaussian.

Bảng 12-8-1: Thuật toán gradient ngẫu nhiên cho cân bằng tự khôi phục

Các hệ số của bộ cân bằng	$\{c_n, 0 \leq n \leq N-1\}$
Dãy tín hiệu nhận được	$\{v_n\}$
Đầu ra bộ cân bằng	$\{\hat{I}_n\} = \{v_n\} * \{c_n\}$
Dãy sai số cân bằng	$\{e_n\} = g(\hat{I}_n) - \hat{I}_n$
Phương trình cập nhật các hệ số	$c_{n+1} = c_n + \Delta v_n^* e_n$

Thuật toán	Hàm phi tuyến $g(\hat{I}_n)$
Godard	$\frac{\hat{I}_n}{ \hat{I}_n } (\hat{I}_n + R_2 \hat{I}_n - \hat{I}_n ^3), R_2 = \frac{E\{ \hat{I}_n ^4\}}{E\{ \hat{I}_n ^2\}}$
Sato	$\zeta \text{sgn}(\hat{I}_n), \zeta = \frac{E\{[\text{Re}(\hat{I}_n)]^2\}}{E\{ \hat{I}_n ^2\}}$
Benveniste-Goursat	$\hat{I}_n + k_1(\hat{I}_n - \bar{I}_n) + k_2 \hat{I}_n - \bar{I}_n [\zeta \text{sgn}(\hat{I}_n) - \bar{I}_n], k_1, k_2$ là hằng số dương

Bảng trên trình bày một số dạng của thuật toán cân bằng tự khôi phục trên cơ sở thích nghi LMS. Ta thấy rằng sự khác nhau cơ bản của các thuật toán là hàm phi tuyến. Thuật toán được sử dụng rộng rãi nhất là thuật toán Godard, đôi khi được gọi là thuật toán CMA.

Thuật toán LMS hội tụ theo trung bình khi

$$E[v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[v_n \hat{I}_n^*] \quad (12-8-21)$$

và hội tụ theo nghĩa trung bình bình phương khi (ký hiệu H là biến đổi liên hợp)

$$\begin{aligned} E[c_n^H v_n g^*(\hat{I}_n)] &= E[c_n^H v_n \hat{I}_n^*] \\ E[\hat{I}_n g^*(\hat{I}_n)] &= E[|\hat{I}_n|^2] \end{aligned} \quad (12-8-22)$$

Như vậy yêu cầu là đầu ra của bộ cân bằng $\{\hat{I}_n\}$ thỏa mãn điều kiện (12-8-22). (12-8-22) chỉ ra rằng tương quan của dãy $\{\hat{I}_n\}$ bằng tương quan chéo giữa $\hat{I}_n$ và biến đổi phi tuyến của $\hat{I}_n$. Giới hạn cơ bản của thuật toán gradient ngẫu nhiên là tốc độ hội tụ chậm.

Thuật toán Godard Như đã nói, thuật toán Godard cân bằng tự thích nghi là thuật toán giảm bậc hay được sử dụng trong thực tế khi không có dãy ký hiệu thử. Thuật toán này kết hợp việc cân bằng với theo dõi và khôi phục pha vật mang. Việc theo dõi pha vật mang được thực hiện ở băng tần cơ sở theo sau bộ cân bằng như trong hình 12-8-2. Trên cấu trúc này, đầu ra của bộ cân bằng là

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-K}^K c_n v_{k-n} \quad (12-8-23)$$

và đầu vào của bộ xác định là $\hat{I}_k \exp(-j\hat{\phi}_k)$, trong đó $\hat{\phi}_k$ là giá trị ước lượng pha vật mang trong thời điểm ký hiệu thứ k . Nếu ta biết ký hiệu truyền đi thì tín hiệu sai số sẽ là

$$\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k} \quad (12-8-24)$$

và tối thiểu hóa MSE theo $\hat{\phi}_k$ và $\{c_n\}$ có nghĩa là

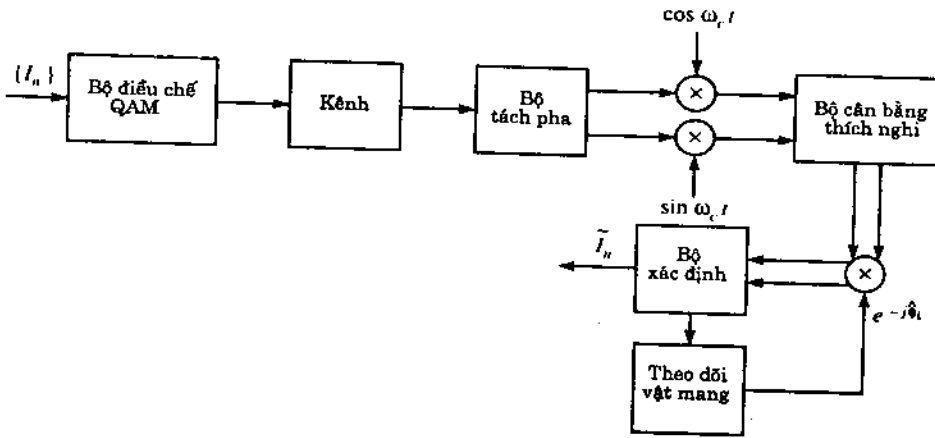
$$\min_{\hat{\phi}_k, C} E(|I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k}|^2) \quad (12-8-25)$$

Tiêu chuẩn này dẫn tới việc sử dụng thuật toán LMS truy hồi để ước lượng C và ϕ_k . Thuật toán dựa trên việc biết dãy ký hiệu truyền đi là

$$\hat{C}_{k+1} = \hat{C}_k + \Delta_c (I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k}) V_k^* e^{j\hat{\phi}_k} \quad (12-8-26)$$

$$\hat{\phi}_{k+1} = \hat{\phi}_k + \Delta_\phi \text{Im}(I_k \hat{I}_k^* e^{j\hat{\phi}_k}) \quad (12-8-27)$$

ở đây Δ_c và Δ_ϕ là các tham số bước cho hai phương trình truy hồi. Các phương trình này có liên quan tới nhau và chúng nói chung là không hội tụ khi dãy ký hiệu thông tin $\{I_k\}$ không biết.



Hình 12-8-2: Thuật toán Godard

Phương pháp của Godard phụ thuộc vào lượng ISI ở đầu ra của bộ cân bằng, nhưng lại độc lập với tín hiệu mang (ví dụ QAM) và pha vật mang. Ví dụ hàm giá cả là độc lập với pha vật mang và có tính chất là giá trị tối thiểu của nó cho MSE nhỏ là

$$G^{(p)} = E(|\hat{I}_k|^p - |I_k|^p)^2 \quad (12-8-28)$$

p là số nguyên dương. Tối thiểu hóa $G^{(p)}$ theo các hệ số của bộ cân bằng dẫn tới việc cân bằng chỉ ở biên độ tín hiệu. Dựa vào đó, Godard chọn một hàm giá cả tổng quát hơn là

$$D^{(p)} = E(|\hat{I}_k|^p - R_p)^2 \quad (12-8-29)$$

R_p là một hằng số thực dương và $D^{(p)}$ cũng độc lập với pha vật mang.

Tối thiểu hóa $D^{(p)}$ theo các hệ số của bộ cân bằng có thể thực hiện một cách truy hồi theo thuật toán giảm bậc

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k - \Delta_p \frac{dD^{(p)}}{d\mathbf{C}_k} \quad (12-8-30)$$

Chúng ta nhận được thuật toán dạng LMS để thay đổi các hệ số bộ cân bằng là

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_p \mathbf{V}_k^* \hat{I}_k |\hat{I}_k|^{p-2} (R_p - |\hat{I}_k|^p) \quad (12-8-31)$$

Giá trị tối ưu của R_p là

$$R_p = \frac{E(|I_k|^{2p})}{E(|I_k|^p)} \quad (12-8-32)$$

Ta thấy rằng thuật toán truy hồi trong (12-8-31) không cần biết pha vật mang. Việc theo dõi pha vật mang có thể hoạt động theo chế độ trực tiếp theo (12-8-27).

Một trường hợp quan trọng là khi $p = 2$, chúng ta có thuật toán khá đơn giản như sau

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_p \mathbf{V}_k^* \hat{I}_k (R_2 - |\hat{I}_k|^2) \\ \hat{\phi}_{k+1} &= \hat{\phi}_k + \Delta_\phi \text{Im}(\hat{I}_k \hat{I}_k^* e^{j\hat{\phi}_k}) \end{aligned} \quad (12-8-33)$$

$\bar{I}_k$ là xác định đầu ra dựa trên $\hat{I}_k$ và

$$R_2 = \frac{E(|I_k|^4)}{E(|\bar{I}_k|^2)} \quad (12-8-34)$$

Tính hội tụ của thuật toán (12-8-33) sẽ thỏa mã nếu ta chọn khởi đầu các hệ số của bộ cân bằng là 0 trừ hệ số ở giữa thỏa mãn bất đẳng thức

$$|c_0|^2 > \frac{E(|I_k|^4)}{2|x_0|^2[E(|I_k|^2)]^2} \quad (12-8-35)$$

Đây là điều kiện đủ cho tính hội tụ của thuật toán.

12-8-3 Thuật toán tự cân bằng dựa trên thống kê bậc cao

Ta biết rằng tính chất thống kê bậc hai của tín hiệu (tự tương quan) nhận được cung cấp cho chúng ta đáp ứng biên độ của kênh nhưng không cho chúng ta biết về đáp ứng pha. Tuy nhiên với tín hiệu tối ưu tuần hoàn như các tín hiệu điều chế số thì lại khác. Tính tuần hoàn vòng của tín hiệu nhận được là cơ sở cho một thuật toán ước lượng kênh mà ta xét trong phần này.

Đáp ứng xung của một hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến có thể xác định nếu như đầu vào của kênh không phải là gaussian do thống kê tích lũy bậc bốn của dãy gaussian bằng 0. Ta xét ví dụ về phương pháp này bằng cách thống kê bậc bốn dãy tín hiệu nhận được. Thống kê bậc 4 được định nghĩa là:

$$\begin{aligned} c(v_k, v_{k+m}, v_{k+n}, v_{k+l}) &\equiv c_v(m, n, l) \\ &= E(v_k v_{k+m} v_{k+n} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+m}) E(v_{k+n} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+n}) E(v_{k+m} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+l}) E(v_{k+m} v_{k+n}) \end{aligned} \quad (12-8-36)$$

Từ đó dẫn tới

$$c_r(m, n, l) = c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) \sum_{k=0}^{\infty} f_k f_{k+m} f_{k+n} f_{k+l} \quad (12-8-37)$$

Với dãy đầu vào $\{I_n\}$ có phân bố giống nhau và độc lập thống kê thì $c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) = k$ là hằng số. Như vậy nếu độ dài đáp ứng của kênh là $L+1$, ta có thể đặt $m = n = l = -L$ thì khi đó

$$c_r(-L, -L, -L) = k f_L f_0^3 \quad (12-8-38)$$

Tương tự nếu ta đặt $m = 0, n = L, l = p$ thì sẽ nhận được

$$c_r(0, L, p) = k f_L f_0^2 f_p \quad (12-8-39)$$

Kết hợp (12-8-38) và (12-8-39) ta nhận được đáp ứng xung với hệ số tỷ lệ

$$f_p = f_0 \frac{c_r(0, L, p)}{c_r(-L, -L, -L)}, \quad p = 1, 2, \dots, L \quad (12-8-40)$$

Các giá trị $c_r(m, n, l)$ được ước lượng bằng cách lấy trung bình dãy ký hiệu nhận được $\{v_n\}$.

Bằng cách tách riêng ước lượng kênh và cân bằng kênh, ta có thể sử dụng bất cứ loại cân bằng nào để giải quyết vấn đề ISI. Nhược điểm cơ bản của các loại cân bằng này là lượng số liệu cần xử lý lớn, khối lượng tính toán lớn.

BÀI TẬP

12-1 Trong một hệ thống PAM nhị phân, đầu vào bộ xác định là

$$y_m = a_m + n_m + i_m$$

trong đó $a_m = \pm 1$ là tín hiệu mong muốn, n_m là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình 0 và sai phương σ_n^2 , i_m là ISI do suy hao trên kênh. Thành phần ISI là một biến ngẫu nhiên nhận các giá trị $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ với các xác suất $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Xác định xác suất lỗi trung bình theo σ_n^2 .

12-2 Trong một hệ thống PAM nhị phân, việc lấy mẫu ở đầu ra của bộ tương quan sai lệch so với thời điểm lấy mẫu tối ưu là 10%. Nếu xung tín hiệu là xung chữ nhật, xác định sự suy hao trong SNR do lấy mẫu sai thời điểm. Xác định lượng ISI và ảnh hưởng của nó lên độ hiệu quả.

12-3 Đáp ứng tần số của một kênh tần số thấp là

$$H(f) = \begin{cases} 1 + \alpha \cos 2\pi f t_0 & (|\alpha| < 1, |f| \leq W) \\ 0 & (\text{các giá trị khác}) \end{cases}$$

W là độ rộng dải thông của kênh và tín hiệu vào $s(t)$ có phổ nằm trong dải thông của kênh và bằng W .

- Chứng tỏ rằng $y(t) = s(t) + \frac{1}{2}\alpha[s(t - t_0) + s(t + t_0)]$
- Giả sử tín hiệu $y(t)$ nhận được được cho qua một bộ lọc phối hợp với $s(t)$. Xác định đầu ra của bộ lọc phối hợp tại các thời điểm $t = kT$, T là khoảng thời gian ký hiệu.
- Hỏi thành phần ISI của kênh nếu $t_0 = T$.

12-4 Một đường truyền có định hướng có chiều dài 1000 km được dùng để truyền số liệu nhờ tín hiệu PAM nhị phân. Các bộ lặp được đặt cách nhau 50 km dọc theo đường truyền. Các đoạn của kênh có đáp ứng tần số lý tưởng trong dải tần $0 \leq f \leq 1200$ Hz và độ suy hao là 1 dB/km. Giả thiết nhiễu trên kênh là AWGN.

- Hỏi tốc độ truyền lớn nhất mà không bị ISI
- Xác định ξ_b/N_0 cần thiết để xác suất sai bit là $P_2 = 10^{-7}$ với mỗi bộ lặp
- Xác định công suất truyền ở mỗi bộ lặp để đạt được giá trị ξ_b/N_0 xác định ở câu trên nếu $N_0 = 4,1 \times 10^{-21}$ W/Hz

12-5 Chứng minh quan hệ trong (12-1-13) cho tự tương quan của nhiễu ở đầu ra của bộ lọc phối hợp

12-6 Trong trường hợp tín hiệu PAM với sai tương quan, các độ đo trong thuật toán Viterbi được biểu diễn tổng quát là

$$CM(\mathbf{I}) = 2 \sum_n I_n r_n - \sum_n \sum_m I_n I_m x_{n-m}$$

với $x_n = x(nT)$ là các mẫu tín hiệu ở đầu ra của bộ lọc phối hợp, $\{I_n\}$ là dãy số liệu, $\{r_n\}$ là dãy tín hiệu nhận được ở đầu ra bộ lọc phối hợp. Xác định độ đo cho tín hiệu nhị phân kép.

12-7 Một tín hiệu nhị phân ngược pha được truyền qua một kênh có dải tần hữu hạn không lý tưởng và do đó gây ra ISI trên 2 ký hiệu kề nhau. Với một tín hiệu $x(t)$ tách biệt truyền đi, đầu ra (không có nhiễu) ở bộ giải điều chế là $\sqrt{\xi_b}$ tại $t = T$, $\sqrt{\xi_b}/4$ tại $t = 2T$ và bằng 0 với $t = kT, k > 2$, ξ_b là năng lượng tín hiệu và T là khoảng thời gian tín hiệu.

a. Xác định xác suất sai trung bình, giả thiết hai tín hiệu truyền đi đồng xác suất và nhiễu cộng là trắng và gaussian

b. Về xác suất lỗi xác định được trong câu trên và trong trường hợp không có ISI, xác định độ chênh lệch về SNR khi xác suất sai là 10^{-6}

12-8 Khi dãy giả ngẫu nhiên độ dài N được sử dụng để thay đổi các hệ số của bộ cân bằng tuyến tính N hệ số thì quá trình tính toán có thể thực hiện khá dễ dàng ở miền tần số bằng cách sử dụng biến đổi Fourier. Giả sử $\{y_n\}$ là dãy N mẫu tín hiệu nhận được (lấy mẫu ở tốc độ ký hiệu) ở đầu vào của bộ cân bằng. Sau đó việc tính các hệ số của bộ cân bằng được thực hiện như sau:

a. Tính DFT một chu kỳ dãy đầu vào bộ cân bằng $\{y_n\}$:

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi nk/N}$$

b. Tính phổ

$$C_k = \frac{X_k Y_k^*}{|Y_k|^2}$$

trong đó X_k là kết quả DFT của dãy khởi đầu.

c. Tính IDFT của $\{C_k\}$ để có các hệ số của bộ cân bằng $\{c_n\}$. Tìm đáp ứng tần số của bộ cân bằng.

Chương 13

HỆ THỐNG TRUYỀN TIN NHIỀU KÊNH VÀ NHIỀU SÓNG MANG

Trong một số ứng dụng người ta muốn truyền cùng một tín hiệu mang thông tin qua nhiều kênh khác nhau. Chế độ truyền này thường được sử dụng trong trường hợp có một số kênh không có đủ độ tin cậy và an toàn theo thời gian (không ổn định theo thời gian), ví dụ như các kênh radio truyền trong tầng điện ly hay tầng đối lưu. Một dạng ứng dụng khác mà người ta cũng hay sử dụng đó là trong các ứng dụng quân sự để chống hiện tượng tắc nghẽn tín hiệu hay để quá trình truyền tin có độ an toàn và tin cậy cao.

Cùng với truyền tin nhiều kênh, người ta còn sử dụng truyền tin nhiều sóng mang, trong đó băng tần của kênh được chia ra thành nhiều băng con và thông tin được truyền trong mỗi băng con này.

13-1 Hệ thống truyền tin nhiều kênh trong kênh AWGN

Phần này chúng ta tập trung vào việc truyền thông tin qua một số kênh nhất định và các kênh này chỉ khác nhau ở độ suy hao và độ trễ pha. Mô hình của hệ thống truyền tin nhiều kênh được trình bày như sau. Các tín hiệu truyền đi có dạng tổng quát là:

$$s_{lm}^{(n)}(t) = \text{Re}[s_{lm}^{(n)}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M \quad (13-1-1)$$

trong đó L là số kênh và M là số lượng tín hiệu. Các tín hiệu giả sử có cùng năng lượng và cùng xác suất tiên nghiệm. Các tín hiệu $\{s_{lm}^{(n)}(t)\}$ được truyền qua L kênh có hệ số khuếch đại biên độ là $\{\alpha_n\}$ và độ dịch pha $\{\phi_n\}$ và trên kênh có nhiễu cộng. Tín hiệu tần số thấp tương đương nhận được ở đầu ra của L kênh là

$$r_l^{(n)}(t) = \alpha_n e^{-j\phi_n} s_{lm}^{(n)}(t) + z_n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad n = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M \quad (13-1-2)$$

$s_{lm}^{(n)}(t)$ là tín hiệu truyền đi tần số thấp tương đương và $z_n(t)$ là nhiễu cộng trên L kênh. Giả thiết $z_n(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên gaussian có phân bố giống nhau và độc lập thống kê với nhau.

Có hai loại xử lý ở phía thu là xác định liên kết và xác định không liên kết. Bộ thu cho xác định liên kết sẽ ước lượng các tham số của kênh $\{\alpha_n\}$ và $\{\phi_n\}$ và sử dụng các giá trị ước lượng này để tính các biến xác định. Ta định nghĩa $g_n = \alpha_n e^{-j\phi_n}$ và $\hat{g}_n$ là ước lượng của g_n . Bộ thu đa kênh lấy tương quan của mỗi tín hiệu trong số L tín hiệu nhận được với các tín hiệu có thể truyền đi rồi nhân đầu ra

của bộ tương quan với $\{\hat{g}_n^*\}$ và lấy tổng các tín hiệu nhận được. Cuối cùng các biến xác định cho việc xác định liên kết là các độ đo tương quan

$$CM_m = \sum_{n=1}^L \operatorname{Re} \left[\hat{g}_n^* \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{lm}^{(n)*}(t) dt \right], \quad m = 1, \dots, M \quad (13-1-3)$$

Đối với xác định không liên kết thì người ta không phải ước lượng các tham số của kênh. Bộ giải điều chế có thể xác định dựa trên tổng đường bao (xác định đường bao) hay tổng bình phương đường bao (luật xác định bình phương) tín hiệu ở đầu ra của bộ lọc phối hợp. Nói chung hiệu quả của hai luật xác định này có khác nhau một chút trên kênh AWGN. Tuy nhiên luật xác định bình phương đối với tín hiệu truyền trên nhiều kênh AWGN để phân tích hơn và chúng ta xét phương pháp này. Các biến xác định là

$$CM_m = \sum_{n=1}^L \left| \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{lm}^{(n)*}(t) dt \right|^2, \quad m = 1, \dots, M \quad (13-1-4)$$

Bây giờ ta xét tín hiệu nhị phân và giả thiết $s_{l1}^{(n)}, n = 1, \dots, L$ là L tín hiệu truyền đi. Lỗi xảy ra khi $CM_2 > CM_1$ hay $D = CM_1 - CM_2 < 0$. Đối với xác định không liên kết thì

$$D = \sum_{n=1}^L (|X_n|^2 - |Y_n|^2) \quad (13-1-5)$$

và

$$\begin{aligned} X_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{l1}^{(n)*}(t) dt, \quad n = 1, \dots, L \\ Y_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{l2}^{(n)*}(t) dt, \quad n = 1, \dots, L \end{aligned} \quad (13-1-6)$$

$\{X_n\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian có phân bố giống nhau và độc lập thống kê với nhau và cũng như vậy với $\{Y_n\}$. Tuy nhiên với mỗi giá trị n thì X_n và Y_n có thể vẫn tương quan với nhau.

Đối với xác định liên kết thì

$$D = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L (X_n Y_n^* + X_n^* Y_n) \quad (13-1-7)$$

$$\begin{aligned} Y_n &= \hat{g}_n, \quad n = 1, \dots, L \\ X_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) [s_{l1}^{(n)*}(t) - s_{l2}^{(n)*}(t)] dt \end{aligned} \quad (13-1-8)$$

Các ước lượng $\{\hat{g}_n\}$ có được qua việc theo dõi các tín hiệu nhận được có đặc trưng thống kê là phân bố gaussian. Khi đó $\{Y_n\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian có phân bố giống nhau và độc lập thống kê với nhau. Đối với $\{X_n\}$ ta cũng thấy như vậy. Cũng giống như xác định không liên kết, có thể có sự tương quan giữa X_n và Y_n nhưng sẽ không có sự tương quan giữa X_n và Y_m với $m \neq n$.

13-1-1 Tín hiệu nhị phân

Chúng ta quan tâm tới biến ngẫu nhiên dạng tổng quát

$$D = \sum_{n=1}^L (A|X_n|^2 + B|Y_n|^2 + CX_n Y_n^* + C^* X_n^* Y_n) \quad (13-1-9)$$

là biến ngẫu nhiên gaussian giá trị phức. Xác suất để $D < 0$ là xác suất lỗi của tín hiệu nhị phân đa kênh AWGN.

Nếu các tín hiệu nhị phân là ngược pha và ước lượng $\{g_n\}$ là đúng thì như xác định PSK liên kết, xác suất sai là

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right) \quad (13-1-10)$$

với

$$\gamma_b = \frac{\xi}{N_0} \sum_{n=1}^L |g_n|^2 = \frac{\xi}{N_0} \sum_{n=1}^L \alpha_n^2 \quad (13-1-11)$$

là SNR từng bit. Nếu các kênh là lý tưởng $\alpha_n = \alpha$ với mọi n thì

$$\gamma_b = \frac{L\xi}{N_0} \alpha^2 \quad (13-1-12)$$

$L\xi$ là tổng năng lượng các tín hiệu truyền đi trên L kênh. Như vậy sẽ không có suy hao về độ hiệu quả khi chia toàn bộ năng lượng tín hiệu cho L kênh. Hiệu quả cũng sẽ đạt được như vậy khi một tín hiệu có năng lượng $L\xi$ truyền trên một kênh. Chú ý rằng điều này chỉ đúng khi $\hat{g}_n = g_n$ với mọi n . Khi quá trình ước lượng các tham số kênh không chính xác thì sẽ bị suy hao về độ hiệu quả.

Việc ước lượng chính xác $\{g_n\}$ là một trường hợp đặc biệt. Một trường hợp đặc biệt khác là ta sử dụng tín hiệu DPSK nhị phân. Đối với tín hiệu DPSK thì các ước lượng $\{\hat{g}_n\}$ chính là các mẫu tín hiệu cộng nhiễu ở đầu ra bộ lọc phối hợp ở khoảng thời gian ký hiệu trước. Đây là trường hợp tồi nhất khi ước lượng $\{g_n\}$. Đối với tín hiệu DPSK nhị phân thì xác suất lỗi là

$$P_b = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-\gamma_b} \sum_{n=1}^{L-1} c_n \gamma_b^n \quad (13-1-13)$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{L-1-n} \binom{2L-1}{k} \quad (13-1-14)$$

và γ_b là SNR từng bit được định nghĩa trong (13-1-11). Ta so sánh kết quả này với trường hợp một kênh ($L = 1$). Để đơn giản ta giả thiết L kênh có độ suy hao giống nhau. Như vậy với cùng một giá trị γ_b thì hiệu quả của hệ thống đa kênh kém hơn so với hệ thống một kênh và độ suy hao phụ thuộc vào L .

Sự suy hao về độ hiệu quả cũng xảy ra đối với luật xác định bình phương cho tín hiệu trực giao truyền trên L kênh. Đối với tín hiệu trực giao nhị phân, biểu thức của xác suất lỗi giống với biểu thức của tín hiệu DPSK nhị phân trừ giá trị γ_b được thay bằng $\frac{1}{2}\gamma_b$. Như vậy hệ thống sử dụng tín hiệu trực giao nhị phân xác định không liên kết có độ hiệu quả kém hơn so với hệ thống sử dụng tín hiệu DPSK nhị phân là 3 dB. Tuy nhiên độ suy hao do việc tích hợp không liên kết các tín hiệu nhận được trên L kênh cũng giống như đối với tín hiệu DPSK nhị phân.

Hình 13-1-1 biểu diễn độ suy hao do việc tích hợp không liên kết L tín hiệu. xác suất lỗi nhận được từ biểu thức

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b} \quad (13-1-15)$$

13-1-2 Tín hiệu trực giao M mức

Xét việc sử dụng tín hiệu trực giao M mức với luật xác định bình phương và tích hợp các tín hiệu trên L kênh. Các biến xác định được cho trong (13-1-4). Giả thiết các tín hiệu $s_{1l}^{(n)}(t), n = 1, \dots, L$ được truyền qua L kênh AWGN, khi đó các biến xác định là

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{n=1}^L |2\xi\alpha_n + N_{n1}|^2 \\ U_m &= \sum_{n=1}^L |N_{nm}|^2, \quad m = 2, \dots, M \end{aligned} \quad (13-1-16)$$

$\{N_{nm}\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và là các biến phức với sai phương $\sigma^2 = \frac{1}{2} E(|N_{nm}|^2) = 2\xi N_0$. Như vậy U_1 được đặc trưng thống kê bởi một biến ngẫu nhiên có phân bố Khi không trung tâm có $2L$ độ tự do và tham số không trung tâm là

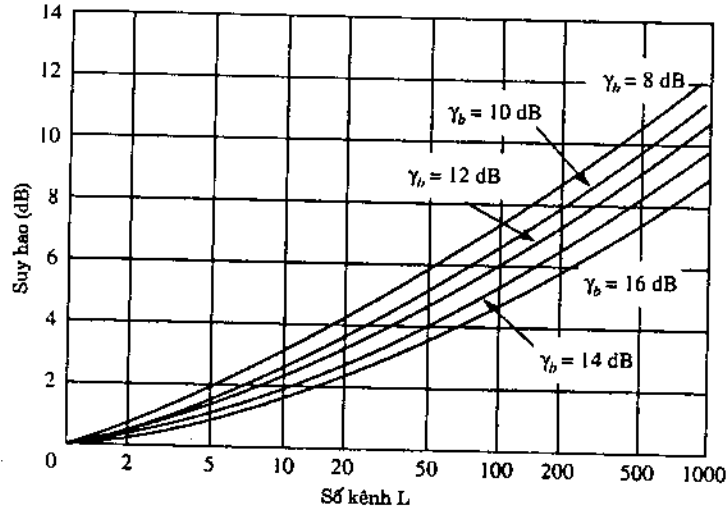
$$s^2 = \sum_{n=1}^L (2\xi\alpha_n)^2 = 4\xi^2 \sum_{n=1}^L \alpha_n^2 \quad (13-1-17)$$

Dùng (2-1-118) ta có

$$p(u_1) = \frac{1}{2\xi N_0} \left(\frac{u_1}{s^2}\right)^{(L-1)/2} \exp\left(-\frac{s^2 + u_1}{4\xi N_0}\right) I_{L-1}\left(\frac{s\sqrt{u_1}}{2\xi N_0}\right), \quad u_1 \geq 0 \quad (13-1-18)$$

Mặt khác, $\{U_m\}, m = 2, \dots, M$ là các biến ngẫu nhiên có phân bố Khi giống nhau, độc lập thống kê, mỗi biến có $2L$ độ tự do. Dùng (2-1-110) ta có

$$p(u_m) = \frac{1}{(4\xi N_0)^L (L-1)!} u_m^{L-1} e^{-u_m/4\xi N_0}, \quad u_m \geq 0, \quad m = 2, \dots, M \quad (13-1-19)$$



Hình 13-1-1: Độ suy hao do xác định không liên kết

Xác suất sai ký hiệu là

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - P_c \\ &= 1 - P(U_2 < U_1, U_3 < U_1, \dots, U_M < U_1) \\ &= 1 - \int_0^\infty [P(U_2 < u_1 | U_1 = u_1)]^{M-1} p(u_1) du_1 \end{aligned} \quad (13-1-20)$$

Nhưng

$$P(U_2 < u_1 | U_1 = u_1) = 1 - \exp\left(-\frac{u_1}{4\xi N_0}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{u_1}{4\xi N_0}\right)^k \quad (13-1-21)$$

Như vậy

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - \int_0^\infty \left[1 - e^{-u_1/4\xi N_0} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{u_1}{4\xi N_0}\right)^k\right]^{M-1} p(u_1) du_1 \\ &= 1 - \int_0^\infty \left(1 - e^{-v} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{v^k}{k!}\right)^{M-1} \left(\frac{v}{\gamma}\right)^{(L-1)/2} e^{-(\gamma+v)} I_{L-1}(2\sqrt{\gamma v}) dv \end{aligned} \quad (13-1-22)$$

trong đó

$$\gamma = \xi \sum_{n=1}^L \alpha_n^2 / N_0$$

Một phương pháp khác, ta cũng có thể sử dụng giới hạn hợp

$$P_M < (M - 1)P_2(L) \quad (13-1-23)$$

ở đây $P_2(L)$ là xác suất chọn một trong $M - 1$ biến xác định $\{U_m\}$, $m = 2, \dots, M$. Từ độ hiệu quả của tín hiệu trực giao nhị phân ta có

$$P_2(L) = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-k\gamma_b/2} \sum_{n=0}^{L-1} c_n \left(\frac{1}{2}k\gamma_b\right)^n \quad (13-1-24)$$

trong đó c_n được xác định trong (13-1-14). Với M nhỏ, giới hạn hợp là đủ chặt với các ứng dụng trong thực tế.

13-2 Hệ thống truyền tin nhiều sóng mang

Như chúng ta đã biết trong chương trước, khi kênh là tuyến tính không lý tưởng thì nó sẽ gây ra ISI làm giảm hiệu quả của kênh. Mức độ suy hao phụ thuộc vào đáp ứng tần số của kênh. Hơn nữa, độ phức tạp của bộ thu tăng lên khi sự ảnh hưởng của ISI kéo dài ra theo thời gian (khi mở rộng ISI).

Với một kênh truyền cho trước, người thiết kế hệ thống phải xác định làm thế nào để có thể sử dụng có hiệu quả độ rộng dải thông của kênh và truyền thông tin một cách an toàn bảo đảm khi công suất máy phát và độ phức tạp của bộ thu bị ràng buộc. Đối với kênh tuyến tính không lý tưởng, một phương pháp là sử dụng một sóng mang. Đối với những kênh như vậy, sự tán xạ về mặt thời gian nói chung lớn hơn nhiều so với tốc độ ký hiệu và ISI là kết quả của kênh có đáp ứng tần số không lý tưởng. Khi đó ta cần sử dụng các bộ cân bằng để bù lại lượng ISI.

Một phương pháp khác để thiết kế hệ thống truyền thông khi kênh có suy hao là chia dải thông của kênh ra thành nhiều kênh nhỏ sao cho trong mỗi kênh nhỏ thì có thể coi là lý tưởng. Giả sử $C(f)$ là đáp ứng tần số của kênh có dải tần hữu hạn, không lý tưởng có độ rộng dải thông W và phổ mật độ công suất nhiễu cộng gaussian là $\Phi_{nn}(f)$. Chúng ta chia băng tần W thành N kênh nhỏ, mỗi kênh nhỏ có độ rộng dải tần Δf và Δf đủ nhỏ để $|C(f)|^2/\Phi_{nn}(f)$ có thể coi là hằng số trong mỗi băng con. Hơn nữa, ta chọn mật độ phổ công suất tín hiệu truyền đi là $P(f)$ thỏa mãn

$$\int_W P(f)df \leq P_{av} \quad (13-2-1)$$

trong đó P_{av} là công suất trung bình của máy phát. Sau đây ta tính thông lượng kênh không lý tưởng có nhiễu cộng gaussian.

13-2-1 Thông lượng kênh tuyến tính không lý tưởng

Ta đã biết rằng thông lượng kênh AWGN có dải tần hữu hạn lý tưởng là

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0} \right) \quad (13-2-2)$$

Trong hệ thống nhiều sóng mang, với Δf đủ nhỏ thì thông lượng mỗi kênh con là

$$C_i = \Delta f \log_2 \left[1 + \frac{\Delta f P(f_i) |C(f)|^2}{\Delta f \Phi_{nn}(f_i)} \right] \quad (13-2-3)$$

Như vậy thông lượng tổng cộng của kênh là

$$C = \sum_{i=1}^N C_i = \Delta f \sum_{i=1}^N \log_2 \left[1 + \frac{P(f_i) |C(f)|^2}{\Phi_{nn}(f_i)} \right] \quad (13-2-4)$$

Trong trường hợp giới hạn, khi $\Delta f \rightarrow 0$ thì thông lượng của kênh là

$$C = \int_W \log_2 \left[1 + \frac{P(f)|C(f)|^2}{\Phi_{nn}(f)} \right] df \quad (13-2-5)$$

Dưới điều kiện (13-2-1), chọn $P(f)$ để cực đại hóa C được xác định bởi cực đại hóa tích phân

$$\int_W \left\{ \log_2 \left[1 + \frac{P(f)|C(f)|^2}{\Phi_{nn}(f)} \right] + \lambda P(f) \right\} df \quad (13-2-6)$$

trong đó λ là hệ số Lagrange. Chúng ta tìm ra phân bố tối ưu của công suất tín hiệu truyền đi là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{|C(f)|^2 P(f) + \Phi_{nn}(f)} + \lambda = 0 \quad (13-2-7)$$

Như vậy ta thấy rằng $P(f) + \Phi_{nn}(f)/|C(f)|^2$ là một hằng số. Như vậy:

$$P(f) = \begin{cases} K - \Phi_{nn}(f)/|C(f)|^2 & (f \in W) \\ 0 & (f \notin W) \end{cases} \quad (13-2-8)$$

Đây là biểu thức về thông lượng kênh tuyến tính không lý tưởng có nhiễu cộng gaussian. Như vậy công suất tín hiệu phải cao khi SNR của kênh $C(f)/\Phi_{nn}(f)$ cao và phải nhỏ khi SNR của kênh nhỏ.

Một điều thú vị cần chú ý là thông lượng của kênh là nhỏ nhất khi SNR của kênh là hằng số khi $f \in W$. Khi đó $P(f)$ là hằng số. Nói cách khác, khi đáp ứng tần số của kênh là lý tưởng thì thông lượng của kênh sẽ nhỏ nhất khi nhiễu là nhiễu trắng gaussian.

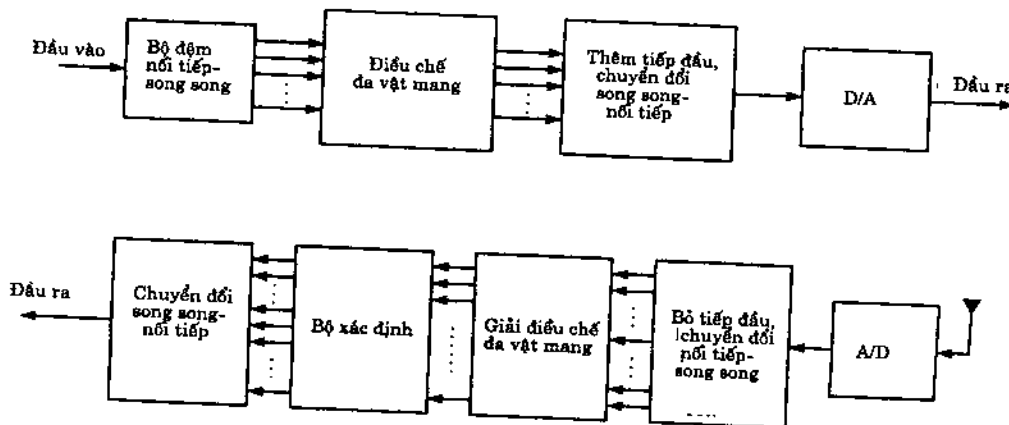
Như vậy bằng cách điều chế đa vật mang thì ta có thể truyền số liệu với tốc độ gần sát tới thông lượng của kênh. Tín hiệu trong mỗi kênh con có thể được mã hóa độc lập và điều chế với tốc độ ký hiệu là $1/\Delta f$ với Δf tối ưu. Khi Δf đủ nhỏ thì ISI có thể loại bỏ được.

13-2-2 Hệ thống nhiều sóng mang sử dụng FFT

Hình 13-2-1 là sơ đồ khối một hệ thống truyền thông sử dụng nhiều sóng mang. Bộ dem nối tiếp-song chia dây thông tin thành các khung N_f bit. N_f bit trong mỗi khung lại được chia thành N nhóm và nhóm thứ i gồm $\tilde{n}_i$ bit, như vậy

$$\sum_{i=1}^N \tilde{n}_i = N_f \quad (13-2-9)$$

Mỗi nhóm có thể được mã hóa một cách độc lập và số bit ở đầu ra của mỗi bộ mã hóa là $n_i \geq \tilde{n}_i$.



Hình 13-2-1: Hệ thống nhiều sóng mang

Ta xét hệ thống nhiều sóng mang là hệ thống gồm $\tilde{N}$ kênh tín hiệu QAM độc lập, các kênh hoạt động ở cùng tốc độ ký hiệu $1/T$. Ta ký hiệu điểm tín hiệu phức tương ứng với các ký hiệu mang thông tin trong các kênh con là $X_k, k = 0, \dots, \tilde{N} - 1$. Để điều chế $\tilde{N}$ sóng mang để mang các ký hiệu thông tin $\{X_k\}$, người ta sử dụng IDFT.

Tuy nhiên, nếu ta tính IDFT $\tilde{N}$ điểm cho $\{X_k\}$ thì chúng ta sẽ thu được dãy giá trị phức không tương đương với $\tilde{N}$ tín hiệu QAM. Thay vào đó, ta tạo ra $N = 2\tilde{N}$ ký hiệu mang thông tin như sau:

$$X_{n-k} = X_k^*, \quad k = 1, \dots, \tilde{N} - 1 \quad (13-2-10)$$

và $X'_0 = \text{Re}(X_0), X_{\tilde{N}} = \text{Im}(X_0)$. Như vậy ký hiệu X_0 được chia thành hai phần đều là thực. Khi đó IDFT N điểm tạo ra dãy giá trị thực:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi nk/N}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (13-2-11)$$

Dãy $\{x_n, 0 \leq n \leq N-1\}$ tương ứng với các mẫu của tổng $x(t)$ của $\tilde{N}$ tín hiệu mang, được biểu diễn là

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kt/T}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (13-2-12)$$

T là khoảng thời gian ký hiệu. Ta thấy rằng các tần số mang là $f_k = k/T, k = 0, \dots, \tilde{N}$. Hơn nữa, dãy rời rạc $\{x_n\}$ là các mẫu của $x(t)$ tại các thời điểm $t = nT/N, n = 0, \dots, N-1$.

Tính IDFT của dãy số liệu $\{X_k\}$ theo (13-2-10) có thể xem là việc nhân mỗi điểm tín hiệu X_k với một vectơ

$$\mathbf{v}_k = [v_{k0} v_{k1} \dots v_{k(N-1)}] \quad (13-2-13)$$

với

$$v_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j(2\pi/N)kn} \quad (13-2-14)$$

Các mẫu tín hiệu thường được cho qua bộ biến đổi D/A để tạo ra tín hiệu $x(t)$ và đầu ra của kênh là

$$r(t) = x(t) \star h(t) + n(t) \quad (13-2-15)$$

$h(t)$ là đáp ứng xung của kênh. Bằng cách chọn Δf đủ nhỏ thì khoảng thời gian ký hiệu $T = 1/\Delta f$ lớn hơn nhiều so với thời gian tán xạ của kênh (nếu thời gian tán xạ của kênh ảnh hưởng tới $v+1$ mẫu tín hiệu $v \ll N$ và để khắc phục hiện tượng ISI người ta thêm một khoảng thời gian bảo vệ vT/N giữa hai lần truyền khối liên tiếp). Một phương pháp khác nữa để tránh ISI là người ta thêm một phần mã vòng vào mỗi khối N mẫu tín hiệu $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ sao cho sự tán xạ trên kênh chỉ ảnh hưởng tới phần ký hiệu thêm vào còn phần ký hiệu gốc thì không bị ISI. Về bản chất thì hai phương pháp này không khác gì nhau.

Tín hiệu mang thông tin được giải điều chế bằng cách tính DFT của tín hiệu nhận được sau khi đã cho các mẫu qua bộ biến đổi A/D. Các mẫu của đáp ứng tần số của kênh có thể dễ dàng ước lượng ở phía thu bằng cách gửi một dãy tín hiệu điều chế trên mỗi kênh con hay một dãy tín hiệu mang không điều chế tới phía thu. Nếu các thông số của kênh biến đổi chậm theo thời gian thì có thể theo dõi sự biến đổi này bằng cách sử dụng quyết định ở đầu ra của bộ xác định hay bộ giải mã theo kiểu quyết định trực tiếp. Như vậy hệ thống nhiều sóng mang có thể thiết kế một cách thích nghi.

BÀI TẬP

13-1 $X_1, X_2, \dots, X_N$ là N biến ngẫu nhiên gaussian thực có phân bố giống nhau và độc lập thống kê có giá trị trung bình $E(X_i) = m$ và sai phương σ^2 .

a. Định nghĩa

$$U = \sum_{n=1}^N X_n$$

Tính SNR của U và

$$SNR_U = \frac{[E(U)]^2}{2\sigma_U^2}$$

b. Định nghĩa

$$V = \sum_{n=1}^N X_n^2$$

Tính SNR của V , giá trị này được định nghĩa như đối với U .

13-2 Một hệ thống truyền nhị phân truyền cùng một thông tin trên hai kênh riêng biệt. Hai tín hiệu nhận được là

$$\begin{aligned} r_1 &= \pm\sqrt{\xi_b} + n_1 \\ r_2 &= \pm\sqrt{\xi_b} + n_2 \end{aligned}$$

$E(n_1) = E(n_2) = 0, E(n_1^2) = \sigma_1^2, E(n_2^2) = \sigma_2^2$, n_1 và n_2 là các biến ngẫu nhiên gaussian không tương quan. Bộ xác định sẽ quyết định dựa vào tổ hợp tuyến tính của r_1 và r_2 : $r = r_1 + kr_2$

a. Xác định k để tối thiểu hóa xác suất sai.

b. Vẽ xác suất sai với $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 3, k = 1$ và giá trị k tối ưu đã xét trong câu a. So sánh kết quả.

13-3 Chứng tỏ rằng dãy $\{x_n\}$ trong (13-2-11) tương ứng với các mẫu của tín hiệu $x(t)$ trong (13-2-12)

Chương 14

HỆ THỐNG TRUYỀN TIN DÙNG TÍN HIỆU TRẢI PHỔ

Hệ thống truyền thông số sử dụng tín hiệu trải phổ được phân biệt với các hệ thống truyền thông khác ở đặc điểm độ rộng phổ W của tín hiệu lớn hơn nhiều so với tốc độ thông tin R bit/s. Như vậy hệ số mở rộng dải thông $B_e = W/R$ lớn hơn 1 khá nhiều. Độ dư thừa trong tín hiệu trải phổ để khắc phục các ảnh hưởng gặp phải khi truyền tín qua một số kênh như kênh radio hay vệ tinh. Do tín hiệu mã cũng được đặc trưng bởi hệ số mở rộng dải thông lớn hơn đơn vị và mã hóa là một biện pháp tốt để sử dụng độ dư thừa trong mã hiệu nên mã hóa là một thành phần quan trọng khi thiết kế tín hiệu trải phổ.

Thành phần quan trọng thứ hai khi thiết kế tín hiệu trải phổ là dãy giả nhiễu (giả ngẫu nhiên), nó làm cho tín hiệu có tính chất gần giống nhiễu và do đó khó bị phát hiện, giải điều chế và thu nhận bởi một bộ thu nào đó không được phép. Điều này thích hợp trong các hệ thống truyền tin đòi hỏi tính riêng tư cao.

Tín hiệu trải phổ được sử dụng để:

- tránh hay giảm nhỏ các ảnh hưởng trầm trọng do tắc nghẽn, ảnh hưởng từ các người dùng khác trên kênh hay tự ảnh hưởng do tín hiệu truyền lan nhiều đường.
- che giấu tín hiệu bằng cách truyền tín hiệu với công suất thấp, gây khó khăn cho đối tượng thu không được phép do khó phát hiện tín hiệu trong nền nhiễu.
- xác lập tính riêng tư của bản tin khi có nhiều đối tượng thu đồng thời.

Trong một số ứng dụng khác như đo khoảng cách (trễ truyền lan), đo vận tốc người ta cũng sử dụng tín hiệu trải phổ. Tuy nhiên chúng ta chỉ xem xét tín hiệu trải phổ trong các ứng dụng truyền thông.

Để tránh ảnh hưởng gây tắc nghẽn có chủ ý, điều quan trọng là phải làm cho bộ phát tín hiệu tắc nghẽn không biết một số đặc điểm quan trọng của tín hiệu truyền đi mà chỉ có thể biết độ rộng phổ của tín hiệu và phương pháp điều chế. Một bộ gây tắc nghẽn phức tạp có thể bắt chước tín hiệu truyền đi và gây rối loạn ở phía thu. Để giảm bớt khả năng này, bộ phát sử dụng một phần tử giả nhiễu tác động lên mỗi tín hiệu mã mà mẫu ngẫu nhiên này chỉ được biết ở phía thu mà các đối tượng khác không biết.

Ảnh hưởng từ những người dùng khác xuất hiện trong hệ thống truyền thông đa truy nhập trong đó có nhiều đầu cuối cùng sử dụng chung một kênh truyền. Tại cùng một thời điểm có thể có nhiều người sử dụng cùng truy nhập đường truyền để truyền tin tới các bộ thu tương ứng. Giả sử tất cả người dùng đều dùng chung một phương pháp mã hóa và giải mã thì các tín hiệu vẫn có thể phân biệt được với nhau bởi mẫu ngẫu nhiên trong tín hiệu truyền đi. Như vậy một bộ thu chỉ thu được tín hiệu nào mà

nó biết mẫu ngẫu nhiên. Kỹ thuật này cho phép đồng thời nhiều người sử dụng cùng truy nhập đường truyền và được gọi là *đa truy nhập phân chia theo mã* (CDMA).

Một bản tin có thể được che giấu trong nền nhiễu bằng cách mở rộng phổ tín hiệu và truyền đi với công suất thấp. Tín hiệu này có xác suất thâm nhập thấp và được ký hiệu là tín hiệu LPI (low-probability of intercept).

Cuối cùng, có thể thiết lập tính riêng tư cho bản tin bằng mẫu ngẫu nhiên trong tín hiệu truyền đi và chỉ có bộ thu nào biết mẫu ngẫu nhiên đó mới có thể giải điều chế tín hiệu nhận được.

Trong chương này ta qui ước gọi "ảnh hưởng" là một trong các trường hợp đã nói ở trên là: tín hiệu có thể tự ảnh hưởng lên nó, tín hiệu này ảnh hưởng lên tín hiệu khác truyền trên kênh hay một bộ phát tín hiệu tác nhân gây ảnh hưởng xấu lên tín hiệu truyền đi.

14-1 Mô hình hệ thống truyền tin dùng tín hiệu trải phổ

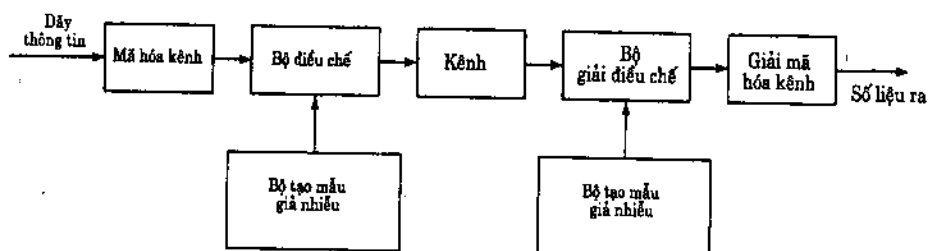
Mô hình chung một hệ thống truyền tin trải phổ được vẽ trong hình 14-1-1. Chúng ta có hai bộ phát tín hiệu giả ngẫu nhiên, một ở bộ điều chế và một ở bộ giải điều chế. Các bộ phát này tạo ra các dãy nhị phân giả ngẫu nhiên hay giả nhiễu, được ký hiệu là PN, sẽ tác động lên tín hiệu truyền đi ở bộ giải điều chế và được loại bỏ ở bộ giải điều chế.

Việc đồng bộ giữa hai dãy PN là cần thiết để giải điều chế được tín hiệu. Khởi đầu, trước khi truyền thông tin, quá trình đồng bộ được thực hiện bằng cách phát đi một mẫu ngẫu nhiên xác định để phía thu nhận ra với xác suất đủ cao trong môi trường có các loại ảnh hưởng. Sau khi quá trình đồng bộ được thiết lập thì quá trình truyền thông tin mới bắt đầu.

Sự ảnh hưởng không mong muốn lên tín hiệu phụ thuộc chủ yếu vào bản chất tự nhiên của tín hiệu. Chúng ta có thể phân loại thành tín hiệu băng rộng hay tín hiệu băng hẹp tùy vào độ rộng phổ của tín hiệu, ta cũng có thể phân loại là rời rạc hay liên tục theo thời gian. Ví dụ tín hiệu ảnh hưởng cố ý có thể gồm một vài tín hiệu hình sin trong dải phổ của tín hiệu truyền đi. Tần số của các tín hiệu sin có thể cố định hay thay đổi theo luật nào đó. Tín hiệu ảnh hưởng bởi người sử dụng khác trong hệ thống CDMA có thể là băng rộng hay băng hẹp, phụ thuộc vào loại của tín hiệu trải phổ sử dụng để thực hiện đa truy nhập.

Chúng ta quan tâm tới hiệu quả của hệ thống truyền thông sử dụng tín hiệu trải phổ khi có sự xuất hiện của các loại ảnh hưởng băng rộng hay băng hẹp. Có hai loại điều chế thường được sử dụng là PSK và FSK. Tín hiệu PSK thích hợp trong các ứng dụng trong đó sự liên kết về pha giữa phía phát và phía thu duy trì được trong khoảng thời gian lớn hơn nghịch đảo độ rộng phổ tín hiệu truyền đi. Mặt khác thì tín hiệu FSK thích hợp khi sự liên kết về pha không duy trì được do sự dịch chuyển theo thời gian của liên kết truyền như trong các ứng dụng có sự di chuyển nhanh của các đầu cuối.

Dãy PN tạo ra ở bộ điều chế khi sử dụng với tín hiệu PSK thì sẽ làm thay đổi ngẫu nhiên pha của tín hiệu PSK và tín hiệu được gọi là tín hiệu trải phổ DS hay PN (direct sequence, pseudo-noise). Khi sử dụng tín hiệu FSK thì dãy ngẫu nhiên sẽ làm thay đổi một cách ngẫu nhiên tần số của tín hiệu và người ta gọi tín hiệu này là tín hiệu trải phổ FH (frequency-hopped).



Hình 14-1-1: Mô hình một hệ thống truyền thông trải phổ

14-2 Tín hiệu trái phổ DS

Trên mô hình 14-1-1, ta giả thiết rằng tốc độ thông tin ở đầu vào bộ mã hóa là R bit/s và độ rộng dải thông của kênh thông tin là W Hz. Kỹ thuật điều chế sử dụng là PSK nhị phân. Để có thể sử dụng toàn bộ dải thông của kênh thì mẫu PN phải được tạo ra với tốc độ W lần/s. Nghịch đảo của W , ký hiệu T_c là nghịch đảo của W chính là độ rộng của một xung nhiều gọi là *chip* thì T_c là khoảng thời gian chip.

$T_b = 1/R$ là độ rộng của một xung tín hiệu mang thông tin thì hệ số mở rộng dải thông W/R được biểu diễn bởi

$$B_e = \frac{W}{R} = \frac{T_b}{T_c} \quad (14-2-1)$$

Trong thực tế thì tỷ số T_b/T_c là số nguyên

$$L_c = \frac{T_b}{T_c} \quad (14-2-2)$$

là số chip tương ứng với một bit thông tin. Như vậy L_c là số lần dịch pha của tín hiệu trong khoảng thời gian một bit thông tin $T_b = 1/R$. Giả sử bộ mã hóa tạo ra mã khối tuyến tính nhị phân (n, k) thì khoảng thời gian để truyền n bit mã sẽ là kT_b và số chip xuất hiện trong khoảng thời gian này là kL_c . Như vậy ta có thể chọn độ dài từ mã là $n = kL_c$. Nếu bộ mã hóa tạo ra mã chập nhị phân tốc độ k/n thì số chip xuất hiện trong khoảng thời gian kT_b cũng là $n = kL_c$. Như vậy chúng ta có thể phân tích trên cả hai loại mã chập và mã khối.

Một phương pháp có thể sử dụng để làm cho dãy PN tác động lên pha của vật mang là thay thế trực tiếp mỗi bit mã bởi tổng modulo 2 của bit mã với bit PN tương ứng. Nếu b_i là bit thứ i trong dãy PN và c_i là ký hiệu mã thứ i trong từ mã thì tổng modulo 2 là

$$a_i = b_i \oplus c_i \quad (14-2-3)$$

Dãy $\{a_i\}$ được ánh xạ thành các tín hiệu PSK nhị phân có dạng $s(t) = \pm \text{Re}[g(t)e^{j2\pi f_c t}]$ theo qui luật

$$g_i(t) = \begin{cases} g(t - iT_c) & (a_i = 0) \\ -g(t - iT_c) & (a_i = 1) \end{cases} \quad (14-2-4)$$

trong đó $g(t)$ là tín hiệu xung có độ rộng T_c .

Tổng modulo 2 ở trên có thể được xem như tích của hai tín hiệu. Để chứng tỏ điều này, giả thiết mỗi bit trong từ mã được ánh xạ thành một tín hiệu PSK nhị phân theo luật

$$c_i(t) = (2c_i - 1)g(t - iT_c) \quad (14-2-5)$$

Ta định nghĩa tín hiệu $p_i(t)$ là

$$p_i(t) = (2b_i - 1)p(t - iT_c) \quad (14-2-6)$$

$p(t)$ là xung vuông độ rộng T_c . Như vậy tín hiệu tần số thấp tương đương truyền đi ứng với bit mã thứ i là

$$g_i(t) = p_i(t)c_i(t) = (2b_i - 1)(2c_i - 1)g(t - iT_c) \quad (14-2-7)$$

Tín hiệu này giống với tín hiệu trong (14-2-4). Mặc dù có thể xây dựng bộ cộng modulo 2 và sau đó là bộ điều chế PSK nhưng để thuận tiện cho việc giải điều chế, ta xét cách tạo ra tín hiệu theo công thức (14-2-7). Sơ đồ khối bộ điều chế trái phổ DS sử dụng tín hiệu PSK bốn mức được vẽ trên hình 14-2-1.

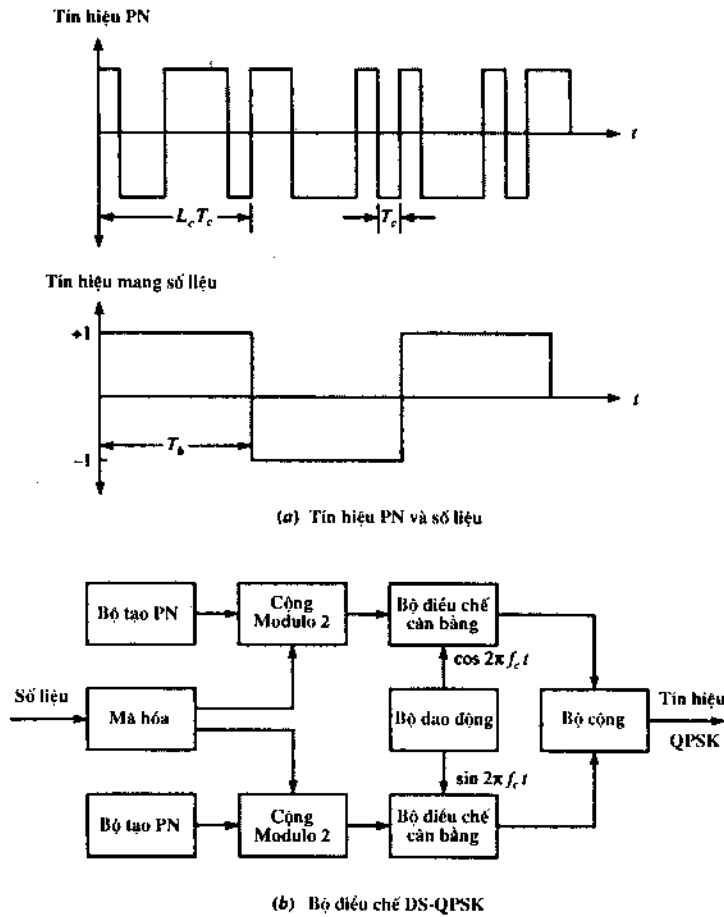
Tín hiệu nhận được ở miền tần số thấp tương đương là

$$\begin{aligned} r_i(t) &= p_i(t)c_i(t) + z(t), \quad iT_c \leq t \leq (i+1)T_c \\ &= (2b_i - 1)(2c_i - 1)g(t - iT_c) + z(t) \end{aligned} \quad (14-2-8)$$

ở đây $z(t)$ thể hiện các tín hiệu ảnh hưởng lên tín hiệu mang thông tin. Các ảnh hưởng này giả thiết là quá trình ngẫu nhiên dừng có giá trị trung bình bằng 0.

Nếu $z(t)$ là các mẫu của quá trình ngẫu nhiên gaussian giá trị phức thì bộ giải điều chế tối ưu có thể được xây dựng từ bộ lọc phối hợp hay từ bộ tương quan như trên hình 14-2-2. Nếu sử dụng bộ lọc phối hợp thì các mẫu đầu ra của bộ lọc phối hợp được nhân với $2b_i - 1$. Do $(2b_i - 1)^2 = 1$ khi $b_i = 0$ hay $b_i = 1$ nên ảnh hưởng của dây PN lên tín hiệu được loại bỏ. Khi sử dụng bộ tương quan chéo thì ta có thể xây dựng bộ giải điều chế theo hai cách như trên hình 14-2-2.

Khi $z(t)$ không phải là một quá trình ngẫu nhiên gaussian thì các phương pháp giải điều chế ở trên không còn là tối ưu nữa nhưng chúng ta vẫn có thể sử dụng để giải điều chế tín hiệu. Một phương pháp khác là sử dụng bộ lọc thích nghi trước bộ lọc phối hợp hay trước bộ tương quan chéo để giảm nhỏ các ảnh hưởng băng hẹp. Chúng ta sẽ xét phương pháp này sau. Trong phần 14-2-1 chúng ta xét hiệu quả của bộ giải mã dựa trên ba phương pháp giải điều chế trên.



Hình 14-2-1: Sơ đồ khối bộ điều chế trải phổ DS PSK bốn mức

14-2-1 Hiệu quả bộ giải mã

Ta ký hiệu đầu ra chưa lượng tử của bộ giải điều chế là $y_j, 1 \leq j \leq n$. Đầu tiên ta xét mã khối tuyến tính nhị phân (n, k) và giả thiết từ mã toàn ký hiệu 0 được truyền đi.

Bộ giải mã sử dụng giải mã xác định mềm sẽ tính các độ đo tương quan

$$CM_i = \sum_{j=1}^n (2c_{ij} - 1)y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k \quad (14-2-9)$$

với c_{ij} là bit thứ j trong từ mã thứ i . Độ đo tương quan ứng với từ mã toàn 0 là

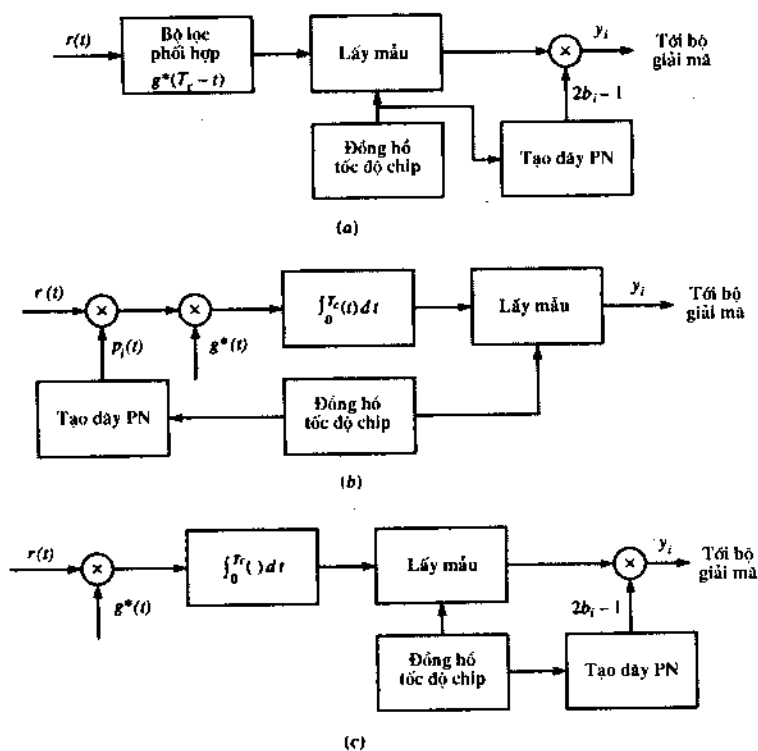
$$\begin{aligned} CM_1 &= 2n\xi_c + \sum_{j=1}^n (2c_{1j} - 1)(2b_j - 1)v_j \\ &= 2n\xi_c - \sum_{j=1}^n (2b_j - 1)v_j \end{aligned} \quad (14-2-10)$$

trong đó $v_j, 1 \leq j \leq n$ là thành phần nhiễu cộng ảnh hưởng lên bit mã thứ j và ξ_c là năng lượng một chip. Ta có

$$v_j = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{T_c} g^*(t) z[t + (j-1)T_c] dt \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (14-2-11)$$

Tương tự các độ đo tương quan ứng với từ mã C_m có trọng lượng w_m là

$$CM_m = 2n\xi_c \left(1 - 2\frac{w_m}{n} \right) + \sum_{j=1}^n (2c_{mj} - 1)(2b_j - 1)v_j \quad (14-2-12)$$



Hình 14-2-2: Ba phương pháp xây dựng bộ giải điều chế

Cũng giống như trong phần 10-1-4, ta xác định xác suất để $CM_1 < CM_m$. Độ chênh lệch giữa CM_1 và CM_m là

$$D = CM_1 - CM_m = 4\xi_c w_m - 2 \sum_{j=1}^n c_{mj}(2b_j - 1)v_j \quad (14-2-13)$$

Do từ mã C_m có trọng lượng w_m nên số thành phần khác 0 trong tổng các thành phần nhiều trong (14-2-13) cũng là w_m . Ta giả thiết khoảng cách tối thiểu giữa các từ mã đủ lớn để có thể áp dụng định lý giới hạn trung tâm cho tổng các thành phần nhiều. Điều giả thiết này sẽ đúng khi tín hiệu trải phổ PN có hệ số mở rộng dải thông ít nhất bằng 20 và điều này là đúng trong các ứng dụng thực tế. Như vậy tổng các thành phần nhiều được mô hình hóa bằng một biến ngẫu nhiên gaussian. Do $E(2b_j - 1) = 0$ và $E(v_j) = 0$ nên giá trị trung bình của thành phần thứ hai trong (14-2-13) bằng 0.

Sai phương của độ chênh lệch là

$$\sigma_m^2 = 4 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{mi} c_{mj} E[(2b_j - 1)(2b_i - 1)] E(v_j v_i) \quad (14-2-14)$$

Dãy ký hiệu do bộ phát PN tạo ra giả thiết là không tương quan thì

$$E[(2b_j - 1)(2b_i - 1)] = \delta_{ij} \quad (14-2-15)$$

và

$$\sigma_m^2 = 4w_m E(v^2) \quad (14-2-16)$$

trong đó $E(v^2)$ là mômen bậc hai của mọi thành phần trong dãy $\{v_j\}$ và

$$\begin{aligned} E(v^2) &= \int_0^{T_c} \int_0^{T_c} g^*(t)g(\tau)\phi_{zz}(t-\tau)dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \Phi_{zz}(f)df \end{aligned} \quad (14-2-17)$$

$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2}E[z^*(t)z(t+\tau)]$ là hàm tự tương quan và $\Phi_{zz}(f)$ là phổ mật độ công suất của dãy nhiễu ảnh hưởng $z(t)$.

Khi ảnh hưởng có phổ phẳng trong dải thông của kênh (nếu độ rộng dải thông của kênh thông dải là W thì độ rộng dải thông của kênh tần số thấp tương đương là $\frac{1}{2}W$), có nghĩa là

$$\Phi_{zz}(f) = J_0 \quad |f| \leq \frac{1}{2}W \quad (14-2-18)$$

thì $E(v^2) = 2\xi_c J_0$ và sai phương của ảnh hưởng trong (14-2-16) trở thành

$$\sigma_m^2 = 8\xi_c J_0 w_m \quad (14-2-19)$$

Trong trường hợp này, xác suất để $D < 0$ là

$$P_2(m) = Q\left(\sqrt{\frac{2\xi_c}{J_0} w_m}\right) \quad (14-2-20)$$

Nhưng ta lại có

$$\xi_c = \frac{k}{n} \xi_b = R_c \xi_b \quad (14-2-21)$$

(14-2-20) trở thành

$$P_2(m) = Q\left(\sqrt{\frac{2\xi_b}{J_0} R_c w_m}\right) = Q(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}) \quad (14-2-22)$$

trong đó $\gamma_b = \xi_b/J_0$ là SNR từng bit thông tin. Cuối cùng, xác suất sai từ mã bị chặn trên bởi giới hạn hợp

$$P_m \leq \sum_{m=2}^M Q(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}) \quad (14-2-23)$$

$M = 2^k$. Biểu thức này giống xác suất sai của giải mã xác định mềm của mã khối tuyến tính trong kênh AWGN. Đối với mã chập (n, k) thì cũng tương tự như vậy. Xác suất sai bit bị giới hạn trên bởi

$$P_b \leq \frac{1}{k} \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d}) \quad (14-2-24)$$

Tập hợp các hệ số $\{\beta_d\}$ có được từ khai triển hàm truyền $T(D, N)$ như trong 10-2-3.

Tiếp theo ta xét tới ảnh hưởng băng hẹp ở tần số của vật mang. Ta có thể cố định toàn bộ công suất của các thành phần tác nhân là $J_{av} = J_0 W$, trong đó J_0 là phổ mật độ công suất của ảnh hưởng băng rộng tương đương. Như vậy ảnh hưởng băng hẹp được đặc trưng bởi phổ mật độ công suất

$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} \frac{J_{av}}{W_1} = \frac{J_0 W}{W_1} & (|f| \leq \frac{1}{2} W_1) \\ 0 & (|f| > \frac{1}{2} W_1) \end{cases} \quad (14-2-25)$$

$W \gg W_1$. Thay (14-2-25) vào (14-2-17) ta thu được

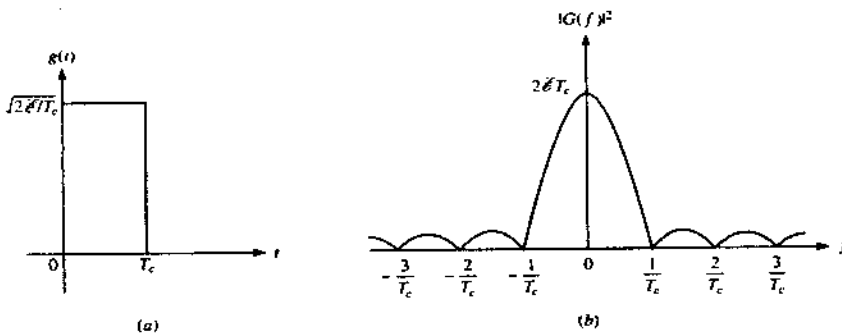
$$E(v^2) = \frac{J_{av}}{W_1} \int_{-W_1/2}^{W_1/2} |G(f)|^2 df \quad (14-2-26)$$

Vi dụ 14-2-1

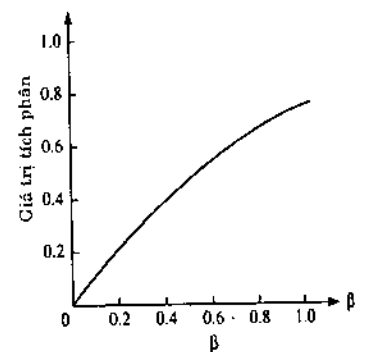
Giả sử $g(t)$ là xung chữ nhật và $|G(f)|^2$ là phổ mật độ năng lượng như trong hình 14-2-3. Đối với ảnh hưởng băng hẹp trong (14-2-26), sai phương của ảnh hưởng là

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= 4w_m E(v^2) \\ &= \frac{8\xi_c w_m T_c J_{av}}{W_1} \int_{-W_1/2}^{W_1/2} \left(\frac{\sin \pi f T_c}{\pi f T_c} \right)^2 df \\ &= \frac{8\xi_c w_m J_{av}}{W_1} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (14-2-27)$$

trong công thức này thì $\beta = W_1 T_c$. Hình 14-2-4 biểu diễn giá trị của tích phân khi $0 \leq \beta \leq 1$. Giá trị của tích phân bị chặn trên bởi $W_1 T_c$, như vậy thì $\sigma_m^2 \leq 8\xi_c w_m T_c J_{av}$.



Hình 14-2-3: Xung chữ nhật và phổ mật độ năng lượng



Hình 14-2-4: Giá trị của tích phân trong (14-2-27)

Trong trường hợp giới hạn khi W_1 tiến tới 0 thì ảnh hưởng trở thành một xung ở tần số mang. Trường hợp này được gọi là nhiễu tần thuần túy hay *tín hiệu tắc nghẽn CW*. Phổ mật độ công suất là

$$\Phi_{zz}(f) = J_{av}\delta(f) \quad (14-2-28)$$

và sai phương tương ứng của biến xác định $D = CM_1 - CM_m$ là

$$\sigma_m^2 = 4w_m J_{av} |G(0)|^2 = 8w_m \xi_c T_c J_{av} \quad (14-2-29)$$

Xác suất sai từ mã với tín hiệu tắc nghẽn CW bị giới hạn trên bởi

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2\xi_c}{J_{av}T_c} w_m} \right) \quad (14-2-30)$$

Nhưng ta có $\xi_c = R_c \xi_b$, $T_c \approx 1/W$, $J_{av}/W = J_0$ nên (14-2-30) được biểu diễn thành

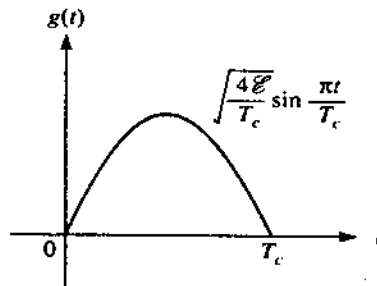
$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2\xi_b}{J_0} R_c w_m} \right) \quad (14-2-31)$$

Đây chính là kết quả trước đây ta đã có đối với ảnh hưởng băng rộng. Như vậy tắc nghẽn CW có ảnh hưởng giống như tắc nghẽn băng rộng tương đương.

Vi dụ 14-2-2

Ta xác định hiệu quả của hệ thống trải phổ DS khi có tắc nghẽn CW với công suất trung bình J_{av} khi tín hiệu xung có dạng như trong hình 14-2-5 hay

$$g(t) = \sqrt{\frac{4\xi_c}{T_c}} \sin \frac{\pi t}{T_c}, \quad 0 \leq t \leq T_c \quad (14-2-32)$$



Hình 14-2-5: Tín hiệu nửa hình sin

Sai phương của ảnh hưởng là

$$\sigma_m^2 = 4w_m J_{av} |G(0)|^2 = \frac{64}{\pi^2} \xi_c T_c J_{av} w_m \quad (14-2-33)$$

Giới hạn trên của xác suất sai từ mã là

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{\pi^2 \xi_b}{4J_{av}T_c} R_c w_m} \right) \quad (14-2-34)$$

Như vậy độ hiệu quả khi sử dụng tín hiệu xung như trên tốt hơn so với xung chữ nhật là 0,9 dB.

Độ khuếch đại xử lý và tắc nghẽn biên Ta biểu diễn độ hiệu quả của tín hiệu trải phổ DS bằng cách biểu diễn năng lượng một bit ξ_b theo công suất trung bình. Xét độ hiệu quả khi có tắc nghẽn CW và sử dụng tín hiệu xung chữ nhật như trong ví dụ 14-2-1. Thay ξ_b và J_0 vào (14-2-31) ta nhận được

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2P_{av} T_b}{J_{av} T_c} R_c w_m} \right) \\ &= \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2P_{av}}{J_{av}} L_c R_c w_m} \right) \end{aligned} \quad (14-2-35)$$

L_c là số chip ứng với một bit thông tin và P_{av}/J_{av} là tỷ số công suất tín hiệu trên công suất tín hiệu tắc nghẽn.

Kết quả giống hệt như vậy đối với tắc nghẽn băng rộng và độ hiệu quả được cho trong (14-2-23). Với năng lượng từng bit tín hiệu ta có

$$\xi_b = P_{av} T_b = \frac{P_{av}}{R} \quad (14-2-36)$$

Phổ mật độ công suất của tín hiệu tắc nghẽn là

$$J_0 = \frac{J_{av}}{W} \quad (14-2-37)$$

Dùng (14-2-36) và (14-2-37) ta có

$$\frac{\xi_b}{J_0} = \frac{P_{av}/R}{J_{av}/W} = \frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \quad (14-2-38)$$

Tỷ số J_{av}/P_{av} là tỷ số công suất tắc nghẽn trên tín hiệu, thường lớn hơn đơn vị. Tỷ số $W/R = T_b/T_c = B_e = L_c$ là hệ số mở rộng dải thông hay số chip ứng với một bit thông tin. Tỷ số này được gọi là *độ khuếch đại xử lý* của hệ thống trải phổ DS. Nó biểu diễn độ khuếch đại so với nhiễu tắc nghẽn bằng cách mở rộng phổ của tín hiệu truyền đi. Nếu ta lý giải tỷ số ξ_b/J_0 là SNR cần thiết để có được một tốc độ sai xác định và W/R là hệ số mở rộng dải thông thì J_{av}/P_{av} được gọi là *tắc nghẽn biên* của hệ thống trải phổ DS. Nói cách khác, tắc nghẽn biên là giá trị lớn nhất của tỷ số J_{av}/P_{av} để hệ thống còn có được một xác suất sai nhất định.

Hiệu quả của giải mã xác định mềm đối với mã khối tuyến tính nhị phân (n, k) biểu diễn theo độ khuếch đại xử lý và tắc nghẽn biên là

$$\begin{aligned} P_m &\leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}} R_c w_m} \right) \\ &\leq (M-1)Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}} R_c d_{min}} \right) \end{aligned} \quad (14-2-39)$$

Chúng ta cũng thấy rằng độ hiệu quả của hệ thống còn phụ thuộc vào một tham số thứ ba là $R_c w_m$. Tham số này được gọi là *độ khuếch đại mã hóa* và giới hạn dưới của nó là $R_c d_{min}$. Như vậy tắc nghẽn biên trong hệ thống được xác định bởi độ khuếch đại xử lý và độ khuếch đại mã hóa.

Tín hiệu trải phổ DS không mã Hiệu quả của hệ thống trải phổ DS đối với mã (n, k) ở trên, trong trường hợp đặc biệt khi $k = 1$ và trọng lượng của các từ mã khác 0 là $w = n$. Loại mã này gọi là

mã lập nhị phân. Do $R_c w = 1$ nên hiệu quả của hệ thống suy giảm thành

$$P_2 = Q \left(\sqrt{\frac{2\xi_b}{J_0}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \quad (14-2-40)$$

Trong trường hợp này không có độ khuếch đại mã hóa.

Ví dụ 14-2-3

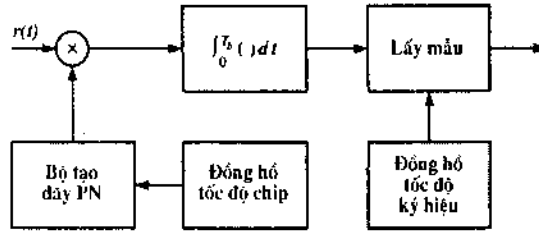
Giả sử chúng ta muốn có một hệ thống trải phổ DS không mã có xác suất sai tối đa là 10^{-6} . Hệ số mở rộng dải thông là $W/R = 1000$. Xác định tốc nghẽn biên.

ξ_b/J_0 cần thiết để có xác suất sai bit tối đa 10^{-6} với tín hiệu PSK nhị phân không mã là 10,5 dB. Độ khuếch đại mã hóa là $10 \log_{10} 1000 = 30$ dB. Như vậy tỷ số công suất tắc nghẽn trên tín hiệu phải là

$$10 \log_{10} \frac{J_{av}}{P_{av}} = 30 - 10,5 = 19,5 \text{ dB}$$

Đây là tắc nghẽn biên có thể thực hiện được với hệ thống trải phổ DS không mã.

Có một phương pháp khác để xem xét quá trình điều chế và giải điều chế đối với hệ thống trải phổ DS không mã. Ở bộ điều chế, tín hiệu tạo ra từ bộ mã lập nhị phân với các xung vuông $s(t)$ hay $-s(t)$ có độ rộng T_c và biên độ đơn vị. Dãy PN nhân với hoặc $s(t)$ hoặc $-s(t)$. Bộ giải điều chế được xây dựng từ bộ tương quan như trên hình 14-2-6.



Hình 14-2-6: Bộ giải điều chế theo kiểu tương quan cho mã lập nhị phân

Ta lượng hóa ảnh hưởng của quá trình giải điều chế lên thành phần ảnh hưởng $z(t)$. Tích của $z(t)$ với dãy PN là

$$w(t) = \sum_i (2b_i - 1)p(t - iT_c)$$

và

$$v(t) = z(t)w(t)$$

Các tín hiệu $z(t)$ và $w(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên độc lập thống kê có giá trị trung bình bằng 0 và hàm tự tương quan $\phi_{ww}(\tau)$ và $\phi_{zz}(\tau)$. Tích $v(t)$ cũng là một quá trình ngẫu nhiên có hàm tự tương quan là tích của hai hàm tự tương quan nói trên, như vậy phổ mật độ công suất của $v(t)$ là tích chập của hai phổ mật độ công suất tương ứng.

Hệ quả của tích chập hai phổ là sẽ trải công suất tín hiệu trong dải thông. Do độ rộng phổ của $w(t)$ chiếm toàn bộ độ rộng W nên công suất của $z(t)$ sẽ được trải ra trong khoảng tần số W . Nếu $z(t)$ là quá trình băng hẹp thì phổ mật độ công suất của $v(t)$ sẽ chiếm độ rộng ít nhất là W .

Bộ tích phân sử dụng trong tương quan chéo trên hình 14-2-6 có độ rộng dải thông xấp xỉ $1/T_b$. Do $1/T_b \ll W$ nên chỉ có một phần của toàn bộ công suất tín hiệu ảnh hưởng xuất hiện ở đầu ra của bộ tương quan chéo. Phần này xấp xỉ bằng

$$\frac{1/T_b}{W} = \frac{1}{WT_b} = \frac{T_c}{T_b} = \frac{1}{L_c}$$

Nói cách khác, tích của tín hiệu ảnh hưởng với dãy PN sẽ trải ảnh hưởng ra toàn bộ dải phổ W là độ rộng phổ của tín hiệu truyền đi và tích phân trong một băng hẹp sau bộ nhân sẽ chỉ cho ở đầu ra một phần là $1/L_c$ toàn bộ ảnh hưởng. Như vậy hiệu quả của hệ thống trải phổ DS không mã được tăng lên L_c lần.

Ghép mã lặp nhị phân với mã tuyến tính Như đã nói, mã lặp nhị phân có một số ưu điểm để khắc phục các ảnh hưởng và tắc nghẽn nhưng lại không có độ khuếch đại mã hóa. Để nâng cao độ hiệu quả, người ta sử dụng mã khối hay mã chập tuyến tính (n_1, k) với $n_1 \leq n = kL_c$. Nếu chọn $n_1 < n$ và lặp mỗi bit mã n_2 lần để $n = n_1 n_2$ thì ta có thể xây dựng mã tuyến tính (n_1, k) ghép với mã lặp nhị phân $(n_2, 1)$. Bộ mã này có thể coi như được tạo ra bởi bộ mã hóa ngoài là mã tuyến tính (n_1, k) và bộ mã hóa trong là bộ mã hóa lặp nhị phân. Do độ khuếch đại mã hóa chỉ được thực hiện ở bộ mã hóa ngoài nên người ta chứng minh được độ khuếch đại mã hóa của bộ mã ghép như vậy là

$$R_c w_m = \frac{k}{n} w_m, \quad m = 2, 3, \dots, 2^k$$

Nhưng ta lại có $w_m = n_2 w_m^0$ trong đó $\{w_m^0\}$ là trọng lượng bộ mã ngoài. Như vậy độ khuếch đại mã hóa tổng cộng là

$$R_c w_m = \frac{k}{n_1 n_2} n_2 w_m^0 = \frac{k}{n_1} w_m^0 = R_c^0 w_m^0 \quad (14-2-41)$$

Đó chính là độ khuếch đại mã hóa có được do bộ mã hóa ngoài.

Độ khuếch đại mã hóa cũng có thể có được khi bộ mã ngoài (n_1, k) được giải mã xác định cứng. Xác suất sai bit của bộ mã $(n_2, 1)$ dựa trên giải mã xác định mềm là

$$\begin{aligned} p &= Q\left(\sqrt{\frac{2n_2 \xi_c}{J_0}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2\xi_b}{J_0} R_c^0}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c^0\right) \end{aligned} \quad (14-2-42)$$

Xác suất sai từ mã đối với mã khối (n_1, k) bị chặn trên bởi:

$$P_M \leq \sum_{m=t+1}^{n_1} \binom{n_1}{m} p^m (1-p)^{n_1-m} \quad (14-2-43)$$

ở đây $t = \lfloor \frac{1}{2}(d_{min} - 1) \rfloor$ hay

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m^0/2} \quad (14-2-44)$$

Đối với mã chập nhị phân (n_1, k) , giới hạn trên của xác suất sai bit là

$$P_b \leq \sum_{d=d_{frc}}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (14-2-45)$$

Mã hóa ghép cho hệ thống trải phổ DS Ta đã biết rằng hiệu quả của bộ mã sẽ tăng lên khi ta thay mã lặp nhị phân bằng loại mã có hiệu quả hơn có độ khuếch đại mã hóa. Nói chung mục tiêu

của hệ thống trải phổ DS là xây dựng một bộ mã dài, tốc độ mã thấp có khoảng cách tối thiểu lớn và điều này có thể thực hiện bằng mã ghép.

Hiệu quả của bộ mã sẽ cao nhất khi ta thực hiện giải mã xác định mềm đối với cả hai bộ mã trong và ngoài, nhưng để giảm độ phức tạp cho bộ giải mã thì thực hiện giải mã xác định mềm cho bộ mã trong và giải mã xác định cứng cho bộ mã ngoài.

14-2-2 Một số ứng dụng của tín hiệu trải phổ DS

Trong mục này ta xét ba ứng dụng của hệ thống trải phổ DS. Ứng dụng thứ nhất là tránh hay giảm thiểu tín hiệu tác nghẽn, ứng dụng thứ hai là che giấu tín hiệu trong nền nhiễu bằng cách truyền tín hiệu đi với công suất rất thấp và ứng dụng thứ ba là truyền đồng thời nhiều tín hiệu trên một kênh truyền thông, tức là hệ thống CDMA.

Tránh tác nghẽn Ta xét hiệu quả của hệ thống truyền thông khi có tín hiệu tác nghẽn trong ba trường hợp tín hiệu mã. Mã thứ nhất là Golay (24,12) có phân bố trọng lượng trong bảng 10-1-1 và khoảng cách tối thiểu $d_{min} = 8$. Loại mã thứ hai là mã Golay (24,11) gồm 2048 từ mã có trọng lượng đều là 12. Hai loại mã này được sử dụng cùng với mã lặp nhị phân. Loại mã thứ ba là mã ghi dịch có độ dài cực đại.

Hiệu quả của mã Golay (24,12) với giải mã xác định mềm là

$$P_M \leq \left[759Q \left(\sqrt{\frac{8W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) + 2576Q \left(\sqrt{\frac{12W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) + 759Q \left(\sqrt{\frac{16W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) + Q \left(\sqrt{\frac{24W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \right] \quad (14-2-46)$$

Do $n = n_1 n_2 = 12W/R$ và $n_1 = 24$ nên mỗi bit mã được lặp lại $n_2 = W/2R$ lần. Ví dụ nếu $W/R = 100$ (độ khuếch đại xử lý là 20 dB) thì độ dài của mã lặp nhị phân là $n_2 = 50$.

Nếu sử dụng giải mã xác định cứng thì xác suất sai một bit mã là

$$p = Q \left(\sqrt{\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \quad (14-2-47)$$

và xác suất sai từ mã bị chặn trên bởi

$$P_M \leq \sum_{m=4}^{24} \binom{24}{m} p^m (1-p)^{24-m} \quad (14-2-48)$$

Nếu ta sử dụng giới hạn Chernoff cho giải mã xác định cứng thì

$$P_M \leq 759[4p(1-p)]^4 + 2576[4p(1-p)]^6 + 759[4p(1-p)]^8 + [4p(1-p)]^{12} \quad (14-2-49)$$

Đối với giải mã xác định mềm thì xác suất sai là

$$759Q \left(\sqrt{\frac{8W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right)$$

Hình 14-2-7 vẽ độ hiệu quả của mã Golay (24,12) theo tác nghẽn biến với hai loại giải mã và độ khuếch đại mã hóa là tham số.

Hiệu quả của mã Golay (24,11) được cho bởi

$$P_M \leq 2047Q \left(\sqrt{\frac{11W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \quad (14-2-50)$$

đối với giải mã xác định mềm, còn đối với giải mã xác định cứng thì là

$$P_M \leq 2047[4p(1-p)]^6 \quad (14-2-51)$$

và

$$p = Q \left(\sqrt{\frac{11W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \quad (14-2-52)$$

Thay cho việc sử dụng mã khối ghép tốc độ thấp $1/n_2$, ta có thể chỉ sử dụng một mã tốc độ thấp. Xét mã ghi dịch độ dài cực đại với các tham số của mã là

$$\begin{aligned} (n, k) &= (2^m - 1, m) \\ d_{min} &= 2^{m-1} \end{aligned} \quad (14-2-53)$$

Mọi từ mã trừ từ mã toàn 0 đều có trọng lượng là 2^{m-1} và đối với giải mã xác định mềm ta có

$$\begin{aligned} P_M &\leq (M-1)Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c d_{min} \right) \\ &\leq 2^m Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} \frac{m 2^{m-1}}{2^m - 1} \right) \\ &\leq 2^m \exp \left(-\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \frac{m 2^{m-1}}{2^m - 1} \right) \end{aligned} \quad (14-2-54)$$

Với các giá trị của m để $R_c d_{min} \approx \frac{1}{2}m$ thì

$$P_M \leq 2^m Q \left(\sqrt{\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}}} m \right) \leq 2^m \exp \left(-\frac{mW/R}{2J_{av}P_{av}} \right) \quad (14-2-55)$$

Ví dụ ta chọn $m = 10$ thì $n = 2^{10} - 1 = 1023$. Do $n = kW/R = mW/R$ như vậy $W/R \approx 102$, chúng ta có độ khuếch đại xử lý khoảng 20 dB và độ khuếch đại mã hóa khoảng 7 dB. Khi tăng m sẽ tăng độ khuếch đại mã hóa.

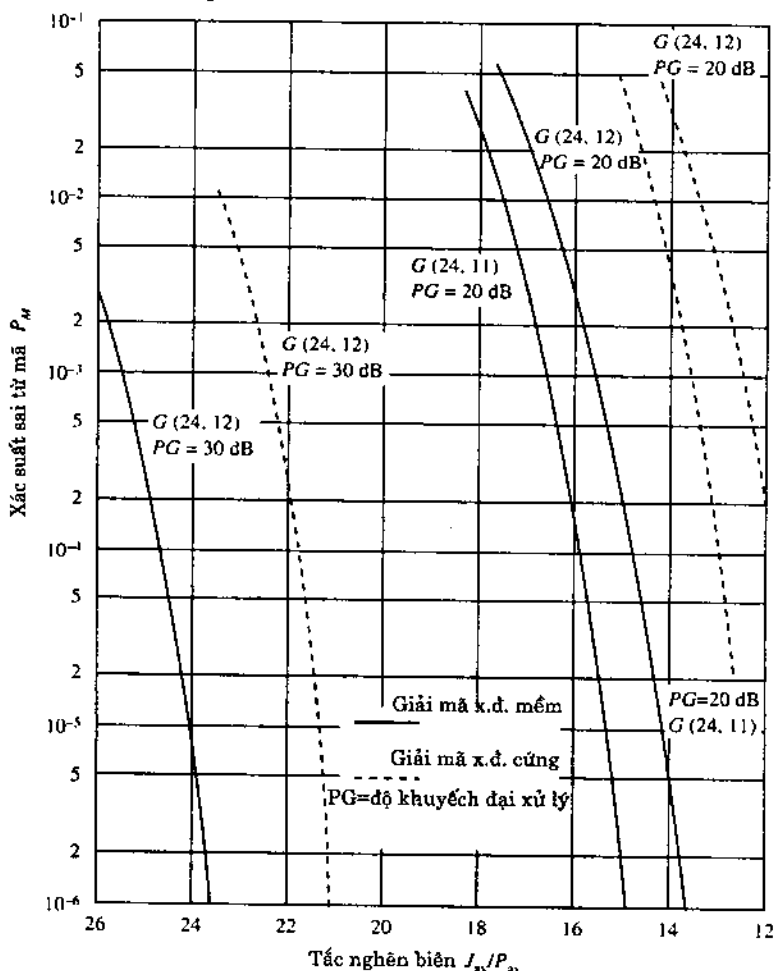
Nếu ta sử dụng giải mã xác định cứng thì khi sử dụng giới hạn Chernoff ta có

$$P_M \leq (M-1)[4p(1-p)]^{d_{min}/2} = (2^m - 1)[4p(1-p)]^{2^{m-2}} \quad (14-2-56)$$

$$p = Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} \frac{m}{2^m - 1} \right) \quad (14-2-57)$$

Tín hiệu có xác suất xác định thấp Tín hiệu truyền đi có công suất thấp hơn nhiều so với công suất nhiễu trên kênh. Nếu trong hệ thống trái phỏ DS có độ rộng dải tần là W và phổ mật độ công suất nhiễu cộng N_0 W/Hz thì công suất nhiễu trung bình trong toàn bộ dải thông là $N_{av} = WN_0$. Công suất trung bình của tín hiệu nhận được. Nếu chúng ta muốn che giấu tín hiệu đối với một số bộ thu thì phải có $P_{av}/N_{av} \ll 1$. Bộ thu được phép có thể khôi phục thông tin bằng độ khuếch đại xử lý và độ khuếch đại mã hóa. Chúng ta gọi loại tín hiệu này là tín hiệu có xác suất thu nhận thấp LPI.

CDMA Do nhiều tín hiệu cùng truyền trên kênh thì các tín hiệu của nhiều người dùng sẽ ảnh hưởng lên nhau do hiện tượng cộng tín hiệu. Mức ảnh hưởng phụ thuộc vào số lượng người dùng và theo thời gian. Ưu điểm cơ bản của hệ thống CDMA là nhiều người dùng có thể truyền "đồng thời" các bản tin ngắn. Trong hệ thống đa truy nhập như thế có thể dễ dàng thêm người dùng và bớt người dùng đi mà không phải dừng hệ thống.



Hình 14-2-7: Hiệu quả của mã Golay dùng trong hệ thống trải phổ DS

Giả sử các tín hiệu có cùng công suất trung bình và N_u là số người dùng đồng thời, tỷ số tín hiệu trên nhiễu ảnh hưởng ở phía thu là

$$\frac{P_{av}}{J_{av}} = \frac{P_{av}}{(N_u - 1)P_{av}} = \frac{1}{N_u - 1} \quad (14-2-58)$$

Như vậy độ hiệu quả đối với giải mã xác định mềm là

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{N_u - 1}} R_c w_m \right) \\ &\leq (M - 1) Q \left(\sqrt{\frac{2W/R}{N_u - 1}} R_{cdmin} \right) \end{aligned} \quad (14-2-59)$$

Trong trường hợp này ta giả sử ảnh hưởng giữa các người dùng là gaussian. Ví dụ độ hiệu quả ta mong muốn có xác suất sai 10^{-6} thực hiện được khi

$$\frac{W/R}{N_u - 1} R_c d_{min} = 20$$

Số lượng cực đại người dùng cho phép trong một hệ thống CDMA là

$$N_u = \frac{W/R}{20} R_c d_{min} + 1 \quad (14-2-60)$$

Khi xác định số lượng cực đại người sử dụng trong một hệ thống CDMA, ta đã giả thiết các dây PN là trực giao đôi một và ảnh hưởng giữa các người dùng chỉ là vấn đề công suất. Tuy nhiên trong thực tế thì các dây PN rất khó trực giao với nhau, đặc biệt khi số lượng các dây PN lớn. Thông thường người ta chọn tập hợp các dây PN thích hợp.

14-2-3 Ảnh hưởng loại xung trong tín hiệu trái phổ DS

Trong các phần trước, chúng ta mới chỉ xét tới các ảnh hưởng liên tục hay tín hiệu tắc nghẽn liên tục lên tín hiệu trái phổ DS và khi đó độ khuếch đại mã hóa hay độ khuếch đại xử lý có tác dụng khắc phục hay giảm nhỏ các hiện tượng này. Tuy nhiên khi tín hiệu tắc nghẽn gồm các xung có phổ phẳng tác động lên toàn bộ dải tần của tín hiệu thì ảnh hưởng của nó rất nghiêm trọng mà ta gọi là *ảnh hưởng xung*.

Giả sử tín hiệu tắc nghẽn có công suất trung bình J_{av} và độ rộng phổ là W thì $J_0 = J_{av}/W$. Bộ tạo tín hiệu tắc nghẽn sẽ phát các xung có công suất J_{av}/α với xác suất $\alpha\%$ tại một thời điểm thời gian nào đó. Để đơn giản ta giả thiết rằng các xung ảnh hưởng tác động tới một số nguyên lần khoảng thời gian tín hiệu và như vậy nó ảnh hưởng tới một số nguyên bit. Khi bộ phát tín hiệu tắc nghẽn không hoạt động thì các bit giả thiết là được xác định không có lỗi và khi nó phát thì xác suất sai của hệ thống là $Q(\sqrt{2\alpha\xi_b/J_0})$. Như vậy xác suất sai bit trung bình là

$$P_2(\alpha) = \alpha Q(\sqrt{2\alpha\xi_b/J_0}) = \alpha Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \quad (14-2-61)$$

Bộ phát tín hiệu tắc nghẽn sẽ chọn α để cực đại hóa xác suất sai và lấy đạo hàm công thức trên ta thấy trường hợp tồi nhất là

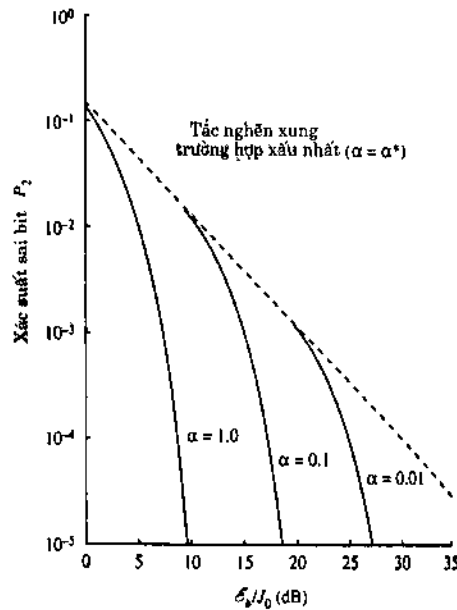
$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{0,71}{\xi_b/J_0} & (\xi_b/J_0 \geq 0,71) \\ 1 & (\xi_b/J_0 < 0,71) \end{cases} \quad (14-2-62)$$

và khi đó xác suất sai tương ứng là

$$P_2 = \begin{cases} \frac{0,083}{\xi_b/J_0} = \frac{0,083 J_{av}/P_{av}}{W/R} & (\xi_b/J_0 \geq 0,71) \\ Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) & (\xi_b/J_0 < 0,71) \end{cases} \quad (14-2-63)$$

Tốc độ sai theo công thức (14-2-61) với một số giá trị α được vẽ trên hình 14-2-8.

Trong thực tế có thể có trường hợp bộ phát tín hiệu tắc nghẽn tạo ra các xung nhiễu có công suất cao (α nhỏ), khi đó (14-2-63) là giới hạn trên của độ hiệu quả đối với hệ thống PSK không mã trong trường hợp tồi nhất. Như vậy hiệu quả của hệ thống là rất nhỏ. Lý do là xung nhiễu sẽ ảnh hưởng lên các bit liên tiếp khi bộ phát tín hiệu tắc nghẽn hoạt động. Chúng ta có thể mã hóa hệ thống DS trái phổ để nâng cao độ hiệu quả bởi độ khuếch đại mã hóa. Như vậy ξ_b/J_0 sẽ giảm đi độ khuếch đại mã hóa lần. Mặt khác, để nâng cao hiệu quả của hệ thống thì ta có thể sử dụng kỹ thuật tách và ghép bit như trong phần 10-1-9.

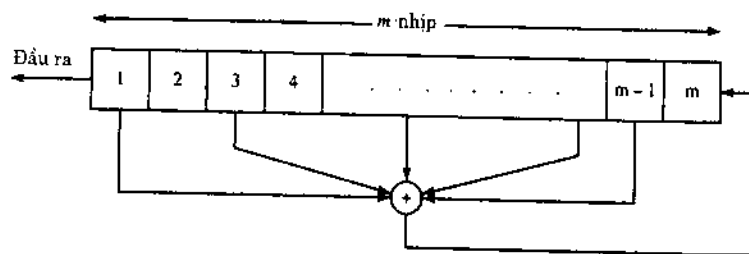


Hình 14-2-8: Tốc độ sai của tín hiệu trải phổ DS PSK khi có tác nghẽn xung

14-2-4 Tạo dây PN

Việc tạo ra dây PN có nhiều ý nghĩa trong thực tế và được nghiên cứu nhiều. Trong phần này ta sẽ trình bày một số phương pháp tạo ra dây PN và một số tính chất quan trọng của hàm tự tương quan và tương quan chéo của các dây này.

Dây PN nhị phân được biết đến nhiều nhất là dây ghi dịch có độ dài cực đại mà ta đã trình bày trong phần 10-1-3. Dây ghi dịch có độ dài cực đại, có độ dài m hay ngắn hơn có độ dài $n = 2^m - 1$ bit được tạo ra bởi thanh ghi dịch m trạng thái và phản hồi tuyến tính như trong hình 14-2-9. Dây tạo ra sẽ tuần hoàn với chu kỳ n và mỗi dây trong một chu kỳ có 2^{m-1} bit 1 và $2^{m-1} - 1$ bit 0.



Hình 14-2-9: Thanh ghi dịch m trạng thái với phản hồi tuyến tính

Trong các ứng dụng của hệ thống trải phổ DS, dây bit gồm các phần tử $\{0, 1\}$ được ánh xạ thành các xung tín hiệu theo quan hệ

$$p_i(t) = (2b_i - 1)p(t - iT)$$

Một cách tương đương, chúng ta có thể nói rằng dãy bit nhị phân $\{0, 1\}$ được ánh xạ thành một dãy nhị phân khác với các phần tử là $\{-1, 1\}$. Dãy này gọi là dãy *hướng cực*.

Một đặc điểm quan trọng của dãy PN tuần hoàn là hàm tự tương quan cũng tuần hoàn và được định nghĩa là

$$\phi(j) = \sum_{n=1}^n (2b_i - 1)(2b_{i+j} - 1), \quad 0 \leq j \leq n - 1 \quad (14-2-64)$$

với n là chu kỳ tuần hoàn. Rõ ràng $\phi(j)$ tuần hoàn với chu kỳ n .

Lý tưởng mà nói thì dãy giả ngẫu nhiên phải có tính chất hàm tự tương quan mà $\phi(0) = n, \phi(j) = 0, 1 \leq j \leq n - 1$. Trong trường hợp dãy độ dài m thì hàm tự tương quan tuần hoàn là

$$\phi(j) = \begin{cases} n & (j = 0) \\ -1 & (1 \leq j \leq n - 1) \end{cases} \quad (14-2-65)$$

Trong các ứng dụng chống tắc nghẽn, độ dài m phải lớn để tránh bộ phát tín hiệu tắc nghẽn học từ đường phản hồi trong bộ phát PN. Tuy nhiên yêu cầu này không phù hợp trong đa số trường hợp do bộ phát tín hiệu tắc nghẽn có thể xác định đường phản hồi bằng cách quan sát chỉ $2m$ chip từ dãy PN. Tác hại này của dãy PN là do tính tuyến tính của bộ phát. Để giảm nhỏ tác hại của bộ phát tín hiệu tắc nghẽn, vài dãy đầu ra sau vài nhịp của thanh ghi dịch được ghép lại theo một luật phi tuyến để tạo ra dãy phi tuyến, gây khó khăn cho bộ phát tín hiệu tắc nghẽn trong việc xác định. Người ta cũng có thể thường xuyên thay đổi đường phản hồi hay số nhịp trong thanh ghi dịch để gây khó khăn cho bộ phát tín hiệu tắc nghẽn.

Trong một số trường hợp thì tính chất của hàm tương quan chéo của dãy PN cũng quan trọng không kém tính chất của hàm tự tương quan. Ví dụ như trong hệ thống CDMA thì mỗi người sử dụng một dãy PN và lý tưởng thì các dãy PN trực giao với nhau nhưng thực tế thì giữa chúng vẫn có tương quan. Giá trị lớn trong hàm tương quan chéo là không tốt trong hệ thống CDMA.

Cụ thể, ta xét các dãy độ dài m . Ta biết rằng hàm tương quan chéo tuần hoàn giữa các dãy độ dài m có cùng chu kỳ có các đỉnh khá lớn. Bảng 14-2-1 liệt kê đỉnh biên độ $\phi_{\max}$ của hàm tương quan chéo tuần hoàn giữa các dãy độ dài m với $3 \leq m \leq 12$. Ta thấy rằng đối với đa số dãy thì giá trị đỉnh biên độ $\phi_{\max}$ của hàm tương quan chéo lớn hơn nhiều so với giá trị đỉnh biên độ của hàm tự tương quan.

m	$n = 2^m - 1$	Số dãy độ dài m	$\phi_{\max}$	$\phi_{\max}/\phi(0)$	$t(m)$	$t(m)/\phi(0)$
3	7	2	5	0,71	5	0,71
4	15	2	9	0,6	9	0,6
5	31	6	11	0,35	9	0,29
6	63	6	23	0,36	17	0,27
7	127	18	41	0,32	17	0,13
8	255	16	95	0,37	33	0,13
9	511	48	113	0,22	33	0,06
10	1023	60	383	0,37	65	0,06
11	2047	176	287	0,14	65	0,03
12	4095	114	1407	0,34	129	0,03

Mặc dù có thể chọn một tập hợp con các dãy độ dài m có giá trị tương quan chéo nhỏ ở các đỉnh nhưng số lượng các dãy như thế là nhỏ và như vậy không thích hợp trong các hệ thống CDMA.

Các dãy PN có hàm tương quan chéo tốt hơn được đưa ra bởi Gold và Kasami, chúng xuất phát từ các dãy độ dài m như sau. Gold và Kasami đã chứng minh được rằng có một số cặp dãy m độ dài n có hàm tương quan chéo chỉ có ba giá trị $\{-1, -t(m), t(m) - 2\}$ với

$$t(m) = \begin{cases} 2^{(m+1)/2} + 1 & (m \text{ lẻ}) \\ 2^{(m+2)/2} + 1 & (m \text{ chẵn}) \end{cases} \quad (14-2-66)$$

Hai dãy m độ dài n với hàm tương quan chéo chỉ có ba giá trị như trên gọi là các dãy phù hợp. Từ một cặp dãy phù hợp, $\mathbf{a} = [a_1 a_2 \dots a_n]$ và $\mathbf{b} = [b_1 b_2 \dots b_n]$, ta xây dựng một tập hợp các dãy độ dài n bằng cách lấy tổng modulo 2 của $\mathbf{a}$ với n dịch vòng của $\mathbf{b}$ hoặc ngược lại. Như vậy chúng ta có n dãy tuần hoàn mới có chu kỳ $n = 2^m - 1$. ta cũng có thể lấy thêm hai dãy $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ và có tổng cộng $n + 2$ dãy và $n + 2$ dãy này tạo nên các dãy Gold.

Ví dụ 14-2-4

Xét việc tạo ra các dãy Gold có độ dài $n = 31$, như vậy $m = 5$ và

$$t(5) = 2^3 + 1 = 9$$

Hai dãy phù hợp được mô tả bằng hai đa thức (Peterson và Weldon, 1972):

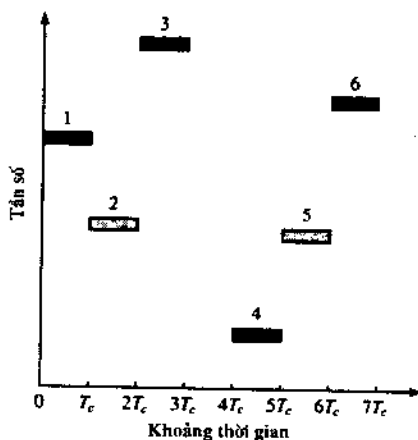
$$\begin{aligned} g_1(p) &= p^5 + p^2 + 1 \\ g_2(p) &= p^5 + p^4 + p^2 + p + 1 \end{aligned} \quad (14-2-67)$$

Trong ví dụ này ta sẽ có tất cả 33 dãy khác nhau, tương ứng với 33 giá trị pha khác nhau của hai dãy m . Tất nhiên có 31 dãy độ dài không cực đại.

Ngoại trừ hai dãy $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ thì các dãy Gold không phải là các dãy thanh ghi dịch độ dài cực đại và hàm tự tương quan của chúng không chỉ có hai giá trị. Gold đã chứng minh rằng hàm tương quan chéo giữa hai dãy trong số $n + 2$ dãy Gold có ba giá trị là $\{-1, -t(m), t(m) - 2\}$.

14-3 Tín hiệu trải phổ FH

Trong hệ thống trải phổ FH, dải thông của kênh được chia ra thành nhiều khe tần số. Trong mỗi khoảng thời gian tín hiệu, tín hiệu được truyền đi trong một hay nhiều khe tần số và các khe tần số được lựa chọn một cách ngẫu nhiên tại mỗi thời điểm theo dãy PN tạo ra.

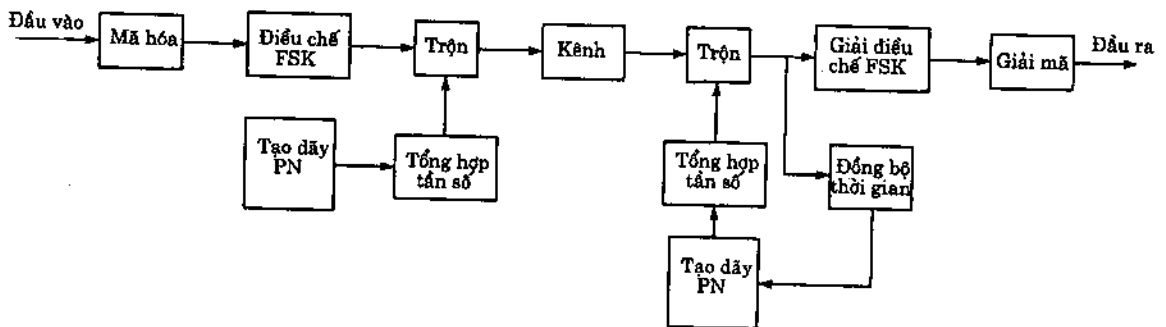


Hình 14-3-1: Ví dụ về sử dụng các khe tần số

Sơ đồ khối hệ thống thu phát tín hiệu trải phổ FH được vẽ trên hình 14-3-2. Quá trình điều chế thường được sử dụng là FSK nhị phân hay M mức và sự dịch chuyển tần số phụ thuộc vào dãy PN tạo ra. Ví dụ m bit trong dãy PN có thể tạo ra $2^m - 1$ sự dịch chuyển tần số.

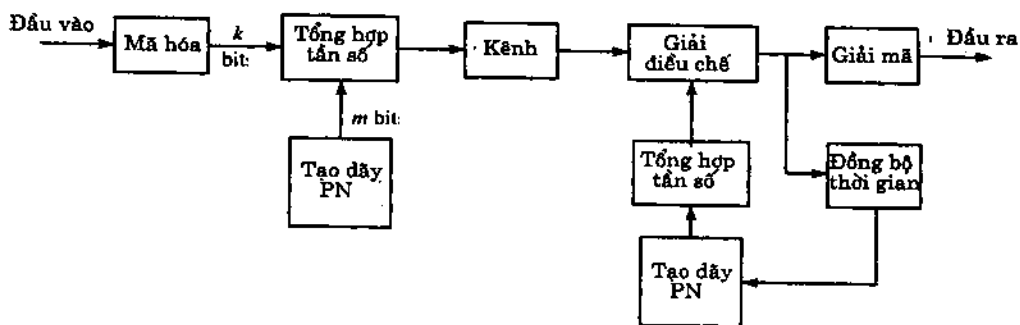
Ở phía thu có một bộ phát dãy PN giống hệt phía phát, đồng bộ với tín hiệu nhận được để điều khiển đầu ra của bộ tổng hợp tần số. Tín hiệu nhận được sau khi loại bỏ sự dịch chuyển ngẫu nhiên

về tần số được giải điều chế. Tín hiệu dùng để duy trì sự đồng bộ của bộ tạo PN với tín hiệu dịch tần nhận được thường được lấy ra từ tín hiệu nhận được ở đầu ra của kênh. Tín hiệu FSK xác định không liên kết thường được sử dụng trong hệ thống trái phổ FH.



Hình 14-3-2: Sơ đồ khối hệ thống trái phổ FH

Trong hệ thống dịch tần như trong hình 14-3-2, tần số mang dịch chuyển một cách ngẫu nhiên khi chuyển đổi từ khoảng thời gian ký hiệu này sang khoảng thời gian ký hiệu khác. M tần số mang thông tin cách nhau liên tiếp khoảng tần số là $1/T_c$, trong đó T_c là khoảng thời gian ký hiệu. Một phương pháp dịch chuyển tần số khác là k bit thông tin cùng với m bit trong dây PN dùng để xác định các khe tần số cho truyền tín hiệu. Sơ đồ khối phương pháp này được vẽ trong hình 14-3-3.



Hình 14-3-3: Sơ đồ khối hệ thống trái phổ FH độc lập tần số

Tốc độ thay đổi tần số thường là bằng hoặc nhanh hơn tốc độ ký hiệu. Nếu có nhiều chuyển đổi tần số trong một khoảng thời gian ký hiệu thì ta có một hệ thống tín hiệu thay đổi tần số cao. Trái lại, nếu tần số chỉ thay đổi khi chuyển từ ký hiệu này sang ký hiệu khác, ta có hệ thống thay đổi tần số chậm.

Tín hiệu trái phổ FH thường được sử dụng trong hệ thống CDMA hay các ứng dụng cần phải chống tác nghẽn. Trong đa số trường hợp, người ta thường chọn hệ thống tín hiệu trái phổ FH hơn là hệ thống trái phổ DS do trong hệ thống DS gặp phải vấn đề đồng bộ. Trong hệ thống DS, đồng bộ phải được duy trì trong từng khoảng thời gian chip T_c , còn trong hệ thống FH, khoảng thời gian chip là khoảng thời gian truyền trong một khe tần số, và như vậy khoảng thời gian này xấp xỉ $1/B$, lớn hơn nhiều so với $1/W$.

14-3-1 Hiệu quả của tín hiệu trái phổ FH trong kênh AWGN

Ta xét hiệu quả của hệ thống trái phổ FH trong kênh có ảnh hưởng băng rộng, được đặc trưng thống kê như là kênh AWGN có phổ mật độ công suất là J_0 . Với tín hiệu FSK trực giao nhị phân xác định

không liên kết và tốc độ chuyển đổi tần số thấp thì xác suất lỗi là (phần 7-1-4)

$$P_2 = \frac{1}{2}e^{-\gamma_b/2} \quad (14-3-1)$$

$\gamma_b = \xi_b/J_0$. Nếu tín hiệu chuyển đổi tần số L lần trong một khoảng thời gian ký hiệu thì tốc độ sai số sẽ là (phần 13-1)

$$P_2(L) = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-\gamma_b/2} \sum_{i=0}^{L-1} K_i \left(\frac{1}{2} \gamma_b \right)^i \quad (14-3-2)$$

trong đó SNR từng bit là $\gamma_b = \xi_b/J_0 = L\gamma_c$, γ_c là SNR từng chip và

$$K_i = \frac{1}{i!} \sum_{r=0}^{L-1-i} \binom{2L-1}{r} \quad (14-3-3)$$

Chúng ta cần chú ý rằng với một giá trị SNR từng bit, sai số trong (14-3-2) lớn hơn trong (14-3-1). Sự chênh lệch về SNR với cùng một tốc độ sai gọi là *suy hao tích hợp không liên kết*.

Mã hóa sẽ làm tăng độ hiệu quả của hệ thống FH một lượng là *độ tăng ích mã hóa*, phụ thuộc vào các tham số của bộ mã. Giả sử ta sử dụng mã khối tuyến tính nhị phân (n, k) , tín hiệu PSK trực giao nhị phân xác định không liên kết, giải mã xác định mềm theo luật bình phương thì xác suất sai từ mã là

$$P_M \leq \sum_{m=2}^L P_2(m) \quad (14-3-4)$$

Biểu thức của $P_2(L)$ giống như trong phần 10-1-4, có dạng giống như (14-3-1), (14-3-2) với L được thay bằng w_m , γ_b được thay bằng $\gamma_b R_c w_m$. Như vậy chúng ta có hiệu quả của hệ thống FH có ảnh hưởng bằng rộng. Tốc độ sai khi có n_2 lần thay đổi tần số đối với một mã bit được rút ra dễ dàng từ (14-3-4). n_2 lần thay đổi với một mã bit có thể xem như mã lập nhị phân và khi tích hợp với mã khối tuyến tính nhị phân (n_1, k) có phân bố trọng lượng $\{w_m\}$ ta sẽ được mã tuyến tính nhị phân $(n_1 n_2, k)$ có phân bố trọng lượng $\{n_2 w_m\}$. Như vậy ta có thể thay L bởi $n_2 w_m$, γ_b bởi $\gamma_b R_c n_2 w_m$, $R_c = k/n_1 n_2$.

Với giải mã xác định cứng và tốc độ thay đổi tần số chậm thì xác suất sai bit ở đầu ra bộ giải điều chế là

$$p = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b R_c/2} \quad (14-3-5)$$

Xác suất sai từ mã bị chặn trên theo giới hạn Chernoff

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (14-3-6)$$

Nếu tốc độ chuyển đổi tần số cao, n_2 lần đối với một mã bit và xác định theo luật bình phương ở đầu ra các bộ lọc phối hợp thì xác suất sai bit được xác định theo (14-3-2) với L được thay bằng n_2 , γ_b được thay bằng $\gamma_b R_c n_2$, R_c là tốc độ trong mã (n_1, k) . Như vậy hiệu quả của hệ thống FH thay đổi nhanh khi có ảnh hưởng bằng rộng giảm đi so với hệ thống FH thay đổi chậm một lượng bằng độ suy hao tích hợp không liên kết do có n_2 lần thay đổi tần số ứng với một bit mã.

Chúng ta đã thấy rằng đối với cả giải mã xác định mềm và giải mã xác định cứng, việc sử dụng mã lập nhị phân không cho độ khuếch đại mã hóa. Độ khuếch đại mã hóa chỉ có với mã khối (n_1, k) . Như vậy mã lập nhị phân không có hiệu quả trong hệ thống FH thay đổi nhanh, xác định không liên kết. Mã nhị phân tốc độ thấp hay mã ghép sẽ có độ hiệu quả cao hơn.

Việc xác định độ hiệu quả đối với mã chấp nhị phân cũng tương tự như đối với mã khối tuyến tính nhị phân. Cuối cùng, ta thấy rằng năng lượng từng bit ξ_b có thể biểu diễn thành $\xi_b = P_{av}/R$, R là tốc độ thông tin và $J_0 = J_{av}/W$ nên

$$\gamma_b = \frac{\xi_b}{J_0} = \frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \quad (14-3-7)$$

Trong công này chúng ta thấy rằng W/R là độ khuếch đại xử lý và J_{av}/P_{av} là tắc nghẽn biên của hệ thống FH.

14-3-2 Hiệu quả của tín hiệu trái phổ khi có ảnh hưởng từng phần trên kênh

Ảnh hưởng từng phần trên kênh được mô hình bởi quá trình ngẫu nhiên gaussian giá trị trung bình bằng 0 với phổ mật độ công suất phẳng trong một phần của dải thông W và bằng 0 trong phần còn lại của dải thông. Trong các miền mà phổ mật độ công suất khác 0, giá trị của nó là $\Phi_{zz}(f) = J_0/\alpha, 0 < \alpha \leq 1$. Mô hình ảnh hưởng này được sử dụng cho tín hiệu tắc nghẽn hay ảnh hưởng do nhiễu dùng trong hệ thống CDMA FH.

Giả sử ảnh hưởng từng phần trên kênh là do một bộ phát tín hiệu tắc nghẽn có thể lựa chọn α một cách tối ưu để cực đại hóa ảnh hưởng trên kênh. Trong hệ thống FH chậm không mã hóa, điều chế FSK nhị phân và xác định không liên kết, tín hiệu nhận được bị ảnh hưởng với xác suất α . Khi bị ảnh hưởng, xác suất lỗi là $\frac{1}{2} \exp(-\xi_b \alpha / 2J_0)$ và khi không bị ảnh hưởng thì giải điều chế là không bị lỗi. Như vậy xác suất sai trung bình là

$$P_2(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha \exp\left(-\frac{\alpha \xi_b}{2J_0}\right) \quad (14-3-8)$$

Hình 14-3-4 biểu diễn tốc độ sai theo ξ_b/J_0 . Bộ phát tín hiệu tắc nghẽn có thể chọn giá trị α để xác suất lỗi là cực đại. Ta tìm thấy giá trị đó là

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{1}{\xi_b/2J_0} = 2 \frac{J_{av}/P_{av}}{W/R} & (\xi_b/J_0 \geq 2) \\ 1 & (\xi_b/J_0 < 2) \end{cases} \quad (14-3-9)$$

Xác suất sai tắc nghẽn xung tương ứng trong trường hợp tồi nhất là

$$P_2 = \frac{e^{-1}}{\xi_b/J_0} = \left[e \left(\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \right) \right]^{-1} \quad (14-3-10)$$

Đối với tắc nghẽn toàn băng thì xác suất sai giảm theo hàm mũ còn đối với tắc nghẽn từng phần thì xác suất lỗi chỉ giảm nghịch đảo với ξ_b/J_0 trong trường hợp tồi nhất. Kết quả này tương tự với hệ thống DS không mã trong trường hợp tắc nghẽn xung tồi nhất.

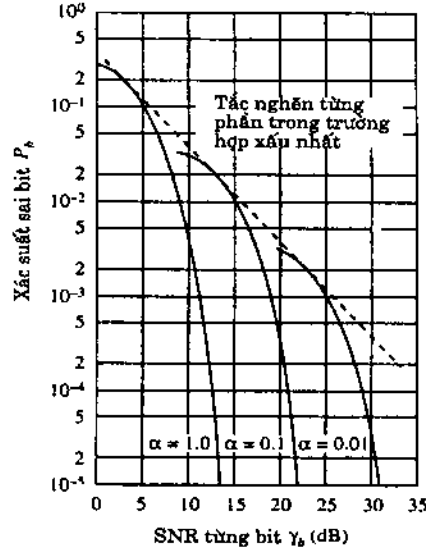
Như chúng ta sẽ chứng tỏ dưới đây, tín hiệu tán xạ nhận được bằng cách mã hóa sẽ cải thiện đáng kể về độ hiệu quả so với tín hiệu không mã hóa.

Để mô tả ưu điểm của tín hiệu tán xạ trong hệ thống trái phổ FH với ảnh hưởng từng phần, ta giả thiết rằng cùng một ký hiệu thông tin được truyền đi bằng tín hiệu FSK nhị phân trong L khe tần số độc lập. Điều này ta có thể thực hiện bằng cách chia khoảng thời gian tín hiệu thành L khoảng thời gian nhỏ. Sau khi loại bỏ các thành phần tần số mang thì tín hiệu được giải điều chế bằng cách cho tín hiệu qua một cặp bộ lọc phối hợp, đầu ra được xác định theo luật bình phương và được lấy mẫu tại thời điểm cuối của mỗi khe thời gian nhỏ. Xác định theo luật bình phương tín hiệu tương ứng với L khe tần số được cộng lại để tạo ra hai biến xác định (hai độ đo), ký hiệu là U_1 và U_2 . Khi biến U_1 mang thông tin thì

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{k=1}^L \beta_k |2\xi_c + N_{1k}|^2 \\ U_2 &= \sum_{k=1}^L \beta_k |N_{2k}|^2 \end{aligned} \quad (14-3-11)$$

$\{\beta_k\}$ là các hệ số, ξ_c là năng lượng tín hiệu từng chip trong ký hiệu L chip, $\{N_{jk}\}$ là các thành phần nhiễu cộng gaussian ở đầu ra của các bộ lọc phối hợp.

Các hệ số được lựa chọn một cách tối ưu để chống lại hiện tượng tắc nghẽn. Lý tưởng thì β_k là nghịch đảo của sai phương của các thành phần nhiễu tương ứng $\{N_k\}$. Như vậy sai phương của nhiễu ứng với mỗi chip được chuẩn hóa thành đơn vị. Khi tần số trong một khe tần số nào đó bị tắc nghẽn thì giá trị độ đo trong khe đó là rất nhỏ và khi không tắc nghẽn thì giá trị trọng lượng hay độ đo trong khe đó là khá lớn.



Hình 14-3-4: Hiệu quả của hệ thống FSK nhị phân với tác nhiễu từng phần

Giả sử chúng ta có nhiều gaussian băng rộng có phổ mật độ công suất N_0 và ảnh hưởng từng phần trên băng tần có độ rộng αW cũng là gaussian và phổ mật độ công suất là J_0/α . Khi không có ảnh hưởng từng phần thì momen bậc hai của các thành phần nhiễu N_{1k} và N_{2k} là

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{2}E(|N_{1k}|^2) = \frac{1}{2}E(|N_{2k}|^2) = 2\xi_c \left(N_0 + \frac{J_0}{\alpha} \right) \quad (14-3-12)$$

Trong trường hợp này ta chọn $\beta_k = 1/\sigma_k^2 = [2\xi_c(N_0 + J_0/\alpha)]^{-1}$. Khi không có ảnh hưởng từng phần thì $\sigma_k^2 = 2\xi_c N_0$ và do đó $\beta_k = (2\xi_c N_0)^{-1}$. Chú ý rằng β_k là biến ngẫu nhiên.

Lỗi giải điều chế gặp phải khi $U_2 > U_1$. Giới hạn trên Chernoff về xác suất lỗi là

$$\begin{aligned} P_2 &= P(U_2 - U_1 > 0) \leq E\{\exp[v(U_2 - U_1)]\} \\ &= E\left\{\exp\left[-v \sum_{k=1}^L \beta_k (|2\xi_c + N_{1k}|^2 - |N_{2k}|^2)\right]\right\} \end{aligned} \quad (14-3-13)$$

ở đây v là một biến sử dụng để tìm giới hạn trên chặt. Quá trình lấy trung bình công thức (14-3-13) được thực hiện theo tính chất thống kê của các thành phần nhiễu và tính chất thống kê của các hệ số trọng lượng $\{\beta_k\}$. Trước tiên ta giữ cố định $\{\beta_k\}$ và lấy trung bình theo tính thống kê của các thành phần nhiễu và nhận được

$$\begin{aligned} P_2(\beta) &= E\left[\exp\left(-v \sum_{k=1}^L \beta_k |2\xi_c + N_{1k}|^2 + v \sum_{k=1}^L \beta_k |N_{2k}|^2\right)\right] \\ &= \prod_{k=1}^L E[\exp(-v\beta_k |2\xi_c + N_{1k}|^2)] E[\exp(v\beta_k |N_{2k}|^2)] \\ &= \prod_{k=1}^L \frac{1}{1 - 4v^2} \exp\left(\frac{-4\xi_c^2 \beta_k v}{1 + 2v}\right) \end{aligned} \quad (14-3-14)$$

Do các thành phần tần số của tín hiệu FSK bị gây tác nghẽn với xác suất α nên $\beta_k = [2\xi_c(N_0 + J_0/\alpha)]^{-1}$ với xác suất α và $\beta_k = (2\xi_c N_0)^{-1}$ với xác suất $1 - \alpha$. Như vậy giới hạn Chernoff là

$$\begin{aligned} P_2 &\leq \prod_{k=1}^L \left\{ \frac{\alpha}{1-4v^2} \exp \left[\frac{-2\xi_c v}{(N_0 + J_0/\alpha)(1+2v)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\alpha}{1-4v^2} \exp \left[\frac{-2\xi_c v}{N_0(1+2v)} \right] \right\} \\ &= \left\{ \frac{\alpha}{1-4v^2} \exp \left[\frac{-2\xi_c v}{(N_0 + J_0/\alpha)(1+2v)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\alpha}{1-4v^2} \exp \left[\frac{-2\xi_c v}{N_0(1+2v)} \right] \right\}^L \end{aligned} \quad (14-3-15)$$

Bước tiếp theo là tối ưu hóa (14-3-15) theo v . Để đơn giản ta giả thiết $J_0/\alpha \gg N_0$ để cho thành phần thứ hai trong tổng nhỏ không đáng kể so với thành phần thứ nhất. Nếu ta đặt $N_0 = 0$ thì

$$P_2 \leq \left\{ \frac{\alpha}{1-4v^2} \exp \left[\frac{-2\alpha v \xi_c}{J_0(1+2v)} \right] \right\}^L \quad (14-3-16)$$

Giá trị tối thiểu của giới hạn này theo v và giá trị cực đại theo α (trường hợp ảnh hưởng từng phần tồi nhất) đạt được khi $\alpha = 3J_0/\xi_c \leq 1$ và $v = \frac{1}{4}$. Với các giá trị này thì (14-3-16) trở thành

$$P_2 \leq P_2(L) = \left(\frac{4}{e\gamma_c} \right)^L = \left(\frac{1,47}{\gamma_c} \right)^L, \quad \gamma_c = \frac{\xi_c}{J_0} = \frac{\xi_b}{LJ_0} \geq 3 \quad (14-3-17)$$

trong đó γ_c là SNR từng chip trong ký hiệu được truyền đi qua L chip. Tương đương

$$P_2 \leq \left[\frac{1,47(J_{av}/P_{av})}{W/R} \right]^L, \quad \frac{W/R}{L(J_{av}/P_{av})} \geq 3 \quad (14-3-18)$$

Ta thấy rằng xác suất sai trong trường hợp ảnh hưởng từng phần tồi nhất giảm theo hàm mũ khi tăng SNR từng chip γ_c . Ta có thể biểu diễn vế phải trong (14-3-17) thành dạng

$$P_2(L) = \exp[-\gamma_b h(\gamma_c)] \quad (14-3-19)$$

với

$$h(\gamma_c) = -\frac{1}{\gamma_c} \left[\ln \left(\frac{4}{\gamma_c} \right) - 1 \right] \quad (14-3-20)$$

Đồ thị biểu diễn $h(\gamma_c)$ được vẽ trên hình 14-3-5 và nó có một giá trị cực đại là $\frac{1}{4}$ khi $\gamma_c = 4$ và như vậy giá trị tối ưu SNR từng chip là $10 \log \gamma_c = 6$ dB. Ở giá trị SNR tối ưu này ta có

$$P_2 \leq P_2(L_{opt}) = e^{-\gamma_b/4} \quad (14-3-21)$$

Khi so sánh xác suất sai trong (14-3-21) với xác suất sai của tín hiệu FSK nhị phân với nhiễu có phổ phẳng trong (14-3-1), ta thấy ảnh hưởng đồng thời của ảnh hưởng từng phần trong trường hợp tồi nhất và xác định không liên kết là 3 dB.

Mã hóa cho phép nâng cao độ hiệu quả của hệ thống trái phổ FH khi có ảnh hưởng băng hẹp. Đặc biệt, nếu ta sử dụng mã khối trực giao với $M = 2^k$ từ mã và L độ tán xạ với mỗi từ mã thì xác suất sai từ mã bị chặn trên bởi

$$P_M \leq (2^k - 1)P_2(L) = (2^k - 1) \left(\frac{1,47}{\gamma_c} \right)^L = (2^k - 1) \left(\frac{1,47}{k\gamma_b/L} \right)^L \quad (14-3-22)$$

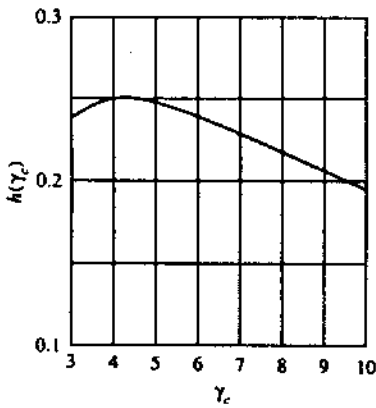
và xác suất sai bit tương đương bị chặn trên bởi

$$P_b \leq 2^{k-1} \left(\frac{1,47}{k\gamma_b/L} \right)^L \quad (14-3-23)$$

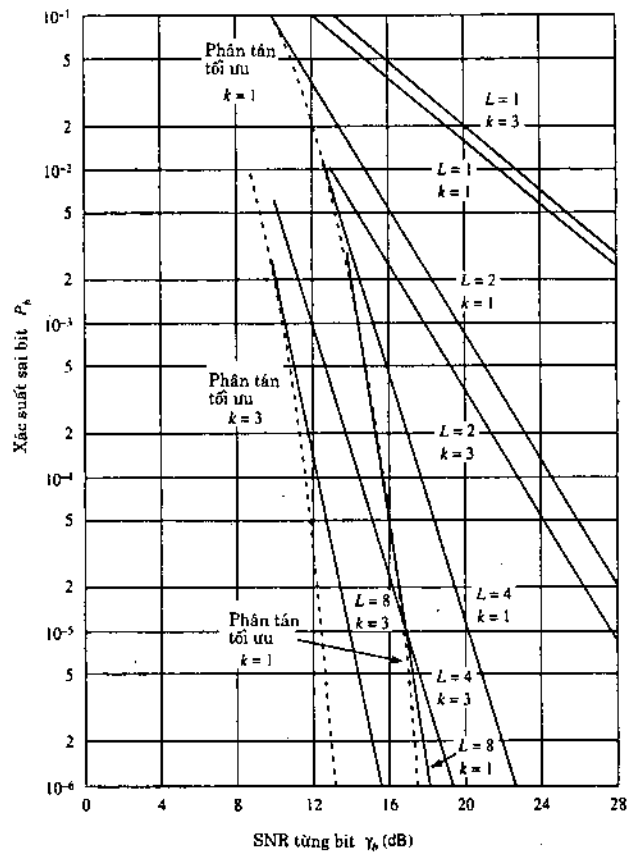
Hình 14-3-6 biểu diễn xác suất sai bit với $L = 1, 2, 4, 8$ và $k = 1, 3$. Với lựa chọn tối ưu về độ tán xạ thì giới hạn trên về xác suất sai bit được biểu diễn thành

$$P_b \leq 2^{k-1} \exp\left(-\frac{1}{4}k\gamma_b\right) = \frac{1}{2} \exp\left[-k\left(\frac{1}{4}\gamma_b - \ln 2\right)\right] \quad (14-3-24)$$

Như vậy ta đã nâng cao độ hiệu quả một lượng là $10 \log[k(1 - 2,77/\gamma_b)]$. Bằng cách dùng mã ghép và giải mã xác định mềm ta có thể nâng cao hơn nữa độ hiệu quả.



Hình 14-3-5: Đồ thị $h(\gamma_c)$



Hình 14-3-6: Hiệu quả của mã FSK nhị phân và tám mức với L độ tán xạ trên kênh có ảnh hưởng từng phần trong trường hợp tối nhất

Ví dụ 14-3-1

Giả sử ta sử dụng mã Hadamard $H(n, k)$ có trọng lượng cố định với điều chế OOK (on-off keying) đối với mỗi bit mã. Khoảng cách tối thiểu của bộ mã là $d_{min} = \frac{1}{2}n$ và do đó số độ tán xạ có hiệu quả

009.008
KX.01
009.008

qua việc điều chế OOK là $\frac{1}{2}d_{min} = \frac{1}{4}n$. Có $\frac{1}{2}n$ thành phần tần số được sử dụng để truyền một từ mã, như vậy

$$\gamma_c = \frac{k}{\frac{1}{2}n} \gamma_b = 2R_c \gamma_b \tag{14-3-25}$$

khi mã này được sử dụng độc lập. Xác suất sai bit với giải mã xác định mềm của mã này cho kênh có ảnh hưởng từng phần bị chặn trên bởi

$$P_b \leq 2^{k-1} P_2\left(\frac{1}{2}d_{min}\right) = 2^{k-1} \left(\frac{1,47}{2R_c \gamma_b}\right)^{n/4} \tag{14-3-26}$$

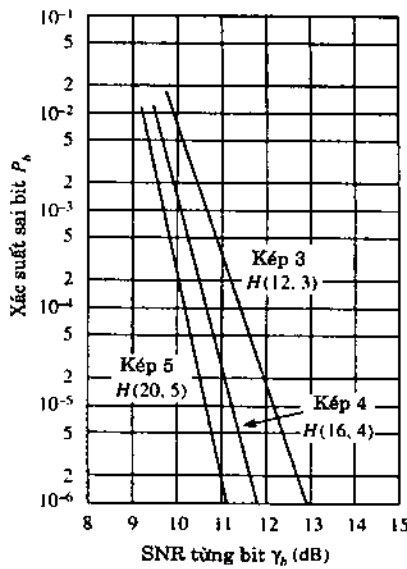
Nếu mã Hadamard được sử dụng làm mã trong và mã chập kép k tốc độ $1/2$ được sử dụng làm mã ngoài thì xác suất sai bit khi có ảnh hưởng từng phần trong trường hợp tồi nhất (xem (14-2-40)) là

$$P_b \leq \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{m=4}^{\infty} \beta_m P_2\left(\frac{1}{2}md_{min}\right) = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{m=4}^{\infty} \beta_m P_2\left(\frac{1}{4}mn\right) \tag{14-3-27}$$

trong đó $P_2(L)$ được cho trong (14-3-17) với

$$\gamma_c = \frac{k}{n} \gamma_b = R_c \gamma_b \tag{14-3-28}$$

Hình 14-3-7 thể hiện độ hiệu quả của mã kép k với $k = 3, 4, 5$ với mã Hadamard $H(20, 5), H(16, 4), H(12, 3)$.



Hình 14-3-7: Hiệu quả của mã kép k với mã Hadamard

14-4 Đồng bộ trong hệ thống trái phổ

Việc đồng bộ về mặt thời gian giữa phía thu với tín hiệu trái phổ nhận được có thể chia ra làm hai pha là pha thu nhận khởi đầu và pha theo dõi sau khi bắt đầu nhận được tín hiệu.

Thu nhận khởi đầu Trong hệ thống trái phổ DS, mã PN phải được đồng bộ về mặt thời gian trong khoảng thời gian một chip $T_c \approx 1/W$. Vấn đề đồng bộ khởi đầu có thể xem như việc cố gắng

đồng bộ đồng hồ phía thu với đồng hồ phía phát. Thông thường các đồng hồ đặc biệt chính xác và ổn định theo thời gian được sử dụng trong hệ thống trải phổ. Như vậy các thời điểm thời gian có thể coi là chính xác giữa phía thu và phía phát. Tuy nhiên vẫn có một độ bất định về mặt thời gian là do khoảng cách giữa hai phía thường được xác định không chính xác tuyệt đối. Vấn đề này đặc biệt nghiêm trọng khi hai đầu cuối là hai thiết bị di động. Trong mọi trường hợp, thủ tục thông thường để khởi đầu quá trình đồng bộ là phía phát truyền đi một dãy số liệu giả ngẫu nhiên xác định tới phía thu. Phía thu sẽ liên tục trong trạng thái tìm dãy này để khởi đầu việc đồng bộ.

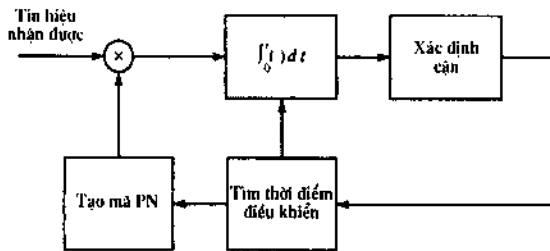
Giả sử thời gian khởi đầu bất định là T_u và khoảng thời gian chip là T_c . Nếu việc đồng bộ khởi đầu được thực hiện trong điều kiện có nhiễu cộng và các ảnh hưởng khác thì cần phải tập trung vào khoảng thời gian $T_d = NT_c$ để kiểm tra tính đồng bộ tại mỗi thời điểm. Nếu ta tìm trong khoảng thời gian bất định theo từng bước thời gian $\frac{1}{2}T_c$ thì thời gian cần thiết để thiết lập đồng bộ khởi đầu là

$$T_{init\ sync} = \frac{T_u}{\frac{1}{2}T_c} NT_c = 2NT_u \quad (14-4-1)$$

Rõ ràng dãy đồng bộ truyền đi tới phía thu phải có khoảng thời gian tối thiểu là $2NT_c$ để phía thu có đủ thời gian để thực hiện việc tìm kiếm.

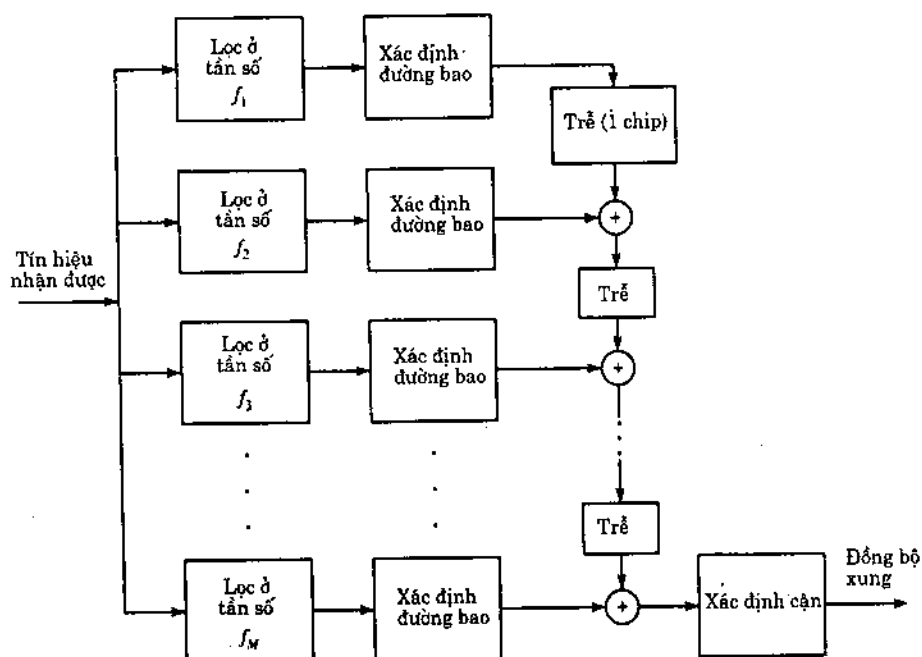
Thông thường, bộ lọc phối hợp hay bộ tương quan chéo là các phương pháp tối ưu để thiết lập đồng bộ ban đầu. Bộ lọc sẽ phối hợp với dãy số liệu biết trước và tới một thời điểm sẽ thiết lập được việc đồng bộ và bộ giải điều chế sẽ bước vào chế độ thu số liệu.

Một cách khác, ta có thể dùng bộ tương quan trượt như trên hình 14-4-1. Bộ tương quan sẽ "xoay vòng" trong khoảng thời gian bất định, thông thường là gián đoạn theo thời gian, mỗi bước là $\frac{1}{2}T_c$ và tính độ tương quan của dãy nhận được với dãy đồng bộ biết trước. Tính tương quan chéo được thực hiện trong khoảng thời gian NT_c và đầu ra bộ tương quan sẽ được so sánh với giá trị cận để xác định xem liệu tín hiệu mong muốn đã xuất hiện chưa. Nếu không vượt quá được giá trị cận thì dãy tham khảo được dịch lên theo thời gian một khoảng $\frac{1}{2}T_c$ và quá trình tính tương quan được lặp lại. Quá trình này được thực hiện cho tới khi xác định được tín hiệu mong muốn hay tới khi quá trình tìm kiếm vượt quá khoảng thời gian bất định T_u . Trong trường hợp sau thì quá trình tìm kiếm được lặp lại.

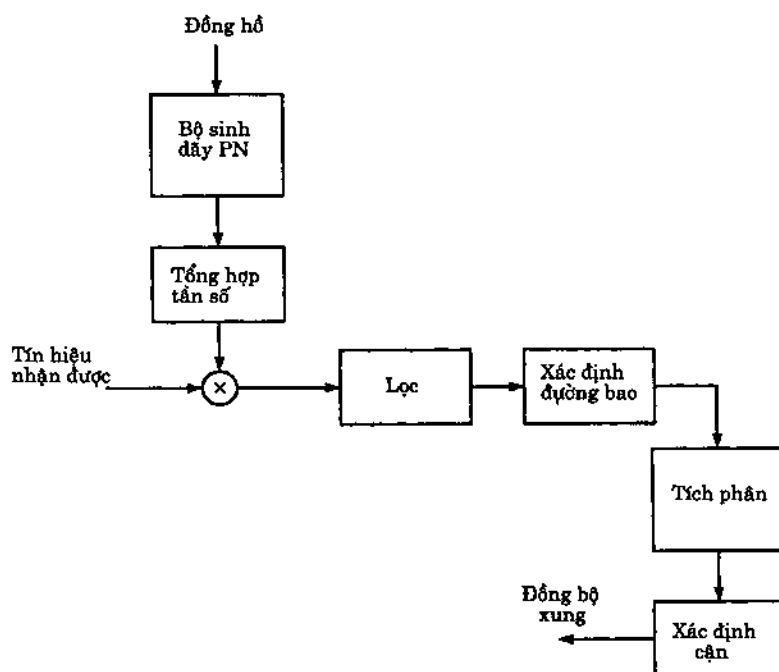


Hình 14-4-1: Bộ tương quan trượt để thu tín hiệu DS

Một quá trình tương tự cũng được thực hiện với tín hiệu FH. Trong trường hợp này vấn đề là đồng bộ mã PN (mã này điều khiển các thành phần tần số). Để khởi đầu việc đồng bộ, một tín hiệu FH biết trước được truyền tới phía thu. Hệ thống thu nhận khởi đầu ở phía thu tìm dãy FH này. Ví dụ có thể sử dụng băng các bộ lọc phối hợp với các tần số truyền đi. Đầu ra của chúng phải được làm trễ một cách hợp lý, sau đó xác định đường bao hay xác định bình phương, cộng lại để tạo ra tín hiệu dùng để so sánh với giá trị cận. Sơ đồ khối của hệ thống được vẽ trên hình 14-4-2. Một phương pháp khác chỉ sử dụng tới một cặp bộ lọc phối hợp-bộ xác định đường bao như trên hình 14-4-3, tương tự như bộ tương quan trượt trong cho tín hiệu trải phổ DS. Nhược điểm của phương pháp thứ hai này là thời gian tìm kiếm lâu. Người ta có thể sử dụng các cơ chế tìm kiếm song song trong các khe thời gian, ví dụ như trong phương pháp thứ nhất.



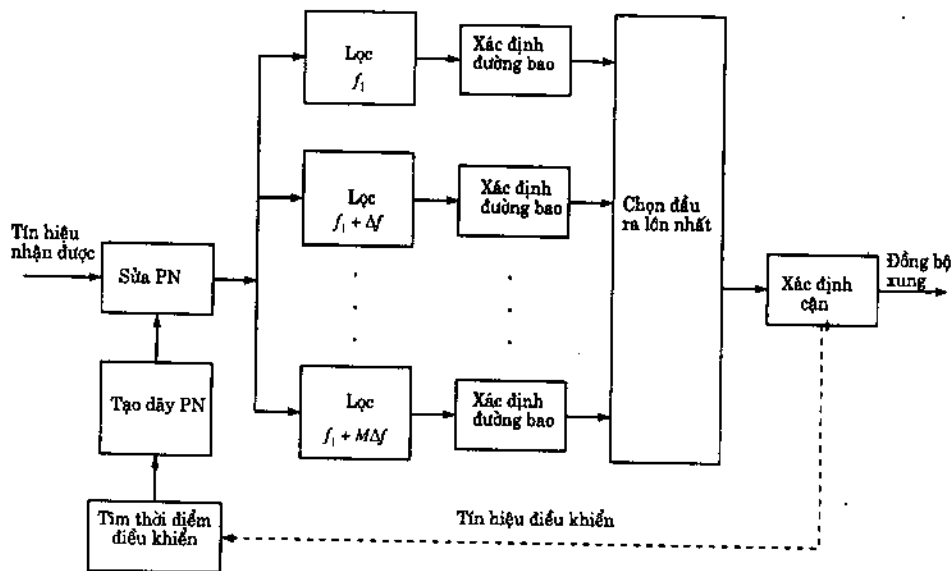
Hình 14-4-2: Hệ thống thu tín hiệu FH



Hình 14-4-3: Hệ thống thu tín hiệu FH chỉ dùng một cặp bộ lọc phối hợp-bộ xác định đường bao

Trong quá trình tìm kiếm, có thể có lỗi xảy ra và để khắc phục điều này, người ta sử dụng thêm một mạch khác dùng để kiểm tra và khẳng định tín hiệu nhận được ở đầu ra bộ tương quan hay bộ lọc phối hợp vẫn vượt quá giá trị ngưỡng hay không. Với phương pháp xác định như vậy, nhiều xung lớn có thể làm vượt ngưỡng trong một khoảng thời ngắn và nếu thực sự là tín hiệu mong muốn thì đầu ra bộ lọc phối hợp hay bộ tương quan chéo sẽ vượt ngưỡng trong suốt khoảng thời gian tín hiệu xuất hiện. Như vậy nếu quá trình tìm kiếm gặp lỗi thì sẽ được bắt đầu lại.

Trên đây ta mới chỉ quan tâm tới khoảng thời gian bất định trong thiết lập đồng bộ khởi đầu. Khi sử dụng tới độ bất định tần số để khởi đầu đồng bộ thì ta có thể sử dụng hiệu ứng Doppler. Phương pháp này thường được áp dụng khi các đầu cuối di động. Do phía thu không biết vận tốc tương ứng với phía phát nên độ di tần Doppler là không biết trước và phải được xác định bằng phương pháp tìm kiếm theo tần số. Sơ đồ khối của hệ thống được vẽ trên hình 14-4-4. Tìm kiếm theo tần số cũng có thể sửa đổi để áp dụng cho hệ thống trải phổ FH.



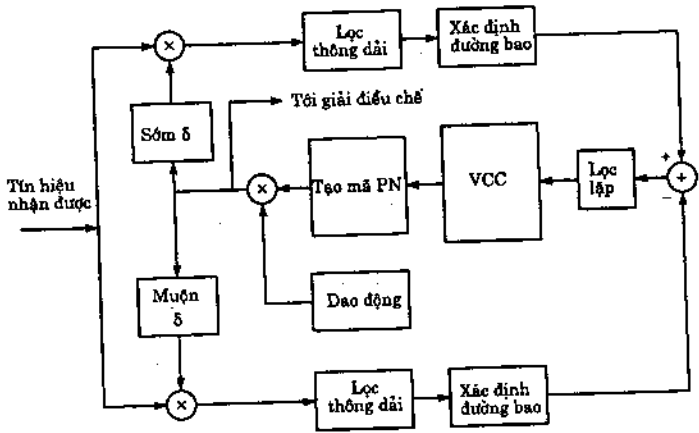
Hình 14-4-4: Đo độ di tần Doppler trong hệ thống trải phổ DS

Theo dõi Khi đã thu nhận được tín hiệu tức là đã thực hiện xong việc đồng bộ khởi đầu thì chế độ theo dõi bắt đầu. Bộ theo dõi duy trì bộ phát mã PN ở phía thu luôn đồng bộ với tín hiệu nhận được. Bộ theo dõi duy trì đồng bộ chip và đối với giải điều chế liên kết thì phải duy trì đồng bộ về pha.

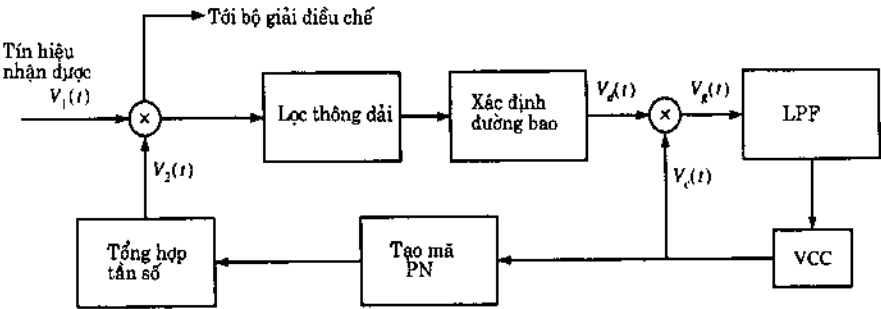
Vòng theo dõi thường được sử dụng trong hệ thống DS là vòng khóa trễ DLL như trên hình 14-4-5. Trong vòng theo dõi này, tín hiệu nhận được được sử dụng trong hai bộ nhân và được nhân với hai đầu ra từ bộ tạo mã PN cục bộ, được làm trễ một lượng $2\delta \leq T_c$. Như vậy hai tín hiệu tích là tương quan chéo giữa tín hiệu nhận được và dãy PN với hai giá trị trễ. Tín hiệu tích được lọc và xác định đường bao hay xác định theo luật bình phương và sau đó trừ cho nhau. Độ chênh lệch được sử dụng cho bộ lọc lặp điều khiển bộ VCC. Bộ VCC sẽ tạo tín hiệu đồng hồ cho bộ phát dãy PN.

Kỹ thuật theo dõi điển hình cho hệ thống trải phổ FH được trình bày sơ đồ khối trên hình 14-4-6. Phương pháp này dựa trên tiền đề là mặc dù quá trình đồng bộ khởi đầu đã xác lập nhưng vẫn còn một độ sai lệch nhỏ về thời gian giữa tín hiệu nhận được và đồng hồ của bộ thu. Bộ lọc thông dải hoạt động ở một tần số trung gian và có độ rộng tần là bội của $1/T_c$. Đầu ra được xác định đường bao và

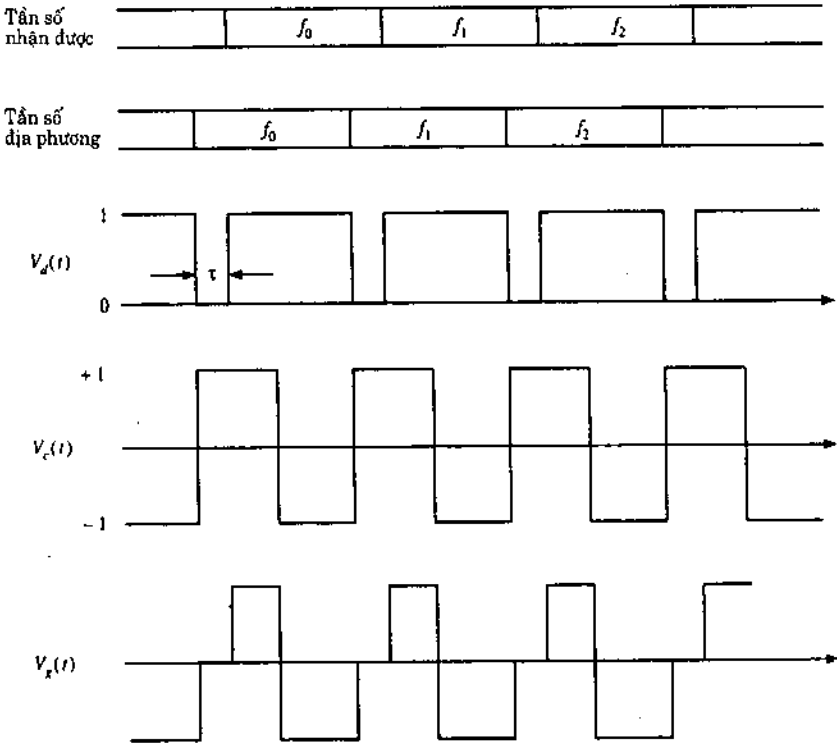
được nhân với tín hiệu đồng hồ để tạo ra tín hiệu ba mức, tín hiệu này sử dụng để điều khiển bộ lọc lặp.



Hình 14-4-5: Vòng khóa trễ để theo dõi mã PN



(a) Vòng lặp theo dõi tín hiệu FH



(b) Các tín hiệu dùng để theo dõi tín hiệu FH

Hình 14-4-6: Theo dõi tín hiệu FH

BÀI TẬP

14-1 Theo như ví dụ 14-2-2, xác định tốc độ sai trong hệ thống DS khi có tắc nghẽn CW và tín hiệu xung là

$$g(t) = \sqrt{\frac{16\xi_c}{3T_c}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{T_c} \left(t - \frac{1}{2}T_c \right) \right], \quad 0 \leq t \leq T_c$$

14-2 Mã Red-Solomon $(31, 3)$ ($q = 32$) là mã ngoài và mã nhị phân Hadamard $(16, 5)$ là mã trong trong hệ thống DS. Giả thiết giải mã xác định mềm được thực hiện ở cả hai bộ mã. Xác định giới hạn trên (hợp) của xác suất lỗi dựa trên khoảng cách tối thiểu của mã ghép.

14-3 Mã Hadamard $(n, k) = (2^m, m + 1)$ là mã tốc độ thấp với $d_{min} = 2^{n-1}$. Xác định hiệu quả của lớp mã này trong hệ thống DS với điều chế PSK nhị phân với cả hai phương pháp xác định mềm và cứng.

14-4 Mã chập tốc độ $1/2$, $d_{free} = 10$ được sử dụng để mã hóa dãy số liệu có tốc độ 1000 bit/s. Phương pháp điều chế là PSK nhị phân, hệ thống DS có tốc độ chip là 10 MHz. Xác định độ khuếch đại mã hóa, độ khuếch đại xử lý, tắc nghẽn biên với $\xi_b/J_0 = 10$.

14-5 Giả thiết có 30 người dùng trong hệ thống trải phổ DS-CDMA, các máy phát có công suất giống nhau. Mỗi người truyền thông tin với tốc độ 10 kbit/s dùng tín hiệu PSK nhị phân. Xác định tốc độ chip tối thiểu để xác suất sai bit là 10^{-5} . Nhiều cộng ở bộ thu có thể bỏ qua trong tính toán.

14-6 Hệ thống CDMA dựa trên tín hiệu trải phổ DS có độ khuếch đại xử lý là 1000 và điều chế PSK nhị phân. Xác định số lượng người sử dụng nếu mọi người đều có công suất giống nhau và xác suất lỗi mong muốn là 10^{-6} .

Chương 15

TRUYỀN TIN QUA KÊNH CÓ FADING NHIỀU ĐƯỜNG

Trong các chương trước, chúng ta đã trình bày việc thiết kế tín hiệu và hiệu quả của hệ thống truyền thông số trong các kênh AWGN điển hình hay các kênh tuyến tính với AWGN. Ta thấy rằng độ suy hao do tính tuyến tính của kênh đòi hỏi các kỹ thuật thiết kế đặc biệt và các thuật toán cân bằng thích nghi để hệ thống đạt được độ hiệu quả cao.

Trong chương này, ta xét việc thiết kế tín hiệu, cấu trúc thu và hiệu quả của các bộ thu cho các kênh phức tạp hơn là các kênh có đáp ứng xung thay đổi một cách ngẫu nhiên theo thời gian. Điển hình về các kênh này là các kênh radio như truyền tin qua tầng điện ly trong dải tần 3-30 MHz (HF), 30-300 MHz (VHF), tán xạ qua tầng đối lưu trong dải 300-3000 MHz (UHF), 3000-30000 MHz (SHF). Sự thay đổi về đáp ứng xung trong các kênh này là hệ quả của sự thay đổi về các thông số vật lý của môi trường. Ví dụ sự phản xạ của tín hiệu trong dải tần HF khi gặp các ion trong quá trình truyền là thay đổi một cách ngẫu nhiên. Đối với người xử dụng kênh thì sự thay đổi này là ngẫu nhiên, và như vậy, với cùng một tín hiệu truyền đi trong dải tần HF tại các thời điểm thời gian cách xa nhau thì hai tín hiệu nhận được có thể sẽ khác nhau. Đáp ứng thay đổi theo thời gian như vậy sẽ được xử lý theo phương pháp thống kê. Trước hết, ta xét đặc trưng của kênh có fading nhiều đường.

15-1 Đặc trưng của kênh có fading nhiều đường

Nếu chúng ta truyền một xung tín hiệu có độ rộng rất nhỏ qua một kênh đa đường thay đổi theo thời gian thì tín hiệu nhận được có thể là một dãy các xung như trên hình 15-1-1. Như vậy một đặc trưng của kênh đa đường là sự trải rộng theo thời gian (kéo dài theo thời gian hay có tác động trong một khoảng thời gian) đối với tín hiệu truyền qua kênh.

Một đặc trưng thứ hai là do sự thay đổi theo thời gian trong cấu trúc đường truyền. Sự thay đổi theo thời gian làm tính chất của các đường truyền cũng thay đổi theo thời gian. Như vậy nếu lặp lại việc truyền xung thêm nhiều lần thì ta sẽ thấy được sự thay đổi trong các xung nhận được. Sự thay đổi này gồm có thay đổi về độ lớn của xung, độ trễ giữa các xung và có thể còn là số xung nhận được trong một lần truyền.

Từ đây trở tới cuối chương này, ta xét tín hiệu truyền đi có dạng tổng quát như sau:

$$s(t) = \text{Re}[s_I(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (15-1-1)$$

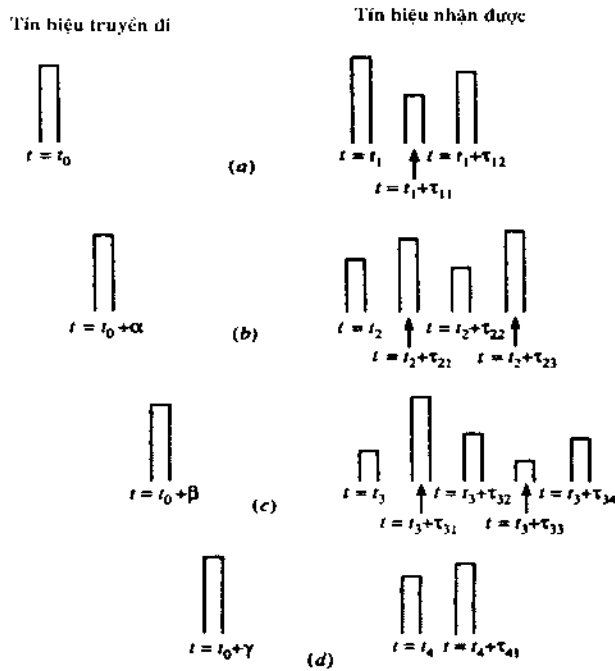
Giả thiết tín hiệu truyền từ phía phát tới phía thu có nhiều đường truyền khác nhau và gắn với mỗi đường truyền có một khoảng thời gian trễ nào đó và một độ suy hao (hệ số suy hao) nào đó. Chú ý rằng các khoảng thời gian trễ và các hệ số suy hao là thay đổi theo thời gian. Như vậy tín hiệu thông

dải nhận được có thể biểu diễn thành:

$$x(t) = \sum_n \alpha_n(t) s(t - \tau_n(t)) \quad (15-1-2)$$

với $\alpha_n(t)$ là hệ số suy hao của tín hiệu nhận được trên đường truyền thứ n và $\tau_n(t)$ là trễ truyền lan đối với đường truyền thứ n . Thay $s(t)$ trong (15-1-1) vào (15-1-2) ta nhận được

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \left[\sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) \right] e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (15-1-3)$$



Hình 15-1-1: Ví dụ về đáp ứng của kênh thay đổi theo thời gian với xung có độ rộng rất hẹp

Từ (15-1-3) ta thấy tín hiệu tần số thấp tương đương nhận được là

$$r_l(t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) \quad (15-1-4)$$

Do $r_l(t)$ là đáp ứng của kênh tần số thấp tương đương đối với tín hiệu vào tần số thấp tương đương $s_l(t)$ nên ta có thể mô tả kênh tần số thấp tương đương bằng đáp ứng xung thay đổi theo thời gian như sau

$$c(\tau; t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta(\tau - \tau_n(t)) \quad (15-1-5)$$

Đối với nhiều kênh thì tín hiệu nhận được bao gồm vô số các thành phần truyền theo các đường có độ suy hao biến đổi liên tục và tín hiệu nhận được có thể biểu diễn thành dạng

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau; t) s(t - \tau) d\tau \quad (15-1-6)$$

trong đó $\alpha(\tau; t)$ là độ suy hao của thành phần tín hiệu có độ trễ τ tại thời điểm thời gian t . Thay $s(t)$ trong (15-1-1) vào (15-1-6) dẫn tới:

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau; t) e^{-j2\pi f_c \tau} s_l(t - \tau) d\tau \right] e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (15-1-7)$$

Từ công thức này dẫn tới (do tính nhân chập)

$$c(\tau; t) = \alpha(\tau; t) e^{-j2\pi f_c \tau} \quad (15-1-8)$$

ở đây $c(\tau; t)$ thể hiện đáp ứng của kênh ở thời điểm t đối với xung đầu vào ở thời điểm $t - \tau$.

Xét việc truyền một vật mang không điều chế qua kênh (đây là một phép thử) ở tần số f_c . Như vậy $s_l(t) = 1$ với mọi t và do đó tín hiệu nhận được đối với kênh đa đường rời rạc là

$$r_l(t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j\theta_n(t)} \quad (15-1-9)$$

trong đó $\theta_n(t) = 2\pi f_c \tau_n(t)$. Như vậy tín hiệu nhận được là tổng các vectơ có biên độ $\alpha_n(t)$ và pha $\theta_n(t)$. Chú ý rằng cần phải có một sự thay đổi lớn đối với đường truyền mới đủ để $\alpha_n(t)$ thay đổi đáng kể và từ đó tạo ra sự thay đổi đáng kể trong tín hiệu nhận được. Mặt khác, $\theta_n(t)$ thay đổi 2π khi τ_n thay đổi $1/f_c$. Do $1/f_c$ nhỏ nên $\theta_n(t)$ sẽ thay đổi 2π rad khi có một sự thay đổi nhỏ trong đường truyền. Do $\tau_n(t)$ cũng thay đổi một cách ngẫu nhiên nên tín hiệu nhận được $r_l(t)$ trong (15-1-9) có thể mô hình hóa bằng một quá trình ngẫu nhiên. Khi có rất nhiều đường truyền khác nhau thì ta có thể sử dụng định lý giới hạn trung tâm. Như vậy ta có thể mô hình hóa $r_l(t)$ bởi một quá trình ngẫu nhiên gaussian giá trị phức và điều đó cũng có nghĩa là đáp ứng xung thay đổi theo thời gian $c(\tau; t)$ cũng là một quá trình ngẫu nhiên giá trị phức theo biến thời gian t .

Tín hiệu nhận được $r_l(t)$ do quá trình truyền lan theo nhiều đường khác nhau từ phía phát tới phía thu gọi là tín hiệu fading. Hiện tượng fading chủ yếu là do sự thay đổi theo thời gian trong tập hợp pha $\{\theta_n(t)\}$. Do hiện tượng fading nên các thành phần tín hiệu nhận được có thể làm suy yếu nhau hay tăng cường nhau gây ra sự thay đổi về biên độ của tín hiệu nhận được, hay tính fading của tín hiệu nhận được là do sự thay đổi về các thông số của các đường truyền.

15-1-1 Hàm tương quan của kênh và phổ công suất

Bây giờ ta xây dựng các hàm tương quan và các hàm phổ mật độ công suất hay sử dụng và các hàm này đặc trưng cho tính chất của kênh có fading. Giả thiết đáp ứng xung tần số thấp tương đương $c(\tau; t)$ là một quá trình ngẫu nhiên giá trị phức và nó là một quá trình ngẫu nhiên dừng theo nghĩa rộng. Ta định nghĩa hàm tự tương quan của $c(\tau; t)$ là

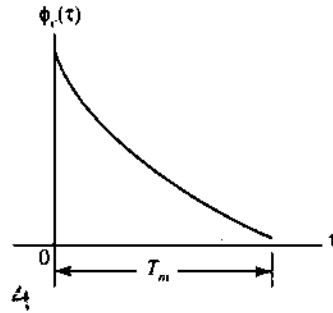
$$\phi_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E[c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] \quad (15-1-10)$$

Trong đa số các đường truyền radio thì độ suy hao và độ dịch pha của một kênh với độ trễ τ_1 thì không tương quan với độ suy hao và độ dịch pha của một kênh khác có độ trễ τ_2 , điều này thường được gọi là *tán xạ không tương quan* (uncorrelated scattering). Với giả thiết tán xạ không tương quan áp dụng vào công thức (15-1-10) thì

$$\frac{1}{2} E[c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] = \phi_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (15-1-11)$$

Nếu ta cho $\Delta t = 0$ thì hàm tự tương quan $\phi_c(\tau; 0) \equiv \phi_c(\tau)$ là công suất trung bình ở đầu ra của kênh, là hàm của thời gian trễ τ , chính vì thế $\phi_c(\tau)$ được gọi là *hàm mật độ đa đường* (multipath intensity profile) hay *phổ công suất trễ* (delay power spectrum) của kênh. Tổng quát, $\phi_c(\tau; \Delta t)$ cho ta công suất trung bình ở đầu ra của kênh với độ trễ thời gian τ và độ chênh lệch thời gian Δt .

Trong thực tế ta xác định $\phi_c(\tau; t)$ bằng cách truyền một xung có độ rộng rất hẹp và lấy tương quan chéo giữa tín hiệu nhận được với bản thân tín hiệu nhận được mà có trễ. Nói chung $\phi_c(\tau)$ có dạng như trong hình 15-1-2. Dải giá trị của τ trong đó $\phi_c(\tau)$ khác 0 gọi là *độ trải về thời gian của kênh* (multipath spread of the channel) và ký hiệu là T_m .



Hình 15-1-2: Hàm mật độ đa đường

Lấy biến đổi Furiê của đáp ứng xung $c(\tau; t)$ ta nhận được hàm truyền đạt thay đổi theo thời gian $C(f; t)$ với f là biến tần số.

$$C(f; t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (15-1-12)$$

Nếu $c(\tau; t)$ là một quá trình ngẫu nhiên gaussian giá trị phức có giá trị trung bình bằng 0 theo biến thời gian t thì $C(f; t)$ cũng có tính chất thống kê như vậy. Giả thiết kênh là dừng theo nghĩa rộng, ta định nghĩa hàm tự tương quan

$$\phi_C(f_1, f_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E[C^*(f_1; t) C(f_2; t + \Delta t)] \quad (15-1-13)$$

Do $C(f; t)$ là biến đổi Furiê của $c(\tau; t)$ nên ta cũng dễ thấy rằng $\phi_C(f_1, f_2; \Delta t)$ là biến đổi Furiê của $\phi_c(\tau; \Delta t)$. Thật vậy, thay (15-1-12) vào (15-1-13) ta có

$$\begin{aligned} \phi_C(f_1, f_2; \Delta t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] e^{j2\pi(f_1 \tau_1 - f_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) e^{j2\pi(f_1 \tau_1 - f_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau_1; \Delta t) e^{j2\pi(f_1 - f_2) \tau_1} d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau; \Delta t) e^{-j2\pi \Delta f \tau} d\tau \equiv \phi_C(\Delta f; \Delta t) \end{aligned} \quad (15-1-14)$$

với $\Delta f = f_2 - f_1$. Hơn nữa, với giả thiết tán xạ không tương quan thì hàm tự tương quan của $C(f; t)$ theo tần số là hàm chỉ phụ thuộc vào độ chênh lệch tần số $\Delta f = f_2 - f_1$. Như vậy ta gọi hàm $\phi_C(\Delta f; \Delta t)$ là *hàm tương quan theo thời gian và theo tần số của kênh*. Trong thực tế nó được đo bằng cách truyền một cặp tín hiệu hình sin có tần số khác nhau Δf và lấy tương quan chéo hai tín hiệu nhận được với độ trễ thời gian so với nhau là Δt .

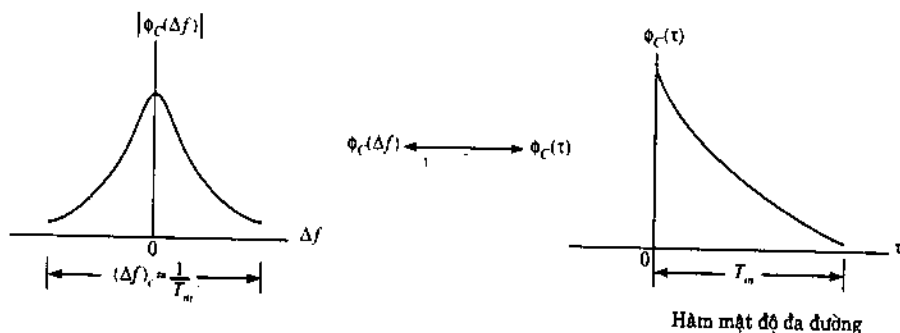
Giả thiết $\Delta t = 0$ trong (15-1-14), $\phi_C(\Delta f; 0) \equiv \phi_C(\Delta f)$, $\phi_c(\tau; 0) \equiv \phi_c(\tau)$, mối quan hệ đơn giản thành

$$\phi_C(\Delta f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau) e^{-j2\pi \Delta f \tau} d\tau \quad (15-1-15)$$

Do $\phi_C(\Delta f)$ là hàm tự tương quan theo biến tần số nên nó cho chúng ta biết về độ liên kết theo tần số của kênh truyền. Nghịch đảo độ trải thời gian của kênh là *dải thông liên kết của kênh*, ký hiệu là $(\Delta f)_c$:

$$(\Delta f)_c = \frac{1}{T_m} \quad (15-1-16)$$

Như vậy nếu hai tín hiệu hình sin có độ phân biệt tần số lớn hơn $(\Delta f)_c$ thì ảnh hưởng của kênh lên hai tín hiệu đó khi truyền sẽ khác nhau. Khi tín hiệu mang thông tin được truyền qua kênh, nếu $(\Delta f)_c$ nhỏ hơn so với độ rộng phổ của tín hiệu thì kênh đó được gọi là *có chọn lọc theo tần số*, ngược lại, nếu $(\Delta f)_c$ lớn hơn so với độ rộng phổ của tín hiệu thì kênh được gọi là *không chọn lọc theo tần số*.



Hình 15-1-3: Mối quan hệ giữa $\phi_C(\Delta f)$ và $\phi_C(\tau)$

Bây giờ chúng ta tập trung vào sự thay đổi theo thời gian của kênh được đánh giá bởi tham số Δt trong $\phi_C(\Delta f; \Delta t)$. Sự thay đổi theo thời gian trên kênh cũng có thể coi là dấu hiệu của hiện tượng Doppler. Để xây dựng mối liên hệ giữa hiệu ứng Doppler với sự thay đổi của kênh, ta lấy biến đổi Fourier của $\phi_C(\Delta f; \Delta t)$ theo biến Δt là hàm $S_C(\Delta f; \lambda)$:

$$S_C(\Delta f; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_C(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (15-1-17)$$

Với $\Delta f = 0$ và $S_C(0; \lambda) \equiv S_C(\lambda)$, quan hệ trên đơn giản thành

$$S_C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_C(\Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (15-1-18)$$

Hàm $S_C(\lambda)$ là phổ công suất theo biến tần số Doppler λ và do đó ta gọi $S_C(\lambda)$ là *phổ công suất Doppler* của kênh.

Từ (15-1-18) ta thấy nếu kênh là bất biến theo thời gian, $\phi_C(\Delta t) = 1$ và $S_C(\lambda)$ trở thành hàm $\delta(\lambda)$. Như vậy khi kênh không thay đổi theo thời gian thì không có sự thay đổi về tần số khi ta truyền một tín hiệu hình sin qua kênh. Dải giá trị của λ để $S_C(\lambda)$ khác 0 gọi là *độ rộng Doppler của kênh*, ký hiệu là B_d . Do $S_C(\lambda)$ liên hệ với $\phi_C(\Delta t)$ qua biến đổi Fourier nên nghịch đảo của B_d cho ta độ liên kết theo thời gian của kênh, ký hiệu là $(\delta t)_c$ và được gọi là *thời gian liên kết*:

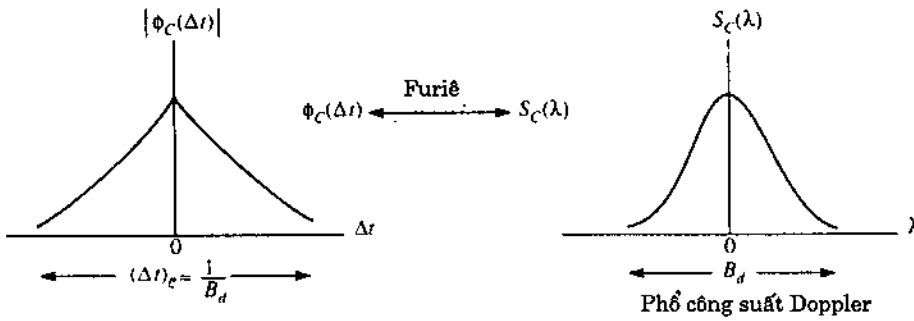
$$(\delta t)_c = \frac{1}{B_d} \quad (15-1-19)$$

Bây giờ ta định nghĩa một hàm mới $S(\tau; \lambda)$ là biến đổi Fourier của $\phi_c(\tau; \Delta t)$ theo biến Δt :

$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (15-1-20)$$

Từ đó dẫn tới $S(\tau; \lambda)$ và $S_C(\Delta f; \lambda)$ là một cặp biến đổi Furié, có nghĩa là

$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S_C(\Delta f; \lambda) e^{j2\pi\tau\Delta f} d\Delta f \quad (15-1-21)$$



Hình 15-1-4: Mối quan hệ giữa $\phi_C(\Delta t)$ và $S_C(\lambda)$

Hơn nữa, $S(\tau; \lambda)$ và $\phi_C(\Delta f; \Delta t)$ liên hệ với nhau qua phép biến đổi Furié kép

$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_C(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} e^{j2\pi\tau\Delta f} d\Delta t d\Delta f \quad (15-1-22)$$

Hàm $S(\tau; \lambda)$ gọi là *hàm tán xạ của kênh*, nó cho phép chúng ta đo công suất trung bình ở đầu ra của kênh theo độ trễ τ và tần số Doppler λ . Mối quan hệ giữa bốn hàm $\phi_C(\Delta f; \Delta t)$, $\phi_c(\tau; \Delta t)$, $\phi_C(\Delta f; \lambda)$, $S(\tau; \lambda)$ được mô tả trong hình 15-1-5.

15-1-2 Mô hình thống kê của kênh có fading

Chúng ta đã biết một số hàm phân bố xác suất có thể sử dụng để mô hình hóa thống kê cho kênh có fading. Khi có nhiều tán xạ trong kênh tạo nên tín hiệu ở phía thu, ví dụ như trong trường hợp tín hiệu truyền lan trong tầng điện ly hay tầng đối lưu, ta có thể áp dụng định lý giới hạn trung tâm và có thể dùng quá trình ngẫu nhiên gaussian để mô hình hóa thống kê cho đáp ứng xung của kênh. Nếu quá trình ngẫu nhiên có giá trị trung bình bằng 0 thì đường bao đáp ứng của kênh tại mọi thời điểm thời gian sẽ có phân bố Rayleigh và pha có phân bố đều trong khoảng $(0, 2\pi)$, có nghĩa là

$$p_R(r) = \frac{2r}{\Omega} e^{-r^2/\Omega}, r \geq 0 \quad (15-1-23)$$

với

$$\Omega = E(R^2) \quad (15-1-24)$$

Ta thấy rằng phân bố Rayleigh được đặc trưng chỉ bởi một thông số $E(R^2)$.

Một phân bố khác cũng hay được sử dụng để mô hình hóa thống kê cho đường bao của đáp ứng của kênh là phân bố Nakagami-m. Đây là phân bố có hai tham số nên nó mềm dẻo và chính xác hơn phân bố Rayleigh. Phân bố Rice cũng là một phân bố có hai tham số là s và σ^2 . Nhắc lại rằng s^2 là thông số không trung tâm của phân bố, nó biểu diễn công suất của thành phần tín hiệu không fading.

Có nhiều kênh radio trong thực tế như các kênh *nhìn thấy trực tiếp* (line-of-sight - LOS) mà trong đó các thành phần fading là do các tia phản xạ từ mặt đất. Trong những trường hợp như vậy thì số tia phản xạ nói chung là ít và kênh có thể được mô hình hóa bởi dạng khác đơn giản hơn. Ví dụ như quá trình truyền tin giữa một máy bay với một trạm mặt đất. Ngoài một đường truyền trực tiếp, ta

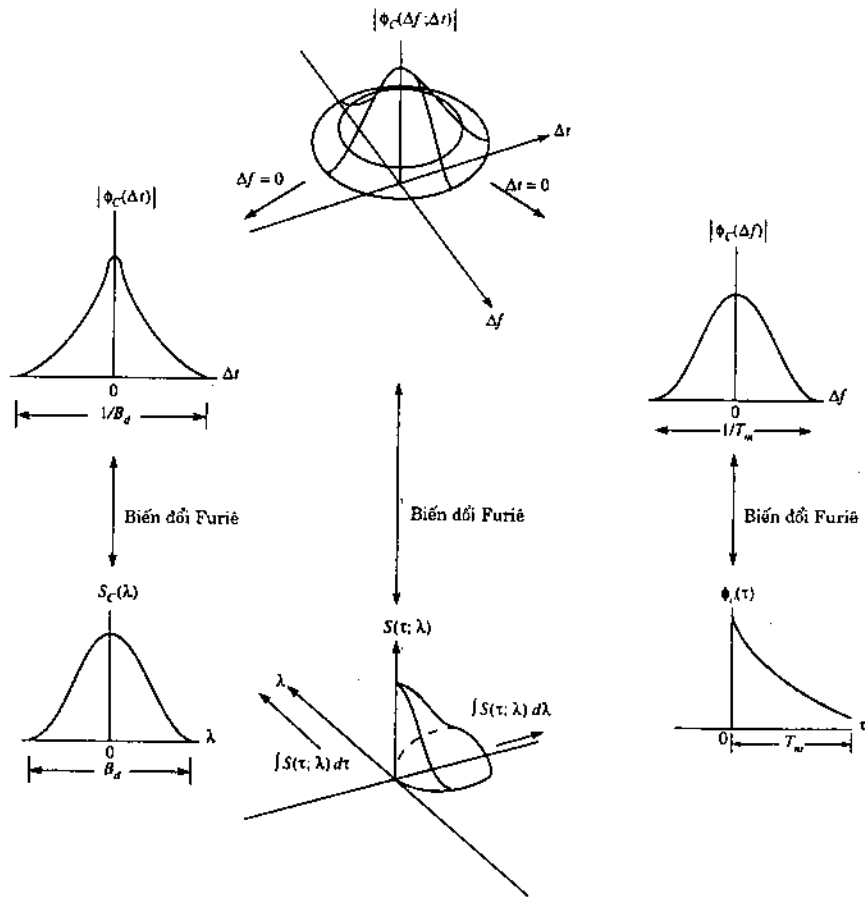
giả thiết chỉ còn một đường truyền phản xạ (gián tiếp) có độ trễ t_0 so với đường truyền trực tiếp. Đáp ứng xung của kênh có thể được mô hình hóa như sau:

$$c(\tau; t) = \alpha\delta(\tau) + \beta(t)\delta(\tau - \tau_0(t)) \quad (15-1-25)$$

α là độ suy hao của đường truyền trực tiếp và $\beta(t)$ biểu diễn thành phần tín hiệu đa đường thay đổi theo thời gian do phản xạ. Nói chung $\beta(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0. Hàm truyền đạt của kênh có thể được biểu diễn thành

$$C(f; t) = \alpha + \beta(t)e^{-j2\pi f\tau_0(t)} \quad (15-1-26)$$

Mô hình kênh này có phân bố Rice. Thành phần trực tiếp có độ suy hao α và $\beta(t)$ biểu diễn thành phần fading có phân bố Rayleigh.



Hình 15-1-5: Mối quan hệ giữa các hàm tương quan của kênh và phổ công suất

15-2 Lựa chọn mô hình kênh theo đặc điểm tín hiệu

Trong phần trước chúng ta đã xét đặc điểm thống kê của kênh đa đường thay đổi theo thời gian qua các hàm tương quan và bây giờ ta xét việc lựa chọn mô hình kênh theo các đặc điểm của tín hiệu ở

đầu vào của kênh. Gọi $s_i(t)$ là tín hiệu tần số thấp tương đương truyền qua kênh và biến đổi Fourier của nó là $S_i(f)$. Khi đó tín hiệu tần số thấp tương đương nhận được không kể nhiễu có thể biểu diễn theo một trong hai dạng như sau:

$$r_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) s_i(t - \tau) d\tau \quad (15-2-1)$$

$$r_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) S_i(f) e^{j2\pi ft} df \quad (15-2-2)$$

Giả sử chúng ta truyền thông tin số qua kênh bằng phương pháp điều chế tín hiệu xung $s_i(t)$ với tốc độ $1/T$ với T là khoảng thời gian ký hiệu. Từ (15-2-2) ta thấy rằng tính thay đổi theo thời gian của kênh sẽ làm suy hao tín hiệu truyền đi $S_i(f)$. Nếu $S_i(f)$ có độ rộng dải thông W lớn hơn dải thông liên kết của kênh $(\Delta f)_c$ thì $S_i(f)$ sẽ bị khuếch đại và di pha với các hệ số khác nhau trong dải tần của nó. Trong trường hợp này kênh được gọi là *có chọn lọc theo tần số*. Tính thay đổi theo thời gian của $C(f; t)$ cũng gây ra một sự suy hao khác, đó là sự thay đổi độ lớn của tín hiệu nhận được, và hiện tượng này cũng được gọi là *fading*. Như vậy tính lựa chọn theo tần số và fading là hai dạng suy hao trên kênh. Độ suy hao thứ nhất phụ thuộc vào độ trải về thời gian của kênh hay dải thông liên kết của kênh so với độ rộng phổ của tín hiệu truyền đi. Độ suy hao thứ hai phụ thuộc vào sự thay đổi theo thời gian của kênh, được đặc trưng bởi thời gian liên kết $(\Delta t)_c$ hay độ rộng Doppler của kênh B_d .

Ảnh hưởng của kênh lên tín hiệu truyền đi là hàm của độ rộng phổ tín hiệu và khoảng thời gian tín hiệu. Nếu khoảng thời gian tín hiệu T thỏa mãn điều kiện $T \gg T_m$ thì kênh hầu như không gây ra hiện tượng ảnh hưởng lẫn nhau giữa các ký hiệu. Nếu ta coi độ rộng phổ của tín hiệu $s_i(t)$ là $W \approx 1/T$ thì điều kiện $T \gg T_m$ trở thành

$$W \ll \frac{1}{T_m} \approx (\Delta f)_c \quad (15-2-3)$$

Như vậy là độ rộng phổ của tín hiệu truyền đi nhỏ hơn nhiều so với dải thông liên kết của kênh hay kênh gọi là *không chọn lọc theo tần số*. Điều đó có nghĩa là trong dải tần chiếm bởi $S_i(f)$ thì hàm truyền đạt thay đổi theo thời gian của kênh $C(f; t)$ là một hằng số phức theo biến tần số. Do $S_i(f)$ có các thành phần tần số nằm lân cận xung quanh tần số $f = 0$ nên $C(f; t) = C(0; t)$ và (15-2-2) đơn giản thành

$$r_i(t) = C(0; t) \int_{-\infty}^{\infty} S_i(f) e^{j2\pi ft} df = C(0; t) s_i(t) \quad (15-2-4)$$

Tóm lại khi độ rộng phổ của tín hiệu W nhỏ hơn nhiều so với độ rộng dải thông liên kết của kênh thì tín hiệu nhận được là tích của tín hiệu truyền đi với một quá trình ngẫu nhiên giá trị phức $C(0; t)$ thể hiện tính thay đổi theo thời gian của kênh. Trong trường hợp này các thành phần đa đường trong tín hiệu nhận được không thể phân tách được do $W \ll (\Delta f)_c$.

Hàm truyền $C(0; t)$ của kênh không chọn lọc theo tần số có thể biểu diễn thành dạng

$$C(0; t) = \alpha(t) e^{-j\phi(t)} \quad (15-2-5)$$

ở đây $\alpha(t)$ và $\phi(t)$ thứ tự là đường bao và pha của kênh tần số thấp tương đương. Khi mô hình toán học của $C(0; t)$ là quá trình ngẫu nhiên phức giá trị trung bình bằng 0 thì đường bao có phân bố Rayleigh và pha có phân bố đều trong khoảng $(-\pi, \pi)$. Tính fading của kênh không chọn lọc theo tần số được xác định bởi hàm tương quan $\phi_C(\Delta t)$ hay phổ công suất Doppler $S_C(\lambda)$. Nói cách khác, một trong hai tham số $(\Delta t)_c$ hay B_d đều có thể đặc trưng cho fading nhanh hay chậm.

Ví dụ ta có thể chọn tín hiệu sao cho độ rộng phổ W thỏa mãn điều kiện $W \ll (\Delta f)_c$ và khoảng thời gian tín hiệu thỏa mãn điều kiện $T \ll (\Delta t)_c$. Do T nhỏ hơn thời gian liên kết của kênh nên độ suy hao và di pha trong khoảng thời gian ít nhất một tín hiệu là không đổi. Khi đó kênh gọi là *kênh fading chậm*. Nếu ta coi $W \approx 1/T$ thì điều kiện để kênh không chọn lọc theo tần số và fading chậm là $T_m B_d < 1$. Tích này được gọi là *độ trải rộng của kênh* (spread factor). Nếu $T_m B_d < 1$ thì kênh được gọi là *không trải rộng* (underspread) và trái lại là *trải rộng* (overspread).

Do các thành phần đa đường trong tín hiệu nhận được là không thể phân tách được khi $W \ll (\Delta f)_c$ thì tín hiệu nhận được có thể coi như chỉ truyền qua một đường duy nhất. Trong trường hợp ngược lại, $W \gg (\Delta f)_c$ thì kênh là có chọn lọc theo tần số. Chúng ta sẽ thấy rằng trong trường hợp này các thành phần đa đường trong tín hiệu nhận được có thể phân tách được với nhau với độ phân tách theo thời gian trên là $1/W$.

15-3 Kênh fading chậm không chọn lọc theo tần số

Trong phần này ta xác định xác suất sai khi truyền tín hiệu PSK nhị phân hay FSK nhị phân qua kênh fading chậm không chọn lọc tần số. Đối với kênh này và tín hiệu tần số thấp tương đương truyền đi là $s_I(t)$ thì tín hiệu tần số thấp tương đương nhận được trong một khoảng thời gian tín hiệu sẽ là

$$r_I(t) = \alpha e^{-j\phi} s_I(t) + z(t), 0 \leq t \leq T \quad (15-3-1)$$

$z(t)$ là nhiễu cộng gaussian trắng giá trị phức ảnh hưởng lên tín hiệu.

Giả sử độ fading của kênh đủ chậm để việc ước lượng độ di pha ϕ từ tín hiệu nhận được không gặp phải sai số. Khi đó ta có thể thực hiện việc xác định liên kết lý tưởng đối với tín hiệu nhận được. Tín hiệu nhận được được cho qua một bộ lọc phối hợp (tín hiệu PSK nhị phân) hay cho qua một cặp bộ lọc phối hợp (tín hiệu FSK nhị phân). Chúng ta có thể xác định độ hiệu quả của hệ thống truyền tin bằng cách tính các biến xác định để từ đó xác định xác suất lỗi. Nhưng việc này ta đã tính đối với kênh bất biến theo thời gian. Như vậy, từ (7-2-5) ta có tốc độ sai đối với tín hiệu nhị phân PSK là

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (15-3-2)$$

với $\gamma_b = \alpha^2 \xi_b / N_0$. Đối với tín hiệu nhị phân FSK xác định liên kết thì tốc độ sai theo (7-2-10) là

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (15-3-3)$$

Chúng ta có thể coi (15-3-2) và (15-3-3) là các xác suất lỗi có điều kiện (α cố định). Khi α là biến ngẫu nhiên thì tốc độ sai là

$$P_2 = \int_0^\infty P_2(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (15-3-4)$$

với $p(\gamma_b)$ là hàm mật độ phân bố xác suất của γ_b khi α là biến ngẫu nhiên.

Kênh fading Rayleigh Do α có phân bố Rayleigh nên α^2 có phân bố Khi bình phương với hai độ tự do và do đó γ_b cũng có phân bố Rayleigh. Để thấy rằng

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\bar{\gamma}_b} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_b}, \gamma_b \geq 0 \quad (15-3-5)$$

trong đó $\bar{\gamma}_b$ là giá trị trung bình của tỷ số tín hiệu trên nhiễu, được định nghĩa là

$$\bar{\gamma}_b = \frac{\xi_b}{N_0} E(\alpha^2) \quad (15-3-6)$$

Thay (15-3-5) vào (15-3-4) và lấy tích phân. Đối với tín hiệu PSK nhị phân thì kết quả là

$$P_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{1 + \bar{\gamma}_b}} \right) \quad (15-3-7)$$

Đối với tín hiệu FSK nhị phân xác định liên kết thì kết quả là

$$P_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{2 + \bar{\gamma}_b}} \right) \quad (15-3-8)$$

Trong việc tính toán tốc độ sai ở trên, chúng ta đã giả thiết là kênh fading đủ chậm để việc ước lượng độ di pha là không gặp phải sai số, tuy nhiên trong thực tế điều này thường không thực hiện được. Khi đó các tốc độ sai ở trên là khả năng tối ưu thực hiện được khi kênh có fading Rayleigh.

Trong các kênh có fading đủ nhanh thì ta phải lấy trung bình pha của tín hiệu nhận được qua nhiều khoảng thời gian tín hiệu. Khi đó ta có thể sử dụng tín hiệu DPSK để thay thế. Do đối với tín hiệu DPSK chỉ yêu cầu sự ổn định về pha trong hai khoảng thời gian tín hiệu liên tiếp nên kỹ thuật điều chế này là thích hợp đối với kênh fading nhanh. Đối với tín hiệu này ta có tốc độ sai khi kênh không bị fading là

$$P_2(\gamma_b) = \frac{1}{2}e^{-\gamma_b} \quad (15-3-9)$$

Từ đó xác suất sai đối với tín hiệu DPSK là

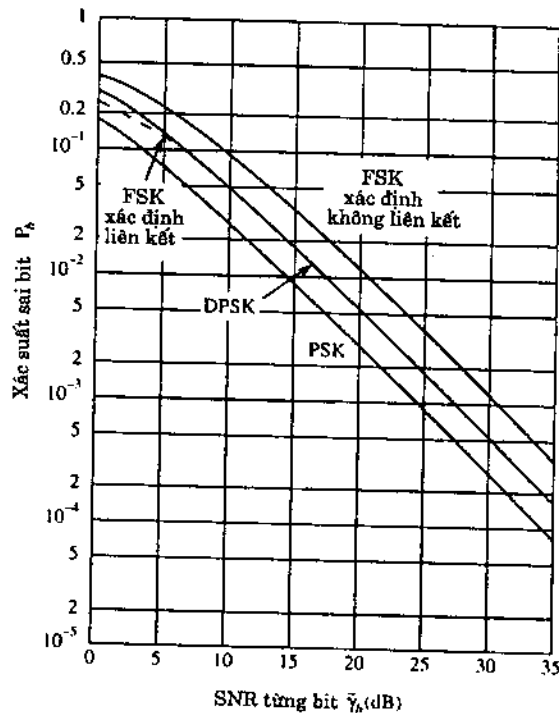
$$P_2 = \frac{1}{2(1 + \bar{\gamma}_b)} \quad (15-3-10)$$

Nếu ta không ước lượng pha mà dùng bộ xác định không liên kết cho tín hiệu nhị phân trực giao FSK thì xác suất lỗi đối với kênh không bị fading là

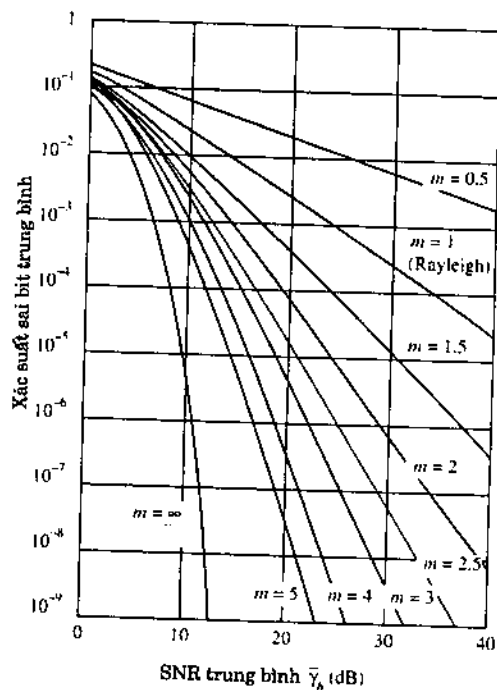
$$P_2(\gamma_b) = \frac{1}{2}e^{-\gamma_b/2} \quad (15-3-11)$$

Như vậy đối với kênh fading Rayleigh thì xác suất sai sẽ là

$$P_2 = \frac{1}{2 + \bar{\gamma}_b} \quad (15-3-12)$$



Hình 15-3-1: Xác suất lỗi của các loại tín hiệu trên kênh fading Rayleigh



Hình 15-3-2: Xác suất lỗi trung bình với tín hiệu PSK nhị phân.

Các xác suất lỗi được vẽ trên hình 15-3-1. Khi SNR lớn, có nghĩa là $\bar{\gamma}_b \gg 1$ thì các xác suất sai đơn giản thành

$$P_2 \approx \begin{cases} 1/4\bar{\gamma}_b & \text{tín hiệu PSK xác định liên kết} \\ 1/2\bar{\gamma}_b & \text{tín hiệu FSK trực giao, xác định liên kết} \\ 1/2\bar{\gamma}_b & \text{tín hiệu DPSK} \\ 1/\bar{\gamma}_b & \text{tín hiệu FSK trực giao, xác định không liên kết} \end{cases} \quad (15-3-13)$$

Kênh fading Nakagami Nếu α được đặc trưng thống kê bởi phân bố Nakagami thì biến ngẫu nhiên $\gamma = \alpha^2 \xi_b / N_0$ có hàm mật độ phân bố xác suất

$$p(\gamma) = \frac{m^m}{\Gamma(m)\bar{\gamma}^m} \gamma^{m-1} e^{-m\gamma/\bar{\gamma}} \quad (15-3-14)$$

trong đó $\bar{\gamma} = E(\alpha^2)\xi_b/N_0$. Xác suất lỗi trung bình đối với tín hiệu PSK nhị phân được vẽ trong hình 15-3-2.

15-4 Các kỹ thuật chống fading

Các kỹ thuật chống fading (diversity techniques) đều dựa trên nhận xét là xác suất sai khi thu nhận sẽ lớn nếu kênh gây suy hao tín hiệu. Nếu ta có thể truyền tới phía thu vài bản sao của cùng một tín hiệu mang thông tin thì xác suất để tất cả các tín hiệu bị “mờ” đồng thời sẽ giảm đi đáng kể. Gọi p là xác suất để một tín hiệu bị mờ dưới một mức ngưỡng nào đó thì p^L là xác suất để L bản sao tín hiệu đồng thời nằm dưới mức ngưỡng. Người ta có một số phương pháp để cung cấp cho phía thu L bản sao tín hiệu độc lập mang thông tin.

Phương pháp thứ nhất là *phân tán theo tần số* (frequency diversity), trong đó cùng một tín hiệu mang thông tin được truyền qua L vật mang và độ phân tách về tần số giữa các vật mang không nhỏ hơn độ rộng dải thông liên kết của kênh $(\Delta f)_c$. Phương pháp thứ hai là L bản sao của tín hiệu mang thông tin được truyền qua L khe thời gian khác nhau và độ phân tách về thời gian giữa các khe liên tiếp không nhỏ hơn thời gian liên kết của kênh $(\Delta t)_c$.

Chú ý rằng kênh có fading có mô hình giống như kênh có nhiễu tương quan và ta có thể xem việc truyền tín hiệu mang thông tin qua các vật mang khác nhau hay trong các khe thời gian khác nhau là một dạng đơn giản của mã lặp. Độ phân tách tối thiểu theo thời gian $(\Delta t)_c$ hay theo tần số $(\Delta f)_c$ là một dạng chèn khối bit để loại bỏ các sai nhầm tương quan và tạo ra các sai nhầm độc lập.

Một phương pháp hay được sử dụng khác là dùng nhiều anten. Ví dụ ta có thể dùng một anten phát và nhiều anten thu. Các anten thu đặt cách nhau đủ xa để các thành phần đa đường trong tín hiệu có thể truyền lan tới các anten thu là khác nhau. Thông thường độ phân tách tối thiểu là 10 lần bước sóng giữa hai anten để các tín hiệu nhận được là bị mờ một cách độc lập với nhau.

Một phương pháp phức tạp hơn là sử dụng tín hiệu có độ rộng phổ lớn hơn nhiều so với dải thông liên kết của kênh $(\Delta f)_c$. Tín hiệu có độ rộng phổ W như vậy sẽ bị phân tách theo các đường truyền và phía thu sẽ nhận được một vài đường tín hiệu fading độc lập. Độ phân tách về thời gian là $1/W$ nên với độ trải theo thời gian của kênh T_m thì sẽ có $T_m W$ thành phần tín hiệu phân biệt. Do $T_m \approx 1/(\Delta f)_c$ nên số thành phần tín hiệu phân biệt có thể biểu diễn thành $W/(\Delta f)_c$. Như vậy việc sử dụng tín hiệu có phổ rộng là một phương pháp khác để có độ phân tán theo tần số theo số đường $L \approx W/(\Delta f)_c$. Bộ thu tối ưu để xử lý tín hiệu dải rộng là bộ tương quan RAKE hay bộ lọc phối hợp RAKE mà chúng ta sẽ xét sau.

15-4-1 Tín hiệu nhị phân

Bây giờ ta xác định xác suất sai của hệ thống truyền thông số với kỹ thuật phân tán. Đầu tiên ta xây dựng mô hình toán học của hệ thống truyền thông sử dụng kỹ thuật phân tán. Giả thiết có L kênh

phân tán, các kênh đều là không chọn lọc theo tần số và là kênh fading chậm, hàm mật độ phân bố xác suất đường bao là Rayleigh. Việc xử lý fading đối với L kênh giả thiết là độc lập thống kê đồng thời. Tín hiệu trong mỗi kênh giả thiết bị ảnh hưởng bởi nhiễu cộng gaussian trắng có giá trị trung bình bằng 0 và nhiễu đối với các kênh tín hiệu là độc lập thống kê đồng thời, có hàm tự tương quan giống nhau. Như vậy các tín hiệu tần số thấp tương đương nhận được trong L kênh có thể biểu diễn dưới dạng

$$r_{ik}(t) = \alpha_k e^{-j\phi_k} s_{km}(t) + z_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2 \quad (15-4-1)$$

$\{\alpha_k e^{-j\phi_k}\}$ thể hiện độ suy hao và dịch pha đối với L kênh tín hiệu, $s_{km}(t)$ là tín hiệu thứ m truyền đi trong kênh thứ k , $z_k(t)$ là nhiễu cộng gaussian trắng trong kênh thứ k . Các tín hiệu trong tập hợp $\{s_{km}(t)\}$ có năng lượng giống nhau.

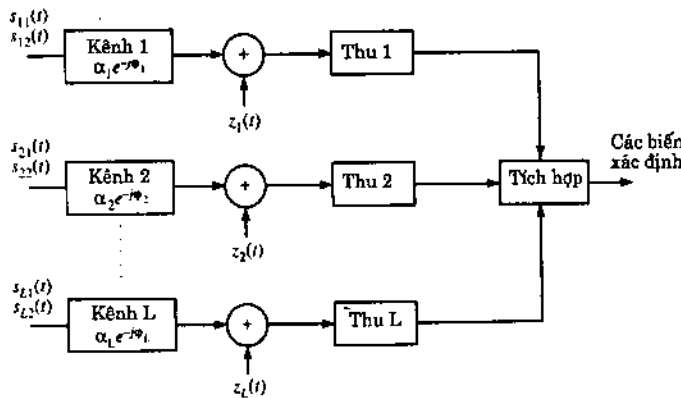
Bộ giải điều chế tối ưu đối với tín hiệu nhận được trong kênh thứ k gồm hai bộ lọc phối hợp và có đáp ứng xung là

$$b_{k1}(t) = s_{k1}^*(T - t) \quad (15-4-2)$$

$$b_{k2}(t) = s_{k2}^*(T - t) \quad (15-4-3)$$

Tất nhiên nếu ta sử dụng tín hiệu nhị phân PSK để truyền thông tin thì $s_{k1}(t) = -s_{k2}(t)$ và ta chỉ cần dùng một bộ lọc phối hợp. Theo sau các bộ lọc phối hợp là một bộ tích hợp (combiner) tạo ra hai biến xác định. Bộ tích hợp tốt nhất là bộ tích hợp sẽ nhân đầu ra của mỗi bộ lọc phối hợp với liên hợp phức với độ khuếch đại của kênh $\alpha_k e^{j\phi_k}$. Việc nhân này sẽ bù độ di pha trên kênh và nhân tín hiệu với hệ số tỷ lệ với độ lớn của tín hiệu. Sau khi thực hiện phép nhân sẽ thực hiện việc lấy tổng của hai tín hiệu thu được. Bộ tích hợp tối ưu này gọi là *bộ tích hợp cực đại tỷ số* (maximal ratio combiner). Việc thực hiện bộ tích hợp này cần phải biết chính xác các giá trị $\{\alpha_k\}$ và $\{\phi_k\}$ hay việc ước lượng các tham số đó là không có nhiều. Ảnh hưởng của việc ước lượng có nhiều lên độ hiệu quả của hệ thống đối với các tín hiệu PSK đa pha được ghi trong các tài liệu tra cứu.

Sơ đồ khối của hệ thống truyền thông nhị phân sử dụng kỹ thuật phân tán được vẽ trong hình 15-4-1.



Hình 15-4-1: Mô hình hệ thống truyền thông nhị phân sử dụng kỹ thuật phân tán.

Với tín hiệu PSK nhị phân và độ phân tán bậc L thì đầu ra bộ tích hợp cực đại tỷ số được biểu diễn thành

$$U = \text{Re} \left(2\xi \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k N_k \right) = 2\xi \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k N_{kr} \quad (15-4-4)$$

trong đó N_{kr} là phần thực của biến ngẫu nhiên nhiễu gaussian giá trị phức

$$N_k = e^{j\phi_k} \int_0^T z_k(t) s_k^*(t) dt \quad (15-4-5)$$

Ta sử dụng phương pháp giống như trong phần 15-3 để xác định xác suất lỗi. Như vậy xác suất lỗi với điều kiện các độ suy hao $\{\alpha_k\}$ được xác định trước, sau đó ta lấy trung bình theo hàm mật độ phân bố xác suất của $\{\alpha_k\}$.

Kênh fading Rayleigh Với tập hợp các giá trị xác định $\{\alpha_k\}$ biến xác định U là biến gaussian có giá trị trung bình

$$E(U) = 2\xi \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 \quad (15-4-6)$$

và sai phương

$$\sigma_U^2 = 2\xi N_0 \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 \quad (15-4-7)$$

Xác suất để $U < 0$ là

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (15-4-8)$$

với γ_b là SNR từng bit, được xác định theo công thức

$$\gamma_b = \frac{\xi}{N_0} \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^L \gamma_k \quad (15-4-9)$$

trong đó $\gamma_k = \xi \alpha_k^2 / N_0$ là SNR trên kênh thứ k . Bây giờ ta xác định hàm mật độ phân bố xác suất $p(\gamma_b)$. Đầu tiên ta chú ý rằng với $L = 1, \gamma_b \equiv \gamma_1$ có phân bố Khi bình phương và hàm đặc tính của γ_1 là

$$\psi_{\gamma_1}(jv) = E(e^{jv\gamma_1}) = \frac{1}{1 - jv\bar{\gamma}_c} \quad (15-4-10)$$

$\bar{\gamma}_c$ là SNR trung bình từng kênh, giả thiết là giống nhau với mọi kênh. Như vậy

$$\bar{\gamma}_c = \frac{\xi}{N_0} E(\alpha_k^2) \quad (15-4-11)$$

độc lập với k . Do fading trên L kênh là độc lập thống kê đồng thời nên $\{\gamma_k\}$ cũng độc lập thống kê và như vậy thì

$$\psi_{\gamma_b}(jv) = \frac{1}{(1 - jv\bar{\gamma}_c)^L} \quad (15-4-12)$$

Đây là hàm đặc tính của phân bố Khi bình phương có $2L$ độ tự do. Như vậy thì hàm mật độ phân bố xác suất $p(\gamma_b)$ là

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{(L-1)! \bar{\gamma}_c^L} \gamma_b^{L-1} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_c} \quad (15-4-13)$$

Ta lấy trung bình của xác suất sai có điều kiện trong (15-4-8) theo hàm mật độ phân bố xác suất $p(\gamma_b)$:

$$P_2 = \int_0^\infty P_2(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (15-4-14)$$

Kết quả là

$$P_2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \mu)\right]^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left[\frac{1}{2}(1 + \mu)\right]^k \quad (15-4-15)$$

với

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{1 + \bar{\gamma}_c}} \quad (15-4-16)$$

Khi SNR trung bình từng kênh $\bar{\gamma}_c$ thỏa mãn điều kiện $\bar{\gamma}_c \gg 1$ thì $\frac{1}{2}(1+\mu) \approx 1$ và $\frac{1}{2}(1-\mu) \approx 1/4\bar{\gamma}_c$ và

$$\sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} = \binom{2L-1}{L} \quad (15-4-17)$$

Như vậy khi $\bar{\gamma}_c$ đủ lớn (hơn 10 dB) thì xác suất lỗi trong (15-4-15) được xấp xỉ thành

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{4\bar{\gamma}_c} \right)^L \binom{2L-1}{L} \quad (15-4-18)$$

Như vậy với việc phân tán, xác suất lỗi giảm tỷ lệ với SNR lũy thừa L .

Đối với tín hiệu nhị phân trực giao FSK xác định liên kết thì hai biến xác định ở đầu ra của bộ tích hợp cực đại tỷ số là

$$\begin{aligned} U_1 &= \operatorname{Re} \left(2\xi \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k N_{k1} \right) \\ U_2 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^L \alpha_k N_{k2} \right) \end{aligned} \quad (15-4-19)$$

ở đây ta giả thiết tín hiệu $s_{k1}(t)$ được truyền đi và $\{N_{k1}\}$ và $\{N_{k2}\}$ là hai tập hợp các thành phần nhiễu ở đầu ra các bộ lọc phối hợp. Xác suất lỗi là xác suất để $U_2 > U_1$. Khi $\{\alpha_k\}$ cố định, thì xác suất lỗi có điều kiện là

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (15-4-20)$$

Do việc tính toán đối với tín hiệu này cũng giống như tín hiệu PSK nhị phân ngoại trừ ta có hai thành phần nhiễu và cuối cùng kết quả cũng là công thức (15-4-15) với $\bar{\gamma}_c$ được thay bằng $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_c$ và

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{2 + \bar{\gamma}_c}} \quad (15-4-21)$$

Hơn nữa với $\bar{\gamma}_c$ lớn thì

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{2\bar{\gamma}_c} \right) \binom{2L-1}{L} \quad (15-4-22)$$

Các vấn đề chúng ta đã trình bày ở trên là trong khuôn khổ của giả thiết việc ước lượng các tham số của kênh $\{\alpha_k e^{-j\phi_k}\}$ không gặp sai số. Do kênh thay đổi theo thời gian nên các tham số của kênh không thể ước lượng chính xác được. Nếu như sự thay đổi theo thời gian của kênh đủ nhanh thì người ta có thể sử dụng tín hiệu DPSK hay FSK xác định không liên kết.

Trước hết chúng ta xét tín hiệu DPSK. Để sử dụng được tín hiệu này thì sự thay đổi của kênh phải đủ chậm để các độ di pha $\{\phi_k\}$ thay đổi không đáng kể trong hai khoảng thời gian tín hiệu liên tiếp. Ta giả thiết rằng các tham số của kênh là hằng số trong khoảng thời gian một tín hiệu. Như vậy bộ tích hợp cho tín hiệu DPSK nhị phân sẽ tạo ra biến xác định

$$U = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L (2\xi \alpha_k e^{-j\phi_k} + N_{k2}) (2\xi \alpha_k e^{j\phi_k} + N_{k1}^*) \right] \quad (15-4-23)$$

ở đây $\{N_{k1}\}$ và $\{N_{k2}\}$ là các thành phần nhiễu ở đầu ra của các bộ lọc phối hợp trong hai chu kỳ tín hiệu liên tiếp. Xác suất lỗi là xác suất để $U < 0$. Ta có thể sử dụng xác suất lỗi trong (13-1-3) áp dụng cho tín hiệu DPSK nhị phân truyền qua L kênh thay đổi theo thời gian và lấy trung bình theo phân bố Rayleigh và ta có

$$P_2(\gamma_b) = \left(\frac{1}{2} \right)^{2L-1} e^{-\gamma_b} \sum_{k=0}^{L-1} b_k \gamma_b^k \quad (15-4-24)$$

γ_b được tính theo (15-4-9) và

$$b_k = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{L-1-k} \binom{2L-1}{n} \quad (15-4-25)$$

Kết quả sau khi lấy trung bình là

$$P_2 = \frac{1}{2^{2L-1}(L-1)!(1+\bar{\gamma}_c)^L} \sum_{k=0}^{L-1} b_k(L-1+k)! \left(\frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c} \right)^k \quad (15-4-26)$$

Ta có thể chuyển công thức trên về dạng (15-4-15), đối với tín hiệu DPSK tham số μ được định nghĩa là

$$\mu = \frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c} \quad (15-4-27)$$

Với $\bar{\gamma}_c \gg 1$ thì (15-4-26) được xấp xỉ thành

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{2\bar{\gamma}_c} \right)^L \binom{2L-1}{L} \quad (15-4-28)$$

Tín hiệu FSK trực giao xác định không liên kết có thể áp dụng cho kênh fading chậm và fading nhanh nhưng việc phân tích của chúng ta ở đây giả thiết rằng fading đủ chậm để sự thay đổi các tham số của kênh là không đáng kể trong khoảng thời gian một tín hiệu. Bộ tích hợp trong trường hợp này là bộ tích hợp theo luật bình phương. Đầu ra của nó là hai biến xác định

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{k=1}^L |2\xi\alpha_k e^{-j\phi_k} + N_{k1}|^2 \\ U_2 &= \sum_{k=1}^L |N_{k2}|^2 \end{aligned} \quad (15-4-29)$$

trong đó ta giả thiết biến xác định U_1 có chứa tín hiệu. Xác suất lỗi là xác suất để $U_1 < U_2$.

Phương pháp thứ nhất để xác định xác suất lỗi là theo phần 13-1, biểu thức của xác suất lỗi của bộ tích hợp theo luật bình phương đối với tín hiệu FSK cũng giống như đối với tín hiệu DPSK với γ_b được thay bằng $\frac{1}{2}\gamma_b$. Như vậy hệ thống FSK cần thêm 3 dB so với hệ thống DPSK để có cùng một độ hiệu quả trên kênh bất biến theo thời gian. Như vậy xác suất lỗi có điều kiện đối với tín hiệu DPSK cũng áp dụng được cho tín hiệu FSK với γ_b được thay bằng $\frac{1}{2}\gamma_b$ và kết quả cuối cùng trong (15-4-26) cũng áp dụng cho tín hiệu FSK xác định không liên kết với $\bar{\gamma}_c$ được thay bằng $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_c$. Nhưng ta đã biết rằng (15-4-15) là tương đương với (15-4-26). Như vậy xác suất lỗi trong (15-4-15) cũng áp dụng được cho tín hiệu PSK với tham số

$$\mu = \frac{\bar{\gamma}_c}{2+\bar{\gamma}_c} \quad (15-4-30)$$

Phương pháp thứ hai bắt đầu từ các hàm mật độ phân bố xác suất $p(U_1)$ và $p(U_2)$. Do các biến ngẫu nhiên giả trị phức $\{\alpha_k e^{-j\phi_k}\}$, $\{N_{k1}\}$, $\{N_{k2}\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian giả trị trung bình bằng 0 nên các biến ngẫu nhiên U_1 và U_2 là các biến ngẫu nhiên có phân bố Khi bình phương với $2L$ độ tự do. Như vậy

$$p(U_1) = \frac{1}{(2\sigma_1^2)^L(L-1)!} U_1^{L-1} \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_1^2}\right) \quad (15-4-31)$$

với

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} E(|2\xi\alpha_k e^{-j\phi_k} + N_{k1}|^2) = 2\xi N_0(1+\bar{\gamma}_c)$$

Tương tự ta có

$$p(U_2) = \frac{1}{(2\sigma_2^2)^L(L-1)!} U_2^{L-1} \exp\left(-\frac{U_2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (15-4-32)$$

và

$$\sigma_2^2 = 2\xi N_0$$

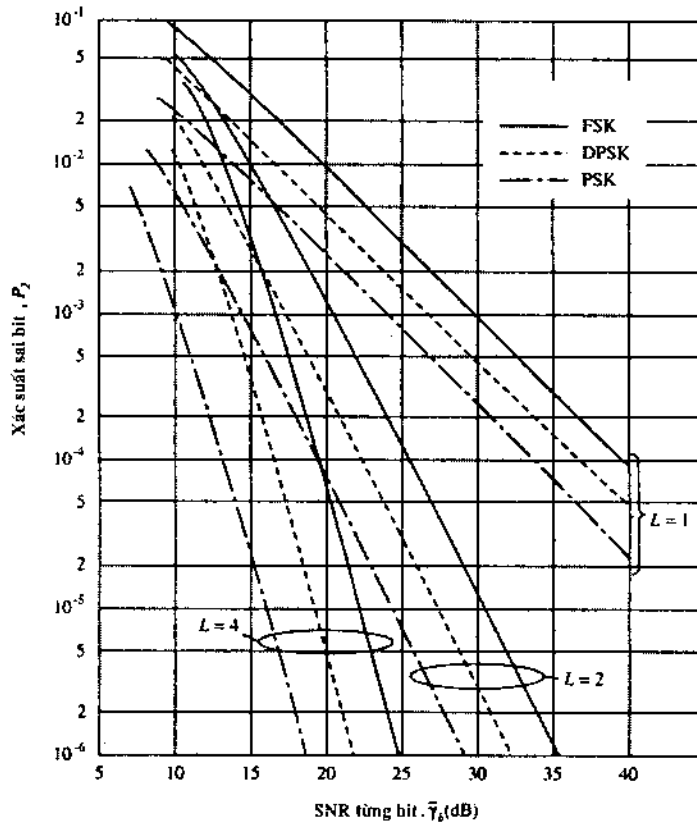
Xác suất lỗi là xác suất để $U_2 > U_1$ và kết quả là (15-4-15) với μ được định nghĩa trong (15-4-30).

Khi $\bar{\gamma}_c \gg 1$ thì ta có

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_c} \right)^L \binom{2L-1}{L} \quad (15-4-33)$$

Độ hiệu quả của các loại tín hiệu được vẽ trong hình 15-4-2. Các độ hiệu quả được vẽ theo SNR trung bình từng bit $\bar{\gamma}_b$ với

$$\bar{\gamma}_b = L\bar{\gamma}_c \quad (15-4-34)$$



Hình 15-4-2: Độ hiệu quả của các tín hiệu nhị phân với kỹ thuật phân tán

15-4-2 Tín hiệu đa pha

Mục tiêu của chúng ta trong phần này là xác định xác suất sai ký hiệu trong các hệ thống PSK và DPSK nhiều mức và xác suất sai bit đối với tín hiệu PSK, DPSK bốn mức pha.

Kết quả tổng quát về xác suất sai ký hiệu đối với tín hiệu PSK và DPSK đa mức là

$$P_M = \frac{(-1)^{L-1}(1-\mu^2)^L}{\pi(L-1)!} \left(\frac{\partial^{L-1}}{\partial b^{L-1}} \left\{ \frac{1}{b-\mu^2} \left[\frac{\pi}{M}(M-1) - \frac{\mu \sin(\pi/M)}{\sqrt{b-\mu^2 \cos^2(\pi/M)}} \cot^{-1} \frac{-\mu \cos(\pi/M)}{\sqrt{b-\mu^2 \cos^2(\pi/M)}} \right] \right\} \right)_{b=1} \quad (15-4-35)$$

trong đó

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{1 + \bar{\gamma}_c}} \quad (15-4-36)$$

đối với tín hiệu PSK và

$$\mu = \frac{\bar{\gamma}_c}{1 + \bar{\gamma}_c} \quad (15-4-37)$$

đối với tín hiệu DPSK. Chú ý rằng $\bar{\gamma}_c$ là SNR trung bình từng kênh, $\bar{\gamma}_b = L\bar{\gamma}_v/k$, $k = \log_2 M$.

Tốc độ sai bit đối với tín hiệu bốn mức PSK và DPSK được xác định từ giả thiết từng cặp hai bit thông tin được ánh xạ thành một giá trị pha theo luật mã Golay và ta có

$$P_b = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{2 - \mu^2}} \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1 - \mu^2}{4 - 2\mu^2} \right)^k \right] \quad (15-4-38)$$

μ được xác định theo (15-4-36) và (15-4-37) tương ứng với hai tín hiệu PSK và DPSK.

Hình 15-4-3 vẽ xác suất sai ký hiệu với $L = 1$. Khi $\bar{\gamma}_b \gg 1$ và $L = 1$ thì (15-4-35) được xấp xỉ thành

$$P_M \approx \frac{M - 1}{(M \log_2 M) [\sin^2(\pi/M)] \bar{\gamma}_b} \quad (15-4-39)$$

đối với tín hiệu DPSK và đối với tín hiệu PSK là

$$P_M \approx \frac{M - 1}{(M \log_2 M) [\sin^2(\pi/M)] 2\bar{\gamma}_b} \quad (15-4-40)$$

15-4-3 Tín hiệu trực giao M mức

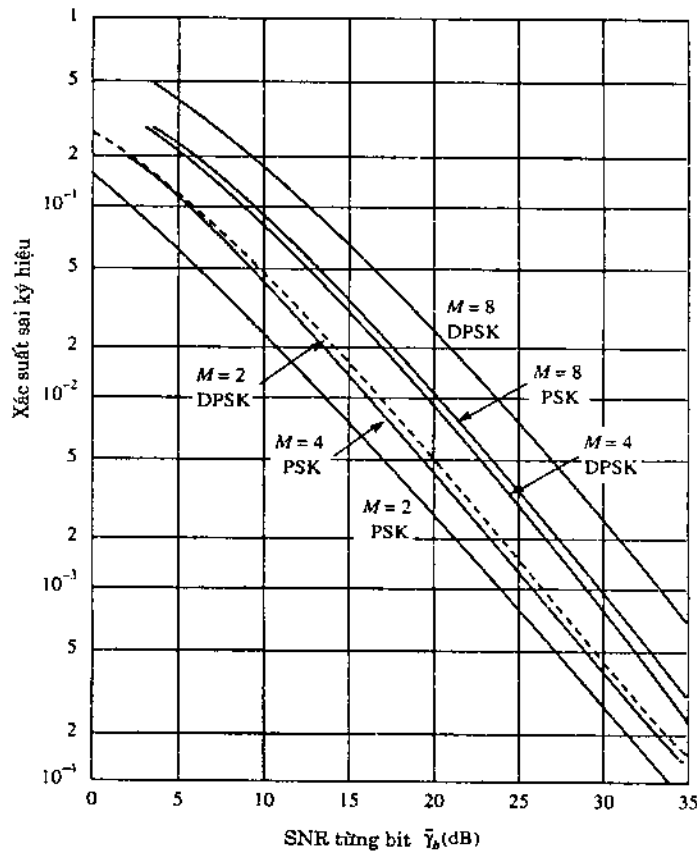
Trong mục này, ta xác định độ hiệu quả của tín hiệu trực giao M mức truyền qua kênh fading Rayleigh. Tín hiệu trực giao có thể xem như tín hiệu FSK M mức có độ phân tách tần số tối thiểu là bội số của $1/T$ với T là chu kỳ tín hiệu. Giả thiết tín hiệu mang thông tin được truyền qua L kênh phân tán, các kênh giả thiết là không chọn lọc theo tần số và là các kênh fading chậm. Sự fading trên L kênh giả thiết là độc lập thống kê đồng thời. Chúng ta cũng giả thiết thêm là nhiễu cộng gaussian trắng tác động trên các kênh cũng độc lập thống kê đồng thời.

Mặc dù ta có thể xây dựng cấu trúc và phân tích độ hiệu quả của bộ tích hợp cực đại tỷ số cho các kênh phân tán nhưng trong thực tế người ta thường sử dụng phương pháp xác định không liên kết và như vậy ta tập trung vào việc tích hợp theo luật bình phương các tín hiệu phân tán. Đầu ra của bộ tích hợp (biến xác định) có tín hiệu là

$$U_1 = \sum_{k=1}^L |2\xi\alpha_k e^{-j\phi_k} + N_{k1}|^2 \quad (15-4-41)$$

và đầu ra của $M - 1$ bộ tích hợp còn lại là

$$U_m = \sum_{k=1}^L |N_{km}|^2, \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (15-4-42)$$



Hình 15-4-3: Xác suất sai ký hiệu cho kênh fading Rayleigh $L = 1$

Xác suất lỗi là 1 trừ đi xác suất để $U_1 > U_m, m = 2, 3, \dots, M$. Do các tín hiệu là trực giao và các quá trình nhiễu cộng là độc lập thống kê đồng thời nên các biến ngẫu nhiên $U_1, U_2, \dots, U_m$ cũng độc lập thống kê đồng thời. Hàm mật độ phân bố xác suất của U_1 được tính theo công thức (15-4-31) còn các biến $U_2, U_3, \dots, U_m$ có phân bố giống nhau và được xác định bởi hàm mật độ phân bố xác suất biên (15-4-32). Với U_1 xác định thì xác suất đồng thời $P(U_2 < U_1, U_3 < U_1, \dots, U_m < U_1)$ sẽ bằng lũy thừa bậc $M - 1$ của $P(U_2 < U_1)$.

$$\begin{aligned}
 P(U_2 < U_1) &= \int_0^{U_1} p(U_2) dU_2 \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right)^k
 \end{aligned} \quad (15-4-43)$$

với $\sigma_2^2 = 2\xi N_0$. Lũy thừa bậc $M - 1$ của xác suất này được lấy trung bình theo hàm mật độ phân bố xác suất của U_1 sẽ cho ta xác suất đúng. Như vậy:

$$\begin{aligned}
 P_M &= 1 - \int_0^\infty \frac{1}{(2\sigma_1^2)^L (L-1)!} U_1^{L-1} \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right) \\
 &\quad \left[1 - \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right)^k\right]^{M-1} dU_1
 \end{aligned}$$

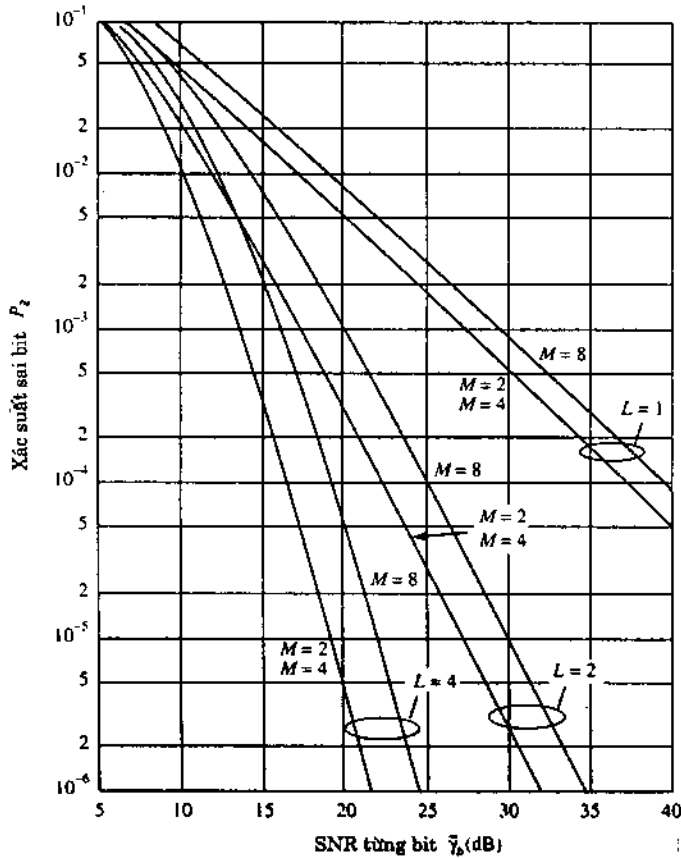
$$= 1 - \int_0^\infty \frac{1}{(1 + \bar{\gamma}_c)^L (L-1)!} U_1^{L-1} \exp\left(-\frac{U_1}{1 + \bar{\gamma}_c}\right) \left(1 - e^{-U_1} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{U_1^k}{k!}\right)^{M-1} dU_1 \quad (15-4-44)$$

ở đây $\bar{\gamma}_c$ là SNR trung bình theo từng kênh. SNR trung bình từng bit là $\bar{\gamma}_b = L\bar{\gamma}_c / \log_2 M = L\bar{\gamma}_c / k$. Chúng ta biểu diễn lại một phần trong công thức trên như sau

$$\left(\sum_{k=0}^{L-1} \frac{U_1^k}{k!}\right)^m = \sum_{k=0}^{m(L-1)} \beta_{km} U_1^k \quad (15-4-45)$$

trong đó $\{\beta_{km}\}$ là tập hợp các hệ số trong khai triển trên thì (15-4-44) trở thành

$$P_M = \frac{1}{(L-1)!} \sum_{m=1}^{M-1} \frac{(-1)^{m+1} \binom{M-1}{m}}{(1+m+m\bar{\gamma}_c)^L} \sum_{k=0}^{m(L-1)} \beta_{km} (L-1+k)! \left(\frac{1+\bar{\gamma}_c}{1+m+m\bar{\gamma}_c}\right)^k \quad (15-4-46)$$

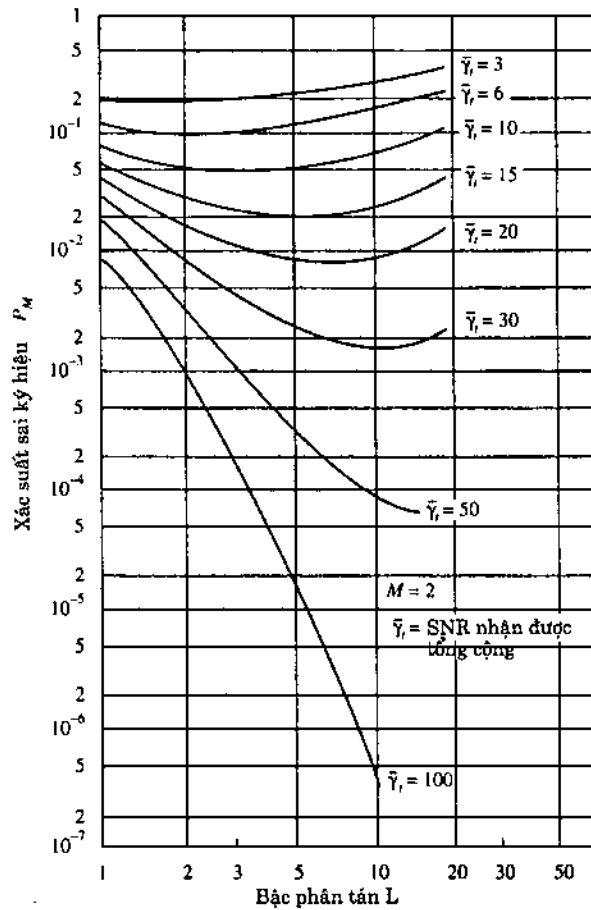


Hình 15-4-4: Xác suất sai bit của tín hiệu DPSK trên kênh fading Rayleigh

Khi không sử dụng kỹ thuật phân tán thì $L = 1$ và (15-4-46) trở thành

$$P_M = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{(-1)^{m+1} \binom{M-1}{m}}{1 + m + m\bar{\gamma}_c} \quad (15-4-47)$$

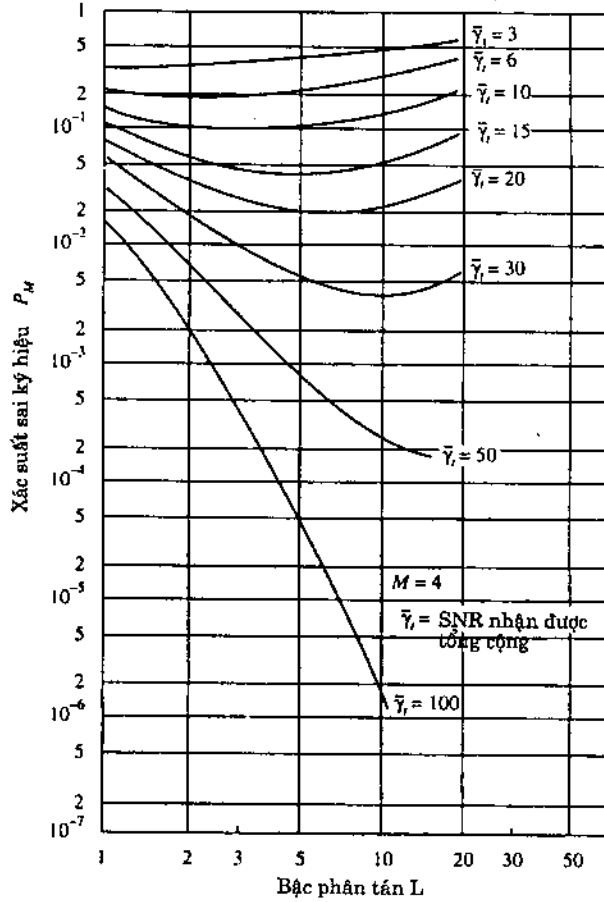
Ta có thể chuyển tốc độ sai ký hiệu ở trên thành tốc độ sai bit bằng cách nhân P_M với $2^{k-1}/(2^k - 1)$.



Hình 15-4-5: Hiệu quả của tín hiệu nhị phân trực giao xác định theo luật bình phương theo độ phân tán L

Trước hết, ta xét tốc độ sai của tín hiệu trực giao M mức xác định theo luật bình phương theo độ phân tán L . Hai hình vẽ 15-4-5 và 15-4-6 biểu diễn P_M với $M = 2$ và $M = 4$ theo L khi SNR tổng cộng trên các kênh được giữ cố định $\bar{\gamma}_t = L\bar{\gamma}_c$. Ta thấy có giá trị tối ưu của độ phân tán với mỗi giá trị của $\bar{\gamma}_t$ và giá trị tối thiểu của P_M đạt được khi $\bar{\gamma}_c = 3$ và giá trị này là độc lập với M .

Thứ hai, chúng ta xét xác suất sai P_M là hàm của SNR từng bit $\bar{\gamma}_b = L\bar{\gamma}_c/k$ (nếu ta coi tín hiệu FSK trực giao M mức là một dạng của mã hóa và độ phân tán là số lần lặp lại một ký hiệu trong mã lặp thì $\bar{\gamma}_b = \bar{\gamma}_c/R_c$, $R_c = k/L$). Đồ thị biểu diễn P_M theo $\bar{\gamma}_b$ với $M = 2, 4, 8, 16, 32$ và $L = 1, 2, 4$ được vẽ trong hình 15-4-7. Chúng ta thấy độ hiệu quả tăng lên khi L và M tăng và việc tăng L sẽ có hiệu quả hơn việc tăng M . Chú ý rằng độ rộng phổ của tín hiệu là $B_e = LM/\log_2 M$.



Hình 15-4-6: Hiệu quả của tín hiệu trực giao $M = 4$ xác định theo luật bình phương theo độ phân tán L

Giới hạn Chernoff Bây giờ ta xác định giới hạn trên Chernoff của xác suất sai đối với tín hiệu nhị phân trực giao có độ phân tán L . Với hai biến xác định trong (15-4-29) thì xác suất sai nhị phân là

$$P_2(L) = P(U_2 - U_1 > 0) = P(X > 0) = \int_0^\infty p(x)dx \quad (15-4-48)$$

với biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là

$$X = U_2 - U_1 = \sum_{k=1}^L (|N_{k2}|^2 - |2\xi\alpha_k + N_{k1}|^2) \quad (15-4-49)$$

Thành phần pha $\{\phi_k\}$ trong U_1 ở đây ta không xét do không ảnh hưởng tới độ hiệu quả của bộ xác định theo luật bình phương.

Gọi $S(X)$ là hàm đơn vị thì xác suất sai trong (15-4-48) trở thành

$$P_2(L) = E[S(X)] \quad (15-4-50)$$

Giới hạn Chernoff xác định được bằng cách chặn trên hàm đơn vị bằng hàm mũ:

$$S(X) \leq e^{\zeta X}, \zeta \geq 0 \quad (15-4-51)$$

trong đó tham số ζ được tối ưu hóa để thu được giới hạn chặt. Ta có

$$P_2(L) = E[S(X)] \leq E(e^{\zeta X}) \quad (15-4-52)$$

Thay X từ (15-4-49) và chú ý rằng các biến ngẫu nhiên trong tổng là độc lập thống kê đồng thời nên ta nhận được

$$P_2(L) \leq \prod_{k=1}^L E(e^{\zeta |N_{k2}|^2}) E(e^{-\zeta |2\xi\alpha_k + N_{k1}|^2}) \quad (15-4-53)$$

Nhưng

$$E(e^{\zeta |N_{k2}|^2}) = \frac{1}{1 - 2\zeta\sigma_2^2}, \quad \zeta < \frac{1}{2\sigma_2^2} \quad (15-4-54)$$

và

$$E(e^{-\zeta |2\xi\alpha_k + N_{k1}|^2}) = \frac{1}{1 + 2\zeta\sigma_1^2}, \quad \zeta > -\frac{1}{2\sigma_1^2} \quad (15-4-55)$$

với $\sigma_2^2 = 2\xi N_0$, $\sigma_1^2 = 2\xi N_0(1 + \bar{\gamma}_c)$. Chú ý rằng σ_1^2 và σ_2^2 là độc lập với k có nghĩa là các thành phần nhiễu cộng trên L kênh cũng như tính chất fading là có phân bố giống nhau. Như vậy (15-4-53) đơn giản thành

$$P_2(L) \leq \left[\frac{1}{(1 - 2\zeta\sigma_2^2)(1 + 2\zeta\sigma_1^2)} \right]^L, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{2\sigma_2^2} \quad (15-4-56)$$

Lấy đạo hàm về phải công thức trên theo ζ ta thấy giới hạn trên tối thiểu hóa khi

$$\zeta = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2} \quad (15-4-57)$$

và chúng ta có

$$P_2(L) \leq \left[\frac{4(1 + \bar{\gamma}_c)}{(2 + \bar{\gamma}_c)^2} \right]^L \quad (15-4-58)$$

Đặt $p = 1/(2 + \bar{\gamma}_c)$ là xác suất sai của tín hiệu trực giao nhị phân trên kênh fading không dùng kỹ thuật phân tán thì (15-4-58) trở thành

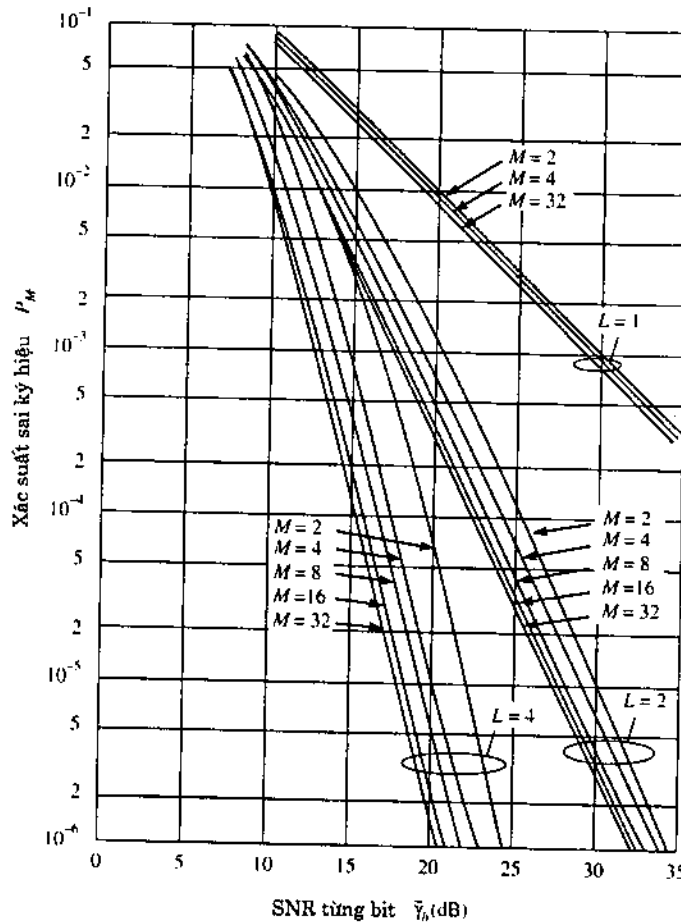
$$P_2(L) \leq [4p(1 - p)]^L \quad (15-4-59)$$

Ta có thể so sánh giới hạn Chernoff với xác suất sai chính xác của tín hiệu trực giao nhị phân tích hợp theo luật bình phương gồm L kênh phân tán là

$$\begin{aligned} P_2(L) &= \left(\frac{1}{1 + \bar{\gamma}_c} \right)^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left(\frac{1 + \bar{\gamma}_c}{2 + \bar{\gamma}_c} \right)^k \\ &= p^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} (1-p)^k \end{aligned} \quad (15-4-60)$$

Cuối cùng, xác suất sai của tín hiệu trực giao M mức với kỹ thuật phân tán có giới hạn trên được tính theo giới hạn hợp

$$P_M \leq (M-1)P_2(L) \quad (15-4-61)$$



Hình 15-4-7: Hiệu quả của tín hiệu trực giao theo hai tham số M và L

15-5 Kênh fading chậm có chọn lọc

Khi hệ số trải rộng của kênh thỏa mãn điều kiện $T_m B_d \ll 1$, ta có thể chọn các tín hiệu có độ rộng phổ $W \ll (\Delta f)_c$ và khoảng thời gian tín hiệu $T \ll (\Delta t)_c$, khi đó kênh là không chọn lọc theo tần số và fading chậm. Trên các kênh như vậy ta có thể sử dụng các kỹ thuật phân tán để khắc phục các ảnh hưởng xấu của hiện tượng fading.

Khi người dùng có thể sử dụng độ rộng dải thông của kênh $W \gg (\Delta f)_c$ thì có thể sử dụng kênh theo phương pháp FDM, các kênh con cách nhau ít nhất là $(\Delta f)_c$ tính từ tần số trung tâm và khi đó có thể sử dụng phương pháp phân tán theo tần số. Trong phần này ta xét một phương pháp khác.

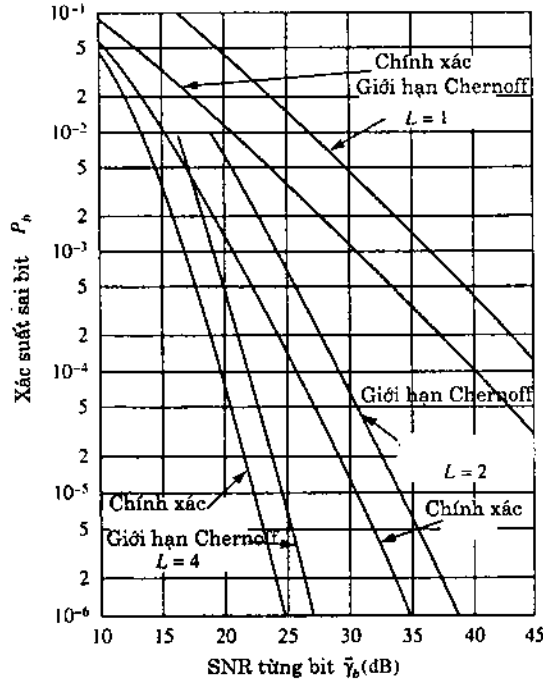
15-5-1 Mô hình kênh kiểu dây trễ (Tapped-Delay-Line)

Ta giả thiết kênh vẫn là kênh fading chậm $T \ll (\Delta t)_c$ và tín hiệu thông dải có độ rộng phổ W . Như vậy dải tần mà tín hiệu tần số thấp tương đương $s_l(t)$ sẽ chiếm là $|f| \leq \frac{1}{2}W$. Do tín hiệu $s_l(t)$ có dải tần hữu hạn trong khoảng $|f| \leq \frac{1}{2}W$ nên sử dụng định lý lấy mẫu Shannon ta có

$$s_l(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l\left(\frac{n}{W}\right) \frac{\sin[\pi W(t - n/W)]}{\pi W(t - n/W)} \quad (15-5-1)$$

Biến đổi Furiê của $s_l(t)$ là

$$S_l(f) = \begin{cases} \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(n/W) e^{-j2\pi f n/W} & (|f| \leq \frac{1}{2}W) \\ 0 & (|f| > \frac{1}{2}W) \end{cases} \quad (15-5-2)$$



Hình 15-4-8: So sánh giới hạn Chernoff với xác suất sai chính xác

Tín hiệu không có nhiễu nhận được từ kênh có chọn lọc theo tần số được xác định trong phần trước là

$$r_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) S_l(f) e^{j2\pi f t} df \quad (15-5-3)$$

$C(f; t)$ là hàm truyền thay đổi theo thời gian. Thay $S_l(f)$ trong (15-5-2) vào (15-5-3) ta có

$$\begin{aligned} r_l(t) &= \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(n/W) \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) e^{j2\pi f(t-n/W)} df \\ &= \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(n/W) c(t - n/W; t) \end{aligned} \quad (15-5-4)$$

trong đó $c(\tau; t)$ là đáp ứng xung thay đổi theo thời gian. Ta thấy (15-5-4) có dạng tổng chập và do đó nó có thể biểu diễn thành dạng khác như sau

$$r(t) = \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(t - n/W) c(n/W; t) \quad (15-5-5)$$

Ta định nghĩa tập hợp các hệ số của kênh thay đổi theo thời gian là

$$c_n(t) = \frac{1}{W} c\left(\frac{n}{W}; t\right) \quad (15-5-6)$$

Khi đó (15-4-5) trở thành

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) s_i(t - n/W) \quad (15-5-7)$$

Công thức trên chỉ ra rằng kênh chọn lọc theo tần số thay đổi theo thời gian có thể được mô hình hóa bởi một cơ cấu lọc gọi là *dây trễ* (tapped-delay-line) với các hệ số đặt cách nhau $1/W$ và các hệ số là $\{c_n(t)\}$. Từ (15-5-7) ta thấy đáp ứng xung của kênh là

$$c(\tau; t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) \delta(\tau - n/W) \quad (15-5-8)$$

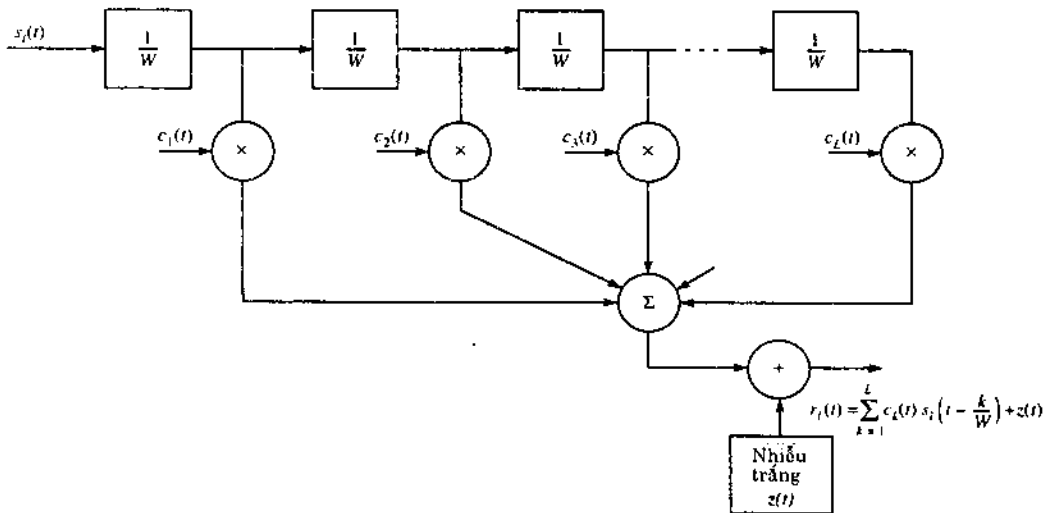
và hàm truyền thay đổi theo thời gian tương ứng là

$$C(f; t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{-j2\pi f n/W} \quad (15-5-9)$$

Như vậy với một tín hiệu tần số thấp tương đương có độ rộng phổ $\frac{1}{2}W$ và $W \gg (\Delta f)_c$, chúng ta có thể thực hiện độ phân tách $1/W$ trong độ trải về thời gian của kênh. Tổng số độ trải về thời gian của kênh là T_m , ta sử dụng $L = T_m W + 1$ hệ số. Khi đó tín hiệu nhận được không có nhiễu có dạng

$$r_l(t) = \sum_{n=1}^L c_n(t) s_i\left(t - \frac{n}{W}\right) \quad (15-5-10)$$

Các hệ số $\{c_n(t)\}$ là các quá trình ngẫu nhiên dừng giá trị phức. Trong trường hợp kênh fading Rayleigh, modul $|c_n(t)| \equiv \alpha_n(t)$ có phân bố Rayleigh và các giá trị pha $\{\phi_n(t)\}$ có phân bố đều. Với giả thiết tán xạ không tương quan thì $\{c_n(t)\}$ sẽ không tương quan đồng thời. Khi các hệ số là các biến ngẫu nhiên gaussian thì chúng sẽ độc lập thống kê.



Hình 15-5-1: Mô hình dây trễ

15-5-2 Bộ giải điều chế RAKE

Bây giờ ta xét việc truyền tín hiệu số qua kênh có chọn lọc theo tần số được mô hình hóa bởi dây trễ và các hệ số $\{c_n(t)\}$ độc lập thống kê. Rõ ràng mô hình kênh là dây trễ với các hệ số độc lập thống kê

sẽ cho chúng ta L bản sao của cùng một tín hiệu ở phía thu. Bộ thu sẽ xử lý tín hiệu nhận được một cách tối ưu để có được kết quả tương đương với kỹ thuật phân tán bậc L .

Xét tín hiệu nhị phân truyền qua kênh. Chúng ta có hai tín hiệu cùng năng lượng hoặc trực giao hoặc ngược pha nhau. Khoảng thời gian tín hiệu T thỏa mãn điều kiện $T \gg T_m$ và do đó có thể bỏ qua hiện tượng ảnh hưởng chéo giữa các ký hiệu do tính đa đường. Do độ rộng phổ tín hiệu lớn hơn dải thông liên kết của kênh nên tín hiệu nhận được có thể biểu diễn thành

$$\begin{aligned} r_i(t) &= \sum_{k=1}^L c_k(t) s_{li}(t - k/W) + z(t) \\ &= v_i(t) + z(t), \quad 0 \leq t \leq T, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (15-5-11)$$

với $z(t)$ là quá trình nhiễu cộng gaussian trắng, có giá trị phức và giá trị trung bình bằng 0. Giả thiết các hệ số của kênh đã biết thì bộ thu tối ưu gồm có hai bộ lọc phối hợp với $v_1(t)$ và $v_2(t)$, tiếp theo là bộ lấy mẫu và mạch xác định tín hiệu lớn hơn. Các biến xác định cho xác định liên kết trong trường hợp này là

$$\begin{aligned} U_m &= \operatorname{Re} \left[\int_0^T r_i(t) v_m^*(t) dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L \int_0^T r_i(t) c_k^*(t) s_{im}^*(t - k/W) dt \right], \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (15-5-12)$$

Hình 15-5-2 biểu diễn quá trình tính các biến xác định. Trong quá trình này, hai tín hiệu tham chiếu được làm trễ và lấy tương quan với tín hiệu nhận được $r_i(t)$. Một phương pháp khác là bộ thu tối ưu chỉ sử dụng một đường làm trễ. Tín hiệu ở mỗi khâu trễ được tương quan với $c_k(t) s_{im}^*(t)$, $k = 1, 2, \dots, L, m = 1, 2$. Cấu trúc bộ thu này được vẽ trong hình 15-5-3. Bộ thu này gọi là bộ thu RAKE.

15-5-3 Hiệu quả bộ thu RAKE

Bây giờ ta tính hiệu quả bộ thu RAKE trong trường hợp kênh fading đủ chậm để việc ước lượng các hệ số $c_k(t)$ không bị lỗi. Hơn nữa, trong mỗi khoảng thời gian tín hiệu, $c_k(t)$ được coi là hằng số và ký hiệu lại là c_k . Như vậy các biến xác định trong (15-5-12) được viết lại thành:

$$U_m = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \int_0^T r(t) s_{im}^*(t - k/W) dt \right], \quad m = 1, 2 \quad (15-5-13)$$

Giả sử tín hiệu truyền đi là $s_{11}(t)$ thì tín hiệu nhận được sẽ là

$$r_i(t) = \sum_{n=1}^L c_n s_{11}(t - n/W) + z(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (15-5-14)$$

Thay (15-5-14) vào (15-5-13) ta có

$$\begin{aligned} U_m &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \sum_{n=1}^L c_n \int_0^T s_{11}(t - n/W) s_{im}^*(t - k/W) dt \right] \\ &\quad + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \int_0^T z(t) s_{im}^*(t - k/W) dt \right], \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (15-5-15)$$

Thông thường các tín hiệu dải rộng $s_{11}(t)$ và $s_{12}(t)$ được tạo ra từ các dãy giả ngẫu nhiên nên chúng có tính chất

$$\int_0^T s_{li}(t - n/W) s_{li}^*(t - k/W) dt \approx 0, \quad k \neq n, i = 1, 2 \quad (15-5-16)$$

Giả thiết các tín hiệu nhị phân ta xét được thiết kế thỏa mãn tính chất trên thì (15-5-15) đơn giản thành

$$U_m = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L |c_k|^2 \int_0^T s_{11}(t - k/W) s_{1m}^*(t - k/W) dt \right] + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \int_0^T z(t) s_{1m}^*(t - k/W) dt \right], \quad m = 1, 2 \quad (15-5-17)$$

Khi các tín hiệu nhị phân ngược pha thì ta chỉ cần một biến xác định là đủ. Trong trường hợp này, (15-5-17) đơn giản thành

$$U_1 = \operatorname{Re} \left(2\xi \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k N_k \right) \quad (15-5-18)$$

với $\alpha_k = |c_k|$ và

$$N_k = e^{j\phi_k} \int_0^T z(t) s_1^*(t - k/W) dt \quad (15-5-19)$$

Nhưng (15-5-18) chính là biến xác định trong (15-4-4), là đầu ra của bộ tích hợp cực đại tỷ số trong hệ thống phân tán bậc L . Như vậy bộ thu RAKE khi việc ước lượng các hệ số không gặp lỗi tương đương với bộ tích hợp cực đại tỷ số trong hệ thống phân tán bậc L . Như vậy khi tất cả các hệ số có cùng trung bình bình phương thì tốc độ sai của bộ thu RAKE được xác định qua (15-4-15) và (15-4-16). Mặt khác, khi các hệ số không có trung bình bình phương giống nhau, tức là $E(\alpha_k^2)$ không giống nhau với mọi k thì ta phải bắt đầu từ xác suất sai có điều kiện

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{\gamma_b(1 - \rho_r)}) \quad (15-5-20)$$

với $\rho_r = -1$ với tín hiệu ngược pha và $\rho_r = 0$ với tín hiệu trực giao và

$$\gamma_b = \frac{\xi}{N_0} \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^L \gamma_k \quad (15-5-21)$$

Mỗi biến trong tập hợp $\{\gamma_k\}$ có phân bố Khi bình phương với hai độ tự do, như vậy

$$p(\gamma_k) = \frac{1}{\bar{\gamma}_k} e^{-\gamma_k/\bar{\gamma}_k} \quad (15-5-22)$$

$\bar{\gamma}_k$ là SNR trung bình trên đường thứ k được định nghĩa là

$$\bar{\gamma}_k = \frac{\xi}{N_0} E(\alpha_k^2) \quad (15-5-23)$$

Từ (15-4-10) ta đã biết hàm đặc tính của γ_k là

$$\psi_{\gamma_k}(jv) = \frac{1}{1 - jv\bar{\gamma}_k} \quad (15-5-24)$$

Do γ_b là tổng của L thành phần độc lập thống kê $\{\gamma_k\}$ nên hàm đặc tính của γ_b là

$$\psi_{\gamma_b}(jv) = \prod_{k=1}^L \frac{1}{1 - jv\bar{\gamma}_k} \quad (15-5-25)$$

Biến đổi Furiê ngược hàm đặc tính cho ta hàm mật độ phân bố xác suất

$$p(\gamma_b) = \sum_{k=1}^L \frac{\pi_k}{\bar{\gamma}_k} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_k}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (15-5-26)$$

trong đó π_k được định nghĩa là

$$\pi_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^L \frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_i} \quad (15-5-27)$$

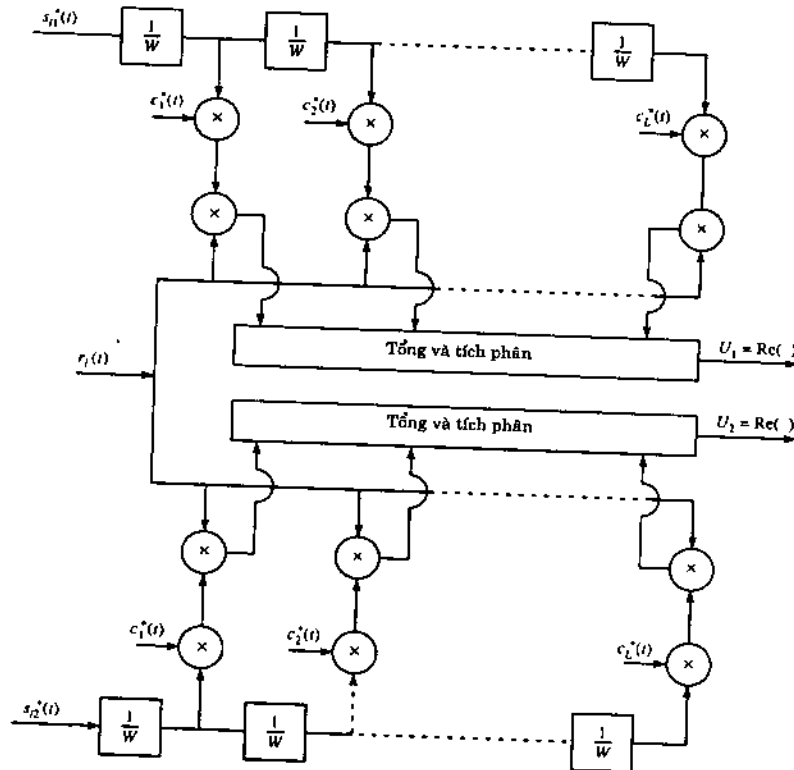
Lấy trung bình xác suất lỗi có điều kiện (15-5-20) theo (15-5-26) ta có

$$P_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \pi_k \left[1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_k(1-\rho_r)}{2 + \bar{\gamma}_k(1-\rho_r)}} \right] \quad (15-5-28)$$

Khi $\bar{\gamma}_k \gg 1$ thì xác suất sai xấp xỉ thành

$$P_2 \approx \left(\frac{2L-1}{L} \right) \prod_{k=1}^L \frac{1}{2\bar{\gamma}_k(1-\rho_r)} \quad (15-5-29)$$

Bây giờ ta xét tới xác suất sai của bộ thu RAKE, ta giả thiết rằng các hệ số của kênh được ước lượng chính xác. Thực tế thì kết quả ước lượng là khá tốt nếu kênh fading đủ chậm, có nghĩa là $(\Delta t)_c/T \geq 100$. Hình 15-5-4 biểu diễn phương pháp ước lượng các hệ số của kênh khi các tín hiệu là trực giao và hình 15-5-5 là phương pháp ước lượng các hệ số của kênh khi các tín hiệu là ngược pha.



Hình 15-5-2: Bộ thu tối ưu cho tín hiệu nhị phân dải rộng

truyền đi $s_t(t)$ thỏa mãn điều kiện (15-5-16) thì các biến xác định giống như trong (15-4-23). Như vậy tốc độ sai của bộ thu RAKE cho tín hiệu DPSK được tính theo công thức (15-4-15) với $\mu = \bar{\gamma}_c / (1 + \bar{\gamma}_c)$, khi mọi đường đi của tín hiệu đều có SNR là $\bar{\gamma}_c$. Mặt khác, khi các giá trị SNR của các kênh $\{\bar{\gamma}_k\}$ khác nhau, xác suất sai sẽ là trung bình của (15-4-24) theo hàm mật độ phân bố xác suất (15-5-26). Kết quả thu được là

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2L-1} \sum_{m=0}^{L-1} m! b_m \sum_{k=1}^L \frac{\pi_k}{\bar{\gamma}_k} \left(\frac{\bar{\gamma}_k}{1 + \bar{\gamma}_k}\right)^{m+1} \quad (15-5-30)$$

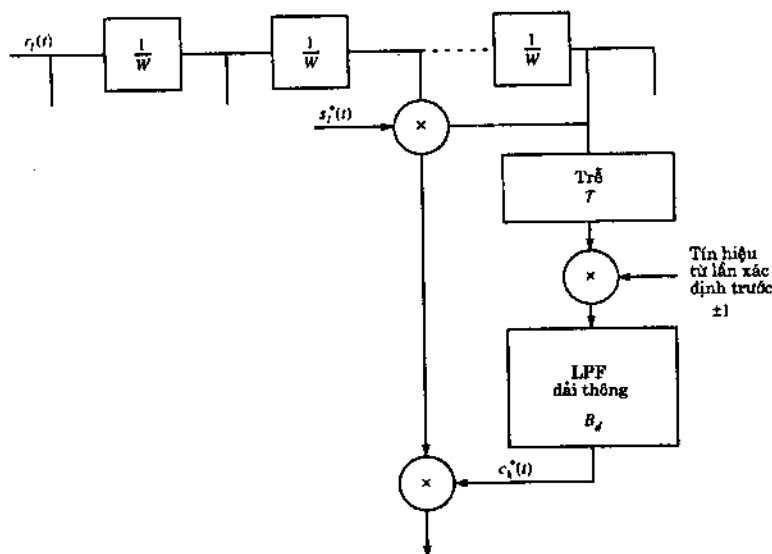
với π_k được định nghĩa trong (15-5-27) và b_m được định nghĩa trong (15-4-25).

Cuối cùng chúng ta xét việc truyền tín hiệu nhị phân trực giao qua kênh fading có chọn lọc theo tần số và được xác định theo luật bình phương ở phía thu. Bộ thu RAKE và bộ tích hợp theo luật bình phương được vẽ trong hình 15-5-7. Giả thiết tín hiệu có tính trực giao trong (15-5-16). Các biến xác định ở đầu ra bộ thu RAKE là

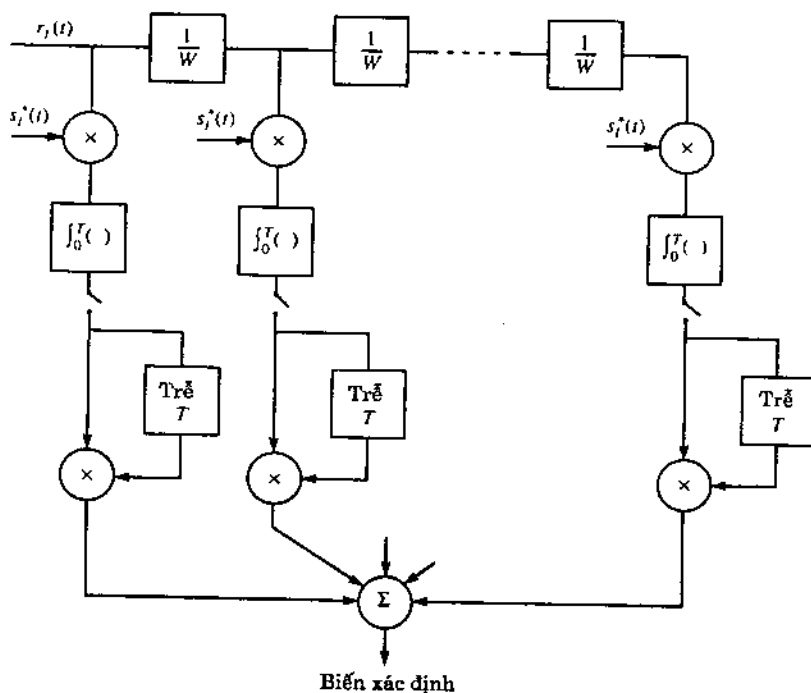
$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{k=1}^L |2\xi c_k + N_{k1}|^2 \\ U_2 &= \sum_{k=1}^L |N_{k2}|^2 \end{aligned} \quad (15-5-31)$$

ở đây ta vẫn giả thiết tín hiệu $s_{11}(t)$ được truyền đi. Các biến xác định này giống (15-4-29) áp dụng cho tín hiệu trực giao truyền qua kênh có độ phân tán bậc L . Như vậy hiệu quả của bộ thu RAKE cho tín hiệu trực giao xác định theo luật bình phương được tính theo (15-4-15) với $\mu = \bar{\gamma}_c / (2 + \bar{\gamma}_c)$ khi tất cả các đường dẫn tín hiệu có cùng SNR. Khi các giá trị SNR khác nhau thì ta phải lấy trung bình (15-4-24) theo hàm mật độ phân bố xác suất (15-5-26) với γ_b được thay bằng $\frac{1}{2}\gamma_b$ và kết quả là (15-5-30) với $\bar{\gamma}_k$ được thay bằng $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_k$.

Bộ thu RAKE đã trình bày có thể dễ dàng mở rộng cho tín hiệu đa mức và cấu trúc bộ thu không thay đổi khi sử dụng tín hiệu PSK M mức hay tín hiệu DPSK mà chỉ có bộ xác định theo sau bộ thu RAKE là thay đổi.



Hình 15-5-5: Ước lượng các hệ số của kênh với tín hiệu nhị phân ngược pha



Hình 15-5-6: Bộ giải điều chế RAKE cho tín hiệu DPSK

15-6 Mã hóa trong kênh có fading

Chúng ta đã chứng minh rằng các kỹ thuật phân tán có hiệu quả cao để khắc phục ảnh hưởng của fading do tính chất thay đổi theo thời gian của kênh. Các kỹ thuật phân tán đã xét có thể xem như mã hóa lập thông tin. Trên quan điểm này thì các kỹ thuật tích hợp mà chúng ta đã xét là giải mã xác định mềm cho mã lập. Do mã lập là một dạng đơn giản của mã hóa nên bây giờ ta xét tới các phương pháp mã hóa khác có hiệu quả hơn. Đặc biệt, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng mã hóa tạo ra khả năng phân tán trên kênh có fading.

Như trong phần 15-4, kỹ thuật phân tán theo thời gian là truyền các thành phần tín hiệu mang thông tin giống nhau trong nhiều khe thời gian với độ phân tách ít nhất là thời gian liên kết của kênh $(\Delta t)_c$. Tương tự, kỹ thuật phân tán theo tần số là truyền các thành phần tín hiệu mang thông tin giống nhau trong nhiều khe tần số đồng thời với độ phân tách ít nhất là dải thông liên kết của kênh $(\Delta f)_c$. Như vậy các thành phần tín hiệu mang thông tin bị ảnh hưởng của fading độc lập thống kê với nhau.

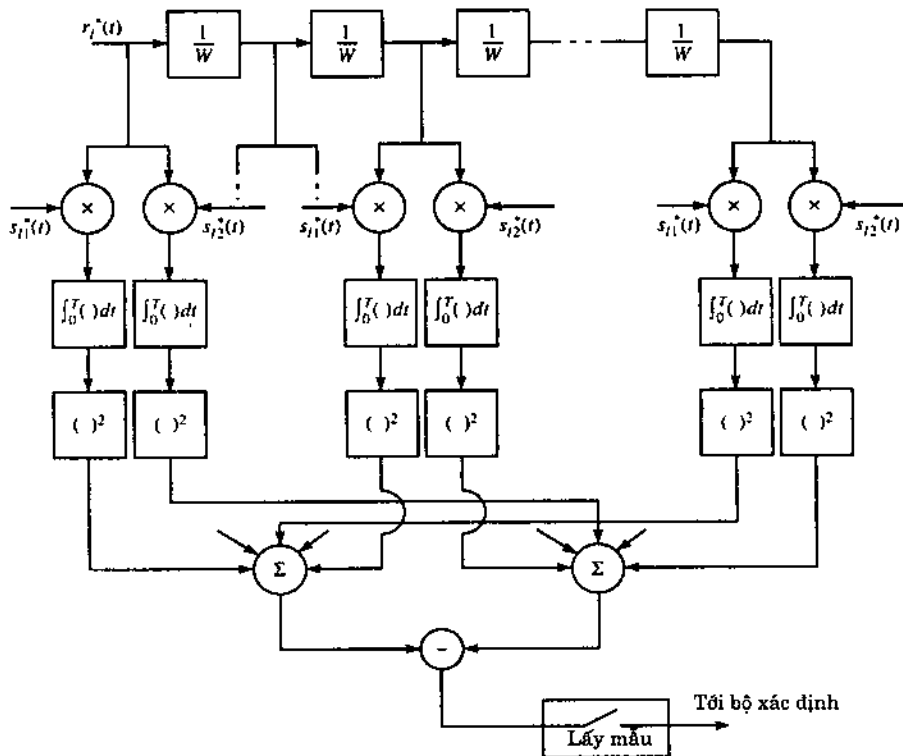
Để mở rộng các khái niệm trên cho dây thông tin mã hóa, chúng ta chỉ cần tín hiệu tương ứng với một bit hay một ký hiệu mã bị ảnh hưởng độc lập với tín hiệu tương ứng với bit khác hay ký hiệu mã khác. Điều này có thể gây ra việc sử dụng không hiệu quả không gian thời gian hay không gian tần số với sự tồn tại của nhiều phần không sử dụng trong không gian tín hiệu hai chiều này. Để giảm bớt độ không hiệu quả, nhiều từ mã có thể được ghép lại với nhau (interleaved) theo thời gian hay theo tần số hay theo cả hai, điều này tạo ra tín hiệu tương ứng với các bit hay các ký hiệu mã bị ảnh hưởng độc lập. Như vậy ta giả thiết rằng không gian tín hiệu thời gian-tần số được chia thành các ô (cell) không trùm lên nhau. Một tín hiệu tương ứng với một bit hay một ký hiệu mã được truyền đi trong một ô.

Chúng ta giả thiết sự fading lên các thành phần tín hiệu của một từ mã là độc lập thống kê và các thành phần nhiễu cộng ảnh hưởng lên tín hiệu nhận được là các quá trình gaussian trắng độc lập thống

kê và có phân bố giống nhau trong các ô của không gian thời gian-tần số. Chúng ta cũng giả thiết độ phân tách giữa các ô liên tiếp là đủ lớn để sự ảnh hưởng giữa các ô là không đáng kể.

Một điều rất quan trọng khi truyền thông tin là kỹ thuật điều chế. Nếu kênh fading đủ chậm để có thể thiết lập được mối liên kết về pha thì có thể sử dụng tín hiệu PSK hay DPSK, nếu không thì cần phải sử dụng kỹ thuật FSK xác định không liên kết. Trong phần này chúng ta giả thiết không thể thiết lập được mối liên kết về pha đối với các tín hiệu trong các ô khác nhau. Như vậy chúng ta sử dụng tín hiệu FSK xác định không liên kết.

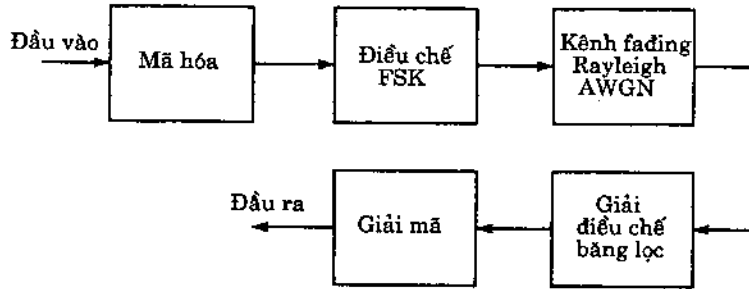
Ta xét mô hình của hệ thống truyền thông trong hình 15-6-1. Để trình bày việc điều chế, giải điều chế, giải mã cho tín hiệu FSK trực giao, ta xét mã khối nhị phân tuyến tính trong đó k bit thông tin được mã hóa thành một từ mã độ dài n . Để đơn giản mà không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng n bit trong một từ mã được truyền đồng thời qua kênh trên nhiều ô tần số. Một từ mã C_i có các bit $\{c_{ij}\}$ được ánh xạ thành các tín hiệu FSK theo qui tắc: nếu $c_{ij} = 0$ thì tín hiệu tần số f_{0j} được truyền đi, nếu $c_{ij} = 1$ thì tín hiệu tần số f_{1j} được truyền đi. Như vậy phải có $2n$ tần số hay $2n$ ô được sử dụng để truyền n bit trong từ mã nhưng chỉ có n tần số thực sự được sử dụng trong một khoảng thời gian tín hiệu. Do mỗi từ mã có k bit thông tin nên hệ số mở rộng dải thông cho tín hiệu FSK là $B_e = 2n/k$.



Hình 15-5-7: Bộ thu RAKE cho tín hiệu trực giao xác định theo luật bình phương

Bộ giải điều chế tín hiệu nhận được sẽ chia tín hiệu thành $2n$ thành phần tần số tương ứng với các tần số ở phía phát. Như vậy bộ giải điều chế gồm $2n$ bộ lọc, mỗi bộ lọc sẽ phối hợp với một trong các thành phần tần số có thể truyền đi. Đầu ra của $2n$ bộ lọc được xác định không liên kết. Do fading Rayleigh và nhiễu cộng gaussian trắng trên $2n$ ô là độc lập thống kê và có phân bố giống nhau nên tiêu chuẩn giải mã tối ưu ML xác định mềm đòi hỏi các bộ lọc đáp ứng theo luật bình phương và tích hợp để tạo ra $M = 2^k$ biến xác định. Từ mã ứng với biến xác định cực đại sẽ được lựa chọn. Nếu dùng giải

mã xác định cứng thì bộ giải mã ML tối ưu sẽ chọn từ mã có khoảng cách Hamming với từ mã nhận được nhỏ nhất.



Hình 15-6-1: Mô hình hệ thống truyền thông sử dụng tín hiệu FSK

Sơ đồ khối ở trên có thể dễ dàng mở rộng ra cho mã chập. Ví dụ nếu sử dụng mã chập nhị phân thì mỗi bit trong dãy đầu ra được truyền đi bởi một tín hiệu FSK nhị phân. Tiêu chuẩn giải mã xác định mềm ML hay giải mã xác định cứng được xây dựng dễ dàng từ thuật toán Viterbi.

15-6-1 Xác suất lỗi của giải mã xác định mềm cho mã khối nhị phân tuyến tính

Xét việc giải mã cho mã nhị phân tuyến tính (n, k) truyền qua kênh fading Rayleigh. Bộ giải mã xác định mềm tối ưu dựa trên tiêu chuẩn ML tạo ra $M = 2^k$ biến xác định như sau

$$\begin{aligned}
 U_i &= \sum_{j=1}^n [(1 - c_{ij})|y_{0j}|^2 + c_{ij}|y_{1j}|^2] \\
 &= \sum_{j=1}^n [|y_{0j}|^2 + c_{ij}(|y_{1j}|^2 - |y_{0j}|^2)], \quad i = 1, 2, \dots, 2^k
 \end{aligned} \quad (15-6-1)$$

với $|y_{rj}|^2, j = 1, 2, \dots, n, r = 0, 1$ là bình phương đường bao ở đầu ra của $2n$ bộ lọc và ta sẽ lựa chọn từ mã ứng với biến xác định cực đại.

Mục tiêu của chúng ta trong phần này là xác định xác suất sai của bộ giải mã xác định mềm. Từ đây trở về sau, ta giả thiết từ mã toàn 0 C_1 được truyền đi. SNR trung bình trong từng ô được ký hiệu là $\bar{\gamma}_c$. Toàn bộ SNR nhận được trên toàn bộ n ô là $n\bar{\gamma}_c$ và như vậy SNR trung bình từng bit là

$$\bar{\gamma}_b = \frac{n}{k} \bar{\gamma}_c = \frac{\bar{\gamma}_c}{R_c} \quad (15-6-2)$$

Biến xác định U_1 tương ứng với từ mã C_1 được xác định trong (15-6-1) với $c_{ij} = 0$ với mọi j . Xác suất để việc xác định lựa chọn từ mã thứ m là

$$\begin{aligned}
 P_2(m) &= P(U_m > U_1) = P(U_1 - U_m < 0) \\
 &= P \left[\sum_{j=1}^n (c_{1j} - c_{mj})(|y_{1j}|^2 - |y_{0j}|^2) < 0 \right] \\
 &= P \left[\sum_{j=1}^{w_m} (|y_{0j}|^2 - |y_{1j}|^2) < 0 \right]
 \end{aligned} \quad (15-6-3)$$

với w_m là trọng lượng của từ mã thứ m . Nhưng xác suất trong (15-6-3) là xác suất sai của bộ tích hợp theo luật bình phương cho tín hiệu FSK trực giao nhị phân với w_m độ phân tán và như vậy

$$P_2(m) = p^{w_m} \sum_{k=0}^{w_m-1} \binom{w_m-1+k}{k} (1-p)^k \quad (15-6-4)$$

$$\leq p^{w_m} \sum_{k=0}^{w_m-1} \binom{w_m-1+k}{k} = \binom{2w_m-1}{w_m} p^{w_m} \quad (15-6-5)$$

với

$$p = \frac{1}{2 + \bar{\gamma}_c} = \frac{1}{2 + R_c \bar{\gamma}_b} \quad (15-6-6)$$

Mặt khác, chúng ta có thể sử dụng giới hạn trên Chernoff trong phần 15-4 và ta có

$$P_2(m) \leq [4p(1-p)]^{w_m} \quad (15-6-7)$$

Cuối cùng ta có xác suất sai bị chặn trên bởi

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M P_2(m) \quad (15-6-8)$$

Do khoảng cách tối thiểu của mã tuyến tính bằng trọng lượng tối thiểu nên

$$(1 + R_c \bar{\gamma}_b)^{-w_m} \leq (2 + R_c \bar{\gamma}_b)^{-d_{min}}$$

Sử dụng bất đẳng thức này với (15-6-5) và (15-6-8) cho ta giới hạn trên (không chặt) là

$$P_M < \frac{\sum_{m=2}^M \binom{2w_m-1}{w_m}}{(2 + R_c \bar{\gamma}_b)^{d_{min}}} \quad (15-6-9)$$

Giới hạn trên đơn giản ở trên chỉ ra rằng việc mã hóa cho ta độ hiệu quả giống như kỹ thuật phân tán có độ phân tán là d_{min} . Giới hạn trên đơn giản hơn là giới hạn hợp

$$P_M < (M-1)[4p(1-p)]^{d_{min}} \quad (15-6-10)$$

Hình 15-6-2 vẽ độ hiệu quả của mã Golay mở rộng (24,12), mã FSK nhị phân, mã FSK bốn mức với hai độ phân tán. Mã Golay cần 48 ô và hệ số mở rộng dài thông $B_e = 4$, đó cũng chính là hệ số mở rộng dài thông của mã FSK nhị phân và mã FSK bốn mức với $L = 2$. Ta nhận thấy độ hiệu quả của mã Golay cao hơn chính là do khoảng cách tối thiểu giữa các từ mã $d_{min} = 8$ hay chính là $L = 8$.

15-6-2 Xác suất lỗi của giải mã xác định cứng cho mã khối nhị phân tuyến tính

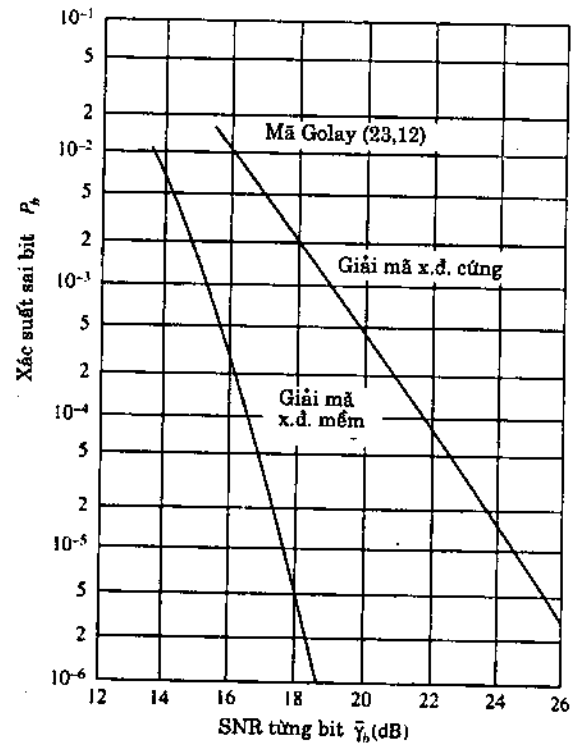
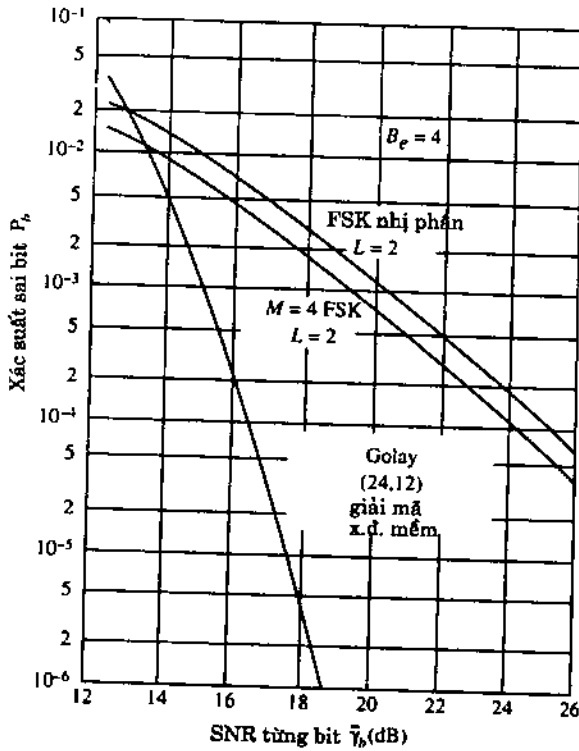
Giới hạn trên của xác suất lỗi của giải mã xác định cứng cho mã nhị phân tuyến tính đã được xác định trong phần 10-1-5. Các giới hạn này áp dụng trên kênh BSC và do đó có thể áp dụng trực tiếp cho kênh fading Rayleigh với AWGN và độc lập thống kê của fading giữa các ký hiệu trong từ mã. Xác suất sai bit để tính các giới hạn này khi sử dụng tín hiệu FSK nhị phân xác định không liên kết được xác định trong (15-6-6).

Một giới hạn trên quan trọng khi sử dụng giới hạn Chernoff cho giải mã xác định cứng là

$$P_2(m) \leq [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (15-6-11)$$

và P_M được tính theo (15-6-8). So sánh với giới hạn Chernoff với giải mã xác định mềm có giới hạn trong (15-6-7), ta thấy rằng hiệu quả của giải mã xác định cứng giảm theo khoảng cách giữa hai từ mã là 2 lần. Khi khoảng cách giữa các từ mã là khá nhỏ thì việc giảm khoảng cách giữa các từ mã đi 2 lần gây ảnh hưởng trên kênh fading nhiều hơn đáng kể so với trên kênh không fading.

Hình 15-6-3 mô tả hiệu quả của mã Golay (23,12) khi giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm. Độ chênh lệch khi $P_b = 10^{-5}$ là khoảng 6 dB. Chú ý rằng trên kênh không fading AWGN thì độ chênh lệch chỉ khoảng 2 dB.



Hình 15-6-2: Độ hiệu quả của một số loại mã Hình 15-6-3: So sánh độ hiệu quả giữa giải mã xác định cứng và giải mã xác định mềm

15-6-3 Hiệu quả của mã chập cho kênh fading Rayleigh

Trong phần này, ta xác định xác suất sai của mã chập nhị phân trên kênh fading Rayleigh với AWGN. Giả sử tốc độ mã là $R_c = k/n$ tức là bộ mã hóa sử dụng k bit đồng thời để tạo ra từ mã n bit đồng thời. Từ mã được truyền qua kênh fading Rayleigh sử dụng tín hiệu FSK nhị phân và xác định theo luật bình phương ở phía thu. Bộ giải mã xác định cứng hay xác định mềm dựa trên việc ước lượng dãy ML theo thuật toán Viterbi.

Trước hết, ta xét việc giải mã xác định mềm. Khi đó các độ đo được tính từ thuật toán Viterbi là tổng các đầu ra bình phương của bộ giải điều chế. Theo phần 10-2-3, ta dễ dàng chứng minh được rằng xác suất lỗi khi so sánh một cặp độ đo là độ đo ứng với dãy toàn 0 và một độ đo ứng với một dãy khác nhập lại cùng một trạng thái ở một thời điểm nào đó là

$$P_2(d) = p^d \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d-1+k}{k} (1-p)^k \quad (15-6-12)$$

trong đó d là số bit tương ứng hai dãy khác nhau và p được tính theo (15-6-6). Như vậy $P_2(d)$ là xác suất lỗi của tín hiệu FSK nhị phân xác định theo luật bình phương với d độ phân tán. Một cách khác là ta có thể sử dụng giới hạn trên Chernoff cho (15-6-7) cho $P_2(d)$. Trong cả hai trường hợp, xác suất sai bit bị chặn trên theo phần 10-2-3 bởi

$$P_b < \frac{1}{k} \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (15-6-13)$$

với $\{\beta_d\}$ là các hệ số trong khai triển đạo hàm bậc 1 của hàm truyền đạt $T(D, N)$ trong (10-2-25).

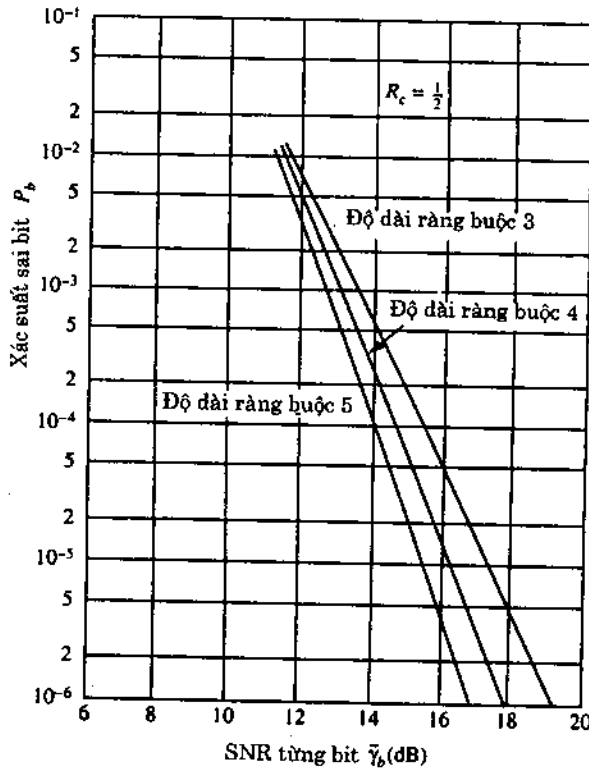
Khi thực hiện giải mã xác định cứng thì giới hạn của xác suất lỗi cho mã chập nhị phân được xác định trong phần 10-2-4. P_b cũng được giới hạn trên bởi (15-6-13) với $P_2(d)$ được xác định trong (10-2-28) với d lẻ và trong (10-2-29) với d chẵn hay giới hạn Chernoff trong (10-2-31) và p được xác định theo (15-6-6). Cũng giống như mã khối tuyến tính, hiệu quả của giải mã xác định cứng giảm theo 2 lần khoảng cách so với giải mã xác định mềm.

Hình 15-6-4 biểu diễn hiệu quả của mã chập tốc độ 1/2 với độ dài ràng buộc là 3, 4, 5. Hệ số mở rộng dài thông cho tín hiệu FSK nhị phân là $B_e = 2n$.

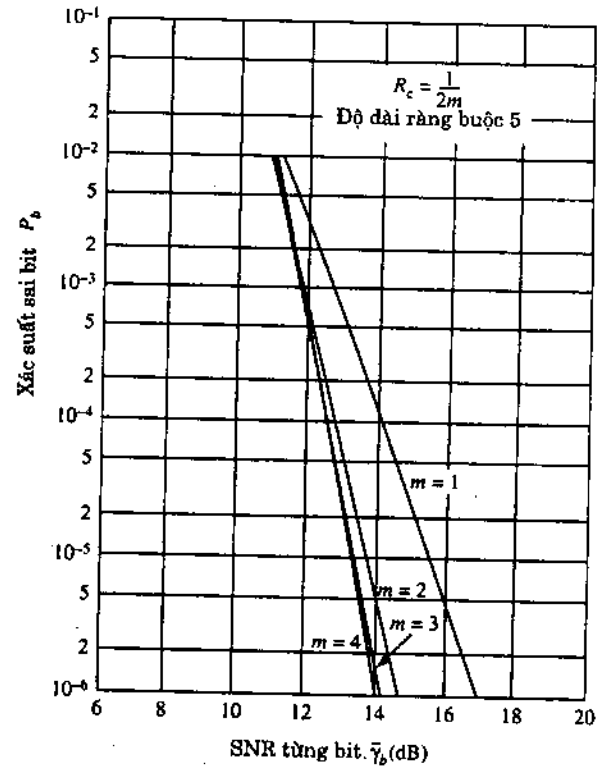
Một phương pháp khác để tăng khoảng cách mà không phải tăng độ dài ràng buộc là lặp lại mỗi bit đầu ra m lần. Điều đó tương đương với việc giảm tốc độ mã đi m lần hay mở rộng dài thông m lần. Như vậy thì mã chập có khoảng cách tối thiểu là md_{free} với d_{free} là khoảng cách tự do tối thiểu của mã khi chưa lặp. Hiệu quả của mã lặp như vậy bị chặn trên bởi

$$P_b < \frac{1}{k} \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_d P_2(md) \quad (15-6-14)$$

trong đó $P_2(md)$ được cho trong (15-6-12). Hình 15-6-5 biểu diễn độ hiệu quả của mã tốc độ 1/2 lặp $m = 1, 2, 3, 4$ với độ dài ràng buộc là 5.



Hình 15-6-4: Hiệu quả của mã chập nhị phân tốc độ 1/2 với giải mã xác định mềm



Hình 15-6-5: Hiệu quả của mã tốc độ 1/2 độ dài ràng buộc là 5 với giải mã xác định mềm

BÀI TẬP

15-1 Hàm tán xạ $S(\tau; \lambda)$ của một kênh fading đa đường khác 0 trong khoảng giá trị $0 \leq \tau \leq 1$ ms và $-0,1 \text{ Hz} \leq \lambda \leq 0,1 \text{ Hz}$. Giả thiết hàm tán xạ là đều theo hai biến.

a. Hỏi giá trị của các tham số sau:

- độ trải về thời gian của kênh
- độ rộng Doppler của kênh
- thời gian liên kết của kênh
- dải thông liên kết của kênh
- hệ số trải rộng của kênh

b. Giải thích ý nghĩa những điều sau

- kênh là không chọn lọc theo tần số
- kênh này là kênh fading chậm
- kênh là chọn lọc theo tần số

c. Giả thiết độ rộng dải thông của kênh là 10 kHz và ta muốn truyền ở tốc độ 100 bit/s qua kênh. Thiết kế một hệ thống truyền nhị phân dùng kỹ thuật phân tán theo tần số, có tính tới các vấn đề về kiểu điều chế, số kênh con, độ phân tách tần số giữa các vật mang, khoảng thời gian tín hiệu

15-2 Xét một hệ thống truyền nhị phân dùng để truyền một dãy ký hiệu nhị phân qua kênh có fading. Kỹ thuật điều chế là FSK trực giao với độ phân tán tần số là 3 ($L = 3$). Bộ giải điều chế gồm các bộ lọc phối hợp và các bộ xác định đường bao. Giả thiết các tần số mang FSK có phân bố đường bao Rayleigh độc lập và giống nhau. Nhiễu cộng tác động lên các tín hiệu phân tán là gaussian có giá trị trung bình bằng 0 với hàm tự tương quan $\frac{1}{2}E[z_k^*(t)z_k(t+\tau)] = N_0\delta(\tau)$. Các quá trình nhiễu là độc lập thống kê đồng thời.

a. Tín hiệu truyền đi có thể xem như là tín hiệu FSK nhị phân với luật xác định bình phương, được tạo ra bởi mã lập có dạng:

$$1 \rightarrow C_1 = [111], \quad 0 \rightarrow C_0 = [000]$$

Xác định xác suất lỗi P_{2h} cho bộ giải mã xác định cứng với tín hiệu được xác định theo luật bình phương

b. Tính P_{2h} cho $\bar{\gamma}_c = 100$ và 1000

c. Tính xác suất lỗi P_{2s} cho $\bar{\gamma}_c = 100$ và 1000 nếu bộ giải mã là giải mã xác định mềm

15-3 Giả thiết tín hiệu nhị phân $s_l(t)$ được truyền qua kênh có fading và tín hiệu nhận được là

$$r_l(t) = \pm a s_l(t) + z(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

với $z(t)$ là nhiễu gaussian trắng có giá trị trung bình và hàm tự tương quan

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0\delta(\tau)$$

Năng lượng của tín hiệu truyền đi là $\xi = \frac{1}{2} \int_0^T |s_l(t)|^2 dt$. Độ khuếch đại của kênh a có hàm mật độ phân bố xác suất

$$p(a) = 0,1\delta(a) + 0,9\delta(a-2)$$

- xác định xác suất sai trung bình P_2 cho bộ giải điều chế sử dụng bộ lọc phối hợp với $s_l(t)$.
- Giá trị của P_2 sẽ là bao nhiêu khi $\xi/N_0 \rightarrow \infty$
- Giả thiết tín hiệu như vậy được truyền qua hai kênh fading độc lập thống kê với các độ khuếch đại a_1, a_2 :

$$p(a_k) = 0,1\delta(a_k) + 0,9\delta(a_k-2), \quad k = 1, 2$$

Nhiều trên hai kênh là độc lập thống kê có phân bố giống nhau. Bộ giải điều chế dùng bộ lọc phối hợp cho mỗi kênh và kèm theo hai bộ lọc đầu ra để tạo ra biến xác định. Xác định xác suất lỗi P_2 .

d. Cũng giống như câu c nhưng khi $\xi/N_0 \rightarrow \infty$

15-4 Một kênh fading đa đường có độ trải về thời gian $T_m = 1$ s và độ rộng Doppler $B_d = 0,01$ Hz. Tổng cộng độ rộng dải thông của kênh cho truyền một tín hiệu là $W = 5$ Hz. Để giảm ảnh hưởng của ISI, người ta chọn độ rộng xung $T = 10$ s.

- Xác định dải thông liên kết của kênh và thời gian liên kết của kênh
- Kênh này có chọn lọc theo tần số không?
- Kênh này là kênh fading chậm hay nhanh?
- Giả thiết kênh này được sử dụng để truyền số liệu nhị phân qua tín hiệu PSK xác định liên kết và dùng kỹ thuật phân tán theo tần số. Hỏi rằng có thể sử dụng độ rộng dải thông của kênh như thế nào để có thể dùng kỹ thuật phân tán theo tần số và xác định độ phân tán.
- Trong câu d, hỏi SNR xấp xỉ cần thiết theo từng kênh để có xác suất lỗi là 10^{-6}

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Cơ sở lý thuyết truyền tin, Bùi Minh Tiêu, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1979.
- [2] Fondements de la théorie de la Transmission de l'Information, Alexandru Spataru, Presses Polytechniques Romandes, 1987.
- [3] La théorie mathématique de l'Information, Silviu Guiasu et Radu Theodorescu, Dunod Éditeur Paris, 1968.
- [4] Systèmes de Télécommunication, P.-G Fontollet, Presses Polytechniques Romandes, 1983.
- [5] Introduction to Digital Communication, Rodger E. Ziemer and Roger L. Peterson. McMillan Publishing Company, 1992.
- [6] Digital Communication, John G. Proakis, McGraw-Hill International Editions, 1995.
- [7] Communication Electronics, Louis E. Frenzel, MacMillan, McGraw-Hill, 1994.
- [8] Circuit and System Theory, Gladwyn Lago and Lloyd M. Benningfield, John Wiley & Sons, 1979.
- [9] Telecommunication Transmission Systems, Robert G. Winch, McGraw-Hill International Editions, 1993.
- [10] Digital Communication Fundamentals and Applications, Bernard Sklar, Prentice Hall, 1988.
- [11] Analog and Digital Communication, W. David Gregg, John Wiley & Sons, 1977.

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập lần đầu :

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

Biên tập tái bản :

NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Sửa bản in :

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

Trình bày bìa :

ĐOÀN HỒNG

Chế bản :

TÁC GIẢ

CƠ SỞ LÝ THUYẾT TRUYỀN TIN - TẬP HAI

Mã số: 7B514T4

In 2.000 bản; (QĐ.02ĐH); khổ 19 x 27 cm; tại Xí nghiệp In Hải Dương

Số in: 28; Số xuất bản: 1750/105 - 03

In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2004



8 934980 411056



Giá: 23.000^d