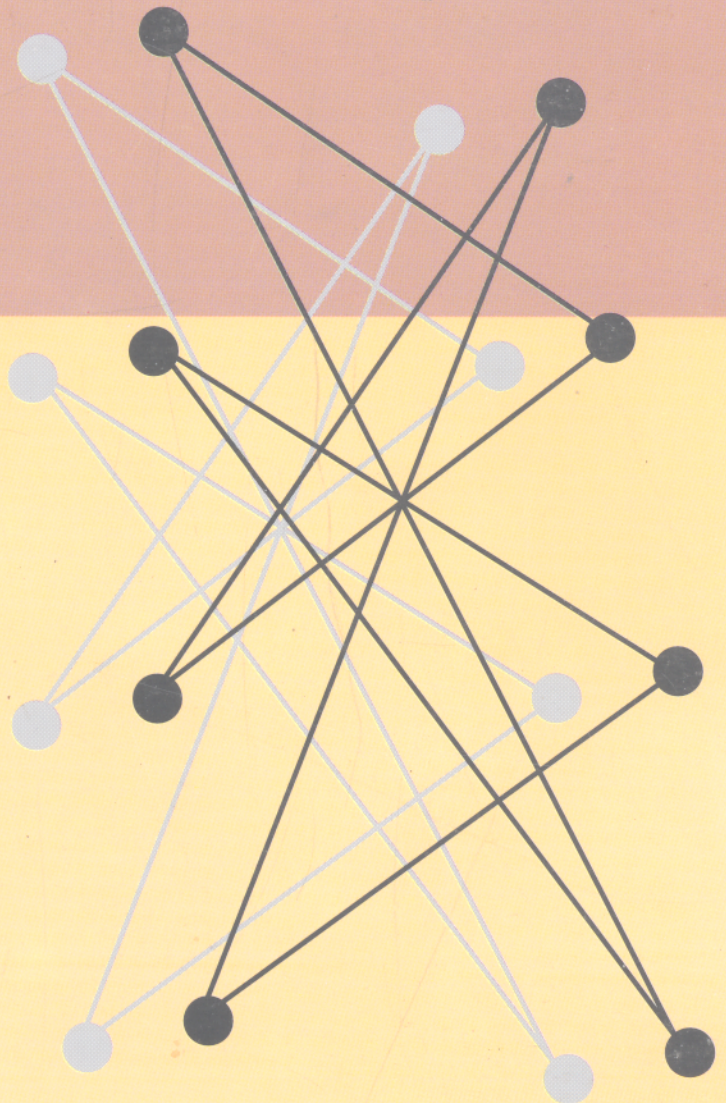


Cơ sở lý thuyết

TRUYỀN TIN

TẬP MỘT

**ĐẶNG VĂN CHUYẾT
NGUYỄN TUẤN ANH**



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

ĐẶNG VĂN CHUYẾT (chủ biên) – NGUYỄN TUẤN ANH

CƠ SỞ LÝ THUYẾT TRUYỀN TIN

Tập một
(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

4.000
H.00574
8.118.118.

Lời nói đầu

Kể từ những năm 1970, sự thâm nhập lẫn nhau của hai lĩnh vực khoa học máy tính và truyền thông đã làm thay đổi sâu sắc các lĩnh vực công nghệ và sản xuất, và một kết quả tất yếu là một ngành công nghiệp máy tính-truyền thông (Computer-Communication) ra đời. Chính nhờ sự hòa trộn mang tính cách mạng này, rất nhiều lĩnh vực khoa học, công nghệ đã có những cơ sở để phát triển mạnh mẽ. Trong bối cảnh của sự phát triển bùng nổ này, những hiểu biết về lý thuyết thông tin (Information Theory), về truyền thông ngày càng quan trọng và cần được xem xét trong hoàn cảnh mới.

Qua nhiều năm làm công tác giảng dạy, với tham vọng có một tài liệu làm giáo trình cho sinh viên chuyên ngành Điện tử-Viễn thông và Công nghệ Thông tin, tài liệu tham khảo cho các kỹ sư thuộc những chuyên ngành trên, chúng tôi cố gắng biên soạn cuốn sách này.

Chúng tôi giả thiết rằng các độc giả xem cuốn sách này là những người đã có cơ sở nhất định về Giải tích, về Đại số tuyến tính và Xác suất. Những cơ sở Toán học theo chúng tôi là hết sức quan trọng và được dùng có tính xuyên suốt cả cuốn sách hoặc từng phần sẽ được chúng tôi trình bày trong cuốn sách này. Cơ sở Toán học của cuốn sách này là Xác suất và Quá trình Ngẫu nhiên với những luật phân bố xác suất hết sức quan trọng trong việc trình bày các vấn đề của cuốn sách.

Cuốn sách này sẽ được chia thành hai tập. Sau khi trình bày chung về hệ thống truyền tin và các khái niệm chung liên quan đến nó, chúng tôi sẽ trình bày các phần của cuốn sách theo trật tự là các vấn đề chung trước, các vấn đề cụ thể sau. Khi trình bày các vấn đề chung, chúng tôi sẽ theo trật tự: nguồn tin trước, kênh tin sau. Các vấn đề phối hợp giữa nguồn và kênh sẽ được xét sau khi đã có những hiểu biết về nguồn và kênh.

Cấu trúc tập 1 như sau:

Chương 1 : **Những khái niệm chung.** Chương này giới thiệu những khái niệm và các vấn đề cơ bản trong lý thuyết truyền tin.

Chương 2: **Xác suất và quá trình ngẫu nhiên,** trong chương này ta xây dựng những cơ sở Toán học cần thiết cho việc khảo sát các hệ thống truyền tin.

Chương 3: **Thông tin và lượng tin,** trình bày vấn đề định lượng thông tin của các nguồn tin.

Chương 4: **Mã hiệu.** Trong chương này ta tập trung vào các khái niệm và định nghĩa về mã, các điều kiện và yêu cầu đối với mã hiệu.

Chương 5: **Mã hóa nguồn,** nghiên cứu vấn đề mã hóa nguồn trên cơ sở mô hình toán học của nguồn và các khái niệm về lượng tin đã xét trong chương 3.

Chương 6: **Tín hiệu và hệ thống truyền tin.** Chương này trình bày các tín hiệu và hệ thống thường gặp khi truyền thông tin qua kênh truyền thông cùng việc biểu diễn các tín hiệu điều chế và các đặc tính về phổ của chúng.

Chương 7: **Cấu trúc thu tối ưu cho kênh có nhiễu cộng gaussian,** nghiên cứu việc thiết kế và đánh giá độ hiệu quả của các bộ thu tối ưu cho các phương pháp điều chế trong kênh có nhiễu cộng gaussian.

Chương 8: **Đồng bộ.** Chương này nghiên cứu các phương pháp đồng bộ vật mang và đồng bộ ký hiệu ở đầu thu.

Trong tập 2 chúng tôi sẽ trình bày về mã hóa kênh, hệ thống truyền tin với kênh có băng tần hạn chế, các hệ thống truyền tin nhiều kênh, nhiều vật mang và nhiều người sử dụng, vấn đề trải phổ, hệ thống truyền tin có fading và cuối cùng là giới thiệu về mã mật được xem như là một loại mã trong hệ thống truyền tin.

Do hạn chế về thời gian, lần đầu biên soạn cuốn sách này, chúng tôi không tránh khỏi các thiếu sót, rất mong các độc giả thông cảm và góp ý để cho những lần biên soạn sau sẽ tốt hơn.

Cuối cùng, xin lưu ý độc giả về cách đánh số các tiêu đề để tiện cho việc tra cứu. Trong mỗi chương, các mục lớn được đánh số bằng hai số, ví dụ 3-2 chỉ mục lớn hai trong chương 3; 3-2-4 chỉ mục bốn của mục lớn hai trong chương 3. Các công thức và hình vẽ được đánh số bằng ba số, số đầu chỉ chương, số thứ hai chỉ mục lớn, số thứ ba chỉ thứ tự của công thức hay hình vẽ trong mục lớn đó.

Chúng tôi chân thành cảm ơn ông Nguyễn Thúc Hải, bà Hồ Anh.Túy đã dành thời gian đóng góp những ý kiến quý báu cho chúng tôi khi biên soạn cuốn sách này.

Các tác giả

CHƯƠNG 1

NHỮNG KHÁI NIỆM CHUNG

Thông tin (tiếng Anh là "Information", còn được dịch là tin tức) là vật liệu đầu tiên được gia công trong một hệ thống truyền tin. Hiện nay chưa có một định nghĩa đầy đủ và súc tích cho khái niệm thông tin. Chúng ta tạm sử dụng khái niệm sau làm định nghĩa về thông tin : *Thông tin là sự cảm hiểu của con người về thế giới xung quanh* (thông qua sự tiếp xúc với nó). Như vậy thông tin là hiểu biết của con người và càng tiếp xúc với môi trường xung quanh con người càng hiểu biết và làm tăng lượng thông tin thu nhận được.

Trong cuộc sống, con người luôn có nhu cầu trao đổi thông tin với nhau, có nghĩa là có nhu cầu truyền tin (Communication) với nhau. Những thông tin khi truyền được mang dưới những dạng năng lượng khác nhau như âm điện, sóng điện từ, sóng ánh sáng... Những dạng năng lượng được dùng để mang tin này được gọi là *vật mang* (Carrier). Nó là một quá trình vật lý cụ thể. Vật mang đã chứa thông tin trong nó là một đại diện của thông tin và nó được gọi là *tín hiệu* (Signal). Cho nên trước đây khi khái niệm "thông tin" chưa được xác định cụ thể như hiện nay, người ta vẫn nghiên cứu định lượng các hệ thống truyền tin bằng cách tính toán và thực nghiệm trên sự biến đổi năng lượng mang tin trong các hệ thống đó. Trên quan điểm năng lượng, lý thuyết mạch điện, lý thuyết tín hiệu đã giải quyết những vấn đề tổng quát về phân tích và tổng hợp mạch và tín hiệu, và nhờ đó kỹ thuật truyền tin đã có những bước tiến bộ khá dài.

Nhưng đồng thời với sự phát triển mạnh mẽ của mình, ngành kỹ thuật truyền tin đã làm nảy sinh ra nhiều vấn đề mà những lý thuyết xây dựng trên quan điểm năng lượng không giải thích được trọn vẹn, như vấn đề mối liên hệ cơ bản giữa các hệ thống truyền tin sử dụng những năng lượng khác nhau, như vấn đề bảo tồn thông tin trong các hệ thống thông tin vũ trụ trong đó năng lượng tải tin rất nhỏ bé, như vấn đề đảm bảo tốc độ truyền tin nhanh và chính xác trong các hệ thống truyền số liệu, như gia công thông tin trong các thiết bị tính toán điều khiển... Nói một cách khác phải xây dựng những tiêu chuẩn chung để có thể đánh giá và so sánh các hệ thống truyền tin, giải quyết những vấn đề cơ bản của sự truyền tin là: tốc độ truyền tin và khả năng chống nhiễu của hệ thống, thiết lập những mô hình hệ thống truyền tin thực, chỉ ra các phương hướng cải tiến có hiệu quả.

Để trả lời được những điều nói trên một cách rõ ràng và ngắn gọn, các lý thuyết xây dựng trên quan điểm năng lượng cần phải được bổ sung bằng những lý thuyết xây dựng trên quan điểm thông tin. Trong chương này sẽ giới thiệu mô hình tổng quát của một hệ thống truyền tin, các vấn đề lý thuyết cơ bản mà hệ thống đề ra và các chức năng của các khâu chính trong hệ thống truyền tin.

1-1. HỆ THỐNG TRUYỀN TIN

Những hệ thống truyền tin cụ thể mà con người đã sử dụng và khai thác có rất nhiều dạng, và khi phân loại chúng, người ta cũng có thể dựa trên nhiều cơ sở khác nhau. Ví dụ trên cơ sở năng lượng mang tin người ta có thể phân hệ thống truyền tin thành các loại :

- Hệ thống điện tín dùng năng lượng điện một chiều
- Hệ thống thông tin vô tuyến điện dùng năng lượng sóng điện từ

NHỮNG KHÁI NIỆM CHUNG

-Hệ thống thông tin quang năng (hệ thống báo hiệu, thông tin hồng ngoại, laser, cáp quang...)

-Hệ thống thông tin dùng sóng âm, siêu âm, (năng lượng cơ học)...

Chúng ta cũng có thể phân loại hệ thống truyền tin dựa trên cơ sở biểu hiện bên ngoài của thông tin như:

-Hệ thống truyền số liệu

-Hệ thống truyền hình

-Hệ thống thông tin thoại...

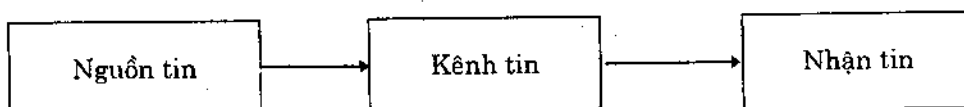
Những phương pháp phân loại trên dựa theo nhu cầu kỹ thuật, giúp các cán bộ kỹ thuật nhận thức vấn đề một cách cụ thể và tìm hiểu khai thác các loại hệ thống được dễ dàng. Sự phân loại như vậy đã được ứng dụng rộng rãi và gần như thống nhất trong các tài liệu và sách kỹ thuật. Nhưng ở đây để đảm bảo tính logic của vấn đề được trình bày, chúng ta căn cứ đặc điểm của thông tin đưa vào kênh để phân loại các hệ thống truyền tin và như vậy chúng ta phân làm hai loại hệ thống truyền tin:

-Hệ thống truyền tin rời rạc

-Hệ thống truyền tin liên tục

Chúng ta có thể định nghĩa: *Truyền tin* (Transmission) là dịch chuyển thông tin từ điểm này đến điểm khác trong một môi trường xác định. Hai điểm này sẽ được gọi là điểm *nguồn tin* (Information Source) và điểm *nhận tin* (Information Destination). Môi trường truyền tin (Transmission Media) còn được gọi là *kênh tin* (Channel).

Sơ đồ khối chức năng của một hệ thống truyền tin tổng quát gồm có ba khâu chính: nguồn tin, kênh tin và nhận tin (hình 1-1-1).



Hình 1-1-1: Sơ đồ khối chức năng hệ thống truyền tin

Trong sơ đồ này:

Nguồn tin là nơi sản sinh ra hay chứa các tin cần truyền đi.

Khi một đường truyền tin được thiết lập để truyền tin từ nguồn tin đến nhận tin, một dãy các phần tử cơ sở (các tin) của nguồn sẽ được truyền đi với một phân bố xác suất nào đó. Dãy này được gọi là một *bản tin* (Message). Vậy ta có thể định nghĩa: *Nguồn tin là tập hợp các tin mà hệ thống truyền tin dùng để lập các bản tin khác nhau để truyền tin.*

Kênh tin là môi trường lan truyền thông tin. Để có thể lan truyền được thông tin trong một môi trường vật lý xác định, thông tin phải được chuyển thành tín hiệu thích hợp với môi trường truyền lan. Vậy kênh tin là nơi hình thành và truyền tín hiệu mang tin đồng thời ở đây sinh ra các tạp nhiễu phá hủy thông tin. Trong lý thuyết truyền tin kênh là một khái niệm trừu tượng đại biểu cho *hỗn hợp tín hiệu và tạp nhiễu*. Từ khái niệm này, sự phân loại kênh sẽ dễ dàng hơn, mặc dù trong thực tế các kênh tin có rất nhiều dạng khác nhau, ví dụ :

-Truyền tín hiệu theo các dây song hành, cáp đồng trục, ống dẫn sóng.

-Tín hiệu truyền lan qua các tầng điện ly, không hoặc có phản xạ.

- Tín hiệu truyền lan qua các tầng đối lưu, không hoặc có phản xạ và khúc xạ.
- Tín hiệu truyền lan trên mặt đất, trong đất.
- Tín hiệu truyền lan trong nước...

Thu tin là cơ cấu khôi phục thông tin ban đầu từ tín hiệu lấy ở đầu ra của kênh.

Để tìm hiểu chi tiết hơn chúng ta đi sâu vào các khối chức năng của sơ đồ trên và xét đến nhiệm vụ của từng khối.

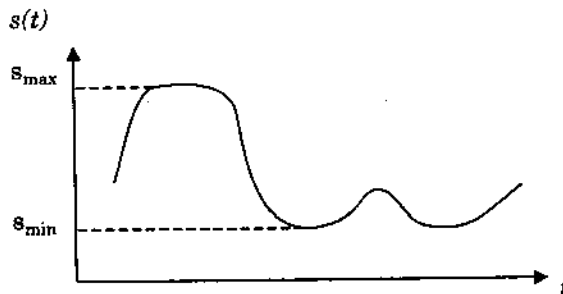
1-1-1. Nguồn tin nguyên thủy

Nguồn tin nguyên thủy là tập hợp những tin nguyên thủy (chưa qua một phép biến đổi nhân tạo nào) ví dụ như tiếng nói, âm nhạc, hình ảnh, các biến đổi khí tượng... Các tin nguyên thủy phần nhiều là những hàm liên tục theo thời gian $f(t)$ hoặc là những hàm biến đổi theo thời gian và một hoặc nhiều thông số khác như hình ảnh đen trắng $h(x, y, t)$, trong đó x, y là các tọa độ không gian của hình, hoặc như các thông tin khí tượng: $g(\lambda_i, t)$ trong đó λ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) là các thông số khí tượng như nhiệt độ, độ ẩm, tốc độ gió...

Thông tin nguyên thủy cũng có thể là các hệ hàm theo thời gian và các thông số như trường hợp thông tin hình ảnh màu:

$$\begin{cases} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{cases}$$

Thông thường các tin nguyên thủy mang tính chất liên tục theo thời gian và mức; nghĩa là có thể biểu diễn một thông tin nào đó dưới dạng một hàm $s(t)$ tồn tại trong quãng thời gian T và lấy các trị bất kỳ trong phạm vi $(s_{\min}, s_{\max})$ (hình 1-1-2)



Hình 1-1-2: Ví dụ về một tín hiệu nguyên thủy

Những tin nguyên thủy có thể được đưa trực tiếp vào kênh để truyền đi. Cũng có thể bằng những phép biến đổi nhân tạo như rời rạc hóa theo thời gian và theo mức rồi đưa vào kênh truyền. Lúc này tin trước khi vào kênh đã trở thành tin rời rạc. Nguồn tin lúc này gọi là *nguồn tin rời rạc* và kênh tin được gọi là *kênh tin rời rạc* để phân biệt với trường hợp đưa tin liên tục vào kênh gọi là *nguồn liên tục* và *kênh liên tục*.

Bảng chữ của một ngôn ngữ, các tin trong hệ thống điện tín, các lệnh điều khiển trong hệ thống điều khiển là những tin nguyên thủy có tính chất rời rạc.

Sự phân biệt về bản chất của nguồn rời rạc với nguồn liên tục là số lượng các tin trong nguồn rời rạc là hữu hạn và số lượng các tin trong nguồn liên tục không đếm được.

NHỮNG KHÁI NIỆM CHUNG

Nói chung các tin rời rạc, hoặc nguyên thủy rời rạc, hoặc nguyên thủy liên tục đã được rời rạc hóa, trước khi đưa vào kênh thông thường đều qua thiết bị mã hóa.

Thiết bị mã hóa biến đổi tập hợp tin nguyên thủy thành tập hợp những tin thích hợp với đặc điểm cơ bản của kênh như khả năng cho qua (thông lượng), tính chất tín hiệu (dạng, cấu trúc phổ, tính thống kê...) và tạp nhiễu. Tóm lại mã hóa là phép biến đổi tính thống kê và tính chống nhiễu của nguồn tin.

Với những khái niệm và định nghĩa trên, chúng ta có thể xây dựng mô hình toán học cho nguồn rời rạc.

Một bảng các tin xuất phát từ một nguồn tin nào đó đều phản ánh tính chất thống kê của nguồn đó. Bảng tin càng dài sự phản ánh càng trung thực. Chúng ta có thể xem một bảng tin cụ thể là một thể hiện của một nguồn. Vì tại một thời điểm xác định nguồn có thể tạo ra một tin ngẫu nhiên đối với người quan sát, nên theo quan điểm toán học có thể xem nguồn tin (nguồn tạo ra các bảng tin) là cấu trúc thống kê của một quá trình ngẫu nhiên. Như vậy để xác định một nguồn tin, hay nói cách khác để xác định cấu trúc thống kê của một quá trình ngẫu nhiên, chúng ta cần phải biết được các quy luật thống kê của quá trình.

Trường hợp một nguồn rời rạc, bảng tin là một dãy các ký hiệu kế tiếp của một bộ chữ (bộ ký hiệu) gồm một số m ký hiệu hữu hạn gọi là bộ chữ A :

$$A = \{a_i\} \text{ với } i = 1, 2, \dots, m.$$

Bảng tin là một dãy ký hiệu vô hạn hay hữu hạn ở hai phía:

$$x = (\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots)$$

$\dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots$ là ký hiệu a_i , $i = 1, 2, \dots, m$ bất kỳ của bộ chữ A được phát đi ở thời điểm $t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$

Trong thực tế bảng tin có bắt đầu và kết thúc cho nên bảng tin là một dãy các ký hiệu hữu hạn

$$x^* = (x_1 x_2 \dots x_n)$$

x^* được gọi là một khối n chiều, tập hợp của các khối n chiều với các đặc tính thống kê của chúng sẽ xác định cấu trúc thống kê của nguồn tin. Nói cách khác biết được tập hợp các x^* (ký hiệu bằng X^*) và xác suất xuất hiện của các bảng tin $p(x^*)$ sẽ quyết định được tính chất thống kê của nguồn. Do vậy trong trường hợp này nguồn tin là một trường xác suất hữu hạn $\{X^*, p(x^*)\}$. Trong một trường hợp hẹp hơn, nếu xác suất xuất hiện các ký hiệu trong bảng tin độc lập với nhau, chỉ cần biết bộ chữ A và xác suất xuất hiện của các ký hiệu $p(a_i)$, $a_i \in A$ cũng đủ để xác định tính chất thống kê của nguồn, lúc đó nguồn là trường xác suất hữu hạn $\{A, p\}$, (p viết tắt cho $p(a_i)$, $a_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, m$).

Khi chúng ta rời rạc hóa một nguồn liên tục, chúng ta thay một thể hiện $x(t)$ của nguồn (một bảng tin liên tục) bằng một dãy hoặc một khối n chiều x^* nếu thời gian quan sát là hữu hạn. Trong đó bộ chữ A của khối là tập hợp các giá trị lượng tử hóa được của $x(t)$. Như vậy sự rời rạc hóa được thực hiện thông qua hai khâu: gián đoạn hóa theo thời gian và lượng tử hóa theo mức.

Theo những điều đã trình bày ở trên nguồn tin có cấu trúc thống kê của một quá trình ngẫu nhiên. Mỗi nguồn tin (quá trình ngẫu nhiên) được xác định bởi một cặp tập giá trị x^* và cấu trúc thống kê của chúng $p(x^*)$. Những nguồn tin thường gặp thường có tính chất của một quá trình ngẫu nhiên dừng và nhiều khi lại có tính ergodic. Đối với các nguồn tin ergodic mỗi thể hiện (mỗi bảng tin) ghi nhận được trong một thời gian đủ dài có thể tiêu biểu cho nguồn và chúng ta có thể căn cứ vào một thể hiện để xác định được cấu trúc thống kê của nguồn. Điều này có một ý nghĩa quan trọng trong thực tiễn.

Để nghiên cứu định lượng nguồn tin cũng như hệ thống truyền tin, chúng ta có thể mô hình hóa toán học nguồn tin bằng bốn quá trình sau :

- *Quá trình ngẫu nhiên liên tục*: Nguồn tiếng nói, âm nhạc, hình ảnh là tiêu biểu cho quá trình này. Trong các hệ thống thông tin thoại, truyền thanh, truyền hình với các tín hiệu điều biên, điều tần thông thường chúng ta gặp các nguồn như vậy.

- *Quá trình ngẫu nhiên rời rạc*: Một quá trình ngẫu nhiên liên tục sau khi được lượng tử hóa theo mức sẽ trở thành quá trình này. Một ngôn ngữ, tín hiệu điện tín, các lệnh điều khiển là nguồn rời rạc loại này.

- *Dãy ngẫu nhiên liên tục*: Đây là trường hợp một nguồn liên tục đã được gián đoạn hóa theo thời gian, như thường gặp trong các hệ thống tin xung điều biên xung (PAM-Pulse Amplitude Modulation), điều pha xung (PPM), điều tần xung (PFM)...không bị lượng tử hóa.

- *Dãy ngẫu nhiên rời rạc*: Trong các hệ thống thông tin xung có lượng tử hóa như điều biên (pha, tần) xung lượng tử hóa, điều xung mã (PCM).

1-1-2. Kênh tin

Chúng ta đều biết rằng, cho đến nay khoa học thừa nhận rằng: vật chất chỉ có thể dịch chuyển từ điểm này đến một điểm khác trong một môi trường thích hợp và dưới tác động của một lực thích hợp. Trong quá trình dịch chuyển của các "hạt" vật chất, những thông tin về nó hay chứa trong nó sẽ được dịch chuyển theo. Đây chính là bản chất của sự lan truyền thông tin.

Vậy chúng ta có thể nói rằng việc truyền tin chính là sự dịch chuyển của dòng các "hạt" vật chất mang tin (tín hiệu) trong môi trường truyền tin. Trong quá trình truyền tin, hệ thống truyền tin phải gắn được thông tin lên các dòng vật chất tạo thành tín hiệu và lan truyền nó đi.

Việc tín hiệu lan truyền trong một môi trường xác định chính là dòng các "hạt" vật chất, chịu tác động của lực, lan truyền trong một cấu trúc xác định của môi trường (một mạng các hạt đặc trưng cho môi trường). Dòng vật chất mang tin này, ngoài tác động để dịch chuyển, còn chịu các tác động của các lực không mong muốn sẵn có trong cũng như ngoài môi trường và chịu va đập với các "hạt" của môi trường. Đây chính là những nguyên nhân làm biến đổi dòng vật chất không mong muốn hay là nguyên nhân gây ra nhiễu (noise) trong quá trình truyền tin.

Kênh tin có thể hiểu là một môi trường để hình thành tín hiệu mang tin và lan truyền tín hiệu mang tin. Trong kênh diễn ra sự truyền lan của tín hiệu mang tin và chịu tác động của tạp nhiễu. Để mô tả kênh chúng ta chỉ cần dựa vào đặc điểm tín hiệu trong kênh và tạp nhiễu tiêu biểu cho môi trường truyền lan của kênh đó. Các môi trường truyền lan các tín hiệu là rất khác nhau. Vấn đề đặt ra là từ các dạng khác nhau đó tìm ra được những điểm chung để có thể tổng quát hóa được về kênh.

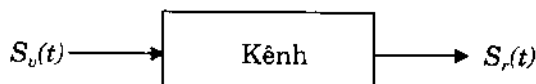
Ta biết rằng tín hiệu có thể truyền lan trong nhiều môi trường khác nhau. Khi tín hiệu đi qua các môi trường như vậy ngoài sự biến đổi về năng lượng, dạng của tín hiệu cũng bị thay đổi do tác động của tạp nhiễu tồn tại trong các môi trường vật lý đó hoặc do phương thức truyền lan, sự biến đổi các thông số vật lý của môi trường gây ra sự điều chế tín hiệu không cần thiết. Rõ ràng tác động của nhiễu lên tín hiệu tiêu biểu cho môi trường truyền lan của tín hiệu. Vậy có thể lấy tạp nhiễu làm đặc tính chung của môi trường truyền lan và lấy sự phân tích, phân loại tạp nhiễu để phân tích và phân loại môi trường. Tuy rằng trong thực tế môi trường truyền lan rất khác nhau, chúng ta vẫn có thể quy nạp về các dạng cơ bản sau:

- Môi trường trong đó tác động nhiễu cộng là chủ yếu;
- Môi trường trong đó tác động nhiễu nhân là chủ yếu;
- Môi trường gồm cả nhiễu cộng và nhiễu nhân.

NHỮNG KHÁI NIỆM CHUNG

Ngoài ra trong trường hợp sự truyền tin xảy ra giữa hai vật di động so với nhau, tín hiệu sẽ bị điều tần phụ do hiệu ứng Doppler gây nên, chúng ta xếp riêng một loại gọi là kênh có hiệu ứng Doppler.

Tóm lại để mô tả kênh chúng ta dùng một mạng hai cửa và sự quan hệ giữa tín hiệu đầu ra với tín hiệu đầu vào như trên hình 1-1-3.



Hình 1-1-3: Mô hình kênh với tín hiệu vào và tín hiệu ra

Với giả thiết rằng mạng hai cửa này có hàm truyền đơn vị (bằng 1) trên mọi tần số và trên toàn miền thời gian, chúng ta có:

$$S_r(t) = N_p(t)S_p(t) + N_c(t)$$

trong đó $N_n(t)$ ký hiệu cho nhiễu nhân và $N_c(t)$ ký hiệu cho nhiễu cộng. Nhiễu cộng sinh ra một tín hiệu ngẫu nhiên không mong muốn và tác động cộng thêm vào tín hiệu ở đầu ra. Nhiễu cộng là do các nguồn nhiễu công nghiệp và vũ trụ tạo ra, luôn luôn tồn tại trong các môi trường truyền lan của tín hiệu. Dải phổ của nhiễu cộng rất rộng, cho nên với bất kỳ tín hiệu có phổ ở đoạn tần số nào, chúng cũng tạo thành một nền trù lên tín hiệu.

Nhiều nhân, tác động nhân vào tín hiệu, gây ra do phương thức truyền lan của tín hiệu, hay là sự thay đổi thông số vật lý của bộ phận môi trường truyền lan khi tín hiệu đi qua. Trong trường hợp đầu nhiều sẽ tác động nhanh lên tín hiệu, và tác động chậm trong trường hợp thứ hai vì các biến động của môi trường thường xảy ra với những chu kỳ vài phút đến vài giờ hoặc hơn nữa. Hiện tượng này thường gặp trong khi thu các tín hiệu vô tuyến ở dải sóng ngắn, bằng nhiều con đường truyền lan khác nhau, tùy theo sai trình (dài ngắn khác nhau) của các đường đó thay đổi làm cho tổng cường độ điện trường ở đầu thu biến đổi, gây ra biên độ tín hiệu thu khi lớn khi bé và đôi khi mất hẳn, chúng ta gọi là hiện tượng pha đing (fading).

Các kênh tin trong thực tế không đảm bảo đặc tính xung hoặc đặc tính tần số đơn vị nên công thức tính tín hiệu ra là :

$$S_r(t) = N_n(t) S_u(t)^* H(t) + N_c(t)$$

Ở đây $H(t)$ là đặc tính xung của kênh. Đặc tính kênh không lý tưởng này sẽ gây ra một sự biến dạng của tín hiệu ra so với tín hiệu vào, gọi là méo tín hiệu, và méo lại là một nguồn nhiễu trong quá trình truyền tin.

Tín hiệu đầu vào của các kênh truyền hiện nay là những dao động cao tần với những thông số biến đổi theo quy luật của thông tin. Các thông số có thể là biên độ, tần số hoặc góc pha. Dao động có thể là liên tục hoặc gián đoạn, nếu là gián đoạn sẽ có những dãy xung cao tần với các thông số xung thay đổi theo thông tin như biên độ xung, tần số lặp lại, thời điểm xuất hiện...

Trường hợp dao động liên tục biểu thức tổng quát của tín hiệu có dạng sau :

$$S_{rr}(t) = a(t) \cos[\omega(t) - \theta(t)]$$

Các thông số biên độ $a(t)$, tần số $\omega(t)$, hay góc pha $\theta(t)$ biến đổi theo quy luật của thông tin để mang tin và nhiễu tác động sẽ làm thay đổi các thống số này làm sai lạc thông tin.

Theo mô hình mạng 2 của của kênh tin, nếu đầu vào chúng ta đưa vào tin $x(t)$ với xác suất xuất hiện $p(x)$ chúng ta sẽ nhận được ở đầu ra một tin $y(t)$ với xác suất xuất hiện $p(y)$ đại diện cho $x(t)$. Với yêu cầu truyền tin chính xác, chúng ta cần $y(t)$ phải là đại diện của $x(t)$, hay xác

suất nhận được $y(t)$ là đại diện của $x(t)$ khi truyền $x(t)$ là $p(y|x) = 1$. Điều này chỉ có được khi kênh không có nhiễu. Khi kênh có nhiễu, có thể trên đầu ra của kênh chúng ta nhận được một tín khác với tín được phát, có nghĩa là xác suất để nhận được $y(t)$ là đại diện của $x(t)$ là $p(y|x)$, $0 < p(y|x) < 1$, và nếu nhiễu càng lớn, xác suất này càng nhỏ. Vậy có thể sử dụng xác suất $p(y|x)$ để đặc trưng cho đặc tính truyền tin của kênh.

1-1-3. Nhận tin

Nhận tin là đầu cuối của hệ thống truyền tin. Nhận tin thường gồm có bộ nhận biết thông tin được phát và xử lý thông tin. Bộ xử lý thông tin có thể là người, cũng có thể là thiết bị (thiết bị ghi giữ, máy tính điện tử). Nếu bộ phận xử lý thông tin là thiết bị tự động chúng ta có một hệ thống truyền tin tự động.

Vì tín hiệu nhận được ở đầu ra của kênh là một hỗn hợp tín hiệu và tạp nhiễu xảy ra trong kênh, nên nói chung tín hiệu ra không giống với tín hiệu đưa vào kênh. Nhiệm vụ chính cần thực hiện tại nhận tin là từ tín hiệu nhận được $y(t)$ phải xác định được $x(t)$ nào được đưa vào đầu vào của kênh. Bài toán này được gọi là bài toán thu hay phục hồi tín hiệu tại điểm thu.

1-1-4. Những vấn đề cơ bản của hệ thống truyền tin

Trong phần trên chúng ta đã phân loại các hệ thống truyền tin làm hai nhóm chính, một là nhóm các hệ thống truyền tin rời rạc và hai là nhóm các hệ thống truyền tin liên tục. Khi nói đến sơ đồ khối chức năng của hệ thống truyền tin có đề cập đến biểu thức $S_r(t) = N_n(t)S_o(t) + N_c(t)$ tổng quát mô tả kênh tin. Trong biểu thức đó tùy theo dạng của $S_o(t)$, chúng ta có kênh tin rời rạc hoặc liên tục. Sau đây, chúng ta sẽ dựa trên sự phân loại như vậy để phân tích các vấn đề cơ bản của hệ thống truyền tin. Trước hết, chúng ta liệt kê các vấn đề cơ bản liên quan đến quá trình truyền tin.

Các vấn đề cơ bản của hệ thống truyền tin gồm có :

(1) *Hiệu suất truyền tin*, hay là tốc độ truyền tin của hệ thống. Đó là lượng thông tin hệ thống cho phép (hay có thể) truyền đi trong một đơn vị thời gian.

(2) *Độ chính xác truyền tin*, nói cách khác là khả năng chống nhiễu của hệ thống.

Yêu cầu tối đa với bất kỳ một hệ thống truyền tin nào là thực hiện được sự truyền tin nhanh chóng và chính xác. Những cơ sở lý thuyết nói ở trong các phần sau giải đáp những vấn đề này. Những khái niệm về lý thuyết thông tin cho biết giới hạn tốc độ truyền tin trong một kênh tin, nghĩa là khối lượng thông tin lớn nhất mà kênh cho truyền qua với một độ sai nhầm nhỏ tùy ý.

Khi sự truyền tin tiến hành trên những cự ly rất lớn, người ta thường dùng năng lượng mang tín là sóng điện từ. Trong trường hợp này nếu công suất máy phát bị hạn chế, năng lượng tín hiệu và tạp nhiễu ở đầu thu sẽ xấp xỉ bằng nhau, một vấn đề lý thuyết đặt ra là xác định cấu trúc của thiết bị thu tín hiệu lý tưởng, nghĩa là có thể phát hiện và tách tín hiệu trong nền tạp âm lớn. Đó là một nội dung lớn của lý thuyết chống nhiễu.

Trong những mục sau sẽ giới thiệu chức năng của khối liên quan đến nguồn tin và kênh tin: khối mã hóa và giải mã của nguồn và kênh, khối điều chế và giải điều chế của kênh.

Trong nhiều trường hợp nguồn tin nguyên thủy là liên tục nhưng dùng kênh rời rạc để truyền tin. Vậy nguồn liên tục trước khi mã hóa phải được rời rạc hóa. Để xác minh phép biến đổi nguồn liên tục thành nguồn rời rạc là một phép biến đổi tương đương 1-1 về mặt thông tin, trước tiên chúng ta khảo sát cơ sở lý thuyết của phép rời rạc hóa gồm các định lý lấy mẫu và quy luật lượng tử hóa.

Sự xác minh tính đúng đắn về phương diện lý thuyết phép rời rạc hóa là một phép biến đổi tương đương không những có một ý nghĩa to lớn về thực nghiệm, mà về mặt lý thuyết cũng có

một ý nghĩa rõ rệt. Nhờ đó mà những điều đã được khảo sát và kết luận trong các hệ thống rời rạc có thể mở rộng trong các hệ thống liên tục mà sự khảo sát trực tiếp sẽ làm nảy sinh nhiều vấn đề khó khăn về phương pháp.

1-2. RỜI RẠC HÓA MỘT NGUỒN TIN LIÊN TỤC

Trong các hệ thống truyền tin mà đầu cuối (đầu thu) là những thiết bị xử lý thông tin rời rạc (ví dụ máy tính số) như các hệ thống truyền số liệu, hay là các hệ thống thông tin chuyển tiếp điều mã xung, nguồn tin có thể là rời rạc hoặc liên tục. Nếu các nguồn tin là liên tục, nhất thiết trước khi đưa tin vào kênh phải thông qua một phép biến đổi liên tục thành rời rạc. Sau đó sẽ áp dụng các phương pháp mã hóa để đáp ứng được các chỉ tiêu kỹ thuật của hệ thống truyền tin cụ thể.

Phép biến đổi nguồn tin liên tục thành rời rạc gồm hai khâu cơ bản: một là khâu rời rạc hóa theo thời gian hay còn gọi là khâu lấy mẫu, hai là khâu lượng tử hóa theo mức (viết tắt lượng tử hóa). Cơ sở lý thuyết của phép biến đổi này gồm các định lý lấy mẫu và luật lượng tử hóa.

1-2-1. Lấy mẫu

Lấy mẫu một hàm tin, có nghĩa là trích từ hàm đó ra các mẫu tại những thời điểm thời gian nhất định. Nói một cách khác thay hàm tin liên tục bằng một hàm rời rạc là những mẫu của hàm trên lấy tại những thời điểm gián đoạn. Vấn đề đặt ra ở đây là xét các điều kiện để cho sự thay thế đó là một sự thay thế tương đương. Tương đương ở đây là về ý nghĩa thông tin, nghĩa là hàm thay thế không bị mất mát thông tin so với hàm được thay thế.

Trong các chương sau chúng ta sẽ khảo sát kỹ hơn về vấn đề rời rạc hóa một nguồn tin (một quá trình ngẫu nhiên), ở đây chúng ta nêu ra tinh thần của định lý lấy mẫu theo thời gian:

Một hàm $s(t)$ có phổ hữu hạn, không có thành phần tần số lớn hơn ω_{max} có thể được thay thế bằng các mẫu của nó lấy tại những thời điểm cách nhau một khoảng $\Delta t \leq \pi / \omega_{max}$

1-2-2. Lượng tử hóa

Hàm $s(t)$ là một thể hiện của một nguồn tin liên tục, có biên độ biến đổi liên tục trong phạm vi (s_{min}, s_{max}) . Ta phân chia phạm vi đó thành một số mức nhất định, đánh số các mức từ $s_{min} = s_0, s_1, s_2, \dots, s_n = s_{max}$. Việc gián đoạn hóa sự biến đổi biên độ của $s(t)$ là cho biên độ lấy mức s_i nhất định khi nó tăng hoặc giảm gần đến mức đó. Như vậy $s(t)$ sẽ trở thành một hàm biến đổi theo bậc thang gọi là hàm lượng tử hóa $s'(t)$. Khi số thứ tự các mức đã có quy ước trước, việc gửi đi một hàm liên tục trở thành gửi đi những con số ở những thời điểm tương ứng. Theo các con số đó có thể dễ dàng khôi phục lại hàm lượng tử hóa $s'(t)$. Sự chọn lựa các mức thích đáng sẽ làm giảm sự khác nhau giữa $s'(t)$ và $s(t)$, gọi là sai số lượng tử, đồng thời giảm sai nhảm trong quá trình truyền tin.

Với phép lượng tử hóa, nguồn tin liên tục trở thành rời rạc với bộ chữ A là tập hợp hữu hạn các mức lượng tử, một tin (bảng tin) gửi đi của nguồn sẽ trở thành một dãy hữu hạn các mức (dưới dạng các con số hoặc các ký hiệu).

Một nguồn tin liên tục sau khi được lấy mẫu và lượng tử hóa sẽ trở thành một nguồn rời rạc. Trong quá trình truyền tin sự tồn tại của tạp nhiễu gây tổn thất thông tin là một điều hiển nhiên. Do vậy sự phân biệt giữa các mức của các trị tức thời của tin $s(t)$ đều bị giới hạn bởi ảnh

hưởng của tạp nhiễu lớn hoặc bé. Nếu chúng ta cho trị bé nhất của $s(t)$ là mức mà ở đầu thu còn có thể phân biệt được trong nền tạp nhiễu, thì mức đó gọi là mức ngưỡng và phải thoả mãn điều kiện lớn hơn mức tạp nhiễu trong kênh. Như vậy để phân biệt được hai trị tức thời ở những mức kế cận của $s(t)$ cũng phải thoả mãn điều kiện như vậy, nghĩa là chúng phải lớn hơn nhau một đại lượng lớn hơn hoặc bằng mức ngưỡng, nói cách khác bước lượng tử tối thiểu phải lớn hơn mức tạp nhiễu trong kênh. Khi đã thoả mãn điều kiện này rồi, đứng về quan điểm thông tin mà nói, việc rời rạc hóa nguồn tin liên tục hoàn toàn là một phép biến đổi tương đương nghĩa là không gây một sự thiệt hại nào về thông tin. Sau khi đã được rời rạc hóa, nguồn tin là rời rạc cho phép chúng ta tiến hành rất thuận lợi một số phép biến đổi nữa để nâng cao các chỉ tiêu của hệ thống truyền tin đến những mức tiếp cận lý tưởng (ví dụ, mã hóa và điều chế).

1-3. ĐỘ ĐO THÔNG TIN

Trong những mục về sau của phần lý thuyết thông tin, chúng ta sẽ khảo sát lượng đo thông tin một cách chi tiết hơn, ở đây chúng ta chỉ nêu ra một khái niệm ban đầu về lượng tin nhằm để vật thể hóa thông tin, và cho chúng ta một phương tiện để có thể so sánh định lượng các thông tin với nhau. Từ đây cũng giúp cho chúng ta để nhận thức hơn những chỉ tiêu chất lượng để ra trong khi xây dựng các phương pháp xử lý thông tin (ví dụ phép mã hóa).

Độ đo (Metric) của một đại lượng là cách ta xác định độ lớn của đại lượng đó. Mỗi độ đo phải thoả mãn 3 tính chất sau:

+ *Độ đo phải cho phép ta xác định được độ lớn của đại lượng. Đại lượng càng lớn, giá trị đo được càng phải lớn.*

+ *Độ đo phải không âm.*

+ *Độ đo phải tuyến tính, tức là giá trị đo được của đại lượng tổng cộng phải bằng tổng giá trị của các đại lượng riêng phần khi sử dụng độ đo này để đo chúng.*

Để xác định độ đo thông tin, chúng ta nhận thấy rằng thông tin càng có ý nghĩa khi nó càng hiếm gặp, nên độ lớn của nó phải tỷ lệ nghịch với xác suất xuất hiện của tin. Vậy độ đo thông tin phải là một hàm tỷ lệ nghịch với xác suất xuất hiện của tin, hay nó là hàm $f(1/p(x_i))$ cho tin x_i có xác suất xuất hiện $p(x_i)$. Một tin không cho chúng ta lượng tin nào khi chúng ta đã biết trước về nó hay nó có xác suất (lớn nhất) bằng 1.

Để xác định dạng của hàm này, chúng ta sử dụng tính chất thứ ba. Chúng ta giả sử rằng có hai tin x_i và x_j là độc lập thống kê để mỗi tin không chứa thông tin về tin còn lại. Nếu hai tin có xác suất xuất hiện là $p(x_i)$ và $p(x_j)$, lượng tin của mỗi tin sẽ là $f(1/p(x_i))$, $f(1/p(x_j))$. Giả sử hai tin này cùng đồng thời xuất hiện, ta có tin (x_i, x_j) , lượng tin chung của chúng phải bằng tổng lượng tin của từng tin. Khi hai tin đồng thời xuất hiện, xác suất xuất hiện đồng thời của chúng là $p(x_i, x_j)$, và ta có:

$$f(1/p(x_i, x_j)) = f(1/p(x_i)) + f(1/p(x_j))$$

Vì hai tin độc lập thống kê nên:

$$p(x_i, x_j) = p(x_i) \cdot p(x_j)$$

Vậy:

$$f(1/(p(x_i) \cdot p(x_j))) = f(1/p(x_i)) + f(1/p(x_j))$$

Trong trường hợp này, hàm f phải là hàm dạng loga. Vậy hàm $\log(1/p(x_i))$ là dạng hàm có thể chọn làm độ đo thông tin. Ta cần phải kiểm tra tính không âm của hàm này. Vì $0 \leq p(x) \leq 1$, nên $1/p(x_i) \geq 1$ hay $\log(1/p(x_i))$ không âm.

Thêm nữa khi một tin luôn luôn xuất hiện thì lượng tin nhận được khi này bằng 0, ta cần kiểm tra điều kiện này. Rõ ràng khi

$$p(x_i) = 1 \text{ thì } \log(1/p(x_i)) = 0$$

Vậy hàm $\log(1/p(x_i))$ được chọn làm độ đo thông tin hay lượng do thông tin của một tin của nguồn. Lượng do thông tin của một tin x_i của nguồn thường được ký hiệu là $I(x_i)$:

$$I(x_i) = \log(1/p(x_i))$$

Trong công thức xác định độ đo thông tin này, cơ số của hàm loga chưa được chỉ ra. Tùy vào cơ số của hàm log này ta sẽ có các đơn vị đo độ lớn thông tin xác định. Hiện nay người ta thường dùng các đơn vị đo sau đây:

Bit hay đơn vị nhị phân khi cơ số loga là 2;

Nat hay đơn vị tự nhiên khi cơ số loga là e ;

Hartley hay đơn vị thập phân khi cơ số loga là 10.

Ví dụ nguồn A có m ký hiệu đẳng xác suất, một tin do nguồn A hình thành là một dãy n ký hiệu a_i bất kỳ ($a_i \in A$). Chúng ta sẽ xác định lượng tin chứa trong một tin như vậy. Trước tiên hãy tìm lượng tin chứa trong một tin a_i . Do đẳng xác suất nên mỗi tin a_i đều có xác suất là $1/m$, vậy:

$$I(a_i) = \log m$$

Lượng tin chứa trong một dãy x gồm n ký hiệu bằng n lần lượng tin của một ký hiệu (vì chúng đẳng xác suất):

$$I(x) = n \log m$$

Đơn vị lượng tin tùy theo cách chọn cơ số của log, là bit, nat, hay Hartley nếu cơ số là 2, e hay 10. Rõ ràng khi m ký hiệu của nguồn có những xác suất khác nhau và không độc lập thống kê với nhau thì lượng tin riêng từng ký hiệu phụ thuộc vào xác suất xuất hiện $p(a_i)$ của nó:

$$I(a_i) = \log \frac{1}{p(a_i)}$$

Và lượng tin chứa trong một dãy ký hiệu của nguồn không những phụ thuộc xác suất xuất hiện từng ký hiệu, mà còn phụ thuộc vào xác suất có điều kiện. Khái niệm này sẽ được đề cập đến một cách cặn kẽ hơn trong các chương sau.

1-4. MÃ HÓA

Mã hóa là một phép biến đổi cấu trúc thống kê của nguồn. Phép biến đổi ấy tương đương trên quan điểm thông tin, và nhằm mục đích cải tiến các chỉ tiêu kỹ thuật của hệ thống truyền tin. Nói một cách khác, lớp tin ở đầu vào thiết bị mã hóa được thay thế bằng một lớp tin khác tương đương và kinh tế hơn, như tốc độ hình thành tin gần với khả năng cho thông qua của kênh hơn, tính chống nhiễu của tin khi truyền qua kênh cũng tăng lên. Với khái niệm mã hóa như trên, thì phép rời rạc hóa là một ví dụ mã hóa đơn giản, biến đổi tin liên tục ở đầu vào thành một lớp tương đương tin rời rạc. Chúng ta luôn lưu ý là tương đương ở đây có nghĩa là phép biến đổi

không thay đổi lượng tin. Ví dụ chúng ta có một nguồn tin có bốn tin đẳng xác suất với sơ đồ thống kê như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Lượng tin $I(a_i)$ chứa trong một tin của A bằng:

$$I(a_i) = 1.(-\log_2 1/4) = 2 \text{ bit}$$

Bằng một phép mã hóa như sau:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &\rightarrow b_1 b_1 \\ a_2 &\rightarrow b_1 b_2 \\ a_3 &\rightarrow b_2 b_1 \\ a_4 &\rightarrow b_2 b_2 \end{aligned} \right\}$$

chúng ta đổi thành một nguồn tin mới gồm có hai ký hiệu đẳng xác suất:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lượng tin chứa trong một tin của B cũng vẫn bằng lượng tin chứa trong tin tương ứng của A, ví dụ tin $b_1 b_1$ tương ứng với tin a_1 trong A:

$$I(b_1 b_1) = 2 \log_2 2 = 2 \text{ (bit)}$$

Nói chung khi mã hóa một tin x của nguồn A bằng một tin y của nguồn B, chúng ta đã thay một dãy ký hiệu:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

trong đó $x_j = a_i$ bất kỳ, $a_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ bằng một dãy ký hiệu:

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{n'})$$

với $y_j = b_i$ bất kỳ $b_i \in B$, $i = 1, 2, \dots, m'$, $j = 1, 2, \dots, n'$

Sự biến đổi đó phải đảm bảo một đổi một và lượng tin chứa trong x và y bằng nhau:

$$I(x) = n \log m = I(y) = n' \log m'$$

Đẳng thức này viết với giả thiết các ký hiệu trong nguồn A cũng như các ký hiệu trong nguồn B đều đẳng xác suất. Thông qua phép mã hóa số ký hiệu của nguồn bị thay đổi, từ m trở thành m' , và số ký hiệu trong một tin mà người ta gọi là *từ mã* cũng được thay đổi: n trở thành n' . Độ phức tạp của thiết bị mã hóa phụ thuộc vào số ký hiệu m' của nguồn và số ký hiệu n' trong một từ, nói chính xác hơn độ phức tạp của thiết bị mã hóa tỷ lệ với tích $m'n'$. Điều này chúng ta có thể hiểu bằng cách mô tả một thiết bị mã hóa đơn giản như sau. Để tạo ra những mã hiệu có n' mã và mỗi mã có thể có m' trị bất kỳ chúng ta, thiết lập một sơ đồ khối như trong hình 1-4-1.

$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(M)}$ các dãy (tin) có thể có của nguồn A, tổng số bằng $M = m^n$

$y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(M')}$ các từ mã tương ứng của nguồn B, tổng số là $M' = m'^{n'}$ và bằng M trong trường hợp phép mã hóa là một-một.

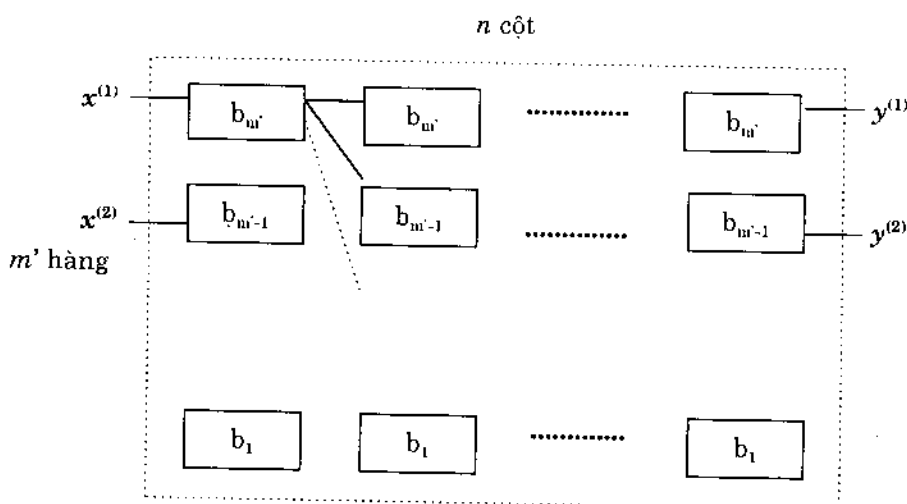
NHỮNG KHÁI NIỆM CHUNG

Như vậy để mã hóa thiết bị cần có $m'n'$ khối mạch, mỗi khối mạch đại biểu một trị của một mã trong mã hiệu. Vấn đề đặt ra ở đây là chọn số trị của một mã m' (còn gọi là *cơ số* của mã, và thực chất là số ký hiệu của nguồn mới) phải chọn như thế nào để cho thiết bị đơn giản, nghĩa là cho tích $m'n'$ tối thiểu với điều kiện lượng tin của từ mã không đổi.

$$I(y) = n' \log m' = I(x)$$

$$m'n' = m' I(x) / \log m$$

Tích $m'n'$ sẽ nhỏ nhất khi $m' = e = 2,7$, điều này nói lên lý do trong thực tế người ta thường chọn các loại mã hiệu cơ số hai, hoặc ba, nhưng thông thường là loại mã hiệu cơ số hai ($m' = 2$), gọi là *mã nhị phân*. Sau đây ta sẽ tập trung trình bày loại mã nhị phân.



Hình 1-4-1: Mô hình một thiết bị mã hóa đơn giản

1-5. ĐIỀU CHẾ VÀ GIẢI ĐIỀU CHẾ

Trong các hệ thống truyền tin liên tục, các tin hình thành từ nguồn tin liên tục được biến đổi thành các đại lượng điện (áp, dòng) và chuyển vào kênh ví dụ như trường hợp điện thoại trong thành phố. Khi muốn chuyển các tin ấy qua một cự ly lớn, phải cho qua một phép biến đổi khác gọi là *điều chế*. Điều chế có nghĩa là chuyển thông tin thành một dạng năng lượng thích hợp với môi trường truyền lan, trong đó dạng năng lượng được dùng ít bị tổn hao và ít bị biến dạng do tác động của nhiễu. Thực chất của phép điều chế là biến đổi một hoặc nhiều thông số của dạng năng lượng đã chọn theo quy luật đặc trưng cho thông tin. Ví dụ sự thông thoại giữa các thành phố với nhau được thực hiện bằng các đường tải ba, trong đó quy luật thông tin điều khiển sự biến đổi của một thông số (biên độ, tần số) của năng lượng dòng điện xoay chiều tần số thấp (vào khoảng vài chục KHz). Thông tin với cự ly xa hơn sẽ được thực hiện bằng các đường thông tin vô tuyến điện, ở đây quy luật thông tin điều khiển một hoặc nhiều thông số của năng lượng trường điện từ cao tần.

Đối với các hệ thống truyền tin rời rạc, quy luật mã hiệu điều khiển một hoặc nhiều thông số của năng lượng được dùng để mang tin. Ví dụ trong trường hợp điện báo thông thường, quy luật mã hiệu điều khiển biên độ dòng một chiều. Và với các dạng năng lượng khác như dòng điện xoay chiều hay sóng điện từ, chúng ta sẽ có các hệ thống truyền tin bằng điện báo tải ba hoặc thông tin vô tuyến điện điều chế mã.

Phép điều chế, ngoài việc chọn năng lượng thích hợp với sự truyền lan trong môi trường (sóng điện từ) còn có nhiệm vụ là tùy theo tính chất của tạp nhiễu trong kênh mà xây dựng một hệ thống tín hiệu có độ phân biệt với nhau rõ ràng, để quá trình giải điều chế có thể dễ dàng nhận dạng được dù có bị tạp nhiễu biến dạng đi phần nào.

Các phương pháp điều chế thường dùng đối với tín liên tục là *điều chế biên độ* (AM-Amplitude Modulation), *điều chế đơn biên* (SSB-Single Side Band), *điều chế tần số* (FM-Frequency Modulation) và *điều chế góc pha* (PM-Phase Modulation) cao tần; để tăng tính chống nhiễu người ta còn dùng đến những phương pháp điều chế kép. Ngoài phép điều chế cao tần có thêm một điều chế phụ như là *điều chế xung*, (điều chế các thông số của một dãy xung tuần hoàn, có chu kỳ lặp lại thỏa mãn điều kiện đã nêu ra trong định lý lấy mẫu) như *điều chế góc pha xung* (PPM-Pulse Phase Modulation), *điều chế độ rộng xung* (PDM-Pulse Duration Modulation), *điều chế tần số xung* (PFM-Pulse Frequency Modulation) và *điều chế biên độ xung* (PAM-Pulse Amplitude Modulation). Một phương pháp điều chế phụ được thường dùng là *điều chế mã xung* (PCM-Pulse Code Modulation) và *điều chế delta* (DM-Delta Modulation). Khi đó đã biến tín liên tục thành tín rời rạc, và sự điều chế cao tần hoàn toàn giống như trường hợp các hệ thống truyền tín rời rạc.

Những năm gần đây, do sự phát triển của lý thuyết thông tin và lý thuyết tín hiệu, người ta bắt đầu dùng các tín hiệu dải rộng (tín hiệu giả nhiễu, có phổ và hàm tương quan giống tạp âm trắng). Một phương pháp điều chế được nghiên cứu và áp dụng trong kỹ thuật thông tin một cách có hiệu quả là phương pháp điều chế giả nhiễu.

Đối với tín rời rạc, các phương pháp điều chế cao tần cũng giống như trường hợp thông tin liên tục, nhưng làm việc gián đoạn theo thời gian, gọi là *maníp* hay *khóa dịch*. Cụ thể có các phương pháp *maníp biên độ* (ASK-Amplitude Shift Key), *maníp pha* (PSK-Phase Shift Key) và *maníp tần số* (FSK-Frequency Shift Key). Với PSK và FSK còn có phương pháp *maníp pha tương đối* (DPSK-Differential PSK), hoặc là điều chế pha khác với quy luật maníp (hằng số trong độ rộng một xung), ví dụ luật tuyến tính hay bình phương trong độ rộng một xung. Điều chế nhiễu cũng được dùng như một điều chế phụ đối với tín rời rạc để tăng cường tính chống nhiễu của tín hiệu.

Giải điều chế là phép biến đổi ngược của phép điều chế, điều khác là tín hiệu đầu vào của thiết bị giải điều chế không phải chỉ là tín hiệu đầu ra của thiết bị điều chế, mà là một hỗn hợp tín hiệu điều chế và tạp nhiễu. Nhiệm vụ của thiết bị giải điều chế là từ trong hỗn hợp đó lọc ra được thông tin dưới dạng một hàm điện áp liên tục hoặc là một dãy xung điện rời rạc giống như thông tin ở đầu vào thiết bị điều chế, với sai số trong phạm vi cho phép.

Về phương pháp giải điều chế, nói cách khác phép lọc tín, tùy theo hỗn hợp tín hiệu nhiễu và các chỉ tiêu tối ưu về sai số (độ chính xác) phải đạt được mà chúng ta có các phương pháp lọc tín thông thường như tách sóng biên độ, tách sóng tần số, tách sóng pha, tách sóng đồng bộ, lọc tín (xác định) liên kết (coherent), lọc tín bằng phương pháp tương quan, lọc tối ưu...

CHƯƠNG 2

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Lý thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên là công cụ toán học chủ yếu để nghiên cứu các hệ thống truyền tin. Nó được dùng trong việc mô hình hóa thống kê các nguồn tin, lượng tử hóa nguồn và mô tả các quá trình truyền tin, nhận tin. Trong chương này chúng ta chỉ trình bày một số kiến thức cơ bản về lý thuyết xác suất và các quá trình ngẫu nhiên để rút ra những kết quả cần thiết cho việc ứng dụng vào nghiên cứu các hệ thống truyền tin.

2-1. XÁC SUẤT

2-1-1. Định nghĩa về xác suất

Chúng ta bắt đầu bằng một phép thử gieo xúc xắc. Tập các giá trị có thể xuất hiện khi gieo xúc xắc sẽ là:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (2-1-1)$$

ở đây mỗi giá trị xuất hiện chính là số lượng điểm chấm có trên mặt ngửa của con xúc xắc.

Khi ta gieo một hoặc một số con súc xắc thì một tập con các giá trị của S sẽ xuất hiện. Chúng ta sẽ gọi việc xuất hiện này là một *sự kiện*, nói cách khác sự kiện là một tập con bất kỳ của S . Ví dụ, ta định nghĩa sự kiện A là việc xuất hiện hai giá trị 2 và 4 như sau:

$$A = \{2, 4\} \quad (2-1-2)$$

Sự kiện bù của sự kiện A , ký hiệu là $\bar{A}$, là tập con gồm các phần tử của S nhưng không thuộc A . Ví dụ với A ở (2-1-2):

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 6\} \quad (2-1-3)$$

Hai sự kiện được gọi là *loại trừ nhau* nếu chúng không chứa một giá trị chung nào. Ví dụ hai sự kiện A và B dưới đây là loại trừ nhau:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3\} \\ B &= \{2, 4, 6\} \end{aligned} \quad (2-1-4)$$

Hai sự kiện bù nhau (A và $\bar{A}$) là loại trừ nhau.

Hợp (Union) của hai sự kiện là sự kiện chứa tất cả các giá trị có trong cả hai sự kiện. Phép hợp được ký hiệu " $\cup$ ". Ví dụ nếu:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\} \\ B &= \{1, 3, 6\} \end{aligned}$$

thì sự kiện hợp là:

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \quad (2-1-5)$$

Tất nhiên, chúng ta có $A \cup \bar{A} = S$.

Giao (Intersection) của hai sự kiện là sự kiện chứa các giá trị chung trong hai sự kiện. Phép giao hai sự kiện được ký hiệu là " $\cap$ ". Ví dụ nếu:

$$A = \{2, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 6\}$$

thì sự kiện giao là:

$$C = A \cap B = \{2, 4\} \quad (2-1-6)$$

Đương nhiên giao của hai sự kiện loại trừ nhau cho ta sự kiện rỗng, ký hiệu là $\emptyset$.
Ví dụ: $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Liên quan đến sự kiện A thuộc tập S chúng ta định nghĩa xác suất xuất hiện của sự kiện A , ký hiệu là $P(A)$.

Xác suất xuất hiện $P(A)$ của sự kiện A được định nghĩa là khả năng xuất hiện sự kiện A (khả năng xuất hiện các giá trị thuộc tập con A) khi thực hiện một phép thử có liên quan đến sự kiện A (hay khi thực hiện phép thử có tập S các giá trị có thể xuất hiện mà các giá trị thuộc A là tập con của S sẽ xuất hiện).

Rõ ràng với định nghĩa này chúng ta luôn có:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Và $P(S) = 1$ là trường hợp của sự kiện tất nhiên hay sự kiện chứa tất cả các giá trị có thể có. Nếu chúng ta có một tập các sự kiện loại trừ nhau $A_i, i = 1, 2, \dots$ thuộc tập S , tức là:

$$A_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j = 1, 2, \dots$$

thì xác suất của sự kiện hợp của chúng bằng tổng các xác suất xuất hiện của các sự kiện thành phần:

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i) \quad (2-1-7)$$

Ví dụ với phép thử gieo súc sắc ở trên và ta có các sự kiện:

$$A = \{2, 4\}$$

$$B = \{1, 3, 6\}$$

và giả thiết súc sắc là đồng đều, thì mỗi giá trị có khả năng xuất hiện khi gieo súc sắc là $1/6$ và

$$P(A) = 2/6$$

$$P(B) = 1/2$$

$$P(A \cup B) = 2/6 + 1/2 = 5/6$$

Sự kiện đồng thời và xác suất đồng thời Chúng ta đã xem xét trường hợp một phép thử gieo một con xúc sắc đơn lẻ, bây giờ chúng ta sẽ xét trường hợp hai phép thử được thực hiện đồng thời. Ví dụ: chúng ta gieo liên tiếp hay gieo đồng thời hai con xúc sắc. Lúc này chúng ta sẽ có 36 cặp giá trị $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)$. Nếu cả hai con xúc sắc là đồng đều, xác suất xuất hiện mỗi cặp giá trị sẽ là $1/36$. Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa *sự kiện đồng thời* liên quan với nó. Sự kiện đồng thời là sự kiện mà hai sự kiện riêng đồng thời xuất hiện. Một ví dụ về một sự kiện đồng thời là: con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt chẵn và con thứ hai xuất hiện giá trị 3.

Tổng quát, nếu một phép thử (thực hiện một thực nghiệm) làm xuất hiện các sự kiện $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ và phép thử thứ hai làm xuất hiện các sự kiện $B_j, j = 1, 2, \dots, m$ thì phép thử đồng thời sẽ làm xuất hiện các sự kiện đồng thời

$$(A_i, B_j) \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Ứng với mỗi sự kiện đồng thời này là một khả năng xuất hiện của nó mà ta gọi là *xác suất xuất hiện đồng thời* $P(A_i, B_j)$, và chúng ta có :

$$0 \leq P(A_i, B_j) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

Nếu các sự kiện B_j là loại trừ nhau thì chúng ta có :

$$\sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = P(A_i) \quad (2-1-8)$$

Tương tự, nếu các sự kiện A_i là loại trừ nhau thì :

$$\sum_{i=1}^n P(A_i, B_j) = P(B_j) \quad (2-1-9)$$

Nếu tất cả các sự kiện A_i và B_j loại trừ nhau thì :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = 1 \quad (2-1-10)$$

Trường hợp nhiều phép thử đồng thời có thể suy ra tương tự từ hai phép thử đồng thời.

Xác suất có điều kiện. Bây giờ chúng ta giả thiết rằng một thực nghiệm đồng thời đã được thực hiện và sự kiện đồng thời xuất hiện với xác suất $P(A, B)$. Khi đang thực nghiệm, giả thiết sự kiện B đã xuất hiện và chúng ta muốn xác định xác suất xuất hiện của sự kiện A . Xác suất này được gọi là *xác suất có điều kiện* của sự kiện A với điều kiện sự kiện B đã xuất hiện và ta định nghĩa:

$$P(A|B) = P(A, B) / P(B) \quad (2-1-11)$$

Tương tự xác suất có điều kiện của sự kiện B với điều kiện A đã xuất hiện là:

$$P(B|A) = P(A, B) / P(A) \quad (2-1-12)$$

với điều kiện $P(A) > 0$ hoặc $P(B) > 0$. Kết hợp (2-1-11) và (2-1-12) ta có :

$$P(A, B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B) \quad (2-1-13)$$

Bây giờ, nếu thực hiện một phép thử đơn lẻ mà trong đó hai sự kiện A và B cùng xuất hiện thì xác suất đồng thời được quan niệm là xác suất xuất hiện của $A \cap B$, $P(A, B) = P(A \cap B)$. Trong trường hợp này, nếu A và B loại trừ nhau $A \cap B = \emptyset$, thì $P(A, B) = 0$, dẫn đến $P(A|B) = 0$. Tương tự nếu A là tập con của B thì:

$$P(A|B) = P(A) / P(B)$$

Vì $A \cap B = A$ nếu B là tập con của A , $A \cap B = B$, thì

$$P(A|B) = P(B) / P(B) = 1$$

Một quan hệ thường dùng của xác suất có điều kiện là công thức Bayes. Công thức này nói rằng, nếu các sự kiện A_i , $i = 1, \dots, n$ là loại trừ nhau

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

và B là một sự kiện xuất hiện đồng thời với các sự kiện A_i và $P(B) > 0$ thì:

$$P(A_i | B) = P(A_i, B) / P(B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) P(A_j)} \quad (2-1-14)$$

Trong hệ thống truyền tín hiệu số, các sự kiện A_i sẽ được coi là các tin có thể được phát, B được coi là tin nhận được khi phía nguồn phát tin A_i và có nhiễu tác động, xác suất $P(A_i | B)$ được coi là xác suất để nguồn tin phát tin A_i khi phía thu đã nhận được B . Trong công thức Bayes, $P(A_i | B)$ được gọi là xác suất hậu nghiệm, còn $P(A_i)$ được gọi là xác suất tiên nghiệm.

Tính độc lập thống kê của các sự kiện. Tính độc lập thống kê của các sự kiện là một khái niệm quan trọng của lý thuyết xác suất. Để giải thích khái niệm này, chúng ta xem xét hai sự kiện A và B và xác suất có điều kiện của chúng là $P(A | B)$ hoặc $P(B | A)$. Giả thiết rằng việc xuất hiện của sự kiện A không phụ thuộc vào sự xuất hiện sự kiện B và ngược lại, chúng ta có:

$$\begin{aligned} P(A | B) &= P(A) \\ P(B | A) &= P(B) \end{aligned} \quad (2-1-15)$$

và chúng ta có:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (2-1-16)$$

Lúc này xác suất đồng thời là tích trực tiếp của hai xác suất thành phần. Trong lý thuyết xác suất người ta nói hai sự kiện là *độc lập thống kê* khi chúng thỏa mãn quan hệ (2-1-16).

Định nghĩa về tính độc lập này cũng có thể mở rộng cho nhiều sự kiện. Ví dụ A_1, A_2, A_3 được gọi là độc lập thống kê nếu:

$$P(A_1, A_2, A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \quad (2-1-17)$$

2-1-2. Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất và hàm mật độ phân bố xác suất

Giả thiết rằng một thực nghiệm có tập giá trị S và s là một phần tử của nó, $s \in S$, chúng ta sẽ định nghĩa một hàm $X(s)$ có miền xác định là S và miền giá trị của nó là một khoảng trên trục thực. Hàm $X(s)$ được gọi là một *biến ngẫu nhiên*. Ví dụ nếu chúng ta tung một đồng xu có hai mặt sấp (H) và ngửa (T), tập $S = \{H, T\}$. Ta định nghĩa một hàm:

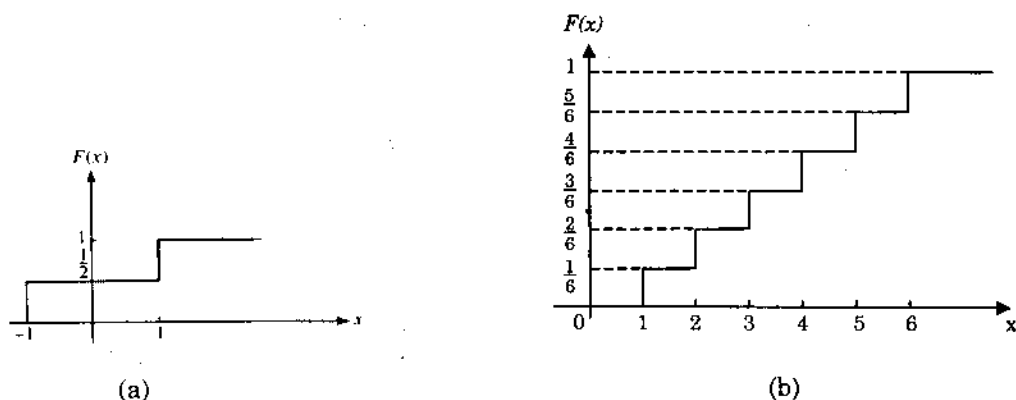
$$X(s) = \begin{cases} 1 & (s = H) \\ -1 & (s = T) \end{cases} \quad (2-1-18)$$

Đây chính là một biến số ngẫu nhiên có thể lấy giá trị 1 hoặc -1 tùy theo kết quả tung đồng tiền. Biến ngẫu nhiên này được gọi là *biến ngẫu nhiên rời rạc*.

Trong nhiều trường hợp vật lý, các thực nghiệm sẽ cho một biến có giá trị liên tục như trong trường hợp đo điện áp nhiễu của bộ khuếch đại điện tử chẳng hạn. Lúc này tập giá trị S là liên tục và ta có thể định nghĩa hàm $X(s) = s$. Hàm $X(s)$ này là một biến ngẫu nhiên liên tục. Để đơn giản cho cách ghi biến ngẫu nhiên, từ nay $X(s)$ sẽ được viết là X . Giả thiết chúng ta đã có biến ngẫu nhiên X , và sự kiện để cho biến ngẫu nhiên X nhỏ hơn một giá trị x , $\{X \leq x\}$, với $-\infty < x < \infty$ là một giá trị thực bất kỳ. Sự kiện này sẽ có một xác suất xuất hiện nhất định và chúng ta ký hiệu xác suất của sự kiện này là $F(x)$.

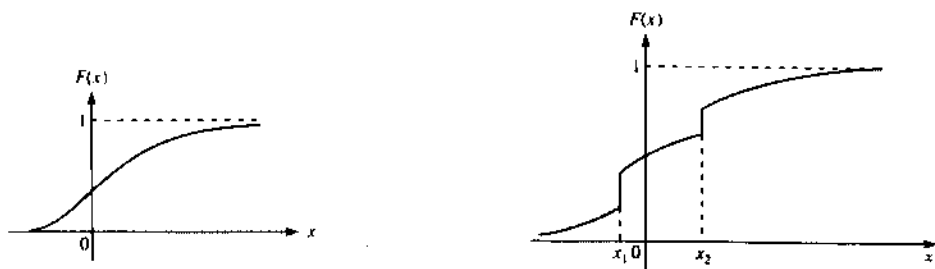
$$F(x) = P(X \leq x) \quad -\infty < x < \infty \quad (2-1-19)$$

Hàm $F(x)$ được gọi là *hàm phân bố xác suất* của biến ngẫu nhiên X . Vì $F(x)$ là xác suất xuất hiện, nên giá trị của nó cũng nằm trong dải $[0, 1]$ $0 \leq F(x) \leq 1$, ở đây $F(-\infty) = 0$ và $F(\infty) = 1$. Hàm này là một hàm không giảm.



Hình 2-1-1: Hàm phân bố xác suất khi tung đồng tiền hai mặt và con xúc sắc.

Ví dụ biến ngẫu nhiên rời rạc tương ứng với sự kiện tung đồng tiền có hai giá trị 1 và -1 như đã định nghĩa có hàm phân bố xác suất như trên hình 2-1-1 (a) và biến ngẫu nhiên rời rạc $X(s) = s$ khi tung một con xúc sắc có hàm phân bố xác suất như trên hình 2-1-1 (b).



Hình 2-1-2

Ví dụ về hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

Hình 2-1-3

Ví dụ về hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên hỗn hợp liên tục với gián đoạn

Hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục là một hàm trơn, không giảm của x như trên hình 2-1-2. Trong thực tế, chúng ta hay gặp các biến ngẫu nhiên liên tục trong từng khoảng. Hàm phân bố xác suất của nó trơn, không giảm trong từng khoảng trên trục thực và có các bước nhảy tại các giá trị rời rạc của x như trên hình 2-1-3.

Đạo hàm $p(x)$ của hàm phân bố xác suất được gọi là *hàm mật độ phân bố xác suất* của biến ngẫu nhiên X . Vậy chúng ta sẽ có

$$p(x) = dF(x)/dx, \quad -\infty < x < \infty \quad (2-1-20)$$

và

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u)du, \quad -\infty < u < \infty \quad (2-1-21)$$

Vì $F(x)$ là hàm không giảm nên $p(x) \geq 0$. Trong trường hợp biến ngẫu nhiên rời rạc hay là hỗn hợp cả hai loại thì hàm phân bố xác suất có bước nhảy nên phần rời rạc của hàm mật độ phân bố xác suất có thể tính theo công thức:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n P(X = x_i) \delta(x - x_i) \quad (2-1-22)$$

ở đây $\delta(x)$ là hàm bước nhảy đơn vị và $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các giá trị rời rạc của biến ngẫu nhiên.

Trong trường hợp phải xác định xác suất của sự kiện "giá trị của biến ngẫu nhiên X nằm trong khoảng (x_1, x_2) ", để xác định được xác suất của sự kiện này, ta thấy rằng sự kiện $\{X \leq x_2\}$ là hợp của hai sự kiện loại trừ nhau là $\{X \leq x_1\}$ và $\{x_1 < X \leq x_2\}$. Từ đó, ta có :

$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

hay

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (2-1-23)$$

Nói cách khác, xác suất của sự kiện $\{x_1 < X \leq x_2\}$ là diện tích vùng dưới của hàm mật độ xác suất trong khoảng $x_1 < X \leq x_2$.

Biến ngẫu nhiên nhiều chiều, hàm phân bố xác suất và hàm mật độ phân bố xác suất nhiều chiều. Khi chúng ta thực hiện đồng thời nhiều phép thử hoặc thực hiện một phép thử phức tạp thì chúng ta sẽ gặp một biến ngẫu nhiên nhiều chiều. Biến này đồng thời nhận một bộ giá trị ngẫu nhiên, mà mỗi giá trị có thể coi là giá trị một biến ngẫu nhiên thành phần. Hàm phân bố xác suất và hàm mật độ phân bố xác suất của biến này gọi là *hàm phân bố xác suất và mật độ phân bố xác suất* nhiều chiều.

Giả sử biến ngẫu nhiên X gồm hai biến ngẫu nhiên thành phần X_1, X_2 . Hàm phân bố xác suất hai chiều sẽ là :

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (2-1-24)$$

Hàm mật độ phân bố xác suất hai chiều là:

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2) \quad (2-1-25)$$

Khi lấy tích phân hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời theo một biến số, chúng ta thu được hàm mật độ phân bố xác suất của biến kia, có nghĩa là:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 &= p(x_2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_2 &= p(x_1) \end{aligned} \quad (2-1-26)$$

Các hàm mật độ phân bố xác suất $p(x_1)$ và $p(x_2)$ thu được từ hàm mật độ phân bố đồng thời gọi là các hàm mật độ phân bố xác suất biên. Hơn nữa, chúng ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = F(\infty, \infty) = 1 \quad (2-1-27)$$

Có thể tổng quát hóa các khái niệm và định nghĩa trên cho các biến ngẫu nhiên nhiều chiều một cách tương tự. Các biến ngẫu nhiên $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ có hàm phân bố xác suất được định nghĩa như sau:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \quad (2-1-28)$$

với $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời. Chúng ta cũng có:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-1-29)$$

Tương tự, có thể lấy tích phân hàm mật độ phân bố xác suất nhiều chiều theo một vài biến:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 = p(x_1, x_4, \dots, x_n) \quad (2-1-30)$$

Có thể diễn giải theo cách khác là $F(x_1, -\infty, -\infty, x_4, \dots, x_n) = F(x_1, x_4, \dots, x_n)$

và

$$F(x_1, -\infty, -\infty, x_4, \dots, x_n) = 0$$

Hàm phân bố xác suất có điều kiện Xét hai biến ngẫu nhiên X_1, X_2 có hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(x_1, x_2)$. Giả sử chúng ta muốn xác định xác suất để biến ngẫu nhiên $X_1 \leq x_1$ với điều kiện:

$$x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2$$

trong đó Δx_2 dương. Điều đó có nghĩa là chúng ta muốn xác định xác suất của sự kiện $(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$. Sử dụng những quan hệ đã thiết lập ở trên cho xác suất có điều kiện của một sự kiện, xác suất của sự kiện $(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$ sẽ bằng xác suất của sự kiện đồng thời $(X_1 \leq x_1, x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$ chia cho xác suất của sự kiện $(x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$:

$$P(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} \int_{x_2 - \Delta x_2}^{x_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2}{\int_{x_2 - \Delta x_2}^{x_2} p(u_2) du_2} = \frac{F(x_1, x_2) - F(x_1, x_2 - \Delta x_2)}{F(x_2) - F(x_2 - \Delta x_2)} \quad (2-1-31)$$

Giả sử các hàm mật độ phân bố xác suất $p(x_1, x_2)$ và $p(x_2)$ là các hàm liên tục trong khoảng $(x_2 - \Delta x_2, x_2)$, chúng ta có thể chia cả tử số và mẫu số của (2-1-31) cho Δx_2 và lấy giới hạn khi $\Delta x_2 \rightarrow 0$ và nhận được:

$$P(X_1 \leq x_1 | X_2 = x_2) = F(x_1 | x_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2) / \partial x_2}{\partial F(x_2) / \partial x_2} = \frac{\partial \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2 / \partial x_2}{\partial \int_{-\infty}^{x_2} p(u_2) du_2 / \partial x_2} = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} p(u_1, x_2) du_1}{p(x_2)} \quad (2-1-32)$$

đó chính là hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X_1 trong điều kiện biến X_2 đã xác định. Ta thấy rằng $F(-\infty | x_2) = 0$ và $F(\infty | x_2) = 1$. Lấy đạo hàm (2-1-32) theo x_1 nhận được hàm mật độ phân bố xác suất tương ứng $p(x_1 | x_2)$ như sau:

$$p(x_1 | x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_2)} \quad (2-1-33)$$

Chúng ta có thể biểu diễn hàm mật độ phân bố xác suất $p(x_1, x_2)$ theo các hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện:

$$p(x_1, x_2) = p(x_1 | x_2) p(x_2) = p(x_2 | x_1) p(x_1) \quad (2-1-34)$$

Có thể mở rộng các quan hệ trên cho các biến ngẫu nhiên nhiều chiều một cách tương tự. Hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ như sau:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) p(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (2-1-35)$$

Hàm phân bố xác suất có điều kiện đồng thời tương ứng với hàm mật độ phân bố xác suất $p(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$ là:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} p(u_1, u_2, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n) du_1 \dots du_k}{p(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (2-1-36)$$

Các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê Chúng ta đã định nghĩa các sự kiện độc lập thống kê. Bây giờ chúng ta sẽ định nghĩa các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê. Nếu các biến ngẫu nhiên là kết quả của phép thử chung mà sự xuất hiện một giá trị của biến này không phụ thuộc vào sự xuất hiện giá trị nào của tất cả các biến ngẫu nhiên khác thì chúng ta nói là chúng là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê với nhau. Vậy nếu các biến $X_1, \dots, X_n$ là độc lập thống kê thì :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1)F(x_2) \dots F(x_n) \quad (2-1-37)$$

và

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2) \dots p(x_n) \quad (2-1-38)$$

2-1-3. Hàm của biến ngẫu nhiên

Một vấn đề thường gặp trong các ứng dụng thực tế là cho một biến ngẫu nhiên X được đặc trưng bởi hàm mật độ phân bố xác suất $p(x)$, cần xác định hàm mật độ phân bố của biến ngẫu nhiên $Y = g(X)$ với $g(X)$ là một hàm của X . Nếu ánh xạ từ X tới Y là một-một thì việc xác định $p(y)$ là khá đơn giản, nhưng khi ánh xạ đó không phải là một-một (ví dụ $Y = X^2$) thì việc tính $p(y)$ sẽ phức tạp hơn.

Ví dụ 2-1-1

Tính hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên Y với Y được định nghĩa là

$$Y = aX + b \quad (2-1-39)$$

với a, b là hai hằng số. Giả thiết $a > 0$ ($a < 0$ thì cách làm tương tự) và ánh xạ từ X tới Y được biểu diễn trên hình 2-1-4 (a) là tuyến tính và đơn điệu. Gọi $F_X(x)$ và $F_Y(y)$ là các hàm phân bố xác suất của hai biến X, Y . Ta có:

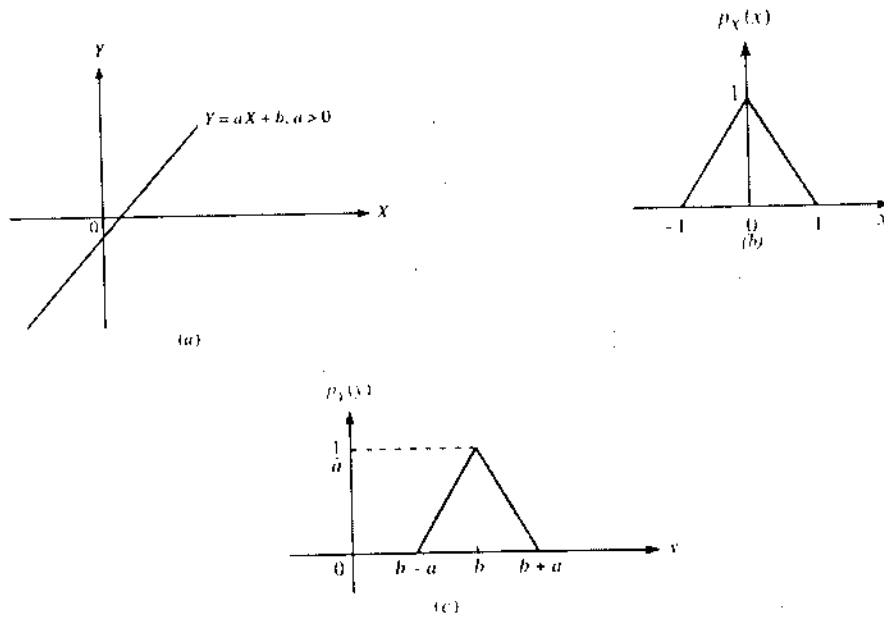
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{(y-b)/a} p_X(x) dx = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (2-1-40)$$

Lấy đạo hàm (2-1-40) theo y ta được:

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (2-1-41)$$

Như vậy (2-1-40) và (2-1-41) cho ta mối quan hệ giữa hàm phân bố xác suất và mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên Y theo các hàm tương ứng của biến ngẫu nhiên X . Trên hình 2-1-4 (b) và (c) biểu diễn các hàm mật độ phân bố xác suất của hai biến ngẫu nhiên X và Y .



Hình 2-1-4: Biến đổi tuyến tính của biến ngẫu nhiên X và ví dụ về hàm mật độ phân bố xác suất tương ứng của X và Y

Ví dụ 2-1-2

Xét biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa như sau:

$$Y = aX^3 + b, \quad a > 0 \quad (2-1-42)$$

Cũng giống như ví dụ 2-1-1, ánh xạ từ biến ngẫu nhiên X tới biến ngẫu nhiên Y là một-một. Từ đó:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX^3 + b \leq y) = P\left[X \leq \left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/3}\right] = F_X\left[\left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/3}\right] \quad (2-1-43)$$

Lấy đạo hàm của (2-1-43) theo y được mối quan hệ giữa các hàm mật độ phân bố xác suất:

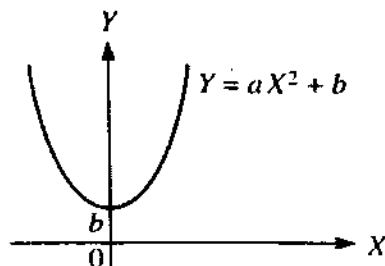
$$p_Y(y) = \frac{1}{3a[(y-b)/a]^{2/3}} p_X\left[\left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/3}\right] \quad (2-1-44)$$

Ví dụ 2-1-3

Cho biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa là

$$Y = aX^2 + b, \quad a > 0 \quad (2-1-45)$$

Khác với hai ví dụ 2-1-1 và 2-1-2, ánh xạ từ X đến Y không phải là một-một.



Hình 2-1-5: Bình phương của biến ngẫu nhiên X

Ta có:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX^2 + b \leq y) = P\left(|X| \leq \sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) = F_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \quad (2-1-46)$$

Lấy đạo hàm của (2-1-46) theo y ta thu được:

$$p_Y(y) = \frac{p_X\left[\sqrt{(y-b)/a}\right]}{2a\sqrt{(y-b)/a}} + \frac{p_X\left[-\sqrt{(y-b)/a}\right]}{2a\sqrt{(y-b)/a}} \quad (2-1-47)$$

Ở trên chúng ta đã giả thiết là phương trình $g(x) = ax^2 + b = y$ có hai nghiệm thực x_1 và x_2 , có thể viết lại (2-1-47) thành:

$$p_Y(y) = \frac{p_X\left[x_1 = \sqrt{(y-b)/a}\right]}{\left|g'\left[x_1 = \sqrt{(y-b)/a}\right]\right|} + \frac{p_X\left[x_2 = -\sqrt{(y-b)/a}\right]}{\left|g'\left[x_2 = -\sqrt{(y-b)/a}\right]\right|} \quad (2-1-48)$$

$g'(x)$ ký hiệu đạo hàm của $g(x)$.

Trong trường hợp tổng quát, giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm thực của của phương trình $g(x) = y$. Khi đó hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = g(X)$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (2-1-49)$$

với $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ là hàm của y .

Bây giờ chúng ta xét tới hàm của biến ngẫu nhiên nhiều chiều. Giả sử $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên với hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên với:

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-1-50)$$

Giả sử $g_i(X_1, X_2, \dots, X_n), i = 1, 2, \dots, n$ là các hàm đơn trị, có vi phân từng phần liên tục và khả đảo, thế thì $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ có thể được biểu diễn dưới dạng:

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

$$X_i = g_i^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-1-51)$$

Ta giả thiết các hàm ngược này cũng đơn trị với vi phân từng phần liên tục. Vấn đề là xác định hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ký hiệu là $p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Gọi R_Y là miền xác định của các biến ngẫu nhiên $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ trong không gian n chiều và R_Y là ảnh của R_X (ảnh xạ một-một) được xác định bởi các hàm $Y_i = g_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Rõ ràng ta có:

$$\int_{R_Y} \dots \int p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n = \int_{R_X} \dots \int p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2-1-52)$$

Đổi biến $x_i = g_i^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv g_i^{-1}, i = 1, 2, \dots, n$ trong vế phải của biểu thức (2-1-52), ta có:

$$\int_{R_Y'} \dots \int p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n = \int_{R_Y'} \dots \int p_X(x_1 = g_1^{-1}, x_2 = g_2^{-1} \dots x_n = g_n^{-1}) |J| dy_1 dy_2 \dots dy_n \quad (2-1-53)$$

với J là định thức jacobí của phép biến đổi, được xác định bằng định thức:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_n} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (2-1-54)$$

Như vậy, hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ là:

$$p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_X(x_1 = g_1^{-1}, x_2 = g_2^{-1}, \dots, x_n = g_n^{-1}) |J| \quad (2-1-55)$$

Ví dụ 2-1-4

Một quan hệ hàm quan trọng giữa hai biến ngẫu nhiên n chiều thường gặp trong thực tế là phép biến đổi tuyến tính:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2-1-56)$$

với các hệ số α_{ij} là hằng số. Ta có thể dùng dạng ma trận cho phép biến đổi trên:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2-1-57)$$

X và Y là hai vectơ n chiều, A là ma trận $n \times n$. Giả sử A khả đảo, do đó:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y} \quad (2-1-58)$$

Tương đương như vậy, ta có:

$$X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2-1-59)$$

trong đó b_{ij} là các phần tử của ma trận nghịch đảo A^{-1} . Định thức jacobí của phép biến đổi là $J = 1/\det A$. Do đó:

$$p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_X(x_1 = \sum_{j=1}^n b_{1j}y_j, x_2 = \sum_{j=1}^n b_{2j}y_j, \dots, x_n = \sum_{j=1}^n b_{nj}y_j) \frac{1}{|\det A|} \quad (2-1-60)$$

2-1-4. Trị trung bình thống kê của các biến ngẫu nhiên

• Trị trung bình đóng vai trò quan trọng trong việc biểu thị kết quả của thực nghiệm và định nghĩa các biến ngẫu nhiên trong quá trình thực nghiệm. Chúng ta đặc biệt quan tâm tới các mô men cấp một và cấp hai của một biến ngẫu nhiên đơn và các mô men chung, cũng như sự tương quan và hàm hợp biến giữa bất kỳ một cặp biến ngẫu nhiên trong một tập hợp các biến ngẫu nhiên. Hàm đặc tính của một biến ngẫu nhiên và hàm đặc tính hợp của một tập các biến ngẫu nhiên cho phép ta khảo sát một cách thuận tiện các quá trình ngẫu nhiên tương ứng. Phần này sẽ đề cập đến những định nghĩa về các giá trị trung bình thống kê quan trọng đó.

Trước hết chúng ta xét biến ngẫu nhiên X được mô tả bởi hàm mật độ xác suất $p(x)$. Trị trung bình hay kỳ vọng toán học của X được định nghĩa như sau :

$$E(X) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (2-1-61)$$

ở đây $E(\cdot)$ ký hiệu của kỳ vọng toán học (trung bình thống kê), nó cũng là mô men cấp đầu tiên của biến ngẫu nhiên X . Một cách tổng quát, mô men cấp n được định nghĩa như sau:

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx \quad (2-1-62)$$

Bây giờ chúng ta định nghĩa một biến ngẫu nhiên $Y = g(X)$ trong đó $g(X)$ là một hàm nào đó của biến ngẫu nhiên X . Kỳ vọng toán học của Y là:

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx \quad (2-1-63)$$

Đặc biệt nếu $Y = (X - m_x)^n$ ở đây m_x là giá trị trị trung bình của X , thì:

$$E(Y) = E[(X - m_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n p(x) dx \quad (2-1-64)$$

Giá trị này được gọi là mô men trung tâm cấp n của biến ngẫu nhiên X . Khi $n = 2$ thì mô men trung tâm được gọi là độ lệch trung bình bình phương hay sai phương của biến ngẫu nhiên và được ký hiệu σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x)dx \quad (2-1-65)$$

Chú ý rằng kỳ vọng toán học của một hằng số chính là hằng số đó, chúng ta thu được:

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - m_x^2 \quad (2-1-66)$$

Trong trường hợp hai biến ngẫu nhiên X_1 và X_2 với hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời là $p(x_1, x_2)$, mô men hợp được định nghĩa là:

$$E(X_1^k X_2^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-1-67)$$

và mô men trung tâm hợp:

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

$$E[(X_1 - m_1)^k (X_2 - m_2)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^k (x_2 - m_2)^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-1-68)$$

ở đây $m_i = E(X_i)$. Đặc biệt quan trọng là mô men hợp và mô men trung tâm hợp ứng với $k = n = 1$. Các mô men hợp này được gọi là *hàm tương quan* và *hàm hiệp biến* giữa hai biến ngẫu nhiên X_1 và X_2 .

Trong trường hợp biến ngẫu nhiên nhiều chiều chúng ta có thể định nghĩa các mô men hợp các cấp. Tuy nhiên những mô men được ứng dụng nhiều trong thực tế là hàm tương quan và hàm hiệp biến giữa các cặp biến ngẫu nhiên. Cụ thể hơn, giả sử X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các biến ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất đồng thời $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $p(x_i, x_j)$ là hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X_i và X_j , thì hàm tương quan giữa X_i và X_j được xác định bằng mô men hợp:

$$E(X_i X_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2-1-69)$$

và hàm hiệp biến của X_i và X_j là:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) p(x_i, x_j) dx_i dx_j \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j - m_i m_j = E(X_i X_j) - m_i m_j \end{aligned} \quad (2-1-70)$$

Ma trận $n \times n$ với các thành phần μ_{ij} được gọi là *ma trận hiệp biến* của các biến ngẫu nhiên X_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Hai biến ngẫu nhiên được gọi là không tương quan với nhau nếu và chỉ nếu $E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = m_i m_j$. Trong trường hợp đó giá trị hàm hiệp biến $\mu_{ij} = 0$. Khi X_i và X_j độc lập thống kê với nhau thì chúng không tương quan, nhưng ngược lại nếu chúng không tương quan thì không nhất thiết là chúng sẽ độc lập thống kê với nhau.

Hai biến ngẫu nhiên được gọi là trực giao nếu và chỉ nếu $E(X_i X_j) = 0$. Điều này xảy ra khi X_i và X_j là không tương quan với nhau và ít nhất một biến có trị trung bình bằng không.

Hàm đặc tính *Hàm đặc tính* của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là:

$$E(e^{jvX}) = \psi(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvX} p(x) dx \quad (2-1-71)$$

Biến số v là thực và $j^2 = -1$. Chúng ta chú ý rằng $\psi(jv)$ có thể coi là biến đổi Furiê của hàm mật độ phân bố xác suất $p(x)$ (mặc dù khác về dấu của phần mũ, chúng ta vẫn quy ước gọi là biến đổi Furiê). Biến đổi Furiê ngược là:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(jv) e^{-jvX} dv \quad (2-1-72)$$

Sử dụng hàm đặc tính cho phép ta xác định những mô men của biến ngẫu nhiên ([6]). Từ công thức (2-1-71) ta lấy đạo hàm theo v :

$$\frac{d\psi(jv)}{dv} = j \int_{-\infty}^{\infty} x e^{jvX} p(x) dx$$

Tính đạo hàm tại $v = 0$ chúng ta thu được mô men cấp một là:

$$E(X) = m_x = -j \frac{d\psi(jv)}{dv} \Big|_{v=0} \quad (2-1-73)$$

Mô men bậc n của biến ngẫu nhiên có thể được xác định như sau:

$$E(X^n) = (-j)^n \frac{d^n \psi(jv)}{dv^n} \Big|_{v=0} \quad (2-1-74)$$

Như vậy, có thể tính những mô men của biến ngẫu nhiên xuất phát từ hàm đặc tính. Mặt khác giả sử hàm đặc tính có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại $v = 0$, là:

$$\psi(jv) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^n \psi(jv)}{dv^n} \right]_{v=0} \frac{v^n}{n!} \quad (2-1-75)$$

Kết hợp (2-1-74) và (2-1-75) ta có thể biểu diễn hàm đặc tính qua các mô men của nó như sau:

$$\psi(jv) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X^n) \frac{(jv)^n}{n!} \quad (2-1-76)$$

Hàm đặc tính cho phép chúng ta xác định dễ dàng hàm mật độ xác suất của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê. Ví dụ, giả sử X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê và:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad (2-1-77)$$

Để xác định hàm mật độ xác suất của Y , chúng ta sẽ tìm hàm đặc tính của nó và sau đó tính toán biến đổi Furiê ngược, như vậy:

$$\begin{aligned} \psi_Y(jv) &= E(e^{jvY}) = E\left\{ \exp\left(jv \sum_{i=1}^n X_i\right) \right\} = E\left\{ \prod_{i=1}^n (e^{jvX_i}) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n e^{jvx_i} \right) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2-1-78)$$

Vì các biến ngẫu nhiên là độc lập thống kê với nhau nên $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n)$ do đó tích phân bậc n trong (2-1-78) trở thành tích của các tích phân và có thể viết đơn giản thành:

$$\psi_Y(jv) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(jv) \quad (2-1-79)$$

Nếu có thêm điều kiện các biến ngẫu nhiên X_i có phân bố đồng nhất thì các hàm $\psi_{X_i}(jv)$ là đồng nhất và ta có:

$$\psi_Y(jv) = [\psi_X(jv)]^n \quad (2-1-80)$$

Cuối cùng hàm mật độ phân bố xác suất của Y được xác định từ biến đổi Furiê ngược của $\psi_Y(jv)$ theo (2-1-72).

Do hàm đặc tính của tổng n biến ngẫu nhiên độc lập thống kê bằng tích các hàm đặc tính của các biến X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), nên hàm mật độ phân bố xác suất của Y là tích chập cấp n của các hàm

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

mật độ phân bố xác suất của các biến X_i . Việc tính tích chập này thường phức tạp hơn là phương pháp sử dụng hàm đặc tính ở trên.

Chúng ta cũng hay gặp các biến ngẫu nhiên n chiều và tương tự ta có biến đổi Furiê n chiều của hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời. Cụ thể nếu X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các biến ngẫu nhiên với hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì hàm đặc tính n chiều được định nghĩa như sau:

$$\psi(jv_1, jv_2, \dots, jv_n) = E \left[\exp \left(j \sum_{i=1}^n v_i X_i \right) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j \sum_{i=1}^n v_i x_i \right) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2-1-81)$$

Thường chúng ta hay chú ý tới hàm đặc tính hai chiều:

$$\psi(jv_1, jv_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(v_1 x_1 + v_2 x_2)} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-1-82)$$

Chúng ta nhận xét rằng đạo hàm riêng của $\psi(jv_1, jv_2)$ theo v_1 và v_2 có thể sử dụng để tìm ra mô men đồng thời:

$$E(X_1 X_2) = - \frac{\partial^2 \psi(jv_1, jv_2)}{\partial v_1 \partial v_2} \bigg|_{v_1=v_2=0} \quad (2-1-83)$$

Những mô men cấp cao hơn có thể suy ra tương tự.

2-1-5. Một số phân bố xác suất thường gặp

Trong phần này chúng ta sẽ xem xét các biến ngẫu nhiên hay gặp trong thực tế và các hàm phân bố xác suất, hàm mật độ phân bố xác suất và các mô men của chúng. Đầu tiên là phân bố nhị thức, phân bố này là phân bố của một biến ngẫu nhiên rời rạc, và sau đó chúng ta sẽ xét phân bố xác suất của một số biến ngẫu nhiên liên tục.

Phân bố nhị thức Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc, chỉ nhận hai giá trị $X = 0$ hoặc $X = 1$ với xác suất tương ứng là p và $1 - p$. Hàm mật độ phân bố xác suất của X được biểu diễn trên hình 2-1-6. Bây giờ giả thiết rằng

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

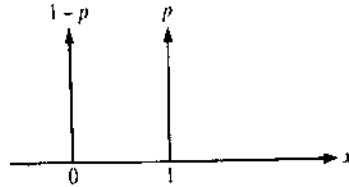
ở đây X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê và phân bố đồng nhất với hàm mật độ xác suất biểu thị trong hình 2-1-6.

Vấn đề đặt ra là xác định hàm phân bố xác suất của Y . Trước hết chúng ta có nhận xét rằng Y là một tập hợp các số nguyên từ 0 tới n vì nó là tổng của n số, mà mỗi số là 0 hoặc 1. Xác suất mà $Y = 0$ là xác suất tất cả các biến $X_i = 0$. Vì các biến X_i là độc lập thống kê nên ta có:

$$P(Y = 0) = (1 - p)^n$$

Xác suất để $Y = 1$ là xác suất có một biến $X_i = 1$ và các biến X_i khác đều bằng 0. Như vậy sẽ có n trường hợp khác nhau và:

$$P(Y = 1) = np(1 - p)^{n-1}$$



Hình 2-1-6. Hàm phân bố xác suất biến ngẫu nhiên X

Một cách tổng quát, xác suất $Y = k$ là xác suất để k biến $X_i = 1$ và $n - k$ biến còn lại bằng 0. Ký hiệu:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2-1-84)$$

Từ các điều trên ta có :

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2-1-85)$$

Trong đó $\binom{n}{k}$ là hệ số nhị thức. Như vậy hàm phân bố xác suất của Y có thể được xác định như sau:

$$p(y) = \sum_{k=0}^n P(Y = k) \delta(y - k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta(y - k) \quad (2-1-86)$$

Hàm phân bố xác suất của Y là :

$$F(y) = P(Y \leq y) = \sum_{k=0}^{[y]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2-1-87)$$

ở đây $[y]$ là số nguyên m lớn nhất mà $m \leq y$. Hàm phân bố xác suất trong (2-1-87) đặc trưng cho một biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức.

Hai mô men của đầu tiên của Y là:

$$\begin{aligned} E(Y) &= np \\ E(Y^2) &= np(1-p) + n^2 p^2 \\ \sigma^2 &= np(1-p) \end{aligned} \quad (2-1-88)$$

và hàm đặc tính là:

$$\varphi(j\nu) = (1 - p + pe^{j\nu})^n \quad (2-1-89)$$

Phân bố đều Hàm mật độ phân bố xác suất và phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X phân bố đều được trình bày trên hình 2-1-7. Hai mô men đầu tiên của X là:

$$E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab) \quad (2-1-90)$$

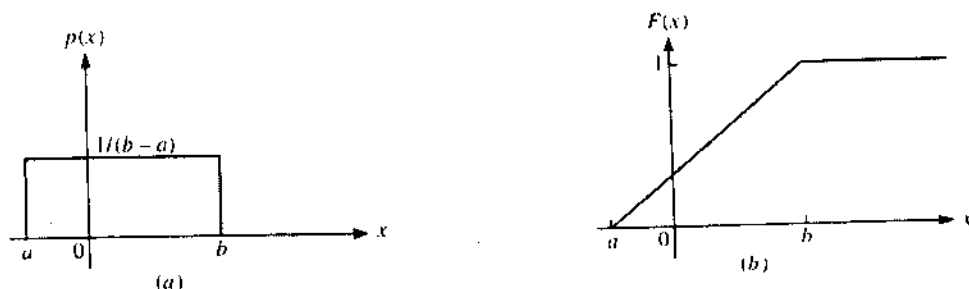
$$\sigma^2 = \frac{1}{12} (a - b)^2$$

và hàm đặc tính là:

$$\psi(j\nu) = \frac{e^{j\nu b} - e^{j\nu a}}{j\nu(b-a)} \quad (2-1-91)$$

Phân bố gaussian (phân bố chuẩn) Hàm mật độ phân bố xác suất của một biến ngẫu nhiên phân bố gaussian là:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2} \quad (2-1-92)$$



Hình 2-1-7: Hàm phân bố và mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên phân bố đều trong đó m_x là trị trung bình và σ^2 là sai phương của biến ngẫu nhiên. Hàm phân bố xác suất là:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(u-m_x)^2/2\sigma^2} du$$

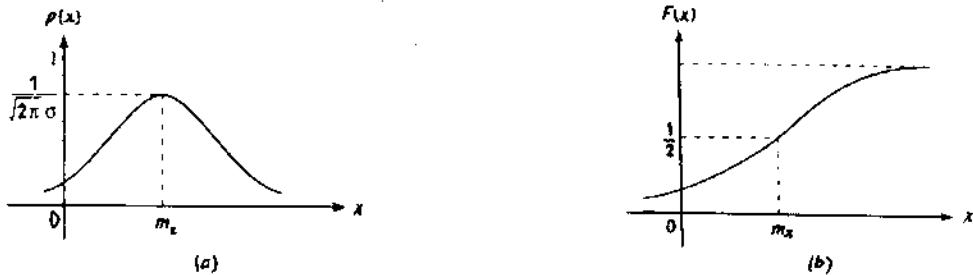
$$= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m_x)/\sqrt{2}\sigma} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (2-1-93)$$

ở đây $erf(x)$ là ký hiệu của hàm lỗi và được định nghĩa như sau:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2-1-94)$$

Hàm phân bố xác suất cũng có thể biểu diễn ở dạng hàm bù lỗi như sau:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x - m_x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$



Hình 2-1-8: Hàm phân bố và mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên phân bố gaussian.

trong đó:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf}(x) \quad (2-1-95)$$

Chú ý rằng $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$, $\text{erfc}(-x) = 2 - \text{erfc}(x)$, $\text{erf}(0) = \text{erfc}(\infty) = 0$ và $\text{erf}(\infty) = \text{erfc}(0) = 1$. Với $x > m_x$ thì hàm bù lỗi là vùng bên dưới ngưỡng của hàm mật độ phân bố xác suất gaussian. Với x lớn, hàm bù lỗi $\text{erfc}(x)$ có thể được biểu diễn gần đúng bằng chuỗi như sau:

$$\text{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{2^2 x^4} - \frac{1.3.5}{2^3 x^6} + \dots \right) \quad (2-1-96)$$

trong đó sai số của phép xấp xỉ nhỏ hơn số hạng cuối cùng.

Hàm thường được dùng cho vùng dưới ngưỡng của hàm mật độ phân bố xác suất gaussian được ký hiệu là $Q(x)$ và được định nghĩa như sau:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad x \geq 0 \quad (2-1-97)$$

So sánh (2-1-95) và (2-1-97) ta có:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (2-1-98)$$

Hàm đặc tính của biến ngẫu nhiên gaussian với trị trung bình m_x và sai phương σ^2 là:

$$\psi(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2} \right] dx = e^{jvm_x - (1/2)v^2\sigma^2} \quad (2-1-99)$$

Các mô men trung tâm của biến ngẫu nhiên gaussian là:

$$E[(X - m_x)^k] \equiv \mu_k = \begin{cases} 1.3 \dots (k-1)\sigma^k & (k \text{ chẵn}) \\ 0 & (k \text{ lẻ}) \end{cases} \quad (2-1-100)$$

và mô men có thể được biểu diễn qua mô men trung tâm như sau:

$$E(X^k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} m_x^i \mu_{k-i} \quad (2-1-101)$$

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad (2-1-102)$$
$$\psi_V(jv) = \prod_{i=1}^n \psi_{N_i}(jv) = \prod_{i=1}^n e^{jvm_i - v^2 \sigma_i^2 / 2} = e^{jvm_V - v^2 \sigma^2 / 2} \quad (2-1-103)$$
$$\begin{aligned} m_y &= \sum_{i=1}^n m_i \\ \sigma^2_y &= \sum_{i=1}^n \sigma^2_i \end{aligned} \quad (2-1-104)$$

Phân bố Khi bình phương (Khi-Square Distribution) Nếu $Y = X^2$ trong đó X là một biến ngẫu nhiên gaussian thì Y sẽ có phân bố Khi bình phương. Chúng ta phân biệt hai loại phân bố Khi bình phương. Loại thứ nhất được gọi là *phân bố Khi bình phương trung tâm* khi X có trị trung bình bằng không. Loại thứ hai gọi là *phân bố Khi bình phương không trung tâm* khi X có trị trung bình khác không ([6]).

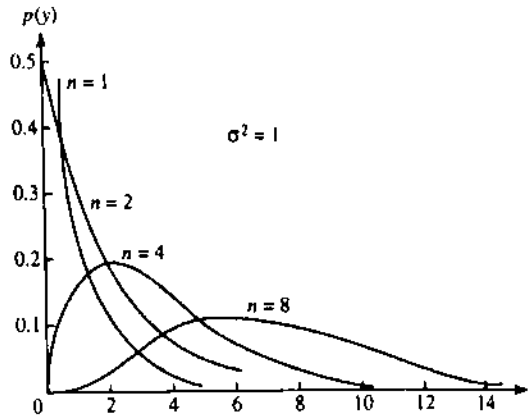
$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma} e^{-y/2\sigma^2}, \quad y \geq 0 \quad (2-1-105)$$
$$F_Y(y) = \int_0^y p_Y(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u/2\sigma^2} du \quad (2-1-106)$$
$$\varphi(jv) = \frac{1}{(1 - j2v\sigma^2)^{1/2}} \quad (2-1-107)$$
$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (2-1-108)$$

36

$$\psi_Y(jv) = \frac{1}{(1 - j2v\sigma^2)^{n/2}} \quad (2-1-109)$$

Biến đổi Furiê ngược của hàm đặc tính cho ta hàm mật độ phân bố xác suất:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2\sigma^2}, y \geq 0 \quad (2-1-110)$$



Hình 2-1-9: Hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên phân bố Khi bình phương. trong đó $\Gamma(p)$ gọi là *hàm gamma* được định nghĩa như sau:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, p > 0 \quad (2-1-111)$$

$$\Gamma(p) = (p-1)!, p \text{ là số nguyên}, p > 0$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(3/2) = (1/2)\sqrt{\pi}$$

Hàm mật độ phân bố xác suất này là tổng quát hóa của (2-1-105) và được gọi là hàm mật độ phân bố xác suất Khi bình phương (hoặc gamma) với n mức tự do. Phân bố này được minh họa trong hình 2-1-9.

Trường hợp $n = 2$ ta có *phân bố mũ*. Hai mô men đầu tiên của Y là:

$$\begin{aligned} E(Y) &= n\sigma^2 \\ E(Y^2) &= 2n\sigma^4 + n^2\sigma^4 \\ \sigma_Y^2 &= 2n\sigma^4 \end{aligned} \quad (2-1-112)$$

Hàm phân bố xác suất của Y là:

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} u^{n/2-1} e^{-u/2\sigma^2} du, y \geq 0 \quad (2-1-113)$$

Khi n chẵn phép tích phân (2-1-113) có thể biểu diễn ở dạng ẩn. Cụ thể, đặt $m = n/2$ trong đó m là số nguyên thì bằng phép tích phân từng phần ta có thể thu được biểu thức:

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{y}{2\sigma^2} \right)^k, \quad y \geq 0 \quad (2-1-114)$$

Bây giờ chúng ta sẽ đề cập tới phân bố Khi bình phương không trung tâm, thu được từ việc bình phương của một biến ngẫu nhiên gaussian có trị trung bình khác không. Nếu X là biến ngẫu nhiên gaussian với trị trung bình m_x và sai phương là σ^2 , thì biến ngẫu nhiên $Y = X^2$ có hàm mật độ phân bố xác suất thu được bằng cách ứng dụng kết quả ở hai công thức (2-1-47) và (2-1-92):

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma} e^{-(y+m_x^2)/2\sigma^2} \cosh\left(\frac{\sqrt{y} m_x}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0 \quad (2-1-115)$$

Hàm đặc tính tương ứng với hàm mật độ phân bố xác suất này là:

$$\psi_Y(j\nu) = \frac{1}{(1 - j2\nu\sigma^2)^{1/2}} e^{jm_x^2\nu/(1 - j2\nu\sigma^2)} \quad (2-1-116)$$

Để tổng quát hóa kết quả này, đặt Y là tổng bình phương của các biến ngẫu nhiên gaussian được định nghĩa ở (2-1-108). Với X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê với trị trung bình m_i và sai phương đồng nhất bằng σ^2 , khi đó hàm đặc tính của Y thu được từ (2-1-116) với quan hệ trong hệ thức (2-1-79) là:

$$\psi_Y(j\nu) = \frac{1}{(1 - j2\nu\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(\frac{j\nu \sum_{i=1}^n m_i^2}{1 - j2\nu\sigma^2}\right) \quad (2-1-117)$$

Biến đổi Furiê ngược hàm đặc tính này ta thu được hàm mật độ phân bố xác suất là:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{y}{s^2} \right)^{(n-2)/4} e^{-(s^2+y)/2\sigma^2} I_{n/2-1}\left(\sqrt{y} \frac{s}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0 \quad (2-1-118)$$

với

$$s^2 = \sum_{i=1}^n m_i^2 \quad (2-1-119)$$

và $I_\alpha(x)$ là hàm Bessel loại một cải tiến cấp α và có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi vô hạn như sau:

$$I_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\alpha+2k}}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)}, \quad x \geq 0 \quad (2-1-120)$$

Hàm mật độ phân bố xác suất biểu thị ở công thức (2-1-118) được gọi là hàm mật độ phân bố xác suất Khi bình phương không trung tâm với n độ tự do. Thông số s^2 được gọi là *thông số không trung tâm* của phân bố.

Hàm phân bố xác suất của phân bố Khi bình phương không trung tâm với n độ tự do là:

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{u}{s^2} \right)^{(n-2)/4} e^{-(s^2+u)/2\sigma^2} I_{n/2-1}\left(\sqrt{u} \frac{s}{\sigma^2}\right) du \quad (2-1-121)$$

Không có biểu thức dạng ẩn cho tích phân này. Tuy nhiên khi $m = n/2$ là một số nguyên, hàm phân bố xác suất có thể biểu diễn ở dạng hàm Q (gọi là *hàm Marcum tổng quát*) được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} Q_m(a, b) &= \int_a^b x \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} e^{-(x^2+a^2)/2} I_{m-1}(ax) dx \\ &= Q_1(a, b) + e^{(a^2+b^2)/2} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k I_k(ab) \end{aligned} \quad (2-1-122)$$

trong đó:

$$Q_1(a, b) = e^{-(a^2+b^2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k I_k(ab), \quad b > a > 0 \quad (2-1-123)$$

Nếu chúng ta đổi biến tích phân trong (2-1-121) từ u thành x với $x^2 = u/\sigma^2$ và đặt $a^2 = s^2/\sigma^2$ thì ta thu được:

$$F_Y(y) = 1 - Q_m\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{\sqrt{y}}{\sigma}\right) \quad (2-1-124)$$

Cuối cùng, hai mô men đầu tiên của biến ngẫu nhiên phân bố Khi bình phương không trung tâm là:

$$\begin{aligned} E(Y) &= n\sigma^2 + s^2 \\ E(Y^2) &= 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2 + (n\sigma^2 + s^2) \\ \sigma_Y^2 &= 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2 \end{aligned} \quad (2-1-125)$$

Phân bố Rayleigh (Rayleigh Distribution) ([5]) Phân bố Rayleigh thường được dùng làm mô hình thống kê của những tín hiệu truyền qua các kênh radio như hệ thống radio tổ ong. Phân bố này có liên hệ với phân bố Khi bình phương trung tâm. Để minh họa điều này, xét biến ngẫu nhiên $Y = X_1^2 + X_2^2$ trong đó X_1 và X_2 là những biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê có trị trung bình bằng 0, sai phương σ^2 . Từ đó ta thấy Y có phân bố Khi bình phương với hai độ tự do. Hàm mật độ phân bố xác suất của Y được xác định như sau:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-y/2\sigma^2}, \quad y \geq 0 \quad (2-1-126)$$

Bây giờ ta định nghĩa một biến ngẫu nhiên mới:

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{Y} \quad (2-1-127)$$

Dễ dàng thấy rằng hàm mật độ phân bố xác suất của R là:

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0 \quad (2-1-128)$$

Đây là hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên có phân bố Rayleigh và hàm phân bố xác suất tương ứng là:

$$F_R(r) = \int_0^r \frac{u}{\sigma^2} e^{-u^2/2\sigma^2} du = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0 \quad (2-1-129)$$

Các mô men của R là:

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma(1 + k/2) \quad (2-1-130)$$

Sai phương của R là:

$$\sigma_r^2 = (2 - \frac{1}{2}\pi)\sigma^2 \quad (2-1-131)$$

Hàm đặc tính của biến ngẫu nhiên phân bố Rayleigh là:

$$\psi_R(jv) = \int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} e^{jvr} dr \quad (2-1-132)$$

Có thể biểu diễn tích phân này như sau:

$$\begin{aligned} \psi_R(jv) &= \int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \cos vr \cdot dr + j \int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \sin vr \cdot dr \\ &= {}_1F_1(1, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}v^2\sigma^2) + j\sqrt{\frac{1}{2}}\pi v\sigma^2 e^{-v^2\sigma^2/2} \end{aligned} \quad (2-1-133)$$

Trong đó ${}_1F_1(1, 1/2, -a)$ là hàm hợp siêu hình học và được định nghĩa là:

$${}_1F_1(\alpha, \beta, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)x^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+k)k!}, \quad \beta \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2-1-134)$$

Người ta đã chứng minh được rằng ${}_1F_1(1, 1/2, -a)$ có thể biểu diễn thành:

$${}_1F_1(1; 1/2; -a) = -e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(2k-1)k!} \quad (2-1-135)$$

Để tổng quát hóa những kết quả trên, ta xét biến ngẫu nhiên:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (2-1-136)$$

trong đó $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê, phân bố đồng nhất và có trị trung bình bằng không. Biến ngẫu nhiên R gọi là biến ngẫu nhiên có phân bố Rayleigh tổng quát. Như vậy $Y = R^2$ là phân bố Khi bình phương với n mức tự do. Hàm mật độ phân bố xác suất của nó được xác định bởi (2-1-110). Để dàng tìm ra hàm mật độ phân bố xác suất của R bằng cách đổi biến trong (2-1-110):

$$p_R(r) = \frac{r^{n-1}}{2^{(n-2)/2} \sigma^n \Gamma(\frac{1}{2}n)} e^{-r^2/2\sigma^2}, \quad r \geq 0 \quad (2-1-137)$$

Từ sự liên hệ giữa phân bố Khi bình phương trung tâm và phân bố Rayleigh, ta có thể suy ra sự liên hệ giữa các hàm phân bố xác suất tương ứng. Do vậy, với mọi n hàm phân bố xác suất của R có thể biểu diễn qua hàm gamma. Đặc biệt khi $n = 2m$ thì hàm phân bố xác suất của Y có thể biểu diễn ở dạng ẩn như sau:

$$F_R(r) = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{r^2}{2\sigma^2} \right)^k, \quad r \geq 0 \quad (2-1-138)$$

Cuối cùng, chúng ta có mô men cấp k của R

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+k))}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}, k \geq 0 \quad (2-1-139)$$

với mọi n nguyên.

Phân bố Rice (Rice Distribution) ([5]) Nếu như phân bố Rayleigh có liên hệ với phân bố Khi bình phương trung tâm thì phân bố Rice liên hệ với phân bố Khi bình phương không trung tâm. Để minh họa điều này, xét biến ngẫu nhiên $Y = X_1^2 + X_2^2$, trong đó X_1 và X_2 là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê với trị trung bình m_i , $i = 1, 2$ và sai phương σ^2 . Từ các kết quả đã đạt được thì Y có phân bố Khi bình phương không trung tâm với thông số không trung tâm là $s^2 = m_1^2 + m_2^2$, hàm mật độ phân bố xác suất của Y thu được từ (2-1-118) với $n = 2$ là:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-(s^2+y)/2\sigma^2} I_0\left(\sqrt{y} \frac{s}{\sigma^2}\right), y \geq 0 \quad (2-1-140)$$

Bây giờ, chúng ta định nghĩa một biến ngẫu nhiên mới $R = \sqrt{Y}$. Hàm mật độ phân bố xác suất của R có được bằng cách đổi biến trong công thức (2-1-140) và ta thu được:

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-(r^2+s^2)/2\sigma^2} I_0\left(\frac{rs}{\sigma^2}\right), r \geq 0 \quad (2-1-141)$$

Đây là hàm mật độ phân bố xác suất của một biến ngẫu nhiên có phân bố Rice. Hàm mật độ phân bố xác suất này biểu thị tính thống kê của đường bao một tín hiệu bị ảnh hưởng bởi nhiễu cộng có phân bố gaussian trong băng tần hẹp. Hàm này cũng được dùng để mô hình hóa tính thống kê của tín hiệu truyền qua một số kênh radio. Từ (2-1-124) trong trường hợp $m = 1$, ta thu được hàm phân bố xác suất của R như sau:

$$F_R(r) = 1 - Q_1\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right), r \geq 0 \quad (2-1-142)$$

trong đó $Q_1(a, b)$ được định nghĩa theo (2-1-123).

Tổng quát hóa các biểu thức ở trên, R được định nghĩa như trong (2-1-136), X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê với trị trung bình m_i , $i = 1, 2, \dots, n$ và sai phương σ^2 . Biến ngẫu nhiên $R^2 = Y$ có phân bố Khi bình phương không trung tâm với n độ tự do và thông số không trung tâm là s^2 được định nghĩa trong biểu thức (2-1-119). Hàm mật độ phân bố xác suất của nó được xác định theo (2-1-118). Từ đó hàm mật độ phân bố xác suất của R là:

$$p_R(r) = \frac{r^{n/2}}{\sigma^2 s^{(n-2)/2}} e^{-(r^2+s^2)/2\sigma^2} I_{n/2-1}\left(\frac{rs}{\sigma^2}\right), r \geq 0 \quad (2-1-143)$$

và hàm phân bố xác suất tương ứng là:

$$F_R(r) = P(R \leq r) = P(\sqrt{Y} \leq r) = P(Y \leq r^2) = F_Y(r^2) \quad (2-1-144)$$

trong đó $F_Y(r^2)$ được xác định theo (2-1-121). Trong trường hợp $m = n/2$ là số nguyên, chúng ta có:

$$F_R(r) = 1 - Q_m\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right), r \geq 0 \quad (2-1-145)$$

điều này được suy ra từ (2-1-124). Cuối cùng ta có mô men cấp k của R là:

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} e^{-s^2/2\sigma^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+k)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} {}_1F_1\left(\frac{n+k}{2}, \frac{n}{2}, \frac{s^2}{2\sigma^2}\right), k \geq 0 \quad (2-1-146)$$

trong đó ${}_1F_1(\alpha, \beta, x)$ là hàm hợp siêu hình học.

Phân bố m-Nakagami ([5]) Cả hai loại phân bố Rayleigh và Rice thường được dùng để mô tả sự thăng giáng thống kê của các tín hiệu nhận từ một kênh có fading nhiều đường (hiện tượng fading là hiện tượng khi thu các tín hiệu vô tuyến điện ở dải sóng ngắn bằng nhiều con đường khác nhau, tín hiệu tổng hợp ở đầu thu biến đổi gây ra biên độ tín hiệu khi lớn khi bé và đôi khi mất hẳn). Một phân bố khác thường được dùng để mô tả tính thống kê của tín hiệu truyền qua các kênh fading nhiều đường là *phân bố m-Nakagami*. Hàm mật độ phân bố xác suất của phân bố do Nakagami đưa ra (1960) như sau:

$$p_R(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m r^{2m-1} e^{-mr^2/\Omega} \quad (2-1-147)$$

trong đó Ω được định nghĩa là:

$$\Omega = E(R^2) \quad (2-1-148)$$

và thông số m được định nghĩa là tỷ số của các mô men và được gọi là chỉ số fading:

$$m = \frac{\Omega^2}{E[(R^2 - \Omega)^2]}, m \geq \frac{1}{2} \quad (2-1-149)$$

Mô men cấp n của R là:

$$E(R^n) = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{n/2}$$

Với $m = 1$, chúng ta thấy rằng (2-1-147) trở thành hàm mật độ phân bố xác suất Rayleigh. Cho các giá trị của m trong khoảng $1/2 \leq m \leq 1$, chúng ta thu được các hàm mật độ phân bố xác suất có các ngưỡng lớn hơn so với một biến ngẫu nhiên có phân bố Rayleigh. Với các giá trị của $m > 1$, ngưỡng của hàm mật độ phân bố xác suất suy giảm nhanh hơn so với phân bố Rayleigh. Trong hình 2-1-10 minh họa các hàm mật độ phân bố xác suất với các giá trị khác nhau của m .

Phân bố Gaussian đa biến ([6]) Trong nhiều phân bố đa biến (hay nhiều chiều) thì phân bố gaussian đa biến là hay gặp nhất trong thực tế. Chúng ta sẽ trình bày phân bố này và đưa ra các tính chất cơ bản của nó.

Giả thiết rằng $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên gaussian với trị trung bình $m_i, i = 1, 2, \dots, n$, sai phương $\sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n$ và hiệp biến $\mu_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$. Hiển nhiên $\mu_{ii} = \sigma_i^2$. Ký hiệu $\mathbf{M}$ là ma trận hiệp biến $n \times n$ có các phần tử là $\{\mu_{ij}\}$, $\mathbf{x}$ là véc tơ cột $n \times 1$ của các biến ngẫu nhiên, và $\mathbf{m}_x$ là véc tơ cột các trị trung bình m_i . Hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ được định nghĩa là:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{M})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)' \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)\right] \quad (2-1-150)$$

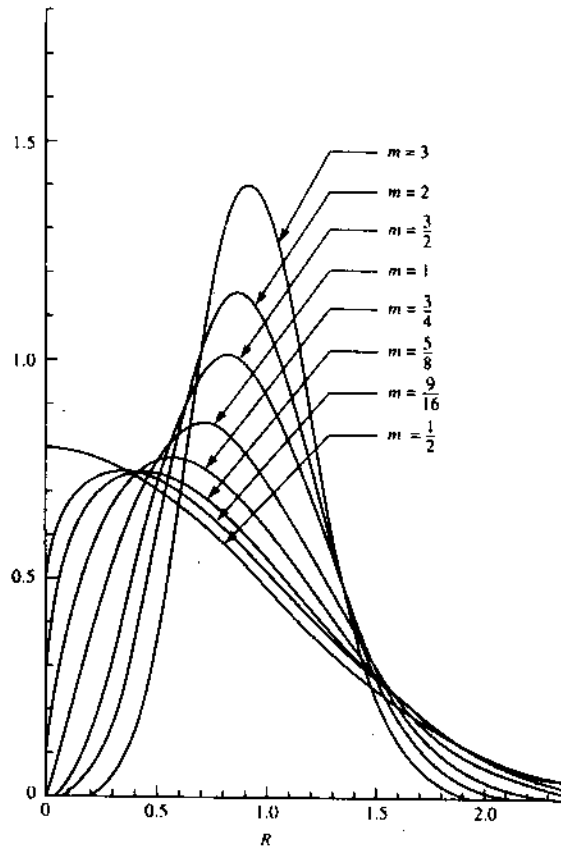
trong đó $\mathbf{M}^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của $\mathbf{M}$ và $\mathbf{x}'$ là hoán vị của $\mathbf{x}$.

Hàm đặc tính tương ứng với hàm mật độ phân bố xác suất n chiều này là:

$$\psi(\mathbf{jv}) = E(e^{j\mathbf{v}\mathbf{x}})$$

ở đây $\mathbf{v}$ là véc tơ n chiều với các thành phần $v_i, i = 1, 2, \dots, n$. Tính biến đổi Fourier n chiều ta thu được:

$$\psi(j\mathbf{v}) = \exp(j\mathbf{m}_x' \mathbf{v} - \frac{1}{2} \mathbf{v}' \mathbf{M} \mathbf{v}) \quad (2-1-151)$$



Hình 2-1-10: Sự thay đổi của hàm mật độ phân bố xác suất theo m với $\Omega = 1$.

Một trường hợp đặc biệt của (2-1-150) là hàm mật độ phân bố xác suất gaussian hai chiều. Trị trung bình $\mathbf{m}_x$ và ma trận hiệp biến $\mathbf{M}$ cho trường hợp này là:

$$\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mu_{12} \\ \mu_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2-1-152)$$

trong đó mô men hợp trung tâm μ_{12} được xác định là:

$$\mu_{12} = E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$$

Ta định nghĩa hàm hiệp biến chuẩn hóa:

$$\rho_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad i \neq j \quad (2-1-153)$$

ρ_{ij} thoả mãn điều kiện $0 \leq |\rho_{ij}| \leq 1$. Trong trường hợp hai chiều, ma trận hiệp biến được biểu diễn như sau:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2-1-154)$$

Ma trận nghịch đảo của nó là:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{s_1^2 s_2^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} s_2^2 & -\rho s_1 s_2 \\ -\rho s_1 s_2 & s_1^2 \end{bmatrix} \quad (2-1-155)$$

và $\det \mathbf{M} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$. Thay $\mathbf{M}^{-1}$ vào (2-1-150) thu được hàm mật độ phân bố xác suất như sau:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{\sigma_2^2(x_1 - m_1)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + \sigma_1^2(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right] \quad (2-1-156)$$

Chú ý rằng khi $\rho = 0$, hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(x_1, x_2)$ trong (2-1-156) trở thành tích $p(x_1)p(x_2)$, trong đó $p(x_i)$, $i = 1, 2$ là các hàm mật độ phân bố xác suất biên. Từ ρ là sự đánh giá sự liên hệ giữa X_1 và X_2 , chúng ta có thể chỉ ra rằng khi các biến ngẫu nhiên gaussian X_1 và X_2 không tương quan thì chúng cũng độc lập thống kê với nhau. Đây là tính chất cơ bản của biến ngẫu nhiên gaussian, điều này không đúng cho các trường hợp phân bố khác. Mở rộng ra cho các biến ngẫu nhiên gaussian n chiều, tức là $\rho_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$ thì các biến ngẫu nhiên X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ không có liên hệ với nhau, do vậy chúng độc lập thống kê với nhau.

Bây giờ chúng ta xét một biến đổi tuyến tính của n biến ngẫu nhiên gaussian X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ với vectơ trị trung bình $\mathbf{m}_x$ và ma trận hiệp biến $\mathbf{M}$. Ta có:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2-1-157)$$

với $\mathbf{A}$ là ma trận không suy biến. Ta đã biết rằng, định thức Jacobi của phép biến đổi này là $J = 1/\det \mathbf{A}$. Từ $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$, ta thay $\mathbf{X}$ vào (2-1-150), ta thu được hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của $\mathbf{Y}$ như sau:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{M})^{1/2} \det \mathbf{A}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{m}_x) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{m}_x)' \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{Q})^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)' \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y) \right] \end{aligned} \quad (2-1-158)$$

ở đây vectơ $\mathbf{m}_y$ và ma trận $\mathbf{Q}$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_y &= \mathbf{A}\mathbf{m}_x \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}' \end{aligned} \quad (2-1-159)$$

Như vậy chúng ta đã chỉ ra rằng bằng một phép biến đổi tuyến tính của một tập các biến ngẫu nhiên gaussian ta sẽ thu được một tập các biến ngẫu nhiên gaussian khác.

Giả sử rằng chúng ta muốn làm một phép biến đổi tuyến tính để thu được n biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê thì phải chọn ma trận $\mathbf{A}$ như thế nào? Từ các vấn đề đã khảo sát ở trên, chúng ta biết rằng các biến ngẫu nhiên gaussian là độc lập thống kê nếu chúng không có

liên hệ với nhau, có nghĩa là nếu ma trận hiệp biến $\mathbf{Q}$ là ma trận đường chéo. Khi đó chúng ta có:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}' = \mathbf{D} \quad (2-1-160)$$

với $\mathbf{D}$ là ma trận đường chéo. Ma trận $\mathbf{M}$ là ma trận hiệp biến, vì vậy nó xác định dương. Một giải pháp là chọn $\mathbf{A}$ là một ma trận trực giao ($\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$) gồm các cột là các véc tơ riêng của ma trận hiệp biến $\mathbf{M}$. Như vậy $\mathbf{D}$ là một ma trận đường chéo với các thành phần trên đường chéo bằng các giá trị riêng của $\mathbf{M}$.

Ví dụ 2-1-5

Xét hàm mật độ phân bố xác suất gaussian kép với ma trận hiệp biến :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Chúng ta xác định ma trận của phép biến đổi $\mathbf{A}$ để tạo ra các biến ngẫu nhiên không liên hệ với nhau. Trước hết ta tìm các giá trị riêng của $\mathbf{M}$. Phương trình đặc trưng là :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ (1 - \lambda)^2 - 1/4 &= 0 \\ \lambda &= 3/2 ; 1/2 \end{aligned}$$

Tiếp theo chúng ta xác định hai véc tơ riêng. Nếu $\mathbf{a}$ là một véc tơ riêng, chúng ta có:

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{a} = 0$$

Với $\lambda_1 = 3/2$ và $\lambda_2 = 1/2$, chúng ta thu được các véc tơ riêng

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \end{bmatrix}$$

Như thế:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Để kiểm tra rằng $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$ và $\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}' = \mathbf{D}$, trong đó các thành phần đường chéo của $\mathbf{D}$ là $3/2$ và $1/2$.

2-1-6. Giới hạn trên của xác suất ngưỡng

Khi đánh giá hiệu quả của một hệ thống thông tin số, thông thường cần phải xác định miền dưới ngưỡng của hàm mật độ phân bố xác suất. Chúng ta gọi miền này là *xác suất ngưỡng*. Trong phần này chúng ta xét hai giới hạn trên của xác suất ngưỡng. Giới hạn thứ nhất thu được từ bất đẳng thức Chebyshev, có độ chính xác không cao. Giới hạn thứ hai là giới hạn Cherrnoff có độ chính xác cao hơn ([5], [6]).

Bất đẳng thức Chebyshev. Giả thiết X là một biến ngẫu nhiên tùy ý với trị trung bình xác định m_x và độ lệch trung bình bình phương xác định σ_x^2 , với mọi $\delta > 0$ ta có :

$$P(|X - m_x| \geq \delta) \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2} \quad (2-1-161)$$

Bất đẳng thức này gọi là bất đẳng thức Chebyshev. Việc chứng minh bất đẳng thức này khá đơn giản. Ta có:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \geq \int_{|x - m_x| \geq \delta} (x - m_x)^2 p(x) dx \\ &\geq \delta^2 \int_{|x - m_x| \geq \delta} p(x) dx = \delta^2 P(|X - m_x| \geq \delta)\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra (2-1-161).

Rõ ràng bất đẳng thức Chebyshev là giới hạn trên của miền nằm dưới các ngưỡng của hàm mật độ phân bố xác suất $p(y)$, ở đây $Y = X - m_x$, tức là miền của $p(y)$ trong khoảng $(-\infty, -\delta)$ và (δ, ∞) . Vì vậy có thể biểu diễn bất đẳng thức Chebyshev như sau:

$$1 - [F_Y(\delta) - F_Y(-\delta)] \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2} \quad (2-1-162)$$

hoặc

$$1 - [F_X(m_x + \delta) - F_X(m_x - \delta)] \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2} \quad (2-1-163)$$

Ta có thể xét giới hạn Chebyshev theo một cách khác. Với biến ngẫu nhiên có trị trung bình bằng không $Y = X - m_x$, để thuận lợi ta định nghĩa một hàm $g(Y)$ như sau:

$$g(Y) = \begin{cases} 1 & (|Y| \geq \delta) \\ 0 & (|Y| < \delta) \end{cases} \quad (2-1-164)$$

Do $g(Y)$ chỉ nhận trị 1 hoặc 0 với các suất tương ứng $P(|Y| < \delta)$ và $P(|Y| \geq \delta)$, nên giá trị trung bình của nó là:

$$E[g(Y)] = P(|Y| \geq \delta) \quad (2-1-165)$$

Bây giờ giả thiết rằng $g(Y)$ bị chặn trên bởi hàm toàn phương $(Y/\delta)^2$, nghĩa là:

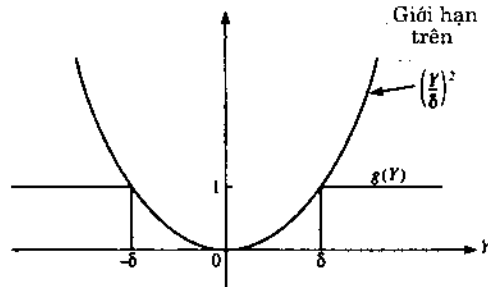
$$g(Y) \leq (Y/\delta)^2 \quad (2-1-166)$$

Đồ thị biểu diễn $g(Y)$ và giới hạn trên được trình bày trên hình 2-1-11. Ta có:

$$E[g(Y)] \leq E\left(\frac{Y^2}{\delta^2}\right) = \frac{E(Y^2)}{\delta^2} = \frac{\sigma_y^2}{\delta^2} = \frac{\sigma_x^2}{\delta^2}$$

Do $E[g(Y)]$ là xác suất ngưỡng nên ta nhận được bất đẳng thức Chebysev.

Trong nhiều ví dụ thực tế, việc sử dụng giới hạn Chebysev gây ra nhiều sai số. Lý do chủ yếu là ta đã sử dụng hàm $(Y/\delta)^2$ không sát với hàm $g(Y)$ để chặn trên hàm $g(Y)$.



Hình 2-1-11 : Chặn trên toàn phương $g(Y)$ để tìm xác suất ngưỡng.

Giới hạn Chernoff Giới hạn Chebyshev đề cập ở trên có tính tới hàm mật độ phân bố xác suất ngưỡng theo cả hai phía. Trong nhiều ứng dụng thực tế, chúng ta chỉ quan tâm tới miền dưới một ngưỡng, trong khoảng (δ, ∞) hoặc trong khoảng $(-\infty, \delta)$. Trong trường hợp như vậy chúng ta có thể thu được một giới hạn trên chặt nhờ chặn trên hàm $g(Y)$ bằng một hàm mũ, hàm mũ này có một tham số được sử dụng khi tối ưu hóa để tìm giới hạn trên chặt. Trong trường hợp chúng ta quan tâm tới xác suất ngưỡng trong khoảng (δ, ∞) . Hàm $g(Y)$ được chặn trên như sau:

$$g(Y) \leq e^{1(Y-\delta)} \quad (2-1-167)$$

trong đó $g(Y)$ được định nghĩa là :

$$g(Y) = \begin{cases} 1 & (Y \geq \delta) \\ 0 & (Y < \delta) \end{cases} \quad (2-1-168)$$

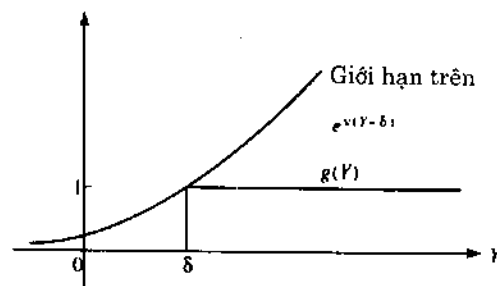
với $v \geq 0$ là tham số dùng để tối ưu hóa. Đồ thị của $g(Y)$ và giới hạn trên là hàm mũ được biểu thị trên hình 2-1-12.

Giá trị trung bình của $g(Y)$ là :

$$E[g(Y)] = P(Y \geq \delta) \leq E(e^{uY, \delta}) \quad (2-1-169)$$

Giới hạn này đúng với mọi $v \geq 0$. Giới hạn trên chặt nhất thu được bằng cách lựa chọn giá trị của v để cực tiểu hóa $E(e^{vY-\theta})$. Điều kiện cần thiết để hàm đạt cực tiểu là :

$$\frac{d}{dv} E(e^{iY \cdot \delta}) = 0 \quad (2-1-170)$$



Hình 2-1-12 : Giới hạn trên $g(Y)$ bằng hàm mũ để thu được xác suất ngưỡng.

Thứ tự lấy vi phân và lấy trung bình có thể hoán vị cho nhau, do đó

$$\frac{d}{d\nu} E(e^{\nu Y \cdot \delta}) = E\left(\frac{d}{d\nu} e^{\nu Y \cdot \delta}\right) = E[(Y \cdot \delta) e^{\nu Y \cdot \delta}] = e^{\nu \delta} [E(e^{\nu Y}) \cdot \delta E(e^{\nu Y})] = 0$$

Từ đó giá trị của ν cho ta giới hạn trên chặt thỏa mãn phương trình:

$$E(Ye^{\nu Y}) \cdot \delta E(e^{\nu Y}) = 0 \quad (2-1-171)$$

Gọi $\bar{\nu}$ là nghiệm của (2-1-171). Như vậy từ (2-1-169) giới hạn trên của xác suất ngưỡng một phía là:

$$P(Y \geq \delta) \leq e^{-\bar{\nu}\delta} \cdot E(e^{\bar{\nu}Y}) \quad (2-1-172)$$

Đây là giới hạn Chernoff cho xác suất ngưỡng trên của các biến ngẫu nhiên rời rạc hay liên tục có trị trung bình bằng không. Giới hạn này có thể dùng để chứng minh rằng $Q(x) \leq e^{-x^2/2}$ trong đó $Q(x)$ là vùng dưới ngưỡng của hàm mật độ phân bố xác suất gaussian.

Có thể thu được theo cách tương tự giới hạn trên ở vùng xác suất ngưỡng dưới. Kết quả là:

$$P(Y \leq \delta) \leq e^{-\bar{\nu}\delta} \cdot E(e^{\bar{\nu}Y}) \quad (2-1-173)$$

trong đó $\bar{\nu}$ là nghiệm của (2-1-171) và $\delta < 0$.

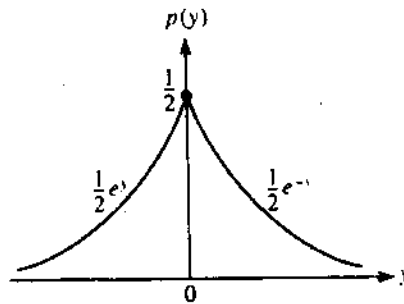
Ví dụ 2-1-6

Xét hàm mật độ xác suất Laplace:

$$p(y) = \frac{1}{2} e^{-|y|} \quad (2-1-174)$$

được minh họa trên hình 2-1-13. Chúng ta xác định vùng xác suất ngưỡng trên từ giới hạn Chernoff và so sánh với xác suất ngưỡng chính xác, ta có:

$$P(Y \geq \delta) = \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-y} dy = \frac{1}{2} e^{-\delta} \quad (2-1-175)$$



Hình 2-1-13: Hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên có phân bố Laplace

Từ (2-1-171) để xác định được $\bar{\nu}$, ta phải xác định các momen $E(Ye^{\nu Y})$ và $E(e^{\nu Y})$. Với hàm mật độ xác suất (2-1-174) chúng ta tìm được:

$$\begin{aligned} E(Ye^{\nu Y}) &= \frac{2\nu}{(\nu+1)^2(\nu-1)^2} \\ E(e^{\nu Y}) &= \frac{1}{(\nu+1)(\nu-1)} \end{aligned} \quad (2-1-176)$$

Thay (2-1-176) vào (2-1-171) ta thu được phương trình bậc hai:

$$\nu^2 \delta + 2\nu - \delta = 0$$

có các nghiệm là:

$$\bar{\nu} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta} \quad (2-1-177)$$

Đối chiếu với điều kiện $\bar{\nu} > 0$, ta được:

$$\bar{\nu} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta} \quad (2-1-178)$$

Cuối cùng ta tính giới hạn trên trong (2-1-172) bằng cách sử dụng hệ thức thứ hai trong (2-1-178) và thay $\bar{\nu}$ từ (2-1-178). Kết quả như sau:

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{\delta^2}{2(-1 + \sqrt{1 + \delta^2})} e^{1 - \sqrt{1 + \delta^2}} \quad (2-1-179)$$

Với $\delta \gg 1$, (2-1-179) đơn giản hóa còn:

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{\delta}{2} e^{-\delta} \quad (2-1-180)$$

Chúng ta chú ý rằng giới hạn Chernoff suy giảm theo hàm mũ khi δ tăng. Kết quả đó gần đúng với xác suất ngưỡng chuẩn trong (2-1-175). Ngược lại, giới hạn trên Chebyshev cho phần xác suất ngưỡng trên thu được bằng cách lấy một nửa xác suất trong hai phần ngưỡng (do tính đối xứng của hàm mật độ xác suất) là:

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2}$$

Như vậy, giới hạn này rất kém chính xác.

Giới hạn Chernoff có thể được mở rộng cho biến ngẫu nhiên có trị trung bình khác không. Nếu $Y = X - m_x$, ta có:

$$P(Y \geq \delta) = P(X - m_x \geq \delta) = P(X \geq m_x + \delta) = P(X \geq \delta_m)$$

với $\delta_m = m_x + \delta$. Kết hợp với điều kiện $\delta > 0$ suy ra $\delta_m > m_x$ và hàm $g(X)$ được định nghĩa như sau:

$$g(X) = \begin{cases} 1 & (X \geq \delta_m) \\ 0 & (X < \delta_m) \end{cases} \quad (2-1-181)$$

và giới hạn trên thu được là:

$$g(X) \leq e^{\nu(X - \delta_m)} \quad (2-1-182)$$

Từ đây lặp lại các bước từ (2-1-169) tới (2-1-172), kết quả thu được cuối cùng là:

$$P(X \geq \delta_m) \leq e^{-\bar{\nu}\delta_m} E\left(e^{\bar{\nu}X}\right) \quad (2-1-183)$$

ở đây $\delta_m > m_x$ và $\bar{\nu}$ là nghiệm của phương trình:

$$E(Xe^{vX}) - \delta_m E(e^{vX}) = 0 \quad (2-1-184)$$

Bằng cách tương tự chúng ta có thể thu được các kết quả cho phân xác suất ngưỡng dưới. Với $\delta < 0$ ta có:

$$P(X - m_x \leq \delta) = P(X \leq m_x + \delta) = P(X \leq \delta_m) \leq E(e^{v(X-\delta_m)}) \quad (2-1-185)$$

Từ quá trình tính toán ở trên, ta dễ nhận thấy rằng:

$$P(X \leq \delta_m) \leq e^{-v\delta_m} E(e^{vX}) \quad (2-1-186)$$

ở đây $\delta_m < m_x$ và v là nghiệm của phương trình (2-1-184).

2-1-7. Tổng các biến ngẫu nhiên và định lý giới hạn trung tâm

Các vấn đề chúng ta xét ở trên chú trọng đến việc xác định hàm mật độ xác suất của một tổng gồm n biến ngẫu nhiên độc lập thống kê. Trong phần này chúng ta vẫn quan tâm tới tổng các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê, nhưng không quan tâm tới hàm mật độ xác suất của từng biến ngẫu nhiên trong tổng. Rõ ràng hơn, giả thiết rằng X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là những biến ngẫu nhiên độc lập thống kê và phân bố đồng nhất. Mỗi biến có một trị trung bình hữu hạn m_x và sai phương σ_x^2 . Biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa như là tổng các biến ngẫu nhiên X_i được chuẩn hóa, được gọi là *mẫu trung bình*:

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2-1-187)$$

Trước hết chúng ta xác định giới hạn trên của xác suất ngưỡng của Y , sau đó chúng ta sẽ chứng minh một định lý quan trọng đối với hàm mật độ phân bố xác suất của Y trong trường hợp giới hạn khi n dần tới vô hạn.

Biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa trong (2-1-187) thường gặp trong việc định lượng trị trung bình của một biến ngẫu nhiên X từ nhiều quan sát cụ thể X_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Nói cách khác, X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ được coi như các mẫu độc lập thu được từ một hàm phân bố $F_X(x)$ và Y là ước lượng trị trung bình m_x .

Trị trung bình của Y là:

$$E(Y) = m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = m_x$$

và độ lệch trung bình bình phương của Y là:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E(Y^2) - m_y^2 = E(Y^2) - m_x^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) - m_x^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n E(X_i) E(X_j) - m_x^2 \\ &= \frac{1}{n} (\sigma_x^2 + m_x^2) + \frac{1}{n^2} n(n-1) m_x^2 - m_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \end{aligned}$$

Với Y được coi như một ước lượng giá trị trung bình m_x , chúng ta thấy rằng kỳ vọng toán học của nó bằng m_x và độ lệch trung bình bình phương của nó suy giảm tỷ lệ nghịch với số mẫu n . Khi cho n tiến tới vô hạn thì độ lệch trung bình bình phương σ_y^2 tiến tới không. Phép ước lượng một tham số (trong trường hợp này là m_x), mà tham số ấy hội tụ về giá trị đúng của nó và sai phương hội tụ về không khi n tiến tới vô cùng được gọi là một *ước lượng chặt*.

Xác suất ngưỡng của biến ngẫu nhiên Y có thể được chặn trên nhờ sử dụng các giới hạn đã được nêu trong phần 2-1-5. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho Y ta có:

$$P(|Y - m_x| \geq \delta) \leq \frac{\sigma_y^2}{\delta^2}$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma_x^2}{n\delta^2} \quad (2-1-188)$$

Khi cho n dần tới vô cùng, (2-1-188) sẽ trở thành:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_x\right| \geq \delta\right) = 0 \quad (2-1-189)$$

Như vậy, xác suất để giá trị trung bình ước lượng sai khác với giá trị trung bình thật lớn hơn hay bằng δ ($\delta > 0$) tiến tới không khi n dần tới vô hạn. Đây là *luật số lớn*. Giới hạn trên hội tụ về không khá chậm (tỷ lệ nghịch với n) nên được gọi là luật suy yếu của các số lớn.

Giới hạn Chernoff áp dụng cho biến ngẫu nhiên Y thu được một hàm mũ theo n cho ta giới hạn trên chặt của xác suất ngưỡng một phía. Chúng ta có thể xác định được xác suất ngưỡng của y là:

$$P(Y - m_x \geq \delta) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_x \geq \delta\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq n\delta_m\right) \leq E\left[\exp\left\{v\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\delta_m\right)\right\}\right] \quad (1-2-190)$$

ở đây $\delta_m = m_x + \delta$ và $\delta > 0$. Nhưng các biến X_i độc lập thống kê với nhau và phân bố đồng nhất, do đó:

$$E\left[\exp\left\{v\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\delta_m\right)\right\}\right] = e^{-v n \delta_m} E\left[\exp\left\{v \sum_{i=1}^n X_i\right\}\right] = e^{-v n \delta_m} \prod_{i=1}^n E\left(e^{v X_i}\right) = \left[e^{-v \delta_m} E\left(e^{v X}\right)\right]^n \quad (2-1-191)$$

ở đây X biểu thị một biến X_i bất kỳ. Tham số v ứng với giới hạn trên chặt thu được nhờ lấy đạo hàm (2-1-191) rồi cho đạo hàm bằng 0, từ đó ta thu được phương trình:

$$E(Xe^{vX}) - \delta_m E(e^{vX}) = 0 \quad (2-1-192)$$

Giải phương trình (2-1-192) ta thu được nghiệm $\hat{v}$. Giới hạn trên của xác suất ngưỡng trên là:

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \delta_m\right) \leq \left[e^{-\hat{v} \delta_m} E\left(e^{\hat{v} X}\right)\right]^n, \delta_m > m_x \quad (2-1-193)$$

Tương tự ta tìm được giới hạn trên của xác suất ngưỡng dưới là

$$P(Y \leq \delta_m) \leq [e^{-\hat{\nu}\delta_m} E(e^{\hat{\nu}X})]^n, \quad \delta_m < m_x \quad (2-1-194)$$

ở đây $\hat{\nu}$ là nghiệm của (2-1-192).

Ví dụ 2-1-7

Cho $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê được định nghĩa như sau :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{với xác suất } p < 1/2 \\ -1 & \text{với xác suất } 1 - p \end{cases}$$

Chúng ta muốn xác định giới hạn trên chặt của xác suất để tổng của các biến X_i lớn hơn 0. Do $p < 1/2$, chúng ta thấy rằng tổng các biến có giá trị trung bình âm, từ đó ta xác định xác suất ngưỡng trên. Với $\delta_m = 0$ trong (2-1-193) ta có :

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 0\right) \leq [E(e^{\hat{\nu}X})]^n \quad (2-1-195)$$

trong đó $\hat{\nu}$ là nghiệm của

$$E(Xe^{\hat{\nu}X}) = 0 \quad (2-1-196)$$

Từ:

$$E(Xe^{\hat{\nu}X}) = -(1-p)e^{-\hat{\nu}} + pe^{\hat{\nu}} = 0$$

ta rút ra

$$\hat{\nu} = \ln\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right) \quad (2-1-197)$$

Hơn nữa:

$$E(e^{\hat{\nu}X}) = pe^{\hat{\nu}} + (1-p)e^{-\hat{\nu}}$$

Từ đó giới hạn ở (2-1-195) trở thành:

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 0\right) \leq [pe^{\hat{\nu}} + (1-p)e^{-\hat{\nu}}]^n \leq \left[p\sqrt{\frac{1-p}{p}} + (1-p)\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right]^n \leq [4p(1-p)]^{n/2} \quad (2-1-198)$$

Chúng ta nhận xét rằng giới hạn trên suy giảm theo hàm mũ của n . Trái lại, với giới hạn Chebyshev, xác suất ngưỡng sẽ suy giảm tỷ lệ nghịch với n .

Định lý giới hạn trung tâm. Phần này chúng ta xét một định lý quan trọng được sử dụng nhiều trong thực tế. Định lý này nói tới hàm phân bố xác suất của tổng các biến ngẫu nhiên khi số biến ngẫu nhiên tiến tới vô hạn. Có nhiều dạng của định lý này, chúng ta sẽ chứng minh định lý trong trường hợp các biến ngẫu nhiên $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ độc lập thống kê và có phân bố giống nhau, mỗi biến sẽ có một trị trung bình hữu hạn m_x và độ lệch trung bình bình phương xác định σ_x^2 . Để tiện tính toán, chúng ta định nghĩa một biến ngẫu nhiên chuẩn hóa như sau :

$$U_i = \frac{X_i - m_x}{\sigma_x}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

U_i có trị trung bình bằng không và độ lệch trung bình bình phương bằng một. Đặt

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_i \quad (1-2-199)$$

Mỗi một số hạng trong tổng có trị trung bình bằng không và độ lệch trung bình bình phương bằng một, như vậy biến ngẫu nhiên chuẩn hóa Y (bởi $1/\sqrt{n}$) cũng sẽ có trị trung bình bằng không và độ lệch trung bình bình phương bằng một. Chúng ta muốn xác định hàm phân bố xác suất của Y trong trường hợp giới hạn khi $n \rightarrow \infty$.

Hàm đặc tính của Y như sau:

$$\psi_Y(jv) = E(e^{jvY}) = E \left[\exp \left(\frac{jv \sum_{i=1}^n U_i}{\sqrt{n}} \right) \right] = \prod_{i=1}^n \psi_{U_i} \left(\frac{jv}{\sqrt{n}} \right) = \left[\psi_U \left(\frac{jv}{\sqrt{n}} \right) \right]^n \quad (2-1-200)$$

ở đây ký hiệu U biểu thị cho các biến U_i có phân bố giống nhau. Bây giờ chúng ta khai triển hàm đặc trưng dưới dạng chuỗi Taylor như sau:

$$\psi_U \left(\frac{jv}{\sqrt{n}} \right) = 1 + j \frac{v}{\sqrt{n}} E(U) - \frac{v^2}{n2!} E(U^2) + \frac{(jv)^3}{(\sqrt{n})^3 3!} E(U^3) - \dots \quad (2-1-201)$$

Từ $E(U) = 0$ và $E(U^2) = 1$, (2-1-201) có thể được viết đơn giản như sau:

$$\psi_U \left(\frac{jv}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{v^2}{2n} + \frac{1}{n} R(v, n) \quad (2-1-202)$$

ở đây $R(v, n)/n$ biểu thị cho các số hạng bậc cao. Chúng ta chú ý rằng $R(v, n)$ tiến tới không khi $n \rightarrow \infty$. Thay (2-1-202) vào (2-1-200) ta thu được hàm đặc trưng của Y dưới dạng:

$$\psi_Y(jv) = \left[1 - \frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n} \right]^n \quad (2-1-203)$$

Lấy lôga tự nhiên hai vế của (2-1-203) ta thu được:

$$\ln \psi_Y(jv) = n \ln \left[1 - \frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n} \right] \quad (2-1-204)$$

Với các giá trị x nhỏ, $\ln(1+x)$ có thể được phân tích dưới dạng chuỗi như sau:

$$\ln(1+x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 - \dots$$

áp dụng cho (2-1-204) ta có

$$\ln \psi_Y(jv) = n \left[-\frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n} - \frac{1}{2} \left(-\frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n} \right)^2 + \dots \right] \quad (2-1-205)$$

Cuối cùng ta lấy giới hạn khi $n \rightarrow \infty$, (2-1-205) trở thành:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_Y(jv) = e^{-v^2/2} \quad (2-1-206)$$

Nhưng đây là hàm đặc trưng của một biến ngẫu nhiên gaussian với trị trung bình bằng không và độ lệch trung bình bình phương bằng một. Như vậy, chúng ta đã có một kết quả quan trọng là tổng các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê và phân bố giống nhau với trị trung bình và độ lệch trung bình bình phương hữu hạn tiến tới một biến ngẫu nhiên gaussian khi $n \rightarrow \infty$. Kết quả này là nội dung của *định lý giới hạn trung tâm*.

2-2. QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Có rất nhiều hiện tượng ngẫu nhiên xảy ra trong tự nhiên là các hàm của thời gian. Ví dụ các hiện tượng trong khí tượng học như các hiện tượng lên xuống ngẫu nhiên của nhiệt độ và áp suất không khí là những hàm theo thời gian. Sự dao động của điện áp do nhiễu nhiệt sinh ra trong những điện trở của một thiết bị điện tử cũng là một hàm của thời gian. Tương tự, tín hiệu ở đầu ra của một nguồn sinh thông tin được đặc trưng như một tín hiệu ngẫu nhiên biến đổi theo thời gian. Tín hiệu truyền trên kênh điện thoại là một ví dụ của loại tín hiệu như vậy. Tất cả những ví dụ này đều là những quá trình ngẫu nhiên. Trong nghiên cứu của chúng ta về truyền thông tin số, chúng ta sẽ gặp các quá trình ngẫu nhiên khi đặc trưng hóa và mô hình hóa các tín hiệu được tạo ra bởi các nguồn thông tin, trong việc mô hình hóa các kênh truyền thông dùng để truyền thông tin, trong việc biểu diễn nhiễu trong máy thu và trong việc thiết kế các máy thu tối ưu cho các quá trình xử lý và thu nhận các tín hiệu ngẫu nhiên.

Tại một thời điểm nào đó, giá trị của một quá trình ngẫu nhiên là một biến ngẫu nhiên, ví dụ như giá trị điện áp nhiễu phát sinh bởi một điện trở hay biên độ của tín hiệu phát ra bởi một nguồn audio. Sau đây chúng ta sẽ xem một quá trình ngẫu nhiên như là một biến ngẫu nhiên theo tham số thời gian. Chúng ta sẽ ký hiệu các quá trình như thế là $X(t)$. Một cách tổng quát, tham số t là liên tục, trong khi X có thể là liên tục hoặc rời rạc phụ thuộc vào đặc điểm của nguồn phát tạo ra quá trình ngẫu nhiên.

Điện áp nhiễu sinh ra từ một điện trở hoặc một nguồn thông tin cho ta thấy việc tạo ra một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên, được gọi là một *mẫu* của quá trình ngẫu nhiên. Tập hợp tất cả các mẫu, nghĩa là tập hợp tất cả điện áp nhiễu phát ra từ các điện trở, tạo nên một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Một cách tổng quát, số các mẫu trong tập hợp các mẫu có thể là vô hạn, nhưng thường thì hữu hạn.

Ta đã định nghĩa một quá trình ngẫu nhiên như tất cả các mẫu có thể xuất hiện, chúng ta lại có thể quan tâm tới các giá trị của quá trình tại các thời điểm $t_1 > t_2 > \dots > t_n$, ở đây n là số nguyên dương. Tổng quát, các biến ngẫu nhiên $X_i \equiv X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ được đặc trưng thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$. Nói rộng hơn nữa, tất cả các quan hệ xác suất đã được định nghĩa trong phần 2-1 cho các biến ngẫu nhiên nhiều chiều cũng được sử dụng cho các biến ngẫu nhiên X_i , $i = 1, 2, \dots, n$. ([2], [5], [6], [10])

Quá trình ngẫu nhiên dừng Như đã nói ở trên, các biến ngẫu nhiên X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ thu được từ quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ tại các thời điểm $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ và với n bất kỳ, được đặc trưng thống kê bằng hàm mật độ xác suất đồng thời $p(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$. Chúng ta chú ý tới một tập hợp gồm n biến ngẫu nhiên khác $X_{i+t} \equiv X(t_i + t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ở đây t là độ dịch thời gian tùy ý. Các biến ngẫu nhiên này được đặc trưng bằng hàm mật độ xác suất đồng thời $p(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$. Các hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X_i và X_{i+t} , $i = 1, 2, \dots, n$ có thể là giống nhau hoặc không giống nhau. Trong trường hợp chúng giống nhau, nếu:

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = p(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \dots, x_{t_n+t}) \quad (2-2-1)$$

với mọi t và n thì quá trình ngẫu nhiên được gọi là *dừng chặt*. Điều đó có nghĩa là tính chất thống kê của quá trình ngẫu nhiên dừng là không đổi với bất kỳ sự dịch chuyển nào của trục thời gian. Mặt khác, khi các hàm mật độ xác suất đồng thời không giống nhau, quá trình ngẫu nhiên là *không dừng*.

2-2-1. Các trị trung bình thống kê

Như chúng ta đã định nghĩa các trị trung bình thống kê cho các biến ngẫu nhiên, tương tự chúng ta cũng có thể định nghĩa các trị trung bình thống kê cho một quá trình ngẫu nhiên. Các trị trung bình này được gọi là các *trị trung bình theo tập hợp*. Với $X(t)$ biểu thị một quá trình ngẫu nhiên và $X_{t_i} \equiv X(t_i)$, mô men cấp n của biến ngẫu nhiên X_{t_i} được định nghĩa là:

$$E(X_{t_i}^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_i}^n p(x_{t_i}) dx_{t_i} \quad (2-2-2)$$

Nói chung giá trị của mô men cấp n phụ thuộc vào thời điểm t_i nếu hàm mật độ phân bố xác suất của $X(t_i)$ phụ thuộc vào t_i . Khi quá trình là dừng $p(x_{t_i}) = p(x_{t_i+t})$ với mọi t . Vì vậy hàm mật độ phân bố xác suất và mô men cấp n không phụ thuộc vào gốc thời gian.

Tiếp theo chúng ta quan tâm tới hai biến ngẫu nhiên $X_{t_i} \equiv X(t_i)$, $i = 1, 2$. Tương quan giữa X_{t_1} và X_{t_2} được đo bằng mô men đồng thời:

$$E(X_{t_1} X_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} p(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2} \quad (2-2-3)$$

Do mô men đồng thời này phụ thuộc vào các thời điểm t_1, t_2 , nó được ký hiệu bằng hàm $\phi(t_1, t_2)$. Hàm này được gọi là *hàm tự tương quan* của quá trình ngẫu nhiên. Khi quá trình $X(t)$ là dừng, hàm mật độ xác suất đồng thời của cặp (X_{t_1}, X_{t_2}) giống với hàm mật độ xác suất đồng thời của cặp (X_{t_1+t}, X_{t_2+t}) với mọi t . Điều này nói lên rằng hàm tự tương quan của $X(t)$ không phụ thuộc vào các thời điểm riêng biệt t_1 và t_2 , mà chỉ phụ thuộc vào hiệu $t_1 - t_2$. Do đó đối với một quá trình ngẫu nhiên dừng mô men đồng thời (2-2-3) được viết như sau :

$$E(X_{t_1} X_{t_2}) = \phi(t_1, t_2) = \phi(t_1 - t_2) = \phi(\tau) \quad (2-2-4)$$

ở đây $\tau = t_1 - t_2$ hay $t_2 = t_1 - \tau$. Nếu chúng ta đặt $t_2 = t_1 + \tau$ ta sẽ có:

$$\phi(-\tau) = E(X_{t_1} X_{t_1+\tau}) = E(X_{t_1} X_{t_1-\tau}) = \phi(\tau)$$

Dễ thấy rằng $\phi(\tau)$ là hàm chẵn. Chúng ta chú ý rằng $\phi(0) = E(X_t^2)$ biểu thị công suất trung bình của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$.

Người ta cũng thấy tồn tại các quá trình ngẫu nhiên không dừng với tính chất là trị trung bình của quá trình không phụ thuộc thời gian (là hằng số) và hàm tự tương quan thỏa mãn điều kiện $\phi(t_1, t_2) = \phi(t_1 - t_2)$. Những quá trình ngẫu nhiên như thế được gọi là *dừng theo nghĩa rộng*. Do đó dừng theo nghĩa rộng là một điều kiện kém chặt chẽ hơn dừng chặt. Về sau, khi nói tới quá trình ngẫu nhiên dừng thì ta quy ước hiểu là quá trình ngẫu nhiên dừng theo nghĩa rộng.

8.11.19.11

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Tương ứng với hàm tự tương quan là hàm tự hiệp biến của một quá trình ngẫu nhiên và được định nghĩa như sau:

$$\mu(t_1, t_2) = E \{ [X_{t_1} - m(t_1)] [X_{t_2} - m(t_2)] \} = \phi(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) \quad (2-2-5)$$

ở đây $m(t_1)$ và $m(t_2)$ theo thứ tự là các trị trung bình của X_{t_1} và X_{t_2} . Khi quá trình ngẫu nhiên là dừng, hàm tự hiệp biến được viết đơn giản thành:

$$\mu(t_1, t_2) = \mu(t_1 - t_2) = \mu(\tau) = \phi(\tau) - m^2 \quad (2-2-6)$$

ở đây $\tau = t_1 - t_2$.

Những mômen đồng thời cấp cao hơn của hai hoặc nhiều biến ngẫu nhiên thu được từ một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ được định nghĩa tương tự như trên. Ngoại trừ quá trình ngẫu nhiên gaussian, những mômen cấp cao có thể được biểu diễn qua các mômen bậc một và bậc hai, các mômen bậc cao thường rất ít gặp trong thực nghiệm.

Trị trung bình của một quá trình gaussian. Giả thiết rằng $X(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên gaussian. Do đó tại các thời điểm $t = t_i, i = 1, 2, \dots, n$, các biến ngẫu nhiên $X_{t_i}, i = 1, 2, \dots, n$ là gaussian với các trị trung bình $m(t_i)$ và các hàm tự hiệp biến là:

$$\mu(t_i, t_j) = E \{ [X_{t_i} - m(t_i)] [X_{t_j} - m(t_j)] \}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2-2-7)$$

Nếu chúng ta biểu thị $\mathbf{M}$ là ma trận hiệp biến cỡ $n \times n$ với các phần tử là $\mu(t_i, t_j)$ và các trị trung bình là véc tơ $\mathbf{m}_x$, thì hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các biến X_{t_i} đã được xét tới trong công thức (2-1-150).

Nếu quá trình gaussian là dừng thì $m(t_i) = m$ mọi t_i và $\mu(t_i, t_j) = \mu(t_i - t_j)$. Chúng ta nhận xét rằng quá trình ngẫu nhiên gaussian được xác định hoàn toàn bởi trị trung bình và các hàm tự hiệp biến. Từ đó nếu quá trình gaussian là dừng theo nghĩa rộng thì nó cũng dừng theo nghĩa hẹp. Tất nhiên điều ngược lại luôn đúng cho mọi quá trình ngẫu nhiên.

Trị trung bình đồng thời của các quá trình ngẫu nhiên. Cho $X(t)$ và $Y(t)$ biểu thị hai quá trình ngẫu nhiên và $X_{t_i} \equiv X(t_i)$ và $Y_{t'_j} \equiv Y(t'_j), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ là các biến ngẫu nhiên tại các thời điểm $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ và $t'_1 > t'_2 > \dots > t'_m$. Đặc trưng thống kê của hai quá trình được biểu thị bằng hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m})$$

với mọi $t_1, t_2, \dots, t_n, t'_1, t'_2, \dots, t'_m$ và với mọi số nguyên dương n, m .

Hàm tương quan chéo giữa $X(t)$ và $Y(t)$ biểu thị bằng $\phi_{xy}(t_1, t_2)$, được định nghĩa như là mômen đồng thời:

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E(X_{t_1} Y_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} p(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2} \quad (2-2-8)$$

và hàm hiệp biến chéo là:

$$\mu_{xy}(t_1, t_2) = \phi_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2) \quad (2-2-9)$$

Khi các quá trình là *dừng đồng thời* và *dừng riêng biệt*, chúng ta có $\phi_{xy}(t_1, t_2) = \phi_{xy}(t_1, -t_2)$ và $\mu_{xy}(t_1, t_2) = \mu_{xy}(t_1, -t_2)$. Trong trường hợp này ta chú ý rằng:

$$\phi_{xy}(-\tau) = E(X_{t_1} Y_{t_1+\tau}) = E(X_{t_1-\tau} Y_{t_1}) = \phi_{yx}(\tau) \quad (2-2-10)$$

Các quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là *độc lập thống kê* nếu và chỉ nếu:

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m}) = p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) p(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m})$$

với mọi t_i và t_j và mọi số nguyên dương n, m . Các quá trình được gọi là *không tương quan* nếu:

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E(X_{t_1})E(Y_{t_2})$$

vì vậy:

$$\mu_{xy}(t_1, t_2) = 0$$

Quá trình ngẫu nhiên phức $Z(t)$ được định nghĩa như sau:

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \quad (2-2-11)$$

ở đây $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên. Hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $Z_{t_i} = Z(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, được xác định bởi hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các thành phần (X_{t_i}, Y_{t_i}) , $i = 1, 2, \dots, n$. Như vậy hàm mật độ xác suất đặc trưng cho Z_{t_i} là

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n})$$

Quá trình ngẫu nhiên phức $Z(t)$ thường gặp trong khi biểu diễn nhiều bằng hợp bằng tín hiệu tần số thấp tương đương. Một đặc tính quan trọng của quá trình như vậy là hàm tự tương quan, được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \phi_{zz}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} E(Z_{t_1} Z_{t_2}^*) = \frac{1}{2} E[(X_{t_1} + jY_{t_1})(X_{t_2} - jY_{t_2})] \\ &= \frac{1}{2} \{ \phi_{xx}(t_1, t_2) + \phi_{yy}(t_1, t_2) + j[\phi_{yx}(t_1, t_2) - \phi_{xy}(t_1, t_2)] \} \end{aligned} \quad (2-2-12)$$

ở đây $\phi_{xx}(t_1, t_2)$ và $\phi_{yy}(t_1, t_2)$ là các hàm tự tương quan của $X(t)$ và $Y(t)$, và $\phi_{yx}(t_1, t_2)$, $\phi_{xy}(t_1, t_2)$ là các hàm tương quan chéo, hệ số $1/2$ trong định nghĩa của hàm tự tương quan một quá trình ngẫu nhiên phức có ý nghĩa về mặt chuẩn hóa toán học mà chúng ta sẽ chứng minh ở chương 6.

Khi các quá trình $X(t)$ và $Y(t)$ là dừng độc lập và dừng đồng thời, hàm tự tương quan của $Z(t)$ trở thành:

$$\phi_{zz}(t_1, t_2) = \phi_{zz}(t_1 - t_2) = \phi_{zz}(\tau)$$

với $t_2 = t_1 - \tau$. Như vậy, hàm liên hợp phức của (2-2-12) là:

$$\phi_{zz}^*(\tau) = \frac{1}{2} E(Z_{t_1}^* Z_{t_1-\tau}) = \frac{1}{2} E(Z_{t_1+\tau}^* Z_{t_1}) = \phi_{zz}(-\tau) \quad (2-2-13)$$

vì vậy

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{zz}^*(-\tau)$$

Bây giờ giả thiết rằng $Z(t) = X(t) + jY(t)$ và $W(t) = U(t) + jV(t)$ là hai quá trình ngẫu nhiên phức, hàm tương quan chéo của $Z(t)$ và $W(t)$ được định nghĩa như sau:

$$\phi_{zw}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} E(Z_{t_1} W_{t_2}^*) = \frac{1}{2} E[(X_{t_1} + jY_{t_1})(U_{t_2} - jV_{t_2})]$$

$$= \frac{1}{2} \{ \phi_{xu}(t_1, t_2) + \phi_{yu}(t_1, t_2) + j[\phi_{yu}(t_1, t_2) - \phi_{xu}(t_1, t_2)] \} \quad (2-2-14)$$

Khi $X(t)$, $Y(t)$, $U(t)$ và $V(t)$ dừng đồng thời từng cặp, hàm tương quan chéo trong (2-2-14) trở thành các hàm của thời gian chênh lệch $\tau = t_1 - t_2$. Tức là:

$$\phi_{xu}^*(\tau) = \frac{1}{2} E \left(Z_{t_1} W_{t_1-\tau}^* \right) = \frac{1}{2} E \left(Z_{t_1+\tau}^* W_{t_1} \right) = \phi_{xu}(-\tau) \quad (2-2-15)$$

2-2-2. Phổ mật độ công suất

Đặc tính tần số của một tín hiệu là đặc tính cơ bản, nó cho phép phân biệt các tín hiệu với nhau. Nói chung một tín hiệu có thể được phân loại là có công suất trung bình hữu hạn hay vô hạn, có năng lượng hữu hạn hay vô hạn. Đặc tính tần số của tín hiệu có năng lượng hữu hạn thu được qua phép biến đổi Furiê của biểu diễn tín hiệu theo thời gian. Nếu tín hiệu là tuần hoàn, năng lượng tín hiệu là vô hạn nên không tồn tại phép biến đổi Furiê. Thay vào đó ta dùng chuỗi Furiê và các hệ số Furiê cho ta biết sự phân bố công suất tín hiệu tại các tần số rời rạc.

Một quá trình ngẫu nhiên dừng có năng lượng vô hạn và đặc tính phổ của quá trình ngẫu nhiên dừng được cho bởi phép biến đổi Furiê của hàm tự tương quan. Sự phân bố công suất tín hiệu theo tần số được cho bởi hàm:

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-2-16)$$

Biến đổi Furiê ngược là:

$$\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2-2-17)$$

Chúng ta nhận xét rằng:

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) df = E(|X_t|^2) \geq 0 \quad (2-2-18)$$

Do hàm $\phi(0)$ biểu diễn công suất trung bình của tín hiệu ngẫu nhiên nên $\Phi(f)$ là phân bố công suất của tín hiệu ngẫu nhiên theo tần số. Bởi vậy $\Phi(f)$ được gọi là *phổ mật độ công suất* của quá trình ngẫu nhiên.

Nếu quá trình ngẫu nhiên là thực, $\phi(\tau)$ là hàm thực và chẵn, hàm $\Phi(f)$ cũng thực và chẵn. Mặt khác nếu quá trình là phức, $\phi(\tau) = \phi^*(-\tau)$, vì vậy ta có:

$$\Phi^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(-\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Phi(f) \quad (2-2-19)$$

do đó $\Phi(f)$ là thực.

Định nghĩa của mật độ phổ công suất có thể suy rộng ra cho hai quá trình ngẫu nhiên dừng đồng thời $X(t)$ và $Y(t)$, hai quá trình này có hàm tương quan chéo $\phi_{xy}(\tau)$. Biến đổi Furiê của $\phi_{xy}(\tau)$ được gọi là *phổ mật độ công suất chéo*:

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-2-20)$$

Nếu chúng ta kết hợp hai vế của (2-2-20) chúng ta có:

$$\begin{aligned}\Phi_{xy}^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}^*(-\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Phi_{yx}(-f)\end{aligned}\quad (2-2-21)$$

Nếu $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên thực ta có:

$$\Phi_{xy}^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \Phi_{yx}(-f) \quad (2-2-22)$$

Kết hợp (2-2-21) và (2-2-22) chúng ta thấy mật độ phổ công suất chéo của hai quá trình thực thoả mãn điều kiện:

$$\Phi_{yx}(f) = \Phi_{xy}(-f) \quad (2-2-23)$$

2-2-3. Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên

Xét một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian được mô tả bởi đáp ứng xung $h(t)$ đáp ứng tần số $H(f)$, ở đây $h(t)$ và $H(f)$ là một cặp của phép biến đổi Fourier, với $x(t)$ là tín hiệu vào của hệ thống và $y(t)$ là tín hiệu đầu ra. Tín hiệu ra của hệ thống có thể biểu diễn dưới dạng tích chập:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2-2-24)$$

Giả thiết rằng $x(t)$ là một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên dừng $X(t)$ thì tín hiệu đầu ra $y(t)$ là một thể hiện của một quá trình ngẫu nhiên $Y(t)$. Chúng ta hãy xác định trị trung bình và hàm tự tương quan của tín hiệu ra.

Do phép toán chập là một phép biến đổi tuyến tính tác động lên tín hiệu vào $x(t)$, giá trị trung bình của tích phân bằng tích phân của giá trị trung bình. Do đó giá trị trung bình của $Y(t)$ là:

$$m_y = E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t-\tau)] d\tau = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = m_x H(0) \quad (2-2-25)$$

ở đây $H(0)$ là đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính tại tần số $f = 0$. Vì vậy giá trị trung bình của tín hiệu ra là một hằng số.

Hàm tự tương quan của tín hiệu ở đầu ra là:

$$\begin{aligned}\phi_{yy}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} E(Y_{t_1} Y_{t_2}^*) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) h^*(\alpha) E[X(t_1 - \beta) X^*(t_2 - \alpha)] d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) h^*(\alpha) \phi_{xx}(t_1 - t_2 + \alpha - \beta) d\alpha d\beta\end{aligned}$$

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Như vậy tích phân kép là một hàm của hiệu thời gian $t_1 - t_2$. Nói cách khác, nếu quá trình đầu vào là dừng thì quá trình ở đầu ra cũng dừng, vì vậy ta có:

$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)h^*(\alpha)\phi_{xx}(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta \quad (2-2-26)$$

Bằng tính toán biến đổi Furiê hai vế (2-2-26) ta thu được mật độ phổ công suất của quá trình đầu ra:

$$\Phi_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)h(\beta)\phi_{xx}(\tau + \alpha - \beta)e^{-j2\pi f\tau}d\tau d\alpha d\beta = \Phi_{xx}(f)|H(f)|^2 \quad (2-2-27)$$

Từ công thức trên chúng ta có một kết quả quan trọng là phổ mật độ công suất của tín hiệu đầu ra là tích của phổ mật độ công suất của tín hiệu vào với bình phương biên độ đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính.

Khi muốn tính hàm tự tương quan $\phi_{yy}(\tau)$, thông thường ta có thể tính phổ mật độ công suất $\Phi_{yy}(f)$ và sau đó tính biến đổi Furiê ngược. Ta có:

$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{yy}(f)e^{j2\pi f\tau}df = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f)|H(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}df \quad (2-2-28)$$

Công suất trung bình của tín hiệu đầu ra là:

$$\phi_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f)|H(f)|^2 df \quad (2-2-29)$$

Do $\phi_{yy}(0) = E(|Y_t|^2)$, suy ra:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f)|H(f)|^2 df \geq 0$$

Ví dụ 2-2-1

Giả thiết rằng mạch lọc thông thấp được minh họa trong hình 2-2-1 được kích bởi một tín hiệu ngẫu nhiên $x(t)$ có một phổ mật độ công suất

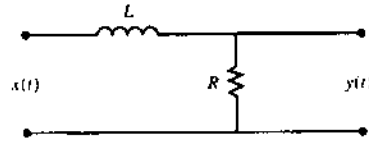
$$\phi_{xx}(f) = \frac{1}{2}N_0 \text{ với mọi } f$$

Một quá trình ngẫu nhiên có phổ mật độ công suất đồng đều (phẳng) gọi là nhiễu trắng. Chúng ta xác định phổ mật độ công suất của quá trình ngẫu nhiên ở đầu ra. Hàm truyền đạt của mạch lọc thông thấp là:

$$H(f) = \frac{R}{R + j2\pi fL} = \frac{1}{1 + j2\pi fL/R}$$

vì vậy:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fL/R)^2 f^2} \quad (2-2-30)$$



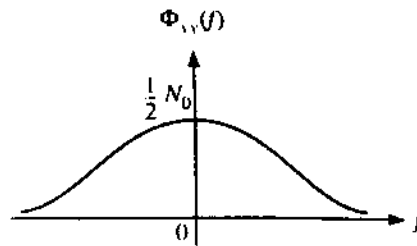
Hình 2-2-1. Ví dụ một mạch lọc thông thấp

Phổ mật độ công suất của quá trình ra là:

$$\Phi_{yy}(f) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (2\pi L/R)^2 f^2} \quad (2-2-31)$$

Phổ mật độ công suất được minh họa trong hình 2-2-2. Biến đổi Furiê ngược thu được hàm tự tương quan:

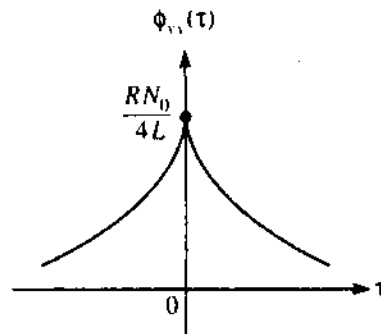
$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (2\pi L/R)^2 f^2} e^{j2\pi f\tau} df = \frac{RN_0}{4L} e^{-(R/L)|\tau|} \quad (2-2-32)$$



Hình 2-2-2. Phổ mật độ công suất tín hiệu ra mạch lọc thông thấp khi tín hiệu vào là nhiễu trắng

Hàm tự tương quan $\phi_{yy}(\tau)$ được biểu diễn trong hình 2-2-3. Chúng ta nhận xét rằng mô men bậc hai của quá trình $Y(t)$ là $\phi_{yy}(0) = RN_0/(4L)$.

Bây giờ chúng ta xác định hàm tương quan chéo giữa $y(t)$ và $x(t)$, ở đây $y(t)$ và $x(t)$ lần lượt là tín hiệu đầu ra và đầu vào của hệ thống tuyến tính. Ta có:



Hình 2-2-3. Hàm tự tương quan của tín hiệu ra của mạch lọc thông thấp khi tín hiệu vào là nhiễu trắng

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

$$\begin{aligned}\phi_{yx}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} E(Y_{t_1} X_{t_2}^*) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) E[X(t_1 - \alpha) X^*(t_2)] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \phi_{xx}(t_1 - t_2 - \alpha) d\alpha = \phi_{yx}(t_1 - t_2)\end{aligned}$$

Như vậy các quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình dừng đồng thời. Với $t_1 - t_2 = \tau$, ta có:

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \phi_{xx}(\tau - \alpha) d\alpha \quad (2-2-33)$$

Chú ý rằng tích phân trong (2-2-33) là một tích chập, do đó công thức (2-2-33) biểu diễn ở miền tần số sẽ trở thành:

$$\Phi_{yx}(f) = \Phi_{xx}(f)H(f) \quad (2-2-34)$$

2-2-4. Định lý lấy mẫu giới cho quá trình ngẫu nhiên có băng tần hạn chế

Nhắc lại rằng một tín hiệu xác định $s(t)$ có biến đổi Furiê $S(f)$ được gọi là có băng tần hạn chế nếu $S(f) = 0$ với $|f| > W$, ở đây W là tần số cao nhất của tín hiệu $s(t)$. Một tín hiệu như thế được biểu diễn một cách duy nhất bởi những mẫu của $s(t)$ lấy với tần số $f_s \geq 2W$. Tốc độ tối thiểu ứng với tần số tối thiểu $F_N = 2W$ được gọi là *tốc độ Nyquist*. Nếu tốc độ lấy mẫu thấp hơn tốc độ Nyquist thì tín hiệu sẽ bị nhập nhằng, không chính xác (frequency aliasing) ở miền tần số.

Tín hiệu có băng tần hạn chế được lấy mẫu theo tốc độ Nyquist có thể được khôi phục lại từ các mẫu của nó theo công thức nội suy sau:

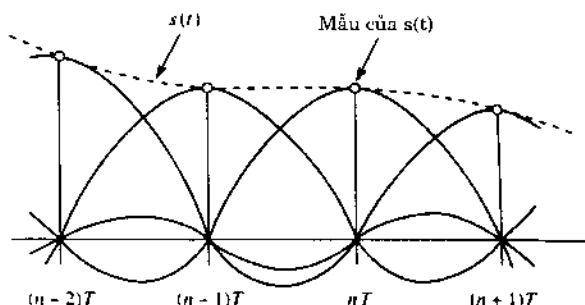
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2-2-35)$$

ở đây $\{s(n/2W)\}$ là các mẫu của $s(t)$ lấy tại $t = n/2W$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Tương đương, có thể khôi phục lại $s(t)$ bằng cách cho các mẫu tín hiệu qua một mạch lọc thông thấp lý tưởng với đáp ứng xung $h(t) = (\sin 2\pi W t) / 2\pi W t$. Hình 2-2-4 minh họa quá trình khôi phục lại tín hiệu dựa trên phép nội suy.

Một quá trình ngẫu nhiên dừng $X(t)$ được gọi là có *băng tần hạn chế* nếu phổ mật độ công suất của nó $\Phi(f) = 0$ với mọi $|f| > W$. Do $\Phi(f)$ là biến đổi Furiê của hàm tự tương quan $\phi(\tau)$, nên $\phi(\tau)$ có thể được biểu diễn thành:

$$\phi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(\tau - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(\tau - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2-2-36)$$

trong đó $\{\phi(n/2W)\}$ là các mẫu của $\phi(\tau)$ lấy tại thời điểm $\tau = n/2W$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$



Hình 2-2-4. Khôi phục tín hiệu dựa trên phép nội suy

Bây giờ nếu $X(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên dừng có băng tần hạn chế thì $X(t)$ có thể được biểu diễn như sau:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2-2-37)$$

trong đó $\{X(n/2W)\}$ là các mẫu của $X(t)$ lấy tại $t = n/2W$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Đây là cách biểu diễn một quá trình ngẫu nhiên dừng theo các mẫu rời rạc của nó. Các mẫu là các biến ngẫu nhiên được mô tả thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời tương ứng. Để chứng minh được rằng:

$$E \left\{ \left[X(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \right]^2 \right\} = 0 \quad (2-2-38)$$

Như vậy sự biểu diễn quá trình ngẫu nhiên bởi các mẫu của nó tương đương theo nghĩa trung bình bình phương sai số bằng không.

2-2-5. Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian

Các tính chất của tín hiệu ngẫu nhiên liên tục theo thời gian nói ở phần trên có thể áp dụng cho các tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian. Các tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian thông thường thu được bằng cách lấy mẫu đều các tín hiệu ngẫu nhiên liên tục theo thời gian.

Một quá trình ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian $X(n)$ gồm tập hợp các dãy mẫu $\{x(n)\}$. Các tính chất thống kê của $X(n)$ tương tự với $X(t)$ với n là một biến nguyên (biến thời gian). Vì vậy mô men bậc m của $X(n)$ được định nghĩa như sau:

$$E[X_n^m] = \int_{-\infty}^{\infty} X_n^m p(X_n) dX_n \quad (2-2-39)$$

và dãy tự tương quan là:

$$\phi(n, k) = \frac{1}{2} E(X_n X_k^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_n X_k^* p(X_n, X_k) dX_n dX_k \quad (2-2-40)$$

Tương tự, dãy tự hiệp biến là:

$$\mu(n, k) = \phi(n, k) - E(X_n)E(X_k^*) \quad (2-2-41)$$

Với một quá trình dừng, chúng ta có $\phi(n, k) \equiv \phi(n - k)$ và $\mu(n, k) \equiv \mu(n - k)$ và:

$$\mu(n - k) = \phi(n - k) - |m_x|^2 \quad (2-2-42)$$

với $m_x = E(X_n)$ là giá trị trung bình.

Giống như trong trường hợp của các quá trình ngẫu nhiên liên tục theo thời gian, một quá trình dừng rời rạc có năng lượng vô hạn nhưng công suất trung bình hữu hạn cho bởi:

$$E(|m_x|^2) = \phi(0) \quad (2-2-43)$$

Phổ mật độ công suất của quá trình rời rạc theo thời gian thu được bằng biến đổi Furiê của $\phi(n)$. Do $\phi(n)$ là một dãy rời rạc theo thời gian, biến đổi Furiê của nó được định nghĩa là:

$$\Phi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) e^{-j2\pi fn} \quad (2-2-44)$$

và biến đổi Furiê ngược tương ứng là:

$$\phi(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi(f) e^{j2\pi fn} df \quad (2-2-45)$$

Chúng ta nhận xét rằng phổ mật độ công suất $\Phi(f)$ là tuần hoàn với chu kỳ $f_p = 1$. Nói cách khác, $\Phi(f + k) = \Phi(f)$ với $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Đây là một đặc trưng của biến đổi Furiê của bất kỳ một chuỗi rời rạc thời gian giống như $\phi(n)$.

Cuối cùng ta quan tâm tới đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc theo thời gian với một tín hiệu đầu vào là tín hiệu ngẫu nhiên dừng. Hệ thống được mô tả trong miền thời gian bởi đáp ứng xung đơn vị $h(n)$ và trong miền tần số bởi đáp ứng tần số $H(f)$:

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j2\pi fn} \quad (2-2-46)$$

Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu đầu vào ngẫu nhiên dừng $X(n)$ là tổng chập:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n - k) \quad (2-2-47)$$

Giá trị trung bình của tín hiệu ra là:

$$m_y = E[y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) E[x(n - k)]$$

$$m_y = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = m_x H(0) \quad (2-2-48)$$

trong đó $H(0)$ là đáp ứng với thành phần một chiều của hệ thống.

Dãy tự tương quan của quá trình đầu ra là:

$$\begin{aligned}\phi_{yy}(k) &= \frac{1}{2} E[y^*(n)y(n-k)] = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h^*(i)h(j)E[x^*(n-i)x(n+k-j)] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h^*(i)h(j)\phi_{xx}(k-j+i)\end{aligned}\quad (2-2-49)$$

Bằng phép lấy biến đổi Furiê $\phi_{yy}(k)$ và thay vào (2-2-49) ta thu được quan hệ ở miền tần số:

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f)|H(f)|^2 \quad (2-2-50)$$

Quan hệ này giống quan hệ (2-2-27), chỉ khác ở chỗ trong (2-2-50) phổ mật độ công suất $\Phi_{yy}(f)$ và $\Phi_{xx}(f)$ và đáp ứng tần số $H(f)$ là các hàm tuần hoàn theo tần số với chu kỳ $f_p = 1$.

2-2-6. Các quá trình dừng vòng (Cyclostationary)

Trong các tín hiệu mang thông tin số chúng ta hay gặp các quá trình ngẫu nhiên có các giá trị trung bình thống kê là tuần hoàn. Cụ thể, ta xét một quá trình ngẫu nhiên có dạng:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT) \quad (2-2-51)$$

ở đây $\{a_n\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian với trị trung bình $m_a = E(a_n)$ với mọi n và dãy tự tương quan $\phi_{aa}(k) = \frac{1}{2} E(a_n^* a_{n+k})$. Tín hiệu $g(t)$ là tín hiệu xác định. Quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ biểu diễn tín hiệu của một số hệ thống điều chế tuyến tính sẽ được khảo sát ở chương 6. Chuỗi $\{a_n\}$ biểu diễn chuỗi thông tin số (các ký hiệu) được truyền qua kênh truyền thông và $1/T$ biểu thị tốc độ truyền các ký hiệu mang thông tin.

Bây giờ ta xác định trị trung bình và hàm tự tương quan của $X(t)$. Trước hết, giá trị trị trung bình là:

$$E[X(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(a_n)g(t-nT) = m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT) \quad (2-2-52)$$

Ta thấy rằng trị trung bình thay đổi theo thời gian với chu kỳ T . Hàm tương quan của $X(t)$ là:

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(t+\tau, t) &= \frac{1}{2} E[X(t+\tau)X^*(t)] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(a_n^* a_m)g^*(t-nT)g(t+\tau-mT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{aa}(m-n)g^*(t-nT)g(t+\tau-mT)\end{aligned}\quad (2-2-53)$$

Nhận xét rằng:

$$\phi_{xx}(t+\tau+kT, t+kT) = \phi_{xx}(t+\tau, t) \quad (2-2-54)$$

với mọi $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Vì vậy, hàm tự tương quan của $X(t)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ T .

Một quá trình ngẫu nhiên như thế được gọi là *dừng vòng* hay *dừng tuần hoàn* (Cyclostationary). Do hàm tự tương quan phụ thuộc vào hai biến t và τ nên để biểu diễn trong miền tần số cần sử dụng phép biến đổi Furiê hai chiều.

Thường người ta muốn mô tả các tín dừng vòng bởi phổ mật độ công suất, bằng cách tính hàm tự tương quan trung bình theo thời gian trong một chu kỳ, được định nghĩa như sau:

$$\bar{\phi}_{xr}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_{xr}(t + \tau, t) dt \quad (2-2-55)$$

Như vậy để tránh sự phụ thuộc theo thời gian của hàm tự tương quan, người ta sử dụng hàm tự tương quan trung bình. Cuối cùng, biến đổi Furiê của $\bar{\phi}_{xx}(\tau)$ cho ta **phổ mật độ công suất trung bình** của quá trình ngẫu nhiên dừng vòng. Phương pháp này giúp chúng ta đơn giản hóa việc biểu diễn quá trình ngẫu nhiên dừng vòng trong miền tần số. Phổ mật độ công suất là biến đổi Furiê của hàm tự tương quan trung bình theo thời gian:

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-2-56)$$

BÀI TẬP

2-1. Phép thử thứ nhất có bốn sự kiện loại trừ nhau $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ và phép thử thứ hai có ba sự kiện loại trừ nhau $B_j, j = 1, 2, 3$. Xác suất đồng thời $P(A_i, B_j)$ là:

$$P(A_1, B_1) = 0.1, P(A_1, B_2) = 0.08, P(A_1, B_3) = 0.13$$

$$P(A_2, B_1) = 0,05, P(A_2, B_2) = 0,03, P(A_2, B_3) = 0,09$$

$$P(A_3, B_1) = 0,05, P(A_3, B_2) = 0,12, P(A_3, B_3) = 0,14$$

$$P(A_4, B_1) = 0,11, P(A_4, B_2) = 0,04, P(A_4, B_3) = 0,06$$

Xác định các xác suất $P(A_i)$ và $P(B_j)$ với $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3$.

2-2. Các biến ngẫu nhiên $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ có hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Chứng tỏ rằng:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1) p(x_{n-1} | x_{n-2}, \dots, x_1) p(x_2 | x_1) p(x_1)$$

2-3. Hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X là $p(x)$. Một biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa là $Y = aX + b$ với $a < 0$. Xác định hàm mật độ phân bố xác suất của Y theo hàm mật độ phân bố xác suất của X .

2-4. Giả sử X là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương đơn vị. Đặt $Y = aX^3 + b$, với $a > 0$. Xác định và vẽ hàm mật độ phân bố xác suất của Y .

2-5. Đặt X_i và X_j là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương giống nhau. Chứng tỏ rằng phép biến đổi:

$$Y_r + jY_i = (X_r + jX_i)e^{j\phi}$$

tạo nên một cặp biến ngẫu nhiên khác (Y_n, Y_n) , cũng là cặp biến ngẫu nhiên gaussian có hàm mật độ phân bố xác suất giống như cặp (X_n, X_n) .

2-6. Một biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa là $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, với X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê với

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{với xác suất } p \\ 0 & \text{với xác suất } 1-p \end{cases}$$

- Xác định hàm đặc tính của Y .
- Từ hàm đặc tính, xác định mômen $E(Y)$ và $E(Y^2)$.

2-7. Hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X có phân bố Cauchy là:

$$p(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

- Xác định giá trị trung bình và sai phương của X .
- Xác định hàm đặc tính của X .

2-8. Biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa là $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, với $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê, mỗi biến có phân bố Cauchy giống nhau.

- Xác định hàm đặc tính của Y .
- Xác định hàm mật độ phân bố xác suất của Y .
- Xét hàm mật độ phân bố xác suất của Y khi $n \rightarrow \infty$.

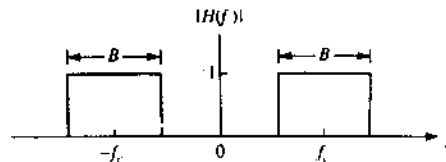
2-9. Giả thiết các quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ và $y(t)$ là dừng riêng và dừng đồng thời.

- Xác định hàm tự tương quan của $z(t) = x(t) + y(t)$
- Xác định hàm tự tương quan của $z(t)$ khi $x(t)$ và $y(t)$ là không tương quan.
- Xác định hàm tự tương quan của $z(t)$ khi $x(t)$ và $y(t)$ là không tương quan và có giá trị trung bình bằng 0.

2-10. Hàm tự tương quan của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ là:

$$\phi_{xx}(\tau) = N_0 \delta(\tau) / 2$$

Quá trình ngẫu nhiên như thế được gọi là nhiễu trắng. Giả thiết $x(t)$ là tín hiệu vào một bộ lọc thông dải lý tưởng có đáp ứng tần số như hình dưới. Xác định công suất nhiễu tổng cộng ở đầu ra bộ lọc.



Đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải lý tưởng

2-11. Với phân bố Nakagami, ta định nghĩa một biến ngẫu nhiên chuẩn hóa $X = R / \sqrt{\Omega}$. Xác định hàm mật độ phân bố xác suất của X .

XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

2-12. Sử dụng giới hạn Chernoff, chứng tỏ rằng $Q(x) \leq e^{-x^2/2}$ với $Q(x)$ được định nghĩa trong (2-1-97).

2-13. Dãy tự tương quan của một quá trình ngẫu nhiên rời rạc là $\phi(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$. Xác định phổ mật độ công suất của nó.

2-14. Dải thông của nhiễu tương đương của một hệ thống được định nghĩa như sau:

$$B_{eq} = \frac{1}{G} \int_0^\infty |H(f)|^2 df$$

với $G = \max |H(f)|^2$. Sử dụng định nghĩa này, xác định dải thông của nhiễu tương đương của bộ lọc thông dải lý tưởng trong bài 2-10.

CHƯƠNG 3

THÔNG TIN VÀ LƯỢNG TIN

Từ đây về sau, chúng ta sẽ giả thiết rằng nguồn tin và các ảnh hưởng lên tín hiệu mang thông tin là các quá trình ngẫu nhiên, được mô tả bởi các luật thống kê. Chỉ có các quá trình ngẫu nhiên mới tạo ra thông tin và tín hiệu khi đó mới mang thông tin.

3-1. KHÁI NIỆM THÔNG TIN

Sự tiếp xúc của con người với ngoại vật và cảm hiểu, nhận thức được ngoại vật là thông qua thông tin tiếp thu được. Khái niệm thông tin là một khái niệm đã hình thành từ lâu trong tư duy của con người. Để diễn tả khái niệm này, chúng ta giả thiết rằng trong một tình huống nào đó, có thể xảy ra nhiều sự kiện khác nhau và việc xảy ra một sự kiện nào đó trong tập hợp các sự kiện có thể làm cho chúng ta thu nhận được thông tin. ([1], [6])

Một tin đối với người nhận đều có hai phần, hay hai nội dung. Một là độ bất ngờ của tin, và hai là ý nghĩa của tin. Để so sánh các tin với nhau, chúng ta có thể lấy một trong hai hoặc cả hai nội dung trên để làm thước đo. Nhưng nội dung, ý nghĩa của tin, mà chúng ta gọi là tính hàm ý của tin, không ảnh hưởng đến các vấn đề cơ bản của hệ thống truyền tin như tốc độ hay độ chính xác. Nó chính là ý nghĩa của những tin mà con người muốn trao đổi với nhau thông qua việc truyền tin.

Độ bất ngờ của tin lại rất liên quan đến các vấn đề cơ bản của hệ thống truyền tin. Ví dụ một tin càng bất ngờ, sự xuất hiện của nó càng hiếm, thì rõ ràng thời gian nó chiếm trong một hệ thống truyền tin càng ít. Như vậy, muốn cho việc truyền tin có hiệu suất cao, chúng ta không thể coi các tin như nhau nếu chúng xuất hiện ít, nhiều khác nhau.

Vì lý do trên, để định lượng thông tin trong các hệ thống truyền tin, chúng ta lấy mức độ bất ngờ để so sánh các tin với nhau. Chúng ta cho rằng lượng tin càng lớn nếu độ bất ngờ của tin càng lớn. Điều này là hợp lý bởi vì khi chúng ta nhận một tin đã biết trước, thì xem như đã không nhận được gì, và việc nhận được một tin mà ta ít có hy vọng nhận được thì lại rất quý đối với chúng ta.

3-2. LƯỢNG TIN CỦA NGUỒN RỜI RẠC

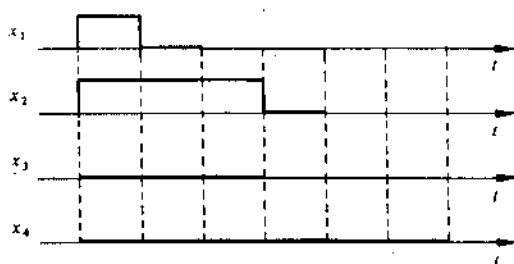
3-2-1. Nguồn rời rạc

Định nghĩa Nguồn rời rạc là nguồn tạo ra các tin dưới dạng rời rạc. Ví dụ như một tin liên tục cần truyền đi được rời rạc hóa, thì ta có thể truyền đi các xung có biên độ khác nhau.

Nguồn thông tin rời rạc: là nguồn tạo ra một chuỗi các biến ngẫu nhiên rời rạc $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Ký hiệu: là phân tử nhỏ nhất có chứa thông tin.

Ví dụ về mã Morse, sử dụng bộ bốn ký hiệu (hình 3-2-1)



Hình 3-2-1: Các ký hiệu sử dụng trong mã Morse.

Ký hiệu x_1 gồm một xung độ rộng τ và một khoảng nghỉ độ rộng τ . Ký hiệu x_2 gồm một xung độ rộng 3τ và một khoảng nghỉ độ rộng τ . Ký hiệu x_3 gồm ba khoảng nghỉ và ký hiệu x_4 gồm sáu khoảng nghỉ.

Bộ ký hiệu: là tập hợp tất cả các ký hiệu $[X] = [x_1, x_2, \dots, x_L]$.

Trong trường hợp mã Morse, bộ ký hiệu gồm bốn ký hiệu.

Từ: là một tập hợp hữu hạn các ký hiệu (trong trường hợp đặc biệt, một từ có thể chỉ chứa một ký hiệu).

Bộ từ: là tập hợp tất cả các từ mà một bộ ký hiệu có thể tạo ra.

Nguồn rời rạc không nhớ: là nguồn mà xác suất xuất hiện một ký hiệu không phụ thuộc vào các ký hiệu xuất hiện trước:

$$p(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots) = p(x_n) \quad (3-2-1)$$

trong đó $x_n \in X$ là một ký hiệu nào đó của bộ ký hiệu X của nguồn, tạo ra tại thời điểm n .

Nguồn rời rạc có nhớ: là nguồn mà xác suất xuất hiện một ký hiệu phụ thuộc vào một hay nhiều các ký hiệu đã xuất hiện trước nếu khả năng nhớ của nguồn là đủ lớn.

Nguồn dừng: là nguồn mà xác suất xuất hiện các ký hiệu không phụ thuộc vào gốc thời gian mà chỉ phụ thuộc vào vị trí tương quan giữa các ký hiệu, có nghĩa là:

$$p(x_{i,n}) = p(x_{i,n+k}) \text{ với mọi } k \quad (3-2-2)$$

Nói cách khác là các tính chất thống kê của nguồn không phụ thuộc vào gốc thời gian.

Nguồn dừng ergodic: là nguồn dừng không nhớ hoặc có nhớ hữu hạn, có các đặc tính thống kê theo thời gian bằng các đặc tính thống kê theo tập hợp.

Nguồn có tốc độ thông tin điều khiển được: là nguồn có thể tạo ra các tin với tốc độ phụ thuộc vào các yếu tố bên ngoài nguồn và không có các ràng buộc nội tại về mặt thời gian trong việc tạo ra các tin.

Ví dụ về loại nguồn này là nguồn điện báo. Rõ ràng đối với hệ thống điện báo thì không có các ràng buộc về mặt thời gian đối với các ký hiệu tạo ra được truyền đi.

Nguồn có tốc độ thông tin không điều khiển được: là nguồn tạo ra các bản tin với tốc độ cố định, không điều khiển được từ bên ngoài nguồn, tốc độ này là một tính chất nội tại của nguồn.

Ví dụ trong trường hợp này là nguồn rời rạc tạo ra khi lấy mẫu một tín hiệu liên tục theo thời gian. Các mẫu được tạo ra liên tiếp nhau, cách nhau một khoảng thời gian cố định phụ thuộc vào tín hiệu liên tục.

Nguồn Markov Nguồn Markov giữ một vai trò quan trọng trong lĩnh vực truyền thông. Nó được đặc trưng bởi quan hệ:

$$p(x_{i_n} | x_{j_{n-1}}, x_{k_{n-2}} \dots) = p(x_{i_n} | x_{j_{n-1}}) \quad (3-2-3)$$

với $x_{i_n}, x_{j_{n-1}}, x_{k_{n-2}}, \dots \in [X] = [x_1, x_2, \dots, x_L]$, có nghĩa là xác suất tạo ra một ký hiệu nào đó tại thời điểm n chỉ phụ thuộc vào ký hiệu đã tạo ra ở thời điểm $n - 1$ và không phụ thuộc vào các ký hiệu đã tạo ra ở các thời điểm $n - 2, n - 3 \dots$

Tại thời điểm n , nguồn có thể ở trạng thái j với xác suất $p(x_{j_n} | x_{i_{n-1}})$ nào đó khi ở thời điểm $n - 1$ nguồn đã ở trạng thái i .

Xác suất $p(x_{j_n} | x_{i_{n-1}}) = p_{ij}$ gọi là xác suất chuyển đổi từ trạng thái i sang trạng thái j . Hiển nhiên ta có:

$$\sum_{j=1}^L p_{ij} = 1$$

Xác suất để nguồn ở trạng thái j tại thời điểm n là:

$$p(x_{j_n}) = \sum_{i=1}^L p(x_{j_n}, x_{i_{n-1}}) = \sum_{i=1}^L p(x_{i_{n-1}}) p(x_{j_n} | x_{i_{n-1}}) = \sum_{i=1}^L p(x_{i_{n-1}}) p_{ij}$$

với $j = 1, \dots, L$.

Biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} p(x_{1_n}) \\ p(x_{2_n}) \\ \dots \\ p(x_{L_n}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{n-1} = \begin{bmatrix} p(x_{1_{n-1}}) \\ p(x_{2_{n-1}}) \\ \dots \\ p(x_{L_{n-1}}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1L} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{L1} & p_{L2} & \dots & p_{LL} \end{bmatrix} \quad (3-2-4)$$

Quan hệ trên có thể viết lại thành:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{T}^T \mathbf{P}_{n-1} \quad (3-2-5)$$

và từ đó:

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{T}^T)^n \mathbf{P}_0 \quad (3-2-6)$$

$\mathbf{P}_0$ là ma trận xác suất tại thời điểm bắt đầu $n = 1$.

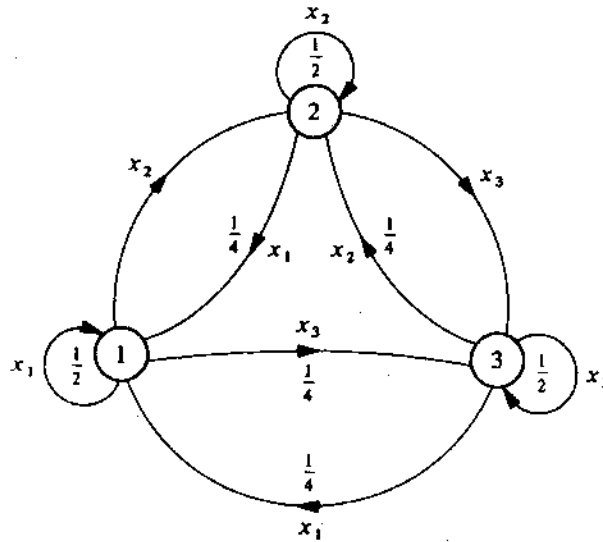
Nguồn Markov có thể được biểu diễn bằng đồ thị, các nút (node) biểu diễn các trạng thái, các nhánh biểu diễn các chuyển đổi.

Ví dụ

Một nguồn Markov có ba ký hiệu $[X] = [x_1, x_2, x_3]$, tạo ra tại thời điểm đầu với xác suất:

$$p(x_{1_1}) = 1/3, \quad p(x_{2_1}) = 1/3, \quad p(x_{3_1}) = 1/3.$$

Đồ thị trên hình 3-2-2 cho thấy các xác suất chuyển đổi từ trạng thái này sang trạng thái khác của nguồn là như nhau ([2]).



Hình 3-2-2: Đồ thị một nguồn Markov ba trạng thái

3-2-2. Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

Như trong chương 1 đã đề cập về độ đo thông tin, hàm loga đã được chọn để đánh giá, định lượng các lượng tin. Đối với mỗi tin x_i của nguồn X đều có một lượng tin riêng được đánh giá bằng ([1]):

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \quad (3-2-7)$$

Nếu nguồn X thông qua một phép biến đổi trở thành nguồn Y ví dụ như thông qua sự truyền lan trong kênh, thì phép biến đổi đó có thể không phải là một-một. Ở đầu vào của kênh là các tin của nguồn X , các tin trong quá trình truyền lan trong kênh bị nhiễu phá hoại, làm cho sự chuyển đổi từ nguồn X sang nguồn Y không phải là một-một. Một tin x_i có thể chuyển thành một tin y_j bất kỳ trong nguồn Y ở đầu ra của kênh, với những xác suất chuyển đổi khác nhau tùy theo tính chất nhiễu trong kênh. Bài toán truyền tin trong trường hợp này đặt ra là: cho biết cấu trúc thống kê của nguồn X , tính chất tạp nhiễu của kênh biểu thị dưới dạng các xác suất chuyển đổi của tin, khi nhận được ở đầu ra một tin y_j thuộc nguồn Y , hãy xác định tin tương ứng của nguồn X .

Rõ ràng ở đây là một bài toán thống kê, lời giải khẳng định không có được. Lời giải tìm được sẽ có dạng: với tin y_j nhận được, tin nào của nguồn X (phía phát) có nhiều khả năng đã được phát đi nhất.

Muốn giải quyết vấn đề này chúng ta lần lượt qua hai bước. Bước một là tính các lượng tin về một tin bất kỳ x_i của tập X chứa trong tin y_j nhận được, lượng tin đó gọi là lượng tin tương hỗ giữa x_i và y_j . Bước thứ hai đem so sánh các lượng tin tương hỗ với nhau, và lượng tin nào cực đại sẽ cho biết tin x_i có khả năng nhiều nhất chuyển thành y_j trong quá trình truyền tin.

Để xác định lượng tin về x_i chứa trong y_j chúng ta cần phải biết lượng tin ban đầu của x_i và lượng tin còn lại của x_i sau khi đã nhận được y_j . Lượng tin tương hỗ sẽ là hiệu của hai lượng tin này.

Lượng tin ban đầu là lượng tin riêng được xác định bằng xác suất tiên nghiệm của tin. Lượng tin còn lại của x_i sau khi đã nhận được y_j được xác định bằng xác suất hậu nghiệm:

$$I(x_i | y_j) = -\log p(x_i | y_j) \quad (3-2-8)$$

Như vậy lượng tin tương hỗ sẽ tính theo:

$$I(x_i, y_j) = I(x_i) - I(x_i | y_j) = \log[p(x_i | y_j) / p(x_i)] \quad (3-2-9)$$

Lượng tin về x_i chứa trong y_j có nghĩa là tương hỗ giữa x_i và y_j với những dữ kiện đã cho của bài toán truyền tin là xác suất ban đầu $p(x_i)$ và xác suất chuyển đổi $p(x_i|y_j)$:

$$I(x_i, y_j) = \log[p(x_i|y_j)/p(x_i)]$$

hay

$$I(x_i, y_j) = \log[p(x_i|y_j) / \sum_j p(y_j) \cdot p(x_i|y_j)] \quad (3-2-10)$$

$I(x_i|y_j)$ là lượng tin còn lại của x_i sau khi đã nhận được y_j gọi là lượng tin có điều kiện, trong quá trình truyền tin, lượng tin đó chính là lượng tin đã bị tạp nhiễu phá huỷ không đến đầu thu được.

Chúng ta hoàn toàn có thể mở rộng lượng tin tương hỗ sang các phép biến đổi phức tạp hơn. Lúc đó lượng tin tương hỗ cũng được xác định theo các xác suất tiên nghiệm và hậu nghiệm của tin đang xét.

3-2-3. Tính chất của lượng tin

Tính chất 1. *Lượng tin riêng bao giờ cũng lớn hơn lượng tin về nó chứa trong bất kỳ một ký hiệu nào có liên hệ thống kê với nó.* Khi x_i và y_j độc lập thống kê với nhau lượng tin tương hỗ bằng không, và trở thành cực đại, đồng thời bằng lượng tin riêng khi y_j xác định được x_i , nghĩa là xác suất có điều kiện $p(x_i|y_j)$ bằng 1.

Điều nói trên cho thấy lượng tin tương hỗ mô tả sự ràng buộc giữa x_i và y_j , nếu sự ràng buộc ấy càng chặt chẽ thì lượng tin về x_i chứa trong y_j càng lớn, hay lượng tin về y_j chứa trong x_i cũng tăng lên.

Từ đây cũng có thể giải thích ý nghĩa của lượng tin riêng như là lượng tin tương hỗ cực đại giữa x_i và y_j

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i, y_j) = \log[p(x_i|y_j)/p(x_i)] = \log[p(y_j|x_i)/p(y_j)]$$

Tính chất 2. *Lượng tin riêng là một đại lượng không âm vì $p(x_i) \leq 1$, nhưng lượng tin tương hỗ có thể dương hoặc âm.* Khi xác suất xuất hiện x_i với điều kiện đã xảy ra y_j lớn hơn xác suất của x_i khi nó xảy ra một cách độc lập với y_j , thì lượng tin tương hỗ sẽ dương, ngược lại lượng tin tương hỗ sẽ là một đại lượng âm.

Tính chất 3. *Lượng tin của một cặp (x, y) bằng tổng lượng tin riêng của từng tin trừ đi lượng tin tương hỗ giữa chúng.* Khi chúng độc lập thống kê với nhau lượng tin tương hỗ bằng không, khi đó:

$$I(xy) = I(x) + I(y)$$

Trong trường hợp tổng quát:

$$I(xy) = I(x) + I(y) - I(x, y) \quad (3-2-11)$$

3.2.4. Lượng tin trung bình

Lượng tin riêng chỉ có ý nghĩa đối với một tin nào đó mà nói, nhưng không phản ánh được giá trị tin tức của nguồn. Nói một cách khác $I(x_i)$ mới đánh giá được về mặt tin tức của một tin khi nó đứng riêng rẽ, nhưng không thể dùng để đánh giá về mặt tin tức của tập hợp trong đó x_i tham gia. Trong thực tế điều người ta quan tâm là giá trị tin tức của một tập hợp chứ không phải giá trị tin tức một phần tử nào đó trong tập hợp. Điều này có thể được trình bày trong ví dụ sau

Một nguồn gồm có hai ký hiệu $X = \{x_0, x_1\}$ với xác suất $x_0 = 0.99$ và $x_1 = 0.01$. Khi nhận được ký hiệu của nguồn này người ta có thể tin chắc 99% là ký hiệu x_0 và có thể xem như một tin đã biết trước. Đúng về quan điểm thông tin mà xét, tin nhận được của nguồn tin này ít có giá trị tuy rằng trong đó có tin x_1 với lượng tin riêng khá lớn.

Từ đây, trong thực tế để đánh giá được một tin nhận được từ một nguồn đã cho, người ta phải dùng đến khái niệm lượng tin trung bình (trị trung bình theo tập hợp):

$$I(X) = - \sum_x p(x) \log p(x) \quad (3-2-12)$$

Lượng tin trung bình là lượng tin tức trung bình chứa trong một ký hiệu bất kỳ của nguồn đã cho.

Ta tính lượng tin trung bình trong ví dụ trên:

$$I(X) = -0.99 \log_2(0.99) - 0.01 \log_2(0.01) = 0.081 \text{ [bit/ký hiệu]}$$

Trong khi đó lượng tin riêng của x_1 rất lớn:

$$I(x_1) = -\log_2(0.01) = 6.5 \text{ [bit/ký hiệu]}$$

Tương tự như lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ không mang đầy đủ ý nghĩa thực tế cần thiết, nó chỉ cho biết lượng tin về một ký hiệu đã cho chứa trong một ký hiệu xác định, nghĩa là mới cho biết sự ràng buộc thống kê giữa một cặp ký hiệu (x_i, y_j) nào đó, nhưng điều quan trọng hơn cần phải xác định trong thực tiễn mối liên hệ thống kê giữa hai tập X, Y , nghĩa là lượng tin trung bình về một tin bất kỳ của nguồn X chứa trong một tin bất kỳ thuộc nguồn Y .

$$I(X, Y) = \sum_{xy} p(xy) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \quad (3-2-13)$$

$I(X, Y)$ gọi là lượng tin tương hỗ trung bình.

Tương tự lượng tin riêng trung bình có điều kiện $I(Y|X)$ là lượng tin trung bình của một tin bất kỳ của Y khi đã biết một tin bất kỳ của X và được xác định như sau:

$$I(Y|X) = - \sum_{xy} p(x, y) \log p(y|x) \quad (3-2-14)$$

Ta có quan hệ giữa các lượng tin trung bình:

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= I(X) - I(X|Y) \\ I(X, Y) &= I(Y, X) \geq 0 \end{aligned} \quad (3-2-15)$$

3-3. ENTRÔPI CỦA NGUỒN RỜI RẠC

Lượng tin trung bình là lượng tin trung bình chứa trong một ký hiệu bất kỳ của một nguồn đã cho. Khi chúng ta nhận được một tin chúng ta sẽ nhận được một lượng tin trung bình, đồng thời độ bất ngờ về tin đó cũng đã được giải thoát, cho nên độ bất ngờ và lượng tin về ý nghĩa vật lý trái ngược nhau, nhưng về số đo lại giống nhau. Độ bất ngờ của tin x_i tính bằng ([1], [2]):

$$H(x_i) = -\log p(x_i)$$

Độ bất ngờ trung bình của một tin của nguồn sẽ là :

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log p(x) \quad (3-3-1)$$

Về số đo $H(X)$ và $I(X)$ là giống nhau:

$$H(X) = I(X)$$

$H(X)$ gọi là *entrôpi* của nguồn, là một thông số thống kê cơ bản của nguồn.

3-3-1. Tính chất của entropi $H(X)$

Tính chất 1. *Entropi là một đại lượng luôn dương hoặc bằng không: $H(X) \geq 0$*

Tính chất 2. *Entropi sẽ bằng không khi nguồn có một ký hiệu bất kỳ có xác suất xuất hiện bằng một và xác suất tất cả các ký hiệu còn lại bằng không, nghĩa là nguồn có một tin luôn luôn được xác định, như vậy giá trị thông tin của nguồn sẽ bằng không.*

Tính chất 3. *Entropi cực đại khi xác suất xuất hiện các ký hiệu của nguồn bằng nhau, lúc đó độ bất định của một tin bất kỳ trong nguồn là lớn nhất.*

Ta lấy một ví dụ đơn giản về nguồn có hai tin $X = [x_0, x_1]$ với xác suất tương ứng là p_0 và p_1 để minh họa điều trên, chúng ta có quy luật phân bố xác suất:

$$p_0 + p_1 = 1 \text{ hay } p_1 = 1 - p_0$$

Entropi của nguồn sẽ là:

$$H(X) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1 = -p_0 \log p_0 - (1 - p_0) \log(1 - p_0).$$

Khảo sát $H(X)$ theo p_0 bằng đồ thị, ta nhận thấy $H(X) = 0$ khi $p_0 = 0$ (hay $p_1 = 1$) hoặc khi $p_0 = 1$ (hay $p_1 = 0$). $H(X)$ cực đại khi $p_0 = p_1 = 1/2$, lúc đó $H(X)_{\max} = \log 2$, nếu dùng loga cơ số 2 thì $H(X)_{\max} = 1$ (bit / ký hiệu).

Điều nói trên giải thích ý nghĩa của đơn vị bit là *entrôpi của một nguồn gồm có hai ký hiệu đẳng xác suất*.

Ta chứng minh tính chất này trong trường hợp tổng quát.

Các giá trị $p(x)$ làm cực đại hàm $H(X) = -\sum_x p(x) \log p(x)$ với điều kiện $\sum_x p(x) = 1$ cũng chính

là các giá trị $p(x)$ làm cực đại hàm $\Phi = -\sum_x p(x) \log p(x) + \lambda \left(\sum_x p(x) - 1 \right)$ với λ là hệ số Lagrange.

Các giá trị $p(x)$ làm cực đại hàm Φ thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p(x)} = 0 \text{ với mọi giá trị } p(x)$$

hay

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p(x)} = -\log p(x) - \log e + \lambda = 0$$

với mọi giá trị $p(x)$, tức là các giá trị $p(x)$ bằng nhau với tất cả các tin của nguồn, và khi đó giá trị cực đại của $H(X)$ sẽ là $\log_2 L$ nếu lấy đơn vị là bit và nguồn có L tin.

3-3-2. Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn

Thông số thống kê cơ bản thứ nhất của nguồn tin là entropi như phần trên đã trình bày, tùy thuộc cấu trúc thông kê của nguồn. Nhưng sự hình thành tin nhanh hay chậm để đưa vào kênh lại tùy thuộc các tính chất vật lý khác của nguồn như quán tính, độ phân biệt.v.v..., cho nên số ký hiệu lập được trong một đơn vị thời gian rất khác nhau. Ví dụ con người vì kết cấu của cơ

quan phát âm hạn chế nên một giây chỉ phát âm được từ 5 tới 7 ký hiệu (âm tiết) trong lời nói thông thường, trong khi đó máy điện báo có thể tạo ra từ 50 tới 70 ký hiệu trong một giây ([1], [2]).

Như vậy thông số cơ bản thứ hai của nguồn là tốc độ thiết lập tin R , bằng tích của entropi $H(X)$ với số ký hiệu n_0 lập được trong một đơn vị thời gian. Đơn vị của R là lượng tin trên đơn vị thời gian, trong trường hợp dùng loga cơ sở hai đơn vị của R sẽ là bit/sec.

$$R = n_0 H(X) \text{ (bit/sec)} \quad (3-3-2)$$

Để chỉ ra sự chênh lệch giữa entropi của nguồn và giá trị cực đại có thể có của nó, người ta định nghĩa *độ dư* của nguồn như sau:

$$R_s = H(X)_{\max} - H(X) \quad (3-3-3)$$

Độ dư tương đối của nguồn được định nghĩa như sau:

$$r_s = [H(X)_{\max} - H(X)] / H(X)_{\max} = 1 - H(X) / H(X)_{\max} \quad (3-3-4)$$

3-3-3. Entropi của nguồn Markov

Xét một nguồn Markov. Nếu nguồn đang ở trạng thái i thì sẽ có một độ bất định về trạng thái của nguồn ở thời điểm sau, đó là trạng thái j , trạng thái này là một trong các trạng thái có thể của nguồn $j = 1, 2, \dots, L$. Giá trị trung bình của độ bất định này, nói cách khác là thông tin trung bình khi nguồn ở trạng thái i , được xác định bởi entropi ([2]):

$$H_i = - \sum_{j=1}^L p_{ij} \log p_{ij} \quad (3-3-5)$$

Nếu tính tới tất cả các trạng thái của nguồn, entropi của nguồn là giá trị trung bình của entropi của nguồn ở mỗi trạng thái:

$$H = \sum_{i=1}^L p(x_i) H_i = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L p(x_i) p_{ij} \log p_{ij} \quad (3-3-6)$$

3-4. KÊNH RỜI RẠC

3-4-1. Định nghĩa

Nguồn tin và nhận tin liên hệ với nhau qua kênh thông tin, và kênh thông tin thực hiện một phép biến đổi từ không gian các ký hiệu ở đầu vào tới không gian các ký hiệu ở đầu ra của kênh.

Kênh được gọi là *rời rạc* nếu không gian ký hiệu vào và không gian ký hiệu ra là rời rạc. Kênh được gọi là *liên tục* nếu cả hai không gian ký hiệu vào và ra là liên tục.

Nếu sự truyền tin trong kênh là liên tục theo thời gian thì kênh được gọi là *liên tục theo thời gian* và nếu sự truyền tin chỉ thực hiện ở những thời điểm rời rạc theo thời gian thì kênh được gọi là *rời rạc theo thời gian*.

Nếu sự chuyển đổi ký hiệu vào là x thành ký hiệu ra là y không phụ thuộc vào các chuyển đổi trước đó thì kênh được gọi là *không nhớ*. Nếu như sự chuyển đổi đó không phụ thuộc vào việc chọn gốc thời gian thì kênh được gọi là *dừng*.

Trong phần này, ta quan tâm tới kênh rời rạc dừng, không nhớ ([1], [2]).

3-4-2. Entropi ở đầu vào và ở đầu ra của kênh

Ta ký hiệu $[X]$ là tập hợp tất cả các ký hiệu ở đầu vào kênh, tạo nên một trường các sự kiện. Ví dụ trong một kênh telex sử dụng mã Morse, $[X]$ gồm có bốn ký hiệu x_1, x_2, x_3 và x_4 . Tổng quát, nếu có n ký hiệu thì không gian ký hiệu ở đầu vào của kênh là:

$$[X] = [x_1 x_2 \dots x_n]$$

Giả sử mỗi ký hiệu x_i được sử dụng với xác suất p_i :

$$[P_x] = [p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n)]$$

Các xác suất $[P_x]$ không phải là tính chất của kênh, chúng là một tính chất của nguồn tin.

Tập hợp tất cả các ký hiệu ở đầu ra của kênh là:

$$[Y] = [y_1 y_2 \dots y_m]$$

với xác suất của các ký hiệu:

$$[P_y] = [p(y_1) p(y_2) \dots p(y_m)]$$

Do tính chất của nhiễu trên kênh, không gian $[Y]$ có thể khác với không gian $[X]$, cũng như các xác suất $[P_y]$ cũng có thể khác các xác suất ở đầu vào $[P_x]$. Với không gian các ký hiệu ở đầu vào kênh và ở đầu ra kênh, ta có thể định nghĩa một trường tích:

$$[X, Y] = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_m \end{bmatrix} \quad (3-4-1)$$

trong đó tích $x_i y_j$ là sự xuất hiện đồng thời hai sự kiện x_i và y_j . Chú ý rằng ở đây ta không giả thiết gì về sự độc lập hay phụ thuộc giữa x_i và y_j . Ma trận (3-4-1) tương ứng với ma trận xác suất:

$$[P(X, Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) & \dots & p(x_1, y_m) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) & \dots & p(x_2, y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_n, y_1) & p(x_n, y_2) & \dots & p(x_n, y_m) \end{bmatrix} \quad (3-4-2)$$

Từ ma trận xác suất ta có:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \quad (3-4-3)$$

$$\text{và} \quad p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) \quad (3-4-4)$$

Như vậy, ta có thể định nghĩa ba trường sự kiện:

- Trường ở đầu vào kênh với entropi $H(X)$
- Trường ở đầu ra kênh với entropi $H(Y)$
- Trường hợp giữa đầu vào và đầu ra kênh với entropi $H(X, Y)$

và biểu thức của chúng như sau:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i) \quad (3-4-5)$$

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^m p(y_j) \log p(y_j) \quad (3-4-6)$$

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) \quad (3-4-7)$$

3-4-3. Entropi có điều kiện

Khi trường các sự kiện ở đầu ra của kênh đã biết, do có nhiều tác động, vẫn còn sự bất định về trường vào kênh. Giá trị trung bình của sự bất định này gọi là entropi của trường X khi trường Y đã biết, ký hiệu là $H(X|Y)$, biểu thị độ bất định trung bình của một ký hiệu x_i bất kỳ thuộc X khi đã biết một ký hiệu y_j kỳ thuộc Y. Xuất phát từ các xác suất có điều kiện $p(x|y)$ và $p(y|x)$ cũng như theo định nghĩa về entropi, ta xây dựng được biểu thức cho entropi có điều kiện $H(X|Y)$:

$$H(X|Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i|y_j) \quad (3-4-8)$$

entropi $H(X|Y)$ được gọi là "độ mập mờ" vì nó cho biết sự mập mờ của trường vào kênh khi đã biết trường ra kênh.

Tương tự ta cũng xác định được entropi của trường ra khi đã biết trường vào kênh:

$$H(Y|X) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(y_j|x_i) \quad (3-4-9)$$

entropi $H(Y|X)$ gọi là sai số trung bình bởi vì nó cho biết độ bất định (sai số) của trường ra khi đã biết trường vào.

Nếu trên kênh không có nhiễu thì $p(x_i|y_j) = 1$ và $p(y_j|x_i) = 1$, do đó:

$$H(X|Y) = H(Y|X) = 0 \quad (3-4-10)$$

Nếu nhiễu trên kênh đủ lớn để trường vào kênh và trường ra kênh độc lập thống kê với nhau, tức là $p(x_i|y_j) = p(x_i)$ và $p(y_j|x_i) = p(y_j)$ thì:

$$H(X|Y) = H(X) \quad (3-4-11)$$

và

$$H(Y|X) = H(Y) \quad (3-4-12)$$

Cuối cùng, để xác định các entropi có điều kiện, cần phải biết các xác suất có điều kiện:

$$[P(X|Y)] = \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_2|y_1) & \dots & p(x_n|y_1) \\ p(x_1|y_2) & p(x_2|y_2) & \dots & p(x_n|y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_1|y_m) & p(x_2|y_m) & \dots & p(x_n|y_m) \end{bmatrix} \quad (3-4-13)$$

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \dots & p(y_m|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \dots & p(y_m|x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1|x_n) & p(y_2|x_n) & \dots & p(y_m|x_n) \end{bmatrix} \quad (3-4-14)$$

Các xác suất này có thể xác định từ ma trận $[P(X,Y)]$. Ma trận $[P(Y|X)]$ được gọi là ma trận nhiễu trên kênh.

3-4-4. Mối liên hệ giữa các entropi

Từ các công thức (3-4-5), (3-4-7), (3-4-8) ta thu được:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3-4-15)$$

Tương tự ta có:

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) \quad (3-4-16)$$

Nếu trên kênh không có nhiễu, giữa trường vào và trường ra có một quan hệ một-một, sai số trung bình cũng như độ mập mờ bằng không, khi đó:

$$H(X, Y) = H(X) = H(Y) \quad (3-4-17)$$

Khi nhiễu trên kênh đủ lớn làm cho trường vào và trường ra của kênh độc lập với nhau thì:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \quad (3-4-18)$$

và ta cũng chứng minh được các bất đẳng thức:

$$H(X) \geq H(X|Y)$$

$$H(Y) \geq H(Y|X)$$

nghĩa là độ bất định trung bình của một tin bất kỳ bao giờ cũng lớn hơn độ bất định trung bình của tin đó khi đã biết một tin bất kỳ khác có liên hệ thống kê với nó. Các bất đẳng thức trên sẽ trở thành đẳng thức trong trường hợp hai tập X và Y độc lập thống kê với nhau.

Sự liên hệ giữa lượng tin tương hỗ trung bình và entropi được biểu diễn như sau:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (3-4-19)$$

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3-4-20)$$

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (3-4-21)$$

Các biểu thức này có một ý nghĩa cụ thể khi dùng chúng để mô tả sự truyền tin trong một kênh có nhiễu. Lượng tin trung bình nhận được về tin phát bằng tổng các độ bất định trung bình về tin phát đi và tin thu được xét một cách độc lập với nhau trừ cho độ bất định trung bình về sự xuất hiện đồng thời của chúng. Nếu giữa tin thu và tin phát không có liên quan gì với nhau nghĩa là tập phát X và tập thu Y độc lập thống kê với nhau, thì lượng tin trung bình nhận được về tin phát sẽ bằng không vì:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \text{ và } I(X, Y) = 0$$

Từ đây có thể giải thích lượng tin tương hỗ như một số đo mối liên hệ thống kê giữa X và Y.

3-4-5. Thông lượng, độ dư và hiệu quả sử dụng kênh rời rạc

Theo định nghĩa thông lượng của kênh là lượng tin tối đa mà kênh cho đi qua trong một đơn vị thời gian mà không gây sai nhầm, ký hiệu bằng C và đơn vị đo, giống như tốc độ lập tin (bit/sec).

Thông thường tốc độ lập tin bé hơn nhiều so với thông lượng của kênh:

$$R \ll C$$

Nhiệm vụ của mã hóa thống kê là thay đổi tốc độ lập tin của nguồn bằng cách thay đổi entropy, để tốc độ lập tin có thể so sánh được với thông lượng, gọi là phối hợp giữa nguồn với kênh về phương diện tốc độ truyền tin. Trường hợp truyền tin trong kênh có nhiễu thì nhiệm vụ của mã hóa là lợi dụng điều kiện $R < C$ để xây dựng mã hiệu mang tin có khả năng chống nhiễu, gọi là mã hiệu chống nhiễu.

Giả thiết kênh không nhớ, nghĩa là những tin nhận được sau không phụ thuộc những tin nhận được trước, nói cách khác chúng độc lập thống kê với nhau hoặc là khoảng cách giữa hai tin kế cận lớn hơn thời gian tương quan của quá trình. Như vậy độ chính xác của tin truyền đi trong kênh còn chỉ còn bị ảnh hưởng của nhiễu làm giảm đi mà thôi.

Nguồn $X = [x_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$ ở đầu vào của kênh, đầu ra của kênh nhận được các tin tương ứng hợp lại thành tập $Y = [y_j]$. Vì trong kênh có nhiễu nên sự chuyển đổi trong kênh giữa X và Y không phải một-một mà giữa X và Y có một xác suất chuyển đổi $p(y_j | x_i)$, $y_j \in Y$ và $x_i \in X$. Trong trường hợp này lượng tin tương hỗ trung bình giữa X và Y được xác định bằng:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Tốc độ lập tin ở đầu ra của kênh trong trường hợp kênh có nhiễu bằng :

$$R = n_0 H(X, Y) = n_0 [H(X) - H(X|Y)] \text{ (bit/sec)} \quad (3-4-22)$$

$n_0 H(X|Y)$ về mặt độ lớn là lượng tin bị nhiễu phá hủy trong một đơn vị thời gian. Nếu các thông số của kênh đã được xác định, lượng tin đó cũng được xác định, vậy muốn nâng cao tốc độ lập tin ở đầu ra của kênh nhất thiết phải thay đổi thông số thống kê của nguồn nhằm tăng entropy. Lúc đó lượng tin tối đa mà kênh cho đi qua mà không xảy ra sai lầm sẽ là tốc độ lập tin cực đại trong kênh có nhiễu :

$$C = R_{\max} = n_0 [H(X) - H(X|Y)]_{\max} \text{ (bit/sec)} \quad (3-4-23)$$

Độ dư tương đối của kênh được định nghĩa như sau:

$$r_c = 1 - \frac{R}{C} \quad (3-4-24)$$

Hiệu quả sử dụng kênh được định nghĩa là tỷ số của tốc độ lập tin ở đầu ra của kênh với thông lượng của kênh:

$$\eta_c = \frac{R}{C} \quad (3-4-25)$$

Ta thấy rằng:

$$\eta_c = 1 - r_c \quad (3-4-26)$$

và $\eta_c \leq 1$.

Hiệu quả sử dụng kênh là số đo độ chênh lệch giữa tốc độ lập tin ở đầu ra của kênh và thông lượng kênh.

3-5. ENTRÔPI CỦA NGUỒN VÀ THÔNG LƯỢNG KÊNH LIÊN TỤC

Ta biết rằng nguồn liên tục có thể xem như tập các thể hiện của một quá trình ngẫu nhiên. Nếu tập các quá trình ngẫu nhiên đó có năng lượng tập trung trong một dải phổ nhất định và có một thời gian tồn tại hữu hạn, điều này thường gặp trong thực tế, thì theo định lý lấy mẫu có thể thay mỗi thể hiện bằng n trị tức thời lấy ở những thời điểm cách nhau một quãng $\Delta T = 1/2\Delta f$, (Δf là dải phổ trong đó năng lượng của tín hiệu được tập trung, [1], [2], [6]):

$$n = 2\Delta f T_s \quad (3-5-1)$$

với T_s là thời gian tồn tại của một thể hiện đó.

Mỗi thể hiện $x(t)$ là một hàm theo biến thời gian t tồn tại trong quãng thời gian T_s và được xác định bởi n trị tức thời x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Các trị x_i có thể lấy bất kỳ trong phạm vi dải động của tín hiệu ($s_{\min}, s_{\max}$).

Muốn biết tính chất thống kê của nguồn phải biết quy luật phân bố xác suất nhiều chiều:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Trong thực tiễn truyền tin, thường gặp các quá trình ngẫu nhiên dừng, tính chất thống kê của các quá trình này không phụ thuộc gốc thời gian. Nói một cách chính xác các quá trình có thời gian tồn tại nhất định không phải là quá trình dừng, nhưng ở đây có thể xem gần đúng như dừng vì mối liên hệ thống kê giữa các trị lấy tại những thời điểm $t_1, t_2, \dots$ rất lỏng lẻo. Do vậy việc xác định quy luật phân bố nhiều chiều của các quá trình đang nghiên cứu trở nên dễ dàng hơn:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i) \quad (3-5-2)$$

Giả thiết các giá trị x_i đều chung một quy luật phân bố thì (3-5-2) sẽ trở thành:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = [p(x)]^n \quad (3-5-3)$$

So sánh $x(t)$ với một dãy x của nguồn rời rạc, mỗi mẫu $x_i = x(t_i)$ có thể so sánh với một ký hiệu x_i trong dãy x . Điều khác là x_i là một trong số ký hiệu hữu hạn của bộ chữ của nguồn rời rạc, và ký hiệu đó của bộ chữ có một xác suất nhất định. Còn $x(t_i)$ thì có thể lấy một trị bất kỳ trong phạm vi ($s_{\min}, s_{\max}$), số trị như vậy là không đếm được, cho nên nói xác suất xuất hiện của một trị bất kỳ là vô nghĩa. Nhưng nếu biết quy luật phân bố xác suất (mật độ phân bố xác suất) các trị tức thời của mẫu $x(t_i)$ là $p(x)$ thì có thể xây dựng khái niệm entropi về nguồn liên tục tương tự như trường hợp nguồn rời rạc.

3.5.1. Entropi nguồn liên tục

Entropi là đại lượng đo độ bất định trung bình của mỗi trị bất kỳ mà mẫu $x(t_i)$ có thể lấy. Về số đo mà nói thì đó cũng là lượng tin trung bình của một trị bất kỳ $x(t_i)$. Với giả thiết các mẫu $x(t_i)$ độc lập thống kê với nhau và cùng một quy luật phân bố xác suất $p(x)$, entropi của nguồn liên tục sẽ là:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx \quad (3-5-4)$$

Nếu các giá trị $x(t_i)$ phụ thuộc thống kê với nhau, cần phải xác định $H(X)$ theo quy luật phân bố nhiều chiều:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \log p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3-5-5)$$

$H(X)$ tính theo đơn vị (bit /độ tự do) với trường hợp dùng loga cơ số 2. Tốc độ lập tin của nguồn là liên tục sẽ là:

$$R = n_0 H(X) = (n / T_0) H(X) = 2 \Delta f \cdot H(X) \text{ (bit /sec)} \quad (3-5-6)$$

Khi sự truyền tin xảy ra trong kênh có nhiễu, ứng với một thể hiện $x(t)$ ở đầu vào của kênh có một thể hiện $y(t)$ ở đầu ra đã bị sai lệch ít nhiều. Tại một thời điểm bất kỳ một trị nào đó $x(t_i)$ qua kênh sẽ chuyển đổi thành một trị nào đó $y(t_i)$ theo quy luật phân bố có điều kiện $p(x|y)$.

Quy luật phân bố $p(x|y)$ cho phép xác định độ bất định trung bình về một trị x nào đó khi nhận được một trị y , nghĩa là xác định được entropi có điều kiện của nguồn liên tục :

$$H(X|Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log p(x|y) dx dy \quad (3-5-7)$$

$p(x,y)$ là quy luật phân bố đồng thời của x và y . Quy luật này dùng để tính entropi đồng thời:

$$H(X,Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log p(x,y) dx dy \quad (3-5-8)$$

và cũng như $H(X|Y)$, có thể xác định $H(Y|X)$ với quy luật phân bố $p(y|x)$:

$$H(Y|X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log p(y|x) dx dy \quad (3-5-9)$$

và ta cũng có:

$$H(Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \log p(y) dy \quad (3-5-10)$$

Quan quan hệ giữa các entropi được xác định bởi:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3-5-11)$$

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) \quad (3-5-12)$$

Lượng tin tương hỗ giữa x và y cũng được định nghĩa như trong trường hợp nguồn tin rời rạc. Lượng tin tương hỗ trung bình giữa một tin bất kỳ của nguồn Y và một tập tin bất kỳ của nguồn X được xác định theo biểu thức:

$$I(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log [p(x|y) / p(x)] dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log [p(y|x) / p(y)] dx dy \quad (3-5-13)$$

Quan quan hệ giữa lượng thông tin tương hỗ và các entropi được tính theo:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (3-5-14)$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3-5-15)$$

Cần chú ý các biểu thức cho entropi và lượng tin tương hỗ ở đây không phải suy diễn và mở rộng từ các biểu thức tương tự trong nguồn rời rạc vì làm như vậy sẽ dẫn đến giá trị của entropi nguồn liên tục lớn vô cùng vì số lượng tin là vô hạn. Điều kiện chú ý thứ hai là entropi nguồn

liên tục thay đổi khi đổi hệ tọa độ các biến ngẫu nhiên x, y , cho nên không mang một ý nghĩa vật lý đầy đủ như trường hợp trường nguồn rời rạc và chỉ là những khái niệm mở rộng dùng trong bước tính trung gian. Ý nghĩa vật lý của lượng tin tương hỗ là hiệu của hai entropi không phụ thuộc hệ tọa độ.

Điều chú ý cuối cùng là entropi nguồn liên tục phụ thuộc quy luật phân bố $p(x), p(y), p(x|y), p(x, y)$. Khi tính cụ thể chỉ giới hạn trong một số quy luật có hạn và gần với thực tế để đơn giản hóa các bước tính.

3-5-2. Thông lượng kênh liên tục

Giả thiết ở đầu vào của kênh là tín hiệu $x(t)$, tín hiệu ở đầu ra của kênh $y(t)$ tương ứng là hỗn hợp của $x(t)$ và nhiễu cộng $n(t)$:

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

$y(t) \in Y, x(t) \in X$ và $n(t) \in N$ với X là tập nguồn, Y là tập đích và N là tập nhiễu, $H(X), H(Y)$ và $H(N)$ là entropi các tập tương ứng. Giữa nguồn X và nguồn nhiễu N không có sự liên hệ thống kê nào, ta có thể viết entropi đồng thời của X và Y như sau:

$$H(X, Y) = H(X, X + N) = H(X, N) = H(X) + H(N)$$

Mặt khác, entropi đồng thời có thể viết lại như sau:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

So sánh hai công thức ta nhận thấy:

$$H(Y|X) = H(N)$$

Từ đây ta thấy rằng $H(Y|X)$ là entropi của nguồn nhiễu.

Tốc độ lập tin ở đầu ra của kênh xác định theo:

$$R = n_o[H(Y) - H(Y|X)] = n/T_s[H(Y) - H(N)] = 2\Delta f[H(Y) - H(N)] \quad (3-5-16)$$

Thông lượng kênh liên tục theo định nghĩa là lượng tin cực đại mà kênh cho truyền qua một đơn vị thời gian mà không bị nhiễu phá hủy, nói cách khác chính là tốc độ lập tin cực đại ở đầu ra của kênh:

$$C = R_{\max} \quad (3-5-17)$$

Tốc độ lập tin cực đại khi entropi tập Y cực đại. Các tin của tập Y gồm hai thành phần $x(t)$ và $n(t)$ xuất phát từ hai nguồn độc lập thống kê với nhau là nguồn tin X và nguồn nhiễu N . Tập Y xem như một nguồn hỗn hợp của X và N .

3-6. BIẾN ĐỔI ENTRÔPI QUA PHÉP BIẾN ĐỔI HỆ TỌA ĐỘ

Xét một tín hiệu $x(t)$ là một điểm hay một vectơ $\mathbf{x}$ trong không gian Φ . Ta xét một song ánh ψ từ không gian Φ sang không gian Ω , nói cách khác, tín hiệu $x(t)$ (hay $\mathbf{x}$) chuyển thành một tín hiệu $u(t)$ (hay $\mathbf{u}$). Biết entropi $H(\Phi)$, vấn đề đặt ra là xác định entropi $H(\Omega)$ ([2]).

Bởi vì phép biến đổi ψ là song ánh, nên xác suất để điểm $\mathbf{x}$ (đỉnh vectơ $\mathbf{x}$) nằm trong miền $d\Phi$ bằng xác suất để điểm $\mathbf{u}$ nằm trong miền $d\Omega$ ($d\Omega$ là ảnh của miền $d\Phi$ qua ánh xạ ψ). Như vậy:

$$p(\mathbf{x})d\Phi = q(\mathbf{u})d\Omega \quad (3-6-1)$$

với $p(\mathbf{x})$ là mật độ xác suất nhiều chiều của tín hiệu $x(t)$ trong không gian Φ và $q(\mathbf{u})$ là mật độ xác suất nhiều chiều của tín hiệu $u(t)$ trong không gian Ω . Từ (3-6-1) ta có:

$$p(\mathbf{x}) = q(\mathbf{u}) \left| \frac{d\Omega}{d\Phi} \right| \quad (3-6-2)$$

mà
$$\left| \frac{d\Omega}{d\Phi} \right| = \left| J\left(\frac{\Omega}{\Phi}\right) \right| \quad (3-6-3)$$

$J\left(\frac{\Omega}{\Phi}\right)$ là định thức jacobí của phép biến đổi ψ từ không gian Φ sang không gian Ω .

Giả thiết $x(t)$ có năng lượng hữu hạn, có phổ trong một dải tần hạn chế, do đó có thể biểu diễn trong một không gian hữu hạn chiều, ta có:

$$H(\Phi) = - \int_{\Phi} p(\mathbf{x}) \log p(\mathbf{x}) d\Phi$$

Từ (3-6-2) ta viết lại công thức trên:

$$H(\Phi) = - \int_{\Phi} p(\mathbf{x}) \log \left[q(\mathbf{u}) \left| J\left(\frac{\Omega}{\Phi}\right) \right| \right] d\Phi$$

hay

$$H(\Phi) = - \int_{\Phi} p(\mathbf{x}) \log \left[\left| J\left(\frac{\Omega}{\Phi}\right) \right| \right] d\Phi - \int_{\Phi} p(\mathbf{x}) \log q(\mathbf{u}) d\Phi \quad (3-6-4)$$

nhưng

$$- \int_{\Phi} p(\mathbf{x}) \log q(\mathbf{u}) d\Phi = - \int_{\Omega} q(\mathbf{u}) \log q(\mathbf{u}) d\Omega = H(\Omega)$$

Cuối cùng ta có:

$$H(\Omega) = H(\Phi) + \int_{\Phi} p(\mathbf{x}) \log \left[\left| J\left(\frac{\Omega}{\Phi}\right) \right| \right] d\Phi \quad (3-6-5)$$

Công thức (3-6-5) nói lên rằng trong kênh liên tục entropi phụ thuộc vào hệ tọa độ biểu diễn tín hiệu.

Đối với các phép biến đổi trực giao thì $J\left(\frac{\Omega}{\Phi}\right) = 1$ và do đó $H(\Omega) = H(\Phi)$.

Phép biến đổi trực giao giữa hai không gian không làm thay đổi entropi nên được quan tâm nhiều trong các ứng dụng xử lý tín hiệu, đặc biệt là trong vấn đề nén thông tin.

BÀI TẬP

3-1. Chứng tỏ rằng $\ln u \leq u - 1$.

3-2. Xác định entropi của biến ngẫu nhiên X có phân bố đồng đều:

$$p(x) = \begin{cases} a^{-1} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{với các giá trị khác} \end{cases}$$

trong các trường hợp:

- a) $a = 1$
 b) $a = 4$
 c) $a = 1/4$

3-3. Gọi X là một biến ngẫu nhiên có phân bố hình học, nghĩa là:

$$p(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Tìm entropi của X .
 b) Biết rằng $X > K$ với K là số nguyên dương. Tìm entropi của X .

3-4. Hai biến ngẫu nhiên X và Y nhị phân có phân bố đồng thời $P(X = Y = 0) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = Y = 1) = 1/3$. Tính $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ và $H(XY)$.

3-5. Đặt $Y = g(X)$, với g là hàm xác định. Chứng tỏ rằng $H(Y) \leq H(X)$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

3-6. Gọi X là một biến ngẫu nhiên với hàm mật độ phân bố xác suất $p_X(x)$ và đặt $Y = aX + b$ là một biến đổi tuyến tính của X , a và b là hai hằng số. Tính $H(Y)$ theo $H(X)$.

3-7. Tìm entropi của các biến ngẫu nhiên liên tục sau đây:

- a) X là biến ngẫu nhiên mũ với tham số $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} e^{-x/\lambda} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

- b) X là biến ngẫu nhiên Laplace với tham số $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda}$$

MÃ HIÊU

Trong các hệ thống truyền tin rời rạc hoặc truyền các tín hiệu liên tục nhưng đã được rời rạc hóa, bản tin thường phải thông qua một một số phép biến đổi: đổi thành số (thường là số nhị phân), mã hóa ...ở phía phát, ở phía thu bản tin (chúng ta gọi là từ mã) phải thông qua những phép biến đổi ngược lại là giải mã (mã thám), liên tục hóa...([1], [2], [2], [4], [11]).

Như đã nói trong chương 3, khi tốc độ lập tin R của nguồn còn cách xa thông lượng C của kênh, nhiệm vụ của mã hóa là biến đổi tính thống kê của nguồn làm cho tốc độ lập tin tiếp cận với khả năng truyền của kênh. Trong trường hợp truyền tin trong kênh có nhiễu, điều cần quan tâm nhiều là độ chính xác của sự truyền tin, hay các tin truyền đi ít bị sai nhảm. Đây chính là nhiệm vụ thứ hai của mã hóa.

Trong những chương sau, chúng sẽ đề cập đến cơ sở lý thuyết và phương pháp xây dựng mã hiệu tối ưu, mã hiệu chống nhiễu. Trong chương này, trước tiên, chúng ta giới thiệu các khái niệm và định nghĩa về mã: thế nào là mã hiệu? các thông số cơ bản của mã hiệu là gì? Các điều kiện và yêu cầu đối với mã hiệu là gì? Đó là những câu hỏi sẽ được giải đáp dần dần qua các phần sau đây.

Chúng ta đã định nghĩa nguồn tin rời rạc như một tập hữu hạn các tin có một cấu trúc thống kê nhất định được mô tả bằng một bảng chữ với quy luật phân bố xác suất xác định của các chữ.

Mã hiệu (code) được định nghĩa là một nguồn tin với một sơ đồ thống kê được xây dựng nhằm thoả mãn một số yêu cầu do hệ thống truyền tin đề ra, ví dụ như thoả mãn về tốc độ truyền tin, hay về độ chính xác của các tin truyền đi.

Như vậy, mã hiệu chính là một tập hữu hạn các dấu hiệu riêng (symbol) hay bảng chữ riêng (còn gọi là các *dấu mã* hay các *ký hiệu mã*) có phân bố xác suất thoả mãn một số yêu cầu quy định.

Số các dấu mã (ký hiệu mã) khác nhau trong bảng chữ của mã gọi là *cơ số của mã*, chúng ta ký hiệu bằng m . Ví dụ trong thông tin điện báo manip tần số (FSK) hoặc manip pha (PSK) chỉ dùng hai tần số hoặc hai góc pha ngược nhau 180° , cơ số của mã bằng hai ($m = 2$), trường hợp điện báo morse dùng ba loại ký hiệu : gạch, chấm, nghỉ có độ dài khác nhau, cơ số của mã là ba ($m = 3$). Khi mã có cơ số hai gọi là mã cơ số hai hoặc là mã nhị phân, đó là loại mã được dùng

rộng rãi nhất. Mã có cơ số bằng ba, bốn được gọi là mã cơ số ba, cơ số bốn hoặc là mã tam phân, mã tứ phân ...

Quá trình mã hóa (encoding) là việc sử dụng mã hiệu để biểu diễn các tin của nguồn tin. Ta cũng có thể nói: mã hóa là một phép biến đổi từ nguồn tin thành mã hiệu, hay mã hóa là phép biến đổi từ một tập tin này thành một tập tin khác có đặc tính thống kê yêu cầu.

Vì thông tin là sự cảm nhận của con người về thế giới xung quanh nên số lượng bản tin luôn là một số rất lớn và tăng lên không ngừng, cho nên số ký hiệu mã (hay cơ số của mã) không thể bằng hoặc nhiều hơn số tin. Thông thường, người ta gọi phép biến đổi từ một tập nhiều tin hơn về một tập có ít ký hiệu hơn là mã hóa. Phép biến đổi ngược lại được gọi là *giải mã* (decoding).

Vì số ký hiệu mã nhỏ hơn số tin của nguồn được mã hóa nên để mã hóa một tin của nguồn, chúng ta phải dùng một dãy liên tục các ký hiệu mã hay ta còn gọi là phải dùng một *tổ hợp* của các ký hiệu mã. Dãy này được gọi là một *từ mã* (codeword). Như vậy mã hóa là một phép biến đổi một-một giữa một tin của nguồn và một từ mã của bộ mã. Từ mã chính là một dãy liên tục các ký hiệu mã (hay một tổ hợp mã) được dùng để mã hóa (hay biểu diễn) một tin của nguồn. Trong một số trường hợp nhất định, người ta không thay thế mỗi tin của nguồn bằng một từ mã mà một khối tin của nguồn mới được mã hóa bằng một từ mã thì từ mã sẽ là một tổ hợp mã dùng để mã hóa một khối tin của nguồn. Lúc này chúng ta có khái niệm *mã khối*.

Thông số cơ bản thứ hai của mã là số các ký hiệu mã có trong một từ mã. Số ký hiệu này được gọi là tính dấu của mã hoặc là *độ dài của từ mã* và chúng ta ký hiệu bằng n . Nếu các từ mã của một bộ mã đồng một tính dấu nghĩa là cùng một độ dài như trường hợp mã baudot (điện báo télétyp) được gọi là *mã đồng đều*; nếu độ dài các từ mã khác nhau như các loại mã thống kê được gọi là *mã không đồng đều*. Đối với mã không đồng đều, *độ dài trung bình* được ký hiệu bằng $\bar{R}$ là một thông số cơ bản của mã và được tính theo biểu thức:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^L p(x_i) n_i \quad (4-1-1)$$

Trong đó:

$p(x_i)$ là xác suất xuất hiện tin x_i của nguồn X sẽ được mã hóa, $x_i \in X$

n_i là độ dài từ mã tương ứng với tin x_i

L là tổng số từ mã tương ứng với tổng số các tin của X .

Tất cả các từ mã để mã hóa các tin của nguồn làm thành bộ mã mã hóa nguồn. Thông số quan trọng thứ ba là *tổng số từ mã* trong bộ mã ký hiệu bằng L . Nó chính bằng số tin sẽ được mã hóa hoặc bằng số khối tin sẽ được mã hóa trong trường hợp chúng ta mã hóa mỗi khối tin bằng một từ mã.

Trong trường hợp mã đồng đều, nếu tất cả các tổ hợp mã gồm n ký hiệu với m trị khác nhau đều được dùng làm từ mã, lúc đó sẽ có:

$$L = m^n \quad (4-1-2)$$

và bộ mã được gọi là *mã đầy*. Nếu $L < m^n$, bộ mã được gọi là *mã vơi*. Mã baudot là một loại mã đầy. Trong trường hợp mã vơi, trong số các tổ hợp có độ dài n ký hiệu sẽ được gọi là *tổng số tổ hợp có thể dùng làm từ mã* và được ký hiệu là M .

Căn cứ sự phát triển của lý thuyết và kỹ thuật mã hiện nay, có thể có hai xu hướng nghiên cứu về mã. Một là nghiên cứu cấu trúc các loại mã đồng đều chủ yếu là loại mã vơi có tính chất phát hiện và sửa sai.

Xu hướng thứ hai nghiên cứu các loại mã không đồng đều, nhằm tìm thủ tục xây dựng những loại mã có độ dài trung bình ngắn nhất gọi là mã thống kê tối ưu, hoặc là mã kinh tế (về quan

MÃ HIỆU

điểm thời gian truyền tin). Hiện nay cũng có những công trình nghiên cứu phương pháp xây dựng các loại mã không đều có tính chống nhiễu (phát hiện và sửa sai).

Tham số thứ tư là *giá trị riêng* hay còn gọi *trị* của mỗi ký hiệu mã. Mỗi mã hiệu có m ký hiệu mã khác nhau, nếu cơ sở của nó là m . Mỗi ký hiệu mã là một dấu hiệu riêng, và chúng được gán một giá trị xác định theo một độ đo xác định (metric xác định). Các giá trị này được gọi là các *giá trị riêng* của các ký hiệu mã và ký hiệu nó là a . Trong trường hợp số, mỗi ký hiệu mã được gán một giá trị riêng nằm trong khoảng từ 0 tới $m - 1$. Ví dụ mã nhị phân ($m = 2$) ta có hai ký hiệu mã '0' và '1' được gán giá trị riêng 0 và 1.

Tham số thứ năm là *chỉ số vị trí* (code digit) của ký hiệu mã trong từ mã. Chúng ta gọi một vị trí mã là một chỗ trong từ mã để đặt một ký hiệu mã vào đó. Một từ mã có n ký hiệu mã (hay có độ dài n) sẽ có n vị trí mã. Một vị trí mã nhị phân còn được gọi là một vị trí nhị phân hay một bit. Một vị trí mã thập phân còn được gọi là một vị trí thập phân hay một digit. Chỉ số vị trí là số hiệu của vị trí mã trong từ mã theo một cách đánh số cụ thể. Hiện nay chúng ta thường đánh số vị trí mã bên phải nhất của từ mã là vị trí 0 và sau đó cứ dịch sang trái một vị trí thì chỉ số vị trí tăng thêm một.

Tham số thứ sáu là *trọng số vị trí* w_i , i là chỉ số của vị trí cần xác định trọng số của nó. Đây là một hệ số nhân làm thay đổi giá trị của ký hiệu mã khi nó nằm ở các vị trí khác nhau. Trong số vị trí này phụ thuộc vào mỗi mã hiệu cụ thể. Trong trường hợp số, (mã hiệu là một hệ đếm), trọng số vị trí là lũy thừa bậc chỉ số vị trí của cơ sở của mã. Cụ thể trọng số của vị trí i của mã hiệu dạng hệ đếm có cơ sở m là m^i .

Tham số thứ bảy là *giá trị* hay *trọng số của từ mã* b . Trọng số của từ mã là tổng các giá trị của các ký hiệu mã có trong từ mã.

$$b = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k \quad (4-1-3)$$

ở đây a_k là giá trị riêng của ký hiệu mã ở vị trí k . Trong trường hợp mã hiệu là hệ đếm thì trọng số của từ mã là:

$$b = \sum_{k=0}^{n-1} a_k m^k \quad (4-1-4)$$

Tham số thứ tám chúng ta quan tâm là *quãng cách mã* D . Quãng cách mã là khoảng cách giữa hai trọng số của hai từ mã. Tùy vào việc định nghĩa giá trị riêng và trọng số vị trí của các ký hiệu mã, chúng ta sẽ có những định nghĩa khác nhau cho quãng cách mã.

Ngoài các tham số trên mỗi loại mã còn có những tham số riêng của nó mà ta sẽ xét riêng trong mỗi loại mã cụ thể.

4-1-2. Điều kiện thiết lập mã hiệu

Chúng ta đã nói trong phần trên là mỗi từ mã là một tổ hợp mã dùng để mã hóa một tin hay một khối tin của nguồn. Vấn đề là có điều kiện nào ràng buộc để một tổ hợp mã sẽ được hay không được dùng làm một từ mã. Những điều kiện này sẽ được gọi là điều kiện thiết lập mã. Chúng sẽ thể hiện như thế nào và kiểm tra chúng như thế nào là vấn đề chúng ta sẽ phải xác định trong chương này. Trước hết chúng ta sẽ phát biểu những điều kiện thiết lập mã và sau đó sẽ đi tìm thể hiện của chúng và cách kiểm tra chúng.

Điều kiện thiết lập mã chung cho các loại mã hiệu Như chúng ta đã biết, các bản tin được mã hóa khi truyền đi sẽ ở dạng một dãy ký hiệu mã liên tiếp nhau. Muốn giải mã, hay muốn khôi phục lại được các tin từ dãy các ký hiệu mã nhận được, điều kiện trước tiên là trong dãy ký hiệu liên tiếp đó phải có quy luật đảm bảo sự phân tách ra được một cách duy nhất các từ

mã. Hay nói một cách khác chúng phải có quy luật để phân biệt được ký hiệu đầu của mỗi từ mã. Nếu điều kiện này không được thỏa mãn thì từ một chuỗi các ký hiệu mã nhận được ta có thể có nhiều cách tách nó thành các từ mã hoặc không tách nó thành các từ mã được. Điều này làm cho bản tin nhận được sau giải mã sẽ có thể không giống với bản tin được phát.

Lấy một ví dụ về mã nhị phân: nguồn tin gồm bốn tin a, b, c, d được mã hóa nhị phân theo quy luật:

a	00
b	01
c	10
d	11

khi nhận được dãy tin $aaabdcdb$ dưới dạng dãy ký hiệu mã, ta có:

00 00 00 01 10 11 01

Khi giải mã, nếu xác định được gốc của dãy ký hiệu trên, chúng ta chỉ có thể tách một cách duy nhất thành dãy tin ban đầu bằng cách từ gốc trở đi chia thành từng nhóm hai ký hiệu mã tương ứng. Như vậy bộ mã trên cho phép phân tách các từ mã một cách duy nhất và được gọi là *mã phân tách được*.

Bây giờ lấy một ví dụ khác, đem mã hóa nguồn tin trên với một bộ mã khác:

a	0
b	01
c	101
d	1

Cũng với dãy tin $aaabdcdb$ trên, khi chúng ta nhận được dãy các ký hiệu mã:

00001101101

Chúng ta có thể giải thành các dãy tin khác nhau và khác với dãy tin ban đầu, ví dụ có thể giải thành:

$aaaadbbdb$

Như vậy bộ mã này không cho phép phân tích các từ mã một cách duy nhất và đúng đắn, sự nhận tin không thể thực hiện được.

Sự tồn tại quy luật cho phép tách được một cách duy nhất dãy các ký hiệu mã thành các từ mã được gọi là *điều kiện thiết lập mã chung* cho mọi bộ mã. Bộ mã thỏa mãn điều kiện thiết lập mã còn được gọi là bộ mã phân tách được.

Chúng ta sẽ xét những tiêu chuẩn cụ thể cho phép xác định một bộ mã có thỏa mãn tính phân tách được hay không, hay nói khác, chúng ta sẽ xét quy luật cho phép phân tích được sau. Trong phần này, từ điều kiện thiết lập mã chung, chúng ta có thể đưa ra khái niệm cụ thể hơn cho bộ mã đầy hoặc vơi. Rõ ràng tất cả các tổ hợp mã có độ dài $n = 1$ đến $n_{\max}$ mà các tổ hợp mã này thỏa mãn điều kiện thiết lập mã là những tổ hợp có thể sử dụng để mã hóa một tin của nguồn. Hay nói khác chúng là các tổ hợp có thể được sử dụng làm từ mã. Chúng được gọi là các *tổ hợp có thể*. Đương nhiên, số tổ hợp có thể này ít nhất cũng phải bằng số từ mã cần phải có (bằng số tin hay số khối tin của nguồn) của bộ mã. Số tổ hợp có thể được ký hiệu là M và nó liên quan đến độ dài lớn nhất $n_{\max}$ của chúng.

Chúng ta gọi một bộ mã là *bộ mã đầy* nếu tất cả các tổ hợp có thể ứng với một giá trị $n_{\max}$ đã được sử dụng hết làm từ mã hay số tổ hợp có thể bằng số tin của nguồn được mã hóa. Nếu còn ít

nhất một tổ hợp có thể không được sử dụng làm từ mã thì bộ mã được gọi là *bộ mã vơi*. Trong bộ mã vơi, các tổ hợp là tổ hợp có thể nhưng không được dùng làm từ mã được gọi là *các tổ hợp cấm* hay *tổ hợp thừa*. Số tổ hợp cấm được ký hiệu là R và

$$R = M - L \quad (4-1-5)$$

Điều kiện riêng cho mỗi loại mã Đối với mỗi bộ mã còn tồn tại những điều kiện riêng phải được thoả mãn khi thiết lập nó. Ví dụ mã thống kê tối ưu phải đạt được độ dài trung bình của các từ mã tối thiểu, mã chống nhiễu phải cho phép phát hiện sai càng nhiều càng tốt.

Các điều kiện riêng cho mỗi bộ mã chính là những điều kiện về hình thức, về yêu cầu kỹ thuật, hoặc chỉ tiêu kỹ thuật riêng mà bộ mã cần đạt được. Các điều kiện này sẽ khác nhau với mỗi loại mã cụ thể, chúng ta sẽ xét đến các điều kiện riêng này khi nghiên cứu về từng loại mã cụ thể.

4-2. PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN MÃ

Một phương pháp biểu diễn mã là một cách trình bày toàn bộ mã hiệu với các tin được mã hóa dưới một dạng thuận tiện cho việc nghiên cứu các tính chất của mã hiệu. Các dạng biểu diễn mã thường được dùng là các bảng mã, các đồ hình mã và các hàm cấu trúc mã ([1], [2], [6]).

4-2-1. Các bảng mã

Các bảng mã thường được dùng rộng rãi để mô tả một mã hiệu (bộ mã) là bảng đối chiếu và mặt tọa độ của mã.

Bảng đối chiếu mã Bảng đối chiếu mã là cách trình bày đơn giản nhất, liệt kê trong một bảng những tin của nguồn và kèm theo là từ mã tương ứng với nó. Bảng đối chiếu có ưu điểm là cho thấy cụ thể và tức thời bản tin và từ mã của nó. Nhưng với những bộ mã lớn thì quá công kênh và khuyết điểm chính là không cho phép thấy các tính chất quan trọng của bộ mã. Một ví dụ của bộ đối chiếu mã trình bày trong bảng 4-2-1 như sau:

tin	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
từ mã	00	01	100	1010	1011

Bảng 4-2-1: Ví dụ về bảng đối chiếu mã

Trong một bảng đối chiếu mã, số thứ tự của từ mã trong bộ mã là số thứ tự người ta liệt kê từ mã.

Mặt tọa độ của mã Mặt tọa độ mã là một biểu diễn dựa trên hai thông số của từ mã thường là độ dài n và trọng số b để lập một mặt phẳng có hai tọa độ, trên đó mỗi từ mã được biểu diễn bằng một điểm. Trọng số b của từ mã là tổng trọng số các ký hiệu trong từ mã.

$$b = \sum_{k=0}^{n-1} a_k m^k$$

với a_k là giá trị riêng của ký hiệu thứ k trong từ mã kể từ trái sang phải, với mã nhị phân a_k có hai giá trị 0 hoặc 1, k là số thứ tự của ký hiệu trong từ mã, m là cơ số của mã.

Ví dụ

Trọng số của từ mã nhị phân có 4 ký hiệu 1011 bằng:

$$b = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 13$$

Mỗi từ mã sẽ hoàn toàn xác định khi ta xác định được cặp (n, b) của nó. Như vậy mỗi từ mã được biểu diễn một cặp tọa độ (n, b) duy nhất. Điều này được thể hiện bằng định lý sau:

Định lý. Không có hai từ mã mã hóa hai tin khác nhau của cùng một bộ mã thỏa mãn đồng thời:

$$n_i = n_j \text{ và } b_i = b_j \quad (i \neq j)$$

Thật vậy, giả thiết $n_i = n_j$, để hai từ mã khác nhau thì ít nhất tại một vị trí k nào đó giá trị của hai ký hiệu mã của hai từ mã phải khác nhau, nghĩa là $b_i \neq b_j$. Hoặc là giả thiết $b_i = b_j$, để hai từ mã khác nhau, độ dài từ mã phải khác nhau $n_i \neq n_j$.

4-2-2. Đồ hình mã

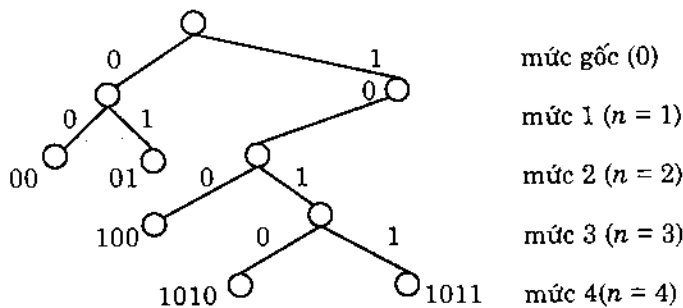
Các phương pháp đồ hình sử dụng một đồ hình để biểu diễn một mã hiệu. Nó cho phép trình bày mã một cách gọn hơn các bảng mã, đồng thời cho thấy rõ các tính chất quan trọng của mã hiệu một cách trực quan hơn. Các phương pháp biểu diễn mã hiệu bằng đồ hình gồm có cây mã và đồ hình kết cấu.

Cây mã Cây mã là một đồ hình gồm các nút và các nhánh. Gốc của cây gọi là nút gốc. Từ nút gốc phân ra m nhánh hoặc ít hơn, mỗi nhánh đại biểu một trị của ký hiệu nằm ở vị trí bên trái nhất của mọi từ mã của bộ mã. Mỗi nhánh kết thúc tại một nút ở cấp cao hơn nút xuất phát. Tiếp tục từ mỗi nút ở cấp i sẽ phân ra m nhánh hoặc ít hơn, mỗi nhánh đại biểu cho một trị của ký hiệu có tại vị trí $i + 1$ (tính từ bên trái) của những từ mã mà i ký hiệu bên trái nó được biểu diễn bằng một đường liên tục các nhánh tính từ nút gốc đến nút cấp i được phân nhánh này. Mỗi nhánh phân ra từ nút cấp i này sẽ kết thúc ở một nút cấp $i + 1$.

Mỗi nút cuối (là nút kết thúc của nhánh đại biểu cho ký hiệu cuối cùng của một từ mã) sẽ đại biểu cho một từ mã mà thứ tự các trị ký hiệu mã là thứ tự các trị trên các nhánh đi từ nút gốc đến nút cuối qua các nút trung gian.

Rõ ràng có thể có những nút cuối mà không có nhánh nào đi ra từ nó, và cũng có thể có những nút cuối của từ mã này là nút trung gian của từ mã khác. Mã hiệu có nút cuối trùng với một nút trung gian của từ mã khác sẽ có đặc điểm là từ mã ngắn hơn là phần đầu của từ mã dài hơn và nó không cho phép phân tách một chuỗi mã bất kỳ thành một dãy duy nhất các từ mã.

Ví dụ cây mã cho bộ mã 00, 01, 100, 1010, 1011.

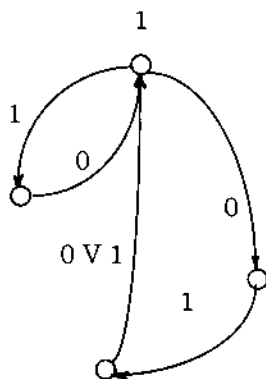


Hình 4-2-1: Ví dụ về cây mã

Từ ví dụ ta nhận thấy rằng nhìn vào cây mã ta biết cây mã có phải là cây mã đồng đều hay không đồng đều, loại mã đầy hay vơi. Cây mã trong hình 4-2-1 thuộc loại mã không đồng đều.

Đồ hình kết cấu Đồ hình kết cấu gồm có những nút và những nhánh có hướng, đây là một cách biểu diễn cây mã rút gọn. Một từ mã được biểu diễn bằng một vòng kín xuất phát từ nút gốc theo các nhánh có hướng (chiều mũi tên) qua các nút trung gian rồi về nút gốc. Mỗi nhánh đại diện cho một trị của ký hiệu mã. Thứ tự các trị bắt đầu từ nút gốc là thứ tự các ký hiệu mã tính từ bên trái mỗi từ mã.

Ví dụ



Trên đồ hình kết cấu, trị các nhánh được ghi ở đầu xuất phát của nhánh và phía bên trái, dấu V là dấu hoặc (hay là) có nghĩa là một nhánh có thể đại biểu cho trị bên trái hoặc trị bên phải của dấu V; các nút được đánh dấu theo thứ tự xa dần nút gốc (số ghi trong vòng tròn của nút).

Đồ hình kết cấu không những dùng để mô tả bản thân mã mà còn dùng để xét cách vận hành thiết bị mã hóa và giải mã như là một đồ hình trạng thái của thiết bị.

4-2-3. Hàm cấu trúc của mã

Hàm cấu trúc mã cho ta một đặc tính quan trọng của mã là sự phân bố của các từ mã theo độ dài, ký hiệu bằng: $G(n_i)$.

Ví dụ

Bộ mã 00, 01, 100, 1010, 1011 có hàm $G(n_i)$ dưới dạng sau:

$$G(n_i) = 2, \text{ khi } n_i = 2$$

$$1, \text{ khi } n_i = 3$$

$$2, \text{ khi } n_i = 4$$

Từ hàm cấu trúc có thể phân biệt được mã đều hoặc không đều. Cụ thể nếu hàm cấu trúc bằng không với tất cả các giá trị của n_i , trừ tại một điểm chúng ta có loại mã đều. Nếu hàm cấu trúc có hai hoặc nhiều điểm khác không chúng ta có loại mã không đều. Cũng từ hàm cấu trúc có thể xác minh mã thoả mãn điều kiện phân tách được hay không.

4-2-4. Các phương pháp biểu diễn mã tổng quát

Trên đây là những phương pháp biểu diễn mã dụng cho bất cứ loại mã nào, nhưng cũng có còn những phương pháp biểu diễn tổng quát khác có tính chất bao trùm hơn mà chúng ta có thể phân thành hai phương pháp chủ yếu: một là *phương pháp hình học* và hai là *phương pháp đại số*.

Với phương pháp hình học, các từ mã có độ dài n được biểu diễn bằng một vectơ hay một điểm (đầu mút của vectơ) trong không gian n chiều. Bộ mã là một hệ điểm trong không gian đó.

Phương pháp biểu mã tổng quát thứ hai là phương pháp biểu diễn đại số, bộ mã được xem như thuộc một cấu trúc đại số nhất định. Các loại mã sẽ được phân loại và nghiên cứu theo các cấu trúc đại số sử dụng để biểu diễn bộ mã.

Các phương pháp biểu diễn mã tổng quát được dùng để khảo sát một số mã hiệu và sẽ được trình bày trong chương 9 và 10.

4-3. ĐIỀU KIỆN PHÂN TÁCH CỦA MÃ HIỆU

Trong mục này chúng ta sẽ xem xét các tiêu chuẩn được sử dụng để đánh giá một mã hiệu có thoả mãn điều kiện thiết lập mã hay không. Chúng ta biết rằng điều kiện chung để thiết lập mã là mã phải phân tách được cho nên tiêu chuẩn thiết lập mã chính là tiêu chuẩn để mã phân tách được hay chính là những tiêu chuẩn cho phép tách đúng từng từ mã từ chuỗi mã nhận được. Nếu lưu ý rằng giữa từ mã và tin được mã hóa có quan hệ một-một thì việc giải mã ở phía thu tin sẽ bao gồm việc tách đúng từ mã và chuyển ngược từ mã thành tin tương ứng. Việc chuyển từ mã thành tin sẽ được thực hiện dễ dàng nhờ một sơ đồ giải mã xác định. Việc tách đúng các từ mã là một thuật toán kiểm tra tính đúng của một số tiêu chuẩn được là điều kiện phân tách của mã hiệu. Việc kiểm tra này sẽ bắt đầu từ ký hiệu mã đầu tiên của chuỗi cho đến khi có thể cắt được một từ mã thì nó sẽ cắt từ mã và lại coi ký hiệu tiếp sau làm ký hiệu đầu tiên của chuỗi để kiểm tra tiếp ([1], [5], [6], [10], [11]).

4-3-1. Độ chậm giải mã

Như trong mục 4-1-2, khi nhận một dãy ký hiệu mã, để có thể phân tách được các từ mã một cách duy nhất và đúng đắn bộ mã phải thoả mãn điều kiện cần và đủ là: *bất kỳ dãy các từ mã nào của bộ mã cũng không được trùng với một dãy từ mã khác của cùng bộ mã.*

Lấy bộ mã 00, 01, 100, 1010, 1011 làm ví dụ

Khi nhận được dãy ký hiệu:

1000101001011101101

chỉ có thể phân tách ra một cách duy nhất thành dãy các từ mã:

100-01-01-00-1011-1011-01

Như vậy bộ mã đang xét thuộc loại mã phân tách được.

Chúng ta gọi *độ chậm giải mã* là số ký hiệu cần phải nhận được đủ để có thể phân tách (nhận dạng) được từ mã. Thường đối với mã phân tách được, độ chậm giải mã là hữu hạn, nhưng cũng có trường hợp độ chậm giải mã là vô hạn.

4-3-2. Điều kiện để mã phân tách được

Để xác định tính phân tách của bộ mã và độ chậm giải mã là bao nhiêu nếu mã là phân tách được, người ta dùng bảng thử tính phân tách của bộ mã.

Bộ mã sẽ chắc chắn phân tách được nếu từ mã ngắn hơn không là phần đầu, phần cuối hoặc phần giữa của từ mã khác dài hơn, hoặc việc ghép hai hay nhiều từ mã lại thành chuỗi ký hiệu mã không tạo thành một đoạn ký hiệu mã trùng với một từ mã khác chúng.

MÃ HIỆU

Cách xây dựng bảng thử như sau : đem các từ mã xếp thành một cột, đánh dấu là cột số 1. Đối chiếu các từ mã ngắn với các từ mã dài hơn trong cột 1. Nếu từ mã ngắn giống phần đầu của từ mã dài hơn, thì lấy phần còn lại ghi vào cột tiếp theo đánh dấu cột số 2. Tiếp tục đối chiếu các tổ hợp mã mới thiết lập được trong cột số 2 với các từ mã trong cột 1, lấy phần còn lại và ghi vào cột tiếp theo đánh dấu cột số 3... Trong cột thứ j sẽ ghi kết quả khi đối chiếu các tổ hợp trong cột thứ $j - 1$ với các từ mã trong cột 1. Tiếp tục như vậy cho đến lúc cột phải điền, trở nên trống rỗng. Ta có định lý sau:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để mã có tính phân tách là không có một tổ hợp mã nào trong các cột từ $j \geq 2$ trùng với một từ mã trong cột 1.

Thực vậy, vì từ cột hai là những chuỗi cuối của từ mã dài mà phần đầu của nó đã trùng với từ mã khác hoặc phần cuối của từ mã khác. Nếu có một chuỗi này trùng với một từ mã khác thì chắc chắn có lớn hơn một cách phân tách chuỗi mã nhận được thành các từ mã. Hay nói khác nếu định lý trên không thoả mãn thì sẽ tồn tại một cách ghép các từ mã thành chuỗi mã, mà trong nó tạo ra một đoạn ký hiệu mã trùng với một từ mã khác với các từ mã được ghép thành chuỗi.

Ví dụ

Bảng thử mã phân tách của bộ mã: 00, 01, 100, 1010, 1011 được cho ở bảng 4-3-1

Bảng 4-3-1:

1	2	3
00		
01		
100		
1010		
1011		

Bảng thử mã phân tách ở bảng 4-3-1 có các cột từ cột 2 là trống rỗng, nghĩa là bộ mã này phân tách được. Rõ ràng trong trường hợp này không có từ mã nào trùng với phần đầu của từ mã khác nên khi nhận đủ số ký hiệu của một từ mã thì không có từ mã nào khác nhận các ký hiệu mã này làm phần đầu nữa nên đây chính là điểm phải cắt từ mã. Độ chậm giải mã của mã này bằng độ dài của từ mã.

Ví dụ

Xét tính phân tách của bộ mã 10, 100, 01, 011. Bảng thử của nó cho ở bảng 4-3-2.

Bảng 4-3-2

1	2	3	4	5	...
10	0	1	0	1	
100	1	11	00	11	
01		0	1	0	...
011		00	11	00	

Trong các cột từ cột 2, 3,... của bảng thử này không có tổ hợp mã nào trùng với các từ mã trong cột 1, nhưng có thể diễn các cột j đến vô hạn mà không gặp cột trống. Bộ mã này phân tách được nhưng độ chậm giải mã là vô hạn.

Giả sử khi nhận được dãy ký hiệu:

1001010101010101010...

của bộ mã này, muốn phân tách được một từ mã đầu tiên phải chờ nhận thêm một số ký hiệu nữa và số này phải chờ đến vô hạn (hay đến hết bản tin), vì chỉ với 5 ký hiệu đầu chúng ta có thể tách thành 100-10, hoặc 10-01-01. Nhưng nếu bản tin chỉ là chuỗi ký hiệu:

100101010101010101001011

thì chúng ta chỉ có một cách phân tích duy nhất thành:

100-10-10-10-10-10-10-10-01-011

Bảng thử tính phân tách cho phép đánh giá được độ chậm giải mã. Có thể chứng minh được nếu j là số hiệu cột rỗng, thì độ chậm giải mã T_{ch} tính theo:

$$\left\lceil \frac{j-1}{2} \right\rceil n_{\min} \leq T_{ch} \leq \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil n_{\max}$$

$n_{\min}$ và $n_{\max}$ là độ dài từ mã ngắn nhất và dài nhất, $[x]$ là phần nguyên của x .

4-3-3. Mã có tính prefix

Từ những ví dụ và nhận xét vừa nêu trong mục trên chúng ta rút ra một điều kiện đơn giản về tính phân tách của mã.

Điều kiện cần và đủ để mã có tính phân tách được là không có bất kỳ từ mã nào trùng với phần đầu của từ mã khác của cùng bộ mã.

Nếu thỏa mãn điều kiện này bảng thử mã sẽ có các cột, trừ cột số một, là rỗng như trường hợp 00, 01, 100, 1010, 1011.

Bộ mã thỏa mãn điều kiện này có nhiều đặc điểm có ích cho việc khai thác sử dụng và được nghiên cứu nhiều, chúng được gọi là loại *mã có tính prefix*.

Prefix của một từ mã là phần đầu (hay bộ phận còn lại) của từ mã sau khi bỏ đi một số ký hiệu cuối cùng. Thông thường chúng ta đọc từ trái qua phải nên chúng ta thường quy định ký hiệu đầu tiên của từ mã là ký hiệu bên trái nhất, và ký hiệu bên phải nhất là ký hiệu cuối cùng. Quy định này có thể thay đổi nhưng phải thống nhất. Ví dụ từ mã 011001110 có các prefix 01100111, 0110011, 011001, 01100, 0110, 011, 01, 0.

Mã có tính prefix là bộ mã không có bất kỳ từ mã nào lại là prefix của một từ mã khác của cùng bộ mã. Như vậy mã prefix thỏa mãn điều kiện về tính phân tách của mã.

Khi dùng cây mã để mô tả mã có tính prefix, cây mã đó sẽ có những đặc điểm sau:

- Không có một nút nào vừa là nút cuối lại đồng thời là nút trung gian.
- Mỗi nút ở cấp j , trừ các nút cuối, đều nối với m nút hoặc ít hơn ở cấp $j+1$. Nếu một nút cấp j nối với m nút ở cấp $j+1$ thì bộ mã được biểu diễn bởi cây mã là bộ mã đầy vì không thể thêm một từ mã bất kỳ nào mà không phá hủy tính prefix của mã.

Mã đầy đồng thời có tính prefix. Định nghĩa trên có thể áp dụng cho các loại mã đồng đều, tuy rằng đối với loại mã này thường dùng một định nghĩa mã đầy riêng như đã nói đến trong phần 4-1 khái niệm và định nghĩa.

MÃ HIỆU

Các loại mã không đồng đều phân tách được mà không có tính prefix ít được nghiên cứu vì không có giá trị thực tế bao nhiêu và những thiết bị mã hóa và giải mã quá phức tạp.

Từ tính chất nói trên của mã prefix, có thể dùng hàm cấu trúc của mã để rút ra điều kiện tổng quát về tính phân tách được của mã. Rõ ràng với mã có tính prefix thì một nút chỉ tỏa ra nhiều nhất m nhánh nên:

$$G(1) \leq m$$

$$G(2) \leq m^2 - mG(1)$$

$$G(3) \leq m^3 - m^2 G(1) - m G(2)$$

* * * * *

$$G(n) \leq m^n - m^{n-1}G(1) - m^{n-2}G(2) \dots - m^{n-j}G(j) - \dots - mG(n-1)$$

hav

$$G(n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} m^{n-j} G(j)$$

Đem chia cả hai vế của bất đẳng thức cho m^n và chuyển tất cả các hạng số có hàm cấu trúc qua một vế sẽ được:

$$m^{-1}G(1) + m^{-2}G(2) + \dots + m^{-j}G(j) + \dots + m^{-n}G(n) \leq 1$$

hoặc:

$$\sum_{j=1}^n m^{-j} G(j) \leq 1 \quad (4-3-1)$$

Khi mã có hàm cấu trúc $G(j)$ thỏa mãn điều kiện (4-3-1) thì mã đó sẽ có tính prefix. Điều kiện này có thể mở rộng cho tất cả các loại mã phân tách được có hoặc không có tính prefix.

Khi điều kiện (4-3-1) trở thành đẳng thức, lúc đó sẽ có mã đầy với hàm cấu trúc $G(j)$.

Giống cách chứng minh của công thức (4-3-1), chúng ta có thể chứng minh một định lý mang tên bất đẳng thức Kraft (ta sẽ chứng minh định lý này ở chương 5).

Bất đẳng thức Kraft : Nếu một dãy số nguyên $n_1, n_2, \dots, n_k$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^k m^{-nj} \leq 1 \quad (4-3-2)$$

thì sẽ tồn tại một mã có tính prefix, cơ số m , và dãy số nguyên trên là các độ dài của các từ mã của bộ mã.

Độ chặm giải mã của mã prefix bằng độ dài của từ mã dài nhất.

4-4. MÃ HÊ THỐNG

4-4-1. Mã hệ thống tổng quát

Mã hệ thống là một loại mã mà mỗi từ mã của nó được xây dựng bằng cách liên kết một số từ mã của một bộ mã gốc. Vì bộ mã gốc có tính phân tách nên bộ mã hệ thống cũng có tính phân tách. Nếu bộ mã gốc có tính prefix thì bộ mã hệ thống cũng có tính prefix. Thường hiện nay,

người ta sử dụng một số từ mã của bộ mã gốc làm các tổ hợp tạo thành phần đầu của từ mã hệ thống và gọi nó là các tổ hợp sơ đẳng. Các tổ hợp còn lại của bộ mã gốc được sử dụng làm các tổ hợp kết thúc của từ mã hệ thống và gọi nó là các tổ hợp cuối. Từ mã của mã hệ thống được tạo ra bằng cách nối các tổ hợp sơ đẳng lại với nhau và nối thêm một tổ hợp cuối.

Để biểu diễn mã hệ thống có thể dùng cách biểu diễn mã bất kỳ nhưng để thấy nó là mã hệ thống người ta thường biểu diễn các tổ hợp sơ đẳng và các tổ hợp cuối của nó rồi biểu diễn sự liên kết các tổ hợp này để tạo thành từ mã. Cách biểu diễn thuận tiện đối với mã hệ thống là đồ hình kết cấu với một chút biến đổi. Trong đồ hình kết cấu này, chỉ những tổ hợp sơ đẳng mới kết thúc ở nút gốc, còn các tổ hợp cuối sẽ kết thúc ở một nút kết thúc riêng. Sự biến đổi này cho phép phân biệt tổ hợp cuối và tổ hợp sơ đẳng, đồng thời cho phép xác định một từ mã của mã hệ thống. Từ mã của mã hệ thống sẽ là trình tự các trị được biểu diễn bằng các nhánh đi từ nút gốc, có thể vòng qua nút gốc một số lần qua các đường đi khác nhau, rồi đến kết thúc ở một nút kết thúc.

Việc giải mã đối với mã hệ thống phải thông qua hai bước. Bước một là tách chuỗi ký hiệu mã nhận được thành chuỗi các tổ hợp sơ đẳng và các tổ hợp cuối. Bước hai là tìm các tổ hợp cuối và xác định điểm kết thúc từ mã tại đây.

Phương pháp giải mã hệ thống bằng đồ hình kết cấu thực hiện như sau: xuất phát từ nút gốc theo đường mũi tên của các nhánh một cách tuần tự, mỗi khi quay về gốc là kết thúc một tổ hợp sơ đẳng, và khi vào đường cụt là kết thúc tổ hợp cuối cùng, đồng thời kết thúc từ mã hệ thống.

4-4-2. Mã hệ thống có tính prefix

Mã hệ thống có tính prefix được xây dựng từ một bộ mã gốc có tính prefix bằng cách lấy một số từ mã của mã prefix gốc làm tổ hợp sơ đẳng và các từ mã còn lại làm tổ hợp cuối. Ghép các tổ hợp sơ đẳng với nhau và nối một trong các tổ hợp cuối vào thành từ mã của mã mới gọi là mã hệ thống có tính prefix.

Ví dụ

Lấy bộ mã prefix 1, 00, 010, 011 làm gốc, trong đó các tổ hợp: 1, 00, 010 là tổ hợp sơ đẳng còn 011 là tổ hợp cuối. Các từ mã được hình thành như sau đều có thể là từ mã của mã hệ thống:

1011, 11011, 00011, 100011, 010011, 01001011011

Khi giải mã phải qua hai bước. Bước thứ nhất từ dãy ký hiệu nhận được phân tách thành giải các tổ hợp sơ đẳng và tổ hợp cuối, sau đó giải thành dãy các tổ hợp của mã hệ thống. Vẫn lấy ví dụ trên khi nhận được tin dưới dạng dãy ký hiệu mã:

010011 010011 100011 01001011011 1011 11011 1011

bước thứ nhất tách thành dãy:

010-011-010-1-00-011-010-010-1-1-011-1-011-1-1-011-1-011

bước thứ hai phân tách thành dãy tổ hợp mã hệ thống:

010011-010011-100011-01001011011-1011-11011-1011

4-5. MÃ CÓ DẤU PHÂN TÁCH

Các loại mã có tính prefix đều có tính phân tách được, nhưng các thiết bị tách từ mã đối với các loại mã đó đều phức tạp. Để có thể sử dụng những thiết bị đơn giản để phân tách từ mã và cho phép phân tách mã trong điều kiện có nhiễu, cần phải xây dựng những loại mã có dấu phân tách. Từ lý luận về mã hệ thống, chúng ta nhận thấy rằng nếu mỗi từ mã có một tổ hợp

MÃ HIỆU

cuối và tổ hợp cuối của mọi từ mã là giống nhau thì mỗi khi tìm được tổ hợp cuối này chúng ta tìm thấy điểm kết thúc một từ mã. Như vậy tổ hợp cuối này trở thành một dấu hiệu được sử dụng hết sức thuận lợi để phân tách mã và nó được gọi là dấu phân tách. Mã dùng dấu phân tách để cắt các từ mã được gọi là mã có dấu phân tách.

Tổng quát hóa, mã có dấu phân tách là một loại mã mà mỗi từ mã được giới hạn bởi một dấu hiệu đặc biệt gọi là dấu phân tách. Dấu phân tách là một dấu hiệu có thể là một tổ hợp các ký hiệu mã mà cũng có thể không phải là ký hiệu mã. Ví dụ một bài viết là một cách mã hóa thông tin trao đổi giữa con người với nhau. Nếu ta coi bài viết này được mã hóa bằng các ký hiệu mã là bộ chữ cái (alphabet) thì dấu bỏ cách (là dấu phân tách) không phải là ký hiệu mã. Nhưng nếu chúng ta coi bài viết được mã hóa bằng bộ chữ mở rộng (gồm cả các dấu) thì dấu bỏ cách là một ký hiệu mã. Thường trong mã hóa, dấu phân tách là một tổ hợp mã đặc biệt mà ta không gặp nó trong từ mã hoặc trong chuỗi liên tục các từ mã. Một trường hợp rất thường gặp trong mã hóa, mã có dấu phân tách là một trường hợp riêng của mã hệ thống có tính prefix.

Trường hợp mã có tính prefix khi phân tách một từ mã ta phải biết được ít nhất là tất cả các ký hiệu của từ mã cần phân tách. Việc phân tách một từ mã là việc nhận dạng đầy các ký hiệu của một từ mã cụ thể. Việc này phải được thực hiện với mọi từ mã của bộ mã.

Trường hợp mã có dấu phân tách, để tách một từ mã đã cho, chúng ta chỉ cần nhận dạng dấu phân tách. Nếu dấu phân tách là một dấu hiệu đặc biệt mà nhiều trong đường truyền, khi không lớn, khó làm nó chuyển thành một ký hiệu mã thì mã này cho phép chống nhiễu. Nếu dấu phân tách là tổ hợp ký hiệu mã của dấu phân tách thì việc nhận dạng này được thực hiện bằng cách trễ đoạn mã dài bằng dấu phân tách bằng một thanh ghi dịch và so sánh đoạn mã này với dấu phân tách. Nếu đầu ra của mạch so sánh cho biết có sự giống nhau thì chúng ta đã nhận được một dấu phân tách và ta biết đã kết thúc một từ mã. Cấu trúc phân tách từ mã nêu trên được gọi là bộ lọc tuyến tính điều chỉnh theo dấu phân tách.

Nếu dấu phân tách là một chuỗi t ký hiệu mã $k_1 k_2 \dots k_t$ với k_i là một ký hiệu mã, thì chuỗi này không được trùng với một dãy ký hiệu mã bất kỳ trong một từ mã và cũng không được hình thành ra do xếp liên tiếp các từ mã. Nếu không thỏa mãn điều này sẽ xảy ra việc nhận dạng sai vị trí của dấu phân tách và dẫn đến tách sai các từ mã từ một chuỗi bất kỳ các ký hiệu mã nhận được.

Với mã có dấu phân tách là một trường hợp riêng của mã hệ thống được gọi là mã hệ thống có dấu phân tách thì từ mã của nó gồm phần đầu (là các từ mã của bộ mã gốc có tính prefix) thuộc loại mã có tính prefix, và phần cuối (là một từ mã của mã gốc) là dấu phân tách. Dấu phân tách này sẽ không trùng với bất kỳ một đoạn mã nào trong từ mã cũng như do xếp các từ mã tạo thành.

Một ví dụ về mã hệ thống có dấu phân tích là bộ mã được xây dựng từ bộ mã gốc 1, 01, 001 với tổ hợp cuối hay dấu phân tích là 001 và các tổ hợp sơ đẳng là 1, 01 sẽ có các từ mã ví dụ là

01111001 - 111101001 - 010101001 - ...

Nếu ta nhận được chuỗi mã:

10010101001110010101010011001,

ta dễ dàng tách ra được các từ mã:

1001 - 0101001 - 111001 - 0101010011001

bằng bộ lọc tuyến tính điều chỉnh theo dấu phân tích 001 gồm thanh ghi dịch 3 bit mã các ký hiệu mã của chuỗi mã nhận được được cho đi qua nó, đầu ra mỗi bit của thanh ghi dịch được đưa đến đầu vào 1 mạch đồng dấu mà 3 đầu vào còn lại của mỗi mạch đồng dấu này sẽ theo thứ tự là 0, 0, 1. Đầu ra 3 mạch đồng dấu sẽ qua một mạch ngưỡng mà chỉ khi cả 3 đầu vào của mạch ngưỡng là 1 thì đầu ra của nó mới bằng 1. Khi đầu ra mạch ngưỡng là 1 thì chúng ta có dấu phân tích trên thanh ghi dịch hay chúng ta xác định được điểm kết thúc từ mã.

CHƯƠNG 5

MÃ HÓA NGUỒN

Hệ thống truyền tin được sử dụng để truyền thông tin từ nguồn tin tới nơi nhận tin. Nguồn thông tin có thể có nhiều dạng, ví dụ trong hệ thống radio, nguồn tin là nguồn âm thanh (tiếng nói hay âm nhạc), trong hệ thống vô tuyến truyền hình, nguồn tin là nguồn video, nó sinh ra các ảnh chuyển động. Những nguồn như thế là *nguồn tương tự*. Trái lại, các máy tính tạo ra và sử dụng các tín hiệu rời rạc (các số nhị phân hay các chữ cái trong bảng mã ASCII), những nguồn như thế gọi là *nguồn rời rạc*.

Với khả năng và sự phát triển của kỹ thuật số, hệ thống truyền tin sử dụng kỹ thuật số có thể dùng để truyền thông tin từ nguồn tương tự hay rời rạc dưới dạng số. Như vậy, đầu ra của nguồn phải chuyển thành dạng có thể truyền đi bằng kỹ thuật số (ví dụ dạng đó là một chuỗi các ký hiệu nhị phân) và quá trình này được gọi là *mã hóa nguồn*.

Trong chương này, ta xét vấn đề mã hóa nguồn trên cơ sở mô hình toán học của nguồn và các khái niệm về lượng tin đã xét trong chương 3.

Để người đọc dễ có khái niệm cụ thể về mã nhị phân là mã đang được sử dụng trên các đường truyền tin số, từ phần này chúng tôi sẽ trình bày các vấn đề liên quan đến mã hóa nguồn với mã có cơ số $m = 2$ (mã nhị phân). Các kết quả thu được khi dùng mã nhị phân vẫn đúng cho mã có cơ số m bất kỳ, chỉ với một thay đổi từ cơ số 2 thành cơ số m .

5-1. MÔ HÌNH TOÁN HỌC CỦA NGUỒN THÔNG TIN

Các nguồn thông tin tạo ra các bản tin một cách ngẫu nhiên, nghĩa là đầu ra của nguồn được đặc trưng bởi các luật thống kê. Nguồn tin là một quá trình ngẫu nhiên. Trái lại, nếu ta biết chính xác đầu ra của nguồn thì việc nhận được nó không còn ý nghĩa và sẽ không cần phải truyền nó đi nữa. Trong mục này, chúng ta quan tâm tới cả nguồn tương tự và nguồn rời rạc và xác định mô hình toán học của chúng ([1], [2], [5], [6], [10], [11]).

Dạng đơn giản nhất của nguồn rời rạc là nguồn tạo ra một chuỗi các ký hiệu từ một bảng hữu hạn các ký hiệu (alphabet). Ví dụ một nguồn nhị phân tạo ra một chuỗi các ký hiệu nhị phân như 1001001110010..., mà bảng các ký hiệu chỉ gồm hai ký hiệu là $\{0, 1\}$. Tổng quát, nguồn rời rạc có thể tạo ra một chuỗi các ký hiệu trong L ký hiệu của bảng ký hiệu $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$.

Để xây dựng mô hình toán học của nguồn rời rạc, giả sử mỗi ký hiệu trong bảng các ký hiệu $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$ có xác suất xuất hiện p_k , nghĩa là:

$$p_k = P(X = x_k), 1 \leq k \leq L \text{ và } \sum_{k=1}^L p_k = 1$$

Ta xét hai mô hình nguồn rời rạc. Trong mô hình đầu tiên, ta giả sử rằng chuỗi các ký hiệu nguồn tạo ra là độc lập thống kê, nghĩa là việc xuất hiện một ký hiệu không phụ thuộc vào các ký hiệu đã sinh ra trước đó và các ký hiệu sẽ sinh trong tương lai. Một nguồn thỏa mãn điều kiện độc lập thống kê giữa các ký hiệu trong chuỗi các ký hiệu sinh ra gọi là nguồn rời rạc không nhớ (DMS: Discrete Memoryless Source).

Mô hình thứ hai, nếu chuỗi các ký hiệu tạo ra bởi nguồn rời rạc là phụ thuộc thống kê, ví dụ như trong văn viết tiếng Anh hay tiếng Việt, ta có thể xây dựng mô hình toán học dựa trên tính chất dừng thống kê của nguồn.

Nguồn tương tự tạo ra tín hiệu $x(t)$ là một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Giả thiết rằng $X(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên dừng với hàm tự tương quan $\phi_{xx}(\tau)$ và phổ mật độ công suất $\Phi_{xx}(f)$. Khi $X(t)$ là quá trình ngẫu nhiên có dải thông hữu hạn, nghĩa là $\Phi_{xx}(f) = 0$ với $|f| \geq W$, ta có thể sử dụng định lý lấy mẫu để biểu diễn $X(t)$:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (5-1-1)$$

$\{X(n/2W)\}$ ký hiệu cho các mẫu của $X(t)$ lấy theo tốc độ Nyquist $f_s = 2W$ mẫu/giây. Như vậy, dùng định lý lấy mẫu ta có thể chuyển tín hiệu đầu ra của một nguồn tương tự thành một nguồn rời rạc tương đương. Như vậy, đầu ra của nguồn được đặc trưng thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ với mọi $m \geq 1$ và $X_n = X(n/2W)$, $1 \leq n \leq m$ là các biến ngẫu nhiên của một thể hiện của $X(t)$.

Chúng ta chú ý rằng các mẫu $\{X(n/2W)\}$ nói chung là liên tục và không thể biểu diễn dưới dạng số mà còn nguyên vẹn tính chính xác. Ví dụ chúng ta có thể lượng tử hóa mỗi mẫu thành một giá trị trong một tập hợp các giá trị rời rạc, nhưng quá trình lượng tử hóa tạo nên một sự sai khác (sai lệch) nào đó và không thể khôi phục chính xác tín hiệu ban đầu từ các mẫu được lượng tử hóa. Trong chương này chúng ta cũng xét việc đánh giá suy hao tín hiệu do quá trình lượng tử hóa gây ra.

5-2. MÃ HÓA NGUỒN RỜI RẠC

Trong chương 3 chúng ta đã trình bày việc đo lường lượng tin của một biến ngẫu nhiên rời rạc X . Khi X là một nguồn rời rạc, entropi $H(X)$ của nguồn biểu thị lượng tin trung bình của một ký hiệu mà nó tạo ra. Trong phần này chúng ta xét quá trình mã hóa đầu ra của nguồn, nghĩa là quá trình biểu diễn các ký hiệu ở đầu ra của nguồn bởi một dãy các ký hiệu nhị phân, xác định hiệu quả của một phương pháp mã hóa nguồn bằng cách so sánh số lượng trung bình các ký hiệu nhị phân để mã hóa cho một ký hiệu với entropi $H(X)$ ([1], [5], [6]).

Việc mã hóa một nguồn rời rạc có bộ ký hiệu hữu hạn tương đối đơn giản nhưng điều đó chỉ đúng với nguồn không nhớ, nghĩa là các ký hiệu của nguồn tạo ra là độc lập thống kê và trong trường hợp này các ký hiệu có thể mã hóa độc lập được. Nguồn rời rạc không nhớ là mô hình đơn giản nhất trong các nguồn vật lý. Rất ít nguồn tin thực tế thỏa mãn chặt chẽ mô hình này, ví dụ như các chữ cái trong một đoạn văn viết tiếng Anh hay tiếng Việt có thể coi gần như là độc lập thống kê. Nhưng trong nhiều trường hợp, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng việc mã hóa từng khối các ký hiệu của nguồn sẽ hiệu quả hơn việc mã hóa từng ký hiệu độc lập. Nếu cỡ của khối đủ lớn thì số lượng các ký hiệu nhị phân trung bình ứng với một ký hiệu của nguồn tiến dần và sát tùy ý với entropi của nguồn, nghĩa là hiệu quả của phép mã hóa gần như tuyệt đối.

5-2-1. Mã hóa nguồn rời rạc không nhớ

Giả sử một nguồn rời rạc không nhớ sau thời gian τ_s tạo ra một ký hiệu trong tập hợp hữu hạn các ký hiệu x_i , $i = 1, 2, \dots, L$. Các ký hiệu có xác suất xuất hiện $P(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, L$. Entropi của nguồn này là:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^L P(x_i) \log_2 P(x_i) \leq \log_2 L \quad (5-2-1)$$

Dấu bằng xảy ra khi xác suất xuất hiện tất cả các ký hiệu bằng nhau. Lượng thông tin trung bình ứng với mỗi ký hiệu là $H(X)$ và tốc độ thông tin của nguồn là $H(X)/\tau_s$.

Mã hóa với từ mã có độ dài cố định Phương pháp mã hóa đầu tiên là gán cho mỗi ký hiệu một dãy R ký hiệu nhị phân. Do có L ký hiệu của nguồn nên để bảo đảm phép mã hóa là duy nhất thì số ký hiệu nhị phân tối thiểu phải sử dụng khi L là lũy thừa của 2:

$$R = \log_2 L \quad (5-2-2)$$

và khi L không phải là lũy thừa của 2 là:

$$R = \lfloor \log_2 L \rfloor + 1 \quad (5-2-3)$$

Ở đây $\lfloor x \rfloor$ biểu thị số nguyên lớn nhất nhỏ hơn x . Lượng tin của mỗi từ mã là R và do $H(X) \leq \log_2 L$ nên $R \geq H(X)$.

Hiệu quả của phương pháp mã hóa cho nguồn rời rạc không nhớ được xác định bởi tỷ số $H(X)/R$. Ta nhận thấy rằng khi L là lũy thừa của 2 và L ký hiệu của nguồn là đồng xác suất thì $R = H(X)$. Khi đó phép mã hóa gán cho mỗi ký hiệu của nguồn một dãy ký hiệu mã có độ dài cố định có hiệu quả 100%. Tuy nhiên khi L không phải là lũy thừa của 2 và các ký hiệu của nguồn vẫn là đồng xác suất thì R sai khác $H(X)$ tối đa là 1 bit/ký hiệu. Khi $\log_2 L \gg 1$ thì phương pháp mã hóa này có hiệu quả cao. Ngược lại khi $\log_2 L$ nhỏ thì hiệu quả của phương pháp mã hóa với độ dài cố định có thể nâng lên bằng cách mã hóa từng khối gồm J ký hiệu của nguồn. Để mã hóa duy nhất ta cần L^J từ mã và nếu gọi N là số ký hiệu mã được sử dụng để mã hóa thì:

$$N \geq J \log_2 L$$

Giá trị nguyên nhỏ nhất có thể chấp nhận được của N là:

$$N = \lfloor J \log_2 L \rfloor + 1 \quad (5-2-4)$$

Khi đó số ký hiệu mã trung bình ứng với một ký hiệu của nguồn là $N/J = R$, và như vậy độ không tối ưu của mã giảm xuống xấp xỉ $1/J$ so với việc mã hóa riêng từng ký hiệu của nguồn. Khi J đủ lớn, hiệu quả của phương pháp mã hóa này, được đo bằng tỷ số $JH(X)/N$, rất gần tới đơn vị.

Các phương pháp mã hóa trên không bị sai số vì ta mã mỗi ký hiệu hay mỗi khối ký hiệu thành một từ mã duy nhất. Loại mã hóa này gọi là mã hóa không nhiễu.

Bây giờ giả sử ta muốn giảm R bằng cách bỏ đi điều kiện phép mã hóa là duy nhất. Ví dụ chỉ một phần trong L^J khối ký hiệu được mã hóa duy nhất, cụ thể hơn, giả sử $2^N - 1$ khối J ký hiệu có xác suất xuất hiện lớn nhất được mã hóa một cách duy nhất còn $L^J - (2^N - 1)$ khối J ký hiệu được mã hóa thành một từ mã duy nhất. Phương pháp mã hóa này gây ra việc giải mã sai đối với các khối có xác suất xuất hiện thấp. Gọi P_e là xác suất giải mã sai. Dựa trên phương pháp mã hóa này, Shannon đã chứng minh định lý mã hóa nguồn sau:

Định lý mã hóa nguồn 1 Gọi X là một nguồn rời rạc không nhớ có entropi hữu hạn $H(X)$. Các khối J ký hiệu của nguồn được mã hóa thành các từ mã nhị phân độ dài N . Với mọi $\varepsilon > 0$, xác suất giải mã khối sai P_e có thể nhỏ tùy ý nếu:

$$R = N/J \geq H(X) + \varepsilon \quad (5-2-5)$$

với J tiến tới vô hạn. Ngược lại nếu:

$$R \leq H(X) + \varepsilon \quad (5-2-6)$$

thì P_e dần tới đơn vị khi J tiến tới vô hạn.

Từ định lý này ta thấy số lượng ký hiệu nhị phân trung bình để mã hóa cho một nguồn rời rạc không nhỏ với xác suất giải mã sai nhỏ tùy ý bị chặn dưới bởi entropi $H(X)$. Ngược lại nếu $R < H(X)$ thì xác suất giải mã sai tiến tới 100% khi J tăng tới vô hạn.

Mã hóa với từ mã độ dài thay đổi Trong trường hợp các ký hiệu của nguồn không cùng xác suất xuất hiện thì phép mã hóa với độ dài từ mã thay đổi có hiệu quả hơn so với phương pháp mã hóa trên. Ví dụ như mã Morse, các ký hiệu có tần suất xuất hiện nhiều hơn sẽ được gán cho các từ mã có độ dài ngắn hơn, và ngược lại, những ký hiệu nào ít xuất hiện hơn sẽ được gán cho các từ mã có độ dài lớn hơn. Xuất phát từ ý tưởng chung này, ta có thể sử dụng xác suất xuất hiện các ký hiệu khác nhau của nguồn trong việc lựa chọn các từ mã dùng để mã hóa các ký hiệu của nguồn. Loại mã hóa này gọi là mã hóa entropi.

Mục tiêu cơ bản của chúng ta là xây dựng một phương pháp mã hóa có tính hệ thống để tạo ra các từ mã có độ dài thay đổi, giải mã duy nhất và có hiệu quả theo nghĩa số lượng trung bình các ký hiệu nhị phân ứng với một ký hiệu của nguồn, được định nghĩa là:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^L n_k P(a_k) \quad (5-2-7)$$

tối thiểu, trong đó a_k là ký hiệu thứ k của nguồn và n_k là số ký hiệu nhị phân ứng với từ mã của a_k . Điều kiện tồn tại một mã thỏa mã tính prefix được xác định bởi bất đẳng thức Kraft (ta đã nói tới trong chương 4, còn gọi là bất đẳng thức McMillan).

Bất đẳng thức Kraft: Điều kiện cần và đủ để tồn tại mã nhị phân với các từ mã có độ dài $n_1, n_2, \dots, n_L$ thỏa mãn điều kiện prefix là:

$$\sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1 \quad (5-2-8)$$

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng công thức (5-2-8) là điều kiện đủ để tồn tại mã thỏa mãn tính prefix. Để xây dựng một mã như thế, ta bắt đầu với một cây nhị phân đầy đủ bậc $n = n_L$ có 2^n nút cuối. Ta chọn một nút bậc n_1 để tạo từ mã C_1 đầu tiên. Việc lựa chọn này sẽ không cho phép chọn 2^{n-n_1} nút cuối. Từ các nút còn lại bậc n_2 , ta chọn một nút cho từ mã thứ hai C_2 . Việc lựa chọn này cũng sẽ không cho phép chọn 2^{n-n_2} nút cuối. Quá trình này tiếp tục cho tới khi từ mã cuối cùng được gán ở nút bậc n_L . Tại nút bậc $j < L$, số lượng các nút không được chọn tiếp là:

$$\sum_{k=1}^j 2^{-n_k} < \sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1$$

luôn luôn còn ít nhất một nút bậc $k > j$ còn được phép sử dụng để gán cho từ mã tiếp theo. Như vậy, ta đã xây dựng được một cây mã là một bộ phận của cây đầy đủ 2^n nút thỏa với điều kiện (5-2-8).

Để chứng minh (5-2-8) là điều kiện đủ, ta thấy rằng trong cây mã bậc $n = n_L$, số lượng các nút cuối không được sử dụng để tạo từ mã từ tổng số 2^n nút là:

$$\sum_{k=1}^L 2^{n-n_k} \leq 2^n$$

hay

$$\sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1$$

Định lý được chứng minh xong. Định lý này được sử dụng để chứng minh định lý mã hóa nguồn sau đây, định lý này áp dụng cho mã thỏa mãn điều kiện prefix.

Định lý mã hóa nguồn 2 Gọi X là một nguồn rời rạc không nhớ với entropi hữu hạn $H(X)$ bit với các ký hiệu x_k , $1 \leq k \leq L$, với các xác suất xuất hiện tương ứng p_k , $1 \leq k \leq L$. Có thể xây dựng một mã hiệu nhị phân có tính prefix và có độ dài từ mã trung bình $\bar{R}$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$H(X) \leq \bar{R} < H(X) + 1 \quad (5-2-9)$$

Để chứng minh cận dưới trong công thức trên, ta thấy rằng:

$$H(X) - \bar{R} = \sum_{k=1}^L p_k \log_2 \frac{1}{p_k} - \sum_{k=1}^L p_k n_k = \sum_{k=1}^L p_k \log_2 \frac{2^{-n_k}}{p_k} \quad (5-2-10)$$

Sử dụng bất đẳng thức $\ln x \leq x - 1$ vào công thức trên, ta thu được:

$$H(X) - \bar{R} \leq (\log_2 e) \sum_{k=1}^L p_k \left(\frac{2^{-n_k}}{p_k} - 1 \right) \leq (\log_2 e) \left(\sum_{k=1}^L 2^{-n_k} - 1 \right) \leq 0$$

đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $p_k = 2^{-n_k}$ với $1 \leq k \leq L$.

Do n_k là số nguyên $1 \leq k \leq L$ và chọn n_k thỏa mãn $2^{-n_k} \leq p_k < 2^{-n_k+1}$. Lấy loga của $p_k < 2^{-n_k+1}$, ta có:

$$n_k < 1 - \log p_k \quad (5-2-11)$$

Nhân cả hai vế của (5-3-11) với p_k và lấy tổng $1 \leq k \leq L$, ta được giới hạn trên trong (5-3-9).

Bây giờ ta xét việc mã hóa nguồn cho một nguồn rời rạc không nhớ có xác suất xuất hiện không đồng đều bằng các từ mã có độ dài thay đổi.

Mã Shannon-Fano Độc lập với nhau, Shannon và Fano đã xây dựng phương pháp lập mã thống kê tối ưu trên cùng một cơ sở: độ dài từ mã tỷ lệ nghịch với xác suất xuất hiện. Để đơn giản, ta xét một ví dụ:

Ví dụ 5-2-1

Cho một nguồn rời rạc không nhớ có bảy ký hiệu và các xác suất xuất hiện được cho trong hình 5-2-1.

Thuật toán đơn giản như sau: sắp xếp nguồn tin theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần của xác suất xuất hiện, sau đó chia nguồn tin ra làm hai nhóm (khi dùng mã nhị phân, m nhóm khi dùng mã cơ số m) có xác suất xuất hiện xấp xỉ như nhau, gán cho mỗi nhóm một ký hiệu mã 0 hoặc 1 rồi cứ tiếp tục như thế đến khi nào các nhóm chỉ còn 1 ký hiệu. Từ mã ứng với mỗi ký hiệu là tổ hợp các ký hiệu gán cho các nhóm chứa ký hiệu theo thứ tự từ lần tạo nhóm đầu tiên về lần tạo nhóm cuối cùng. Bộ mã này có tính prefix

Ta có thể kiểm tra lại hiệu quả của mã lập được. Entropi của nguồn $H(X) \approx 2,37$ (bit/ký hiệu). Số ký hiệu nhị phân trung bình để mã hóa cho các từ mã $\bar{R} \approx 2,41$. Độ hiệu quả của mã là $H(X)/\bar{R} = 0,98$.

Mã Huffman Năm 1952 Huffman đã đưa ra một thuật toán mã hóa dựa trên xác suất xuất hiện của các ký hiệu. Thuật toán là tối ưu theo nghĩa số ký hiệu nhị phân trung bình để mã hóa cho một ký hiệu của nguồn là cực thiểu. Phương pháp mã hóa này cho một bộ mã có tính prefix và tất nhiên quá trình giải mã là duy nhất. Ta xét hai ví dụ của phương pháp này.

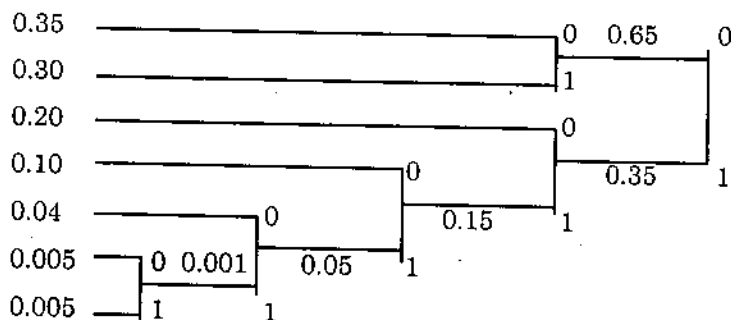
0.34 0.23 0.19 0.10 0.07 0.06 0.01																
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Hình 5-2-1: Ví dụ về phương pháp mã hóa Shannon-Fano cho nguồn rời rạc không nhớ

Ví dụ 5-2-2

Xét một nguồn rời rạc không nhớ tạo ra bảy ký hiệu với xác suất xuất hiện tương ứng được cho trên hình 5-2-2. Chúng ta đã sắp xếp các ký hiệu theo thứ tự giảm dần của xác suất xuất hiện, nghĩa là $P(x_1) > P(x_2) > \dots > P(x_7)$. Ta bắt đầu quá trình mã hóa với hai ký hiệu có xác suất xuất hiện nhỏ nhất. Hai ký hiệu được hợp lại với nhau, hai nhánh được gán cho một trong hai ký hiệu 0 hoặc 1. Nút của hai nhánh được coi là một ký hiệu mới có xác suất xuất hiện bằng tổng xác suất xuất hiện của hai ký hiệu tạo ra nó. Bước tiếp theo lại làm với hai ký hiệu có xác suất xuất hiện nhỏ nhất. Quá trình mã hóa dừng lại khi chỉ còn một ký hiệu với xác suất xuất hiện bằng 1 (tổng xác suất xuất hiện của tất cả các ký hiệu). Cuối cùng từ mã ứng với mỗi ký hiệu của nguồn là tổ hợp các ký hiệu mã ở các nhánh của cây mã tính từ gốc. Entropi của nguồn là $H(X) = 2.11$ bit/ký hiệu và độ dài trung bình của từ mã là $\bar{R} = 2.21$ bit/ký hiệu.

Ta thấy rằng phương pháp mã hóa Shannon-Fano và phương pháp mã hóa Huffman không phải là chỉ cho một bộ mã duy nhất. Ta có thể ký hiệu các nhóm hay các nhánh cây là 0 hay 1, chứ không bắt buộc nhánh cây hay nhóm nào là 0 hay 1. Tất nhiên, khi đó hiệu suất lập mã sẽ không thay đổi.



Ký hiệu	Xác suất	Lượng tin riêng	Từ mã
x_1	0.35	1.5146	00
x_2	0.30	1.7370	01
x_3	0.20	2.3219	10
x_4	0.10	3.3219	110

x_5	0.04	4.6439	1110
x_6	0.005	7.6439	11110
x_7	0.005	7.6439	11111
$H(X) = 2.11$		$\bar{R} = 2.21$	

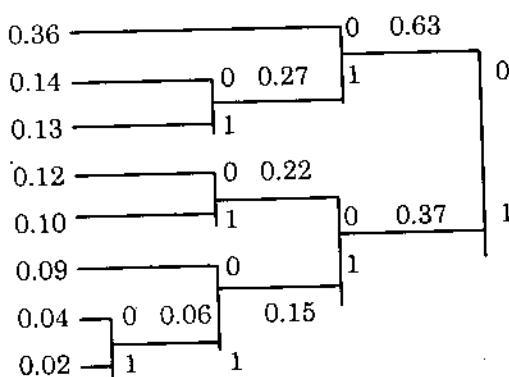
Hình 5-2-2: Ví dụ về phương pháp mã hóa Huffman cho nguồn rời rạc không nhớ

Ví dụ 5-2-3

Trong ví dụ này, ta xét việc tạo mã Huffman cho một nguồn rời rạc không nhớ cho trên hình 5-2-3. Entropi của nguồn là $H(X) = 2.63$ bit/ký hiệu. Độ dài trung bình của từ mã $\bar{R} = 2.7$ bit/ký hiệu, như vậy hiệu suất lập mã là 0.97.

Thuật toán mã hóa Huffman cho bộ mã có độ dài thay đổi thỏa mãn điều kiện prefix và có độ dài trung bình của từ mã $\bar{R}$ thỏa mãn (5-2-9). Tuy nhiên, thay vì việc mã hóa từng ký hiệu của nguồn (ký hiệu-ký hiệu), ta có thể mã hóa từng khối J ký hiệu của nguồn để tạo nên một bộ mã có hiệu quả cao hơn. Khi đó, các giới hạn trong (5-2-9) trở thành:

$$JH(X) \leq \bar{R}_J < JH(X) + 1 \quad (5-2-12)$$



Ký hiệu	Từ mã
x_1	00
x_2	010
x_3	011
x_4	100
x_5	101
x_6	110
x_7	1110
x_8	1111
$H(X) = 2.63$	
$\bar{R} = 2.70$	

Hình 5-2-3: Mã Huffman cho ví dụ 5-2-3

Entropi của một khối J ký hiệu của nguồn rời rạc không nhớ là $JH(X)$ và $\bar{R}_J$ là độ dài từ mã trung bình của một khối J ký hiệu của nguồn. Chia (5-2-12) cho J ta thu được:

$$H(X) \leq \frac{\bar{R}_J}{J} < H(X) + \frac{1}{J} \quad (5-2-13)$$

ở đây $\frac{\bar{R}_J}{J} \equiv \bar{R}$ là số ký hiệu nhị phân trung bình ứng với một ký hiệu của nguồn. Như vậy $\bar{R}$ tiến dần sát với $H(X)$ khi J đủ lớn.

Tóm tắt lại, ta đã chứng tỏ rằng hiệu quả của quá trình mã hóa cho một nguồn rời rạc không nhớ có thể thực hiện bằng cách mã hóa từng ký hiệu với độ dài từ mã thay đổi dựa trên thuật toán Huffman. Hơn nữa, hiệu quả mã hóa tăng lên bằng cách mã hóa từng khối J ký hiệu của

nguồn và khi J tăng tới vô hạn thì số ký hiệu nhị phân trung bình để mã hóa cho một ký hiệu của nguồn tiến tới entropi $H(X)$ của nguồn.

5-2-2. Mã hóa nguồn dừng rời rạc

Trong phần trước ta đã xét việc mã hóa nguồn rời rạc không nhớ, bây giờ ta tiếp tục xét tới nguồn mà một dãy các ký hiệu của nguồn tạo ra là phụ thuộc thống kê. Ta cũng chỉ xét tới nguồn dừng thống kê trong phần này.

Entropi của một khối các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \dots, X_k$ là:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^k H(X_i | X_1, X_2, \dots, X_{i-1}) \quad (5-2-14)$$

ở đây $H(X_i | X_1, X_2, \dots, X_{i-1})$ là entropi có điều kiện của ký hiệu thứ i khi đã xác định $i - 1$ ký hiệu đã xuất hiện trước. Entropi của một ký hiệu trong một khối gồm k ký hiệu được định nghĩa là:

$$H_k(X) = \frac{1}{k} H(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (5-2-15)$$

Ta định nghĩa lượng tin trung bình của một nguồn dừng là lượng tin trung bình của một ký hiệu của nguồn và có độ lớn bằng entropi của một ký hiệu của nguồn trong (5-2-15) khi k tiến tới vô hạn, nghĩa là:

$$H_\infty(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (5-2-16)$$

Sự tồn tại của giới hạn trên được chứng minh như sau: entropi của một ký hiệu của nguồn là entropi có điều kiện $H(X_k | X_1, X_2, \dots, X_{k-1})$ khi k tiến tới vô cùng. Người ta chứng minh được rằng giới hạn này tồn tại và bằng giới hạn trong (5-2-16), nghĩa là:

$$H_\infty(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} H(X_k | X_1, X_2, \dots, X_{k-1}) \quad (5-2-17)$$

Bây giờ giả thiết rằng một nguồn dừng rời rạc tạo ra J ký hiệu với $H_J(X)$ là entropi của một ký hiệu. Ta có thể mã hóa một dãy J ký hiệu bằng phương pháp Huffman đã mô tả ở trên. Mã tạo ra có độ dài trung bình của từ mã ứng với khối J ký hiệu của nguồn thỏa mãn điều kiện sau:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_J) \leq \bar{R}_J < H(X_1, X_2, \dots, X_J) + 1 \quad (5-2-18)$$

Chia (5-2-18) cho J , ta thu được các giới hạn của độ dài từ mã trung bình của một ký hiệu của nguồn $\bar{R} = \bar{R}_J / J$, như sau:

$$H_J(X) \leq \bar{R} < H_J(X) + \frac{1}{J} \quad (5-2-19)$$

Khi J tăng vô hạn, $\bar{R}$ tiến tới $H_J(X)$:

$$H_\infty(X) \leq \bar{R} < H_\infty(X) + \varepsilon \quad (5-2-20)$$

với ε dương bé tùy ý. Như vậy, hiệu quả của mã hóa nguồn dừng rời rạc phụ thuộc vào việc một khối các ký hiệu của nguồn được mã hóa thành một từ mã là lớn hay nhỏ. Tuy nhiên, ta thấy rằng thuật toán mã hóa Huffman và Shannon-Fano yêu cầu phải biết hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của khối J ký hiệu của nguồn.

5-2-3. Thuật toán Lempel-Ziv

Ta thấy rằng thuật toán mã hóa nguồn Huffman là thuật toán mã hóa nguồn tối ưu theo nghĩa bộ mã tạo ra có tính prefix và có độ dài trung bình của từ mã tối thiểu. Để mã hóa cho nguồn rời rạc không nhớ, chúng ta phải biết xác suất xuất hiện của tất cả các ký hiệu, và đối với nguồn có nhớ, phải biết hàm mật độ xác suất của các khối ký hiệu. Tuy nhiên trong thực tế tính chất thống kê của nguồn thường không biết trước, mà chúng ta thường ước lượng các giá trị xác suất của nguồn rời rạc bằng cách quan sát một chuỗi dài các ký hiệu. Ngoài trừ việc ước lượng các xác suất biên $\{p_k\}$ tương ứng với tần suất xuất hiện các ký hiệu riêng rẽ của nguồn, độ phức tạp tính toán trong việc ước lượng các xác suất đồng thời là rất cao. Như vậy sử dụng thuật toán mã hóa nguồn Huffman cho các nguồn có nhớ trong thực tế nói chung là rất phức tạp.

Trái lại với thuật toán mã hóa của Huffman, thuật toán mã hóa nguồn Lempel-Ziv là độc lập với tính chất thống kê của nguồn. Trong thuật toán này, một dãy các ký hiệu của nguồn rời rạc được chia ra thành các khối có độ dài thay đổi và được gọi là các *câu*. Một câu mới là một khối các ký hiệu của nguồn và là một câu đã có thêm vào một ký hiệu cuối cùng. Các câu được liệt kê trong một từ điển kèm với vị trí xuất hiện. Để mã hóa một câu mới, ta chỉ ra vị trí của câu đã có trong từ điển và chèn thêm ký hiệu mới vào phía cuối.

Ví dụ ta xét dãy ký hiệu nhị phân sau:

10101101001001110101000011001110101100011011

Chia dãy ký hiệu trên thành các câu như sau:

1, 0, 10, 11, 01, 00, 100, 111, 010, 1000, 011, 001, 110, 101, 10001, 1011

Ta thấy rằng mỗi câu trong dãy là ghép của một câu cũ và một ký hiệu mới. Để mã hóa các câu, ta xây dựng một từ điển như trong bảng 5-2-1. Các vị trí của từ điển liên tiếp nhau, bắt đầu bằng 1 và tăng dần, trong trường hợp này là 16. Các từ mã được xác định bởi vị trí của một câu có trước trong từ điển và ký hiệu mới được thêm vào trong từ mã. Khởi đầu, vị trí 0000 dùng để mã hóa cho một câu chưa xuất hiện trước trong từ điển.

	Vị trí trong từ điển	Nội dung	Từ mã
1	0001	1	00001
2	0010	0	00000
3	0011	10	00010
4	0100	11	00011
5	0101	01	00101
6	0110	00	00100
7	0111	100	00110
8	1000	111	01001
9	1001	010	01010
10	1010	1000	01110
11	1011	011	01011
12	1100	001	01101
13	1101	110	01000
14	1110	101	00111
15	1111	10001	10101
16		1011	11101

Bảng 5-2-1: Từ điển dùng trong thuật toán Lempel-Ziv

Để giải mã cần phải xây dựng lại từ điển ở phía thu giống như ở phía phát và sau đó là giải mã lần lượt các từ mã nhận được.

Ta nhận thấy rằng quá trình mã hóa trong ví dụ trên mã hóa 44 ký hiệu nhị phân của nguồn thành 16 từ mã, mỗi từ mã có độ dài 5 bit. Như vậy là trong ví dụ này không thực hiện nén số liệu, đó là do chuỗi ký hiệu được quan sát quá ngắn. Nếu chuỗi ký hiệu được quan sát dài ra thêm thì thuật toán sẽ trở nên hiệu quả hơn và có nén số liệu ở đầu ra của nguồn.

Vấn đề bây giờ đặt ra là độ lớn của từ điển là bao nhiêu. Nói chung, độ lớn của từ điển chỉ phụ thuộc vào bộ nhớ dùng trong lưu trữ. Để giải quyết vấn đề tràn nhớ, bộ mã hóa và bộ giải mã hóa cần thống nhất loại bỏ những câu không còn sử dụng và thay thế vào các câu mới. Thuật toán Lempel-Ziv được sử dụng rộng rãi trong việc nén số liệu các tệp (file) trong máy tính. Các tiện ích như compress và uncompress trong hệ điều hành UNIX và DOS xuất phát từ thuật toán này.

5-3. MÃ HÓA NGUỒN TƯƠNG TỰ

Nguồn tương tự sinh ra các bản tin $x(t)$ là một thể hiện cụ thể của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$. Khi $X(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên dừng, có dải phổ hữu hạn, ta có thể sử dụng định lý lấy mẫu để biểu diễn $X(t)$ qua một chuỗi các mẫu lấy theo tốc độ Nyquist.

Sử dụng định lý lấy mẫu, tín hiệu ở đầu ra của một nguồn tương tự được biểu diễn một cách tương đương bằng một chuỗi các mẫu rời rạc theo thời gian. Sau đó các mẫu được lượng tử hóa theo biên độ và được mã hóa. Một dạng đơn giản của mã hóa là biểu diễn mỗi mức biên độ rời rạc bằng một dãy các ký hiệu nhị phân. Như vậy nếu biên độ tín hiệu có L mức rời rạc, ta cần $R = \log_2 L$ bit cho một mẫu trong trường hợp L là lũy thừa của 2 và $R = \lfloor \log_2 L \rfloor + 1$ khi L không phải là lũy thừa của 2. Mặt khác, nếu các mức không đồng xác suất xuất hiện và chúng ta biết xác suất của các mức tín hiệu đầu ra thì ta có thể sử dụng phương pháp mã hóa Huffman (mã hóa theo entropi) để tăng hiệu quả mã hóa.

Lượng tử hóa biên độ của một mẫu tín hiệu tạo nên hiệu quả trong việc nén số liệu nhưng đồng thời cũng tạo nên một sự sai lệch nào đó của tín hiệu hay còn gọi là sự suy giảm tính trung thực của tín hiệu. Chúng ta cũng xét việc tối thiểu hóa sai lệch trong phần này ([1], [2], [5], [6], [11]).

5-3-1. Hàm tốc độ tạo tin-sai lệch

Trong việc lượng tử hóa tín hiệu ta quan tâm trước tiên tới sự sai lệch khi các mẫu của nguồn được lượng tử hóa thành một số hữu hạn các mức. Sai lệch nghĩa là có một sự sai khác giữa giá trị thực của các mẫu tín hiệu $\{x_k\}$ với các giá trị lượng tử hóa tương ứng $\tilde{x}_k$, được ký hiệu là $d(x_k, \tilde{x}_k)$. Thông thường ta quan tâm tới bình phương của sai lệch, được định nghĩa như sau:

$$d(x_k, \tilde{x}_k) = (x_k - \tilde{x}_k)^2 \quad (5-3-1)$$

Cách đo lường sai số như trên được sử dụng trong việc xác định sai số lượng tử trong mã PCM. Tổng quát, người ta có thể đo lường sai số theo công thức sau:

$$d(x_k, \tilde{x}_k) = |x_k - \tilde{x}_k|^p \quad (5-3-2)$$

p lấy các giá trị nguyên dương.

Nếu $d(x_k, \tilde{x}_k)$ là độ sai lệch đối với từng mẫu thì sai lệch giữa một dãy n mẫu X_n với n mẫu lượng tử hóa tương ứng $\tilde{X}_n$ là giá trị trung bình sai lệch trên n mẫu, nghĩa là:

$$d(\mathbf{X}_n, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(x_k, \tilde{x}_k) \quad (5-3-3)$$

Đầu ra của nguồn là một quá trình ngẫu nhiên, do đó n mẫu của $\mathbf{X}_n$ là các biến ngẫu nhiên. Từ đó, $d(\mathbf{X}_n, \tilde{\mathbf{X}}_n)$ cũng là một biến ngẫu nhiên. Kỳ vọng toán học của nó được định nghĩa là sai số D , nghĩa là:

$$D = E[d(\mathbf{X}_n, \tilde{\mathbf{X}}_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[d(x_k, \tilde{x}_k)] = E[d(x, \tilde{x})] \quad (5-3-4)$$

Đẳng thức cuối cùng chỉ đúng khi quá trình ngẫu nhiên là dừng. Bây giờ giả sử chúng ta có một nguồn không nhớ, đầu ra $\mathbf{X}$ là các mẫu rời rạc, biên độ liên tục có hàm mật độ phân bố xác suất $p(x)$, các mẫu tín hiệu được lượng tử hóa theo biên độ thành $\tilde{\mathbf{X}}$ và sai lệch trên từng mẫu là $d(x, \tilde{x})$ với $x \in \mathbf{X}$ và $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{X}}$. Tốc độ tạo tin tối thiểu để biểu diễn đầu ra của nguồn không nhớ $\mathbf{X}$ với sai lệch nhỏ hơn hay bằng D gọi là hàm tốc độ tạo tin-sai lệch $R(D)$, được định nghĩa như sau:

$$R(D) = \min_{p(\tilde{x}|x): E[d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})] \leq D} I(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) \quad (5-3-5)$$

ở đây $I(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$ là lượng tin trung bình tương hỗ giữa $\mathbf{X}$ và $\tilde{\mathbf{X}}$. Nói chung, $R(D)$ giảm thì D tăng và ngược lại, $R(D)$ tăng thì D giảm.

Một mô hình nguồn thông tin không nhớ, biên độ liên tục hay gặp là mô hình nguồn gaussian. Trong trường hợp này, Shannon đã chứng minh định lý cơ bản về hàm tốc độ tạo tin-sai lệch sau:

Tốc độ tạo tin tối thiểu cần thiết để biểu diễn một nguồn gaussian không nhớ, rời rạc theo thời gian, biên độ liên tục trên cơ sở trung bình bình phương sai lệch của từng mẫu là:

$$R_K(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 (\sigma_x^2 / D) & (0 \leq D \leq \sigma_x^2) \\ 0 & (D \geq \sigma_x^2) \end{cases} \quad (5-3-6)$$

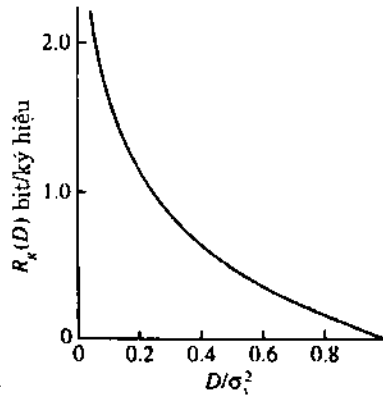
σ_x^2 là sai phương của nguồn gaussian.

Công thức trên chỉ ra rằng không cần truyền thông tin khi sai lệch $D \geq \sigma_x^2$. đặc biệt, khi $D = \sigma_x^2$, ta có thể sử dụng các tín hiệu 0 để khôi phục lại tín hiệu. Khi $D > \sigma_x^2$ có thể dùng các mẫu tín hiệu nhiễu gaussian độc lập thống kê, kỳ vọng toán học bằng không với sai phương $D - \sigma_x^2$ để khôi phục lại tín hiệu. $R_K(D)$ được vẽ trên hình 5-3-1.

Hàm tốc độ sai số $R(D)$ của một nguồn có liên hệ với định lý mã hóa cơ bản của lý thuyết thông tin sau đây.

Định lý về mã hóa nguồn với sai lệch cho trước: *Tồn tại một phương pháp mã hóa nguồn để mã hóa các mẫu của nguồn thành các từ mã với một độ sai lệch cho trước D , tốc độ tạo tin tối thiểu $R(D)$ bit/ký hiệu (mẫu) đủ để khôi phục lại đầu ra của nguồn với sai lệch trung bình sát gần tùy ý tới D .*

Như vậy, rõ ràng hàm tốc độ tạo tin-sai lệch $R(D)$ là giới hạn dưới của tốc độ tạo tin của nguồn với mức độ sai lệch đã cho.



Hình 5-3-1: Hàm tốc độ tạo tin-sai lệch của nguồn gaussian không nhớ, biên độ liên tục

Quay trở lại công thức (5-3-6), ta có thể biểu diễn D qua R như sau:

$$D_g(R) = 2^{-2R} \sigma_x^2 \quad (5-3-7)$$

Hàm này gọi là hàm sai lệch-tốc độ tạo tin của nguồn gaussian không nhớ, rời rạc theo thời gian.

Biểu diễn công thức trên theo dB, ta có:

$$10 \log_{10} D_g(R) = -6R + 10 \log_{10} \sigma_x^2 \quad (5-3-8)$$

Như vậy trung bình bình phương sai lệch giảm với tốc độ 6dB/bit.

Biểu thức của hàm tốc độ tạo tin-sai lệch cho các nguồn không nhớ và không phải là nguồn gaussian tới nay vẫn chưa tìm ra được. Tuy nhiên, người ta đã tìm được giới hạn dưới và giới hạn trên của hàm này cho các nguồn không nhớ, rời rạc theo thời gian, có biên độ liên tục.

Định lý về giới hạn trên của $R(D)$ *Hàm tốc độ tạo tin-sai lệch của các nguồn không nhớ, rời rạc theo thời gian, có biên độ liên tục có giá trị trung bình bằng không và sai phương σ_x^2 hữu hạn đảm bảo sai lệch trung bình bình phương cho trước có giới hạn trên là:*

$$R(D) \leq \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_x^2}{D} \quad (0 \leq D \leq \sigma_x^2) \quad (5-3-9)$$

Điều này chỉ ra rằng tốc độ thông tin cực đại của nguồn gaussian lớn hơn tất cả các nguồn khác với cùng mức trung bình bình phương sai lệch. Như vậy hàm tốc độ tạo tin-sai lệch của tất cả các nguồn có giá trị trung bình bằng không và sai phương hữu hạn thỏa mãn điều kiện $R(D) \leq R_g(D)$. Tương tự, hàm sai lệch-tốc độ tạo tin của các nguồn như vậy thỏa mãn điều kiện:

$$D(R) \leq D_g(R) = 2^{-2R} \sigma_x^2 \quad (5-3-10)$$

Giới hạn dưới của hàm tốc độ tạo tin-sai lệch cũng tồn tại. Giới hạn này được gọi là giới hạn dưới Shannon cho việc đo lường sai lệch theo trung bình bình phương sai lệch như sau:

$$R^*(D) = H(X) - \frac{1}{2} \log_2 2\pi e D \quad (5-3-11)$$

$H(X)$ là entropi của nguồn không nhớ có biên độ liên tục. Hàm sai lệch-tốc độ tạo tin tương ứng là:

$$D^*(R) = \frac{1}{2\pi e} 2^{-2[R-H(X)]} \quad (5-3-12)$$

Như vậy, hàm tốc độ tạo tin-sai lệch của các nguồn không nhớ, biên độ liên tục có giới hạn trên và giới hạn dưới như sau:

$$R^*(D) \leq R(D) \leq R_g(D) \quad (5-3-13)$$

và tương ứng là hàm sai lệch-tốc độ tạo tin:

$$D^*(R) \leq D(R) \leq D_g(R) \quad (5-3-14)$$

Entropi của nguồn gaussian không nhớ là:

$$H_g(X) = \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \sigma^2_x \quad (5-3-15)$$

Như vậy giới hạn dưới $R^*(D)$ trong công thức (5-3-11) trở thành $R_g(D)$. Bây giờ ta biểu diễn $D^*(R)$ theo dB và chuẩn hóa bằng cách đặt $\sigma^2_x = 1$ (hay chia $D^*(R)$ cho σ^2_x), ta thu được từ (5-3-12):

$$10 \log_{10} D^*(R) = -6R - 6[H_g(X) - H(X)] \quad (5-3-16)$$

hay

$$10 \log_{10} \frac{D_x(R)}{D^*(R)} = 6[H_g(X) - H(X)] \text{ dB} = 6[R_g(D) - R^*(D)] \text{ dB} \quad (5-3-17)$$

Ta thấy rằng $D^*(R)$ cũng giảm với tốc độ -6dB/bit và entropi $H(X)$ bị giới hạn trên bởi $H_g(X)$.

Bảng 5-3-1 trình bày bốn hàm mật độ phân bố xác suất của bốn nguồn thông tin thường gặp. Phân bố gamma sai khác nhiều nhất so với phân bố gaussian và phân bố laplace gần nhất với phân bố gaussian. Điều đó dùng để đánh giá sự sai khác giữa giới hạn trên và giới hạn dưới của sai lệch và tốc độ.

Bảng 5-3-1: Entropi và so sánh tốc độ, sai lệch của bốn loại phân bố tin hiệu

Hàm mật độ xác suất	$p(x)$	$H(X)$	$R_g(D) - R^*(D)$ (bit/Ký hiệu)	$D_g(R) - D^*(R)$ (dB)
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2}$	$\frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_x^2)$	0	0
Đồng đều	$\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_x}, x \leq \sqrt{3}\sigma_x$	$\frac{1}{2} \log_2 (12\sigma_x^2)$	0,255	1,53
Laplace	$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_x} e^{-\sqrt{2} x /\sigma_x}$	$\frac{1}{2} \log_2 (2e^2 \sigma_x^2)$	0,104	0,62
Gamma	$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{8\pi\sigma_x x }} e^{-\sqrt{3} x /2\sigma_x}$	$\frac{1}{2} \log_2 (4\pi e^{0.423} \sigma_x^2 / 3)$	0,709	4,25

Trước khi kết thúc mục này, ta xét một nguồn gaussian có dải thông hữu hạn với mật độ phổ:

$$\Phi(f) = \begin{cases} \sigma_x^2 / 2W & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases} \quad (5-3-18)$$

Khi tín hiệu đầu ra của nguồn này được lấy mẫu ở tốc độ Nyquist, các mẫu không tương quan với nhau và do đó, chúng độc lập thống kê (do nguồn là nguồn gaussian). Như vậy nguồn tương đương là rời rạc theo thời gian và không nhớ. Hàm tốc độ tạo tin-sai lệch cho mỗi mẫu được xác định bởi (5-3-6) là:

$$R_g(D) = W \log_2 \frac{\sigma_x^2}{D} \quad (0 \leq D \leq \sigma_x^2) \quad (5-3-19)$$

Hàm sai lệch-tốc độ tạo tin tương ứng là:

$$D_g(R) = 2^{-R/W} \sigma_x^2 \quad (5-3-20)$$

Khi biểu diễn bằng dB và chuẩn hóa bởi σ_x^2 , ta thu được:

$$10 \log_{10} D_g(R) / \sigma_x^2 = -3R/W \quad (5-3-21)$$

5-3-2. Lượng tử hóa vô hướng

Trong mã hóa nguồn, bộ lượng tử hóa có thể được tối ưu hóa nếu chúng ta biết hàm mật độ xác suất của biên độ tín hiệu ở đầu vào bộ lượng tử. Ví dụ, giả sử chuỗi $\{x_n\}$ ở đầu vào bộ lượng tử có hàm mật độ phân bố xác suất $p(x)$ và đặt $L = 2^k$ là số mức tín hiệu. Ta sẽ thiết kế bộ lượng tử hóa vô hướng tối ưu, làm tối thiểu hóa hàm sai số lượng tử của biến $q = \tilde{x} - x$, ở đây $\tilde{x}$ là giá trị lượng tử của x . Gọi $f(\tilde{x} - x)$ là hàm sai lệch ta quan tâm. Từ đó, sai lệch trong quá trình lượng tử biên độ tín hiệu là:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} - x) p(x) dx \quad (5-3-22)$$

Tổng quát, bộ lượng tử hóa tối ưu sẽ làm tối thiểu D bằng cách lựa chọn tối ưu các mức tín hiệu đầu ra và với mỗi khoảng tín hiệu đầu vào sẽ ứng với một mức tín hiệu ở đầu ra của bộ lượng tử. Vấn đề tối ưu hóa đã được xem xét bởi Lloyd (1982) và Max (1960) và bộ lượng tử hóa tối ưu được gọi là bộ lượng tử hóa Lloyd-Max.

Đối với bộ lượng tử hóa đồng đều, các mức tín hiệu đầu ra bộ lượng tử được tính là $\tilde{x} = \frac{1}{2}(2k-1)\Delta$, tương ứng với tín hiệu đầu vào trong khoảng $(k-1)\Delta \leq x < k\Delta$ và Δ là bước lượng tử. Khi bộ lượng tử hóa đồng đều là đối xứng với số bước chẵn, sai lệch trung bình trong (5-3-22) được viết thành:

$$D = 2 \sum_{k=1}^{L/2-1} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} f\left(\frac{1}{2}(2k-1)\Delta - x\right) p(x) dx + 2 \int_{(L/2-1)\Delta}^{\infty} f\left(\frac{1}{2}(2k-1)\Delta - x\right) p(x) dx \quad (5-3-23)$$

Trong trường hợp này, việc tối thiểu hóa D được tính theo bước lượng tử Δ . Lấy tích phân D theo Δ , ta thu được:

$$\sum_{k=1}^{L/2-1} (2k-1) \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} f\left(\frac{1}{2}(2k-1)\Delta - x\right) p(x) dx + (L-1) \int_{-(L/2-1)\Delta}^{\infty} f\left(\frac{1}{2}(L-1)\Delta - x\right) p(x) dx = 0 \quad (5-3-24)$$

$f(x)$ là ký hiệu của đạo hàm của $f(x)$.

Bằng việc lựa chọn hàm sai lệch $f(x)$, nghiệm của phương trình (5-3-24) cho ta bước lượng tử hóa tối ưu Δ . Với tiêu chuẩn trung bình bình phương sai lệch $f(x) = x^2$, người ta tìm ra bước lượng tử hóa tối ưu Δ_{opt} và giá trị tối thiểu của trung bình bình phương sai lệch (MSE) với hàm mật độ phân bố xác suất là của quá trình ngẫu nhiên gaussian có trị trung bình bằng không và sai phương đơn vị. Một vài kết quả được cho trên bảng 5-3-2. Ta nhận thấy rằng trung bình bình phương sai lệch tối thiểu D_{min} giảm khoảng 5dB mỗi khi L tăng gấp đôi. Như vậy, cứ thêm 1 bit vào bộ lượng tử hóa đồng đều với bước lượng tử hóa tối ưu Δ_{opt} cho tín hiệu có phân bố gaussian thì độ sai lệch sẽ giảm đi 5dB.

Số lượng mức lượng tử	Bước lượng tử tối ưu Δ_{opt}	Giá trị tối thiểu MSE D_{min}	$10\log_{10} D_{\text{min}}$ (dB)
2	1,596	0,3634	-4,4
4	0,9957	0,1188	-9,25
8	0,5860	0,03744	-14,27
16	0,3352	0,01154	-19,38
32	0,1881	0,00349	-24,57

Bảng 5-3-2: Bước lượng tử hóa tối ưu cho bộ lượng tử hóa đồng đều cho biến ngẫu nhiên gaussian

Trong trường hợp bộ lượng tử hóa không đồng đều thì độ sai lệch có thể giảm hơn nữa. Khi đó, nếu tín hiệu vào trong khoảng $x_{k-1} \leq x < x_k$ sẽ ứng với mức tín hiệu ra là $\tilde{x} = \tilde{x}_k$. Với bộ lượng tử hóa L mức, các giá trị đầu cuối $x_0 = -\infty$, $x_L = \infty$, kết quả sai số là:

$$D = \sum_{k=1}^L \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\tilde{x}_k - x) p(x) dx \quad (5-3-25)$$

Điều kiện cần cho việc tối thiểu hóa sai số D theo $\{x_k\}$ và $\{\tilde{x}_k\}$ là đạo hàm của D theo $\{x_k\}$ và $\{\tilde{x}_k\}$ bằng 0. Kết quả là hệ phương trình:

$$f(\tilde{x}_k - x_k) = f(\tilde{x}_{k+1} - x_k), \quad k = 1, 2, \dots, L-1 \quad (5-3-26)$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\tilde{x}_k - x) p(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (5-3-27)$$

Trong trường hợp ta xét tới việc tối thiểu hóa trung bình bình phương sai lệch $f(x) = x^2$, (5-3-26) trở thành:

$$x_k = \frac{1}{2}(\tilde{x}_k + \tilde{x}_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, L-1 \quad (5-3-28)$$

các phương trình tương ứng để xác định $\{\tilde{x}_k\}$ là:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\tilde{x}_k - x) p(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (5-3-29)$$

MÃ HÓA NGUỒN

Như vậy $\tilde{x}_k$ là trung tâm của miền xác định bởi $p(x)$ giữa x_{k-1} và x_k . Có thể giải gần đúng các phương trình này khi biết $p(x)$.

Giá trị k	x_k	$\tilde{x}_k$
1	-0,9816	-1,510
2	0,0	-0,4528
3	0,9816	0,4528
4	∞	1,510
$D_{\min} = 0,1175$		
$10\log_{10} D_{\min} = -9,3 \text{ dB}$		

Bảng 5-3-3: Bộ lượng tử hóa tối ưu bốn mức cho biến ngẫu nhiên gaussian

Giá trị k	x_k	$\tilde{x}_k$
1	-1,748	-2,152
2	-1,050	-1,344
3	-0,5006	-0,7560
4	0	-0,2451
5	0,5006	0,2451
6	1,050	0,7560
7	1,748	1,344
8	∞	2,152
$D_{\min} = 0,03454$		
$10\log_{10} D_{\min} = -14,62 \text{ dB}$		

Bảng 5-3-4: Bộ lượng tử hóa tối ưu tám mức cho biến ngẫu nhiên gaussian

Bảng 5-3-3 và 5-3-4 cho kết quả quá trình tối ưu hóa đối với các bộ lượng tử tối ưu bốn mức và tám mức của biến ngẫu nhiên có biên độ tuân theo luật phân bố gaussian có trị trung bình bằng không và sai phương bằng đơn vị. Trong bảng 5-3-5 ta so sánh giá trị tối thiểu của trung bình bình phương sai lệch của bộ lượng tử hóa đồng đều với bộ lượng tử hóa không đồng đều đối với biến ngẫu nhiên có giá trị biên độ có phân bố gaussian. Sự chênh lệch là rất nhỏ khi R nhỏ, nhưng tăng lên khi R tăng. Ví dụ khi $R = 5$, bộ lượng tử hóa không đồng đều sai lệch ít hơn bộ lượng tử hóa đồng đều 5dB.

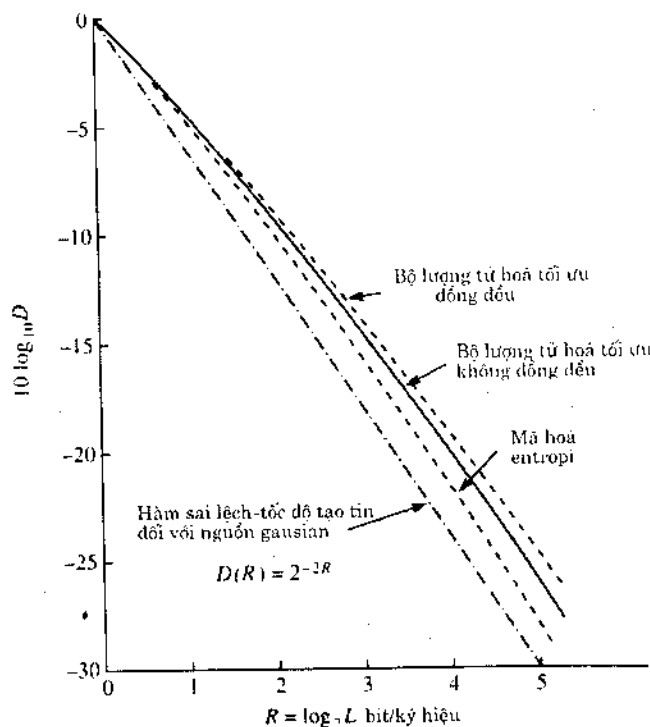
R (bit/ký hiệu)	$10\log_{10}D_{\min}$	
	Tuyến tính (dB)	Phi tuyến (dB)
1	-4,4	-4,4
2	-9,25	-9,3
3	-14,27	-14,62
4	-19,38	-20,22
5	-24,57	-26,02
6	-29,83	-31,89
7	-35,13	-37,81

Bảng 5-3-5: So sánh bộ lượng tử hóa đồng đều và không đồng đều đối với biến ngẫu nhiên gaussian.

Trên hình 5-3-2 vẽ độ sai lệch tối thiểu theo tốc độ thông tin $R = \log_2 L$ trên mỗi mẫu. Sự phụ thuộc của sai lệch D theo tốc độ R chính là hàm sai lệch-tốc độ tạo tin $D(R)$. Ta thấy rằng đường biểu diễn hàm này đối với bộ lượng tử hóa không đồng đều ở dưới đường biểu diễn với bộ lượng tử đồng đều.

Bộ lượng tử mã hóa các mẫu của một nguồn có biên độ liên tục thành các mẫu của một nguồn có biên độ rời rạc, ta có thể xử lý các biên độ rời rạc như các ký hiệu $\tilde{X} = \{\tilde{x}_k, 1 \leq k \leq L\}$, với các giá trị xác suất $\{p_k\}$. Nếu các giá trị biên độ tín hiệu là độc lập thống kê, thì nguồn là rời rạc không nhớ có entropi là:

$$H(\tilde{X}) = - \sum_{k=1}^L p_k \log_2 p_k \quad (5-3-30)$$



Hình 5-3-2: Suy hao theo tốc độ đối với nguồn gaussian không nhớ, rời rạc

Ví dụ, với bộ lượng tử hóa tối ưu không đồng đều bốn mức cho nguồn có giá trị biên độ tuân theo luật phân bố gaussian với các xác suất $p_1 = p_4 = 0.1635$ và $p_2 = p_3 = 0.3365$. Entropi của nguồn là $H(\tilde{\mathbf{X}}) = 1.911$ bit/ký hiệu. Với mã hóa Huffman mã hóa khối các ký hiệu có thể đạt được độ sai lệch tối thiểu là -9.3 dB với độ dài từ mã là 1.911 bit/ký hiệu thay vì phải dùng 2bit/ký hiệu. Bảng 5-3-6 liệt kê giá trị entropi của bộ lượng tử hóa không đồng đều.

$\bar{R}$ (bit/ký hiệu)	Entropi (bit/ký hiệu)	Độ sai lệch $10\log_{10}D_{\min}$
1	1,0	-4,4
2	1,911	-9,30
3	2,825	-14,62
4	3,765	-20,22
5	4,730	-26,02

Bảng 5-3-6: Entropi đầu ra bộ lượng tử hóa tối ưu không đồng đều đối với biến ngẫu nhiên gaussian

Kết luận lại, bộ lượng tử hóa có thể được tối ưu hóa nếu ta biết hàm mật độ phân bố xác suất của nguồn liên tục. Bộ lượng tử hóa tối ưu $L = 2^R$ mức gây ra sai số $D(R)$ tối thiểu. Điều đó có thể đạt được khi mã hóa mỗi mẫu tín hiệu bởi R bit. Tuy nhiên, vẫn có thể mã hóa hiệu quả hơn. Các mẫu ở đầu ra của bộ lượng tử hóa được đặc trưng bởi các xác suất xuất hiện $\{p_k\}$ sẽ được sử dụng trong phương pháp mã hóa Huffman (mã hóa entropi). Hiệu quả của các phương pháp mã hóa có thể được so sánh qua hàm tốc độ tạo tin-sai lệch hay hàm sai lệch-tốc độ tạo tin đối với nguồn rời rạc, biên độ liên tục được đặc trưng bởi hàm mật độ phân bố xác suất.

5-3-3. Lượng tử hóa vectơ

Trong phần trước chúng ta đã xét tới việc lượng tử hóa các mẫu tín hiệu ở đầu ra của một nguồn có biên độ liên tục, trong đó quá trình lượng tử thực hiện trên từng mẫu. Phần này ta xét tới việc lượng tử hóa đồng thời một khối các mẫu tín hiệu hay một khối các tham số tín hiệu. Kiểu lượng tử hóa này được gọi là lượng tử hóa khối hay lượng tử hóa vectơ. Phương pháp lượng tử này được sử dụng rộng rãi trong mã hóa tín hiệu tiếng nói hay trong các hệ thống tin tổ ong.

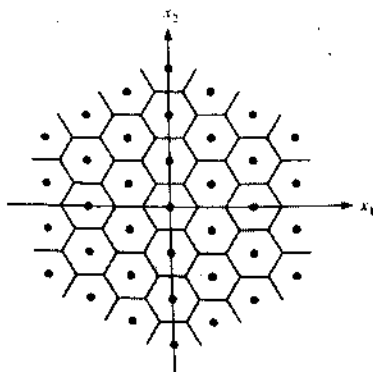
Việc lượng tử hóa vectơ sẽ mang lại hiệu quả cao hơn lượng tử hóa vô hướng, ngay cả khi nguồn có biên độ liên tục và không nhớ. Hơn nữa, nếu các mẫu tín hiệu hay các tham số tín hiệu là phụ thuộc thống kê, chúng ta có thể lợi dụng tính chất này bằng cách lượng tử hóa đồng thời một khối các mẫu hay một khối các tham số. Phương pháp này có hiệu quả cao hơn phương pháp lượng tử hóa vectơ về mặt tốc độ thông tin (tốc độ thông tin thấp hơn).

Vấn đề lượng tử hóa vectơ có thể được diễn giải như sau. Ta có một vectơ n chiều $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ với giá trị thực, các thành phần có biên độ liên tục $\{x_k, 1 \leq k \leq n\}$ được mô tả bằng hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Vectơ $\mathbf{X}$ được lượng tử hóa thành một vectơ $\tilde{\mathbf{X}}$ n chiều khác với các thành phần $\{\tilde{x}_k, 1 \leq k \leq n\}$. Ta biểu diễn phép lượng tử hóa là Q , nghĩa là:

$$\tilde{\mathbf{X}} = Q(\mathbf{X}) \quad (5-3-31)$$

$\tilde{\mathbf{X}}$ là đầu ra bộ lượng tử hóa vectơ khi đầu vào là $\mathbf{X}$.

Về cơ bản, việc lượng tử hóa vectơ một khối số liệu có thể được xem như vấn đề nhận dạng mẫu trong việc phân loại các khối số liệu thành các lớp rời rạc hay ô để tối ưu hóa tiêu chuẩn nào đó về độ trung thực. Ví dụ, ta xét việc lượng tử hóa vectơ hai chiều $\mathbf{X} = [x_1, x_2]$ Không gian hai chiều được chia thành các ô như trên hình 5-3-3, các ô là các hình lục giác đều. Ta ký hiệu tập hợp các vectơ ở đầu ra bộ lượng tử là $\{\tilde{\mathbf{X}}_k, 1 \leq k \leq L\}$.



Hình 5-3-3: Ví dụ lượng tử hóa không gian hai chiều.

Tổng quát, việc lượng tử hóa một vectơ $\mathbf{X}$ n chiều thành một vectơ $\tilde{\mathbf{X}}$ n chiều khác tạo ra một sai số lượng tử hay sai lệch $d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$. Giá trị trung bình của sai lệch của tập hợp các vectơ đầu vào $\mathbf{X}$ là:

$$D = \sum_{k=1}^L P(\mathbf{X} \in C_k) E[d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_k) | \mathbf{X} \in C_k] = \sum_{k=1}^L P(\mathbf{X} \in C_k) \int_{\mathbf{X} \in C_k} d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_k) p(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5-3-32)$$

$P(\mathbf{X} \in C_k)$ là xác suất để vectơ $\mathbf{X}$ ở trong ô C_k và $p(\mathbf{X})$ là hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của n biến ngẫu nhiên. Cũng như trong lượng tử hóa vô hướng, ta có thể cực tiểu hóa D bằng cách chọn các ô $\{C_k, 1 \leq k \leq L\}$ với mỗi hàm $p(\mathbf{X})$.

Một tiêu chuẩn đo lường sai lệch hay dùng là trung bình bình phương sai số, được định nghĩa như sau:

$$d_2(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})' (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x}_k)^2 \quad (5-3-33)$$

Tổng quát hơn tiêu chuẩn trên là trọng lượng của trung bình bình phương sai số:

$$d_{2W}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})' \mathbf{W} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) \quad (5-3-34)$$

$\mathbf{W}$ là ma trận trọng lượng, nó là ma trận xác định dương, thông thường $\mathbf{W}$ là nghịch đảo của ma trận hiệp biến của vectơ dữ liệu vào $\mathbf{X}$.

Một tiêu chuẩn đo lường sai lệch khác đôi khi cũng được sử dụng là:

$$d_p(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \tilde{x}_k|^p \quad (5-3-35)$$

Lượng tử hóa vectơ không chỉ giới hạn ở việc lượng tử hóa một khối các mẫu của nguồn tín hiệu vào mà nó còn được sử dụng để lượng tử hóa tập hợp các tham số của số liệu. Ví dụ như

trong mã hóa dự đoán tuyến tính (LPC), các tham số lấy từ tín hiệu là các hệ số dự đoán, đó là các hệ số của mô hình bộ lọc toàn cực của nguồn tạo tín hiệu. các tham số này được lượng tử hóa vectơ với một tiêu chuẩn sai lệch thích hợp nào đó. Trong mã hóa tín hiệu tiếng nói, tiêu chuẩn sai lệch thường là trọng lượng của bình phương sai lệch, ma trận trọng lượng W là ma trận tự tương quan chuẩn hóa của tín hiệu vào.

Trong xử lý tín hiệu tiếng nói, một tập hợp các tham số khác cũng có thể được dùng để lượng tử hóa vectơ và truyền tới phía thu là tập hợp các hệ số phản xạ $\{a_i, 1 \leq i \leq m\}$. Một tập hợp các tham số khác đôi khi cũng được sử dụng trong lượng tử hóa vectơ của mã hóa dự đoán tuyến tính là các tỷ số loga $\{r_k\}$, được định nghĩa qua các hệ số phản xạ:

$$r_k = \log \frac{1 + a_{kk}}{1 - a_{kk}}, \quad 1 \leq k \leq m \quad (5-3-36)$$

Bây giờ chúng ta quay trở lại với việc mô hình hóa toán học của vấn đề lượng tử hóa vectơ. Xét việc chia không gian n chiều thành L ô $\{C_k, 1 \leq k \leq L\}$ sao cho sai lệch trung bình là tối thiểu trên toàn bộ L mức lượng tử. Có hai điều kiện cho quá trình tối ưu. Thứ nhất là bộ lượng tử hóa tối ưu sử dụng *luật gần nhất* được diễn giải dưới dạng toán học như sau:

$Q(X) = \tilde{X}_k$ nếu và chỉ nếu:

$$D(X, \tilde{X}_k) \leq D(X, \tilde{X}_j) \quad k \neq j, 1 \leq j \leq L \quad (5-3-37)$$

Điều kiện thứ hai cần thiết cho việc tối ưu hóa là mỗi vectơ đầu ra $\tilde{X}_k$ được chọn sao cho *tối thiểu hóa sai lệch trong ô C_k* . Nói cách khác, $\tilde{X}_k$ là vectơ trong C_k làm cực tiểu biểu thức:

$$D_k = E[d(X, \tilde{X}_k) | X \in C_k] = \int_{X \in C_k} d(X, \tilde{X}_k) p(X) dX \quad (5-3-38)$$

Vectơ $\tilde{X}_k$ làm tối thiểu D_k gọi là trung tâm của ô C_k . Như vậy các điều kiện cho việc tối ưu hóa được sử dụng trong việc chia không gian n chiều thành các ô $\{C_k, 1 \leq k \leq L\}$ với điều kiện đã biết hàm mật độ phân bố xác suất $p(X)$. Nói chung ta muốn các vectơ mã gần nhau trong miền giá trị hàm mật độ phân bố xác suất lớn và xa nhau trong miền giá trị hàm mật độ phân bố xác suất nhỏ.

Ta có thể sử dụng giới hạn trên của sai lệch trong lượng tử hóa vô hướng áp dụng cho từng thành phần của lượng tử hóa vectơ để tìm giới hạn trên của sai lệch trong lượng tử hóa vectơ. Mặt khác, hiệu quả cao nhất của lượng tử hóa vectơ được cho bởi hàm tốc độ tạo tin-sai lệch hay hàm sai lệch-tốc độ tạo tin.

Hàm sai lệch-tốc độ tạo tin có thể định nghĩa trong lượng tử hóa vectơ như sau. Giả sử ta có vectơ n chiều X từ n mẫu $\{x_m\}$. Vectơ X được lượng tử hóa thành vectơ $\tilde{X}$, $\tilde{X} = Q(X)$. Vectơ $\tilde{X}$ là một vectơ trong tập các vectơ $\{\tilde{X}_k, 1 \leq k \leq L\}$. Như đã nói ở trên, sai lệch trung bình D khi biểu diễn X bởi $\tilde{X}$ là $E[d(X, \tilde{X})]$, $d(X, \tilde{X})$ là sai lệch theo từng chiều, nghĩa là:

$$d(X, \tilde{X}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x}_k)^2$$

Các vectơ $\{\tilde{X}_k, 1 \leq k \leq L\}$ được truyền đi với tốc độ trung bình:

$$R = \frac{H(\tilde{X})}{n} \text{ bit/ký hiệu} \quad (5-3-39)$$

$H(\tilde{X})$ là entropi của nguồn đầu ra bộ lượng tử, được định nghĩa như sau:

$$H(\tilde{\mathbf{X}}) = - \sum_{i=1}^L p(\tilde{\mathbf{X}}_i) \log_2 p(\tilde{\mathbf{X}}_i) \quad (5-3-40)$$

Với tốc độ trung bình R , sai lệch tối thiểu có thể thực hiện được $D_n(R)$ là:

$$D_n(R) = \min_{Q(\mathbf{X})} E[d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})] \quad (5-3-41)$$

trùng công thức trên $R \geq H(\tilde{\mathbf{X}})/n$ và giá trị cực tiểu được tính với tất cả các khả năng của $Q(\mathbf{X})$. Lấy giới hạn khi n tiến tới vô cùng, ta nhận được:

$$D(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(R) \quad (5-3-42)$$

$D(R)$ là hàm sai lệch-tốc độ tạo tin đã được nói tới trong phần trước.

Các vấn đề nói ở trên là trong bối cảnh ta đã biết hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(\mathbf{X})$. Tuy nhiên, trong thực tế, người ta thường không tính được $p(\mathbf{X})$, trong trường hợp đó có thể chọn các vectơ lượng tử một cách thích nghi từ một tập hợp các vectơ thử $\mathbf{X}(m)$. Giả thiết chúng ta đã có một tập hợp M vectơ thử và $M \gg L$. Một thuật toán ghép gọi là *thuật toán K trung bình* (K means algorithm), trong trường hợp của ta thì $K = L$ được áp dụng với các vectơ thử. Thuật toán này chia M vectơ thử thành L tập mà hai điều kiện tối ưu được thỏa mãn. Thuật toán như sau:

Thuật toán K trung bình:

Bước 1: Khởi đầu quá trình lặp với $i = 0$, chọn một tập hợp các vectơ đầu ra $\tilde{\mathbf{X}}_k(0)$, $1 \leq k \leq L$.

Bước 2: Phân các vectơ thử $\{\mathbf{X}(m), 1 \leq m \leq M\}$ thành các lớp $\{C_k\}$ bằng cách sử dụng luật gần nhất:

$$\mathbf{X} \in C_k(i) \text{ nếu và chỉ nếu } D(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_k(i)) \leq D(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_j(i)) \quad \text{với mọi } k \neq j$$

Bước 3: Tính lại (đặt $i = i + 1$) các vectơ đầu ra của tất cả các lớp bằng cách tính trung tâm:

$$\tilde{\mathbf{X}}_k(i) = \frac{1}{M_k} \sum_{\mathbf{X} \in C_k} \mathbf{X}(m) \quad 1 \leq k \leq L$$

của các vectơ thử trong mỗi lớp. Tính sai lệch $D(i)$ của mỗi bước lặp.

Bước 4: Kết thúc nếu như độ chênh lệch $D(i-1) - D(i)$ đủ nhỏ, nếu không quay lại bước 2.

Thuật toán K trung bình hội tụ tới cực tiểu địa phương. Bằng cách lặp lại thuật toán với nhiều tập hợp các vectơ đầu ra khởi đầu $\{\tilde{\mathbf{X}}_k(0)\}$, ta có thể tìm được cực tiểu toàn cục. Tuy nhiên do khối lượng tính toán quá lớn nên thông thường ta chỉ làm với một vài tập khởi đầu.

Mỗi khi khởi đầu với một tập hợp các vectơ đầu ra $\{\tilde{\mathbf{X}}_k, 1 \leq k \leq L\}$, mỗi vectơ $\mathbf{X}(m)$ được lượng tử hóa thành một vectơ ở đầu ra gần nó nhất (theo cách đo lường sai lệch). Nếu việc tính toán được thực hiện với tất cả L vectơ có thể ở đầu ra $\{\tilde{\mathbf{X}}_k\}$ thì thủ tục này được gọi là tìm kiếm toàn bộ. Giả thiết số phép tính cộng và nhân trong mỗi phép thử là n (thực ra là tỷ lệ với n là số chiều của vectơ) thì số phép tính cần thực hiện đối với một vectơ là:

$$C = nL \quad (5-3-43)$$

Nếu L là lũy thừa của 2 thì $\log_2 L$ là số bit cần thiết để biểu diễn cho mỗi vectơ. Gọi R là số bit cần thiết để biểu diễn cho mỗi mẫu tín hiệu (một thành phần hay một chiều của $\mathbf{X}(m)$) thì $nR = \log_2 L$. Do đó số phép tính cần thực hiện đối với mỗi vectơ là:

$$C = n2^{nR} \quad (5-3-44)$$

Như vậy số lượng phép tính tăng theo hàm mũ với số chiều không gian và tốc độ bit đối với mỗi chiều, do đó lượng tử hóa vectơ được sử dụng cho việc mã hóa nguồn tốc độ thấp như mã hóa các hệ số phản xạ hay các hệ số loga trong phương pháp LPC.

Ví dụ 5-3-1

Gọi x_1 và x_2 là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời đồng đều:

$$p(x_1, x_2) \equiv p(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{1}{ab} & \mathbf{X} \in C \\ 0 & \mathbf{X} \notin C \end{cases} \quad (5-3-45)$$

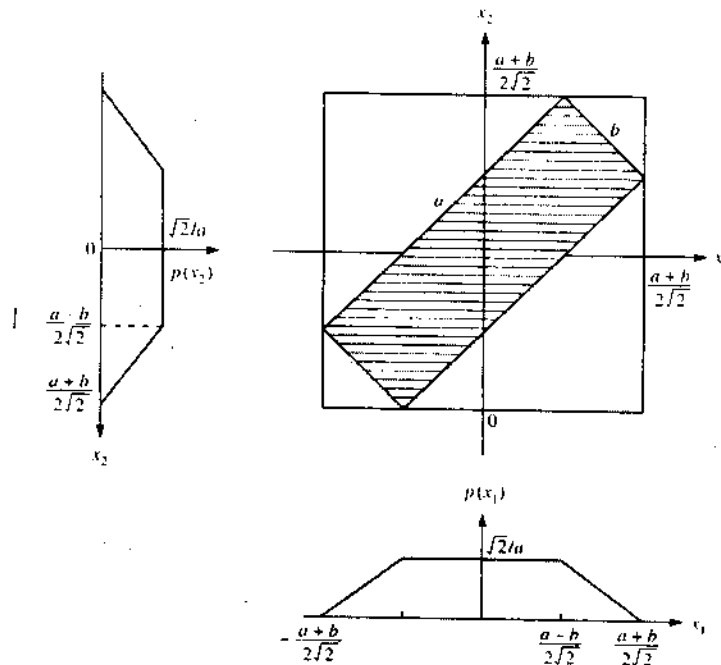
C là miền hình chữ nhật trên hình 5-3-4. Hình này quay 45° so với đường nằm ngang.

Nếu ta lượng tử hóa x_1 và x_2 độc lập và dùng các bước lượng tử như nhau Δ thì số các mức cần thiết là:

$$L_1 = L_2 = \frac{a+b}{\sqrt{2}\Delta} \quad (5-3-46)$$

Số lượng các bit cần thiết để mã hóa vectơ $\mathbf{X} = [x_1, x_2]$ là:

$$R_x = R_1 + R_2 = \log_2 L_1 + \log_2 L_2 = \log_2 \frac{(a+b)^2}{2\Delta^2} \quad (5-3-47)$$



Hình 5-3-4: Ví dụ về lượng tử hóa vectơ hai chiều

Như vậy lượng tử hóa từng thành phần tương đương với lượng tử hóa vectơ với số mức:

$$L_x = L_1 L_2 = \frac{(a+b)^2}{2\Delta^2} \quad (5-3-48)$$

Ta nhận thấy rằng phương pháp này tương đương với việc phủ kín hình chữ nhật lớn bằng các ô chữ nhật, mỗi ô biểu diễn một miền lượng tử. Do $p(\mathbf{X}) = 0$ trừ khi $\mathbf{X} \in C$ phương pháp mã hóa này lãng phí và làm tăng tốc độ số liệu.

Nếu chúng ta chỉ phủ miền mà $p(\mathbf{X}) \neq 0$ bằng các hình vuông diện tích Δ^2 thì số lượng các mức lượng tử hay số hình vuông phải sử dụng để phủ kín là:

$$L'_x = ab / \Delta^2 \quad (5-3-49)$$

Từ đó sự khác nhau về tốc độ số liệu giữa lượng tử hóa vô hướng và lượng tử hóa vectơ là:

$$R_x - R'_x = \log_2 \frac{(a+b)^2}{2ab} \quad (5-3-50)$$

Chú ý rằng phép biến đổi tuyến tính (quay 45°) sẽ làm mất quan hệ giữa x_1 và x_2 và làm cho hai biến ngẫu nhiên độc lập với nhau. Như vậy lượng tử hóa vectơ và lượng tử hóa vô hướng có hiệu quả như nhau. Nhưng nói chung, lượng tử hóa vectơ có hiệu quả ít nhất là bằng với lượng tử hóa vô hướng.

Lượng tử hóa vectơ được sử dụng trong một vài kiểu mã hóa tín hiệu tiếng nói trong phương pháp mã hóa trong miền thời gian và cả trong phương pháp mã hóa dựa trên mô hình nguồn. Trong phương pháp mã hóa dựa trên mô hình nguồn như LPC, lượng tử hóa vectơ có thể tạo nên tốc độ số liệu dưới 1000 bit/s. Khi áp dụng trong phương pháp mã hóa trong miền thời gian có thể nhận được tín hiệu tiếng nói chất lượng tốt ở tốc độ 16000 bit/s nghĩa là ở tốc độ $R = 2$ bit/mẫu.

5-4. CÁC KỸ THUẬT MÃ HÓA NGUỒN TƯƠNG TỰ

Nhiều kỹ thuật mã hóa cho nguồn tương tự đã được phát triển trong hơn 40 năm qua. Phần lớn các kỹ thuật này dùng để mã hóa tiếng nói và hình ảnh. Trong phần này chúng ta đi qua một số phương pháp và xét việc áp dụng trong mã hóa tiếng nói để đánh giá độ hiệu quả.

Ta chia các phương pháp mã hóa nguồn tương tự thành ba loại. Loại thứ nhất là *mã hóa tín hiệu miền thời gian*. Trong loại này, bộ mã hóa nguồn được thiết kế để có thể biểu diễn số các đặc tính về mặt thời gian của nguồn. Loại thứ hai là *mã hóa tín hiệu miền tần số*. Tín hiệu được chia thành các dải tần số và mã hóa từng dải để truyền đi. Loại thứ ba là mã hóa dựa trên mô hình toán học của nguồn và được gọi là *mã hóa mô hình nguồn*.

5-4-1. Mã hóa tín hiệu miền thời gian

Có vài kỹ thuật dùng để biểu diễn các đặc tính của tín hiệu miền thời gian. Các kỹ thuật hay dùng nhất được trình bày dưới đây.

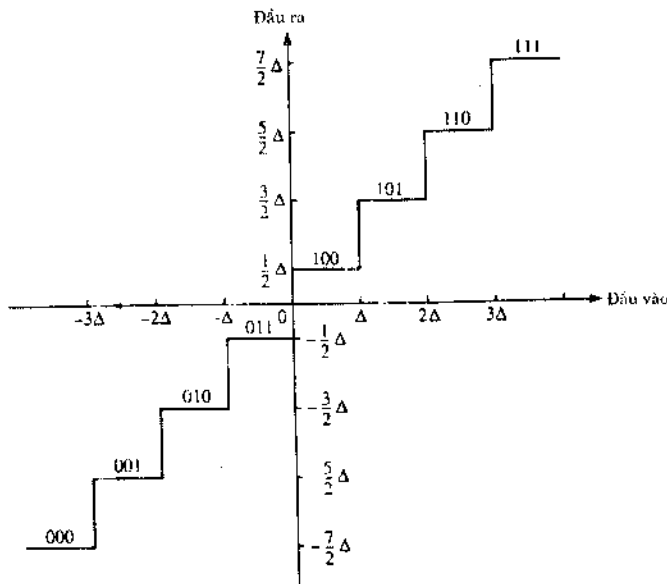
Điều chế xung mã (PCM) Gọi $x(t)$ là một thể hiện của nguồn và x_n là các mẫu lấy theo tần số lấy mẫu $f_s \geq 2W$, W là tần số cao nhất trong phổ của $x(t)$. Trong mã PCM, mỗi mẫu tín hiệu được lượng tử hóa thành một trong 2^R các mức tín hiệu, ở đây R là số ký hiệu nhị phân dùng để biểu diễn cho mỗi mẫu. Như vậy tốc độ thông tin của nguồn là Rf_s bit/s.

Quá trình lượng tử hóa có mô hình toán học như sau:

$$\tilde{x}_n = x_n + q_n \quad (5-4-1)$$

$\tilde{x}_n$ là giá trị lượng tử của x_n và q_n là sai số lượng tử (chúng ta thường coi đó là nhiễu cộng). Giả sử bộ lượng tử hóa là đồng đều có quan hệ giữa đầu ra với đầu vào được mô tả trên hình 5-4-1, sai số lượng tử được đặc trưng thống kê bởi hàm mật độ phân bố xác suất đồng đều:

$$p(q) = \frac{1}{\Delta} \quad -\frac{1}{2}\Delta \leq q \leq \frac{1}{2}\Delta \quad (5-4-2)$$



Hình 5-4-1: Quan hệ giữa đầu ra với đầu vào của bộ lượng tử hóa đồng đều

Bước lượng tử là $\Delta = 2^{-R}$. Trung bình bình phương sai số lượng tử là:

$$E(q^2) = \frac{1}{12} \Delta^2 = \frac{1}{12} 2^{-2R} \quad (5-4-3)$$

Theo thang dB, trung bình bình phương giá trị của nhiễu là:

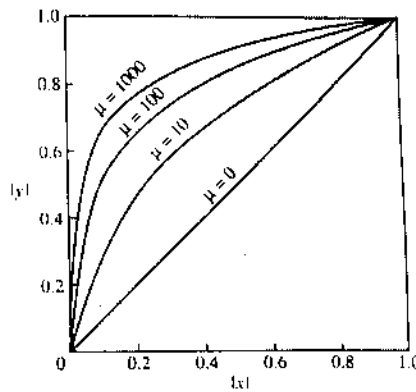
$$10\log_{10} \frac{1}{12} \Delta^2 = 10\log_{10} \left(\frac{1}{12} 2^{-2R} \right) = -6R - 10.8 \text{ dB} \quad (5-4-4)$$

Chúng ta nhận thấy rằng sai số lượng tử giảm 6 dB/bit đối với bộ lượng tử hóa này. Ví dụ với bộ lượng tử hóa 7 bit thì sai số lượng tử là -52.8 dB.

Nhiều nguồn tín hiệu ví dụ như nguồn tín hiệu tiếng nói có tính chất là giá trị biên độ tín hiệu hay nhận giá trị nhỏ hơn là nhận giá trị lớn. Nhưng bộ lượng tử hóa đồng đều có khoảng cách giữa các bước lượng tử giống nhau mà không phản ánh được tính chất của tín hiệu. Đối với những tín hiệu như thế sử dụng bộ lượng tử hóa không đồng đều sẽ mang lại hiệu quả cao hơn. Tính chất của bộ lượng tử hóa không đồng đều có thể coi như cho tín hiệu đi qua một thiết bị phi tuyến để nén biên độ tín hiệu, sau đó cho tín hiệu đã nén qua bộ lượng tử hóa đồng đều. Ví dụ bộ nén loga có quan hệ về biên độ giữa đầu ra và đầu vào như sau:

$$|y| = \log_{10} \frac{1 + \mu|x|}{1 + \mu} \quad (5-4-5)$$

$|x| \leq 1$ là biên độ của tín hiệu vào, $|y|$ là biên độ tín hiệu ra, μ là tham số nén. Hình 5-4-2 biểu diễn quan hệ giữa $|y|$ và $|x|$ với các giá trị khác nhau của μ . Giá trị $\mu = 0$ tương ứng với không nén tín hiệu.



Hình 5-4-2: Quan hệ về biên độ giữa đầu ra với đầu vào của bộ nén loga

Trong việc mã hóa tín hiệu tiếng nói, giá trị $\mu = 255$ được chấp nhận là chuẩn ở Bắc Mỹ. Khi đó bộ lượng tử này giảm được sai số lượng tử khoảng 24 dB so với bộ lượng tử đồng đều. Khi khôi phục lại các giá trị các mẫu tín hiệu từ các giá trị lượng tử, người ta phải thực hiện một phép biến đổi loga ngược để giãn biên độ tín hiệu.

Điều chế xung mã vi sai (DPCM) Trong PCM, mỗi mẫu tín hiệu được mã hóa độc lập với tất cả các mẫu khác. Tuy nhiên, phần lớn các nguồn tín hiệu được lấy mẫu ở tốc độ Nyquist hay cao hơn thì giữa các mẫu liên tiếp có một mối liên hệ đáng kể. Nói cách khác, sự sai khác về biên độ giữa các mẫu liên tiếp là khá nhỏ. Như vậy có thể xây dựng được một mô hình mã hóa tận dụng tính chất này để làm giảm tốc độ số liệu ở đầu ra của nguồn.

Một phương pháp đơn giản là chỉ mã hóa sự sai khác của các mẫu tín hiệu liên tiếp thay cho mã hóa từng mẫu độc lập. Do sự chênh lệch giữa các mẫu nhỏ hơn nhiều giá trị biên độ của một mẫu nên cần ít bit hơn để biểu diễn sự sai khác đó. Cụ thể, ta có thể dự đoán mẫu hiện tại dựa trên p mẫu trước đó. Đặt x_n là giá trị mẫu hiện tại và $\hat{x}_n$ là giá trị dự đoán của x_n , được định nghĩa như sau:

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} \quad (5-4-6)$$

Như vậy $\hat{x}_n$ là tổ hợp tuyến tính của p mẫu trước và a_i là các hệ số của bộ dự đoán. Các hệ số $\{a_i\}$ được chọn để tối thiểu hóa một hàm sai lệch nào đó giữa $\hat{x}_n$ và x_n .

Hàm lỗi thường dùng trong toán học và thực tế là trung bình bình phương sai số (MSE). Với hàm lỗi này, ta chọn $\{a_i\}$ để cực tiểu hóa sai số:

$$\begin{aligned} \xi_p &= E[e^2_n] = E \left[\left(x_n - \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} \right)^2 \right] \\ &= E[x_n^2] - 2 \sum_{i=1}^p a_i E(x_n x_{n-i}) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j E(x_{n-i} x_{n-j}) \end{aligned} \quad (5-4-7)$$

Giả sử đầu ra của nguồn là dừng (theo nghĩa rộng), ta có thể viết lại công thức (5-4-7) như sau:

$$\xi_p = \phi(0) - 2 \sum_{i=1}^p a_i \phi(i) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \phi(i-j) \quad (5-4-8)$$

$\phi(m)$ là hàm tự tương quan của dãy các mẫu tín hiệu $\{x_n\}$. Cực tiểu hóa ξ_p theo $\{a_i\}$ tạo nên hệ các phương trình tuyến tính sau:

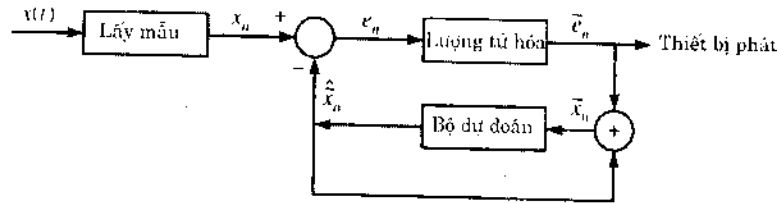
$$\sum_{i=1}^p a_i \phi(i-j) = \phi(j), \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (5-4-9)$$

Khi hàm tự tương quan $\phi(n)$ không biết trước một cách tiên nghiệm, ta có thể ước lượng từ các mẫu $\{x_n\}$ sử dụng quan hệ sau:

$$\hat{\phi}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-n} x_i x_{i+n} \quad n = 0, 1, \dots, p \quad (5-4-10)$$

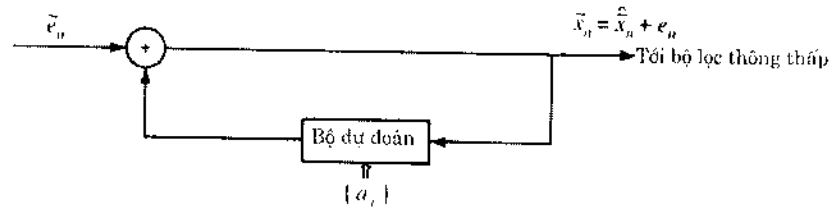
Chú ý rằng hệ số chuẩn hóa $1/N$ phải bỏ đi khi thay $\hat{\phi}(n)$ vào công thức (5-4-9).

Hệ phương trình tuyến tính (5-4-9) dùng để tìm các hệ số của bộ dự đoán được gọi là hệ phương trình Yule-Walker. Thuật toán của Levinson và Durbin là loại thuật toán có hiệu quả khi dùng để giải hệ phương trình đó.



$$\begin{aligned} e_n &= x_n - \hat{x}_n = x_n - \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{n-i} \\ \tilde{e}_n - e_n &= \tilde{e}_n - (x_n - \hat{x}_n) = e_n + \hat{x}_n - x_n \\ &= \tilde{x}_n - x_n \\ &= q_n = \text{Sai số lượng tử} \end{aligned}$$

(a) Bộ mã hóa



(b) Bộ giải mã

Hình 5-4-3: (a) Sơ đồ khối của bộ mã hóa DPCM, (b) Bộ giải mã DPCM

Sơ đồ khối của hệ thống DPCM được trình bày trên hình 5-4-3. Bộ dự đoán là mạch hồi tiếp của bộ lượng tử hóa. Đầu vào của bộ dự đoán ký hiệu là $\tilde{x}_n$ biểu diễn mẫu tín hiệu x_n nhưng bị thay đổi do quá trình lượng tử, đầu ra của bộ dự đoán là:

$$\hat{\tilde{x}}_n = \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{n-i} \quad (5-4-11)$$

với sai lệch

$$e_n = x_n - \hat{x}_n \quad (5-4-12)$$

là tín hiệu vào của bộ lượng tử và đầu ra của bộ lượng tử ký hiệu $\tilde{e}_n$. Sai số $\tilde{e}_n$ được mã hóa thành từ mã và gửi tới phía thu. Sai số lượng tử $\tilde{e}_n$ được cộng vào giá trị dự đoán $\hat{x}_n$ để được $\tilde{x}_n$.

Phía thu cũng sử dụng bộ dự đoán như phía phát và giá trị $\hat{x}_n$ được cộng với $\tilde{e}_n$ để thu được $\tilde{x}_n$. Tín hiệu $\tilde{x}_n$ được lọc qua một mạch lọc thông thấp để thu được tín hiệu $\tilde{x}(t)$.

Sai số lượng tử bằng:

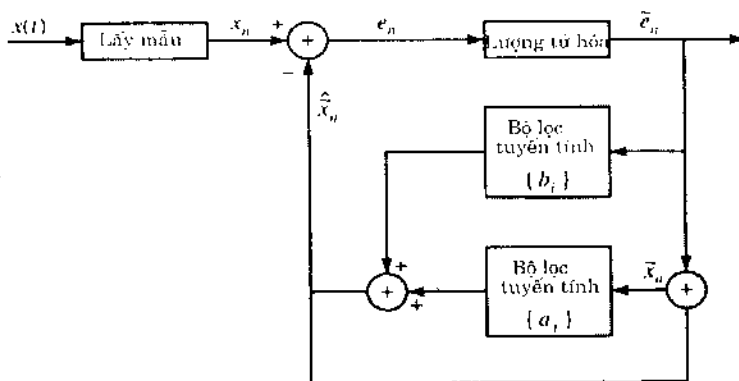
$$q_n = \tilde{e}_n - e_n = \tilde{e}_n - (x_n - \hat{x}_n) = \tilde{x}_n - x_n \quad (5-4-13)$$

Như vậy, $\tilde{x}_n = x_n + q_n$ nghĩa là mẫu lượng tử hóa $\tilde{x}_n$ sai lệch với mẫu tín hiệu x_n một lượng bằng sai số lượng tử q_n độc lập với bộ dự đoán và do đó sai số không bị dồn.

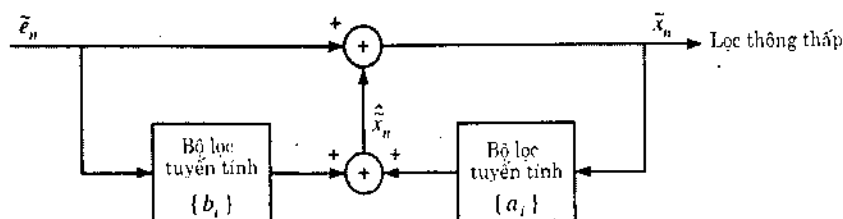
Người ta có thể cải thiện chất lượng của việc dự đoán bằng cách lọc tuyến tính các giá trị sai số lượng tử cũ. Giá trị dự đoán $\hat{x}_n$ được tính như sau:

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{n-i} + \sum_{i=1}^n b_i \tilde{e}_{n-i} \quad (5-4-14)$$

$\{b_i\}$ là các hệ số của bộ lọc các sai số lượng tử. Sơ đồ khối bộ mã hóa và giải mã được trình bày trên hình 5-4-4.



(a) Bộ mã hóa



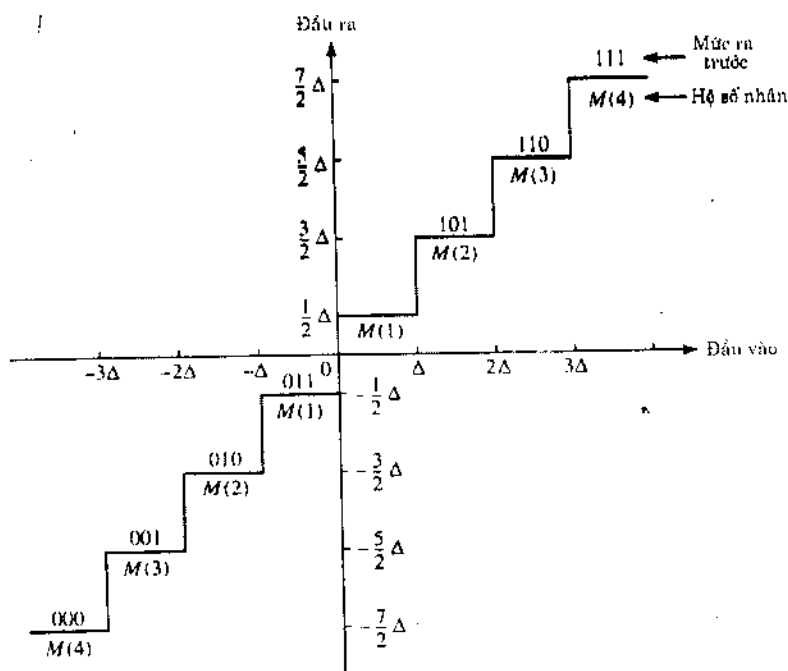
(b) Bộ giải mã

Hình 5-4-4: Hệ thống DPCM cải tiến bằng cách lọc tuyến tính dãy sai số lượng tử

Nhiều nguồn thông tin trong thực tế là nguồn *giả dừng* (quasistationary). Đặc trưng của nguồn giả dừng là sai phương và hàm tự tương quan thay đổi chậm theo thời gian. PCM và DPCM được thiết kế trên cơ sở nguồn là dừng thống kê. Hiệu quả của các phương pháp mã hóa này có thể được cải tiến bằng cách làm cho chúng thay đổi một cách thích nghi với tính thay đổi chậm của nguồn.

Trong cả hai hệ thống PCM và DPCM, sai số lượng tử q_n gây ra bởi bộ lượng tử hóa đồng đều đối với tín hiệu vào giả dừng sẽ có sai phương thay đổi theo thời gian (công suất nhiễu lượng tử). Sử dụng bộ lượng tử hóa thích nghi sẽ làm giảm giải động của nhiễu lượng tử. Một phương pháp đơn giản sử dụng cho các bộ lượng tử hóa đồng đều là thay đổi bước lượng tử tùy theo sai phương của các mẫu tín hiệu trước. Ví dụ việc ước lượng trong khoảng thời gian ngắn sai phương của x_n được tính từ dãy tín hiệu vào $\{x_n\}$ có thể dùng để thay đổi bước lượng tử. Hình 5-4-5 biểu diễn bộ lượng tử hóa 3 bit với bước lượng tử thay đổi theo quan hệ:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n M(n) \quad (5-4-15)$$



Hình 5-4-5: Ví dụ về bộ lượng tử hóa với bước lượng tử thay đổi thích nghi

$M(n)$ là hệ số phụ thuộc vào mức lượng tử của mẫu x_n và Δ_n là bước lượng tử của bộ lượng tử hóa ứng với mẫu x_n . Giá trị của các hệ số dùng cho việc tối ưu quá trình mã hóa tiếng nói được cho trên bảng 5-4-1 theo Jayant (1974).

Trong hệ thống DPCM, bộ dự đoán cũng có thể được thiết kế để thích nghi với tính chất giả dừng của nguồn tín hiệu. Các hệ số của bộ dự đoán có thể thay đổi tuần hoàn để phản ánh sự thay đổi thống kê của nguồn tín hiệu. Hệ phương trình tuyến tính trong công thức (5-4-9) vẫn như cũ, với việc ước lượng thời gian ngắn các hàm tự tương quan của x_n , các hệ số của bộ dự đoán có thể được truyền từ phía phát tới phía thu cùng với sai số lượng tử $\tilde{e}_n$ nhưng sẽ làm tăng tốc độ số liệu trên kênh. Để giải quyết điều đó, bộ dự đoán ở phía thu có thể tính các hệ số dự đoán của mình từ $\tilde{e}_n$ và $\tilde{x}_n$:

$$\tilde{x}_n = \tilde{e}_n + \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{n-i} \quad (5-4-16)$$

	PCM			DPCM		
	2	3	4	2	3	4
$M(1)$	0.60	0.85	0.80	0.80	0.90	0.90
$M(2)$	2.20	1.00	0.80	1.60	0.90	0.90
$M(3)$		1.00	0.80		1.25	0.90
$M(4)$		1.50	0.80		1.70	0.90
$M(5)$			1.20			1.20
$M(6)$			1.60			1.60
$M(7)$			2.00			2.00
$M(8)$			2.40			2.40

Bảng 5-4-1: Các hệ số dùng để thay đổi thích nghi bước lượng tử

Nếu ta bỏ qua sai số lượng tử, $\tilde{x}_n$ sẽ bằng x_n . Các hàm tự tương quan $\phi(n)$ tính từ $\tilde{x}_n$ thường đủ để tính các hệ số dự đoán một cách khá chính xác, và như vậy tốc độ số liệu sẽ giảm đi.

Thay cho việc dùng các khối xử lý dựa trên các hệ số dự đoán $\{a_i\}$ được nói ở trên ta có thể sử dụng các hệ số dự đoán dựa trên thuật toán kiểu gradient đối với từng mẫu tương tự như thuật toán cân bằng gradient thích nghi sẽ trình bày sau.

5-4-2. Mã hóa tín hiệu miền tần số

Trong phần này chúng ta sẽ trình bày các phương pháp mã hóa tín hiệu bằng cách lọc tín hiệu ở đầu ra của nguồn thành nhiều dải tần số và mã hóa riêng rẽ tín hiệu trong từng dải.

Mã hóa băng con (Subband Coding) Trong mã hóa băng con (SBC) đối với tín hiệu tiếng nói hay tín hiệu hình ảnh, tín hiệu được chia thành nhiều dải băng hẹp và tín hiệu trong miền thời gian ứng với mỗi dải được mã hóa độc lập. Trong mã hóa tiếng nói, dải tần số thấp chứa phần lớn năng lượng của tín hiệu, thêm vào nữa, nhiều lượng tử ảnh hưởng tới tai người rất thấp trong dải tần số thấp. Như vậy, tín hiệu ở băng tần thấp được mã hóa bằng nhiều bit còn tín hiệu ở miền tần cao được mã hóa bởi ít bit hơn.

Mã hóa biến đổi thích nghi (Adaptive Transform Coding) Trong mã hóa biến đổi thích nghi, ta chia các mẫu tín hiệu của nguồn thành từng khung N_f mẫu, sau đó số liệu trong mỗi khung được chuyển sang miền tần số rồi mã hóa và truyền đi. Tại phía thu, mỗi khung phổ các mẫu tín hiệu sẽ được chuyển ngược lại trong miền thời gian và tín hiệu sẽ được tổng hợp lại từ các mẫu ở miền thời gian rồi cho qua bộ biến đổi D-A. Để mã hóa có hiệu quả, ta dùng nhiều bit cho các thành phần phổ quan trọng và ít bit hơn cho các thành phần phổ không quan trọng.

Việc lựa chọn phép biến đổi từ miền thời gian sang miền tần số phải sao cho các mẫu phổ không liên hệ với nhau. Như vậy thì phép biến đổi Karhunen-Loève là tối ưu. Nhưng tính toán phép biến đổi này quá phức tạp nên người ta thường dùng phép biến đổi DFT hay phép biến đổi cosin rời rạc DCT (discrete cosin transform). Hiệu quả phép biến đổi DCT cao hơn nên người ta hay sử dụng phương pháp này.

5-4-3. Mã hóa mô hình nguồn

Khác với các phương pháp mã hóa đã xét ở trên, cách tiếp cận của phương pháp mã hóa mô hình nguồn hoàn toàn khác. Trong phương pháp này, mô hình nguồn được coi là một hệ thống tuyến tính, được kích thích bởi một tín hiệu vào và cho tín hiệu ở đầu ra tương ứng. Thay cho truyền các mẫu của nguồn tín hiệu tới phía thu người ta truyền các tham số của hệ thống tuyến tính với kích thích đầu vào tương ứng. Nếu số lượng các tham số là nhỏ thì phương pháp mã hóa mô hình nguồn cho phép nén số liệu rất nhiều.

Phương pháp mã hóa mô hình nguồn được sử dụng rộng rãi nhất là mã hóa dự đoán tuyến tính (LPC). Trong phương pháp này, các mẫu tín hiệu được ký hiệu là x_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, coi như được sinh ra từ một bộ lọc toàn cực (rời rạc) có hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (5-4-17)$$

Kích thích hệ thống có thể là một xung, một dãy các xung hay các mẫu của tín hiệu nhiễu trắng có sai phương đơn vị. Trong các trường hợp đó, giả sử rằng dãy tín hiệu vào được ký hiệu là v_n , $n = 1, 2, \dots$. Dãy tín hiệu ra thỏa mã phương trình sai phân:

$$x_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + G v_n \quad n = 0, 1, \dots \quad (5-4-18)$$

Tổng quát, dãy tín hiệu ra x_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$ không thỏa mãn phương trình sai phân (5-4-18). Nếu đầu vào là dãy tín hiệu nhiễu trắng hay là một xung, ta có thể thực hiện việc ước lượng (dự đoán) x_n bằng tổ hợp tuyến tính:

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad n > 0 \quad (5-4-19)$$

Sai lệch giữa x_n và $\hat{x}_n$:

$$e_n = x_n - \hat{x}_n = x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad (5-4-20)$$

biểu thị sai lệch giữa giá trị nhận được và giá trị dự đoán. Các hệ số của bộ lọc được lựa chọn để tối thiểu hóa trung bình bình phương sai lệch này.

Giả sử dãy tín hiệu vào là dãy tín hiệu nhiễu trắng thì đầu ra của bộ lọc là một dãy ngẫu nhiên cũng như sai lệch $e_n = x_n - \hat{x}_n$. Giá trị trung bình của bình phương sai lệch là:

$$\begin{aligned} \xi_p &= E(e_n^2) = E \left[\left(x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \right)^2 \right] \\ &= \phi(0) - 2 \sum_{k=1}^p a_k \phi(k) + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p a_k a_m \phi(k-m) \end{aligned} \quad (5-4-21)$$

$\phi(m)$ là hàm tự tương quan của dãy tín hiệu x_n , $n = 1, 2, \dots, N-1$. Nhưng ξ_p chính là trung bình bình phương sai số (MSE) trong công thức (5-4-8) với bộ dự đoán sử dụng trong hệ thống DPCM. Việc tối thiểu hóa sai số ξ_p tạo ra một tập các phương trình (5-4-9). Để xác định rõ $H(z)$ ta cần xác định hệ số G . Từ (5-4-18) ta có:

$$E[(Gv_n)^2] = G^2 E(v_n^2) = G^2 = E \left[\left(x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \right)^2 \right] = \xi_p \quad (5-4-22)$$

ở đây ξ_p nhận được từ (5-4-21) khi thay các hệ số dự đoán tối ưu là lời giải của (5-4-9). Như vậy:

$$\xi_p = G^2 = \phi(0) - \sum_{k=1}^p a_k \phi(k) \quad (5-4-23)$$

Trong thực tế chúng ta thường không biết hàm tự tương quan của tín hiệu đầu ra của nguồn. Như vậy thay cho $\phi(n)$, ta có thể sử dụng các giá trị $\hat{\phi}_n$ cho bởi (5-4-10) nhận được từ dãy các mẫu x_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Như đã nói ở trên, thuật toán Levinson-Durbin có thể được sử dụng để tìm ra các hệ số $\{a_i\}$ một cách truy hồi, xuất phát từ bộ dự đoán bậc 1 rồi lặp tới bộ dự đoán bậc p . Các phương trình truy hồi để tìm $\{a_i\}$ là:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{\hat{\phi}_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1k} \hat{\phi}(i-k)}{\hat{\xi}_{i-1}} & i &= 2, 3, \dots, p \\ a_{ik} &= a_{i-1k} - a_{ii} a_{i-1i-k} & 1 \leq k &\leq i-1 \\ \hat{\xi}_i &= (1 - a_{ii}) \hat{\xi}_{i-1} \\ a_{i1} &= \frac{\hat{\phi}(1)}{\hat{\phi}(0)} & \hat{\xi}_0 &= \hat{\phi}(0) \end{aligned} \quad (5-4-24)$$

a_{ik} , $k = 1, 2, \dots, i$ là các hệ số của bộ dự đoán bậc i . Các hệ số của bộ dự đoán bậc p là:

$$a_k \equiv a_{pk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (5-4-25)$$

và sai số là:

$$\hat{\xi} = G^2 = \hat{\phi}(0) - \sum_{k=1}^p a_k \hat{\phi}(k) = \hat{\phi}(0) \prod_{i=1}^p (1 - a_{ii})^2 \quad (5-4-26)$$

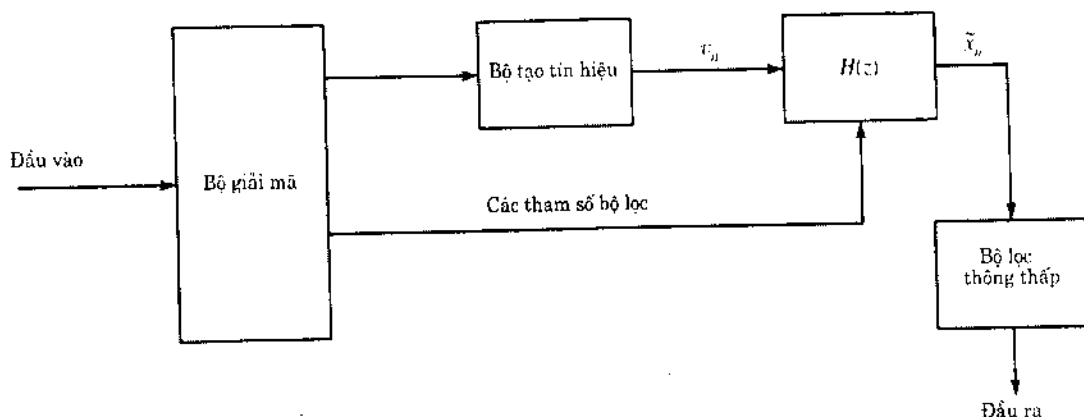
Ta nhận thấy các phương trình truy hồi trong (5-4-24) không những cho các tham số của bộ dự đoán bậc p mà còn cho các tham số của tất cả các bộ dự đoán có bậc nhỏ hơn p .

Các giá trị sai số $\hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ thoả mãn điều kiện $\hat{\xi}_p \leq \hat{\xi}_{p-1} \leq \dots \leq \hat{\xi}_0$, và các hệ số dự đoán a_{ii} thoả mãn điều kiện

$$|a_{ii}| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5-4-27)$$

Các điều kiện này là cần và đủ để cho tất cả các điểm cực của $H(z)$ nằm trong đường tròn đơn vị. Như vậy hệ (5-4-27) là bảo đảm để hệ ổn định.

LPC được sử dụng trong việc mô hình hoá nguồn tín hiệu tiếng nói. Các hệ số a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, p$ gọi là các hệ số phản xạ tương ứng với các hệ số phản xạ của ống âm học trong hệ thống dẫn âm.



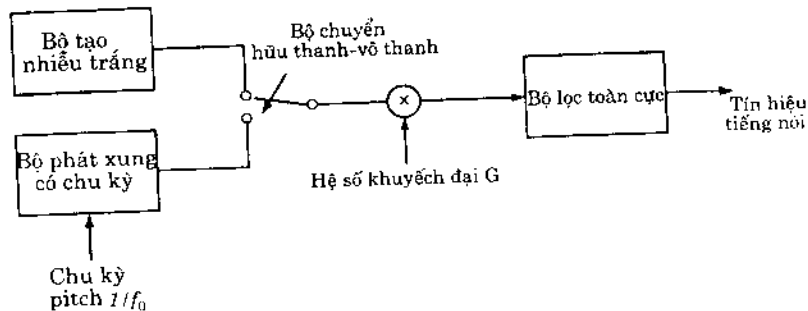
Hình 5-4-6: Sơ đồ khối của bộ tổng hợp tín hiệu của hệ thống LPC

Các hệ số dự đoán và hệ số G ước lượng từ các mẫu tín hiệu $\{x_n\}$ được mã hóa và truyền tới đầu thu. Giải mã nguồn hay tổng hợp tín hiệu có thể thực hiện như trong hình 5-4-5. Bộ tạo tín hiệu được sử dụng để tạo ra hàm kích thích $\{v_n\}$, được khuếch đại bởi G để có được tín hiệu đầu vào bộ lọc toàn cực $H(z)$ mong muốn. Khi cho tín hiệu ở đầu ra bộ lọc qua một mạch lọc thông thấp ta sẽ được tín hiệu tương tự mong muốn.

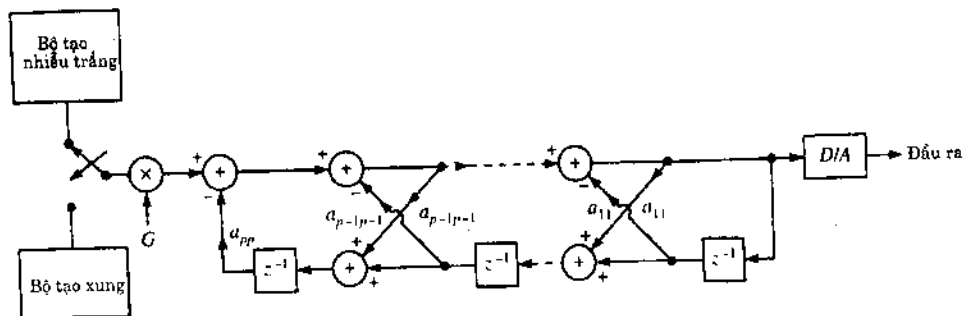
Khi nguồn là dừng thì các tham số bộ lọc chỉ cần xác định một lần, nhưng trong thực tế chúng ta hay gặp nguồn giả dừng. Như vậy, cần phải ước lượng các tham số của bộ lọc một cách tuần hoàn, hệ số G , kiểu của hàm kích thích và truyền tới phía thu.

Ví dụ 5-4-1

Sơ đồ khối trên hình 5-4-7 biểu diễn mô hình của nguồn tiếng nói. Có hai hàm kích thích trong mô hình cho âm hữu thanh và vô thanh. Trong khoảng thời gian ngắn, âm hữu thanh được coi là tuần hoàn với tần số cơ bản f_0 hay chu kỳ cơ bản $1/f_0$ phụ thuộc vào người nói. Như vậy âm hữu thanh được tạo ra do sự kích thích mô hình bộ lọc toàn cực của một dây xung tuần hoàn có chu kỳ chính là $1/f_0$. Âm vô thanh tạo ra do kích thích vào mô hình bộ lọc bởi một nguồn nhiễu ngẫu nhiên. Phía phát (mã hóa) cần xác định chu kỳ cơ bản, hệ số G , các hệ số dự đoán và mã hóa các hệ số này thành các từ mã và truyền tới phía thu. Nói chung, thông tin về âm hữu thanh hay vô thanh cần 1 bit, chu kỳ cơ bản cần được biểu diễn bằng 6 bit, hệ số G sau khi đã nén theo luật loga cần 5 bit để biểu diễn. Các hệ số dự đoán cần khoảng 8 tới 10 bit cho một hệ số để chất lượng chấp nhận được. Lý do của việc sử dụng nhiều bit cho một hệ số là một sự thay đổi nhỏ trong các hệ số cũng làm thay đổi vị trí vị trí của điểm cực trong $H(z)$. Ta cũng có thể giảm tốc độ bit bằng cách truyền các hệ số phản xạ a_n có dải động hẹp hơn, mỗi hệ số cần 6 bit. Như vậy với một bộ dự đoán bậc 10 (năm điểm cực trong $H(z)$) số lượng bit là 72. Trong trường hợp nguồn là giả dừng như nguồn tiếng nói, mô hình hệ thống tuyến tính cần thay đổi đều đặn, khoảng 15-30 ms. Như vậy tốc độ thông tin của nguồn sau khi mã hóa khoảng 4800-2400 bit/s. Khi truyền các hệ số phản xạ tới phía thu thì không cần thiết phải tìm lại các hệ số của bộ lọc mà có thể tổng hợp tín hiệu tiếng nói theo mô hình trong hình 5-4-6, mô hình này tương đương với mô hình bộ lọc dự đoán tuyến tính (hình 5-4-8).



Hình 5-4-7: Sơ đồ khối bộ tạo tín hiệu tiếng nói



Hình 5-4-8: Bộ lọc toàn cực để tổng hợp tín hiệu tiếng nói

Mô hình bộ lọc toàn cực mà các hệ số được ước lượng nhờ dự đoán tuyến tính là mô hình nguồn đơn giản nhất. Mô hình nguồn tổng quát hơn là mô hình có cả điểm cực lẫn điểm không. Tín hiệu ra x_n thỏa mãn phương trình sai phân:

$$x_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + \sum_{k=0}^q b_k v_{n-k}$$

với v_n là dãy tín hiệu kích thích. Việc xác định các tham số bộ lọc $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ từ dãy tín hiệu x_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$ là rất phức tạp. Theo tiêu chuẩn độ sai lệch là tối thiểu trung bình bình phương sai lệch (MSE) dẫn tới một hệ các phương trình phi tuyến và trong khuôn khổ cuốn sách này chúng ta không xét việc giải hệ đó.

BÀI TẬP

5-1. Các ký hiệu đầu ra của một nguồn DMS x_1, x_2, x_3 với xác suất $p(x_1) = 0,45$, $p(x_2) = 0,35$ và $p(x_3) = 0,20$ được biến đổi một cách tuyến tính $Y = aX + b$ với a và b là hai hằng số. Xác định entropi $H(Y)$.

5-2. Một bộ lượng tử hóa không đồng đều tối ưu bốn mức áp dụng cho một tín hiệu biên độ có phân bố gaussian tạo nên bốn mức lượng tử a_1, a_2, a_3, a_4 với các xác suất $p_1 = p_2 = 0,3365$ và $p_3 = p_4 = 0,1635$.

a) Lập mã Huffman cho từng ký hiệu và tính tốc độ thông tin trung bình.

b) Lập mã Huffman cho từng cặp hai ký hiệu và tính tốc độ thông tin trung bình.

c) Tốc độ thông tin tối thiểu là bao nhiêu khi mã hóa từng khối J ký hiệu khi $J \rightarrow \infty$?

5-3. Một nguồn không nhớ có bộ ký hiệu $\{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$ với các xác suất tương ứng $\{0,05, 0,1, 0,1, 0,15, 0,05, 0,25, 0,3\}$.

a) Tìm entropi của nguồn.

b) Giả sử nguồn được lượng tử hóa với luật lượng tử $q(-5) = q(-3) = 4, q(-1) = q(0) = q(1) = 0, q(3) = q(5) = 4$. Tìm entropi của nguồn lượng tử hóa.

5-4. Biết rằng hàm tốc độ lặp tin-lai lệch của nguồn Laplace $f_X(x) = (2\lambda)^{-1}e^{-|x|/\lambda}$ với đo lường giá trị tuyệt đối của sai số $d(x, \hat{x}) = |x - \hat{x}|$ là:

$$R(D) = \begin{cases} \log(\lambda/D) & (0 \leq D \leq \lambda) \\ 0 & (D > \lambda) \end{cases}$$

a) Cần bao nhiêu bit để biểu diễn một mẫu ở đầu ra của nguồn để độ sai lệch trung bình không vượt quá $\lambda/2$.

b) Vẽ $R(D)$ với ba giá trị nào đó của λ .

5-5. Trong điều kiện nào thì tồn tại mã nhị phân với độ dài từ mã 1, 2, 2, 3 thỏa mã điều kiện prefix?

5-6. Xét dãy tín hiệu ngẫu nhiên dừng $\{X(n)\}$ với giá trị trung bình bằng 0 và dãy tự tương quan:

$$\phi(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 1/2 & (n = \pm 1) \\ 0 & (\text{với giá trị khác}) \end{cases}$$

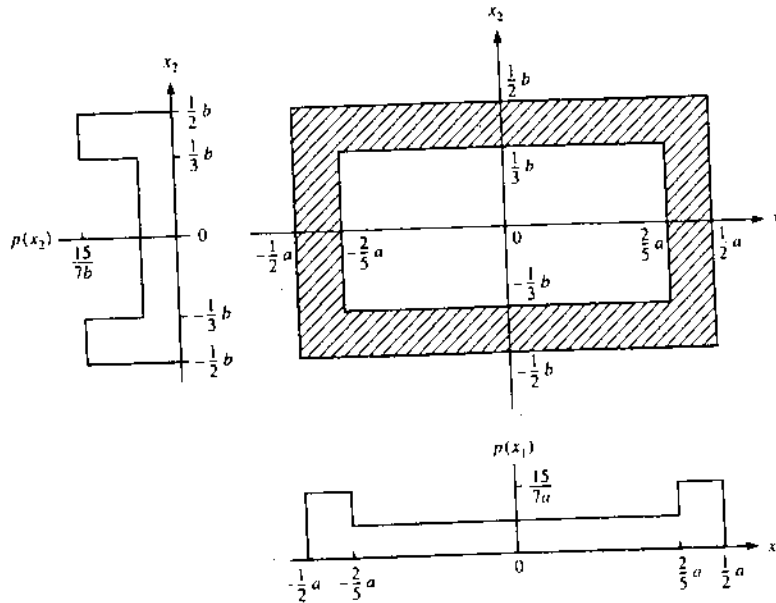
a) Xác định hệ số dự đoán của bộ dự đoán MSE bậc 1 cho $\{X(n)\}$ $\hat{x}(n) = a_1 x(n-1)$ và sai số trung bình bình phương nhỏ nhất tương ứng là ξ_1 .

b) Giống câu a với bộ dự đoán bậc 2 $\hat{x}(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$.

5-7. Xét việc mã hóa các biến ngẫu nhiên x_1 và x_2 được đặc cho bởi hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(x_1, x_2)$:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{15}{7ab} & (x_1, x_2 \in C) \\ 0 & (x_1, x_2 \notin C) \end{cases}$$

trong hình sau:



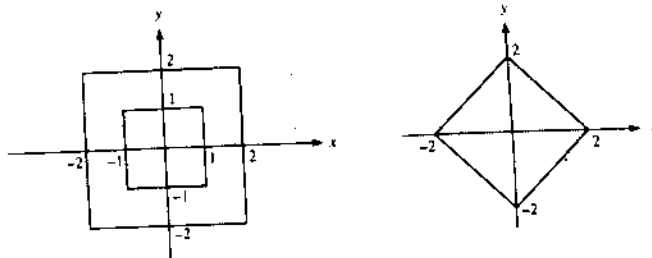
Xác định tốc độ bit cần thiết cho việc lượng tử hóa đồng đều hai biến x_1 và x_2 độc lập và đồng thời (lượng tử hóa vectơ). Xác định độ chênh lệch khi $a = 4b$.

5-8. Xét việc mã hóa hai biến ngẫu nhiên X và Y có phân bố đồng đều trong miền giới hạn bởi hai hình chữ nhật (trong hình vẽ dưới).

a) Tìm $f_X(x)$ và $f_Y(y)$.

b) Mỗi biến ngẫu nhiên X và Y được lượng tử hóa bởi bộ lượng tử hóa đồng đều bốn mức. Xác định độ sai lệch và tốc độ bit của cặp (X, Y) .

c) Nếu như ta lượng tử hóa vectơ cho X và Y để có cùng một độ sai lệch như trong câu b thì tốc độ bit của cặp (X, Y) ở đầu ra của nguồn là bao nhiêu?



CHƯƠNG 6

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRUYỀN TIN

Có thể phân loại tín hiệu theo nhiều kiểu khác nhau, như là ngẫu nhiên hay xác định, rời rạc theo thời gian hay liên tục theo thời gian, có biên độ rời rạc hay liên tục, tần số thấp (lowpass) hay trong một dải tần hữu hạn (bandpass), có năng lượng hữu hạn hay có năng lượng vô hạn, công suất trung bình hữu hạn hay vô hạn. Trong chương này ta xét các tín hiệu và hệ thống thường gặp trong khi truyền thông tin qua kênh truyền thông. Tiếp theo, ta xét tới việc biểu diễn các tín hiệu điều chế và các đặc tính về phổ của chúng.

6-1. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG CÓ DẢI TẦN HỮU HẠN (bandpass signals and bandpass systems)

Nhiều tín hiệu mang thông tin được truyền đi dưới dạng điều chế. Kênh mà tín hiệu điều chế truyền qua bị giới hạn trong dải thông ở miền tần số xung quanh tần số của vật mang như điều chế hai biên, lân cận tần số vật mang như điều chế đơn biên. Tín hiệu và kênh (hệ thống) thỏa mãn điều kiện dải thông nhỏ hơn nhiều so với tần số của vật mang gọi là tín hiệu và hệ thống băng hẹp. Việc điều chế được thực hiện ở phía phát để tạo ra tín hiệu có dải tần hữu hạn và quá trình giải điều chế được thực hiện ở phía thu để khôi phục lại thông tin. Không làm mất tính tổng quát cho việc biểu diễn toán học, ta có thể chuyển các kênh và tín hiệu thông dải thành các kênh và tín hiệu tần số thấp một cách tương đương. Thêm nữa, hiệu quả của các kỹ thuật điều chế và giải điều chế là độc lập với tần số của vật mang và dải tần của kênh. Việc biểu diễn các tín hiệu có dải phổ hạn chế và các hệ thống thông dải bằng các tín hiệu tần số thấp và các hệ thống thông thấp tương đương, đặc trưng hóa các quá trình ngẫu nhiên dừng có dải tần hữu hạn là mục đích chủ yếu của chương này ([2], [4], [5], [6], [7], [8], [9]).

6-1-1. Biểu diễn các tín hiệu có dải tần hữu hạn (bandpass signal)

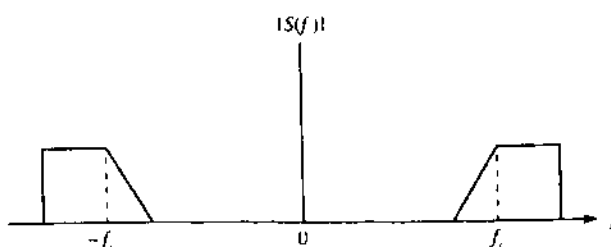
Giả sử tín hiệu thực $s(t)$ có dải tần số nằm trong một dải tần hữu hạn lân cận tần số f_c như trong hình 6-1-1. Mục tiêu của ta là xây dựng mô hình toán học cho các tín hiệu như vậy. Đầu tiên ta xây dựng tín hiệu chỉ chứa các thành phần tần số dương trong $s(t)$. Tín hiệu như vậy có thể được biểu diễn như sau:

$$S_+(f) = 2u(f)S(f) \quad (6-1-1)$$

với $S(f)$ là biến đổi Furiê của $s(t)$ và $u(f)$ là biến đổi Furiê của hàm đơn vị.

Biểu diễn trong miền thời gian tín hiệu trong (6-1-1) là:

$$s_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_+(f) e^{j2\pi ft} df = F^{-1}[2u(f)] * F^{-1}[S(f)] \quad (6-1-2)$$



Hình 6-1-1: Phổ tín hiệu có dải tần hạn chế

Tín hiệu $s_+(t)$ được gọi là tín hiệu giải tích hay đường bao trước của $s(t)$. Chú ý rằng $F^{-1}[S(f)] = s(t)$ và:

$$F^{-1}[2u(f)] = \delta(t) + \frac{j}{\pi} \quad (6-1-3)$$

Từ đó:

$$s_+(t) = \left[\delta(t) + \frac{j}{\pi} \right] * s(t) = s(t) + j \frac{1}{\pi} * s(t) \quad (6-1-4)$$

Ta định nghĩa tín hiệu $\hat{s}(t)$ là:

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} * s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (6-1-5)$$

Tín hiệu $\hat{s}(t)$ có thể xem như tín hiệu ra của bộ lọc với đáp ứng xung:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty \quad (6-1-6)$$

khi tín hiệu vào là $s(t)$. Bộ lọc này thực hiện phép biến đổi gọi là phép biến đổi Hilbert. Đáp ứng tần số của bộ lọc này là:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft} dt = \begin{cases} -j & (f > 0) \\ 0 & (f = 0) \\ j & (f < 0) \end{cases} \quad (6-1-7)$$

Ta thấy rằng $|H(f)| = 1$ và đáp ứng pha $\Theta(f) = -\frac{1}{2}\pi$ với $f > 0$ và $\Theta(f) = \frac{1}{2}\pi$ với $f < 0$. Như vậy, bộ lọc này đơn giản là bộ dịch pha 90° với tất cả các tần số của tín hiệu vào.

Tín hiệu giải tích $s_+(t)$ là tín hiệu có dải tần hữu hạn. Ta có thể nhận được tín hiệu tương đương tần số thấp bằng cách dịch chuyển tần số của $S_+(f)$. Ta định nghĩa $S_l(f)$ như sau:

$$S_l(f) = S_+(f + f_c) \quad (6-1-8)$$

Biểu diễn ở miền thời gian của tín hiệu này là:

$$s_l(t) = s_+(t) e^{-j2\pi f_c t} = [s(t) + j\hat{s}(t)] e^{-j2\pi f_c t} \quad (6-1-9)$$

hay một cách tương đương là:

$$s(t) + j\hat{s}(t) = s_I(t)e^{j2\pi f_c t} \quad (6-1-10)$$

Nói chung tín hiệu $s_I(t)$ là tín hiệu phức và có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$s_I(t) = x(t) + jy(t) \quad (6-1-11)$$

Từ đó ta nhận được:

$$s(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t \quad (6-1-12)$$

$$\hat{s}(t) = x(t)\sin 2\pi f_c t + y(t)\cos 2\pi f_c t \quad (6-1-13)$$

Biểu thức (6-1-12) là dạng biểu diễn mong muốn của tín hiệu có dải tần hữu hạn. Các thành phần tần số thấp $x(t)$ và $y(t)$ có thể xem như được điều chế biên độ với các tín hiệu mang $\cos 2\pi f_c t$ và $\sin 2\pi f_c t$ tương ứng. Do các thành phần tín hiệu mang này ở dạng pha vuông góc (phase quadrature), $x(t)$ và $y(t)$ được gọi là các thành phần vuông góc của tín hiệu thông dải $s(t)$.

Một cách biểu diễn khác của tín hiệu trong biểu thức (6-1-12) là:

$$s(t) = \operatorname{Re}\left\{[x(t) + jy(t)]e^{j2\pi f_c t}\right\} = \operatorname{Re}\left[s_I(t)e^{j2\pi f_c t}\right] \quad (6-1-14)$$

với Re là ký hiệu phần thực của số phức. Tín hiệu tần số thấp $s_I(t)$ thường được gọi là đường bao phức (complex envelope) của tín hiệu thực $s(t)$ và là tín hiệu tần số thấp tương đương.

Cách biểu diễn thứ ba của tín hiệu có dải tần hữu hạn có được bằng cách biểu diễn $s_I(t)$ như sau:

$$s_I(t) = a(t)e^{j\Theta(t)} \quad (6-1-15)$$

với
$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (6-1-16)$$

và
$$\Theta(t) = \arctg \frac{y(t)}{x(t)} \quad (6-1-17)$$

Như vậy:

$$s(t) = \operatorname{Re}\left[s_I(t)e^{j2\pi f_c t}\right] = \operatorname{Re}\left[a(t)e^{j[2\pi f_c t + \Theta(t)]}\right] = a(t)\cos[2\pi f_c t + \Theta(t)] \quad (6-1-18)$$

Tín hiệu $a(t)$ được gọi là đường bao của $s(t)$ và $\Theta(t)$ được gọi là pha của $s(t)$. Như vậy (6-1-12), (6-1-14), (6-1-18) là các biểu diễn tương đương của tín hiệu có dải tần hữu hạn.

Biến đổi Furiê của $s(t)$ là:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}\left[s_I(t)e^{j2\pi f_c t}\right] \right\} e^{-j2\pi f t} dt \quad (6-1-19)$$

Sử dụng đẳng thức:

$$\operatorname{Re}(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + \xi^*) \quad (6-1-20)$$

thì (6-1-19) trở thành:

$$S(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[s_I(t)e^{j2\pi f_c t} + s_I^*(t)e^{-j2\pi f_c t} \right] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2} [S_f(f - f_c) + S_f^*(-f - f_c)] \quad (6-1-21)$$

ở đây $S_f(f)$ là biến đổi Furiê của $s_f(t)$. Đây là mối liên hệ cơ bản giữa phổ của tín hiệu thực có dải tần hữu hạn $S(f)$ với phổ của tín hiệu thông thấp tương đương $S_f(f)$.

Năng lượng của tín hiệu $s(t)$ là:

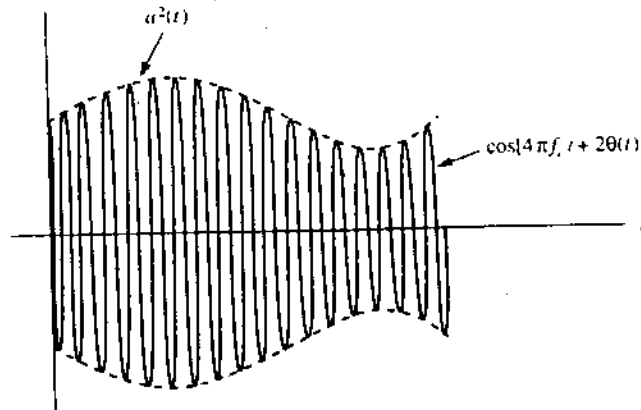
$$\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \text{Re} [s_f(t) e^{j2\pi f_c t}] \right\}^2 dt \quad (6-1-22)$$

Từ (6-1-22) và theo đẳng thức (6-1-20), ta nhận được:

$$\zeta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_f(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_f(t)|^2 \cos[4\pi f_c t + 2\Theta(t)] dt \quad (6-1-23)$$

Xét tích phân thứ hai trong công thức trên. Do tín hiệu $s(t)$ là tín hiệu dải hẹp, đường bao thực $a(t) \equiv |s(t)|$ hay $a^2(t)$ biến đổi chậm hơn so với sự biến đổi nhanh của thành phần cosin. Đồ thị mô tả thành phần tích phân trong tích phân thứ hai trên hình 6-1-2. Do biên độ $a^2(t)$ biến đổi chậm hơn nhiều so với thành phần cosin nên thành phần thứ hai trong (6-1-23) có thể bỏ qua và trong thực tế, năng lượng của tín hiệu có dải tần hữu hạn $s(t)$ được biểu diễn qua tín hiệu thông thấp tương đương:

$$\zeta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_f(t)|^2 dt \quad (6-1-24)$$



Hình 6-1-2: Tín hiệu $a^2(t)\cos[4\pi f_c t + 2\Theta(t)]$

6-1-2. Biểu diễn hệ thống tuyến tính có dải tần hữu hạn

Hệ thống tuyến tính có thể được biểu diễn hoặc qua đáp ứng xung $h(t)$ hoặc qua đáp ứng tần số $H(f)$ là biến đổi Furiê của $h(t)$. Do $h(t)$ là thực nên:

$$H^*(-f) = H(f) \quad (6-1-25)$$

Để chuyển hệ thống về hệ thống thông thấp tương đương, ta định nghĩa $H_l(f - f_c)$ như sau:

$$H_l(f - f_c) = \begin{cases} H(f) & (f > 0) \\ 0 & (f < 0) \end{cases} \quad (6-1-26)$$

thì

$$H_l^*(-f - f_c) = \begin{cases} 0 & (f > 0) \\ H^*(-f) & (f < 0) \end{cases} \quad (6-1-27)$$

Do (6-1-25), ta có:

$$H(f) = H_l(f - f_c) + H_l^*(-f - f_c) \quad (6-1-28)$$

Công thức này tương tự công thức (6-1-21) ngoại trừ hệ số $1/2$. Biến đổi Furiê ngược của $H(f)$ cho ta đáp ứng xung $h(t)$:

$$h(t) = h_l(t)e^{j2\pi f_c t} + h_l^*(t)e^{-j2\pi f_c t} = 2 \operatorname{Re}[h_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (6-1-29)$$

với $h_l(t)$ là biến đổi Furiê ngược của $H_l(f)$. Tổng quát, đáp ứng xung $h_l(t)$ là đáp ứng xung của hệ thống thông thấp tương đương có giá trị phức.

6-1-3. Đáp ứng của hệ thống thông dải với tín hiệu vào có dải tần hữu hạn

Trong hai phần 6-1-1 và 6-1-2 ta thấy tín hiệu và hệ thống thông dải bằng hẹp có thể được biểu diễn bởi tín hiệu và hệ thống tần số thấp tương đương. Trong phần này ta sẽ thấy đáp ứng của một hệ thống thông dải với tín hiệu vào có dải tần hạn chế có thể nhận được từ tín hiệu vào tần số thấp tương đương với hệ thống thông thấp tương đương.

Giả thiết tín hiệu $s(t)$ là tín hiệu có dải tần hữu hạn và $s_l(t)$ là tín hiệu tần số thấp tương đương. Tín hiệu này kích thích một hệ thống thông dải bằng hẹp có đáp ứng xung $h(t)$ hay đáp ứng xung $h_l(t)$ của hệ thống thông thấp tương đương. Đầu ra của hệ thống thông dải cũng là một tín hiệu thông dải có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$r(t) = \operatorname{Re}[r_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (6-1-30)$$

và $r(t)$ có quan hệ với tín hiệu vào $s(t)$ và đáp ứng xung $h(t)$ theo công thức tích chập:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6-1-31)$$

Một cách tương đương, đầu ra của hệ thống được biểu diễn trong miền tần số như sau:

$$R(f) = S(f)H(f) \quad (6-1-32)$$

Thay (6-1-21) vào $S(f)$ và (6-1-28) vào $H(f)$ ta nhận được:

$$R(f) = \frac{1}{2} [S_l(f - f_c) + S_l^*(-f - f_c)] [H_l(f - f_c) + H_l^*(-f - f_c)] \quad (6-1-33)$$

với $s(t)$ là tín hiệu có dải tần hữu hạn và $h(t)$ là đáp ứng xung của hệ thống thông dải bằng hẹp. $S_l(f - f_c) \approx 0$ và $H_l(f - f_c) = 0$ với $f < 0$. Điều đó rút ra từ điều kiện băng hẹp như sau:

$$S_l(f - f_c)H_l^*(-f - f_c) = 0, S_l^*(-f - f_c)H_l(f - f_c) = 0$$

(6-1-33) đơn giản thành:

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{2} [S_i(f - f_c)H_i(f - f_c) + S_i^*(-f - f_c)H_i^*(-f - f_c)] \\ &= \frac{1}{2} [R_i(f - f_c) + R_i^*(-f - f_c)] \end{aligned} \quad (6-1-34)$$

với

$$R_i(f) = S_i(f)H_i(f) \quad (6-1-35)$$

là phổ tín hiệu ra của hệ thống thông thấp tương đương được kích thích bởi tín hiệu tần số thấp tương đương. Rõ ràng là quan hệ ở miền thời gian của đầu ra $r_i(t)$ được cho bởi tích chập của $s_i(t)$ và $h_i(t)$:

$$r_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau)h_i(t - \tau)d\tau \quad (6-1-36)$$

Phối hợp giữa (6-1-36) với (6-1-30) cho ta quan hệ giữa tín hiệu ra có dải tần hữu hạn với các tín hiệu và hệ thống thông thấp tương đương $s_i(t)$ và $h_i(t)$. Quan hệ này cho phép ta bỏ qua sự dịch chuyển tần số tuyến tính gặp trong điều chế tín hiệu với mục đích định vị tần số của kênh với phổ tín hiệu. Về mặt toán học ta chỉ cần quan tâm tới việc truyền tín hiệu thông thấp tương đương qua hệ thống thông thấp tương đương.

6-1-4. Biểu diễn quá trình ngẫu nhiên dừng có dải tần hữu hạn

Việc biểu diễn tín hiệu có dải tần hữu hạn trong phần 6-1-1 chỉ áp dụng cho tín hiệu xác định. Phần này ta biểu diễn một thể hiện của một quá trình ngẫu nhiên dừng có dải tần hạn chế. Đặc biệt, ta sẽ thấy sự liên hệ quan trọng giữa hàm tương quan và phổ mật độ công suất của tín hiệu tần số thấp.

Giả sử $n(t)$ là một thể hiện của một quá trình ngẫu nhiên dừng theo nghĩa rộng với giá trị trung bình bằng 0 và phổ mật độ công suất $\Phi_{nn}(f)$. Giả thiết $\Phi_{nn}(f)$ bằng 0 tại các tần số bên ngoài tần số trung tâm $\pm f_c$ với f_c là tần số mang. Quá trình ngẫu nhiên $n(t)$ gọi là quá trình có dải tần hữu hạn bằng hẹp nếu độ rộng phổ nhỏ hơn nhiều so với f_c . Với điều kiện này, thể hiện $n(t)$ có thể được biểu diễn bởi một trong ba dạng trong phần 6-1-1:

$$n(t) = a(t) \cos[2\pi f_c t + \Theta(t)] \quad (6-1-37)$$

$$= x(t) \cos 2\pi f_c t - y(t) \sin 2\pi f_c t \quad (6-1-38)$$

$$= \text{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (6-1-39)$$

với $a(t)$ là đường bao và $\Theta(t)$ là pha của tín hiệu thực, $x(t)$ và $y(t)$ là các thành phần vuông góc của $n(t)$, $z(t)$ là đường bao phức của $n(t)$.

Bây giờ ta xét kỹ hơn dạng biểu diễn (6-1-38). Nếu $n(t)$ có giá trị trung bình bằng 0 thì $x(t)$ và $y(t)$ phải có giá trị trung bình bằng 0. Hơn nữa, do $n(t)$ là một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên dừng nên hàm tự tương quan và tương quan chéo của $x(t)$ và $y(t)$ có các tính chất sau:

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) \quad (6-1-40)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(\tau) \quad (6-1-41)$$

Hai tính chất trên được chứng minh như sau. Hàm tự tương quan của $n(t)$ là:

$$E[n(t)n(t + \tau)] = E\{[x(t) \cos 2\pi f_c t - y(t) \sin 2\pi f_c t] \times$$

$$\begin{aligned}
 & x[x(t+\tau)\cos 2\pi f_c(t+\tau) - y(t+\tau)\sin 2\pi f_c(t+\tau)] \\
 &= \phi_{xx}(\tau)\cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t+\tau) + \phi_{yy}(\tau)\sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t+\tau) \\
 & \quad - \phi_{xy}(\tau)\sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t+\tau) - \phi_{yx}(\tau)\cos 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t+\tau)
 \end{aligned} \tag{6-1-42}$$

Sử dụng các công thức:

$$\begin{aligned}
 \cos A \cos B &= \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\
 \sin A \sin B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\
 \sin A \cos B &= \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]
 \end{aligned} \tag{6-1-43}$$

Thay (6-1-43) vào (6-1-42) ta có:

$$\begin{aligned}
 E[n(t)n(t+\tau)] &= \frac{1}{2}[\phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau)]\cos 2\pi f_c \tau \\
 & \quad + \frac{1}{2}[\phi_{xx}(\tau) - \phi_{yy}(\tau)]\cos 2\pi f_c(2t+\tau) - \frac{1}{2}[\phi_{yx}(\tau) - \phi_{xy}(\tau)]\sin 2\pi f_c \tau \\
 & \quad - \frac{1}{2}[\phi_{yx}(\tau) + \phi_{xy}(\tau)]\sin 2\pi f_c(2t+\tau)
 \end{aligned} \tag{6-1-44}$$

Do $n(t)$ là dừng, vế phải của (6-1-44) độc lập với t . Điều này chỉ thoả mãn nếu (6-1-40) và (6-1-41) đồng thời xảy ra. Khi đó, (6-1-44) trở thành:

$$\phi_{nn}(\tau) = \phi_{xx}(\tau)\cos 2\pi f_c \tau - \phi_{yx}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau \tag{6-1-45}$$

Ta thấy rằng quan hệ giữa hàm tự tương quan $\phi_{nn}(\tau)$ của quá trình ngẫu nhiên dừng có dải tần hạn chế với hàm tự tương quan và hàm tương quan chéo $\phi_{xx}(\tau)$ và $\phi_{yx}(\tau)$ của các thành phần vuông góc có dạng giống như (6-1-38) là biểu diễn quá trình ngẫu nhiên có dải tần hữu hạn qua các thành phần bình phương.

Hàm tự tương quan của quá trình ngẫu nhiên tần số thấp tương đương:

$$z(t) = x(t) + jy(t) \tag{6-1-46}$$

được định nghĩa là:

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2}E[z^*(t)z(t+\tau)] \tag{6-1-47}$$

Thay (6-1-46) vào (6-1-47) ta nhận được:

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2}[\phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau) - j\phi_{xy}(\tau)] \tag{6-1-48}$$

Nếu sử dụng tính chất đối xứng trong (6-1-40) và (6-1-41) trong (6-1-48) ta nhận được:

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau) \tag{6-1-49}$$

Đây là mối quan hệ giữa hàm tự tương quan của đường bao phức với hàm tự tương quan và tương quan chéo của các thành phần vuông góc. Cuối cùng, kết hợp (6-1-45) với (6-1-49) ta có:

$$\phi_{nn}(\tau) = \text{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}] \quad (6-1-50)$$

Như vậy hàm tự tương quan $\phi_{nn}(\tau)$ của quá trình ngẫu nhiên dừng có dải tần hữu hạn được xác định duy nhất từ hàm tự tương quan $\phi_{zz}(\tau)$ của quá trình ngẫu nhiên thông thấp tương đương $z(t)$ và tần số mang f_c .

Phổ mật độ công suất $\Phi_{nn}(f)$ của quá trình ngẫu nhiên $n(t)$ là biến đổi Furiê của $\phi_{nn}(\tau)$:

$$\Phi_{nn}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \text{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}] \right\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{1}{2} [\Phi_{zz}(f - f_c) + \Phi_{zz}(-f - f_c)] \quad (6-1-51)$$

$\Phi_{zz}(f)$ là phổ mật độ công suất của quá trình ngẫu nhiên tần số thấp tương đương $z(t)$. Do hàm tự tương quan của $z(t)$ có tính chất $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{zz}^*(-\tau)$ nên $\Phi_{zz}(f)$ là hàm thực theo tần số.

Tính chất của các thành phần vuông góc Chúng ta đã chứng minh ở trên là hàm tương quan chéo của các thành phần vuông góc thỏa mãn điều kiện (6-1-41). Hơn nữa, hàm tương quan chéo thỏa mãn điều kiện:

$$\phi_{yx}(\tau) = \phi_{xy}(-\tau) \quad (6-1-52)$$

Từ hai điều kiện đó ta rút ra rằng:

$$\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(-\tau) \quad (6-1-53)$$

Như vậy, $\phi_{xy}(\tau)$ là hàm lẻ theo τ , do đó $\phi_{xy}(0) = 0$ và $x(t)$ và $y(t)$ không tương quan khi $\tau = 0$. Nếu $\phi_{xy}(\tau) = 0$ với mọi τ thì $\phi_{zz}(\tau)$ là thực và phổ mật độ công suất $\Phi_{zz}(f)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\Phi_{zz}(f) = \Phi_{zz}(-f) \quad (6-1-54)$$

và ngược lại. Như vậy $\Phi_{zz}(f)$ đối xứng xung quanh điểm $f = 0$. Trong trường hợp đặc biệt khi quá trình ngẫu nhiên dừng có phân bố gaussian thì các thành phần vuông góc $x(t)$ và $y(t + \tau)$ có phân bố gaussian đồng thời. Với $\tau = 0$, $x(t)$ và $y(t + \tau)$ là độc lập thống kê, hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của chúng là:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2 + y^2)/2\sigma^2} \quad (6-1-55)$$

sai phương σ^2 được định nghĩa là $\sigma^2 = \phi_{xx}(0) = \phi_{yy}(0) = \phi_{nn}(0)$.

Biểu diễn nhiễu trắng Nhiễu trắng là một quá trình ngẫu nhiên theo định nghĩa là có phổ mật độ công suất phẳng trong một dải tần hữu hạn. Loại nhiễu này không được biểu diễn qua các thành phần vuông góc do đặc điểm phổ rộng của nó.

Trong các vấn đề có liên quan tới giải điều chế các tín hiệu dải hẹp trong nền nhiễu, về mặt toán học có thể coi nhiễu trắng là nhiễu cộng và biểu diễn nhiễu theo các thành phần vuông góc. Điều đó thực hiện được khi coi tín hiệu và nhiễu ở phía thu là đã qua một bộ lọc thông dải lý tưởng có dải thông chứa phổ của tín hiệu nhưng rộng hơn nhiễu. Với bộ lọc như thế có thể bỏ qua sai lệch của tín hiệu và bỏ qua các thành phần tần số của nhiễu nằm ngoài dải thông.

Nhiều nhận được khi cho nhiễu trắng qua một bộ lọc thông dải lý tưởng gọi là nhiễu trắng có dải tần hạn chế và nó có phổ mật độ công suất như trên hình 6-1-3. Nhiễu trắng có dải tần hạn chế có thể được biểu diễn bởi một trong ba dạng biểu diễn đã xét ở trên. Nhiễu tần số thấp tương đương $z(t)$ có phổ mật độ công suất như sau:

$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} N_0 & |f| \leq \frac{1}{2}B \\ 0 & |f| > \frac{1}{2}B \end{cases} \quad (6-1-56)$$

và hàm tự tương quan là:

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi \tau} \quad (6-1-57)$$

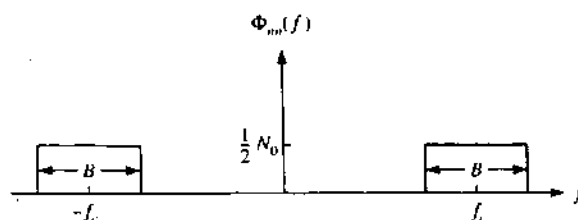
Giới hạn của $\phi_{zz}(\tau)$ khi B tiến tới vô cùng là:

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau) \quad (6-1-58)$$

Phổ mật độ công suất của nhiễu trắng có dải tần hạn chế là đối xứng qua điểm $f = 0$ nên $\phi_{yz}(\tau) = 0$ với mọi τ . Khi đó:

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) = \phi_{zz}(\tau) \quad (6-1-59)$$

Như vậy các thành phần vuông góc $x(t)$ và $y(t)$ là không có tương quan với nhau với mọi dịch chuyển thời gian τ và hàm tự tương quan của $z(t)$, $x(t)$ và $y(t)$ là bằng nhau.



Hình 6-1-3: Nhiễu có dải tần hạn chế với phổ phẳng

6-2. KHÔNG GIAN TÍN HIỆU

Trong phần này ta sẽ thấy tín hiệu có các tính chất tương tự như các vectơ và ta có thể sử dụng khái niệm vectơ để biểu diễn các tín hiệu. Ta bắt đầu bằng một số khái niệm và định nghĩa cơ bản về vectơ ([2], [5], [6]).

6-2-1. Các khái niệm về không gian vectơ

Một vectơ v trong không gian n chiều được xác định bởi n thành phần $[v_1, v_2, \dots, v_n]$. Nó cũng có thể được biểu diễn là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ đơn vị hay các vectơ cơ sở e_i , $1 \leq i \leq n$, nghĩa là:

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \quad (6-2-1)$$

Theo định nghĩa, vectơ đơn vị có độ dài đơn vị và v_i là độ dài hình chiếu của vectơ v trên trục của vectơ đơn vị e_i .

Tích trong (còn gọi là tích vô hướng của hai vectơ n chiều $\mathbf{v}_1 = [v_{11} \ v_{12} \dots \ v_{1n}]$ và $\mathbf{v}_2 = [v_{21} \ v_{22} \dots \ v_{2n}]$ được định nghĩa là:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^n v_{1i} v_{2i} \quad (6-2-2)$$

Hai vectơ $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ được gọi là trực giao nếu $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Tổng quát, tập hợp m vectơ $\mathbf{v}_k$, $1 \leq k \leq m$ là trực giao nếu:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad (6-2-3)$$

với mọi $1 \leq i, j \leq m$ và $i \neq j$.

Chuẩn của vectơ $\mathbf{v}$, ký hiệu $||\mathbf{v}||$, được định nghĩa là:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (6-2-4)$$

chính là độ dài của vectơ. Một tập hợp m vectơ được gọi là trực chuẩn nếu chúng trực giao và mỗi vectơ có chuẩn bằng đơn vị. Tập hợp m vectơ được gọi là độc lập tuyến tính nếu không một vectơ nào trong tập hợp đó là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Hai vectơ n chiều $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ thoả mãn bất đẳng thức tam giác:

$$||\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|| \leq ||\mathbf{v}_1|| + ||\mathbf{v}_2|| \quad (6-2-5)$$

đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ cùng hướng hay $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2$ với a là số thực dương. Từ bất đẳng thức tam giác ta rút ra bất đẳng thức Cauchy-Schwartz:

$$|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2| \leq ||\mathbf{v}_1|| \cdot ||\mathbf{v}_2|| \quad (6-2-6)$$

Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2$ với a là số thực dương. Chuẩn bình phương của tổng hai vectơ được biểu diễn như sau:

$$||\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 + ||\mathbf{v}_2||^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (6-2-7)$$

Nếu $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ trực giao thì $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ nên:

$$||\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 + ||\mathbf{v}_2||^2 \quad (6-2-8)$$

Đây là quan hệ Pytago cho hai vectơ trực giao.

Từ đại số ma trận ta đã biết một biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ là ma trận của phép biến đổi có dạng:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (6-2-9)$$

$\mathbf{A}$ là ma trận của phép biến đổi vectơ $\mathbf{v}$ thành vectơ $\mathbf{v}'$. Trong trường hợp đặc biệt, $\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$ nghĩa là:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (6-2-10)$$

λ là một vô hướng (dương hoặc âm), vectơ $\mathbf{v}$ được gọi là vectơ riêng của phép biến đổi và λ là giá trị riêng tương ứng.

Cuối cùng cũng cần thiết phải nhắc lại thủ tục Gram-Schmidt để xây dựng tập hợp các vectơ trực chuẩn từ một tập hợp vectơ n chiều $\mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq m$. Bắt đầu ta chọn một vectơ bất kỳ, ví dụ $\mathbf{v}_1$. Bằng cách chuẩn hóa độ dài, ta có được vectơ đầu tiên:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \quad (6-2-11)$$

Tiếp theo ta chọn vectơ $\mathbf{v}_2$ và thu được vectơ $\mathbf{u}'_2$ theo công thức:

$$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 \quad (6-2-12)$$

Chuẩn hóa vectơ $\mathbf{u}'_2$ ta thu được vectơ $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2}{\|\mathbf{u}'_2\|} \quad (6-2-13)$$

Tương tự, chọn vectơ $\mathbf{v}_3$ và ta có vectơ $\mathbf{u}'_3$:

$$\mathbf{u}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_2 \quad (6-2-14)$$

Ta thu được vectơ chuẩn hóa $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|} \quad (6-2-15)$$

Tiếp tục thủ tục này ta tìm được tập gồm n_1 vectơ trực chuẩn, và $n_1 \leq n$.

6-2-2. Các khái niệm về không gian tín hiệu

Cũng giống như trong không gian vectơ, ta có thể xây dựng các khái niệm tương ứng cho tập hợp các tín hiệu xác định trong khoảng $[a, b]$ nào đó. Tích trong của hai tín hiệu phức $x_1(t)$ và $x_2(t)$, ký hiệu là $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle$, được định nghĩa là:

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \quad (6-2-16)$$

Hai tín hiệu trực giao nếu tích trong của chúng bằng 0. Chuẩn của một tín hiệu được định nghĩa là:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \quad (6-2-17)$$

Tập hợp m tín hiệu được gọi là trực chuẩn nếu chúng trực giao và chuẩn của chúng bằng đơn vị. Tập m tín hiệu gọi là độc lập tuyến tính nếu không có tín hiệu nào trong số m tín hiệu đó biểu diễn được bằng một tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu còn lại.

Bất đẳng thức ta giác của hai tín hiệu là:

$$\|x(t) + y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\| \quad (6-2-18)$$

và bất đẳng thức Cauchy-Schwartz là:

$$\left| \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |x_1(t)|^2 dt \right|^{1/2} \left| \int_a^b |x_2(t)|^2 dt \right|^{1/2} \quad (6-2-19)$$

Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $x_2(t) = ax_1(t)$ với a là số phức nào đó.

6-2-3. Khai triển trực giao tín hiệu

Trong phần này ta sẽ biểu diễn vectơ cho các tín hiệu và chứng minh sự tương đương giữa tín hiệu và vectơ biểu diễn nó.

Giả sử $s(t)$ là tín hiệu thực, xác định, có năng lượng hữu hạn:

$$\zeta_s = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \quad (6-2-20)$$

Giả sử tồn tại một tập hợp các hàm $\{f_n(t), 1 \leq n \leq N\}$ là trực chuẩn theo nghĩa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)f_m(t)dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (6-2-21)$$

Ta sẽ ước lượng tín hiệu $s(t)$ bằng một tổ hợp tuyến tính các hàm này, nghĩa là:

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \quad (6-2-22)$$

trong đó $\{s_k, 1 \leq k \leq K\}$ là các hệ số ước lượng của $s(t)$. Sai số phép ước lượng là:

$$e(t) = s(t) - \hat{s}(t) \quad (6-2-23)$$

Ta sẽ chọn các hệ số $\{s_k\}$ để cực tiểu hóa năng lượng của tín hiệu sai số ζ_e . Ta có:

$$\zeta_e = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \right]^2 dt \quad (6-2-24)$$

Các hệ số trong khai triển $s(t)$ có thể tìm được bằng cách lấy đạo hàm của (6-2-24) theo từng hệ số $\{s_k\}$ và cho các đạo hàm bằng 0. Cách khác, ta có thể dùng các kết quả đã biết của lý thuyết ước lượng dựa trên tiêu chuẩn trung bình bình phương sai số (Mean Square Approximation Error, MSE), nghĩa là giá trị cực tiểu của ζ_e đạt được khi hàm sai số trực giao với các hàm trong khai triển chuỗi, nghĩa là:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \right] f_n(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (6-2-25)$$

Do $\{f_n(t)\}$ là trực chuẩn nên (6-2-25) đơn giản còn:

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)f_n(t)dt \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (6-2-26)$$

Như vậy các hệ số nhận được bằng cách "chiếu" $s(t)$ lên các hàm $\{f_n(t)\}$, và $\hat{s}(t)$ chính là "hình chiếu" của $s(t)$ lên không gian tín hiệu K chiều cho bởi các hàm $\{f_n(t)\}$. Trung bình bình phương sai số tối thiểu của ước lượng là:

$$\zeta_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^K s_k f_k(t)s(t)dt = \zeta_s - \sum_{k=1}^K s_k^2 \quad (6-2-27)$$

Khi giá trị tối thiểu của trung bình bình phương sai số bằng 0, $\zeta_{\min} = 0$ thì:

$$\zeta_s = \sum_{k=1}^K s_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \quad (6-2-28)$$

Khi đó $s(t)$ được viết thành:

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \quad (6-2-29)$$

Chúng ta hiểu rằng $s(t)$ bằng khai triển chuỗi của nó theo nghĩa sai số có năng lượng bằng 0. Khi mọi tín hiệu có năng lượng hữu hạn đều được biểu diễn bằng khai triển chuỗi theo dạng (6-2-29) với $\zeta_{\min} = 0$ thì tập hợp các hàm trực chuẩn $\{f_n(t)\}$ được gọi là hệ kín.

Ví dụ 6-2-1: Khai triển chuỗi Furiê

Một tín hiệu có năng lượng hữu hạn $s(t)$ chỉ khác 0 trong khoảng $0 \leq t \leq T$, có số điểm gián đoạn hữu hạn trong khoảng này, có thể được biểu diễn bằng chuỗi Furiê như sau:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (6-2-30)$$

Các hệ số $\{a_k, b_k\}$ với trung bình bình phương sai số cực tiểu là:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t dt \\ b_k &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt \end{aligned} \quad (6-2-31)$$

Tập hợp các hàm $\left\{ \sqrt{2/T} \cos k \frac{2\pi}{T} t, \sqrt{2/T} \sin k \frac{2\pi}{T} t \right\}$ là một hệ kín và phép khai triển chuỗi có trung bình bình phương sai số bằng 0.

Thủ tục Gram-Schmidt Giả sử ta có một tập hợp các tín hiệu có năng lượng hữu hạn $\{s_i(t), 1 \leq i \leq M\}$ và ta muốn xây dựng một tập hợp các tín hiệu trực chuẩn. Cũng giống như trong phần 6-1-1, thủ tục Gram-Schmidt cho phép ta xây dựng một tập hợp tín hiệu như thế. Ta bắt đầu với tín hiệu thứ nhất $s_1(t)$ có năng lượng ζ_1 . Tín hiệu thứ nhất được xây dựng là:

$$f_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\zeta_1}} \quad (6-2-32)$$

Như vậy $f_1(t)$ được chuẩn hóa từ $s_1(t)$ và có năng lượng đơn vị. Tín hiệu thứ hai xây dựng từ $s_2(t)$. Đầu tiên tính "hình chiếu" của $f_1(t)$ trên $s_2(t)$ là:

$$c_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) f_1(t) dt \quad (6-2-33)$$

Sau đó trừ $s_2(t)$ đi $c_{12}f_1(t)$:

$$f_2'(t) = s_2(t) - c_{12}f_1(t) \quad (6-2-34)$$

Tín hiệu này trực giao với $f_1(t)$ nhưng không có năng lượng đơn vị. Nếu $f_2'(t)$ có năng lượng ζ_2 thì tín hiệu thứ hai là:

$$f_2(t) = \frac{f_2'(t)}{\sqrt{\zeta_2}} \quad (6-2-35)$$

Tổng quát, quá trình trực giao hóa tín hiệu thứ k dẫn tới:

$$f_k(t) = \frac{f_k'(t)}{\sqrt{\zeta_k}} \quad (6-2-36)$$

với

$$f_k'(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} f_i(t) \quad (6-2-37)$$

và

$$c_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) f_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (6-2-38)$$

Như vậy quá trình trực giao hóa kết thúc khi tất cả M tín hiệu $\{s_i(t)\}$ đã được xét hết và $N \leq M$ các vectơ trực chuẩn được xây dựng. Số chiều N của không gian tín hiệu bằng M nếu các tín hiệu là độc lập tuyến tính, nghĩa là không có tín hiệu nào là tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu còn lại.

Vi dụ 6-2-2

Ta sử dụng thủ tục Gram-Schmidt để xây dựng tập hợp các vectơ trực chuẩn của bốn vectơ trên hình 6-2-1(a). Tín hiệu $s_1(t)$ có năng lượng $\zeta_1 = 2$ do đó $f_1(t) = \sqrt{1/2} s_1(t)$. Do $c_{12} = 0$ nên $s_2(t)$ và $f_1(t)$ là trực giao. Từ đó $f_2(t) = s_2(t)/\sqrt{\zeta_2} = \sqrt{1/2} s_2(t)$. Để tìm $f_3(t)$ ta tính c_{13} và c_{23} và dễ dàng tìm được $c_{13} = \sqrt{2}$, $c_{23} = 0$ nên:

$$f_3'(t) = s_3(t) - \sqrt{2} f_1(t) = \begin{cases} -1 & (2 \leq t \leq 3) \\ 0 & (t < 2 \text{ hoặc } t > 3) \end{cases}$$

Do $f_3'(t)$ có năng lượng đơn vị nên $f_3(t) = f_3'(t)$. Để tìm $f_4(t)$ ta thấy $c_{14} = -\sqrt{2}$, $c_{24} = 0$, $c_{34} = 1$ nên:

$$f_4'(t) = s_4(t) + \sqrt{2} f_1(t) - f_3(t) = 0$$

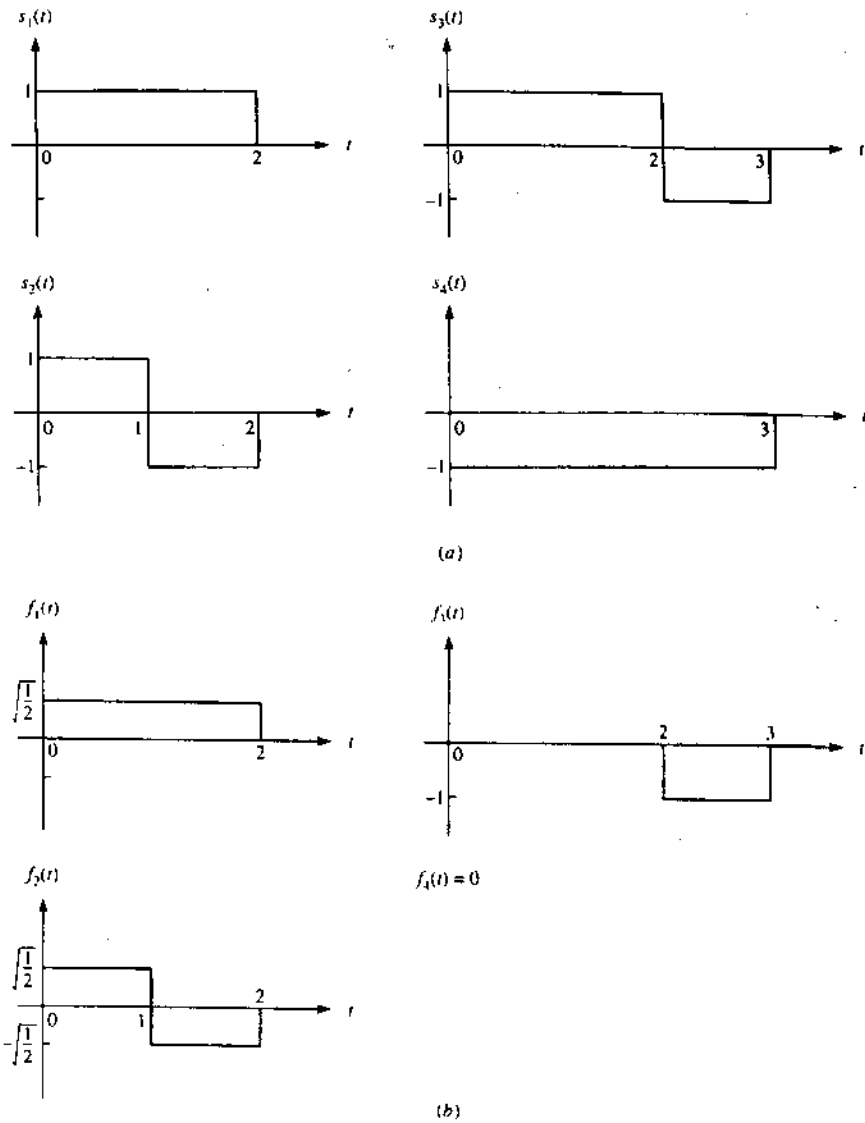
Do đó $s_4(t)$ là tổ hợp tuyến tính của $f_1(t)$ và $f_3(t)$ nên $f_4(t) = 0$. Ba tín hiệu trực chuẩn được vẽ trên hình 6-2-1(b).

Khi ta đã xây dựng tập hợp các vectơ trực chuẩn $\{f_n(t)\}$ thì M tín hiệu $\{s_n(t)\}$ là tổ hợp tuyến tính của $\{f_n(t)\}$. Do đó ta có thể viết:

$$s_k(t) = \sum_{n=1}^N s_{kn} f_n(t) \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (6-2-39)$$

và

$$\zeta_k = \int_{-\infty}^{\infty} [s_k(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^M s_{kn}^2 = \|s_k\|^2 \quad (6-2-40)$$



Hình 6-2-1: Chuẩn hóa bốn tín hiệu $\{s_i(t), 1 \leq i \leq 4\}$ và các tín hiệu trực giao

Dựa trên biểu thức (6-2-39), mỗi tín hiệu có thể được biểu diễn bởi một vectơ:

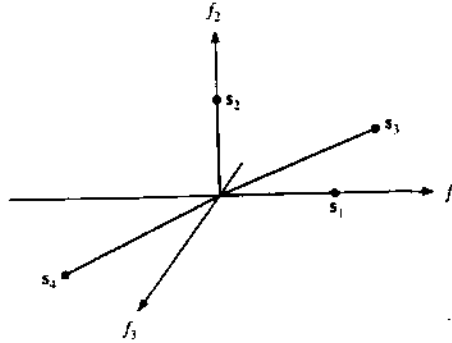
$$s_k = [s_{k1} \ s_{k2} \dots \ s_{kN}] \quad (6-1-41)$$

là một điểm trong không gian tín hiệu N chiều với các tọa độ $\{s_{ki}, i = 1, 2, \dots, N\}$. Năng lượng của tín hiệu là bình phương độ dài vectơ hay bình phương khoảng cách Euclide từ gốc tọa độ tới đỉnh vectơ trong không gian. Như vậy tín hiệu có thể được biểu diễn hình học bởi một điểm trong không gian xác định bởi các hàm trực chuẩn $\{f_n(t)\}$.

Ví dụ 6-2-3

Xét việc biểu diễn vectơ của bốn tín hiệu trên hình 6-2-1(a) bằng việc sử dụng các hàm trực chuẩn $\{f_n(t)\}$ trên hình 6-2-1(b). Số chiều của không gian tín hiệu là $N = 3$ nên mỗi tín hiệu được biểu diễn bởi ba thành phần. Tín hiệu $s_1(t)$ được xác định bởi vectơ $s_1 = (\sqrt{2}, 0, 0)$, tương tự ta có các tín hiệu $s_2(t)$, $s_3(t)$, $s_4(t)$ được xác định bởi các vectơ $s_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$, $s_3 = (\sqrt{2}, 0, 1)$, $s_4 = (-\sqrt{2}, 0, 1)$

tương ứng. Các vectơ này được biểu diễn trên hình 6-2-2. Độ dài của chúng là $|s_1| = \sqrt{2}$, $|s_2| = \sqrt{2}$, $|s_3| = \sqrt{3}$, $|s_4| = \sqrt{3}$ và năng lượng tương ứng với các tín hiệu $\zeta_k = |s_k|^2$, $k = 1, 2, 3, 4$.



Hình 6-2-2: Bốn vectơ tín hiệu được biểu diễn bởi bốn điểm trong không gian tín hiệu ba chiều

Ta thấy rằng tập hợp M tín hiệu có năng lượng hữu hạn $\{s_n(t)\}$ có thể được biểu diễn bởi một tổ hợp tuyến tính các hàm trực chuẩn $\{f_n(t)\}$ số chiều $N \leq M$. Các hàm $\{s_n(t)\}$ được xác định nhờ thủ tục Gram-Schmidt. Cũng cần phải chú ý rằng các hàm $\{f_n(t)\}$ thu được từ thủ tục đó không phải là duy nhất. Nếu thay đổi thứ tự các tín hiệu trực giao hóa ta sẽ thu được một tập hợp các hàm trực chuẩn khác $\{f_n(t)\}$.

Vấn đề khai triển trực giao ta xét ở trên là áp dụng với các tín hiệu thực. Việc mở rộng cho các tín hiệu phức là bài tập dành cho bạn đọc tự thực hiện.

Cuối cùng ta xét tín hiệu có dải tần hữu hạn được biểu diễn như sau:

$$s_m(t) = \operatorname{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6-2-42)$$

$\{s_{lm}(t)\}$ là ký hiệu các tín hiệu tần số thấp tương đương. Nhắc lại rằng năng lượng tín hiệu có thể được biểu diễn qua $s_m(t)$ hoặc $s_{lm}(t)$:

$$\zeta_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_{lm}(t)|^2 dt \quad (6-2-43)$$

Sự tương quan giữa hai tín hiệu $s_m(t)$ và $s_k(t)$ được xác định bởi hàm tương quan chéo chuẩn hoá:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_m \zeta_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\zeta_m \zeta_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}(t) s_{lk}^*(t) dt \right\} \quad (6-2-44)$$

Ta định nghĩa hệ số tương quan chéo phức ρ_{km} là:

$$\rho_{km} = \frac{1}{2\sqrt{\zeta_m \zeta_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}^*(t) s_{lk}(t) dt \quad (6-2-45)$$

Do đó:

$$\operatorname{Re}(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{\zeta_m \zeta_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt \quad (6-2-46)$$

hay một cách tương đương là:

$$\operatorname{Re}(\rho_{km}) = \frac{s_m \cdot s_k}{\|s_m\| \cdot \|s_k\|} = \frac{s_m \cdot s_k}{\sqrt{\zeta_k \zeta_m}} \quad (6-2-47)$$

Các hệ số tương quan giữa từng cặp các tín hiệu hay các vectơ tín hiệu gồm một tập hợp các tham số đặc trưng cho sự tương quan giữa các tín hiệu. Một tham số có liên quan khác là khoảng cách Euclide $d_{km}^{(e)}$ giữa một cặp tín hiệu, được định nghĩa là:

$$d_{km}^{(e)} = \|s_m - s_k\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [s_m(t) - s_k(t)]^2 dt \right\}^{1/2} = \left\{ \zeta_m + \zeta_k - 2\sqrt{\zeta_m \zeta_k} \operatorname{Re}(\rho_{km}) \right\}^{1/2} \quad (6-2-48)$$

Khi $\zeta_m = \zeta_k = \zeta$ với mọi k và m , ta có:

$$d_{km}^{(e)} = \left\{ 2\zeta [1 - \operatorname{Re}(\rho_{km})] \right\}^{1/2} \quad (6-2-49)$$

Như vậy khoảng cách Euclide là một cách để đo lường sự tương quan hay không tương quan giữa các tín hiệu hay các vectơ tương ứng với các tín hiệu.

Trong phần sau ta sẽ trình bày các tín hiệu điều chế số và sử dụng không gian tín hiệu để biểu diễn các tín hiệu đó. Chúng ta sẽ nhận thấy rằng các tín hiệu điều chế số theo phương pháp tuyến tính có thể khai triển theo hai hàm trực chuẩn có dạng:

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t, \quad f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t \quad (6-2-50)$$

Nếu $s_{lm}(t)$ được biểu diễn thành $s_{lm}(t) = x_l(t) + jy_l(t)$ thì $s_m(t)$ trong biểu thức (6-2-42) có thể biểu diễn thành:

$$s_m(t) = x_l(t)f_1(t) + y_l(t)f_2(t) \quad (6-2-51)$$

ở đây $x_l(t)$ và $y_l(t)$ biểu diễn các tín hiệu điều chế.

6-3. BIỂU DIỄN CÁC TÍN HIỆU ĐIỀU CHẾ SỐ

Khi truyền thông tin số qua kênh truyền, bộ điều chế là thiết bị biến đổi thông tin số thành các tín hiệu tương tự phù hợp với các tính chất của kênh. Quá trình biến đổi gồm chuyển dãy thông tin số $\{a_n\}$ thành các khối $k = \log_2 M$ các bit nhị phân và chọn một trong $M = 2^k$ tín hiệu xác định có năng lượng hữu hạn $\{s_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$ để truyền mỗi khối qua kênh.

Khi việc biến đổi từ dãy số $\{a_n\}$ thành tín hiệu phụ thuộc vào một hay nhiều tín hiệu đã tạo ra trước đó thì bộ điều chế là có nhớ. Ngược lại, khi biến đổi dãy số $\{a_n\}$ thành các tín hiệu $\{s_m(t)\}$ không bị ràng buộc bởi các tín hiệu đã tạo ra trước đó thì bộ điều chế được gọi là không nhớ.

Cùng với việc phân loại các bộ điều chế là có nhớ hay không có nhớ, ta có thể phân loại bộ điều chế là tuyến tính hay phi tuyến. Điều chế tuyến tính chỉ làm thay đổi biên độ tín hiệu theo dãy tín hiệu số ở đầu vào còn điều chế phi tuyến không làm thay đổi biên độ của tín hiệu mà làm thay đổi góc của tín hiệu tương tự ([2], [4], [5], [6], [7], [8], [9]).

6-3-1. Các phương pháp điều chế không nhớ

Như đã nói ở trên, bộ điều chế trong một hệ thống truyền thông số biến đổi một dãy ký hiệu nhị phân thành một tập các tín hiệu tương tự tương ứng. Các tín hiệu tương tự này có thể khác nhau về biên độ, pha hay tần số, hoặc đồng thời hai hay nhiều tham số của tín hiệu. Không mất tính tổng quát, ta giả thiết tốc độ số liệu đầu vào là R bit/s trong mọi trường hợp.

Tín hiệu điều chế biên độ xung (Pulse Amplitude Modulation-PAM) Trong hệ thống PAM số, tín hiệu có thể biểu diễn theo dạng:

$$s_m(t) = \operatorname{Re}[A_m g(t) e^{j2\pi f_c t}] = A_m g(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T \quad (6-3-1)$$

$\{A_m, 1 \leq m \leq M\}$ là ký hiệu M giá trị biên độ tương ứng với $M = 2^k$ khối k bit có thể (hay là các ký hiệu). Các giá trị biên độ tín hiệu A_m lấy các giá trị (mức) rời rạc:

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6-3-2)$$

$2d$ là độ chênh lệch biên độ giữa hai tín hiệu liên tiếp. $g(t)$ là tín hiệu xung thực mà độ rộng của nó sẽ ảnh hưởng tới phổ tín hiệu truyền đi. Tốc độ ký hiệu trong hệ thống PAM là R/k , đó chính là tốc độ thay đổi về biên độ của vật mang thể hiện việc truyền thông tin mới. Khoảng thời gian $T_b = 1/R$ gọi là *khoảng thời gian bit* và khoảng thời gian $T = k/R = kT_b$ gọi là *khoảng thời gian ký hiệu*.

Các tín hiệu PAM M mức có năng lượng:

$$\zeta_m = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} A_m^2 \int_0^T g^2(t) dt = \frac{1}{2} A_m^2 \zeta_g \quad (6-3-3)$$

trong đó ζ_g là năng lượng của xung $g(t)$. Rõ ràng các tín hiệu này là một chiều ($N = 1$) và được biểu diễn tổng quát như sau:

$$s_m(t) = s_m f(t) \quad (6-3-4)$$

$f(t)$ là ký hiệu một tín hiệu có năng lượng đơn vị và:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\zeta_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad (6-3-5)$$

và

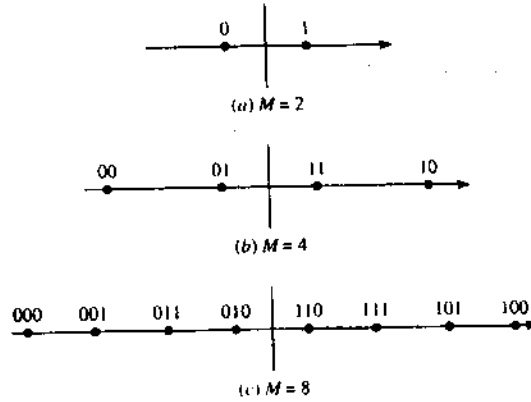
$$s_m = A_m \sqrt{\frac{1}{2} \zeta_g}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6-3-6)$$

Sơ đồ không gian tín hiệu tương ứng với $M = 2$, $M = 4$ và $M = 8$ được cho trên hình 6-3-1. Hệ thống PAM số còn được gọi là điều chế biên độ số (Amplitude Shift Keying - ASK).

Quá trình biến đổi hay gán k bit thông tin thành $M = 2^k$ tín hiệu khác nhau về biên độ có thể thực hiện theo nhiều cách. Một cách đơn giản nhất là các tín hiệu kế nhau khác nhau một ký hiệu nhị phân như trên hình 6-3-1. Loại biến đổi này gọi là mã hóa Gray. Loại này hay được sử dụng do phần lớn sai nhầm gây ra bởi nhiễu sẽ biến một tín hiệu thành một tín hiệu kế (hai tín hiệu có biên độ liên tiếp nhau). Trong trường hợp như thế chỉ có 1 bit bị sai nhầm trong dãy k bit.

Khoảng cách Euclide giữa hai điểm tín hiệu là:

$$d_{mn}^{(v)} = \sqrt{(s_m - s_n)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \zeta_g} |A_m - A_n| = d \sqrt{2 \zeta_g} |m - n| \quad (6-3-7)$$



Hình 6-3-1: Sơ đồ không gian tín hiệu cho các tín hiệu PAM số

Khoảng cách giữa hai điểm tín hiệu kế nhau có khoảng cách Euclide nhỏ nhất và bằng:

$$d_{\min}^{(e)} = d\sqrt{2\zeta_g} \quad (6-3-8)$$

Tín hiệu PAM trong công thức (6-3-1) là tín hiệu điều chế hai biên (DSB) và đòi hỏi độ rộng dải thông của kênh bằng hai lần độ rộng phổ của tín hiệu tần số thấp tương đương để truyền tải. chúng ta có thể dùng tín hiệu PAM đơn biên (SSB) được biểu diễn như sau:

$$s_m(t) = \text{Re} \left\{ A_m [g(t) \pm j\hat{g}(t)] e^{j2\pi f_c t} \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6-3-9)$$

và $\hat{g}(t)$ là biến đổi Hilbert của $g(t)$. Như vậy dải phổ của tín hiệu SSB bằng nửa dải phổ của tín hiệu DSB.

Tín hiệu PAM số có thể truyền trực tiếp qua kênh mà không cần vật mang. Trong trường hợp này tín hiệu được biểu diễn như sau:

$$s_m(t) = A_m g(t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6-3-10)$$

Tín hiệu này được gọi là tín hiệu băng tần cơ sở. Ví dụ tín hiệu PAM băng tần cơ sở bốn mức được biểu diễn trên hình 6-3-2(a), còn trong trường hợp có vật mang là trên hình 6-3-2(b).

Trong trường hợp tín hiệu PAM nhị phân ($M = 2$) ta có $s_1(t) = -s_2(t)$, hai tín hiệu có cùng năng lượng và hệ số tương quan chéo bằng -1.

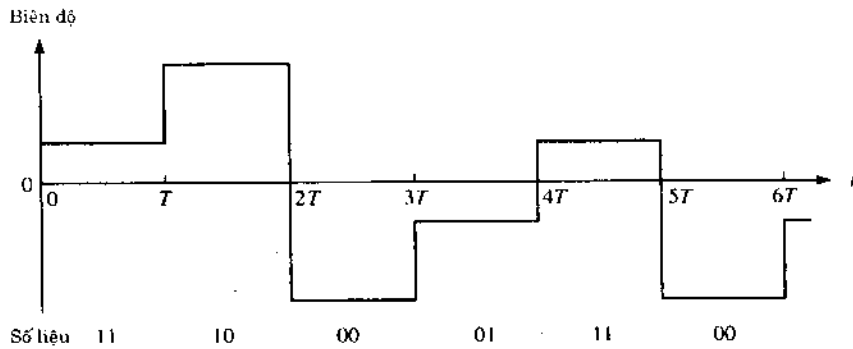
Tín hiệu điều chế pha Trong điều chế pha số, M tín hiệu được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \text{Re} \left[g(t) e^{j2\pi(m-1)/M} e^{j2\pi f_c t} \right] = g(t) \cos \left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \\ &= g(t) \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \cos 2\pi f_c t - g(t) \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \sin 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (6-3-11)$$

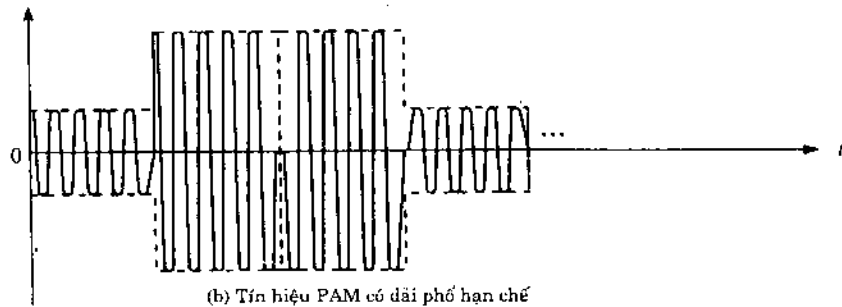
$g(t)$ là tín hiệu xung và $\theta_m = 2\pi(m-1)/M$, $m = 1, 2, \dots, M$ với M là số lượng các giá trị pha của vật mang. Điều chế pha số được gọi là PSK (Phase Shift Keying).

Ta chú ý rằng các tín hiệu này có năng lượng bằng nhau, nghĩa là:

$$\zeta = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T g^2(t) dt = \frac{1}{2} \zeta_g \quad (6-3-12)$$



(a) Tín hiệu PAM băng tần cơ sở



(b) Tín hiệu PAM có dải phổ hạn chế

Hình 6-3-2: Tín hiệu PAM băng tần cơ sở và dải phổ hạn chế

Hơn nữa, các tín hiệu đó có thể được biểu diễn thành các tổ hợp tuyến tính của hai tín hiệu trực giao $f_1(t)$ và $f_2(t)$ như sau:

$$s_m(t) = s_{m_1}(t)f_1(t) + s_{m_2}(t)f_2(t) \quad (6-3-13)$$

với

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\zeta_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad (6-3-14)$$

$$f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\zeta_g}} g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (6-3-15)$$

và các vectơ hai chiều $s_m = [s_{m_1} s_{m_2}]$ là:

$$s_m = \left[\sqrt{\frac{\zeta_g}{2}} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \sqrt{\frac{\zeta_g}{2}} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right], m = 1, 2, \dots, M \quad (6-3-16)$$

Sơ đồ không gian tín hiệu với $M = 2, M = 4, M = 8$ được cho trên hình 6-3-3. Trường hợp $M = 2$ ứng với các tín hiệu một chiều giống như tín hiệu PAM nhị phân.

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRUYỀN TIN

Quá trình biến đổi hay gán k bit thông tin thành $M = 2^k$ tín hiệu có pha khác nhau có thể thực hiện theo nhiều cách. Mã Gray hay được sử dụng vì sai số do nhiễu tạo ra nói chung chỉ làm sai một bit trong dãy k bit.

Khoảng cách Euclide giữa hai điểm tín hiệu là:

$$d_{mn}^{(e)} = |s_m - s_n| = \left\{ \zeta_g \left[1 - \cos \frac{2\pi}{M} (m-n) \right] \right\}^{1/2} \quad (6-3-17)$$

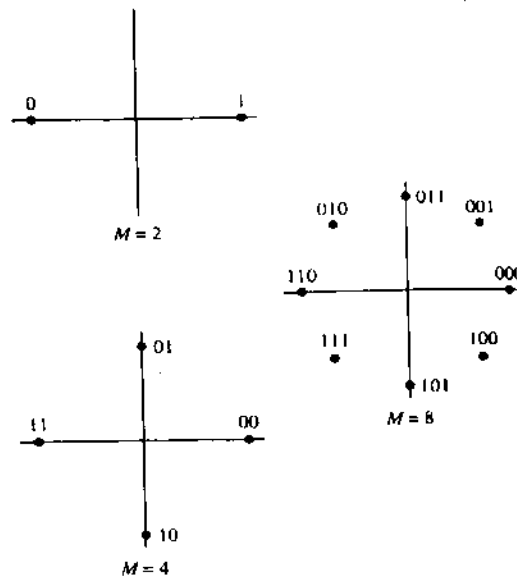
Khoảng cách Euclide tối thiểu ứng với trường hợp $|m - n| = 1$, tức là hai tín hiệu có pha kế nhau, là:

$$d_{\min}^{(e)} = \left\{ \zeta_g \left[1 - \cos \frac{2\pi}{M} \right] \right\}^{1/2} \quad (6-3-18)$$

Điều chế biên độ vuông góc (Quadrature Amplitude Modulation) Xét việc điều chế đồng thời hai ký hiệu k bit bằng hai vật mang vuông góc $\cos 2\pi f_c t$ và $\sin 2\pi f_c t$. Phép điều chế này được gọi là điều chế PAM vuông góc hay QAM và tín hiệu điều chế là:

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \text{Re} \left[(A_{m_c} + jA_{m_s}) g(t) e^{j2\pi f_c t} \right] \\ &= A_{m_c} g(t) \cos 2\pi f_c t - A_{m_s} g(t) \sin 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (6-3-19)$$

A_{m_c} và A_{m_s} là biên độ vật mang thông tin của hai thành phần vuông góc và $g(t)$ là tín hiệu xung.



Hình 6-3-3: Sơ đồ không gian tín hiệu của tín hiệu PSK

Tín hiệu QAM có thể được biểu diễn theo cách khác:

$$s_m(t) = \text{Re} \left[V_m e^{j\theta_m} g(t) e^{j2\pi f_c t} \right] = V_m g(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m) \quad (6-3-20)$$

với $V_m = (A_{m_c}^2 + A_{m_s}^2)^{1/2}$ và $\theta_m = \arctg \frac{A_{m_s}}{A_{m_c}}$. Từ cách biểu diễn này ta thấy tín hiệu QAM là tín hiệu điều chế biên độ và pha đồng thời.

Thực tế chúng ta có thể kết hợp hệ thống PAM M_1 mức biên độ với hệ thống PSK M_2 mức pha để tạo ra tín hiệu PAM-PSK với $M = M_1 M_2$ tín hiệu khác nhau. Nếu $M_1 = 2^n$ và $M_2 = 2^n$ thì một tín hiệu PAM-PSK có thể truyền tải đồng thời $m + n = \log_2 M$ bit nhị phân với tốc độ ký hiệu $R/(m + n)$. Ví dụ về sơ đồ không gian tín hiệu PAM-PSK với $M = 8$ và $M = 16$ trên hình 6-3-4.

Giống như tín hiệu PSK, tín hiệu QAM có thể biểu diễn bằng tổ hợp tuyến tính của hai tín hiệu trực giao $f_1(t)$ và $f_2(t)$ như sau:

$$s_m(t) = s_{m_1}(t)f_1(t) + s_{m_2}(t)f_2(t) \quad (6-3-21)$$

với

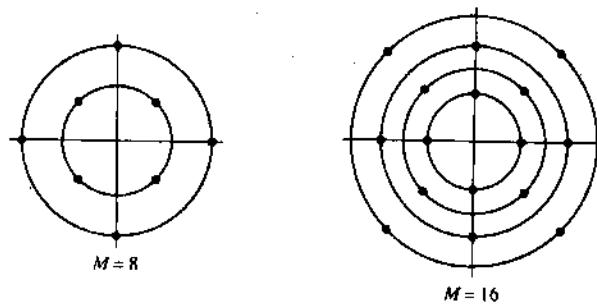
$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{\zeta_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \\ f_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{\zeta_g}} g(t) \sin 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (6-3-22)$$

và

$$s_m = [s_{m_1} \ s_{m_2}] = \left[A_{m_c} \sqrt{\frac{\zeta_g}{2}} \ A_{m_s} \sqrt{\frac{\zeta_g}{2}} \right] \quad (6-3-23)$$

với ζ_g là năng lượng của tín hiệu xung $g(t)$. Khoảng cách Euclide giữa hai điểm tín hiệu là:

$$d_{mn}^{(e)} = |s_m - s_n| = \left\{ \frac{1}{2} \zeta_g \left[(A_{m_c} - A_{n_c})^2 + (A_{m_s} - A_{n_s})^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (6-3-24)$$



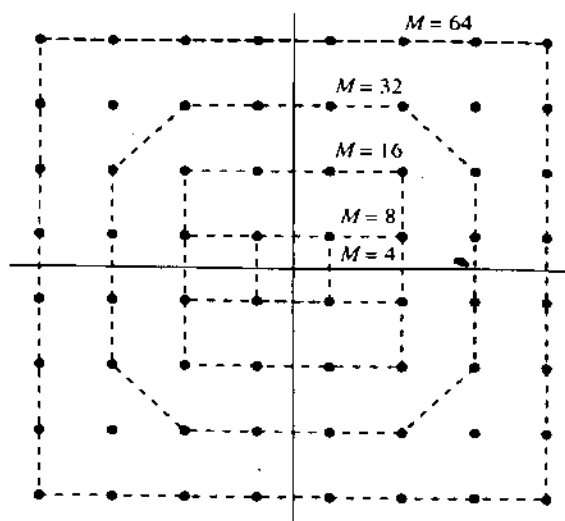
Hình 6-3-4: Ví dụ về sơ đồ không gian tín hiệu PAM-PSK

Trong trường hợp các giá trị biên độ tín hiệu thuộc tập hợp các giá trị rời rạc $\{(2m - 1 - M)d, m = 1, 2, \dots, M\}$ sơ đồ không gian tín hiệu là hình chữ nhật như trên hình 6-3-5. Khoảng cách Euclide giữa hai điểm kề là nhỏ nhất và bằng:

$$d_{\min}^{(e)} = d\sqrt{2\zeta_g} \quad (6-3-25)$$

Tín hiệu nhiều chiều Ta thấy rằng tín hiệu điều chế số cả về biên độ và pha tương ứng với vectơ hay sơ đồ không gian tín hiệu hai chiều. Nếu ta muốn xây dựng các tín hiệu tương ứng với các vectơ trong không gian nhiều chiều hơn, ta có thể sử dụng hoặc miền thời gian hoặc miền tần số, hoặc cả hai để nâng số chiều của tín hiệu.

Giả sử ta có các vectơ tín hiệu N chiều, ta có thể chia khoảng thời gian T thành N khoảng thời gian nhỏ, mỗi khoảng thời gian nhỏ kéo dài trong $T = T_1/N$. Trong mỗi khoảng thời gian nhỏ ta có thể dùng tín hiệu PAM nhị phân (tín hiệu một chiều) để truyền một phân tử của vectơ tín hiệu N chiều. Nếu N chẵn, một khe thời gian T có thể sử dụng để truyền đồng thời hai thành phần của vectơ N chiều bằng cách điều chế biên độ các vật mang vuông góc một cách độc lập bởi các thành phần tương ứng. Như vậy vectơ tín hiệu N chiều được truyền trong $\frac{1}{2}NT$ đơn vị thời gian.



Hình 6-3-5: Sơ đồ không gian tín hiệu QAM chữ nhật

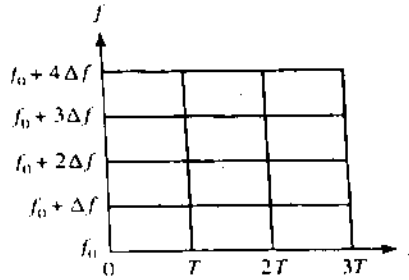
Cách khác, một dải tần số có độ rộng $N\Delta f$ được chia thành N khe tần số, mỗi khe rộng Δf . mỗi vectơ tín hiệu N chiều được truyền qua kênh bằng cách điều chế đồng thời biên độ của N vật mang trong N khe tần số. Cần chú ý độ phân tách tần số giữa các vật mang là Δf để không bị hiện tượng điều chế chéo giữa các tín hiệu trong N vật mang. Nếu các vật mang vuông góc được sử dụng trong mỗi khe tần số, vectơ N chiều (với N chẵn) có thể được truyền trong $\frac{1}{2}N$ khe tần số, làm giảm độ rộng dải thông cần thiết đi hai lần.

Tổng quát hơn, ta có thể sử dụng đồng thời cả miền thời gian và miền tần số để truyền vectơ tín hiệu N chiều. Ví dụ trên hình 6-3-6 trình bày việc chia trực thời gian và trực tần số thành 12 khe. Với vectơ tín hiệu 12 chiều có thể truyền đi bởi tín hiệu PAM hay vectơ tín hiệu 24 chiều có thể truyền đi bằng cách dùng hai vật mang vuông góc (QAM) trong mỗi khe.

Tín hiệu trực giao nhiều chiều Ta xét việc xây dựng M tín hiệu trực giao có năng lượng bằng nhau và khác nhau ở tần số, được biểu diễn bởi:

$$s_m(t) = \text{Re} \left[s_{lm}(t) e^{j2\pi f_c t} \right] = \sqrt{\frac{2\zeta}{T}} \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t \right], m = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T$$

(6-3-26)



Hình 6-3-6: Chia trục thời gian và trục tần số thành các khe

Tín hiệu tần số thấp tương đương được định nghĩa là:

$$s_{lm}(t) = \sqrt{\frac{2\zeta}{T}} e^{j2\pi m \Delta f t}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T \quad (6-3-27)$$

Loại điều chế tần số này được gọi là FSK (Frequency Shift Keying). Các tín hiệu này có năng lượng bằng nhau và hệ số tương quan chéo là:

$$\rho_{km} = \frac{2\zeta/T}{2\zeta} \int_0^T e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt = \frac{\sin \pi T(m-k)\Delta f}{\pi T(m-k)\Delta f} e^{j\pi T(m-k)\Delta f} \quad (6-3-28)$$

Phần thực của ρ_{km} là:

$$\rho_r = \text{Re}(\rho_{km}) = \frac{\sin[\pi T(m-k)\Delta f]}{\pi T(m-k)\Delta f} \cos[\pi T(m-k)\Delta f] = \frac{\sin[2\pi T(m-k)\Delta f]}{2\pi T(m-k)\Delta f} \quad (6-3-29)$$

Ta thấy $\text{Re}(\rho_{km}) = 0$ khi $\Delta f = 1/2T$ và $m \neq k$. Do $|m - k| = 1$ với hai khe tần số kế nhau, $\Delta f = 1/2T$ biểu thị độ phân tách tần số nhỏ nhất giữa các tín hiệu kế nhau để thỏa mãn tính trực giao giữa M tín hiệu. Đường biểu diễn $\text{Re}(\rho_{km})$ và $|\rho_{km}|$ theo Δf trên hình 6-3-7. Chú ý rằng $\text{Re}(\rho_{km}) = 0$ tại các tần số là bội của $1/2T$.

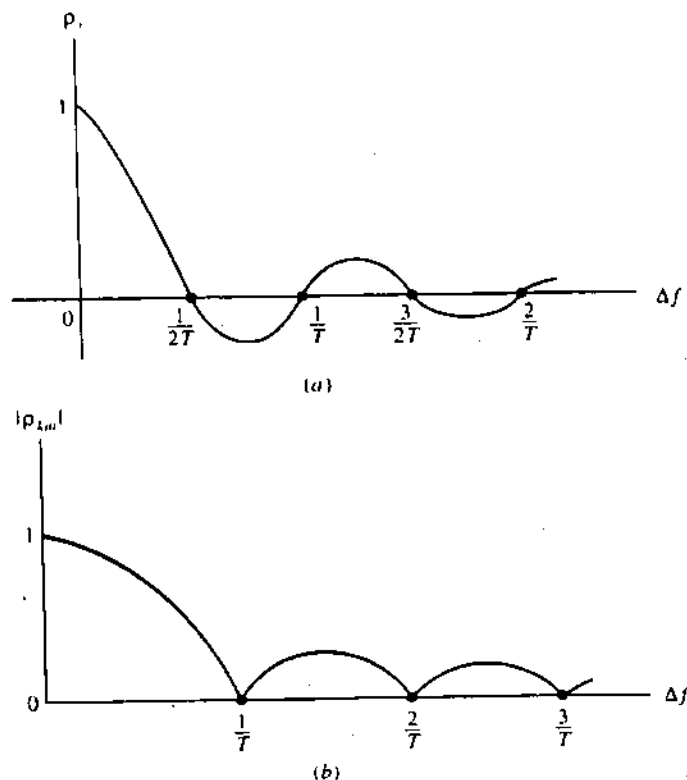
Trong trường hợp $\Delta f = 1/2T$, tín hiệu FSK M mức tương đương với các vectơ N chiều:

$$\begin{aligned} s_1 &= [\sqrt{\zeta} \ 0 \ 0 \dots\dots\dots 0] \\ s_2 &= [0 \ \sqrt{\zeta} \ 0 \dots\dots\dots 0] \\ &\dots\dots\dots \\ s_N &= [0 \ 0 \dots\dots\dots \sqrt{\zeta}] \end{aligned} \quad (6-3-30)$$

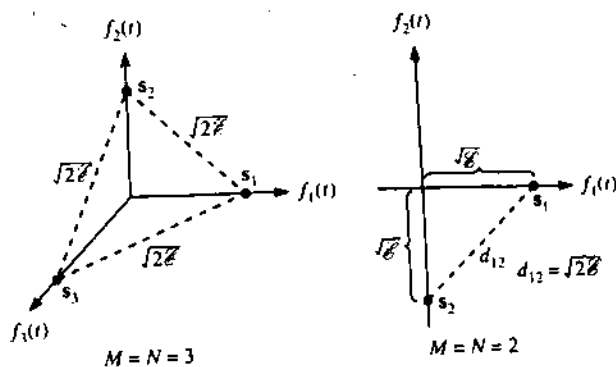
ở đây $M = N$. Khoảng cách giữa hai tín hiệu là:

$$d_{km}^{(e)} = \sqrt{2\zeta} \quad \text{với mọi } m, k \quad (6-3-31)$$

và đây cũng là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai tín hiệu. Hình 6-3-8 biểu diễn sơ đồ không gian tín hiệu với $M = N = 2$ và $M = N = 3$.



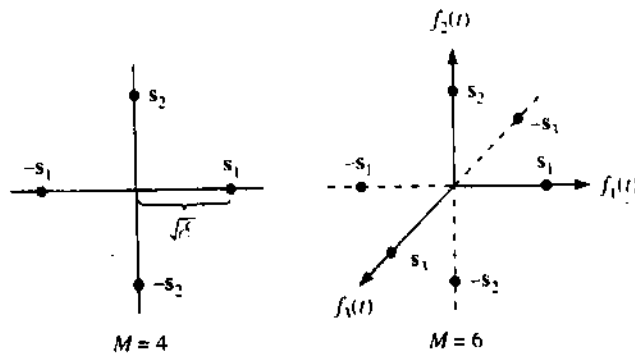
Hình 6-3-7: Biểu diễn hệ số tương quan chéo theo độ phân tách tần số đối với tín hiệu FSK



Hình 6-3-8: Các tín hiệu trực giao với $M = N = 2$ và $M = N = 3$.

Tín hiệu trực giao kép Tập hợp M tín hiệu trực giao kép có thể được xây dựng từ $M/2$ các tín hiệu trực giao bằng cách đảo dấu các tín hiệu trực giao. Như vậy ta cần số chiều $N = M/2$ cho việc xây dựng tập hợp M tín hiệu trực giao kép. Hình 6-3-9 biểu diễn các tín hiệu trực giao kép với $M = 4$ và $M = 6$.

Ta thấy rằng sự liên hệ giữa một cặp hai tín hiệu là $\rho_r = 1$ hoặc $\rho_r = 0$. Khoảng cách $d = 2\sqrt{\zeta}$ hoặc $d = \sqrt{2\zeta}$ và $d = \sqrt{2\zeta}$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai tín hiệu.



Hình 6-3-9: Sơ đồ không gian tín hiệu của tín hiệu trực giao kép với $M = 4$ và $M = 6$

Tín hiệu đơn hình Giả sử ta có một tập hợp M tín hiệu trực giao $\{s_m(t)\}$ hay tập hợp các vectơ tương ứng $\{s_m\}$. Giá trị trung bình của chúng là:

$$\bar{s} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M s_m \quad (6-3-32)$$

Ta xây dựng tập hợp M tín hiệu bằng cách trừ giá trị trung bình vào các tín hiệu:

$$s'_m = s_m - \bar{s}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6-3-33)$$

Như vậy ta đã dịch chuyển gốc tọa độ của không gian tới điểm $\bar{s}$. Các tín hiệu nhận được gọi là các tín hiệu đơn hình và có các tính chất sau. Thứ nhất là năng lượng của mỗi tín hiệu:

$$|s'_m|^2 = |s_m - \bar{s}|^2 = \zeta - \frac{2}{M} \zeta + \frac{1}{M} \zeta = \zeta \left(1 - \frac{1}{M}\right) \quad (6-3-34)$$

Tương quan chéo giữa hai tín hiệu là:

$$\text{Re}(\rho_{mn}) = \frac{s'_m s'_n}{|s'_m| |s'_n|} = -\frac{1}{M-1} \quad (6-3-35)$$

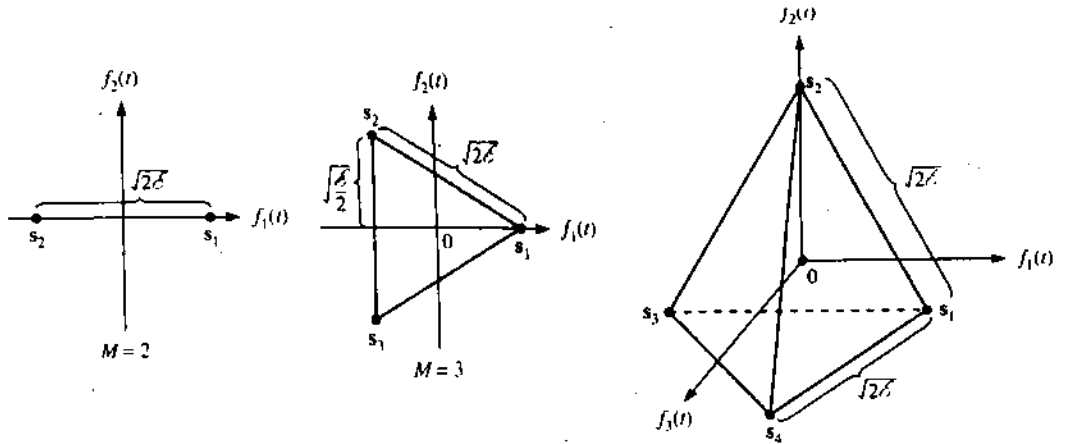
với mọi m, n . như vậy tập hợp các tín hiệu đơn hình là tương quan bằng nhau và năng lượng nhỏ hơn so với tập hợp các tín hiệu trực giao. Do gốc tọa độ thay đổi không làm thay đổi khoảng cách giữa hai đỉnh vectơ tín hiệu và vẫn là $d = \sqrt{2\zeta}$. Hình 6-3-10 biểu diễn các tín hiệu đơn hình với $M = 2, 3, 4$. Ta chú ý rằng số chiều của tín hiệu $N = M - 1$.

Tín hiệu từ mã nhị phân Một tập hợp M tín hiệu có thể sinh ra từ tập hợp M từ mã nhị phân có dạng:

$$C_m = [c_{m1} \ c_{m2} \ \dots \ c_{mN}], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6-3-36)$$

với $c_{mj} = 0$ hoặc $c_{mj} = 1$ với mọi m và j . Mỗi thành phần của một từ mã được biến đổi thành một tín hiệu PSK nhị phân như sau:

$$\begin{aligned}
 c_{mj} = 1 &\rightarrow s_{mj}(t) = \sqrt{\frac{2\zeta_c}{T_c}} \cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T_c) \\
 c_{mj} = 0 &\rightarrow s_{mj}(t) = -\sqrt{\frac{2\zeta_c}{T_c}} \cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T_c)
 \end{aligned}
 \tag{6-3-37}$$



Hình 6-3-10: Sơ đồ không gian tín hiệu với M tín hiệu đơn hình

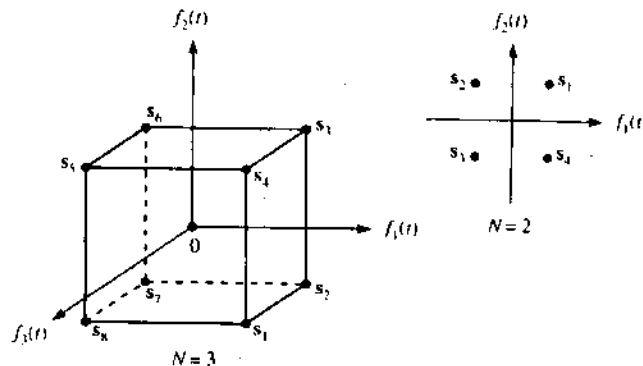
$T_c = T/N$ và $\zeta_c = \zeta/N$. Như vậy M từ mã $\{C_m\}$ được biến đổi thành một tập hợp M tín hiệu $\{s_m(t)\}$.

Các tín hiệu có thể được biểu diễn dưới dạng vectơ như sau:

$$s_m = [s_{m1} \ s_{m2} \ \dots \ s_{mN}], \quad m = 1, 2, \dots, M \tag{6-3-38}$$

với $s_{mj} = \pm \sqrt{\zeta/N}$ với mọi m và j , N là độ dài của từ mã và cũng chính là số chiều của M tín hiệu.

Ta thấy rằng có 2^N tín hiệu được xây dựng từ 2^N từ mã có thể có. Ta có thể chọn một tập hợp con gồm $M < 2^N$ tín hiệu để truyền tải thông tin. Ta cũng thấy rằng 2^N điểm tín hiệu có thể có tương ứng với các đỉnh của một siêu hộp trong không gian N chiều với gốc tọa độ là tâm của siêu hộp.



Hình 6-3-11: Sơ đồ không gian tín hiệu cho các tín hiệu sinh ra từ mã nhị phân

Mỗi tín hiệu trong tập M tín hiệu có năng lượng ζ . Tương quan chéo giữa hai tín hiệu phụ thuộc vào việc chọn M tín hiệu từ 2^N tín hiệu có thể như thế nào. Rõ ràng hai điểm tín hiệu kế nhau có hệ số tương quan chéo là:

$$\rho_r = \frac{\zeta(1 - 2/N)}{\zeta} = \frac{N-2}{N} \quad (6-3-39)$$

và khoảng cách tương ứng là:

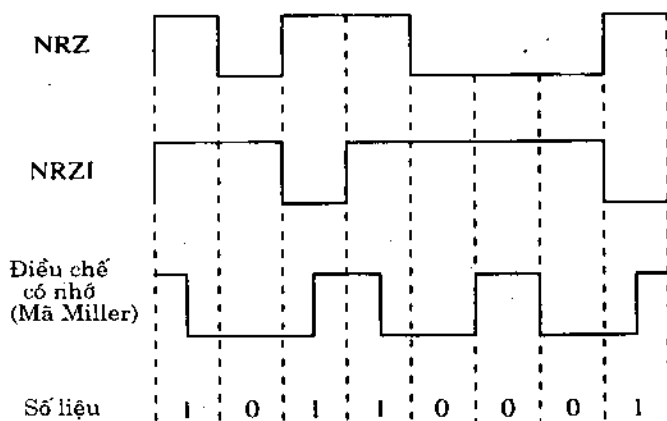
$$d^{(e)} = \sqrt{2\zeta(1 - \rho_r)} = \sqrt{4\zeta/N} \quad (6-3-40)$$

6-3-2. Điều chế tuyến tính có nhớ

Các phương pháp điều chế tín hiệu xét ở phần trước thuộc loại điều chế không nhớ do không có sự liên hệ nào giữa tín hiệu đã truyền đi với các tín hiệu tạo ra sau đó. Trong phần này ta sẽ xét tới một vài tín hiệu điều chế có sự phụ thuộc của tín hiệu đã truyền đi với các tín hiệu sẽ truyền sau đó. Sự phụ thuộc giữa các tín hiệu này thường có mục đích làm cho phổ của tín hiệu truyền đi thích hợp với các đặc điểm về tần số của kênh truyền.

Trong phần này, như đã nói, ta sẽ xét một số ví dụ về tín hiệu điều chế có nhớ và biểu diễn tính có nhớ bằng dãy Markov. Ta giả thiết rằng các tín hiệu ở băng tần cơ sở. Đối với các tín hiệu có dải phổ hữu hạn được suy ra một cách tương tự.

Hình 6-3-12 vẽ ba tín hiệu bằng tần cơ sở và dãy số liệu tương ứng. Tín hiệu thứ nhất gọi là tín hiệu NRZ, nó là đơn giản nhất trong ba tín hiệu. Thông tin nhị phân 1 được biểu diễn bởi một xung vuông biên độ A và thông tin nhị phân 0 được biểu diễn bởi một xung vuông biên độ $-A$. Như vậy phép điều chế tín hiệu NRZ là không nhớ và nó tương đương với tín hiệu PAM nhị phân hay PSK nhị phân trong các hệ thống điều chế có sử dụng tín hiệu mang.



Hình 6-3-12: Tín hiệu bằng tần cơ sở

Tín hiệu NRZI khác với tín hiệu NRZ ở chỗ có sự chuyển đổi từ mức biên độ này sang mức biên độ khác khi có thông tin nhị phân 1. Biên độ tín hiệu không thay đổi khi truyền các bit 0. Kiểu mã hóa tín hiệu như thế được gọi là mã hóa vi sai. Thuật toán mã hóa được mô tả toán học như sau:

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \quad (6-3-41)$$

$\{a_k\}$ là dãy bit nhị phân ở đầu vào bộ mã hóa và $\{b_k\}$ là dãy ra của bộ mã hóa. Khi $b_k = 1$ thì tín hiệu truyền đi là một xung vuông biên độ A , và khi $b_k = 0$ thì tín hiệu truyền đi là xung vuông biên độ $-A$. Như vậy đầu ra của bộ mã hóa được biến đổi thành một trong hai loại tín hiệu giống hệt như mã NRZ.

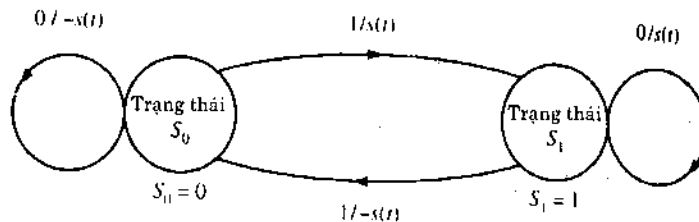
Mã hóa vi sai là mã hóa có nhớ. Phối hợp sự hoạt động của bộ mã hóa và bộ điều chế được biểu diễn bởi sơ đồ trạng thái (dãy Markov) trên hình 6-3-13. Sơ đồ trạng thái có thể được mô tả bằng ma trận chuyển đổi tương ứng với hai khả năng có thể của đầu vào $\{0, 1\}$. Chú ý rằng khi $a_k = 0$, bộ mã hóa giữ nguyên trạng thái. Ma trận chuyển đổi ứng với đầu vào 0 là:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-3-42)$$

$t_{ij} = 1$ nếu a_k làm bộ mã hóa chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j . Tương tự ma trận chuyển đổi trạng thái với $a_k = 1$ là:

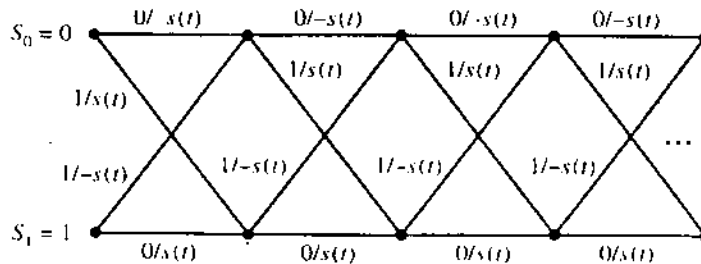
$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-3-43)$$

Đó là hai ma trận chuyển đổi trạng thái đặc trưng cho tín hiệu NRZI.



Hình 6-3-13: Lưu đồ trạng thái của tín hiệu NRZI

Một cách khác để thể hiện quá trình nhớ là bằng sơ đồ lưới. Sơ đồ lưới đối với tín hiệu NRZI trên hình 6-3-14. Sơ đồ này cho chúng ta các thông tin về sự phụ thuộc của các tín hiệu giống như lưu đồ trạng thái.



Hình 6-3-14: Sơ đồ lưới đối với tín hiệu NRZI

Tín hiệu tạo ra bởi điều chế trễ cũng có nhớ. Ta xét phương pháp Miller và sử dụng mã NRZI để truyền số liệu đã được mã vuông góc. Loại điều chế số này được sử dụng nhiều trong việc ghi lên băng từ, đĩa từ số. Tín hiệu được biểu diễn bởi sơ đồ trạng thái có 4 trạng thái trên hình 6-3-15(a). Có hai tín hiệu cơ bản là $s_1(t)$ và $s_2(t)$ và hai tín hiệu đối $-s_1(t)$ và $-s_2(t)$ được sử dụng để truyền thông tin nhị phân. Các tín hiệu này 6-3-15(b). Quá trình biến đổi từ các bit thành các

tín hiệu tương ứng được cho trên lưu đồ trạng thái. Ma trận chuyển đổi trạng thái đặc trưng cho quá trình mã hóa và điều chế dễ dàng nhận được từ lưu đồ trạng thái. Với $\alpha_k = 0$, ta có:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-3-44)$$

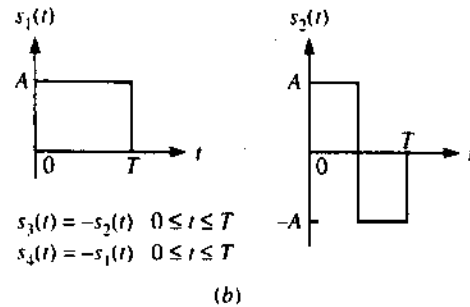
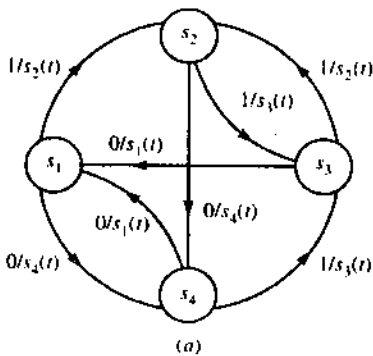
và khi $\alpha_k = 1$ thì ma trận chuyển đổi là:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-3-45)$$

Hai ma trận này đặc trưng cho phương pháp mã hóa Miller.

Các kỹ thuật điều chế có nhớ như NRZI và mã hóa Miller được tổng quát hóa bởi dãy Markov K trạng thái với các xác suất các trạng thái dừng $\{p_i, i = 1, 2, \dots, K\}$ và các xác suất chuyển đổi $\{p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, K\}$. Xác suất chuyển đổi p_{ij} ký hiệu xác suất tín hiệu $s_j(t)$ được truyền sau tín hiệu $s_i(t)$ ở khoảng thời gian ngay trước đó. Các xác suất chuyển đổi được sắp xếp thành dạng ma trận như sau:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{K1} & p_{K2} & \dots & p_{KK} \end{bmatrix} \quad (6-3-46)$$



Hình 6-3-15: Lưu đồ trạng thái (a) và các tín hiệu cơ bản (b) cho quá trình điều chế tín hiệu số có nhớ

P được gọi là ma trận xác suất chuyển đổi, ma trận xác suất chuyển đổi có thể dễ dàng nhận được từ ma trận chuyển đổi $\{T_i\}$ và các xác suất tương ứng của các ký hiệu vào (các xác suất $\{p_i\}$). Mối liên hệ cơ bản đó là:

$$P = \sum_{i=1}^2 q_i T_i \quad (6-3-47)$$

ở đây $q_1 = P(a_k = 0)$ và $q_2 = P(a_k = 1)$.

Với tín hiệu NRZI và xác suất $p_1 = p_2 = 1/2$, ma trận xác suất chuyển đổi là:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6-3-48)$$

Tương tự ma trận chuyển đổi cho mã Miller với xác suất xuất hiện các ký hiệu đầu vào như nhau $q_1 = q_2 = 1/2$ hay $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$ là:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-3-49)$$

Ma trận xác suất chuyển đổi được sử dụng trong việc xác định các tính chất về phổ của các tín hiệu điều chế số có nhớ.

6-3-3. Điều chế phi tuyến có nhớ

Trong phần này ta xét một loại điều chế số trong đó pha của tín hiệu biến đổi liên tục. Điều này là kết quả của các bộ điều chế pha hay tần số có nhớ. Phương pháp điều chế như thế là không tuyến tính hay phi tuyến.

FSK pha liên tục (Continuous Phase FSK-CPFSK) Tín hiệu FSK thông thường được tạo ra bởi việc dịch chuyển tần số một lượng $f_n = \frac{1}{2} \Delta f I_n$, $I_n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$ để phản ánh thông tin số mang đi. Loại tín hiệu FSK là không nhớ. Sự chuyển đổi từ tần số này sang tần số khác được thực hiện bởi $M = 2^k$ bộ dao động tương ứng với các tần số được lựa chọn và chọn một trong số M tần số ứng với một ký hiệu k bit nào đó được truyền đi trong một khoảng thời gian $T = k/R$ giây. Tuy nhiên sự chuyển đổi đột ngột từ bộ dao động này sang bộ dao động khác tạo nên các búp sóng phụ tương đối rộng bên cạnh dải phổ chủ yếu của tín hiệu và đòi hỏi độ rộng dải thông của kênh phải đủ rộng để truyền tín hiệu.

Để tránh việc sử dụng các tín hiệu có các búp sóng phụ rộng, vật mang thông tin được điều chế ở một tần số và tần số này biến đổi một cách liên tục. Kết quả của loại điều chế này là pha của tín hiệu biến đổi một cách liên tục nên nó được gọi là điều chế tần số pha liên tục (CPFSK). Loại tín hiệu FSK này là có nhớ vì pha của vật mang thay đổi một cách liên tục.

Để biểu diễn tín hiệu CPFSK, ta bắt đầu với tín hiệu PAM:

$$d(t) = \sum_n I_n g(t - nT) \quad (6-3-50)$$

$\{I_n\}$ ký hiệu dãy giá trị của biên độ khi biến đổi các khối (ký hiệu) k bit nhị phân từ dãy thông tin vào $\{a_n\}$ thành các mức tín hiệu $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$ và $g(t)$ là xung chữ nhật biên độ $1/2$ với độ rộng T . Tín hiệu $d(t)$ được sử dụng để điều chế tần số vật mang. Tín hiệu tần số thấp tương đương là:

$$v(t) = \sqrt{\frac{2\zeta}{T}} \exp \left\{ j \left[4\pi f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau + \phi_0 \right] \right\} \quad (6-3-51)$$

với f_d là độ biến đổi cực đại về tần số và ϕ_0 là pha ban đầu của vật mang. Tín hiệu điều chế tương ứng với (6-3-51) được biểu diễn như sau:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2\zeta}{T}} \cos[2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{I}) + \phi_0] \quad (6-3-52)$$

ở đây $\phi(t; \mathbf{I})$ biểu diễn sự biến đổi về pha theo thời gian của vật mang, được định nghĩa là:

$$\phi(t; \mathbf{I}) = 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau = 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t \left[\sum_n I_n g(\tau - nT) \right] d\tau \quad (6-3-53)$$

Chú ý rằng mặc dù $d(t)$ có các điểm gián đoạn nhưng tích phân của $d(t)$ là liên tục. Như vậy ta có tín hiệu pha biến đổi liên tục. Pha của vật mang trong khoảng thời gian $nT \leq t \leq (n+1)T$ được xác định bởi tích phân (6-3-53). Như vậy:

$$\phi(t; \mathbf{I}) = 2\pi T f_d \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + 2\pi f_d (t - nT) I_n = \theta_n + 2\pi h I_n q(t - nT) \quad (6-3-54)$$

$h, \theta_n, q(t)$ được định nghĩa như sau:

$$h = 2T f_d \quad (6-3-55)$$

$$\theta_n = \pi h \sum_{k=1}^{n-1} I_k \quad (6-3-56)$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t/2T & (0 \leq t \leq T) \\ 1/2 & (t > T) \end{cases} \quad (6-3-57)$$

Ta thấy rằng θ_n biểu thị tính chất nhớ của tất cả các tín hiệu tới thời điểm $(n-1)T$. Tham số h gọi là hệ số điều chế.

Điều chế pha liên tục (Continuous Phase Modulation - CPM) Khi biểu diễn tín hiệu CPFSK ở dạng công thức (6-3-54), ta thấy tín hiệu này là một trường hợp đặc biệt của lớp tổng quát các tín hiệu điều chế pha liên tục (CPM) với pha vật mang là:

$$\phi(t; \mathbf{I}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^n I_k h_k q(t - kT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (6-3-58)$$

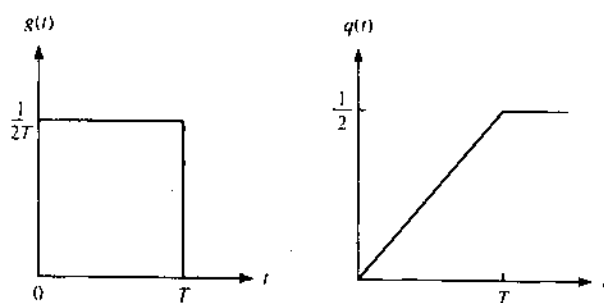
với I_k là dãy các ký hiệu mang thông tin lấy các giá trị $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$, $\{h_k\}$ là dãy các hệ số điều chế và $q(t)$ là một tín hiệu chuẩn hóa nào đó.

Khi $h_k = h$ với mọi k , nghĩa là hệ số điều chế là không đổi đối với mọi ký hiệu. Khi hệ số điều chế thay đổi từ ký hiệu này sang ký hiệu khác, tín hiệu CPM được gọi là tín hiệu đa hệ số điều chế. Trong trường hợp đó $\{h_k\}$ thay đổi theo vòng tròn trên tập hợp các hệ số.

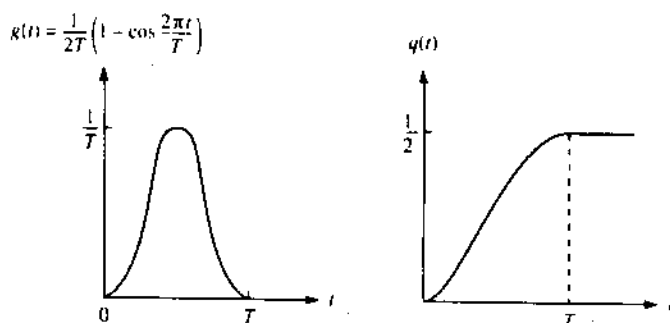
Tín hiệu $q(t)$ có thể được biểu diễn một cách tổng quát là tích phân của một xung $g(t)$ nào đó:

$$q(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (6-3-59)$$

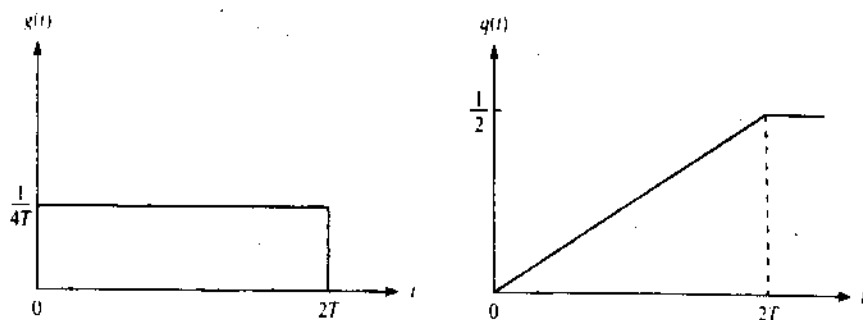
Nếu $g(t) = 0$ với $t > T$ thì tín hiệu CPM được gọi là có *đáp ứng đầy đủ*. Nếu $g(t) \neq 0$ với $t > T$ thì tín hiệu CPM được gọi là có *đáp ứng từng phần*. Hình 6-3-16 biểu diễn một số loại xung $g(t)$ và $q(t)$ tương ứng. Ta nhận thấy rằng tín hiệu CPM thay đổi vô hạn nếu ta chọn các tín hiệu xung $g(t)$ khác nhau, thay đổi hệ số điều chế h và bộ ký hiệu M .



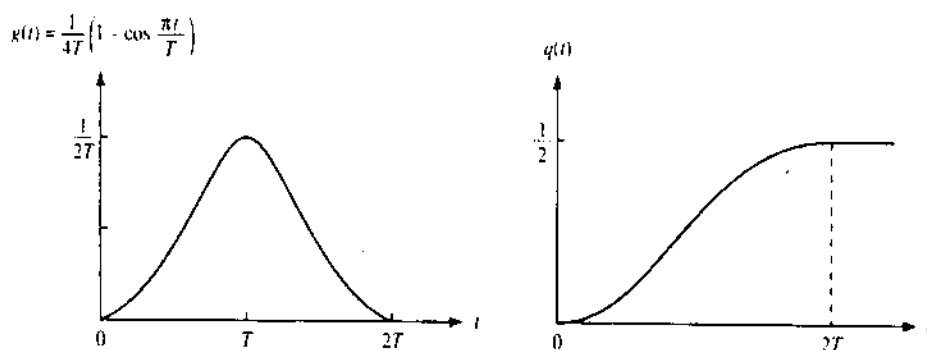
(a)



(b)



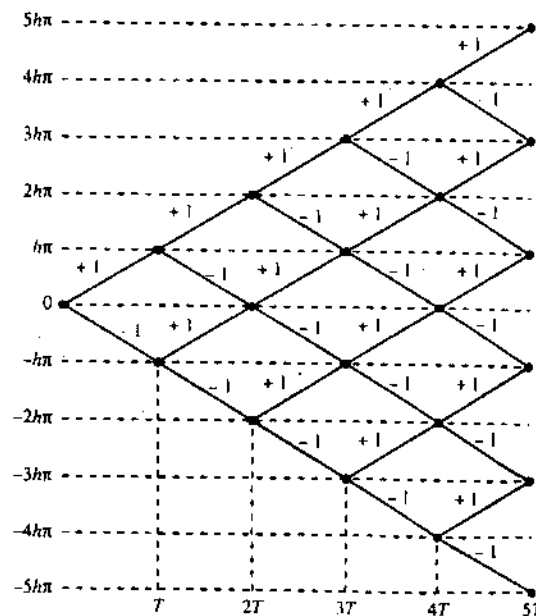
(c)



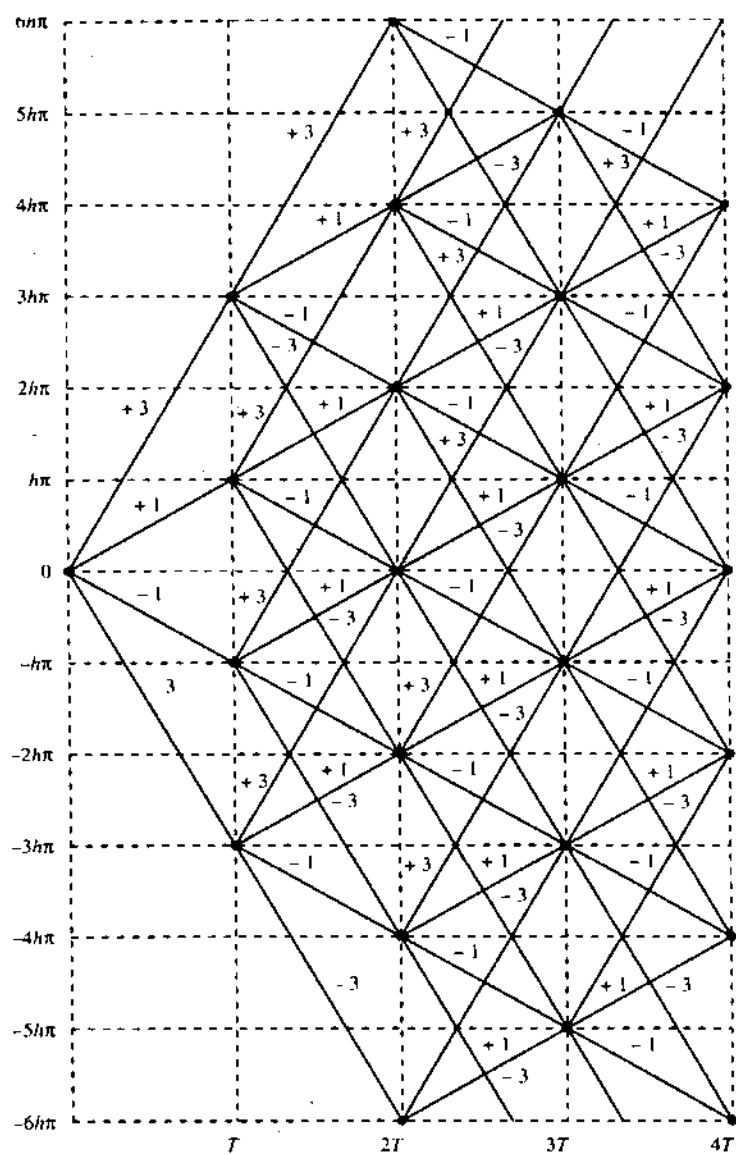
(d)

Hình 6-3-16: Xung cho tín hiệu CPM đáp ứng đầy đủ (a, b) và xung cho tín hiệu CPM đáp ứng từng phần (c, d)

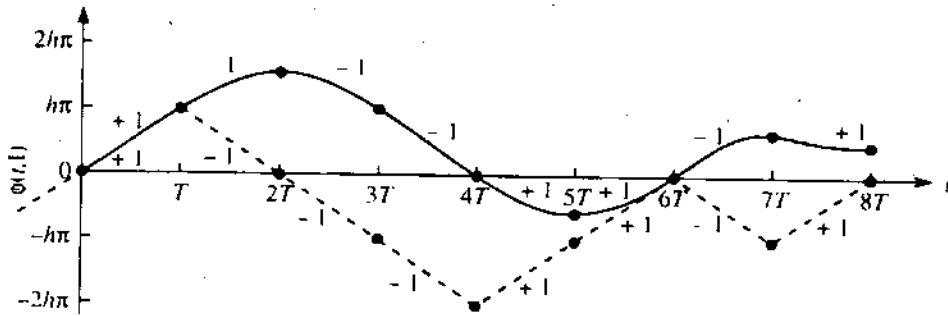
Bây giờ ta xét tới quỹ đạo pha $\phi(t; \mathbf{I})$ được tạo ra bởi tất cả các giá trị có thể có của dãy thông tin $\{I_n\}$. Ví dụ trong trường hợp CPFSK với hai ký hiệu nhị phân $I_n = \pm 1$, tập hợp các quỹ đạo pha bắt đầu tại thời điểm $t = 0$ được vẽ như trên hình 6-3-17. Quỹ đạo pha của tín hiệu CPFSK bốn mức được vẽ trên hình 6-3-18. Các sơ đồ pha này được gọi là cây pha. Ta thấy rằng các cây pha của tín hiệu CPFSK là tuyến tính từng khúc do tín hiệu xung $g(t)$ là xung chữ nhật. Quỹ đạo pha sẽ trở nên đều đặn hơn nếu $g(t)$ không có các điểm gián đoạn, như các xung cosin. Ví dụ quỹ đạo pha tạo ra bởi dãy $(1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$ cho tín hiệu CPM đáp ứng từng phần, xung cosin độ dài $3T$ được vẽ trên hình 6-3-19.



Hình 6-3-17: Quỹ đạo pha của tín hiệu CPFSK nhị phân



Hình 6-3-18: Quỹ đạo pha của tín hiệu CPFSK bốn mức



Hình 6-3-19: Quỹ đạo pha của tín hiệu CPFSK (đường đứt nét) và tín hiệu CPM nhị phân đáp ứng từng phần dựa trên xung cosin độ rộng $3T$ (đường liền nét)

Cây pha trong các hình trên lớn dần theo thời gian. Tuy nhiên pha của vật mang chỉ biến đổi trong khoảng từ $\phi = 0$ tới $\phi = 2\pi$ hay từ $\phi = -\pi$ tới $\phi = \pi$. Khi các quỹ đạo pha được vẽ với module 2π (trong khoảng $-\pi$ tới π), cây pha trở thành có cấu trúc và được gọi là lưới pha. Để có thể quan sát được sơ đồ lưới pha, ta có thể vẽ hai thành phần vuông góc $x_c(t; I) = \cos\phi(t; I)$ và $x_s(t; I) = \sin\phi(t; I)$ như là các hàm theo thời gian. Như vậy ta tạo ra một hình vẽ ba chiều mà các thành phần vuông góc x_c và x_s ở trên biên của vành tròn bán kính đơn vị. Hình 6-3-20 vẽ lưới pha hay vòng pha của phép điều chế nhị phân, hệ số điều chế $h = 1/2$ và tín hiệu xung cosin độ dài $3T$.

Việc biểu diễn một cách đơn giản hơn cho quỹ đạo pha có thể thực hiện bằng cách chỉ thể hiện giá trị cuối cùng của pha tín hiệu tại các thời điểm $t = nT$. Trong trường hợp này ta thấy hệ số điều chế của tín hiệu CPM là số hữu tỷ. Đặc biệt nếu $h = m/p$ với m và p là hai số nguyên thì tín hiệu CPM đáp ứng đầy đủ tại các thời điểm $t = nT$ có các giá trị pha là :

$$\theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (6-3-60)$$

khi m chẵn và

$$\theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(2p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (6-3-61)$$

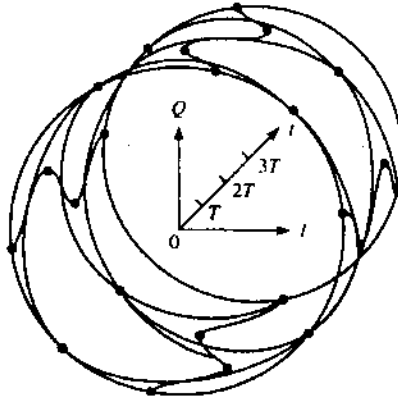
với m lẻ. Như vậy có p giá trị pha khi m chẵn và $2p$ giá trị pha khi m lẻ. Mặt khác khi tín hiệu xung kéo dài L lần khoảng thời gian một ký hiệu (tín hiệu CPM đáp ứng từng phần), số lượng trạng thái pha tăng tới giá trị cực đại S_t :

$$S_t = \begin{cases} pM^{L-1} & (m \text{ chẵn}) \\ 2pM^{L-1} & (m \text{ lẻ}) \end{cases} \quad (6-3-62)$$

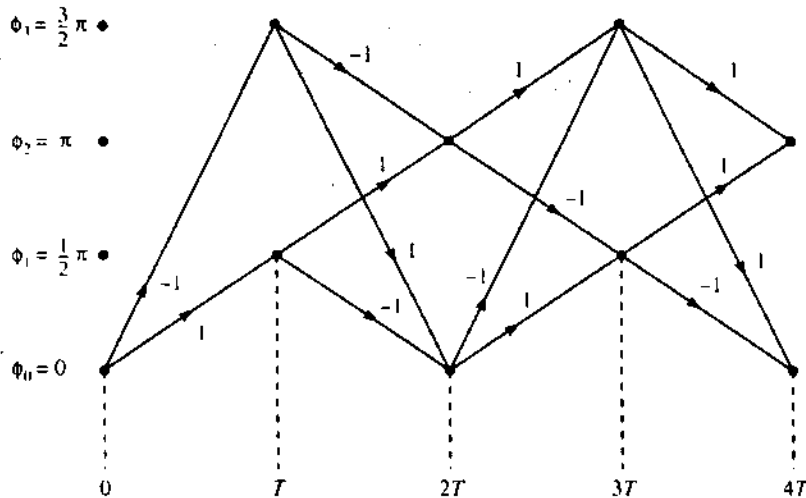
với m là số lượng các ký hiệu. Ví dụ đối với tín hiệu CPFSK nhị phân (đáp ứng đầy đủ và xung vuông) với $h = 1/2$ và $S_t = 4$ trạng thái pha. Lưới trạng thái pha cho tín hiệu này vẽ trên hình 6-3-21. Sự chuyển đổi pha từ trạng thái này sang trạng thái khác không phải là quỹ đạo pha thật sự. Chúng biểu diễn sự chuyển tiếp về pha của các trạng thái tại các thời điểm $t = nT$.

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRUYỀN TIN

Một cách biểu diễn khác của lưới trạng thái là sơ đồ trạng thái, biểu diễn sự chuyển đổi trạng thái tại các thời điểm $t = nT$. Đó còn là kiểu biểu diễn các tính chất của tín hiệu CPM một cách đơn giản. Chỉ có các trạng thái pha có thể và sự chuyển đổi của chúng được vẽ trên sơ đồ trạng thái. Ví dụ sơ đồ trạng thái tín hiệu CPFSK với $h = 1/2$ được cho trên hình 6-3-22.



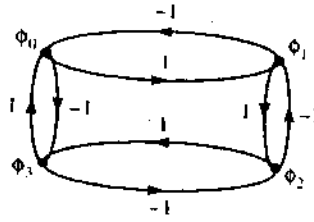
Hình 6-3-20: Vòng pha của tín hiệu CPM nhị phân, $h = 1/2$ và xung cosin độ dài $3T$



Hình 6-3-21: Lưới trạng thái của tín hiệu CPFSK nhị phân với $h = 1/2$

Tín hiệu dịch chuyển pha tối thiểu MSK (Minimum Shift Keying) MSK là một dạng đặc biệt của tín hiệu nhị phân CPFSK (cũng là của tín hiệu CPM) với hệ số điều chế $h = 1/2$. Pha của vật mang trong khoảng thời gian $nT \leq t \leq (n+1)T$ là:

$$\phi(t; \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \pi \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \pi I_n q(t - nT) = \theta_n + \frac{1}{2} \pi I_n \left(\frac{t - nT}{T} \right), \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (6-3-63)$$



Hình 6-3-22: Sơ đồ trạng thái của tín hiệu CPFSK nhị phân với $h = 1/2$

và tín hiệu điều chế là:

$$s(t) = A \cos \left[2\pi f_c t + \theta_n + \frac{1}{2} \pi I_n \left(\frac{t - nT}{T} \right) \right] = A \cos \left[2\pi \left(f_c + \frac{1}{4T} I_n \right) t - \frac{1}{2} n\pi I_n + \theta_n \right]$$

$$nT \leq t \leq (n+1)T \quad (6-3-64)$$

Biểu thức trên chỉ ra rằng tín hiệu CPFSK nhị phân có thể biểu diễn dưới dạng tín hiệu cosin nhận một trong hai giá trị tần số có thể trong khoảng thời gian $nT \leq t \leq (n+1)T$, ta định nghĩa hai tần số đó là:

$$f_1 = f_c - \frac{1}{4T}$$

$$f_2 = f_c + \frac{1}{4T} \quad (6-3-65)$$

Tín hiệu CPFSK nhị phân có thể viết lại dưới dạng:

$$s_i(t) = A \cos \left[2\pi f_i t + \theta_n + \frac{1}{2} n\pi (-1)^{i-1} \right], \quad i = 1, 2 \quad (6-3-66)$$

Độ phân biệt tần số là $\Delta f = f_2 - f_1 = 1/2T$. Nhắc lại $\Delta f = 1/2T$ là độ chênh lệch tần số tối thiểu để bảo đảm tính trực giao giữa hai tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$ trong khoảng thời gian T . Điều đó nói lên rằng tín hiệu MSK là tín hiệu CPFSK nhị phân với $h = 1/2$.

Tín hiệu MSK có thể được biểu diễn dưới dạng tín hiệu PSK bốn mức. Để nêu rõ điều này, ta có thể biểu diễn tín hiệu điều chế số tần số thấp tương đương như sau:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_{2n} g(t - 2nT) - jI_{2n+1} g(t - 2nT - T)] \quad (6-3-67)$$

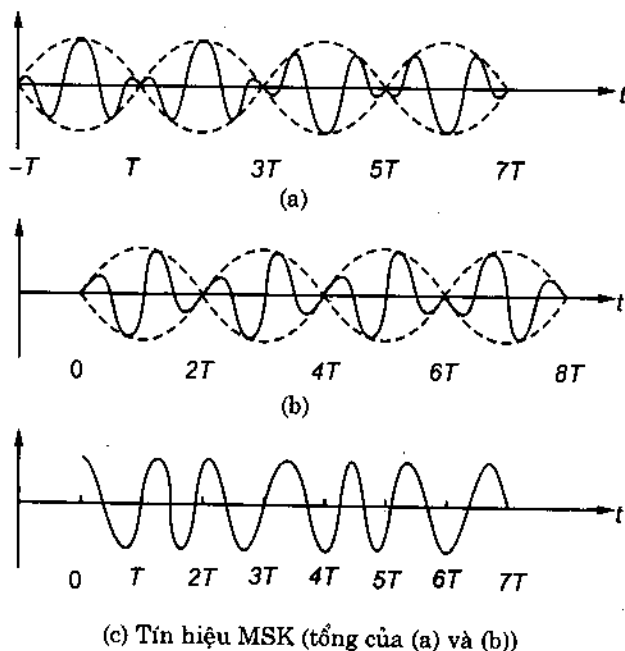
$g(t)$ là xung hình sin được định nghĩa là:

$$g(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2T} t & (0 \leq t \leq 2T) \\ 0 & (t < 0 \text{ hoặc } t > 2T) \end{cases} \quad (6-3-68)$$

Như vậy loại tín hiệu này có thể được xem như tín hiệu PSK bốn mức. Các ký hiệu số thứ tự chẵn $\{I_{2n}\}$ của dãy thông tin $\{I_n\}$ được truyền bằng vật mang cosin và các ký hiệu số thứ tự lẻ $\{I_{2n+1}\}$ được truyền bằng vật mang sin. Tốc độ truyền trên hai vật mang trực giao là $1/2T$ bit/s và như vậy tốc độ truyền đồng thời là $1/T$ bit/s. Nhớ rằng sự chuyển đổi các bit trên các thành phần mang cosin và sin lệch nhau T giây. Vì lý do đó tín hiệu:

$$s(t) = A \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{2n} g(t - 2nT) \right] \cos 2\pi f_c t + \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{2n+1} g(t - 2nT - T) \right] \sin 2\pi f_c t \right\} \quad (6-3-69)$$

gọi là tín hiệu PSK lệch vuông góc (Offset Quadrature PSK - OQPSK, Staggered Quadrature PSK - SQPSK). Hình 6-3-23 biểu diễn tín hiệu MSK là tổng hai tín hiệu PSK nhị phân vuông góc.

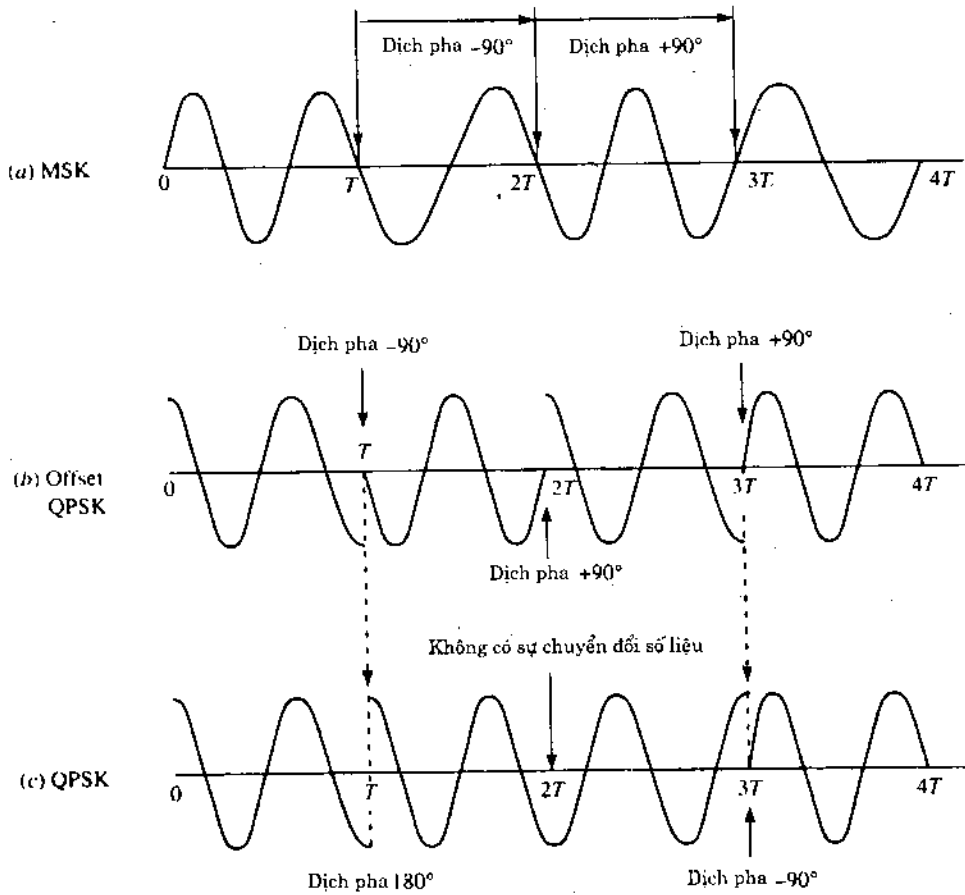


Hình 6-3-23: Biểu diễn tín hiệu MSK

Ta có thể so sánh tín hiệu MSK với tín hiệu OQPSK, tín hiệu xung $g(t)$ chữ nhật $0 \leq t \leq 2T$ và với tín hiệu QPSK với tín hiệu xung chữ nhật $0 \leq t \leq 2T$. Rõ ràng cả ba phương pháp tạo ra tốc độ số liệu giống nhau. Tín hiệu MSK có pha liên tục, tín hiệu OQPSK là hai tín hiệu PSK nhị phân với sự dịch chuyển về pha lệch nhau T giây. Như vậy tín hiệu này có đột biến về pha $\pm 90^\circ$ tại các thời điểm cách nhau T giây. Mặt khác tín hiệu PSK bốn mức thông thường (QPSK) có đột biến về pha $\pm 180^\circ$ hay $\pm 90^\circ$ tại các thời điểm cách nhau $2T$ giây. Hình 6-3-24 mô tả ba tín hiệu này.

Sơ đồ không gian tín hiệu của tín hiệu CPM Nói chung, tín hiệu có pha liên tục không thể biểu diễn bởi các điểm rời rạc trong không gian tín hiệu như tín hiệu PAM, PSK hay QAM do pha của vật mang thay đổi theo thời gian. Thay vào đó, tín hiệu có pha liên tục được mô tả bởi quỹ đạo từ trạng thái pha này sang trạng thái pha khác. Với tín hiệu CPM biên độ không đổi, quỹ đạo pha là đường tròn.

Ví dụ trên hình 6-3-25 vẽ sơ đồ không gian tín hiệu (quỹ đạo pha) của các tín hiệu CPFSK với $h = 1/4$, $h = 1/3$, $h = 1/2$ và $h = 2/3$. Điểm đầu và điểm cuối của quỹ đạo pha được đánh dấu bởi các điểm. Độ dài quỹ đạo pha tăng lên khi h tăng. Việc tăng hệ số điều chế h cũng sẽ làm tăng độ rộng phổ, phần sau sẽ chứng minh điều này.



Hình 6-3-24: Tín hiệu MSK (a), OQPSK (b) và QPSK (c)

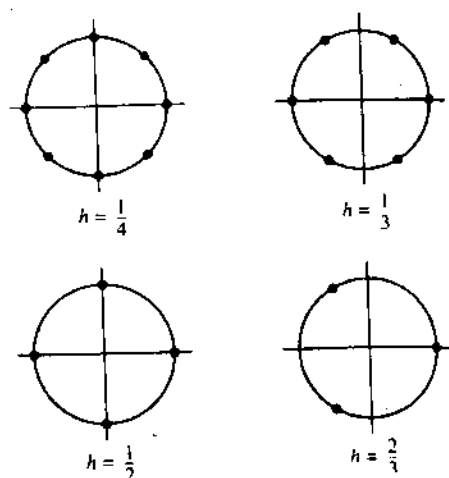
Tín hiệu CPM đa biên độ Tín hiệu CPM đa biên độ là mở rộng của tín hiệu CPM thông thường, trong đó biên độ tín hiệu biến đổi trong một tập hợp các giá trị biên độ khi pha của tín hiệu biến đổi liên tục. Ví dụ ta xét tín hiệu CPFSK hai giá trị biên độ, được mô tả toán học như sau:

$$s(t) = 2A \cos[2\pi f_c t + \phi_2(t; I)] + A \cos[2\pi f_c t + \phi_1(t; J)] \quad (6-3-70)$$

với

$$\phi_2(t; I) = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \frac{\pi h I_n (t - nT)}{T}, \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (6-3-71)$$

$$\phi_1(t; J) = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} J_k + \frac{\pi h J_n (t - nT)}{T}, \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (6-3-72)$$



Hình 6-3-25: Sơ đồ không gian tín hiệu của tín hiệu CPFSK

Thông tin được truyền đi bởi các dãy ký hiệu $\{I_n\}$ và $\{J_n\}$ xuất phát từ hai dãy thông tin nhị phân độc lập $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ lấy hai giá trị $\{0, 1\}$. Ta nhận thấy rằng tín hiệu ở công thức (6-3-70) là sự chuyển đổi của hai tín hiệu CPFSK có biên độ khác nhau. Tuy nhiên hai dãy $\{I_n\}$ và $\{J_n\}$ không độc lập thống kê nhưng cũng bị ràng buộc để tín hiệu có pha biến đổi liên tục khi chuyển đổi giữa hai thành phần.

Với trường hợp $h = 1/2$, ta có sự chuyển đổi giữa hai tín hiệu MSK. Khi chuyển đổi, hai thành phần có biên độ khác nhau hoặc cùng pha hoặc lệch pha 180° . Sự thay đổi về pha được xác định bởi thành phần có biên độ lớn hơn, trong khi đó sự thay đổi về biên độ được xác định bởi thành phần có biên độ nhỏ hơn. Thành phần có biên độ nhỏ hơn bị ràng buộc như vậy, độc lập với pha của nó, tại các thời điểm đầu và cuối khoảng thời gian một ký hiệu, hoặc cùng pha hoặc lệch pha 180° so với thành phần biên độ lớn. Khi đó các dãy ký hiệu $\{I_n\}$ và $\{J_n\}$ có thể được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} I_n &= 2a_n - 1 \\ J_n &= I_n(1 - 2b_n) = I_n \left(1 - \frac{b_n}{h}\right) \end{aligned} \quad (6-3-73)$$

Các mối liên hệ này được tóm tắt trong bảng 6-3-1.

Bảng 6-3-1

a_n	b_n	I_n	J_n	Quan hệ biên độ-pha
0	0	-1	-1	Biên độ không đổi, pha giảm
0	1	-1	1	Biên độ thay đổi, pha giảm
1	0	1	1	Biên độ không đổi, pha tăng
1	1	1	-1	Biên độ thay đổi, pha tăng

Tổng quát hơn, tín hiệu CPFSK đa biên độ với n thành phần có thể được biểu diễn thành:

$$s(t) = 2^{N-1} \cos[2\pi f_c t + \phi_N(t; \mathbf{I})] + \sum_{m=1}^{N-1} 2^{m-1} \cos[2\pi f_c t + \phi_m(t; \mathbf{J}_m)] \quad (6-3-74)$$

với

$$\phi_N(t; \mathbf{I}) = \pi h I_n \frac{t - nT}{T} + \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k, \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (6-3-75)$$

$$\phi_m(t; \mathbf{J}_m) = I_n \pi \left[h + \frac{1}{2} (J_{mn} + 1) \right] \frac{t - nT}{T} + \sum_{k=-\infty}^{n-1} \pi I_k \left[h + \frac{1}{2} (J_{mk} + 1) \right], \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (6-3-76)$$

$\{I_n\}$ và $\{J_{mn}\}$ là hai dãy nhị phân độc lập thống kê, lấy giá trị trong tập $\{-1, 1\}$.

Từ (6-3-75) và (6-3-76) ta thấy rằng mỗi thành phần trong tổng hoặc cùng pha hoặc lệch pha 180° so với thành phần lớn nhất tại thời điểm cuối của khoảng thời gian thứ n , tức là tại thời điểm $t = (n+1)T$. Các trạng thái của tín hiệu được xác định bởi các mức biên độ thuộc tập hợp $\{1, 3, 5, \dots, 2^N - 1\}$ và các mức pha thuộc tập $\{0, \pi\theta, 2\pi\theta, \dots, 2\pi - \pi\theta\}$. Hình 6-3-26 vẽ sơ đồ không gian tín hiệu cho tín hiệu CPFSK hai mức biên độ với $h = 1/4$, $h = 1/3$, $h = 1/2$ và $h = 2/3$. Sơ đồ không gian tín hiệu cho tín hiệu CPFSK ba mức ($N = 3$) vẽ trên hình 6-3-27. Tín hiệu đó có bốn mức biên độ. Số lượng các trạng thái phụ thuộc hệ số điều chế h và số mức N . Chú ý rằng điểm đầu và điểm cuối của quỹ đạo pha được đánh dấu bởi các điểm.

6-4. PHỔ CỦA CÁC TÍN HIỆU ĐIỀU CHẾ SỐ

Trong phần lớn các hệ thống truyền thông số, độ rộng dải thông của kênh là hữu hạn. Từ đó người thiết kế hệ thống phải quan tâm tới giới hạn của dải thông của kênh để chọn một kỹ thuật điều chế sử dụng trong truyền tin. Do đó việc tìm hiểu các tính chất về phổ của các tín hiệu điều chế số là hết sức quan trọng.

Do dãy thông tin số là ngẫu nhiên, tín hiệu điều chế số là một quá trình ngẫu nhiên. Ta cần xác định phổ mật độ công suất của các quá trình ngẫu nhiên mô tả tín hiệu điều chế số. Từ phổ mật độ công suất ta có thể xác định dải thông cần thiết của kênh để truyền tín hiệu mang thông tin ([2], [5], [6], [9]).

6-4-1. Phổ mật độ công suất của các tín hiệu điều chế tuyến tính

Tín hiệu thông dải $s(t)$ được biểu diễn qua tín hiệu $v(t)$ tần số thấp tương đương như sau:

$$s(t) = \text{Re}[v(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Hàm tự tương quan của $s(t)$ là:

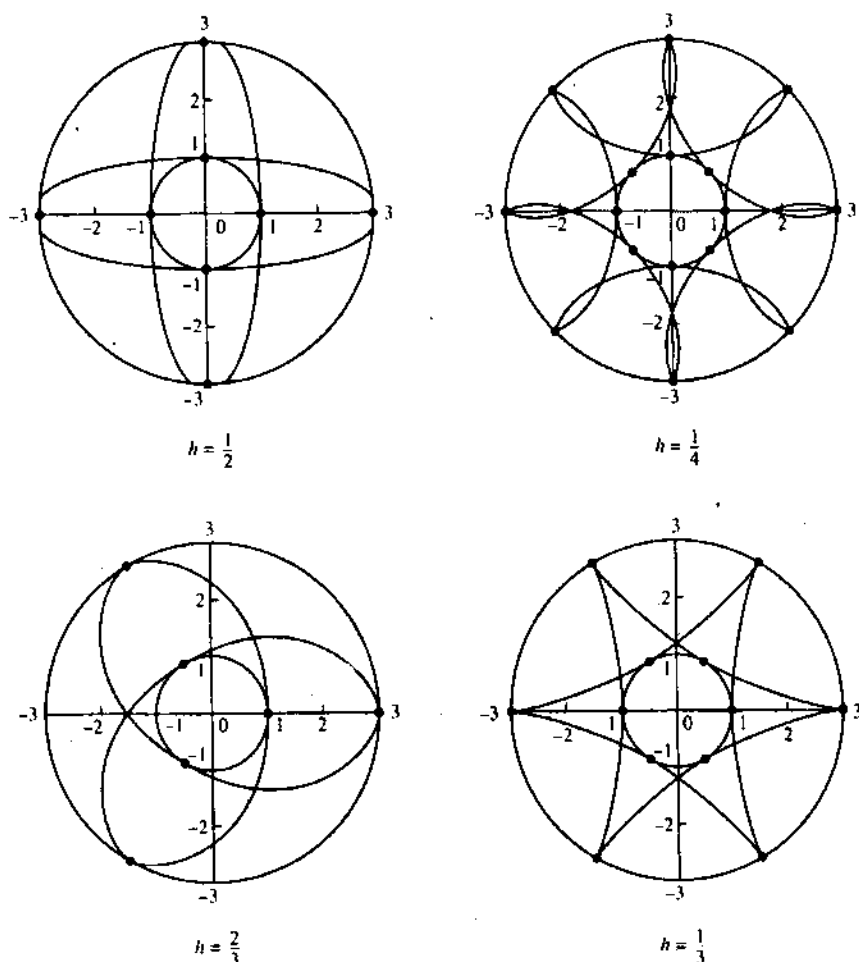
$$\phi_{ss}(\tau) = \text{Re}[\phi_{vv}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}] \quad (6-4-1)$$

$\phi_{vv}(\tau)$ là hàm tự tương quan của $v(t)$. Biến đổi Furiê của (6-4-1) cho ta công thức phổ mật độ công suất $\Phi_{ss}(f)$ như sau:

$$\Phi_{ss}(f) = \frac{1}{2} [\Phi_{vv}(f - f_c) + \Phi_{vv}(-f - f_c)] \quad (6-4-2)$$

$\Phi_v(f)$ là phổ mật độ công suất của $v(t)$. Từ đây ta thấy rằng cần phải xác định hàm tự tương quan và phổ mật độ công suất của tín hiệu tần số thấp tương đương $v(t)$. Trước hết ta xét các phương pháp điều chế số tuyến tính với $v(t)$ có dạng tổng quát như sau:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT) \quad (6-4-3)$$

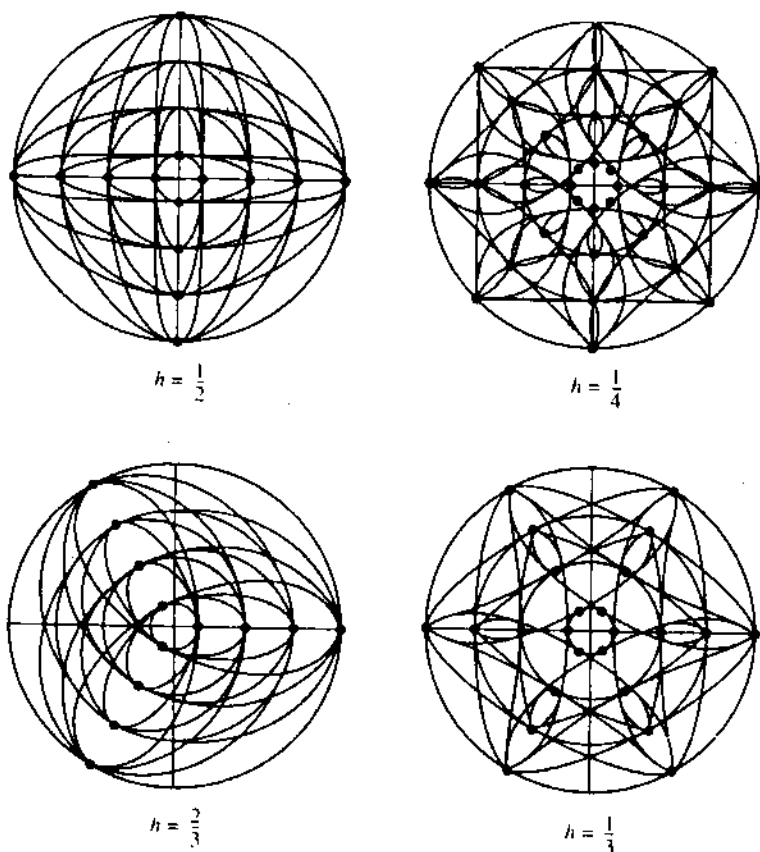


Hình 6-3-26: Sơ đồ không gian tín hiệu CPFSK hai thành phần

Tốc độ truyền là $1/T = R/k$ ký hiệu/s và $\{I_n\}$ là ký hiệu của chuỗi ký hiệu là kết quả của phép biến đổi các khối k ký hiệu nhị phân thành các điểm tín hiệu trong sơ đồ không gian tín hiệu tương ứng. Trong hệ PAM, dãy $\{I_n\}$ là thực và tương ứng với các giá trị biên độ của các mẫu tín hiệu truyền đi, còn trong các hệ thống PSK hay QAM hoặc PAM-PSK đồng thời, dãy $\{I_n\}$ có giá trị phức bởi các tín hiệu được biểu diễn trong không gian hai chiều.

Hàm tự tương quan của $v(t)$ là:

$$\phi_{vv}(t + \tau; t) = \frac{1}{2} E[v^*(t)v(t + \tau)] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[I_n^* I_m] g^*(t - nT) g(t + \tau - mT) \quad (6-4-4)$$



Hình 6-3-27: Sơ đồ không gian tín hiệu CPFSK ba thành phần

Ta giả thiết dãy $\{I_n\}$ là dừng theo nghĩa rộng có giá trị trung bình μ_i và hàm tự tương quan là:

$$\phi_{ii}(m) = \frac{1}{2} E[I_n^* I_{n+m}] \quad (6-4-5)$$

Từ đó (6-4-4) rút gọn lại thành:

$$\begin{aligned} \phi_{vv}(t + \tau; t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m-n) g^*(t-nT) g(t+\tau-mT) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT) \end{aligned} \quad (6-4-6)$$

Tổng thứ hai trong công thức trên $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT)$ tuần hoàn theo t với chu kỳ T , dẫn tới $\phi_{vv}(t + \tau; t)$ cũng tuần hoàn theo t với chu kỳ T :

$$\phi_{vv}(t + \tau + T; t+T) = \phi_{vv}(t + \tau; t) \quad (6-4-7)$$

Hơn nữa, giá trị trung bình của $v(t)$ là:

$$E[v(t)] = \mu, \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT) \quad (6-4-8)$$

cũng tuần hoàn với chu kỳ T . $v(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên có giá trị trung bình và hàm tự tương quan tuần hoàn và được gọi là quá trình ngẫu nhiên dừng vòng. Để tìm phổ mật độ công suất của quá trình dừng vòng thì phải bỏ qua sự phụ thuộc của $\phi_{vv}(t + \tau; t)$ theo t . Điều này có được nếu ta lấy trung bình của $\phi_{vv}(t + \tau; t)$ trong một chu kỳ:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{vv}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_{vv}(t + \tau; t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t - nT) g(t + \tau - nT - mT) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{(-T/2)-nT}^{(T/2)-nT} g^*(t) g(t + \tau - mT) dt \end{aligned} \quad (6-4-9)$$

Ta coi tích phân trong công thức trên như hàm tự tương quan của $g(t)$ và được định nghĩa là:

$$\phi_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) g(t + \tau) dt \quad (6-4-10)$$

Biểu thức (6-4-9) trở thành:

$$\bar{\phi}_{vv}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \phi_{gg}(\tau - mT) \quad (6-4-11)$$

Biến đổi Furiê của $\bar{\phi}_{vv}(\tau)$ cho ta phổ mật độ công suất trung bình của $v(t)$ là:

$$\Phi_{vv}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \Phi_{ii}(f) \quad (6-4-12)$$

$G(f)$ là biến đổi Furiê của $g(t)$ và $\Phi_{ii}(f)$ là ký hiệu phổ mật độ công suất của dãy thông tin, được định nghĩa là:

$$\Phi_{ii}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) e^{-j2\pi f m T} \quad (6-4-13)$$

Công thức (6-4-12) biểu diễn sự phụ thuộc của phổ mật độ công suất của $v(t)$ vào tính chất phổ của $g(t)$ và dãy $\{I_n\}$. Như vậy tính chất về phổ của $v(t)$ có thể được điều khiển bởi tín hiệu xung $g(t)$ và tính chất về sự tương quan của dãy thông tin $\{I_n\}$. Sự phụ thuộc của $\Phi_{vv}(f)$ và $G(f)$ là dễ hiểu nhưng sự ảnh hưởng của sự tương quan của dãy thông tin $\{I_n\}$ lên $\Phi_{vv}(f)$ tinh tế và khó nhận thấy hơn. Ta chú rằng với mỗi hàm tự tương quan $\phi_{ii}(m)$ tương ứng với phổ mật độ công suất $\Phi_{ii}(f)$ tuần hoàn với chu kỳ $1/T$. Hàm tự tương quan $\phi_{ii}(m)$ được cho bởi công thức sau:

$$\phi_{ii}(m) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \Phi_{ii}(f) e^{j2\pi f m T} df \quad (6-4-14)$$

Tiếp theo, xét trường hợp các ký hiệu của dãy thông tin là thực và không có tương quan chéo. Khi đó hàm tự tương quan $\phi_{ii}(m)$ được biểu diễn là:

$$\phi_{ii}(m) = \begin{cases} \sigma_i^2 + \mu_i^2 & (m = 0) \\ \mu_i^2 & (m \neq 0) \end{cases} \quad (6-4-15)$$

với σ_i^2 là sai phương của một ký hiệu. Thay (6-4-15) vào (6-4-13) ta có:

$$\Phi_{ii}(f) = \sigma_i^2 + \mu_i^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f m T} \quad (6-4-16)$$

Tổng trên tuần hoàn với chu kỳ $1/T$. Công thức trên cũng được viết thành dạng:

$$\Phi_{ii}(f) = \sigma_i^2 + \frac{\mu_i^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (6-4-17)$$

Thay (6-4-17) vào (6-4-12) ta thấy sự phụ thuộc phổ mật độ công suất của $v(t)$ vào dãy các ký hiệu thông tin khi các ký hiệu mang thông tin không có tương quan:

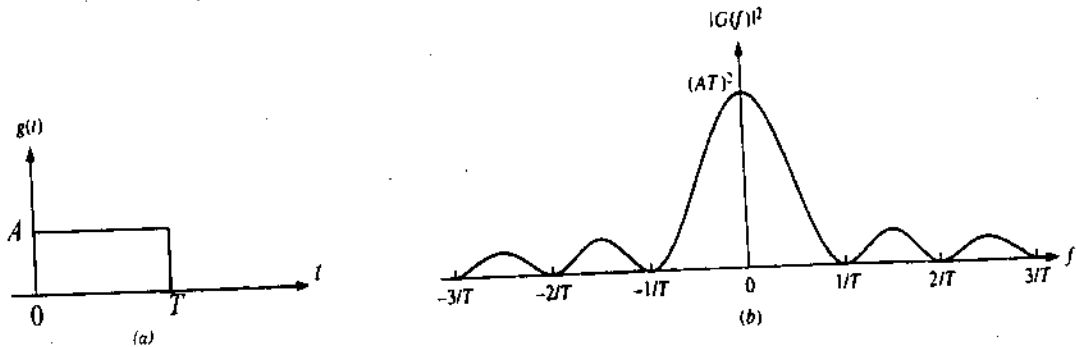
$$\Phi_{vv}(f) = \frac{\sigma_i^2}{T} |G(f)|^2 + \frac{\mu_i^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (6-4-18)$$

Phổ mật độ công suất chia làm hai phần. Phần thứ nhất là phổ liên tục, tính chất của nó chỉ phụ thuộc vào tính chất phổ của tín hiệu xung $g(t)$. Phần thứ hai gồm các thành phần tần số rời rạc cách nhau $1/T$, mỗi vạch có công suất tỷ lệ với $|G(f)|^2$ được tính tại tần số $f = m/T$. Chú ý rằng các thành phần tần số rời rạc không còn khi giá trị trung bình của dãy ký hiệu bằng 0 ($\mu_i = 0$). Như vậy người thiết kế hệ thống có thể lựa chọn tính chất về phổ của tín hiệu điều chế qua việc lựa chọn tính chất dãy ký hiệu truyền đi.

Ví dụ 6-4-1.

Xét xung chữ nhật trên hình 6-4-1(a). Biến đổi Furiê của $g(t)$ là:

$$G(f) = AT \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} e^{-j\pi f T}$$



Hình 6-4-1: Xung chữ nhật và phổ mật độ năng lượng $|G(f)|^2$

Như vậy:

$$|G(f)|^2 = (AT)^2 \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \quad (6-4-19)$$

$|G(f)|^2$ bằng 0 tại các tần số là bội của $1/T$ và suy giảm nghịch với bình phương của tần số. Từ đó các thành phần phổ rời rạc bằng 0 trừ một thành phần và ta có:

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRUYỀN TIN

$$\Phi_{vv}(f) = \sigma_i^2 A^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 + A^2 \mu_i^2 \delta(f) \quad (6-4-20)$$

Ví dụ 6-4-2

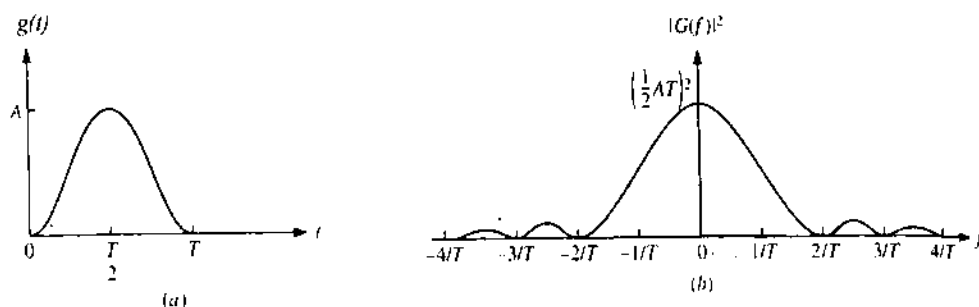
Xét xung $g(t)$ cosin như sau:

$$g(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right], 0 \leq t \leq T \quad (6-4-21)$$

Biến đổi Furiê của $g(t)$ là:

$$G(f) = \frac{AT}{2} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T (1 - f^2 T^2)} e^{-j\pi f T} \quad (6-4-22)$$

$g(t)$ và $|G(f)|^2$ được vẽ trên hình 6-4-2. $|G(f)|^2$ bằng 0 tại các tần số $f = nT$, $n = \pm 2, \pm 3, \dots$. Như vậy các thành phần phổ rời rạc trừ tại tần số $f = 0$ và $f = \pm 1/T$ đều bằng 0. So với phổ xung chữ nhật, phổ xung cosin có búp chính rộng hơn nhưng suy giảm tỷ lệ nghịch với f^6 .



Hình 6-4-2: Xung cosin và phổ mật độ công suất

Ví dụ 6-4-3

Để minh họa phổ của tín hiệu điều chế phụ thuộc vào dãy ký hiệu vào, ta xét dãy nhị phân $\{b_n\}$ và từ đó ta tạo ra các ký hiệu:

$$I_n = b_n + b_{n-1} \quad (6-4-23)$$

Giả thiết $\{b_n\}$ là các biến ngẫu nhiên không tương quan, có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương đơn vị. Hàm tự tương quan của dãy $\{I_n\}$ là:

$$\phi_{ii}(m) = E(I_n I_{n+m}) = \begin{cases} 2 & (m=0) \\ 1 & (m=\pm 1) \\ 0 & (m \neq 0, m \neq \pm 1) \end{cases} \quad (6-4-24)$$

Phổ mật độ công suất của dãy ký hiệu vào là:

$$\Phi_{ii}(f) = 2(1 + \cos 2\pi f T) = 4 \cos^2 \pi f T \quad (6-4-25)$$

và phổ mật độ công suất tương ứng của tín hiệu điều chế là:

$$\Phi_{vv}(f) = \frac{4}{T} |G(f)|^2 \cos^2 \pi f T \quad (6-4-26)$$

6-4-2. Phổ mật độ công suất các tín hiệu CPFSK và CPM

Trong phần này ta xét phổ mật độ công suất của các tín hiệu CPM biên độ không đổi đã được trình bày trong phần 6-3. Trước hết ta tính hàm tự tương quan và biến đổi Furiê của nó.

Tín hiệu CPM có biên độ không đổi có biểu thức là:

$$s(t; \mathbf{I}) = A \cos[2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{I})] \quad (6-4-27)$$

với

$$\phi(t; \mathbf{I}) = 2\pi h \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k q(t - kT) \quad (6-4-28)$$

Mỗi ký hiệu trong dãy $\{I_n\}$ nhận một trong M giá trị $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$. Các ký hiệu này là độc lập thống kê, có phân bố xác suất giống nhau với xác suất tiên nghiệm:

$$P_n = P(I_k = n), n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1) \quad (6-4-29)$$

và $\sum_n P_n = 1$. Tín hiệu xung $g(t) = q'(t)$ bằng 0 ở ngoài khoảng $[0, LT]$, $q(t) = 0$ với $t < 0$ và $q(t) = 1/2$ với $t > LT$. Hàm tự tương quan của tín hiệu thông thấp tương đương $v(t) = e^{j\phi(t; \mathbf{I})}$ là:

$$\phi_{vv}(t + \tau, t) = \frac{1}{2} E \left[\exp \left\{ j2\pi h \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)] \right\} \right] \quad (6-4-30)$$

$$= \frac{1}{2} E \left[\prod_{k=-\infty}^{\infty} \exp \{ j2\pi h I_k [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)] \} \right] \quad (6-4-31)$$

Do các ký hiệu $\{I_k\}$ là độc lập thống kê nên ta nhận được:

$$\phi_{vv}(t + \tau; t) = \frac{1}{2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-(M-1)}^{M-1} P_n \exp \{ j2\pi h n [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)] \} \right) \quad (6-4-32)$$

Hàm tự tương quan trung bình là:

$$\bar{\phi}_{vv}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_{vv}(t + \tau; t) dt \quad (6-4-33)$$

Mặc dù (6-4-32) chỉ ra rằng có vô số thừa số trong tích, nhưng $g(t) = q'(t) = 0$ với $t < 0$ và $t > LT$, $q(t) = 0$ với $t < 0$, nên chỉ có một số lượng hữu hạn các thừa số có thành phần mũ khác 1. Mặt khác, nếu ta đặt $\tau = \xi + mT$ với $0 \leq \xi < T$ và $m = 0, 1, \dots$ thì hàm tự tương quan trung bình đơn giản thành:

$$\bar{\phi}_{vv}(\xi + mT) = \frac{1}{2T} \int_0^T \prod_{n=-(M-1)}^{M-1} \left(P_n \exp \{ j2\pi h n [q(t + \xi - (k-m)T) - q(t - kT)] \} \right) dt \quad (6-4-34)$$

Chúng ta tập trung vào $\bar{\phi}_{vv}(\xi + mT)$ với $\xi + mT \geq LT$. Khi đó (6-4-34) có thể biểu diễn như sau:

$$\bar{\phi}_{vv}(\xi + mT) = [\psi(jh)]^{m-L} \lambda(\xi), m \geq L, 0 \leq \xi \leq T \quad (6-4-35)$$

$\psi(jh)$ là hàm đặc tính của dãy ngẫu nhiên $\{I_n\}$ được định nghĩa là:

$$\psi(jh) = E(e^{j\pi h I_n}) = \sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ lẻ}}}^{M-1} P_n e^{j\pi h n} \quad (6-4-36)$$

và $\lambda(\xi)$ là phần còn lại của hàm tự tương quan trung bình như sau:

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) = & \frac{1}{2T} \int_0^T \prod_{k=1-L}^0 \left(\sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ lẻ}}}^{M-1} P_n \exp \left\{ j2\pi h n \left[\frac{1}{2} - q(t - kT) \right] \right\} \right) * \\ & * \prod_{k=1-L}^0 \left(\sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ lẻ}}}^{M-1} P_n \exp \left\{ j2\pi h n q(t + \xi - kT) \right\} \right) dt, m \geq L \end{aligned} \quad (6-4-37)$$

Như vậy $\bar{\phi}_{vv}(\tau)$ được tách thành tích của hai thành phần $\psi(jh)$ và $\lambda(\xi)$ với $\tau = \xi + mT \geq LT$ và $0 \leq \xi \leq T$.

Biến đổi Furiê của $\bar{\phi}_{vv}(\tau)$ cho ta phổ mật độ công suất trung bình:

$$\Phi_{vv}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] \quad (6-4-38)$$

Nhưng

$$\int_0^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_0^{LT} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau + \int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (6-4-39)$$

Sử dụng (6-4-35), tích phân trong khoảng $LT \leq \tau < \infty$ trở thành:

$$\int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \sum_{m=L}^{\infty} \int_{mT}^{(m+1)T} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (6-4-40)$$

Đặt $\tau = \xi + mT$, (6-4-40) trở thành:

$$\begin{aligned} \int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau &= \sum_{m=L}^{\infty} \int_0^T \bar{\phi}_{vv}(\xi + mT) e^{-j2\pi f (\xi + mT)} d\xi \\ &= \sum_{m=L}^{\infty} \int_0^T \lambda(\xi) [\psi(jh)]^{m-L} e^{-j2\pi f (\xi + mT)} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(jh) e^{-j2\pi f nT} \int_0^T \lambda(\xi) e^{-j2\pi f (\xi + LT)} d\xi \end{aligned} \quad (6-4-41)$$

Ta có $|\psi(jh)| \leq 1$. Với các giá trị của h thoả mãn $|\psi(jh)| < 1$, tổng (6-4-41) hội tụ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(jh) e^{-j2\pi nT} = \frac{1}{1 - \psi(jh) e^{-j2\pi T}} \quad (6-4-42)$$

(6-4-41) trở thành:

$$\int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{1 - \psi(jh) e^{-j2\pi T}} \int_0^T \bar{\phi}_{vv}(\xi + LT) e^{-j2\pi f(\xi + LT)} d\xi \quad (6-4-43)$$

Sử dụng (6-4-38), (6-4-39) và (6-4-43) ta nhận được phổ mật độ công suất của tín hiệu CPM là:

$$\Phi_{vv}(f) = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{LT} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \frac{1}{1 - \psi(jh) e^{-j2\pi T}} \int_{LT}^{LT+T} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] \quad (6-4-44)$$

Đây là kết quả mong muốn khi $|\psi(jh)| < 1$. Nói chung phổ mật độ công suất được tính từ (6-4-44) bằng phương pháp số và hàm tự tương quan trung bình cũng được tính bằng phương pháp số từ (6-4-34).

Khi $|\psi(jh)| = 1$ tức là $h = K$ với K nguyên, ta có thể đặt:

$$\psi(jh) = e^{j2\pi v}, \quad 0 \leq v < 1 \quad (6-4-45)$$

(6-4-41) trở thành:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j2\pi T(f - v/T)n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{v}{T} - \frac{n}{T}\right) - j \frac{1}{2} \cot \pi T \left(f - \frac{v}{T}\right) \quad (6-4-46)$$

Phổ mật độ công suất chứa các xung ở các tần số:

$$f_n = \frac{n + v}{T}, \quad 0 \leq v < 1, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6-4-47)$$

Kết hợp (6-4-39), (6-4-41), (6-4-46) ta nhận được phổ mật độ công suất đầy đủ có cả thành phần liên tục và cả thành phần rời rạc.

Trở lại trường hợp $|\psi(jh)| < 1$, khi các ký hiệu đồng xác suất:

$$P_n = \frac{1}{M}, \text{ với mọi } n$$

thì hàm đặc tính trở thành:

$$\psi(jh) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ lẻ}}}^{M-1} e^{j\pi h n} = \frac{1}{M} \frac{\sin M\pi h}{\sin \pi h} \quad (6-4-48)$$

Như vậy trong trường hợp này $\psi(jh)$ là thực. Hàm tự tương quan trung bình trở thành:

$$\bar{\phi}_{vv}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_0^T \prod_{k=1-L}^{\lfloor \tau/T \rfloor} \frac{1}{M} \frac{\sin 2\pi h M [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)]}{\sin 2\pi h [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)]} dt \quad (6-4-49)$$

Phổ mật độ công suất trở thành:

$$\Phi_{vv}(f) = 2 \left[\int_0^{LT} \bar{\phi}_{vv}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau + \frac{1 - \psi(jh) \cos 2\pi f T}{1 + \psi^2(jh) - 2\psi(jh) \cos 2\pi f T} \int_{LT}^{LT+T} \bar{\phi}_{vv}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \right] \quad (6-4-50)$$

Phổ mật độ công suất của tín hiệu CPFSK Từ (6-4-50) với xung $g(t)$ là xung chữ nhật bằng 0 với t nằm ngoài khoảng $[0, T]$, ta nhận được phổ mật độ công suất:

$$\Phi_{vv}(f) = T \left[\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M A_n^2(f) + \frac{2}{M^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M B_{nm}(f) A_n(f) A_m(f) \right] \quad (6-4-51)$$

với

$$A_n(f) = \frac{\sin \pi \left[fT - \frac{1}{2}(2n-1-M)h \right]}{\pi \left[fT - \frac{1}{2}(2n-1-M)h \right]}$$

$$B_{nm}(f) = \frac{\cos(2\pi f T - \alpha_{nm}) - \psi \cos \alpha_{nm}}{1 + \psi^2 - 2\psi \cos 2\pi f T}$$

$$\alpha_{nm} = \pi h(m+n-1-M), \quad \psi \equiv \psi(jh) = \frac{\sin M\pi h}{M \sin \pi h} \quad (6-4-52)$$

Phổ mật độ công suất của tín hiệu CPFSK với $M = 2, 4, 8$ được vẽ trên hình 6-4-3, 6-4-4, 6-4-5 như là hàm của tần số chuẩn hóa fT với hệ số điều chế $h = 2f_d T$ là tham số. Chú ý rằng ta chỉ vẽ một nửa phổ trên hình vẽ do tính đối xứng và gốc tọa độ ứng với tần số f_c . Khi h gần 1, phổ rất nhọn, $h = 1$ ứng với $|\psi| = 1$ có các xung xuất hiện ở M tần số. Khi $h > 1$, phổ sẽ rộng hơn, do đó người ta thường dùng $h < 1$ để đỡ tốn dải thông của kênh.

Đặc biệt khi $h = 1/2$ ($f_d = 1/4T$) khi $A = 1$ trong (6-4-52) và $\psi = 0$ tương ứng với tín hiệu MSK. Phổ của tín hiệu này là:

$$\Phi_{vv}(f) = \frac{16A^2 T}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\pi f T}{1 - 16f^2 T^2} \right)^2 \quad (6-4-53)$$

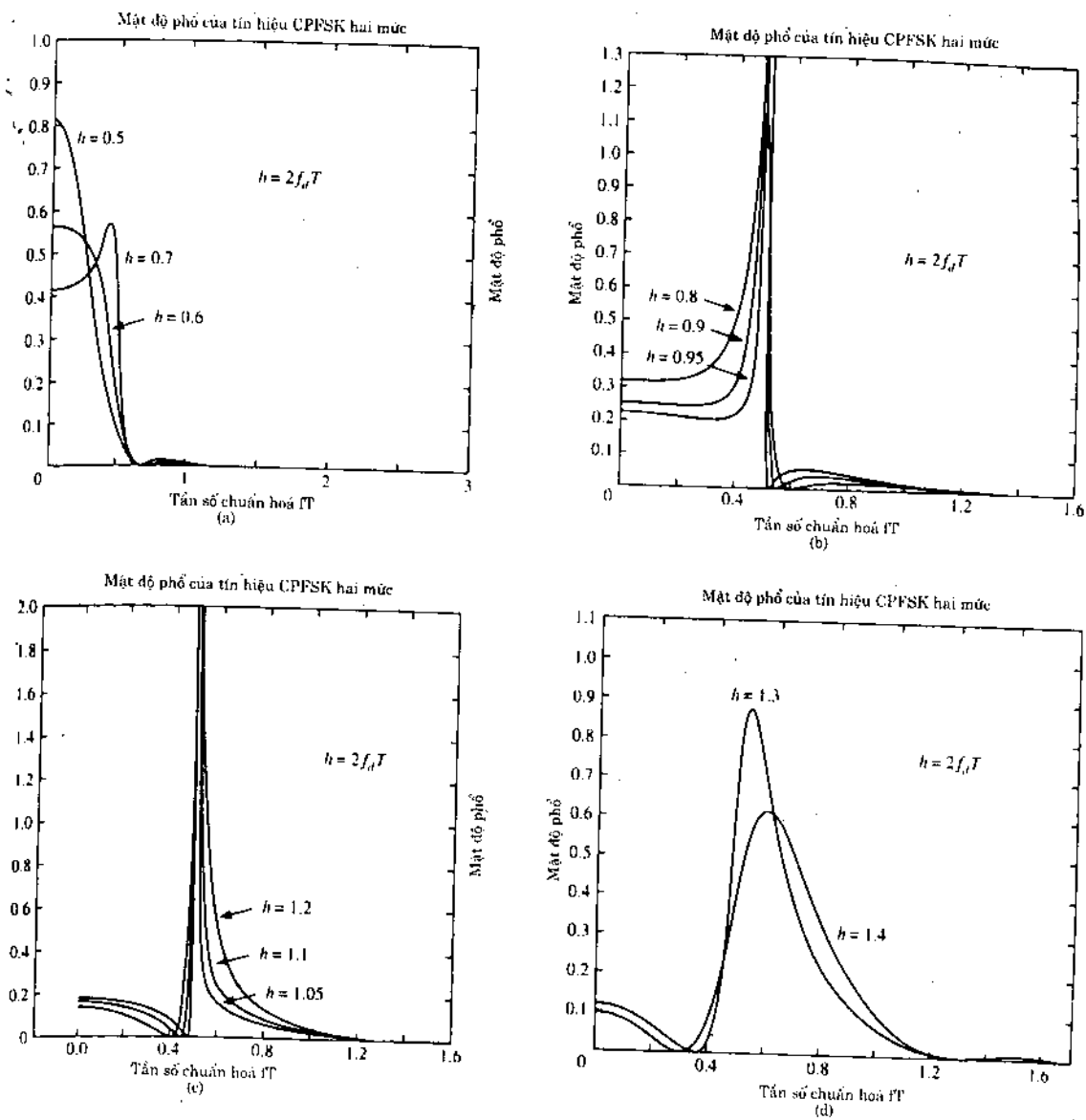
Phổ của tín hiệu OQPSK với xung $g(t)$ chữ nhật độ rộng T là:

$$\Phi_{vv}(f) = A^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \quad (6-4-54)$$

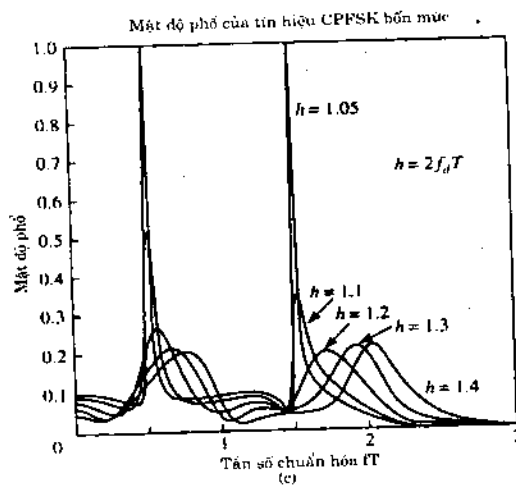
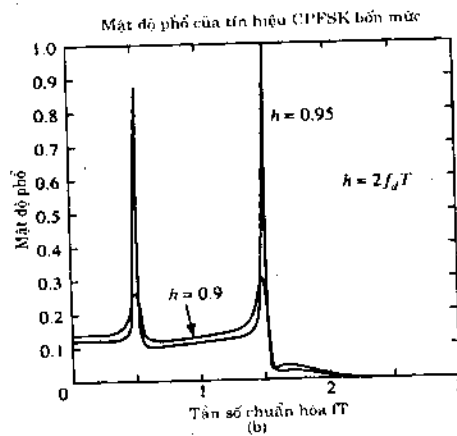
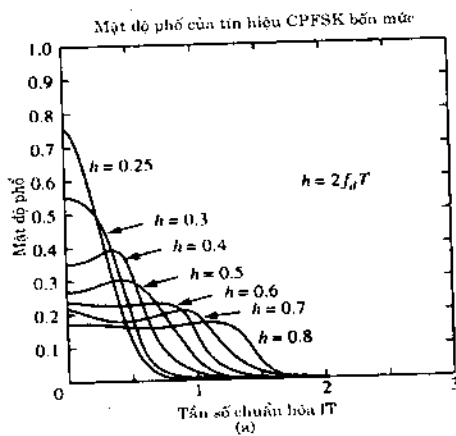
Đối với tín hiệu MSK, độ rộng thời gian của một bit là $T_b = T$ và với tín hiệu OQPSK là $T = 2T_b$ nên (6-4-54) trở thành:

$$\Phi_{vv}(f) = 2A^2 T_b \left(\frac{\sin 2\pi f T_b}{2\pi f T_b} \right)^2 \quad (6-4-55)$$

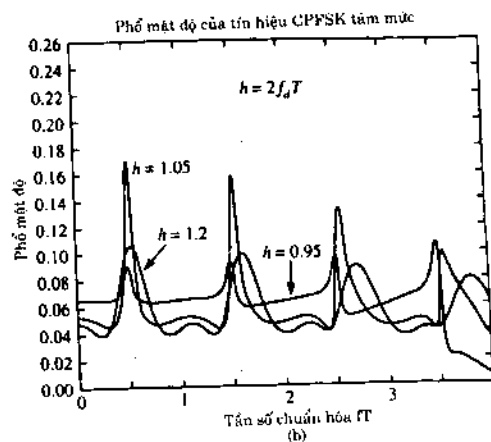
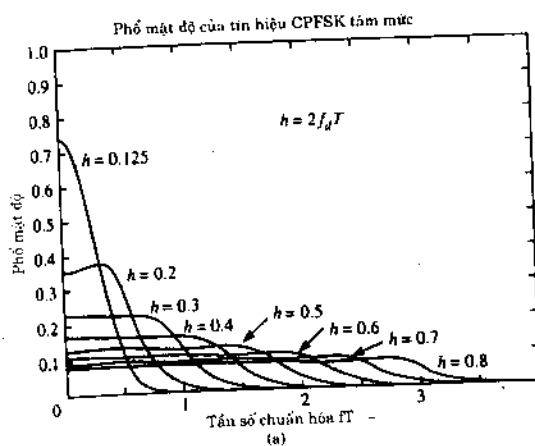
Phổ các tín hiệu MSK và OQPSK được vẽ trên hình 6-4-6. Búp chính của tín hiệu MSK rộng hơn 50% so với búp chính của tín hiệu OQPSK. Như vậy, tín hiệu MSK sử dụng dải thông kênh truyền có hiệu quả hơn nên thường được sử dụng trong các hệ thống truyền thông số.



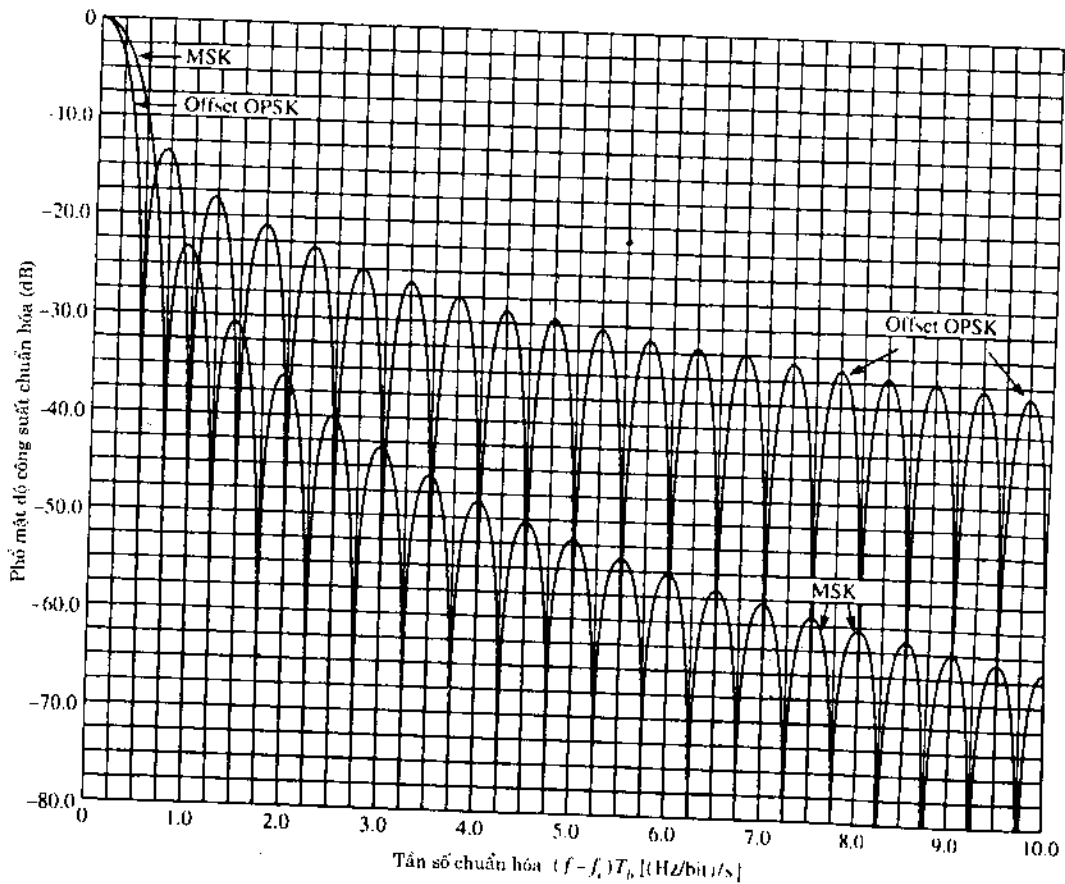
Hình 6-4-3: Phổ mật độ công suất của tín hiệu CPFSK nhị phân ($M = 2$)



Hình 6-4-4: Phổ mật độ công suất của tín hiệu CPFSK với $M = 4$



Hình 6-4-5: Phổ mật độ công suất của tín hiệu CPFSK với $M = 8$



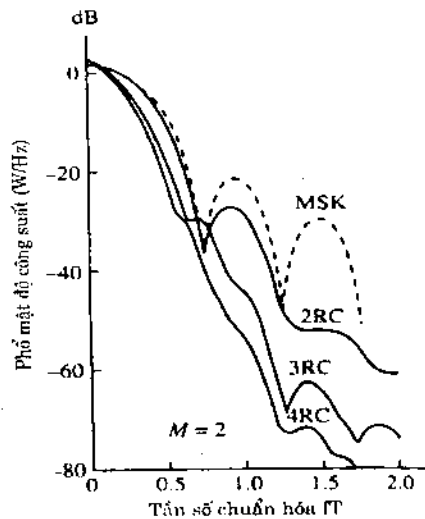
Hình 6-4-6: Phổ mật độ công suất của tín hiệu MSK và OQPSK

Phổ mật độ công suất tín hiệu CPM Nói chung độ rộng dải thông của tín hiệu CPM phụ thuộc vào hệ số điều chế h , xung $g(t)$ và số lượng tín hiệu M . Giống như tín hiệu CPFSK, với h nhỏ thì phổ của tín hiệu hẹp.

Sử dụng xung cosin dạng:

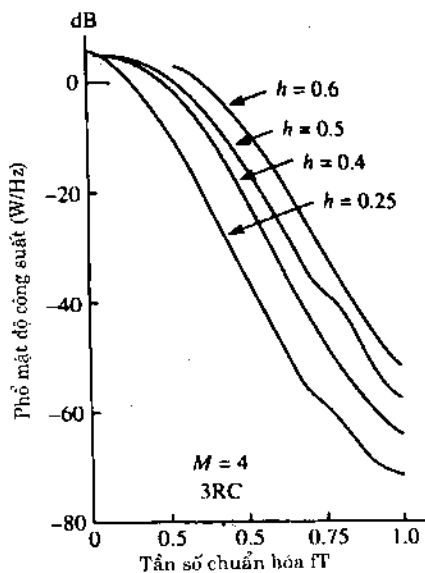
$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{LT} \right) & 0 \leq t \leq LT \\ 0 & \text{với các giá trị còn lại} \end{cases} \quad (6-4-56)$$

với $L = 1$ cho đáp ứng đầy đủ và $L > 1$ cho đáp ứng từng phần sẽ cho độ rộng phổ hẹp hơn (tức là sử dụng dải thông có hiệu quả hơn) so với xung chữ nhật. Hình 6-4-7 vẽ phổ mật độ công suất của tín hiệu CPM với các xung cosin khác nhau (LRC) với $h = 1/2$. Khi L tăng lên thì $g(t)$ trở nên đều đặn hơn và độ rộng phổ tín hiệu giảm xuống.



Hình 6-4-7: Phổ mật độ công suất tín hiệu CPM nhị phân, $h = 1/2$, với các xung khác nhau

Hiệu quả của việc thay đổi các hệ số điều chế trong tín hiệu CPM được vẽ trên hình 6-4-8 với $M = 4$ và xung cosin trong (6-4-56) và $L = 3$. Các tính chất về phổ cũng tương tự như đối với tín hiệu CPFSK ngoại trừ phổ trong trường hợp này hẹp hơn do xung $g(t)$ đều đặn hơn so với xung chữ nhật trong tín hiệu CPFSK.



Hình 6-4-8: Phổ mật độ công suất của tín hiệu CPM với $M = 4$, 3RC với các hệ số điều chế khác nhau

6-4-3. Phổ mật độ công suất của các tín hiệu điều chế tuyến tính có nhớ

Trong phần này ta xét các tính chất về phổ của các tín hiệu điều chế tuyến tính có nhớ được mô hình hóa bởi chuỗi Markov. Đầu tiên ta xác định hàm tự tương quan và tính biến đổi Fourier

để thu được phổ mật độ công suất. Với các tín hiệu được tạo ra bởi chuỗi Markov với ma trận xác suất chuyển đổi $\mathbf{P}$, phổ mật độ công suất có dạng tổng quát:

$$\Phi(f) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^K p_i S_i \left(\frac{n}{T} \right) \right|^2 \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K p_i |S_i(f)|^2 + \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i S_i^*(f) S_j(f) p_{ij}(f) \right] \quad (6-4-57)$$

$S_i(f)$ là biến đổi Furiê của tín hiệu $s_i(t)$:

$$s_i(t) = s_1(t) - \sum_{k=1}^K p_k s_k(t)$$

$p_{ij}(f)$ là biến đổi Furiê của dãy rời rạc $p_{ij}(n)$ được định nghĩa như sau:

$$p_{ij}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) e^{-j2\pi n f T} \quad (6-4-58)$$

K là số trạng thái của bộ điều chế. $p_{ij}(n)$ ký hiệu xác suất tín hiệu $s_j(t)$ được truyền đi trong khoảng thời gian thứ n sau khi đã truyền $s_i(t)$ ở khoảng thời gian thứ $n - 1$. Như vậy $\{p_{ij}(n)\}$ là các xác suất chuyển đổi trong ma trận xác suất chuyển đổi $\mathbf{P}^n$. Chú ý rằng $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Khi điều chế không nhớ, phổ mật độ công suất có được khi thay ma trận xác suất chuyển đổi vào (6-4-57) như sau:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_K \\ p_1 & p_2 & \dots & p_K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_K \end{bmatrix} \quad (6-4-59)$$

và $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$ với mọi $n \geq 1$. Với các điều kiện này, phổ mật độ công suất chỉ là hàm của xác suất các trạng thái dừng $\{p_i\}$ và là:

$$\Phi(f) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^K p_i S_i \left(\frac{n}{T} \right) \right|^2 \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K p_i (1 - p_i) |S_i(f)|^2 - \frac{2}{T} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i p_j \operatorname{Re} [S_i(f) S_j^*(f)] \quad (6-4-60)$$

Ta nhận thấy thành phần đầu tiên trong (6-4-57) và (6-4-60) gồm các thành phần tần số rời rạc. Các thành phần này bằng 0 khi:

$$\sum_{i=1}^K p_i S_i \left(\frac{n}{T} \right) = 0 \quad (6-4-61)$$

Điều kiện trên được sử dụng khi thiết kế các hệ thống truyền thông số trong thực tiễn và dễ dàng có được bằng cách chọn tín hiệu thích hợp.

Bây giờ ta xác định phổ mật độ công suất của tín hiệu điều chế bằng tần cơ sở. Tín hiệu NRZ gồm hai tín hiệu $s_1(t) = g(t)$ và $s_2(t) = -g(t)$ với $g(t)$ là xung chữ nhật biên độ A . Với $K = 2$, (6-4-60) trở thành:

$$\Phi(f) = \frac{(2p-1)^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) + \frac{4p(1-p)}{T} |G(f)|^2 \quad (6-4-62)$$

với $|G(f)|^2 = (AT)^2 \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \quad (6-4-63)$

Khi $p = 1/2$, các thành phần phổ rời rạc bằng 0 và:

$$\Phi(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \quad (6-4-64)$$

Tín hiệu NRZI được đặc trưng bởi ma trận xác suất chuyển đổi:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6-4-65)$$

Chú ý rằng $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$ với $n \geq 1$ và phổ mật độ công suất được xác định theo công thức (6-4-62) và giống phổ mật độ công suất tín hiệu NRZ.

Điều chế có nhớ có ma trận xác suất chuyển đổi:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-4-66)$$

và các xác suất trạng thái dừng là $p_i = 1/4$ với $i = 1, 2, 3, 4$. Ta có:

$$\mathbf{P}^4 \rho = -\frac{1}{4} \rho \quad (6-4-67)$$

với ρ là ma trận tương quan của tín hiệu, có các phần tử là:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{T} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt \quad (6-4-68)$$

Với bốn tín hiệu $s_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ đã cho trong phần trước, ta có:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-4-69)$$

và như vậy:

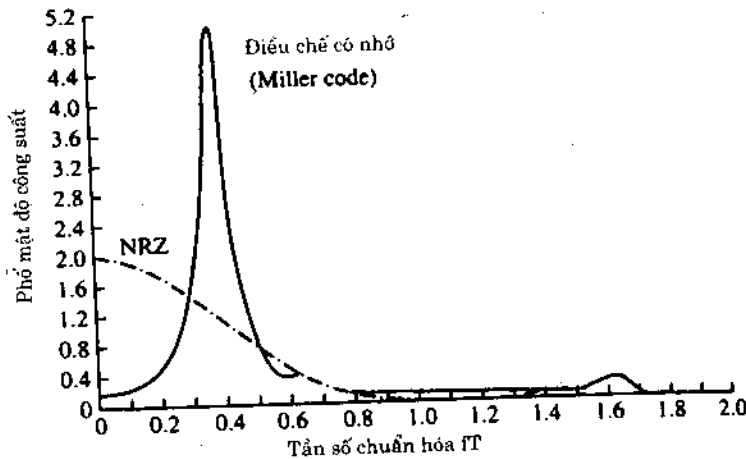
$$\mathbf{P}^{k+4} \rho = -\frac{1}{4} \mathbf{P}^k \rho, \quad k > 1 \quad (6-4-70)$$

Sử dụng (6-4-69), (6-4-70), (6-4-66) trong (6-4-57) ta có:

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\psi^2(17 + 8\cos 8\psi)} * \begin{bmatrix} 23 - 2\cos \psi - 22\cos 2\psi - 12\cos 3\psi + 5\cos 4\psi \\ + 12\cos 5\psi + 2\cos 6\psi - 8\cos 7\psi + 2\cos 8\psi \end{bmatrix} \quad (6-4-71)$$

với $\psi = \pi fT$.

Phổ các tín hiệu này trên hình 6-4-9. Phổ tín hiệu NRZ và NRZI có đỉnh tại tần số $f = 0$. Tín hiệu điều chế có nhớ có phổ hẹp hơn và hầu như không có thành phần một chiều.



Hình 6-4-9: Phổ mật độ công suất các tín hiệu điều chế băng tần cơ sở

BÀI TẬP

6-1. Chứng minh các tính chất sau đây của phép biến đổi Hilbert:

- a) Nếu $x(t) = x(-t)$ thì $\hat{x}(t) = -\hat{x}(-t)$.
- b) Nếu $x(t) = -x(-t)$ thì $\hat{x}(t) = \hat{x}(-t)$.
- c) Nếu $x(t) = \cos \omega_b t$ thì $\hat{x}(t) = \sin \omega_b t$.
- d) Nếu $x(t) = \sin \omega_b t$ thì $\hat{x}(t) = -\cos \omega_b t$.
- e) $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$.

f) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}^2(t) dt$.

g) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = 0$.

6-2. Giả thiết $n(t)$ là quá trình ngẫu nhiên dừng, có dải tần hạn chế và có giá trị trung bình bằng 0, được biểu diễn trong (6-1-37). Hàm tự tương quan của quá trình tần số thấp tương đương $z(t) = x(t) + jy(t)$ được định nghĩa là:

$$\phi_z(\tau) = \frac{1}{2} E[z^*(t)z(t+\tau)]$$

- a) Chứng tỏ rằng $E[z(t)z(t+\tau)] = 0$.

h) Giả thiết $\phi_{xx}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$ và đặt $V = \int_0^T z(t) dt$, xác định $E(V^2)$ và $E(VV^*) = E(|V|^2)$.

6-3. Xác định hàm tự tương quan của quá trình ngẫu nhiên $x(t) = A \sin(2\pi f_c t + \theta)$, với f_c là hằng số và θ có phân bố đều, tức là $p(\theta) = 1/2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

6-4. Chứng tỏ rằng $s_i(t)$ nói chung là số phức và trong điều kiện nào thì trở thành số thực. Giả thiết $s(t)$ là tín hiệu thông dải giá trị thực.

6-5. Một quá trình ngẫu nhiên gaussian tần số thấp $x(t)$ có phổ mật độ công suất:

$$\Phi(f) = \begin{cases} N_0 & (|f| < B) \\ 0 & (|f| > B) \end{cases}$$

Xác định phổ mật độ công suất và hàm tự tương quan của $y(t) = x^2(t)$.

6-6. Quá trình ngẫu nhiên $v(t)$ được định nghĩa là:

$$v(t) = X \cos 2\pi f_c t - Y \sin 2\pi f_c t$$

với X và Y là các biến ngẫu nhiên. Chứng tỏ rằng $v(t)$ là dừng theo nghĩa rộng nếu và chỉ nếu $E(X) = E(Y) = 0$, $E(X^2) = E(Y^2)$ và $E(XY) = 0$.

6-7. Biểu diễn tần số thấp tương đương của tín hiệu PAM là:

$$u(t) = \sum_n I_n g(t - nT)$$

Giả thiết $g(t)$ là xung chữ nhật và $I_n = a_n \cdot a_{n-2}$ với $\{a_n\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên giá trị nhị phân $\{1, -1\}$ không tương quan với xác suất xuất hiện như nhau.

a) Xác định hàm tự tương quan của dãy $\{I_n\}$.

b) Xác định phổ mật độ công suất của $u(t)$.

c) Xác định phổ mật độ công suất của $u(t)$ với các giá trị có thể của a_n là $\{0, 1\}$.

6-8. Xác định hàm tự tương quan của các tín hiệu điều chế MSK và QPSK với giả thiết là dãy thông tin là không tương quan và có giá trị trung bình bằng 0.

6-9. Hai tín hiệu PSK nhị phân được truyền với pha gián đoạn:

$$s_0(t) = \sqrt{\frac{2\zeta_b}{T_b}} \cos \left[2\pi \left(f - \frac{\Delta f}{2} \right) t + \theta_0 \right], \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2\zeta_b}{T_b}} \cos \left[2\pi \left(f + \frac{\Delta f}{2} \right) t + \theta_1 \right], \quad (0 \leq t \leq T)$$

với $\Delta f = 1/T \ll f_c$, θ_0, θ_1 là các biến ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng $(0, 2\pi)$. Các tín hiệu $s_0(t)$ và $s_1(t)$ có xác suất bằng nhau.

a) Xác định phổ mật độ công suất của tín hiệu PSK.

b) Chứng tỏ rằng phổ mật độ công suất suy giảm theo $1/f^2$ khi $f \gg f_c$.

CHƯƠNG 7

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Trong chương 6, ta đã xét các phương pháp điều chế sử dụng trong truyền thông số. Như chúng ta đã biết, bộ điều chế ở phía phát thực hiện biến đổi dãy số thành tín hiệu có thể truyền trên kênh. Trong chương này ta xét việc thiết kế và đánh giá độ hiệu quả của các bộ thu tối ưu cho các phương pháp điều chế trong kênh có nhiễu cộng gaussian.

7-1. THU TỐI ƯU CHO TÍN HIỆU CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Đầu tiên ta xác định mô hình toán học của tín hiệu ở đầu vào của bộ thu. Ta giả thiết rằng thiết bị phát truyền thông tin số qua M tín hiệu $\{s_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$, mỗi tín hiệu được truyền trong một khoảng thời gian T và ta xét việc truyền thông tin trong khoảng $0 \leq t \leq T$ ([2], [5], [6]).

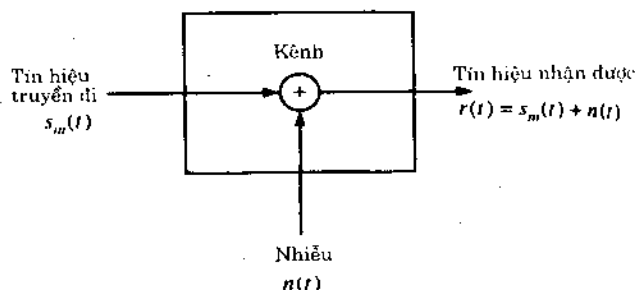
Tín hiệu khi truyền qua kênh bị ảnh hưởng của nhiễu cộng gaussian như mô tả trên hình 7-1-1, tín hiệu nhận được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq T$ là:

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-1-1)$$

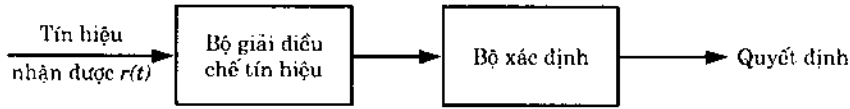
với $n(t)$ là một thể hiện của một quá trình ngẫu nhiên nhiễu cộng gaussian (Additive White Gaussian Noise - AWGN) với phổ mật độ công suất $\Phi_{nn}(f) = \frac{1}{2} N_0 W / \text{Hz}$. Dựa trên tín hiệu $r(t)$ nhận được, ta muốn thiết kế một bộ thu tối ưu theo nghĩa nó cực tiểu hóa xác suất sai nhầm.

Ta có thể chia bộ thu ra làm hai phần, một phần là bộ giải điều chế tín hiệu và một phần là bộ xác định tín hiệu như trên hình 7-1-2. Chức năng của bộ giải điều chế tín hiệu là chuyển tín hiệu nhận được $r(t)$ thành một vectơ N chiều $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ với N là số chiều của tín hiệu truyền đi. Chức năng bộ xác định tín hiệu là xác định tín hiệu nào trong M tín hiệu đã được truyền đi dựa trên vectơ $\mathbf{r}$.

Có hai cách thực hiện giải điều chế tín hiệu được xét dưới đây. Cách thứ nhất dựa trên tính tương quan của tín hiệu và cách thứ hai dựa vào bộ lọc phối hợp (Matched Filter). Bộ xác định tối ưu tiếp theo bộ giải điều chế tín hiệu được thiết kế để cực tiểu hóa xác suất sai nhầm.



Hình 7-1-1: Mô hình tín hiệu trên kênh AWGN



Hình 7-1-2: Bộ thu tín hiệu

7-1-1. Bộ giải điều chế tương quan

Trong phần này ta sẽ thấy bộ giải điều chế tương quan phân giải tín hiệu nhận được ở phía thu thành các vectơ N chiều. Nói cách khác, tín hiệu và nhiễu được khai triển thành chuỗi tuyến tính của các hàm trực giao cơ sở $\{f_n(t)\}$. Giả thiết N hàm cơ sở $\{f_n(t)\}$ tương ứng với các vectơ sinh của không gian vectơ, như vậy mọi tín hiệu có thể phát đi $\{s_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$ đều có thể biểu diễn thành một tổ hợp tuyến tính của $\{f_n(t)\}$. Trong trường hợp có nhiễu, các hàm $\{f_n(t)\}$ không tạo nên không gian nhiễu. Tuy nhiên ta sẽ thấy thành phần nhiễu nằm ngoài không gian tín hiệu, không ảnh hưởng tới bộ xác định tín hiệu.

Giả thiết tín hiệu $r(t)$ nhận được được cho qua một băng song song gồm N bộ tương quan chéo để khai triển $r(t)$ theo N hàm cơ sở $\{f_n(t)\}$ như trên hình 7-1-3. Như vậy ta có:

$$\int_0^T r(t) f_k(t) dt = \int_0^T [s_m(t) + n(t)] f_k(t) dt \quad (7-1-2)$$

$$r_k = s_{mk} + n_k, k = 1, 2, \dots, N$$

với

$$s_{mk} = \int_0^T m(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$n_k = \int_0^T n(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7-1-3)$$

Tín hiệu được biểu diễn bởi vectơ s_m với các thành phần $s_{mk}, k = 1, 2, \dots, N$. Giá trị của chúng tùy thuộc vào tín hiệu nào trong số M tín hiệu được truyền đi. Các thành phần $\{n_k\}$ là các biến ngẫu nhiên tạo ra do sự xuất hiện của nhiễu cộng.

Ta có thể biểu diễn tín hiệu $r(t)$ trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq T$ như sau:

$$r(t) = \sum_{k=1}^N s_{mk}(t) f_k(t) + \sum_{k=1}^N n_k f_k(t) + n'(t) = \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) + n'(t) \quad (7-1-4)$$

Thành phần $n'(t)$ được định nghĩa là:

$$n'(t) = n(t) - \sum_{k=1}^N n_k f_k(t) \quad (7-1-5)$$

là quá trình nhiễu gaussian có giá trị trung bình bằng 0 biểu diễn sự khác nhau giữa nhiễu nguyên thủy $n(t)$ với thành phần tương ứng với sự khai triển $n(t)$ theo các hàm cơ sở $\{f_n(t)\}$. Chúng ta sẽ thấy dưới đây rằng $n'(t)$ không ảnh hưởng tới việc xác định tín hiệu nào đã truyền đi. Do đó việc xác định tín hiệu có thể dựa hoàn toàn trên tín hiệu đầu ra bộ tương quan và các thành phần nhiễu $r_k = s_{mk} + n_k, k = 1, 2, \dots, N$.

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Do các tín hiệu $\{s_m(t)\}$ là xác định nên các thành phần tín hiệu cũng xác định. Các thành phần nhiễu $\{n_k\}$ có phân bố gaussian. Giá trị trung bình của các thành phần nhiễu là:

$$E(n_k) = \int_0^T E[n(t)] f_k(t) dt = 0 \quad (7-1-6)$$

với mọi k . Sai phương của các thành phần là:

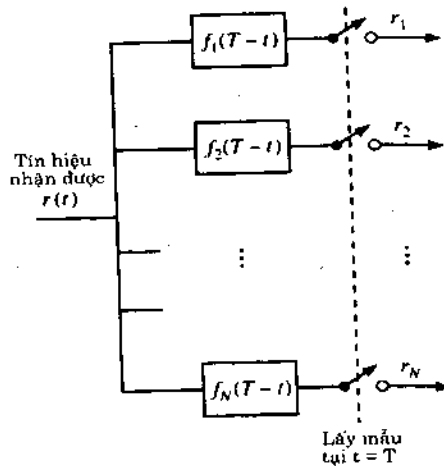
$$\begin{aligned} E(n_k n_m) &= \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)] f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau) f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau = \frac{1}{2} N_0 \int_0^T f_k(t) f_m(t) dt = \frac{1}{2} N_0 \delta_{mk} \end{aligned} \quad (7-1-7)$$

với $\delta_{mk} = 1$ khi $m = k$ và bằng 0 trong các trường hợp khác. Như vậy N thành phần của nhiễu $\{n_k\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian không có tương quan, giá trị trung bình bằng 0 và sai phương chung $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$. Như vậy các tín hiệu ra của bộ tương quan $\{r_k\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian với giá trị trung bình:

$$E(r_k) = E(s_{mk} + n_k) = s_{mk} \quad (7-1-8)$$

và sai phương là:

$$\sigma_r^2 = \sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0 \quad (7-1-9)$$



Hình 7-1-3: Bộ giải điều chế tương quan

Do các thành phần của nhiễu $\{n_k\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian không tương quan nên chúng độc lập thống kê. Từ đó các tín hiệu đầu ra của bộ tương quan $\{r_k\}$ cũng là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê. Hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện của các biến ngẫu nhiên $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ là:

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = \prod_{k=1}^N p(r_k|s_{mk}), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-1-10)$$

với

$$p(r_k|s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0}\right], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7-1-11)$$

Thay (7-1-11) vào (7-1-10) ta nhận được:

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0}\right], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-1-12)$$

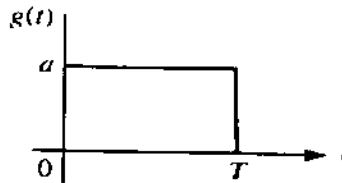
Cuối cùng ta muốn chứng tỏ rằng các tín hiệu đầu ra bộ tương quan $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ là đủ để xác định tín hiệu nào đã truyền đi từ phía phát, không cần thêm thông tin từ phần còn lại của nhiễu $n'(t)$. Thực vậy, $n'(t)$ không có liên hệ với N tín hiệu $\{r_k\}$:

$$\begin{aligned} E[n'(t)r_k] &= E[n'(t)s_{mk}] + E[n'(t)n_k] = E[n'(t)n_k] \\ &= E\left[\left[n(t) - \sum_{j=1}^N n_j f_j(t)\right] n_k\right] = \int_0^T E[n(t)n(\tau)] f_k(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^N E(n_j n_k) f_j(t) \\ &= \frac{1}{2} N_0 f_k(t) - \frac{1}{2} N_0 f_k(t) = 0 \end{aligned} \quad (7-1-13)$$

Do $n'(t)$ và $\{r_k\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian không tương quan nên chúng độc lập thống kê. Như vậy $n'(t)$ không chứa thông tin ảnh hưởng tới việc xác định tín hiệu nào đã được truyền đi mà tất cả thông tin để xác định đều ở các tín hiệu $\{r_k\}$. Như vậy $n'(t)$ có thể bỏ qua.

Ví dụ 7-1-1

Xét tín hiệu PAM băng tần cơ sở M mức với tín hiệu xung cơ bản $g(t)$ hình chữ nhật như trên hình 7-1-4. Nhiễu công là quá trình ngẫu nhiên gaussian có trị trung bình bằng 0. Ta xác định hàm cơ sở $f(t)$ và đầu ra của bộ giải điều chế tương quan.



Hình 7-1-4: Tín hiệu xung $g(t)$

Năng lượng của xung chữ nhật là:

$$\zeta_g = \int_0^T g^2(t) dt = \int_0^T a^2 dt = a^2 T$$

Do tín hiệu PAM là một chiều $N = 1$ nên chỉ có một hàm cơ sở $f(t)$ là:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 T}} g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Đầu ra bộ giải điều chế là:

$$\begin{aligned} r &= \int_0^T r(t) f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T r(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T [s_m(t) + n(t)] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\int_0^T s_m(t) dt + \int_0^T n(t) dt \right] = s_m + n \end{aligned}$$

Do với nhiễu ta có $E(n) = 0$ nên:

$$\sigma_n^2 = E \left[\frac{1}{T} \int_0^T n(t) n(\tau) dt d\tau \right] = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[n(t) n(\tau)] dt d\tau = \frac{N_0}{2T} \int_0^T \int_0^T \delta(t - \tau) dt d\tau = \frac{N_0}{2}$$

Hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện của tín hiệu ra là:

$$p(r|s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(r - s_m)^2}{N_0} \right]$$

7-1-2. Bộ giải điều chế dùng bộ lọc phối hợp

Thay cho việc dùng một băng N bộ tương quan để tạo ra các tín hiệu $\{r_k\}$, ta có thể dùng một băng gồm N bộ lọc tuyến tính. Giả sử đáp ứng xung của N bộ lọc là:

$$h_k(t) = f_k(T - t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-1-14)$$

với $\{f_k(t)\}$ là N hàm cơ sở và $h_k(t) = 0$ với t ngoài khoảng $[0, T]$. Đầu ra của các bộ lọc này là:

$$y_k(t) = \int_0^t r(\tau) h_k(t - \tau) d\tau = \int_0^t r(\tau) f_k(T - t + \tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7-1-15)$$

Nếu ta lấy mẫu các tín hiệu ra tại thời điểm $t = T$, ta nhận được:

$$y_k(T) = \int_0^T r(\tau) f_k(\tau) d\tau = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7-1-16)$$

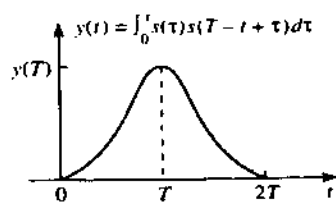
Như vậy, các mẫu đầu ra của bộ lọc tại thời điểm $t = T$ chính là tập giá trị $\{r_k\}$ nhận được từ N bộ tương quan tuyến tính.

Một bộ lọc mà đáp ứng xung $h(t) = s(T - t)$ với $s(t)$ xác định trong khoảng $0 \leq t \leq T$ được gọi là bộ lọc phối hợp với tín hiệu $s(t)$. Ví dụ về tín hiệu và bộ lọc phối hợp trên hình 7-1-5. Đáp ứng của tín hiệu $s(t)$ ở đầu ra bộ lọc là:

$$y(t) = \int_0^t s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau \quad (7-1-17)$$

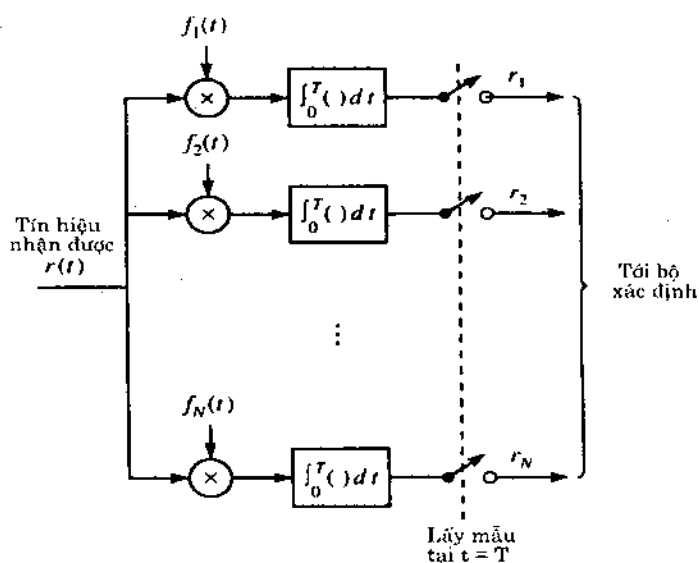
chính là hàm tự tương quan của tín hiệu $s(t)$. Hình 7-1-6 biểu diễn $y(t)$ với tín hiệu trên hình 7-1-5. Hàm tự tương quan $y(t)$ là hàm chẵn đối với t và có một cực đại tại $t = T$.

Với bộ giải điều chế được mô tả ở trên, N bộ lọc phối hợp là phối hợp với các hàm cơ sở $\{f_k(t)\}$. Hình 7-1-7 mô tả bộ giải điều chế loại này.



Hình 7-1-6

Đầu ra bộ lọc phối hợp là hàm tự tương quan của $s(t)$



Tính chất của bộ lọc phối hợp Bộ lọc phối hợp có một số tính chất đáng chú ý sau. Nếu tín hiệu $s(t)$ bị ảnh hưởng bởi nhiễu AWGN thì bộ lọc với đáp ứng xung phối hợp với $s(t)$ sẽ cực đại hóa tỷ số tín hiệu trên nhiễu (SNR). Để chứng minh tính chất này, giả thiết tín hiệu $r(t)$ nhận được gồm tín hiệu $s(t)$ và nhiễu AWGN $n(t)$ với giá trị trung bình bằng 0 và phổ mật độ công suất $\Phi_{nn}(f) = \frac{1}{2} N_0 W / \text{Hz}$. Giả thiết tín hiệu $r(t)$ được cho qua một bộ lọc với đáp ứng xung $h(t)$, $0 \leq t \leq T$, và đầu ra của bộ lọc được lấy mẫu tại thời điểm $t = T$. Tín hiệu đầu ra của bộ lọc là:

$$y(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t s(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^t n(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (7-1-18)$$

$$y(T) = \int_0^T s(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)h(t-\tau)d\tau = y_s(T) + y_n(T) \quad (7-1-19)$$

với $y_s(T)$ biểu diễn thành phần tín hiệu và $y_n(T)$ biểu diễn thành phần nhiễu. Vấn đề đặt ra là xác định đáp ứng xung của bộ lọc làm cực đại tỷ số tín hiệu trên nhiễu SNR_0 như sau:

$$SNR_0 = \frac{y_s^2(T)}{E[y_n^2(T)]} \quad (7-1-20)$$

Mẫu số của (7-1-20) là sai phương của nhiễu ở đầu ra của bộ lọc. Ta có:

$$\begin{aligned} E[y_n^2(T)] &= \int_0^T \int_0^T E[n(\tau)n(t)]h(T-t)h(T-\tau)dtd\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)h(T-t)h(T-\tau)dtd\tau = \frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T-t)dt \end{aligned} \quad (7-1-21)$$

Ta thấy rằng sai phương phụ thuộc vào phổ mật độ công suất của nhiễu và đáp ứng xung $h(t)$. Thay $y_s(T)$ và $E[y_n^2(T)]$ vào (7-1-20) ta có:

$$SNR_0 = \frac{\left[\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau \right]^2}{\frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T-t)dt} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau)s(T-\tau)d\tau \right]^2}{\frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T-t)dt} \quad (7-1-22)$$

Do mẫu số của biểu thức trên phụ thuộc vào năng lượng của $h(t)$, giá trị cực đại của SNR theo $h(t)$ nhận được bằng cách cực đại hóa tử số khi mẫu số giữ không đổi. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, một cách tổng quát nếu $g_1(t)$ và $g_2(t)$ là hai tín hiệu có năng lượng hữu hạn thì:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)dt \quad (7-1-23)$$

dạng thức xảy ra khi $g_1(t) = Cg_2(t)$ với C là hằng số. Đặt $g_1(t) = h(t)$ và $g_2(t) = s(T-t)$ thì rõ ràng SNR cực đại khi $h(t) = Cs(T-t)$ hay $h(t)$ là phối hợp với $s(t)$. Giá trị (đây là giá trị cực đại) của SNR của bộ lọc phối hợp là:

$$SNR_0 = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t)dt = \frac{2\zeta}{N_0} \quad (7-1-24)$$

Chú ý rằng tỷ số tín hiệu trên nhiễu cực đại SNR_0 của bộ lọc phối hợp phụ thuộc vào năng lượng của tín hiệu $s(t)$ chứ không phụ thuộc vào tính chất của tín hiệu $s(t)$. Đó là tính chất quan trọng thứ hai của bộ lọc phối hợp.

Biểu diễn trong miền tần số bộ lọc phối hợp Do $h(t) = s(T-t)$ nên ta có:

$$H(f) = \int_0^T s(T-t)e^{-j2\pi ft}dt = \left[\int_0^T s(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau \right] e^{-j2\pi fT} = S^*(f)e^{-j2\pi fT} \quad (7-1-25)$$

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Ta thấy rằng đáp ứng tần số của bộ lọc phối hợp là liên hợp phức của tín hiệu truyền đi nhân với $e^{-j2\pi fT}$, biểu diễn trễ khoảng thời gian T . Nói cách khác, $|H(f)| = |S(f)|$, đáp ứng biên độ của bộ lọc phối hợp giống với phổ biên độ của tín hiệu truyền đi và pha của $H(f)$ ngược với pha của $S(f)$.

Tín hiệu $s(t)$ với phổ $S(f)$ được cho qua một bộ lọc phối hợp, tín hiệu ra của bộ lọc có phổ $Y(f) = |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT}$, tương ứng với tín hiệu ra là:

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft} df \quad (7-1-26)$$

Lấy mẫu tín hiệu ra tại thời điểm $t = T$, ta nhận được:

$$y_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_0^T s^2(t) dt = \zeta \quad (7-1-27)$$

Nhiều ở đầu ra của bộ lọc phối hợp có phổ mật độ công suất:

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{2} |H(f)|^2 N_0 \quad (7-1-28)$$

Như vậy, công suất nhiều ở đầu ra của bộ lọc là:

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(f) df = \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \frac{1}{2} \zeta N_0 \quad (7-1-29)$$

Tỷ số tín hiệu trên nhiễu là tỷ số của công suất tín hiệu P_s được cho bởi:

$$P_s = y_s^2(T) \quad (7-1-30)$$

chia cho công suất nhiễu P_n . Như vậy:

$$SNR_0 = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\zeta^2}{\frac{1}{2} \zeta N_0} = \frac{2\zeta}{N_0} \quad (7-1-31)$$

Ví dụ 7-1-2 (Các hàm cơ sở và đáp ứng của bộ lọc phối hợp)

Các tín hiệu trực giao kép có số chiều $N = 2$. Như vậy cần hai hàm cơ bản để biểu diễn các tín hiệu. Ta chọn:

$$f_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{với các trường hợp khác} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} & \frac{1}{2}T \leq t \leq T \\ 0 & \text{với các trường hợp khác} \end{cases} \quad (7-1-32)$$

Đáp ứng xung của hai bộ lọc phối hợp này là:

$$h_1(t) = f_1(T-t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} & \frac{1}{2}T \leq t \leq T \\ 0 & \text{với các trường hợp khác} \end{cases}$$

$$h_2(t) = f_2(T-t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{với các trường hợp khác} \end{cases} \quad (7-1-33)$$

Nếu tín hiệu $s_i(t)$ truyền đi (không có nhiễu), đáp ứng của hai bộ lọc phối hợp được cho trên hình 7-1-8(c). Do $y_1(t)$ và $y_2(t)$ được lấy mẫu tại thời điểm $t = T$, ta thấy rằng $y_{1s}(T) = \sqrt{\frac{1}{2}} A^2 T$ và $y_{2s}(T) = 0$. Chú ý rằng $\frac{1}{2} A^2 T = \zeta$ là năng lượng của tín hiệu. Vectơ nhận được từ các đầu ra của hai bộ lọc phối hợp tại thời điểm lấy mẫu $t = T$ là:

$$\mathbf{r} = [r_1 \ r_2] = [\sqrt{\zeta} + n_1 \ n_2] \quad (7-1-34)$$

với $n_1 = y_{1n}(T)$ và $n_2 = y_{2n}(T)$ là các thành phần nhiễu tại các đầu ra của hai bộ lọc phối hợp được xác định theo công thức:

$$y_{kn}(T) = \int_0^T n(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2 \quad (7-1-35)$$

Rõ ràng $E(n_k) = E[y_{kn}(T)] = 0$. Sai phương của chúng là:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= E[y_{kn}^2(T)] = \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)] f_k(t) f_k(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau) f_k(t) f_k(\tau) dt d\tau = \frac{1}{2} N_0 \int_0^T f_k^2(t) dt = \frac{1}{2} N_0 \end{aligned} \quad (7-1-36)$$

Ta thấy SNR_0 của bộ lọc phối hợp thứ nhất là:

$$SNR_0 = \frac{(\sqrt{\zeta})^2}{\frac{1}{2} N_0} = \frac{2\zeta}{N_0} \quad (7-1-37)$$

Giống như kết quả đã nói ở trên. Chú ý rằng bốn tín hiệu ra có thể của hai bộ lọc phối hợp tương ứng với bốn tín hiệu truyền đi là $(r_1, r_2) = (\sqrt{\zeta} + n_1, n_2)$, $(n_1, \sqrt{\zeta} + n_2)$, $(-\sqrt{\zeta} + n_1, n_2)$, $(n_1, -\sqrt{\zeta} + n_2)$.

7-1-3. Bộ xác định tối ưu

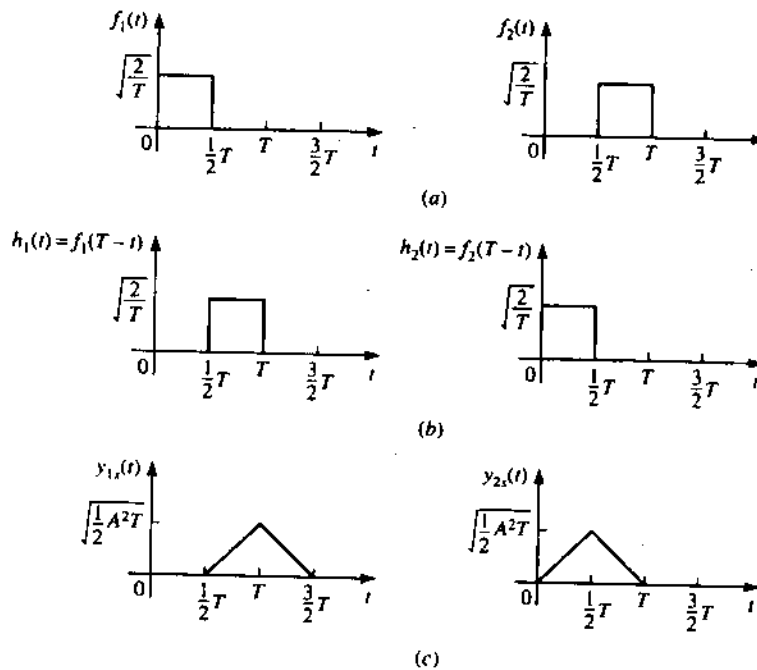
Ta đã chứng minh rằng với tín hiệu truyền qua kênh có nhiễu AWGN thì vectơ $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \dots \ r_n]$ nhận được qua bộ giải điều chế chứa mọi thông tin cần thiết. Trong phần này ta trình bày luật xác định tối ưu dựa trên vectơ $\mathbf{r}$. Ta giả thiết là tín hiệu truyền qua kênh là không nhớ trong các khoảng thời gian T của một tín hiệu.

Ta muốn thiết kế một bộ xác định tín hiệu có thể xác định tín hiệu đã truyền đi từ phía phát dựa vào vectơ $\mathbf{r}$ thu được với xác suất xác định đúng là cực đại. Ta xét luật xác định dựa trên xác suất hậu nghiệm là xác suất đã phát s_m khi ta đã thu được vectơ $\mathbf{r}$, được định nghĩa như sau:

$$P(\text{tín hiệu được truyền} | \mathbf{r}), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

và ta ký hiệu gọn lại là $P(s_m | r)$. Tiêu chuẩn xác định dựa trên sự lựa chọn tín hiệu tương ứng với giá trị cực đại của tập hợp các xác suất hậu nghiệm $\{P(s_m | r)\}$. Sau đó ta sẽ chứng tỏ rằng tiêu chuẩn này sẽ cực đại hóa xác suất xác định đúng (có nghĩa là cực tiểu hóa xác suất xác định sai). Tiêu chuẩn này được gọi là tiêu chuẩn cực đại hóa xác suất hậu nghiệm (MAP).



Hình 7-1-8: Các hàm cơ sở và đáp ứng của bộ lọc phối hợp

Theo luật Bayes, xác suất hậu nghiệm được xác định bởi:

$$P(s_m | r) = \frac{p(r | s_m) P(s_m)}{p(r)} \quad (7-1-38)$$

với $p(r | s_m)$ là hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện của vectơ nhận được khi đã xác định s_m được truyền đi và $P(s_m)$ là xác suất tiên nghiệm của tín hiệu thứ m được truyền đi. Mẫu số của (7-1-38) được biểu diễn như sau:

$$p(r) = \sum_{m=1}^M p(r | s_m) P(s_m) \quad (7-1-39)$$

Từ (7-1-38) và (7-1-39) ta thấy rằng để xác định được xác suất hậu nghiệm $P(s_m | r)$ cần phải biết xác suất tiên nghiệm $P(s_m)$ và hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện $p(r | s_m)$ với $m = 1, 2, \dots, M$. Ta thấy rằng mẫu số của (7-1-38) độc lập với tín hiệu truyền đi và như vậy luật xác định dựa trên việc tìm tín hiệu làm cực đại $P(s_m | r)$ tương đương với việc tìm tín hiệu làm cực đại $p(r | s_m)$.

Hàm mật độ phân bố xác suất $p(r | s_m)$ thường được gọi là *hàm khả năng* (likelihood function). Tiêu chuẩn xác định dựa trên việc cực đại hóa $p(r | s_m)$ đối với M tín hiệu thường được gọi là tiêu chuẩn cực đại khả năng (ML). Ta thấy rằng bộ xác định dựa trên tiêu chuẩn MAP và dựa trên tiêu chuẩn ML mang lại các kết quả giống nhau nếu các xác suất tiên nghiệm $P(s_m)$ là bằng nhau, hay các tín hiệu $\{s_m\}$ là đồng xác suất.

Đối với kênh có nhiễu AWGN, hàm khả năng $p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ được xác định bởi (7-1-12). Để đơn giản tính toán, ta làm việc với loga tự nhiên của $p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ là hàm đơn điệu.

$$\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = -\frac{1}{2} N \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2 \quad (7-1-40)$$

Tìm cực đại của $\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ theo $\mathbf{s}_m$ tương đương với việc tìm tín hiệu $\mathbf{s}_m$ để cực tiểu hóa khoảng cách Euclide:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2 \quad (7-1-41)$$

Với kênh có nhiễu AWGN, luật xác định dựa trên tiêu chuẩn ML trở thành việc tìm tín hiệu $\mathbf{s}_m$ có khoảng cách tới vectơ $\mathbf{r}$ nhận được nhỏ nhất. Ta gọi luật xác định này là *xác định khoảng cách cực tiểu*.

Một cách diễn giải khác luật xác định tối ưu dựa trên tiêu chuẩn ML có thể nhận được bằng cách khai triển (7-1-41) thành:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \sum_{n=1}^N r_n^2 - 2 \sum_{n=1}^N r_n s_{mn} + \sum_{n=1}^N s_{mn}^2 = |\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-1-42)$$

Do thành phần $|\mathbf{r}|^2$ là không đổi với mọi giá trị $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$ nên ta có thể bỏ qua khi so sánh và ta có tập hợp khoảng cách khác:

$$D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -2\mathbf{r}\mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2 \quad (7-1-43)$$

Việc chọn tín hiệu $\mathbf{s}_m$ cực tiểu hóa $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ tương đương với việc chọn tín hiệu làm cực đại khoảng cách $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, có nghĩa là:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2\mathbf{r}\mathbf{s}_m - |\mathbf{s}_m|^2 \quad (7-1-44)$$

Thành phần $\mathbf{r}\mathbf{s}_m$ biểu thị hình chiếu của vectơ nhận được trên mỗi vectơ trong tập M vectơ ứng với tập M tín hiệu phát đi. Giá trị mỗi hình chiếu này là độ đo liên quan giữa vectơ nhận được với tín hiệu thứ m . Do lý do này ta gọi $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$ là các độ tương quan cho việc xác định tín hiệu nào đã truyền đi. Thành phần $|\mathbf{s}_m|^2 = \zeta_m$, $m = 1, 2, \dots, M$ có thể bỏ qua nếu các tín hiệu có cùng năng lượng trong việc tính các độ tương quan $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ hay các khoảng cách $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ ($D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$).

Để thấy rằng các độ tương quan có thể biểu diễn thành:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2 \int_0^T r(t) s_m(t) dt - \zeta_m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-1-45)$$

Do đó các giá trị này có thể tạo ra bởi một bộ giải điều chế xác định tương quan chéo giữa tín hiệu nhận được $r(t)$ với M tín hiệu có thể truyền đi ở phía phát và thêm vào đầu ra của mỗi bộ tương quan năng lượng của tín hiệu tương ứng trong trường hợp các tín hiệu có năng lượng khác nhau. Một cách tương đương, tín hiệu thu được có thể cho qua một băng gồm M bộ lọc phối hợp với các tín hiệu $\{s_m(t)\}$ và lấy mẫu tại $t = T$. Như vậy bộ thu tối ưu (giải điều chế và xác định) có thể xây dựng như trên hình 7-1-9.

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Ta thấy rằng bộ xác định tối ưu ML tính toán tập hợp M khoảng cách $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ hay $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ và chọn tín hiệu tương ứng với khoảng cách nhỏ nhất. Bộ xác định tối ưu ML có thể tính độ tương quan $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ và chọn tín hiệu có độ tương quan với $\mathbf{r}$ lớn nhất.

Những điều chúng ta vừa xây dựng là xét trong trường hợp các tín hiệu là đồng xác suất. Tuy nhiên, khi các tín hiệu là không đồng xác suất thì bộ xác định tối ưu MAP sẽ dựa trên các xác suất $P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})$, $m = 1, 2, \dots, M$ hay các độ đo $PM(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)P(\mathbf{s}_m)$.

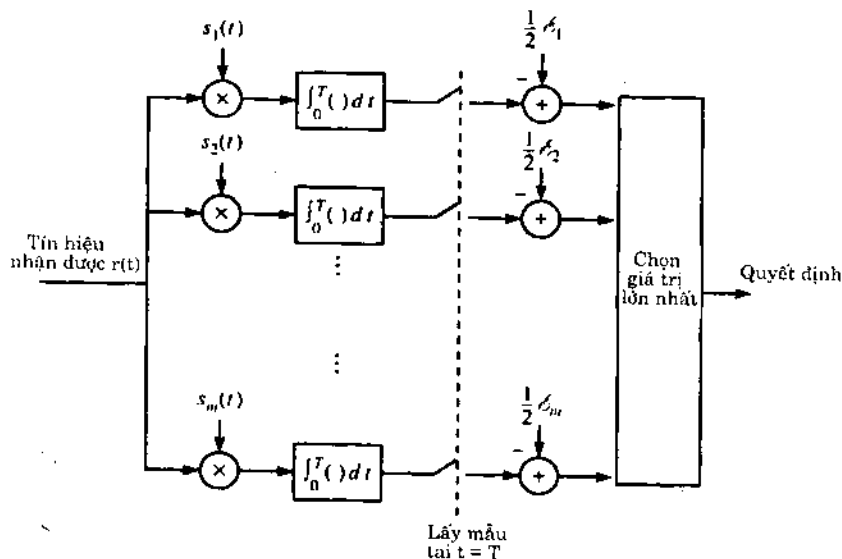
Ví dụ 7-1-3

Xét tín hiệu PAM nhị phân với hai điểm tín hiệu $s_1 = -s_2 = \sqrt{\zeta_b}$, với ζ_b là năng lượng ứng với một bit. Xác suất tiên nghiệm là $P(s_1) = p$ và $P(s_2) = 1 - p$. Ta xác định các độ đo cho bộ xác định tối ưu MAP khi tín hiệu bị nhiễu AWGN.

Vectơ tín hiệu nhận được đối với tín hiệu PAM nhị phân là:

$$\mathbf{r} = \pm\sqrt{\zeta_b} + y_n(T) \quad (7-1-46)$$

với $y_n(T)$ là biến ngẫu nhiên gaussian có trị trung bình bằng 0 và sai phương $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$.



Hình 7-1-9: Thực hiện bộ thu tối ưu với kênh có nhiễu AWGN

Hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện $p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ của hai tín hiệu là:

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(r - \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (7-1-47)$$

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(r + \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (7-1-48)$$

Các khoảng cách $PM(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)$ và $PM(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2)$ là:

$$PM(r, s_1) = p \cdot p(r|s_1) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r - \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (7-1-49)$$

$$PM(r, s_2) = (1-p) \cdot p(r|s_2) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r + \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (7-1-50)$$

Nếu $PM(r, s_1) > PM(r, s_2)$ ta xác định tín hiệu là s_1 và ngược lại là tín hiệu s_2 . Luật xác định có thể biểu diễn như sau:

$$\frac{PM(r, s_1)}{PM(r, s_2)} >_{s_1} 1 \quad (7-1-51)$$

Nhưng

$$\frac{PM(r, s_1)}{PM(r, s_2)} = \frac{p}{1-p} \exp\left[\frac{(r + \sqrt{\zeta_b})^2 - (r - \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (7-1-52)$$

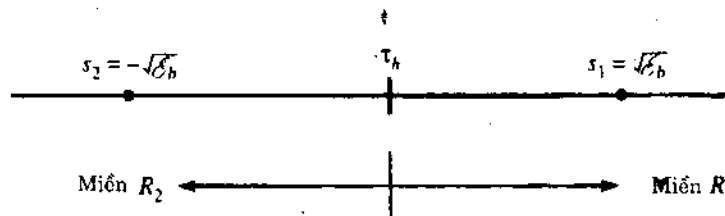
nên (7-1-51) trở thành:

$$\frac{(r + \sqrt{\zeta_b})^2 - (r - \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2} >_{s_1} \ln \frac{1-p}{p} <_{s_2} \quad (7-1-53)$$

hay tương đương:

$$\sqrt{\zeta_b} r >_{s_1} \frac{1}{2} \sigma_n^2 \ln \frac{1-p}{p} = \frac{1}{4} N_0 \ln \frac{1-p}{p} <_{s_2} \quad (7-1-54)$$

Đó là dạng cuối của bộ xác định tối ưu. Nó tính các độ tương quan $C(r, s_1) = r\sqrt{\zeta_b}$ và so sánh với $\frac{1}{4} N_0 \ln \frac{1-p}{p}$. Hình 7-1-10 vẽ hai điểm tín hiệu s_1 và s_2 . Giới hạn $\frac{1}{4} N_0 \ln \frac{1-p}{p}$ ký hiệu là τ_b . Giá trị này phụ thuộc vào N_0 và p . Nếu $p = 1/2$, $\tau_b = 0$. Nếu $p > 1/2$, điểm tín hiệu s_1 có xác suất lớn hơn và $\tau_b < 0$ và miền R_1 lớn hơn miền R_2 .



Hình 7-1-10: Biểu diễn không gian tín hiệu cho bộ xác định tối ưu tín hiệu PAM nhị phân

Trong trường hợp các xác suất tiên nghiệm không bằng nhau, ta cần phải biết các giá trị này và giá trị N_0 để tính giới hạn τ_b .

Chúng ta kết thúc phần này với việc chứng minh rằng luật xác định dựa trên tiêu chuẩn cực đại khả năng tối thiểu hóa xác suất sai nhầm khi M tín hiệu đồng xác suất tiên nghiệm. Ta ký

hiệu R_m là miền của không gian N chiều mà trong đó ta xác định tín hiệu $s_m(t)$ đã truyền đi khi nhận được vectơ $r = [r_1, r_2, \dots, r_N]$. Xác suất xác định nhầm khi đó là:

$$P(e|s_m) = \int_{R_m^c} p(r|s_m) dr \quad (7-1-55)$$

R_m^c là miền bù của R_m . Xác suất lỗi trung bình là:

$$P(e) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} P(e|s_m) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \int_{R_m^c} p(r|s_m) dr = \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left[1 - \int_{R_m} p(r|s_m) dr \right] \quad (7-1-56)$$

$P(e)$ được cực tiểu hóa bởi việc chọn tín hiệu s_m nếu $p(r|s_m) > p(r|s_k)$ với mọi $k \neq m$. Khi M tín hiệu không đồng xác suất, ta có thể chứng minh một cách tổng quát là tiêu chuẩn MAP làm cực tiểu hóa xác suất lỗi trung bình.

7-1-4. Bộ xác định dãy cực đại khả năng

Khi tín hiệu không nhớ, bộ xác định ký hiệu-ký hiệu mô tả ở trên là tối ưu theo nghĩa nó cực tiểu hóa xác suất sai nhầm. Mặt khác, khi tín hiệu truyền đi có nhớ, có nghĩa là các tín hiệu trong các khoảng thời gian liên tiếp có ảnh hưởng lẫn nhau, thì bộ xác định tối ưu là bộ xác định dựa trên dãy các ký hiệu nhận được trong các khoảng thời gian liên tiếp. Dưới đây ta sẽ xét hai kiểu xác định khác nhau. Trong phần đầu ta xét thuật toán xác định dãy khả năng cực đại bằng cách tìm khoảng cách Euclide nhỏ nhất trong lưới đặc trưng cho tín hiệu truyền đi. Trong phần sau, ta sẽ xét thuật toán cực đại hóa xác suất hậu nghiệm, từ đó cho phép xác định trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu, và mỗi ký hiệu được xác định dựa trên dãy các vectơ tín hiệu nhận được.

Để xây dựng thuật toán xác định dãy cực đại khả năng, ta xét tín hiệu NRZI mà quá trình nhớ được đặc trưng bởi lưới trong hình 6-3-14. Tín hiệu được truyền là tín hiệu PAM nhị phân. Như vậy có thể có hai tín hiệu được truyền đi tương ứng với hai điểm tín hiệu $s_1 = -s_2 = \sqrt{\zeta_b}$ với ζ_b là năng lượng ứng với một bit. Đầu ra của bộ lọc phối hợp hay bộ giải điều chế tương quan với tín hiệu PAM nhị phân ở khoảng thời gian tín hiệu thứ k là:

$$r_k = \pm \sqrt{\zeta_b} + n_k \quad (7-1-57)$$

với n_k là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$.

Hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện của hai tín hiệu có thể truyền đi là:

$$p(r_k|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left[-\frac{(r_k - \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$p(r_k|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left[-\frac{(r_k + \sqrt{\zeta_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (7-1-58)$$

Giả sử ta nhận được một dãy các tín hiệu ở đầu ra của bộ lọc phối hợp $r_1, r_2, \dots, r_K$. Do nhiễu trên kênh là nhiễu trắng có phân bố gaussian và $f(t-iT), f(t-jT)$ với $i \neq j$ là trực giao, dẫn tới $E(n_k n_j) = 0$ với $k \neq j$. Như vậy dãy $n_1, n_2, \dots, n_K$ cũng là nhiễu trắng. Từ đó, với mỗi dãy tín hiệu

truyền đi $\mathbf{s}^{(m)}$, hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của $r_1, r_2, \dots, r_K$ là tích của K hàm mật độ phân bố xác suất biên:

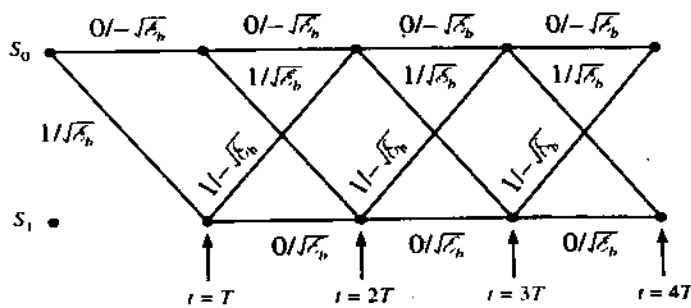
$$\begin{aligned} p(r_1, r_2, \dots, r_K | \mathbf{s}^{(m)}) &= \prod_{k=1}^K p(r_k | s_k^{(m)}) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r_k - s_k^{(m)})^2}{2\sigma_n^2}\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^K \exp\left[-\sum_{k=1}^K \frac{(r_k - s_k^{(m)})^2}{2\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (7-1-59)$$

ở đây $s_k = \sqrt{\zeta_b}$ hoặc $s_k = -\sqrt{\zeta_b}$. Như vậy với dãy $r_1, r_2, \dots, r_K$ nhận được, bộ xác định sẽ tìm dãy $\mathbf{s}^{(m)} = \{s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \dots, s_K^{(m)}\}$ làm cực đại hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện $p(r_1, r_2, \dots, r_K | \mathbf{s}^{(m)})$. Bộ xác định như thế được gọi là bộ xác định dãy cực đại hóa khả năng.

Lấy loga của (7-1-59) và bỏ qua các thành phần độc lập với $(r_1, r_2, \dots, r_K)$, ta tìm được một bộ xác định dãy cực đại khả năng để chọn dãy $\mathbf{s}^{(m)}$ để làm cực tiểu khoảng cách Euclide:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)}) = \sum_{k=1}^K (r_k - s_k^{(m)})^2 \quad (7-1-60)$$

Khi tìm trong lưới dãy làm cực tiểu độ dài $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)})$, ta có thể phải tính độ dài $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)})$ cho mọi dãy có thể. Với tín hiệu NRZI chẳng hạn, khi điều chế nhị phân, số lượng các dãy là 2^K với K là số tín hiệu ở đầu ra bộ giải điều chế, nhưng ta có thể giảm số lượng dãy phải tìm trong lưới nhờ áp dụng thuật toán Viterbi. Thuật toán Viterbi là thuật toán tìm trong lưới để xác định dãy ML. Chúng ta mô tả thuật toán này đối với tín hiệu NRZI. Giả sử rằng quá trình tìm kiếm khởi đầu ở trạng thái S_0 . Lưới tương ứng trên hình 7-1-11.



Hình 7-1-11: Lưới tương ứng với tín hiệu NRZI

Tại thời điểm $t = T$, ta nhận được $r_1 = s_1^{(m)} + n_1$ từ bộ điều chế và tại thời điểm $t = 2T$ ta nhận được $r_2 = s_2^{(m)} + n_2$. Do tín hiệu có nhớ 1 bit, ta ký hiệu $L = 1$, ta nhận thấy lưới tiến tới trạng thái bình thường của nó sau hai chuyển đổi. Sau khi nhận được r_2 tại thời điểm $t = 2T$, có hai đường tín hiệu đi vào mỗi nút và hai đường tín hiệu đi ra khỏi mỗi nút. Hai đường vào nút S_0 tại thời điểm $t = 2T$ tương ứng với các bit thông tin $(0, 0)$ và $(1, 1)$ hay hai điểm tín hiệu $(-\sqrt{\zeta_s}, -\sqrt{\zeta_s})$ và $(\sqrt{\zeta_s}, -\sqrt{\zeta_s})$. Hai đường vào nút S_1 tại thời điểm $t = 2T$ tương ứng với các bit thông tin $(0, 1)$ và $(1, 0)$ hay hai điểm tín hiệu $(-\sqrt{\zeta_s}, \sqrt{\zeta_s})$ và $(\sqrt{\zeta_s}, \sqrt{\zeta_s})$.

Với hai đường tín hiệu vào nút S_0 ta tính hai khoảng cách Euclide:

$$\begin{aligned} D_0(0,0) &= (r_1 + \sqrt{\zeta_b})^2 + (r_2 + \sqrt{\zeta_b})^2 \\ D_0(1,1) &= (r_1 - \sqrt{\zeta_b})^2 + (r_2 + \sqrt{\zeta_b})^2 \end{aligned} \quad (7-1-61)$$

Thuật toán Viterbi so sánh hai khoảng cách này và bỏ đi khoảng cách lớn hơn. Đường ứng với khoảng cách nhỏ hơn được lưu trữ và gọi là *đường còn lại* tại thời điểm $t = 2T$. Việc bỏ qua một trong hai đường không cần xét tới tính tối ưu của việc tìm kiếm bởi vì mọi sự mở rộng đường với khoảng cách lớn sau thời điểm $t = 2T$ luôn có độ đo lớn hơn so với đường còn lại được mở rộng theo đúng đường như thế sau thời điểm $t = 2T$.

Tương tự, hai đường vào nút S_1 tại thời điểm $t = 2T$, ta tính hai khoảng cách Euclide:

$$\begin{aligned} D_1(0,1) &= (r_1 + \sqrt{\zeta_b})^2 + (r_2 - \sqrt{\zeta_b})^2 \\ D_1(1,0) &= (r_1 - \sqrt{\zeta_b})^2 + (r_2 - \sqrt{\zeta_b})^2 \end{aligned} \quad (7-2-62)$$

So sánh hai độ đo này và đường tín hiệu ứng với độ đo lớn hơn bị bỏ qua. Như vậy, tại thời điểm $t = 2T$, ta còn hai đường còn lại, một đường tại nút S_0 và một đường tại nút S_1 . Đường tín hiệu tại các nút S_0 và S_1 sau đó được mở rộng dọc theo hai đường còn lại.

Sau khi nhận được r_3 tại thời điểm $t = 3T$, ta tính hai độ đo của hai đường vào trạng thái S_0 . Giả sử các đường còn lại tại thời điểm $t = 2T$ là $(0, 0)$ tại S_0 và $(0, 1)$ tại S_1 . Hai độ đo cho hai đường vào S_0 tại $t = 3T$ là:

$$\begin{aligned} D_0(0,0,0) &= D_0(0,0) + (r_3 + \sqrt{\zeta_b})^2 \\ D_0(0,1,1) &= D_1(0,1) + (r_3 + \sqrt{\zeta_b})^2 \end{aligned} \quad (7-1-63)$$

So sánh hai độ đo này với nhau và đường với độ đo lớn hơn bị bỏ qua. Quá trình này cứ tiếp tục mỗi khi nhận được một tín hiệu mới từ bộ giải điều chế. Tương tự, hai độ đo của hai đường vào trạng thái S_1 tại thời điểm $t = 3T$ là:

$$\begin{aligned} D_1(0,0,1) &= D_0(0,0) + (r_3 - \sqrt{\zeta_b})^2 \\ D_1(0,1,0) &= D_1(0,1) + (r_3 - \sqrt{\zeta_b})^2 \end{aligned} \quad (7-1-64)$$

Như vậy thuật toán Viterbi tính toán hai độ đo của hai đường tín hiệu vào một nút tại mỗi giai đoạn của quá trình tìm kiếm và bỏ qua một đường tại mỗi nút. Hai đường còn lại sau đó được mở rộng tới trạng thái tiếp theo. Như vậy số đường tìm kiếm trong cây giảm đi hai lần tại mỗi giai đoạn.

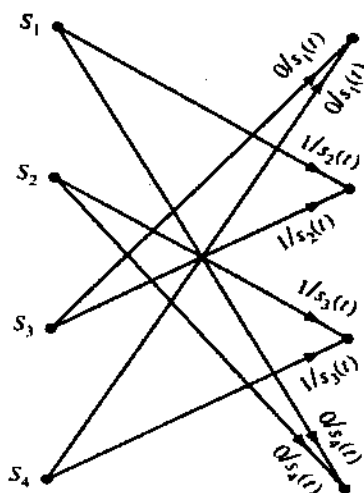
Ta tạo ra được một cách dễ dàng lưới tìm kiếm cho điều chế M mức theo thuật toán Viterbi. Ví dụ điều chế có nhớ với $M = 4$ được đặc trưng bởi lưới 4 trạng thái trên hình 7-1-12. Mỗi trạng thái có hai đường tín hiệu vào và hai đường tín hiệu ra khỏi nút. Quá trình nhớ của tín hiệu là $L = 1$. Thuật toán Viterbi cho 4 đường còn lại tại mỗi giai đoạn và các độ đo tương ứng. Hai độ đo tương ứng với hai đường vào và một đường bị bỏ qua tại mỗi giai đoạn. Như vậy thuật toán Viterbi cực tiểu hóa số đường tìm kiếm trên lưới trong việc xác định dãy ML.

Ví dụ 7-1-4

Xét luật quyết định cho việc xác định dãy số liệu trong một tín hiệu NRZI với thuật toán Viterbi có độ trễ $5L$ bit. Lưới tương ứng trên hình 7-1-11. Trong trường hợp này $L = 1$ và độ trễ trong việc xác định một bit là 5 bit. Tại thời điểm $t = 6T$, ta còn hai dãy còn lại, mỗi dãy cho một

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

trạng thái và các độ đo tương ứng là $\mu_6(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ và $\mu_6(b_1', b_2', b_3', b_4', b_5', b_6')$. Tại giai đoạn này với xác suất gần bằng 1, bit b_i sẽ giống bit b_i' có nghĩa là hai dãy còn lại có chung nhánh đầu tiên. Nếu $b_i \neq b_i'$, ta có thể chọn bit ứng với giá trị nhỏ hơn của hai độ đo. Tại thời điểm $t = 7T$, hai độ đo $\mu_7(b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ và $\mu_7(b_2', b_3', b_4', b_5', b_6', b_7')$ được dùng để xác định bit b_2 . Quá trình này tiếp tục tại mỗi giai đoạn của quá trình tìm kiếm. Như vậy trẻ xác định cố định là 5 bit.



Hình 7-1-12: Một giai đoạn của lưới ứng với điều chế có nhớ

7-1-5. Bộ xác định ký hiệu-ký hiệu cho tín hiệu có nhớ

Trái lại với bộ xác định dãy cực đại khả năng để xác định dãy thông tin truyền đi, bây giờ ta trình bày bộ xác định ký hiệu-ký hiệu dựa trên việc tính xác suất hậu nghiệm cực đại đối với mỗi ký hiệu được xác định. Bộ xác định này là tối ưu theo nghĩa nó cực tiểu hóa xác suất xác định sai ký hiệu.

Ta trình bày thuật toán trong khung cảnh xác định tín hiệu PAM M mức. Giả sử ta phải xác định ký hiệu mang thông tin tại khoảng thời gian tín hiệu thứ k và đặt $r_1, r_2, \dots, r_{k+D}$ là dãy ký hiệu thu được với D là tham số trễ được chọn sao cho vượt qua khả năng nhớ của tín hiệu, có nghĩa là $D \gg L$ với L là độ nhớ của tín hiệu. Dựa trên dãy nhận được, ta xác định các xác suất hậu nghiệm:

$$P(s^{(k)} = A_m | r_{k+D}, r_{k+D-1}, \dots, r_1) \quad (7-1-65)$$

với M giá trị có thể và chọn ký hiệu với xác suất lớn nhất. Do:

$$P(s^{(k)} = A_m | r_{k+D}, r_{k+D-1}, \dots, r_1) = \frac{p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)} = A_m) P(s^{(k)} = A_m)}{p(r_{k+D}, r_{k+D-1}, \dots, r_1)} \quad (7-1-66)$$

và do mẫu số là giống nhau với M xác suất, tiêu chuẩn cực đại của xác suất hậu nghiệm tương đương với việc chọn giá trị của $s^{(k)}$ làm cực đại tử số trong (7-1-66). Như vậy tiêu chuẩn xác định ký hiệu truyền đi $s^{(k)}$ là:

$$\tilde{s}^{(k)} = \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} p(r_{k \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(k)} = A_m) P(s^{(k)} = A_m) \right\} \quad (7-1-67)$$

Khi các ký hiệu là đồng xác suất thì $P(s^{(k)} = A_m)$ có thể bỏ qua trong tính toán. Thuật toán để xác định các xác suất trong (7-1-67) được thực hiện truy hồi bắt đầu với ký hiệu đầu tiên $s^{(1)}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{(1)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(1)}} p(r_{1 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(1)} = A_m) P(s^{(1)} = A_m) \right\} \\ &= \arg \left\{ \max_{s^{(1)}} \sum_{s^{(1+D)}} \dots \sum_{s^{(2)}} p(r_{1 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \right\} \\ &= \arg \left\{ \max_{s^{(1)}} \sum_{s^{(1+D)}} \dots \sum_{s^{(2)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \right\} \end{aligned} \quad (7-1-68)$$

với $\tilde{s}^{(1)}$ ký hiệu việc xác định $s^{(1)}$ và ta định nghĩa:

$$p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \equiv p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \quad (7-1-69)$$

Xác suất đồng thời $p(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)})$ có thể bỏ qua nếu các ký hiệu là đồng xác suất và độc lập thống kê. Ta có:

$$p(r_{1 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) = p(r_{1 \cdot D} | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1+D-L)}) p(r_D | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1+D-L)}) \dots p(r_1 | s^{(1)}) \quad (7-1-70)$$

với giả thiết $s^{(k)} = 0$ với $k \leq 0$.

Để xác định ký hiệu $s^{(2)}$, ta có:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{(2)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} p(r_{2 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(2)} = A_m) P(s^{(2)} = A_m) \right\} \\ &= \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} \sum_{s^{(2+D)}} \dots \sum_{s^{(3)}} p(r_{2 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) P(s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) \right\} \end{aligned} \quad (7-1-71)$$

Mà:

$$p(r_{2 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) = p(r_{2 \cdot D} | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2+D-L)}) p(r_{1 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) \quad (7-1-72)$$

Hơn nữa, xác suất đồng thời:

$$p(r_{1 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)})$$

nhận được từ việc tính toán khi xác định $s^{(1)}$, có nghĩa là:

$$p(r_{1 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) = \sum_{s^{(1)}} p(r_{1 \cdot D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)})$$

$$= \sum_{s^{(1)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \quad (7-1-73)$$

Thay (7-1-72), (7-1-73) vào (7-1-71) ta nhận được:

$$\tilde{s}^{(2)} = \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} \sum_{s^{(1+D)}} \dots \sum_{s^{(2)}} p_2(s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) \right\} \quad (7-1-74)$$

$$\text{với } p_2(s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) \equiv p(r_{2+D} | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2+D-L)}) p(s^{(2+D)}) \sum_{s^{(1)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \quad (7-1-75)$$

Thuật toán truy hồi xác định $s^{(k)}$ dựa trên $r_{k+D}, \dots, r_1$, ta tính:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{(k)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)}) p(s^{(k)}) \right\} \\ &= \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} \sum_{s^{(k+D)}} \dots \sum_{s^{(k+1)}} p_k(s^{(k+D)}, \dots, s^{(k)}) \right\} \end{aligned} \quad (7-1-76)$$

$$\text{với } p_k(s^{(k+D)}, \dots, s^{(k)}) = p(r_{k+D} | s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+D-L)}) p(s^{(k+D)}) \sum_{s^{(k-1)}} p_{k-1}(s^{(k-1+D)}, \dots, s^{(k-1)}) \quad (7-1-77)$$

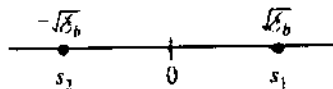
Vấn đề cơ bản của thuật toán này là độ phức tạp tính toán đặc biệt khi M lớn. Nếu M nhỏ và khả năng nhớ L nhỏ thì thuật toán thực hiện nhanh và tương đối dễ dàng.

7-2. HIỆU QUẢ BỘ THU TỐI ƯU ĐỐI VỚI TÍN HIỆU ĐIỀU CHẾ KHÔNG NHỚ

Trong phần này ta tính xác suất thu sai đối với tín hiệu điều chế không nhớ ([5], [6], [10], [11]).

7-2-1. Xác suất thu sai tín hiệu nhị phân

Ta xét tín hiệu PAM nhị phân với hai tín hiệu $s_1(t) = g(t)$ và $s_2(t) = -g(t)$ với $g(t)$ là một xung bất kỳ khác 0 trong khoảng $0 \leq t \leq T$ và bằng 0 tại các thời điểm thời gian khác. Do $s_1(t) = -s_2(t)$ nên các tín hiệu này ngược pha với nhau (antipodal). Năng lượng xung $g(t)$ là ζ_b . Tín hiệu PAM là một chiều và biểu diễn hình học đơn giản là vectơ một chiều $s_1 = \sqrt{\zeta_b}$, $s_2 = -\sqrt{\zeta_b}$. Hình 7-2-1 biểu diễn hai điểm tín hiệu.



Hình 7-2-1: Hai điểm tín hiệu của tín hiệu PAM nhị phân

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Giả thiết tín hiệu $s_1(t)$ được truyền đi và tín hiệu nhận được sau bộ giải điều chế là:

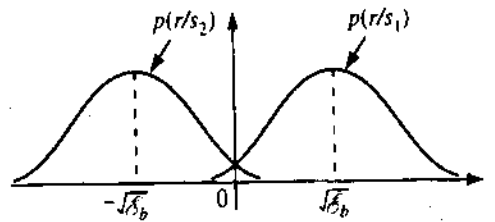
$$r = s_1 + n = \sqrt{\zeta_b} + n \quad (7-2-1)$$

n là thành phần nhiễu cộng gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương $\sigma_n^2 = N_0 / 2$. Trong trường hợp này, luật xác định dựa trên độ đo tương quan (7-1-44) sẽ so sánh r với cận 0. Nếu $r > 0$ thì quyết định tín hiệu truyền đi là $s_1(t)$ và nếu $r < 0$ thì quyết định tín hiệu truyền đi là $s_2(t)$, hai hàm xác suất có điều kiện là:

$$p(r|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[- (r - \sqrt{\zeta_b})^2 / N_0 \right] \quad (7-2-2)$$

$$p(r|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[- (r + \sqrt{\zeta_b})^2 / N_0 \right] \quad (7-2-3)$$

Hai hàm mật độ xác suất này được biểu diễn trên hình 7-2-2.



Hình 7-2-2: Hai hàm mật độ phân bố xác suất của hai tín hiệu

Giả thiết $s_1(t)$ truyền đi, xác suất lỗi là xác suất để $r < 0$, nghĩa là:

$$\begin{aligned} P(e|s_1) &= \int_{-\infty}^0 p(r|s_1) dr = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[- (r - \sqrt{\zeta_b})^2 / N_0 \right] dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\zeta_b}/N_0} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\zeta_b}/N_0}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = Q(\sqrt{2\zeta_b} / N_0) \end{aligned} \quad (7-2-4)$$

với $Q(x)$ được định nghĩa trong (2-1-97). Tương tự, nếu $s_2(t)$ được truyền đi thì xác suất để $r > 0$ là $P(e|s_2) = Q(\sqrt{2\zeta_b} / N_0)$. Nếu giả thiết $s_1(t)$ và $s_2(t)$ có xác suất truyền đi như nhau thì giá trị trung bình của xác suất sai là:

$$P_b = [P(e|s_1) + P(e|s_2)] / 2 = Q(\sqrt{2\zeta_b} / N_0) \quad (7-2-5)$$

Ta có thể nhận thấy có hai tính chất quan trọng sau. Thứ nhất, xác suất lỗi chỉ phụ thuộc vào tỷ số ζ_b / N_0 mà không phụ thuộc vào tính chất của tín hiệu và nhiễu. Thứ hai, $2\zeta_b / N_0$ là tỷ số tín hiệu trên nhiễu cực đại SNR_0 của tín hiệu từ bộ giải điều chế. Tỷ số ζ_b / N_0 được gọi là tỷ số tín hiệu trên nhiễu ứng với (của) một bit.

Ta cũng nhận thấy rằng xác suất lỗi có thể biểu diễn theo khoảng cách giữa hai điểm tín hiệu s_1 và s_2 . Với khoảng cách giữa hai điểm tín hiệu là $d_{12} = 2\sqrt{\zeta_b}$, ta có:

$$P_b = Q(\sqrt{d_{12}^2 / 2N_0}) \quad (7-2-6)$$

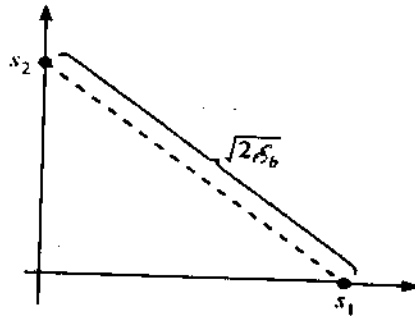
Công thức trên biểu diễn sự phụ thuộc của xác suất lỗi vào khoảng cách giữa hai điểm tín hiệu.

Tiếp theo ta tính xác suất lỗi của tín hiệu nhị phân trực giao. Hai vectơ tín hiệu s_1 và s_2 là hai chiều như trên hình 7-2-3, theo (6-3-30) ta có:

$$\begin{aligned} s_1 &= [\sqrt{\zeta_b} \ 0] \\ s_2 &= [0 \ \sqrt{\zeta_b}] \end{aligned} \quad (7-2-7)$$

với ζ_b là năng lượng của mỗi tín hiệu. Khoảng cách giữa hai điểm tín hiệu $d_{12} = \sqrt{2\zeta_b}$. Giả thiết tín hiệu $s_1(t)$ được truyền đi, vectơ nhận được sau bộ giải điều chế là:

$$r = [\sqrt{\zeta_b} + n_1 \ n_2] \quad (7-2-8)$$



Hình 7-2-3: Các điểm tín hiệu của tín hiệu nhị phân trực giao

Ta thay r vào biểu thức độ đo tương quan trong (7-1-44) để nhận được $C(r, s_1)$ và $C(r, s_2)$. Xác suất lỗi là xác suất để $C(r, s_2) > C(r, s_1)$.

$$P(e|s_1) = P[C(r, s_2) > C(r, s_1)] = P[n_2 - n_1 > \sqrt{\zeta_b}] \quad (7-2-9)$$

Do n_1 và n_2 là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương $N_0/2$, biến ngẫu nhiên $x = n_2 - n_1$ cũng là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương N_0 . Do đó:

$$P(n_2 - n_1 > \sqrt{\zeta_b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{\sqrt{\zeta_b}}^{\infty} e^{-x^2/2N_0} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\zeta_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = Q(\sqrt{\zeta_b/N_0}) \quad (7-2-10)$$

Xác suất sai nhầm khi $s_2(t)$ phát đi cũng giống như vậy. Từ đó, xác suất sai nhầm trung bình của tín hiệu nhị phân trực giao là:

$$P_b = Q(\sqrt{\zeta_b/N_0}) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (7-2-11)$$

với γ_b là SNR từng bit.

Nếu so sánh xác suất sai trung bình của hai tín hiệu, ta thấy tín hiệu trực giao cần năng lượng gấp đôi năng lượng của tín hiệu nhị phân ngược pha để có cùng xác suất sai trung bình.

Xác suất sai nhầm theo $10\log_{10}(\zeta_b/N_0)$ của hai loại tín hiệu được vẽ trên hình 7-2-4. Với mỗi xác suất sai nhầm, tín hiệu trực giao cần nhiều hơn 3 dB đối với ζ_b/N_0 so với tín hiệu nhị phân ngược pha.

7-2-2. Xác suất thu sai tín hiệu trực giao M mức

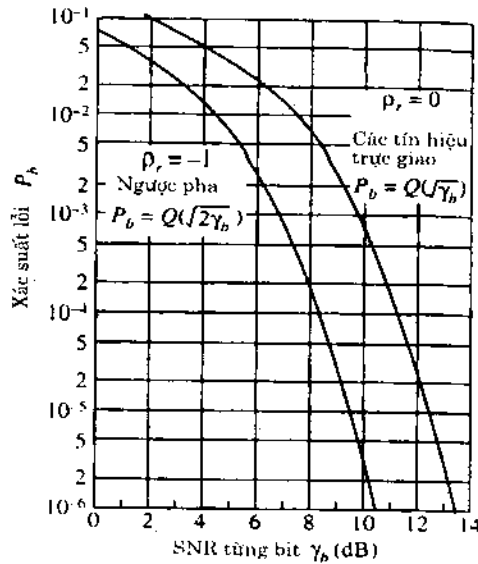
Với các tín hiệu trực giao cùng năng lượng, bộ xác định tối ưu sẽ chọn tín hiệu có độ đo tương quan chéo lớn nhất với vectơ $\mathbf{r}$, có nghĩa là:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^M r_k s_{mk}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-2-12)$$

Để tính xác suất thu sai, ta giả sử tín hiệu $\mathbf{s}_1$ được truyền đi. Vectơ tín hiệu nhận được là:

$$\mathbf{r} = [\sqrt{\zeta_s} + n_1 \quad n_2 \dots n_M] \quad (7-2-13)$$

$n_1, n_2, \dots, n_M$ là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê, có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$. Đầu ra của băng M bộ tương quan là:



Hình 7-2-4: Xác suất sai nhầm cho các tín hiệu nhị phân

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) &= \sqrt{\zeta_s} (\sqrt{\zeta_s} + n_1) \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2) &= \sqrt{\zeta_s} n_2 \\ &\dots \dots \dots \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_M) &= \sqrt{\zeta_s} n_M \end{aligned} \quad (7-2-14)$$

Khi chuẩn hóa bằng cách chia tất cả các biểu thức (7-2-14) cho $\sqrt{\zeta_s}$, hàm mật độ phân bố xác suất của tín hiệu ở đầu ra bộ tương quan thứ nhất ($r_1 = \sqrt{\zeta_s} + n_1$) là:

$$p_{r_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\left(x_1 - \sqrt{\zeta_s} \right)^2 / N_0 \right] \quad (7-2-15)$$

và các hàm mật độ phân bố xác suất của các tín hiệu đầu ra $M - 1$ bộ tương quan khác là:

$$p_{r_m}(x_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp(-x_m^2 / N_0), m = 2, 3, \dots, M \quad (7-2-16)$$

Xác suất xác định đúng là:

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1) p(r_1) dr_1 \quad (7-2-17)$$

với $P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1)$ là xác suất đồng thời để tất cả $n_2, n_3, \dots, n_M$ đều nhỏ hơn r_1 . Do $\{r_m\}$ là độc lập thống kê nên xác suất đồng thời là tích của $M - 1$ xác suất sau:

$$P(n_m < r_1 | r_1) = \int_{-\infty}^{r_1} p_{r_m}(x_m) dx_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1 \sqrt{2/N_0}} e^{-x^2/2} dx, m = 2, \dots, M \quad (7-2-18)$$

Các xác suất này là giống nhau với $m = 2, 3, \dots, M$ và xác suất đồng thời là lũy thừa bậc $M - 1$ của một xác suất. Từ đó, xác suất xác định đúng là:

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1 \sqrt{2/N_0}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} p(r_1) dr_1 \quad (7-2-19)$$

và xác suất thu sai ký hiệu là:

$$P_M = 1 - P_c \quad (7-2-20)$$

và

$$P_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{\frac{2\zeta_s}{N_0}} \right)^2 \right] dy \quad (7-2-21)$$

Xác suất xác định sai khi $M - 1$ tín hiệu còn lại được truyền đi cũng đúng như vậy. Do M tín hiệu là đồng khả năng khi truyền nên P_M là xác suất xác định sai trung bình một ký hiệu.

Khi so sánh hiệu quả các phương pháp điều chế số, ta muốn biểu diễn xác suất xác định sai theo tỷ số SNR từng bit là ζ_b/N_0 thay cho SNR từng ký hiệu ζ_s/N_0 . Với $M = 2^k$, mỗi ký hiệu gồm k bit thông tin và $\zeta_s = k\zeta_b$ và ta có thể thay vào (7-2-21).

Đôi khi ta cũng muốn chuyển xác suất xác định sai ký hiệu thành dạng tương đương là xác suất xác định sai từng bit. Với các tín hiệu trực giao đồng xác suất, sai lầm của các ký hiệu là đồng khả năng và bằng:

$$\frac{P_M}{M-1} = \frac{P_M}{2^k-1} \quad (7-2-22)$$

Số lượng trung bình các bit bị sai trong ký hiệu có độ dài k là:

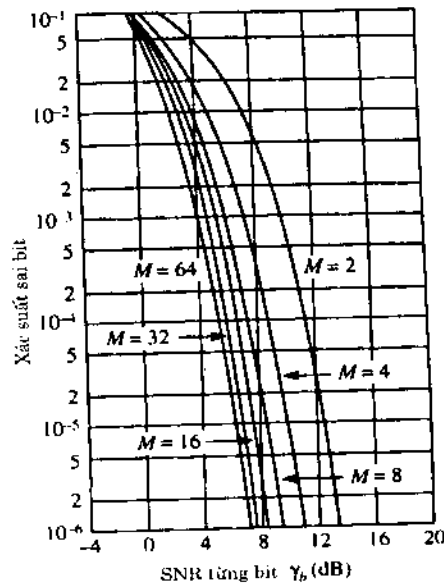
$$\sum_{n=1}^k \binom{k}{n} \frac{P_M}{2^k-1} = k \frac{2^{k-1}}{2^k-1} P_M \quad (7-2-23)$$

và xác suất sai trung bình một bit là:

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k-1} P_M \approx \frac{1}{2} P_M, k \gg 1 \quad (7-2-24)$$

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Đồ thị trên hình 7-2-5 biểu diễn xác suất sai bit theo SNR từng bit ζ_b/N_0 . Ta thấy rằng khi tăng số lượng tín hiệu M , có thể giảm SNR từng bit để có cùng một xác suất sai nhầm.



Hình 7-2-5: Xác suất sai bit đối với thu liên kết tín hiệu trực giao

Vấn đề bây giờ là xác định giới hạn dưới của ζ_b/N_0 để xác suất sai nhầm bé tùy ý khi $M \rightarrow \infty$. Câu trả lời được trình bày dưới đây.

Ta khảo sát ảnh hưởng lên xác suất xác định sai khi tăng M của các tín hiệu trực giao. Để đơn giản trong biểu diễn toán học, trước hết ta xác định giới hạn trên của xác suất xác định sai ký hiệu.

Nhắc lại rằng xác suất xác định sai của các ký hiệu trực giao nhị phân được xác định bởi (7-2-21). Nếu ta xét bộ xác định tín hiệu trực giao M mức như là một bộ đưa ra $M - 1$ quyết định giữa đầu ra của bộ tương quan $C(r, s_i)$ với $M - 1$ đầu ra khác $C(r, s_m)$, $m = 2, 3, \dots, M$ thì xác suất xác định sai bị chặn trên bởi giới hạn hợp của $M - 1$ sự kiện. Điều đó có nghĩa là nếu E_i biểu thị

sự kiện $C(r, s_i) > C(r, s_1)$ với $i \neq 1$ thì ta có $P_M = P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$ và:

$$P_M \leq (M - 1)P_2 = (M - 1)Q\left(\sqrt{\zeta_s/N_0}\right) < MQ\left(\sqrt{\zeta_s/N_0}\right) \quad (7-2-25)$$

Giới hạn này có thể đơn giản hơn nữa nếu xét giới hạn trên của $Q\left(\sqrt{\zeta_s/N_0}\right)$:

$$Q\left(\sqrt{\zeta_s/N_0}\right) < e^{-\zeta_s/2N_0} \quad (7-2-26)$$

và

$$P_M < Me^{-\zeta_s/2N_0} = 2^k e^{-k\zeta_b/2N_0}$$

Như vậy:

$$P_M < e^{-k(\zeta_b/N_0 - 2\ln 2)/2} \quad (7-2-27)$$

Khi $k \rightarrow \infty$ (hay $M \rightarrow \infty$), xác suất xác định sai tiến tới 0, do đó ζ_b/N_0 lớn hơn $2\ln 2$ hay:

$$\zeta_b/N_0 > 2\ln 2 = 1,39 \text{ (1,42 dB)} \quad (7-2-28)$$

Giới hạn trên của xác suất xác định sai chỉ ra rằng nếu $\text{SNR} > 1,42 \text{ dB}$, ta có thể giảm tùy ý P_M . Tuy nhiên giới hạn hợp không phải là giới hạn trên chặt do giới hạn trên của hàm Q là không chặt. Về sau ta sẽ thấy giới hạn xét ở trên là tương đối chặt với $\zeta_b/N_0 > 4\ln 2$. Với $\zeta_b/N_0 < 4\ln 2$, giới hạn trên chặt hơn của P_M là:

$$P_M < 2e^{-k(\sqrt{\zeta_b/N_0} - \sqrt{\ln 2})^2} \quad (7-2-29)$$

Khi $k \rightarrow \infty$ thì $P_M \rightarrow 0$, ta có:

$$\zeta_b/N_0 > \ln 2 = 0,693 \text{ (-1,6 dB)} \quad (7-2-30)$$

Như vậy, -1,6 dB là giá trị cực tiểu của SNR từng bit để có thể giảm xác suất xác định sai nhỏ tùy ý khi $M \rightarrow \infty$. Giới hạn này gọi là giới hạn Shannon cho kênh có nhiễu cộng gaussian (AWGN).

7-2-3. Xác suất xác định sai tín hiệu trực giao kép M mức

Như ta đã biết, tập hợp $M = 2^k$ tín hiệu nhị phân trực giao kép được xây dựng từ $M/2$ tín hiệu trực giao bằng cách đổi dấu các tín hiệu. Như vậy sẽ làm giảm độ phức tạp của bộ giải điều chế so với các tín hiệu trực giao do chỉ cần $M/2$ bộ tương quan chéo hay bộ lọc phối hợp.

Để tính xác suất xác định sai của bộ xác định tối ưu, ta giả thiết tín hiệu $s_1(t)$ tương ứng với vectơ $\mathbf{s}_1 = [\sqrt{\zeta_s} \ 0 \dots 0]$ được truyền đi. Vectơ tín hiệu nhận được là:

$$\mathbf{r} = [\sqrt{\zeta_s} + n_1 \ n_2 \dots n_{M/2}] \quad (7-2-31)$$

$\{n_m\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian độc lập thống kê có giá trị trung bình 0 và sai phương $N_0/2$. Bộ xác định tối ưu quyết định tín hiệu ứng với giá trị cực đại của độ đo tương quan chéo:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^{M/2} r_k s_{mk}, \quad m = 1, 2, \dots, M/2 \quad (7-2-32)$$

với dấu của giá trị lớn nhất dùng để xác định tín hiệu $s_m(t)$ hay $-s_m(t)$ đã truyền đi. Xác suất xác định đúng bằng xác suất để $r_1 = \sqrt{\zeta_s} + n_1 > 0$ và r_1 lớn hơn $|r_m| = |n_m|$, $m = 2, \dots, M/2$. Nhưng:

$$P(|n_m| < r_1 | r_1 > 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-r_1}^{r_1} e^{-x^2/N_0} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx \quad (7-2-33)$$

Xác suất xác định đúng là:

$$P_c = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx \right)^{\frac{M}{2}-1} p(r_1) dr_1 = \int_{-\sqrt{2\zeta_s/N_0}}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(v+\sqrt{2\zeta_s/N_0})}^{v+\sqrt{2\zeta_s/N_0}} e^{-x^2/2} dx \right)^{\frac{M}{2}-1} e^{-v^2/2} dv \quad (7-2-34)$$

(ta sử dụng $p(r_1)$ từ (7-2-15)). Cuối cùng, xác suất xác định sai ký hiệu là: $P_M = 1 - P_c$.

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

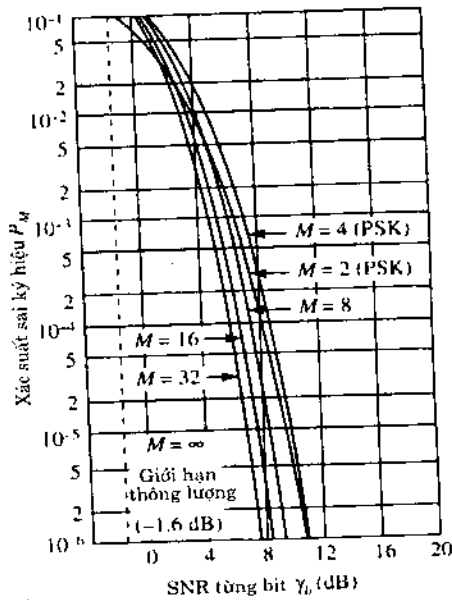
Đồ thị trên hình 7-2-6 biểu diễn P_M theo ζ_s/N_0 với $\zeta_s = k\zeta_b$ và $M = 2, 4, 6, 8, 16, 32$. Ta thấy đồ thị tương tự như đối với tín hiệu trực giao. Tuy nhiên, xác suất sai với $M = 4$ lớn hơn so với $M = 2$. Nếu ta vẽ xác suất sai bit thì hai đường với $M = 2$ và $M = 4$ sẽ trùng nhau. Giống như với tín hiệu trực giao, khi $M \rightarrow \infty$ (hay $k \rightarrow \infty$), giá trị cực tiểu của tỷ số ζ_b/N_0 để xác suất xác định sai bé tùy ý là $-1,6$ dB.

7-2-4. Xác suất xác định sai tín hiệu đơn hình

Nhắc lại rằng tín hiệu đơn hình là một tập hợp M tín hiệu có tương quan giống nhau với các hệ số tương quan chéo $\rho_{mn} = -1/(M - 1)$. Các tín hiệu này có cùng một độ phân tách cực tiểu là $\sqrt{2\zeta_s}$ giữa hai điểm tín hiệu kế nhau trong không gian M chiều. Các tín hiệu với độ phân tách như thế được truyền đi với năng lượng $\zeta_s(M - 1)/M$, nhỏ hơn so với các tín hiệu trực giao (đối với tín hiệu trực giao là ζ_s). Như vậy xác suất xác định sai tín hiệu đơn hình giống như với tín hiệu trực giao nhưng độ chính xác đó được thực hiện với độ tiết kiệm:

$$10\log_{10}(1 - \rho) = 10\log_{10} \frac{M}{M - 1} \text{ dB} \quad (7-2-35)$$

đối với SNR. Đối với $M = 2$, độ tiết kiệm là 3 dB.



Hình 7-2-6: Xác suất sai ký hiệu của tín hiệu trực giao kép

7-2-5. Xác suất xác định sai tín hiệu mã nhị phân M mức

Các tín hiệu mã nhị phân được biểu diễn bởi các vectơ tín hiệu:

$$s_m = [s_{m1} s_{m2} \dots s_{mN}], \quad m = 1, 2, \dots, M$$

với $s_{mj} = \pm \sqrt{\zeta/N}$ với mọi m và j , N là độ dài của từ mã và cũng là số chiều của các tín hiệu.

Nếu $d_{\min}^{(e)}$ là khoảng cách Euclide nhỏ nhất giữa M tín hiệu thì xác suất xác định sai ký hiệu có giới hạn trên là:

$$P_m < (M-1)P_b = (M-1)Q\left[\sqrt{\frac{(d_{\min}^{(e)})^2}{2N_0}}\right] < 2^k \exp\left[-\frac{(d_{\min}^{(e)})^2}{4N_0}\right] \quad (7-2-36)$$

Khoảng cách Euclide nhỏ nhất phụ thuộc vào việc chọn từ mã, nghĩa là phụ thuộc vào việc thiết kế mã.

7-2-6. Xác suất xác định sai tín hiệu PAM M mức

Tín hiệu PAM M mức được biểu diễn hình học bởi M điểm tín hiệu trong không gian một chiều với giá trị:

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{2}} \zeta_g A_m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-2-37)$$

với ζ_g là năng lượng xung cơ bản $g(t)$. Các giá trị biên độ là:

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-2-38)$$

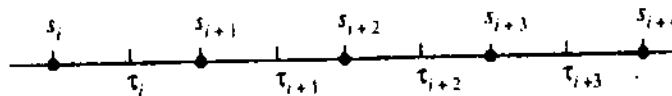
và khoảng cách Euclide giữa hai điểm tín hiệu kế nhau là $d\sqrt{2\zeta_g}$:

$$\zeta_{av} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \zeta_m = \frac{d^2 \zeta_g}{2M} \sum_{m=1}^M (2m - 1 - M)^2 = \frac{d^2 \zeta_g}{2M} \left[\frac{1}{3} M(M^2 - 1) \right] = \frac{1}{6} (M^2 - 1) d^2 \zeta_g \quad (7-2-39)$$

Một cách tương đương, ta có thể đặc trưng các tín hiệu này bởi công suất trung bình:

$$P_{av} = \frac{\zeta_{av}}{T} = \frac{1}{6} (M^2 - 1) \frac{d^2 \zeta_g}{T} \quad (7-2-40)$$

Xác suất xác định sai trung bình cho tín hiệu PAM M mức có thể xác định theo luật cực đại hóa độ đo tương quan trong (7-1-44). Bộ xác định so sánh tín hiệu r ở đầu ra bộ giải điều chế với $M - 1$ cận tại điểm giữa các giá trị biên độ như trên hình 7-2-7, và quyết định chọn giá trị biên độ sát r nhất.



Hình 7-2-7: Các cận là điểm giữa các giá trị biên độ liên tiếp

Việc đánh dấu các cận cho phép tính xác suất xác định sai. Nếu giá trị biên độ thứ m được truyền đi thì tín hiệu đầu ra bộ giải điều chế là:

$$r = s_m + n = \sqrt{\frac{1}{2}} \zeta_g A_m + n \quad (7-2-41)$$

với n là biến ngẫu nhiên có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương $\frac{1}{2}N_0$. Nếu tất cả các giá trị biên độ là đồng xác suất tiên nghiệm thì xác suất xác định ký hiệu sai trung bình là xác suất để giá trị biến ngẫu nhiên n vượt qua một nửa hiệu giá trị biên độ của hai mức liên tiếp. Tuy nhiên khi một trong hai giá trị biên độ $\pm(M-1)$ truyền đi, sai số chỉ xảy ra theo một chiều. Ta có:

$$\begin{aligned} P_M &= \frac{M-1}{M} P\left(|r - s_m| > d\sqrt{\frac{1}{2}\zeta_K}\right) = \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{d\sqrt{\zeta_K/2}}^{\infty} e^{-x^2/N_0} dx \\ &= \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{d\sqrt{\zeta_K/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{d^2\zeta_K}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (7-2-42)$$

Xác suất lỗi trong (7-2-42) có thể được biểu diễn theo công suất trung bình truyền đi. Từ (7-2-40) và từ:

$$d^2\zeta_K = \frac{6}{M^2 - 1} P_{av} T \quad (7-2-43)$$

Thay $d^2\zeta_K$ vào (7-2-42) ta nhận được xác suất xác định sai ký hiệu trung bình theo công suất trung bình là:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}}\right) \quad (7-2-44)$$

hay

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\zeta_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right) \quad (7-2-45)$$

$\zeta_{av} = P_{av}T$ là năng lượng trung bình.

Khi vẽ xác suất sai ký hiệu cho tín hiệu PAM M mức, ta dùng SNR như tham số. Do $T = kT_b$ và $k = \log_2 M$, (7-2-45) có thể viết thành:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{(6\log_2 M)\zeta_{bav}}{(M^2-1)N_0}}\right) \quad (7-2-46)$$

ζ_{bav} là năng lượng trung bình ứng với một bit và ζ_{bav}/N_0 là SNR trung bình ứng với một bit. Hình 7-2-8 vẽ xác suất sai ký hiệu theo $10\log_{10}(\zeta_{bav}/N_0)$ với M là tham số. SNR theo bit tăng 4dB khi M tăng gấp đôi và giữ nguyên xác suất sai nhầm.

7-2-7. Xác suất xác định sai tín hiệu PSK M mức

Tín hiệu điều chế pha số có thể biểu diễn như sau:

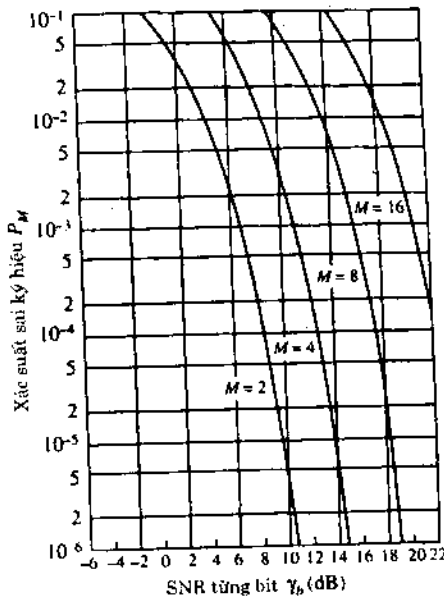
$$s_m(t) = g(t) \cos\left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1)\right], \quad 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-2-47)$$

và biểu diễn vectơ tương ứng:

$$s_m = \left[\sqrt{\zeta_s} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad \sqrt{\zeta_s} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \quad (7-2-48)$$

với $\zeta_s = \frac{1}{2}\zeta_x$ là năng lượng mỗi tín hiệu và $g(t)$ là xung của tín hiệu truyền đi. Do các tín hiệu có cùng năng lượng, bộ xác định tối ưu trong (7-1-44) tính các độ đo tương quan:

$$C(r, s_m) = r \cdot s_m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-2-49)$$



Hình 7-2-8: Xác suất xác định sai tín hiệu PAM

Nói cách khác, vectơ tín hiệu nhận được $r = [r_1, r_2]$ được chiếu trên M vectơ tín hiệu và sẽ chọn tín hiệu ứng với hình chiếu lớn nhất.

Bộ xác định tương quan mô tả ở trên là tương đương với bộ xác định pha mà bộ xác định pha này tính pha của tín hiệu ứng với r và chọn vectơ tín hiệu s_m có pha gần với r nhất. Pha của r là:

$$\theta_r = \arctg \frac{r_2}{r_1} \quad (7-2-50)$$

Ta sẽ xác định hàm mật độ phân bố xác suất của θ_r , từ đó ta sẽ tính xác suất xác định sai. Xét trường hợp tín hiệu truyền đi có pha $\theta_r = 0$ ứng với tín hiệu $s_1(t)$. Vectơ tín hiệu truyền đi là:

$$s_0 = [\sqrt{\zeta_s} \quad 0] \quad (7-2-51)$$

và vectơ tín hiệu nhận được có các thành phần:

$$r_1 = \sqrt{\zeta_s} + n_1, \quad r_2 = n_2 \quad (7-2-52)$$

Do n_1 và n_2 là hai biến ngẫu nhiên đồng thời nên $E(r_1) = \sqrt{\zeta_s}$, $E(r_2) = 0$ và

$$\sigma_{r_1}^2 = \sigma_{r_2}^2 = \frac{N_0}{2} = \sigma_r^2. \text{ Ta có:}$$

$$p_r(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left[-\frac{(r_1 - \sqrt{\zeta_s})^2 + r_2^2}{2\sigma_r^2}\right] \quad (7-2-53)$$

Hàm mật độ phân bố xác suất của θ_r được xác định khi đổi biến từ (r_1, r_2) thành:

$$V = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \quad \theta_r = \arctg \frac{r_2}{r_1} \quad (7-2-54)$$

$$p_{V, \theta_r}(V, \theta_r) = \frac{V}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left[-\frac{V^2 + \zeta_s - 2\sqrt{\zeta_s} V \cos \theta_r}{2\sigma_r^2}\right]$$

Lấy tích phân của $p_{V, \theta_r}(V, \theta_r)$ theo V ta có $p_{\theta_r}(\theta_r)$:

$$p_{\theta_r}(\theta_r) = \int_0^\infty p_{V, \theta_r}(V, \theta_r) dV = \frac{1}{2\pi} e^{-2\gamma_s \sin^2 \theta_r} \int_0^\infty V e^{-(V - \sqrt{4\gamma_s} \cos \theta_r)^2 / 2} dV \quad (7-2-55)$$

với $\gamma_s = \zeta_s / N_0$. Hình 7-2-9 vẽ $p_{\theta_r}(\theta_r)$ với vài giá trị của γ_s khi tín hiệu truyền đi có pha bằng 0. Chú ý rằng $p_{\theta_r}(\theta_r)$ càng hẹp và cực đại tại $\theta_r = 0$ càng cao nếu γ_s càng lớn.

Khi $s_i(t)$ được truyền đi, việc xác định bị sai nếu nhiễu làm pha nằm ngoài khoảng $-\pi/M \leq \theta_r \leq \pi/M$. Như vậy, xác suất xác định sai ký hiệu là:

$$P_M = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p_{\theta_r}(\theta_r) d\theta_r \quad (7-2-56)$$

Với điều chế pha nhị phân thì xác suất xác định sai là:

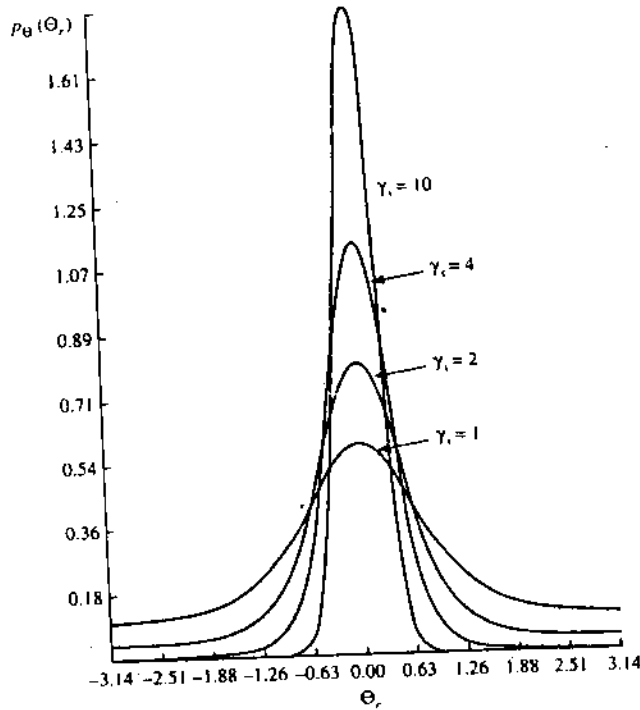
$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2\zeta_b}{N_0}}\right) \quad (7-2-57)$$

Với $M = 4$ ta có hai tín hiệu điều chế pha nhị phân và có pha vuông góc. Nếu không có hiện tượng xuyên âm (crosstalk) giữa các tín hiệu trong hai vật mang vuông góc thì xác suất sai bit giống trong (7-2-57). Mặt khác, xác suất sai ký hiệu với $M = 4$ được xác định qua:

$$P_c = (1 - P_2)^2 = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2\zeta_b}{N_0}}\right)\right]^2 \quad (7-2-58)$$

P_c là xác suất xác định đúng ký hiệu 2 bit. Chú ý rằng (7-2-58) rút ra từ tính độc lập thống kê của nhiễu cộng tác động lên hai thành phần vuông góc. Như vậy, xác suất xác định sai ký hiệu với $M = 4$ là:

$$P_4 = 1 - P_c = 2Q\left(\sqrt{2\zeta_b / N_0}\right) \left[1 - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2\zeta_b / N_0}\right)\right] \quad (7-2-59)$$



Hình 7-2-9: Hàm mật độ phân bố xác suất $p_{\theta}(\theta_r)$

Với $M > 4$ thì xác suất sai ký hiệu P_M được tính theo (7-2-55) bằng phương pháp số. Hình 7-2-10 biểu diễn xác suất này theo SNR. Với $P_M = 10^{-5}$, sai khác giữa $M = 4$ và $M = 8$ xấp xỉ 4dB và giữa $M = 8$ và $M = 16$ xấp xỉ 5dB. Với M lớn, phải tăng gấp đôi số pha tín hiệu cần tăng 6dB/bit để có cùng một xác suất sai nhầm.

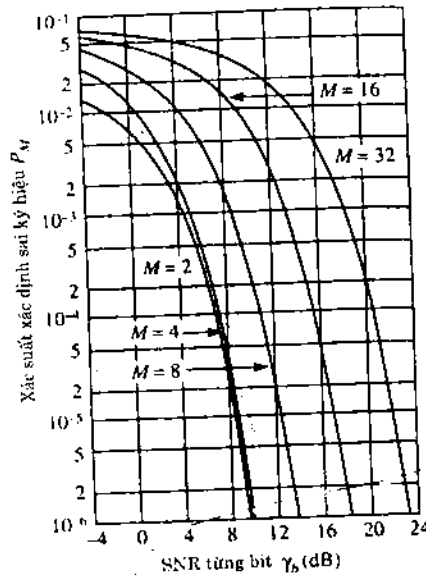
Để xấp xỉ xác suất sai ký hiệu khi M lớn và SNR lớn, trước tiên ta xấp xỉ $p_{\theta}(\theta_r)$. Với $\zeta_s/N_0 \gg 1$ và $|\theta_r| \leq \pi/2$, ta có:

$$p_{\theta}(\theta_r) \approx \sqrt{\frac{2\gamma_s}{\pi}} \cos \theta_r e^{-2\gamma_s \sin^2 \theta_r} \quad (7-2-60)$$

Thay (7-2-60) vào (7-2-56) và đổi biến từ θ_r thành $u = \sqrt{2\gamma_s} \sin \theta_r$, ta có:

$$\begin{aligned} P_M &\approx 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{2\gamma_s}{\pi}} \cos \theta_r e^{-2\gamma_s \sin^2 \theta_r} d\theta_r \\ &\approx \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{2\gamma_s} \sin(\pi/M)}^{\infty} e^{-u^2/2} du = 2Q\left(\sqrt{2\gamma_s} \sin \frac{\pi}{M}\right) = 2Q\left(\sqrt{2k\gamma_b} \sin \frac{\pi}{M}\right) \end{aligned} \quad (7-2-61)$$

với $k = \log_2 M$ và $\gamma_b = k\gamma_s$.



Hình 7-2-10: Xác suất xác định sai ký hiệu với tín hiệu PSK

Xác suất xác định sai bit cho tín hiệu PSK M mức có thể rút ra từ việc biến đổi ký hiệu k bit thành tín hiệu tương ứng. Khi mã Gray được sử dụng cho quá trình biến đổi, hai ký hiệu k bit được chuyển thành hai tín hiệu kế nhau và sai khác về pha chỉ do một bit. Với các sai nhầm thông thường thì các ký hiệu k bit chỉ có 1 bit bị sai. Xác suất sai bit đối với tín hiệu PSK M mức là:

$$P_b \approx \frac{1}{k} P_M \quad (7-2-62)$$

Trong việc giải điều chế tín hiệu PSK, ta giả thiết rằng bộ giải điều chế xác định chính xác pha vật mang. Thực tế, pha vật mang được tính từ tín hiệu nhận được qua vài phép xử lý phi tuyến và tạo nên độ xê dịch về pha. Ví dụ với tín hiệu PSK nhị phân, tín hiệu thường được bình phương để loại bỏ sự điều chế và thành phần tần số gấp đôi được lọc và chia đôi tần số để xác định tần số vật mang và góc pha ϕ . Các phép biến đổi đó tạo nên sự xê dịch về pha 180° trong pha vật mang. Có thể loại bỏ vấn đề xê dịch về pha bằng cách mã hóa trong các pha khác nhau giữa các tín hiệu liên tiếp. Với mã PSK nhị phân, bit thông tin 1 tạo nên dịch pha vật mang 180° so với pha của tín hiệu trước đó và bit thông tin 0 không tạo nên sự dịch pha đối với tín hiệu đã phát trước đó. Tín hiệu PSK được xây dựng từ việc mã hóa như thế gọi là mã hóa vi sai.

Bộ giải điều chế ứng với tín hiệu PSK mã hóa vi sai được thực hiện như đã mô tả ở trên và bỏ qua sự xê dịch về pha. Tiếp theo bộ xác định là bộ so sánh pha, nó so sánh pha của tín hiệu nhận được qua hai khoảng thời gian tín hiệu liên tiếp để xác định thông tin. Bộ giải điều chế liên kết tín hiệu PSK mã hóa vi sai tạo nên xác suất sai nhầm lớn hơn so với tín hiệu PSK mã hóa pha tuyệt đối do việc giải điều chế pha sai dẫn tới việc giải mã sai trong hai khoảng thời gian tín hiệu liên tiếp. Như vậy xác suất sai nhầm trong trường hợp này gấp đôi xác suất sai nhầm đối với mã hóa pha tuyệt đối.

7-2-8. Tín hiệu PSK vi sai (DPSK) và hiệu quả của tín hiệu này

Tín hiệu điều chế pha vi sai tương ứng với bộ giải điều chế không cần ước lượng pha vật mang. Thay vào đó, tín hiệu nhận được trong một khoảng thời gian tín hiệu sẽ được so sánh với

pha của tín hiệu nhận được trong khoảng thời gian tín hiệu trước. Giả sử ta giải điều chế tín hiệu mã hóa vì sai bằng cách nhân $r(t)$ với $\cos 2\pi f_c t$ và $\sin 2\pi f_c t$ rồi lấy tích phân trong khoảng thời gian T . Trong khoảng thời gian tín hiệu thứ k , vectơ tín hiệu đầu ra bộ giải điều chế là:

$$r_k = \left[\sqrt{\zeta_s} \cos(\theta_k - \phi) + n_{k1} \quad \sqrt{\zeta_s} \sin(\theta_k - \phi) + n_{k2} \right] \quad (7-2-63)$$

với θ_k là góc của tín hiệu truyền đi tại khoảng thời gian thứ k và ϕ là pha vật mang, $n_k = n_{k1} + jn_{k2}$ ứng với vectơ nhiễu. Tương tự, vectơ tín hiệu nhận được ở đầu ra bộ giải điều chế tại khoảng thời gian tín hiệu thứ $k-1$ là:

$$r_{k-1} = \sqrt{\zeta_s} e^{j(\theta_{k-1} - \phi)} + n_{k-1} \quad (7-2-64)$$

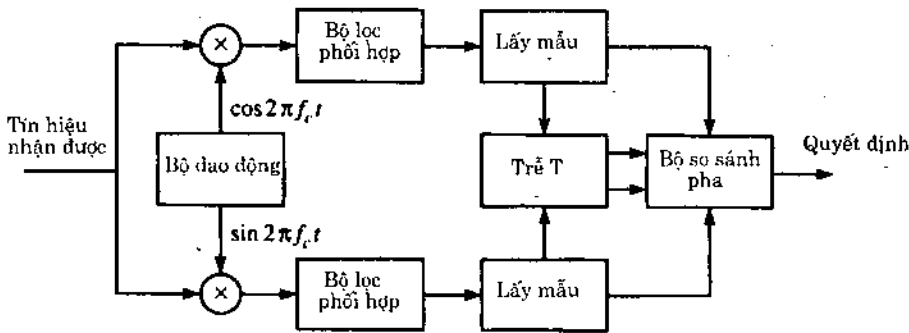
Biến cần phải xác định của bộ xác định pha là sự chênh lệch về pha giữa hai số phức này. Ta có thể chiếu r_k lên r_{k-1} và sử dụng pha của số phức thu được:

$$r_k r_{k-1}^* = \zeta_s e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})} + \sqrt{\zeta_s} e^{j(\theta_k - \phi)} n_{k-1}^* + \sqrt{\zeta_s} e^{-j(\theta_{k-1} - \phi)} n_k + n_k n_{k-1}^* \quad (7-2-65)$$

khi không có nhiễu cho ta sự sai lệch về pha là $\theta_k - \theta_{k-1}$. Như vậy, giá trị trung bình của $r_k r_{k-1}^*$ độc lập với pha của vật mang. Tín hiệu PSK mã hóa vì sai được giải điều chế và xác định như trên gọi là tín hiệu PSK vì sai (DPSK).

Giải điều chế và xác định tín hiệu DPSK sử dụng bộ lọc phối hợp được vẽ trên hình 7-2-11. Nếu $g(t)$ là xung chữ nhật, các bộ lọc có thể thay thế bằng các bộ lọc tích phân.

Bây giờ ta xác định xác suất xác định sai của bộ xác định tín hiệu DPSK. Rất khó xác định chính xác giá trị này, trừ khi $M = 2$. Lý do chủ yếu là việc xác định hàm mật độ phân bố xác suất pha của tín hiệu ngẫu nhiên $r_k r_{k-1}^*$. Tuy nhiên ta có thể ước lượng được xác suất sai này.



Hình 7-2-11: Sơ đồ khối bộ giải điều chế tín hiệu DPSK

Không mất tính tổng quát, giả sử độ chênh lệch về pha $\theta_k - \theta_{k-1} = 0$, và các thành phần mũ $e^{-j(\theta_{k-1} - \phi)}$ và $e^{j(\theta_k - \phi)}$ có thể cho vào các thành phần nhiễu n_{k-1} và n_k mà không làm thay đổi tính chất thống kê của chúng. Như vậy $r_k r_{k-1}^*$ có thể viết thành:

$$r_k r_{k-1}^* = \zeta_s + \sqrt{\zeta_s} (n_k + n_{k-1}^*) + n_k n_{k-1}^* \quad (7-2-66)$$

Sự phức tạp trong việc xác định hàm mật độ phân bố xác suất phụ thuộc vào thành phần $n_k n_{k-1}^*$. Tuy nhiên, với SNR trong thực tế, thành phần $n_k n_{k-1}^*$ nhỏ hơn nhiều so với thành phần

$\sqrt{\zeta_s}(n_k + n_{k-1}^*)$. Nếu ta bỏ qua thành phần $n_k n_{k-1}^*$ và chuẩn hóa $r_k r_{k-1}^*$ bằng việc chia cho $\sqrt{\zeta_s}$, ta có tập hợp các độ đo xác định là:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\zeta_s} + \operatorname{Re}(n_k + n_{k-1}^*) \\ y &= \operatorname{Im}(n_k + n_{k-1}^*) \end{aligned} \quad (7-2-67)$$

x và y là các biến ngẫu nhiên gaussian không tương quan, sai phương giống nhau $\sigma_n^2 = N_0$. Giá trị pha là:

$$\theta_r = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (7-2-68)$$

Vấn đề bây giờ giống như với vấn đề trong giải điều chế pha liên kết đã xét trong phần trước. Điều khác duy nhất là sai phương của nhiễu gấp đôi so với tín hiệu PSK. Ta có thể kết luận rằng hiệu quả của tín hiệu DPSK là thấp hơn 3dB so với tín hiệu PSK. Kết quả này là khá tốt với $M \geq 4$ nhưng với $M = 2$ thì giá trị đó nhỏ hơn 3 dB khi SNR lớn, và điều đó được chứng minh như sau.

Với tín hiệu DPSK nhị phân, hai pha của tín hiệu truyền đi là 0 và π radian. Chỉ có phần thực của $r_k r_{k-1}^*$ là cần thiết cho khôi phục thông tin. Sử dụng (7-2-67) ta có:

$$\operatorname{Re}(r_k r_{k-1}^*) = \frac{1}{2} (r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1})$$

Do sự chênh lệch về pha giữa hai tín hiệu liên tiếp là 0 (theo giả thiết) nên việc xác định gặp lỗi nếu $\operatorname{Re}(r_k r_{k-1}^*) < 0$. Xác suất để $(r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1}) < 0$ là trường hợp đặc biệt của xác suất để một dạng vuông góc tổng quát là một biến ngẫu nhiên gaussian phức nhỏ hơn 0. Ta có xác suất xác định sai với tín hiệu DPSK nhị phân là:

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\zeta_b/N_0} \quad (7-2-69)$$

với ζ_b/N_0 là SNR từng bit.

Đồ thị được vẽ trên hình 7-2-12. Ta nhận thấy tại xác suất $P_b \leq 10^{-3}$ sự chênh lệch giá trị SNR giữa hai tín hiệu là nhỏ hơn 3 dB. Với $P_b \leq 10^{-5}$, sự chênh lệch đó nhỏ hơn 1 dB.

Xác suất sai bit của tín hiệu DPSK bốn mức với mã Gray là:

$$P_b = Q_1(a, b) - \frac{1}{2} I_0(a, b) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \quad (7-2-70)$$

với $Q_1(a, b)$ được định nghĩa ở (2-1-122) và (2-1-123). $I_0(x)$ là hàm Bessel sửa đổi bậc 0, được định nghĩa ở (2-1-120) với các tham số a và b như sau:

$$a = \sqrt{2\gamma_b(1 - \sqrt{1/2})} \quad b = \sqrt{2\gamma_b(1 + \sqrt{1/2})} \quad (7-2-71)$$

Hình 7-2-13 biểu diễn xác suất sai bit với tín hiệu DPSK. Do tín hiệu DPSK nhị phân không cần ước lượng pha vật mang nên hay được sử dụng trong thực tế.

7-2-9. Xác suất xác định sai tín hiệu QAM

Tín hiệu QAM có thể được biểu diễn như sau:

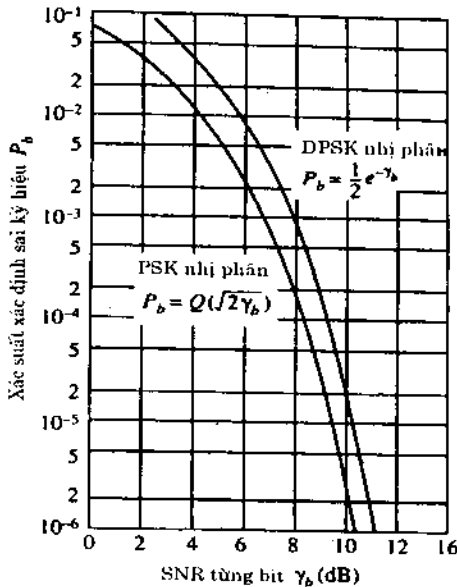
$$s_m(t) = A_{mc}g(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms}g(t)\sin 2\pi f_c t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-2-72)$$

với A_{mc} và A_{ms} là biên độ của các thành phần vuông góc (chúng mang thông tin) và $g(t)$ là tín hiệu xung. Vectơ biểu diễn tín hiệu này là:

$$\mathbf{s}_m = \left[A_{mc} \sqrt{\frac{1}{2} \zeta_R} \quad A_{ms} \sqrt{\frac{1}{2} \zeta_R} \right] \quad (7-2-73)$$

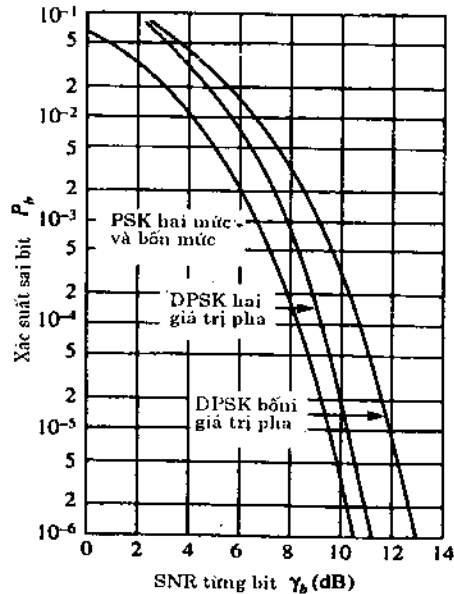
Để xác định xác suất xác định sai tín hiệu QAM, ta phải xác định các điểm tín hiệu. Ta bắt đầu với tín hiệu QAM với $M = 4$ điểm. Hình 7-2-14 mô tả hai tập hợp bốn điểm tín hiệu. Tập hợp thứ nhất là tín hiệu điều chế pha bốn mức và tập hợp thứ hai là tín hiệu QAM hai mức biên độ, ký hiệu A_1 và A_2 với bốn giá trị pha. Do xác suất xác định lỗi gần với khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm tín hiệu và ta có $d_{\min}^{(e)} = 2A$ với cả hai loại tín hiệu. Công suất trung bình của tín hiệu phát đi (trên cơ sở tất cả các tín hiệu là đồng xác suất) với tín hiệu bốn mức pha là:

$$P_{av} = \frac{1}{4} 4A^2 = A^2 \quad (7-2-74)$$



Hình 7-2-12

Xác suất xác định sai tín hiệu
DPSK và PSK nhị phân



Hình 7-2-13

Xác suất xác định sai tín hiệu
DPSK và PSK hai mức, bốn mức

Với tín hiệu hai mức biên độ, bốn mức pha, các điểm tín hiệu nằm trên hai đường tròn bán kính A , $\sqrt{3}A$ và $d_{\min}^{(e)} = 2A$, ta có:

$$P_{av} = \frac{1}{4} [2.3A^2 + 2A^2] = 2A^2 \quad (7-2-75)$$

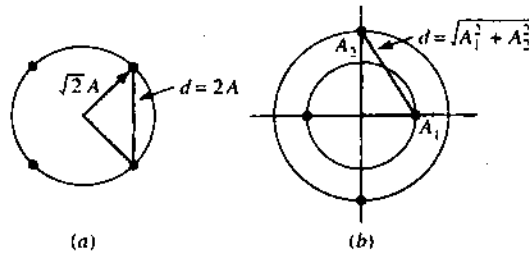
CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Như vậy với các ứng dụng trong thực tế, tỷ lệ sai số của hai tín hiệu này là như nhau. Nói cách khác, không có sự khác biệt giữa hai loại tín hiệu này khi sử dụng trong thực tế.

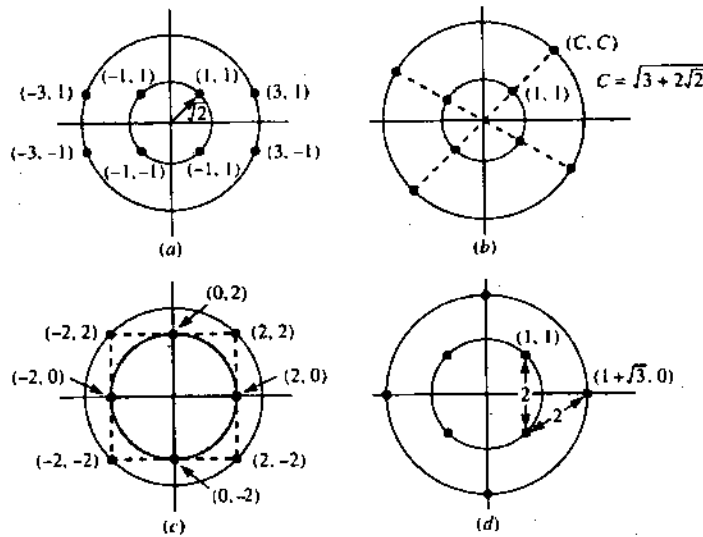
Xét trường hợp tín hiệu QAM với $M = 8$. Có nhiều tập hợp các điểm tín hiệu, và ta xét bốn tập hợp các điểm tín hiệu như trên hình 7-2-15, tất cả các loại tín hiệu đều có hai mức biên độ và khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm tín hiệu là $2A$. Các giá trị (A_{mc}, A_{ms}) được chuẩn hóa bởi A . Giả sử các tín hiệu đồng xác suất, công suất trung bình của tín hiệu truyền đi là:

$$P_{av} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (A_{mc}^2 + A_{ms}^2) = \frac{A^2}{M} \sum_{m=1}^M (a_{mc}^2 + a_{ms}^2) \quad (7-2-76)$$

với (a_{mc}, a_{ms}) là tọa độ các điểm tín hiệu đã được chuẩn hóa bởi A .



Hình 7-2-14: Hai tập hợp bốn điểm tín hiệu



Hình 7-2-15: Bốn tập hợp điểm tín hiệu QAM tám điểm ($M = 8$)

Hai tập hợp tín hiệu (a) và (c) có các điểm tín hiệu trong một hình chữ nhật và $P_{av} = 6A^2$. Tín hiệu trong hình (b) có công suất trung bình $P_{av} = 6,83A^2$ và hình (d) là $P_{av} = 4,73A^2$. Như vậy tín hiệu (d) yêu cầu công suất thấp hơn 1 dB so với tín hiệu thứ nhất và 1,6 dB so với tín hiệu thứ hai với cùng một xác suất lỗi. Loại tín hiệu này là loại tín hiệu QAM với $M = 8$ tốt nhất do yêu cầu về công suất nhỏ nhất với khoảng cách cực tiểu giữa hai điểm tín hiệu đã cho.

Với $M \geq 16$, có nhiều khả năng lựa chọn tín hiệu QAM trong không gian hai chiều. Ví dụ ta có thể chọn tín hiệu nhiều mức biên độ như trên hình 6-3-4. Loại tín hiệu QAM với $M = 16$ này là mở rộng của tín hiệu QAM với $M = 8$ tối ưu. Tuy nhiên loại tín hiệu này không phải là tốt nhất trong kênh AWGN (loại tín hiệu QAM với $M = 16$ trong hình 6-3-4).

Tập hợp tín hiệu QAM chữ nhật có ưu điểm là dễ dàng tạo ra từ hai tín hiệu PAM điều chế vào các tín hiệu pha vuông góc. Hơn nữa, chúng dễ dàng trong giải điều chế. Mặc dù chúng không phải là tín hiệu QAM với $M \geq 16$ tốt nhất, công suất trung bình yêu cầu chỉ lớn hơn một chút so với tín hiệu tối ưu để cho cùng một xác suất xác định sai (với cùng một khoảng cách cực tiểu). Vì những lý do đó, tín hiệu QAM M mức hình chữ nhật thường được sử dụng trong thực tế.

Tín hiệu QAM chữ nhật với $M = 2^k$ với k chẵn tương đương với hai tín hiệu PAM trong các tín hiệu mang vuông góc, mỗi tín hiệu có $\sqrt{M} = 2^{k/2}$ điểm tín hiệu. Do các tín hiệu trong các thành phần pha vuông góc có thể phân tách một cách rõ ràng tại bộ giải điều chế, xác suất xác định sai của tín hiệu QAM có thể xác định dễ dàng từ xác suất xác định sai của tín hiệu PAM. Xác suất xác định đúng của tín hiệu QAM M mức là:

$$P_c = (1 - P_{\sqrt{M}})^2 \quad (7-2-77)$$

với $P_{\sqrt{M}}$ là xác suất xác định sai của tín hiệu PAM $\sqrt{M}$ mức với một nửa công suất trung bình trong mỗi tín hiệu vuông góc của tín hiệu QAM tương đương. Sửa đổi xác suất xác định sai của tín hiệu PAM M mức, ta có:

$$P_{\sqrt{M}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{\zeta_{av}}{N_0}} \right) \quad (7-2-78)$$

với ζ_{av}/N_0 là SNR trung bình của mỗi ký hiệu. Xác suất xác định sai ký hiệu tín hiệu QAM M mức là:

$$P_M = 1 - (1 - P_{\sqrt{M}})^2 \quad (7-2-79)$$

Chú ý rằng kết quả này đúng với k chẵn. Với k lẻ thì không có hệ thống PAM $\sqrt{M}$ mức tương đương. Tuy nhiên có thể dễ dàng xác định tốc độ xác định sai cho tập hợp các điểm tín hiệu hình chữ nhật. Nếu sử dụng bộ xác định tối ưu dựa trên độ đo khoảng cách thì xác suất xác định sai ký hiệu bị chặn trên bởi:

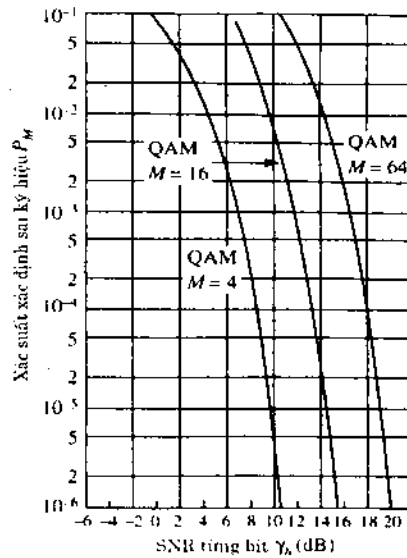
$$P_M \leq 1 - \left[1 - 2Q \left(\sqrt{\frac{3\zeta_{av}}{(M-1)N_0}} \right) \right]^2 \leq 4Q \left(\sqrt{\frac{3k\zeta_{bav}}{(M-1)N_0}} \right) \quad (7-2-80)$$

với $k \geq 1$ và ζ_{bav}/N_0 là SNR trung bình từng bit. Xác suất sai ký hiệu được vẽ trên hình 7-2-16 theo SNR trung bình từng bit.

Với tín hiệu QAM không chữ nhật, ta có thể xác định giới hạn trên của xác suất sai bằng cách sử dụng giới hạn hợp:

$$P_M < (M-1)Q \left(\sqrt{\left(d_{\min}^{(e)} \right)^2 / 2N_0} \right)$$

với $d_{\min}^{(e)}$ là khoảng cách Euclide cực tiểu giữa hai điểm tín hiệu. Giới hạn này không chặt khi M lớn. Khi M lớn, ta có thể xấp xỉ P_M bằng cách thay $M-1$ bằng M_n là số điểm kế lớn nhất với khoảng cách $d_{\min}^{(e)}$.



Hình 7-2-16: Xác suất sai ký hiệu của tín hiệu QAM.

Ta có thể so sánh hiệu quả hai tín hiệu QAM và PSK với cùng một giá trị M và hai tín hiệu cùng có hai chiều. Xác suất xác định sai ký hiệu của tín hiệu PSK M mức là:

$$P_M \approx 2Q\left(\sqrt{2\gamma_s} \sin \frac{\pi}{M}\right) \quad (7-2-81)$$

với γ_s là SNR của từng ký hiệu. Do các xác suất sai đều phụ thuộc vào đối số của hàm Q nên ta có thể so sánh các đối số này với nhau. Tỷ số hai đối số này là:

$$R_M = \frac{3/(M-1)}{2 \sin^2(\pi/M)} \quad (7-2-82)$$

Với $M = 4$ thì $R_M = 1$. Như vậy tín hiệu PSK và QAM bốn mức có hiệu quả tương đương nhau với cùng SNR từng ký hiệu. Mặt khác, nếu $M > 4$ thì $R_M > 1$ nên tín hiệu QAM M mức có độ hiệu quả cao hơn so với tín hiệu PSK M mức. Bảng 7-2-1 cho ta một số số liệu về tỷ số R_M .

Bảng 7-2-1: Lợi về SNR của tín hiệu QAM so với tín hiệu PSK

M	$10\log_{10} R_M$
8	1,65
16	4,20
32	7,02
64	9,95

7-2-10. So sánh các phương pháp điều chế số

Các phương pháp điều chế số có thể so sánh theo nhiều cách. Ta có thể so sánh dựa trên SNR cần thiết để có xác suất lỗi xác định. Tuy nhiên cách so sánh này không thuận tiện lắm trừ khi với một số ràng buộc chẳng hạn tốc độ số liệu cố định (hay cố định dải thông). Bây giờ ta xét dải thông cần thiết cho các phương pháp điều chế số khác nhau.

Với tín hiệu nhiều pha, dải thông của kênh cần thiết là dải thông để truyền dải phổ của tín hiệu xung $g(t)$ tần số thấp tương đương. Giả sử xung $g(t)$ có độ rộng T và độ rộng dải thông $W \approx 1/T$ và do $T = k/R = (\log_2 M)/R$ nên:

$$W = \frac{R}{\log_2 M} \quad (7-2-83)$$

Khi M tăng và tốc độ R cố định thì độ rộng dải thông giảm xuống. Dải thông hiệu quả được đo bằng tỷ số tốc độ số liệu với độ rộng dải thông:

$$\frac{R}{W} = \log_2 M \quad (7-2-84)$$

Dải thông có hiệu quả cho việc truyền tín hiệu PAM là một dải bên (SSB). Như vậy dải thông của kênh cần thiết để truyền tín hiệu xấp xỉ $1/2T$ là:

$$\frac{R}{W} = 2 \log_2 M \quad (7-2-85)$$

Trong trường hợp tín hiệu QAM, ta có hai vật mang trực giao, mỗi vật mang mang một tín hiệu PAM. Như vậy tốc độ số liệu gấp đôi so với tín hiệu PAM. Tuy nhiên tín hiệu QAM phải truyền qua hai dải bên. Như vậy tín hiệu QAM và PAM có dải thông hiệu quả giống nhau khi tín hiệu có dải phổ hữu hạn.

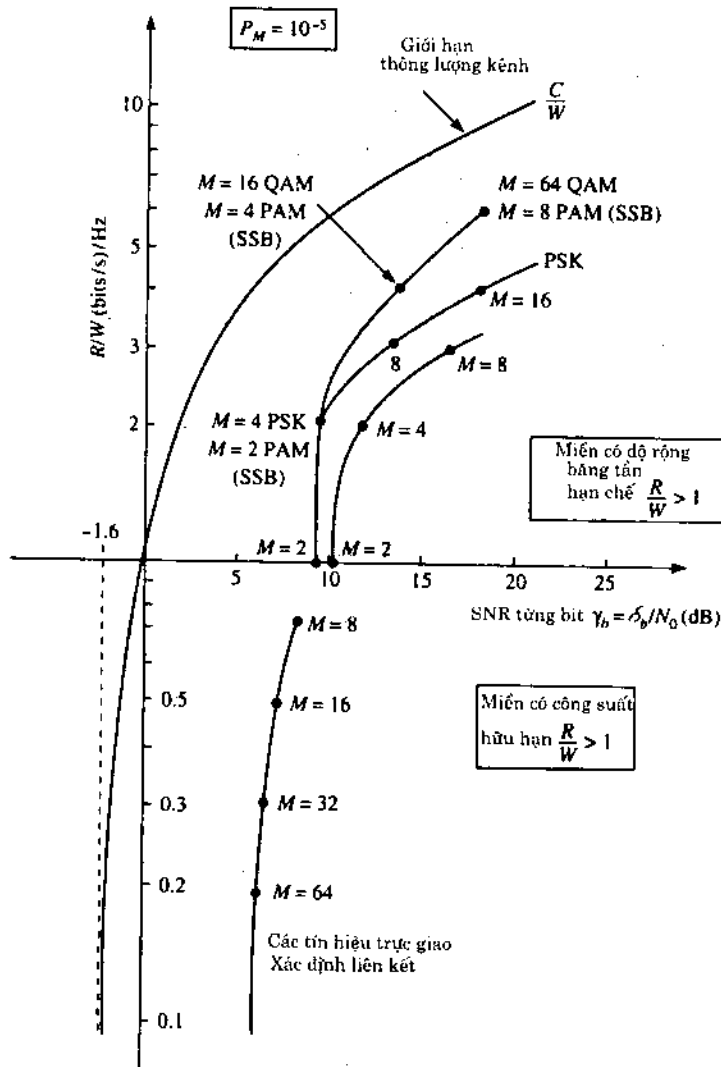
Các tín hiệu trực giao có yêu cầu về dải thông hoàn toàn khác. Nếu $M = 2^k$, tín hiệu trực giao với độ phân tách tần số cực tiểu là $1/2T$ thì dải thông cần thiết cho truyền $k = \log_2 M$ bit thông tin là:

$$W = \frac{M}{2T} = \frac{M}{2(k/R)} = \frac{M}{2 \log_2 M} R \quad (7-2-86)$$

Trong trường hợp này, độ rộng dải thông tăng khi M tăng. Một quan hệ tương tự cho tín hiệu đơn hình và trực giao kép. Với tín hiệu trực giao kép, dải thông cần thiết bằng một nửa so với tín hiệu trực giao.

Một phương pháp so sánh khác là tốc độ số liệu chuẩn hóa R/W theo SNR từng bit (ζ_b/N_0) với cùng một xác suất sai. Hình 7-2-17 vẽ R/W theo SNR từng bit cho các tín hiệu PAM, QAM, PSK, tín hiệu trực giao với $P_M = 10^{-5}$. Ta thấy rằng với các tín hiệu PAM, QAM, PSK khi M tăng dẫn tới tỷ số R/W tăng. Các phương pháp điều chế này ứng với các kênh truyền thông băng tần hữu hạn, với tỷ số $R/W > 1$ mong muốn, SNR phải đủ cao để có thể tăng được M . Ngược lại, tín hiệu trực giao M mức có tỷ số $R/W \leq 1$. Khi M tăng, tỷ số R/W giảm do việc tăng độ rộng dải thông kênh truyền.

Hình 7-2-17 cũng là đồ thị thông lượng chuẩn hóa của kênh AWGN. Tỷ số C/W với C (C bằng R) là thông lượng của kênh, biểu thị tỷ số R/W lớn nhất có thể thực hiện được.



Hình 7-2-17: So sánh các phương pháp điều chế với $P_M = 10^{-5}$

7-3. BỘ THU TỐI ƯU CHO TÍN HIỆU ĐIỀU CHẾ PHA LIÊN TỤC (CPM)

Tín hiệu CPM là tín hiệu điều chế có nhớ. Tính chất nhớ là kết quả của sự biến đổi liên tục về pha vật mang từ khoảng thời gian tín hiệu này tới khoảng thời gian tín hiệu khác. Tín hiệu CPM được biểu diễn dạng:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2\zeta}{T}} \cos[2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{I})] \quad (7-3-1)$$

với $\phi(t; \mathbf{I})$ là pha vật mang. Tín hiệu nhận được sau bộ lọc là:

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (7-3-2)$$

$$\text{với } n(t) = n_c(t)\cos 2\pi f_c t - n_s(t)\sin 2\pi f_c t \quad (7-3-3)$$

7-3-1. Giải điều chế và xác định tối ưu tín hiệu CPM

Bộ thu tối ưu cho tín hiệu này gồm một bộ thu tương quan và bộ xác định dãy cực đại khả năng. Bộ thu tìm kiếm trong lưới trạng thái để tìm đường có khoảng cách Euclide nhỏ nhất. Thuật toán Viterbi là thuật toán có hiệu quả trong trường hợp này. Bây giờ ta lập cấu trúc lưới tổng quát cho tín hiệu CPM và sau đó sẽ trình bày cách tính toán độ đo ([5], [6]).

Nhắc lại rằng pha của tín hiệu mang với hệ số điều chế h cố định được xác định như sau:

$$\phi(t; \mathbf{I}) = 2\pi h \sum_{k=-\infty}^n I_k q(t - kT) = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-L} I_k + 2\pi h \sum_{k=n-L+1}^n I_k q(t - kT) = \theta_n + \theta(t; \mathbf{I}), \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (7-3-4)$$

ở đây giả sử $q(t) = 0$ với $t < 0$ và $q(t) = 1/2$ với $t \geq LT$ với

$$q(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (7-3-5)$$

Tín hiệu xung $g(t) = 0$ với $t < 0$ và $t \geq LT$. Với $L = 1$ ta có tín hiệu CPM đáp ứng hoàn toàn và $L > 1$ ta có tín hiệu CPM đáp ứng từng phần.

Khi h là số hữu tỷ, có nghĩa là $h = m/p$ với m và p là các số nguyên dương, thì tín hiệu CPM có thể được biểu diễn bằng một lưới. Trong trường hợp này có p trạng thái pha khi m chẵn:

$$\theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (7-3-6)$$

và có $2p$ trạng thái pha khi m lẻ:

$$\theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(2p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (7-3-7)$$

Nếu $L = 1$ thì đó là các trạng thái trong lưới và nếu $L > 1$, ta có thêm một số trạng thái tương ứng với tính chất đáp ứng từng phần của tín hiệu xung $g(t)$. Các trạng thái phụ này có thể xác định qua việc khai triển $\theta(t; \mathbf{I})$ như sau:

$$\theta(t; \mathbf{I}) = 2\pi h \sum_{k=n-L+1}^{n-1} I_k q(t - kT) + 2\pi h I_n q(t - nT) \quad (7-3-8)$$

Thành phần thứ nhất trong vế phải của (7-3-8) phụ thuộc vào các ký hiệu mang thông tin $(I_{n-L}, I_{n-L+1}, \dots, I_{n-1})$ và được gọi là vectơ trạng thái tương quan và biểu thị pha của tín hiệu xung tương ứng khi chưa đạt tới giá trị cuối cùng. Thành phần thứ hai trong (7-3-8) biểu thị pha của tín hiệu mới xảy ra nhất I_n . Như vậy, trạng thái của tín hiệu CPM tại thời điểm $t = nT$ là tổ hợp trạng thái pha và trạng thái tương quan, được ký hiệu là:

$$S_n = \{\theta_n, I_{n-L}, \dots, I_{n-1}\} \quad (7-3-9)$$

với tín hiệu xung đáp ứng từng phần độ dài LT , $L > 1$. Trong trường hợp này, số lượng các trạng thái là:

$$N_s = \begin{cases} pM^{L-1} & (m \text{ chẵn}) \\ 2pM^{L-1} & (m \text{ lẻ}) \end{cases} \quad (7-3-10)$$

Bây giờ ta giả sử trạng thái của bộ điều chế tại $t = nT$ là S_n . Ảnh hưởng của ký hiệu mới trong khoảng thời gian $nT \leq t \leq (n+1)T$ là thay đổi trạng thái từ S_n sang S_{n+1} . Tại $t = (n+1)T$, trạng thái bộ điều chế là:

$$S_{n+1} = \{\theta_{n+1}, I_n, I_{n-1}, \dots, I_{n-L+2}\}$$

với

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \pi h I_{n-L+1}$$

Ví dụ 7-3-1

Xét tín hiệu CPM nhị phân với hệ số điều chế $h = 3/4$ và đáp ứng từng phần với $L = 2$. Xác định trạng thái S_n của tín hiệu, vẽ cây pha và lưới trạng thái của tín hiệu.

Trước hết ta có $2p = 8$ trạng thái pha, ký hiệu:

$$\theta_s = \left\{ 0, \pm \frac{1}{4}\pi, \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{4}\pi, \pi \right\}$$

Với mỗi trạng thái pha, có hai trạng thái do tính nhớ của tín hiệu CPM. Như vậy, tổng cộng các trạng thái là $N_s = 16$, là:

$(0, 1), (0, -1), (\pi, 1), (\pi, -1), (\pi/4, 1), (\pi/4, -1), (\pi/2, 1), (\pi/2, -1), (3\pi/4, 1), (3\pi/4, -1), (-\pi/4, 1),$
 $(-\pi/4, -1), (-\pi/2, 1), (-\pi/2, -1), (-3\pi/4, 1), (-3\pi/4, -1).$

Nếu hệ thống ở trạng thái pha $\theta_n = -\frac{1}{4}\pi$ và $I_{n-L} = -1$ thì:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \pi h I_{n-L} = -\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\pi$$

Hình 7-3-1 vẽ lưới trạng thái. Đường dọc theo lưới trạng thái tương ứng với dãy $(1, -1, -1, -1, 1, 1)$ được vẽ trên hình 7-3-2.

Để vẽ cây pha, ta phải biết xung $g(t)$. Hình 7-3-3 vẽ cây pha khi xung $g(t)$ là xung chữ nhật độ rộng $2T$, với lưới trạng thái khởi đầu $(0, 1)$.

Tính độ đo Ta thấy rằng loga của xác suất quan sát được tín hiệu $r(t)$ với điều kiện một dãy ký hiệu đã truyền $\mathbf{I}$ là độ đo tương quan chéo:

$$CM_n(\mathbf{I}) = \int_{-\infty}^{(n+1)T} r(t) \cos[\omega_c t + \phi(t; \mathbf{I})] dt = CM_{n-1}(\mathbf{I}) + \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos[\omega_c t + \theta(t; \mathbf{I}) + \theta_n] dt \quad (7-3-11)$$

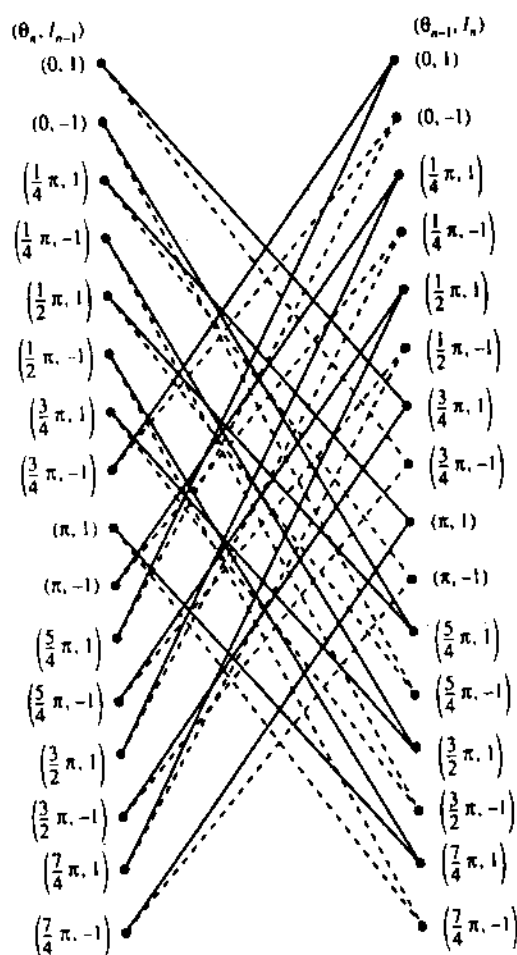
Thành phần $CM_{n-1}(\mathbf{I})$ biểu diễn độ đo cho các dãy còn lại tới thời điểm nT và thành phần:

$$v_n(\mathbf{I}; \theta_n) = \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos[\omega_c t + \theta(t; \mathbf{I}) + \theta_n] dt \quad (7-3-12)$$

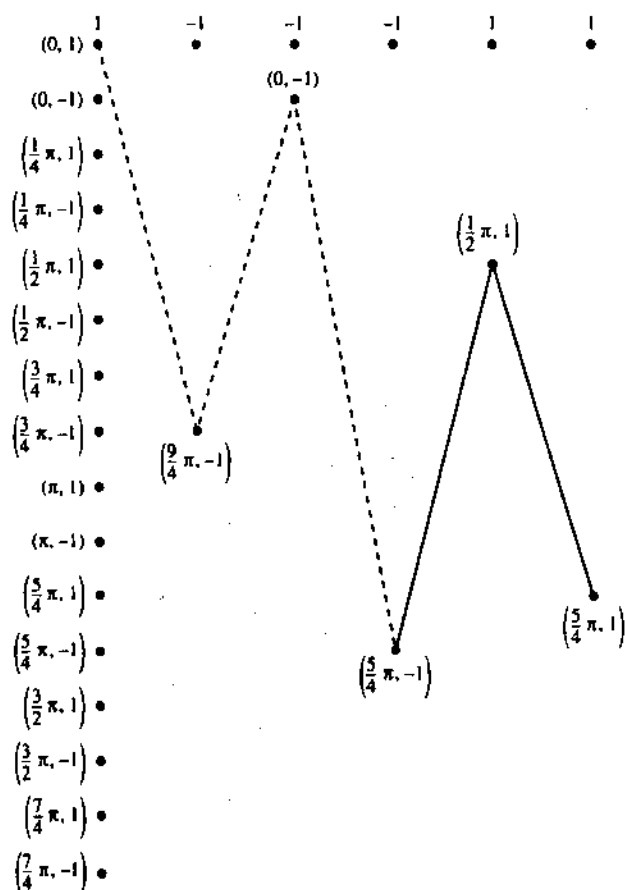
biểu thị độ đo thêm vào do việc xuất hiện tín hiệu ở thời điểm $nT \leq t \leq (n+1)T$. Chú ý rằng có M^L dãy có thể $\mathbf{I} = (I_n, I_{n-1}, \dots, I_{n-L+1})$ các ký hiệu và p (hay $2p$) các trạng thái pha có thể $\{\theta_n\}$. Như vậy có pM^L (hay $2pM^L$) giá trị khác nhau của $v_n(\mathbf{I}; \theta_n)$, được tính toán trong mỗi khoảng thời gian tín hiệu và mỗi giá trị được sử dụng để cộng vào các độ đo tương ứng với pM^{L-1} dãy còn lại từ

khoảng thời gian ký hiệu trước. Sơ đồ khối tổng quát thể hiện việc tính $v_n(\mathbf{I}; \theta_n)$ với thuật toán Viterbi được biểu thị trên hình 7-3-4.

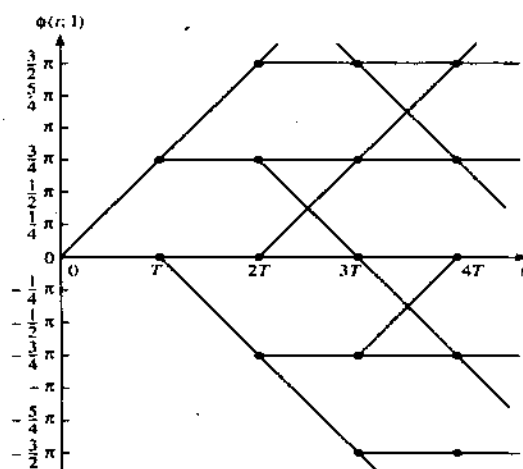
Chú ý rằng số dây còn lại tại mỗi trạng thái của quá trình giải mã Viterbi là pM^{L-1} (hay $2pM^{L-1}$). Với mỗi dây còn lại, ta có M giá trị độ đo tăng thêm $v_n(\mathbf{I}; \theta_n)$ để tạo ra pM^L (hay $2pM^L$) độ đo. Tuy nhiên, số lượng này sau đó giảm xuống còn pM^{L-1} (hay $2pM^{L-1}$) đường còn lại với các độ đo tương ứng do việc chọn dây có khả năng nhất trong M dây và loại bỏ $M - 1$ dây.



Hình 7-3-1: Lưới trạng thái tín hiệu CPM với $L = 2$ và $h = 3/4$



Hình 7-3-2: Một đường tín hiệu trong lưới



Hình 7-3-3: Cây pha với $L = 2, h = 3/4$

7-3-2. Hiệu quả của tín hiệu CPM.

Trong việc tính toán hiệu quả của tín hiệu CPM với ước lượng dãy cực đại khả năng, ta phải xác định khoảng cách Euclide nhỏ nhất của các đường dọc theo lưới phân tách tại một nút tại thời điểm $t = 0$ và nhập lại cùng một nút sau một khoảng thời gian. Hai đường tín hiệu dọc theo lưới liên hệ với các tín hiệu mà ta sẽ chứng minh sau đây ([5], [6], [11]).

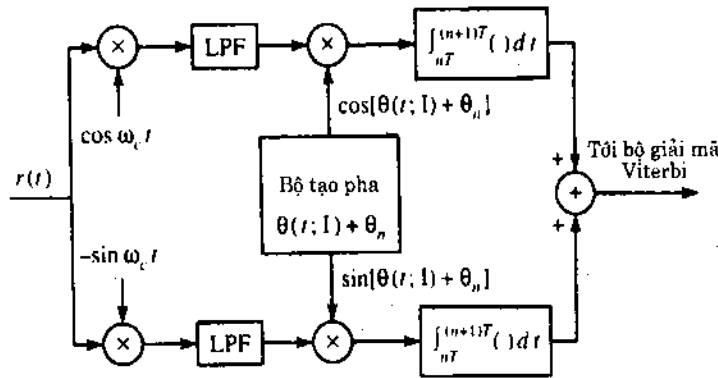
Giả sử ta có hai tín hiệu $s_i(t)$ và $s_j(t)$ tương ứng với hai quỹ đạo pha $\phi(t; \mathbf{I}_i)$ và $\phi(t; \mathbf{I}_j)$. Các dãy $\mathbf{I}_i$ và $\mathbf{I}_j$ phải khác nhau ký hiệu đầu tiên. Như vậy, khoảng cách Euclide giữa hai tín hiệu sau một khoảng thời gian NT , với $1/T$ là tốc độ ký hiệu, được định nghĩa là (theo định nghĩa về khoảng cách Euclide giữa hai tín hiệu mà ta đã nói trong phần trước):

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= \int_0^{NT} [s_i(t) - s_j(t)]^2 dt = \int_0^{NT} s_i^2(t) dt + \int_0^{NT} s_j^2(t) dt - 2 \int_0^{NT} s_i(t) s_j(t) dt \\ &= 2N\zeta - 2 \frac{2\zeta}{T} \int_0^{NT} \cos[\omega_c t + \phi(t; \mathbf{I}_i)] \cos[\omega_c t + \phi(t; \mathbf{I}_j)] dt \\ &= 2N\zeta - \frac{2\zeta}{T} \int_0^{NT} \cos[\phi(t; \mathbf{I}_i) - \phi(t; \mathbf{I}_j)] dt = \frac{2\zeta}{T} \int_0^{NT} \{1 - \cos[\phi(t; \mathbf{I}_i) - \phi(t; \mathbf{I}_j)]\} dt \quad (7-3-13) \end{aligned}$$

Như vậy khoảng cách Euclide giữa hai đường phụ thuộc vào sự sai khác về pha theo công thức (7-3-13).

Ta muốn biểu diễn khoảng cách d_{ij}^2 theo năng lượng từng bit. Do $\zeta = \zeta_b \log_2 M$ nên ta có:

$$d_{ij}^2 = 2\zeta_b \delta_{ij}^2 \quad (7-3-14)$$



Hình 7-3-4: Tính độ đo tăng thêm $v_n(\mathbf{I}; \theta_n)$

với δ_y^2 được định nghĩa là:

$$\delta_y^2 = \frac{\log_2 M}{T} \int_0^{NT} \left\{ 1 - \cos \left[\phi(t; \mathbf{I}_i) - \phi(t; \mathbf{I}_j) \right] \right\} dt \quad (7-3-15)$$

Hơn nữa, $\phi(t; \mathbf{I}_i) - \phi(t; \mathbf{I}_j) = \phi(t; \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j)$ với $\xi = \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j$, (7-3-15) trở thành:

$$\delta_y^2 = \frac{\log_2 M}{T} \int_0^{NT} \left\{ 1 - \cos \phi(t; \xi) \right\} dt \quad (7-3-16)$$

ξ có thể nhận các giá trị $0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2(M-1)$ và trừ trường hợp $\xi_0 = 0$.

Tốc độ xác định sai phụ thuộc vào khoảng cách Euclide cực tiểu, có thể biểu diễn là:

$$P_M = K_{\delta_{\min}} Q \left(\sqrt{\frac{\zeta_h}{N_0} \delta_{\min}^2} \right) \quad (7-3-17)$$

$$\text{với } \delta_{\min}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{i,j} \delta_y^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{i,j} \left\{ \frac{\log_2 M}{T} \int_0^{NT} \left\{ 1 - \cos \phi(t; \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j) \right\} dt \right\} \quad (7-3-18)$$

Chú ý rằng với tín hiệu PSK nhị phân thông thường không nhớ, $N = 1$ và $\delta_{\min}^2 = \delta_{12}^2 = 2$. Từ đó (7-3-17) cho ta kết quả đã biết.

Do $\delta_{\min}^2$ đặc trưng cho hiệu quả của tín hiệu CPM với MLSE, ta có thể khảo sát hiệu quả theo $\delta_{\min}^2$ bằng cách thay đổi giá trị của M , hệ số điều chế h và độ rộng xung truyền trong tín hiệu CPM đáp ứng từng phần.

Đầu tiên, xét tín hiệu CPM với $L = 1$ tức là đáp ứng đầy đủ. Nếu bắt đầu với $M = 2$, các dãy:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i &= 1, -1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_j &= -1, 1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3 \end{aligned} \quad (7-3-19)$$

chỉ khác nhau với $k = 0$ và $k = 1$ và giống nhau với $k \geq 2$, như vậy hai quỹ đạo pha trùng nhau sau ký hiệu thứ hai. Điều đó tương ứng với dãy:

$$\xi = \{2, -2, 0, 0, \dots\} \quad (7-3-20)$$

Khoảng cách Euclide đối với dãy này tính được dễ dàng từ (7-3-16) và cho ta giới hạn trên của $\delta_{\min}^2$. Với $M = 2$, ta có:

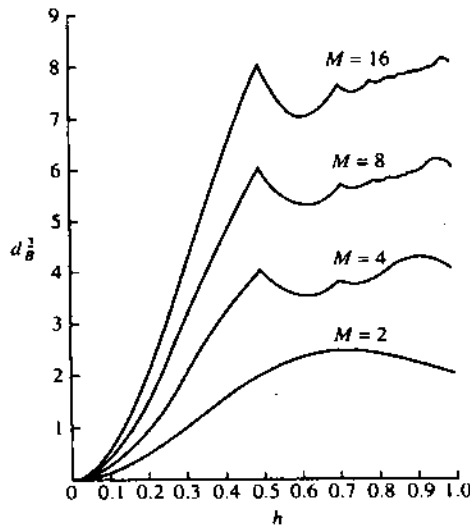
$$d_B^2(h) = 2 \left(1 - \frac{\sin 2\pi h}{2\pi h} \right), \quad M = 2 \quad (7-3-21)$$

Ví dụ với $h = 1/2$ tương ứng với tín hiệu MSK, ta có $d_h^2(1/2) = 2$ nên $\delta_{\min}^2(1/2) \leq 2$.

Với $M > 2$ và đáp ứng đầy đủ, ta dễ thấy rằng các quỹ đạo pha gặp nhau tại thời điểm $t = 2T$. Do đó giới hạn trên của $\delta_{\min}^2$ thu được từ dãy độ chênh lệch pha $\xi = \{\alpha, -\alpha, 0, 0, \dots\}$ với $\alpha = \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2(M-1)$. Dãy này dẫn tới giới hạn trên của $\delta_{\min}^2$:

$$d_h^2(h) = \min_{1 \leq k \leq M-1} \left\{ 2 \log_2 M \left(1 - \frac{\sin 2k\pi h}{2k\pi h} \right) \right\} \quad (7-3-22)$$

Đồ thị của $d_h^2(h)$ theo h với $M = 2, 4, 8, 16$ trên hình 7-3-5.



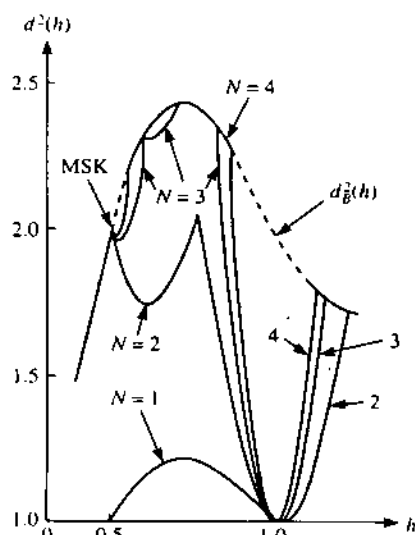
Hình 7-3-5: Giới hạn trên $d_h^2(h)$ theo h của tín hiệu CPM xung chữ nhật và $L = 1$

Khoảng cách Euclide cực tiểu $\delta_{\min}^2(h)$ được xác định bằng cách tính (7-3-16) với nhiều tín hiệu CPM. Hình 7-3-6 biểu thị sự phụ thuộc của khoảng cách Euclide theo h của tín hiệu CPFSK nhị phân với N khoảng thời gian bit quan sát được (khoảng thời gian bit là một tham số đã xác định) là tham số. Trên hình đó cũng thể hiện $d_h^2(h)$ theo công thức (7-3-21). Đặc biệt khi $h = 1/2$, $\delta_{\min}^2(\frac{1}{2}) = 2$, bằng bình phương khoảng cách của tín hiệu PSK (nhị phân bốn mức) với $N = 1$.

Ta cũng nhận thấy từ hình 7-3-6 là hệ số điều chế tối ưu đối với tín hiệu CPFSK nhị phân là $h = 0,715$ khi khoảng thời gian quan sát $N = 3$. Từ đó dẫn tới $\delta_{\min}^2(0,715) = 2,43$ hay độ khuếch đại là 0,85 dB tương ứng với tín hiệu MSK.

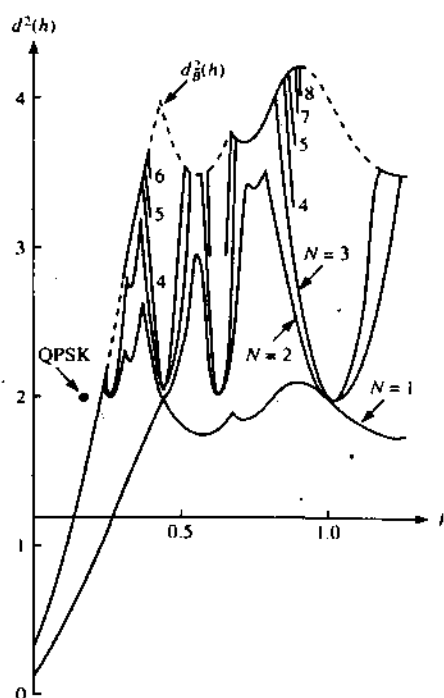
CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Hình 7-3-7 vẽ khoảng cách Euclide là hàm số của h với khoảng thời gian N là tham số của tín hiệu CPFSK với $M = 4$. Trên đó cũng vẽ (đường đứt nét) giới hạn trên d_B^2 tính từ (7-3-22). Chú ý rằng $d_{\min}^2$ đạt được giới hạn trên với một vài giá trị h và N . Đặc biệt, giá trị cực đại của d_B^2 đạt được khi $h \approx 0,9$, là giá trị xấp xỉ với $N = 8$. Giá trị cực đại đạt được tại $h = 0,914$ với $N = 9$. Khi đó $d_{\min}^2(0,914) = 4,2$, tức là hơn 3,2 dB so với tín hiệu MSK. Cũng cần chú ý rằng khoảng cách Euclide có các cực tiểu tại $h = 1/3, 1/2, 2/3, 1, \dots$. Các giá trị này được gọi là các hệ số điều chế yếu và cần phải tránh.



Hình 7-3-6

Bình phương khoảng cách Euclide cực tiểu của tín hiệu CPFSK nhị phân theo hệ số điều chế h



Hình 7-3-7

Bình phương khoảng cách Euclide cực tiểu với tín hiệu CPFSK bốn mức. Giới hạn trên là d_B^2 .

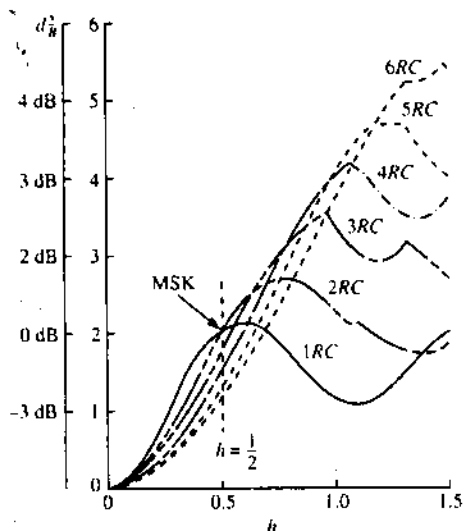
Hệ số khuếch đại lớn đối với tín hiệu CPM dùng MLSE đạt được khi dùng tín hiệu đáp ứng từng phần. Ví dụ giới hạn $d_B^2(h)$ với tín hiệu xung:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{2LT} \right) & (0 \leq t \leq LT) \\ 0 & \text{với các giá trị khác} \end{cases} \quad (7-3-23)$$

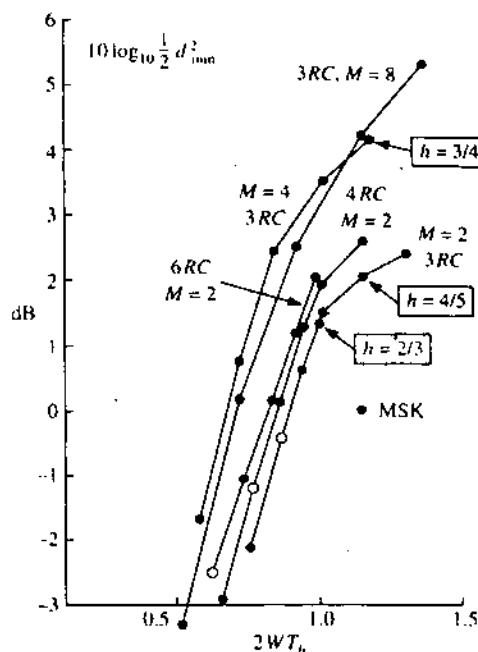
trên hình 7-3-8 với $M = 2$. Chú ý rằng khi L tăng, d_B^2 cũng đạt giá trị cao hơn. Rõ ràng hiệu quả của tín hiệu CPM tăng lên theo độ nhớ L , nhưng h cũng phải tăng lên để đạt được giá trị d_B^2 lớn hơn. Do hệ số điều chế lớn dẫn tới dải thông lớn (với L cố định), khi độ nhớ L lớn (với h cố định)

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

dẫn tới dải thông hẹp nên ta có thể so sánh khoảng cách Euclide như hàm của dải thông chuẩn hóa $2WT_b$, trong đó W là dải thông chứa 99% năng lượng tín hiệu và T_b là độ rộng thời gian ứng với một bit. Hình 7-3-9 so sánh tín hiệu CPM với tín hiệu MSK được sử dụng như điểm tham chiếu.



Hình 7-3-8



Hình 7-3-9

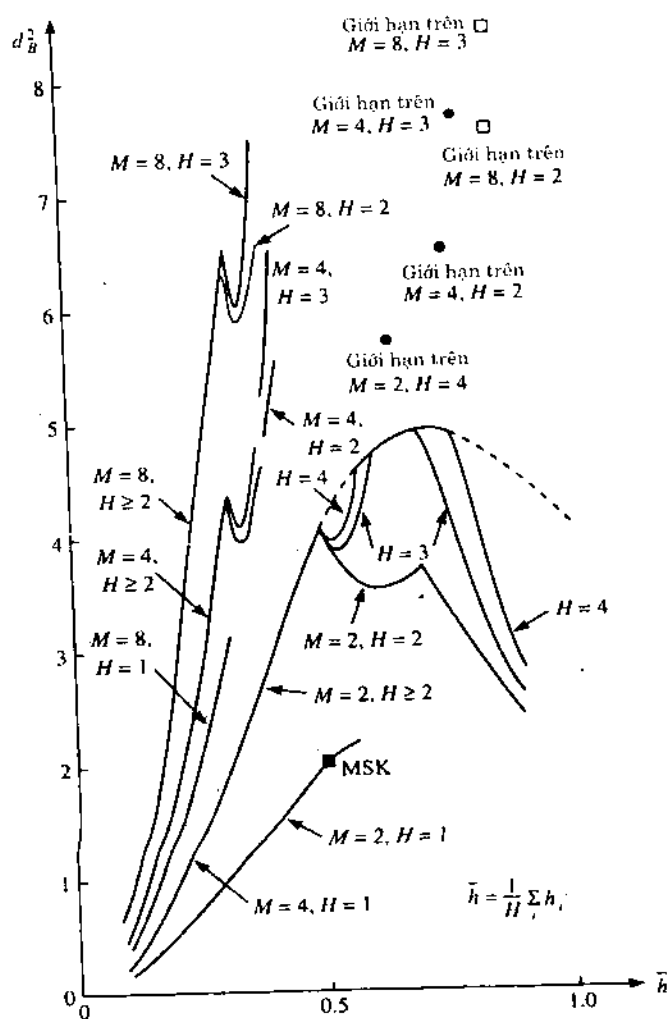
Giới hạn trên d_B^2 Mối liên hệ giữa công suất và độ rộng dải thông của tín hiệu

CPM đáp ứng từng phần với $g(t)$ là xung cosin

Tín hiệu CPM nhiều hệ số điều chế Bằng cách thay đổi hệ số điều chế ta có thể tăng khoảng cách Euclide cực tiểu $d_{\min}^2$ giữa hai điểm của quỹ đạo pha và hiệu quả cao hơn so với tín hiệu CPM có hệ số h cố định. Thông thường, số các hệ số điều chế H là cố định và thay đổi theo vòng tròn qua các khoảng thời gian ký hiệu. Như vậy, pha tín hiệu biến đổi tuyến tính từng khúc.

Với tín hiệu CPM, $L = 1$, $H = 2$, ta có thể nhận được hệ số khuếch đại cao hơn 3 dB so với tín hiệu PSK nhị phân hay bốn mức. Hiệu quả có thể tăng lên khi tăng số lượng ký hiệu M . Bảng 7-3-1 cho ta giá trị hiệu quả thu được với $M = 2, 4, 8$ với vài giá trị H . Giới hạn trên của khoảng cách Euclide cực tiểu được cho trên hình 7-3-10. Chú ý rằng hiệu quả tăng chủ yếu khi chuyển từ $H = 1$ sang $H = 2$. Với $H > 2$, hiệu quả tăng chậm với các giá trị $\{h_i\}$ nhỏ. Mặt khác, hiệu quả tăng đáng kể khi tăng số lượng ký hiệu M .

Các kết quả trên thu được với tín hiệu CPM đáp ứng đầy đủ. Hiệu quả còn tăng hơn nữa khi tín hiệu CPM là đáp ứng từng phần.



Hình 7-3-10: Giới hạn trên của khoảng cách Euclide cực tiểu với một số giá trị của M và H

Bảng 7-3-1: Giá trị cực đại của giới hạn trên d_h^2 với tín hiệu CPM đa hệ số điều chế

M	H	d_h^2 cực đại	so sánh với tín hiệu MSK (dB)	h_1	h_2	h_3	h_4	$\bar{h}$
2	1	2,43	0,85	0,715				0,715
2	2	4,0	3,0	0,5	0,5			0,5
2	3	4,88	3,87	0,620	0,686	0,714		0,673
2	4	5,69	4,54	0,73	0,55	0,73	0,55	0,64
4	1	4,23	3,25	0,914				0,914
4	2	6,54	5,15	0,772	0,772			0,772
4	3	7,65	5,83	0,795	0,795	0,795		0,795
8	1	6,14	4,87	0,964				0,964
8	2	7,50	5,74	0,883	0,883			0,883
8	3	8,40	6,23	0,879	0,879	0,879		0,879

Tín hiệu CPM đa biên độ Tín hiệu CPM đa biên độ là kết hợp điều chế pha số với điều chế biên độ số cho phép tăng số lượng tín hiệu M so với tín hiệu CPM và tốc độ số liệu cao hơn trong kênh có dải tần hữu hạn. Hiệu quả của loại tín hiệu này (MACPM) đã được khảo sát với hai trường hợp: tín hiệu CPM đa biên độ thông thường và CPM đa biên độ mã hóa lưới. Với tín hiệu CPM mã hóa lưới đa biên độ (hai mức biên độ) có hệ số khuếch đại lớn hơn 3-4 dB so với tín hiệu MSK mà không cần tăng độ rộng phổ tín hiệu.

7-3-3. Xác định tín hiệu CPM trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu

Bên cạnh bộ xác định dãy ML, còn có các bộ xác định loại khác có thể sử dụng trong việc khôi phục dãy thông tin trong tín hiệu CPM. Trong phần này ta xét bộ xác định loại ký hiệu-ký hiệu. Một loại bộ xác định ký hiệu-ký hiệu được trình bày trong phần 7-1-5, khai thác tính nhớ của tín hiệu này bằng bộ lọc phối hợp hay bộ tương quan chéo trong các khoảng thời gian tín hiệu. Do độ phức tạp tính toán cao nên thuật toán truy hồi này không áp dụng trực tiếp để xác định tín hiệu CPM. Thay vào đó, hai thuật toán tương tự, mặc dầu không tối ưu bằng, là các thuật toán xác định ký hiệu-ký hiệu đã được nghiên cứu. Một thuật toán về mặt chức năng tương đương với thuật toán trong phần 7-1-5 và thuật toán thứ hai là xấp xỉ của thuật toán thứ nhất. Ta trình bày hai thuật toán này trong khung cảnh giải điều chế tín hiệu CPFSK, trong đó các thuật toán xác định được áp dụng một cách trực tiếp.

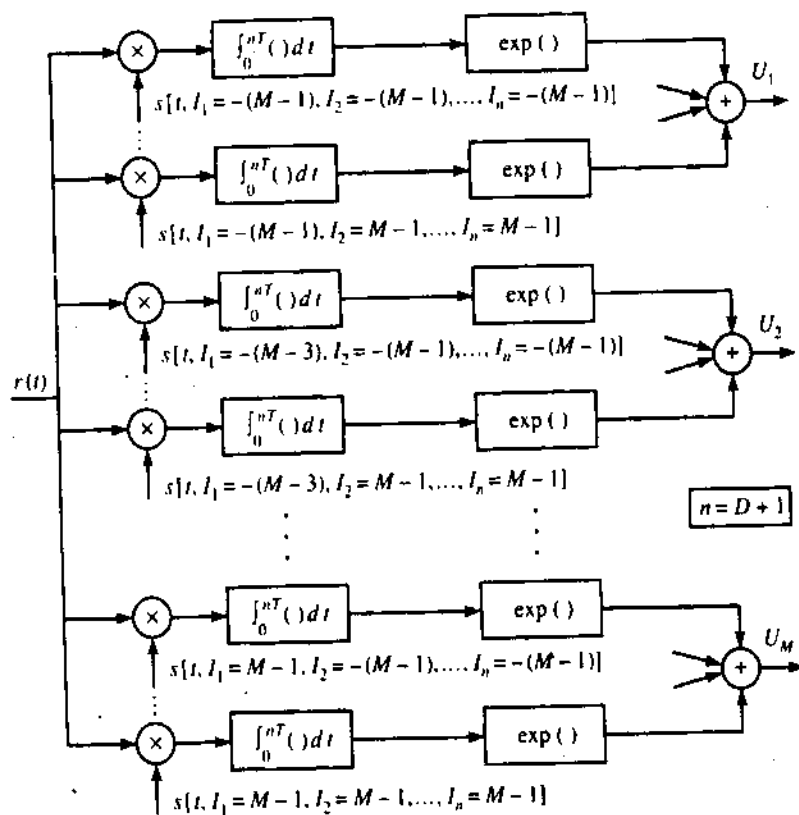
Để trình bày các thuật toán này, ta giả sử tín hiệu được quan sát trong khoảng thời gian hiện tại và D khoảng thời gian trong tương lai được sử dụng để xác định ký hiệu mang thông tin trong khoảng thời gian hiện tại. Sơ đồ khối bộ giải điều chế gồm một dãy các bộ tương quan chéo

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

được mô tả trên hình 7-3-11. Nhắc lại rằng tín hiệu CPFSK trong khoảng thời gian thứ n là $s(t) = \text{Re}[v(t)e^{j2\pi f_d t}]$ với

$$v(t) = \exp \left\{ j \left[\frac{\pi h [t - (n-1)T] I_n}{T} + \pi h \sum_{k=0}^{n-1} I_k + \phi_0 \right] \right\}$$

và $h = 2f_d T$ là hệ số điều chế, f_d là độ dịch chuyển tần số cực đại và ϕ_0 là pha ban đầu của tín hiệu mang.



Hình 7-3-11: Sơ đồ khối bộ giải điều chế tín hiệu CPFSK

Để xác định ký hiệu I_1 , các bộ tương quan chéo trên hình 7-3-11 thực hiện với các tín hiệu $s(t, I_1, I_2, \dots, I_{1+D})$ với tất cả M^{D+1} giá trị có thể của các ký hiệu $I_1, I_2, \dots, I_{1+D}$ được truyền trong $D+1$ khoảng thời gian tín hiệu. Các bộ tương quan này thực chất là tạo ra các biến $r_1, r_2, \dots, r_{1+D}$ là các đối số của thành phần mũ trong hàm mật độ phân bố xác suất:

$$p(r_1, r_2, \dots, r_{1+D} | I_1, I_2, \dots, I_{1+D})$$

Cuối cùng, tổng tất cả M^D giá trị có thể của các ký hiệu $I_2, \dots, I_{1+D}$ biểu thị giá trị trung bình của $p(r_1, r_2, \dots, r_{1+D} | I_1, I_2, \dots, I_{1+D}) P(I_1, I_2, \dots, I_{1+D})$. M đầu ra bộ giải điều chế là các biến trong đó biến lớn nhất được chọn để tạo ra ký hiệu giải điều chế. Từ đó dẫn tới các độ đo tạo ra bởi bộ giải điều chế trên hình 7-3-11 là tương đương với các biến cho bởi (7-1-68) trên cơ sở xác định I_1 .

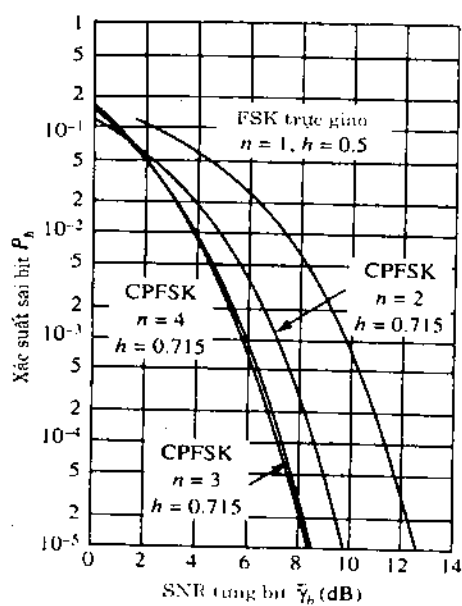
Các tín hiệu nhận được trong các khoảng thời gian được xử lý một cách tương tự. Như vậy bộ giải điều chế xác định tương quan chéo tín hiệu nhận được qua $D+1$ khoảng thời gian tín hiệu với M^{D+1} tín hiệu có thể và cuối cùng xác định ký hiệu. Như vậy việc xác định tín hiệu trong khoảng thời gian thứ m dựa trên tương quan chéo được thực hiện qua các khoảng thời gian $m, m+1, \dots, m+D$. Pha ban đầu trong khoảng thời gian $(D+1)T$ giả thiết là đã biết. Mặt khác, thuật toán trình bày trong (7-1-76) và (7-1-77) tạo nên việc xử lý phụ đối với các ký hiệu đã xác định từ trước, và như vậy, bộ giải điều chế trên hình 7-3-11 khác với thuật toán truy hồi đã mô tả ở phần trước. Tuy nhiên, sự khác nhau này là không đáng kể.

Một phương pháp giải điều chế gần tối ưu thực hiện gần tốt bằng phương pháp mô tả trên hình 7-3-11 mà việc xác định dựa trên giá trị đầu ra lớn nhất từ M^{D+1} bộ tương quan chéo. Như vậy các hàm mũ và việc tính tổng được bỏ qua. Nhưng phương pháp này là tương đương để chọn ký hiệu I_m với hàm mật độ phân bố xác suất $p(r_m, r_{m+1}, \dots, r_{m+D} | I_m, I_{m+1}, \dots, I_{m+D})$ cực đại.

Hiệu quả bộ xác định trên hình 7-3-11 bị giới hạn trên và có thể tính được. Hình 7-3-12 biểu diễn độ hiệu quả đối với tín hiệu CPFSK với $n = D+1$ là tham số. Hệ số điều chế $h = 0,715$ để mang lại giá trị nhỏ nhất của xác suất xác định sai. Chú ý rằng hiệu quả hơn khoảng 2,5 dB so với tín hiệu PSK trực giao ($n = 1$). Hiệu quả tăng thêm 1,5 dB nếu mở rộng thời gian tương quan thành 3 ký hiệu (ba khoảng thời gian tín hiệu) và độ tăng của hiệu quả sẽ giảm nếu mở rộng thêm thời gian tương quan.

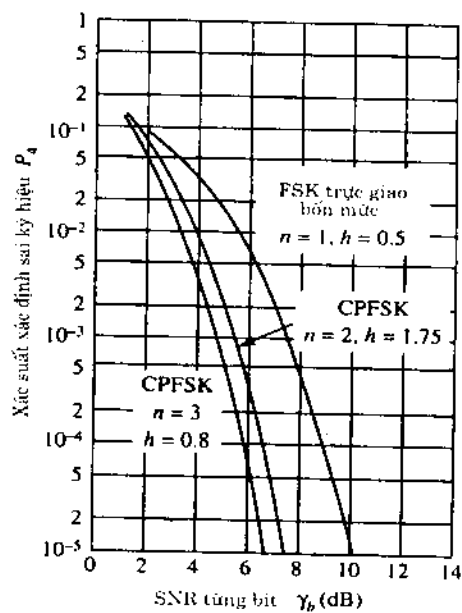
Sẽ thu được kết quả tương tự nếu ta mở rộng bộ ký hiệu. Hình 7-3-13 và 7-3-14 trình bày độ hiệu quả đối với tín hiệu CPFSK bốn mức và tám mức. Hệ số điều chế được chọn để cực tiểu hóa xác suất xác định sai ký hiệu.

Thay cho việc xác định liên kết, cần phải biết góc pha ϕ_0 , ta giả thiết rằng ϕ_0 phân bố đều trong khoảng 0 tới 2π . Như vậy tích phân liên kết (tương quan chéo) được thực hiện qua $n = D+1$ khoảng thời gian ký hiệu, nhưng đầu ra các bộ tương quan chéo xác định được đường bao. Phương pháp này gọi là xác định không liên kết đối với tín hiệu CPFSK. Trong sơ đồ xác định này, hiệu quả tối ưu khi chọn n lẻ và việc xác định được thực hiện trên ký hiệu giữa của dãy n ký hiệu. Kết quả xác suất xác định sai đối với thu không liên kết tương tự như đối với thu liên kết.



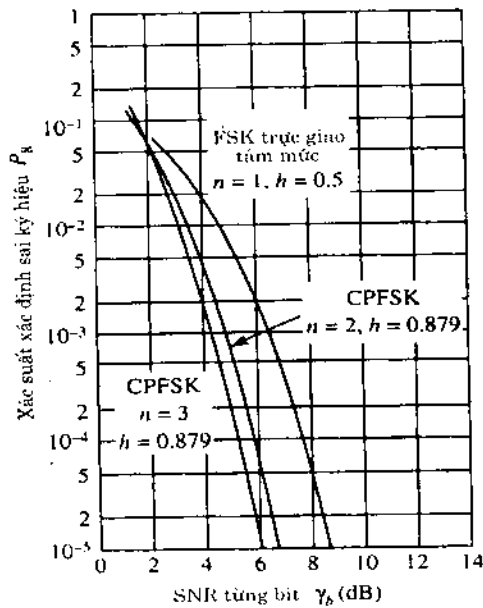
Hình 7-3-12

Hiệu quả của tín hiệu CPFSK nhị phân khi thu liên kết



Hình 7-3-13

Hiệu quả của tín hiệu CPFSK bốn mức khi thu liên kết



Hình 7-3-14: Hiệu quả của tín hiệu CPFSK tám mức khi thu liên kết

7-4. THU TỐI ƯU TÍN HIỆU PHA NGẪU NHIÊN TRONG KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN AWGN

Trong phần này ta xét việc thiết kế bộ thu tối ưu tín hiệu điều chế khi pha vật mang là không xác định được ở phía thu và cũng không cần xác định giá trị này. Sự không xác định pha vật mang ở phía thu là do các nguyên nhân sau: bộ dao động ở phía phát và phía thu thường không đồng bộ về pha và trễ truyền lan của tín hiệu từ phía phát tới phía thu thường không biết chính xác. Tín hiệu truyền đi được biểu diễn là:

$$s(t) = \text{Re}[g(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Tín hiệu truyền lan với độ trễ t_0 và tín hiệu nhận được là:

$$s(t - t_0) = \text{Re}[g(t - t_0)e^{j2\pi f_c (t - t_0)}] = \text{Re}[g(t - t_0)e^{j2\pi f_c t} e^{-j2\pi f_c t_0}]$$

Dịch chuyển về pha do trễ truyền lan là $\phi = -2\pi f_c t_0$

Chú ý rằng độ dịch chuyển về pha là lớn ngay cả khi trễ truyền lan là nhỏ. Trong một số kênh (ví dụ kênh radio), trễ truyền lan của tín hiệu từ phía phát tới phía thu thay đổi nhanh và ngẫu nhiên. Như vậy pha của tín hiệu nhận được thay đổi một cách ngẫu nhiên.

Trong trường hợp không biết pha vật mang, ta có thể coi tham số này của tín hiệu như một biến ngẫu nhiên.

7-4-1. Bộ thu tối ưu cho các tín hiệu nhị phân

Ta xét hệ thống truyền thông sử dụng hai tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$ để truyền thông tin với:

$$s_m(t) = \text{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad m = 1, 2, 0 \leq t \leq T \quad (7-4-1)$$

trong đó $s_{lm}(t)$ là tín hiệu tần số thấp tương đương, $m = 1, 2$. Giả sử hai tín hiệu này có năng lượng giống nhau:

$$\zeta = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T |s_{lm}^2(t)|^2 dt \quad (7-4-2)$$

và được đặc trưng bởi hệ số tương quan phức:

$$\rho_{12} \equiv \rho = \frac{1}{\zeta} \int_0^T s_{l1}(t)s_{l2}(t) dt \quad (7-4-3)$$

Tín hiệu nhận được lệch pha so với tín hiệu phát và bị ảnh hưởng bởi nhiễu:

$$n(t) = \text{Re}\left\{[n_c(t) + jn_s(t)]e^{j2\pi f_c t}\right\} = \text{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (7-4-4)$$

Như vậy tín hiệu nhận được ở phía thu là:

$$r(t) = \text{Re}\left\{[s_{lm}(t)e^{j\phi} + z(t)]e^{j2\pi f_c t}\right\} \quad (7-4-5)$$

$$\text{với } r_f(t) = s_{lm}(t)e^{j\phi} + z(t), 0 \leq t \leq T \quad (7-4-6)$$

là tín hiệu tần số thấp tương đương. Tín hiệu nhận được sẽ qua bộ giải điều chế và lấy mẫu tại thời điểm $t = T$ và sẽ tới bộ xác định.

Bộ giải điều chế tối ưu Trong phần 7-1-1, ta đã chứng minh rằng nếu tín hiệu nhận được có tương quan với tập hợp các hàm trực chuẩn $\{f_n(t)\}$ tạo thành không gian tín hiệu, thì đầu ra của các bộ tương quan cho ta một tập hợp các thông số đủ để xác định tín hiệu với xác suất xác định sai cực tiểu.

Một sự phân tách trực chuẩn tương tự được thực hiện với tín hiệu nhận được, và ta sử dụng tín hiệu tần số thấp tương đương để biểu diễn toán học cho thuận lợi.

Người ta tìm được đáp ứng xung của bộ lọc phối hợp với tín hiệu tần số thấp tương đương $s_f(t)$, $0 \leq t \leq T$ là:

$$h_f(t) = s_f^*(T-t) \quad (7-4-7)$$

và đầu ra của bộ lọc tại thời điểm $t = T$ là:

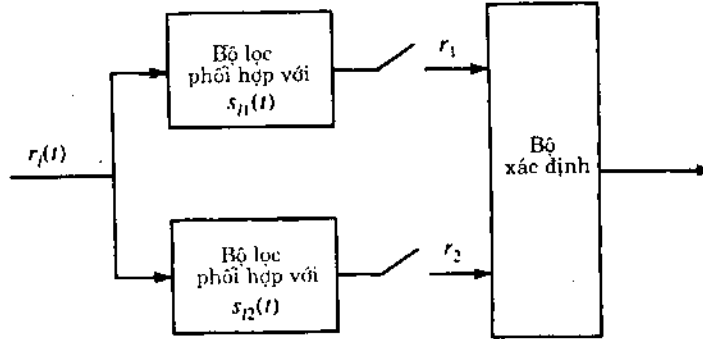
$$\int_0^T |s_f(t)|^2 dt = 2\zeta \quad (7-4-8)$$

với ζ là năng lượng tín hiệu. Ta cũng nhận được kết quả tương tự nếu tín hiệu $s_f(t)$ tương quan với tín hiệu $s_f^*(t)$ tại bộ tương quan và lấy mẫu tại $t = T$. Do đó bộ giải điều chế tối ưu của tín hiệu tần số thấp tương đương $s_f(t)$ có thể thực hiện bởi hai bộ lọc phối hợp mắc song song như trên hình 7-4-1. Đầu ra của các bộ lọc được lấy mẫu là hai số phức:

$$r_m = r_{mc} + jr_{ms}, m = 1, 2 \quad (7-4-9)$$

Giả sử tín hiệu truyền đi là $s_1(t)$. Để chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2\zeta \cos \phi + n_{1c} + j(2\zeta \sin \phi + n_{1s}) \\ r_2 &= 2\zeta |\rho| \cos(\phi + \alpha_0) + n_{2c} + j[2\zeta |\rho| \sin(\phi + \alpha_0) + n_{2s}] \end{aligned} \quad (7-4-10)$$



Hình 7-4-1: Bộ thu tối ưu tín hiệu nhị phân

với ρ là hệ số tương quan phức, $\rho = |\rho| \exp(j\alpha_0)$. Các biến ngẫu nhiên n_{1c} , n_{1s} , n_{2c} , n_{2s} là các biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương giống nhau.

Bộ xác định tối ưu Bộ xác định tối ưu nhận được các tín hiệu ngẫu nhiên $\mathbf{r} = [r_{1c} \ r_{1s} \ r_{2c} \ r_{2s}]$ với $r_1 = r_{1c} + jn_{1s}$ và $r_2 = r_{2c} + jn_{2s}$, xác định trên cơ sở các xác suất hậu nghiệm $P(s_m | \mathbf{r})$, $m = 1, 2$. Các xác suất này là:

$$P(s_m | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | s_m) P(s_m)}{p(\mathbf{r})}, \quad m = 1, 2 \quad (7-4-11)$$

và luật xác định tối ưu được biểu diễn là:

$$P(s_1 | \mathbf{r}) \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_2} \end{matrix} P(s_2 | \mathbf{r})$$

hay một cách tương đương:

$$\frac{p(\mathbf{r} | s_1)}{p(\mathbf{r} | s_2)} \begin{matrix} >_{s_1} \\ <_{s_2} \end{matrix} \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (7-4-12)$$

Tỷ số ở phía trái gọi là tỷ số khả năng và ký hiệu là:

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | s_1)}{p(\mathbf{r} | s_2)} \quad (7-4-13)$$

Vế phải của (7-4-12) là tỷ số của hai xác suất hậu nghiệm và bằng 1 khi hai tín hiệu đồng xác suất.

Có thể nhận được các hàm mật độ phân bố xác suất $p(\mathbf{r} | s_1)$ và $p(\mathbf{r} | s_2)$ bằng cách lấy trung bình của $p(\mathbf{r} | s_m, \phi)$ theo hàm mật độ phân bố xác suất của pha ngẫu nhiên, nghĩa là:

$$p(\mathbf{r} | s_m) = \int_0^{2\pi} p(\mathbf{r} | s_m, \phi) p(\phi) d\phi \quad (7-4-14)$$

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

Ta thực hiện tích phân trên trong trường hợp đặc biệt là khi hai tín hiệu trực giao hay $\rho = 0$. Trong trường hợp này, đầu ra bộ giải điều chế là:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1c} + jr_{1s} = 2\zeta \cos \phi + n_{1c} + j(2\zeta \sin \phi + n_{1s}) \\ r_2 &= r_{2c} + jr_{2s} = n_{2c} + jn_{2s} \end{aligned} \quad (7-4-15)$$

với $(n_{1c}, n_{1s}, n_{2c}, n_{2s})$ là các biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0, không có tương quan chéo và do đó độc lập thống kê. Ta có:

$$\begin{aligned} p(r_{1c}, r_{1s} | s_1, \phi) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(r_{1c} - 2\zeta \cos \phi)^2 + (r_{1s} - 2\zeta \sin \phi)^2}{2\sigma^2} \right] \\ p(r_{2c}, r_{2s}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (7-4-16)$$

với $\sigma^2 = 2\zeta N_0$.

Vì ϕ phân bố đồng đều nên ta có thể thực hiện tại bộ xác định một cách đơn giản, với $p(\phi) = 1/2\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Thay vào (7-4-14) ta nhận được:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r_{1c}, r_{1s} | s_1, \phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + 4\zeta^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{2\zeta(r_{1c} \cos \phi + r_{1s} \sin \phi)}{\sigma^2} \right] d\phi \quad (7-4-17)$$

và:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{2\zeta(r_{1c} \cos \phi + r_{1s} \sin \phi)}{\sigma^2} \right] d\phi = I_0 \left(\frac{2\zeta \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}}{\sigma^2} \right) \quad (7-4-18)$$

với $I_0(x)$ là hàm Bessel sửa đổi bậc 0, được định nghĩa trong (2-1-120). Tương tự khi $s_2(t)$ truyền đi, ta có:

$$p(r_{2c}, r_{2s} | s_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{r_{2c}^2 + r_{2s}^2 + 4\zeta^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{2\zeta \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}}{\sigma^2} \right) \quad (7-4-19)$$

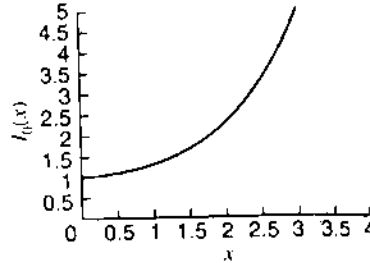
Thay các kết quả này vào (7-4-13) ta nhận được:

$$\Lambda(r) = \frac{I_0 \left(2\zeta \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} / \sigma^2 \right) >_{s_1} \frac{P(s_2)}{P(s_1)}}{I_0 \left(2\zeta \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2} / \sigma^2 \right) <_{s_2} \frac{P(s_1)}{P(s_2)}} \quad (7-4-20)$$

Bộ xác định tối ưu tính $\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}$, $\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$, $I_0 \left(2\zeta \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} / \sigma^2 \right)$, $I_0 \left(2\zeta \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2} / \sigma^2 \right)$ và ta thấy cần phải biết sai phương của nhiễu σ^2 . Tỷ số tương ứng được so sánh với $P(s_2)/P(s_1)$ để xác định tín hiệu nào đã truyền đi.

Trong trường hợp hai tín hiệu đồng xác suất, do tính đơn điệu của hàm Bessel như trên hình 7-4-2 ta có:

$$\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} >_{s_1} \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2} <_{s_2} \quad (7-4-21)$$



Hình 7-4-2: Đồ thị $I_0(x)$

Như vậy bộ xác định dựa trên hai đường bao $\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}$ và $\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$ để xác định tín hiệu, nên ta gọi là bộ xác định đường bao. Tương tự ta cũng có thể dựa vào $r_{1c}^2 + r_{1s}^2$ và $r_{2c}^2 + r_{2s}^2$, bộ xác định như thế gọi là bộ xác định luật bình phương.

Tín hiệu nhị phân PSK là ví dụ về tín hiệu trực giao nhị phân. Hai tần số của tín hiệu PSK là f_1 và $f_2 = f_1 + \Delta f$. Cách lựa chọn độ phân tách tần số Δf cực tiểu được xét sau đây. Tín hiệu được biểu diễn là:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{2\zeta_b / T_b} \cos 2\pi f_1 t, \quad 0 \leq t \leq T_b \\ s_2(t) &= \sqrt{2\zeta_b / T_b} \cos 2\pi f_2 t, \quad 0 \leq t \leq T_b \end{aligned} \quad (7-4-22)$$

Các tín hiệu tần số thấp tương đương là:

$$\begin{aligned} s_{11}(t) &= \sqrt{2\zeta_b / T_b}, \quad 0 \leq t \leq T_b \\ s_{12}(t) &= \sqrt{2\zeta_b / T_b} e^{j2\pi\Delta f t}, \quad 0 \leq t \leq T_b \end{aligned} \quad (7-4-23)$$

Tín hiệu nhận được là:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2\zeta_b}{T_b}} \cos(2\pi f_m t + \phi_m) + n(t) \quad (7-4-24)$$

với ϕ_m là pha của tín hiệu mang tần số f_m . Giải điều chế tín hiệu thực $r(t)$ thực hiện như trên hình 7-4-3, sử dụng bốn bộ tương quan với các hàm cơ sở là:

$$\begin{aligned} f_{1m}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos[(2\pi f_1 + 2\pi m\Delta f)t], \quad m = 0, 1 \\ f_{2m}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin[(2\pi f_1 + 2\pi m\Delta f)t], \quad m = 0, 1 \end{aligned} \quad (7-4-25)$$

Bốn tín hiệu ra được lấy mẫu tại thời điểm $t = T$ và đưa vào bộ xác định. Nếu tín hiệu thứ m được truyền đi, bốn tín hiệu ở bộ xác định là:

$$\begin{aligned} r_{kc} &= \sqrt{\zeta_b} \left[\frac{\sin[2\pi(k-m)\Delta f T]}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi_m - \frac{\cos[2\pi(k-m)\Delta f T] - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi_m \right] + n_{kc} \\ k, m &= 1, 2 \end{aligned}$$

$$r_{ks} = \sqrt{\zeta_b} \left[\frac{\cos[2\pi(k-m)\Delta f T] - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi_m + \frac{\sin[2\pi(k-m)\Delta f T]}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi_m \right] + n_{ks}$$

$$k, m = 1, 2 \quad (7-4-26)$$

với n_{kc} và n_{ks} là các thành phần nhiễu gaussian trong các mẫu.

Ta thấy rằng khi $k = m$, các mẫu tín hiệu là:

$$r_{mc} = \sqrt{\zeta_b} \cos \phi_m + n_{mc}$$

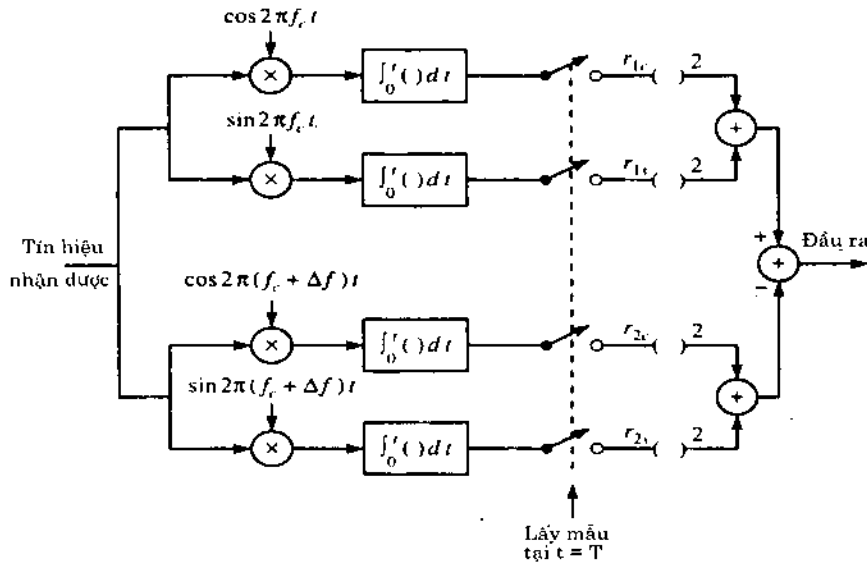
$$r_{ms} = \sqrt{\zeta_b} \sin \phi_m + n_{ms}$$

$$(7-4-27)$$

Khi $k \neq m$, các thành phần tín hiệu trong các mẫu r_{kc} và r_{ks} bằng 0, độc lập với độ lệch pha ϕ_k , với độ phân tách tần số $\Delta f = 1/T$. Trong trường hợp này hai tín hiệu ra ở bộ tương quan chỉ gồm nhiễu:

$$r_{kc} = n_{kc}, r_{ks} = n_{ks}, k \neq m \quad (7-4-28)$$

Với độ phân tách tần số $\Delta f = 1/T$, (7-4-27) và (7-4-28) tương thích với kết quả (7-4-15) cho các tín hiệu ra bộ giải điều chế. Kết luận là với các luật xác định đường bao hay luật xác định bình phương cho tín hiệu PSK nhị phân, độ phân tách tần số cực tiểu để đảm bảo tính trực giao của hai tín hiệu là $\Delta f = 1/T$. Độ phân tách này lớn hơn hai lần so với bộ xác định pha liên kết.



Hình 7-4-3: Bộ giải điều chế và xác định theo luật bình phương cho tín hiệu FSK nhị phân

7-4-2. Bộ thu tối ưu cho tín hiệu trực giao M mức

Nếu các tín hiệu có năng lượng giống nhau và đồng xác suất thì các tín hiệu sẽ được biểu diễn như sau:

$$s_m(t) = \text{Re}[s_{im}(t)e^{j2\pi f_c t}], m = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T \quad (7-4-29)$$

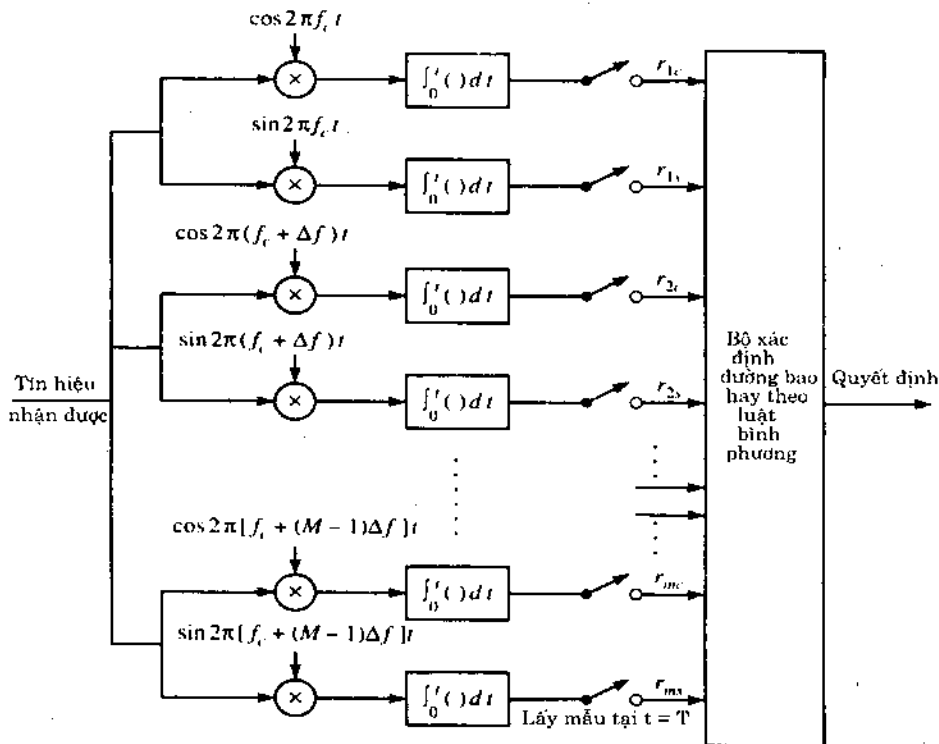
với $s_{im}(t)$ là tín hiệu tần số thấp tương đương. Bộ giải điều chế tối ưu tạo ra M biến ngẫu nhiên phức:

$$r_m = r_{mc} + jr_{ms} = \int_0^T r_l(t) s_{lm}^*(t) dt, m = 1, 2, \dots, M \quad (7-4-30)$$

với $r_l(t)$ là tín hiệu tần số thấp tương đương với tín hiệu nhận được. Bộ xác định tối ưu dựa trên giá trị pha ngẫu nhiên, phân bố đều, sẽ tính toán M đường bao:

$$|r_m| = \sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}, m = 1, 2, \dots, M \quad (7-4-31)$$

Trong trường hợp tín hiệu PSK trực giao M mức, bộ thu tối ưu có cấu trúc như trên hình 7-4-4, có $2M$ bộ tương quan, hai bộ tương quan với mỗi tần số có thể. Độ phân tách tần số cực tiểu giữa hai tần số kế nhau để bảo đảm tính trực giao là $\Delta f = 1/T$.



Hình 7-4-4: Giải điều chế tín hiệu PSK M mức cho xác định không liên kết

7-4-3. Xác suất xác định sai dùng bộ xác định đường bao đối với tín hiệu trực giao M mức

Xét trường hợp truyền M tín hiệu trực giao có năng lượng bằng nhau qua kênh AWGN và bộ thu dùng phương pháp xác định đường bao. Ta cũng giả thiết rằng M tín hiệu đồng xác suất tiên nghiệm và tín hiệu $s_l(t)$ được truyền trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq T$.

M độ đo ở bộ xác định là M giá trị đường bao:

$$|\mathbf{r}_m| = \sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7-4-32)$$

với

$$\begin{aligned} r_{1c} &= \sqrt{\zeta_s} \cos \phi_1 + n_{1c} \\ r_{1s} &= \sqrt{\zeta_s} \sin \phi_1 + n_{1s} \end{aligned} \quad (7-4-33)$$

và

$$r_{mc} = n_{mc}, \quad r_{ms} = n_{ms}, \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (7-4-34)$$

Các thành phần nhiễu cộng $\{n_{mc}\}$ và $\{n_{ms}\}$ là các biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và độc lập thống kê với sai phương $\sigma^2 = N_0/2$. Hàm mật độ phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên đầu vào bộ xác định là:

$$p_{r_1}(r_{1c}, r_{1s}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + \zeta_s}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{\zeta_s(r_{1c}^2 + r_{1s}^2)}}{\sigma^2}\right) \quad (7-4-35)$$

$$p_{r_m}(r_{mc}, r_{ms}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}{2\sigma^2}\right), \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (7-4-36)$$

Ta định nghĩa các biến chuẩn hóa để đổi biến trong (7-4-35) và (7-4-36):

$$R_m = \frac{\sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}}{\sigma}, \quad \theta_m = \arctg \frac{r_{ms}}{r_{mc}} \quad (7-4-37)$$

Rõ ràng $r_{mc} = \sigma R_m \cos \theta_m$ và $r_{ms} = \sigma R_m \sin \theta_m$. Định thức jacobin của phép biến đổi là:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sigma \cos \theta_m & \sigma \sin \theta_m \\ -\sigma R_m \sin \theta_m & \sigma R_m \cos \theta_m \end{vmatrix} = \sigma^2 R_m \quad (7-4-38)$$

Do đó:

$$p(R_1, \theta_1) = \frac{R_1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(R_1^2 + \frac{2\zeta_s}{N_0}\right)\right] I_0\left(\sqrt{\frac{2\zeta_s}{N_0}} R_1\right) \quad (7-4-39)$$

$$p(R_m, \theta_m) = \frac{R_m}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} R_m^2\right), \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (7-4-40)$$

Bằng cách lấy trung bình $p(R_m, \theta_m)$ theo θ_m , thành phần 2π bị mất khỏi (7-4-39) và (7-4-40), ta thấy R_1 có phân bố Rice và $R_m, m = 2, 3, \dots, M$ có phân bố Reyleigh.

Xác suất xác định đúng là xác suất để $R_1 > R_2, R_1 > R_3, \dots, R_1 > R_M$.

$$P_c = P(R_1 > R_2, R_1 > R_3, \dots, R_1 > R_M) = \int_0^\infty P(R_1 > R_2, \dots, R_1 > R_M | R_1 = x) p_{R_1}(x) dx \quad (7-4-41)$$

Do các biến ngẫu nhiên $R_m, m = 2, 3, \dots, M$ là độc lập thống kê nên:

$$P_c = \int_0^\infty \left[P(R_1 > R_2 | R_1 = x) \right]^{M-1} p_{R_1}(x) dx \quad (7-4-42)$$

với

$$P(R_1 > R_2 | R_1 = x) = \int_0^x p_{R_2}(r_2) dr_2 = 1 - e^{-x^2/2} \quad (7-4-43)$$

Từ đó:
$$\left(1 - e^{-x^2/2}\right)^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} e^{-nx^2/2} \quad (7-4-44)$$

Thay kết quả này vào (7-4-42) và lấy tích phân theo x , ta có:

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left[-\frac{n\zeta_s}{(n+1)N_0}\right] \quad (7-4-45)$$

với ζ_s/N_0 là SNR từng ký hiệu. Xác suất xác định sai ký hiệu là:

$$P_M = 1 - P_c = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left[-\frac{nk\zeta_b}{(n+1)N_0}\right] \quad (7-4-46)$$

với ζ_b/N_0 là SNR từng bit.

Với $M = 2$, ta có:

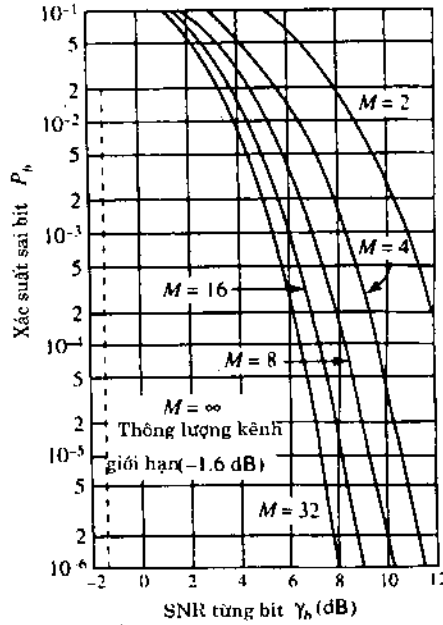
$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\zeta_b/2N_0} \quad (7-4-47)$$

Với $M > 2$, ta có:

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M \quad (7-4-48)$$

Hình 7-4-5 vẽ xác suất sai bit theo SNR từng bit với $M = 2, 4, 8, 16, 32$. Trong trường hợp xác định liên kết tín hiệu trực giao M mức (phần 7-2-2) ta thấy rằng với mỗi giá trị xác suất sai bit, SNR từng bit giảm khi M tăng. Ta sẽ thấy trong chương 9, khi $M \rightarrow \infty$, xác suất sai bit P_b có thể nhỏ tùy ý khi SNR từng bit lớn hơn giới hạn Shannon là -1,6 dB. Với tín hiệu PSK M mức, độ phân tách ta cực tiểu là $\Delta f = 1/T$ để bảo đảm tính trực giao. Dải thông cần thiết cho M tín hiệu là $W = M\Delta f = M/T$, tốc độ số liệu là $R = k/T$ với $k = \log_2 M$, ta có:

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{M} \quad (7-4-49)$$



Hình 7-4-5: Xác suất sai bit của bộ xác định không liên kết đối với tín hiệu trực giao

7-4-4. Xác suất lỗi của phương pháp xác định đường bao đối với tín hiệu nhị phân tương quan

Trong phần này ta xét hiệu quả bộ xác định đường bao đối với tín hiệu nhị phân tương quan có năng lượng bằng nhau. Khi hai tín hiệu là tương quan, đầu vào bộ xác định là các biến ngẫu nhiên phức trong (7-4-10). Giả thiết bộ xác định dựa trên cơ sở đường bao $|r_1|$ và $|r_2|$ có tương quan với nhau (có tính phụ thuộc thống kê).

Hàm mật độ phân bố xác suất của $R_1 = |r_1|$ và $R_2 = |r_2|$ là phân bố Rice:

$$p(R_m) = \begin{cases} \frac{R_m}{2\zeta N_0} \exp\left(-\frac{R_m^2 + \beta_m^2}{4\zeta N_0}\right) I_0\left(\frac{\beta_m R_m}{2\zeta N_0}\right) & (R_m > 0) \\ 0 & (R_m < 0) \end{cases} \quad (7-4-50)$$

$m = 1, 2$ và $\beta_1 = 2\zeta$ và $\beta_2 = 2\zeta |\rho|$ với giả thiết tín hiệu $s_i(t)$ được truyền đi.

Do R_1 và R_2 phụ thuộc thống kê, như là dãy các tín hiệu không trực giao, xác suất xác định sai là:

$$P_b = P(R_2 > R_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (7-4-51)$$

với $p(x_1, x_2)$ là hàm mật độ phân bố xác suất đường bao R_1 và R_2 . Một cách xác định khác là:

$$P_b = P(R_2 > R_1) = P(R_2^2 > R_1^2) = P(R_2^2 - R_1^2 > 0) \quad (7-4-52)$$

Nhưng $R_2^2 - R_1^2$ là trường hợp đặc biệt của biến ngẫu nhiên gaussian tổng quát giá trị phức. Khi đó:

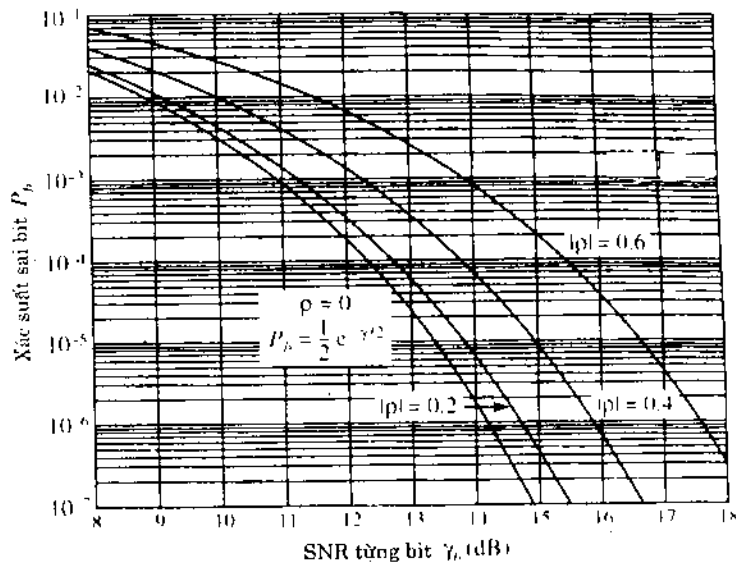
$$P_b = Q_1(a, b) - \frac{1}{2} e^{-(a^2+b^2)/2} I_0(ab) \quad (7-4-53)$$

với
$$a = \sqrt{\frac{\zeta_b}{2N_0}} (1 - \sqrt{1 - |\rho|^2}), \quad b = \sqrt{\frac{\zeta_b}{2N_0}} (1 + \sqrt{1 - |\rho|^2}) \quad (7-4-54)$$

Xác suất lỗi P_b vẽ trên hình 7-4-6 với một số giá trị của $|\rho|$. P_b nhỏ nhất khi $\rho = 0$. Trong trường hợp này $a = 0$, $b = \sqrt{\zeta_b / N_0}$ và (7-4-53) trở thành:

$$P_b = Q_1\left(0, \sqrt{\zeta_b / N_0}\right) - \frac{1}{2} e^{-\zeta_b / 2N_0} \quad (7-4-55)$$

Nhưng $Q_1\left(0, \sqrt{\zeta_b / N_0}\right) = e^{-\zeta_b / 2N_0}$ nên ta lại thu được kết quả trong phần trước. Khi $|\rho| = 1$, xác suất lỗi $P_b = 1/2$.



Hình 7-4-6: Xác suất lỗi đối với thu không liên kết

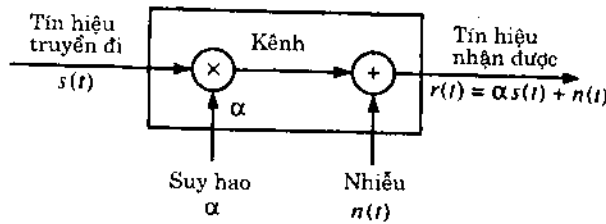
7-5. BỘ LẬP VÀ PHÂN TÍCH ĐƯỜNG TRUYỀN SÓNG NGẮN

Khi truyền tín hiệu số qua kênh AWGN, ta thấy hiệu quả của hệ thống truyền thông được xác định bởi xác suất xác định sai, chỉ phụ thuộc vào SNR ở phía nhận, ζ_b / N_0 , với ζ_b là năng lượng ứng với một bit và $N_0 / 2$ là phổ mật độ công suất của nhiễu cộng. Như vậy nhiễu cộng giới hạn hiệu quả của hệ thống truyền tin.

Cùng với nhiễu cộng, một nhân tố khác ảnh hưởng tới hiệu quả của hệ thống truyền tin là suy hao trên kênh. Mọi kênh truyền vật lý đều làm suy hao tín hiệu. Như vậy tín hiệu sẽ suy hao khi truyền qua kênh. Mô hình toán học đơn giản cho sự suy hao trên kênh được vẽ trên hình 7-5-1. Nếu tín hiệu truyền đi là $s(t)$, tín hiệu nhận được với $0 < \alpha \leq 1$ là:

$$r(t) = \alpha s(t) + n(t) \quad (7-5-1)$$

Nếu năng lượng của tín hiệu là ζ_b thì năng lượng của tín hiệu nhận được là $\alpha^2 \zeta_b$ và SNR là $\alpha^2 \zeta_b / N_0$. Như vậy ảnh hưởng của suy hao tín hiệu là làm giảm năng lượng tín hiệu. Trong các hệ thống truyền tin tương tự, các bộ khuếch đại được sử dụng để khuếch đại năng lượng tín hiệu nhưng nó cũng khuếch đại nhiễu trong hệ thống. Hệ thống truyền tin số cho phép ta xác định và tạo lại tín hiệu (không có nhiễu). Các thiết bị như thế gọi là bộ lặp, rất hay được sử dụng trong thực tế.



Hình 7-5-1: Mô hình toán học của kênh với suy hao và nhiễu

7-5-1. Bộ lặp

Đầu vào của mỗi bộ lặp gồm một bộ giải điều chế và một bộ xác định, nó sẽ giải điều chế và xác định dãy thông tin số nhận được từ bộ lặp phía trước. Sau đó dãy số này được đưa tới phía phát của bộ lặp, biến đổi thành dãy tín hiệu để truyền tới bộ lặp sau. Loại bộ lặp này gọi là bộ lặp khôi phục.

Do tín hiệu tạo ra bởi bộ lặp là không có nhiễu nên không có thành phần nhiễu cộng trong tín hiệu. Tuy nhiên khi sai số xảy ra ở bộ xác định thì sai số này sẽ truyền tới bộ lặp sau. Để xác định hiệu quả của hệ thống này, giả thiết tín hiệu điều chế là tín hiệu PAM nhị phân, nên xác suất sai bit đối với một liên kết bộ lặp-bộ lặp (hop) là:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2\zeta_b}{N_0}}\right)$$

Do xác suất sai một bit là thấp, ta coi như một bit không bị xác định sai quá một lần khi truyền qua kênh gồm K bộ lặp. Như vậy xác suất xác định sai của hệ thống là:

$$P_b \approx KQ\left(\sqrt{\frac{2\zeta_b}{N_0}}\right) \quad (7-5-2)$$

Trái lại, hệ thống gồm K bộ lặp tương tự sẽ làm giảm SNR ở phía thu đi K lần và xác suất sai bit là:

$$P_b \approx Q\left(\sqrt{\frac{2\zeta_b}{KN_0}}\right) \quad (7-5-3)$$

Rõ ràng, với cùng một độ hiệu quả (xác suất sai bit), sử dụng bộ lặp khôi phục tiết kiệm công suất truyền hơn so với bộ lặp tương tự. Do đó trong các hệ thống truyền thông số người ta hay sử dụng bộ lặp khôi phục. Tuy nhiên trong các kênh điện thoại sử dụng cả tín hiệu số và tín hiệu tương tự, người ta sử dụng chủ yếu bộ lặp tương tự.

Ví dụ 7-5-1

Một hệ thống truyền thông số nhị phân truyền số liệu qua đường dây có độ dài 1000 km, các bộ lặp đặt cách nhau 10 km. Xác định ζ_b/N_0 để xác suất sai là 10^{-5} trong hai trường hợp sử dụng bộ lặp khôi phục và bộ lặp tương tự.

Số lượng bộ lặp $K = 100$. Nếu sử dụng bộ lặp khôi phục thì:

$$10^{-5} = 100 Q\left(\sqrt{\frac{2\zeta_b}{N_0}}\right)$$

suy ra $\zeta_b/N_0 \approx 11,3$ dB. Đối với bộ lặp tương tự:

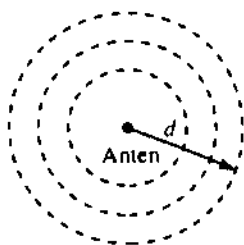
$$10^{-5} = Q\left(\sqrt{\frac{2\zeta_b}{100N_0}}\right)$$

suy ra $\zeta_b/N_0 \approx 29,6$ dB. Như vậy công suất truyền đi gấp khoảng 70 lần nếu dùng bộ lặp tương tự so với việc dùng bộ lặp khôi phục.

7-5-2. Phân tích các đường truyền sóng ngắn nhiều tia

Trong khi thiết kế các hệ thống truyền tin radio hay truyền thông vệ tinh, người thiết kế hệ thống phải xác định độ lớn của anten phía phát và phía thu, công suất thiết bị phát, SNR cần thiết để có thể đạt được độ hiệu quả với một tốc độ số liệu xác định.

Xét anten phát công suất P_T trên hình 7-5-2. Mật độ công suất ở khoảng cách d so với vị trí anten là $P_T/4\pi d^2$ W/m². Nếu anten có định hướng thì mật độ công suất theo hướng phát tăng lên gấp G_T lần với G_T gọi là độ khuếch đại của anten. Tích $P_T G_T$ gọi là công suất bức xạ hiệu quả (Effective Radiated Power - ERP hay EIRP).



Hình 7-5-2: Anten bức xạ

Anten nhận hướng đối diện với anten phát và nhận được một phần công suất bằng:

$$P_R = \frac{P_T G_T A_R}{4\pi d^2} \quad (7-5-4)$$

với A_R là vùng hiệu quả của anten. Từ lý thuyết trường ta có:

$$A_R = \frac{G_R \lambda^2}{4\pi} m^2 \quad (7-5-5)$$

với $\lambda = c/f$ là bước sóng của tín hiệu. Thay (7-5-5) vào (7-5-4) ta nhận được:

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi d / \lambda)^2} \quad (7-5-6)$$

Thành phần $L_s = (4\pi d / \lambda)^2$ gọi là suy hao trên đường truyền không gian. Với các độ suy hao khác như suy hao trong khí quyển, ta phải tính thêm một hệ số suy hao nữa là L_a . Như vậy công suất nhận được là:

$$P_R = P_T G_T G_R L_s L_a \quad (7-5-7)$$

Ta thấy rằng đặc trưng quan trọng của anten là vùng hiệu quả và hệ số khuếch đại, phụ thuộc vào bước sóng và hình dáng anten. Ví dụ anten parabol đường kính D có vùng hiệu quả là:

$$A_R = \frac{1}{4} \pi D^2 \eta \quad (7-5-8)$$

$\frac{1}{4} \pi D^2$ thể hiện tính chất vật lý của anten và η là hệ số hiệu quả bức xạ của anten. Thông thường $0,5 \leq \eta \leq 0,6$. Độ khuếch đại của anten parabol đường kính D là:

$$G_R = \eta \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \quad (7-5-9)$$

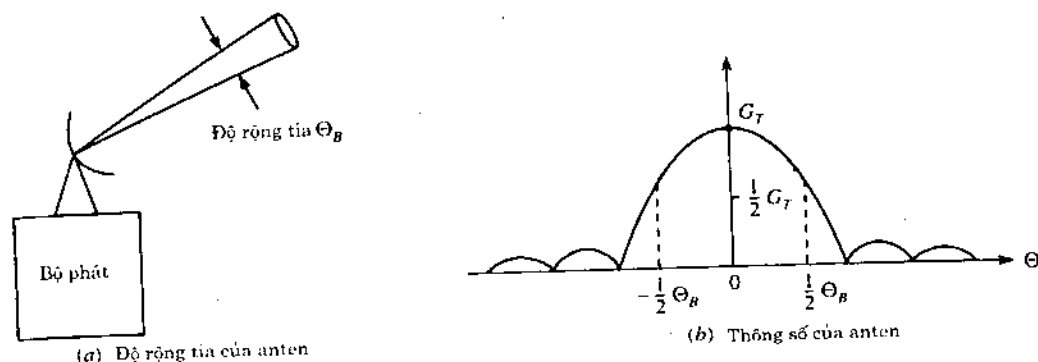
Với anten hình sừng (horn anten) thì vùng hiệu quả $A_R = 0,8 A$ với A là kích thước vật lý của anten, hệ số hiệu quả 0,8 thì độ khuếch đại của anten là:

$$G_R = \frac{10 A}{\lambda^2} \quad (7-5-10)$$

Một tham số khác liên quan tới độ khuếch đại của anten là độ rộng tia, ký hiệu θ_B , như trên hình 7-5-3. Ví dụ với anten parabol thì:

$$\theta_B = 70(\lambda / D)^0 \quad (7-5-11)$$

và G_T tỷ lệ nghịch với θ_B^2 .



Hình 7-5-3: Độ rộng tia của anten

BÀI TẬP

7-1. Một bộ lọc phối hợp có đáp ứng tần số:

$$H(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

- Xác định đáp ứng xung của bộ lọc phối hợp.
- Xác định tín hiệu tương ứng với bộ lọc.

7-2. Xét tín hiệu:

$$s(t) = \begin{cases} (A/T)t \cos 2\pi f_c t & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & \text{với các giá trị khác} \end{cases}$$

- Xác định đáp ứng xung của bộ lọc phối hợp với tín hiệu.
- Xác định tín hiệu ra của bộ lọc tại thời điểm $t = T$.
- Giả thiết tín hiệu $s(t)$ được cho qua một bộ tương quan, bộ tương quan này tính tương quan giữa tín hiệu vào $s(t)$ với $s(t)$. Xác định giá trị bộ tín hiệu ra của bộ tương quan tại $t = T$.

7-3. Một hệ thống truyền thông số nhị phân dùng hai tín hiệu:

$$s_0(t) = 0, 0 \leq t \leq T$$

$$s_1(t) = A, 0 \leq t \leq T$$

để truyền thông tin. Bộ giải điều chế tính tương quan chéo giữa tín hiệu nhận được $r(t)$ với $s(t)$ và lấy mẫu tín hiệu ra tại thời điểm $t = T$.

- Xác định bộ xác định tối ưu cho kênh AWGN và giá trị cận tối ưu, giả thiết các tín hiệu là đồng xác suất.
- Xác định xác suất lỗi theo SNR.

7-4. Xét tín hiệu tần số thấp tương đương $s_l(t)$, $0 \leq t \leq T$ với năng lượng:

$$\zeta = \frac{1}{2} \int_0^T |s_l(t)|^2 dt$$

Giả sử tín hiệu này truyền qua kênh AWGN, được biểu diễn bởi tín hiệu tần số thấp tương đương $z(t)$. Như vậy, tín hiệu nhận được là:

$$r_l(t) = s_l(t) + z(t), 0 \leq t \leq T$$

Tín hiệu nhận được qua một bộ lọc (tần số thấp tương đương) với đáp ứng xung $h_l(t)$. Xác định $h_l(t)$ để bộ lọc làm cực đại SNR tại đầu ra của nó tại thời điểm $t = T$.

7-5. Giả sử tín hiệu PSK nhị phân được sử dụng để truyền thông tin qua kênh AWGN với phổ mật độ công suất $N_0/2 = 10^{-10} \text{ W/Hz}$. Năng lượng của tín hiệu truyền đi là $\zeta_b = A^2 T / 2$ với T là khoảng thời gian tương ứng với một bit và A là biên độ tín hiệu. Xác định biên độ tín hiệu cần thiết để xác suất sai là 10^{-6} khi tốc độ số liệu là 10 kbit/s, 100 kbit/s.

7-6. Xét bộ xác định tín hiệu với tín hiệu vào:

$$r = \pm A + n$$

CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN

với A và $-A$ xuất hiện với xác suất giống nhau và n là nhiễu được đặc trưng bởi hàm mật độ phân bố xác suất Laplace:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-|n|\sqrt{2}/\sigma}$$

a) Xác định xác suất xác định lỗi theo A và σ .

b) Xác định SNR cần thiết để xác suất xác định lỗi là 10^{-5} .

7-7. Hai vật mang vuông góc $\cos 2\pi f_c t$ và $\sin 2\pi f_c t$ được sử dụng để truyền thông tin qua kênh AWGN với tốc độ khác nhau, 10 kbit/s và 100 kbit/s. Xác định mối liên hệ giữa các biên độ tín hiệu để ζ_b/N_b với hai kênh là như nhau.

7-8. Ba bản tin được truyền qua kênh AWGN với phổ mật độ công suất của nhiễu là $N_0/2$. Ba bản tin là:

$$s_1(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & \text{với các giá trị khác} \end{cases}$$

$$s_2(t) = -s_3(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T/2) \\ -1 & (T/2 \leq t \leq T) \\ 0 & \text{với các giá trị khác} \end{cases}$$

a) Hỏi số chiều của không gian tín hiệu.

b) Xác định các cơ sở của không gian tín hiệu.

CHƯƠNG 8

ĐỒNG BỘ

Ta biết rằng trong một hệ thống truyền thông số đầu ra của bộ giải điều chế được lấy mẫu một cách tuần hoàn, một lần trong một khoảng thời gian ký hiệu để khôi phục lại thông tin. Do trễ truyền lan, thường không biết trước ở phía thu, nên phải xác định khoảng thời gian ký hiệu ở phía thu để đồng bộ việc lấy mẫu ở đầu ra bộ giải điều chế. Trễ truyền lan tạo nên dịch chuyển pha vật mang và phải ước lượng độ dịch chuyển này ở phía thu nếu bộ xác định là bộ xác định liên kết pha. Trong phần này ta xét các phương pháp để đồng bộ vật mang và đồng bộ ký hiệu ở đầu thu ([2], [5], [6], [10]).

8-1. ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ TÍN HIỆU

Ta bắt đầu bằng việc xây dựng mô hình toán học cho tín hiệu nhận được ở phía thu. Giả thiết rằng tín hiệu truyền qua kênh bị trễ và bị ảnh hưởng bởi nhiễu cộng gaussian, tín hiệu nhận được là ([5], [6]):

$$r(t) = s(t - \tau) + n(t)$$

với

$$s(t) = \text{Re}[s_i(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (8-1-1)$$

τ là trễ truyền lan và $s_i(t)$ là tín hiệu tần số thấp tương đương. Tín hiệu nhận được có thể biểu diễn là:

$$r(t) = \text{Re}\left\{[s_i(t - \tau)e^{j\phi} + z(t)]e^{j2\pi f_c t}\right\} \quad (8-1-2)$$

với pha ϕ do trễ truyền lan τ gây ra và $\phi = -2\pi f_c \tau$. Từ dạng này ta thấy chỉ có thể ước lượng một tham số tín hiệu, đó là góc pha ϕ được xác định từ f_c và τ . Tuy nhiên bộ dao động tạo ra vật mang cho quá trình giải điều chế thường không đồng bộ về pha so với bộ dao động ở phía phát. Hơn nữa, hai bộ dao động có thể dịch chuyển chậm theo thời gian so với nhau. Từ đó dẫn tới pha vật mang ở phía thu không chỉ phụ thuộc vào τ . Độ chính xác của việc đồng bộ về thời gian để giải điều chế tín hiệu còn phụ thuộc vào khoảng thời gian tín hiệu T . Thông thường sai số khi ước lượng τ phải nhỏ so với T . Ví dụ sai số 1% so với T là đã đủ chính xác cho các ứng dụng thực tế. Tuy nhiên mức độ chính xác này không đủ để ước lượng pha vật mang, thậm chí nếu ϕ chỉ phụ thuộc vào τ do f_c thường là lớn và sai lệch nhỏ của τ dẫn tới sai lệch về pha là lớn.

Thực ra ta phải xác định cả hai tham số τ và ϕ để giải điều chế và xác định liên kết tín hiệu nhận được. Như vậy, có thể biểu diễn tín hiệu nhận được là:

$$r(t) = s(t; \phi, \tau) + n(t) \quad (8-1-3)$$

với ϕ và τ là các tham số cần ước lượng. Ký hiệu ψ là vectơ tham số $\{\phi, \tau\}$ thì $s(t; \phi, \tau)$ ký hiệu là $s(t; \psi)$.

Có hai tiêu chuẩn cho việc ước lượng tham số tín hiệu hay dùng là: tiêu chuẩn cực đại khả năng (Maximum Likelihood - ML) và tiêu chuẩn xác suất hậu nghiệm cực đại (Maximum a-posteriori Probability - MAP). Với tiêu chuẩn MAP, vectơ tham số tín hiệu ψ được mô hình hóa như là một biến ngẫu nhiên, đặc trưng bởi hàm mật độ phân bố xác suất tiên nghiệm $p(\psi)$. Trong tiêu chuẩn ML, vectơ tham số tín hiệu ψ được coi là xác định nhưng chưa biết.

ĐỒNG BỘ

Khai triển trực chuẩn $r(t)$ sử dụng N hàm trực chuẩn $\{f_n(t)\}$, ta có thể biểu diễn $r(t)$ bằng một vectơ $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N]$. Hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N]$ được biểu diễn là $p(\mathbf{r} | \psi)$. Từ đó ước lượng ML của ψ là giá trị làm cực đại $p(\mathbf{r} | \psi)$. Mặt khác, ước lượng MAP là giá trị ψ làm cực đại hàm mật độ xác suất hậu nghiệm:

$$p(\psi | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | \psi)p(\psi)}{p(\mathbf{r})} \quad (8-1-4)$$

Ta chú ý rằng nếu không biết trước vectơ tham số ψ , ta có thể giả thiết rằng ψ có phân bố đều trong khoảng giá trị của các tham số. Trong trường hợp này giá trị ψ làm cực đại $p(\mathbf{r} | \psi)$ cũng làm cực đại $p(\psi | \mathbf{r})$, như thế thì hai tiêu chuẩn MAP và ML là như nhau.

Dưới đây ta giả thiết hai tham số ϕ và τ là xác định nhưng chưa biết và sử dụng tiêu chuẩn ML để ước lượng chúng. Khi đó việc ước lượng dựa trên tín hiệu quan sát được trong khoảng thời gian $T_0 \geq T$, được gọi là thời gian quan sát. Kết quả thu được từ một khoảng thời gian quan sát được gọi là ước lượng một lần. Trong thực tế, việc ước lượng được thực hiện một cách liên tục và phải cập nhật liên tục các tham số ước lượng.

8-1-1. Hàm khả năng

Do nhiễu cộng $n(t)$ là nhiễu trắng gaussian có giá trị trung bình bằng 0, hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời $p(\mathbf{r} | \psi)$ được biểu diễn là:

$$p(\mathbf{r} | \psi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left\{ - \sum_{n=1}^N \frac{[r_n - s_n(\psi)]^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (8-1-5)$$

$$\text{với} \quad r_n = \int_{T_0} r(t) f_n(t) dt, \quad s_n(\psi) = \int_{T_0} s(t; \psi) f_n(t) dt \quad (8-1-6)$$

Ta thấy rằng đối số trong phần mũ có thể biểu diễn theo tín hiệu $r(t)$ và $s(t; \psi)$ bằng cách thay (8-1-6) vào (8-1-5):

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [r_n - s_n(t; \psi)]^2 = \frac{1}{N_0} \int_{T_0} [r(t) - s(t; \psi)]^2 dt \quad (8-1-7)$$

Bây giờ việc cực đại hóa $p(\mathbf{r} | \psi)$ theo tham số tín hiệu ψ tương đương với việc cực đại hóa hàm khả năng:

$$\Lambda(\psi) = \exp \left\{ - \frac{1}{N_0} \int_{T_0} [r(t) - s(t; \psi)]^2 dt \right\} \quad (8-1-8)$$

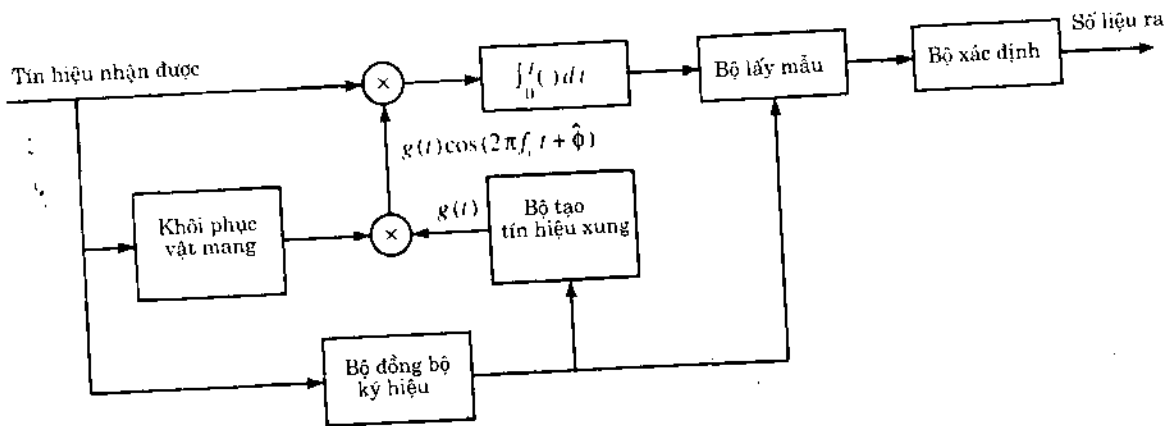
Dưới đây ta xét việc ước lượng tham số tín hiệu từ việc cực đại hóa $\Lambda(\psi)$.

8-1-2. Khôi phục vật mang và đồng bộ ký hiệu

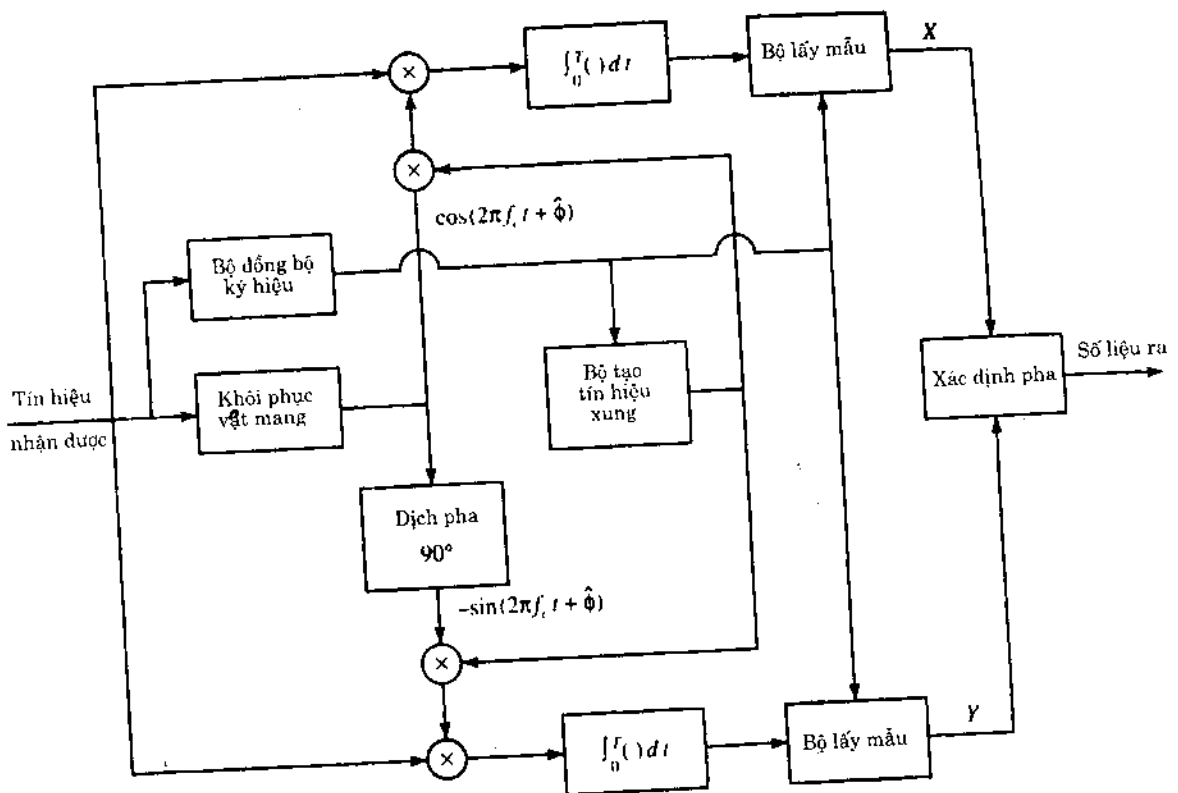
Đồng bộ ký hiệu cần thiết trong mọi hệ thống truyền thông số để truyền thông tin một cách đồng bộ và khôi phục vật mang để sử dụng trong việc xác định liên kết.

Hình 8-1-1 là sơ đồ khối của bộ giải điều chế và xác định đối với tín hiệu PSK nhị phân. Pha vật mang ước lượng là $\hat{\phi}$ được sử dụng để tạo ra tín hiệu tham chiếu $g(t)\cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ cho bộ tương quan. Bộ đồng bộ ký hiệu điều khiển bộ lấy mẫu và bộ tạo tín hiệu xung $g(t)$. Nếu tín hiệu xung là tín hiệu xung chữ nhật thì có thể bỏ qua bộ tạo tín hiệu.

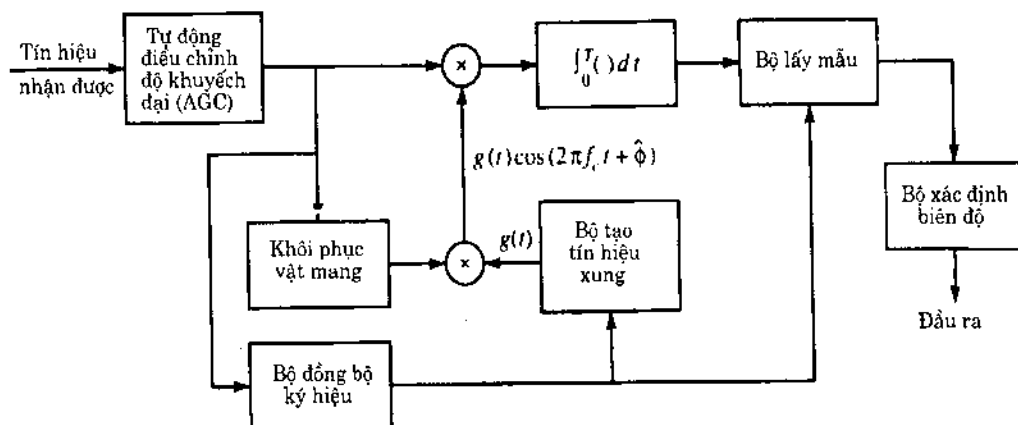
Sơ đồ khối bộ giải điều chế tín hiệu PSK M mức như trên hình 8-1-2. Trong trường hợp này cần hai bộ tương quan (hay bộ lọc phối hợp để tính tương quan của tín hiệu nhận được với hai tín hiệu vuông góc $g(t)\cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ và $g(t)\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$). Bộ xác định là bộ xác định pha, so sánh pha tín hiệu nhận được với các giá trị pha có thể truyền đi.



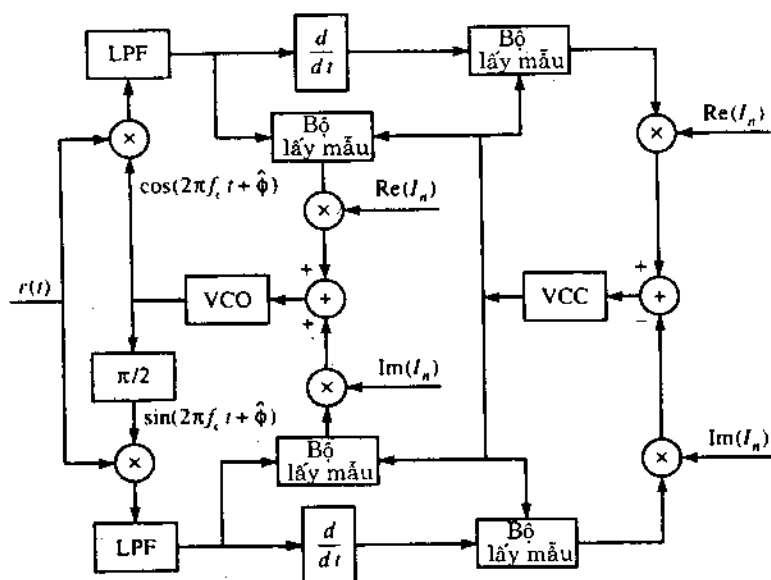
Hình 8-1-1: Sơ đồ khối bộ thu tín hiệu PSK nhị phân



Hình 8-1-2: Sơ đồ khối bộ thu tín hiệu PSK M mức



Hình 8-1-3: Sơ đồ khối bộ thu tín hiệu PAM M mức



Hình 8-1-4: Sơ đồ khối bộ thu tín hiệu QAM.

Sơ đồ khối bộ giải điều chế tín hiệu PAM biểu diễn trên hình 8-1-3. Trong trường hợp này chỉ cần một bộ tương quan và bộ xác định là bộ xác định biên độ, so sánh biên độ của tín hiệu nhận được với các giá trị có thể có của biên độ. Ta cũng cần một bộ tự động điều chỉnh độ khuếch đại (AGC) ở đầu vào bộ giải điều chế để hạn chế sự thay đổi của độ khuếch đại do kênh gây ra. Bộ AGC có hằng số thời gian khá lớn để không làm biến đổi giá trị biên độ tín hiệu trong khi xác định ký hiệu và có công suất trung bình cố định ở đầu ra.

Sơ đồ khối bộ giải điều chế tín hiệu QAM biểu diễn trên hình 8-1-4. Một bộ AGC giữ công suất trung bình của tín hiệu vào bộ giải điều chế không đổi. Ta thấy bộ giải điều chế này tương

tự như với tín hiệu PSK. Bộ xác định tính khoảng cách Euclide giữa điểm tín hiệu nhận được với M điểm tín hiệu có thể và chọn tín hiệu gần với tín hiệu nhận được nhất.

8-2. ƯỚC LƯỢNG PHA VẬT MANG

Có hai cách để đồng bộ vật mang ở phía thu. Cách thứ nhất là dồn kênh (multiplex), thường là dồn kênh theo tần số. Một tín hiệu đặc biệt, gọi là tín hiệu lái, cho phép bộ thu đồng bộ dao động của mình theo tần số và pha của tín hiệu nhận được. Khi một thành phần tín hiệu mang không điều chế truyền cùng với tín hiệu mang thông tin, bộ thu sử dụng vòng khóa pha PLL để thu nhận và theo dõi vật mang. Bộ PLL được thiết kế để có dải thông hẹp, nên ảnh hưởng không đáng kể tới tần số của vật mang thông tin ([2], [5], [10]).

Cách thứ hai hay được sử dụng trong thực tế là ước lượng pha vật mang trực tiếp từ tín hiệu thu được. Cách này có ưu điểm là toàn bộ công suất máy phát dùng để truyền vật mang thông tin. Trong việc khôi phục vật mang, ta quan tâm tới phương pháp thứ hai.

Để nhấn mạnh tầm quan trọng của việc ước lượng pha tín hiệu, ta xét ảnh hưởng khi ước lượng sai pha vật mang trong việc giải điều chế tín hiệu hai biên (Double Side Band-DSB). Giả thiết rằng tín hiệu điều biên là:

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (8-2-1)$$

Nếu ta giải điều chế bằng cách nhân $s(t)$ với vật mang tham chiếu:

$$c(t) = \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \quad (8-2-2)$$

ta sẽ nhận được:

$$c(t)s(t) = \frac{1}{2} A(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) + \frac{1}{2} A(t)\cos(4\pi f_c t + \phi + \hat{\phi})$$

Có thể loại bỏ thành phần tần số gấp đôi bằng cách cho tín hiệu qua bộ lọc thông thấp, ta nhận được vật mang thông tin:

$$y(t) = \frac{1}{2} A(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) \quad (8-2-3)$$

Ảnh hưởng của độ sai pha $(\phi - \hat{\phi})$ là giảm biên độ tín hiệu đi $\cos(\phi - \hat{\phi})$ lần và giảm công suất tín hiệu đi $\cos^2(\phi - \hat{\phi})$ lần.

Ảnh hưởng của sai pha với tín hiệu QAM hay PSK nhiều mức còn nghiêm trọng hơn. Tín hiệu QAM và PSK M mức được biểu diễn là:

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) - B(t)\sin(2\pi f_c t + \phi) \quad (8-2-4)$$

Tín hiệu này được giải điều chế nhờ hai thành phần vuông góc:

$$c_c(t) = \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \quad \text{và} \quad c_s(t) = -\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \quad (8-2-5)$$

Nhân $s(t)$ với $c_c(t)$ rồi cho tín hiệu qua bộ lọc thông thấp ta được:

$$y_I(t) = \frac{1}{2} A(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) - \frac{1}{2} B(t)\sin(\phi - \hat{\phi}) \quad (8-2-6)$$

Tương tự, nhân $s(t)$ với $c_s(t)$ rồi cho tín hiệu qua bộ lọc thông thấp, ta nhận được:

$$y_Q(t) = \frac{1}{2} B(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) + \frac{1}{2} A(t)\sin(\phi - \hat{\phi}) \quad (8-2-7)$$

Ta thấy sai lệch $\phi - \hat{\phi}$ không chỉ làm giảm công suất tín hiệu đi $\cos^2(\phi - \hat{\phi})$ lần mà còn có ảnh hưởng chéo từ các thành phần vuông góc. Nếu công suất trung bình của $A(t)$ và $B(t)$ là như nhau, một độ sai lệch nhỏ về pha dẫn tới suy giảm lớn về hiệu quả.

8-2-1. Ước lượng cực đại khả năng pha vật mang

Đầu tiên ta diễn giả việc ước lượng ML pha vật mang. Để đơn giản, giả thiết độ trễ τ đã biết và đặt $\tau = 0$. Hàm khả năng trong (8-1-8) được cực đại hóa. Thay ϕ cho ψ , ta được:

$$\begin{aligned}\Lambda(\phi) &= \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{T_0} [r(t) - s(t; \phi)]^2 dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{T_0} r^2(t) dt + \frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t)s(t; \phi) dt - \frac{1}{N_0} \int_{T_0} s^2(t; \phi) dt \right\}\end{aligned}\quad (8-2-8)$$

Thành phần thứ nhất trong biểu thức mũ không phụ thuộc tham số ϕ , thành phần thứ ba là hằng số và bằng năng lượng tín hiệu trong khoảng thời gian quan sát T_0 với mọi giá trị ϕ . Chỉ có thành phần thứ hai là tương quan chéo giữa $r(t)$ với $s(t; \phi)$ phụ thuộc vào ϕ . Như vậy hàm $\Lambda(\phi)$ được viết thành:

$$\Lambda(\phi) = C \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t)s(t; \phi) dt \right] \quad (8-2-9)$$

với C là hằng số không phụ thuộc ϕ .

Ước lượng ML giá trị ϕ là $\hat{\phi}_{ML}$ làm cực đại $\Lambda(\phi)$ trong (8-2-9). Một cách tương đương, giá trị $\hat{\phi}_{ML}$ làm cực đại loga của $\Lambda(\phi)$, nghĩa là hàm:

$$\Lambda_L(\phi) = \frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t)s(t; \phi) dt \quad (8-2-10)$$

Chú ý rằng ta bỏ qua hằng số $\ln C$ trong $\Lambda_L(\phi)$.

Ví dụ 8-2-1

Xét vật mang chưa điều chế $A \cos 2\pi f_c t$ được gửi tới phía thu. Tín hiệu nhận được là:

$$r(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)$$

ϕ là giá trị pha chưa biết. Giá trị $\hat{\phi}_{ML}$ làm cực đại hóa $\Lambda_L(\phi) = \frac{2A}{N_0} \int_{T_0} r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt$

Điều kiện cần để đạt cực đại là:

$$\frac{d\Lambda_L(\phi)}{d\phi} = 0$$

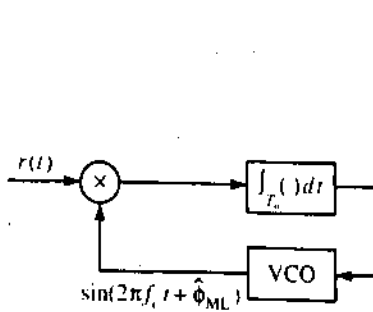
Từ đó dẫn tới:

$$\int_{T_0} r(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}_{ML}) dt = 0 \quad (8-2-11)$$

hay

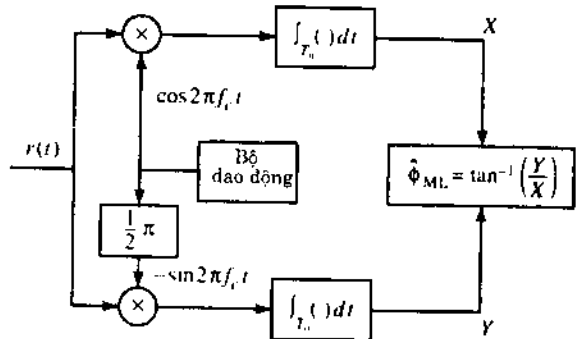
$$\hat{\phi}_{ML} = -\arctg \left[\frac{\int_{T_0} r(t) \sin 2\pi f_c t dt}{\int_{T_0} r(t) \cos 2\pi f_c t dt} \right] \quad (8-2-12)$$

Điều kiện tối ưu (8-2-11) được thực hiện bằng cách dùng vòng lặp như trên hình 8-2-1. Mặt khác, (8-2-12) chỉ ra rằng việc cài đặt và sử dụng các thành phần mang vuông góc để tương quan chéo với $r(t)$. $\hat{\phi}_{ML}$ nhận được từ tỷ số của hai đầu ra của hai bộ tương quan như trên hình 8-2-2. Ví dụ này chứng tỏ bộ PLL cho phép ta ước lượng ML pha của vật mang không điều chế.



Hình 8-2-1

Sử dụng bộ PLL để ước lượng ML pha vật mang không điều chế



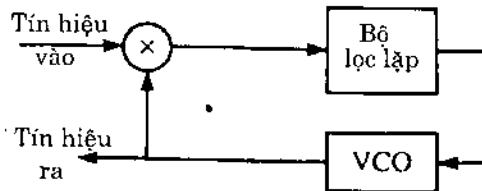
Hình 8-2-2

Ước lượng ML (một lần) pha vật mang không điều chế

8-2-2. Vòng khóa pha (PLL)

Vòng khóa pha gồm một bộ nhân, một bộ lọc lặp và một bộ dao động điều chỉnh điện áp (VCO) như trên hình 8-2-3. Giả thiết rằng tín hiệu vào là $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ và tín hiệu ra bộ VCO là $\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ với $\hat{\phi}$ là giá trị ước lượng của ϕ . Tích hai tín hiệu này là:

$$e(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) = \frac{1}{2} \sin(\hat{\phi} - \phi) + \frac{1}{2} \sin(4\pi f_c t + \phi + \hat{\phi}) \quad (8-2-13)$$



Hình 8-2-3: Các phần tử cơ bản của bộ PLL

Bộ lọc lặp là bộ lọc chỉ đáp ứng với thành phần tần số thấp $\frac{1}{2} \sin(\hat{\phi} - \phi)$ và loại bỏ thành phần tần số cao $2f_c$. Bộ lọc này thường được chọn sao cho có hàm truyền đạt đơn giản:

$$G(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \tau_1 s} \quad (8-2-14)$$

ĐỒNG BỘ

với τ_1 và τ_2 là các tham số ($\tau_1 \gg \tau_2$) để điều khiển dải thông bộ lọc. Bộ lọc bậc cao hơn có các điểm cực phụ được sử dụng nếu ta cần đáp ứng tốt hơn.

Đầu ra bộ lọc lặp cung cấp điện áp điều khiển $v(t)$ cho bộ VCO. Bộ VCO là bộ tạo tín hiệu hình sin với góc pha được cho bởi:

$$2\pi f_c t + \hat{\phi}(t) = 2\pi f_c t + K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (8-2-15)$$

K là hệ số khuếch đại có đơn vị rad/V. Như vậy:

$$\hat{\phi}(t) = K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (8-2-16)$$

Bỏ qua thành phần tần số $2f_c$, bộ PLL đơn giản thành hệ thống vòng kín như trên hình 8-2-4. Hàm sin của độ sai pha $\phi - \hat{\phi}$ làm cho hệ thống là phi tuyến. Tuy nhiên thông thường độ sai pha $\phi - \hat{\phi}$ nhỏ và:

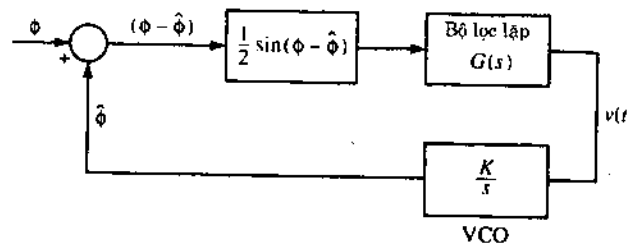
$$\sin(\phi - \hat{\phi}) \approx \phi - \hat{\phi} \quad (8-2-17)$$

Khi đó, bộ PLL trở thành tuyến tính và được đặc trưng bởi hàm truyền đạt:

$$H(s) = \frac{KG(s)/s}{1 + KG(s)/s} \quad (8-2-18)$$

Thay (8-2-14) vào (8-2-18) ta nhận được:

$$H(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_2 + 1/K)s + (\tau_1/K)s^2} \quad (8-2-19)$$



Hình 8-2-4: Mô hình vòng khóa pha (PLL)

Như vậy mô hình vòng kín để tuyến tính hóa PLL là bậc 2 với $G(s)$ được cho bởi (8-2-14). Biểu diễn mẫu số của $H(s)$ thành dạng chuẩn:

$$D(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (8-2-20)$$

với $\omega_n = \sqrt{K/\tau_1}$ và $\xi = (\tau_2 + 1/K)/2\omega_n$, hàm truyền đạt trở thành:

$$H(s) = \frac{(2\xi\omega_n - \omega_n^2/K)s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8-2-21)$$

Dải thông nhiễu tương đương (một phía) của vòng lặp là:

$$B_{eq} = \frac{\tau_2^2 (1/\tau_2^2 + K/\tau_1)}{4(\tau_2 + 1/K)} = \frac{1 + (\tau_2 \omega_n)^2}{8\zeta \omega_n} \quad (8-2-22)$$

Đáp ứng biên độ $20\log|H(\omega)|$ là hàm của tần số chuẩn hóa ω/ω_n vẽ trên hình 8-2-5 với $\tau_1 \gg 1$. Trong thực tế, việc lựa chọn dải thông của bộ PLL tạo nên sự đối lập giữa tốc độ đáp ứng và nhiễu trong ước lượng pha. Mặt khác, người ta mong muốn chọn dải thông của vòng lặp đủ rộng để theo dõi sự biến đổi về pha của tín hiệu nhận được, nhưng dải thông rộng kéo theo nhiễu ảnh hưởng tới việc ước lượng pha.

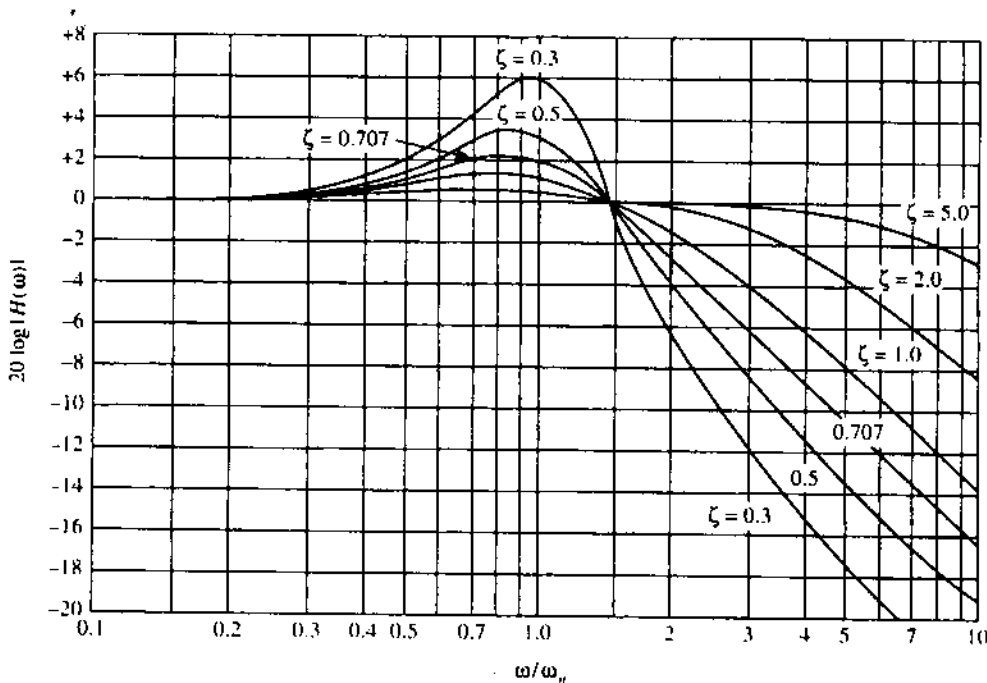
8-2-3. Ảnh hưởng của nhiễu cộng tới việc ước lượng pha

Để xác định ảnh hưởng của nhiễu tới việc ước lượng pha vật mang, ta giả thiết nhiễu ở đầu vào bộ PLL là nhiễu dải hẹp. Giả thiết tín hiệu vào là tín hiệu hình sin:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (8-2-23)$$

và nhiễu cộng dải hẹp là:

$$n(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t \quad (8-2-24)$$



Hình 8-2-5: Đáp ứng tần số của vòng lặp bậc hai

Các thành phần vuông góc của nhiễu giả thiết là các quá trình ngẫu nhiên dừng, phân bố gaussian và độc lập thống kê với nhau, phổ mật độ công suất $\frac{1}{2}N_0$. Ta có thể biểu diễn $n(t)$ thành:

$$n(t) = n_c(t)\cos[2\pi f_c t + \phi(t)] - n_s(t)\sin[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (8-2-25)$$

với

$$n_c(t) = x(t)\cos\phi(t) + y(t)\sin\phi(t)$$

ĐỒNG BỘ

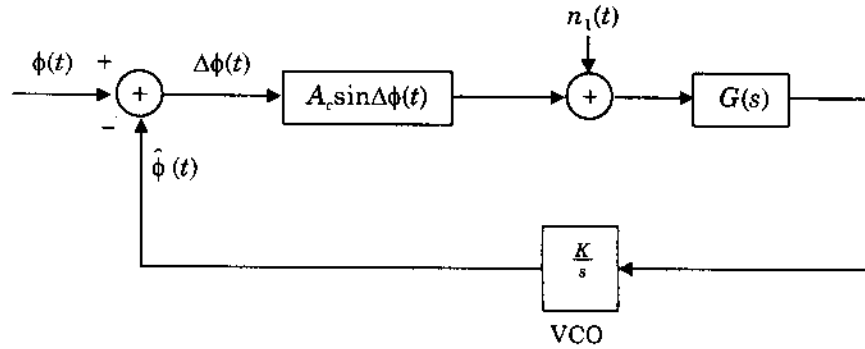
$$n_s(t) = -x(t) \sin \phi(t) + y(t) \cos \phi(t) \quad (8-2-26)$$

Ta chú ý rằng $n_c(t) + jn_s(t) = [x(t) + jy(t)]e^{-j\phi(t)}$ nên các thành phần vuông góc $n_c(t)$ và $n_s(t)$ có đặc trưng thống kê giống như $x(t)$ và $y(t)$.

Nếu $s(t) + n(t)$ được nhân với tín hiệu đầu ra bộ VCO và thành phần tần số $2f_c$ bị lọc thì tín hiệu vào bộ lọc là tín hiệu có nhiễu:

$$e(t) = A_c \sin \Delta\phi + n_c(t) \sin \Delta\phi - n_s(t) \cos \Delta\phi = A_c \sin \Delta\phi + n_1(t) \quad (8-2-27)$$

với $\Delta\phi = \phi - \hat{\phi}$ là sai số pha. Ta có mô hình tương đương của bộ PLL có nhiễu cộng trên hình 8-2-6.



Hình 8-2-6 : Mô hình bộ PLL tương đương với nhiễu cộng

Khi công suất tín hiệu vào $P_c = \frac{1}{2} A_c^2$ lớn hơn nhiễu so với công suất nhiễu, ta có thể tuyến tính hóa bộ PLL và dễ dàng xác định ảnh hưởng của nhiễu cộng lên độ chính xác của phép ước lượng. Mô hình tuyến tính hóa bộ PLL trên hình 8-2-7. Hệ số khuếch đại A_c được chuẩn hóa là đơn vị và thành phần nhiễu trở thành:

$$n_2(t) = \frac{n_c(t)}{A_c} \sin \Delta\phi - \frac{n_s(t)}{A_c} \cos \Delta\phi \quad (8-2-28)$$

Do $n_2(t)$ là nhiễu cộng ở đầu vào bộ lặp nên sai phương của sai số $\Delta\phi$ cũng là sai phương của pha tín hiệu ra bộ VCO và bằng:

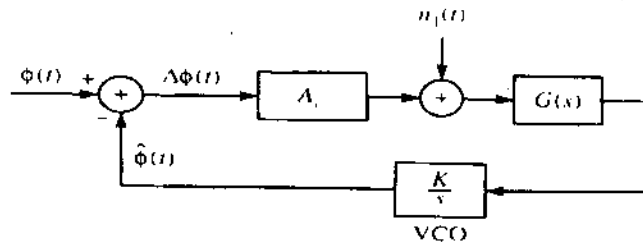
$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{N_0 B_{eq}}{A_c^2} \quad (8-2-29)$$

với B_{eq} là dải thông nhiễu tương đương (một phía) của vòng lặp, xác định bởi (8-2-22). Sai phương σ_{ϕ}^2 là tỷ số công suất nhiễu trong dải thông của bộ PLL chia cho công suất tín hiệu A_c^2 . Do đó:

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{\gamma_L} \quad (8-2-30)$$

với γ_L là tỷ số tín hiệu trên nhiễu (SNR):

$$SNR = \gamma_L = \frac{A_c^2}{N_0 B_{eq}} \quad (8-2-31)$$



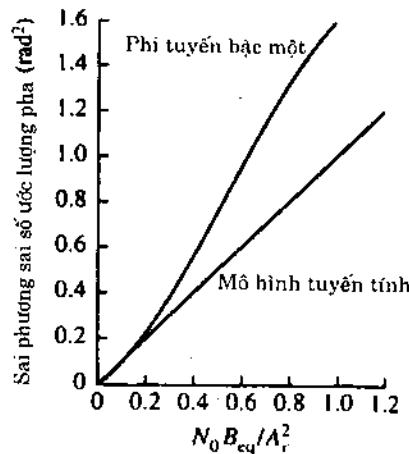
Hình 8-2-7: Mô hình bộ PLL tuyến tính hóa với nhiễu cộng

Biểu thức của sai phương σ_ϕ^2 áp dụng trong trường hợp SNR đủ lớn để có thể áp dụng mô hình tuyến tính của bộ PLL. Việc phân tích chính xác dựa trên bộ PLL phi tuyến khá thuận lợi với $G(s) = 1$, cho ta bộ lặp bậc 1. Khi đó, hàm mật độ phân bố xác suất của sai số pha là:

$$p(\Delta\phi) = \frac{\exp(\gamma_L \cos \Delta\phi)}{2\pi I_0(\gamma_L)} \quad (8-2-32)$$

với γ_L là SNR cho bởi công thức (8-2-31) với B_{eq} là dải thông nhiễu tương đương ứng với vòng lặp bậc một.

Từ biểu thức của $p(\Delta\phi)$ ta có thể nhận được giá trị chính xác của sai phương của sai số pha bộ PLL bậc một, và được vẽ trên hình 8-2-9 theo $1/\gamma_L$. Sai phương của mô hình tuyến tính rất gần với giá trị đúng với $\gamma_L > 3$. Như vậy, ta thấy mô hình tuyến tính là đủ chính xác cho các ứng dụng thực tế.



Hình 8-2-8: So sánh sai phương của $\Delta\phi$ của hai mô hình (tuyến tính và phi tuyến bậc một)

8-2-4. Vòng lặp xác định trực tiếp

Vấn đề tiếp theo là cực đại hóa (8-2-9) hoặc (8-2-10) khi tín hiệu $s(t; \phi)$ mang dây thông tin $\{I_n\}$. Ta chấp nhận một trong các khả năng sau: hoặc giả thiết rằng $\{I_n\}$ là đã biết hoặc coi $\{I_n\}$ là dây ngẫu nhiên và xét các giá trị thống kê trung bình với cả dây.

Để ước lượng trực tiếp tham số, giả thiết rằng dãy thông tin $\{I_n\}$ trong khoảng thời gian quan sát đã được ước lượng và giả thiết rằng không mắc lỗi ở khâu giải điều chế, $\tilde{I}_n = I_n$ với $\tilde{I}_n$ là giá trị xác định được của thông tin I_n . Trong trường hợp này $s(t; \phi)$ đã xác định hoàn toàn ngoại trừ pha vật mang.

Việc ước lượng pha trực tiếp cho các kỹ thuật điều chế tuyến tính với tín hiệu nhận được là tín hiệu tần số thấp tương đương:

$$r(t) = e^{-j\phi} \sum_n I_n g(t - nT) + z(t) = s_l(t) e^{-j\phi} + z(t) \quad (8-2-33)$$

với $s_l(t)$ là tín hiệu đã biết nếu giả thiết $\{I_n\}$ là đã biết. Hàm khả năng của tín hiệu tần số thấp tương đương là:

$$\Lambda(\phi) = C \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{N_0} \int_{t_0} r(t) s_l^*(t) e^{j\phi} dt \right] \right\} \quad (8-2-34)$$

$$\Lambda_L(\phi) = \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{N_0} \int_{t_0} r(t) s_l^*(t) dt \right] e^{j\phi} \right\} \quad (8-2-35)$$

Thay $s_l(t)$ vào (8-2-35) và giả thiết $T_0 = KT$ với K nguyên dương, ta nhận được:

$$\Lambda_L(\phi) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi} \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) g^*(t - nT) dt \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi} \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right\} \quad (8-2-36)$$

$$\text{với} \quad y_n = \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) g^*(t - nT) dt \quad (8-2-37)$$

Chú ý rằng y_n là đầu ra của bộ lọc phối hợp ở khoảng thời gian tín hiệu thứ n . Dễ dàng tìm được ước lượng ML của ϕ từ (8-2-36) bằng cách lấy đạo hàm của loga hàm khả năng theo ϕ và cho đạo hàm bằng 0:

$$\begin{aligned} \Lambda_L(\phi) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) \cos \phi - I_m \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) \sin \phi \\ \hat{\phi}_{ML} &= -\arctg \left[I_m \left(\sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) / \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) \right] \end{aligned} \quad (8-2-38)$$

Ta gọi $\hat{\phi}_{ML}$ là giá trị ước lượng pha vật mang trực tiếp. Để chứng minh được rằng giá trị trung bình của $\hat{\phi}_{ML}$ là ϕ .

Bộ PLL có hồi tiếp (DFPLL) được sử dụng cho tín hiệu PAM hai biên có dạng $A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi)$ được trình bày trên hình 8-2-9. Tín hiệu nhận được nhân với các thành phần vuông góc $c_c(t)$ và $c_s(t)$ trong (8-2-5). Tín hiệu tích là:

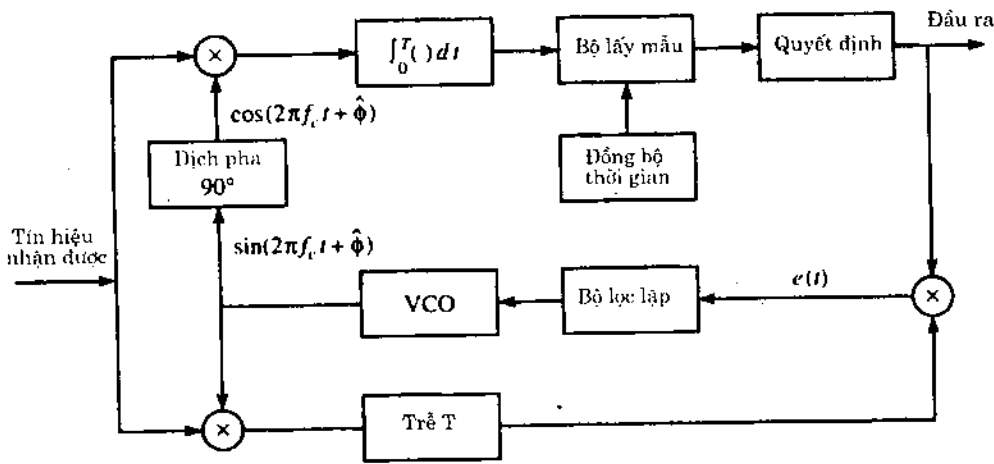
$$r(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) = \frac{1}{2} [A(t) + n_c(t)] \cos \Delta\phi - \frac{1}{2} n_s(t) \sin \Delta\phi + \text{thành phần tần số } 2f_c \quad (8-2-39)$$

Tín hiệu này được sử dụng để khôi phục thông tin có chứa trong $A(t)$. Trong trường hợp xác định ký hiệu không có lỗi, nó khôi phục lại tín hiệu $A(t)$ để nhân với thành phần vuông góc thứ

hai (trễ T giây để bộ giải điều chế xác định được). Tín hiệu vào bộ lọc lặp trong trường hợp xác định đúng là tín hiệu sai lệch:

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{2} A(t) \{ [A(t) + n_c(t)] \sin \Delta \phi - n_s(t) \cos \Delta \phi \} + \text{thành phần tần số } 2f_c \\ &= \frac{1}{2} A^2(t) \sin \Delta \phi + \frac{1}{2} A(t) [n_c(t) \sin \Delta \phi - n_s(t) \cos \Delta \phi] + \text{thành phần tần số } 2f_c \end{aligned} \quad (8-2-40)$$

Thành phần $A^2(t) \sin \Delta \phi$ có chứa độ sai lệch pha, dùng để điều khiển vòng lặp.



Hình 8-2-9: Khôi phục vật mang với bộ PLL có hồi tiếp

Đối với tín hiệu PSK M mức, bộ DFPLL có cấu trúc như trên hình 8-2-10. Tín hiệu nhận được được giải điều chế để cho ước lượng pha:

$$\hat{\theta}_m = \frac{2\pi}{M}(m-1)$$

Trong trường hợp xác định không có lỗi (xác định đúng), $\hat{\theta}_m$ là pha tín hiệu đã truyền đi. Hai tín hiệu ra của bộ nhân bị trễ một khoảng thời gian T (là khoảng thời gian ứng với một ký hiệu) rồi nhân với $\cos \theta_m$ và $\sin \theta_m$:

$$\begin{aligned} r(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \sin \theta_m &= \frac{1}{2} [A \cos \theta_m + n_c(t)] \sin \theta_m \cos(\phi - \hat{\phi}) \\ &\quad - \frac{1}{2} [A \sin \theta_m + n_s(t)] \sin \theta_m \sin(\phi - \hat{\phi}) + \text{thành phần tần số } 2f_c \\ r(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \cos \theta_m &= -\frac{1}{2} [A \cos \theta_m + n_c(t)] \cos \theta_m \sin(\phi - \hat{\phi}) \\ &\quad - \frac{1}{2} [A \sin \theta_m + n_s(t)] \cos \theta_m \cos(\phi - \hat{\phi}) + \text{thành phần tần số } 2f_c \end{aligned} \quad (8-2-41)$$

Hai tín hiệu này được cộng với nhau để tạo ra tín hiệu sai lệch:

$$e(t) = -\frac{1}{2} A \sin(\phi - \hat{\phi}) + \frac{1}{2} n_c(t) \sin(\phi - \hat{\phi} - \theta_m) + \frac{1}{2} n_s(t) \cos(\phi - \hat{\phi} - \theta_m) + \text{thành phần tần số } 2f_c \quad (8-2-42)$$

ĐỒNG BỘ

Tín hiệu sai lệch $e(t)$ là tín hiệu ở đầu vào bộ lọc lặp, để điều khiển bộ VCO.

Bộ lặp đối với tín hiệu PSK M mức có độ bất định về pha là $360^\circ/M$ nên cần phải mã hóa vì sai dây thông tin khi truyền và giải mã vì sai dây nhận được sau bộ giải điều chế để khôi phục thông tin.

Ước lượng ML tín hiệu QAM cũng tương tự như trên. Đối với tín hiệu OQPSK ta cực đại hóa loga hàm khả năng với:

$$s_I(t) = \sum_n I_n g(t - nT) + j \sum_n J_n g(t - nT - \frac{1}{2}T) \quad (8-2-43)$$

với $I_n = \pm 1$ và $J_n = \pm 1$.

Ước lượng pha tín hiệu CPM cũng có thể thực hiện bằng cách ước lượng trực tiếp dùng bộ PLL. Từ bộ giải điều chế tối ưu, ta có thể tạo ra tín hiệu sai lệch, sau đó tín hiệu đầu ra bộ lọc lặp dùng để điều khiển bộ VCO như đã trình bày.

8-2-5. Vòng lặp xác định gián tiếp

Thay cho việc sử dụng mô hình xác định trực tiếp để ước lượng pha tín hiệu, ta có thể xử lý số liệu như các biến ngẫu nhiên và lấy trung bình $\Lambda(\phi)$ với mọi biến ngẫu nhiên trước khi cực đại hóa. Để làm được việc này, ta sử dụng hoặc là hàm mật độ phân bố xác suất của số liệu nếu như hàm này đã biết, hoặc có thể sử dụng một hàm mật độ phân bố nào đó để xấp xỉ với hàm mật độ phân bố xác suất thực.

Ví dụ 8-2-2

Giả thiết rằng ta có tín hiệu $s(t)$ thực là tín hiệu điều chế nhị phân như sau:

$$s(t) = A \cos 2\pi f_c t, 0 \leq t \leq T$$

với $A = \pm 1$ và hai giá trị này đồng xác suất. Hàm mật độ phân bố xác suất của A là:

$$p(A) = \frac{1}{2} \delta(A - 1) + \frac{1}{2} \delta(A + 1)$$

Hàm khả năng $\Lambda(\phi)$ là có điều kiện với mỗi giá trị của A và được lấy trung bình với cả hai giá trị:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}(\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\phi) p(A) dA \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right] + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right] \\ &= \cosh \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right] \end{aligned}$$

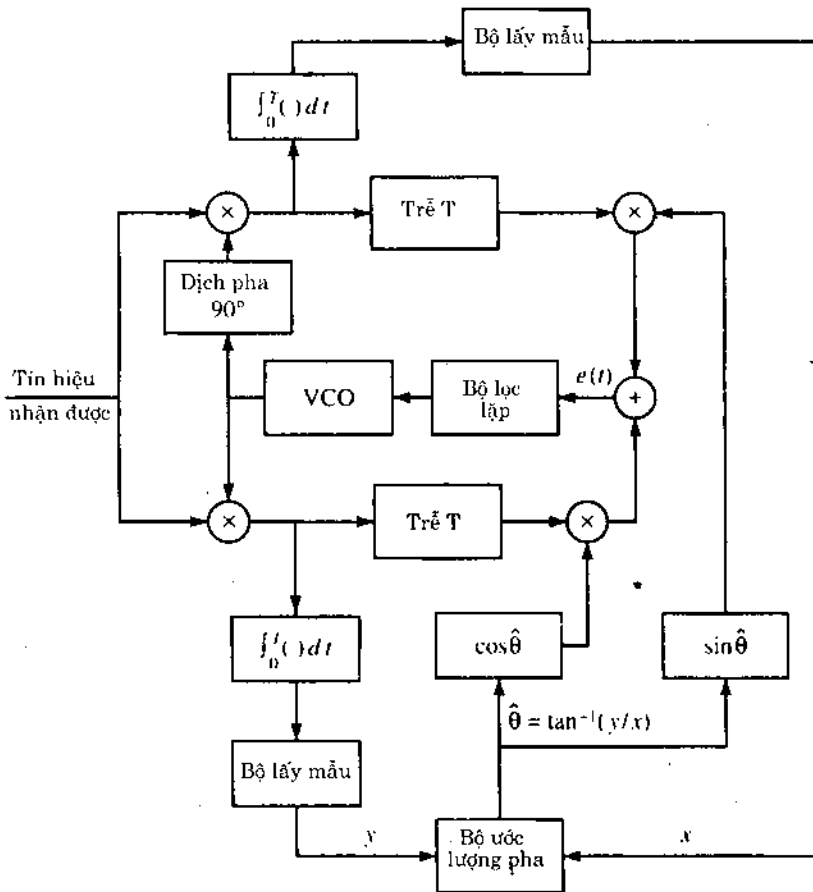
Loga hàm khả năng trung bình là:

$$\bar{\Lambda}_L(\phi) = \ln \cosh \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right] \quad (8-2-44)$$

Nếu ta lấy đạo hàm $\bar{\Lambda}_L(\phi)$ theo ϕ và cho đạo hàm bằng 0, ta thu được ước lượng ML trong trường hợp ước lượng không trực tiếp. Tuy nhiên giá trị đúng trong trường hợp này rất khó tìm vì biểu thức (8-2-44) là rất phức tạp. Do đó ta cần xấp xỉ nó.

$$\ln \cosh x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (|x| \ll 1) \\ |x| & (|x| \gg 1) \end{cases} \quad (8-2-45)$$

Với việc xấp xỉ này ta có thể tìm ra giá trị ϕ để đạo hàm của $\bar{\Lambda}_L(\phi)$ bằng 0. Trong ví dụ này ta lấy giá trị trung bình của hai giá trị có thể của ký hiệu mang thông tin. Khi có M ký hiệu mang thông tin thì phép lấy trung bình trở nên phức tạp. Khi đó ta có thể đơn giản vấn đề bằng cách giả thiết rằng các ký hiệu mang thông tin là những biến ngẫu nhiên liên tục. Ví dụ ta có thể giả thiết các ký hiệu là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0. Xét ví dụ sau.



Hình 8-2-10: Khôi phục vật mang đối với tín hiệu PSK M mức

Ví dụ 8-2-3

Xét tín hiệu như trong ví dụ 8-2-2 nhưng A là biến ngẫu nhiên gaussian có giá trị trung bình bằng 0 và sai phương đơn vị.

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-A^2/2}$$

Lấy trung bình hàm $\Lambda(\phi)$ theo mật độ phân bố xác suất của A , ta có:

$$\bar{\Lambda}(\phi) = C \exp \left\{ \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right]^2 \right\} \quad (8-2-46)$$

và

$$\bar{\Lambda}_L(\phi) = \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right]^2 \quad (8-2-47)$$

Ta có thể ước lượng ML giá trị ϕ như đã nói.

Ta nhận xét rằng loga hàm khả năng là hàm toàn phương nếu biến ngẫu nhiên là biến gaussian và là hàm xấp xỉ toàn phương với giá trị nhỏ của tương quan chéo $r(t)$ với $s(t; \phi)$ như (8-2-45). Nói cách khác, nếu tương quan chéo trong một khoảng thời gian tín hiệu là nhỏ thì có thể xấp xỉ một cách khá chính xác loga hàm khả năng.

Ta có thể xấp xỉ gaussian tất cả các ký hiệu quan sát được trong khoảng thời gian $T_0 = KT$. Nếu K ký hiệu mang thông tin là độc lập thống kê và có phân bố giống nhau, ta có thể lấy trung bình hàm $\Lambda(\phi)$ theo hàm mật độ phân bố gaussian với K ký hiệu trong khoảng thời gian $T_0 = KT$ và nhận được:

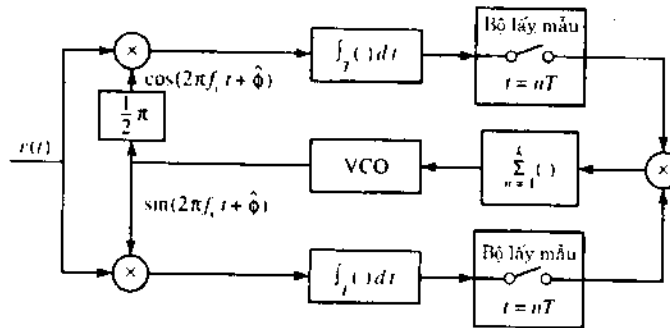
$$\Lambda(\phi) = C \exp \left\{ \sum_{n=0}^{K-1} \left[\frac{2}{N_0} \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right]^2 \right\} \quad (8-2-48)$$

Từ đó ta có điều kiện đối với ước lượng ML là giá trị $\hat{\phi}$ để:

$$\sum_{n=0}^{K-1} \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) dt \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) dt = 0 \quad (8-2-49)$$

Phương trình này được thực hiện như trên hình 8-2-11. Phép nhân hai tín hiệu sau bộ tích phân sẽ loại bỏ vật mang và bộ lấy tổng đóng vai trò bộ lọc lặp.

Tương tự ta có thể ước lượng ML gián tiếp (xác định gián tiếp) đối với tín hiệu QAM và PSK M mức. Xuất phát là lấy trung bình hàm khả năng với tính chất thống kê của số liệu, ta có thể xấp xỉ gaussian (biến gaussian hai chiều cho các ký hiệu thông tin phức) khi lấy trung bình dãy thông tin.



Hình 8-2-11: Bộ PLL xác định gián tiếp pha vật mang của tín hiệu PAM

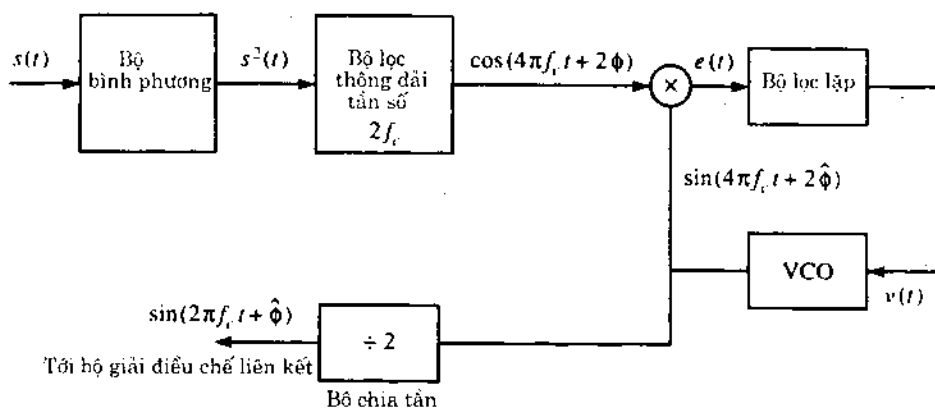
Vòng lặp bình phương Vòng lặp bình phương là vòng lặp xác định gián tiếp được sử dụng rộng rãi trong thực tế để ước lượng pha vật mang của tín hiệu hai biên không có vật mang như tín hiệu PAM. Để mô tả hoạt động, xét việc ước lượng pha vật mang của tín hiệu PAM điều chế số:

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (8-2-50)$$

$A(t)$ mang thông tin số. Chú ý rằng $E[s(t)] = E[A(t)] = 0$ với tín hiệu đối xứng qua mức 0. Giá trị trung bình của $s(t)$ không tạo ra các thành phần pha liên kết tại bất cứ tần số nào kể cả tần số mang. Một phương pháp để tạo ra vật mang từ tín hiệu nhận được là bình phương tín hiệu để tạo ra thành phần tần số $2f_c$. Sơ đồ khối phương pháp này được trình bày trên hình 8-2-12.

Đầu ra của bộ bình phương là:

$$s^2(t) = A^2(t)\cos^2(2\pi f_c t + \phi) = \frac{1}{2}A^2(t) + \frac{1}{2}A^2(t)\cos(4\pi f_c t + 2\phi) \quad (8-2-51)$$



Hình 8-2-12: Khôi phục vật mang từ bộ bình phương

Do quá trình điều chế là quá trình ngẫu nhiên dừng vòng nên:

$$E[s^2(t)] = \frac{1}{2}E[A^2(t)] + \frac{1}{2}E[A^2(t)]\cos(4\pi f_c t + 2\phi) \quad (8-2-52)$$

Nếu tín hiệu ra khỏi bộ bình phương được cho qua bộ lọc thông dải tới tần số $2f_c$ thì giá trị trung bình của tín hiệu ra khỏi bộ lọc là $\frac{1}{2}E[A^2(t)]H(2f_c)\cos(4\pi f_c t + 2\phi)$ với $H(2f_c)$ là hệ số khuếch đại của bộ lọc tại tần số $f = 2f_c$. Như vậy bộ bình phương tạo ra tín hiệu tuần hoàn từ tín hiệu vào $s(t)$ cũng chính là tạo ra thành phần pha liên kết ở tần số $2f_c$. Tín hiệu đầu ra bộ lọc dùng để điều khiển bộ PLL.

Phép bình phương dẫn tới việc tăng công suất nhiễu ở đầu vào bộ PLL và kéo theo sai phương của độ sai lệch pha tăng lên.

Sau bộ bình phương ta nhận được tín hiệu:

$$y(t) = s^2(t) + 2n(t)s(t) + n^2(t) \quad (8-2-53)$$

với $n(t)$ là nhiễu cộng gaussian thông dải. Tính hàm tự tương quan và phổ mật độ công suất của hai thành phần nhiễu $n(t)s(t)$ và $n^2(t)$, ta thấy cả hai đều có phổ mật độ công suất có tần số trung tâm là $2f_c$. Như vậy bộ lọc thông dải với dải thông B_{ω} có tần số trung tâm $2f_c$ tạo nên thành phần tín hiệu hình sin để điều khiển bộ PLL, đồng thời cũng tạo nhiễu từ hai thành phần kể trên.

ĐỒNG BỘ

Do dải thông của bộ lọc nhỏ hơn đáng kể so với B_{bq} nên phổ của nhiễu ở đầu vào bộ PLL có thể được xấp xỉ là hằng số trong dải thông của bộ lọc. Điều đó cho phép ra biểu diễn đơn giản sai phương của độ sai pha:

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = \frac{1}{\gamma_L S_L} \quad (8-2-54)$$

với S_L là suy hao bình phương và:

$$S_L = \left(1 + \frac{B_{bp}/2B_{cq}}{\gamma_L} \right)^{-1} \quad (8-2-55)$$

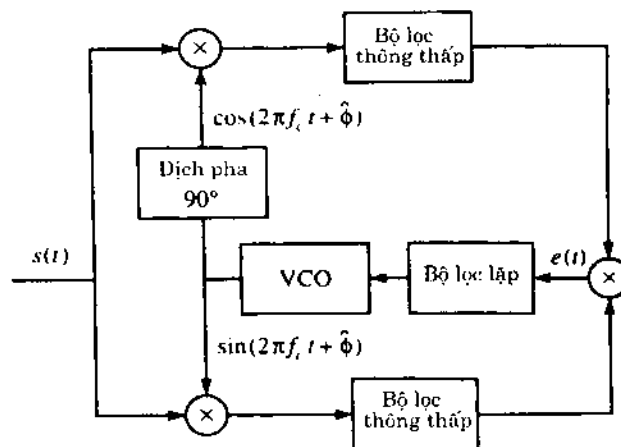
So $S_L < 1$ nên S_L^{-1} làm tăng sai phương của độ sai lệch pha do cộng thêm một thành phần nhiễu.

Cuối cùng ta nhận thấy đầu ra bộ VCO phải chia đôi tần số để tạo tín hiệu cho giải điều chế. Đầu ra bộ chia tần có độ bất định về pha là 180° so với pha của tín hiệu nhận được. Do đó phải mã hóa vì sai số liệu trước khi truyền và giải điều chế vì sai ở phía thu.

Bộ lặp Costas Một phương pháp khác để tạo ra pha vật mang cho tín hiệu hai biên không có vật mang có sơ đồ khối như trên hình 8-2-13.

Tín hiệu nhận được nhân với $\cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ và $\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ là tín hiệu đầu ra bộ VCO. Hai tích này là:

$$\begin{aligned} y_c(t) &= [s(t) + n(t)] \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) = \frac{1}{2} [A(t) + n_c(t)] \cos \Delta\phi + \frac{1}{2} n_s(t) \sin \Delta\phi \\ &\quad + \text{thành phần tần số } 2f_c \\ y_s(t) &= [s(t) + n(t)] \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) = \frac{1}{2} [A(t) + n_c(t)] \sin \Delta\phi - \frac{1}{2} n_s(t) \cos \Delta\phi \\ &\quad + \text{thành phần tần số } 2f_c \end{aligned} \quad (8-2-56)$$



Hình 8-2-13: Sơ đồ khối bộ lặp Costas

Thành phần tần số gấp đôi bị lọc bởi bộ lọc sau bộ nhân. Nhân hai tín hiệu ra của bộ lọc tạo nên tín hiệu lỗi:

$$e(t) = \frac{1}{8} \left\{ \left[A(t) + n_c(t) \right]^2 - n_s^2(t) \right\} \sin(2\Delta\phi) - \frac{1}{4} n_s(t) \left[A(t) + n_c(t) \right] \cos(2\Delta\phi) \quad (8-2-57)$$

Tín hiệu này qua bộ lọc lặp và điều khiển bộ VCO. Thực ra nếu bộ lọc lặp trong bộ lặp Costas giống trong bộ lặp bình phương thì hai bộ lọc này là tương đương. Khi đó hàm mật độ phân bố xác suất của sai số pha và hiệu quả bộ lặp là như nhau.

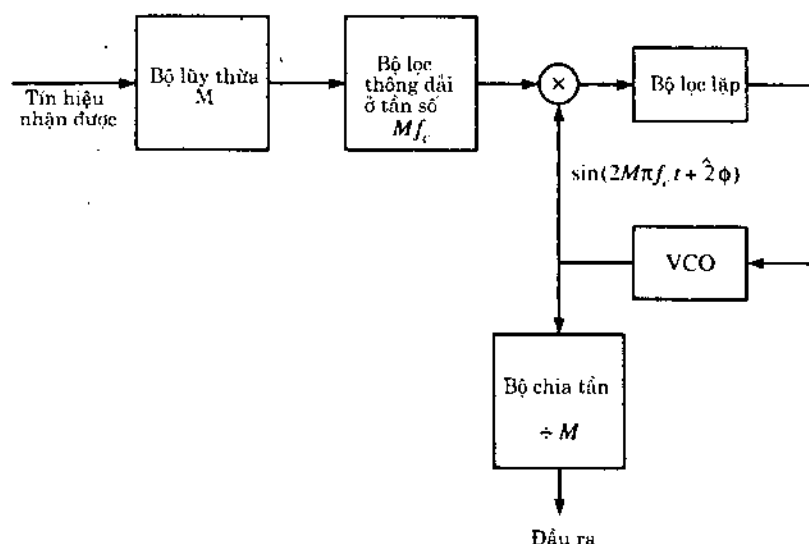
Chú ý rằng bộ lọc thông thấp lý tưởng trong bộ lặp Costas là bộ lọc phối hợp với tín hiệu xung trong tín hiệu mang thông tin. Nếu sử dụng bộ lọc phối hợp, tín hiệu ra có thể được lấy mẫu tại mỗi thời điểm tín hiệu và các mẫu rời rạc này có thể sử dụng để điều khiển vòng lặp, khi đó sẽ giảm được nhiễu trong bộ lặp.

Cuối cùng, tín hiệu ra bộ VCO bất định về pha 180° so với tín hiệu nhận được nên cần phải mã hóa vì sai số liệu và giải mã vi sai tại bộ giải điều chế.

Ước lượng tín hiệu mang cho tín hiệu nhiều mức pha Khi ta dùng vật mang M mức pha, các phương pháp trên có thể mở rộng để ước lượng pha vật mang dùng trong giải điều chế. Tín hiệu nhận được có thể được biểu diễn như sau:

$$s(t) = A \cos \left[2\pi f_c t + \phi + \frac{2\pi}{M}(m-1) \right], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (8-2-58)$$

với $\frac{2\pi}{M}(m-1)$ biểu diễn các thành phần mang thông tin của pha tín hiệu. Vấn đề khôi phục vật mang là loại bỏ các thành phần mang thông tin và nhận được tín hiệu $\cos(2\pi f_c t + \phi)$. Một phương pháp có thể sử dụng như trên hình 8-2-14 là mở rộng của bộ lặp bình phương. Tín hiệu nhận được cho qua một bộ mũ M , tạo ra các hài của f_c , bộ lọc thông dải chọn hài $\cos(2\pi M f_c t + M\phi)$ để điều khiển bộ PLL. Thành phần $\frac{2\pi}{M}(m-1)M = 2\pi(m-1) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ $m = 1, 2, \dots, M$ là các thành phần mang thông tin bị loại bỏ. Tín hiệu đầu ra bộ VCO là $\sin(2\pi M f_c t + M\hat{\phi})$ được chia tần cho M tạo ra tín hiệu $\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$. Độ bất định về pha trong trường hợp này là $360^\circ/M$ nên vẫn cần mã hóa và giải mã vi sai.



Hình 8-2-14: Khôi phục vật mang cho tín hiệu PSK M mức

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{S_{ML}^{-1}}{\gamma_L} \quad (8-2-59)$$

Ta cũng có thể xây dựng bộ khôi phục vật mang từ bộ lập Costas nhưng do độ phức tạp trong cài đặt nên thường người ta không sử dụng trong thực tế.

Trong hệ thống truyền thông số, tín hiệu đầu ra bộ giải điều chế được lấy mẫu tuần hoàn theo tốc độ ký hiệu, tức là tại các thời điểm $t_m = mT + \tau$ với T là khoảng thời gian của một ký hiệu (chu kỳ ký hiệu) và τ là trễ truyền lan từ bộ phát tới bộ thu. Để lấy mẫu một cách tuần hoàn như thế, ta cần một "đồng hồ tín hiệu" ở phía thu. Quá trình lấy đồng hồ tín hiệu ở phía thu từ tín hiệu nhận được gọi là đồng bộ ký hiệu hay khôi phục thời gian ([6]).

Có thể thực hiện đồng bộ ký hiệu theo nhiều cách. Cách thứ nhất là phía phát và phía thu dùng một đồng hồ chủ và cả hai đều tự đồng bộ theo đồng hồ chủ. Khi đó bộ thu phải ước lượng và bù khoảng thời gian trễ truyền lan. Cách thứ hai là phía phát gửi tần số $1/T$ tới phía thu cùng với tín hiệu mang thông tin.

Đồng hồ tín hiệu cũng có thể lấy ra từ tín hiệu nhận được và có nhiều phương pháp để phía thu tự đồng bộ với phía phát. Phần này ta xét cả phương pháp xác định trực tiếp và xác định gián tiếp.

Ta bắt đầu với việc ước lượng ML thời gian trễ τ . Nếu tín hiệu là tín hiệu PAM băng tần cơ sở thì nó được biểu diễn như sau:

với
$$s(t; \tau) = \sum_n I_n g(t - nT - \tau) \quad (8-3-2)$$

Ta phân biệt hai loại: ước lượng thời gian trực tiếp và ước lượng thời gian gián tiếp. Trong loại thứ nhất, dãy ký hiệu mang thông tin ở đầu ra bộ giải điều chế được coi là dãy chưa biết. Khi đó loga hàm khả năng có dạng:

$$\Lambda_L(\tau) = C_L \int_{T_0} r(t)s(t;\tau)dt \quad (8-3-3)$$

Thay (8-3-2) vào (8-3-3) ta nhận được:

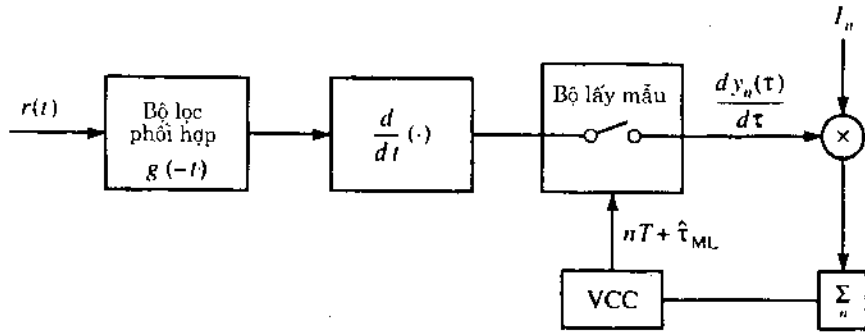
$$\Lambda_L(\tau) = C_L \sum_n I_n \int_{T_0} r(t) g(t - nT - \tau) dt = C_L \sum_n I_n y_n(\tau) \quad (8-3-4)$$

với
$$y_n(\tau) = \int_{T_n} r(t)g(t-nT-\tau)dt \quad (8-3-5)$$

Điều kiện cần để $\hat{\tau}$ là giá trị ước lượng ML là:

$$\frac{d\Lambda_L(\tau)}{d\tau} = \sum_n I_n \frac{d}{d\tau} \int_{T_n} r(t)g(t-nT-\tau)dt = \sum_n I_n \frac{d}{d\tau} [y_n(\tau)] = 0 \quad (8-3-6)$$

Sơ đồ vòng lặp thực hiện (8-3-6) trên hình 8-3-1. Đầu ra bộ lọc lặp điều khiển bộ đồng hồ điện áp điều khiển được (VCC), điều khiển thời gian lấy mẫu. Dây thông tin xác định được $\{I_n\}$ được sử dụng để ước lượng τ , như vậy việc ước lượng là trực tiếp.



Hình 8-3-1: Ước lượng ML trực tiếp cho tín hiệu PAM bằng tần cơ sở

Ước lượng ML khoảng thời gian cho tín hiệu PAM bằng tần cơ sở có thể mở rộng cho các tín hiệu điều chế khác như QAM và PSK với việc sử dụng tín hiệu tần số thấp tương đương.

8-3-2. Ước lượng khoảng thời gian tín hiệu gián tiếp

Ta có thể ước lượng gián tiếp bằng cách lấy trung bình hàm khả năng $\Lambda(\tau)$ theo hàm mật độ phân bố xác suất của dãy thông tin để nhận được $\bar{\Lambda}(\tau)$, rồi lấy đạo hàm của $\bar{\Lambda}(\tau)$ hay $\bar{\Lambda}_L(\tau)$ để ước lượng ML giá trị $\hat{\tau}_{ML}$.

Đối với tín hiệu PAM nhị phân bằng tần cơ sở, $I_n = \pm 1$ đồng xác suất, ta có:

$$\bar{\Lambda}_L(\tau) = \sum_n \ln \cosh Cy_n(\tau) \quad (8-3-7)$$

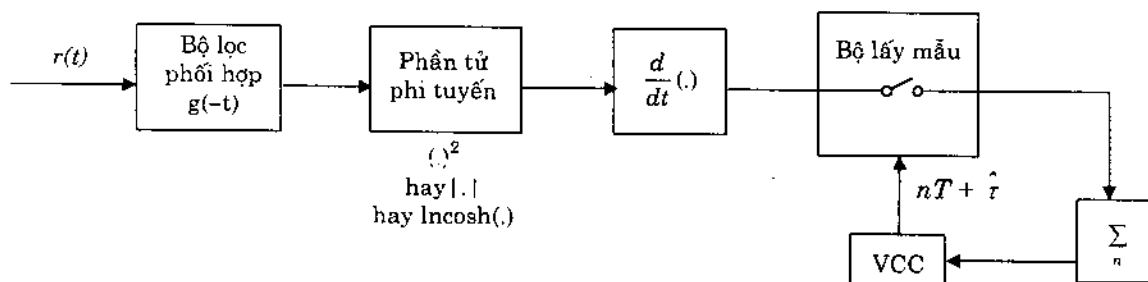
Do $\ln \cosh x \approx \frac{1}{2}x^2$ với x nhỏ, (8-3-7) trở thành:

$$\bar{\Lambda}_L(\tau) \approx \frac{1}{2}C^2 \sum_n y_n^2(\tau) \quad (8-3-8)$$

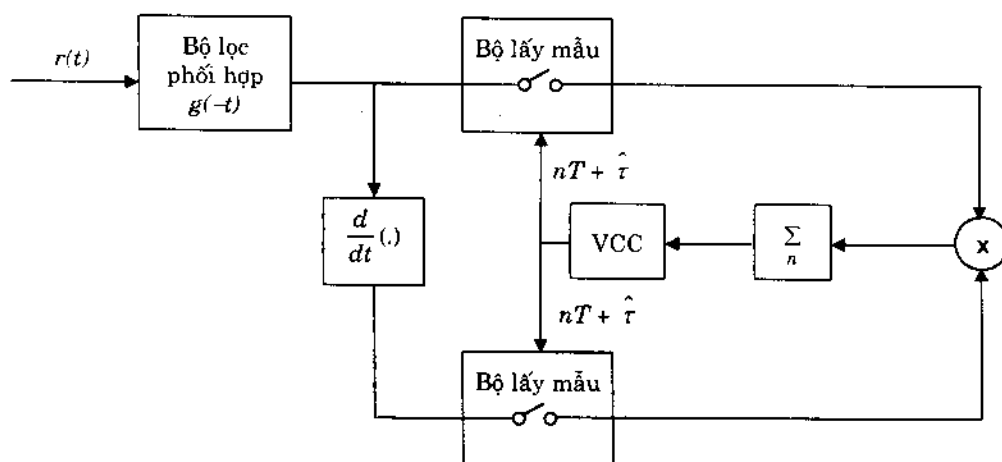
Đối với tín hiệu PAM nhiều mức, ta có thể xấp xỉ đặc trưng thống kê của dãy thông tin $\{I_n\}$ bởi hàm mật độ phân bố xác suất gaussian, giá trị trung bình bằng 0 và sai phương đơn vị. Khi lấy trung bình của $\Lambda(\tau)$ theo hàm mật độ phân bố xác suất gaussian, loga của $\bar{\Lambda}(\tau)$ là $\bar{\Lambda}_L(\tau)$ đã cho trong (8-3-8). Ước lượng gián tiếp τ nhận được bằng cách đạo hàm (8-3-8). Ta có:

$$\frac{d}{d\tau} \sum_n y_n^2(\tau) = 2 \sum_n y_n(\tau) \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (8-3-9)$$

Sơ đồ khối quá trình thực hiện trên hình 8-3-2 và sơ đồ cải tiến như trong hình 8-3-3.

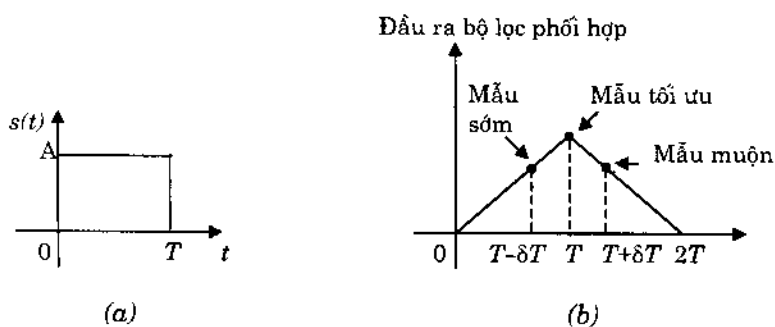


Hình 8-3-2: Ước lượng gián tiếp đối với tín hiệu PAM nhị phân



Hình 8-3-3: Ước lượng gián tiếp đối với tín hiệu PAM nhị phân (cải tiến)

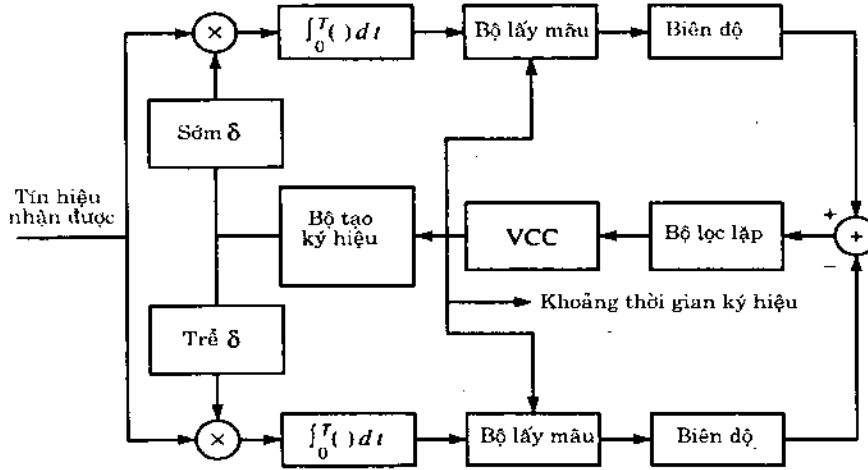
Bộ đồng bộ sớm-muộn (Early-Late Gate Synchronizers) Một phương pháp ước lượng gián tiếp khác khai thác tính đối xứng của tín hiệu ở đầu ra bộ lọc phối hợp (bộ tương quan). Xét xung $s(t)$ hình chữ nhật như trên hình 8-3-4. Đầu ra bộ lọc tương ứng có một giá trị cực đại tại $t = T$. Như vậy đầu ra bộ lọc phối hợp là hàm tự tương quan của $s(t)$.



Hình 8-3-4: Tín hiệu xung chữ nhật và tín hiệu ra bộ lọc phối hợp

Khi có nhiễu, việc xác định giá trị đỉnh sẽ khó hơn. Thay cho việc lấy mẫu tín hiệu tại đỉnh (tại thời điểm $t = T$), ta lấy mẫu sớm (tại $t = T - \delta$) hay muộn ($t = T + \delta$). Giá trị tuyệt đối của mẫu sớm hay muộn nhỏ hơn giá trị đỉnh. Do hàm tự tương quan là hàm chẵn nên giá trị tuyệt

đổi của hai mẫu sớm và muộn là bằng nhau. Trong điều kiện này, thời điểm lấy mẫu chọn giữa $t = T - \delta$ và $t = T + \delta$. Bộ đồng bộ như thế gọi là bộ đồng bộ sớm-muộn.



Hình 8-3-5: Sơ đồ khối bộ đồng bộ sớm muộn

Trong hình 8-3-5, ta sử dụng bộ tương quan thay cho bộ lọc phối hợp. Hai bộ tương quan lấy tích phân trong khoảng thời gian T , nhưng lệch nhau về thời gian là δ so với giá trị tại thời điểm tối ưu. Tín hiệu lỗi là sai lệch giữa hai tín hiệu ra bộ tương quan. Để nhiễu ảnh hưởng đồng đều lên tín hiệu, sai số được cho qua một bộ lọc thông thấp. Tùy vào dấu của tín hiệu lỗi là dương hay âm mà làm tăng hay giảm đồng hồ tín hiệu. Đầu ra bộ VCC là thời điểm để lấy mẫu tín hiệu.

Ta thấy rằng bộ đồng bộ này là một hệ thống điều khiển kín mà dải thông hẹp hơn so với tốc độ ký hiệu $1/T$. Dải thông của bộ lọc xác định độ chính xác của phép ước lượng. Dải thông càng hẹp thì thời điểm ước lượng càng chính xác với điều kiện trễ truyền lan là không đổi và bộ dao động tạo nhịp ở phía phát không dịch chuyển theo thời gian. Mặt khác, khi trễ truyền lan thay đổi và/hoặc đồng hồ phía phát cũng dịch chuyển theo thời gian thì phải mở rộng dải thông để có thể theo dõi nhanh sự thay đổi theo thời gian của khoảng thời gian ký hiệu.

Một cách thực hiện khác cho bộ đồng bộ sớm-muộn như trên hình 8-3-6. Đồng hồ tín hiệu từ bộ VCC tăng lên hay trễ đi δ và các tín hiệu này được sử dụng để lấy mẫu tín hiệu ra hai bộ tương quan.

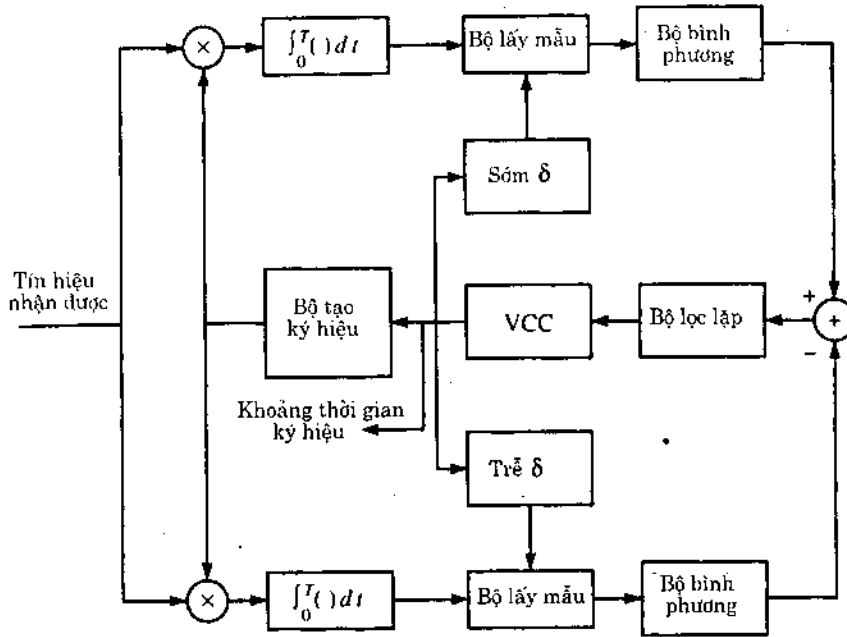
Bộ đồng bộ loại này là bộ ước lượng gián tiếp khoảng thời gian ký hiệu là xấp xỉ của bộ ước lượng ML. Ta có:

$$\frac{d\bar{\Lambda}_L(\tau)}{d\tau} \approx \frac{\bar{\Lambda}_L(\tau + \delta) - \bar{\Lambda}_L(\tau - \delta)}{2\delta} \quad (8-3-10)$$

Thay (8-3-8) vào (8-3-10) ta nhận được:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Lambda}_L(\tau)}{d\tau} &\approx \frac{C^2}{4\delta} \sum_n [y_n^2(\tau + \delta) - y_n^2(\tau - \delta)] \\ &\approx \frac{C^2}{4\delta} \sum_n \left\{ \left[\int_{T_0} r(t)g(t - nT - \tau - \delta)dt \right]^2 - \left[\int_{T_0} r(t)g(t - nT - \tau + \delta)dt \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (8-3-11)$$

Biểu thức này mô tả chức năng của bộ đồng bộ sớm-muộn trong hình 8-3-5 và 8-3-6.



Hình 8-3-6: Sơ đồ khối bộ đồng bộ sớm-muộn tương đương

8-4. ƯỚC LƯỢNG ĐỒNG THỜI PHA VẬT MANG VÀ KHOẢNG THỜI GIAN KÝ HIỆU

Ước lượng pha vật mang và khoảng thời gian ký hiệu có thể thực hiện đồng thời hay riêng biệt. Nhưng ước lượng đồng thời hai hay nhiều tham số của tín hiệu thường cho kết quả tốt hơn là kết quả ước lượng từ cách tối ưu riêng rẽ hàm khả năng. Nói cách khác, sai phương các tham số tín hiệu đối với tối ưu đồng thời nhỏ hơn hay bằng sai phương các tham số ước lượng từ việc tối ưu tách biệt hàm khả năng.

Xét việc ước lượng đồng thời pha vật mang và khoảng thời gian ký hiệu. Loga hàm khả năng hai tham số này có thể biểu diễn theo tín hiệu tần số thấp tương đương như sau:

$$\Lambda_L(\phi, \tau) = \text{Re} \left[\frac{1}{N_0} \int_{T_0} r(t) s_l^*(t; \phi, \tau) dt \right] \quad (8-4-1)$$

$s_l(t; \phi, \tau)$ là tín hiệu tần số thấp tương đương có dạng tổng quát là:

$$s_l(t; \phi, \tau) = e^{-j\phi} \left[\sum_n I_n g(t - nT - \tau) + j \sum_n J_n w(t - nT - \tau) \right] \quad (8-4-2)$$

với $\{I_n\}$ và $\{J_n\}$ là hai dãy thông tin.

Với tín hiệu PAM, $J_n = 0$ với mọi n và $\{I_n\}$ thực. Với tín hiệu QAM, PSK thì $J_n = 0$ với mọi n và $\{I_n\}$ có giá trị phức. Với tín hiệu OQPSK, $\{I_n\}$ và $\{J_n\}$ khác 0 và $w(t) = g(t - \frac{1}{2}T)$.

Ước lượng trực tiếp ML cho ϕ và τ , loga hàm khả năng là:

$$\Lambda_L(\phi, \tau) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j\phi}}{N_0} \sum_n [I_n^* y_n(\tau) + j J_n^* x_n(\tau)] \right\} \quad (8-4-3)$$

với

$$y_n(\tau) = \int_{T_0} r(t) g^*(t - nT - \tau) dt$$

$$x_n(\tau) = \int_{T_0} r(t) w^*(t - nT - \tau) dt \quad (8-4-4)$$

Cho các đạo hàm riêng bằng 0 như sau

$$\frac{\partial \Lambda_L(\phi, \tau)}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_L(\phi, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (8-4-5)$$

và đặt:

$$A(\tau) + jB(\tau) = \frac{1}{N_0} \sum_n [I_n^* y_n(\tau) + j J_n^* x_n(\tau)] \quad (8-4-6)$$

(8-4-3) trở thành:

$$\Lambda_L(\phi, \tau) = A(\tau) \cos \phi - B(\tau) \sin \phi \quad (8-4-7)$$

và điều kiện (8-4-5) cho ước lượng ML đồng thời trở thành:

$$\frac{\partial \Lambda_L(\phi, \tau)}{\partial \phi} = -A(\tau) \sin \phi - B(\tau) \cos \phi = 0 \quad (8-4-8)$$

$$\frac{\partial \Lambda_L(\phi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \cos \phi - \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \sin \phi = 0 \quad (8-4-9)$$

Từ (8-4-8) ta nhận được:

$$\hat{\phi}_{ML} = -\arctg \left[\frac{B(\hat{\tau}_{ML})}{A(\hat{\tau}_{ML})} \right] \quad (8-4-10)$$

và nghiệm của (8-4-9) tương ứng với (8-4-10) là:

$$\left[A(\tau) \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} + B(\tau) \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}_{ML}} = 0 \quad (8-4-11)$$

Hình 8-4-1 biểu diễn vòng lặp xác định trực tiếp với tín hiệu QAM hay PSK.

Ta cũng có thể ước lượng đồng thời các tham số với giải điều chế dãy thông tin $\{I_n\}$. Như vậy ta phải tính tới việc ước lượng ML đồng thời dãy $\{I_n\}$, pha tín hiệu ϕ và tham số τ .

8-5. HIỆU QUẢ BỘ ƯỚC LƯỢNG CỰC ĐẠI KHẢ NĂNG

Hiệu quả của việc ước lượng tham số tín hiệu thường được xác định bằng độ sai lệch (bias) và sai phương. Để định nghĩa các khái niệm này, giả thiết rằng ta có một dãy $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ với hàm mật độ phân bố xác suất $p(\mathbf{x} | \phi)$, từ đó ta ước lượng tham số ϕ . Độ sai lệch của ước lượng, mà ta ký hiệu bằng $\hat{\phi}(\mathbf{x})$, được định nghĩa là:

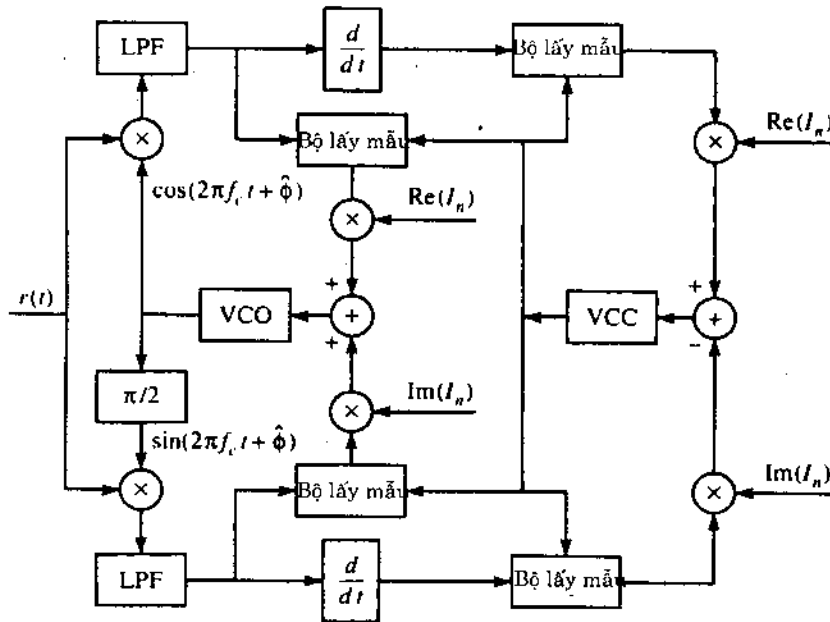
$$\text{Độ sai lệch (bias)} = E[\hat{\phi}(\mathbf{x})] - \phi \quad (8-5-1)$$

với ϕ là giá trị thực của tham số. Khi $E[\hat{\phi}(x)] = \phi$, ta nói rằng phép ước lượng là không có sai lệch. Sai phương của ước lượng $\hat{\phi}(x)$ được định nghĩa là:

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = E\left\{\left[\hat{\phi}(x)\right]^2\right\} - \left\{E\left[\hat{\phi}(x)\right]\right\}^2 \quad (8-5-2)$$

Nói chung, khó tính cụ thể $\sigma_{\hat{\phi}}^2$. Tuy nhiên, ta có giới hạn dưới của trung bình bình phương sai số là:

$$E\left\{\left[\hat{\phi}(x) - \phi\right]^2\right\} \geq \left[\frac{\partial}{\partial \phi} E\left[\hat{\phi}(x)\right]\right]^2 / E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(x|\phi)\right]^2\right\} \quad (8-5-3)$$



Hình 8-4-1: Xác định trực tiếp đồng thời các tham số của tín hiệu QAM hay PSK

Khi ước lượng không sai lệch thì tử số trong (8-5-3) là đơn vị và giới hạn trở thành giới hạn dưới của sai phương $\sigma_{\hat{\phi}}^2$ của ước lượng $\hat{\phi}(x)$:

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 \geq 1 / E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(x|\phi)\right]^2\right\} \quad (8-5-4)$$

Do $\ln p(x|\phi)$ khác loga hàm khả năng một thành phần hằng số độc lập với ϕ nên ta có:

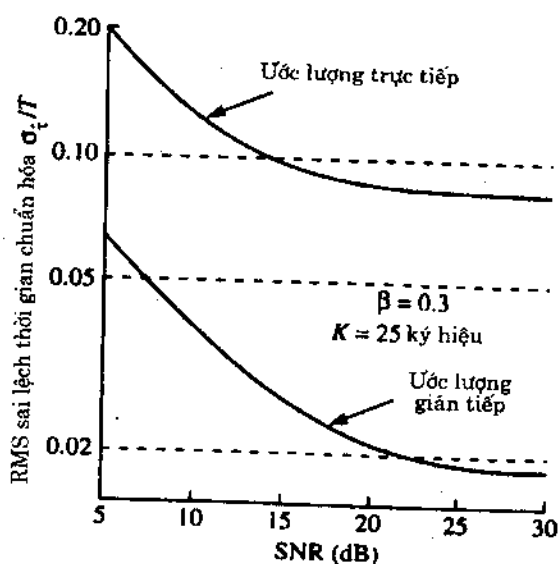
$$E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(x|\phi)\right]^2\right\} = E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln \Lambda(\phi)\right]^2\right\} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \ln \Lambda(\phi)\right] \quad (8-5-5)$$

và giới hạn dưới của sai phương là:

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 \geq 1 / E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln \Lambda(\phi)\right]^2\right\} = -1 / E\left[\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \ln \Lambda(\phi)\right] \quad (8-5-6)$$

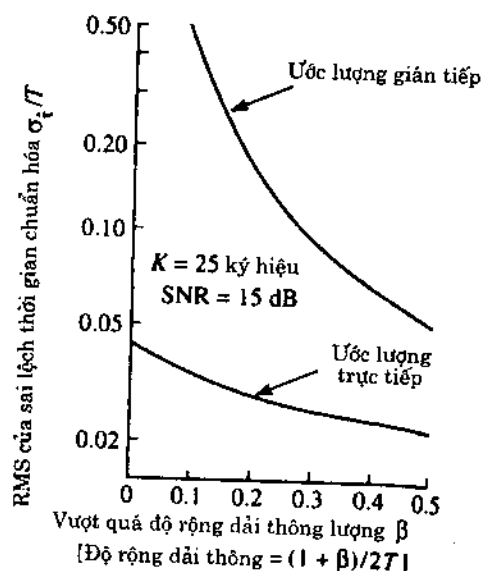
Giới hạn dưới là một kết quả hay được sử dụng. Một ước lượng không sai lệch và sai phương đạt tới giới hạn dưới gọi là phép ước lượng có hiệu quả.

Nói chung ước lượng hiệu quả là rất hiếm. Nếu tồn tại, chúng là ước lượng ML. Trong trường hợp ước lượng ML cho hai tham số tín hiệu, sai phương của chúng tỷ lệ nghịch với tỷ số tín hiệu trên nhiễu hay tỷ lệ nghịch với công suất tín hiệu nhân với khoảng thời gian quan sát T_0 . Hơn nữa, sai phương của ước lượng trực tiếp, với xác suất sai nhỏ, thường thấp hơn sai phương của ước lượng gián tiếp. Thực ra hiệu quả của ước lượng trực tiếp ML cho ϕ và τ đạt tới giới hạn dưới.



Hình 8-5-1

Hiệu quả của việc ước lượng khoảng thời gian ký hiệu với tín hiệu và dải thông vòng lặp cố định



Hình 8-5-2

Hiệu quả của việc ước lượng khoảng thời gian ký hiệu với SNR và dải thông vòng lặp cố định

Ví dụ 8-5-1

Ước lượng ML pha vật mang không điều chế trong (8-2-11) thỏa mãn điều kiện:

$$\int_{T_0} r(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}_{ML}) dt = 0 \quad (8-5-7)$$

với $r(t) = s(t; \phi) + n(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)$ (8-5-8)

Điều kiện (8-5-7) được biểu diễn bởi loga hàm khả năng như sau:

$$\Lambda_L(\phi) = \frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t) s(t; \phi) dt \quad (8-5-9)$$

Sai phương của $\hat{\phi}_{ML}$ có giới hạn dưới là:

$$\sigma_{\hat{\phi}_{ML}}^2 \geq \left\{ \frac{2A}{N_0} \int_{T_0} E[r(t)] \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right\}^{-1} \geq \left\{ \frac{A^2}{N_0} \int_{T_0} dt \right\}^{-1}$$

$$= \frac{N_0}{A^2 T_0} \geq \frac{N_0 / 2T_0}{\frac{1}{2} A^2} = \frac{N_0 B_{eq}}{\frac{1}{2} A^2} \quad (8-5-10)$$

Thành phần $\frac{1}{2T_0}$ là dải thông của nhiễu tương đương (một phía) của bộ tích phân lý tưởng.

Từ ví dụ này ta thấy sai phương của pha trong ước lượng ML có giới hạn dưới là:

$$\sigma_\phi^2 \geq 1/\gamma_L \quad (8-5-11)$$

với $\gamma_L = A^2 / 2N_0 B_{eq}$ là SNR của bộ lọc. Nó cũng chính là sai phương của ước lượng pha từ bộ PLL ước lượng trực tiếp. Như ta đã biết, hiệu quả của ước lượng gián tiếp không cao bằng ước lượng trực tiếp do suy hao Khi bình phương và Khi mũ M . Việc ước lượng khoảng thời gian ký hiệu cũng cho các kết quả tương tự. Do phụ thuộc vào tỷ số tín hiệu trên nhiễu SNR, chất lượng của việc ước lượng khoảng thời gian ký hiệu là hàm của tín hiệu xung. Ví dụ xung thông thường dùng trong thực tế là xung có phổ hình cosin, với tín hiệu này, giá trị RMS của sai lệch thời gian (σ_τ) là hàm của SNR như trên hình 8-5-1.

Nếu xung thay đổi thì RMS của sai lệch thời gian cũng thay đổi theo. Ví dụ xung có phổ hình cosin thì RMS của sai lệch thời gian thay đổi như trên hình 8-5-2. Chú ý rằng sai số giảm nếu tăng độ rộng phổ của xung.

BÀI TẬP

8-1. Giả thiết bộ lọc lặp trong một bộ PLL có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{1}{s + \sqrt{2}}$$

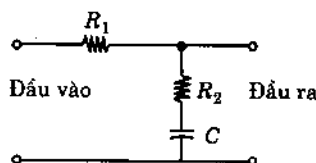
- Xác định hàm truyền đạt $H(s)$ nếu hệ là ổn định.
- Xác định các tham số ξ và ω_n của hệ thống.

8-2. Xét bộ PLL để ước lượng pha vật mang mà bộ lọc lặp được đặc trưng bởi hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau_1 s}$$

- Xác định hàm truyền đạt $H(s)$ của hệ thống vòng kín PLL.
- K và τ_1 phải thỏa mãn điều kiện gì để vòng lặp là ổn định?

8-3. Bộ lọc lặp trong vòng khóa pha PLL được tạo bởi mạch điện như hình dưới. Xác định hàm truyền đạt $G(s)$ và các tham số τ_1, τ_2 theo các thông số mạch điện.



8-4. Xác định hàm mật độ phân bố xác suất của giá trị pha ước lượng được bằng phương pháp ML trong (8-2-38).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Cơ sở Lý thuyết Truyền tin, Bùi Minh Tiêu, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1979.
- [2] Fondements de la théorie de la Transmission de l'Information, Alexandru Spataru, Presses Polytechniques Romandes, 1987.
- [3] La théorie mathématique de l'Information, Silviu Guiasu et Radu Theodorescu, Dunod Éditeur Paris 1968.
- [4] Systèmes de Télécommunications, P.-G. Fontollet, Presses Polytechniques Romandes, 1983.
- [5] Introduction to Digital Communication, Rodger E. Ziemer and Roger L. Peterson, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [6] Digital Communication, John G. Proakis, McGraw-Hill International Editions, 1995.
- [7] Communication Electronics, Louis E. Frenzel, Macmillan/McGraw-Hill, 1994.
- [8] Circuit and System Theory, Gladwyn Lago and Lloyd M. Benningfield, John Wiley & Sons, 1979.
- [9] Telecommunication Transmission Systems, Robert G. Winch, McGraw-Hill International Editions, 1993.
- [10] Digital Communications Fundamentals and Applications, Bernard Sklar, Prentice Hall, 1988.
- [11] Analog and Digital Communication, W. David Gregg, John Wiley & Sons, 1977.

MỤC LỤC

<i>Lời nói đầu</i>	3
Chương 1: NHỮNG KHÁI NIỆM CHUNG	5
1-1. Hệ thống truyền tin	5
1-1-1. Nguồn tin nguyên thủy	7
1-1-2. Kênh tin	9
1-1-3. Nhận tin	11
1-1-4. Những vấn đề cơ bản của hệ thống truyền tin	11
1-2. Rời rạc hóa một nguồn tin liên tục	12
1-2-1. Lấy mẫu	12
1-2-2. Lượng tử hóa	12
1-3. Độ đo thông tin	13
1-4. Mã hóa	14
1-5. Điều chế và giải điều chế	16
CHƯƠNG 2: XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN	18
2-1. Xác suất	18
2-1-1. Định nghĩa về xác suất	18
2-1-2. Biến ngẫu nhiên, hàm phân bố xác suất và hàm mật độ phân bố xác suất	21
2-1-3. Hàm của biến ngẫu nhiên	25
2-1-4. Trị trung bình thống kê của các biến ngẫu nhiên	29
2-1-5. Một số phân bố xác suất thường gặp	32
2-1-6. Giới hạn trên của xác suất ngưỡng	45
2-1-7. Tổng các biến ngẫu nhiên và định lý giới hạn trung tâm	50
2-2. Quá trình ngẫu nhiên	54
2-2-1. Các trị trung bình thống kê	55
2-2-2. Phổ mật độ công suất	58
2-2-3. Đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian với một tín hiệu vào ngẫu nhiên	59
2-2-4. Định lý lấy mẫu cho quá trình ngẫu nhiên có băng tần hạn chế	62
2-2-5. Tín hiệu ngẫu nhiên rời rạc theo thời gian	63
2-2-6. Các quá trình dừng vòng (Cyclostationary)	65
CHƯƠNG 3: THÔNG TIN VÀ LƯỢNG TIN	69
3-1. Khái niệm thông tin	69
3-2. Lượng tin của nguồn rời rạc	69
3-2-1. Nguồn rời rạc	69
3-2-2. Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện	72
3-2-3. Tính chất của lượng tin	73

10.11.18

3-3. Entropi của nguồn rời rạc	74
3-3-1. Tính chất của entropi $H(X)$	75
3-3-2. Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn	75
3-3-3. Entropi của nguồn Markov	76
3-4. Kênh rời rạc	76
3-4-1. Định nghĩa	76
3-4-2. Entropi ở đầu vào và ở đầu ra của kênh	77
3-4-3. Entropi có điều kiện	78
3-4-4. Mối liên hệ giữa các entropi	79
3-4-5. Thông lượng, độ dư và hiệu quả sử dụng kênh rời rạc	80
3-5. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục	81
3-5-1. Entropi nguồn liên tục	81
3-5-2. Thông lượng kênh liên tục	83
3-6. Biến đổi entropi qua phép biến đổi hệ tọa độ	83
Chương 4: MÃ HIỆU	86
4-1. Khái niệm và định nghĩa	86
4-1-1. Mã hiệu và các thông số cơ bản của mã hiệu	86
4-1-2. Điều kiện thiết lập mã hiệu	88
4-2. Phương pháp biểu diễn mã	90
4-2-1. Các bảng mã	90
4-2-2. Đồ hình mã	91
4-2-3. Hàm cấu trúc của mã	92
4-2-4. Các phương pháp biểu diễn mã tổng quát	92
4-3. Điều kiện phân tách của mã hiệu	93
4-3-1. Độ chậm giải mã	93
4-3-2. Điều kiện để mã phân tích được	93
4-3-3. Mã có tính prefix	95
4-4. Mã hệ thống	96
4-4-1. Mã hệ thống tổng quát	96
4-4-2. Mã hệ thống có tính prefix	97
4-5. Mã có dấu phân tách	97
Chương 5: MÃ HÓA NGUỒN	99
5-1. Mô hình toán học của nguồn thông tin	99
5-2. Mã hóa nguồn rời rạc	100
5-2-1. Mã hóa nguồn rời rạc không nhớ	100
5-2-2. Mã hóa nguồn dừng rời rạc	106
5-2-3. Thuật toán Lempel-Ziv	107
5-3. Mã hóa nguồn tương tự	108
5-3-1. Hàm tốc độ tạo tin-sai lệch	108
5-3-2. Lượng tử hóa vô hướng	112

8.11.19.119

5-3-3. Lượng tử hóa vectơ	116
5-4. Các kỹ thuật mã hóa nguồn tương tự	121
5-4-1. Mã hóa tín hiệu miền thời gian	121
5-4-2. Mã hóa tín hiệu miền tần số	127
5-4-3. Mã hóa mô hình nguồn	128
Chương 6: TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRUYỀN TIN	134
6-1. Biểu diễn tín hiệu và hệ thống có dải tần hữu hạn (bandpass signal and bandpass system)	134
6-1-1. Biểu diễn các tín hiệu có dải tần hữu hạn (bandpass signal)	134
6-1-2. Biểu diễn hệ thống tuyến tính có dải tần hữu hạn	137
6-1-3. Đáp ứng của hệ thống thông dải với tín hiệu vào có dải tần hữu hạn	138
6-1-4. Biểu diễn quá trình ngẫu nhiên dừng có dải tần hữu hạn	139
6-2. Không gian tín hiệu	142
6-2-1. Các khái niệm về không gian vectơ	142
6-2-2. Các khái niệm về không gian tín hiệu	144
6-2-3. Khai triển trực giao tín hiệu	145
6-3. Biểu diễn các tín hiệu điều chế số	150
6-3-1. Các phương pháp điều chế không nhớ	151
6-3-2. Điều chế tuyến tính có nhớ	161
6-3-3. Điều chế phi tuyến có nhớ	164
6-4. Phổ của các tín hiệu điều chế số	175
6-4-1. Phổ mật độ công suất của các tín hiệu điều chế tuyến tính	175
6-4-2. Phổ mật độ công suất các tín hiệu CPFSK và CPM	181
6-4-3. Phổ mật độ công suất của các tín hiệu điều chế tuyến tính có nhớ	188
Chương 7: CẤU TRÚC THU TỐI ƯU CHO KÊNH CÓ NHIỀU CỘNG GAUSSIAN	193
7-1. Thu tối ưu cho tín hiệu có nhiều cộng gaussian	193
7-1-1. Bộ giải điều chế tương quan	194
7-1-2. Bộ giải điều chế dùng bộ lọc phối hợp	197
7-1-3. Bộ xác định tối ưu	201
7-1-4. Bộ xác định dãy cực đại khả năng	206
7-1-5. Bộ xác định ký hiệu-ký hiệu cho tín hiệu có nhớ	209
7-2. Hiệu quả bộ thu tối ưu đối với tín hiệu điều chế không nhớ	211
7-2-1. Xác suất thu sai tín hiệu nhị phân	211
7-2-2. Xác suất thu sai tín hiệu trực giao M mức	214
7-2-3. Xác suất xác định sai tín hiệu trực giao kép M mức	217
7-2-4. Xác suất xác định sai tín hiệu đơn hình	218
7-2-5. Xác suất xác định sai tín hiệu mã nhị phân M mức	218
7-2-6. Xác suất xác định sai tín hiệu PAM M mức	219
7-2-7. Xác suất xác định sai tín hiệu PSK M mức	220
7-2-8. Tín hiệu PSK vi sai (DPSK) và hiệu quả của tín hiệu này	224
7-2-9. Xác suất xác định sai tín hiệu QAM	227

7-2-10. So sánh các phương pháp điều chế số	230
7-3. Bộ thu tối ưu cho tín hiệu điều chế pha liên tục (CPM)	232
7-3-1. Giải điều chế và xác định tối ưu tín hiệu CPM	233
7-3-2. Hiệu quả của tín hiệu CPM	237
7-3-3. Xác định tín hiệu CPM trên cơ sở ký hiệu-ký hiệu	242
7-4. Thu tối ưu tín hiệu pha ngẫu nhiên trong kênh có nhiễu cộng gaussian AWGN	247
7-4-1. Bộ thu tối ưu cho các tín hiệu nhị phân	248
7-4-2. Bộ thu tối ưu cho tín hiệu trực giao M mức	252
7-4-3. Xác suất xác định sai dùng bộ xác định đường bao đối với tín hiệu trực giao M mức	253
7-4-4. Xác suất lỗi của phương pháp xác định đường bao đối với tín hiệu nhị phân tương quan	256
7-5. Bộ lặp và phân tích đường truyền sóng ngắn	257
7-5-1. Bộ lặp	258
7-5-2. Phân tích các đường truyền sóng ngắn nhiều tia	259
Chương 8: ĐỒNG BỘ	263
8-1. Ước lượng tham số tín hiệu	263
8-1-1. Hàm khả năng	264
8-1-2. Khôi phục vật mang và đồng bộ ký hiệu	264
8-2. Ước lượng pha vật mang	267
8-2-1. Ước lượng cực đại khả năng pha vật mang.	268
8-2-2. Vòng khóa pha (PLL)	269
8-2-3. Ảnh hưởng của nhiễu cộng tới việc ước lượng pha	271
8-2-4. Vòng lặp xác định trực tiếp	273
8-2-5. Vòng lặp xác định gián tiếp	276
8-3. Ước lượng khoảng thời gian ký hiệu	282
8-3-1. Ước lượng khoảng thời gian cực đại khả năng (ML)	282
8-3-2. Ước lượng khoảng thời gian tín hiệu gián tiếp	283
8-4. Ước lượng đồng thời pha vật mang và khoảng thời gian ký hiệu	286
8-5. Hiệu quả bộ ước lượng cực đại khả năng	287
Tài liệu tham khảo	291
Mục lục	292

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập :
NGUYỄN VĂN THƯỜNG

Biên tập tái bản :
NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Trình bày bìa :
ĐOÀN HỒNG

Sửa bản in :
NGUYỄN VĂN THƯỜNG

CƠ SỞ LÝ THUYẾT TRUYỀN TIN - Tập một

In 2.000 cuốn, khổ 19 x 26,5 cm tại Công ty In Khoa học kỹ thuật
101A Nguyễn Khuyến - Hà Nội
Số in: 708 - Số xuất bản: 502/33 - 03
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2003.



8 934980 224502



Giá: 27.200 đ