



Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán - Tập 6

ĐẠI SỐ 2

Giáo trình và
500 bài tập có lời giải



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



DUNOD

Giáo trình toán - Tập 6

ĐẠI SỐ 2

Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình đào tạo Kỹ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hoá và Hợp tác của Đại sứ quán Pháp tại nước Cộng hoà Xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

Cours de mathématiques - 6

ALGÈBRE 2

Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam, bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République Socialiste du Vietnam.

Jean - Marie Monier

Giáo trình Toán
Tập 6

ĐẠI SỐ 2

Giáo trình và 500 bài tập có lời giải

(Tái bản lần thứ tư)

Người dịch:

Mai Văn Đức - Ngô Ánh Tuyết

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Cours de mathématiques - 6

ALGÈBRE 2

Cours et 500 exercices corrigés

2^e année MP. PSI. PC. PT

Jean - Marie Monier
*Professeur en classe de Spéciales
au lycée la Martinière-Monplaisir à Lyon*

@ DUNOD, Paris, 1996

Lời nói đầu

Bộ giáo trình Toán mới này, với nhiều bài tập có lời giải, được biên soạn dành cho sinh viên giai đoạn I các trường đại học công nghệ quốc gia (năm thứ 1 và thứ 2 mọi chuyên ngành), cho sinh viên giai đoạn I đại học khoa học, và cho các thí sinh dự thi tuyển giáo viên trung học phổ thông.

Bố cục của bộ giáo trình này như sau :

Tập 1 : Giải tích 1 }
Tập 2 : Giải tích 2 } Giải Tích năm thứ 1 (xuất bản lần 2, 6/1996)

Tập 3 : Giải tích 3 }
Tập 4 : Giải tích 4 } Giải Tích năm thứ 2 (xuất bản lần 2, 6/1997)

Tập 5 : Đại số 1 : Đại số năm thứ 1

Tập 6 : Đại số 2 : Đại số năm thứ 2

Tập 7 : Hình học : Hình học năm thứ 1 và năm thứ 2.

Để kiểm tra mức độ lĩnh hội kiến thức, trong mỗi chương độc giả sẽ thấy có lời giải in ở cuối sách. Trừ một vài trường hợp đặc biệt, các bài tập này đều khác với những bài đã có trong các bộ bài tập có lời giải ở các tập trước.

Nhiều vấn đề ở ranh giới của chương trình được đề cập ở cuối chương, dưới dạng các bổ sung có lời giải.

Tác giả rất mong nhận được những lời phê bình và gợi ý của độc giả. Xin vui lòng gửi các ý kiến đến Nhà xuất bản Dunod, 15, phố Gossin, 92541 Montrouge Cedex.

Jean - Marie Monier

Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn đến các bạn đồng nghiệp đã vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc của bản đánh máy : Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gerard BOURGIN, Gerard Pierre BOUVIER, Gerard CASSAYRE, Gilles CHAFFARD, Jean-Yves CHEVROLAT, Jean- Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Nicole GAILLARD, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Chritian GIRAUD, Alain GOURET, André GRUZ, André LAFFONT, Jean- Marc LAPIERRE, Jean- Paul MARGIRIER, Annie MICHEL, Rémy NICOLAI, Michel PERNOUD, Jean REY, René ROY, Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ và Gérard SIBERT.

Cuối cùng tôi xin trân trọng cảm ơn Nhà xuất bản Dunod, Gisèle Maïus và Michel Mounic đã tạo điều kiện để hoàn thành các tập sách này.

Mục lục tập 6

Phần I – Giáo trình

Chương 1. – Bổ sung về đại số tuyến tính	3
1.1. Đối ngẫu	3
1.1.1. Đại cương	3
1.1.2. Siêu phẳng	4
1.1.3. Tính trực giao	7
1.1.4. Cơ sở đối ngẫu	11
1.1.5. Chuyển vị	19
1.2. Khối	23
1.3. Dãy và chuỗi ma trận	31
1.3.1. Các chuẩn trên $M_{n,p}(\mathbb{K})$	31
1.3.2. Hàm mũ của ma trận	33
Chương 2. – Phép thu gọn các tự đồng cấu và các ma trận vuông (nghiên cứu sơ bộ)	37
2.1. Phần tử riêng	37
2.2. Đa thức đặc trưng	43
2.3. Tính chéo hóa được	49
2.4. Đa thức các tự đồng cấu, đa thức ma trận	63
2.5. Các ứng dụng của phép chéo hóa	71
2.5.1. Tính các lũy thừa của một ma trận vuông	71
2.5.2. Các dãy truy hồi tuyến tính đồng thời cấp 1 với hệ số không đổi	75
2.5.3. Các dãy truy hồi tuyến tính với hệ số không đổi	77
Chương 3. – Phép thu gọn (nghiên cứu nâng cao)	81
3.1. Tam giác hóa	81
3.2. Các đa thức triệt tiêu	89
3.2.1. Định lý Cayley và Hamilton	89

X Mục lục

3.2.2.	Định lý các hạt nhân	91
3.2.3.	Đa thức tối tiểu	95
3.3.	Phân tích Dunford	101
3.3.1.	Không gian con đặc trưng	101
3.3.2.	Phân tích Dunford	104
3.3.3.	Các ví dụ ứng dụng phân tích Dunford	106
3.4.	Phép thu gọn Jordan	109
3.4.1.	Cấu trúc của các tự đồng cấu lũy linh	109
3.4.2.	Phép thu gọn Jordan	115
	Bổ sung	121
Chương 4. – Đại số song tuyến tính (nghiên cứu sơ bộ)		125
4.1.	Các dạng song tuyến tính đối xứng, các dạng toàn phương	125
4.1.1.	Đại cương	125
4.1.2.	Diễn giải ma trận	127
4.2.	Nhắc lại về không gian Euclide	132
4.2.1.	Tích vô hướng	132
4.2.2.	Tính trực giao	135
4.3.	Các tự đồng cấu đáng chú ý của không gian vector Euclide	138
4.3.1.	Các tự đồng cấu đối xứng	138
4.3.2.	Các tự đồng cấu trực giao	143
4.4.	Phép thu gọn các ma trận đối xứng thực	148
4.4.1.	Định lý cơ bản	148
4.4.2.	Phép thu gọn đồng thời	151
4.4.3.	Các dạng toàn phương dương, xác định dương	152
Chương 5. – Đại số song tuyến tính (nghiên cứu nâng cao)		161
5.1.	Các dạng song tuyến tính đối xứng, các dạng toàn phương	161
5.1.1.	Đại cương	161
5.1.2.	Tính trực giao theo một dạng song tuyến tính đối xứng	161
5.1.3.	Trường hợp hữu hạn chiều	165

5.1.4.	Phân loại các dạng toàn phương trong trường hợp hữu hạn chiều	170
5.1.5.	Phân tích Gauss của một dạng toàn phương	176
5.2.	Phụ hợp	180
5.2.1.	Đại cương	180
5.2.2.	Trường hợp hữu hạn chiều	181
5.2.3.	Các tự đồng cấu đáng chú ý trong không gian tiền Hilbert thực	182
	Bổ sung	188
Chương 6. – Đại số tuyến tính rưỡi		189
6.1.	Các dạng tuyến tính rưỡi	189
6.1.1.	Đại cương	189
6.1.2.	Tính trực giao theo một dạng tuyến tính rưỡi Hermite	192
6.1.3.	Trường hợp hữu hạn chiều	194
6.1.4.	Phân loại các dạng Hermite trên kgv có số chiều hữu hạn	201
6.1.5.	Phân tích Gauss của một dạng Hermite	201
6.2.	Không gian Hermite	204
6.2.1.	Tích vô hướng	204
6.2.2.	Tính trực giao	207
6.3.	Phụ hợp	211
6.3.1.	Đại cương	211
6.3.2.	Trường hợp hữu hạn chiều	212
6.4.	Các tự đồng cấu đáng chú ý của một không gian Hermite	213
6.4.1.	Các tự đồng cấu tự phụ hợp	213
6.4.2.	Tự đồng cấu Unita	216
6.4.3.	Tự đồng cấu chuẩn tắc	220
6.5.	Thu gọn các ma trận Hermite	223
6.5.1.	Định lý cơ bản	223
6.5.2.	Thu gọn đồng thời	224
6.5.3.	Ma trận Hermite dương, xác định dương	225
	Bổ sung	237

Chương 7. -- Bổ sung về đại số đại cương	241
7.1. Nhóm	241
7.1.1 Nhóm $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	241
7.1.2 Nhóm, sự tác động của một nhóm lên một tập hợp	245
7.2. Vành	248
7.2.1. Idêan của một vành giao hoán	248
7.2.2. Đồng cấu vành	251
7.2.3. Idêan của $\mathbb{Z}$, các vành $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	251
7.2.4. Đại số $K[a]$	255
Bổ sung	260

Phần II

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập

Chương 1, 265; Chương 2, 279; Chương 3, 309; Chương 4, 351;
 Chương 5, 373; Chương 6, 401; Chương 7, 445.

Bảng ký hiệu	455
Bảng thuật ngữ	457

Phần I

GIÁO TRÌNH

Chương 1

Bổ sung về đại số tuyến tính

1.1 Đối ngẫu

K chỉ một thể giao hoán.

1.1.1 Đại cương

Trong §1.1.1 này, E chỉ một K -kgv (không gian vector).
Ta nhắc lại một định nghĩa (Tập 5, 7.1.1, Định nghĩa 3).

- ♦ **Định nghĩa** Ánh xạ tuyến tính từ E vào K được gọi là **dạng tuyến tính** trên E . Ta ký hiệu E^* là tập hợp các dạng tuyến tính trên E ; E^* được gọi là **đối ngẫu** của E .

Vậy ta có: $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

VÍ DỤ:

1) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E . Với mọi x thuộc E , tồn tại duy nhất $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ sao cho $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Khi

đó, hiển nhiên với mỗi i thuộc $\{1, \dots, n\}$, ánh xạ $e_i^* : E \rightarrow K$ là một dạng tuyến tính

trên E , gọi là **dạng - tọa độ** thứ i trong cơ sở B . Xem 1.1.4 dưới đây.

2) Giả sử $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a \leq b$, E là $\mathbb{C}$ -kgv các ánh xạ liên tục từng khúc từ $[a; b]$ vào $\mathbb{C}$. Ánh xạ $\mu : E \rightarrow \mathbb{C}$ là một dạng tuyến tính trên E .

$$f \mapsto \int_a^b f$$

3) Giả sử X là một tập không rỗng. Với mỗi a thuộc X , ánh xạ $E_a : K^X \rightarrow K$ là một dạng tuyến tính trên K -kgv K^X , gọi là **định giá** tại a (xem Tập 5, 7.1.1, Ví dụ 6). ■
Ta nhắc lại (Tập 5, 7.2.1, Mệnh đề):

- ♦ **Mệnh đề**
 E^* là một K -kgv.

Bài tập

◊ 1.1.1 Cho E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$ có hạng là 1, $u \in E - \{0\}$ sao cho $\text{Im}(f) = Ku$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $\varphi \in E^*$ sao cho :

$$\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)u.$$

b) Chứng minh tồn tại duy nhất $\alpha \in K$ sao cho $f^2 = \alpha f$, và nếu $\alpha \neq 1$ thì $f - \text{Id}_E$ khả nghịch

◊ 1.1.2 Chứng minh rằng các K -kgv $(K[X])^*$ và $K^{\mathbb{N}}$ là đẳng cấu.

1.1.2 Siêu phẳng

Trong §1.1.2 này, E chỉ một K -kgv.

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi các hạt nhân của các dạng tuyến tính trên E khác dạng không là các **siêu phẳng** của E .

Nói cách khác, một kgvc H của E là một siêu phẳng khi và chỉ khi :

$$\exists \varphi \in E^* - \{0\}, H = \text{Ker}(\varphi).$$

Ta nói rằng hệ thức $\varphi(x) = 0$ là một **phương trình** của siêu phẳng H .

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử H là một kgvc của E . Điều kiện cần và đủ để H là một siêu phẳng của E là tồn tại một đường thẳng vector D của E sao cho H và D bù nhau trong E .

Chứng minh :

1) Giả sử H là một siêu phẳng của E . Tồn tại $\varphi \in E^* - \{0\}$ sao cho $H = \text{Ker}(\varphi)$, và tồn tại $x_0 \in E$ sao cho $\varphi(x_0) \neq 0$. Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng đường thẳng vector $D = Kx_0$ là bù của H trong E .

• Giả sử $x \in D \cap H$. Tồn tại $\alpha \in K$ sao cho $x = \alpha x_0$ và $\varphi(x) = 0$. Nếu $\alpha \neq 0$ thì

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{\alpha} \varphi(x) = 0, \text{ mâu thuẫn. Do đó } \alpha = 0, \text{ từ đây } x = 0.$$

Điều này chứng tỏ $D \cap H = \{0\}$.

• Giả sử $x \in E$, ta chỉ ra rằng tồn tại $(\lambda, y) \in K \times H$ sao cho $x = \lambda x_0 + y$.

Nếu tồn tại một cặp (λ, y) như vậy, thì $\varphi(x) = \lambda \varphi(x_0) + \varphi(y) = \lambda \varphi(x_0)$.

từ đây $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$, suy ra $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$.

Đảo lại, ta có: $x = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 + \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \right)$.

và do $\varphi \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \varphi(x_0) = 0$, nên $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \in \text{Ker}(\varphi) = H$.

Điều này chứng tỏ: $D + H = E$.

Cuối cùng: $D \oplus H = E$.

2) Ngược lại, giả sử tồn tại một đường thẳng vectơ D sao cho $D \oplus H = E$. Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $x_0 \neq 0$. Với mọi $x \in E$, tồn tại duy nhất $(\lambda, y) \in K \times H$ sao cho $x = \lambda x_0 + y$. Hiển nhiên rằng ánh xạ $\varphi: E \rightarrow K$ được định nghĩa như vậy là tuyến tính.

Khi đó ta có: $\varphi \in E^* - \{0\}$ (vì $\varphi(x_0) = 1 \neq 0$) và $\text{Ker}(\varphi) = H$.

Nhận xét:

Phép chứng minh trên chứng tỏ rằng, nếu H là một siêu phẳng của E thì với mọi x_0 thuộc $E - H$:

$$H \oplus (Kx_0) = E.$$

♦ **Hệ quả** Nếu E hữu hạn chiều với số chiều là n ($n \geq 1$), thì các siêu phẳng của E là các kgvc của E với số chiều là $n - 1$.

Như thế ta trở lại Định nghĩa đã gặp trong Tập 5, 6.4, trong trường hợp đặc biệt khi E hữu hạn chiều.

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử H là một siêu phẳng của E , $\varphi \in E^* - \{0\}$ sao cho $H = \text{Ker}(\varphi)$ và $\psi \in E^* - \{0\}$. Ta có:

$$H = \text{Ker}(\psi) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in K - \{0\}, \psi = \alpha\varphi).$$

Chứng minh:

1) Rõ ràng rằng với mọi α thuộc $K - \{0\}$:

$$\text{Ker}(\alpha\varphi) = \text{Ker}(\varphi) = H.$$

2) Đảo lại, giả sử $\psi \in E^* - \{0\}$ sao cho $H = \text{Ker}(\psi)$. Tồn tại $x_0 \in E$ sao cho $\varphi(x_0) \neq 0$ và ta có:

$$E = \text{Ker}(\varphi) + (Kx_0).$$

Giả sử $x \in E$; tồn tại $\lambda \in K$ và $y \in \text{Ker}(\varphi) = H = \text{Ker}(\psi)$ sao cho $x = y + \lambda x_0$.

Khi đó: $\varphi(x) = \lambda\varphi(x_0)$ và $\psi(x) = \lambda\psi(x_0)$, từ đó: $\psi(x) = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)} \varphi(x)$.

Với ký hiệu $\alpha = \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x_0)} \in K - \{0\}$ ta được: $\varphi = \alpha\varphi$. ■

Mệnh đề trên chứng tỏ rằng một siêu phẳng cho trước chỉ có một phương trình duy nhất, sai khác một hệ số khác 0.

Khái niệm đối chiều

- ♦ **Định nghĩa 2** Một kgvc F của E được gọi là có **đối chiều hữu hạn** khi và chỉ khi F có ít nhất một phần bù hữu hạn chiều trong E .
- ♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3** Giả sử F là một kgvc có đối chiều hữu hạn của E . Mọi phần bù của F trong E đều hữu hạn chiều và có cùng số chiều, gọi là **số đối chiều của F (trong E)** và ký hiệu là $\text{codim}(F)$.

Chứng minh :

1) Trước tiên ta chỉ ra rằng với mọi kgvc F của E , các phần bù của F trong E đều đẳng cấu với nhau.

Giả sử G và G' là hai phần bù của F trong E : $F \oplus G = F \oplus G' = E$.

Ký hiệu p là phép chiếu lên G song song với F , và $\varphi: G' \rightarrow G$; $x \mapsto p(x)$; ta sẽ chứng minh rằng φ là một phép đẳng cấu kgv.

- Hiển nhiên φ là tuyến tính.
- Giả sử $x \in G'$ sao cho $\varphi(x) = 0$. Khi đó $p(x) = 0$, do vậy $x \in F$; như vậy: $x \in G' \cap F = \{0\}$, vậy $x = 0$.

Điều này chứng tỏ φ là đơn ánh.

- Giả sử $y \in G$. Tồn tại $(x, z) \in G' \times F$ sao cho $y = x + z$.

Ta có: $\varphi(y) = p(y - z) = p(y) - p(z) = p(y) = y$.

Điều này chứng tỏ φ là toàn ánh.

Cuối cùng φ là một đẳng cấu từ G' lên G .

Như vậy mọi phần bù của F trong E đều đẳng cấu với nhau.

2) Giả sử F có đối chiều hữu hạn; F có ít nhất một phần bù G trong E sao cho G hữu hạn chiều. Theo 1) mọi phần bù của F trong E đều đẳng cấu với G , do vậy hữu hạn chiều và có cùng số chiều là $\dim(G)$.

Nhận xét:

Các siêu phẳng của E là các kgvc của E có đối chiều hữu hạn bằng 1.

- ♦ **Hệ quả** Nếu E hữu hạn chiều thì mọi kgvc F của E hữu hạn đối chiều và: $\text{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$.

Chứng minh :

Xem Tập 5, 6.4, Mệnh đề 6.

Bài tập

- ♦ 1.1.3 Cho E là một K -kgv, $\mathcal{V}$ là tập hợp các kgv của E khác E . Chứng minh rằng các siêu phẳng của E là các phần tử tối đại của tập hợp sắp thứ tự $(\mathcal{V}, \subset)$ (xem Tập 5, 1.2.3.2), Định nghĩa 1.4), tức là một kgv H của E là một siêu phẳng của E khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} H \neq E \\ \forall F \in \mathcal{V}. (H \subset F \Rightarrow H = F) \end{cases}$$

1.1.3 Tính trực giao

Trong §1.1.3 này, E chỉ một K -kgv.

Ánh xạ $E \times E^* \rightarrow K$ $(x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$ là một dạng song tuyến tính, được gọi là **móc đối ngẫu** và ký hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Như vậy: $\forall x \in E, \forall \varphi \in E^*, \langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$.

Cách ký hiệu này có thể làm sáng tỏ sự khảo sát sau đây.

♦ Định nghĩa

- 1) Với mọi tập con A của E , **trực giao $A^\perp$ của A trong E^*** được định nghĩa như sau:

$$A^\perp = \{ \varphi \in E^*; \forall a \in A, \varphi(a) = 0 \}.$$

- 2) Với mọi tập con L của E^* , **trực giao ${}^\circ L$ của L trong E** được định nghĩa như sau:

$${}^\circ L = \{ x \in E; \forall \varphi \in L, \varphi(x) = 0 \}.$$

Nhận xét :

- 1) Với mọi φ thuộc E^* và mọi tập con A của E :

$$\varphi \in A^\perp \Leftrightarrow \varphi|_A = 0 \Leftrightarrow A \subset \text{Ker}(\varphi).$$

- 2) Với mọi tập con L của E^* : ${}^\circ L = \bigcap_{\varphi \in L} \text{Ker}(\varphi)$.

♦ **Mệnh đề** Với mọi tập con A, B của E và mọi tập con L, M của E^* :

- | | |
|--|---|
| 1) $A^\perp$ là một kgvc của E^* | 1') ${}^\circ L$ là một kgvc của E |
| 2) $\{0_E\}^\perp = E^*$ | 2') ${}^\circ\{0_{E^*}\} = E$ |
| 3) $E^\perp = \{0_{E^*}\}$ | 3') ${}^\circ(E^*) \supset \{0_E\}$ |
| 4) $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$ | 4') $L \subset M \Rightarrow {}^\circ L \supset {}^\circ M$ |
| 5) $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$ | 5') ${}^\circ L = {}^\circ(\text{Vect}(L))$ |

Với mọi kgvc A, B của E và mọi kgvc L, M của E^* :

- | | |
|---|--|
| 6) $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ | 6') ${}^\circ(L + M) = {}^\circ L \cap {}^\circ M$ |
| 7) $(A \cap B)^\perp \supset A^\perp + B^\perp$ | 7') ${}^\circ(L \cap M) \supset {}^\circ L + {}^\circ M$ |
| 8) ${}^\circ(A^\perp) \supset A$ | 8') $({}^\circ L)^\perp \supset L$ |

Chứng minh:

- 1) • $0_{E^*} \in A^\perp$ vì $\forall a \in A, 0_{E^*}(a) = 0$.
 • Giả sử $\lambda \in K, \varphi, \psi \in A^\perp$. Ta có: $\forall a \in A, (\lambda\varphi + \psi)(a) = \lambda\varphi(a) + \psi(a) = 0$, do vậy $\lambda\varphi + \psi \in A^\perp$.
- 1') • $0_E \in {}^\circ L$ vì $\forall \varphi \in L, \varphi(0_E) = 0$.
 • Giả sử $\lambda \in K, x, y \in {}^\circ L$. Ta có: $\forall \varphi \in L, \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y) = 0$, do vậy $\lambda x + y \in {}^\circ L$.
- 2) $\{0_E\}^\perp = \{\varphi \in E^*; \varphi(0_E) = 0\} = E^*$.
- 2') ${}^\circ\{0_{E^*}\} = \{x \in E; 0_{E^*}(x) = 0\} = E$.
- 3) $E^\perp = \{\varphi \in E^*; \forall x \in E, \varphi(x) = 0\} = \{0_{E^*}\}$.
- 3') ${}^\circ(E^*) \supset \{0_E\}$ vì ${}^\circ(E^*)$ là một kgvc của E .
- 4) Giả sử $A \subset B$. Cho $\varphi \in B^\perp$; ta có: $(\forall b \in B, \varphi(b) = 0)$, do đó $(\forall a \in A, \varphi(a) = 0)$,

tức là $\varphi \in A^\perp$.

Kết luận: $A^\perp \supset B^\perp$.

- 4') Giả sử $L \subset M$. Cho $x \in {}^\circ M$; ta có: $(\forall \varphi \in M, \varphi(x) = 0)$, do đó $(\forall \varphi \in L, \varphi(x) = 0)$,

tức là $x \in {}^\circ L$.

Kết luận: ${}^\circ L \supset {}^\circ M$.

- 5) • $A \subset \text{Vect}(A) \Rightarrow A^\perp \supset (\text{Vect}(A))^\perp$.
 • Tính chất là hiển nhiên nếu $A = \emptyset$: $\emptyset^\perp = E^* = \{0_{E^*}\}^\perp$

Do vậy giả thiết $A \neq \emptyset$. Cho $\varphi \in A^\perp, x \in \text{Vect}(A)$.

Tồn tại $N \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in K, a_1, \dots, a_N \in A$ sao cho $x = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$.

Ta có: $\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi(a_k) = 0$, do vậy $\varphi \in (\text{Vect}(A))^\perp$.

$$5') L \subset \text{Vect}(L) \Rightarrow {}^\circ L \supset {}^\circ(\text{Vect}(L)).$$

• Tính chất là hiển nhiên nếu $L = \emptyset$: ${}^\circ \emptyset = E = {}^\circ \{0_E\}$.

Do vậy giả sử rằng $L \neq \emptyset$. Giả sử $x \in {}^\circ L, \varphi \in \text{Vect}(L)$.

Tồn tại $N \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in K, \varphi_1, \dots, \varphi_N \in L$ sao cho $\varphi = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k$.

Ta có: $\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k(x) = 0$, vậy $x \in {}^\circ(\text{Vect}(L))$.

$$6) \bullet \begin{cases} A \subset A+B \\ B \subset A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^\perp \supset (A+B)^\perp \\ B^\perp \supset (A+B)^\perp \end{cases} \Rightarrow A^\perp \cap B^\perp \supset (A+B)^\perp$$

• Giả sử $\varphi \in A^\perp \cap B^\perp, x \in A+B$. Tồn tại $a \in A, b \in B$, sao cho $x = a+b$, do vậy $\varphi(x) = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = 0$, suy ra $\varphi \in (A+B)^\perp$.

$$6') \bullet \begin{cases} L \subset L+M \\ M \subset L+M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^\circ L \supset {}^\circ(L+M) \\ {}^\circ M \supset {}^\circ(L+M) \end{cases} \Rightarrow {}^\circ L \cap {}^\circ M \supset {}^\circ(L \cap M)$$

• Giả sử $x \in {}^\circ L \cap {}^\circ M, \varphi \in L+M$. Tồn tại $l \in L, m \in M$, sao cho $\varphi = l+m$, từ đây $\varphi(x) = l(x) + m(x) = 0$, suy ra $x \in {}^\circ(L+M)$.

$$7) \begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A \cap B)^\perp \supset A^\perp \\ (A \cap B)^\perp \supset B^\perp \end{cases} \Rightarrow (A \cap B)^\perp \supset A^\perp + B^\perp$$

$$7') \begin{cases} L \cap M \subset L \\ L \cap M \subset M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^\circ(L \cap M) \supset {}^\circ L \\ {}^\circ(L \cap M) \supset {}^\circ M \end{cases} \Rightarrow {}^\circ(L \cap M) \supset {}^\circ L + {}^\circ M$$

8) Cho $a \in A$. Do $(\forall \varphi \in A^\perp, \varphi(a) = 0)$ nên ta có: $a \in {}^\circ(A^\perp)$.

8') Cho $\varphi \in L$. Do $(\forall x \in {}^\circ L, \varphi(x) = 0)$ nên ta có: $\varphi \in ({}^\circ L)^\perp$.

Nhận xét:

1) Hãy chú ý tới sự tương tự với các kết quả về tính trực giao đối với tích vô hướng (Tập 5, 10.1.3, Mệnh đề 1).

2) Nếu thừa nhận rằng mọi kgv của một kgv đều có ít nhất một phần bù, thì ta có thể chứng minh rằng có đẳng thức trong các công thức 3'), 7), 8), xem các bài tập từ 1.1.5 đến 1.1.7.

3) Có thể không có đẳng thức trong các công thức 7'), 8'), xem các bài tập 1.1.8 và 1.1.9.

4) Ta sẽ chứng minh dưới đây (1.1.4, Hệ quả) rằng nếu E hữu hạn chiều thì có đẳng thức trong các công thức 3'), 7), 7'), 8), 8').

Bài tập

♦ 1.1.4 Cho E là một K -kgv, $\mathcal{V}(E)$ (tương ứng $\mathcal{V}(E^*)$) là tập hợp các kgvc của E (tương ứng E^*).

a) Chứng minh rằng:
$$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{V}(E), & ({}^0(A^\perp))^\perp = A^\perp \\ \forall L \in \mathcal{V}(E^*), & {}^0(({}^0L)^\perp) = {}^0L \end{cases}$$

b) Ký hiệu $\alpha: \mathcal{V}(E) \rightarrow \mathcal{V}(E)$ và $\beta: \mathcal{V}(E^*) \rightarrow \mathcal{V}(E^*)$. Chứng minh: $\alpha \circ \alpha = \text{id}, \beta \circ \beta = \text{id}$
 $A \mapsto {}^0(A^\perp) \quad L \mapsto ({}^0L)^\perp$

Trong các bài tập 1.1.5 đến 1.1.7 ta sẽ giả thiết rằng với mọi K -kgv E và mọi kgvc F của E , F có ít nhất một phần bù trong E .

♦ 1.1.5 Cho E là một K -kgv. Chứng minh: ${}^0(E^*) = \{0_E\}$.

♦ 1.1.6 Cho E là một K -kgv, A là một kgvc của E . Chứng minh: ${}^0(A^\perp) = A$.

♦ 1.1.7 Cho E là một K -kgv, A, B là hai kgvc của E . Chứng minh: $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

♦ 1.1.8 Cho $E = K^{(\mathbb{N})}$ là tập hợp các dãy trong K với giá hữu hạn, tức là:

$$K^{(\mathbb{N})} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n = 0\}.$$

Với $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ là dãy có tất cả các số hạng bằng không, trừ số hạng thứ i bằng 1. Hiển nhiên $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một cơ sở của E . Với $p \in \mathbb{N}$, ký hiệu φ_p là phần tử của E^* được định nghĩa bởi: $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_p(e_n) = \delta_{pn}$.

Cuối cùng ta ký hiệu $L = \text{Vect}(\{\varphi_p; p \in \mathbb{N}\})$.

Chứng minh: $({}^0L)^\perp \neq L$.

♦ 1.1.9* Hãy cho một ví dụ về $\mathbb{R}$ -kgv E và các kgvc L, M của E^* sao cho

$${}^0(L \cap M) \neq {}^0L + {}^0M.$$

1.1.4 Cơ sở đối ngẫu

Trong §1.1.4 này, E chỉ một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$.

♦ **Định lý - Định nghĩa** Giả sử $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E .

Ta xét với mỗi i thuộc $\{1, \dots, n\}$ dạng tuyến tính $e_i^* : E \rightarrow K$ định nghĩa bởi :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Họ $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ là một cơ sở của E^* , gọi là cơ sở đối ngẫu của B , ký hiệu là B^* .

δ_{ij} được gọi là ký hiệu Kronecker.

Chứng minh :

Trước tiên, các e_i^* ($1 \leq i \leq n$) là các phần tử của E^* (xem 1.1.1, Ví dụ 1)).

Giả sử $\varphi \in E^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$. Ta có :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = \varphi &\Leftrightarrow \left(\forall j \in \{1, \dots, n\}, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right)(e_j) = \varphi(e_j) \right) \\ &\Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, n\}, \lambda_j = \varphi(e_j)). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ là một cơ sở của E^* , ngoài ra : $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$. ■

Kết quả trên đây là trường hợp đặc biệt của Mệnh đề, Tập 5, 7.3.2.

♦ **Hệ quả**

E^* hữu hạn chiều, và $\dim(E^*) = \dim(E)$.

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E . $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ là đối ngẫu của nó. Ta có :

$$1) \forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* \quad 2) \forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i.$$

Chứng minh :

Tính chất thứ nhất vừa được chứng minh trong phép chứng minh định lý ở trên.

Tính chất thứ hai diễn tả định nghĩa các dạng-tọa độ $e_1^*, \dots, e_n^*$. ■

Nhận xét :

Giả sử $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E , $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ là đối ngẫu của nó.

Với mọi $x \in E$ và mọi $\varphi \in E^*$, ta có :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \langle e_i, \varphi \rangle e_i^*, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i, \quad \langle x, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle \langle e_i, \varphi \rangle. \quad \blacksquare$$

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử B là một cơ sở của E , B^* là đối ngẫu của nó, $x \in E$, $\varphi \in E^*$, $X = \text{Mat}_B(x)$, $U = \text{Mat}_{B^*}(\varphi)$. Khi đó ta có : $\varphi(x) = {}^tUX$.

Chứng minh :

Ký hiệu $B = (e_1, \dots, e_n)$, $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$.

$$\forall \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* \text{ nên ta có : } U = \text{Mat}_{B^*}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix}.$$

Với ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ta có :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^tUX.$$

Nhận xét :

Mệnh đề trên đây cho ta nhận xét rằng với cơ sở chính tắc của K (K -kgv có số chiều bằng 1) ký hiệu là $B_0 = (1)$, ta có :

$$\forall \varphi \in E^*, \text{Mat}_{B^*}(\varphi) = {}^t(\text{Mat}_{B, B_0}(\varphi)).$$

♦ **Mệnh đề 3 (Đổi cơ sở đối với đối ngẫu)**

Giả sử B, B' là hai cơ sở của E , P là ma trận chuyển từ B sang B' . Khi đó ma trận chuyển từ B^* sang B'^* là ${}^tP^{-1}$.

Chứng minh :

Ký hiệu $B = (e_1, \dots, e_n)$, $B' = (f_1, \dots, f_n)$, $P = (p_{ij})_{ij}$ là ma trận chuyển từ B sang B' , $Q = (q_{ij})_{ij}$ là ma trận chuyển từ B^* sang B'^* . $\forall (j, k) \in \{1, \dots, n\}^2$, ta có :

$$\delta_{jk} = f_j^*(f_k) = \left(\sum_{i=1}^n q_{ij} e_i^* \right) \left(\sum_{l=1}^n p_{lk} e_l \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ij} p_{lk} \delta_{il} = \sum_{i=1}^n q_{ij} p_{ik}.$$

Điều này chứng tỏ : ${}^tQP = I_n$, do vậy $Q = {}^tP^{-1}$. ■

Một chứng minh khác, sử dụng phép chuyển vị các ánh xạ tuyến tính, xem 1.1.5, *Nhận xét 2)* dưới đây.

VÍ DỤ:

1) Chứng minh rằng các vectơ $V_1 = (2, 1, 4)$, $V_2 = (3, 2, 3)$, $V_3 = (-1, -1, 2)$ thuộc $\mathbb{R}^3$ tạo thành một cơ sở và xác định cơ sở đối ngẫu của nó.

Do $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ khả nghịch nên $B = (V_1, V_2, V_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và với ký

hiệu $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ma trận chuyển từ $B_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$

sang $B^* = (V_1^*, V_2^*, V_3^*)$ là: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ -9 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta kết luận rằng V_1^*, V_2^*, V_3^* là các dạng tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} V_1^*(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 9x_2 - x_3 \\ V_2^*(x_1, x_2, x_3) = -6x_1 + 8x_2 + x_3 \\ V_3^*(x_1, x_2, x_3) = -5x_1 + 6x_2 + x_3 \end{cases}$$

2) Đa thức nội suy Lagrange

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \dots, x_n \in K$, từng đôi một khác nhau.

Với mỗi i thuộc $\{0, \dots, n\}$, ký hiệu $L_i = \frac{1}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - x_j)$

(xem Ví dụ, 5.3.1, Tập 5).

Ta chứng tỏ rằng $(L_0, \dots, L_n)$ là một cơ sở của $K_n[X]$ (K -kgv các đa thức bậc $\leq n$ của $K[X]$), và xác định cơ sở đối ngẫu của nó.

• Giả sử $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ sao cho $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$.

Ta có: $\forall j \in \{0, \dots, n\}$, $0 = \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i \right)(x_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_j) = \lambda_j$.

Điều này chứng tỏ rằng $(L_0, \dots, L_n)$ độc lập tuyến tính.

Do $\dim(K_n[X]) = n + 1$, nên $(L_0, \dots, L_n)$ là một cơ sở của $K_n[X]$.

• Giả sử $P \in K_n[X]$. Vì $B = (L_0, \dots, L_n)$ là một cơ sở của $K_n[X]$, nên tồn tại

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1} \text{ sao cho } P = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i.$$

$$\text{Ta có: } \forall j \in \{0, \dots, n\}, P(x_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j, \text{ vì vậy } P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i.$$

$$\text{Tiếp đó: } \forall i \in \{0, \dots, n\}, L_i^*(P) = \sum_{j=0}^n P(x_j) L_i^*(L_j) = P(x_i).$$

Ta kết luận: Với mọi i thuộc $\{0, \dots, n\}$, L_i^* là định giá tại x_i , $L_i^* : K_n[X] \xrightarrow{P \mapsto P(x_i)} K$. ■

Ký hiệu $\beta(E)$ (tương ứng $\beta(E^*)$) là tập hợp các cơ sở của E (tương ứng E^*).
 Định lý - Định nghĩa §1.1.4, cho phép xác định một ánh xạ $d : \beta(E) \rightarrow \beta(E^*)$
 $B \mapsto B^*$

liên kết mỗi cơ sở B của E với cơ sở đối ngẫu B^* của nó.

Ta sẽ chứng minh rằng d là một song ánh.

a) K -kgv E có ít nhất một cơ sở B_0 (xem Định lý - Định nghĩa 1, 6.4, Tập 5)

Giả sử $\mathcal{F}$ là một cơ sở của E^* . Ký hiệu $Q = \text{Pass}(B_0^*, \mathcal{F})$, $P = 'Q^{-1}'$, B là cơ sở của E sao cho $\text{Pass}(B_0, B) = P$. Theo Mệnh đề ở trên, vì $Q = 'P^{-1}'$, ta có: $\mathcal{F} = B^* = d(B)$.

Điều này chứng tỏ d là toàn ánh.

• b) Giả sử B_1, B_2 là hai cơ sở của E sao cho $B_1^* = B_2^*$. Ma trận P chuyển từ B_1 sang B_2 thỏa mãn $'P^{-1} = I_n$ do đó $P = I_n$, $B_2 = B_1$.

Điều này chứng tỏ d là đơn ánh.

Tóm tắt nghiên cứu trên :

- ♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 4** Với mọi cơ sở $\mathcal{F}$ của E^* , tồn tại duy nhất một cơ sở B của E sao cho $\mathcal{F} = B^*$; B được gọi là cơ sở tiền đối ngẫu (hay đối ngẫu) của $\mathcal{F}$, và ta nói rằng B và $\mathcal{F}$ là các cơ sở đối ngẫu với nhau.

VÍ DỤ :

Ký hiệu $\mathbb{R}$ -kgv các đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ với bậc ≤ 3 là $E = \mathbb{R}_3[X]$ và $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ là các dạng tuyến tính trên E xác định bởi :

$$\forall P \in E, (\varphi_1(P) = P(0), \varphi_2(P) = P(1), \varphi_3(P) = P''(0), \varphi_4(P) = P''(1)).$$

Chứng tỏ rằng $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ là một cơ sở của E^* và xác định cơ sở đối ngẫu của nó.

Ta ký hiệu $B_0 = (1, X, X^2, X^3)$ là cơ sở chính tắc của E .

Khi đó $\text{Mat}_{B_0^*}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ khả nghịch, vậy $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ là

một cơ sở của E^* .

Ký hiệu B là cơ sở tiền đối ngẫu của $\mathcal{F}$, $Q = \text{Pass}(B_0^*, \mathcal{F})$, $P = \text{Pass}(B_0, B)$ ta có :

$$P = {}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Cuối cùng, cơ sở tiền đối ngẫu của $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ là :

$$\left(1-X, \quad X, \quad -\frac{1}{6}X + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X^3, \quad -\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}X^3 \right).$$

♦ Mệnh đề 5

- 1) Với mọi kgvc A của E : $\dim(A^\perp) = \dim(E) - \dim(A)$.
- 2) Với mọi kgvc L của E^* : $\dim({}^oL) = \dim(E) - \dim(L)$.

Chứng minh :

1) Kgvc A của E có ít nhất một cơ sở $(e_1, \dots, e_p)$ với $p = \dim(A)$. Theo định lý về cơ sở không đầy đủ, dạng yếu (xem Tập 5, 6.4, Định lý 2) tồn tại $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ (trong đó $n = \dim(E)$) sao cho $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E .

Giả sử $\varphi \in E^*$. Theo 1.1.4, Mệnh đề 1, ta có : $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

Ta cũng có : $\varphi \in A^\perp \Leftrightarrow \varphi \in \{e_1, \dots, e_p\}^\perp \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, p\}, \varphi(e_i) = 0)$.

$$\Leftrightarrow \varphi = \sum_{i=p+1}^n \varphi(e_i) e_i^* \Leftrightarrow \varphi \in \text{Vect}(\{e_{p+1}^*, \dots, e_n^*\}).$$

Như vậy $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ sinh $A^\perp$. Hơn nữa $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ độc lập tuyến tính vì bao hàm trong cơ sở B^* .

Vậy $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ là một cơ sở của $A^\perp$, từ đó $\dim(A^\perp) = n - p = \dim(E) - \dim(A)$.

2) Chứng minh tương tự.

- ♦ **Hệ quả** Với mọi kgvc A, B của E và L, M của E^* :
- | | |
|---|--|
| 1) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$. | 1') ${}^\circ(L \cap M) = {}^\circ L + {}^\circ M$. |
| 2) ${}^\circ(A^\perp) = A$. | 2') $({}^\circ L)^\perp = L$. |
| | 3') ${}^\circ(E^*) = \{0_E\}$. |

Chứng minh :

1) Ta đã có $(A \cap B)^\perp \supset A^\perp + B^\perp$ (xem 1.1.3, Mệnh đề 7). Hơn nữa :

$$\begin{aligned} \dim(A^\perp + B^\perp) &= \dim(A^\perp) + \dim(B^\perp) - \dim(A^\perp \cap B^\perp) \\ &= \dim(A^\perp) + \dim(B^\perp) - \dim((A + B)^\perp) \\ &= (n - \dim(A)) + (n - \dim(B)) - (n - \dim(A + B)) \\ &= n - (\dim(A) + \dim(B) - \dim(A + B)) \\ &= n - (\dim(A \cap B)) = \dim((A \cap B)^\perp). \end{aligned}$$

1') Tương tự 1).

2) Ta đã có $A \subset {}^\circ(A^\perp)$ (xem 1.1.3, Mệnh đề 8)).

Hơn nữa : $\dim({}^\circ(A^\perp)) = n - \dim(A^\perp) = n - (n - \dim(A)) = \dim(A)$.

2') Tương tự 2).

3') $\dim({}^\circ(E^*)) = n - \dim(E^*) = n - \dim(E) = 0$. ■

Ánh xạ tuyến tính gắn với một họ hữu hạn các vectơ của E hay của E^*

Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều.

1) Giả sử $p \in \mathbb{N}^*, (e_1, \dots, e_p) \in E^p$.

Xét ánh xạ $u : E^* \rightarrow K^p$, $\varphi \mapsto (\varphi(e_i))_{1 \leq i \leq p}$, rõ ràng u là tuyến tính.

Ta có : $\text{Ker}(u) = \{\varphi \in E^* ; \forall i \in \{1, \dots, p\}, \varphi(e_i) = 0\} = \{e_1, \dots, e_p\}^\perp = (\text{Vect}(e_1, \dots, e_p))^\perp$,
vậy $\text{rank}(u) = \dim(E^*) - \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)) = \text{rank}(e_1, \dots, e_p)$.

• Đặc biệt :

(u toàn ánh) $\Leftrightarrow \text{rank}(u) = p \Leftrightarrow \text{rank}(e_1, \dots, e_p) = p \Leftrightarrow (e_1, \dots, e_p)$ độc lập tuyến tính.

Giả sử u là toàn ánh, thì :

$$\begin{cases} \text{codim}(\text{Ker}(u)) = \dim(E^*) - \dim(\text{Ker}(u)) = \text{rank}(e_1, \dots, e_p) = p \\ {}^\circ(\text{Ker}(u)) = {}^\circ((\text{Vect}(e_1, \dots, e_p))^\perp) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p), \end{cases}$$

vậy $\text{Ker}(u)$ có số đối chiều p , và mọi phần tử của E trên đó các phần tử của $\text{Ker}(u)$ triệt tiêu đều là tổ hợp tuyến tính của $e_1, \dots, e_p$.

• Cuối cùng, $(e_1, \dots, e_p)$ là một cơ sở của E khi và chỉ khi : $p = n$ và u là một đẳng cấu của kgv.

Ứng dụng : Xây dựng một họ phương trình của một kgvc của E

Giả sử F là một kgvc của E , $p = \dim(F)$, $(e_1, \dots, e_p)$ là một cơ sở của F . Xét ánh xạ tuyến tính $u: E \rightarrow K^p$, là một toàn ánh (xem phần trên).
 $\varphi \mapsto (\varphi(e_i))_{1 \leq i \leq p}$

Ta đã thấy : $\dim(\text{Ker}(u)) = n - p$;

Vậy tồn tại một cơ sở $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-p})$ của $\text{Ker}(u)$. Vì $\text{Ker}(u) = F^\perp$, nên ta được với mọi x

thuộc $E: x \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-p}(x) = 0 \end{cases}$, hệ này lập nên một họ phương trình của F .

2) Giả sử $p \in \mathbb{N}^*$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$.

Ta xét ánh xạ $v: E \rightarrow K^p$, rõ ràng v là tuyến tính.
 $x \mapsto (\varphi_i(x))_{1 \leq i \leq p}$

Ta có : $\text{Ker}(v) = \{x \in E; \forall i \in \{1, \dots, p\}, \varphi_i(x) = 0\} = {}^o\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\} = {}^o(\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p))$,

vậy $\text{rank}(v) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(v)) = \dim(\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)) = \text{rank}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

• Đặc biệt :

$(v \text{ toàn ánh}) \Leftrightarrow \text{rank}(v) = p \Leftrightarrow \text{rank}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = p \Leftrightarrow (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \text{ độc lập tuyến tính.}$

Giả sử v là toàn ánh, thì :

$$\begin{cases} \text{codim}(\text{Ker}(v)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(v)) = \text{rank}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = p \\ (\text{Ker}(v))^\perp = ({}^o(\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)))^\perp = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \end{cases}$$

Vậy $\text{Ker}(v)$ có số đối chiều p , và mọi dạng tuyến tính triệt tiêu trên $\text{Ker}(v)$ đều là tổ hợp tuyến tính của $\varphi_1, \dots, \varphi_p$.

• Cuối cùng $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ là một cơ sở của E^* khi và chỉ khi: $p = n$ và v là một đẳng cấu của kgv.

Ứng dụng : Giao của một họ hữu hạn các siêu phẳng

Giả sử $p \in \mathbb{N}^*$, $H_1, \dots, H_p$ là những siêu phẳng của E , $F = \bigcap_{i=1}^p H_i$.

Với mỗi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, tồn tại $\varphi_i \in E^* - \{0\}$ (duy nhất với sai khác một hệ số khác

không) sao cho $H_i = \text{Ker}(\varphi_i)$. Ta có, với mọi x thuộc $E: x \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_p(x) = 0 \end{cases}$

hệ này lập nên một họ phương trình của F .

Hạng của hệ tuyến tính $\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_p(x) = 0 \end{cases}$ bằng p khi và chỉ khi $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ độc lập tuyến tính.

Bài tập

- ◇ 1.1.10 Cho $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \end{cases}$$

với mọi (x_1, x_2, x_3) thuộc $\mathbb{R}^3$.

Chứng minh rằng $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ là một cơ sở của $(\mathbb{R}^3)^*$ và xác định cơ sở tiền đối ngẫu của nó.

- ◇ 1.1.11 Giả sử $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi :

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = x + \alpha y + \beta z \\ \varphi_2(x, y, z) = \alpha x + \alpha^2 y + z \\ \varphi_3(x, y, z) = \beta x + y + \alpha^2 z \end{cases}$$

với mọi (x, y, z) thuộc $\mathbb{R}^3$.

a) Tìm điều kiện cần và đủ cho (α, β) để $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ là một cơ sở của $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) Khi $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ là một cơ sở của $(\mathbb{R}^3)^*$, hãy xác định cơ sở tiền đối ngẫu của nó.

- ◇ 1.1.12 Với mọi k thuộc $\mathbb{N}$ và mọi K -kgv E , ta ký hiệu $G_k(E)$ là tập hợp các kgvc của E với số chiều k . Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E)$, $p \in \{0, \dots, n\}$. Chứng minh rằng các ánh xạ $A \mapsto A^\perp, L \mapsto {}^\perp L$ là những song ánh ngược nhau giữa $G_p(E)$ và $G_{n-p}(E^*)$.

- ◇ 1.1.13 Cho $n \in \mathbb{N}^*, E = \mathbb{C}_n[X]$ là $\mathbb{C}$ -kgv các đa thức thuộc $\mathbb{C}[X]$ với bậc $\leq n, a \in \mathbb{C}$.

Với mọi i, j thuộc $\{0, \dots, n\}$, ta ký hiệu: $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{C}_1$ và $e_j = (X - a)^j$.
 $P \mapsto \frac{1}{i!} P^{(i)}(a)$

Chứng minh rằng $(e_0, \dots, e_n)$ và $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ là hai cơ sở tương ứng của E và E^* , đối ngẫu với nhau. Bằng cách này tìm lại công thức Taylor cho các đa thức.

- ◇ 1.1.14 Cho $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng, với mọi A thuộc $M_n(K)$, ánh xạ $M_n(K) \rightarrow K$ $X \mapsto \text{tr}(AX)$ là một phần tử của $(M_n(K))^*$ rồi chứng minh ánh xạ $\theta : M_n(K) \rightarrow (M_n(K))^*$ xác định bởi :

$$\forall A \in M_n(K), \forall X \in M_n(K), (\theta(A))(X) = \text{tr}(AX)$$

là một đẳng cấu của K -kgv.

- ◇ 1.1.15 Cho $n \in \mathbb{N}^*, (f_1, \dots, f_n)$ là một họ độc lập tuyến tính trong $K^X, V = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

a) Với mọi a thuộc K , ta ký hiệu $E_a: V \rightarrow K$ và $L = \text{Vect}((E_a)_{a \in K})$. Chứng minh: $L = V^*$.

b) Từ đó suy ra rằng tồn tại $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ sao cho $(f_i(a_j))_{ij} \in \text{GL}_n(K)$.

♦ 1.1.16 Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E)$.

a) Cho $p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1} \in E^*$. Chứng minh rằng nếu $\varphi_{p+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ thì:

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{p+1} \text{Ker}(\varphi_i).$$

b) Cho $q \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_q \in E^*$, $r = \text{rank}(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$. Chứng minh:

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^q \text{Ker}(\varphi_i) \right) = n - r.$$

c) Từ đó suy ra rằng với mọi họ $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ gồm n phần tử của E^* , $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi:

$$\exists x \in E - \{0\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \varphi_i(x) = 0.$$

1.1.5 Chuyển vị

Trong §1.1.5 này, E, F, G chỉ các K -kgv.

♦ **Định nghĩa** Giả sử E, F là hai K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Ta gọi ánh xạ từ F^* vào E^* ký hiệu là f' và xác định bởi: $\forall \psi \in F^*, f'(\psi) = \psi \circ f$, là **chuyển vị** của f .

Với mọi ψ thuộc F^* , hiển nhiên $\psi \circ f$ là một phần tử của E^* .

Với ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ của § 1.1.3 (móc đối ngẫu), ta có:

$$\forall x \in E, \forall \psi \in F^*, \langle f(x), \psi \rangle = \langle x, f'(\psi) \rangle.$$

♦ **Mệnh đề 1**

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), f' \in \mathcal{L}(F^*, E^*).$$

Chứng minh:

Với mọi λ thuộc K , ψ, ψ' thuộc F^* :

$$f'(\lambda \psi + \psi') = (\lambda \psi + \psi') \circ f = \lambda \psi \circ f + \psi' \circ f = \lambda f'(\psi) + f'(\psi').$$

◆ **Mệnh đề 2**

$$1) \forall \lambda \in K, \forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F), {}^t(\lambda f_1 + f_2) = \lambda {}^t f_1 + {}^t f_2.$$

$$2) \forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), {}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g.$$

$$3) {}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}_{E^*}.$$

3) Nếu f là một đẳng cấu từ E lên F , thì ${}^t f$ là một đẳng cấu từ F^* lên E^* , và :

$$({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1}).$$

Chứng minh :

$$1) \forall \psi \in F^*, {}^t(\lambda f_1 + f_2)(\psi) = \psi \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda \psi \circ f_1 + \psi \circ f_2 = \lambda {}^t f_1(\psi) + {}^t f_2(\psi) \\ = (\lambda {}^t f_1 + {}^t f_2)(\psi).$$

$$2) \forall \eta \in G^*, {}^t(g \circ f)(\eta) = \eta \circ (g \circ f) = (\eta \circ g) \circ f = {}^t f(\eta \circ g) = {}^t f({}^t g(\eta)) = ({}^t f \circ {}^t g)(\eta).$$

$$3) \forall \varphi \in E^*, {}^t(\text{Id}_E)(\varphi) = \varphi \circ \text{Id}_E = \varphi.$$

$$4) \begin{cases} f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \\ f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^t(f^{-1} \circ f) = {}^t(\text{Id}_E) \\ {}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t(\text{Id}_F) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = \text{Id}_{E^*} \\ {}^t(f^{-1}) \circ {}^t f = \text{Id}_{F^*} \end{cases}$$

Vậy ${}^t f$ là một đẳng cấu của K -kgv từ F^* lên E^* , và $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$. ■

◆ **Mệnh đề 3** Giả sử E, F là hai K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ (tương ứng : $\mathcal{C}$) là một cơ sở của E (tương ứng : F), $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$. Thế thì :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t A.$$

Chứng minh :

Ký hiệu $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, $A = (a_{ij})_{ij}$.

Ta có, với mọi (i, j) thuộc $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$:

$$({}^t f({}^t f_i))(e_j) = ({}^t f_i \circ f)(e_j) = f_i \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} f_k \right) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij}$$

$$\text{và } \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} e_k^* \right)(e_j) = \sum_{k=1}^p a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}.$$

$$\text{Vậy } \forall i \in \{1, \dots, n\}, {}^t f({}^t f_i) = \sum_{k=1}^p a_{ik} e_k^*.$$

điều này chứng tỏ : $\text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t A.$

Nhận xét :

1) Kết quả trên biện minh cho ký pháp ${}^t f$ với $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

2) Giả sử B, B' là hai cơ sở của E . Ta có :

$$\begin{aligned} \text{Pass}(B^*, B'^*) &= \text{Mat}_{B'^*, B^*}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{B'^*, B^*}({}^t(\text{Id}_E)) \\ &= {}^t(\text{Mat}_{B, B'}(\text{Id}_E)) = {}^t\text{Pass}(B, B') = ({}^t\text{Pass}(B, B'))^{-1}. \end{aligned}$$

Ta thấy lại Mệnh đề 3, 1.1.4.

3) Bởi vì $(\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(K), \text{rank}({}^t A) = \text{rank}(A))$, xem hệ quả phần 8.2.3, Tập 5, ta suy ra : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \text{rank}({}^t f) = \text{rank}(f)$, nếu E và F là các K -kgv hữu hạn chiều.

♦ **Mệnh đề 4** Giả sử E, F là hai K -kgv hữu hạn chiều. Ánh xạ $t : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$
 $f \mapsto {}^t f$
 là một đẳng cấu của K -kgv.

Chứng minh :

• Theo mệnh đề 2 1), t là tuyến tính.

• Giả sử $f \in \mathcal{L}(E, F)$ sao cho ${}^t f = 0$. Các K -kgv E, F có các cơ sở B, C và với ký hiệu $A = \text{Mat}_{B, C}(f)$, ta có ${}^t A = \text{Mat}_{C^*, B^*}({}^t f) = 0$, từ đây $A = {}^t A = 0$, vậy $f = 0$.

• Vì t là đơn ánh tuyến tính và $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{L}(F^*, E^*))$
 $(= \dim(E) \times \dim(F))$, nên ta kết luận rằng t là một đẳng cấu của K -kgv.

Bài tập

♦ 1.1.17 Cho E là $\mathbb{R}$ -kgv $\mathbb{R}[X]$, $f: E \rightarrow E$, $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{matrix} P \mapsto XP \\ P \mapsto P'(0) \end{matrix}$$
 Hãy tính $f(\varphi)$.

♦ 1.1.18 Cho E, F là hai K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) Chứng minh: $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$ và $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$.

b) Hãy chứng minh rằng, nếu E và F hữu hạn chiều, thì có đẳng thức trong bao hàm thức của a) và: $\text{rank}(f) = \text{rank}(f)$.

c) Với việc thừa nhận rằng tất cả các kgv của một kgv đều có ít nhất một phần bù trong kgv này, hãy chứng minh có đẳng thức trong bao hàm thức của a) (dù E là hữu hạn chiều hay không). Có thể sử dụng bài tập 7.2.18 a), Tập 5.

♦ 1.1.19 Cho E, F là hai K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Chứng minh:

a) f đơn ánh $\Leftrightarrow f$ toàn ánh

b) f toàn ánh $\Leftrightarrow f$ đơn ánh

c) f song ánh $\Leftrightarrow f$ song ánh.

(Có thể sử dụng bài tập 1.1.18).

1.2 Khối

Giả sử

- $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$.
- $s, t \in \mathbb{N}^*$, $(n_1, \dots, n_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$, $(p_1, \dots, p_t) \in (\mathbb{N}^*)^t$ sao cho $n_1 + \dots + n_s = n$ và $p_1 + \dots + p_t = p$.
- $n_0 = p_0 = 0$.
- $\delta_k = \sum_{i=0}^k n_i$ với $k \in \{0, \dots, s\}$.
- $\tau_l = \sum_{j=0}^l p_j$ với $l \in \{0, \dots, t\}$.

Trong A , ta nhóm các phần tử “theo khối” :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1\tau_1} & a_{1\tau_1+1} & \dots & a_{1\tau_2} & \dots & a_{1\tau_{t-1}+1} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\delta_1} & \dots & a_{\delta_1\tau_1} & a_{\delta_1\tau_1+1} & \dots & a_{\delta_1\tau_2} & \dots & a_{\delta_1\tau_{t-1}+1} & \dots & a_{\delta_1p} \\ \hline a_{\delta_1+1} & & a_{\delta_1+1\tau_1} & a_{\delta_1+1\tau_1+1} & \dots & a_{\delta_1+1\tau_2} & \dots & a_{\delta_1+1\tau_{t-1}+1} & \dots & a_{\delta_1+1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\delta_2} & \dots & a_{\delta_2\tau_1} & a_{\delta_2\tau_1+1} & \dots & a_{\delta_2\tau_2} & \dots & a_{\delta_2\tau_{t-1}+1} & \dots & a_{\delta_2p} \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{\delta_{s-1}+1} & \dots & a_{\delta_{s-1}+1\tau_1} & a_{\delta_{s-1}+1\tau_1+1} & \dots & a_{\delta_{s-1}+1\tau_2} & \dots & a_{\delta_{s-1}+1\tau_{t-1}+1} & \dots & a_{\delta_{s-1}+1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n_0} & \dots & a_{n_0\tau_1} & a_{n_0\tau_1+1} & \dots & a_{n_0\tau_2} & \dots & a_{n_0\tau_{t-1}+1} & \dots & a_{n_0p} \end{array} \right)$$

Với $(k, l) \in \{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, t\}$, ma trận

$$B_{kl} = \begin{pmatrix} a_{\delta_{k-1}+1\tau_{l-1}+1} & \dots & a_{\delta_{k-1}+1\tau_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\delta_k\tau_{l-1}+1} & \dots & a_{\delta_k\tau_l} \end{pmatrix}$$

thuộc $\mathbf{M}_{n_k p_l}(K)$, được gọi là khối thứ (k, l) trong phân tích của A thành các khối theo cách cắt $(n_1, \dots, n_s)$ theo hàng và $(p_1, \dots, p_t)$ theo cột :

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{B_{11}} & & \boxed{B_{1t}} & \\ \vdots & \boxed{} & \vdots & \\ \boxed{B_{s1}} & & \boxed{B_{st}} & \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \text{ hàng} \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \text{ hàng} \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} \leftrightarrow & & \leftrightarrow \\ p_1 \text{ cột} & \dots & p_t \text{ cột} \end{array}$

Để thuận tiện ta sẽ bỏ các nét chỉ ra cách cắt.

Một vài ví dụ về việc phân tích thành khối :

$$\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1,1}(K), \text{ với } x \in K, X \in \mathbf{M}_{n,1}(K).$$

$$(X \ Y) \in \mathbf{M}_{n,p+q}(K), \text{ với } X \in \mathbf{M}_{n,p}(K), Y \in \mathbf{M}_{n,q}(K).$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+p}(K), \text{ với } A \in \mathbf{M}_n(K), B \in \mathbf{M}_{n,p}(K), C \in \mathbf{M}_{p,n}(K), D \in \mathbf{M}_p(K).$$

$$\begin{pmatrix} a & L \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(K), \text{ với } a \in K, L \in \mathbf{M}_{1,n}(K), C \in \mathbf{M}_{n,1}(K), B \in \mathbf{M}_n(K).$$

Nhận xét :

1) Trừ các ngoại lệ, nếu A là ma trận vuông thì ta chỉ sử dụng việc phân tích thành các khối sao cho $s = t$ và $(n_1, \dots, n_s) = (p_1, \dots, p_s)$:

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_1 \text{ hàng} \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \text{ hàng} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \longleftrightarrow n_1 \text{ cột} & \cdots & \longleftrightarrow n_s \text{ cột} \end{matrix}$$

Trong trường hợp này các khối B_{ik} ($k \in \{1, \dots, s\}$) được gọi là các khối **chéo** của phân tích A thành khối (các khối chéo này cũng vuông).

2) Giả sử E là K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E)$, F là một kgvc của E , $p = \dim(F)$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Để cho F ổn định đối với f , điều kiện cần và đủ là tồn tại một cơ sở $B = (e_1, \dots, e_n)$ của E sao cho :

$$\left\{ \begin{array}{l} (e_1, \dots, e_p) \text{ là một cơ sở của } F \\ \text{Mat}_B(f) \text{ có dạng } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{matrix} \longleftrightarrow p & \longleftrightarrow n-p \end{matrix}$$

Hơn nữa, trong trường hợp này, A là ma trận trong $(e_1, \dots, e_p)$ của tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên F . Như vậy, sự hiện diện của một số khối 0 trong việc phân tích thành khối có thể diễn tả tính ổn định của một kgvc.

Để dàng chứng minh mệnh đề sau đây.

♦ **Mệnh đề 1 (Phép cộng và luật ngoài theo khối)**

Giả sử $\lambda \in K$, $A, B \in M_{n,p}(K)$.

Nếu A và B được phân tích thành khối với cùng cách cắt, thì $\lambda A + B$ cũng thừa nhận việc phân tích thành khối (với cùng cách cắt) thu được bằng việc tổ hợp các khối nằm ở cùng vị trí:

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + B_{11} & \cdots & \lambda A_{1t} + B_{1t} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda A_{s1} + B_{s1} & \cdots & \lambda A_{st} + B_{st} \end{pmatrix}$$

VÍ DỤ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}.$$

♦ **Định lý (Phép nhân theo khối)**

Giả sử $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t'} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s'1} & \cdots & B_{s't'} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n'_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n'_{s'} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \cdots & \leftrightarrow \\ p_1 & & p_t \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftrightarrow & \cdots & \leftrightarrow \\ p'_1 & & p'_{t'} \end{matrix}$$

là phân tích thành khối của A và B sao cho :

$$s' = t, \quad (n'_1, \dots, n'_{s'}) = (p_1, \dots, p_t).$$

Khi đó AB thừa nhận phân tích thành khối như sau:

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s'} A_{1j} B_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{s'} A_{1j} B_{j t'} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{s'} A_{sj} B_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{s'} A_{sj} B_{j t'} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \xleftarrow{p_1} & \cdots & \xleftarrow{p_{t'}} \end{matrix}$$

Nói cách khác:

- Ta có thể thực hiện phép nhân hai ma trận được phân tích thành khối bằng cách thao tác trên các khối xem như chúng là những phần tử của K , với điều kiện là các tích được xét tồn tại.

Chứng minh: (có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên)

Giả sử $(i, j') \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}$. Tồn tại duy nhất $(k, l') \in \{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, t'\}$ sao cho :

$$n_0 + \dots + n_{k-1} + 1 \leq i \leq n_0 + \dots + n_k \text{ và } p'_0 + \dots + p'_{l'-1} + 1 \leq j' \leq p'_0 + \dots + p'_{l'}.$$

Phần tử của AB nằm ở vị trí (i, j') có giá trị :

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jj'} = \sum_{j=1}^{p_1} a_{ij} b_{jj'} + \sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} a_{ij} b_{jj'} + \dots + \sum_{j=p_1+\dots+p_{l-1}+1}^p a_{ij} b_{jj'}$$

Nhưng $\sum_{j=1}^{p_1} a_{ij} b_{jj'}, \sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} a_{ij} b_{jj'}, \dots, \sum_{j=p_1+\dots+p_{l-1}+1}^p a_{ij} b_{jj'}$ tương ứng là các phần tử của

$A_{k1}B_{1l'}, A_{k2}B_{2l'}, \dots, A_{ks}B_{sl'}$ nằm tại vị trí :

$(i - (n_0 + \dots + n_{k-1}), j' - (p'_0 + \dots + p'_{l'-1}))$, từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

VÍ DỤ:

Giả sử $a, b \in K, V, W \in M_{n,1}(K), L \in M_{1,n}(K), A, B, C, D, A', B', C', D' \in M_n(K)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} (aL) \begin{pmatrix} b \\ V \end{pmatrix} &= (ab + LV) \in M_1(K) \\ \begin{pmatrix} b \\ V \end{pmatrix} (aL) &= \begin{pmatrix} ba & bL \\ aV & VL \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AV + BW \\ CV + DW \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(K) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \in M_{2n}(K). \end{aligned}$$

Nhận xét :

Khi thực hiện phép nhân theo khối, phải tôn trọng thứ tự của các ma trận trong phép nhân các khối. Chẳng hạn với $A, B, C, D \in M_n(K)$: $(A|B) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = AC + BD$ là khác với $CA + BD$.

Tuy nhiên, với $a \in K$, ta đã thấy rằng (xem Nhận xét 3, phần 8.1.4, Tập 5) có thể đồng nhất a và ma trận (a) thuộc $M_1(K)$. Như vậy, với mọi V thuộc $M_{n,1}(K)$, $aV = V(a)$; nhưng không tồn tại $(a)V$ (nếu $n \geq 2$).

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 2 (Chuyển vị theo khối)**

Với mọi sự phân tích thành khối, ta có :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & \cdots & {}^tA_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ {}^tA_{1r} & \cdots & {}^tA_{sr} \end{pmatrix}.$$

Nói cách khác, để chuyển vị một ma trận đã phân tích thành khối : ta đổi chỗ các khối (chẳng hạn, bằng cách viết chúng theo cột các khối thay vì theo hàng các khối).

VÍ DỤ :

Giả sử $a \in K, V \in M_{n,1}(K), A, B, C, D \in M_n(K)$.

Ta có :

$$\begin{pmatrix} a \\ V \end{pmatrix} = (a \ {}^tV), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$$

♦ **Mệnh đề 3** Giả sử $A \in M_n(K), B \in M_{n,p}(K), C \in M_p(K)$.
Ta có :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C).$$

Chứng minh :

Ta nhận thấy :
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

từ đó
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}.$$

Khai triển $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ đối với dòng thứ nhất, theo cách lập, ta thu được :

$$\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C).$$

Cũng vậy, bằng việc khai triển $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ đối với dòng cuối cùng, theo cách lập, ta thu được :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \det(A).$$

◆ **Định nghĩa**

- 1) • Ma trận vuông A được gọi là ma trận **tam giác trên** theo khối khi và chỉ khi nó thừa nhận việc phân tích thành khối sau đây:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}$$

sao cho : $\begin{cases} A_{11}, \dots, A_{ss} \text{ là các ma trận vuông} \\ \text{các khối nằm dưới đường chéo đều bằng không.} \end{cases}$

- Định nghĩa tương tự cho ma trận **tam giác dưới** theo khối.
 - Một ma trận vuông được gọi là ma trận **tam giác theo khối** khi và chỉ khi nó là ma trận tam giác trên theo khối hay tam giác dưới theo khối.
- 2) Một ma trận vuông A được gọi là ma trận **chéo** theo khối khi và chỉ khi nó thừa nhận sự phân tích thành khối :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}$$

sao cho : $\begin{cases} A_{11}, \dots, A_{ss} \text{ là các ma trận vuông} \\ \text{các khối không nằm trên đường chéo đều bằng không.} \end{cases}$

Khi đó ta có thể ký hiệu : $A = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{ss})$.

- ◆ **Mệnh đề 4** Định thức của ma trận tam giác theo khối bằng tích các định thức của các khối chéo :

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^s \det(A_{kk}) .$$

Chứng minh :

Quy nạp theo s bằng việc sử dụng Mệnh đề 3.

Như trong Tập 5, 8.3.2 và 8.3.3, ta chứng minh các kết quả sau :

- 1) Tập hợp các ma trận tam giác trên theo khối của $M_n(K)$ (với cùng cách cắt) là một đại số con có đơn vị của đại số có đơn vị $M_n(K)$.
Hơn nữa, các khối chéo của tích hai ma trận tam giác trên theo khối (với cùng cách cắt) là tích các khối chéo nằm ở cùng vị trí :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}B_{ss} \end{pmatrix}.$$

2) Giả sử A là ma trận tam giác trên theo khối :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

Để A khả nghịch (trong $M_n(K)$), cần và đủ là : $\forall k \in \{1, \dots, s\}$, $\det(A_{kk}) \neq 0$.

Hơn nữa, trong trường hợp đó, A^{-1} là ma trận tam giác trên theo khối, và các khối chéo của A^{-1} là nghịch đảo của các khối chéo của A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

3) Tập hợp các ma trận chéo theo khối của $M_n(K)$ (với cùng cách cắt) là một đại số có đơn vị (không nhất thiết giao hoán) của đại số con có đơn vị $M_n(K)$. Hơn nữa:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}B_{ss} \end{pmatrix}.$$

4) Giả sử A là ma trận chéo theo khối : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}.$

Để A khả nghịch (trong $M_n(K)$) cần và đủ là : $\forall k \in \{1, \dots, s\}$, $\det(A_{kk}) \neq 0$.

Hơn nữa, trong trường hợp đó, A^{-1} là chéo theo khối và :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Bài tập

♦ 1.2.1 Giả sử $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$, $C \in GL_p(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$

Chứng minh : $M \in GL_{n+p}(K)$ và tính M^{-1} dưới dạng phân tích thành khối.

♦ 1.2.2 Chứng minh: $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.

♦ 1.2.3' Giả sử $A, B, C, D, X \in M_n(K)$ sao cho $A + BX$ khả nghịch. Chứng minh:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A + BX) \det(-(C + DX)(A + BX)^{-1}B + D).$$

Xét trường hợp đặc biệt $X = 0$.

♦ 1.2.4 Giả sử E, F là hai K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(F)$, $p = \dim(E)$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $r = \text{rank}(f)$, $G = \{g \in \mathcal{L}(F, E); g \circ f = 0 \text{ và } f \circ g = 0\}$. Chứng minh rằng G là một K -kgv và tính số chiều của nó.

♦ 1.2.5' Giả sử $n, p \in \mathbb{N}^*$, $B \in M_{n,p}(K)$, $C \in M_p(K)$. Chứng minh: $\text{rank} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \text{rank}(C)$.

♦ 1.2.6' Giả sử $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,n}(K)$.

a) Hãy chứng minh: $n + \text{rank}(I_p - BA) = p + \text{rank}(I_n - AB)$ (có thể sử dụng bài tập 1.2.5)

b) Từ đó suy ra: $\text{rank}(I_n - AB) = n - p \Leftrightarrow BA = I_p$.

♦ 1.2.7 Giả sử $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(K)$, $B \in M_p(K)$. Chứng minh:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

♦ 1.2.8' Giả sử $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(K)$, $r = \text{rank}(A)$, $P \in M_n(K)$, $Q \in M_p(K)$ sao cho $PAQ = A$.

Chứng minh rằng tồn tại $R \in GL_r(K)$, $S \in M_{r,p-r}(K)$, $T' \in M_{p-r,r}(K)$, $U \in M_{n-r}(K)$, $U' \in M_{p-r}(K)$

sao cho $P \sim \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & U \end{pmatrix}$ và $Q \sim \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ T' & U' \end{pmatrix}$, ở đây $\sim$ ký hiệu cho sự đồng dạng giữa các ma trận vuông.

♦ 1.2.9' Giả sử E, F là hai K -kgv hữu hạn chiều, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Chứng minh rằng bốn tính chất sau đây đôi một tương đương:

(i) $\text{rank}(f + g) = \text{rank}(f) + \text{rank}(g)$.

(ii) $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f + g)$ và $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$.

(iii) $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$ và $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f + g)$.

(iv) Tồn tại $r, s \in \mathbb{N}$ và hai cơ sở B, C tương ứng của E, F sao cho:

$$\text{Mat}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } \text{Mat}_{B,C}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Dãy và chuỗi ma trận

Trong §1.3 này, $\mathbb{K}$ chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

1.3.1 Các chuẩn trên $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Giả sử $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Để thuận tiện cho độc giả, ta sẽ nhắc lại ở đây các định nghĩa và tính chất sơ cấp liên quan đến các chuẩn và các dãy trong một kgv định chuẩn (xem Chương 1, Tập 3).

Một chuẩn trên $\mathbb{K}$ -kgv $M_{n,p}(\mathbb{K})$ theo định nghĩa là một ánh xạ

$N : M_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn :

- (i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$
- (ii) $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), (N(A) = 0 \Rightarrow A = 0)$
- (iii) $\forall (A, B) \in (M_{n,p}(\mathbb{K}))^2, N(A + B) \leq N(A) + N(B).$

Chẳng hạn, các ánh xạ $N_1, N_2, N_\infty : M_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định với mọi $A = (a_{ij})$ thuộc $M_{n,p}(\mathbb{K})$ bởi :

$$N_1(A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|, \quad N_2(A) = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N_\infty(A) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|,$$

đều là các chuẩn trên $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Tất cả các chuẩn trên $M_{n,p}(\mathbb{K})$ đều tương đương (xem Tập 3, 1.3.4, Định lý 1), tức là, nếu N, N' là các chuẩn trên $M_{n,p}(\mathbb{K})$ thì tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho :

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \alpha N(A) \leq N'(A) \leq \beta N(A).$$

Bây giờ ta xét trường hợp đặc biệt $n = p$. Vì $M_n(\mathbb{K})$ là một đại số, ta sẽ quan tâm tới các chuẩn đại số trên $M_n(\mathbb{K})$, tức là (Tập 3, Định nghĩa, 1.1.1 4)) các chuẩn N trên $\mathbb{K}$ -kgv $M_n(\mathbb{K})$ sao cho :

$$\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2, N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Thay cho chuẩn đại số, ta cũng nói **chuẩn nhân** hay **chuẩn dưới - nhân**.

◆ Mệnh đề

Tồn tại ít nhất một chuẩn đại số trên $M_n(\mathbb{K})$.

Chứng minh:

Xét $N : \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$. Vì N_∞ là một chuẩn trên $\mathbb{K}$ -kgv $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ (và vì $n > 0$) nên rõ ràng rằng N là một chuẩn trên $\mathbb{K}$ -kgv $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Hơn nữa, với mọi $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{jk})_{jk}$ thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} N(A, B) &= n \max_{i,k} \left| \sum_j a_{ij} b_{jk} \right| \leq n \max_{i,k} \left(\sum_j |a_{ij}| |b_{jk}| \right) \\ &\leq n(n N_\infty(A) N_\infty(B)) = N(A) N(B). \end{aligned}$$

Nhận xét :

Theo Mệnh đề ở trên, và vì tất cả các chuẩn trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ đều tương đương, thông thường ta có thể đưa về trường hợp chuẩn đại số (xem Mệnh đề 1, phần 1.3.2 sau đây). ■

Các ánh xạ $\mathbb{K} \times \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 $(\lambda, A) \mapsto \lambda A \quad (A, B) \mapsto A + B$

$\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{K}), \quad \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{K})$,
 $(A, B) \mapsto AB \quad A \mapsto {}^t A$

$\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{C}), \quad (\text{Ở đây } A^* = \overline{{}^t A} \text{ là chuyển vị liên hợp của } A).$
 $A \mapsto A^*$

$\mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$
 $A \mapsto \text{tr}(A) \quad A \mapsto \det(A) \quad A \mapsto A^{-1}$

là liên tục.

Bằng ngôn ngữ của các dãy, ta có :

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \\ A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_n A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda A$$

$$\left\{ \begin{array}{c} A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \\ B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B \end{array} \right\} \Rightarrow A_n + B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A + B$$

$$\left\{ \begin{array}{c} A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \\ B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B \end{array} \right\} \Rightarrow A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$$

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \Rightarrow ({}^t A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} {}^t A, \quad A_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^*)$$

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \Rightarrow (\text{tr}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{tr}(A), \quad \det(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \det(A))$$

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \text{ trong } \mathbf{GL}_p(\mathbb{K}) \Rightarrow A_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^{-1}.$$

Bài tập

♦ 1.3.1 Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Ta trang bị cho $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ một chuẩn đại số $\|\cdot\|$.

a) Hãy chứng minh rằng, với mọi A thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ sao cho $\|A\| < 1$, thì chuỗi nhân $\sum_{k \geq 0} A^k$

hội tụ, $I_n - A$ khả nghịch trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, và $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}$ (xem Bài tập 3.4.8, Tập 3).

b) Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, sao cho $\|A\| < 1$. Hãy chứng minh rằng $I_n - A$, $I_n + A$, $I_n - A^2$ khả nghịch trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ và :

$$(I_n - A^2)^{-1} = \frac{1}{2} (I_n - A)^{-1} + \frac{1}{2} (I_n + A)^{-1}.$$

♦ 1.3.2' Cho $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh: $\forall (A, B) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{K}))^2$, $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$.

b) Chứng tỏ rằng $(\mathbf{GL}_n(\mathbb{K}))^2$ trù mật trong $(\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

c) Chứng minh: $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$.

1.3.2 Hàm mũ của ma trận

Để thuận tiện cho độc giả, ta sẽ nhắc lại ở đây định nghĩa và các tính chất sơ cấp đã xét trong phần 3.3.5 Tập 3 ; phần 7.3.6 3) Tập 4.

Ta biết rằng (xem 1.3.1 Mệnh đề) tồn tại ít nhất một chuẩn đại số $\|\cdot\|$ trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp theo k rằng :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \forall k \in \mathbb{N}^*, \|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

♦ **Mệnh đề 1**

Chuỗi ánh xạ $\sum_{k \geq 0} \left(\begin{array}{c} \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto \frac{1}{k!} A^k \end{array} \right)$ hội tụ theo chuẩn trên tất cả các tập con giới nội của $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Chứng minh :

Giả sử X là một tập con giới nội của $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$; tồn tại $M \in \mathbb{R}_+$ sao cho :

$$\forall A \in X, \|A\| \leq M.$$

Khi đó ta có :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall A \in X, \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \frac{M^k}{k!}.$$

Vì chuỗi số $\sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$ hội tụ nên chuỗi ánh xạ $\sum_{k \geq 0} \left(A \mapsto \frac{1}{k!} A^k \right)$ hội tụ theo chuẩn trên X .

- ◆ **Định nghĩa** Ta gọi ánh xạ từ $M_n(\mathbb{K})$ vào $M_n(\mathbb{K})$, ký hiệu là **exp** và xác định bởi :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

là hàm mũ.

Nhận xét:

$$1) \exp(0) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Rõ ràng nếu $n = 1$ và nếu ta đồng nhất một ma trận của $M_1(\mathbb{K})$ với phần tử duy nhất của nó thì ta thấy lại hàm mũ thực hay phức đã xác định trước đây. Vậy ta có thể ký hiệu e^A thay cho $\exp(A)$ với $A \in M_n(\mathbb{K})$.

◆ **Mệnh đề 2**

$$\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2, (AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A).$$

Chứng minh:

Theo chứng minh Định lý, Tập 3, 3.3.5 vì các chuỗi $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ và $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} B^k$ hội tụ tuyệt đối và $AB = BA$, nên chuỗi tích hội tụ tuyệt đối và có tổng là $e^A e^B$ và cũng là $e^B e^A$, và hạng thức tổng quát của nó là:

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} A^i \frac{1}{(k-i)!} B^{k-i} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i A^i B^{k-i} = \frac{1}{k!} (A+B)^k.$$

◆ **Hệ quả**

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), (e^A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ và } (e^A)^{-1} = e^{-A}).$$

◆ **Mệnh đề 3**

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P.$$

Chứng minh :

Với mọi N thuộc $\mathbb{N}$, ta có :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} P^{-1}A^kP = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) P.$$

Từ đây cho N dần tới $+\infty$ và sử dụng tính liên tục của $M \mapsto P^{-1}MP$ trên $M_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A) P. \quad \blacksquare$$

Mệnh đề trên cho phép định nghĩa hàm mũ của một tự đồng cấu f của một $\mathbb{K}$ -kgv E hữu hạn chiều : $\exp(f)$ là tự đồng cấu duy nhất của E sao cho với mọi cơ sở $\mathcal{B}$ của E , ma trận của nó trong $\mathcal{B}$ là $\exp(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

Bài tập

♦ 1.3.3 Hãy nêu một ví dụ về các ma trận A, B của $M_2(\mathbb{R})$ sao cho e^{A+B} , $e^A e^B$, $e^B e^A$ từng đôi một khác nhau.

♦ 1.3.4 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$. Hãy tính e^A .

♦ 1.3.5 Cho $(a, b, c, t) \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Hãy tính e^{At} .

♦ 1.3.6* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $N \in M_n(\mathbb{R})$ lũy linh.

a) Giả sử e^N là một ma trận tam giác trên và các phần tử chéo của nó bằng 1.

Chứng minh rằng N là một ma trận tam giác trên và các phần tử chéo của nó bằng 0.

b) Cho E, F là hai kgvc của $M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $E \subset F$. Hãy chứng tỏ :

$$(e^N - I_n)(F) \subset E \Rightarrow N(F) \subset E.$$

♦ 1.3.7* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Hãy chứng minh :

$$\left(I_n + \frac{1}{p}A\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} e^A.$$

Bổ sung

♦ C 1.1 Song đối ngẫu

Giả sử E là một K -kgv, ta gọi đối ngẫu của đối ngẫu của E là **song đối ngẫu** của E , và ký hiệu là E^{**} : $E^{**} = (E^*)^*$.

1) Chứng minh rằng, với mọi x thuộc E , ánh xạ $\begin{matrix} E^* \rightarrow K \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{matrix}$ là một dạng tuyến tính

mà ta sẽ ký hiệu là $\hat{x}$ hay $j_E(x)$. Như vậy, ta có :

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in E^*, (j_E(x))(\varphi) = \varphi(x),$$

hoặc bằng cách sử dụng móc đối ngẫu (ký hiệu theo cùng cách cho E , E^* và cho E^* , E^{**}) :

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, j_E(x) \rangle = \langle x, \varphi \rangle.$$

2) Chứng tỏ rằng $j_E: E \rightarrow E^{**}$ là tuyến tính.

3) Chứng tỏ rằng nếu E hữu hạn chiều, thì j_E là một đẳng cấu của K -kgv.

4) Với việc thừa nhận rằng tất cả các kgv của E đều có một phần bù trong E , hãy chứng tỏ rằng j_E là đơn ánh.

5) Hãy chứng minh với mọi kgv L của E^* : $j_E^{-1}(L^\square) = L^\circ$, với $L^\square$ là tập trực giao của L trong E^{**} .

6) Giả sử E, F là hai K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ là chuyển vị của f (xem Định nghĩa, 1.1.5), ${}^{tt} f \in \mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$ là chuyển vị của ${}^t f$.

Chứng minh rằng biểu đồ

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ j_E \downarrow & & \downarrow j_F \\ E^{**} & \xrightarrow{{}^{tt} f} & F^{**} \end{array}$$

là giao hoán,

nghĩa là : ${}^{tt} f \circ j_E = j_F \circ f$.

Chương 2

Phép thu gọn các tự đồng cấu và các ma trận vuông (nghiên cứu sơ bộ)

K chỉ một thể giao hoán.

2.1 Các phần tử riêng

♦ Định nghĩa

1) Giả sử E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Cho $\lambda \in K$. Ta nói rằng λ là một **giá trị riêng** (viết tắt : gtr) của (hoặc : đối với) f khi và chỉ khi :

$$\exists x \in E, (x \neq 0 \text{ và } f(x) = \lambda x).$$

Ta gọi tập hợp các giá trị riêng của f là **phổ** của f , và ký hiệu $\text{Sp}_K(f)$ (hay $\text{Sp}(f)$).

- Cho $x \in E$. Ta nói rằng x là một **vectơ riêng** (viết tắt : vtr) của (hoặc : đối với) f khi và chỉ khi :

$$x \neq 0 \text{ và } (\exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x).$$

2) Giả sử $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(K)$.

- Cho $\lambda \in K$. Ta nói rằng λ là một **giá trị riêng** (viết tắt : gtr) của (hoặc : đối với) A khi và chỉ khi :

$$\exists X \in \mathbf{M}_{n,1}(K), (X \neq 0 \text{ và } AX = \lambda X).$$

Ta gọi tập hợp các giá trị riêng của A là **phổ** của A , và ký hiệu $\text{Sp}_K(A)$ (hay $\text{Sp}(A)$).

- Cho $X \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$. Ta nói rằng X là một **vectơ riêng** (viết tắt : vtr) của (hoặc : đối với) A khi và chỉ khi :

$$X \neq 0 \text{ và } (\exists \lambda \in K, AX = \lambda X).$$

Các giá trị riêng và các vectơ riêng được gọi chung là **các phần tử riêng**.

Nhận xét :

1) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều $n, n \geq 1$, B là một cơ sở của $E, A = \text{Mat}_B(f)$. Khi đó :

- Với mọi λ thuộc K , λ là gtr của f khi và chỉ khi λ là gtr của A (nói cách khác : $\text{Sp}_K(f) = \text{Sp}_K(A)$).
- Với mọi x thuộc E , x là vtr của f khi và chỉ khi $\text{Mat}_B(x)$ là vtr của A .

Vậy trong trường hợp hữu hạn chiều, ta có thể chọn quan điểm "tự đồng cấu" hay quan điểm ma trận.

2) Theo định nghĩa, một vectơ riêng không bao giờ bằng không.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

◆ Mệnh đề 1

- 1) Giả sử E là K -kgv, $e = \text{Id}_E, \lambda \in K$; ta có :
 $\lambda \in \text{Sp}_K(f) \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda e) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda e$ không đơn ánh.
- 2) Giả sử $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(K), \lambda \in K$; ta có :

$$\lambda \in \text{Sp}_K(A) \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(K)$$

$$\Leftrightarrow \text{rank}(A - \lambda I_n) < n.$$

Đặc biệt, với mọi A thuộc $\mathbf{M}_n(K) : A \in \text{GL}_n(K) \Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}_K(A)$.

◆ Mệnh đề - Định nghĩa 2

- 1) Giả sử E là K -kgv, $e = \text{Id}_E, f \in \mathcal{L}(E)$.
 - Giả sử $\lambda \in K, x \in E - \{0\}$. Ta nói rằng λ và x là giá trị riêng và vectơ riêng liên kết khi và chỉ khi : $x \neq 0$ và $f(x) = \lambda x$.
 - Với mọi gtr λ của f , kgvc $\text{Ker}(f - \lambda e)$ của E được tạo thành từ các vtr của f liên kết với λ và vectơ không. Kgvc $\text{Ker}(f - \lambda e)$ này được gọi là không gian con riêng của f liên kết với giá trị riêng λ của f , và được ký hiệu là $\text{KGCR}(f, \lambda)$:

$$\text{KGCR}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda e).$$
- 2) Giả sử $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(K)$.
 - Giả sử $\lambda \in K, X \in \mathbf{M}_{n,1}(K) - \{0\}$. Ta nói rằng λ và X là giá trị riêng và vectơ riêng liên kết khi và chỉ khi : $X \neq 0$ và $AX = \lambda X$.
 - Với mọi gtr λ của A , kgvc $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ của $\mathbf{M}_{n,1}(K)$ được tạo thành từ vtr của A liên kết với λ và vectơ không. Kgvc $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ này được gọi là không gian vectơ con riêng của A liên kết với gtr λ của A , và được ký hiệu là $\text{KGCR}(A, \lambda)$:

$$\text{KGCR}(A, \lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Nhận xét :

1) Giả sử là E một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$. Vì $\forall x \in \text{KGCR}(f, \lambda)$, $f(x) = \lambda x$ nên $\text{KGCR}(f, \lambda)$ ổn định đối với f , và tự đồng cấu được cảm sinh bởi f trên $\text{KGCR}(f, \lambda)$ là một phép vị tự tỉ số λ : $\text{KGCR}(f, \lambda) \rightarrow \text{KGCR}(f, \lambda)$.

2) Giả sử E là K -kgv sao cho $E \neq \{0\}$. Với mọi α thuộc K , phổ của phép vị tự $h_\alpha: E \rightarrow E$ là $\{\alpha\}$, và $\text{KGCR}(h_\alpha, \alpha) = E$.

3) Giả sử E là K -kgv hữu hạn chiều với số chiều n , $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ là một cơ sở của E , $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$, $x \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Rõ ràng rằng :

$$x \in \text{KGCR}(f, \lambda) \Leftrightarrow X \in \text{KGCR}(A, \lambda).$$

VÍ DỤ:

$$\text{Giả sử } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

Hãy xác định các giá trị riêng và các vector riêng của A .

$$\text{Giả sử } \lambda \in \mathbb{R}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}. \text{ Ta có :}$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_1 + \dots + x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda \neq 0, x_1 = \dots = x_n, \lambda = n) \\ \text{hay} \\ (\lambda = 0, x_1 + \dots + x_n = 0) \end{cases}$$

Ta kết luận :

- $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, n\}$

- $\text{KGCR}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}); x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$, là một siêu phẳng

của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

- $\text{KGCR}(A, n) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, đường thẳng vector. ■

Ta sẽ thấy ở dưới đây (2.2) khả năng sử dụng đa thức đặc trưng để xác định các giá trị riêng của một ma trận vuông.

- ♦ **Mệnh đề 3** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ là các giá trị riêng của f (từng đôi phân biệt: $\text{Sp}_K(f) \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$). Khi đó các không gian con riêng của f liên kết với $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ có tổng trực tiếp.

Chứng minh :

Quy nạp theo N .

Tính chất là hiển nhiên với $N = 1$.

Giả sử tính chất đó đúng với N thuộc $\mathbb{N}^*$ và $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ là các giá trị riêng của f từng đôi phân biệt. Giả sử $(x_i)_{1 \leq i \leq N+1} \in E^{N+1}$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, N+1\}, & x_i \in \text{KGCR}(f, \lambda_i) \\ \sum_{i=1}^{N+1} x_i = 0 \end{cases}$$

Áp dụng f :
$$0 = \sum_{i=1}^{N+1} f(x_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i .$$

Như vậy :
$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_N + x_{N+1} = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = 0 \end{cases}$$

Từ đây, bằng cách tổ hợp : $(\lambda_{N+1} - \lambda_1)x_1 + \dots + (\lambda_{N+1} - \lambda_N)x_N = 0$.

Vì $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $(\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i \in \text{KGCR}(f, \lambda_i)$ và các không gian con riêng $\text{KGCR}(f, \lambda_i)$ ($1 \leq i \leq N$) có tổng trực tiếp (theo giả thiết quy nạp) ta suy ra :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, (\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i = 0.$$

Nhưng $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ từng đôi phân biệt, từ đây : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, x_i = 0$,

và cuối cùng:
$$x_{N+1} = - \sum_{i=1}^N x_i = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng các $\text{KGCR}(f, \lambda_i)$ ($1 \leq i \leq N+1$) có tổng trực tiếp.

Nhận xét:

Mặc dù tổng các KGCR liên kết với các gtr của một tự đồng cấu f của E là trực tiếp, tổng này không nhất thiết bằng E . (Xem Mệnh đề, § 2.3).

Bài tập

♦ 2.1.1 Cho E là một K -kgv, $f, g \in \mathcal{L}(E)$, sao cho $g \circ f = f \circ g$. Chứng minh rằng mọi không gian con riêng của f đều ổn định đối với g , và $\text{Ker}(f)$ và $\text{Im}(f)$ ổn định đối với g .

♦ 2.1.2 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $A^p = I_n$, ω là một căn bậc p của 1 trong $\mathbb{C}$ sao cho $\omega^{-1} \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Chứng minh: $\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0$.

♦ 2.1.3 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Ta có thể khẳng định rằng AB và BA có chung ít nhất một vector riêng không?

♦ 2.1.4 Cho $\alpha \in \mathbb{C}$, E là $\mathbb{C}$ -kgv các đa thức của $\mathbb{C}[X]$ bậc $\leq n$, $f: E \rightarrow E$
 $P \mapsto ((X + \alpha)P)'$,
 là một tự đồng cấu của E . Tìm các giá trị riêng và các vector riêng của f .

♦ 2.1.5 Xác định các giá trị riêng và các vector riêng của tự đồng cấu f của $\mathbb{R}[X]$ được xác định bởi: $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = (X + 1)(X - 3)P' - XP$.

♦ 2.1.6 Xác định các giá trị riêng, các vector riêng, hạt nhân, ảnh của tự đồng cấu f của $\mathbb{R}[X]$ được xác định bởi:

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = X(P(X) - P(X - 1)).$$

♦ 2.1.7 Cho $E = K[X]$, $f: E \rightarrow E$, $F: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$. Xác định các giá trị riêng và các vector riêng của F .
 $P \mapsto XP$ $g \mapsto f \circ g - g \circ f$

♦ 2.1.8 Cho $E = \mathbb{R}[X]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < -b$; với mọi P thuộc E , ta ký hiệu:

$$f(P) = X^2 P'' - (a + b - 1)XP' + abP.$$

a) Hãy kiểm chứng: $f \in \mathcal{L}(E)$.

b) Xác định các giá trị riêng và các vector riêng của f .

♦ 2.1.9 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$; với mọi P thuộc E , ta ký hiệu: $f(P) = X(1 - X)P' + nXP$.

a) Hãy kiểm chứng: $f \in \mathcal{L}(E)$.

b) Xác định các giá trị riêng và các vector riêng của f .

♦ 2.1.10 Ta ký hiệu c_0 là $\mathbb{C}$ -kgv các dãy phức hội tụ về 0, và f là tự đồng cấu của c_0 đặt ứng mỗi dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thuộc c_0 với dãy $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ được xác định bởi: $\begin{cases} y_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_{n-1} \end{cases}$

Chứng minh: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \emptyset$.

♦ 2.1.11 Cho E là $\mathbb{C}$ -kgv các dãy phức hội tụ, và f là tự đồng cấu của E đặt ứng mỗi dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ của E với dãy $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ được xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1}$.

Xác định các giá trị riêng và các vectơ riêng của f .

- ♦ **2.1.12** Cho $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Với mọi $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ thuộc E , ta ký hiệu $T(u) = v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ là dãy được xác định bởi: $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} (u_1 + \dots + u_n)$.

Xác định các giá trị riêng và các vectơ riêng của T .

- ♦ **2.1.13** Cho $E = C^0([-\pi; \pi], \mathbb{R})$. Với mọi f thuộc E , ta ký hiệu:

$$u(f) : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{và} \quad v(f) : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_{-\pi}^x \cos(x-t) f(t) dt \quad x \mapsto \int_{-\pi}^x \sin(x-t) f(t) dt$$

a) Kiểm tra rằng u, v là các tự đồng cấu của E .

b) Xác định các vectơ riêng và các giá trị riêng của u và v .

- ♦ **2.1.14** Cho $n \in \mathbb{N}^*, A, B \in M_n(K)$. Chứng minh: $\text{Sp}_K(AB) = \text{Sp}_K(BA)$.

Xem kết quả tổng quát hơn ở bài tập 2.2.12.

- ♦ **2.1.15 a) Định lý Gershgorin**

Cho $n \in \mathbb{N}^*, A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n B' \left(a_{ii}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \right)$

(ở đây với $(a, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+, B'(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq r\}$).

Các $B' \left(a_{ii}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \right)$ được gọi là các đĩa Gershgorin của A .

b) **Định lý Hadamard**

Cho $n \in \mathbb{N}^*, A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$, sao cho:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|.$$

(ta nói rằng A có đường chéo trội chặt).

Chứng minh: $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

2.2 Đa thức đặc trưng

Trong § 2.2 này K chỉ một thể vô hạn (đó là trường hợp khi K là một thể con của $\mathbb{C}$).

Vậy ta có thể đồng nhất đa thức (thuộc $K[X]$) và hàm đa thức (từ K vào K), xem Nhận xét, 5.1.7, Tập 5. Theo thông lệ, ở đây, biến được ký hiệu là λ , thành thử ta đồng nhất một đa thức P thuộc $K[X]$ với ánh xạ đa thức : $\bar{P} : K \rightarrow K$

$$\lambda \mapsto P(\lambda)$$

Thật ra, có thể tiến hành nghiên cứu cho một thể K nào đó (hữu hạn hay vô hạn) không phải đồng nhất đa thức P và hàm đa thức $\bar{P}$, nhưng đối lại thì phải xem xét và nghiên cứu các ma trận và định thức với hệ số trong vành $K[X]$ (hay trong thể $K(X)$), điều này vượt ra ngoài khuôn khổ cuốn sách.

Trong § 2.2 này E chỉ một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$. Ta ký hiệu : $e = \text{Id}_E$.

♦ Mệnh đề – Định nghĩa 1

1) Cho $A \in M_n(K)$. Ánh xạ $K \rightarrow K$ là một đa thức, được gọi

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$$

là **đa thức đặc trưng** của A , và ký hiệu là χ_A .

2) Cho $f \in \mathcal{L}(E)$. Ánh xạ $K \rightarrow K$ là một đa thức, được gọi

$$\lambda \mapsto \det(f - \lambda e)$$

là **đa thức đặc trưng** của f , và ký hiệu là χ_f .

Chứng minh :

1) Ký hiệu $A = (a_{ij})_{ij}$, sau khi khai triển định thức, rõ ràng rằng ánh xạ :

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{là một đa thức.}$$

2) K -kgv E có ít nhất một cơ sở $\mathcal{B}$ và với ký hiệu $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, ta có :

$$\forall \lambda \in K, \det(f - \lambda e) = \det(A - \lambda I_n).$$

Do đó từ 1) suy ra rằng $\lambda \mapsto \det(f - \lambda e)$ là một đa thức.

Nhận xét :

1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Ta có : $\chi_f = \chi_A$.

2) Độc giả có thể gặp trong các sách khác một định nghĩa hơi khác : $\chi_f = \det(\lambda e - f)$, tương đương với $\det(f - \lambda e)$, sai khác một hệ số $(-1)^n$.

3) Giả sử $\alpha \in K$, $h_\alpha : E \rightarrow E$ là phép vị tự tỉ số α .

$$x \mapsto x\alpha$$

Ta có : $\forall \lambda \in K, \chi_{h_\alpha}(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$.

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Ta có :

$$\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A).$$

Đặc biệt, χ_A có bậc n .

Chứng minh :

Ký hiệu $A = (a_{ij})$. Giả sử $\lambda \in K$ và với mọi (i, j) thuộc $\{1, \dots, n\}^2$: $\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ii} - \lambda & \text{nếu } i = j \\ a_{ij} & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$

Theo Tập 5, 9.4, Định nghĩa (Định nghĩa về định thức của một ma trận) :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}$$

Với mọi σ thuộc $\mathfrak{S}_n - \{\text{Id}_{\{1, \dots, n\}}\}$, hạng thức $\varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}$ là một đa thức (của λ) với bậc $\leq n-2$.

Mặt khác :

$$\alpha_{11} \dots \alpha_{nn} = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = (-\lambda)^n + (\alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \dots$$

Điều này chứng tỏ rằng χ_A có bậc n , và các hạng tử tại λ^n và λ^{n-1} tương ứng là $(-1)^n \lambda^n$ và $(-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1}$.

Cuối cùng, vì $\det(A) = \chi_A(0)$ nên hạng tử không đổi của χ_A là $\det(A)$.

♦ **Mệnh đề 3** Hai ma trận vuông đồng dạng có cùng một đa thức đặc trưng.
Nói cách khác: $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(K))^2, (A \sim B \Rightarrow \chi_A = \chi_B)$.

Chứng minh :

Giả sử $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$ sao cho $A \sim B$, có nghĩa là (xem Tập 5, 8.2.4, Định nghĩa 1) tồn tại $P \in \text{GL}_n(K)$ sao cho $B = P^{-1}AP$.

Ta có với mọi λ thuộc K :

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= (\det(P))^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det(P) = \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

Nhận xét :

Mệnh đề đảo của mệnh đề trên là sai (nếu $n \geq 2$), như trong ví dụ sau đây:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ trong đó } A \sim B \text{ và } \chi_A = \chi_B = X^2.$$

♦ **Mệnh đề 4**

$$1) \quad \forall f \in \mathcal{L}(E), \text{Sp}_K(f) = \chi_f^{-1}(\{0\}).$$

$$2) \quad \forall A \in \mathbf{M}_n(K), \text{Sp}_K(A) = \chi_A^{-1}(\{0\}).$$

Nói cách khác : các giá trị riêng của một tự đồng cấu (tương ứng : của một ma trận vuông) là các nghiệm của đa thức đặc trưng của tự đồng cấu (tương ứng : ma trận vuông) ấy.

Chứng minh :

1) Với mọi λ thuộc K :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}_K(f) &\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda e) \neq \{0\} \Leftrightarrow (f - \lambda e) \text{ không đơn ánh} \\ &\Leftrightarrow \det(f - \lambda e) = 0 \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

2) Tương tự 1).

♦ **Hệ quả** Phép của một tự đồng cấu của E ($\dim(E) = n$) hay của một ma trận thuộc $M_n(K)$ là một tập con hữu hạn của K có nhiều nhất là n phần tử.

Mệnh đề trên thường cho phép xác định các giá trị riêng của một ma trận.

VÍ DỤ :

Tính các giá trị riêng và các vectơ riêng của $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Ta lập đa thức đặc trưng :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 12 & 10 \\ -9 & -22-\lambda & -22 \\ 9 & 18 & 17-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4) \quad (\text{sau khi khai triển}) \\ &= -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2.\end{aligned}$$

Vậy $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 2\}$.

$$\begin{aligned}\bullet \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, -1) &\Leftrightarrow (A + I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y + 10z = 0 \\ -9x - 21y - 22z = 0 \\ 9x + 18y + 18z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2z \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $\text{KGCR}(A, -1)$ là đường thẳng vectơ sinh bởi $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\bullet \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 12y + 10z = 0 \\ -9x - 24y - 22z = 0 \\ 9x + 18y + 15z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -6y - 5z \\ 6y + 7z = 0 \end{cases}$$

Vậy $\text{KGCR}(A, 2)$ là đường thẳng vectơ sinh bởi $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- ♦ **Định nghĩa** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, (tương ứng : $A \in \mathbf{M}_n(K)$), λ_0 là một giá trị riêng của f (tương ứng : A). Ta gọi số lần mà λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng χ_f (tương ứng : χ_A) là **cấp bội** của λ_0 .

VÍ DỤ :

Trong ví dụ trên đây các giá trị riêng là : -1 (đơn) và 2 (kép).

Nhận xét :

- Giả sử $K = \mathbb{C}$, và giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Khi đó, f có ít nhất một gtr và một $\overline{\text{vtr}}$ vì theo định lý d'Alembert (Tập 5, 5.3.4, Định lý), χ_f có ít nhất một nghiệm trong $\mathbb{C}$.
- Tương tự, nếu $n \geq 1$, mọi ma trận A thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ đều có ít nhất một $\overline{\text{vtr}}$ và một gtr.

- ♦ **Mệnh đề 5** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_0 \in \text{Sp}_K(f)$, α_0 là cấp bội của λ_0 , $d_0 = \dim(\text{KGCR}(f, \lambda_0))$. Khi đó ta có : $1 \leq d_0 \leq \alpha_0$.

Chứng minh:

1) Vì theo định nghĩa $\text{KGCR}(f, \lambda_0) = \text{Ker}(f - \lambda_0 e) \neq \{0\}$, nên ta có : $d_0 \geq 1$.

2) $\text{KGCR}(f, \lambda_0)$ có ít nhất một cơ sở $(e_1, \dots, e_{d_0})$, và theo định lý về cơ sở không đầy đủ, tồn tại $e_{d_0+1}, \dots, e_n \in E$, sao cho $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E .

Tồn tại $C \in \mathbf{M}_{d_0, n-d_0}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n-d_0}(K)$ sao cho $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_{d_0} & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{từ đó: } \forall \lambda \in K, \chi_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} (\lambda_0 - \lambda) I_{d_0} & C \\ 0 & B - \lambda I_{n-d_0} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_0 - \lambda)^{d_0} \det(B - \lambda I_{n-d_0}) = (\lambda_0 - \lambda)^{d_0} \chi_B(\lambda). \end{aligned}$$

Vì χ_B là một đa thức nên ta suy ra : $(\lambda_0 - X)^{d_0} \mid \chi_f$, và do vậy $d_0 \leq \alpha_0$.

♦ Hệ quả

- 1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Với mọi gtr đơn λ_0 của f , $\text{KGCR}(f, \lambda_0)$ có số chiều là 1.
- 2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Với mọi gtr đơn λ_0 của A , $\text{KGCR}(A, \lambda_0)$ có số chiều là 1.

Bài tập

- ◇ 2.2.1 Cho E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$, F là một kgvc của E ổn định đối với f , $f' : F \rightarrow F$ là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên F . Chứng minh $\chi_f | \chi_{f'}$.
- ◇ 2.2.2 Cho E là $\mathbb{R}$ -kgv hữu hạn chiều với số chiều lẻ, $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường thẳng và một siêu phẳng của E ổn định đối với f .
- ◇ 2.2.3 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(K)$, $\chi_A = (-1)^n X^n + \dots + \alpha_{n-1}X + \alpha_n$ là đa thức đặc trưng của A . Chứng minh: $\alpha_{n-1} = -\text{tr}(\text{com}(A))$.

- ◇ 2.2.4 Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*$, $A_i \in M_{n_i}(K)$ ($1 \leq i \leq N$), $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}$.

Chứng minh: $\chi_A = \prod_{k=1}^N \chi_{A_k}$.

- ◇ 2.2.5 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $B \in M_{n,p}(K)$, $C \in M_{p,n}(K)$.

Chứng minh: $X^p \chi_{\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}} = (-1)^n X^n \chi_{CB}(X^p)$.

- ◇ 2.2.6 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(K)$, $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$. Hãy biểu thị χ_M theo χ_A .

- ◇ 2.2.7 Chứng minh: $\forall A \in M_n(K)$, $\chi_{t_A} = \chi_A$.

Đặc biệt: $\forall A \in M_n(K)$, $\text{Sp}_K(A) = \text{Sp}_K(A)$.

- ◇ 2.2.8 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n$, $(f(x)) \in (\mathbb{R}_+)^n$ và $\|f(x)\|_1 = \|x\|_1$

(ở đây $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$).

Chứng minh: $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

- ◇ 2.2.9 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, X (tương ứng: Y) là một vơ của A (tương ứng: A) liên kết với giá trị riêng λ của A (xem bài tập 2.2.7). Ta giả sử:
- các thành phần của Y (trong cơ sở chính tắc) đều > 0
 - $\dim(\text{KGCR}(A, \lambda)) = 1$.

Giả sử $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, $Z \in \text{KGCR}(A, \mu) - \{0\}$; ta giả sử các thành phần của Z đều ≥ 0 .

Chứng minh rằng Z cộng tuyến với X và $\mu = \lambda$.

- ◇ 2.2.10 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) - \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} = 0$ là các giá trị riêng của A . Ta giả thiết rằng hàng thứ nhất của A là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác và ta ký

hiệu $A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & B \end{pmatrix}$, trong đó $\alpha \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $L \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Chứng minh rằng tồn tại $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sao cho: $\alpha = {}^1XC$ và $L = {}^1XB$.

b) Giả sử $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, thỏa mãn a), chứng minh: $C^1X + B$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

◇ 2.2.11 Ma trận đồng hành

a) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$.

Chứng minh: $\chi_A = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$.

Ta nói rằng A là ma trận đồng hành của đa thức chuẩn tắc $X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

b) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$, $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$. Tìm điều kiện cần và đủ để tồn tại

$A \in \mathbf{M}_n(K)$ sao cho $\chi_A = P$?

◇ 2.2.12 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$. Chứng minh:

$$(-X)^n \chi_{BA} = (-X)^p \chi_{AB}.$$

Đặc biệt: $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(K))^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

◇ 2.2.13' a) Cho E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $u, f, g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho $u \circ f = g \circ u$.

Chứng minh: $\deg(\text{UCLN}(\chi_f, \chi_g)) \geq \text{rank}(u)$.

b) Nói riêng, nếu E là một $\mathbb{C}$ -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 và nếu $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho tồn tại $u \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$ thỏa mãn $u \circ f = g \circ u$ thì f và g có chung ít nhất một giá trị riêng.

◇ 2.2.14' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & -AV \\ -{}^1UA & {}^1UAV \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh: $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

b) Chứng minh:

$$\alpha) \det(A) = 0 \Rightarrow X^2 \Big| \chi_B$$

$$\beta) \left\{ \begin{array}{l} X^2 \Big| \chi_B \\ {}^1UV \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \det(A) = 0.$$

2.3 Tính chéo hóa được

Trong § 2.3 này, E chỉ K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$.

◆ Định nghĩa

- 1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta nói rằng f **chéo hóa được** khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của E sao cho $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ là ma trận chéo.
- 2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Ta nói rằng A **chéo hóa được** khi và chỉ khi tồn tại một ma trận chéo D thuộc $\mathbf{M}_n(K)$ sao cho A đồng dạng với D .

Nói cách khác, A chéo hóa được khi và chỉ khi :

$$\exists P \in \text{GL}_n(K), \exists D \in \mathbf{D}_n(K), A = PDP^{-1}.$$

Nếu $A \in \mathbf{M}_n(K)$ chéo hóa được thì ta gọi dữ liệu chéo hóa của A là việc cho $P, D, (P^{-1})$ sao cho :

$$P \in \text{GL}_n(K), D \in \mathbf{D}_n(K), A = PDP^{-1}.$$

Nếu $A \in \mathbf{M}_n(K)$ chéo hóa được thì chéo hóa A là việc xác định $P, D, (P^{-1})$ sao cho :

$$P \in \text{GL}_n(K), D \in \mathbf{D}_n(K), A = PDP^{-1}.$$

Trừ ngoại lệ, việc chéo hóa một ma trận chéo hóa được không duy nhất, nói cách khác, P và D không duy nhất (xem bài tập 2.3.17).

Thay cho nói chéo hóa, ta còn nói : **thu về dạng chéo**.

Nhận xét :

1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Khi đó f chéo hóa được khi và chỉ khi A chéo hóa được. Thực vậy :

- Nếu f chéo hóa được thì tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}'$ của E sao cho ma trận D của f trong $\mathcal{B}'$ là ma trận chéo, ký hiệu $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, ta có $A = PDP^{-1}$ (công thức đổi cơ sở cho một tự đồng cấu, xem Mệnh đề 1, 8.2.4, Tập 5).

- Nếu A chéo hóa được thì tồn tại $P \in \text{GL}_n(K)$, $D \in \mathbf{D}_n(K)$ sao cho $A = PDP^{-1}$ và do vậy D là ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}'$ của E được xác định bởi $\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P$.

2) Tồn tại các ma trận chéo hóa được và các ma trận không chéo hóa được (xem phần dưới đây).

3) Mọi ma trận chéo đều chéo hóa được.

◆ **Mệnh đề** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Các tính chất sau đây từng đôi một tương đương :

- (i) f chéo hóa được
- (ii) Tồn tại một cơ sở của E được tạo nên từ các $\overrightarrow{\text{vtr}}$ của f .
- (iii) Tổng các KGCR của f bằng E .
- (iv) Tổng các số chiều của các KGCR của f bằng $\dim(E)$.

Chứng minh :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Giả sử f chéo hóa được .

Tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ của E sao cho $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ là ma trận chéo, vậy tồn tại

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \text{ sao cho : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\forall i : \forall i \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} f(e_i) = \lambda_i e_i \\ e_i \neq 0 \end{cases}$$

nên $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E được tạo nên từ vtr của f .

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Giả sử tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ được tạo nên từ vtr của f . Vậy tồn tại

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \text{ sao cho } \forall i \in \{1, \dots, n\}, f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Rõ ràng rằng mỗi λ_i là một gtr của f (một vtr liên kết là e_i).

Ta ký hiệu $\Lambda = \{\lambda_i ; 1 \leq i \leq n\}$.

$$\text{Khi đó : } \sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{Ker}(f - \lambda e) \supset \sum_{\lambda \in \Lambda} \text{Ker}(f - \lambda e) = \sum_{i=1}^n \text{Ker}(f - \lambda_i e) \supset \sum_{i=1}^n K e_i = E.$$

Vậy tổng các KGCR của f , chính là $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{Ker}(f - \lambda e)$, bằng E .

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Giả sử tổng các KGCR của f bằng E . Vì tổng này là tổng trực tiếp (xem Mệnh đề 3,

$$2.1) \text{ nên ta có : } \sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \dim(\text{KGCR}(f, \lambda)) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{KGCR}(f, \lambda)\right) = \dim(E).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Giả sử tổng các số chiều của các KGCR của f bằng $\dim(E)$.

Ta ký hiệu $k = \text{Card}(\text{Sp}_K(f))$, $\mu_1, \dots, \mu_k$ là các phần tử của $\text{Sp}_K(f)$.

Mỗi $\text{KGCR}(f, \mu_j)$ ($1 \leq j \leq k$) có ít nhất một cơ sở $\mathcal{B}_j$, ta ký hiệu $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{B}_j$.

Vì các $\text{KGCR}(f, \mu_j)$ ($1 \leq j \leq k$) có tổng trực tiếp (xem Mệnh đề 3, 2.1) và mỗi $\mathcal{B}_j$ là độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}$ là độc lập tuyến tính.

Mặt khác :

$$\text{Card}(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^k \text{Card}(\mathcal{B}_j) = \sum_{j=1}^k \dim(\text{KGCR}(f, \mu_j)) = \dim(E).$$

Vậy $\mathcal{B}$ là một cơ sở của E và ma trận của f trong $\mathcal{B}$ là ma trận chéo, vì các phần tử

của B là các vtr của f : $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_k I_{d_k} \end{pmatrix}$ trong đó

$$d_j = \text{Card}(B_j), \quad (1 \leq j \leq k).$$

Nhận xét :

Theo chứng minh trên đây, nếu $f \in \mathcal{L}(E)$ chéo hóa được thì các phần tử chéo của một ma trận chéo biểu diễn cho f chính là các giá trị riêng của f , được viết trên đường chéo này với số lần bằng cấp bội của chúng.

Ta sẽ thấy dưới đây (Nhận xét 4), 3.1) một tính chất tương tự cho các tự đồng cấu tam giác hóa được.

♦ **Định lý (Điều kiện cần và đủ của tính chéo hóa được)**

1) Cho $f \in \mathcal{L}(E)$, f chéo hóa được khi và chỉ khi :

- χ_f tách được trên K
- Với mỗi gtr λ của f , $\dim(\text{KGCR}(f, \lambda))$ bằng cấp bội của λ

2) Cho $A \in M_n(K)$, A chéo hóa được khi và chỉ khi :

- χ_A tách được trên K
- Với mỗi gtr λ của A , $\dim(\text{KGCR}(A, \lambda))$ bằng cấp bội của λ

Chứng minh :

1) Với mỗi gtr λ của f , ký hiệu $d(\lambda) = \dim(\text{KGCR}(f, \lambda))$ và $\omega(\lambda)$ là cấp bội của λ (trong χ_f).

• Giả sử f chéo hóa được .

Theo Mệnh đề 5, 2.2 : $\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), d(\lambda) \leq \omega(\lambda)$.

Theo Mệnh đề § 2.3: $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} d(\lambda)$.

Mặt khác, vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở B của E và $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ sao

$$\text{cho : } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy ta có : } \forall \lambda \in K, \chi_f(\lambda) = \det(\text{Mat}_B(f) - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda).$$

Do đó, χ_f tách được và : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \omega(\lambda) = n$. Ta kết luận : $\forall \lambda \in K, d(\lambda) = \omega(\lambda)$.

• Đảo lại, giả sử χ_f tách được và : $\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), d(\lambda) = \omega(\lambda)$.

Vì χ_f tách được và nghiệm của χ_f là các gtr của f nên $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \omega(\lambda) = n$.

♦ **Hệ quả (Điều kiện đủ của tính chéo hóa được)**

- 1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Nếu f có n giá trị riêng từng đôi phân biệt (trong đó $n = \dim(E)$) thì f chéo hóa được.
- 2) Giả sử $A \in M_n(K)$. Nếu A có n giá trị riêng từng đôi phân biệt thì A chéo hóa được.

VÍ DỤ :

$$\text{Giả sử } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

Chúng ta chứng tỏ rằng A chéo hóa được.

Ta lập đa thức đặc trưng bằng việc khai triển đối với dòng cuối :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & -\lambda \end{vmatrix}_{[n]} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & -\lambda \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \\ 0 & & & -\lambda \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= (-\lambda)(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1} = (-1)^n(-\lambda^n - 1). \end{aligned}$$

Rõ ràng χ_A tách được trên $\mathbb{C}$ và có các nghiệm đơn (căn bậc n của 1 trong $\mathbb{C}$).

Theo Hệ quả trên, A chéo hóa được trong $M_n(\mathbb{C})$.

Với ví dụ này, xem thêm Ví dụ 4, 2.4 dưới đây. ■

Khi một ma trận vuông không chéo hóa được, thì có thể nó tam giác hóa được, có nghĩa là tồn tại $P \in GL_n(K)$, $T \in T_{n,n}(K)$ sao cho $A = PTP^{-1}$. Chúng ta sẽ minh họa qua ví dụ (với $n = 3$). Lý thuyết về việc tam giác hóa sẽ được xét trong chương sau (3.1).

Ví dụ về việc tam giác hóa các ma trận vuông cấp ≤ 3

Giả sử $A \in M_3(K)$. Dưới đây ta sẽ thấy rằng (Định lý 3.1) nếu χ_A tách được trên K thì A tam giác hóa được, nghĩa là tồn tại $P \in GL_3(K)$, $T \in T_{3,3}(K)$ sao cho $A = PTP^{-1}$. Trên các ví dụ chúng ta sẽ chỉ ra cách tìm cặp (P, T) .

Ta giả sử A không chéo hóa được và χ_A tách được trên K . Khi đó :

- hoặc A có một gtr kép λ_1 và một gtr đơn λ_2
- hoặc A có một gtr bội ba λ_1 .

Chúng ta ký hiệu $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ là cơ sở chính tắc của $M_{3,1}(K)$ và f là tự đồng cấu của $M_{3,1}(K)$ sao cho $\text{Mat}_{B_0}(f) = A$.

VÍ DỤ 1:

Tam giác hóa $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Ta lập đa thức đặc trưng của A :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -17 & 25 \\ 2 & -9-\lambda & 16 \\ 1 & -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \text{ (sau khi khai triển)} \\ &= -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 1).\end{aligned}$$

Vậy χ_A tách được trên $\mathbb{R}$ và các gtr của A là 2 (kép) và 1 (đơn).

$$\bullet X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 17y + 25z = 0 \\ 2x - 11y + 16z = 0 \\ x - 5y + 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y - 7z \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$

Vậy $\text{KGCR}(A, 2)$ có số chiều là 1 và có cơ sở (V_1) trong đó $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\bullet X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 17y + 25z = 0 \\ 2x - 10y + 16z = 0 \\ x - 5y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y - 8z \\ 3y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 11z \\ 3y = 7z \end{cases}$$

Vậy $\text{KGCR}(A, 1)$ có số chiều là 1 và có cơ sở (V_3) trong đó $V_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ta tìm vector $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sao cho $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ là cơ sở của $M_{3,1}(\mathbb{R})$ và $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ là

ma trận tam giác trên : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & * & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Điều này dẫn đến : $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ là một cơ sở của } M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ f(V_2) - 2V_2 \in \mathbb{R} V_1 \end{cases}$

Ta có : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f(V_2)) = AV_2 = \begin{pmatrix} 5x - 17y + 25z \\ 2x - 9y + 16z \\ x - 5y + 9z \end{pmatrix}$.

$$\text{Từ đây : } AV_2 - 2V_2 \in \mathbb{R} V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 17y + 25z = 3(x - 5y + 7z) \\ 2x - 7y + 16z = 2(x - 5y + 7z) \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0.$$

$$\text{Vậy ta có thể chọn } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ và do đó } AV_2 = 2V_2 + V_1.$$

$$\text{Ký hiệu } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ta có } A = PTP^{-1}.$$

$$\text{Tính toán cho ta : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

VÍ DỤ 2 :

$$\text{Tam giác hóa } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Ta lập đa thức đặc trưng của A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^3 \quad (\text{sau khi tính toán})$$

Vậy χ_A tách được trên $\mathbb{R}$ và A có một gtr duy nhất, -1 , với cấp 3.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, -1) \Leftrightarrow -x + 2y - z = 0.$$

Vậy $\text{KGCR}(A, -1)$ có số chiều là 2 và có một cơ sở, chẳng hạn (V_1, V_2) trong đó

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ta tìm $V_3 \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ sao cho $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ là một cơ sở của $M_{3,1}(\mathbb{R})$ và $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$$\text{là ma trận tam giác trên : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Giả sử $V_3 \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ sao cho $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ là cơ sở của $M_{3,1}(\mathbb{R})$; tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{sao cho } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Vì $\chi_{\text{Mat}_B(f)}(\lambda) = \chi_f(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$ nên ta cần có $\gamma = -1$.

Vậy mọi V_3 thuộc $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sao cho (V_1, V_2, V_3) độc lập tuyến tính thì đều phù hợp.

Ta hãy chọn chẳng hạn $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ký hiệu $P = \text{Pass}_{B_0}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ và $T = P^{-1}AP$, T là ma trận tam giác

trên ta thu được : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ và $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ta sẽ chứng minh rằng (Hệ quả 3.2.2) có thể chọn V_3 sao cho $\text{Mat}_B(f)$ có dạng

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

VÍ DỤ 3 :

Tam giác hóa $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Ta thu được $\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3$.

Vậy χ_A tách được trên $\mathbb{R}$ và A có một gtr duy nhất, 2, có cấp 3.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy $\text{KGCR}(A, 2)$ có số chiều là 1 và có cơ sở (V_1) , trong đó $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ta tìm V_2, V_3 để cho $B = (V_1, V_2, V_3)$ là một cơ sở của $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ và $\text{Mat}_B(f)$ là ma

trận tam giác trên : $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Điều này dẫn đến : $\begin{cases} B \text{ là một cơ sở của } \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ f(V_2) - 2V_2 \in \text{Vect}(V_1) \\ f(V_3) - 2V_3 \in \text{Vect}(V_1, V_2) \end{cases}$.

Ký hiệu $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$f(V_2) - 2V_2 \in \text{Vect}(V_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ x-y \\ -x+y+z \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow x-y=z.$$

Ví dụ ta chọn $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tiếp đó, với bất kì V_3 nào (sao cho (V_1, V_2, V_3) độc lập tuyến tính) phù hợp, ví dụ $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ký hiệu } P = \text{Pass}_{B_0}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Khi đó } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ là ma trận tam giác trên.}$$

Nhận xét :

Dưới đây ta sẽ chứng minh (phép thu gọn Jordan, 3.4) rằng, nếu χ_A tách được và nếu ta ký hiệu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (không nhất thiết khác nhau) là các nghiệm của χ_A , thì A đồng dạng với một trong các ma trận sau :

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ từng đôi phân biệt
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ nếu $\lambda_2 = \lambda_1 \neq \lambda_3$
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Bài tập

♦ 2.3.1 Chứng tỏ rằng các ma trận sau đây chéo hóa được và hãy chéo hóa chúng :

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$b) \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$c) \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$$

$$d) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}.$$

♦ 2.3.2 Cho $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh : $A^t A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$.

b) Từ đó suy ra : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) = ((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

c) Trong $\mathbb{C}$, xác định các giá trị riêng và các vectơ riêng của A và chứng tỏ rằng A chéo hóa được trong $M_4(\mathbb{C})$.

♦ 2.3.3 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Hãy xác định các giá trị riêng và các không gian con riêng của A .

b) Tìm điều kiện cần và đủ đối với (n, a, b) để A chéo hóa được.

♦ 2.3.4 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$, $\alpha, a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & & \\ a_n & & & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm điều kiện cần và đủ để A chéo hóa được.

♦ 2.3.5 Chứng tỏ rằng các ma trận sau đây chéo hóa được và hãy chéo hóa chúng :

$$a) \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & n & 0 \\ 1 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*.$$

$$b) \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \\ & b & 0 \\ b & 0 & a \\ & 0 & a \\ & & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{C}), (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*.$$

◇ 2.3.6* Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \geq 3$, và $\alpha, p, q \in \mathbb{R}$ sao cho $p^2 - 4q > 0$. Ký hiệu:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -q & & & 0 \\ n-1 & \alpha-p & -2q & & \\ & n-2 & \alpha-2p & & \\ & & & & -(n-1)q \\ & 0 & & 1 & \alpha-(n-1)p \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Chứng minh rằng A chéo hóa được, xác định các giá trị riêng và các vector riêng của nó (ta có thể xét tự đồng cấu của $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là A).

◇ 2.3.7* Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$

a) Xác định các giá trị riêng và các vector riêng của A .

b) Tìm điều kiện cần và đủ để A chéo hóa được.

c) Ta ký hiệu U_n là đa thức Tchebychev thứ n loại hai (Xem 2.5.1, Tập 1) được xác định bởi:

$$\forall t \in]-1; 1[, U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\text{Arccost } t)}{\sin(\text{Arccost } t)}.$$

Khi $bc \neq 0$, hãy biểu diễn χ_A theo U_n .

◇ 2.3.8 Tìm tất cả các ma trận B thuộc $M_3(\mathbb{R})$ sao cho $B^2 = A$ và $\text{tr}(B) = 0$, trong

$$\text{đó: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

◇ 2.3.9 Các ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ thuộc $M_3(\mathbb{R})$ có đồng dạng không?

◇ 2.3.10 Các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ thuộc $M_3(\mathbb{R})$ có đồng dạng không?

◇ 2.3.11 Cho $a \in K$, $n \in \mathbb{N}^*$, f là tự đồng cấu của $K_n[X]$ được xác định bởi:

$$\forall P \in K_n[X], f(P) = (X - a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a)).$$

Hãy xác định các giá trị riêng, các vectơ riêng, hạt nhân, ảnh của f ; f có chéo hóa được không?

◇ 2.3.12' Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $H \in M_n(K)$ sao cho $\text{rank}(H) = 1$.

a) Hãy chứng tỏ rằng H chéo hóa được khi và chỉ khi: $\text{tr}(H) \neq 0$.

b) Chứng minh:

$\alpha)$ Nếu H chéo hóa được, thì $H \sim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \\ & & & \text{tr}(H) \end{pmatrix}$

$\beta)$ Nếu H không chéo hóa được, thì $H \sim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(Ta có thể dùng quan hệ $H^2 = \text{tr}(H)H$, xem bài tập 8.1.31, b) Tập 5).

c) Từ đó suy rằng với mọi ma trận H_1, H_2 thuộc $M_n(K)$ có hạng 1, ta có:

$$H_1 \sim H_2 \Leftrightarrow \text{tr}(H_1) = \text{tr}(H_2).$$

◇ 2.3.13 Cho $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_n(K)$, $\varphi: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$.

$$M \mapsto \text{tr}(AM)B$$

Tìm điều kiện cần và đủ đối với (A, B) để φ chéo hóa được (sử dụng bài tập 2.3.12 a)).

◇ 2.3.14 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$

(sử dụng bài tập 2.2.10).

Chứng minh rằng A chéo hóa được khi và chỉ khi đa thức $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ tách được trên K và có tất cả các nghiệm đều đơn.

◇ 2.3.15' Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A, B \in M_n(K)$. Chứng minh: $A \sim B \Rightarrow \text{com}(A) \sim \text{com}(B)$.

(Sử dụng bài tập 9.8.1, Tập 5. Trong trường hợp $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$, sử dụng bài tập 2.2.3 và 2.3.12 c)).

- ◇ 2.3.16 Chứng minh rằng tất cả các tự đồng cấu lũy linh và chéo hóa được đều bằng không.
- ◇ 2.3.17 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Giả sử tồn tại một cặp duy nhất (P, D) thuộc $\mathbf{GL}_n(K) \times \mathbf{D}_n(K)$ sao cho $A = PDP^{-1}$. Chứng minh: $n = 1$ và K là một thể đẳng cấu với $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- ◇ 2.3.18' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ có n gtr từng đôi một khác nhau, $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Chứng minh rằng $\{X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}); X^k = A\}$ hữu hạn và có bản số k^n hay k^{n-1} .
- ◇ 2.3.19 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$ sao cho AB chéo hóa được.
- a) Chứng minh rằng nếu A hay B khả nghịch thì BA chéo hóa được.
- b) Kết quả trên có đúng không nếu không có giả thiết khả nghịch?
- ◇ 2.3.20 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Hãy chứng minh rằng ta có thể phân tích A thành tổng của hai ma trận chéo hóa được.
- ◇ 2.3.21' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbf{M}_n(K)$ chéo hóa được, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh:
- $$M^k A = 0 \Leftrightarrow MA = 0.$$

- ◇ 2.3.22' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ chéo hóa được, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ là các giá trị riêng (từng đôi một phân biệt) của A , ω_k là cấp bội của λ_k ($1 \leq k \leq p$), $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ là một ma trận khả nghịch sao cho:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{\omega_p} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- a) Xác định hoán tập $C(A)$ của A , tức là $C(A) = \{B \in \mathbf{M}_n(K); AB = BA\}$.
- b) Hãy kiểm chứng rằng $C(A)$ là một K -kgv và tính số chiều của nó. Nếu $n = 5$, ta có thể có $\dim(C(A)) = 10$ được không?
- c) Chứng minh: $\dim(C(A)) = n \Leftrightarrow p = n$.
- ◇ 2.3.23' Cho $n \in \mathbb{N}^*$; với $A \in \mathbf{M}_n(K)$, ta ký hiệu $C_A = \{M \in \mathbf{M}_n(K); M \sim A \text{ và } AM = MA\}$.
- a) Giả sử $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$ sao cho $A \sim B$. Chứng minh rằng tồn tại một song ánh từ C_A vào C_B .
- b) Từ đó suy ra rằng nếu $A \in \mathbf{M}_n(K)$ có n gtr từng đôi một phân biệt, thì C_A hữu hạn và $\text{Card}(C_A) = n!$.
- ◇ 2.3.24' Cho $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n = p + q$, $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $B \in \mathbf{M}_q(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$,

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

Giả sử A và B chéo hóa được và $\text{Sp}_K(A) \cap \text{Sp}_K(B) = \emptyset$. Chứng minh rằng M đồng dạng

với $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ và chéo hóa được.

- ◇ **2.3.25** Tìm các kgvc của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với tự đồng cấu f có ma trận trong cơ sở

chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- ◇ **2.3.26** Cho E là một $\mathbb{C}$ -kgv hữu hạn chiều, $\alpha \in \mathbb{C}^*$; $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho $\begin{cases} f \circ g - g \circ f = \alpha f \\ g \text{ chéo hóa được} \end{cases}$.

a) Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n$.

b) Từ đó suy ra rằng f lũy linh.

- ◇ **2.3.27** Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sao cho χ_A tách được trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng A chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ khi và chỉ khi A chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

- ◇ **2.3.28** Hãy tam giác hóa các ma trận sau trong $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4 Đa thức tự đồng cấu, đa thức ma trận

Trong § 2.4 này, E chỉ một K -kgv; ta ký hiệu $e = \text{Id}_E$.

♦ **Định nghĩa - Ký hiệu 1** Giả sử $P = a_0 + a_1X + \dots + a_NX^N \in K[X]$.

1) Với $f \in \mathcal{L}(E)$, ta ký hiệu $P(f) = a_0e + a_1f + \dots + a_Nf^N$, và $P(f)$ được gọi là **đa thức tự đồng cấu**.

2) Với $A \in \mathbf{M}_n(K)$, ($n \in \mathbb{N}^*$), ta ký hiệu $P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_NA^N$, và $P(A)$ được gọi là **đa thức ma trận**.

Nói cách khác, để thu được $P(f)$ (hay $P(A)$) ta thay thế hằng 1 bởi e (hay I_n), X bởi f (hay A), X^k bởi f^k (hay A^k) với $k \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét :

1) Tránh nhầm lẫn $1(f)$ (bằng e) và $X(f)$ (bằng f).

Ví dụ : $(2 + 3X)(f) = 2e + 3f$.

2) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $\mathcal{B}$ là cơ sở của E , $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$; khi đó theo Mệnh đề 1, 8.1.4, Tập 5, ta có: $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(A)$.

♦ Mệnh đề 1

1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ánh xạ $P \rightarrow P(f)$ là một cấu xạ đại số có đơn vị từ $K[X]$ vào $\mathcal{L}(E)$, có nghĩa là :

$$\forall \alpha \in K, \forall P, Q \in K[X], \begin{cases} (\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f) \\ (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) \\ 1(f) = e \end{cases}$$

2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Ánh xạ $P \mapsto P(A)$ là một cấu xạ đại số có đơn vị từ $K[X]$ vào $\mathbf{M}_n(K)$, có nghĩa là :

$$\forall \alpha \in K, \forall P, Q \in K[X], \begin{cases} (\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A) \\ (PQ)(A) = P(A)Q(A) \\ 1(A) = I_n. \end{cases}$$

Chứng minh :

1) Ta ký hiệu $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^N b_k X^k$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\alpha P + Q)(f) &= \left(\sum_{k=0}^N (\alpha a_k + b_k) X^k \right) (f) = \sum_{k=0}^N (\alpha a_k + b_k) f^k = \alpha \sum_{k=0}^N a_k f^k + \sum_{k=0}^N b_k f^k \\ &= \alpha P(f) + Q(f). \end{aligned}$$

• Ký hiệu thêm $a_k = b_k = 0$ nếu $k > N$, ta có :

$$\begin{aligned} (PQ)(f) &= \left(\sum_{k=0}^{2N} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^k \right) (f) = \sum_{k=0}^{2N} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} f^k = \left(\sum_{i=0}^N a_i f^i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^N b_j f^j \right) \\ &= P(f) \circ Q(f). \end{aligned}$$

2) Cùng phương pháp trên.

Ta cũng có thể đưa về 1) bằng việc chuyển qua ma trận. ■

Mệnh đề trên cho ta nhận xét rằng về hình thức các phép toán : luật ngoài, cộng, nhân (hay hợp thành) được thực hiện trên X theo cùng cách như trên f hay A .

Nhận xét :

Với $A \in M_n(K)$ ($n \geq 2$), ánh xạ $\theta : K[X] \rightarrow M_n(K)$ có thể không là đơn ánh cũng

không là toàn ánh. Chẳng hạn, nếu $K = \mathbb{R}$ và $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ với nhận xét $A^2 = I_2$:

- θ không đơn ánh vì : $\theta(X^2 - 1) = (X^2 - 1)(A) = A^2 - I_n = 0$
- θ không toàn ánh vì : $\text{Im}(\theta) = \text{Vect}\{I, A, A^2, \dots\} = \text{Vect}\{I, A\}$ có số chiều 2, trong khi $M_2(K)$ có số chiều 4.

◆ Mệnh đề 2

- 1) Nếu $f, g \in \mathcal{L}(E)$ giao hoán, thì mọi đa thức của f đều giao hoán với mọi đa thức của g .
- 2) Nếu $A, B \in M_n(K)$ giao hoán thì mọi đa thức của A đều giao hoán với mọi đa thức của B .

Chứng minh :

1) Giả sử $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho $g \circ f = f \circ g$.

- Ta chứng minh bằng quy nạp : $\forall k \in \mathbb{N}, g^k \circ f = f \circ g^k$.

Tính chất này là hiển nhiên với $k = 0$ (vì $g^0 = e$), và theo giả thiết, đúng với $k = 1$. Nếu nó là đúng với số nguyên k nào đó, thì :

$$g^{k+1} \circ f = g \circ (g^k \circ f) = g \circ (f \circ g^k) = (g \circ f) \circ g^k = (f \circ g) \circ g^k = f \circ g^{k+1}.$$

- Từ đó theo tính chất tuyến tính, ta có : $\forall Q \in K[X], Q(g) \circ f = f \circ Q(g)$.
- Áp dụng kết quả trên cho $(Q(g), f)$ thay vì cho (f, g) , ta được :

$$\forall P, Q \in K[X], Q(g) \circ P(f) = P(f) \circ Q(g).$$

2) Cùng phương pháp trên.

Ta cũng có thể đưa về 1) bằng việc chuyển qua ma trận.

♦ Định nghĩa 2

1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in K[X]$. Ta nói rằng P triệt tiêu f (hay P là đa thức triệt tiêu của f) khi và chỉ khi : $P(f) = 0$.

2) Giả sử $A \in M_n(K)$, $P \in K[X]$. Ta nói rằng P triệt tiêu A (hay P là đa thức triệt tiêu của A) khi và chỉ khi : $P(A) = 0$.

VÍ DỤ :

Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$.

- f là một phép chiếu khi và chỉ khi $X^2 - X$ là đa thức triệt tiêu của f .
- f là một phép đối xứng khi và chỉ khi $X^2 - 1$ là đa thức triệt tiêu của f .

Nhận xét :

1) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Vì $\mathcal{L}(E)$ hữu hạn chiều với số chiều n^2 , nên họ $(e, f, f^2, \dots, f^{n^2})$, chứa $n^2 + 1$ phần tử, là phụ thuộc tuyến tính. Vậy tồn tại $(a_0, \dots, a_{n^2}) \in K^{n^2+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ sao cho $a_0 e + a_1 f + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$.

Ký hiệu $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$, ta có: $P \neq 0$, $P(f) = 0$.

Như vậy f thừa nhận ít nhất một đa thức triệt tiêu khác 0.

2) Cũng vậy, mọi ma trận A của $M_n(K)$ đều thừa nhận ít nhất một đa thức triệt tiêu khác 0.

3) Nếu E không hữu hạn chiều, thì có thể một tự đồng cấu f của E chỉ thừa nhận 0 làm đa thức triệt tiêu (Xem bài tập 2.4.2).

4) Thay vì nói « P triệt tiêu f (hay A) » ta cũng nói : « f (hay A) triệt tiêu P ».

♦ Mệnh đề 3

1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$, $x \in \text{KGCR}(f, \lambda)$. Khi đó ta có :

$$\forall P \in K[X], (P(f))(x) = P(\lambda)x.$$

2) Giả sử $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \text{Sp}_K(A)$, $V \in \text{KGCR}(A, \lambda)$. Khi đó ta có :

$$\forall P \in K[X], P(A)V = P(\lambda)V.$$

Chứng minh:

1) • Chứng minh bằng quy nạp : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(x) = \lambda^k x$. Tính chất là hiển nhiên với $k = 0$ (vì $f^0 = e$ và $\lambda^0 = 1$) và đúng với $k = 1$ theo giả thiết.

Ký hiệu $N = \text{Card}(\text{Sp}_K(f))$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ là các phân tử của $\text{Sp}_K(f)$ (như vậy $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ từng đôi phân biệt). Tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của E sao cho ma trận A của f trong $\mathcal{B}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N I_{d_N} \end{pmatrix} \text{ trong đó } \forall k \in \{1, \dots, N\}, d_k = \dim(\text{KGCR}(f, \lambda_k)).$$

Xét $P = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)$, là tách đơn. Ta có :

$$P(A) = \prod_{k=1}^N (A - \lambda_k I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ (\lambda_2 - \lambda_1) I_{d_2} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda_N - \lambda_1) I_{d_N} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_N) I_{d_1} & & 0 \\ & (\lambda_2 - \lambda_N) I_{d_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Như vậy, tồn tại $P \in K[X]$ tách đơn và là đa thức triệt tiêu của f .

b) Đảo lại, giả sử tồn tại $P \in K[X]$ tách đơn sao cho $P(f) = 0$.

Vậy tồn tại $\alpha \in K - \{0\}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ từng đôi phân biệt, sao cho

$$P = \alpha \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k).$$

Ta xét $A_k = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} (X - \lambda_j)$ với $k \in \{1, \dots, p\}$. Vì $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ từng đôi phân biệt nên ta có :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, A_k(\lambda_k) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0.$$

Ký hiệu : $u_k = \frac{1}{A_k(\lambda_k)} \in K$, với $k \in \{1, \dots, p\}$.

Đa thức $1 - \sum_{k=1}^p u_k A_k$ có bậc $\leq p - 1$ và triệt tiêu tại $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vì :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \left(\sum_{k=1}^p u_k A_k \right) (\lambda_j) = u_j A_j(\lambda_j) = 1.$$

Điều này chứng tỏ : $\sum_{k=1}^p u_k A_k = 1$.

Chuyển sang các tự đồng cấu, ta thu được : $e = 1(f) = \sum_{k=1}^p u_k A_k(f)$.

Giả sử $x \in E$, ta có : $x = e(x) = \left(\sum_{k=1}^p u_k A_k(f) \right) (x) = \sum_{k=1}^p u_k (A_k(f))(x)$.

Ký hiệu : $x_k = u_k (A_k(f))(x)$, với $k \in \{1, \dots, p\}$.

Khi đó ta có $x = \sum_{k=1}^p x_k$ và với mọi k thuộc $\{1, \dots, p\}$:

$$\begin{aligned}(f - \lambda_k e)(x_k) &= (X - \lambda_k)(u_k(A_k(f)))(x) = (u_k(X - \lambda_k)A_k)(f)(x) \\ &= (\alpha^{-1}u_k P)(f)(x) = 0(x) = 0.\end{aligned}$$

Vậy $\forall k \in \{1, \dots, p\}, x_k \in \text{Ker}(f - \lambda_k e)$.

Từ đó suy ra : $E = \sum_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k e)$.

Ta đã thấy (xem Hệ quả 1) : $\text{Sp}_K(f) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$; mặt khác, theo định nghĩa, với mọi k thuộc $\{1, \dots, p\}$ sao cho $\lambda_k \notin \text{Sp}_K(f)$, ta có : $\text{Ker}(f - \lambda_k e) = \{0\}$.

Vậy $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{KGCR}(f, \lambda) = \sum_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k e)$ và (xem Mệnh đề, 2.3) f chéo hóa được.

2) Suy từ 1) bằng việc chuyển qua ma trận.

VÍ DỤ :

1) Giả sử E là một K - kgv hữu hạn chiều. Mọi phép chiếu p của E đều chéo hóa được vì p triệt tiêu đa thức tách đơn $X(X - 1)$.

2) Giả sử E là một $\mathbb{K}$ - kgv (với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$) hữu hạn chiều. Mọi phép đối xứng s của E đều chéo hóa được vì p triệt tiêu đa thức $(X - 1)(X + 1)$ vốn là tách đơn.

3) Giả sử $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ sao cho $A^3 = 7A - 6I_{10}$.

Đa thức $X^3 - 7X + 6 = (X - 1)(X - 2)(X + 3)$ thuộc $\mathbb{R}[X]$ là tách đơn, vậy A chéo hóa được.

4) Giả sử $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$, $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ là cơ sở

chính tắc của $M_{n,1}(\mathbb{C})$, f là tự đồng cấu của $M_{n,1}(\mathbb{C})$ của ma trận A đối với B_0 .

Vì $f(e_1) = e_n, f(e_2) = e_1, \dots, f(e_n) = e_{n-1}$, rõ ràng rằng : $f^n = \text{Id}_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$, và do vậy $A^n = I_n$. Như vậy, A triệt tiêu đa thức tách đơn $X^n - 1$ (các nghiệm của nó là các căn bậc n của 1), vậy A chéo hóa được.

Nhận xét :

1) Giả sử $A \in M_n(K)$, P là một đa thức triệt tiêu của A sao cho $P \neq 0$.

Ta không thể khẳng định rằng χ_A chia hết P hay P chia hết χ_A . Ví dụ, nếu $A = I_n$ ($n \geq 2$) thì $\chi_A = (-1)^n(X - 1)^n$ và với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$, $(X - 1)^k$ là đa thức triệt tiêu của A .

2) Theo định lý Cayley-Hamilton (xem Định lý 3.2.1 dưới đây) :

$$\forall A \in M_n(K), \chi_A(A) = 0.$$

Nói cách khác, χ_A là đa thức triệt tiêu của A .

Bài tập

◇ 2.4.1 Giả sử E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$, $P \in K[X]$.

Chứng minh: $\begin{cases} P(\lambda) \in \text{Sp}_K(P(f)) \\ \text{KGCR}(P(f), (P(\lambda))) \supset \text{KGCR}(f, \lambda). \end{cases}$

◇ 2.4.2 Giả sử E là một $\mathbb{R}$ -kgv $\mathbb{R}^N$, $f : E \rightarrow E$
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

Chứng minh $f \in \mathcal{L}(E)$ và chứng tỏ rằng đa thức triệt tiêu duy nhất của f là đa thức không.

◇ 2.4.3 Cho $A \in M_3(\mathbb{R})$ sao cho $A^3 + A = 0$ và $A \neq 0$. Chứng minh: $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

◇ 2.4.4 Cho $n \in \mathbb{N}$, $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$.
 $A \mapsto {}^t A$

Chứng minh f tuyến tính.

Xác định các phần tử riêng của f ; f có chéo hóa được không ?

◇ 2.4.5 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^3 = A + I_n$. Chứng minh : $\det(A) > 0$.

◇ 2.4.6 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Chứng minh: $\text{tr}(A) \in \mathbb{N}$ và $\text{tr}(A) \leq 4n$.

◇ 2.4.7 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $A^3 = A^2$ và $\text{tr}(A) = n$. Chứng minh : $A = I_n$.

◇ 2.4.8 Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*$, $A_i \in M_{n_i}(K)$, $(1 \leq i \leq N)$.

Chứng minh: $\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}$ chéo hóa được khi và chỉ khi $A_1, \dots, A_N$ chéo hóa được.

◇ 2.4.9 Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{k=1}^N n_k$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in K$.

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \dots & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \in T_{n_k, s}(K) \quad (1 \leq k \leq N) \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_N \end{pmatrix} \in T_{n, s}(K).$$

Chứng minh rằng T chéo hóa được khi và chỉ khi $\forall k \in \{1, \dots, N\}, T_k = \lambda_k I_{n_k}$ (sử dụng bài tập 2.4.8).

- ◇ 2.4.10 Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$ chéo hóa được, F là kgvc của E ổn định đối với f , f' là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên F . Chứng minh rằng f' chéo hóa được.

- ◇ 2.4.11 a) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$ chéo hóa được, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ là các gtr của f từng đôi một khác nhau, $N_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$ ($1 \leq i \leq p$), F là một kgvc của E . Chứng minh rằng F ổn định đối với f khi và chỉ khi tồn tại các

$$\text{kgvc } N'_1, \dots, N'_p \text{ của } E \text{ sao cho } \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, N'_i \subset N_i \\ F = \bigoplus_{i=1}^p N'_i \end{cases}$$

(sử dụng bài tập 2.4.10).

Đặc biệt, nếu tất cả các gtr của f đều đơn, thì có đúng 2^n kgvc của E ổn định đối với f .

b) Ví dụ: Tìm tất cả các kgvc của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với tự đồng cấu f có ma trận

$$\text{trong cơ sở chính tắc là: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ◇ 2.4.12' Chéo hóa đồng thời

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều n , I là một tập khác rỗng,

$(f_i)_{i \in I}$ là một họ các tự đồng cấu chéo hóa được của E và giao hoán từng đôi, nghĩa là:

$$\forall (i, j) \in I^2, f_i \circ f_j = f_j \circ f_i.$$

Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của E trong đó các ma trận của f_i đều là chéo

(ta nói rằng các f_i chéo hóa được đồng thời). (Có thể quy nạp theo n). Đặc biệt, nếu

hai ma trận chéo hóa được mà giao hoán thì chúng chéo hóa được đồng thời.

- ◇ 2.4.13' Cho E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho tồn tại $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ từng đôi phân biệt thỏa mãn: $(f - \lambda_1 e) \circ \dots \circ (f - \lambda_p e) = 0$ (trong đó $e = \text{Id}_E$).

Chứng minh rằng tồn tại $v_1, \dots, v_p \in \mathcal{L}(E)$ sao cho: $\forall P \in K[X], P(f) = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) v_k$.

- ◇ 2.4.14' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ chéo hóa được, $p \in \mathbb{N}^*$, $B \in \text{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $B^p = A$.

Chứng minh rằng A và B chéo hóa được đồng thời, tức là:

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), (P^{-1}AP \in \text{D}_n(\mathbb{C}) \text{ và } P^{-1}BP \in \text{D}_n(\mathbb{C})).$$

- ◇ 2.4.15' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, G là nhóm con hữu hạn Aben của $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng các phần tử của G chéo hóa được đồng thời, nghĩa là:

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \forall A \in G, P^{-1}AP \in \text{D}_n(\mathbb{C}).$$

(Sử dụng bài tập 2.4.12).

2.5 Ứng dụng của việc chéo hóa

2.5.1 Tính các lũy thừa của một ma trận vuông

Giả sử $A \in M_n(K)$.

1) Giả sử A chéo hóa được, tồn tại $P \in GL_n(K)$, $D \in D_n(K)$ sao cho :

$$A = PDP^{-1}.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Tính chất này là tầm thường với $k = 0$ (vì $A^0 = D^0 = I_n$) và đúng với $k = 1$. Nếu nó đúng cho một k thuộc $\mathbb{N}$, thì :

$$A^{k+1} = A^k A = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = P(D^k D)P^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

Mặt khác, ký hiệu $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, rõ ràng ta có : $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Từ đó ta suy ra giá trị của A^k .

VÍ DỤ :

Giả sử $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng A khả nghịch và hãy tính

A^k với mọi k thuộc $\mathbb{Z}$.

Ta lập đa thức đặc trưng :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -8 & 6 \\ -1 & -8-\lambda & 7 \\ 1 & -14 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12) \text{ (sau khai triển)} \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Vì $A \in M_3(\mathbb{R})$ và A có ba gtr phân biệt $(-2, 2, 3)$ nên A chéo hóa được. Ta tính các không gian con riêng :

$$\bullet X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 6y + 7z = 0 \\ x - 14y + 13z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Vậy $\text{KGCR}(A, -2)$ có số chiều là 1 và có cơ sở (V_1) , trong đó $(V_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\bullet X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 10y + 7z = 0 \\ x - 14y + 9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3y = 2z \end{cases}$$

Vậy $\text{KGCR}(A, 2)$ có số chiều là 1 và có cơ sở (V_2) , trong đó $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\bullet X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 11y + 7z = 0 \\ x - 14y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 3z \\ 3x = 2y \end{cases}$$

Vậy $\text{KGCR}(A, 3)$ có số chiều là 1 và có cơ sở (V_3) , trong đó $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ký hiệu } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ và } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ta có } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và}$$

$$A = PDP^{-1}.$$

Khi đó, với mọi k thuộc $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^k &= PD^k P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^k - 2.2^k + 2.3^k & (-2)^k + 3.2^k - 4.3^k & -(-2)^k - 2^k + 2.3^k \\ (-2)^k - 4.2^k + 3.3^k & (-2)^k + 6.2^k - 6.3^k & -(-2)^k - 2.2^k + 3.3^k \\ (-2)^k - 6.2^k + 5.3^k & (-2)^k + 9.2^k - 10.3^k & -(-2)^k - 3.2^k + 5.3^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mặt khác, vì $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ nên A khả nghịch; vậy A^{-1} , rồi A^k ($k \in \mathbb{Z}_-^*$) tồn tại.

Ta có: $\forall k \in \mathbb{Z}_-^*$,

$$A^k = (A^{-1})^{-k} = ((PDP^{-1})^{-1})^{-k} = (PD^{-1}P^{-1})^{-k} = P(D^{-1})^{-k}P^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Nói cách khác, công thức $A^k = PD^kP^{-1}$ đúng với mọi k thuộc $\mathbb{Z}$, và kết quả thu được ở trên cũng đúng cho cả A^k .

2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_3(K)$ không chéo hóa được và sao cho χ_A tách được. Ta đã thấy (theo các ví dụ ở § 2.3) cách chéo hóa A . Nếu $A = PTP^{-1}$ ($P \in \text{GL}_3(K)$, $T \in \mathbf{T}_{3,K}(K)$) thì như trong 1), ta thu được: $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$. Còn phải tính T^k .

VÍ DỤ:

$$\text{Giả sử } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}). \text{ Tính } A^k \text{ với mọi } k \text{ thuộc } \mathbb{N}.$$

Ta đã thấy (Ví dụ 3, 2.3):

$$\bullet \chi_A = (2 - X)^3.$$

• $\text{KGCR}(A, 2)$ có số chiều là 1, được sinh bởi $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hơn nữa ta đã xác

định $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ để cho $AV_2 = 2V_2 + V_1$. Vector V_3 mà ta đã chọn cho ta ma trận

tam giác $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ta sẽ chọn theo cách khác để được ma trận tam giác

«đơn giản hơn»: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (xem phần 3.4 sau đây về phép thu gọn Jordan),

Ký hiệu $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} AV_3 = 2V_3 + V_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta chọn $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ký hiệu $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ta có $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $A = PTP^{-1}$.

Ta nhận thấy: $T = 2I_3 + N$, trong đó $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ lũy linh ($N^3 = 0$).

Vậy vì I_3 và N giao hoán, nên theo công thức nhị thức Newton ta có với mọi k thuộc $\mathbb{N}$:

$$T^k = (2I_3 + N)^k = 2^k I_3 + C_k^1 2^{k-1} N + C_k^2 2^{k-2} N^2 = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} & k(k-1)2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

(Nhắc lại rằng $C_k^j = 0$ với mọi $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $k < j$).

Một nghiên cứu tổng quát hơn việc cho nâng lên lũy thừa của ma trận dạng

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}, \text{ xem phần dưới đây về phép thu gọn Jordan, bài tập 3.4.11.}$$

Ta thu được với mọi k thuộc $\mathbb{N}$:

$$A^k = PT^k P^{-1} = 2^{k-1} \begin{pmatrix} -k^2 + k + 8 & k^2 - k & k^2 + 3k \\ -k^2 + 5k & k^2 - 5k + 8 & k^2 - k \\ -4k & 4k & 4k + 8 \end{pmatrix}.$$

Bài tập

◇ 2.5.1 Tính A^n :

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

◇ 2.5.2 Cho $a, b \in K$ sao cho $a \neq b$, E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$ chéo hóa được sao cho $\text{Sp}_K(f) = \{a, b\}$.

Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trong K sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^n = \alpha_n e + \beta_n f, \text{ và tính } \alpha_n, \beta_n.$$

◇ 2.5.3 Tìm một ma trận B thuộc $M_3(\mathbb{R})$ sao cho $B^2 = A$, trong đó $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

◇ 2.5.4 Cho $a \in [-1, 1], A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Tìm một ma trận B thuộc $M_2(\mathbb{R})$ sao cho $e^B = A$.

◇ 2.5.5 Tính e^A :

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.5.2 Các dãy truy hồi tuyến tính đồng thời cấp 1 với hệ số không đổi

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$.

Ta xét các dãy truy hồi tuyến tính đồng thời cấp 1 với hệ số không đổi

$(x_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ xác định bởi :

$$(E) \begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, n\}, & x_{j,0} = \alpha_j \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N}, & x_{j,k+1} = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_{i,k} \end{cases}$$

Vấn đề là tính các $x_{j,k}$.

$$\text{Ký hiệu } X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix}, (E) \text{ được đưa về : } \begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ \forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k \end{cases}$$

Vậy ta có : $\forall k \in \mathbb{N}, X_k = A^k X_0$ và việc xác định X_k được quy về việc tính A^k .

VÍ DỤ :

Giả sử $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là các dãy thực được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases} \end{cases}$$

Tính u_n, v_n, w_n và nghiên cứu sự hội tụ của ba dãy này.

$$\text{Ký hiệu } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ và với } n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Ta có : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$, vậy $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

• Thu gọn A

Ta lập đa thức đặc trưng :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} - \lambda & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= (1 - \lambda) \left(\frac{1}{12} - \lambda \right) \left(\frac{1}{4} - \lambda \right).\end{aligned}$$

Vì A có ba gtr phân biệt và A có cấp 3 nên A chéo hóa được

Tính các không gian con riêng. Ta thu được một cơ sở (V_1, V_2, V_3) của các vtr

liên kết tương ứng với $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ký hiệu } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \text{ ta có } P^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

và $A = PDP^{-1}$.

• Từ đây: $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$

$$= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 12^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\text{và do vậy: } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 14 - 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \\ v_n = 14 + 8 \cdot 12^{-n} \\ w_n = 14 + 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \end{cases}.$$

Rõ ràng rằng $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ hội tụ về 14.

2.5.3 Các dãy truy hồi tuyến tính với hệ số không đổi

Giả sử $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in K^p$. Ta xét các dãy truy hồi tuyến tính với hệ số không đổi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi :

$$\begin{cases} (u_0, \dots, u_{p-1}) \in K^p \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} = a_0 u_n + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1} \end{cases}$$

Vấn đề là tính u_n theo n , với mọi n thuộc $\mathbb{N}$. Phương trình này đã được giải trong trường hợp đặc biệt $K = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ và $p = 1$, trong 3.4.2, Tập 1.

Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \in M_p(K)$ và với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}.$$

Ta có với mọi n thuộc $\mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = AX_n.$$

Như vậy việc tính u_n được đưa về việc tính các lũy thừa của A .

Mặt khác, ký hiệu $u_{j,n} = u_{n+j}$ với $j \in \{0, \dots, p-1\}$ và $n \in \mathbb{N}$ ta cũng có thể đưa về trường hợp các dãy truy hồi tuyến tính đồng thời cấp 1 với hệ số không đổi, 2.5.2.

Ta nhận thấy :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & -\lambda & 1 \\ a_0 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^p (\lambda^p - a_{p-1} \lambda^{p-1} - \dots - a_0),$$

xem bài tập 2.2.11.

VÍ DỤ:

Tính u_n với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ nếu biết :
$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$ và lập đa thức đặc trưng :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 45 & -39 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45 = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 5).$$

Vậy χ_A tách được trên $\mathbb{R}$ và các gtr của A là 3 (kép) và 5 (đơn).

Tính các KGCR và thu được :

$$\begin{cases} \text{KGCR}(A, 3) = \text{Vect}(V_1), \text{ trong đó } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \text{KGCR}(A, 5) = \text{Vect}(V_3), \text{ trong đó } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Vì 3 là gtr kép và $\dim(\text{KGCR}(A, 3)) = 1$, nên A không chéo hóa được.

Ta sẽ tam giác hóa A . Ta tìm $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ để cho $AV_2 = 3V_2 + V_1$.

Ta có : $AV_2 = 3V_2 + V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ z = 9x + 6 \end{cases}$.

Vậy ta có thể chọn $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Kí hiệu $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}$, và $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, ta có $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ -30 & 16 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

và $A = PTP^{-1}$.

Bằng quy nạp dễ dàng chứng tỏ : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

Từ đây, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$: $X_n = PT^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -4n3^{n-1} + 5^n \\ -4(n+1)3^n + 5^{n+1} \\ -4(n+2)3^{n+1} + 5^{n+2} \end{pmatrix}$.

Cuối cùng : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -4n3^{n-1} + 5^n$.

Việc nghiên cứu về các hệ vi phân tuyến tính cấp 1 với hệ số không đổi đã được tiến hành ở Tập 4.

Bài tập

- ♦ 2.5.6 Cho $u_0 > 0, u_1 > 0$ và $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ được xác định bởi : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{2}{\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}}. \text{ Tính } u_n, \text{ rồi tính } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

- ♦ 2.5.7 Cho $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ được xác định bởi : $\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \begin{cases} u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1} \\ u_{2n} = u_{2n-1} + 2u_{2n-2} \end{cases} \end{cases}$

Tính u_n theo n .

Chương 3

Phép thu gọn (nghiên cứu nâng cao)

Chương 3 này dành cho các sinh viên các lớp Toán đặc biệt MP^* , MP , PSI^* , PSI và hoàn chỉnh chương 2.

3.1 Tam giác hóa

Trong § 3.1 này, E chỉ một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều là n , $n \geq 1$.

◆ Định nghĩa 1

- 1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta nói rằng f **tam giác hóa được** khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở B của E sao cho $\text{Mat}_B(f)$ là ma trận tam giác.
- 2) Giả sử $A \in M_n(K)$. Ta nói rằng A **tam giác hóa được** khi và chỉ khi tồn tại một ma trận tam giác T thuộc $M_n(K)$ đồng dạng với A .

Nếu $A \in M_n(K)$ tam giác hóa được thì ta gọi các dữ liệu P, T (và P^{-1}) sao cho $P \in GL_n(K)$, $T \in T_{n,s}(K)$ (hay $T_{n,i}(K)$), $A = PTP^{-1}$ là **dữ liệu tam giác hóa** của A . Tam giác hóa A , nghĩa là xác định P, T (và P^{-1}) thích hợp. Thay vì nói “tam giác hóa được” ta cũng nói : **thu được về dạng tam giác**.

Nhận xét :

1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, B_0 là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_{B_0}(f)$. Khi đó f tam giác hóa được khi và chỉ khi A tam giác hóa được.

2) Mọi ma trận tam giác đều tam giác hóa được.

3) Mọi ma trận tam giác dưới đều đồng dạng với một ma trận tam giác trên, và ngược lại. Thật vậy, nếu $T = (t_{ij}) \in T_{n,i}(K)$, ký hiệu $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$, ta có

$$P \in GL_n(K), P^{-1} = P \text{ và } PTP^{-1} = \begin{pmatrix} t_{nn} & t_{n,n-1} & \cdots & t_{n1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_{11} \end{pmatrix} \in T_{n,s}(K).$$

Như vậy, để cho một ma trận A thuộc $M_n(K)$ đồng dạng với một ma trận tam giác dưới, cần và đủ là nó đồng dạng với một ma trận tam giác trên. Trong phần sau của

giáo trình này ta sẽ ưu tiên các ma trận tam giác trên.

4) Nếu $f \in \mathcal{L}(E)$ tam giác hóa được thì các phần tử chéo của ma trận tam giác biểu diễn f là các gtr của f , được viết trên đường chéo này với số lần lặp bằng cấp bội của chúng (xem, chẳng hạn phần (i) $\Rightarrow$ (ii) của định lý dưới đây).

◆ Định lý

1) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Hai tính chất sau đây là tương đương :

(i) A tam giác hóa được.

(ii) χ_A tách được trên K .

2) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Hai tính chất sau đây là tương đương :

(i) f tam giác hóa được.

(ii) χ_f tách được trên K .

Chứng minh :

1) (i) $\Rightarrow$ (ii)

Giả sử A tam giác hóa được. Tồn tại $T = \begin{pmatrix} t_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,n}(K)$ sao cho $A \sim T$.

Vậy thì : $\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = \chi_T(\lambda) = \prod_{i=1}^n (t_{ii} - \lambda)$, do đó χ_A tách được trên K .

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

Quy nạp theo n .

Tính chất là tầm thường với $n = 1$.

Giả sử tính chất đó đúng với n thuộc $\mathbb{N}^*$, và giả sử $A \in \mathbf{M}_{n+1}(K)$ sao cho χ_A tách được trên K . Khi đó A có ít nhất một gtr λ_1 và một vtr liên kết V_1 ($V_1 \in \mathbf{M}_{n+1,1}(K)$) và do vậy tồn tại $L \in \mathbf{M}_{1,n}(K), A_2 \in \mathbf{M}_n(K)$ sao cho $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Ta có $\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & L \\ 0 & A_2 - \lambda I_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \chi_{A_2}(\lambda)$.

Vì χ_A tách được trên K nên χ_{A_2} tách được trên K . Theo giả thiết quy nạp tồn tại $Q \in \mathbf{GL}_n(K), T \in \mathbf{T}_{n,n}(K)$ sao cho $A_2 = QTQ^{-1}$.

Ký hiệu $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(K)$, khả nghịch và có nghịch đảo $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $X \in \mathbf{M}_{1,n}(K)$ sao cho với ký hiệu $T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T \end{pmatrix}$, ta có :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = R T_1 R^{-1}.$$

$$\text{Ta có : } R T_1 R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X Q^{-1} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy chỉ cần chọn } X = LQ \text{ để có được } \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = R T_1 R^{-1}.$$

Điều này chứng tỏ $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T \end{pmatrix} \in T_{n+1,1}(K)$, vậy A tam giác hóa được.

2) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. K -kgv E có ít nhất một cơ sở $\mathcal{B}$; sử dụng I) và ký hiệu $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, ta có:

$$(f \text{ tam giác hóa được}) \Leftrightarrow (A \text{ tam giác hóa được}) \Leftrightarrow (\chi_A \text{ tách được}) \Leftrightarrow (\chi_f \text{ tách được})$$

◆ Hệ quả

- 1) Giả sử E là một $\mathbb{C}$ -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 . Mọi tự đồng cấu của E đều tam giác hóa được.
- 2) Mọi ma trận vuông thuộc $M_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 1$) đều tam giác hóa được.

Chứng minh :

Theo định lý d'Alembert (Định lý, 5.3.4, Tập 5) χ_f (hay χ_A) tách được trên $\mathbb{C}$, vậy (theo định lý trên) f (hay A) tam giác hóa được.

VÍ DỤ :

$$\text{Giả sử } n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, A = \begin{pmatrix} 1 & - & 1 & 1-n \\ | & 1 & | & | \\ 1 & - & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Chứng minh rằng A không chéo hóa được nhưng tam giác hóa được, và hãy tam giác hóa A .

Nhận xét rằng $\text{rank}(A) = 1$, từ đó (theo định lý về hạng) : $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rank}(A) \geq 1$; vậy A thừa nhận 0 làm gtr và cấp bội của gtr 0 là $\geq n-1$, vì :

$$\dim(\text{KGCR}(A,0)) = \dim(\text{Ker}(A)) = n-1.$$

Vậy tồn tại $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sao cho $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda_1)$.

Vì $\text{tr}(A) = \lambda_1 + (n-1) \cdot 0$ và $\text{tr}(A) = (1-n) + (n-1) = 0$, ta suy ra $\lambda_1 = 0$.

Như vậy, A thừa nhận một và chỉ một gtr, chính là 0, và có cấp n ; vì không gian con riêng liên kết với 0 có số chiều $n-1$, ($\neq n$) nên A không chéo hóa được (xem thêm bài tập 2.3.12)

KGCR($A,0$) có phương trình $x_1 + \dots + x_{n-1} + (1-n)x_n = 0$, do vậy có một cơ sở

$$(V_1, \dots, V_{n-1}), \text{ trong đó: } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, V_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ta có $V_n \notin \text{Ker}(A)$ (vì $AV_n = V_{n-1}$), vậy $(V_1 \dots V_n)$ là một cơ

sở của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ký hiệu $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (V_1 \dots V_n)$,

$$P = \text{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \diagdown & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có : $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $T \in \mathbf{T}_{n,n}(\mathbb{R})$, $A = PTP^{-1}$.

Cuối cùng, việc giải hệ phương trình $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ \vdots \\ V_{n-2} = e_1 - e_{n-1} \\ V_{n-1} = e_1 + \dots + e_n \\ V_n = e_1 \end{cases}$ cho ta

$$\begin{cases} e_1 = V_n \\ e_2 = -V_1 + V_n \\ \vdots \\ e_{n-1} = -V_{n-2} + V_n \\ e_n = V_1 + \dots + V_{n-1} - (n-1)V_n \end{cases}, \text{ từ đó } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

Nhận xét :

Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Theo Hệ quả trên, tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T \in \mathbf{T}_{n,n}(\mathbb{C})$ sao cho $A = PTP^{-1}$. Vậy ta có $e^A = Pe^T P^{-1}$ (xem Mệnh đề 3, 1.3.2) và với ký hiệu

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ thì :}$$

$$\det(e^A) = \det(e^T) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}.$$

Khái niệm cờ của một không gian vectơ hữu hạn chiều

- ♦ **Định nghĩa 2** Ta gọi mọi họ $(E_1, \dots, E_n)$ các kgvc của E (trong đó $n = \dim(E)$), thoả mãn :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, & \dim(E_i) = i \\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, & E_i \subset E_{i+1} \end{cases}$$

là cờ của E .

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

- ♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $E_1, \dots, E_n$ là các kgvc của E ($n = \dim(E)$). Để $(E_1, \dots, E_n)$ là cờ của E , cần và đủ là tồn tại một cơ sở $(e_1, \dots, e_n)$ của E sao cho : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, E_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

- ♦ **Định nghĩa 3** Giả sử $(E_1, \dots, E_n)$ là một cờ của E , $(e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E . Ta nói rằng $(e_1, \dots, e_n)$ là **tương thích** với cờ $(E_1, \dots, E_n)$ khi và chỉ khi :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, E_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

Theo Mệnh đề trên, với mọi cờ $(E_1, \dots, E_n)$ của E , tồn tại một cơ sở $(e_1, \dots, e_n)$ tương thích với cờ $(E_1, \dots, E_n)$.

Hai mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $(E_1, \dots, E_n)$ là một cờ của E . Để f giữ ổn định $E_1, \dots, E_n$ (tức là $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(E_i) \subset E_i$), cần và đủ là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của E tương thích với cờ $(E_1, \dots, E_n)$ và sao cho $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ là ma trận tam giác trên.

- ♦ **Mệnh đề 3** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Để f tam giác hóa được, cần và đủ là tồn tại một cờ $(E_1, \dots, E_n)$ của E sao cho với mỗi i thuộc $\{1, \dots, n\}$, E_i ổn định đối với f .

Bài tập

- ◇ 3.1.1 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng các tính chất sau đây từng đôi một tương đương :

(i) A lũy linh

(ii) $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$

(iii) $\chi_A = (-1)^n X^n$

(iv) $A^n = 0$.

- ◇ 3.1.2 Giả sử E là một $\mathbb{C}$ -kgv hữu hạn chiều với số chiều là n , $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng với mọi k thuộc $\{0, \dots, n\}$ tồn tại một kgvc của E với số chiều k và ổn định đối với f .

- ◇ 3.1.3 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $\chi_A = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$ là đa thức đặc trưng của A .

Chứng minh rằng $\chi_{P(A)} = \prod_{i=1}^n (P(\lambda_i) - X)$ và từ đó suy ra : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(P(A)) = P(\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$.

- ◇ 3.1.4 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Chứng minh rằng M tam giác hóa được khi và chỉ khi A và B tam giác hóa được. Hãy tổng quát cho một ma trận chéo theo khối.

- ◇ 3.1.5 Chứng minh : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \det \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} \right) \geq 0$.

- ◇ 3.1.6 Tìm tất cả các kgvc của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với tự đồng cấu f của $\mathbb{R}^3$ có ma trận

$$\text{trong cơ sở chính tắc } \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ là : } A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- ◇ 3.1.7 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh rằng, nếu χ_A tách được trên $\mathbb{R}$, thì, với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, χ_{A^k} tách được trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng, nếu χ_{A^2} tách được trên $\mathbb{R}$ và có các nghiệm đều ≥ 0 , thì χ_A tách được trên $\mathbb{R}$.

c) Cho một ví dụ về $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ sao cho χ_A không tách được trên $\mathbb{R}$ và χ_{A^3} tách được trên $\mathbb{R}$.

- ◇ 3.1.8 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương :

(i) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ từng đôi phân biệt

(ii) $\det((\operatorname{tr}(A^{i+j-2}))_{1 \leq i, j \leq n}) \neq 0$.

◇ 3.1.9 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $AB = BA$ và B lũy linh. Chứng minh rằng $A + B$ và A có cùng đa thức đặc trưng; đặc biệt: $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A)$ và $\det(A + B) = \det(A)$.

◇ 3.1.10* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều n , $f \in \mathcal{L}(E)$ lũy linh, v là chỉ số lũy linh của f .
Chứng minh: $v = n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(f) = n - 1$.

◇ 3.1.11 Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$ tam giác hóa được, F là một kgvc của E ổn định đối với f và sao cho $F \neq \{0\}$, g là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên F . Chứng minh rằng g tam giác hóa được (sử dụng bài tập 2.2.1).

◇ 3.1.12* Tam giác hóa đồng thời

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều n , I là tập khác rỗng, $(f_i)_{i \in I}$ là họ các tự đồng cấu tam giác hóa được của E và từng đôi giao hoán.

a) Chứng minh rằng tồn tại một vectơ riêng chung cho tất cả các f_i (thực hiện quy nạp theo n).

b) Từ đó suy ra rằng tồn tại một cơ sở của E trong đó tất cả các ma trận của f_i đều là ma trận tam giác trên (có thể thực hiện quy nạp theo n).

◇ 3.1.13 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $AB = BA$.

Chứng minh: $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A + B) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) + \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.
(sử dụng bài tập 3.1.12).

◇ 3.1.14* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho: $AB - BA = C$, $AC = CA$, $BC = CB$.

Chứng minh rằng A, B, C tam giác hóa được đồng thời, tức là tồn tại $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ sao cho $P^{-1}AP, P^{-1}BP, P^{-1}CP$ là các ma trận tam giác trên (thực hiện quy nạp theo n và sử dụng bài tập 3.1.12 a)).

◇ 3.1.15* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $AB = 0$. Chứng minh rằng A và B tam giác hóa được đồng thời. Tính chất này có mở rộng cho trường hợp ba ma trận được không?

◇ 3.1.16* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $\rho(A)\rho(B) < 1$ (trong đó $\rho(\cdot)$ chỉ bán kính phổ:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|).$$

Chứng minh: $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists! X \in M_n(\mathbb{C}), AXB - X = C$.

(Sử dụng bài tập 3.1.13 áp dụng cho các tự đồng cấu a, b của $M_n(\mathbb{C})$ xác định bởi:

$a: X \mapsto AX, b: X \mapsto XB$).

◇ 3.1.17* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng các tính chất sau đây từng đôi một tương đương :

(i) $\forall C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$.

(ii) $\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), (AX = XB \Rightarrow X = 0)$.

(iii) $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$.

◇ 3.1.18* Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ sao cho $\forall k \in \{1, \dots, N\}, |\lambda_k| = 1$.

Chứng minh rằng tồn tại một hàm trích σ sao cho : $\sum_{k=1}^N \lambda_k^{\sigma(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} N$.

◇ 3.1.19* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh $\rho(A) = \limsup_{p \rightarrow \infty} (|\text{tr}(A^p)|^{\frac{1}{p}})$, trong đó $\rho(A)$

là bán kính phổ của A , $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$ (Sử dụng bài tập 3.1.18).

3.2 Các đa thức triệt tiêu

Ở đây chúng ta sẽ làm sâu thêm những nghiên cứu được tiến hành ở § 2.4. Trong § 3.2 này, E chỉ một E -kgv.

3.2.1 Định lý Cayley và Hamilton

Trong § 3.2.1 này E được giả thiết là hữu hạn chiều với số chiều n , $n \geq 1$.

◆ **Định lý (Định lý Cayley và Hamilton)**

$$1) \quad \forall f \in \mathcal{L}(E), \chi_f(f) = 0.$$

$$2) \quad \forall A \in M_n(K), \chi_A(A) = 0.$$

Nói cách khác : Đa thức đặc trưng của f (tương ứng : A) triệt tiêu f (tương ứng : A).

Chứng minh :

Rõ ràng 2) là dạng ma trận của 1).

Giả sử $x \in E - \{0\}$. Họ $(f^k(x))_{0 \leq k \leq n}$, có $n+1$ phần tử, là phụ thuộc tuyến tính. Vậy tồn tại một số nguyên p_x lớn nhất trong $\mathbb{N}^*$ sao cho $(x, f(x), \dots, f^{p_x-1}(x))$ là độc lập tuyến tính. Vì $(x, f(x), \dots, f^{p_x}(x))$ là phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại $(a_0, \dots, a_{p_x-1}) \in K^{p_x}$ sao cho :

$$f^{p_x}(x) = \sum_{k=0}^{p_x-1} a_k f^k(x).$$

Ký hiệu $E_f(x) = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{p_x-1}(x))$.

Vì $f^{p_x}(x)$ được phân tích tuyến tính trên $x, f(x), \dots, f^{p_x-1}(x)$, nên rõ ràng rằng $E_f(x)$ ổn định đối với f .

Ký hiệu g_x là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên $E_f(x)$. Ma trận B của g_x trong cơ

$$\text{sở } (x, f(x), \dots, f^{p_x-1}(x)) \text{ của } E_f(x) \text{ là : } B = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & a_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{p_x-1} \end{pmatrix}.$$

Ta có với mọi λ thuộc K :

$$\chi_{g_x}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & & 0 & a_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 1 & & -\lambda & \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{p_x-1} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^{p_x} (\lambda^{p_x} - a_{p_x-1} \lambda^{p_x-1} - \dots - a_1 \lambda - a_0).$$

(Xem thêm bài tập 2.2.11)

Từ đây $(\chi_{g_x}(f))(x) = (-1)^{p_x} (f^{p_x}(x) - a_{p_x-1} f^{p_x-1}(x) - \dots - a_0 x) = 0$.

Mặt khác (bài tập 2.2.1): $\chi_{g_x} | \chi_f$. Vậy tồn tại $Q_x \in K[X]$ sao cho $\chi_f = Q_x \chi_{g_x}$.

Khi đó, ta có: $\chi_f(f) = Q_x(f) \circ \chi_{g_x}(f)$, tiếp đó:

$$(\chi_f(f))(x) = Q_x(f)((\chi_{g_x}(f))(x)) = Q_x(f)(0) = 0.$$

Điều này chứng tỏ $\forall x \in E, (\chi_f(f))(x) = 0$ tức là $\chi_f(f) = 0$.

Bài tập

Các bài tập 3.2.1 và 3.2.2 không dùng tới định lý Cayley và Hamilton.

◇ 3.2.1 Cho $N \in \mathbb{N}^*, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathbf{M}_{n_i}(K) (1 \leq i \leq N), P \in K[X]$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}. \text{ Chứng minh: } P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_N) \end{pmatrix}.$$

◇ 3.2.2 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{GL}_n(K)$. Chứng minh: $\exists P \in K[X], A^{-1} = P(A)$.

◇ 3.2.3 Cho $n, N \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), P_1, \dots, P_N \in \mathbb{C}[X]$. Giả sử rằng $A_1, \dots, A_N$ từng đôi một không có giá trị riêng nào chung nhau. Chứng minh rằng tồn tại $P \in \mathbb{C}[X]$ sao cho:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, P(A_i) = P_i(A_i).$$

◇ 3.2.4 Một phép chứng minh định lý Cayley và Hamilton (khi $K = \mathbb{C}$).

Cho $n \in \mathbb{N}^*, E$ là tập hợp các ma trận chéo hóa được của $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

tu) Chứng minh: $\forall A \in E, \chi_A(A) = 0$.

h) Bằng cách sử dụng tính trừu tượng của E trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (Xem bài tập 1.2.24, Tập 3) từ đó suy ra định lý Cayley và Hamilton (với $K = \mathbb{C}$): $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \chi_A(A) = 0$.

◇ 3.2.5 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), P \in \mathbb{C}[X]$. Chứng minh:

$$P(A) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \text{UCLN}(P, \chi_A) = 1.$$

◇ 3.2.6' Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều $\geq 1, f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng χ_f bất khả quy trong $K[X]$ khi và chỉ khi $\{0\}$ và E là hai kgv duy nhất của E ổn định đối với f .

◇ 3.2.7' Cho $n \in \mathbb{N}^*, A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$.

a) Chứng minh: $\chi_A(B) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Chứng minh : $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), (AX = XB \Rightarrow X = 0)$

c) Từ đó suy ra $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists! X \in M_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$.

Xem thêm bài tập 3.1.16.

◇ 3.2.8' Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{C}), P_A = \det(XI_n - A) = \sum_{i=0}^n a_i X^{n-i}$

a) Chứng minh : $\forall x \in \mathbb{C} - \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \text{tr}((xI_n - A)^{-1}) = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}$

b) Ta ký hiệu $B_j = \sum_{i=0}^j a_i A^{j-i}$ với $j \in \{0, \dots, n\}$ và $Q = \sum_{j=1}^n B_{j-1} X^{n-j}$ (đa thức với hệ số ma trận)

Chứng minh : $\forall x \in \mathbb{C}, P_A(x)I_n = (xI_n - A)Q(x)$.

Từ đó suy ra : $\forall x \in \mathbb{C}, \text{tr}(Q(x)) = P'_A(x)$.

c) Từ đó suy ra các hệ thức Newton giữa các $S_k = \sum_{p=1}^n \lambda_p^k$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$), và

các hệ số $a_0, \dots, a_n$: $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=0}^{j-1} a_i S_{j-i-1} = (n-j+1)a_{j-1}$.

d) Ví dụ

Giả sử $x_1, \dots, x_5$ là các nghiệm trong $\mathbb{C}$ của $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X - 1$.

Tính $S_k = \sum_{p=1}^5 x_p^k$ với $k \in \{0, \dots, 4\}$.

3.2.2 Định lý các hạt nhân

Trong § 3.2.2 này, E chỉ một K -kgv (không nhất thiết hữu hạn chiều).

◆ Định lý (Định lý các hạt nhân)

Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $N \in \mathbb{N}^*, P_1, \dots, P_N \in K[X]$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Khi đó các kgvc $\text{Ker}(P_i(f))$ ($1 \leq i \leq N$) có tổng trực tiếp và :

$$\bigoplus_{i=1}^N \text{Ker}(P_i(f)) = \text{Ker} \left(\left(\prod_{i=1}^N P_i \right) (f) \right).$$

Chứng minh :

Kí hiệu $P = \prod_{i=1}^N P_i$, và với $i \in \{1, \dots, N\}$, $Q_i = \prod_{1 \leq j \leq N, j \neq i} P_j$; khi đó ta có :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, P_i Q_i = P.$$

1) Vì : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $Q_i(f) \circ P_i(f) = P(f)$ nên ta có :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \text{Ker} P_i(f) \subset \text{Ker} P(f).$$

và do vậy :

$$\sum_{i=1}^N \text{Ker} P_i(f) \subset \text{Ker} P(f).$$

2) Ta chứng minh rằng các đa thức $Q_1, \dots, Q_N$ nguyên tố cùng nhau trong tập hợp của chúng.

Giả sử Π là một đa thức bất khả quy thuộc $K[X]$ sao cho $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\Pi | Q_i$.

Vì Π là bất khả quy và $\Pi | Q_1 = P_2 P_3 \dots P_N$, nên tồn tại $i \in \{2, \dots, N\}$ thỏa mãn $\Pi | P_i$.

Và bởi vì Π là bất khả quy và $\Pi | Q_i$, nên tồn tại $j \in \{1, \dots, N\} - \{i\}$, thỏa mãn $\Pi | P_j$.

Khi đó : $\Pi | P_i, \Pi | P_j, i \neq j$, mâu thuẫn vì $P_i \wedge P_j = 1$.

Điều này chứng tỏ rằng $Q_1, \dots, Q_N$ nguyên tố cùng nhau trong tập hợp của chúng.

Theo định lý Bezout, tồn tại $U_1, \dots, U_N \in K[X]$ sao cho $\sum_{i=1}^N U_i Q_i = 1$.

Từ đó suy ra : $\sum_{i=1}^N U_i(f) \circ Q_i(f) = \text{Id}_E$.

Giả sử $x \in \text{Ker} P(f)$. Ký hiệu $x_i = (Q_i(f) \circ U_i(f))(x)$, với $i \in \{1, \dots, N\}$, ta có :

$$x = \text{Id}_E(x) = \sum_{i=1}^N x_i.$$

Với mọi i thuộc $\{1, \dots, N\}$:

$$(P_i(f))(x_i) = (U_i(P_i Q_i))(f)(x) = (U_i(f))(P_i(f)(x)) = 0,$$

từ đây : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, x_i \in \text{Ker} P_i(f)$.

Như vậy :

$$\text{Ker} P(f) = \sum_{i=1}^N \text{Ker} P_i(f).$$

3) Cho $(x_1, \dots, x_N) \in E^N$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, N\}, x_i \in \text{Ker} P_i(f) \\ \sum_{i=1}^N x_i = 0 \end{cases}$$

Giả sử $j \in \{1, \dots, N\}$. Ta có $0 = Q_j(f) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) = \sum_{i=1}^N Q_j(f)(x_i)$.

Với mọi j thuộc $\{1, \dots, N\} - \{i\}$, P_i chia hết Q_j , và do vậy $(Q_j(f))(x_i) = 0$.

Từ đó : $(Q_j(f))(x_j) = 0$.

Ta đã thấy trong 2) : $\text{Id}_E = \sum_{i=1}^N U_i(f) \circ Q_i(f)$.

Từ đây : $x_j = \text{Id}_E(x_j) = \sum_{i=1}^N U_i(f)(Q_i(f)(x_j)) = 0$.

Điều này chứng tỏ rằng tổng $\sum_{i=1}^N \text{Ker} P_i(f)$ là trực tiếp.

◆ **Hệ quả (Thu về dạng chéo theo khối)**

Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$, $N \in \mathbb{N}^*$,

$P_1, \dots, P_N \in K[X]$ sao cho :

$$\begin{cases} \chi_f = \prod_{i=1}^N P_i \\ P_1, \dots, P_N \text{ đôi một nguyên tố cùng nhau} \end{cases}$$

Ta ký hiệu $n_i = \dim(\text{Ker } P_i(f))$, với $i \in \{1, \dots, N\}$.

Tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của E và các ma trận $A_i \in \mathbf{M}_{n_i}(K)$ ($1 \leq i \leq N$) sao cho :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}.$$

Chứng minh :

Theo định lý Cayley và Hamilton (Định lý, 3.2.1), $\chi_f(f) = 0$, từ đây bằng cách áp dụng định lý các hạt nhân :

$$E = \text{Ker } \chi_f(f) = \bigoplus_{i=1}^N \text{Ker } P_i(f).$$

Với mỗi i thuộc $\{1, \dots, N\}$, $\text{Ker } P_i(f)$ có một cơ sở $\mathcal{B}_i$ với n_i phần tử, ta ký

hiệu $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i$. Vì với mọi i thuộc $\{1, \dots, N\}$, $\text{Ker } P_i(f)$ ổn định đối với f , nên

ma trận của f trong $\mathcal{B}$ có dạng mong muốn, chéo theo khối.

Nhận xét:

Nếu ta giả thiết : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\deg(P_i) \geq 1$ thì : $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $n_i \geq 1$ (Xem nhận xét trong mục 3.2.3 dưới đây).

Trong phát biểu của Hệ quả ta đã cho phép một số n_i nào đó là 0.

VÍ DỤ :

$$\text{Xét } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$$

Ta lập đa thức đặc trưng χ_A của A :

$$\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4)$$

Vì χ_A không có một nghiệm thực nào, nên A không có một giá trị riêng thực nào cả, đặc biệt, A không chéo hóa được trong $M_4(\mathbb{R})$. Tuy nhiên vì χ_A tách đơn trên $\mathbb{C}$ nên A chéo hóa được trong $M_4(\mathbb{C})$.

Ký hiệu $N=2$, $P_1=X^2+1$, $P_2=X^2+4$ thì các giả thiết của Hệ quả trên được thỏa mãn:

- Giả sử $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$. Ta có :

$$X \in \text{Ker}(P_1(A)) \Leftrightarrow (A^2 + I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \text{Ker}(P_1(A)) \text{ có cơ sở } (V_1, V_2) \text{ trong đó } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Cũng tương tự: $X \in \text{Ker}(P_2(A)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z-t=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\text{Một cơ sở của } \text{Ker}(P_2(A)) \text{ là } (V_3, V_4) \text{ trong đó : } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ký hiệu } P = (V_1 V_2 V_3 V_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ta có } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{và } A = PBP^{-1} \text{ trong đó } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ chính là ma trận chéo theo khối.}$$

Ta cũng có thể nhận xét $AV_3 = V_3 + 5V_4$ và $AV_4 = -V_3 - V_4$ điều này cho ta B mà không cần tích P^{-1} cũng như tích PBP^{-1} .

3.2.3 Đa thức tối thiểu

Trong § 3.2.3 này, E chỉ một K -kgv (không nhất thiết hữu hạn chiều).

Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$.

Xét $I_f = \{P \in K[X]; P(f) = 0\}$. Ta chứng minh rằng I_f là một ideal của vành giao hoán $K[X]$ (xem Tập 5, 5.2.3 1) Định nghĩa):

- $0 \in I_f$ là hiển nhiên.
- Nếu $(P, Q) \in (I_f)^2$, thì $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f) = 0 + 0 = 0$, vậy $P + Q \in I_f$.
- Nếu $P \in I_f$ và $U \in K[X]$, thì $(UP)(f) = U(f) \circ P(f) = U(f) \circ 0 = 0$, vậy $UP \in I_f$.

Vậy: I_f là một ideal của vành giao hoán $K[X]$.

Theo 5.2.3 1) Định lý, Tập 5, tất cả các ideal của $K[X]$ đều là chính. Vậy tồn tại $P_0 \in K[X]$ sao cho: $I_f = \{UP_0; U \in K[X]\} = P_0K[X]$.

Tóm tắt lại:

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Tồn tại $P_0 \in K[X]$ sao cho:

$$\forall P \in K[X], (P(f) = 0 \Leftrightarrow P_0 | P).$$

Nói cách khác, tập hợp các đa thức triệt tiêu của f được tạo nên từ các bội của P_0 .

Có thể là P_0 đa thức không. Chẳng hạn, với ký hiệu $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ và $f: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

thì không tồn tại đa thức P thuộc $\mathbb{C}[X] - \{0\}$ sao cho $P(f) = 0$ bởi vì nếu

$P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ và $a_N \neq 0$, thì ký hiệu $e_N = (\delta_{N,k})_{k \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, ta có:

$$P(f)(e_N) = (a_N, a_{N-1}, \dots, a_1, a_0, 0, \dots) \neq 0.$$

♦ **Định nghĩa** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$.

Ta nói rằng f thừa nhận một đa thức tối thiểu khi và chỉ khi:

$$\{P \in K[X]; P(f) = 0\} \neq \{0\}.$$

Nếu f thừa nhận một đa thức tối thiểu, thì tồn tại một đa thức chuẩn tắc duy nhất, ký hiệu là π_f sao cho $\{P \in K[X]; P(f) = 0\} = \pi_f K[X]$, và π_f được gọi là đa thức tối thiểu của f .

♦ **Mệnh đề 2**

- 1) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Tồn tại một đa thức chuẩn tắc duy nhất, ký hiệu là π_A sao cho $\{P \in K[X]; P(A) = 0\} = \pi_A K[X]$, và π_A được gọi là đa thức tối thiểu của A .
- 2) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$. Khi đó f thừa nhận một đa thức tối thiểu.

3.2.3 Đa thức tối tiểu

Trong § 3.2.3 này, E chỉ một K -kgv (không nhất thiết hữu hạn chiều).

Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$.

Xét $I_f = \{P \in K[X]; P(f) = 0\}$. Ta chứng minh rằng I_f là một ideal của vành giao hoán $K[X]$ (xem Tập 5, 5.2.3 1) Định nghĩa):

- $0 \in I_f$ là hiển nhiên.
- Nếu $(P, Q) \in (I_f)^2$, thì $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f) = 0 + 0 = 0$, vậy $P + Q \in I_f$
- Nếu $P \in I_f$ và $U \in K[X]$, thì $(UP)(f) = U(f) \circ P(f) = U(f) \circ 0 = 0$, vậy $UP \in I_f$.

Vậy: I_f là một ideal của vành giao hoán $K[X]$.

Theo 5.2.3 1) Định lý, Tập 5, tất cả các ideal của $K[X]$ đều là chính. Vậy tồn tại $P_0 \in K[X]$ sao cho: $I_f = \{UP_0; U \in K[X]\} = P_0K[X]$.

Tóm tắt lại:

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Tồn tại $P_0 \in K[X]$ sao cho:

$$\forall P \in K[X], (P(f) = 0 \Leftrightarrow P_0 | P).$$

Nói cách khác, tập hợp các đa thức triệt tiêu của f được tạo nên từ các bội của P_0 .

Có thể là P_0 đa thức không. Chẳng hạn, với ký hiệu $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ và $f: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

thì không tồn tại đa thức P thuộc $\mathbb{C}[X] - \{0\}$ sao cho $P(f) = 0$ bởi vì nếu

$P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ và $a_N \neq 0$, thì ký hiệu $e_N = (\delta_{N,k})_{k \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, ta có:

$$P(f)(e_N) = (a_N, a_{N-1}, \dots, a_1, a_0, 0, \dots) \neq 0.$$

♦ **Định nghĩa** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$.

Ta nói rằng f thừa nhận một đa thức tối tiểu khi và chỉ khi:

$$\{P \in K[X]; P(f) = 0\} \neq \{0\}.$$

Nếu f thừa nhận một đa thức tối tiểu, thì tồn tại một đa thức chuẩn tắc duy nhất, ký hiệu là π_f sao cho $\{P \in K[X]; P(f) = 0\} = \pi_f K[X]$, và π_f được gọi là đa thức tối tiểu của f .

♦ **Mệnh đề 2**

1) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Tồn tại một đa thức chuẩn tắc duy nhất, ký hiệu là π_A sao cho $\{P \in K[X]; P(A) = 0\} = \pi_A K[X]$, và π_A được gọi là đa thức tối tiểu của A .

2) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$. Khi đó f thừa nhận một đa thức tối tiểu.

Chứng minh :

1) Vì $M_n(K)$ hữu hạn chiều với số chiều n^2 , nên họ $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ phụ thuộc tuyến tính. Vậy tồn tại $P \in K[X]$ (bậc $\leq n^2$) sao cho $P \neq 0$ và $P(A) = 0$. Việc sử dụng Định lý Cayley và Hamilton (Định lý 3.2.1) chứng tỏ rằng tồn tại $P \in K[X]$ sao cho : $P \neq 0$, $\deg(P) \leq n$, $P(A) = 0$.

2) Dễ dàng suy ra từ 1) bằng việc xét ma trận của f trong một cơ sở (nào đó) của E .

Nhận xét :

1) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$, B là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_B(f)$. Khi đó ta có : $\pi_f = \pi_A$.

2) • Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$. Theo Định lý Cayley và Hamilton (Định lý, 3.2.1), $\chi_f(f) = 0$. Theo định nghĩa của π_f , ta suy ra $\pi_f | \chi_f$.

• Tương tự : $\forall A \in M_n(K)$, $\pi_A | \chi_A$ và do vậy : $\forall A \in M_n(K)$, $1 \leq \deg(\pi_A) \leq n$.

◆ Định lý

1) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$.

Để f chéo hóa được, cần và đủ là π_f là tách đơn.

2) Giả sử $A \in M_n(K)$. Để A chéo hóa được, cần và đủ là π_A là tách đơn.

Chứng minh:

Rõ ràng 2) là dạng ma trận của 1).

a) Giả sử f chéo hóa được.

Theo Định lý, 2.4, tồn tại một đa thức tách đơn P thuộc $K[X]$ sao cho $P(f) = 0$. Vì $\pi_f | P$ nên π_f là tách đơn.

b) Đảo lại, giả sử π_f tách đơn. Vì $\pi_f(f) = 0$, nên theo Định lý, 2.4, f chéo hóa được.

◆ **Mệnh đề 3** Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 ,

$f \in \mathcal{L}(E)$. Với mọi đa thức bất khả quy P thuộc $K[X]$, ta có: $P | \pi_f \Leftrightarrow P | \chi_f$.

Nói cách khác : π_f và χ_f có cùng các ước bất khả quy.

Chứng minh:

1) Vì $\pi_f | \chi_f$ (xem Nhận xét 2)) nên mọi ước bất khả quy của π_f đều chia hết χ_f .

2) Đảo lại, ta giả thiết $K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$. Giả sử P là một ước bất khả quy của χ_f , tồn tại $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ sao cho $P(\lambda_1) = 0$.

Theo Hệ quả, 2.4, vì $\lambda_1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ và $\pi_f(f) = 0$, nên λ_1 là một nghiệm của π_f .

Nếu $K = \mathbb{C}$ hoặc ($K = \mathbb{R}$ và $\lambda_1 \in \mathbb{R}$), thì ta có $P = X - \lambda_1$ với sai khác một hệ số khác không của K , và do vậy $P | \pi_f$.

Nếu $K = \mathbb{R}$ và $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$, thì ta có $P = (X - \lambda_1)(X - \overline{\lambda_1})$, với sai khác một hệ số khác không của $\mathbb{R}$, và do vậy $P | \pi_f$ trong $\mathbb{R}[X]$.

Nếu K không phải là $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$, thì bằng cách thừa nhận (Định lý Steinitz, sử dụng tiên đề chọn) rằng tồn tại một thể mở rộng $\widehat{K}$ của K sao cho $\widehat{K}$ đóng đại số, ta chứng minh rằng kết quả được phát biểu vẫn đúng.

◆ Hệ quả 1

1) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta có :

$$\pi_f^{-1}(\{0\}) = \text{Sp}_K(f).$$

2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Ta có : $\pi_A^{-1}(\{0\}) = \text{Sp}_K(A)$.

Xem thêm bài tập 3.2.18

◆ Hệ quả 2

1) Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$. Để f tam giác hóa được, cần và đủ là π_f tách được trên K .

2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Để A tam giác hóa được, cần và đủ là π_A tách được trên K .

Chứng minh :

Rõ ràng 2) là dạng ma trận của 1). Theo Định lý, 3.1, f tam giác hóa được khi và chỉ khi χ_f tách được trên K , và theo Mệnh đề 3, χ_f tách được trên K khi và chỉ khi π_f tách được trên K .

Nhận xét :

Từ Mệnh đề trên đây suy ra, trong việc thu gọn về dạng chéo theo khối (Hệ quả, 3.2.2) mỗi khối A_i đều khác rỗng, tức là : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, n_i \geq 1$.

Bài tập

- ◇ 3.2.9 Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$. Tính χ_A , các gtr và các không gian con riêng của A , π_A . Có hay không $\chi_A = \pi_A$?
- ◇ 3.2.10 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $K[A] = \{P(A); P \in K[X]\}$. Chứng minh rằng $K[A]$ là một đại số con giao hoán của $\mathbf{M}_n(K)$ và $\dim(K[A]) = \deg(\pi_A)$.
- ◇ 3.2.11 Chứng minh: $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(K)$, $(A \sim B \Rightarrow \pi_A = \pi_B)$.
Điều ngược lại có đúng không (với giả thiết $K = \mathbb{C}$)?
- ◇ 3.2.12 Cho E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$, F là kgvc của E ổn định đối với f , g là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên F . Chứng minh: $\pi_g | \pi_f$.
- ◇ 3.2.13 Có hay không: $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(K)$, $\pi_{AB} = \pi_{BA}$?
- ◇ 3.2.14 Cho E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng f lũy linh khi và chỉ khi tồn tại $r \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\pi_f = X^r$, và khi đó r là chỉ số lũy linh của f .
- ◇ 3.2.15 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $H \in \mathbf{M}_n(K)$, sao cho $\text{rank}(H) = 1$.
Chứng minh $\pi_H = X(X - \text{tr}(H))$ (sử dụng bài tập 2.3.12).
- ◇ 3.2.16 Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*$, $A_i \in \mathbf{M}_{n_i}(K)$ ($1 \leq i \leq N$), $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}$.
Chứng minh $\pi_A = \prod_{1 \leq i \leq N} \pi_{A_i}$ (Có thể sử dụng bài tập 3.2.1).
- ◇ 3.2.17 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, π_A là đa thức tối tiểu của A trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, σ_A là đa thức tối tiểu của A trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh: $\sigma_A = \pi_A$.
- ◇ 3.2.18 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Chứng minh: $\text{Sp}_K(A) = \pi_A^{-1}(\{0\})$, không sử dụng Định lý Steinitz (xem chứng minh của Mệnh đề 3).
- ◇ 3.2.19 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh $|\chi_A| = (\pi_A)^n$.
Khảo sát trường hợp $\chi_A = (-1)^n (\pi_A)^n$.
- ◇ 3.2.20 Các khẳng định sau đây đúng hay sai?
1) $\exists A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, $\pi_A = X^2 + 1$

$$2) \exists B \in M_3(\mathbb{C}), \pi_B = X^2 + 1$$

$$3) \exists C \in M_3(\mathbb{R}), \pi_C = X^2 + 1.$$

◇ 3.2.21 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(K) - GL_n(K)$. Chứng minh rằng tồn tại

$$B \in M_n(K) - \{0\} \text{ sao cho } AB = BA = 0.$$

◇ 3.2.22' Giả sử E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng, nếu f thừa nhận một đa thức tối thiểu thì f cũng vậy và $\pi_{1_f} = \pi_f$ (sử dụng ${}^n(E^*) = \{0\}_E$, xem bài tập 1.1.5).

$$\text{Đặc biệt, ta thấy lại: } \forall A \in M_n(K), \pi_{1_A} = \pi_A.$$

◇ 3.2.23 Tổng quát hóa Mệnh đề 2.2)

Giả sử E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng, nếu $\text{Im}(f)$ hữu hạn chiều thì f thừa nhận một đa thức tối thiểu. Điều ngược lại có đúng không?

◇ 3.2.24 Giả sử E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$ thừa nhận một đa thức tối thiểu.

Chứng minh rằng các tính chất sau đây từng đôi một tương đương:

(i) f là đơn ánh

(ii) f là toàn ánh

(iii) f là song ánh.

◇ 3.2.25 Giả sử E là một K -kgv, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ thừa nhận một đa thức tối thiểu và thỏa mãn $f \circ g = g \circ f$.

Chứng minh rằng $f + g$ và $g \circ f$ thừa nhận một đa thức tối thiểu.

◇ 3.2.26 Giả sử E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Chứng minh rằng, nếu f thừa nhận một đa thức tối thiểu thì với mọi P thuộc $K[X]$,

$P(f)$ thừa nhận một đa thức tối thiểu

b) Chứng minh rằng nếu tồn tại $P \in K[X]$ bậc ≥ 1 sao cho $P(f)$ thừa nhận một đa thức tối thiểu thì f thừa nhận một đa thức tối thiểu.

◇ 3.2.27 Cho $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_p(K)$, $B \in M_q(K)$ sao cho $\pi_A \wedge \pi_B = 1$, $P, Q \in K[X]$,

$$M = P(A), N = Q(B), C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng tồn tại $R \in K[X]$ sao cho $F = R(C)$.

◇ 3.2.28' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $AB = BA$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

$$a) \text{ Chứng minh: } \forall P \in \mathbb{C}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

b) Từ đó suy ra : M chéo hóa được $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ chéo hoá được} \\ B = 0 \end{cases}$

◇ 3.2.29 Ma trận đồng hành

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$, $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0$, $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$

là ma trận đồng hành của P (xem bài tập 2.2.11).

Chứng minh : $\pi_{C_P} = P$.

◇ 3.2.30 Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$, $e = \text{Id}_E$, $g = f - \lambda e$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương:

(i) $\text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g) = E$

(ii) λ là nghiệm đơn của π_f .

3.3 Phân tích Dunford

§ 3.3 này có thể dành cho lần đọc thứ hai.

E chỉ một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều $n, n \geq 1$. Ta ký hiệu $e = \text{Id}_E$.

3.3.1 Không gian con đặc trưng

- ♦ **Định nghĩa** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_0 \in \text{Sp}_K(f)$, μ_0 là cấp bội của λ_0 trong π_f . Kgv của E , ký hiệu là $\text{KGCD}(f, \lambda_0)$ và xác định bởi :

$$\text{KGCD}(f, \lambda_0) = \text{Ker}((f - \lambda_0 e)^{\mu_0}),$$

được gọi là **không gian con đặc trưng** (hay : **không gian con phổ**) của f liên kết với giá trị riêng λ_0 .

Nhận xét : Với ký pháp trên : $\text{KGCD}(f, \lambda_0) \supset \text{KGCR}(f, \lambda_0) \neq \{0\}$.

- ♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho χ_f tách được trên K .

Ta có :
$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{KGCD}(f, \lambda).$$

Chứng minh :

Ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \text{Sp}_K(f)$, ta có $\pi_f = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\mu_k}$, vậy (Định lý các hạt nhân 3.2.2) :

$$E = \text{Ker}(\pi_f(f)) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}((f - \lambda_k e)^{\mu_k}) = \bigoplus_{k=1}^p \text{KGCD}(f, \lambda_k).$$

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho χ_f tách được trên K , $\lambda_0 \in \text{Sp}_K(f)$, ω_0 là cấp bội của λ_0 trong χ_f , μ_0 là cấp bội của λ_0 trong π_f . Khi đó :

1) $\text{KGCD}(f, \lambda_0)$ ổn định đối với f và với ký hiệu $e_0 = \text{Id}_{\text{KGCD}(f, \lambda_0)}$ và f_0

là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên $\text{KGCD}(f, \lambda_0)$, thì $f_0 - \lambda_0 e_0$ lũy linh chỉ số μ_0 .

2) $\dim(\text{KGCD}(f, \lambda_0)) = \omega_0$.

3) Ký hiệu $N_q = \text{Ker}((f - \lambda_0 e)^q)$ với mọi q thuộc $\mathbb{N}$, ta có :

$$\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{\mu_0} = N_{\mu_0+1} = \dots = \text{KGCD}(f, \lambda_0).$$

Chứng minh :

1) • $\text{KGCD}(f, \lambda_0)$ ổn định đối với f vì với mọi x thuộc $\text{KGCD}(f, \lambda_0)$:

$(f - \lambda_0 e)^{\mu_0}(f(x)) = f(f - \lambda_0 e)^{\mu_0}(x) = f(0) = 0$, vậy $f(x) \in \text{KGCD}(f, \lambda_0)$.

• Vì $\forall x \in \text{KGCD}(f, \lambda_0)$, $(f - \lambda_0 e)^{\mu_0}(x) = 0$ nên ta có : $(f_0 - \lambda_0 e_0)^{\mu_0} = 0$, vậy $f_0 - \lambda_0 e_0$ lũy linh.

• Ta ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \text{Sp}_K(f)$ và, với mọi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, $C_i = \text{KGCD}(f, \lambda_i)$, f_i là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên C_i , $v_i = f_i - \lambda_i \text{Id}_{C_i}$.

Vì χ_f tách được trên K nên ta có $E = \bigoplus_{i=1}^p C_i$, và do vậy : $\pi_f = \text{BCNN}_{1 \leq i \leq p} \pi_{f_i}$ (xem Bài tập 3.2.16).

Với mỗi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, ta ký hiệu α_i là chỉ số lũy linh của v_i : $v_i^{\alpha_i-1} \neq 0$ và $v_i^{\alpha_i} = 0$.

Vậy ta có : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\pi_{f_i} = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$,

từ đây : $\pi_f = \text{BCNN}_{1 \leq i \leq p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, do vậy α_i là cấp bội của λ_i trong π_f .

2) Theo định nghĩa của μ_0 , tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $\pi_f = (X - \lambda_0)^{\mu_0} Q$ và $Q(\lambda_0) \neq 0$.

Vì $(X - \lambda_0)^{\mu_0} \wedge Q = 1$, nên theo Định lý các hạt nhân (Định lý, 3.2.2) :

$E = \text{Ker}(\pi_f) = \text{Ker}((f - \lambda_0 e)^{\mu_0}) \oplus \text{Ker}(Q(f)) = \text{KGCD}(f, \lambda_0) \oplus \text{Ker}(Q(f))$.
Rõ ràng $\text{Ker}(Q(f))$ ổn định đối với f ; ta ký hiệu g là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên $\text{Ker}(Q(f))$. Khi đó ta có : $\chi_f = \chi_{f_0} \chi_g$ (xem bài tập 2.2.1).

• Vì $f_0 - \lambda_0 e_0$ lũy linh, nên ký hiệu $\delta_0 = \dim(\text{KGCD}(f, \lambda_0))$, ta có :

$$\chi_{f_0} = (-1)^{\delta_0} (X - \lambda_0)^{\delta_0}.$$

• Mặt khác, vì $\forall x \in \text{Ker}(Q(f))$, $Q(g)(x) = Q(f)(x) = 0$, nên Q là đa thức triệt tiêu của g , và vì $Q(\lambda_0) \neq 0$ nên λ_0 không phải là giá trị riêng của g (xem Hệ quả, 2.4).
Vậy, cấp bội của λ_0 trong χ_f và trong χ_{f_0} là bằng nhau, từ đó $\delta_0 = \alpha_0$.

3) Tồn tại i (duy nhất) trong $\{1, \dots, p\}$ sao cho $\lambda_0 = \lambda_i$.

Ta ký hiệu $F_i = \bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} \text{Ker}((f - \lambda_j e)^{\mu_j})$.

Giả sử $q \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu $P = (X - \lambda_i)^q \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)^{\mu_j}$

Theo Định lý các hạt nhân (Định lý, 3.2.2) : $\begin{cases} \text{Ker}(P(f)) = N_q \oplus F_i \\ E = \text{Ker}(\pi_f(f)) = N_{\mu_i} \oplus F_i \end{cases}$

Đặc biệt : $\dim(N_q) \leq \dim(E) - \dim(F_i) = \dim(N_{\mu_i})$.

- Nếu $q \geq \mu_i$, thì $N_{\mu_i} \subset N_q$, từ đây (vì $\dim(N_q) \leq \dim(N_{\mu_i})$) : $N_{\mu_i} = N_q$.
- Nếu $q < \mu_i$, thì theo định nghĩa của π_f , P không phải là đa thức triệt tiêu của f , vậy $\text{Ker}(P(f)) \neq E$, từ đó $\dim(N_q) < \dim(N_{\mu_i})$, và cần có $N_q \neq N_{\mu_i}$. Mặt khác (nếu $q \leq \mu_i$), $N_q \subset N_{\mu_i}$; vậy thì $N_q \subsetneq N_{\mu_i}$.

Ta đã chứng minh : $N_{\mu_i} = N_{\mu_i+1} = \dots = N_q$ (với mọi q thuộc $\mathbb{N}$ thoả mãn $q \geq \mu_i$).

Giả thiết tồn tại $q \in \{0, \dots, \mu_i - 1\}$ sao cho $N_q = N_{q+1}$. Giả sử $x \in N_{\mu_i}$. Ta có :

$$(f - \lambda_i e)^{q+1}((f - \lambda_i e)^{\mu_i - q - 1}(x)) = (f - \lambda_i e)^{\mu_i}(x) = 0.$$

vậy : $(f - \lambda_i e)^{\mu_i - q - 1}(x) \in N_{q+1} = N_q$,

Từ đó : $(f - \lambda_i e)^q((f - \lambda_i e)^{\mu_i - q - 1}(x)) = 0$, tức là : $(f - \lambda_i e)^{\mu_i - 1}(x) = 0$.

Vậy ta thu được $N_{\mu_i} = N_{\mu_i - 1}$, mâu thuẫn.

Ta kết luận : $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_{\mu_i} = N_{\mu_i + 1} = \dots$

Việc nghiên cứu này sẽ được xét tiếp ở phần sau trong Phép thu gọn Jordan (3.4.11).

Bài tập

- ◇ 3.3.1 Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho $g \circ f = f \circ g$. Chứng minh rằng các không gian con đặc trưng của f ổn định đối với g và, tổng quát hơn, với mọi P thuộc $K[X]$, $\text{Ker}(P(f))$ ổn định đối với g .
- ◇ 3.3.2 Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều ≥ 1 , $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho χ_f tách được trên K . Chứng minh rằng f chéo hóa được khi và chỉ khi :

$$\forall \lambda \in K, \text{rank}(f - \lambda e) = \text{rank}((f - \lambda e)^2).$$

3.3.2 Phân tích Dunford

◆ **Định lý - Định nghĩa**

1) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho χ_f tách được trên K . Tồn tại một cặp duy nhất (d, v) thuộc $(\mathcal{L}(E))^2$ sao cho :

$$\begin{cases} f = d + v \\ d \text{ chéo hóa được} \\ v \text{ lũy linh} \\ d \circ v = v \circ d \end{cases}$$

Hơn nữa : d và v là các đa thức của f và $\chi_d = \chi_f$.

Cặp (d, v) (hay hệ thức $f = d + v$) được gọi là **phân tích Dunford** của f .

2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$ sao cho χ_A tách được trên K . Tồn tại một cặp duy nhất (D, N) thuộc $(\mathbf{M}_n(K))^2$ sao cho :

$$\begin{cases} A = D + N \\ D \text{ chéo hóa được} \\ N \text{ lũy linh} \\ DN = ND \end{cases}$$

Hơn nữa : D và N là các đa thức của A và $\chi_D = \chi_A$.

Cặp (D, N) (hay hệ thức $A = D + N$) được gọi là **phân tích Dunford** của A .

Chứng minh :

Rõ ràng 2) là dạng ma trận của 1).

a) **Tồn tại**

Ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \text{Sp}_K(f)$, ω_k là cấp bội của λ_k trong χ_f ($1 \leq k \leq p$), sao cho :

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\omega_k}.$$

Với $k \in \{1, \dots, p\}$, ký hiệu $C_k = \text{KGCD}(f, \lambda_k)$, $e_k = \text{Id}_{C_k}$, f_k là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên C_k , $v_k = f_k - \lambda_k e_k$.

Ta nhắc lại (xem Mệnh đề 1, 3.3.1) : $E = \bigoplus_{k=1}^p C_k$.

Xét các tự đồng cấu d và v của E được xác định bởi việc gán tương ứng các $\lambda_k e_k$ và v_k : với mọi x thuộc E , tồn tại duy nhất $(x_1, \dots, x_p) \in C_1 \times \dots \times C_p$ sao cho $x = x_1 + \dots + x_p$, và ta đặt :

$$d(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \text{ và } v(x) = \sum_{k=1}^p v_k(x_k).$$

- Trong một cơ sở hợp nhất các cơ sở của các C_k , ma trận của d là (xem Mệnh đề

$$2.2), 3.3.1) \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{\omega_p} \end{pmatrix}, \text{ vậy } d \text{ chéo hóa được, và } \chi_d = \chi_f.$$

- Ký hiệu $\omega = \max_{1 \leq k \leq p} \omega_k$ và với các ký hiệu trên đây, ta có: $v^\omega(x) = \sum_{k=1}^p v_k^\omega(x_k) = 0$,

vì: $\forall k \in \{1, \dots, p\}, v_k^{\omega_k} = 0$.

Vậy v lũy linh.

- Với các ký hiệu trên:

$$f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x_k) = \sum_{k=1}^p (\lambda_k e_k + v_k)(x_k) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k + \sum_{k=1}^p v_k(x_k) = d(x) + v(x)$$

từ đây $f = d + v$.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} (d \circ v)(x) = d\left(\sum_{k=1}^p v_k(x_k)\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k(x_k) \\ (v \circ d)(x) = v\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k(x_k) \end{array} \right\}, \text{ từ đây } d \circ v = v \circ d.$$

- Lấy lại chứng minh của Định lý các hạt nhân (Định lý, 3.2.2) và ký hiệu Q_k là đa thức xác định bởi $(X - \lambda_k)^{\omega_k} Q_k = \chi_f$, phép chiếu lên C_k song song với $\bigoplus_{\substack{1 \leq l \leq p \\ l \neq k}} C_l$ là $U_k(f) \circ Q_k(f)$, vậy là một đa thức của f . Vậy d là một đa thức của f , và $v = f - d$ cũng vậy.

b) Duyệt nhất

Giả sử (d, v) là cặp xác định trên đây và $(d', v') \in (\mathcal{L}(E))^2$ sao cho :

$f = d' + v'$, d' chéo hóa được, v' lũy linh $d' \circ v' = v' \circ d'$.

Khi đó : $d' \circ f = d' \circ (d' + v') = d'^2 + d' \circ v' = d'^2 + v' \circ d' = f \circ d'$, do đó d' giao hoán với mọi đa thức của f , nói riêng với d . Tiếp theo, $v' = f - d'$ giao hoán với mọi đa thức của f . Nói riêng v' giao hoán với v . Hơn nữa vì v và v' lũy linh nên công thức nhị thức Newton chứng tỏ rằng $v - v'$ lũy linh (xem bài tập 2.3.3 a), Tập 5)

Mặt khác ta chứng minh rằng $d' - d$ chéo hóa được. Giả sử $k \in \{1, \dots, p\}$, $x \in C_k$. Ta có :

$$d \circ d'(x_k) = d' \circ d(x_k) = d'(\lambda_k x_k) = \lambda_k d'(x_k), \text{ vậy } d'(x_k) \in C_k.$$

Điều này chứng tỏ rằng mỗi C_k đều ổn định đối với d' . Vì d' chéo hóa được nên mỗi tự đồng cấu d'_k cảm sinh bởi d' trên C_k ($1 \leq k \leq p$) chéo hóa được (xem bài tập 2.4.10) và cuối cùng d và d' chéo hóa được trong cùng một cơ sở. Vậy $d' - d$ chéo hóa được.

Vì $d' - d = v - v'$ chéo hóa được và lũy linh nên rõ ràng $d' - d = v - v' = 0$, từ đây $(d', v') = (d, v)$. ■

Nhận xét :

Trong phân tích Dunford $f = d + v$, f chéo hóa được khi và chỉ khi $v = 0$.

◆ **Hệ quả** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho χ_f tách được. Ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \text{Sp}_K(f)$, ω_k là cấp bội của λ_k ($1 \leq k \leq p$) trong χ_f .

Tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của E sao cho ma trận của f trong $\mathcal{B}$ có dạng:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_p & \dots \\ & & & & & \ddots \\ & 0 & & & & & \lambda_p & \dots \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Chứng minh :

Ta giữ lại các ký hiệu trong chứng minh của Định lý trước. Mỗi v_k đều tam giác hóa được vì đa thức đặc trưng của nó là $(-1)^{\dim(C_k)} X^{\dim(C_k)}$, tách được. Vậy tồn tại một

cơ sở $\mathcal{B}_k$ của C_k sao cho $\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(v_k)$ có dạng $\begin{pmatrix} 0 & \dots \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vậy chỉ cần lấy $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^p \mathcal{B}_k$.

3.3.3 Ví dụ về ứng dụng phân tích Dunford

1) Dãy các lũy thừa của một ma trận

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$.

◆ **Định nghĩa** Với mọi A thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, ta gọi số thực ≥ 0 ký hiệu $\rho(A)$ và xác định bởi :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$$

là bán kính phổ của A .

♦ Định lý

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad \left(A^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1 \right).$$

Chứng minh :

Vì $\mathbb{C}$ đóng đại số nên χ_A tách được trên $\mathbb{C}$. Ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ và ω_k là

cấp bội của λ_k trong χ_A ($1 \leq k \leq N$), ta có : $\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{\omega_k}$.

Theo Hệ quả, 3.3.2, tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ và $T_k \in \mathbf{T}_{\omega_k, s}(K)$ có đường chéo 0

($1 \leq k \leq p$) sao cho $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{\omega_1} + T_1, \dots, \lambda_N I_{\omega_N} + T_N)$ (ma trận chéo theo khối, có các khối chéo tam giác).

Rõ ràng :

$$A^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \left(\forall k \in \{1, \dots, N\}, (\lambda_k I_{\omega_k} + T_k)^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \right).$$

Giả sử $k \in \{1, \dots, N\}$. Vì $\lambda_k I_{\omega_k}$ và T_k giao hoán và T_k lũy linh với chỉ số $\leq \omega_k$, nên ta có, theo công thức nhị thức Newton, với mọi p thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $p \geq \omega_k$:

$$(\lambda_k I_{\omega_k} + T_k)^p = \sum_{i=0}^{\omega_k-1} C_p^i \lambda_k^{p-i} T_k^i.$$

1) Giả sử $\rho(A) < 1$, tức là : $\forall k \in \{1, \dots, N\}, |\lambda_k| < 1$.

Ta trang bị cho $\mathbf{M}_{\omega_k}(\mathbb{C})$ một chuẩn $\|\cdot\|$ (được ký hiệu cùng một cách với $1 \leq k \leq N$).

Ta có :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \|(\lambda_k I_{\omega_k} + T_k)^p\| \leq \sum_{i=0}^{\omega_k-1} C_p^i |\lambda_k|^{p-i} \|T_k^i\|,$$

và do đó : $\forall p \geq \omega_k, \|(\lambda_k I_{\omega_k} + T_k)^p\| \leq |\lambda_k|^{p-\omega_k} \sum_{i=0}^{\omega_k-1} C_p^i |\lambda_k|^{\omega_k-i} \|T_k^i\|.$

Vì $p \mapsto \sum_{i=0}^{\omega_k-1} C_p^i |\lambda_k|^{\omega_k-i} \|T_k^i\|$ là một hàm đa thức, do ưu thế của lũy thừa nhân

($|\lambda_k|^{p-\omega_k}$) $_{p \geq \omega_k}$ đối với mọi đa thức, ta suy ra $(\lambda_k I_{\omega_k} + T_k)^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, và cuối cùng : $A^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$.

2) Đảo lại, giả sử $A^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$.

Giả sử $k \in \{1, \dots, N\}$; tồn tại $X_k \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho $AX_k = \lambda_k X_k$.

Ta có : $\forall p \in \mathbb{N}, A^p X_k = \lambda_k^p X_k$, vậy $\lambda_k^p X_k \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$.

Vì X_k là cố định $\neq 0$ và độc lập với p , nên ta có $\lambda_k^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, từ đây $|\lambda_k| < 1$.

Cuối cùng vì $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ hữu hạn, ta kết luận $\rho(A) = \max_{1 \leq k \leq p} |\lambda_k| < 1$.

Về một chứng minh khác cho kết quả này, xem (C 3.1.5).

2) Phép tính $\exp(A)$

Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Với các ký hiệu như ở 1):

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\omega_1} + T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N I_{\omega_N} + T_N \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đó (xem Mệnh đề 3, 1.3.2):

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} e^{T_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} e^{T_N} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Với mỗi k thuộc $\{1, \dots, N\}$, vì T_k lũy linh với chỉ số $\leq \omega_k \leq n$, nên ta có:

$$e^{T_k} = \sum_{i=0}^{\omega_k-1} \frac{1}{i!} T_k^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} T_k^i.$$

Bài tập

♦ 3.3.3* Cho $A = D + N$ là phân tích Dunford của $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Phân tích Dunford của A^k , $k \in \mathbb{N}^*$ là gì?

b) Phân tích Dunford của A^{-1} là gì, với giả thiết A khả nghịch?

♦ 3.3.4* Cho $A = D + N$ là phân tích Dunford của $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Phân tích Dunford của e^A là gì?

b) Giải phương trình $e^X = I_n$, ẩn $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

c) Chứng minh rằng A chéo hóa được khi và chỉ khi e^A chéo hóa được.

♦ 3.3.5* Cho $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ là một chuỗi nguyên, R là bán kính hội tụ của nó, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Chứng minh:

$$1) \sum_{k \geq 0} a_k A^k \text{ hội tụ} \Rightarrow \rho(A) \leq R.$$

$$2) \rho(A) < R \Rightarrow \sum_{k \geq 0} a_k A^k \text{ hội tụ},$$

trong đó $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$ là bán kính phổ của A .

♦ 3.3.6* Chứng minh: $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \text{tr}(A^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, với mọi A thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

(Sử dụng bài tập 3.1.18).

3.4 Thu gọn Jordan

§ 3.4 này có thể được dành cho lần đọc thứ hai.

E chỉ một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều $n, n \geq 1$.

3.4.1 Cấu trúc của các tự đồng cấu lũy linh

Giả sử v là một tự đồng cấu lũy linh của E , N là chỉ số của v , tức là số nguyên nhỏ nhất ≥ 1 sao cho $v^N = 0$. Ta giả sử $v \neq 0$, vậy $N \geq 2$.

1) Dãy các hạt nhân lặp

Với $k \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu $F_k = \text{Ker}(v^k)$. Khi đó ta có các bao hàm thức :

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{N-1} \subset F_N = E.$$

Ta chứng minh rằng tất cả các bao hàm thức này là chặt.

Ta lập luận bằng phản chứng : Giả sử tồn tại $k \in \{0, \dots, N-1\}$ sao cho $F_k = F_{k+1}$.

Giả sử $i \in \mathbb{N}$ sao cho $i \geq k$. Ta có với mọi x thuộc E :

$$\begin{aligned} v^{i+1}(x) = 0 &\Leftrightarrow v^{i+1}(v^{i-k}(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow v^{i-k}(x) \in F_{k+1} = F_k \Leftrightarrow v^k(v^{i-k}(x)) = 0 \Leftrightarrow v^i(x) = 0. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ : $F_k = F_{k+1} = \dots = F_{N-1} = F_N$.

Nhưng vì $v^{N-1} \neq 0$ và $v^N = 0$ nên ta có : $F_{N-1} \neq F_N = E$, mâu thuẫn.

Vậy : $\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_{N-1} \subsetneq F_N = E$.

2) Xây dựng một số kgvc của F_k

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng tồn tại các kgvc $G_1, \dots, G_N$ của E sao cho :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, N\}, & G_k \oplus F_{N-k} = F_{N-k+1} \\ \forall k \in \{2, \dots, N\}, & v(G_{k-1}) \subset G_k. \end{cases}$$

- Kgvc F_{N-1} của F_N có ít nhất một phần bù G_1 trong F_N : $G_1 \oplus F_{N-1} = F_N = E$.
- Cho $i \in \{1, \dots, N-1\}$. Giả sử tồn tại các kgvc $G_1, \dots, G_i$ của E sao cho :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, i\}, & G_k \oplus F_{N-k} = F_{N-k+1} \\ \forall k \in \{2, \dots, i\}, & v(G_{k-1}) \subset G_k. \end{cases}$$

Cho $x \in G_i - \{0\}$.

Vì $G_i \subset F_{N-i+1}$ nên $v^{N-i+1}(x) = 0$, tức là $v(x) \in F_{N-i}$.

Vì $G_i \cap F_{N-i} = \{0\}$ nên $x \notin F_{N-i}$, tức là $v(x) \notin F_{N-i-1}$.

Vậy ta có : $\begin{cases} v(G_i) \subset F_{N-i} \\ v(G_i) \cap F_{N-i-1} = \{0\} \end{cases}$

Ký hiệu C là một cơ sở của $v(G_i)$, C' là một cơ sở của F_{N-i-1} , C'' là một cơ sở của một phần bù của $v(G_i) \oplus F_{N-i-1}$ trong F_{N-i} , rõ ràng kgvc G_{i+1} được sinh bởi

$C \cup C''$ thoả mãn :

$$\begin{cases} v(G_i) \subset G_{i+1} \\ G_{i+1} \oplus F_{N-i-1} = F_{N-i} \end{cases}$$

Giả sử $i \in \{1, \dots, N-1\}$. Ánh xạ tuyến tính thu hẹp $v|_{G_i} : G_i \rightarrow E$ là đơn
 $x \mapsto v(x)$

ánh vì với mọi x thuộc $G_i - \{0\}$, ta có $v(x) \notin F_{N-i-1}$ (xem phần trước), vậy $v(x) \neq 0$.

Từ đó và vì $v(G_i) \subset G_{i+1}$ ta có:

$$\dim(G_i) = \dim(v|_{G_i}(G_i)) = \dim(v(G_i)) \leq \dim(G_{i+1}).$$

3) Xây dựng một cơ sở thích hợp của E

Ta ký hiệu $\gamma_k = \dim(G_k)$ với $k \in \{1, \dots, N\}$.

Vì (xem 1)) : $\forall k \in \{1, \dots, N\}$, $F_{N-k} \subsetneq F_{N-k+1}$ nên ta có : $\forall k \in \{1, \dots, N\}$, $\gamma_k \geq 1$.

Kgvc G_1 của E có ít nhất một cơ sở $B_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{1,\gamma_1})$.

Cho $i \in \{1, \dots, N-1\}$. Ta giả sử chọn được một cơ sở $B_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,\gamma_i})$ của G_i .

Họ $(v(e_{i,1}), \dots, v(e_{i,\gamma_i}))$ là độc lập tuyến tính vì $v|_{G_i} : G_i \rightarrow E$ là đơn ánh (xem 2))
 $x \mapsto v(x)$

và được tạo nên từ các phần tử của G_{i+1} (vì $v(G_i) \subset G_{i+1}$).

Vậy ít nhất cũng có một cách theo đó ta có thể bổ sung nó thành một cơ sở
 $B_{i+1} = (e_{i+1,1}, \dots, e_{i+1,\gamma_{i+1}})$ của G_{i+1} , trong đó $e_{i+1,j} = v(e_{i,j})$ với $j \in \{1, \dots, \gamma_i\}$.

Ta đặt trong một bảng các cơ sở của $G_1, \dots, G_N$ được xây dựng như vậy, sao cho mỗi vectơ nằm ngay trên ảnh của nó qua v , các vectơ của dòng cuối cùng có ảnh 0:

G_1	$e_{1,1} \dots e_{1,\gamma_1}$			
G_2	$e_{2,1} \dots e_{2,\gamma_1}$	$e_{2,\gamma_1+1} \dots e_{2,\gamma_2}$		
G_N	$e_{N,1} \dots e_{N,\gamma_1}$	$e_{N,\gamma_1+1} \dots e_{N,\gamma_2}$	...	$e_{N,\gamma_{N-1}+1} \dots e_{N,\gamma_N}$

Vì $E = F_N = G_1 \oplus F_{N-1} = G_1 \oplus (G_2 \oplus F_{N-2}) = \dots$, và $F_0 = \{0\}$, nên rõ ràng

$G_1, \dots, G_N$ có tổng trực tiếp và : $E = \bigoplus_{i=1}^N G_i$.

Ký hiệu V_j là kgvc của E sinh bởi các vectơ của cột thứ j của bảng với mọi j thuộc $\{1, \dots, \gamma_N\}$:

$$\begin{cases} V_1 = \text{Vect}(e_{i,1})_{1 \leq i \leq N} \\ \vdots \\ V_{\gamma_1} = \text{Vect}(e_{i,\gamma_1})_{1 \leq i \leq N} \\ V_{\gamma_1+1} = \text{Vect}(e_{i,\gamma_1+1})_{2 \leq i \leq N} \\ \vdots \\ V_{\gamma_N} = \text{Vect}(e_{N,\gamma_N}). \end{cases}$$

có nghĩa là $V_j = \text{Vect}(e_{i,j})_{k \leq i \leq N}$, với k là số nguyên duy nhất thuộc $\{1, \dots, N\}$ sao cho $\gamma_{k-1} < j \leq \gamma_k$ (theo quy ước $\gamma_0 = 0$).

Để tiện cho lập luận về sau, ta ký hiệu $B'_j = (e_{N,j}, e_{N-1,j}, \dots, e_{k,j})$ với $j \in \{1, \dots, \gamma_N\}$,

trong đó k được xác định bởi $\gamma_{k-1} < j \leq \gamma_k$.

Giả sử $j \in \{1, \dots, \gamma_N\}$ và k được xác định bởi $\gamma_{k-1} < j \leq \gamma_k$.

Vì $v(e_{N,j}) = 0$, $v(e_{N-1,j}) = e_{N,j}, \dots, v(e_{k,j}) = e_{k+1,j}$, nên V_j là ổn định đối với v , và

ma trận của tự đồng cấu cảm sinh bởi v trên V_j là $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ có cấp $N - k + 1$.

Với $s \in \mathbb{N}^*$ ta ký hiệu $J_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_s(\mathbb{C})$, được gọi là **ma trận lũy linh Jordan** (cấp s).

Như vậy : $J_1 = (0)$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$

Ký hiệu $B' = B'_1 \cup \dots \cup B'_{\gamma_N}$; ma trận J của v trong B' là ma trận chéo theo khối :

$$J = \begin{pmatrix} J_N & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_N & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{N-1} \\ & & & & & \ddots \\ & & 0 & & & & J_{N-1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & J_1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix}$$

mà ta có thể viết: $J = \text{diag}(\underbrace{J_N, \dots, J_N}_{\gamma_1 \text{ khối } J_N}, \underbrace{J_{N-1}, \dots, J_{N-1}}_{\gamma_2 - \gamma_1 \text{ khối } J_{N-1}}, \dots, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\gamma_N - \gamma_{N-1} \text{ khối } J_1})$.

Ký hiệu $\varphi_i = \dim(F_i)$, với $i \in \{1, \dots, N\}$ và $\varphi_{N+1} = n$.

$\forall i \in \{1, \dots, N\}, G_i \oplus F_{N-i} = F_{N-i+1}$,

nên ta có: $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \gamma_i = \varphi_{N-i+1} - \varphi_{N-i}$.

Giả sử $i \in \{1, \dots, N\}$. Trong J , khối J_{N-i+1} xuất hiện đúng $\gamma_i - \gamma_{i-1}$ lần, tức là

$2\varphi_{N-i+1} - \varphi_{N-i} - \varphi_{N-i+2}$ lần, điều này chứng tỏ: $2\varphi_{N-i+1} \geq \varphi_{N-i} + \varphi_{N-i+2}$.

Như vậy, J được xác định một cách duy nhất từ dãy các số chiều của các hạt nhân của các lũy thừa của v . Ma trận J được gọi là **thu gọn Jordan của tự đồng cấu lũy linh** v .

Ta sẽ thấy rằng, với v lũy linh đã cho, thu gọn Jordan J của v là duy nhất, nhưng một cơ sở $\mathcal{B}$ của E sao cho $J = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ lại không nhất thiết duy nhất.

Nhận xét :

Giả sử $s \in \mathbb{N}^*$, $J_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_s(\mathbb{C})$, rõ ràng rằng :

$$J_s^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, J_s^{s-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_s^s = 0.$$

Vậy, với ký hiệu $J = \text{diag}(J_N, \dots, J_N, J_{N-1}, \dots, J_{N-1}, \dots, J_1, \dots, J_1)$ là thu gọn Jordan của v , ta có :

$$\begin{aligned} J^2 &= \text{diag}(J_N^2, \dots, J_N^2, J_{N-1}^2, \dots, J_{N-1}^2, \dots, J_1^2, \dots, J_1^2, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ J^{N-1} &= \text{diag}(J_N^{N-1}, \dots, J_N^{N-1}, 0, \dots, 0), J^N = 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra số lần xuất hiện trong J của $J_N, J_{N-1}, \dots, J_1$ tương ứng là $\text{rank}(J^{N-1}) - \text{rank}(J^{N-2}), \dots, \text{rank}(J) - \text{rank}(J^2)$,
hay : $\text{rank}(v^{N-1}) - \text{rank}(v^{N-2}), \dots, \text{rank}(v) - \text{rank}(v^2)$.

VÍ DỤ :

1) Chứng minh rằng $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ lũy linh, xác định thu gọn

Jordan J của A và một ma trận khả nghịch P sao cho $A = PJP^{-1}$.

Ta kiểm chứng dễ dàng $A^2 = 0$ và $A \neq 0$, nên A lũy linh chỉ số $N = 2$. Với các ký hiệu của phần trước :

$$\begin{cases} F_0 = \{0\}, & F_1 = \text{Ker}(A), & F_2 = \text{Ker}(A^2) = E = \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ G_1 \oplus F_1 = F_2, & G_2 \oplus F_0 = F_1, & v(G_1) \subset G_2, \end{cases}$$

vậy G_1 là một phần bù của $\text{Ker}(A)$ trong E , và $G_2 = \text{Ker}(A)$.

Ta chọn hai vectơ $e_{1,1}, e_{1,2}$ của E tạo nên một họ độc lập tuyến tính và không

thuộc $\text{Ker}(A)$, chẳng hạn : $e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tiếp đó ta đặt $e_{2,1} = Ae_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_{2,2} = Ae_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Cuối cùng : $u_1 = e_{2,1}, u_2 = e_{1,1}, u_3 = e_{2,2}, u_4 = e_{1,2}$.

Vậy, $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ là một cơ sở của E và : $Au_1 = 0, Au_2 = u_1, Au_3 = 0, Au_4 = u_3$.

Ký hiệu $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $M_{4,1}(\mathbb{R})$

sang B , tức là $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $A = PJP^{-1}$.

Tính toán cho ta : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Hãy kiểm chứng $A = \begin{pmatrix} -15 & 12 & -9 & 1 \\ 29 & -24 & 19 & -2 \\ 60 & -49 & 38 & -4 \\ -6 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ lũy linh, xác định thu gọn

Jordan J của A và một ma trận khả nghịch P sao cho $A = PJP^{-1}$.

Ta dễ dàng kiểm tra $A^4 = 0$ và $A^3 \neq 0$, nên A lũy linh chỉ số $N = 4$. Với các ký hiệu ở phần trên, ta có $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$.

Vậy chỉ cần chọn $e_{1,1}$ trong $M_{4,1}(\mathbb{R}) - \text{Ker}(A^3)$, rồi xác định $e_{2,1} = Ae_{1,1}, e_{3,1} = Ae_{2,1} = A^2e_{1,1}, e_{4,1} = Ae_{3,1} = A^3e_{1,1}$. Ký hiệu $u_1 = e_{4,1}, u_2 = e_{3,1}, u_3 = e_{2,1}, u_4 = e_{1,1}$ và P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $M_{4,1}(\mathbb{R})$ sang (u_1, u_2, u_3, u_4) , ta có $A = PJP^{-1}$,

trong đó $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Chẳng hạn ta có thể chọn $e_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, từ đây $e_{2,1} = Ae_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_{3,1} = Ae_{2,1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$e_{4,1} = Ae_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Vậy } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tính toán cho ta: } P^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & 0 \\ -11 & 9 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài tập

Các bài tập từ 3.4.1 tới 3.4.6 không sử dụng định lý về phép thu gọn Jordan.

♦ 3.4.1 Chứng minh: $\forall A \in M_n(K), \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq n \Rightarrow \text{rank}(A^p) = \text{rank}(A^n))$.

♦ 3.4.2 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(K)$ lũy linh, v là chỉ số của A , $r = \text{rank}(A)$. Chứng minh:
 $v \leq r + 1$.

♦ 3.4.3 a) Cho $n \in \mathbb{N}^*, \lambda \in K, J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

Tính π_J .

b) Cho $N \in \mathbb{N}^*, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*, \lambda \in K, J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{n_i}(K)$,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_N \end{pmatrix}.$$

Tính π_J . (Có thể sử dụng bài tập 3.2.16).

♦ 3.4.4 Cho $n \in \mathbb{N}^*, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$. Xác định hoán tập $C(N)$ của N trong

$M_n(K)$, được xác định bởi: $C(N) = \{A \in M_n(K); AN = NA\}$.

◇ 3.4.5 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in K$, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$, $P \in K[X]$. Với mỗi k thuộc $\mathbb{N}$,

ta ký hiệu $\mu_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(\lambda)$. Chứng minh $P(J) = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \\ & \mu_0 & \dots & \mu_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \mu_0 \end{pmatrix}$.

◇ 3.4.6 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$, v là tự đồng cấu của K^n của ma trận J

trong cơ sở chính tắc của K^n . Xác định tất cả các kgc của K^n ổn định đối với v .

◇ 3.4.7 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều n , $v \in \mathcal{L}(E)$, lũy linh,

N là chỉ số của v . Chứng minh $N = n \Leftrightarrow \text{rank}(v) = n - 1$.

Hãy so sánh với bài tập 3.1.10.

3.4.2 Thu gọn Jordan

1) Sự tồn tại của thu gọn Jordan

Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho χ_f tách được trên K .

Ta ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \text{Sp}_K(f)$, ω_i là cấp bội của giá trị riêng λ_i trong χ_f và

$C_i = \text{KGCD}(f, \lambda_i)$ với mọi i thuộc $\{1, \dots, p\}$.

Giả sử $i \in \{1, \dots, p\}$. Rõ ràng C_i ổn định đối với f (xem 3.3.1, Mệnh đề 2). Ký hiệu f_i là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên C_i và $v_i = f_i - \lambda_i \text{Id}_{C_i}$.

Ta đã thấy (3.3.1, Mệnh đề 2) rằng v_i lũy linh và chỉ số lũy linh của nó là cấp bội μ_i của λ_i trong π_f .

Theo 3.4.1, tồn tại một cơ sở $\mathcal{U}_i$ của C_i trong đó v_i được biểu diễn bởi một ma trận chéo tạo nên từ các khối lũy linh Jordan: $\text{diag}(J_{\mu_i}, \dots, J_{\mu_i}, J_1, \dots, J_1)$.

Nếu ký hiệu với $(\lambda, l) \in K \times \mathbb{N}^*$, $J_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_l(K)$, gọi là ma trận

Jordan thì ma trận của f_i trong $\mathcal{U}_i$ là ma trận chéo theo khối Jordan:

$\text{diag}(J_{\mu_i}(\lambda_i), \dots, J_{\mu_i}(\lambda_i), J_1(\lambda_i), \dots, J_1(\lambda_i))$.

Cuối cùng, ký hiệu $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}$ là một cơ sở của E (vì $E = \bigoplus_{i=1}^p C_i$, xem 3.3.1,

Mệnh đề 1) và ma trận của f trong $\mathcal{U}$ là ma trận chéo theo khối Jordan, được gọi là một thu gọn Jordan của f .

2) Tính duy nhất của thu gọn Jordan, sai khác trật tự các khối

Trong một thu gọn Jordan, ta quy ước đặt các khối chéo Jordan theo một thứ tự nào đó cho các giá trị riêng (chẳng hạn giảm tự nhiên nếu tất cả các giá trị riêng đều là thực), và đối với cùng một giá trị riêng, thì theo thứ tự giảm của các khối Jordan. Các giá trị riêng của f được xác định một cách duy nhất từ f (có thể sai khác thứ tự). Với một gtr đã cho λ_i của f , cấp tối đa các khối Jordan tương ứng với λ_i là cấp bội ω_i của λ_i trong χ_f . Với mỗi j thuộc $\{1, \dots, \mu_i\}$, số lần xuất hiện của khối $J_j(\lambda_i)$ được xác định một cách duy nhất từ các số chiều của hạt nhân của các lũy thừa đồng cấu lũy linh $f_i - \lambda_i \text{Id}_{\text{KGCD}(f, \lambda_i)}$, với f_i là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên $\text{KGCD}(f, \lambda_i)$ (3.4.1, 3)).

3) Phát biểu định lý

§ 1) và 2) cho phép tổng kết bằng định lý sau.

◆ Định lý (Định lý thu gọn Jordan)

Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho χ_f tách được trên K , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ là phổ của f và với mỗi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, μ_i là cấp bội của λ_i trong π_f . Tồn tại một và chỉ một thu gọn Jordan cho f , sai khác thứ tự các khối Jordan :

$$J = \text{diag}(J_{\mu_1}(\lambda_1), \dots, J_{\mu_1}(\lambda_1), \dots, J_1(\lambda_1), \dots, J_1(\lambda_1), \dots, J_{\mu_p}(\lambda_p), \dots, J_{\mu_p}(\lambda_p), \dots, J_1(\lambda_p), \dots, J_1(\lambda_p)),$$

trong đó, với mọi $(\lambda, k) \in K \times \mathbb{N}^*$, ta đã ký hiệu :

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_k(K).$$

Nhận xét :

1) Giữ lại các ký hiệu ở trên và ngoài ra, với $i \in \{1, \dots, p\}$ ta ký hiệu :

$$d_i = \dim(\text{KGCR}(f, \lambda_i))$$

ω_i là cấp bội của λ_i trong χ_f ,

α_{ij} là số lần xuất hiện của khối Jordan $J_j(\lambda_i)$ trong J , với $j \in \{1, \dots, \mu_i\}$.

Khi đó ta có : $d_i = \sum_{j=1}^{\mu_i} \alpha_{i,j}$ và $\omega_i = \sum_{j=1}^{\mu_i} j\alpha_{i,j}$.

2) Ta xét phân tích Dunford $J = D + N$ của J (xem 3.3.2, Định lý - Định nghĩa). Rõ ràng $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{\omega_1}, \dots, \lambda_p I_{\omega_p})$ và $N = J - D$. Giả sử B là một cơ sở của E sao cho $\text{Mat}_B(f) = J$, d, v là các tự đồng cấu của E xác định bởi $\text{Mat}_B(d) = D$, $\text{Mat}_B(v) = N$. Vậy $f = d + v$ là phân tích Dunford của f .

4) Lớp đồng dạng

Giả sử $A, B \in M_n(K)$.

• Nếu χ_A và χ_B tách được và nếu A và B có cùng một thu gọn Jordan J , thì $A \sim B$ vì $A \sim J$ và $B \sim J$.

• Đảo lại, giả sử $A \sim B$ và χ_A tách được. Vậy thì χ_B tách được và A, B có cùng phổ, ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Giả sử $i \in \{1, \dots, p\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có :

$$\begin{aligned} A \sim B &\Rightarrow (A - \lambda_i I_n)^k \sim (B - \lambda_i I_n)^k \\ &\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A - \lambda_i I_n)^k) = \dim(\text{Ker}(B - \lambda_i I_n)^k). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ (xem 3.4.2, 2)) rằng A và B có cùng thu gọn Jordan. Ta tóm tắt nghiên cứu trên:

♦ **Định lý** Giả sử $A, B \in M_n(K)$ sao cho χ_A hoặc χ_B tách được trên K . Để A và B đồng dạng, cần và đủ là chúng có cùng một thu gọn Jordan (có thể sai khác thứ tự các khối Jordan).

Bài tập

♦ 3.4.8 Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh rằng χ_A tách được trên $\mathbb{R}$, tính thu gọn Jordan J của A , và một ma trận khả nghịch P sao cho $A = PJP^{-1}$.

b) Chứng minh rằng A khả nghịch, và tính A^k với mọi k thuộc $\mathbb{Z}$.

c) Tính e^A .

◇ 3.4.9 Với $(\alpha, \beta) \in K^2$, xác định thu gọn Jordan của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(K)$.

◇ 3.4.10 Chứng minh rằng các ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -9 & 72 & 52 \\ 1 & -5 & -4 \\ -3 & 20 & 15 \end{pmatrix}$

đồng dạng trong $M_3(\mathbb{R})$.

◇ 3.4.11 a) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in K$, $T = (t_{ij})_{ij} \in T_{n,n}(K)$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, & t_{ii} = 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, & t_{i,i+1} \neq 0. \end{cases}$$

Chứng minh : $\lambda I_n + T \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$.

(Sử dụng bài tập 3.4.7)

b) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in K - \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}^k \sim \begin{pmatrix} \lambda^k & 1 & 0 \\ & \lambda^k & 1 \\ 0 & & \lambda^k \end{pmatrix}$ trong $M_n(K)$.

c) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, $A = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)J^k$ (tổng của một số hữu hạn

các hạng tử). Chứng minh : $A \sim J$.

◇ 3.4.12 Tìm tất cả các thu gọn Jordan lũy linh thuộc $M_n(\mathbb{C})$, với $1 \leq n \leq 4$.

◇ 3.4.13 Cho $a, b \in K$ sao cho $a \neq b$, $A \in M_b(K)$ sao cho $\chi_A = (X-a)^4(X-b)^2$ và $\pi_A = (X-a)^2(X-b)$.

Các thu gọn Jordan có thể có của A là gì ?

◇ 3.4.14 Cho $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{i=1}^p \alpha_i$, $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$(\forall i \in \{1, \dots, p\}, \beta_i \leq \alpha_i)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ từng đôi phân biệt. Hãy biểu thị tường minh một ma trận A thuộc $M_n(K)$ sao cho:

$$\chi_A = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{\alpha_i} \quad \text{và} \quad \pi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

- ◇ 3.4.15 a) Cho $n \in \{1, 2, 3\}$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh: $A \sim B \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \pi_A = \pi_B \end{cases}$
- b) Cho $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$, $A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(K)$. Chứng minh:

$$\chi_A = \chi_B, \pi_A = \pi_B, A \neq B.$$

- ◇ 3.4.16 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ thoả mãn $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $B \in M_n(\mathbb{R})$ và $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ sao cho: $A = PBP^{-1}$.

- ◇ 3.4.17 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh:

$$A \sim B \Leftrightarrow (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \text{rank}((A - \lambda I_n)^k) = \text{rank}((B - \lambda I_n)^k)).$$

- ◇ 3.4.18 Chứng minh: $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), A \sim A$.

(Phương pháp 1: sử dụng bài tập 3.4.17)

Phương pháp 2: sử dụng thu gọn Jordan và chứng minh $J_k(\lambda) \sim J_k(\lambda)$ với mọi (λ, k) thuộc $\mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$).

- ◇ 3.4.19 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\rho(A) < 1, \text{ và nếu } \rho(A) < 1 \text{ thì tính } \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

- ◇ 3.4.20 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho: $\begin{cases} \rho(A) < 1 \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} > 0. \end{cases}$

Chứng tỏ rằng tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho không một phần tử nào của A^p là nguyên.

- ◇ 3.4.21' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ta giả sử rằng $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ về một phần tử B thuộc $M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng tồn tại $P \in \mathbb{C}[X]$ sao cho $B = P(A)$ (Có thể sử dụng bài tập 3.2.27).

- ◇ 3.4.22' Ma trận không sai phạm

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, ta nói rằng A là không sai phạm khi và chỉ khi: $\pi_A = (-1)^n \chi_A$. Chứng minh rằng A là không sai phạm khi và chỉ khi tồn tại đa thức chuẩn tắc bậc n $P \in \mathbb{C}[X]$, sao cho A đồng dạng với ma trận đồng hành C_P của P . (Sử dụng các bài tập 2.2.11 và 3.2.29).

- ◇ 3.4.23' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây tương đương:

(i) A không sai phạm (tức là $\pi_A = (-1)^n \chi_A$)

(ii) Với mọi ma trận B thuộc $M_n(\mathbb{C})$ sao cho $AB = BA$, tồn tại $Q \in \mathbb{C}[X]$ sao cho

$$B = Q(A).$$

- ◇ 3.4.24 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $\pi_A = \pi_B = (-1)^n \chi_A = (-1)^n \chi_B$.

Chứng minh : $A \sim B$ (Sử dụng bài tập 3.4.22).

- ◇ 3.4.25* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$

a) Tìm điều kiện cần và đủ để $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Nếu $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, tìm điều kiện cần và đủ để $(A^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bị chặn trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

- ◇ 3.4.26 Cho $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}_q(\mathbb{C})$, J_A (tương ứng J_B) là thu gọn Jordan

của A (tương ứng B). Chứng minh rằng thu gọn Jordan của $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ trong $\mathbf{M}_{p+q}(\mathbb{C})$ là

$\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ (sai khác trật tự các khối Jordan).

- ◇ 3.4.27* Các chữ cái $A, A', B, C, \dots$ ký hiệu cho các ma trận vuông phức.

a) 1) Chứng minh : $\left\{ \begin{matrix} A \sim A' \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \Rightarrow B \sim C.$

(Sử dụng bài tập 3.4.26).

2) Từ đó suy ra : $\left\{ \begin{matrix} A_1 \sim A'_1, \dots, A_N \sim A'_N \\ \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \\ & & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A'_N \\ & & C \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \Rightarrow B \sim C.$

b) Chứng minh : $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow B \sim C.$

(Sử dụng bài tập 3.4.26).

Bổ sung

♦ C.3.1* Bán kính phổ

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$. Với $A \in M_n(\mathbb{C})$, ta ký hiệu $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$, và gọi là bán kính phổ của A .

1) Các tính chất sơ cấp của ρ

a) Chứng minh rằng với mọi α thuộc $\mathbb{C}$, k thuộc $\mathbb{N}^*$, A, B thuộc $M_n(\mathbb{C})$ và P thuộc $GL_n(\mathbb{C})$:

$$\alpha) \quad \rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$$

$$\beta) \quad \rho(A^k) = (\rho(A))^k$$

$$\gamma) \quad \rho(AB) = \rho(BA)$$

$$\delta) \quad \rho(P^{-1}AP) = \rho(A).$$

b) Liệu có phải với mọi A, B thuộc $M_n(\mathbb{C})$ ta có : $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$?

$$\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B) ?$$

Ta nhắc lại (xem 1.1.1.4, Định nghĩa, Tập 3) rằng một chuẩn $\| \cdot \|$ trên $M_n(\mathbb{C})$ được gọi là

chuẩn dưới-nhân (hay : **chuẩn đại số**) khi và chỉ khi : $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Ta cũng nói : **chuẩn nhân** hay **chuẩn ma trận** thay vì chuẩn dưới - nhân.

2) a) Chứng minh rằng nếu $\| \cdot \|$ là một chuẩn dưới - nhân trên $M_n(\mathbb{C})$ thì :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

b) Chứng minh rằng ánh xạ $N : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\forall A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(\mathbb{C}), N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

là một chuẩn dưới - nhân trên $M_n(\mathbb{C})$.

c) Giả sử $\| \cdot \|$ là một chuẩn dưới - nhân trên $M_n(\mathbb{C})$ và $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng ánh xạ $\| \cdot \|_P : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ định nghĩa bởi : $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \|A\|_P = \|P^{-1}AP\|$ là một chuẩn dưới - nhân trên $M_n(\mathbb{C})$.

3) Giả sử $\| \cdot \|$ là một chuẩn dưới - nhân trên $M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \rho(A) \leq \|A\|.$$

4)* Giả sử $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Chứng minh rằng tồn tại một chuẩn dưới - nhân $\| \cdot \|$ trên $M_n(\mathbb{C})$ sao cho : $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

(Sử dụng phép tam giác hóa $A = PTP^{-1}$ của A , $T = (t_{ij})_{i,j} \in T_{n,n}(\mathbb{C})$. Tiếp theo với

$u \in \mathbb{R}_+^*$, giả sử $D_u = \text{diag}(u, u^2, \dots, u^n)$; tính $D_u T D_u^{-1}$ và chứng minh rằng với u đủ lớn : $N(D_u T D_u^{-1}) \leq \rho(A) + \varepsilon$, với n được xác định trong 2) b).

Cuối cùng định nghĩa $\| \cdot \|$ bởi $\|M\| = N(D_u P^{-1} M P D_u^{-1})$, với mọi M thuộc $M_n(\mathbb{C})$.

Ký hiệu $\mathcal{N}$ là tập hợp các chuẩn dưới - nhân trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, các kết quả của 3) và 4) chứng tỏ:

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \|A\|.$$

5) Chứng minh: $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), (A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1)$. (Sử dụng 3) và 4)).

Tính chất này đã được chứng minh theo cách khác trong 3.3.3 1) bằng việc sử dụng phân tích Dunford.

6) Chứng minh rằng với mọi chuẩn $\|\cdot\|$ trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ và mọi ma trận A thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rho(A).$$

(Bắt đầu bằng việc chứng minh kết quả này khi $\|\cdot\|$ là dưới - nhân; sử dụng 3) và 4)).

7) Suy ra từ 6) rằng nếu $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ giao hoán, thì $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.

8) a) Giả sử $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng, nếu $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ thì $\rho(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

b) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), (B_k)_{k \in \mathbb{N}}, (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là hai dãy trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, (P_k \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ và } B_k = P_k A P_k^{-1}) \\ B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng A lũy linh.

9)* Giả sử $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, |a_{ij}| \leq m_{ij}.$$

Chứng minh: $\rho(A) \leq \rho(M)$.

(Với $k \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $A^k = (a_{ij}^{[k]})_{ij}$ và tương tự cho M^k . Nhận xét: $\forall k \in \mathbb{N}^*, |a_{ij}^{[k]}| \leq m_{ij}^{[k]}$).

• Nếu $\rho(M) = 0$, chứng minh rằng M và A lũy linh và $\rho(A) = 0$.

• Nếu $\rho(M) > 0$, với $x \in \left]0; \frac{1}{\rho(M)}\right[$ áp dụng 5) cho $(xM)^k$, bằng việc chọn chuẩn dưới - nhân thích hợp).

◊ C.3.2* Tích Kronecker

K chỉ một thể giao hoán, n, n', p, p' là các số nguyên ≥ 1 . Với $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$ và $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$, ta định nghĩa tích Kronecker của A và B , ký hiệu $A \otimes B$, như sau:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn'}B \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{np, n'p'}(K).$$

I. Các tính chất sơ cấp của tích Kronecker

a)* Với $A \in \mathbf{M}_{n,n}(K), B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$, ta ký hiệu $f_{A,B}: \mathbf{M}_{n',p'}(K) \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(K)$.

$$M \mapsto AMB$$

Chứng minh rằng $A \otimes B$ là ma trận của $f_{A,B}$ trong các cơ sở chính tắc (được sắp xếp theo thứ tự phù hợp).

b) Chứng minh các kết quả sau (các ma trận được xét sẽ được chính xác hóa):

- 1)
$$\begin{cases} (\alpha A + \alpha' A') \otimes B = \alpha A \otimes B + \alpha' A' \otimes B \\ A \otimes (\beta B + \beta' B') = \beta A \otimes B + \beta' A \otimes B' \end{cases}$$
- 2) $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$
- 3) $A \otimes B = (A \otimes I)(I \otimes B)$
- 4) $\forall k \in \mathbb{N}, (A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k$
- 5) $A \otimes B = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ hoặc } B = 0)$
- 6) Với giả thiết A và B vuông, $A \otimes B$ khả nghịch khi và chỉ khi A và B khả nghịch và khi đó ta có $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- 7) $A \otimes B$ lũy linh khi và chỉ khi A hoặc B lũy linh
- 8) ${}^t(A \otimes B) = {}^tA \otimes {}^tB$

$$9) \text{ Nếu } \begin{cases} A \text{ và } A' \text{ cùng dạng} \\ B \text{ và } B' \text{ cùng dạng} \\ A \neq 0 \text{ và } B \neq 0 \end{cases} \text{ thì } A \otimes B = A' \otimes B' \Leftrightarrow \left(\exists \alpha \in K - \{0\}, \begin{cases} A' = \alpha A \\ B' = \frac{1}{\alpha} B \end{cases} \right).$$

- 10) • Nếu A và B là đối xứng thì $A \otimes B$ là đối xứng
- Nếu $A \otimes B$ là đối xứng và $A \neq 0$ và $B \neq 0$, thì A và B là đối xứng hoặc phản đối xứng.
- 11) Nếu $B \neq 0$ thì : $A \otimes B$ là ma trận tam giác trên khi và chỉ khi A là ma trận tam giác trên.
- 12) Nếu $A \neq 0$ và $B \neq 0$ thì : $A \otimes B$ là ma trận chéo khi và chỉ khi A và B là ma trận chéo.
- 13) Nếu $(A_{ij})_{i,j \in I}$ (tương ứng $(B_{ij})_{i,j \in J}$) là một họ các ma trận giao hoán từng đôi, thì $A_i \otimes B_j$, $((i,j) \in I \times J)$ giao hoán từng đôi.
- 14) • $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$
- $\det(A \otimes B) = (\det(A))^p (\det(B))^n$.

II Ở đây ta giả thiết K đóng đại số (chẳng hạn $K = \mathbb{C}$).

Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$, $\chi_A = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$, $\chi_B = \prod_{j=1}^p (\mu_j - X)$

$$1) \text{ Chứng minh : } \chi_{A \otimes B} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (\lambda_i \mu_j - X).$$

2) Ta giả thiết trong vấn đề này rằng $K = \mathbb{C}$ và ta dùng từ vựng và các tính chất của các ma trận Hermite (xem Định nghĩa 1, 6.1.3 2), Định lý 6.5.1, Định nghĩa 6.5.3, Định lý 6.5.3). Chứng minh rằng nếu A và B là ma trận Hermite (tương ứng : Hermite dương, tương ứng : Hermite xác định dương), thì $A \otimes B$ cũng vậy.

3)* Ta giả thiết $A \neq 0$ và $B \neq 0$. Chứng minh rằng $A \otimes B$ chéo hóa được khi và chỉ khi A và B chéo hóa được (sử dụng phân tích Dunford).

Chương 4

Đại số song tuyến tính (nghiên cứu sơ bộ)

Chương 4 này dành cho các sinh viên thuộc chuyên ngành PC^* , PC , PT^* , PT , PSI ; còn đối với các sinh viên chuyên ngành MP^* , MP , PSI^* đây là một sự chuẩn bị cần thiết cho chương sau.

4.1 Dạng song tuyến tính đối xứng, dạng toàn phương

Trong § 4.1 này, K chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$, nhưng có thể chỉ một thể giao hoán có đặc số khác 2, tức là trong đó $2.1_K \neq 0_K$ (xem thêm chương 9, Tập 5).

4.1.1 Đại cương

Trong § 4.1.1 này, E chỉ một K -kgv.

Ta nhắc lại Định nghĩa sau đây (xem § 9.1.1, Tập 5).

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi ánh xạ $\varphi: E \times E \rightarrow K$ sao cho :

(i) $\forall \alpha \in K, \forall (x, x', y) \in E^3, \varphi(\alpha x + x', y) = \alpha \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$
(φ là tuyến tính đối với vị trí thứ nhất)

(ii) $\forall \beta \in K, \forall (x, y, y') \in E^3, \varphi(x, \beta y + y') = \beta \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$
(φ là tuyến tính đối với vị trí thứ hai)

là **dạng song tuyến tính trên $E \times E$** .

Ký hiệu $\mathcal{L}(E, E; K)$ là tập hợp các dạng song tuyến tính trên $E \times E$ (xem § 9.1.1, Tập 5). Ta có ngay $\mathcal{L}(E, E; K)$ là một K -kgv.

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử φ là một dạng song tuyến tính trên $E \times E$,

$(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p \in K, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p \in E$. Khi đó ta có :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^p \beta_j y_j\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j).$$

Chứng minh :

Bảng truy hồi theo n ta có:

$$\forall Y \in E, \varphi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, Y \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i, Y)$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^p \beta_j y_j \right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi \left(x_i, \sum_{j=1}^p \beta_j y_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^p \beta_j \varphi(x_i, y_j) \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j). \end{aligned}$$

- ♦ **Định nghĩa 2** Một ánh xạ $\varphi: E \times E \rightarrow K$ được gọi là **đối xứng** khi và chỉ khi :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = \varphi(x, y).$$

Ta viết tắt dạng song tuyến tính đối xứng là : dstđx.

Ký hiệu $\mathcal{S}(E; K)$ là tập hợp các dạng song tuyến tính đối xứng trên $E \times E$.

Hiển nhiên $\mathcal{S}(E; K)$ là một K -kgv, kgvc của $\mathcal{L}(E, E; K)$.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên, tiện dụng.

- ♦ **Mệnh đề 2** Để một ánh xạ $\varphi: E \times E \rightarrow K$ là dstđx, cần và đủ là :
- $$\begin{cases} \varphi \text{ đối xứng} \\ \varphi \text{ tuyến tính đối với vị trí thứ hai.} \end{cases}$$

Xem thêm Định nghĩa 1.1.6.1, Tập 3, Định nghĩa 1, 10.1.1 Tập 5.

- ♦ **Định nghĩa 3** Giả sử φ là một dstđx trên $E \times E$. Ta gọi ánh xạ (thường được ký hiệu là ϕ) từ E vào K xác định bởi :

$$\forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x).$$

là **dạng toàn phương liên kết với φ** .

Dạng toàn phương được viết tắt là : dtp.

VÍ DỤ :

- 1) Tích vô hướng chính tắc trên $\mathbb{R}^n$, định nghĩa bởi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$

là một dstđx, và dtp liên kết là $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2$

- 2) Ánh xạ $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là một dstđx và dtp liên kết là
 $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto 2x_1x_2\end{aligned}$$

Mệnh đề sau đây suy ra dễ dàng từ Mệnh đề 1.

♦ **Mệnh đề 3** Giả sử ϕ là một dstđx trên $E \times E$, ϕ là dtp liên kết với ϕ .
Ta có :

$$1) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \forall x_1, \dots, x_n \in E,$$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \phi(x_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \phi(x_i, x_j)$$

$$2) \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2,$$

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 \phi(x) + 2\alpha\beta\phi(x, y) + \beta^2 \phi(y)$$

$$3) \forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) = \phi(x) + 2\phi(x, y) + \phi(y)$$

$$4) \forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \frac{1}{4}(\phi(x + y) - \phi(x - y))$$

$$5) \forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) + \phi(x - y) = 2(\phi(x) + \phi(y)).$$

Nhận xét :

Các công thức 3) và 4) trên chứng tỏ rằng ϕ xác định hoàn toàn ϕ ; ϕ được gọi là **dạng cực** của ϕ .

♦ **Định nghĩa 4** Giả sử $\phi: E \rightarrow K$ là một ánh xạ. Ta nói rằng ϕ là một **dạng toàn phương** khi và chỉ khi tồn tại một dstđx $\phi: E \times E \rightarrow K$ sao cho ϕ là dtp liên kết với ϕ .

Ta ký hiệu $Q(E)$ là tập hợp các dtp trên E .

Rõ ràng rằng ánh xạ $U: S(E; K) \rightarrow Q(E)$ đặt tương ứng mỗi dstđx ϕ trên $E \times E$ với dtp liên kết với ϕ , và ánh xạ $V: Q(E) \rightarrow S(E; K)$ đặt tương ứng mỗi dtp ϕ trên E với dạng đối cực của ϕ , là các song ánh ngược nhau.

4.1.2 Diễn giải ma trận

Trong § 4.1.2 này E chỉ một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$.

♦ **Định nghĩa** Giả sử ϕ là một dstđx trên $E \times E$ và $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E . Ta gọi ma trận vuông cấp n , đối xứng :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = (\phi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

là ma trận của ϕ trong (hay: ứng với) $\mathcal{B}$, và ký hiệu là $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

VÍ DỤ :

Xét $E = \mathbb{R}^2$ được trang bị một cơ sở chính tắc $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ và

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto \alpha x_1 y_1 + \beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \gamma x_2 y_2\end{aligned}$$

Rõ ràng φ là một dstđx trên $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, và ta có :

$$\varphi(e_1, e_1) = \alpha, \varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_2, e_1) = \beta, \varphi(e_2, e_2) = \gamma,$$

$$\text{vậy : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Ta nhắc lại rằng ký hiệu $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ đã được định nghĩa cho một vectơ của E ($\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ với $x \in E$, xem Định nghĩa 1, 8.1.2, Tập 5) và cho một tự đồng cấu của E ($\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ với $f \in \mathcal{L}(E)$, xem Định nghĩa 3, 8.1.2, Tập 5).

◆ Mệnh đề 1

Giả sử : φ là một dstđx trên $E \times E$
 $\mathcal{B}$ là một cơ sở của E
 $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$
 $x, y \in E, X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.
 Khi đó ta có : $\varphi(x, y) = {}^t XAY$

Chứng minh :

Ký hiệu $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ta có :

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right).$$

$$\text{Mặt khác : } {}^t X = (x_1, \dots, x_n), \quad AY = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{pmatrix},$$

$$\text{vậy : } \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right) = {}^t XAY. \quad \blacksquare$$

Ta nhắc lại rằng (xem Định nghĩa, 8.3.1 I) Tập 5) $S_n(K)$ là tập hợp các ma trận đối xứng cấp n với hệ số trong K .

◆ **Mệnh đề 2** Giả sử B là một cơ sở của E .

Ánh xạ $\text{Mat}_B : S(E, K) \rightarrow S_n(K)$ là một đẳng cấu của K -kgv.
 $\varphi \mapsto \text{Mat}_B(\varphi)$

Chứng minh :

Ta đã thấy (4.1.1 và Mệnh đề 1, 8.3.1 1), Tập 5) rằng $S(E, K)$ và $S_n(K)$ là các K -kgv. Ký hiệu $B = (e_1, \dots, e_n)$.

1) Giả sử $\alpha \in K, \varphi, \psi \in S(E, K)$. Vì

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (\alpha\varphi + \psi)(e_i, e_j) = \alpha\varphi(e_i, e_j) + \psi(e_i, e_j),$$

nên ta có : $\text{Mat}_B(\alpha\varphi + \psi) = \alpha \text{Mat}_B(\varphi) + \text{Mat}_B(\psi)$, vậy Mat_B tuyến tính.

2) Giả sử $A = (a_{ij})_{ij} \in S_n(K)$. Ta xét ánh xạ $\varphi : E \times E \rightarrow K$ xác định bởi :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = 'XAY.$$

(với $X = \text{Mat}_B(x), Y = \text{Mat}_B(y)$).

Ánh xạ φ là một dstđx vì :

• $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = 'YAX = 'Y'AX = '(XAY) = \varphi(x, y)$, bằng việc đồng nhất một ma trận của $M_1(K)$ với phần tử duy nhất của nó.

• $\forall \alpha \in K, \forall x, y, y' \in E,$

$$\varphi(x, \alpha y + y') = 'XA(\alpha Y + Y') = \alpha 'XAY + 'XAY' = \alpha\varphi(x, y) + \varphi(x, y').$$

Hơn nữa, với mọi (i, j) thuộc $\{1, \dots, n\}^2$:

$$\varphi(e_i, e_j) = 'E_i A E_j = a_{ij}$$

(trong đó $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ là cơ sở chính tắc của $M_{n,1}(K)$), vậy $\text{Mat}_B(\varphi) = A$.

Điều này chứng tỏ rằng Mat_B là toàn ánh.

3) Giả sử $\varphi \in S(E, K)$ sao cho $\text{Mat}_B(\varphi) = 0$.

Vậy ta có $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \varphi(e_i, e_j) = 0$, từ đó theo tính chất song tuyến tính (xem Mệnh đề 1, 4.1.1):

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = 0,$$

và do vậy $\varphi = 0$.

Vậy Mat_B là đơn ánh.

Dưới một dạng khác:

$$\forall (A, B) \in (S_n(K))^2, ((\forall X \in M_{n,1}(K), 'XAX = 'XBX) \Rightarrow A = B). \quad \blacksquare$$

Đặc biệt, vì $\dim(S_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$ (xem 8.3.1, 1) Tập 5), ta cũng có :

$$\dim(S(E, K)) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \blacksquare$$

Khái niệm đa thức toàn phương và quy tắc tách đôi

Cho n biến $x_1, \dots, x_n$, ta gọi mọi ánh xạ $\phi: K^n \rightarrow K$ sao cho tồn tại các phần tử $\alpha_{ii} (1 \leq i \leq n)$ và $\alpha_{ij} (1 \leq i < j \leq n)$ của K sao cho :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in K^n, \phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

là **đa thức toàn phương** của $x_1, \dots, x_n$.

Chẳng hạn, “dạng tổng quát”, của một đa thức toàn phương hai biến x_1, x_2 là :

$$\phi(x_1, x_2) = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{22} x_2^2.$$

Với các ký hiệu trên, ϕ là một dtp trên K^n và ma trận của dạng đối cực ϕ của ϕ trong cơ sở chính tắc của K^n là :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ta có thể bắt đầu từ ϕ , tìm lại ϕ theo quy tắc được gọi là **tách đôi**: biết

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

$$\text{ta thu được } \phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$$

bằng cách tách đôi : $\begin{cases} x_i^2 \text{ thành } x_i y_i & (1 \leq i \leq n) \\ 2 x_i x_j \text{ thành } x_i y_j + x_j y_i & (1 \leq i < j \leq n). \end{cases}$

Ta kết thúc § 4.1.2 này bằng việc giải quyết các vấn đề đối cơ sở cho các dstdx và các dtp.

◆ **Mệnh đề 3**

Giả sử ϕ là một dstdx trên $E \times E$

B, B' là hai cơ sở của E

$$P = \text{Pass}(B, B')$$

$$A = \text{Mat}_B(\phi), A' = \text{Mat}_{B'}(\phi).$$

Khi đó ta có : $A' = 'PAP'$.

Chứng minh :

Giả sử $x, y \in E, X = \text{Mat}_B(x), Y = \text{Mat}_B(y), X' = \text{Mat}_{B'}(x), Y' = \text{Mat}_{B'}(y)$; vậy ta có :

$X = PX'$ và $Y = PY'$ (xem Mệnh đề, 8.2.2, Tập 5).

Một mặt : $\phi(x, y) = 'X'A'Y'$.

Mặt khác : $\phi(x, y) = 'XAY = '(PX')A(PY') = 'X'PAPY'$.

Do tính duy nhất của ma trận của ϕ trong B' và vì $'PAP \in S_n(K)$,

nên ta kết luận : $A' = 'PAP$.

Bài tập

♦ 4.1.1 a) Giả sử $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$. Chứng minh :

$$(\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2, 'XAY = 'XBY) \Leftrightarrow A = B.$$

b) Giả sử $(A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$. Chứng minh : $(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), 'XAX = 'XBX) \Leftrightarrow A = B$.

c) Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh : $(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), 'XAX = 0) \Leftrightarrow A \in A_n(\mathbb{R})$.

♦ 4.1.2 Ma trận tương đẳng

Trong $M_n(\mathbb{R})$, quan hệ “*tương đẳng với*”, ký hiệu là C , được định nghĩa bởi :

$$A C B \Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), B = 'PAP).$$

a) Chứng minh rằng C là một quan hệ tương đương trong $M_n(\mathbb{R})$. Có mối liên quan nào giữa tương đẳng, tương đương, đồng dạng? Ta nhắc lại (xem Định nghĩa 8.2.3, 2), và Định nghĩa 1, 8.2.4, Tập 5) :

- Hai ma trận A, B thuộc $M_n(\mathbb{R})$ được gọi là tương đương, và ký hiệu A *td* B , khi và chỉ khi :

$$\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}), B = Q^{-1}AP$$

- Hai ma trận A, B thuộc $M_n(\mathbb{R})$ được gọi là đồng dạng, và ký hiệu $A \sim B$, khi và chỉ khi :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), B = P^{-1}AP$$

b) 1) Liệu ta có không:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B, A', B' \in M_n(\mathbb{R}), \left(\begin{matrix} A C B \\ A' C B' \end{matrix} \Rightarrow \alpha A + A' C \alpha B + B' \right)?$$

2) Chứng minh : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), (A C B \Rightarrow 'A C 'B)$.

c) Giả sử $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Chứng minh : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), (A C B \Rightarrow 'MAM C 'MBM)$.

Tính chất này còn đúng không nếu ta chỉ giả thiết $M \in M_n(\mathbb{R})$?

d) Giả sử $A, B \in M_p(\mathbb{R}), A', B' \in M_q(\mathbb{R})$. Chứng minh : $\begin{matrix} A C B \\ A' C B' \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$.

e) Giả sử $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng A và B tương đẳng khi và chỉ khi chúng biểu thị cho cùng một dstdx trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$ trong hai cơ sở.

4.2 Nhắc lại về không gian Euclide

Việc nghiên cứu về các không gian tiền Hilbert thực hay phức đã được trình bày trong Tập 3, 1.6 và việc nghiên cứu về các không gian Euclide đã được trình bày trong Tập 5, 10.1 và 10.2.
Để thuận tiện cho độc giả, chúng tôi nhắc lại ở đây những điều cần thiết cho các nghiên cứu tiếp theo.

Trong § 4.2 này, thể được dùng là $\mathbb{R}$, và E chỉ một $\mathbb{R}$ - kgv hữu hạn chiều.

4.2.1 Tích vô hướng

- ♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi dstdx ϕ trên $E \times E$ sao cho, với ký hiệu ϕ là dtp liên kết với ϕ , các hệ thức sau đây được thoả mãn :
(i) $\forall x \in E, \phi(x) \geq 0$
(ii) $\forall x \in E, (\phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$
là tích vô hướng trên E .

Khi ϕ là một tích vô hướng, thường ký hiệu $(x|y)$ hay $\langle x,y \rangle$ hay $x.y$ thay cho $\phi(x,y)$.

- ♦ **Định nghĩa 2** Ta gọi mọi cặp (E,ϕ) trong đó E là một $\mathbb{R}$ - kgv hữu hạn chiều và ϕ là một tích vô hướng trên E , là không gian Euclide.

Ta thường ký hiệu E thay cho (E,ϕ) , khi ngữ cảnh đã chính xác hóa ϕ .
Không gian (vector) Euclide được viết tắt là : kgve.

VÍ DỤ :

1) Tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$

Ánh xạ $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$\phi((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$, gọi là tích vô hướng thông thường (hay chính tắc) trên $\mathbb{R}^n$.

2) Tích vô hướng chính tắc trên $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Ánh xạ $\phi : (M_{n,p}(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là một tích vô hướng trên $M_{n,p}(\mathbb{R})$, được gọi là $(A,B) \mapsto \text{tr}(AB)$

tích vô hướng chính tắc trên $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Tích vô hướng chính tắc trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (hay $M_{1,n}(\mathbb{R})$) là tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^n$, có thể sai khác về ký hiệu.

♦ **Định lý 1 (Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz)**

Giả sử (E, φ) là một kgve, ϕ là dtp liên kết với φ . Ta có :

$$\forall (x, y) \in E^2, (\varphi(x, y))^2 \leq \phi(x)\phi(y).$$

♦ **Mệnh đề 1 (Trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)**

Giả sử (E, φ) là một kgve, ϕ là dtp liên kết với φ , $(x, y) \in E^2$. Ta có :

$$(\varphi(x, y))^2 = \phi(x)\phi(y) \Leftrightarrow (x, y) \text{ phụ thuộc.}$$

♦ **Định lý 2 (Bất đẳng thức Minkowski)**

Giả sử (E, φ) là một kgve, ϕ là dtp liên kết với φ . Ta có :

$$\forall (x, y) \in E^2, (\varphi(x + y))^{\frac{1}{2}} \leq (\varphi(x))^{\frac{1}{2}} + (\varphi(y))^{\frac{1}{2}}.$$

♦ **Mệnh đề 2 (Trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Minkowski)**

Giả sử (E, φ) là một kgve, ϕ là dtp liên kết với φ , $(x, y) \in E^2$. Ta có :

$$(\varphi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\varphi(x))^{\frac{1}{2}} + (\varphi(y))^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{hay} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, y = \alpha x \end{cases}$$

Ta diễn giải điều kiện cuối cùng này là : (x, y) phụ thuộc dương.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3 Cho (E, φ) là một kgve, ϕ là dtp liên kết với φ .**

Ánh xạ $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ $\frac{1}{x \mapsto (\phi(x))^{\frac{1}{2}}}$ là một chuẩn trên E , gọi là chuẩn

Euclide liên kết với φ .

Nhận xét:

Giả sử $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một tích vô hướng trên E , $\| \cdot \|$ là một chuẩn Euclide liên kết. Các công thức nhận được từ Mệnh đề 3 3), 4), 5), 4.1.1 có thể được viết lại dưới dạng sau đây, với mọi (x, y) thuộc E^2 :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Bài tập

- ◇ 4.2.1 Cho E là một $\mathbb{R}$ -kgv $\neq \{0\}$, φ là một tích vô hướng trên E , $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,
 $\psi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $\psi(x, y) = a\varphi(x, x) + b\varphi(x, y) + c\varphi(y, y)$.
 Tìm điều kiện cần và đủ cho (a, b, c) để ψ là một tích vô hướng trên E .

- ◇ 4.2.2 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Chứng minh:

$$(X^t A B Y)^2 \leq (X^t A A X) (Y^t B B Y).$$

- ◇ 4.2.3 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Chứng minh: $A A^t = 0 \Rightarrow A = 0$.

- ◇ 4.2.4 Cho $n, q, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Chứng minh:

$$B A^t A = C A^t A \Rightarrow B A = C A.$$

- ◇ 4.2.5 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. So sánh các hạt nhân, ảnh, hạng của $A, A^t, A A^t, A^t A$.

- ◇ 4.2.6 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho: $A A^t = A^t A$ và $A^4 = 2A^2 - I_n$.

Chứng minh: $A^2 = I_n$.

- ◇ 4.2.7 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $V \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & {}^t V \\ V & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.

Hạng của A và A^2 là gì?

- ◇ 4.2.8 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho (A, B) là độc lập tuyến tính và
 $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ xác định bởi:

$$\forall X \in M_n(\mathbb{R}), f(X) = \text{tr}(A X) B - \text{tr}(B X) A.$$

Tự đồng cấu f thuộc $M_n(\mathbb{R})$ có chéo hóa được không?

- ◇ 4.2.9 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ sao cho $\text{rank}(A) = p$; ta ký hiệu $B = A A^t$.

a) Chứng minh $B \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$. (Sử dụng bài tập 4.2.5).

b) Ký hiệu $C = A B^{-1} A$. Hãy chứng minh:

$$C^2 = C, \text{Im}(C) = \text{Im}(A), \text{Ker}(C) = \text{Ker}(A).$$

- ◇ 4.2.10 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $H \in M_n(\mathbb{R})$ không đối xứng và sao cho $\text{rank}(H) = 1$; ta ký hiệu: $A = H + {}^t H$.

a) Xác định các giá trị riêng và các vectơ riêng của A (trong $M_{n,1}(\mathbb{R})$). Ta có thể chứng minh rằng tồn tại $(U, V) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ độc lập tuyến tính sao cho $H = U^t V$, rồi biểu thị các gtr và vtr của H theo U và V .

b) A có chéo hóa được không (trong $M_n(\mathbb{R})$)?

♦ **4.2.11** Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\forall V \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|AV\| \leq \|V\|$ trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Euclide chính tắc trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh : $\forall V \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|AV\| \leq \|V\|$.

b) Chứng minh : $\forall V \in M_{n,1}(\mathbb{R}), (AV = V \Leftrightarrow AV = V)$.

c) Chứng minh rằng $\text{Ker}(A - I_n)$ và $\text{Im}(A - I_n)$ là bù nhau trong $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

4.2.2 Tính trực giao

♦ **Định nghĩa** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là không gian vector Euclide.

1) Giả sử $(x, y) \in E^2$; ta nói rằng x **trực giao** với y và ký hiệu là $x \perp y$, khi và chỉ khi : $\langle x, y \rangle = 0$.

2) Giả sử $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$; ta nói rằng x **trực giao** với A và ký hiệu là $x \perp A$, khi và chỉ khi : $\forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0$.

3) Với mọi bộ phận A của E , ta định nghĩa **trực giao của A** , ký hiệu là $A^\perp$ như sau:

$$A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

4) Một họ $(x_i)_{i \in I}$ các phần tử của E được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi :

$$\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0).$$

5) Một họ $(x_i)_{i \in I}$ các phần tử của E được gọi là **trực chuẩn** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} (x_i)_{i \in I} \text{ trực giao} \\ \forall i \in I, \|x_i\| = 1 \end{cases}$$

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve. Khi đó :

1) Với mọi tập con A của $E, A^\perp$ là kgvc của E .

2) $\forall (A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2, (A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp)$.

3) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

4) Với mọi kgvc F của $E: F \oplus F^\perp = E$, do vậy: $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

5) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A^{\perp\perp} = \text{Vect}(A)$.

6) $E^\perp = \{0\}$ và $\{0\}^\perp = E$.

7) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

8) Với mọi kgvc F, G của E :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ và } (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve, $(x_i)_{i \in I}$ là một họ trong E .
 Nếu $\left\{ \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \text{ trực giao} \\ \forall i \in I, x_i \neq 0 \end{array} \right\}$, thì $(x_i)_{i \in I}$ độc lập tuyến tính.

♦ **Mệnh đề 3 (Định lý Pythagore)**

Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve, $(x, y) \in E^2$. Ta có :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

♦ **Định lý (Phép trực giao hóa Schmidt)**

Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve, $p \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_p)$ là một họ độc lập tuyến tính trong E . Tồn tại $(V_1, \dots, V_p) \in E^p$ sao cho :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1, \dots, V_p \text{ đôi một trực giao} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect}(V_1, \dots, V_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \end{array} \right.$$

(và do vậy : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, V_k \neq 0$).

Nhận xét :

Bằng cách đặt cho $(V_1, \dots, V_p)$ điều kiện :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle V_k, e_k \rangle = 1,$$

khi đó sẽ có duy nhất $(V_1, \dots, V_p)$ và ma trận chuyển từ $(e_1, \dots, e_p)$ sang $(V_1, \dots, V_p)$

là ma trận tam giác trên với các thành phần đường chéo bằng 1: $\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Cơ sở trực chuẩn được viết tắt là cstc.

♦ **Hệ quả 1 (Định lý về cstc không đầy đủ)**

Với mọi họ trực chuẩn $(e_1, \dots, e_p)$ của một kgve E , tồn tại $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ (trong đó $n = \dim(E)$) sao cho $(e_1, \dots, e_n)$ là một cstc của E .

♦ **Hệ quả 2**

Mọi kgve đều có ít nhất một cstc.

Nhận xét :

Nếu $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cstc của $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, thì:

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i.$$

♦ **Mệnh đề 4** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgvc, B là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. Khi đó :

$$\left| \begin{array}{l} B \text{ là trực giao khi và chỉ khi } A \in D_n(\mathbb{R}) \\ B \text{ là trực chuẩn khi và chỉ khi } A = I_n. \end{array} \right.$$

Chứng minh : Theo Định nghĩa ở § 4.1.2 : $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Nhận xét :

Đặc biệt, nếu B là một csc của E thì ta có với mọi (x, y) thuộc E^2 và với ký hiệu $X = \text{Mat}_B(x)$, $Y = \text{Mat}_B(y)$: $\langle x, y \rangle = {}^tXY$.

Bài tập

♦ **4.2.12** Cho $(E, (\cdot | \cdot))$ là một không gian tiền Hilbert thực, $\| \cdot \|$ là chuẩn liên kết, F là kgvc của E , $x \in E$. Chứng minh :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow (\forall y \in F, (x|y) \leq \|y\|^2).$$

♦ **4.2.13** Cho φ, ψ là hai tích vô hướng trên $\mathbb{R}$ -kgv E hữu hạn chiều sao cho :

$$\forall (x, y) \in E^2, (\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow \psi(x, y) = 0).$$

Chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in E^2, \psi(x, y) = \alpha \varphi(x, y).$$

♦ **4.2.14** Ta trang bị cho $M_n(\mathbb{R})$ tích vô hướng chính tắc của nó. Các trực giao của $D_n(\mathbb{R})$, $S_n(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R})$ là gì ?

♦ **4.2.15** Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, $H = \{Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}); {}^tXY = 0\}$. Chứng minh rằng X là vectơ riêng của A khi và chỉ khi H ổn định đối với A .

4.3 Các tự đồng cấu đáng chú ý của không gian véctor Euclide

Trong § 4.3 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgve, $n = \dim(E) \geq 1$.

4.3.1 Tự đồng cấu đối xứng

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta nói rằng f là **đối xứng** khi và chỉ khi :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Ta ký hiệu $\mathcal{S}(E)$ là tập các tự đồng cấu đối xứng của E .

Rõ ràng rằng $\mathcal{S}(E)$ là một kgvc của $\mathcal{L}(E)$.

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là kgve, $\mathcal{B}$ là một cstc của E , $f \in \mathcal{L}(E)$,
 $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Ta có: $f \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Chứng minh :

Ta có :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(AX)Y = {}^tXAY$$

$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(A - {}^tA)XY = 0)$$

$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(A - {}^tA)X = 0$$

$$\Leftrightarrow A - {}^tA = 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Xem thêm bài tập 4.1.1. ■

Nhận xét :

1) Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve, $\mathcal{B}$ là một cstc của E . Ánh xạ $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
 $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
 là một tự đồng cấu của $\mathbb{R}$ -kgv. Đặc biệt, $\mathcal{S}(E)$ hữu hạn chiều và :

$$\dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Ta cần phân biệt :

$\mathcal{S}(E; K)$	và	$\mathcal{S}(E)$
$\text{dstdx } \varphi$	và	tự đồng cấu đối xứng f
$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$	và	$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Chính xác hơn, ánh xạ $\theta : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathcal{S}(E; K)$ cho tương ứng $\text{dstdx } \varphi$ xác định bởi : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$ với mỗi tự đồng cấu đối xứng f của E

là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$ - kgv và với mọi csc B của E : $\text{Mat}_B(\varphi) = \text{Mat}_B(f)$, vì với ký hiệu $A = \text{Mat}_B(f) \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, ta có với mọi (x, y) thuộc E^2 (và $X = \text{Mat}_B(x)$, $Y = \text{Mat}_B(y)$):

$$\langle x, f(y) \rangle = X(AY) = XAY.$$

♦ **Mệnh đề 2** Ta có :

- 1) $\forall f, g \in \mathcal{S}(E), (g \circ f \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow g \circ f = f \circ g)$
- 2) $\forall f \in \mathcal{S}(E), \forall k \in \mathbb{N}, f^k \in \mathcal{S}(E).$
- 3) $\forall f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{GL}(E), \forall k \in \mathbb{Z}, f^k \in \mathcal{S}(E).$

Chứng minh : Phương pháp thứ nhất

1) Giả sử $(f, g) \in (\mathcal{S}(E))^2$. Ta có :

$$\begin{aligned} g \circ f \in \mathcal{S}(E) &\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, \langle (g \circ f)(x), y \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle) \\ &\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), g(y) \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle) \\ &\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, \langle x, (f \circ g)(y) \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in E, f \circ g(y) = g \circ f(y)) \\ &\Leftrightarrow f \circ g = g \circ f. \end{aligned}$$

2) Suy ra từ 1) với $k \in \mathbb{N}^*$, theo quy nạp ; và $f^0 = \text{Id}_E \in \mathcal{S}(E).$

3) Giả sử $f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{GL}(E).$

• Ta có, với mọi (x, y) thuộc E^2 :

$$\langle f^{-1}(x), y \rangle = \langle f^{-1}(x), f(f^{-1}(y)) \rangle = \langle f(f^{-1}(x)), f^{-1}(y) \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle$$

vậy $f^{-1} \in \mathcal{S}(E).$

• Áp dụng 2) cho f^{-1} và $-k$ để thu được : $\forall k \in \mathbb{Z}, f^k = (f^{-1})^{-k} \in \mathcal{S}(E).$

Phương pháp thứ hai

Mệnh đề này là hệ quả của Mệnh đề tương tự trên các ma trận đối xứng thực (xem 8.3.1, 1) Mệnh đề 2 và 3, Tập 5). ■

Phép chiếu trực giao, đối xứng trực giao

Ta nhắc lại và bổ sung việc nghiên cứu đã xét ở 10.2.2, Tập 5.

♦ **Định nghĩa 2** Với mọi kgv F của E , ta gọi phép chiếu lên F song song với $F^\perp$ là phép chiếu trực giao lên F .

Ký hiệu p_F là phép chiếu trực giao lên F , ta có :

$$\begin{cases} p_F \circ p_F = p_F, & \text{Im}(p_F) = F, \text{Ker}(p_F) = F^\perp \\ \forall x \in E, (p_F(x) \in F, x - p_F(x) \in F^\perp) \end{cases}$$

Ta cũng nói **phép chiếu trực giao** thay cho phép chiếu trực giao.

- ♦ **Định nghĩa 3** Giả sử F là kgvc của $E, x \in E$. Ta gọi số thực xác định bởi :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

là **khoảng cách từ x tới F** , và ký hiệu là $d(x, F)$.

- ♦ **Mệnh đề 3** Giả sử F là kgvc của $E, x \in E$. Ta có :

$$\begin{cases} \forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\| \\ \forall y \in F, (\|x - y\| = \|x - p_F(x)\| \Leftrightarrow y = p_F(x)) \end{cases}$$

Nói cách khác, ánh xạ $F \rightarrow \mathbb{R}$ có một cận dưới đúng và nó chỉ đạt được

$$y \mapsto \|x - y\|$$

tại $p_F(x)$.

- ♦ **Mệnh đề 4** Giả sử F là kgvc của $E, (e_1, \dots, e_p)$ là một cstc của F . Khi đó ta có :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i.$$

- ♦ **Mệnh đề 5** Giả sử $p \in \mathcal{L}(E)$ là một phép chiếu ($p \circ p = p$). Khi đó p là phép chiếu trực giao khi và chỉ khi p đối xứng.

Chứng minh :

1) Giả sử p là phép chiếu trực giao và $(x, y) \in E^2$. Ta có :

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), y - p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$$

vì $p(x) \in \text{Im}(p)$ và $y - p(y) \in \text{Ker}(p) = (\text{Im}(p))^\perp$.

Cũng vậy $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(y), x \rangle = \langle p(y), p(x) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$.

Vậy ta có : $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle (= \langle p(x), p(y) \rangle)$.

và cuối cùng p đối xứng.

2) Đảo lại, giả sử p là phép chiếu đối xứng của E . Ta có :

$$\forall (x, y) \in \text{Ker}(p) \times \text{Im}(p), \langle x, y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = 0,$$

vậy p là phép chiếu trực giao.

- ♦ **Mệnh đề 6** Giả sử p là phép chiếu đối xứng của E . Tồn tại một csc $\mathcal{B}$ của E sao cho $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó $r = \text{rank}(p)$.

Chứng minh :

Tồn tại một csc $\mathcal{B}_1$ của $\text{Im}(p)$ và một csc $\mathcal{B}_2$ của $\text{Ker}(p)$. Vì $\text{Im}(p)$ và $\text{Ker}(p)$ là các phần bù trực giao trong E , nên $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ là một csc phù hợp của E .

- ♦ **Định nghĩa 4** Với mọi kgvc F của E , ta gọi tự đồng cấu s_F của E xác định bởi $s_F = 2p_F - e$, với p_F là phép chiếu trực giao lên F , và $e = \text{Id}_E$ là phép đối xứng trực giao đối với F .

Rõ ràng rằng :

$$\begin{cases} s_F \circ s_F = e \\ \text{Ker}(s_F - e) = F, \text{Ker}(s_F + e) = F^\perp \\ p_F = \frac{1}{2}(e + s_F). \end{cases}$$

- ♦ **Mệnh đề 7** Giả sử $s \in \mathcal{L}(E)$ là một phép đối xứng ($s \circ s = e$). Khi đó s là một phép đối xứng trực giao khi và chỉ khi s là đối xứng.

Chứng minh :

Ta ký hiệu $p = \frac{1}{2}(e + s)$. Vì $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + e)$ và $\text{Im}(p) = \text{Ker}(s - e)$

(vì $x = p(x) \Leftrightarrow s(x) = x$) nên sử dụng Mệnh đề 5, ta có:

$$\begin{aligned} (s \text{ đối xứng trực giao}) &\Leftrightarrow (p \text{ phép chiếu trực giao}) \\ &\Leftrightarrow (p \text{ đối xứng}) \Leftrightarrow (s \text{ đối xứng}). \end{aligned}$$

Nhận xét : Ta chú ý về sự không nhất quán trong từ vựng đã thiết lập : Tự đồng cấu đối xứng và phép đối xứng là không đồng nghĩa.

- ♦ **Mệnh đề 8** Giả sử s là một phép đối xứng trực giao của E . Tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}$ của E sao cho:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \text{ trong đó } p = \dim(\text{Ker}(s - e)), q = \dim(\text{Ker}(s + e))$$

- ♦ **Định nghĩa 5** Ta gọi mọi phép đối xứng trực giao đối với một siêu phẳng của E là phép phản xạ (của E).

Bài tập

- ♦ 4.3.1 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng hai trong ba tính chất sau đây suy ra tính chất thứ ba :
- (i) ${}^tA = A$ (ii) ${}^tAA = A$ (iii) $A^2 = A$.
- ♦ 4.3.2 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, λ, μ là hai gtr của A sao cho $\lambda \neq \mu$, U (tương ứng: V) là một vtr của A liên kết với λ (tương ứng : μ). Chứng minh : ${}^tUV = 0$ và $U{}^tV$ lũy linh.
- ♦ 4.3.3 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sao cho ${}^tA = A$ và $A^2 = A$. Chứng minh :
- a) $0 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \leq n$
- b) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{\text{rank}(A)}$
- c) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| < n^{\frac{3}{2}}$ (nếu $n \geq 2$).
- ♦ 4.3.4 Cho $n \in \mathbb{N}^*$; xác định hoán tập của $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, tức là :
- $$\{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}); \forall A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}.$$
- ♦ 4.3.5 Cho $n \in \mathbb{N}^*$; ta trang bị cho $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ tích vô hướng chính tắc của nó, và ký hiệu
- $$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}, F = \text{Vect}\{U^k; 0 \leq k \leq n-1\}, A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$
- a) Chứng minh rằng $(U^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ là một cơ sở trực giao của F .
- b) Từ đó suy ra phép chiếu trực giao của A lên F .

4.3.2 Tự đồng cấu trực giao

Ta tiếp tục và bổ sung ở đây việc nghiên cứu đã xét trong Tập 5, 10.3.

Trong § 4.3.2 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgve, $n = \dim(E) \geq 1$.

- ♦ **Định nghĩa** Một tự đồng cấu f của E được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi f bảo toàn tích vô hướng, tức là :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Ký hiệu $\mathcal{O}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (hay: $\mathcal{O}(E)$) là tập các tự đồng cấu trực giao của E .

Nhận xét : Từ vựng truyền thống ở đây là không nhất quán, vì phép chiếu trực giao của E (khác Id_E) không phải là một tự đồng cấu trực giao của E .

- ♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Hai tính chất sau đây là tương đương :

$$(i) \quad f \in \mathcal{O}(E)$$

$$(ii) \quad \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Các phần tử của $\mathcal{O}(E)$ cũng được gọi là **đẳng cự vectơ**.

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Các tính chất sau đây đôi một tương đương :

$$(i) \quad f \in \mathcal{O}(E)$$

$$(ii) \quad \text{Với mọi csc } \mathcal{B} \text{ của } E, f(\mathcal{B}) \text{ là một csc của } E$$

$$(iii) \quad \text{Tồn tại một csc } \mathcal{B} \text{ của } E \text{ sao cho } f(\mathcal{B}) \text{ là một csc của } E.$$

- ♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3** Tập $\mathcal{O}(E)$ các tự đồng cấu trực giao của E là một nhóm với luật $\circ$, gọi là **nhóm trực giao của $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$** (hay: của E).

- ♦ **Định nghĩa 2** Ma trận $\mathcal{Q}$ thuộc $M_n(\mathbb{R})$ được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi tự đồng cấu của $\mathbb{R}^n$, biểu diễn bởi $\mathcal{Q}$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, là một tự đồng cấu trực giao của $\mathbb{R}^n$ được trang bị tích vô hướng thông thường.

Ta ký hiệu $O_n(\mathbb{R})$ là tập các ma trận trực giao của $M_n(\mathbb{R})$.

- ◆ **Mệnh đề 4** Giả sử $\Omega \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, E là một $\mathbb{R}$ -kgv hữu hạn chiều với số chiều n , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một tích vô hướng trên E . Các tính chất sau đây từng đôi một tương đương :
- 1) $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$
 - 2) ${}^t\Omega\Omega = \mathbf{I}_n$
 - 3) $\Omega {}^t\Omega = \mathbf{I}_n$
 - 4) Với mọi csc $\mathcal{B}$ của E , tự đồng cấu biểu diễn bởi Ω trong $\mathcal{B}$ là trực giao
 - 5) Tồn tại một csc của E trong đó tự đồng cấu biểu diễn bởi Ω là trực giao
 - 6) Các cột của Ω tạo nên một csc của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ đối với tích vô hướng chính tắc
 - 7) Các hàng của Ω tạo nên một csc của $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ đối với tích vô hướng chính tắc.
- ◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 5** $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ là một nhóm đối với phép nhân, gọi là nhóm trực giao (cấp n).

Nhận xét :

Giả sử $\mathcal{B}$ là một csc của E , $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Omega = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Khi đó ta có : $f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Ánh xạ $\mathcal{O}(E) \rightarrow \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ là một đẳng cấu nhóm $\mathcal{O}(E)$ được trang bị phép hợp thành và $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ được trang bị phép nhân.

- ◆ **Mệnh đề 6** Giả sử $\mathcal{B}$ là một csc của E , $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của E , $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Khi đó $\mathcal{B}'$ là một csc của E khi và chỉ khi P là trực giao.

- ◆ **Mệnh đề 7**
- 1) $\forall \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \det(\Omega) \in \{-1, 1\}$
 - 2) $\forall f \in \mathcal{O}(E), \det(f) \in \{-1, 1\}$.

- ◆ **Định nghĩa 3** Giả sử $f \in \mathcal{O}(E)$. Ta nói rằng f là một tự đồng cấu trực giao thuận (tương ứng: nghịch) khi và chỉ khi $\det(f) = 1$ (tương ứng: -1).

Ta còn nói : $\left| \begin{array}{l} \text{phải thay vì thuận} \\ \text{trái thay vì nghịch.} \end{array} \right.$

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 8** Tập hợp các tự đồng cấu trực giao thuận của E là một nhóm con của $\mathcal{O}(E)$, gọi là **nhóm trực giao đặc biệt** của E , ký hiệu $\mathcal{SO}(E)$.

◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 9** Giả sử $\mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Ta nói rằng $\mathcal{Q}$ là **trực giao phải** (tương ứng : **trái**) khi và chỉ khi $\det(\mathcal{Q}) = 1$ (tương ứng : -1). Tập hợp các ma trận trực giao phải cấp n là một nhóm con của $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, gọi là **nhóm trực giao đặc biệt**, ký hiệu $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) = \{ \mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) ; \det(\mathcal{Q}) = 1 \}.$$

Nhận xét :

Giả sử B là một csc của E , $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{Q} = \text{Mat}_B(f)$.

Khi đó ta có : $f \in \mathcal{SO}(E) \Leftrightarrow \mathcal{Q} \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.

Ánh xạ $\mathcal{SO}(E) \rightarrow \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$ là một đẳng cấu nhóm ($\mathcal{SO}(E)$ được trang bị $f \mapsto \text{Mat}_B(f)$

phép hợp thành, còn $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$ được trang bị phép nhân).

◆ **Mệnh đề 10**

$$1) \forall f \in \mathcal{O}(E), \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$$

$$2) \forall \mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \text{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathcal{Q}) \subset \{-1, 1\}.$$

Chứng minh :

Rõ ràng rằng 2) là biểu diễn ma trận của 1).

Giả sử $f \in \mathcal{O}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E - \{0\}$ sao cho $f(x) = \lambda x$.

Ta có $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ từ đó $|\lambda| = 1$ và do vậy $\lambda \in \{-1, 1\}$.

◆ **Mệnh đề 11**

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists (T, \mathcal{Q}) \in \mathbf{T}_{n,n}(\mathbb{R}) \times \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), A = \mathcal{Q}T.$$

Chứng minh :

Ký hiệu $C_1, \dots, C_n$ là các cột của A và do vậy $C = (C_1, \dots, C_n)$ là một họ độc lập tuyến tính trong $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Trong kgve $M_{n,1}(\mathbb{R})$ có trang bị tích vô hướng chính tắc, ta áp dụng cho C quy trình trực giao hóa Schmidt (Định lý, 4.2.2). Tồn tại $V_1, \dots, V_n \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho :

$$\begin{cases} V_1, \dots, V_n \text{ từng đôi một trực giao} \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \|V_k\| = 1 \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{Vect}(V_1, \dots, V_k) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_k) \end{cases}$$

Vậy $B = (V_1, \dots, V_n)$ là một cste của $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ký hiệu B_0 là cơ sở chính tắc của $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\Omega = \text{Pass}(B_0, B) \in O_n(\mathbb{R})$,

$T_1 = \text{Pass}(C, B) \in T_{n,1}(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Khi đó (xem Mệnh đề 2, 8.2.1, Tập 5) :

$$A = \text{Pass}(B_0, C) = \text{Pass}(B_0, B) \text{Pass}(B, C) = \Omega T_1^{-1}.$$

Ký hiệu $T = T_1^{-1} \in T_{n,1}(\mathbb{R})$, cuối cùng ta thu được : $A = \Omega T$.

Bài tập

◇ 4.3.6 Hãy xác định hoán tập của $O_n(\mathbb{R})$ trong $M_n(\mathbb{R})$, tức là :

$$\{M \in M_n(\mathbb{R}); \forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), M\Omega = \Omega M\}.$$

◇ 4.3.7 Giả sử E là kgve, $f \in \mathcal{O}(E)$.

a) Chứng minh : $\forall (x, y) \in \text{Ker}(f - e) \times \text{Im}(f - e), \langle x, y \rangle = 0$.

b) Từ đó suy ra rằng $\text{Ker}(f - e)$ và $\text{Im}(f - e)$ là các phần bù trực giao trong E .

◇ 4.3.8 Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là kgve, $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng hai trong ba tính chất sau đây suy ra tính chất thứ ba:

(i) f là đẳng cự.

(ii) $f \circ f = -\text{Id}_E$

(iii) $\forall x \in E, \langle x | f(x) \rangle = 0$.

◇ 4.3.9 Cho $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là kgve, $f \in \mathcal{O}(E)$. Chứng minh rằng f chéo hóa được khi và chỉ khi f là đối xứng trực giao.

◇ 4.3.10 Ta trang bị cho $M_n(\mathbb{R})$ tích vô hướng chính tắc. Chứng minh rằng $O_n(\mathbb{R})$ bị chặn và tính đường kính của nó.

◇ 4.3.11 Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, Σ_n là tập các ma trận ngẫu nhiên của $M_n(\mathbb{R})$, nghĩa là :

$$\Sigma_n = \left\{ A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R}); \begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} \in [0; 1] \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \end{cases} \right\},$$

Π_n là tập các ma trận hoán vị của $M_n(\mathbb{R})$, tức là tập các ma trận $A = (a_{ij})_{ij}$ thuộc $M_n(\mathbb{R})$ sao cho tồn tại $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ thoả mãn:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} = \delta_{\sigma(i), j} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{nếu } j \neq \sigma(i) \end{cases}.$$

Chứng minh : $\Pi_n = \Sigma_n \cap O_n(\mathbb{R})$.

◇ 4.3.12 Giả sử $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $D \in M_p(\mathbb{R})$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n+p}(\mathbb{R}).$$

Giả thiết : $M \in O_{n+p}(\mathbb{R})$ và $(A \in O_n(\mathbb{R}) \text{ hay } D \in O_p(\mathbb{R}))$.

Chứng minh: $B = 0$, $C = 0$, $A \in O_n(\mathbb{R})$, $D \in O_p(\mathbb{R})$.

◇ 4.3.13 Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA$.

a) Chứng minh : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $(AX)BX = 0$.

b) Chứng minh : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|(A+B)X\| = \|(A-B)X\|$, trong đó $\|\cdot\|$ ký hiệu chuẩn Euclide chính tắc trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Ta giả sử thêm B khả nghịch. Chứng minh rằng $A+B$ và $A-B$ khả nghịch và $(A+B)(A-B)^{-1}$ trực giao.

4.4 Thu gọn của ma trận đối xứng thực

Trong § 4.4 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgve, $n \in \mathbb{N}^*$.

4.4.1 Định lý cơ bản

- ♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve, f là một tự đồng cấu đối xứng của E . Khi đó các không gian con riêng của f trực giao lẫn nhau, tức là: với mọi gtr λ, μ của f sao cho $\lambda \neq \mu$ và mọi $\overline{\text{vtr}} x$ liên kết với λ và y liên kết với μ : $\langle x, y \rangle = 0$.

Chứng minh:

Giả sử $\lambda, \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ sao cho $\lambda \neq \mu$, $x \in \text{KGCR}(f, \lambda)$, $y \in \text{KGCR}(f, \mu)$: Khi đó ta có:

$$x \neq 0, y \neq 0, f(x) = \lambda x, f(y) = \mu y.$$

Từ đó: $\langle \lambda x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle$, vậy $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ và cuối cùng $\langle x, y \rangle = 0$.

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử f là một tự đồng cấu đối xứng của E . Với mọi kgve F của E ổn định đối với f , $F^\perp$ là ổn định đối với f .

Chứng minh:

Giả sử F là kgve của E ổn định đối với f , $x \in F^\perp$. Ta có:

$$\forall y \in F, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0$$

(vì $x \in F^\perp$ và $f(y) \in F$), từ đây $f(x) \in F^\perp$.

- ♦ **Định lý (Định lý cơ bản):**

1) Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve, f là một tự đồng cấu đối xứng của E . Tồn tại một csc của E trong đó ma trận của f là ma trận chéo.

$$2) \quad \forall S \in S_n(\mathbb{R}), \exists (\Omega, D) \in O_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R}), \quad S = \Omega D \Omega^t$$

Chứng minh: (Có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên).

Rõ ràng rằng 2) là biểu diễn ma trận của 1)

Độc giả sẽ thấy một chứng minh khác trong bài tập (xem bài tập 4.4.1) và chứng minh “cổ điển” sử dụng các không gian Hermite trong Chương 6 (Định lý, 6.5.1).

Quy nạp theo n ($n = \dim(E)$).

Tính chất là hiển nhiên với $n = 1$.

Ta giả sử tính chất đó đúng cho một số nguyên $n \in \mathbb{N}^*$ và giả sử E là kgvê có số chiều $n + 1$, f là tự đồng cấu đối xứng của E , B_1 là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_{B_1}(f)$. Phân tích A theo khối :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC \\ C & B \end{pmatrix}, \text{ trong đó } \alpha \in \mathbb{R}, C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $B = \Omega D \Omega^{-1}$.

Ký hiệu $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$ rõ ràng rằng U là trực giao và $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{pmatrix}$, từ đây

$$\text{lấy tích theo khối: } U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC\Omega \\ \Omega^{-1}C & D \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta ký hiệu } G = \Omega^{-1}C \text{ và } A' = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tG \\ G & D \end{pmatrix}.$$

1) Ta chứng minh rằng A' có ít nhất một gtr và một vtr.

Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$, $V \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Phân tích V theo khối: $V = \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}$ với $x \in \mathbb{R}$ và $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ta có :

$$A'V = \lambda V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & {}^tG \\ G & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + {}^tGX = \lambda x \\ xG + DX = \lambda X \end{cases}$$

Giả sử $\lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(D)$; vậy thì $D - \lambda I_n$ khả nghịch và do vậy :

$$A'V = \lambda V \Leftrightarrow \begin{cases} X = -x(D - \lambda I_n)^{-1}G \\ \alpha x - x {}^tG(D - \lambda I_n)^{-1}G = \lambda x \end{cases}$$

Ký hiệu $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, ta có:

$${}^tG(D - \lambda I_n)^{-1}G + \lambda = \alpha \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{g_i^2}{d_i - \lambda} + \lambda = \alpha.$$

Nếu $G = 0$ thì rõ ràng ta có thể chọn $\lambda = \alpha$, $x = 1$, $X = 0$.

Giả sử $G \neq 0$; ta có thể giả thiết $d_1 \geq \dots \geq d_n$.

- Nếu $g_1 \neq 0$, thì ánh xạ $\varphi :]d_1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $]d_1; +\infty[$,

$$\lambda \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{g_i^2}{d_i - \lambda} + \lambda$$

có giới hạn $-\infty$ tại d_1^+ và $+\infty$ tại $+\infty$, vậy (theo định lý giá trị trung gian)

tồn tại $\lambda \in]d_1; +\infty[$ sao cho $\varphi(\lambda) = \alpha$.

- Nếu $g_1 = 0$ thì lập luận này vẫn áp dụng được bằng việc thay thế d_1 bằng d_i trong đó:

$$r = \min\{i \in \{1, \dots, n\}; g_i \neq 0\}.$$

Ta đã chứng minh rằng f có ít nhất một giá trị riêng và một vtr thực.

2) Ký hiệu x_0 là một vtr của f , $\mathbb{R}x_0$ ổn định đối với f , vậy (xem Mệnh đề 2)

$(\mathbb{R}x_0)^\perp$ cũng ổn định đối với f . Trong một csc của E bắt đầu bởi $\frac{1}{\|x_0\|}x_0$, ma

trận của f có dạng $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ trong đó $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Theo giả thiết quy

nạp, tồn tại $\mathcal{Q}_1 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D_1 \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $S = \mathcal{Q}_1 D_1 \mathcal{Q}_1^{-1}$.

Ký hiệu $\mathcal{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_1 \end{pmatrix}$ và $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$, rõ ràng rằng: $\mathcal{Q}_2 \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R})$,

$D_2 \in \mathbf{D}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_2 D_2 \mathcal{Q}_2^{-1}$.

Điều này chứng tỏ tồn tại một csc của E trong đó ma trận của f là ma trận chéo.

Nhận xét :

1) Định lý trên cũng có thể phát biểu dưới dạng sau : với mọi tự đồng cấu đối xứng f của E , E là tổng trực giao trực tiếp của các không gian con riêng của f .

2) Trong thực tế, vì $\mathcal{Q}$ trực giao nên ta có thể thay $\mathcal{Q}^{-1}$ bằng ${}^t\mathcal{Q}$.

Bài tập

♦ 4.4.1 Một chứng minh cho định lý cơ bản

Cho $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgv hữu hạn chiều có số chiều ≥ 2 , $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$,

$f \in \mathbf{S}(E)$, $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \langle x, f(x) \rangle$$

a) Chứng minh rằng φ bị chặn và tồn tại $x_0 \in S$ sao cho $\varphi(x_0) = \sup_{x \in S} \varphi(x)$.

b) Giả sử $x_1 \in E$ sao cho (x_0, x_1) là một họ trực chuẩn. Xét $\cos \theta x_0 + \sin \theta x_1$ với $\theta \in \mathbb{R}$, chứng minh : $\langle x_1, f(x_0) \rangle = 0$.

c) Từ đó suy ra rằng x_0 là một vector riêng của f .

♦ 4.4.2 Tìm một thí dụ về ma trận đối xứng phức cấp hai không chéo hóa được.

♦ 4.4.3 Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng nếu $A + {}^tA$ lũy linh thì A phản đối xứng.

◊ 4.4.4 Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng tồn tại $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho ${}^1XX = n$ và ${}^1XAX = \text{tr}(A)$.

◊ 4.4.5 Cho $S \in S_n(\mathbb{R})$, $A = S + iI_n \in M_n(\mathbb{C})$.

Chứng minh rằng A khả nghịch.

◊ 4.4.6 Giải trong $(M_n(\mathbb{R}))^2$:
$$\begin{cases} {}^1XX = I_n \\ {}^1YXY = I_n \end{cases}$$

◊ 4.4.7 Cho $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của S . Chứng minh:

$$a) \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ sao cho } {}^1XX = 1 : \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \leq {}^1XSX \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

$$b) \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \inf_{\substack{x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ {}^1XX=1}} {}^1XSX \text{ và } \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \sup_{\substack{x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ {}^1XX=1}} {}^1XSX$$

◊ 4.4.8* Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ sao cho $d_1 < \dots < d_n$, $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & d_n \end{pmatrix}$.

Chứng minh rằng A chéo hóa được trong $M_n(\mathbb{R})$ và các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ của nó

thỏa mãn: $d_1 - 1 < \lambda_1 < d_2 - 1 < \dots < \lambda_{n-1} < d_n - 1 < \lambda_n < d_n + n - 1$.

4.4.2 Thu gọn đồng thời

◆ **Định lý** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgve, φ là dstđx trên $E \times E$. Tồn tại một cstc của E trong đó ma trận của φ là ma trận chéo.

Chứng minh:

Kgve E có ít nhất một cstc B_1 ; ta ký hiệu $A_1 = \text{Mat}_{B_1}(\varphi)$.

Vì A_1 đối xứng nên theo định lý cơ bản (Định lý, 4.4.1) tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$,

$D \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho $A_1 \in \Omega D \Omega^{-1}$.

Ký hiệu B là cơ sở suy dẫn từ B_1 bởi ma trận chuyển Ω . Khi đó B trực chuẩn (vì B_1 là trực chuẩn và Ω trực giao, xem Mệnh đề 6, 4.3.2) và (xem công thức đổi cơ sở Mệnh đề 3, 4.1.2):

$$\text{Mat}_B(\varphi) = {}^1\Omega A_1 \Omega = {}^1\Omega (\Omega D \Omega^{-1}) \Omega = D.$$

4.4.3 Dạng toàn phương dương, xác định dương

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử E là kgv, ϕ là một dtp trên E .

1) Ta nói rằng ϕ là **dương** khi và chỉ khi : $\forall x \in E, \phi(x) \geq 0$.

2) Ta nói rằng ϕ là **xác định dương** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall x \in E, \phi(x) \geq 0 \\ \forall x \in E, (\phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0) \end{cases}$$

Nhận xét : Giả sử ϕ là dstdx trên kgv E , ϕ là dtp liên kết với ϕ ; ϕ là tích vô hướng khi và chỉ khi ϕ xác định dương.

♦ **Định nghĩa 2** Giả sử $S \in S_n(\mathbb{R})$, ϕ là dstdx trên $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là S , ϕ là dtp liên kết với ϕ .

1) Ta nói rằng S là **đối xứng dương** khi và chỉ khi ϕ là dương.

1) Ta nói rằng S là **đối xứng xác định dương** khi và chỉ khi ϕ là xác định dương.

♦ **Ký hiệu**

Ta ký hiệu: S_n^+ là tập các ma trận đối xứng dương của $S_n(\mathbb{R})$.

S_n^{++} là tập các ma trận đối xứng xác định dương của $S_n(\mathbb{R})$.

Dễ dàng chứng minh mệnh đề sau đây.

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $S \in S_n(\mathbb{R})$. Ta có :

$$\bullet S \in S_n^+ \Leftrightarrow (\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0).$$

$$\bullet S \in S_n^{++} \Leftrightarrow \left(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} {}^tXSX \geq 0 \\ {}^tXSX = 0 \Rightarrow X = 0 \end{cases} \right) \\ \Leftrightarrow (\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, {}^tXSX > 0).$$

Nhận xét:

1) Dễ dàng suy ra từ Mệnh đề trên các tính chất sơ cấp sau đây của S_n^+ và S_n^{++} .

$$1) \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall S \in S_n^+, \alpha S \in S_n^+.$$

$$2) \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall S \in S_n^{++}, \alpha S \in S_n^{++}.$$

$$3) \forall (S_1, S_2) \in (S_n^+)^2, S_1 + S_2 \in S_n^+$$

$$4) \forall S_1, S_2 \in S_n^+ \times S_n^+, S_1 + S_2 \in S_n^+$$

$$5) \forall A \in M_n(\mathbb{R}), A^t A \in S_n^+.$$

2) Ta trang bị cho $S_n(\mathbb{R})$ một quan hệ ký hiệu là $\leq$ và xác định bởi :

$$\forall (A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2, (A \leq B \Leftrightarrow B - A \in S_n^+).$$

Quan hệ $\leq$ này là một quan hệ thứ tự trên $S_n(\mathbb{R})$:

- *Tính phản xạ* : $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A - A = 0 \in S_n^+$.
- *Tính phản đối xứng*: Giả sử $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ sao cho $A \leq B$ và $B \leq A$. Khi đó ta có $B - A \in S_n^+$ và $A - B \in S_n^+$, từ đây $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X(A - B)X = 0$, và do vậy, vì $A - B \in S_n(\mathbb{R})$ nên $A - B = 0$ (xem Mệnh đề 2, 4.1.2).

- *Tính bắc cầu* : Ta có $\forall A, B, C \in S_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} A \leq B \\ B \leq C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - A \in S_n^+ \\ C - B \in S_n^+ \end{cases} \Rightarrow C - A = (C - B) + (B - A) \in S_n^+ \Rightarrow A \leq C.$$

Nhưng nếu $n \geq 2$:

- $\leq$ không phải là thứ tự toàn phần trên $S_n(\mathbb{R})$. Chẳng hạn với $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ và

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ta không có cả } A \leq B \text{ lẫn } B \leq A.$$

- $\leq$ không tương thích với phép nhân (cho dù các ma trận xét đến đều đối xứng). Chẳng hạn với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5/4 \end{pmatrix}$, ta có $A \leq B$

$$(\text{vì } B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5/4 \end{pmatrix} \in S_2^+) \text{ và } A^2 \not\leq B^2 \text{ (vì } B^2 - A^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 64 & 52 \\ 52 & 41 \end{pmatrix} \notin S_2^+).$$

Ta thường ký hiệu $<$ là quan hệ được xác định trong $S_n(\mathbb{R})$ bởi :

$$\forall (A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2, (A < B \Leftrightarrow B - A \in S_n^{++}).$$

Cần thận trọng rằng khi $n \geq 2$, các quan hệ $\begin{cases} A \leq B \\ A \neq B \end{cases}$ không đưa tới $A < B$, như

$$\text{ví dụ sau đây : } n = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Giả sử E là kgv, $n = \dim(E)$, B là cstc của E , φ là dstđx trên E , ϕ là dtp liên kết với φ , $A = \text{Mat}_B(\varphi)$. Ta có:

$$\begin{cases} A \text{ đối xứng dương} \Leftrightarrow \phi \text{ dương} \\ A \text{ đối xứng xác định dương} \Leftrightarrow \phi \text{ xác định dương.} \end{cases}$$

♦ **Định lý** Giả sử $S \in S_n(\mathbb{R})$. Ta có:

$$1) S \in S_n^+ \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$$

$$2) S \in S_n^{++} \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Chứng minh :

1) • Giả sử $S \in S_n^+$, $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$; tồn tại $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ sao cho $SX = \lambda X$.

Ta có: $'X SX \geq 0$, $'X SX = 'X(\lambda X) = \lambda'XX$, $'XX = \|X\|^2 > 0$.

Từ đây $\lambda \geq 0$.

• Đảo lại, giả sử $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Theo định lý cơ bản (Định lý, 4.4.1) tồn tại $(\mathcal{Q}, D) \in O_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R})$ sao cho

$$S = \mathcal{Q}D\mathcal{Q}^T. \text{ Giả sử } X \in M_{n,1}(\mathbb{R}); \text{ ký hiệu } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ và } Y = \mathcal{Q}^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Vậy ta có: $'X SX = 'X \mathcal{Q}D\mathcal{Q}^{-1}X = 'YDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$. Điều này chứng tỏ $S \in S_n^+$.

2) Lấy lại các ký hiệu trước :

• $'XSX > 0$, từ đây $\lambda > 0$

• $'XSX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$ vì $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ và $Y \neq 0$

(nếu không, $X = \mathcal{Q}Y = 0$, loại trừ).

Nhận xét :

Từ Định lý cơ bản (Định lý, 4.4.1) và Mệnh đề trên, ta suy ra $S_n^{++} \subset GL_n(\mathbb{R})$.

♦ **Mệnh đề 2 (Biểu diễn ma trận của định lý thu gọn đồng thời)**

Giả sử $A \in S_n^{++}$, $B \in S_n(\mathbb{R})$. Khi đó tồn tại $(P, D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = 'PP$ và $B = 'PDP$.

Chứng minh :

Vì $A \in S_n^{++}$ nên $\text{dstđx } \varphi_A : (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là một tích vô hướng trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
 $(X, Y) \mapsto 'XAY$

Ký hiệu φ_B là dstđx được biểu thị bởi B trong cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ của $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Theo định lý thu gọn đồng thời (Định lý, 4.4.2), tồn tại một csc $\mathcal{B}$ của

$(M_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi_A)$ sao cho ma trận D của φ_B trong $\mathcal{B}$ là ma trận chéo.

Ký hiệu $P = \text{Pass}(B_0, B)$.

Vì φ_A được biểu diễn trong B_0 bởi A và trong B bởi I_n (vì B là trực chuẩn đối với φ_A), ta có (công thức đổi cơ sở cho một dstđx, Mệnh đề 3, 4.1.2):

$$A = {}^P I_n P = {}^P P. \text{ Cũng vậy: } B = {}^P D P.$$

Nhận xét :

Trong Mệnh đề 2, các phần tử trên đường chéo của D (“nói chung”) không phải là các giá trị riêng của B .

Bài tập

Các bài tập từ 4.4.9 tới 4.4.22 không cần áp dụng định lý cơ bản.

♦ 4.4.9 Cho E là một $\mathbb{R}$ -kgv, ϕ là dstđx trên E , ϕ là đtđ liên kết với φ , $(a, b) \in E^2$.

Ký hiệu $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ được xác định bởi:

$$\forall x \in E, \psi(x) = \phi(a)\phi(b)\phi(x) - \phi(a, b)\phi(a, x)\phi(b, x).$$

a) Chứng minh rằng ψ là một đtđ và biểu thị dạng đối cực của nó.

b) Chứng minh rằng nếu ϕ xác định dương và (a, b) độc lập tuyến tính, thì ψ xác định dương.

♦ 4.4.10 Cho E là một $\mathbb{R}$ -kgv, ϕ là một đtđ trên E , F là một kgvc của E , $\phi': F \rightarrow \mathbb{R}$ là

$$x \mapsto \phi(x)$$

thu hẹp của ϕ vào F .

Chứng minh: a) nếu ϕ dương, thì ϕ' dương

b) nếu ϕ xác định dương, thì ϕ' xác định dương.

♦ 4.4.11 Chứng minh rằng $\leq$ tương thích trong $S_n(\mathbb{R})$ với phép cộng, tức là:

$$\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in S_n(\mathbb{R}), \begin{cases} A_1 \leq B_1 \\ A_2 \leq B_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 \leq B_1 + B_2.$$

$$\text{Hơn nữa: } \forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in S_n(\mathbb{R}), \begin{cases} A_1 \leq B_1 \\ A_2 < B_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 < B_1 + B_2.$$

♦ 4.4.12 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $S_1, \dots, S_p \in S_n(\mathbb{R})$, $S = \sum_{k=1}^p S_k^2$.

a) Chứng minh: $S \in S_n^+$.

b) Chứng minh: $S = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, p\}, S_k = 0)$.

♦ 4.4.13 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n(\mathbb{R})$. Chứng minh:

a) ${}^A S A \in S_n(\mathbb{R})$

$$b) S \in S_n^+ \Rightarrow 'ASA \in S_n^+$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} S \in S_n^{++} \\ A \in GL_n(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \Rightarrow 'ASA \in S_n^{++}.$$

◇ 4.4.14 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Chứng minh : $AB + BA \in S_n(\mathbb{R})$ và $AB + BA \leq A^2 + B^2$.

◇ 4.4.15 Có thể có hay không: $\forall (A, B) \in (S_n^+)^2, AB + BA \in S_n^+$?

◇ 4.4.16 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^{++}$, $B \in A_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA$.

Chứng minh : $A + B \in GL_n(\mathbb{R})$.

◇ 4.4.17 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Chứng minh :

$$a) 'AA \in S_p^+$$

$$b) 'AA \in S_p^{++} \Leftrightarrow \text{rank}(A) = p.$$

Đặc biệt : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), ('AA \in S_n^{++} \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}))$.

◇ 4.4.18 Cho $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*$, $S_1 \in S_{n_1}(\mathbb{R}), \dots, S_N \in S_{n_N}(\mathbb{R})$,

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_N \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R}) \text{ trong đó } n = \sum_{k=1}^N n_k.$$

Chứng minh : a) $S \in S_n^+ \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, N\}, S_k \in S_{n_k}^+)$.

$$b) S \in S_n^{++} \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, N\}, S_k \in S_{n_k}^{++}).$$

◇ 4.4.19 Cho $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_p^+$, $B \in S_q^{++}$, $U \in M_{p,q}(\mathbb{R}), S = \begin{pmatrix} A & U \\ U & B \end{pmatrix} \in S_{p+q}(\mathbb{R})$,

$$C = A - UB^{-1}U.$$

Chứng minh : a) $S \in S_{p+q}^+ \Leftrightarrow C \in S_p^+$

$$b) S \in S_{p+q}^{++} \Leftrightarrow C \in S_p^{++}.$$

◇ 4.4.20 Cho $n \in \mathbb{N}^*$; chứng minh :

a) $S_n(\mathbb{R})$ đóng trong $M_n(\mathbb{R})$

b) S_n^+ đóng trong $S_n(\mathbb{R})$ và trong $M_n(\mathbb{R})$.

◇ 4.4.21 Chứng minh : $\forall A \in S_n^+, e^A \geq I_n$, và xét trường hợp đẳng thức.
(Sử dụng bài tập 4.4.20 a)).

◇ 4.4.22 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in S_n^{++}$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ta giả sử: $\begin{cases} SX \geq 0 \\ X \leq 0 \end{cases}$, trong đó " $\geq$ " trong $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ có nghĩa là tất cả các thành phần vectơ (trong cơ sở chính tắc) đều ≥ 0 . Chứng minh: $X = 0$.

◇ 4.4.23 Cho $(\alpha, \beta, \gamma) \in]0; \pi]^3$, $\delta = 1 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ta giả sử rằng } \delta > 0; \text{ chứng minh: } S \in \mathbf{S}_3^{++}.$$

◇ 4.4.24 Tích của hai ma trận đối xứng thực có luôn luôn chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ không?

◇ 4.4.25 Cho E là một $\mathbb{R}$ -kgv hữu hạn chiều, φ là dsđx trên E , ϕ là dtp liên kết với φ , B là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_B(\varphi)$. Chứng minh:

a) nếu ϕ dương, thì $\det(A) \geq 0$

b) nếu ϕ xác định dương, thì $\det(A) > 0$.

◇ 4.4.26 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh:

a) nếu p lẻ, thì: $\forall S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), \exists R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), R^p = S$

b) nếu p chẵn, thì: $\forall S \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists R \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R}), R^p = S$

Đặc biệt: $\forall S \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists R \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R}), R^2 = S$.

(Đối với tính duy nhất, xem bài tập 5.2.25 ở phần sau).

◇ 4.4.27 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ là các gtr của 'AA'. Chứng minh:

a) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mu_i \geq 0$

$$b) \sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2.$$

◇ 4.4.28* Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh:

a) $\forall (S, S') \in (\mathbf{S}_n^+)^2, \text{tr}(SS') \leq \text{tr}(S) \text{tr}(S')$

b) $\forall (S, S') \in (\mathbf{S}_n^{++})^2, \text{tr}(SS') < \text{tr}(S) \text{tr}(S')$, nếu $n \geq 2$.

◇ 4.4.29 Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh:

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

trong đó $\| \cdot \|$ là chuẩn Euclide chính tắc trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, được xác định bởi:

$$\|A\| = (\text{tr}(AA))^{\frac{1}{2}}. \text{ (Sử dụng bài tập 4.4.28).}$$

◇ 4.4.30* Cho $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A_1, \dots, A_p \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Chứng minh: $\left| \text{tr} \left(\prod_{i=1}^p A_i \right) \right| \leq \prod_{i=1}^p \|A_i\|$,

trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Euclide chính tắc trên $M_n(\mathbb{R})$. (Sử dụng bài tập 4.4.29).

◇ 4.4.31 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ là các gtr của AA^+ ($AA^+ \in S_n^+$, xem bài tập 4.4.17 a)). Chứng minh:

α) Với mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $\|X\| = 1$: $\sqrt{\mu_n} \leq \|AX\| \leq \sqrt{\mu_1}$

b) $\sqrt{\mu_n} = \inf_{\substack{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\|=1}} \|AX\|$ và $\sqrt{\mu_1} = \sup_{\substack{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\|=1}} \|AX\|$, trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn

Euclide chính tắc trên $M_n(\mathbb{R})$. (Sử dụng bài tập 4.4.7).

◇ 4.4.32 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} a_1 & & & a_1 \\ & a_2 & & a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$.

Chứng minh: $S \in S_n^{++} \Leftrightarrow 0 < a_1 < \dots < a_n$.

◇ 4.4.33 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$.

Tìm điều kiện cần và đủ cho (a, b) sao cho $S \in S_n^+$ (tương ứng S_n^{++})? (Xem Ví dụ, 9.6.2, Tập 5).

◇ 4.4.34 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\alpha, \beta, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} \alpha & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & \beta & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & 0 & & \beta \end{pmatrix} \in S_{n+1}(\mathbb{R})$.

Tìm điều kiện cần và đủ sao cho $S \in S_{n+1}^{++}$.

◇ 4.4.35 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ b & a & & b \\ & & \ddots & \\ 0 & b & & a \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$.

Tìm điều kiện cần và đủ để $S \in S_n^+$ (tương ứng S_n^{++})? (Sử dụng bài tập 2.3.7).

Ví dụ: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & -1 \\ & & \ddots & \\ 0 & -1 & & 2 \end{pmatrix}$ là đối xứng xác định dương.

◇ 4.4.36* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in S_n^+$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh:

$$AS = SA \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^*, AS^k = S^k A).$$

Đặc biệt: $AS = SA \Leftrightarrow AS^2 = S^2 A.$

- ◇ 4.4.37 Cho $(E, (\cdot|\cdot))$ là một kgve, $(e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E , $f \in \mathcal{L}(E)$ được xác định bởi:

$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i.$$

a) Chứng minh: f là đối xứng xác định dương (tức là: f đối xứng và đtp $\phi_f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x | f(x))$

xác định dương).

b) Suy ra rằng tồn tại $u \in \mathcal{L}(E)$ đối xứng xác định dương sao cho $u \circ u = f^{-1}$ (sử dụng bài tập 4.4.26; nếu ta muốn cả tính duy nhất của u thì sử dụng bài tập 5.2.25).

c) Chứng minh rằng $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ là một cstc.

- ◇ 4.4.38* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^+$, $B \in S_n(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}.$

(Sử dụng các bài tập 4.4.26 và 2.2.12).

b) Chứng minh rằng nếu $B \in S_n^+$ thì $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}_+.$

c) Chứng minh rằng nếu $A \in S_n^{++}$ thì AB chéo hóa được (trong $M_n(\mathbb{R})$).

d) Cho một ví dụ trong đó $A \in S_2^+$, $B \in S_2(\mathbb{R})$ và AB không chéo hóa được.

- ◇ 4.4.39 Cho $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh: $S_n^{++} = S_n^+ \cap \text{GL}_n(\mathbb{R}).$

b) Suy ra rằng S_n^{++} là một tập con mở của $S_n^+.$

(Có thể sử dụng: $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ mở trong $M_n(\mathbb{R})$, xem bài tập 1.2.22, Tập 3).

c) Chứng minh rằng S_n^{++} trù mật trong $S_n^+.$

- ◇ 4.4.40* Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (S_n^+)^2.$

a) Chứng minh: $A \leq B \Rightarrow \begin{cases} \text{tr}(A) \leq \text{tr}(B) \\ \det(A) \leq \det(B) \end{cases}.$

(Có thể sử dụng bài tập 4.4.25).

b) Chứng minh: $\left[\begin{cases} A \leq B \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A \in S_n^{++} \\ A \leq B \\ \det(A) = \det(B) \end{cases} \right] \Rightarrow A = B.$

c) Chứng minh:

$$\left[\begin{matrix} A \leq B \\ \lambda \text{tr}(A) + \mu \det(A) = \lambda \text{tr}(B) + \mu \det(B) \end{matrix} \right] \Rightarrow A = B.$$

với mọi (λ, μ) thuộc $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

◊ 4.4.41' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in S_n^{++}$ sao cho $A \leq B$. Chứng minh : $B^{-1} \leq A^{-1}$.

◊ 4.4.42' Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^{++}$, $B \in S_n(\mathbb{R})$.

Chứng minh : $\det(A) \leq |\det(A + iB)|$, và xét trường hợp đẳng thức.

Chương 5

Đại số song tuyến tính (Nghiên cứu nâng cao)

Chương 5 dành cho sinh viên chuyên ngành Toán – Lý và bổ sung cho chương 4.

5.1 Dạng song tuyến tính đối xứng, dạng toàn phương.

Trong § 5.1 này K chỉ $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$, nhưng có thể chỉ một thể giao hoán có đặc số khác 2 mà không cần sửa đổi bài viết.

5.1.1 Đại cương

Trong § 5.1.1 này, E chỉ K -kgv.

Ta nhắc lại các định nghĩa dạng song tuyến tính đối xứng (dstdx) và dạng toàn phương (dtp), xem các Định nghĩa 1, Định nghĩa 2 và Định nghĩa 3, 4.1.1.

◆ Định nghĩa

1) Ta gọi **dạng song tuyến tính đối xứng** trên $E \times E$ (hoặc : trên E) mọi ánh xạ $\varphi: E \times E \rightarrow K$ thỏa mãn :

- (i) $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$ (φ là đối xứng)
- (ii) $\forall \beta \in K, \forall (x, y, y') \in E^3, \varphi(x, \beta y + y') = \beta \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$
(φ là tuyến tính đối với vị trí thứ 2).

2) Cho một dạng song tuyến tính đối xứng φ trên $E \times E$.

Ánh xạ từ E vào K , thường ký hiệu là ϕ , xác định bởi :

$$\forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x)$$

được gọi là **dạng toàn phương** liên kết với φ .

Ta nhắc lại rằng, có thể biểu diễn φ theo ϕ nhờ "đồng nhất thức phân cực" (xem Mệnh đề 3. 3) và 4), 4.1.1) :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)) = \frac{1}{4} (\phi(x + y) - \phi(x - y)).$$

5.1.2 Tính trực giao theo một dạng song tuyến tính đối xứng

Trong § 5.1.2 này E chỉ K -kgv, φ là một dstdx trên $E \times E$, ϕ dtp liên kết với φ .

Ta tổng quát hóa khái niệm trực giao theo một tích vô hướng (xem 4.2.2).

◆ **Định nghĩa 1**

1) Giả sử $(x, y) \in E^2$, ta nói x **trực giao với y theo φ** khi và chỉ khi

$$\varphi(x, y) = 0.$$

2) Giả sử $x \in E$, $A \in \mathfrak{P}(E)$, ta nói rằng x là **trực giao với A theo φ** khi và chỉ khi

$$\forall a \in A, \varphi(x, a) = 0.$$

3) Với mỗi tập con A của E , ta gọi tập hợp $\{x \in E; \forall a \in A, \varphi(x, a) = 0\}$ là **tập trực giao với A theo φ** , ký hiệu $A^\perp$ (hay: $A^{\perp_\varphi}$).

4) Một họ $(x_i)_{i \in I}$ các phần tử của E được gọi là **họ trực giao theo φ** khi và chỉ khi $\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow \varphi(x_i, x_j) = 0)$.

Ta cũng nói φ - **trực giao** thay cho “trực giao theo φ ”.

◆ **Mệnh đề 1**

1) Với mỗi tập con A của E , $A^\perp$ là một kgvc của E .

2) $\forall (A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2, (A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp)$.

3) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

4) $\{0\}^\perp = E$.

5) Với mọi kgvc F của $E: F \subset F^{\perp\perp}$.

Chứng minh:

Các chứng minh đã được đưa ra trong 10.1.3, Tập 5 đối với một tích vô hướng vẫn còn đúng cho một dstđx.

◆ **Định nghĩa 2**

Ta gọi kgvc $E^\perp$ của E là **hạt nhân của φ** và ký hiệu là $\text{Ker}(\varphi)$.

Nói cách khác $\text{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{x \in E; \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$.

Mặc dù được ký hiệu là $\text{Ker}(\varphi)$, nhưng ở đây φ không phải là một ánh xạ tuyến tính, mà là một dstđx. Xem bài tập 5.1.3.

VÍ DỤ :

$K = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2, \varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \varphi$ là một dstđx và $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}(0, 1)$.

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1$$

◆ **Định nghĩa 3** Một dstđx φ trên $E \times E$ được gọi là **suy biến** (tương ứng: không suy biến) khi và chỉ khi $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ (tương ứng: $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$).

Nói một cách khác, φ được gọi là không suy biến khi và chỉ khi :

$$\forall x \in E, ((\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0).$$

◆ **Định nghĩa 4**

- 1) Một vectơ x của E được gọi là **đẳng hướng** (đối với ϕ) khi và chỉ khi $\phi(x) = 0$.
- 2) Tập hợp các vectơ đẳng hướng đối với ϕ được gọi là **nón đẳng hướng** của ϕ .
- 3) Một kgvc F của E được gọi là **đẳng hướng hoàn toàn** khi và chỉ khi $F \subset F^\perp$.

Nhận xét :

- 1) Có thể tồn tại các vectơ đẳng hướng khác 0. Ví dụ, nếu $E = \mathbb{R}^2$ và

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{vectơ } (1,1) &\text{đẳng hướng đối với } \phi. \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{aligned}$$

- 2) Nón đẳng hướng đối với ϕ , thường được ký hiệu $C(\phi)$, là một "mặt nón" với nghĩa hình học, nghĩa là :

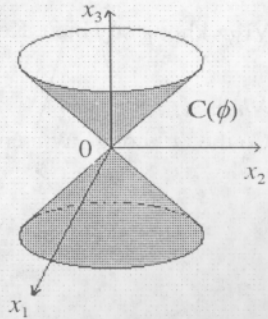
$$\forall \alpha \in K, \forall x \in C(\phi), \alpha x \in C(\phi)$$

(vì: $\phi(\alpha x) = \alpha^2 \phi(x) = 0$).

Nói chung, $C(\phi)$ không phải là một kgvc của E .

Ví dụ với $K = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & C(\phi) &\text{là một mặt nón bậc hai.} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \end{aligned}$$



- 3) Theo định nghĩa 3), một kgvc F của E đẳng hướng hoàn toàn khi và chỉ khi

$$\forall (x, y) \in F^2, \varphi(x, y) = 0,$$

điều này dẫn đến : thu hẹp của φ lên $F \times F$ là ánh xạ không.

- 4) Hiển nhiên $\text{Ker}(\varphi) \subset C(\phi)$.

◆ **Định nghĩa 5** Một dtp ϕ trên E là xác định khi và chỉ khi :

$$\forall x \in E, (\phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0).$$

Nói một cách khác, ϕ xác định khi và chỉ khi $C(\phi) = \{0\}$.

◆ **Mệnh đề 2**

1) Nếu ϕ xác định thì ϕ không suy biến.

2) Nếu $\left\{ \begin{array}{l} K = \mathbb{R} \\ \phi \text{ không suy biến} \\ \phi \text{ dương} \end{array} \right.$, thì ϕ là xác định.

Ta nhắc lại rằng ϕ được gọi là dương khi và chỉ khi $\forall x \in E, \phi(x) \geq 0$. (xem Định nghĩa 1, 4.4.3).

Chứng minh :

1) Nếu ϕ xác định thì ϕ không suy biến vì $\text{Ker}(\phi) \subset C(\phi) = \{0\}$.

2) Giả sử ϕ không suy biến, ϕ dương và $x \in C(\phi)$. Ta có :

$$\forall y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi(y + \lambda x) = \phi(y) + 2\lambda\phi(x, y),$$

từ đây cần có : $\forall y \in E, \phi(x, y) = 0$, tức là $x \in \text{Ker}(\phi)$.

Vì ϕ không suy biến, $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, từ đó $x = 0$, và cuối cùng $C(\phi) = \{0\}$.

Nhận xét :

Có thể ϕ không suy biến và ϕ không xác định, ví dụ sau chỉ ra điều đó:

$$K = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2, \phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2$$

Bài tập

◆ **5.1.1** Cho một $\mathbb{C}$ -kgv E và $\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ là một dstđx sao cho $\forall x \in E, \phi(x, x) \in \mathbb{R}_+$.

Chứng minh : $\forall x \in E, \phi(x, x) = 0$.

◆ **5.1.2** Cho một K -kgv E , ϕ là một dstđx trên E ; F, G là hai kgvc của E . Chứng minh:

$F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$. Ta nói rằng F và G là **trực giao** khi và chỉ khi $F \subset G^\perp$.

◆ **5.1.3** Cho một không gian tiền Hilbert thực $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ là một tự đồng cấu

đối xứng của E , $\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \langle x, f(y) \rangle$$

Chứng minh rằng ϕ là một dstđx trên E và $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(f)$.

◆ **5.1.4** Cho một K -kgv E , ϕ là một dstđx trên $E \times E$, $x, y \in E$ là đẳng hướng.

Chứng minh rằng $x + y$ là đẳng hướng khi và chỉ khi x và y là trực giao với nhau.

♦ 5.1.5 Cho một K -kgv E , φ là một dstđx trên $E \times E$, F là một kgvc của E sao cho $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. Chứng minh: $F^\perp \cap F^{\perp\perp} \neq \{0\}$.

♦ 5.1.6 Cho một K -kgv E , φ là một dstđx trên $E \times E$, F là một kgvc của E .

Chứng minh rằng F là một kgvc đẳng hướng hoàn toàn khi và chỉ khi $F \subset C(\varphi)$.

♦ 5.1.7 Cho một K -kgv E , φ là một dstđx trên $E \times E$, $x \in E$ và x không phải là đẳng hướng. Chứng minh:

$$a) \forall y \in E, y - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, x)} x \in x^\perp$$

$$b) E = (Kx) \oplus x^\perp.$$

5.1.3 Trường hợp hữu hạn chiều

Trong § 5.1.2 này E chỉ K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$, φ một dstđx trên $E \times E$, φ đtđ liên kết với φ .

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi số tự nhiên $\dim(E) - \dim(\text{Ker}(\varphi))$ là hạng của φ , ký hiệu là $\text{rank}(\varphi)$.

Vậy: $\text{rank}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(\varphi))$.

Mặc dù được ký hiệu là $\text{rank}(\varphi)$, nhưng ở đây φ không phải là một ánh xạ tuyến tính mà là một dstđx. Xem bài tập 5.1.3.

Ta nhắc lại Định nghĩa và Mệnh đề sau (xem 4.1.2):

♦ **Định nghĩa 2** Giả sử φ là một dstđx trên $E \times E$ và $B = (e_1, \dots, e_n)$ một cơ sở của E . Ta gọi ma trận vuông đối xứng cấp n $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ là ma trận của φ trong B , và được ký hiệu là $\text{Mat}_B(\varphi)$.

♦ **Mệnh đề 1**

Giả sử φ là một dstđx trên $E \times E$

B là một cơ sở của E

$$A = \text{Mat}_B(\varphi)$$

$$x, y \in E, X = \text{Mat}_B(x), Y = \text{Mat}_B(y).$$

Khi đó ta có: $\varphi(x, y) = XAY$. ■

♦ **Mệnh đề 2** Với mỗi dstđx φ trên $E \times E$ và mỗi cơ sở B của E , ta có:

$$\text{rank}(\varphi) = \text{rank}(\text{Mat}_B(\varphi)).$$

Chứng minh:

- Giả sử $x \in E$, $X = \text{Mat}_E(x)$. Với ký hiệu $A = \text{Mat}_B(\varphi)$, ta có :

$$x \in \text{Ker}(x) \Leftrightarrow (\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0) \Leftrightarrow (\forall y \in M_{n,1}(K), 'XAY = 0)$$

$$\Leftrightarrow 'XA = 0 \Leftrightarrow 'AX = 0 \Leftrightarrow AX = 0.$$

Điều này chứng tỏ $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(A)$.

Theo định nghĩa của $\text{rank}(\varphi)$ và định lý về hạng, ta có :

$$\text{rank}(\varphi) = n - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - \dim(\text{Ker}(A)) = \text{rank}(A).$$

Nhận xét :

1) φ không suy biến khi và chỉ khi $\text{rank}(\varphi) = n$.

2) Giả sử B là cơ sở của E , $A = \text{Mat}_B(\varphi)$. φ không suy biến khi và chỉ khi

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

♦ Định lý (Sự tồn tại một cơ sở φ -trực giao)

Với mỗi dstđx φ trên E , tồn tại ít nhất một cơ sở trực giao theo φ của E .

Chứng minh :

Quy nạp theo $n = \dim(E)$.

Tính chất là tầm thường với $n = 1$.

Giả sử tính chất trên đúng với mọi K -kgv n chiều, E là một K -kgv $n + 1$ chiều, và φ là một dstđx trên $E \times E$.

Nếu $\varphi = 0$, thì mọi cơ sở của E là trực giao theo φ , do đó E có ít nhất một cơ sở.

Vậy ta giả sử $\varphi \neq 0$.

Nếu mọi vectơ của E là đẳng hướng, thì φ là ánh xạ không vì :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y))$$

(Cũng xem bài tập 5.1.4).

Giả sử tồn tại $e_1 \in E$ sao cho $\phi(e_1) \neq 0$. Xét tập $F = \{e_1\}^\perp$ và thu hẹp φ' của φ lên $F \times F$:

$$\varphi' : F \times F \rightarrow K$$

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

Ta sẽ chứng minh Ke_1 và F là bù nhau trong E .

Giả sử $x \in E$. Với mỗi (α, y) của $K \times E$, ta có :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = \alpha e_1 + y \\ y \in F \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha e_1 + y \\ \varphi(e_1, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha e_1 + y \\ \varphi(e_1, x) = \alpha \phi(e_1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\varphi(e_1, x)}{\phi(e_1)} \\ y = x - \frac{\varphi(e_1, x)}{\phi(e_1)} e_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng, mỗi phần tử x của E được phân tích một cách duy nhất trên Ke_1 và F . Như vậy Ke_1 và F là bù nhau trong E .

Đặc biệt vì $\dim(F) = (n+1) - 1 = n$ nên F là một siêu phẳng của E .

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại một cơ sở $(e_2, \dots, e_{n+1})$ của F trực giao theo φ' . Với ký hiệu $B = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$, ta có:

- Vì $(e_2, \dots, e_{n+1})$ độc lập, $e_1 \notin \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ và $\dim(E) = n+1$ nên B là một cơ sở của E
- $\forall j \in \{2, \dots, n+1\}$, $\varphi(e_1, e_j) = 0$ vì $e_j \in F = \{e_1\}^\perp$
- $\forall (i, j) \in \{2, \dots, n+1\}^2$, $(i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0)$.

Vậy B là cơ sở trực giao theo φ của E .

◆ | Hệ quả 1

$$\forall S \in S_n(K), \exists (P, D) \in GL_n(K) \times D_n(K), S = {}^tPDP.$$

Chứng minh:

Giả sử $S \in S_n(K)$. Ta ký hiệu φ một dstdx trên $(M_{n,1}(K))^2$ có ma trận trong cơ sở chính tắc B_0 của $M_{n,1}(K)$ là S . Theo định lý trên, tồn tại một cơ sở B của $M_{n,1}(K)$ trực giao theo φ . Vậy ma trận D của φ trong B là ma trận chéo. Theo định lý về chuyển cơ sở đối với các dstdx (Xem Mệnh đề, 3.4.1.2), ta có:

$$D = {}^tP^{-1}SP^{-1}, \text{ trong đó } P = \text{Pass}(B, B_0), S = {}^tPDP.$$

Nhận xét: Các phần tử trên đường chéo của D nói chung không phải là các gtr của S .

◆ | Hệ quả 2 Mọi dạng toàn phương ϕ trên E đều có ít nhất một cách phân tích thành tổ hợp tuyến tính các bình phương của các dạng tuyến tính độc lập.

Chứng minh:

Giả sử ϕ là dạng phân cực của một đtp ϕ trên E . Theo định lý trên, tồn tại một cơ sở B trực giao theo ϕ của E . Vì vậy ma trận D của ϕ trong B là ma trận chéo:

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad (d_1, \dots, d_n) \in K^n.$$

Giả sử $x \in E$, $X = \text{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ta có:

$$\phi(x) = {}^tXDX = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

Ký hiệu $l_i: E \rightarrow K$ ($1 \leq i \leq n$). Khi đó l_i là các dạng tuyến tính trên E và :

$$\forall x \in E, \phi(x) = \sum_{i=1}^n d_i (l_i(x))^2.$$

Hơn nữa $(l_1, \dots, l_n)$ độc lập vì $(l_1, \dots, l_n)$ là một cơ sở đối ngẫu của B .

Nhận xét :

Giả sử đã biết một phân tích của ϕ dưới dạng một tổ hợp tuyến tính các bình phương của các dạng tuyến tính :

$$\forall x \in E, \phi(x) = \sum_{i=1}^N d_i (L_i(x))^2.$$

và giả sử : $\begin{cases} (L_1, \dots, L_n) \text{ độc lập tuyến tính} \\ \forall i \in \{1, \dots, N\}, d_i \neq 0 \end{cases}$.

Ta có thể biểu diễn dạng phân cực φ của ϕ :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) &= \frac{1}{4} (\phi(x+y) - \phi(x-y)) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N d_i \left((L_i(x) + L_i(y))^2 - (L_i(x) - L_i(y))^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N d_i L_i(x) L_i(y). \end{aligned}$$

Từ đó sẽ suy ra hạt nhân của φ :

$$x \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow (\forall (y) \in E, \varphi(x, y) = 0) \Leftrightarrow (\forall (y) \in E, \sum_{i=1}^N d_i L_i(x) L_i(y) = 0)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N d_i L_i(x) L_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, N\}, d_i L_i(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, N\}, L_i(x) = 0.$$

Như vậy:
$$\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i=1}^N \text{Ker}(L_i) = \bigcap_{i=1}^N {}^0\{L_i\}.$$

(trong đó ${}^0\{L_i\}$ là tập trực giao của tập con $\{L_i\}$ của E^* trong E).

Hơn nữa, vì $(L_1, \dots, L_n)$ là độc lập, hạng của hệ phương trình

$$(\forall i \in \{1, \dots, N\}, L_i(x) = 0) \text{ (ẩn } x \in E)$$

bằng N , do đó $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - N$, nên

$$\text{rank}(\varphi) = n - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = N.$$

Như vậy ta có thể xác định nhân và hạng của một dtp từ một phân tích dưới dạng tổ hợp tuyến tính với các hệ số khác không của các bình phương các dạng tuyến tính độc lập (xem bài tập 5.1.20).

Bài tập

◊ 5.1.8 Cho một K -kgv E hữu hạn chiều, φ là một dstdx trên $E \times E$, B là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_B(\varphi)$, $x \in E$, $X = \text{Mat}_B(x)$. Chứng minh :

$$x \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(A).$$

◊ 5.1.9 Cho một K -kgv E ; φ là một dstdx trên $E \times E$, ϕ là dtp liên kết với φ , và

$$O_\varphi = \{f \in \mathcal{GL}(E); \forall (x, y) \in E^2, \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)\}.$$

a) α) Chứng minh O_φ là một nhóm đối với luật $\circ$.

β) Chứng minh : $O_\varphi = \{f \in \mathcal{GL}(E); \forall x \in E, \phi(f(x)) = \phi(x)\}$.

Đặc biệt, nếu φ là tích vô hướng thì O_φ là nhóm trực giao của (E, φ) (Xem 4.3.2, Định nghĩa 1)

b) Giả sử E hữu hạn chiều và φ không suy biến; B là một cơ sở của E và $S = \text{Mat}_B(\varphi)$.

α) Giả sử $f \in \mathcal{GL}(E)$, $\Omega = \text{Mat}_B(f)$. Chứng minh : $f \in O_\varphi \Leftrightarrow {}^t\Omega S \Omega = S$.

β) Từ đó suy ra : $\forall f \in O_\varphi, \det(f) \in \{-1, 1\}$.

c) Trong cơ sở chính tắc (e_1, e_2) của $\mathbb{R}^2$, một dtp φ trên $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ được xác định bởi :

$$\varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2) = 0, \quad \varphi(e_1, e_2) = 1.$$

Xác định các phần tử của O_φ bằng cách tìm ma trận của chúng trong (e_1, e_2) .

◊ 5.1.10 Cho một K -kgv E , φ là một dstdx trên $E \times E$, $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in E$.

Ký hiệu $\delta = \det((\varphi(x_i, y_j))_{1 \leq i, j \leq p})$.

a) Chứng minh : $\delta \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_p) & \text{độc lập} \\ (y_1, \dots, y_p) & \text{độc lập} \end{cases}$

b) Nếu $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)$ độc lập tuyến tính và φ không suy biến thì có thể suy ra $\delta \neq 0$ hay không ?

c) Ở đây ta giả thiết E có số chiều hữu hạn và $p = \dim(E)$. Chứng minh rằng, nếu $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)$ là độc lập và nếu φ không suy biến, thì $\delta \neq 0$.

◊ 5.1.11 Cho một K -kgv E hữu hạn chiều, φ là một dstdx trên $E \times E$,

$r = \text{rank}(\varphi)$. Chứng minh rằng, tồn tại $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r \in E^*$ sao cho:

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^r f_i(x)g_i(y).$$

- ◇ 5.1.12 Cho E một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$, φ là một dstđx không suy biến trên $E \times E$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ là một cơ sở của E . Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ của E sao cho :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \varphi(e'_i, e'_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}.$$

5.1.4 Phân loại các dạng toàn phương trên không gian vector hữu hạn chiều

1) Đại cương

Trong § 5.1.4 1) này, E chỉ K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$.

Trong tập hợp $S(E; K)$ của các dstđx trên $E \times E$, quan hệ $\mathcal{C}$ được xác định bởi:

$$\varphi \mathcal{C} \psi \Leftrightarrow (\exists f \in \mathcal{GL}(E), \forall (x, y) \in E^2, \psi(x, y) = \varphi(f(x), f(y))).$$

Dễ dàng chứng minh được $\mathcal{C}$ là một quan hệ tương đương trong $S(E; K)$ và thường được gọi là quan hệ **tương đẳng**.

Cho một cơ sở $\mathcal{B}_0$ của E .

Giả sử $\varphi, \psi \in S(E, K)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\psi)$.

Khi đó, theo định nghĩa về ma trận của một dstđx trong một cơ sở, ta có:

$$\varphi \mathcal{C} \psi \Leftrightarrow (\exists P \in \text{GL}_n(K), B = {}^tPAP).$$

Quan hệ trên $S_n(K)$, vẫn được ký hiệu là $\mathcal{C}$, xác định bởi:

$$ACB \Leftrightarrow (\exists P \in \text{GL}_n(K), B = {}^tPAP),$$

được gọi là **quan hệ tương đẳng** (cũng xem bài tập 4. 1.2).

Ta vừa chứng minh : $\varphi \mathcal{C} \psi \Leftrightarrow A \mathcal{C} B$.

Ta sẽ xác định các lớp tương đương của $S(E; K)$ (hay $S_n(K)$) modulo $\mathcal{C}$ trong hai trường hợp : $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$.

2) Trường hợp của $\mathbb{C}$

Trong § 5.1.4 2) này $K = \mathbb{C}$.

- Giả sử $\varphi \in S(E; \mathbb{C})$.

Theo Định lý 5.1.3, có một cơ sở $\mathcal{B}$ trực giao theo φ của E ; như vậy tồn tại $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{C}^n$ thỏa mãn $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Ta có thể giả thiết $\mathcal{B}$ được sắp để $d_1, \dots, d_r \neq 0$ và $d_{r+1} = \dots = d_n = 0$, trong đó $r = \text{rank}(\varphi) = \text{rank}(\text{diag}(d_1, \dots, d_n))$. Vì mọi số phức khác không có ít nhất một căn bậc hai khác không, nên tồn tại $\delta_1, \dots, \delta_r \in \mathbb{C}^*$, sao cho : $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \delta_i^2 = d_i$.

Ta ký hiệu $\delta_{r+1} = \dots = \delta_n = 1$ và $Q = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Rõ ràng $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Với ký hiệu $J_{n,n,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (xem 8.2.3, Tập 5) thì

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_n) = {}^t Q J_{n,n,r} Q.$$

Như vậy, tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}'$ của E thỏa mãn $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = J_{n,n,r}$ (cơ sở này suy ra từ $\mathcal{B}$ bởi ma trận chuyển Q).

• Ngược lại, các ma trận $J_{n,n,r} (r \in \{0, \dots, n\})$ đôi một không tương đương vì chúng không tương đương.

Tóm tắt khảo sát trên :

◆ **Định lý (Phân loại các dạng toàn phương phức trên không gian vectơ hữu hạn chiều)**

Điều kiện cần và đủ để hai dạng toàn phương trên một $\mathbb{C}$ -kgv hữu hạn chiều tương đương là chúng có cùng hạng.

Trong phần khảo sát trên, ta đã chứng minh:

◆ **Mệnh đề** Giả sử E là một $\mathbb{C}$ -kgv hữu hạn chiều, ϕ là một dtp trên E , $r = \text{rank}(\phi)$. Khi đó tồn tại r dạng tuyến tính $L_1, \dots, L_r$ tạo nên một họ độc lập thỏa mãn :

$$\forall x \in E, \phi(x) = \sum_{i=1}^r (L_i(x))^2.$$

3) Trường hợp của $\mathbb{R}$

Trong § 5.1.4 3) này $K = \mathbb{R}$.

• Giả sử $\varphi \in \mathcal{S}(E; R)$.

Theo Định lý 5.1.3, có một cơ sở $\mathcal{B}$ trực giao theo φ của E ; vì vậy tồn tại $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Ta có thể giả thiết $\mathcal{B}$ được sắp sao cho tồn tại (p, q) của $\mathbb{N}^2$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, & d_i > 0 \\ \forall i \in \{p+1, \dots, p+q\}, & d_i < 0 \\ \forall i \in \{p+q+1, \dots, n\}, & d_i = 0 \end{cases}$$

Vì $r = \text{rank}(\varphi)$, $\text{rank}(\varphi) = \text{rank}(D)$, nên $p+q=r$.

Với mỗi i thuộc $\{1, \dots, p+q\}$, tồn tại $\delta_i \in \mathbb{R}^*$ thỏa mãn $\delta_i^2 = |d_i|$. Ký hiệu $\delta_{p+q+1} = \dots = \delta_n = 1$ và $Q = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Rõ ràng $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, và bằng cách đặt

$$S_{p,q} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ số hạng}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-q \text{ số hạng}})$$

ta có: $D = {}^t Q S_{p,q} Q$.

Như vậy, tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}'$ của E (cơ sở này suy ra từ $\mathcal{B}$ bởi ma trận chuyển Q) sao cho:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = S_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Đảo lại, ta chứng minh ma trận $S_{p,q} ((p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ và } p+q \leq n)$ đối một không tương đẳng.

Giả sử $(p, q), (p', q') \in \mathbb{N}^2$ sao cho $p+q \leq n$, $p'+q' \leq n$, và giả sử rằng, tồn tại một đstdx φ có ma trận $S_{p,q}$ và $S_{p',q'}$ trong hai cơ sở tương ứng $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,

$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ của E . Ta ký hiệu $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, $G' = \text{Vect}(e'_{p+1}, \dots, e'_n)$.

Khi đó rõ ràng:
$$\begin{cases} \forall x \in F - \{0\}, & \phi(x) > 0 \\ \forall x \in G', & \phi(x) \leq 0 \end{cases}$$

Từ đây điều kiện cần là: $F \cap G' = \{0\}$.

Suy ra: $n = \dim(E) \geq \dim(F \oplus G') = \dim(F) + \dim(G') = p + (n - p')$, và do vậy $p' \geq p$.
Vì vai trò đối xứng của (p, q) và (p', q') , suy ra $p' = p$ và $q' = q$.

Tóm tắt khảo sát trên:

- ◆ **Mệnh đề – Định nghĩa** Giả sử ϕ là một dạng toàn phương trên E . Khi đó tồn tại một cặp duy nhất (p, q) thuộc $\mathbb{N}^2$ sao cho có một cơ sở $\mathcal{B}$ của E mà trong cơ sở đó ma trận của ϕ là:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ & 0 & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_p \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_q \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-p-q}$

Cặp (p, q) được gọi là ký số của ϕ , và được ký hiệu là $\text{sgn}(\phi)$.

Như vậy, tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của E sao cho, với mọi x thuộc E , ta có:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2,$$

trong đó $(x_1, \dots, x_n)$ là các thành phần của x trong $\mathcal{B}$.

Nhận xét :

1) Có thể $p = 0$ hoặc $q = 0$, trong trường hợp đó một trong các tổng

$$\sum_{i=1}^p x_i^2, \quad \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 \text{ không xuất hiện.}$$

2) Nếu $\text{sgn}(\phi) = (p, q)$, thì $p + q = \text{rank}(\phi)$.

3) • ϕ dương khi và chỉ khi ký số của ϕ có dạng $(p, 0)$, $p \in \{0, \dots, n\}$

• ϕ xác định dương khi và chỉ khi ký số của ϕ là $(n, 0)$.

4) Giả sử ϕ là một dtp trên E , $\mathcal{B}$ một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Theo định lý cơ bản (Định lý, 4.4.1), tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \Omega D \Omega^{-1}$. Khi đó ma trận D của ϕ trong cơ sở $\mathcal{B}'$ được suy ra từ ma trận của ϕ trong $\mathcal{B}$ bởi ma trận chuyển Ω vì $D = {}^t\Omega A \Omega$. Từ đó suy ra ký số của ϕ là (p, q) trong đó p (tương ứng q) là số các chỉ số i của $\{1, \dots, n\}$ thỏa mãn $\lambda_i > 0$ (tương ứng < 0), với $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các trị riêng của A .

- ◆ **Định lý (Phân loại các dạng toàn phương thực trên không gian vectơ hữu hạn chiều)**

Điều kiện cần và đủ để hai dạng toàn phương trên một $\mathbb{R}$ -kgv có số chiều hữu hạn tương đương là chúng có cùng ký số.

Đôi khi định lý này còn được gọi là **định lý quán tính Sylvester**.

Bài tập

- ◇ 5.1.13 Giả sử K - kgv E có số chiều hữu hạn, $n = \dim E$, ϕ là một dstđx không suy biến trên $E \times E$, F là một kgvc của E . Chứng minh:
- $$\dim(F) + \dim(F^\perp) = n.$$
- ◇ 5.1.14 Cho một K - kgv E hữu hạn chiều, ϕ là một dstđx không suy biến trên $E \times E$, F là một kgvc của E . Chứng minh: $F^{\perp\perp} = F$. (Sử dụng bài tập 5.1.13).
- ◇ 5.1.15 a) Chứng minh: $\forall S \in S_n(\mathbb{C}), \exists M \in M_n(\mathbb{C}), S = MM$
 b) Chứng minh: $\forall S \in S_n(\mathbb{C}), \exists A \in M_{\text{rank}(S), n}(\mathbb{C}), S = AA$.
- ◇ 5.1.16 a) Ta có thể có: $\forall A, B \in S_n(\mathbb{C}), ACB \Rightarrow A^2CB^2$ hay không?
 b) Chứng minh: $\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}), ACB \Rightarrow A^2CB^2$.
 Đảo lại có đúng không?
 c) Chứng tỏ rằng: $\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}), ACB \Rightarrow A^3CB^3$.
- ◇ 5.1.17 **Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và bất đẳng thức Minkowski đối với một dạng toàn phương dương**
 Cho một $\mathbb{R}$ - kgv E , ϕ là một dstđx trên E sao cho đtđ liên kết ϕ là dương.
 Chứng minh rằng với mọi (x, y) thuộc E^2 :
- a) $(\phi(x, y))^2 \leq \phi(x) \phi(y)$
 b) $\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$.
- ◇ 5.1.18 Cho một $\mathbb{R}$ - kgv E , ϕ là một đtđ trên E . Chứng minh rằng ϕ lồi khi và chỉ khi ϕ dương (Ta nhắc lại rằng, theo định nghĩa, $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi khi và chỉ khi:
 $\forall \lambda \in [0; 1], \forall (x, y) \in E^2, \phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y)$).
- ◇ 5.1.19 Cho một $\mathbb{R}$ - kgv E hữu hạn chiều, ϕ là một đtđ trên E có ký số là (p, q) , F là một kgvc của E . Chứng minh:
- a) Nếu $\phi|_F$ xác định dương, thì $\dim(F) \leq p$
 b) Nếu $\phi|_F$ xác định âm (tức là: $-\phi|_F$ xác định dương), thì $\dim(F) \leq q$.
 c) Nếu $\dim(F) > \max(p, q)$, thì F có ít nhất một vectơ đẳng hướng khác không.
- ◇ 5.1.20 Tìm nhân, hạng, ký số của các đtđ mà trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ được xác định bởi các ma trận đối xứng A sau đây:
- a) $A = (\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ sao cho $((\cos a_i)_{1 \leq i \leq n}, (\sin a_i)_{1 \leq i \leq n})$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$
 b) $A = (\text{ch}(a_i - a_j))_{1 \leq i, j \leq n}, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$

$$c) A = \begin{pmatrix} a^2 & -ab & \vdots & 0 \\ -ab & a^2 + b^2 & & \\ & & a^2 + b^2 & -ab \\ 0 & & -ab & b^2 \end{pmatrix}, (a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, n \geq 3.$$

◇ 5.1.21 Một quan hệ tương đương trong $S_n(\mathbb{R})$, với $n \geq 1$ có bao nhiêu lớp tương đương ?

◇ 5.1.22 a) Cho $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $\alpha < \beta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_i: |\alpha, \beta| \rightarrow \mathbb{R} (1 \leq i \leq n)$ là các ánh xạ liên tục sao cho f_i, f_j khả tích trên $|\alpha, \beta|$, với mọi (i, j) thuộc $\{1, \dots, n\}^2$.

Ta ký hiệu, $a_{ij} = \int_{\alpha}^{\beta} f_i(t) f_j(t) dt$ với mỗi $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ và $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ là ma trận đối xứng. A là ma trận của đip ϕ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh :

$\alpha)$ ϕ dương

$\beta)$ ϕ xác định dương khi và chỉ khi $(f_1, \dots, f_n)$ độc lập tuyến tính.

b) Ứng dụng : Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}_+^*$, $A = \left(\frac{1}{u_i v_j + u_j v_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

$\alpha)$ Chứng minh : $A \in S_n^+$.

$\beta)$ Chứng minh rằng $A \in S_n^{++}$ khi và chỉ khi hai vectơ $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)$ tạo thành họ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.

◇ 5.1.23 Hãy chứng tỏ rằng : $\forall A, B \in S_n^+, A \leq B \Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

◇ 5.1.24 a) Cho $n, n' \in \mathbb{N}^*$, $S \in S_n(\mathbb{R}), S' \in S_{n'}(\mathbb{R}), (p, q) = \text{sgn}(S), (p', q') = \text{sgn}(S')$.
Chứng minh :

$$\text{sgn} \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \right) = (p + p', q + q').$$

b) Suy ra :

$$\alpha) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall S, S' \in S_n(\mathbb{R}), \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} S' & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow S C S'.$$

$$\beta) \forall n, n' \in \mathbb{N}^*, \forall S \in S_n(\mathbb{R}), \forall S', S'' \in S_{n'}(\mathbb{R}) \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow S' C S'' \right)$$

5.1.5 Phân tích Gauss của một dạng toàn phương

Ở đây chúng ta sẽ đưa ra một thuật toán, được gọi là phương pháp Gauss, cho phép nhận được một phân tích của một dtp thành một tổ hợp tuyến tính các bình phương của các dạng tuyến tính độc lập (xem Định lý 5.1.3).

Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $n = \dim(E) \geq 1$, ϕ một dstđx trên $E \times E$, ϕ là dtp liên kết với ϕ , $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E , $A = (a_{ij})_{ij} = \text{Mat}_B(\phi)$.

Với mọi x thuộc E , ký hiệu $(x_1, \dots, x_n)$ là các thành phần của x trong B , ta có:

$$\phi(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Trường hợp $n = 1$ là tầm thường.

1) Trường hợp $n = 2$

Giả sử $n = 2$, khi đó $\phi(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

$\alpha)$ Nếu $a_{11} \neq 0$, ta có thể viết (bằng cách viết dưới dạng chính tắc đối với một tam thức):

$$\phi(x) = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x_2^2.$$

Đây là một phân tích của ϕ thành tổ hợp tuyến tính của bình phương của hai dạng tuyến tính trên E : $L_1: (x_1, x_2) \mapsto x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2$, $L_2: (x_1, x_2) \mapsto x_2$;

hơn nữa (L_1, L_2) là độc lập.

$\beta)$ Nếu $a_{11} = 0$ và $a_{22} \neq 0$, ta đổi vai trò của x_1, x_2 và tiến hành như $\alpha)$.

$\gamma)$ Nếu $a_{11} = a_{22} = 0$, thì ta có thể viết:

$$\phi(x) = 2a_{12}x_1x_2 = \frac{a_{12}}{2} (x_1 + x_2)^2 - \frac{a_{12}}{2} (x_1 - x_2)^2,$$

và đây là một phân tích của ϕ thành tổ hợp tuyến tính của bình phương hai dạng tuyến tính trên E : $L_1: (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, $L_2: (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$;

hơn nữa (L_1, L_2) là độc lập tuyến tính.

2) Trường hợp $n \geq 3$

$\alpha)$ Giả sử tồn tại $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $a_{ii} \neq 0$.

Bằng cách hoán vị $x_1, \dots, x_n$, ta có thể trở về trường hợp $a_{11} \neq 0$.

Với việc sắp xếp thứ tự các hạng tử của $\phi(x)$ theo lũy thừa của x_1 , ta được:

$$\phi(x) = a_{11}x_1^2 + 2x_1P(x_2, \dots, x_n) + Q(x_2, \dots, x_n),$$

trong đó P là một dạng tuyến tính trên $\mathbb{R}^{n-1}$ và Q là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^{n-1}$.

Cũng có thể nói P và Q là các đa thức thuần nhất tương ứng bậc 1 và 2 của $x_2, \dots, x_n$.

Ta ký hiệu $y = (x_2, \dots, x_n)$ và $P(y) = P(x_2, \dots, x_n)$. Bằng cách đặt dưới dạng tam thức chính tắc của x_1 , ta có: $\phi(x) = a_{11} \left(x_1 + \frac{1}{a_{11}} P(y) \right)^2 + \left(Q(y) - \frac{1}{a_{11}} (P(y))^2 \right)$.

Hiển nhiên $\psi: y \mapsto Q(y) - \frac{1}{a_{11}} (P(y))^2$ là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^{n-1}$.

Giả thiết biết một phân tích của ψ dưới dạng tổ hợp tuyến tính các bình phương các dạng tuyến tính độc lập: $\psi(y) = \sum_{i=2}^N \alpha_i (l_i(y))^2$.

Ký hiệu $L_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ và với mọi $i \in \{2, \dots, N\}$, $L_i: E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x_1 + \frac{1}{a_{11}} P(y) \quad x \mapsto l_i(y)$$

Hiển nhiên $L_i (1 \leq i \leq N)$ là các dạng tuyến tính trên E lập thành một họ độc lập tuyến tính và:

$$\phi(x) = a_{11} (L_1(x))^2 + \sum_{i=2}^N \alpha_i (L_i(x))^2.$$

$\beta)$ Giả sử: $a_{ii} = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Trường hợp $\phi = 0$ là tầm thường, bằng cách hoán vị nếu cần, ta có thể giả thiết: $a_{12} \neq 0$.

Ta có: $\phi(x) = a_{12} x_1 x_2 + x_1 A(x_3, \dots, x_n) + x_2 B(x_3, \dots, x_n) + Q(x_3, \dots, x_n)$, trong đó A, B là dạng tuyến tính trên $\mathbb{R}^{n-2}$ và Q là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^{n-2}$.

Ký hiệu $y = (x_3, \dots, x_n)$. Ta nhóm các số hạng có chứa ít nhất một trong hai phân tử x_1

hoặc x_2 : $\phi(x) = a_{12} \left(x_1 + \frac{1}{a_{12}} B(y) \right) \left(x_2 + \frac{1}{a_{12}} A(y) \right) + \left(Q(y) - \frac{1}{a_{12}} A(y) B(y) \right)$.

L_1, L_2 là các dạng tuyến tính trên E được định nghĩa bởi:

$$\begin{cases} L_1(x) = x_1 + x_2 + \frac{1}{a_{12}} (A(y) + B(y)) \\ L_2(x) = x_1 - x_2 + \frac{1}{a_{12}} (B(y) - A(y)) \end{cases}$$

và dạng toàn phương ψ (trên $\mathbb{R}^{n-2}$) xác định bởi: $\psi(y) = Q(y) - \frac{1}{a_{12}} A(y) B(y)$.

Giả sử đã biết một phân tích của ψ dưới dạng tổ hợp tuyến tính các bình phương của các dạng tuyến tính độc lập: $\psi(y) = \sum_{i=3}^N \alpha_i (l_i(y))^2$.

Với $3 \leq i \leq N$, ta ký hiệu $L_i: E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto l_i(y)$$

Khi đó: $\phi(x) = \frac{a_{12}}{4} (L_1(x))^2 - \frac{a_{12}}{4} (L_2(x))^2 + \sum_{i=3}^N \alpha_i (L_i(x))^2$.

Ta chứng minh $(L_1, \dots, L_N)$ là độc lập tuyến tính.

Giả sử $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ sao cho $\sum_{i=1}^N \lambda_i L_i = 0$. Bằng cách áp dụng đẳng thức này cho hai vectơ của E với các thành phần $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$ trong $\mathcal{B}$, ta được $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$, từ đây $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Và vì $(l_i)_{3 \leq i \leq N}$ là độc lập, suy ra $\lambda_3 = \dots = \lambda_N = 0$.

VÍ DỤ :

1) Áp dụng phương pháp Gauss cho dạng toàn phương ϕ xác định trên $\mathbb{R}^3$:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3,$$

và từ đó suy ra hạt nhân, hạng, ký số của ϕ .

Ta có : $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1(2x_3 - x_2) + 2x_2^2 + 8x_3^2$
 $= (x_1 + (2x_3 - x_2))^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$.

Theo Nhận xét trang 168 :

$$(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}.$$

Vậy $\text{Ker}(\phi)$ có số chiều là 1, và được sinh bởi vectơ $(4, 2, -1)$.

Tiếp đó $\text{rank}(\phi) = 3 - \dim(\text{Ker}(\phi)) = 2$. Do đó : $\text{sgn}(\phi) = (2, 0)$.

Nhận xét:

Ký hiệu $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho

$$\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0) = P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Khi đó ta có: } A = PDP.$$

2) Áp dụng phương pháp Gauss cho dạng toàn phương ϕ xác định trên $\mathbb{R}^4$ bởi :

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 24x_2x_3 - 24x_2x_4,$$

và từ đó suy ra hạt nhân, hạng, ký số của ϕ .

Ta có : $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4(x_1 + 6x_3 - 6x_4)(x_2 + 2x_3) - 48x_3^2 + 48x_3x_4$

$$= (x_1 + x_2 + 8x_3 - 6x_4)^2 - (x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4)^2 - 48(x_3 - \frac{1}{2}x_4)^2 + 12x_4^2,$$

từ đó : $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, $\text{rank}(\phi) = 4$, $\text{sgn}(\phi) = (2, 2)$.

Bài tập

◇ 5.1.25 Tìm một phân tích Gauss và từ đó suy ra hạt nhân, hạng, ký số của các dạng toàn phương sau:

a) $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$

b) $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2a(xy + xz + yz), a \in]0; 1[$

c) $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x, y, z) = xy + xz$

d) $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 4zt$; Tìm nón đẳng hướng.

e) $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt + 2yt + 4zt$.

◇ 5.1.26 Cho ϕ đtp xác định trên $\mathbb{R}^3: \phi(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz$.

Tìm tất cả các mặt phẳng vector của $\mathbb{R}^3$ mà trên đó thu hẹp của ϕ xác định dương.

5.2 Phụ hợp

Trong § 5.2 này $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một không gian tiền Hilbert thực ; chuẩn liên kết được ký hiệu $\|\cdot\|$.

Vấn đề về phụ hợp trên một thể phức cũng đã được đề cập thiên về Giải tích trong Bổ sung 1.3, Tập 3.

Mặt khác, ta tiến hành một khảo sát tương tự đối với khái niệm phụ hợp trong một không gian tiền Hilbert phức ở Chương 6.

5.2.1 Đại cương

- ◆ **Định nghĩa** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta nói rằng f có phụ hợp khi và chỉ khi tồn tại $g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

Một g thuộc $\mathcal{L}(E)$ như vậy được gọi là phụ hợp của f .

- ◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Nếu f có phụ hợp, thì f^* chỉ có một phụ hợp, và phụ hợp duy nhất này được gọi là phụ hợp của f và ký hiệu là f^* .

Chứng minh :

Giả sử $g, h \in \mathcal{L}(E)$ là các phụ hợp của f . Ta có :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle = \langle x, h(y) \rangle,$$

từ đó : $\forall y \in E, g(y) - h(y) \in E^\perp = \{0\}$, nên $g = h$

Như vậy, nếu f^* tồn tại, thì ta có :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle}$$

Nhận xét :

1) Tồn tại các tự đồng cấu không có phụ hợp (xem Bổ sung 3.3 5), Tập 3 bằng cách thay $\mathbb{C}$ bởi $\mathbb{R}$).

2) Ta sẽ thấy ở phần sau này (Mệnh đề 5.2.2) rằng, trong không gian Euclide, mọi tự đồng cấu đều có phụ hợp.

- ◆ **Mệnh đề 2** Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}; f, g \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp. Khi đó :

- 1) $\lambda f + g$ có phụ hợp và $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
- 2) Id_E có phụ hợp và $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$
- 3) $g \circ f$ có phụ hợp và $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- 4) f^* có phụ hợp và $(f^*)^* = f$.

Chứng minh:

Ta có, với mọi (x, y) thuộc E^2 :

$$\begin{aligned} 1) \quad \langle x, (\lambda f^* + g^*)(y) \rangle &= \lambda \langle x, f^*(y) \rangle + \langle x, g^*(y) \rangle \\ &= \lambda \langle f(x), y \rangle + \langle g(x), y \rangle = \langle (\lambda f + g)(x), y \rangle \end{aligned}$$

$$2) \quad \langle x, \text{Id}_E(y) \rangle = \langle x, y \rangle = \langle \text{Id}_E(x), y \rangle$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \langle x, (f^* \circ g^*)(y) \rangle &= \langle x, f^*(g^*(y)) \rangle = \langle f(x), g^*(y) \rangle = \langle g(f(x)), y \rangle \\ &= \langle (g \circ f)(x), y \rangle \end{aligned}$$

$$4) \quad \langle x, f(y) \rangle = \langle f(y), x \rangle = \langle y, f^*(x) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle.$$

5.2.2 Trường hợp hữu hạn chiều

Trong § 5.2 này $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một không gian vector Euclide, tức là một không gian tiền Hilbert thực hữu hạn chiều.

◆ **Mệnh đề** Mọi tự đồng cấu của E đều có phụ hợp. Hơn nữa, với mọi f thuộc $\mathcal{L}(E)$ và mọi estc B của E :

$$\text{Mat}_B(f^*) = {}^t(\text{Mat}_B(f)).$$

Chứng minh:

1) Kgv E có ít nhất một cơ sở trực chuẩn B_0 .

Giả sử $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $A = \text{Mat}_{B_0}(f)$, $B = \text{Mat}_{B_0}(g)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} g = f^* &\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle) \\ &\Leftrightarrow (\forall (X, Y) \in (\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, {}^t(AX) Y = {}^tX (BY)) \\ &\Leftrightarrow {}^tA = B, \text{ xem bài tập 4.1.1.} \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ f có phụ hợp (và chỉ một) đồng thời ma trận của f^* trong B là tA .

2) Lập luận 1) là đúng đối với mọi estc của E .

◆ **Hệ quả** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta có:

$$\text{rank}(f^*) = \text{rank}(f), \quad \text{tr}(f^*) = \text{tr}(f), \quad \det(f^*) = \det(f), \quad \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f^*) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f).$$

Nhận xét:

Giả sử $A \in (\mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$; mặc dù A và tA có cùng giá trị riêng, “nói chung” A và tA

không có cùng vector riêng, ví dụ sau chỉ ra điều đó: $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài tập

- ♦ 5.2.1 Trang bị trên $M_n(\mathbb{R})$ một tích vô hướng chính tắc $(XY) \mapsto \text{tr}(XY)$. Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh $\varphi_A \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ và tìm phụ hợp $(\varphi_A)^*$ của φ_A .
- $$X \mapsto AXA$$
- ♦ 5.2.2 Cho một kgvc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ thỏa mãn $f \circ f^* = f^* \circ f$, F là một kgvc của E ổn định đối với f ; g là tự đồng cấu của F sinh bởi f ; trên F có tích vô hướng cảm sinh từ $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Chứng minh :
- $$g \circ g^* = g^* \circ g$$

5.2.3 Các tự đồng cấu đáng chú ý trong không gian tiền Hilbert thực

Ta lấy lại một phần và mở rộng khảo sát đã có ở § 4.3 và § 4.4.
Trong § 5.2.3 này, E chỉ một không gian tiền Hilbert thực.

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta nói rằng :

- 1) f là **đối xứng** (hay là: **tự phụ hợp**) khi và chỉ khi : f có phụ hợp và $f^* = f$.
- 2) f là **phản đối xứng** khi và chỉ khi : f có phụ hợp và $f^* = -f$.
- 3) f là **trực giao** khi và chỉ khi f có phụ hợp và $f^* \circ f = \text{Id}_E$.

Rõ ràng rằng các định nghĩa 1) và, 3) là mở rộng của các định nghĩa trong trường hợp E có số chiều hữu hạn (xem Định nghĩa 1, 4.3.1 và Định nghĩa 1, 4.3.2).

♦ **Định nghĩa 2** Một tự đồng cấu đối xứng f của E được gọi là :

- 1) **Đối xứng dương** khi và chỉ khi :

$$\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0$$
- 2) **Đối xứng xác định dương** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0 \\ \forall x \in E, (\langle x, f(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0) \end{cases}$$

Nhận xét:

- 1) Một tự đồng cấu đối xứng f của E là đối xứng xác định dương khi và chỉ khi:

$$\forall x \in E - \{0\}, \langle x, f(x) \rangle > 0.$$
- 2) Tính “dương”, “xác định dương” ở đây chỉ có thể được sử dụng đối với một tự đồng cấu đối xứng (chứ không phải với mọi tự đồng cấu).
- 3) Một tự đồng cấu đối xứng f của E được gọi là **âm** (tương ứng : **xác định âm**) khi và chỉ khi $-f$ là đối xứng dương (tương ứng : xác định dương).
- 4) Giả sử f là một tự đồng cấu đối xứng của E ; ký hiệu $\phi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \langle x, f(x) \rangle$$

Hiển nhiên ϕ_f là một đtđ trên E (gọi là **dạng toàn phương liên kết với f**) và f là đối xứng dương (tương ứng : xác định dương) khi và chỉ khi ϕ_f là một đtđ dương (tương ứng : xác định dương). ■

Nhắc lại rằng, trong trường hợp E có số chiều hữu hạn, ta có :

- **Định lý cơ bản** : Với mọi tự đồng cấu đối xứng f của E , tồn tại một csc của E được tạo nên từ $\overline{\text{vtr}}$ của f (xem Định lý, 4.4.1)

- **Định lý thu gọn đồng thời hai đtđ trong đó một là xác định dương** (xem Định lý, 4.4.2) và biểu diễn dưới dạng ma trận :

$$\forall (A, B) \in S_n^{++} \times S_n(\mathbb{R}), \exists (P, D) \in GL_n(\mathbb{R}) \times D_n(\mathbb{R}), A = {}^t P P, B = {}^t P D P$$

(xem Mệnh đề 2, 4.4.3).

- **Xét các tính chất của ma trận đối xứng dương** (tương ứng : xác định dương) nhờ phổ của chúng (xem Định lý, 4.4.3) :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \begin{cases} S \in S_n^+ \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+ \\ S \in S_n^+ \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Độc giả sẽ tìm thấy dưới đây (bài tập từ 5.2.3 đến 5.2.38) các bài tập mức nâng cao về các vấn đề này.

Bài tập

◇ 5.2.3 Cho $M \in M_n(\mathbb{R})$, $A = {}^t M M - M {}^t M$. Giả sử $A \in S_n^+$; Chứng minh : ${}^t M M = M {}^t M$.

◇ 5.2.4 Cho E một kgve, $f \in \mathcal{O}(E) - \mathcal{SO}(E)$; chứng minh : $-1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

◇ 5.2.5 Giả sử $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$ và $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Chứng minh : $A \sim D \Rightarrow A = D$.

(Nhắc lại ký hiệu $A \sim D$ chỉ A và D đồng dạng, nghĩa là : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), D = P^{-1} A P$, xem Định nghĩa 1, bài tập 8.2.4, Tập 5)

◇ 5.2.6 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}, (B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là hai dãy trong $S_n(\mathbb{R})$ sao cho $A_k^2 + B_k^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

Chứng minh : $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ và $B_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

◇ 5.2.7 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $S_n(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh : $\forall k \in \mathbb{N}, I_n + A_k^2 \in GL_n(\mathbb{R})$.

b) Ta đặt $B_k = (I_n + A_k^2)^{-1} A_k$, với $k \in \mathbb{N}$.

Giả sử $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là dãy giới nội và $B_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Chứng minh $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

◇ 5.2.8' Giả sử $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$, đặt $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \Omega^i$. Tìm $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$.

◇ 5.2.9' a) Cho $(A, B) \in S_n^{++} \times S_n(\mathbb{R})$.

α) Chứng minh rằng AB là chéo hóa được (Xem bài tập 4.4.38).

β) Chứng minh: $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(AB) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow B \in S_n^{++}$.

b) Cho $M \in M_n(\mathbb{R})$ chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương:

(i) $\exists (AB) \in (S_n^{++})^2, M = AB$.

(ii) M là chéo hóa được trong $M_n(\mathbb{R})$ và $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

c) Từ đó suy ra rằng $-I_n$ không phải là tích của bốn phần tử của S_n^{++} .

◇ 5.2.10' Định thức con - Gauss.

Cho $A = (a_{ij})_{ij} \in S_n(\mathbb{R})$; với mỗi p thuộc $\{1, \dots, n\}$, ta ký hiệu $A_p = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in S_p(\mathbb{R})$.

α) Chứng minh: $A \in S_n^{++} \Rightarrow (\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) \geq 0)$.

β) Đảo lại của α) có đúng không?

b) α)^{*} Chứng minh: $A \in S_n^{++} \Leftrightarrow (\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) > 0)$.

β) Suy ra rằng S_n^{++} là tập mở trong $S_n(\mathbb{R})$.

◇ 5.2.11' Chứng minh rằng S_n^{++} là tập mở liên thông cung của $S_n(\mathbb{R})$ (Sử dụng bài tập 5.2.10 b) β)).

◇ 5.2.12' Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $-(n-1)b < a < b$,

$$A = \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R}),$$

ϕ là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là A . Chứng minh rằng nón đẳng hướng của ϕ không chứa một mặt phẳng vector nào.

◇ 5.2.13' Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, $D \in D_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AA^t = D^2$. Chứng minh rằng tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \Omega D$. (xem bài tập 5.2.32).

Ta nhắc lại rằng, trên $S_n(\mathbb{R})$ các quan hệ $\leq$ và $<$ đã được định nghĩa bởi (xem Nhận xét 2), 4.4.3):

$$A \leq B \Leftrightarrow B - A \in S_n^+$$

$$A < B \Leftrightarrow B - A \in S_n^{++}$$

◇ 5.2.14' Cho $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ sao cho $A \leq B$ và $E = \{S \in S_n(\mathbb{R}); A \leq S \leq B\}$. Chứng minh rằng

E là một tập con compact của $S_n(\mathbb{R})$ (Ta có thể sử dụng bài tập 4.4.26).

- ♦ 5.2.15' Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $p \in \mathbb{N}$ sao cho $1 < p < n$, $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_{p, n-p}(\mathbb{R})$,

$C \in M_{n-p, p}(\mathbb{R})$, $D \in M_{n-p}(\mathbb{R})$, $\Omega = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Ta giả sử: $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh: $|\det(A)| = |\det(D)|$. (Ta có thể sử dụng bài tập 2.2.12).

b) Chứng minh: $|\det(A)| \in [0; 1]$.

- ♦ 5.2.16' Cho $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Giả sử $A \in S_n^{++}$ và AB là lũy linh. Chứng minh $B = 0$.

- ♦ 5.2.17' Cho $n \in \mathbb{N}$ và φ là dạng tuyến tính trên $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ sao cho:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] - \{0\}, \varphi(P^2) > 0.$$

a) Chứng minh rằng tồn tại $n+1$ dạng tuyến tính $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ trên $\mathbb{R}_n[X]$ và $n+1$ số thực $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sao cho:

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \begin{cases} \varphi(PQ) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(P) \varphi_i(Q) \\ \varphi(\chi PQ) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(P) \varphi_i(Q) \end{cases}$$

b) Từ đó suy ra rằng tồn tại $n+1$ số thực $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sao cho:

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 P(\alpha_i) Q(\alpha_i).$$

- ♦ 5.2.18 Cho $n \in \mathbb{N}^* - \{0, 1\}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho: $A = A$ và $A + \bar{A} \in S_n^{++}$. Chứng minh rằng, tồn tại $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ và $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sao cho: ${}^tPAP = \text{diag}(1 + it_1, \dots, 1 + it_n)$.

- ♦ 5.2.19' Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $U \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ thỏa mãn $\|U\| = 1$ (trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Euclide trên $M_{n,1}(\mathbb{C})$). Chứng minh:

$$\|AU\|^2 > \frac{(\det(A))^2}{(\text{tr}({}^tAA))^{n-1}} (n-1)^{n-1}.$$

(Có thể bằng cách so sánh giữa trung bình cộng và trung bình nhân. Xem Bổ sung 1.1, Tập 1.).

- ♦ 5.2.20 Chứng minh: $A \in S_n^+$, $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $|\text{tr}(A\Omega)| \leq \text{tr}(A)$.

- ♦ 5.2.21' Cho $A \in S_n(\mathbb{R})$. Tính $\inf_{\substack{(x, X) \in \mathbb{R} \times M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\|=1}} \text{tr}(A - xXX^2)$, trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Euclide chính tắc trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

- ♦ 5.2.22' a) Giả sử $S \in S_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương:

(i) $\text{tr}(S) = 0$ (ii) Tồn tại một ma trận đối xứng A mà các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0 và một ma trận trực giao Ω thỏa mãn : $S = \Omega A \Omega^{-1}$.b) Cho một kgvc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ đối xứng, ϕ là đtđ xác định trên E được cho bởi :

$$\phi(x) = \langle x, f(x) \rangle, \forall x \in E.$$

Chứng minh rằng $\text{tr}(f) = 0$ khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở trực chuẩn của E được tạo bởi các vectơ đẳng hướng đối với ϕ .

◇ 5.2.23* Cho kgvc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, p, q là hai phép chiếu trực giao của E , $F = \text{Im}(p)$, $G = \text{Im}(q)$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương :

(i) $p \circ q = q \circ p$ (ii) Các kgvc $(F \cap G)^\perp \cap F$ và $(F \cap G)^\perp \cap G$ là trực giao (xem bài tập 5.1.2).

◇ 5.2.24* Cho kgvc E , $A = \{f \in \mathcal{L}(E), f \circ f^* \circ f = f\}$.

a) Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng hai trong số các tính chất sau đây là đôi một tương đương :

(i) $f \in A$ (ii) $f^* \circ f$ là một phép chiếu trực giao(iii) $\forall x \in (\text{Ker}(f))^\perp, \|f(x)\| = \|x\|$.

b) Cho $f \in A$. Chứng minh : $(\text{Ker}(f))^\perp = \{x \in E; \|f(x)\| = \|x\|\} = \{x \in E; (f^* \circ f)(x) = x\}$.

c) Chứng minh rằng $\mathcal{O}(E)$ là tập mở và đóng trong A .

◇ 5.2.25* Căn bậc hai trong S_n^+

Chứng minh : $\forall S \in S_n^+, \exists ! R \in S_n^+, S = R^2$ (xem bài tập 4.4.26).

Ta nói rằng R là căn bậc hai của S và viết là $R = \sqrt{S}$ hay $R = S^{\frac{1}{2}}$.

◇ 5.2.26 a) Cho $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^+$. Chứng minh : $\Omega \sim S \Rightarrow S = \Omega = I_n$.

b) Cho $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^{++}$. Chứng minh : $\Omega S \in S_n^+ \Rightarrow \Omega = I_n$.

(Sử dụng bài tập 5.2.25).

◇ 5.2.27* Cho $M \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh hai tính chất sau đây là tương đương :

(i) $\exists S \in S_n^{++}, M \sim S$ (ii) $\exists (A, B) \in (S_n^{++})^2, M = AB$.

(Sử dụng bài tập 5.2.25 và 5.2.9).

◇ 5.2.28* Giả sử $A \in S_n^+, R = A^{\frac{1}{2}}$ (xem bài tập 5.2.25), $M \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh :

$$AM = MA \Leftrightarrow RM = MR.$$

(Ta có thể chứng minh R là đa thức của A).

◇ 5.2.29* Cho $A \in A_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Tìm tất cả $B \in S_n^{++}$ thỏa mãn :

$$AB = BA \text{ và } (AB)^2 = -I_n.$$

(Sử dụng bài tập 5.2.25 và bài 5.2.28).

- ◇ **5.2.30*** a) Cho kgvce $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$; $f, g \in \mathcal{L}(E)$ thỏa mãn: $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|$.

Chứng minh rằng tồn tại $h \in \mathcal{O}(E)$ sao cho: $f = h \circ g$.

b) Chứng minh rằng với mọi (A, B) thuộc $(M_n(\mathbb{R}))^2$, ta có:

$${}^1AA = {}^1BB \Leftrightarrow (\exists \mathcal{Q} \in O_n(\mathbb{R}), A = \mathcal{Q}B).$$

- ◇ **5.2.31*** Phân tích dạng cực trong $GL_n(\mathbb{R})$.

Chứng minh: $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists! (\mathcal{Q}, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}, A = \mathcal{Q}S$.

(Ta có thể sử dụng bài tập 5.2.25).

Ta nói rằng $A = \mathcal{Q}S$ là một **phân tích dạng cực** của $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

- ◇ **5.2.32*** Phân tích dạng cực trong $M_n(\mathbb{R})$

Cho $M \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh tồn tại $(\mathcal{Q}, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+$ sao cho $M = \mathcal{Q}S$ và S là duy nhất.

Chú ý ở đây có thể không có tính duy nhất của $\mathcal{Q}$.

Áp dụng: Tìm lại kết quả của bài tập 5.2.30 b).

- ◇ **5.2.33*** Với $A \in M_n(\mathbb{R})$ đã cho, giải phương trình: ${}^1XX + {}^1XA + {}^1AX = 0$, với ẩn $X \in M_n(\mathbb{R})$.

(Sử dụng bài tập 5.2.32).

- ◇ **5.2.34*** Cho $(A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$ sao cho $0 \leq B \leq A$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} {}^1XX + {}^1YY = A \\ {}^1XY + {}^1YX = B \end{cases}$, với ẩn $(X, Y) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$.

(Sử dụng bài tập 5.2.32).

- ◇ **5.2.35** Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng tồn tại hai ma trận trực giao U, V và ma trận đường chéo D với các phần tử nằm trên đường chéo ≥ 0 sao cho: $A = UDV$.
(Sử dụng bài tập 5.2.32).

- ◇ **5.2.36*** Chéo hóa đồng thời của một họ giao hoán các ma trận đối xứng
Cho một tập không rỗng I , $(S_i)_{i \in I}$ là một họ các phần tử giao hoán từng đôi một của $S_n(\mathbb{R})$.

Chứng minh rằng tồn tại $\mathcal{Q} \in O_n(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\forall i \in I, \mathcal{Q}^{-1} S_i \mathcal{Q} \in D_n(\mathbb{R}).$$

- ◇ **5.2.37*** Giả sử $(AB) \in (S_n^+)^2$ (tương ứng: $(S_n^{++})^2$) thỏa mãn $AB = BA$.

Chứng minh: $AB \in S_n^+$ (tương ứng: S_n^{++}). (Sử dụng bài tập 5.2.36).

- ◇ **5.2.38*** Giả sử $AB \in S_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA$.

Chứng minh: $(0 \leq A \leq B \Rightarrow A^2 \leq B^2)$. (Sử dụng bài tập 5.2.36).

Bổ sung◇ **C 5.1** Giá trị tuyệt đối của một ma trận thực đối xứng

Với $A \in S_n(\mathbb{R})$, ta ký hiệu $|A| = (A^2)^{\frac{1}{2}}$ (xem bài tập 5.2.25).

1) Chứng minh rằng, với mọi A thuộc $S_n(\mathbb{R})$: $A \leq |A|$, $-A \leq |A|$, $|A| = A \Leftrightarrow A \in S_n^+$.

2) Chứng minh: $|\alpha A| = |\alpha| |A|$ với $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$.

3) Tính $|A|$ trong các ví dụ sau đây: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4) a) Cho $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn: $AB = BA$.

Chứng minh: $\begin{cases} A \leq B \\ -A \leq B \end{cases} \Leftrightarrow |A| \leq B$. (Sử dụng bài tập 5.2.36).

b) Ta có $\left(\begin{cases} A \leq B \\ -A \leq B \end{cases} \Rightarrow |A| \leq B \right)$ với $\forall (A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$ hay không?

5) a) Giả sử $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn: $AB = BA$.

Chứng minh: $|A + B| \leq |A| + |B|$. (Sử dụng bài tập 5.2.36).

b) Ta có: $\forall (A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$, $|A + B| \leq |A| + |B|$ hay không?

6) Chứng minh: $|\Omega A \Omega| = |\Omega| |A| |\Omega|$ với $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

Chương 6

Đại số tuyến tính rưỡi

Chương 6 dành cho sinh viên chuyên ngành Toán - Lý. Ở chương này ta phát triển một lý thuyết gần giống lý thuyết ở chương 4 và chương 5. Các chứng minh tương tự không được nhắc lại.

Thế được sử dụng ở đây là $\mathbb{C}$.

6.1 Các dạng tuyến tính rưỡi

6.1.1 Khái quát

Trong § 6.1.1 này, E chỉ một $\mathbb{C}$ - kgv.

♦ **Định nghĩa 1** Ta gọi mọi ánh xạ $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ thỏa mãn :

$$(i) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall (x, x', y) \in E^3, \varphi(\alpha x + x', y) = \alpha \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$

(φ là nửa tuyến tính so với vị trí thứ nhất)

$$(ii) \quad \forall \beta \in \mathbb{C}, \forall (x, y, y') \in E^3, \varphi(x, \beta y + y') = \beta \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

(φ là tuyến tính so với vị trí thứ hai).

là dạng tuyến tính rưỡi trên $E \times E$ (hay : trên E)

Rõ ràng tập các dạng tuyến tính rưỡi trên $E \times E$ là một $\mathbb{C}$ -kgv

♦ **Mệnh đề 1** Cho một dạng tuyến tính rưỡi φ trên $E \times E$,

$(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{C}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p \in E$. Khi đó :

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \sum_{j=1}^p \beta_j y_j\right) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \overline{\alpha_k} \beta_j \varphi(x_k, y_j) \quad .$$

♦ **Định nghĩa 2** Một dạng tuyến tính rưỡi φ trên $E \times E$ được gọi là đối xứng Hermite khi và chỉ khi:

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)} \quad .$$

Thay vì dạng tuyến tính rưỡi đối xứng Hermite, ta cũng nói là dạng tuyến tính rưỡi Hermite, viết tắt là đtrh.

Ký hiệu $SH(E)$ tập hợp các đttrh trên $E \times E$. Rõ ràng $SH(E)$ là một $\mathbb{R}$ -kgv (đối với các luật thông thường), nhưng không phải là một $\mathbb{C}$ -kgv (trừ khi $E = \{0\}$). Thực vậy, nếu φ là một đstth trên $E \times E$ khác ánh xạ không, tồn tại $(x, y) \in E \times E$ thỏa mãn $\overline{\varphi(x, y)} \neq 0$ và ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\varphi)(y, x) = i\varphi(y, x) = i\overline{\varphi(x, y)} \\ (i\varphi)(x, y) = -i\overline{\varphi(x, y)} \end{array} \right\}, \text{ như vậy } i\varphi \notin SH(E). \quad \blacksquare$$

Mệnh đề sau là hiển nhiên và tiện dụng:

♦ **Mệnh đề 2** Để ánh xạ $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ là một đttrh, điều kiện cần và đủ là:

$$(i) \quad \forall (x, y) \in E \times E, \quad \overline{\varphi(x, y)} = \varphi(y, x)$$

(φ là đối xứng Hermite)

$$(ii) \quad \forall \beta \in \mathbb{C}, \forall (x, y, y') \in E^3, \quad \varphi(x, \beta y + y') = \beta \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

(φ là tuyến tính đối với vị trí thứ hai).

♦ **Định nghĩa 3** Cho φ một đstth trên $E \times E$. Ta gọi ánh xạ ϕ từ E vào $\mathbb{C}$ được xác định bởi:

$$\phi(x) = \varphi(x, x), \quad \forall x \in E.$$

là dạng Hermite liên kết với φ .

Nhận xét: ϕ nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.

Ta cũng gọi là **dạng toàn phương Hermite** thay cho dạng Hermite.

Ta thường viết tắt dạng Hermite là dh.

Nhận xét về sự tương ứng trong thuật ngữ:

đại số song tuyến tính:
dạng song tuyến tính
dạng song tuyến tính đối xứng
dạng toàn phương

đại số tuyến tính rưỡi:
dạng tuyến tính rưỡi
dạng tuyến tính rưỡi Hermite
dạng Hermite

VÍ DỤ:

1) Tích vô hướng Hermite chính tắc trên $\mathbb{C}^n$ được xác định bởi:

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k.$$

(xem Ví dụ 1), 1.6, Tập 3) là một đttrh và dh liên kết là:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

2) Ánh xạ $\varphi: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ là dttrh và dh liên kết là :

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \overline{x_1 y_2} + \overline{x_2 y_1}$$

$$\phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}; \\ (x_1, x_2) \mapsto \overline{x_1 x_2} + \overline{x_2 x_1}.$$

3) Ta ký hiệu E là $\mathbb{C}$ -kgv của các ánh xạ liên tục từ $[0; 1]$ vào $\mathbb{C}$; ánh xạ

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{là một dttrh, và dtp liên kết: } \phi: E \rightarrow \mathbb{C}; \\ (f, g) \mapsto \int_0^1 \overline{f}g \quad f \mapsto \int_0^1 |f|^2$$

Mệnh đề ngay sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 3** Cho φ là một dttrh trên $E \times E$, ϕ dh liên kết với φ . Ta có :

$$1) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \forall x_1, \dots, x_n \in E$$

$$\phi\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \phi(x_k) + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} \operatorname{Re}(\overline{\alpha_k} \alpha_j \varphi(x_k, x_j)).$$

$$2) \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall (x, y) \in E^2,$$

$$\phi(\alpha x + \beta y) = |\alpha|^2 \phi(x) + 2 \operatorname{Re}(\overline{\alpha} \beta \varphi(x, y)) + |\beta|^2 \phi(y).$$

$$3) \forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) = \phi(x) + 2 \operatorname{Re}(\varphi(x, y)) + \phi(y).$$

$$4) \forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\phi(x + y) - i\phi(x + iy) - \phi(x - y) + i\phi(x - iy)).$$

$$5) \forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) + \phi(x - y) = 2(\phi(x) + \phi(y)).$$

Chứng minh :

Đối với 4) khai triển về thứ hai (xem Ví dụ 1.6.1, Tập 3).

Nhận xét :

Đẳng thức 4) chứng tỏ rằng, φ được xác định hoàn toàn bởi ϕ (tức là, nếu ϕ là một dh, thì tồn tại một dttrh φ duy nhất sao cho ϕ là dh liên kết với φ); φ được gọi là **dạng cực** của ϕ .

♦ **Định nghĩa 4** Giả sử $\phi: E \rightarrow \mathbb{C}$ là một ánh xạ. Ta nói rằng ϕ là **dạng Hermite** khi và chỉ khi tồn tại một dstth $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho ϕ là dh liên kết với φ .

Trong Định nghĩa 4 này ta có thể thay $\phi: E \rightarrow \mathbb{C}$ bởi $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Ta ký hiệu $H(E)$ là tập hợp các dạng Hermite trên E . Hiển nhiên $H(E)$ là một $\mathbb{R}$ -kgv, ánh xạ $U: SH(E) \rightarrow H(E)$ (Cho tương ứng mỗi dstth φ trên $E \times E$ với dh liên

kết với φ) và ánh xạ $V : H(E) \rightarrow SH(E)$ (Cho tương ứng mỗi dh ϕ trên E liên kết với dạng cực của ϕ) là các đẳng cấu của $\mathbb{R}$ -kgv và là nghịch đảo của nhau.

Nhận xét :

Nếu ϕ là một dh trên E , thì : $\forall x \in E, \phi(x) \in \mathbb{R}$,

vì : $\forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)} = \overline{\phi(x)}$.

6.1.2 Tính trực giao theo một dạng tuyến tính Hermite

Trong § 6.1.2 này, E chỉ một $\mathbb{C}$ -kgv, φ một dsth trên $E \times E$, ϕ liên kết với φ

♦ Định nghĩa 1

- 1) Giả sử $(x, y) \in E^2$; ta nói rằng x là **trực giao với y theo φ** (hoặc : x và y là **trực giao theo φ**) khi và chỉ khi : $\varphi(x, y) = 0$.
- 2) Giả sử $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$; ta nói rằng x là **trực giao với A theo φ** khi và chỉ khi :

$$\forall a \in A, \varphi(x, a) = 0.$$
- 3) Với mỗi tập con A của E , ta gọi **tập trực giao với A theo φ** và ký hiệu $A^\perp$ (hay là $A^{\perp_\varphi}$) tập hợp : $A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, \varphi(x, a) = 0\}$
- 4) Một họ $(x_i)_{i \in I}$ các phần tử thuộc E được gọi là **trực giao theo φ** khi và chỉ khi :

$$\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow \varphi(x_i, x_j) = 0).$$

Ta cũng gọi φ - **trực giao** thay cho “trực giao theo φ ”.

♦ Mệnh đề 1

- 1) Với mỗi tập con A của E , $A^\perp$ là một kgvc của E .
- 2) $\forall (A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2, (A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp)$.
- 3) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
- 4) $\{0\}^\perp = E$.
- 5) $\forall A \in \mathfrak{P}(E), A \subset A^{\perp\perp}$.

- ♦ **Định nghĩa 2** Kgvc $E^\perp$ của E được gọi **hạt nhân của φ** , ký hiệu là $\text{Ker}(\varphi)$.

Nói cách khác : $\text{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{x \in E; \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$.

Mặc dù được ký hiệu $\text{Ker}(\varphi)$, nhưng ở đây φ không phải là một ánh xạ tuyến tính mà là một dsth.

VÍ DỤ:

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ là một đttrh và } \text{Ker}(\varphi) = \mathbb{C}(0,1). \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1$$

♦ **Định nghĩa 3** Một đttrh φ trên $E \times E$ được gọi là **suy biến** (tương ứng **không suy biến**) khi và chỉ khi $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ (tương ứng $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$).

Nói cách khác, φ là không suy biến khi và chỉ khi :

$$\forall x \in E, ((\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0).$$

♦ **Định nghĩa 4**

- 1) Một vectơ x của E được gọi là **đẳng hướng** (đối với ϕ) khi và chỉ khi $\phi(x) = 0$.
- 2) Ta gọi tập hợp các vectơ đẳng hướng đối với ϕ là **nón đẳng hướng** của ϕ .
- 3) Một kgvc F thuộc E được gọi là **đẳng hướng hoàn toàn** khi và chỉ khi : $F \subset F^\perp$.

Nhận xét :

1) Nón đẳng hướng đối với ϕ , thường được ký hiệu $C(\phi)$, là một nón theo nghĩa hình học, tức là :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in C(\phi), \alpha x \in C(\phi).$$

2) Rõ ràng : $\text{Ker}(\varphi) \subset C(\phi)$.

3) Theo Định nghĩa 3), một kgvc F của E là đẳng hướng hoàn toàn đối với ϕ khi và chỉ khi :

$$\forall (x, y) \in F^2, \varphi(x, y) = 0,$$

điều này dẫn đến : thu hẹp của ϕ lên $F \times F$ là ánh xạ không.

4) Có thể tồn tại các vectơ đẳng hướng khác không. Ví dụ, nếu $E = \mathbb{C}^2$ và

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ --- , vectơ } (1,1) \text{ là đẳng hướng đối với } \phi \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$$

♦ **Định nghĩa 5** Một dh ϕ trên E được gọi là **xác định** khi và chỉ khi :

$$\forall x \in E, (\phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0).$$

Nói cách khác : ϕ là xác định khi và chỉ khi $C(\phi) = \{0\}$.

♦ **Định nghĩa 6** Ta nói dh ϕ là **dương** khi và chỉ khi :

$$\forall x \in E, \phi(x) \in \mathbb{R}_+.$$

♦ | Mệnh đề 2

- 1) Nếu ϕ xác định, thì ϕ không suy biến
- 2) Nếu $\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ không suy biến} \\ \phi \text{ dương} \end{array} \right\}$, thì ϕ xác định.

Chứng minh:

1) Nếu ϕ xác định thì ϕ không suy biến vì, $\text{Ker}(\phi) \subset C(\phi) = \{0\}$.

2) Giả sử ϕ không suy biến, ϕ dương và $x \in C(\phi)$. Ta có :

$$\forall y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \phi(y + \lambda x) = \phi(y) + 2\text{Re}(\lambda \phi(y, x)).$$

Với cách chọn $\lambda = \mu \overline{\phi(y, x)}$, ta suy ra : $\forall y \in E, \forall \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi(y) + 2\mu |\phi(y, x)|^2$,

vậy phải có : $\forall y \in E, \phi(y, x) = 0$, tức là : $x \in \text{Ker}(\phi)$.

Vì ϕ không suy biến, $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, do đó $x = 0$ nên $C(\phi) = \{0\}$.

Nhận xét :

1) Nếu ϕ dương, thì : $(\phi \text{ không suy biến}) \Leftrightarrow (\phi \text{ xác định})$.

2) Có thể ϕ không suy biến và không xác định, ví dụ sau chỉ ra điều đó: $E = \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \overline{x_1}x_1 - \overline{x_2}x_2 \end{aligned}$$

6.1.3 Trường hợp hữu hạn chiều

1) Chuyển vị liên hợp

Trong §1) này, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

♦ **Định nghĩa** Giả sử $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Ta gọi ma trận ${}^t\overline{A}$ thuộc $\mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ là ma trận chuyển vị liên hợp của A , ký hiệu A^* , vậy : $A^* = {}^t\overline{A}$.

Như vậy, chuyển vị liên hợp của A là chuyển vị của liên hợp của A .

Bằng cách ký hiệu $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, ta có $A^* = (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$; A^* cũng là chuyển vị

liên hợp của A : $A^* = \overline{{}^tA}$.

Ví dụ :

Nếu $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 2+i & 3 & 1-i \end{pmatrix}$, thì $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ -i & 3 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$.

♦ **Mệnh đề 1**

- 1) $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}))^2, (A + B)^* = A^* + B^*$
- 2) $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}), A^{**} = A$
- 3) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}), (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$
- 4) $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{C}), (AB)^* = B^* A^*$
- 5) $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), (\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow A^* \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$
- 6) $\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
- 7) $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \text{rank}(A^*) = \text{rank}(A)$.
- 8) $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), (\text{tr}(A^*) = \overline{\text{tr}(A)} \text{ và } \det(A^*) = \overline{\det(A)})$
- 9) $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^*) = \overline{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}$.

♦ **Mệnh đề 2 (Chuyển vị liên hợp theo khối)**

Với mỗi phân tích thành khối, ta có :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & \cdots & A_{s1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^* & \cdots & A_{st}^* \end{pmatrix}.$$

Nói cách khác, đối với chuyển vị liên hợp một ma trận được phân tích thành khối, ta chuyển đổi các khối (ví dụ ta viết cột của khối thay cho dòng của khối), và lấy chuyển vị liên hợp từng khối.

VÍ DỤ:

Giả sử $a \in \mathbb{C}, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), A, B, C, D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Ta có : $\begin{pmatrix} a \\ V \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & V^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}.$

2) **Ma trận Hermite**

Trong § 2) này, $n \in \mathbb{N}^*$.

- ♦ **Định nghĩa 1** Ma trận A thuộc $M_n(\mathbb{C})$ được gọi là ma trận Hermite khi và chỉ khi $A^* = A$. Ký hiệu H_n là tập hợp các ma trận Hermite cấp n .

Nhận xét :

- 1) Điều kiện $A^* = A$ buộc A phải là ma trận vuông.
- 2) Nếu A là Hermite, thì các phần tử trên đường chéo của A là các số thực.

VÍ DỤ:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{pmatrix}$ là các ma trận Hermite
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ không phải là ma trận Hermite.

♦ **Mệnh đề 1**

H_n là một $\mathbb{R}$ -kgv.

Chứng minh:

Ta chứng minh H_n là một kgv của $\mathbb{R}$ -kgv $M_n(\mathbb{C})$.

- Hiển nhiên là $H_n \neq \emptyset$ ($0 \in H_n$).
- Nếu $H_1, H_2 \in H_n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì: $(\alpha H_1 + H_2)^* = \bar{\alpha} H_1^* + H_2^* = \alpha H_1 + H_2$,
nên $\alpha H_1 + H_2 \in H_n$.

Nhận xét : H_n không phải là một $\mathbb{C}$ -kgv, vì $I_n \in H_n$ và $iI_n \notin H_n$.

♦ **Mệnh đề 2**

- 1) $\forall (H_1, H_2) \in (H_n)^2, (H_1 H_2 \in H_n \Leftrightarrow H_1 H_2 = H_2 H_1)$
- 2) $\forall H \in H_n \cap GL_n(\mathbb{C}), H^{-1} \in H_n$.

Chứng minh :

- 1) $H_1 H_2 \in H_n \Leftrightarrow (H_1 H_2)^* = H_1 H_2 \Leftrightarrow H_2^* H_1^* = H_1 H_2 \Leftrightarrow H_2 H_1 = H_1 H_2$.
- 2) $(H^{-1})^* = (H^*)^{-1} = H^{-1}$, xem 1) Mệnh đề 6).

- ♦ **Định nghĩa 2** Một ma trận A của $M_n(\mathbb{C})$ được gọi là **phản Hermite** khi và chỉ khi: $A^* = -A$.

- ♦ **Mệnh đề 3** Giả sử $A \in M_n(\mathbb{C})$. A là phản Hermite khi và chỉ khi iA là Hermite.

Chứng minh: $(iA)^* = iA \Leftrightarrow \bar{i} A^* = iA \Leftrightarrow -iA^* = iA \Leftrightarrow A^* = -A$.

3) Ma trận của một dạng tuyến tính rưỡi Hermite trong một cơ sở

Trong § 3) này E chỉ một $\mathbb{C}$ -kgy có số chiều hữu hạn, $n = \dim(E) \geq 1$, φ một đttrh trên $E \times E$, φ dh liên kết với φ .

- ♦ **Định nghĩa 1** Giả sử $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E . Ta gọi ma trận Hermite vuông cấp n $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ là **ma trận của φ** (hay của φ) trong cơ sở B , ký hiệu là:

$$\text{Mat}_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

- ♦ **Mệnh đề 1**

Giả sử φ một đttrh trên $E \times E$
 B một cơ sở của E
 $A = \text{Mat}_B(\varphi)$
 $x, y \in E, X = \text{Mat}_B(x), Y = \text{Mat}_B(y)$.

Khi đó: $\varphi(x, y) = X^*AY$.

Ví dụ:

1) dh $\phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ có ma trận (trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{C}^2$) là

$$(x_1, x_2) \mapsto \overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ bởi vì: } \overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1 = \overline{(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2) Gọi φ là đttrh trên $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ có ma trận (trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{C}^2$) là

$$\begin{pmatrix} 4 & 2-i \\ 2+i & -5 \end{pmatrix}, \text{ khi đó, với mọi } ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \text{ của } \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, \text{ ta có:}$$

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \overline{(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} 4 & 2-i \\ 2+i & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4\overline{x_1}y_1 + (2-i)\overline{x_1}y_2 + (2+i)\overline{x_2}y_1 - 5\overline{x_2}y_2,$$

và với ký hiệu ϕ là dh liên kết với φ thì:

$$\phi(x_1, x_2) = 4|x_1|^2 + 2\text{Re}((2-i)\overline{x_1}x_2) - 5|x_2|^2, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử B là một cơ sở của E .

Ánh xạ $\text{Mat}_B: SH(E) \rightarrow \mathbf{H}_n$ là một đẳng cấu $\mathbb{R}$ -kgv.
 $\varphi \mapsto \text{Mat}_B(\varphi)$

♦ **Định nghĩa 2** Ta gọi số tự nhiên $\dim(E) - \dim(\text{Ker}(\varphi))$ là **hạng** của φ , và được ký hiệu là $\text{rank}(\varphi)$, vậy :

$$\text{rank}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(\varphi))$$

Mặc dù được ký hiệu $\text{rank}(\varphi)$, nhưng ở đây φ không phải là một ánh xạ tuyến tính, mà là một dttrh. Xem 6.4.1 phần 1) trang 194.

♦ **Mệnh đề 3**

Với mọi cơ sở B của E , ta có : $\text{rank}(\varphi) = \text{rank}(\text{Mat}_B(\varphi))$.

Nhận xét :

1) φ không suy biến khi và chỉ khi $\text{rank}(\varphi) = n$.

2) Giả sử B một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_B(\varphi)$; φ không suy biến khi và chỉ khi

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

♦ **Mệnh đề 4 (Đổi cơ sở đối với một dttrh)**

Giả sử φ một dttrh trên $E \times E$

B, B' hai cơ sở của E

$$P = \text{Pass}(B, B')$$

$$A = (\text{Mat}_B(\varphi)), A' = (\text{Mat}_{B'}(\varphi)).$$

Khi đó ta có : $A' = P^*AP$.

4) Cơ sở φ -trực giao

Trong § 4) này, ký hiệu E là một $\mathbb{C}$ -kgv có số chiều hữu hạn.

♦ **Định lý (Tồn tại một cơ sở φ -trực giao)**

Với mỗi dttrh φ trên E , tồn tại ít nhất một cơ sở trực giao theo φ của E .

♦ **Hệ quả 1**

$$\forall H \in \mathbf{H}_n, \exists (P, D) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbf{D}_n(\mathbb{C}), H = P^*DP.$$

Nhận xét : Hệ quả 1 sẽ được mở rộng hơn ở phần sau (Xem Định lý, 6.5.1).

- ◆ **Hệ quả 2** Mọi dh ϕ trên E có ít nhất một cách phân tích thành tổ hợp tuyến tính (với hệ số thực) các bình phương mô-đun của các dạng $\mathbb{C}$ -tuyến tính độc lập.

Nhận xét: Giả sử biết một phân tích của ϕ : $\forall x \in E, \phi(x) = \sum_{i=1}^N d_i |L_i(x)|^2$, và

$$\begin{cases} (L_1, \dots, L_N) \text{ } \mathbb{C}\text{-độc lập (nên } N \leq \dim(E)) \\ \forall i \in \{1, \dots, N\}, d_i \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Ta có thể biểu diễn ϕ dưới dạng cực của ϕ :

$$\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \sum_{i=1}^N d_i \overline{L_i(x)} L_i(y).$$

Từ đó suy ra hạt nhân của ϕ : $\text{Ker}(\phi) = \bigcap_{i=1}^N \text{Ker}(L_i)$, (như Nhận xét, 5.1.3).

Hơn nữa, vì $(L_1, \dots, L_N)$ là $\mathbb{C}$ -độc lập, nên: $\text{rank}(\phi) = N$.

Ta cũng có thể xác định nhân, hạng của một dh từ một phân tích dạng tổ hợp tuyến tính (với hệ số thực khác không) của bình phương các mô-đun dạng $\mathbb{C}$ -tuyến tính độc lập (xem bài tập 6.1.12).

Bài tập

- ◆ **6.1.1** a) Cho $(A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Chứng minh:

$$(\forall (X, Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2, XAY = XBY) \Leftrightarrow A = B.$$

b) Cho $(A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2$. Chứng minh:

$$(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), XAX = XBX) \Leftrightarrow A = B.$$

- ◆ **6.1.2** Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng có bất kỳ hai trong ba tính chất sau đây thì cũng có tính chất còn lại:

$$(i) A^* = A, \quad (ii) A^*A = A, \quad (iii) A^2 = A$$

- ◆ **6.1.3** Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) - \{0\}, (X, Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ sao cho $X + iY \in \text{KGCR}(A, \lambda)$

Chứng minh: $\lambda \in i\mathbb{R}, {}^tXY = 0$ và ${}^tXX = {}^tYY$.

- ◆ **6.1.4** Cho $X, Y \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), A = X + iY$.

a) Chứng minh rằng nếu $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ thì $A^{-1}(X^2 + Y^2) = \bar{A} \Leftrightarrow XY = YX$.

b) Nếu A suy biến, thì $X^2 + Y^2$ có thể khả nghịch không?

c) Nếu A là khả nghịch thì có thể có $X^2 + Y^2 = 0$ hay không?

- ◇ 6.1.5 Giả sử $AB \in \mathbf{H}_n$. Chứng minh : $\chi_{AB} \in \mathbb{R}[X]$ (Ta có thể sử dụng $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, xem bài tập 2.2.12) ; đặc biệt : $\text{tr}(AB) \in \mathbb{R}$.
- ◇ 6.1.6 Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $(I_n + A)A^* = 2A$. Chứng minh $A^2 = A$ và $A^* = A$ (có thể bắt đầu bằng cách chứng minh $I_n + A$ là khả nghịch và A^* giao hoán với A).
- ◇ 6.1.7 Chứng minh :
 - a) $\mathbf{H}_n \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) = \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$.
 - b) $\forall A \in \mathbf{H}_n, (A \in \mathbf{H}_n \text{ và } \bar{A} \in \mathbf{H}_n)$.
 - c) $\forall A \in \mathbf{H}_n, \forall P \in \mathbb{R}[X], P(A) \in \mathbf{H}_n$.
- ◇ 6.1.8 Chứng minh rằng, với mọi $(A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2$, $AB - BA$ là phản Hermite.
- ◇ 6.1.9 Cho $H \in \mathbf{H}_n$, λ, μ là hai gtr của H thỏa mãn $\lambda \neq \mu$, U (tương ứng V) là một vtr ứng với λ (tương ứng : μ). Chứng minh rằng: $V^*U = 0$ và UV^* là lũy linh.
- ◇ 6.1.10 Ký hiệu $\mathbf{H}'_n$ là tập các ma trận phản Hermite cấp n . Chứng minh $\mathbf{H}_n$ và $\mathbf{H}'_n$ là hai $\mathbb{R}$ -kgv bù nhau trong $\mathbb{R}$ -kgv $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ và $H \mapsto iH$ là một đẳng cấu từ $\mathbb{R}$ -kgv $\mathbf{H}_n$ lên $\mathbf{H}'_n$. Đặc biệt : $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}_n) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}'_n) = n^2$.
- ◇ 6.1.11 Giả sử $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{H}_n$ và $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh :

$$A \sim D \Leftrightarrow A = D.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1}x_1 + \overline{x_1}(ix_2 - 2x_3) + x_1(-i\overline{x_2} - 2\overline{x_3}) + 3\overline{x_2}x_2 + 6\overline{x_3}x_3 \\
 &= (\overline{x_1} - ix_2 - 2\overline{x_3})(x_1 + ix_2 - 2x_3) - (-i\overline{x_2} - 2\overline{x_3})(ix_2 - 2x_3) + 3\overline{x_2}x_2 + 6\overline{x_3}x_3 \\
 &= |x_1 + ix_2 - 2x_3|^2 + 2\overline{x_2}x_2 - 2i\overline{x_2}x_3 + 2i\overline{x_3}x_2 + 2\overline{x_3}x_3 \\
 &= |x_1 + ix_2 - 2x_3|^2 + 2|x_2 - ix_3|^2.
 \end{aligned}$$

Theo Nhận xét trên thì :

$$(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + ix_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - ix_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = ix_3 \end{cases}$$

Vậy $\text{Ker}(\phi)$ được sinh bởi vectơ (3.i.1) và có chiều là 1.

Từ đó $\text{rank}(\phi) = 3 - \dim(\text{Ker}(\phi)) = 2$.

Cuối cùng: $\text{sgn}(\phi) = (2, 0)$.

2) Áp dụng phương pháp Gauss đối với dh xác định trên $\mathbb{C}^4$ được cho bởi bởi:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1 + \overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}x_2 + \overline{x_3}x_4 + \overline{x_4}x_3,$$

và suy ra nhân, hạng, ký số của ϕ .

Bằng cách sử dụng đồng nhất thức $\overline{u}v + \overline{v}u = \frac{1}{2}(|u+v|^2 - |u-v|^2)$ trong $\mathbb{C}$, ta có:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= ((\overline{x_1} + \overline{x_3})x_2 + \overline{x_2}(x_1 + x_3)) + (\overline{x_3}x_4 + \overline{x_4}x_3) \\
 &= \frac{1}{2}(|x_1 + x_3 + x_2|^2 - |x_1 + x_3 - x_2|^2) + \frac{1}{2}(|x_3 + x_4|^2 - |x_3 - x_4|^2) \\
 &= \frac{1}{2}|x_1 + x_2 + x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - x_2 + x_3|^2 + \frac{1}{2}|x_3 + x_4|^2 - \frac{1}{2}|x_3 - x_4|^2.
 \end{aligned}$$

Vậy : $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, $\text{rank}(\phi) = 4$, $\text{sgn}(\phi) = (2, 2)$.

Bài tập

- ◇ **6.1.12** Tìm một phân tích Gauss và từ đó suy ra nhân, hạng, ký số của các dạng Hermite ϕ trên $\mathbb{C}^3$ dưới đây, mà trong cơ sở chính tắc có ma trận là :

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2i \\ 2 & 5 & 4i \\ 2i & -4i & 5 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}.$$

- ◇ **6.1.13** Xác định nhân, hạng, ký số của dạng Hermite ϕ trên $\mathbb{C}^3$ có ma trận

trong cơ sở chính tắc là :

$$\begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2 Không gian Hermite

Nghiên cứu theo quan điểm thiên về Giải tích các không gian tiền Hilbert phức và không gian Hermite đã có trong Tập 3. Để thuận tiện cho độc giả, chúng ta sẽ nhắc lại ở đây những gì cần thiết cho việc nghiên cứu tiếp theo.

Trong § 6.2 này, E chỉ một $\mathbb{C}$ -kgv (không nhất thiết có số chiều hữu hạn).

6.2.1 Tích vô hướng Hermite

♦ **Định nghĩa 1** Một đttrh ϕ trên $E \times E$ với dh liên kết ϕ được gọi **tích vô hướng Hermite** (hay: **tích vô hướng**) nếu thỏa mãn:

- (i) $\forall x \in E, \phi(x) \geq 0$ (ϕ dương)
- (ii) $\forall x \in E, (\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (ϕ xác định).

Ta viết tắt là tích vô hướng Hermite.

Vì ϕ là một tvhh, ta thường ký hiệu $(x|y)$ hoặc $\langle x, y \rangle$ hoặc x, y thay cho $\phi(x, y)$.

♦ **Định nghĩa 2** Ta gọi **không gian tiền Hilbert phức** mọi cặp (E, ϕ) trong đó E là một $\mathbb{C}$ -kgv và ϕ một tvhh trên E .

Không gian tiền Hilbert phức có số chiều hữu hạn được gọi **không gian Hermite**.

Ta thường ký hiệu E thay cho (E, ϕ) , nếu cần chỉ rõ ϕ .
Không gian (vector) Hermite được viết tắt là kgvh.

VÍ DỤ:

1) **Tích vô hướng Hermite thông thường trên $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}^*$**

Ánh xạ $\phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ được xác định bởi: $\phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$ là

một tvhh trên $\mathbb{C}^n$ và được gọi là tvhh thông thường (hay: chính tắc) trên $\mathbb{C}^n$.

2) **Tích vô hướng Hermite chính tắc trên $M_{n,p}(\mathbb{C}), (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$**

Ánh xạ $\phi : (M_{n,p}(\mathbb{C}))^2 \rightarrow \mathbb{C}$ là một tvhh trên $M_{n,p}(\mathbb{C})$ và được gọi là tvhh chính tắc trên $M_{n,p}(\mathbb{C})$.

$$(A, B) \mapsto \text{tr}(A^* B)$$

Tvhh chính tắc trên $M_{n,1}(\mathbb{C})$ (hay $M_{1,n}(\mathbb{C})$) là tvhh thông thường trên $\mathbb{C}^n$, chỉ khác nhau về ký hiệu.

3) Giả sử $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $a < b$, và $E = C^0([a, b], \mathbb{C})$ là $\mathbb{C}$ -kgv của các ánh xạ liên tục từ $[a, b]$ vào $\mathbb{C}$.

Ánh xạ $\varphi: E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ là một tvhh trên E (xem ví dụ 3, 1.6.1, Tập 3).

$$(f, g) \mapsto \int_a^b \overline{f}g$$

♦ **Định lý 1 (Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz)**

Giả sử (E, φ) là một không gian tiền Hilbert phức, φ là dh liên kết với φ .

Ta có: $\forall (x, y) \in E^2, |\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x) \varphi(y)$.

♦ **Mệnh đề 1 (Trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy - Schwarz)**

Giả sử (E, φ) là một không gian tiền Hilbert phức, φ là dh liên kết với

$\varphi, (x, y) \in E^2$. Ta có:

$$|\varphi(x, y)|^2 = \varphi(x) \varphi(y) \Leftrightarrow (x, y) \text{ phụ thuộc.}$$

♦ **Định lý 2 (Bất đẳng thức Minkowski)**

Giả sử (E, φ) là một không gian tiền Hilbert phức, φ là dh liên kết với φ .

Ta có: $\forall (x, y) \in E^2, (\varphi(x + y))^{\frac{1}{2}} \leq (\varphi(x))^{\frac{1}{2}} + (\varphi(y))^{\frac{1}{2}}$.

♦ **Mệnh đề 2 (Trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Minkowski)**

Giả sử (E, φ) là một không gian tiền Hilbert phức, φ là dh liên kết với φ .

$(x, y) \in E^2$. Ta có:

$$(\varphi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\varphi(x))^{\frac{1}{2}} + (\varphi(y))^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{hay} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, y = \alpha x. \end{cases}$$

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3**

Giả sử (E, φ) là một không gian tiền Hilbert phức, φ là dh liên kết với φ .

Ánh xạ $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ là một chuẩn trên E , và được gọi là **chuẩn Hermite liên kết với φ** .

Nhận xét :

Giả sử $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một tvhh trên E , $\|\cdot\|$ chuẩn Hermite liên kết. Biểu thức nhận được ở Mệnh đề 3, 6.1.1 có thể viết lại dưới dạng sau :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\text{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= 4\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \text{ với mọi } (x, y) \text{ thuộc } E^2.\end{aligned}$$

Bài tập

- ◇ 6.2.1 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $X, Y \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh :

$$|X^* A^* B Y|^2 \leq (X^* A^* A X)(Y^* B^* B Y).$$

- ◇ 6.2.2 Chứng minh : $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $(A^* A = 0 \Rightarrow A = 0)$.

- ◇ 6.2.3 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Hãy so sánh nhân, ảnh, hạng của $A, A^*, A^* A, A A^*$.

- ◇ 6.2.4 Giải phương trình $(I_n + A)A^* = A$, ẩn $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

- ◇ 6.2.5 Cho $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ thỏa mãn $\operatorname{rank}(A) = p$, $B \in \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ sao cho $\operatorname{rank}(B) = q$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương :

- (i) $\exists (X, Y) \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{C})$, $\begin{cases} (X, Y) \neq (0, 0) \\ AX = BY \end{cases}$
(ii) $B^* B - B^* A (A^* A)^{-1} A^* B$ không khả nghịch.

Tham khảo : *Crux Mathematicorum*, bài tập 863.

- ◇ 6.2.6 Chứng minh rằng, với mọi X thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$: $\|X\|_p = \sup_{\substack{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ \|Y\|_p=1}} |Y^* X|$,

trong đó $p \in \{1, 2, \infty\}$ và $q = \begin{cases} \infty & \text{nếu } p=1 \\ 2 & \text{nếu } p=2 \\ 1 & \text{nếu } p=\infty \end{cases}$. Nhắc lại rằng, với $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

ta ký hiệu $\|Y\|_1 = \sum_{k=1}^n |y_k|$, $\|Y\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\|Y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k|$, xem 1.1.1, Tập 3.

- ◇ 6.2.7 Cho E một kgv, $(x, y) \in E^2$; chứng minh : $\|x+y\| \|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ và xét trường hợp đẳng thức.

- ◇ 6.2.8 Cho một kgv E , $(x, y) \in E^2$; chứng minh :

$$2\langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - (1+i)(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- ◇ 6.2.9 Giả sử $N \in \mathbb{N}$ sao cho $N \geq 3$, E là không gian tiền Hilbert phức, $(x, y) \in E^2$.

Chúng minh : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|e^{\frac{2ik\pi}{N}} x + y\|^2 e^{\frac{2ik\pi}{N}}$.

- ♦ 6.2.10 Cho không gian tiền Hilbert phức E , $(x, y) \in E^2$. Chứng minh :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|e^{i\theta} x + y\|^2 e^{i\theta} d\theta.$$

- ♦ 6.2.11 Giả sử E là không gian tiền Hilbert phức và $f \in \mathcal{L}(E)$.

Chứng minh rằng nếu $(\forall x \in E \langle f(x), x \rangle = 0)$ thì $f = 0$.

Kết quả trên vẫn còn đúng khi thay $\mathbb{C}$ bằng $\mathbb{R}$?

- ♦ 6.2.12 Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh : $A^*AB = 0 \Rightarrow AB = 0$.

- ♦ 6.2.13 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $\text{tr}(A)^2 = \text{tr}(AA^*)$. Chứng minh : $A \in \mathbf{H}_n$ (Ta có thể tính $\|A - A^*\|^2$, trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Hermite trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$).

- ♦ 6.2.14 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})^2$ độc lập. Tự đồng cấu f của $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ được xác định bởi : $\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = \text{tr}(A^*X)B - \text{tr}(B^*X)A$ có chéo hoá được không ?

- ♦ 6.2.15 Bất đẳng thức Montgomery

Giả sử $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ là một không gian tiền Hilbert phức, $n \in \mathbb{N}^*$, $x, y_1, \dots, y_n \in E$. Chứng minh :

$$\begin{aligned} a) \sum_{k=1}^n |(x | y_k)|^2 &\leq \|x\|^2 \left(\sum_{1 \leq p, q \leq n} |(y_p | y_q)| \right)^{\frac{1}{2}} \\ b) \sum_{k=1}^n |(x | y_k)|^2 &\leq \|x\|^2 \max_{1 \leq p \leq n} \sum_{q=1}^n |(y_p | y_q)|. \end{aligned}$$

6.2.2 Tính trực giao

Ta nhắc lại Định nghĩa sau (xem Định nghĩa, 1.6.3, Tập 3 và Định nghĩa, 6.4.2.2, Tập 6).

- ♦ **Định nghĩa** Cho một không gian tiền Hilbert phức $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1) Giả sử $(x, y) \in E^2$; ta nói rằng x là **trực giao** với y , và ký hiệu $x \perp y$, khi và chỉ khi : $\langle x, y \rangle = 0$.

2) Giả sử $x \in E, A \in \mathfrak{P}(E)$; ta nói rằng x là **trực giao** với A , và ký hiệu $x \perp A$, khi và chỉ khi : $\forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0$.

3) Ta gọi tập $\{x \in E; \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$ là **tập trực giao** với A và

ký hiệu $A^\perp$, vậy:

$$A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

- 4) Một họ $(x_i)_{i \in I}$ các phần tử của E được gọi là **trực giao** khi và chỉ khi:
 $\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0)$.
- 5) Một họ $(x_i)_{i \in I}$ các phần tử thuộc E được gọi là **trực chuẩn** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} (x_i)_{i \in I} \text{ là trực giao} \\ \forall i \in I, \|x_i\| = 1. \end{cases}$$

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một không gian vector tiền Hilbert phức. Khi đó:

- 1) Với mỗi tập con A của E , $A^\perp$ là một kgvc của E .
- 2) $\forall (A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2, (A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp)$.
- 3) $\forall (A) \in \mathfrak{P}(E), A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
- 4) Nếu E có số chiều hữu hạn, thì với mọi kgvc F của E : $F \oplus F^\perp = E$, và vì vậy: $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.
- 5) $\begin{cases} \bullet \forall A \in \mathfrak{P}(E), A^{\perp\perp} \supset \text{Vect}(A) \\ \bullet \text{ Nếu } E \text{ có số chiều hữu hạn, thì } : \forall A \in \mathfrak{P}(E), A^{\perp\perp} = \text{Vect}(A). \end{cases}$
- 6) $E^\perp = \{0\}$ và $\{0\}^\perp = E$.
- 7) $\forall (A) \in \mathfrak{P}(E), A \cap A^\perp \subset \{0\}$.
- 8) Với mọi kgvc F, G của E :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ và } (F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp.$$

và nếu E là có số chiều hữu hạn thì: $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một không gian vector tiền Hilbert phức, $(x_i)_{i \in I}$ là một họ các phần tử của E .

Nếu $\begin{cases} (x_i)_{i \in I} \text{ trực giao} \\ \forall i \in I, x_i \neq 0 \end{cases}$, thì $(x_i)_{i \in I}$ là độc lập.

♦ **Mệnh đề 3 (Định lý Pythagore)**

Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một không gian vector tiền Hilbert phức, $(x, y) \in E^2$. Ta có:

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Nhận xét:

Điều ngược lại là sai (nếu $\dim(E) \geq 1$). Thực vậy:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = 0.$$

♦ **Định lý (Trực giao hoá Schmidt)**

Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một không gian vectơ tiền Hilbert phức, $p \in \mathbb{N}^*$,
 $(e_1, \dots, e_p)$ là một họ độc lập trong E . Khi đó, tồn tại $(V_1, \dots, V_p) \in E^p$
 sao cho:
$$\begin{cases} V_1, \dots, V_p \text{ đôi một trực giao} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \operatorname{Vect}(V_1, \dots, V_k) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k). \end{cases}$$

Nhận xét:

Nếu ta buộc $(V_1, \dots, V_p)$ phải thỏa mãn điều kiện $\langle e_k, V_k \rangle = 1, \forall k \in \{1, \dots, p\}$,
 thì có duy nhất một bộ $(V_1, \dots, V_p)$, và ma trận chuyển từ $(e_1, \dots, e_p)$ sang $(V_1, \dots, V_p)$

là ma trận tam giác trên với số hạng trên đường chéo bằng 1:
$$\begin{pmatrix} 1 & & \dots \\ & \searrow & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Diễn đạt dưới dạng ma trận của quá trình trực giao hoá Schmidt được trình bày ở phần sau, xem Mệnh đề 11, 6.4.2.

Cơ sở trực chuẩn được viết tắt là : csc.

♦ **Hệ quả 1 (Định lý về cơ sở trực chuẩn không đầy đủ)**

Với mỗi họ trực chuẩn $(e_1, \dots, e_p)$ của một kgv E , tồn tại $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$
 sao cho $(e_1, \dots, e_n)$ là một csc của E (trong đó $n = \dim(E)$).

♦ **Hệ quả 2**

Mỗi kgv có ít nhất một csc.

Nhận xét :

Nếu $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một csc của $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ thì : $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k$.

♦ **Mệnh đề 4** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgv, B là một cơ sở của E ,

$A = \operatorname{Mat}_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. Khi đó :
$$\begin{cases} B \text{ là trực giao khi và chỉ khi } A \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}) \\ B \text{ là trực chuẩn khi và chỉ khi } A = I_n. \end{cases}$$

Nhận xét :

Trường hợp riêng, nếu B là một csc của E , thì với mỗi (x, y) thuộc E^2 và với ký

hiệu $X = \text{Mat}_B(x)$, $Y = \text{Mat}_B(y)$, ta có : $\langle x, y \rangle = X^*Y$.

Bài tập

◊ 6.2.16 Cho một kgv (E, $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Với hai kgvc F, G của E , ta nói rằng :

- F là **trực giao** với G và viết là $F \perp G$ khi và chỉ khi $\langle f, g \rangle = 0, \forall (f, g) \in F \times G$.
 - F là **trực giao yếu** với G và viết là $F \top G$ khi và chỉ khi $F \subset G^\perp$ hoặc $G^\perp \subset F$.
- a) Chứng minh rằng ba tính chất sau đây là đôi một tương đương :

$$(i) F \perp G, \quad (ii) F \subset G^\perp, \quad (iii) G \subset F^\perp,$$

trong đó F, G là hai kgvc của E .

b) Chứng minh rằng, $\perp$ và $\top$ là quan hệ đối xứng (trong cùng kgvc của E).

c) Chứng minh: $F \top G \Leftrightarrow F^\perp \top G^\perp$, trong đó F, G là hai kgvc của E .

d) Chứng minh với hai kgvc F, G của E , ta có : $\left\{ \begin{array}{l} F \top G \\ F \cap G = \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow F \perp G$.

6.3 Phụ hợp

Trong § 6.3 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một không gian tiền Hilbert phức; chuẩn liên kết được ký hiệu $\|\cdot\|$.

Vấn đề về phụ hợp cũng đã được đề cập đến trong Bổ sung 1.3, Tập 3, theo quan điểm thiên về Giải Tích.

6.3.1 Đại cương

- ♦ **Định nghĩa** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$; ta nói rằng f có phụ hợp khi và chỉ khi tồn tại $g \in \mathcal{L}(E)$ sao cho :

$$\forall x, y \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

Một g thuộc $\mathcal{L}(E)$ như vậy được gọi là **phụ hợp** của f .

- ♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Nếu f có phụ hợp thì f chỉ có duy nhất phụ hợp và được gọi là **phụ hợp** của f , ký hiệu là f^* .

Như vậy, nếu tồn tại f^* , thì :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $\lambda \in \mathbb{C}$; $f, g \in \mathcal{L}(E)$ có các phụ hợp. Khi đó, $\lambda f + g, \text{Id}_E, g \circ f, f^*$ cũng có phụ hợp, và :
 $(\lambda f + g)^* = \bar{\lambda} f^* + g^*, (\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E, (g \circ f)^* = f^* \circ g^*, (f^*)^* = f.$

Bài tập

- ♦ **6.3.1** Cho một không gian tiền Hilbert phức E ; $f, g \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp. Chứng minh rằng, nếu f và g giao hoán thì f^* và g^* giao hoán.
- ♦ **6.3.2** Cho một không gian tiền Hilbert phức E ; $f \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp, F là một kgcvc của E . Chứng minh rằng, nếu F ổn định đối với f thì $F^\perp$ ổn định đối với f^* .
- ♦ **6.3.3** Cho một không gian tiền Hilbert phức E ; $f \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp. Chứng minh :
 $\text{Ker}(f^* \circ f) = \text{Ker}(f)$ và $\text{Ker}(f \circ f^*) = \text{Ker}(f^*)$.
- ♦ **6.3.4** Cho một không gian tiền Hilbert phức E ; $f \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp và thỏa mãn :

$$\forall t \in E, \|f(t)\| \leq \|t\|.$$

Giả sử $x \in E$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương :

$$(i) f^* \circ f(x) = x \quad (ii) \langle f^* \circ f(x) - x, x \rangle = 0.$$

- ♦ 6.3.5 Cho không gian tiền Hilbert phức $E, f \in \mathcal{L}(E)$ có phụ hợp và có đa thức tối thiểu. Chứng minh rằng f^* có đa thức tối thiểu và: $\pi_{f^*} = \overline{\pi_f}$.

6.3.2 Trường hợp hữu hạn chiều

Trong § 6.3.2 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgvnh có số chiều hữu hạn.

- ♦ **Mệnh đề** Mọi tự đồng cấu của E đều có phụ hợp.
Hơn nữa, với mỗi f thuộc $\mathcal{L}(E)$ và với mỗi csct B của E .
- $$\text{Mat}_B(f^*) = (\text{Mat}_B(f))^*.$$

- ♦ **Hệ quả** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta có:
- $$\text{rank}(f^*) = \text{rank}(f), \text{tr}(f^*) = \overline{\text{tr}(f)}, \det(f^*) = \overline{\det(f)}, \text{Sp}_\mathbb{C}(f^*) = \overline{\text{Sp}_\mathbb{C}(f)}.$$

Nhận xét :

Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$; mặc dù các gtr của A và A^* là đôi một phụ hợp, nhưng các vtr của A và của A^* “nói chung”, là không phụ hợp.

Bài tập

- ♦ 6.3.6 Cho một kgvnh $E, f \in \mathcal{L}(E)$. F là một kgvc của E . Giả sử rằng:

$$\begin{cases} \forall x \in F, \|f(x)\| = \|x\| \\ \forall x \in F, f(x) = 0 \end{cases}$$

Chứng minh: $\text{Ker}(F) = F^\perp$.

- ♦ 6.3.7 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), B \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C}), f \in \mathcal{L}(\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}))$ được xác định bởi:

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}), f(X) = AX - XB.$$

Tìm f^* ($\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ với tvhh chính tắc).

6.4 Các tự đồng cấu đáng chú ý của không gian Hermite

Trong § 6.4 này $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgv (hữu hạn chiều), và $\|\cdot\|$ là chuẩn liên kết.

6.4.1 Các tự đồng cấu tự phụ hợp

1) Đại cương

♦ **Định nghĩa** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Ta nói rằng :

- 1) f là **tự phụ hợp** (hay là : **Hermite**) khi và chỉ khi $f^* = f$
- 2) f là **phản tự phụ hợp** (hay là : **phản Hermite**) khi và chỉ khi $f^* = -f$.

Ở đây ta ký hiệu $\mathcal{H}(E)$ tập các tự đồng cấu Hermite của E . Ta cần phân biệt $\mathcal{H}(E)$ (một tập con của $\mathcal{L}(E)$) với $H(E)$, tập hợp các dạng Hermite trên E (xem 6.1.1). Tuy nhiên ta cần chú ý rằng ánh xạ $\theta: \mathcal{H}(E) \rightarrow H(E)$ được xác định bởi : $\forall f \in \mathcal{H}(E)$,

$\forall x \in E, (\theta(f))(x) = \langle x, f(x) \rangle$, là đẳng cấu của $\mathbb{R}$ - kgv và :

$\forall f \in \mathcal{H}(E), \text{rank}(\theta(f)) = \text{rank}(f)$.

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$, B là một csc của E , $A = \text{Mat}_B(f)$.

1) Để f là Hermite, cần và đủ A là Hermite

Hơn nữa, $\mathcal{H}(E)$ là một $\mathbb{R}$ - kgv và ánh xạ $\mathcal{H}(E) \rightarrow \mathbf{H}_n$ là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$ - kgv.
 $f \mapsto \text{Mat}_B(f)$

2) Để f là phản Hermite, cần và đủ A là phản Hermite.

Nhận xét : Một tự đồng cấu f của E là phản Hermite khi và chỉ khi if là Hermite (xem Mệnh đề 3, 6.1.3 2)).

♦ **Mệnh đề 2**

1) $\forall (f, g) \in (\mathcal{H}(E))^2, (g \circ f \in \mathcal{H}(E) \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f)$.

2) $\forall f \in \mathcal{H}(E), \forall k \in \mathbb{N}^*, f^k \in \mathcal{H}(E)$.

3) $\forall f \in \mathcal{H}(E) \cap \mathcal{GL}(E), \forall k \in \mathbb{Z}, f^k \in \mathcal{H}(E)$.

2) Phép chiếu trực giao, phép đối xứng trực giao

♦ **Định nghĩa 1** Với mỗi kgv F của E , ta gọi phép chiếu lên F theo phương $F^\perp$ là **phép chiếu trực giao lên F** .

Với ký hiệu p_F là phép chiếu trực giao lên F , khi đó ta có :

$$\begin{cases} p_F \circ p_F = p_F, \operatorname{Im}(p_F) = F, \operatorname{Ker}(p_F) = F^\perp \\ \forall x \in E, (p_F(x) \in F, x - p_F(x) \in F^\perp). \end{cases}$$

ta cũng nói **trực chiếu** thay cho phép chiếu trực giao.

- ♦ **Định nghĩa 2** Giả sử F là một kgvc của $E, x \in E$. Số thực ký hiệu $d(x, F)$, được xác định bởi:

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

được gọi là khoảng cách từ x đến F .

- ♦ **Mệnh đề 1** Giả sử F một kgvc của $E, x \in E$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\| \\ \forall y \in F, (\|x - y\| = \|x - p_F(x)\| \Leftrightarrow y = p_F(x)). \end{cases}$$

Nói cách khác, ánh xạ $F \rightarrow \mathbb{R}$ đặt cận dưới tại một điểm duy nhất $p_F(x)$.
 $y \mapsto \|x - y\|$

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử F một kgvc của $E, (e_1, \dots, e_p)$ một cste của F . Khi

$$\text{đó ta có : } \forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle e_k, x \rangle e_k.$$

- ♦ **Mệnh đề 3** Giả sử $p \in \mathcal{L}(E)$ là một phép chiếu ($p \circ p = p$). Khi đó p là một phép chiếu trực giao khi và chỉ khi p là Hermite.

- ♦ **Mệnh đề 4** Giả sử p một phép chiếu trực giao của E . Khi đó tồn tại một cste $\mathcal{B}$ của E thỏa mãn : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ trong đó $r = \operatorname{rank}(p)$.

- ♦ **Định nghĩa 3** Với mỗi kgvc F của E , ta gọi phép đối xứng qua F theo phương $F^\perp$ là **phép đối xứng trực giao qua F** .

Với ký hiệu s_F là phép đối xứng trực giao qua F , khi đó ta có:

$$\begin{cases} s_F = 2p_F - e \text{ (trong đó } e = \operatorname{Id}_E), p_F = \frac{1}{2}(e + s_F) \\ s_F \circ s_F = e \\ \operatorname{Ker}(s_F - e) = F, \operatorname{Ker}(s_F + e) = F^\perp \end{cases}$$

- ♦ **Mệnh đề 5** Giả sử $s \in \mathcal{L}(E)$ là một phép đối xứng ($s \circ s = e$). Khi đó s là một phép đối xứng trực giao khi và chỉ khi s là Hermite.

- ♦ **Mệnh đề 6** Giả sử s là một phép đối xứng trực giao của E .
 Khi đó, tồn tại một csc $\mathcal{B}$ của E thỏa mãn $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$,
 trong đó $p = \dim(\text{Ker}(s-e))$, $q = \dim(\text{Ker}(s+e))$.

- ♦ **Định nghĩa 4** Ta gọi phép đối xứng trực giao qua một siêu phẳng của E là **phép phản xạ** (của E).

3) Tự đồng cấu Hermite dương, xác định dương

- ♦ **Định nghĩa** Giả sử f là một tự đồng cấu Hermite của E .
 1) Ta nói f **dương** khi và chỉ khi :

$$\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0.$$

- 2) Ta nói f **xác định dương** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0 \\ \forall x \in E, (\langle x, f(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0) \end{cases}$$

Nhận xét :

Với ký hiệu ϕ là dh trên E được định nghĩa bởi : $\phi(x) = \langle x, f(x) \rangle, \forall x \in E$,

ta có : $\begin{cases} f \text{ dương} \Leftrightarrow \phi \text{ dương} \\ f \text{ xác định dương} \Leftrightarrow \phi \text{ xác định dương} \end{cases}$

(xem Định nghĩa 5 và 6, 6.1.2)

Ta sẽ hoàn thiện khảo sát này ở phần sau (6.5.3).

Bài tập

- ♦ **6.4.1** Cho một kgh E , $f \in \mathcal{H}(E)$. Chứng minh : $\langle x, f(x) \rangle^2 \leq \langle x, f^2(x) \rangle \|x\|^2$.
- ♦ **6.4.2** Cho một kgh E , $p \in \mathcal{L}(E)$ sao cho $p \circ p = p$.
 Chứng minh : $p^* = p \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in \text{Ker}(p) \times \text{Im}(p), \langle x, y \rangle = 0)$.
- ♦ **6.4.3** Cho kgh E ; p, q là hai phép chiếu chuẩn tắc của E . Chứng minh :
 $p \circ q = q \circ p \Leftrightarrow p \circ q \circ p = q \circ p \circ p$.
- ♦ **6.4.4'** Cho kgh E , $f \in \mathcal{H}(E)$, $B' = \{x \in E; \|x\| = 1\}$, $\|f\| = \sup_{x \in B'} \|f(x)\|$. Chứng minh :
 $\|f\| = \sup_{x \in B'} |\langle f(x), x \rangle| = \sup_{(x, y) \in B'^2} |\langle f(x), y \rangle|$.

(Xem 1.2.6, Tập 3).

6.4.2 Tự đồng cấu unita

Trong § 6.4.2 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgv, $\| \cdot \|$ là chuẩn liên kết.

- ♦ **Định nghĩa 1** Một tự đồng cấu f của E được gọi là **phép biến đổi unita** khi và chỉ khi f bảo toàn tvhh, tức là :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Ký hiệu $\mathcal{U}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (hoặc : $\mathcal{U}(E)$) là tập hợp các phép biến đổi unita của E .

- ♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Hai tính chất sau đây là tương đương :

- (i) $f \in \mathcal{U}(E)$
- (ii) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$

- ♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $f \in \mathcal{L}(E)$. Các tính chất sau đây là đôi một tương đương :

- (i) $f \in \mathcal{U}(E)$
- (ii) Với mỗi estc B của E , $f(B)$ là estc của E .
- (iii) Tồn tại một estc B của E thỏa mãn, $f(B)$ là một estc của E .

- ♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3** Tập hợp $\mathcal{U}(E)$ các phép biến đổi unita của E là một nhóm đối với luật $\circ$, được gọi là **nhóm unita của $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$** (hoặc của E).

$\mathcal{U}(E)$ là một nhóm con của $\mathcal{GL}(E)$.

- ♦ **Định nghĩa 2** Một ma trận U thuộc $M_n(\mathbb{C})$ được gọi là **ma trận unita** khi và chỉ khi tự đồng cấu của $\mathbb{C}^n$ nhận U làm ma trận trong estc của $\mathbb{C}^n$, là phép biến đổi unita của $\mathbb{C}^n$ với tvhh thông thường của nó.
Ký hiệu U_n là tập hợp các ma trận unita của $M_n(\mathbb{C})$.

- ♦ **Mệnh đề 4** Giả sử $U \in M_n(\mathbb{C})$, E là một $\mathbb{C}$ - kgv có hữu hạn chiều là n , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một tvhh trên E . Các tính chất sau đây là đôi một tương đương :
- 1) $U \in U_n$
 - 2) $U^*U = I_n$
 - 3) $UU^* = I_n$
 - 4) Với mỗi estc B của E , tự đồng cấu nhận U làm ma trận trong cơ sở B , là một tự đồng cấu unita

- 5) Tồn tại một cstc của E mà trong cơ sở đó tự đồng cấu nhận U làm ma trận là tự đồng cấu unita.
- 6) Các cột của U tạo nên một cstc của $M_{n,1}(\mathbb{C})$ đối với tvh chính tắc.
- 7) Các hàng của U tạo nên một cstc của $M_{1,n}(\mathbb{C})$ đối với tvh chính tắc.

♦ **Mệnh đề – Định nghĩa 5** U_n là một nhóm đối với phép nhân và được gọi là **nhóm unita** (cấp n).

U_n là một nhóm con của $GL_n(\mathbb{C})$.

Nhận xét : Giả sử B là một cstc của E , $f \in \mathcal{L}(E)$, $U = \text{Mat}_B(f)$. Khi đó ta có :

$$f \in \mathcal{U}(E) \Leftrightarrow U \in U_n.$$

Ánh xạ : $\mathcal{U}(E) \rightarrow U_n$ là một đẳng cấu của nhóm.

$$f \mapsto \text{Mat}_B(f)$$

♦ **Mệnh đề 6** Giả sử B' là một cstc của E , B' là một cơ sở của E , $P = \text{Pass}(B, B')$. Khi đó B' là một cstc của E khi và chỉ khi P là ma trận unita.

♦ **Mệnh đề 7**

$$1) \forall U \in U_n, |\det(U)| = 1$$

$$2) \forall f \in \mathcal{U}(E), |\det(f)| = 1.$$

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 8** Tập các tự đồng cấu unita của E có định thức bằng 1 là một nhóm con của $\mathcal{U}(E)$, được gọi là **nhóm unita đặc biệt** của E và ký hiệu là $\mathcal{SU}(E)$.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 9** Tập các ma trận unita cấp n có định thức bằng 1 là một nhóm con của U_n , được gọi là **nhóm unita đặc biệt** (cấp n) và ký hiệu là SU_n :

$$SU_n = \{U \in U_n; \det(U) = 1\}.$$

Nhận xét :

Giả sử B là một cstc của E , $f \in \mathcal{L}(E)$, $U = \text{Mat}_B(f)$. Khi đó ta có :

$$f \in \mathcal{SU}(E) \Leftrightarrow U \in SU_n$$

Ánh xạ $\mathcal{SU}(E) \rightarrow SU_n$ là một đẳng cấu nhóm.

$$f \mapsto \text{Mat}_B(f)$$

♦ **Mệnh đề 10**

1) $\forall f \in \mathcal{U}(E), \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{U}$

2) $\forall U \in \mathbf{U}_n, \text{Sp}_{\mathbb{C}}(U) \subset \mathbb{U}.$

Ta nhắc lại rằng, $\mathbb{U}$ là tập hợp các số phức có môđun bằng 1 (xem 2.4.1, Tập 1)

♦ **Mệnh đề 11 (Thể hiện dưới dạng ma trận thuật toán Schmidt)**

$$\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \exists (T, U) \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) \times \mathbf{U}_n, A = UT.$$

Bài tập

♦ 6.4.5 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, $A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \leq k, j \leq n}$.

Chứng minh $A \in \mathbf{U}_n$.

♦ 6.4.6 Chứng minh: $\forall A \in \mathbf{H}_n, e^{iA} \in \mathbf{U}_n$.

♦ 6.4.7 Chứng minh $\text{SU}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{C}^2, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.

♦ 6.4.8 Xác định $\mathbf{H}_2 \cap \mathbf{U}_2$.

♦ 6.4.9 Chứng minh rằng, với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{U}_n$ là một tập compac của $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

♦ 6.4.10 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}_{np}(\mathbb{C})$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{C})$, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Giả sử $M \in \mathbf{U}_{n+p}$ và ($A \in \mathbf{U}_n$ hay $D \in \mathbf{U}_p$). Chứng minh: $B = 0$, $C = 0$, $A \in \mathbf{U}_n$, $D \in \mathbf{U}_p$.

♦ 6.4.11 Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $G = \{M \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbb{R}); {}^tMJM = J\}$.

a) Chứng minh: $\forall M \in G, \det(M) \in \{-1, 1\}$.

b) Chứng minh rằng, G là một nhóm con của $\text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

c) Chứng minh: $G \cap \mathbf{O}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}; A + iB \in \mathbf{U}_n \right\}$.

d) Với $M \in G \cap \mathbf{O}_{2n}(\mathbb{R})$, tính $\det(M)$.

♦ 6.4.12 Chứng minh: $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \exists (U, T) \in \mathbf{U}_n \times \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}), A = UTU^*$.

Nói một cách khác mọi ma trận thuộc $M_n(\mathbb{C})$ là tam giác hóa được bởi nhóm unita (Sử dụng dạng ma trận của quá trình chuẩn tắc hóa Schmidt, Mệnh đề 11).

- ♦ **6.4.13** Cho $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A . Chứng minh :

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2.$$

(Sử dụng bài tập 6.4.12).

- ♦ **6.4.14** Cho $\mathcal{L} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh: $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}), |\lambda| = 1$.

b) Cho $\lambda, \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}), X \in \text{KGCR}(\mathcal{L}, \lambda), Y \in \text{KGCR}(\mathcal{L}, \mu)$. Chứng minh:

$$\begin{cases} \lambda \neq \mu \Rightarrow {}^t X \bar{Y} = 0 \\ \lambda \neq \bar{\mu} \Rightarrow {}^t X Y = 0. \end{cases}$$

c) Cho $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}) - \mathbb{R}, X \in \text{KGCR}(\mathcal{L}, \lambda)$. Chứng minh: ${}^t X X = 0$.

d) Cho $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}) - \mathbb{R}, \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}), X \in \text{KGCR}(\mathcal{L}, \lambda), U = \frac{1}{2}(X + \bar{X}),$

$V = \frac{1}{2i}(X - \bar{X}), Z \in \text{KGCR}(\mathcal{L}, \mu)$. Chứng minh: ${}^t U Z = {}^t V Z = 0$.

e) Cho $\lambda, \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}) - \mathbb{R}$ thỏa mãn $\lambda \neq \mu$ và $\lambda \neq \bar{\mu}, X \in \text{KGCR}(\mathcal{L}, \lambda), Y \in \text{KGCR}(\mathcal{L}, \mu),$

$U = \frac{1}{2}(X + \bar{X}), W = \frac{1}{2}(Y + \bar{Y})$. Chứng minh: ${}^t U W = 0$.

- ♦ **6.4.15** Cho $(G, +)$ một nhóm giao hoán hữu hạn cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$), và $E = \mathbb{C}^G$ là một $\mathbb{C}$ -kgv n chiều.

a) Chứng minh : $(f, g) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} g(x)$ là một tvh trên E mà ta sẽ ký hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

b) Với $u \in G$ cố định, ký hiệu $T_u : E \rightarrow E$ ánh xạ xác định bởi :

$$\forall f \in E, \forall x \in G, (T_u(f))(x) = f(x - u).$$

Chứng minh rằng T_u là một tự đồng cấu unita của $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- ♦ **6.4.16** Ký hiệu $H = \{M \in \mathbf{H}_2; \text{tr}(M) = 0\}$ và $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow H$

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix}$$

a) Chứng minh rằng H là một $\mathbb{R}$ -kgv và φ là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$ -kgv.

b) Cho $U \in \text{SU}_2$.

α) Chứng minh : $\forall v \in \mathbb{R}^3, \exists ! w \in \mathbb{R}^3, \varphi(w) = U_{\varphi}(v) U^{-1}$.

β) Chứng minh rằng ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được định nghĩa ở trên là một phép đẳng cự của kgvơ $\mathbb{R}^3$ (thông thường).

6.4.3 Tự đồng cấu chuẩn tắc

Trong § 6.4.3 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgvơ, $\|\cdot\|$ là chuẩn liên kết.

♦ Định nghĩa

1) Một tự đồng cấu f của E được gọi là **chuẩn tắc** khi và chỉ khi :

$$f \circ f^* = f^* \circ f.$$

2) Một ma trận vuông A của $M_n(\mathbb{C})$ được gọi là **chuẩn tắc** khi và chỉ khi :

$$AA^* = A^*A.$$

Nhận xét :

1) Giả sử B là một csc của E , $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \text{Mat}_B(f)$. Hiển nhiên f là chuẩn tắc khi và chỉ khi A là chuẩn tắc.

2) • Nếu $f (\in \mathcal{L}(E))$ là Hermite hoặc unita, thì f là chuẩn tắc.

• Nếu $A (\in M_n(\mathbb{C}))$ là Hermite hoặc unita, thì A là chuẩn tắc.

3) Tồn tại các ma trận chuẩn tắc không phải là Hermite, cũng không phải là unita, chẳng hạn :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

4) Tồn tại các ma trận không chuẩn tắc, ví dụ : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5) Tập các ma trận chuẩn tắc cấp n ($n \geq 2$) không ổn định đối với phép cộng cũng không ổn định đối với phép nhân, (xem bài tập 6.4.17 b) và d)).

Độc giả sẽ tìm thấy các bài tập về ma trận chuẩn tắc ở trang 221, 222, và trang 235, 236.

Bài tập

♦ 6.4.17 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$; ở đây ta ký hiệu N_n là tập hợp các ma trận chuẩn tắc cấp n .

a) Chứng minh: $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in N_n, \alpha A \in N_n$.

b) N_n có ổn định đối với phép cộng không?

c) Chứng minh: $\forall A \in N_n, A^* \in N_n$.

d) N_n có ổn định đối với phép nhân không?

e) Chứng minh: $\forall A \in N_n, \forall k \in \mathbb{N}^*, A^k \in N_n$.

f) Chứng minh: $\forall A \in N_n \cap GL_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{Z}, A^k \in N_n$.

g) Chứng minh: $\forall A \in N_n, \forall U \in U_n, UAU^* \in N_n$.

h) Chứng minh: $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}, (A \in N_n \Leftrightarrow A + \alpha I_n \in N_n)$.

◇ 6.4.18 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{C})$ chuẩn tắc, $\lambda \in \mathbb{C}, X \in M_{n+1}(\mathbb{C})$. Chứng minh:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow X^*A = \lambda X^*.$$

◇ 6.4.19 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{C})$; ta ký hiệu $\operatorname{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*), \operatorname{Im}(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*)$.

Chứng minh rằng bốn tính chất sau đây là đôi một tương đương:

- (i) A là chuẩn tắc (ii) $\operatorname{Re}(A)$ và $\operatorname{Im}(A)$ giao hoán
(iii) $(\operatorname{Re}(A))^2 + (\operatorname{Im}(A))^2 = A^*A$ (iv) $(\operatorname{Re}(A))^2 + (\operatorname{Im}(A))^2 = AA^*$.

◇ 6.4.20 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{C})$ là chuẩn tắc, $B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $AB = BA$. Chứng minh: $A^*B = BA^*$ (hãy chỉ ra $\|A^*B - BA^*\|^2 = 0$, trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Hermite chính tắc trên $M_n(\mathbb{C})$).

◇ 6.4.21 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A, B \in M_n(\mathbb{C})$ là chuẩn tắc sao cho, $AB = BA$. Chứng minh rằng AB là ma trận chuẩn tắc. (Sử dụng bài tập 6.4.20).

◇ 6.4.22 Cho $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A, B \in M_n(\mathbb{C})$ chuẩn tắc. Có thể khẳng định AB là chéo hóa được không?

◇ 6.4.23 Hãy cho một ví dụ về ma trận A, B thuộc $M_2(\mathbb{C})$ sao cho: A, B, AB, BA là chuẩn tắc và $AB \neq BA$.

◇ 6.4.24 Cho $n \in \mathbb{N}^*, A, B \in M_n(\mathbb{C})$ là chuẩn tắc.

- a) Chứng minh $\|AB\| = \|BA\|$, trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Hermite chính tắc trên $M_n(\mathbb{C})$.
b) Từ đó suy ra rằng, nếu $AB = 0$, thì $BA = 0$.

◇ 6.4.25 Cho $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, A \in M_p(\mathbb{C}), B \in M_q(\mathbb{C})$.

Chứng minh $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ là chuẩn tắc khi và chỉ khi A và B là chuẩn tắc.

◇ 6.4.26 Cho $n \in \mathbb{N}^*, B \in GL_n(\mathbb{C}), A = B^{-1}B^*$.

- a) Chứng minh rằng A là unita khi và chỉ khi B là chuẩn tắc.
b) Chứng minh rằng, nếu tồn tại ma trận N chuẩn tắc và không suy biến, và tồn tại ma trận H Hermite và không suy biến, sao cho $B = HNH$, thì A là đồng dạng với một ma trận unita.

◇ 6.4.27 Cho E kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$ chuẩn tắc. Chứng minh: $\operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Ker}(f)$.

◇ 6.4.28 Cho E kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương:

- (i) f là chuẩn tắc.

$$(ii) \quad \forall x \in E, \|f^*(x)\| = \|f(x)\|.$$

(Xem bài tập 6.5.66).

- ◊ **6.4.29** Cho E kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$ chuẩn tắc, λ, μ hai vector riêng của f sao cho $\lambda \neq \mu$, $x \in \text{KGCR}(f, \lambda)$, $y \in \text{KGCR}(f, \mu)$. Chứng minh rằng $\langle x, y \rangle = 0$.
(Để khảo sát sâu hơn, xem bài tập 6.5.68).
- ◊ **6.4.30** Cho E kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$. Chứng minh rằng ba tính chất sau đây là đôi một tương đương:
(i) f là chuẩn tắc. (ii) Với mọi kgvc F của E ổn định đối với f , F ổn định đối với f^* .
(iii) Với mọi kgvc F thuộc E ổn định đối với f , $F^\perp$ ổn định đối với f .

6.5 Thu gọn các ma trận Hermite

Trong § 6.4.3 này, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ chỉ một kgv, $\|\cdot\|$ là chuẩn liên kết, $n \in \mathbb{N}^*$.

6.5.1 Định lý cơ bản

♦ Mệnh đề 1

Giả sử f là một tự đồng cấu Hermite của E . Khi đó:

$$1) \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{R}$$

2) Các KGCR của f đôi một trực giao, tức là : với mọi gtr λ, μ thuộc f thỏa mãn $\lambda \neq \mu$ và với mọi vtr x, y ứng với λ, μ , ta đều có : $\langle x, y \rangle = 0$.

Chứng minh:

1) Giả sử $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$, $x \in \operatorname{KGCR}(f, \lambda)$. Khi đó :

$$\begin{cases} \langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2 \\ \langle x, f(x) \rangle = \overline{\langle f(x), x \rangle} = \overline{\langle \lambda x, x \rangle} = \overline{\lambda} \|x\|^2. \end{cases}$$

Từ đây $\lambda = \overline{\lambda}$ vì $x \neq 0$.

2) Giả sử $\lambda, \mu \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ sao cho $\lambda \neq \mu$, $x \in \operatorname{KGCR}(f, \lambda)$, $y \in \operatorname{KGCR}(f, \mu)$

Khi đó ta có: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \mu y$.

Từ đó : $\langle \lambda x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle$, như vậy $\overline{\lambda} \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$.

Vì $\lambda = \overline{\lambda}$ và $\lambda \neq \mu$, ta suy ra $\langle x, y \rangle = 0$.

♦ Mệnh đề 2

Giả sử f là một tự đồng cấu Hermite của E . Với mỗi kgvc F của E ổn định đối với f , thì $F^\perp$ cũng ổn định đối với f .

Chứng minh:

Giả sử F là một kgvc của E ổn định đối với f , và $x \in F^\perp$. Ta có :

$\forall y \in F$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0$. ($\forall x \in F^\perp$ và $f(y) \in F$), từ đó : $f(x) \in F^\perp$.

♦ Định lý (Định lý cơ bản)

1) Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgv, f là một tự đồng cấu Hermite của E . Tồn tại một csc của E mà trong cơ sở đó ma trận của f là ma trận chéo.

$$2) \boxed{\forall H \in \mathbf{H}_n, \exists (U, D) \in \mathbf{U}_n \times \mathbf{D}_n(\mathbb{C}), H = UDU^{-1}}$$

Chứng minh :

1) Quy nạp theo n ($n = \dim(E)$).

Tính chất là hiển nhiên khi $n = 1$.

Giả sử tính chất trên đúng với n thuộc $\mathbb{N}^*$, và E là một kgv $n+1$ chiều, $f \in \mathcal{H}(E)$.

Tự đồng cấu f của kgv phức E có ít nhất một trị riêng λ , và một vectơ riêng e_1 ứng với λ .

Vì Ce_1 ổn định đối với tự đồng cấu Hermite f , theo Định nghĩa, siêu phẳng $H = (Ce_1)^\perp$ cũng ổn định đối với f . Ký hiệu g là tự đồng cấu sinh bởi f trên H . Vì:

$$\forall (x, y) \in H^2, \langle g(x), y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, g(y) \rangle,$$

nên rõ ràng g là tự đồng cấu Hermite của H (Tvvh của H là thu hẹp của tvvh của E trên H).

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại một cstc $(e_2, \dots, e_{n+1})$ của H mà trong cơ sở đó ma trận của g là ma trận chéo.

Ta kết luận rằng, ma trận của f trong cstc $(e_1, \dots, e_{n+1})$ là ma trận chéo.

2) Chỉ là sự thể hiện 1) dưới dạng ma trận.

Nhận xét :

1) Từ định lý cơ bản về các ma trận Hermite ta lại nhận được các kết quả tương ứng đối với các ma trận đối xứng thực (Định lý 4.4.1).

Thực vậy, giả sử $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Vì $S_n(\mathbb{R}) \subset H_n$, theo Mệnh đề 1, ta có $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(S) \subset \mathbb{R}$, và như vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(S) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$.

Giả sử $\lambda \in \text{Sp}(S)$, X là một vtr tương ứng ($X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$).

Ta có $SX = \lambda X$, do đó $S\bar{X} = \overline{SX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda} \bar{X} = \lambda \bar{X}$.

Nếu $X \notin M_{n,1}(\mathbb{R})$, các họ $(X, \bar{X})$ và $\left(\frac{1}{2}(X + \bar{X}), \frac{1}{2i}(X - \bar{X})\right)$ là tập sinh (trong $M_{n,1}(\mathbb{C})$) của cùng một $\mathbb{C}$ -kgvc, và $\frac{1}{2}(X + \bar{X}), \frac{1}{2i}(X - \bar{X})$ là các số thực.

Như vậy, mỗi KGCR của S có một $\mathbb{C}$ -cơ sở được tạo nên từ các phần tử của $M_{n,1}(\mathbb{R})$, và S chứa một cstc gồm các vtr trong $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

2) Định lý cơ bản cũng có thể được phát biểu dưới dạng : với mỗi tự đồng cấu Hermite f của E , E là tổng trực tiếp giao của các KGCR của f .

3) Ta có thể thay U^{-1} bằng U^* , vì U là phép biến đổi unita.

4) Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgvh, ϕ là dh trên E , f là tự đồng cấu Hermite trên E được xác định bởi $(\forall x \in E, \phi(x) = \langle x, f(x) \rangle)$. Theo định lý cơ bản, tồn tại một cstc B của E mà trong cơ sở đó ma trận của f có dạng chéo. Khi đó, ký số của ϕ là (p, q) trong đó p (tương ứng : q) là số các phần tử dương (tương ứng : âm) trên đường chéo của D .

6.5.2 Thu gọn đồng thời

- ♦ **Định lý** Giả sử $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một kgvh, ϕ là một dttrh trên $E \times E$. Khi đó tồn tại một cstc của E mà trong cơ sở đó ma trận của ϕ là ma trận đường chéo.

Độc giả sẽ tìm thấy thể hiện dưới dạng ma trận của tính chất này ở phần sau (Mệnh đề 4, 6.5.3).

6.5.3 Ma trận Hermite dương, xác định dương

Trong § 6.5.3 này, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta nhắc lại Định nghĩa sau (xem Định nghĩa 5 và 6, 6.1.2).

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử E là một $\mathbb{C}$ -kgv, ϕ là một dh trên E .

1) Ta nói rằng ϕ **dương** khi và chỉ khi:

$$\forall x \in E, \phi(x) \geq 0.$$

2) Ta nói rằng ϕ **xác định dương** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \forall x \in E, \phi(x) \geq 0 \\ \forall x \in E, (\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0). \end{cases}$$

Nhận xét :

Giả sử φ là một dttrh trên một $\mathbb{C}$ -kgv, ϕ là dh liên kết với φ ; φ là một tvhh khi và chỉ khi ϕ xác định dương.

♦ **Định nghĩa 2** Giả sử $H \in \mathbf{H}_n$, φ là dttrh trên $\mathbb{C}^n$ và có ma trận trong cơ sở chính tắc là H , ϕ là dh liên kết với φ .

1) Ta nói rằng H là **dạng Hermite dương** khi và chỉ khi ϕ dương.

2) Ta nói rằng H là **dạng Hermite xác định dương** khi và chỉ khi ϕ xác định dương.

Nhận xét:

Nếu $H \in \mathbf{H}_n$ là dạng Hermite dương (tương ứng : dạng Hermite xác định dương), thì các phần tử nằm trên đường chéo của H là ≥ 0 (tương ứng : > 0).

Đảo lại là sai (nếu $n \geq 2$) ví dụ sau chứng minh điều đó: $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

♦ **Ký hiệu 1**

Ký hiệu: $\mathbf{H}_n^+$ là tập các ma trận Hermite dương của $\mathbf{H}_n$.

$\mathbf{H}_n^{++}$ là tập các ma trận Hermite xác định dương của $\mathbf{H}_n$.

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên và rất tiện dụng.

♦ **Mệnh đề 1** Giả sử $H \in \mathbf{H}_n$. Ta có :

$$\bullet H \in \mathbf{H}_n^+ \Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^* H X \geq 0)$$

$$\bullet H \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \left\{ \begin{array}{l} X^* H X \geq 0 \\ X^* H X = 0 \Rightarrow X = 0 \end{array} \right. \right)$$

$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}, X^* H X > 0.$$

Từ đó ta dễ dàng suy ra Mệnh đề sau.

♦ **Mệnh đề 2**

- 1) • $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall H \in \mathbf{H}_n^+, \alpha H \in \mathbf{H}_n^+$
 • $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall H \in \mathbf{H}_n^{++}, \alpha H \in \mathbf{H}_n^{++}$.
- 2) • $\forall (H_1, H_2) \in (\mathbf{H}_n^+)^2, H_1 + H_2 \in \mathbf{H}_n^+$
 • $\forall (H_1, H_2) \in \mathbf{H}_n^+ \times \mathbf{H}_n^{++}, H_1 + H_2 \in \mathbf{H}_n^{++}$.
- 3) • $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), A^*A \in \mathbf{H}_n^+$
 • $\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), A^*A \in \mathbf{H}_n^{++}$
 • $\forall H \in \mathbf{H}_n, H^2 \in \mathbf{H}_n^+$.

♦ **Ký hiệu 2** Trang bị cho $\mathbf{H}_n$ một quan hệ, ký hiệu $\leq$, được định nghĩa bởi :

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, (A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathbf{H}_n^+).$$

♦ **Mệnh đề 3** $\leq$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbf{H}_n$ tương thích với phép cộng.

Chứng minh :

1) *Tính phản xạ :* $\forall A \in \mathbf{H}_n, A - A = 0 \in \mathbf{H}_n^+.$

2) *Tính phản đối xứng :* Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n$ thỏa mãn $A \leq B$ và $B \leq A$.

$$\text{Khi đó ta có : } \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \begin{cases} X^*(A - B)X \geq 0 \\ X^*(B - A)X \geq 0 \end{cases},$$

từ đây, do tính phản đối xứng của $\leq$ trong $\mathbb{R} : \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^*(A - B)X = 0$ nên $A = B$ (xem Mệnh đề 2.3), 6.1.3)

3) *Tính bắc cầu :*

$$\begin{cases} A \leq B \\ B \leq C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - A \in \mathbf{H}_n^+ \\ C - B \in \mathbf{H}_n^+ \end{cases} \Rightarrow C - A = (C - B) + (B - A) \in \mathbf{H}_n^+ \Rightarrow A \leq C.$$

4) *Tính tương thích với phép cộng :*

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \leq B \\ C \leq D \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} B - A \in \mathbf{H}_n^+ \\ D - C \in \mathbf{H}_n^+ \end{cases} \Rightarrow (D + B) - (A + C) = (D - C) + (B - A) \in \mathbf{H}_n^+ \\ &\Rightarrow A + C \leq B + D. \end{aligned}$$

Nhận xét :

1) Quan hệ trên $\leq$ trên $\mathbf{H}_n$ được định nghĩa như vậy là mở rộng của quan hệ $\leq$ trên $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ đã được định nghĩa trước đó.

2) $\leq$ không phải là một quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbf{H}_n$ (nếu $n \geq 2$).

3) $\leq$ không tương thích với phép nhân nếu $n \geq 2$. ■

Ta thường ký hiệu $<$ là quan hệ trên $\mathbf{H}_n$ được xác định bởi:

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, \quad (A < B \Leftrightarrow B - A \in \mathbf{H}_n^{++}).$$

Lưu ý rằng, khi $n \geq 2$, các quan hệ $\begin{cases} A \leq B \\ A \neq B \end{cases}$ không dẫn đến $A < B$.

Nhận xét :

Giả sử E là một kgv, $n = \dim(E)$, $\mathcal{B}$ là một csc của E , ϕ là đtrh trên E , ϕ là đh

liên kết với ϕ , $H = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Ta có : $\begin{cases} H \in \mathbf{H}_n^+ \Leftrightarrow \phi \text{ dương} \\ H \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow \phi \text{ xác định dương.} \end{cases}$

♦ **Định lý** Giả sử $H \in \mathbf{H}_n$. Khi đó:

- 1) $H \in \mathbf{H}_n^+ \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_+$.
- 2) $H \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(H) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Chứng minh: Tương tự Định lý, 4.4.3.

Nhận xét:

Từ Định lý cơ bản (Định lý, 6.5.1) và Mệnh đề trên, ta suy ra: $\mathbf{H}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

♦ **Mệnh đề 4 (Thể hiện dưới dạng ma trận của định lý thu gọn đồng thời)**

Giả sử $A \in \mathbf{H}_n^{++}$, $B \in \mathbf{H}_n$. Khi đó tồn tại $(P, D) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn :

$$A = P^*P \text{ và } B = P^*DP.$$

Chứng minh: Tương tự Mệnh đề 2, 4.4.3.

Nhận xét:

Ở Mệnh đề trước, các phần tử nằm trên đường chéo của D (“nhìn chung”) không phải là các trị riêng của B ; Tuy nhiên, ta có: $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$.

Bài tập

◇ 6.5.1 Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh :

- a) $A \in \mathbf{H}_n \Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^*AX \in \mathbb{R})$
 b) $A \in \mathbf{H}_n^+ \Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^*AX \in \mathbb{R}_+)$.
 c) $A \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}, X^*AX \in \mathbb{R}^+)$.

◇ 6.5.2 Cho $A \in \mathbf{H}_n$. Chứng minh :

- a) $A \in \mathbf{H}_n^+ \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), M^*AM \in \mathbf{H}_n^+)$.
 b) $A \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), M^*AM \in \mathbf{H}_n^{++})$.

◇ 6.5.3 Chứng minh : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, (A \leq B \Rightarrow \alpha A \leq \alpha B)$.

◇ 6.5.4 Chứng minh : $\forall (A_1, A_2, B_1, B_2) \in (\mathbf{H}_n)^4, \begin{cases} A_1 \leq B_1 \\ A_2 \leq B_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 \leq B_1 + B_2$.

◇ 6.5.5 Cho $p \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_p \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), H = \sum_{k=1}^p A_k^* A_k$.

- a) Chứng minh : $H \in \mathbf{H}_n^+$
 b) Chứng minh : $H = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, p\}, A_k = 0)$.

◇ 6.5.6 Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), H \in \mathbf{H}_n$. Chứng minh :

- a) $A^*HA \in \mathbf{H}_n$
 b) $H \in \mathbf{H}_n^+ \Rightarrow A^*HA \in \mathbf{H}_n^+$.
 c) $\begin{cases} H \in \mathbf{H}_n^{++} \\ A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \end{cases} \Rightarrow A^*HA \in \mathbf{H}_n^{++}$.

◇ 6.5.7 Cho $n, p \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Chứng minh :

- a) $A^*A \in \mathbf{H}_p^+$
 b) $A^*A \in \mathbf{H}_p^{++} \Leftrightarrow \text{rank}(A) = p$.
 Đặc biệt : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), (A^*A \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$.

◇ 6.5.8 Cho $N \in \mathbb{N}^*, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*, H_1 \in \mathbf{H}_{n_1}, \dots, H_N \in \mathbf{H}_{n_N}, H = \begin{pmatrix} H_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_N \end{pmatrix}$,

với $H \in \mathbf{H}_n$, trong đó $n = \sum_{k=1}^N n_k$. Chứng minh :

- a) $H \in \mathbf{H}_n^+ \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, N\}, H_k \in \mathbf{H}_{n_k}^+)$

$$b) H \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, H_k \in \mathbf{H}_{n_k}^{++}).$$

$$\diamond \text{ 6.5.9 Cho } p, q \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{H}_p^+, B \in \mathbf{H}_q^{++}, U \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{C}), H = \begin{pmatrix} A & U \\ U^* & B \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{p+q}.$$

$C = A - UB^{-1}U^*$. Chứng minh :

$$a) H \in \mathbf{H}_{p+q}^+ \Leftrightarrow C \in \mathbf{H}_p^+$$

$$b) H \in \mathbf{H}_{p+q}^{++} \Leftrightarrow C \in \mathbf{H}_p^{++}.$$

$$\diamond \text{ 6.5.10 Cho } p, q \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{H}_p^{++}, B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{C}), C \in \mathbf{H}_q^{++}, M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & C \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p+q}(\mathbb{C}),$$

$$H = M^*M. \text{ Chứng minh : } H \in \mathbf{H}_{p+q}^{++}.$$

$$\diamond \text{ 6.5.11 Chứng minh : } a) \mathbf{H}_n \text{ là đóng trong } \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$$

$$b) \mathbf{H}_n^+ \text{ là đóng trong } \mathbf{H}_n \text{ và trong } \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

$$\diamond \text{ 6.5.12 Cho } n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \text{ ta có : } \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, (0 \leq A \leq B \Rightarrow e^A \leq e^B) ?$$

$$\diamond \text{ 6.5.13 Cho } A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), U = (\operatorname{Re}(a_{ij}))_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), V = (\operatorname{Im}(a_{ij}))_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbb{R}). \text{ Chứng minh :}$$

$$a) A \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow C \in \mathbf{S}_{2n}^{++}$$

$$b) A \in \mathbf{U}_n \Leftrightarrow C \in \mathbf{O}_{2n}(\mathbb{R}).$$

$$\diamond \text{ 6.5.14 Chứng minh : } \forall (H_1, H_2) \in (\mathbf{H}_n^+)^2, (H_1 \sim -H_2 \Rightarrow H_1 = H_2 = 0).$$

$$\diamond \text{ 6.5.15 Cho } M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \chi_M = \prod_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k - X) \text{ là đa thức đặc trưng của nó (trong đó}$$

α_k và β_k là các số thực.), $H = \frac{1}{2}(M + M^*)$, $H' = \frac{1}{2i}(M - M^*)$, λ (tương ứng : μ) là gtr nhỏ nhất (tương ứng : lớn nhất) của H , λ' (tương ứng : μ') là gtr nhỏ nhất (tương ứng : lớn nhất) của H' .

$$\text{Chứng minh : } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} \lambda \leq \alpha_k \leq \mu \\ \lambda' \leq \beta_k \leq \mu' \end{cases}.$$

$$\diamond \text{ 6.5.16 Chứng minh : } \forall H \in \mathbf{H}_n, \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \exists (H_1, H_2) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2, \text{ sao cho}$$

$$H = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2. \text{ Đặc biệt } \mathbb{R} - \text{kgv } \mathbf{H}_n \text{ được sinh bởi } \mathbf{H}_n^{++}.$$

$$\diamond \text{ 6.5.17 Xác định tập các phần tử của } \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \text{ giao hoán với } \mathbf{H}_n, \mathbf{H}_n^+, \mathbf{H}_n^{++}.$$

(Có thể sử dụng bài tập 6.5.16).

$$\diamond \text{ 6.5.18 Chứng minh : } \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(AB - BA) \subset i\mathbb{R} \text{ (xem bài tập 6.1.8).}$$

- ◇ 6.5.19 a) Cho $(A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2$. Chứng minh rằng, nếu A và B có chung một vectơ riêng, thì $AB - BA$ là suy biến.

b) Chứng minh rằng đảo lại là đúng với $n = 2$ và sai với $n \geq 3$.

- ◇ 6.5.20 Cho $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $H = M^*M - MM^*$. Chứng minh : $H \in \mathbf{H}_n^+ \Leftrightarrow M^*M = MM^*$.

- ◇ 6.5.21 Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$.

Chứng minh : $A \in \mathbf{H}_n \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(A))^2 \geq A^*A$. (sử dụng bài tập 6.5.20).

- ◇ 6.5.22 Cho $H \in \mathbf{H}_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các gtr của H . Chứng minh :

a) Với mọi X của $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $X^*X = I$, ta có :

$$\min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \leq X^*HX \leq \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k.$$

$$b) \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k = \inf_{\substack{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X^*X = I}} X^*HX \quad \text{và} \quad \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k = \sup_{\substack{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X^*X = I}} X^*HX.$$

- ◇ 6.5.23 Cho $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $s_1, \dots, s_n$ là các gtr của A^*A . Chứng minh :

a) $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $s_k \geq 0$

$$b) \sum_{k=1}^n s_k = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2.$$

- ◇ 6.5.24' Chứng minh : $\forall (H, H') \in (\mathbf{H}_n^+)^2$, $\operatorname{tr}(H, H') \leq \operatorname{tr}(H) \operatorname{tr}(H')$.

- ◇ 6.5.25 Chứng minh : $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Hermite chính tắc trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. (Sử dụng bài tập 6.5.24).

- ◇ 6.5.26' Cho $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $A_1, \dots, A_p \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh :

$$\left| \operatorname{tr} \left(\prod_{k=1}^p A_k \right) \right|^2 \leq \prod_{k=1}^p \operatorname{tr}(A_k^* A_k).$$

(Sử dụng bài tập 6.5.25).

- ◇ 6.5.27' Cho $H \in \mathbf{H}_n - \{0\}$. Chứng minh : $\operatorname{rank}(H) \geq \frac{(\operatorname{tr}(H))^2}{\operatorname{tr}(H^2)}$.

- ◇ 6.5.28' a) Chứng minh : $\mathbf{H}_n^{++} = \mathbf{H}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Suy ra $\mathbf{H}_n^{++}$ là tập mở của $\mathbf{H}_n^+$. (Có thể sử dụng $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ là tập mở trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, xem bài tập 1.2.22, Tập 3).

c) Chứng minh $\mathbf{H}_n^{++}$ là trù mật trong $\mathbf{H}_n^+$.

◇ 6.5.29* Cho $(A, B) \in (\mathbf{H}_n^+)^2$.

a) Chứng minh : $A \leq B \Rightarrow \begin{cases} \text{tr}(A) \leq \text{tr}(B) \\ \det(A) \leq \det(B) \end{cases}$.

b) Chứng minh : $\left(\begin{cases} A \leq B \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A \in \mathbf{H}_n^{++} \\ A \leq B \\ \det(A) = \det(B) \end{cases} \right) \Rightarrow A = B$.

◇ 6.5.30* Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n^{++}$ thỏa mãn $A \leq B$. Chứng minh : $B^{-1} \leq A^{-1}$.

◇ 6.5.31* Giả sử $U \in \mathbf{U}_n$ và với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$, $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k U^i$. Tìm $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$.

◇ 6.5.32 Cho $H \in \mathbf{H}_n$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $a < b$ và $[a, b] \cap \text{Sp}_{\mathbb{R}}(H) = \emptyset$. Chứng minh:

$$(H - aI_n)(H - bI_n) \in \mathbf{H}_n^+.$$

◇ 6.5.33* Định thức con - Gauss

Cho $A = (a_{ij}) \in \mathbf{H}_n$, với mỗi p thuộc $\{1, \dots, n\}$, ta ký hiệu $A_p = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathbf{H}_p$.

a) α) Chứng minh : $A \in \mathbf{H}_n^+ \Rightarrow (\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) \geq 0)$.

β) Đảo lại của α) có đúng không ?

b) α^*) Chứng minh : $A \in \mathbf{H}_n^{++} \Leftrightarrow (\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) > 0)$.

β) Suy ra $\mathbf{H}_n^{++}$ là tập mở trong $\mathbf{H}_n$.

◇ 6.5.34 Chứng minh : $\forall H \in \mathbf{H}_n^+, \forall U \in \mathbf{U}_n \left| \text{tr}(HU) \right| \leq \text{tr}(H)$.

◇ 6.5.35 Chứng minh $\mathbf{H}_n^{++}$ là tập mở liên thông theo cung của $\mathbf{H}_n$ (xem bài tập 6.5.33 b) β)).

◇ 6.5.36 Chứng minh : $\forall H \in \mathbf{H}_n, e^H \in \mathbf{H}_n^{++}$.

◇ 6.5.37 Cho $H \in \mathbf{H}_n$. Chứng minh tồn tại $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ thỏa mãn : $e^H \in P(H)$ và $H = Q(e^H)$.

◇ 6.5.38 Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n$ thỏa mãn $e^A e^B = e^B e^A$. Chứng minh : $AB = BA$. (Sử dụng bài tập 6.5.37).

◇ 6.5.39 Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ và $P \in \mathbb{C}[X]$ thỏa mãn $P(AA^*) = 0$. Chứng minh : $P(A^*A) = 0$.

◇ 6.5.40* Căn bậc p trong $\mathbf{H}_n^+$.

Chứng minh : $\forall p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \forall H \in \mathbf{H}_n^+, \exists! R \in \mathbf{H}_n^+, H = R^p$.

Ta nói rằng R là căn bậc p của H trong $\mathbf{H}_n^+$ và được viết $R = H^{1/p}$ hoặc $\sqrt[p]{H}$.

Chứng minh rằng $H^{1/p}$ là một đa thức của H .

◇ 6.5.41 Chứng minh : a) $\forall H \in \mathbf{H}_n^+, \exists A \in \mathbf{M}_n, H = A^*A$

b) $\forall H \in \mathbf{H}_n^{++}, \exists A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), H = A^*A$.

◇ 6.5.42* (Phân tích Choleski trong $\mathbf{H}_n^{++}$)

Chứng minh : $\forall H \in \mathbf{H}_n^{++}, \exists T \in \mathbf{T}_{n,n}(\mathbb{C}) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, sao cho $H = T^*T$.

(Sử dụng bài tập 6.5.41b)).

◇ 6.5.43* Cho $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh hai tính chất sau là tương đương :

(i) $\exists H \in \mathbf{H}_n^{++}, M \sim H$

(ii) $\exists (A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2, M = AB$.

◇ 6.5.44* Cho $p, q \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbf{H}_p^{++}, B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{C}), C \in \mathbf{H}_q^{++}, H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{p+q}$.

Giả sử $H \in \mathbf{H}_{p+q}^{++}$.

Chứng minh : a) $\det(H) \leq \det(A)\det(C)$.

b) $\det(H) = \det(A)\det(C) \Leftrightarrow B = 0$.

(Sử dụng các bài tập 6.5.29; 6.5.42).

◇ 6.5.45* Giả sử $A, B, C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{2n}^{++}$. Chứng minh :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \det(H) \leq \det(A)\det(M^*AM + B^*M + M^*B + C),$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AM + B = 0$.

(Sử dụng bài tập 6.5.44).

◇ 6.5.46 Cho $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, H \in \mathbf{H}_n^+, R = H^{\frac{1}{p}}$. Chứng minh : $HM = MH \Leftrightarrow RM = MR$.

◇ 6.5.47* a) Cho $(A, B) \in \mathbf{H}_n^{++} \times \mathbf{H}_n$.

α) Chứng minh AB là ma trận đường chéo (trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$).

β) Chứng minh : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A, B) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow B \in \mathbf{H}_n^{++}$.

b) Cho $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng hai tính chất sau là tương đương :

(i) $\exists (A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2, M = AB$

(ii) M là ma trận đường chéo (trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$) $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

c) Từ đó suy ra $-I_n$ không phải là tích của bốn phần tử của $\mathbf{H}_n^{++}$.

◇ 6.5.48* Chứng minh : a) $\forall (A, B) \in \mathbf{H}_n^{++} \times \mathbf{H}_n, \text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}$

b) $\forall (A, B) \in \mathbf{H}_n^{++} \times \mathbf{H}_n^+, \text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}_+$.

(Sử dụng $A^{\frac{1}{2}}$).

- ◇ 6.5.49* a) Cho $p \in \mathbb{N}^*$, $H_1, \dots, H_p \in \mathbf{H}_n^{++}$, $M_1, \dots, M_p \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh :

$$\left(\sum_{i=1}^p M_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^p H_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^p M_i \right) \leq \sum_{i=1}^p M_i^* H_i^{-1} M_i,$$

và xét trường hợp đẳng thức.

- b) Suy ra : $\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2$, $(A+B)^{-1} \leq \frac{1}{4} (A^{-1} + B^{-1})$ và xét trường hợp đẳng thức.

- ◇ 6.5.50* Cho $H \in \mathbf{H}_n^+$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_N) \in (\mathbb{R}_+)^{N+1}$ sao cho

$$(a_1, \dots, a_N) \neq (0, \dots, 0), \quad P = \sum_{k=0}^N a_k X^k. \text{ Giả sử rằng } P(H) \text{ là giao hoán với } A.$$

Chứng minh rằng H giao hoán với A .

- ◇ 6.5.51* Cho $U, V \in \mathbf{U}_n$ thỏa mãn $U \sim V$. Chứng minh rằng tồn tại $Q \in \mathbf{U}_n$ sao cho $V = QUQ^{-1}$. (Sử dụng bài tập 6.5.40 và 6.5.50).

- ◇ 6.5.52* (Tính tăng của căn bậc hai trong $\mathbf{H}_n^+$).

a) Chứng minh : $\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^+)^2$, $(A \leq B \Rightarrow A^{\frac{1}{2}} \leq B^{\frac{1}{2}})$.

(Bắt đầu bằng trường hợp $B \in \mathbf{H}_n^{++}$. Đặt $R = A^{\frac{1}{2}}$, $S = B^{\frac{1}{2}}$, $U = S - R$; suy ra $SU + US = U^2$, và $U \in \mathbf{H}_n^+$. Sử dụng bài tập 6.5.11 b)).

b) Chứng minh : $\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^+)^2$, $(A < B \Rightarrow A^{\frac{1}{2}} < B^{\frac{1}{2}})$.

- ◇ 6.5.53* a) Cho $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kgvh $f, g \in \mathcal{L}(E)$ thỏa mãn : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|g(x)\|$.

Chứng minh rằng tồn tại $h \in \mathcal{U}(E)$ sao cho $f = h \circ g$.

- b) Chứng minh, với mọi (A, B) thuộc $(\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$:

$$A^*A = B^*B \Leftrightarrow (\exists U \in \mathbf{U}_n, A = UB).$$

- ◇ 6.5.54* Phân tích dạng cực trong $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$

Chứng minh : $\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $\exists! (U, H) \in \mathbf{U}_n \times \mathbf{H}_n^{++}$, $A = UH$.

Ta nói rằng $A = UH$ là phân tích dạng cực của $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

- ◇ 6.5.55* Phân tích dạng cực trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$

Chứng minh : $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists (U, H) \in \mathbf{U}_n \times \mathbf{H}_n^+$, $M = UH$.

Lưu ý rằng, ở đây không thể có tính duy nhất của (U, H) .

Áp dụng : Chứng minh, với mọi (A, B) thuộc $(\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$:

$$A^*A = B^*B \Leftrightarrow (\exists U \in \mathbf{U}_n, A = UB).$$

Xem bài tập 6.5.53.

- ◇ 6.5.56 Chứng minh : $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists (D, U, V) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C}) \times \mathbf{U}_n \times \mathbf{U}_n$, $M = UDV$.

(Sử dụng phân tích dạng cực của M , bài tập 6.5.55).

- ◇ **6.5.57** Chéo hóa trực giao đồng thời một họ các ma trận Hermite giao hoán
Cho I một tập không rỗng, $(H_i)_{i \in I}$ là một họ các phần tử thuộc $\mathbf{H}_n$ từng đôi giao hoán.
Chứng minh rằng tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$ sao cho :

$$\forall i \in I, U^{-1}H_i U \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}).$$

- ◇ **6.5.58** Chứng minh :

a) $\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^+)^2, (AB \in \mathbf{H}_n \Rightarrow AB \in \mathbf{H}_n^+).$

b) $\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2, (AB \in \mathbf{H}_n \Rightarrow AB \in \mathbf{H}_n^{++}).$

(Sử dụng bài tập 6.5.57).

- ◇ **6.5.59** Giả sử $(A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2$ sao cho $AB = BA$. Chứng minh : $0 \leq A \leq B \Rightarrow A^2 \leq B^2$.
(Sử dụng bài tập 6.5.57).

- ◇ **6.5.60*** Cho $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho : $A(A^*A)^k = B$.

- ◇ **6.5.61*** Cho $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Chứng minh rằng $\phi : \mathbf{H}_n^{++} \rightarrow \mathbf{H}_n^{++}$ là một C^1 -vi phôi
 $A \mapsto A^k$

- ◇ **6.5.62*** Định lý Lyapounov

Cho $H \in \mathbf{H}_n^{++}, A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Xét phương trình (1) : $HX + XH = A$ với ẩn $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Chứng minh rằng (1) có một và chỉ một nghiệm.

b) Chứng minh nghiệm của (1) là $X = \int_0^{+\infty} e^{-tH} A e^{-tH} dt$.

c) Từ đó suy ra, nếu $A \in \mathbf{H}_n^+$ (tương ứng $\mathbf{H}_n^{++}$) thì nghiệm của (1) cũng thuộc $\mathbf{H}_n^+$ (tương ứng : $\mathbf{H}_n^{++}$).

- ◇ **6.5.63*** a) Chứng minh $\mathbf{H}_n^{++}$ là lồi, nghĩa là :

$$\forall \lambda \in [0; 1], \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2, \lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathbf{H}_n^{++}.$$

b)* Chứng minh rằng ánh xạ : $\mathbf{H}_n^{++} \rightarrow \mathbf{H}_n^{++}$ là lồi, tức là :

$$A \mapsto A^{-1}$$

$$\forall t \in [0; 1], \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2, (tA + (1 - t)B)^{-1} \leq tA^{-1} + (1 - t)B^{-1}.$$

c) Từ đó suy ra $\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2, (A + B)^{-1} \leq \frac{1}{4}(A^{-1} + B^{-1})$.

xem bài tập 6.5.49 b).

- ◇ **6.5.64*** Cho $(A, B) \in \mathbf{H}_n^{++} \times \mathbf{H}_n$. Chứng minh rằng, nếu AB là lũy linh, thì $B = 0$.

Các bài tập từ 6.5.65 đến 6.5.78 đề cập đến ma trận chuẩn tắc.

- ◇ **6.5.65** Cho $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng ba tính chất sau là đôi một tương đương:

(i) A là chuẩn tắc.

$$(ii) \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{C}), \|AX\| \geq \|A^*X\|$$

$$(iii) \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{C}), \|A^*X\| \geq \|AX\|$$

(trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Hermite thông thường trên $M_{n,1}(\mathbb{C})$).

- ◇ **6.5.66** Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $\operatorname{Im}(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Chứng minh rằng, nếu mọi $\overline{\operatorname{vtr}}$ của $\operatorname{Re}(A)$ đều là $\overline{\operatorname{vtr}}$ của $\operatorname{Im}(A)$, thì A là chuẩn tắc.

- ◇ **6.5.67** Cho $U \in U_n$, $H \in H_n^+$, $M = UH$. Chứng minh rằng M là chuẩn tắc khi và chỉ khi $UH = HU$.
(Sử dụng bài tập 6.5.46).

- ◇ **6.5.68'** Giả sử $A \in M_n(\mathbb{C})$ là ma trận chuẩn tắc. Chứng minh:

$$\exists (U, D) \in U_n \times D_n(\mathbb{C}), A = UDU^{-1}.$$

Như vậy, mọi ma trận chuẩn tắc là chéo hóa được nhờ nhóm unita. Đặc biệt, mọi ma trận unita đều chéo hóa được bởi nhóm unita.

- ◇ **6.5.69** Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng nếu A là chuẩn tắc và lũy linh thì $A = 0$ (Sử dụng bài tập 6.5.68 và 2.3.16)

- ◇ **6.5.70** Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$ là chuẩn tắc, $P \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $(P(A))^k = 0$ thì $P(A) = 0$ (một biến thể của bài tập 6.5.68).

- ◇ **6.5.71** Giả sử $A \in M_n(\mathbb{C})$ là ma trận chuẩn tắc, $m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận chuẩn tắc $B \in M_n(\mathbb{C})$ sao cho $B^m = A$. (Sử dụng bài tập 6.5.68).

- ◇ **6.5.72** Giả sử $A \in M_n(\mathbb{C})$ là ma trận chuẩn tắc. Chứng minh:

$$a) A \in H_n \Leftrightarrow \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}.$$

$$b) A \in U_n \Leftrightarrow \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}.$$

(Sử dụng bài tập 6.5.68).

- ◇ **6.5.73** Giả sử $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ là ma trận chuẩn tắc. Chứng minh rằng ba tính chất sau là đôi một tương đương:

$$(i) \chi_A = \chi_B \quad (ii) \exists U \in U_n, A = UBU^* \quad (iii) A \sim B.$$

(Sử dụng bài tập 6.5.68).

- ◇ **6.5.74** Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng A là chuẩn tắc khi và chỉ khi tồn tại $U \in U_n$ sao cho $A^* = AU$. (Sử dụng bài tập 6.5.68).

- ◇ **6.5.75'** Cho $A \in M_n(\mathbb{C})$ là chuẩn tắc. Chứng minh hai tính chất sau là tương đương:

$$(i) A \text{ là chuẩn tắc.}$$

(ii) Tồn tại ma trận chuẩn tắc $B \in M_n(\mathbb{C})$ mà mọi giá trị riêng của nó đều là giá trị riêng đơn sao cho $AB = BA$. (Sử dụng bài tập 6.5.68).

◇ **6.5.76** Chứng minh : $\forall U \in U_n, \exists H \in H_n, U = e^{iH}$. (Sử dụng bài tập 6.5.68).

◇ **6.5.77*** Chéo hóa trực giao đồng thời của một họ giao hoán các ma trận chuẩn tắc. Cho I là một tập không rỗng, $(A_k)_{k \in I}$ là một họ ma trận chuẩn tắc và đôi một giao hoán của $M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng tồn tại $U \in U_n$, sao cho :

$$\forall k \in I, U^{-1}A_kU \in D_n(\mathbb{C}).$$

Kết quả này bao gồm cả các kết quả của các bài tập 6.5.57 và 6.5.68.

◇ **6.5.78*** Cho I là một tập không rỗng, $(A_i)_{i \in I}$ là một họ ma trận chuẩn tắc và đôi một giao hoán của $M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng tồn tại $H \in H_n$ sao cho, với mọi i thuộc I , tồn

$$\text{tại } P_i \in \mathbb{C}[X] \text{ thỏa mãn : } \begin{cases} \deg(P_i) \leq n-1 \\ A_i = P_i(H) \end{cases}$$

(Sử dụng bài tập 6.5.77).

Bổ sung◇ **C 6.1*** Ma trận đồng dạng với ma trận chuyển vị liên hợp

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng năm tính chất sau đây là đôi một tương đương:

- 1) $A^* \sim A$
- 2) $\exists B \in M_n(\mathbb{R}), A \sim B$
- 3) $\exists H \in \mathbf{H}_n^{++}, A^* = H^{-1}AH$
- 4) $\exists (H_1, H_2) \in (\mathbf{H}_n^{++} \times \mathbf{H}_n) \cup (\mathbf{H}_n \times \mathbf{H}_n^{++}), A = H_1 H_2$
- 5) $\exists (H_1, H_2) \in (\mathbf{H}_n)^2, A = H_1 H_2$.

Để Chứng minh $1 \Rightarrow 2$ và $5 \Rightarrow 1$, ta có thể sử dụng thu gọn Jordan.
Như vậy $5 \Rightarrow 1$ cũng có thể viết dưới dạng:

$$\forall (H_1, H_2) \in (\mathbf{H}_n)^2, H_2 H_1 \sim H_1 H_2.$$

Tài liệu tham khảo: Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*
Cambridge University Press, New York, 1992.

◇ **C 6.2*** Định lý Courant, Fischer và một số hệ quả

Trong toàn bộ phần này, n chỉ một số tự nhiên ≥ 1 .

Với $A \in \mathbf{H}_n$, ta ký hiệu $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ là các giá trị riêng của A theo thứ tự tăng dần:

$$\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$$

(Theo định lý cơ bản 6.5.1, A chéo hóa được và các giá trị riêng đều là thực).

Ta nhắc lại rằng, với $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(M)$ là bán kính phổ của M .

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|.$$

Với $M \in M_n(\mathbb{C})$, ta ký hiệu $\|M\|_2 = (\text{tr}(M^*M))^{\frac{1}{2}}$.

I Lý thuyết Courant và Fischer**I)* Định lý minimax của Courant và Fischer**

Với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, ta ký hiệu $\mathcal{V}_k$ là tập hợp các kgvc k chiều của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Giả sử $A \in \mathbf{H}_n$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Chứng minh:

$$\lambda_k(A) = \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \sup_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X} = \sup_{V \in \mathcal{V}_{n+1-k}} \inf_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X},$$

và các cận này đều đạt được.

Vậy ta có:

$$\lambda_k(A) = \min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X} = \max_{V \in \mathcal{V}_{n+1-k}} \min_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X}.$$

$$\text{Đặc biệt: } \lambda_1(A) = \min_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X} \text{ và } \lambda_n(A) = \max_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X}$$

và như vậy: $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \lambda_1(A) X^* X \leq X^* A X \leq \lambda_n(A) X^* X$. (Xem bài tập 6.5.22)

2) a) Bất đẳng thức H.Weyl

Từ định lý Minimax suy ra các bất đẳng thức sau:

$$\forall A, B \in \mathbf{H}_n, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

b) Từ a) suy ra:

$$1) \forall A, B \in \mathbf{H}_n, \rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$$

$$2) \forall A \in \mathbf{H}_n, \forall B \in \mathbf{H}_n^+, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(A) \leq \lambda_k(A+B)$$

$$3) \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, (A \leq B \Rightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(A) \leq \lambda_k(B)))$$

$$4) \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \rho(A-B) \leq \|A-B\|_2.$$

Theo 4), với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, ánh xạ $\lambda_k: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$ có tính 1-Lipschitz
 $A \mapsto \lambda_k(A)$
 nên liên tục ($\mathbf{H}_n$ được trang bị $\|\cdot\|_2$).

c) Chứng minh rằng ánh xạ $\lambda_1: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$ là lõm và ánh xạ $\lambda_n: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$ là
 $A \mapsto \lambda_1(A)$ $A \mapsto \lambda_n(A)$
 lồi, tức là:

$$\forall \theta \in [0, 1], \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, \begin{cases} \lambda_1(\theta A + (1-\theta)B) \geq \theta \lambda_1(A) + (1-\theta) \lambda_1(B) \\ \lambda_n(\theta A + (1-\theta)B) \leq \theta \lambda_n(A) + (1-\theta) \lambda_n(B). \end{cases}$$

3)* Sự quyện vào nhau của các giá trị riêng khi nhiều có hạng ≤ 1

Ở đây ta giả thiết $n \geq 2$.

Cho $A, H \in \mathbf{H}_n$ sao cho $\text{rank}(H) \leq 1$. Chứng minh:

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \begin{cases} \lambda_k(A+H) \leq \lambda_{k+1}(A) \\ \lambda_k(A) \leq \lambda_{k+1}(A+H) \end{cases}.$$

4) Nhiều có hạng $\leq r$

Giả sử $r \in \{1, \dots, n\}$, $A, B \in \mathbf{H}_n$ sao cho $\text{rank}(B) \leq r$.

Chứng minh:

$$\forall k \in \{1, \dots, n-r\}, \begin{cases} \lambda_k(A+B) \leq \lambda_{k+r}(A) \\ \lambda_k(A) \leq \lambda_{k+r}(A+B) \end{cases}.$$

(Sử dụng 3)).

5) a) Giả sử $U \in \mathbf{U}_n$, $U_1, \dots, U_n$ là các cột của U , $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$,

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), A = UDU^*, r \in \{1, \dots, n\}, B = \sum_{k=n-r+1}^n \lambda_k U_k U_k^*.$$

Chứng minh: $\lambda_n(A-B) = \lambda_{n-r}^+$, trong đó ta đã ký hiệu,

$$x^+ = \text{Max}(x, 0) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}, \text{ với mỗi } x \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$

b) Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n$, $(j, k) \in \{1, \dots, n\}^2$. Chứng minh:

$$\begin{cases} \lambda_{j+k-n}(A+B) \leq (\lambda_j(A))^+ + (\lambda_k(B))^+ & \text{nếu } j+k \geq n+1 \\ \lambda_{j+k-1}(A+B) \geq -(\lambda_j(A))^- - (\lambda_k(B))^- & \text{nếu } j+k \leq n+1 \end{cases},$$

trong đó, $x^- = \text{Max}(-x, 0) = (-x)^+$, với mỗi x thuộc $\mathbb{R}$.

c) Từ đó suy ra:

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(A+B) \leq \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=k+1}} \left((\lambda_i(A))^+ + (\lambda_j(B))^+ \right).$$

6)* Một quyện vào nhau khác của giá các trị riêng

Giả sử $A \in \mathbf{H}_n, C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), a \in \mathbb{R}, A' = \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & a \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{n+1}$. Chứng minh:

$$\lambda_1(A') \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A') \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \lambda_n(A') \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_{n+1}(A').$$

7) a) Giả sử $A \in \mathbf{H}_n, r \in \{1, \dots, n\}$, $\hat{A}$ là một ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ r dòng và r cột cùng chỉ số (như vậy $\hat{A} \in \mathbf{H}_{n-r}$). Chứng minh:

$$\forall k \in \{1, \dots, r\}, \lambda_k(A) \leq \lambda_k(\hat{A}) \leq \lambda_{k+r}(A).$$

(Sử dụng 6)).

b) Định lý tách Poincaré

Giả sử $A \in \mathbf{H}_n, r \in \{1, \dots, n\}, (U_1, \dots, U_r)$ là một họ trực giao của r các phần tử thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), U = (U_1, \dots, U_r) \in \mathbf{M}_{n,r}(\mathbb{C}), B = U^* A U \in \mathbf{M}_r(\mathbb{C})$.

Chứng minh: $\lambda_k(A) \leq \lambda_k(B) \leq \lambda_{n+k-r}(A)$, với $\forall k \in \{1, \dots, r\}$.

c) Suy ra, với mỗi A thuộc $\mathbf{H}_n$ và mọi r thuộc $\{1, \dots, n\}$:

$$\begin{cases} \lambda_1(A) + \dots + \lambda_r(A) = \min_{\substack{U \in \mathbf{M}_{n,r}(\mathbb{C}) \\ U^* U = I_r}} \text{tr}(U^* A U) \\ \lambda_{n-r+1}(A) + \dots + \lambda_n(A) = \max_{\substack{U \in \mathbf{M}_{n,r}(\mathbb{C}) \\ U^* U = I_r}} \text{tr}(U^* A U). \end{cases}$$

Ta thu được gì, khi $r = n$?

II Mở đầu về lý thuyết làm trội

Giả sử $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta nói rằng $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ làm trội $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \min_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\sum_{j=1}^k \beta_{i_j} \right) \geq \min_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{i_j} \right), \\ \beta_1 + \dots + \beta_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \end{cases}$$

Giả sử $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ và $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$, khi đó $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ làm trội $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \alpha_1 \leq \beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} \leq \beta_1 + \dots + \beta_{n-1} \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n. \end{cases}$$

1) Định lý Schur

Giả sử $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbf{H}_n$. Chứng minh rằng $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ làm trội $(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$. (Chứng minh bằng quy nạp theo n và sử dụng phần I, 7, c))

2) Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n$. Ta ký hiệu $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$, và cũng như vậy $\lambda(B)$ và cho $\lambda(A+B)$.

Chứng minh rằng $\lambda(A+B)$ làm trội $\lambda(A) + \lambda(B)$. (Sử dụng I, 7, a)).

III Các giá trị đặc biệt của một ma trận vuông

Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Ta gọi là các giá trị đặc biệt của A , các số thực ký hiệu là $s_1(A), \dots, s_n(A)$ và được xác định bởi:

$$s_k(A) = (\lambda_{n+1-k}(A^*A))^{\frac{1}{2}}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Nói cách khác, $(s_1(A))^2, \dots, (s_n(A))^2$ là các trị riêng của ma trận Hermite dương A^*A , được xếp theo thứ tự tăng (và $s_k(A) \geq 0$).

1) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Chứng minh (với các ký hiệu $\mathcal{V}_k$ của I 1)):

$$s_k(A) = \min_{X \in \mathcal{V}_{n+1-k}} \max_{X \in \mathcal{V}-\{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} = \max_{X \in \mathcal{V}_k} \min_{X \in \mathcal{V}-\{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}.$$

(Sử dụng I, I)).

2) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\hat{A}$ là một ma trận có được từ ma trận A bằng cách bỏ một hàng và một cột. Chứng minh:

$$s_1(A) \geq s_1(\hat{A}) \geq s_2(A) \geq s_2(\hat{A}) \geq \dots \geq s_{n-1}(\hat{A}) \geq s_n(A).$$

(Sử dụng I, 7), a)).

3) a) Với mỗi M thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, ta ký hiệu $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^* & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm trị riêng của $\tilde{M}$ theo trị riêng của M^*M .

b) Giả sử $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Chứng minh rằng, với mỗi (i, j) của $\{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i + j \leq n + 1$, ta có:

$$s_{i+j-1}(A+B) \leq s_i(A) + s_j(B).$$

(Sử dụng a, và I 5), b)).

$$\text{Đặc biệt: } \begin{cases} s_1(A+B) \leq s_1(A) + s_1(B) \\ s_n(A+B) \leq \min\{s_n(A) + s_1(B), s_1(A) + s_n(B)\}. \end{cases}$$

Có thể có: $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $s_k(A+B) \leq s_k(A) + s_k(B)$ hay không?

4) Giả sử $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$. Chứng minh:

$$\lambda_{n+1-k}(H) \leq s_k(A), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

5) a) * Giả sử $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i + j \leq n + 1$. Chứng minh:

$$s_{i+j-1}(AB) \leq s_i(A)s_j(B).$$

(Ta có thể sử dụng dạng phân cực của AB trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, xem bài tập 6.5.55)

b) Ta có thể khẳng định rằng, với mọi A, B thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, AB và BA có cùng giá trị đặc biệt hay không (nếu $n \geq 2$)?

Chương 7

Bổ sung đại số đại cương

Chương 7 này dành cho sinh viên chuyên ngành Toán - Lý

7.1 Nhóm

7.1.1 Nhóm $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Ta nhắc lại rằng $(\mathbb{Z}, +)$ là một nhóm sinh bởi 1.

♦ Định lý 1

Các nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$ là $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ký hiệu $n\mathbb{Z} = \{nx; x \in \mathbb{Z}\}$, $n\mathbb{Z}$ là một nhóm con của $\mathbb{Z}$ được sinh bởi n .

Chứng minh :

Rõ ràng rằng, với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ là một nhóm con của $\mathbb{Z}$.

Đảo lại, giả sử G là một nhóm con của $\mathbb{Z}$.

Nếu $G = \{0\}$, thì $G = 0\mathbb{Z}$.

Vậy ta giả sử $G \neq \{0\}$.

Tồn tại $a \in G$ sao cho $a \neq 0$. Nếu $a > 0$, thì $G \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$. Nếu $a < 0$, thì $-a \in G$, nên

$G \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$.

Như vậy $G \cap \mathbb{N}^*$ là một tập con không rỗng của $\mathbb{N}^*$, do đó phần tử nhỏ nhất được ký hiệu là

n . Ta chứng minh $G = n\mathbb{Z}$.

• Vì $n \in G$, hiển nhiên $n\mathbb{Z} \subset G$.

• Giả sử $a \in G$. Bằng phép chia Euclide a cho n , tồn tại $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho :

$a = nq + r$ và $0 \leq r < n$. Khi đó $r = a - nq \in G$ và $0 \leq r < n$, và từ định nghĩa của n suy ra $r = 0$, và như vậy $a = nq \in n\mathbb{Z}$.

Điều này chứng tỏ $G = n\mathbb{Z}$.

Ta nhắc lại các Định nghĩa và Mệnh đề 4.1.2, Tập 5.

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$; ta nói rằng a đồng dư với b

modulo n , ký hiệu là $a \equiv b \pmod{n}$ (hay $a \equiv b$) khi và chỉ khi $b - a$ chia hết cho n .

Như vậy : $a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|b-a \Leftrightarrow b-a \in n\mathbb{Z}$.

♦ **Mệnh đề 1**

Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$, quan hệ $\equiv [n]$ là một quan hệ tương đương trong $\mathbb{Z}$.

♦ **Ký hiệu**

Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta ký hiệu $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ thay cho $\mathbb{Z}/\equiv [n]$.

Với mỗi x thuộc $\mathbb{Z}$, ta ký hiệu $\hat{x}$ (hay $\bar{x}$, hoặc $\dot{x}$) là lớp của x trong $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$:

$$\hat{x} = \{y \in \mathbb{Z}, x \equiv y[n]\} = \{x + \lambda n; \lambda \in \mathbb{Z}\} = \{x\} + \lambda\mathbb{Z}.$$

Ta cũng có thể ký hiệu $x \bmod n$ là lớp tương đương của x modulo n . Khi đó rõ ràng (với phép chia Euclide cho n) $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ là một tập hữu hạn có n phần tử, và rằng :

$$\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}.$$

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$. Với mọi (a, b, c, d) thuộc $\mathbb{Z}^4$, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv b \\ c \equiv d \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} n \\ n \end{array} \right] \Rightarrow a+c \equiv b+d \quad [n]$$

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$.

Cho $(\xi, \zeta) \in (\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z})^2$; tồn tại $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho $\xi = \hat{x}$ và $\zeta = \hat{y}$. Nếu $(x', y') \in \mathbb{Z}^2$ là một cặp khác thỏa mãn $\xi = \hat{x'}$ và $\zeta = \hat{y'}$ thì $\widehat{x+y} = \widehat{x'+y'}$.

Ta cũng có thể định nghĩa một luật hợp thành trong trên $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$, ký hiệu $\hat{+}$, hay còn ký hiệu $+$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}.$$

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

♦ **Mệnh đề 3** Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$.

- $(\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}, +)$ là một nhóm giao hoán.
- Ánh xạ $p_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ là một toàn cấu nhóm, và được gọi là toàn cấu chính tắc.

Nhận xét :

1) $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ được sinh bởi $\hat{1}$.

2) $\text{Ker}(p_n) = n\mathbb{Z}$ và $\text{Im}(p_n) = \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$.

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$. Ta tìm các **phần tử sinh của nhóm** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tức là các phần tử ξ của $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ thỏa mãn $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \xi \rangle$.

Giả sử $\xi \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $\xi = \hat{k}$.

Vì $\hat{1}$ là một phần tử sinh của $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, bằng cách sử dụng Định lý Bezout (xem Định lý 1,

4.3.2, Tập 5), ta có :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \xi \rangle &\Leftrightarrow \hat{1} \in \langle \xi \rangle \Leftrightarrow (\exists \zeta \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \hat{1} = \zeta \xi) \\ &\Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}, 1 = u\hat{k}) \Leftrightarrow (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, 1 - uk = vn) \Leftrightarrow \text{UCLN}(k, n) = 1.\end{aligned}$$

Ta tóm tắt kết quả khảo sát trên bằng :

♦ Mệnh đề 4

Các phần tử sinh của $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ là $\hat{k}$, với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \wedge n = 1$.

Nhận xét :

Bằng cách sử dụng số **chỉ Euler** φ (bài tập 4.4.75, Tập 5), số các phần tử sinh của $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là $\varphi(n)$.

VÍ DỤ :

Các phần tử sinh của nhóm $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ là $\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}$.

Các nhóm đơn

1) Giả sử $(G, \cdot)$ là một nhóm, $a \in G$.

Xét ánh xạ $f_a: \mathbb{Z} \rightarrow G$, trong đó :

$$a^k = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(k \text{ lần})} & \text{nếu } k \in \mathbb{N}^* \\ e & \text{(phần tử trung hoà của } G) \text{ nếu } k = 0 \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{(-k \text{ lần})} & \text{nếu } k \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$$

Rõ ràng : $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2, a^k a^l = a^{k+l}$,

và như vậy f_a là một đồng cấu từ nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ vào nhóm $(G, \cdot)$.

Hạt nhân $\text{Ker}(f_a) = \{k \in \mathbb{Z}, a^k = e\}$ là một nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$. Theo Định lý 1,

tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\text{Ker}(f_a) = n\mathbb{Z}$.

Đặc biệt, f_a là đơn ánh khi và chỉ khi $n = 0$.

Mặt khác $\text{Im}(f) = \{a^k; k \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$.

Xét thu hẹp của f_a lên $\text{Im}(f_a)$ $g_a: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Im}(f_a)$.

$$k \mapsto a^k$$

Một mặt, g_a là toàn ánh (theo định nghĩa), mặt khác $\text{Ker}(g_a) = \text{Ker}(f_a) = n\mathbb{Z}$.

Nếu $\text{Ker}(f_a) = \{0\}$, thì g_a là đẳng cấu từ $\mathbb{Z}$ lên $\langle a \rangle$.

Giả sử $\text{Ker}(f_a) \neq \{0\}$, khi đó $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $\text{Im}(f_a)$ là một nhóm đẳng cấu với $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Với mọi ξ thuộc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $\xi = \hat{k} = p_n(k)$.

Nếu hai phần tử k, k' thuộc $\mathbb{Z}$ thỏa mãn $\xi = \hat{k} = \hat{k}'$, thì $k - k'$ chia hết cho n , nên tồn tại

$q \in \mathbb{Z}$ sao cho $k' = k + qn$, và như vậy: $a^{k'} = a^{k+qn} = a^k(a^n)^q = a^k e^q = a^k$.

Điều này chứng tỏ rằng, ta có thể định nghĩa một ánh xạ $\theta_a: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$.

$$\xi = \hat{k} \mapsto a^k$$

- θ_a là một đồng cấu nhóm vì với mọi (k, l) thuộc $\mathbb{Z}^2$:

$$\theta_a(\widehat{k+l}) = \theta_a(\widehat{k+l}) = a^{k+l} = a^k a^l = \theta_a(\hat{k}) \theta_a(\hat{l}).$$

- θ_a là một đơn ánh vì với mọi k thuộc $\mathbb{Z}$:

$$\hat{k} \in \text{Ker}(\theta_a) \Leftrightarrow \theta_a(\hat{k}) = e \Leftrightarrow a^k = e \Leftrightarrow k \in \text{Ker}(f_a) = n\mathbb{Z} \Leftrightarrow \hat{k} = \hat{0}.$$

- θ_a là một toàn ánh vì với mọi u thuộc $\langle a \rangle$, tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$u = a^k = \theta_a(\hat{k}).$$

Tóm tắt kết quả khảo sát trên:

♦ **Định lý 2** Giả sử $(G, \cdot)$ là một nhóm $a \in G$.

1) Ánh xạ $f_a: \mathbb{Z} \rightarrow G$ là một đồng cấu từ nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ vào $(G, \cdot)$.
 $k \mapsto a^k$

Tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\text{Ker}(f_a) = n\mathbb{Z}$; và $\text{Im}(f_a) = \langle a \rangle$.

2) • Nếu $\text{Ker}(f_a) = \{0\}$, thì $\mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$ là một đẳng cấu nhóm từ $(\mathbb{Z}, +)$ lên nhóm

$$k \mapsto a^k$$

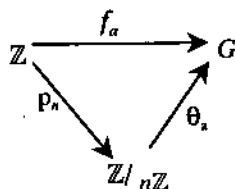
con của G sinh bởi a .

- Nếu $\text{Ker}(f_a) \neq \{0\}$, thì tồn tại $n \in \mathbb{Z}^*$ sao cho $\text{Ker}(f_a) = n\mathbb{Z}$. Khi đó

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle$ là một đẳng cấu từ nhóm $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ lên nhóm con của G

$$\hat{k} \mapsto a^k,$$

được sinh bởi a .



Nhận xét:

1) Lược đồ bên đây là giao hoán, tức là:

$$\theta_a \circ p_n = f_a.$$

2) Khảo sát trên là trường hợp đặc biệt của sự phân tích chính tắc một đồng cấu nhóm (xem C.2.2 H 4) Ví dụ, Tập 5).

♦ **Định nghĩa 2** Một nhóm G được gọi là đơn khi và chỉ khi nó có một phần tử sinh, tức là khi và chỉ khi tồn tại $a \in G$ thỏa mãn $G = \langle a \rangle$.
 Một nhóm G được gọi là cyclic khi và chỉ khi G là đơn và hữu hạn.

Định lý sau đây được suy ra ngay từ Định lý 2.

◆ **Định lý 3 (Phân loại các nhóm đơn)**

Giả sử $(G, \cdot)$ là một nhóm đơn.

- Nếu G là vô hạn, thì G đẳng cấu với $\mathbb{Z}$. Cụ thể hơn, với mọi phần tử sinh a của G , ánh xạ $\mathbb{Z} \rightarrow G$ là một đẳng cấu nhóm.

$$k \mapsto a^k$$
- Nếu G là hữu hạn, thì G đẳng cấu với $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, trong đó $n = \text{Card}(G)$. Cụ thể hơn, với mọi phần tử sinh a của G , ánh xạ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ là một đẳng cấu nhóm.

$$k \mapsto a^k$$

VÍ DỤ :

1) $G = \{2^k, k \in \mathbb{Z}\}$ là một nhóm đơn vô hạn, và $k \mapsto 2^k$ là một đẳng cấu từ $\mathbb{Z}$ lên G .

2) Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ (là nhóm các căn bậc n của 1 trong $\mathbb{C}$) là một nhóm đẳng

cấu đối với $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bởi : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_n$

$$k \mapsto \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

7.1.2 Nhóm, sự tác động từ một nhóm lên một tập hợp

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên.

- ◆ **Mệnh đề - Định nghĩa 1** Giả sử $(G, \top)$, $(G', \perp)$ là hai nhóm. Bằng cách trang bị trên $G \times G'$ một luật hợp thành trong $*$ được định nghĩa bởi :
- $$\forall (x, x') \in G \times G', \forall (y, y') \in G \times G', (x, x') * (y, y') = (x \top y, x' \perp y'), \text{ khi đó}$$
- $G \times G'$ là một nhóm đối với $(*)$, được gọi **nhóm tích của G và G'** .

Mệnh đề - Định nghĩa trên có thể mở rộng cho trường hợp một họ các nhóm $(G_i)_{i \in I}$. ■

- ◆ **Định nghĩa 1** Giả sử G là một nhóm, $A \in \mathfrak{P}(G)$. Ta nói rằng A là một **tập sinh** của G khi và chỉ khi : $G = \langle A \rangle$.

Ta nhắc lại (xem Định nghĩa 2, 2.2.2, Tập 5) rằng:

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{H \text{ nc của } G \\ A \subset H}} H.$$

- ◆ **Định nghĩa 2** Ta gọi **tác động** (hay : **phép toán**) từ một nhóm $(G, \cdot)$ lên một tập E mọi ánh xạ $G \times E \rightarrow E$ thỏa mãn :
- $$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

$$\begin{cases} (1) & \forall (g, h) \in G^2, \forall x \in E, \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \\ (2) & \forall x \in E, \quad e \cdot x = x \end{cases}$$

(trong đó e là phần tử trung hoà của G).

Cho tới hết § 7.1.2 này $(G, \cdot)$ là một nhóm, E là một tập hợp.

1) Giả sử $G \times E \rightarrow E$ là một phép toán từ nhóm G lên E .
 $(g, x) \mapsto g \cdot x$

Với mỗi g thuộc G , xét $\varphi_g: E \rightarrow E$.
 $x \mapsto g \cdot x$

Theo (1) (áp dụng cho g và g^{-1}) và (2), ta có:

$$\forall g \in G, \quad \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_e = \text{Id}_E,$$

và như vậy φ_g là song ánh có ánh xạ ngược $\varphi_{g^{-1}}$.

Ký hiệu $\mathfrak{S}(E)$ tập hoán vị của E , tức là tập hợp các song ánh từ E lên E . Rõ ràng $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ là một nhóm.

Xét ánh xạ $\phi: G \rightarrow \mathfrak{S}(E)$.
 $g \mapsto \varphi_g$

Theo (1), $\forall (g, h) \in G^2$, $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$, như vậy ϕ là một đồng cấu nhóm.

2) Đảo lại, xét một đồng cấu nhóm $\phi: G \rightarrow \mathfrak{S}(E)$ và, với mọi (g, x) thuộc $G \times E$, ta ký hiệu $g \cdot x = (\phi(g))(x)$. Khi đó ta có:

- $\forall g, h \in G, \forall x \in E, (gh) \cdot x = (\phi(gh))(x) = (\phi(g) \circ \phi(h))(x) = \phi(g)((\phi(h))(x)) = \phi(g)(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x).$
- $\forall x \in E, e \cdot x = (\phi(e))(x) = \text{Id}_E(x) = x.$

Điều này chứng tỏ rằng, ánh xạ $(g, x) \mapsto g \cdot x = (\phi(g))(x)$ là một phép toán từ G lên E .

Ta tóm tắt khảo sát trên:

♦ **Mệnh đề 2** Giả sử $(G, \cdot)$ là một nhóm, E là một tập hợp.

Ánh xạ cho tương ứng mỗi một phép toán $G \times E \rightarrow E$ từ nhóm G lên tập E với đồng cấu nhóm $G \rightarrow \mathfrak{S}(E)$ là một song ánh từ tập hợp các phép toán từ nhóm G lên E vào tập các đồng cấu nhóm từ G vào $(\mathfrak{S}(E), \circ)$.

♦ **Định nghĩa 3** Giả sử $G \times E \rightarrow E$ là một phép toán từ nhóm G lên một tập E . Với mỗi x thuộc E , ta gọi tập hợp $\{g \cdot x; g \in G\}$ là quỹ đạo của x dưới G .

Nhận xét:

Giả sử E là một tập không rỗng, $\mathfrak{S}(E)$ là tập các hoán vị của E , G là một nhóm con của $(\mathfrak{S}(E), \circ)$; G tác động lên E bởi phép toán $G \times E \rightarrow E$.
 $(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$

VÍ DỤ :

1) Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$; mỗi nhóm con G của nhóm đối xứng $\mathfrak{S}(E)$ tác động lên F_n bởi phép toán $G \times F_n \rightarrow F_n$.
 $(\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$

Với $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ cố định và G là nhóm xíc-líc sinh bởi $\sigma : G = \{\sigma^i, i \in \mathbb{Z}\}$, quỹ đạo của một phần tử k thuộc F_n dưới G là tập $\{k, \sigma(k), \sigma^2(k), \dots\}$ và tập hợp này hữu hạn.

2) Giả sử E là mặt phẳng affine Euclide thông thường, $O \in E$, G là nhóm các phép quay quanh tâm O : G tác động lên E bởi phép toán $G \times E \rightarrow E$. Với $(g, M) \mapsto g(M)$ mỗi M thuộc E , quỹ đạo của M dưới G là một vòng tròn tâm O đi qua M .

Nhận xét :

Giả sử $G \times E \rightarrow E$ là một phép toán từ nhóm G lên một tập E . Quan hệ $\mathcal{R}$ xác định

$$(g, x) \mapsto g.x$$

trong E được định nghĩa bởi :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (\exists g \in G, y = g.x)$$

là một quan hệ tương đương trong E . Với mọi x thuộc E , lớp của x modulo $\mathcal{R}$ là quỹ đạo của x dưới G . Các quỹ đạo của các phần tử thuộc E lập thành một phân hoạch của E . ■

Độc giả sẽ tìm thấy Định lý Lagrange sau đây và một vài ứng dụng của nó, C2.1, Tập 5:

Nếu G là một nhóm hữu hạn, thì với mọi nhóm con H của G , bản số của G chia hết cho bản số của H .

Bài tập

♦ 7.1.1 Giả sử G, G' là hai nhóm, H (tương ứng : H') là một nhóm con của G (tương ứng : G'). Chứng minh rằng $H \times H'$ là một nhóm của $G \times G'$.

♦ 7.1.2 Cho $(G, \cdot)$ là một nhóm, E một tập. $G \times E \rightarrow E$ là phép toán từ G lên E , $a \in E$.
 $(g, a) \mapsto g.a$

Chứng minh rằng $\{g \in G, g.a = a\}$, là một nhóm con của G và được gọi là tập ổn định của a .

♦ 7.1.3 Ta ký hiệu E là mặt phẳng affine Euclide, $O \in E$, ABC là một tam giác đều tâm O , $A \neq O$.

a) Chứng minh rằng nhóm G của các phép đẳng cự của E , mà $\{A, B, C\}$ bất biến, có sáu phần tử. Hãy chỉ ra các phần tử đó.

b) Với mỗi M thuộc E , G tác động lên E bởi : $G \times E \rightarrow E$. Hãy xác định quỹ đạo của M dưới G và chỉ ra bản số của các quỹ đạo này.
 $(g, M) \mapsto g(M)$

7.2 Vành

7.2.1 Idean của một vành giao hoán

♦ **Định nghĩa 1** Giả sử A là một vành giao hoán, $I \in \mathfrak{P}(A)$.

Ta nói rằng I là một **idean** của A khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} I \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in I^2, x + y \in I \\ \forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I. \end{cases}$$

Chú ý rằng : $x - y = x + (-1_A)y$, nên Mệnh đề sau đây là hiển nhiên :

♦ **Mệnh đề 1** Một tập I của vành giao hoán A là một idean của A khi và chỉ khi : $\begin{cases} I \text{ là một nhóm con của } A \text{ đối với phép } + \\ \forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I. \end{cases}$

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 2** Giả sử A là một vành giao hoán. Với mọi x thuộc A , tập $xA = Ax = \{ax; a \in A\}$ là một idean của A , và được gọi là **idean sinh bởi x** .

Chứng minh :

$$1) x = 1x \in Ax$$

$$2) \forall (a, b) \in A^2, ax + bx = (a + b)x \in Ax$$

$$3) \forall a \in A, \forall \alpha \in A, \alpha(ax) = (\alpha a)x \in Ax.$$

Nhắc lại rằng (xem 2.3.5, Tập 5) vành A được gọi là **vành nguyên** khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A \text{ là giao hoán} \\ \forall (x, y) \in A^2, (xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ hoặc } y = 0)) \\ A \neq \{0\}. \end{cases}$$

♦ **Định nghĩa 2** Giả sử A là một vành nguyên, $(x, y) \in A^2$. Ta nói y chia hết cho x , và ký hiệu là $x|y$, khi và chỉ khi tồn tại $a \in A$ sao cho $y = ax$.

$$\text{Vậy} \quad x|y \Leftrightarrow (\exists a \in A, y = ax).$$

♦ **Mệnh đề 3** Giả sử A là một vành nguyên, $(x, y) \in A^2$. Ta có :

$$x|y \Leftrightarrow Ay \subset Ax.$$

Chứng minh:

1) Nếu $x|y$, thì tồn tại $a \in A$ sao cho $y = ax$, từ đây:

$$\alpha y = \alpha(ax) = (\alpha a)x \in Ax, \quad \text{với mọi } \alpha \text{ thuộc } A.$$

Điều này chứng tỏ: $Ay \subset Ax$.

2) Đảo lại, nếu $Ay \subset Ax$, vì $y = 1y \in Ay \subset Ax$, nên tồn tại $a \in A$ sao cho $y = ax$, và như vậy $x|y$. ■

Giả sử A là một vành nguyên. Ký hiệu U là tập hợp các phần tử khả nghịch của A :

$$U = \{u \in A; \exists u' \in A, uu' = 1\}.$$

Rõ ràng U là một nhóm đối với phép nhân, được gọi là **nhóm unita** của A .

1) Giả sử $(x, y) \in A^2$. Ta có: $Ax = Ay \Leftrightarrow (\exists u \in U, y = ux)$. Thực vậy:

• Nếu $Ax = Ay$, thì $y = 1y \in Ay = Ax$ và $x = 1x \in Ax = Ay$. Vậy tồn tại $(u, v) \in A^2$ sao cho $y = ux$ và $x = vy$, tiếp đó $x = v(ux) = (vu)x$, $x(1-vu) = 0$, vì A là vành nguyên nên $x = 0$ hay $uv = 1$. Nếu $x = 0$, thì $y = 0$ và ta có thể chọn $u = 1$.

• Đảo lại, nếu tồn tại $u \in U$ sao cho $y = ux$, thì $y \in Ax$, vậy $Ay \subset Ax$ và tồn tại $u' \in A$ sao cho $uu' = 1$, từ đây $x = u'y \in Ay$, nên $Ax \subset Ay$, và cuối cùng $Ax = Ay$.

Hai phần tử x, y của A được gọi là **liên kết** với nhau khi và chỉ khi: $\exists u \in U, y = ux$.

2) Một ideal I của A được gọi là **ideal chính** nếu tồn tại $x \in A$ sao cho $I = Ax$. Một vành nguyên A được gọi là **vành chính** khi và chỉ khi mọi ideal của A là ideal chính.

Giả sử rằng A là một vành chính và $(x, y) \in A^2$.

• Vì $Aa + Ab$ là một ideal của A , nên tồn tại $d \in A$ sao cho $Aa + Ab = Ad$, do đó:

$$\begin{cases} d|a \text{ và } d|b \\ \forall x \in A, ((x|a \text{ và } x|b) \Rightarrow x|d) \end{cases}$$

Phần tử d như vậy được gọi là **ƯCLN** của a và b , và được xác định sai khác nhau một nhân tử thuộc U .

Tồn tại $(u, v) \in A^2$, sao cho $ua + vb = d$.

• Tương tự, vì $Aa \cap Ab$ là một ideal của A , tồn tại $m \in A$ sao cho $Aa \cap Ab = Am$.

Ta có:

$$\begin{cases} a|m \text{ và } b|m \\ \forall y \in A, ((a|y \text{ và } b|y) \Rightarrow m|y) \end{cases}$$

Một phần tử m như vậy được gọi là **BCNN** của a và b , và được xác định sai khác một nhân tử thuộc U .

Bài tập

◇ 7.2.1 Cho một vành giao hoán A và một ideal I của A . Chứng minh: $1 \in I \Leftrightarrow I = A$.

◇ 7.2.2 Cho một vành giao hoán A và $(I_k)_{k \in K}$ là một họ các ideal của A sao cho:

$$\forall (i, j) \in K^2, \exists k \in K, I_i \cup I_j \subset I_k.$$

Chứng minh rằng $\bigcup_{k \in K} I_k$ là một ideal của A .

◇ 7.2.3 Cho một vành giao hoán A và e là một phần tử lũy đẳng của A ($e^2 = e$).

a) Chứng minh rằng, tập hợp $J = \{x \in A; xe = 0\}$ là một ideal của A , và được gọi là ideal triệt tiêu e .

b) Đặt $I = Ae$, chứng minh $I + J = A$ và $I \cap J = \{0\}$.

c) Chứng minh rằng, với mọi ideal D của A : $(D \cap I) + (D \cap J) = D$.

◇ 7.2.4 Cho một vành giao hoán A và một ánh xạ $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ sao cho:

$$\begin{cases} \forall x \in A, & (f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0) \\ \forall (x, y) \in A^2, & f(xy) = f(x)f(y) \\ \forall (x, y) \in A^2, & f(x+y) \leq \text{Max}\{f(x), f(y)\}. \end{cases}$$

Đặt $F = \{x \in A; f(x) \leq 1\}$ và $U = \{x \in A; f(x) < 1\}$.

Chứng minh F là một vành con của A và U là một ideal của F .

◇ 7.2.5 Cho $E \subset \mathbb{R}$ và $A = \mathbb{R}^E$ được trang bị các luật thông thường.

Với $x \in E$, ta ký hiệu $I_x = \{f \in A; f(x) = 0\}$.

a) Chứng minh rằng, với mỗi x thuộc E , I_x là một ideal của A .

b) Chứng minh rằng, nếu $(x_1, x_2) \in E^2$ và $x_1 \neq x_2$, thì $I_{x_1} + I_{x_2} = A$.

◇ 7.2.6 Cho một tập hợp E và Δ là hiệu đối xứng.

a) Chứng minh rằng $(\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap)$ là một vành giao hoán. Ta ký hiệu $+, \dots, 0, 1$ tương ứng thay cho $\Delta, \cap, \emptyset, E$. Chứng minh:

$$\forall (X, Y) \in (\mathfrak{P}(E))^2, \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = X + 1 \\ X \cup Y = X + Y + XY \end{array} \right\}, \text{ trong đó } \overline{X} = \mathfrak{C}_E(X).$$

b) Chứng minh: nếu E có ít nhất hai phần tử thì $(\mathfrak{P}(E), +, \cdot)$ không phải là vành nguyên.

c) Chứng minh rằng $\mathfrak{P}(E)$ là một vành chính khi và chỉ khi E hữu hạn.

◇ 7.2.7 Giả sử A là một vành chính, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy tăng (theo quan hệ bao hàm) các ideal của A . Chứng minh rằng $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy dừng.

◇ 7.2.8 Chứng minh rằng, tập hợp các phần tử lũy linh của một vành giao hoán A là một ideal của A .

◇ 7.2.9 Cho một vành giao hoán A . Chứng minh A là một thể khi và chỉ khi $\{0\}$ và A chỉ có hai ideal và $0 \neq 1$.

◇ 7.2.10 Giả sử K, K' là hai thể giao hoán, $K \times K'$ là vành-tích. Tìm tất cả các ideal của $K \times K'$.

7.2.2 Đồng cấu vành

Ta nhắc lại Định nghĩa sau (Xem 2.3.4, Tập 5).

♦ **Định nghĩa** Giả sử A, A' là hai vành, $f: A \rightarrow A'$ là một ánh xạ. Ta nói rằng f là một **đồng cấu vành** khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in A^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x, y) \in A^2, f(xy) = f(x)f(y) \\ f(1_A) = 1_{A'} \end{cases}$$

Một **đẳng cấu vành** là một đồng cấu vành và là song ánh.

♦ **Mệnh đề** Giả sử A, A' là hai vành giao hoán, $f: A \rightarrow A'$ là đồng cấu vành. Khi đó :

- 1) $\text{Ker}(f)$ là một ideal của A
- 2) $\text{Im}(f)$ là một vành con của A' .

Chứng minh :

- 1) • $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$ vì $0_A \in \text{Ker}(f)$.
 • Nếu $(x, y) \in (\text{Ker}(f))^2$, thì $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0 - 0 = 0$, vậy $x - y \in \text{Ker}(f)$.
 • Nếu $a \in A$ và $x \in \text{Ker}(f)$, thì $f(ax) = f(a)f(x) = f(a)0 = 0$, vậy $ax \in \text{Ker}(f)$.
- 2) • $1_{A'} \in \text{Im}(f)$ vì $1_{A'} = f(1_A)$.
 • Nếu $(x', y') \in (\text{Im}(f))^2$, thì tồn tại $(x, y) \in A^2$ thỏa mãn $x' = f(x)$ và $y' = f(y)$.

Do đó :

$$\begin{cases} x' - y' = f(x) - f(y) = f(x - y) \in \text{Im}(f) \\ x'y' = f(x)f(y) = f(xy) \in \text{Im}(f) \end{cases}$$

Nhận xét :

Có thể $\text{Ker}(f)$ (một ideal của A) không phải là một vành con của A , và $\text{Im}(f)$ (một vành con của A') không phải là một ideal của A' .

7.2.3 Ideal của $\mathbb{Z}$, vành $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

♦ **Định lý**

Các ideal của $\mathbb{Z}$ là các $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Chứng minh :

1) Giả sử I là một ideal của $\mathbb{Z}$. Nói riêng, I cũng là một nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$, vì vậy, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $I = n\mathbb{Z}$ (xem Định lý 1, 7.1.1).

2) Đảo lại, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ là một ideal của $\mathbb{Z}$ vì nó là ideal của $\mathbb{Z}$ được sinh bởi n .

Bằng việc sử dụng khái niệm ideal của $\mathbb{Z}$, ta có thể nhận được những tính chất của các ƯCLN và BCNN (xem 4.2.2, Tập 5):

$$(\text{ƯCLN}(x_1, \dots, x_n))\mathbb{Z} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{Z} \quad , \quad (\text{BCNN}(x_1, \dots, x_n))\mathbb{Z} = \bigcap_{i=1}^n x_i \mathbb{Z}.$$

Từ định lý Bezout (Định lý 1, 4.3.2, Tập 5):

$$(\text{ƯCLN}(x_1, \dots, x_n)) = 1 \Leftrightarrow \left(\exists (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n, \sum_{i=1}^n x_i u_i = 1 \right),$$

và định lý Gauss (Định lý 2, 4.3.2, Tập 5):

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{Z}^*)^3, \left[\begin{array}{l} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right] \Rightarrow a \mid c.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ và mọi (a, b, c, d) thuộc $\mathbb{Z}^4$:

$$\left[\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{array} \right] \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}.$$

(xem Mệnh đề 2, 4.1.2, Tập 5)

Ta nói rằng phép nhân trong $\mathbb{Z}$ là tương thích với quan hệ đồng dư modulo n .

Giả sử $(\xi, \zeta) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Tồn tại $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho $\xi = \hat{x}$ và $\zeta = \hat{y}$. Nếu $(x', y') \in \mathbb{Z}^2$ là một cặp (khác) thỏa mãn $\xi = \hat{x'}$ và $\zeta = \hat{y'}$, thì: $\widehat{xy} = \widehat{x'y'}$.

Như vậy, ta có thể định nghĩa luật hợp thành trong $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, được ký hiệu $\hat{\cdot}$, hay còn ký hiệu:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}.$$

Ta dễ dàng chứng minh các mệnh đề sau đây (4.1.2, Tập 5).

♦ Mệnh đề 1

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ là một vành giao hoán.

♦ Mệnh đề 2

Toàn ánh chính tắc $p_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một toàn cấu vành, có hạt nhân là $n\mathbb{Z}$.

♦ Mệnh đề 3

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$. Điều kiện cần và đủ để $\hat{k}$ khả nghịch trong $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, là $k \wedge n = 1$.

Chứng minh:

Tương tự chứng minh Mệnh đề 4, 7.1.1:

$$(\exists u \in \mathbb{Z}, \hat{k}\hat{u} = \hat{1}) \Leftrightarrow (\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2, 1 - ku = nv) \Leftrightarrow k \wedge n = 1. \quad \blacksquare$$

Nhận xét:

Trong $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mỗi phần tử khác 0 hoặc khả nghịch, hoặc là ước của 0.

♦ Hệ quả

Vành $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một thể khi và chỉ khi n là số nguyên tố. ■

Nhận xét:

Với mỗi n thuộc $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, ba tính chất sau đây là đôi một tương đương :

(i) n là số nguyên tố

(ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một thể

(iii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là một vành nguyên. ■

Giả sử A là một vành giao hoán $f: \mathbb{Z} \rightarrow A$ là một đồng cấu vành. Vì $\text{Ker}(f)$ là một ideal của $\mathbb{Z}$, nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\text{Ker}(f) = N\mathbb{Z}$.

Giả sử $N \neq 0$.

Với mỗi bội n của N trong $\mathbb{N}^*$, ta có $n\mathbb{Z} \subset N\mathbb{Z}$ và như vậy $n\mathbb{Z} \subset \text{Ker}(f)$.

Tương tự 7.1.1, tồn tại một đồng cấu vành $F_n: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow A$ thỏa mãn :

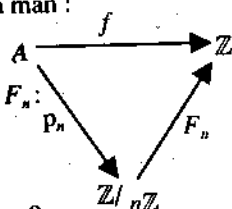
$$\forall k \in \mathbb{Z}, F_n(\hat{k}) = f(k).$$

Ta nói rằng F_n nhận được bởi phép phân tích f thành tích qua F_n :

$$F_n \circ p_n = f.$$

Đồng cấu vành F_n là đơn ánh vì, với k thuộc $\mathbb{Z}$:

$$F_n(p_n(k)) = 0_A \Leftrightarrow f(k) = 0_A \Leftrightarrow k \in \text{Ker}(f) = N\mathbb{Z} \Leftrightarrow p_n(k) = 0.$$



Áp dụng khảo sát trên cho trường hợp đặc biệt với $f: \mathbb{Z} \rightarrow A, f$ là một đồng cấu vành.

Từ đó ta có Định nghĩa sau (xem thêm bài tập 2.3.4, Tập 5).

♦ **Định nghĩa** Giả sử A là một vành giao hoán.

• Nếu $\{n \in \mathbb{N}^*; n1_A = 0_A\} = \{0\}$, ta nói rằng A có đặc số 0.

• Nếu $\{n \in \mathbb{N}^*; n1_A = 0_A\} \neq \{0\}$, khi đó tồn tại một số tự nhiên nhỏ nhất $N \geq 1$ sao cho $N1_A = 0_A$. Số nguyên N này được gọi là đặc số của vành A .

VÍ DỤ:

1) $\mathbb{Z}$ có đặc số là 0.

2) Với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ có đặc số là n .

Nhận xét:

Nếu A là một vành có đặc số n , thì $nx = (n1_A)x = 0_Ax = 0_A$, với mọi x thuộc A , nên $nx = 0_A$.

♦ Mệnh đề 4

Đặc số của một thể giao hoán là 0 hoặc là một số nguyên tố.

Chứng minh :

Giả sử K là một thể giao hoán có đặc số N khác không. Nếu N không là số nguyên tố, thì tồn tại $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho : $N = ab$, $1 < a < N$, $1 < b < N$.

Vì $0_K = N1_K = (a1_K)(b1_K)$ (xem 2.3.2, Tập 5) và K là một số nguyên, nên $a1_K = 0$ hay $b1_K = 0$, trái với định nghĩa của N .

Điều này chứng tỏ một cách tổng quát hơn rằng đặc số của một vành nguyên là 0 hoặc là số nguyên tố.

Bài tập

♦ 7.2.11 Tìm tất cả các số $n \in \mathbb{N}$, sao cho $1 \leq n \leq 105$, biết rằng phần dư của phép chia Euclide của n cho 3, 5, 7 tương ứng là 1, 2, 3.

♦ 7.2.12 Tìm tất cả các số $x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời :

$$3x - 10 \in 7\mathbb{Z}, 11x + 8 \in 17\mathbb{Z}, 16x - 1 \in 5\mathbb{Z}.$$

♦ 7.2.13 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x \equiv 2 & [7] \\ x \equiv 1 & [8] \\ x \equiv 3 & [9] \end{cases}$, trong $\mathbb{Z}$.

♦ 7.2.14 Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - \hat{2}x - \hat{2} = \hat{0}$ trong $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

b) $x^2 - \hat{2}x + \hat{2} = \hat{0}$ trong $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

c) $x^2 - x - \hat{1} = \hat{0}$ trong $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

d) $2x^2 - 3x - 2 \equiv 0 \pmod{17}$ trong $\mathbb{Z}$

e) $x^2 = \hat{1}$ trong $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

f) $x^3 - \hat{3}x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$ trong $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$

g) $x^2 - \hat{4}x + \hat{3} = \hat{0}$ trong $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$

$$h) \begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{3} \\ \hat{2}x + \hat{4}y = \hat{6} \end{cases} \text{ trong } \mathbb{Z}/143\mathbb{Z}^2$$

$$i) 2^x - 5^y \equiv 1[24] \text{ trong } \mathbb{N}^2.$$

♦ 7.2.15 a) Giải phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ trong $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

b) Cho một số nguyên tố $p > 2$. Hãy khảo sát dãy các phần tử của $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ được cho bởi

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}. \text{ Xác định theo } p \text{ số nghiệm của phương trình } x^2 - x + 1 = 0 \text{ trong } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Đọc giả có thể tham khảo các bài tập sau : 4.1.31, 4.1.34, 4.2.4 (các phần tử có cấp hữu hạn của một nhóm) 4.3.3, 4.3.5 (tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$) 4.3.10 (Định lý Trung Hoa), 4.3.21, 4.3.22 trong Tập 5.

7.2.4 Đại số $K[a]$

K là một thể con của $\mathbb{C}$, hay tổng quát hơn là một thể giao hoán.

1) Idean của $K[X]$

Ta nhắc lại rằng, $K[X]$ là một vành nguyên và mọi idean của $K[X]$ là idean chính (xem Định lý, 5.2.3, Tập 5), tức là :

♦ Định lý

Với mỗi idean $\mathcal{J}$ của $K[X]$, tồn tại $P_0 \in K[X]$ sao cho $\mathcal{J} = P_0 K[X]$.

Rõ ràng P_0 là duy nhất nếu ta đòi hỏi nó chuẩn tắc.

Ta đã biết (xem Mệnh đề 2, 5.2.3, Tập 5), với mỗi n thuộc $\mathbb{N}^*$ và với mọi đa thức $P_1, \dots, P_n$ thuộc $K[X]$, ta có :

$$\Delta K[X] = \sum_{i=1}^n P_i K[X], \quad M K[X] = \bigcap_{i=1}^n P_i K[X],$$

với $\Delta = \text{UCLN}(P_1, \dots, P_n)$ và $M = \text{BCNN}(P_1, \dots, P_n)$.

Vậy (Định lý Bezout, Định lý 1, 5.2.4, 2), Tập 5) :

$$\text{UCLN}(P_1, \dots, P_n) = 1 \Leftrightarrow \left(\exists (U_1, \dots, U_n) \in (K[X])^n, \sum_{i=1}^n P_i U_i = 1 \right),$$

cuối cùng (Định lý Gauss, Định lý 2, 5.2.4, 2), Tập 5) :

$$\forall (A, B, C) \in (K[X] - \{0\})^3, \left(\left\{ \begin{array}{l} A|BC \\ A \wedge B = 1 \end{array} \right. \Rightarrow A|C \right).$$

2) Đại số $K[a]$

Ở đây chúng ta sẽ tổng quát hoá khái niệm về đa thức của một tự đồng cấu ở phần 2.4 và về đa thức tối tiểu ở 3.2.3.

E chỉ một K -đại số kết hợp có đơn vị và a là một phần tử của E .

♦ **Ký hiệu** Với mỗi $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$ thuộc $K[X]$ (trong đó $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in K$), ta đặt $P(a) = \sum_{k=0}^N \alpha_k a^k$, với quy ước $a^0 = e$, phần tử trung hòa của E .

♦ **Mệnh đề 1**
 Ánh xạ $\theta_a : K[X] \rightarrow E$ là một đồng cấu đại số có đơn vị.
 $P \mapsto P(a)$

Chứng minh :

Như Mệnh đề 1, 2.4.

♦ **Mệnh đề - ký hiệu 2** Ảnh của $\theta_a : K[X] \rightarrow E$ là một đại số con có đơn vị của E , được ký hiệu $K[a]$ và được gọi là **đại số con của E sinh bởi a** .

Nhận xét :

- 1) $K[a]$ là một đại số giao hoán vì :
 $\forall (P, Q) \in (K[X])^2, P(a)Q(a) = (PQ)(a) = (QP)(a) = Q(a)P(a).$
- 2) $K[a]$ là một đại số con có đơn vị nhỏ nhất và chứa a của E .

♦ **Định nghĩa**
 Một đa thức P được gọi là **đa thức triệt tiêu của a** khi và chỉ khi $P(a) = 0$.

Như vậy, tập các đa thức triệt tiêu của a là hạt nhân của đồng cấu vành $\theta_a : K[X] \rightarrow E$, do đó là một ideal của $K[X]$.
 $P \mapsto P(a)$

Nếu $\text{Ker}(\theta_a) \neq \{0\}$, thì theo Định lý trên, tồn tại duy nhất một đa thức chuẩn tắc π_a (tức là hệ tử bậc cao nhất của π_a bằng 1) thỏa mãn : $\text{Ker}(\theta_a) = \pi_a K[X]$.

♦ **Mệnh đề - Định nghĩa 3** Nếu ideal các đa thức triệt tiêu a không phải là $\{0\}$, thì tồn tại duy nhất một đa thức chuẩn tắc, được ký hiệu π_a , là phần tử sinh của ideal này. π_a được gọi là **đa thức tối tiểu của a** .

Nói một cách khác, π_a là chuẩn tắc, là đa thức triệt tiêu của a , và mọi đa thức triệt tiêu a đều là bội của π_a ; π_a cũng là một đa thức chuẩn tắc, đa thức triệt tiêu của a và có bậc thấp nhất. ■

- ♦ **Mệnh đề 4** Phần tử a của E có một đa thức tối tiểu khi và chỉ khi đại số $K[a]$ là một K -kgv có số chiều hữu hạn.
 Nếu a có một đa thức tối tiểu π_a , thì họ $(a^n)_{0 \leq n < r} = (e, a, \dots, a^{r-1})$ là một cơ sở của K -kgv $K[a]$, trong đó $r = \deg(\pi_a)$, như vậy $\dim_K(K[a]) = r$.

Chứng minh :

1) Ta giả sử rằng a có một đa thức tối tiểu π_a , đặt $r = \deg(\pi_a)$.

Giả sử $P \in K[X]$. Với phép chia Euclide P cho π_a , tồn tại $(Q, R) \in (K[X])^2$ sao cho:

$$P = \pi_a Q + R \text{ và } \deg(R) < r.$$

Khi đó ta có: $P(a) = \pi_a(a)Q(a) + R(a) = R(a)$ và như vậy: $P(a) \in \text{Vect}((a^n)_{0 \leq n < r})$.

Điều này chứng tỏ rằng $K[a]$ là một K -kgv có số chiều hữu hạn $\leq r$, và $(a^n)_{0 \leq n < r}$ là tập các phần tử sinh.

Giả sử $(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) \in K^r$ sao cho $\sum_{0 \leq n < r} \lambda_n a^n = 0$.

Đa thức $\sum_{0 \leq n < r} \lambda_n X^n$ triệt tiêu a và có bậc $< r$, vậy (theo định nghĩa của π_a),

$$\sum_{0 \leq n < r} \lambda_n X^n = 0, \text{ suy ra } \lambda_0 = \dots = \lambda_{r-1} = 0.$$

Điều này chứng tỏ $(a^n)_{0 \leq n < r}$ là độc lập tuyến tính.

Cuối cùng, $K[a]$ là hữu hạn chiều, $(a^n)_{0 \leq n < r}$ là một cơ sở, và $\dim(K[a]) = r$.

2) Đảo lại, giả sử đại số $K[a]$ là một K -kgv có số chiều hữu hạn là s . Khi đó $(a^n)_{0 \leq n < s}$ là phụ thuộc (vì gồm $s+1$ phần tử), vì vậy tồn tại

$(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in K^{s+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ sao cho $\sum_{n=0}^s \alpha_n a^n = 0$, từ đây $P \neq 0$ và $P(a) = 0$, trong

$$\text{đó } P = \sum_{n=0}^s \alpha_n X^n.$$

Như vậy, idêan của các đa thức triệt tiêu của a là $\neq \{0\}$, và do đó a có một đa thức tối tiểu. ■

- ♦ **Mệnh đề 5** Nếu E là một vành nguyên và nếu a có một đa thức tối tiểu, thì π_a là đa thức bất khả quy trong $K[X]$.

Chứng minh :

Giả sử $(P, Q) \in (K[X])^2$ sao cho $\pi_a = PQ$

Ta có: $P(a)Q(a) = \pi_a(a) = 0$.

Vì E là vành nguyên, từ đó suy ra, chẳng hạn, $P(a) = 0$, và theo định nghĩa của π_a , $\pi_a | P$.

Vậy tồn tại $\alpha \in K - \{0\}$ sao cho $P = \alpha\pi_a$.

Điều này chứng tỏ rằng π_a là đa thức bất khả quy trong $K[X]$. ■

- ♦ **Mệnh đề 6** Nếu $P \in K[X]$ là một đa thức chuẩn tắc, triệt tiêu a ($a \neq 0$) và bất khả quy, thì P là một đa thức tối tiểu của a .

Chứng minh:

Vì idêan của các đa thức triệt tiêu a không phải là $\{0\}$ (nó chứa P), do đó a có một đa thức tối tiểu π_a và $\pi_a | P$. Vì P là chuẩn tắc và bất khả quy (trong $K[X]$), nên $\pi_a = P$ hoặc $\pi_a = 1$. Nếu $\pi_a = 1$, thì $0 = \pi_a(a) = 1(a) = a$, mâu thuẫn. ■

Giả sử a có một đa thức tối tiểu.

Giả sử $P \in K[X]$. Ta tìm điều kiện để $P(a)$ khả nghịch trong E .

1) Giả sử $\text{ƯCLN}(P, \pi_a) \neq 1$. Khi đó tồn tại $D, A, B \in K[X]$ sao cho :

$$P = DA, \pi_a = DB, \deg(D) \geq 1.$$

Ta có : $P(a)B(a) = (DAB)(a) = (DBA)(a) = (\pi_a A)(a) = \pi_a(a)A(a) = 0$,

và $B(a) \neq 0$, vì $\deg(B) < \deg(\pi_a)$ và $B \neq 0$.

Điều này chứng tỏ rằng $P(a)$ là một ước của 0 trong E . Nói riêng, $P(a)$ không khả nghịch.

2) Giả sử $\text{ƯCLN}(P, \pi_a) = 1$. Theo định lý Bezout, tồn tại $(U, V) \in (K[X])^2$ sao cho $UP + V\pi_a = 1$, từ đây :

$$e = 1(a) = (UP + V\pi_a)(a) = U(a)P(a).$$

Như vậy $P(a)$ là khả nghịch trong E , và nghịch đảo $U(a)$ của nó thuộc $K[a]$.

Tóm lại :

- ♦ **Mệnh đề 7** Giả sử a có đa thức tối tiểu và $P \in K[X]$.
- $P(a)$ là khả nghịch trong E khi và chỉ khi $\text{ƯCLN}(P, \pi_a) = 1$.
 - Nếu $\text{ƯCLN}(P, \pi_a) = 1$, thì nghịch đảo của $P(a)$ thuộc $K[a]$. ■

- ♦ **Mệnh đề 8** Nếu E là vành nguyên và a có một đa thức tối tiểu, thì $K[a]$ là một thể.

Chứng minh :

Giả sử $P \in K[X]$ sao cho $P(a) \neq 0$.

Theo Mệnh đề 5, π_a là bất khả quy trong $K[X]$, như vậy (xem Mệnh đề 1.5.2.5, Tập 5):

$$\pi_a | P \text{ hay } P \wedge \pi_a = 1.$$

Nếu $\pi_a | P$, thì $P(a) = 0$, bị loại.

Do đó $P \wedge \pi_a = 1$, và theo Mệnh đề 7, $P(a)$ có nghịch đảo trong $K[a]$.

Nhận xét :

Rõ ràng trong các Mệnh đề 5 và 8 ta có thể thay giả thiết E là vành nguyên bởi $K[a]$ là nguyên.

Bài tập

- ♦ **7.2.16** Giả sử E là một đại số kết hợp và có đơn vị, $a \in E$ có đa thức tối thiểu. Chứng minh rằng a khả nghịch trong E khi và chỉ khi a không phải là ước của không trong vành E .
- ♦ **7.2.17** Giả sử E là một đại số kết hợp và có đơn vị, $a \in E$ có đa thức tối thiểu, $b \in K[a]$. Chứng minh rằng b có đa thức tối thiểu.
- ♦ **7.2.18** Giả sử $A = C([0, 1], \mathbb{R})$, $T : A \rightarrow A$ cho tương ứng $f \in A$ với $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto xf(x)$.
- Hãy kiểm chứng rằng T là một tự đồng cấu của A và chứng minh T không có đa thức tối thiểu trong đại số $E = \mathcal{L}(A)$.
- ♦ **7.2.19** a) Tìm đa thức tối thiểu của $\sqrt{2}$ trong $\mathbb{Q}$ -đại số $\mathbb{R}$.
 b) Từ đó suy ra rằng $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ là một thể và $:\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{\alpha + \beta\sqrt{2} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2\}$.
- ♦ **7.2.20** a) Tìm đa thức tối thiểu của $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ trong $\mathbb{Q}$ -đại số $\mathbb{R}$.
 b) Từ đó suy ra rằng $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ là một thể và :
- $$\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] = \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6} : (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Q}^4\}.$$

Bổ sung

◇ C 7.1 Định lý Cauchy về các nhóm hữu hạn

Giả sử p là một số nguyên tố và $(G, \cdot)$ là một nhóm hữu hạn cấp n sao cho $p|n$; ta ký hiệu e là phần tử trung hòa của G .

Giả sử $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p; x_1 x_2 \dots x_p = e\}$ và $\mathcal{R}$ là quan hệ trong E xác định bởi :

$(x_1, \dots, x_p) \mathcal{R} (y_1, \dots, y_p)$ khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $(\forall i \in \{1, \dots, p\}, y_i = \sigma^k(x_i))$, trong đó σ là hoán vị vòng quanh $\sigma = (1, 2, \dots, p)$.

1) a) Hãy chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trong E .

b) Chứng minh rằng mỗi lớp modulo $\mathcal{R}$ có 1 hoặc p phần tử.

2) Ký hiệu r (tương ứng : s) là số các lớp modulo $\mathcal{R}$ có 1 (tương ứng : p) phần tử. Chứng minh $r + sp = n^{p-1}$.

3) Từ đó suy ra định lý Cauchy :

Trong một nhóm hữu hạn có cấp là bội của một số nguyên tố p thì số nghiệm của phương trình $x^p = e$ là bội của p .

(Tham khảo : Jamc H. MacKay, *Another proof of Cauchy's group theorem*, Amer.Math.Month.Vol.66(1959).

◇ C 7.2 Phần tử lũy đẳng của một vành

Giả sử A là một vành, $E(A) = \{e \in A; e^2 = e\}$ là tập hợp các phần tử lũy đẳng của A .

$Z(A) = \{x \in A; \forall a \in A, ax = xa\}$ là tâm của A .

1) Chỉ trong câu hỏi này, ta giả thiết rằng 0 là một phần tử lũy linh duy nhất của A .

a) Chứng minh : $E(A) \subset Z(A)$.

b) Giả sử $(a, x) \in A^2$ sao cho $axa = a$. Chứng minh $(ax, xa) \in (E(A))^2$, và $ax = xa$.

2) Giả sử $(e_1, e_2) \in (E(A))^2$ sao cho $e_2 e_1 = 0$; ta ký hiệu $e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$.

Chứng minh : $e \in E(A)$ và $Ae = Ae_1 + Ae_2$.

3) Giả sử $e \in E(A)$ và I là một ideal của A .

Chứng minh : $I \cap (eAe) = eIe$.

4) Giả sử $e \in E(A)$

a) Chứng tỏ : $1 - e \in E(A)$.

b) Chứng minh : $Ae + A(1 - e) = A$.

c) Chứng minh rằng eAe là ổn định đối với phép $+$ và phép $\times$ của A , và nó cũng là một vành. Phần tử trung hoà của $\times$ trong eAe là gì ?

d) Chứng minh : $1 \in eAe \Rightarrow e = 1$.

e) Chứng minh : $A = eAe + eA(1 - e) + (1 - e)Ae + (1 - e)A(1 - e)$.

5) Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ trong $E(A)$ xác định bởi : $e \mathcal{R} f \Leftrightarrow ef = fe = f$.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trong $E(A)$.

b) Giả sử $(e_1, e_2) \in (E(A))^2$ sao cho $e_2 e_1 = 0$ và $e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$. Chứng minh e là cận trên theo thứ tự $\mathcal{R}$ trong $E(A)$ của $\{e_1, e_2\}$.

◊ **C7.3 Các phép toán về các ideal của một vành giao hoán**

Giả sử $(A, +, \cdot)$ là một vành giao hoán. Với mọi ideal I, J của A , ta ký hiệu :

$\mathcal{R}(I) = \{x \in A; \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$, được gọi là **cân** của I .

$IJ = \{x \in A; \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \exists (y_1, \dots, y_n) \in J^n, x = \sum_{i=1}^n x_i y_i\}$, được gọi

(một cách lạm dụng) là **tích** của I và J ,

$I:J = \{x \in A; xJ \subset I\}$, được gọi là **tập chuyển** từ J vào I , trong đó $xJ = \{xy, y \in J\}$.

I 1) Kiểm chứng rằng, với mọi ideal I của A , $\mathcal{R}(I)$ là một ideal của A chứa I .

2) Chứng minh các công thức sau đây với mọi ideal I, J của A :

- $\mathcal{R}(A) = A$
- $I \subset J \Rightarrow \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}(J)$
- $\mathcal{R}(\mathcal{R}(I)) = \mathcal{R}(I)$
- $\mathcal{R}(I \cap J) = \mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)$
- $\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(J) \subset \mathcal{R}(I + J)$.

3) Ví dụ : ở đây ta thường lấy $A = \mathbb{Z}$. Giả sử $x \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ và $x = \prod_{i=1}^N p_i^{s_i}$ là phân tích

nguyên tố của x . Chứng minh : $\mathcal{R}(x\mathbb{Z}) = x'\mathbb{Z}$, trong đó $x' = \prod_{i=1}^N p_i$.

II 1) Kiểm chứng rằng, với mọi ideal I, J của A , IJ là một ideal của A .

2) Chứng minh các công thức sau đúng với mọi ideal I, I', J, J' của A :

- $IJ \subset I \cap J$
- $\{0\}I = \{0\}, AI = I$
- $(I + I') \cap J \supset (I \cap J) + (I' \cap J)$
- $(I \cap I') + J \subset (I + J) \cap (I' + J)$
- $I \subset I' \Rightarrow IJ \subset I'J$
- $(I + I')J = (IJ) + (I'J)$
- $IJ = JI, (I'J) = I(I'J)$
- $(I \cap I')J \subset (IJ) \cap (I'J)$.

III 1) Chứng minh rằng, với mọi ideal I, J của A , $I : J$ là một ideal của A .

2) Chứng minh các công thức sau đúng với mọi ideal I, I', J, J' của A :

- $I \subset J \Rightarrow I : J = A$
- $I : \{0\} = A, I : A = I, A : I = A$
- $J \subset J' \Rightarrow I : J \supset I : J'$
- $I \subset I' \Rightarrow I : J \subset I' : J$
- $(I \cap I') : J = (I : J) \cap (I' : J)$
- $I : (J + J') = (I : J) \cap (I : J')$
- $I : J \subset (I : I') : (J : I')$
- $(I : I') : J = I : (I'J)$.

3) Ví dụ : Với $A = \mathbb{Z}$ và $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, Tính $(a\mathbb{Z}) : (b\mathbb{Z})$.

◇ C7.4 Số hoàn hảo

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ký hiệu $\sigma(n)$ là tổng các ước ≥ 1 của n (kể cả n); ta nói rằng n là số hoàn hảo khi và chỉ khi $\sigma(n) = 2n$.

1) a) Chứng minh: $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, (a \wedge b = 1 \Rightarrow \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b))$.

b) Chứng tỏ rằng số p là nguyên tố khi và chỉ khi $\sigma(p) = p + 1$.

c) Chứng minh, với mỗi số p : $\sigma(p^f) = \frac{p^{f+1} - 1}{p - 1}, \forall f \in \mathbb{N}^*$.

2) Chứng minh rằng các số hoàn hảo chẵn là các số có dạng $2^{p-1}(2^p - 1)$ trong đó p và $2^p - 1$ là các số nguyên tố, được gọi là các số Euclide.

3) Chứng minh rằng, nếu $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n \geq 3$ là số hoàn hảo và lẻ, thì n chứa ít nhất ba thừa số nguyên tố khác nhau (và như vậy $n \geq 105$). Hiện nay (1996), ta chưa biết liệu có tồn tại các số hoàn hảo lẻ hay không.

◇ C7.5 Phương trình $x^2 + y^2 = z^2, x^4 + y^4 = z^2$ trong $(\mathbb{N}^*)^3$

I Phương trình $x^2 + y^2 = z^2$, ẩn $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

1) Giả sử $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ sao cho: $x^2 + y^2 = z^2$ và ƯCLN(x, y, z) = 1.

a) Chứng minh rằng x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh rằng z lẻ và x, y có tính chẵn đối lập. Từ đây ta giả sử (trong phần 1)): x lẻ, y chẵn, z lẻ.

c) Chứng minh: $(z - x) \wedge (z + x) = 2$. Từ đó suy ra rằng, tồn tại $(\alpha, \beta, \gamma') \in (\mathbb{N}^*)^3$ thỏa mãn: $z - x = 2\alpha, z + x = 2\beta, y = 2\gamma'$. Chứng minh: $y^2 = \alpha\beta$ và $\alpha \wedge \beta = 1$.

d) Từ đó, tồn tại $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho: $\alpha = u^2, \beta = v^2, u \wedge v = 1$.

2) Tìm tập hợp $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ sao cho $x^2 + y^2 = z^2$.

II Phương trình $x^4 + y^4 = z^2$, ẩn $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Giả sử rằng tập S của $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ thỏa mãn $x^4 + y^4 = z^2$ là không rỗng.

1) Chứng minh rằng, tồn tại $(x, y, z) \in S$ sao cho $\forall (X, Y, Z) \in S, z \leq Z$.

Trong các bài tập tiếp theo, (x, y, z) là một phần tử cố định của S .

2) Chứng minh x, y, z là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

3) Chứng minh rằng, sau khi hoán vị giữa x và y nếu cần, tồn tại $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho: $x^2 = v^2 - u^2, y^2 = 2uv, z = u^2 + v^2, u \wedge v = 1$ (Sử dụng I 1)d)).

4) a) Chứng minh rằng u và v có tính chẵn đối lập.

b) Chứng minh rằng u chẵn và v lẻ; từ đây ta sẽ ký hiệu $u = 2u', u' \in \mathbb{N}^*$.

5) Chứng minh rằng, tồn tại $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho: $u' = a^2, v = b^2$.

6) Chứng minh rằng, tồn tại $(c, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho: $x = c^2 - d^2, u = 2cd, v = c^2 + d^2$ (Sử dụng I 1)d)).

7) Chứng minh rằng, tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho: $c = \alpha^2, d = \beta^2$.

8) Chứng minh: $\alpha^4 + \beta^4 = h^2$ và $h < z$. Kết luận.

◇ C7.6 Mọi số nguyên tố $\equiv 1[4]$ là tổng bình phương của hai số

Giả sử p là một số nguyên tố, sao cho $p \geq 5$ và $p \equiv 1[4]$, và $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3, x^2 + 4yz = p\}$.

1) a) Chứng minh rằng, ánh xạ f được xác định bởi

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{nếu } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{nếu } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{nếu } 2y < x \end{cases}$$

là một đối hợp của E .

b) Chứng minh rằng f có duy nhất một điểm bất động.

c) Suy ra rằng $\text{Card}(E)$ chẵn.

2) Giả sử g là một ánh xạ xác định bởi $g(x, y, z) = (x, z, y)$.

a) Chứng minh g là một ánh xạ đối hợp của E .

b) Chứng minh g có ít nhất một điểm cố định (sử dụng bài tập 1) c))

3) Suy ra rằng, tồn tại $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho $p = a^2 + b^2$.

(Tham khảo : D.Zagier, *A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ is a sum of two squares*, Amer.Math.Month. Vol.97, 1990, trang 144).

Ta cũng có thể chứng minh chi tiết hơn các kết quả sau :

1) Để một số $n \geq 1$ phân tích được thành tổng bình phương của hai số nguyên, cần và đủ là số mũ của ước số nguyên tố $q \equiv 3 \pmod{4}$ trong phân tích nguyên tố của n là chẵn.

2) Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n)$ là số ước số ≥ 1 của n , $d_1(n)$ (tương ứng $d_3(n)$) là số các ước số $d \geq 1$ của n sao cho $d \equiv 1 \pmod{4}$ (tương ứng : $d \equiv 3 \pmod{4}$), $n = 2^i n_1$, trong đó

$$f \in \mathbb{N}, \quad n_1 = \prod_{\substack{p_i \text{ nguyên tố} \\ p_i \equiv 1 \pmod{4}}} p_i^{r_i}, \quad n_3 = \prod_{\substack{q_j \text{ nguyên tố} \\ q_j \equiv 3 \pmod{4}}} q_j^{s_j}$$

(Trong phân tích nguyên tố của n , ta đã nhóm các thừa số nguyên tố đồng dư với 1 modulo 4 và các thừa số đồng dư với 3 modulo 4). Nếu với mỗi j , s_j chẵn, thì n phân tích được thành tổng của hai bình phương (xem 1)) và $r_2(n)$ số cặp số $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $n = a^2 + b^2$ là :

$$r_2(n) = 4d(n_1) = 4(d_1(n) - d_3(n)).$$

(Tham khảo : E.Grosswald, *Representations of integers as sum of squares*, Springer 1985, trang 16).

Phần II

CHỈ DẪN VÀ TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 1

1.1.1 a) Vì $\text{Im}(f) = Ku$ và $u \neq 0$ nên với mọi $x \in E$, tồn tại $\lambda_x \in K$ duy nhất sao cho $f(x) = \lambda_x u$, điều này cho phép định nghĩa một ánh xạ $\varphi: E \rightarrow K$.

$$x \mapsto \lambda_x$$

Nếu $\lambda \in K, (x, y) \in E^2$, thì :

$$\varphi(\lambda x + y)u = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda \varphi(x)u + \varphi(y)u = (\lambda \varphi(x) + \varphi(y))u,$$

$$\text{vậy } \varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y).$$

Như vậy : $\varphi \in E^*$.

$$b) \bullet \forall x \in E, f^2(x) = \varphi(\varphi(x)u)u = \varphi(u)\varphi(x)u = \varphi(u)f(x).$$

Ký hiệu $\alpha = \varphi(u)$, ta có : $f^2 = \alpha f$.

• Nếu $(\alpha, \beta) \in K^2$ nghiệm đúng $f^2 = \alpha f = \beta f$, thì $\alpha = \beta$ vì $f \neq 0$.

• Tìm nghịch đảo có thể có của $f - e$ dưới dạng $\lambda f + \mu e, (\lambda, \mu) \in K^2 (e = \text{Id}_E)$.

$$\circ \text{ Trả lời : } \forall \alpha \in K - \{1\}, (f - \text{Id}_E)^{-1} = \frac{1}{\alpha - 1} f - \text{Id}_E.$$

1.1.2 1) Chứng minh rằng ánh xạ $u: (K[X])^* \rightarrow K^{\mathbb{N}}$ là tuyến tính.

$$\varphi \mapsto (\varphi(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$$

2) Với $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, xét ánh xạ tuyến tính $\varphi: K[X] \rightarrow K$ xác định trên cơ sở chính tắc $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bởi : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(X^n) = x_n$. Rõ ràng ánh xạ $v: K^{\mathbb{N}} \rightarrow (K[X])^*$ định nghĩa như vậy là tuyến tính.

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \varphi$$

3) Chứng minh : $v \circ u = \text{Id}_{(K[X])^*}$ và $u \circ v = \text{Id}_{K^{\mathbb{N}}}$.

1.1.3 1) Giả sử H là một siêu phẳng của E , ta đã có $H \neq E$. Cho $F \in \mathcal{V}$ sao cho $H \subset F$; ta giả sử $H \neq F$. Tồn tại $x_0 \in F$ sao cho $x_0 \notin H$. Theo Nhận xét 1.1.2 : $H \oplus (Kx_0) = E$. Nhưng $H \subset F$ và $x_0 \in F$, vậy $H \oplus (Kx_0) \in F, E = F$, mâu thuẫn.

2) Đảo lại, giả sử H là một phần tử tối đại của $(\mathcal{V}, \subset)$. Tồn tại $x_0 \in E$ sao cho $x_0 \notin H$. Nếu $H \oplus (Kx_0) \neq E$ thì do $H \oplus (Kx_0) \in \mathcal{V}$ và $H \subset H \oplus (Kx_0)$, ta suy ra $H = H \oplus (Kx_0)$, mâu thuẫn, như vậy $H \oplus (Kx_0) = E$, và do đó (xem Mệnh đề 1, 1.1.2), H là một siêu phẳng của E .

1.1.4 a) 1) • Ta biết $A \subset {}^{\circ}(A^{\perp})$ (xem Mệnh đề 8), 1.1.3), từ đó (xem Mệnh đề 4): $A^{\perp} \supset ({}^{\circ}(A^{\perp}))^{\perp}$.

• Theo Mệnh đề 8'), 1.1.3, áp dụng cho $A^{\perp}$: $A^{\perp} \subset ({}^{\circ}(A^{\perp}))^{\perp}$.

2) • Ta biết rằng $L \subset ({}^{\circ}L)^{\perp}$ (xem Mệnh đề 8') 1.1.3) do đó (xem Mệnh đề 4'): ${}^{\circ}L \supset ({}^{\circ}({}^{\circ}L)^{\perp})^{\perp}$.

• Theo Mệnh đề 8), 1.1.3, áp dụng với ${}^{\circ}L$: ${}^{\circ}L \subset ({}^{\circ}({}^{\circ}L)^{\perp})^{\perp}$.

$$b) \bullet (\alpha \circ \alpha)(A) = ({}^{\circ}({}^{\circ}(A^{\perp}))^{\perp})^{\perp} = ({}^{\circ}(A^{\perp}))^{\perp} = \alpha(A)$$

$$\bullet (\beta \circ \beta)(L) = ({}^{\circ}({}^{\circ}L)^{\perp})^{\perp} = ({}^{\circ}L)^{\perp} = \beta(L).$$

1.1.5 Giả sử $x \in {}^{\circ}(E^*)$, tức là sao cho $\forall \varphi \in (E^*), \varphi(x) = 0$.

Lập luận bằng phản chứng: giả sử $x \neq 0$.

Kgvc Kx của E thừa nhận ít nhất một phần bù H trong E . Xét ánh xạ tuyến tính

$\varphi: E \rightarrow K$ định nghĩa bởi $\varphi(x) = 1$ và $\varphi|_H = 0$.

Khi đó $\varphi \in E^*$ và $\varphi(x) \neq 0$, mâu thuẫn.

Do vậy $x = 0$ và cuối cùng ${}^{\circ}(E^*) = \{0_E\}$.

1.1.6 • Theo Mệnh đề 8), 1.1.3: $A \subset {}^{\circ}(A^{\perp})$.

• Giả sử $x \in {}^{\circ}(A^{\perp})$, tức là sao cho $\forall \varphi \in A^{\perp}, \varphi(x) = 0$.

Lập luận bằng phản chứng: giả sử $x \notin A$.

Kgvc $A \oplus (Kx)$ của E có ít nhất một phần bù B trong E . Xét ánh xạ tuyến tính

$\varphi: E \rightarrow K$ định nghĩa bởi $\varphi(x) = 1$ và $\varphi|_{A \oplus B} = 0$.

Khi đó: $\varphi \in A^{\perp}$ và $\varphi(x) \neq 0$, mâu thuẫn.

Vậy $x \in A$ và cuối cùng ${}^{\circ}(A^{\perp}) = A$.

Nhận xét: Kết quả này tổng quát hóa kết quả bài tập 1.1.5: ${}^{\circ}(E^*) = ({}^{\circ}\{0_E\})^{\perp} = \{0_E\}$.

1.1.7 • Theo Mệnh đề 7, 1.1.3: $(A \cap B)^{\perp} \supset A^{\perp} + B^{\perp}$.

Giả sử $\varphi \in (A \cap B)^{\perp}$.

Kgvc $A \cap B$ của A và của B có ít nhất một phần bù A' (tương ứng B') trong A

(tương ứng B). Chúng ta có $A + B$ là tổng trực tiếp của $A \cap B, A', B'$. Tiếp đó $A + B$ có ít

nhất một phần bù F trong E , như vậy: $E = A \oplus (B' \oplus F) = B \oplus (A' \oplus F)$.

Xét các ánh xạ tuyến tính $u, v: E \rightarrow K$ định nghĩa bởi: $u|_A = 0, u|_{B' \oplus F} = \varphi|_{B' \oplus F}, v|_{A' \oplus F} = 0,$

$v|_A = \varphi|_A$.

Rõ ràng rằng: $u \in A^{\perp}, v \in B^{\perp}, u + v = \varphi$, và do vậy $\varphi \in A^{\perp} + B^{\perp}$.

1.1.8 1) ${}^{\circ}L = \{x \in E; \forall p \in N, \varphi_p(x) = 0\} = \{(x_n)_{n \in N} \in E; \forall p \in N, x_p = 0\} = \{0_E\}$, vậy

$({}^{\circ}L)^{\perp} = \{0_E\}^{\perp} = E^*$.

2) Xét $\varphi: E \rightarrow K$, trong đó $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ thực tế chỉ là tổng của một số hữu hạn các hạng tử.

$$(x_n)_{n \in N} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

Rõ ràng φ là tuyến tính, vậy $\varphi \in E^*$.

Giả sử $\varphi \in L$. Khi đó tồn tại $N \in N^*, p_1, \dots, p_N \in N, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in K$ sao cho $\varphi = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_{p_i}$.

Xét $p_0 = 1 + \max_{1 \leq i \leq N} p_i$.

Khi đó ta có $\varphi(e_{p_0}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_{p_i}(e_{p_0}) = 0$ (vì $\forall i \in \{1, \dots, N\}, p_i < p_0$), và $\varphi(e_{p_0}) = 1$, theo

định nghĩa của φ , mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ $\varphi \notin L$, và cuối cùng ${}^{\circ}(L^{\perp}) \neq L$.

1.1.9 Giả sử E là $\mathbb{R}$ -kgv các dãy thực hội tụ.

Với $n \in N$, ký hiệu e_n là dãy có mọi phần tử là 0, trừ phần tử thứ n bằng 1: $e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$.

Với $p \in N$, ký hiệu $\varphi_p: E \rightarrow \mathbb{R}$; rõ ràng $\forall p \in N, \varphi_p \in E^*$.

$$(x_n)_{n \in N} \mapsto x_p$$

Ký hiệu $L = \text{Vect} \{ \varphi_p; p \in \mathbb{N} \}, M = \text{Vect} \{ \varphi_{2p+1}; p \in \mathbb{N} \}$ là những kgcvc của E^* .

1) Do $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là độc lập, rõ ràng rằng $L \cap M = \{0_{E^*}\}$, và do vậy ${}^o(L \cap M) = {}^o\{0_{E^*}\} = E$.

2) Xét dãy hằng u bằng 1: $u = (1, \dots, 1, \dots) \in E$.

Giả sử $u \in {}^oL + {}^oM$.

Khi đó tồn tại $x = (x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in {}^oL$ và $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in {}^oM$ sao cho $u = x + y$. Ta có :

$$\begin{cases} x \in {}^oL \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{N}, \varphi_{2p}(x) = 0) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{N}, x_{2p} = 0) \\ y \in {}^oM \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{N}, \varphi_{2p+1}(y) = 0) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{N}, y_{2p+1} = 0) \end{cases}$$

Từ đây suy ra rằng dãy 0 là dãy trích của $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ và của $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Do $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ và $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là hội tụ, ta suy ra $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ và $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ và do đó $x_n + y_n \rightarrow 0$, điều này mâu thuẫn với :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n + y_n = 1.$$

Điều này chứng tỏ $u \notin {}^oL + {}^oM$, vậy ${}^oL + {}^oM \neq E$.

1.1.10 $\diamond$ **Trả lời :** Cơ sở tiền đối ngẫu của $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ là (V_1, V_2, V_3) , trong đó :

$$V_1 = \frac{1}{8}(-3, 3, 2), V_2 = \frac{1}{8}(1, -1, 2), V_3 = \frac{1}{4}(5, -1, -6).$$

$$1.1.11 \quad a) \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -(1 - \alpha\beta)^2.$$

$\diamond$ **Trả lời :** $1 - \alpha\beta \neq 0$.

b) $\diamond$ **Trả lời :** Cơ sở tiền đối ngẫu của $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ là (V_1, V_2, V_3) , trong đó :

$$V_1 = \frac{1}{(1 - \alpha\beta)^2}(1 - \alpha^4, \alpha^3 - \beta - \alpha(1 - \alpha\beta)), V_2 = \frac{1}{(1 - \alpha\beta)^2}(\alpha^3 - \beta, \beta^2 - \alpha^2, 1 - \alpha\beta),$$

$$V_3 = \frac{1}{1 - \alpha\beta}(-\alpha, 1, 0).$$

1.1.12 Nếu $A \in \mathcal{G}_p(E)$ thì $\dim(A^\perp) = n - p$, vậy $A^\perp \in \mathcal{G}_{n-p}(E^*)$.

Nếu $L \in \mathcal{G}_{n-p}(E^*)$ thì $\dim({}^oL) = n - (n - p) = p$, vậy ${}^oL \in \mathcal{G}_p(E)$.

Vậy ta có thể xét các ánh xạ $\alpha: \mathcal{G}_p(E) \rightarrow \mathcal{G}_{n-p}(E^*), \beta: \mathcal{G}_{n-p}(E^*) \rightarrow \mathcal{G}_p(E)$
 $A \mapsto A^\perp, L \mapsto {}^oL$

Vì với mọi kgcvc A của E và L của E^* , ${}^o(A^\perp) = A$ và $({}^oL)^\perp = L$ (xem Mệnh đề 8), 8'),

1.1.3); ta có : $\beta \circ \alpha = \text{Id}_{\mathcal{G}_p(E)}$ và $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{\mathcal{G}_{n-p}(E^*)}$, và do vậy α và β là những song ánh ngược nhau.

1.1.13 1) Vì $(\forall j \in \{0, \dots, n\}, \deg(e_j) = j)$, $(e_0, \dots, e_n)$ là một họ những đa thức có bậc liên tiếp, vậy là một cơ sở của $\mathbb{C}_n[X]$ (xem Nhận xét, 5.1.4, Tập 5).

2) Giả sử $(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$. Ta có:

$$\begin{cases} i < j \Rightarrow e_j^{(i)} = \frac{j!}{(j-i)!}(X-a)^{j-i} \Rightarrow \varphi_i(e_j) = \frac{1}{i!}e_j^{(i)}(a) = 0 \\ i = j \Rightarrow e_j^{(j)} = j! \Rightarrow \varphi_i(e_j) = \frac{1}{i!}e_j^{(i)}(a) = 1 \\ i > j \Rightarrow e_j^{(i)} = 0 \Rightarrow \varphi_i(e_j) = \frac{1}{i!}e_j^{(i)}(a) = 0. \end{cases}$$

Như vậy : $\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2, \varphi(e_j) = \delta_{ij}$.

Giả sử $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$ sao cho $\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i = 0$.

Khi đó với mọi $j \in \{0, \dots, n\} : 0 = \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i \right) (e_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$, điều này chứng tỏ rằng

$(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ là độc lập. Vì $\dim(E^*) = \dim(E) = n+1$, kết luận rằng $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ là một cơ sở của E .

3) $\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}, (\varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ là cơ sở đối ngẫu của $(e_j)_{0 \leq j \leq n}$.

4) Với mọi P thuộc $E : P = \sum_{i=0}^n e_i^*(P) e_i = \sum_{i=0}^n \varphi_i(P) e_i = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} P^{(i)}(a)(X-a)^i$, điều này cho lại công thức Taylor đối với các đa thức (xem Định lý, 5.1.7, Tập 5).

1.1.14 1) Giả sử $A \in M_n(K)$. Ta có :

$$\forall \lambda \in K, \forall X, Y \in M_n(K), \operatorname{tr}(A(\lambda X + Y)) = \operatorname{tr}(\lambda AX + AY) = \lambda \operatorname{tr}(AX) + \operatorname{tr}(AY).$$

Như vậy, ánh xạ $M_n(K) \rightarrow K$ là tuyến tính, tức là thuộc $(M_n(K))^*$.

$$X \mapsto \operatorname{tr}(AX)$$

Điều này cho phép định nghĩa một ánh xạ $\theta : M_n(K) \rightarrow (M_n(K))^*$.

$$A \mapsto (X \mapsto \operatorname{tr}(AX))$$

2) Giả sử $\alpha \in K, A, B \in M_n(K)$. Ta có :

$$\forall X \in M_n(K), (\theta(\alpha A + B))(X)$$

$$= \operatorname{tr}((\alpha A + B)X) = \alpha \operatorname{tr}(AX) + \operatorname{tr}(BX) = \alpha(\theta(A))(X) + (\theta(B))(X) = (\alpha\theta(A) + \theta(B))(X),$$

vậy: $\theta(\alpha A + B) = \alpha\theta(A) + \theta(B)$, và như vậy θ là tuyến tính.

3) Giả sử $A \in M_n(K)$ sao cho $\theta(A) = 0$, tức là : $\forall X \in M_n(K), \operatorname{tr}(AX) = 0$.

Với $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, ta có $\operatorname{tr}(AE_{ij}) = 0$. Nếu đặt $A = (a_{ij})_{ij}$ thì :

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ji} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{ji} \end{pmatrix}, \text{ từ đây } \operatorname{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}.$$

Cột thứ j

Điều này chứng tỏ $A = 0$, và do vậy θ là đơn ánh.

4) Vì $\theta : M_n(K) \rightarrow (M_n(K))^*$ là đơn ánh tuyến tính và $M_n(K)$ và $(M_n(K))^*$ hữu hạn chiều và có cùng số chiều n^2 , ta kết luận rằng θ là một đồng cấu của K -kgv.

1.1.15 a) Ta có : ${}^{\circ}L = \{f \in V; \forall a \in K, f(a) = 0\} = \{0_V\}$, do V là hữu hạn chiều nên :

$$L = ({}^{\circ}L)^{\perp} = \{0_V\}^{\perp} = V^*.$$

b) Theo a), $(E_{a_j})_{j \in K}$ sinh V^* . Vì V^* có số chiều hữu hạn n , tồn tại $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, sao cho $(E_{a_j})_{1 \leq j \leq n}$ là một cơ sở của V^* . Ta có :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, E_{a_j} = \sum_{i=1}^n E_{a_j}(f_i) f_i^* = \sum_{i=1}^n f_i(a_j) f_i^*.$$

Điều này chứng tỏ $(f_i(a_j))_{ij}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $(f_1^*, \dots, f_n^*)$ sang cơ sở $(E_{a_1}, \dots, E_{a_n})$.
do vậy khả nghịch.

1.1.16 a) Tồn tại $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$, sao cho $\varphi_{p+1} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i$.

Cho $x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$.

Khi đó ta có: $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\varphi_i(x) = 0$, từ đây: $\varphi_{p+1}(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(x) = 0$, và do vậy $x \in \text{Ker}(\varphi_{p+1})$.

Điều này chứng tỏ: $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\varphi_{p+1})$, vậy $\bigcap_{i=1}^{p+1} \text{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i)$.

b) Cho phép hoán vị $\varphi_1, \dots, \varphi_q$, ta có thể giả thiết $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ độc lập và $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_q$ được phân tích tuyến tính trên $\varphi_1, \dots, \varphi_r$.

Theo a), ta có: $\bigcap_{i=1}^q \text{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\varphi_i)$.

Vì $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ độc lập nên theo định lý về cơ sở không đầy đủ, tồn tại $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n \in E^*$ sao cho $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n)$ là một cơ sở của E^* .

Ta xét cơ sở tiền đối ngẫu của nó: $(e_1, \dots, e_n)$.

Giả sử $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ sao cho $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Ta có: $x \in \bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\varphi_i) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, r\}, e_i^*(x) = 0) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, r\}, x_i = 0)$.

Như vậy $\bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\varphi_i) = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$, vậy: $\dim \left(\bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(\varphi_i) \right) = n - r$.

c) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ độc lập $\Leftrightarrow \text{rank}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = n \Leftrightarrow \dim \left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i) \right) = 0 \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i) = \{0\}$.

1.1.17 $\forall P \in E$, $(f(\varphi))(P) = (\varphi \circ f)(P) = (XP)'(0) = (XP' + P)(0) = P(0)$.

♦ Trả lời: $f(\varphi) = E_0: E \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$

1.1.18 a) i) Giả sử $\varphi \in F^*$. Ta có:

$$\varphi \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi \in (\text{Im}(f))^\perp.$$

Từ đó: $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$.

2) Giả sử $\varphi \in \text{Im}(f)$; tồn tại $\psi \in F^*$ sao cho $\varphi = f(\psi) = \psi \circ f$.

Ta có: $\forall x \in \text{Ker}(f)$, $\varphi(x) = (\psi \circ f)(x) = \psi(0) = 0$, vậy: $\varphi \in (\text{Ker}(f))^\perp$.

Ta được: $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$.

b) • $\text{rank}(f) = \dim(F^*) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(F) - \dim((\text{Im}(f))^\perp) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rank}(f)$.

• $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rank}(f) = \text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f))^\perp$.

từ đó, vì đã có $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker}(f))^\perp$ nên ta có: $\text{Im}(f) = (\text{Ker}(f))^\perp$.

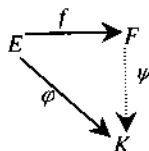
c) Giả sử $\varphi \in (\text{Ker}(f))^\perp$, tức là:

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(\varphi).$$

Theo bài tập 7.2.18 a), Tập 5, tồn tại:

$$\varphi \in \mathcal{L}(F, K) = F^* \text{ sao cho } \varphi = \psi \circ f.$$

Như vậy: $\varphi = f(\psi) \in \text{Im}(f)$.



Ta kết luận : $\text{Im}(f) = (\text{Ker}(f))^\perp$.

1.1.19 Trước tiên nhận xét rằng (xem Hệ quả 2, 1.1.4) vì E hữu hạn chiều nên ta có với mọi kgc A, B của E :

$$\begin{cases} A = B \Rightarrow A^\perp = B^\perp \\ A^\perp = B^\perp \Rightarrow A = {}^0(A^\perp) = {}^0(B^\perp) = B. \end{cases}$$

a) Sử dụng bài tập 1.1.18 c): $(\text{Im}(f))^\perp = (\text{Ker}(f))^\perp$:

f đơn ánh $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow (\text{Ker}(f))^\perp = \{0_E\}^\perp \Leftrightarrow \text{Im}(f) = E^* \Rightarrow f$ toàn ánh.

b) Sử dụng bài tập 1.1.18 a): $(\text{Ker}(f))^\perp = (\text{Im}(f))^\perp$:

f toàn ánh $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \Leftrightarrow (\text{Im}(f))^\perp = F^\perp \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_F\} \Leftrightarrow f$ đơn ánh .

c) f song ánh $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ đơn ánh} \\ f \text{ toàn ánh} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ toàn ánh} \\ f \text{ đơn ánh} \end{cases} \Leftrightarrow f$ song ánh.

1.2.1 Theo Mệnh đề 3, 1.2 : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C) \neq 0$, vậy $M \in \text{GL}_{n+p}(K)$.

Theo 1.2.2), M^{-1} có dạng $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, trong đó $X \in \text{M}_{n,p}(K)$. Ta có:

$$\begin{aligned} MM^{-1} = I_{n+p} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow AX + BC^{-1} = 0 \Leftrightarrow X = -A^{-1}BC^{-1}. \end{aligned}$$

♦ Trả lời : $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

1.2.2 Bằng cách biến đổi các cột, rồi các hàng:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} \\ &= \det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A+iB) \overline{\det(A+iB)} = |\det(A+iB)|^2 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

1.2.3 Với mọi Y thuộc $\text{M}_n(K)$, ta có :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ Y & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BX & B \\ YA+C+(YB+D)X & YB+D \end{pmatrix}.$$

Ta chọn $Y = -(C+DX)(A+BX)^{-1}$ sao cho :

$YA+C+(YB+D)X = Y(A+BX) + (C+DX)X = 0.$

Vì $\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ Y & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = (\det(I_n))^2 = 1$, nên ta được :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+BX & B \\ 0 & YB+D \end{pmatrix} = \det(A+BX)\det(-(C+DX)(A+BX)^{-1}B+D).$$

Đặc biệt nếu $A \in \text{GL}_n(K)$, bằng cách chọn $X = 0$ ta được:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B+D).$$

1.2.4 1) Ta chỉ ra rằng G là một kgvc của $\mathcal{L}(F, E)$.

• $0 \in G$.

• Nếu $\lambda \in K$ và $g_1, g_2 \in G$ thì $\begin{cases} (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + g_2 \circ f = 0 \\ f \circ (\lambda g_1 + g_2) = \lambda f \circ g_1 + f \circ g_2 = 0 \end{cases}$, vậy $\lambda g_1 + g_2 \in G$.

2) Theo định lý về hạng: $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rank}(f) = p - r$.

Kgvc $\text{Ker}(f)$ của E có ít nhất một cơ sở $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ và theo định lý về cơ sở không đầy đủ, tồn tại $e_1, \dots, e_r \in E$ sao cho $B = (e_1, \dots, e_p)$ là một cơ sở của E .

Kgvc $\text{Im}(f)$ của F có ít nhất một cơ sở $(f_1, \dots, f_r)$ và theo định lý về cơ sở không đầy đủ, tồn tại $f_{r+1}, \dots, f_n \in F$ sao cho $C = (f_1, \dots, f_n)$ là một cơ sở của F .

Với mọi g thuộc $\mathcal{L}(F, E)$ ta có:

$$g \in G \Leftrightarrow \begin{cases} g \circ f = 0 \\ f \circ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g) \\ \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\exists M \in \mathbf{M}_{p-r, n-r}(K), \text{Mat}_{C, B}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \right),$$

vậy: $\dim(G) = \dim(\mathbf{M}_{p-r, n-r}(K))$.

◊ **Trả lời:** $\dim(G) = (p - r)(n - r)$.

1.2.5 Theo Mệnh đề 2, 8.2.3, Tập 5, tồn tại $P, Q \in \text{GL}_p(K)$ sao cho $C = Q^{-1}J_rP$, ở đây

$$r = \text{rank}(C) \text{ và } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $P' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+p}(K)$ và $Q' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+p}(K)$, ta có:

$$Q' \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} P'^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & BP^{-1} \\ 0 & J_r \end{pmatrix},$$

vậy (xem Mệnh đề 4, 8.1.6, Tập 5):

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} I_n & BP^{-1} \\ 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

$$= \text{rank} \left(\begin{array}{c|ccc} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & & \\ \hline & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{array} \right) = \text{rank} \left(\begin{array}{c|ccc} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & & \\ \hline & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{array} \right) = n + r.$$

1.2.6 a) Nhận xét:

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - AB & 0 \\ B & I_p \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_p - BA \end{pmatrix}.$$

∀ $\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+p}(K)$, ta suy ra (xem Mệnh đề 4, 8.1.6, Tập 5):

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_n - AB & 0 \\ B & I_p \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_p - BA \end{pmatrix}.$$

Mặt khác (bài tập 1.2.5):

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_n - AB & 0 \\ B & I_p \end{pmatrix} = p + \text{rank}(I_n - AB) \text{ và } \text{rank} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_p - BA \end{pmatrix} = n + \text{rank}(I_p - BA).$$

$$b) \text{rank}(I_n - AB) = n - p \Leftrightarrow \text{rank}(I_p - BA) = 0 \Leftrightarrow I_p - BA = 0.$$

1.2.7 Theo Mệnh đề 2, 8.2.3, Tập 5, tồn tại $P, Q \in \text{GL}_n(K), R, S \in \text{GL}_p(K)$ sao cho :

$$A = Q^{-1}J_{n,r}P \text{ và } B = S^{-1}J_{p,s}R, \text{ ở đây } r = \text{rank}(A), s = \text{rank}(B), J_{n,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K),$$

$$J_{p,s} = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_p(K).$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+p}(K), \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+p}(K) \text{ và :}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_{n,r} & 0 \\ 0 & J_{p,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

$$\text{từ đây : rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r + s.$$

1.2.8 Theo Mệnh đề 2, 8.2.3, Tập 5, tồn tại $P_1 \in \text{GL}_n(K), Q_1 \in \text{GL}_p(K)$ sao cho :

$$A = P_1 J_r Q_1^{-1}, \text{ trong đó } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(K).$$

$$\text{Ta có : } PAQ = A \Leftrightarrow (P_1^{-1} P P_1) J_r (Q_1^{-1} Q Q_1) = J_r.$$

$$\text{Ký hiệu : } P' = P_1^{-1} P P_1 \sim P \text{ và } Q' = Q_1^{-1} Q Q_1 \sim Q.$$

Ta phân tích P' và Q' thành khối :

$$P' = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}, Q' = \begin{pmatrix} R' & S' \\ T' & U' \end{pmatrix}, \text{ trong đó } R \in \mathbf{M}_r(K), S \in \mathbf{M}_{r,n-r}(K), \dots$$

$$\text{Ta có : } P' J_r Q' = J_r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R' & S' \\ T' & U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} RR' & RS' \\ TR' & TS' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} RR' = I_r \\ RS' = 0 \\ TR' = 0 \\ TS' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R \in \text{GL}_r(K) \\ R' = R^{-1} \\ S' = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta kết luận : } P \sim P' = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & U \end{pmatrix} \text{ và } Q \sim Q' = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ T' & U' \end{pmatrix}.$$

1.2.9 (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\text{Ta giả sử } \text{rank}(f + g) = \text{rank}(f) + \text{rank}(g).$$

$$\text{Rõ ràng (không có giả thiết gì về } f \text{ và } g): \text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g).$$

Ta có :

$$\text{rank}(f + g) = \dim(\text{Im}(f + g)) \leq \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = \text{rank}(f) + \text{rank}(g) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g))$$

$$\leq \text{rank}(f) + \text{rank}(g) = \text{rank}(f + g).$$

Vậy các bất đẳng thức ở trên đều là đẳng thức.

Ta suy ra : $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ và $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f + g)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Ta giả sử : $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f + g)$ và $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$.

Rõ ràng (không có giả thiết gì về f và g): $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f + g)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \dim(\text{Ker}(f + g)) &= \dim(E) - \dim(\text{Im}(f + g)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)) \\ &= \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) - \dim(\text{Im}(g)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g)) - \dim(E) \\ &= \dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) + \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) - \dim(E), \end{aligned}$$

$$\text{từ đó : } 0 \leq \dim(\text{Ker}(f + g)) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) - \dim(E) \leq 0.$$

Vậy các bất đẳng thức trên đều là đẳng thức.

Từ đó suy ra : $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ và $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Ta giả sử : $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$ và $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f + g)$. Ta có :

$$\begin{aligned} \text{rank}(f + g) &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f + g)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) \\ &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) - \dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) \\ &= (\dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))) + (\dim(E) - \dim(\text{Ker}(g))) = \text{rank}(f) + \text{rank}(g). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

Ta giả sử : $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Im}(f + g)$ và $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$; vậy ta có (xem trên đây) :

$$\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E \text{ và } \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f + g).$$

Ký hiệu : $n = \dim(F)$, $p = \dim(E)$, $r = \text{rank}(f)$, $s = \text{rank}(g)$.

Kgvc $\text{Im}(f)$ của F có ít nhất một cơ sở $C_1 = (f_1, \dots, f_r)$ và kgvc $\text{Im}(g)$ của F có ít nhất một cơ sở $C_2 = (f_{r+1}, \dots, f_{r+s})$.

Vì $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ nên $C_1 \cup C_2$ là độc lập.

Theo định lý về cơ sở không đầy đủ, tồn tại $C_3 = (f_{r+s+1}, \dots, f_n) \in F^{n-r-s}$ sao cho $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ là một cơ sở của F .

• Giả sử $i \in \{1, \dots, r\}$. Tồn tại $x_i \in E$ sao cho $f_i = f(x_i)$, và vì $E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$ nên tồn tại $u_i \in \text{Ker}(f)$ và $e_i \in \text{Ker}(g)$ sao cho $x_i = u_i + e_i$. Khi đó ta có : $e_i \in \text{Ker}(g)$ và $f(e_i) = f(x_i) = f_i$. Ta ký hiệu $B_1 = (e_1, \dots, e_r)$.

• Giả sử $i \in \{r+1, \dots, r+s\}$. Tồn tại $x_i \in E$ sao cho $f_i = g(x_i)$ và tồn tại $e_i \in \text{Ker}(f)$, $v_i \in \text{Ker}(g)$ sao cho $x_i = e_i + v_i$. Khi đó ta có : $e_i \in \text{Ker}(f)$ và $g(e_i) = g(x_i) = f_i$. Ta ký hiệu $B_2 = (e_{r+1}, \dots, e_{r+s})$.

Vì $\dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \dim(\text{Ker}(f + g)) = p - \text{rank}(f + g) = p - r - s$, nên

kgvc $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ của E có ít nhất một cơ sở $B_3 = (e_{r+s+1}, \dots, e_p)$.

Chúng minh $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ là một cơ sở của E .

Giả sử $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$ sao cho $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$.

$$\text{Áp dụng } f \text{ và } g, \text{ ta nhận được : } 0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i \text{ và } 0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i g(e_i) = \sum_{i=r+1}^{r+s} \lambda_i f_i,$$

từ đây $\lambda_i = 0$ với mọi i thuộc $\{1, \dots, r+s\}$.

Khi đó $\sum_{i=r+s+1}^p \lambda_i e_i = 0$ và như vậy (vì C_λ độc lập) $\lambda_i = 0$ với mọi i thuộc $\{r+s+1, \dots, p\}$.

Như vậy, B là độc lập trong E và có p phần tử, vậy B là một cơ sở của E .

Rõ ràng rằng (qua phép xây dựng): $\text{Mat}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $\text{Mat}_{C,B}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Hiển nhiên.

1.3.1 a) Vì $(\forall k \in \mathbb{N}, \|A^k\| \leq \|A\|^k)$ và $\|A\| < 1$, chuỗi $\sum_{k \geq 0} A^k$ là hội tụ tuyệt đối.

Vì $M_n(\mathbb{K})$ là một $\mathbb{K}$ -kgv hữu hạn chiều nên $M_n(\mathbb{K})$ đầy đủ (xem Định lý 1, 1.4.2, Tập 3)

vậy $\sum_{k \geq 0} A^k$ hội tụ trong $M_n(\mathbb{K})$ (Định lý, 3.3.1, Tập 3). Ký hiệu $B = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Ta có $\forall k \in \mathbb{N}, \left(\sum_{p=0}^k A^p \right) (I_n - A) = \sum_{p=0}^k A^p - \sum_{p=0}^k A^{p+1} = I_n - A^{k+1}$, từ đó, cho k dần đến vô cùng: $B(I_n - A) = I_n$ vì $A^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Điều này chứng tỏ rằng $I_n - A$ khả nghịch và $(I_n - A)^{-1} = B$.

b) Vì $(\|A\| < 1, \|-A\| = \|A\| < 1, \|A^2\| \leq \|A\|^2 < 1)$, nên các ma trận $I_n - A, I_n + A, I_n - A^2$ là khả nghịch.

Theo a): $\frac{1}{2} (I_n - A)^{-1} + \frac{1}{2} (I_n + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} A^k + \frac{1}{2} (-A)^k \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} A^{2i} = (I_n - A^2)^{-1}$

Nhận xét : Ta có thể nhận được kết quả mà không sử dụng chuỗi :

$$\begin{aligned} (I_n + A) \left(\frac{1}{2} (I_n - A)^{-1} + \frac{1}{2} (I_n + A)^{-1} \right) (I_n - A) \\ = \frac{1}{2} (I_n + A) (I_n - A)^{-1} (I_n - A) + \frac{1}{2} ((I_n + A) (I_n + A)^{-1}) (I_n - A) \\ = \frac{1}{2} (I_n + A) + \frac{1}{2} (I_n - A) = I_n, \end{aligned}$$

từ đó $\frac{1}{2} (I_n - A)^{-1} + \frac{1}{2} (I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1} (I_n - A)^{-1} = ((I_n - A)(I_n + A))^{-1} = (I_n - A^2)^{-1}$.

1.3.2 a) $\text{com}(AB) = \det(AB) (AB)^{-1} = \det(A) \det(B) A^{-1} B^{-1}$
 $= (\det(A) A^{-1}) (\det(B) B^{-1}) = \text{com}(A) \text{com}(B)$.

b) Ta biết rằng (xem bài tập 1.2.22, Tập 3) $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ trừ mật trong $M_n(\mathbb{K})$ và ta suy ra từ đó rằng $(\text{GL}_n(\mathbb{K}))^2$ trừ mật trong $(M_n(\mathbb{K}))^2$.

c) Ánh xạ $\delta: (M_n(\mathbb{K}))^2 \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ được định nghĩa bởi: $\delta(A, B) = \text{com}(AB) - \text{com}(A) \text{com}(B)$ liên tục trên $(M_n(\mathbb{K}))^2$ (vì các phần tử của $\delta(A, B)$ được biểu thị bằng đa thức theo các phần tử của A và của B) và triệt tiêu trên bộ phận trừ mật $(\text{GL}_n(\mathbb{K}))^2$, vậy bằng 0.

1.3.3 Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• $A^2 = B^2 = 0$, vậy $e^A = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^B = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

• $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C^2 = I_2$, từ đó $e^C = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \right) C = \begin{pmatrix} \text{ch} 1 & \text{sh} 1 \\ \text{sh} 1 & \text{ch} 1 \end{pmatrix}.$

◊ **Trả lời:** Ta có thể chọn $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.3.4 Nhận xét rằng $A = (a - b)I + bJ$, trong đó $I = I_n$ và $J = \begin{pmatrix} 1 & - & 1 \\ | & 1 & | \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}$

Vì I và J giao hoán, ta có: $e^A = e^{(a-b)I} e^{bJ} = e^{aI} e^{bJ}.$

Hơn nữa, $J^2 = nJ$, từ đây, bằng một phép quy nạp đơn giản: $\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = n^{k-1}J$. Vậy:

$$e^{bJ} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (bJ)^k = I + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k n^{k-1}}{k!} \right) J = I + \frac{1}{n} (e^{nb} - 1)J.$$

◊ **Trả lời:** $e^A = e^{a-b} \left(I_n + \frac{1}{n} (e^{nb} - 1)J \right)$ trong đó $J = \begin{pmatrix} 1 & - & 1 \\ | & 1 & | \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}.$

1.3.5 Ký hiệu $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \omega = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, nhận xét rằng $AU = 0$ và

$A^2 = -\omega^2 I_3 + U \cdot U$, từ đó $A^3 = -\omega^2 A$. Ta suy ra, bằng một phép truy hồi đơn giản:

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, A^{2k+1} = (-\omega^2)^k A \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, A^{2k} = (-\omega^2)^{k-1} A^2. \end{cases}$$

Từ đó:
$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} \\ &= I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} A + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \omega^{2k-2} t^{2k}}{(2k)!} A^2 \\ &= I_3 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t A - \frac{1}{\omega^2} (\cos \omega t - 1) A^2. \end{aligned}$$

◊ **Trả lời:** $e^{tA} = I_3 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t A + \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) A^2.$

1.3.6 a) Ký hiệu E_0 là tập hợp các ma trận lũy linh của $M_n(\mathbb{R})$, và $E_1 = \{I_n + A; A \in E_0\}.$

• Giả sử $A \in E_0$; tồn tại $v \in \mathbb{N}^*$ sao cho $A^v = 0$, vậy $e^A = I_n + \left(\sum_{k=1}^v \frac{1}{k!} A^k \right) \in E_1$, vì

$$\left(\sum_{k=1}^v \frac{1}{k!} A^k \right)^v = A^v \left(\sum_{k=0}^{v-1} \frac{1}{(k+1)!} A^k \right)^v = 0.$$

Ký hiệu $f: E_0 \rightarrow E_1$.
 $A \mapsto e^A$

- Giả sử $B \in E_1$, tồn tại $A \in E_0$ sao cho $B = I_n + A$, và $v \in \mathbb{N}^*$ sao cho $A^v = 0$.

Vì A lũy linh, nên như trên đây, $\sum_{k=1}^v \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$, mà ta có thể ký hiệu $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$ cũng lũy linh.

Ký hiệu $g: E_1 \rightarrow E_0$.

$$B \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$$

Ta xét ánh xạ $\varphi:]-\infty; \ln 2[\rightarrow]0; 2[$ và $\psi:]0; 2[\rightarrow]-\infty; \ln 2[$.

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad y \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (y-1)^k = \ln y$$

Ta có: $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{]-\infty; \ln 2[}$ và $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{]0; 2[}$.

Do tính duy nhất của KTCN(0) thuộc $\text{Id}_{]-\infty; \ln 2[}$ và của KTCN(1) thuộc $\text{Id}_{]0; 2[}$ suy ra rằng các hệ số của chuỗi nguyên "hợp thành" đều bằng 0, trừ hệ số của x (hoặc của $(y-1)$) bằng 1.

Vì g và f được biểu thị bằng các tổng hữu hạn xuất phát từ các chuỗi nguyên này, ta suy ra $g \circ f = \text{Id}_{E_0}$ và $f \circ g = \text{Id}_{E_1}$.

$$\text{Khi đó: } N = g(e^N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (e^N - I_n)^k.$$

$$\text{Vì } e^N = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \text{ ta có } e^N - I_n = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \text{ như vậy } N \text{ có dạng } \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Giả sử $Y \in F$.

Ta chứng minh bằng quy nạp: $\forall k \in \mathbb{N}^*, (e^N - I_n)^k Y \in E$.

Theo giả thiết, tính chất đúng với $k=1$. Nếu nó đúng với k thuộc $\mathbb{N}^*$ thì:

$$(e^N - I_n)^{k+1} Y = (e^N - I_n)((e^N - I_n)^k Y) \in (e^N - I_n)(E) \subset (e^N - I_n)(F) \subset E.$$

Vì E là một kgvc của $M_{n,1}(\mathbb{R})$, suy ra: $NY = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (e^N - I_n)^k Y \in E$, tổng có giá trị hữu hạn.

Như vậy: $(\forall Y \in F, NY \in E)$, tức là: $N(F) \subset E$.

1.3.7 Ta trang bị cho $M_n(\mathbb{C})$ một chuẩn đại số $\|\cdot\|$ (xem Mệnh đề, 1.3.1). Giả sử $\varepsilon > 0$.

Với mọi p thuộc $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \left\| e^A - \left(I_n + \frac{1}{p} A \right)^p \right\| &= \left\| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) - \left(I_n + \frac{1}{p} A \right)^p \right\| \\ &\leq \left\| \left(\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k \right) - \left(I_n + \frac{1}{p} A \right)^p \right\| + \left\| \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \right\|. \end{aligned}$$

Tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho : $\sum_{k=N_1+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k < \varepsilon$.

Giả sử $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho $p \geq N_1 + 1$. Ta có :

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k \right) - \left(I_n + \frac{1}{p} A \right)^p \right\| = \left\| \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{k!} - C_p^k \left(\frac{1}{p} \right)^k \right) A^k \right\| \leq \sum_{k=1}^p \left| 1 - \frac{p!}{(p-k)! p^k} \right| \frac{1}{k!} \|A\|^k.$$

• Vì với mọi k thuộc $\{N_1 + 1, \dots, p\}$, $\frac{p!}{(p-k)! p^k} = \frac{p}{p} \frac{p-1}{p} \dots \frac{p-k+1}{p} \in]0; 1[$, nên :

$$\sum_{k=N_1+1}^p \left| 1 - \frac{p!}{(p-k)! p^k} \right| \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \sum_{k=N_1+1}^p \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \sum_{k=N_1+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k < \varepsilon.$$

• Mặt khác vì với mỗi k thuộc $\{1, \dots, N_1\}$, $\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{p^k} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 1$ nên tồn tại $N_2 \in \mathbb{N}^*$

sao cho $\forall k \in \{1, \dots, N_1\}$, $\forall p \geq N_2$, $\left| 1 - \frac{p!}{(p-k)! p^k} \right| < \varepsilon e^{-\|A\|}$, từ đây với mọi $p \geq N_2$, ta có :

$$\sum_{k=1}^{N_1} \left| 1 - \frac{p!}{(p-k)! p^k} \right| \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \varepsilon e^{-\|A\|} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \varepsilon e^{-\|A\|} e^{\|A\|} = \varepsilon.$$

Vậy với mọi p sao cho $p \geq \max(N_1 + 1, N_2)$: $\left\| e^A - \left(I_n + \frac{1}{p} A \right)^p \right\| < 3\varepsilon$.

Điều này chứng tỏ : $\left(I_n + \frac{1}{p} A \right)^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} e^A$.

C1.1 1) Giả sử $x \in E$. Ta có : $\forall \lambda \in K, \forall \varphi, \psi \in E^*, (\lambda\varphi + \psi)(x) = \lambda\varphi(x) + \psi(x)$.

vậy $E^* \rightarrow K$ là K -tuyến tính.

$\varphi \rightarrow \varphi(x)$

2) Giả sử $\lambda \in K, x, y \in E$. Với mọi φ thuộc E^* , ta có:

$$(j_E(\lambda x + y))(\varphi) = \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y) = \lambda(j_E(x))(\varphi) + (j_E(y))(\varphi) = (\lambda j_E(x) + j_E(y))(\varphi).$$

3) $\text{Ker}(j_E) = {}^0(E^*) = \{0_E\}$, xem hệ quả 3'), 1.1.4, vậy j_E là đơn ánh.

Hơn nữa, $\dim(E^{**}) = \dim(E^*) = \dim(E)$.

Ta kết luận : j_E là một đẳng cấu của K -kgv từ E lên E^{**} .

4) $\text{Ker}(j_E) = \{x \in E, \forall \varphi \in E^*, \varphi(x) = 0\} = {}^0(E^*) = \{0_E\}$ xem bài tập 1.1.5.

5) Với mọi x thuộc E :

$$x \in j_E^{-1}(L^\square) \Leftrightarrow j_E(x) \in L^\square \Leftrightarrow (\forall \varphi \in L, (j_E(x))(\varphi) = 0) \Leftrightarrow (\forall \varphi \in L, \varphi(x) = 0) \Leftrightarrow x \in {}^0L.$$

6) Giả sử $x \in E, \psi \in F^*$. Ta có :

$$\bullet ((f \circ j_E)(x))(\psi) = (f(j_E(x))) (\psi) = (j_E(x) \circ f)(\psi) = (j_E(x))(f(\psi)) = (j_E(x))(\psi \circ f) = (\psi \circ f)(x)$$

$$\bullet ((j_F \circ f)(x))(\psi) = (j_F(f(x))) (\psi) = \psi(f(x)).$$

Ta kết luận : $f \circ j_E = j_F \circ f$.

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 2

2.1.1 1) Giả sử $\lambda \in K, x \in \text{Ker}(f - \lambda e)$. Ta có :

$$(f - \lambda e)(g(x)) = (f \circ g)(x) - \lambda g(x) = (g \circ f)(x) - \lambda g(x) = g(\lambda x) - \lambda g(x) = 0.$$

Vậy $g(x) \in \text{Ker}(f - \lambda e)$.

Khi lấy $\lambda = 0$: $\text{Ker}(f)$ ổn định đối với g .

Khi lấy $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$: $\text{KGCR}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda e)$ ổn định đối với g .

2) Giả sử $y \in \text{Im}(f)$. Tồn tại $x \in E$ sao cho $y = f(x)$, từ đó :

$$g(y) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \text{Im}(f).$$

2.1.2 Ký hiệu $B = \sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k$, ta có : $B(I_n - \omega A) = I_n - \omega^p A^p = 0$.

Vì $I_n - \omega A = -\omega(A - \omega^{-1}I_n)$ và vì $\omega^{-1} \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ nên $I_n - \omega A$ khả nghịch, từ đó $B = 0$.

2.1.3 Ta xét, chẳng hạn, $n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ không có chung một vectơ riêng nào vì các vectơ riêng

của BA là cộng tuyến với $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ đều không phải là vectơ riêng của AB .

♦ Trả lời : Không.

2.1.4 1) Giả sử $\lambda \in \mathbb{C}, P \in E - \{0\}$ sao cho $f(P) = \lambda P$, tức là $(X + \alpha)P' + (1 - \lambda)P = 0$

• Nếu $\lambda \neq 1$, ta suy ra $P(-\alpha) = 0$. Vậy tồn tại $k \in \{0, \dots, n\}$ và $Q \in \mathbb{C}[X]$ sao cho :

$$\begin{cases} P = (X + \alpha)^k Q & (k \text{ là cấp bội của nghiệm } -\alpha \text{ của } P). \\ Q(-\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Thế vào phương trình trên : $(X + \alpha)Q' + (k + 1 - \lambda)Q = 0$.

Vì $Q(-\alpha) \neq 0$, ta suy ra $k + 1 - \lambda = 0$, rồi $Q' = 0$, vậy $\deg(Q) = 0$.

Như vậy, tồn tại $C \in \mathbb{C} - \{0\}$ và $k \in \{0, \dots, n\}$ sao cho $\lambda = k + 1$ và $P = C(X + \alpha)^k$.

2) Đảo lại : $f(X + \alpha)^k = (k + 1)(X + \alpha)^k$ với mọi k thuộc $\{0, \dots, n\}$.

♦ Trả lời : • $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \{1, \dots, n + 1\}$,

$$\bullet \forall \lambda \in \{1, \dots, n + 1\}, \text{KGCR}(f, \lambda) = \mathbb{C}(X + \alpha)^{\lambda-1}.$$

2.1.5 Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$ sao cho $f(P) = \lambda P$, tức là :

$(X+1)(X-3)P' - (X+\lambda)P = 0$. Xét các hạng tử bậc cao nhất, ta suy ra : $\deg(P) \leq 1$.

$$\text{Ký hiệu } P = aX + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2: f(P) = \lambda P \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + \lambda a + b = 0 \\ 3a + \lambda b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -(2 + \lambda)a \\ (\lambda^2 + 2\lambda - 3)a = 0 \end{cases}$$

$\forall P \neq 0$, suy ra $\lambda = 1$ hoặc $\lambda = -3$, rồi suy ra P .

♦ Trả lời: • $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \{-3, 1\}$

$$\bullet \text{KGCR}(f, -3) = \text{Vect}(X+1), \text{KGCR}(f, 1) = \text{Vect}(X-3).$$

2.1.6 Xét $P_0 = 1, P_1 = X$ và với $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, P_k = X(1 - X)(2 - X) \dots (k - 1 - X)$

(như vậy: $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X(1 - X), P_3 = X(1 - X)(2 - X), \dots$).

Kiểm chứng: $\forall k \in \mathbb{N}, f(P_k) = k P_k$.

Rõ ràng $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}[X]$ (các đa thức có bậc liên tiếp).

Cho $\lambda \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$ sao cho $f(P) = \lambda P$. Tồn tại $n \in \mathbb{N}, (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sao cho

$$P = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k. \text{ Ta có:}$$

$$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \alpha_k k P_k = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda P_k \Leftrightarrow (\forall k \in \{0, \dots, n\}, \alpha_k(k - \lambda) = 0).$$

Nếu $\lambda \notin \{0, \dots, n\}$, thì $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \alpha_k = 0$, vậy $P = 0$, mâu thuẫn.

Vậy $\lambda \in \{0, \dots, n\}$, rồi $(\forall k \in \{0, \dots, n\} - \{\lambda\}, \alpha_k = 0)$, và $P = \alpha_\lambda P_\lambda$.

♦ Trả lời: • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \mathbb{N}$

• $\forall k \in \mathbb{N}, \text{KGCR}(f, k) = \mathbb{R}P_k$ trong đó $P_k = X(1 - X)(2 - X) \dots (k - 1 - X)$

• $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}1$

• $\text{Im}(f) = X\mathbb{R}[X]$.

2.1.7 Giả sử $\lambda \in K, g \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} F(g) = \lambda g &\Leftrightarrow \forall P \in K[X], Xg(P) - g(XP) = \lambda g(P) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in K[X], g(XP) = (X - \lambda)g(P) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, g(X^{n+1}) = (X - \lambda)g(X^n) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, g(X^n) = (X - \lambda)^n g(1) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in K[X], g(P) = P(X - \lambda)g(1). \end{aligned}$$

♦ Trả lời: • $\text{Sp}_K(F) = K$

$$\bullet \text{ Với mọi } \lambda \text{ thuộc } K, \text{KGCR}(F, \lambda) = \left\{ g: K[X] \rightarrow K[X]; A \in K[X] \right\}.$$

$$P \mapsto A \cdot P(X - \lambda)$$

Chẳng hạn, nếu $K = \mathbb{R}, F$ có một số vô hạn các giá trị riêng (tất cả đều là thực), và với mỗi giá trị riêng, không gian con riêng liên kết vô hạn chiều.

2.1.8 a) Rõ ràng: $\forall P \in E, X^2 P'' - (a + b - 1)XP' + ahP \in E$, và f là tuyến tính.

b) Nhận xét: $\forall k \in \mathbb{N}, f(X^k) = (k^2 - (a + b)k + ab)X^k$.

Chứng tỏ (sử dụng $a + b < 0$) rằng các $k^2 - (a + b)k + ab (k \in \mathbb{N})$ từng đôi phân biệt rồi kết thúc như trong lời giải bài tập 2.1.6.

♦ Trả lời: • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{(k - a)(k - b); k \in \mathbb{N}\}$

• $\forall k \in \mathbb{N}, \text{KGCR}(f, (k - a)(k - b)) = \mathbb{R}X^k$.

2.1.9 a) Trong $X(1 - X)P' + nXP$, hạng tử bậc $n + 1$ biến mất. Và f là tuyến tính.

b) Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in E - \{0\}$ sao cho $f(P) = \lambda P$. Suy ra $P' + \frac{nX - \lambda}{X(1 - X)}P = 0$. Bằng cách giải

phương trình vi phân (trên $] - \infty; 0[$ hay $] 0; 1[$ hay $] 1; +\infty[$) $y' + \frac{nx - \lambda}{x(1 - x)}y = 0$ ta có:

$y: x \rightarrow C|x|^{1-\lambda}(1-x)^{-\lambda}(C \in \mathbb{R})$. Và y có dạng đa thức khi và chỉ khi $(\lambda, n - \lambda) \in \mathbb{N}^2$.

Từ đây suy ra $\lambda \in \{0, \dots, n\}$, rồi P .

Nghiên cứu phần đảo.

♦ **Trả lời:** • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{0, \dots, n\}$

$$\bullet \forall \lambda \in \{0, \dots, n\}, \text{KGCR}(f, \lambda) = \text{Vect}(X^\lambda(1 - X)^{n-\lambda}).$$

2.1.10 Giả sử $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ sao cho $f(x) = \lambda x$.

Khi đó ta có: $\lambda x_0 = 0$, $\lambda x_1 = x_0, \dots, \lambda x_{n+1} = x_n, \dots$

Nếu $\lambda = 0$ thì $x_0 = 0, \dots, x_n = 0$, vậy $x = 0$.

Nếu $\lambda \neq 0$, thì ta cũng có $x_0 = 0, \dots, x_n = 0$, vậy $x = 0$.

Điều này chứng tỏ rằng f không thừa nhận một giá trị riêng nào.

2.1.11 Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E - \{0\}$.

Ta có: $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \lambda x_n) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \lambda^n x_0)$.

Nếu $x_0 = 0$ thì $x = 0$, loại trừ. Mặt khác, $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ khi và chỉ khi: $|\lambda| < 1$ hay $\lambda = 1$.

♦ **Trả lời:** • $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\} \cup \{1\}$

$$\bullet \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f), \text{KGCR}(f, \lambda) = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Mỗi không gian con riêng có số chiều là 1.

2.1.12 Rõ ràng rằng T là tuyến tính.

Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E - \{0\}$. Ta có: $T(u) = \lambda u \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n) = \lambda u_n)$.

Vì $u \neq 0$, tồn tại số nguyên k nhỏ nhất thuộc $\mathbb{N}^*$ sao cho $u_k \neq 0$. Khi đó ta có:

$$T(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{k}u_k = \lambda u_k \\ \frac{1}{k+1}(u_k + u_{k+1}) = \lambda u_{k+1} \\ \frac{1}{k+2}(u_k + u_{k+1} + u_{k+2}) = \lambda u_{k+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}(u_k + \dots + u_n) = \lambda u_n \quad (n > k) \\ \vdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{k} \\ k(u_k + u_{k+1}) = (k+1)u_{k+1} \\ k(u_k + u_{k+1} + u_{k+2}) = (k+2)u_{k+2} \\ \vdots \\ k(u_k + \dots + u_n) = nu_n \quad (n > k) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{k} \\ u_{k+1} = ku_k \\ 2u_{k+2} = (k+1)u_{k+1} \\ \vdots \\ (n-k)u_n = (n-1)u_{n-1} \quad (n > k) \\ \vdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{k} \\ u_{k+1} = ku_k \\ u_{k+2} = \frac{k(k+1)}{2}u_k \\ \vdots \\ u_n = \frac{k(k+1)\dots(n-1)}{1.2\dots(n-k)}u_k \quad (n > k) \\ \vdots \end{cases}$$

◊ Trả lời: • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T) = \left\{ \frac{1}{k}; k \in \mathbb{N}^* \right\}$

• Với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$, $\text{KGCR}(T, \frac{1}{k})$ có số chiều là 1, được sinh bởi dãy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

xác định bởi: $u_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n < k \\ C_{n-1}^{k-1} & \text{nếu } n \geq k \end{cases}$

2.1.13 a) • Với mọi x thuộc $[-\pi; \pi]$, các ánh xạ $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ và $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \cos(x-t)f(t)$ $t \mapsto \sin(x-t)f(t)$

là liên tục, vậy $u(f)(x)$ và $v(f)(x)$ tồn tại.

• Với mọi x thuộc $[-\pi; \pi]$, bằng cách khai triển, ta được:

$$\begin{cases} u(f)(x) = \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t f(t) dt + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t f(t) dt \\ v(f)(x) = \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t f(t) dt - \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t f(t) dt \end{cases}$$

điều này chứng tỏ rằng $u(f)$ và $v(f)$ liên tục (vì là tổ hợp tuyến tính của $\cos$ và $\sin$).

• Tính chất tuyến tính của u và v là hiển nhiên.

b) Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}, f \in E - \{0\}$. Ta có:

$$u(f) = \lambda f \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t f(t) dt + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t f(t) dt = \lambda f(x) \right)$$

Nếu $\lambda = 0$, thì: $u(f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos t f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t f(t) dt = 0$.

Giả sử $\lambda \neq 0$ khi đó $u(f) = \lambda f \Rightarrow f \in \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Tính: $u(\cos) = \pi \cos, u(\sin) = \pi \sin$.

Cũng vậy: $v(\cos) = \pi \sin, v(\sin) = -\pi \cos$.

◊ Trả lời: 1) • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{0, \pi\}$

• $\text{KGCR}(u, 0) = \left\{ f \in E; \int_{-\pi}^{\pi} \cos t f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t f(t) dt = 0 \right\}$ vô hạn chiều

(vì là giao của hai siêu phẳng của E); $\text{KGCR}(u, \pi) = \text{Vect}(\cos, \sin)$

2) • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(v) = \{0\}$

• $\text{KGCR}(v, 0) = \text{KGCR}(u, 0)$.

2.1.14 Giả sử $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(AB)$, tồn tại $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) - \{0\}$ sao cho $ABX = \lambda X$. Ta suy ra:

$$(BA)BX = B(ABX) = \lambda BX$$

• Nếu $BX \neq 0$, thì $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(BA)$ và BX là một vectơ riêng của BA , liên kết với λ .

• Giả sử $BX = 0$. Khi đó $\lambda X = ABX = 0$, vậy $\lambda = 0$.

Tiếp đó: $0 \in \text{Sp}_K(AB) \Rightarrow \det(AB) = 0 \Rightarrow \det(BA) = \det(B)\det(A) = \det(A)\det(B) = \det(AB) = 0$
 $\Rightarrow 0 \in \text{Sp}_K(BA)$.

Như vậy ta đã chứng tỏ: $\text{Sp}_K(AB) \subset \text{Sp}_K(BA)$.

Ta kết luận khi hoán vị vai trò của A và B .

2.1.15 a) Giả sử $\lambda \in \text{Sp}_C(A)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{KGCR}(A, \lambda) - \{0\}$. Tồn tại $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ sao cho:

$$|x_{i_0}| = \|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

$$\text{Vì } AX = \lambda X, \text{ hàng thứ } i_0 \text{ cho ta: } \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0}$$

$$\text{Từ đó: } |(\lambda - a_{i_0 i_0}) x_{i_0}| = \left| \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} a_{i_0 j} x_j \right| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}| |x_j| \leq \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}| \right) |x_{i_0}|.$$

$$\text{Vì } X \neq 0, \text{ ta có } |x_{i_0}| > 0, \text{ vậy: } |\lambda - a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}|.$$

b) Theo giả thiết: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, 0 \notin B' \left(a_{ii}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \right)$. Từ a) suy ra: $0 \notin \text{Sp}_C(A)$, tức là:

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

2.2.1 Giả sử $B_1 = (e_1, \dots, e_p)$ là một cơ sở của F . Theo Định lý về cơ sở không đầy đủ, tồn tại $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ sao cho $B = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E . Ký hiệu $A = \text{Mat}_{B_1}(f')$ tồn tại

$B \in \mathbf{M}_{p, n-p}(K)$ và $C \in \mathbf{M}_{n-p}(K)$ sao cho: $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Khi đó, với mọi λ thuộc K :

$$\chi_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda I_p & B \\ 0 & C - \lambda I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I_p) \det(C - \lambda I_{n-p}) = \chi_{f'}(\lambda) \chi_C(\lambda).$$

Vì $\chi_C \in K[X]$, ta kết luận: $\chi_{f'} | \chi_f$.

2.2.2 Cho B là một cơ sở của E và $A = \text{Mat}_B(f)$.

1) Vì n là lẻ, nên một ánh xạ χ_A liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, có giới hạn $-\infty$ tại $+\infty$ và $+\infty$ tại $-\infty$ có ít nhất một nghiệm thực (định lý các giá trị trung gian).

Vậy tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ và $x \in E - \{0\}$ sao cho $f(x) = \lambda x$. Khi đó $\mathbb{R}x$ là một đường thẳng vectơ ổn định đối với f .

2) Lập luận trên (áp dụng cho A thay cho A) chỉ ra rằng tồn tại $\lambda' \in \mathbb{R}$ và $X' \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ sao cho $AX' = \lambda' X'$.

Ký hiệu $H = \{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}); X'Y = 0\}$ là một siêu phẳng của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Cho $Y \in H$. Ta có: $X'(AY) = (AX')Y = (\lambda' X')Y = \lambda' X'Y = 0$, vậy $AY \in H$.

Điều này chứng tỏ rằng H ổn định đối với A .

Vậy siêu phẳng của E liên kết với H trong cơ sở B là ổn định đối với f .

$$2.2.3 \quad \text{Hạng thức bậc 1 tại } \lambda \text{ trong } \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \text{ là :}$$

$-\lambda A_{11} - \lambda A_{22} - \dots - \lambda A_{nn}$, trong đó A_{ii} vừa là định thức con và vừa phần bù đại số của a_{ii} trong A .

$$2.2.4 \quad \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & A_N - \lambda I_{n_N} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^N \det(A_k - \lambda I_{n_k}) = \prod_{k=1}^N \chi_{A_k}(\lambda).$$

$$2.2.5 \quad \text{Trong đẳng thức ma trận} \begin{pmatrix} -\lambda I_n & B \\ C & -\lambda I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & \lambda I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda I_n & 0 \\ C & CB - \lambda^2 I_p \end{pmatrix},$$

hãy lấy các định thức.

2.2.6 Phương pháp thứ nhất

Theo bài tập 2.2.5 và do A và I_n giao hoán :

$$\chi_M(\lambda) = (-1)^n \det(A^2 - \lambda^2 I_n) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n) \det(A + \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda) \chi_A(-\lambda).$$

Phương pháp thứ hai

Thực hiện các phép toán trên các cột rồi trên các hàng :

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda I_n & A \\ A & -\lambda I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda I_n + A & A \\ A - \lambda I_n & -\lambda I_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & A \\ 0 & -A - \lambda I_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A - \lambda I_n) \det(A + \lambda I_n). \end{aligned}$$

$$2.2.7 \quad \forall \lambda \in K, \chi_{1_A}(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda).$$

$$2.2.8 \quad \text{Ký hiệu } B_0 = (e_1, \dots, e_n) \text{ là cơ sở chính tắc của } \mathbb{R}^n, A = (a_{ij})_{ij} = \text{Mat}_{B_0}(f).$$

Cho $j \in \{1, \dots, n\}$. Vì $e_j \in (\mathbb{R}_+)^n$ và $f(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$, ta suy ra : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} \geq 0$.

$$\text{Vậy : } \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \|f(e_j)\|_1 = \|e_j\|_1 = 1.$$

Xét $u = (1, \dots, 1)$. Ta có $u \neq 0$ và :

$${}^t A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Như vậy : $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

Theo bài tập 2.2.7, ta suy ra $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, tức là $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

$$2.2.9 \quad \text{Ta có : } \begin{cases} {}^t YAZ = {}^t (AY)Z = {}^t (\lambda Y)Z = \lambda {}^t YZ \\ {}^t YAZ = {}^t Y(AZ) = {}^t Y(\mu Z) = \mu {}^t YZ \end{cases}, \text{ từ đó } (\lambda - \mu) {}^t YZ = 0.$$

- Nếu $\lambda = \mu$ thì $Z \in \text{KGCR}(A, \lambda)$ có số chiều là 1, vậy Z cộng tuyến với X .
- Ta giả sử $\lambda \neq \mu$, khi đó $YZ = 0$.

Ký hiệu, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ trong đó với mọi i thuộc $\{1, \dots, n\}$, $y_i > 0$ và $z_i \geq 0$, suy ra

($\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $z_i = 0$), vậy $Z = 0$ mâu thuẫn.

2.2.10 a) Ký hiệu $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $L = (l_1, \dots, l_n)$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$,

vậy $A = \begin{pmatrix} \alpha & l_1 & \dots & l_n \\ c_1 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Theo giả thiết, tồn tại $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ sao cho :

$$\begin{cases} \alpha = \sum_{i=1}^n x_i c_i \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad l_j = \sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \end{cases}$$

Ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, khi đó ta có :

$$\begin{cases} {}^tXC = \sum_{i=1}^n x_i c_i = \alpha \\ {}^tXB = \left(\sum_{i=1}^n x_i b_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i b_{in} \right) = (l_1, \dots, l_n) = L \end{cases}$$

b) Ký hiệu $P = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tX \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$, rõ ràng rằng P khả nghịch và $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & {}^tX \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

Ta có : $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tX \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^tX \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - {}^tXC & L - {}^tXB \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^tX \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^tX \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & C^tX + B \end{pmatrix}$, từ đó, với mọi λ thuộc K :

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{PAP^{-1}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ C & C^tX + B - \lambda I_n \end{pmatrix} = -\lambda \chi_{C^tX+B}(\lambda).$$

Kết luận : $C^tX + B$ có các gtr $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Chính xác hơn : $\forall \lambda \in K$, $\chi_{C^tX+B}(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k)$.

2.2.11 a) Với $k \in \{0, \dots, n-1\}$, ký hiệu $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_k & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n-k}(K)$.

Khai triển theo dòng thứ nhất :

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{A_0}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\lambda & 1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \chi_{A_1}(\lambda) + (-1)^{n+1} a_0.$$

Kết hợp các hệ thức :

$$\begin{array}{lcl} \chi_{A_0}(\lambda) & = & -\lambda \chi_{A_1}(\lambda) + (-1)^{n+1} a_0 \\ \chi_{A_1}(\lambda) & = & -\lambda \chi_{A_2}(\lambda) + (-1)^n a_1 \\ & \vdots & \\ \chi_{A_{n-2}}(\lambda) & = & -\lambda \chi_{A_{n-1}}(\lambda) + (-1)^3 a_{n-2} \\ \chi_{A_{n-1}}(\lambda) & = & -\lambda + (-1)^2 a_{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ -\lambda \\ \vdots \\ (-\lambda)^{n-2} \\ (-\lambda)^{n-1} \end{array}$$

Từ đây : $\chi_A(\lambda) = (-1)^{n+1} a_0 + (-1)^{n+1} a_1 \lambda + \dots + (-1)^{n+1} a_{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n =$

$$(-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \right).$$

b) Điều kiện cần hiển nhiên : $\alpha_n = (-1)^n$.

Đào lại, với mọi $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ thuộc K^n , theo a) tồn tại $A \in M_n(K)$ sao cho

$$\chi_A = (-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k.$$

◇ Trả lời : $\alpha_n = (-1)^n$.

2.2.12 Chú ý tới các đẳng thức ma trận, trong $M_{n+p}(K)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - \lambda I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & -\lambda I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda I_n & 0 \\ -B & BA - \lambda I_p \end{pmatrix}$$

từ đây bằng cách chuyển sang các định thức :

$$\det(AB - \lambda I_n) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \text{ và } (-\lambda)^n \det(BA - \lambda I_p) = (-1)^n (-\lambda)^n \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix},$$

và vì vậy : $(-\lambda)^n \chi_{BA}(\lambda) = (-\lambda)^n \chi_{AB}(\lambda)$.

2.2.13 a) Giả sử B_0 là một cơ sở của E ; F, G, U là các ma trận tương ứng của f, g, u trong

B_0 . Tồn tại $P, Q \in GL_n(K)$ sao cho với ký hiệu $r = \text{rank}(u)$ và $J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$, ta có

$U = Q^{-1}JP$ (xem Mệnh đề 2, 8.2.3, Tập 5).

Ký hiệu $F' = PFP^{-1}$ và $G' = QGQ^{-1}$, suy ra $JF' = G'J$.

Phân tích F', G' thành các khối : $F' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, G' = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, trong đó $A \in M_r(K), \dots$

Khi đó $JF' = G'J \Rightarrow (A = X, B = 0, Z = 0)$, từ đây : $F' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, G' = \begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & T \end{pmatrix}$.

Lại có : $\chi_f = \chi_{f'} = \chi_{f''} = \chi_A \chi_D$ và $\chi_g = \chi_{g'} = \chi_{g''} = \chi_A \chi_T$, vậy χ_A (có bậc r) chia hết χ_f và χ_g .

b) Theo a) : $\deg(\text{UCLN}(\chi_f, \chi_g)) \geq 1$. Định lý d'Alembert chứng tỏ rằng $\text{UCLN}(\chi_f, \chi_g)$ có ít nhất một nghiệm trong $\mathbb{C}$, vậy f và g có chung ít nhất một giá trị riêng.

2.2.14 a) Nhận xét: $B \begin{pmatrix} V \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, vậy $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

b) Ký hiệu $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ {}^tU & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ rõ ràng P khả nghịch và $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -{}^tU & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ta được } PBP^{-1} = \begin{pmatrix} A + AV{}^tU & -AV \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta tìm lại được kết quả của a) : $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

Với mọi λ thuộc $\mathbb{C}$, ta có :

$$\chi_B(\lambda) = \chi_{PBP^{-1}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A + AV{}^tU - \lambda I_n & -AV \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \chi_{A+AV{}^tU}(\lambda).$$

Như vậy : $X^2 | \chi_B \Leftrightarrow X | \chi_{A+AV{}^tU} \Leftrightarrow \det(A + AV{}^tU) = 0 \Leftrightarrow \det(A) \det(I_n + V{}^tU) = 0$.

Để khảo sát tính khả nghịch của $I_n + V{}^tU$, ta sẽ xác định $\text{Ker}(I_n + V{}^tU)$.

Với mọi W thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, ta có: $(I_n + V{}^tU)W = 0 \Leftrightarrow W + ({}^tUV)V = 0 \Rightarrow W \in \mathbb{C}V$.

Và : $(I_n + V{}^tU)V = V + ({}^tUV)V = (1 + {}^tUV)V$.

Như vậy : $\text{Ker}(I_n + V{}^tU) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } {}^tUV \neq -1 \\ \mathbb{C}V & \text{nếu } {}^tUV = -1 \end{cases}$.

Ta suy ra : $\det(I_n + V{}^tU) \neq 0 \Leftrightarrow {}^tUV \neq -1$.

Cuối cùng :

$$\alpha) \det(A) = 0 \Rightarrow X^2 | \chi_B$$

$$\beta) \left\{ \begin{array}{l} X^2 | \chi_B \\ {}^tUV \neq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det(A) \det(I_n + V{}^tU) = 0 \\ \det(I_n + V{}^tU) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \det(A) = 0.$$

2.3.1 $\diamond$ Trả lời : PDP^{-1} trong đó :

$$a) P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3.2 a) Dễ dàng kiểm chứng.

b) Áp dụng a) cho $a - \lambda$ thay vì cho a ta được: $(A - \lambda I_4)(A - \lambda I_4) = ((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$.

từ đó bằng cách lấy các định thức: $\chi_A^2 = ((a - X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$, tức là:

$$(\chi_A - ((a - X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2) (\chi_A + ((a - X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2) = 0.$$

Do χ_A là một đa thức chuẩn tắc bậc 4 và vành $\mathbb{C}[X]$ là nguyên, ta suy ra:

$$\chi_A = ((a - X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

c) Theo b) χ_A tách được trên $\mathbb{C}$ và có hai nghiệm kép $a + i\omega$, $a - i\omega$ trong đó

$\omega = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ (Có thể giả thiết $\omega > 0$, trường hợp $b = c = d = 0$ là tầm thường). Chứng minh: $\text{KGCR}(A, a + i\omega)$ và $\text{KGCR}(A, a - i\omega)$ có số chiều là 2, vậy A chéo hóa được.

♦ Trả lời: 1) • Nếu $b = c = d = 0$ thì $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$, $\text{KGCR}(A, a) = \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

2) • Nếu $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$ thì với ký hiệu $\omega = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$, ta có:

$$\bullet \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a + i\omega, a - i\omega\}$$

$$\bullet \text{KGCR}(A, a + i\omega) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} i\omega \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ i\omega \\ d \\ -c \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{KGCR}(A, a - i\omega) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \\ i\omega \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ -c \\ b \\ i\omega \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i\omega \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ -i\omega \\ d \\ -c \end{pmatrix}\right).$$

2.3.3 a) Trường hợp $(a = 0$ hoặc $b = 0)$ là hiển nhiên.

Giả thiết $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Giả sử $\lambda \in \mathbb{C}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$. Ký hiệu $S = x_1 + \dots + x_n$, ta có:

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Leftrightarrow \begin{cases} ax_2 + \dots + ax_n = \lambda x_1 \\ bx_1 + ax_3 + \dots + ax_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ bx_1 + \dots + bx_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aS = (\lambda + a)x_1 \\ bx_1 - ax_2 = \lambda(x_2 - x_1) \\ \vdots \\ bx_{n-1} - ax_n = \lambda(x_n - x_{n-1}) \\ bS = (\lambda + b)x_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda + a)x_1 = aS \\ (\lambda + a)x_2 = (\lambda + b)x_1 \\ \vdots \\ (\lambda + a)x_n = (\lambda + b)x_{n-1} \\ bS = (\lambda + b)x_n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} \lambda + a \neq 0 \\ \lambda + b \neq 0 \end{cases}, \text{ thì với ký hiệu } \zeta = \frac{\lambda + b}{\lambda + a}: AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \zeta x_1 \\ \vdots \\ x_n = \zeta^{n-1} x_1 \\ (\lambda + a)x_1 = aS \\ bS = (\lambda + b)\zeta^{n-1} x_1 \end{cases}$$

Chứng minh :
$$\begin{cases} (\lambda + a)x_1 = aS \\ bS = (\lambda + b)\zeta^{n-1}x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \zeta^n = \frac{b}{a}.$$

Từ đó suy ra $a \neq b$, A nhận n số phức $\frac{au_k - b}{1 - u_k}$ là các gtr, trong đó các u_k ($0 \leq k \leq n-1$)

là các căn bậc n của $\frac{b}{a}$.

Nếu $a = b$ thì : $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -a \\ S = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_1 = \dots = x_n \\ \lambda = (n-1)a \end{cases}$.

◊ Trả lời : 1) Nếu ($a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$) :

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{ \frac{au_k - b}{1 - u_k}; k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$ trong đó u_k ($0 \leq k \leq n-1$) là các căn bậc n của $\frac{b}{a}$ trong $\mathbb{C}$.

• Với mọi k thuộc $\{0, \dots, n-1\}$, KGCR $\left(A, \frac{au_k - b}{1 - u_k} \right)$ là đường thẳng vector sinh bởi $\begin{pmatrix} 1 \\ u_k \\ \vdots \\ u_k^{n-1} \end{pmatrix}$

2) Nếu $a = b \neq 0$:

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-a, (n-1)a\}$

• KGCR($A, -a$) là siêu phẳng có phương trình $x_1 + \dots + x_n = 0$

• KGCR($A, (n-1)a$) là đường thẳng vector sinh bởi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Nếu ($a \neq 0, b = 0$) :

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$

• KGCR($A, 0$) là đường thẳng vector sinh bởi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

4) Nếu ($a = 0, b \neq 0$) :

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$

• KGCR($A, 0$) là đường thẳng vector sinh bởi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

5) Nếu ($a = b = 0$) :

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$

• $\text{KGCR}(A, 0) = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

b) $\diamond$ Trả lời : $ab \neq 0$ hay $a = b = 0$.

2.3.4 Lập đa thức đặc trưng : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^2 - \alpha\lambda - (a_2b_2 + \dots + a_nb_n))\lambda^{n-2}$. Đặc biệt, 0 là gtr của A.

Với mọi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, ta có : $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0 \\ a_2x_1 = \dots = a_nx_1 = 0 \end{cases}$

Nghiên cứu về số chiều của $\text{KGCR}(A, 0)$ (tức là $\text{Ker}(A)$).

$\diamond$ Trả lời :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0) \\ (b_2, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0) \\ a_2b_2 + \dots + a_nb_n \neq 0 \\ \alpha^2 + 4(a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{hoặc} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_2, \dots, a_n) = (0, \dots, 0) \\ (b_2, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0) \\ \alpha \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{hoặc} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0) \\ (b_2, \dots, b_n) = (0, \dots, 0) \\ \alpha \neq 0 \end{array} \right\}$$

hoặc $\left\{ \begin{array}{l} (a_2, \dots, a_n) = (0, \dots, 0) \\ (b_2, \dots, b_n) = (0, \dots, 0) \end{array} \right\}$.

2.3.5 $\diamond$ Trả lời : PDP^{-1} , trong đó :

a) $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$, trong đó $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & 0 \\ & 0 & 2n \end{pmatrix}$.

b) $P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & 0 & & & \\ & I_n & & & J & \\ & & 0 & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & 1 & 0 & \text{---} & 0 \\ & & 0 & & & \\ J & & & & & -I_n \\ & & 0 & & & \end{array} \right), D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & 0 & & & \\ & (a+b)I_n & & & & \\ & & 0 & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & a+b & 0 & \text{---} & 0 \\ & & 0 & & & \\ & & & & (a-b)I_n & \\ & & 0 & & & \end{array} \right),$

$P^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & 0 & & & \\ & I_n & & & J & \\ & & 0 & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & 2 & 0 & \text{---} & 0 \\ & & 0 & & & \\ J & & & & & -I_n \\ & & 0 & & & \end{array} \right),$ trong đó $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

2.3.6 Ký hiệu $E = K_{n-1}[X]$, E_0 là cơ sở chính tắc của E, $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho $\text{Mat}_{E_0}(f) = A$.

Ta có : $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, f(X^i) = (n-1-i)X^{i+1} + (\alpha - pi)X^i - qiX^{i-1}$

$$= ((n-1)X + \alpha)X' - (X^2 + pX + q)(X')'.$$

Từ đó suy ra : $\forall P \in K[X], f(P) = ((n-1)X + \alpha)P - (X^2 + pX + q)P'.$

Ký hiệu a, b là các nghiệm thực của $X^2 + pX + q$, với $k \in \{0, \dots, n-1\}, P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-1-k}.$

Tính : $f(P_k) = (\alpha + (n-1)a + k(b-a))P_k.$

n số thực $\alpha + (n-1)a + k(b-a), 0 \leq k \leq n-1$ từng đôi một phân biệt, vậy A chéo hóa được.

♦ Trả lời : • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\alpha + (n-1)a + k(b-a); k \in \{0, \dots, n-1\}\}.$

• Với mọi k thuộc $\{0, \dots, n-1\}$, KGCR liên kết với $\alpha + (n-1)a + k(b-a)$ có số chiều là 1, được sinh bởi các thành phần của đa thức $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-1-k}$, trong cơ sở chính tắc của $K_{n-1}[X].$

2.3.7 a) Giả sử $\lambda \in \mathbb{C}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}.$

$$\text{Ta có : } AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = \lambda x_1, \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Ký hiệu $x_0 = 0, x_{n+1} = 0$. Như vậy ta có :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, bx_{k+1} + (a-\lambda)x_k + cx_{k-1} = 0).$$

Nếu $\begin{cases} (b=0 \text{ và } c \neq 0) \\ \text{hoặc} \\ (b \neq 0 \text{ và } c=0) \end{cases}$, chứng minh A không chéo hóa được.

Trường hợp $b=c=0$ là tầm thường.

Giả sử $b \neq 0$ và $c \neq 0$.

Ký hiệu $\Delta = (a-\lambda)^2 - 4bc$ là biệt thức của phương trình đặc trưng $br^2 + (a-\lambda)r + c = 0$

liên kết với các dãy truy hồi tuyến tính cấp 2 $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ thỏa mãn :

$$\forall k \in \mathbb{N}^+, bu_{k+1} + (a-\lambda)u_k + cu_{k-1} = 0.$$

Giả sử $\Delta = 0$. Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $r_0 = \frac{\lambda-a}{2b}$, và $r_0 \neq 0$ (vì $c \neq 0$).

Tồn tại $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ sao cho : $\forall k \in \{0, \dots, n+1\}, x_k = \alpha r_0^k + \beta r_0^{k-1}.$

Vì $x_0 = x_{n+1} = 0$, ta suy ra $\alpha = \beta = 0$, vậy $X = 0$, loại trừ.

Vậy ta có $\Delta \neq 0$, và phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt, ký hiệu r_1, r_2 .

Tồn tại $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ sao cho : $\forall k \in \{0, \dots, n+1\}, x_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k.$

$$\text{Ta có : } x_0 = x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 r_1^{n+1} + \alpha_2 r_2^{n+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_1(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Nếu $\alpha_1 = 0$ thì $\alpha_2 = 0, X = 0$, loại trừ.

Vậy $\alpha_1 \neq 0$ và : $(1) \Leftrightarrow r_1^{n+1} = r_2^{n+1}.$

Vậy tồn tại $p \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $r_2 = r_1 e^{\frac{2ip\pi}{n+1}}$. Hơn nữa $r_1 r_2 = \frac{c}{b}$, vậy $r_1^2 = \frac{c}{b} e^{-\frac{2ip\pi}{n+1}}.$

Ký hiệu ζ là một căn bậc hai phức của $\frac{c}{b}$. Ta được : $r_1 = \zeta e^{\frac{ip\pi}{n+1}}$ và $r_2 = \zeta e^{\frac{ip\pi}{n+1}}$ (sai khác thứ tự).

Mặt khác: $r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}$, từ đó $\lambda = a + 2b\zeta \cos \frac{p\pi}{n+1}$.

Với $p \in \{1, \dots, n\}$, ta ký hiệu $\lambda_p = a + 2b\zeta \cos \frac{p\pi}{n+1}$.

Vì $b\zeta \neq 0$ và $\cos$ là hàm giảm nghiêm ngặt trên $]0; \pi[$ nên n số phức $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ đôi một phân biệt.

Điều này chứng tỏ rằng A có ít nhất n gtr đôi một phân biệt; khi đó chúng là duy nhất vì $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được.

Cuối cùng, với mỗi p thuộc $\{1, \dots, n\}$, ta có:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = \alpha_1(r_1^k - r_2^k) = -2i\alpha_1\zeta^k \sin \frac{kp\pi}{n+1}.$$

♦ **Trả lời:** 1) Nếu $b \neq 0$ và $c \neq 0$:

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ có n phần tử là các $\lambda_p = a + 2b\zeta \cos \frac{p\pi}{n+1}$, trong đó $p \in \{1, \dots, n\}$ và ζ là một

căn bậc hai phức của $\frac{c}{b}$.

• Với mỗi p thuộc $\{1, \dots, n\}$, $\text{KGCR}(A, \lambda_p)$ là đường thẳng vector sinh bởi $\begin{pmatrix} \zeta \sin \frac{p\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \zeta^n \sin \frac{np\pi}{n+1} \end{pmatrix}$.

2) Nếu $b \neq 0$ và $c = 0$:

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$

• $\text{KGCR}(A, a)$ là đường thẳng vector sinh bởi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Nếu $b = 0$ và $c \neq 0$

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$

• $\text{KGCR}(A, a)$ là đường thẳng vector sinh bởi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Nếu $b = c = 0$

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$

• $\text{KGCR}(A, a) = M_n(\mathbb{C})$.

b) ♦ **Trả lời:** $bc \neq 0$ hoặc $b = c = 0$.

c) Ta có với mọi t thuộc $]-1; 1[$:

$$U_n(t) = 0 \Leftrightarrow \text{Arccos } t = 0 \left[\frac{\pi}{n+1} \right] \Leftrightarrow \left(\exists p \in \{1, \dots, n\}, t = \cos \frac{p\pi}{n+1} \right).$$

Vì U_n là một đa thức bậc n với hệ tử cao nhất là 2^n và có n nghiệm đôi một phân biệt, ta kết

$$\text{luận : } U_n = 2^n \prod_{p=1}^n \left(X - \cos \frac{p\pi}{n+1} \right).$$

Mặt khác theo a) trong trường hợp $bc \neq 0$:

$$\chi_A = (-1)^n \prod_{p=1}^n \left(X - \left(a + 2b\zeta_p \cos \frac{p\pi}{n+1} \right) \right),$$

$$\text{từ đây với mọi } \lambda \text{ thuộc } \mathbb{C} : \chi_A(\lambda) = (-1)^n (b\zeta)^n U_n \left(\frac{\lambda - a}{2b\zeta} \right).$$

♦ **Trả lời :** Nếu $bc \neq 0$ thì ký hiệu η là một căn bậc hai phức của bc , ta có :

$$\chi_A = (-\eta)^n U_n \left(\frac{X - a}{2\eta} \right).$$

2.3.8 1) Chéo hóa A . Ta được : $A = PDP^{-1}$, trong đó :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Giả sử $B \in M_3(\mathbb{R})$, $C = P^{-1}BP$. Ta có : $B^2 = A \Leftrightarrow C^2 = D$.

Phân tích C thành các khối : $C = \begin{pmatrix} M & V \\ {}^tU & \alpha \end{pmatrix}$, trong đó $M \in M_2(\mathbb{R})$, ...

$$\text{Vậy } C^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} M^2 + V {}^tU = I_2 & (1) \\ MV + \alpha V = 0 & (2) \\ M {}^tU + \alpha {}^tU = 0 & (3) \\ {}^tUV + \alpha^2 = 0 & (4) \end{cases}.$$

Từ (1) và (4), ta suy ra : $M^2V = V - V({}^tUV) = (1 + \alpha^2)V$.

Từ (2) : $M^2V = -\alpha MV = \alpha^2V$.

Từ đó $V = 0$, $\alpha = 0$, $M^2 = I_2$, $M {}^tU = 0$, ${}^tU = M^2 {}^tU = 0$, $U = 0$.

Như vậy : $C^2 = D \Leftrightarrow (M^2 = I_2, U = V = 0, \alpha = 0)$.

Mặt khác : $\text{tr}(B) = \text{tr}(C) = \text{tr}(M)$.

Ký hiệu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ta có : $\begin{cases} M^2 = I_2 \\ \text{tr}(M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ a^2 + bc = 1 \end{cases}.$

Cuối cùng tính $B = PCP^{-1}$.

$$\diamond \text{ **Trả lời :** } \left\{ \begin{pmatrix} 4a-3b+c & 9a-9b+2c & 5a-6b+c \\ -a+b & -2a+3b & -a+2b \\ -a-c & -3a-2c & -2a-c \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ và } a^2+bc=1 \right\}.$$

2.3.9 Phương pháp thứ nhất : Tính các đa thức đặc trưng, ta tìm được : $\chi_A = \chi_B = -X^3 + 3X + 1$.

Chứng minh đa thức $-X^3 + 3X + 1$ của $\mathbb{R}[X]$ có ba nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ký hiệu $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, ta có : $A \sim D$ và $B \sim D$, từ đó $A \sim B$.

Phương pháp thứ hai : Sử dụng $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

♦ **Trả lời :** có.

2.3.10 Ký hiệu $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ và chú ý rằng $PA = BP$.

♦ Trả lời: có.

2.3.11 Trước tiên, rõ ràng f là một tự đồng cấu của $K_n[X]$. Nhận xét rằng :

$f(1) = 0, f(X-a) = -2(X-a)$ và với $k \in \{2, \dots, n\}, f((X-a)^k) = (k-2)(X-a)^k$. Như vậy $B = ((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ là một cơ sở của $K_n[X]$ và ma trận của f trong B là ma trận chéo :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & n-2 \end{pmatrix}.$$

♦ Trả lời: • Các gtr là -2 (đơn), 0 (kép), và $1, 2, \dots, n-2$ (đơn)

- $\text{KGCR}(f, -2) = \text{Vect}(X-a)$
 $\text{KGCR}(f, 0) = \text{Vect}(1, (X-a)^2)$
 $\text{KGCR}(f, \lambda) = \text{Vect}((X-a)^{\lambda+2})$ với mọi λ thuộc $\{1, 2, \dots, n-2\}$
- $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1, (X-a)^2)$
- $\text{Im}(f) = \text{Vect}((X-a), (X-a)^3, (X-a)^4, \dots, (X-a)^n)$
- f chéo hóa được.

2.3.12 a) Theo định lý về hạng, $\dim(\text{Ker}(H)) = n - \text{rank}(H) = n-1 (\geq 1)$; như vậy 0 là gtr của H có cấp $n-1$ và $\dim(\text{KGCR}(H, 0)) = \dim(\text{Ker}(H)) = n-1$.

Vì $X^{n-1} \mid \chi_H$ và $\deg(\chi_H) = n$ nên χ_H tách được trên K . Vậy $\text{tr}(H)$ là tổng các gtr của H , điều này chứng tỏ $\text{Sp}_K(H)$ được tạo thành từ 0 và từ $\text{tr}(H)$.

Trường hợp thứ nhất : $\text{tr}(H) \neq 0$

Khi đó $\text{Sp}_K(H) = \{0, \text{tr}(H)\}$, $\dim(\text{KGCR}(H, 0)) = n-1$, $\dim(\text{KGCR}(H, \text{tr}(H))) = 1$, vậy H

chéo hóa được và $H \sim \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \\ & & & \text{tr}(H) \end{pmatrix}$.

Trường hợp thứ hai : $\text{tr}(H) = 0$.

Khi đó $\text{Sp}_K(H) = \{0\}$ và $\dim(\text{KGCR}(H, 0)) = n-1$, vậy H không chéo hóa được.

b) a) Xem a), trường hợp thứ nhất.

β) Giả sử H không chéo hóa được, tức là (Xem a)) : $\text{tr}(H) = 0$.

Vì $\text{rank}(H) = 1$, tồn tại $V_{n-1} \in M_{n,1}(K) - \{0\}$ sao cho $\text{Im}(H) = K V_{n-1}$, và $V_n \in M_{n,1}(K)$, sao cho $V_{n-1} = H V_n$.

Vì $H V_{n-1} = H^2 V_n = \text{tr}(H) H V_n = 0$, ta có : $V_{n-1} \in \text{Ker}(H)$.

Do $\dim(\text{Ker}(H)) = n-1$, tồn tại $V_1, \dots, V_{n-2} \in M_{n,1}(K)$ sao cho $(V_1, \dots, V_{n-2}, V_{n-1})$ là một cơ sở của $\text{Ker}(H)$.

Chúng minh $B = (V_1, \dots, V_n)$ là một cơ sở của $M_{n,1}(K)$.

Ký hiệu f là tự đồng cấu của $M_{n,1}(K)$ của ma trận H trong cơ sở chính tắc, ta có :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ và như vậy } H \sim \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

c) • $H_1 \sim H_2 \Rightarrow \text{tr}(H_1) = \text{tr}(H_2)$, xem Mệnh đề 3, 8.2.4, Tập 5.

• Đảo lại, giả sử $\text{tr}(H_1) = \text{tr}(H_2)$.

Nếu $\text{tr}(H_1) \neq 0$ thì $\text{tr}(H_2) \neq 0$ và theo b) β , H_1 và H_2 đồng dạng với $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & \text{tr}(H_1) \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Nếu $\text{tr}(H_1) = 0$ thì $\text{tr}(H_2) = 0$ và theo b) β , H_1 và H_2 đồng dạng với $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.13 Dễ dàng khảo sát nếu $A = 0$ hoặc $B = 0$. Vậy ta giả thiết $A \neq 0$ và $B \neq 0$.

$\forall \text{Im}(\varphi) \subset \text{Vect}(B)$, ta có : $\text{rank}(\varphi) \leq 1$.

Hãy chứng minh rằng tồn tại $M_1 \in M_{n,1}(K)$ sao cho $\text{tr}(AM_1) \neq 0$ (xem thêm bài tập 1.1.5) và từ đó suy ra $\text{rank}(\varphi) = 1$.

Ta có : $\forall X \in M_{n,1}(K), \varphi \circ \varphi(X) = \text{tr}(AX)\varphi(B) = \text{tr}(AX)\text{tr}(AB)B = \text{tr}(AB)\varphi(X)$, vậy : $\varphi^2 = \text{tr}(AB)\varphi$.

Mặt khác, $\varphi^2 = \text{tr}(\varphi)\varphi$ (xem bài tập 8.1.31, b), Tập 5). Ta suy ra : $\text{tr}(\varphi) = \text{tr}(AB)$.

Cuối cùng áp dụng kết quả bài tập 2.3.12 a) cho φ (thay cho H).

◊ **Trả lời :** $\text{tr}(AB) \neq 0$ hoặc $A = 0$ hoặc $B = 0$.

2.3.14 Giả sử $\lambda \in K, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K) - \{0\}$. Ta có :

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_0 x_1 + \dots + a_{n-2} x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} - \lambda^n) x_1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ gtr của A là các nghiệm của P và với mọi nghiệm λ của P , $\text{KGCR}(A, \lambda)$

có số chiều là 1, được sinh bởi $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$. Như vậy A chéo hóa được khi và chỉ khi P tách được

trên K và có các nghiệm đều đơn.

2.3.15 Trường hợp thứ nhất : $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$.

Khi đó A và B khả nghịch và theo giả thiết, tồn tại $P \in \text{GL}_n(K)$ sao cho $A = PBP^{-1}$. Từ đó :

$$\text{com}(A) = \det(A)A^{-1} = \det(A)P^{-1}B^{-1}P.$$

Vì $A \sim B$, ta có $\det(A) = \det(B)$ và do vậy :

$$\text{com}(A) = P^{-1}(\det(B)B^{-1})P = P^{-1}\text{com}(B)P \sim \text{com}(B).$$

Trường hợp thứ hai : $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) \leq n - 2$.

Khi đó $\text{com}(A) = \text{com}(B) = 0$, vậy $\text{com}(A) \sim \text{com}(B)$ (tầm thường) (xem bài tập 9.8.1, Tập5).

Trường hợp thứ ba : $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n - 1$.

Theo bài tập 9.8.1, Tập 5 : $\text{rank}(\text{com}(A)) = \text{rank}(\text{com}(B)) = 1$.

Khi đó ta có : $\text{com}(A) \sim \text{com}(B) \Leftrightarrow \text{tr}(\text{com}(A)) = \text{tr}(\text{com}(B))$, theo bài tập 2.3.12 c). Nhưng (xem bài tập 2.2.3) : $-\text{tr}(\text{com}(A))$ là hệ tử của λ trong $\chi_A(\lambda)$, vậy cũng là hệ tử của λ trong $\chi_B(\lambda)$, từ đó $\text{tr}(\text{com}(A)) = \text{tr}(\text{com}(B))$, và cuối cùng $\text{com}(A) \sim \text{com}(B)$.

2.3.16 Giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều, $f \in \mathcal{L}(E)$ lũy linh và chéo hóa được. Tồn tại

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ và một cơ sở B của E sao cho với $D = \text{Mat}_B(f)$, ta có $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ và tồn

tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $D^k = 0$. Suy ra : $\lambda_1^k = \dots = \lambda_n^k = 0$, tiếp đó $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0, D = 0, f = 0$.

2.3.17 Ký hiệu $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Nếu tồn tại $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $\lambda_i \neq \lambda_j$ (vậy thì $n \geq 2$ và $i \neq j$) vì $A \sim D$ và $A \sim D' \neq D$, trong đó D' nhận được từ D bằng cách đổi chỗ λ_i và λ_j , mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ : $D = \lambda_1 I_n$.

Vậy ta có : $\forall Q \in \text{GL}_n(K), QDQ^{-1} = \lambda_1 I_n = PDP^{-1}$.

Từ giả thiết suy ra $\text{GL}_n(K)$ có một và chỉ một phần tử.

• Nếu $n \geq 2$, $\text{GL}_n(K)$ chứa ít nhất hai phần tử khác nhau, chẳng hạn I_n và $\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

• Nếu $n = 1$, $\text{GL}_n(K) = K - \{0\}$ có một và chỉ một phần tử nếu $\text{Card}(K) = 2$.

2.3.18 Theo giả thiết, A chéo hóa được và tồn tại $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ đôi một phân biệt và

$P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, sao cho $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ và $A = PDP^{-1}$.

1) Hãy chứng tỏ rằng ánh xạ $f : \text{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{M}_n(\mathbb{C})$ là một song ánh từ $\{X \in \text{M}_n(\mathbb{C}); X^k = A\}$ lên $\{Y \in \text{M}_n(\mathbb{C}); Y^k = D\}$.

2) Giả sử $Y = (y_{ij})_{ij} \in \text{M}_n(\mathbb{C})$.

Nếu $Y^k = D$ thì $YD = Y^{k+1} = DY$.

Và $YD = DY \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2; y_{ij}\lambda_j = \lambda_i y_{ij})$

$$\Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (i \neq j \Rightarrow y_{ij} = 0)) \Leftrightarrow Y \in \mathbf{D}_n(K).$$

Ký hiệu $Y = \begin{pmatrix} y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix}$. Ta có: $Y^k = D \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i^k = \lambda_i)$.

Với mọi λ thuộc $\mathbb{C}$, phương trình $y^k = \lambda$ (ẩn $y \in \mathbb{C}$) có đúng k nghiệm nếu $\lambda \neq 0$ và một nghiệm duy nhất nếu $\lambda = 0$. Vì $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ đôi một phân biệt nên chỉ có nhiều nhất là một trong các λ_i bằng 0. Mặt khác, với mọi (i, j) thuộc $\{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i \neq j$, nếu $y_i^k = \lambda_i$ và $y_j^k = \lambda_j$ thì $y_i \neq y_j$ (vì $\lambda_i \neq \lambda_j$).

Như vậy $\{Y \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}); Y^k = D\}$ hữu hạn và có k^n phần tử (nếu $\det(A) \neq 0$) hay k^{n-1} phần tử (nếu $\det(A) = 0$). Theo 1) cũng như vậy với $\{X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}); X^k = A\}$.

2.3.19 a) Ta giả sử, chẳng hạn A khả nghịch (trường hợp còn lại tương tự).

Tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D \in \mathbf{D}_n(K)$, sao cho $AB = PDP^{-1}$.

Ta có: $BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}(PDP^{-1})A = (P^{-1}A)^{-1}D(P^{-1}A)$, vậy BA chéo hóa được.

b) Xét $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ chéo hóa được.

• $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ không chéo hóa được.

♦ Trả lời: Không.

2.3.20 Ký hiệu $A = (a_{ij})_{ij}$.

Tồn tại $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ sao cho:
$$\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ từng đôi phân biệt} \\ \mu_1, \dots, \mu_n \text{ từng đôi phân biệt} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i + \mu_i = a_{ii} \end{cases}$$

Thật vậy, ta lấy:

• $\begin{cases} \lambda_1 \text{ bất kỳ} \\ \mu_1 = a_{11} - \lambda_1 \end{cases}$

• $\begin{cases} \lambda_2 \text{ sao cho: } \lambda_2 \neq \lambda_1, \lambda_2 \neq a_{22} - \mu_1 \\ \mu_2 = a_{22} - \lambda_2 \end{cases}$

• $\begin{cases} \lambda_3 \text{ sao cho: } \lambda_3 \neq \lambda_1, \lambda_3 \neq \lambda_2, \lambda_3 \neq a_{33} - \mu_1, \lambda_3 \neq a_{33} - \mu_2 \\ \mu_3 = a_{33} - \lambda_3 \end{cases}$

⋮

điều này có thể vì $\mathbb{R}$ là vô hạn.

Ký hiệu $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ a_{21} & \lambda_2 & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & \lambda_n \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} \mu_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \mu_2 & & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_{n-1} & n \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$,

ta có $B + C = A$, và B và C chéo hóa được (chúng có n gtr đôi một phân biệt).

2.3.21 Tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D \in \mathbf{D}_n(K)$, sao cho $M = PDP^{-1}$, ta có:

$$M^k A = 0 \Leftrightarrow D^k(P^{-1}A) = 0.$$

$$\text{Ký hiệu } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, P^{-1}A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Khi đó } D^k(P^{-1}A) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \alpha_{11} & \cdots & \lambda_1^k \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^k \alpha_{n1} & \cdots & \lambda_n^k \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \text{ từ đây:}$$

$$D^k P^{-1}A = 0 \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda_i^k \alpha_{ij} = 0) \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda_i \alpha_{ij} = 0) \\ \Leftrightarrow D(P^{-1}A) = 0 \Leftrightarrow MA = 0.$$

2.3.22 a) Giả sử $B \in M_n(K)$, $E = P^{-1}BP$. Ta có: $AB = BA \Leftrightarrow DE = ED$.

$$\text{Phân tích } E \text{ thành khối theo cùng dạng như phân tích } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 1_{\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p 1_{\omega_p} \end{pmatrix}:$$

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{p1} & \cdots & E_{pp} \end{pmatrix}. \text{ Ta có: } DE = ED \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \lambda_i E_{ij} = \lambda_j E_{ij}) \\ \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (i \neq j \Rightarrow E_{ij} = 0)).$$

$$\diamond \text{ Trả lời: } C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} P^{-1}; (A_1, \dots, A_p) \in M_{\omega_1}(K) \times \dots \times M_{\omega_p}(K) \right\}.$$

b) $\bullet 0 \in C(A)$ và với mọi α thuộc K và B, C thuộc $C(A)$:

$$A(\alpha B + C) = \alpha AB + AC = \alpha BA + CA = (\alpha B + C)A,$$

vậy $\alpha B + C \in C(A)$.

Như vậy, $C(A)$ là một kgvc của $M_n(K)$.

• Theo a) ánh xạ $\theta: \prod_{k=1}^p M_{\omega_k}(K) \rightarrow C(A)$ xác định bởi:

$$\theta(A_1, \dots, A_p) = P \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} P^{-1} \text{ là một tự đồng cấu của } K\text{-kgv. Vậy:}$$

$$\dim(C(A)) = \dim\left(\prod_{k=1}^p M_{\omega_k}(K)\right) = \sum_{k=1}^p \dim(M_{\omega_k}(K)) = \sum_{k=1}^p \omega_k^2.$$

• Với $n = 5$ kiểm chứng rằng không tồn tại $p \in \{1, \dots, 5\}$, $(\omega_1, \dots, \omega_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ sao cho:

$$\sum_{k=1}^p \omega_k = 5 \text{ và } \sum_{k=1}^p \omega_k^2 = 10.$$

$$\diamond \text{ Trả lời: } \bullet \dim(C(A)) = \sum_{k=1}^p \omega_k^2$$

$$\bullet n = 5 \Rightarrow \dim(C(A)) \neq 10.$$

c) Rõ ràng rằng nếu $p = n$ thì $\omega_1 = \dots = \omega_p = 1$, vậy $\dim(C(A)) = \sum_{k=1}^p \omega_k^2 = n$.

2) Đảo lại, giả sử $\dim(C(A)) = n$. Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz :

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^p \omega_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^p 1^2 \right) \left(\sum_{k=1}^p \omega_k^2 \right) = pn, \text{ do đó } n = p.$$

2.3.23 a) Tồn tại $P \in \text{GL}_n(K)$ sao cho $B = P^{-1}AP$.

Ký hiệu $f: \mathbf{M}_n(K) \rightarrow \mathbf{M}_n(K), \quad g: \mathbf{M}_n(K) \rightarrow \mathbf{M}_n(K)$
 $M \mapsto P^{-1}MP \quad M \mapsto PXP^{-1}$

Giả sử $M \in C_A$. Tồn tại $Q \in \text{GL}_n(K)$ sao cho $M = Q^{-1}AQ$ và $AM = MA$. Từ đây :

$$\begin{cases} f(M) = P^{-1}Q^{-1}AQP = (P^{-1}QP)^{-1}B(P^{-1}QP) \sim B \\ f(M)B = P^{-1}MAP = P^{-1}AMP = Bf(M) \end{cases}$$

vậy $f(M) \in C_B$.

Phép suy luận tương tự chứng tỏ : $\forall X \in C_B, g(X) \in C_A$.

Như vậy : $f(C_A) \subset C_B$ và $g(C_B) \subset C_A$.

Xét $f': C_A \rightarrow C_B$ và $g': C_B \rightarrow C_A$
 $M \mapsto P^{-1}MP \quad X \mapsto PXP^{-1}$

Vì $g' \circ f' = \text{Id}_{C_A}$ và $f' \circ g' = \text{Id}_{C_B}$ nên f' và g' là các song ánh ngược nhau.

b) Vì $A \in \mathbf{M}_n(K)$ và A có n gtr $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ đôi một phân biệt, nên A chéo hóa được.

Tồn tại $P \in \text{GL}_n(K), D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sao cho $A = PDP^{-1}$.

Giả sử $X = (x_{ij}) \in \mathbf{M}_n(K)$. Ta có :

$$\begin{aligned} MD = DM &\Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{ij}\lambda_j = \lambda_i m_{ij}) \\ &\Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0)) \Leftrightarrow M \in \mathbf{D}_n(K). \end{aligned}$$

Tiếp đó, D có n gtr đôi một phân biệt : $M \sim D \Leftrightarrow \left(\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, M = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \right)$

Như vậy : $C_D = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}; \sigma \in \mathfrak{S}_n \right\}$ có đúng $n!$ phần tử.

Theo a) C_A cũng hữu hạn và có $n!$ phần tử.

2.3.24 Vì A và B chéo hóa được nên tồn tại

$$P \in \text{GL}_p(K), D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_p(K), Q \in \text{GL}_q(K), E = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_q \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_q(K)$$

sao cho : $A = PDP^{-1}$ và $B = EQE^{-1}$.

Giả sử $U \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$ (ta sẽ chọn sau), $R = \begin{pmatrix} P & U \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$. Chứng minh R khả nghịch và :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}UQ^{-1} \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $F = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, ta có: $RFR^{-1} = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & B \end{pmatrix}$, trong đó $W = -PDP^{-1}UQ^{-1} + UEQ^{-1}$.

Tiếp theo: $W = C \Leftrightarrow (P^{-1}U)E - D(P^{-1}U) = P^{-1}CQ$.

Ta sẽ chứng minh tồn tại U thỏa mãn phương trình trên bằng cách chỉ ra rằng

$\phi: M_{p,q}(K) \rightarrow M_{p,q}(K)$ là song ánh.
 $Y \mapsto YE - DY$

Giả sử $Y = (y_{ij}) \in M_{p,q}(K)$.

Ta có: $\phi(Y) = 0 \Leftrightarrow (\forall (i,k) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, y_{ik} \mu_k = \lambda_i y_{ik})$.

Nhưng: $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \dots, \mu_q\} = \text{Sp}_K(A) \cap \text{Sp}_K(B) = \emptyset$,

vậy: $\forall (i,k) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \lambda_i \neq \mu_k$.

Khi đó: $\phi(Y) = 0 \Leftrightarrow (\forall (i,k) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, y_{ik} = 0) \Leftrightarrow Y = 0$.

Điều này chứng tỏ rằng ϕ là đơn ánh tuyến tính; vì $M_{p,q}(K)$ hữu hạn chiều nên ϕ là song ánh.

Vậy tồn tại $Y \in M_{p,q}(K)$ sao cho $\phi(Y) = P^{-1}CQ$. Ký hiệu $U = PY$, ta có:

$(P^{-1}U)E - D(P^{-1}U) = YE - DY = \phi(Y) = P^{-1}CQ$, từ đây $W = C$.

Điều này chứng tỏ: $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ vậy M chéo hóa được và đồng

dạng với $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

2.3.25 Lập đa thức đặc trưng: $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda^2 + 3)$

• KGCR(A,3) có số chiều là 1, được sinh bởi: $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Các kgvcc ổn định có số chiều 0,1,3 là: $\{0\}, \mathbb{R}V, \mathbb{R}^3$. Còn phải tìm các mặt phẳng ổn định.

Nhận xét rằng mặt phẳng $P_0 = \text{Ker}(f^2 + 3e)$ có phương trình $x + y + z = 0$, ổn định đối với f .

Giả sử P là một mặt phẳng ổn định đối với f , khác với P_0 (nếu nó tồn tại). Khi đó $P \cap P_0$ là một đường thẳng vector ổn định, vậy $P \cap P_0 = \mathbb{R}V$. Vậy $V \in P_0$, điều này không đúng. Như vậy, P_0 là mặt phẳng ổn định duy nhất.

♦ **Trả lời:** $\{0\}, \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mặt phẳng có phương trình $x + y + z = 0, \mathbb{R}^3$.

2.3.26 a) Quy nạp theo n .

• Tính chất đúng với $n = 1$ theo giả thiết.

• Giả sử nó đúng với n thuộc $\mathbb{N}^*$. Khi đó:

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} &= f \circ (f^n \circ g) - g \circ f^{n+1} = f \circ (g \circ f^n + n \alpha f^n) - g \circ f^{n+1} \\ &= n \alpha f^{n+1} + (f \circ g - g \circ f) \circ f^n = n \alpha f^{n+1} + \alpha f \circ f^n = (n+1) \alpha f^{n+1}. \end{aligned}$$

b) • Giả sử $\lambda \in \text{Sp}_C(g)$ và x là một vtr liên kết: $x \neq 0$ và $g(x) = \lambda x$. Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có theo a):

$$g(f^n(x)) = f^n(g(x)) - n \alpha f^n(x) = (\lambda - n \alpha) f^n(x).$$

Vì $\text{Sp}_C(g)$ hữu hạn và α khác 0 nên tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\lambda - n \alpha \notin \text{Sp}_C(g)$, khi đó $f^n(x) = 0$.

• Do g chéo hóa được, tồn tại một cơ sở $B = (x_1, \dots, x_p)$ của E ($p = \dim(E)$) được tạo thành

từ các vectơ riêng của g . Ta vừa thấy với mỗi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, tồn tại $n_i \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f^{n_i}(x_i) = 0. \text{ Ký hiệu } N = \max_{1 \leq i \leq p} n_i, \text{ ta có: } \forall i \in \{1, \dots, p\}, f^N(x_i) = 0. \text{ Vậy } f^N = 0.$$

2.3.27 Rõ ràng nếu A chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (tức là: $\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}),$

$A = PDP^{-1}$), thì A chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (tức là: $\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), \exists D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C}),$

$A = PDP^{-1}$).

Vậy ta giả sử A chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, tức là tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ (vì χ_A tách được trên $\mathbb{R}$) sao cho $A = PDP^{-1}$.

Ký hiệu $R = \operatorname{Re}(P) = \frac{1}{2}(P + \bar{P})$ và $S = \operatorname{Im}(P) = \frac{1}{2i}(P - \bar{P})$. Khi đó $R, S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ và

$$P = R + iS.$$

$$\text{Ta có: } A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow A(R + iS) = (R + iS)D \Leftrightarrow \begin{cases} AR = RD \\ AS = SD \end{cases},$$

vì AR, RD, AS, SD là các số thực.

Giả sử $\alpha \in \mathbb{R}$ (ta sẽ chọn sau), $Q = R + \alpha S$. Ta có: $AQ = AR + \alpha AS = RD + \alpha SD = QD$.

Cần phải chỉ ra rằng có thể chọn α sao cho Q khả nghịch.

Ảnh xạ đa thức $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ không bằng 0 (vì $f(i) = \det(P) \neq 0$), vậy chỉ có một số hữu hạn nghiệm. Vì $\mathbb{R}$ vô hạn, tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(\alpha) \neq 0$.

Đối với α này, Q khả nghịch và $A = QDQ^{-1}$, vậy A chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

2.3.28 $\diamond$ Trả lời: $A = PTP^{-1}$, trong đó:

$$a) P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4.1 Tồn tại $x \in E - \{0\}$ sao cho $f(x) = \lambda x$.

Theo Mệnh đề 3: $P(f)(x) = P(\lambda)x$, vậy $P(\lambda) \in \operatorname{Sp}_K(P(f))$ và với mọi x thuộc $\operatorname{KGCR}(f, \lambda)$, $x \in \operatorname{KGCR}(P(f), P(\lambda))$.

2.4.2 Dễ thấy f là tuyến tính.

Giả sử $x \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $P(f) = 0$.

Với mọi λ thuộc $\mathbb{R}$, dãy $\Lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ thoả mãn: $f(\Lambda) = \lambda \Lambda$ và $\Lambda \neq 0$. Như vậy: $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \mathbb{R}$.

(Xem thêm bài tập 2.1.11).

Theo Hệ quả § 2.4, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset P^{-1}(\{0\})$, từ đó $P = 0$.

2.4.3 Vì $A(A - iI_3)(A + iI_3) = 0$ nên A triệt tiêu một đa thức tách đơn của $\mathbb{C}[X]$, vậy A chéo hóa được trong $M_3(\mathbb{C})$ và $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, i, -i\}$.

Nếu $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ thì do A chéo hóa được trong $M_3(\mathbb{C})$, $A = 0$, loại trừ.

Nếu $i \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ và $V \in \text{KGCR}(A, i)$ thì $-i \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ và $\bar{V} \in \text{KGCR}(A, -i)$, vì: $A\bar{V} = \overline{AV} = \bar{i}\bar{V} = -i\bar{V}$ và $\bar{V} \neq 0$.

Cũng như vậy khi đổi chỗ i và $-i$.

Vậy: $\{i, -i\} \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Cuối cùng, nếu $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ thì $A^2 + I_3 = 0$, từ đây $(\det(A))^2 = \det(A^2) = \det(-I_3) = -1$, mâu thuẫn vì $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Như vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, i, -i\}$ và mỗi không gian con riêng có số chiều là 1 (trên $\mathbb{C}$).

Ký hiệu $U, V, \bar{V}$ là các vectơ riêng tương ứng liên kết với $0, i, -i$, và $W_1 = \frac{1}{2}(V + \bar{V})$,

$W_2 = \frac{1}{2i}(V - \bar{V})$. Kiểm tra (U, W_1, W_2) là một cơ sở của $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Ngoài ra: $AU = 0, AW_1 = \frac{1}{2}(iV - i\bar{V}) = -W_2$ và $AW_2 = \frac{1}{2i}(iV + i\bar{V}) = W_1$.

Ký hiệu P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $M_{3,1}(\mathbb{C})$ sang cơ sở (U, W_1, W_2) , ta có:

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2.4.4 Nhận xét rằng $f^2 = \text{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$.

◊ Trả lời: • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{-1, 1\}$

• $\text{KGCR}(f, -1) = A_n(\mathbb{R}), \text{KGCR}(f, 1) = S_n(\mathbb{R})$

• f chéo hóa được.

2.4.5 Chứng minh $P = X^3 - X - 1$ có một và chỉ một nghiệm thực, ký hiệu là x_0 (Khảo sát sự biến thiên của P) và hai nghiệm phức liên hợp (không thực) $z_0, \bar{z}_0$, chứng minh $x_0 > 0$.

Ký hiệu ω_1 là cấp bội của gtr x_0 của A (nếu x_0 không phải là gtr, ta ký hiệu $\omega_1 = 0$) ω_2 là cấp bội của gtr z_0 của A , ($\omega_2 \in \mathbb{N}$), cấp bội của $\bar{z}_0$ khi đó cũng là ω_2 .

Ký hiệu $D = \text{diag}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{\omega_1}, \underbrace{z_0, \dots, z_0}_{\omega_2}, \underbrace{\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_0}_{\omega_2})$, ta có:

$$\det(A) = \det(D) = x_0^{\omega_1} z_0^{\omega_2} (\bar{z}_0)^{\omega_2} = x_0^{\omega_1} |z_0|^{2\omega_2} > 0.$$

2.4.6 Phân tích thành thừa số: $X^4 - 7X^3 + 12X^2 = X^2(X-3)(X-4)$.

Vì $A \in M_n(\mathbb{C})$ nên χ_A tách được trên $\mathbb{C}$, vậy với ký hiệu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các nghiệm của χ_A :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Mặt khác: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in \{0, 3, 4\}$, nên $\text{tr}(A) \in \mathbb{N}$ và $\text{tr}(A) \leq 4n$.

2.4.7 Phân tích thành thừa số: $X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$.

Đa thức χ_A tách được trên $\mathbb{C}$ và với $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, ta có:
$$\begin{cases} \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Vì $\text{tr}(A) = n$, suy ra ($\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 1$). Điều này chứng tỏ A khả nghịch, và do $A^3 = A^2$ ta kết luận $A = I_n$.

2.4.8 1) Giả sử $A_1, \dots, A_N$ chéo hóa được.

Phương pháp thứ nhất:

Tồn tại $P_1 \in \text{GL}_{n_1}(K), \dots, P_N \in \text{GL}_{n_N}(K), D_1 \in \text{D}_{n_1}(K), \dots, D_N \in \text{D}_{n_N}(K)$ sao cho

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, A_i = P_i D_i P_i^{-1}.$$

$$\text{Ký hiệu } P = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_N \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_N \end{pmatrix}, n = n_1 + \dots + n_N.$$

Rõ ràng $P \in \text{GL}_n(K), D \in \text{D}_n(K), A = PDP^{-1}$, vậy A chéo hóa được.

Phương pháp thứ hai:

Tồn tại các đa thức tách đơn $P_1, \dots, P_N$ thuộc $K[X]$ sao cho: $\forall i \in \{1, \dots, N\}, P_i(A_i) = 0$.

Ký hiệu $P = \text{BCNN}(A_1, \dots, A_N)$ cũng là tách đơn, ta có: $\forall i \in \{1, \dots, N\}, P(A_i) = 0$,

$$\text{vậy } P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_N) \end{pmatrix} = 0.$$

2) Đảo lại, giả sử A chéo hóa được.

Tồn tại $P \in K[X]$ tách đơn sao cho $P(A) = 0$. Vì $P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_N) \end{pmatrix}$, ta suy ra

$P(A_1) = \dots = P(A_N) = 0$, trong đó P là tách đơn, vậy $A_1, \dots, A_N$ chéo hóa được.

2.4.9 1) Rõ ràng nếu ($\forall k \in \{1, \dots, N\}, T_k = \lambda_k I_{n_k}$) thì T là ma trận chéo, vậy chéo hóa được.

2) Đảo lại, giả sử T chéo hóa được. Theo bài tập 2.4.8, $T_1, \dots, T_N$ chéo hóa được.

Vì $\text{Sp}_K(T_k) = \{\lambda_k\}$, ta suy ra: $\forall k \in \{1, \dots, N\}, T_k \sim \lambda_k I_{n_k}$, vậy: $\forall k \in \{1, \dots, N\}, T_k = \lambda_k I_{n_k}$.

2.4.10 Do f chéo hóa được nên tồn tại một đa thức tách đơn P thuộc $K[X]$ sao cho $P(f) = 0$.

Vì: $\forall x \in E, P(f)(x) = 0$, nên $\forall x \in F, P(f')(x) = P(f)(x) = 0$, vậy $P(f') = 0$.

Vì f' triệt tiêu bởi một đa thức tách đơn thuộc $K[X]$ nên f' chéo hóa được.

2.4.11 a) 1) Giả sử f là một kgc của E ổn định đối với f .

Ký hiệu f' là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên F ; theo bài tập 2.4.10, f' chéo hóa được và rõ ràng: $\text{Sp}_K(f') \subset \text{Sp}_K(f)$. Với mỗi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, ký hiệu $N_i' = \text{Ker}(f' - \lambda_i \text{Id}_F)$, một vài

N_i' có thể là $\{0\}$.

Ta có: $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $N_i' = N_i \cap F$, vì:

$$\forall x \in E, \left(x \in N_i' \Leftrightarrow \begin{cases} x \in F \\ f'(x) = \lambda_i x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in F \\ x \in N_i \end{cases} \Leftrightarrow x \in N_i \cap F \right).$$

Vì f' chéo hóa được nên: $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_K(f')} \text{KGCR}(f', \lambda) = \bigoplus_{i=1}^p N_i'$

2) Dễ dàng chứng minh phần đảo.

3) Giả sử tất cả các giá trị riêng của f đều là đơn, $(v_1, \dots, v_n)$ là một cơ sở của E được tạo thành từ các vector riêng của f .

Khi đó với các ký hiệu ở trên ta có: $p = n$ và: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $N_i = Kv_i$, vậy:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, N_i' = \{0\} \text{ hay } N_i' = Kv_i.$$

Khi đó có đúng 2^n kgvc của E ổn định đối với f ; đó là các Vect(v_i ; $i \in I$) trong đó I chạy khắp $\mathfrak{P}(\{1, \dots, n\})$.

b) $\diamond$ Trả lời: Ký hiệu $v_1 = (1 -1 \ 0)$, $v_2 = (-1 \ 1 \ 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, các kgvc của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với f là:

- $\{0\}$
- ba đường thẳng vector tương ứng sinh bởi v_1, v_2, v_3
- ba mặt phẳng vector tương ứng sinh bởi $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)$
- $\mathbb{R}^3$.

2.4.12 Tính chất là tầm thường với $n = 1$.

Giả sử nó đúng với mọi p thuộc $\{1, \dots, n\}$ và giả sử E là một K -kgv hữu hạn chiều với số chiều $n + 1$, I là một tập hợp không rỗng, $(f_i)_{i \in I}$ là một họ các tự đồng cấu chéo hóa được của E , đôi một giao hoán.

Dễ dàng khảo sát trong trường hợp tất cả f_i là các phép vị tự.

Giả sử tồn tại $i_0 \in I$ sao cho f_{i_0} không phải là một phép vị tự.

Ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \text{Sp}_K(f_{i_0})$ và $E_k = \text{KGCR}(f_{i_0}, \lambda_k)$ với $1 \leq k \leq r$. Vì f_{i_0} không phải là một phép vị tự và f_{i_0} chéo hóa được, ta có: $r \geq 2$ vậy: $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $1 \leq \dim(E_k) \leq n$.

Cho $i \in I$, $k \in \{1, \dots, r\}$, chứng minh rằng E_k ổn định đối với f_i . Giả sử $x \in E_k$, ta có:

$$f_{i_0}(f_i(x)) = (f_{i_0} \circ f_i)(x) = (f_i \circ f_{i_0})(x) = f_i(\lambda_k x) = \lambda_k f_i(x),$$

Vậy $f_i(x) \in E_k$.

Ký hiệu $f_{i,k}$ là tự đồng cấu cảm sinh bởi f_i trên E_k , với $i \in I$ và $k \in \{1, \dots, r\}$.

Cho $k \in \{1, \dots, r\}$.

- Với mỗi i thuộc I , vì f_i chéo hóa được nên $f_{i,k}$ chéo hóa được (xem bài tập 2.4.10).
- Các $f_{i,k}$ ($i \in I$) đôi một giao hoán vì các f_i đôi một giao hoán.

Vậy ta có thể áp dụng giả thiết quy nạp cho họ $(f_{i,k})_{i \in I}$. Tồn tại một cơ sở B_k thuộc E_k sao cho:

$$\forall i \in I, \text{Mat}_{B_k}(f_{i,k}) \in \mathbf{D}_{\dim(E_k)}(K).$$

Khi đó $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ là một cơ sở của E và:

$$\forall i \in I, \text{Mat}_B(f_i) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{B_1}(f_{i,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{Mat}_{B_r}(f_{i,r}) \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_{n+1}(K).$$

2.4.13 Ký hiệu $A = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$ và với mỗi k thuộc $\{1, \dots, p\}$, $A_k = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} (X - \lambda_j)$.

Cũng như trong chứng minh Định lý § 2.4, với $u_k = \frac{1}{A_k(\lambda_k)}$, ta có: $\sum_{k=1}^p u_k A_k = 1$.

Ký hiệu với mỗi k thuộc $\{1, \dots, p\}$, $v_k = u_k A_k(f)$.

Giả sử $P \in K[X]$. Áp dụng phép chia Euclide P cho $X - \lambda_k$, tồn tại $Q_k \in K[X]$ sao cho:

$$P = (X - \lambda_k)Q_k + P(\lambda_k).$$

Từ đó: $(Pu_k A_k)(f) = u_k Q_k A(f) + P(\lambda_k) u_k A_k(f) = P(\lambda_k) v_k$ vậy:

$$P(f) = \left(\sum_{k=1}^p Pu_k A_k \right)(f) = \sum_{k=1}^p (Pu_k A_k)(f) = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) v_k.$$

2.4.14 • Vì A chéo hóa được nên tồn tại đa thức P tách đơn của $\mathbb{C}[X]$ là đa thức triệt tiêu của A .

Tồn tại $v \in \{0, 1\}$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ sao cho: $P = X^v Q$ và $Q(0) \neq 0$. Khi đó $A^v Q(A) = 0$ và (theo giả thiết) $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, vậy $Q(A) = 0$.

Điều này chứng tỏ rằng tồn tại đa thức Q tách đơn của $\mathbb{C}[X]$ là đa thức triệt tiêu của A và không có nghiệm 0.

Tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}^*$ đôi một phân biệt sao cho $Q = \alpha \prod_{k=1}^N (X - z_k)$.

Ký hiệu $\omega_q = \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)$, $q \in \{0, \dots, p-1\}$ và ζ_k là một căn bậc p của z_k với $k \in \{1, \dots, N\}$.

Ta có: $\forall k \in \{1, \dots, N\}$, $X^p - z_k = \prod_{q=0}^{p-1} (X - \omega_q \zeta_k)$,

từ đây: $0 = \prod_{k=1}^N (A - z_k I_n) = \prod_{k=1}^N (B^p - z_k I_n) = \prod_{k=1}^N \prod_{q=0}^{p-1} (B - \omega_q \zeta_k I_n)$.

Vì các $\omega_q \zeta_k$, $(q, k) \in \{0, \dots, p-1\} \times \{1, \dots, N\}$ đôi một phân biệt nên đa thức $\prod_{k=1}^N \prod_{q=0}^{p-1} (X - \omega_q \zeta_k)$ tách đơn, vậy B chéo hóa được.

• Vậy tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $D \in \text{D}_n(\mathbb{C})$ sao cho $B = PD P^{-1}$, từ đây $A = B^p = PD^p P^{-1}$ vậy A và B đồng thời chéo hóa được.

2.4.15 1) Chứng minh rằng tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall A \in G$, $A^k = I_n$.

• Giả sử $A \in G$. Vì G là hữu hạn, nên ánh xạ $\mathbb{N} \rightarrow G$ không phải là đơn ánh. Vậy tồn tại $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $p \neq q$ và $A^p = A^q$. Chẳng hạn có thể giả thiết $p < q$. Ký hiệu $r = q - p$, vì A khả nghịch, ta có: $r \in \mathbb{N}^*$ và $A^r = I_n$.

• Ta vừa chứng minh: $\forall A \in G$, $\exists r(A) \in \mathbb{N}^*$, $A^{r(A)} = I_n$.

Ký hiệu $k = \text{BCNN}\{r(A); A \in G\} \in \mathbb{N}^*$ (G hữu hạn). Vì mỗi $r(A)$ chia hết cho k , ta có:

$$\forall A \in G, A^k = I_n.$$

2) Đa thức $X^k - 1$ tách đơn trên $\mathbb{C}$ và là đa thức triệt tiêu của mỗi phần tử G , vậy các phần tử của G chéo hóa được. Vì các phần tử của G chéo hóa được nên theo bài tập 2.4.12, các phần tử của G chéo hóa được đồng thời.

2.5.1 a) • Lập χ_A và tính các KGCR. Từ đó suy ra rằng A không chéo hóa được.

Tam giác hóa A , ta suy ra $A = PTP^{-1}$ trong đó, chẳng hạn :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Chứng tỏ : } \forall n \in \mathbb{N}^* \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

$$\diamond \text{ Trả lời : } A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & -1+3^n & 2n3^{n-1} \\ -1+3^n & 1+3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

b) • Lập χ_A và tính các KGCR từ đó suy ra rằng A chéo hóa được. Ta được $A = P = PDP^{-1}$ trong đó, chẳng hạn :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

• Vậy ta có : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PD^nP^{-1}$. Vì $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ nên A khả nghịch. Từ đó suy ra rằng công thức $A^n = PD^nP^{-1}$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

$$\diamond \text{ Trả lời : } A^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 3+(-1)^n & 1-(-1)^n & 1-(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 3+(-1)^n & -1+(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & -1+(-1)^n & 3+(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & -1+(-1)^n & -1+(-1)^n & 3+(-1)^n \end{pmatrix}.$$

2.5.2 Tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của E sao cho ma trận của f trong $\mathcal{B}$ là ma trận chéo :

$$D = \begin{pmatrix} aI_p & 0 \\ 0 & bI_q \end{pmatrix}.$$

$$\text{Khi đó ta có : } \forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} a^n I_p & 0 \\ 0 & b^n I_q \end{pmatrix}.$$

Giả sử $n \in \mathbb{N}, (\alpha_n, \beta_n) \in K^2$. Ta có : $f^n = \alpha_n e + \beta_n f \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = \alpha_n + a\beta_n \\ b^n = \alpha_n + b\beta_n \end{cases}$ và tính α_n, β_n .

$$\diamond \text{ Trả lời : } \alpha_n = \frac{ba^n - ab^n}{b-a}, \beta_n = \frac{b^n - a^n}{b-a}.$$

2.5.3 • Lập χ_A và tính các KGCR. Từ đó suy ra rằng A chéo được. Ta được $A = PDP^{-1}$,

trong đó, chẳng hạn : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

• Ký hiệu $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ chẳng hạn và $B = P\Delta P^{-1}$, ta có : $B^2 = A$.

◊ Trả lời : Một lời giải là $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

2.5.4 Chứng minh A chéo hóa được và chéo hóa A , ta được $A = PDP^{-1}$ trong đó, chẳng

hạn : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Giả sử $\Delta = \begin{pmatrix} \ln(1+a) & 0 \\ 0 & \ln(1-a) \end{pmatrix}, B = P\Delta P^{-1}.$

Ta có : $e^B = e^{P\Delta P^{-1}} = Pe^{\Delta}P^{-1} = PDP^{-1} = A.$

◊ Trả lời : Một lời giải là $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ln(1+a) + \ln(1-a) & \ln(1+a) - \ln(1-a) \\ \ln(1+a) - \ln(1-a) & \ln(1+a) + \ln(1-a) \end{pmatrix}.$

2.5.5 a) • Chứng minh A chéo hóa được trong $M_3(\mathbb{C})$. Chéo hóa A , ta được $A = PDP^{-1}$ trong đó, chẳng hạn :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1+i & -1-i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -i & -i & 1+i \\ i & i & 1-i \end{pmatrix}.$$

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^{DP}P^{-1} \text{ và } e^D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{1+i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1-i} \end{pmatrix}, \text{ từ đây}$$

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e - 2ie^{1+i} + 2ie^{1-i} & -2ie^{1+i} + 2ie^{1-i} & -4e + 2(1+i)e^{1+i} + 2(1-i)e^{1-i} \\ -2e + (1+i)e^{1+i} + (1-i)e^{1-i} & (1+i)e^{1+i} + (1-i)e^{1-i} & 4e - 2e^{1+i} - 2e^{1-i} \\ -ie^{1+i} + ie^{1-i} & -ie^{1+i} + ie^{1-i} & (1+i)e^{1+i} + (1-i)e^{1-i} \end{pmatrix}$$

◊ Trả lời : $e^A = e \begin{pmatrix} 1 + 2\sin 1 & 2\sin 1 & -2 + 2\cos 1 - 2\sin 1 \\ -1 + \cos 1 - \sin 1 & \cos 1 - \sin 1 & 2 - 2\cos 1 \\ \sin 1 & \sin 1 & \cos 1 - \sin 1 \end{pmatrix}.$

b) • Lập χ_A và tính các KGCR. Từ đó suy ra A không chéo hóa được trong $M_4(\mathbb{R})$ (cũng vậy trong $M_4(\mathbb{C})$). Tam giác hóa A , ta được $A = FTF^{-1}$ trong đó, chẳng hạn :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

• Chứng minh: $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$, rồi tính $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} k2^{k-1}$ và suy ra e^T .

• $e^A = e^{PTP^{-1}} = Pe^TP^{-1}$.

◊ Trả lời: $e^A = \begin{pmatrix} -2e^2 + 3e^{-1} & e^2 - e^{-1} & e^2 & -2e^2 + 2e^{-1} \\ -2e^2 + 2e^{-1} & e^2 & e^2 & -2e^2 + 2e^{-1} \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 2e^2 - 2e^{-1} & -e^2 + e^{-1} & -e^2 & 2e^2 - 2e^{-1} \end{pmatrix}$.

2.5.6 Trước hết chứng minh bằng quy nạp theo n rằng mọi u_n tồn tại và > 0 .

Ký hiệu $v_n = \frac{1}{u_n}$, ta có: $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{1}{2} v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

Từ đó suy ra: $v_n = \frac{1}{3} \left(\left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) v_0 + \left(2 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) v_1 \right)$.

◊ Trả lời: • $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \left(\left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \frac{1}{u_0} + \left(2 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \frac{1}{u_1} \right)^{-1}$

• $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3u_0u_1}{2u_0 + u_1}$.

2.5.7 Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ và $U_n = \begin{pmatrix} u_{2n} \\ u_{2n+1} \end{pmatrix}$, hãy chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$,

từ đó: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.

Hãy chéo hóa A và suy ra giá trị của A^n .

◊ Trả lời: $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}} ((2+\sqrt{2})^{n+1} - (2-\sqrt{2})^{n+1}) \\ u_{2n+1} = \frac{1}{2} ((2+\sqrt{2})^{n+1} + (2-\sqrt{2})^{n+1}) \end{cases}$

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 3

3.1.1 (i) $\Rightarrow$ (ii):

Giả sử A lũy linh.

• Tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $A^N = 0$, nói cách khác đa thức X^N là đa thức triệt tiêu của A .

Từ đó suy ra: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.

• Vì $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ và $\deg(\chi_A) \geq 1$ nên χ_A có ít nhất một nghiệm trong $\mathbb{C}$, vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

Cuối cùng: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Nếu $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ thì vì χ_A tách được trên $\mathbb{C}$, $\chi_A^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ và χ_A có bậc n với hệ tử cao nhất là $(-1)^n$, ta kết luận: $\chi_A = (-1)^n X^n$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv):

Giả sử $\chi_A = (-1)^n X^n$.

Tồn tại $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ sao cho $A \sim T$, vậy ta có $\chi_T = \chi_A = (-1)^n X^n$. Các thành phần đường

chéo của T đều bằng không: $T = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó (xem thêm Nhận xét 3.4.1, 3):

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, T^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \bullet \\ & \ddots & 0 & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, T^n = 0, \text{ và như vậy } A^n = 0.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): hiển nhiên.

3.1.2 Vì f tam giác hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ của E sao cho

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$.

Rõ ràng các kgvc của E : $\{0\}$, $\text{Vect}(e_1)$, $\text{Vect}(e_1, e_2), \dots$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k), \dots$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ ổn định đối với f và có số chiều tương ứng là $0, 1, 2, \dots, n$.

3.1.3 • Vì A tam giác hóa được nên tồn tại $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$, $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$

sao cho $A = QTQ^{-1}$. Khi đó $P(A) = QP(T)Q^{-1}$. Từ đó, với mọi λ thuộc $\mathbb{C}$:

$$\chi_{P(A)}(\lambda) = \chi_{P(T)}(\lambda) = \begin{vmatrix} P(\lambda_1) - \lambda & & \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (P(\lambda_i) - \lambda)$$

• $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(P(A)) = \{P(\lambda_i); 1 \leq i \leq n\} = P(\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)).$

3.1.4 Chú ý rằng : $\chi_M = \chi_A \chi_B$ (xem thêm bài tập 2.2.4), nên :

$(M \text{ tam giác hóa được}) \Leftrightarrow (\chi_M \text{ tách được}) \Leftrightarrow (\chi_A \text{ và } \chi_B \text{ tách được}) \Leftrightarrow (A \text{ và } B \text{ tam giác hóa được}).$

Nhận xét :

Ta giả sử đã biết các dữ liệu tam giác hóa của A và B : $A = PTP^{-1}, B = QUQ^{-1}, P \in \text{GL}_n(K), Q \in \text{GL}_n(K), T \in \text{T}_{n,s}(K), U \in \text{T}_{n,s}(K).$

Ký hiệu $R = \begin{pmatrix} P & X \\ 0 & Q \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} T & G \\ 0 & U \end{pmatrix}$ trong đó X, G cần xác định.

Đầu tiên, R khả nghịch và : $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}XQ^{-1} \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Tiếp đó bằng các phép nhân theo khối:

$M = RVR^{-1} \Leftrightarrow C = -PTP^{-1}XQ^{-1} + (PG + XU)Q^{-1}.$

Vậy chỉ cần chọn $\begin{cases} X = 0 \\ G = P^{-1}CQ \end{cases}$ để có một phép tam giác hóa M :

$$M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & P^{-1}CQ \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Tổng quát hóa dễ dàng bằng quy nạp theo N : $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}$ tam giác hóa được khi và chỉ

khi $A_1, \dots, A_N$ tam giác hóa được.

3.1.5 Ma trận A tam giác hóa được trong $\text{M}_n(\mathbb{C})$:

Tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \in \text{T}_{n,s}(\mathbb{C})$, sao cho $A = PTP^{-1}$.

Khi đó : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} A^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} P T^{2k} P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} T^{2k} \right) P^{-1},$

vậy : $\det \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} A^{2k} \right) = \det \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} T^{2k} \right) = \begin{vmatrix} \text{ch } \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{ch } \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \text{ch } \lambda_i.$

Vì $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, ta có thể nhóm các nghiệm phức của χ_A với liên hợp của nó:

$$\chi_A = (-1)^n \left(\prod_{i=1}^N (X - \lambda_i) \right) \left(\prod_{j=1}^M (X - \mu_j)(X - \overline{\mu_j}) \right),$$

trong đó $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}, \mu_1, \dots, \mu_M \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$

- $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \text{ch } \lambda_i \geq 1.$
- Giả sử $j \in \{1, \dots, M\}$. Với ký hiệu $\mu = \mu_j = \alpha + i\beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$\text{ch } \mu \text{ ch } \overline{\mu} = \frac{1}{4} (e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{2i\beta} + e^{-2i\beta}) = \frac{1}{2} (\text{ch } 2\alpha + \cos 2\beta) \geq 0,$$

vì $\text{ch } 2\alpha \geq 1$ và $\cos 2\beta \geq -1.$

3.1.6 Phương pháp thứ nhất

1) Phép tam giác hóa A

Lập đa thức đặc trưng: $\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 5)^2$. Xác định các không gian vectơ con riêng:

- $\text{KGCR}(A, -1)$ có số chiều là 1, sinh bởi $V_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- $\text{KGCR}(A, 5)$ có số chiều là 2, sinh bởi $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Từ đó suy ra A không chéo hóa được. Nhưng do χ_A tách được trên $\mathbb{R}$, nên A tam giác hóa

được trong $M_3(\mathbb{R})$. Tìm $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ sao cho $AV_3 = 5V_3 + V_2$. Ta có thể chọn

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ để cho tiện ta thay } V_2 \text{ bởi } V_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Với ký hiệu $P = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 15 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, ta có: $A = PTP^{-1}$.

2) Tìm các kgc của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với f

Các kgc của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với f và có số chiều 0, 1, 3 được xác định dễ dàng: $\{0\}, \mathbb{R}V_1, \mathbb{R}V_2, \mathbb{R}^3$.

Ta còn phải tìm các mặt phẳng ổn định đối với f . Rõ ràng các mặt phẳng $P_1 = \text{Vect}(V_1, V_2)$, $P_2 = \text{Vect}(V_2, V_3)$ ổn định đối với f .

Giả sử P là một mặt phẳng ổn định đối với f khác P_1 và P_2 (nếu nó tồn tại). Khi đó $P \cap P_2$ là một đường thẳng vectơ ổn định đối với f , do đó được định hướng bởi V_2 (vì $V_1 \notin P_2$). Vậy tồn tại $W \in \mathbb{R}^3$ sao cho $P = \text{Vect}(V_2, W)$. Với ký hiệu $W = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$, ta có:

$$\begin{aligned} AW \in P &\Leftrightarrow \det(V_1, V_2, V_3)(V_2, W, AW) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ 1 & \beta & 5\beta + \gamma \\ 0 & \gamma & 5\gamma \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow (P = P_1 \text{ hay } P = P_2). \end{aligned}$$

Phương pháp thứ hai (sử dụng đối ngẫu và chuyển vị)

1) Cho E là một K -kgv, $f \in \mathcal{L}(E)$, F là một kgc của E .

• Giả sử F ổn định đối với f . Ta sẽ chứng minh $F^\perp$ ổn định đối với f^* .

Cho $\varphi \in F^\perp$. Ta có: $\forall x \in F, \langle x, f(\varphi) \rangle = \langle f(x), \varphi \rangle = 0$ (vì $f(x) \in F, \varphi \in F^\perp$), vậy: $f(\varphi) \in F^\perp$.

• Nếu hơn nữa E hữu hạn chiều thì đảo lại cũng đúng vì rằng nếu $F^\perp$ ổn định đối với f^* thì bằng cách đồng nhất E và song đối ngẫu của nó (xem Cl.1), $F^\perp = F^{\perp\perp}$ ổn định đối với $f = ({}^t f)$.

2) Như vậy một mặt phẳng vectơ P của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với f khi và chỉ khi $P^\perp$ (có số chiều là 1) ổn định đối với f^* . Vì thế mặt phẳng vectơ ổn định đối với f là phần bù trực giao của đường thẳng vectơ ổn định đối với f^* .

Các đường thẳng vectơ ổn định đối với A là các đường sinh bởi $(1, 0, -1)$ và $(11, -6, -5)$. Vậy các mặt phẳng vectơ ổn định đối với f là hai mặt phẳng có các phương trình Descartes (trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$): $x - z = 0, 11x - 6y - 5z = 0$.

Nhận xét :

Phương pháp thứ nhất cho một cơ sở và phương pháp thứ hai cho một phương trình của mỗi mặt phẳng ổn định.

◊ **Trả lời :** Các kgvc của $\mathbb{R}^3$ ổn định đối với f là : $\{0\}, \mathbb{R}V_1, \mathbb{R}V_2, \mathbb{R}V_1 + \mathbb{R}V_2, \mathbb{R}V_2 + \mathbb{R}V_3, \mathbb{R}^3$ trong đó $V_1 = (10, 15, 4), V_2 = (1, 1, 1), V_3 = (0, -1, 0)$.

3.1.7 a) Vì χ_A tách được trên $\mathbb{R}$ nên A tam giác hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$: tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in T_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ sao cho } A = PTP^{-1}.$$

Khi đó $A^k = PT^kP^{-1}$, từ đây : $\chi_{A^k} = \chi_{T^k} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i^k - X)$ tách được trên $\mathbb{R}$. Xem thêm bài tập 3.1.3.

b) Vì χ_A tách được trên $\mathbb{R}$ nên A tam giác hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Tồn tại } P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in T_{n,n}(\mathbb{C}) \text{ sao cho } A = PTP^{-1}.$$

$$\text{Khi đó (xem thêm a)) : } \chi_{A^2} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i^2 - X).$$

Theo giả thiết : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i^2 \in \mathbb{R}_+$, vậy $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$, nên χ_A tách được trên $\mathbb{R}$.

c) Với $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $\chi_A = -X^3 + 1 = -(X-1)(X^2 + X + 1)$, không tách được trên $\mathbb{R}$, và $A^3 = I_3$, vậy $\chi_{A^3} = -(X-1)^3$, tách được trên $\mathbb{R}$.

$$\diamond \text{ Trả lời : chẳng hạn : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.8 Ma trận A tam giác hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Tồn tại } P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in T_{n,n}(\mathbb{C}), \text{ sao cho } A = PTP^{-1}.$$

$$\text{Ta có : } \forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{tr}(A^{i+j-2}) = \text{tr}(T^{i+j-2}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{i+j-2}.$$

$$\text{Xét : } M = (\text{tr}(A^{i+j-2}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

Nhận thấy : $\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{tr}(A^{i+j-2}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{i-1} \lambda_k^{j-1}$.

Như vậy, với ký hiệu $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, ta có : $M = {}^t B B$. Từ đó (định thức

Vandermonde) :

$$\det(M) = (\det(B))^2 = \left(\prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \right)^2,$$

và cuối cùng : $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ đôi một phân biệt).

Nhận xét : Ngoài ra ta còn có :

- $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \det(M) \in \mathbb{R}_+$
- $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ là các số thực đôi một phân biệt $\Rightarrow \det(M) \in \mathbb{R}_+^*$.

3.1.9 Giả sử $\lambda \in \mathbb{C} - \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Khi đó $A - \lambda I_n$ khả nghịch và giao hoán với B (vì $AB = BA$), từ đây :

$\chi_{A+B}(\lambda) = \det((A - \lambda I_n) + B) = \det(A - \lambda I_n) \det(I_n + N)$, trong đó $N = B(A - \lambda I_n)^{-1}$. Vì B lũy linh, B và $(A - \lambda I_n)^{-1}$ giao hoán nên N lũy linh.

Nhưng N tam giác hóa được trong $M_n(\mathbb{C})$, tức là tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in T_{n,n}(\mathbb{C}), \text{ sao cho } N = PTP^{-1}, \text{ từ đây : } \det(I_n + N) = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

và như vậy $\chi_{A+B}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

- Vì các ánh xạ đa thức χ_{A+B} và χ_A trùng nhau trên bộ phận vô hạn $\mathbb{C} - \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ nên ta kết luận : $\chi_{A+B} = \chi_A$.

3.1.10 Ta có $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^{v-1}) \subset \text{Ker}(f^v) = E$.

Chứng minh các bao hàm thức trên là nghiêm ngặt (xem thêm 3.4.1)).

1) Giả sử $v = n$. Vì $\sum_{i=0}^{n-1} (\dim(\text{Ker}(f^{i+1})) - \dim(\text{Ker}(f^i))) = n$ suy ra :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \dim(\text{Ker}(f^{i+1})) = \dim(\text{Ker}(f^i)) + 1.$$

Đặc biệt $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ và như vậy (theo định lý về hạng) $\text{rank}(f) = n - \dim(\text{Ker}(f)) = n - 1$.

2) Đảo lại, giả sử $\text{rank}(f) = n - 1$, tức là (theo định lý về hạng) : $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

- Giả sử $i \in \{0, \dots, v-1\}$. Tồn tại $V_i \in \text{Ker}(f^{i+1})$ sao cho $V_i \notin \text{Ker}(f^i)$. Giả sử $V \in \text{Ker}(f^{i+1})$.

Vì $f^{i+1}(V_i) = f^i(f(V_i)) = 0$, ta có : $f^i(V_i) \in \text{Ker}(f)$ và $f^i(V) \in \text{Ker}(f)$.

Vì $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ và $f^i(V_i) \neq 0$ nên tồn tại $\alpha \in K$ sao cho $f^i(V) = \alpha f^i(V_i)$.

Như vậy : $V = (V - \alpha V_i) + \alpha V_i \in \text{Ker}(f^i) \oplus KV_i$.

Điều này chứng tỏ : $\dim(\text{Ker}(f^{i+1})) = \dim(\text{Ker}(f^i)) + 1$.

- Bằng cách cộng hệ thức nhận được ở trên với i chạy từ 0 đến $v-1$, ta suy ra :

$$\dim(\text{Ker}(f^v)) = \dim(\text{Ker}(f^0)) + v, \text{ tức là } n = v.$$

3.1.11 a) Theo bài tập 2.2.1 : $\chi_n | \chi_f$. Vậy

f tam giác hóa được $\Rightarrow \chi_f$ tách được $\Rightarrow \chi_g$ tách được $\Rightarrow g$ tam giác hóa được.

3.1.12 a) Quy nạp theo n

Tính chất đúng với $n = 1$.

Ta giả sử nó đúng với mọi số nguyên $\leq n$, và E là một K -kgv có số chiều hữu hạn là $n + 1$, I là một tập hợp không rỗng, $(f_i)_{i \in I}$ là một họ các tự đồng cấu tam giác hóa được của E và đôi một giao hoán. Để dàng khảo sát trường hợp mọi f_i là phép vị tự. Giả sử tồn tại $i_0 \in I$ sao cho f_{i_0} không phải là một phép vị tự; f_{i_0} có ít nhất một gtr (vì f_{i_0} tam giác hóa được) và một không gian con riêng tương ứng E_0 sao cho $1 \leq \dim(E_0) \leq n$.

• Kgv E_0 ổn định đối với mỗi f_i vì với mọi x thuộc E_0 :

$$f_{i_0}(f_i(x)) = f_i(f_{i_0}(x)) = f_i(\lambda_0 x) = \lambda_0 f_i(x), \text{ vậy } f_i(x) \in E_0.$$

• Ta ký hiệu g_i là tự đồng cấu cảm sinh bởi f_i trên E_0 với $i \in I$. Theo bài tập 3.1.11, g_i tam giác hóa được. Có thể áp dụng giả thiết quy nạp cho E_0 và cho họ $(g_i)_{i \in I}$; các g_i ($i \in I$) nhận ít nhất một vtr chung x_0 . Rõ ràng rằng x_0 là một vtr chung cho mọi f_i .

b) Quy nạp theo n

Tính chất đúng với $n = 1$.

Giả sử nó đúng với n và E là một K -kgv có số chiều hữu hạn là $n + 1$, I là một tập hợp không rỗng, $(f_i)_{i \in I}$ là một họ các tự đồng cấu tam giác hóa được của E và đôi một giao hoán.

Khi đó $({}^i f_i)_{i \in I}$ là một họ các tự đồng cấu của E^* (với phép chuyển vị, xem 1.1.5) tam giác hóa được (vì nếu $\text{Mat}_B(f_i) = T_i \in \mathbf{T}_{n+1}(K)$ thì $\text{Mat}_{B^*}({}^i f_i) = {}^i T_i \in \mathbf{T}_{n+1}(K)$) và đôi một giao hoán:

$$\forall (i, j) \in I^2, {}^i f_i \circ {}^i f_j = {}^i (f_j \circ f_i) = {}^i (f_i \circ f_j) = {}^i f_i \circ {}^i f_j.$$

Theo a), các $({}^i f_i)_{i \in I}$ nhận ít nhất một vtr chung φ :
$$\begin{cases} \varphi \in E^* - \{0\} \\ \forall i \in I, \exists \lambda_i \in K, {}^i f_i(\varphi) = \lambda_i \varphi \end{cases}$$

• Các kgv $\text{Ker}(\varphi)$ của E ổn định đối với mỗi f_i vì với mọi x thuộc $\text{Ker}(\varphi)$:

$$\varphi(f_i(x)) = (\varphi \circ f_i)(x) = ({}^i f_i(\varphi))(x) = (\lambda_i \varphi)(x) = \lambda_i \varphi(x) = 0.$$

Ta ký hiệu f'_i là tự đồng cấu cảm sinh bởi f_i trên $\text{Ker}(\varphi)$ với $i \in I$.

• Vì $\varphi \neq 0$, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = (n + 1) - 1 = n$, vậy ta có thể áp dụng giả thiết quy nạp cho $\text{Ker}(\varphi)$ và họ $(f'_i)_{i \in I}$, vì mỗi f'_i tam giác hóa được (xem bài tập 3.1.11) và các f'_i đôi một giao hoán. Vậy tồn tại một cơ sở $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ của $\text{Ker}(\varphi)$ sao cho: $\forall i \in I, \text{Mat}_{B_1}(f'_i) \in \mathbf{T}_{n,n}(K)$.

Tồn tại $e_{n+1} \in E - \text{Ker}(\varphi)$; khi đó $B = (e_1, \dots, e_{n+1})$ là một cơ sở của E và:

$$\forall i \in I, \text{Mat}_B(f_i) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{B_1}(f'_i) & \vdots \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n+1,n}(K).$$

Nhận xét: Nếu $n \geq 2$ thì có thể xây ra là hai tự đồng cấu của E đồng thời tam giác hóa được

mà không giao hoán, ví dụ như: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, trong đó ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

3.1.13 Theo bài tập 3.1.12 do A và B tam giác hóa được và giao hoán nên tồn tại

$$P \in \text{GL}_n(K), T_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,n}(K), T_B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,n}(K)$$

sao cho $A = PT_A P^{-1}$ và $B = PT_B P^{-1}$, trong đó $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (tương ứng: $\mu_1, \dots, \mu_n$) là các gtr của A (tương ứng: B). Khi đó ta có:

$$A + B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix} P^{-1} \text{ và } AB = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Điều này chứng tỏ các gtr của $A + B$ (tương ứng: AB) là $\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n$ (tương ứng: $\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n$).

3.1.14 Quy nạp theo n

Tính chất là hiển nhiên với $n = 1$.

Giả sử nó đúng với một số nguyên n , và giả sử $A, B, C \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ sao cho:

$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$. Ký hiệu α, β, γ là các tự đồng cấu của $M_{n+1}(\mathbb{C})$ tương ứng liên kết với A, B, C trong cơ sở chính tắc của $M_{n+1}(\mathbb{C})$.

Tự đồng cấu γ có ít nhất một gtr λ , ký hiệu: $E_\lambda = \text{KGCR}(\gamma, \lambda)$. Chứng minh E_λ ổn định đối với α, β, γ . Ký hiệu α', β', γ' là các tự đồng cấu cảm sinh trên E_λ tương ứng bởi α, β, γ . Ta có: $\alpha' \circ \beta' - \beta' \circ \alpha' = \gamma' = \lambda \text{Id}_{E_\lambda}$, từ đó: $0 = \text{tr}(\alpha' \circ \beta') - \text{tr}(\beta' \circ \alpha') = \text{tr}(\alpha' \circ \beta' - \beta' \circ \alpha') = \lambda \dim(E_\lambda)$,

vậy $\lambda = 0, \alpha' \circ \beta' = \beta' \circ \alpha'$.

Áp dụng bài tập 3.1.12 a) cho E_λ và họ (α', β') , tồn tại $a_i, b_i \in \mathbb{C}, x_i \in E_\lambda - \{0\}$ sao cho:

$$\alpha'(x_i) = a_i x_i \text{ và } \beta'(x_i) = b_i x_i.$$

Bổ sung x_i thành một cơ sở $B = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ của $M_{n+1}(\mathbb{C})$. Các ma trận của α, β, γ

trong B tương ứng có dạng: $\begin{pmatrix} a_1 & X \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & Y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$, trong đó $X, Y, Z \in M_{1,n}(\mathbb{C})$,

$$A_1, B_1, C_1 \in M_n(\mathbb{C})$$

Bằng phép nhân theo khối, chứng minh: $A_1 B_1 - B_1 A_1 = C_1, A_1 C_1 = C_1 A_1, B_1 C_1 = C_1 B_1$.

Ta có thể áp dụng giả thiết quy nạp cho (A_1, B_1, C_1) : tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), T_1, U_1, V_1 \in T_{n,n}(\mathbb{C})$

sao cho: $A_1 = PT_1 P^{-1}, B_1 = PU_1 P^{-1}, C_1 = PV_1 P^{-1}$.

Ký hiệu $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, Q khả nghịch, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ và bằng phép nhân theo khối ta được:

$$Q^{-1} A Q, Q^{-1} B Q, Q^{-1} C Q \in T_{n+1,n}(\mathbb{C}).$$

3.1.15 Quy nạp theo n

Tính chất là hiển nhiên với $n = 1$.

Ta giả sử nó đúng với một $n \in \mathbb{N}$ và giả sử $A, B \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ sao cho $AB = 0$. Nếu A hoặc B khả nghịch thì $A = 0$ hoặc $B = 0$ và tính chất là hiển nhiên. Giả sử A và B không khả nghịch.

Ký hiệu f, g là các tự đồng cấu của $M_{n+1}(\mathbb{C})$ của các ma trận A, B trong cơ sở chính tắc.

Vì $f \circ g = 0$, rõ ràng $\text{Ker}(f)$ ổn định đối với g .

Ký hiệu g' là tự đồng cấu cảm sinh bởi g trên $\text{Ker}(f)$.

Vì $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$ nên g' nhận ít nhất một gtr λ và một vtr liên kết x_1 .

Tồn tại $x_2, \dots, x_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ sao cho $B = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ là một cơ sở của $M_{n+1}(\mathbb{C})$.

Các ma trận của f, g trong B tương ứng có dạng $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & Y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$, trong đó $X, Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$,

$A_1, B_1 \in M_n(\mathbb{C})$. Do $f \circ g = 0$, ta suy ra $A_1 B_1 = 0$.

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T, U \in T_{n,s}(\mathbb{C})$ sao cho : $A = PTP^{-1}$, $B = PUP^{-1}$.

Ký hiệu $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, Q khả nghịch, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ và bằng phép nhân theo khối ta được : $Q^{-1}AQ \in T_{n+1,s}(K)$, $Q^{-1}BQ \in T_{n+1,s}(K)$.

• Giả sử $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tính : $ABC = 0$.

Nếu A, B, C đồng thời tam giác hóa được thì A, B, C sẽ nhận ít nhất một vtr chung X_1 .

Nhưng $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$, $KGCR(A, 0) = \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ và $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vậy A và B

không có vtr chung.

◊ **Trả lời** : Tính chất không mở rộng được cho trường hợp ba ma trận (nếu $n \geq 2$).

3.1.16 Xét các tự đồng cấu a, b của $M_n(\mathbb{C})$ xác định bởi :

$$a: X \mapsto AX, \quad b: X \mapsto XB.$$

Rõ ràng A và B giao hoán : $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), (a \circ b)(X) = (b \circ a)(X) = AXB$.

Vì a và b tam giác hóa được và giao hoán nên theo bài tập 3.1.13: $Sp_{\mathbb{C}}(a \circ b) \subset Sp_{\mathbb{C}}(a) Sp_{\mathbb{C}}(b)$.

Nhưng $Sp_{\mathbb{C}}(a) \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

Thật vậy, nếu $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(a)$, tồn tại $X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho $AX = \lambda X$, vậy tồn tại

$V \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho $AV = \lambda V$ (lấy V là một trong các cột khác không của X),

vậy $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$. Cũng vậy với B .

Vì $\rho(A)\rho(B) < 1$, ta suy ra : $\forall (\lambda, \mu) \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \times Sp_{\mathbb{C}}(B)$, $|\lambda| |\mu| < 1$,

vậy : $\forall \Lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(a \circ b)$, $|\Lambda| < 1$.

Điều này chứng tỏ tự đồng cấu $F = a \circ b - \text{Id}_{M_n(\mathbb{C})} : X \mapsto AXB - X$ thuộc $M_n(\mathbb{C})$ không nhận 0 làm gtr (nếu không thì $a \circ b$ đã thừa nhận 1 làm gtr), vậy là song ánh, từ đó có đpcm.

3.1.17 (i) $\Rightarrow$ (ii) : hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

Ánh xạ $\phi: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ là đơn ánh tuyến tính và $M_n(\mathbb{C})$ hữu hạn chiều, vậy ϕ là song ánh

$$X \mapsto AX - XB$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Giả sử $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \cap Sp_{\mathbb{C}}(B)$. Vì $Sp_{\mathbb{C}}(B) = Sp_{\mathbb{C}}(B)$, tồn tại $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho

$AU = \lambda U$ và $BV = \lambda V$. Ký hiệu $X = U^t V \in M_n(\mathbb{C})$; chứng minh $X \neq 0$.

Ta có : $AX = (AU)^t V = \lambda U^t V$ và $XB = U^t (VB) = U^t (BV) = \lambda U^t V$, vậy $AX = XB$.

Theo (ii) ta suy ra $X = 0$; mâu thuẫn.

Kết luận : $Sp_{\mathbb{C}}(A) \cap Sp_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) :

Giả sử B là một cơ sở của $M_{n,1}(\mathbb{C})$, f, g là các tự đồng cấu biểu diễn bởi A và B trong B .

Giả sử tồn tại $h \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$ sao cho $f \circ h = h \circ g$ (tức là không có (ii)).

Chúng minh rằng $\text{Im}(h)$ ổn định đối với f (xem thêm bài tập 7.2.8, Tập 5). Ký hiệu f' là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên $\text{Im}(h)$; f' có ít nhất một gtr λ và một vtr ν .

Vì $\nu \in \text{Im}(h)$, tồn tại $u \in E$ sao cho $\nu = h(u)$; chú ý rằng $u \neq 0$.

Ta có: $(f \circ h)(u) = f(\nu) = \lambda \nu = \lambda h(u)$. Như vậy $f \circ h - \lambda h$ triệt tiêu tại u và trên $\text{Ker}(h)$, do đó nó triệt tiêu trên $\mathbb{C}u \oplus \text{Ker}(h)$.

Chúng minh: $\mathbb{C}u \oplus \text{Ker}(h) \subset \text{Ker}(h \circ (g - \lambda e))$, trong đó $e = \text{Id}_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Nếu $g - \lambda e$ là đơn ánh, thì $\dim(\text{Ker}(h \circ (g - \lambda e))) = \dim(\text{Ker}(h))$, mâu thuẫn. Vậy $g - \lambda e$ không là đơn ánh, tức là λ là gtr của g .

Cuối cùng, f và g thừa nhận ít nhất một gtr chung λ , vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \neq \emptyset$.

3.1.18 Ký hiệu $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $E = \{\text{diag}(z_1, \dots, z_N); (z_1, \dots, z_N) \in U^N\}$, $M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

Rõ ràng E đóng giới nội trong $\mathbf{M}_N(\mathbb{C})$, vậy E là compac. Dãy $(M^{p(n)})_{p \in \mathbb{N}^*}$ có các phần tử trong E nên có ít nhất một giới hạn riêng X trong E . Từ đó suy ra tồn tại một hàm trích τ sao cho:

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}^*, \tau(p+1) \geq \tau(p) + p \\ M^{\tau(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} X \end{cases}$$

Vì $M^{\tau(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} X$, $M^{\tau(p+1)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} X$ và các $M^{\tau(p)}$ và X khả nghịch, ta suy ra:

$$M^{\tau(p+1) - \tau(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} I_N.$$

Ta ký hiệu với $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \tau(p+1) - \tau(p)$; theo cách xây dựng: $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \geq p$.

Vậy tồn tại một hàm trích p sao cho $u_{p(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty$, và ta có $M^{u_{p(p)}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} I_N$.

Như vậy, I_N là giới hạn riêng của $(M^{p(n)})_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Vậy tồn tại một hàm trích σ sao cho $M^{\sigma(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} I_N$. Vì $\text{tr}: \mathbf{M}_N(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ liên tục, suy ra:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k^{\sigma(p)} = \text{tr}(M^{\sigma(p)}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \text{tr}(I_N) = N.$$

3.1.19 Ma trận A thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ tam giác hóa được, tức là:

tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,1}(\mathbb{C})$ sao cho $A = PTP^{-1}$. Vậy ta có:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, |\text{tr}(A^p)|^{\frac{1}{p}} = |\text{tr}(T^p)|^{\frac{1}{p}} = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k^p \right|^{\frac{1}{p}}.$$

$$\bullet \forall p \in \mathbb{N}^*, |\text{tr}(A^p)|^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \rho(A) \text{ và } n^{\frac{1}{p}} \rho(A) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A).$$

Vậy $\limsup_{p \rightarrow \infty} (|\text{tr}(A^p)|^{\frac{1}{p}}) \leq \rho(A)$, trong đó $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$ là bán kính phổ của A .

• Giả sử $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ được sắp xếp sao cho:

$$\rho(A) = |\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| > |\lambda_{n+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Theo bài tập 3.1.18 tồn tại một hàm trích σ sao cho :
$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k}{\rho(A)} \right)^{\sigma(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} N,$$

Mặt khác, vì : $\forall k \in \{N+1, \dots, n\}, \left| \frac{\lambda_k}{\rho(A)} \right| < 1$, ta có :
$$\sum_{k=N+1}^n \left(\frac{\lambda_k}{\rho(A)} \right)^{\sigma(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Từ đó :
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_k}{\rho(A)} \right)^{\sigma(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} N, \text{ vậy } \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k^{\sigma(p)} \right|^{\frac{1}{\sigma(p)}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A).$$

Cuối cùng :
$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \left(|\operatorname{tr}(A^p)|^{\frac{1}{p}} \right) = \rho(A).$$

3.2.1 • Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N^k \end{pmatrix}.$

• Khi đó với $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, ta có :

$$P(A) = \sum_{k=0}^d \begin{pmatrix} a_k A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k A_N^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_N) \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Vì $M_n(K)$ là một K -kgv có số chiều hữu hạn chiều là n^2 , nên họ $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ phụ thuộc tuyến tính, vì vậy tồn tại $P \in K[X] - \{0\}$ sao cho $P(A) = 0$ (xem Mệnh đề 3.2.3).

1) Nếu $P(0) \neq 0$ thì ký hiệu $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_N X^N$ ($a_0 \neq 0$), ta có

$$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_N A^N = 0, \text{ từ đây : } A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_1 I_n + a_2 A + \dots + a_N A^{N-1}).$$

2) Nếu $P(0) = 0$ thì tồn tại $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (cấp bội của 0 trong P) và $Q \in K[X] - \{0\}$ sao cho : $P = X^\alpha Q$ và $Q(0) \neq 0$. Vì A khả nghịch và $A^\alpha Q(A) = 0$, suy ra $Q(A) = 0$ và ta áp dụng 1) cho Q thay vì cho P .

3.2.3 Các đa thức đặc trưng $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_N}$ tách được trên $\mathbb{C}$ và vì $A_1, \dots, A_N$ đôi một không có gtr nào chung nên $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_N}$ đôi một nguyên tố cùng nhau. Ký hiệu $Q_i = \prod_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \chi_{A_j}$

với $i \in \{1, \dots, N\}$.

Theo Định lý Cayley và Hamilton : $\forall j \in \{1, \dots, N\}, \chi_{A_j}(A_j) = 0$,

từ đây : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, (i \neq j \Rightarrow Q_i(A_j) = 0)$.

Chứng minh $Q_1, \dots, Q_N$ nguyên tố cùng nhau trong toàn bộ (xem thêm chứng minh Định lý 3.2.2).

Theo Định lý Bezout, tồn tại $U_1, \dots, U_N \in \mathbb{C}[X]$ sao cho
$$\sum_{i=1}^N U_i Q_i = 1.$$

Ký hiệu $P = \sum_{i=1}^N U_i Q_i P_i$. Giả sử $j \in \{1, \dots, N\}$, ta có :

$$\bullet P(A_j) = \sum_{i=1}^N U_i(A_j) Q_i(A_j) P_i(A_j) = U_j(A_j) Q_j(A_j) P_j(A_j)$$

$$\bullet I_n = \left(\sum_{i=1}^N U_i Q_i \right) (A_j) = \sum_{i=1}^N U_i(A_j) Q_i(A_j) = U_j(A_j) Q_j(A_j).$$

$$\text{Cuối cùng : } P(A_j) = P_j(A_j).$$

3.2.4 a) Giả sử $A \in E$. Tồn tại $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$ sao cho $A = PDP^{-1}$.

Ta có : $\chi_A(A) = P\chi_A(D)P^{-1}$ và :

$$\chi_A(D) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i I_n - D) = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Xem thêm chứng minh Định lý 2.4

b) Xét $f: \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Theo định nghĩa của χ_A , các hệ tử của χ_A là các đa thức của

$$A \mapsto \chi_A(A)$$

các hạng tử của A .

Vậy các hạng tử của $f(A)$ là các đa thức của các hạng tử của A , nên f liên tục trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Vì E trù mật trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ và f triệt tiêu trên E , kết luận : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \chi_A(A) = f(A) = 0$.

3.2.5 1) Nếu $\text{UCLN}(P, \chi_A) \neq 1$ thì theo Định lý d'Alembert, tồn tại $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sao cho

$P(\lambda_0) = \chi_A(\lambda_0) = 0$. Vì λ_0 là các gtr của A , $P(\lambda_0)$ là các giá trị riêng của $P(A)$ (xem Mệnh đề 3, 2.4), vậy $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(P(A))$ mâu thuẫn với $P(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

2) Nếu $\text{UCLN}(P, \chi_A) = 1$ thì theo định lý Bezout, tồn tại $U, V \in \mathbb{C}[X]$ sao cho $UP + V\chi_A = 1$;

vậy ta có : $U(A)P(A) + V(A)\chi_A(A) = I_n$.

Theo Định lý Cayley và Hamilton : $\chi_A(A) = 0$, từ đây $U(A)P(A) = I_n$, $P(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

3.2.6 1) Giả sử F là một kgv của E khác $\{0\}$, khác E và ổn định đối với f . Ta ký hiệu g là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên F . Theo bài tập 2.2.1 : $\chi_g | \chi_f$. Mặt khác $0 < \dim(F) < \dim(E)$, vậy $0 < \deg(\chi_g) < \deg(\chi_f)$, vậy χ_f bất khả quy trong $K[X]$.

Điều này chứng tỏ rằng, chỉ có duy nhất $\{0\}$ và E là các kgvc của E ổn định đối với f .

2) Đảo lại, giả sử E chỉ có duy nhất $\{0\}$ và E là kgvc của ổn định đối với f .

Ta ký hiệu $n = \dim(E)$, $\chi_f = (-1)^n P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$ là phân tích nguyên sơ của χ_f trong $K[X]$

($k \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_n$ bất khả quy, chuẩn tắc, đôi một nguyên tố cùng nhau, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$).

Theo Định lý Cayley và Hamilton $\chi_f(f) = 0$; vậy tồn tại $i \in \{1, \dots, k\}$ sao cho $P_i(f)$ không khả nghịch trong $\mathcal{L}(E)$, và tồn tại $x \in \text{Ker}(P_i(f)) - \{0\}$.

Ta ký hiệu $N = \deg(P_i) \geq 1$ và xét $F = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{N-1}(x))$.

Khi đó $F \neq \{0\}$, F ổn định đối với f vì : $\begin{cases} f(x), \dots, f^{N-1}(x) \in F \\ f^N(x) \text{ được phân tích tuyến tính trên } x, \dots, f^{N-1}(x) \end{cases}$

Theo giả thiết, $F = E$, vậy $n = \dim(E) = \dim(F) \leq N$.

Mặt khác : $N = \deg(P_i) \leq \deg(\chi_f) = n$.

Từ đó $N = n$, $\chi_f = (-1)^n P_i$, χ_f bất khả quy trong $K[X]$.

3.2.7 a) Theo Định lý d'Alembert, χ_A tách được trong $\mathbb{C}[X]$, vậy tồn tại $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$

sao cho $\chi_A = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$, từ đó : $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i I_n - B)$. Khi đó :

$$\begin{aligned} \chi_A(B) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i I_n - B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)) \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset. \end{aligned}$$

b) Giả sử $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $AX = XB$. Để dàng chứng minh bằng quy nạp:

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = XB^k$. Do tính chất tuyến tính : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X = XP(B)$.

Đặc biệt : $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$.

Theo Định lý Cayley và Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ và theo a) $\chi_A(B)$ khả nghịch. Ta suy ra : $X = 0$.

c) Ánh xạ $\phi: \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ tuyến tính, đơn ánh (xem b)) và $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ hữu hạn chiều, vậy ϕ là song ánh.

3.2.8 a) Đa thức P_A tách được trên $\mathbb{C}$: $P_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ trong đó $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các gtr (không nhất thiết phân biệt) của A . Khi đó, với mọi x thuộc $\mathbb{C} - \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ta có :

$$\text{tr}((xI_n - A)^{-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - \lambda_i} = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}, \text{ xem Mệnh đề 9), 5.4.1, Tập 5.}$$

b) Giả sử $x \in \mathbb{C}$, sử dụng Định lý Cayley và Hamilton, ta có :

$$\begin{aligned} (xI_n - A)Q(x) &= \sum_{j=1}^n x^{n-j+1} B_{j-1} - \sum_{j=1}^n x^{n-j} AB_{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-j} B_j - \sum_{j=1}^n x^{n-j} AB_{j-1} \\ &= x^n B_0 + \sum_{j=1}^{n-1} x^{n-j} (B_j - AB_{j-1}) - AB_{n-1} = x^n B_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^{n-j} I_n - AB_{n-1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{n-j} \right) I_n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{n-i} = P_A(x) I_n - P_A(A) = P_A(x) I_n. \end{aligned}$$

• Từ đó, sử dụng a).

$$\forall x \in \mathbb{C} - \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \text{tr}(Q(x)) = \text{tr}(P_A(x)(xI_n - A)^{-1}) = P'_A(x).$$

• Vì $x \mapsto \text{tr}(Q(x))$ và P'_A là các đa thức và trùng nhau trên tập vô hạn $\mathbb{C} - \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ của $\mathbb{C}$, ta kết luận : $\forall x \in \mathbb{C}$, $\text{tr}(Q(x)) = P'_A(x)$.

c) Giả sử $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Ta ký hiệu $S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ với $k \in \{0, \dots, n-1\}$, và $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{C}, \text{tr}(Q(x)) = \text{tr} \left(\sum_{j=1}^n x^{n-j} B_{j-1} \right) = \sum_{j=1}^n x^{n-j} \text{tr}(B_{j-1})$$

$$\bullet \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \text{tr}(B_j) = \sum_{i=0}^j a_i \text{tr}(A^{j-i}) = \sum_{i=0}^j a_i S_{j-i}.$$

• Từ đây : $\forall x \in \mathbb{C}, \text{tr}(Q(x)) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} a_i S_{j-i-1} \right) x^{n-j}.$

• Theo b) : $\forall x \in \mathbb{C}, \text{tr}(Q(x)) = P_A'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i x^{n-i-1} = \sum_{j=1}^n (n-j+1) a_{j-1} x^{n-j}.$

Ta kết luận : $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=0}^{j-1} a_i S_{j-i-1} = (n-j+1) a_{j-1}.$

d) Trong ví dụ : $n = 5, a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = -1.$

Giải hệ phương trình tam giác :
$$\begin{cases} a_0 S_0 = 5a_0 \\ a_0 S_1 + a_1 S_0 = 4a_1 \\ a_0 S_2 + a_1 S_1 + a_2 S_0 = 3a_2 \\ a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + a_3 S_0 = 2a_3 \\ a_0 S_4 + a_1 S_3 + a_2 S_2 + a_3 S_1 + a_4 S_0 = a_4. \end{cases}$$

♦ Trả lời : $S_0 = 5, S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = -1.$

3.2.9 ♦ Trả lời : • $\chi_A = X^2(X-2)(X+2)$

• Các gtr của A là 0 (kép), 2(đơn), -2(đơn).

• KGCR(A,0) có số chiều 2 và thừa nhận $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ làm cơ sở

• KGCR(A,2) có số chiều 1 và thừa nhận $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ làm cơ sở

• KGCR(A,-2) có số chiều 1 và thừa nhận $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ làm cơ sở.

• A chéo hóa được trong $M_4(\mathbb{R})$

• $\pi_A = X(X-2)(X+2) \neq \chi_A.$

3.2.10 Theo Mệnh đề 1, 2, 4 :

$$\forall \alpha \in K, \forall P, Q \in K[X], \begin{cases} (\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A) \\ P(A)Q(A) = (PQ)(A) = (QP)(A) = Q(A)P(A) \end{cases}$$

Vậy $K[A]$ là một đại số con giao hoán của $M_n(K).$

• Ký hiệu $N = \deg(\pi_A).$

Vì $\pi_A(A) = 0$, ta có $A^N \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{N-1}),$

từ đây, bằng một phép quy nạp đơn giản : $\forall k \geq N, A^k \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{N-1}),$

vậy : $K[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{N-1}).$

Mặt khác, $(I_n, A, \dots, A^{N-1})$ là độc lập tuyến tính và vì rằng nếu không phải vậy thì tồn tại

$P \in K[X] - \{0\}$ sao cho $P(A) = 0$ và $\deg(P) < \deg(\pi_A)$, trái với định nghĩa của $\pi_A.$

Như vậy $(I_n, A, \dots, A^{N-1})$ là một cơ sở của $K[A]$, vậy $\dim(K[A]) = \deg(\pi_A).$

3.2.11 1) Giả sử $A, B \in M_n(K)$ sao cho $A \sim B$. Tồn tại $M \in GL_n(K)$ sao cho $B = M^{-1}AM$.
 Từ đó dễ dàng suy ra bằng quy nạp : $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = M^{-1}A^kM$ và

$$\forall P \in K[X], P(B) = M^{-1}P(A)M.$$

Khi đó : $\{P \in K[X]; P(A) = 0\} = \{P \in K[X]; P(B) = 0\}$, vậy $\pi_A = \pi_B$.

2) *Phản đảo*

• Trường hợp $n = 1$ khảo sát dễ dàng.

• Trường hợp $n = 2$.

Giả sử $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ sao cho $\pi_A = \pi_B$.

$\alpha)$ Nếu π_A có dạng $X - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), thì $A = B = \lambda I_n$.

$\beta)$ Nếu π_A có dạng $(X - \lambda)^2$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), thì A và B đồng dạng với $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$\gamma)$ Nếu π_A có dạng $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 \neq \lambda_2$) thì A và B đồng dạng với

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

• Trường hợp $n \geq 3$.

Xét $A = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ và $B = \text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0)$, thoả mãn $A \sim B$ (vì $\chi_A \neq \chi_B$)

và $\pi_A = \pi_B = X(X-1)$.

◊ **Trả lời** : • Nếu $n \leq 2$ và $K = \mathbb{C}$, phản đảo là đúng.

• Nếu $n \geq 3$, phản đảo là sai.

3.2.12 Ta có : $\forall x \in F, (\pi_f(g))(x) = (\pi_f(f))(x) = 0$, vậy π_f là đa thức triệt tiêu của g , từ đó: $\pi_g | \pi_f$.

3.2.13 Xét $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; AB = 0, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, từ đó $\pi_{AB} = X, \pi_{BA} = X^2$.

Bổ sung A và B bởi 0, nếu $n \geq 3$.

◊ **Trả lời** : • Đẳng thức đúng, nếu $n = 1$

• Sai nếu $n \geq 2$.

3.2.14 1) Nếu f lũy linh thì với ký hiệu v là chỉ số lũy linh của f , ta có $f^{v-1} \neq 0$, và $f^v = 0$, từ đó $\pi_f | X^v$ và $X^{v-1} \nmid \pi_f$, vậy $\pi_f = X^v$.

2) Đảo lại, nếu tồn tại $r \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\pi_f = X^r$ thì f lũy linh, $f^r = 0$ và $f^{r-1} \neq 0$ (theo định nghĩa của π_f), vậy r là chỉ số lũy linh của f .

3.2.15 Theo bài tập 2.3.12:

1) Nếu $\text{tr}(H) \neq 0$ thì H chéo hóa được và $\text{Sp}_K(H) = \{0, \text{tr}(H)\}$, vậy $\pi_H = X(X - \text{tr}(H))$

2) Nếu $\text{tr}(H) = 0$ thì $H \sim E_{n-1,n}$ (ma trận cơ sở), vậy $H^2 = 0$ và $H \neq 0$,

từ đó $\pi_H = X^2 = X(X - \text{tr}(H))$.

3.2.16 Theo bài tập 3.2.1

$$\pi_A K[X] = \{P \in K[X]; P(A) = 0\} = \{P \in K[X]; P(A_1) = \dots = P(A_N) = 0\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^N \{P \in K[X]; P(A_i) = 0\} = \bigcap_{i=1}^N \pi_{A_i} K[X] = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq N} \pi_{A_i} \right) K[X]$$

(Xem Mệnh đề 2, 5.2.3), Tập 5).

Vì π_A và $\text{BCNN}_{1 \leq i \leq N} \pi_{A_i}$ là chuẩn tắc, ta kết luận: $\pi_A = \text{BCNN}_{1 \leq i \leq N} \pi_{A_i}$.

3.2.17 Vì $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, ta có: $\forall P \in \mathbb{C}[X], \overline{P(A)} = \overline{P(A)}$.

Đặc biệt: $\overline{\sigma_A(A)} = \overline{\sigma_A(A)} = \overline{0} = 0$, vậy $\overline{\sigma_A}$ triệt tiêu A , từ đó $\sigma_A | \overline{\sigma_A}$ (trong $\mathbb{C}[X]$).

Nhưng $\deg(\overline{\sigma_A}) = \deg(\sigma_A)$, σ_A và $\overline{\sigma_A}$ là chuẩn tắc, nên suy ra $\overline{\sigma_A} = \sigma_A$, tức là: $\sigma_A \in \mathbb{R}[X]$.

1) Vì π_A là đa thức tối tiểu của A trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ và $\sigma_A \in \mathbb{R}[X]$ là đa thức triệt tiêu của A , ta có: $\pi_A | \sigma_A$ (trong $\mathbb{R}[X]$).

2) Vì σ_A là đa thức tối tiểu của A trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ và $\pi_A \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ là đa thức triệt tiêu của A . Ta có: $\sigma_A | \pi_A$ (trong $\mathbb{C}[X]$).

Cuối cùng, vì σ_A và π_A là chuẩn tắc nên ta kết luận: $\sigma_A = \pi_A$.

3.2.18 1) Vì $\pi_A(A) = 0$, ta có: $\text{Sp}_K(A) \subset \pi_A^{-1}(\{0\})$.

2) Cho $\lambda_0 \in \pi_A^{-1}(\{0\})$. Tồn tại $\mu_0 \in \mathbb{N}^*$ (cấp bội của λ_0 trong π_A) và $Q \in K[X]$ sao cho:

$$\pi_A = (X - \lambda_0)^{\mu_0} Q \text{ và } Q(\lambda_0) \neq 0.$$

Ta giả sử $\lambda_0 \notin \text{Sp}_K(A)$.

Khi đó $(A - \lambda_0 I_n)^{\mu_0} \in \text{GL}_n(K)$ vậy do $0 = \pi_A(A) = (A - \lambda_0 I_n)^{\mu_0} Q(A)$, suy ra $Q(A) = 0$. Nhưng $Q \neq 0$ và $\deg(Q) < \deg(\pi_A)$, trái với định nghĩa π_A .

Như vậy, $\lambda_0 \in \text{Sp}_K(A)$ và cuối cùng $\pi_A^{-1}(\{0\}) \subset \text{Sp}_K(A)$.

3.2.19 Các đa thức χ_A và π_A tách được trên $\mathbb{C}$ và với ký hiệu $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, theo Hệ quả 1.1), 3.2.3, tồn tại $\omega_1, \dots, \omega_N, \mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^N (X - \lambda_i)^{\omega_i}, \pi_A = \prod_{i=1}^N (X - \lambda_i)^{\mu_i}.$$

1) Vì $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \omega_i \leq n \leq n\mu_i$, ta có: $\chi_A | (\pi_A)^n$.

2) • Vì $\deg(\chi_A) = n$, ta có:

$$\chi_A = (-1)^n (\pi_A)^n \Rightarrow \deg(\pi_A) = 1 \Rightarrow (\exists \lambda_1 \in \mathbb{C}, \pi_A = X - \lambda_1) \Rightarrow (\exists \lambda_1 \in \mathbb{C}, A = \lambda_1 I_n).$$

• Dễ dàng chứng minh phần đảo.

♦ Trả lời: $\chi_A = (-1)^n (\pi_A)^n \Leftrightarrow A \in \text{KI}_n$.

3.2.20 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ thích hợp, vì $A^2 = -I_n$ và $A \notin \text{RI}_n$.

2) $B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ thích hợp, vì $B^2 = -I_n$ và $B \notin \text{CI}_n$.

3) Ta giả sử rằng tồn tại C thích hợp. Khi đó $\phi \neq \text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) \subset \{i, -i\}$. Vì C là thực, nên

$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \{i, -i\}$ và với ký hiệu ω_i và ω_{-i} là các cặp bội tương ứng của i và $-i$ trong χ_C :

$$\omega_i = \omega_{-i}.$$

Từ đó $3 = 2\omega_i$, mâu thuẫn.

♦ Trả lời: 1) đúng 2) đúng 3) sai.

3.2.21 Ký hiệu $\pi_A = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$.

Nếu $a_0 \neq 0$, thì $-\frac{1}{a_0}(A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \dots + a_1I_n)A = I_n$, nên A khả nghịch, mâu thuẫn.

Vậy $a_0 = 0$; ta ký hiệu $Q = X^{p-1} + a_{p-1}X^{p-2} + \dots + a_1 \in K[X]$, sao cho $\pi_A = XQ$ và ký hiệu $B = Q(A)$.

• $AB = BA = \pi_A(A) = 0$.

• $\deg(Q) < \deg(\pi_A)$, vậy (từ định nghĩa π_A): $B = Q(A) \neq 0$.

3.2.22 1) Giả sử $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ là một phần tử nào đó của $K[X]$. Với mọi $\varphi \in E^*$, ta có:

$$(P(f))(\varphi) = \left(\sum_{k=0}^N a_k (f^k) \right)(\varphi) = \sum_{k=0}^N a_k \varphi \circ f^k = \varphi \circ \left(\sum_{k=0}^N a_k f^k \right) = \varphi \circ P(f).$$

2) Bằng cách thay P bởi π_f : $\forall \varphi \in E^*$, $(\pi_f(f))(\varphi) = \varphi \circ \pi_f(f) = \varphi \circ 0 = 0$, vậy $(\pi_f(f)) = 0$.

Điều này chứng tỏ rằng f thừa nhận một đa thức tối thiểu và: $\pi_{1_f} \pi_f$

3) Bằng cách thay P bởi π_{1_f} : $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi \circ \pi_{1_f}(f) = (\pi_{1_f}(f))(\varphi) = 0(\varphi) = 0$

Cho $x \in E$.

Ta có: $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi(\pi_{1_f}(f)(x)) = (\varphi \circ \pi_{1_f}(f))(x) = 0$.

Điều này chứng tỏ: $(\pi_{1_f}(f))(x) \in {}^0(E^*) = \{0\}$, vậy $(\pi_{1_f}(f))(x) = 0$.

Vì $(\forall x \in E, (\pi_{1_f}(f))(x) = 0)$ nên ta có $\pi_{1_f}(f) = 0$, từ đây $\pi_f \pi_{1_f}$.

Cuối cùng: $\pi_{1_f} = \pi_f$.

3.2.23 1) Tính chất là hiển nhiên nếu $\text{Im}(f) = \{0\}$.

Giả sử $p = \dim(\text{Im}(f)) \geq 1$. Tồn tại một cơ sở $(f_1, \dots, f_p)$ của $\text{Im}(f)$, và tồn tại $e_1, \dots, e_p \in E$ sao cho: $\forall i \in \{1, \dots, p\}, f(e_i) = f_i$.

• Giả sử $i \in \{1, \dots, p\}$.

Họ $(f(e_i), f^2(e_i), \dots, f^{p+1}(e_i))$ phụ thuộc tuyến tính. Vậy tồn tại $(a_{i1}, \dots, a_{ip+1}) \in K^{p+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ sao cho $a_{i1}f(e_i) + \dots + a_{ip+1}f^{p+1}(e_i) = 0$.

Ký hiệu $P_i = \sum_{k=1}^{p+1} a_{ik} X^k \in K[X]$.

Vậy ta có: $P_i = 0$ và $(P_i(f)(e_i) = 0$.

• Ký hiệu $P = X \prod_{i=1}^p P_i \in K[X]$. Khi đó ta có $P \neq 0$ và vì các $P_i(f)$ ($1 \leq i \leq p$) đôi một giao

hoán nên:

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, (P(f))(e_i) = f \left(\bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} P_j(f) \right) (P_i(f)(e_i)) = 0.$$

• Chứng minh : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ (xem thêm Nhận xét 1), 7.3.1, Tập 5).

• Ở trên ta đã thấy : $\forall i \in \{1, \dots, p\} (P(f)(e_i) = 0$.

Mặt khác, vì $X|_P : \forall x \in \text{Ker}(f), P(f)(x) = 0$.

Ta kết luận : $P(f) = 0, P \neq 0$, vậy f thừa nhận một đa thức tối thiểu.

2) Đảo lại xét Id_E trong đó E là một K -kgv vô hạn chiều, chẳng hạn $E = K[X]$.

$\text{Id}_E(E)$ không hữu hạn chiều, và Id_E triệt tiêu $X - 1$.

♦ Trả lời : Phần đảo không đúng.

3.2.24 Ký hiệu $\pi_f = X^N + a_{N-1}X^{N-1} + \dots + a_1X + a_0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii):

Giả sử f đơn ánh.

Nếu $a_0 = 0$ thì $f \circ (f^{N-1} + a_{N-1}f^{N-2} + \dots + a_1e) = \pi_f(f) = 0$, vậy vì f là đơn ánh nên $f^{N-1} + a_{N-1}f^{N-2} + \dots + a_1e = 0$, trái với tính tối thiểu của π_f .

Vậy $a_0 \neq 0$ và $f \circ \left(-\frac{1}{a_0}(f^{N-1} + a_{N-1}f^{N-2} + \dots + a_1e) \right) = e$, điều này chứng tỏ f là toàn ánh

(xem thêm Mệnh đề 2, 2)1.3.2, Tập 5)

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Giả sử f toàn ánh.

Nếu $a_0 = 0$ thì $(f^{N-1} + a_{N-1}f^{N-2} + \dots + a_1e) \circ f = \pi_f(f) = 0$, vậy thì vì f là toàn ánh nên $f^{N-1} + a_{N-1}f^{N-2} + \dots + a_1e = 0$, trái với tính tối thiểu của π_f .

Vậy $a_0 \neq 0$, rồi $\left(-\frac{1}{a_0}(f^{N-1} + a_{N-1}f^{N-2} + \dots + a_1e) \right) \circ f = e$,

điều này chứng tỏ f là đơn ánh (xem thêm Mệnh đề 2) 1.3.2, Tập 5) Các kéo theo (iii) $\Rightarrow$ (i) và (iii) $\Rightarrow$ (ii) là tầm thường.

Nhận xét : Ta vừa chứng minh rằng, với $a_0 \neq 0$ các tính chất (i); (ii); (iii) là tương đương, trong đó a_0 là hệ tử không đổi của π_f .

3.2.25 Tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(e, f, f^2, \dots, f^m)$ và $(e, g, g^2, \dots, g^n)$ phụ thuộc tuyến tính.

Từ đó suy ra $\forall i \in \mathbb{N}, (i \geq m \Rightarrow f^i \in \text{Vect}(e, f, \dots, f^m))$, vậy $\text{Vect}(f^i)_{i \in \mathbb{N}} = \text{Vect}(f^i)_{0 \leq i \leq m-1}$.

Cũng vậy với g .

• Vì $g \circ f = f \circ g$, theo công thức nhị thức Newton, ta có:

$$\forall k \in \mathbb{N}, (f + g)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i f^i \circ g^{k-i}$$

Từ đó : $\text{Vect}((f+g)^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Vect}(f^i \circ g^j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} = \text{Vect}(f^i \circ g^j)_{(i,j) \in \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}}$.

Đặc biệt, $((f+g)^k)_{0 \leq k \leq mn}$ phụ thuộc tuyến tính, vậy $f+g$ thừa nhận một đa thức tối thiểu.

• Lập luận tương tự cho $g \circ f$.

3.2.26 Ta ký hiệu $N = \deg(\pi_f) \geq 1$, và giả sử $P \in K[X]$. Vì :

$$\{S(f); S \in K[X]\} = \text{Vect}(f^k)_{k \in \mathbb{N}} = \text{Vect}(e, f, \dots, f^{N-1})$$

nên họ $(e, P(f), \dots, P(f)^N)$ phụ thuộc tuyến tính.

Vậy tồn tại $(a_0, \dots, a_N) \in K^{N+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ sao cho :

$$a_0e + a_1P(f) + \dots + a_N(P(f))^N = 0.$$

Ký hiệu $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_NX^N$, ta có $Q \neq 0$ và $Q(P(f)) = 0$, vậy $P(f)$ thừa nhận một đa thức tối thiểu.

b) Bằng cách sử dụng phép phân tích đa thức, chứng minh: $0 = \pi_{P(Q)}(P(f)) = (\pi_{P(Q)} \circ P)(f)$; và $\pi_{P(Q)} \circ P$ là một đa thức bậc ≥ 1 . Vậy f nhận một đa thức tối thiểu.

$$3.2.27 \quad \text{Ta có: } F = R(C) \Leftrightarrow \begin{cases} R(A) = P(A) \\ R(B) = Q(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_A | R - P \\ \pi_B | R - Q \end{cases}$$

Vì $\pi_A \wedge \pi_B = 1$, nên theo Định lý Bezout, tồn tại $U, V \in K[X]$ sao cho $U\pi_A + V\pi_B = 1$. Ký hiệu $R = P + (Q - P)U\pi_A = Q + (P - Q)V\pi_B$, ta có $\pi_A | R - P$ và $\pi_B | R - Q$, vậy $F = R(C)$.

$$3.2.28 \quad a) \text{ Chứng minh bằng quy nạp theo } k: \forall k \in \mathbb{N}, M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

$$\text{Từ đó suy ra theo tính chất tuyến tính: } \forall P \in \mathbb{C}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

b) 1) Giả sử A chéo hóa được và $B = 0$. Khi đó rõ ràng rằng M chéo hóa được (xem thêm bài tập 2.4.8).

2) Ta giả sử M chéo hóa được. Thế thì π_M là tách đơn

$$\text{vì (xem a): } 0 = \pi_M(M) = \begin{pmatrix} \pi_M(A) & \pi'_M(A)B \\ 0 & \pi_M(A) \end{pmatrix} \text{ nên ta suy ra: } \pi_M(A) = 0 \text{ và } \pi'_M(A)B = 0.$$

Vì $\pi_M(A) = 0$ và π_M là tách đơn nên A chéo hóa được.

Mặt khác vì π_M là tách đơn, ta có $\pi_M \wedge \pi'_M = 1$; theo định lý Bezout, tồn tại $U, V \in \mathbb{C}[X]$

sao cho $U\pi_M + V\pi'_M = 1$, từ đó $V(A)\pi'_M(A) = I_n$.

Như vậy $\pi'_M(A)$ khả nghịch; từ $\pi'_M(A)B = 0$, ta suy ra $B = 0$.

3.2.29 Ký hiệu $E_1, \dots, E_n$ là cơ sở chính tắc của $M_{n,1}(K)$. Sẽ thuận lợi hơn nếu ta làm việc trên 1C_p thay cho C_p (xem thêm bài tập 3.2.22). Ta có: ${}^1C_p E_1 = E_2, {}^1C_p E_2 = E_3, \dots, {}^1C_p E_{n-1} = E_n$; từ đó $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, {}^1C_p^i E_1 = E_{i+1}$.

Cho $Q \in K[X]$ chuẩn tắc sao cho $\deg(Q) < n$; ta ký hiệu $m = \deg(Q)$, $b_0, \dots, b_{m-1} \in K$ sao cho $Q = X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \dots + b_0$. Ta có:

$$(Q({}^1C_p))E_1 = {}^1C_p^m E_1 + b_{m-1} {}^1C_p^{m-1} E_1 + \dots + b_0 E_1 = E_{m+1} + b_{m-1} E_m + \dots + b_0 E_1 \neq 0$$

vì $E_{m+1} \notin \text{Vect}(E_1, \dots, E_m)$.

Điều này chứng tỏ không một đa thức nào (khác 0) bậc $< n$ triệt tiêu 1C_p , vậy cũng không triệt tiêu C_p , và như vậy $\deg(\pi_{C_p}) \geq n$.

Theo bài tập 2.2.11: $\chi_{C_p} = (-1)^n P$ và theo định lý Cayley và Hamilton, $\pi_{C_p} | \chi_{C_p}$. Ta kết luận: $\pi_{C_p} = (-1)^n \chi_{C_p} = P$.

3.2.30 Nhận xét rằng λ là nghiệm của π_f .

1) Giả sử: $\text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g) = E$.

Ký hiệu α là cấp bội của λ trong π_f , giả sử $\alpha \geq 2$. Tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $\pi_f = (X - \lambda)^\alpha Q$; ký hiệu $P = (X - \lambda)^{\alpha-1} Q$.

Giả sử $y \in E$. Tồn tại $z \in \text{Ker}(g)$ và $x \in E$ sao cho $y = z + g(x)$, khi đó ta có:

$$P(f)(y) = P(f)(z) + P(f)(g(x)) = Q(f)((f - \lambda e)^{\alpha-1}(z)) + \pi_f(f)(x) = 0,$$

vì $(f - \lambda e)(z) = 0$ và $\pi_f(f) = 0$.

Điều này chứng tỏ $P(f) = 0$, mâu thuẫn với tính tối thiểu của π_f vì $0 \leq \deg(P) < \deg(\pi_f)$.

Vậy $\alpha = 1$.

2) Đảo lại, giả sử λ là một nghiệm đơn của π_f . Tồn tại $Q \in K[X]$ sao cho $\pi_f = (X - \lambda)Q$ và $Q(\lambda) \neq 0$.

Như vậy ta có $(X - \lambda) \wedge Q = 1$; theo định lý Bezout, tồn tại $U, V \in K[X]$ sao cho

$(X - \lambda)U + QV = 1$. Khi đó: $e = g \circ U(f) + Q(f) \circ V(f)$.

Cho $x \in E$. Ký hiệu $y = g(U(f)(x))$ và $z = Q(f)(V(f)(x))$, ta có :

$$\bullet x = y + z$$

$$\bullet y \in \text{Im}(g)$$

$$\bullet z \in \text{Ker}(g) \text{ vì } g(z) = (\pi_r(f))(V(f)(x)) = 0.$$

Điều này chứng tỏ : $\text{Ker}(g) + \text{Im}(g) = E$.

Theo định lý về hạng, $\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(E)$, ta suy ra :

$$\text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g) = E.$$

3.3.1 Cho $x \in \text{Ker}(P(f))$. Vì f và g giao hoán nên $P(f)$ và g giao hoán (xem thêm Mệnh đề 2, 2.4), từ đó : $P(f)(g(x)) = g(P(f)(x)) = g(0) = 0$, vậy $g(x) \in \text{Ker}(P(f))$.

Điều này chứng tỏ $\text{Ker}(P(f))$ ổn định đối với g .

Đặc biệt, với mọi gtr λ của f , ký hiệu ω là cấp bội của λ trong χ_f , $\text{SEC}(f, \lambda) = \text{Ker}((f - \lambda e)^\omega)$ ổn định đối với g .

3.3.2 Cho $\lambda \in K$.

Nếu $\lambda \notin \text{Sp}_K(f)$, thì $f - \lambda e \in \mathcal{GL}(E)$, vậy cũng có $(f - \lambda e)^2 \in \mathcal{GL}(E)$, từ đó $\text{rank}(f - \lambda e) = \text{rank}(f - \lambda e)^2$.

Nếu $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$, thì vì $\text{Ker}(f - \lambda e) \subset \text{Ker}(f - \lambda e)^2$, ta có :

$$\begin{aligned} \text{rank}(f - \lambda e) = \text{rank}(f - \lambda e)^2 &\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f - \lambda e)) = \dim(\text{Ker}(f - \lambda e)^2) \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda e)^* = \text{Ker}(f - \lambda e)^2 \end{aligned}$$

Như vậy : $(\forall \lambda \in K, \text{rank}(f - \lambda e) = \text{rank}(f - \lambda e)^2) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), \text{Ker}(f - \lambda e) = \text{Ker}(f - \lambda e)^2)$.

Theo Mệnh đề 2, 3), 3.3.1, với mọi λ thuộc $\text{Sp}_K(f)$, dãy $(\text{Ker}(f - \lambda e)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ là dãy tăng (đối với phép bao hàm) và dừng lại bắt đầu từ chỉ số $\mu(\lambda)$, ở đây $\mu(\lambda)$ là cấp bội của λ trong π_f .

Vậy : $(\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), \text{Ker}(f - \lambda e) = \text{Ker}(f - \lambda e)^2) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), \mu(\lambda) = 1)$
 $\Leftrightarrow (\pi_f \text{ tách đơn}) \Leftrightarrow (f \text{ chéo hóa được})$ (xem Định lý 3.2.3).

3.3.3 a) Vì D và N giao hoán nên theo công thức nhị thức Newton:

$$A^k = (D + N)^k = D^k + MN, \text{ trong đó } M = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i D^i N^{k-i-1}$$

Vì N lũy linh và M và N giao hoán nên MN lũy linh.

Mặt khác, D^k chéo hóa được và D^k và MN giao hoán vì D và N giao hoán.

♦ **Trả lời :** Phân tích Dunford của A^k là : $A^k = D^k + \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i D^i N^{k-i-1} \right)$.

b) Vì $0 \notin \text{Sp}_K$ và (xem Định lý - Định nghĩa 3.3.2) $\text{Sp}_K(D) = \text{Sp}_K(A)$ nên D khả nghịch và ta có : $A = D + N = D(I_n + D^{-1}N)$

Vì A khả nghịch nên $I_n + D^{-1}N$ khả nghịch và : $A^{-1} = (I_n + D^{-1}N)^{-1} D^{-1}$.

Ta ký hiệu $U = D^{-1}N$.

Vì D^{-1} và N giao hoán và N lũy linh nên U lũy linh. Vậy $I_n + U$ khả nghịch và :

$$(I_n + U)^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k U^k \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k U^k \right)$$

(vì $U^n = 0$, xem 3.1.1).

Từ đây $A^{-1} = D^{-1} + R$, trong đó $R = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k U^k \right) D^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} U^k D^{-1} \right) U$.

Vì U lũy linh và $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} U^k D^{-1}$ và U giao hoán nên R lũy linh.

Mặt khác, D^{-1} chéo hóa được và D^{-1} và R giao hoán.

◊ **Trả lời:** Phân tích Dunford của A^{-1} là: $A^{-1} = D^{-1} + \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k (D^{-1})^{k+1} N^k \right)$.

3.3.4 a) Vì D và N giao hoán nên: $e^A = e^{D+N} = e^D e^N$.

Vì N lũy linh, tồn tại $v \in \mathbb{N}^*$ sao cho $N^v = 0$, từ đó: $e^N = I_n + \sum_{k=1}^{v-1} \frac{1}{k!} N^k$.

Vậy ta có: $e^A = e^D + M$, trong đó $M = \left(e^D \sum_{k=1}^{v-1} \frac{1}{k!} N^{k+1} \right) N$. Vì D và N giao hoán nên e^D

và N giao hoán, $e^D \sum_{k=1}^{v-1} \frac{1}{k!} N^{k+1}$ và N giao hoán. Vì N lũy linh, suy ra M lũy linh; hơn nữa e^D và M giao hoán. Cuối cùng e^D chéo hóa được.

Ta có thể nhận xét: $M = e^D (e^N - I_n) = e^A - e^D$.

◊ **Trả lời:** Nếu $A = D + N$ là phân tích Dunford của A , thì phân tích Dunford của e^A là: $e^A = e^D + (e^A - e^D)$.

b) Nếu ký hiệu $X = D + N$ là phân tích Dunford của X thì phân tích Dunford của e^X là:

$$e^X = e^D + (e^X - e^D) \text{ (xem a)}, \text{ từ đó: } e^X = I_n \Leftrightarrow \begin{cases} e^D = I_n \\ e^X - e^D = 0 \end{cases}$$

Ký hiệu $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; ta có:

$$e^D = I_n \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, e^{\lambda_k} = 1) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \in 2i\pi\mathbb{Z}).$$

Tiếp đó, vì e^D khả nghịch nên $e^X - e^D = 0 \Leftrightarrow e^N = I_n$.

Ta ký hiệu v là chỉ số lũy linh của N và giả sử $v \geq 2$.

Khi đó: $N + \frac{1}{2!} N^2 + \dots + \frac{1}{v!} N^v = e^N - I_n = 0$, từ đây: $\frac{1}{2!} N^2 + \dots + \frac{1}{v!} N^v = -N$.

Chứng minh: $\text{Im}(N) \supsetneq \text{Im}(N^2) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(N^{v-1}) \supsetneq \text{Im}(N^v) = \{0\}$.

Từ đó suy ra: $\text{Im} \left(\frac{1}{2!} N^2 + \dots + \frac{1}{v!} N^v \right) \subset \text{Im}(N^2)$, do đó $\text{rank} \left(\frac{1}{2!} N^2 + \dots + \frac{1}{v!} N^v \right) \leq \text{rank}(N^2)$.

mâu thuẫn với $\text{rank} \left(\frac{1}{2!} N^2 + \dots + \frac{1}{v!} N^v \right) = \text{rank}(-N) = \text{rank}(N)$.

Điều này chứng tỏ $v = 1$, do đó $N = 0$.

◊ **Trả lời:** $e^X = I_n \Leftrightarrow \left(\exists (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n, X \sim 2i\pi \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix} \right)$.

c) i) Rõ ràng, nếu A chéo hóa được, $A = PDP^{-1}$ ($P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $D \in \text{D}_n(\mathbb{C})$), thì $e^A = Pe^DP^{-1}$, vậy e^A chéo hóa được.

2) Đảo lại, giả sử e^A chéo hóa được. Vậy phân tích Dunford của e^A là $e^A = e^A + 0$, từ đó theo a) (bằng cách ký hiệu $A = D + N$ là phân tích Dunford của A): $e^N - I_n = 0$.

Theo b), tồn tại $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ sao cho $N \sim 2i\pi \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$. Vì N lũy linh nên

$p_1 = \dots = p_n = 0$, từ đó $N = 0$ và cuối cùng $A = D$ chéo hóa được.

3.3.5 1) Dùng phản đảo. Giả sử $\rho(A) > R$. Tồn tại $\lambda \in \mathbb{C}$ và $X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho

$$AX = \lambda X \text{ và } |\lambda| > R. \text{ Ta có: } \forall k \in \mathbb{N}, a_k A^k X = a_k \lambda^k X.$$

Nếu $\sum_{k \geq 0} a_k A^k$ hội tụ (trong $M_n(\mathbb{C})$), thì $\sum_{k \geq 0} a_k A^k X$ hội tụ (trong $M_{n,1}(\mathbb{C})$) do tính liên tục

của $(M, X) \mapsto MX$ từ $M_n(\mathbb{C}) \times M_{n,1}(\mathbb{C})$ vào $M_{n,1}(\mathbb{C})$, vậy, vì X cố định khác không nên

$$\sum_{k \geq 0} a_k \lambda^k \text{ hội tụ, mâu thuẫn. Vậy } \sum_{k \geq 0} a_k A^k \text{ phân kỳ.}$$

Ta đã chứng minh: $\rho(A) > R \Rightarrow \sum_{k \geq 0} a_k A^k$ phân kỳ,

tức là bằng phản đảo: $\sum_{k \geq 0} a_k A^k$ hội tụ $\Rightarrow \rho(A) \leq R$.

2) Giả sử $\rho(A) < R$. Tồn tại $r \in \mathbb{R}$ sao cho: $\rho(A) < r < R$. Ta có: $\forall k \in \mathbb{N}, a_k A^k = a_k r^k \left(\frac{1}{r} A\right)^k$

Vì $0 \leq r < R$, $\sum_{k \geq 0} a_k r^k$ hội tụ (tuyệt đối).

$$\forall r \left(\frac{1}{r} A\right)^k = \frac{1}{r^k} \rho(A)^k < 1 \text{ nên theo Định lý 3.3.3 1), } \left(\frac{1}{r} A\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Kết quả là $\sum_{k \geq 0} a_k A^k$ hội tụ (tuyệt đối) trong $M_n(\mathbb{C})$, vậy là hội tụ.

3.3.6 $\Rightarrow$: Hiển nhiên, vì $\text{tr}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ liên tục.

$\Leftarrow$: Ta giả sử $\text{tr}(A^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Đa thức đặc trưng χ_A tách được trên $\mathbb{C}$; ký hiệu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các gtr của A , được sắp xếp sao cho:

$$\rho(A) = |\lambda_1| = \dots = |\lambda_N| > |\lambda_{N+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Ta có: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

Lập luận bằng phản chứng: giả sử $\rho(A) \geq 1$.

Vì: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{\text{tr}(A^k)}{(\rho(A))^k} \leq \text{tr}(A^k)$, suy ra: $\frac{\text{tr}(A^k)}{(\rho(A))^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, tức là: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

• Vì: $\forall i \in \{N+1, \dots, n\}, \frac{|\lambda_i|}{\rho(A)} < 1$, ta có: $\sum_{i=N+1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

• Theo bài tập 3.1.18, tồn tại một hàm trích σ sao cho: $\sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^{\sigma(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} N$.

Khi đó $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\rho(A)}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} N \neq 0$, mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ $\rho(A) < 1$, và (xem Định lý 3.3.3 1)): $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

3.4.1 Vì $E = \text{Im}(A^0) \supset \text{Im}(A) \supset \dots \supset \text{Im}(A^k) \supset \dots$ nên dãy $(\text{rank}(A^k))_{k \in \mathbb{N}}$ giảm và có các phần tử trong $\mathbb{N}$, vậy là dãy dừng. Tồn tại số nguyên nhỏ nhất $N \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\text{rank}(A^N) = \text{rank}(A^{N+1}).$$

Chứng minh : $\text{Im}(A^0) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(A^N) = \text{Im}(A^{N+1}) = \dots$

Vậy ta có : $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \text{rank}(A^k) - \text{rank}(A^{k+1}) \geq 1$,

từ đó bằng cách cộng : $n - \text{rank}(A^N) \geq N$, vậy $N \leq n$.

Vậy : $\text{Im}(A^N) = \text{Im}(A^{N+1}) = \dots = \text{Im}(A^n) = \dots$, vậy $\forall p \geq n, \text{rank}(A^p) = \text{rank}(A^n)$.

3.4.2 Sử dụng cùng phương pháp như bài 3.4.1.

3.4.3 a) Một mặt, $J - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ lũy linh và $(J - \lambda I_n)^n = 0$, vậy $\pi_J(X - \lambda)^n$.

Mặt khác, $(J - \lambda I_n)^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, vậy $\pi_J(X - \lambda)^{n-1}$.

♦ Trả lời : $\pi_J = (X - \lambda)^n$.

b) Theo bài tập 3.2.16 : $\pi_J = \text{BCNN}_{1 \leq i \leq N} \pi_{J_i}$ và theo a) : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \pi_{J_i} = (X - \lambda)^{n_i}$.

♦ Trả lời : $\pi_J = (X - \lambda)^{\text{Max}(n_1, \dots, n_N)}$ (Xem thêm 3.4.2.2).

3.4.4 Ký hiệu $B = (e_1, \dots, e_n)$ là cơ sở chính tắc của K^n , v là tự đồng cấu của K^n của ma trận N trong B . Giả sử $A \in M_n(K)$ và f được biểu diễn bởi A trong B .

1) Giả sử $AN = NA$. Ta có :

$$AN = NA \Leftrightarrow f \circ v = v \circ f \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(v(e_i)) = v(f(e_i)))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v(f(e_1)) = 0 \\ v(f(e_2)) = f(e_1) \\ \vdots \\ v(f(e_n)) = f(e_{n-1}) \end{cases}$$

Vì $f(e_1) \in \text{Ker}(v) = Ke_1$ nên tồn tại $\alpha_1 \in K$ sao cho $f(e_1) = \alpha_1 e_1$.

Tiếp đó, vì $v(f(e_2) - \alpha_1 e_2) = v(f(e_2)) - \alpha_1 v(e_2) = f(e_1) - \alpha_1 e_1 = 0$ nên tồn tại $\alpha_2 \in K$ thoả mãn $f(e_2) = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1$.

Lập luận bằng quy nạp.

Cho $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Ta giả sử tồn tại $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ sao cho :

$$f(e_1) = \alpha_1 e_1, f(e_2) = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1, \dots, f(e_k) = \alpha_1 e_k + \alpha_2 e_{k-1} + \dots + \alpha_k e_1.$$

Ta có : $v(f(e_{k+1})) - (\alpha_1 e_{k+1} + \alpha_2 e_k + \dots + \alpha_k e_2) = f(e_k) - (\alpha_1 e_k + \alpha_2 e_{k-1} + \dots + \alpha_k e_1) = 0$,
nên tồn tại $\alpha_{k+1} \in K$ sao cho $f(e_{k+1}) - (\alpha_1 e_{k+1} + \alpha_2 e_k + \dots + \alpha_k e_2) = \alpha_{k+1} e_1$.

Như vậy ta đã chứng minh tồn tại $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ sao cho :

$$f(e_1) = \alpha_1 e_1, f(e_2) = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1, \dots, f(e_n) = \alpha_1 e_n + \dots + \alpha_n e_1.$$

Khi đó ta có $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_2 \\ 0 & & & \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 I_n + \alpha_2 N + \dots + \alpha_n N^{n-1}$, do đó $A \in \text{Vect}(I_n, N, \dots, N^{n-1})$.

2) Dễ dàng chứng minh phần đảo.

♦ Trả lời : $C(N) = \text{Vect}(I_n, N, \dots, N^{n-1})$.

3.4.5 Vì $J = \lambda I + N$ trong đó $I = I_n$ và $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ và vì I và N giao hoán, nên theo

công thức nhị thức Newton ta có: $\forall k \in \mathbb{N}, J^k = \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^{k-i} N^i$.

Ký hiệu $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$, ta có:

$$P(J) = \sum_{k=0}^N a_k J^k = \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^k C_k^i a_k \lambda^{k-i} N^i = \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=i}^N \frac{k!}{(k-i)!} \lambda^{k-i} a_k \right) N^i = \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} P^{(i)}(\lambda) N^i.$$

$$\text{Cuối cùng vì } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^n = 0, \text{ ta kết luận: } P(J) = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix}.$$

3.4.6 Ký hiệu $B = (e_1, \dots, e_n)$ là cơ sở chính tắc của K^n và v là tự đồng cấu có ma trận N trong B . Rõ ràng rằng: $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\text{Ker}(v^k) = \text{Vect}((e_i)_{1 \leq i \leq k})$ (trong đó $\text{Ker}(v^0) = \text{Vect}((e_i)_{i \in \emptyset}) = \{0\}$), và mỗi $\text{Ker}(v^k)$ là ổn định đối với v .

Cho F là một kgvc của K^n ổn định đối với v và khác $\{0\}$. Ký hiệu g là tự đồng cấu cảm sinh bởi v trên F . Vì v lũy linh, nên g cũng lũy linh, vậy $\text{Ker}(g) \neq \{0\}$.

Nhưng $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(v) = Ke_1$, vậy $\text{Ker}(g) = Ke_1$, $e_1 \in \text{Ker}(g) \subset F$. Vậy ta có thể xét $k = \text{Max}\{i \in \{1, \dots, n\}; e_i \in F\}$.

Ta có: $\text{Ker}(v^k) \subset F$ và $\text{Ker}(v^{k+1}) \not\subset F$.

Vì: $\text{Ker}(v^k) \subset \text{Ker}(v^{k+1}) \cap F \subset \text{Ker}(v^{k+1})$ và $\dim(\text{Ker}(v^{k+1})) = \dim(\text{Ker}(v^k)) + 1$,

ta suy ra $\text{Ker}(v^{k+1}) \cap F = \text{Ker}(v^k)$,

vậy: $\text{Ker}(g^k) = \text{Ker}(v^k) \cap F = \text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^{k+1}) \cap F = \text{Ker}(g^{k+1})$.

Điều này chứng tỏ rằng, dãy các hạt nhân lặp của g dừng (ít nhất) bắt đầu từ chỉ số k :

$$\{0\} = \text{Ker}(g^0) \subset \text{Ker}(g) \subset \dots \subset \text{Ker}(g^k) = \text{Ker}(g^{k+1}) \dots$$

Vì g lũy linh suy ra $\text{Ker}(g^k) = F$ và $F = \text{Ker}(g^k) = \text{Ker}(v^k) \cap F \subset \text{Ker}(v^k)$.

Cuối cùng: $F = \text{Ker}(v^k)$.

♦ **Trả lời:** Các kgvc của K^n ổn định đối với v là các $\text{Vect}((e_i)_{1 \leq i \leq k})$, $k \in \{0, \dots, n\}$ có đúng $n+1$ kgvc.

3.4.7 1) Giả sử $N = n$. Khi đó (xem 3.4.1 1)), tồn tại một cơ sở B của E sao cho

$$\text{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \text{ vậy } \text{rank}(v) = n-1.$$

2) Đảo lại, giả sử $\text{rank}(v) = n - 1$. Theo 3.4.1 3), tồn tại một cơ sở B của E và các số nguyên $N \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_N, \dots, \beta_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\text{Mat}_B(v) = \left(\underbrace{J_N, \dots, J_N}_{\beta_N \text{ khối}}, \dots, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\beta_1 \text{ khối}} \right).$$

Vậy ta có: $n = \sum_{i=1}^N i\beta_i$, và $\text{rank}(v) = \sum_{i=1}^N (i-1)\beta_i$, từ đó $1 = n - \text{rank}(v) = \sum_{i=1}^N \beta_i$.

Do đó tồn tại $k \in \{1, \dots, N\}$ sao cho: $\begin{cases} \beta_k = 1 \\ \forall i \in \{1, \dots, N\} - \{k\}, \beta_i = 0 \end{cases}$.

Khi đó $n = \sum_{i=1}^N i\beta_i = k$, và như vậy $N \geq k = n$, $N = n$.

3.4.8 a) Lập χ_A : $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^2$.

1) Ký hiệu $M = A - I_5$. Tính:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 20 \\ -12 & -12 & -12 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

Ta chọn một vector V_3 sao cho $M^3V_3 = 0$ và $M^2V_3 \neq 0$, chẳng hạn $V_3 = (0, 0, 1, -1, 0)$, rồi xác định $V_2 = AV_3 = (0, 1, -1, 0, 0)$, $V_1 = A^2V_3 = (1, -1, 0, 0, 0)$.

2) Ký hiệu $N = A + I_5$. Tính:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & -9 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chọn vector V_5 sao cho $N^2V_5 = 0$ và $NV_5 \neq 0$, chẳng hạn $V_5 = (1, 0, 0, 1, -1)$ rồi xác định

$V_4 = AV_5 = (0, 0, 0, 1, -1)$. Ký hiệu $P = (V_1 V_2 V_3 V_4 V_5)$ và $J = \begin{pmatrix} J_3(1) & 0 \\ 0 & J_2(-1) \end{pmatrix}$, J là thu gọn

Jordan của A , $A = PJP^{-1}$. Tính P^{-1} bằng máy tính tay.

♦ Trả lời: Thu gọn Jordan của A là $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, và với ký hiệu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ta có } A = PJP^{-1} \text{ và } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Ma trận A khả nghịch vì $\det(A) = \det(J) = 1 \neq 0$.

Ta có: $\forall k \in \mathbb{Z}, A^k = PJ^kP^{-1}$.

$$\text{Một phép quy nạp đơn giản cho ta: } \forall k \in \mathbb{N}, J^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

(xem thêm bài tập 3.4.5).

Ký hiệu M_k (với $k \in \mathbb{Z}_-$) là vế phải thứ hai của công thức trên, kiểm chứng $M_k J^{-k} = I_5$, điều này chứng tỏ công thức cũng đúng với $k \in \mathbb{Z}_-$.

◊ Trả lời:

$$A^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & -1+(-1)^k & -1-k+(-1)^k & -\frac{k^2+k+2}{2}+(-1)^k & -\frac{k^2+k+2}{2}+(-1)^k \\ 0 & 1 & k & \frac{k^2-k}{2} & \frac{k^2-k}{2} \\ 0 & 0 & 1 & k & k \\ k(-1)^{k+1} & k(-1)^{k+1} & k(-1)^{k+1} & 1+k(-1)^{k+1} & 1+(k+1)(-1)^{k+1} \\ k(-1)^k & k(-1)^k & k(-1)^k & k(-1)^k & (k+1)(-1)^k \end{pmatrix}$$

$$c) \text{ Ta có: } e^A = Pe^JP^{-1} \text{ và } e^J = \begin{pmatrix} e^{J_3(1)} & 0 \\ 0 & e^{J_2(-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet e^{J_3(1)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (I_3 + J_3(0))^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (I_3 + C_k^1 J_3(0) + C_k^2 J_3^2(0)) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) I_3 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} \right) J_3(0) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2(k-2)!} \right) J_3^2(0) = eI_3 + eJ_3(0) + \frac{e}{2} J_3^2(0) \\ &= \begin{pmatrix} e & e & \frac{e}{2} \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\bullet e^{J_2(-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (-I_2 + J_2(0))^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} ((-1)^k I_2 + C_k^1 (-1)^{k-1} J_2(0))$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \right) J_2(0) = e^{-1} I_2 + e^{-1} J_2(0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

◇ Trả lời: $e^A = \begin{pmatrix} e^{-1} & -e+e^{-1} & -2e+e^{-1} & -\frac{5}{2}e+e^{-1} & -\frac{5}{2}e+e^{-1} \\ 0 & e & e & \frac{e}{2} & \frac{e}{2} \\ 0 & 0 & e & e & e \\ e^{-1} & e^{-1} & e^{-1} & e+e^{-1} & e \\ -e^{-1} & -e^{-1} & -e^{-1} & -e^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$

3.4.9 Ký hiệu $N = A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ và $N^3 = 0$.

Theo 3.4.1 3), thu gọn Jordan của N là: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

◇ Trả lời: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3.4.10 Tính $\chi_A = \chi_B = -(X-1)^2(X+1)$. Chứng minh rằng $\text{KGCR}(A,1)$ và $\text{KGCR}(B,1)$ có số chiều 1. Suy ra $A \sim J$ và $B \sim J$, trong đó $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, vậy $A \sim B$ (trong $M_3(\mathbb{R})$).

3.4.11 Ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ là một phần tử nào đó của $M_{n,1}(K)$, ta có:

$$TX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ t_{n-1,n}x_{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

(Giải bằng phương pháp bậc thang, bắt đầu từ phương trình cuối cùng).

Điều này chứng tỏ $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, vậy $\text{rank}(T) = n - 1$. Theo bài tập 3.4.7, ta suy ra rằng T

lũy linh chỉ số n , vậy $T \sim J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ và cuối cùng:

$$\lambda I_n + T \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}^k = (\lambda I_n + J_n(0))^k = \lambda^k I_n + N, \text{ trong đó } N = \begin{pmatrix} 0 & k\lambda^{k-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Vì $k\lambda^{k-1} \neq 0$ nên theo a), $N \sim J_n(0)$, ta có đpcm.

c) Lập luận như phần b).

3.4.12 $\diamond$ Trả lời :

$n = 1$: (0)

$n = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 4$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.4.13 Vì $\chi_A = (X - a)^4(X - b)^2$ tách được nên A thừa nhận một thu gọn Jordan dạng :

$$J = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \text{ trong đó } U = \begin{pmatrix} a & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & \beta & 0 \\ 0 & 0 & a & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} b & \delta \\ 0 & b \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{0, 1\}^4.$$

Ta có (xem bài tập 3.2.16) :

$$(X - a)^2(X - b) = \pi_A = \pi_U = \text{BCNN}(\pi_U, \pi_V).$$

Vì $\pi_U | (X - a)^4$, $\pi_V | (X - b)^2$, ta suy ra : $\pi_U = (X - a)^2$, $\pi_V = X - b$.

• $\pi_V = X - b$, vậy $V = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

• $\pi_U = (X - a)^2$, vậy (α, β, γ) khác $(0, 0, 0)$ (nếu không thì $\pi_U = (X - a)$), khác $(1, 1, 0)$ (nếu không thì $\pi_U = (X - a)^3$), khác $(1, 1, 1)$ (nếu không thì $\pi_U = (X - a)^4$).

Vậy ta có : $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ hay $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$ (Nhắc lại rằng, theo quy ước ta sắp xếp các khối theo thứ tự giảm dần, đối với cùng một gtr).

Rõ ràng rằng các thu gọn nhận được là thích hợp.

◊ Trả lời :
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

3.4.14 1) Giả sử $i \in \{1, \dots, p\}$. Ta chứng minh rằng, tồn tại $A_i \in M_{\alpha_i}(K)$ sao cho :

$$\chi_{A_i} = (\lambda_i - X)^{\alpha_i} \text{ và } \pi_{A_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i}.$$

Nếu $\beta_i = 1$, ta có thể chọn $A_i = \lambda_i I_{\alpha_i}$. Khi $\beta_i \geq 2$, có thể chọn $A_i = \begin{pmatrix} J_{\beta_i}(\lambda_i) & 0 \\ 0 & \lambda_i I_{\alpha_i - \beta_i} \end{pmatrix}$.

2) Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$, ta có (xem bài tập 2.2.4 và 3.2.16) :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^p \chi_{A_i} = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{\alpha_i} \text{ và } \pi_A = \text{BCNN}_{1 \leq i \leq p} \pi_{A_i} = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\beta_i}.$$

3.4.15 a) $\Rightarrow$: Ta biết rằng (độc lập với điều kiện $n \leq 3$) :

$$\begin{cases} A \sim B \Rightarrow \chi_A = \chi_B \text{ xem Mệnh đề 3, 2.2} \\ A \sim B \Rightarrow \pi_A = \pi_B \text{ xem bài tập 3.2.11} \end{cases}$$

$\Leftarrow$: Rõ ràng rằng ta có thể chỉ xét, trường hợp $n = 3$.

Giả sử $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ sao cho $\chi_A = \chi_B$ và $\pi_A = \pi_B$.

1) Nếu A có ba gtr $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ đôi một phân biệt thì A và B đồng dạng với $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2) Nếu A có một gtr kép λ_1 và một gtr đơn λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) thì $\chi_A = \chi_B = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)$ và :

- nếu $\pi_A = \pi_B = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ thì A và B chéo hóa được và đồng dạng với $(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$.
- nếu $\pi_A = \pi_B = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)$ thì A và B không chéo hóa được và đồng dạng với

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

3) Nếu A có một gtr bội ba λ_1 thì :

- nếu $\pi_A = X - \lambda_1$ thì A và B bằng $\lambda_1 I_3$.

- nếu $\pi_A = (X - \lambda_1)^2$ thì A và B đồng dạng với $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

- nếu $\pi_A = (X - \lambda_1)^3$ thì A và B đồng dạng với $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

b) • $\chi_A = \chi_B = X^4$ và $\pi_A = \pi_B = X^2$.

• A và B không đồng dạng vì đó là các thu gọn Jordan “khác biệt” (xem 3.4.22), hay đơn giản hơn, vì rằng $\text{rank}(A) = 2$ và $\text{rank}(B) = 1$.

3.4.16 Theo Định lý về phép thu gọn Jordan (3.4.23), tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1} \text{ sao cho ta có } A = PBP^{-1} \text{ với } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

3.4.17 1) Nếu $A \sim B$ thì với mọi $(\lambda, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$, $(A - \lambda I_n)^k \sim (B - \lambda I_n)^k$,
vậy $\text{rank}((A - \lambda I_n)^k) = \text{rank}((B - \lambda I_n)^k)$.

2) Đảo lại, giả sử: $\forall (\lambda, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$, $\text{rank}((A - \lambda I_n)^k) = \text{rank}((B - \lambda I_n)^k)$.

• Cho $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Khi đó $\text{rank}(A - \lambda I_n) < n$, vậy $\text{rank}(B - \lambda I_n) = \text{rank}(A - \lambda I_n) < n$, $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

Do A và B có vai trò như nhau nên $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

• Theo giả thiết và Định lý ở 3.4.24), các ma trận A và B có cùng thu gọn Jordan, vậy $A \sim B$.

3.4.18 Phương pháp thứ nhất :

Vì $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{rank}((A - \lambda I_n)^k) = \text{rank}((B - \lambda I_n)^k) = \text{rank}((A - \lambda I_n)^k)$ nên theo bài tập 3.4.17, ta kết luận $A \sim B$.

Phương pháp thứ hai :

$$1) \text{ Giả sử } \lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^*, J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_k(\mathbb{C}).$$

$$\text{Ký hiệu } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ta có } P^{-1} = P \text{ và } PJ_k(\lambda)P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \ddots \\ & & \ddots & \lambda \end{pmatrix} = {}^t(J_k(\lambda)),$$

vậy ${}^t(J_k(\lambda)) \sim J_k(\lambda)$.

2) Theo Định lý về phép thu gọn Jordan (Định lý 3.4.23), tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ và ma trận đường chéo theo các khối Jordan J , sao cho: $A = PJP^{-1}$.

• $A = {}^tP^{-1}JP = {}^tJ$.

• Từ J , ta suy ra: ${}^tJ \sim J$ vì J là ma trận chéo theo các khối Jordan.

Như vậy $A \sim {}^tJ \sim J \sim A$.

3.4.19 1) Nếu $\sum_{k \geq 0} A^k$ hội tụ, thì $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, vậy (Định lý 3.3.3 1)): $\rho(A) < 1$.

2) Đảo lại, giả sử $\rho(A) < 1$. Khi đó 1 không phải là gtr của A , vậy $I - A$ khả nghịch, và

$$\forall N \in \mathbb{N}, (I - A) \sum_{k=0}^N A^k = I - A^{N+1}, \text{ vậy } \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^N A^k = (I - A)^{-1}(I - A^{N+1}).$$

Theo Định lý 3.3.3 1) : $A^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, vậy $\sum_{k \geq 0} A^k$ hội tụ và $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

Xem bài tập 3.4.19.

◊ Trả lời : Nếu $\rho(A) < 1$, thì $\sum_{k \geq 0} A^k$ hội tụ và $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

3.4.20 Rõ ràng (bằng phép nhân các ma trận) các phần tử của A đều > 0 nên các phần tử của mỗi A^p ($p \in \mathbb{N}^*$) đều > 0 .

Vì $\rho(A) < 1$, theo Định lý 3.3.3 1), $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Ký hiệu $\|\cdot\|_\infty$ là chuẩn xác định trên $M_n(\mathbb{R})$ bởi $\forall M = (m_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R}), \|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|$,

tồn tại $P \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\|A^P\|_\infty < 1$.

Các phần tử A^p đều thuộc $]0; 1[$ không có số nguyên nào.

3.4.21 Theo định lý về phép thu gọn Jordan (3.4.2 3), Định lý), tồn tại $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ và ma trận chéo theo các khối Jordan J sao cho $A = QJQ^{-1}$.
Ta có : $\forall k \in \mathbb{N}, J^k = (Q^{-1}AQ)^k = Q^{-1}A^kQ$, vậy với ký hiệu $C = Q^{-1}BQ : J^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C$.

Khi đó, với mỗi khối Jordan $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$ tham gia trong J , dãy $(J_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ .

Cho i cố định. Vì $\forall k \in \mathbb{N}, J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$, ta suy ra $|\lambda_i| \leq 1$.

Hơn nữa, nếu $|\lambda_i| = 1$ thì $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ, vậy $\lambda_i = 1$ và J_i nhất thiết phải có cấp 1

(vì $|C_k^1 \lambda_i^{k-1}| = k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$).

Bằng cách sắp xếp lại các khối Jordan J , ta có thể đưa về trường hợp $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_q, 1, \dots, 1)$, trong đó $q \in \mathbb{N}$, và với $i \in \{1, \dots, q\}$, $|\lambda_i| < 1$ và J_i chéo theo các khối Jordan tương ứng với gtr λ_i .

Ký hiệu $M = \text{diag}(J_1, \dots, J_q)$. Vì $\rho(M) = \max_{1 \leq i \leq q} |\lambda_i| < 1$, theo Định lý 3.3.3 1), $M^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

vậy $J^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Vì $\pi_i = X - 1$ và $1 \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, ta có $\pi_i \wedge \pi_M = 1$. Theo bài tập 3.2.27,

tồn tại $P \in \mathbb{C}[X]$ sao cho $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = P \left(\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) = P(J)$.

Vậy ta có : $B = QCQ^{-1} = QP(J)Q^{-1} = P(QJQ^{-1}) = P(A)$.

3.4.22 1) Giả sử $\pi_A = (-1)^n \chi_A$. Vì χ_A tách được trên $\mathbb{C}$ nên theo định lý về phép thu gọn Jordan (Định lý 3.4.2 3)) $A \sim J$, trong đó J là ma trận đường chéo theo các khối Jordan. Với mỗi gtr λ_i của A , có một và chỉ một khối Jordan tương ứng với λ_i trong J vì $(-1)^n \chi_A = \pi_A$, và cấp của khối này là ω_i (cấp bội của λ_i trong χ_A).
Xét ma trận đồng hành $C\pi_A$ của π_A (xem bài tập 2.2.11).

Cũng theo bài tập đó : $\chi_{C\pi_A} = (-1)^n \pi_A$.

Theo bài tập 3.2.29 : $\pi_{C\pi_A} = \pi_A$.

Vì $\pi_{C\pi_A} = (-1)^n \chi_{C\pi_A}$, áp dụng khảo sát trên cho $C\pi_A$ thay vì cho A , ta suy ra rằng thu gọn Jordan của $C\pi_A$ cũng là J , và kết luận $A \sim C\pi_A$.

2) Đảo lại, giả sử tồn tại $P \in \mathbb{C}[X]$ chuẩn tắc bậc n , sao cho $A \sim C_P$.

Theo bài tập 2.2.11 và bài tập 3.2.29 : $\pi_{C_P} = P$ và $\chi_{C_P} = (-1)^n P$, từ đó $\pi_A = \pi_{C_P} = P$ và $\chi_A = \chi_{C_P} = (-1)^n P$, vậy $\pi_A = (-1)^n \chi_A$.

3.4.23 Theo định lý về phép thu gọn Jordan (Định lý 3.4.2.3)), tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ và J là ma trận chéo theo các khối sao cho $A = PJP^{-1}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

Giả sử $\pi_A = (-1)^n \chi_A$. Vì $\pi_J = \pi_A = (-1)^n \chi_A = (-1)^n \chi_J$, với mỗi gtr λ_i ($1 \leq i \leq p$) của A , có một và chỉ một khối Jordan tương ứng với λ_i trong J và cấp của khối này là ω_i (cấp bội của λ_i trong χ_A) : $J = \text{diag}((J_{\omega_i}(\lambda_i))_{1 \leq i \leq p})$.

(Nếu không thì ta sẽ có $\deg(\pi_J) < n$, vậy $\pi_J \neq (-1)^n \chi_J$, xem bài tập 3.2.16).

Cho $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $AB = BA$; ký hiệu $B' = P^{-1}BP$. Khi đó ta có $JB' = B'J$, từ đó bằng cách phân tích B' thành các khối theo phân tích của J , $B' = (B'_{ij})_{ij}$:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, J_{\omega_i}(\lambda_i) B'_{ij} = B'_{ij} J_{\omega_j}(\lambda_j).$$

Giả sử $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ sao cho $i \neq j$. Vì $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J_{\omega_i}(\lambda_i)) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(J_{\omega_j}(\lambda_j)) = \emptyset$, nên theo bài tập 3.1.17 : $B'_{ij} = 0$.

Điều này chứng tỏ B' là ma trận chéo theo khối : $B' = \text{diag}(B'_{ii})_{1 \leq i \leq p}$.

Hơn nữa : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $J_{\omega_i}(\lambda_i) B'_{ii} = B'_{ii} J_{\omega_i}(\lambda_i)$.

vậy : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $(J_{\omega_i}(\lambda_i) - \lambda_i J_{\omega_i}) B'_{ii} = B'_{ii} (J_{\omega_i}(\lambda_i) - \lambda_i J_{\omega_i})$.

Theo bài tập 3.4.4, với mỗi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, tồn tại $P_i \in \mathbb{C}[X]$ sao cho $B'_{ii} = P_i(J_{\omega_i}(\lambda_i))$.

Vì $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ đôi một phân biệt nên các đa thức tối thiểu $\pi_{J_{\omega_i}(\lambda_i)} = (X - \lambda_i)^{\omega_i}$ ($1 \leq i \leq p$) nguyên tố sánh đôi.

Theo định lý Trung hoa trong $\mathbb{C}[X]$ (chứng minh tương tự như chứng minh định lý Trung hoa trong $\mathbb{Z}$, bài tập 4.3.16, Tập 5), tồn tại $Q \in \mathbb{C}[X]$ sao cho :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, Q = [\pi_{J_{\omega_i}(\lambda_i)}] .$$

Vậy : $Q(J) = \text{diag}(Q(J_{\omega_i}(\lambda_i))) = \text{diag}(P_i(J_{\omega_i}(\lambda_i))) = \text{diag}(B'_{ii}) = B'$,

và : $Q(A) = Q(PJP^{-1}) = PQ(J)P^{-1} = P B' P^{-1} = B$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

Lập luận bằng phản đảo: giả sử $\pi_A \neq (-1)^n \chi_A$. Ta sẽ chỉ ra sự tồn tại $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho

$AB = BA$ và B không phải là đa thức của A .

Tồn tại một gtr của A , chẳng hạn λ_1 sao cho thu gọn Jordan J của A có ít nhất hai khối Jordan $J_{\alpha}(\lambda_1)$, $J_{\beta}(\lambda_1)$ tương ứng với λ_1 . Có thể giả sử $\alpha \geq \beta$ và : $J = \text{diag}(J_{\alpha}(\lambda_1), J_{\beta}(\lambda_1), \dots)$.

Ký hiệu, với cùng một cách cắt theo khối: $B' = \begin{pmatrix} 0 & X & & \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ trong đó $X \in M_{\alpha, \beta}(\mathbb{C})$

mà ta sẽ chọn sau này, và $B = PB'P^{-1}$.

Vì $AB = BA \Leftrightarrow J_{\alpha}(\lambda_1)X = XJ_{\beta}(\lambda_1)$, chỉ cần chọn X sao cho $J_{\alpha}(\lambda_1)X = XJ_{\beta}(\lambda_1)$, chẳng hạn

$$X = \begin{pmatrix} J_{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mặt khác, nếu B là một đa thức của A , B' sẽ là một đa thức của J , vậy B' sẽ là ma trận chéo theo các khối (với cùng cách cắt như với J), không đúng, vì $X \neq 0$.

3.4.24 Theo bài tập 3.4.22, vì $\pi_A = (-1)^n \chi_A$ và $\pi_B = (-1)^n \chi_B$, ta có:
 $A \sim C_{\pi_A}$ và $B \sim C_{\pi_B}$. Vì $\pi_A = \pi_B$, ta suy ra $A \sim B$.

3.4.25 Theo định lý về phép thu gọn Jordan (Định lý 3.4.2 3)), tồn tại $P \in GL_n(\mathbb{C})$ và ma trận J chéo theo khối Jordan, sao cho $A = PJP^{-1}$.

a) Ta có: $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PJ^kP^{-1}$, vậy $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn khi và chỉ khi $(J^k)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn. Tiếp đó, $(J^k)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn khi và chỉ khi với mỗi khối Jordan $J_p(\lambda)$ có trong J , $((J_p(\lambda))^k)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn.

Nhưng: $\forall k \in \mathbb{N}, (J_p(\lambda))^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \dots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^k \end{pmatrix}$, vậy $((J_p(\lambda))^k)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn khi và chỉ

khí: $|\lambda| < 1$ hay $(|\lambda| = 1 \text{ và } p = 1)$ (xem thêm lời giải bài tập 3.4.11 b)).

◊ Trả lời: $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn khi và chỉ khi: $\rho(A) \leq 1$ và với mỗi gtr λ của A sao cho $|\lambda| = 1$ số chiều của $\text{KGCR}(A, \lambda)$ bằng cấp bội của λ trong χ_A .

b) $(A^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bị chặn $\Leftrightarrow \begin{cases} (A^k)_{k \in \mathbb{N}} & \text{bị chặn} \\ ((A^{-1})^k)_{k \in \mathbb{N}} & \text{bị chặn} \end{cases}$

Vì: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^{-1}) = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$, rõ ràng rằng: $\rho(A^{-1}) = \left(\min_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \right)^{-1}$.

Vậy: $\begin{cases} \rho(A) \leq 1 \\ \rho(A^{-1}) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset U$.

Hơn nữa: với mỗi gtr λ của A , $\text{KGCR}(A, \lambda)$ và $\text{KGCR}(A^{-1}, \lambda^{-1})$ đồng cấu (nh các $\mathbb{C}$ -kgv), vậy có cùng số chiều.

◊ Trả lời: $(A^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bị chặn khi và chỉ khi: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset U$ và A chéo hóa được.

3.4.26 Tồn tại $P_A \in GL_p(\mathbb{C}), P_B \in GL_q(\mathbb{C})$ sao cho $A = P_A J_A P_A^{-1}, B = P_B J_B P_B^{-1}$.

Ký hiệu $P = \begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{pmatrix}$. Rõ ràng rằng:

$$P \in GL_{p+q}(\mathbb{C}), P^{-1} = \begin{pmatrix} P_A^{-1} & 0 \\ 0 & P_B^{-1} \end{pmatrix}, \text{ và } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Mặt khác, $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ là ma trận chéo theo khối Jordan.

Theo tính duy nhất của thu gọn Jordan của $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (sai khác thứ tự các khối), thu gọn

Jordan của $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ là $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$.

3.4.27 a) 1) Vì $A \sim A'$ nên A và A' có cùng thu gọn Jordan J_A . Theo bài tập 3.4.26 ký hiệu J_B và J_C tương ứng là các thu gọn Jordan của B và C thì các thu gọn Jordan tương ứng của

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ là: (có thể sai khác thứ tự các khối): $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_C \end{pmatrix}$.

Vì $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ nên theo tính duy nhất của thu gọn Jordan, ta suy ra (có thể sai khác

thứ tự các khối): $\begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_C \end{pmatrix}$, vậy $J_B = J_C$ và cuối cùng $B \sim C$.

2) Vì $A_1 \sim A'_1, \dots, A_N \sim A'_N$, ta có $A \sim A'$ với $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}$ và $A' = \begin{pmatrix} A'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A'_N \end{pmatrix}$.

Theo 1), vì $A \sim A'$ và $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ta suy ra $B \sim C$

b) Bằng cách ký hiệu J_B và J_C là các thu gọn Jordan tương ứng của B và C , theo bài tập

3.4.26, các thu gọn Jordan của $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ tương ứng là $\begin{pmatrix} J_B & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ và

$\begin{pmatrix} J_C & 0 \\ 0 & J_C \end{pmatrix}$.

Vì $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ nên các khối Jordan trong $\begin{pmatrix} J_B & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ cũng là các khối

Jordan trong $\begin{pmatrix} J_C & 0 \\ 0 & J_C \end{pmatrix}$ (sai khác thứ tự).

Do mỗi khối Jordan có cùng số lần xuất hiện trong $\begin{pmatrix} J_B & 0 \\ 0 & J_B \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} J_C & 0 \\ 0 & J_C \end{pmatrix}$, ta suy

ra các khối Jordan của J_B cũng là các khối trong J_C (có thể sai khác thứ tự), do đó $B \sim C$.

C 3.1 1) a) α) Chứng minh dễ dàng, vì: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\alpha A) = \{\alpha \lambda; \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.

β) Vì A chéo hóa được (xem Hệ quả 2), 3.1) nên tồn tại $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $T = (t_{ij}) \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ sao cho $A = QTQ^{-1}$.

Khi đó ta có $A^k = QT^kQ^{-1}$, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{t_{ii}; 1 \leq i \leq n\}$, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^k) = \{t_{ii}^k; 1 \leq i \leq n\}$

từ đó $\rho(A^k) = \max_{1 \leq i \leq n} (|t_{ii}^k|) = \left(\max_{1 \leq i \leq n} |t_{ii}| \right)^k = (\rho(A))^k$.

γ) Theo bài tập 2.1.14, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(BA)$, từ đó $\rho(AB) = \rho(BA)$.

δ) Theo γ) $\rho(P^{-1}AP) = \rho((AP)P^{-1}) = \rho(A)$.

Hoặc bằng cách khác, vì $P^{-1}AP \sim A$, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(P^{-1}AP) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, vậy $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

b) Xét ví dụ: $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, có $\rho(A) = \rho(B) = 0$, $\rho(A + B) = \rho(AB) = 1$.

$\diamond$ **Trả lời:** Không đối với cả hai câu hỏi (nếu $n \geq 2$).

2) a) Quy nạp theo k (A cố định).

Tính chất là tầm thường với $k = 1$.

Nếu $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ thì: $\|A^{k+1}\| = \|A^k A\| \leq \|A^k\| \|A\| \leq \|A\|^k \|A\| = \|A\|^{k+1}$.

Ta nhận thấy rằng công thức "nói chung" sai với $k = 0$.

b) Với các ký hiệu hiển nhiên:

$$\bullet N(\alpha A) = \max_i \left(\sum_j |\alpha a_{ij}| \right) = |\alpha| \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) = |\alpha| N(A)$$

$$\bullet N(A) = 0 \Leftrightarrow \left(\forall i, \sum_j |a_{ij}| = 0 \right) \Leftrightarrow (\forall i, \forall j, a_{ij} = 0) \Leftrightarrow A = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet N(A + B) &= \max_i \left(\sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \right) \leq \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}| \right) \\ &\leq \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) + \max_i \left(\sum_j |b_{ij}| \right) = N(A) + N(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet N(AB) &= \max_i \left(\sum_j \left| \sum_k a_{ik} b_{kj} \right| \right) \leq \max_i \left(\sum_j \sum_k |a_{ik}| |b_{kj}| \right) \\ &= \max_i \left(\sum_k \left(|a_{ik}| \sum_j |b_{kj}| \right) \right) \leq \max_i \left(\sum_k (|a_{ik}| N(B)) \right) = N(A) N(B). \end{aligned}$$

c) Việc kiểm chứng là dễ dàng:

$$\bullet \| \alpha A \|_p = \| P^{-1} \alpha A P \| = |\alpha| \| P^{-1} A P \| = |\alpha| \| A \|_p$$

$$\bullet \| A \|_p = 0 \Leftrightarrow P^{-1} A P = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$\bullet \| A + B \|_p = \| P^{-1} A P + P^{-1} B P \| \leq \| P^{-1} A P \| + \| P^{-1} B P \| = \| A \|_p + \| B \|_p$$

$$\bullet \| AB \|_p = \| P^{-1} A B P \| = \| P^{-1} A P P^{-1} B P \| \leq \| P^{-1} A P \| \| P^{-1} B P \| = \| A \|_p + \| B \|_p.$$

3) Cho $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Tồn tại $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho $AX = \lambda X$. Ta ký hiệu

$M = (X, \dots, X) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ là ma trận vuông thu được bằng cách đặt n lần X cạnh nhau. Khi đó rõ ràng rằng $AM = \lambda M$, từ đây: $|\lambda| \|M\| = \|\lambda M\| = \|AM\| \leq \|A\| \|M\|$. Vì $M \neq 0$ (do $X \neq 0$), ta suy ra $|\lambda| \leq \|A\|$.

Như vậy $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leq \|A\|$ vậy $\rho(A) \leq \|A\|$.

4) Theo định lý về phép chéo hóa trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (Hệ quả 3.1), tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$,

$T = (t_{ij})_{ij} \in \mathbf{T}_{n,n}(\mathbb{C})$ sao cho $A = PTP^{-1}$.

Ký hiệu $D_u = \text{diag}(u, u^2, \dots, u^n)$ với $u \in \mathbb{R}_+^*$.

Rõ ràng rằng D_u khả nghịch và $D_u^{-1} = D_{u^{-1}}$, từ đó:

$$D_u T D_u^{-1} = (u^{i-j} t_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} t_{11} & u^{-1} t_{12} & \dots & u^{1-n} t_{1n} \\ & t_{22} & \dots & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Vì với mọi i thuộc $\{1, \dots, n-1\}$: $\sum_{j=i+1}^n u^{i-j} |t_{ij}| \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ (do các lũy thừa của u tham gia

vào đây đều < 0) nên tồn tại $u \in \mathbb{R}_+^*$ sao cho:

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sum_{j=i+1}^n |u^{i-j} t_{ij}| \leq \varepsilon.$$

Vậy ta có: $N(D_u T D_u^{-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(|t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^n |u^{i-j} t_{ij}| \right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|t_{ii}| + \varepsilon) = (\max_{1 \leq i \leq n} |t_{ii}|) + \varepsilon$.

Nhưng $t_{11}, \dots, t_{nn}$ là các gtr của T , vậy cũng của A , từ đây: $\max_{1 \leq i \leq n} |t_{ii}| = \rho(A)$.

Như vậy: $N(D_u T D_u^{-1}) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Vì $P D_u^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, (theo 2) b) và c), ánh xạ $\|\cdot\|: \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \|M\| = N(D_u P^{-1} M P D_u^{-1}) = N((P D_u^{-1})^{-1} M (P D_u^{-1}))$$

là một chuẩn dưới nhân của $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Và: $\|A\| = N(D_u P^{-1} A P D_u^{-1}) = N(D_u T D_u^{-1}) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

5) 1) Giả sử $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Cho $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Tồn tại $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho $AX = \lambda X$.

Ta có: $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k X = \lambda^k X$.

Vì $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, ta suy ra liên tiếp $A^k X \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\lambda^k X \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\lambda^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

(vì X cố định $\neq 0$), $|\lambda| < 1$.

Điều này chứng tỏ: $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| < 1$, vậy $\rho(A) < 1$.

(Thật ra đó là một phần của chứng minh định lý 3.3.3 1)).

2) Đảo lại, giả sử $\rho(A) < 1$

Ký hiệu $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \rho(A)) > 0$, theo 4) tồn tại một chuẩn dưới nhân $\|\cdot\|$ trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho:

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1.$$

Vì: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \|A^k\| \leq \|A\|^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$, ta kết luận $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

6) 1) Giả sử $\|\cdot\|$ là một chuẩn dưới nhân.

$$\text{Theo 1) a) } \beta) \text{ và 3) : } \forall k \in \mathbb{N}, \rho(A) = (\rho(A^k))^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

$$\text{Cho } \varepsilon > 0 \text{ cố định. Ký hiệu } B = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A.$$

$$\text{Khi đó ta có (xem 1) a) } \alpha) : \rho(B) = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} \rho(A) < 1.$$

$$\text{Theo 5) : } B^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Vậy tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall k \in \mathbb{N}, (k > N \Rightarrow \|B^k\| < 1)$.

$$\text{Cho } k \in \mathbb{N} \text{ sao cho } k > N. \text{ Ta có } \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = (\rho(A) + \varepsilon) \|B^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho(A) + \varepsilon.$$

Như vậy ta đã chứng tỏ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (k > N \Rightarrow \rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon),$$

$$\text{vậy } \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(A).$$

2) Giả sử $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên $M_n(\mathbb{C})$, không nhất thiết dưới nhân. Tồn tại ít nhất một chuẩn dưới nhân N trên $M_n(\mathbb{C})$, và $\|\cdot\|$ và N tương đương. Vậy tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sao cho :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \alpha N(M) \leq \|M\| \leq \beta N(M).$$

$$\text{Từ đó, với } A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ cố định : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha^{\frac{1}{k}} (N(A^k))^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \beta^{\frac{1}{k}} (N(A^k))^{\frac{1}{k}}.$$

$$\text{Theo 1), } (N(A^k))^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(A). \text{ Vì } \alpha^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1 \text{ và } \beta^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1,$$

$$\text{ta suy ra : } \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(A).$$

7) Ta có thể trang bị cho $M_n(\mathbb{C})$ ít nhất một chuẩn dưới nhân $\|\cdot\|$.

Theo 3) và vì A và B giao hoán :

$$\rho(AB) \leq \|AB^k\|^{\frac{1}{k}} = \|A^k B^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \|B^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

$$\text{Theo 6) : } \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(A) \text{ và } \|B^k\|^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(B).$$

$$\text{Ta suy ra : } \rho(AB) \leq \rho(A) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(B).$$

8) a) Vì N là một chuẩn dưới nhân (xem 2) b), ta có theo 3) : $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq \rho(A_k) \leq N(A_k)$.

$$\text{vì } A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ theo định nghĩa } N(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ vậy } \rho(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$\text{b) Theo 1) a) } \delta) : \forall k \in \mathbb{N}, \rho(A) = \rho(B_k) \text{ và theo 8) a) : } \rho(B_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ vậy } \rho(A) = 0.$$

Ta suy ra A lũy linh (xem bài tập 3.1.1).

$$9) \text{ Ký hiệu với } k \in \mathbb{N}^* : A^k = (a_{ij}^{[k]})_{ij}, M^k = (m_{ij}^{[k]})_{ij}.$$

Bảng quy nạp dễ dàng chứng minh :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, |a_{ij}^{[k]}| \leq m_{ij}^{[k]}.$$

• Giả sử $\rho(M) = 0$. Khi đó $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$, vậy M lũy linh (xem bài tập 3.1.1); tồn tại

$k \in \mathbb{N}^*$, sao cho $M^k = 0$. Theo kết quả trên đây, khi đó ta có $A^k = 0$, vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$,

$$\rho(A) = 0.$$

Ta có dễ dàng $\rho(A) \leq \rho(M)$.

• Ta giả sử $\rho(M) > 0$.

Cho $x \in \left] 0; \frac{1}{\rho(M)} \right[$; vậy ta có (xem 1) a) α : $\rho(xM) = x\rho(M) < 1$. Theo 5) : $(xM)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

Ta chọn làm chuẩn dưới nhân $(\|\cdot\|)$ chuẩn được định nghĩa như sau :

$$\forall B = (b_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_n(\mathbb{C})}, \|B\| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |b_{ij}|.$$

Vì $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $x^k |a_{ij}^{[k]}| \leq x^k m_{ij}^{[k]}$, ta có : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|(xA)^k\| \leq \|(xM)^k\|$.

Từ đó suy ra $(xA)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, vậy (xem 5)) : $\rho(xA) < 1$.

Điều này chứng tỏ : $\forall x \in \left] 0; \frac{1}{\rho(M)} \right[$, $x \in \left] 0; \frac{1}{\rho(A)} \right[$, từ đó $\frac{1}{\rho(M)} \leq \frac{1}{\rho(A)}$,

tức là $\rho(A) \leq \rho(M)$.

C 3.2 1) a) Xét cơ sở chính tắc $B' = (E'_{i'j'})_{(i',j') \in \{1, \dots, n'\} \times \{1, \dots, p'\}}$ của $M_{n',p'}(K)$ và

$B = (E_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}}$ của $M_{n,p}(K)$ được sắp xếp theo thứ tự từ điển, tức là :

$$B' = (E'_{11}, \dots, E'_{1p'}, E'_{21}, \dots, E'_{2p'}, \dots, E'_{n'1}, \dots, E'_{n'p'})$$

$$B = (E_{11}, \dots, E_{1p}, \dots, E_{21}, \dots, E_{2p}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{np}).$$

Giả sử $(i', j') \in \{1, \dots, n'\} \times \{1, \dots, p'\}$. Với ký hiệu $A = (a_{ij})_{ij}$, $E'_{i'j'} = (\delta_{i'i} \delta_{j'j})_{ik}$, $B = (b_{ik})_{ik}$, với

mọi (i, l) thuộc $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, phần tử thứ (i, l) của $f_{A,B}(E'_{i'j'})$ là $\sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{p'} a_{ij} \delta_{i'i} \delta_{j'j} b_{lk}$, tức

là $a_{ij'}$, $b_{lj'}$. Vậy cột thứ (i', j') của $\text{Mat}_{B'B}(f_{A,B})$ là :

$$\begin{pmatrix} a_{1i'} b_{1j'} \\ \vdots \\ a_{1i'} b_{pj'} \\ a_{2i'} b_{1j'} \\ \vdots \\ a_{2i'} b_{pj'} \\ \vdots \\ a_{ni'} b_{1j'} \\ \vdots \\ a_{ni'} b_{pj'} \end{pmatrix}, \text{ và như vậy } \text{Mat}_{B'B}(f_{A,B}) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn'}B \end{pmatrix} = A \otimes B.$$

b) 1) • Giả sử $\alpha, \alpha' \in K$, $A, A' \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,p'}(K)$. Ta có với mọi M thuộc $M_{n',p'}(K)$:

$$f_{\alpha A + \alpha' A', B}(M) = (\alpha A + \alpha' A')M'B = \alpha AM'B + \alpha' A'M'B = \alpha f_{A,B}(M) + \alpha' f_{A',B}(M),$$

do đó (xem 1)) : $(\alpha A + \alpha' A') \otimes B = \alpha A \otimes B + \alpha' A' \otimes B$.

- Một phép tính tương tự cho ta:

$$\forall \beta, \beta' \in K, \forall A \in M_{n,n}(K), \forall B, B' \in M_{p,p}(K), A \otimes (\beta B + \beta' B') = \beta A \otimes B + \beta' A \otimes B'.$$

2) Giả sử $A \in M_{n,n}(K), A' \in M_{n',n'}(K), B \in M_{p,p}(K), B' \in M_{p',p'}(K)$. Ta có:

$$\forall M \in M_{pp'}(K), f_{AA', BB'}(M) = (AA')M'(BB') = A(A'M'B')B = f_{A,B} \circ f_{A',B'}(M),$$

do đó (xem 1)): $(AA') \otimes (BB') = (A \otimes B)(A' \otimes B')$.

3) Giả sử $A \in M_{n,n}(K), B \in M_{p,p}(K)$. Theo 2):

$$A \otimes B = (AI_n) \otimes (I_p B) = (A \otimes I_p)(I_n \otimes B).$$

4) Một phép truy hồi đơn giản sử dụng 2) chứng tỏ:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall A \in M_n(K), \forall B \in M_p(K), (A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k.$$

5) Cho $A \in M_{n,n'}(K), B \in M_{p,p'}(K)$.

$$\bullet \text{ Rõ ràng rằng: } \begin{cases} A=0 \\ \text{hay} \Rightarrow A \otimes B = 0. \\ B=0 \end{cases}$$

- Đảo lại, giả sử $A \otimes B = 0$. Khi đó, ký hiệu $A = (a_{ij})_{ij}$:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n'\}, a_{ij}B = 0.$$

Nếu $B \neq 0$, thì $(\forall (i, j), a_{ij} = 0)$, vậy $A = 0$.

Điều này chứng tỏ $A = 0$ hoặc $B = 0$.

6) Cho $A \in M_n(K), B \in M_p(K)$.

Nếu A và B khả nghịch thì theo 2):

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_n \otimes I_p = I_{np},$$

vậy $A \otimes B (\in M_{np}(K))$ khả nghịch, và: $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

- Đảo lại, giả sử $A \otimes B$ khả nghịch.

Lập luận bằng phản chứng: giả sử (chẳng hạn) A không khả nghịch. Khi đó tồn tại $V \in \text{Ker}(A)$ sao cho $V \neq 0$, từ đây với ký hiệu $A' = (V, \dots, V) \in M_n(K)$:

$$(A \otimes B)(A' \otimes I_p) = (AA') \otimes (BI_p) = 0 \otimes B = 0,$$

và $A' \otimes I_p \neq 0$ (xem 5)), mâu thuẫn.

Như vậy nếu $A \otimes B$ khả nghịch thì A và B khả nghịch.

7) Cho $A \in M_n(K), B \in M_p(K)$.

- Ta giả sử A lũy linh. Tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $A^k = 0$, từ đó (xem 4)):

$$(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k = 0 \otimes B^k = 0, \text{ vậy } A \otimes B \text{ lũy linh.}$$

- Đảo lại, giả sử $A \otimes B$ lũy linh, tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $(A \otimes B)^k = 0$. Từ 4) suy ra $A^k \otimes B^k = 0$, rồi từ 5): $A^k = 0$ hoặc $B^k = 0$, vậy A hoặc B lũy linh.

8) Cho $A \in M_{n,n'}(K), B \in M_{p,p'}(K)$.

$$\text{Ta có: } {}^t(A \otimes B) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn'}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}{}^tB & \dots & a_{n1}{}^tB \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n'}{}^tB & \dots & a_{nn'}{}^tB \end{pmatrix} = {}^tA \otimes {}^tB.$$

Đặc biệt, nếu $A (\in M_n(K))$ và $B (\in M_p(K))$ đối xứng thì $A \otimes B (\in M_{np}(K))$ đối xứng.

9) Giả sử $A, A' \in M_{n,n}(K)$, $B, B' \in M_{p,p}(K)$.

• Nếu tồn tại $\alpha \in K - \{0\}$ sao cho $A' = \alpha A$ và $B' = \frac{1}{\alpha} B$, thì:

$$A' \otimes B' = (\alpha A) \otimes \left(\frac{1}{\alpha} B\right) = \alpha \frac{1}{\alpha} (A \otimes B) = A \otimes B.$$

• Đảo lại, giả sử $A \neq 0$, $B \neq 0$, $A \otimes B = A' \otimes B'$.

Khi đó ta có: $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, $a_{ij}B = a'_{ij}B'$.

$$\text{Theo 5): } \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A' \otimes B' = A \otimes B \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} A' \neq 0 \\ B' \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy tồn tại $(i_0, j_0) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ sao cho $a'_{i_0 j_0} \neq 0$. Ký hiệu $\alpha = a_{i_0 j_0} a'_{i_0 j_0}^{-1}$ khi đó ta

có $\alpha \neq 0$ và $B' = \frac{1}{\alpha} B$

Với $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$; ta có $a_{ij}B = a'_{ij}B' = \frac{1}{\alpha} a'_{ij}B$, từ đó (vì $B \neq 0$): $a'_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Ta suy ra: $A' = \alpha A$.

Nhận xét:

Với $A, B \in M_{n,p}(K)$ sao cho $A \neq 0$, ta có: $A \otimes B \Leftrightarrow B \otimes A \Leftrightarrow (\exists \alpha \in K, B = \alpha A)$

10) • Theo 8), rõ ràng nếu $A \in M_n(K)$, $B \in M_p(K)$ đối xứng hay phản đối xứng (bốn trường hợp), thì $A \otimes B$ đối xứng hay phản đối xứng, tùy theo "quy tắc dấu":

$$\begin{cases} A = \varepsilon A \\ B = \varepsilon' B \end{cases} \Rightarrow (A \otimes B) = (\varepsilon A) \otimes (\varepsilon' B) = (\varepsilon \varepsilon') (A \otimes B).$$

• Đảo lại, giả sử $A \in M_n(K) - \{0\}$, $B \in M_p(K) - \{0\}$ sao cho $A \otimes B$ đối xứng hay phản đối xứng: $(A \otimes B) = \varepsilon''(A \otimes B)$, $\varepsilon'' \in \{-1, 1\}$.

Theo 8): $(A) \otimes (B) = \varepsilon''(A \otimes B) = \varepsilon''(A \otimes B) = (\varepsilon''A) \otimes B$.

Tiếp đó (xem 9)), tồn tại $\alpha \in K - \{0\}$ sao cho: $A = \alpha \varepsilon''A$ và $B = \frac{1}{\alpha} B$.

Nhưng khi đó: $B = \varepsilon''B = \frac{1}{\alpha} B = \frac{1}{\alpha^2} B$, từ đó $\alpha^2 = 1$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, vậy A và B đối xứng hay phản đối xứng.

Đặc biệt, nếu $A \otimes B$ đối xứng và $A \neq 0$ và $B \neq 0$, thì A và B đối xứng hay phản đối xứng.

11) Cho $A \in M_n(K)$, $B \in M_p(K) - \{0\}$. Ta có:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in T_{np,n}(K) \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (i > j \Rightarrow a_{ij}B = 0))$$

$$\Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)) \Leftrightarrow A \in T_{n,n}(K)$$

12) Cho $A \in M_n(K)$, $B \in M_p(K)$.

• Nếu A và B là các ma trận chéo, $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ thì rõ ràng

$A \otimes B$ là ma trận chéo và: $A \otimes B = \text{diag}(\mu_1 \lambda_1, \dots, \mu_1 \lambda_n, \mu_2 \lambda_1, \dots, \mu_2 \lambda_n, \dots, \mu_p \lambda_1, \dots, \mu_p \lambda_n)$.

• Đảo lại giả sử $A \otimes B$ là ma trận chéo và $A \neq 0$ và $B \neq 0$.

Cho $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i \neq j$. Vì $A \otimes B$ là ma trận chéo, ta có $a_{ij}B = 0$, từ đó $a_{ij} = 0$.

Điều này chứng tỏ A là ma trận chéo.

Tiếp đó, vì $A \neq 0$, tồn tại $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $a_{i_0 i_0} \neq 0$.

Vì $A \otimes B$ là ma trận chéo nên $a_{i_0 i_0} B$ là ma trận chéo, nên B là ma trận chéo.

13) Cho $(A_i)_{i \in I}$ (tương ứng $(B_j)_{j \in J}$) là họ các phần tử của $M_n(K)$ (tương ứng $M_p(K)$) đôi một giao hoán.

Cho $(i, j), (i', j') \in I \times J$. Theo 2) ta có :

$$(A_i \otimes B_j)(A_{i'} \otimes B_{j'}) = (A_i A_{i'}) \otimes (B_j B_{j'}) = (A_{i'} A_i) \otimes (B_{j'} B_j) = (A_{i'} \otimes B_{j'})(A_i \otimes B_j).$$

Như vậy, các $A_i \otimes B_j$ ($(i, j) \in I \times J$) đôi một giao hoán.

14) Cho $A \in M_n(K), B \in M_p(K)$.

$$\bullet \operatorname{tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B).$$

$$\bullet \det(A \otimes B) = \det((A \otimes I_p)(I_n \otimes B)) = \det(A \otimes I_p) \det(I_n \otimes B)$$

$$\text{Một mặt : } \det(I_n \otimes B) = \det \begin{pmatrix} B & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B \end{pmatrix} = (\det(B))^n.$$

Mặt khác : lấy lại lời giải của 1) ta thấy rằng $A \otimes B$ là ma trận của $f_{A \otimes B}$ trong các cơ sở chính tắc được sắp xếp dưới dạng :

$$(E'_{11}, \dots, E'_{n1}, E'_{12}, \dots, E'_{n2}, \dots, E'_{1p}, \dots, E'_{np})$$

và

$$(E_{11}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1p}, \dots, E_{np}).$$

Từ đó : $\det(A \otimes I_p) = \det(f_{A \otimes I_p}) = \det(I_p \otimes A) = (\det(A))^p$

Cuối cùng : $\det(A \otimes B) = (\det(A))^p (\det(B))^n$.

II 1) Vì χ_A và χ_B tách được nên A và B tam giác hóa được (xem Định lý, 3.1). Vậy tồn tại

$$P \in \operatorname{GL}_n(K), T_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in T_{n,K}(K), Q \in \operatorname{GL}_p(K), T_B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_p \end{pmatrix} \in T_{p,K}(K)$$

sao cho $A = PT_A P^{-1}$ và $B = QT_B Q^{-1}$. Khi đó ta có (xem 2), 6, 11) :

$$P \otimes Q \in \operatorname{GL}_{np}(K), T_A \otimes T_B \in T_{np,K}(K), A \otimes B = (P \otimes Q)(T_A \otimes T_B)(P \otimes Q)^{-1},$$

từ đây ta có một dữ liệu tam giác hóa của $A \otimes B$.

$$\text{Vì } T_A \otimes T_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 T_B & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n T_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 \mu_p & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & \lambda_n \mu_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \mu_p \end{pmatrix}$$

$$\text{ta được : } \chi_{A \otimes B} = \chi_{T_A} \otimes \chi_{T_B} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (\lambda_i \mu_j - X).$$

Đặc biệt, ta tìm lại được kết quả của 13) (trong trường hợp K đóng đại số).

$$\det(A \otimes B) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_i \mu_j = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^p \left(\prod_{j=1}^p \mu_j \right)^n = (\det(A))^p (\det(B))^n$$

$$2) \bullet (A \otimes B)^* = {}^t \overline{(A \otimes B)} = {}^t (\overline{A} \otimes \overline{B}) = {}^t (\overline{A}) \otimes {}^t (\overline{B}) = A^* \otimes B^* = A \otimes B.$$

• Ta ký hiệu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (tương ứng $\mu_1, \dots, \mu_p$) là các giá trị riêng của A (tương ứng B) được tính cùng cấp bội của chúng. Ta có :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \in \mathbf{H}_n^+ \\ B \in \mathbf{H}_p^+ \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \\ \forall j \in \{1, \dots, p\}, \mu_j \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, \lambda_i \mu_j \in \mathbb{R}_+). \\ &\Rightarrow A \otimes B \in \mathbf{H}_{np}^+ \end{aligned}$$

Cũng như vậy với các “xác định - dương Hermite”

3) • Giả sử A và B chéo hóa được. Tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(K)$; $D_A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(K)$

$Q \in \mathbf{GL}_p(K)$, $D_B(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbf{D}_p(K)$, sao cho $A = PD_AP^{-1}$ và $B = QD_BQ^{-1}$.

Khi đó ta có (xem I 2), 6), 12)) :

$$P \otimes Q \in \mathbf{GL}_{np}(K), D_A \otimes D_B \in \mathbf{D}_{np}(K), A \otimes B = (P \otimes Q) (D_A \otimes D_B) (P \otimes Q)^{-1}.$$

Điều này chứng tỏ $A \otimes B$ chéo hóa được (và hơn nữa còn cung cấp dữ liệu chéo hóa của $A \otimes B$).

• Đảo lại, giả sử $A \otimes B$ chéo hóa được và $A \neq 0, B \neq 0$. Xét các phân tích Dunford của A và B (xem Định lý - Định nghĩa 3.3.2) :

$$\begin{cases} A = D_A + N_A, D_A \text{ chéo hoá được, } N_A \text{ lũy linh, } D_A N_A = N_A D_A \\ B = D_B + N_B, D_B \text{ chéo hoá được, } N_B \text{ lũy linh, } D_B N_B = N_B D_B \end{cases}$$

Khi đó (xem 1)) : $A \otimes B = D_A \otimes D_B + N$, trong đó $N = D_A \otimes N_B + N_A \otimes D_B + N_A \otimes N_B$.

Theo phần trên, $D_A \otimes D_B$ chéo hóa được.

Theo I 7) và 13) $D_A \otimes N_B, N_A \otimes D_B, N_A \otimes N_B$ lũy linh và đôi một giao hoán, vậy N lũy linh như ta có thể thấy bằng cách sử dụng nhị thức Newton.

Cuối cùng, theo 13), $D_A \otimes D_B, D_A \otimes N_B, N_A \otimes N_B$ đôi một giao hoán, vậy $D_A \otimes D_B$ và N giao hoán.

Điều này chứng tỏ rằng $A \otimes B = D_A \otimes D_B + N$ là phân tích Dunford của $A \otimes B$ (tính duy nhất của phân tích Dunford).

Nhưng theo giả thiết thì $A \otimes B$ chéo hóa được. Vậy $N = 0$, và :

$$A \otimes N_B = D_A \otimes N_B + N_A \otimes N_B = -N_A \otimes D_B.$$

Giả sử $N_B \neq 0$.

Vì $A \neq 0$, theo I 9) tồn tại $\alpha \in K - \{0\}$ sao cho : $N_A = -\alpha A$ và $D_B = \frac{1}{\alpha} N_B$.

Khi đó D_B đồng thời chéo hóa được và lũy linh, vậy $D_B = 0$, rồi $N_B = 0, B = 0$ mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ : $N_B = 0$ rồi $N_A \otimes N_B = -A \otimes N_B = 0$. Vì $D_B = B \neq 0$, ta suy ra (xem I 5) $N_A = 0$.

Cuối cùng, A và B chéo hóa được.

Nhận xét :

Nếu K không đóng đại số thì có thể xảy ra là A và B không chéo hóa được và $A \otimes B$ chéo hóa

được, như trong ví dụ sau: $K = \mathbb{R}, n = p = 2, A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 4

4.1.1 a) $\Leftarrow$: hiển nhiên

$\Rightarrow$:

Giả sử : $\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2, 'XAY = 'XBY$.

Phương pháp thứ nhất

Cho $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$; vì : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), 'X(AY - BY) = 0$, nên $AY - BY$ là trực giao với mỗi phần tử của $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (đối với tích vô hướng chính tắc), vậy $AY - BY = 0$.

Vì : $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), (A - B)Y = AY - BY = 0$, ta kết luận : $A - B = 0$.

Phương pháp thứ hai

Ký hiệu $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}$ và áp dụng giả thiết cho $X = E_i, Y = E_j$ (của cơ sở chính tắc); ta được : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} = 'E_i A E_j = 'E_j B E_i = b_{ji}$, từ đó $A = B$.

b) $\Leftarrow$: hiển nhiên

$\Rightarrow$:

Giả sử : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), 'XAX = 'XBX$

Phương pháp thứ nhất

Cho $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. Áp dụng giả thiết cho $X, Y, X + Y$, ta suy ra :

$$'XAY + 'YAX = 'XBY + 'YBX$$

Do A và B đối xứng nên ta có : $'YAX = ('XAY) = 'XAY$ và $'YBX = 'XBY$,
từ đó : $'XAY = 'XBY$.

Từ a), ta suy ra : $A = B$.

Phương pháp thứ hai

Ký hiệu ϕ_A (tương ứng ϕ_B) là dtp của ma trận A (tương ứng B) trong cơ sở chính tắc của $M_{n,1}(\mathbb{R})$, theo giả thiết ta có $\phi_A = \phi_B$ vậy $\phi_A = \phi_B$ (dạng cực), tức là $A = B$.

c) $\Leftarrow$:

Nếu $A \in A_n(\mathbb{R})$ thì với mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{R})$: $'XAX = ('XAX) = 'X'AX = 'X(-A)X = -'XAX$,
vậy $'XAX = 0$.

$\Rightarrow$:

Giả sử $A \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ và : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), 'XAX = 0$.

Khi đó : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), 'X(A + 'A)X = 'XAX + ('XAX) = 0$.

Vì $A + 'A \in S_n(\mathbb{R})$, ta suy ra từ b) : $A + 'A = 0$, tức là $A \in A_n(\mathbb{R})$.

4.1.2 a) 1) • **Tính phản xạ** : $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, ta có $A \subset A$, bằng cách chọn $P = I_n$.

• **Tính đối xứng** : Cho $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ sao cho tồn tại $P \in GL_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $B = {}^tPAP$. Khi đó ta có : $A = ({}^tP)^{-1}BP^{-1} = ({}^tP^{-1})BP^{-1}$, vậy $B \subset A$.

• **Tính bắc cầu** : Cho $(A, B, C) \in (M_n(\mathbb{R}))^3$ sao cho $A \subset B$ và $B \subset C$. Tồn tại $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ sao cho : $B = {}^tPAP$ và $C = {}^tQBQ$. Khi đó : $C = {}^tQ({}^tPAP)Q = {}^t(PQ)A(PQ)$ và $PQ \in GL_n(\mathbb{R})$, vậy $A \subset C$.

Như vậy : $\subset$ là một quan hệ tương đương trong $M_n(\mathbb{R})$.

2) • **Mối liên hệ giữa tương đương và đồng dạng** đã được khảo sát (xem Nhận xét 1), 8.2.4, Tập 5), ta có : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $(A \sim B \Rightarrow A \text{ tđ } B)$, nhưng đảo lại không đúng.

• Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $A \subset B$; tồn tại $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sao cho : $B = {}^tPAP$. Khi đó : $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$, vậy $A \text{ tđ } B$.

• Rõ ràng nếu $B = {}^tPAP$ thì $\det(B) = (\det(P))^2 \det(A)$, vậy $\text{sgn}(\det(B)) = \text{sgn}(\det(A))$. Lấy $n = 1, A = (1), B = (-1)$, rõ ràng : $A \sim B$ và $A \not\subset B$.

• Lấy $n = 1, A = (1), B = (4)$, ta có $A \subset B$ (chọn $P = (2)$); khi đó ta có $B = {}^tPAP$ và $A \sim B$.

◇ **Trả lời** : • đồng dạng $\Rightarrow$ tương đương
• đồng dư $\Rightarrow$ tương đương
• không có mối liên hệ logic nào khác.

b) 1) **Thí dụ** : $n = 1, \alpha = 1, A = (1), B = (4), A' = (-9), B' = (-1)$.

Ở đây ta có : $A \subset B, A' \subset B'$ nhưng $\alpha A + A' \not\subset \alpha B + B'$.

◇ **Trả lời** : không.

2) Nếu $B = {}^tPAP$, thì ${}^tB = {}^tP'AP$.

c) • Nếu $B = {}^tPAP$ thì ${}^tMBM = {}^tM'PAPM = ({}^t(PM)A(PM))$ và $PM \in GL_n(\mathbb{R})$.

• Ví dụ trong đó $M \notin GL_n(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ở đây ta có : $A \subset B$ (chọn $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$), ${}^tMAM \not\subset {}^tMBM$ (vì ${}^tMAM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và ${}^tMBM = 0$).

◇ **Trả lời** : Không.

d) Nếu tồn tại $P \in GL_n(\mathbb{R}), Q \in GL_n(\mathbb{R})$ sao cho $A' = {}^tPAP$ và $B' = {}^tQBQ$ thì với ký hiệu

$R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ ta có $R \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ và : $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} R$.

e) Tính chất được suy ra dễ dàng từ công thức đối cơ sở cho các dstdx (Mệnh đề 3.4.1.2).

4.2.1 1) Giả sử ψ là một tích vô hướng trên E . $\forall E \neq \{0\}$, tồn tại $x_0 \in E - \{0\}$, và ta có $\varphi(x_0, x_0) > 0$. Khi đó :

$$0 = \psi(x_0, 0) = a\varphi(x_0, x_0), \quad 0 = \psi(0, x_0) = c\varphi(x_0, x_0), \quad 0 < \psi(x_0, x_0) = b\varphi(x_0, x_0),$$

từ đó : $a = c = 0, b > 0$.

2) Phản đảo là hiển nhiên.

◇ **Trả lời** : $a = c = 0$ và $b > 0$.

4.2.2 Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho AX, BY trong $M_{n,1}(\mathbb{R})$ được trang bị tích vô hướng chính tắc của nó.

4.2.3 Vì $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$ là một tích vô hướng trên $M_{p,n}(\mathbb{R})$ (xem Thí dụ 2) 4.2.1) :

$${}^tAA = 0 \Rightarrow \text{tr}({}^tAA) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

4.2.4 Ký hiệu $M = B - C$ và sử dụng bài tập 4.2.3 :

$$BA'A = CA'A \Leftrightarrow MA'A = 0 \Rightarrow MA'A'M = 0$$

$$\Leftrightarrow ({}^tA'M)({}^tA'M) = 0 \Rightarrow {}^tA'M = 0 \Rightarrow ({}^tMA) = {}^tA'M = 0 \Rightarrow MA = 0.$$

4.2.5 1) • Vì với mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = 0 \Rightarrow ({}^tAA)X = {}^tA(AX) = 0$,

nên ta có : $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}({}^tAA)$.

• Giả sử $X \in \text{Ker}({}^tAA)$; khi đó : $\|AX\|^2 = (AX)(AX) = X({}^tAA)X = 0$, vậy $AX = 0$.

Kết luận : $\text{Ker}(A) = \text{Ker}({}^tAA)$.

Bằng cách áp dụng tA thay cho A , ta cũng nhận được : $\text{Ker}({}^tA) = \text{Ker}({}^tA'A)$.

2) • Giả sử $Y \in \text{Im}({}^tA'A)$. Tồn tại $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $Y = ({}^tA'A)X$, do đó $Y = {}^tA(AX) \in \text{Im}({}^tA)$.

Điều này chứng tỏ : $\text{Im}({}^tA'A) \subset \text{Im}({}^tA)$.

• Theo định lý về hạng :

$$\text{rank}({}^tA'A) = n - \dim(\text{Ker}({}^tA'A)) = n - \dim(\text{Ker}({}^tA)) = \text{rank}({}^tA) = \text{rank } A.$$

Từ đó được : $\text{Im}({}^tA'A) = \text{Im } A$ và với tA thay cho A : $\text{Im}({}^tAA) = \text{Im}({}^tA)$.

3) Nói chung không có mối liên hệ bao hàm giữa $\text{Ker}(A)$ và $\text{Ker}({}^tA)$, giữa $\text{Im}(A)$ và $\text{Im}({}^tA)$.

Chẳng hạn, với $n = 2$ và $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ta có : $\text{Ker}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\text{Ker}({}^tA) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\text{Im}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{Im}({}^tA) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

♦ Trả lời : • $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$, $\text{Ker}({}^tA'A) = \text{Ker}({}^tA)$

$$\bullet \text{Im}({}^tAA) = \text{Im}({}^tA), \text{Im}({}^tA'A) = \text{Im}(A).$$

$$\bullet \text{rank}(A) = \text{rank}({}^tA) = \text{rank}({}^tAA) = \text{rank}({}^tA'A).$$

4.2.6 Ký hiệu $B = A^2 - I_n$. Khi đó : $B^2 = A^4 - 2A^2 + I_n = 0$, và ${}^tBB = {}^tA^2A^2 - A^2 - {}^tA^2 + I_n = A^2{}^tA^2 - A^2 - {}^tA^2 + I_n = B{}^tB$, từ đó $({}^tBB)({}^tBB) = ({}^tBB)^2 = {}^tB^2B^2 = 0$, vậy (xem bài tập 4.2.3) ${}^tBB = 0$ và $B = 0$.

4.2.7 Ký hiệu $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, vậy $A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & \cdots & v_n \\ v_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ v_n & & & \end{pmatrix}$.

1) Vì các cột từ 2 đến $n+1$ của A cộng tuyến với $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, nên rõ ràng $\text{rank}(A) \leq 2$.

Mặt khác, tồn tại $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $v_i \neq 0$ và các cột 1 và $i+1$ lập nên một họ độc lập tuyến tính, từ đó $\text{rank}(A) \geq 2$.

Kết luận : $\text{rank}(A) = 2$.

2) Ta có : $A^2 = \begin{pmatrix} {}^tVV & 0 \\ 0 & V{}^tV \end{pmatrix}$.

Một mặt, vì $\text{Im}(A^2) \subset \text{Im}(A)$, ta có : $\text{rank}(A^2) \leq \text{rank}(A) = 2$.

Mặt khác, ${}^tVV \neq 0$ và $V{}^tV \neq 0$ (vì $V \neq 0$) vậy $\text{rank}(A^2) = \text{rank}({}^tVV) + \text{rank}(V{}^tV) \geq 2$.

♦ Trả lời : $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2) = 2$.

4.2.8 Vì $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(\{A, B\})$, nên mặt phẳng vectơ $P = \text{Vect}(\{A, B\})$ ổn định đối với f ; ta

ký hiệu g là tự đồng cấu cảm sinh bởi f trên P và $M = \text{Mat}_{(A, B)}(g) = \begin{pmatrix} -\text{tr}({}^tBA) & -\text{tr}({}^tBB) \\ \text{tr}({}^tAA) & \text{tr}({}^tAB) \end{pmatrix}$.

Ta có : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_g(\lambda) = \lambda^2 + \alpha$, trong đó $\alpha = -(\text{tr}({}^tAB))^2 + \text{tr}({}^tAA)\text{tr}({}^tBB)$.

Vì (A, B) là độc lập tuyến tính nên theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và khảo sát trường hợp đẳng thức áp dụng cho tích vô hướng chính tắc trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, ta có :

$$\alpha = -\langle A, B \rangle^2 + \|A\|^2 \|B\|^2 > 0.$$

Như vậy, χ_g không tách được trên $\mathbb{R}$. Vì g cảm sinh bởi f nên $\chi_g | \chi_f$ (xem bài tập 2.2.1), vậy

χ_f cũng không tách được trên $\mathbb{R}$.

♦ Trả lời : f không chéo hóa được.

4.2.9 a) Theo bài tập 4.2.5 : $\text{rank}({}^tAA) = \text{rank}(A) = p$. Vì $B = {}^tAA \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, ta kết luận :

$B \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$.

b) • $C = AB^{-1}{}^tA \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

• $C^2 = AB^{-1}({}^tAA)B^{-1}{}^tA = AB^{-1}BB^{-1}{}^tA = AB^{-1}{}^tA = C$.

• $\begin{cases} C = AB^{-1}{}^tA \Rightarrow \text{Im}(C) \subset \text{Im}(A) \\ CA = AB^{-1}{}^tAA = A \Rightarrow \text{Im}(A) \subset \text{Im}(C) \end{cases}$

• $\begin{cases} C = AB^{-1}{}^tA \Rightarrow \text{Ker}({}^tA) \subset \text{Ker}(C) \\ {}^tAC = {}^tAAB^{-1}{}^tA = {}^tA \Rightarrow \text{Ker}(C) \subset \text{Ker}({}^tA) \end{cases}$

4.2.10 a) Theo bài tập 8.1.31, Tập 5, tồn tại $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $H = UV$.

Vì $\text{rank}(H) = 1$, ta có : $U \neq 0$ (và $V \neq 0$).

Nếu V cộng tuyến với U , $V = \alpha U$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), vậy $H = \alpha U^2U$ đối xứng, loại trừ, như vậy (U, V) độc lập tuyến tính.

Giả sử $(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\})$. Ta có :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (UV + V{}^tU)X = \lambda X \Leftrightarrow ({}^tVX)U + ({}^tUX)V = \lambda X$$

1) Nếu $\lambda \neq 0$, thì $X \in \text{Vect}(U, V)$, $X = \alpha U + \beta V$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Ta có :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha {}^tVU + \beta {}^tVV = \lambda \alpha \\ \alpha {}^tUU + \beta {}^tUV = \lambda \beta \end{cases}$$

Định thức Δ của hệ này là :

$$\Delta = \begin{vmatrix} {}^tVU - \lambda & {}^tVV \\ {}^tUU & {}^tUV - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - {}^tUV)^2 - ({}^tUU)({}^tVV), ((\alpha, \beta) \text{ là ẩn}).$$

với ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng chính tắc trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$ và $\|\cdot\|$ là chuẩn Euclide liên kết :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \langle U, V \rangle \pm \|U\| \|V\|.$$

Nhận xét rằng $\langle U, V \rangle - \|U\| \|V\|$ và $\langle U, V \rangle + \|U\| \|V\|$ khác nhau và khác 0 (xem khảo sát trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, Mệnh đề 1, 4.2.1).

2) $AX=0 \Leftrightarrow \forall X=UX=0$, vậy $\text{Ker}(A)$ có số chiều $n-2$ (đó là $(\text{Vect}(U,V))^{\perp}$, xem Mệnh đề 1 4), 4.2.2).

♦ Trả lời : • $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\langle U, V \rangle + \|U\| \|V\|, \langle U, V \rangle - \|U\| \|V\|, 0\}$

• $\text{KGCR}(A, \langle U, V \rangle + \varepsilon \|U\| \|V\|) = \text{Vect}(\|V\|U + \varepsilon \|U\|V)$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

• $\text{KGCR}(A, 0) = (\text{Vect}(U, V))^{\perp}$, trong đó $\langle U, V \rangle = UV$, $\|U\| = (UV)^{\frac{1}{2}}$,

$\|V\| = (VV)^{\frac{1}{2}}$, (U, V) là một cặp trong $(M_{n,1}(\mathbb{R}))$ sao cho $H = UV$.

b) Vì H nhận ba gtr có các KGCR liên kết với các số chiều tương ứng 1, 1, $n-2$, ta kết luận A chéo hóa được.

Mặt khác, $A \in S_n(\mathbb{R})$, vậy A chéo hóa được (xem Định lý, 4.4.1).

♦ Trả lời : có.

4.2.11 a) $\|AV\|^2 = (AV)^T AV = V^T A^T AV = \langle V, A^T AV \rangle \leq \|V\| \|A^T AV\| \leq \|V\| \|AV\|$,

do đó: $\|AV\| = 0$ hay $\|AV\| \leq \|V\|$.

b) • Giả sử $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $AV = V$. Ta có :

$$\|AV - V\|^2 = V^T A^T AV - V^T AV - V^T AV + V^T V = \|AV\|^2 - V^T V - V^T V + V^T V = \|AV\|^2 - \|V\|^2 \leq 0,$$

do đó $AV = V$.

• Theo a), ta có thể thay thế A bằng A , vậy : $AV = V \Rightarrow AV = V$.

c) Giả sử $X \in \text{Ker}(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n)$. Khi đó $AX = X$, tồn tại $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $X = AY - Y$.

Theo b), $AX = X$.

Ta có : $X = AX = A(AY - Y) = AAY - AY$, do đó : $AAY = AY + AY - Y$, tiếp đó :

$$XX = (Y^T A - Y^T)(AY - Y) = Y^T(AAY - AY - AY + Y) = 0,$$

như vậy $X = 0$.

Điều này chứng tỏ $\text{Ker}(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n) = 0$.

• Theo định lý về hạng : $\dim(\text{Ker}(A - I_n)) + \dim(\text{Im}(A - I_n)) = n$, do đó cuối cùng :

$$M_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n).$$

4.2.12 $\Rightarrow$: hiển nhiên

$\Leftarrow$:

Giả sử : $\forall y \in F, (x|y) \leq \|y\|^2$.

Cho $y \in F$; ta có : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (x|\lambda y) \leq \|\lambda y\|^2$, từ đó :
$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, & (x|y) \leq \lambda \|y\|^2 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_-^*, & (x|y) \geq \lambda \|y\|^2 \end{cases}$$

Cho λ dần đến 0^+ , 0^- , ta suy ra : $(x|y) = 0$.

4.2.13 $\text{Ker}(E, \varphi)$ có ít nhất một c.s.c.t $B = (e_1, \dots, e_n)$ ký hiệu $\alpha_i = \varphi(e_i, e_i)$ với $1 \leq i \leq n$.

Cho $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i \neq j$.

Ta có $\varphi(e_i, e_j) = 0$, vậy (theo giả thiết) $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Cũng vậy, $\varphi(e_i + e_j, e_i - e_j) = \varphi(e_i, e_i) - \varphi(e_j, e_j) = 0$, vậy, $\psi(e_i + e_j, e_i - e_j) = 0$, tức là $\psi(e_i, e_i) = \psi(e_j, e_j)$, như vậy, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$ ký hiệu là α .
 Vậy ta có: $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\psi(e_i, e_j) = \alpha\varphi(e_i, e_j)$,
 từ đây theo tính chất song tuyến tính của φ và ψ : $\forall (x, y) \in E^2$, $\psi(x, y) = \alpha\varphi(x, y)$.
 Cuối cùng, $\alpha = \psi(e_1, e_1) > 0$.

$$4.2.14 \quad 1) A = (a_{ij})_{ij} \in (\mathbf{D}_n(\mathbb{R}))^\perp \Leftrightarrow (\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \text{tr}(A \text{ diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 0) \\ \Leftrightarrow \left(\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n a_{ii} \lambda_i = 0 \right) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{ii} = 0).$$

2) Giả sử $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$. Ta có:

$$\langle S, A \rangle = \text{tr}(SA) = \text{tr}({}^t(SA)) = \text{tr}({}^tAS) = \text{tr}(-AS) = -\text{tr}(A'S) = -\langle S, A \rangle,$$

do đó: $\langle S, A \rangle = 0$.

Điều này chứng tỏ: $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathbf{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$ và $\mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

$$\text{Hơn nữa, } \dim((\mathbf{A}_n(\mathbb{R}))^\perp) = n^2 - \dim(\mathbf{A}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})).$$

$$\diamond \text{ Trả lời: } \bullet (\mathbf{D}_n(\mathbb{R}))^\perp = \{A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}); \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{ii} = 0\}.$$

$$\bullet (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathbf{A}_n(\mathbb{R}), (\mathbf{A}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

4.2.15 1) Giả sử X là vectơ riêng của A : tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $AX = \lambda X$.

Ta có: $\forall Y \in H$, $X(AY) = ({}^tAX)Y = (\lambda X)Y = \lambda XY = 0$, vậy $\forall Y \in H$, $AY \in H$.

2) Đảo lại, giả sử H ổn định đối với A .

Khi đó: $\forall Y \in H \Rightarrow AY \in H \Rightarrow XAY = 0 \Rightarrow ({}^tAX)Y = 0$,

tức là: $H = X^\perp \subset ({}^tAX)^\perp$.

Chuyển sang các trực giao: $\text{Vect}(X) = X^{\perp\perp} \supset ({}^tAX)^{\perp\perp} = \text{Vect}({}^tAX)$.

Như vậy ${}^tAX \in \mathbb{R}X$, vậy X là vtr của A .

4.3.1 ((i) và (ii)) $\Rightarrow$ (iii): hiển nhiên.

((i) và (iii)) $\Rightarrow$ (ii): hiển nhiên.

((ii) và (iii)) $\Rightarrow$ (i): $A = {}^tAA = ({}^tAA) = {}^tA$ ((iii) không dùng đến).

$$4.3.2 \quad \bullet \text{ Ta có: } \begin{cases} {}^tVAU = {}^tV(AU) = {}^tV(\lambda U) = \lambda {}^tVU \\ {}^tVAU = {}^tV({}^tAU) = {}^t(V^tU) = {}^t(\mu V)U = \mu {}^tVU \end{cases}$$

do đó, vì $\lambda \neq \mu$: ${}^tVU = 0$.

$$\bullet (U^tV)^2 = U({}^tVU)V = 0.$$

$$4.3.3 \quad a) \text{ Ký hiệu } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

$$\bullet \begin{cases} {}^tVAV = {}^tV({}^tAA)V = \|AV\|^2 \geq 0 \\ {}^tVAV = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \end{cases}, \text{ do đó } \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \geq 0.$$

• Giả sử $B = I_n - A$. Vì $B = B$ và $B^2 = I_n - 2A + A^2 = I_n - A = B$ nên ta có thể áp dụng kết quả trên cho B thay cho A , từ đây: $n - \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \geq 0$.

b) Ký hiệu $A' = (|a_{ij}|)_{ij}$ và $U = \begin{pmatrix} 1 & - & 1 \\ | & 1 & | \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz: $(A'U)^2 \leq \|A'\|^2 \|U\|^2$ cho:

$$\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^2 \leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} 1^2 \right).$$

Nhưng: $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \text{tr}(AA) = \text{tr}(A)$, và vì A là một ma trận chiều nên $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$.

(Thực vậy, vì A triệt tiêu $X(X-1)$ nên A chéo hoá, xem Ví dụ 1), 2.4, và $A \sim \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó: $r = \text{rank}(A)$).

Như vậy: $\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^2 \leq n^2 \text{rank}(A)$.

c) • Theo b) và $\text{rank}(A) \leq n$: $\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right) \leq n^{3/2}$.

• Nếu $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| = n^{3/2}$, thì $\text{rank}(A) = n$, như vậy $A \in GL_n(\mathbb{R})$, tiếp đó $A = I_n$ (vì $A^2 = A$).

Nhưng khi đó $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| = n < n^{3/2}$, mâu thuẫn.

4.3.4 • Giả sử $n \geq 3$ và $M = (m_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho: $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), AM = MA$.

Cho $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i \neq j$; tồn tại $k \in \{1, \dots, n\}$ sao cho i, j, k đôi một khác nhau.

Vì $E_{jk} - E_{kj} \in A_n(\mathbb{R})$, ta có: $(E_{jk} - E_{kj})M = M(E_{jk} - E_{kj})$,

từ đó, lấy các phần tử thứ (i, k) : $0 = -m_{ij}$.

Cũng vậy chứng minh $m_{ji} = m_{ij}$.

Phần đảo chứng minh dễ dàng.

• Xét riêng trường hợp $n = 2$.

♦ Trả lời: Hoán tập của $A_n(\mathbb{R})$ là: $\begin{cases} \mathbb{R}I_n & \text{nếu } n \neq 2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$.

4.3.5 a) Cho $(k, l) \in \{0, \dots, n-1\}^2$ sao cho $k \neq l$.

Ta có $\langle U^k, U^l \rangle = \text{tr}(U^k U^l)$.

Vì $U^n = I_n$, ta có: $\langle U^k \rangle = U^{n-k} = U^{-k}$, từ đó $\langle U^k, U^l \rangle = \text{tr}(U^{l-k}) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } l \neq k \\ n & \text{nếu } l = k \end{cases}$.

Như vậy $(U^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ là một họ trực giao.

Vì: $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, U^k \neq 0$ nên $(U^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ là một cơ sở trực giao đối với F (xem Mệnh đề 2, 4.2.2).

Ký hiệu $L_k = \frac{1}{\sqrt{n}} U^k$ ($0 \leq k \leq n-1$). Theo a), $(L_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ là một csc của F , từ đó (xem

Mệnh đề 4, 4.3.1) : $p_f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \langle L_k, A \rangle L_k$.

Với mọi k thuộc $\{0, \dots, n-1\}$, ta có : $\langle L_k, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tr}(U^k A) = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tr}(U^{n-k} A) = \frac{1}{\sqrt{n}}$,

từ đó : $p_f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} L_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k$.

♦ Trả lời : $p_f(A) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}$.

4.3.6 1) Giả sử $M = (m_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sao cho : $\forall \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), M\Omega = \Omega M$.

• Cho $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\Omega = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Ta có : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{ij}\varepsilon_j = \varepsilon_i m_{ij}$.

Giả sử $i \neq j$. Ta có thể chọn $\varepsilon_i = 1, \varepsilon_j = -1$, từ đó $m_{ij} = 0$.

Điều này chứng tỏ : $M = \operatorname{diag}(m_{11}, \dots, m_{nn})$.

• Cho $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i < j$. Sử dụng $\Omega = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ji} - E_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, ta được $m_{ii} = m_{jj}$.

Như vậy $M \in \mathbb{R}I_n$.

2) Phân đảo là hiển nhiên.

♦ Trả lời : Hoán tập của $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ là $\mathbb{R}I_n$.

4.3.7 a) Giả sử $(x, y) \in \operatorname{Ker}(f - e) \times \operatorname{Im}(f - e)$. Tồn tại $z \in E$ sao cho $y = f(z) - z$, và $f(x) = x$, từ đó :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) - z \rangle = \langle x, f(z) \rangle - \langle x, z \rangle = \langle f(x), f(z) \rangle - \langle x, z \rangle = 0.$$

b) Theo định lý về hạng, $\dim(\operatorname{Ker}(f - e)) + \dim(\operatorname{Im}(f - e)) = \dim E$ và theo a) :

$$\operatorname{Ker}(f - e) \cap \operatorname{Im}(f - e) = \{0\}.$$

4.3.8 Kge E có ít nhất một cste $\mathcal{B}$; ký hiệu $\Omega = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Khi đó :

$$(i) \Leftrightarrow {}^t\Omega\Omega = I_n, (ii) \Leftrightarrow \Omega^2 = -I_n, (iii) \Leftrightarrow {}^t\Omega = -\Omega,$$

(xem bài tập 4.1.1).

$$((i) \text{ và } (ii)) \Rightarrow (iii) : {}^t\Omega\Omega = I_n = -\Omega^2 \Rightarrow {}^t\Omega = -\Omega \text{ vì } \Omega \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$((i) \text{ và } (iii)) \Rightarrow (ii) : \Omega^2 = ({}^t\Omega)\Omega = -I_n$$

$$((ii) \text{ và } (iii)) \Rightarrow (i) : {}^t\Omega\Omega = (-\Omega)\Omega = -\Omega^2 = I_n.$$

4.3.9 1) Xem Mệnh đề 8, 4.3.1.

2) Đảo lại, giả sử $f \in \mathcal{O}(E)$ chéo hóa được. Vì $f \in \mathcal{O}(E)$ nên : $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Vậy tồn tại một cste $\mathcal{B}$ của E sao cho : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$, trong đó $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Khi đó ta có $f^2 = e$, vậy f là một phép đối xứng.

Cho $x \in \operatorname{Ker}(f - e), y \in \operatorname{Ker}(f + e)$, ta có :

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle, \text{ từ đây } \langle x, y \rangle = 0.$$

Cuối cùng, f là một phép đối xứng trực giao.

4.3.10 1) Cho $\Omega = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Ta có :

$$\|\mathcal{Q}\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) = \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

vậy $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ bị chặn, hơn nữa: $\forall \mathcal{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|\mathcal{Q}\| = \sqrt{n}$.

2) $\bullet \forall \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2\| \leq \|\mathcal{Q}_1\| + \|\mathcal{Q}_2\| = 2\sqrt{n}$.

$\bullet I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), -I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|I_n - (-I_n)\| = 2\sqrt{n}$.

$\diamond$ **Trả lời:** $\text{diam}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = 2\sqrt{n}$.

4.3.11 1) Rõ ràng rằng $I_n \subset \Sigma_n$ và $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ như vậy $I_n \subset \Sigma_n \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2) Giả sử $A = (a_{ij})_{ij} \in I_n \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ta có:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij}(1 - a_{ij}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1 - 1 = 0, \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij}(1 - a_{ij}) \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Do đó: $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} \in \{0, 1\}$.

Cho $i \in \{1, \dots, n\}$. Vì $\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \right\}$, tồn tại duy nhất $j \in \{1, \dots, n\}$ sao cho:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \\ \forall k \in \{1, \dots, n\} - \{j\}, a_{ik} = 0 \end{cases}$$

Ánh xạ $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ được xác định như vậy là đơn ánh vì nếu $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ thỏa

mã $i_1 \neq i_2$ và $\sigma(i_1) = \sigma(i_2)$, thì $\sum_{i=1}^n a_{i\sigma(i_1)}^2 \geq a_{i_1\sigma(i_1)}^2 + a_{i_2\sigma(i_1)}^2 = 2$, điều này mâu thuẫn với

$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Như vậy $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ là đơn ánh, vậy là song ánh, và cuối cùng: $A \in I_n$.

4.3.12 Giả sử $M \in \mathcal{O}_{mp}(\mathbb{R})$ và $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (trường hợp $D \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ chứng minh tương tự).

Phép nhân theo khối bắt đầu từ $MM = I_{mp}$ cho ta:

$${}^1AA + {}^1CC = I_n, {}^1AB + {}^1CD = 0, {}^1BA + {}^1DC = 0, {}^1BB + {}^1DD = I_p.$$

Tiếp đó: $\bullet \begin{cases} {}^1AA = I_n \\ {}^1AA + {}^1CC = I_n \end{cases} \Rightarrow {}^1CC = 0 \Rightarrow C = 0$, xem bài tập 4.2.3

$\bullet \begin{cases} C = 0 \\ {}^1AB + {}^1CD = 0 \end{cases} \Rightarrow {}^1AB = 0 \Rightarrow B = 0$, vì $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$

$\bullet \begin{cases} C = 0 \\ {}^1CC + {}^1DD = I_p \end{cases} \Rightarrow {}^1DD = I_p \Leftrightarrow D \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$.

4.3.13 a) $\bullet {}^1(AB) = {}^1BA = B(-A) = -BA = -AB$, như vậy $AB \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$\bullet {}^1(AX)BX = {}^1X{}^1ABX = -{}^1X(AB)X = 0$, vì $AB \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, xem bài tập 4.1.1.

$$b) \|(A+B)X\|^2 = \|AX\|^2 + 2(AX)BX + \|BX\|^2 = \|AX\|^2 + \|BX\|^2,$$

$$\text{và cũng như vậy: } \|(A-B)X\|^2 = \|AX\|^2 + \|BX\|^2.$$

$$c) \bullet (A+B)X=0 \Leftrightarrow \|(A+B)X\|=0 \Leftrightarrow \|(A-B)X\|=0 \Leftrightarrow (A-B)X=0,$$

$$\text{như vậy: } \begin{cases} (A+B)X=0 \\ (A-B)X=0 \end{cases} \text{ hay } \Rightarrow \begin{cases} (A+B)X=0 \\ (A-B)X=0 \end{cases} \Rightarrow BX=0 \Rightarrow X=0.$$

Điều này chứng tỏ rằng $A+B$ và $A-B$ là khả nghịch.

• Ký hiệu $\mathcal{Q} = (A+B)(A-B)^{-1}$. Vì A và B giao hoán nên $A+B$ và $A-B$ giao hoán, do đó:

$$\begin{aligned} {}^t\mathcal{Q}\mathcal{Q} &= {}^t(A-B)^{-1}(A+B)(A+B)(A-B)^{-1} = (-A-B)^{-1}(-A+B)(A+B)(A-B)^{-1} \\ &= (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

4.4.1 a) φ liên tục trên compact S , vậy bị chặn và đạt các biên của nó.

b) Cho $\theta \in \mathbb{R}$; vì $\|\cos\theta x_0 + \sin\theta x_1\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ta có: $\varphi(\cos\theta x_0 + \sin\theta x_1) \leq \varphi(x_0)$,

từ đó bằng cách khai triển: $2\sin\theta\cos\theta\langle x_1, f(x_0) \rangle \leq \sin^2\theta(\langle x_0, f(x_0) \rangle - \langle x_1, f(x_1) \rangle)$.

$$\text{Vậy ta có: } \begin{cases} \forall \theta \in]0; \pi[, & 2\cos\theta\langle x_1, f(x_0) \rangle \leq \sin\theta(\langle x_0, f(x_0) \rangle - \langle x_1, f(x_1) \rangle) \\ \forall \theta \in]-\pi; 0[, & 2\cos\theta\langle x_1, f(x_0) \rangle \geq \sin\theta(\langle x_0, f(x_0) \rangle - \langle x_1, f(x_1) \rangle) \end{cases}.$$

Cho θ dần tới 0^+ và 0^- tương ứng, ta suy ra: $\langle x_1, f(x_0) \rangle = 0$.

c) • Cho $x \in x_0^\perp - \{0\}$. Theo b), $\langle \frac{1}{\|x\|}x, f(x_0) \rangle = 0$, vậy $\langle x, f(x_0) \rangle = 0$.

• Điều này chứng tỏ: $x_0^\perp \subset (f(x_0))^\perp$, từ đây, bằng cách chuyển sang các trực giao:

$$\mathbb{R}x_0 = x_0^{\perp\perp} \supset (f(x_0))^{\perp\perp} = \mathbb{R}f(x_0), \text{ xem thêm bài tập 4.2.15.}$$

Như vậy $f(x_0) \in \mathbb{R}x_0$, vậy x_0 là vectơ riêng của f .

$$4.4.2 \text{ Cho } A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \text{ ta có: } \chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2, \text{ vậy } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}.$$

Nếu A chéo hóa được thì phải có $A = I_2$, mâu thuẫn.

$$\diamond \text{ Trả lời: } \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.3 Vì $A + {}^tA$ đối xứng nên, theo định lý cơ bản, tồn tại $\mathcal{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho

$$A + {}^tA = \mathcal{Q}D\mathcal{Q}^{-1}.$$

Mặt khác, vì $A + {}^tA$ lũy linh nên tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(A + {}^tA)^p = 0$, từ đó $D^p = 0$.

Ký hiệu $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ta có $\lambda_1^p = \dots = \lambda_n^p = 0$, suy ra $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, $D = 0$,

$$A + {}^tA = 0, A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

4.4.4 Ký hiệu $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Theo định lý cơ bản, tồn tại $\mathcal{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

sao cho $S = \mathcal{Q}D\mathcal{Q}^{-1}$. Ký hiệu $C_1, \dots, C_n$ là các cột của $\mathcal{Q}$, $X = C_1 + \dots + C_n$, $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$.

Khi đó ta có: ${}^tXX = n$ và ${}^tXSX = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(S)$.

Hơn nữa: ${}^tXAX = {}^t(X{}^tAX) = {}^tXAX$, vậy: ${}^tXSX = {}^tXAX$.

Cuối cùng, $\text{tr}(S) = \frac{1}{2} (\text{tr}(A) + \text{tr}(A')) = \text{tr}(A)$.

4.4.5 Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $D \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Vậy ta có: $A = \Omega(D + iI_n)\Omega^{-1}$.

Với ký hiệu $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$: $\det(D + iI_n) = \prod_{k=1}^n (\lambda_k + i) \neq 0$, vì: $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Như vậy, $D + iI_n \in GL_n(\mathbb{R})$ và $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Ví dụ: } \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2+i & 0 & 3 \\ 4 & 0 & i & 7 \\ -5 & 3 & 7 & 3+i \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{R}).$$

4.4.6 1) Cho (X, Y) thích hợp.

Khi đó X và Y khả nghịch và: $Y = (X^{-1}X)^{-1} = (X^T X)^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$, tương tự: $X \in S_n(\mathbb{R})$.

Vậy ta có $\begin{cases} XYX = I_n \\ YXY = I_n \end{cases}$, do đó $\begin{cases} (XY)^2 = (XYX)Y = Y \\ (XY)^2 = X(YXY) = X \end{cases}$, vậy $X^3 = XYX = I_n$.

Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho $X = \Omega D \Omega^{-1}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} X^3 = I_n &\Rightarrow D^3 = I_n \Rightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k^3 = 1) \\ &\Rightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 1) \Rightarrow D = I_n \Rightarrow X = I_n. \end{aligned}$$

vậy $X = Y = I_n$.

2) Phần đảo là tầm thường.

♦ Trả lời: $\{(I_n, I_n)\}$.

4.4.7 a) Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$

sao cho $S = \Omega D \Omega^{-1}$. Cho $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho ${}^t X X = 1$; ký hiệu $Y = \Omega^{-1} X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Ta có: $\begin{cases} {}^t Y Y = {}^t X {}^t \Omega^{-1} \Omega^{-1} X = {}^t X \Omega \Omega^{-1} X = {}^t X X = 1 \\ {}^t Y D Y = {}^t X {}^t \Omega^{-1} D \Omega^{-1} X = {}^t X \Omega D \Omega^{-1} X = {}^t X S X. \end{cases}$

Mặt khác: ${}^t Y D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$, do đó, với ký hiệu $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ và $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$:

$$\alpha = \alpha \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq {}^t Y D Y \leq \beta \sum_{i=1}^n y_i^2 = \beta.$$

b) Ký hiệu $\Sigma = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}); {}^t X X = 1\}$, $\phi: S \rightarrow \mathbb{R}$. Theo a), ϕ bị chặn và (với các ký hiệu $X \mapsto {}^t X S X$

trong a): $\forall X \in \Sigma, \alpha \leq \phi(X) \leq \beta$.

Giữ nguyên các ký hiệu trong a), giả sử, chẳng hạn, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ và ký hiệu $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$X_1 = \Omega Y_1, X_n = \Omega Y_n.$$

Ta có: $X_1 \in \mathcal{L}$, $X_n \in \mathcal{L}$, $\phi(X_1) = Y_1 D Y_1 = \lambda_1$, $\phi(X_n) = Y_n D Y_n = \lambda_n$.

Điều này chứng tỏ ϕ đạt các biên dưới và trên tương ứng (ít nhất) tại X_1 và X_n .

4.4.8 • Theo định lý cơ bản, A là ma trận thực, đối xứng và chéo hóa được trong $M_n(\mathbb{R})$.

Ký hiệu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các gtr của A , được sắp xếp sao cho: $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

• Cho $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x_j \right) + d_i x_i = \lambda x_i \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n x_j = (\lambda + 1 - d_i) x_i \right). \end{aligned}$$

Trước hết nhận xét rằng các $d_i - 1$ ($1 \leq i \leq n$) không phải là các gtr của A . Thật vậy, nếu

$\lambda = d_i - 1$, thì $\sum_{j=1}^n x_j = 0$, từ đó với mọi k thuộc $\{1, \dots, n\} - \{i\}$, $(\lambda + 1 - d_k) x_k = 0$ vậy $x_k = 0$

(vì $d_1, \dots, d_n$ đôi một khác nhau). Nhưng khi đó thì $x_i = -\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} x_k = 0$, từ đó $X = 0$, loại trừ.

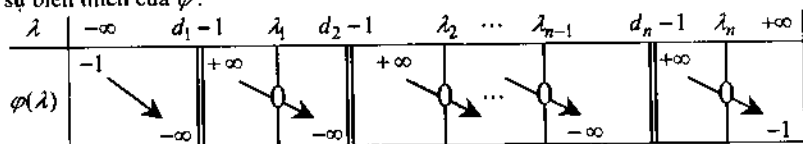
Vậy ta có thể giả sử: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda + 1 - d_i \neq 0$. Ký hiệu $s = \sum_{i=1}^n x_i$, ta có $s \neq 0$.

Thật vậy, nếu $s = 0$ thì $(\forall i \in \{1, \dots, n\}, (\lambda + 1 - d_i) x_i = 0)$, vậy $X = 0$, loại trừ.

$$\text{Như vậy: } AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} s = \sum_{i=1}^n x_i \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{s}{\lambda + 1 - d_i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + 1 - d_i} = 1 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{s}{\lambda + 1 - d_i} \end{cases}$$

Ký hiệu ϕ là hàm số từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda + 1 - d_i}$. Tính ϕ' và suy ra

sự biến thiên của ϕ :



Vậy ta có: $d_1 - 1 < \lambda_1 < d_2 - 1 < \dots < \lambda_{n-1} < d_n - 1 < \lambda_n$.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} d_1 - 1 < \lambda_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} - 1 < \lambda_{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (d_i - 1) < \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n d_i \right) - d_n - (n-1) < \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) - \lambda_n$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}(A) - d_n - (n-1) < \text{tr}(A) - \lambda_n \Leftrightarrow \lambda_n < d_n + (n-1).$$

4.4.9 • Rõ ràng rằng $\psi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\psi(x, y) = \phi(a)\phi(b)\phi(x, y) - \frac{1}{2} \phi(a, b)(\phi(ax)\phi(b, y) + \phi(b, x)\phi(a, y))$$

là một dstdx trên $E \times E$ và ψ là dtp liên kết với ψ .

• Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz đối với ϕ , với mọi x thuộc E ta có :

$$\phi(a, b)^2 \leq \phi(a)\phi(b), (\phi(ax))^2 \leq \phi(a)\phi(x), (\phi(b, x))^2 \leq \phi(b)\phi(x),$$

từ đó thực hiện phép nhân và do ϕ dương : $\phi(a, b)\phi(ax)\phi(b, x) \leq \phi(a)\phi(b)\phi(x)$.

Như vậy, ψ là một dtp dương.

• Cho $x \in E$ sao cho $\psi(x) = 0$.

Ta giả sử $\phi(x) > 0$. Theo các bất đẳng thức trên và vì $\phi(a) > 0, \phi(b) > 0, \phi(x) > 0$, ta suy ra $|\phi(a, b)| = \phi(a)\phi(b)$, trái với sự độc lập tuyến tính của (a, b) (xem Mệnh đề 1.4.2.1).

4.4.10 Chứng minh dễ dàng dựa trên định nghĩa dương và xác định dương.

$$\begin{aligned} 4.4.11 \bullet \left\{ \begin{array}{l} A_1 \leq B_1 \\ A_2 \leq B_2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_1 - A_1 \in S_n^+ \\ B_2 - A_2 \in S_n^+ \end{array} \right. \\ &\Rightarrow (B_1 + B_2) - (A_1 + A_2) = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2) \in S_n^+ \\ &\Rightarrow A_1 + A_2 \leq B_1 + B_2, \text{ xem Nhận xét 1) 3), 4.4.3.} \end{aligned}$$

• Giống như Nhận xét 1) 4), 4.4.3

4.4.12 a) • $\forall k \in \{1, \dots, p\}, S_k^2 \in S_n^+$, xem Nhận xét 1) 5), 4.4.3.

• $\sum_{k=1}^p S_k^2 \in S_n^+$, xem Nhận xét 1) 3), 4.4.3.

b) $\Leftarrow$: Hiển nhiên.

$\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} S = 0 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \{1, \dots, p\}, {}^tXS_k^2X \geq 0 \\ \sum_{k=1}^p {}^tXS_k^2X = {}^tXSX = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall k \in \{1, \dots, p\}, {}^tXS_k^2X = 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, p\}, \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|S_kX\| = 0) \\ &\Rightarrow (\forall k \in \{1, \dots, p\}, S_k = 0). \end{aligned}$$

4.4.13 a) ${}^t(ASA) = {}^tA'SA = {}^tASA$

b) $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX(ASA)X = (AX)S(AX) \geq 0$

c) $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ({}^tX(ASA)X = 0 \Leftrightarrow (AX)S(AX) = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X = 0)$.

4.4.14 • $'(AB + BA) = 'B'A + 'A'B = BA + AB = AB + BA$.

• $A^2 + B^2 - (AB + BA) = (A - B)^2 \in S_n^+$, xem Nhận xét 1) 5), 4.4.3.

4.4.15 Khảo sát ví dụ : $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, trong đó $A \in S_2^+$, $B \in S_2^+$, nhưng

$AB + BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2^+$, vì $\det(AB + BA) = -1 < 0$; hoặc với $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $'X(AB + BA)X = -2 < 0$.

◇ Trả lời : • đúng, nếu $n = 1$

• không, nếu $n \geq 2$.

4.4.16 Cho $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $(A + B)X = 0$. Ta có : $'XA = '(AX) = -(BX) = 'XB$,

và $\begin{cases} 'XAX = 'X(AX) = -'XBX \\ 'XAX = ('XA)X = 'XBX \end{cases}$, vậy $'XAX = 0$.

Vì $A \in S_n^{++}$, ta suy ra $X = 0$.

Điều này chứng tỏ : $A + B \in GL_n(\mathbb{R})$.

4.4.17 a) $'AA \in S_p(\mathbb{R})$ và : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $'X('AA)X = '(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$.

b) Theo bài tập 4.2.5 $\text{rank}(AA) = \text{rank}(A)$, do đó : $'AA \in S_p^{++} \Leftrightarrow \text{rank}(AA) = p \Leftrightarrow \text{rank}(A) = p$.

4.4.18 Cho $X_k \in M_{n_k,1}(\mathbb{R})$ ($1 \leq k \leq N$), $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ phân tích thành khối.

Khi đó ta có : $'XSX = \sum_{k=1}^N 'X_k S_k X_k$.

a) $S \in S_n^+ \Leftrightarrow (\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), 'XSX \geq 0) \Leftrightarrow \left(\forall (X_1, \dots, X_N) \in \prod_{k=1}^N M_{n_k,1}(\mathbb{R}), \sum_{k=1}^N 'X_k S_k X_k \geq 0 \right)$

$\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, N\}, \forall X_k \in M_{n_k,1}(\mathbb{R}), 'X_k S_k X_k \geq 0) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, N\}, S_k \in S_{n_k}^+)$.

b) Cùng phương pháp như trong a).

4.4.19 Với ký hiệu $P = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -B^{-1}U & I_q \end{pmatrix}$, ta có $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $'P = \begin{pmatrix} I_p & -UB^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, và

$$'PSP = \begin{pmatrix} A - UB^{-1}U & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Ta suy ra từ bài tập 4.4.18 :

$$S \in S_{p+q}^+ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A - UB^{-1}U & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in S_{p+q}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} A - UB^{-1}U \in S_p^+ \\ B \in S_q^+ \end{cases} \Leftrightarrow A - UB^{-1}U \in S_p^+.$$

b) Cùng phương pháp.

4.4.20 a) Ánh xạ $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ liên tục, $\{0\}$ đóng trong $M_n(\mathbb{R})$, và $A \mapsto {}^t A - A$

$S_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$; vậy $S_n(\mathbb{R})$ đóng trong $M_n(\mathbb{R})$.

b) Cho $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong S_n^+ , hội tụ đến một phần tử A thuộc $M_n(\mathbb{R})$.

• Theo a), vì $S_n^+ \subset S_n(\mathbb{R})$, ta đã có: $A \in S_n(\mathbb{R})$.

• Cho $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ta có: $\forall k \in \mathbb{N}, {}^t X A_k X \geq 0$. Vì $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$, nên ta suy ra:

$${}^t X A_k X \xrightarrow{k \rightarrow \infty} {}^t X A X.$$

Chuyển sang giới hạn trong các bất đẳng thức, ta được ${}^t X A X \geq 0$, vậy $A \in S_n^+$.

Điều này chứng tỏ rằng S_n^+ đóng trong $M_n(\mathbb{R})$.

Cuối cùng, $S_n^+ = S_n^+ \cap S_n(\mathbb{R})$, vậy S_n^+ cũng đóng trong $S_n(\mathbb{R})$.

4.4.21 Cho $A \in S_n^+$.

1) Ta có với mọi p thuộc $\mathbb{N}$ và mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} {}^t X A^{2p} X = {}^t (A^p X)(A^p X) \geq 0 \\ {}^t X A^{2p+1} X = {}^t (A^p X) A (A^p X) \geq 0 \end{cases}$$

Như vậy: $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in S_n^+$, và như vậy $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k!} A^k \in S_n^+$.

$$2) \text{ Vi } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} A^k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^A \\ \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} A^k \in S_n^+ \\ S_n^+ \text{ đóng trong } S_n(\mathbb{R}) \text{ (xem bài tập 4.4.20)} \end{array} \right\}, \text{ suy ra } e^A - I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \in S_n^+.$$

3) Giả sử $e^A = I_n$.

$$\text{Cho } X \in M_{n,1}(\mathbb{R}). \text{ Ta có: } \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k!} {}^t X A^k X \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} {}^t X A^k X = {}^t X (e^A - I_n) X = 0 \end{array} \right\}, \text{ từ đó: } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k!} {}^t X A^k X = 0.$$

Đặc biệt: $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X = 0$, vậy $A = 0$.

Phân đảo chứng minh dễ dàng.

Nhận xét: Ta cũng có thể sử dụng định lý cơ bản.

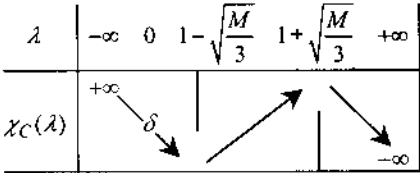
♦ Trả lời: $\forall A \in S_n^+, (e^A = I_n \Leftrightarrow A = 0)$.

$$4.4.22 \text{ Ta ký hiệu } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, SX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ Theo giả thiết: } \begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k \leq 0 \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, y_k \geq 0, \\ {}^t X S X = \sum_{k=1}^n x_k y_k \geq 0 \end{cases}$$

từ đó ${}^t X S X = 0$, và $X = 0$ (vì $S \in S_n^{++}$).

4.4.23 Lập đa thức đặc trưng: $\chi_C(\lambda) = (1 - \lambda)^3 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (1 - \lambda) M$,

trong đó $M = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$.
 Xét sự biến thiên của χ_C :



Vì $\chi_C(0) = \delta > 0$ nên χ_C không có nghiệm nào trong $] - \infty; 0]$. Mặt khác, theo định lý cơ bản, χ_C tách được trên $\mathbb{R}$, như vậy, các gtr của C đều > 0 , vậy (Định lý, 4.4.3) : $C \in S_3^{++}$.

4.4.24 Khảo sát ví dụ $n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ không chéo hóa được.
 ◇ **Trả lời :** • đúng, nếu $n = 1$
 • không, nếu $n \geq 2$.

4.4.25 Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho

$A = \Omega D \Omega^{-1}.$

- a) $\phi \geq 0 \Leftrightarrow A \in S_n^+ \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0) \Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$.
 b) $\phi > 0 \Leftrightarrow A \in S_n^{++} \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0) \Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$.

4.4.26 Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho

$S = \Omega D \Omega^{-1}$. Với ký hiệu $R = \Omega \begin{pmatrix} \sqrt[p]{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[p]{\lambda_n} \end{pmatrix} \Omega^{-1}$, ta có : $R \in S_n(\mathbb{R})$ (và hơn nữa,

$R \in S_n^+$ nếu $S \in S_n^+$ vì khi đó : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$) và $R^p = \Omega D \Omega^{-1} = S$.

4.4.27 a) Ta có ${}^tAA \in S_n^+$, vậy (Định lý, 4.4.3) : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mu_i \geq 0$.

b) $\sum_{j=1}^n \mu_j = \text{tr}({}^tAA) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)$.

4.4.28 Cho $(S, S') \in (S_n^+)^2$.

Theo định lý cơ bản tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R}), D \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho $S = \Omega D \Omega^{-1}$. Ký hiệu $B = \Omega^{-1} S' \Omega$. Khi đó ta có : $S = \Omega D \Omega^{-1}, S' = \Omega B \Omega^{-1}, SS' = \Omega D B \Omega^{-1}$ từ đó :

$$\text{tr}(SS') = \text{tr}(DB) \text{ và } \text{tr}(S) \text{tr}(S') = \text{tr}(D)\text{tr}(B).$$

Nói cách khác, ta đã chuyển vấn đề sang cặp (D, B) thay cho cặp (S, S') , trong đó D là ma trận chéo.

$$\text{Ta ký hiệu } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ và } B = (b_{ij}).$$

Vì $S \in S_n^+$ nên ta có: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$.

Mặt khác, $B \in S_n^+$ vì: $B = \mathcal{Q}^{-1}S'\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \in O_n(\mathbb{R})$, $S' \in S_n^+$. Đặc biệt, nếu ký hiệu $(E_1, \dots, E_n)$ là cơ sở chính tắc của $M_{n,1}(\mathbb{R})$ thì: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_{ii} = {}^tE_i B E_i \geq 0$.

$$a) \text{ Rõ ràng (chẳng hạn bằng cách khai triển) rằng: } \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_{ii} \right),$$

do đó: $\text{tr}(SS') = \text{tr}(DB) \leq \text{tr}(D)\text{tr}(B) = \text{tr}(S)\text{tr}(S')$.

b) Nếu $(S, S') \in (S_n^{++})^2$, thì: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (\lambda_i > 0 \text{ và } b_{ii} > 0)$,

$$\text{do đó (nếu } n \geq 2): \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{ii} < \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_{ii} \right), \text{ và như vậy: } \text{tr}(SS') < \text{tr}(S)\text{tr}(S').$$

4.4.29 Giả sử $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$. Ta có:

$$\|AB\|^2 = \text{tr}({}^t(AB)AB) = \text{tr}({}^tB({}^tAAB)) = \text{tr}({}^t(AA)(B'B)).$$

Theo bài tập 4.4.28, vì ${}^tAA \in S_n^+$ và $B'B \in S_n^+$, ta có:

$$\text{tr}({}^tAA)(B'B) \leq \text{tr}({}^tAA)\text{tr}(B'B) = \text{tr}({}^tAA)\text{tr}({}^tBB) = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

Nhận xét: Nói riêng: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, và như vậy: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|^{1/k} \leq \|A\|$.

4.4.30 1) Với $p = 2$, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz đối với tích vô hướng chính tắc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ trên $M_n(\mathbb{R})$:

$$|\text{tr}(A_1 A_2)| = |\langle {}^tA_1, A_2 \rangle| \leq \|{}^tA_1\| \|A_2\| = \|A_1\| \|A_2\|.$$

$$2) \text{ Cho } p \geq 3. \text{ Theo trường hợp } p = 2: \left| \text{tr} \left(\prod_{i=1}^p A_i \right) \right| \leq \left\| \prod_{i=1}^{p-1} A_i \right\| \|A_p\|$$

$$\text{Mặt khác, theo bài tập 4.4.29 và bằng quy nạp đơn giản, ta có: } \left\| \prod_{i=1}^{p-1} A_i \right\| \leq \prod_{i=1}^{p-1} \|A_i\|.$$

$$\text{Từ đó: } \left| \text{tr} \left(\prod_{i=1}^p A_i \right) \right| \leq \prod_{i=1}^p \|A_i\|.$$

4.4.31 Chỉ cần áp dụng bài tập 4.4.7 cho $S = {}^tAA \in S_n^+$ và nhận xét:

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}): {}^tXSX = \|AX\|^2.$$

4.4.32 1) Giả sử $A \in S_n^{++}$. Ký hiệu $B = (E_1, \dots, E_n)$ là cơ sở chính tắc của $M_{n,1}(\mathbb{R})$, ϕ là đtđp của ma trận A trong B , và với mỗi i thuộc $\{1, \dots, n\}$, ϕ_i là đtđp trên Vect $(E_1, \dots, E_n)$ của ma trận

$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ & a_2 & \cdots & a_2 \\ & | & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i \end{pmatrix}$ trong cơ sở $(E_1, \dots, E_n)$. Theo bài tập 4.4.10, mỗi ϕ , đều xác định dương,

vậy: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ & a_2 & \cdots & a_2 \\ & | & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i \end{vmatrix} > 0$, (bài tập 4.4.25).

Thay $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$ ($2 \leq k \leq i$):

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ & a_2 & \cdots & a_2 \\ & | & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_i - a_{i-1} \end{vmatrix} = a_1(a_2 - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1}).$$

Do đó: $a_1 > 0, a_1(a_2 - a_1) > 0, \dots, a_1(a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1}) > 0$, và như vậy $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

2) Đảo lại, giả sử $0 < a_1 < \dots < a_n$.

Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (sẽ chọn sau) và $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \in T_{n,n}(\mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } TT = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^2 \\ & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^2 & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \end{pmatrix}.$$

Bằng cách chọn $\alpha_1 = \sqrt{a_1} > 0, \alpha_2 = \sqrt{a_2 - a_1} > 0, \dots, \alpha_n = \sqrt{a_n - a_{n-1}} > 0$, ta có $T \in GL_n(\mathbb{R})$ và $A = TT$ do đó: $A \in S_n^{++}$.

4.4.33 Trước tiên nhận xét rằng: $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Theo ví dụ, 9.6.2 4), Tập 5:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & & b \\ & \ddots & \\ b & & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda + (n-1)b)(a - \lambda - b)^{n-1}.$$

Theo Định lý, 4.4.3:

- $A \in S_n^+ \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \begin{cases} a + (n-1)b \geq 0 \\ a - b \geq 0 \end{cases}$
- $A \in S_n^{++} \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} a + (n-1)b > 0 \\ a - b > 0 \end{cases}$

- ◊ Trả lời:
- $A \in S_n^+ \Leftrightarrow a \geq \text{Max}(b, (1-n)b)$
 - $A \in S_n^{++} \Leftrightarrow a > \text{Max}(b, (1-n)b)$

4.4.34 Trước tiên nhận xét rằng : $S \in S_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ký hiệu P_{n+1} là đa thức đặc trưng của S và khai triển đối với dòng thứ $(n+1)$:

$$P_{n+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \beta - \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & & 0 & \beta - \lambda \end{vmatrix}_{[n+1]} = (\beta - \lambda)P_n(\lambda) + (-1)^n x_n \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \beta - \lambda & & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & \beta - \lambda & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (\beta - \lambda)P_n(\lambda) - (\beta - \lambda)^{n-1} x_n^2.$$

Từ đó suy ra : $\chi_S(\lambda) = (\beta - \lambda)^{n-1} T_n(\lambda)$,

trong đó T_n là tam thức xác định bởi $T_n(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \left(\alpha\beta - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$.

Biệt thức của T là $(\alpha - \beta)^2 + 4 \sum_{k=1}^n x_k^2$ và các nghiệm của $T > 0$ khi và chỉ khi tổng và tích

của chúng > 0 , tức là : $\alpha + \beta > 0$ và $\alpha\beta - \sum_{k=1}^n x_k^2 > 0$.

Cuối cùng áp dụng Định lý, 4.4.3.

♦ **Trả lời :** $\beta > 0$ và $\alpha > \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n x_k^2$.

4.4.35 Theo bài tập 2.3.7, các gtr của S là : $\lambda_p = a + 2b \cos \frac{p\pi}{n+1}$, $1 \leq p \leq n$.

Vậy (xem Định lý, 4.4.3):

$$S \in S_n^+ \Leftrightarrow \left(\forall p \in \{1, \dots, n\}, 2b \cos \frac{p\pi}{n+1} \geq -a \right) \Leftrightarrow -2|b| \cos \frac{\pi}{n+1} \geq -a,$$

và tiến hành tương tự với S_n^{++} .

♦ **Trả lời :** • $S \in S_n^+ \Leftrightarrow 2|b| \cos \frac{\pi}{n+1} \leq a$
 • $S \in S_n^{++} \Leftrightarrow 2|b| \cos \frac{\pi}{n+1} < a$.

4.4.36 $\Rightarrow$: Hiển nhiên

$\Leftarrow$:

Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $AS^k = S^kA$.

Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Hơn nữa, do $S \in S_n^+$: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \geq 0$.

Khi đó ta có : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $(\lambda_i^k = \lambda_j^k \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j)$

Vậy (sử dụng nội suy Lagrange trên các λ_i^k đôi một phân biệt) tồn tại $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = P(\lambda_i^k).$$

Khi đó $D = P(D^k)$, và $S = P(S^k)$. Vì S^k giao hoán với A và S là một đa thức của S^k , ta kết luận rằng S giao hoán với A .

4.4.37 a) Rõ ràng rằng $f \in \mathcal{L}(E)$. Hơn nữa :

$$\bullet \forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = \left(\sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \middle| y \right) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) (e_i | y) = \left(x \middle| \sum_{i=1}^n (e_i | y) e_i \right) = (x|f(y))$$

$$\bullet \forall x \in E, (x|f(x)) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 \geq 0$$

• Với mọi x thuộc E :

$$(x|f(x)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, (x|e_i) = 0). \\ \Leftrightarrow x \in \{e_1, \dots, e_n\}^\perp = E^\perp = \{0\} \Leftrightarrow x = 0.$$

Cuối cùng, f là đối xứng xác định dương.

b) Cho $\mathcal{B}$ là một cstc của E ; ký hiệu $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Theo a), $A \in S_n^{++}$, vậy A^{-1} tồn tại và

$A^{-1} \in S_n^{++}$; điều này chứng tỏ rằng f^{-1} tồn tại và là đối xứng xác định dương.

Theo bài tập 4.4.26, tồn tại $R \in S_n^{++}$ sao cho $R^2 = A^{-1}$. Ký hiệu u là tự đồng cấu của E sao cho $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R$, rõ ràng rằng u là đối xứng xác định dương và $u \circ u = f^{-1}$.

c) Ký hiệu $v_i = f^{-1}(e_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Ta có : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, e_i = f(v_i) = \sum_{j=1}^n (e_j | v_i) e_j$.

Vì $(e_1, \dots, e_n)$ độc lập tuyến tính, ta được : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (e_j | v_i) = \delta_{ij}$ (ký hiệu Kronecker).

Tiếp đó, với mọi (i, j) thuộc $\{1, \dots, n\}^2$: $(u(e_i)|u(e_j)) = (u \circ u(e_i)|e_j) = (f^{-1}(e_i)|e_j) = (v_i|e_j) = \delta_{ij}$, vậy $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ là một cstc của E .

4.4.38 a) Theo bài tập 4.4.26, tồn tại $R \in S_n^+$ sao cho $R^2 = A$. Khi đó (xem bài tập 2.1.f4) :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(R(RB)) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(RBR).$$

Nhưng $RBR \in S_n(\mathbb{R})$, vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(RBR) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(RBR) \subset \mathbb{R}$.

b) Cũng như trong a), hơn nữa $RBR \in S_n^+$, vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(RBR) \subset \mathbb{R}_+$.

c) Tồn tại $R \in S_n^{++}$ sao cho $R^2 = A$, từ đó : $AB = R^2B = R(RBR)R^{-1} \sim RBR$.

Vì $RBR \in S_n(\mathbb{R})$ nên RBR chéo hóa được (trong $M_n(\mathbb{R})$), vậy AB đồng dạng với nó cũng chéo hóa được.

$$d) \diamond \text{ Trả lời : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.39 a) $S_n^{++} \subset S_n^+$ và $S_n^{++} \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ (vì $\forall S \in S_n^{++}, \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$), vậy

$$S_n^{++} \subset S_n^+ \cap \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

• Giả sử $S \in S_n^+ \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Khi đó $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$ và $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$, từ đó $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, và như vậy $S \in S_n^{++}$.

b) $S_n^{++} = S_n^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$ và $GL_n(\mathbb{R})$ là mở (trong $M_n(\mathbb{R})$, xem bài tập 1.2.22, Tập 3), và như vậy S_n^{++} là mở trong S_n^+ .

c) Giả sử $S \in S_n^+$. Ta có:

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}^*, S + \frac{1}{p} I_n \in S_n^{++} \\ S + \frac{1}{p} I_n \xrightarrow{p \rightarrow \infty} S \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ rằng S_n^{++} trù mật trong S_n^+ .

4.4.40 a) $\alpha)$ Theo Định lý, 4.4.3 và định lý cơ bản, vì $B - A \in S_n^+$ ta có $\text{tr}(B - A) \geq 0$, vậy $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$.

$\beta)$ 1) Nếu $A \in S_n^{++}$ thì theo định lý về phép thu gọn đồng thời (Mệnh đề 2, 4.4.3), tồn tại

$$P \in GL_n(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R}) \text{ sao cho } A = {}^t P P \text{ và } B = {}^t P D P.$$

Vì $B - A \in S_n^+$ và $B - A = {}^t P (D - I_n) P$, ta suy ra $D - I_n \in S_n^+$, từ đó: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d_i \geq 1$.

Tiếp đó: $\det(D) = \prod_{i=1}^n d_i \geq 1$,

vậy: $\det(B) = (\det(P))^2 \det(D) \geq (\det(P))^2 = \det(A)$.

2) Nếu $A \in S_n^+ - S_n^{++}$ thì $\det(A) = 0$ và do $B \geq A \geq 0$, $B \in S_n^+$ vậy $\det(B) \geq 0$ (xem bài tập 4.4.25) và cuối cùng: $\det(A) \leq \det(B)$.

b) $\alpha)$ Giả sử: $A \in S_n^+, A \leq B, \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$. Theo định lý cơ bản, tồn tại $\mathcal{Q} \in O_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R}) \text{ sao cho } B - A = \mathcal{Q} D \mathcal{Q}^t.$$

Vì $A \leq B$ nên: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$.

Mặt khác, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, vậy $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Từ đó suy ra: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$, vậy $A = B$.

$\beta)$ Giả sử: $A \in S_n^{++}, A \leq B, \det(A) = \det(B)$.

Theo định lý về phép thu gọn đồng thời, tồn tại $P \in GL_n(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$

sao cho: $A = {}^t P P$ và $B = {}^t P D P$.

Vì $A \leq B$ nên ta có: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d_i \geq 1$.

Mặt khác, $\det(A) = \det(B)$, vậy $\prod_{i=1}^n d_i = 1$.

Ta suy ra: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d_i = 1$, từ đó $D = I_n, B = {}^t P P = A$.

c) Giả sử: $A \in S_n^+, A \leq B, \lambda \text{tr}(A) + \mu \det(A) = \lambda \text{tr}(B) + \mu \det(B)$.

Theo a): $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$ và $\det(A) \leq \det(B)$.

Suy ra : $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ (và $\mu \det(A) = \mu \det(B)$).
Theo b), ta kết luận : $A = B$.

4.4.41 $\forall (A,B) \in S_n^{++} \times S_n(\mathbb{R})$ nên theo định lý về phép thu gọn đồng thời (Mệnh đề 2,

$$4.4.3), \text{ tồn tại } P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R}) \text{ sao cho : } A = {}^tPP \text{ và } B = {}^tPDP.$$

Ta có : $A \leq B \Leftrightarrow B - A \in S_n^+ \Leftrightarrow D - I_n \in S_n^+ \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 1)$.

Do $A^{-1} = P^{-1} {}^t(P^{-1})$ và $B^{-1} = P^{-1} D^{-1} {}^t(P^{-1})$ nên ta cũng có :

$$B^{-1} \leq A^{-1} \Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{1}{\lambda_i} \leq 1 \right).$$

$$\text{Cuối cùng : } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \left(\lambda \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \leq 1 \right).$$

4.4.42 Theo định lý về phép thu gọn đồng thời (Mệnh đề 2, 4.4.3), tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R}) \text{ sao cho : } A = {}^tPP \text{ và } B = {}^tPDP.$$

$$\text{Vậy : } \bullet \det(A) = (\det(P))^2$$

$$\bullet |\det(A + iB)| = |\det({}^tP(I_n + iD)P)| = (\det(P))^2 |\det(I_n + iD)|$$

$$\bullet |\det(I_n + iD)| = \left| \prod_{k=1}^n (1 + id_k) \right| = \prod_{k=1}^n \sqrt{1 + d_k^2} \geq 1,$$

$$\text{từ đó : } \det(A) \leq |\det(A + iB)|.$$

Trường hợp đẳng thức :

$$\det(A) = |\det(A + iB)| \Leftrightarrow \prod_{k=1}^n (1 + d_k^2) = 1 \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, d_k = 0).$$

$$\diamond \text{ Trả lời : } \det(A) = |\det(A + iB)| \Leftrightarrow B = 0.$$

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 5

$$5.1.1 \quad \begin{cases} \varphi(ix, ix) = i^2 \varphi(x, x) = -\varphi(x, x) \\ \varphi(x, x) \in \mathbb{R}_+ \text{ và } \varphi(ix, ix) \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$$5.1.2 \quad F \subset G^\perp \Rightarrow F^\perp \supset G^{\perp\perp} = G \text{ (xem Mệnh đề 1.2) và 5), 5.1.2)}.$$

$$5.1.3 \quad \begin{aligned} & \bullet \varphi(y, x) = \langle y, f(x) \rangle = \langle f(y), x \rangle = \varphi(x, y) \\ & \bullet \varphi(\alpha x + x', y) = \langle \alpha x + x', f(y) \rangle = \alpha \langle x, f(y) \rangle + \langle x', f(y) \rangle \\ & \quad = \alpha \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ & \bullet y \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \varphi(x, y) = 0) \\ & \quad \Leftrightarrow (\forall x \in E, \langle x, f(y) \rangle = 0) \Leftrightarrow f(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \text{Ker}(f). \end{aligned}$$

$$5.1.4 \quad \varphi(x + y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x, y) = 0.$$

$$5.1.5 \quad F \subset F^{\perp\perp} \Rightarrow \{0\} \neq F \cap F^\perp \subset F^{\perp\perp} \cap F^\perp.$$

5.1.6 1) Giả sử F là một kgvc hoàn toàn đẳng hướng, tức là $F \subset F^\perp$. Khi đó:

$$\forall (x, y) \in F^2, \varphi(x, y) = 0,$$

từ đó, nói riêng: $\forall x \in E, \varphi(x) = 0$, và như vậy: $F \subset C(\varphi)$.

2) Đảo lại, giả sử F là một kgvc của E sao cho $F \subset C(\varphi)$. Cho $x, y \in F$, ta có $\varphi(x) = 0$,

$$\varphi(y) = 0, \varphi(x + y) = 0, \text{ do đó } \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)) = 0 \text{ (xem thêm bài tập}$$

5.1.4). Vậy F là hoàn toàn đẳng hướng.

$$5.1.7 \quad a) \varphi\left(x, y - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x)}x\right) = \varphi(x, y) - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x)}\varphi(x, x) = 0.$$

b) • Giả sử $z \in (Kx) \cap x^\perp$. Tồn tại $\alpha \in K$ sao cho $z = \alpha x$ và $\varphi(x, z) = 0$, từ đó $\alpha\varphi(x) = 0$; vì $\varphi(x) \neq 0$, ta suy ra $\alpha = 0$, và $z = 0$.

Điều này chứng tỏ: $(Kx) \cap x^\perp = \{0\}$.

• Giả sử $y \in E$. Ta có: $\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x)}x \in Kx, y - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x)}x \in x^\perp$ (xem a)) và

$$y = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x)}x + \left(y - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x)}x\right).$$

Điều này chứng tỏ: $(Kx) + x^\perp = E$.

$$5.1.8 \quad \begin{aligned} x \in \text{Ker}(\varphi) & \Leftrightarrow (\forall y \in E, \varphi(x, y) = 0) \Leftrightarrow (\forall Y \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), 'XAY = 0) \\ & \Leftrightarrow 'XA = 0 \Leftrightarrow 'AX = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(A). \end{aligned}$$

5.1.9 a) α) Ta chứng minh O_φ là một nhóm con của $\mathcal{GL}(E)$.

• $\text{Id}_E \in O_\varphi$ là hiển nhiên

• Nếu $f, g \in O_\varphi$, thì với mọi (x, y) thuộc E^2 :

$$\varphi((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y),$$

vậy $g \circ f \in O_\varphi$.

• Nếu $f \in O_\varphi$, thì f^{-1} tồn tại (trong $\mathcal{GL}(E)$), và với mọi (x, y) thuộc E^2 :

$$\varphi(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = \varphi(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = \varphi(x, y),$$

vậy $f^{-1} \in O_\varphi$.

β) • Nếu $f \in O_\varphi$, thì $\forall x \in E, \phi(f(x)) = \varphi(f(x), f(x)) = \varphi(x, x) = \phi(x)$.

• Đảo lại, giả sử $f \in \mathcal{GL}(E)$ sao cho:

$$\forall x \in E, \phi(f(x)) = \phi(x).$$

Với mọi (x, y) thuộc E^2 , ta có:

$$\begin{aligned} \varphi(f(x), f(y)) &= \frac{1}{2} (\phi(f(x) + f(y)) - \phi(f(x) - \phi(f(y))) = \frac{1}{2} (\phi(f(x + y)) - \phi(f(x)) - \phi(f(y))) \\ &= \frac{1}{2} (\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)) = \varphi(x, y), \end{aligned}$$

và như vậy $f \in O_\varphi$.

b) α) $f \in O_\varphi \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y))$,

$$\Leftrightarrow (\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2, {}^t X \Omega S \Omega X = {}^t X S X)$$

$$\Leftrightarrow {}^t \Omega S \Omega = S.$$

β) Với các ký hiệu ở α):

$$\det(S) = \det({}^t \Omega S \Omega) = (\det(\Omega))^2 \det(S).$$

Do $\det(S) \neq 0$ (vì φ không suy biến) nên: $(\det(\Omega))^2 = 1$, và như vậy

$$\det(f) = \det(\Omega) \in \{-1, 1\}.$$

$$c) \text{ Ký hiệu } S = \text{Mat}_{(e_1, e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Giả sử } f \in \mathcal{GL}(E), \Omega = \text{Mat}_{(e_1, e_2)}(f) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Ta có (xem b) α):

$$f \in O_\varphi \Leftrightarrow {}^t \Omega S \Omega = S \Leftrightarrow \begin{cases} 2xz = 0 \\ yz + xt = 1 \\ 2yt = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t = 0 \\ yz = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} z = y = 0 \\ xt = 1 \end{cases}$$

◊ Trả lời: Các phần tử của O_φ là các tự đồng cấu của E mà ma trận trong (e_1, e_2) có

$$\text{dạng: } \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} (x \in \mathbb{R}^*) \text{ hoặc } \begin{pmatrix} 0 & y \\ \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix} (y \in \mathbb{R}^*).$$

5.1.10 a) Chứng minh bằng phản đảo. Giả sử, chẳng hạn $(x_1, \dots, x_p)$ phụ thuộc tuyến tính.

Tồn tại $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p - \{(0, \dots, 0)\}$ sao cho $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0$. Khi đó:

$$\forall j \in (1, \dots, p), \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi(x_i, y_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, y_j\right) = 0,$$

Vậy các cột của ma trận $(\varphi(x_i, y_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ lập nên một họ phụ thuộc tuyến tính, do đó $\delta = 0$.

b) Xét ví dụ : $E = \mathbb{R}^2$, $p = 1$, φ được xác định bởi $\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó $B = (e_1, e_2)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$, $x_1 = y_1 = e_1$.

♦ Trả lời: Không

c) Giả sử B_0 là một cơ sở của E , $P = \text{Pass}(B_0, (x_1, \dots, x_n))$, $Q = \text{Pass}(B_0, (y_1, \dots, y_n))$,

$$A = \text{Mat}_{B_0}(\varphi).$$

Khi đó: $(\varphi(x_i, y_j))_{1 \leq i, j \leq n} = {}^tPAQ$.

Vì P, A, Q khả nghịch (xem bài tập 5.1.8), nên tPAQ cũng khả nghịch, do đó $\delta \neq 0$.

5.1.11 Giả sử B là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_B(\varphi)$.

Theo bài tập 8.2.1, Tập 5, tồn tại $H_1, \dots, H_r \in M_n(K)$ sao cho :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, r\}, \text{rg}(H_i) = 1 \\ A = \sum_{i=1}^r H_i \end{cases}$$

Hơn nữa, với mỗi i thuộc $\{1, \dots, r\}$, tồn tại $F_i, G_i \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, sao cho $H_i = F_i {}^tG_i$ (xem bài tập 8.1.31, Tập 5).

Ký hiệu $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r$ là các dạng tuyến tính trên E có các ma trận tương ứng ${}^tF_1, \dots, {}^tF_r, {}^tG_1, \dots, {}^tG_r$ trong B . Khi đó, bằng cách ký hiệu $X = \text{Mat}_B(x)$, $Y = \text{Mat}_B(y)$, ta có:

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY = {}^tX \left(\sum_{i=1}^r F_i {}^tG_i \right) Y = \sum_{i=1}^r ({}^tF_i X) ({}^tG_i Y) = \sum_{i=1}^r f_i(x) g_i(y),$$

với mọi (x, y) thuộc E^2 .

5.1.12 Giả sử B_0 là một cơ sở của E , $A = \text{Mat}_{B_0}(\varphi)$, $U_i = \text{Mat}_{B_0}(e_i)$ ($1 \leq i \leq n$).

$P = (U_1, \dots, U_n) = \text{Pass}(B_0, B)$. Giả sử $e'_1, \dots, e'_n \in E$, $V'_j = \text{Mat}_{B_0}(e'_j)$ ($1 \leq j \leq n$).

$Q = (V'_1, \dots, V'_n)$. Ta có:

$$(\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \varphi(e_i, e'_j) = \delta_{ij}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^tU_1 \\ \vdots \\ {}^tU_n \end{pmatrix} A (V'_1, \dots, V'_n) = I_n \Leftrightarrow {}^tPAQ = I_n.$$

Vì φ không suy biến, A khả nghịch, nên tPA cũng khả nghịch, suy ra sự tồn tại của Q , và cơ sở thích hợp $B' = (e'_j)_{1 \leq j \leq n}$.

5.1.13 Tồn tại một cơ sở B của E thỏa mãn $D = \text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, trong đó

$$d_1, \dots, d_n \in K;$$

Hơn nữa, φ không suy biến, D khả nghịch, do đó : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d_i \neq 0$.

Cho $(V_1, \dots, V_p)$ là một cơ sở của F ($p = \dim(F)$), và với mỗi j thuộc $\{1, \dots, p\}$, $(v_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ là các thành phần của V_j trong B .

Cho $x \in E$, $X = \text{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ta có :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, p\}, \varphi(V_p, x) = 0) \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, p\}, {}^1V_j D X = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{11}d_1x_1 + \dots + v_{n1}d_nx_n = 0 \\ \vdots \\ v_{1p}d_1x_1 + \dots + v_{np}d_nx_n = 0. \end{cases}$$

Theo lý thuyết về hệ phương trình tuyến tính (Mệnh đề 9.9.24, Tập 5), ta có :

$$\dim(F^\perp) = n - \text{rank} \begin{pmatrix} v_{11}d_1 & \dots & v_{n1}d_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1p}d_1 & \dots & v_{np}d_n \end{pmatrix} = n - \text{rank} \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1p} & \dots & v_{np} \end{pmatrix} = n - p.$$

5.1.14. • $F \subset F^{\perp\perp}$

$$\bullet \dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F).$$

5.1.15 a) Ký hiệu $r = \text{rank}(S)$. Theo định lý phân loại các dạng toàn phương phức, tồn tại

$$P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ thỏa mãn } S = {}^1P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P. \text{ Ký hiệu } M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \text{ ta có: } S = {}^1MM.$$

b) Sử dụng lại các ký hiệu của a), phân tích P theo khối : $P = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ (trong đó $R \in \text{M}_r(\mathbb{C})$).

Khi đó:

$$S = {}^1P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} {}^1R & 0 \\ {}^1S & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1RR & {}^1RS \\ {}^1SR & {}^1SS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1R \\ {}^1S \end{pmatrix} (R \ S).$$

Bằng cách đặt $A = (R \ S) \in \text{M}_{r,n}(\mathbb{C})$, ta nhận được : $S = {}^1AA$.

$$5.1.16 \text{ a) Xét ví dụ } A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $A \subset B$ vì $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$ (xem Định lý 5.1.42)). Nhưng $A^2 = 0$, $B^2 = B \neq 0$ nên $A^2 \not\subset B^2$.

◦ Trả lời: Không (nếu $n \geq 2$).

b) • Ký hiệu $(p_A, q_A), (p_B, q_B)$ tương ứng là các ký số của A, B .

Theo Định lý cơ bản (Định lý 4.4.1), tồn tại $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

Vì $A \subset D$ nên $\text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\}; \lambda_i > 0\} = p_A$ và $\text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i < 0\} = q_A$

(xem 5.1.43) Nhận xét 4)). Vì $A^2 = \Omega D^2 \Omega^{-1} \subset D^2$, nên rõ ràng

$$\text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\}; \lambda_i^2 \neq 0\} = p_A + q_A \text{ và như vậy } \text{sgn}(A^2) = (p_A + q_A, 0).$$

$$\text{Do đó } A \subset B \Leftrightarrow (p_A, q_A) = (p_B, q_B) \Rightarrow (p_A + q_A, 0) = (p_B + q_B, 0) \Leftrightarrow A^2 \subset B^2.$$

• Để chứng minh phần đảo, xét ví dụ :

$$n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

◦ Trả lời: Không.

c) Với lập luận như trên, ta chứng minh ký số của A^3 cũng là ký số của A .

$$\text{Như vậy : } A \subset B \Leftrightarrow \text{sgn}(A) = \text{sgn}(B) \Leftrightarrow \text{sgn}(A^3) = \text{sgn}(B^3) = A^3 \subset B^3$$

5.1.17 Chỉ cần lấy lại các chứng minh cho trường hợp của một tích vô hướng (1.6.2, Tập 3)

a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi(\lambda x + y) = \lambda^2 \phi(x) + 2\lambda \phi(x, y) + \phi(y).$

• Nếu $\phi(x) > 0$ thì biệt số của tam thức bậc hai của λ ở trên là ≤ 0 , tức là :

$$(\phi(x, y))^2 - \phi(x) \phi(y) \leq 0.$$

• Nếu $\phi(x) = 0$, thì, vì $\forall \lambda \in \mathbb{R}, 2\lambda \phi(x, y) + \phi(y) \geq 0$, ta cần có $\phi(x, y) = 0$, và đẳng thức cần chứng minh là tầm thường.

b) $\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \Leftrightarrow \phi(x+y) \leq \phi(x) + 2\sqrt{\phi(x)\phi(y)} + \phi(y).$

$$\Leftrightarrow \phi(x, y) \leq \sqrt{\phi(x)\phi(y)} \Leftrightarrow (\phi(x, y))^2 \leq \phi(x)\phi(y).$$

5.1.18 Tính toán ta được:

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda \phi(x) - (1-\lambda)\phi(y) = -(1-\lambda)\phi(x-y)$$

với mọi λ thuộc $[0; 1]$ và x, y thuộc E .

1) Nếu ϕ dương, từ đẳng thức trên suy ra ϕ lồi.

2) Nếu ϕ lồi thì bằng cách chọn $\lambda = \frac{1}{2}$ và $y = 0$, ta suy ra ϕ dương.

5.1.19 a) Giả sử $\phi|_F$ xác định dương.

Theo Định lý 5.1.4 3), tồn tại một cơ sở $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, e_{p+q+1}, \dots, e_n)$ của E thỏa

mã: $\text{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ký hiệu $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Ta có: $\begin{cases} \forall x \in F - \{0\}, & \phi(x) > 0 \\ \forall x \in G & , & \phi(x) \leq 0 \end{cases}$, vậy $(F - \{0\}) \cap G = \emptyset$, hay: $F \cap G = \{0\}$.

Suy ra: $n = \dim(E) \geq \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(F) + n - p$, do đó $\dim(F) \leq p$.

b) Áp dụng a) cho $-\phi$

c) Theo a), $\phi|_F$ không xác định dương cũng không xác định âm. Vậy tồn tại $x, y \in F - \{0\}$, sao cho: $\phi(x) \leq 0$ và $\phi(y) \geq 0$.

• Nếu $\phi(x) = 0$, hoặc $\phi(y) = 0$, thì x hoặc y thích hợp.

• Giả sử $\phi(x) < 0$ và $\phi(y) > 0$.

Nhận xét rằng, (x, y) là độc lập tuyến tính vì nếu $y = \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), thì $\phi(y) = \lambda^2 \phi(x) \leq 0$, mâu thuẫn.

Ký hiệu $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là tam thức được xác định bởi:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, T(\alpha) = \phi(\alpha x + y) = \alpha^2 \phi(x) + 2\alpha \phi(x, y) + \phi(y).$$

Ta có $T(\alpha) \rightarrow -\infty$ (vì $\phi(x) < 0$), và $T(0) = \phi(y) > 0$.

$\alpha \rightarrow +\infty$

Vì T là liên tục trên $[0; +\infty]$, định lý các giá trị trung gian chứng tỏ rằng tồn tại $\alpha_0 \in]0; +\infty[$ thỏa mãn $T(\alpha_0) = 0$.

Vectơ $\alpha_0 x + y$ là $\neq 0$ và thích hợp.

5.1.20 a) Với mọi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ thuộc $M_{n,1}(\mathbb{R})$, ta có:

$$\begin{aligned} {}^1XAX &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sin(a_i + b_j)x_i x_j = \sum_{i, j} \sin a_i \cos b_j x_i x_j + \sum_{i, j} \sin b_j \cos a_i x_i x_j \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n \sin a_i x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \cos b_j x_j \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\sin a_i + \cos b_i) x_i \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\sin a_i - \cos b_i) x_i \right)^2. \end{aligned}$$

(Ta cũng có thể coi như vừa thực hiện một phân tích Gauss xem phần sau 5.1.5)

$$\text{Ký hiệu: } U = \begin{pmatrix} \sin a_1 + \cos b_1 \\ \vdots \\ \sin a_n + \cos b_n \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \sin a_1 - \cos b_1 \\ \vdots \\ \sin a_n - \cos b_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}.$$

$\forall C = \frac{1}{2}(U - V), S = \frac{1}{2}(U + V)$ và (C, S) độc lập tuyến tính nên (U, V) độc lập tuyến tính.

Như vậy ta đã phân tích ϕ thành tổ hợp tuyến tính các bình phương của (hai) dạng tuyến tính độc lập tuyến tính.

• Theo Nhận xét 5.1.3 :

$$X \in \text{Ker}(\phi) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\sin a_i + \cos b_i) x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (\sin a_i - \cos b_i) x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \cos b_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \sin b_i x_i = 0 \end{cases},$$

và như vậy $\text{Ker}(\phi)$ có số chiều là $n - 2$.

• $\text{rank}(\phi) = n - \dim(\text{Ker}(\phi)) = 2$.

• $\text{sgn}(\phi) = (1, 1)$.

♦ Trả lời : • $\text{Ker}(\phi)$ là kgvc có chiều là $n - 2$, có phương trình $\sum_{i=1}^n \cos a_i x_i = \sum_{i=1}^n \sin a_i x_i = 0$

• $\text{rank}(\phi) = 2$

• $\text{sgn}(\phi) = (1, 1)$.

b) Cùng phương pháp như ở a)

$$\begin{aligned} {}^1XAX &= \sum_{i, j} \text{ch}(a_i - a_j)x_i x_j = \sum_{i, j} \text{cha}_i \text{cha}_j x_i x_j - \sum_{i, j} \text{sha}_i \text{sha}_j x_i x_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \text{cha}_i x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \text{sha}_i x_i \right)^2. \end{aligned}$$

♦ Trả lời : • $\text{Ker}(\phi)$ là kgvc có số chiều là $n - 2$, có phương trình $\sum_{i=1}^n \text{cha}_i x_i = \sum_{i=1}^n \text{sha}_i x_i = 0$

• $\text{rank}(\phi) = 2$

• $\text{sgn}(\phi) = (1, 1)$.

c) Với mọi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ta có :

$$\begin{aligned} {}^1XAX &= a^2 x_1^2 - 2abx_1 x_2 + (a^2 + b^2)x_2^2 - 2abx_2 x_3 + \dots + (a^2 + b^2)x_{n-1}^2 - 2abx_{n-1} x_n + b^2 x_n^2 \\ &= (ax_1 - bx_2)^2 + (ax_2 - bx_3)^2 + \dots + (ax_{n-1} - bx_n)^2. \end{aligned}$$

◊ Trả lời : • $\text{Ker}(\varphi)$ là đường thẳng vectơ sinh bởi $\left(1, \frac{a}{b}, \dots, \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}\right)$

• $\text{rank}(\varphi) = n - 1$

• $\text{sgn}(\varphi) = (n-1, 0)$.

5.1.21 Bản số cần tìm là $\text{Card} \{ (p, q) \in \mathbb{N}^2 ; p + q \leq n \}$.

◊ Trả lời : $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

5.1.22 a) Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$ thuộc $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f_i(t) f_j(t) dt \right) x_i x_j = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (f_i(t) x_i) (f_j(t) x_j) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{i=1}^n (f_i(t) x_i) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

α) Rõ ràng ϕ dương.

β) • Giả sử $\{f_1, \dots, f_n\}$ độc lập tuyến tính, và $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\phi(x) = 0$.

Khi đó ta có $\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{i=1}^n (f_i(t) x_i) \right)^2 dt = 0$. Vì $t \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i$ là liên tục trên $]\alpha; \beta[$, nên :

$(\forall t \in]\alpha; \beta[, \sum_{i=1}^n f_i(t) x_i = 0)$, và $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Điều này chứng tỏ ϕ xác định dương.

• Đảo lại, giả sử ϕ xác định dương, và $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$.

Khi đó ta có : $\phi((x_1, \dots, x_n)) = 0$, vậy $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

Điều này chứng tỏ $\{f_1, \dots, f_n\}$ là độc lập tuyến tính.

b) Nhận xét với mọi (i, j) thuộc $\{1, \dots, n\}^2$:

$$\frac{1}{u_i v_j + u_j v_i} = \frac{1}{v_i v_j} \frac{1}{\frac{u_i}{v_i} + \frac{u_j}{v_j}} = \int_0^1 \frac{1}{v_i v_j} t^{-1 + \frac{u_i}{v_i} + \frac{u_j}{v_j}} dt = \int_0^1 f_i(t) f_j(t) dt,$$

trong đó $f_i :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi : $f_i(t) = \frac{1}{v_i} t^{-\frac{1}{2} + \frac{u_i}{v_i}}$

(Các tích phân suy rộng tham dự ở đây là hội tụ theo Riemann chẳng hạn).

α) Theo a) α) : ϕ dương, tức là : $A \in S_n^+$.

α) Theo a) β) : $A \notin S_n^{++} \Leftrightarrow (f_1, \dots, f_n)$ phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \dots = \frac{u_n}{v_n} = 0$.

5.1.23 Cho $A, B \in S_n^+$. Ta có :

$$A \leq B \Leftrightarrow \text{sgn}(A) = \text{sgn}(B) \Leftrightarrow (\text{rank}(A), 0) = (\text{rank}(B), 0) \Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(B).$$

5.1.24 a) Tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $P' \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $S = {}^1PDP$, $S' = {}^1P'D'P'$ trong đó

$$D = \begin{pmatrix} 1_p & 0 & 0 \\ 0 & -1_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ và } D' = \begin{pmatrix} 1_{p'} & 0 & 0 \\ 0 & -1_{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. Phép lấy tích theo khối cho ta: $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} = {}^1R\Delta R$,

từ đây: $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \subset \Delta$ (vì $R \in \text{GL}_{n+n}(\mathbb{R})$).

Cuối cùng nhận được (chẳng hạn bằng cách sử dụng một phép hoán vị):

$$\Delta \subset \begin{pmatrix} 1_{p+p'} & 0 & 0 \\ 0 & -1_{q+q'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} b) \alpha) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} S' & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \text{sgn} \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \right) = \text{sgn} \left(\begin{pmatrix} S' & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow (2p, 2q) = (2p', 2q') \\ &\Leftrightarrow (p, q) = (p', q') \Leftrightarrow S \subset S'. \end{aligned}$$

$$\beta) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow (p + p', q + q') = (p + p'', q + q'') \Leftrightarrow (p', q') = (p'', q'') \Leftrightarrow S' \subset S''.$$

5.1.25 ♦ Trả lời:

$$a) \bullet \phi(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 + (y - z)^2 - 3z^2$$

$$\bullet \text{Ker}(\phi) = \{0\}, \text{rank}(\phi) = 3, \text{sgn}(\phi) = (2, 1).$$

$$b) \bullet \phi(x, y, z) = (x - ay - az)^2 + (1 - a^2) \left(y - \frac{a}{1-a}z \right)^2 + \frac{(1+a)(1-2a)}{1-a} z^2$$

$$\bullet \text{ Nếu } a \neq \frac{1}{2} \text{ thì } \text{Ker}(\phi) = \{0\}, \text{rank}(\phi) = 3$$

$$\bullet \text{ Nếu } a = \frac{1}{2} \text{ thì } \text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}(1, 1, 1), \text{rank}(\phi) = 2$$

$$\bullet \text{sgn}(\phi) = \begin{cases} (3, 0) & \text{nếu } 0 < a < \frac{1}{2} \\ (2, 0) & \text{nếu } a = \frac{1}{2} \\ (2, 1) & \text{nếu } \frac{1}{2} < a < 1. \end{cases}$$

$$c) \bullet \phi(x, y, z) = \frac{1}{4}(x + y + z)^2 - \frac{1}{4}(x - y - z)^2$$

$$\bullet \text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}(0, 1, -1), \text{rank}(\phi) = 2, \text{sgn}(\phi) = (1, 1).$$

$$d) \bullet \phi(x, y, z, t) = (x + y + z + t)^2 - (z - t)^2$$

$$\bullet \text{Ker}(\phi) \text{ có phương trình } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \text{ và số chiều là 2, } ((1, -1, 0, 0), (-2, 0, 1, 1)) \text{ là}$$

một cơ sở.

$$\bullet \text{rank}(\phi) = 2, \quad \text{sgn}(\phi) = (1, 1)$$

$$\bullet C(\phi) \text{ là hợp của hai siêu phẳng có phương trình } x + y + 2z = 0, x + y + 2z = 0.$$

$$e) \bullet \phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4}(x + y + 2z + 3t)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 2z + t)^2 - 2t^2$$

$$\bullet \text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}(0, -2, 1, 0), \quad \text{rank}(\phi) = 3, \quad \text{sgn}(\phi) = (1, 2).$$

5.1.26 Phân tích Gauss :

$$\phi(x, y, z) = (x - 2y + z)^2 - (y - 3z)^2 + 8z^2$$

chứng tỏ : $\text{sgn}(\phi) = (2, 1)$.

1) Giả sử P là một mặt phẳng vector của $\mathbb{R}^3$ sao cho $\phi|_P$ xác định dương. Vì P không chứa bất kỳ một vector đẳng hướng nào, nên $P^\perp$ là một đường thẳng vector bù của P trong $\mathbb{R}^3$ (xem bài tập 5.1.7). Với ký hiệu u là một vector sao cho $P^\perp = \mathbb{R}u$, theo ký số của ϕ , ta có: $\phi(u) < 0$. Do tính cộng tuyến ta có thể chọn u sao cho $\phi(u) = -1$.

2) Ngược lại, ký hiệu $P = \{u\}^\perp$ và giả sử $u \in \mathbb{R}^3$ sao cho $\phi(u) = -1$. Vì u không phải là đẳng hướng và ϕ không suy biến nên $\mathbb{R}u$ và P chỉ có 0 là phần tử chung duy nhất và $\dim(P) = 2$, nên P là một mặt phẳng vector bù của $\mathbb{R}u$ trong $\mathbb{R}^3$. Theo ký số của ϕ , thu hẹp của ϕ lên P là xác định dương.

Như vậy, các mặt phẳng cần tìm là các mặt phẳng $\{u\}^\perp$ trong đó : $u \in \mathbb{R}^3$ và $\phi(u) = -1$.

Ký hiệu $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, $X = (x, y, z)$.

$$\bullet \phi(u) = -1 \Leftrightarrow (\alpha - 2\beta + \gamma)^2 - (\beta - 3\gamma)^2 + 8\gamma^2 = -1.$$

Với ký hiệu $a = \alpha - 2\beta + \gamma$, $b = \beta - 3\gamma$, $c = \gamma\sqrt{8}$, tham số hóa của $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a^2 - b^2 + c^2 = -1\}$ là $a = \cos\theta \sinh t$, $b = \varepsilon \cosh t$, $c = \sin\theta \sinh t$,

$$(\theta, t, \varepsilon) \in]-\pi; \pi[\times [0; +\infty[\times \{-1, 1\}.$$

$$\bullet X \in \{u\}^\perp \Leftrightarrow (x - 2y + z)(\alpha - 2\beta + \gamma) - (y - 3z)(\beta - 3\gamma) + 8z\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta \sinh t (x - 2y + z) - \varepsilon \cosh t (y - 3z) + 2\sqrt{2} \sin\theta \sinh t z = 0.$$

◊ Trả lời : Các mặt phẳng cần tìm là các mặt phẳng có phương trình :

$$\cos\theta \sinh t x - (2 \cos\theta \sinh t + \varepsilon \cosh t) y + (\cos\theta \sinh t + 3 \varepsilon \cosh t + 2\sqrt{2} \sin\theta \sinh t) z = 0,$$

trong đó $(\theta, t, \varepsilon) \in]-\pi; \pi[\times [0; +\infty[\times \{-1, 1\}$.

5.2.1 • Tính tuyến tính của ϕ_A là hiển nhiên.

• Với mọi (X, Y) thuộc $(M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$:

$$\begin{aligned} \langle \phi_A(X), Y \rangle &= \text{tr}({}^t(\phi_A(X))Y) = \text{tr}({}^t(A'XY)A) = \text{tr}({}^t(XAY)'A) \\ &= \text{tr}(X(AY'A)) = \langle X, AY'A \rangle = \langle X, \phi_A(Y) \rangle. \end{aligned}$$

◊ Trả lời : $(\phi_A)' = \phi_{A'}$.

5.2.2 Kgc F của E có ít nhất một estc B_1 , ta có thể bổ sung B_1 thành estc B của E .

Ma trận f trong B có dạng $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, trong đó $A = \text{Mat}_B(g)$.

Sử dụng tích theo khối, từ $f^* \circ f = f \circ f^*$ suy ra ${}^1AA = A^1A + B^1B, {}^1AB = B^1C, {}^1BB + {}^1CC = C^1C$, tiếp đó : $\text{tr}(B^1B) = \text{tr}({}^1AA - A^1A) = \text{tr}({}^1AA) - \text{tr}(A^1A) = 0$. Như vậy $B = 0$, và cuối cùng ${}^1AA = A^1A$, tức là : $g^* \circ g = g \circ g^*$.

5.2.3 Vì A là đối xứng thực, nên theo định lý cơ bản (Định lý 4.4.1), tồn tại : $\mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \mathcal{Q}D\mathcal{Q}^1$. Ta suy ra :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(D) = \text{tr}(A) = \text{tr}({}^1MM - M^1M) = \text{tr}({}^1MM) - \text{tr}(M^1M) = 0.$$

Mặt khác $A \in \mathbf{S}_n^+$, vậy : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$.

Suy ra : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$, từ đó $D = 0$, rồi $A = 0$.

5.2.4 Theo Hệ quả 3.1, f chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, vậy $\det(f) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$, trong đó

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các gtr của f trong $\mathbb{C}$ (không nhất thiết phân biệt). Hơn nữa, các gtr phức không

thực của f là đôi một liên hợp, vậy $\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \lambda_k \in \mathbb{R}}} \lambda_k$ là số thực > 0 .

Mặt khác, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$ (xem Mệnh đề 10, 4.3.2).

Vì $\det(f) = -1$, nên bội của gtr -1 của f là lẻ, nói riêng, cấp bội này khác không, do đó $-1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

5.2.5 Lập đa thức đặc trưng :

$$\begin{aligned} \bullet \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & & \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + (-\lambda)^{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} + \dots \\ \bullet \chi_D(\lambda) &= \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + (-\lambda)^{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii} a_{jj} + \dots \end{aligned}$$

Giả sử $A \sim D$. Khi đó $\chi_A = \chi_D$, đặc biệt :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii} a_{jj}, \text{ từ đây : } \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 = 0.$$

như vậy : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$, và cuối cùng $A = D$.

5.2.6 Giả sử $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Vì :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, ({}^1XA_k^2X \geq 0, {}^1XB_k^2X \geq 0) \\ {}^1XA_k^2X + {}^1XB_k^2X = {}^1X(A_k^2 + B_k^2)X \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \end{cases}$$

Ta suy ra : ${}^1XA_k^2X \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ (và ${}^1XB_k^2X \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$).

Nhưng $\forall k \in \mathbb{N}, {}^1XA_k^2X = \|A_k X\|^2$ (trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn Euclide chính tắc) nên suy ra

$$A_k X \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Vì $(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), A_k X \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0)$, nên rõ ràng $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (cũng vậy $B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$), chẳng hạn, bằng cách lần lượt thay thế X bằng các vectơ của cơ sở chính tắc.

Nhận xét:

Một cách tương tự ta có thể chứng minh “Định lý kẹp”:

Cho $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}, (B_k)_{k \in \mathbb{N}}, (C_k)_{k \in \mathbb{N}}$, là ba dãy trong $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, và $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Nếu } \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}, A_k \leq B_k \leq C_k \\ A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S \text{ và } C_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S \end{array} \right\}, \text{ thì } B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S.$$

$$5.2.7 \quad a) \left\{ \begin{array}{l} I_n \in \mathbf{S}_n^{++} \Rightarrow I_n + A_k^2 \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}). \\ A_k^2 \in \mathbf{S}_n^+ \end{array} \right.$$

b) Có thể trang bị cho $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ít nhất một chuẩn đại số (ta cũng có thể nói: chuẩn nhân, hay chuẩn dưới nhân), tức là một chuẩn $\| \cdot \|$ thỏa mãn:

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

$$\text{Chẳng hạn chọn } \| \cdot \| : A = (a_{ij})_{i,j} \mapsto \frac{1}{n} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

$$\text{Ta có: } \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}, \|A_k\| = \|(I_n + A_k^2)B_k\| \leq \|I_n + A_k^2\| \|B_k\| \\ (I_n + A_k^2)_{k \in \mathbb{N}} \text{ bị chặn (vì } (A_k)_k \text{ bị chặn)} \\ B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\}, \text{ từ đây: } A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

5.2.8 Đặt $F = \text{Ker}(\mathcal{Q} - I_n)$; $F^\perp$ ổn định đối với $\mathcal{Q}$ vì, nếu $X \in F^\perp$ thì:

$$\forall Y \in F, {}^t Y (\mathcal{Q} X) = {}^t (\mathcal{Q} Y) \mathcal{Q} X = {}^t Y X = 0,$$

vậy $\mathcal{Q} X \in F^\perp$.

Bằng cách sử dụng csc của F và csc của $F^\perp$, tồn tại $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{Q}' \in \mathbf{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ sao cho

$$\mathcal{Q} = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}' \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ (trong đó } p = \dim(F)).$$

Vì $\mathcal{Q}$ và P trực giao, nên rõ ràng $\mathcal{Q}'$ cũng trực giao. Hơn nữa, $\mathcal{Q}' - I_{n-p}$ khả nghịch vì

$$\mathcal{Q} - I_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}' - I_{n-p} \end{pmatrix} \text{ và } \text{rank}(\mathcal{Q} - I_n) = n - p.$$

$$\text{Ta có: } \forall k \in \mathbb{N}^*, A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \mathcal{Q}^i = P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & A'_k \end{pmatrix} P^{-1} \text{ trong đó } A'_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \mathcal{Q}'^i.$$

Vì $I_{n-p} - \mathcal{Q}'$ khả nghịch, nên:

$$\sum_{i=0}^k \mathcal{Q}'^i = (I_{n-p} - \mathcal{Q}')^{-1} (I_{n-p} - \mathcal{Q}'^{k+1}).$$

Mặt khác, ta trang bị cho $\mathbf{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ chuẩn $\| \cdot \|$ được xác định bởi:

$$\|M\| = \sup_{X \in \mathbf{M}_{n-p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}, \text{ trong đó } \| \cdot \| \text{ là chuẩn Euclide chính tắc trên } \mathbf{M}_{n-p,1}(\mathbb{R}).$$

Ta biết rằng (xem Mệnh đề, 1.2.6, Tập 3) $\| \cdot \|$ là chuẩn nhân. Hơn nữa

$$\forall \Omega' \in \mathbf{O}_{n-p}(\mathbb{R}), \|\Omega'\| = 1.$$

Từ đây : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{i=0}^k \Omega^i \right\| \leq 2 \|(\mathbf{I}_{n-p} - \Omega')^{-1}\|$.

Điều này chứng tỏ $\left(\sum_{i=0}^k \Omega^i \right)_{k \in \mathbb{N}}$ bị chặn, vậy $\frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \Omega^i \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

Do đó $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ và được ký hiệu là A .

• A là một phép chiếu vì : $A^2 = P \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$

• $\text{Im}(A) = \text{Ker}(\Omega - \mathbf{I}_n)$

• ${}^tA = A$ vì P là trực giao.

◊ Trả lời : $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$ trong đó A là phép chiếu trực giao lên $\text{Ker}(\Omega - \mathbf{I}_n)$.

5.2.9 a) α) Vì $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, tồn tại $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ sao cho $A = R^2$ (xem bài tập 4.4.26 hoặc bài tập 5.2.26). Khi đó : $AB = R^2B = R(RBR)R^{-1} \sim RBR$.

Nhưng $RBR \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, nên RBR chéo hóa được, và do đó AB chéo hóa được.

β) Với các ký hiệu của α), vì $(B, R) \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{++}$, ta có $RBR \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, từ đó :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A, B) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(RBR) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow RBR \in \mathbf{S}_n^{++} \Leftrightarrow B \in \mathbf{S}_n^{++}.$$

b) (i) $\Rightarrow$ (ii) suy ra từ a).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Giả sử M chéo hóa được trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ và $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. Tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $M = PDP^{-1}$ và các hạng tử λ_i ($1 \leq i \leq n$) nằm trên đường chéo là > 0 .

Xét $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$, $A = P\Delta^2P^{-1}$, $B = {}^tP^{-1}\Delta P^{-1}$. Khi đó $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, $B \in \mathbf{S}_n^{++}$ và

$$AB = P\Delta^2P^{-1}\Delta P^{-1} = P\Delta^3P^{-1} = PDP^{-1} = M.$$

c) Lập luận bằng phản chứng : Giả sử tồn tại $A, B, C, D \in \mathbf{S}_n^{++}$ sao cho $-\mathbf{I}_n = ABCD$.

Ký hiệu $U = AB$, $V = CD$. Như vậy $-\mathbf{I}_n = UV$, do đó $U \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ và $V = -U^{-1}$.

Nhưng theo b) : $\emptyset \neq \text{Sp}_{\mathbb{R}}(V) \subset \mathbb{R}_+^*$ và $\emptyset \neq \text{Sp}_{\mathbb{R}}(-U^{-1}) \subset \mathbb{R}_+^*$ điều này là vô lý.

5.2.10 a) α) Cho $A \in \mathbf{S}_n^+$, $p \in \{1, \dots, n\}$. Ký hiệu $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ϕ là dtp của ma trận A trong $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$, $E_p = \text{Vect}(\mathcal{B}_p)$. Rõ ràng A_p là ma trận trong $\mathcal{B}_p$ của dtp thu hẹp ϕ_p của ϕ lên E_p . Do ϕ dương, ϕ_p cũng dương, vậy $A_p \in \mathbf{S}_p^+$, từ đây (xem bài tập 4.4.25) : $\det(A_p) \geq 0$.

β) Xét ví dụ : $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

◊ Trả lời : không.

b) α) 1) Lập luận như trong a) α), ta chứng minh :

$$A \in S_n^{++} \Rightarrow (\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) > 0).$$

2) Đảo lại, giả sử: $\forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) > 0$.

Ta sẽ chứng minh $(\forall p \in \{1, \dots, n\}, A_p \in S_p^{++})$ bằng phép quy nạp theo p .

Rõ ràng rằng $A_1 = (a_{11}) \in S_1^{++}$.

Giả sử $A_p \in S_p^{++}$.

Phân tích A_{p+1} theo khối:

$$A_{p+1} = \begin{pmatrix} A_p & C_p \\ {}^t C_p & a_{p+1 \ p+1} \end{pmatrix}, \text{ trong đó } C_p \in M_{p,1}(\mathbb{R}).$$

Tồn tại $M \in GL_p(\mathbb{R})$ sao cho $A_p = {}^t M M$ (ta cũng có thể chọn M trong S_p^{++} , xem bài tập 4.4.26)

$$\text{Cho } \alpha \in \mathbb{R}; C \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ mà ta sẽ chọn sau; } N = \begin{pmatrix} M & C \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có: } A_{p+1} = {}^t N N \Leftrightarrow \begin{cases} C_p = {}^t M C \\ a_{p+1 \ p+1} = {}^t C C + \alpha^2 \end{cases}.$$

Chọn $C = {}^t M^{-1} C_p$. Để chứng minh sự tồn tại của α , chỉ cần chứng minh: $a_{p+1 \ p+1} - {}^t C C \geq 0$.

$$\forall \begin{pmatrix} A_p & C_p \\ {}^t C_p & a_{p+1 \ p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p^{-1} & -A_p^{-1} C_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ {}^t C_p A_p^{-1} & a_{p+1 \ p+1} - {}^t C_p A_p^{-1} C_p \end{pmatrix}$$

nên bằng cách chuyển qua các định thức, ta có:

$$a_{p+1 \ p+1} - {}^t C C = a_{p+1 \ p+1} - {}^t C_p A_p^{-1} C_p = \frac{\det(A_{p+1})}{\det(A_p)} > 0.$$

Vậy tồn tại (α, C) thích hợp.

Khi đó $N \in GL_{p+1}(\mathbb{R})$ và $A_{p+1} = {}^t N N \in S_{p+1}^{++}$.

β) Ánh xạ $f: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục, $(\mathbb{R}_+^*)^n$ là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, và theo b) α):
 $A \mapsto (\det(A_1), \dots, \det(A_n))$

$$S_n^{++} = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \forall p \in \{1, \dots, n\}, \det(A_p) > 0\} = f^{-1}((\mathbb{R}_+^*)^n).$$

Ta kết luận S_n^{++} là tập mở của $S_n(\mathbb{R})$.

5.2.11 • Theo bài tập 5.2.10, S_n^{++} là một tập mở của $S_n(\mathbb{R})$.

• Cho $A \in S_n^{++}$. Theo Định lý cơ bản (Định lý, 4.4.1), tồn tại $\mathcal{O} \in O_n(\mathbb{R})$,

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{R})$, sao cho $A = \mathcal{O} D \mathcal{O}^{-1}$ và: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0$.

Với $t \in [0; 1]$, ta ký hiệu $D(t) = \text{diag}((t\lambda_i + (1-t))_{1 \leq i \leq n})$ và $\gamma(t) = \mathcal{O} D(t) \mathcal{O}^{-1}$. Ta có:

1) $\forall t \in [0; 1], \gamma(t) \in S_n(\mathbb{R})$

2) $\forall t \in [0; 1], \gamma(t) \in S_n^{++}$ vì $t\lambda_i + (1-t) > 0$

3) $\gamma(0) = \mathcal{O} I_n \mathcal{O}^{-1} = I_n$ và $\gamma(1) = \mathcal{O} D \mathcal{O}^{-1} = A$

4) γ liên tục.

Điều này chứng tỏ I_n và A có thể được nối bởi một đường liên tục trong S_n^{++} .

Để $(A, B) \in (S_n^{++})^2$, ta có thể nối A với I_n , I_n với B . Như vậy A được nối với B bởi các đường

liên tục trong S_n^{++} .

Cuối cùng S_n^{++} liên thông theo cung, vậy nó là liên thông.

5.2.12 Nhận thấy $A = (a - b)I_n + bU$ trong đó $U = \begin{pmatrix} 1 & - & 1 \\ | & 1 & | \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}$. Ta chứng minh A có các

gtr $a + (n-1)b$ (đơn) và $a - b$ (bậc $n-1$). Ký hiệu $D = \text{diag}(a + (n-1)b, a - b, \dots, a - b)$. Vì $A \in S_n(\mathbb{R})$, nên tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

Lập luận bằng phản chứng: giả sử rằng nón đẳng hướng ϕ chứa ít nhất một mặt phẳng vector. Khi đó tồn tại x, y đẳng hướng, độc lập tuyến tính, sao cho $x + y$ là đẳng hướng, do đó (xem bài tập 5.1.4): $\phi(x) = \phi(y) = 0$ và $\phi(x, y) = 0$.

Như vậy tồn tại $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tạo nên họ độc lập tuyến tính và sao cho :

$${}^tXDX = {}^tYDY = {}^tXDY = 0.$$

Phân tích theo khối: $X = \begin{pmatrix} \xi \\ U \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \zeta \\ V \end{pmatrix}$, trong đó $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$.

Ta được :

$$(a + (n-1)b)\xi^2 + (a - b){}^tUU = (a + (n-1)b)\xi\zeta + (a - b){}^tUV = (a + (n-1)b)\zeta^2 + (a - b){}^tVV = 0.$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta suy ra :

$$((a + (n-1)b)\xi\zeta)^2 = (b - a)^2({}^tUV)^2 \leq (b - a)^2({}^tUU)({}^tVV) = (a + (n-1)b)\xi^2\zeta^2.$$

Từ đây, theo khảo sát trường hợp đẳng thức trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (và $b - a \neq 0$), suy ra sự tồn tại của $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $V = \alpha U$, tiếp đó $y = \alpha x$.

Khi đó $Y - \alpha X = \begin{pmatrix} \zeta - \alpha\xi \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ (vì (X, Y) là độc lập tuyến tính) và

$$0 = \phi(Y - \alpha X) = (a + (n-1)b)(\zeta - \alpha\xi)^2, \text{ mâu thuẫn.}$$

5.2.13 Ký hiệu $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ và $r = \text{rank}(D)$.

Tồn tại $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sao cho : $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, r\}, & d_{\sigma(i)} \neq 0 \\ \forall i \in \{r+1, \dots, n\}, & d_{\sigma(i)} = 0 \end{cases}$

Ký hiệu P là ma trận hoán vị được xác định bởi : $P = (\delta_{\sigma(i),j})_{1 \leq i,j \leq n}$, trong đó δ là ký hiệu Kronecker.

Rõ ràng P là trực giao và : $P D P^{-1} = \text{diag}((d_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n})$.

Ký hiệu $D' = P D P^{-1}$ và $A' = P A P^{-1}$, ta có : ${}^tAA = D^2 \Leftrightarrow {}^tA'A' = D'^2$.

Tiếp đến, với mọi Ω' thuộc $O_n(\mathbb{R})$: $A' = \Omega' D' \Leftrightarrow A = P^{-1} \Omega' P D$ và $P^{-1} \Omega' P \in O_n(\mathbb{R})$.

Điều này chứng tỏ rằng, ta có thể đưa về trường hợp tất cả $d_1, \dots, d_r$ đều $\neq 0$ và $d_{r+1}, \dots, d_n$ đều bằng không, và bây giờ ta giả sử điều này.

Ký hiệu $A_1, \dots, A_n$ là các cột của A . Vì ${}^tAA = D^2$, ta có :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \begin{cases} i \neq j \Rightarrow {}^tA_i A_j = 0 \\ i = j \leq r \Rightarrow {}^tA_i A_i = d_i^2 > 0 \\ i = j \geq r+1 \Rightarrow {}^tA_i A_i = 0 \end{cases}$$

Như vậy: $\forall i \in \{r+1, \dots, n\}$, $A_i = 0$ (xem bài tập 4.2.3).

Ký hiệu $A'_i = \frac{1}{d_i} A_i$ với $i \in \{1, \dots, r\}$. Vậy $(A'_1, \dots, A'_r)$ là một họ trực giao (đối với tích vô

hướng chính tắc trên $M_{n,1}(\mathbb{R})$, và ta có thể bổ sung thành một csc $(A'_1, \dots, A'_r, A'_{r+1}, \dots, A'_n)$ của $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ký hiệu Ω là ma trận mà các cột là $A'_1, \dots, A'_n$, rõ ràng: $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Hơn nữa: } \Omega D = (A'_1 \dots A'_r A'_{r+1} \dots A'_n) \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = (A_1 \dots A_r, 0 \dots 0) = A.$$

5.2.14 1) E là tập đóng

Giả sử $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong E và $S \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho: $S_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S$.

- Vì $S_n(\mathbb{R}) = \theta^{-1}(\{0\})$, trong đó $\theta: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ là liên tục và $\{0\}$ đóng, nên $S_n(\mathbb{R})$ đóng trong $M_n(\mathbb{R})$, và như vậy $S \in S_n(\mathbb{R})$.

- Vì S_n^+ đóng trong $S_n(\mathbb{R})$ (xem bài tập 4.4.20) và với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, $S_k - A \in S_n^+$ nên:

$$S - A = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k - A) \in S_n^+, \text{ vậy } A \leq S. \text{ Cũng thế: } S \leq B.$$

Do đó: $S \in E$.

Điều này chứng tỏ rằng E là đóng trong $M_n(\mathbb{R})$ (và trong $S_n(\mathbb{R})$).

2) E giới nội

Trang bị cho $M_{n,1}(\mathbb{R})$ chuẩn Euclide chính tắc (được xác định bởi $\|X\| = (\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{1}{2}}$) và cho $M_n(\mathbb{R})$ chuẩn phụ thuộc $\|\cdot\|$ (xem 1.2.6, Tập 3) được xác định bởi:

$$\|M\| = \sup_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}.$$

Ta biết rằng (xem 1.2.6, Tập 3) $\|\cdot\|$ là một chuẩn nhân.

Cho $S \in E$, ta ký hiệu $S' = S - A$, $B' = B - A$, như vậy ta có: $0 \leq S' \leq B'$.

Theo bài tập 4.4.26, S' và B' có các căn bậc hai trong S_n^+ . Ta có, với mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\|S'^{\frac{1}{2}} X\|^2 = \langle X S' X \rangle = \langle X B' X \rangle = \|B'^{\frac{1}{2}} X\|^2 \leq \|B'\|^{\frac{1}{2}} \|X\|^2.$$

Từ đây: $\|S'\|^{\frac{1}{2}} \leq \|B'\|^{\frac{1}{2}}$.

Tiếp đó: $\|S'\| = \|S'^{\frac{1}{2}}\|^2 \leq \|S'\|^{\frac{1}{2}} \leq \|B'\|^{\frac{1}{2}}$,

và cuối cùng: $\|S\| \leq \|S - A\| + \|A\| \leq \|B'\|^{\frac{1}{2}} + \|A\|$,

Điều này chứng tỏ E giới nội.

3) Vì E là một tập con đóng giới nội trong một kgvdc hữu hạn chiều ($M_n(\mathbb{R})$ hay $S_n(\mathbb{R})$), ta kết luận E là compact.

5.2.15 a) Bảng phép nhân theo khối:

$$\begin{cases} {}^t\Omega\Omega = I_n \\ \Omega {}^t\Omega = I_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tAA + {}^tCC = I_p, {}^tAB + {}^tCD = 0, {}^tBB + {}^tDD = I_{n-p} \\ A {}^tA + B {}^tB = I_p, A {}^tC + B {}^tD = 0, C {}^tC + D {}^tD = I_{n-p} \end{cases}$$

Đặc biệt :

$$\begin{cases} (\det(A))^2 = \det({}^tAA) = \det(I_p - {}^tCC) = (-1)^p \chi_{CC}(1) \\ (\det(D))^2 = \det(D {}^tD) = \det(I_{n-p} - C {}^tC) = (-1)^{n-p} \chi_{C {}^tC}(1) \end{cases}$$

Theo bài tập 2.2.12 : $(-X)^p \chi_{C {}^tC}(X) = (-X)^{n-p} \chi_{C {}^tC}(X)$, từ đây : $(\det(A))^2 = (\det(D))^2$.

b) • Ta chứng minh : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tAA) \subset [0;1]$.

Giả sử $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tAA)$, $X \in \text{KGC}({}^tAA, \lambda)$

Vì ${}^tAA \in S_n^+$ nên ta đã có : $\lambda \geq 0$.

Mặt khác : ${}^tCCX = (I_p - {}^tAA)X = (1 - \lambda)X$ như vậy $1 - \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tCC)$. Vì ${}^tCC \in S_n^+$,

ta suy ra $1 - \lambda \geq 0$.

Điều này chứng tỏ : $0 \leq \lambda \leq 1$.

• Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$${}^tAA = \Omega D \Omega^{-1}.$$

Ta vừa thấy : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \in [0;1]$. Do đó :

$$(\det(A))^2 = \det({}^tAA) = \det(D) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \in [0;1].$$

5.2.16 Phương pháp thứ nhất

Theo định lý về phép thu gọn đồng thời (Mệnh đề 2.4.4.3), tồn tại $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in D_n(\mathbb{R})$

sao cho : $A = {}^tPP$ và $B = {}^tPDP$.

Khi đó ta có : $AB = {}^tPP {}^tPDP$.

Ký hiệu $M = P {}^tPDP {}^tP$, vốn là đối xứng. Vậy ta có : ${}^tPM = AB {}^tP$.

Vì AB lũy linh nên tồn tại $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, thỏa mãn $(AB)^k = 0$. Ta suy ra :

$${}^tPM^k = (AB)^k {}^tP = 0,$$

từ đây $M^k = 0$ do $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Như vậy M là đối xứng và lũy linh.

Theo định lý cơ bản (Định lý 4.4.1), tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$, sao cho $M = \Omega \Delta \Omega^{-1}$.

Ta có : $\Delta^k = \Omega^{-1} M^k \Omega = 0$, như vậy (vì Δ là ma trận chéo) $\Delta = 0$, rồi $M = 0$.

Vì $P {}^tPDP {}^tP = 0$ và $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, ta suy ra $D = 0$, và do đó $B = {}^tPDP = 0$.

Phương pháp thứ hai

Theo bài tập 4.4.26, tồn tại $R \in S_n^{++}$ sao cho $A = R^2$. Ta có :

$$AB = R^2B = R(RBR)R^{-1} \sim RBR.$$

Như vậy RBR đối xứng và lũy linh, nên $RBR = 0$ (như trong phương pháp thứ nhất) và do đó $B = 0$.

5.2.17 a) Ký hiệu $\varphi_1 : (\mathbb{R}_n[X])^2 \rightarrow \mathbb{R}$ và $\varphi_2 : (\mathbb{R}_n[X])^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Rõ ràng φ_1 và φ_2 là

$$(P, Q) \mapsto \varphi(PQ) \quad (P, Q) \mapsto \varphi(XPQ)$$

các dạng song tuyến tính đối xứng. Hơn nữa:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] - \{0\}, \varphi_1(P, P) = \varphi(P^2) > 0,$$

Như vậy đtđ liên kết với φ_1 là xác định dương.

Theo định lý về phép thu gọn đồng thời (Định lý 4.4.2), tồn tại $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ và một họ độc lập tuyến tính $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ các dạng tuyến tính trên $\mathbb{R}_n[X]$ thỏa mãn :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \begin{cases} \varphi_1(P, Q) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(P) \varphi_i(Q) \\ \varphi_2(P, Q) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(P) \varphi_i(Q) \end{cases}$$

b) • Cho $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ta có với mọi P thuộc $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(P) \varphi_i(XQ) = \varphi(PXQ) = \varphi(XPQ) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(P) \varphi_i(Q).$$

Từ đây :

$$\sum_{i=0}^n (\varphi_i(XQ) - \alpha_i \varphi_i(Q)) \varphi_i = 0.$$

Vì $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ độc lập tuyến tính, ta suy ra :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \varphi_i(XQ) = \alpha_i \varphi_i(Q).$$

Áp dụng điều này với $Q = 1, X, \dots, X^{n-1}$, ta suy ra :

$$\varphi_i(X) = \alpha_i \varphi_i(1), \varphi_i(X^2) = \alpha_i^2 \varphi_i(1), \dots, \varphi_i(X^n) = \alpha_i^n \varphi_i(1).$$

• Với P nào đó $\in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^n \beta_k X^k$. Ta có :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \varphi_i(P) = \sum_{k=0}^n \beta_k \varphi_i(X^k) = \sum_{k=0}^n \beta_k \alpha_i^k \varphi_i(1) = P(\alpha_i) \varphi_i(1).$$

Từ đây, với mọi (P, Q) thuộc $(\mathbb{R}_n[X])^2$:

$$\varphi(PQ) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(P) \varphi_i(Q) = \sum_{i=0}^n (\varphi_i(1))^2 P(\alpha_i) Q(\alpha_i).$$

5.2.18 Ký hiệu $R = \frac{1}{2} (A + \bar{A})$, $S = \frac{1}{2i} (A - \bar{A})$, như vậy : $(R, S) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ và $A = R + iS$

(Ta nói rằng R và S là các phần thực và ảo của A). Từ $'A = A$, ta suy ra $'R = R$ và $'S = S$.

Vậy, $(R, S) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$, hơn nữa, theo giả thiết, $R = \frac{1}{2} (A + \bar{A}) \in S_n^{++}$,

Theo định lý thu gọn đồng thời (Mệnh đề 2, 4.4.3) tồn tại $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ và $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho : $R = 'QQ$ và $S = 'Q \text{diag}(t_1, \dots, t_n)Q$.

Với $P = Q^{-1}$ ta được :

$$'PAP = 'Q^{-1}(R + iS)Q^{-1} = I_n + i \text{diag}(t_1, \dots, t_n) = \begin{pmatrix} 1 + it_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + it_n \end{pmatrix}.$$

5.2.19 Theo định lý cơ bản (Định lý 4.4.1), vì $'AA \in S_n^{++}$, nên tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ và

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)$ sao cho với ký hiệu $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ta có : $'AA = \Omega D \Omega^{-1}$.

Rõ ràng ta có thể giả thiết $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$.

Đặt $V = \mathcal{Q}^{-1}U = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Ta có :

$$\|AU\|^2 = {}^tU{}^tAAU = {}^tVDV = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2.$$

như vậy : $\|AU\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_n v_i^2 = \lambda_n \|V\|^2 = \lambda_n \|U\|^2 = \lambda_n$.

Mặt khác, so sánh giữa trung bình cộng và nhân cho $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, ta được :

$$\left(\frac{(\det(A))^2}{\lambda_n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{(\det({}^tAA))}{\lambda_n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i < \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n-1} \operatorname{tr}({}^tAA).$$

Từ đây : $\|AU\|^2 \geq \lambda_n > \frac{(\det(A))^2}{(\operatorname{tr}({}^tAA)^{n-1})} (n-1)^{n-1}$.

5.2.20 • Giả sử $A \in \mathbf{S}_n^+$. Theo định lý cơ bản (Định lý 4.4.1), tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$,

$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$, sao cho $A = PDP^{-1}$ và $\forall i \in \{1, \dots, n\} \lambda_i \geq 0$.

Cho $\mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $Q = P^{-1}\mathcal{Q}P$ vốn là trực giao. Ta có : $\operatorname{tr}(A\mathcal{Q}) = \operatorname{tr}(DQ)$.

Ký hiệu $Q = (q_{ij})_{ij}$. Như vậy :

$$|\operatorname{tr}(DQ)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{ii} \right| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |q_{ii}|.$$

Vì $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) : \forall i \in \{1, \dots, n\}, |q_{ii}| \leq 1$, từ đây : $|\operatorname{tr}(DQ)| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr}(A)$.

5.2.21 • Theo định lý cơ bản (Định lý, 4.4.1), tồn tại $\mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \mathcal{Q}D\mathcal{Q}^{-1}$.

Giả sử $(x, X) \in \mathbb{R} \times \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sao cho $\|X\| = 1$. Ký hiệu $Y = \mathcal{Q}^{-1}X$, ta có :

$$\|Y\|^2 = {}^tX{}^t\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{Q}^{-1}X = {}^tXX = \|X\|^2 = 1 \text{ và } X{}^tX = \mathcal{Q}Y{}^tY{}^t\mathcal{Q}.$$

do đó : $\operatorname{tr}((A - xX{}^tX)^2) = \operatorname{tr}((\mathcal{Q}(D - xY{}^tY)\mathcal{Q}^{-1})^2) = \operatorname{tr}((\mathcal{Q}(D - xY{}^tY)^2\mathcal{Q}^{-1}) = \operatorname{tr}((D - xY{}^tY)^2)$.

Vậy ta cần tìm $\inf_{\substack{(x,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|Y\|=1}} \operatorname{tr}((D - xY{}^tY)^2)$.

• Với ký hiệu $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, sử dụng ${}^tYY = 1$, ta có :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((D - xY{}^tY)^2) &= \operatorname{tr}(D^2 - xDY{}^tY - xY{}^tYD + x^2Y{}^tY{}^tY) = \operatorname{tr}(D^2) - 2x\operatorname{tr}(DY{}^tY) + x^2\operatorname{tr}(Y{}^tY) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2x \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 + x^2 \sum_{i=1}^n y_i^2. \end{aligned}$$

Bằng cách ký hiệu $\alpha(Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ và $\beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, ta có :

$$\operatorname{tr}((D - xY{}^tY)^2) = x^2 - 2\alpha(Y)x + \beta = (x - \alpha(Y))^2 + \beta - (\alpha(Y))^2.$$

Ta suy ra $\inf_{x \in \mathbb{R}} \text{tr}((D - xY'Y)^2) = \beta - (\alpha(Y))^2$.

tiếp theo, vì $\sup_{\substack{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|Y\|=1}} \alpha(Y) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ (xem bài tập 4.4.7) nên :

$$\inf_{\substack{(x,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|Y\|=1}} \text{tr}((D - xY'Y)^2) = \beta - \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right)^2.$$

♦ Trả lời : $\text{tr}(A^2) - \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right)^2$.

5.2.22 α (ii) $\Rightarrow$ (i) là hiển nhiên

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

Ta quy nạp theo n . Tính chất là tầm thường với $n = 1$.

Giả sử nó đúng với n thuộc $\mathbb{N}^*$, và $S \in \mathbf{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ sao cho $\text{tr}(S) = 0$.

Theo định lý cơ bản (Định lý 4.4.1), tồn tại $\mathcal{Q}_1 \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{D}_{n+1}(\mathbb{R})$ thỏa mãn $S = \mathcal{Q}_1 D \mathcal{Q}_1^{-1}$.

Xét $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Ta có : ${}^t U D U = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \text{tr}(D) = \text{tr}(S) = 0$.

Tồn tại $\mathcal{Q}_2 \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ có cột thứ nhất là $\frac{1}{\sqrt{n+1}} U$ (theo định lý về csc không đầy đủ).

$$\text{Ký hiệu } A' = \mathcal{Q}_2^{-1} D \mathcal{Q}_2 = {}^t \mathcal{Q}_2 D \mathcal{Q}_2 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Phần tử thứ (1,1) của A' bằng $\frac{1}{n} (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1})$ nên bằng không.

Như vậy, tồn tại $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ sao cho : $A' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t C \\ C & B \end{pmatrix}$.

Hơn nữa $\text{tr}(B) = \text{tr}(A') = \text{tr}(D) = 0$.

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $\mathcal{Q}_3 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $B' \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ với các phần tử chéo bằng không,

$$\text{sao cho } B = \mathcal{Q}_3 B' \mathcal{Q}_3^{-1}.$$

Ký hiệu $\mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. Phép nhân theo khối cho ta :

$$\mathcal{Q}'^{-1} A' \mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t C \mathcal{Q}_3 \\ \mathcal{Q}_3^{-1} C & B' \end{pmatrix}, \text{ là đối xứng và có đường chéo bằng không.}$$

b) Cùng kết quả như a), được diễn đạt theo thuật ngữ của dạng toàn phương.

5.2.23 (i) $\Rightarrow$ (ii) :

Ta giả thiết $p \circ q = q \circ p$.

Giả sử $(x, y) \in ((F \cap G)^\perp \cap F) \times ((F \cap G)^\perp \cap G)$.

Vì $x \in F = \text{Im}(p)$, ta có $p(x) = x$, tiếp đó $p(q(x)) = q(p(x)) = q(x)$, như vậy $q(x) \in \text{Im}(p)$.

Vậy : $q(x) \in F \cap G$.

$\forall y \in (F \cap G)^\perp$ và q đối xứng, ta suy ra :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, q(y) \rangle = \langle q(x), y \rangle = 0.$$

Điều này chứng tỏ các kgvc $(F \cap G)^\perp \cap F$ và $(F \cap G)^\perp \cap G$ là trực giao.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

Giả sử các kgvc $(F \cap G)^\perp \cap F$ và $(F \cap G)^\perp \cap G$ là trực giao.

1) Cho $x \in E$. Ta có : $\forall z \in F \cap G, \langle p(x - q(x)), z \rangle = \langle x - q(x), p(z) \rangle = 0$.

$$\text{vì } p \text{ là đối xứng và } \begin{cases} x - q(x) \in \text{Ker}(q) = G^\perp \\ p(z) = z \in G \end{cases}$$

Như vậy : $\forall x \in E, p(x - q(x)) \in (F \cap G)^\perp$,

và : $\forall x \in E, p(x - q(x)) \in (F \cap G)^\perp \cap F$.

Cũng như vậy : $\forall y \in E, q(y - p(y)) \in (F \cap G)^\perp \cap G$.

Theo giả thiết : $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x - q(x)), q(y - p(y)) \rangle = 0$.

2) Cho $x \in F^\perp = \text{Ker}(p)$. Theo kết quả trên :

$$\forall y \in E, \langle -p(q(x)), q(y - p(y)) \rangle = 0.$$

Đặc biệt, bằng cách thay y bằng x : $\langle -p(q(x)), q(x) \rangle = 0$,

từ đây : $0 = \langle p \circ q(x), q(x) \rangle = \langle p^2 \circ q(x), q(x) \rangle = \langle p \circ q(x), p \circ q(x) \rangle = \|p \circ q(x)\|^2$.

vậy $p \circ q(x) = 0$, và nó riêng : $p \circ q(x) = q \circ p(x)$.

Điều này chứng tỏ rằng $F^\perp$ ổn định đối với q .

3) Vì $F^\perp$ ổn định đối với q và q đối xứng, nên dễ dàng suy ra $F (= F^{\perp\perp})$ cũng ổn định đối với q . Như vậy : $\forall x \in F, q(x) \in F$, tức là : $\forall x \in F, (p \circ q)(x) = q(x) = (q \circ p)(x)$.

4) Ta đã chứng minh được $p \circ q$ và $q \circ p$ trùng nhau trên F và trên $F^\perp$, là những phần bù nhau trong E vậy $p \circ q = q \circ p$.

5.2.24 a) (i) $\Rightarrow$ (ii) :

Giả sử $f \in A$. Khi đó $(f^* \circ f)^2 = f^* \circ (f \circ f^* \circ f) = f^* \circ f$: vậy $f^* \circ f$ là một phép chiếu của E . Hơn nữa, $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f$. Vậy $f^* \circ f$ là một phép chiếu đối xứng của E , nên là một phép chiếu trực giao (xem bài tập 4.3.1).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

Giả sử $f^* \circ f$ là một phép chiếu trực giao của E .

Cho $x \in (\text{Ker}(f))^{\perp}$. Ta có : $\|f((f^* \circ f)(x)) - x\|^2 = \langle f^* \circ f \circ f^* \circ f(x) - f^* \circ f(x), f^* \circ f(x) - x \rangle = 0$,

vậy $f((f^* \circ f)(x)) - x = 0, f^* \circ f(x) - x \in \text{Ker}(f)$. Ta suy ra $\langle f^* \circ f(x) - x, x \rangle = 0$, từ đây :

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) :

Giả sử : $\forall x \in (\text{Ker}(f))^{\perp}, \|f(x)\| = \|x\|$.

Cho $u \in E$. Tồn tại $(y, z) \in (\text{Ker}(f))^{\perp} \times (\text{Ker}(f))$ sao cho $u = y + z$. Khi đó $f(u) = f(y)$.

Ta sẽ chứng minh : $f^* \circ f(y) = y$.

• $y \in (\text{Ker}(f))^{\perp}$, vậy $\|f(y)\| = \|y\|$, từ đây :

$$\|f^* \circ f(y) - y\|^2 = \|f^* \circ f(y)\|^2 - 2\|f(y)\|^2 + \|y\|^2 = \|f^* \circ f(y)\|^2 - \|f(y)\|^2$$

• $f^* \circ f(y) \in (\text{Ker}(f))^{\perp}$ vì : $\forall t \in \text{Ker}(f), \langle t, f^* \circ f(y) \rangle = \langle f(t), f(y) \rangle = 0$.

Vậy $\|f(f^* \circ f(y))\| = \|f^* \circ f(y)\|$ từ đó, cũng như trên ta có :

$$\|f \circ f^* \circ f(y) - f(y)\|^2 = \|f \circ f^* \circ f(y)\|^2 - 2\|f^* \circ f(y)\|^2 + \|f(y)\|^2 = -\|f^* \circ f(y)\|^2 + \|f(y)\|^2.$$

Bằng cách cộng hai kết quả trên, suy ra : $\|f^* \circ f(y) - y\|^2 = \|f \circ f^* \circ f(y) - f(y)\|^2 = 0$,

vậy : $f^* \circ f(y) = y$.

Khi đó : $f \circ f^* \circ f(u) = f \circ f^* \circ f(y) = f(y) = f(u)$ và cuối cùng $f \in A$.

b) 1) Theo a) (kéo theo $i \Rightarrow iii$), ta đã có : $\text{Ker}(f) \subset \{x \in E; \|f(x)\| = \|x\|\}$.

2) Giả sử $x \in E$ sao cho $\|f(x)\| = \|x\|$. Ta có :

$$\begin{aligned}\|f^* \circ f(x) - x\|^2 &= \|f^* \circ f(x)\|^2 - 2\|f(x)\|^2 + \|x\|^2. \\ &= \langle f(x), f \circ f^* \circ f(x) \rangle - 2\|f(x)\|^2 + \|x\|^2 = -\|f(x)\|^2 + \|x\|^2 = 0.\end{aligned}$$

như vậy $f^* \circ f(x) = x$.

3) Cho $x \in E$ sao cho $f^* \circ f(x) = x$. Với mọi z thuộc $\text{Ker}(f)$, ta có :

$$\langle x, z \rangle = \langle f^* \circ f(x), z \rangle = \langle f(x), f(z) \rangle = 0.$$

điều này chứng tỏ : $x \in (\text{Ker}(f))^\perp$.

c) 1) $f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow f^* \circ f = e \Rightarrow f \circ f^* \circ f = f \Leftrightarrow f \in A$, như vậy $\mathcal{O}(E) \subset A$.

2) Cho $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong $\mathcal{O}(E) \subset A$ và $f \in A$ sao cho $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$. Ta có :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_k^* \circ f_k = f_k \circ f_k^* = e,$$

từ đó chuyển qua giới hạn và lưu ý rằng $f_k^* \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f^*$ (trong $\mathcal{L}(E)$), ta có : $f^* \circ f = f \circ f^* = e$, như

vậy $f \in \mathcal{O}(E)$.

Điều này chứng tỏ $\mathcal{O}(E)$ là đóng trong A .

Ta còn biết $\mathcal{O}(E)$ là đóng trong $\mathcal{L}(E)$, vậy đóng trong A vì $\mathcal{O}(E) \subset A \subset \mathcal{L}(E)$.

3) Chứng minh : $\mathcal{O}(E) = A \cap \mathcal{GL}(E)$.

Đã có bao hàm thức $\mathcal{O}(E) \subset A \cap \mathcal{GL}(E)$.

Cho $f \in A \cap \mathcal{GL}(E)$. Khi đó $f \circ f^* \circ f = f$ và f khả nghịch, do đó $f^* \circ f = e$, nên $f \in \mathcal{O}(E)$.

Như vậy : $\mathcal{O}(E) = A \cap \mathcal{GL}(E)$. Vì $\mathcal{GL}(E)$ là mở trong $\mathcal{L}(E)$ (xem bài tập 1.2.22, Tập 5), từ đó suy ra $\mathcal{O}(E)$ là mở trong A .

5.2.25 1) Tồn tại (xem bài tập 4.4.26)

Theo định lý cơ bản, tồn tại $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ và $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sao cho $S = \Omega D \Omega^{-1}$ trong đó

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Xét $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ và $R = \Omega \Delta \Omega^{-1}$.

Khi đó :

$$\bullet R^2 = \Omega \Delta^2 \Omega^{-1} = \Omega D \Omega^{-1} = S$$

$$\bullet {}^t R = {}^t \Omega^{-1} \Delta {}^t \Omega = \Omega \Delta \Omega^{-1} = R, \text{ vậy } R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$\bullet R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ vì } R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ và } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) \subset \mathbb{R}_+.$$

2) Tính duy nhất

Giả sử $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sao cho $R^2 = S$.

$$\bullet \text{Ta có : } \begin{cases} \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) \subset \{\sqrt{\mu}; \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)\} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R), \text{KGCR}(R, \lambda) \subset \text{KGCR}(S, \lambda^2) \end{cases}$$

vì $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), (RX = \lambda X \Rightarrow SX = R^2 X = \lambda^2 X)$.

Vì R và S chéo hóa được, ta suy ra :

$$M_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R)} \text{KGCR}(R, \lambda) \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(R)} \text{KGCR}(S, \lambda^2) \subset \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)} \text{KGCR}(S, \mu) = M_{n,1}(\mathbb{R}),$$

từ đó cần có :
$$\begin{cases} \text{Sp}_{\mathbf{R}}(S) = \{\lambda^2; \lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{R}}(R)\} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{R}}(R), \text{KGCR}(R, \lambda) \subset \text{KGCR}(S, \lambda^2) \end{cases}$$

• Tồn tại $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Theo kết quả trên, tồn tại $D' \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $R = \Omega D' \Omega^{-1}$. Vì $R \in \mathbf{S}_n^+$, D' được lập thành từ các căn bậc hai của các phần tử thuộc D , do đó R là duy nhất.

5.2.26 a) Giả sử $\Omega \sim S$. Khi đó: $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Vì $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, ta suy ra : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \{1\}$.

Mặt khác cần chứng minh $\text{Ker}(\Omega - I_n)$ và $(\text{Ker}(\Omega - I_n))^{\perp}$ ổn định đối với Ω (xem bài tập 5.2.8). Suy ra tồn tại $(\Omega' \in \mathbf{O}_{n-p}(\mathbb{R}), \omega \in \mathbf{O}_{n-p}(\mathbb{R}))$ (trong đó $p = \dim(\text{Ker}(\Omega - I_n))$) sao cho

$$\Omega = \Omega' \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \Omega'^{-1}.$$

Vì $\text{Sp}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \{1\}$, ta suy ra $p = n$, tiếp đó $\Omega = I_n$.

b) Ký hiệu $S' = S^{-\frac{1}{2}}(\Omega S)\Omega^{-\frac{1}{2}}$, ta có :
$$\begin{cases} \Omega = S^{\frac{1}{2}} S' S^{-\frac{1}{2}} \sim S', \text{ do đó theo a) : } \Omega = I_n. \\ S' \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases}$$

5.2.27 (i) $\Rightarrow$ (ii) :

Giả sử tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ sao cho $M = PSP^{-1}$. Khi đó, với ký hiệu $A = PS^{\frac{1}{2}}P$ và

$$B = P^{-1}S^{\frac{1}{2}}P^{-1}, \text{ ta có : } \begin{cases} M = PS^{\frac{1}{2}}P^{-1}P^{-1}S^{\frac{1}{2}}P^{-1} = AB \\ A \in \mathbf{S}_n^{++}, B \in \mathbf{S}_n^{++} \end{cases}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Giả sử tồn tại $A, B \in \mathbf{S}_n^{++}$ sao cho $M = AB$.

$$\text{Ký hiệu } F = A^{\frac{1}{2}}, \text{ ta có : } \begin{cases} M = F^2 B = F(FBF)F^{-1} \sim FBF \\ FBF \in \mathbf{S}_n^{++} \end{cases}$$

5.2.28 1) Nếu R giao hoán với M , thì, vì $A (= R^2)$ là một đa thức của R , A giao hoán với M .

2) Đảo lại, giả sử $AM = MA$.

Tồn tại $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \Omega D \Omega^{-1}$, và $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$.

Ký hiệu $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, ta có $R = \Omega \Delta \Omega^{-1}$ (xem bài tập 5.2.25).

Tồn tại $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Thực vậy chỉ cần chọn một đa thức nội suy của λ , đối một phân biệt.

Khi đó $\Delta = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = P(D)$,

tiếp đó $R = \Omega \Delta \Omega^{-1} = \Omega P(D) \Omega^{-1} = P(\Omega D \Omega^{-1}) = P(A)$.

Như vậy, R là một đa thức của A . Vì A giao hoán với M , ta suy ra R giao hoán với M .

5.2.29 1) Giả sử $B \in S_n^{++}$ sao cho $AB = BA$ và $(AB)^2 = -I_n$.

Khi đó $A^2B^2 = -I_n$ do đó $B^2 = (-A^2)^{-1}$, tiếp đó $B = ((-A^2)^{-1})^{\frac{1}{2}}$ với điều kiện tồn tại.

Đảo lại $-A^2 \in S_n^{++}$ vì:

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, {}^tX(-A^2)X = {}^tX^tAA^2X = \|AX\|^2 > 0.$$

Vậy ta có thể định nghĩa $B = ((-A^2)^{-1})^{\frac{1}{2}}$.

Khi đó B giao hoán với A (vì $(-A^2)^{-1}$ giao hoán với A , (xem bài tập 5.2.28), và

$$(AB)^2 = A^2B^2 = A^2(-A^2)^{-1} = -I_n.$$

5.2.30 a) Vì với mọi x thuộc E : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|g(x)\| = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$,

nên ta có $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.

Theo định lý về hạng ta suy ra:

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(\text{Im}(g)).$$

• Kgv $\text{Ker}(f)$ ($= \text{Ker}(g)$) của E có ít nhất một phần bù F trong E .

Ký hiệu $f': F \rightarrow \text{Im}(f)$ và $g': F \rightarrow \text{Im}(g)$.

$$x \mapsto f(x) \qquad x \mapsto g(x)$$

Ảnh xạ f' là tuyến tính, và song ánh vì với mọi y thuộc $\text{Im}(f)$, tồn tại $u \in E$ sao cho $y = f(u)$,

tiếp đó $(x, z) \in F \times \text{Ker}(f)$ sao cho $u = x + z$, và ta có $y = f(u) = f(x)$.

Do $\dim(F) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Im}(f))$, suy ra f' là song ánh, cũng như vậy, g' là song ánh.

Ký hiệu $\theta = f' \circ g'^{-1}$, θ là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$ -kgv từ $\text{Im}(g)$ vào $\text{Im}(f)$. Hơn nữa θ bảo toàn chuẩn vì:

$$\forall t \in \text{Im}(g), \|\theta(t)\| = \|f(g'^{-1}(t))\| = \|g(g'^{-1}(t))\| = \|g'(g'^{-1}(t))\| = \|t\|.$$

• Ký hiệu $F' = (\text{Im}(f))^{\perp}$, $G' = (\text{Im}(g))^{\perp}$, vì $\dim(F') = \dim(G')$ nên tồn tại một đẳng cấu $\varphi: G' \rightarrow F'$ bảo toàn chuẩn (chỉ cần chuyển từ một csc của G' sang một csc của F').

• Ký hiệu h là một tự đẳng cấu của E thu được qua phép dính θ và φ , tức là phần tử của $\mathcal{L}(E)$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} \forall x \in \text{Im}(g), & h(x) = \theta(x) \\ \forall x \in (\text{Im}(g))^{\perp}, & h(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

Cho $x \in E$. Tồn tại $(u, v) \in \text{Im}(g) \times (\text{Im}(g))^{\perp}$ sao cho $x = u + v$.

Ta có: $\|h(x)\|^2 = \|h(u) + h(v)\|^2 = \|h(u)\|^2 + \|h(v)\|^2$, vì $h(u) \in \text{Im}(f)$ và $h(v) \in (\text{Im}(f))^{\perp}$.

Tiếp đó: $\|h(u) + h(v)\|^2 = \|\theta(u)\|^2 + \|\varphi(v)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|x\|^2$.

Điều này chứng tỏ $h \in \mathcal{O}(E)$.

• Giả sử $t \in E$. Tồn tại $(x, z) \in F \times \text{Ker}(f)$ sao cho $t = x + z$. Vì $g(z) = f(z) = 0$, ta có:

$$h(g(t)) = \theta(g'(x)) = f'(x) = f(x) = f(t).$$

Vậy $h \circ g = f$.

b) Đây là dạng ma trận của a).

Nhận xét:

Ta có thể suy ra từ bài tập 5.2.13, b).

Thực vậy, giả sử $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ sao cho ${}^tAA = {}^tBB$.

${}^tAA \in S_n^+$, tồn tại $\Omega_1 \in O_n(\mathbb{R})$, $D \in D_n(\mathbb{R})$, sao cho ${}^tAA = \Omega_1 D^2 \Omega_1^{-1}$.

Ký hiệu $A' = \Omega_1^{-1} A \Omega_1$ và $B' = \Omega_1^{-1} B \Omega_1$ ta có ${}^tA'A' = \Omega_1^{-1} {}^tAA \Omega_1 = D^2$ và ${}^tB'B' = D^2$.

Theo bài tập 5.2.13, tồn tại $\Omega_2, \Omega_3 \in O_n(\mathbb{R})$ sao cho : $A' = \Omega_2 D$ và $B' = \Omega_3 D$.

Suy ra $\begin{cases} A = \Omega_1 A' \Omega_1^{-1} = \Omega_1 \Omega_2 D \Omega_1^{-1} \\ B = \Omega_1 B' \Omega_1^{-1} = \Omega_1 \Omega_3 D \Omega_1^{-1} \end{cases}$, do đó $A = \Omega B$, trong đó $\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3^{-1} \Omega_1^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

5.2.31 Giả sử $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Sự tồn tại

Vì $'AA \in S_n^{++}$, ta có thể xét $S = ('AA)^{\frac{1}{2}} \in S_n^{++}$ (xem bài tập 5.2.25), tiếp đó $\Omega = AS^{-1}$.

Ta có : $'\Omega\Omega = 'S^{-1}AAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, vậy $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

Tính duy nhất

Giả sử $(\Omega S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$ sao cho $A = \Omega S$.

Khi đó : $'AA = S'\Omega\Omega S = S^2$, từ đây, theo tính duy nhất của căn bậc hai của $'AA$ trong S_n^{++}

(xem bài tập 5.2.25) : $S = ('AA)^{\frac{1}{2}}$, tiếp đó $\Omega = AS^{-1}$.

Một chứng minh khác cho tính duy nhất bằng cách sử dụng bài tập 5.2.9 :

Giả sử $\Omega, \Omega' \in O_n(\mathbb{R})$, $S, S' \in S_n^{++}$ sao cho $\Omega S = \Omega' S'$. Khi đó $\Omega'^{-1}\Omega = S' S^{-1}$, nhưng

$\Omega'^{-1}\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ và $S' S^{-1}$ là tích của hai ma trận thuộc S_n^{++} , như vậy (bài tập 5.2.9) $\Omega'^{-1}\Omega$

$S' S^{-1}$ là trực giao, chéo hóa được trong $M_n(\mathbb{R})$ và mọi giá trị riêng đều > 0 , từ đó dễ dàng có

$\Omega'^{-1}\Omega = I_n$, tiếp đó $\Omega' = \Omega S' = S$.

5.2.32 Vì $GL_n(\mathbb{R})$ trù mật trong $M_n(\mathbb{R})$ (xem bài tập 1.2.22, Tập 3), nên tồn tại một dãy

$(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ trong $GL_n(\mathbb{R})$ sao cho $M_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$.

Theo bài tập 5.2.31, với mọi k thuộc $\mathbb{N}$, tồn tại $(\Omega_k, S_k) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$ sao cho $M_k = \Omega_k S_k$

Vì $O_n(\mathbb{R})$ là tập compact (do đóng và giới nội trong $M_n(\mathbb{R})$), nên tồn tại σ và $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$

sao cho $\Omega_{\sigma(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Omega$. Vậy :

$$S_{\sigma(k)} = \Omega_{\sigma(k)}^{-1} M_{\sigma(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Omega^{-1} M.$$

Nhận thấy $S = \Omega^{-1} M$, vì $M = \Omega S$.

$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, 'S_{\sigma(k)} = 'M_{\sigma(k)} \Omega_{\sigma(k)}^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 'M \Omega \\ 'S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S \end{cases}$, như vậy $S = 'M \Omega = ('(\Omega^{-1} M) = 'S$, từ đây $S \in S_n(\mathbb{R})$.

• Giả sử $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ta có : $\forall k \in \mathbb{N}, 'XS_{\sigma(k)}X \geq 0$, từ đây chuyển qua giới hạn : $'XSX \geq 0$,

và như vậy $S \in S_n^+$.

Tính duy nhất của S : nếu $(\mathcal{Q}, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^+$, sao cho $M = \mathcal{Q}S$, thì $'MM = 'S'\mathcal{Q}\mathcal{Q}S = S^2$,

vậy S là căn bậc hai của $'MM$ trong $\mathbf{S}_n^+$ (xem bài tập 5.2.25).

Áp dụng

Giả sử $(A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$ sao cho $'AA = 'BB$.

Theo phân tích cực trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, tồn tại $\mathcal{Q}_A, \mathcal{Q}_B \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $S_A, S_B \in \mathbf{S}_n^+$ sao cho :

$A = \mathcal{Q}_A S_A$, $B = \mathcal{Q}_B S_B$. Vì $'BB = 'AA$, ta có $S_B^2 = S_A^2$, tiếp đó, theo tính duy nhất của căn bậc

hai trong $\mathbf{S}_n^+$ (xem bài 5.2.25) : $S_B = S_A$. Vậy $A = \mathcal{Q}B$, trong đó $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_A \mathcal{Q}_B^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Nhận xét

Ta cũng có thể suy ra từ định lý phân cực trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ của bài tập 5.2.30 b)

Giả sử $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Vì $'MM \in \mathbf{S}_n^+$, tồn tại $S \in \mathbf{S}_n^+$ sao cho $'MM = S^2 = 'SS$. Theo bài tập

5.2.30 b) tồn tại $\mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ sao cho $M = \mathcal{Q}S$. Lập luận này tránh được sự tham gia của tính compact.

5.2.33 $'XX + 'XA + 'AX = 0 \Leftrightarrow '(X+A)(X+A) = 'AA \Leftrightarrow (\exists \mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), X+A = \mathcal{Q}A)$.

◊ **Trả lời :** $\{(\mathcal{Q} - I_n)A : \mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})\}$.

5.2.34 • Cho (X, Y) thích hợp. Khi đó : $'(X - Y)(X - Y) = A - B$.

Ký hiệu $C = (A - B)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}_n^+$. Theo định lý phân cực trong $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (bài tập 5.2.32), tồn tại

$\mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, sao cho $X - Y = \mathcal{Q}C$.

• Thay X bằng $Y + \mathcal{Q}C$ ($\mathcal{Q} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$), ta được :

$$\begin{cases} 'XX + 'YY = A \\ 'XY + 'YX = B \end{cases} \Leftrightarrow 2'YY + 'Y\mathcal{Q}C + C\mathcal{Q}'Y = B \Leftrightarrow '(Y + \frac{1}{2}\mathcal{Q}C)(Y + \frac{1}{2}\mathcal{Q}C) = \frac{1}{4}(A+B).$$

Đặt $R = \frac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}_n^+$. Lại theo định lý phân cực, hệ thức trên là tương đương với sự tồn

tại của $\mathcal{Q}' \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ sao cho $Y + \frac{1}{2}\mathcal{Q}C = \mathcal{Q}'R$.

◊ **Trả lời :** $\{(\mathcal{Q}U + \mathcal{Q}'U', -\mathcal{Q}U + \mathcal{Q}'U') : (\mathcal{Q}\mathcal{Q}') \in (\mathbf{O}_n(\mathbb{R}))^2\}$,

trong đó $U = \frac{1}{2}(A - B)^{\frac{1}{2}}$ và $U' = \frac{1}{2}(A + B)^{\frac{1}{2}}$.

5.2.35 Theo bài tập 5.2.32, tồn tại $(\mathcal{Q}, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^+$, sao cho $A = \mathcal{Q}S$. Tiếp đó theo định lý cơ bản, tồn tại $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ với các phần tử trên đường chéo ≥ 0 sao cho

$S = PDP^{-1}$. Khi đó, với ký hiệu $U = \mathcal{Q}P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ và $V = P^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ ta có :

$$A = \mathcal{Q}S = \mathcal{Q}PDP^{-1} = UDV.$$

5.2.36 Quy nạp theo n .

Tính chất là tầm thường với $n = 1$.

Giả sử tính chất trên đúng với mọi p thuộc $\mathbb{N}^*$ sao cho $p < n$, và I là một tập không rỗng.

$(S_i)_{i \in I}$ là một họ các phần tử thuộc $S_n(\mathbb{R})$ đôi một giao hoán.

Trường hợp $(\forall i \in I, S_i \in \mathbb{R}I_n)$ là tầm thường.

Giả sử rằng, tồn tại $i_0 \in I$ sao cho $S_{i_0} \notin \mathbb{R}I_n$.

Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $D \in D_n(\mathbb{R})$, sao cho $S_{i_0} = \Omega D \Omega^{-1}$.

Vì $S_{i_0} \notin \mathbb{R}I_n$, các phần tử trên đường chéo của D không bằng nhau. Vậy ta có thể giả thiết

$D = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_r & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$, trong đó $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \{1, \dots, n-1\}$, $D' \in D_{n-r}(\mathbb{R})$ với các phần tử chéo $\neq \lambda_0$.

Với mỗi $i \in I$, phân tích $\Omega^{-1} S_i \Omega$ theo khối: $\Omega^{-1} S_i \Omega = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ B_i^t & C_i \end{pmatrix}$ trong đó $A_i \in S_r(\mathbb{R})$,

$B_i \in M_{r, n-r}(\mathbb{R})$, $C_i \in S_{n-r}(\mathbb{R})$.

Vì $(S_i)_{i \in I}$ đôi một giao hoán, đặc biệt: $\forall i \in I, S_i S_{i_0} = S_{i_0} S_i$.

Thực hiện phép nhân theo khối, ta suy ra: $\forall i \in I, \lambda_0 B_i = B_i D'$,

tức là: $\forall i \in I, B_i (D' - \lambda_0 I_{n-r}) = 0$.

Nhưng $D' - \lambda_0 I_{n-r}$ là khả nghịch, do đó: $\forall i \in I, B_i = 0$.

Vậy ta chứng minh: $\forall (i, j) \in I^2, \begin{cases} A_i A_j = A_j A_i \\ C_i C_j = C_j C_i \end{cases}$.

Như vậy ta có thể áp dụng giả thiết quy nạp với hai họ $(A_i)_{i \in I}$ và $(C_i)_{i \in I}$.

Nên tồn tại $\Omega_1 \in O_r(\mathbb{R})$ và $\Omega_2 \in O_{n-r}(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\forall i \in I, \begin{cases} \Omega_1^{-1} A_i \Omega_1 \in D_r(\mathbb{R}) \\ \Omega_2^{-1} C_i \Omega_2 \in D_{n-r}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Ký hiệu $\Omega' = \Omega \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{pmatrix}$, khi đó ta dễ dàng có: $\Omega' \in O_n(\mathbb{R})$ và:

$$\forall i \in I, \Omega'^{-1} S_i \Omega' \in D_n(\mathbb{R}).$$

5.2.37 Theo bài tập 5.2.36, tồn tại $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$ (tương ứng $\mathbb{R}_+^*$) sao cho với ký hiệu $D_A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $D_B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, ta có: $A = \Omega D_A \Omega^{-1}$, $B = \Omega D_B \Omega^{-1}$. Khi đó $AB = \Omega D_A D_B \Omega^{-1} = \Omega \text{diag}(\lambda_i \mu_i)_{1 \leq i \leq n} \Omega^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R})$ (tương ứng $S_n^{++}(\mathbb{R})$).

5.2.38 Giả sử $0 \leq A \leq B$.

Vì A và B giao hoán, $B - A$ và $B + A$ cũng giao hoán. Theo bài tập 5.2.37, vì $B - A \in S_n^+$ và $B + A \in S_n^+$, nên: $(B - A)(B + A) \in S_n^+$.

Nhưng A và B giao hoán nên $(B - A)(B + A) = B^2 - A^2$.

Cuối cùng: $A^2 \leq B^2$.

C 5.1

1) Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

Khi đó ta có $A^2 = \Omega D \Omega^{-1}$, vậy (xem bài tập 5.2.25): $|A| = (A^2)^{\frac{1}{2}} = \Omega A \Omega^{-1}$, trong đó $A = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} |A| - A = \Omega \text{diag}((|\lambda_i| - \lambda_i)_i) \Omega^{-1} \in \mathbf{S}_n^+ \\ |A| + A = \Omega \text{diag}((|\lambda_i| + \lambda_i)_i) \Omega^{-1} \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases}$, như vậy $A \leq |A|$ và $-A \leq |A|$.

Hơn nữa: $|A| = A \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, |\lambda_i| = \lambda_i) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0) \Leftrightarrow A \in \mathbf{S}_n^+$.

$$2) |\alpha A| = ((\alpha A)^2)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2 A^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| |A|.$$

3) • Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hoặc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $A^2 = I_2$, vậy $|A| = I_2$.

• Trường hợp $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Chéo hóa A theo nhóm trục giao: $A = \Omega D \Omega^{-1}$, trong đó $\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Omega^{-1} = {}^t \Omega$,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Từ đây } |A| = \Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\diamond \text{ Trả lời: } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) a) Vì $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ và $AB = BA$, theo bài tập 5.2.36, tồn tại $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D_A, D_B \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $A = \Omega D_A \Omega^{-1}$ và $B = \Omega D_B \Omega^{-1}$.

Ký hiệu $D_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D_B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \leq B \\ -A \leq B \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} B - A \in \mathbf{S}_n^+ \\ B + A \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases} \Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1, \dots, n\} \right) \begin{cases} \beta_i - \alpha_i \geq 0 \\ \beta_i + \alpha_i \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, |\alpha_i| \leq \beta_i) \\ &\Leftrightarrow B - |A| = \Omega (D_B - |D_A|) \Omega^{-1} \in \mathbf{S}_n^+ \Leftrightarrow |A| \leq B. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Xét ví dụ } n=2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{ta có: } B - A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+ \text{ (bởi vì, chẳng hạn:}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy) (B - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 = (x + \sqrt{2}y)^2 + y^2 \geq 0),$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+, B - |A| = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+ \text{ (bởi vì, chẳng hạn:}$$

$$(1-1)(B - |A|) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 2\sqrt{2} + 1 < 0).$$

$\diamond$ Trả lời: không (nếu $n \geq 2$).

5) a) Lập luận như trong lời giải của 4) a).

b) Xét ví dụ: $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, ta có:

$$\bullet A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, |A + B| = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet |A| = A \text{ (vì } A \in S_2^+), \text{ và } |B| = -B \text{ (vì } -B \in S_2^+)$$

$$\bullet |A| + |B| - |A + B| = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \notin S_2^+ \text{ (định thức } < 0).$$

6) a) Giả sử $S \in S_n^+$, $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. Ta chứng minh:

$$({}^t\Omega S \Omega)^{\frac{1}{2}} = {}^t\Omega S^{\frac{1}{2}} \Omega.$$

Theo định lý cơ bản, tồn tại $\Omega_1 \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ với các phần tử trên đường chéo

≥ 0 , sao cho $S = \Omega_1 D \Omega_1^{-1}$. Ta lại có $S^{\frac{1}{2}} = \Omega_1 \Delta \Omega_1^{-1}$, trong đó $\Delta = \text{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_n^{\frac{1}{2}})$. Vậy

$${}^t\Omega S \Omega = ({}^t\Omega_1^{-1} \Omega) D (\Omega_1^{-1} \Omega), \text{ từ đây với ký hiệu } S' = ({}^t\Omega_1^{-1} \Omega) \Delta (\Omega_1^{-1} \Omega);$$

$$S' \in S_n^+ \text{ và } S'^2 = ({}^t\Omega_1^{-1} \Omega) \Delta^2 (\Omega_1^{-1} \Omega) = {}^t\Omega S \Omega.$$

Theo tính duy nhất của căn bậc hai trong S_n^+ (bài tập 5.2.25), suy ra $S' = ({}^t\Omega S \Omega)^{\frac{1}{2}}$.

$$\text{Cuối cùng: } S' = {}^t\Omega \Omega_1 \Delta \Omega_1^{-1} \Omega = {}^t\Omega S^{\frac{1}{2}} \Omega.$$

β) Bằng cách sử dụng α):

$$|{}^t\Omega A \Omega| = ({}^t\Omega A \Omega)^2)^{\frac{1}{2}} = ({}^t\Omega A^2 \Omega)^{\frac{1}{2}} = {}^t\Omega (A^2)^{\frac{1}{2}} \Omega = {}^t\Omega |A| \Omega.$$

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 6

Lời giải của một số bài tập chương 6 là tương tự như của bài tập chương 4 và 5 (Đại số song tuyến tính)

6.1.1 Xem bài tập 4.1.1

6.1.2 Xem bài tập 4.3.1

6.1.3 • Đặt $V = X + iY$. Ta có: $V^*(AV) = \lambda V^*V$ và $(V^*A)V = -(AV)^*V = -\bar{\lambda} V^*V$; do đó: $(\lambda + \bar{\lambda})V^*V = 0$.

Vì $V^*V \in \mathbb{R}_+$, ta suy ra $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Vậy tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda = i\alpha$.

Hơn nữa $AV = \lambda V \Leftrightarrow A(X + iY) = i\alpha(X + iY) \Leftrightarrow \begin{cases} AX = -\alpha Y \\ AY = \alpha X \end{cases}$, vì α là số thực và X, Y, A là số thực.

• $'X(AX) = -\alpha'XY$ và $('XA)X = -'(AX)X = \alpha'YX$,

vì $'XY = 'YX \in \mathbb{R}$ và $\alpha \neq 0$ nên: $'XY = 'YX = 0$.

• $'X(AY) = \alpha'XX$ và $('XA)Y = -'(AX)Y = \alpha'YY$, do đó: $'XX = 'YY$.

6.1.4 a) Vì $A\bar{A} = (X + iY)(X - iY) = (X^2 + Y^2) + i(YX - XY)$,

ta có: $A^{-1}(X^2 + Y^2) = \bar{A} \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = A\bar{A} \Leftrightarrow YX = XY$.

b) Xét ví dụ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

◊ Trả lời: Có.

c) Xét ví dụ: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

◊ Trả lời: Có.

6.1.5 Với mọi λ thuộc $\mathbb{C}$, ta có:

$$\begin{aligned} \overline{\chi_{AB}(\lambda)} &= \overline{\det(AB - \lambda I_n)} = \det((AB - \lambda I_n)^*) = \det(B^*A^* - \bar{\lambda} I_n) \\ &= \det(BA - \bar{\lambda} I_n) = \chi_{BA}(\bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Theo bài tập 2.2.12, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, do đó: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{\chi_{AB}(\lambda)} = \chi_{BA}(\bar{\lambda})$.

Thu được: $\chi_{AB} \in \mathbb{R}[X]$, (xem Mệnh đề 1, 5.3.5, Tập 5).

Vì $\text{tr}(AB)$ là (sai khác nhau về dấu) hệ số của hạng tử bậc $n-1$ của χ_{AB} , nên ta có :
 $\text{tr}(AB) \in \mathbb{R}$.

6.1.6 • Giả sử $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ sao cho $(I_n + A^*)X = 0$.

Khi đó ta có : $X^*(I_n + A) = ((I_n + A^*)X)^* = 0$, từ đây : $2X^*A = X^*(I_n + A)A^* = 0$, và do đó :
 $A^*X = (X^*A)^* = 0$.

Vậy $X + A^*X = 0$ và $A^*X = 0$, do đó $X = 0$.

Điều này chứng tỏ $I_n + A^* \in GL_n(\mathbb{C})$, và như vậy $I_n + A = (I_n + A^*)^* \in GL_n(\mathbb{C})$.

• Vì $A^* = 2(I_n + A)^{-1}A$, nên A^* giao hoán với A (tổng quát hơn : tất cả “phần thức hữu tỷ” của A giao hoán với A).

• Theo giả thiết $A^* + AA^* = 2A$, do đó bằng cách chuyển vị phụ hợp và sử dụng $AA^* = A^*A$,
 $A + AA^* = 2A^*$. Từ đó ta suy ra $2A - A^* = AA^* = 2A^* - A$, như vậy $A = A^* = AA^*$ và $A^2 = 0$.

6.1.7 Sử dụng tính giao hoán của hai phép đối hợp $A \mapsto {}^tA$ và $A \mapsto \overline{A}$ của $M_n(\mathbb{C})$.

a) • Một kết luận hiển nhiên.

$$\bullet \text{ Nếu } A = (t_{ij}) \in H_n \cap T_{n,s}(\mathbb{C}), \text{ thì } \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \begin{cases} i > j \Rightarrow t_{ij} = 0 \\ i = j \Rightarrow \overline{t_{ii}} = t_{ii} \\ i < j \Rightarrow t_{ij} = \overline{t_{ji}} = 0 \end{cases}$$

do đó $A \in D_n(\mathbb{R})$.

$$b) ({}^tA)^* = ({}^t\overline{A}) = ({}^tA^*) = {}^tA, ({}^tA)^* = \overline{{}^tA} = \overline{A}^* = \overline{A}.$$

c) Với ký hiệu $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ trong đó a_k là số thực, ta có :

$$(P(A))^* = \left(\sum_{k=0}^N a_k A^k \right)^* = \left(\sum_{k=0}^N a_k (\overline{A})^k \right) = \sum_{k=0}^N a_k (A^*)^k = \sum_{k=0}^N a_k A^k = P(A).$$

Tổng quát hơn : $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall P \in \mathbb{C}[X], (P(A))^* = \overline{P}(A^*)$.

$$\mathbf{6.1.8} \quad (AB - BA)^* = B^*A^* - A^*B^* = BA - AB = -(AB - BA).$$

6.1.9 Xem bài tập 4.3.2.

6.1.10 1) • H_n là kgvc của $\mathbb{R}$ -kgv $M_n(\mathbb{C})$ (xem Mệnh đề 1, 6.1.3 2))

• $H'_n \neq \emptyset$ và với mọi (α, H'_1, H'_2) thuộc $\mathbb{R} \times H'_n \times H'_n$:

$$(\alpha H'_1 + H'_2)^* = \overline{\alpha} H_1^* + H_2^* = \alpha(-H_1) + (-H_2) = -(\alpha H_1 + H_2),$$

như vậy H'_n là một kgvc của $\mathbb{R}$ -kgv $M_n(\mathbb{C})$.

• $H_n \cap H'_n = \{0\}$ vì, nếu $A \in H_n \cap H'_n$, thì $A^* = A = -A$.

• Mọi ma trận M thuộc $M_n(\mathbb{C})$ có thể phân tích thành $M = \frac{1}{2}(M + M^*) + \frac{1}{2}(M - M^*)$,

trong đó $\frac{1}{2}(M + M^*) \in H_n$ và $\frac{1}{2}(M - M^*) \in H'_n$.

Như vậy H_n và H'_n là hai $\mathbb{R}$ -kgv $M_n(\mathbb{C})$.

2) Giả sử $H \in \mathbf{H}_n$. Ta có: $(iH)^* = \overline{iH}^* = -iH$, như vậy $iH \in \mathbf{H}'_n$.

Cũng như vậy: $\forall H' \in \mathbf{H}'_n, iH' \in \mathbf{H}_n$.

Ta có thể xét ánh xạ $\theta: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbf{H}'_n$.

$$H \mapsto iH$$

Rõ ràng θ là $\mathbb{R}$ -tuyến tính và song ánh, vậy θ là một tự đẳng cấu của $\mathbb{R}$ -kgv từ $\mathbf{H}_n$ lên $\mathbf{H}'_n$. Hơn nữa:

$$\forall H \in \mathbf{H}_n, \theta(\theta(H)) = -H.$$

$$3) \text{ Vì } \begin{cases} \mathbf{H}_n \oplus \mathbf{H}'_n = \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \\ \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}_n) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}'_n) \\ \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{M}_n(\mathbb{C})) = 2n^2 \end{cases}, \text{ suy ra: } \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}_n) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{H}'_n) = n^2.$$

6.1.11 Xem bài tập 5.2.5.

$$\begin{aligned} 6.1.12 \quad a) \phi(x, y, z) &= x\bar{x} + 3y\bar{y} + z\bar{z} + (1-i)\bar{x}y + (1+i)\bar{y}x + i\bar{y}z - i\bar{y}\bar{z} \\ &= (\bar{x} + (1+i)\bar{y})(x + (1-i)y) + y\bar{y} + i\bar{y}z - i\bar{y}\bar{z} + z\bar{z} \\ &= |x + (1-i)y|^2 + (\bar{y} - i\bar{z})(y + iz). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Trả lời: } & \bullet \phi(x, y, z) = |x + (1-i)y|^2 + |y + iz|^2 \\ & \bullet \text{Ker}(\phi) = \text{Vect}((1+i, -i, 1)), \text{rank}(\phi) = 2, \text{sgn}(\phi) = (2, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \phi(x, y, z) &= 2x\bar{x} + (2\bar{x}y - 2\bar{y}x) + (-2i\bar{x}z + 2i\bar{z}x) + 5y\bar{y} + (4i\bar{y}z - 4i\bar{z}y) + 5z\bar{z} \\ &= 2(\bar{x} + \bar{y} + i\bar{z})(x + y - iz) + 3y\bar{y} + (6i\bar{y}z - 6i\bar{z}y) + 3z\bar{z} \\ &= 2|x + y - iz|^2 + 3(\bar{y} - 2i\bar{z})(y + iz) - 9z\bar{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Trả lời: } & \bullet \phi(x, y, z) = 2|x + y - iz|^2 + 3|y + iz|^2 - 9|z|^2 \\ & \bullet \text{Ker}(\phi) = \{0\}, \text{rank}(\phi) = 3, \text{sgn}(\phi) = (2, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \phi(x, y, z) &= x\bar{x} - i\bar{x}y + i\bar{y}x + i\bar{x}z - i\bar{z}x + y\bar{y} + z\bar{z} \\ &= (\bar{x} + i\bar{y} - i\bar{z})(x - iy + iz) + (\bar{y}z + \bar{z}y) \\ &= |x - iy + iz|^2 + \frac{1}{2}(|y + z|^2 - |y - z|^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Trả lời: } & \bullet \phi(x, y, z) = |x - iy + iz|^2 + \frac{1}{2}|y + z|^2 - \frac{1}{2}|y - z|^2 \\ & \bullet \text{Ker}(\phi) = \{0\}, \text{rank}(\phi) = 3, \text{sgn}(\phi) = (2, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \phi(x, y, z) &= -i\bar{x}y + i\bar{y}x + i\bar{x}z - i\bar{z}x - i\bar{y}z + i\bar{z}y = \\ &= (\bar{x} - \bar{z})(-iy + iz) + (x - z)(i\bar{y} - i\bar{z}) = \frac{1}{2}(|x - z - iy + iz|^2 - |x - z + iy - iz|^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Trả lời: } & \bullet \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}|x - iy - (1-i)z|^2 - \frac{1}{2}|x + iy - (1+i)z|^2 \\ & \bullet \text{Ker}(\phi) = \text{Vect}((1, 1, 1)), \text{rank}(\phi) = 2, \text{sgn}(\phi) = (1, 1). \end{aligned}$$

$$6.1.13 \quad \text{Để ý rằng } \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} (1 \ j^2 \ j), \text{ do đó, với ký hiệu } U = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\text{ta có: } \phi(x, y, z) = X^*(UU^*)X = (U^*X)^*(U^*X) = |U^*X|^2 = |x + j^2y + jz|^2.$$

◊ Trả lời : $\text{Ker}(\phi)$ là các mặt phẳng vectơ có phương trình là $x + j^2y + jz = 0$,
 $\text{rank}(\phi) = 1$, $\text{sgn}(\phi) = (1, 0)$.

6.2.1 Xem bài tập 4.2.2.

6.2.2 Xem bài tập 4.2.3.

6.2.3 Xem bài tập 4.2.4.

◊ Trả lời :

- $\text{Ker}(A^*A) = \text{Ker}(A)$, $\text{Ker}(AA^*) = \text{Ker}(A^*)$
- $\text{Im}(A^*A) = \text{Im}(A^*)$, $\text{Im}(AA^*) = \text{Im}(A)$
- $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^*) = \text{rank}(A^*A) = \text{rank}(AA^*)$.

6.2.4 Với ký hiệu $H = AA^*$, ta có :
$$\begin{cases} H^* = (AA^*)^* = AA^* = H \\ H^* = (A - A^*)^* = A^* - A = -H \end{cases}, \text{ do đó } H = 0.$$

Vì $AA^* = 0$, ta suy ra $A = 0$ (xem bài tập 6.2.2).

6.2.5 Trước tiên ta lưu ý rằng $A^*A \in M_p(\mathbb{C})$ và $\text{rank}(A^*A) = \text{rank}(A) = p$ (xem bài tập 6.2.3), vậy $(A^*A)^{-1}$ tồn tại. Vì thế $H = B^*B - B^*A(A^*A)^{-1}A^*B$ tồn tại và $H \in H_q$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

Giả sử tồn tại $(X, Y) \in M_{p,1}(\mathbb{C}) \times M_{q,1}(\mathbb{C})$ sao cho $(X, Y) \neq (0, 0)$ và $AX = BY$.

• $Y \neq 0$, vì nếu không $AX = BY = 0$, $A^*AX = 0$, $X = 0$.

• $HY = B^*AX - B^*A(A^*A)^{-1}A^*AX = B^*AX - B^*AX = 0$.

Như vậy H không khả nghịch.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

Giả sử H không khả nghịch.

Tồn tại $Y \in M_{q,1}(\mathbb{C})$ sao cho : $Y \neq 0$ và $HY = 0$.

Ta ký hiệu $X = (A^*A)^{-1}A^*BY$, suy ra $A^*AX = A^*BY$ và $B^*AX = (B^*A(A^*A)^{-1}A^*B)Y = (B^*B - H)Y = B^*BY$.

• $(X, Y) \neq (0, 0)$ vì $Y \neq 0$. Tương tự như phần trước, cụ thể hơn, $X \neq 0$ vì nếu không $B^*BY = B^*AX = 0$, $Y = 0$.

•
$$\begin{aligned} \|AX - BY\|_2^2 &= (AX - BY)^* (AX - BY) = (X^*A^* - Y^*B^*) (AX - BY) \\ &= X^*A^*AX - X^*A^*BY - Y^*B^*AX + Y^*B^*BY \\ &= X^*(A^*AX - A^*BY) - Y^*(B^*AX - B^*BY) = 0. \end{aligned}$$

từ đó $AX = BY$.

6.2.6 Ký hiệu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Trường hợp $X = 0$ là tầm thường. Giả sử $X \neq 0$.

1) $p = 1, q = \infty$

Giả sử $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ sao cho $\|Y\|_1 = \sum_{k=1}^n |y_k| = 1$. Ta có :

$$|Y^* X| = \left| \sum_{k=1}^n \bar{y}_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k| \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |y_k| \right) \sum_{k=1}^n |x_k| = \|Y\|_\infty \|X\|_1 = \|X\|_\infty.$$

- Tồn tại $j \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $|x_j| = \|X\|_\infty$.

Ta xét $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ trong đó: $y_k = \begin{cases} \frac{x_j}{|x_j|} & \text{nếu } k = j \\ 0 & \text{nếu } k \neq j \end{cases}, \forall k \in \{1, \dots, n\}.$

Khi đó ta có $\|Y\|_1 = 1$ và $|Y^* X| = \frac{\bar{x}_j}{|x_j|} x_j = |x_j| = \|X\|_\infty.$

2) $p = 2, q = 2$

- Với mọi Y thuộc $M_{n,1}(\mathbb{C})$ mà $\|Y\|_2 = 1$, thì theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

$$|Y^* X| \leq \|Y\|_2 \|X\|_2 = \|X\|_2.$$

- Chọn $Y = \frac{X}{\|X\|_2}$, ta có $\|Y\|_2 = 1$ và $|Y^* X| = \frac{1}{\|X\|_2} X^* X = \frac{1}{\|X\|_2} \|X\|_2^2 = \|X\|_2.$

3) $p = \infty, q = 1$

- Giả sử $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ sao cho $\|Y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| = 1$. Ta có:

$$|Y^* X| = \left| \sum_{k=1}^n \bar{y}_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k| \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |y_k| \right) \sum_{k=1}^n |x_k| = \|Y\|_\infty \|X\|_1 = \|X\|_1.$$

- Xét $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ trong đó $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} y_k = \frac{x_k}{|x_k|} & \text{nếu } x_k \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x_k = 0 \end{cases}.$

Khi đó $\|Y\|_\infty = 1$ và $|Y^* X| = \sum_{k, x_k \neq 0} \frac{\bar{x}_k}{|x_k|} x_k = \sum_{k, x_k \neq 0} |x_k| = \sum_{k=1}^n |x_k| = \|X\|_1.$

Nhận xét: Trong lời giải trên đây, ta đã lập: $\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{C}))^2, |Y^* X| \leq \|Y\|_p \|X\|_q.$

Bất đẳng thức này đúng với mọi p thuộc $[1; +\infty]$, và $q \in [1; +\infty]$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (xem bài tập 1.1.8, Tập 5, chuẩn Hölder).

6.2.7 Với ký hiệu $u = x + y, v = x - y$, ta có:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x+y\| \|x-y\| &= \frac{1}{4} \|u+v\|^2 + \frac{1}{4} \|u-v\|^2 = \|u\| \|v\| \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|v\|^2 - \|u\| \|v\| = \frac{1}{2} (\|u\| - \|v\|)^2. \end{aligned}$$

◊ **Trả lời:** Có đẳng thức khi và chỉ khi $\text{Re}(\langle x, y \rangle) = 0$.

6.2.8 Khai triển thành phần thứ hai.

6.2.9 Ký hiệu $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{N}}$ ($0 \leq k \leq N-1$). Ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} \|\omega_k x + y\|^2 \omega_k &= \sum_{k=0}^{N-1} (\|x\|^2 + \overline{\omega_k} \langle x, y \rangle + \omega_k \langle y, x \rangle + \|y\|^2) \omega_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k \right) (\|x\|^2 + \|y\|^2) + N \langle x, y \rangle + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^2 \right) \langle y, x \rangle,\end{aligned}$$

và
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_1^k = \frac{1 - \omega_1^N}{1 - \omega_1} = 0 & (\text{tổng các căn bậc } N \text{ của } 1), \\ \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_2^k = \frac{1 - \omega_2^N}{1 - \omega_2} = 0 & (\omega_2 \neq 1 \text{ vì } N \geq 3) \end{cases}$$

6.2.10

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \|e^{i\theta} x + y\|^2 e^{i\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} (\|x\|^2 + e^{-i\theta} \langle x, y \rangle + e^{i\theta} \langle y, x \rangle + \|y\|^2) e^{i\theta} d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta \right) (\|x\|^2 + \|y\|^2) + \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \langle x, y \rangle + \left(\int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta \right) \langle y, x \rangle \\ &= 2\pi \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Tương tự như bài tập 6.2.9.

6.2.11 • Giả sử $(x, y) \in E^2$. Bằng cách áp dụng giả thiết đối với $x, y, x + iy, x - iy$, suy ra $\langle f(x), y \rangle = 0$.

• Đối với trường hợp thực, xét ví dụ : $E = \mathbb{R}^2, f = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}$.

◊ Trả lời : Không.

6.2.12 $A^*AB = 0 \Rightarrow B^*A^*AB = 0 \Rightarrow \text{tr}((AB)^*(AB)) = 0 \Rightarrow AB = 0$.

6.2.13 Ta có $\|A - A^*\|^2 = \text{tr}((A^* - A)(A - A^*)) = \text{tr}(A^*A) - \text{tr}(A^2) - \text{tr}(A^{*2}) + \text{tr}(AA^*)$. Theo giả thiết : $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(AA^*)$.

Vậy : $\text{tr}(A^{*2}) = \text{tr}((A^2)^*) = \overline{\text{tr}(A^2)} = \overline{\text{tr}(AA^*)} = \text{tr}(AA^*)^* = \text{tr}(AA^*) = \text{tr}(A^*A)$.

Ta suy ra $\|A - A^*\| = 0, A = A^*, A \in H_n$.

6.1.14 Giống bài tập 4.2.3 (Nhưng ở đây χ_S là tách được trên $\mathbb{C}$ và có nghiệm khác không)

◊ Trả lời : f là chéo hóa được.

6.2.15 Giả sử $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^n \gamma_k(x|y_k) \right|^2 = \left| \left\langle x \mid \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k \right\rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k \right\|^2 = \|x\|^2 \sum_{1 \leq p, q \leq n} \overline{\gamma_p} \gamma_q (y_p|y_q)$$

Ta sẽ áp dụng kết quả này cho hai sự lựa chọn hợp lý của $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ để thu được các bất đẳng thức a) và b).

a) Ta chọn $\gamma_k = \frac{\overline{(x|y_k)}}{(x|y_k)}$ nếu $(x|y_k) \neq 0, \gamma_k = 1$ nếu $(x|y_k) = 0$. Khi đó ta có :

$$\bullet \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k(x|y_k) \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |(x|y_k)| \right)^2$$

$$\bullet \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k \right\|^2 \leq \sum_{1 \leq p, q \leq n} |\bar{\gamma}_p| |\gamma_q| |(y_p | y_q)| = \sum_{1 \leq p, q \leq n} |(y_p | y_q)|.$$

$$b) \text{ Chú ý rằng : } \forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2, |\bar{\gamma}_p \gamma_q| \leq \frac{1}{2} (|\gamma_p|^2 + |\gamma_q|^2).$$

$$\begin{aligned} \text{từ đó : } \left| \sum_{1 \leq p, q \leq n} \bar{\gamma}_p \gamma_q (y_p | y_q) \right| &\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq n} (|\bar{\gamma}_p|^2 + |\gamma_q|^2) |(y_p | y_q)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq n} |\gamma_p|^2 |(y_p | y_q)| + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq n} |\gamma_q|^2 |(y_p | y_q)| \\ &= \sum_{1 \leq p, q \leq n} |\gamma_p|^2 |(y_p | y_q)|. \end{aligned}$$

Với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}^2$, ta chọn $\gamma_k = \overline{(x | y_k)}$. Khi đó :

$$\bullet \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k (x | y_k) \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |(x | y_k)|^2 \right)^2$$

$$\bullet \sum_{1 \leq p, q \leq n} |\gamma_p|^2 |(y_p | y_q)| = \sum_{1 \leq p, q \leq n} |(x | y_p)|^2 |(y_p | y_q)| \leq \left(\sum_{p=1}^n |(x | y_p)|^2 \right) \left(\max_{1 \leq p \leq n} \left(\sum_{q=1}^n |(y_p | y_q)| \right) \right)$$

$$\text{Do đó : } \left(\sum_{k=1}^n |(x | y_k)|^2 \right)^2 \leq \|x\|^2 \left(\sum_{k=1}^n |(x | y_k)|^2 \right) \left(\max_{1 \leq p \leq n} \left(\sum_{q=1}^n |(y_p | y_q)| \right) \right)$$

và ta nhận được bất đẳng thức mong muốn bằng cách giản ước cả hai vế cho $\sum_{k=1}^n |(x | y_k)|^2$. Trường hợp các nhân tử này bằng không, bất đẳng thức là hiển nhiên.

$$\mathbf{6.2.16} \quad a) F \perp G \Leftrightarrow (\forall f \in F, \forall g \in G, \langle f, g \rangle = 0) \\ \Leftrightarrow (\forall f \in F, f \in G^\perp) \Leftrightarrow F \subset G^\perp,$$

và vai trò đối xứng của F và G .

b) Đối xứng của $\perp$ là đúng.

$$\bullet F \perp G \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G^\perp \\ \text{hoặc} \\ G^\perp \subset F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F^\perp \supset G^{\perp\perp} \\ \text{hoặc} \\ G^{\perp\perp} \supset F^\perp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G \subset F^\perp \\ \text{hoặc} \\ F^\perp \subset G \end{cases} \Leftrightarrow G \perp F$$

$$c) F \perp G \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G^\perp \\ \text{hoặc} \\ G^\perp \subset F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F^\perp \supset (G^\perp)^\perp \\ \text{hoặc} \\ (G^\perp)^\perp \supset F^\perp \end{cases} \Leftrightarrow F^\perp \perp G^\perp.$$

$$d) \text{ Giả sử } \begin{cases} F \subset G^\perp \\ \text{hoặc} \\ G^\perp \subset F \end{cases} \text{ và } F \cap G = \{0\}.$$

Nếu $F \subset G^\perp$, thì $F \perp G$.

Giả sử $G^\perp \subset F$.

Khi đó : $\dim(E) - \dim(G) = \dim(G^\perp) \leq \dim(F)$, trong đó $\dim(F) + \dim(G) \geq \dim(E)$.

Vì $F \cap G = \{0\}$, ta suy ra : $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) \geq \dim(E)$ như vậy $F \oplus G = E$.

Vậy $\dim(G^\perp) = \dim(E) - \dim(G) = \dim(F)$, và cuối cùng $G^\perp = F$, $F \perp G$.

6.3.1 Theo Mệnh đề 2, 6.3.1, $f \circ g$ và $g \circ f$ có các phụ hợp và :

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

6.3.2 Giả sử $y \in F^\perp$, nên $f(x) \in F$ và $y \in F^\perp$. Ta có $\forall x \in F$, $\langle x, f^*(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = 0$.

Như vậy: $\forall x \in F$, $\langle x, f^*(y) \rangle = 0$.

Do đó: $f^*(y) \in F^\perp$.

6.3.3 1) • $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^* \circ f)$ (xem bài tập 7.2.9, Tập 5: $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$)

• Giả sử $x \in \text{Ker}(f^* \circ f)$. Ta có : $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, f^* \circ f(x) \rangle = 0$.

Vậy $f(x) = 0$, $x \in \text{Ker}(f)$.

2) Theo Mệnh đề 2, 6.3.1 f^* có phụ hợp và $f^{**} = f$, vậy $\text{Ker}(f \circ f^*) = \text{Ker}(f^{**} \circ f^*) = \text{Ker}(f^*)$

6.3.4 (i) $\Rightarrow$ (ii) : Hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

Giả sử $\langle f^* \circ f(x) - x, x \rangle = 0$. Khi đó :

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Bởi vậy : $\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x) \rangle = \langle x, f \circ f^*(x) \rangle \leq \|x\| \|f(f^*(x))\| \leq \|x\| \|f^*(x)\|$,

nên : $\|f^*(x)\| \leq \|x\|$.

Cuối cùng : $\|f^* \circ f(x) - x\|^2 = \|(f^* \circ f)(x)\|^2 - 2\|f(x)\|^2 + \|x\|^2 = \|f^*(f(x))\|^2 - \|f(x)\|^2 \leq 0$,

do đó : $f^* \circ f(x) = x$.

6.3.5 Giả sử $P = a_0 + a_1X + \dots + a_NX^N \in \mathbb{C}[X]$ sao cho $P(f) = 0$. Khi đó (xem Mệnh đề 2, 6.3.1):

$$\bar{P}(f^*) = \overline{a_0}e + \overline{a_1}f^* + \dots + \overline{a_N}(f^*)^N = (a_0e + a_1f + \dots + a_Nf^N)^*.$$

Vậy: $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $(P(f) = 0 \Rightarrow \bar{P}(f^*) = 0)$.

Bằng cách áp dụng kết quả này cho f^* , ta suy ra sự tương đương logic :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], (P(f) = 0 \Rightarrow \bar{P}(f^*) = 0).$$

Vì f có một đa thức tối thiểu $\pi_f (\neq 0)$, ta kết luận f^* cũng có một đa thức tối thiểu, và

$$\pi_{f^*} = \overline{\pi_f}.$$

6.3.6 • $(\forall x \in F^\perp, f(x) = 0)$, vậy $F^\perp \subset \text{Ker}(f)$.

• Giả sử $x \in \text{Ker}(f) \cap F$; khi đó $f(x) = 0$ và $\|f(x)\| = \|x\|$, do đó $x = 0$. Điều này chứng tỏ : $\text{Ker}(f) \cap F = \{0\}$.

• $\dim(E) \geq \dim(\text{Ker}(f) \oplus F) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(F)$
 $= \dim(E) + (\dim(\text{Ker}(f)) - \dim(F^\perp)),$

do đó : $\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(F^\perp)$.

và cuối cùng : $\text{Ker}(f) = F^\perp$.

Nhận xét : Bằng cách sử dụng este $\mathcal{B}$ của E được tạo nên bởi một este của F và một este của $F^\perp$, ma trận của f trong $\mathcal{B}$ có dạng $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó U là ma trận unita cấp $\dim(F)$ (xem 6.4.2). Hiển nhiên, $\text{Ker}(f) = F^\perp$, vì U khả nghịch.

6.3.7 Rõ ràng f là tuyến tính.

Với mọi (X, Y) thuộc $M_{n,p}(\mathbb{C})$, ta có:

$$\begin{aligned} \langle f(X), Y \rangle &= \langle AX - XB, Y \rangle = \text{tr}((AX - XB)^* Y) = \text{tr}(X^* A^* Y) - \text{tr}(B^* X^* Y) \\ &= \text{tr}(X^* A^* Y - X^* Y B^*) = \text{tr}(X^* (A^* Y - Y B^*)) = \langle X, A^* Y - Y B^* \rangle \end{aligned}$$

Giả sử $g: M_{n,p}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n,p}(\mathbb{C})$. Rõ ràng g là tuyến tính và:

$$X \mapsto A^* X - X B^*$$

$$\forall (X, Y) \in (M_{n,p}(\mathbb{C}))^2, \langle f(X), Y \rangle = \langle X, g(Y) \rangle,$$

vậy g là phụ hợp của f .

Tương tự bài tập 5.2.1.

◊ **Trả lời :** $f^*: M_{n,p}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n,p}(\mathbb{C})$.

$$X \mapsto A^* X - X B^*$$

6.4.1 Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz :

$$|\langle x, f(x) \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|f(x)\|^2 = \|x\|^2 \langle x, f^* \circ f(x) \rangle = \|x\|^2 \langle x, f^2(x) \rangle.$$

6.4.2

1) Giả sử $p^* = p$.

Giả sử $x \in \text{Ker}(p)$, $y \in \text{Im}(p)$ (vậy $p(y) = y$).

Ta có: $\langle x, y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p^*(x), y \rangle = \langle p(x), y \rangle = 0$.

2) Đảo lại, giả sử: $\forall (x, y) \in \text{Ker}(p) \times \text{Im}(p)$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Với $(u, v) \in E^2$, ta có: $\begin{cases} p(u) = \text{Im}(p) \\ v - p(u) \in \text{Ker}(p) \end{cases}$, vậy $\langle p(u), v - p(u) \rangle = 0$,

do đó: $\langle p(u), v \rangle = \langle p(u), p(v) \rangle$.

Bằng cách đổi vai trò của u và v , ta cũng có:

$$\langle p(v), u \rangle = \langle p(v), p(u) \rangle = \langle p(u), p(v) \rangle = \langle p(u), v \rangle = \langle v, p(u) \rangle = \langle p^*(v), u \rangle.$$

Như vậy: $\forall v \in E, (\forall u \in E, \langle p(v) - p^*(v), u \rangle = 0)$, do đó $p = p^*$.

6.4.3 Một chiều là hiển nhiên.

Luật hợp thành được viết mà không có ký hiệu, giả sử $pqp = qpp = qp$. Đặt $f = qp - pq$, ta có:

$$\begin{aligned} f^2 &= (p^*q^* - q^*p^*)(qp - pq) = (pq - qp)(qp - pq) = pqp - qpqp - pqpq + qpq \\ &= pqp - q(qp) - (qp)q + qpq = 0. \end{aligned}$$

do đó $f = 0$ (xem bài tập 6.22), $pq = qp$.

6.4.4 Trước tiên ta lưu ý rằng, các cận trên được xét tồn tại, vì các ánh xạ

$$B' \rightarrow \mathbb{R}, \quad B' \rightarrow \mathbb{R}, \quad B'^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{giới nội. Ký hiệu: } M_1 = \sup_{x \in B'} |\langle f(x), x \rangle|,$$

$$M_2 = \sup_{(x,y) \in B'^2} |\langle f(x), y \rangle|.$$

1) $M_1 \leq M_2$: hiển nhiên.

Ta có : $\forall t \in E - \{0\}, | \langle f(t), t \rangle | = \left| \left\langle f\left(\frac{1}{\|t\|}t\right), \frac{1}{\|t\|}t \right\rangle \right| \|t\|^2 \leq M_1 \|t\|^2$.

Giả sử $(x, y) \in B'^2$, nên ta có, vì $f \in \mathcal{H}(E)$:

$$| \langle f(x), y \rangle | = \frac{1}{4} | \langle f(x+y), x+y \rangle - \langle f(x-y), x-y \rangle | \leq \frac{1}{4} (M_1 \|x+y\|^2 + M_1 \|x-y\|^2) = M_1.$$

Do đó $M_2 \leq M_1$.

2) Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz :

$$\forall (x, y) \in B'^2, | \langle f(x), y \rangle | \leq \|f(x)\| \|y\| \leq \|f\| \|x\| \|y\| = \|f\|,$$

do đó $M_2 \leq \|f\|$

Trường hợp $f = 0$ khảo sát là tầm thường. Giả sử $f \neq 0$, như vậy $\|f\| > 0$.

• Giả sử $\varepsilon \in]0; \|f\|$. Theo định nghĩa của $\|f\|$, tồn tại $x \in B'$ sao cho $\|f(x)\| \geq \|f\| - \varepsilon$.

Rõ ràng $f(x) \neq 0$ và ta có :

$$\left\langle f\left(\frac{1}{\|f(x)\|}f(x)\right), x \right\rangle = \frac{1}{\|f(x)\|} \langle f^2(x), x \rangle = \frac{1}{\|f(x)\|} \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|.$$

Vì $\left(\frac{1}{\|f(x)\|}f(x), x\right) \in B'^2$, ta suy ra $\|f(x)\| \leq M_2$.

Ta đã chứng minh : $\varepsilon \in]0; \|f\|$ [, $\|f\| - \varepsilon \leq M_2$, do đó : $\|f\| \leq M_2$.

(Ta cũng có thể sử dụng sự tồn tại một phần tử x_0 của B' sao cho $\|f\| = \|f(x_0)\|$, được suy ra từ tính liên tục của f trên tập compact B').

6.4.5 • $A^* = (b_{ji})_{ji}$, trong đó : $b_{ji} = \overline{a_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{-(l-1)(j-1)}$.

• $AA^* = (c_{kl})_{kl}$, trong đó :

$$c_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{jl} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1) - (l-1)(j-1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\omega^{k-l}\right)^{j-1} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \omega^{k-l} \neq 1 \\ 1 & \text{nếu } \omega^{k-l} = 1 \end{cases},$$

$$\text{và } \omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow \exp\left(\frac{2i(k-l)\pi}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2(k-l)\pi}{n} = 0[2\pi] \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k=l,$$

$$\text{vì } (k, l) \in \{1, \dots, n\}^2.$$

Cuối cùng : $AA^* = I_n, A \in U_n$.

6.4.6 $(e^{iA})^* = {}^t(\overline{e^{iA}}) = {}^t(e^{-i\overline{A}}) = e^{-i{}^t\overline{A}} = e^{-iA}, (e^{iA})^* e^{iA} = e^{-iA} e^{iA} = I_n$, vì iA và $-iA$ giao hoán.

6.4.7 Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Ta có :

$$A \in \text{SU}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} AA^* = I_2 \\ \det(A) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ \overline{a}c + \overline{b}d = 0 \\ |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ \overline{a}d - \overline{b}c = 1 \end{cases}.$$

- Nếu $a \neq 0$, thì $c = -\frac{\bar{b}d}{a}$, tiếp đó: $1 = ad - bc = ad + \frac{b\bar{b}d}{a} = (|a|^2 + |b|^2) \frac{d}{a}$,

vậy $d = \bar{a}$ và $c = \frac{\bar{b}\bar{a}}{\bar{a}} = -\bar{b}$.

- Nếu $a = 0$, thì $|b| = 1$, $\bar{b}d = 0$, $d = 0$, tiếp đó $|c| = 1$, $bc = -1$ vậy $c = -\frac{1}{b} = -\bar{b}$.

Đảo lại là hiển nhiên.

6.4.8 Dạng tổng quát của một phần tử của H_2 là $A = \begin{pmatrix} a & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & d \end{pmatrix}$, trong đó

$(a, \beta, \gamma, d) \in \mathbb{R}^4$.

Ta có: $A \in U_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ (a+d)(\beta+i\gamma) = 0 \\ \beta^2 + \gamma^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ (a+d)(\beta+i\gamma) = 0 \\ d^2 = a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ d = -a \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \beta = \gamma = 0 \\ a^2 = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases}$.

◊ Trả lời: $H_2 \cap U_2 = \{I_2, -I_2\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & -a \end{pmatrix}; (a, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \right\}$.

6.4.9 Ta trang bị trên $M_n(\mathbb{C})$ một tvh chính tắc, chẳng hạn $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^*B)$.

1) U_n là một tập con giới nội của $M_n(\mathbb{C})$ vì: $\forall A \in U_n, \|A\| = (\text{tr}(A^*A))^{\frac{1}{2}} = (\text{tr}(I_n))^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}}$.

2) U_n là một tập con đóng của $M_n(\mathbb{C})$ vì $U_n = f^{-1}(\{I_n\})$, trong đó $f: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$
 $A \mapsto A^*A$

liên tục và $\{I_n\}$ đóng.

Như vậy, U_n là một tập con đóng giới nội của một kgvc $M_n(\mathbb{C})$ có số chiều hữu hạn, nên

U_n là một tập compac của $M_n(\mathbb{C})$ (xem Định lý 2, 1.3.4, Tập 5).

6.4.10 Xem bài tập 4.3.12.

6.4.11 a) Trước tiên, lưu ý rằng $J^2 = -I_{2n}$, vậy J là khả nghịch.

Giả sử $M \in G$. Vì $\det(J) = \det(MJM) = (\det(M))^2 \det(J)$ nên $(\det(M))^2 = 1$ (vì $\det(J) \neq 0$), và như vậy $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

b) • $G \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$ (xem a)).

• Giả sử $M, N \in G$, ta có $(MN)J(MN) = N(MJM)N = N^2J = J$, vậy $MN \in G$.

• $I_{2n} \in G$.

• Giả sử $M \in G$. Ta có $M^{-1}JM^{-1} = M^{-1}(MJM)M^{-1} = J$, nên $M^{-1} \in G$.

Vậy G là nhóm con của $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

c) Giả sử $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Ta có:

$$M \in G \in O_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tMJM = J \\ {}^tMM = I_{2n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} JM = MJ \\ {}^tMM = I_{2n} \end{cases}.$$

$$\text{Trước tiên: } JM = MJ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -B \\ D = A \end{cases}.$$

$$\text{Tiếp đó, với } M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}:$$

$$M \in O_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^tA & -{}^tB \\ {}^tB & {}^tA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tAA + {}^tBB = I_n \\ {}^tAB - {}^tBA = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác: } A + iB \in U_n \Leftrightarrow (A + iB)^*(A + iB) = I_n$$

$$\Leftrightarrow (A - iB)(A + iB) = I_n \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tAA + {}^tBB = I_n \\ {}^tAB - {}^tBA = 0 \end{cases}$$

d) Theo bài tập 1.2.2: $\det(M) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$.

Và (xem a)): $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

♦ Trả lời: 1.

6.4.12 Giả sử $A \in M_n(\mathbb{C})$. Theo định lý về tam giác hóa (Hệ quả 3.1), tồn tại

$$P \in GL_n(\mathbb{C}), T_1 \in T_{n,n}(\mathbb{C}) \text{ sao cho } A = PT_1P^{-1}.$$

Theo biểu diễn dạng ma trận của quá trình trực giao nhóm Schmidt (Mệnh đề 11, 6.4.2), tồn tại $T_2 \in T_{n,n}(\mathbb{C})$, $U \in U_n$ sao cho $P = UT_2$.

Ta nhận được $A = UT_2T_1T_2^{-1}U^{-1} = UTU^*$, trong đó $T = T_2T_1T_2^{-1} \in T_{n,n}(\mathbb{C})$.

6.4.13 Theo bài tập 6.4.12, tồn tại $U \in U_n$, $T = (t_{ij})_{ij} \in T_{n,n}(\mathbb{C})$, sao cho $A = UTU^*$.

$$\text{Ta có: } \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 = \text{tr}(A^*A) = \text{tr}(T^*T) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |t_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |t_{ij}|^2$$

$$\forall i: \forall k \in \{1, \dots, n\}, t_{ik} = \lambda_k.$$

6.4.14 a) $\Omega \in O_n(\mathbb{R}) \subset U_n$ vậy (xem Mệnh đề, 6.4.2): $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Omega), |\lambda| = 1$.

b)• Giả sử $\lambda \neq \mu$. Ta có ${}^tX\bar{Y} = {}^tX(\Omega\Omega)\bar{Y} = ({}^tX\Omega)(\overline{\Omega Y}) = \lambda\bar{\mu}{}^tX\bar{Y}$, do đó $(\lambda\bar{\mu} - 1){}^tX\bar{Y} = 0$.

Hơn nữa $\lambda\bar{\mu} - 1 \neq 0$, vì nếu không $\bar{\mu} = \frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}$. Như vậy ${}^tX\bar{Y} = 0$.

• Nếu $\lambda \neq \mu$, áp dụng kết quả phần trước bằng cách thay thế (μ, X) bằng $(\bar{\mu}, \bar{X})$ (điều này có thể vì $\Omega\bar{X} = \overline{\Omega X} = \overline{\mu X} = \bar{\mu}\bar{X}$).

c) Vì $|\lambda| = 1$ và $\lambda \notin \mathbb{R}$, nên $\lambda \neq \bar{\lambda}$, vậy (xem b)) ${}^tXX = 0$.

d) Vì $(|\lambda| = 1, \lambda \notin \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$, ta có $\lambda \neq \mu, \lambda \neq \bar{\mu}$, như vậy (xem b)), ${}^t\bar{X}Z = {}^tXZ = 0$, do đó:

$${}^tUZ = \frac{1}{2}({}^tXZ + {}^t\bar{X}Z) = 0 \text{ và } {}^tVZ = \frac{1}{2i}({}^tXZ - {}^t\bar{X}Z) = 0.$$

e) Theo b): ${}^1\bar{X}Y = {}^1XY = {}^1X\bar{Y} = {}^1\bar{X}\bar{Y} = 0$, do đó ${}^1UW = \frac{1}{4}({}^1XY + {}^1X\bar{Y} + {}^1\bar{X}Y + {}^1\bar{X}\bar{Y}) = 0$.

$$6.4.15 \quad a) \forall (f, g) \in E^2, \langle g, f \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{g(x)} f(x) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} g(x) = \langle f, g \rangle.$$

$$\bullet \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall (f, g, h) \in E^3$$

$$\begin{aligned} \langle f, \alpha g + h \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} (\alpha g(x) + h(x)) = \frac{1}{n} \alpha \sum_{x \in G} \overline{f(x)} g(x) + \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} h(x) \\ &= \alpha \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle. \end{aligned}$$

$$\bullet \forall f \in E, \langle f, f \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$\bullet \forall f \in E, \left(\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in G, f(x) = 0) \Leftrightarrow f = 0 \right)$$

$$b) \bullet T_u \text{ là tuyến tính: } \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall (f, g) \in E^2, \forall x \in G, (T_u(\alpha f + g))(x) = (\alpha f + g)(x - u) \\ = \alpha f(x - u) + g(x - u) = \alpha T_u(f)(x) + T_u(g)(x) = (\alpha T_u(f) + T_u(g))(x).$$

$$\bullet T_u \text{ là unita: } \forall f \in E,$$

$$\|T_u(f)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{T_u(f)(x)} T_u(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{f(x - u)} f(x - u) = \frac{1}{n} \sum_{y \in G} \overline{f(y)} f(y) = \|f\|^2$$

(vì $x \mapsto x - u$ là một phép hoán vị của nhóm G)

$$\text{Nhận xét: } T_u^* = (T_u)^{-1} = T_{-u}$$

6.4.16 a) Ta biết H_2 là một $\mathbb{R}$ -kgv và $T: H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ là tuyến tính (xem Mệnh đề, 6.1.3 $M \mapsto \text{tr}(M)$)

2)), vậy $H = T^{-1}(\{0\})$ là một $\mathbb{R}$ -kgvc của H_2 .

Hiển nhiên φ là ánh xạ tuyến tính vừa đơn ánh vừa toàn ánh. Hơn nữa $\dim_{\mathbb{R}}(H) = 3$.

b) a) Giả sử $v \in \mathbb{R}^3$ ta có: $(U\varphi(v)U^{-1})^* = (U^{-1})^*(\varphi(v))^*U^* = U\varphi(v)U^{-1}$, vậy $U\varphi(v)U^{-1} \in H_2$.

Hơn nữa $\text{tr}(U\varphi(v)U^{-1}) = \text{tr}(\varphi(v)) = 0$, do đó $U\varphi(v)U^{-1} \in H$.

Vì φ là song ánh, tồn tại duy nhất w thuộc $\mathbb{R}^3$ sao cho $\varphi(w) = U\varphi(v)U^{-1}$.

β) Rõ ràng rằng ánh xạ $\varphi_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow H$ $v \mapsto U\varphi(v)U^{-1}$ là $\mathbb{R}$ -tuyến tính và song ánh

Vì $\varphi^{-1}: H \rightarrow \mathbb{R}^3$ cũng là $\mathbb{R}$ -tuyến tính và song ánh, nên $f (= \varphi^{-1} \circ \varphi_v)$ là $\mathbb{R}$ -tuyến tính và song ánh.

Hơn nữa, với $v = (x, y, z)$, ta có:

$$\bullet \det(\varphi(v)) = \begin{vmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{vmatrix} = -z^2 - (x^2 + y^2) = -\|v\|^2$$

$$\bullet \text{ cũng như vậy: } \det(\varphi(w)) = -\|w\|^2$$

$$\bullet \det(\varphi(w)) = \det(U\varphi(v)U^{-1}) = \det(\varphi(v)) = -\|v\|^2$$

Ta được $\|w\| = \|v\|$, vậy f là phép đẳng cự.

$$4.17 \quad a) (\alpha A)^*(\alpha A) = (\bar{\alpha} A^*)(\alpha A) = |\alpha|^2 A^* A = |\alpha|^2 A A^* = (\alpha A)(\bar{\alpha} A^*) = (\alpha A)(\alpha A)^*.$$

$$b) \text{ Xét ví dụ : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ Trả lời : Không.

$$c) (A^*)^* A^* = AA^* = A^* A = A^* (A^*)^*.$$

$$d) \text{ Xét ví dụ : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇ Trả lời : Không.

Vi A^* và A là giao hoán và phép nhân có tính kết hợp trong $M_n(\mathbb{C})$, nên :

$$(A^t)^* A^t = (A^* A)^t = (AA^*)^t = A^t (A^t)^*.$$

$$f) \bullet (A^{-1})^* A^{-1} = (AA^*)^{-1} = (A^* A)^{-1} = A^{-1} (A^{-1})^*.$$

• Áp dụng e) với A^{-1} .

$$g) \quad \begin{aligned} (UAU^*)^* (UAU^*) &= (UA^* U^*) (UAU^*) = UA^* AU^* = U(AA^*) U^* \\ &= (UAU^*) (UA^* U^*) = (UAU^*)^* (UAU^*). \end{aligned}$$

$$h) \quad \begin{aligned} (A + \alpha I_n)^* (A + \alpha I_n) &= (A^* + \bar{\alpha} I_n) (A + \alpha I_n) = A^* A + \bar{\alpha} A + \alpha A^* + \bar{\alpha} \alpha I_n \\ &= AA^* + \bar{\alpha} A + \alpha A^* + \bar{\alpha} \alpha I_n = (A + \alpha I_n) (A^* + \bar{\alpha} I_n) \\ &= (A + \alpha I_n) (A + \alpha I_n)^*. \end{aligned}$$

6.4.18 • Giả sử $AX = \lambda X$. Ta có :

$$\begin{aligned} \|A^* X - \bar{\lambda} X\|^2 &= (A^* X - \bar{\lambda} X)^* (A^* X - \bar{\lambda} X) = (X^* A - \lambda X^*) (A^* X - \bar{\lambda} X) \\ &= X^* AA^* X - \bar{\lambda} X^* AX - \lambda X^* A^* X + \lambda \bar{\lambda} X^* X \\ &= X^* A^* AX - \bar{\lambda} X^* AX - \lambda X^* A^* X + \lambda \bar{\lambda} X^* X \\ &= (X^* A^* - \bar{\lambda} X^*) (AX - \lambda X) = (AX - \lambda X)^* (AX - \lambda X) = \|AX - \lambda X\|^2 = 0, \end{aligned}$$

do đó $A^* X = \bar{\lambda} X$ vậy $X^* A = (A^* X)^* = (\bar{\lambda} X)^* = \lambda X^*$.

Đảo lại, áp dụng kết quả trên với $(A^*, \bar{\lambda}, X)$ thay vì (A, λ, X) .

$$\begin{aligned} 6.4.19 \bullet (ii) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} (A + A^*) \frac{1}{2i} (A - A^*) = \frac{1}{2i} (A - A^*) \frac{1}{2} (A + A^*) \\ &\Leftrightarrow 2(A^* A - AA^*) = 0 \Leftrightarrow (i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (iii) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} (A + A^*) \right)^2 + \left(\frac{1}{2i} (A - A^*) \right)^2 = A^* A \\ &\Leftrightarrow (A^2 + AA^* + A^* A + A^{*2}) - (A^2 - AA^* - A^* A + A^{*2}) = 4 A^* A. \\ &\Leftrightarrow 2 AA^* = 2 A^* A \Leftrightarrow (i). \end{aligned}$$

• (iv) $\Leftrightarrow (i)$: thay A bằng A^* trong (iii) $\Leftrightarrow (i)$, và để ý rằng:

$$\operatorname{Re}(A^*) = \operatorname{Re}(A), \operatorname{Im}(A^*) = -\operatorname{Im}(A).$$

6.4.20 Ta có :

$$\begin{aligned} \|A^* B - BA^*\|^2 &= \operatorname{tr}((A^* B - BA^*)^* (A^* B - BA^*)) = \operatorname{tr}((B^* A - AB^*) (A^* B - BA^*)) \\ &= \operatorname{tr}(B^* AA^* B) - \operatorname{tr}(AB^* A^* B) - \operatorname{tr}(B^* ABA^*) + \operatorname{tr}(AB^* BA^*). \end{aligned}$$

$$\forall i, \begin{cases} \operatorname{tr}(B^* AA^* B) = \operatorname{tr}(B^* A^* AB) = \operatorname{tr}(B^* A^* BA) = \operatorname{tr}(AB^* A^* B) \\ \operatorname{tr}(AB^* BA^*) = \operatorname{tr}(B^* BA^* A) = \operatorname{tr}(B^* BAA^*) = \operatorname{tr}(B^* ABA^*) \end{cases}$$

Ta suy ra : $\|A^* B - BA^*\|^2 = 0$, như vậy : $A^* B = BA^*$.

6.4.21 Theo bài tập 6.4.20, $A^* B = BA^*$ (vì, $B^* A = (A^* B)^* = (BA^*)^* = AB^*$), do đó
 $(AB)^* (AB) = B^* A^* AB = B^* AA^* B = AB^* BA^* = ABB^* A^* = (AB) (AB)^*.$

6.4.22 Với $n = 2$, xét ví dụ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trường hợp $n \geq 2$, bổ sung các số 0 vào đường chéo.

♦ Trả lời: Không.

6.4.23 ♦ Trả lời: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ (chẳng hạn).

6.4.24

$$\begin{aligned} a) \quad \|AB\|^2 &= \text{tr}((AB)^*(AB)) = \text{tr}(B^*A^*AB) = \text{tr}(B^*AA^*B) \\ &= \text{tr}(A^*B)(B^*A) = \text{tr}(A^*B^*BA) = \text{tr}((BA)^*(BA)) = \|BA\|^2. \end{aligned}$$

$$b) \quad AB = 0 \Rightarrow \|BA\| = \|AB\| = 0 \Rightarrow BA = 0.$$

6.4.25 Bằng cách sử dụng ma trận khối:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A^*A = AA^* \\ B^*B = BB^* \end{cases} \end{aligned}$$

6.4.26

$$\begin{aligned} a) \quad A \in U_n &\Leftrightarrow AA^* = I_n \Leftrightarrow (B^{-1}B^*)(B^{-1}B^*)^* = I_n \Leftrightarrow B^{-1}B^*B(B^{-1})^* = I_n \\ &\Leftrightarrow B^{-1}(B^*B)(B^*)^{-1} = I_n \Leftrightarrow B^*B = BB^*. \end{aligned}$$

$$b) \quad A = B^{-1}B^* = (HNH)^{-1}(HNH)^* = H^{-1}N^{-1}N^*H \text{ và theo a) } N^{-1}N^* \text{ là unita.}$$

6.4.27 • Giả sử $x \in \text{Ker}(f)$. Ta có:

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x) \rangle = \langle x, f \circ f^*(x) \rangle = \langle x, f^* \circ f(x) \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2 = 0$$

do đó $f^*(x) = 0$, $x \in \text{Ker}(f^*)$. Vậy: $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^*)$.

• Bằng cách áp dụng kết quả này cho f^* thay vì f , ta suy ra đẳng thức mong muốn.

Xem bài tập 6.4.28 và bài tập 6.4.18.

6.4.28 (i) $\Rightarrow$ (ii):

Giả sử f là chuẩn tắc, và $x \in E$. Như trong bài tập 6.4.27, ta có:

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x) \rangle = \langle x, f \circ f^*(x) \rangle = \langle x, f^* \circ f(x) \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Giả sử: $\|f^*(x)\| = \|f(x)\|$, $\forall x \in E$, B một csc của E và $A = \text{Mat}_B(f)$.

Khi đó, với mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{C})$: $X^*(A^*A - AA^*)X = \|AX\|^2 - \|A^*X\|^2 = 0$.

Vì $A^*A - AA^* \in H_n$, dựa vào bài tập 6.1.1 ta suy ra: $A^*A - AA^* = 0$, và như vậy f là chuẩn tắc.

6.4.29 • Vì $f - \lambda e$ là chuẩn tắc (như bài tập 6.4.17 h)), nên theo bài tập 6.4.28, ta có:

$$\|(f - \lambda e)^*(x)\| = \|(f - \lambda e)(x)\| = 0, \text{ do đó } f^*(x) = \bar{\lambda} x,$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \langle f^*(x), y \rangle = \langle \bar{\lambda} x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle \\ \langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \end{cases} \quad \text{và vì } \lambda \neq \mu \text{ nên: } \langle x, y \rangle = 0.$$

6.4.30 (i) $\Rightarrow$ (ii) và (iii) :

Giả sử f là chuẩn tắc và F một kgvc của E ổn định đối với f . Kgvc F có một csc B_1 và kgvc $F^\perp$ có một csc B_2 , khi đó $B = B_1 \cup B_2$ là một csc của E , và $M = \text{Mat}_B(f)$. Vì F ổn định đối với f , M có dạng : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, trong đó A và C các ma trận vuông tương ứng cấp $\dim(F)$ và $\dim(F^\perp)$.

Bằng cách sử dụng phép nhân theo khối :

$$(i) \Leftrightarrow MM^* = M^*M \quad \begin{cases} AA^* + BB^* = A^*A \\ BC^* = A^*B \\ CB^* = B^*A \\ CC^* = B^*B + C^*C \end{cases}$$

Đặc biệt : $A^*A - AA^* = BB^*$.

Do đó : $\|B^*\|^2 = \text{tr}(BB^*) = \text{tr}(A^*A - AA^*) = \text{tr}(A^*A) - \text{tr}(AA^*) = 0$, như vậy $B^* = 0$, $B = 0$.

Vậy $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Điều này chứng tỏ $F^\perp$ ổn định đối với f .

Hơn nữa, $M^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix}$, vậy F và $F^\perp$ ổn định đối với f^* .

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Quy nạp theo số chiều của E .

Tính chất là tầm thường khi $\dim(E) \leq 1$.

Giả sử đặc tính trên đúng với mọi kgvc với số chiều n , và E là một kgvc có số chiều $n+1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ sao cho mọi kgvc của E ổn định đối với f cũng ổn định như vậy đối với f^* .

Vì χ_f là tách được trên $\mathbb{C}$ (định lý d'Alembert), nên tồn tại $(\lambda_1, x_1) \in \mathbb{C} \times (E - \{0\})$ sao

cho $f(x_1) = \lambda_1 x_1$. Đặt $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$. Ta có : $\|e_1\| = 1$ và $f(e_1) = \lambda_1 e_1$.

$\mathbb{C}e_1$ là ổn định đối với f , theo giả thiết quy nạp, $\mathbb{C}e_1$ cũng ổn định đối với f^* . Vậy tồn tại $\mu_1 \in \mathbb{C}$ sao cho $f^*(e_1) = \mu_1 e_1$. Mặt khác, kgvc $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ có ít nhất một csc B' .

Đặt $B = (e_1) \cup B'$. B' là csc của E .

Các ma trận của f và của f^* trong B là tương ứng có dạng $\begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & M_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ trong đó

$L_1, M_1 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $A_1, B_1 \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Ta có : $\begin{pmatrix} \mu_1 & M_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ L_1^* & A_1^* \end{pmatrix}$.

Do đó : $\mu_1 = \bar{\lambda}_1$, $L_1 = M_1 = 0$, $B_1 = A_1^*$.

Như vậy, $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, và do đó $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ ổn định đối với f .

Xét tự đồng cấu g sinh bởi f trên $(\mathbb{C}e_1)^\perp$, nói cách khác, $\text{Mat}_B(g) = A_1$.

Giả sử G là một kgvc của $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ ổn định đối với g . Khi đó G (cũng là kgvc của E) ổn định đối với f , vì vậy G cũng ổn định đối với f^* (giả thiết). Vì g^* là tự đồng cấu sinh bởi f^* trên G (vì $\text{Mat}_B(g^*) = (\text{Mat}_B(g))^*$, $A_1^* = B_1$) nên G ổn định đối với g^* .

Như vậy, mọi kgvc của $(Ce_1)^\perp$ ổn định đối với g thì cũng ổn định đối với g^* . Theo giả thiết quy nạp, g là chuẩn tắc, vậy A_1 là chuẩn tắc.

Phép nhân theo khối cho phép suy ra $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ là chuẩn tắc, và như vậy f là chuẩn tắc.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Cùng phương pháp trên.

6.5.1

$$\begin{aligned} a) \quad (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^*AX \in \mathbb{R}) &\Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^*AX = (X^*AX)^*) \\ &\Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^*(A - A^*)X^* = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^* \left(\frac{1}{2i}(A - A^*) \right) X = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}(A - A^*) = 0 \Leftrightarrow A = A^*, \end{aligned}$$

bằng cách sử dụng bài tập 6.1.1, và với lưu ý $\frac{1}{2i}(A - A^*) \in \mathbf{H}_n$.

b) và c) Sử dụng a) và định nghĩa của $\mathbf{H}_n^+$ và $\mathbf{H}_n^{++}$

6.5.2 a) 1) Nếu $A \in \mathbf{H}_n^+$, $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ thì :

$$\begin{cases} (M^*AM)^* = M^*A^*M = M^*AM \\ \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X^*(M^*AM)X = (MX)^*A(MX) \geq 0 \end{cases}, \text{ như vậy } M^*AM \in \mathbf{H}_n^+.$$

2) Đảo lại là đúng bằng cách thay M bởi I_n .

b) Tương tự.

6.5.3 Giả sử $\alpha \in \mathbb{R}_+$; $A, B \in \mathbf{H}_n$, ta có :

$$A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathbf{H}_n^+ \Rightarrow \alpha B - \alpha A = \alpha(B - A) \in \mathbf{H}_n^+ \Rightarrow \alpha A \leq \alpha B.$$

Nhận xét : Cũng chứng minh tương tự:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*; \forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, (A < B \Rightarrow \alpha A < \alpha B).$$

6.5.4 Xem bài tập 4.4.11 b).

6.5.5 Xem bài tập 4.4.12.

6.5.6 Xem bài tập 4.4.13.

6.5.7 Xem bài tập 4.4.17.

6.5.8 Xem bài tập 4.4.18.

6.5.9 Xem bài tập 4.4.19.

6.5.10 Theo bài tập 6.5.7, chỉ cần chứng minh :

Giả sử $X = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p+q,1}(\mathbb{C})$ sao cho $MX = 0$.

Khi đó $\begin{cases} AU + BV = 0 \\ -B^*U + CV = 0 \end{cases}$, suy ra $(B^*A^{-1}B + C)V = 0$.

Nhưng $\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \in \mathbf{H}_p^{++} \text{ vậy } B^* A^{-1} B \in \mathbf{H}_q^{++} \\ C \in \mathbf{H}_q^{++} \end{array} \right\}$, nên $B^* A^{-1} B + C \in \mathbf{H}_q^{++} \subset \mathbf{GL}_q(\mathbb{C})$

Từ đó thu được $V = 0$, tiếp đó $U = -A^{-1}BV = 0, X = 0$.

Điều này chứng tỏ $M \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{C})$, và cuối cùng $H \in \mathbf{H}_{p+q}^{++}$.

6.5.11 Xem bài tập 4.4.20.

6.5.12 Giả sử $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_2, B = \begin{pmatrix} 1,3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_2$.

$$\bullet e^A = I_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n = I_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} A = I_2 + \frac{1}{2} (e^2 - 1) A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^2 + 1) & \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\ \frac{1}{2}(e^2 - 1) & \frac{1}{2}(e^2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$\bullet e^B = \begin{pmatrix} e^{1,3} & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \frac{1}{2} (e^2 + 1) > e^{1,3} \text{ (vì } \frac{1}{2} (e^2 + 1) > 4,1 \text{ và } e^{1,3} < 3,8), \text{ vậy } e^A \not\leq e^B.$$

$$\bullet 0 \leq A, \text{ vì với ký hiệu } U = (1, 1) \text{ và } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ta có :}$$

$$\forall X \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{C}), X^* A X = X^* U^* U X = (UX)^* (UX) \geq 0.$$

$$\bullet A \leq B \text{ vì } B - A = \begin{pmatrix} 0,3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ vậy với mọi } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ thuộc } \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{C}) :$$

$$\begin{aligned} X^* (B - A) X &= 0,3 \bar{x} x - (\bar{x} y + \bar{y} x) + 4y \bar{y} = 4(\bar{y} - \frac{1}{4} \bar{x})(y - \frac{1}{4} x) + 0,05 \bar{x} x \\ &= 4 \left| y - \frac{1}{4} x \right|^2 + 0,05 |x|^2. \end{aligned}$$

Trường hợp tổng quát $n \geq 2$ nhận được bằng cách bổ sung cho A và B các hạng tử 0.
 ◦ Trả lời: Không.

6.5.13 Trước tiên, lưu ý rằng: $A = U + iV$ và $A^* = U - iV$.

$$\begin{aligned} a) C \in \mathbf{S}_{2n}(\mathbb{C}) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^tU & {}^tV \\ -{}^tV & {}^tU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tU = U \\ {}^tV = -V \end{cases} \\ &\Leftrightarrow {}^tU - i{}^tV = U + iV \Leftrightarrow A^* = A \Leftrightarrow A \in \mathbf{H}_n. \end{aligned}$$

Giả sử $A \in \mathbf{H}_n$ hoặc (và) $C \in \mathbf{S}_{2n}(\mathbb{R})$.

$$\text{Rõ ràng ánh xạ } Z \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}) \\ \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) \end{pmatrix} \text{ là song ánh từ } \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ lên } \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbb{R}).$$

$$\text{Giả sử } X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), Z = X + iY, T = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \text{ Ta có :}$$

$$\begin{cases} {}^tTCT = ({}^tX {}^tY) \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tXUX - {}^tXVY + {}^tYVX + {}^tYUY \\ Z^*AZ = ({}^tX - i{}^tY)(U + iV)(X + iY) = {}^tXUX - {}^tXVY + {}^tYVX + {}^tYUY \text{ (vì } Z^*AZ \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

do đó : ${}^tTCT = Z^*AZ$.

$$\text{Vì vậy : } C \in S_{2n}^{++} \Leftrightarrow (\forall T \in M_{2n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, {}^tTCT > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}, Z^*AZ > 0) \Leftrightarrow A \in H_n^{++}.$$

$$b) \text{ Ta có : } {}^tCC = \begin{pmatrix} {}^tUU + {}^tVV & -{}^tUV + {}^tVU \\ -{}^tVU + {}^tUV & {}^tVV + {}^tUU \end{pmatrix}, \text{ và } A^*A = {}^tUU + {}^tVV + i({}^tUV - {}^tVU),$$

$$\text{vì vậy } A \in U_n \Leftrightarrow A^*A = I_n \Leftrightarrow {}^tCC = I_{2n} \Leftrightarrow C \in O_{2n}(\mathbb{R}).$$

$$6.5.14 \text{ Ta có : } Sp_{\mathbb{C}}(H_1) \subset \mathbb{R}_+ \text{ và } Sp_{\mathbb{C}}(H_1) = Sp_{\mathbb{C}}(-H_2) \subset \mathbb{R}_-,$$

$$\text{do đó : } Sp_{\mathbb{C}}(H_1) = Sp_{\mathbb{C}}(H_2) = \{0\}.$$

$$\text{Vì } H_1 \text{ và } H_2 \text{ chéo hóa được trong } M_n(\mathbb{C}), \text{ ta kết luận : } H_1 = H_2 = 0.$$

$$6.5.15 \text{ Giả sử } k \in \{1, \dots, n\}.$$

$$\text{Tồn tại } X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}, \text{ sao cho } MX = (\alpha_k + i\beta_k)X.$$

$$\text{Ta có : } X^*M^* = (MX)^* = ((\alpha_k + i\beta_k)X)^* = (\alpha_k - i\beta_k)X^*,$$

$$\text{do đó : } \begin{cases} X^*MX = (\alpha_k + i\beta_k)X^*X \\ X^*M^*X = (\alpha_k - i\beta_k)X^*X \end{cases}, \text{ và như vậy : } X^*HX = \frac{1}{2}(X^*MX + X^*M^*X) = \alpha_k X^*X.$$

Vì $H \in H_n$ theo định lý cơ bản, các $\overline{\text{vtr}} \lambda_1, \dots, \lambda_n$ của H là các số thực và tồn tại một csc $(V_1, \dots, V_n)$ được lập nên từ các $\overline{\text{vtr}}$ ứng với $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\text{Xét phân tích của } X \text{ trên csc } (V_j)_{1 \leq j \leq n} : X = \sum_{j=1}^n x_j V_j, \text{ trong đó } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Ta có : } X^*HX = \sum_{j=1}^n \lambda_j |x_j|^2 \text{ và } \alpha_k X^*X = \alpha_k \sum_{j=1}^n |x_j|^2, \text{ do đó : } \alpha_k \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j |x_j|^2.$$

$$\text{Vì } \forall j \in \{1, \dots, n\}, \lambda \leq \lambda_j \leq \mu, \text{ ta suy ra : } \lambda \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \leq \alpha_k \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \leq \mu \sum_{j=1}^n |x_j|^2,$$

$$\text{và như vậy : } \lambda \leq \alpha_k \leq \mu \text{ (vì } \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = X^*X > 0).$$

Bằng cách áp dụng kết quả phân trên cho iM thay vì M (thay H bằng $-H'$), ta được $-\mu' \leq -\beta_k \leq -\lambda'$, tức là : $\lambda' \leq \beta_k \leq \mu'$.

$$6.5.16 \text{ Theo định lý cơ bản, tồn tại } U \in U_n, D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{R}) \text{ sao cho } H = UDU^*.$$

$$\text{Đặt } \rho = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \text{ và : } D_1 = \text{diag}(\lambda_k + 2\rho)_{1 \leq k \leq n}, D_2 = \text{diag}(-\lambda_k + 2\rho)_{1 \leq k \leq n}.$$

$$\text{Vì : } \forall k \in \{1, \dots, n\}, (\lambda_k + 2\rho > 0 \text{ và } -\lambda_k + 2\rho > 0), \text{ ta có : } (D_1, D_2) \in (H_n^{++})^2.$$

$$\text{Ký hiệu } H_1 = UD_1U^*, H_2 = UD_2U^*. \text{ Khi đó : } (H_1, H_2) \in (H_n^{++})^2 \text{ và } H = \frac{1}{2}H_1 + (-\frac{1}{2})H_2.$$

6.5.17 Với mọi tập con E của $M_n(\mathbb{C})$, ký hiệu $C(E)$ là tập các ma trận giao hoán với E , tức là :

$$C(E) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), \forall M \in E, MA = AM\}.$$

1) Vì $H_n^{++} \subset H_n^+ \subset H_n \subset M_n(\mathbb{C})$, nên :

$$C(H_n^{++}) \supset C(H_n^+) \supset C(H_n) \supset C(M_n(\mathbb{C})).$$

Theo bài tập 6.5.16, H_n^{++} sinh bởi $\mathbb{R}$ -kgv H_n , do đó $C(H_n^{++}) \subset C(H_n)$.

Cũng như thế H_n sinh bởi $\mathbb{C}$ -kgv $M_n(\mathbb{C})$, ta có $C(H_n) \subset C(M_n(\mathbb{C}))$, (mọi A thuộc $M_n(\mathbb{C})$

phân tích thành $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$, trong đó $\frac{1}{2}(A + A^*) \in H_n$ và $\frac{1}{2i}(A - A^*) \in H_n$).

Vậy $C(H_n) = C(H_n^+) = C(H_n^{++}) = C(M_n(\mathbb{C}))$.

2) Chứng minh : $C(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}I_n$.

Bao hàm thức $\mathbb{C}I_n \subset C(M_n(\mathbb{C}))$ là hiển nhiên.

Đảo lại, giả sử $A = (a_{ij}) \in C(M_n(\mathbb{C}))$, và $(k, l) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $k \neq l$.

$$\text{Vì } AE_{kl} = E_{kl}A, \text{ nên : } \begin{pmatrix} a_{1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dòng thứ } k,$$

$l \text{ cột}$

đặc biệt: $a_{lk} = 0, a_{kk} = a_{ll}$.

Điều này chứng tỏ : $A \in \mathbb{C}I_n$.

♦ **Trả lời :** Các tập giao hoán của H_n, H_n^+, H_n^{++} đều bằng $\mathbb{C}I_n$.

6.5.18 Vì $AB - BA$ là phần Hermite (xem bài tập 6.1.8), nên tồn tại $H \in H_n$ sao cho $AB - BA = iH$. Và vì $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(H) \subset \mathbb{R}$, ta kết luận : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB - BA) \subset i\mathbb{R}$.

6.5.19 a) Giả sử tồn tại $X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ sao cho $AX = \lambda X$ và $BX = \mu X$.

Khi đó : $(AB - BA)X = ABX - BAX = \mu\lambda X - \lambda\mu X = 0$, vậy $AB - BA$ là suy biến (tức là không khả nghịch)

Nhận xét : Kết quả trên vẫn còn đúng trong trường hợp tổng quát $(A, B) \in (M_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.

b) 1) Giả sử $A, B \in H_2$ sao cho $AB - BA$ là suy biến. Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in U_2$, $D \in D_2(\mathbb{R})$ sao cho $A = UDU^*$.

Đặt $C = U^*BU$, suy ra $B = UCU^*$. Rõ ràng $C \in H_2$ và $AB - BA = U(DC - CD)U^*$.

Với ký hiệu $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}$, trong đó $\lambda, \mu, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, ta có :

$$\text{Det}(AB - BA) = 0 \Leftrightarrow \text{det}(DC - CD) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & (\lambda - \mu)\beta \\ (\mu - \lambda)\bar{\beta} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \mu)^2 |\beta|^2 = 0.$$

Nếu $\lambda = \mu$ thì $D = \lambda I_2$, $A = \lambda I_2$. Vì mọi vectơ thuộc $M_{2,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ đều là vectơ riêng của A và B có ít nhất một vtr nên A và B có chung (ít nhất) một vtr.

Nếu $\beta = 0$, thì C và D nhận $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (và $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) làm hai vtr, vậy A và B có chung ít nhất một vectơ riêng (cũng như vậy A và B có một cơ sở chung gồm các vtr).

2) Với ký hiệu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_3$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_3$, hãy chứng minh A và B

không có chung vtr nào và $AB - BA$ là suy biến.

3) Với $n \geq 3$, các ví dụ trên được bổ sung bởi các số 0.

6.5.20 Xem bài tập 5.2.3.

6.5.21 • Giả sử $A \in \mathbf{H}_n$. Khi đó $A^* = A$, $\text{Re}(A) = A$, như vậy $(\text{Re}(A))^2 = A^*A (= A^2 = AA^*)$.

• Đảo lại, giả sử $(\text{Re}(A))^2 \geq A^*A$ (1).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (A + A^*)^2 \geq 4A^*A \Leftrightarrow A^2 + AA^* - 3A^*A + A'^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (A - A^*)^2 + 2AA^* - 2A^*A \geq 0 \Leftrightarrow 2(AA^* - A^*A) \geq (A - A^*)^*(A - A^*).$$

Theo bài tập 6.5.7: $(A - A^*)^*(A - A^*) \in \mathbf{H}_n^+$, như vậy $AA^* - A^*A \in \mathbf{H}_n^+$, và cuối cùng (bài tập 6.5.20) $AA^* = A^*A$.

6.5.22 Xem bài tập 4.4.7.

6.5.23 Xem bài tập 4.4.27.

6.5.24 Xem bài tập 4.4.28.

6.5.25 Xem bài tập 4.4.29.

6.5.26 Xem bài tập 4.4.30.

6.5.27 Ký hiệu $r = \text{rank}(H)$. Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $H = UDU^*$. Ta có thể giả thiết các số λ_i được xếp theo thứ tự sao cho:

$$\begin{cases} (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{R}^*)^r \\ \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0 \quad (\text{ta có thể có } r = n) \end{cases}$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

$$(\text{tr}(H))^2 = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^r 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^2 \right) = r \text{tr}(H^2).$$

6.5.28 Xem bài tập 4.4.39.

6.5.29 Xem bài tập 4.4.40.

6.5.30 Xem bài tập 4.4.41.

6.5.31 Xem bài tập 5.2.8.

6.5.32 Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $H = UDU^*$.

Khi đó ta có: $(H - aI_n)(H - bI_n) = UAU^*$, trong đó $A = (D - aI_n)(D - bI_n)$.

Với mọi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ ta có $X^*AX = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - a)(\lambda_k - b) |x_k|^2 \geq 0$,

nên: $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \in \mathbb{R} -]a; b[$.

Vậy: $A \in \mathbf{H}_n^+$, và cuối cùng $(H - aI_n)(H - bI_n) \in \mathbf{H}_n^+$.

6.5.33 Xem bài tập 5.2.10.

6.5.34 Xem bài tập 5.2.20.

6.5.35 Xem bài tập 5.2.11.

6.5.36 Giả sử $H \in \mathbf{H}_n$. Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n, D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $H = UDU^*$.

Khi đó: $e^H = Ue^DU^*$ và $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Vì $\forall k \in \{1, \dots, n\}, e^{\lambda_k} > 0$, nên $e^H \in \mathbf{H}_n^{++}$.

6.5.37 Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n, D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$

sao cho $H = UDU^*$. Khi đó ta có: $e^H = Ue^DU^*$.

1) Tồn tại $P \in \mathbb{R}[X]$ sao cho: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ (dùng đa thức nội suy với các λ_i đôi một khác nhau). Như vậy $P(D) = e^D$, nên:

$P(H) = P(UDU^{-1}) = UP(D)U^{-1} = Ue^DU^* = e^H$.

2) Vì $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là các số thực: $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (e^{\lambda_i} = e^{\lambda_j} \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j)$.

Tồn tại $Q \in \mathbb{R}[X]$ sao cho: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ (dùng đa thức nội suy cho các e^{λ_i} đôi một phân biệt). Như vậy, ta có $Q(e^D) = D$, nên:

$Q(e^H) = Q(Ue^DU^{-1}) = UQ(e^D)U^{-1} = UDU^* = H$.

6.5.38 Theo bài tập 6.5.37, tồn tại $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $A = P(e^A)$ và $B = Q(e^B)$.

Vì e^A giao hoán với e^B , mọi đa thức đặc trưng của e^A giao hoán với e^B , vì vậy $Ae^B = e^BA$.
 Ae^B giao hoán với A nên mọi đa thức của e^B giao hoán với A , do đó $AB = BA$.

6.5.39 Ma trận AA^* và ma trận A^*A có cùng các $\overline{\text{vtr}}$ (xem bài tập 2.1.14) và chéo hóa được (vì là ma trận Hermite), vậy $\pi_{A^*A} = \pi_{AA^*}$.

6.5.40 Xem bài tập 5.2.25.

6.5.41 a) Bằng cách áp dụng bài tập 6.5.40, chỉ cần chọn $A = H^{1/2}$.

b) $A \neq \det(H) = \det(A^*A) = \overline{\det(A)} \det(A) = |\det(A)|^2$, vậy $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

6.5.42 Giả sử $H \in \mathbf{H}_n^{++}$. Theo bài tập 6.5.41, tồn tại $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ sao cho $H = A^*A$. Tồn tại $U \in \mathbf{U}_n, T \in \mathbf{T}_{n,n}(\mathbb{C})$ (Mệnh đề 11, 6.4.2 dạng ma trận của thuật toán trực giao hóa Schmidt) sao cho $A = UT$.

Ta được: $H = (UT)^*(UT) = T^*(U^*U)T = T^*T$.

6.5.43 Xem bài tập 5.2.27.

6.5.44 Vì $H \in \mathbf{H}_{p+q}^{++}$, theo bài tập 6.5.42, tồn tại $T \in \mathbf{T}_{p+q,s}(\mathbb{C})$ sao cho $H = T^*T$.

Phân tích T thành ma trận khối:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \text{ trong đó } T_{11} \in \mathbf{T}_{p,s}(\mathbb{C}), T_{12} \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{C}), T_{22} \in \mathbf{T}_{q,s}(\mathbb{C}) \cap \mathbf{GL}_q(\mathbb{C}).$$

Ta có: $\det(H) = \det(T^*T) = |\det(T)|^2 = |\det(T_{11})\det(T_{22})|^2 = \det(T_{11}^*T_{11})\det(T_{22}^*T_{22})$.

Theo bài tập 6.5.29, vì $T_{12}^*T_{12}$ và $T_{22}^*T_{22}$ là các ma trận thuộc $\mathbf{H}_q^+$ nên:

$$\det(T_{22}^*T_{22}) \leq \det(T_{12}^*T_{12} + T_{22}^*T_{22}).$$

$$\forall \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = H = T^*T = \begin{pmatrix} T_{11}^*T_{11} & T_{11}^*T_{12} \\ T_{12}^*T_{11} & T_{12}^*T_{12} + T_{22}^*T_{22} \end{pmatrix}, \text{ nên ta có } \begin{cases} A = T_{11}^*T_{11} \\ C = T_{12}^*T_{12} + T_{22}^*T_{22} \end{cases}$$

Do đó $\det(H) = \det(T_{11}^*T_{11})\det(T_{22}^*T_{22}) \leq \det(A)\det(C)$.

$$b) \bullet \text{ Nếu } B = 0, \text{ thì } \det(H) = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C).$$

Đảo lại, giả sử $\det(H) = \det(A)\det(C)$.

$$\text{Khi đó (xem a): } \begin{cases} \det(T_{11}^*T_{11}) = 0 \\ \text{hoặc} \\ \det(T_{22}^*T_{22}) = \det(T_{12}^*T_{12} + T_{22}^*T_{22}) \end{cases}$$

Nhưng $A \in \mathbf{H}_p^{++}$, vậy $\det(T_{11}^*T_{11}) = \det(A) \neq 0$, do đó $\det(T_{22}^*T_{22}) = \det(T_{12}^*T_{12} + T_{22}^*T_{22})$,

vì $T_{12}^*T_{12} \in \mathbf{H}_q^+$ và $T_{22}^*T_{22} \in \mathbf{H}_q^+$, nên $T_{12}^*T_{12} = 0$, (xem bài tập 6.5.29, b)).

Ta suy ra $T_{12} = 0$ (xem bài tập 6.2.2), và $B = T_{11}^*T_{12} = 0$.

6.5.45 Với ký hiệu $H' = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, ta có $H' \in \mathbf{H}_{2n}^{++}$ (vì $H \in \mathbf{H}_{2n}^{++}$ và

$\begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$), $\det(H') = \det(H)$ (vì $\det \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \pm 1$) và thực hiện phép nhân theo khối, ta được:

$$H' = \begin{pmatrix} M^*AM + B^*M + M^*B + C & M^*A + B^* \\ AM + B & A \end{pmatrix}.$$

Theo bài tập 6.5.44:

- $\det(H) = \det(H') \leq \det(M^*AM + B^*M + M^*B + C)\det(A)$
- $\det(H) = \det(M^*AM + B^*M + M^*B + C)\det(A) \Leftrightarrow AM + B = 0$.

6.5.46 Xem bài tập 5.5.28.

6.5.47 Xem bài tập 5.2.9.

6.5.48 a) Ta có: $AB = \frac{1}{A^2} \left(\frac{1}{A^2} B \frac{1}{A^2} \right) A^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{A^2} B \frac{1}{A^2}$.

Vì $(\frac{1}{A^2}, B) \in (\mathbf{H}_n)^2$, ta suy ra $\frac{1}{A^2} B \frac{1}{A^2} \in \mathbf{H}_n$, như vậy:

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{A^2} B \frac{1}{A^2}\right) \subset \mathbb{R}.$$

b) Với các ký hiệu của a), $\frac{1}{A^2} B \frac{1}{A^2} \in \mathbf{H}_n^+$, vậy $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\frac{1}{A^2} B \frac{1}{A^2}) \subset \mathbb{R}_+$.

6.5.49 a) Lưu ý rằng : $\sum_{i=1}^p H_i \in \mathbf{H}_n^{++} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Đặt $H = \sum_{i=1}^p H_i, M = \sum_{i=1}^p M_i, A = H^{-1}M$,

và với $i \in \{1, \dots, p\}$, $X_i = H_i^{-\frac{1}{2}} M_i - H_i^{\frac{1}{2}} A$.

Với mọi i thuộc $\{1, \dots, p\}$, ta có:

$$X_i^* X_i = \left(M_i^* H_i^{-\frac{1}{2}} - A^* H_i^{\frac{1}{2}} \right) \left(H_i^{-\frac{1}{2}} M_i - H_i^{\frac{1}{2}} A \right) = M_i^* H_i^{-1} M_i - A^* M_i + M_i^* A + A^* H_i A,$$

và $A^* M = M^* A = M^* H^{-1} M$ và $A^* H A = M^* H^{-1} H H^{-1} M = M^* H^{-1} M$.

do đó $\sum_{i=1}^p X_i^* X_i = \sum_{i=1}^p M_i^* H_i^{-1} M_i - A^* M - M^* A + A^* H A = \sum_{i=1}^p M_i^* H_i^{-1} M_i - M^* H^{-1} M$

• Vì $\forall i \in \{1, \dots, p\}, X_i^* X_i \in \mathbf{H}_n^+$, ta có : $\sum_{i=1}^p X_i^* X_i \in \mathbf{H}_n^+$, nên : $M^* H^{-1} M \leq \sum_{i=1}^p M_i^* H_i^{-1} M_i$.

• Khảo sát trường hợp đẳng thức
 Sử dụng bài tập 6.2.2 và bài tập 6.5.5, ta có :

$$\begin{aligned} M^* H^{-1} M = \sum_{i=1}^p M_i^* H_i^{-1} M_i &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^p X_i^* X_i = 0 \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, p\}, X_i^* X_i = 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, p\}, X_i = 0) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, p\}, M_i = H_i A). \end{aligned}$$

Vì vậy, nếu $M^* H^{-1} M = \sum_{i=1}^p M_i^* H_i^{-1} M_i$ thì tồn tại $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho :

$$M_i = H_i A, \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

Đảo lại, nếu tồn tại $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho : $M_i = H_i B, \forall i \in \{1, \dots, p\}$, thì :

$$\left(\sum_{i=1}^p M_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^p H_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^p M_i \right) = B^* \left(\sum_{i=1}^p H_i \right) \left(\sum_{i=1}^p H_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^p H_i \right) B = B^* \left(\sum_{i=1}^p H_i \right) B$$

và $\sum_{i=1}^p M_i^* H_i^{-1} M_i = \sum_{i=1}^p B^* H_i H_i^{-1} H_i B = B^* \left(\sum_{i=1}^p H_i \right) B$.

♦ Trả lời : Có đẳng thức khi và chỉ khi tồn tại $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $\forall i \in \{1, \dots, p\}, M_i = H_i A$.

b) Áp dụng a) cho trường hợp đặc biệt : $p = 2, H_1 = A, H_2 = B, M_1 = M_2 = I_n$.

♦ Trả lời : Có đẳng thức khi và chỉ khi $A = B$.

6.5.50 Theo định lý cơ bản tồn tại $U \in \mathbf{U}_n, D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}^+)$ (tức là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo trong $\mathbb{R}^+$) sao cho $H = UDU^*$. Khi đó ta có :

$$P(H) = P(UDU^{-1}) = UP(D)U^{-1}.$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} P' = \sum_{k=1}^N k a_k X^{k-1} \\ \forall k \in \{1, \dots, N\}, a_k \geq 0 \\ \exists k_0 \in \{1, \dots, N\}, a_{k_0} > 0 \end{array} \right\}, \text{ nên } P'(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[, \text{ và như vậy } P \text{ tăng ngặt}$$

trên $[0; +\infty[$.

Suy ra: $(P(\lambda_i) = P(\lambda_j) \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j), \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

Vì vậy tồn tại $L \in \mathbb{R}[X]$ sao cho: $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = L(P(\lambda_i))$ (L là đa thức nội suy của $P(\lambda_i)$ đối một phân biệt).

Vì vậy $D = L(P(D))$, và $H = L(P(H))$.

Khi đó H là một đa thức của $P(H)$ và $P(H)$ giao hoán với A , ta kết luận H giao hoán với A .

6.5.51 Theo giả thiết, tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ sao cho $V = PUP^{-1}$.

Ký hiệu $H = (P^*P)^{\frac{1}{2}}$ (vậy $H \in \mathbf{H}_n^{++}$) và $Q = PH^{-1}$.

• $Q^*Q = H^{-1}P^*PH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I_n$, như vậy $Q \in \mathbf{U}_n$.

• $QUQ^{-1} = QUQ^* = PH^{-1}UH^{-1}P^*$.

Ta chứng minh H và U giao hoán.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} P^*PU = P^*(PU) = P^*VP \\ UP^*P = (U^{-1})^*P^*P = ((UP^{-1})^{-1})^*P = ((P^{-1}V)^{-1})^*P = P^*VP \end{cases}$$

vậy P^*P và U giao hoán.

Vì H^2 và U giao hoán, theo bài tập 6.5.50 nên H và U giao hoán, vì vậy H^{-1} và U giao hoán. Do đó:

$$QUQ^* = PH^{-1}UH^{-1}P^* = PU(H^2)^{-1}P^* = PUP^{-1}P^{*-1}P^* = PUP^{-1}.$$

6.5.52 a) 1) Giả sử $B \in \mathbf{H}_n^{++}$.

Đặt $R = A^{\frac{1}{2}}$ (xem bài tập 6.5.40), $S = B^{\frac{1}{2}}$, $U = S - R$. Ta có:

$$0 \leq B - A = S^2 - R^2 = S^2 - (S - U)^2 = SU + US - U^2.$$

Ký hiệu $H = SU + US - U^2 \in \mathbf{H}_n^+$, như vậy ta có $SU + US = H + U^2 \in \mathbf{H}_n^+$, vì $U^2 \in \mathbf{H}_n^+$, xem Mệnh đề 2.3), 6.5.3.

Vì $U \in \mathbf{H}_n$, nên để chứng minh $U \in \mathbf{H}_n^+$, ta chỉ cần chứng minh: $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(U) \subset \mathbb{R}_+$.

Giả sử $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(U)$. Tồn tại $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ sao cho $UX = \lambda X$. Ta có:

$$X^*(SU + US)X = (SX)^*UX + (UX)^*SX = (SX)^*\lambda X + \lambda X^*SX = 2\lambda X^*SX$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} X^*SX > 0 \text{ (vì } S \in \mathbf{H}_n^{++} \text{ và } X \neq 0) \\ X^*(SU + US)X \geq 0 \text{ (vì } SU + US \in \mathbf{H}_n^+) \end{array} \right\}, \text{ ta suy ra } \lambda \geq 0.$$

$$\text{Vậy } \left\{ \begin{array}{l} U \in \mathbf{H}_n \\ \text{Sp}_{\mathbb{R}}(U) \subset \mathbb{R} \end{array} \right\}, \text{ do đó } U \in \mathbf{H}_n^+, \text{ tức là } A^{\frac{1}{2}} \leq B^{\frac{1}{2}}.$$

2) Trường hợp tổng quát $B \in \mathbf{H}_n^+$.

Giả sử $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, áp dụng 1) cho $B + \varepsilon I_n$ (rõ ràng thuộc $\mathbf{H}_n^{++}$). Vì $A \leq B \leq B + \varepsilon I_n$, nên:

$$A^{\frac{1}{2}} \leq (B + \varepsilon I_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Chéo hóa B bởi nhóm unita ta nhận được : $(B + \varepsilon I_n)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} B^{\frac{1}{2}}$.

Vì H_n^+ là đóng trong H_n (xem bài tập 6.5.11 b)), nên : $A^{\frac{1}{2}} \leq B^{\frac{1}{2}}$.

b) Sử dụng cách giải a).

Nhận xét : Ta suy ra theo quy nạp :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall (A, B) \in (H_n^+)^2, (A \leq B \Rightarrow A^{\frac{1}{2^m}} \leq B^{\frac{1}{2^m}}).$$

6.5.53 Xem bài tập 5.2.30.

6.5.54 Xem bài tập 5.2.31.

6.5.55 Xem bài tập 5.2.32.

6.5.56 Xem bài tập 5.2.35.

6.5.57 Xem bài tập 5.2.36.

6.5.58 Xem bài tập 5.2.37.

6.5.59 Xem bài tập 5.2.38.

6.5.60 Vì $B^*B \in H_n^+$, nên theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in U_n, D \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho

$B^*B = UDU^*$. Ký hiệu $B' = U^*BU$ (vậy $B^*B' = D$). Với mọi $A \in M_n(\mathbb{C}), A' = U^*AU$ do đó

$A \mapsto A'$ là một hoán vị của $M_n(\mathbb{C})$.

Ta có : $A(A^*A)^k = B \Leftrightarrow A'(A'^*A')^k = B'$.

Lưu ý rằng, nếu $A'(A'^*A')^k = B'$ thì $D = B'^*B' = (A'^*A')^k A'^*A' (A'^*A')^k = (A'^*A')^{2k+1}$.

Ta có thể giả thiết các phần tử nằm trên đường chéo của D được sắp xếp theo thứ tự để có

$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ và $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{R}_+^*)^r$ (r là hạng của D , cũng như của B).

Vì $D \in H_n^+$, D có một căn bậc $(2k+1)$ duy nhất trong (xem bài tập 6.5.40) là

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ trong đó } \Delta_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r), \mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2k+1}} (1 \leq i \leq r).$$

Vì $A'^*A' \in H_n^+$, ta suy ra : $(A'^*A')^{2k+1} = D \Leftrightarrow A'^*A' = \Delta$.

$$\text{Điều này chứng tỏ : } A(A^*A)^k = B \Leftrightarrow \begin{cases} A'(A'^*A')^k = B' \\ A'^*A' = \Delta \end{cases}$$

Với ký hiệu $A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{pmatrix}$ và $B' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix}$, một phép tính tích theo khối cho ta :

$$A'^*A' = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} A_1'^*A'_1 + A_3'^*A'_3 = \Delta_1 \\ A_1'^*A'_2 + A_3'^*A'_4 = 0 \\ A_2'^*A'_2 + A_4'^*A'_4 = 0 \end{cases}$$

Vì $A_2^* A_2' \in \mathbf{H}_{n-r}^+$ và $A_4^* A_4' \in \mathbf{H}_{n-r}^+$, ta có:

$$A_2^* A_2' + A_4^* A_4' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_2^* A_2' = 0 \\ A_4^* A_4' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2' = 0 \\ A_4' = 0 \end{cases}.$$

Như vậy:

$$A(A'A)^k = B \Leftrightarrow \begin{cases} A_1^* A_1' + A_3^* A_3' = A_1 \\ A_2' = 0, A_4' = 0 \\ A_1' A_1^k = B_1' \\ A_3' A_1^k = B_3' \\ B_2' = 0, B_4' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2' = 0, A_4' = 0 \\ A_1' = B_1' A_1^{-k}, A_3' = B_3' A_1^{-k} \\ B_2' = 0, B_4' = 0 \\ A_1^{-k} B_1^* B_1' A_1^{-k} + A_1^{-k} B_3^* B_3' A_1^{-k} = \Delta \end{cases}$$

Quan hệ cuối cùng được thoả mãn vì: $B_1^* B_1 + B_3^* B_3 = \Delta_1^{2k+1}$.

6.5.61 Trước tiên ta lưu ý rằng ϕ là xác định vì: $\forall A \in \mathbf{H}_n^{++}$, $A^t \in \mathbf{H}_n^{++}$.

- Theo bài tập 6.5.40, ϕ là song ánh.
- Theo bài tập 6.5.33 b) β), $\mathbf{H}_n^{++}$ là mở trong $\mathbf{H}_n$.
- ϕ là lớp C^1 trên $\mathbf{H}_n^{++}$ vì các hệ số của $\phi(A)$ ($= A^t$) có thể biểu diễn dưới dạng đa thức của hệ số của A .
- Giả sử $A \in \mathbf{H}_n^{++}$.

Xét vi phân của ϕ theo A (xem bài tập 8.1.7, Tập 5):

$$d_A \phi : \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbf{H}_n \\ H \mapsto A^{k-1}H + A^{k-2}HA + \dots + HA^{k-1}$$

và chứng minh rằng $d_A \phi$ là đơn ánh.

Giả sử $H \in \mathbf{H}_n$ sao cho $(d_A \phi)(H) = 0$.

Theo định lý cơ bản, tồn tại một csc của $M_n(\mathbb{C})$ được lập nên từ các vtr $V_1, \dots, V_n$ tương ứng với các gtr λ_i ($1 \leq i \leq n$) của A .

Giả sử $i \in \{1, \dots, n\}$. Ta có:

$$0 = (A^{k-1}H + A^{k-2}HA + \dots + HA^{k-1})V_i = A^{k-1}HV_i + \lambda_i A^{k-2}HV_i + \dots + \lambda_i^{k-1}HV_i \\ = (A^{k-1} + \lambda_i A^{k-2} + \dots + \lambda_i^{k-1} I_n)HV_i.$$

Vì $A^{k-1} + \lambda_i A^{k-2} + \dots + \lambda_i^{k-1} I_n \in \mathbf{H}_n^{++}$, ta suy ra $HV_i = 0$.

Điều này chứng tỏ: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $HV_i = 0$ suy ra $H = 0$.

Vậy $d_A \phi$ là đơn ánh.

Theo Hệ quả của Định lý đảo địa phương (Hệ quả, 8.1.6, Tập 4), ta kết luận ϕ là một C^1 -vi phôi từ $\mathbf{H}_n^{++}$ trên chính nó.

6.5.62 a) Ký hiệu $f, \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ rõ ràng rằng f là song ánh.

$$X \mapsto HX + XH$$

Giả sử $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sao cho $f(X) = 0$. Khi đó $HX = -XH$, do đó:

$$X^*HX = -X^*XH = -H^{\frac{1}{2}}(H^{\frac{1}{2}}X^*XH^{\frac{1}{2}})H^{\frac{1}{2}} = -H^{\frac{1}{2}}X^*XH^{\frac{1}{2}}.$$

Vì $X^*HX \in \mathbf{H}_n^+$, $(H^{\frac{1}{2}}X^*XH^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{H}_n^+$ nên theo bài tập 6.5.14, suy ra $X^*HX = H^{\frac{1}{2}}X^*XH^{\frac{1}{2}} = 0$, do đó $X^*X = 0$, $X = 0$.

Như vậy, f là một tự đồng cấu đơn ánh của $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (là một $\mathbb{C}$ -kgv hữu hạn chiều), vì thế f là song ánh.

b) Ký hiệu $F: [0; +\infty[\rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ và trang bị trên $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ chuẩn Hermit chính tắc $\|\cdot\|$.
 $t \mapsto e^{-tH} A e^{-tH}$

Ta biết rằng (xem bài tập 6.5.25) $\|\cdot\|$ là chuẩn dưới nhân, và hơn nữa:

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \forall U \in \mathbf{U}_n \quad \|UMU^*\| &= (\text{tr}((UMU^*)^*(UMU^*)))^{\frac{1}{2}} = (\text{tr}((UM^*MU^*)))^{\frac{1}{2}} \\ &= (\text{tr}(M^*M))^{\frac{1}{2}} = \|M\|. \end{aligned}$$

Vì $H \in \mathbf{H}_n^{++}$, theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$

sao cho: $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0 \\ H = UDU^* \end{cases}$.

Ký hiệu $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i > 0$.

Ta có, $e^{tH} = Ue^{tD}U^*$ với mọi t thuộc $[0; +\infty[$, nên:

$$\|e^{-tH} A e^{-tH}\| \leq \|A\| \|e^{tH}\|^2 = \|A\| \|e^{tD}\|^2 = \|A\| \sum_{i=1}^n e^{2t\lambda_i} \leq n\|A\| e^{2t\alpha}.$$

Rõ ràng F liên tục. Vì $t \mapsto e^{-2t\alpha}$ khả tích trên $[0; +\infty[$, theo định lý làm trội, ta có F khả tích trên $[0; +\infty[$.

Điều này chứng tỏ sự tồn tại của $X_0 = \int_0^{+\infty} e^{-tH} A e^{-tH} dt$

• Bằng cách thế vào các tích phân của các hàm khả tích, ta có:

$$f(X_0) = HX_0 + X_0H = \int_0^{+\infty} (He^{-tH} A e^{-tH} + e^{-tH} A e^{-tH} H) dt.$$

Vì F thuộc lớp C^1 trên $[0; +\infty[$ và vì: $F'(t) = -He^{-tH} A e^{-tH} - e^{-tH} A e^{-tH} H$, $\forall t \in [0; +\infty[$,

nên: $f(X_0) = \int_0^{+\infty} -F'(t) dt = F(0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = A$.

Do đó X_0 là nghiệm của (1).

c) Giả sử $A \in \mathbf{H}_n$. Khi đó ta có:

$$X_0^* = \left(\int_0^{+\infty} e^{-tH} A e^{-tH} dt \right)^* = \int_0^{+\infty} (e^{-tH} A e^{-tH})^* dt = \int_0^{+\infty} e^{-tH} A e^{-tH} dt = X_0.$$

vậy $X_0 \in \mathbf{H}_n$.

Hơn nữa, nếu $A \in \mathbf{H}_n^+$, thì với mọi V thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V^* X_0 V = \int_0^{+\infty} (V^* e^{-tH} A e^{-tH} V) dt \geq 0$

(vì $\forall t \in [0; +\infty[$, $V^* e^{-tH} A e^{-tH} V \geq 0$), và như vậy $X_0 \in \mathbf{H}_n^+$.

Hơn nữa, nếu $A \in \mathbf{H}_n^{++}$, thì với mọi V thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$V^* X_0 V = 0 \Rightarrow (\forall t \in [0; +\infty[), V^* e^{-tH} A e^{-tH} V = 0) \Rightarrow V^* A V = 0 \Rightarrow V = 0,$$

và như vậy $X_0 \in \mathbf{H}_n^{++}$.

6.5.63 a) Suy ra từ Mệnh đề 2 I) và 2).

b) Giả sử $t \in [0; 1]$, $(A, B) \in (\mathbf{H}_n^{++})^2$.

Theo biểu diễn ma trận của định lý thu gọn đồng thời (Mệnh đề 4, 6.5.3), tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$ sao cho: $A = P^* P$ và $B = P^* D P$.

Vì $B \in \mathbf{H}_n^{++}$, nên $D = (P^{-1})^* B P^* \in \mathbf{H}_n^{++}$, do đó: $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Vậy $tA^{-1} + (1-t)B^{-1} - (tA + (1-t)B)^{-1} = P^{-1} \Delta P^{*-1}$,
 trong đó $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu_i = t + (1-t)\lambda_i^{-1} - (t + (1-t)\lambda_i)^{-1}$.

Vì $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi (do φ là lớp C^2 và $\varphi' \geq 0$), nên ta có: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_i \geq 0$, như
 $u \mapsto u^{-1}$

vậy $\Delta \in \mathbf{H}_n^+$.

b) Áp dụng a) cho trường hợp đặc biệt $t = \frac{1}{2}$.

6.5.64 Theo biểu diễn ma trận của định lý thu gọn đồng thời (Mệnh đề 4, 6.5.3), tồn tại $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$ sao cho: $A = P^*P$ và $B = P^*DP$.

Khi đó ta có: $AB = P^*PP^*DP$.

Theo giả thiết, tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(AB)^k = 0$.

Ký hiệu $M = PP^*DP$. Vì $P^*M (= AB)$ là lũy linh nên MP^* cũng lũy linh, thực vậy:
 $(MP^*)^{k+1} = M(P^*M)^k P^* = 0$.

Nhưng $MP^* = PP^*DPP^* \in \mathbf{H}_n$. Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho:
 $MP^* = U\Delta U^*$. Ta có $0 = (MP^*)^{k+1} = U\Delta^{k+1}U^*$, từ đây: $\Delta^{k+1} = 0$, $\Delta = 0$ (vì Δ là ma trận đường chéo), $MP^* = 0$, $D = 0$, $B = 0$.

6.5.65 (i) $\Rightarrow$ ((ii) và (iii)):

Giả sử A chuẩn tắc. Khi đó, với mọi X thuộc $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$\|A^*X\|^2 = (A^*X)^*(A^*X) = X^*AA^*X = X^*A^*AX = (AX)^*(AX) = \|AX\|^2.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Giả sử: $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\|AX\| \geq \|A^*X\|$.

Với ký hiệu: $H = A^*A - AA^* \in \mathbf{H}_n$, ta có: $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X^*HX = \|AX\|^2 - \|A^*X\|^2 \geq 0$,
 vậy $H = 0$, $AA^* = A^*A$ (xem bài tập 6.5.20).

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Áp dụng (ii) $\Rightarrow$ (i) với A^* thay bằng A .

6.5.66 Vì $\text{Re}(A) \in \mathbf{H}_n$, nên theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho

$\text{Re}(A) = UDU^*$. Vì theo giả thiết, mọi vtr của $\overline{\text{Re}(A)}$ là vtr của $\text{Im}(A)$, ma trận
 $U^{-1}\text{Im}(A)(U^*)^{-1}$ là ma trận chéo, hơn nữa nó là ma trận Hermit vì $\text{Im}(A) \in \mathbf{H}_n$.

Vậy tồn tại $E \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho $\text{Im}(A) = UEU^*$.

Vì $D + iE$ là ma trận đường chéo nên chuẩn tắc, do đó $A = U(D + iE)U^*$ là chuẩn tắc.

6.5.67 Ta có:

$$MM^* = M^*M \Leftrightarrow UHHU^* = HU^*UH \Leftrightarrow UH^2U^* = H^2 \Leftrightarrow UH^2 = H^2U.$$

Theo bài tập 6.5.46, vì $H \in \mathbf{H}_n^+$: $UH^2 = H^2U \Leftrightarrow UH = HU$.

6.5.68 Phương pháp thứ nhất

Ký hiệu $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*) = \text{Re}(A)$, $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*) = \text{Im}(A)$, vậy ta có:

$$A = H_1 + iH_2, H_1 \in \mathbf{H}_n, H_2 \in \mathbf{H}_n.$$

Hơn nữa: $AA^* = A^*A \Leftrightarrow (H_1 + iH_2)(H_1 - iH_2) = (H_1 - iH_2)(H_1 + iH_2) \Leftrightarrow H_1H_2 = H_2H_1$.

Vì A chuẩn tắc, nên H_1 và H_2 giao hoán (xem bài tập 6.4.19).

Theo bài tập 6.5.57, tồn tại $U \in U_n$, $D_1, D_2 \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho :

$$H_1 = UD_1U^* \text{ và } H_2 = UD_2U^*.$$

Ta suy ra : $A = UDU^*$, trong đó $D = D_1 + iD_2 \in D_n(\mathbb{C})$.

Phương pháp thứ hai

Xem A như là ma trận trong một csc của một tự đồng cấu chuẩn tắc f của một kgv E có số chiều n . Lập luận như trong § 6.5.1 :

- Các KGCR của f là đôi một trực giao (xem bài tập 6.4.29)
- Với mọi kgv F của E ổn định đối với f , thì $F^\perp$ là ổn định đối với f^* (xem bài tập 6.4.30)
- Tiến hành quy nạp theo số chiều của E như trong chứng minh định lý cơ bản.

Nhận xét :

Với ký hiệu N_n tập hợp các ma trận chuẩn tắc, ta có quan hệ bao hàm :

$$H_n^{++} \subset H_n^+ \subset H_n \subset N_n, \text{ với :}$$

$$H_n^{++} = \{UDU^* ; U \in U_n, D \in D_n(\mathbb{R}_+^*)\}$$

$$H_n^+ = \{UDU^* ; U \in U_n, D \in D_n(\mathbb{R}_+)\}$$

$$H_n = \{UDU^* ; U \in U_n, D \in D_n(\mathbb{R})\}$$

$$N_n = \{UDU^* ; U \in U_n, D \in D_n(\mathbb{C})\}$$

trong đó $D_n(\mathbb{R}_+^*)$, ..., là tập các ma trận chéo với các phần tử nằm trên đường chéo thuộc $\mathbb{R}_+^*$, ...)

6.5.69 Theo bài tập 6.5.68, A là chéo hóa được.

Tiếp đó (xem bài tập 2.3.16) vì A là lũy linh và chéo hóa được nên $A = 0$.

6.5.70 A là chéo hóa được (xem bài tập 6.5.68) vậy $P(A)$ là chéo hóa được, sau đó áp dụng bài tập 2.3.16.

6.5.71 Theo bài tập 6.5.68, tồn tại $U \in U_n$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{C})$ sao cho

$A = UDU^*$. Với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, tồn tại $\mu_k \in \mathbb{C}$ sao cho $\mu_k^m = \lambda_k$ (tồn tại căn bậc m trong $\mathbb{C}$). Với ký hiệu $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ và $B = U\Delta U^*$, ta có :

$$\begin{cases} BB^* = U\Delta\Delta^*U^* = U\Delta^* \Delta U^* = B^*B \\ B^m = U\Delta^m U^* = UDU^* = A \end{cases}$$

6.5.72 Theo bài tập 6.5.68, tồn tại $U \in U_n$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{C})$ sao cho

$A = UDU^*$, và ta có : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_k ; 1 \leq k \leq n\}$.

a) $A \in H_n \Leftrightarrow A = A^* \Leftrightarrow D = D^* \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.

b) $A \in U_n \Leftrightarrow A^*A = I_n \Leftrightarrow D^*D = I_n \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, |\lambda_k|^2 = 1) \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset U$.

Nhận xét :

Với mọi ma trận chuẩn tắc A , ta cũng nhận được tương tự :

$$\begin{cases} A \in H_n^+ \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}_+ \\ A \in H_n^{++} \Leftrightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

6.5.73 (i) $\Rightarrow$ (ii) :

Giả sử $\chi_A = \chi_B$. Theo bài tập 6.5.68 và vì $\chi_A = \chi_B$, nên tồn tại $U, V \in U_n, D \in D_n(\mathbb{C})$ sao cho: $A = UDU^*$ và $B = VDV^*$. Khi đó ta có $A = UV^{-1}(VDV^*)V^{*-1}U^* = (UV^{-1})B(UV^{-1})^*$ và $UV^{-1} \in U_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

Giả sử rằng tồn tại $U \in U_n$ sao cho $A = UBU^*$.

Khi đó $A = UBU^* = UBU^{-1} \sim B$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : đã biết (xem Mệnh đề 3,2.2)

6.5.74 1) Giả sử rằng, tồn tại $U \in U_n$ sao cho $A^* = AU$.

Khi đó: $A = A^{**} = (AU)^* = U^*A^* = U^*AU$, do đó: $UA = UU^*AU = AU$,

tiếp đó: $A^*A = (AU)A = A(AU) = AA^*$, như vậy A là chuẩn tắc.

2) Đảo lại, giả sử A là chuẩn tắc.

Theo bài tập 6.5.68, tồn tại $U \in U_n, D \in D_n(\mathbb{C})$ sao cho $A = VDV^*$.

Tìm một ma trận U thích hợp dưới dạng $U = VXV^*$, $X \in M_n(\mathbb{C})$ là ma trận cần tìm. Ta có :

$$A^* = AU \Leftrightarrow VD^*V^* = VDV^*VXV^* \Leftrightarrow D^* = DX.$$

Ký hiệu $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Với mỗi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, ta ký hiệu $x_k = \begin{cases} \overline{\lambda_k} & \text{nếu } \lambda_k \neq 0 \\ \lambda_k & \text{nếu } \lambda_k = 0 \end{cases}$

và xét $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Khi đó ta có $X \in U_n, D^* = DX$.

Từ đó, bằng cách chọn $U = VXV^*$, ta nhận được: $U \in U_n, A^* = AU$.

6.5.75 (i) $\Rightarrow$ (ii) :

Giả sử A là ma trận chuẩn tắc.

Theo bài tập 6.5.68, tồn tại $U \in U_n, D \in D_n(\mathbb{C})$ sao cho $A = UDU^*$.

Giả sử $E \in D_n(\mathbb{C})$ (mà ta sẽ chọn) và $B = UEU^*$.

Khi đó B là ma trận chuẩn tắc, và $DE = ED$, như vậy $AB = BA$.

Vậy cần tìm một ma trận chéo E với các phần tử nằm trên đường chéo đôi một khác nhau, chẳng hạn :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix} \text{ là thích hợp.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Giả sử tồn tại ma trận chuẩn tắc B với mọi $\overline{v}$ đều là đơn sao cho $AB = BA$.

Theo bài tập 6.5.68, tồn tại $U \in U_n, E \in D_n(\mathbb{C})$ sao cho $B = VEV^*$.

Ký hiệu $A' = V^*AV$, để $A = VA'V^*$. Ta có: $AB = BA \Leftrightarrow EA' = A'E$. Vì E là ma trận chéo với các phần tử của đường chéo đôi một khác nhau (xem bài tập 8.3.6, Tập 5) ta suy ra A' là ma trận chéo, và cuối cùng $A = VA'V^*$ là chuẩn tắc.

6.5.76 Giả sử $U \in U_n$.

Theo bài tập 6.5.68, tồn tại $U \in U_n, D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{C})$ sao cho $U = VDV^*$.

Vì $U \in U_n$, ta có: $\forall k \in \{1, \dots, n\}, |\lambda_k| = 1$.

Như vậy tồn tại $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho: $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = e^{i\theta_k}$.

Ký hiệu $\Delta = \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_n \end{pmatrix}$ và $H = V\Delta V^* = V\Delta V^{-1}$.

Khi đó $H \in \mathbf{H}_n$, và $e^{iH} = Ve^{i\Delta}V^{-1} = VDV^{-1} = U$.

6.5.77 • Với mỗi k thuộc I , ký hiệu $H_k = \frac{1}{2}(A_k + A_k^*)$ và $K_k = \frac{1}{2}(A_k - A_k^*)$, vậy: $H_k \in \mathbf{H}_n$,

$K_k \in \mathbf{H}_n$, $A_k = H_k + iK_k$. Hơn nữa, vì mọi A_k đều là ma trận chuẩn tắc, nên với mọi k thuộc I , H_k giao hoán với K_k (xem bài tập 6.4.19).

• Giả sử $(k, l) \in I^2$.

Vì A_k và A_l giao hoán và A_l là ma trận chuẩn tắc, theo bài tập 6.4.20, nên A_k và A_k^* giao hoán. Vậy A_k giao hoán với H_l và K_l .

Tiếp đó, vẫn theo bài tập 6.4.20, vì H_l và K_l giao hoán với A_k và A_k là ma trận chuẩn tắc, H_l và K_l giao hoán với A_k^* , kết quả là H_l và K_l giao hoán với H_k và K_k .

• Như vậy, $(H_k)_{k \in I} \cup (K_k)_{k \in I}$ là một họ các ma trận Hermite đôi một giao hoán.

Theo bài tập 6.5.57, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$ thoả mãn :

$$\forall k \in I, \begin{cases} U^{-1}H_kU \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R}) \\ U^{-1}K_kU \in \mathbf{D}_n(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

Khi đó ta có, với mỗi k thuộc I : $U^{-1}A_kU = U^{-1}H_kU + iU^{-1}K_kU \in \mathbf{D}_n(\mathbf{C})$.

6.5.78 Theo bài tập 6.5.77, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, và với mỗi i thuộc I ,

$D_i = \text{diag}(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n}) \in \mathbf{D}_n(\mathbf{C})$ sao cho: $A_i = UD_iU^*$, $\forall i \in I$.

Mặt khác, tồn tại n số thực $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ đôi một phân biệt (chẳng hạn: $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_k = k$).

Ký hiệu $E = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ và $H = UEU^* = UEU^{-1} \in \mathbf{H}_n$.

Với mỗi i thuộc I , tồn tại $P_i \in \mathbf{C}[X]$ sao cho :

$$\begin{cases} \deg(P_i) \leq n-1 \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_{i,k} = P_i(\alpha_k) \end{cases}.$$

(lấy một đa thức nội suy).

Khi đó ta có: $\forall i \in I$, $P_i(E) = \text{diag}(P_i(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}) = \text{diag}(\lambda_{i,k})_{1 \leq k \leq n} = D_i$.

Do đó: $\forall i \in I$, $A_i = UD_iU^* = UP_i(E)U^{-1} = P_i(UEU^{-1}) = P_i(H)$

C 6.1

 $1 \Rightarrow 2$

 Ta giả sử $A^* \sim A$.

 Vì $A^* = {}^t\bar{A}$ đồng dạng với $\bar{A}$ (xem bài tập 3.4.18), A và $\bar{A}$ đồng dạng, vậy có cùng thu Jordan, được ký hiệu là J .

 Xét một khối Jordan $J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ có trong J sao cho $\lambda \notin \mathbb{R}$.

 Vì $\bar{J} \sim \bar{A} \sim A \sim J$, khối Jordan $J_s(\bar{\lambda}) = \overline{J_s(\lambda)} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & & 0 \\ & \bar{\lambda} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ cũng có mặt trong J .

Bằng cách sử dụng hoán vị

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & s & s+1 & s+2 & \dots & 2s-1 & 2s \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2s-1 & 2 & 4 & \dots & 2s-2 & 2s \end{pmatrix},$$

 ta thấy rằng

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 & & & & & & \\ & \lambda & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & & \\ 0 & & & \lambda & & & & & & \\ & & & & \bar{\lambda} & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \bar{\lambda} & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & & & & \bar{\lambda} & & \\ & & & & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

 là đồng dạng với

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 1 & & & & & & \\ & & \lambda & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \bar{\lambda} & 0 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \lambda & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & \bar{\lambda} & 0 & 1 & & \\ & 0 & & & & & \lambda & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

 Ký hiệu $D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$, $a = \operatorname{Re}(\lambda)$, $b = \operatorname{Im}(\lambda)$, $P = \begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dễ dàng kiểm chứng :

$$PD_2(\lambda)P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

 Ký hiệu $C_2(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Phép nhân theo khối cho ta:

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_2(\lambda) & I_2 & 0 \\ 0 & & D_2(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2(a, b) & I_2 & 0 \\ 0 & & C_2(a, b) \end{pmatrix}$$

Điều này chỉ ra rằng, $\begin{pmatrix} J_s(\lambda) & 0 \\ 0 & J_s(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}$ là đồng dạng với một ma trận của $M_{2s}(\mathbb{R})$.

Từ đó suy ra J đồng dạng với một ma trận của $M_n(\mathbb{R})$, và do đó ma trận A cũng vậy.

2 $\Rightarrow$ 3

Giả sử tồn tại $B \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in GL_n(\mathbb{C})$ sao cho $A = PBP^{-1}$. Khi đó ta có :

$$A^* = P^{-1*}BP^* = P^{-1*}(P^{-1}AP)P^* = (PP^*)^{-1}A(PP^*).$$

Với ký hiệu $H = PP^*$, ta có $H \in H_n^{++}$ và $A^* = H^{-1}AH$.

3 $\Rightarrow$ 4

Giả sử tồn tại $H \in H_n^{++}$ sao cho $A^* = HAH^{-1}$.

Khi đó : $A = H^{-1}(A^*H)$ và $(A^*H)^* = HA = H(H^{-1}A^*H) = A^*H$.

Vậy với ký hiệu $H_1 = H^{-1}$ và $H_2 = A^*H$, ta có :

$$A = H_1H_2, H_1 \in H_n^{++}, H_2 \in H_n.$$

4 $\Rightarrow$ 5

Hiển nhiên.

5 $\Rightarrow$ 1

Giả sử $H_1, H_2 \in H_n$ sao cho $A = H_1H_2$.

Nếu H_1 khả nghịch, thì :

$$A^* = H_2H_1 = H_1^{-1}(H_1H_2)H_1 = H_1^{-1}AH_1 \sim A.$$

Cũng như vậy H_2 khả nghịch, thì :

$$A^* = H_2H_1 = H_2(H_1H_2)H_2^{-1} = H_2^{-1}AH_2 \sim A.$$

Giả sử H_1 không khả nghịch.

Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in U_n$, $D \in D_r(\mathbb{R})$ sao cho $H_1 = UDU^*$. Ta có thể giả thiết

$D = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trong đó $\Delta \in D_r(\mathbb{R}) \cap GL_r(\mathbb{C})$, $r = \text{rank}(H_1)$. Ký hiệu $H = U^*H_2U$, vậy

$H_2 = UHU^*$ và $H \in H_n$. Phân tích H theo khối:

$$H = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^* & L_3 \end{pmatrix} \text{ trong đó } L_1 \in H_r, L_2 \in M_{r, n-r}(\mathbb{C}), L_3 \in H_{n-r}.$$

Khi đó ta có :

$$U^*AU = DH = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^* & L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta L_1 & \Delta L_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vì $\Delta \in H_r \cap GL_r(\mathbb{C})$ và $L_1 \in H_r$, theo phần đầu lời giải của 5 $\Rightarrow$ 1 và sự kéo theo 1 $\Rightarrow$ 2 ,

tồn tại $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\Delta L_1 \sim B$.

Xét thu gọn Jordan J của ΔL_1 , tồn tại $P \in GL_r(\mathbb{C})$ sao cho $\Delta L_1 = PJP^{-1}$.

Với ký hiệu $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$, ta có $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ và :

$$Q^{-1}(DH)Q = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta L_1 & \Delta L_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & P^{-1}\Delta L_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Đặt $E = Q^{-1}(DH)Q$.

Với mọi λ thuộc $\mathbb{C}^*$ và với mọi k thuộc $\mathbb{N}^*$, ta có :

$$\text{rank}((E - \lambda I_n)^k) = \text{rank} \begin{pmatrix} (J - \lambda I_r)^k & \cdots \\ 0 & (-\lambda I_{n-r})^k \end{pmatrix} = \text{rank}((J - \lambda I_n)^k) + (n - r).$$

Từ đây thu được các khối Jordan trong E ứng với gtr $\neq 0$ cũng có mặt trong J .

Vì J là đồng dạng với một ma trận thực (B), các khối Jordan trong E liên kết với các gtr không phải là số thực có thể nhóm đôi một trong lời giải của $1 \Rightarrow 2$.

Điều này chứng tỏ rằng E đồng dạng với một ma trận thực, nên A cũng vậy.

Như vậy ta đã chứng minh được $5 \Rightarrow 2$.

Vì $2 \Rightarrow 3$ (xem phần trên) và $3 \Rightarrow 1$ (hiển nhiên), ta kết luận $5 \Rightarrow 1$.

C 6.2

I 1) Giả sử $A \in \mathbf{H}_n$. Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D = \text{diag}((\lambda_i(A))_{1 \leq i \leq n})$ sao cho $A = UDU^*$.

Ký hiệu $U_1, \dots, U_n$ là các cột của U .

Với $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $x_1, \dots, x_n$ là các thành phần của X trong csc $(U_1, \dots, U_n)$ của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i U_i. \text{ Khi đó ta có: } X^* A X = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) |x_i|^2 \text{ và } X^* X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Giả sử $k \in \{1, \dots, n\}$.

$\alpha)$ • Với ký hiệu $V_0 = \text{Vect}(U_1, \dots, U_k)$, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_k \in V_0 \text{ và } \frac{U_k^* A U_k}{U_k^* U_k} = \lambda_k(A) \\ \text{Với mọi } X = \sum_{i=1}^k x_i U_i \text{ thuộc } V_0 - \{0\}, \frac{X^* A X}{X^* X} = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i(A) |x_i|^2}{\sum_{i=1}^k |x_i|^2} \leq \lambda_k(A) \end{array} \right.$$

Điều này chứng tỏ: $V_0 \in \mathcal{V}_k$ và $\sup_{X \in V_0 - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X} = \lambda_k(A)$.

• Giả sử $V \in \mathcal{V}_k$. Ta chứng minh: $\lambda_k(A) \leq \sup_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X}$.

Vì $\dim(V) = k$ và $\dim(\text{Vect}(U_1, \dots, U_n)) = n + 1 - k$, ta có: $\dim(V \cap \text{Vect}(U_1, \dots, U_n)) \geq 1$.

Như vậy, tồn tại $X \in V \cap \text{Vect}(U_1, \dots, U_n)$ sao cho $X \neq 0$.

Với ký hiệu $X = \sum_{i=k}^n x_i U_i$, ta có:

$$\frac{X^* A X}{X^* X} = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i(A) |x_i|^2}{\sum_{i=k}^n |x_i|^2} \geq \lambda_k(A).$$

Mặt khác $\sup_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X}$ tồn tại vì (như phần trên): $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}, \frac{X^* A X}{X^* X} \leq \lambda_n(A)$.

Vậy ta suy ra: $\lambda_k(A) \leq \sup_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*AX}{X^*X}$.

Hai điểm trên chứng minh tỏ rằng $\inf_{V \in \mathcal{V}_k} \left(\sup_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*AX}{X^*X} \right)$ tồn tại và đạt được (và như vậy là Min) và bằng $\lambda_k(A)$.

β) Giả sử $V \in \mathcal{V}_k$. Với $\varphi: V - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, rõ ràng: $\forall X \in V - \{0\}, \varphi(X) = \varphi\left(\frac{1}{\|X\|_2} X\right)$.

$$X \mapsto \frac{X^*AX}{X^*X}$$

Vì φ là liên tục trên miền đóng giới nội $V \cap S(0,1) = \{X \in V; \|X\|_2 = 1\}$ của kgv $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ hữu hạn chiều, do đó φ giới nội và đạt được các cận của nó (xem Hệ quả 1.3.2 và Định lý 2, 1.3.4, Tập 5).

Nói cách khác $\max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*AX}{X^*X}$ tồn tại và bằng $\sup_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*AX}{X^*X}$

γ) Sử dụng kết quả trên cho $(-A, n+1-k)$ thay vì (A, k) , và lưu ý $-A \in \mathbf{H}_n$, $\lambda_{n+1-k}(-A) = -\lambda_k(A)$, ta nhận được :

$$\lambda_k(A) = - \min_{V \in \mathcal{V}_{n+1-k}} \max_{X \in V - \{0\}} \left(- \frac{X^*AX}{X^*X} \right) = \max_{V \in \mathcal{V}_{n+1-k}} \min_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*AX}{X^*X}$$

2) a) Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n, k \in \{1, \dots, n\}$.

Giả sử $V \in \mathcal{V}_k$. Vì (xem 1)) : $\forall X \in V - \{0\}, \lambda_1(B) \leq \frac{X^*BX}{X^*X} \leq \lambda_n(B)$,

ta có : $\forall X \in V - \{0\}, \frac{X^*AX}{X^*X} + \lambda_1(B) \leq \frac{X^*(A+B)X}{X^*X} \leq \frac{X^*AX}{X^*X} + \lambda_n(B)$, do đó :

$$\max_{X \in V - \{0\}} \left(\frac{X^*AX}{X^*X} \right) + \lambda_1(B) \leq \max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*(A+B)X}{X^*X} \leq \max_{X \in V - \{0\}} \left(\frac{X^*AX}{X^*X} \right) + \lambda_n(B), \text{ nên :}$$

$$\min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{X \in V - \{0\}} \left(\frac{X^*AX}{X^*X} \right) + \lambda_1(B) \leq \min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*(A+B)X}{X^*X} \leq \min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{X \in V - \{0\}} \left(\frac{X^*AX}{X^*X} \right) + \lambda_n(B)$$

vì $\lambda_1(B)$ và $\lambda_n(B)$ không phụ thuộc V chẳng phụ thuộc X .
 Theo 1), ta kết luận : $\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$.

b) 1) Trước tiên ta lưu ý rằng, với mọi A thuộc $\mathbf{H}_n$, vì $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$, ta có :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k(A)| = \max(-\lambda_1(A), \lambda_n(A)) = \max(|\lambda_1(A)|, \lambda_n(A)).$$

Cho $A, B \in \mathbf{H}_n$. Theo a) : $\begin{cases} \lambda_1(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_1(A+B) \\ \lambda_n(A+B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B) \end{cases}$

Do đó : $\begin{cases} -\lambda_1(A+B) \leq -\lambda_1(A) - \lambda_1(B) \leq \rho(A) + \rho(B) \\ \lambda_n(A+B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B) \leq \rho(A) + \rho(B) \end{cases}$, và như vậy $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

So sánh với C 3.1 1) b).

2) Giả sử $A \in \mathbf{H}_n, B \in \mathbf{H}_n^+$. Khi đó ta có $\lambda_1(B) \geq 0$ (xem Định lý 6.5.3) do đó, theo a):
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(A) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B)$.

3) Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n$, sao cho $A \leq B$. Với ký hiệu $C = B - A$, ta có $C \in \mathbf{H}_n^+$, vậy (xem 2)):
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(A) \leq \lambda_k(A+C) = \lambda_k(B)$.

Điều này chứng tỏ rằng, với mọi k thuộc $\{1, \dots, n\}$, ánh xạ $\lambda_k: \mathbf{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$ là tăng ($\mathbf{H}_n$ được trang bị quan hệ thứ tự $\leq$ xác định bởi :

$$\forall (A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2, (A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathbf{H}_n^+).$$

4) • Giả sử $H \in \mathbf{H}_n$. Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D = \text{diag}((\lambda_i(H))_{1 \leq i \leq n})$ sao cho

$$H = UDU^*, \text{ do đó: } \|H\|_2^2 = \text{tr}(H^*H) = \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i(H))^2.$$

Đặc biệt $|\lambda_1(H)| \leq \|H\|_2$ và $|\lambda_n(H)| \leq \|H\|_2$, do đó $\rho(H) = \max(|\lambda_1(H)|, |\lambda_n(H)|) \leq \|H\|_2$.

• Giả sử $A, B \in \mathbf{H}_n$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Theo a): $\lambda_k(A) \leq \lambda_k(B) + \lambda_n(A - B) \leq \lambda_k(B) + \rho(A - B)$, do đó: $\lambda_k(A) - \lambda_k(B) \leq \rho(A - B)$.

Áp dụng kết quả cuối cùng này cho (B, A) thay vì (A, B) :

$$\lambda_k(B) - \lambda_k(A) \leq \rho(B - A) = \rho(A - B).$$

Cuối cùng: $|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq \rho(A - B) \leq \|A - B\|_2$.

c) Nhận thấy: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall H \in \mathbf{H}_n, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(\alpha H) = \alpha \lambda_k(H)$, do đó, bằng cách

$$\text{sử dụng a): } \begin{cases} \lambda_1(\theta A + (1 - \theta)B) \geq \lambda_1(\theta A) + \lambda_1((1 - \theta)B) = \theta \lambda_1(A) + (1 - \theta) \lambda_1(B) \\ \lambda_n(\theta A + (1 - \theta)B) \leq \lambda_n(\theta A) + \lambda_n((1 - \theta)B) = \theta \lambda_n(A) + (1 - \theta) \lambda_n(B) \end{cases}$$

với mọi $(A, B) \in (\mathbf{H}_n)^2$ và $\theta \in [0; 1]$.

3) Khảo sát đề dạng trường hợp $\text{rank}(H) = 0$. Giả sử $\text{rank}(H) = 1$.

• Theo bài tập 8.1.31, Tập 5, tồn tại $U, U' \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sao cho $H = UU'^*$.

Vì $H \in \mathbf{H}_n$, ta có: $UU'^* = H = H^* = U'^*U$,

tiếp đó: $(U'^*U)U' = U'(U'^*U) = (U'^*U)U = (UU'^*)U = U(U'^*U) = (U'^*U)U$.

Vì $U'^*U \in \mathbb{C}$ và $U'^*U \in \mathbb{C}^*$ (vì $U \neq 0$) suy ra U' đồng tuyến tính với U .

Vậy $\xi \in \mathbb{C}^*$ sao cho $H = \xi UU^*$.

• Giả sử $V' \in \mathcal{V}_{k+1}$. Vì $U^\perp$ là một siêu phẳng của E , nên tồn tại $V \in \mathcal{V}_k$ và $W \in \mathcal{V}_1$ sao cho $V \subset U^\perp$ và $V' = V \oplus W$.

(Chỉ cần chọn $V = V' \cap U^\perp$ nếu $V' \not\subset U^\perp$, và với bất kỳ kqvc V có chiều là k của V' nếu $V' \subset U^\perp$).

Ta có: $\forall X \in V, X^*(A + H)X = X^*AX + \xi X^*UU^*X = X^*AX + \xi |U^*X|^2 = X^*AX$.

$$\text{Như vậy: } \max_{X \in V' - \{0\}} \frac{X^*(A + H)X}{X^*X} = \max_{X \in V' - \{0\}} \frac{X^*AX}{X^*X} \leq \max_{X' \in V' - \{0\}} \frac{X'^*AX'}{X'^*X'}$$

Mặt khác, áp dụng 1) với k và $A + H$:

$$\lambda_k(A + H) \leq \max_{X \in V' - \{0\}} \frac{X^*(A + H)X}{X^*X}.$$

Ta suy ra: $\forall V' \in \mathcal{V}_{k+1}, \lambda_k(A + H) \leq \max_{X' \in V' - \{0\}} \frac{X'^*AX'}{X'^*X'}$, do đó áp dụng (1) với $k + 1$ và A :

$$\lambda_k(A + H) \leq \lambda_{k+1}(A).$$

• Bằng cách áp dụng kết quả trên với $(A + H, -H)$ thay cho (A, H) , ta được:

$$\lambda_k(A) = \lambda_k((A + H) + (-H)) \leq \lambda_{k+1}(A + H).$$

4) • Trước tiên, ta chứng minh B phân tích được thành tổng r ma trận Hermite có hạng ≤ 1 .

Theo định lý cơ bản, tồn tại $U \in U_n$, $D = \text{diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}) \in D_n(\mathbb{R})$ sao cho $B = UDU^*$. Ta có thể giả thiết $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ được sắp xếp theo thứ tự sao cho $\lambda_{r+i} = \dots = \lambda_n = 0$. Ký hiệu $U_1, \dots, U_n$ là các cột của U . Khi đó ta có:

$$B = (U_1, \dots, U_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^* \\ \vdots \\ U_n^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i U_i^*.$$

Ký hiệu $H_i = \lambda_i U_i U_i^*$ với $i \in \{1, \dots, r\}$ và vì $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$, ta có:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, r\}, \text{rg}(H_i) \leq 1 \\ B = \sum_{i=1}^r H_i \end{cases}.$$

• Áp dụng liên tiếp 3):

$$\begin{cases} \lambda_k(A+B) = \lambda_k(A+H_1+\dots+H_r) \leq \lambda_{k+1}(A+H_1+\dots+H_{r-1}) \leq \dots \leq \lambda_{k+r-1}(A+H_1) \leq \lambda_{k+r}(A) \\ \lambda_k(A) \leq \lambda_{k+r}(A+H_1) \leq \lambda_{k+r}(A+H_1+\dots+H_r) \leq \lambda_{k+r}(B) \end{cases}$$

5) a) Giả sử $k \in \{1, \dots, n\}$.

Nếu $k \leq n-r$, thì $AU_k = \lambda_k U_k$ và $BU_k = 0$, như vậy $(A-B)U_k = \lambda_k U_k$.

Nếu $k \geq n-r+1$, thì $AU_k = BU_k = \lambda_k U_k$, như vậy $(A-B)U_k = 0$.

Vậy $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A-B) = \text{Max}\{0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}\}$

do đó $\lambda_n(A-B) = \text{Max}(0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}) = \text{Max}(0, \lambda_{n-r}) = \lambda_{n-r}^+$.

b) • Giả sử $j+k \geq n+1$.

Theo định lý cơ bản, tồn tại $U, V \in U_n$, $\Lambda(A) = \text{diag}((\lambda_i(A))_{1 \leq i \leq n})$, $\Lambda(B) = \text{diag}((\lambda_i(B))_{1 \leq i \leq n})$, sao cho $A = U\Lambda(A)U^*$ và $B = V\Lambda(B)V^*$.

Ký hiệu $U_1, \dots, U_n$ là các cột của U ; $V_1, \dots, V_n$ là các cột của V , $A_j = \sum_{i=j+1}^n \lambda_i(A) U_i U_i^*$,

$$B_k = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i(B) V_i V_i^*.$$

Theo a): $\lambda_n(A-A_j) = (\lambda_j(A))^+$ và $\lambda_n(B-B_k) = (\lambda_k(B))^+$.

Mặt khác, vì $\text{rank}(A_j + B_k) \leq \text{rank}(A_j) + \text{rank}(B_k) \leq (n-j)(n-k)$ ta có (xem 4)):

$$\lambda_n((A-A_j) + (B-B_k)) = \lambda_n((A+B) - (A_j+B_k)) \geq \lambda_{n-(2n-j-k)}(A+B) = \lambda_{j+k-n}(A+B).$$

Cuối cùng (xem 2) a): $\lambda_n((A-A_j) + (B-B_k)) \leq \lambda_n(A-A_j) + \lambda_n(B-B_k)$.

Ta kết luận: $\lambda_{j+k-n}(A+B) \leq (\lambda_j(A))^+ + (\lambda_k(B))^+$.

• Giả sử $j+k \leq n+1$. Áp dụng kết quả trên cho $(-A, -B, n+1-j, n+1-k)$ thay cho (A, B, j, k) (ta có $(n+1-j) + (n+1-k) \geq n+1$), ta được:

$$\begin{aligned} -\lambda_{j+k-1}(A+B) &= \lambda_{n+1-j+k-1}(-A-B) = \lambda_{(n+1-j)+(n+1-k)-n}((-A)+(-B)) \\ &\leq (\lambda_{n+1-j}(-A))^+ + (\lambda_{n+1-k}(-B))^+ = (-\lambda_j(A))^+ + (-\lambda_k(B))^+ = (\lambda_j(A))^- + (\lambda_k(B))^- \end{aligned}$$

như vậy $\lambda_{j+k-1}(A+B) \geq -(\lambda_j(A))^- - (\lambda_k(B))^-$.

c) Giả sử $A, B \in H_n$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Theo b) với $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ sao cho $i+j = k+n$ (như vậy $i+j \geq n+1$), ta có: $\lambda_k(A+B) = \lambda_{i+j-n}(A+B) \leq (\lambda_i(A))^+ + (\lambda_j(B))^+$, nên:

$$\lambda_k(A+B) \leq \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=k+n}} \left((\lambda_i(A))^+ + (\lambda_j(B))^+ \right).$$

6) Ký hiệu $(E_1, \dots, E_n)$ là một cơ sở chính tắc của $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$; $(E'_1, \dots, E'_n, E_{n+1})$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$, vậy :

$$E'_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}, E_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Giả sử $k \in \{1, \dots, n\}$

• Giả sử V' là một kgvc của $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ sao cho $\dim(V') = k+1$.

Xét $W = V' \cap (\text{Vect}(E'_1, \dots, E'_n)) = V' \cap (E_{n+1}^\perp)$ và $V = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}); \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in W\}$.

Vậy $\dim(V) = k$ hoặc $k+1$. Ta có :

$$\max_{\substack{X' \in V' - \{0\} \\ X' \perp E_{n+1}}} \frac{X'^* A X'}{X'^* X'} \geq \max_{\substack{X' \in V' - \{0\} \\ X' \perp E_{n+1}}} \frac{X'^* A' X'}{X'^* X'} = \max_{X' \in W - \{0\}} \frac{X'^* A' X'}{X'^* X'} = \max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X} \geq \lambda_k(A).$$

Bằng cách chuyển qua cận dưới khi V' thay đổi, ta được : $\lambda_{k+1}(A') \geq \lambda_k(A)$.

Cho V' một kgvc của $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ sao cho $\dim(V') = n+2-k$.

Xét $W = V' \cap (\text{Vect}(E'_1, \dots, E'_n)) = V' \cap (E_{n+1}^\perp)$ và $V = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}); \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in W\}$.

Vậy $\dim(V) = n+1-k$ hoặc $n+2-k$. Ta có :

$$\min_{\substack{X' \in V' - \{0\} \\ X' \perp E_{n+1}}} \frac{X'^* A X'}{X'^* X'} \leq \min_{\substack{X' \in V' - \{0\} \\ X' \perp E_{n+1}}} \frac{X'^* A' X'}{X'^* X'} = \min_{X' \in W - \{0\}} \frac{X'^* A' X'}{X'^* X'} = \min_{X \in V - \{0\}} \frac{X^* A X}{X^* X} \leq \lambda_k(A).$$

Bằng cách chuyển qua cận trên khi V' thay đổi, ta được :

$$\lambda_k(A') = \max_{V' \in \mathcal{V}_{n+2-k}} \min_{X' \in V' - \{0\}} \left(\frac{X'^* A' X'}{X'^* X'} \right) \leq \lambda_k(A).$$

7) a) Tồn tại các ma trận $A'_1 \in \mathbf{H}_{n-1}$, $A'_2 \in \mathbf{H}_{n-2}$, ..., $A'_{r-1} \in \mathbf{H}_{n-r+1}$, $A'_r = \hat{A} \in \mathbf{H}_{n-r}$, có được bằng cách ở mỗi bước ta bỏ đi một hàng và một cột có cùng chỉ số.

Giả sử $k \in \{1, \dots, r\}$. Theo 6) : $\begin{cases} \lambda_k(A) \leq \lambda_k(A'_1) \leq \lambda_k(A'_2) \leq \dots \leq \lambda_k(A'_r) = \lambda_k(\hat{A}) \\ \lambda_{k+r}(A) \geq \lambda_{k+r-1}(A'_1) \geq \dots \geq \lambda_{k+r}(A'_r) \geq \lambda_k(A'_{r-1}) = \lambda_k(\hat{A}). \end{cases}$

b) Theo định lý về cơ sở trực giao không đầy đủ, tồn tại $U_{r+1}, \dots, U_n \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sao cho $U' = (U_1, \dots, U_n) \in U_n$. Khi đó $U'^* A U'$ có cùng các giá trị riêng như của A . Ma trận B nhận được từ $U'^* A U'$ bằng cách bỏ đi $n-r$ hàng, cột cuối vì : $U'^* A U' = (U_i^* A U_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ và

$$B = U'^* A U' = (U_i^* A U_j)_{1 \leq i, j \leq r}.$$

Theo a), ta có : $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda_k(A) \leq \lambda_k(B) \leq \lambda_{k+n-r}(A)$.

c) 1) Giả sử $U \in \mathbf{M}_{n,r}(\mathbb{C})$ sao cho $U^* U = I_r$. Bằng cách ký hiệu $U_1, \dots, U_r$ là các cột của U , ta có :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, U_i^* U_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } i \neq j \\ 1 & \text{Nếu } i = j \end{cases}.$$

Theo b) : $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda_k(A) \leq \lambda_k(B)$

$$\text{Do đó : } \sum_{k=1}^r \lambda_k(A) \leq \sum_{k=1}^r \lambda_k(B) = \text{tr}(B) = \text{tr}(U^* A U).$$

• Nếu chọn $(U_1, \dots, U_r)$ làm một họ trực giao các vtr của A ứng với các gtr $\lambda_1(A), \dots, \lambda_r(A)$, thì:

$$\text{tr}(U^* A U) = \sum_{k=1}^r \lambda_k(A).$$

$$\text{Ta kết luận : } \lambda_1(A) + \dots + \lambda_r(A) = \underset{\substack{U \in \mathbf{M}_{n,r}(\mathbb{C}) \\ U^* U = I_r}}{\text{Min}} \text{tr}(U^* A U).$$

2) Bằng cách sử dụng bất đẳng thức khác của $b)$, tương tự ta được :

$$\lambda_{n-r+1}(A) + \dots + \lambda_n(A) = \underset{\substack{U \in \mathbf{M}_{n,r}(\mathbb{C}) \\ U^* U = I_r}}{\text{Max}} \text{tr}(U^* A U).$$

3) Nếu $r = n$, thì điều kiện $U^* U = I_n$ dẫn đến $U U^* = I_n$. Do đó, với mọi U thuộc $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ mà

$$U^* U = I_n, \text{ ta có : } \text{tr}(U^* A U) = \text{tr}(A(U U^*)) = \text{tr}(A I_n) = \text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(A).$$

II 1) Quy nạp theo n .

Tính chất là hiển nhiên với $n = 1$.

Giả sử tính chất trên là đúng với mọi ma trận thuộc $\mathbf{H}_n$.

Cho $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{H}_{n+1}$. Tồn tại $i_0 \in \{1, \dots, n+1\}$ sao cho $a_{i_0 i_0} = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$. Ký hiệu $\hat{A}$ là ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách bỏ dòng và cột i_0 . Sắp xếp lại các phần tử nằm trên đường chéo của $\hat{A}$ theo thứ tự tăng dần : $a_{i_1 i_1} \leq a_{i_2 i_2} \leq \dots \leq a_{i_n i_n}$.

$$\text{Theo giả thiết quy nạp : } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^k a_{i_j i_j} \geq \sum_{j=1}^k \lambda_j(\hat{A}).$$

$$\text{Mặt khác (xem I 7) a)) : } \lambda_1(A) \leq \lambda_1(\hat{A}) \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_2(\hat{A}) \leq \dots \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(\hat{A}) \leq \lambda_{n+1}(A),$$

$$\text{nên : } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^k \lambda_j(\hat{A}) \geq \sum_{j=1}^k \lambda_j(A). \text{ Như vậy : } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^k a_{i_j i_j} \geq \sum_{j=1}^k \lambda_j(A).$$

$$\text{Cuối cùng } \sum_{j=1}^k a_{i_j i_j} + a_{i_0 i_0} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ii} = \text{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(A).$$

Vì $a_{i_1 i_1} \leq \dots \leq a_{i_n i_n} \leq a_{i_0 i_0}$, nên $(a_{ii})_{1 \leq i \leq n+1}$ là dãy trội của dãy $(\lambda_j(A))_{1 \leq j \leq n+1}$.

2) Giả sử $k \in \{1, \dots, n\}$. Theo I 7) c)):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \lambda_j(A+B) &= \underset{\substack{U \in \mathbf{M}_{n,k}(\mathbb{C}) \\ U^* U = I_k}}{\text{Min}} \text{tr}(U^* (A+B) U) = \underset{\dots}{\text{Min}} (\text{tr}(U^* A U) + \text{tr}(U^* B U)) \\ &\geq \underset{\dots}{\text{Min}} \text{tr}(U^* A U) + \underset{\dots}{\text{Min}} \text{tr}(U^* B U) = \sum_{j=1}^k \lambda_j(A) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(B) = \sum_{j=1}^k (\lambda_j(A) + \lambda_j(B)) \end{aligned}$$

$$\text{Và } \sum_{j=1}^n \lambda_j(A+B) = \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(A) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(B) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j(A) + \lambda_j(B)).$$

Cuối cùng, $\lambda(A+B)$ làm trội $\lambda(A) + \lambda(B)$.

III 1) Theo I 1):

$$(s_k(A))^2 = \lambda_{n+1-k}(A^*A) = \min_{V \in V_{n+1-k}} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*(A^*A)X}{X^*X} = \min_{V \in V_{n+1-k}} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{\|AX\|_2^2}{\|X\|_2^2}$$

$$\text{do đó } s_k(A) = \min_{V \in V_{n+1-k}} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}.$$

$$\text{Cũng như vậy: } s_k(A) = \max_{V \in V_k} \min_{X \in V - \{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}.$$

2) Giả sử $\widehat{A}$ nhận được từ A bằng cách bỏ bớt cột số m ($1 \leq m \leq n$). Ký hiệu $C_1, \dots, C_n$ là các cột của A . Ta có:

$$A^*A = \begin{pmatrix} C_1^* \\ \vdots \\ C_n^* \end{pmatrix} (C_1, \dots, C_n) = (C_i^*C_j)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ và } \widehat{A}^*\widehat{A} = (C_i^*C_j)_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i, j \neq m}}.$$

Như vậy $\widehat{A}^* \widehat{A}$ nhận được từ A^*A bằng cách bỏ bớt dòng thứ m .

Theo I 7) a): $\lambda_1(A^*A) \leq \lambda_1(\widehat{A}^*\widehat{A}) \leq \lambda_2(A^*A) \leq \lambda_2(\widehat{A}^*\widehat{A}) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(\widehat{A}^*\widehat{A}) \leq \lambda_n(A^*A)$.

$$\forall i: \begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k(A^*A) = (s_{n+1-k}(A))^2 \\ \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \lambda_k(\widehat{A}^*\widehat{A}) = (s_{n-k}(\widehat{A}))^2 \end{cases}$$

kết luận: $s_n(A) \leq s_{n-1}(\widehat{A}) \leq \dots \leq s_2(\widehat{A}) \leq s_2(A) \leq s_1(\widehat{A}) \leq s_1(A)$.

3) a) Vì $M^*M \in \mathbf{H}_n^+$, tồn tại $U \in \mathbf{U}_n$, $D = \text{diag}((\lambda_i(M^*M))_{1 \leq i \leq n}) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ sao cho

$$M^*M = UDU^*, \text{ và: } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i(M^*M) \geq 0.$$

Ký hiệu $\lambda_i = \lambda_i(M^*M)$ ($1 \leq i \leq n$), $U_1, \dots, U_n$ là các cột của U .

Giả sử $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Ký hiệu $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, $X_i = MU_i$, $Y_i = \varepsilon\sqrt{\lambda_i}U_i$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} M^*X_i = (M^*M)U_i = \lambda_i U_i = (\varepsilon\sqrt{\lambda_i})Y_i \\ MY_i = \varepsilon\sqrt{\lambda_i}MU_i = \varepsilon\sqrt{\lambda_i}X_i \end{cases}$$

$$\text{do đó: } \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MY_i \\ M^*X_i \end{pmatrix} = \varepsilon\sqrt{\lambda_i} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng, với mỗi $i \in \{1, \dots, n\}$ và $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$ nhận được ở trên lập nên một một cơ sở của $\mathbf{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Điều này chứng tỏ $\widetilde{M}$ chéo hóa được (như ta đã biết, vì $\widetilde{M} \in \mathbf{H}_{2n}$) và:

$$(\lambda_1(\widetilde{M}), \dots, \lambda_{2n}(\widetilde{M})) = (-\sqrt{\lambda_n}, \dots, -\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

Đặc biệt: $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $s_k(A) = \sqrt{\lambda_{n+1-k}(A^*A)} = \sqrt{\lambda_{n+1-k}} = \lambda_{2n+1-k}(\widetilde{A})$.

b) Bằng cách sử dụng a) và I 5) b):

$$\begin{aligned} s_{i+j-1}(A+B) &= \lambda_{2n+1-(i+j-1)}(\widetilde{A+\widetilde{B}}) \\ &= \lambda_{(2n+1-i)+(2n+1-j)-2n}(\widetilde{A+\widetilde{B}}) \leq (\lambda_{2n+1-i}(\widetilde{A}))^* + (\lambda_{2n+1-j}(\widetilde{B}))^* \\ &= \lambda_{2n+1-i}(\widetilde{A}) + \lambda_{2n+1-j}(\widetilde{B}) = s_i(A) + s_j(B). \end{aligned}$$

• Lấy $i = j = 1$ (nếu $n \geq 2$): $s_1(A+B) \leq s_1(A) + s_1(B)$.

- Lấy $(i = n, j = 1)$ sau đó $(i = 1, j = n)$:

$$\begin{cases} s_n(A+B) \leq s_n(A) + s_1(B) \\ s_n(A+B) \leq s_1(A) + s_n(B) \end{cases}$$

từ đó : $s_n(A+B) \leq \min(s_n(A) + s_1(B), s_1(A) + s_n(B))$.

- Ta không có : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, s_k(A+B) \leq s_k(A) + s_k(B)$, ví dụ sau chứng tỏ điều đó :

$$n = 2, k = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

trong đó : $s_2(A) = s_2(B) = 0$ và $s_2(A+B) = 1$.

◊ Trả lời : Không (nếu $n \geq 2$).

- 4) Ta có, với mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$\begin{cases} X^*HX = \frac{1}{2}(X^*AX + X^*A^*X) = \operatorname{Re}(X^*AX) \leq |X^*AX| \\ |X^*AX|^2 \leq (X^*X)(X^*A^*AX) \quad (\text{xem bài tập 6.2.1}), \end{cases}$$

$$\text{do đó : } \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}, \left(\frac{X^*HX}{X^*X} \right)^2 \leq \frac{X^*A^*AX}{X^*X} = \frac{\|AX\|_2^2}{\|X\|_2^2}.$$

Theo I) và III), suy ra :

$$s_{n+1-i}(H) = \min_{V \in \mathbb{V}_{n+1-k}} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*HX}{X^*X} \leq \min_{V \in \mathbb{V}_{n+1-k}} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} = s_k(A).$$

- 5) a) Xét một phân tích dạng cực của AB (xem bài tập 6.5.55): $AB = UH, U \in \mathbb{U}_n, H \in \mathbb{H}_n^+$.

Vì $(AB)^*(AB) = (UH)^*(UH) = H^*U^*UH = H^*H = H^2$, và vì $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(H) \subset \mathbb{R}_+$, nên ta có :

$$s_{i+j-1}(AB) = s_{i+j-1}(H) = \lambda_{n+1-(i+j-1)}(H^2) = (\lambda_{n+1-(i+j-1)}(H))^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, với mọi X thuộc $M_{n,1}(\mathbb{C})$, ta có :

$$\begin{aligned} (X^*HX)^2 &= (X^*U^*ABX)^2 = ((A^*UX)^*(BX))^2 \leq \|A^*UX\|_2^2 \|BX\|_2^2 \\ &= ((UX)^*(AA^*)(UX))(X^*(B^*B)X). \end{aligned}$$

Ký hiệu :

- $(Y_1, \dots, Y_n)$ là một cscg gồm các vtr của AA^* ứng với các gtr $(s_1(A))^2, \dots, (s_n(A))^2$.
- $Z_1, \dots, Z_n$ là một cscg gồm các vtr của B^*B , ứng với các gtr $(s_1(B))^2, \dots, (s_n(B))^2$.
- $X_i = U^*Y_1, \dots, X_{i-1} = U^*Y_{i-1}, X_i = Z_1, X_{i+1} = Z_2, \dots, X_{i+j-1} = Z_{j-1}$.
- $V_0 = (\operatorname{Vect}(X_1, \dots, X_{i+j-2}))^\perp$, có số chiều $\geq n - (i+j-2)$.

Giả sử $X \in V_0$.

Vì X là trực giao với $U^*Y_1, \dots, U^*Y_{i-1}$ và U là unita, nên UX là trực giao với $Y_1, \dots, Y_{i-1}$.

vậy UX là một tổ hợp tuyến tính của $Y_i, \dots, Y_n$: $UX = \sum_{m=i}^n \eta_m Y_m$. Do đó :

$$(UX)^*(AA^*)(UX) = \sum_{m=i}^n (s_m(A))^2 |\eta_m|^2 \leq (s_i(A))^2 \sum_{m=i}^n |\eta_m|^2 = (s_i(A))^2 \|UX\|_2^2 = (s_i(A))^2 \|X\|_2^2.$$

Vì X là trực giao với $Z_1, \dots, Z_{i-1}$, nên X phân tích được thành tổ hợp tuyến tính của

$$Z_j, \dots, Z_n : X = \sum_{m=j}^n \xi_m Z_m.$$

Vậy ta có :

$$X(B^*B)X = \sum_{m=j}^n (s_m(B))^2 |\xi_m|^2 \leq (s_j(B))^2 \sum_{m=j}^n |\xi_m|^2 = (s_j(B))^2 \|X\|_2^2.$$

Mặt khác theo 1 I) và $\dim(V_0) = n - i - j + 2$, ta có :

$$\lambda_{n+1-(i+j-1)}(H) = \min_{V \in V_{n+1-(i+j-1)}} \max_{X \in V - \{0\}} \frac{X^*HX}{X^*X} \leq \max_{X \in V_0 - \{0\}} \frac{X^*HX}{X^*X}.$$

Với mọi X thuộc V_0 :

$$(XHX)^2 \leq ((UX)^*(AA^*)(UX))(X(B^*B)X) \leq (s_i(A))^2 \|X\|_2^2 (s_j(B))^2 \|X\|_2^2$$

ta suy ra : $\forall X \in V_0 - \{0\}, \left(\frac{X^*HX}{X^*X} \right)^2 \leq s_i(A)s_j(B)$, và cuối cùng : $s_{i+j-1}(AB) \leq s_i(A)s_j(B)$.

b) Trong ví dụ $n = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ta có $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, và $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

tiếp đó $(AB)^*(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $(BA)^*(BA) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, vậy $s_1(AB) = 1, s_2(AB) = 0, s_1(BA) = 0,$

$s_2(BA) = 0$.

♦ **Trả lời :** Không.

Chỉ dẫn và trả lời các bài tập chương 7

7.1.1 Với các ký hiệu hiển nhiên :

- $(x, x') * (y, y') = (x \top y, x' \top y') \in H \times H'$
- $(e, e') \in H \times H'$ là phần tử trung hòa $G \times G'$
- $(x, x')^{-1} = (x^{-1}, x'^{-1}) \in H \times H'$.

7.1.2 Với ký hiệu $S_a = \{g \in G ; g \cdot a = a\}$ là tập ổn định của a :

- $\forall (g, h) \in S_a^2, (gh) \cdot a = g \cdot (h \cdot a) = g \cdot a = a$, vậy $gh \in S_a$
- $e \cdot a = a$, vậy $e \in S_a$
- $\forall g \in S_a, g^{-1} \cdot a = g^{-1} (g \cdot a) = (g^{-1}g) \cdot a = e \cdot a = a$, vậy $g^{-1} \in S_a$.

7.1.3 a) Ký hiệu A', B', C' là các trung điểm tương ứng của BC, CA, AB . Giả sử g là một phép đẳng cự của E mà $\{A, B, C\}$ hoàn toàn bất biến. Vì O là trọng tâm của (A, B, C) , nên $g(O)$ là trọng tâm của $(g(A), g(B), g(C))$, vì vậy $g(O) = O$. Điều này chứng tỏ g là một phép quay quanh tâm O hoặc một phép phản xạ qua một đường thẳng đi qua O .

Nếu $g(A) = A$, thì $g = \text{Id}_E$ hay $g = \text{Ref}_{(AA')}$.

Nếu $g(A) = B$ và chẳng hạn $g(B) = C$, thì $g = \text{Rot}_{O, \pm \frac{2\pi}{3}}$.

> Trả lời : $G = \left\{ \text{Id}_E, \text{Rot}_{O, \frac{2\pi}{3}}, \text{Rot}_{O, -\frac{2\pi}{3}}, \text{Ref}_{(AA')}, \text{Ref}_{(BB')}, \text{Ref}_{(CC')} \right\}$.

b) Theo định nghĩa, quỹ đạo $\mathcal{Q}(M)$ của M dưới G là : $\mathcal{Q}(M) = \{g(M); g \in G\}$.

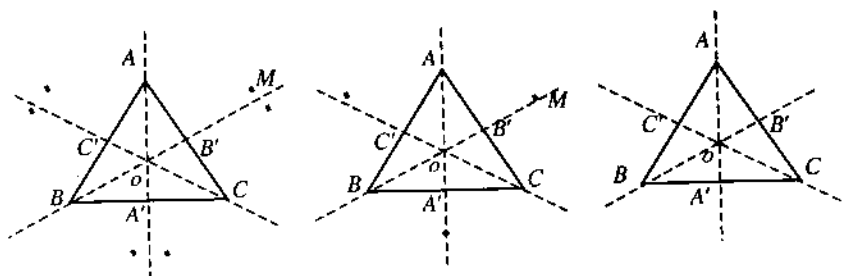
Nếu tồn tại $g_1, g_2 \in G$ thỏa mãn $g_1(M) \neq g_2(M)$, thì tồn tại $g \in G - \{\text{Id}_E\}$ ($g = g_2^{-1} \circ g_1$) sao cho $g(M) = M$, và như vậy $M \in (AA') \cup (BB') \cup (CC')$

♦ Trả lời : Quỹ đạo của M dưới G được tạo nên từ :

sáu phần tử phân biệt nếu $M \notin (AA') \cup (BB') \cup (CC')$

ba phần tử phân biệt $M \in (AA') \cup (BB') \cup (CC')$ và $M \neq O$

một phần tử (O) nếu $M = O$.



7.2.1 $I \in I \Rightarrow (\forall a \in A, a = aI \in I)$.

7.2.2 Ký hiệu $I = \bigcup_{k \in K} I_k$, và giả sử $(x, y) \in I^2, a \in A$, tồn tại $(i, j) \in K^2$ sao cho $x \in I_i, y \in I_j$,

và $k \in K$ thỏa mãn $I_i \cup I_j \subset I_k$. Khi đó $x - y \in I_k \subset I$ và $ax \in I_k \subset I$.

7.2.3 a) Với $(x, y) \in J^2$ và $a \in A: (x + y)e = xe + ye = 0$ và $(ax)e = a(xe) = 0$.

b) • $(\forall x \in A, x = xe + (x - xe))$, với $xe \in I$ và $x - xe \in J$ vì $(x - xe)e = xe - xe^2 = 0$.

• Nếu $xe \in J$, thì $xe = xe^2 = (xe)e = 0$.

c) $(\forall d \in D, d = de + (d - de))$, với $de \in D \cap I$ và $d - de \in D \cap J$.

7.2.4 Ta có ngay phép chứng minh :

+ là luật hợp thành trong trên $F, 0 \in F, x \in F \Rightarrow -x \in F, 1 \in F, (x, y) \in F^2 \Rightarrow xy \in F$

+ là luật hợp thành trong trên $U, 0 \in U, (x, a) \in U \times F \Rightarrow xa \in U$.

7.2.5 a) $(f, g) \in I, \varphi \in A: (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$ và $(\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x) = 0$.

b) Với $f \in A$, xét $f_1: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = x_1 \\ f(x) & \text{nếu } x \neq x_1 \end{cases}$ và $f_2: x \mapsto \begin{cases} f(x_1) & \text{nếu } x = x_1 \\ 0 & \text{nếu } x \neq x_1 \end{cases}$.

7.2.6 a) Chỉ có tính kết hợp của Δ là chưa có ngay. Ta chứng minh :

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Xem bài tập 2.3.6, Tập 5.

b) Nếu $(a, b) \in E^2$ và $a \neq b$, ta có $\{a\} \{b\} = 0$ và $\{a\} \neq 0, \{b\} \neq 0$.

c) a) Giả sử E hữu hạn, L là một ideal của $\mathfrak{P}(E)$. Tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{P}(E)$ sao cho

$I = \{X_1, \dots, X_n\}$, đặt $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$. Vì $(\forall (A, B) \in (\mathfrak{P}(E))^2, A \cup B = A + B + AB)$, ta có $X \in I$, tiếp

đó $I = \mathfrak{P}(X) = X\mathfrak{P}(E)$.

β) Nếu E vô hạn, thì xét ideal I của $\mathfrak{P}(E)$ được tạo nên bởi các tập con hữu hạn của E . Nếu tồn tại $X_0 \in \mathfrak{P}(E)$ thỏa mãn $I = X_0\mathfrak{P}(E) = \mathfrak{P}(X_0)$, thì X_0 hữu hạn, tiếp đó I cũng vậy, mâu thuẫn. Như vậy $\mathfrak{P}(E)$ không phải là ideal chính.

7.2.7 $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ là một ideal của A , vậy tồn tại $x \in A$ sao cho $I = ax$. Vì $x \in I$, tồn tại

$n_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $x \in I_{n_0}$, tiếp đó $I = I_{n_0}$ và như vậy $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là dãy bất đầu từ $n = n_0$.

7.2.8 Ký hiệu N là tập hợp các phần tử lũy linh của A .

• $N \neq \emptyset$ vì $0 \in N$

• Giả sử $(x, y) \in N^2$; tồn tại $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho $x^p = y^q = 0$. Vì x và y giao hoán, nên theo nhị thức Newton, ta có :

$$(x+y)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} C_{p+q-1}^k x^k y^{p+q-1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} C_{p+q-1}^k x^k y^{q+(p-1-k)} + \sum_{k=0}^{p+q-1} C_{p+q-1}^k x^k y^{p+q-1-k}$$

Vì $x^p = 0$, ta có : $\forall k \in \{p, \dots, p+q+1\}, x^k = 0$.

Vì $y^q = 0$, ta có : $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, y^{q+(p-1-k)} = 0$.

Do đó : $(x+y)^{p+q-1} = 0, x+y \in \mathbb{N}$.

• Giả sử $(a, x) \in A \times N$, tồn tại $p \in \mathbb{N}^+$ sao cho $x^p = 0$. Khi đó ta có a và x giao hoán:

$(ax)^p = a^p x^p = 0$, và như vậy $ax \in \mathbb{N}$.

Cuối cùng, N là một ideal của A .

7.2.9 α) Giả sử A là một thể, I là một ideal của A sao cho $I \neq \{0\}$. Tồn tại $x \in I$ mà $x \neq 0$, nên $1 = x^{-1}x \in I$. Do đó $I = A$ (xem bài tập 7.2.1).

β) Đảo lại, giả sử A là một vành giao hoán chỉ có hai ideal là $\{0\}$ và A . Giả sử $x \in A - \{0\}$. Vành Ax không phải là $\{0\}$, nên $Ax = A$, và tồn tại $y \in A$ sao cho $yx = 1$.

7.2.10 Tổng quát hơn, ta chứng minh, nếu A, A' là hai vành giao hoán, các ideal của $A \times A'$ là $I \times I'$, trong đó I là một ideal của A và I' là một ideal của A' .

Giả sử J là một ideal của $A \times A'$. Ký hiệu $J_1 = \text{pr}_1(J) = \{a \in A; \exists a' \in A', (a, a') \in J\}$

và $J_2 = \text{pr}_2(J) = \{a' \in A'; \exists a \in A, (a, a') \in J\}$

Chứng minh J_1 (tương ứng J_2) là một ideal của A (tương ứng của A'), và $J \subset J_1 \times J_2$.

Giả sử $(x, y') \in J_1 \times J_2$, tồn tại $x' \in A'$ và $y \in A$ sao cho $(x, x') \in J$ và $(y, y') \in J$.

Khi đó : $(x, 0) = (x, x')(1, 0) \in J$ và $(0, y') = (y, y')(0, 1) \in J$, do đó $(x, y') = (x, 0) + (0, y') \in J$.

♦ Trả lời : $\{0\} \times \{0\}, \{0\} \times K', K \times \{0\}, K \times K'$.

7.2.11 Tồn tại $\lambda \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3\lambda + 1$. Tiếp đó : $n \equiv 2[5] \Leftrightarrow \lambda \equiv 2[5]$.

Tồn tại $\mu \in \mathbb{N}$ sao cho $\lambda = 5\mu + 2$. Tiếp đó : $n \equiv 3[7] \Leftrightarrow 15\mu \equiv -4[7] \Leftrightarrow \mu \equiv 3[7]$.

Cuối cùng, tồn tại $v \in \mathbb{N}$ sao cho $\mu = 7v + 3$, do đó : $n = 105v + 52$.

♦ Trả lời : 52.

7.2.12 Cùng cách giải bài tập 7.2.11.

♦ Trả lời : $\{595n + 211; n \in \mathbb{Z}\}$.

7.2.13 Cùng cách giải bài tập 7.2.11.

♦ Trả lời : $\{504n + 345; n \in \mathbb{Z}\}$.

7.2.14 a) $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3$, nhưng 3 không phải là bình phương trong $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

♦ Trả lời : $\emptyset$

b) $x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -1$; hay còn : $x^2 - 2x + 2 = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.

♦ Trả lời : $\{-2, -1\}$.

c) $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$.

♦ Trả lời : $\{-2\}$.

d) Trong $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $2^{-1} = 4$, vậy :

$2x^2 - 3x - 2 \equiv 0[7] \Leftrightarrow \hat{x}^2 - \hat{1}2\hat{x} - \hat{8} = 0 \Leftrightarrow \hat{x}^2 + 2\hat{x} - \hat{1} = 0 \Leftrightarrow (\hat{x} + \hat{1})^2 = 2 \Leftrightarrow \hat{x} \in \{-\hat{3}, \hat{3}\}$.

♦ Trả lời : $\{7k + 2; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{7l + 3; l \in \mathbb{Z}\}$.

e) Trong $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, tính x^2 với $x = \hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{9}$.

◊ Trả lời: $\{-\hat{1}, \hat{1}\}$.

f) $x^3 - \hat{3}x^2 - \hat{2}x = \hat{0} \Rightarrow (x \text{ hoặc } x - \hat{1} \text{ hoặc } x - \hat{2} \text{ không khả nghịch trong } \mathbb{Z}/24\mathbb{Z})$.

Với mỗi x như vậy, xét $x(x - \hat{1})(x - \hat{2})$.

◊ Trả lời: $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \hat{9}, \hat{10}, \hat{12}, \hat{14}, \hat{16}, \hat{17}, \hat{18}, \hat{20}, \hat{22}\}$.

g) $x^2 - \hat{4}x + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow (x - \hat{1} \text{ hoặc } x - \hat{3} \text{ không khả nghịch trong } \mathbb{Z}/143\mathbb{Z})$.

◊ Trả lời: $\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{14}, \hat{133}\}$.

h) Rút ra $x = \hat{2}y + \hat{7}$, tiếp đó $\hat{8}y = -\hat{8}$.

◊ Trả lời: $\{(\hat{5}, -\hat{1}), (-\hat{5}, \hat{4}), (\hat{5}, \hat{9}), (-\hat{5}, -\hat{6})\}$.

i) Chứng minh rằng, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$ sao cho $n \geq 3$, ta có:

$$\begin{cases} 2^n \equiv 8 \\ 5^n \equiv 1 \end{cases} \text{ nếu } n \text{ chẵn,} \quad \begin{cases} 2^n \equiv 16 \\ 5^n \equiv 5 \end{cases} \text{ nếu } n \text{ lẻ, modunlo 24.}$$

◊ Trả lời: $\{(0, 2\lambda); \lambda \in \mathbb{N}\}$.

7.2.15 a) ◊ Trả lời: $\{-3, 4\}$.

b) Ký hiệu $S = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; x^2 - x + 1 = 0\}$.

α) Giả sử $f: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Nếu $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0, 1\}$, thì $x \neq 0$ và $f(x) \neq 0$, vì vậy

$$f(f(x)) = \frac{-1}{x-1} \neq 0, \text{ tiếp đó } f(f(f(x))) = x, \text{ ký hiệu } \mathcal{Q}_x = \{x, f(x), f(f(x))\}.$$

Chứng minh $\{0, 1\}$ và $\mathcal{Q}_x$ lập nên một phân hoạch của $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, và nếu $x^2 - x + 1 \neq 0$, thì

$$\text{Card}(\mathcal{Q}_x) = 3.$$

Từ đó suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $p = 2 + \text{Card}(S) + 3k$, hơn nữa $0 \leq \text{Card}(S) \leq 2$.

◊ Trả lời: $p = 3 \Rightarrow \text{Card}(S) = 1; p \equiv 1[3] \Rightarrow \text{Card}(S) = 2; p \equiv 2[3] \Rightarrow \text{Card}(S) = 0$.

7.2.16 1) Nếu a khả nghịch trong E , thì a không phải là ước của không trong E vì:

$$\forall b \in A (ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = 0 \Rightarrow b = 0).$$

2) Đảo lại giả sử a không phải là ước của 0 trong E . Khi đó ánh xạ $K[a] \xrightarrow{b \mapsto ab} K[a]$ là tuyến tính, đơn ánh. Vì $K[a]$ hữu hạn chiều (vì a có một đa thức tối tiểu), nên ánh xạ này là song ánh. Đặc biệt, tồn tại $b \in K[a]$ sao cho $ab = e$, và như vậy a có nghịch đảo trong $K[a]$, và do đó trong E .

7.2.17 Vì $b \in K[a]$, $K[b] \subset K[a]$, và vì $K[a]$, $K[b]$ là hai K -kgv hữu hạn chiều nên b có một đa thức tối tiểu.

7.2.18 Rõ ràng: $T \in \mathcal{L}(A)$.

Giả sử $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ sao cho $P(T) = 0$. Khi đó với mọi f thuộc A và mọi x thuộc $[0,1]$, ta có:

$$0 = (P(T)(f))(x) = \left(\left(\sum_{k=0}^N \alpha_k T^k \right) (f) \right) (x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k x^k f(x) = P(x)f(x).$$

Đặc biệt, với cách chọn $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, ta suy ra: $(\forall x \in [0,1], P(x) = 0)$, do đó $P = 0$.

Điều này chứng tỏ ideal triệt tiêu của T là $\{0\}$, tức T không có đa thức tối tiểu.

7.2.19 a) $\bullet X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ và triệt tiêu $\sqrt{2}$

$\bullet$ Không có một đa thức nào của $\mathbb{Q}[X]$ có bậc ≤ 1 triệt tiêu $\sqrt{2}$ vì $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\diamond$ Trả lời: $\pi_{\sqrt{2}} = X^2 - 2$.

b) Vì $\mathbb{R}$ là vành nguyên, theo Mệnh đề 8, 7.2.4, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ là một thể. Và theo Mệnh đề 3, 7.2.4,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}) = \{ \alpha + \beta \sqrt{2} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2 \}.$$

7.2.20 a) $\bullet$ Ký hiệu $\omega = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, ta có:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow (\omega - \sqrt{2})^2 = 3 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 = 2\omega\sqrt{2} \\ &\Rightarrow (\omega^2 - 1)^2 = 8\omega^2 \Leftrightarrow \omega^4 - 10\omega^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy đa thức $P = X^4 - 10X^2 + 1$ của $\mathbb{Q}[X]$ triệt tiêu $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$\bullet$ Theo Mệnh đề 6, 7.2.4, để chứng minh P là một đa thức tối tiểu của $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, cần phải chứng minh P là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[X]$.

Trước tiên, lưu ý rằng:

$$\begin{aligned} P &= (X^2 + 1) - 12X^2 = (X^2 - 2X\sqrt{3} + 1)(X^2 + 2X\sqrt{3} + 1) \\ &= (X - (\sqrt{3} + \sqrt{2}))(X - (\sqrt{3} - \sqrt{2}))(X + (\sqrt{3} + \sqrt{2}))(X + (\sqrt{3} - \sqrt{2})). \end{aligned}$$

1) Giả sử P phân tích thành $P = P_1 P_2$, trong đó $(P_1, P_2) \in (\mathbb{Q}[X])^2$ và $\deg(P_1) = 1$.

Khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbb{Q}$ sao cho $P_1(\lambda) = 0$, vì vậy $P(\lambda) = 0$, đặt $\lambda = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

ƯCLN(p, q) = 1, ta có $p^4 - 10p^2q^2 + q^4 = 1$, do đó $q|p^4$ và $p|q^4$, vậy $p = \pm 1$, $q = 1$, $\lambda = \pm 1$, điều này không thể xảy ra.

Và lại điều này chứng tỏ rằng, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$ là vô tỷ.

2) Giả sử P phân tích thành $P = P_1 P_2$, trong đó $(P_1, P_2) \in (\mathbb{Q}[X])^2$ và $\deg(P_1) = \deg(P_2) = 2$.

Theo tính duy nhất của phân tích thành số nguyên tố của P trong $\mathbb{R}[X]$, P_1 là một trong sáu đa thức, mà mỗi đa thức là tích của hai đa thức phân biệt dưới đây:

$$X - (\sqrt{3} + \sqrt{2}), X - (\sqrt{3} - \sqrt{2}), X + (\sqrt{3} + \sqrt{2}), X + (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Nhưng các hệ số của mỗi một trong số sáu đa thức nói trên không phải đều thuộc $\mathbb{Q}$.

Vậy P là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[X]$, và do đó $\pi_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = P$.

$\diamond$ Trả lời: $\pi_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = X^4 - 10X^2 + 1$.

b) Vì $\mathbb{R}$ là vành nguyên, theo Mệnh đề 8, 7.2.4, $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ là một thể, và theo Mệnh đề 4, 7.2.4:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] &= \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2} + \sqrt{3}, (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2, (\sqrt{2} + \sqrt{3})^3) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2} + \sqrt{3}, 5 + 2\sqrt{6}, 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6} : (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Q}^4\}.\end{aligned}$$

C 7.1 1) a) $\text{Id} = \sigma^0$, $(\sigma^k)^{-1} = \sigma^{-k}$, $\sigma^k \circ \sigma^l = \sigma^{k+l}$.

b) Nếu $x_1 = \dots = x_p$, thì lớp của $(x_1, \dots, x_p)$ được tạo nên từ một và chỉ một phần tử là $(x_1, \dots, x_p)$. Nếu tồn tại $i \in \{1, \dots, p-1\}$ sao cho $x_i \neq x_{i+1}$, thì p phần tử $(x_1, \dots, x_p), (x_2, \dots, x_p, x_1), \dots, (x_p, x_1, \dots, x_{p-1})$ của E là đôi một phân biệt và tạo thành lớp của $(x_1, \dots, x_p)$.

$$2) \text{ Một mặt } \text{Card}(E) = \sum_{X \in E/\mathcal{R}} \text{Card}(X) + \sum_{\substack{X \in E/\mathcal{R} \\ \text{Card}(X)=1}} 1 = \sum_{\substack{X \in E/\mathcal{R} \\ \text{Card}(X)=p}} p = r + sp.$$

Mặt khác $\text{Card}(E) = x^{p-1}$ vì $G^{p-1} \rightarrow E$ là một song ánh.
 $(x_1, \dots, x_{p-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{p-1}, (x_1, \dots, x_{p-1})^{-1})$

$$3) \text{Card}\{x \in G; x^p = e\} = \text{Card}\{(x_1, \dots, x_p) \in E; x_1 = \dots = x_p\} = r = n^{p-1} - sp, \text{ và } p|n.$$

C 7.2 1) a) Giả sử $e \in E(A)$, $x \in A$; ta có : $((1-e)xe)^2 = (1-e)x(e(1-e)xe) = 0$, và như vậy $(1-e)xe$ là lũy linh. Từ đó $(1-e)xe = 0$, $exe = xe$, cũng vậy $exe = ex$.

b) $(ax)^2 = (axa)x = ax$ và $(xa)^2 = x(axa) = xa$, tiếp đó $ax = (axa)x = (a(xa))x = ((xa)a)x = x(a(ax)) = x((ax)a) = (xa)^2 = xa$.

2) Khai triển e^2 ; $\forall x \in A$, $ae = ae_1 + (a - ae_1)e_2 \in Ae_1 + Ae_2$.

Đảo lại, giả sử $x \in Ae_1 + Ae_2$, tồn tại $(x_1, x_2) \in A^2$ sao cho $x = x_1e_1 + x_2e_2$.

Ta có : $xe = (x_1e_1 + x_2e_2)(e_1 + e_2 - e_1e_2) = x_1e_1 + x_2e_2$.

3) • Giả sử $x \in I \cap (eAe)$, tồn tại $a \in A$ sao cho $x = eae$. Ta có $exe = eae = x$, như vậy $x \in eIe$.

• Giả sử $x \in eIe$; $x \in eAe$ vì $I \subset A$, và $x \in I$ vì I là một ideal của A .

$$4) a) (1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e.$$

$$b) \forall x \in A, x = xe + x(1-e).$$

$$c) eae + ebe = e(a+b)e, (eae)(ebe) = e(aeb)e, (eae)e = e(eae) = eae.$$

♦ Trả lời : Phần tử trung hoà của $\times$ trong eAe là e .

d) Sử dụng tính duy nhất của phần tử trung hoà.

$$e) x = 1x1 = (e + (1-e))x(e + (1-e)) = exe + ex(1-e) + (1-e)xe + (1-e)x(1-e).$$

5) a) Tính phản xạ và tính phản đối xứng là hiển nhiên.

Nếu $e \mathcal{R} f$ và $f \mathcal{R} g$, thì $eg = efg = (ef)g = fg = g$, cũng như thế $ge = g$, vậy $e \mathcal{R} g$.

b) Chứng minh $e, e = ee_1 = e_1$, từ đó $e \mathcal{R} e_1$, tương tự $e \mathcal{R} e_2$. Giả sử $f \in E(A)$ sao cho $f \mathcal{R} e_1$ và $f \mathcal{R} e_2$; khi đó $ef = e_1f + e_2f - e_1e_2f = e_1 + e_2 - e_1e_2 = e$, tương tự $fe = e$, do đó $f \mathcal{R} e$.

C 7.3 I 1) • $0 \in \mathcal{R}(I)$ là hiển nhiên.

• Giả sử $(x, y) \in (\mathcal{R}(I))^2$, tồn tại $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho : $x^n \in I$ và $y^p \in I$.

$$\text{Theo công thức nhị thức Newton : } (x+y)^{n+p-1} = \sum_{k=0}^{n+p-1} C_{n+p-1}^k x^k y^{n+p-1-k}.$$

Với $n \leq k \leq n+p-1$, ta có $x^k \in I$, và với $0 \leq k \leq n-1$, ta có $y^{n+p-1-k} \in I$.

Cuối cùng $x + y \in \mathcal{R}(I)$.

• Nếu $x \in \mathcal{R}(I)$ và $a \in A$, vì $(ax)^n = a^n x^n$, ta suy ra $ax \in \mathcal{R}(I)$.

2) c) • $I \subset \mathcal{R}(I) \Rightarrow \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}(\mathcal{R}(I))$.

• Giả sử $x \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(I))$. Tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x^n \in \mathcal{R}(I)$, và sau đó tồn tại $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(x^n)^p \in I$. Khi đó $x^{np} \in I, x \in \mathcal{R}(I)$.

d) • $\begin{cases} I \cap J \subset I \\ I \cap J \subset J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(I \cap J) \subset \mathcal{R}(I) \\ \mathcal{R}(I \cap J) \subset \mathcal{R}(J) \end{cases}$.

• Giả sử $x \in \mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)$. Tồn tại $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho $x^n \in I$ và $x^p \in J$.

Khi đó $x^{np} = x^n x^p \in I \cap J$, như vậy $x \in \mathcal{R}(I \cap J)$.

e) $\begin{cases} I \subset I + J \\ J \subset I + J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}(I + J) \\ \mathcal{R}(J) \subset \mathcal{R}(I + J) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(J) \subset \mathcal{R}(I + J)$.

3) $\forall y \in \mathbb{Z}, (y \in \mathcal{R}(x\mathbb{Z})) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*, x|y^n) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, N\}, p_i|y) \Leftrightarrow y \in x'\mathbb{Z}$.

II. Hiển nhiên.

III) 1) • $0 \in I: J$ vì $\{0\}J = \{0\} \subset I$.

• Giả sử $(x, x') \in (I: J)^2$, ta có $(x + x')J = xJ + x'J \subset I + I = I$, như vậy $x + x' \in I: J$.

• Giả sử $x \in I: J, a \in A$, ta có $(ax)J = a(xJ) \subset aI \subset I$, như vậy $ax \in I: J$.

2) a) Vì $I: J$ là một ideal, ta có (xem bài tập 7.2.1): $I: J = A \Leftrightarrow 1 \in I: J \Leftrightarrow J \subset I$.

b) $\forall x \in I: J', xJ \subset xJ' \subset I$.

c) $\forall x \in I: J, xJ \subset I \subset I'$.

e) $\forall x \in A, \left(x \in (I \cap I'): J \Leftrightarrow xJ \subset I \cap I' \Leftrightarrow \begin{cases} xJ \subset I \\ xJ \subset I' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I: J \\ x \in I': J \end{cases} \right)$

f) $\forall x \in A, (x \in I: (J + J')) \Leftrightarrow x(J + J') \subset I \Leftrightarrow xJ + xJ' \subset I$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xJ \subset I \\ xJ' \subset I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I: J \\ x \in I: J' \end{cases}.$$

g) Giả sử $x \in I: J$; ta có $x(JJ') = (xJ)J' \subset IJ'$, vậy $x \in (IJ'): (JJ')$.

h) $\forall x \in A, (x \in (I: I'): J \Leftrightarrow xJ \subset I: J' \Leftrightarrow (\forall u \in J, (xu)J' \subset I) \Leftrightarrow xIJ' \subset I \Leftrightarrow x \in I: (I'J))$.

3) Nếu $(a, b) \neq (0, 0)$, thì tồn tại $(a', b') \in (\mathbb{Z}')^2$ sao cho $a = da', b = db', \text{UCLN}(a', b') = 1$, trong đó $d = \text{UCLN}(a, b)$. Vậy:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x \in (a\mathbb{Z}): (b\mathbb{Z})) \Leftrightarrow a | xb \Leftrightarrow a' | xb' \Leftrightarrow a' | x \Leftrightarrow x \in a'\mathbb{Z}.$$

$$\diamond \text{ Trả lời: } (a\mathbb{Z}): (b\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{nếu } b = 0 \\ \{0\} & \text{nếu } a = 0 \text{ và } b \neq 0 \\ \frac{a}{\text{UCLN}(a, b)} \mathbb{Z} & \text{nếu } a \neq 0 \text{ và } b \neq 0 \end{cases}$$

C 7.4 1) a) Giả sử $f: \text{Div}(a)\text{Div}(b) \rightarrow \text{Div}(ab)$.
(x, y) $\mapsto$ xy

Giả sử x, y, x', y' sao cho $f(x, y) = f(x', y')$, vì $x'|a, y'|b, a \wedge b = 1$, ta suy ra $x' \wedge y = 1$, tiếp đó

$x'|x$. Như vậy f là đơn ánh.

Ta chứng minh f là song ánh.

Từ đó suy ra : $\sigma(AB) = \sigma(a)\sigma(b)$.

b) Rõ ràng rằng $\sigma(p) = p + 1$ khi và chỉ khi các ước của p là 1 và p .

c) $\sigma(p^f) = 1 + p + p^2 + \dots + p^f$.

2) • Giả sử n là một số hoàn hảo. Tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ và $b \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n = 2^a b$.

Khi đó $2^{a+1}b = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^a)\sigma(b) = (2^{a+1} - 1)\sigma(b)$.

Từ đó suy ra tồn tại $c \in \mathbb{N}^*$ sao cho : $b = (2^{a+1} - 1)c$ và $\sigma(b) = 2^{a+1}c$.

Nếu $c > 1$, thì $2^{a+1}c \geq 1 + c + (2^{a+1} - 1)c$, mâu thuẫn.

Như vậy $c = 1$, $b = 2^{a+1} - 1$, $\sigma(b) = 2^{a+1} = (2^{a+1} - 1) + 1$, vì thế b là số nguyên tố.

Từ đó suy ra $a + 1$ là số nguyên tố.

• Đảo lại, nếu $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, với p và $2^p - 1$ là các số nguyên tố, thì :

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) = (2^p - 1)2^p = 2n.$$

3) Giả sử $n = p^\alpha q^\beta$ với p, q là hai số nguyên tố ≥ 3 , $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $2n = \sigma(n) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}$, nên $p^\alpha q^\beta (pq - 2p - 2q + 2) = 1 - p^{\alpha+1} - q^{\beta+1} < 0$.

Nhưng $pq - 2p - 2q + 2 = (p - 2)(q - 2) - 2 > 0$ vì $p \geq 3$ và $q \geq 3$.

C 7.5 I 1) a) Giả sử, chẳng hạn, p là một ước chung nguyên tố của x và y , khi đó $p|z^2, p|z$.

b) Nếu x và y lẻ, thì $x^2 \equiv 1[8], y^2 \equiv 1[8]$, như vậy $z^2 \equiv 1[8], z^2 \equiv 2[4]$, không thể.

c) • Một mặt $z - x$ và $z + x$ chẵn, mặt khác, nếu $z - x$ và $z + x$ chia hết cho một số lẻ $d \geq 3$ thì $d|2z$ và $d|2x$, mâu thuẫn.

• $2(\alpha \wedge \beta) = (2\alpha) \wedge (2\beta) = (z - x) \wedge (z + x) = 2$.

2) • Giả sử $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ sao cho $x^2 + y^2 = z^2$. Ký hiệu $d = \text{ƯCLN}(x, y, z)$, tồn tại

$(X, Y, Z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ sao cho $x = dX, y = dY, z = dZ, X^2 + Y^2 = Z^2, \text{ƯCLN}(X, Y, Z) = 1$. Theo 1)

d), tồn tại $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho : $X = v^2 - u^2, Y = 2uv, Z = u^2 + v^2, u \wedge v = 1$ (sai khác về thứ tự của x và y).

• Đảo lại là hiển nhiên.

◊ Trả lời :

$$\{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3; x^2 + y^2 = z^2\} = \{(d(v^2 - u^2), 2d uv, d(u^2 + v^2)); (d, u, v) \in (\mathbb{N}^*)^3, u \leq v\}$$

$$\cup \{(2d uv, d(v^2 - u^2), d(u^2 + v^2)); (d, u, v) \in (\mathbb{N}^*)^3, u \leq v\}.$$

II 1) $\{Z \in \mathbb{N}^*; \exists (X, Y) \in (\mathbb{N}^*)^2, (X, Y, Z) \in S\}$ không rỗng và được bao hàm trong $\mathbb{N}^*$, vậy có một phần tử nhỏ nhất.

2) Giả sử, chẳng hạn, p là một ước số chung nguyên tố của x và y . Khi đó $p^2|z$ và tồn tại $(x_1, y_1, z_1) \in (\mathbb{N}^*)^3$ sao cho : $x = px_1, y = py_1, z = p^2 z_1$. Chứng minh $(x_1, y_1, z_1) \in S$ và $z_1 < z$, do đó mâu thuẫn.

3) Áp dụng I 1) a) cho $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2, \text{ƯCLN}(x^2, y^2, z) = 1$.

4) a) Nếu u và v lẻ, thì x và z chẵn.

b) Nếu v chẵn và u lẻ, thì $u^2 \equiv 1[4]$ và $v^2 \equiv 0[4]$, do đó $x^2 = v^2 - u^2 \equiv -1[4]$ không thể (bình phương của một số lẻ là đồng dư với 1 modulo 8).

5) $y^2 = 2uv$, $2|y$, nên tồn tại $y' \in \mathbb{N}^*$ sao cho $y = 2y'$. Vì $y'^2 = u'v$ và $u' \wedge v = 1$, do đó tồn tại $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho $u' = a^2$ và $v = b^2$ (xem bài tập 4.4.33, Tập 5).

6) $x^2 + u^2 = v^2$, $\text{UCLN}(x, u, v) = 1$, u chẵn. Từ 1) d), ta suy ra tồn tại $(c, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho :
 $x = c^2 - d^2$, $u = 2cd$, $v = c^2 + d^2$.

7) $a^2 = u' = cd$, $c \wedge d = 1$, tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sao cho : $c = \alpha^2$, $d = \beta^2$, $\alpha \wedge \beta = 1$.

8) $\alpha^4 + \beta^4 = c^2 + d^2 = v = b^2$, như vậy $(\alpha, \beta, b) \in S$. Hơn nữa $z = u^2 + v^2 > v^2 \geq v = b^2 \geq b$, mâu thuẫn với định nghĩa của z .

♦ **Trả lời :** $\{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3; x^4 + y^4 = z^4\} = \emptyset$.

Đặc biệt, không tồn tại $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ sao cho $x^4 + y^4 = z^4$.

C 7.6 1) a) Kiểm chứng $\left\{ \forall (x, y, z) \in E, \begin{cases} f(x, y, z) \in E \\ (f \circ f)(x, y, z) = (x, y, z) \end{cases} \right\}$, bằng cách chia ra các trường hợp.

Chẳng hạn, nếu $x < y - z$ và với ký hiệu $(X, Y, Z) = f(x, y, z) = (x + 2z, z, y - x - z)$, ta có :

$$\bullet X^2 + 4YZ = (x + 2z)^2 + 4z(y - x - z) = x^2 + 4yz = p$$

$$\bullet 2Y - X = -x < 0 \text{ vậy } (f \circ f)(x, y, z) = (X - 2Y, X - 2Y + Z, Y) = (x, y, z).$$

Mặt khác, với mọi $(x, y, z) \in E$, ta có $x \neq y - z$ (vì nếu không : $p = x^2 + 4yz = (y + z)^2$ không phải là số nguyên tố).

b) 1) $(x < y - z, x = x + 2z, y = z, y - x - z = z) \Rightarrow (z = 0, p = x^2 \text{ không phải là số nguyên tố}).$
 2) $y - z < x < 2y: (2y - x = x, y = y, z = x - y + z) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó vì $p = x^2 + 4yz = y(y + 4z)$ là số nguyên tố và $y \neq 0, z \neq 0$, ta suy ra $y = 1, z = \frac{p-1}{4}$

($z \in \mathbb{N}^*$ vì $p \equiv 1[4]$ và $p \geq 5$).

3) $(2y < x, x - 2y = x, x - y + z = y, y = z) \Rightarrow (y = 0, p = x^2 \text{ không phải là số nguyên tố}).$

Như vậy f có một điểm bất động duy nhất $(1, 1, k)$, trong đó $k \in \mathbb{N}^*$ được xác định bởi $p = 4k + 1$.

c) Nhóm đôi một (một phần tử và ảnh của nó qua f) các phần tử của E khác với điểm bất động của f .

2) a) Tính chất $\left\{ \forall (x, y, z) \in E, \begin{cases} g(x, y, z) \in E \\ (g \circ g)(x, y, z) = (x, y, z) \end{cases} \right\}$ là hiển nhiên.

b) Nếu g không có điểm bất động, thì $\text{Card}(E)$ sẽ chẵn, theo cùng kiểu lập luận như 1) c).

3) Theo 2) b), tồn tại $(x, y, z) \in E$ sao cho $g(x, y, z) = (x, y, z)$, tức là $x^2 + 4yz = p$ và $y = z$. Vậy ta có $p = x^2 + (2y)^2$.

Bảng ký hiệu

$E^*, e_i^*, 3$	$C, 170$
$\text{codim}(F), 6$	$\text{sng}(\phi), 173$
$\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle x, \phi \rangle, A^\perp, {}^uL, 7, 8$	$f^*, 180$
$B^*, 11$	$\sqrt{S}, S^{\frac{1}{2}}, 186$
$L_i, \beta(E), \beta(E^*), 14$	$ A , 188$
$f, 19$	
$N_1, N_2, N_\infty, 31$	$\text{dtrh}, 189$
$\exp(A), e^A, 34$	$SH(E), \text{dh}, 190$
$\exp(f), e^f, 35$	$H(E), 191$
$E^{**}, \hat{x}, j_E(x), j_E, {}^u f, 36$	$A^\perp, A^{\perp \phi}, \text{Ker}(\phi), 192$
	$C(\phi), 193$
$\text{gr}, \text{Sp}_K(f), \text{Sp}(f), \text{vir}, \text{Sp}_K(A), \text{Sp}(A), 37$	$A^*, 194$
$\text{KGCR}(f, \lambda), \text{KGCR}(A, \lambda), 38$	$H_n, 196$
$\chi_A, \chi_f, \chi_A(\lambda), \chi_f(\lambda), 43$	$\text{Mat}_B(\phi), 197$
$P(f), P(A), 63$	$\text{rank}(\phi), 198$
	$\text{sng}(\phi), 201$
$\pi_f, \pi_A, 96$	$\text{tvhh}, \langle x y \rangle, \langle x, y \rangle, x \cdot y, \phi(x, y), \text{kgvh}, 204$
$\text{KGCD}(f, \lambda), 101$	$x \perp y, x \perp A, 207$
$\rho(A), 106$	$A^\perp, 208$
$J_s, 112$	$F \perp G, F \vdash G, 210$
$J_t, 115$	$f^*, 211$
$A \otimes B, 122$	$\mathcal{H}(E), p_F, 213$
	$d(x, F), s_F, 214$
$\mathcal{L}(E, E; K), 125$	$\mathcal{U}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle; \mathcal{U}(E), U_n, 216$
$S(E; K), \text{dstdx}, \text{dtp}, 126$	$\mathcal{SU}(E), \text{SU}_n, 217$
$Q(E), \text{Mat}_B(\phi), 127$	$\text{Re}(A); \text{Im}(A), 221, 235$
$C, 131$	$H_n^+, H_n^{++}, 225$
$\langle x y \rangle, \langle x, y \rangle, x \cdot y, \phi(x, y), \text{kgve}, 132$	$\leq, <, 227$
$x \perp y, x \perp A, A^\perp, 135$	$H^{\frac{1}{p}}, \sqrt[p]{H}, 231, 232$
$S(E), 138$	$\hat{\lambda}_t(A), 237$
$p_F, d(x, F), 140$	$s_t(A), 240$
$s_F, 141$	
$\mathcal{O}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), \mathcal{O}(E), \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), 143$	$a \equiv b_{[n]}, a \equiv b, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \hat{x}, \bar{x}, \dot{x}, x \bmod n, 242$
$S\mathcal{O}(E), \text{SO}_n(\mathbb{R}), 145$	$\mathfrak{S}(E), 246$
$S_n^+, S_n^{++}, 152$	$x y, 248$
$\leq, <, 153$	$p_n, 252$
	$K a , \pi_a, 255$
$A^\perp, A^{\perp \phi}, \text{Ker}(\phi), 162$	$P(a), 256$
$C(\phi), 163$	
$\text{rank}(\phi), \text{Mat}_B(\phi), 165$	

Bảng thuật ngữ

A

âm (tự đồng cấu đối xứng -), 182

B

bán kính (- phổ), 106
BCNN, 249
bội (cấp - của một gtr), 46

C

CAUCHY - SCHWARZ (bất đẳng thức -), 133, 174, 205
CAYLEY (định lý - và HAMILTON), 89
cấp (- bội của gtr), 46
cân (- bậc hai của một ma trận đối xứng dương), 190
cân (- bậc n của một ma trận Hermite dương), 231
COURANT (định lý - và FISCHER), 237
chéo (- theo khối), 24
chéo (ma trận - theo khối), 28
chéo hoá được, 49
chéo hoá, 49
chia hết ($y - x$), 248
chiều trực giao, 140, 213
chính (idéal -), 249
chính (vành -), 249
chính tắc (tích vô hướng -), 132
chính tắc (tích vô hướng Hermite -), 190, 204
CHOLESKI (phân tích -), 232
chuẩn (- đại số), 121
chuẩn (- của một dstdx), 161
chuẩn (- của một dtrh), 192
chuẩn (- dưới nhân), 121
chuẩn (- Euclide), 133
chuẩn (- Hermite), 205
chuẩn (- ma trận), 121
chuẩn (- nhân), 121
chuẩn tắc (ma trận -), 220
chuẩn tắc (tự đồng cấu -), 220
chuẩn, 31
chuyển vị liên hợp, 194

chuyển vị, 19
cơ bản (định lý -), 148, 223
Cờ, 85
cstc, 26, 213
cực (dạng -), 191

D

dạng (- cực), 191
dạng (- nửa tuyến tính đối với vị trí thứ nhất), 189
dạng (- song tuyến tính đối xứng), 126
dạng (- song tuyến tính), 125
dạng (- toàn phương), 126, 127
dạng (- tuyến tính rườ), 189
dạng (-Hermite), 191
dạng (-tuyến tính đối với vị trí thứ hai), 189
dạng (-tuyến tính), 3
dạng cực (phân tích -), 187, 233
dh, 190
dstdx, 126
dsth, 189
dtp, 126
DUNFORD (phân tích -), 104
dương (tự đồng cấu Hermite -), 115
dương (dạng Hermite -), 193
dương (dạng toàn phương -), 151
dương (ma trận đối xứng thực -), 151
dương (ma trận Hermite -), 225
dương (phụ thuộc -), 133
dương (tự đồng cấu đối xứng -), 182
dưới nhân (chuẩn -), 121

Đ

đa thức (- đặc trưng), 43
đa thức (- ma trận), 63
đa thức (- toàn phương), 130
đa thức (- triệt tiêu), 65
đa thức (- tự đồng cấu), 63
đánh giá (- tại a), 3
đẳng cự (- vectơ), 143
đẳng hướng (kgvc - hoàn toàn), 162, 193
đẳng hướng (nón -), 162, 193
đẳng hướng (vectơ -), 162, 193

đặc biệt (giá trị -), 240
 đặc biệt (nhóm - trực giao), 145
 đặc biệt (nhóm unita -), 217
 đặc số (- của một vành), 253
 đặc trưng (đa thức -), 43
 đặc trưng (không gian con -), 101
 định thức con (- GAUSS), 184, 231
 đóng cầu (- vành), 251
 đồng dư (- với), 242
 đồng dư (dsth-), 170
 đồng hành (ma trận -), 48, 100
 đồng thời (chéo hóa -), 70
 đồng thời (tam giác hóa -), 87
 đối chiếu, 6
 đối ngẫu (cơ sở -), 11, 14
 đối ngẫu, 3
 đối xứng (- Hermite), 189
 đối xứng (- trực giao), 141, 214
 đối xứng (dạng song tuyến tính -), 126
 đối xứng (tự đồng cấu -), 138, 182
 đơn (đa thức tách -), 66
 đơn (nhóm -), 244

E, F

Euclide (chuẩn -), 133
 Euclide (không gian -), 132
 EUCLIDE (số -), 261
 FISCHER (định lý COURANT và -), 237

G

GAUSS (định thức con -), 184, 231
 GAUSS (phân tích -), 176, 201
 GAUSS (phương pháp -), 176
 GERSHGORIN (đĩa -), 42
 giá trị (- đặc biệt), 204
 giá trị (- riêng), 36
 gtr, 36

H

HADAMARD (định lý -), 42
 hàm mũ (- của một ma trận vuông), 34
 hàm mũ (- của một tự đồng cấu), 35
 HAMILTON (định lý CAYLEY và -), 89
 hạng (- của một dstđx), 165
 hạng (- của một đtrh), 198
 Hermite (đối xứng -), 189
 Hermite (dạng - liên kết), 190
 Hermite (dạng -), 191
 Hermite (dạng tuyến tính ngẫu -), 189

Hermite (không gian -), 204
 Hermite (ma trận -), 195
 Hermite (tự đồng cấu -), 213
 Hermite (tích vô hướng -), 204
 hoàn hảo (số -), 262
 hoán vị (ma trận -), 147

I, J

idean (- của một vành giao hoán), 248
 JORDAN (định lý thu gọn -), 111, 115
 JORDAN (ma trận -), 115
 JORDAN (ma trận lũy linh -), 111

K

kgve, 132
 kgvh, 204
 không đầy đủ (định lý về cste -), 136, 209
 không gian (- Euclide), 132
 không gian (- tiền Hermite), 204
 không gian (-Hermite), 204
 không gian con (- đặc trưng), 101
 không gian con (- phổ), 101
 không gian con (- riêng), 37
 không sai phạm (ma trận -), 119
 không suy biến (dstđx -), 164
 không suy biến (đtrh -), 193
 khối, 23
 khoảng cách (giữa x và F), 140, 214
 KRONECKER (tích -), 122
 ký số (- của đtp thực), 173
 ký số (- của đtrh), 201

L

làm trội (β - α), 239
 làm trội, 239
 LAGRANGE (đa thức nội suy -), 13
 liên kết (dh - với một đtrh), 190
 liên kết (đtp - với một dsth), 126
 liên kết (đtp - với một tự đồng cấu đối xứng), 183
 liên kết (gtr và $\overline{v}$), 38
 liên kết (phần tử -), 249
 lũy linh (ma trận - JORDAN), 111
 LYAPOUNOV (định lý -), 234

M

ma trận (- đồng hành), 48, 100

ma trận (- của một dstđ), 127, 165
 ma trận (- của một dtrh), 196
 ma trận (chuẩn -), 121
 móc(- đối ngẫu), 7
 minimax(định lý -), 237
 MINKOWSKI (bất đẳng thức -), 133, 174, 205
 MONTGOMERY (bất đẳng thức -), 207

N

NEWTON (hệ thức -), 91
 nghịch (tự đồng cấu trực giao -), 144
 nhân (định lý -), 91
 nhân (chuẩn -), 121
 nội suy (đa thức - LAGRANGE), 13
 nửa tuyến tính (dạng - so với vị trí thứ nhất), 189

P

phải (ma trận trực giao -), 145
 phải (tự đồng cấu trực giao -), 114
 phần tự phụ hợp (tự đồng cấu-), 213
 phản đối xứng (tự đồng cấu-), 182
 phản Hermite (ma trận -), 196
 phản Hermite (tự đồng cấu-), 213
 phân (- cực), 187, 233
 phân tích (- CHOLESKI), 232
 phân tích (- DUNFORD), 104
 phân tích (- GAUSS), 176, 201
 phân tích (- theo khối), 23
 phép chiếu (- trực giao), 140, 213
 phép phản xạ, 141, 214
 phép toán (- của một nhóm), 245
 phổ (bán kính -), 106
 phổ (không gian con -), 101
 phổ, 36
 phương pháp (- GAUSS), 176
 phương trình (- của một siêu phẳng), 5
 phụ hợp, 180, 211
 phụ thuộc (dương -), 133
 POINCARÉ (định lý tách -), 239
 PYTHAGORE (định lý -), 136, 208

Q, R

quỹ đạo, 246
 riêng (giá trị -), 37
 riêng (không gian con -), 38
 riêng (phần tử -), 38
 riêng (vectơ -), 37

S

SCHMIDT (trực giao hóa -), 136, 209
 SCHUR (định lý -), 239
 siêu phẳng, 4
 sinh (idean - bởi x), 248
 sinh (phần tử - của một nhóm), 245
 song đối ngẫu, 36
 song tuyến tính (dạng -), 125
 sự chéo hoá được, 49
 sự quện vào nhau (- của các giá trị riêng), 238
 sự tam giác hoá, 53, 81
 suy biến (dtrh -), 193
 suy biến (dsth -), 162
 SYLVESTER (định lý quán tính -), 173

T

tác động (- của một nhóm), 245
 tam giác (ma trận - theo khối), 28
 tam giác hoá, 53, 81
 tam giác hoá được, 53, 81
 tách (định lý - POINCARÉ), 239
 tách đôi, 130
 tập ổn định, 247
 tiền đối ngẫu (cơ sở -), 14
 tiền Hilbert (không gian - phức), 204
 tích (- vô hướng Hermite), 204
 tích (- vô hướng), 132
 tích (-KRONECKER), 122
 tích (nhóm -), 245
 tương đẳng (ma trận -), 131
 tương thích (cơ sở - với một cở), 79
 tối tiểu (đa thức -), 95, 256
 thông thường (tích vô hướng -), 132
 thông thường (tích vô hướng Hermite -), 240
 thống nhất (nhóm -), 249
 thu gọn (- đối với dạng chéo theo khối), 93
 thu gọn (- đối với dạng chéo), 49
 thu gọn (- đối với dạng tam giác), 81
 toàn phương (đa thức -), 130
 toàn phương (dạng - Hermite), 190
 toàn phương (dạng -), 126, 127, 182
 tọa độ (dạng -), 3
 trái (ma trận trực giao -), 145
 trái (tự đồng cấu trực giao -), 144
 triệt tiêu (đa thức -), 60, 256
 trội (ma trận vuông có đường chéo - chặt), 42

trực chuẩn (cơ sở -), 136
 trực chuẩn (họ -), 135, 207
 trực giao (nhóm -), 143, 144
 trực giao (- yếu), 210
 trực giao (đối xứng -), 141, 214
 trực giao (họ -), 135, 161, 192, 207
 trực giao (kgvc -), 164
 trực giao (ma trận -), 143
 trực giao (phép chiếu -), 140, 213
 trực giao (tự đồng cấu -), 143, 182
 trực giao hoá (- SCHMIDT), 136, 209
 trực giao, 7, 135, 161, 192, 207, 210
 trực tiếp (tự đồng cấu trực giao -), 144
 tuyến tính (dạng - đối với đối với vị trí thứ hai), 189
 tuyến tính (dạng -), 3
 tuyến tính rưỡi (dạng - Hermite), 189
 tuyến tính rưỡi (dạng -), 189
 tuyệt đối (giá trị - của một ma trận đối xứng thực), 188
 tự phụ hợp (tự đồng cấu -), 182, 213
 tự đồng cấu (- vành), 251
 tvh, 204

U

UCLN, 249
 unita (ma trận -), 216
 unita (nhóm -), 216
 unita (tự đồng cấu -), 216

V

vô hướng (tích - Hermite), 204
 vô hướng (tích -), 132
 vectơ (- riêng), 36
 $\overline{\text{vtr}}$, 36

X

xác định âm (tự đồng cấu đối xứng -), 182
 xác định dương (dh -), 193
 xác định dương (dtp -), 152
 xác định dương (ma trận đối xứng thực -), 152
 xác định dương (ma trận Hermite -), 225
 xác định dương (tự đồng cấu đối xứng -), 158, 182
 xác định dương (tự đồng cấu Hermite -), 215
 xác định (dh -), 193

xác định (dtp -), 163, 162
 xyclic (nhóm -), 244

W

WEYL (bất đẳng thức -), 238

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu:

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

Biên tập tái bản :

TRẦN PHƯƠNG DUNG

Sửa bản in :

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

Chế bản :

TRẦN BÌNH VÂN

Giáo trình Toán Tập 6 - Đại số 2

Mã số: 7K 489 T6 - DAI

In 1.500 bản, khổ 16 x 24 cm; tại Xí nghiệp in Hà Tây. Số in: 23/ĐH;
Số xuất bản: 23 - 323/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2006

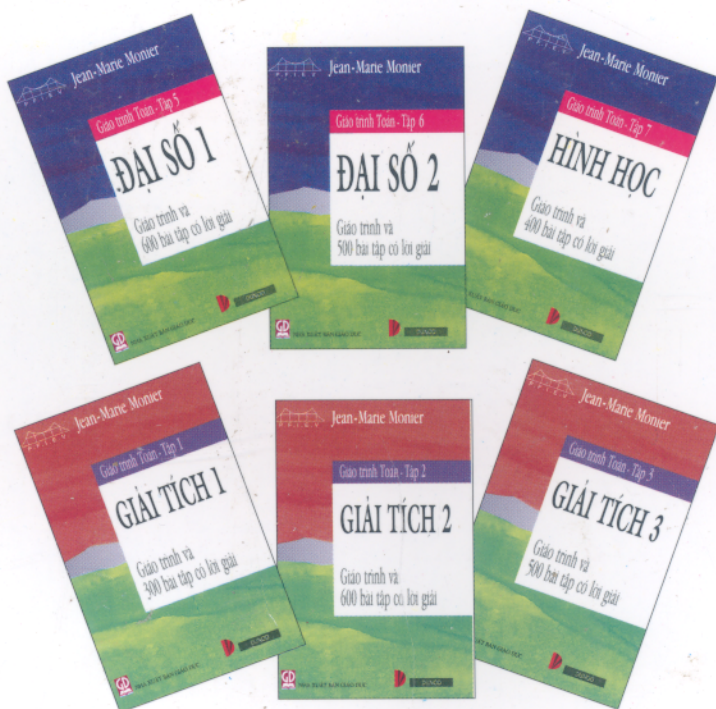
ĐẠI SỐ 2

Giáo trình và 500 bài tập có lời giải



Giáo trình Toán - Tập 6

Mục tiêu của bộ giáo trình Toán này là cung cấp cho sinh viên những năm đầu của các trường đại học khoa học và kỹ thuật một tài liệu học tập, tra cứu thông dụng và có hiệu quả. Với nhiều bài tập có lời giải, đa dạng, bao quát mọi khía cạnh của lý thuyết, cuốn sách còn nhằm giúp cho người học rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học.



Tập 6 đề cập việc khảo sát bổ sung về đại số tuyến tính, phép thu gọn, đại số song tuyến tính, đại số tuyến tính rườì và bổ sung về đại số đại cương.



Giá: 44.500đ