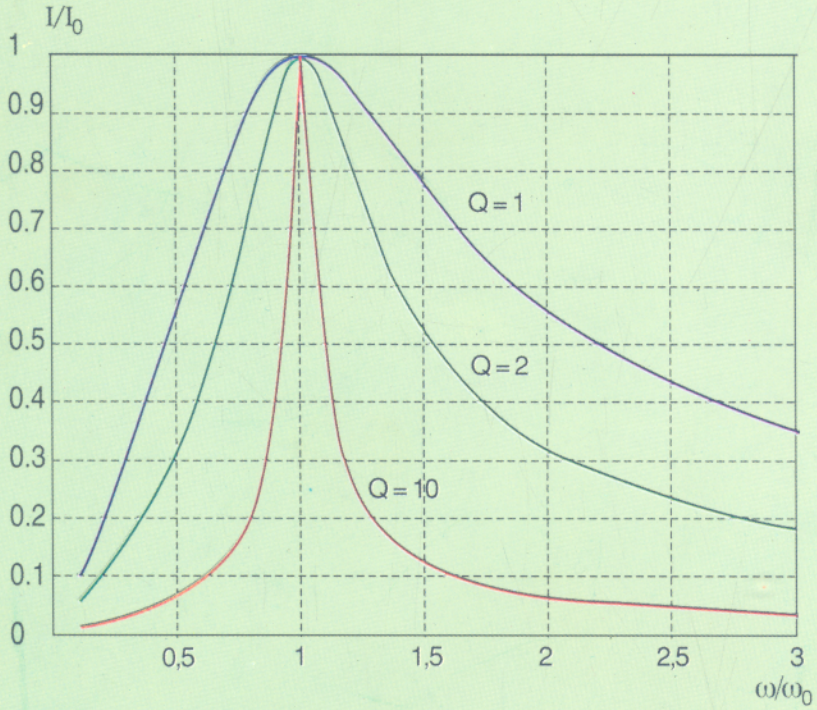
VỤ GIÁO DỤC CHUYÊN NGHIỆP

GIÁO TRÌNH
LÝ THUYẾT MẠCH ĐIỆN

SÁCH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG VÀ HỆ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

PGS. TS. LÊ VĂN BẢNG

Giáo trình
LÝ THUYẾT MẠCH ĐIỆN

Sách dùng cho các trường Cao đẳng và hệ Trung học chuyên nghiệp

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

04 – 2009/CXB/58 – 2117/GD Mã số : 6H145y9 – DAI

Lời giới thiệu

Năm 2002, Vụ Giáo dục Chuyên nghiệp – Bộ Giáo dục và Đào tạo đã phối hợp với Nhà xuất bản Giáo dục xuất bản 21 giáo trình phục vụ cho đào tạo hệ THCN. Các giáo trình trên đã được nhiều trường sử dụng và hoan nghênh. Để tiếp tục bổ sung nguồn giáo trình đang còn thiếu, Vụ Giáo dục Chuyên nghiệp phối hợp cùng Nhà xuất bản Giáo dục tiếp tục biên soạn một số giáo trình, sách tham khảo phục vụ cho đào tạo ở các ngành : Điện – Điện tử, Tin học, Khai thác cơ khí. Những giáo trình này trước khi biên soạn, Vụ Giáo dục Chuyên nghiệp đã gửi đề cương về trên 20 trường và tổ chức hội thảo, lấy ý kiến đóng góp về nội dung đề cương các giáo trình nói trên. Trên cơ sở nghiên cứu ý kiến đóng góp của các trường, nhóm tác giả đã điều chỉnh nội dung các giáo trình cho phù hợp với yêu cầu thực tiễn hơn.

Với kinh nghiệm giảng dạy, kiến thức tích luỹ qua nhiều năm, các tác giả đã cố gắng để những nội dung được trình bày là những kiến thức cơ bản nhất nhưng vẫn cập nhật được với những tiến bộ của khoa học kỹ thuật, với thực tế sản xuất. Nội dung của giáo trình còn tạo sự liên thông từ Dạy nghề lên THCN.

Các giáo trình được biên soạn theo hướng mở, kiến thức rộng và cố gắng chỉ ra tính ứng dụng của nội dung được trình bày. Trên cơ sở đó tạo điều kiện để các trường sử dụng một cách phù hợp với điều kiện cơ sở vật chất phục vụ thực hành, thực tập và đặc điểm của các ngành, chuyên ngành đào tạo.

Để việc đổi mới phương pháp dạy và học theo chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo nhằm nâng cao chất lượng dạy và học, các trường cần trang bị đủ sách cho thư viện và tạo điều kiện để giáo viên và học sinh có đủ sách theo ngành đào tạo. Những giáo trình này cũng là tài liệu tham khảo tốt cho học sinh đã tốt nghiệp cần đào tạo lại, nhân viên kỹ thuật đang trực tiếp sản xuất.

Các giáo trình đã xuất bản không thể tránh khỏi những sai sót. Rất mong các thầy, cô giáo, bạn đọc góp ý để lần xuất bản sau được tốt hơn. Mọi góp ý xin gửi về : Công ty CP sách Đại học - Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

VỤ GIÁO DỤC CHUYÊN NGHIỆP - NXB GIÁO DỤC

Chương 1

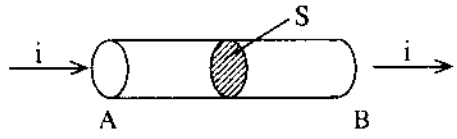
CÁC KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN VỀ MẠCH ĐIỆN

1.1. MẠCH ĐIỆN. CÁC BIẾN CƠ BẢN : DÒNG ĐIỆN VÀ ĐIỆN ÁP

Để tính toán một cách gần đúng các quá trình điện từ trong các thiết bị điện người ta dùng một mô hình toán học đơn giản hoá gọi là *mạch điện*. Ở đây, người ta chỉ quan tâm đến một số (hữu hạn) các đại lượng điện là các *dòng điện* và các *điện áp*.

Dòng điện (hay cường độ dòng điện) i(t)

Trong H.1.1.1 vẽ một đoạn dây dẫn AB có tiết diện là S. Gọi q(t) là lượng điện tích dương chuyển động qua tiết diện S theo chiều từ A đến B (chỉ bởi mũi tên trên hình vẽ) ở thời điểm t và



Hình 1.1.1

$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ là lượng điện tích chuyển động qua S theo chiều từ A đến B trong khoảng thời gian Δt thì trị số trung bình của cường độ dòng điện theo chiều AB trong Δt là :

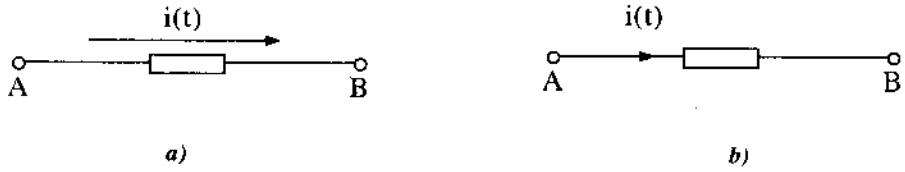
$$i_{AB\ \text{trung bình}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Trị số trung bình này càng chính xác nếu ta lấy Δt càng nhỏ. Cho $\Delta t \to 0$, ta định nghĩa *cường độ dòng điện theo chiều AB* tại thời điểm t là *đạo hàm của lượng điện tích q(t) theo thời gian* :

$$i_{AB}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt} \qquad (1.1.1)$$

Theo quy ước, người ta lấy chiều của dòng điện là chiều chuyển động của các điện tích dương. *Chiều dương của dòng điện* trong mỗi phần tử của mạch điện được vẽ bằng một mũi tên.

Ví dụ ở H.1.1.2a, trong đoạn mạch giữa hai điểm A và B người ta chọn chiều đi từ A đến B làm chiều dương của dòng điện. Chiều này được vẽ bằng một mũi tên hướng từ A đến B đi kèm với kí hiệu i(t). Ta cũng có thể dùng chỉ số AB để chỉ chiều dương đã chọn cho dòng điện i(t), tức là : $i(t) = i_{AB}(t)$.

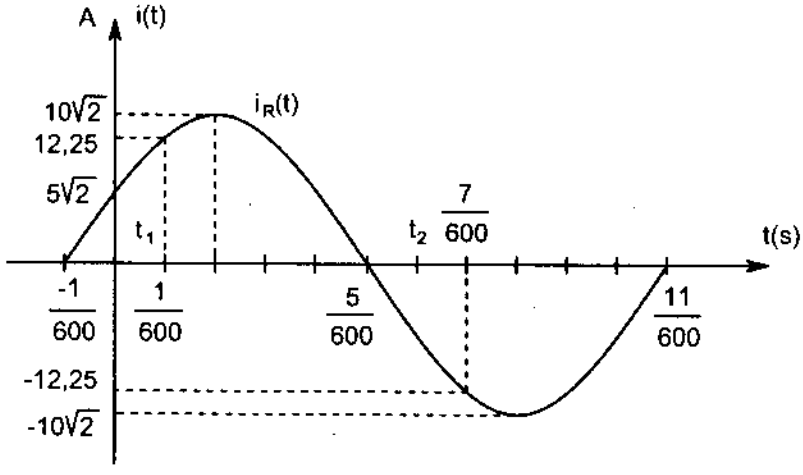


Hình 1.1.2

Người ta thường chỉ chiều dương của dòng điện bằng một mũi tên đặt như ở H.1.1.2b. Đơn vị của cường độ dòng điện trong hệ đơn vị quốc tế SI là ampere, viết tắt là A.

Dòng điện nói chung có trị số thay đổi theo thời gian. Ví dụ

$i_{AB}(t) = i(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ A là biểu thức của *một dòng điện hình sin* (thường gọi là dòng điện xoay chiều), có biên độ là $10\sqrt{2}$ A. Đường biểu diễn của i(t) được vẽ trên H.1.1.3.



Hình 1.1.3

Tại thời điểm $t_1 = \frac{1}{600}$ s ta có :

$$\omega t_1 = 100\pi \times \frac{1}{600} = \frac{\pi}{6}$$

và $$i(t_1) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 10\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = 10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 12{,}25\text{A}$$

Vì $i(t_1) = 12,25A > 0$ nên tại thời điểm t_1 dòng điện i(t) có chiều thực trùng với chiều dương của nó, tức là tại thời điểm t_1 dòng điện có trị số là 12,25A và chạy theo chiều từ A đến B.

Tại thời điểm $t_2 = \frac{1}{600}s + \frac{1}{100}s = \frac{7}{600}s$

ta có $\omega t_2 = 100\pi.\frac{7}{600} = \frac{7\pi}{6}$

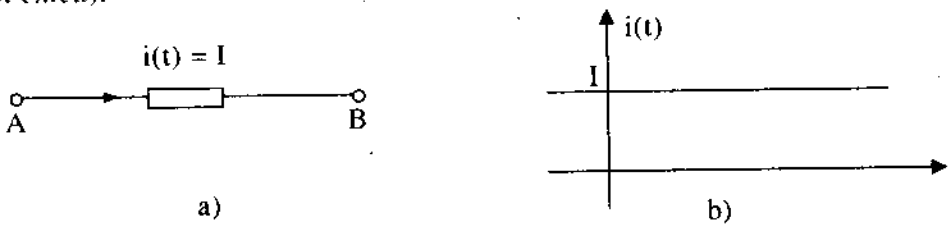
và $i(t_2) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t_2 + \frac{\pi}{6}\right) = 10\sqrt{2}\sin\frac{4\pi}{3}$

$$= 10\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -12,25A$$

Vì $i(t_2) = -12,25\ A < 0$ nên tại thời điểm t_2 dòng điện i(t) có chiều thực ngược với chiều dương của nó, tức là tại thời điểm t_2, dòng điện i(t) có trị số tuyệt đối là 12,25A và chạy theo chiều từ B đến A.

Trong trường hợp đơn giản nhất, dòng điện có chiều và trị số không đổi theo thời gian

i(t) = I = hằng số, được gọi là *dòng điện không đổi* (thường gọi là *dòng điện một chiều*).



Hình 1.1.4

Điện áp u(t)

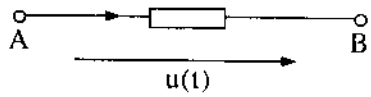
Người ta gọi *hiệu số điện thế* từ điểm A đến điểm B của một mạch điện là *điện áp* $u_{AB}(t)$.

$$u_{AB}(t) = v_A(t) - v_B(t) \qquad (1.1.2)$$

Ở đây, v_A (hoặc v_B) là điện thế của điểm A (hoặc điểm B) được tính đối với điện thế của một điểm O nào đó có điện thế chọn bằng không $v_0(t) = 0$.

Đơn vị của điện thế và điện áp trong hệ đơn vị quốc tế SI là volt, viết tắt là V. Chiều dương của điện áp u_{AB} giữa hai điểm A và B được chỉ bằng một mũi tên hướng từ điểm A đến điểm B vẽ trên đoạn mạch kèm theo kí hiệu u(t) như vẽ ở H.1.1. 5.

Khi chiều dương của điện áp giữa hai điểm đã được chỉ rõ bằng một mũi tên trên hình vẽ thì người ta có thể bỏ qua chỉ số AB mà chỉ viết u(t) thay cho $u_{AB}(t)$.



Hình 1.1.5

Trong trường hợp chung, điện áp giữa hai điểm của mạch điện là một hàm số của thời gian t.

Ví dụ $u(t) = u_{AB}(t) = 220\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ V là một điện áp hình sin có biên độ là 220V.

Ở thời điểm $t_1 = \frac{1}{600}$ s ta có $u(t_1) = 220\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3} = 269,44V$

Vì $u(t_1) = 269,44V > 0$ nên tại thời điểm t_1 điện áp $u(t_1)$ có chiều thực trùng với chiều dương đã chọn, tức là tại thời điểm t_1 điện thế điểm A cao hơn điện thế điểm B là 269,44V.

Tại thời điểm $t_2 = \frac{7}{600}$ s ta có

$$u(t_2) = 220\sqrt{2}\sin\frac{4\pi}{3} = 220\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -269,44V$$

Vì $u(t_2) = -269,44V < 0$ nên tại thời điểm t_2 điện áp $u(t_2)$ có chiều thực ngược với chiều dương đã chọn. Tức là, tại thời điểm t_2 điện áp $u(t_2)$ có trị số tuyệt đối là 269,44V nhưng hướng từ B đến A, nói cách khác điện thế điểm B cao hơn điện thế điểm A là 269,44V.

Trong trường hợp đơn giản nhất, một điện áp u(t) có chiều và trị số không thay đổi theo thời gian :

$$u(t) = U = \text{hằng số}$$

được gọi là *điện áp không đổi*, thường gọi là *điện áp một chiều*.

Dòng điện i(t) và điện áp u(t) là hai biến cơ bản của mạch điện. Các đại lượng khác đều có thể định nghĩa thông qua hai biến cơ bản này.

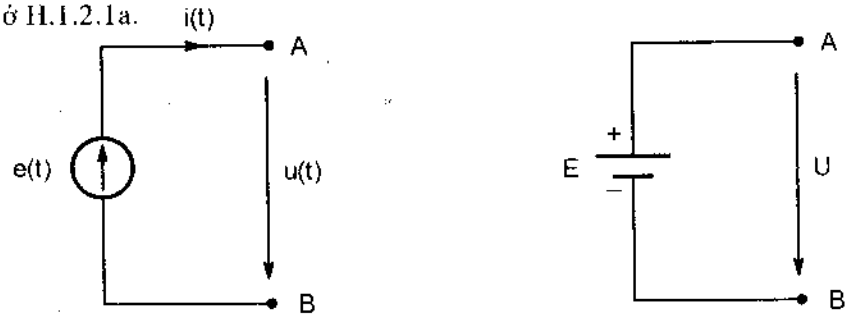
Dưới đây ta sẽ xét một số phần tử cơ bản nhất của mạch điện.

1.2. NGUỒN ĐIỆN ÁP (HAY NGUỒN SỨC ĐIỆN ĐỘNG)

Để tạo ra điện áp đặt vào mạch điện, người ta dùng các *nguồn điện*. Ví dụ các pin và các acquy cung cấp cho ta các điện áp không đổi (theo thời gian). Các máy phát điện xoay chiều cung cấp điện áp hình sin có tần số f = 50Hz dùng trong công nghiệp và sinh hoạt.

Trong mạch điện, người ta gọi *nguồn điện áp* (nguồn áp) hay *nguồn sức điện động* (viết tắt là sđđ) là *phần tử lí tưởng tạo ra một điện áp u(t) giữa hai cực của nó là một hàm đã cho của thời gian* (không phụ thuộc vào dòng điện i(t) đi qua nguồn).

Nguồn điện áp thường được biểu diễn bằng một vòng tròn với một mũi tên như ở H.1.2.1a.



a) *Hình 1.2.1* b)

Chiều của mũi tên là chiều dương của sức điện động e(t) hoặc chiều tăng của điện thế. Với chiều dương của sđđ e(t) và chiều dương của điện áp u(t) chọn như ở H.1.2.1a, ta có :

$$u(t) = u_{AB}(t) = v_A(t) - v_B(t) \qquad (1.2.1)$$

và $$v_A(t) = v_B(t) + e(t) \qquad (1.2.2)$$

tức là $$u(t) = e(t) \qquad (1.2.3)$$

Ví dụ $u(t) = e(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t + \alpha)$ V là một nguồn điện áp hình sin có biên độ là $220\sqrt{2}$ V và có tần số f = 50 Hz.

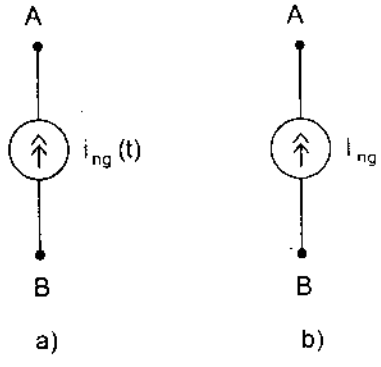
Đối với các pin hoặc acquy là các nguồn điện áp hay nguồn sđđ không đổi theo thời gian người ta còn dùng kí hiệu như ở H.1.2.1b.

1.3. NGUỒN DÒNG ĐIỆN $i_{ng}(t)$

Trong mạch điện, người ta định nghĩa *nguồn dòng điện* (hay *nguồn dòng*) $i_{ng}(t)$ là một phần tử lí tưởng tạo ra một dòng điện là một hàm đã cho của thời gian (không phụ thuộc vào điện áp giữa hai cực của nó).

Nguồn dòng điện thường được kí hiệu bằng một vòng tròn trong đó có một mũi tên kép cùng với chữ $i_{ng}(t)$ như ở H.1.3.1a.

Chiều của mũi tên kép chỉ chiều dương của dòng điện của nguồn dòng.



Hình 1.3.1

Ví dụ $i_{ng}(t) = 10\sqrt{2}\sin(100\pi t + \alpha)$ A là một nguồn dòng điện hình sin có biên độ là $10\sqrt{2}$ A và có tần số f = 50 Hz.

Đối với nguồn dòng không đổi theo thời gian (thường quen gọi là nguồn dòng một chiều), người ta còn dùng kí hiệu như H.1.3.1b.

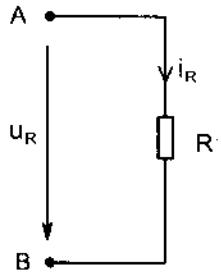
Khái niệm về nguồn dòng cũng quan trọng như khái niệm về nguồn áp, nhưng nguồn dòng thường ít được dùng trong sách vật lý ở các trường phổ thông. Học sinh, sinh viên các trường kỹ thuật thường gặp khó khăn khi giải các mạch điện có các nguồn dòng. Khi đã quen với nguồn dòng ta sẽ thấy nó rất có ích trong việc lập các phương trình cho mạch điện và trong nhiều trường hợp nó sẽ giúp cho việc tính toán mạch điện được đơn giản và dễ dàng hơn.

1.4. ĐIỆN TRỞ R. ĐỊNH LUẬT OHM

Phần tử điện trở (resistor) là phần tử cơ bản của mạch điện mà điện áp trên nó tỉ lệ thuận với dòng điện đi qua nó.

Với các chiều dương của điện áp $u_R(t)$ trên phần tử điện trở và của dòng điện $i_R(t)$ chạy qua nó được chọn cùng chiều với nhau như ở H.1.4.1 thì giữa $u_R(t)$ và $i_R(t)$ có quan hệ :

$$u_R(t) = Ri_R(t) \qquad (1.4.1)$$



Hình 1.4.1

Hệ số tỉ lệ $R \geq 0$ trong (1.4.1) là thông số đặc trưng của phần tử điện trở được gọi là điện trở (resistance) của phần tử điện trở.

Hệ thức (1.4.1) có tên là định luật Ohm.

Đơn vị của điện trở trong hệ SI là ohm, viết tắt là Ω.

Hệ thức (1.4.1) còn có thể viết dưới dạng sau :

$$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} = G.u_R(t) \qquad (1.4.2)$$

Trong đó : $G = \frac{1}{R}$ được gọi là *điện dẫn*. Đơn vị của điện dẫn trong hệ SI là siemens, viết tắt là S.

Với chiều dương của $u_R(t)$ giống với chiều dương của $i_R(t)$ thì công suất tiêu thụ bởi điện trở R là :

$$p_R(t) = u_R(t).i_R(t) = R.i_R^2(t) \qquad (1.4.3)$$

Đơn vị của công suất trong hệ SI là watt, viết tắt là W.

Vì $R \geq 0$ và $i_R^2(t) \geq 0$ nên :

$$p_R(t) \geq 0 \qquad (1.4.4)$$

Điều này có nghĩa là điện trở R luôn tiêu thụ điện năng. Điện năng này được biến đổi thành nhiệt năng, tiêu tán vào môi trường xung quanh. Vì thế, người ta nói rằng điện trở R đặc trưng cho *hiệu ứng nhiệt* của dòng điện (hiệu ứng Joule).

Năng lượng toả nhiệt trên điện trở trong thời gian từ thời điểm $t_0 = 0$ đến thời điểm t được tính theo công thức :

$$w_R = \int_0^t p_R(t)dt = \int_0^t u_R(t)i_R(t)dt = R\int_0^t i_R^2(t)dt \geq 0 \qquad (1.4.5)$$

Đơn vị của năng lượng trong hệ SI là joule, viết tắt là J.

Ta có : 1 joule = 1watt × 1giây hay 1J = 1Ws

Khi điện áp U_R và dòng điện I_R trong điện trở là điện áp và dòng điện không đổi theo thời gian thì định luật Ohm được viết dưới dạng :

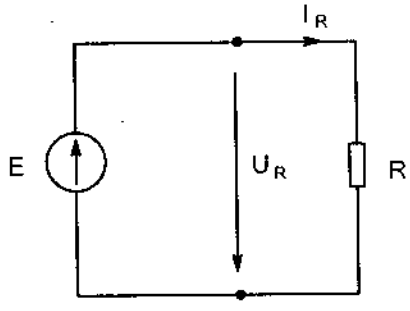
$$U_R = RI_R \qquad (1.4.6)$$

hay

$$I_R = \frac{U_R}{R} = GU_R \qquad (1.4.7)$$

Ví dụ 1.4.1 :

Xét mạch điện ở H.1.4.2 gồm một điện trở R = 10Ω đặt vào nguồn sức điện động E = 12V. Tính điện áp U_R, dòng điện I_R trên điện trở. Tính công suất toả nhiệt trên điện trở và năng lượng tiêu thụ bởi điện trở trong một giờ.



Hình 1.4.2

Giải :

Ta có : $U_R = E = 12V$

Theo định luật Ohm (1.4.7) ta có :

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{12V}{10\Omega} = 1,20A$$

Công suất toả nhiệt trên điện trở :

$$P_R = RI_R^2 = 10 \times (1,2)^2 = 14,40W$$

hay

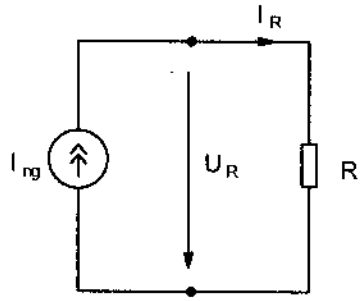
$$P_R = U_R I_R = 12 \times 1,20 = 14,40W$$

Điện năng tiêu thụ bởi điện trở này trong thời gian T = 1 giờ là :

$$W = P_R T = 14,40 \times 60 \times 60 = 51,84 \times 10^3 J$$

Ví dụ 1.4.2 :

Điện trở $R = 10\Omega$ được nối vào một nguồn dòng điện có trị số $I_{ng} = 5A$ (H.1.4.3). Tính điện áp U_R trên điện trở và công suất toả nhiệt P_R trên điện trở



Hình 1.4.3

Giải :

Dòng điện chạy qua điện trở R chính là dòng điện của nguồn dòng đã cho :

$$I_R = I_{ng} = 5A$$

Điệp áp trên điện trở U_R bằng :

$$U_R = R.I_R = 10\Omega \times 5A = 50V$$

Công suất toả nhiệt trên điện trở là :

$$P_R = U_R I_R = 50 \times 5 = 250W$$

hay :

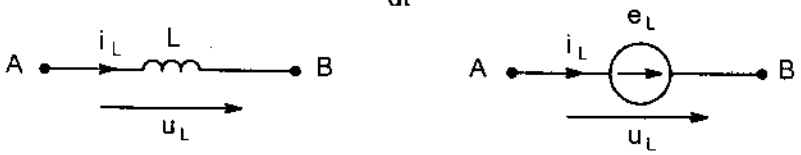
$$P_R = RI_R^2 = 10 \times (5)^2 = 250W$$

1.5. ĐIỆN CẢM L. ĐỊNH LUẬT LENTZ

Phần tử điện cảm (inductor) thường gọi là cuộn dây điện cảm là phần tử cơ bản của mạch điện mà điện áp trên nó tỉ lệ với tốc độ biến thiên theo thời gian của dòng điện chạy qua nó.

Nếu gọi u_L là điện áp giữa hai cực của phần tử điện cảm và i_L là dòng điện chạy qua nó, với quy ước chiều dương của u_L cùng chiều với chiều dương của i_L như ở H.1.5.1a ta có phương trình (vi phân tuyến tính cấp 1) :

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad (1.5.1)$$



a) *Hình 1.5.1* b)

Trong (1.5.1), hệ số tỉ lệ L > 0 được gọi là *điện cảm (inductance)* của phần tử điện cảm. Đơn vị của điện cảm trong hệ SI là henry, viết tắt là H.

Hệ thức (1.14) là hệ quả của định luật cảm ứng Lentz về sức điện động tự cảm, thường viết là :

$$e_L = -\frac{d\Phi_L}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li_L) = -\frac{Ldi_L}{dt} \qquad (1.5.2)$$

Trong đó : Φ_L là từ thông, e_L là sức điện động tự cảm, với chiều dương chọn giống với chiều dương của i_L như ở H.1.5.1b.

Thật vậy, vì các chiều dương của u_L và e_L chọn như ở H.1.5.1b, ta có :

$$v_B = v_A + e_L \qquad (1.5.3)$$

Từ đó : $$e_L = v_B - v_A \qquad (1.5.4)$$

Trong khi đó : $$u_L = u_{AB} = v_A - v_B \qquad (1.5.5)$$

Từ (1.5.4) và (1.5.5), ta có :

$$u_L = -e_L \qquad (1.5.6)$$

Từ (1.5.6) và (1.5.2) ta có

$$u_L = -e_L = -\left(-L\frac{di}{dt}\right) = L\frac{di_L}{dt} \qquad (1.5.6)$$

Vì thế ta cũng có thể gọi hệ thức : $u_L = L\frac{di_L}{dt}$ là định luật Lentz và điện cảm L là thông số đặc trưng cho *hiện tượng tự cảm*.

Với chiều dương của u_L và i_L chọn giống nhau như ở H.1.5.1a thì công suất đưa năng lượng vào phần tử điện cảm là :

$$p_L = i_L.u_L = i_L\left(L\frac{di_L}{dt}\right) = Li_L\frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li_L^2\right) = \frac{dw_M}{dt} \qquad (1.5.7)$$

Ở đây :

$$w_M = \frac{1}{2}Li_L^2 \qquad (1.5.8)$$

là năng lượng từ trường tích luỹ trong phần tử điện cảm.

Do hệ thức (1.5.7) mà điện cảm L cũng đặc trưng cho hiện tượng tích trữ năng lượng từ trường trong mạch điện.

Ví dụ 1.5.1 :

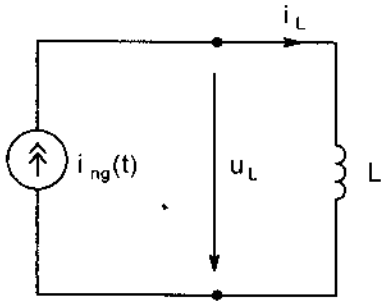
Xét mạch điện ở H.1.5.2 gồm một cuộn dây điện cảm có điện cảm L = 0,1H nối với một nguồn dòng $i_{ng}(t) = 10\sqrt{2}\sin(1000t)$ mA. Hãy tìm điện áp u_L trên cuộn dây điện cảm, công suất p_L và năng lượng từ trường w_M trong cuộn dây ? Vẽ các đường cong $i_L(t)$, $u_L(t)$, $p_L(t)$.

Giải :

Dòng điện i_L chạy qua phần tử điện cảm chính là dòng điện của nguồn dòng :

$$i_L(t) = i_{ng}(t) = 10\sqrt{2}\sin(1000t)\ \text{mA}$$

Chọn chiều dương của điện áp u_L trên điện cảm cùng với chiều dương của dòng điện i_L như ở H.1.5.2. Theo định luật Lentz (1.5.1) ta có :



Hình 1.5.2

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = 0,1 \times \frac{d}{dt}\left(10\sqrt{2} \times 10^{-3}\sin 1000t\right)$$

$$= 0,1 \times 10\sqrt{2} \times 10^{-3} \times 1000\cos 1000t$$

$$= \sqrt{2}\cos 1000t\ \text{V}$$

Công suất đưa năng lượng vào từ trường của phần tử điện cảm là :

$$p_L = u_L.i_L = \sqrt{2}\cos(1000t) \times \left(10\sqrt{2}.10^{-3}\sin 1000t\right)$$

$$= 20 \times 10^{-3}\sin 1000t\cos 1000t \quad \text{W}$$

$$= 20 \times \sin 1000t\cos 1000t \quad \text{mW}$$

hoặc $$p_L = 20\frac{\sin 2000t}{2} = 10\sin 2000t\ \text{mW}$$

Năng lượng từ trường trong cuộn dây điện cảm :

$$w_M = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2} \times 0,1 \times \left(10\sqrt{2}\sin 1000t\right)^2 = \frac{1}{2} \times 0,1 \times \left(10\sqrt{2}\right)^2\sin^2 1000t$$

$$= 10\sin^2 1000t = 10\left(\frac{1-\cos 2000t}{2}\right) = 5\left(1-\cos 2000t\right)\ \text{J}$$

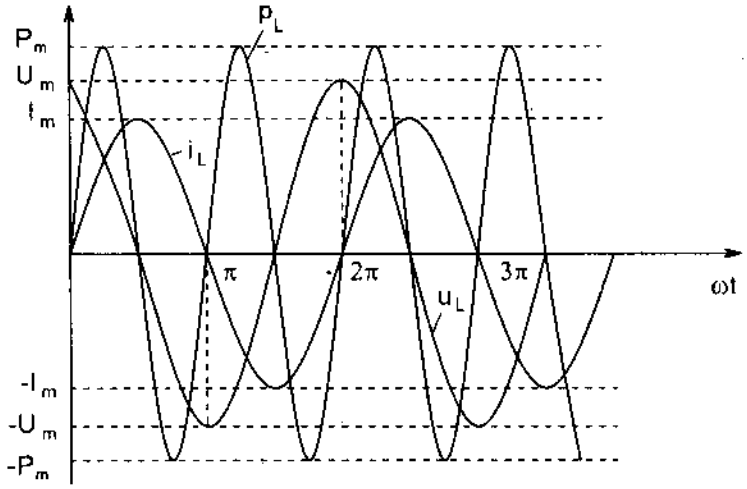
Các đường biểu diễn của $i_L(t)$, $u_L(t)$ và $p_L(t)$ được vẽ trên H.1.5.3 với

$$I_m = 10\sqrt{2} \quad \text{mA}$$

$$U_m = \sqrt{2} \quad \text{V}$$

$$P_m = 10 \quad \text{mW}$$

và $$\omega = 1000\ \text{rad/s}.$$



Hình 1.5.3

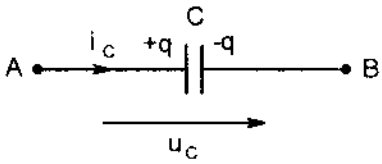
1.6. ĐIỆN DUNG C. DÒNG ĐIỆN CHUYỂN DỊCH

Phần tử điện dung (capacitor) thường gọi là *tụ điện* là phần tử cơ bản của mạch điện mà dòng điện qua nó tỉ lệ thuận với tốc độ biến thiên theo thời gian của điện áp trên nó.

Nếu $i_C(t)$ là dòng điện chạy qua tụ điện và $u_C(t)$ là điện áp giữa hai cực của tụ điện với chiều dương của i_C và chiều dương của u_C chọn giống nhau như ở H.1.6.1 thì phương trình vi phân tuyến tính cấp một liên hệ giữa $i_C(t)$ và $u_C(t)$ là :

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad (1.6.1)$$

Trong đó hệ số tỉ lệ C > 0 được gọi là *điện dung (capacitance)* của tụ điện. Đơn vị của điện dung trong hệ SI là farad, viết tắt là F.



Hình 1.6.1

Hệ thức (1.6.1) là hệ quả của giả thiết của Maxwell về *dòng điện chuyển dịch (displacement current)* qua môi trường điện môi giữa các bản cực của tụ điện.

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C\frac{du_C}{dt} \qquad (1.6.2)$$

Ở đây ±q là điện tích trên các bản cực của tụ điện.

Do (1.6.2) mà điện dung C đặc trưng cho hiện tượng dòng điện chuyển dịch. Với chiều dương của u_C và i_C chọn giống nhau như ở H.1.6.1 thì công suất đưa năng lượng vào điện trường trong không gian giữa hai bản cực của tụ điện là :

$$p_C = i_C u_C = u_C C\frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = d\frac{w_E}{dt} \qquad (1.6.3)$$

Ở đây $w_E = \frac{1}{2}Cu_C^2$ (1.6.4)

là năng lượng điện trường tích luỹ trong tụ điện.

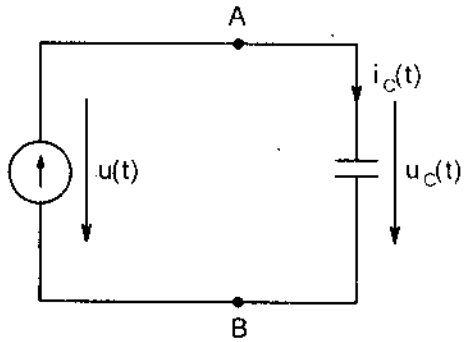
Do hệ thức (1.6.4) mà điện dung C cũng đặc trưng cho hiện tượng tích luỹ năng lượng điện trường trong mạch điện.

Ví dụ 1.6.1 :

Một tụ điện có điện dung C = 10μF được nối vào một nguồn áp hình sin :

$$u(t) = 100\sqrt{2}\sin 1000t \text{ V}$$

Hãy tìm dòng điện qua tụ i_C và công suất đưa năng lượng vào điện trường của tụ điện.



Hình 1.6.2

Giải :

Ta có : $u_C = u(t) = 100\sqrt{2}\sin 1000t$ V

Chọn chiều dương của $i_C(t)$ trùng với chiều dương của $u_C(t)$ như ở H.1.6.2 ta có

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = 10\times 10^{-6}\times\frac{d}{dt}\left(100\sqrt{2}\sin 1000t\right)$$

$$= 10\times 10^{-6}\times 100\sqrt{2}\times 1000\cos 1000t = \sqrt{2}\cos 1000t \text{ A}$$

Công suất tích luỹ năng lượng vào điện trường của tụ điện :

$$p_C = u_C.i_C = \left(100\sqrt{2}\sin 1000t\right)\times\left(\sqrt{2}\cos 1000t\right) = 200\left(\frac{\sin 2000t}{2}\right)$$

$$= 100\sin 2000t \text{ W}$$

Năng lượng điện trường tích luỹ trong tụ điện :

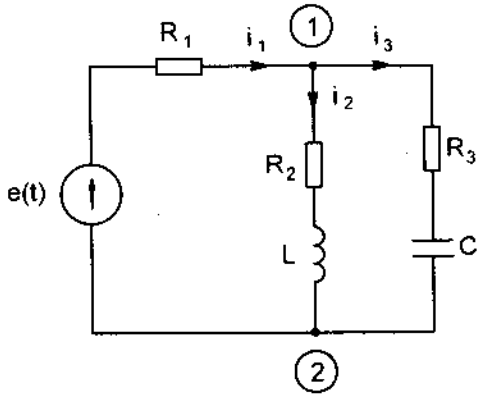
$$w_E = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}\times 10\times 10^{-6}\times\left(100\sqrt{2}\sin 1000t\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 10\times 10^{-6}\times\left(100\sqrt{2}\right)^2\sin^2 1000t = 0,1\sin^2 1000t$$

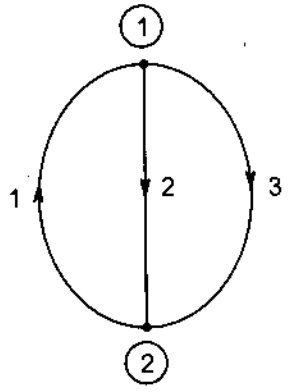
$$= 0,1\left(\frac{1-\cos 2000t}{2}\right) = 0,05\left(1-\cos 2000t\right) \text{ J}$$

1.7. ĐỊNH LUẬT KIRCHHOFF CHO CÁC DÒNG (HAY ĐỊNH LUẬT KIRCHHOFF THỨ NHẤT)

H.1.7.1 vẽ một mạch điện phức tạp. Ta gọi *nhánh* của mạch điện là bộ phận của mạch điện giữa hai điểm bất kì trong đó *có cùng một dòng điện* chạy qua.



Hình 1.7.1



Hình 1.7.2

Mạch điện ở H.1.7.1 gồm có 3 nhánh. Nhánh thứ nhất (nhánh 1) gồm có nguồn sđđ e(t) nối tiếp với điện trở R_1, trong hai phần tử này có cùng một dòng điện i_1 chạy qua. Nhánh thứ hai (nhánh 2) gồm có điện trở R_2 nối tiếp với điện cảm L, trong hai phần tử này có cùng dòng điện i_2 chạy qua. Nhánh thứ ba (nhánh 3) gồm có điện trở R_3 nối tiếp với điện dung C, trong hai phần tử này có cùng một dòng điện i_3 chạy qua.

Ta gọi điểm mà ở đó các nhánh nối với nhau là *nút* của mạch điện. Trong mạch điện ở H.1.7.1, các nhánh 1, 2 và 3 được nối vào hai nút ① và ②.

Để thấy rõ các nhánh và các nút của một mạch điện và sự nối của các nhánh với nhau tại các nút, người ta có thể dùng một loại sơ đồ đơn giản hoá của mạch điện gọi là *graph* của mạch điện. Ví dụ graph của mạch điện ở H.1.7.1 được vẽ như ở H.1.7.2. Mỗi nhánh của graph tương ứng với một nhánh của mạch điện và được vẽ bằng một *đoạn đường cong* hay *thẳng*. Chiều của nhánh trên graph tương ứng với chiều dương của dòng điện của nhánh.

Định luật Kirchhoff cho các dòng (hay định luật Kirchhoff thứ nhất)

Sự ràng buộc giữa các dòng điện của các nhánh trong một mạch điện được thiết lập theo định luật Kirchhoff về các dòng (hay định luật Kirchhoff thứ nhất).

Định luật này có thể phát biểu như sau : *Ở một thời điểm bất kì và tại một nút bất kì của mạch điện, tổng các dòng điện có chiều dương đi tới nút bằng tổng các dòng điện có chiều dương rời khỏi nút.*

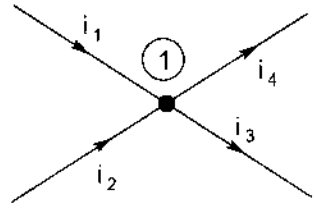
Tại nút 1 trên H.1.7.3 ta có

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t) + i_4(t) \qquad (1.7.1)$$

Phương trình (1.7.1) có nghĩa là :

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} = \frac{dq_3}{dt} + \frac{dq_4}{dt} \text{ hay } dq_1 + dq_2 = dq_3 + dq_4$$

tức là tổng lượng điện tích đi tới nút phải bằng tổng lượng điện tích rời khỏi nút vì không có sự tích luỹ điện tích tại nút.



Hình 1.7.3

Phương trình (1.7.1) còn có thể viết là :

$$-i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$$

hay $$\sum_{\text{nút}} i_1(t) = 0 \qquad (1.7.2)$$

tức là : Tại một nút bất kì, ở một thời điểm bất kì, *tổng đại số các dòng điện có chiều dương rời khỏi một nút bằng không.*

Trong phương trình (1.7.2) : các dòng điện có chiều dương rời khỏi nút được lấy với dấu dương (+), còn các dòng điện có chiều dương đi vào nút được lấy với dấu âm (−).

Đối với nút ① trong mạch điện trên H.1.7.1 ta có phương trình :

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \qquad (1.7.3)$$

Đối với nút ② ta có phương trình :

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \qquad (1.7.4)$$

Chú ý rằng, phương trình (1.7.4) có thể suy ra từ phương trình (1.7.3) bằng cách nhân 2 vế của (1.7.3) với −1. Vì vậy, phương trình (1.7.3) *không độc lập tuyến tính* với phương trình (1.7.4). Vì thế, đối với mạch điện ở H.1.7.1 ta chỉ cần viết 1 trong 2 phương trình (1.7.3) hoặc (1.7.4) là đủ.

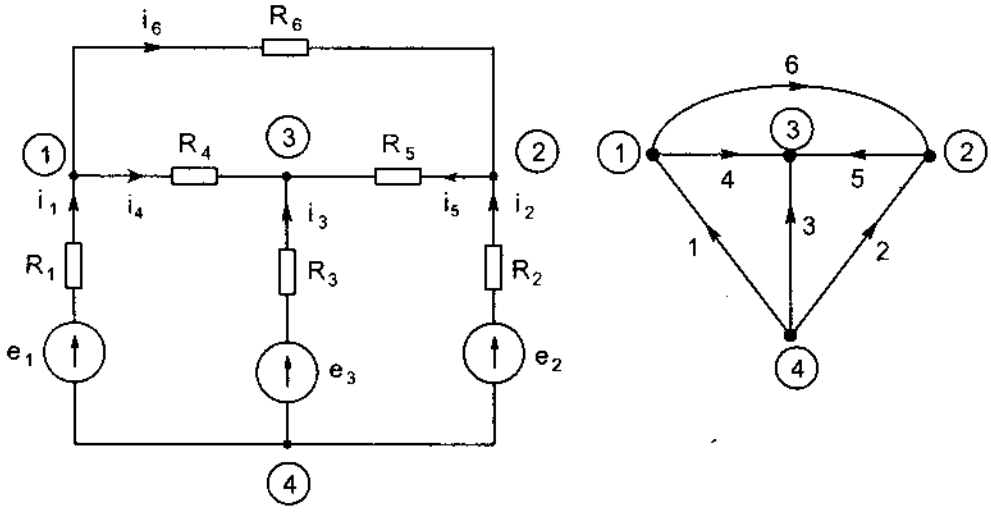
Tương tự như vậy, đối với mạch điện ở H.1.7.4 ta chỉ cần viết các phương trình Kirchhoff cho các dòng đối với 3 trong 4 nút ①, ②, ③ và ④ là đủ.

Ví dụ, viết các phương trình theo định luật Kirchhoff cho các dòng cho các nút ①, ② và ③ (H.1.7.3) là :

$$-i_1 + i_4 + i_6 = 0 \qquad (1.7.5)$$

$$-i_2 + i_5 - i_6 = 0 \qquad (1.7.6)$$

$$-i_3 - i_4 - i_5 = 0 \qquad (1.7.7)$$



a) *Hình 1.7.4* b)

Ta không cần viết phương trình theo định luật Kirchhoff cho các dòng cho nút ④ nữa vì nó sẽ không độc lập tuyến tính đối với các phương trình đã viết cho các nút ①, ② và ③.

Thật vậy phương trình theo định luật Kirchhoff cho các dòng đối với nút ④ là :

$$-i_1 - i_2 - i_3 = 0 \qquad (1.7.8)$$

Phương trình này có thể có được từ việc cộng các phương trình (1.7.5), (1.7.6) và (1.7.7).

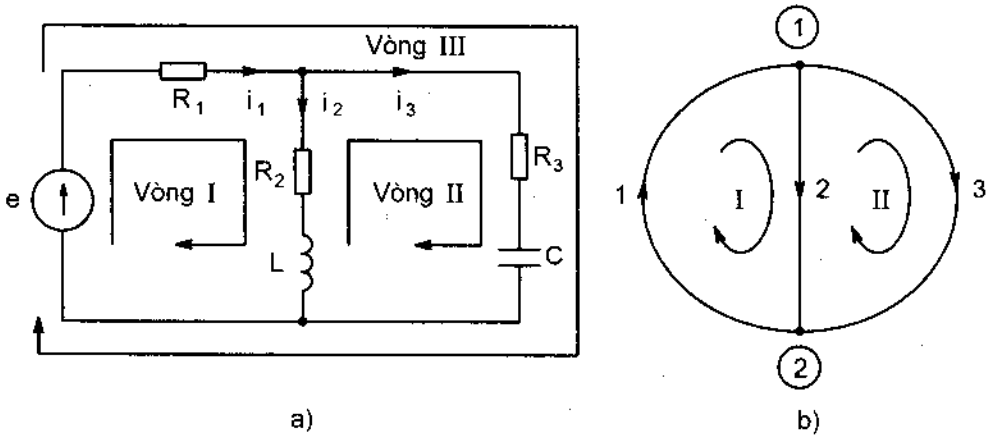
Nói một cách tổng quát : nếu mạch điện có n nút thì chỉ viết được *(n – 1) phương trình độc lập tuyến tính* theo định luật Kirchhoff thứ nhất cho (n – 1) nút của mạch.

1.8. ĐỊNH LUẬT KIRCHHOFF CHO CÁC ĐIỆN ÁP (HAY ĐỊNH LUẬT KIRCHHOFF THỨ HAI)

Sự ràng buộc giữa các điện áp trên các nhánh của một mạch điện được thiết lập theo định luật Kirchhoff cho các điện áp (hay định luật Kirchhoff thứ hai).

Xét mạch điện ở H.1.8.1a. Các nhánh 1 và 2 tạo thành một vòng (đường khép kín) gọi là vòng I. Các nhánh 2 và 3 cũng tạo thành một vòng gọi là vòng II. Các nhánh 1 và 3 cũng tạo thành một vòng gọi là vòng III.

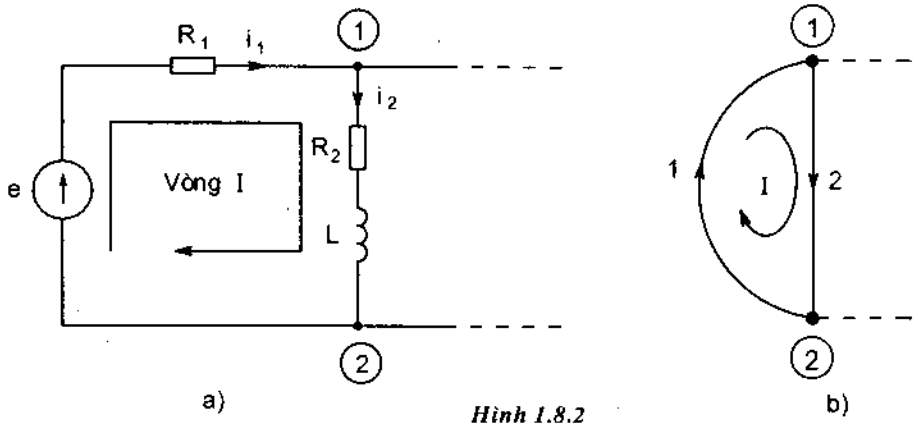
Để thấy rõ các vòng của một mạch điện ở H.1.8.1a ta cũng có thể sử dụng graph của nó vẽ ở H.1.8.1b.



Hình 1.8.1

Ta có thể định nghĩa *vòng là một bộ phận của mạch điện gồm một số nhánh sao cho (trong bộ phận đó) ở mỗi nút chỉ có hai nhánh nối vào.*

Ví dụ ở mạch điện ở H.1.8.2a ta xét một bộ phận của nó chỉ gồm các nhánh 1 và 2 (hãy tưởng tượng rằng nhánh 3 bị cắt khỏi mạch).



Hình 1.8.2

Ta thấy (xem H.1.8.2) trong bộ phận mạch điện này, ở các nút ① và ② đều chỉ có hai nhánh nối vào. Vậy, các nhánh 1 và 2 hợp thành một vòng. Trong mỗi vòng ta hãy chọn một chiều đi vòng tuỳ ý qua các nhánh của vòng. Ví dụ ta có thể chọn chiều đi vòng qua vòng I là chiều kim đồng hồ như ở H.1.8.2b. Ta sẽ gọi chiều này là *chiều của vòng I*.

Chú ý rằng chiều của các nhánh trong một vòng có thể cùng chiều hay ngược chiều với chiều của vòng. Ví dụ ở H.1.8.1 nhánh 1 và nhánh 2 đều cùng chiều với vòng I; nhánh 3 cùng chiều với vòng II, nhưng nhánh 2 ngược chiều với vòng II.

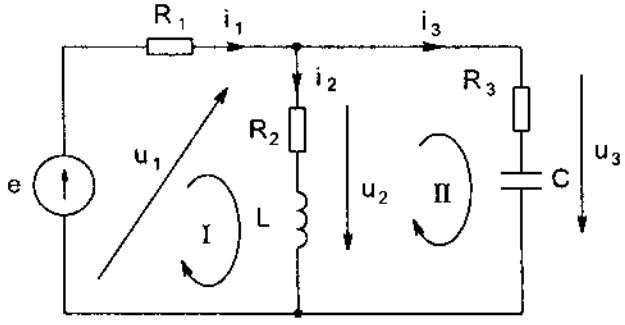
Ví dụ 1.8.1 :

Với mạch điện ở H.1.8.3 ta viết được các phương trình sau đây theo định luật Kirchhoff cho các áp :

Vòng I : $u_1 + u_2 = 0$ (1.8.1)

Vòng II : $-u_2 + u_3 = 0$ (1.8.2)

Vòng III : $u_1 + u_3 = 0$ (1.8.3)



Hình 1.8.3

Chú ý rằng trong hệ 3 phương trình trên, chỉ có 2 phương trình *độc lập tuyến tính*, phương trình còn lại không độc lập tuyến tính, tức là phụ thuộc tuyến tính đối với hai phương trình đã viết.

Thật vậy, phương trình (1.8.3) cho vòng III có thể nhận được bằng cách cộng hai phương trình (1.8.1) và (1.8.2) cho các vòng I và II.

Một cách tổng quát, nếu *mạch điện có m nhánh và n nút thì ta chỉ có thể viết được m − (n − 1) = m − n + 1 phương trình độc lập tuyến tính theo định luật Kirchhoff thứ hai cho các vòng.*

Với kết cấu cụ thể của các nhánh như vẽ ở H.1.8.3, nếu ta chọn chiều dương của các dòng điện i_1, i_2 và i_3 cùng chiều với các chiều dương đã chọn cho các điện áp u_1, u_2 và u_3 , ta có :

$$u_1 = -e + Ri_1 \quad (1.8.4)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} \quad (1.8.5)$$

$$u_3 = R_3 i_3 + u_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_3 dt \quad (1.8.6)$$

Thay (1.8.4), (1.8.5) và (1.8.6) vào (1.8.1) và (1.8.2) ta được các phương trình sau đây cho các vòng I và II :

$$-e + Ri_1 + R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} = 0$$

$$-R_2 i_2 - L\frac{di_2}{dt} + R_3 i_3 + u_C(0) + \frac{1}{C}\int i_3 dt = 0$$

Để chọn được một hệ thống các *vòng độc lập* (tức là các vòng mà hệ phương trình viết theo định luật Kirchhoff cho các áp của chúng họp thành một hệ phương trình độc lập tuyến tính) ta có thể làm như sau :

Bước 1 : Đầu tiên, ta vẽ (n – 1) nhánh nào đó nối liền n nút của graph của mạch đã cho mà không hợp thành một vòng. Tập hợp (n – 1) nhánh có tính chất như thế được gọi là một cây (a tree) của graph đã cho.

Bước 2 : Cứ mỗi lần ta nối thêm một nhánh mới (tức không phải là một trong (n – 1) nhánh thuộc vào cây đã chọn ở bước 1). Bổ sung vào giữa hai nút của cây ta sẽ được một *vòng cơ bản (a fundamental loop).*

Vì số nhánh mới là m – (n – 1) = m – n + 1, ta sẽ có m – n + 1 vòng cơ bản. Vì mỗi vòng cơ bản có một nhánh không thuộc vào các vòng cơ bản khác nên hệ thống các vòng cơ bản sẽ làm thành một hệ thống các vòng độc lập.

Ví dụ 1.8.2 :

Đối với mạch điện ở H.1.8.4 ta có số nhánh m = 6, số nút n = 4.

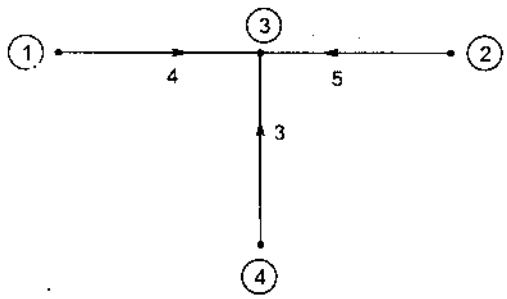
– Đầu tiên, ta chọn cây gồm các nhánh 3, 4, 5 vẽ bằng nét liền ở H.1.8.4.

– Bây giờ ta nối thêm nhánh 1 vào cây ở H.1.8.1, ta sẽ được *vòng cơ bản I* gồm các nhánh 1, 4 và 3 ở H.1.8.5 và ta viết được phương trình sau đây :

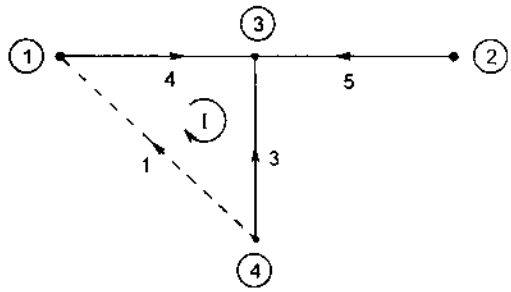
$$u_1 + u_4 - u_3 = 0$$

– Ta nối thêm nhánh 2 vào cây ở H.1.8.4 ta sẽ được *vòng cơ bản II* gồm các nhánh 2, 5 và 3 (H.1.8.6) và ta viết được phương trình :

$$u_2 + u_5 - u_3 = 0$$



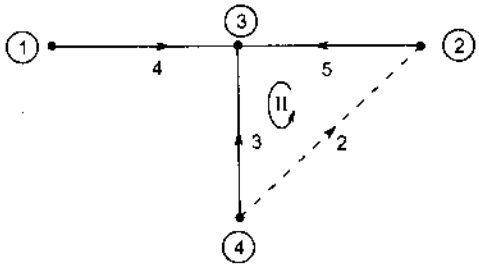
Hình 1.8.4



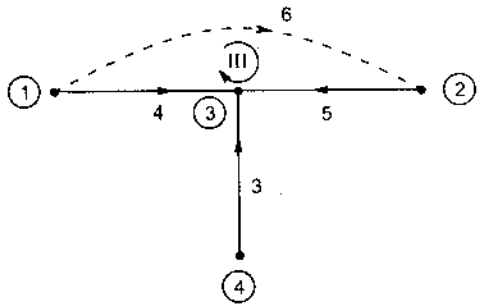
Hình 1.8.5

– Cuối cùng, ta nối thêm nhánh 6 vào cây ở H.1.8.4 ta sẽ được *vòng cơ bản III* gồm các nhánh 6, 5, 4 (H.1.8.7) và viết được phương trình :

$$u_6 + u_5 - u_4 = 0$$



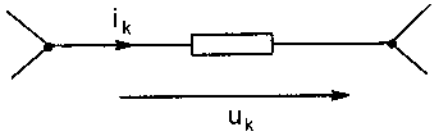
Hình 1.8.6



Hình 1.8.7

1.9. CÂN BẰNG CÔNG SUẤT TRONG TOÀN MẠCH ĐIỆN. ĐỊNH LÝ TELLEGEN

Xét một nhánh bất kỳ của một mạch điện.

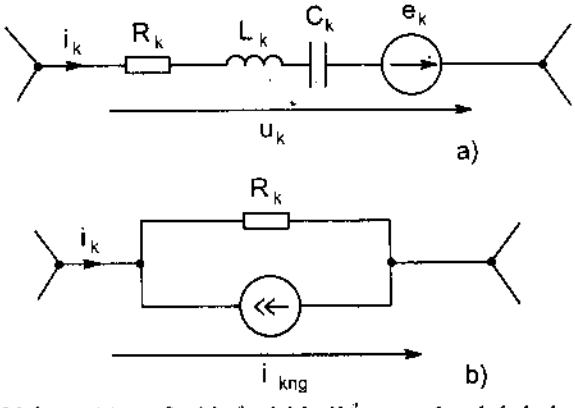


Hình 1.9.1

Nếu $u_k(t)$ là điện áp trên nhánh và $i_k(t)$ là dòng điện trong nhánh (với chiều dương của u_K và chiều dương của i_K chọn giống nhau như ở H.1.9.1) thì công suất tức thời tiêu thụ bởi nhánh k sẽ là :

$$p_k(t) = u_k(t)i_k(t)$$

Tuỳ theo kết cấu cụ thể, một nhánh có thể gồm điện trở R_k (điện cảm L_k, điện dung C_k) nối tiếp với nguồn sđđ e_k như ở H.1.9.2a hoặc nối song song với nguồn dòng i_{kng} như ở H.1.9.2b.



Hình 1.9.2

Nếu $p_k(t) > 0$ thì ở thời điểm t xét nhánh k thực sự tiêu thụ năng lượng.

Nếu $p_k(t) < 0$ thì ở thời điểm t xét nhánh k lại cung cấp năng lượng cho phần còn lại của mạch.

Xét một mạch điện có m nhánh và n nút. Từ các phương trình lập theo định luật Kirchhoff cho các dòng cho (n – 1) nút của mạch điện

$$\sum_{\text{nút}} i_k(t) = 0$$

và các phương trình lập theo định luật Kirchhoff cho các áp cho (m – n + 1) vòng cơ bản của mạch :

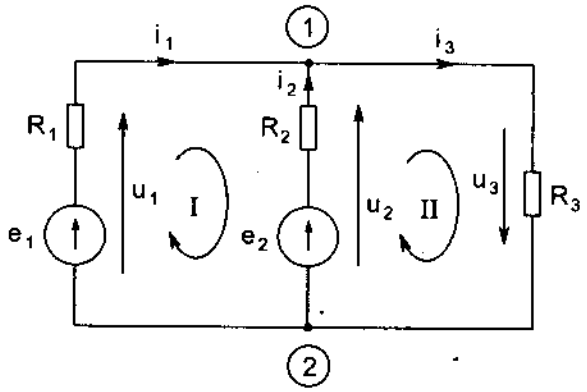
$$\sum_{\text{vòng}} u_k(t) = 0$$

ta có thể chứng minh định lý Tellegen về sự cân bằng công suất trong mạch điện sau đây : *"Trong một mạch điện bất kỳ, ở một thời điểm bất kỳ, tổng các công suất tiêu thụ bởi tất cả nhánh của mạch bằng không"*.

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t) i_k(t) = 0 \qquad (1.9.1)$$

hay nói cách khác, tổng công suất phát ra bởi các nguồn trong mạch bằng tổng công suất tiêu thụ bởi các phần tử khác trong mạch.

Ta hãy chứng minh sự cân bằng công suất cho mạch điện ở H.1.9.3.



Hình 1.9.3

Ta viết phương trình theo định luật Kirchhoff cho các dòng cho nút ① :

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0 \qquad (1.9.2)$$

và các phương trình theo định luật Kirchhoff cho các áp cho các vòng I và II :

$$u_1 - u_2 = 0 \qquad (1.9.3)$$

$$u_2 + u_3 = 0 \qquad (1.9.4)$$

Các phương trình (1.9.3) và (1.9.4) cũng tương đương với việc biểu diễn điện áp các nhánh qua điện thế các nút ① và ② sau đây:

$$u_1 = v_2 - v_1$$

$$u_2 = v_2 - v_1$$

$$u_3 = v_1 - v_2$$

Tổng công suất tiêu thụ bởi tất cả các nhánh của mạch là :

$$\sum_{k=1}^{3} p_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3$$

$$= (v_2 - v_1)i_1 + (v_2 - v_1)i_2 + (v_1 - v_2)i_3$$

$$= v_1(-i_1 - i_2 + i_3) + v_2(+i_1 + i_2 - i_3)$$

Chú ý đến (1.9.2) ta có :

$$\sum_{k=1}^{3} p_k = 0$$

Vậy đẳng thức (1.9.1) của định lý Tellegen đã được chứng minh.

Với cấu trúc của các nhánh 1, 2 và 3 như ở H.1.9.3 ta có

$$u_1 = -e_1 + R_1 i_1$$

$$u_2 = -e_2 + R_2 i_2$$

$$u_3 = R_3 i_3$$

và

$$\sum_{k=1}^{3} p_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 = (-e_1 + R_1 i_1)i_1 + (-e_2 + R_2 i_2)i_2 + (R_3 i_3)i_3 = 0$$

Từ đó :

$$e_1 i_1 + e_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 \qquad (1.9.5)$$

Ở vế trái của phương trình (1.9.5) là tổng công suất phát ra của các nguồn sức điện động e_1 và e_2, còn ở vế phải của (1.9.5) là tổng các công suất tiêu thụ trên các điện trở R_1, R_2 và R_3 của mạch điện.

CÂU HỎI KIỂM TRA

1.1. Mạch điện là gì ? Các biến cơ bản của mạch điện là gì ?

1.2. Dòng điện là gì ? Chiều dương của dòng điện là gì ?

1.3. Điện áp là gì ? Chiều dương của điện áp là gì ? Cho một số ví dụ.

1.4. Nguồn điện áp là gì ? Quan hệ giữa điện áp và sức điện động ? Cho một số ví dụ về nguồn điện áp.

1.5. Nguồn dòng điện là gì ? Cho một số ví dụ về nguồn dòng điện.

1.6. Điện trở R là gì ? Phát biểu định luật Ohm.Viết biểu thức của công suất và năng lượng tiêu thụ trên điện trở.

1.7. Điện cảm L là gì ? Phát biểu định luật Lentz. Viết biểu thức của điện áp trên điện cảm u_L. Viết biểu thức của công suất và năng lượng từ trường trong điện cảm theo L và i_L.

1.8. Điện dung là gì ? Viết biểu thức của dòng điện chuyển dịch i_C theo C và u_C. Viết biểu thức của công suất và năng lượng điện trường trong điện dung theo C và u_C.

1.9. Phát biểu định luật Kirchhoff về các dòng hay định luật Kirchhoff thứ nhất. Nếu mạch điện có n nút thì *số tối đa các phương trình độc lập tuyến tính* có thể lập được theo định luật Kirchhoff thứ nhất là bao nhiêu ? Cho một số ví dụ về hệ phương trình độc lập tuyến tính viết theo định luật Kirchhoff thứ nhất cho một số mạch điện.

1.10. Phát biểu định luật Kirchhoff về các áp hay định luật Kirchhoff thứ hai. Nếu mạch điện có n nút và m nhánh thì *số tối đa các phương trình độc lập tuyến tính* có thể lập được theo định luật Kirchhoff thứ hai là bao nhiêu ?

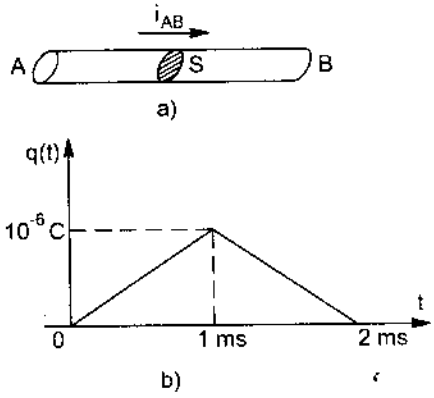
Bằng cách nào có thể xác định được *các vòng độc lập* cho một mạch điện? Cho một số ví dụ về hệ phương trình độc lập tuyến tính viết theo định luật Kirchhoff thứ hai cho một số mạch điện.

1.11. Phát biểu định lý Tellegen

1.12. Chứng minh sự cân bằng công suất trong một số mạch điện đơn giản.

BÀI TẬP

BT.1.1. Lượng điện tích q(t) chuyển động qua tiết diện S của đoạn dây dẫn AB theo chiều từ A đến B (H.BT.1.1a) có đồ thị theo thời gian cho ở H.BT.1.1b. Hãy tính dòng điện $i_{AB}(t)$ và vẽ đồ thị của dòng điện theo thời gian.



H.BT.1.1

BT.1.2. Hỏi như bài tập BT.1.1 với q (t) = $10^{-3}\sqrt{2}\sin 1000t$ C.

BT.1.3. Cho biết điện thế của các điểm A, B, C và O như sau: $V_0 = 0$. $V_A = 100V$, $V_B = 80V$, $V_C = 50V$. Hãy tính các điện áp: U_{AB}, U_{BC}, U_{AC}, U_{BA}, U_{CB} và U_{CA}.

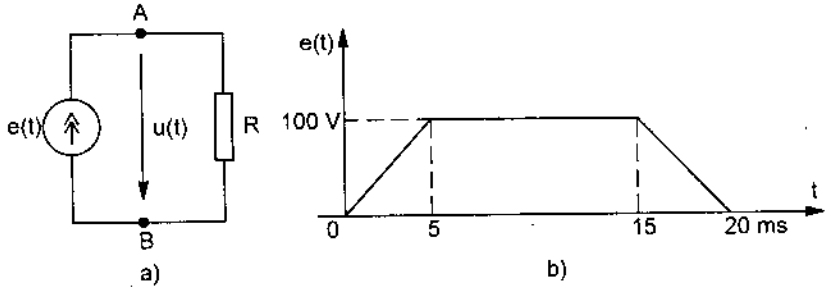
BT.1.4. Hỏi như bài tập BT.1.3 với:

$$v_0 = 0,\ v_A = 100\sqrt{2}\sin 1000t\ V$$

$$v_B(t) = 80\sqrt{2}\sin 1000t V$$

$$v_C(t) = 50\sqrt{2}\sin 1000t V$$

BT.1.5. Một điện trở R = 100Ω được nối với nguồn điện áp u(t) = e(t) như ở H.BT.1.5a. Đồ thị của e(t) được vẽ ở H.BT.1.5b. Tính dòng điện $i_{AB}(t)$ và $i_{BA}(t)$ trong điện trở. Vẽ đường cong $i_{AB}(t)$ và $i_{BA}(t)$. Tính công suất và điện năng tiêu thụ bởi điện trở trong khoảng thời gian $0 \le t \le 20ms$.

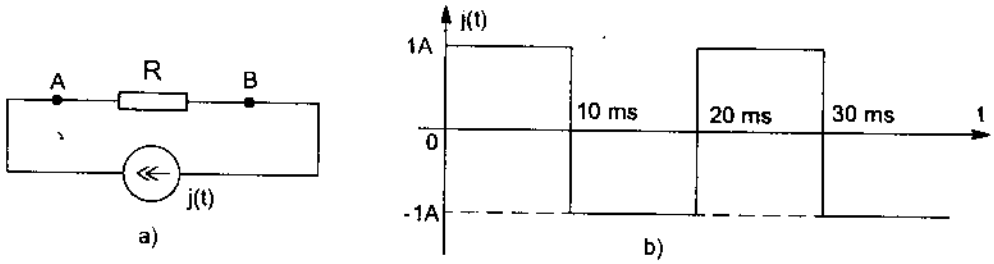


H.BT.1.5

BT.1.6. Giải bài tập BT.1.5 trong trường hợp $e(t) = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ V.

BT.1.7. Một điện trở R = 10 Ω được nối vào một nguồn dòng điện j(t) như ở H.BT.1.7a. Đường cong j(t) được cho ở H.BT.1.7b.

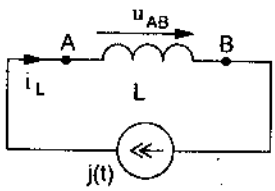
Tính điện áp $u_{AB}(t)$ và $u_{BA}(t)$ trên điện trở. Vẽ đường cong $u_{AB}(t)$ và $u_{BA}(t)$. Tính công suất và điện năng tiêu thụ trên điện trở trong khoảng thời gian $0 \le t \le 20$ ms.



H.BT.1.7

BT.1.8. Giải bài tập BT.1.7 trong trường hợp $j(t) = 5\sqrt{2}\sin 100\pi t$ A.

BT.1.9. Một phần tử điện cảm có L = 100 mH được nối vào một nguồn dòng điện j(t) như ở H.BT.1.9. Đồ thị của j(t) cho ở H.BT.1.7b. Tính điện áp $u_{AB}(t)$ và $u_{BA}(t)$ trên điện cảm. Vẽ đường cong $u_{AB}(t)$ và $u_{BA}(t)$. Tính công suất $p_L(t)$ và năng lượng w_M đưa vào từ trường của điện cảm trong khoảng thời gian $0 \le t \le 20$ ms.

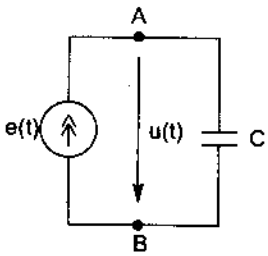


H.BT.1.9

BT.1.10. Giải BT.1.9 trong trường hợp $j(t) = 5\sqrt{2}\sin 100\pi t$ A

BT.1.11. Một tụ điện có điện dung C = 10 μF được nối với nguồn điện áp u(t) = e(t) như ở H.BT.1.11. Đồ thị của e(t) được cho ở H.BT.1.5b.

Tính dòng điện $i_{AB}(t)$ và $i_{BA}(t)$ qua điện dung. Vẽ đường cong $i_{AB}(t)$ và $i_{BA}(t)$. Tính công suất $p_C(t)$ và năng lượng w_E đưa vào điện trường của tụ điện trong khoảng thời gian $0 \le t \le 20$ ms.

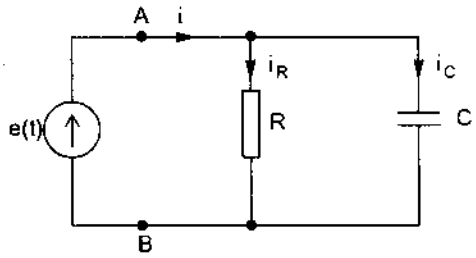


H.1.11

BT.1.12. Giải bài tập BT.1.11 trong trường hợp $e(t) = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ V.

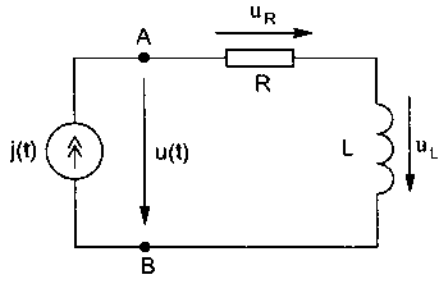
BT.1.13. Cho mạch điện ở H.BT.1.13 với R = 100 Ω, C = 5 μF và $e(t) = 100\sqrt{2}\sin 1000\pi t$ V.

Tính $i_R(t)$, $i_C(t)$ và i(t). Vẽ các đường cong của $i_R(t)$, $i_C(t)$ và i(t).



H.BT.1.13

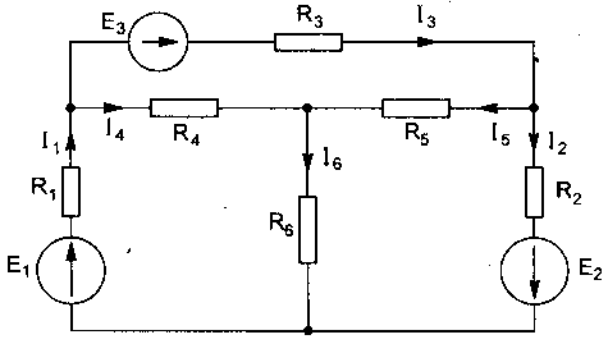
BT.1.14. Cho mạch điện ở H.BT.1.14 với R = 100 Ω, L = 0,2 H và $j(t) = \sqrt{2}\sin 1000\pi t$ A. Tính $u_R(t)$, $u_L(t)$ và u(t). Vẽ các đường cong của $u_R(t)$, $u_L(t)$ và u(t).



H.BT.1.14

BT.1.15. Cho mạch điện ở H.BT.1.15 với $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ Ω, $R_4 = R_5 = R_6 = 20$ Ω. Biết $I_4 = 1$A và $I_5 = 2$A, $I_3 = 3$A.

Hãy tìm I_1, I_2, I_6, E_1, E_2 và E_3.



H.BT.1.15

BT.1.16. Tính các công suất trên các điện trở và công suất của các nguồn sđđ trong mạch điện của BT.1.15. Kiểm tra cân bằng công suất trong toàn mạch.

Chương 2

DÒNG ĐIỆN HÌNH SIN TRONG CÁC MẠCH ĐIỆN ĐƠN GIẢN NHẤT

2.1. DÒNG ĐIỆN HÌNH SIN. TRỊ SỐ HIỆU DỤNG

Điện năng thường được cung cấp cho các thiết bị kỹ thuật dưới dạng điện áp và dòng điện hình sin, thường gọi là điện áp và dòng điện xoay chiều (alternating current, viết tắt là a. c hay AC).

Dòng điện hình sin có biểu thức toán học là :

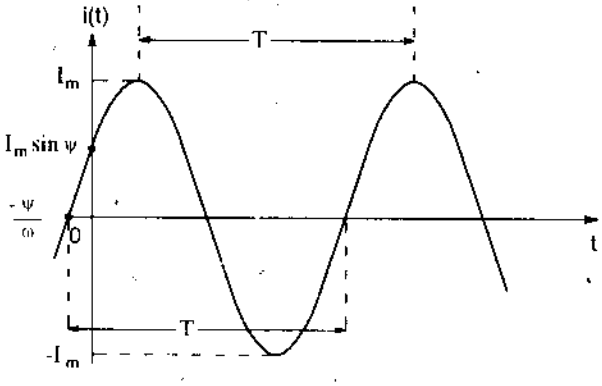
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \qquad (2.1.1)$$

trong đó I_m là *biên độ* của dòng điện; $\omega t + \psi_i$ là *góc pha* của dòng điện tại thời điểm t. Tại t = 0 thì góc pha bằng ψ_i được gọi là *góc pha đầu* của dòng điện, ω được gọi là *tần số góc* của dòng điện. Đơn vị của ω là rad/s.

Đại lượng $T = \frac{2\pi}{\omega}$ là *chu kỳ* của dòng điện hình sin. Người ta còn dùng đại lượng $f = \frac{1}{T}$ gọi là *tần số* của dòng điện hình sin. Đơn vị của tần số f trong hệ SI là hertz, viết tắt là Hz.

Tần số của dòng điện hình sin dùng trong công nghiệp ở đa số các nước là 50 Hz, ở Mỹ là 60 Hz.

Đường biểu diễn dòng điện hình sin được vẽ trên H.2.1.1



Hình 2.1.1

Người ta gọi *trị số hiệu dụng* I của dòng điện hình sin là trị số trung bình của $i^2(t)$ trong một chu kỳ

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i)dt} \qquad (2.1.2)$$

Ta có $$\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i)dt = I_m^2 \int_0^T \frac{\left[1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)\right]dt}{2}$$

$$= \frac{I_m^2}{2}\left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2(\omega t + \psi_i)dt\right) = \frac{I_m^2}{2}T$$

vì tích phân thứ hai $\int_0^T \cos 2(\omega t + \psi_i)dt = 0$.

Vậy $$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (2.1.3)$$

tức là trị số hiệu dụng I của dòng điện hình sin bằng biên độ I_m của nó chia cho $\sqrt{2}$.

Hệ thức (2.1.2) được rút ra từ sự tương đương về năng lượng toả nhiệt của dòng điện hình sin trên một điện trở R trong một chu kỳ T và năng lượng toả nhiệt của một dòng điện có trị số không đổi I trên điện trở R trong thời gian T:

$$R\int_0^T i^2(t)dt = RI^2T$$

$$\text{hay } I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt$$

Sử dụng hệ thức (2.1.3) người ta thường viết biểu thức của dòng điện hình sin dưới dạng

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi_i) \qquad (2.1.4)$$

Ví dụ, với $i(t) = 20\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ A thì

trị số hiệu dụng là I = 20 A và biên độ là $I_m = 20\sqrt{2}$ A,

tần số góc là $\omega = 100\pi \ \frac{rad}{s}$, góc pha đầu $\psi_i = \frac{\pi}{3}$ rad, tần số $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50\,Hz$ và chu kỳ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02s$.

Tương tự với (2.1.1), người ta cũng định nghĩa trị số hiệu dụng U của điện áp hình sin là :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \qquad (2.1.5)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_u)dt}$$

và ta cũng có

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad (2.1.6)$$

2.2. BIỂU DIỄN DÒNG ĐIỆN HÌNH SIN BẰNG VÉCTƠ VÀ SỐ PHỨC

Để thực hiện các phép tính (cộng, trừ, đạo hàm và tích phân) đối với các dòng điện hoặc điện áp hình sin được dễ dàng, người ta cần dùng cách biểu diễn các hàm số hình sin bằng véctơ và số phức.

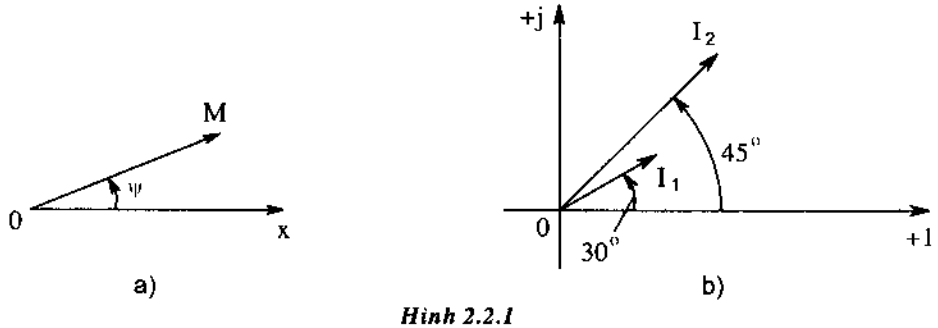
2.2.1. Biểu diễn dòng điện hình sin bằng véctơ

Xét một dòng điện hình sin có biểu thức của trị số tức thời là:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi)$$

trong đó I_m là biên độ, I là trị số hiệu dụng, ω là tần số góc và ψ là góc pha đầu.

Ta hãy lấy một hệ trục toạ độ độc cực có trục 0x đặt nằm ngang (H 2.2.1). Ta vẽ một véctơ $\overrightarrow{OM}$ với độ dài $\overline{OM} = |\overrightarrow{OM}|$ biểu diễn cho trị số hiệu dụng I của dòng điện theo một tỷ lệ xích m_I đã chọn sao cho độ dài $\overline{OM}$ có trị số thích hợp.



Hình 2.2.1

Ví dụ, với I = 10A, nếu ta chọn tỷ lệ xích là $m_I = 2\frac{A}{cm}$ thì :

$$\overline{OM} = \frac{I}{m_I} = \frac{10A}{2A/cm} = 5cm$$

Ta đặt véctơ $\overrightarrow{OM}$ ở vị trí sao cho góc hợp bởi $\overrightarrow{OM}$ và trục 0x tính theo chiều từ trục 0x đến $\overrightarrow{OM}$ bằng góc pha đầu ψ, tức là $(0x,\overrightarrow{OM}) = \psi$. Theo quy ước, người ta chọn *chiều dương của góc là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.*

Véctơ $\overrightarrow{OM}$ xác định như trên được gọi là *véctơ dòng điện hiệu dụng* $\vec{I}$, hoặc một cách vắn tắt hơn, là *véctơ dòng điện* $\vec{I}$.

Ví dụ hai dòng điện hình sin có cùng tần số góc ω nhưng có các trị số hiệu dụng và góc pha đầu khác nhau

$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^0\right) A$$

$$i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2) = 20\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^0\right) A$$

sẽ tương ứng được biểu diễn bằng hai véctơ dòng điện hiệu dụng $\vec{I_1}$ và $\vec{I_2}$ như ở H.2.2.1b.

2.2.2. Tính tổng của hai dòng điện hình sin có cùng tần số bằng phương pháp đồ thị véctơ

Giả sử ta cần tìm tổng của hai dòng điện hình sin nói trên :

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) + I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2)$$

Ta đặt $i_3(t) = I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_3)$.

Để tìm trị số hiệu dụng I_3 và góc pha đầu ψ_3 ta chỉ cần thực hiện *phép cộng véctơ* đối với các véctơ dòng điện (hiệu dụng):

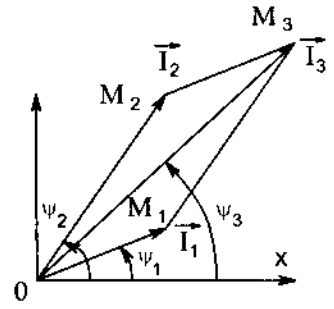
$$\vec{I_3} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$$

hay $$\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

bằng phương pháp hình học như vẽ ở H.2.2.2.

Để biết độ lớn của I_3 ta lấy độ dài $\overline{OM_3}$ nhân với tỷ lệ xích m_I:

$$I_3 = m_I.\ \overline{OM_3}$$



Hình 2.2.2

Để xác định trị số của ψ_3 ta chỉ cần đo góc ψ_3 trên hình vẽ.

Hình 2.2.2 được gọi là *đồ thị véctơ* cho các dòng điện.

Cần chú ý rằng, việc cộng véctơ các dòng điện như trên chỉ áp dụng cho các dòng điện hình sin có cùng một tần số góc ω (hoặc cùng tần số f).

Từ đồ thị véctơ ở H.2.2.2 ta thấy rõ rằng nói chung $I_3 \neq I_1 + I_2$, và $I_3 = I_1 + I_2$ chỉ khi $\psi_1 = \psi_2$.

2.2.3. Biểu diễn dòng điện hình sin bằng số phức

Phương pháp biểu diễn các dòng điện hình sin bằng véctơ nói trên có ưu điểm là nó cho ta một hình ảnh rõ ràng về độ lớn (tương đối) giữa các trị số hiệu dụng khác nhau của các dòng điện và ảnh hưởng quan trọng của sự khác nhau về pha của các dòng điện hình sin có cùng tần số. Nhưng phương pháp này có nhược điểm là việc đo và vẽ thường kém chính xác và không tiện dùng cho trường hợp cần tính với nhiều dòng điện hình sin (ví dụ tính tổng của 10 dòng điện hình sin có cùng tần số) nhưng có các trị số hiệu dụng và các góc pha đầu rất khác nhau.

Để tránh nhược điểm này người ta cần dùng cách biểu diễn dòng điện hình sin bằng số phức.

Bây giờ ta hãy biểu diễn véctơ $\vec{I}$ bằng số phức

$$\dot{I} = Ie^{j\psi} \qquad (2.2.1)$$

là số phức có môđuyn (module theo tiếng Pháp, hoặc modulus theo tiếng Anh) và ác - guy - men (argument theo tiếng Pháp hoặc argument hay angle theo tiếng Anh) là ψ.

Trong (2.2.1) e là cơ số của lôgarit tự nhiên (e = 2,71828...).

Người ta cũng thường dùng cách viết tắt:

$$\dot{I} = Ie^{j\psi} = I\angle\psi \qquad (2.2.2)$$

(đọc là I góc ψ).

Chú ý rằng, theo công thức Euler

$$e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi \qquad (2.2.3)$$

với $j = \sqrt{-1}$ là đơn vị ảo

nên $\dot{I} = Ie^{j\psi} = I(\cos\psi + j\sin\psi) =$

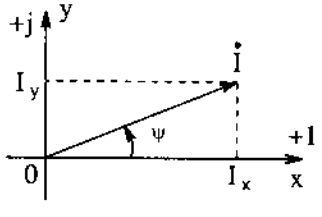
$$= I\cos\psi + jI\sin\psi = I_x + jI_y \qquad (2.3.4)$$

nên số phức $\dot{I}$ còn được biểu diễn bằng 2 thành phần trong hệ toạ độ chữ nhật 0xy là

$$I_x = I\cos\psi$$

$$I_y = I\sin\psi$$

như ở H.2.2.3.



Hình 2.2.3

Người ta gọi trục 0x là trục các số thực hay trục thực 0 +1 và trục 0y là trục các số ảo hay trục ảo 0 +j hay 0j.

Người ta gọi I_x là *phần thực* của số phức $\dot{I}$:

$$I_x = I\cos\psi = \mathrm{Re}\{\dot{I}\} \qquad (2.2.5)$$

với Re là ký hiệu viết tắt của partie réelle hay real part có nghĩa là phần thực.

Người ta gọi I_y là phần ảo của số phức $\dot{I}$:

$$I_y = I\sin\psi = \mathrm{Im}\{\dot{I}\} \qquad (2.2.6)$$

với Im là ký hiệu viết tắt của partie imaginaire hay imaginary part có nghĩa là phần ảo.

Nói chung, một số phức có dạng a + jb được gọi *số phức ở dạng toạ độ chữ nhật* hay *dạng đại số* (algebraic form), một số phức ở dạng $re^{j\theta} = r\angle\theta$ được gọi là số phức ở *dạng toạ độ độc cực* (polar form), còn một số phức ở dạng $re^{j\theta}$ được gọi là số phức ở dạng hàm mũ (exponential form).

Ta có quan hệ sau đây giữa ba dạng của cùng một số phức (H.2.2.4) :

$$re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$= r\cos\theta + rj\sin\theta = a + jb \qquad (2.2.7)$$

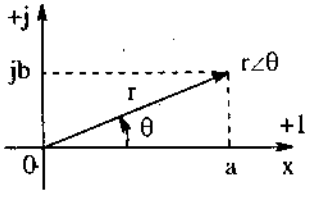
với $a = r\cos\theta$ (2.2.8)

$b = r\sin\theta$ (2.2.9)

và $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (2.2.10)

$tg\theta = \dfrac{b}{a}$ (2.2.11)

hay $\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ (2.2.12)



Hình 2.2.4

Ta có thể bỏ qua bước trung gian là véctơ $\vec{I}$ và coi rằng dòng điện hình sin có biểu thức là

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

được biểu diễn bằng một *ảnh* (image) của nó là một số phức $\dot{I}$, gọi là *dòng điện hiệu dụng phức* hay một cách vắn tắt hơn là *dòng điện phức* :

$$\dot{I} = \dot{I}e^{j\psi} = I\angle\psi = I_x + jI_y \qquad (2.2.13)$$

Ví dụ, các dòng điện hình sin:

$$i_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^0)\ A$$

và $$i_2(t) = 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^0)\ A$$

được biểu diễn bằng dòng điện (hiệu dụng) phức

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} = 10e^{j30^0} = 10\angle 30^0 \text{ A}$$

$$= 10\left(\cos 30^0 + j\sin 30^0\right) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(8,66025 + j5,00000\right) \text{ A}$$

và dòng điện (hiệu dụng) phức

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2} = 20e^{j45^0} = 20\angle 45^0 \text{ A}$$

$$= 20\left(\cos 45^0 + j\sin 45^0\right) = 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(14,14214 + j14,14214\right) \text{ A}$$

2.2.4. Tính tổng của hai dòng điện hình sin cùng tần số bằng phương pháp số phức

Muốn tìm tổng của hai dòng điện hình sin có cùng tần số:

$$i_1(t) + i_2(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_1) + I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_2)$$

ta sẽ tìm tổng của các ảnh phức của chúng dưới dạng đại số:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = I_1 e^{j\psi_1} + I_2 e^{j\psi_2}$$

$$= I_1\left(\cos\psi_1 + j\sin\psi_1\right) + I_2\left(\cos\psi_2 + j\sin\psi_2\right)$$

$$= \left(I_1\cos\psi_1 + I_2\cos\psi_2\right) + j\left(I_1\sin\psi_1 + I_2\sin\psi_2\right)$$

rồi chuyển kết quả này sang dạng số mũ hoặc dạng toạ độ độc cực để được:

$$I_3 e^{j\psi_3} = I_3\angle\psi_3 = \dot{I}_3$$

Với các máy tính bỏ túi (scientific calculators) việc tính toán này có thể thực hiện được rất nhanh chóng và có độ chính xác cao (xem Phụ lục I).

Sau cùng, với I_3 và ψ_3 đã tìm được ta sẽ viết biểu thức trị số tức thời:

$$i_3(t) = I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_3)$$

Ví dụ 2.2.1 :

Tính tổng của 2 dòng điện hình sin :

$$i_1(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^0\right) \text{ A} \quad \text{và} \quad i_2(t) = 20\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^0\right) \text{ A}$$

Giải :

Ta có $\dot{I}_1 = \left(10\angle 30^0\right)$ A

$\dot{I}_2 = \left(20\angle 45^0\right)$ A

và $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 30^0 + 20\angle 45^0$

$= (8,66025 + j5,00000) + (14,1421 + j14,1421)$

$= (22,8024 + j19,1421)$ A

$= \left(29,7720\angle 40,0128^0\right)$ A $= \left(29,7720e^{j40,0128}\right)$ A

Vậy $i_3(t) = 29,7720\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 40,0128^0\right)$ A

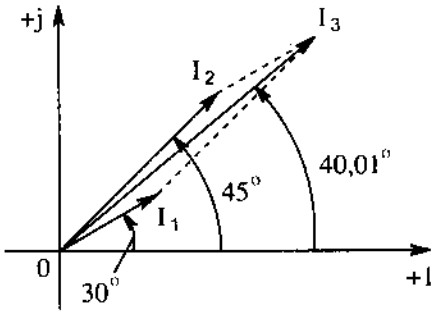
Trên thực tế, người ta thường viết kết quả với bốn chữ số có nghĩa:

$\dot{I}_3 = (22,80 + j19,14)$ A

$= \left(29,77\angle 40,01^0\right)$ A

và $i_3(t) = 29,77\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 40,01^0\right)$ A

Đồ thị véctơ cho các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}_3$ được vẽ ở H.2.2.5.



Hình 2.2.5

Những điều nói trên đối với các dòng điện hình sin cùng tần số cũng áp dụng được đối với các điện áp hình sin cùng tần số.

Ví dụ, điện áp hình sin $u(t) = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 60^0\right)$ V sẽ được biểu diễn bằng véctơ điện áp $\vec{U}$ có môđuyn là 220V và ác - guy - men là 60^0, hoặc được biểu diễn bằng *điện áp hiệu dụng phức:*

$$\dot{U} = 220e^{j60^0} = \left(220\angle 60^0\right) \text{ V}$$

$$= 220\left(\cos 60^0 + j\sin 60^0\right)$$

$$= 220\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (110,00 + j190,53) \text{ V}$$

Ví dụ 2.2.2 :

Tính tổng của hai điện áp hình sin

$$u_1(t) = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 60^0\right) \text{ V}$$

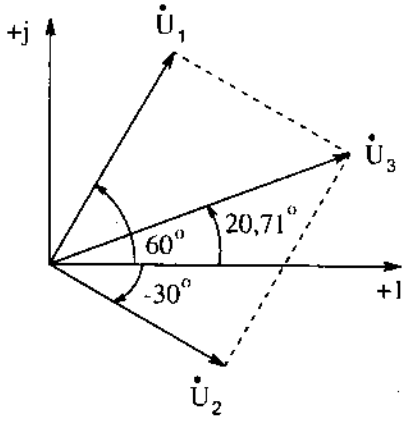
và $$u_2(t) = 180\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 30^0\right) \text{ V}$$

Giải :

Ta có các điện áp (hiệu dụng) phức

$$\dot{U}_1 = 220e^{j60^0} = 220\angle 60^0 \text{ V}$$

và $$\dot{U}_2 = 180e^{-j30^0} = 180\angle -30^0 \text{ V}$$



Hình 2.2.6

Ta tính tổng của hai điện áp (hiệu dụng) phức

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \left(220\angle 60^0\right) + \left(180\angle -30^0\right) =$$

$$= (110,00 + j190,53) + (155,88 - j90,000) =$$

$$= (265,88 + j100,53) \text{ V} =$$

$$= \left(284,25\angle 20,71^0\right) \text{ V}$$

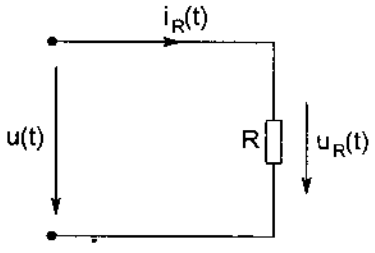
vậy $u_3(t) = 284,25\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 20,71^0\right)$ V.

Đồ thị véctơ cho các điện áp $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ và $\dot{U}_3$ được vẽ ở H.2.2.6.

2.3. MẠCH ĐIỆN CHỈ CÓ ĐIỆN TRỞ R

2.3.1. Dòng điện và điện áp. Định luật Ohm dưới dạng phức

Xét mạch điện đơn giản nhất chỉ có một phần tử có điện trở R nối vào một nguồn điện áp hình sin (H.2.3.1)



Hình 2.3.1

Ta có

$$u_R(t) = u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \qquad (2.3.1)$$

Từ biểu thức của định luật Ohm cho điện trở

$$u_R(t) = Ri_R(t) \qquad (2.3.2)$$

ta rút ra $$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U_{Rm}}{R}\sin(\omega t + \psi_{u_R})$$

$$= \frac{U_m}{R}\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$= I_{Rm}\sin(\omega t + \psi_{i_R}) \qquad (2.3.3)$$

với $$I_{Rm} = \frac{U_{Rm}}{R} = \frac{U_m}{R} \qquad (2.3.4)$$

và $$\psi_i = \psi_{u_R} = \psi_u \qquad (2.3.5)$$

Vậy dòng điện hình sin trong điện trở R có cùng tần số và cùng pha với điện áp hình sin đặt vào điện trở.

Ta ký hiệu I_R, U_R là các trị số hiệu dụng của $i_R(t)$ và $u_R(t)$, tức

$$I_R = \frac{I_{Rm}}{\sqrt{2}} \qquad (2.3.6)$$

$$U_R = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}} \qquad (2.3.7)$$

Hệ thức (2.3.4) có thể viết là

$$I_R = \frac{U_R}{R} \qquad (2.3.8)$$

Ta định nghĩa các điện áp hiệu dụng phức $\dot{U}$, $\dot{U}_R$ và dòng điện hiệu dụng phức $\dot{I}_R$ như sau

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = U\angle\psi_u$$

$$\dot{U}_R = U_R e^{j\psi_{u_R}} = U_R\angle\psi_{u_R}$$

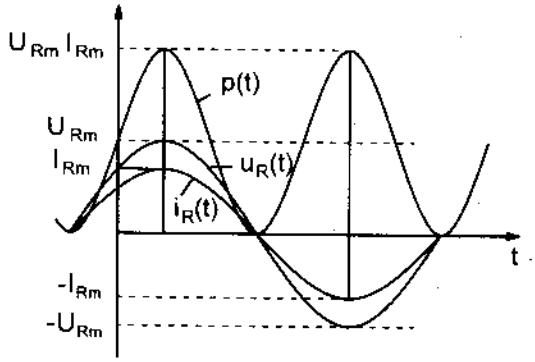
và $$\dot{I}_R = I_R e^{j\psi_{i_R}} = I_R\angle\psi_{i_R}$$

Hệ thức (2.3.8) tương ứng với hệ thức sau

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_R}{R} = \frac{\dot{U}}{R} \qquad (2.3.9)$$

Hệ thức (2.3.9) được gọi là biểu thức của *định luật Ohm dưới dạng phức cho điện trở R*. Nó tương đương với tập hợp 2 hệ thức (2.3.4) và (2.3.5).

Các đường cong của $i_R(t)$ và $u_R(t) = u(t)$ được vẽ trên H. 2.3.2 và đồ thị vectơ của của $\dot{I}_R$ và $\dot{U}_R = \dot{U}$ được vẽ ở H. 2.3.3.



Hình 2.3.2

Hình 2.3.3

2.3.2. Công suất tức thời và công suất tác dụng

Với các chiều dương của $i_R(t)$ và $u_R(t)$ chọn giống nhau như ở H. 2.3.1 thì công suất tức thời $p_R(t)$ tiêu thụ bởi điện trở R sẽ bằng

$$p_R(t) = u_R(t)\, i_R(t) =$$

$$= U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{u_R})\, I_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{i_R}) =$$

$$= R\, I_{Rm}^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) \qquad (2.3.10)$$

(Ở đây $\psi_{u_R} = \psi_{i_R} = \psi_i$)

Ta nhận thấy $p_R(t) \geq 0$ với mọi t. Đường cong của $p_R(t)$ được vẽ ở H.2.3.2.

Người ta định nghĩa *công suất tác dụng (active power)* P_R là trị số trung bình của công suất tức thời $p_R(t)$ trong một chu kỳ của dòng điện

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T p_R(t)\, dt \qquad (2.3.11)$$

Ta dễ thấy rằng

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T R\, I_{Rm}^2 \sin^2(\omega t + \psi_i)\, dt =$$

$$= R\left[\frac{1}{T}\int_0^T I_{Rm}^2 \sin^2(\omega t + \psi_i)\, dt\right]$$

tức là

$$P_R = R\, I_R^2 \qquad (2.3.12)$$

Ví dụ 2.3.1 : Cho một điện trở R = 100 Ω nối vào nguồn điện áp $u(t)=220\sqrt{2}\sin\omega t$ V. Hãy tìm $i_R(t)$, I_R, $\dot{I}_R$, $p_R(t)$ và P_R.

Giải :

Ta có
$$i_{R(t)}=\frac{u(t)}{R}=\frac{220\sqrt{2}}{100}\sin\omega t=$$
$$=2,2\sqrt{2}\sin\omega t \text{ A.}$$
$$I=\frac{U}{R}=\frac{220}{100}=2,2 \text{ A.}$$
và
$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}}{R}=\frac{220\angle 0^0}{100}=2,2\angle 0^0 \text{ A.}$$

Công suất tức thời :
$$p_R(t)=u_R(t)i_R(t)=R\,i_R^2(t)$$
$$=100\times(2,2\sqrt{2})^2\sin^2\omega t=968\sin^2\omega t \text{ W}$$

Công suất tác dụng :
$$P_R=R\,I_R^2=100\times(2,2)^2=484 \text{ W}$$

Ta cũng có thể tính được P_R từ công thức định nghĩa của nó theo (2.3.11) :
$$P_R=\frac{1}{T}\int_0^T p_R(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T 968\sin^2\omega t\,dt=$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T 968\frac{(1-\cos 2\omega t)}{2}\,dt=$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T 484\,dt-\frac{1}{T}\int_0^T 484\cos 2\omega t\,dt$$

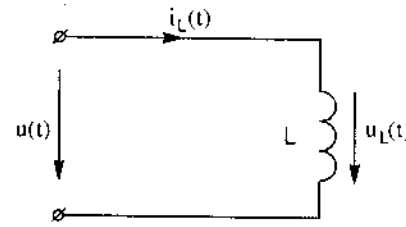
Chú ý rằng tích phân thứ hai bằng không
$$\int_0^T 484\cos 2\omega t\,dt=484\left.\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right|_0^T=\frac{484}{2\omega}(\sin 4\pi-\sin 0)=0$$

nên ta có
$$P_R=\frac{1}{T}\int_0^T 484\,dt=484 \text{ W}$$

2.4. MẠCH ĐIỆN CHỈ CÓ ĐIỆN CẢM L

2.4.1. Dòng điện và điện áp. Định luật Ohm dưới dạng phức

Ta xét mạch điện đơn giản chỉ gồm có một phần tử có điện cảm L nối vào một nguồn điện áp hình sin (H.2.4.1).



Hình 2.4.1

Ta có

$$u_L(t) = u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \qquad (2.4.1)$$

với $$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (2.4.2)$$

Với nguồn điện áp hình sin thì ở chế độ xác lập dòng điện trong mạch cũng là một dòng điện hình sin có cùng tần số.

Đặt $$i_L(t) = I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{i_L}) \qquad (2.4.3)$$

$$u_L(t) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{u_L}) \qquad (2.4.4)$$

và thay vào (2.4.2) và (2.4.1) ta được

$$L\frac{d}{dt}\left[I_{L_m} \sin(\omega t + \psi_{i_L})\right] = U_{L_m} \sin(\omega t + \psi_{u_L}) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

hay

$$(\omega L) I_{Lm} \sin\left(\omega t + \psi_{i_L} + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{u_L}) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \qquad (2.4.5)$$

Từ (2.4.5) ta rút ra:

$$U_m = U_{Lm} = (\omega L) I_{Lm} \qquad (2.4.6)$$

và $$\psi_{i_L} + \frac{\pi}{2} = \psi_{u_L} = \psi_u \qquad (2.4.7)$$

hay $$I_{Lm} = \frac{U_{Lm}}{\omega L} = \frac{U_m}{\omega L} \qquad (2.4.8)$$

và $$\psi_{i_L} = \psi_{u_L} - \frac{\pi}{2} = \psi_u - \frac{\pi}{2} \qquad (2.4.9)$$

Với các ký hiệu I_L, U_L là các trị số hiệu dụng của $i_L(t)$ và $u_L(t)$:

$$I_L = \frac{I_{Lm}}{\sqrt{2}},$$

$$U_L = \frac{U_{Lm}}{\sqrt{2}},$$

hệ thức (2.4.8) cho ta :

$$I_L = \frac{U_L}{\omega L} \qquad (2.4.10)$$

Ta định nghĩa các điện áp hiệu dụng phức

$$\dot{U}_L = U_L e^{j\psi_{u_L}} = U_L \angle \psi_{u_L} \qquad (2.4.11)$$

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = U \angle \psi_u \qquad (2.4.12)$$

và dòng điện hiệu dụng phức

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_{i_L}} = I_L \angle \psi_{i_L} \qquad (2.4.13)$$

Từ (2.4.9), (2.4.10) và (2.4.11) ta có

$$\dot{U}_L = U_L e^{j\psi_{u_L}} = (\omega L) I_L e^{j\left(\psi_{i_L} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= (\omega L)\left(I_L e^{j\psi_{i_L}}\right) e^{j\frac{\pi}{2}}$$

hay $$\dot{U}_L = (j\omega L)\dot{I}_L \qquad (2.4.14)$$

(Chú ý rằng $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = 0 + j1 = j$).

Hệ thức (2.4.14) còn có thể viết là:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{j\omega L} \qquad (2.4.15)$$

Các hệ thức (2.4.14) và (2.4.15) cho ta quan hệ giữa $\dot{U}_L$ và $\dot{I}_L$, có dạng giống với biểu thức của định luật Ohm dưới dạng phức cho điện trở R. Người ta đưa vào ký hiệu

$$X_L = \omega L \qquad (2.4.16)$$

gọi là *điện kháng của điện cảm (inductive reactance)*

và $$Z_L = j\omega L = jX_L \qquad (2.4.17)$$

gọi là *tổng trở phức (complex impedance)* hay *tổng trở (impedance)* của điện cảm L.

Ta có thể viết (2.4.15) dưới dạng

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{Z_L} = \frac{\dot{U}_L}{jX_L} = \frac{\dot{U}_L}{j\omega L} \qquad (2.4.18)$$

hoặc $$\dot{U}_L = Z_L \dot{I}_L = (jX_L)\dot{I}_L = (j\omega L)\dot{I}_L \qquad (2.4.19)$$

Các hệ thức (2.4.18) và (2.4.19) được gọi là các biểu thức của *định luật Ohm dưới dạng phức cho điện cảm.*

Từ (2.4.9) ta thấy rằng dòng điện hình sin trong điện cảm chậm về pha so với điện áp trên nó một góc là $\frac{\pi}{2}$, hay nói cách khác, điện áp hình sin trên điện cảm vượt trước về pha so với dòng điện trong nó một góc là $\frac{\pi}{2}$. Điều này được thể hiện bởi thừa số $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ trong biểu thức của tổng trở phức của điện cảm:

$$Z_L = j\omega L = jX_L = \omega L\angle\frac{\pi}{2} = X_L\angle\frac{\pi}{2} \qquad (2.4.20)$$

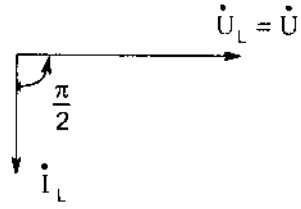
Đồ thị véctơ cho $\dot{U}_L$ và $\dot{I}_L$ được vẽ ở H.2.4.2.

Biểu thức của trị số tức thời của dòng điện $i_L(t)$ là :

$$i_L(t) = I_{L_m}\sin\left(\omega t + \psi_{u_L} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

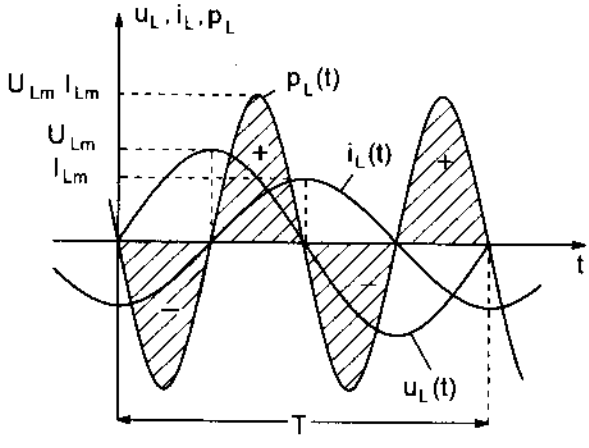
$$= \left(\frac{U_{L_m}}{\omega L}\right)\sin\left(\omega t + \psi_{u_L} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{U_m}{\omega L}\sin\left(\omega t + \psi_{u_L} - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.4.21)$$



Hình 2.4.2

Các đường cong của $u_L(t)$ và $i_L(t)$ cho trường hợp $\psi_u = \psi_{u_L} = 0$ được vẽ ở H.2.4.3.



Hình 2.4.3

2.4.2. Công suất tức thời $p_L(t)$ và công suất phản kháng Q_L

Với các chiều dương của $u_L(t)$ và $i_L(t)$ chọn giống nhau như ở H.2.4.1 thì công suất tức thời $p_L(t)$ trong điện cảm bằng

$$p_L(t) = u_L(t)\, i_L(t)$$

$$= U_{L_m} \sin\left(\omega t + \psi_{u_L}\right) \times I_{L_m} \sin\left(\omega t + \psi_{i_L}\right)$$

$$= X_L I_{L_m}^2 \sin\left(\omega t + \psi_{i_L} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \psi_{i_L}\right)$$

$$= X_L I_{L_m}^2 \cos\left(\omega t + \psi_{i_L}\right) \sin\left(\omega t + \psi_{i_L}\right)$$

hay

$$p_L(t) = \left(X_L I_L^2\right) \sin 2\left(\omega t + \psi_{i_L}\right) = Q_L \sin 2\left(\omega t + \psi_{i_L}\right) \qquad (2.4.22)$$

Ta nhận thấy rằng công suất tức thời $p_L(t)$ dao động hình sin với tần số góc 2ω (gấp đôi tần số góc của nguồn điện áp), với biên độ bằng :

$$Q_L = X_L I_L^2 \qquad (2.4.23)$$

Người ta định nghĩa công suất tác dụng P_L là trị số trung bình của công suất tức thời $p_L(t)$ trong một chu kỳ của dòng điện:

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t)\, dt \qquad (2.4.24)$$

Thay (2.4.22) vào (2.4.24) ta dễ thấy rằng

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T X_L I_L^2 \sin 2\left(\omega t + \psi_{i_L}\right) dt = 0 \qquad (2.4.25)$$

Về mặt vật lý điều này có nghĩa là ở điện cảm không có sự tiêu hao năng lượng mà chỉ có sự trao đổi năng lượng giữa nguồn và từ trường. Trong mỗi chu kỳ lượng năng lượng do nguồn đưa vào từ trường của điện cảm cũng bằng lượng năng lượng mà từ trường trả lại nguồn. Điều này thể hiện ở sự bằng nhau của các phần diện tích dương (giới hạn giữa đường cong $p_L(t)$ và trục thời gian) và các phần diện tích âm (giới hạn giữa đường cong $p_L(t)$ và trục thời gian) trong một chu kỳ T ở trên H. 2.4.3

Để đặc trưng cho cường độ của sự trao đổi năng lượng giữa nguồn và từ trường của điện cảm người ta dùng *biên độ của công suất tức thời* $p_L(t)$ tức:

$$Q_L = X_L I^2 \qquad (2.4.26)$$

gọi là *công suất phản kháng* (reactive power) của điện cảm. Công suất phản kháng Q_L có đơn vị là volt - ampere phản kháng (volt - ampère réactif) viết tắt là VAr.

Ví dụ 2.4.1 :

Một điện cảm L = 200 mH được nối vào nguồn điện áp hình sin $u(t) = 220\sqrt{2}\sin\omega t$ V với f = 50 Hz. Hãy tìm Z_L, $\dot{I}_L$, $i_L(t)$, $p_L(t)$ và Q_L.

Giải :

Tổng trở phức của điện cảm bằng

$$Z_L = j\omega L = j(2\pi fL) = j(2\pi \times 50 \times 0,2) = j62,832\ \Omega$$

Dòng điện hiệu dụng phức trong điện cảm bằng

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{Z_L} = \frac{220\angle 0^0}{j62,832} = -j3,5014\ A = \left(3,5014\angle -\frac{\pi}{2}\right)\ A$$

Dòng điện hiệu dụng I_L = 3,5014 A.

Biểu thức của dòng điện tức thời trong điện cảm là

$$i_L(t) = 3,5014\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\ A$$

Công suất tức thời

$$p_L(t) = u_L(t) \times i_L(t)$$

$$= \left[220\sqrt{2}\sin(100\pi t)\right] \times \left[3,5014\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= (770,31)\sin 2\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

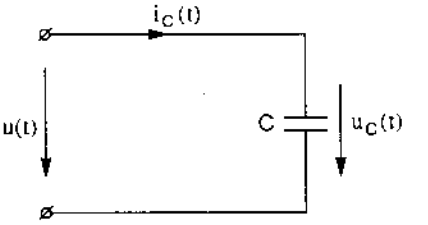
Công suất phản kháng của điện cảm

$$Q_L = X_L I_L^2 = (62,832)(3,5014)^2 = 770,31\ VAr$$

2.5. MẠCH ĐIỆN CHỈ CÓ ĐIỆN DUNG C

2.5.1. Dòng điện và điện áp. Định luật Ohm dưới dạng phức

Ta xét mạch điện đơn giản chỉ gồm có một phần tử có điện dung C nối vào một nguồn điện áp hình sin (H.2.5.1)



Hình 2.5.1

Ta có:

$$u_C(t) = u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \qquad (2.5.1)$$

và $$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad (2.5.2)$$

Với nguồn điện áp hình sin thì ở chế độ xác lập dòng điện trong mạch cũng là một dòng điện hình sin có cùng tần số.

Đặt $$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{u_C}) \qquad (2.5.3)$$

$$i_C(t) = I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{i_C}) \qquad (2.5.4)$$

và thay vào (2.5.2) và (2.5.1) ta được

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}\left[U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{u_C})\right] =$$

$$= C\frac{d}{dt}\left[U_m \sin(\omega t + \psi_u)\right]$$

hay

$$I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{i_C}) = (\omega C) U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_{u_C}) =$$

$$= (\omega C) U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_{u_C} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.5.5)$$

Từ (2.5.5) ta rút ra

$$I_{Cm} = \omega C U_{Cm} = \omega C U_m \qquad (2.5.6)$$

và $$\psi_{i_C} = \psi_{u_C} + \frac{\pi}{2} = \psi_u + \frac{\pi}{2} \qquad (2.5.7)$$

hay $$I_{Cm} = \frac{U_{Cm}}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U_m}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} \qquad (2.5.8)$$

Với các ký hiệu I_C, U_C là các trị số hiệu dụng của $i_C(t)$ và $u_C(t)$

$$I_C = \frac{I_{Cm}}{\sqrt{2}}$$

$$U_C = \frac{U_{Cm}}{\sqrt{2}}$$

hệ thức (2.5.8) có thể viết là

$$I_C = \frac{U_C}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} \qquad (2.5.9)$$

Ta định nghĩa các điện áp hiệu dụng phức

$$\dot{U}_C = U_C e^{j\psi_{u_C}} = U_C \angle \psi_{u_C} \qquad (2.5.10)$$

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = U \angle \psi_u \qquad (2.5.11)$$

và dòng điện hiệu dụng phức

$$\dot{I}_C = I_C e^{j\psi_{i_C}} = I_C \angle \psi_{i_C} \qquad (2.5.12)$$

Từ (2.5.9) ta có

$$\dot{I}_C = I_C e^{j\psi_{i_C}} = \frac{U_C}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)} e^{j\left(\psi_{u_C} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= (\omega C)\left(U_C e^{j\psi_{u_C}}\right) e^{j\frac{\pi}{2}}$$

hay $$\dot{I}_C = (j\omega C)\dot{U}_C \qquad (2.5.13)$$

(Chú ý rằng $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = 0 + j1 = j$)

Hệ thức (2.5.13) còn có thể viết là:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{\dot{U}_C}{\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)} \qquad (2.5.14)$$

hoặc $$\dot{U}_C = \left(\frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_C = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_C \qquad (2.5.15)$$

Các hệ thức (2.5.14) và (2.5.15) cho ta quan hệ giữa $\dot{U}_C$ và $\dot{I}_C$ có dạng giống với các biểu thức của định luật Ohm dưới dạng phức cho điện trở và cho điện cảm. Người ta đưa vào ký hiệu

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (2.5.16)$$

gọi là điện kháng của điện dung (capacitive reactance)

và
$$Z_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} \qquad (2.5.17)$$

gọi là *tổng trở phức* (complex impedance) hay *tổng trở* (impedance) của điện dung C.

Ta có thể viết (2.5.14) dưới dạng

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = \frac{\dot{U}_C}{-jX_C} = \frac{\dot{U}_C}{-j\left(\frac{1}{\omega C}\right)} \qquad (2.5.18)$$

hoặc
$$\dot{U}_C = Z_C\dot{I}_C = (-jX_C)\dot{I}_C = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_C \qquad (2.5.19)$$

Các hệ thức (2.5.18) và (2.5.19) được gọi là các biểu thức của *định luật Ohm dưới dạng phức cho điện dung.*

Từ (2.5.19) ta thấy rằng, dòng điện hình sin trong điện dung vượt trước về pha so với điện áp trên nó một góc là $\frac{\pi}{2}$, hay nói cách khác, điện áp hình sin trên điện dung chậm sau về pha so với dòng điện trong nó một góc là $\frac{\pi}{2}$. Điều này được thể hiện ở thừa số $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ trong biểu thức của tổng trở phức của điện dung :

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = \left(\frac{1}{\omega C}\right)\angle -\frac{\pi}{2} = X_C\angle -\frac{\pi}{2} \qquad (2.5.20)$$

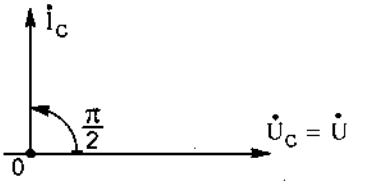
Đồ thị véctơ cho $\dot{U}_C$ và $\dot{I}_C$ được vẽ ở H.2.5.2.

Biểu thức của trị số tức thời của dòng điện $i_C(t)$ là:

$$i_C(t) = I_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right)$$

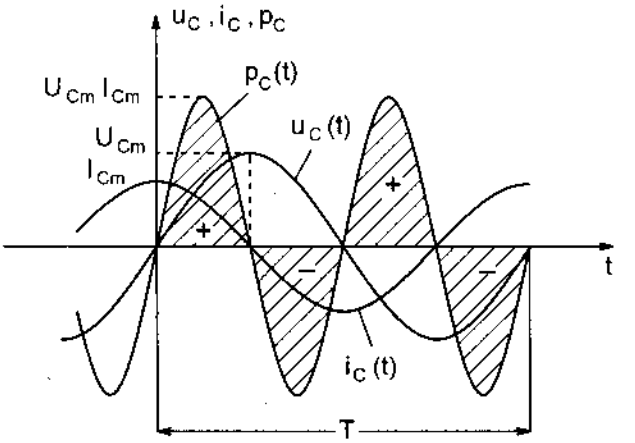
$$= \frac{U_{Cm}}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)}\sin\left(\omega t + \psi_{u_C} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{U_m}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)}\sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.5.21)$$



Hình 2.5.2

Các đường cong của $u_C(t)$ và $i_C(t)$ cho trường hợp $\psi_u = \psi_{u_C} = 0$ được vẽ ở H.2.5.3.



Hình 2.5.3

2.5.2. Công suất tức thời $p_C(t)$ và công suất phản kháng Q_C

Với các chiều dương của $u_C(t)$ và $i_C(t)$ chọn giống nhau như ở H.2.5.1 thì công suất tức thời $p_C(t)$ trong điện dung bằng

$$p_C(t) = u_C(t)\, i_C(t)$$
$$= U_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi_{u_C}\right) \times I_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi_{i_C}\right)$$
$$= X_C I_m^2 \sin\left(\omega t + \psi_{u_C}\right)\cos\left(\omega t + \psi_{u_C}\right)$$

hay
$$p_C(t) = X_C I^2 \sin 2\left(\omega t + \psi_{u_C}\right)$$
$$= Q_C \sin 2\left(\omega t + \psi_{u_C}\right) \qquad (2.5.22)$$

Ta nhận thấy rằng công suất tức thời $p_C(t)$ dao động hình sin với tần số góc 2ω (gấp đôi tần số góc của nguồn điện áp) với biên độ bằng:

$$Q_C = X_C I^2 \qquad (2.5.23)$$

Người ta định nghĩa công suất tác dụng P_C là trị số trung bình của công suất tức thời $p_L(t)$ trong một chu kỳ của dòng điện:

$$P_C = \frac{1}{T}\int_0^T p_C(t)\,dt \qquad (2.5.24)$$

Thay (2.5.22) vào (2.5.24) ta dễ thấy rằng:

$$P_C = \frac{1}{T}\int_0^T X_C I_C^2 \sin 2\left(\omega t + \psi_{u_C}\right) dt = 0 \qquad (2.5.25)$$

Về mặt vật lý, điều này có nghĩa là ở điện dung không có sự tiêu hao năng lượng mà chỉ có sự trao đổi năng lượng giữa nguồn và điện trường. Trong mỗi chu kỳ, lượng năng lượng do nguồn đưa vào điện trường cũng bằng lượng năng lượng mà điện trường trả lại nguồn. Điều này thể hiện ở sự bằng nhau của các phần diện tích dương giới hạn giữa đường cong $p_C(t)$ và trục thời gian và các phần diện tích âm giới hạn giữa đường cong $p_C(t)$ và trục thời gian trong một chu kỳ T ở trên H. 2.5.3.

Để đặc trưng cho cường độ của sự trao đổi năng lượng giữa nguồn và điện trường của điện dung, người ta dùng *biên độ của công suất tức thời $p_C(t)$* tức là:

$$Q_C = X_C I^2 \qquad (2.5.26)$$

gọi là *công suất phản kháng* (reactive power) của điện dung. Công suất phản kháng Q_C có đơn vị là volt - ampere phản kháng (volt - ampere réactif), viết tắt là VAr.

Ví dụ 2.5.1 :

Một điện dung C = 20 μF được nối vào nguồn điện áp hình sin $u(t) = 220\sqrt{2}\sin\omega t$ V, với f = 50 Hz. Hãy tìm Z_C, $\dot{I}_C$, $i_C(t)$, $p_C(t)$ và Q_C.

Giải :

Tổng trở phức của điện dung bằng

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{2\pi fC} = -j\frac{1}{2\pi \times 50 \times 20 \times 10^{-6}} = -j159{,}15\ \Omega$$

Dòng điện hiệu dụng phức trong điện dung bằng

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{Z_C} = \frac{220\angle 0^0}{-j159{,}15} = j1{,}3823 = \left(1{,}3823\angle\frac{\pi}{2}\right)\ A$$

Dòng điện hiệu dụng I_C = 1,3823 A.

Biểu thức của dòng điện tức thời trong điện dung là

$$i_C(t) = (1{,}3823)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ A = (1{,}3823)\sqrt{2}\cos(100\pi t)\ A$$

Công suất tức thời

$$\begin{aligned} p_C(t) &= u_C(t)\, i_C(t) \\ &= 220\sqrt{2}\sin(100\pi t) \times 1{,}3823\sqrt{2}\cos(100\pi t) \\ &= 304{,}11\sin(200\pi t)\ W \end{aligned}$$

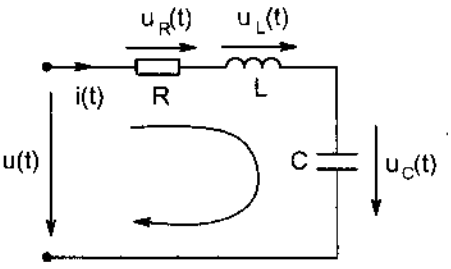
Công suất phản kháng

$$Q_C = X_C I_C^2 = (159{,}15)\left(1{,}3823\right)^2 = 304{,}11 \text{ VAr}$$

2.6. MẠCH RLC

2.6.1. Định luật Ohm dạng phức và tổng trở phức cho mạch RLC

Bây giờ ta xét một mạch điện đơn giản gồm các phần tử điện trở R, điện cảm L và điện dung C nối tiếp, gọi tắt là mạch RLC (H.2.6.1).



Hình 2.6.1

Khi điện áp đặt vào mạch u(t) là điện áp hình sin $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ thì ở chế độ xác lập dòng điện trong mạch cũng là dòng điện hình sin có cùng tần số góc ω.

Nếu đặt $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ là dòng điện trong mạch (ở chế độ xác lập) ta cần tìm I_m và ψ_i theo U_m, ψ_u, R, L, C và ω đã cho.

Áp dụng định luật Kirchhoff về các áp (hay định luật Kirchhoff thứ hai) cho vòng RLC ta có

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t) \qquad (2.6.1)$$

Vì các điện áp u_R, u_L và u_C và u(t) đều là các hàm hình sin có cùng tần số góc ω nên ta có thể dùng các ảnh phức $\dot{U}_R$, $\dot{U}_L$, $\dot{U}_C$ và $\dot{U}$ của chúng và viết phương trình theo định luật Kirchhoff cho các áp dưới dạng phức:

$$\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U} \qquad (2.6.2)$$

Theo định luật Ohm dạng phức cho các phần tử R, L và C ta lần lượt có:

$$\dot{U}_R = R\dot{I} \qquad (2.6.3)$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I} = Z_L\dot{I} \qquad (2.6.4)$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = -jX_C\dot{I} = Z_C\dot{I} \qquad (2.6.5)$$

với

$$Z_L = jX_L = j\omega L \qquad (2.6.6)$$

$$Z_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \qquad (2.6.7)$$

Từ (2.6.2) và (2.6.3) ÷ (2.6.7) ta có :

$$R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} = \dot{U} \qquad (2.6.8)$$

hay $$\left(R + jX_L - jX_C\right)\dot{I} = \left[R + j\left(X_L - X_C\right)\right]\dot{I} = \left(R + jX\right)\dot{I} = \dot{U} \qquad (2.6.9)$$

hay $$Z\dot{I} = \dot{U} \qquad (2.6.10)$$

với $$Z = R + jX = R + j\left(X_L - X_C\right) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad (2.6.11)$$

Hệ thức (2.6.2) được gọi là *định luật Ohm dạng phức cho mạch RLC* và Z xác định bởi (2.6.11) được gọi là *tổng trở phức (complex impedance)* hay *tổng trở (impedance)* của mạch RLC.

Ta cũng có thể viết (2.6.10) dưới dạng:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} \qquad (2.6.12)$$

Đặt $$Z = ze^{j\varphi} = z\angle\varphi \qquad (2.6.13)$$

ta có

$$z = |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (2.6.14)$$

là *môđuyn (modulus)* của tổng trở phức

và $$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{arctg}\frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \qquad (2.6.15)$$

được gọi là *ác - gu - men (argument)* của tổng trở phức.

Hệ thức (2.6.12) tương đương với hai hệ thức sau đây

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (2.6.16)$$

và $$\psi_i = \psi_u - \varphi \qquad (2.6.17)$$

Vậy dòng điện i(t) chậm về pha so với điện áp u(t) góc φ. Chú ý rằng, góc φ có thể có trị số dương hoặc âm.

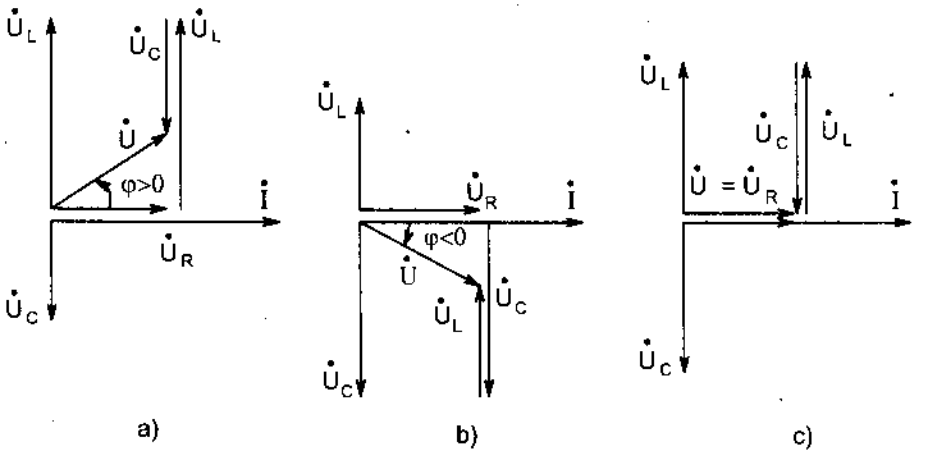
Nếu $X_L > X_C$ thì $X = X_L - X_C > 0$ và $\varphi > 0$. Trong trường hợp này, dòng điện chậm pha sau điện áp.

Nếu $X_L < X_C$ thì $X = X_L - X_C < 0$ và $\varphi < 0$. Trong trường hợp này, dòng điện vượt trước điện áp.

Trong trường hợp đặc biệt $X_L = X_C$ thì $X = X_L - X_C = 0$ và $\varphi = 0$ tức là dòng điện cùng pha với điện áp.

Các đồ thị vectơ vẽ cho mạch RLC cho 3 trường hợp này như ở H.2.6.2.

Trường hợp đặc biệt ($X_L = X_C$) sẽ được xét kỹ hơn trong mục 2.7.



Hình 2.6.2

Ví dụ 2.6.1 :

Cho mạch điện RLC (H.2.6.1) với R = 100 Ω; L = 200 mH; C = 20 μF. Biết $u(t) = 120\sqrt{2}\sin\omega t$ V và f = 50 Hz. Hãy tính Z, $\dot{I}$, $\dot{U}_R$, $\dot{U}_L$ và $\dot{U}_C$.

Giải :

Ta có $\omega = 2\pi f = 2\pi\times 50 \approx 314{,}16$ rad/s.

$X_L = \omega L = 314{,}16\times 0{,}2 = 62{,}832\ \Omega$.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}16\times 20\times 10^{-6}} = 159{,}15\ \Omega$$

$X = X_L - X_C = 62{,}832 - 159{,}15 = -96{,}318\ \Omega$.

Vậy tổng trở phức của mạch là :

$$Z = R + jX = 100 - j96{,}318 = 138{,}84\angle -43{,}93^0\ \Omega$$

Dòng điện hiệu dụng phức trong mạch bằng :

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{120\angle 0^0}{100 - j96{,}318} = 0{,}6225 + j0{,}5996 = 0{,}8643\angle 43{,}93^0\ \text{A}$$

Điện áp hiệu dụng phức trên các phần tử :

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 100\times(0{,}8643\angle 43{,}93^0) = 86{,}43\angle 43{,}93^0\ \text{V}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = (j62{,}832)(0{,}6225 + j0{,}5996)$$

$$= -37{,}674 + j39{,}113 = 54{,}306\angle 133{,}93^0\ \text{V}$$

$$\dot{U}_C = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I} = (-j159,15)(0,6225 + j0,5996)$$

$$= 95,426 - j99,071 = 137,55\angle -46,07 \text{ V}$$

Biểu thức của dòng điện tức thời:

$$i(t) = 0,8643\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 43,93^0\right) \text{ A}$$

Biểu thức của điện áp tức thời trên các phần tử:

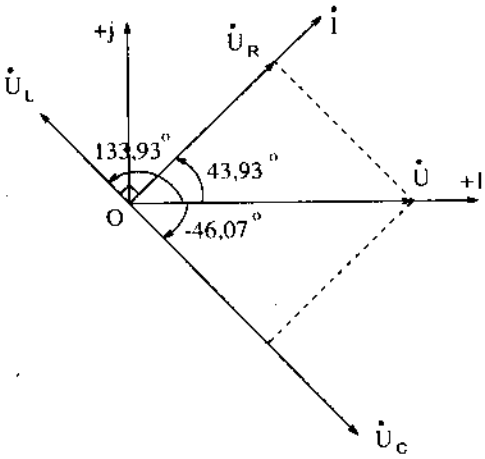
$$u_R = 86,43\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 43,93^0\right) \text{ V}$$

$$u_L = 54,306\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 133,93^0\right) \text{ V}$$

$$u_C = 137,55\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 46,07^0\right) \text{ V}$$

Đồ thị vectơ biểu diễn các dòng điện và điện áp phức trong mạch được vẽ ở H.2.6.3.

Chú ý rằng vì $X_L < X_C$ hay $X = X_L - X_C < 0$ nên $\varphi < 0$, dòng điện i(t) vượt pha trước điện áp u(t).



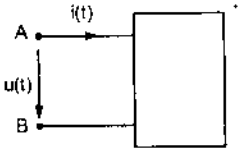
Hình 2.6.3

2.6.2. Công suất tức thời p(t). Công suất tác dụng P. Công suất phản kháng Q và công suất biểu kiến S tron g mạch điện

a) Công suất tức thời p(t)

Công suất tức thời, ký hiệu là p(t), của một bộ phận mạch điện giữa hai cực A và B là tích số của điện áp tức thời đặt vào mạch $u(t) = u_{AB}(t)$ và dòng điện $i(t) = i_{AB}(t)$.

Với chiều dương của u(t) và i(t) chọn giống nhau (hướng từ A đến B) như ở H.2.6.4 thì p(t) là công suất tức thời tiêu thụ bởi bộ phận mạch điện giữa 2 cực A và B.



Hình 2.6.4

Trong trường hợp mạch RLC ở H.2.6.1 ta có:

$$p(t) = u(t)\,i(t) = \left(u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)\right)i(t)$$

$$= u_R(t).i(t) + u_L(t).i(t) + u_C(t).i(t)$$

$$= p_R(t) + p_L(t) + p_C(t) \qquad (2.6.18)$$

Giả sử $i(t) = I_m \sin\omega t$

ta có $u_R = RI_m \sin\omega t$

$$u_L = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = X_L I_m \cos\omega t$$

$$u_C = \left(\frac{1}{\omega C}\right) I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -X_C I_m \cos\omega t$$

và

$$p_R = u_R i(t) = RI_m^2 \sin^2\omega t = RI_m^2\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right) = RI^2(1-\cos 2\omega t) \quad (2.6.19)$$

$$p_L = u_L(t)\, i(t) = X_L I_m^2 \sin\omega t \cos\omega t = X_L I_m^2 \frac{\sin 2\omega t}{2} = X_L I^2 \sin 2\omega t \quad (2.6.20)$$

và

$$p_C = u_C(t)\, i(t) = -X_C I_m^2 \sin\omega t \cos\omega t = -X_C I_m^2 \frac{\sin 2\omega t}{2} = -X_C I^2 \sin 2\omega t \quad (2.6.21)$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} p(t) &= p_R(t) + p_L(t) + p_C(t) \\ &= RI^2(1-\cos 2\omega t) + (X_L - X_C) I^2 \sin 2\omega t \\ &= RI^2(1-\cos 2\omega t) + XI^2 \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Ta nhận thấy công suất tức thời p(t) của mạch RLC gồm hai thành phần có tính chất khác nhau.

Thành phần thứ nhất $p_R(t) = RI^2(1-\cos 2\omega t)$ luôn không âm $p_R(t) \geq 0$ và có trị số trung bình trong một chu kỳ bằng

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_R\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T RI^2(1-\cos 2\omega t)\, dt = RI^2 \quad (2.6.23)$$

Thành phần thứ hai dao động với tần số 2ω

$$p_{LC} = p_L + p_C = XI^2 \sin 2\omega t \quad (2.6.24)$$

có biên độ bằng $Q = XI^2$ và có trị số trung bình trong một chu kỳ bằng không

$$\frac{1}{T}\int_0^T p_{LC}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T XI^2 \sin 2\omega t\, dt = 0 \quad (2.6.25)$$

Thành phần thứ nhất $p_R(t)$ của công suất tức thời là công suất tiêu thụ thực sự trên điện trở R tương ứng với hiệu ứng Joule (biến đổi điện năng thành nhiệt năng). Thành phần thứ hai $p_{LC}(t)$ của công suất tức thời là công suất "tiêu thụ" bởi điện cảm L và điện dung C tương ứng với sự trao đổi năng lượng giữa từ trường và điện trường của mạch điện và nguồn điện.

b) Công suất tác dụng P

Người ta định nghĩa *công suất tác dụng* (active power) P là trị số trung bình của công suất tức thời trong một chu kỳ T của dòng điện.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \qquad (2.6.26)$$

Từ (2.6.22), (2.6.23) và (2.6.25) ta dễ thấy rằng

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T p_R(t)\,dt = RI^2 \qquad (2.6.27)$$

Đơn vị của công suất tác dụng là watt (viết tắt là W).

Để đặc trưng cho công suất trao đổi năng lượng giữa điện trường và từ trường của mạch với nguồn điện, người ta dùng biên độ

$$Q = XI^2 \qquad (2.6.28)$$

của thành phần $p_{LC}(t)$. Đại lượng Q này được gọi là *công suất phản kháng* (reactive power) và có đơn vị là VAr (volt - ampère réactif).

Chú ý rằng, từ đồ thị vectơ ở H.2.6.2 ta có:

$$U_R = RI = U\cos\varphi \qquad (2.6.29)$$

$$U_{LC} = XI = U\sin\varphi \qquad (2.6.30)$$

nên $$P = RI^2 = UI\cos\varphi \qquad (2.6.31)$$

và $$Q = XI^2 = UI\sin\varphi \qquad (2.6.32)$$

Ta định nghĩa

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI \qquad (2.6.33)$$

là *công suất biểu kiến* (apparent power) với đơn vị là VA (volt - ampere) ta có

$$P = S\cos\varphi \qquad (2.6.34)$$

và $$Q = S\sin\varphi \qquad (2.6.35)$$

Thừa số $\cos\varphi$ trong (2.6.34) được gọi là *hệ số công suất (power factor)*. Hệ số công suất có ý nghĩa rất quan trọng và sẽ được xét kỹ hơn ở mục 2.10.

c) Công suất phức

Để tính P, Q và S theo các điện áp hiệu dụng phức $\dot{U}$ và dòng điện hiệu dụng phức, người ta định nghĩa *công suất (biểu kiến) phức (apparent complex power)*

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{\dot{I}} \qquad (2.6.36)$$

trong đó $\overset{*}{\dot{I}}$ là số phức liên hợp của dòng điện hiệu dụng phức.

Giả thiết $\dot{I} = I.e^{j\psi_i}$ và $\dot{U} = U.e^{j\psi_u}$

ta có

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{\dot{I}} = (Ue^{j\psi_u}) \times (Ie^{-j\psi_i}) = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} \qquad (2.6.37)$$

hay $$\tilde{S} = UI(\cos\varphi + j\sin\varphi) = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ \qquad (2.6.38)$$

Vậy $$P = \mathrm{Re}\{\tilde{S}\} = \mathrm{Re}\left\{\dot{U}\overset{*}{\dot{I}}\right\} \qquad (2.6.39)$$

$$Q = \mathrm{Im}\{\tilde{S}\} = \mathrm{Im}\left\{\dot{U}\overset{*}{\dot{I}}\right\} \qquad (2.6.40)$$

Ở đây Re { } là *phần thực* (real part) và Im { } là *phần ảo* (imaginary part) của một số phức.

Ví dụ 2.6.2 :

Tính các công suất tức thời $p(t)$, công suất tác dụng P, công suất phản kháng Q, công suất biểu kiến S và $\tilde{S}$ trong mạch RLC ở ví dụ 2.6.1.

Giải :

Ta có $$u(t) = 120\sqrt{2}\sin\omega t \text{ V}$$

$$i(t) = 0,8643\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 43,93^0\right) \text{ A}$$

Vậy công suất tức thời

$$p(t) = u(t)i(t) = \left(120\sqrt{2}\sin\omega t\right)\left(0,8643\sqrt{2}\right)\sin\left(\omega t + 43,93^0\right)$$

$$= 2(103,7)(\sin\omega t)\sin\left(\omega t + 43,93^0\right)$$

$$= 103,7\left[\cos\left(-43,93^0\right) - \cos\left(2\omega t + 43,93^0\right)\right]$$

$$= 103,7\cos\left(-43,93^0\right) - 103,7\cos\left(2\omega t + 43,93^0\right)$$

$$= 74,7 - 103,7\cos\left(2\omega t + 43,93^0\right) \text{ W}$$

Công suất tác dụng

$$P = RI^2 = 100 \times (0,8643)^2 = 74,70 \text{ W}$$

hay $$P = UI\cos\varphi = 120 \times 0,8643 \times \cos\left(-43,93^0\right) = 74,7 \text{ W}$$

Công suất phản kháng

$$Q = XI^2 = -96,32 \times (0,8643)^2 = -71,95 \text{ VAr}$$

hay $$Q = UI\sin\varphi = 120 \times 0,8643\sin\left(-43,93^0\right) = -71,95 \text{ VAr}$$

Công suất biểu kiến

$$S = UI = 120 \times 0,8643 = 103,716 \text{ VA}$$

hay $$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(74,70)^2 + (-71,95)^2} = 103,7 \text{ VA}$$

Hệ số công suất

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S} = \frac{74,70}{103,7} = 0,7203$$

Công suất (biểu kiến) phức

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = \left(120\angle 0^0\right)\left(0,8643\angle -43,93^0\right)$$

$$= 103,7\angle -43,93^0 = (74,70 - j71,95) \text{ VA.}$$

2.7. CỘNG HƯỞNG ĐIỆN ÁP TRONG MẠCH RLC

Trong mạch điện có điện trở R, điện cảm L và điện dung C nối tiếp, gọi tắt là mạch RLC (H.2.7.1) có một tình trạng đặc biệt khi điện kháng X_L của điện cảm bằng điện kháng X_C của điện dung, tức là

$$X_L = X_C \text{ hay } \omega L = \frac{1}{\omega C} \qquad (2.7.1)$$

Lúc này, điện kháng của toàn mạch triệt tiêu

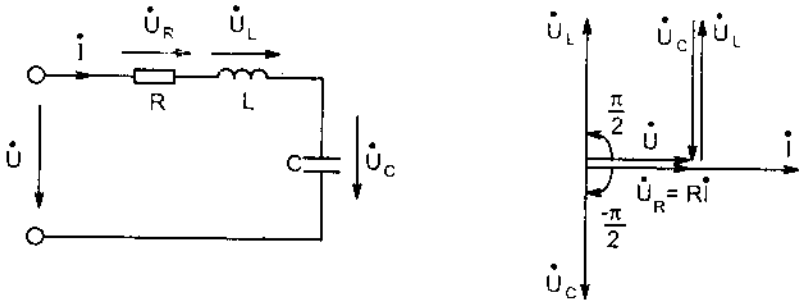
$$X = X_L - X_C = 0 \qquad (2.7.2)$$

và tổng trở của mạch bằng điện trở

$$Z = R + jX = R \qquad (2.7.3)$$

Dòng điện trong mạch sẽ cùng pha với điện áp của nguồn

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{R} \qquad (2.7.4)$$



Hình 2.7.1

Điện áp hiệu dụng phức trên điện cảm $\dot{U}_L$ và điện áp hiệu dụng phức trên điện dung $\dot{U}_C$ có môđuyn bằng nhau nhưng ngược pha nhau:

$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} \tag{2.7.5}$$

$$\dot{U}_C = -jX_C\dot{I} \tag{2.7.6}$$

tức
$$\dot{U}_L = -\dot{U}_C \tag{2.7.7}$$

và do đó
$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0 \tag{2.7.8}$$

Do (2.7.7) và (2.7.8) người ta gọi tình trạng này là *cộng hưởng điện áp*.

Đồ thị vectơ tương ứng với tình trạng cộng hưởng điện áp được vẽ ở H.2.7.1.

Giả thiết rằng điện trở R, điện cảm L và điện dung C là các hằng số, trị số hiệu dụng U của điện áp nguồn không đổi nhưng tần số góc ω của nguồn có thể biến thiên từ 0 đến ∞. Ta hãy khảo sát sự biến thiên của dòng điện hiệu dụng I theo với tần số góc ω.

Ta có

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{2.7.9}$$

và
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{2.7.10}$$

Tần số góc ω_0 ở đấy xẩy ra cộng hưởng điện áp được xác định từ hệ thức

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \tag{2.7.11}$$

Từ đó $$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad (2.7.12)$$

và $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (2.7.13)$$

Người ta gọi ω_0 là tần số góc cộng hưởng của mạch RLC, còn tần số f_0 được xác định bởi

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (2.7.14)$$

được gọi là *tần số cộng hưởng* của mạch RLC.

Từ (2.7.10) và (2.7.11) dễ dàng thấy rằng, khi có cộng hưởng điện áp thì dòng điện hiệu dụng đạt trị số cực đại và bằng

$$I_0 = \frac{U}{R} \qquad (2.7.15)$$

Trị số I_0 được gọi là *dòng điện cộng hưởng.*

Ký hiệu U_{L0} là điện áp hiệu dụng trên điện cảm khi cộng hưởng, U_{C0} là điện áp hiệu dụng trên điện dung khi cộng hưởng, ta có:

$$U_{L0} = \omega_0 L I_0 = U_{C0} = X_{C0} I_0 \qquad (2.7.16)$$

Chú ý rằng, khi cộng hưởng

$$U = RI_0 \qquad (2.7.17)$$

Ta định nghĩa hệ số phẩm chất Q bằng :

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (2.7.18)$$

Nếu $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$ thì $Q > 1$ và $U_{L0} = U_{C0} > U$ (2.7.19)

Nếu $\sqrt{\frac{L}{C}} < R$ thì $Q < 1$ và $U_{L0} = U_{C0} < U$ (2.7.20)

Để thấy rõ ý nghĩa của hệ số phẩm chất Q ta cần khảo sát đặc tính $\frac{I}{I_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

Ở đây $\frac{I}{I_0}$ là tỷ số của dòng điện hiệu dụng I với dòng điện khi cộng hưởng I_0, còn $\frac{\omega}{\omega_0}$ là tỷ số của tần số góc ω với tần số góc cộng hưởng ω_0.

Chú ý rằng

$$\omega L = \omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{2.7.21}$$

và

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega_0 C}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \omega_0 L\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{2.7.22}$$

nên

$$\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{2.7.23}$$

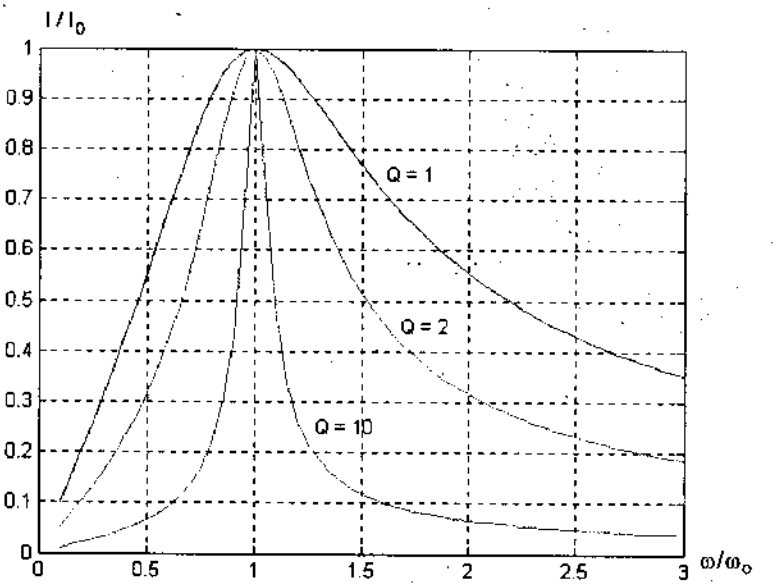
Ta có thể viết

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{2.7.24}$$

Từ (2.7.24) và (2.7.15) ta có

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{2.7.25}$$

Các đường cong $\frac{I}{I_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ tương ứng với Q = 1, Q = 2 và Q = 10 được vẽ ở H.2.7.2.



Hình 2.7.2

Ta nhận thấy rằng, nếu Q càng lớn thì đường cong càng nhọn hơn. Điều này có nghĩa rằng *nếu Q* lớn thì mạch có *tính chọn lọc cao đối với tần số* (high frequency selectivity). Do đó, *Q* được gọi là *hệ số phẩm chất* (quality factor) của mạch RLC.

Trong phụ lục PL.2.2 có cho chương trình viết bằng MATLAB để tính và vẽ các đường cong cộng hưởng của mạch RLC bằng máy vi tính.

Ví dụ 2.7.1:

Xét mạch điện RLC với R = 10 Ω, L = 400 mH. Tìm trị số của C để có cộng hưởng điện áp ở tần số f = 50 Hz. Tính I, U_R, U_L và U_C khi cộng hưởng nếu điện áp của nguồn U = 220 V.

Giải :

Từ điều kiện để có cộng hưởng điện áp trong mạch RLC :

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

ta rút ra
$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L}$$

Vậy, ta phải chọn

$$C = \frac{1}{(2\pi \times 50)^2 \times 400 \times 10^{-3}} = 25{,}33 \times 10^{-6}\ \text{F} = 25{,}33\ \mu\text{F}$$

Trị số của điện kháng của điện cảm và trị số của điện kháng của điện dung khi cộng hưởng là

$$X_{L0} = \omega_0 L = 2\pi f L = 2\pi \times 50 \times 400 \times 10^{-3} = 125{,}7\ \Omega$$

$$X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 25{,}33 \times 10^{-6}} = 125{,}7\ \Omega$$

Trị số của dòng điện khi cộng hưởng điện áp bằng

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{220}{10} = 22\ \text{A}$$

Điện áp trên điện trở R khi cộng hưởng

$$U_R = RI_0 = U = 220\ \text{V}$$

Các điện áp trên điện cảm và trên điện dung khi cộng hưởng là

$$U_{L0} = X_{L0} I_0 = 125{,}7 \times 22 = 2{,}765\ \text{kV}$$

$$U_{C0} = X_{C0} I_0 = 125{,}7 \times 22 = 2{,}765\ \text{kV}$$

Hệ số phẩm chất của mạch

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10} \times \sqrt{\frac{400 \times 10^{-3}}{25{,}33 \times 10^{-6}}} = 12{,}57$$

hoặc $$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{2,765 \times 10^3}{220} = 12,57$$

Ta nhận thấy rằng, với hệ số phẩm chất Q = 12,57 > 1 thì các điện áp trên điện cảm và điện dung khi cộng hưởng lớn gấp 12,57 lần điện áp của nguồn. Điều này có thể gây nguy hiểm đối với người hoặc thiết bị.

Ví dụ 2.7.2 :

Trong mạch điện ở ví dụ 2.7.1, giả sử các trị số của các thông số L, C và U vẫn giữ nguyên như cũ nhưng R = 200 Ω. Tính I_0, U_{R0}, U_{L0} và U_{C0} khi cộng hưởng điện áp?

Giải :

Cộng hưởng điện áp xảy ra ở tần số:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{400 \times 10^{-3} \times 25,33 \times 10^{-6}}} = 50 \text{ Hz}$$

Dòng điện khi cộng hưởng bằng:

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{220}{200} = 1,1 \text{ A}$$

Các điện áp trên R, L, C khi cộng hưởng bằng:

$$U_R = U = 220 \text{ V}$$

Hệ số phẩm chất của mạch bây giờ là:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{200}\sqrt{\frac{400 \times 10^{-3}}{25,33 \times 10^{-6}}} = 0,6283 < 1$$

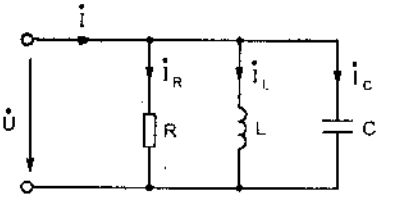
và $$U_{L0} = U_{C0} = QU = 0,6283 \times 220 = 138,3 \text{ V}.$$

Ta nhận thấy rằng với Q < 1 thì khi cộng hưởng, điện áp trên điện cảm và điện áp trên điện dung bé hơn điện áp của nguồn.

Hai ví dụ 2.7.1 và 2.7.2 cho ta thấy rằng khi nối mạch RLC ta cần tính trước xem ở tần số đã cho trong mạch có xảy ra cộng hưởng điện áp không, và nếu xảy ra cộng hưởng thì dòng điện I và các điện áp U_L, U_C khi cộng hưởng là bao nhiêu.

2.8. MẠCH R, L, C SONG SONG VÀ CỘNG HƯỞNG DÒNG ĐIỆN

Xét mạch điện gồm 3 nhánh R, L, C nối song song ở chế độ xác lập hình sin (H.2.8.1).



Hình 2.8.1

Gọi $\dot{I}_R$, $\dot{I}_L$, $\dot{I}_C$ và $\dot{I}$ là các dòng điện nhánh, theo định luật Kirchhoff về các dòng, ta có

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C \tag{2.8.1}$$

Theo định luật Ohm cho mỗi nhánh ta có

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} \tag{2.8.2}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{Z_L} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \dot{U}\left(-j\frac{1}{\omega L}\right) \tag{2.8.3}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{Z_C} = \frac{\dot{U}}{\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)} = \dot{U}(j\omega C) \tag{2.8.4}$$

Vậy $$\dot{I} = \left[\frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]\dot{U} = Y\dot{U} \tag{2.8.5}$$

với $$Y = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = G - j(B_L - B_C) = G - jB \tag{2.8.6}$$

Ở đây $$G = \frac{1}{R} \tag{2.8.7}$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} \tag{2.8.8}$$

và $$B_C = \omega C \tag{2.8.9}$$

Y được gọi là *tổng dẫn phức (complex admittance)* của mạch, G là điện dẫn tác dụng và B là điện dẫn phản kháng.

Từ các đồ thị vectơ, ta nhận thấy rằng nếu $I_L > I_C$ thì $\dot{I}$ chậm sau $\dot{U}$ (H.2.8.2a). Nếu $I_L < I_C$ thì $\dot{I}$ vượt trước $\dot{U}$ (H.2.8.2b).

- Trong trường hợp đặc biệt, khi $I_L = I_C$ (2.8.10)

thì $$\dot{I}_L + \dot{I}_C = 0 \tag{2.8.11}$$

và $$\dot{I} = \dot{I}_R + (\dot{I}_L + \dot{I}_C) = \dot{I}_R \tag{2.8.12}$$

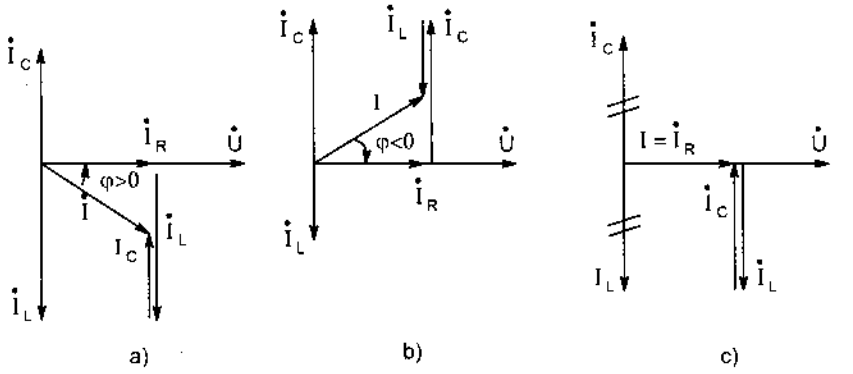
tức là $\dot{I}$ cùng pha với $\dot{U}$ (H.2.8.2c). Tình trạng đặc biệt này được gọi là *cộng hưởng dòng điện*.

Từ (2.8.6) và (2.8.11) ta suy ra rằng điều kiện để có cộng hưởng dòng điện trong mạch R, L, C song song là:

$$B = \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0 \tag{2.8.13}$$

hay $$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C \qquad (2.8.14)$$

Ta cần chú ý rằng khi cộng hưởng dòng điện thì dòng điện I có trị số nhỏ nhất và bằng $I_R = \frac{U}{R}$.



Hình 2.8.2

2.9. CỘNG HƯỞNG DÒNG ĐIỆN TRONG MẠCH SONG SONG CÓ CUỘN DÂY VÀ TỤ ĐIỆN

Xét mạch điện gồm 2 nhánh nối song song (H.2.9.1). Ở đây R_L là điện trở biểu diễn cho các tổn hao năng lượng trong cuộn dây điện cảm và R_C là một điện trở biểu diễn cho tổn hao năng lượng trong tụ điện. Ta có:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{Z_L} = \frac{\dot{U}}{R_L + jX_L} = \frac{\dot{U}(R_L - jX_L)}{R_L^2 + X_L^2} = \dot{U}\left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2}\right) - j\dot{U}\left(\frac{X_L}{R^2 + X_L^2}\right) \qquad (2.9.1)$$

và $$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{Z_C} = \frac{\dot{U}}{R_C - jX_C} = \frac{\dot{U}(R_C + jX_C)}{R_C^2 + X_C^2} = \dot{U}\left(\frac{R_C}{R_C^2 + x_C^2}\right) + j\dot{U}\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) \qquad (2.9.2)$$

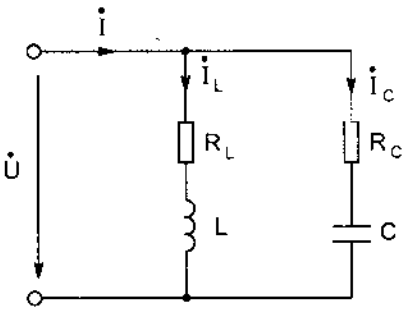
Vậy $$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U}\left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) - j\dot{U}\left(\frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) \qquad (2.9.3)$$

Từ (2.9.1) ta nhận thấy rằng, nếu các thông số của mạch thoả mãn điều kiện:

$$\frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} \qquad (2.9.4)$$

thì $$\dot{I} = \dot{U}\left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) \qquad (2.9.5)$$

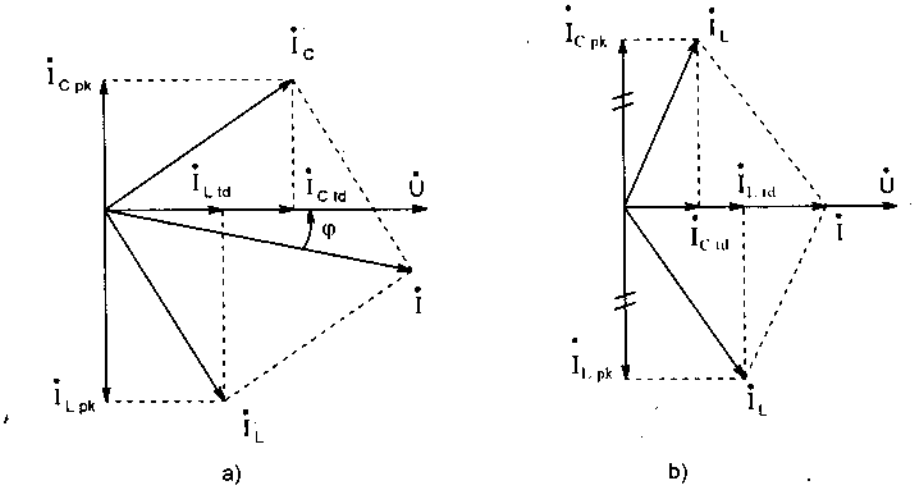
tức là $\dot{I}$ cùng pha với điện áp $\dot{U}$.



Hình 2.9.1

Tình trạng đặc biệt này được gọi là cộng hưởng dòng điện trong mạch song song của cuộn dây điện cảm và tụ điện.

Đồ thị vectơ của các dòng điện cho mạch này ở tình trạng không cộng hưởng được vẽ ở H.2.9.2a và đồ thị vectơ cho tình trạng cộng hưởng dòng điện được vẽ ở H. 2.9.2b.



Hình 2.9.2

Điều kiện cộng hưởng dòng điện (2.9.4) có thể viết là:

$$\frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

hay
$$\frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega C}{1 + (\omega C R_C)^2} \qquad (2.9.6)$$

Nói chung điều kiện (2.9.6) dẫn tới một phương trình bậc hai đối với ω, L, C, R_L hoặc R_C.

Ví dụ 2.9.1:

Xét mạch điện ở H. 2.9.1 với $R_L = 15\ \Omega$, $R_C = 30\ \Omega$, $X_C = 30\ \Omega$. Hãy tìm trị số của điện cảm để có cộng hưởng dòng điện ở tần số f = 50 Hz. Tính trị số của dòng điện các nhánh tương ứng với tình trạng cộng hưởng nếu $\dot{U} = 100\angle 0^0$ V.

Giải :

Trị số X_L để có cộng hưởng dòng điện được xác định từ hệ thức (2.9.4):

$$\frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2}$$

tức là $$\frac{X_L}{15^2 + X_L^2} = \frac{30}{30^2 + 30^2} = \frac{1}{60}$$

Ta được một phương trình bậc hai đối với X_L:

$$X_L^2 - 60X_L + 225 = 0$$

Phương trình này có 2 nghiệm là

$$X_{L1} = \frac{60 + \sqrt{60^2 - 900}}{2} = 55,98\ \Omega$$

và $$X_{L2} = \frac{60 - \sqrt{60^2 - 900}}{2} = 4,019\ \Omega$$

Các trị số của điện cảm tương ứng sẽ là

$$L_1 = \frac{X_{L1}}{2\pi f} = \frac{55,98}{2\pi \times 50} = 0,1782H = 178,2\ mH$$

$$L_2 = \frac{X_{L2}}{2\pi f} = \frac{4,019}{2\pi \times 50} = 12,79 \times 10^{-3}\ H =$$

$$= 12,79\ mH$$

Với L_1 = 178,2 mH thì dòng điện các nhánh sẽ là

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{R_L + jX_{L1}} = \frac{100}{15 + j55,98} = (0,4466 - j1,667)\ A$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R_C - jX_C} = \frac{100}{30 - j30} = (1,667 - j1,667)\ A$$

và $$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = 0,4466 + 1,667 = 2,114\ A$$

Với L_2 = 12,79 mH thì dòng điện các nhánh sẽ là

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{R_L + jX_{L2}} = \frac{100}{15 + j4,019} = (6,220 - j1,667)\ A$$

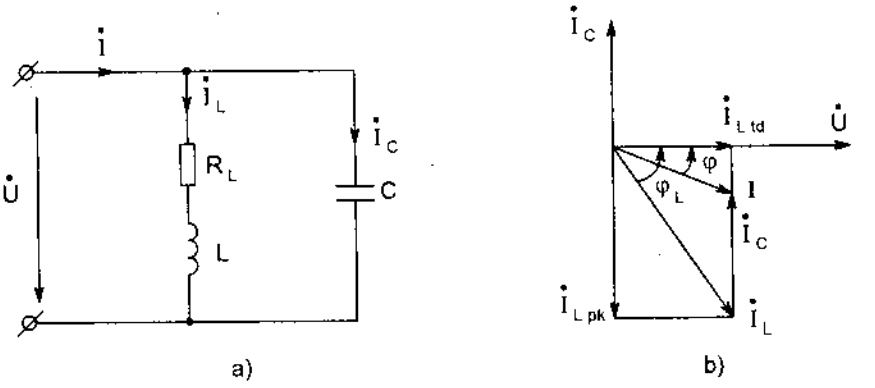
$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R_C - jX_C} = \frac{100}{30 - j30} = (1,667 + j1,667)\ A$$

và $$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = 6,220 + 1,667 = 7,887\ A$$

2.10. NÂNG CAO HỆ SỐ CÔNG SUẤT

Tải của hệ thống điện trong công nghiệp chủ yếu là các động cơ điện không đồng bộ. Đó là các tải có tính chất điện cảm, có thể biểu diễn bằng điện trở R_L

nối tiếp với điện kháng X_L (H.2.10.1a). Dòng điện $\dot{I}_L$ cung cấp cho động cơ chậm sau điện áp $\dot{U}$ một góc φ_L với $0 < \varphi_L < \frac{\pi}{2}$ như vẽ ở đồ thị véctơ H.2.10.1b



Hình 2.10.1

Dòng điện chạy vào động cơ điện là

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \frac{\dot{U}(R - jX_L)}{R^2 + X_L^2} = \dot{U}\left(\frac{R}{R^2 + X_L^2}\right) - j\dot{U}\left(\frac{X_L}{R^2 + X_L^2}\right) \qquad (2.10.1)$$

Ta phân tích $\dot{I}_L$ thành 2 thành phần:

Thành phần tác dụng $\dot{I}_{Ltd} = \dot{U}\left(\frac{R}{R^2 + X_L^2}\right)$ cùng pha với điện áp $\dot{U}$

và thành phần phản kháng $\dot{I}_{L.pk} = -j\dot{U}\left(\frac{X_L}{R^2 + X_L^2}\right)$ chậm sau điện áp $\dot{U}$ góc $\frac{\pi}{2}$.

Chính do thành phần phản kháng $\dot{I}_{Lpk}$ này mà hệ số công suất $\cos\varphi_L$ của động cơ thường nhỏ hơn 1, ví dụ $\cos\varphi_L = 0{,}8$ (hay $\varphi_L = 36{,}87^0$).

Nếu gọi P là công suất tác dụng của động cơ thì dòng điện I_L có trị số (môduyn) bằng:

$$I_L = \frac{P}{U\cos\varphi_L} \qquad (2.10.2)$$

Hệ thức (2.10.2) chứng tỏ rằng, với P và U đã xác định thì I_L càng lớn khi $\cos\varphi_L$ càng nhỏ. Dòng điện I_L lớn sẽ gây ra tổn hao điện năng trên đường dây điện. Hơn nữa nếu hệ số công suất của cả hệ thống điện có trị số thấp thì các nhà máy phát điện sẽ không thể phát được công suất tác dụng lớn như đã thiết kế gây ra lãng phí rất lớn.

Vì thế cần phải đặt vấn đề nâng cao hệ số công suất của các tải trong hệ thống điện.

Để nâng cao hệ số công suất của động cơ điện không đồng bộ, người ta nối song song với nó với tụ điện có điện dung C như vẽ ở H.2.10.1a.

Khi có tụ điện thì dòng điện trên đường dây sẽ là $\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C$, dòng điện $\dot{I}$ sẽ chậm sau điện áp một góc $\varphi < \varphi_L$ với $\cos\varphi > \cos\varphi_L$.

Từ đồ thị vectơ (H.2.10.1) ta dễ thấy rằng:

$$I_C = I_{Lpk} - I_{pk} = I_{td}tg\varphi_L - I_{td}tg\varphi = I_{td}\left(tg\varphi_L - tg\varphi\right) \quad (2.10.3)$$

Chú ý rằng $I_{td} = \dfrac{P}{U}$ (2.10.4)

và $I_C = \omega CU$ (2.10.5)

Từ (2.10.3), (2.10.4) và (2.10.5) ta có

$$\omega CU = \frac{P}{U}\left(tg\varphi_L - tg\varphi\right) \quad (2.10.6)$$

Từ đó, ta xác định được trị số của điện dung C cần thiết để làm tăng hệ số công suất từ $\cos\varphi_L$ lên $\cos\varphi$ là:

$$C = \frac{P}{\omega U^2}\left(tg\varphi_L - tg\varphi\right) \quad (2.10.7)$$

Ví dụ 2.10.1:

Một động cơ điện không đồng bộ có công suất P = 5 kW và hệ số công suất bằng 0,8 làm việc ở điện áp U = 220 V, tần số f = 50 Hz. Hãy tìm trị số của điện dung C cần nối song song với động cơ để nâng cao hệ số công suất lên tới 0,90

Giải :

Ta có

$$tg\varphi_L = \frac{\sin\varphi_L}{\cos\varphi_L} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi_L}}{\cos\varphi_L} = \frac{\sqrt{1-(0,8)^2}}{0,8} = 0,75$$

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-(0,9)^2}}{0,9} = 0,4843$$

Áp dụng công thức (2.10.7), ta có:

$$C = \frac{P}{\omega U^2}\left(tg\varphi_L - tg\varphi\right) = \frac{5\times10^3}{2\pi\times50\times220^2}\left(0,75-0,4843\right)$$

$$= 87,37\times10^{-6}\,F = 87,37\ \mu F$$

CÂU HỎI KIỂM TRA

2.1. Dòng điện hình sin là gì ? Dòng điện hình sin được đặc trưng bởi những đại lượng gì.

2.2. Định nghĩa trị số hiệu dụng của dòng điện hình sin. Quan hệ giữa trị số hiệu dụng I và biên độ I_m của dòng điện hình sin.

2.3. Cách biểu diễn một dòng điện hình sin bằng vectơ. Các ưu điểm và nhược điểm của cách biểu diễn này. Cho một số ví dụ.

2.4. Cách biểu diễn một dòng điện hình sin bằng số phức. Các ưu điểm của cách biểu diễn này so với cách biểu diễn bằng vectơ. Cho một số ví dụ.

2.5. Phát biểu và viết công thức của định luật Ohm dạng phức cho điện trở R. Nói rõ các quan hệ về môđuyn và về pha giữa $\dot{U}_R$ và $\dot{I}_R$. Cho ví dụ.

2.6. Công suất tức thời $p_R(t)$ trên điện trở R có đặc điểm gì ?

Định nghĩa công suất tác dụng P_R và viết biểu thức về quan hệ giữa P_R với R và I_R. Cho một ví dụ.

2.7. Phát biểu và viết công thức của định luật Ohm dạng phức cho điện cảm L. Nói rõ các quan hệ về môđuyn và về pha giữa $\dot{U}_L$ và $\dot{I}_L$.

2.8. Công suất tức thời $p_L(t)$ trong điện cảm L có đặc điểm gì ?

Giải thích quá trình năng lượng trong điện cảm.

Định nghĩa công suất phản kháng Q_L trong điện cảm và viết biểu thức về quan hệ giữa Q_L với X_L và I_L. Cho một ví dụ.

2.9. Phát biểu và viết công thức định luật Ohm dạng phức cho điện dung C. Nói rõ các quan hệ về mô - đuyn và về pha giữa $\dot{U}_C$ và $\dot{I}_C$. Cho một ví dụ.

2.10. Công suất tức thời $p_C(t)$ trong điện dung C có đặc điểm gì ? Giải thích quá trình năng lượng trong điện dung.

Định nghĩa công suất phản kháng Q_C trong điện dung và viết biểu thức về quan hệ giữa Q_C với X_C và I_C. Cho một ví dụ.

2.11. So sánh các đại lượng R, Z_L và Z_C. Sự khác nhau giữa Z_L và X_L, giữa Z_C và X_C như thế nào và có ý nghĩa gì ? Cho một số ví dụ.

2.12. Phát biểu và viết công thức của định luật Ohm dạng phức cho mạch RLC. Nói rõ các quan hệ về môđuyn và về pha giữa $\dot{U}$ và $\dot{I}$ trong mạch RLC. Minh hoạ bằng đồ thị vectơ.

2.13. Tổng trở phức Z của mạch RLC là gì ? Sự khác nhau giữa Z và R, X_L, X_C, X như thế nào và có ý nghĩa gì ? Cho các ví dụ.

2.14. Đối với một mạch RLC mỗi công thức sau đây là đúng hay sai. Giải thích.

a) $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$

b) $I = \frac{U}{Z}$

c) $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + X}$

d) $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX}$

e) $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

f) $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2 + X_C^2}}$

g) $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$

h) $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}}$

i) $I = \frac{U}{R + X}$

j) $I = \frac{U}{|Z|}$

k) $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R - jX}$

l) $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$

m) $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right)$

n) $\varphi = \arccos\frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

o) $\varphi = \arccos\frac{R}{R + X}$

p) $\varphi = \arcsin\frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

q) $\varphi = \arcsin\frac{X}{R + X}$

2.15. Phân tích các thành phần $p_R(t)$ và $p_{LC}(t)$ trong công suất tức thời p(t) của một mạch RLC và nêu ý nghĩa vật lý của chúng.

2.16. Định nghĩa các công suất tác dụng P, công suất phản kháng Q, công suất biểu kiến S của mạch RLC. Cho các công thức tính P, Q và S theo R, X và I hoặc theo U, I, và góc lệch pha $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Cho một số ví dụ.

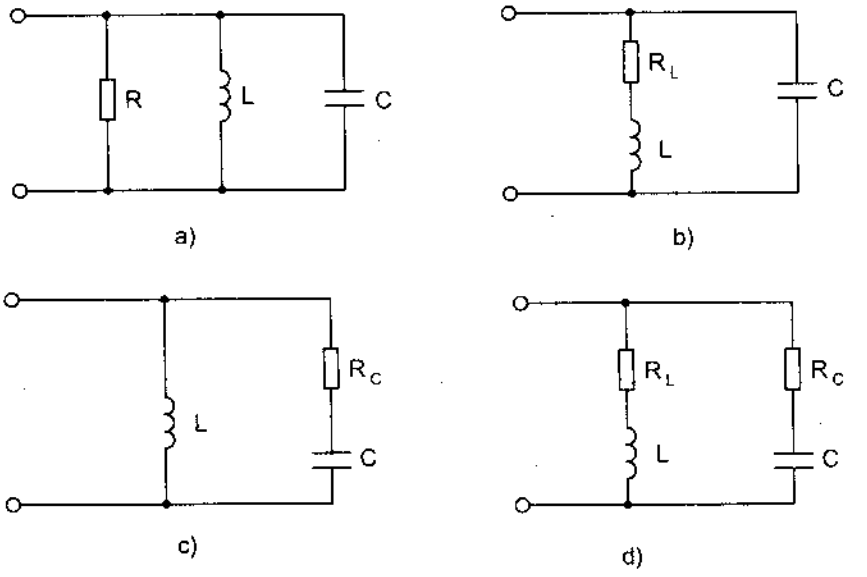
2.17. Cộng hưởng điện áp có đặc điểm gì. Điều kiện giữa các thông số R, L, C và ω của một mạch RLC để xảy ra cộng hưởng điện áp. Cho một số ví dụ.

2.18. Khảo sát và vẽ đường cong cộng hưởng $I(\omega)$ của một mạch RLC.

2.19. Hệ số phẩm chất Q của mạch RLC là gì? Khảo sát và vẽ các đường cong cộng hưởng $\frac{I}{I_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ cho các mạch RLC với Q = 1, Q = 2 và Q = 10. Nhận xét về ảnh hưởng của hệ số phẩm chất Q đối với dạng của các đường cong này.

2.20. Viết biểu thức về quan hệ giữa I_R, I_L, I_C, $\dot{I}$ và $\dot{U}$ của một mạch R, L, C nối song song. Vẽ đồ thị véctơ. Cho một số ví dụ.

2.21. Cộng hưởng dòng điện có những đặc điểm gì? Xét điều kiện ở H.CH.2.21a,b,c và d để có cộng hưởng dòng điện trong các mạch song song có R, L và C. Cho một số ví dụ.



Hình CH.2.21

2.22. Hệ số công suất là gì và có ý nghĩa thế nào về mặt kỹ thuật và kinh tế. Làm thế nào để nâng cao hệ số công suất cho các động cơ điện không đồng bộ. Cho một số ví dụ.

BÀI TẬP

BT.2.1. Tính trị số hiệu dụng của các dòng điện sau đây:

$$i_1(t) = 5\sqrt{2}\sin 100\pi t \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$$

Tính công suất và điện năng tiêu thụ bởi một điện trở R = 10 Ω khi có dòng điện $i_1(t)$ hoặc $i_2(t)$ chảy qua trong một chu kỳ của dòng điện.

BT.2.2. Biểu diễn các dòng điện và điện áp hình sin sau đây bằng các vectơ và bằng các trị số hiệu dụng phức

$$i_1(t) = 5\sqrt{2}\sin 100\pi t \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\ A$$

$$u_1(t) = 120\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\ V$$

$$u_2(t) = 300\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\ V$$

BT.2.3. Viết biểu thức trị số tức thời của các dòng điện và điện áp hình sin có tần số f = 60 Hz sau đây nếu biết các trị số hiệu dụng phức của chúng là

$$\dot{I}_1 = \left(10\angle\frac{\pi}{4}\right)\ A,\quad \dot{I}_2 = (3 + j4)\ A$$

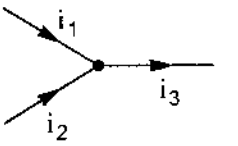
$$\dot{U}_1 = \left(120\angle 60^0\right)\ V,\quad \dot{U}_2 = (180 + j110)\ V$$

BT.2.4. Tính $i_3(t)$ ở H.BT.2.4 nếu biết:

$$i_1(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^0\right)\ A$$

$$i_2(t) = 3\sqrt{2}\cos\left(\omega t - 45^0\right)\ A$$

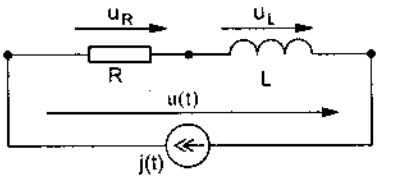
Vẽ đồ thị véctơ cho các dòng điện này.



H.BT.2.4

BT.2.5. Cho mạch điện ở H.BT.2.5 với R = 10 Ω, L = 10 mH, j(t) = $0{,}2\sqrt{2}\sin 1000t$ A.

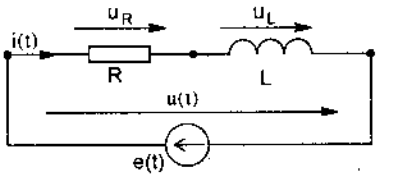
Tính các điện áp $u_R(t)$, $u_L(t)$, u(t) và các công suất $p_R(t)$, $p_L(t)$ và p(t).



H.BT.2.5

BT.2.6. Cho mạch điện ở H.BT.2.6 với R = 30 Ω, L = 40 mH và e(t) = $100\sqrt{2}\sin 1000t$ V.

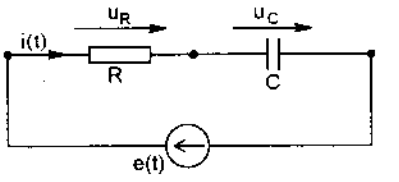
Tính i(t), $u_R(t)$ và $u_L(t)$. Tính các công suất tác dụng P, công suất phản kháng Q và công suất biểu kiến S của nguồn.



H.BT.2.6

BT.2.7. Cho mạch điện ở H.BT.2.7 với R = 100 Ω, C = 10 μF và e(t) = $200\sqrt{2}\sin 1000t$ V.

Tính i(t), $u_R(t)$ và $u_C(t)$. Tính các công suất P, Q, S của nguồn.

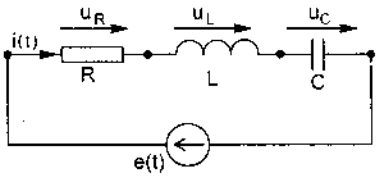


H.BT.2.7

BT.2.8. Cho mạch điện ở H.BT.2.8 với

R = 50 Ω, L = 100 mH, C = 20 μF

và e(t) = $100\sqrt{2}\sin\left(1000t - 60^0\right)$ V.



H.BT.2.8

Tính i(t), $u_R(t)$, $u_C(t)$, $u_L(t)$ và các công suất P, Q, S của nguồn.

BT.2.9. Cho mạch điện ở H.BT.2.8 với

R = 5 Ω, L = 100 mH và e(t) = $100\sqrt{2}\sin(1000t)$ V.

Tìm C để có cộng hưởng điện áp.

Tính I, U_R, U_L và U_C khi cộng hưởng. Tính hệ số phẩm chất Q của mạch.

BT.2.10. Giải bài tập BT.2.9 với R = 100 Ω và với R = 200 Ω. So sánh các kết quả của các bài tập BT.2.8, BT.2.9 và BT.2.10.

BT.2.11. Cho mạch điện ở H.BT.2.8 với R = 100 Ω, C = 100 pF, L = 10 mH.

Tìm tần số cộng hưởng điện áp.

Tính I, U_R, U_L và U_C khi cộng hưởng.

Khảo sát và vẽ các đường đặc tính tần số $I(\omega)$, $U_L(\omega)$ và $U_C(\omega)$.

BT.2.12. Người ta định nghĩa *giải thông* của mạch RLC là giải tần ở đó $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ với $I_0 = \frac{U}{R}$ là dòng điện cộng hưởng. Hãy tìm giải thông của mạch RLC ở BT.2.11.

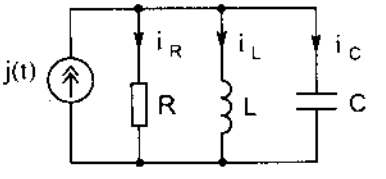
BT.2.13. Khảo sát và vẽ đường cong cộng hưởng $I/I_0 = f\left(\omega/\omega_0\right)$ của các mạch RLC với các hệ số phẩm chất Q = 1, Q = 5 và Q = 50. Tính các trị số I/I_0 với ω/ω_0 = 0,8 và ω/ω_0 = 1,2 tương ứng với các trị số của Q nói trên. Cho các nhận xét về ảnh hưởng của Q đối với tính chọn lọc tần số của các mạch RLC.

Hướng dẫn : Sử dụng chương trình máy tính viết bằng MATLAB ở phụ lục PL.2.2

BT.2.14. Cho mạch điện ở H.BT.2.14 với

R = 1 kΩ, L = 20 μH, C = 20 pF

và j(t) = $10\sqrt{2}\sin\omega t$ mA.



H.BT.2.14

Tìm tần số ω để có cộng hưởng dòng điện. Tính điện áp u(t), $i_R(t)$, $i_L(t)$ và $i_C(t)$ khi cộng hưởng.

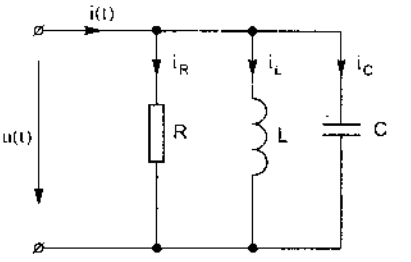
BT.2.15. Cho mạch điện ở H.BT.2.15 với

R = 100 Ω, L = 100 mH

và u(t) = $100\sqrt{2}\sin 1000t$ V.

Tìm điện dung C để có cộng hưởng dòng điện.

Tính $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$ và i(t) khi cộng hưởng.



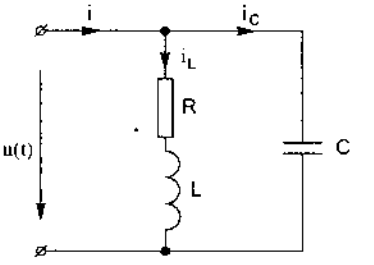
H.BT.2.15

BT.2.16. Cho mạch điện ở H.BT.2.16 với

R = 100 Ω, L = 0,1 H

u(t) = $100\sqrt{2}\sin 1000t$ V.

Tìm trị số của điện dung C để có cộng hưởng dòng điện. Tính $i_L(t)$, $i_C(t)$ và i(t) khi cộng hưởng.

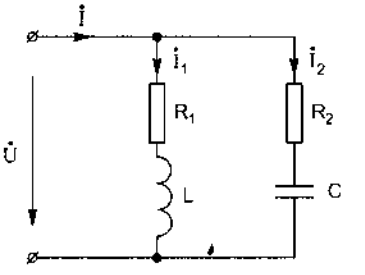


H.BT.2.16

BT.2.17. Trong mạch điện ở H.BT.2.17 cho

R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω, C = 50 μF và $\dot{U} = 100\angle 0^0$ V.

Tìm trị số của điện cảm L để có cộng hưởng dòng điện ở tần số góc ω = 1000 rad/s. Tính $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}$ khi cộng hưởng. Vẽ đồ thị véctơ.



H.BT.2.17

BT.2.18. Cho mạch điện ở H.BT.2.17 với

R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω,

L = 100 mH, C = 50 μF.

Tìm tần số góc ω_0 để có cộng hưởng dòng điện. Tính $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}$ khi cộng hưởng nếu $\dot{U} = 100\angle 0^0$ V. Vẽ đồ thị véctơ cho trường hợp cộng hưởng.

Chương 3

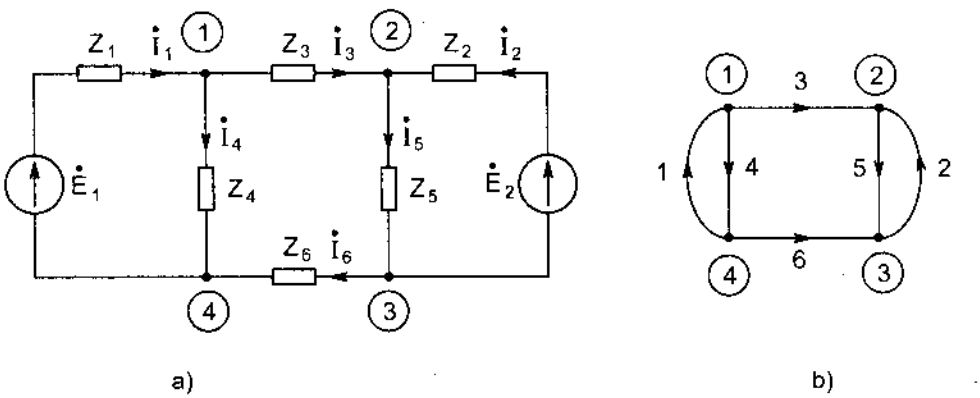
CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI MẠCH ĐIỆN TUYẾN TÍNH PHỨC TẠP

Giải một mạch điện là tìm các dòng điện hoặc các điện áp của tất cả các nhánh hay của một số nhánh nào đó của mạch điện khi đã biết sơ đồ của mạch và các thông số của các phần tử của mạch.

Trong chương này ta sẽ xét các phương pháp để giải các mạch điện tuyến tính phức tạp ở chế độ xác lập hình sin trong trường hợp mạch điện không có hỗ cảm. Trường hợp mạch điện có hỗ cảm sẽ được xét ở chương tiếp theo. Điều này sẽ giúp cho việc tiếp thu nội dung của hai chương này trở nên dễ dàng hơn đối với các sinh viên.

3.1. PHƯƠNG PHÁP CÁC DÒNG ĐIỆN NHÁNH

Ta hãy xét một mạch điện có dạng tương đối phức tạp ở hình 3.1.1a.



Hình 3.1.1

Graph của mạch điện này được vẽ ở hình 3.1.1b.

Mạch điện gồm có m = 6 nhánh và n = 4 nút. Giả thiết đã cho trị số của sức điện động hiệu dụng phức $\dot{E}_1$ và $\dot{E}_2$ của các nguồn với các chiều dương đã chọn, các trị số của các tổng trở phức Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 và Z_6 của các nhánh và cần tìm trị số của các dòng điện hiệu dụng phức của các nhánh.

Theo phương pháp các dòng điện nhánh ta tiến hành các bước sau đây:

- ***Bước 1:*** *Đặt ký hiệu và chọn chiều dương cho dòng điện các nhánh.*

Ta ký hiệu $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, $\dot{I}_4$, $\dot{I}_5$ và $\dot{I}_6$ là các dòng điện hiệu dụng phức trong các nhánh có tổng trở tương ứng là Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 và Z_6.

Đối với dòng điện trong mỗi nhánh, ta có thể chọn một trong hai chiều có thể làm chiều dương.

Đối với các nhánh có nguồn sđđ, người ta thường chọn chiều dương của dòng điện nhánh giống với chiều dương đã chọn cho các sđđ. Vì vậy, ta chọn chiều dương của $\dot{I}_1$ giống với chiều dương của $\dot{E}_1$ và chọn chiều dương của $\dot{I}_2$ giống với chiều dương của $\dot{E}_2$.

Đối với các nhánh không có nguồn sđđ, thì ta có thể chọn một chiều tuỳ ý làm chiều dương cho dòng điện nhánh. Giả sử ta chọn các chiều dương cho $\dot{I}_3$, $\dot{I}_4$, $\dot{I}_5$ và $\dot{I}_6$ như các mũi tên vẽ trên hình 3.1.1.

- ***Bước 2 :*** *Viết các phương trình độc lập tuyến tính theo định luật Kirchhoff thứ nhất* (cũng gọi là định luật Kirchhoff cho các dòng). Các phương trình này có dạng:

$$\sum_{\text{nút}} \dot{I}_k = 0$$

Ta quy ước rằng các dòng điện có chiều dương đi ra khỏi nút được lấy với dấu dương (+), và các dòng điện có chiều dương đi vào nút được lấy với dấu âm (-).

Các phương trình theo định luật Kirchhoff thứ nhất viết cho các nút ①, ② và ③ lần lượt là:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0 \qquad (3.1.1)$$

$$-\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 = 0 \qquad (3.1.2)$$

$$\dot{I}_2 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = 0 \qquad (3.1.3)$$

Chú ý rằng phương trình theo định luật Kirchhoff thứ nhất viết cho nút ④

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_4 - \dot{I}_6 = 0 \qquad (3.1.4)$$

không độc lập tuyến tính với hệ các phương trình (3.1.1), (3.1.2) và (3.1.3). Thật vậy, nếu cộng các phương trình (3.1.1), (3.1.2) và (3.1.3) lại ta sẽ được:

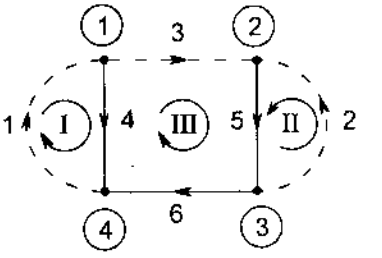
$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 0 \qquad (3.1.5)$$

Đem nhân phương trình (3.1.5) với (-1) ta sẽ được phương trình (3.1.4). Điều này chứng tỏ rằng phương trình (3.1.5) là một tổ hợp tuyến tính của các phương trình (3.1.1), (3.1.2) và (3.1.3).

Một cách tổng quát, nếu mạch điện có n nút thì ta chỉ có thể viết được (n - 1) phương trình độc lập tuyến tính theo định luật Kirchhoff thứ nhất cho (n - 1) nút.

- ***Bước 3:*** *Viết các phương trình độc lập tuyến tính theo định luật Kirchhoff thứ hai* (cũng gọi là định luật Kirchhoff cho các điện áp).

Để chọn *các vòng cơ bản*, ta hãy sử dụng graph của mạch vẽ ở hình 3.1.1b. Đầu tiên, ta chọn một graph con (gọi là *cây*) gồm n - 1 = 4 - 1 = 3 nhánh nối liền n = 4 nút nhưng không tạo thành *vòng* (đường kín).



Hình 3.1.2

Ví dụ ta chọn cây gồm các nhánh 4, 5 và 6 vẽ bằng các nét liền ở hình 3.1.2. Các nhánh 1, 2, 3 vẽ bằng nét đứt ở hình 3.1.2 được gọi là các *cầu*. Mỗi cầu sẽ hợp với một số nhánh của cây đã chọn để tạo thành một vòng cơ bản.

Đối với vòng (cơ bản) I hợp bởi các nhánh 1 và 2 với chiều đi vòng chọn phù hợp với chiều của cầu 1, ta viết được phương trình Kirchhoff thứ hai dạng phức sau đây:

$$Z_1\dot{I}_1 + Z_4\dot{I}_4 = \dot{E}_1 \qquad (3.1.6)$$

Đối với vòng (cơ bản) II hợp bởi các nhánh 2 và 5 với chiều đi vòng chọn theo chiều của cầu 2, ta có phương trình:

$$Z_2\dot{I}_2 + Z_5\dot{I}_5 = \dot{E}_2 \qquad (3.1.7)$$

Cuối cùng, đối với vòng (cơ bản) III hợp bởi các nhánh 3, 5, 6 và 4 với chiều đi vòng chọn theo chiều của cầu 3, ta có phương trình:

$$Z_3\dot{I}_3 - Z_4\dot{I}_4 + Z_5\dot{I}_5 + Z_6\dot{I}_6 = 0 \qquad (3.1.8)$$

Tập hợp các phương trình (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) hợp thành một hệ thống các phương trình độc lập tuyến tính đối với các ẩn số là các dòng điện nhánh $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, $\dot{I}_4$, $\dot{I}_5$ và $\dot{I}_6$.

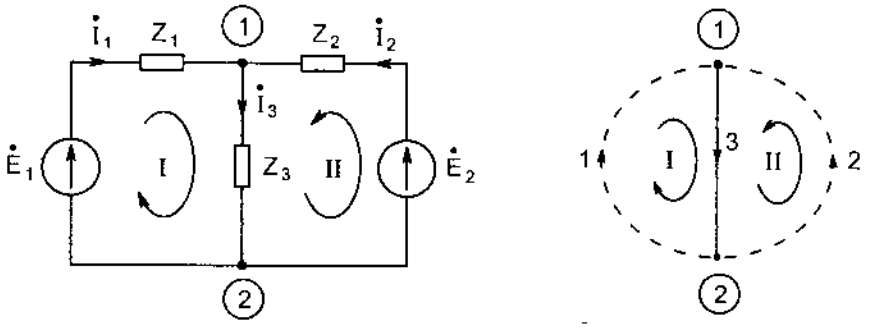
Hệ phương trình này được gọi là *hệ phương trình dòng nhánh*.

- ***Bước 4*** *: Giải hệ phương trình dòng nhánh.*

Cuối cùng ta giải hệ phương trình dòng nhánh bằng một trong các phương pháp của đại số tuyến tính ta sẽ được trị số của các dòng điện phải tìm.

Ví dụ 3.1.1:

Cho mạch điện ở hình 3.1.3a với : $\dot{E}_1 = (100\angle 0^0)$ V , $\dot{E}_2 = 100\angle -\frac{\pi}{6}$ V; và các tổng trở $Z_1 = Z_2 = 50 + j30\ \Omega$, $Z_3 = 100\ \Omega$. Viết hệ phương trình dòng nhánh và giải hệ phương trình đó.



a) *Hình 3.1.3* b)

Giải:

Mạch điện có m = 3 nhánh và n = 2 nút. Graph của mạch điện được vẽ ở H.3.1.3b.

- Bước 1:

Ta ký hiệu dòng điện các nhánh là $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}_3$ với các chiều dương như đã vẽ ở H.3.1.3a.

- Bước 2:

Ta có thể viết được n - 1 = 2 - 1 = 1 phương trình độc lập tuyến tính theo định luật Kirchhoff thứ nhất.

Ta viết phương trình theo định luật Kirchhoff thứ nhất cho nút 1:

$$-\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \qquad (3.1.9)$$

Chọn một cây là nhánh 3, ta sẽ xác định được m - n + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 vòng cơ bản là các vòng I và II như vẽ ở H.3.1.3b .

Ta viết được hai phương trình độc lập tuyến tính theo định luật Kirchhoff thứ hai:

$$Z_1\dot{I}_1 + Z_3\dot{I}_3 = \dot{E}_1 \qquad (3.1.10)$$

$$Z_2\dot{I}_2 + Z_3\dot{I}_3 = \dot{E}_2 \qquad (3.1.11)$$

hay:

$$(50 + j30)\dot{I}_1 + 100\dot{I}_3 = 100\angle 0^0 \qquad (3.1.12)$$

$$(50 + j30)\dot{I}_2 + 100\dot{I}_3 = 100\angle -30^0 \qquad (3.1.13)$$

- *Bước 3:* Giải hệ các phương trình dòng nhánh.

Để giải hệ các phương trình dòng nhánh gồm các phương trình (3.1.9), (3.1.12) và (3.1.13) ta dùng phương pháp thay thế.

Từ (3.1.9) ta rút ra

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \qquad (3.1.14)$$

Thay (3.1.14) vào (3.1.12) và (3.1.13), ta được

$$(Z_1 + Z_3)\dot{I}_1 + Z_3\dot{I}_2 = \dot{E}_1$$

và $$Z_3\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2 = \dot{E}_2$$

hay $$(150 + j30)\dot{I}_1 + 100\dot{I}_2 = 100\angle 0^0 \qquad (3.1.15)$$

và $$100\dot{I}_1 + (150 + j30)\dot{I}_2 = 100\angle -30^0 \qquad (3.1.16)$$

Từ (3.1.15),ta rút ra:

$$\dot{I}_2 = 1\angle 0^0 - (1,5 + j0,3)\dot{I}_1 \qquad (3.1.17)$$

Thay (3.1.17) vào (3.1.16), ta được:

$$100\dot{I}_1 + (150 + j30)\left[1 - (1,5 + j0,3)\dot{I}_1\right] = 100\angle -30^0$$

hay $$(-116 - j90)\dot{I}_1 = -63,40 - j80$$

Vậy $$\dot{I}_1 = \frac{-63,40 - j80}{-116 - j90} = 0,6752 + j0,1658 = 0,6952\angle 13,80^0 \text{ A}$$

Thay kết quả này vào (3.1.17), ta được

$$\dot{I}_2 = (0,03695 - j0,4513) \text{ A} = (0,4528\angle -85,32^0) \text{ A}$$

Ta cũng có thể giải hệ phương trình (3.1.15) và (3.1.16) bằng quy tắc Cramer:

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 100 \\ 100\angle -30^0 & 150+j30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 150+j30 & 100 \\ 100 & 150+j30 \end{vmatrix}} = \frac{6340 + j8000}{11600 + j9000} =$$

$$= (0,6752 + j0,1658) \text{ A} = (0,6952\angle 13,80^0) \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 150+j30 & 100 \\ 100 & 100\angle -30^0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 150+j30 & 100 \\ 100 & 150+j30 \end{vmatrix}} = \frac{4490 - j4902}{11600 + j9000} =$$

$$= (0,03698 - j0,4513) \text{ A} = (0,4528\angle -85,32^0) \text{ A}$$

Cuối cùng, ta tính dòng điện $\dot{I}_3$ theo (3.1.14)

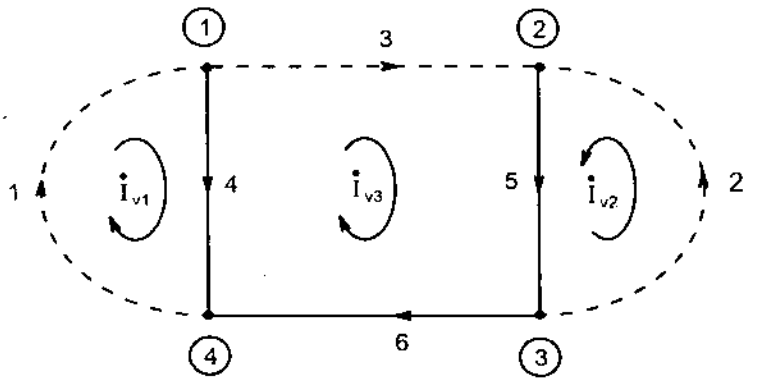
$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (0,7122 - j0,2855) \text{ A} = (0,7672\angle -21,84) \text{ A}$$

3.2. PHƯƠNG PHÁP DÒNG VÒNG

Phương pháp dòng nhánh có số ẩn số và số phương trình bằng số nhánh, nên nếu mạch điện có số nhánh lớn thì việc giải hệ phương trình tuyến tính với số phương trình lớn sẽ tốn nhiều thời gian và công sức. Người ta có thể giảm được số ẩn số về các dòng điện bằng cách chọn ẩn số là *các dòng vòng* chứ không phải là các dòng nhánh.

Xét mạch điện ở H.3.1.1.

Ta hãy coi rằng dòng điện của các cầu là $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ không chỉ chạy qua các cầu tương ứng 1, 2, 3 mà còn chạy qua các nhánh hợp thành các vòng cơ bản I, II, III như vẽ ở H.3.2.1 (tức là coi rằng $\dot{I}_{v_1} = \dot{I}_1$ chạy qua các nhánh 1 và 4, $\dot{I}_{v_2} = \dot{I}_2$ chạy qua các nhánh 2 và 5, và $\dot{I}_{v_3} = \dot{I}_3$ chạy qua các nhánh 3, 5, 6 và 4).



Hình 3.2.1

Bây giờ ta coi dòng điện mỗi nhánh là tổng đại số các dòng vòng chạy qua nhánh :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{v_1} \quad (3.2.1)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{v_2} \quad (3.2.2)$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{v_3} \quad (3.2.3)$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{v_1} - \dot{I}_{v_3} \quad (3.2.4)$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_{v_2} + \dot{I}_{v_3} \quad (3.2.5)$$

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_{v3} \quad (3.2.6)$$

Các hệ thức (3.2.4), (3.2.5), 3.2.6) chính là hệ quả của định luật Kirchhoff thứ nhất viết cho các nút ở (3.1.1), (3.1.2) và (3.1.3).

Thay (3.2.1) ÷ (3.2.6) vào (3.1.6), (3.1.7) và (3.1.8), ta sẽ nhận được hệ phương trình sau đây

$$Z_1\dot{I}_{v_1} + Z_4\left(\dot{I}_{v_1} - \dot{I}_{v_3}\right) = \dot{E}_1$$

$$Z_2\dot{I}_{v_2} + Z_5\left(\dot{I}_{v_2} + \dot{I}_{v_3}\right) = \dot{E}_2$$

$$Z_3\dot{I}_{v_3} - Z_4\left(\dot{I}_{v_1} - \dot{I}_{v_3}\right) + Z_5\left(\dot{I}_{v_2} + \dot{I}_{v_3}\right) + Z_6\dot{I}_{v_3} = 0$$

hay

$$\begin{cases} \left(Z_1 + Z_4\right)\dot{I}_{v_1} - Z_4\dot{I}_{v_3} = \dot{E}_1 & (3.2.7) \\ \left(Z_2 + Z_5\right)\dot{I}_{v_2} + Z_5\dot{I}_{v_3} = \dot{E}_2 & (3.2.8) \\ -Z_4\dot{I}_{v_1} + Z_5\dot{I}_{v_2} + \left(Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6\right)\dot{I}_{v_3} = 0 & (3.2.9) \end{cases}$$

Hệ phương trình (3.2.7), (3.2.8) và (3.2.9) được gọi là *hệ phương trình dòng vòng* viết cho mạch điện ở H.3.1.1.

Để thấy ý nghĩa của các hệ số của các phương trình dòng vòng ta đưa vào các ký hiệu sau đây:

$Z_{11} = Z_1 + Z_4$ là tổng các tổng trở của các nhánh thuộc vòng I.

$Z_{22} = Z_2 + Z_5$ là tổng các tổng trở của các nhánh thuộc vòng II.

$Z_{33} = Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6$ là tổng các tổng trở của các nhánh thuộc vòng III.

$Z_{13} = Z_{31} = -Z_4$ là tổng trở chung của 2 vòng I và III. Tổng trở Z_4 được lấy với dấu trừ (-) vì hai dòng điện $\dot{I}_{v_1}$ và $\dot{I}_{v_3}$ chạy qua Z_4 theo hai chiều ngược nhau.

$Z_{23} = Z_{32} = Z_5$ là tổng trở chung của 2 vòng II và III. Tổng trở Z_5 được lấy dấu dương (+) vì hai dòng điện vòng $\dot{I}_{v_2}$ và $\dot{I}_{v_3}$ chạy qua Z_5 theo cùng một chiều.

$Z_{21} = Z_{12} = 0$ vì hai vòng I và II không có tổng trở chung nào.

$\dot{E}_{v_1} = \sum_1 \dot{E}_k = \dot{E}_1$ là tổng đại số các sđđ trong vòng I.

$\dot{E}_{v_2} = \sum_2 \dot{E}_k = \dot{E}_2$ là tổng đại số các sđđ trong vòng II.

$\dot{E}_{v_3} = \sum_3 \dot{E}_k = 0$ là tổng đại số các sđđ trong vòng III.

Với các ký hiệu này, hệ phương trình dòng vòng cho trường hợp mạch điện có 3 vòng cơ bản được viết là:

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_{v_1} + Z_{12}\dot{I}_{v_2} + Z_{13}\dot{I}_{v_3} = \dot{E}_{v_1} \\ Z_{21}\dot{I}_{v_1} + Z_{22}\dot{I}_{v_2} + Z_{23}\dot{I}_{v_3} = \dot{E}_{v_2} \\ Z_{31}\dot{I}_{v_1} + Z_{32}\dot{I}_{v_2} + Z_{33}\dot{I}_{v_3} = \dot{E}_{v_3} \end{cases} \qquad (3.2.10)$$

Ta dễ suy ra hệ phương trình dòng vòng cho trường hợp mạch điện có số vòng tuỳ ý.

Ưu điểm của hệ phương trình dòng vòng là số ẩn số và số phương trình dòng vòng chỉ bằng số cầu, tức là bằng m - (n - 1) = m - n + 1, ít hơn n - 1 phương trình so với hệ phương trình dòng nhánh.

Giải hệ phương trình dòng vòng, ta sẽ được các dòng vòng. Sau đó nếu muốn tìm dòng các nhánh ta sẽ tính dòng mỗi nhánh bằng cách lấy tổng đại số các dòng vòng chạy qua nhánh.

Tóm lại, các bước giải một mạch điện bằng phương pháp dòng vòng như sau:

- ***Bước 1***: Vẽ graph của mạch điện.

Chọn một cây và xác định các vòng cơ bản tương ứng.

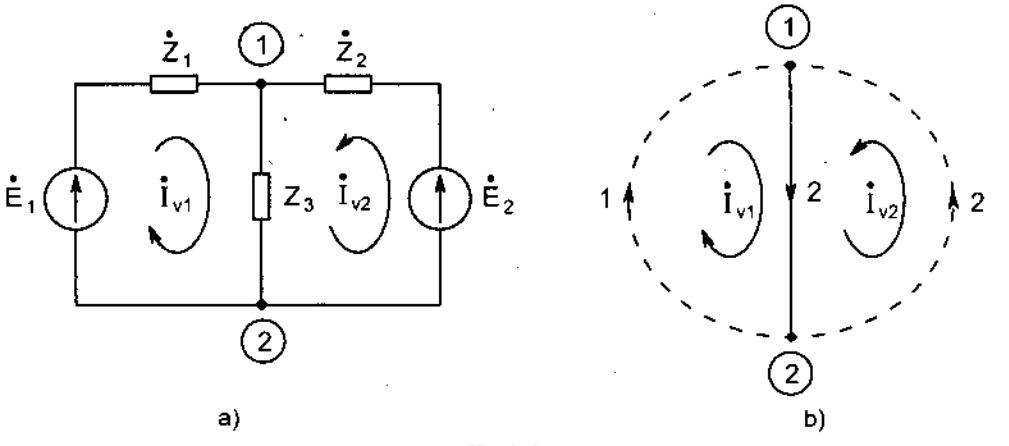
- ***Bước 2***: Viết hệ phương trình dòng vòng theo dạng (3.2.10).

- ***Bước 3***: Giải hệ phương trình dòng vòng để tìm được các dòng điện vòng.

- ***Bước 4***: Tính dòng điện các nhánh theo các dòng vòng đã tìm được.

Ví dụ 3.2.1 :

Giải mạch điện đã cho ở H.3.2.2a với các thông số đã cho ở ví dụ 3.1.1 bằng phương pháp dòng vòng.



Hình 3.2.2

Giải:

- *Bước 1*: Ta vẽ graph của mạch điện như ở H.3.2.2b. Chọn cây là nhánh 3, ta có hai vòng cơ bản với các dòng vòng $\dot{I}_{v_1}$ và $\dot{I}_{v_2}$ như vẽ trên H.3.2.2b

- *Bước 2*: Ta viết hệ phương trình dòng vòng.

$$Z_{11}\dot{I}_{v_1} + Z_{12}\dot{I}_{v_2} = \dot{E}_{v_1}$$

$$Z_{21}\dot{I}_{v_1} + Z_{22}\dot{I}_{v_2} = \dot{E}_{v_2}$$

với $Z_{11} = Z_1 + Z_3 = (50 + j30) + 100 = (150 + j30)\ \Omega$

$Z_{22} = Z_2 + Z_3 = (50 + j30) + 100 = (150 + j30)\ \Omega$

$Z_{12} = Z_{21} = Z_3 = 100\ \Omega$

$\dot{E}_{v_1} = \dot{E}_1 = 100\angle 0^0$ V

$\dot{E}_{v_2} = \dot{E}_2 = 100\angle -30^0$ V

hay là $(150 + j30)\dot{I}_{v_1} + 100\dot{I}_{v_2} = 100$

$$100\dot{I}_{v_1} + (150 + j30)\dot{I}_{v_2} = 100\angle -30^0$$

- *Bước 3* : Giải hệ phương trình dòng vòng trên đây ta được:

$$\dot{I}_{v_1} = (0,6752 + j0,1658)\text{A} = (0,6952\angle 13,80^0)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{v_2} = (0,03695 - j0,4513)\text{A} = (0,4528\angle -85,32^0)\ \text{A}$$

- *Bước 4*: Tính dòng điện các nhánh theo các dòng vòng.

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{v_1}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{v_2}$$

và $\dot{I}_3 = \dot{I}_{v_1} + \dot{I}_{v_2} = (0,6752 + j0,1658) + (0,03695 - j0,4153)$

$$= (0,7122 - j0,2855)\ \text{A} = \left(0,7672\angle -21,84^0\right)\ \text{A}$$

3.3. PHƯƠNG PHÁP ĐIỆN THẾ CÁC NÚT

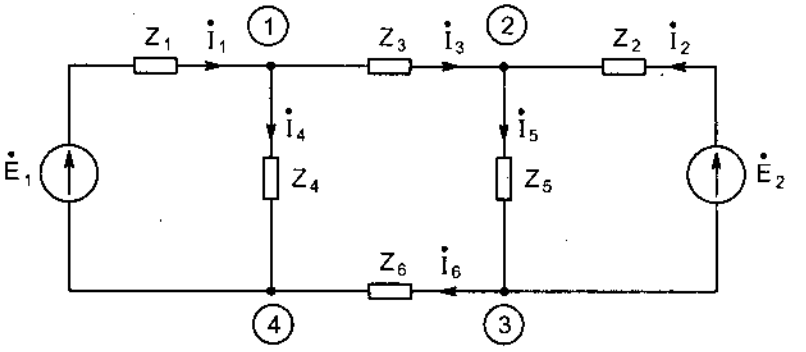
Trong nhiều trường hợp, người ta cần tìm điện thế của các nút của một mạch điện (đối với điện thế của một điểm đã chọn có trị số bằng 0) khi đã biết sơ đồ và các thông số của mạch. Trong những trường hợp này, dĩ nhiên là ta nên chọn ẩn số của bài toán là điện thế của các nút của mạch điện. Hơn nữa, vì số nút (n) của một mạch điện thường ít hơn số nhánh (m) nên số ẩn số là các điện thế bằng (n - 1) thường bé hơn số ẩn số là các dòng nhánh m hay bé hơn số ẩn số là các dòng vòng (m - n + 1), (tức : n - 1 < m hoặc n - 1 < m - n + 1).

Vì thế, nếu chọn ẩn số là điện thế các nút ta thường chỉ cần phải lập và giải một hệ phương trình có số phương trình ít hơn.

Một khi đã tìm được điện thế của các nút, ta sẽ dễ dàng tìm được điện áp của các nhánh và dòng điện các nhánh. Đó là các lý do của việc giải mạch điện bằng phương pháp điện thế các nút.

Ta hãy xét mạch điện ở H.3.3.1.

Ta sẽ cho điện thế của nút ④ bằng không ($\dot{V}_4 = 0$) và lập các phương trình với điện thế các nút ①, ② và ③ là $\dot{V}_1$, $\dot{V}_2$ và $\dot{V}_3$ là các ẩn số.



Hình 3.3.1

Trước hết, sử dụng định luật Ohm để tính dòng điện các nhánh qua điện thế các nút. Với chiều dương của các dòng điện các nhánh đã chọn như ở H.3.3.1, ta có:

$$\dot{V}_4 - \dot{V}_1 = -\dot{E}_1 + Z_1\dot{I}_1$$

Từ đó
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_4 - \dot{V}_1 + \dot{E}_1}{Z_1} = Y_1\left(-\dot{V}_1 + \dot{E}_1\right) \qquad (3.3.1)$$

ở đây $Y_1 = \dfrac{1}{Z_1}$ là tổng dẫn của nhánh 1.

Tiến hành một cách tương tự, ta có:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_3 - \dot{V}_2 + \dot{E}_2}{Z_2} = Y_2\left(\dot{V}_3 - \dot{V}_2 + \dot{E}_2\right) \qquad (3.3.2)$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{Z_3} = Y_3\left(\dot{V}_1 - \dot{V}_2\right) \qquad (3.3.3)$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_4}{Z_4} = Y_4\dot{V}_1 \qquad (3.3.4)$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{V}_2 - \dot{V}_3}{Z_5} = Y_5\left(\dot{V}_2 - \dot{V}_3\right) \qquad (3.3.5)$$

và
$$\dot{I}_6 = \frac{\dot{V}_3 - \dot{V}_4}{Z_6} = Y_6\dot{V}_3 \qquad (3.3.6)$$

Ta thay các dòng điện bằng các biểu thức (3.3.1) ÷ (3.3.6) vào các phương trình viết theo định luật Kirchhoff thứ nhất cho các nút ①, ② và ③ là:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0 \qquad (3.3.7)$$

$$-\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 = 0 \qquad (3.3.8)$$

và
$$\dot{I}_2 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = 0 \qquad (3.3.9)$$

Ta sẽ được các phương trình

$$-Y_1\left(-\dot{V}_1 + \dot{E}_1\right) + Y_3\left(\dot{V}_1 - \dot{V}_2\right) + Y_4\dot{V}_1 = 0$$

$$-Y_2\left(\dot{V}_3 - \dot{V}_2 + \dot{E}_2\right) - Y_3\left(\dot{V}_1 - \dot{V}_2\right) + Y_5\left(\dot{V}_2 - \dot{V}_3\right) = 0$$

và
$$Y_2\left(\dot{V}_3 - \dot{V}_2 + \dot{E}_2\right) - Y_5\left(\dot{V}_2 - \dot{V}_3\right) + Y_6\dot{V}_3 = 0$$

Sau khi sắp xếp lại các số hạng ta được hệ phương trình sau

$$\left(Y_1 + Y_3 + Y_4\right)\dot{V}_1 - Y_3\dot{V}_2 = Y_1\dot{E}_1 \qquad (3.3.10)$$

$$-Y_3\dot{V}_1 + \left(Y_2 + Y_3 + Y_5\right)\dot{V}_2 - Y_5\dot{V}_3 = Y_2\dot{E}_2 \qquad (3.3.11)$$

$$-(Y_2 + Y_5)\dot{V}_2 + \left(Y_2 + Y_6 + Y_5\right)\dot{V}_3 = -Y_2\dot{E}_2 \qquad (3.3.12)$$

Hệ phương trình (3.3.10), (3.3.11) và (3.3.12) được gọi là hệ phương trình thế nút viết cho mạch điện ở H.3.3.1.

Trong trường hợp tổng quát, một hệ phương trình thế nút với 3 ẩn số là $\dot{V}_1$, $\dot{V}_2$ và $\dot{V}_3$ sẽ có dạng:

$$Y_{11}\dot{V}_1 - Y_{12}\dot{V}_2 - Y_{13}\dot{V}_3 = \sum_1 Y_k\dot{E}_k + \sum_1 \dot{J}_k \qquad (3.3.13)$$

$$-Y_{21}\dot{V}_1 + Y_{22}\dot{V}_2 - Y_{23}\dot{V}_3 = \sum_2 Y_k\dot{E}_k + \sum_2 \dot{J}_k \qquad (3.3.14)$$

$$-Y_{31}\dot{V}_1 - Y_{32}\dot{V}_2 + Y_{33}\dot{V}_3 = \sum_3 Y_k\dot{E}_k + \sum_3 \dot{J}_k \qquad (3.3.15)$$

với các hệ số có ý nghĩa như sau :

Y_{11} = tổng các tổng dẫn của các nhánh có nối với nút ①.

Y_{22} = tổng các tổng dẫn của các nhánh có nối với nút ②.

Y_{33} = tổng các tổng dẫn của các nhánh có nối với nút ③.

$Y_{12} = Y_{21}$ = tổng các tổng dẫn của các nhánh nối giữa nút ① và ②.

$Y_{23} = Y_{32}$ = tổng các tổng dẫn của các nhánh nối giữa nút ② và ③.

$Y_{31} = Y_{13}$ = tổng các tổng dẫn của các nhánh nối giữa nút ③ và ①.

Ta dễ thấy rằng đối với mạch điện ở H.3.3.1 thì

$Y_{11} = Y_1 + Y_3 + Y_4$

$Y_{22} = Y_2 + Y_3 + Y_5$

$Y_{33} = Y_2 + Y_5 + Y_6$

$Y_{12} = Y_{21} = Y_3$

$Y_{23} = Y_{32} = Y_2 + Y_5$

$Y_{13} = Y_{31} = 0$ (không có tổng trở nào nối trực tiếp nút ① với nút ③).

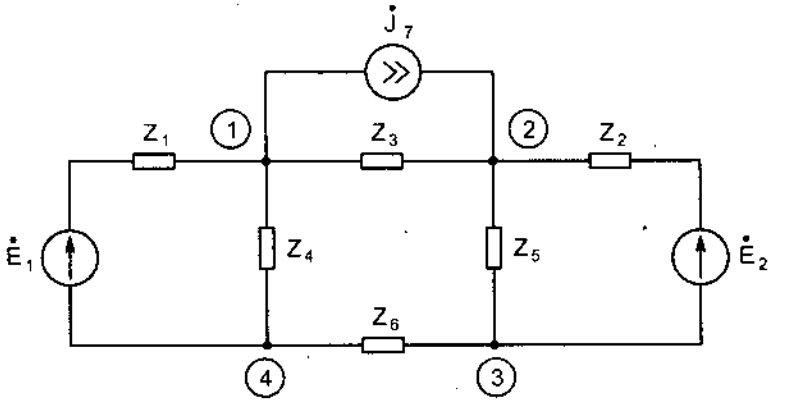
Số hạng $\sum_1 Y_k \dot{E}_k$ ở vế phải của (3.3.10) là tổng các tích của tổng dẫn và sđđ của các nhánh nối vào nút ①. Trong tổng này, nếu sđđ $\dot{E}_k$ có chiều dương hướng vào nút thì nó được lấy với dấu +, ngược lại nếu sđđ $\dot{E}_k$ có chiều dương rời khỏi nút thì nó sẽ được lấy với dấu – .

Còn số hạng $\sum_1 \dot{J}_k$ ở vế phải của (3.3.13) là tổng đại số của các dòng điện của các nguồn dòng có nối với nút ①, trong đó dòng điện của nguồn dòng nào có chiều dương đi vào nút 1 sẽ được lấy với dấu +, dòng điện của nguồn dòng nào có chiều dương rời khỏi nút sẽ được lấy với dấu –.

Các số hạng ở vế phải của các phương trình (3.3.14) và (3.3.15) cũng có ý nghĩa tương tự.

Ví dụ, nếu mạch điện ở H.3.3.1 có thêm một nguồn dòng nối giữa nút ① và nút ② như ở H.3.3.2. thì ta phải thêm số hạng $-\dot{J}_7$ vào vế phải của phương trình (3.3.10) và thêm số hạng $+\dot{J}_7$ vào vế phải của phương trình (3.3.11).

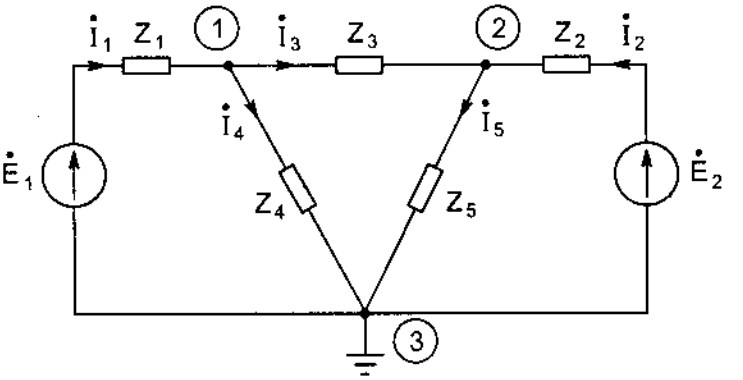
Biết ý nghĩa của các hệ số và các số hạng ở vế phải của hệ phương trình điện thế các nút ta có thể viết được các biểu thức của các hệ số và các số hạng này trực tiếp từ sơ đồ của mạch điện đã cho.



Hình 3.3.2

Ví dụ 3.3.1:

Tìm điện thế các nút của mạch điện ở H.3.3.3 với các thông số: $\dot{E}_1 = (100\angle 0^0)$ V; $\dot{E}_2 = (100\angle \pi/2)$ V ; $Z_1 = Z_2 = j5\ \Omega$; $Z_3 = Z_4 = Z_5 = 10\ \Omega$. Sau đó tính dòng điện các nhánh.



Hình 3.3.3

Giải:

Mạch điện đã cho có 3 nút. Chọn điện thế của nút ③ bằng 0 $\left(\dot{V}_3 = 0\right)$, ta có 2 ẩn số là các điện thế $\dot{V}_1$ và $\dot{V}_2$ của các nút ① và ②.

Hệ phương trình điện thế các nút viết cho mạch điện đã cho có dạng:

$$Y_{11}\dot{V}_1 - Y_{12}\dot{V}_2 = \sum_1 Y_k \dot{E}_k$$

$$-Y_{21}\dot{V}_1 + Y_{22}\dot{V}_2 = \sum_2 Y_k \dot{E}_k$$

hay $$\left(Y_1 + Y_3 + Y_4\right)\dot{V}_1 - Y_3\dot{V}_2 = Y_1\dot{E}_1$$

$$-Y_3\dot{V}_1 + \left(Y_2 + Y_3 + Y_5\right)\dot{V}_2 = Y_2\dot{E}_2$$

với: $$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{j5} = -j0,2\ S$$

$$Y_3 = Y_4 = Y_5 = \frac{1}{10} = 0,1\ S$$

$$Y_1\dot{E}_1 = (-j0,2)(100) = -j20\ A$$

$$Y_2\dot{E}_2 = (-j0,2)(j100) = 20\ A$$

Sau khi thay các hệ số bằng các trị số của chúng ta được hệ phương trình:

$$(0,2 - j0,2)\dot{V}_1 - 0,1\dot{V}_2 = -j20 \qquad (3.3.13)$$

$$-0,1\dot{V}_1 + (0,2 - j0,2)\dot{V}_2 = 20 \qquad (3.3.14)$$

Giải hệ phương trình (3.3.13) và (3.3.14) ta được:

$$\dot{V}_1 = (52,31 - j18,46)\,V = \left(55,47\angle -19,44^0\right)\ V$$

và $$\dot{V}_2 = (67,69 + j58,46)\,V = \left(89,44\angle 40,82^0\right)\ V$$

Tính dòng điện các nhánh theo các điện thế $\dot{V}_1$ và $\dot{V}_2$ đã tìm được:

$$\dot{I}_1 = Y_1\left(\dot{E}_1 - \dot{V}_1\right) = (3,692 - j9,538)\ A = \left(10,23\angle -68,84^0\right)\ A$$

$$\dot{I}_2 = Y_2\left(\dot{E}_2 - \dot{V}_2\right) = (8,308 + j13,54)\ A = \left(15,88\angle 58,47^0\right)\ A$$

$$\dot{I}_3 = Y_3\left(\dot{V}_1 - \dot{V}_2\right) = (-1,538 - j7,692)\ A = \left(7,844\angle -101,3^0\right)\ A$$

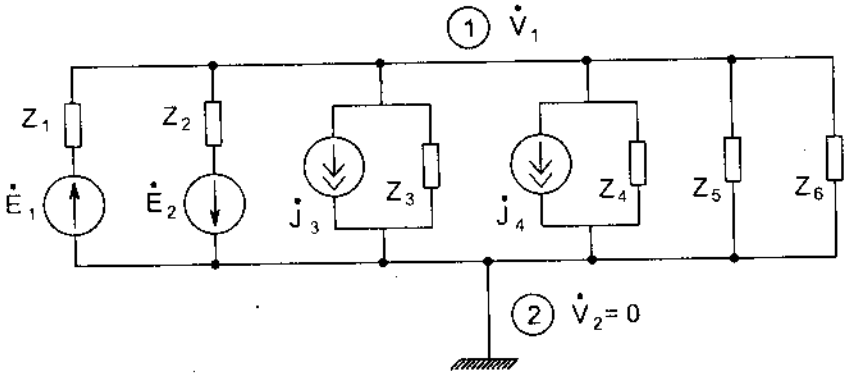
$$\dot{I}_4 = Y_4\dot{V}_1 = (5,231 - j1,846)\ A = \left(5,547\angle -19,44^0\right)\ A$$

$$\dot{I}_5 = Y_5\dot{V}_2 = (6,769 + j5,846)\ A = \left(8,944\angle 40,82^0\right)\ A$$

Trường hợp đặc biệt của phương pháp điện thế các nút : công thức điện áp hai nút.

Trong trường hợp đặc biệt của các mạch điện có nhiều nhánh nối song song giữa 2 nút ① và ② như ở H.3.3.4 thì phương pháp điện thế các nút sẽ chỉ có một phương trình là:

$$Y_{11}\dot{V}_1 = \sum_1 Y_k\dot{E}_k + \sum_1 \dot{J}_k \qquad (3.3.15)$$



Hình 3.3.4

Với $Y_{11} = \sum Y_k$ là tổng các tổng dẫn của các nhánh

Chú ý rằng $\dot{U}_{12} = V_1 - V_2 = \dot{V}_1$

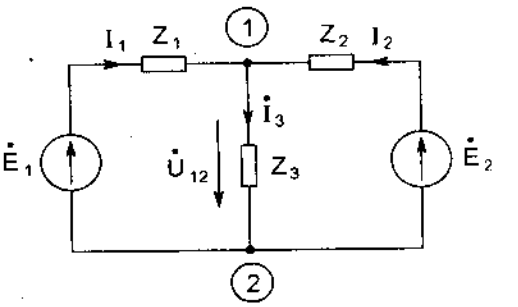
Từ (3.3.15) rút ra:

$$\dot{U}_{12} = \frac{\sum_1 Y_k \dot{E}_k + \sum_1 \dot{J}_k}{\sum Y_k} \qquad (3.3.16)$$

Công thức (3.3.16) được gọi là *công thức điện áp hai nút*. Nó cho ta tính được ngay điện áp giữa 2 nút ① và ② của mạch điện.

Ví dụ 3.3.2 :

Tính điện áp giữa 2 nút ① và ② của mạch điện ở H.3.3.5. Sau đó hãy tính dòng điện các nhánh. Cho $\dot{E}_1 = 100\angle 0^0$ V ; $\dot{E}_2 = 100\angle -\pi/6$ V ; $Z_1 = Z_2 = (50 + j30)\ \Omega$; $Z_3 = 100\ \Omega$.



Hình 3.3.5

Giải:

Áp dụng công thức điện áp hai nút (3.3.16) ta có:

$$\dot{U}_{12} = \frac{Y_1\dot{E}_1 + Y_2\dot{E}_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

với $$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{50 + j30} = (1,471 - j0,8824).10^{-2}\ S$$

$$Y_3 = \frac{1}{100} = 0,01\ S$$

Vậy

$$\dot{U}_{12} = \frac{(1,471 - j0,8824).10^{-2}\left(100 + 100\angle -\frac{\pi}{6}\right)}{2.(1,471 - j0,8824).10^{-2} + 0,01}$$

$$= (71,22 - j28,54)\ V = 76,72\angle -21,84^0\ V$$

Tính dòng điện các nhánh:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{12}}{Z_1} = (0,6752 + j0,1658)\ A = 0,6952\angle 13,80^0\ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{12}}{Z_2} = (0,03695 - j0,4513)\ A = 0,4528\angle -85,32^0\ A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_3} = (0,7122 - j0,2855)\ A = 0,7672\angle -21,84^0\ A$$

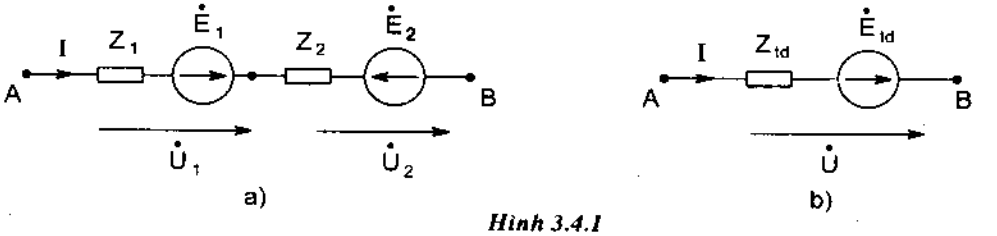
3.4. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG CÁC NHÁNH NỐI TIẾP VÀ SONG SONG

Các mục trên đã xét ba phương pháp cơ bản để giải một mạch điện phức tạp. Các phương pháp này rất tổng quát, có thể áp dụng cho một mạch điện có số nhánh và số nút bất kỳ. Nhưng trong một số trường hợp ta có thể làm đơn giản hoá sơ đồ của mạch điện đã cho nhằm làm giảm số nhánh và số nút của mạch điện trước khi sử dụng một trong ba phương pháp cơ bản, khi đó số phương trình cần viết theo mỗi phương pháp cơ bản sẽ ít hơn.

Trong mục 3.4 và 3.5 sẽ xét hai phương pháp làm đơn giản hoá các sơ đồ mạch điện được gọi là các phương pháp biến đổi tương đương các sơ đồ mạch điện. Trước hết, ta hãy xét phương pháp biến đổi tương đương các nhánh nối tiếp hoặc song song.

3.4.1. Biến đổi tương đương các nhánh nối tiếp

Mạch điện ở H.3.4.1a gồm 2 nhánh nối tiếp. Nhánh thứ nhất gồm có tổng trở Z_1 nối tiếp với sđđ $\dot{E}_1$, nhánh thứ hai gồm có tổng trở Z_2 nối tiếp với sđđ $\dot{E}_2$.



Hình 3.4.1

Ta có thể thay thế sơ đồ ở H.3.4.1a bằng sơ đồ tương đương ở H.3.4.1b, gồm có một tổng trở tương đương Z_{td} nối tiếp với một sđđ tương đương $\dot{E}_{td}$.

Điều kiện tương đương ở đây là với mọi dòng điện $\dot{I}$ như nhau trong hai sơ đồ thì điện áp giữa 2 cực A và B trong 2 sơ đồ phải bằng nhau.

Trong sơ đồ H.3.4.1a ta có:

$$\dot{U}_1 = Z_1\dot{I} - \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_2 = Z_2\dot{I} + \dot{E}_2$$

và $$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

Vậy

$$\dot{U}_{AB} = Z_1\dot{I} - \dot{E}_1 + Z_2\dot{I} - \dot{E}_2$$

$$= (Z_1 + Z_2)\dot{I} - (\dot{E}_1 - \dot{E}_2) \qquad (3.4.1)$$

Trong sơ đồ ở H.3.4.1b ta có:

$$\dot{U}_{AB} = Z_{td}\dot{I} - \dot{E}_{td} \qquad (3.4.2)$$

Cho bằng nhau các hệ số của $\dot{I}$ trong hai phương trình (3.4.1) và (3.4.2), ta được

$$Z_{td} = Z_1 + Z_2 \qquad (3.4.3)$$

Cho bằng nhau các số hạng còn lại của hai phương trình (3.4.1) và (3.4.2) ta được

$$\dot{E}_{td} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \qquad (3.4.4)$$

Các công thức tính Z_{td} và $\dot{E}_{td}$ có thể tổng quát hoá cho trường hợp n nhánh nối tiếp

$$Z_{td} = \sum_{k=1}^{n} Z_k \qquad (3.4.5)$$

$$\dot{E}_{td} = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k \qquad (3.4.6)$$

Vậy

1. Tổng trở tương đương của các nhánh nối tiếp bằng tổng các tổng trở của các nhánh.

2. Sđđ tương đương của các nhánh nối tiếp bằng tổng đại số các sđđ của các nhánh, trong đó sđđ $\dot{E}_k$ nào có cùng chiều dương với sđđ tương đương $\dot{E}_{td}$ sẽ được lấy với dấu (+), còn sđđ $\dot{E}_k$ nào có chiều dương ngược với chiều dương của sđđ tương đương $\dot{E}_{td}$ sẽ được lấy với dấu (-).

Ví dụ 3.4.1:

Tìm $\dot{E}_{td}$ và Z_{td} của sơ đồ ở H.3.4.2b để thay thế cho sơ đồ ở H.3.4.2a với: $\dot{E}_1 = 100\angle 0^0$ V ; $\dot{E}_2 = 100\angle 30^0$ V ; $\dot{E}_3 = 100\angle 60^0$ V và $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 3 + j4\ \Omega$. Sau đó tính dòng điện $\dot{I}$ trong mạch. Với Z = 15 Ω.

Giải :

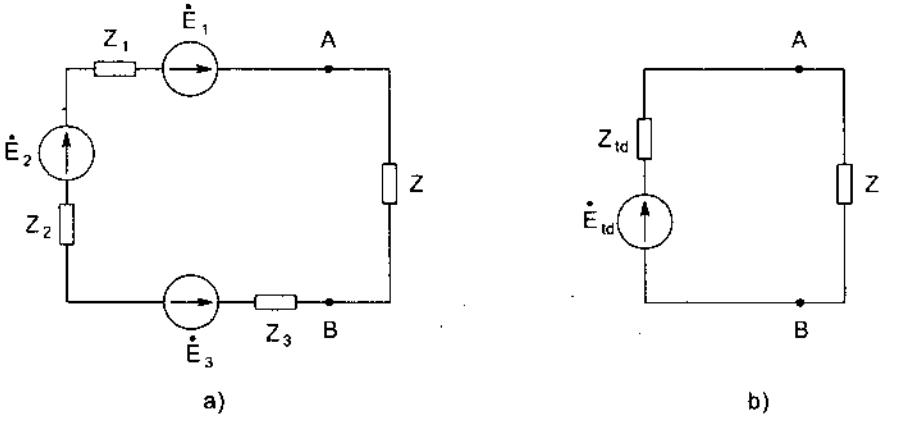
Áp dụng công thức (3.4.5) và (3.4.6), ta có:

$$\dot{E}_{td} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3 = 100\angle 0^0 + 100\angle 30^0 - 100\angle 60^0$$

$$= 100 + (86,60 + j50) - (50 + j86,60)$$

$$= 136,60 - j36,60 = 141,42\angle -15^0 \text{ V}$$

$$Z_{td} = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 3(3 + j4) = 9 + j12\ \Omega.$$



Hình 3.4.2

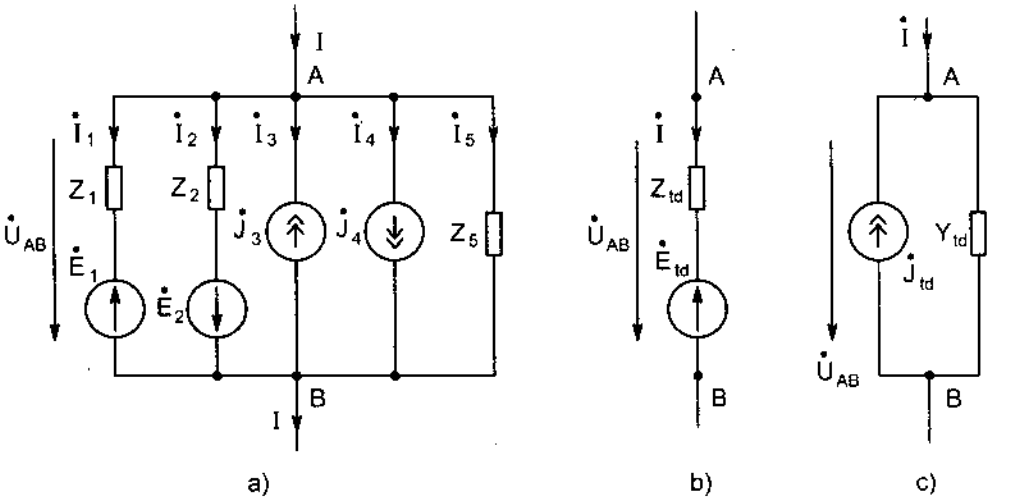
Từ sơ đồ H.3.4.2b, ta có:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_{td}}{Z_{td} + Z} = \frac{141,42\angle -15^0}{9 + j12 + 15} = (3,943 - j3,497)\text{ A} = (5,270\angle -41,57^0)\text{ A}$$

3.4.2. Biến đổi tương đương các nhánh nối song song

Ta hãy chứng minh rằng bộ phận mạch điện ở H.3.4.3a gồm có nhiều nhánh nối song song giữa 2 nút A và B có thể được thay thế bằng sơ đồ tương đương ở H.3.4.3b hoặc H.3.4.3c.

Điều kiện tương đương ở đây là với mọi điện áp $\dot{U}_{AB}$ như nhau trong các sơ đồ thì dòng điện $\dot{I}$ trong các sơ đồ phải bằng nhau.



Hình 3.4.3

Ở sơ đồ H.3.4.3a, ta có:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{AB} - \dot{E}_1}{Z_1} = Y_1\left(\dot{U}_{AB} - \dot{E}_1\right)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{E}_2}{Z_2} = Y_2\left(\dot{U}_{AB} + \dot{E}_2\right)$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_5} = Y_5\left(\dot{U}_{AB}\right)$$

và

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{J}_3 + \dot{J}_4 + \dot{I}_5 \\ &= Y_1\left(\dot{U}_{AB} - \dot{E}_1\right) + Y_2\left(\dot{U}_{AB} + \dot{E}_2\right) - \dot{J}_3 + \dot{J}_4 + Y_5\dot{U}_{AB} \\ &= \left(Y_1 + Y_2 + Y_5\right)\dot{U}_{AB} - Y_1\dot{E}_1 + Y_2\dot{E}_2 - \dot{J}_3 + \dot{J}_4 \qquad (3.4.7)\end{aligned}$$

Đối với sơ đồ H.3.4.3b, ta có:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{AB} - \dot{E}_{td}}{Z_{td}} = Y_{td}\dot{U}_{AB} - Y_{td}\dot{E}_{td} \qquad (3.4.8)$$

Cho bằng nhau các hệ số của $\dot{U}_{AB}$ trong 2 phương trình (3.4.7) và (3.4.8), ta được:

$$Y_{td} = Y_1 + Y_2 + Y_5 \qquad (3.4.9)$$

hay

$$\frac{1}{Z_{td}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_5} \qquad (3.4.10)$$

và cho bằng nhau các số hạng còn lại trong vế phải của hai phương trình (3.4.7) và (3.4.8), ta được:

$$-Y_{td}\dot{E}_{td} = -Y_1\dot{E}_1 + Y_2\dot{E}_2 - \dot{J}_3 + \dot{J}_4$$

hay $$\dot{E}_{td} = \frac{Y_1\dot{E}_1 - Y_2\dot{E}_2 + \dot{J}_3 - \dot{J}_4}{Y_{td}}$$

hoặc kết hợp với (3.4.9), ta được:

$$\dot{E}_{td} = \frac{Y_1\dot{E}_1 - Y_2\dot{E}_2 + \dot{J}_3 - \dot{J}_4}{Y_1 + Y_2 + Y_5} \qquad (3.4.11)$$

Các công thức tính tổng trở tương đương Z_{td} (hoặc tổng dẫn tương đương Y_{td}) và sđđ tương đương $\dot{E}_{td}$ có thể tổng quát hoá cho trường hợp n nhánh nối song song:

$$Y_{td} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \qquad (3.4.12)$$

hay $$\frac{1}{Z_{td}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k} \qquad (3.4.13)$$

tức là tổng dẫn tương đương của các nhánh nối song song bằng tổng các tổng dẫn của các nhánh thành phần. Sđđ tương đương của các nhánh nối song song được tính theo công thức sau đây:

$$\dot{E}_{td} = \frac{\sum^{n} Y_k\dot{E}_k + \sum^{n} \dot{J}_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k} \qquad (3.4.14)$$

Trong (3.4.14) các số hạng $\dot{E}_k$ và $\dot{J}_k$ sẽ được lấy với dấu + nếu có chiều dương trùng với chiều dương của $\dot{E}_{td}$, và sẽ được lấy với dấu – nếu có chiều dương ngược với chiều dương của $\dot{E}_{td}$.

Bây giờ ta tìm các thông số J_{td} và Y_{td} trong sơ đồ H.3.4.3c.

Đối với sơ đồ H.3.4.3c ta có

$$\dot{I} = Y_{td}\,\dot{U}_{AB} - J_{td} \qquad (3.4.15)$$

Cho cân bằng các hệ số của $\dot{U}_{AB}$ trong hai phương trình (3.4.7) và (3.4.15) ta được

$$Y_{td} = Y_1 + Y_2 + Y_5 \qquad (3.4.16)$$

và cho bằng nhau các số hạng còn lại trong vế phải của hai phương trình (3.4.7) và (3.4.15) ta được

$$-\dot{J}_{td} = -Y_1\dot{E}_1 + Y_2\dot{E}_2 - \dot{J}_3 + \dot{J}_4$$

hay $$\dot{J}_{td} = Y_1\dot{E}_1 - Y_2\dot{E}_2 + \dot{J}_3 - \dot{J}_4 \qquad (3.4.17)$$

Các công thức tính tổng dẫn tương đương Y_{td} và nguồn dòng J_{td} có thể tổng quát hoá cho trường hợp n nhánh nối song song :

$$Y_{td} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \qquad (3.4.18)$$

và

$$J_{td} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \dot{E}_k + \sum_{k=1}^{n} \dot{J}_k \qquad (3.4.19)$$

Trong (3.4.19) các số hạng $\dot{E}_k$ và $\dot{J}_k$ được lấy với dấu + nếu có chiều giống với chiều dương của J_{td}, và được lấy với dấu – nếu có chiều ngược với chiều dương của J_{td}.

Từ (3.4.13), (3.4.14) và (3.4.18), (3.4.19) ta cũng suy ra các hệ thức sau đây giữa các thông số $\dot{E}_{td}$, Z_{td} của sơ đồ H3.4.3b và các thông số J_{td} và Y_{td} của sơ đồ H.3.4.3c :

$$Y_{td} = \frac{1}{Z_{td}} \qquad (3.4.20)$$

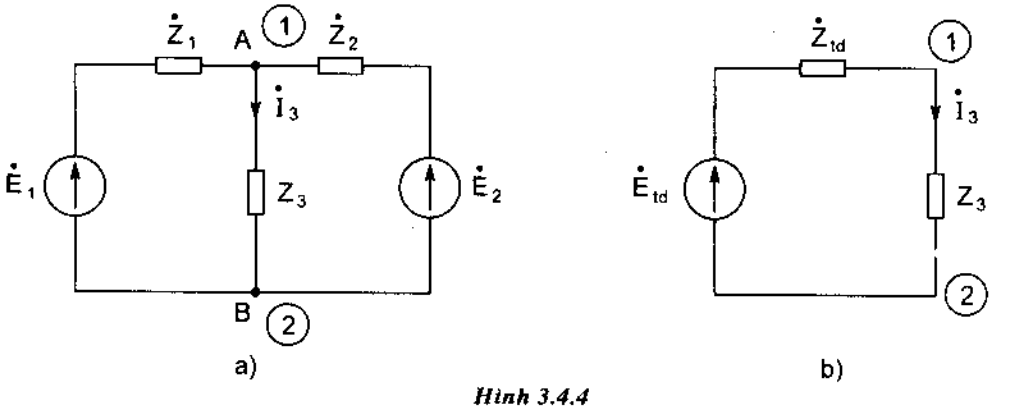
$$\dot{J}_{td} = \frac{\dot{E}_{td}}{Z_{td}} \qquad (3.4.21)$$

Ví dụ 3.4.2:

Cho mạch điện ở H.3.4.4a với

$\dot{E}_1 = 100\angle 0^0$ V ; $\dot{E}_2 = 100\angle -\frac{\pi}{6}$ V và $Z_1 = Z_2 = 50 + j30\ \Omega$; $Z_3 = 100\ \Omega$.

Tính dòng điện $\dot{I}_3$ trong mạch điện ở H.3.4.4a bằng cách thay hai nhánh 1 và 2 nối song song bằng một nhánh tương đương như ở H.3.4.4b hoặc H.3.4.4c.



Hình 3.4.4

Giải:

Áp dụng các công thức biến đổi tương đương các nhánh song song (3.4.9) và (3.4.14), ta có:

$$Y_{td} = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = 2\left(\frac{1}{50 + j30}\right)$$

hay $$Z_{td} = \frac{50 + j30}{2} = (25 + j15)\ \Omega$$

$$\dot{E}_{td} = \frac{Y_1\dot{E}_1 + Y_1\dot{E}_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2}{2} = \frac{100 + 100\angle -\frac{\pi}{6}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(100 + 86,60 - j50)$$

$$= (93,30 - j25)\ V = \left(96,59\angle -15^0\right)\ V$$

Theo sơ đồ tương đương ở H.3.4.4b, ta có:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_{td}}{Z_{td} + Z_3} = \frac{93,30 - j25}{(25 + j15) + 100}$$

$$= (0,7122 - j0,2855)\ A = 0,7672\angle -21,84^0\ A$$

Ta cũng có thể dùng sơ đồ tương đương với nguồn dòng như ở H.3.4.4c.

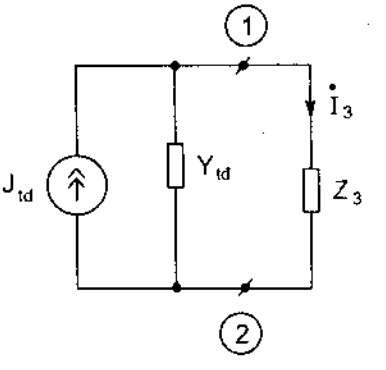
với $$\dot{J}_{td} = Y_1\dot{E}_1 + Y_2\dot{E}_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{50 + j30}\right)(100 + 100\angle -\pi/6) =$$

$$= (2,303 - j2,382)\ A$$

và $$Y_{td} = Y_1 + Y_2 = 2\left(\frac{1}{50 + j30}\right) =$$

$$= (2,941 - j1,765)\times 10^{-2}\ S$$



Hình 3.4.4c

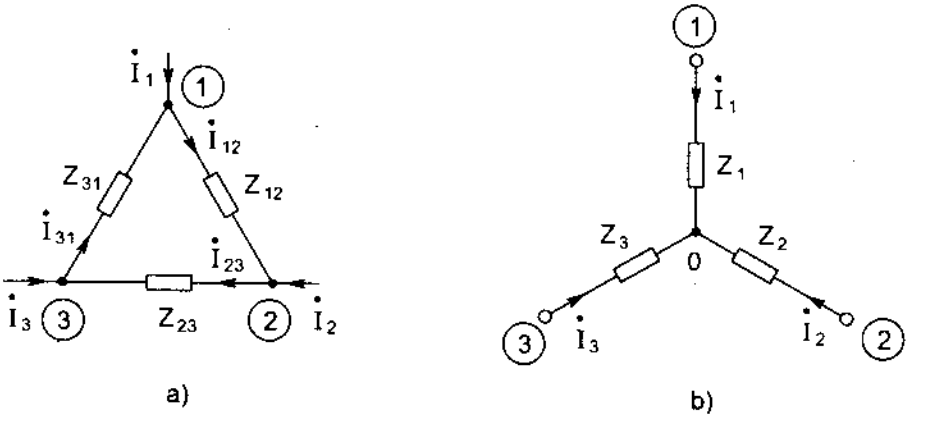
Theo sơ đồ H.3.4.4c ta tính được :

$$\dot{I}_3 = \dot{J}_{td} \times \frac{Y_3}{Y_3 + Y_{td}} = (2,303 - j2,382)\times\frac{0,01}{0,01 + (2,941 - j1,765)\times 10^{-2}}$$

$$= (0,7122 - j0,2855)\ A = (0,7672\angle -21,84)\ A.$$

3.5. BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG SAO - TAM GIÁC VÀ TAM GIÁC - SAO

Xét bộ phận mạch điện ở H.3.5.1a với 3 tổng trở Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} nối theo hình tam giác (Δ) giữa ba nút ①, ② và ③.



Hình 3.5.1

Ta hãy tìm cách thay thế bộ phận sơ đồ hình tam giác này bằng bộ phận sơ đồ tương đương gồm ba tổng trở Z_1, Z_2, Z_3 nối theo hình sao (Y) giữa các nút ①, ②, ③ và nút chung O.

Điều kiện tương đương ở đây là: Với các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}_3$ như nhau từng đôi một trong hai sơ đồ thì các điện áp $\dot{U}_{12}$, $\dot{U}_{23}$ và $\dot{U}_{31}$ trong hai sơ đồ phải bằng nhau từng đôi một.

Ở sơ đồ hình tam giác ta có:

$$\dot{U}_{12} = Z_{12}\dot{I}_{12} \quad (3.5.1)$$

$$\dot{U}_{23} = Z_{23}\dot{I}_{23} \quad (3.5.2)$$

$$\dot{U}_{31} = Z_{31}\dot{I}_{31} \quad (3.5.3)$$

$$\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0 \quad (3.5.4)$$

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31} = 0 \quad (3.5.5)$$

$$-\dot{I}_2 + \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12} = 0 \quad (3.5.6)$$

$$-\dot{I}_3 + \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23} = 0 \quad (3.5.7)$$

Từ (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3), (3.5.4) ta có:

$$Z_{12}\dot{I}_{12} + Z_{23}\dot{I}_{23} + Z_{31}\dot{I}_{31} = 0 \quad (3.5.8)$$

Từ (3.5.5) ta rút ra:

$$\dot{I}_{31} = \dot{I}_{12} - \dot{I}_1 \quad (3.5.9)$$

Từ (3.5.6) rút ra:

$$\dot{I}_{23} = \dot{I}_{12} + \dot{I}_2 \qquad (3.5.10)$$

Thay (3.5.9) và (3.5.10) vào (3.5.8) ta được:

$$(Z_{12} + Z_{23} + Z_{31})\dot{I}_{12} + Z_{23}\dot{I}_2 - Z_{31}\dot{I}_1 = 0 \qquad (3.5.11)$$

Từ (3.5.11) rút ra:

$$\dot{I}_{12} = \left(\frac{Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}\right)\dot{I}_1 - \left(\frac{Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}\right)\dot{I}_2 \qquad (3.5.12)$$

Thay (3.5.12) vào (3.5.1) ta có:

$$\dot{U}_{12} = \left(\frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}\right)\dot{I}_1 - \left(\frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}\right)\dot{I}_2 \qquad (3.5.13)$$

Ở sơ đồ hình sao có:

$$\dot{U}_{12} = Z_1\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2 \qquad (3.5.14)$$

Đồng nhất các hệ số của $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ trong hai phương trình (3.5.13) và (3.5.14) ta được :

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \qquad (3.5.15)$$

và

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \qquad (3.5.16)$$

Bằng cách tương tự ta dễ tìm được:

$$Z_3 = \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \qquad (3.5.17)$$

Các công thức (3.5.15), (3.5.16) và (3.5.17) cho phép ta tính được các tổng trở của hình sao theo các tổng trở của hình tam giác, chúng được gọi là các công thức biến đổi tam giác → sao (hay $\Delta \rightarrow Y$).

Từ các công thức (3.5.15), (3.5.16) và (3.5.17) ta cũng có thể giải được Z_{12}, Z_{23} và Z_{31} theo Z_1, Z_2 và Z_3:

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1Z_2}{Z_3} \qquad (3.5.18)$$

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2Z_3}{Z_1} \qquad (3.5.19)$$

$$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3Z_1}{Z_2} \qquad (3.5.20)$$

Các công thức (3.5.18), (3.5.19), (3.5.20) được gọi là các công thức biến đổi sao → tam giác (hay $Y \rightarrow \Delta$).

Trường hợp đặc biệt:

Với hình sao đối xứng

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y$$

và hình tam giác đối xứng

$$Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z_\Delta$$

ta có: $$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \qquad (3.5.21)$$

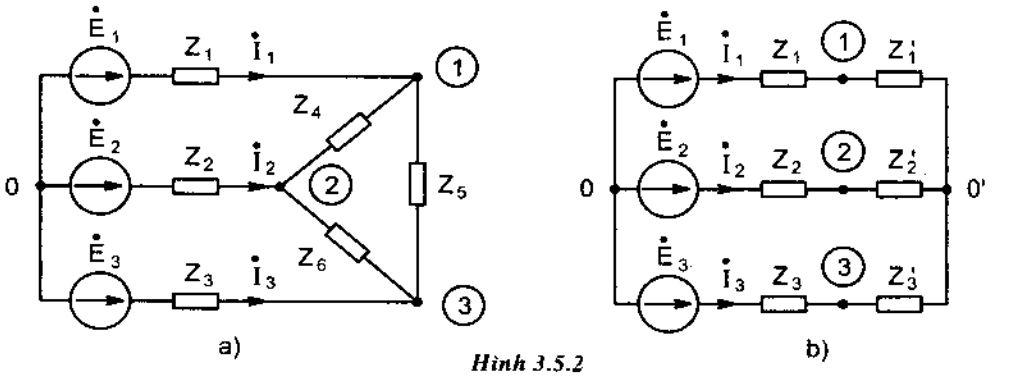
hay $$Z_\Delta = 3Z_Y \qquad (3.5.22)$$

Ví dụ 3.5.1:

Cho mạch điện ở H.3.5.2a với:

$Z_1 = Z_2 = Z_3 = (1 + j2)\ \Omega$; $Z_4 = Z_5 = Z_6 = (12 + j9)\ \Omega$; $\dot{E}_1 = 120\angle 0^0$ V;

$\dot{E}_2 = 120\angle -120^0$ V; $\dot{E}_3 = 120\angle 120^0$ V. Tính các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}_3$.



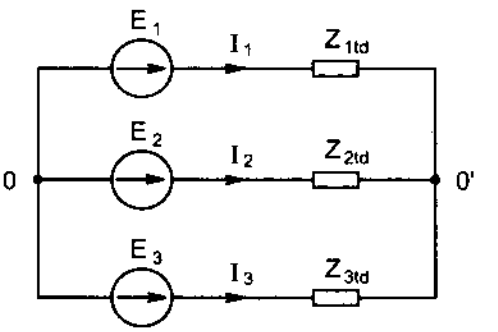
Hình 3.5.2

Giải:

Ta thay các tổng trở Z_4, Z_5, Z_6 nối hình tam giác giữa các nút ①, ②, ③ bằng các tổng trở Z_1', Z_2', Z_3' nối hình sao tương đương.

Kí hiệu $Z_4 = Z_5 = Z_6 = Z_\Delta$ và $Z_1' = Z_2' = Z_3' = Z_Y$, ta có:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} = \frac{12 + j9}{3} = (4 + j3)\ \Omega$$



Hình 3.5.2c

Mạch điện ở H.3.5..2b tương đương với mạch điện ở H.3.5.2c với :

$$Z_{1td} = Z_{2td} = Z_{3td} = Z_1 + Z_1' = Z_2 + Z_2' = Z_3 + Z_3'$$
$$= (4 + j3) + (1 + j2) = (5 + j5)\ \Omega$$

Áp dụng công thức điện áp hai nút (3.3.16) cho mạch điện ở H.3.5.2c, ta có:

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_1 Y_{1td} + \dot{E}_2 Y_{2td} + \dot{E}_3 Y_{3td}}{Y_{1td} + Y_{2td} + Y_{3td}}$$

Vì $Y_{1td} = Y_{2td} = Y_{3td} = Y_{td}$ ta có:

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{(\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3)Y_{td}}{3Y_{td}} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3}{3}$$

$$= \frac{100\angle 0^0 + 100\angle -120^0 + 100\angle 120^0}{3}$$

$$= \frac{100 + (50 - j86,60) + (-50 + j86,60)}{3} = 0$$

Từ sơ đồ H.3.5.2c, ta có:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_{1td}} = \frac{100\angle 0^0}{5 + j5} = (10 - j10)\,A = (14,14\angle -45^0)\ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_{2td}} = \frac{100\angle -120^0}{5 + j5} = (-13,66 - j3,660)\,A = (14,14\angle -165^0)\ A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3}{Z_{3td}} = \frac{100\angle 120^0}{5 + j5} = (3,660 + j13,66)\,A = (14,14\angle 75^0)\ A$$

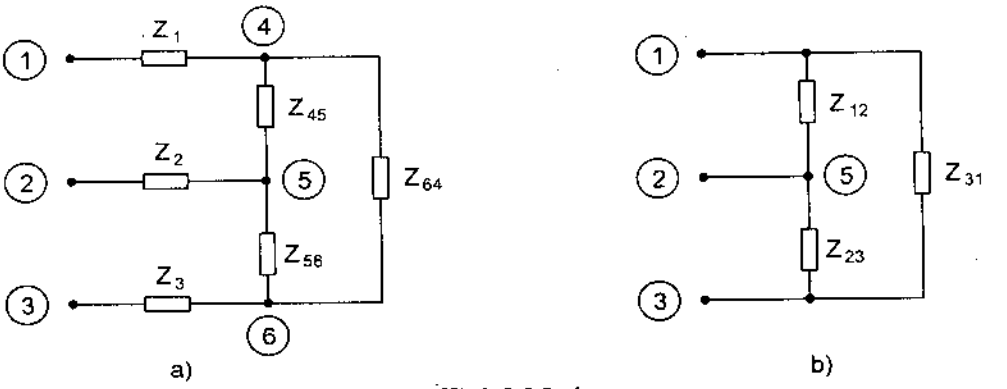
Ở đây, bằng phương pháp biến đổi tương đương $\Delta \rightarrow Y$ ta đã đưa một mạch điện có 6 nhánh và 4 nút về một mạch điện đơn giản hơn chỉ có 3 nhánh và 2 nút làm cho việc tính các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}_3$ dễ dàng hơn rất nhiều.

Ví dụ 3.5.2:

Cho mạch điện ở H.3.5.3a với

$Z_1 = Z_2 = Z_3 = (2 + j4)\Omega$ và $Z_{45} = Z_{56} = Z_{64} = (30 + j60)\Omega$.

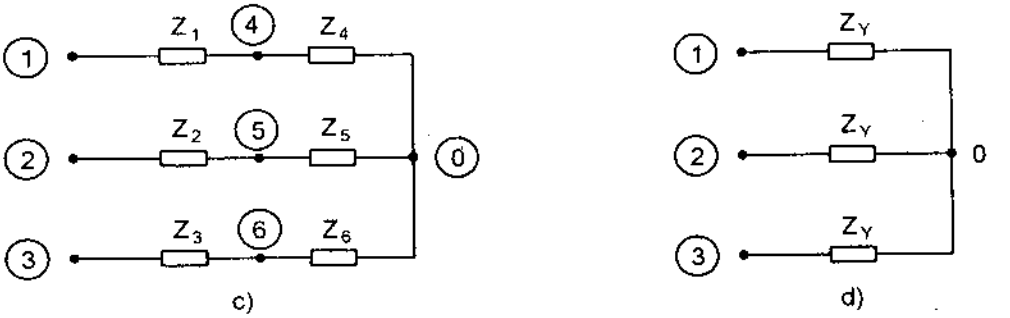
Hãy tìm các tổng trở Z_{12}, Z_{23} và Z_{31} của sơ đồ tương đương ở H.3.5.3b.



Hình 3.5.3a,b

Giải:

Đầu tiên, ta hãy thay các tổng trở Z_{45}, Z_{56} và Z_{64} nối hình tam giác ở sơ đồ H.3.5.3a bằng các tổng trở tương đương Z_4, Z_5 và Z_6 nối hình sao như ở H.3.5.3c.



Hình 3.5.3c,d

Theo công thức biến đổi $\Delta \rightarrow Y$ ta có:

$$Z_4 = Z_5 = Z_6 = \frac{(30 + j60)}{3} = (10 + j20)\ \Omega$$

Ta dễ thấy rằng, sơ đồ ở H.3.5.3c tương đương với sơ đồ ở H.3.5.3d với:

$$Z_Y = Z_1 + Z_4 = Z_2 + Z_5 = Z_3 + Z_6$$
$$= (2 + j4) + (10 + j20) = (12 + j24)\ \Omega$$

Tiếp theo, ta biến đổi các tổng Z_Y nối hình sao (ở hình 3.5.3d) thành các tổng trở tương đương nối hình tam giác Z_Δ ở H.3.5.3b.

Theo công thức biến đổi $Y \rightarrow \Delta$ ta có:

$$Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z_\Delta = 3Z_Y = 3(12 + j24) = 36 + j64\ \Omega$$

CÂU HỎI KIỂM TRA

3.1. Các bước cần tiến hành khi giải một mạch điện bằng phương pháp các dòng điện nhánh. Số phương trình độc lập tuyến tính cần viết cho các nút và cho các vòng có quan hệ gì với số nút n và số nhánh m của mạch điện.

Viết hệ phương trình các dòng điện nhánh cho một số mạch điện từ đơn giản đến phức tạp.

3.2. Các bước cần tiến hành khi giải một mạch điện bằng phương pháp dòng vòng. Số phương trình dòng vòng cần viết có quan hệ gì với số nút n và số nhánh m của mạch điện.

Viết hệ phương trình dòng vòng cho một số mạch điện từ đơn giản đến phức tạp.

3.3. Các bước cần tiến hành khi giải một mạch điện bằng phương pháp thế nút. Số phương trình thế nút cần viết có quan hệ gì với số nút n của mạch điện.

Viết hệ phương trình thế nút cho một số mạch điện từ đơn giản đến phức tạp.

3.4. So sánh phương pháp dòng vòng, phương pháp điện thế các nút với phương pháp các dòng nhánh về các mặt sau đây:

- Cách chọn các ẩn số
- Số các phương trình
- Ý nghĩa của các phương trình
- Thủ tục giải hệ phương trình

Cho một số ví dụ cho thấy rõ ưu điểm, nhược điểm của mỗi phương pháp.

3.5. Mục đích của việc biến đổi sơ đồ của mạch điện thành một sơ đồ tương đương là gì. Cho một số ví dụ.

3.6. Chứng minh các công thức về sđđ tương đương, nguồn dòng tương đương và tổng trở tương đương hoặc tổng dẫn tương đương của các nhánh nối tiếp hoặc song song. Cho một số ví dụ.

3.7. Chứng minh các công thức biến đổi sao - tam giác (Y - Δ) và tam giác - sao $(\Delta - Y)$. Cho một số ví dụ về áp dụng biến đổi Y - Δ và Δ - Y trong việc giải mạch điện.

BÀI TẬP

BT.3.1. Cho mạch điện ở H.BT.3.1 với

$Z_1 = Z_2 = 1 + j1\ \Omega$, $Z_3 = 10 + j20\ \Omega$,

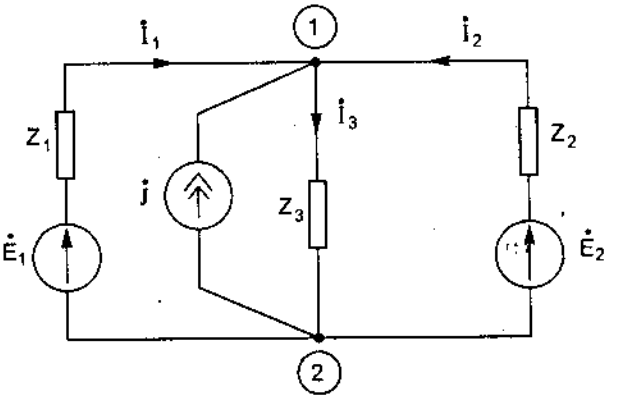
$\dot{E}_1 = \left(100\angle 0^0\right)$ V, $\dot{E}_2 = \left(110\angle\frac{\pi}{3}\right)$ V và $\dot{J} = (5\angle\pi/6)$ A.

Tính các dòng điện $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ bằng:

1. Phương pháp dòng nhánh.
2. Phương pháp dòng vòng.
3. Phương pháp thế nút.

Tính các công suất tác dụng và công suất phản kháng của các nhánh và kiểm nghiệm cân bằng công suất trong toàn mạch.

H.BT.3.1



BT.3.2. Cho mạch điện ở H.BT.3.2 với:

$$\dot{E}_1 = \left(200\angle 0^0\right)\ \text{V},\ \dot{E}_2 = \left(220\angle\frac{\pi}{6}\right)\ \text{V}$$

$Z_1 = Z_2 = 1 + j2\ \Omega$,

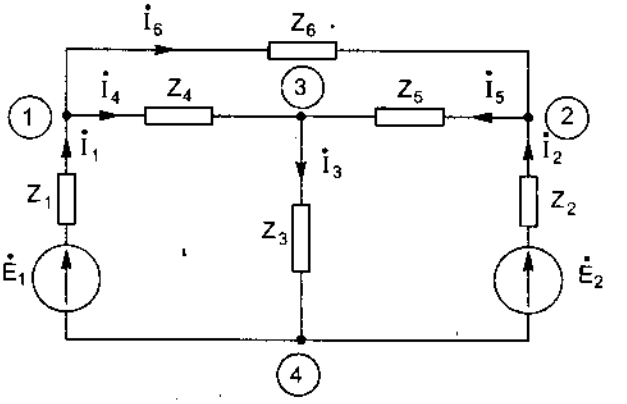
$Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6 = (18 + j24)\ \Omega$

Tính dòng điện các nhánh bằng:

1. Phương pháp dòng nhánh.
2. Phương pháp dòng vòng.
3. Phương pháp thế nút.

Tính các công suất tác dụng và công suất phản kháng của các nhánh và kiểm nghiệm sự cân bằng công suất trong toàn mạch.

H.BT.3.2



BT.3.3. Cho mạch điện ở H.BT.3.3 với:

$$\dot{E}_1 = \left(100\angle\frac{\pi}{6}\right)\text{ V},\ \dot{E}_2 = \left(120\angle\frac{\pi}{3}\right)\text{ V},\ \dot{J} = \left(5\angle\frac{\pi}{4}\right)\text{ A}$$

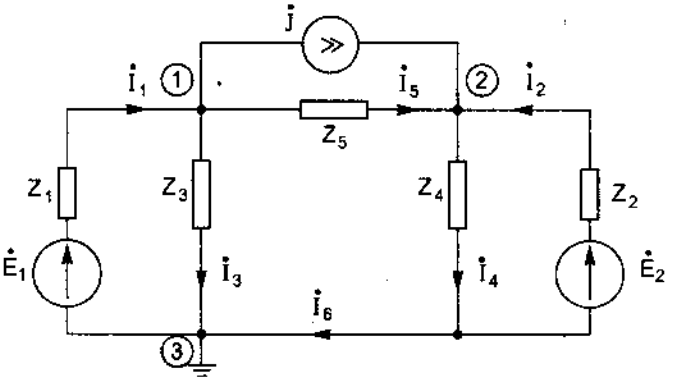
$$Z_1 = Z_2 = 1 + j2\ \Omega,\ Z_3 = Z_4 = Z_5 = (1 + j20)\ \Omega$$

Tính dòng điện các nhánh bằng:

1. Phương pháp dòng nhánh.
2. Phương pháp dòng vòng.
3. Phương pháp thế nút.

Tính các công suất tác dụng và công suất phản kháng của các nhánh và kiểm nghiệm sự cân bằng công suất trong toàn mạch.

H.BT.3.3



BT.3.4. Giải lại bài tập BT.3.2 với $Z_1 = 0$.

BT.3.5. Giải lại bài tập BT.3.3 với $Z_2 = 0$.

BT.3.6. Cho mạch điện ở H.BT.3.6 với:

$Z_1 = (10 + j20)\ \Omega$,

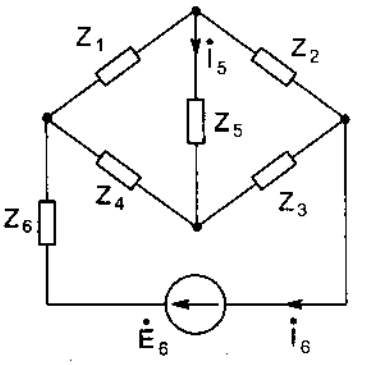
$Z_2 = (20 + j40)\ \Omega$,

$Z_3 = Z_4 = (10 - j20)\ \Omega$,

$Z_5 = 10\ \Omega$,

$Z_6 = (1 + j7)\ \Omega$,

$\dot{E}_1 = \left(100\angle 0^0\right)$ V.



H.BT.3.6

Tính dòng điện các nhánh, tính công suất tác dụng và công suất phản kháng của nguồn.

BT.3.7. Tính dòng điện $\dot{I}_3$ trong mạch điện ở BT.3.1 bằng phương pháp biến đổi tương đương các nhánh song song.

BT.3.8. Tính các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ trong mạch điện ở H.BT.3.2 bằng phương pháp biến đổi sao - tam giác.

BT.3.9. Tính dòng điện $\dot{I}_6$ trong mạch điện ở BT.3.3 bằng phương pháp biến đổi tương đương.

BT.3.10. Tính các dòng điện $\dot{I}_5$ và $\dot{I}_6$ trong mạch điện ở BT.3.6 bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Chương 4

MẠCH ĐIỆN CÓ HỖ CẢM

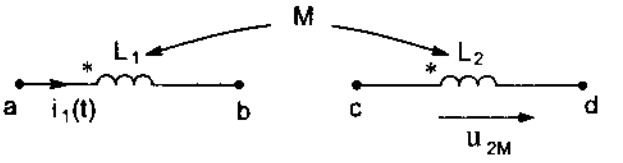
Trong chương này ta xét tác dụng của hỗ cảm ở chế độ xác lập hình sin. Các sinh viên thường gặp nhiều khó khăn và mắc nhiều sai lầm khi giải các mạch điện có hỗ cảm, vì thế cần đặc biệt chú ý và hiểu rõ từng mục trước khi nghiên cứu các mục tiếp theo.

4.1. HỖ CẢM. CÁC CỰC CÙNG CỰC TÍNH. BIỂU THỨC CỦA ĐIỆN ÁP HỖ CẢM

Để cho đơn giản ta hãy xét hai cuộn dây lý tưởng có điện cảm L_1 và L_2 và có các điện trở bằng không ($R_1 = R_2 = 0$).

Người ta nói rằng 2 cuộn dây L_1 và L_2 có hỗ cảm với nhau nếu một dòng điện i_1 biến thiên (theo thời gian $\frac{di_1}{dt} \neq 0$) chạy trong cuộn dây L_1 sẽ tạo nên một điện áp hỗ cảm u_{2M} trong cuộn dây L_2.

Để viết được biểu thức toán học liên hệ giữa điện áp hỗ cảm u_{2M} với tốc độ biến thiên $\frac{di_1(t)}{dt}$ của dòng điện $i_1(t)$ theo thời gian người ta cần chỉ rõ bằng cách đánh dấu bằng cùng một dấu nào đó (ví dụ dấu *) hai cực xác định của L_1 và L_2 được gọi là *các cực cùng cực tính* của L_1 và L_2 với ý nghĩa sau đây :



Hình 4.1.1

*Nếu ta chọn chiều dương của $i_1(t)$ trong cuộn dây L_1 là chiều đi từ cực có đánh dấu * của L_1 đến cực còn lại (không đánh dấu *) của L_1 và chọn chiều dương của điện áp hỗ cảm $u_{2M}(t)$ trong cuộn dây L_2 là chiều đi từ cực có đánh dấu * đến cực còn lại (không đánh dấu *) của L_2 như ở H.4.1.1, thì điện áp hỗ cảm u_{2M} sẽ có biểu thức là:*

$$u_{2M}(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \quad (\text{với } M_{21} > 0) \qquad (4.1.1)$$

Hệ số M_{21} trong phương trình (4.1.1) được gọi là *hệ số hỗ cảm* hay *hỗ cảm (mutual inductance) giữa L_1 và L_2*. Hỗ cảm M_{21} liên quan với L_1, L_2 bởi hệ thức :

$$M_{21} = k_{21}\sqrt{L_1 L_2} \text{ với } 0 \le k_{21} \le 1 \qquad (4.1.2)$$

Hỗ cảm M_{21} có cùng đơn vị với điện cảm L_1, L_2 là henry (viết tắt là H).

Đối với các *hỗ cảm tuyến tính*, ta có :

$$M_{12} = M_{21} \qquad (4.1.3)$$

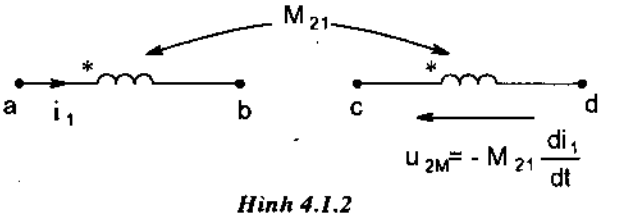
Trong trường hợp chỉ có 2 phần tử L_1 và L_2 có hỗ cảm với nhau, ta chỉ cần dùng M để chỉ hỗ cảm giữa L_1 và L_2 :

$$M_{12} = M_{21} = M$$

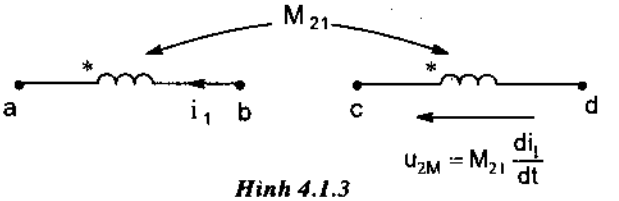
Giả sử đã cho cực a của L_1 và cực c của L_2 là cực cùng cực tính của L_1 và L_2. Ta đánh dấu hai cực a và c này bằng dấu * như ở H.4.1.1. Giả sử ta chọn chiều dương của $i_1(t)$ trong L_1 là chiều đi từ cực có đánh dấu * đến cực kia (không có dấu *) của L_1 (tức là chiều đi cực a đến cực b của L_1). Nếu ta chọn chiều dương của điện áp hỗ cảm $u_{2M}(t)$ trong L_2 là chiều đi từ cực có đánh dấu * đến cực còn lại (không có dấu *) của L_2, tức là chọn chiều dương của $u_{2M}(t)$ là chiều đi từ cực c đến cực d của L_2, thì điện áp hỗ cảm $u_{2M}(t)$ sẽ có biểu thức là:

$$u_{2M} = M_{21}\frac{di_1}{dt} \text{ với } M_{21} > 0 \qquad (4.1.4)$$

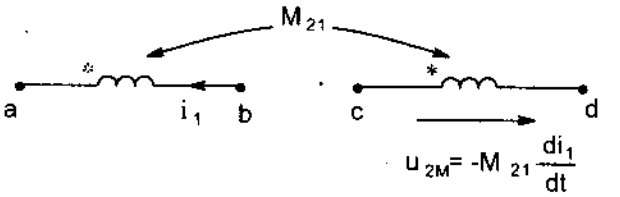
Từ quy tắc ở H.4.1.1 ta dễ dàng suy ra các biểu thức của điện áp hỗ cảm trong H.4.1.2, H4.1.3 và H4.1.4.



Hình 4.1.2



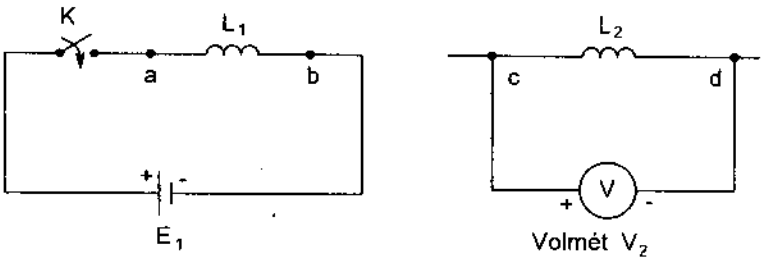
Hình 4.1.3



Hình 4.1.4

Trên thực tế các cực cùng cực tính của hai cuộn dây phụ thuộc vào chiều quấn dây của các cuộn dây điện cảm L_1, L_2 và phụ thuộc vào vị trí tương đối của hai cuộn dây trong không gian. Trên sơ đồ mạch điện không thể chỉ rõ các yếu tố này nên người ta phải đánh dấu các cực cùng cực tính của hai cuộn dây có hỗ cảm bằng cùng một dấu nào đó, ví dụ dấu * như đã nói ở trên.

Nếu không biết chiều quấn dây của các cuộn dây L_1, L_2 và vị trí tương đối của chúng trong không gian ta cũng có thể xác định các cực cùng cực tính của L_1 và L_2 bằng cách thí nghiệm dựa vào *ý nghĩa* đã nói ở trên.



Hình 4.1.5

Thật vậy, giả sử đã cho hai cuộn dây điện cảm L_1 và L_2 với các cực của L_1 được ký hiệu bằng a và b, còn các cực của L_2 được ký hiệu bằng c và d (như H.4.1.5).

Ta hãy nối một pin E_1 với các cực của cuộn dây L_1 sao cho nếu khoá K đóng mạch thì cực a của L_1 được nối với cực dương (+) của pin, còn cực b của L_1 được nối với cực âm (-) của pin. Ta nối một voltmet một chiều V_2 với các cực của cuộn dây L_2 sao cho cực c của L_2 được nối với cực dương (+) của voltmet, còn cực d của L_2 được nối với cực (-) của voltmet.

Bây giờ ta hãy đóng nhanh khoá K trong mạch của cuộn dây L_1 và quan sát xem kim của voltmet trong mạch của cuộn dây L_2 sẽ quay theo chiều nào :

1. Nếu kim của voltmet V_2 quay thuận chiều mà nó đã được chế tạo, tức là về phía bên phải của vạch 0V thì ta kết luận rằng cực c của L_2 có cùng cực tính với cực a của cuộn L_1.

2. Nếu kim của voltmet V_2 quay ngược chiều, tức là về phía bên trái của vạch 0V thì ta kết luận rằng cực d của L_2 có cùng cực tính với cực a của cuộn L_1.

Giải thích : Khi ta đóng khoá K thì dòng điện i_1 với chiều dương chọn theo chiều đi từ cực a đến cực b trong cuộn dây L_1 sẽ tăng lên bắt đầu từ trị số ban đầu bằng không của nó nên $\frac{di_1}{dt} > 0$.

1. Nếu kim của voltmet V_2 quay thuận chiều thì điện áp hỗ cảm $u_{2M}(t)$ đo bởi voltmet với chiều dương đi từ cực + của voltmet đến cực - của volmét (cũng tức là chiều đi từ cực c đến cực d của L_2) có trị số dương:

$$u_{2M}(t) = M_{21}\frac{di_1}{dt} > 0 \text{ với } M_{21} > 0 \text{ và } \frac{di_1}{dt} > 0$$

Điều này phù hợp với quy ước về chiều dương của $i_1(t)$ và $u_{2M}(t)$ trong biểu thức của điện áp hỗ cảm đã nói trên.

Trong trường hợp này, cực a của L_1 và cực c của L_2 là hai cực có cùng cực tính.

2. Nếu kim của voltmet V_2 quay ngược chiều thì điện áp hỗ cảm $u_{2M}(t)$ đo bởi voltmet với chiều dương đi từ cực + của voltmet đến cực - của volmét (cũng tức là chiều đi từ cực c đến cực d của L_2) có trị số âm:

$$u_{2M}(t) = M_{21}\frac{di_1}{dt} < 0$$

với $$M_{21} > 0 \text{ và } \frac{di_1}{dt} > 0$$

Điều này có nghĩa là cực a của L_1 và cực c của L_2 không phải là hai cực có cùng cực tính.

Từ đó suy ra rằng, trong trường hợp này cực a của L_1 và cực d của L_2 là hai cực cùng cực tính.

Trong ví dụ 4.2.2 ở phần dưới ta sẽ trình bày một phương pháp xác định các cực có cùng cực tính của hai cuộn dây có hỗ cảm bằng cách dùng dòng điện hình sin.

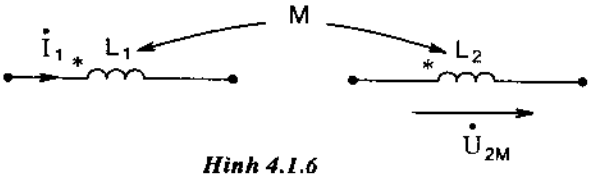
Biểu thức của điện áp hỗ cảm trong trường hợp dòng điện hình sin.

Xét hai cuộn dây L_1 và L_2 có hỗ cảm M với các cực cùng cực tính được đánh dấu * (H.4.1.6). Giả thiết dòng điện chạy trong cuộn dây L_1 là dòng điện hình sin có tần số góc là ω :

$$i_1(t) = I_{1m}\sin(\omega t + \alpha_1) \qquad (4.1.5)$$

với chiều dương của $i_1(t)$ được chọn là chiều đi từ cực * đến cực còn lại của L_1.

Để tìm biểu thức của điện áp hỗ cảm $u_{2M}(t)$ trong cuộn dây L_2, ta chọn chiều dương của u_{2M} là chiều đi từ cực * của L_2 đến cực còn lại của L_2 (H.4.1.6).



Hình 4.1.6

Ta có :

$$u_{2M} = M_{21}\frac{di_1}{dt} = M_{21}\frac{d}{dt}\left[I_{1m}\sin(\omega t + \alpha_1)\right]$$

$$= \omega M_{21} I_{1m}\cos(\omega t + \alpha_1) = \omega M_{21} I_{1m}\sin\left(\omega t + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4.1.6)$$

Các ảnh phức của $i_1(t)$ và $u_{2M}(t)$ tương ứng là:

$$\dot{I}_1 = \frac{I_{1m}e^{j\alpha_1}}{\sqrt{2}} = I_1 e^{j\alpha_1} \qquad (4.1.7)$$

và

$$\dot{U}_{2M} = \omega M_{21}\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}e^{j\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

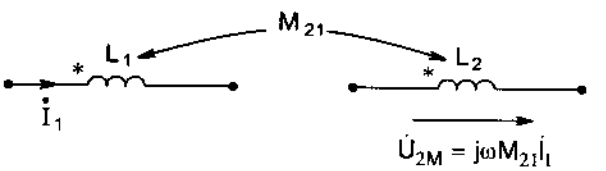
$$= j\omega M_{21}\left(I_1 e^{j\alpha_1}\right) = j\omega M_{21}\dot{I}_1 \qquad (4.1.8)$$

Vì vậy ta có quy tắc sau đây:

Nếu ta chọn chiều dương của $\dot{I}_1$ và chiều dương của $\dot{U}_{2M}$ đều là chiều đi từ cực cùng tính của mỗi cuộn dây đến cực còn lại của cuộn dây đó thì:

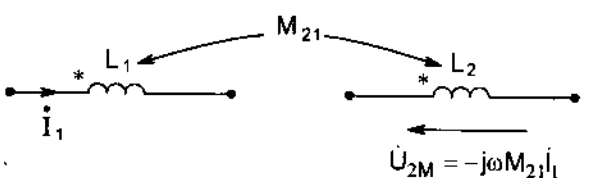
$$\dot{U}_{2M} = j\omega M_{21}\dot{I}_1 \text{ (với } M_{21} > 0) \qquad (4.1.9)$$

Quy tắc này được biểu diễn bằng sơ đồ ở H.4.1.7

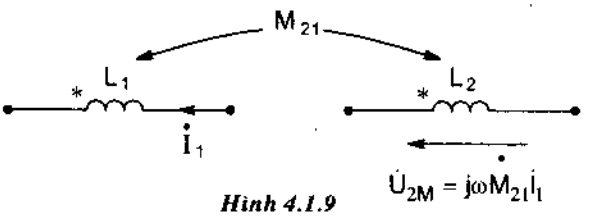


Hình 4.1.7

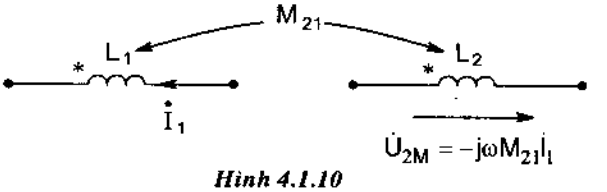
Từ quy tắc cơ bản này ta cũng dễ suy ra biểu thức của điện áp hỗ cảm trong các trường hợp vẽ ở H.4.1.8, H.4.1.9 và H.4.1.10.



Hình 4.1.8



Hình 4.1.9



Hình 4.1.10

4.2. GIẢI CÁC MẠCH ĐIỆN CÓ HỖ CẢM

Để giải các mạch điện có hỗ cảm ta có thể dùng phương pháp dòng nhánh và phương pháp dòng vòng đã xét ở chương 3. Phương pháp thế nút chỉ có thể dùng cho mạch có hỗ cảm nếu viết hệ phương trình dưới dạng ma trận.

Ở đây trong chương trình của các trường Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp, ta chỉ xét phương pháp dòng nhánh.

4.2.1. Mạch có hai phần tử có hỗ cảm nối nối tiếp

Ta sẽ xét việc tính mạch điện có hai phần tử hỗ cảm nối nối tiếp qua ví dụ cụ thể sau đây.

Ví dụ 4.2.1

Cho mạch điện có hai cuộn dây có hỗ cảm nối tiếp (H.4.2.1) với : $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $L_1 = 100$ mH, $L_2 = 200$ mH và $M = 50$ mH đặt vào nguồn có điện áp hình sin với U = 200 V và tần số f = 50 Hz.

Tính tổng trở tương đương của mạch trong hai trường hợp:

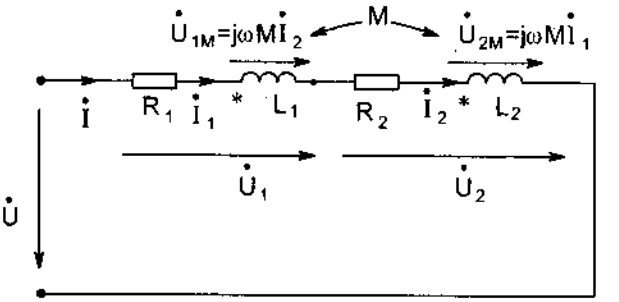
1) Khi hai cuộn dây nối tiếp thuận (H.4.2.1a)

2) Khi hai cuộn dây nối tiếp ngược (H.4.2.1b)

Tính dòng điện và điện áp trên từng cuộn dây trong mỗi trường hợp trên.

Giải :

1) Khi hai cuộn dây có hỗ cảm được nối tiếp theo sơ đồ ở H.4.2.1a, người ta nói chúng được nối tiếp thuận.



Hình 4.2.1a

Chọn chiều dương của các dòng điện $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ và chiều dương của các điện áp hỗ cảm $\dot{U}_{1M}$ và $\dot{U}_{2M}$ như ở H.4.2.1a, ta có:

$$\dot{U}_{1M} = j\omega M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_{2M} = j\omega M\dot{I}_1$$

Chú ý rằng $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}$ nên có: $\dot{U}_{1M} = \dot{U}_{2M} = j\omega M\dot{I}$

Điện áp trên mỗi cuộn dây là

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I} + j\omega L_1\dot{I} + j\omega M\dot{I}$$

$$\dot{U}_2 = R_2\dot{I} + j\omega L_2\dot{I} + j\omega M\dot{I}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \\ &= (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} + (R_2 + j\omega L_2)\dot{I} + 2(j\omega M)\dot{I} \\ &= \left[(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\right]\dot{I}\end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)} = \frac{\dot{U}}{Z_{thuận}}$$

với $Z_{thuận} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = (R_1 + R_2) + jX_{thuận}$

với $X_{thuận} = \omega(L_1 + L_2 + 2M)$

Áp dụng bằng số :

Với $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $L_1 = 100$ mH, $L_2 = 200$ mH, $M = 50$ mH, $f = 50$ Hz và $\dot{U} = 200\angle 0^0$ ta có $\omega = 2\pi\times 50 = 100\pi$ rad/s.

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 100\pi \times 100 \times 10^{-3} = 31,42\ \ \Omega$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 100\pi \times 200 \times 10^{-3} = 62,83\ \ \Omega$$

$$X_M = \omega M = 100\pi \times 50 \times 10^{-3} = 15,71\ \ \Omega$$

$$X_{thuận} = \omega(L_1 + L_2 + 2M) = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M =$$

$$= 31,42 + 62,83 + 2\times(15,71) = 125,7\ \ \Omega$$

$$Z_{thuận} = (R_1 + R_2) + jX_{thuận} = (10 + 20) + j125,7 =$$

$$= (30 + j125,7)\ \Omega = (129,2\angle 76,58^0)\ \Omega$$

Dòng điện

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_{thuận}} = \frac{200\angle 0^0}{30 + j125,7} =$$

$$= (0,3593 - j1,505)\ A = (1,548\angle -76,58^0)\ A$$

Điện áp trên mỗi cuộn dây là :

$$\dot{U}_1 = [R_1 + j(\omega L_1 + \omega M)]\dot{I} =$$

$$= [10 + j(31,42 + 15,71)](0,3593 - j1,505) =$$

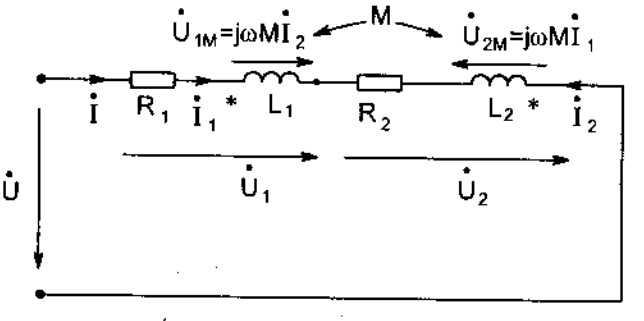
$$= (74,52 + j1,884) = (74,55\angle 1,448^0)\ V$$

$$\dot{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2)\dot{I} + j\omega M\dot{I} = [R_2 + j(\omega L_2 + \omega M)]\dot{I} =$$

$$= [(20 + j(62,83 + 15,71)] \times (0,3593 - j1,505] =$$

$$= 125,4 - j1,881 = (125,4\angle -0,8593^0)\ V$$

2) Khi hai cuộn dây có hỗ cảm được nối tiếp theo sơ đồ ở H.4.2.1b, người ta nói chúng được *nối tiếp ngược*.



Hình 4.2.1b

Với chiều dương của các dòng điện $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ và chiều dương của các điện áp hỗ cảm $\dot{U}_{1M}$ và $\dot{U}_{2M}$ đã chọn như ở H.4.2.1b, ta có :

$$\dot{U}_{1M} = j\omega M\dot{I}_2$$

và $$\dot{U}_{2M} = j\omega M\dot{I}_1$$

Chú ý rằng $\dot{I}_1 = \dot{I}$ và $\dot{I}_2 = -\dot{I}$ nên

$$\dot{U}_{1M} = -j\omega M\dot{I}$$

$$\dot{U}_{2M} = j\omega M\dot{I}$$

Điện áp trên mỗi cuộn dây là :

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I} + j\omega L_1\dot{I} - j\omega M\dot{I} = \left[R_1 + j\omega(L_1 - M)\right]\dot{I}$$

và $$\dot{U}_2 = R_2\dot{I} + j\omega L_2\dot{I} - j\omega M\dot{I} = \left[R_2 + j\omega(L_2 - M)\right]\dot{I}$$

Do đó

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$= \left[R_1 + j\omega(L_1 - M)\right]\dot{I} + \left[R_2 + j\omega(L_2 - M)\right]\dot{I}$$

$$= \left[(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\right]\dot{I}$$

Từ đó ta có $$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)} = \frac{\dot{U}}{Z_{ngược}}$$

với $$Z_{ngược} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) =$$

$$= (R_1 + R_2) + jX_{thuận}$$

và $$X_{ngược} = \omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

4.2.2. Mạch điện có hai phần tử có hỗ cảm nối song song

Ta sẽ xét việc tính mạch điện có hai cuộn dây có hỗ cảm nối song song qua hai ví dụ cụ thể.

Ví dụ 4.2.2 :

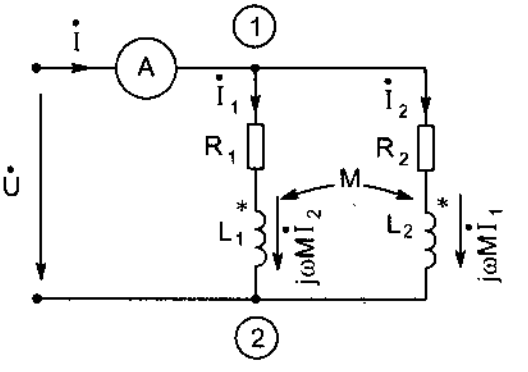
Cho mạch điện gồm hai cuộn dây có hỗ cảm nối song song như ở H.4.2.2 với :

$R_1 = 20\ \Omega$; $R_2 = 40\ \Omega$;

$\omega M = 10\ \Omega$; $\omega L_1 = 30\ \Omega$;

$\omega L_2 = 30\ \Omega$ và $\dot{U} = 180\angle 0^0$ V

Các cực có cùng cực tính của hai cuộn dây được nối với nút ①.



Hình 4.2.2

a) Tính dòng điện các nhánh $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}$.

b) Tính tổng trở tương đương của mạch điện.

Giải :

Ta chọn chiều dương của dòng điện các nhánh như ở H.4.2.3. Ta viết được hệ phương trình dòng nhánh sau đây:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I} \qquad (1)$$

$$R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U} \qquad (2)$$

$$R_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = \dot{U} \qquad (3)$$

hay:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I} \qquad (4)$$

$$Z_1\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2 = \dot{U} \qquad (5)$$

$$Z_M\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 = \dot{U} \qquad (6)$$

với: $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$; $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$ và $Z_M = j\omega M$.

Giải hệ hai phương trình (5) và (6) ta được:

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U} & Z_M \\ \dot{U} & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \dot{U}\left(\frac{Z_2 - Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 & \dot{U} \\ Z_M & \dot{U} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{vmatrix}} = \dot{U}\left(\frac{Z_1 - Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right)$$

Sử dụng phương trình (1) ta có:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}\left(\frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right) \qquad (7)$$

Tổng trở tương đương của mạch theo định nghĩa là tỷ số của điện áp $\dot{U}$ với dòng điện $\dot{I}$ trong nhánh chính nên từ (7) ta có:

$$Z_{td} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}$$

Áp dụng bằng số :

Với $\quad Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (20 + j30)\ \Omega$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (40 + j30)\ \Omega$$

$$Z_M = j\omega M = j10\ \Omega \text{ và } \dot{U} = (180\angle 0^0)\ V$$

ta có

$$Z_1Z_2 - Z_M^2 = (20 + j30)(40 + j30) - (j10)^2$$

$$= -100 + j1800 - (-100) = j1800\ \Omega$$

$$Z_1 + Z_2 - 2Z_M = (20 + j30) + (40 + j30) - 2(j10)$$

$$= 60 + j60 - j20 = 60 + j40\ \Omega$$

$$Z_2 - Z_M = 40 + j30 - j10 = (40 + j20)\ \Omega$$

$$Z_1 - Z_M = 20 + j30 - j10 = (20 + j20)\ \Omega$$

Vậy

$$\dot{I}_1 = \dot{U}\left(\frac{Z_2 - Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right)$$

$$= 180\left(\frac{40 + j20}{j1800}\right) = (2 - j4)A = (4,472\angle -63,43^0)\ A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}\left(\frac{Z_1 - Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right)$$

$$= 180\left(\frac{20 + j20}{j1800}\right) = (2 - j2)A = (2\sqrt{2}\angle -45^0)\ A$$

và $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$

$$= (2 - j4) + (2 - j2)$$

$$= (4 - j6)A = \left(7,2111\angle -56,31^0\right)\ A$$

Tổng trở tương đương của mạch ở H. 4.2.2 bằng:

$$Z_{td} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}$$

$$= \frac{j1800}{60 + j40} = (13,8462 + j20,7692)\ \Omega$$

$$= \left(24,9615\angle 56,31^0\right)\Omega$$

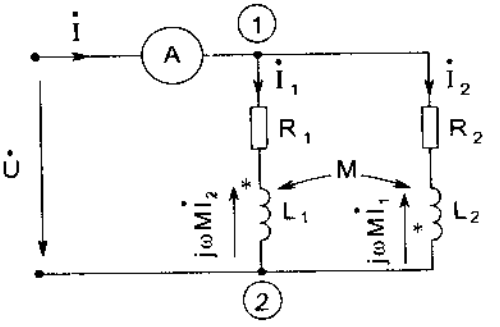
hoặc:

$$Z_{td} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{180\angle 0^0}{4 - j6} = (13,8462 + j20,7692)\ \Omega$$

$$= \left(24,9615\angle 56,31^0\right)\ \Omega.$$

Ví dụ 4.2.3 :

Xét mạch điện đã cho ở ví dụ 4.2.2 nhưng với các cực có cùng cực tính nối vào 2 nút khác nhau như ở H.4.2.3. Tính các dòng điện các nhánh và tổng trở tương đương của mạch. So sánh trị số của dòng điện $\dot{I}$ trong nhánh chính của 2 sơ đồ ở H.4.2.2 và H.4.2.3, từ đó rút ra một phương pháp xác định các cực có cùng cực tính của 2 cuộn dây có hỗ cảm.



Hình 4.2.3

Giải :

Dùng các ký hiệu $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$ và $Z_M = j\omega M$, với chiều dương của các dòng điện $\dot{I}$, $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ như trên H. 4.2.3, ta viết được các phương trình dòng nhánh sau đây:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I} \qquad (1)$$

$$Z_1\dot{I}_1 - Z_M\dot{I}_2 = \dot{U} \qquad (2)$$

$$-Z_M\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 = \dot{U} \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$\dot{I}_1 = \dot{U}\left(\frac{Z_2 + Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right) \qquad (4)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}\left(\frac{Z_1 + Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right) \qquad (5)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}\left(\frac{Z_1 + Z_2 + 2Z_M}{Z_1Z_2 - Z_M^2}\right) \qquad (6)$$

Tổng trở tương đương của mạch ở H.4.2.3 bằng :

$$Z_{td} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_M} \qquad (7)$$

Áp dụng bằng số ta có :

$$\dot{I}_1 = \frac{180(40 + j30 + j10)}{(20 + j30)(40 + j30) - (j10)^2}$$

$$= 180\frac{40 + j40}{j1800} = 4 - j4 = (4\sqrt{2}\angle -45^0)\ A$$

$$\dot{I}_2 = 180\frac{20 + j30 + j10}{j1800} = 4 - j2 = (4,4721\angle -26,57^0)\ A$$

và: $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$

$$= (4 - j4) + (4 - j2)$$

$$= (8 - j6)A = \left(10\angle -36,87^0\right)\ A$$

Tổng trở tương đương của mạch ở H.4.2.3bằng:

$$Z_{td} = \frac{(20 + j30)(40 + j30) - (j10)^2}{(20 + j30) + (40 + j30) + 2(j10)}$$

$$= \frac{j1800}{60 + j80} = 14,40 + j10,80 = 18,00\angle 36,87^0\ \Omega$$

hay $Z_{td} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{180}{8 - j6}$

$$= 14,40 + j10,80 = (18,00\angle 36,87^0)\ \Omega$$

Ta thấy, dòng điện trong nhánh chính của sơ đồ ở H.4.2.2 có trị số hiệu dụng I = 7,2111 A, trong khi dòng điện trong nhánh chính của sơ đồ ở H.4.2.3 có trị số hiệu dụng I = 10 A.

Ta có thể rút ra một phương pháp sau đây để xác định các cực cùng cực tính của hai cuộn dây có hỗ cảm :

Ta nối song song hai cuộn dây với nhau theo hai cách có thể và đặt vào cùng một nguồn điện xoay chiều có trị số điện áp nào đó. Ta dùng một ampemét đo dòng điện I trong mạch chính như ở H.4.2.2 và H.4.2.3

- Nếu ampemét A chỉ trị số dòng điện nhỏ hơn thì hai cực cùng cực tính của hai cuộn dây là các cực cùng nối vào một nút (ví dụ nút ①) của mạch điện như ở sơ đồ H.4.2.2.

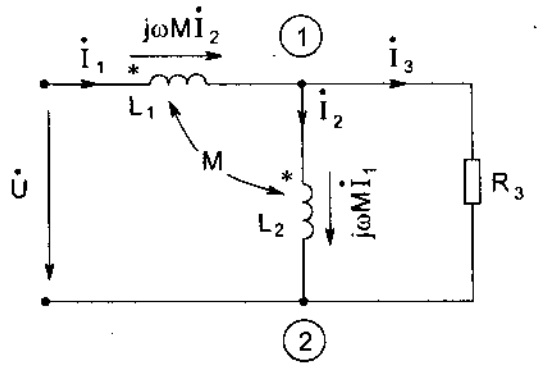
- Nếu ampemét A chỉ trị số dòng điện lớn hơn thì hai cực cùng cực tính của hai cuộn dây nối vào hai nút khác nhau, tức là một cực nối vào nút ① còn cực kia nối vào nút ② của mạch điện như ở sơ đồ H.4.2.3.

4.2.3. Tính mạch điện phức tạp có hỗ cảm

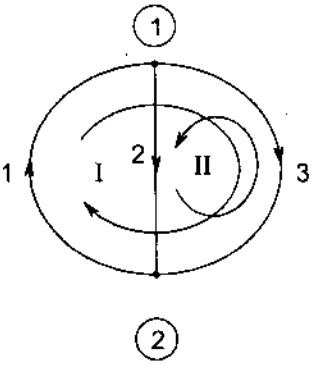
Ta sẽ xét việc tính một mạch điện phức tạp có hỗ cảm qua ví dụ cụ thể sau đây :

Ví dụ 4.2.4 :

Cho mạch điện như ở H. 4.2.4 với $\omega L_1 = \omega L_2 = 140\ \Omega$, $\omega M = 60\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ và $\dot{U} = 200\angle 0^0$ V. Tính các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}_3$ bằng cách viết hệ phương trình dòng nhánh và đưa hệ phương trình này về hệ hai phương trình đối với $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$.



Hình 4.2.4



Hình 4.2.5

Giải :

Ta chọn chiều dương của các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{I}_3$ như vẽ trên H.4.2.4. Ta vẽ graph của mạch điện như ở H.4.2.5

Chọn cây gồm nhánh 3 ta xác định được hai vòng cơ bản I và II như vẽ ở H.4.2.5.

Ta viết phương trình theo định luật Kirchhoff thứ nhất cho nút ①:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \qquad (1)$$

Ta viết các phương trình theo định luật Kirchhoff thứ hai cho vòng I và II:

$$j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 + R_3\dot{I}_3 = \dot{U} \qquad (2)$$

$$j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 - R_3\dot{I}_3 = 0 \qquad (3)$$

Từ (1) ta rút ra biểu thức của $\dot{I}_3$ theo $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \qquad (4)$$

Thay $\dot{I}_3$ theo (4) vào các phương trình (2) và (3) ta được:

$$j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 + R_3\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) = \dot{U}$$

$$j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 - R_3\left(\dot{I}_1 - \dot{I}_2\right) = 0$$

hay
$$(R_3 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + (-R_3 + j\omega M)\dot{I}_2 = \dot{U} \qquad (5)$$

$$(-R_3 + j\omega M)\dot{I}_1 + (R_3 + j\omega L_2)\dot{I}_2 = 0 \qquad (6)$$

Thay trị số của các thông số vào hệ hai phương trình (5) và (6) ta được hai phương trình đối với $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$:

$$\left(30 + j140\right)\dot{I}_1 + \left(-30 + j60\right)\dot{I}_2 = 200 \qquad (7)$$

$$\left(-30 + j60\right)\dot{I}_1 + \left(30 + j140\right)\dot{I}_2 = 0 \qquad (8)$$

Giải hệ hai phương trình (7) và (8) ta được:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 200 & -30+j60 \\ 0 & 30+j140 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+j140 & -30+j60 \\ -30+j60 & 30+j140 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{200\left(30+j140\right)}{-16000+j12000} = \left(0,6000 - j1,3000\right)A = \left(1,4318\angle -65,22^0\right)\ A$$

và
$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 30+j140 & 200 \\ -30+j60 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+j140 & -30+j60 \\ -30+j60 & 30+j140 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-200\left(-30+j60\right)}{-16000+j12000} = \left(-0,6000 + j0,3000\right)A = \left(0,6708\angle 153,43^0\right)\ A$$

Cuối cùng ta tính được dòng điện $\dot{I}_3$ theo (4):

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

$$= \left(1,2000 - j1,6000\right)A = \left(2,000\angle -53,13^0\right)\ A$$

Chú ý rằng, hệ hai phương trình (5) và (6) chính là *hệ phương trình dòng vòng* cho mạch điện có hỗ cảm ở H. 4.2.4. Hệ phương trình dòng vòng này có thể viết dưới dạng sau:

$$Z_{11}\dot{I}_{v_1} + Z_{12}\dot{I}_{v_2} = \dot{E}_{v_1}$$

$$Z_{21}\dot{I}_{v_1} + Z_{22}\dot{I}_{v_2} = \dot{E}_{v_2}$$

trong đó

$$Z_{11} = R_3 + j\omega L_1 = \left(30 + j140\right)\ \Omega$$

$$Z_{22} = R_3 + j\omega L_2 = \left(30 + j140\right)\ \Omega$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -R_3 + j\omega M = \left(-30 + j60\right)\ \Omega$$

$$\dot{E}_{v_1} = \dot{U} = 200\angle 0^0 \text{ V}$$

$$\dot{E}_{v_2} = 0$$

So với trường hợp hệ phương trình dòng vòng cho mạch không có hỗ cảm, ta thấy rằng với mạch có hỗ cảm trong tổng trở chung $Z_{12} = Z_{21}$ của hai vòng I và II ngoài số hạng $(-R_3)$ còn phải thêm số hạng $j\omega M$ do tác dụng của hỗ cảm giữa hai vòng I và II.

CÂU HỎI KIỂM TRA

4.1. Hiện tượng hỗ cảm trong mạch điện là gì? Với quy ước như thế nào về chiều dương của dòng điện i_1 và chiều dương của điện áp hỗ cảm u_{2M} thì ta sẽ có biểu thức:

$$u_{2M} = M\frac{di_1}{dt} \quad (\text{với } M > 0)$$

4.2. Thế nào là hai cực cùng cực tính của 2 phần tử L_1 và L_2 có hỗ cảm với nhau. Từ định nghĩa của các cực cùng cực tính hãy nêu một số phương pháp để xác định các cực cùng cực tính của hai cuộn dây đã cho.

4.3. Cho biểu thức của điện áp hỗ cảm ở chế độ xác lập hình sin. Với quy ước như thế nào về chiều dương của $\dot{U}_{2M}$ và chiều dương của $\dot{I}_1$ thì ta sẽ có biểu thức:

$$\dot{U}_{2M} = j\omega M\dot{I}_1 \quad (\text{với } M > 0)$$

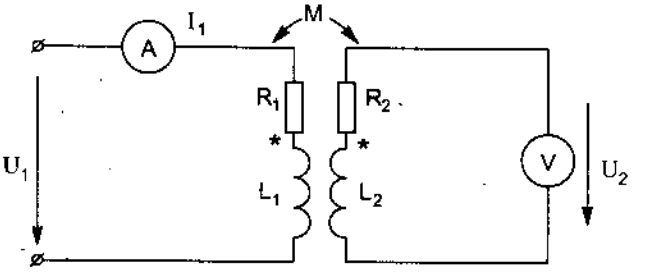
4.4. Tổng trở của hai phần tử có hỗ cảm nối tiếp sẽ thay đổi như thế nào theo các cách nối chúng. Cho một số ví dụ.

4.5. Tổng trở tương đương của hai phần tử nối song song sẽ thay đổi như thế nào theo các cách nối chúng? Cho một số ví dụ.

4.6. Cho một ví dụ về hệ phương trình các dòng nhánh viết cho một mạch điện phức tạp có hỗ cảm. So sánh với trường hợp không có hỗ cảm thì hệ phương trình này có những điểm gì khác.

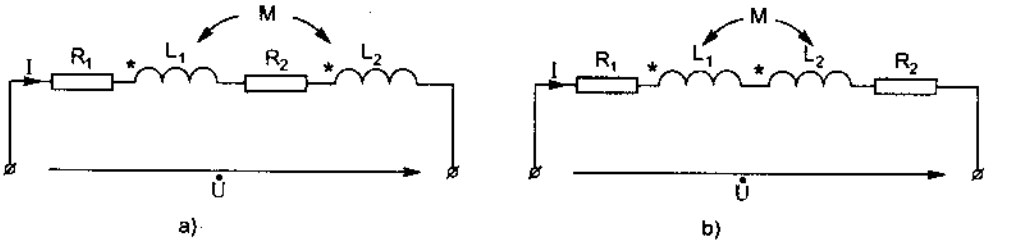
BÀI TẬP

BT.4.1. Trong mạch điện ở H.BT.4.1 người ta đo được I_1 = 1 A và U_2 = 30 V. Tìm trị số của hỗ cảm M nếu i_1 có tần số là 50 Hz (giả thiết rằng voltmét điện trở vô cùng lớn).



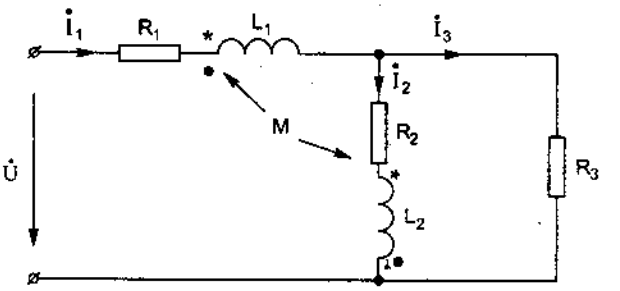
H.BT.4.1

BT.4.2. Trong mạch điện ở H.BT.4.2a người ta đo được dòng điện I = 5 A và công suất P = 100 W ở điện áp U = 200 V và tần số f = 50 Hz. Nếu nối dây như ở H.BT.4.2b người ta đo được công suất P = 500W. Hãy tìm hệ số hỗ cảm M.



H.BT.4.2

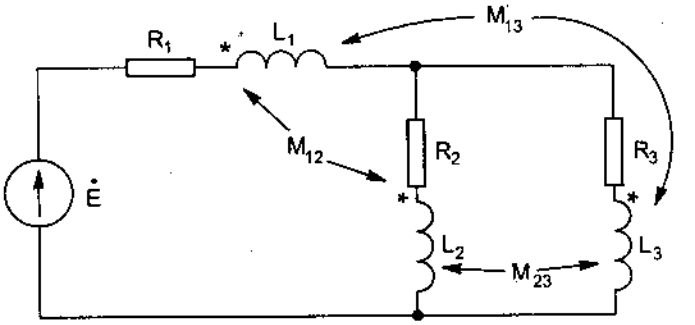
BT.4.3. Cho mạch điện ở H.BT.4.3 với $\dot{U} = 100\angle 0^0$ V, R_1 = 10 Ω, ωL_1 = 30 Ω, R_2 = 10 Ω, ωL_2 = 60 Ω, ωM = 20 Ω và R_3 = 50 Ω. Các cực cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu *. Tìm các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$.



H.BT.4.3

BT.4.4. Giải lại bài tập BT.4.3 khi các cực cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu chấm (•).

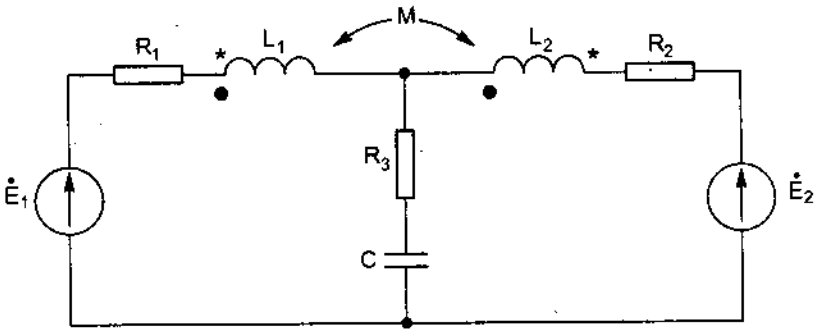
BT.4.5. Cho mạch điện ở H.BT.4.5 với $\dot{E} = 200\angle 0^0$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega$, $\omega L_1 = 30\ \Omega$, $\omega L_2 = 40\ \Omega$, $\omega L_3 = 50\ \Omega$, $\omega M_{12} = 20\ \Omega$, $\omega M_{23} = 40\ \Omega$, $\omega M_{13} = 0$. Tính các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$.



H.BT.4.5

BT.4.6. Giải lại bài tập BT.4.5 với $\omega M_{12} = 20\ \Omega$, $\omega M_{23} = 40\ \Omega$, $\omega M_{13} = 30\ \Omega$.

BT.4.7. Cho mạch điện ở H.BT.4.7 với $\dot{E}_1 = 100\angle 0^0$ V, $\dot{E}_2 = \left(120\angle\frac{\pi}{3}\right)$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = 40\ \Omega$, $\omega L_1 = 80\ \Omega$, $\omega L_2 = 60\ \Omega$, $\omega M = 50\ \Omega$ và $\frac{1}{\omega C} = 100\ \Omega$. Các cực cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu *. Tính dòng điện các nhánh.



H.BT.4.7

BT.4.8. Giải lại BT.4.7 với các cực cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu chấm •

Chương 5

MẠNG MỘT CỬA (MẠNG HAI CỰC) TUYẾN TÍNH

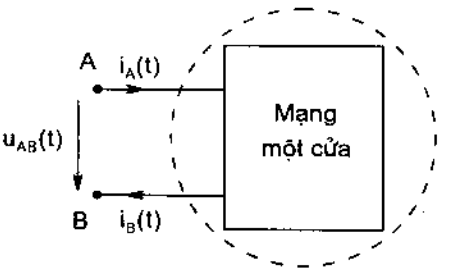
5.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI

Người ta định nghĩa *mạng một cửa* (one-port network) hay *mạng hai cực* (two-terminal network) là bộ phận mạch điện giữa hai cực A và B của một mạch điện phức tạp với điều kiện là dòng điện đi vào mạng bởi cực A phải bằng dòng điện đi ra khỏi mạng bởi cực B tức :

$$i_A(t) = i_B(t) \qquad (5.1.1)$$

Hai cực A và B với điều kiện (5.1) được gọi là *một đôi cực* (a pair of terminals) hay là *một cửa* (a port). Điện áp $u_{AB}(t)$ gọi là *điện áp trên cửa* (xem H.5.1.1).

Nếu một bộ phận của một mạch điện nào đó chỉ được nối với phần còn lại của mạch điện ở hai điểm (hai cực) A và B thì điều kiện (5.1.1) luôn được thoả mãn vì đó là hệ thức ràng buộc giữa hai dòng điện này bởi định luật Kirchhoff đối với các dòng điện đi vào (hay đi ra khỏi) một mặt kín cắt qua hai dây dẫn nối với hai cực A và B.



Hình 5.1.1

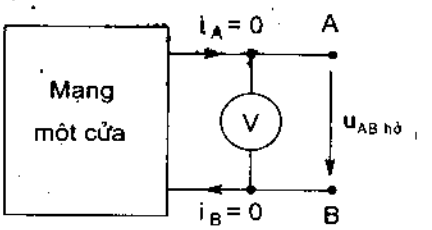
Mạng một cửa có nguồn và mạng một cửa không nguồn

Người ta phân loại các mạng một cửa thành các *mạng một cửa có nguồn* (active one-port networks) và các *mạng một cửa không nguồn* (passive one-port networks).

Để xác định xem một mạng một cửa đã cho là một mạng một cửa có nguồn hay là một mạng một cửa không nguồn, người ta xét một trong hai tình trạng sau đây.

1. Thí nghiệm hở mạch

Ta cắt rời mạng một cửa đã cho khỏi bộ phận mạch điện nối với nó tại các cực A và B như ở H.5.1.2. Khi đó, ta được một mạng một cửa *hở mạch* (dòng điện đi ra



Hình 5.1.2

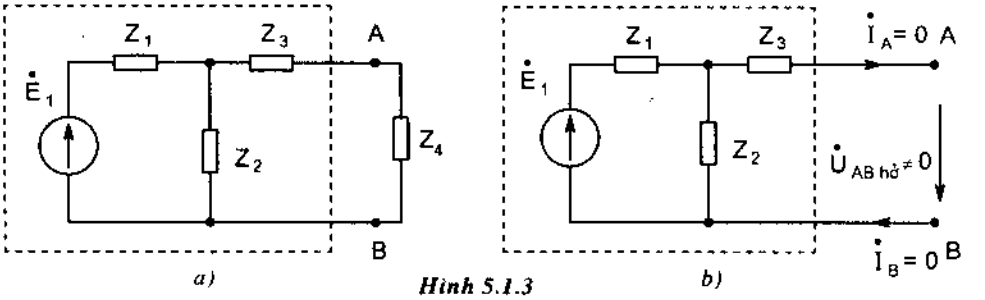
hoặc đi vào mạng một cửa này bằng không $i_A = 0$ (hoặc $i_B = 0$)).

Điện áp giữa hai cực A và B của mạng một cửa khi hở mạch được gọi là *điện áp hở mạch* $u_{ABhở}$ hay $u_{hở}$. Ta có thể xác định điện áp hở mạch $u_{ABhở}$ bằng cách tính toán hay đo bằng một voltmet có điện trở R_v vô cùng lớn.

Nếu $u_{ABhở} = 0$ thì mạng một cửa đã cho là một mạng một cửa không nguồn.

Nếu $u_{ABhở} \neq 0$ thì mạng một cửa đã cho là một mạng một cửa có nguồn.

Ví dụ 5.1.1 :



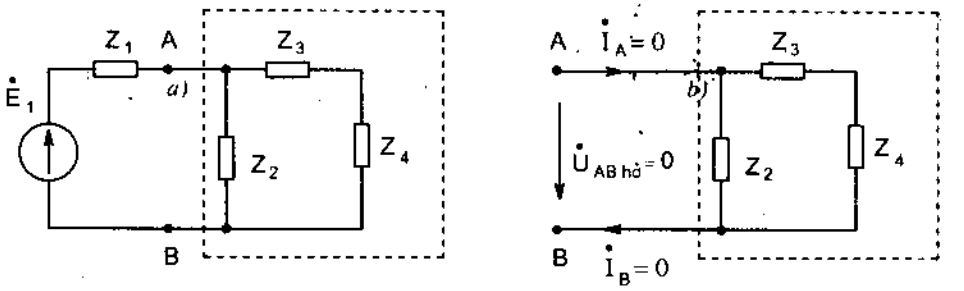
Hình 5.1.3

Xét mạch điện ở chế độ xác lập hình sin ở H.5.1.3. Bộ phận mạch điện ở trong hình chữ nhật là *một mạng một cửa có nguồn*. Thật vậy, nếu làm hở mạch các cực A và B, tức là cho $Z_4 = \infty$ như ở H.5.1.3b thì $\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_{hở} = 0$. Nhưng giữa các cực A và B có một điện áp hở mạch khác 0:

$$\dot{U}_{ABhở} = \left(\frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_2}\right) Z_2 \neq 0$$

Ví dụ 5.1.2 :

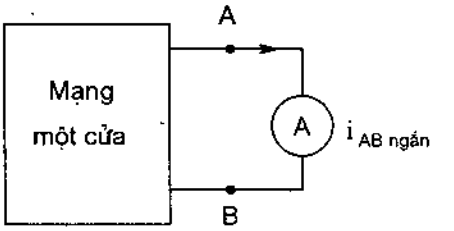
Bộ phận mạch điện trong hình chữ nhật ở H.5.1.4 là *một mạng một cửa không nguồn*. Thật vậy, nếu cắt đứt mạch điện tại các cực A và B thì $\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_{hở} = 0$ và $\dot{U}_{ABhở} = 0$.



Hình 5.1.4

2. Tình trạng ngắn mạch

Sau khi cắt rời mạng một cửa khỏi phần mạch điện còn lại tại các cực A và B của nó ta dùng một dây dẫn có tổng trở bằng không nối hai cực A và B với nhau như ở H.5.1.5.

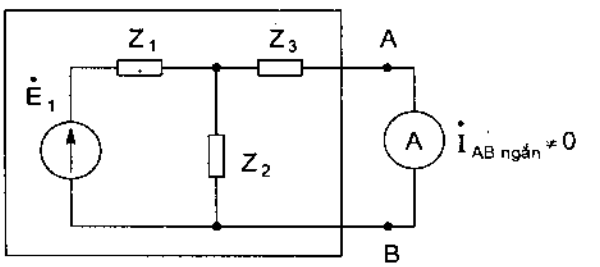


Hình 5.1.5

Trong trường hợp này người ta nói rằng các cực A và B bị nối ngắn mạch (short-circuited). Ta có thể xác định dòng điện ngắn mạch $i_{AB\,ngắn}$ bằng các tính toán hoặc bằng cách đo bởi một ampemét có điện trở bằng không.

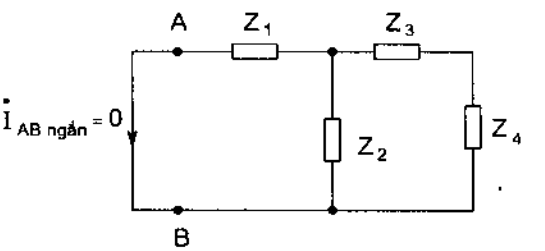
Nếu $i_{AB\,ngắn} \neq 0$ thì mạng một cửa đã cho là một mạng một cửa có nguồn. Nếu $i_{AB\,ngắn} = 0$ thì mạng một cửa đã cho là một mạng một cửa không nguồn.

Ví dụ với mạng một cửa ở H.5.1.6 khi các cực A và B bị nối ngắn mạch thì $\dot{I}_{AB\,ngắn} \neq 0$. Vậy, nó là mạng một cửa có nguồn.



Hình 5.1.6

Còn với mạng một cửa ở H.5.1.7 khi nối ngắn mạch các cực A và B thì $\dot{I}_{AB\,ngắn} = 0$. Vậy, nó là một mạng một cửa không nguồn.



Hình 5.1.7

Cần chú ý rằng, trừ một số trường hợp đặc biệt, thí nghiệm hở mạch thường không gây hậu quả gì nhưng thí nghiệm ngắn mạch có thể gây hư hỏng thiết bị nếu các dòng điện trong các nhánh của mạng một cửa có nguồn đạt tới các trị số lớn. Vì thế, trên thực tế nên tránh làm thí nghiệm ngắn mạch, chỉ nên thực hiện các tính toán tương ứng với tình trạng ngắn mạch mà thôi.

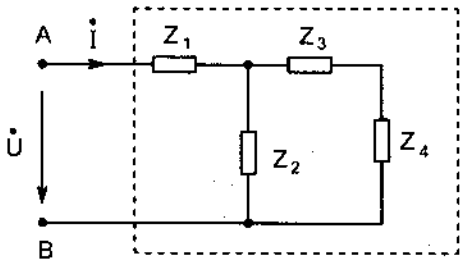
Mạng một cửa tuyến tính và mạng một cửa phi tuyến

Người ta còn phân loại các mạng một cửa thành các mạng một cửa tuyến tính (linear one-port network) và các mạng một cửa phi tuyến (nonlinear one-port network). Một mạng một cửa được gọi là mạng một cửa *tuyến tính* nếu

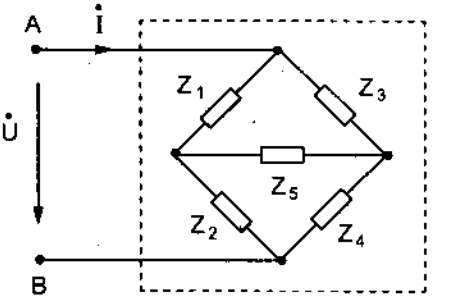
nó chỉ chứa các phần tử (điện trở, điện cảm, điện dung hay hỗ cảm) tuyến tính. Trong trường hợp mạng một cửa chứa ít nhất một phần tử phi tuyến (như một điện trở phi tuyến, một điện cảm phi tuyến) thì nó là mạng một cửa phi tuyến. Trong chương này, chúng ta chỉ xét các mạng một cửa tuyến tính.

5.2. TỔNG TRỞ VÀO CỦA MỘT MẠNG MỘT CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN

Một mạng một cửa (mạng hai cực) không nguồn thường chỉ gồm các tổng trở nối với nhau theo một sơ đồ đơn giản hay phức tạp nào đó giữa hai cực đã cho. Các hình 5.2.1, 5.2.2 là các ví dụ về một số mạng một cửa không nguồn.



Hình 5.2.1

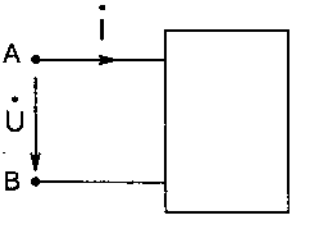


Hình 5.2.2

Ở H.5.2.1 ta có một mạng một cửa chỉ gồm các tổng trở nối tiếp và song song. Ở H.5.2.2 ta có các tổng trở nối hình sao hoặc tam giác.

Ở chế độ xác lập hình sin đối với phần mạch điện bên ngoài thì một mạng một cửa không nguồn có thể được thay thế bằng một tổng trở tương đương gọi là *tổng trở vào (input impedance)* của mạng một cửa không nguồn.

Nếu gọi $\dot{U}$ là điện áp hiệu dụng đặt vào hai cực của mạng một cửa không nguồn và $\dot{I}$ là dòng điện hiệu dụng phức đi vào một trong hai cực của mạng một cửa không nguồn, với quy ước là chiều dương của điện áp $\dot{U}$ và chiều dương của dòng điện $\dot{I}$ của một mạng một cửa không nguồn được chọn theo cùng một chiều (ví dụ đều là chiều đi từ cực A đến cực B như trên H.5.2.3) thì *tổng trở vào (input impedance) của mạng một cửa không nguồn* được định nghĩa bởi :



Hình 5.2.3

$$Z_{vào} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

Ta có thể tính được tổng trở vào của một mạng một cửa không nguồn bằng cách giả thiết điện áp $\dot{U}$ đặt vào mạng một cửa không nguồn là đã cho và tính dòng điện $\dot{I}$ đi vào mạng một cửa không nguồn bằng một phương pháp

nào đó. Sau đó ta tính tổng trở vào bằng tỷ số của điện áp $\dot{U}$ đã cho và dòng điện $\dot{I}$ đã tính được.

Trong trường hợp sơ đồ nối các tổng trở của mạng một cửa không nguồn tương đối đơn giản ta có thể tính được tổng trở vào $Z_{vào}$ của nó bằng cách dùng các công thức tính tổng trở tương đương của các bộ phận của mạch điện và tổng trở tương đương của các bộ phận đó.

Ví dụ ở sơ đồ H.5.2.1, đầu tiên ta tính tổng trở tương đương Z_{34} của hai tổng trở Z_3 và Z_4 nối tiếp:

$$Z_{34} = Z_3 + Z_4$$

Tiếp theo ta tính tổng trở tương đương Z_{234} của Z_{34} nối song song với Z_2 :

$$Z_{234} = \frac{Z_2 Z_{34}}{Z_2 + Z_{34}}$$

Cuối cùng ta tính được tổng trở vào bằng tổng trở tương đương của Z_{234} nối tiếp với Z_1:

$$Z_{vào} = Z_1 + Z_{234}$$

Vậy :

$$Z_{vào} = Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

Để tính tổng trở vào của mạng một cửa không nguồn có ở sơ đồ H.5.2.2 ta cần phải dùng công thức biến đổi sao - tam giác để đưa sơ đồ về trường hợp các tổng trở nối tiếp và song song.

Ví dụ, ta có thể thay các tổng trở Z_1, Z_3, Z_5 nối tam giác thành các tổng trở Z_A, Z_C, Z_D nối hình sao như ở H. 5.2.4. Với :

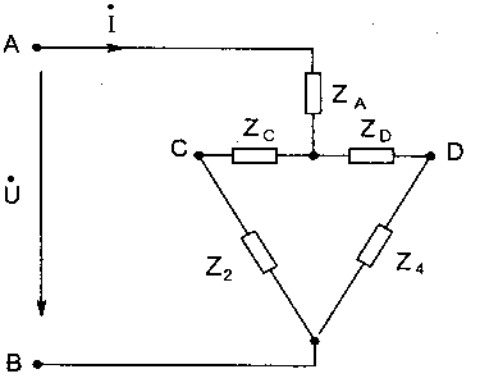
$$Z_A = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_5}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_5}{Z_1 + Z_3 + Z_5}$$

$$Z_D = \frac{Z_3 Z_5}{Z_1 + Z_3 + Z_5}$$

Từ sơ đồ tương đương ở H.5.2.4 ta dễ tính được $Z_{vào}$:

$$Z_{vào} = Z_A + \frac{(Z_C + Z_2) \times (Z_D + Z_4)}{Z_C + Z_2 + Z_D + Z_4}$$

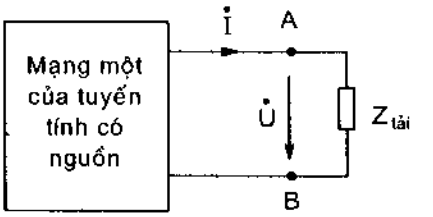


Hình 5.2.4

5.3. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA MẠNG MỘT CỬA TUYẾN TÍNH CÓ NGUỒN. ĐỊNH LÝ THEVENIN VÀ ĐỊNH LÝ NORTON

5.3.1. Phương trình cơ bản của mạng một cửa tuyến tính có nguồn

Ta xét *mạng một cửa tuyến tính có nguồn* bất kỳ ở *chế độ xác lập hình sin (H.5.3.1).*



Hình 5.3.1

Gọi $Z_{tải}$ là tổng trở của một tải tuỳ ý nối vào các cực A và B của mạng một cửa. Gọi $\dot{U}$ là điện áp hiệu dụng phức giữa hai cực A và B, và $\dot{I}$ là dòng điện hiệu dụng phức cung cấp bởi mạng một cửa có nguồn.

Nếu mạng một cửa chỉ gồm các phần tử tuyến tính thì từ các phương trình bậc nhất liên hệ các dòng và các áp trong mạch theo phương pháp dòng nhánh, phương pháp dòng vòng hay phương pháp thế nút, ta có thể rút ra *một phương trình bậc nhất liên hệ điện áp $\dot{U}$ và dòng điện $\dot{I}$* tại các cực (cửa) của mạng một cửa tuyến tính có nguồn. Phương trình này có dạng:

$$\dot{U} = A\dot{I} + B \qquad (5.3.1)$$

hay

$$\dot{I} = C\dot{U} + D \qquad (5.3.2)$$

Ở đây A, B, C, D là các hằng số phức chỉ phụ thuộc vào các thông số (sđđ, nguồn dòng, các tổng trở) của các phần tử ở trong mạng một cửa có nguồn.

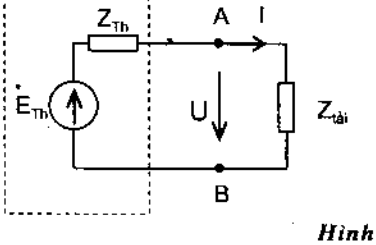
Phương trình (5.3.1) hoặc (5.3.2) được gọi là *phương trình cơ bản* của mạng một cửa có nguồn.

5.3.2. Định lý Thevenin

Ta hãy xét phương trình cơ bản của một mạng một cửa tuyến tính có nguồn ở chế độ xác lập hình sin (ở H.5.3.1) viết dưới dạng :

$$\dot{U} = A\dot{I} + B \qquad (5.3.1)$$

trong đó A và B là các hằng số phức đặc trưng cho mạng một cửa tuyến tính có nguồn đã cho.



Hình 5.3.2

Ta có thể xác định được trị số và ý nghĩa của các hằng số phức A và B bằng cách tính toán hoặc thí nghiệm với mạng một cửa tuyến tính có nguồn ở hai tình trạng đặc biệt là tình trạng hở mạch (hay không tải) và tình trạng ngắn mạch :

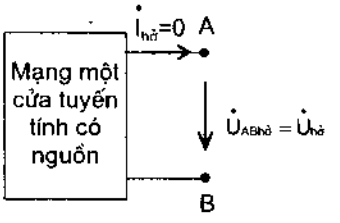
1. Tình trạng hở mạch hay không tải

Ta cắt bỏ $Z_{tải}$ ở giữa các cực A và B của mạng một cửa có nguồn như ở H.5.3.3. Như vậy mạng một cửa ở trong tình trạng hở mạch (open circuit) hay không tải. Về lý thuyết tình trạng hở mạch tương ứng với tổng trở $Z_{tải}$ có trị số vô cùng lớn $Z_{tải} = \infty$. Với mạng một cửa hở mạch thì dòng điện trên cửa bằng không

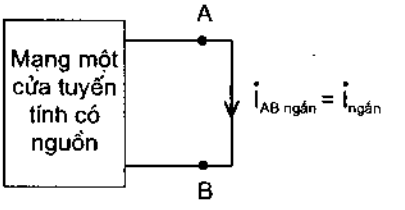
$$\dot{I} = \dot{I}_{ABhở} = \dot{I}_{hở} = 0 \qquad (5.3.3)$$

và điện áp trên cửa gọi là *điện áp hở mạch*

$$\dot{U} = \dot{U}_{ABhở} = \dot{U}_{hở} \qquad (5.3.4)$$



Hình 5.3.3



Hình 5.3.4

Ta đưa vào ký hiệu $\dot{E}_{Th}$ (hay $\dot{E}_{Thevinin}$) định nghĩa bởi đẳng thức :

$$\dot{E}_{Th} = \dot{U}_{hở} = \dot{U}_{ABhở} \qquad (5.3.5)$$

gọi là sđđ của sơ đồ Thevenin.

Thay (5.3.3), (5.3.4) vào (5.3.1) ta có :

$$\dot{U}_{hở} = A.\dot{I}_{hở} + B = A.0 + B = B \qquad (5.3.6)$$

Từ (5.3.5) và (5.3.6) ta có :

$$\dot{E}_{Th} = \dot{U}_{hở} = B \qquad (5.3.7)$$

Vậy hằng số B trong phương trình cơ bản (5.3.1) của mạng một cửa tuyến tính có nguồn chính là điện áp $\dot{U}_{hở}$ hay sđđ $\dot{E}_{Th}$.

2. Tình trạng ngắn mạch của mạng một cửa có nguồn

Ta nối các cực A và B của mạng một cửa có nguồn bằng một dây dẫn có tổng trở bằng không. Lúc này mạng một cửa có nguồn ở trong tình trạng

ngắn mạch (short – circuit). Về lý thuyết tình trạng ngắn mạch tương ứng với $Z_{tải} = 0$. Lúc này điện áp $\dot{U}$ trên cửa của mạng một cửa có nguồn bằng không và dòng điện $\dot{I}$ có trị số gọi là dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{ngắn}$:

$$\dot{U} = \dot{U}_{AB\,ngắn} = 0 \qquad (5.3.8)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_{AB\,ngắn} = \dot{I}_{ngắn} \qquad (5.3.9)$$

Thay (5.3.8) và (5.3.9) vào (5.3.1) ta có :

$$\dot{U}_{ngắn} = 0 = A\dot{I}_{ngắn} + B \qquad (5.3.10)$$

Từ (5.3.10) ta rút ra :

$$A = -\frac{B}{\dot{I}_{ngắn}} \qquad (5.3.11)$$

thay B bằng trị số của nó theo (5.3.7) vào (5.3.11) ta có :

$$A = -\frac{\dot{U}_{hở}}{\dot{I}_{ngắn}} = -\frac{\dot{E}_{Th}}{\dot{I}_{ngắn}} \qquad (5.3.12)$$

Ta đưa vào ký hiệu Z_{Th} (hay $Z_{Thevenin}$) định nghĩa bởi đẳng thức :

$$Z_{Th} = \frac{\dot{U}_{hở}}{\dot{I}_{ngắn}} = \frac{\dot{E}_{Th}}{\dot{I}_{ngắn}} \qquad (5.3.13)$$

gọi là tổng trở của sơ đồ Thevenin.

Từ (5.3.12) và (5.3.13) ta có :

$$A = -Z_{Th} \qquad (5.3.14)$$

Sử dụng các ký hiệu $\dot{E}_{Th}$ và Z_{Th} ta có thể viết phương trình cơ bản (5.3.1) của mạng một cửa tuyến tính có nguồn dưới dạng sau :

$$\dot{U} = \dot{E}_{Th} - Z_{Th}\dot{I} \qquad (5.3.15)$$

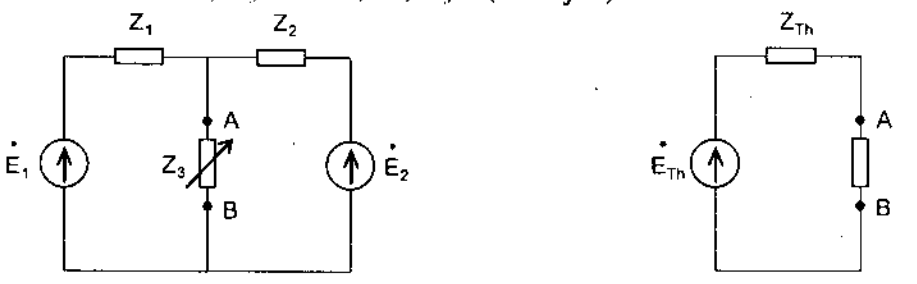
Phương trình (5.3.15) tương ứng với sơ đồ tương đương ở H.5.3.3, trong đó mạng một cửa tuyến tính có nguồn được thay thế bằng một sơ đồ tương đương (*một máy phát điện tương đương* theo danh từ của Thevenin) gồm một nguồn sđđ $\dot{E}_{Th}$ nối tiếp với một tổng trở Z_{Th}. Vậy ta đã chứng minh định lý sau đây, gọi là *định lý Thevenin* :

"Một mạng một cửa tuyến tính có nguồn có thể được thay thế bằng một sơ đồ tương đương gồm có một nguồn sđđ $\dot{E}_{Th}$ nối tiếp với một tổng trở Z_{Th}. $\dot{U}_{hở}$ trên cửa của mạng một cửa có nguồn khi hở mạch và tổng trở Z_{Th} có trị số bằng tỷ số của điện áp $\dot{U}_{hở}$. Sđđ $\dot{E}_{Th}$ có trị số bằng điện áp $\dot{U}_{hở}$ với dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{ngắn}$ của mạng một cửa có nguồn khi ngắn mạch".

Người ta gọi sơ đồ tương đương này là *sơ đồ Thevenin* của mạng một cửa tuyến tính có nguồn. Dưới đây ta sẽ xét một ví dụ về ứng dụng định lý Thevenin.

Ví dụ 5.3.1 :

Tìm các thông số của sơ đồ Thevenin tương đương với mạng một cửa tuyến tính có nguồn ở H.5.3.5a với các thông số $\dot{E}_1 = 100\angle 0^0$ V, $\dot{E}_2 = 100\angle 30^0$ V và $Z_1 = Z_2 = (50+j30)\ \Omega$. Ứng dụng định lý Thevenin để tính $\dot{I}_3$ với a) $Z_3 = 10\ \Omega$, b) $Z_3 = (15 + j15)\ \Omega$.

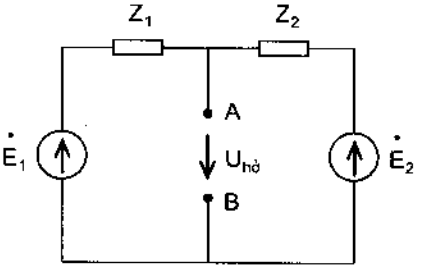


a) *Hình 5.3.5* *b)*

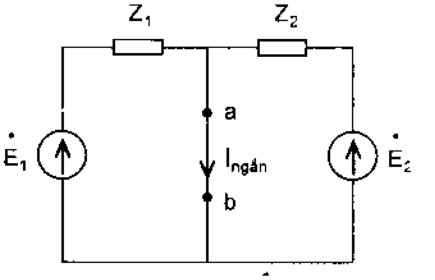
Giải :

Sơ đồ Thevenin tương đương với mạng một cửa đã cho được vẽ ở H.5.3.5b.

Để tìm trị số của sđđ $\dot{E}_{Th}$ ta cắt bỏ Z_3 (hay cho $Z_3 = \infty$) và tính điện áp hở mạch $\dot{U}_{hở} = \dot{U}_{AB\,hở}$ (H.5.3.6).



Hình 5.3.6



Hình 5.3.7

Áp dụng công thức (3.3.16) của phương pháp điện áp hai nút cho sơ đồ ở H.5.3.6 ta có :

$$\dot{U}_{hở} = \dot{U}_{ABhở} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} =$$

$$= \frac{(100\angle 0^0)(50 + j30) + (100\angle 30^0)(50 + j30)}{2(50 + j30)} =$$

$$=(93,30 + j25)\ V = (96.59\angle 15^0)V$$

Vậy sđđ $\dot{E}_{Th}$ bằng :

$$\dot{E}_{Th} = \dot{U}_{hở} = (93,30 + j25)V = (96,59\angle 15^0)V$$

Tiếp theo ta cho $Z_3 = 0$ (nối ngắn mạch A và B) và tính dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{ngắn} = \dot{I}_{AB\ ngắn}$ (H5.3.7).

Ta dễ thấy rằng :

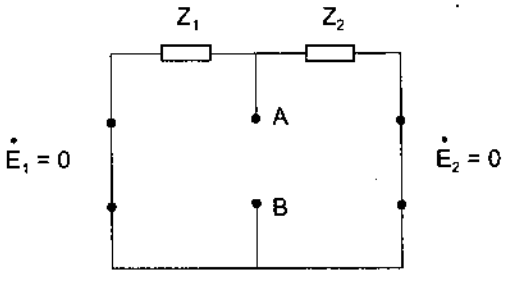
$$\dot{I}_{ngắn} = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2} = \frac{100\angle 0^0}{50 + j30} + \frac{100\angle 30^0}{50 + j30} = (3,185\text{-}j0,911)$$

$$= (3,313\angle 15,96^0)\ A. \qquad (5.3.13)$$

Theo công thức (5.3.13) ta tính được tổng trở Z_{Th}

$$Z_{Th} = \frac{\dot{U}_{hở}}{\dot{I}_{ngắn}} = \frac{93,30 + j25}{3,185 - j0,9112} = (25,00 + j15,00)\Omega$$

Ta cũng có thể tính được Z_{Th} bằng cách cho triệt tiêu các nguồn ở trong mạng một cửa có nguồn, tức cho $\dot{E}_1 = 0$ và $\dot{E}_2 = 0$, và tính tổng trở tương đương của mạng một cửa không nguồn đối với các cực A và B (H5.3.8)



Hình 5.3.8

Ta dễ thấy rằng tổng trở Z_{Th} là tổng trở tương đương của hai tổng trở Z_1 và Z_2 nối song song với nhau :

$$Z_{Th} = Z_{AB} = \frac{Z_1.Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(50+j30)(50+j30)}{2(50+j30)} = \frac{(50+j30)}{2} = (25+j15)\Omega$$

Sử dụng sơ đồ Thevenin ta dễ tính được dòng điện $\dot{I}_3$ tương ứng với một trị số bất kỳ của Z_3 : $\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_{Th}}{Z_{Th} + Z_3}$

a) Với $Z_3 = 10\Omega$ ta có

$$\dot{I}_3 = \frac{93,30 + j25}{(25+j15)+10} = (2,511 - j0,3617)A = (2,537\angle -8,198^0)A$$

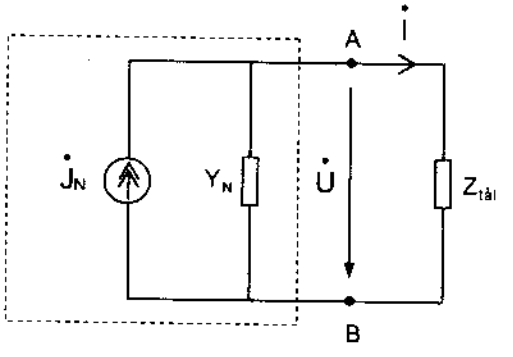
b) Với $Z_3 = (15+j15)\Omega$ ta có

$$\dot{I}_3 = \frac{93,30 + j25}{(25+j15)+(15+j15)} = (1,793 - j0,7196)A = (1.932\angle 21,87^0)A$$

5.3.3. Định lý Norton

Sử dụng phương trình (5.3.2) và cách lập luận tương tự như ở mục 5.3.2 ta có thể chứng minh được *định lý Norton* sau đây :

"Một mạng một cửa tuyến tính có nguồn có thể được thay thế bằng một sơ đồ tương đương (sơ đồ Norton) gồm có một nguồn dòng $\dot{J}_N$ (hay $\dot{J}_{Norton}$) nối song song với một tổng dẫn Y_N (hay Y_{Norton}) (H.5.3.9). Nguồn dòng $\dot{J}_N$ có trị số bằng dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{ngắn}$ của mạng một cửa có nguồn khi ngắn mạch, và tổng dẫn Y_N có trị số bằng tỷ số của dòng điện $I_{ngắn}$ với điện áp hở mạch $\dot{U}_{hở}$ của mạng một cửa có nguồn khi hở mạch :



Hình 5.3.9

$$\dot{J}_N = \dot{I}_{ngắn} \qquad (5.3.16)$$

$$\dot{Y}_N = \frac{\dot{I}_{ngắn}}{\dot{U}_{hở}} \qquad (5.3.17)$$

Định lý Thevenin và định lý Norton cho ta hai sơ đồ tương đương của cùng một mạng một cửa tuyến tính có nguồn. Dĩ nhiên là hai sơ đồ này phải tương đương với nhau. Giữa các thông số của sơ đồ Thevenin và sơ đồ Norton của một mạng một cửa tuyến tính có nguồn có các quan hệ sau đây :

$$\dot{J}_N = \frac{\dot{E}_{Th}}{Z_{Th}}, \quad Y_N = \frac{1}{Z_{Th}} \tag{5.3.18}$$

và

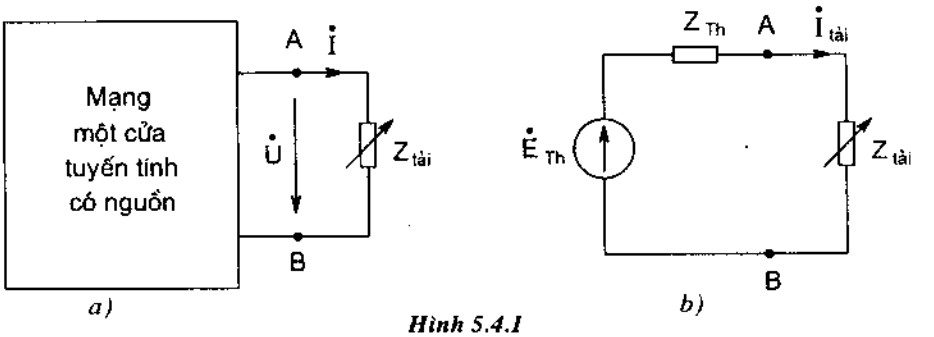
$$\dot{E}_{Th} = \frac{\dot{J}_N}{Y_N}, \quad Z_{Th} = \frac{1}{Y_N} \tag{5.3.19}$$

5.4. TẢI HOÀ HỢP CỦA MỘT MẠNG MỘT CỬA TUYẾN TÍNH CÓ NGUỒN

Giả sử đã cho một mạng một cửa tuyến tính có nguồn. Vấn đề thường gặp là cần tìm một tải đặc biệt sao cho công suất tác dụng mà tải nhận được từ mạng một cửa tuyến tính có nguồn đã cho có trị số cực đại. Tải đặc biệt này được gọi là *tải hoà hợp* của mạng một cửa có nguồn đã cho.

Bài toán này dễ giải được bằng cách áp dụng định lý Thévenin.

Ta hãy thay thế mạng một cửa tuyến tính có nguồn đã cho ở H.5.4.1a bằng sơ đồ Thevenin ở H.5.4.1b.



Hình 5.4.1

Theo sơ đồ ở H. 5.4.1b ta dễ tính được dòng điện tải:

$$\dot{I}_{tải} = \frac{\dot{E}_{Th}}{Z_{Th} + Z_{tải}}$$

Giả sử $\quad Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$

và $\quad Z_{tải} = R_{tải} + jX_{tải}$

ta có

$$\dot{I}_{tải} = \frac{\dot{E}_{Th}}{(R_{Th} + jX_{Th}) + (R_{tải} + jX_{tải})}$$

$$= \frac{\dot{E}_{Th}}{(R_{Th} + R_{tải}) + j(X_{Th} + X_{tải})} \tag{5.4.1}$$

Từ (5.4.1) ta dễ thấy rằng nếu ta chọn tải sao cho

$$X_{Th} + X_{tải} = 0 \tag{5.4.2}$$

tức $$X_{tải} = - X_{Th} \qquad (5.4.3)$$

thì $$\dot{I}_{tải} = \frac{\dot{E}_{Th}}{R_{Th} + R_{tải}} \qquad (5.4.4)$$

sẽ có trị số tuyệt đối (tức môđuyn) $I_{tải}$ lớn hơn so với (5.4.1)

Bây giờ ta chỉ cần chọn $R_{tải}$ sao cho công suất tác dụng trên tải đạt cực đại. Ta có

$$P_{tải} = R_{tải} I_{tải}^2 = R_{tải} \frac{E_{Th}^2}{(R_{Th} + R_{tải})^2}$$

$$\frac{dP_{tải}}{dR_{tải}} = E_{Th}^2 \frac{d}{dR_{tải}} \left(\frac{R_{tải}}{(R_{Th} + R_{tải})^2} \right)$$

$$= \frac{(R_{Th} + R_{tải})^2 - 2(R_{Th} + R_{tải}) R_{tải}}{(R_{Th} + R_{tải})^4}$$

$$= \frac{(R_{Th} + R_{tải}) - 2R_{tải}}{(R_{Th} + R_{tải})^3}$$

và $$\frac{dP_{tải}}{dR_{tải}} = 0 \text{ khi } R_{tải} = R_{Th} \qquad (5.4.5)$$

Kết hợp hai điều kiện (5.4.3) và (5.4.5) ta kết luận rằng công suất tác dụng trên tải sẽ cực đại khi :

$$Z_{tải} = \overset{*}{Z}_{Th} \qquad (5.4.6)$$

tức là tổng trở của tải bằng trị số liên hợp của tổng trở Z_{Th}.

Tải thoả mãn điều kiện (5.4.6) được gọi là *tải hoà hợp* của mạng một cửa có nguồn.

Ví dụ 5.4.1 :

Tìm tổng trở của tải hoà hợp và tính trị số cực đại của công suất tác dụng trên tải cho mạng một cửa tuyến tính có nguồn ở ví dụ 5.3.1.

Giải :

Ở ví dụ 5.3.1 ta đã tìm được

$$\dot{E}_{Th} = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} = (96,59\angle 15^0) \text{ và } Z_{Th} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = (25 + j15)\Omega$$

Tổng trở của tải hoà hợp được xác định bởi (5.4.6) :

$$Z_{\text{Tải hoà hợp}} = \overset{*}{Z}_{Th} = (25 - j15)\Omega$$

Dòng điện tải hoà hợp bằng :

$$\dot{I}_{\text{tải hoà hợp}} = \frac{\dot{E}_{Th}}{R_{Th} + R_{\text{tải}}} = \frac{\dot{E}_{Th}}{2R_{Th}} = \frac{96,59\angle 15^0}{2(25)} = (1,932\angle 15^0)A$$

Công suất tác dụng cực đại trên tải cũng là công suất tác dụng trên tải hoà hợp bằng :

$$P_{\text{tải max}} = P_{\text{tải hoà hợp}} \cdot I^2_{\text{tải hoà hợp}} = R_{Th}\left(\frac{E_{Th}}{2R_{Th}}\right)^2 = \frac{E^2_{Th}}{4R_{Th}} = \frac{(96,59)^2}{4 \times 25} = 93,30W$$

CÂU HỎI KIỂM TRA

5.1. Định nghĩa mạng một cửa? Khi nào hai cực làm thành một cửa?

5.2. Phân biệt một mạng một cửa có nguồn với một mạng một cửa không nguồn? Cho một số ví dụ.

5.3. Tổng trở vào của một mạng một cửa tuyến tính không nguồn là gì? Nêu một số cách tính tổng trở này? Cho một số ví dụ.

5.4. Phương trình cơ bản của một mạng một cửa tuyến tính có nguồn có dạng như thế nào? Ý nghĩa của các hệ số trong các phương trình này là gì? Có thể xác định chúng bằng các phương pháp nào? Cho một số ví dụ.

5.5. Phát biểu định lý Thevenin về một mạng một cửa tuyến tính có nguồn. Có thể xác định $\dot{E}_{Th}$ và Z_{Th} bằng các phương pháp nào. Cho một số ví dụ.

5.6. Phát biểu định lý Norton về một mạng một cửa tuyến tính có nguồn. Có thể xác định $\dot{J}_N$ và Y_N bằng các phương pháp nào. Cho một số ví dụ.

5.7. Chứng minh rằng giữa $\dot{E}_{Th}$, Z_{Th} và $\dot{J}_N$, Y_N của một mạng một cửa tuyến tính có nguồn có quan hệ sau đây:

$$\dot{J}_N = \frac{\dot{E}_{Th}}{Z_{Th}}$$

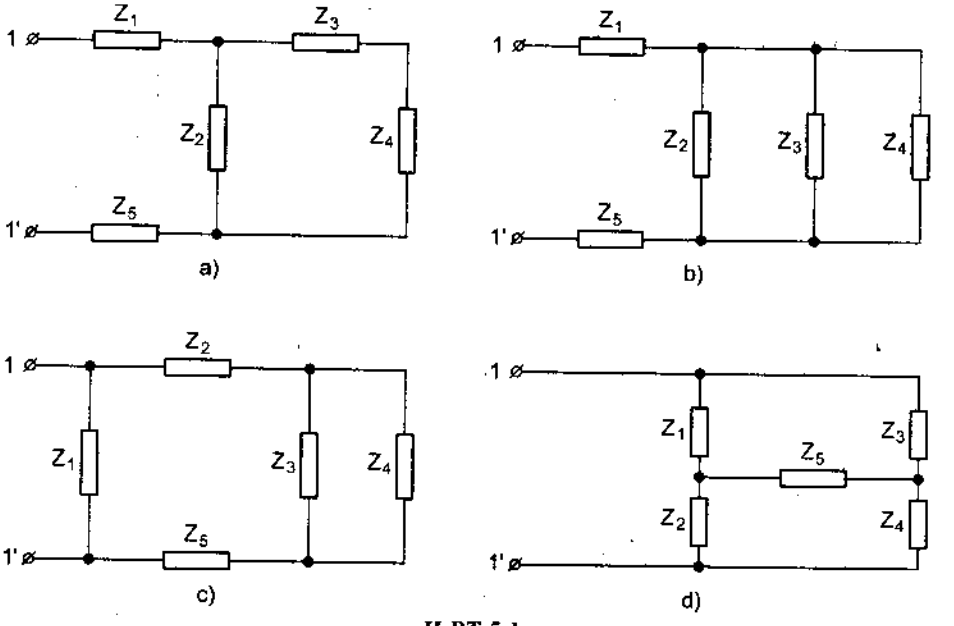
$$Y_N = \frac{1}{Z_{Th}}$$

5.8. Cho một số ví dụ về ứng dụng định lý Thevenin và định lý Norton trong việc giải mạch điện.

5.9. Tải hoà hợp của mạng một cửa có nguồn là gì? Chứng minh rằng với $Z_{tải} = \overset{*}{Z}_{Th}$ thì công suất tác dụng $P_{tải}$ đạt cực đại. Cho một số ví dụ.

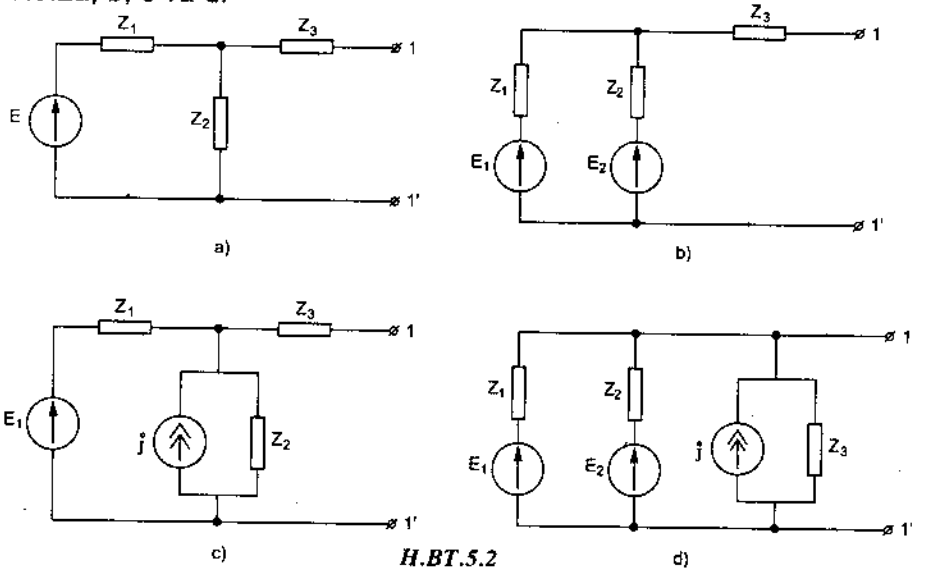
BÀI TẬP

BT.5.1. Tính tổng trở vào của các mạng một cửa tuyến tính không nguồn ở H.BT.5.1a, b, c và d với $Z_1 = (2 + j3)\ \Omega$, $Z_2 = (4 + j8)\ \Omega$, $Z_3 = (10 + j20)\ \Omega$, $Z_4 = (10 - j10)\ \Omega$ và $Z_5 = (5 + j5)\ \Omega$.



H.BT.5.1

BT.5.2. Tìm các thông số của sơ đồ tương đương Thévenin và sơ đồ tương đương Norton của các mạng một cửa tuyến tính có nguồn ở H.BT.5.2a, b, c và d.



H.BT.5.2

Cho $\dot{E}_1 = 50\angle 0^0$ V, $\dot{E}_2 = \left(60\angle\frac{\pi}{3}\right)$ V, $\dot{J} = \left(10\angle\frac{\pi}{4}\right)$ A,

$Z_1 = (1 + j2)\ \Omega$, $Z_2 = (3 + j4)\ \Omega$, $Z_3 = (4 + j5)\ \Omega$

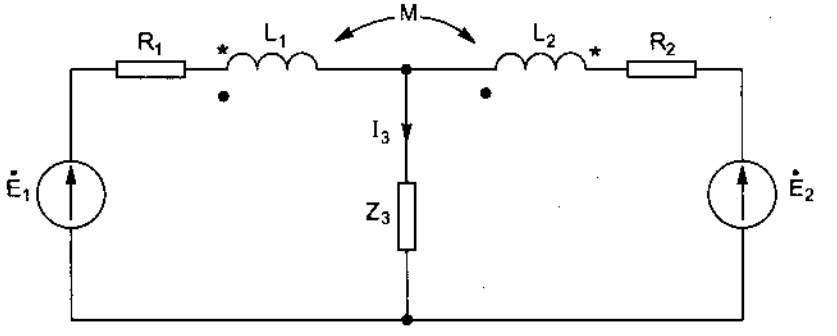
BT.5.3. Tính dòng điện qua tổng trở tải $Z_{tải} = (20 + j30)\ \Omega$ khi tổng trở này được nối vào mạng hai cửa có nguồn ở bài tập BT.5.2.

BT.5.4. Tìm tổng trở tải cho các mạng một cửa có nguồn ở BT.5.2 để cho công suất tác dụng thu được trên tải đạt cực đại và tính trị số của công suất cực đại này.

BT.5.5. Cho mạch điện ở H.BT.5.5 với $\dot{E}_1 = \left(100\angle 0^0\right)$ V, $\dot{E}_2 = \left(120\angle\frac{\pi}{3}\right)$ V, $R_1 = R_2 = 40\ \Omega$, $\omega L_1 = 80\ \Omega$, $\omega L_1 = 60\ \Omega$ và $\omega M = 50\ \Omega$. Các cực cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu sao (*).

1. Tính $\dot{I}_3$ nếu $Z_3 = (30 + j50)\ \Omega$

2. Tìm Z_3 để công suất tác dụng trên nó đạt cực đại và tính công suất cực đại này.



H.BT.5.5

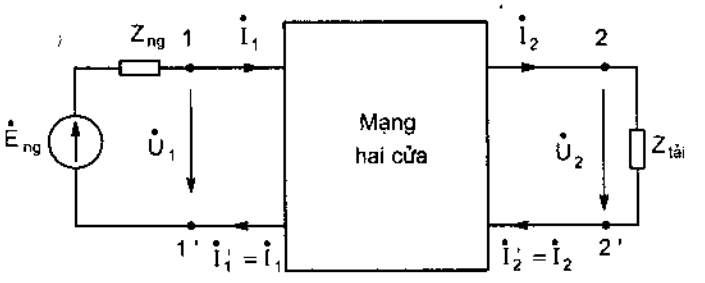
BT.5.6. Giải BT.5.5 với các cực cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu chấm (•).

Chương 6

MẠNG HAI CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN

6.1. ĐỊNH NGHĨA CỦA MẠNG HAI CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN

Vì nhiều lý do khác nhau nguồn điện và tải thường không nối trực tiếp với nhau mà nối qua một bộ phận mạch điện trung gian. Bộ phận mạch điện trung gian này có *hai đôi cực* (two pairs of terminals). Đôi cực được nối với nguồn thường được ký hiệu là 1 - 1', đôi cực kia được nối với tải thường được ký hiệu là 2 - 2' (H. 6.1.1).



Hình 6.1.1

Trong trường hợp này, ở chế độ xác lập hình sin, dòng điện (hiệu dụng phức) $\dot{I}_1'$ với chiều dương đi ra khỏi cực 1' phải bằng dòng điện (hiệu dụng phức) $\dot{I}_1$ với chiều dương đi vào cực 1 tức :

$$\dot{I}_1' = \dot{I}_1 \qquad (6.1.1a)$$

Với điều kiện (6.1.1a), đôi cực 1 - 1' làm thành *một cửa* (a port).

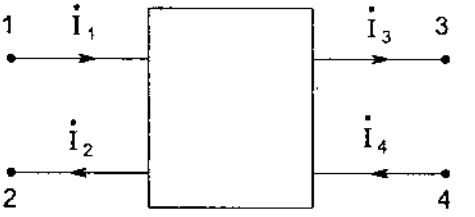
Dòng điện $\dot{I}_2'$ với chiều dương đi vào cực 2' bằng dòng điện $\dot{I}_2$ với chiều dương đi ra khỏi cực 2 tức

$$\dot{I}_2' = \dot{I}_2 \qquad (6.1.1b)$$

Với điều kiện (6.1.1b), đôi cực 2 - 2' làm thành *một cửa*.

Các điều kiện (6.1.1a) và (6.1.1b) được gọi là *các điều kiện về cửa* (port conditions).

Bộ phận mạch điện giữa các đôi cực 1 - 1' và 2 - 2' thoả mãn các điều kiện về cửa (6.1.1a) và (6.1.1b) được gọi là một *mạng điện hai cửa* (a two - port network). Đôi khi người ta cũng gọi bộ phận mạch điện này là *một mạng bốn cực* (a four - terminal network). Để tránh sự hiểu lầm với trường hợp một bộ phận mạch điện có bốn cực 1, 2, 3 và 4 mà các dòng điện $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$ và $\dot{I}_4$ (H.6.1.2) ở các cực chỉ thoả mãn định luật Kirchhoff thứ nhất



Hình 6.1.2

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = 0$$

mà *không thoả mãn điều kiện về các cửa*, ví dụ $\dot{I}_1 \neq \dot{I}_2$ và $\dot{I}_3 \neq \dot{I}_4$.

ta sẽ không dùng danh từ *mạng bốn cực* như là từ đồng nghĩa của danh từ mạng hai cửa.

Với một mạng hai cửa, người ta chỉ quan tâm đến các dòng điện và điện áp tại các cửa là $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ ở cửa 1 - 1' và $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ ở cửa 2 - 2' mà không quan tâm đến các dòng và áp khác ở bên trong mạng hai cửa. Ta sẽ gọi $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$, $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ là *các biến cơ bản* của mạng hai cửa. Hệ phương trình cho ta quan hệ giữa các biến cơ bản của mạng hai cửa sẽ được gọi là *hệ phương trình cơ bản* của mạng hai cửa.

Các mạng hai cửa có thể được phân loại thành các *mạng hai cửa tuyến tính* (linear two - port networks) và các *mạng hai cửa phi tuyến* (nonlinear two - port networks).

Một mạng hai cửa được gọi là tuyến tính nếu *hệ phương trình cơ bản* của nó là một *hệ phương trình tuyến tính*. Trong trường hợp ngược lại, ta có mạng hai cửa phi tuyến.

Trong chương này ta chỉ xét các mạng hai cửa tuyến tính.

Các mạng hai cửa còn được phân loại thành các mạng hai cửa có nguồn (active two - port networks) và các mạng hai cửa không nguồn (passive two - port networks).

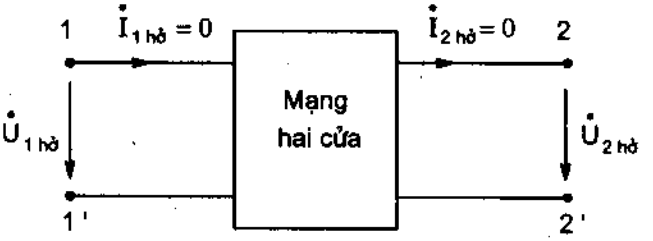
Để xác định xem một mạng hai cửa đã cho là một mạng hai cửa có nguồn hay là một mạng hai cửa không nguồn ta có thể dựa vào một trong hai tình trạng sau đây.

1. Tình trạng với các cửa hở mạch

Ta làm hở mạch ở các cửa 1 - 1' và 2 - 2' tức cho $\dot{I}_{1hở} = 0$, $\dot{I}_{2hở} = 0$ và đo hoặc tính các điện áp $\dot{U}_{1hở}$ giữa các cực 1 - 1' và $\dot{U}_{2hở}$ giữa các cực 2 - 2' (H.6.1.3)

- Nếu $\dot{U}_{1hở} = 0$ và $\dot{U}_{2hở} = 0$ thì ta có một mạng hai cửa không nguồn.

- Nếu ít nhất một trong hai điện áp này khác không thì ta có một mạng hai cửa có nguồn.



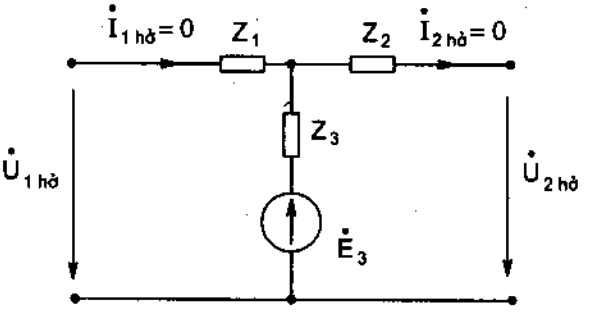
Hình 6.1.3

Ví dụ 6.1.1:

Với mạng hai cửa ở H.6.1.4, khi $\dot{I}_{1hở} = 0$ và $\dot{I}_{2hở} = 0$ ta có :

$\dot{U}_{1hở} = \dot{E}_3 \neq 0$ và

$\dot{U}_{2hở} = \dot{E}_3 \neq 0$. Vậy đây là một mạng có nguồn.



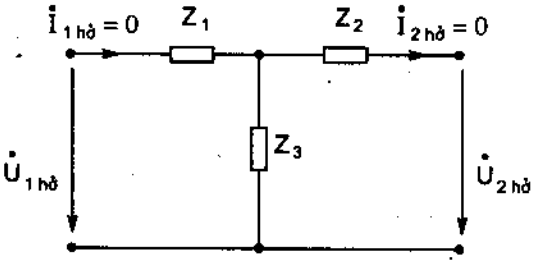
Hình 6.1.4

Ví dụ 6.1.2:

Với mạng hai cửa ở H.6.1.5, khi $\dot{I}_{1hở} = 0$ và $\dot{I}_{2hở} = 0$ ta có :

$\dot{U}_{1hở} = 0$ và $\dot{U}_{2hở} = 0$.

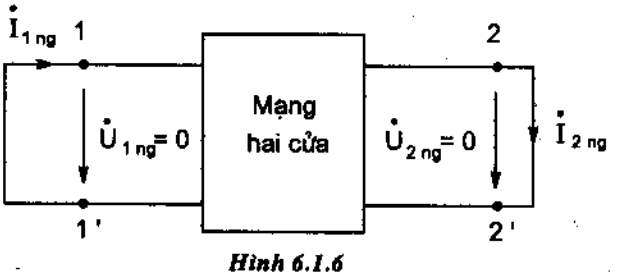
Vậy đây là một mạng hai cửa không nguồn.



Hình 6.1.5

2. Tình trạng với các cửa ngắn mạch

Ta làm ngắn mạch các đôi cực 1 - 1' và 2 - 2' tức cho $\dot{U}_{1ng} = 0$ và $\dot{U}_{2ng} = 0$ và đo hoặc tính các dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{1ng}$ ở cửa 1 - 1' và $\dot{I}_{2ng}$ ở cửa 2 - 2'.

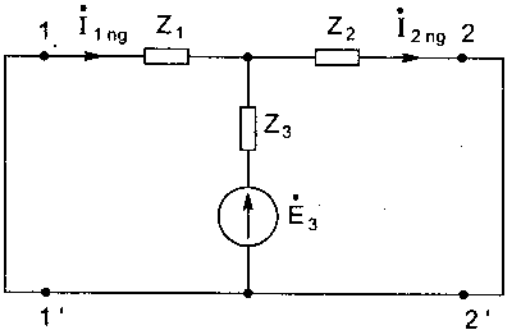


Hình 6.1.6

- Nếu $\dot{I}_{1ng} = 0$ và $\dot{I}_{2ng} = 0$ thì ta có một mạng hai cửa không nguồn.

- Nếu ít nhất một trong hai dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_{1ng}$ và $\dot{I}_{2ng}$ khác không thì ta có một mạng hai cửa có nguồn.

Ví dụ 6.1.3 :



Hình 6.1.7

Với mạng hai cửa ở H.6.1.7 với các cửa 1 - 1' và 2 - 2' bị ngắn mạch ta dễ thấy rằng:

$$\dot{I}_{1ng} = -\left(\frac{\dot{E}_3}{Z_3 + \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}\right) \times \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{-\dot{E}_3 Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_3 Z_1 + Z_3 Z_2} \neq 0$$

và $$\dot{I}_{2ng} = \left(\frac{\dot{E}_3}{Z_3 + \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}\right) \times \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{\dot{E}_3 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_3 Z_2} \neq 0$$

Vậy đây là một mạng hai cửa có nguồn. (Cần lưu ý rằng trừ một số trường hợp đặc biệt thí nghiệm hở mạch trên các cửa thường không gây ra nguy hiểm gì trong khi thí nghiệm ngắn mạch có thể gây ra hư hỏng thiết bị nếu các dòng điện ngắn mạch có trị số lớn).

Trong chương này ta sẽ xét các mạng hai cửa tuyến tính không nguồn.

6.2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN DẠNG A CỦA MỘT MẠNG HAI CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC HỆ SỐ A_{ik} (i, k = 1, 2)

Nếu mạng hai cửa chỉ gồm các phần tử tuyến tính thì từ hệ phương trình dòng nhánh hoặc hệ phương trình dòng vòng, hoặc hệ phương trình thế nút viết cho phần mạch điện bên trong mạng hai cửa (giữa các đôi cực 1 - 1' và 2 - 2') ở chế độ xác lập hình sin ta dễ rút ra các phương trình tuyến tính liên hệ các dòng và áp trên các cửa $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ và $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ dưới dạng

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 + A_{13} \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 + A_{23} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

với A_{ik} (i = 1, 2 và k = 1, 2, 3) là các hệ số phức hoàn toàn đặc trưng cho mạng hai cửa tuyến tính đã cho.

Nếu mạng hai cửa tuyến tính đã cho là một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn thì với $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1hở} = 0$ và $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2hở} = 0$ ta phải có $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1hở} = 0$ và $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2hở} = 0$, tức $A_{13} = 0$ và $A_{23} = 0$.

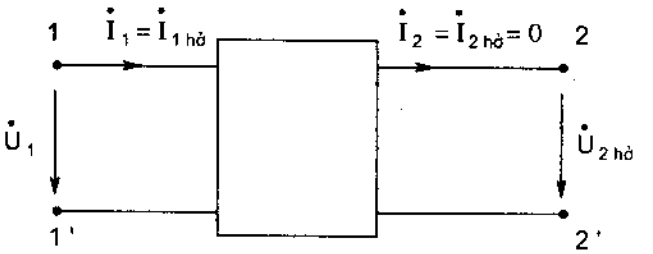
Vậy *hệ phương trình cơ bản của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn* có thể viết dưới dạng

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Hệ phương trình (6.2.2) cho ta điện áp ở cửa vào $\dot{U}_1$ và dòng điện ở cửa vào $\dot{I}_1$ là hàm số bậc nhất của điện áp ở cửa ra $\dot{U}_2$ và dòng điện ở cửa ra $\dot{I}_2$ với các hệ số được ký hiệu bởi các chữ A_{ik} (i, k = 1, 2). Người ta gọi hệ phương trình này là hệ phương trình cơ bản dạng A của mạng hai cửa tuyến tính không nguồn.

Để thấy rõ ý nghĩa của các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) trong hệ phương trình cơ bản dạng A ta xét các tình trạng sau đây:

1. Tình trạng với cửa ra hở mạch



Hình 6.2.1

Ta cho cửa ra 2 - 2' hở mạch ($\dot{I}_2 = \dot{I}_{2hở} = 0$) (H.6.2.1) và ta xác định điện áp $\dot{U}_{2hở}$ ở cửa ra và dòng điện $\dot{I}_{1hở}$ ở cửa vào, trong khi cửa vào được nối vào một nguồn có điện áp $\dot{U}_1$ nào đó.

Từ hệ phương trình cơ bản (6.2.2) với $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2hở} = 0$, ta có:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_{2hở} \quad (6.2.3)$$

và

$$\dot{I}_{1hở} = A_{21}\dot{U}_{2hở} \quad (6.2.4)$$

Từ (6.2.3) và (6.2.4) ta rút ra:

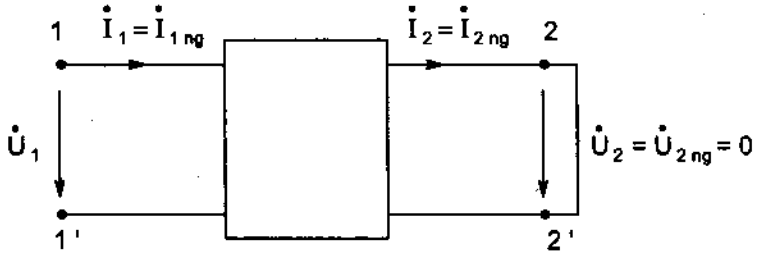
$$A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_{2hở}} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad (6.2.5)$$

và

$$A_{21} = \frac{\dot{I}_{1hở}}{\dot{U}_{2hở}} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad (6.2.6)$$

Các công thức (6.2.5) và (6.2.6) cho ta xác định được các hệ số A_{11} và A_{21} bằng thí nghiệm hoặc bằng tính toán. Từ (6.2.5) ta thấy rằng A_{11} không có đơn vị, còn từ (6.2.6) ta thấy rằng A_{21} có thứ nguyên của tổng dẫn và có đơn vị là siemens (S).

2. Tình trạng với cửa ra ngắn mạch



Hình 6.2.2

Ta làm ngắn mạch cửa ra 2 - 2' ($\dot{U}_2 = \dot{U}_{2ng} = 0$) (H.6.2.2) và xác định dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2ng}$ ở cửa ra và dòng điện ngắn mạch $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1ng}$ ở cửa vào, trong khi cửa vào 1- 1' được đặt vào một nguồn áp với điện áp $\dot{U}_1$ nào đó.

Từ hệ phương trình cơ bản (6.2.2) với $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2ng} = 0$, ta có:

$$\dot{U}_1 = A_{12}\dot{I}_{2ng} \qquad (6.2.7)$$

và

$$\dot{I}_{1ng} = A_{22}\dot{I}_{2ng} \qquad (6.2.8)$$

Từ (6.2.7) và (6.2.8) ta rút ra:

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{2ng}} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0} \qquad (6.2.9)$$

và

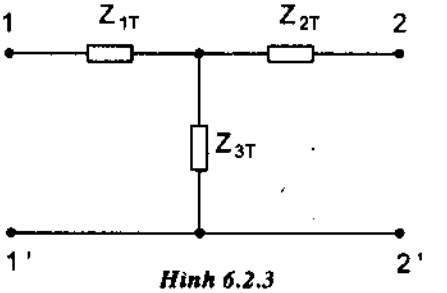
$$A_{22} = \frac{\dot{I}_{1ng}}{\dot{I}_{2ng}} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0} \qquad (6.2.10)$$

Các công thức (6.2.9) và (6.2.10) cho ta xác định được các hệ số A_{12} và A_{22} bằng thí nghiệm hoặc bằng tính toán. Từ (6.2.9) ta thấy rằng A_{12} có thứ

nguyên của tổng trở và có đơn vị là ohm (Ω) còn từ (6.2.10) ta thấy rằng A_{22} không có đơn vị.

Ví dụ 6.2.1:

Cho một mạng hai cửa hình T ở H.6.2.3 gồm các tổng trở Z_{1T} = j10 Ω; Z_{2T} = 10 Ω và Z_{3T} = (5 +j5) Ω. Hãy xác định các hệ số A_{ikT} (i, k = 1, 2).



Hình 6.2.3

Giải :

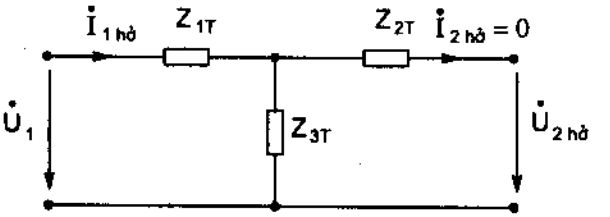
1. Tình trạng với cửa ra hở mạch

Từ sơ đồ ở H.6.2.4 ta dễ tính được:

$$\dot{I}_{1hở} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{1T} + Z_{3T}} \qquad (6.2.11)$$

và

$$\dot{U}_{2hở} = Z_{3T}\dot{I}_{1hở} = \frac{Z_{3T}}{Z_{1T} + Z_{3T}}\dot{U}_1 \qquad (6.2.12)$$



Hình 6.2.4

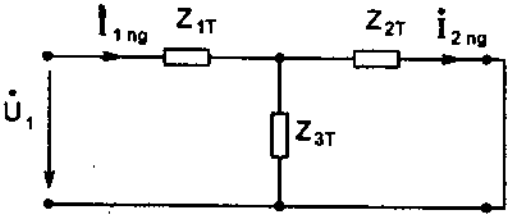
Vậy, theo các công thức (6.2.5) và (6.2.6) ta có:

$$A_{11T} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_{2hở}} = \frac{Z_{1T} + Z_{3T}}{Z_{3T}} = 1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{3T}} \qquad (6.2.13)$$

và

$$A_{21T} = \frac{\dot{I}_{1hở}}{\dot{U}_{2hở}} = \frac{1}{Z_{3T}} \qquad (6.2.14)$$

2. Tình trạng với cửa ra ngắn mạch



Hình 6.2.5

Từ sơ đồ ở H. 6.2.5 ta dễ tính được:

$$\dot{I}_{1ng} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{1T} + \dfrac{Z_{2T}Z_{3T}}{Z_{2T} + Z_{3T}}} = \frac{\dot{U}_1(Z_{2T} + Z_{3T})}{Z_{1T}Z_{2T} + Z_{2T}Z_{3T} + Z_{3T}Z_{1T}} \qquad (6.2.15)$$

$$\dot{I}_{2ng} = \dot{I}_{1ng} \times \frac{Z_{3T}}{Z_{2T} + Z_{3T}} = \frac{\dot{U}_1 Z_{3T}}{Z_{1T}Z_{2T} + Z_{2T}Z_{3T} + Z_{3T}Z_{1T}} \qquad (6.2.16)$$

Vậy theo các công thức (6.2.9) và (6.2.10) ta có:

$$A_{12T} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{2ng}} = \frac{Z_{1T}Z_{2T} + Z_{2T}Z_{3T} + Z_{3T}Z_{1T}}{Z_{3T}} = Z_{1T} + Z_{2T} + \frac{Z_{1T}Z_{2T}}{Z_{3T}} \qquad (6.2.17)$$

và $$A_{22T} = \frac{\dot{I}_{1ng}}{\dot{I}_{2ng}} = \frac{Z_{2T} + Z_{3T}}{Z_{3T}} = 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{3T}} \qquad (6.2.18)$$

Áp dụng bằng số : Với Z_{1T}= j10 Ω; Z_{2T} = 10 Ω và Z_{3T} = (5 + j5) Ω ta có:

$$A_{11T} = 1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{3T}} = 1 + \frac{j10}{5 + j5} = 2 + j1$$

$$A_{21T} = \frac{1}{Z_{3T}} = \frac{1}{(5 + j5)} = (0,1 - j0,1)\ S$$

$$A_{12T} = Z_{1T} + Z_{2T} + \frac{Z_{1T}Z_{2T}}{Z_{3T}} = j10 + 10 + \frac{(j10)(10)}{(5 + j5)} = (20 + j20)\ \Omega$$

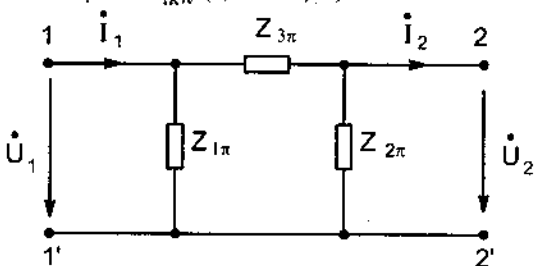
$$A_{22T} = 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{3T}} = 1 + \frac{10}{5 + j5} = 2 - j1$$

Ví dụ 6.2.2

Cho mạng hai cửa hình π ở H.6.2.6 với các tổng trở:

$Z_{1\pi}$ = j10 Ω; $Z_{2\pi}$ = 10 Ω và $Z_{3\pi}$ = (5 + j5) Ω.

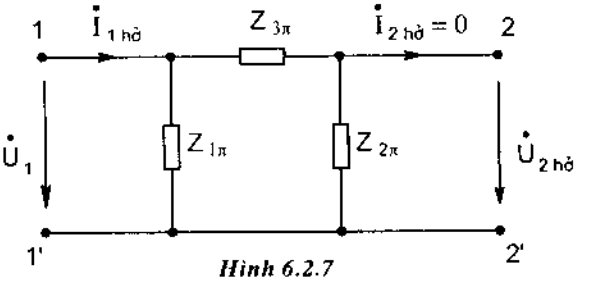
Hãy xác định các hệ số $A_{ik\pi}$ (i, k = 1, 2).



Hình 6.2.6

Giải:

1. Tình trạng với cửa ra hở mạch



Hình 6.2.7

Từ sơ đồ ở H.6.2.7 ta dễ tính được:

$$\dot{I}_{1hở} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{1\pi}} + \frac{\dot{U}_1}{Z_{2\pi} + Z_{3\pi}} = \dot{U}_1\left(\frac{1}{Z_{1\pi}} + \frac{1}{Z_{2\pi} + Z_{3\pi}}\right)$$

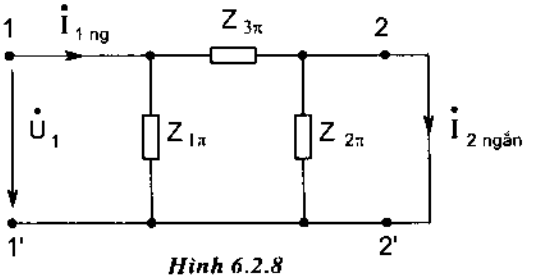
$$\dot{U}_{2hở} = \frac{\dot{U}_1 Z_{2\pi}}{Z_{2\pi} + Z_{3\pi}}$$

Vậy theo các công thức (6.2.5) và (6.2.6) ta có:

$$A_{11\pi} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_{2hở}} = \frac{Z_{2\pi} + Z_{3\pi}}{Z_{2\pi}} = 1 + \frac{Z_{3\pi}}{Z_{2\pi}} \qquad (6.2.19)$$

và $$A_{21\pi} = \frac{\dot{I}_{1hở}}{\dot{U}_{2hở}} = \frac{\dot{U}_1\left(\frac{1}{Z_{1\pi}} + \frac{1}{Z_{2\pi} + Z_{3\pi}}\right)}{\dot{U}_1\left(\frac{Z_{2\pi}}{Z_{2\pi} + Z_{3\pi}}\right)} = \frac{Z_{2\pi} + Z_{3\pi} + Z_{1\pi}}{Z_{1\pi} Z_{2\pi}} \qquad (6.2.20)$$

2. Tình trạng với cửa ra ngắn mạch



Hình 6.2.8

Từ sơ đồ H.6.2.8 ta dễ tính được:

$$\dot{I}_{2ng} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{3\pi}}$$

và $$\dot{I}_{1ng} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{1\pi}} + \frac{\dot{U}_1}{Z_{3\pi}} = \dot{U}_1\left(\frac{1}{Z_{1\pi}} + \frac{1}{Z_{3\pi}}\right)$$

Vậy theo các công thức (6.2.9) và (6.2.10) ta có:

$$A_{12\pi} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{2ng}} = Z_{3\pi} \qquad (6.2.21)$$

và

$$A_{22\pi} = \frac{\dot{I}_{1ng}}{\dot{I}_{2ng}} = \frac{\dfrac{1}{Z_{1\pi}} + \dfrac{1}{Z_{3\pi}}}{\dfrac{1}{Z_{3\pi}}} = \frac{Z_{3\pi} + Z_{1\pi}}{Z_{1\pi}} = 1 + \frac{Z_{3\pi}}{Z_{1\pi}} \qquad (6.2.22)$$

Áp dụng bằng số : Với $Z_{1\pi} = j10\ \Omega$; $Z_{2\pi} = 10\ \Omega$ và $Z_{3\pi} = (5 + j5)\ \Omega$ ta có:

$$A_{11\pi} = 1 + \frac{Z_{3\pi}}{Z_{2\pi}} = 1 + \frac{5 + j5}{10} = 1,5 - j0,5$$

$$A_{21\pi} = \frac{Z_{1\pi} + Z_{2\pi} + Z_{3\pi}}{Z_{1\pi}Z_{2\pi}} = \frac{j10 + 10 + 5 + j5}{(j10)(10)} = (0,15 - j0,15)\ S$$

$$A_{12\pi} = Z_{3\pi} = (5 + j5)\ \Omega$$

và

$$A_{22\pi} = 1 + \frac{Z_{3\pi}}{Z_{1\pi}} = 1 + \frac{5 + j5}{j10} = 1,5 - j0,5$$

6.3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN DẠNG Z CỦA MỘT MẠNG HAI CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC HỆ SỐ Z_{ik} (i, k = 1, 2)

Ta cũng có thể viết hệ phương trình cơ bản của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn dưới dạng sau:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \qquad (6.3.1)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \qquad (6.3.2)$$

Ở đây các điện áp $\dot{U}_1$ và $\dot{U}_2$ trên các cửa là các hàm số tuyến tính của các dòng điện $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ trên các cửa. Các hệ số của hệ phương trình (6.3.1) và (6.3.2) đều có thứ nguyên là các tổng trở nên được ký hiệu là Z_{ik} (i, k = 1, 2). Vì thế hệ phương trình (6.3.1) và (6.3.2) được gọi là hệ phương trình cơ bản dạng Z của mạng hai cửa tuyến tính không nguồn.

Hệ phương trình cơ bản dạng Z có thể rút ra được từ hệ phương trình dòng nhánh hoặc hệ phương trình dòng vòng hoặc hệ phương trình thế nút viết cho phần mạch điện ở bên trong mạng hai cửa (ở giữa các đôi cực 1 - 1' và 2 - 2'). Nếu ta đã có hệ phương trình cơ bản dạng A của mạng hai cửa thì ta cũng có thể giải hệ phương trình đó đối với $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ để được hệ phương trình cơ bản dạng Z (với điều kiện là $A_{21} \neq 0$).

Thật vậy, giả sử đã cho hệ phương trình cơ bản dạng A:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \qquad (6.3.3)$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 \qquad (6.3.4)$$

Từ (6.3.4) ta rút ra

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{I}_1 - A_{22}\dot{I}_2}{A_{21}}$$

$$= \left(\frac{1}{A_{21}}\right)\dot{I}_1 - \left(\frac{A_{22}}{A_{21}}\right)\dot{I}_2 \qquad (6.3.5)$$

Thay (6.3.5) vào (6.3.3) ta được:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\left(\frac{\dot{I}_1 - A_{22}\dot{I}_2}{A_{21}}\right) + A_{12}\dot{I}_2$$

$$= \left(\frac{A_{11}}{A_{21}}\right)\dot{I}_1 + \left(A_{12} - \frac{A_{11}A_{22}}{A_{21}}\right)\dot{I}_2 \qquad (6.3.6)$$

Cho đồng nhất các hệ số của phương trình (6.3.1) với các hệ số của phương trình (6.3.6) ta có:

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} \text{ và } Z_{12} = A_{12} - \frac{A_{11}A_{22}}{A_{21}}$$

Cho đồng nhất các hệ số của phương trình (6.3.2) với các hệ số của phương trình (6.3.5) ta có:

$$Z_{21} = \frac{1}{A_{21}} \text{ và } Z_{22} = -\frac{A_{22}}{A_{21}}$$

Ta cũng có thể xác định các hệ số Z_{ik} (i, k = 1, 2) của hệ phương trình cơ bản dạng Z bằng cách xét các tình trạng hở mạch và ngắn mạch.

Từ hệ phương trình cơ bản dạng Z với $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2hở} = 0$, ta có

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{1hở}} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad (6.2.7)$$

và

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_{2hở}}{\dot{I}_{1hở}} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad (6.2.8)$$

Từ hệ phương trình cơ bản dạng Z với $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1hở} = 0$ ta có:

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_{1hở}}{\dot{I}_{2hở}} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} \qquad (6.2.9)$$

và $$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_{2hở}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0} \qquad (6.2.10)$$

Ví dụ 6.3.1:

Hãy xác định các hệ số Z_{ikT} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa hình T đã cho ở ví dụ 6.2.1.

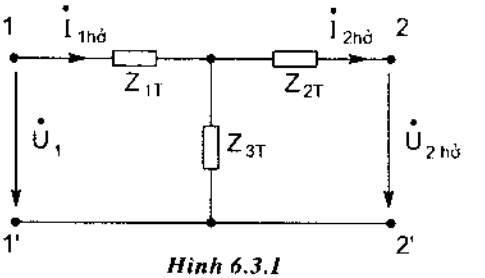
Giải:

Từ sơ đồ ở H.6.3.1 ta tính được

$$\dot{I}_{1hở} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{1T} + Z_{3T}}$$

và

$$\dot{U}_{2hở} = Z_{3T}\dot{I}_{1hở} = \left(\frac{Z_{3T}}{Z_{1T} + Z_{3T}}\right)\dot{U}_1$$



Hình 6.3.1

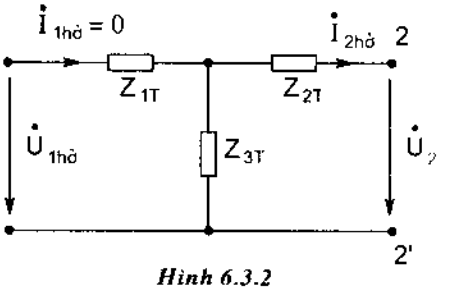
Vậy theo các công thức (6.2.7) và (6.2.8) ta có:

$$Z_{11T} = \frac{\dot{U}_{1hở}}{\dot{I}_{1hở}} = Z_{1T} + Z_{3T}$$

và $$Z_{21T} = \frac{\dot{U}_{2hở}}{\dot{I}_{1hở}} = Z_{3T}$$

Từ sơ đồ ở H.6.3.2 ta tính được:

$$\dot{I}_{2hở} = -\left(\frac{\dot{U}_2}{Z_{2T} + Z_{3T}}\right)$$



Hình 6.3.2

và $$\dot{U}_{1hở} = -Z_{3T}\dot{I}_{2hở} = \left(\frac{Z_{3T}}{Z_{2T} + Z_{3T}}\right)\dot{U}_2$$

Vậy theo các công thức (6.2.9) và (6.2.10) ta có

$$Z_{12T} = \frac{\dot{U}_{1hở}}{\dot{I}_{2hở}} = -Z_{3T}$$

và $$Z_{22T} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_{2hở}} = -(Z_{2T} + Z_{3T})$$

Áp dụng bằng số : Với Z_{1T}= j10 Ω; Z_{2T} = 10 Ω và Z_{3T} = (5 + j5) Ω ta có

$$Z_{11T} = Z_{1T} + Z_{3T} = j10 + (5 + j5) = (5 + j15)\ \Omega$$

$$Z_{21T} = Z_{3T} = (5 + j5)\ \Omega$$

$$Z_{12T} = -Z_{3T} = -(5 + j5)\ \Omega$$

và $$Z_{22T} = -(Z_{2T} + Z_{3T}) = -(10 + 5 + j5) = -(15 + j5)\ \Omega.$$

6.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN DẠNG Y CỦA MỘT MẠNG HAI CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC HỆ SỐ Y_{ik} (i, k = 1, 2)

Ta có thể viết hệ phương trình cơ bản của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn dưới dạng sau:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \qquad (6.4.1)$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \qquad (6.4.2)$$

Ở đây các dòng điện $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ trên các cửa là các hàm số tuyến tính của các điện áp $\dot{U}_1$ và $\dot{U}_2$ trên các cửa. Các hệ số của hệ phương trình (6.4.1) và (6.4.2) đều có thứ nguyên là tổng dẫn (nghịch đảo của tổng trở) nên được ký hiệu là Y_{ik} (i, k = 1, 2). Vì thế hệ phương trình (6.4.1) và (6.4.2) được gọi là hệ phương trình dạng Y của mạng hai cửa tuyến tính không nguồn.

Hệ phương trình cơ bản dạng Y có thể rút ra được từ hệ phương trình dòng nhánh hoặc hệ phương trình dòng vòng hoặc hệ phương trình thế nút viết cho phần mạch điện ở bên trong mạng hai cửa (ở giữa các đôi cực 1 - 1' và 2 - 2'). Nếu ta đã có hệ phương trình dạng Z của mạng hai cửa thì ta cũng có thể giải hệ phương trình đó đối với $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ để được hệ phương trình cơ bản dạng Y (với điều kiện là $Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \neq 0$).

Thật vậy, giả sử đã cho hệ phương trình cơ bản dạng Z:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \qquad (6.4.3)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \qquad (6.4.4)$$

Giải hệ phương trình (6.4.3) và (6.4.4) đối với $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ bằng cách áp dụng quy tắc Cramer ta được:

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_1 & Z_{12} \\ \dot{U}_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \left(\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}\right)\dot{U}_1 + \left(-\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}\right)\dot{U}_2 \qquad (6.4.5)$$

và

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{U}_1 \\ Z_{21} & \dot{U}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \left(-\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}\right)\dot{U}_1 + \left(\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}\right)\dot{U}_2 \qquad (6.4.6)$$

với $\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$

So sánh các phương trình (6.4.3) và (6.4.4) với (6.4.5) và (6.4.6) ta rút ra các hệ số

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}, \qquad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}, \qquad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

Các công thức trên cho ta tính được các hệ số Y_{ik} (i, k = 1, 2) theo các hệ số Z_{ik} (i, k = 1, 2) nếu $Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \neq 0$.

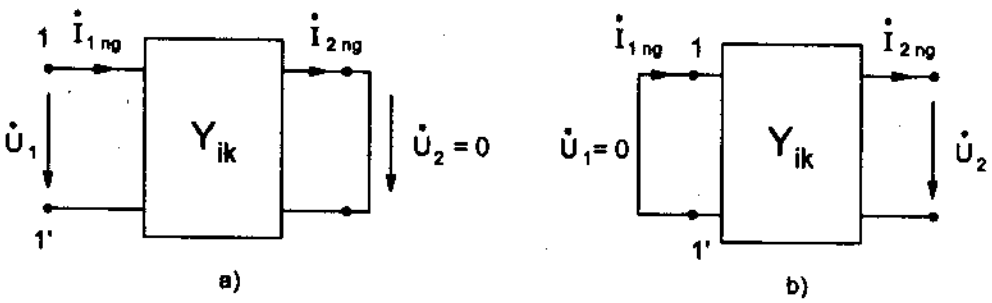
Ta cũng có thể xác định các hệ số Y_{ik} (i, k = 1, 2) của hệ phương trình cơ bản dạng Y bằng cách xét các tình trạng hở mạch và ngắn mạch.

Từ hệ phương trình cơ bản dạng Y với $\dot{U}_2 = 0$ (2 - 2' ngắn mạch, H.6.4.1a) ta có

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_{1ng}}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0} \tag{6.4.7}$$

và

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_{2ng}}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0} \tag{6.4.8}$$



Hình 6.4.1

Từ hệ phương trình cơ bản dạng Y với $\dot{U}_1 = 0$ (1 - 1' ngắn mạch, H.6.4.1b) ta có

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_{1ng}}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0} \tag{6.4.9}$$

và

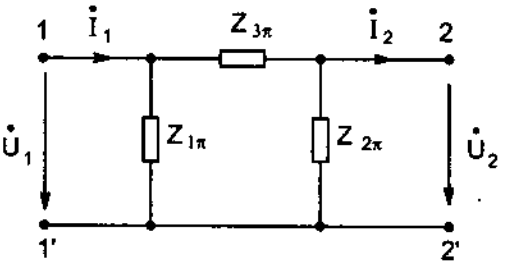
$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_{2ng}}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\dot{U}_1=0} \tag{6.4.10}$$

Ví dụ 6.4.1:

Hãy xác định các hệ số Y_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa hình Π đã cho ở ví dụ 6.2.2.

Giải:

Cho các điện thế $\dot{V}_{1'} = \dot{V}_{2'} = 0$ và coi $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ như là các nguồn dòng nối vào các nút ① và ②, ta viết hệ phương trình thế nút sau đây cho mạch điện ở H.6.4.2:



Hình 6.4.2

$$\left(\frac{1}{Z_{1\pi}}+\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{V}_1+\left(-\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{V}_2=\dot{I}_1 \qquad (6.4.11)$$

và
$$\left(-\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{V}_1+\left(\frac{1}{Z_{2\pi}}+\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{V}_2=-\dot{I}_2 \qquad (6.4.12)$$

Chú ý rằng $\dot{V}_1 = \dot{U}_1$, $\dot{V}_2 = \dot{U}_2$ ta có thể viết lại hệ phương trình (6.4.11) và (6.4.12) dưới dạng:

$$\dot{I}_1=\left(\frac{1}{Z_{1\pi}}+\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{U}_1+\left(-\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{U}_2 \qquad (6.4.13)$$

$$\dot{I}_2=\left(\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{U}_1+\left(-\frac{1}{Z_{2\pi}}-\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)\dot{U}_2 \qquad (6.4.14)$$

Hai phương trình (6.4.13) và (6.4.14) hợp thành hệ phương trình cơ bản dạng Y của mạng hai cửa hình Π.

Vậy ta có các hệ số Y_{ik} (i, k = 1, 2) như sau:

$$Y_{11}=\frac{1}{Z_{1\pi}}+\frac{1}{Z_{3\pi}}, \qquad Y_{12}=-\frac{1}{Z_{3\pi}}$$

$$Y_{21}=\frac{1}{Z_{3\pi}}, \qquad Y_{22}=-\left(\frac{1}{Z_{2\pi}}+\frac{1}{Z_{3\pi}}\right)$$

Áp dụng bằng số : Với $Z_{1\pi} = j10\ \Omega$; $Z_{2\pi} = 10\ \Omega$; $Z_{3\pi} = (5 + j5)\ \Omega$ ta có

$$Y_{11}=\frac{1}{j10}+\frac{1}{5+j5}=(0,1-j0,2)\ S$$

$$Y_{12}=-\frac{1}{5+j5}=(-0,1+j0,1)\ S$$

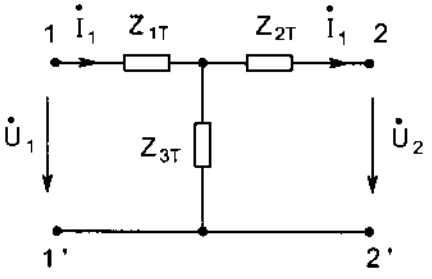
$$Y_{21} = \frac{1}{5+j5} = (0,1 - j0,1)\ S$$

$$Y_{22} = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5+j5}\right) = (-0,2 + j0,1)\ S$$

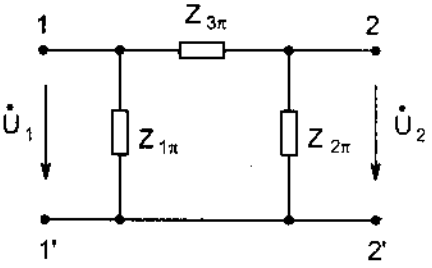
6.5. CÁC SƠ ĐỒ TƯƠNG ĐƯƠNG HÌNH T VÀ HÌNH Π CỦA MỘT MẠNG HAI CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN TƯƠNG HỖ

Giả sử đã cho một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn với các hệ số A_{11}, A_{12}, A_{21} và A_{22}.

Nếu $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ thì mạng hai cửa đã cho thoả mãn *tính tương hỗ* (xem mục 6.10). Trong trường hợp này ta có thể thay thế mạng hai cửa đã cho bằng một sơ đồ hình T gồm các tổng trở Z_{1T}, Z_{2T}, Z_{3T} (H.6.5.1) hoặc bằng một sơ đồ hình Π gồm các tổng trở $Z_{1\pi}$, $Z_{2\pi}$ và $Z_{3\pi}$ (H.6.5.2) sao cho các hệ số A_{11}, A_{12}, A_{21} và A_{22} của sơ đồ hình T hoặc hình Π lần lượt bằng các hệ số A_{11}, A_{12}, A_{21} và A_{22} của mạng hai cửa (tương hỗ) đã cho.



Hình 6.5.1



Hình 6.5.2

Từ các công thức (6.2.13, 6.2.14, 6.2.17, 6.2.18) đã tìm được ở ví dụ 6.2.1 ta dễ rút ra được các công thức sau đây cho ta tính được trị số của các tổng trở Z_{1T}, Z_{2T} và Z_{3T} ở sơ đồ tương đương hình T theo các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) đã cho:

$$Z_{1T} = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}}$$

$$Z_{2T} = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} \qquad (6.5.1)$$

$$Z_{3T} = \frac{1}{A_{21}}$$

Từ các công thức (6.2.19), (6.2.20), (6.2.21) và (6.2.22) đã tìm được ở ví dụ 6.2.2 ta rút ra được các công thức tính các tổng trở của sơ đồ tương đương hình Π :

$$Z_{1\pi} = \frac{A_{12}}{A_{22} - 1}$$

$$Z_{2\pi} = \frac{A_{12}}{A_{11} - 1} \qquad (6.5.2)$$

$$Z_{3\pi} = A_{12}$$

Ví dụ 6.5.1

Hãy tìm các tổng trở của sơ đồ tương đương hình T cho mạng hai cửa có:

$$A_{11} = (1 + j1)$$

$$A_{12} = (1 + j2)\ \Omega$$

$$A_{21} = (j1)\ S$$

và $$A_{22} = j1$$

Giải:

Ta có $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = (1 + j1)(j1) - (1 + j2)(j1) = 1$.

Mạng hai cửa đã cho thoả mãn tính tương hỗ nên có thể thay thế bằng một sơ đồ hình T.

Dùng các công thức (6.5.1) ta có:

$$Z_{1T} = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}} = \frac{(1 + j1) - 1}{j1} = 1\ \Omega$$

$$Z_{2T} = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} = \frac{j1 - 1}{j1} = (1 + j1)\ \Omega$$

và $$Z_{3T} = \frac{1}{A_{21}} = \frac{1}{j1} = -j1\ \Omega$$

Ví dụ 6.5.2

Tìm các tổng trở của sơ đồ tương đương hình Π cho mạng hai cửa đã cho ở ví dụ 6.5.1.

Giải:

Dùng các công thức (6.5.2) ta có:

$$Z_{1\pi} = \frac{A_{12}}{A_{22} - 1} = \frac{1 + j2}{j1 - 1} = (0,5 - j1,5)\ \Omega$$

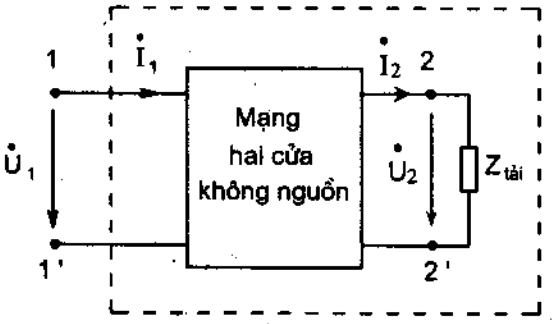
$$Z_{2\pi} = \frac{A_{12}}{A_{11} - 1} = \frac{1 + j2}{(1 + j1) - 1} = \frac{1 + j2}{j1} = (2 - j1)\ \Omega$$

và $$Z_{3\pi} = A_{12} = (1 + j2)\ \Omega$$

6.6. TỔNG TRỞ VÀO CỦA MỘT MẠNG HAI CỬA KHÔNG NGUỒN

Ta xét bộ phận mạch điện gồm một mạng hai cửa giữa các đôi cực 1 - 1' và 2 - 2' và tổng trở $Z_{tải}$ của nó nối vào đôi cực 2 - 2' (xem H.6.6.1)

Người ta gọi tỷ số giữa điện áp $\dot{U}_1$ và dòng điện $\dot{I}_1$ với các chiều dương chọn như ở H.6.6.1 là *tổng trở vào* của mạng hai cửa đối với đôi cực 1 - 1'.



Hình 6.6.1

$$Z_{1vào} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \qquad (6.6.1)$$

Dĩ nhiên là trị số của tổng trở vào $Z_{1vào}$ phụ thuộc vào các thông số đặc trưng của mạng hai cửa không nguồn (ví dụ các hệ số A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik}, ... (i, k = 1, 2)) và phụ thuộc vào trị số của $Z_{tải}$.

Ví dụ, nếu đã cho các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa, ta có các phương trình :

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \qquad (6.6.2)$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 \qquad (6.6.3)$$

và

$$\dot{U}_2 = Z_{tải}\dot{I}_2 \qquad (6.6.4)$$

thay (6.6.4) vào (6.6.2) và (6.6.3) ta được

$$\dot{U}_1 = (A_{11}Z_{tải} + A_{12})\dot{I}_2 \qquad (6.6.5)$$

và

$$\dot{I}_1 = (A_{21}Z_{tải} + A_{22})\dot{I}_2 \qquad (6.6.6)$$

Vậy

$$Z_{1vào} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}Z_{tải} + A_{12}}{A_{21}Z_{tải} + A_{22}} \qquad (6.6.7)$$

Trong trường hợp mạng hai cửa ngắn mạch ($Z_{tải} = 0$) thì tổng trở vào đối với các cực 1 - 1' được gọi là *tổng trở vào ngắn mạch*.

$$Z_{1ngắn} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{1ngắn}} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \qquad (6.6.8)$$

Còn trong trường hợp mạng hai cửa hở mạch $Z_{tải} = \infty$ thì tổng trở vào đối với các cực 1 - 1' được gọi là *tổng trở vào hở mạch*

$$Z_{1hở} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{1hở}} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{A_{11}}{A_{21}} \qquad (6.6.9)$$

Ví dụ 6.6.1 :

Cho một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn với các hệ số

$A_{11} = 1,5$ $\qquad$ $A_{12} = (10 + j15)\ \Omega$

$A_{21} = 0,05\ S$ $\qquad$ $A_{22} = 1 + j0,5$

Hãy tính các tổng trở vào đối với các cực 1 - 1' trong các trường hợp

a) $Z_{tải} = (6 + j8)\ \Omega$

b) $Z_{tải} = 0$ $\qquad$ c) $Z_{tải} = \infty$

Giải :

Áp dụng các công thức (6.6.7) ta có

$$Z_{1vào} = \frac{A_{11}Z_{tải} + A_{12}}{A_{21}Z_{tải} + A_{22}} =$$

$$= \frac{(1,5)(6+j8)+(10+j15)}{(0,05)(6+j8)+(1+j0,5)} =$$

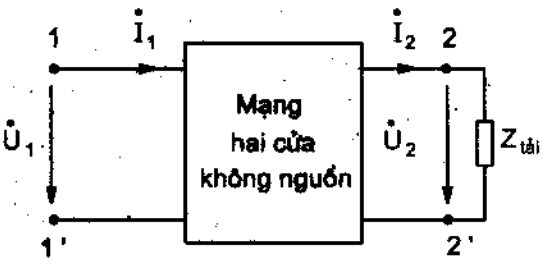
$$= \frac{19+j27}{1,3+j0,9} = (19,6+j7,2)\ \Omega$$

$$Z_{1ngắn} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{(10+j15)}{(1+j0,5)} = (14 + j8)\ \Omega$$

và $$Z_{1hở} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{1,5}{0,05} = 30\ \Omega$$

6.7. HÀM TRUYỀN ĐẠT ÁP CỦA MỘT MẠNG HAI CỬA

Trong mạch điện ở H.6.7.1 người ta gọi tỷ số của điện áp $\dot{U}_2$ ở cửa ra (đôi cực 2 - 2') của mạng hai cửa với điện áp ở cửa vào (đôi cực 1 - 1') của mạng hai cửa là *hàm (hay hệ số) truyền đạt áp* của mạng hai cửa, thường ký hiệu là K_U :



Hình 6.7.1

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \qquad (6.7.1)$$

Nếu đã cho các thông số của mạng hai cửa không nguồn (Ví dụ A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik} v.v.. (i, k = 1, 2)) và cho trị số của $Z_{tải}$ ta có thể tính được trị số của K_U theo các thông số đó. Ví dụ đã cho các thông số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa và $Z_{tải}$, chú ý rằng $\dot{U}_2 = Z_{tải}\dot{I}_2$ ta có :

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$$

$$= \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2} = \frac{Z_{tải}\dot{I}_2}{(A_{11}Z_{tải} + A_{12})\dot{I}_2}$$

Vậy

$$K_U = \frac{Z_{tải}}{A_{11}Z_{tải} + A_{12}} \qquad (6.7.2)$$

Từ công thức (6.7.2) ta thấy rõ rằng nếu A_{ik} (i, k = 1, 2) và $Z_{tải}$ có các trị số hoàn toàn xác định thì K_U sẽ có một trị số hoàn toàn xác định. Trong trường hợp này K_U có thể được gọi là *hệ số truyền đạt áp*. Nếu A_{ik} (i, k = 1, 2) và $Z_{tải}$ có các trị số thay đổi (ví dụ theo tần số) thì K_U sẽ thay đổi theo. Vì thế K_U được gọi là *hàm truyền đạt áp*. Điều này có ý nghĩa quan trọng đối với các mạng hai cửa đặc biệt, ví dụ như các mạch lọc tần số.

Ví dụ 6.7.1:

Đối với mạng hai cửa với các hệ số A_{ik} đã cho ở ví dụ 6.6.1, hãy tính hệ số truyền đạt áp K_U với

a) $Z_{tải} = (6 + j8)\ \Omega$

b) với $Z_{tải} = \infty$

Giải

a) Áp dụng công thức (6.7.2) với $Z_{tải} = (6 + j8)\ \Omega$ ta có:

$$K_U = \frac{Z_{tải}}{A_{11}Z_{tải} + A_{12}} = \frac{6 + j8}{(1,5)(6 + j8) + (10 + j15)} =$$

$$= \frac{6 + j8}{19 + j27} = 0,3028 - j0,009174 = 0,3029\angle -1,74^0$$

b) Với $Z_{tải} = \infty$ ta có

$$K_{Uhở} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1;5} \approx 0,66667$$

6.8. HÀM TRUYỀN ĐẠT DÒNG CỦA MỘT MẠNG HAI CỬA

Trong mạch điện ở H.6.7.1 người ta gọi tỷ số của dòng điện $\dot{I}_2$ ở cửa ra với dòng điện $\dot{I}_1$ ở cửa vào của mạng hai cửa là *hàm (hay hệ số) truyền đạt dòng* của mạng hai cửa, thường ký hiệu là K_I:

$$K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \qquad (6.8.1)$$

Dĩ nhiên là K_I phụ thuộc vào các thông số (ví dụ A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik}, ..., (i, k) = 1, 2) của mạng hai cửa và phụ thuộc vào tổng trở $Z_{tải}$ của tải. Ví dụ, nếu đã cho A_{ik} (i, k = 1, 2), chú ý rằng $\dot{U}_2 = Z_{tải}\dot{I}_2$ ta có :

$$K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} =$$

$$= \frac{\dot{I}_2}{(A_{21}Z_{tải} + A_{22})\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21}Z_{tải} + A_{22}} \qquad (6.8.2)$$

Ví dụ 6.8.1 :

Đối với mạng hai cửa với các hệ số A_{ik} đã cho ở ví dụ 6.6.1, hãy tính hệ số truyền đạt dòng K_I với

a) $Z_{tải} = 6 + j8\ \Omega$

b) $Z_{tải} = 0$.

Giải: a) Áp dụng công thức (6.8.2), với $Z_{tải} = (6 + j8)\ \Omega$ ta có:

$$K_I = \frac{1}{A_{21}Z_{tải} + A_{22}} = \frac{1}{0,05(6+j8)+(1+j0,5)} =$$

$$= 0,52 - j0,36 = 0,6325 \angle -34,71^0$$

Vậy với $Z_{tải} = (6 + j8)\ \Omega$ thì

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,6325$$

và $\dot{I}_2$ chậm sau $\dot{I}_1$ góc $34,71^0$

b) Với $Z_{tải} = 0$ ta có

$$K_{Ingắn} = \frac{1}{A_{22}} = \frac{1}{1 + j0,5} =$$

$$= 0,8 - j0,4 = 0,8944 \angle -26,57^0$$

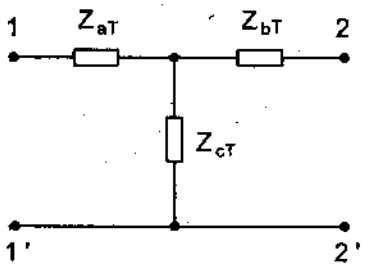
Vậy với $Z_{tải} = 0$ thì

$$\frac{I_{2ng}}{I_{1ng}} = 0,8944$$

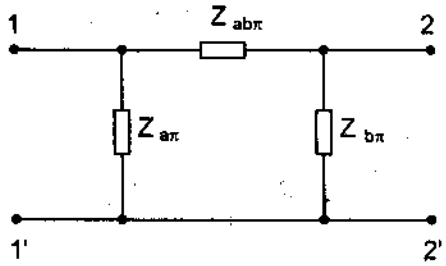
và $\dot{I}_{2ng}$ chậm sau $\dot{I}_{1ng}$ góc $26,57^0$.

6.9. MẠNG HAI CỬA TUYẾN TÍNH KHÔNG NGUỒN ĐỐI XỨNG

Mạng hai cửa ở H.6.9.1 với $Z_{aT} = Z_{bT}$ và mạng hai cửa ở H.6.9.2 với $Z_{a\pi} = Z_{b\pi}$ là các ví dụ về các mạng hai cửa không nguồn đối xứng.



Hình 6.9.1



Hình 6.9.2

Từ các công thức tính các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) theo các tổng trở của mạng hai cửa hình T (ở ví dụ 6.2.1) và của mạng hai cửa hình π (ở ví dụ 6.2.2) ta dễ thấy rằng đối với mạng hai cửa không nguồn đối xứng thì :

$$A_{11} = A_{22} \qquad (6.9.1)$$

Do đó hệ phương trình cơ bản dạng A của một mạng hai cửa không nguồn đối xứng sẽ trở thành

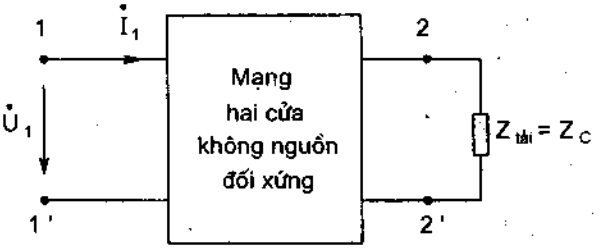
$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \qquad (6.9.2)$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{11}\dot{I}_2 \qquad (6.9.3)$$

Tổng trở đặc tính Z_C và hệ số truyền đạt g của một mạng hai cửa không nguồn đối xứng.

a) *Tổng trở đặc tính Z_c*

Xét một mạng hai cửa không nguồn đối xứng. Người ta gọi tổng trở đặc tính (characteristic impedance) của mạng hai cửa này là một trị số tổng trở đặc biệt, ký hiệu là Z_c, sao cho khi nó được nối vào một trong hai cửa (ví dụ 2 - 2') thì tổng trở vào của mạng hai cửa đối với cửa kia (1 - 1') cũng lại chính bằng Z_c (xem H.6.9.3).



Hình 6.9.3

Ta có thể dễ tính được tổng trở đặc tính Z_c của một mạng hai cửa không nguồn đối xứng theo các hệ số A_{ik} của nó.

Ta hãy tính $Z_{1vào}$ của mạng hai cửa đối xứng với $Z_{tải} = Z_c$, chú ý rằng $\dot{U}_2 = Z_C \dot{I}_2$:

$$Z_{1vào} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{Z_{tải}=Z_C} = \frac{A_{11}Z_c + A_{12}}{A_{21}Z_c + A_{11}} \qquad (6.9.4)$$

Chú ý rằng $Z_{1vào} = Z_c$ ta có

$$Z_c = \frac{A_{11}Z_c + A_{12}}{A_{21}Z_c + A_{11}} \qquad (6.9.5)$$

Từ đó ta có

$$A_{21}Z_c^2 + A_{11}Z_c = A_{11}Z_c + A_{12}$$

hay $\quad A_{21}Z_c^2 = A_{12}$

Vậy $\quad Z_c^2 = \dfrac{A_{12}}{A_{21}}$

và $\quad Z_c = \sqrt{\dfrac{A_{12}}{A_{21}}} \qquad (6.9.6)$

Người ta cũng thường gọi $Z_{tải} = Z_c$ là *tải hòa hợp* của mạng hai cửa không nguồn đối xứng.

b) *Hệ số truyền đạt g*

Khi một mạng hai cửa không nguồn đối xứng làm việc với tải hòa hợp $Z_{tải} = Z_c$ thì quan hệ giữa các áp và quan hệ giữa các dòng ở hai cửa rất đơn giản. Trước hết ta hãy chứng minh rằng với $Z_{tải} = Z_c$ thì

$$\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{Z_{tải}=Z_c} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{Z_{tải}=Z_c} \qquad (6.9.7)$$

Thật vậy, với $Z_{tải} = Z_c$ thì

$$\dot{U}_2 = Z_c\dot{I}_2 \qquad (6.9.8)$$

và theo định nghĩa của Z_c thì

$$Z_{1\text{vào}} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} = Z_c \qquad (6.9.9)$$

tức

$$\dot{U}_1 = Z_c\dot{I}_1 \qquad (6.9.10)$$

Từ (6.9.8) và (6.9.10) ta rút ra (6.9.7).

Người ta ký hiệu tỷ số (6.9.7) bằng số phức e^g với g = a + jb tức

$$\left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} = e^g = e^{(a+jb)}$$

$$= e^a e^{jb} = e^a \angle b \qquad (6.9.11)$$

Hệ số a được gọi là *hệ số tắt* và b được gọi là *hệ số pha.*

Từ (6.9.11) ta dễ thấy rằng

$$e^a = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} \qquad (6.9.12)$$

hay

$$a = \ln\left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} = \ln\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} \qquad (6.9.13)$$

và b là góc lệch pha (tính bằng radian) giữa $\dot{U}_1$ và $\dot{U}_2$ khi $Z_{\text{tải}} = Z_c$ hoặc góc lệch pha (tính bằng radian) giữa $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ khi $Z_{\text{tải}} = Z_c$.

Hệ số phức

$$g = a + jb$$

được gọi là *hệ số truyền đạt* của mạng hai cửa không nguồn đối xứng.

Ta dễ tính được g theo các hệ số A_{ik} của mạng hai cửa. Ta có

$$e^g = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{\dot{U}_2} =$$

$$= \frac{(A_{11}Z_c + A_{12})\dot{I}_2}{Z_c\dot{I}_2} = \frac{A_{11}Z_c + A_{12}}{Z_c} =$$

$$= A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_c} \qquad (6.9.14)$$

Thay Z_c theo (6.9.6) vào (6.9.14) ta có

$$e^g = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{Z_{\text{tải}}=Z_c} = A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \qquad (6.9.15)$$

Vậy

$$g = \ln(A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}) \qquad (6.9.16)$$

Hệ phương trình cơ bản của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn, đối xứng và tương hỗ dưới dạng hàm hyperbolic.

Từ (6.9.15) ta có

$$e^{-g} = \frac{1}{A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}} \tag{6.9.17}$$

Chú ý rằng nếu một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn, đối xứng thoả mãn tính chất tương hỗ (xem mục 6.10) thì ta có hệ thức

$$A_{11}^2 - A_{12}A_{21} = 1 \tag{6.9.18}$$

Sử dụng (6.9.18) ta có thể viết (6.9.17) dưới dạng

$$e^{-g} = \frac{A_{11}^2 - A_{12}A_{21}}{A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}} = A_{11} - \sqrt{A_{12}A_{21}} \tag{6.9.19}$$

Từ (6.9.15) và (6.9.19) ta có

$$\text{ch}g = \frac{e^g + e^{-g}}{2} = A_{11} \tag{6.9.20}$$

và

$$\text{sh}g = \frac{e^g - e^{-g}}{2} = \sqrt{A_{12}A_{21}} \tag{6.9.21}$$

Cuối cùng từ (6.9.6) và (6.9.21) ta rút ra

$$A_{12} = Z_C\,\text{sh}g \tag{6.9.22}$$

và

$$A_{21} = \frac{\text{sh}g}{Z_C} \tag{6.9.23}$$

Các công thức (6.9.20), (6.9.22) và (6.9.23) cho ta cách biểu diễn các hệ số A_{11}, A_{12} và A_{21} của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn, đối xứng và tương hỗ qua tổng trở đặc tính Z_C và hệ số truyền đạt g của nó.

Thay các biểu thức này vào hệ phương trình cơ bản dạng A của một mạng hai cửa đối xứng ta sẽ được :

$$\dot{U}_1 = (\text{ch}g)\dot{U}_2 + (Z_C\,\text{sh}g)\dot{I}_2 \tag{6.9.24}$$

$$\dot{I}_1 = \left(\frac{\text{sh}g}{Z_C}\right)\dot{U}_2 + (\text{ch}g)\dot{I}_2 \tag{6.9.25}$$

Hệ phương trình (6.9.24) - (6.9.25) được gọi là hệ phương trình cơ bản dạng hàm hyperbolic của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn, đối xứng và tương hỗ.

Ví dụ 6.9.1 :

Cho một mạng hai cửa đối xứng với

$$A_{11} = A_{22} = 0,5$$

$$A_{12} = -j75\ \Omega$$

và $$A_{21} = -j0,01\ S$$

Tìm tổng trở đặc tính Z_C và hệ số truyền đạt g của mạng hai cửa.

Giải : Áp dụng công thức (6.9.6) ta có

$$Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\frac{-j75}{-j0,01}}$$

$$= \sqrt{\frac{75}{0,01}} = 86,603\Omega$$

và áp dụng công thức (6.9.15) ta có

$$e^g = A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}$$

$$= 0,5 + \sqrt{(-j75)(-j0,01)} =$$

$$= 0,5 + \sqrt{(j^2)0,75}$$

$$= 0,5 + \sqrt{0,75}\angle \pm \frac{\pi}{2}$$

$$= 0,5 \pm j0,86603$$

Ta xét hai trường hợp :

1. $e^g = 0,5 + j0,86603 = 1\angle \frac{\pi}{3} = e^{(a_1 + jb_1)} = e^{a_1}\angle b_1$

tức $e^{a_1} = 1$ hay $a_1 = 0$

và $b_1 = \frac{\pi}{3}$ rad.

2. $e^g = 0,5 - j0,86603 = 1\angle -\frac{\pi}{3} = e^{(a_2 + jb_2)} = e^{a_2}\angle b_2$

tức $e^{a_2} = 1$ hay $a_2 = 0$

và $b_2 = -\frac{\pi}{3}$ rad

Để chọn trị số đúng cho hệ số pha b ta cần dựa vào hệ số

$$A_{12} = Z_C \operatorname{sh} g$$

hoặc $A_{21} = \frac{shg}{Z_C}$

Với $b_1 = \frac{\pi}{3}$ ta có :

$$g = a_1 + jb_1 = 0 + j\frac{\pi}{3}$$

$$e^g = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$shg = \frac{e^g - e^{-g}}{2} = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\frac{\pi}{3}}}{2} = j\sin\frac{\pi}{3} = j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{12} = Z_C\, shg = (86,603)(j\frac{\sqrt{3}}{2}) = j75\ \ S$$

và $A_{21} = \frac{shg}{Z_C} = \frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}}{86,603} = j0,01\ \ S$

Với $b_2 = -\frac{\pi}{3}$ ta có :

$$g = a_2 + jb_2 = 0 - j\frac{\pi}{3}$$

$$e^g = e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$shg = \frac{e^g - e^{-g}}{2} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{j\frac{\pi}{3}}}{2} = j\sin(-\frac{\pi}{3}) = -j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{12} = Z_C\, shg = (86,603)(-j\frac{\sqrt{3}}{2}) = -j75\ \ \Omega$$

và $A_{21} = \frac{shg}{Z_C} = \frac{-j\frac{\sqrt{3}}{2}}{86,603} = -j0,01\ \ S$

Để được $A_{12} = -j75\ \Omega$ hoặc $A_{21} = -j0,01S$ như đã cho, ta cần chọn $b = -\frac{\pi}{3}$ rad.

Vậy $g = -j\frac{\pi}{3}$

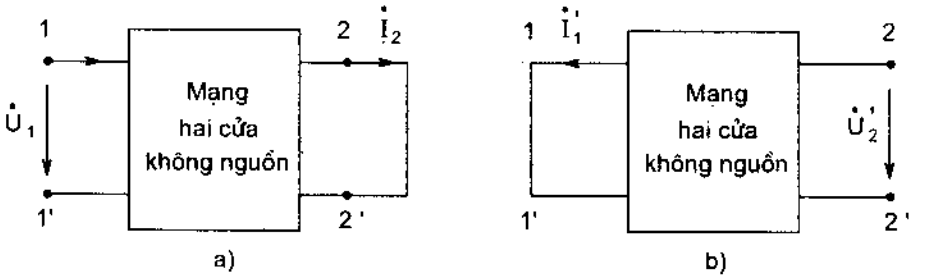
6.10. MẠNG HAI CỬA TƯƠNG HỖ VÀ MẠNG HAI CỬA KHÔNG TƯƠNG HỖ

Các mạng hai cửa tuyến tính không nguồn còn có thể phân thành hai loại:

1. Các mạng hai cửa tương hỗ
2. Các mạng hai cửa không tương hỗ

Nếu mạng hai cửa không nguồn chỉ gồm các phần tử điện trở R, điện cảm L, điện dung C và hỗ cảm M, ta có thể chứng minh rằng hệ thức sau đây sẽ được thỏa mãn đối với các sơ đồ ở H.6.10.1a và H.6.10.1b

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}'_1}{\dot{U}'_2} \qquad (6.10.1)$$



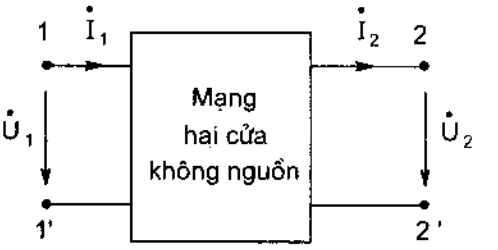
Hình 6.10.1

Hệ thức 6.10.1 thể hiện *tính chất tương hỗ* (reciprocity) đôi khi cũng gọi là *nguyên lý tương hỗ*.

(Chú ý rằng mạng hai cửa trong hai sơ đồ H.6.10.1a và H.6.10.1b là như nhau. Ta chỉ đổi vị trí của các nguồn áp cho nhau mà thôi).

Một mạng hai cửa thỏa mãn tính chất tương hỗ (6.10.1) được gọi là mạng hai cửa tương hỗ (a reciprocal two - port network). Ngược lại, một mạng hai cửa không nguồn không thỏa mãn tính chất tương hỗ sẽ được gọi là một mạng hai cửa không tương hỗ (a nonreciprocal two - port network).

Có thể chứng minh rằng với các chiều dương quy ước của $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ và $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ như đã chọn ở H.6.1.1 (vẽ lại ở H.6.10.2) thì các hệ số A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik} của một mạng hai cửa tương hỗ thỏa mãn các hệ thức sau đây



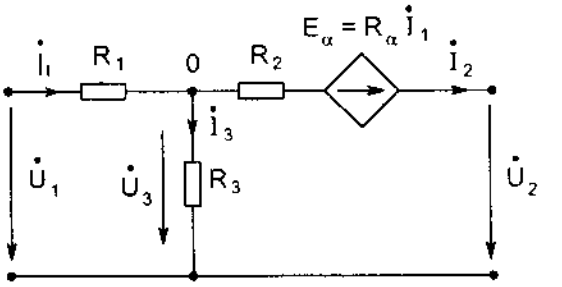
Hình 6.10.2

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \qquad (6.10.2)$$

$$Z_{12} = -Z_{21} \qquad (6.10.3)$$

$$Y_{12} = -Y_{21} \qquad (6.10.4)$$

Mạng hai cửa là mô hình của các transistor bán dẫn là một ví dụ điển hình về một mạng hai cửa không tương hỗ. Ví dụ, sơ đồ ở H.6.10.3 là sơ đồ thay thế của một transistor bán dẫn.



Hình 6.10.3

Trong sơ đồ này có một phần tử mới là *nguồn áp phụ thuộc* $\dot{E}_\alpha = R_\alpha \dot{I}_1$ có trị số điện áp $\dot{E}_\alpha$ phụ thuộc vào dòng điện $\dot{I}_1$.

Nhờ sự có mặt của các nguồn phụ thuộc trong sơ đồ thay thế của các transistor bán dẫn mà các phần tử này có tác dụng khuếch đại điện áp hoặc dòng điện.

Ví dụ 6.10.1 :

Đối với mạng hai cửa ở H.6.10.3 với $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 50\Omega$ và $R_\alpha = 2.5\ \Omega$ hãy tính các thông số A_{ik} (i,k = 1,2) và thử nghiệm tính tương hỗ.

Giải :

Gọi $\dot{U}_3$ là điện áp trên R_3 trong sơ đồ ở H.6.10.3 ta có

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_2 + R_2\dot{I}_2 - R_\alpha\dot{I}_1$$

Gọi $\dot{I}_3$ là dòng điện trong R_3 ta có

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{R_3} = \left(\frac{1}{R_3}\right)\dot{U}_2 + \left(\frac{R_2}{R_3}\right)\dot{I}_2 - \left(\frac{R_\alpha}{R_3}\right)\dot{I}_1$$

Ta viết phương trình theo định luật Kirchhoff thứ nhất cho nút 0 của sơ đồ :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \left(\frac{1}{R_3}\right)\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)\dot{I}_2 - \left(\frac{R_\alpha}{R_3}\right)\dot{I}_1$$

hay

$$\left(1 + \frac{R_\alpha}{R_3}\right)\dot{I}_1 = \left(\frac{1}{R_3}\right)\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)\dot{I}_2$$

Từ đó ta rút ra

$$\dot{I}_1 = \left(\frac{1}{R_\alpha + R_3}\right)\dot{U}_2 + \left(\frac{R_2 + R_3}{R_\alpha + R_3}\right)\dot{I}_2 \qquad (6.10.5)$$

Ta viết phương trình theo định luật Kirchhoff thứ hai cho sơ đồ :

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + \dot{U}_3 = R_1\dot{I}_1 + R_2\dot{I}_2 - R_\alpha\dot{I}_1 + \dot{U}_2$$

$$= \dot{U}_2 + R_2\dot{I}_2 + (R_1 - R_\alpha)\dot{I}_1$$

Thay $\dot{I}_1$ theo (6.10.5) vào phương trình cuối này ta được :

$$\dot{U}_1 = \left(1 + \frac{R_1 - R_\alpha}{R_\alpha + R_3}\right)\dot{U}_2 + \left[R_2 + \frac{(R_1 - R_\alpha)(R_2 + R_3)}{R_\alpha + R_3}\right]\dot{I}_2 \qquad (6.10.6)$$

Các phương trình (6.10.6) và (6.10.5) họp thành hệ phương trình cơ bản dạng A của mạng hai cửa ở H.6.10.3 :

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2$$
$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2$$

với các hệ số

$$A_{11} = 1 + \frac{R_1 - R_\alpha}{R_\alpha + R_3}, \quad A_{12} = R_2 + \frac{(R_1 - R_\alpha)(R_2 + R_3)}{R_\alpha + R_3}$$

$$A_{21} = \frac{1}{R_\alpha + R_3}, \quad A_{22} = \frac{R_2 + R_3}{R_\alpha + R_3}$$

Áp dụng bằng số : với $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, $R_\alpha = 2{,}5\ \Omega$, ta có

$$A_{11} = 1 + \frac{10 - 2{,}5}{2{,}5 + 50} = \frac{8}{7}\ \Omega$$

$$A_{12} = 5 + \frac{(10 - 2{,}5)(5 + 50)}{2{,}5 + 50} = \frac{90}{7}\ \Omega$$

$$A_{21} = \frac{1}{2{,}5 + 50} = \frac{2}{105}\ \Omega$$

$$A_{22} = \frac{5 + 50}{2{,}5 + 50} = \frac{22}{21}\ \Omega$$

Ta nhận thấy với $R_\alpha = 2{,}5\ \Omega$ thì

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \frac{8}{7} \times \frac{22}{21} - \frac{90}{7} \times \frac{2}{105} = \frac{176}{147} - \frac{12}{49} = \frac{20}{21} \neq 1$$

Vậy mạng hai cửa đã cho với là một mạng hai cửa không tương hỗ

(Nếu $R_\alpha = 0$ thì ta có

$$A_{11} = 1 + \frac{R_1}{R_3} = 1 + \frac{10}{50} = 1{,}2$$

$$A_{12} = R_2 + \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_3} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$= 10 + 5 + \frac{10\times 5}{50} = 16\ \Omega$$

$$A_{21} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{50} = 0,02\ S$$

và $A_{22} = \frac{R_2+R_3}{R_3} = 1 + \frac{R_2}{R_3} = 1 + \frac{5}{50} = 1,1$

Ta có

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = (1,2)\times(1,1) - (16)\times(0,02) = 1,32 - 0,32 = 1$$

Vậy nếu $R_\alpha = 0$ thì mạng hai cửa đã cho là một mạng hai cửa tương hỗ)

6.11. NỐI GHÉP CÁC MẠNG HAI CỬA

Các mạng hai cửa thường được nối ghép với nhau theo nhiều cách

1. Nối xâu chuỗi (cascade connection) H. 6.11.1(1)

2. Nối nối tiếp (series connection) H.6.11.1(2)

3. Nối song song (parallel connection) H.6.11.1(3)

4. Nối nối tiếp - song song (series - parallel connection) H.6.11.1(4)

5. Nối song song - nối tiếp (parallel - series connection) H.6.11.1(5)

Trong số các cách nối ghép này chỉ có ở cách nối xâu chuỗi thì luôn đảm bảo được điều kiện là mỗi mạng hai cửa thành phần vẫn là mạng hai cửa như là trước khi chúng được nối với nhau, còn ở các cách nối khác thì điều kiện này không phải bao giờ cũng được đảm bảo. Ở đây ta chỉ xét việc nối xâu chuỗi các mạng hai cửa.

Hình 6.11.2 vẽ hai mạng hai cửa nối xâu chuỗi với nhau.

Các dòng điện và điện áp của mạng hai cửa thứ nhất được mang thêm chỉ số là a, còn các dòng điện và điện áp của mạng hai cửa thứ hai được mang thêm chỉ số là b.

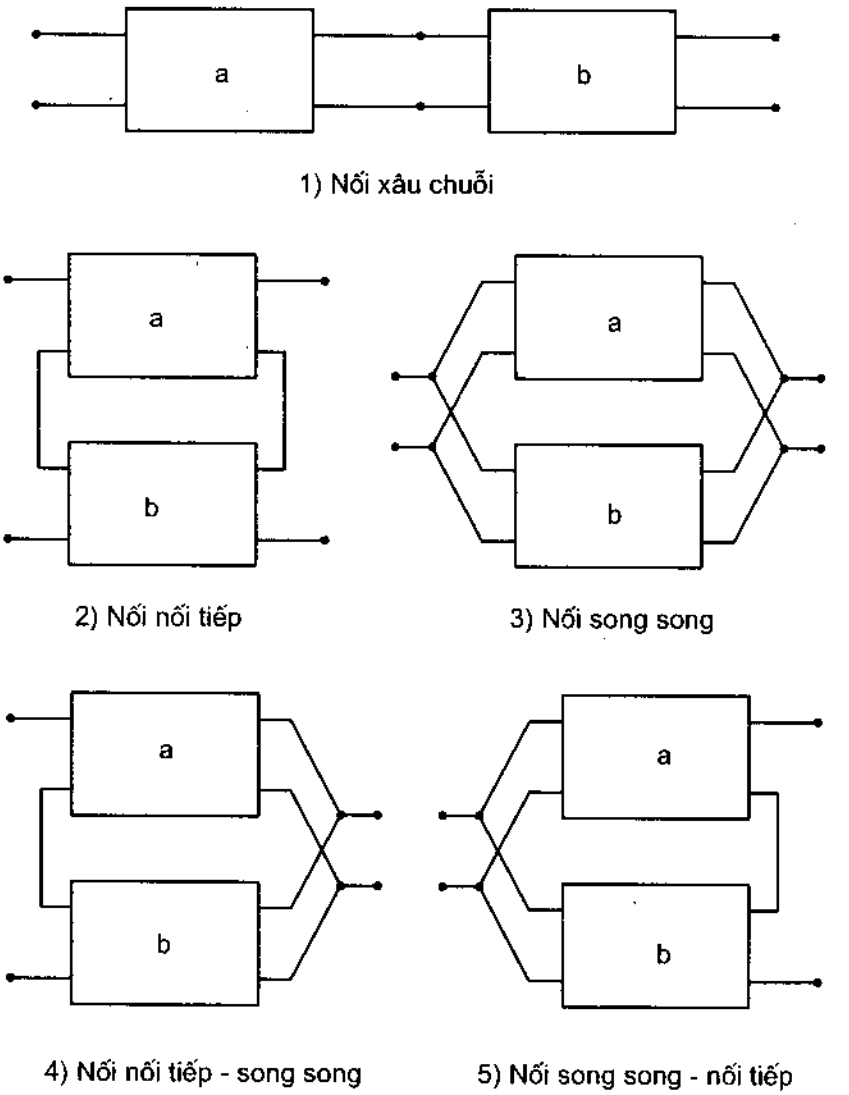
Giả thiết rằng *điều kiện về các cửa*

$$\dot{I}'_{1a} = \dot{I}_{1a},\ \dot{I}'_{2a} = \dot{I}_{2a} \qquad (6.11.1)$$

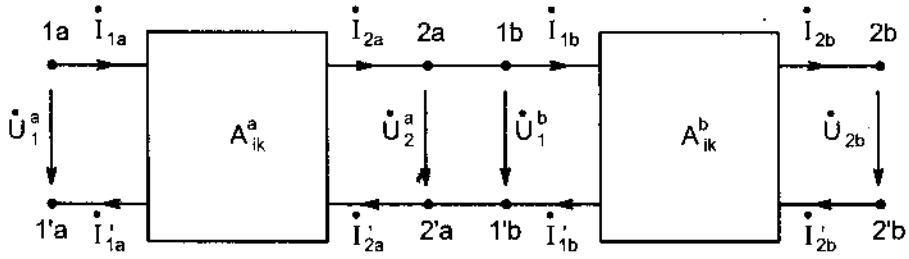
và $$\dot{I}'_{1b} = \dot{I}_{1b},\ \dot{I}'_{2b} = \dot{I}_{2b} \qquad (6.11.2)$$

được thỏa mãn trước khi nối xâu chuỗi thì các điều kiện này vẫn được đảm bảo sau khi nối xâu chuỗi. Điều này có thể kiểm nghiệm được bằng cách áp dụng định luật Kirchhoff thứ nhất cho các tập cắt gồm hai dây dẫn nối với mỗi đôi cực (1a - 1'a hoặc 2a - 2'a, hoặc 1b - 1'b hoặc 2b - 2'b).

Như vậy sau khi nối xâu chuỗi thì bộ phận mạch điện giữa các đôi cực 1a - 1'a và 2a - 2'a vẫn là mạng hai cửa như trước khi nối xâu chuỗi và bộ phận mạch điện giữa các đôi cực 1b - 1'b và 2b - 2'b vẫn là mạng hai cửa như trước khi nối xâu chuỗi.



Hình 6.11.1



Hình 6.11.2

Điều này có nghĩa là các hệ số A_{ik}^a (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa thứ nhất và các hệ số A_{ik}^b (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa thứ hai vẫn giữ nguyên các trị số của chúng trước và sau khi nối xâu chuỗi.

Ta hãy tìm các thông số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa tương đương giữa đôi cực 1a - 1'a và đôi cực 2b - 2'b.

Đối với mạng hai cửa thứ nhất ta có

$$\dot{U}_{1a} = A_{11}^a\dot{U}_{2a} + A_{12}^a\dot{I}_{2a} \qquad (6.11.3)$$

và $$\dot{I}_{1a} = A_{21}^a\dot{U}_{2a} + A_{22}^a\dot{I}_{2a} \qquad (6.11.4)$$

Đối với mạng hai cửa thứ hai ta có

$$\dot{U}_{1b} = A_{11}^b\dot{U}_{2b} + A_{12}^b\dot{I}_{2b} \qquad (6.11.5)$$

và $$\dot{I}_{1b} = A_{21}^b\dot{U}_{2b} + A_{22}^b\dot{I}_{2b} \qquad (6.11.6)$$

Do việc nối xâu chuỗi ta có

$$\dot{U}_{1b} = \dot{U}_{2a} \qquad (6.11.7)$$

và $$\dot{I}_{1b} = \dot{I}_{2a} \qquad (6.11.8)$$

Thay (6.11.7) và (6.11.8) vào (6.11.3) và sử dụng (6.11.5) - (6.11.6) ta sẽ được :

$$\dot{U}_{1a} = A_{11}^a\dot{U}_{1b} + A_{12}^a\dot{I}_{1b} =$$

$$= A_{11}^a(A_{11}^b\dot{U}_{2b} + A_{12}^bI_2^b) + A_{12}^a(A_{21}^b\dot{U}_{2b} + A_{22}^b\dot{I}_{2b})$$

hay $$\dot{U}_{1a} = (A_{11}^aA_{11}^b + A_{12}^aA_{21}^b)\dot{U}_{2b} + (A_{11}^aA_{12}^b + A_{12}^aA_{22}^b)I_{2b} \qquad (6.11.9)$$

Thay (6.11.7) và (6.11.8) vào (6.11.4) và sử dụng (6.11.5) - (6.11.6) ta cũng được

$$\dot{I}_{1a} = A_{21}^a\dot{U}_1^b + A_{22}^a\dot{I}_{1b} =$$

$$= A_{21}^a(A_{11}^b\dot{U}_{2b} + A_{12}^b\dot{I}_{2b}) + A_{22}^a(A_{21}^b\dot{U}_{2b} + A_{22}^bI_{2b})$$

hay $$\dot{I}_{1a} = (A_{21}^aA_{11}^b + A_{22}^aA_{21}^b)\dot{U}_{2b} + (A_{21}^aA_{12}^b + A_{22}^aA_{22}^b)I_{2b} \qquad (6.11.10)$$

Các phương trình (6.11.9) và (6.11.10) hợp thành hệ phương trình cơ bản dạng A của một mạng hai cửa tương đương với hai mạng hai cửa đã cho nối xâu chuỗi. Ta có thể viết các phương trình này dưới dạng sau

$$\dot{U}_{1a} = A_{11}\dot{U}_{2b} + A_{12}\dot{I}_{2b} \qquad (6.11.11)$$

$$\dot{I}_{1a} = A_{21}\dot{U}_{2b} + A_{22}\dot{I}_{2b} \qquad (6.11.12)$$

với

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= A^a_{11}A^b_{11} + A^a_{12}A^b_{21} \\ A_{12} &= A^a_{11}A^b_{12} + A^a_{12}A^b_{22} \\ A_{21} &= A^a_{21}A^b_{11} + A^a_{22}A^b_{21} \\ A_{22} &= A^a_{21}A^b_{12} + A^a_{22}A^b_{22} \end{aligned}\right\} \qquad (6.11.13)$$

Các công thức (6.11.13) cho ta các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa tương đương tính theo các hệ số A^a_{ik} (i, k = 1, 2) và các hệ số A^b_{ik} (i, k = 1, 2) của hai mạng hai cửa được nối xâu chuỗi. Các công thức (6.11.13) có thể viết dưới dạng ma trận là

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a_{11} & A^a_{12} \\ A^a_{21} & A^a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A^b_{11} & A^b_{12} \\ A^b_{21} & A^b_{22} \end{bmatrix} \qquad (6.11.14)$$

Ví dụ 6.11.1: Cho hai mạng hai cửa với các hệ số

$$A^a_{11} = 1{,}5 \qquad A^a_{12} = 1\ \Omega$$

$$A^a_{21} = 0{,}5\ S \qquad A^a_{21} = 1$$

và

$$A^b_{11} = 1 \qquad A^b_{12} = 0$$

$$A^b_{21} = 0{,}5\ S \qquad A^b_{22} = 1$$

nối xâu chuỗi với nhau như ở H.6.11.2. Tìm các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa tương đương.

Giải :

Áp dụng các công thức (6.11.13) ta tính được các hệ số A_{ik} của mạng hai cửa tương đương với mạng hai cửa đã cho nối xâu chuỗi với nhau:

$$A_{11} = (1{,}5 \times 1) + (1 \times 0{,}5) = 2$$

$$A_{12} = (1{,}5 \times 0) + (1 \times 1) = 1\ \Omega$$

$$A_{21} = (0{,}5 \times 1) + (1 \times 0{,}5) = 1\ S$$

$$A_{22} = (0{,}5 \times 0) + (1 \times 1) = 1$$

hoặc dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1\ \Omega \\ 0{,}5S & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5\ S & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1\ \Omega \\ 1\ S & 1 \end{bmatrix}$$

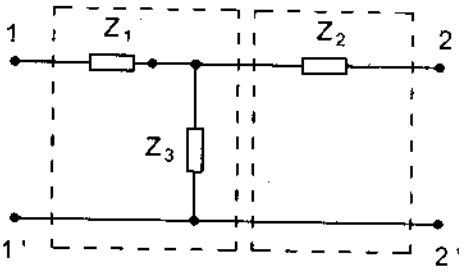
Ví dụ 6.11.2 : Cho mạng hai cửa hình T ở H.6.11.3 với :

$$Z_1 = 100\ \Omega$$

$$Z_2 = -j100\ \Omega$$

và $$Z_3 = j200\ \Omega$$

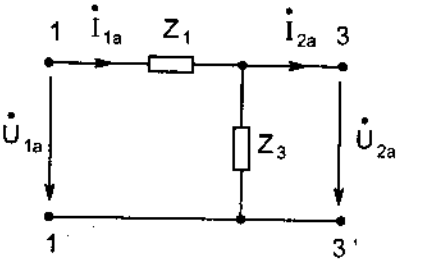
Tính các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa bằng cách coi nó là hai mạng hai cửa nối xâu chuỗi với nhau.



Hình 6.11.3

Giải : Ta có thể coi mạng hai cửa đã cho ở H.6.11.3 là sự nối xâu chuỗi của hai mạng hai cửa vẽ trong các hình chữ nhật.

Đối với mạng hai cửa thứ nhất (H.6.11.4) ta có thể viết được các phương trình



Hình 6.11.4

$$\dot{I}_1^a = \dot{I}_{2a} + \frac{\dot{U}_{2a}}{Z_3} \qquad (6.11.15)$$

và $$\dot{U}_1^a = \dot{U}_{2a} + Z_1\dot{I}_1^a = \dot{U}_{2a} + Z_1\left(\dot{I}_{2a} + \frac{\dot{U}_{2a}}{Z_3}\right) = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right)\dot{U}_{2a} + Z_1\dot{I}_{2a} \qquad (6.11.16)$$

Từ các phương trình (6.11.16) và (6.11.15) ta rút ra các hệ số

$$A_{11}^a = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} \qquad A_{12}^a = Z_1$$

$$A_{21}^a = \frac{1}{Z_3} \qquad A_{22}^a = 1$$

Đối với mạng hai cửa thứ hai ta viết được các phương trình

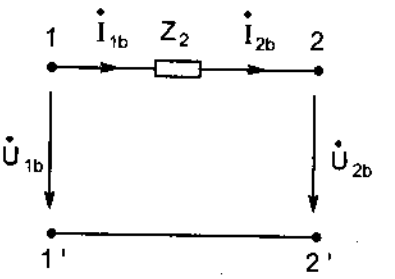
$$\dot{U}_{1b} = \dot{U}_{2b} + Z_2\dot{I}_{2b} \qquad (6.11.17)$$

và $$\dot{I}_{1b} = \dot{I}_{2b} \qquad (6.11.18)$$

Từ các phương trình (6.11.17) và (6.11.18) ta rút ra các hệ số

$$A_{11}^b = 1, \qquad A_{12}^b = Z_2$$

$$A_{21}^b = 0, \qquad A_{22}^b = 1$$



Hình 6.11.5

Áp dụng các công thức (6.11.3) hoặc (6.11.4) ta tính được các hệ số A_{ik} của mạng hai cửa hình T đã cho:

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} \qquad A_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_3} \qquad\qquad A_{22} = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}$$

hoặc dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}$$

Áp dụng bằng số : với $Z_1 = 100\ \Omega$

$Z_2 = -j100\ \Omega$ và $Z_3 = j200\ \Omega$

ta có :

$$A_{11} = 1 + \frac{100}{j200} = 1 - j0,5$$

$$A_{12} = 100 + (-j100) + \frac{(100)(-j100)}{j200} = (50 - j100)\ \Omega$$

$$A_{21} = \frac{1}{j200} = -j0,005\ S$$

$$A_{22} = 1 + \frac{(-j100)}{j200} = 0,5.$$

CÂU HỎI KIỂM TRA

6.1. Định nghĩa một mạng hai cửa. Với điều kiện nào thì một bộ phận mạch điện có bốn cực là một mạng hai cửa.

6.2. Làm cách nào để có thể phân biệt một mạng hai cửa có nguồn với một mạng hai cửa không nguồn. Cho một số ví dụ.

6.3. Các phương trình cơ bản của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn là gì ? Chúng cho ta liên hệ giữa các biến nào ? Chúng có dạng toán học như thế nào ?

6.4. Viết hệ phương trình cơ bản dạng A của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn. Làm thế nào để xác định các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2). Cho một số ví dụ.

6.5. Hãy dẫn ra hệ phương trình cơ bản dạng A cho một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn có sơ đồ hình T và hình Π từ các phương trình lập theo định luật Kirchhoff và theo định luật Ohm cho sơ đồ đó.

6.6. Viết hệ phương trình cơ bản dạng Z cho một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn. Làm thế nào để xác định các hệ số Z_{ik} (i, k = 1, 2). Cho một số ví dụ.

6.7. Hãy dẫn ra hệ phương trình dạng Z cho một mạng hai cửa không nguồn có sơ đồ hình T từ các phương trình dòng vòng viết cho sơ đồ đó.

6.8. Viết hệ phương trình dạng Y cho một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn. Làm thế nào để xác định các hệ số Y_{ik} (i, k = 1, 2). Cho một số ví dụ.

6.9. Hãy dẫn ra hệ phương trình cơ bản dạng Y cho một mạng hai cửa không nguồn có sơ đồ hình Π từ các phương trình thế nút viết cho sơ đồ đó.

6.10. Tìm các quan hệ giữa các thông số A_{ik}, Z_{ik} và Y_{ik} (i, k = 1, 2) của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn. Cho một số ví dụ.

6.11. Tìm các công thức tính các tổng trở của sơ đồ hình T và hình Π theo các thông số A_{ik} (i, k = 1, 2) của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn.

6.12. Tổng trở vào của một mạng hai cửa không nguồn là gì ? Tìm biểu thức của tổng trở này theo các hệ số A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik} (i, k = 1, 2) và $Z_{tải}$. Xét các trường hợp đặc biệt của mạng hai cửa không tải và mạng hai cửa ngắn mạch. Cho một số ví dụ.

6.13. Định nghĩa hàm truyền đạt dòng và hàm truyền đạt áp của một mạng hai cửa không nguồn. Tìm biểu thức của các hàm truyền đạt này theo các hệ số A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik} (i, k = 1, 2) và $Z_{tải}$. Xét các trường hợp đặc biệt của mạng hai cửa không tải và mạng hai cửa ngắn mạch. Cho một số ví dụ.

6.14. Thế nào là một mạng hai cửa đối xứng. Các hệ số A_{ik}, Z_{ik} và Y_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa này có đặc điểm gì ? Cho một số ví dụ.

6.15. Định nghĩa tổng trở đặc tính Z_C và hệ số truyền đạt g của một mạng hai cửa tuyến tính không nguồn đối xứng.

6.16. Tải hoà hợp của một mạng hai cửa đối xứng là gì. Với tải hoà hợp thì quan hệ giữa $\dot{U}_1$ và $\dot{U}_2$ cũng như giữa $\dot{I}_1$ và $\dot{I}_2$ của mạng hai cửa này có gì đặc biệt ?

6.17. Thế nào là một mạng hai cửa tương hỗ và một mạng hai cửa không tương hỗ. Các hệ số A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik} (i, k = 1, 2) của một mạng hai cửa tương hỗ phải thoả mãn các điều kiện gì ? Cho một số ví dụ.

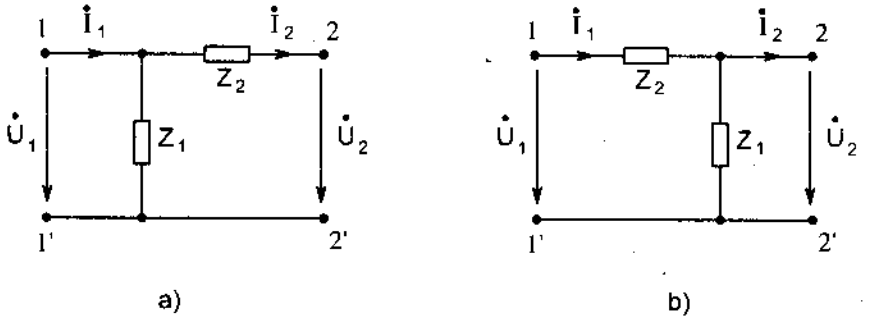
6.18. Chứng minh rằng với hai mạng hai cửa nối xâu chuỗi ta có đẳng thức ma trận sau:

$$A = A_a \times A_b$$

Cho một số ví dụ ứng dụng đẳng thức này để xác định các hệ số A_{ik}, (i, k = 1, 2) của một số mạng hai cửa có sơ đồ phức tạp theo các hệ số A_{ik}, (i, k = 1, 2) của các mạng hai cửa đơn giản hơn.

BÀI TẬP

BT.6.1. Xác định các hệ số A_{ik}, Z_{ik} và Y_{ik} (i, k = 1, 2) của các mạng hai cửa tuyến tính không nguồn ở H.BT.6.1a và b. Cho Z_1 = (10 + j20) Ω, Z_2 = (10 - j20) Ω.



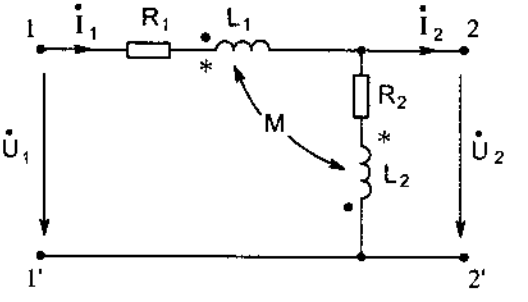
H.BT.6.1

BT.6.2. Các cực của 2 - 2' của các mạng hai cửa ở BT.6.1 được nối với $Z_{tải}$ = (30 + j40) Ω. Với $\dot{U}_1 = 100\angle 0^0$ V hãy tính $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{U}_2$ bằng cách sử dụng các hệ số A_{ik}, Z_{ik}, Y_{ik} (i,k = 1,2) đã tìm được ở bài tập BT.6.1.

BT.6.3. Cho mạng hai cửa ở H.BT.6.3 với: $R_1 = R_2$ = 10 Ω, ωL_1 = 20 Ω, ωL_2 = 30 Ω, ωM = 10 Ω. Các cực có cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu *.

Xác định các hệ số Z_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa.

Tính $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ khi các cực 2 - 2' được nối với $Z_{tải}$ = (10 + j10) Ω và $\dot{U}_1 = 100\angle 0^0$ V (Sử dụng các hệ số Z_{ik} (i,k = 1,2) đã tìm được).



H.BT.6.3

BT.6.4. Giải lại bài tập BT.6.3 khi các cực có cùng cực tính của L_1 và L_2 là các cực có dấu (•).

BT.6.5. Tính tổng trở vào của các mạng hai cửa ở BT.6.3 đối với các cực 1 - 1' khi các cực 2 - 2' được nối với $Z_{tải}$ = (10 + j10) Ω. Tính hệ số truyền đạt áp $K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$ và hệ số truyền đạt dòng $K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$ với tải đã cho.

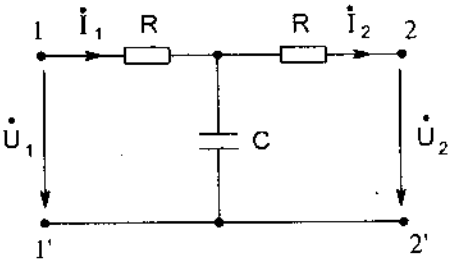
BT.6.6. Xác định các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa ở bài tập BT.6.3. Tìm các tổng trở của sơ đồ tương đương hình T và sơ đồ tương đương hình Π của mạng hai cửa này.

BT.6.7. Cho mạng hai cửa đối xứng ở H.BT.6.7 với R = 10 Ω, $\frac{1}{\omega C} = 20\ \Omega$.

Tìm hệ số truyền đạt g và tổng trở đặc tính Z_c của mạng hai cửa.

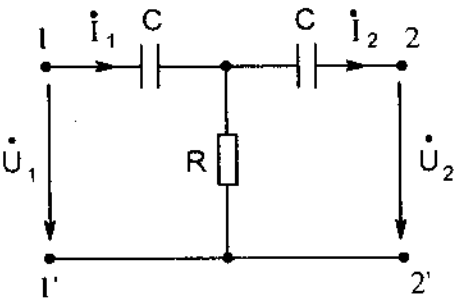
Tính các hệ số A_{ik} của mạng hai cửa theo Z_c, chg và shg.

Viết hệ phương trình cơ bản dạng hàm hyperbolic cho mạng hai cửa và dùng hệ phương trình đó để tính $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ và $\dot{U}_2$ khi các cực 2 - 2' được nối với $Z_{tải}$ = (30 + j40) Ω và các cực 1 - 1' được nối với nguồn áp $\dot{U}_1 = 100\angle 0^0$ V.



H.BT.6.7

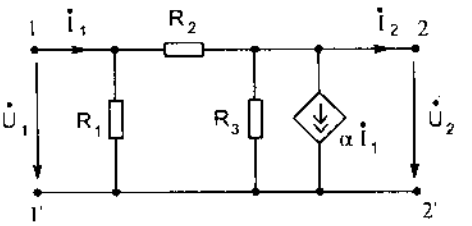
BT.6.8. Cũng hỏi như ở bài tập BT.6.7 đối với mạng hai cửa đối xứng ở H.BT.6.8 với R = 10Ω và $\frac{1}{\omega C} = 20\Omega$.



H.BT.6.8

BT.6.9. Cho mạng hai cửa ở H.BT.6.9 với:

$R_1 = R_3 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $\alpha = 5$.

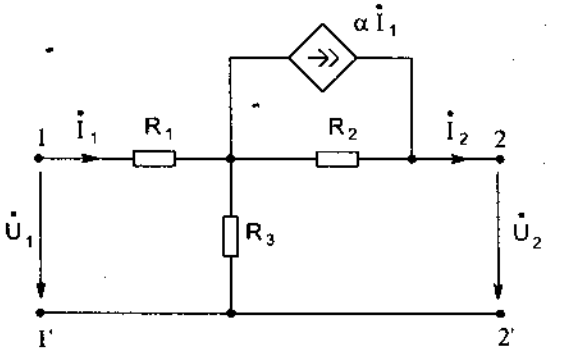


H.BT.6.9

Tìm các hệ số Z_{ik} và Y_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa. Hỏi mạng hai cửa này là một mạng hai cửa tương hỗ hay không tương hỗ.

BT.6.10. Hỏi như ở bài tập BT.6.9 đối với mạng hai cửa ở H.BT6.10 với

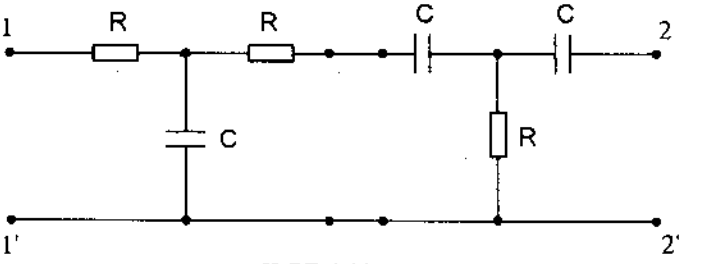
$R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 2{,}5\ \Omega$ và $\alpha = 0{,}5$.



H.BT.6.10

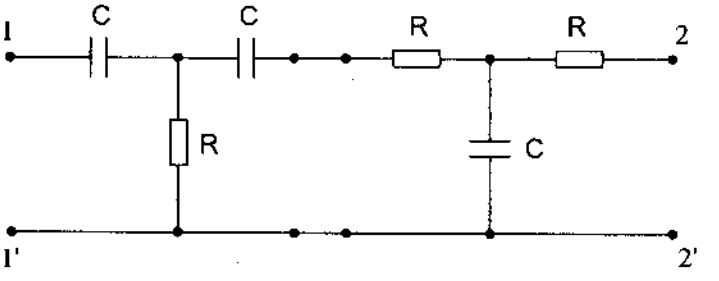
BT.6.11. Hai mạng hai cửa ở bài tập BT.6.7 và BT.6.8 được nối xâu chuỗi với nhau như ở H.BT.6.11.

Tìm các hệ số A_{ik} (i, k = 1, 2) của mạng hai cửa mới.



H.BT.6.11

BT.6.12. Cũng hỏi như ở bài tập BT.6.11 đối với mạng hai cửa ở H.BT.6.12.



H.BT.6.12

Chương 7

MẠCH ĐIỆN BA PHA

7.1. HỆ THỐNG SĐĐ BA PHA ĐỐI XỨNG VÀ HỆ THỐNG DÒNG ĐIỆN BA PHA ĐỐI XỨNG

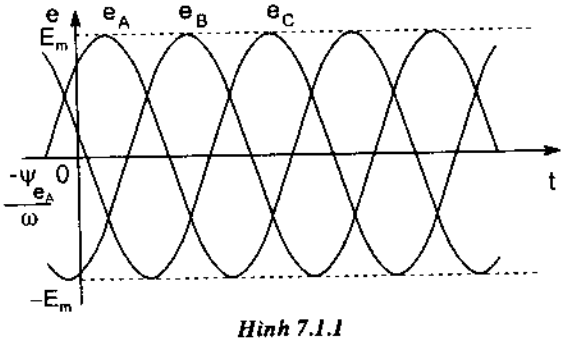
Trong việc sản xuất, truyền tải điện năng và sử dụng điện năng, hệ thống điện ba pha có nhiều ưu điểm về mặt kỹ thuật và kinh tế. Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu việc tính các mạch điện ba pha đối xứng và không đối xứng thường dùng trong công nghiệp.

Máy phát điện ba pha tạo ra hệ thống sức điện động (sđđ) ba pha đối xứng. Đó là một hệ thống gồm ba sức điện động $e_A(t)$, $e_B(t)$, $e_C(t)$ biến thiên hình sin theo thời gian có cùng tần số (f = 50 Hz ở đa số các nước trên thế giới, f = 60 Hz ở Mỹ), cùng biên độ E_m nhưng lệch pha đối với nhau một góc $\frac{2\pi}{3}$ theo thứ tự pha A, B, C :

$$\left.\begin{aligned} e_A(t) &= E_m \sin\left(\omega t + \psi_{e_A}\right) \\ e_B(t) &= E_m \sin\left(\omega t + \psi_{e_A} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_C(t) &= E_m \sin\left(\omega t + \psi_{e_A} - \frac{4\pi}{3}\right) = E_m \sin\left(\omega t + \psi_{e_A} + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7.1.1)$$

ở đây $\omega = 2\pi f$ được gọi là tần số góc.

Các đường cong biểu diễn sự biến thiên của $e_A(t)$, $e_B(t)$ và $e_C(t)$ được vẽ ở H.7.1.1.

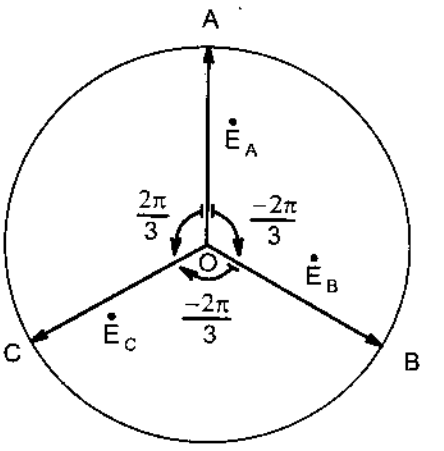


Hình 7.1.1

Các sức điện động hiệu dụng phức tương ứng với $e_A(t)$, $e_B(t)$ và $e_C(t)$ là

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_A &= \frac{E_m}{\sqrt{2}}\angle\psi_{e_A} = E\angle\psi_{e_A} \\
\dot{E}_B &= \frac{E_m}{\sqrt{2}}\angle\left(\psi_{e_A} - \frac{2\pi}{3}\right) = E\angle\left(\psi_{e_A} - \frac{2\pi}{3}\right) \\
\dot{E}_C &= \frac{E_m}{\sqrt{2}}\angle\left(\psi_{e_A} - \frac{4\pi}{3}\right) = E\angle\left(\psi_{e_A} - \frac{4\pi}{3}\right) \\
\text{hay}\quad \dot{E}_C &= \frac{E_m}{\sqrt{2}}\angle\left(\psi_{e_A} + \frac{2\pi}{3}\right) = E\angle\left(\psi_{e_A} + \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (7.1.2)$$

Đồ thị véctơ của hệ thống sđđ ba pha đối xứng được vẽ ở H.7.1.2. Chú ý rằng theo quy ước, chiều dương của góc được chọn là chiều ngược chiều kim đồng hồ. Dù rằng ψ_{e_A} có thể có các trị số tuỳ ý người ta thường đặt véctơ $\dot{E}_A$ ở vị trí thẳng đứng.



Hình 7.1.2.

Hệ thống sđđ ba pha đối xứng có tính chất đặc biệt là ở một thời điểm bất kỳ tổng các trị số tức thời của $e_A(t)$, $e_B(t)$ và $e_C(t)$ đều bằng không

$$e_A(t) + e_B(t) + e_C(t) = 0 \qquad (7.1.3)$$

hoặc tổng các trị số hiệu dụng phức của các sđđ $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ và $\dot{E}_C$ bằng không

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0 \qquad (7.1.4)$$

Những tính chất nói trên đây cũng đúng đối với các hệ thống dòng điện ba pha đối xứng hoặc hệ thống điện áp ba pha đối xứng. Ví dụ, hệ thống dòng điện ba pha đối xứng là hệ thống các dòng điện hình sin cùng tần số, cùng biên độ hay trị số hiệu dụng nhưng lệch pha nhau $\frac{2\pi}{3}$ theo thứ tự pha A, B, C:

$$\left.\begin{aligned}
i_A(t) &= I_m \sin(\omega t + \psi_{i_A}) \\
i_B(t) &= I_m \sin\left(\omega t + \psi_{i_A} - \frac{2\pi}{3}\right) \\
i_C(t) &= I_m \sin\left(\omega t + \psi_{i_A} - \frac{4\pi}{3}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \psi_{i_A} + \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (7.1.5)$$

và ta có $\quad i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = 0 \qquad (7.1.6)$

hoặc $\quad \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 \qquad (7.1.7)$

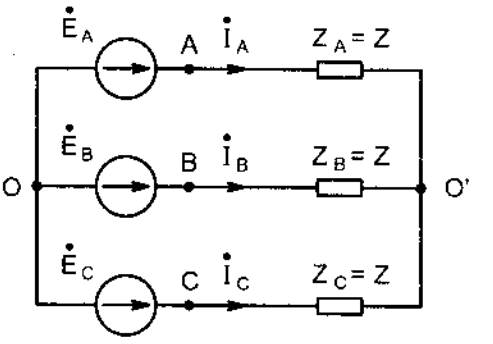
7.2. MẠCH BA PHA ĐỐI XỨNG NỐI HÌNH SAO (Y – Y)

Hình 7.2.1 vẽ một mạch ba pha nối hình sao, thường ký hiệu là Y – Y.

Hệ thống ba sđđ ba pha đối xứng $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ và $\dot{E}_C$ được nối thành hình sao với các cực là A, B, C và *điểm trung tính O*.

Tải ba pha đối xứng được biểu diễn bằng một sơ đồ tương đương gồm ba tổng trở bằng nhau:

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z \qquad (7.2.1)$$



Hình 7.2.1

nối thành hình sao giữa các cực A, B, C và *điểm trung tính O'*.

Nếu đã biết các sđđ $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$, $\dot{E}_C$ và các tổng trở $Z_A = Z_B = Z_C = Z$ thì ta dễ dàng tính được các dòng điện $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ và $\dot{I}_C$ trong sơ đồ hình sao.

Áp dụng công thức điện áp hai nút của phương pháp thế nút trong trường hợp mạch chỉ có hai nút (xem chương 3, mục 3.3, công thức (3.3.16)), ta dễ thấy rằng:

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} \qquad (7.2.2)$$

Với $$Y_A = \frac{1}{Z_A},\ Y_B = \frac{1}{Z_B} \text{ và } Y_C = \frac{1}{Z_C} \qquad (7.2.3)$$

Chú ý rằng $Z_A = Z_B = Z_C = Z$ nên

$$Y_A = Y_B = Y_C = 1/Z \qquad (7.2.4)$$

và $$\dot{U}_{O'O} = \frac{\left(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C\right)Y}{3Y} \qquad (7.2.5)$$

Với hệ thống sđđ ba pha đối xứng ta có

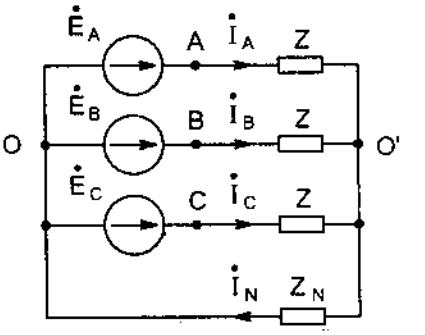
$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0 \qquad (7.2.6)$$

Vậy $$\dot{U}_{O'O} = 0 \qquad (7.2.7)$$

Hệ thức (7.2.7) là một đặc điểm rất quan trọng của mạch ba pha đối xứng nối hình sao :

Trong mạch ba pha đối xứng nối hình sao, điện áp giữa hai điểm trung tính bằng không.

Hệ thức (7.2.7) cũng đúng cho cả trường hợp mạch ba pha nối hình sao có dây trung tính, như vẽ ở H.7.2.2.



Hình 7.2.2

Thật vậy, trong trường hợp này ta có:

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}$$

$$= \frac{\left(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C\right)Y}{3Y + Y_N} = 0 \quad (7.2.8)$$

vì $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$

Điều này chứng tỏ rằng với mạch ba pha đối xứng dòng điện trong dây trung tính bằng không

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{O'O}}{Z_N} = 0 \quad (7.2.9)$$

và dây trung tính trở thành không cần thiết.

Các dòng điện $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ được tính theo các công thức sau

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}}{Z_A} = \frac{\dot{E}_A}{Z} = Y\dot{E}_A \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}}{Z_B} = \frac{\dot{E}_B}{Z} = Y\dot{E}_B \\ \text{và} \quad \dot{I}_C &= \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}}{Z_C} = \frac{\dot{E}_C}{Z} = Y\dot{E}_C \end{aligned}\right\} \quad (7.2.10)$$

Chú ý rằng $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ họp thành hệ thống dòng điện ba pha đối xứng và

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (7.2.11)$$

Điều này cũng giải thích tại sao dòng điện $\dot{I}_N$ trong dây trung tính sẽ bằng không .

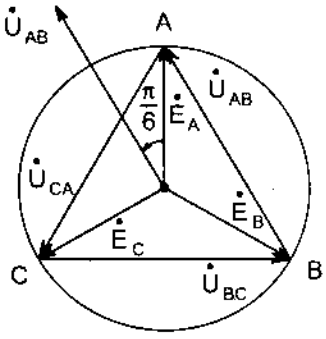
Trong mạch ba pha nối hình sao, người ta gọi $\dot{I}_A$ và $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ là *các dòng điện pha* (của các pha A, B và C của nguồn hoặc của tải ba pha). Chú ý rằng với mạch ba pha nối hình sao thì $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ cũng đồng thời là *các dòng điện dây* (line currents) của các dây dẫn (A, B và C) của đường dây tải điện ba pha từ nguồn đến tải.

Các điện áp $\dot{U}_{AO}$, $\dot{U}_{BO}$, $\dot{U}_{CO}$ được gọi là *các điện áp pha của nguồn*, còn các điện áp $\dot{U}_{AO'}$, $\dot{U}_{BO'}$, $\dot{U}_{CO'}$ được gọi là *các điện áp pha của tải.*

Ở đây ta có

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{AO} &= \dot{E}_A\\ \dot{U}_{BO} &= \dot{E}_B\\ \dot{U}_{CO} &= \dot{E}_C\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.12)$$

và
$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{AO'} &= Z_A\dot{I}_A = Z\dot{I}_A\\ \dot{U}_{BO'} &= Z_B\dot{I}_B = Z\dot{I}_B\\ \dot{U}_{CO'} &= Z_C\dot{I}_C = Z\dot{I}_C\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.13)$$



Hình 7.2.3

Các điện áp $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$ được gọi là *các điện áp dây* (điện áp giữa các dây) của hệ thống điện ba pha.

Từ sơ đồ hình sao ta có:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{E}_A - \dot{E}_B\\ \dot{U}_{BC} &= \dot{E}_B - \dot{E}_C\\ \dot{U}_{CA} &= \dot{E}_C - \dot{E}_A\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.14)$$

Trên đồ thị véctơ H.7.2.3 ta cần chú ý rằng điện áp $\dot{U}_{AB}$ được biểu diễn bằng véctơ $\overrightarrow{BA}$ (nối B với A và hướng từ B đến A), điện áp $\dot{U}_{BC}$ được biểu diễn bằng véctơ $\overrightarrow{CB}$ (nối C với B và hướng từ C đến B) và điện áp $\dot{U}_{CA}$ được biểu diễn bằng véctơ $\overrightarrow{AC}$ (nối A với C và hướng từ A đến C).

Các điện áp dây $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$ cũng họp thành một hệ thống ba pha đối xứng và

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0 \qquad (7.2.15)$$

Về quan hệ giữa các điện áp dây với các sđđ pha thì ta có, ví dụ :

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{E}_A - \dot{E}_B\\ &= \dot{E}_A - \dot{E}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \dot{E}_A\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)\\ &= \dot{E}_A\left[1 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \dot{E}_A\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\dot{E}_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

tức
$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{E}_A e^{j\frac{\pi}{6}} \qquad (7.2.16)$$

Vậy về môđuyn thì U_{AB} lớn gấp $\sqrt{3}$ lần E_A còn về pha thì $\dot{U}_{AB}$ vượt trước $\dot{E}_A$ một góc bằng $\frac{\pi}{6}$.

Ví dụ với $E_A = 220$ V ta có

$$U_{AB} = \sqrt{3} \times 220 \text{ V} = 381{,}05 \text{ V}.$$

Người ta thường lấy trị số gần đúng là 380 V làm trị số của điện áp dây của hệ thống ba pha có nối hình sao có sđđ pha hay điện áp pha là 220 V.

Ví dụ 7.2.1:

Cho một máy phát điện ba pha đối xứng có sđđ pha A là $\dot{E}_A = 220\angle 0^0$ V, tần số f = 50 Hz và một tải ba pha đối xứng có tổng trở pha $Z_A = Z_B = Z_C = (8 + j6)\ \Omega$ nối theo sơ đồ hình sao không có dây trung tính (H.7.2.1).

Tính các dòng điện dây và các dòng điện pha, các điện áp dây và các điện áp pha của nguồn và của tải. Tính công suất tác dụng và công suất phản kháng của mỗi pha của nguồn.

Giải :

Vì
$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

$$= \frac{\left(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C\right) Y}{3Y} = 0$$

ta có các dòng điện dây cũng đồng thời là các dòng điện pha:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A} = \frac{\dot{E}_A}{Z} = \frac{220\angle 0^0}{8 + j6}$$

$$= 17{,}600 - j13{,}200 = \left(22{,}000\angle -36{,}87^0\right) \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B} = \frac{\dot{E}_B}{Z} = \frac{220\angle -120^0}{8 + j6}$$

$$= -20{,}232 - j8{,}6420 = \left(22{,}000\angle -156{,}87^0\right) \text{ A}$$

và
$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C} = \frac{\dot{E}_C}{Z} = \frac{220\angle 120^0}{8 + j6}$$

$$= 2{,}6315 + j21{,}842 = \left(22{,}000\angle 83{,}13^0\right) \text{ A}$$

Các điện áp pha của nguồn:

$$\dot{U}_{AO} = \dot{E}_A = \left(220\angle 0^0\right) V$$

$$\dot{U}_{BO} = \dot{E}_B = \left(220\angle -120^0\right) V$$

$$\dot{U}_{CO} = \dot{E}_C = \left(220\angle 120^0\right) V$$

Các điện áp pha của tải:

$$\dot{U}_{AO'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{O'O} = \dot{E}_A = \left(220\angle 0^0\right) V$$

$$\dot{U}_{BO'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{O'O} = \dot{E}_B = \left(220\angle -120^0\right) V$$

$$\dot{U}_{CO'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{O'O} = \dot{E}_C = \left(220\angle 120^0\right) V$$

Các điện áp dây :

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B$$

$$= 220\angle 0^0 - 220\angle -120^0 = (381,05\angle 30^0)\ V$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C$$

$$= \left(220\angle -120^0\right) - \left(220\angle 120^0\right) = (381,05\angle -90^0)\ V$$

và $\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = \left(220\angle -120^0\right) - \left(220\angle 0^0\right) = (381,05\angle 150^0)\ V$

Công suất biểu kiến phức của các pha của nguồn:

$$\tilde{S}_A = \dot{E}_A \overset{*}{I}_A = \left(220\angle 0^0\right)\left(17,6 + j13,20\right)$$

$$= \left(3872 + j2904\right) VA$$

$$\tilde{S}_B = \dot{E}_B \overset{*}{I}_B = \left(220\angle -120^0\right)\left(-20,232 + j8,642\right)$$

$$= \left(3872 + j2904\right) VA$$

$$\tilde{S}_C = \dot{E}_C \overset{*}{I}_C = \left(220\angle 120^0\right)\left(2,6315 - j21,842\right)$$

$$= \left(3872 + j2904\right) VA$$

Ta nhận thấy công suất biểu kiến phức của ba pha bằng nhau

$$\tilde{S}_A = \tilde{S}_B = \tilde{S}_C$$

Vậy công suất biểu kiến phức của nguồn ba pha bằng

$$\tilde{S} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C = 3\tilde{S}_A = 3\left(3872 + j2904\right) VA = \left(11616 + j8712\right) VA$$

Công suất tác dụng của nguồn điện ba pha:

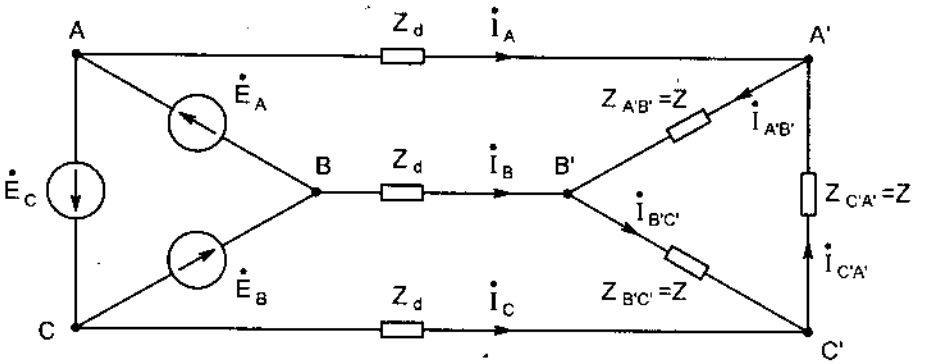
$$P = 3P_A = 3\times3872 = 11616\ W = 11,616\ kW$$

Công suất phản kháng của nguồn điện ba pha:

$$Q = 3Q_A = 3\times2904 = 8712\ VA = 8,712\ kVA.$$

7.3. MẠCH BA PHA ĐỐI XỨNG NỐI HÌNH TAM GIÁC (Δ - Δ)

Hình 7.3.1 vẽ một mạch ba pha nối hình tam giác, thường ký hiệu là Δ - Δ.



Hình 7.3.1

Hệ thống ba sđđ ba pha đối xứng $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ và $\dot{E}_C$ được nối thành hình tam giác giữa các nút A, B và C. Tải ba pha đối xứng được biểu diễn bằng ba tổng trở bằng nhau

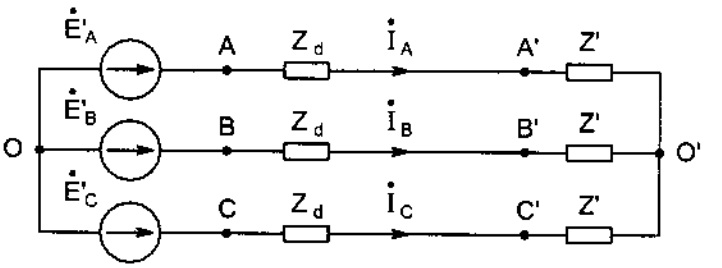
$$Z_{A'B'} = Z_{B'C'} = Z_{C'A'} = Z \qquad (7.3.1)$$

nối thành hình tam giác giữa các nút A', B', C'.

Các dây dẫn AA', BB', CC' nối nguồn với tải có tổng trở bằng nhau

$$Z_{d_A} = Z_{d_B} = Z_{d_C} = Z_d \qquad (7.3.2)$$

Để tính các dòng điện dây $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ và $\dot{I}_C$ ta cần biến đổi sơ đồ Δ - Δ về một sơ đồ tương đương nối Y – Y.



Hình 7.3.2

Tải ba pha đối xứng nối hình tam giác có thể thay thế bằng một tải ba pha đối xứng tương đương nối hình sao có tổng trở mỗi pha là

$$Z_{A'} = Z_{B'} = Z_{C'} = Z' = \frac{Z \times Z}{3Z} = \frac{Z}{3} \qquad (7.3.3)$$

Hệ thống sđđ ba pha đối xứng tương đương nối hình sao $\dot{E}'_A$, $\dot{E}'_B$ và $\dot{E}'_C$ phải tạo ra các điện áp dây đối xứng $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ và $\dot{U}_{CA}$ như ở sơ đồ hình tam giác.

Muốn vậy, ta phải chọn (xem công thức (7.2.17)):

$$\dot{E}'_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{\dot{E}_A}{\sqrt{3}}e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad (7.3.4)$$

tức $E'_A = \frac{E_A}{\sqrt{3}}$ và $\dot{E}'_A$ phải chậm pha so với $\dot{E}_A$ một góc $\frac{\pi}{6}$.

Sau khi tính được $\dot{E}'_A$ ta dễ dàng suy ra $\dot{E}'_B$ và $\dot{E}'_C$ từ tính chất đối xứng:

$$\dot{E}'_B = \dot{E}'_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad (7.3.5)$$

và

$$\dot{E}'_C = \dot{E}'_A e^{j\frac{2\pi}{3}} \qquad (7.3.6)$$

Bây giờ ta tính mạch ba pha tương đương nối hình sao ở H.7.3.2 bằng phương pháp đã trình bày ở mục 7.2.

Ta chỉ cần tính dòng điện của pha A

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}'_A}{Z_d + Z'} \qquad (7.3.7)$$

rồi suy ra các dòng điện $\dot{I}_B$ và $\dot{I}_C$ từ tính chất đối xứng:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad (7.3.8)$$

và

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j\frac{2\pi}{3}} \qquad (7.3.9)$$

Tiếp theo ta tính các điện áp dây trên tải $\dot{U}_{A'B'}$, $\dot{U}_{B'C'}$ và $\dot{U}_{C'A'}$.

Ta chỉ cần tính điện áp dây $\dot{U}_{A'B'}$

$$\dot{U}_{A'B'} = Z'\dot{I}_A - Z'_d\dot{I}_B \qquad (7.3.10)$$

và suy ra các điện áp dây $\dot{U}_{B'C'}$ và $\dot{U}_{C'A'}$ từ tính chất đối xứng:

$$\dot{U}_{B'C'} = \dot{U}_{A'B'} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad (7.3.11)$$

$$\dot{U}_{C'A'} = \dot{U}_{A'B'}\, e^{j\frac{2\pi}{3}} \qquad (7.3.12)$$

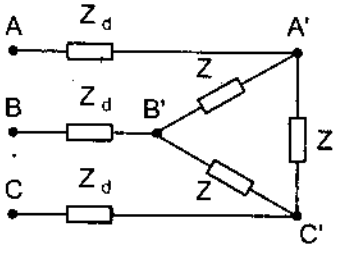
Sau đó ta có thể tính được các công suất tác dụng của nguồn và của tải.

Ví dụ 7.3.1:

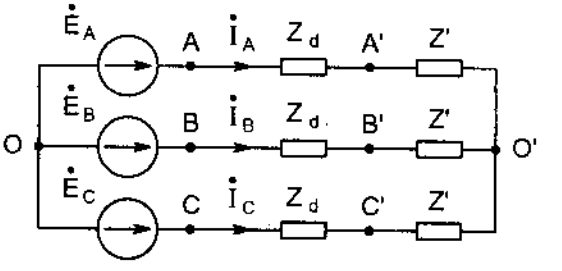
Cho mạch điện ba pha nối hình tam giác ở H.7.3.3. Tải ba pha nối hình tam giác có các tổng trở $Z_{A'B'} = Z_{B'C'} = Z_{C'A'} = (24 + j18)\,\Omega$

Đường dây ba pha có các tổng trở $Z_{d_A} = Z_{d_B} = Z_{d_C} = (1 + j1)\,\Omega$

Cho hệ thống điện áp dây $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ và $\dot{U}_{CA}$ đối xứng với $\dot{U}_{AB} = 380\angle 0^0\,V$. Tính các dòng điện dây, các dòng điện pha, các điện áp dây trên tải và công suất của tải.



Hình 7.3.3



Hình 7.3.4

Giải:

Ta biến đổi hình tam giác của tải thành hình sao tương đương các với tổng trở

$$Z' = \frac{Z}{3} = \frac{24 + j18}{3} = 8 + j6\ \Omega$$

Ta xác định một hệ thống sđđ ba pha đối xứng $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ và $\dot{E}_C$ nối hình sao tạo ra hệ thống điện áp dây $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ và $\dot{U}_{CA}$ đã cho.

$$\dot{E}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}} = \frac{380\angle 0^0}{\sqrt{3}\angle 30^0} = 219{,}39\angle -30^0\ V$$

$$\dot{E}_B = \dot{E}_A\, e^{-j120^0} = 219{,}39\angle -150^0\ V$$

$$\dot{E}_C = \dot{E}_A\, e^{j120^0} = 219{,}39\angle 90^0\ V$$

Đối với mạch ba pha đối xứng nối hình sao ở H.7.3.4 ta dễ thấy rằng

$$\dot{U}_{O'O} = 0$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_{A'}}{Z_d + Z'} = \frac{219,4\angle -30^0}{(1+j1)+(8+j6)}$$

$$= \frac{219,39\angle -30^0}{9+j7} = 7,2470 - j17,825 = \left(19,242\angle -67,875^0\right)\ A$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= 19,242\angle\left(-67,875 - 120^0\right) =$$

$$= \left(19,242\angle -187,88^0\right) = \left(19,242\angle 172,13^0\right)\ A$$

và

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 19,242\angle\left(-67,875 + 120^0\right) = \left(19,242\angle 52,125^0\right)\ A$$

Các điện áp dây trên tải:

$$\dot{U}_{A'B'} = Z'\dot{I}_A - Z'\dot{I}_B = Z'\left(\dot{I}_A - \dot{I}_B\right) =$$

$$= (8+j6)\left[19,242\angle -67,875^0 - 19,242\angle 172,13^0\right]$$

$$= (8+j6)(26,308 - j20,460) =$$

$$= (333,22 - j5,8315) =$$

$$= \left(333,27\angle -1,00^0\right)\ V$$

$$\dot{U}_{B'C'} = \dot{U}_{A'B'}\, e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 333,27\angle\left(-1,00^0 - 120^0\right) = 333,27\angle -121,00^0\ \ V$$

$$\dot{U}_{C'A'} = \dot{U}_{A'B'}\, e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 333,27\angle\left(-1,00^0 + 120^0\right) = 333,27\angle 119,00^0\ \ V$$

Các dòng điện pha của tải:

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{U}_{A'B'}}{Z} = \frac{333,27\angle -1,00^0}{24 + j18}$$

$$= 8,7695 - j6,8195 = \left(11,109\angle -37,87^0\right)\ A$$

$$\dot{I}_{B'C'} = \dot{I}_{A'B'}\, e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 11{,}109\angle\left(-37{,}87^0 - 120^0\right) = \left(11{,}109\angle -157{,}87^0\right)\ \text{A}$$

và $$\dot{I}_{C'A'} = \dot{I}_{A'B'}\, e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 11{,}109\angle\left(-37{,}87^0 + 120^0\right) = 11{,}109\angle 82{,}13^0\ \text{A}$$

Công suất của tải ba pha:

$$\tilde{S}_{tải} = \dot{U}_{A'B'}\,\overset{*}{I}_{A'B'} + \dot{U}_{B'C'}\,\overset{*}{I}_{B'C'} + \dot{U}_{C'A'}\,\overset{*}{I}_{C'A'}$$

Do tính đối xứng ta có:

$$\dot{U}_{A'B'}\,\overset{*}{I}_{A'B'} = \dot{U}_{B'C'}\,\overset{*}{I}_{B'C'} = \dot{U}_{C'A'}\,\overset{*}{I}_{C'A'}$$

và

$$\tilde{S}_{tải} = 3\left(\dot{U}_{A'B'}\,\overset{*}{I}_{A'B'}\right) =$$

$$= 3(333{,}27\angle -1{,}00^0)\times(11{,}109\angle 37{,}87^0) =$$

$$= 3(2961{,}8 + j2221{,}4) =$$

$$= (8885{,}5 + j6664{,}1)\ \text{VA} =$$

$$= (8{,}885 + j6{,}664)\ \text{kVA}$$

Công suất tác dụng của tải là

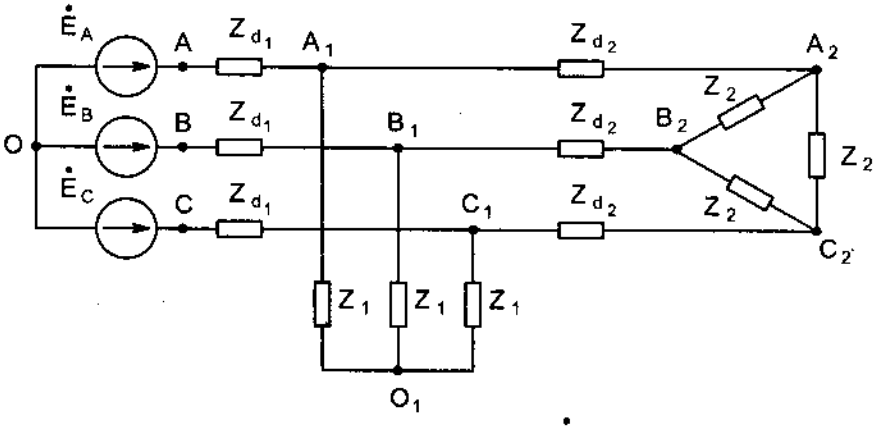
P = 8,885 kW

Công suất phản kháng của tải là

Q = 6,664 kVAr

7.4. MẠCH BA PHA ĐỐI XỨNG PHỨC TẠP

Hình 7.4.1 vẽ một mạch điện ba pha đối xứng phức tạp. Hệ thống sđđ ba pha đối xứng $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ và $\dot{E}_C$ được nối thành hình sao giữa các cực A, B, C và điểm trung tính O. Tải ba pha đối xứng thứ nhất có tổng trở pha Z_1 được nối hình sao giữa các nút A_1, B_1, C_1 và điểm trung tính O_1. Tải ba pha đối xứng thứ hai có tổng trở pha Z_2 được nối thành hình tam giác giữa các nút A_2, B_2 và C_2. Đoạn đường dây thứ nhất có các tổng trở là Z_{d_1} và đoạn đường dây thứ hai có các tổng trở là Z_{d_2}.



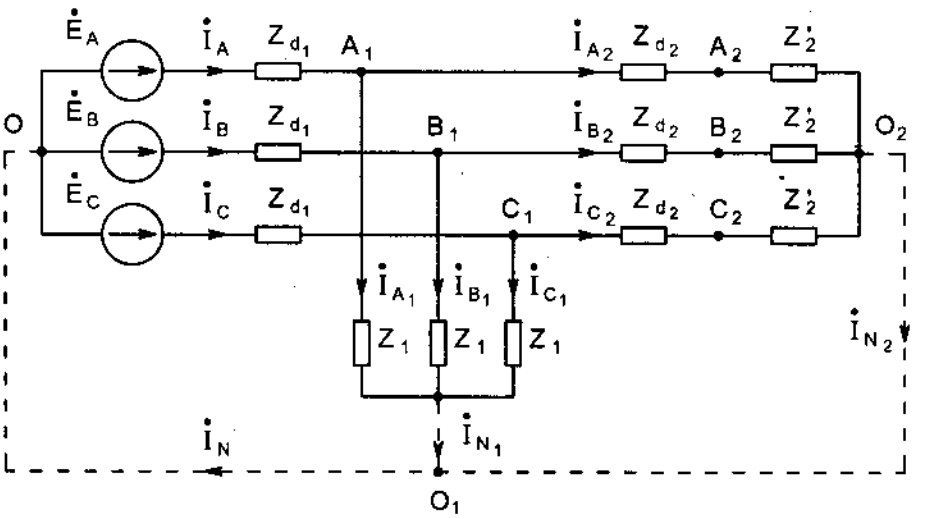
Hình 7.4.1

Để tính mạch điện này ta biến đổi nó về một mạch ba pha đối xứng nối hình sao tương đương.

Trước tiên ta thay các tổng trở Z_2 nối hình tam giác bằng các tổng trở

$$Z'_2 = \frac{Z_2}{3} \qquad (7.4.1)$$

nối hình sao giữa các nút A_2, B_2, C_2 và điểm trung tính O_2 (H.7.4.2).



Hình 7.4.2

Bây giờ chú ý rằng trong mạch ba pha đối xứng nối hình sao ở (H.7.4.2) nếu ta nối các điểm trung tính O, O_1 và O_2 với nhau thì các dòng điện chạy trong dây trung tính phải bằng không:

$$\dot{I}_{N_1} = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{C_1} = 0 \qquad (7.4.2)$$

$$\dot{I}_{N_2} = \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{B_2} + \dot{I}_{C_2} = 0 \qquad (7.4.3)$$

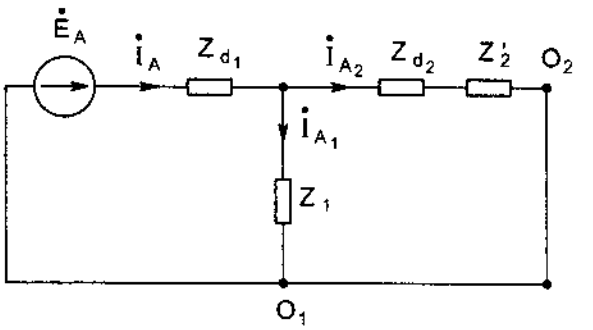
và

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 \qquad (7.4.4)$$

do tính chất đối xứng của các hệ thống dòng điện tương ứng.

Vì thế ta có thể nối các điểm trung tính O, O_1 và O_2 với nhau bằng các đoạn dây dẫn có tổng trở bằng không mà không làm thay đổi các dòng điện trong mạch.

Ta chỉ cần tính các dòng điện $\dot{I}_{A_1}$, $\dot{I}_{A_2}$ và $\dot{I}_A$ của pha A.



Hình 7.4.3

Ta có thể vẽ sơ đồ tính toán cho pha A như ở H.7.4.3 và tính được

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_{d_1} + \dfrac{Z_1\left(Z_{d_2} + Z_2'\right)}{Z_1 + Z_{d_2} + Z_2'}} \qquad (7.4.5)$$

$$\dot{I}_{A_1} = \dot{I}_A \times \frac{Z_{d_2} + Z'}{Z_1 + Z_{d_2} + Z_2'} \qquad (7.4.6)$$

và

$$\dot{I}_{A_2} = \dot{I}_A \times \frac{Z_1}{Z_1 + Z_{d_2} + Z_2'} \qquad (7.4.7)$$

Ta suy ra các dòng điện $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ cũng như $\dot{I}_{B_1}$, $\dot{I}_{C_1}$ và $\dot{I}_{B_2}$, $\dot{I}_{C_2}$ lần lượt từ $\dot{I}_A$, $\dot{I}_{A_1}$ và $\dot{I}_{A_2}$ từ tính chất đối xứng.

Sau đó ta có thể tính được tất cả các dòng điện, các điện áp và công suất của các bộ phận của mạch điện đã cho.

Ví dụ 7.4.1 :

Cho mạch điện ở H. 7.4.1 với :

$Z_1 = (8 + j12)\ \Omega$; $Z_2 = (36 + j24)\ \Omega$; $Z_{d_1} = (1 + j2)\ \Omega$; $Z_{d_2} = (2 + j4)\ \Omega$.

Hệ thống sđđ ba pha đối xứng với $\dot{E}_A = 220\angle 0^0$ V. Tìm các dòng điện trong mạch, công suất của nguồn và của các tải.

Giải :

Ta có $\quad Z'_2 = \dfrac{Z_2}{3} = \dfrac{36 + j24}{3} = (12 + j8)\ \Omega$

Theo công thức (7.4.5) ta tính được

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_{d_1} + \dfrac{Z_1(Z_{d_2} + Z'_2)}{Z_1 + Z_{d_2} + Z'_2}} =$$

$$= \frac{220\angle 0^0}{(1 + j2) + \dfrac{(8 + j12)[(2+j4)+(12+j8)]}{(8 + j12) + (2 + j4) + (12 + j8)}} =$$

$$= \frac{220\angle 0^0}{(1 + j2) + \dfrac{(8 + j12)(14 + j12)}{22 + j24}} =$$

$$= \frac{220\angle 0^0}{(1 + j2) + (5,3132 + j6,2038)} =$$

$$= 12,961 - j16,843 = (21,252\angle -52,42^0)\ \text{A}$$

Theo công thức (7.4.6) ta có

$$\dot{I}_{A_1} = \dot{I}_A \times \frac{Z_{d_2} + Z'_2}{Z_1 + Z_{d_2} + Z'_2} =$$

$$= (12,961 - j16,843) \times \frac{(2 + j4) + (12 + j8)}{(8 + j12) + (2 + j4) + (12 + j8)} =$$

$$= (12,961 - j16,843) \times \frac{14 + j12}{22 + j24} =$$

$$= 6,1435 - j10,351 = 12,036\angle -59,31^0\ \text{A}$$

Theo công thức (7.4.7) ta có

$$\dot{I}_{A_2} = \dot{I}_A \times \frac{Z_1}{Z_1 + Z_{d_2} + Z'_2} =$$

$$= (12,961 - j16,843) \times \frac{8 + j12}{(8 + j12) + (2 + j4) + (12 + j8)} =$$

$$= (12,961 - j16,843) \times \frac{8 + j12}{22 + j24} =$$

$$= 6,8175 - j6,4924 = 9,4144\angle -43,60^0 \text{ A}$$

Từ tính chất đối xứng ta suy ra

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 21,252\angle(-52,42^0 - 120^0) =$$

$$= (21,252\angle -172,42^0) \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j\frac{2\pi}{3}} = 21,252\angle(-52,42 + 120^0) =$$

$$= (21,252\angle 67,58^0) \text{ A}$$

$$\dot{I}_{B_1} = \dot{I}_{A_1} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 12,036\angle(-59,31^0 - 120^0) =$$

$$= (12,036\angle -179,31^0) \text{ A}$$

$$I_{C_1} = I_{A_1} e^{j\frac{2\pi}{3}} = 12,036\angle(-59,31^0 + 120^0) =$$

$$= (12,036\angle 60,69^0) \text{ A}$$

$$\dot{I}_{B_2} = \dot{I}_{A_2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 9,4144\angle(-43,60^0 - 120^0) =$$

$$= (9,4144\angle -163,60^0) \text{ A}$$

$$\dot{I}_{C_2} = \dot{I}_{A_2} e^{j\frac{2\pi}{3}} = 9,4144\angle(-43,60 + 120^0) =$$

$$= (9,4144\angle 76,40^0) \text{ A}$$

Điện áp dây $\dot{U}_{A_2B_2}$ được tính như sau :

$$\dot{U}_{A_2B_2} = Z'_2 \dot{I}_{A_2} - Z'_2 \dot{I}_{B_2} = Z'_2(\dot{I}_{A_2} - \dot{I}_{B_2})$$

$$= (12 + j8)(9,4144\angle -43,60^0 - 9,4144\angle -163,60^0) =$$

$$= 220,86 + j80,781 = (235,17\angle 20,09^0) \text{ V}$$

Từ tính chất đối xứng ta suy ra

$$\dot{U}_{B_2C_2} = \dot{U}_{A_2B_2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= 235,17\angle(20,09^0 - 120^0) = (235,17\angle -99,91^0) \text{ V}$$

và $\dot{U}_{C_2A_2} = \dot{U}_{A_2B_2} e^{j\frac{2\pi}{3}} =$

$$= 235,17\angle(20,09^0 + 120^0) = (235,17\angle 140,09^0)\ \text{V}$$

Bây giờ ta có thể tính được dòng điện $\dot{I}_{A_2B_2}$ của tải nối hình tam giác :

$$\dot{I}_{A_2B_2} = \frac{\dot{U}_{A_2B_2}}{Z_2} = \frac{235,17\angle 20,09^0}{36 + j24} =$$

$$= 5,2830 - j1,2780 = (5,4354\angle -13,60^0)\ \text{A}$$

Từ tính chất đối xứng ta suy ra :

$$\dot{I}_{B_2C_2} = \dot{I}_{A_2B_2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 5,4354\angle(-13,6^0 - 120^0) =$$

$$= (5,4354\angle -133,6^0)\ \text{A}$$

và $\dot{I}_{C_2A_2} = \dot{I}_{A_2B_2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 5,4354\angle(-13,6^0 + 120^0) =$

$$= (5,4354\angle 106,40^0)\ \text{A}$$

Công suất của tải thứ nhất (nối hình sao) :

$$\tilde{S}_{tải1} = 3\dot{U}_{A_1} \overset{*}{I}_{A_1} = 3(Z_{A_1}\dot{I}_{A_1})\overset{*}{I}_{A_1} =$$

$$= 3Z_1 I_{A_1}^2 = 3(8 + j12)(12,036)^2 =$$

$$= (3476,8 + j5215,2)\ \text{VA}$$

Công suất của tải thứ hai (nối hình tam giác)

$$\tilde{S}_{tải2} = 3(\dot{U}_{A_2B_2} \overset{*}{I}_{A_2B_2}) =$$

$$= 3(Z_2\dot{I}_{A_2B_2})\overset{*}{I}_{A_2B_2} =$$

$$= 3Z_2 I_{A_2B_2}^2 = 3(36 + j24)(5,4354)^2 =$$

$$= (3190,7 + j2127,1)\ \text{VA}$$

Công suất tổn hao trên đoạn đường dây thứ nhất

$$\tilde{S}_{dây1} = 3Z_{d_1} I_A^2 =$$

$$= 3(1 + j2)(21,252)^2 = (1354,9 + 2709,9)\ \text{VA}$$

Công suất tổn hao trên đoạn đường dây thứ hai

$$\tilde{S}_{dây2} = 3Z_{d_2} I_{A_2} = 3(2 + j4)(9,4144)^2 =$$

$$= (531,79 + 1063,6)\ \text{VA}$$

Công suất của nguồn ba pha

$$\tilde{S}_{nguồn} = 3\dot{E}_A \overset{*}{I}_A ==$$

$$= 3(220\angle 0^0)(21,252\angle 52,42^0) = (8554,2 + j11116)\ VA$$

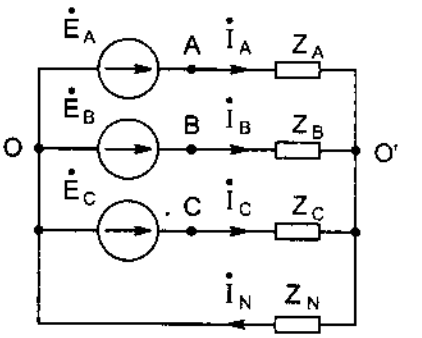
Ta có thể kiểm nghiệm sự cân bằng công suất trong toàn mạch điện :

$$\tilde{S}_{nguồn} = \tilde{S}_{tải1} + \tilde{S}_{tải2} + \tilde{S}_{dây1} + \tilde{S}_{dây2}$$

7.5. MẠCH BA PHA KHÔNG ĐỐI XỨNG

Mạch ba pha không đối xứng là mạch ba pha có một nguồn điện ba pha không đối xứng hoặc có một tải ba pha không đối xứng.

Hình 7.5.1 cho ví dụ về một mạch ba pha không đối xứng nối hình sao có dây trung tính.



Hình 7.5.1

Chỉ cần các sđđ $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$, $\dot{E}_C$ không phải là một hệ thống sđđ ba pha đối xứng hoặc là các tổng trở Z_A, Z_B và Z_C không thỏa mãn điều kiện của một tải ba pha đối xứng là :

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z$$

thì mạch điện này trở thành một mạch điện ba pha không đối xứng.

Để tính các dòng điện trong mạch này ta nên dùng phương pháp thế nút, vì mạch điện chỉ có hai nút.

Trước tiên ta tính điện áp $\dot{U}_{O'O}$

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}$$

trong đó $Y_A = \frac{1}{Z_A}$, $Y_B = \frac{1}{Z_B}$ và $Y_C = \frac{1}{Z_C}$

Sau đó ta tính được dòng điện các nhánh

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}}{Z_A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}}{Z_B}$$

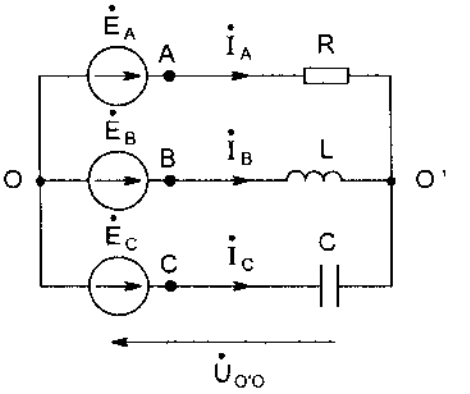
$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}}{Z_C}$$

và $\dot{I}_N = \dfrac{\dot{U}_{O'O}}{Z_N}$

hay $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$

Ví dụ 7.5.1 :

Cho mạch điện ở H.7.5.2 với nguồn sđđ ba pha đối xứng có $\dot{E}_A = 220\angle 0^0$ V; R = 10 Ω; $X_L = X_C = 10$ Ω. Tính dòng điện các nhánh.



Hình 7.5.2

Giải :

Ta có

$\dot{E}_A = 220\angle 0^0$ V,

$\dot{E}_B = 220\angle -120^0$ V

và $\dot{E}_C = 220\angle 120^0$ V ;

$Z_A = R = 10$ Ω; $Z_B = jX_L = j10$ Ω; $Z_C = -jX_C = -j10$ Ω.

Trước hết, ta tính điện áp giữa hai điểm trung tính :

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

với $Y_A = \dfrac{1}{Z_A} = \dfrac{1}{10} = 0,1$ S

$Y_B = \dfrac{1}{Z_B} = \dfrac{1}{j10} = -j0,1$ S

và $Y_C = \dfrac{1}{Z_C} = \dfrac{1}{-j10} = j0,1$ S

Vậy

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\left(220\angle 0^0\right)(0,1) + \left(220\angle -120^0\right)(-j0,1) + \left(220\angle 120^0\right)(j0,1)}{0,1 + j0,1 - j0,1} =$$

$$= \frac{-16,105}{0,1} = -161,05 \text{ V}$$

Tiếp theo ta tính dòng điện các nhánh:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}}{Z_A} = \frac{220\angle 0^0 - (-161,05)}{10} = 38,105 \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}}{Z_B} = \frac{220\angle -120^0 - (-161,05)}{j10} = \frac{51,050 - j190,53}{j10} =$$

$$= -19,053 - j5,1050 = (19,725\angle -165^0)\ A$$

và $$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}}{Z_C} = \frac{220\angle 120^0 - (-161,05)}{-j10} = \frac{51,050 + j190,53}{-j10} =$$

$$= -19,053 + j5,1050 = (19,725\angle 165^0)\ A$$

Ta có thể nghiệm được rằng

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 38,105 + (-19,053 - j5,105) + (-19,053 + j5,1050) = 0$$

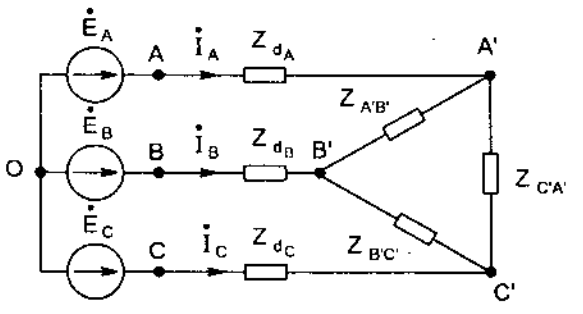
Trong mạch điện ở H.7.5.3a, giả sử hoặc các sđđ $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$, $\dot{E}_C$ không phải là một hệ sđđ ba pha đối xứng, hoặc các tổng trở Z_{d_A}, Z_{d_B}, Z_{d_C} không bằng nhau hoặc $Z_{A'B'}$, $Z_{B'C'}$ và $Z_{C'A'}$ không bằng nhau thì ta đều có một mạch ba pha không đối xứng.

Bằng phép biến đổi tam giác – sao ta sẽ thay các tổng trở $Z_{A'B'}$, $Z_{B'C'}$ và $Z_{C'A'}$ nối hình tam giác bằng các tổng trở Z'_A, Z'_B, Z'_C nối hình sao như ở H.7.5.3b với :

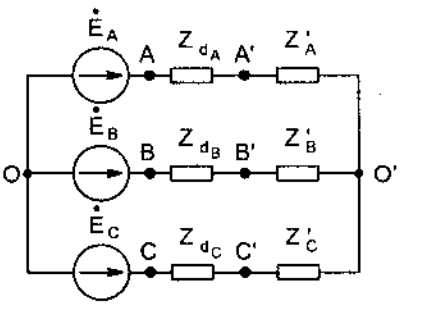
$$Z'_A = \frac{Z_{A'B'} \times Z_{C'A'}}{Z_{A'B'} + Z_{B'C'} + Z_{C'A'}}$$

$$Z'_B = \frac{Z_{A'B'} \times Z_{B'C'}}{Z_{A'B'} + Z_{B'C'} + Z_{C'A'}}$$

và $$Z'_C = \frac{Z_{B'C'} \times Z_{C'A'}}{Z_{A'B'} + Z_{B'C'} + Z_{C'A'}}$$



Hình 7.5.3a



Hình 7.5.3b

Sau đó ta sẽ tính được điện áp $\dot{U}_{O'O}$ và các dòng điện $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ bằng phương pháp đã dùng cho sơ đồ ở H.7.5.2.

Trong các mạch ở các H.7.5.2 và H7.5.3a,b nếu người ta cho các điện áp dây $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ và $\dot{U}_{CA}$ (có thể đối xứng hoặc không đối xứng) mà không cho sẵn các sđđ $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$, $\dot{E}_C$ thì ta có thể tự chọn một hệ thống sđđ $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ và $\dot{E}_C$ nối hình sao nào đó tạo ra hệ thống điện áp dây đã cho. Các sđđ này chỉ cần thoả mãn các phương trình

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_A - \dot{E}_B &= \dot{U}_{AB}\\ \dot{E}_B - \dot{E}_C &= \dot{U}_{BC}\\ \dot{E}_C - \dot{E}_A &= \dot{U}_{CA}\end{aligned}\right\} \qquad (7.5.10)$$

Vì tổng các điện áp dây phải thoả mãn điều kiện

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0 \qquad (7.5.11)$$

nên chỉ có hai trong ba phương trình của (7.5.10) là các phương trình độc lập và ta có bài toán hai phương trình với ba ẩn số là $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ và $\dot{E}_C$. Vì thế bài toán có vô số lời giải.

Ta có thể tuỳ ý cho một trong ba sđđ $\dot{E}_A$, $\dot{E}_B$ hoặc $\dot{E}_C$ lấy một trị số tuỳ ý nào đó và giải hai trong ba phương trình (7.5.10) để xác định hai sđđ còn lại.

Ví dụ, nếu cho $\dot{E}_C = 0$, thì từ phương trình thứ hai của (7.5.10) ta có:

$$\dot{E}_B = \dot{U}_{BC}$$

và từ phương trình thứ ba của (7.5.10) ta có

$$\dot{E}_A = -\dot{U}_{CA}$$

Ví dụ 7.5.2 :

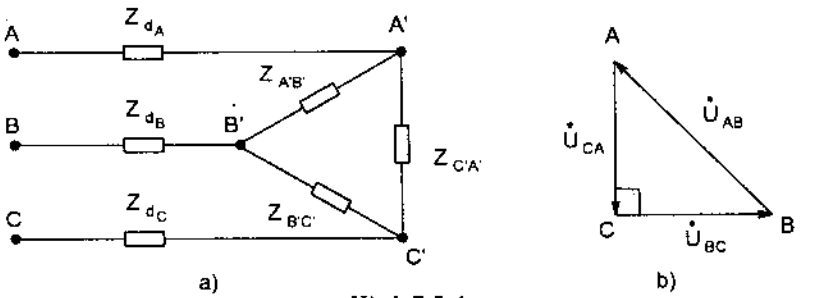
Cho mạch điện ở H.7.5.4a với $Z_{d_A} = Z_{d_B} = Z_{d_C} = (1 + j2)\ \Omega$;

$Z_{A'B'} = 100\ \Omega$; $Z_{B'C'} = Z_{C'A'} = (100 + j100)\ \Omega$.

Cho tam giác điện áp dây ở H. 7.5.4b với

$U_{BC} = U_{CA} = 380V$; $U_{AB} = 380\sqrt{2}V$.

Tính dòng điện các nhánh.



Hình 7.5.4

Giải :

Ta lấy $\dot{U}_{BC} = 380\angle 0^0$ V thì $\dot{U}_{AB} = 380\sqrt{2}\angle 135^0$ V và $\dot{U}_{CA} = 380\angle -90^0$ V

Chọn $\dot{E}_C = 0$, ta sẽ xác định được:

$$\dot{E}_B = \dot{U}_{BC} = 380\angle 0^0 \text{ V}$$

$$\dot{E}_A = -\dot{U}_{CA} = 380\angle 90^0 \text{ V}$$

Ta thay các tổng trở $Z_{A'B'}$, $Z_{B'C'}$ và $Z_{C'A'}$ nối hình tam giác bằng các tổng trở tương đương Z'_A, Z'_B, Z'_C nối hình sao. Theo các công thức (7.5.9) ta có :

$$Z'_A = Z'_B = \frac{100(100 + j100)}{100 + 2(100 + j100)} = (38,462 + j7,6923)\ \Omega$$

và $$Z'_C = \frac{(100 + j100)^2}{100 + 2(100 + j100)} = (30,769 + j46,154)\ \Omega$$

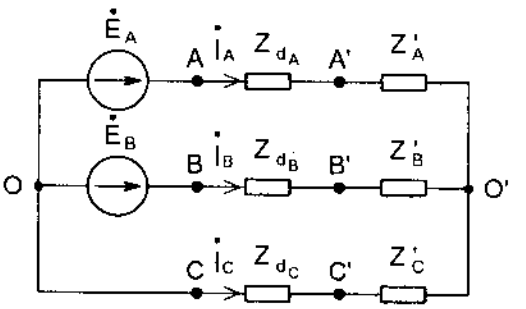
Theo sơ đồ ở H.7.5.5 ta có

$$Y_A = Y_B = \frac{1}{Z_{d_A} + Z'_A} = \frac{1}{(1 + j2) + (38,462 + j7,6923}$$

$$= (23,899 - j5,8699) \times 10^{-3}\ \text{S}$$

và $$Y_C = \frac{1}{Z_{d_C} + Z'_C} = \frac{1}{(1 + j2) + (30,769 + j46,154)}$$

$$= (9,5458 - j14,469) \times 10^{-3}\ \text{S}$$



Hình 7.5.5

Ta tính điện áp giữa hai điểm trung tính O' và O :

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C} =$$

$$= \frac{(j380+380)(23,899-j5,8699)\times 10^{-3}}{2(23,899-j5,8699)\times 10^{-3}+(9,5458-j14,469)\times 10^{-3}} =$$

$$= 118,01 + j173,41 = 209,76\angle 55,763^0$$

Tiếp theo ta tính các dòng điện dây

$$\dot{I}_A = Y_A(\dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}) =$$

$$= (23,899 - j5,8699)\times 10^{-3}\times(j380 - 209,76\angle 55,763^0) =$$

$$= -1,6078 + j5,6301 = (5,8552\angle 105,94^0)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_B = Y_B(\dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}) =$$

$$= (23,899 - j5,8699)\times 10^{-3}\times(380 - 209,76\angle 55,763^0) =$$

$$5,2434 - j5,6823 = (7,7318\angle -47,30^0)\ \text{A}$$

và $\dot{I}_C = Y_C(-\dot{U}_{O'O}) =$

$$\hat{=} (9,5458 - j14,469)\times 10^{-3}\times(-209,76\angle 55,763^0) =$$

$$-3,6356 + j0,052186 = (3,6360\angle 179,18^0)\ \text{A}$$

Ta tính các điện áp dây giữa các điểm A', B' và C' :

$$\dot{U}_{A'B'} = Z'_A\,\dot{I}_A - Z'_B\,\dot{I}_B =$$

$$= -350,52 + j382,39 = 518,74\angle 132,51^0\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{B'C'} = Z'_B\,\dot{I}_B - Z'_C\,\dot{I}_C =$$

$$= 359,65 - j12,024 = 359,85\angle -1,9147^0\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{C'A'} = Z'_C\,\dot{I}_C - Z'_A\,\dot{I}_A =$$

$$= -9,128 - j370,37 = 370,48\angle -91,412^0\ \text{V}$$

Cuối cùng ta tính các dòng điện trong các pha của tải nối hình tam giác

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{U}_{A'B'}}{Z_{A'B'}} = -3,5052 + j3,8239 = 5,1874\angle 132,51^0\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{B'C'} = \frac{\dot{U}_{B'C'}}{Z_{B'C'}} = 1,7381 - j1,8584 = 2,5445\angle -46,915^0\ \text{A}$$

và $\dot{I}_{C'A'} = \dfrac{\dot{U}_{C'A'}}{Z_{C'A'}} = -1,8975 - j1,8062 = 2,6197\angle -136,41^0$ A

CÂU HỎI KIỂM TRA

7.1. Thế nào là một hệ thống sđđ (điện áp, dòng điện) ba pha đối xứng.

Vẽ đồ thị vectơ của một hệ thống $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ ($\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$ hoặc $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$) đối xứng.

7.2. Chứng minh rằng đối với một hệ thống sđđ (điện áp, dòng điện) ba pha đối xứng ta có

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$$

$$(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0)$$

$$(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0)$$

và

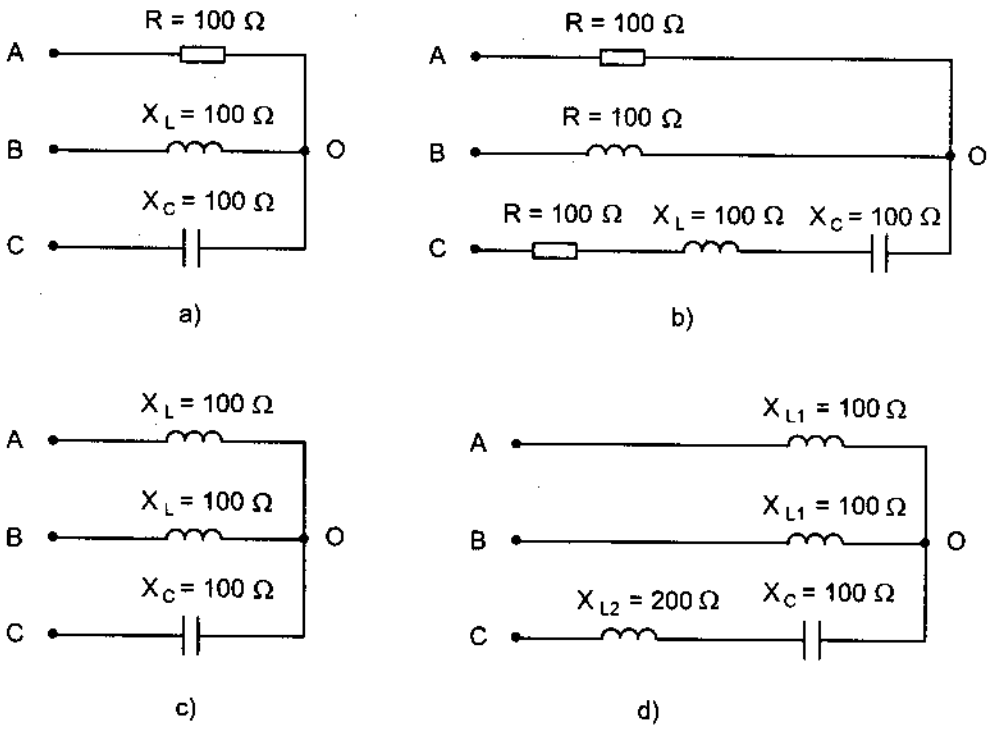
$$e_A(t) + e_B(t) + e_C(t) = 0$$

$$(u_A(t) + u_B(t) + u_C(t) = 0)$$

$$(i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = 0)$$

7.3. Một tải ba pha đối xứng phải thoả mãn điều kiện gì ? Cho một số ví dụ về tải ba pha đối xứng và tải ba pha không đối xứng.

7.4. Mỗi tải ở H.BT.7.4a,b,c và d là tải ba pha đối xứng hay không đối xứng. Giải thích.



H.BT.7.4

7.5. Một mạch ba pha đối xứng nối hình sao phải thoả mãn các điều kiện gì về nguồn và về tải. Cho một số ví dụ.

7.6. Chứng minh rằng đối với một mạch ba pha đối xứng nối hình sao thì dây trung tính không có ảnh hưởng gì đến sự phân bố dòng điện trong các nhánh.

7.7. Ta nên dùng phương pháp gì để tính một mạch điện ba pha đối xứng nối hình sao ? Ta có thể dùng phương pháp dòng vòng để giải mạch này không ? Cho các ví dụ minh hoạ.

7.8. Trong một mạch ba pha đối xứng nối hình sao ta có quan hệ gì giữa điện áp dây $\dot{U}_{AB}(\dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA})$ và điện áp pha $\dot{U}_A(\dot{U}_B, \dot{U}_C)$.

Minh hoạ các quan hệ này bằng các đồ thị vectơ.

7.9. Một mạch ba pha đối xứng nối hình tam giác phải thoả mãn các điều kiện gì về nguồn và về tải. Cho một số ví dụ.

7.10. Ta nên dùng phương pháp gì để giải mạch điện ba pha đối xứng nối tam giác ? Vì sao ?

7.11. Thế nào là một mạch ba pha *không đối xứng*. Cho một số ví dụ.

7.12. Để giải một mạch ba pha không đối xứng nối Y - Y người ta thường dùng phương pháp nào ? Tại sao ?

7.13. Một mạch ba pha có tải không đối xứng nối hình sao đặt vào một hệ thống điện áp dây đối xứng hoặc không đối xứng đã cho được giải bằng cách nào ? Cho một số ví dụ.

7.14. Một mạch ba pha có tải không đối xứng nối hình tam giác được giải bằng cách nào ? Cho một số ví dụ.

BÀI TẬP

BT.7.1. Cho mạch điện như H.BT - 7.1 với:

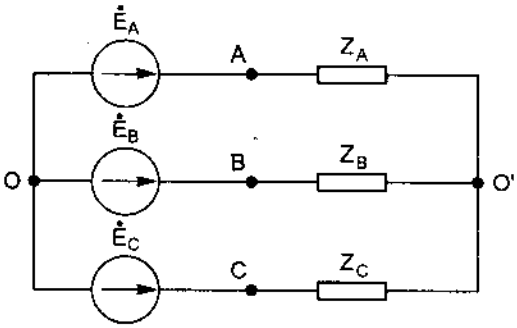
$$\dot{E}_A = (220\angle 0^0)\ V$$
$$\dot{E}_B = (220\angle -120^0)\ V$$
$$\dot{E}_C = (220\angle 120^0)\ V$$

Tính các dòng điện pha, các dòng điện dây, các điện áp pha và các điện áp dây, các công suất tác dụng và công suất phản kháng của mỗi pha của nguồn và của tải trong các trường hợp sau đây:

1) $Z_A = Z_B = Z_C = 10\ \Omega$

2) $Z_A = Z_B = Z_C = (15 + j20)\ \Omega$

3) $Z_A = Z_B = Z_C = (15 - j20)\ \Omega$

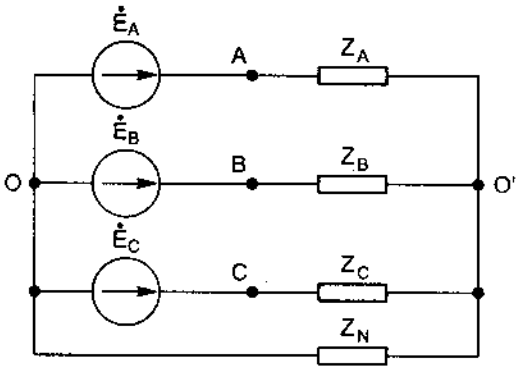


H.BT.7.1

BT.7.2. Giải lại bài tập BT.7.1 trong trường hợp các điểm trung tính O và O' được nối với nhau bằng một dây trung tính như ở H.BT.7.2 có tổng trở:

1) $Z_N = 0$

2) $Z_N = (1 + j2)\ \Omega$



H.BT.7.2

BT.7.3. Cho mạch điện ba pha ở H.BT.7.3 với một máy phát điện ba pha đối xứng có sđđ pha A là

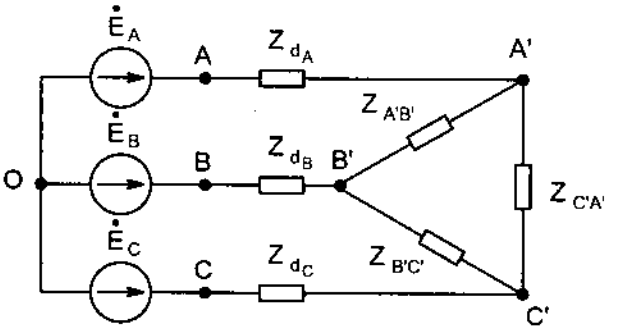
$$\dot{E}_A = 200\angle 0^0\ V$$

Tính các dòng điện pha, các dòng điện dây, các điện áp pha và các điện áp dây của nguồn và của tải, các công suất tác dụng và công suất phản kháng của nguồn và của tải nếu tổng trở mỗi pha của đường dây

$$Z_{d_A} = Z_{d_B} = Z_{d_C} = (1 + j3)\ \Omega$$

và tổng trở pha của tải

$$Z_{A'B'} = Z_{B'C'} = Z_{C'A'} = (24 + j36)\Omega$$



H.BT.7.3

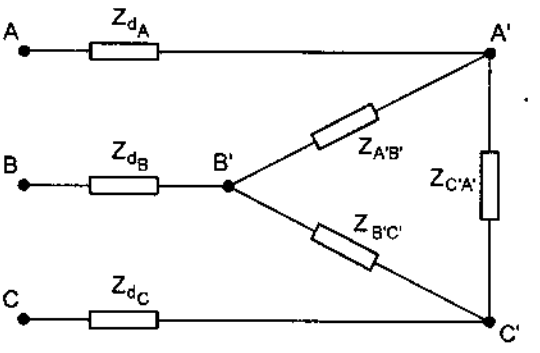
BT.7.4. Giải lại bài tập BT. 7.3 khi biết các điện áp dây

$\dot{U}_{AB} = (380\angle 0^0)$ V

$\dot{U}_{BC} = (380\angle -120^0)$ V

$\dot{U}_{CA} = (380\angle 120^0)$ V

(Xem H.BT.7.4)



H.BT.7.4

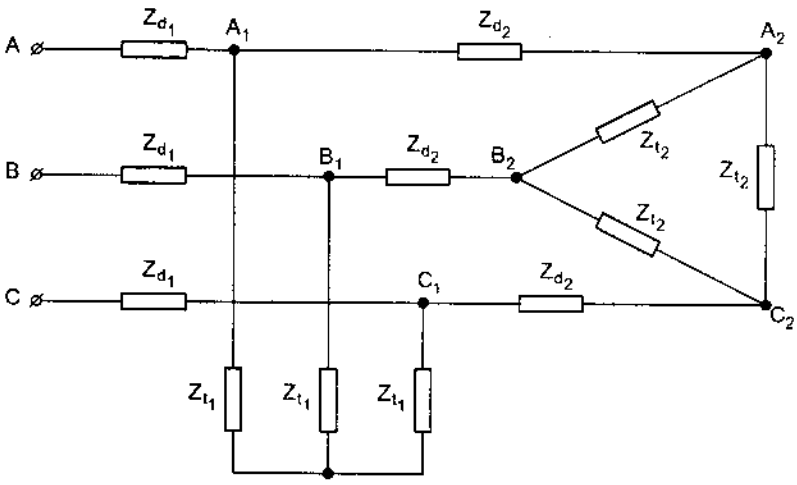
BT.7.5. Cho mạch điện ở H.BT.7.5 với các điện áp

$\dot{U}_{AB} = (380\angle 0^0)$ V, $\dot{U}_{BC} = (380\angle -120^0)$ V, $\dot{U}_{CA} = (380\angle 120^0)$ V,

$Z_{d_1} = (1 + j1)\ \Omega$, $Z_{d_2} = (1 + j2)\ \Omega$;

$Z_{t_1} = (6 + j8)\ \Omega$, $Z_{t_2} = (18 + j24)\ \Omega$.

Tính các dòng điện dây và các dòng điện pha, các điện áp dây và các điện áp pha, các công suất tác dụng và công suất phản kháng của tải ba pha nối hình sao, của tải ba pha nối hình tam giác và của nguồn điện ba pha.



H.BT.7.5

BT.7.6. Giải lại bài tập BT.7.1 trong các trường hợp

1) $Z_A = 10\ \Omega$, $Z_B = j10\ \Omega$, $Z_C = -j10\ \Omega$.

2) $Z_A = 10\ \Omega$, $Z_B = -j10\ \Omega$, $Z_C = j10\ \Omega$.

BT.7.7. Giải lại bài tập BT.7.2 với

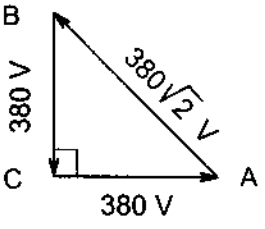
$Z_A = 10\ \Omega$, $Z_B = j10\ \Omega$, $Z_C = -j10\ \Omega$ và $Z_N = (1 + j1)\ \Omega$.

BT.7.8. Giải lại bài tập BT.7.3 với

$$Z_{d_A} = Z_{d_B} = Z_{d_C} = (1 + j2)\ \Omega$$

$$Z_{A'B'} = 30\ \Omega,\ \ Z_{B'C'} = -j30\ \Omega,\ \ Z_{C'A'} = j30\ \Omega,$$

BT.7.9. Giải lại bài tập BT.7.4 với các điện áp dây cho bởi đồ thị véctơ ở H.BT.7.9.



H.BT.7.9

BT.7.10. Giải lại bài tập BT.7.5 khi tải ba pha nối hình sao có các tổng trở pha là $Z_{t_A} = Z_{t_B} = (16 + j12)\ \Omega$, $Z_{t_C} = (16 - j12)\ \Omega$.

Chương 8

QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG CÁC MẠCH ĐIỆN TUYẾN TÍNH ĐƠN GIẢN

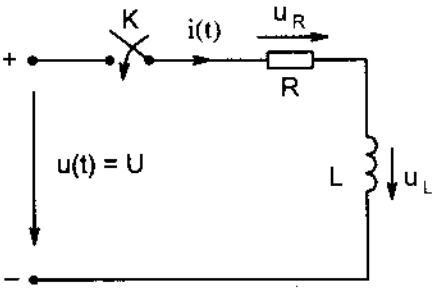
Nếu một mạch điện có chứa ít nhất một phần tử điện cảm hay một phần tử điện dung thì khi đóng cắt một nguồn kích thích hoặc khi một thông số của mạch điện biến thiên một cách đột ngột trong mạch điện sẽ xảy ra một *quá trình quá độ*. Trong chương này chỉ xét một số quá trình quá độ trong các mạch điện đơn giản nhất.

8.1. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ KHI ĐÓNG MẠCH RL VÀO MỘT NGUỒN ÁP KHÔNG ĐỔI

Giả thiết một mạch điện gồm có điện trở R và điện cảm L nối tiếp (ta sẽ gọi tắt là mạch RL) được đóng vào một nguồn điện áp không đổi theo thời gian:

$$u(t) = U = \text{const}$$

(thường gọi là nguồn điện áp một chiều) (H. 8.1.1).



Hình 8.1.1

Ta chọn gốc thời gian t = 0 là thời điểm đóng khoá K. Ta cần viết *phương trình vi phân* cho mạch và giải phương trình vi phân này để tìm các dòng điện và các điện áp trong mạch với $t \geq 0$.

Đối với mạch ở H.8.1.1 ta có các phương trình sau đây:

$$u_R(t) = Ri(t) \tag{8.1.1}$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} \tag{8.1.2}$$

và

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) = U \tag{8.1.3}$$

Kết hợp (8.1.1) – (8.1.3) cho ta

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U \tag{8.1.4}$$

Phương trình (8.1.4) là một phương trình vi phân *tuyến tính* cấp một có các hệ số là các hằng số.

Ở *chế độ xác lập* thì các dòng điện và điện áp trong mạch biến thiên theo thời gian theo quy luật của nguồn kích thích tức đều là các hằng số:

$$i_{xl}(t) = I \tag{8.1.5}$$

$$u_{Rxl}(t) = Ri_{xl}(t) = RI \tag{8.1.6}$$

và

$$u_{Lxl}(t) = L\frac{di_{xl}(t)}{dt} = L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{8.1.7}$$

Thay (8.1.5) - (8.1.7) vào (8.1.4) ta có

$$RI + L\frac{dI}{dt} = RI = U \tag{8.1.8}$$

Từ đó ta tìm được:

$$i_{xl}(t) = I = \frac{U}{R} \tag{8.1.9}$$

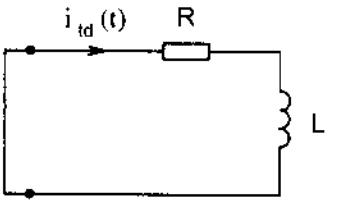
Nghiệm tổng quát i(t) của (8.1.4) có thể coi là tổng của *thành phần xác lập* và *thành phần tự do.*

$$i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t) \tag{8.1.10}$$

trong đó thành phần tự do $i_{td}(t)$ thoả mãn phương trình (8.1.4) với vế phải bằng không gọi là *phương trình vi phân thuần nhất*

$$Ri_{td}(t) + L\frac{di_{td}}{dt} = 0 \tag{8.1.11}$$

tương ứng với mạch RL *không có nguồn kích thích* ở H.8.1.2.



Hình 8.1.2

Ta có thể đặt nghiệm của (8.1.11) dưới dạng hàm mũ:

$$i_{td}(t) = Ae^{pt} \tag{8.1.12}$$

trong đó A là một hằng số gọi là *hằng số tích phân*

và p là một hằng số được gọi là *số mũ đặc trưng.*

Thay (8.1.12) vào (8.1.11) ta được

$$R(Ae^{pt}) + L\frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = 0$$

hay

$$RAe^{pt} + pLAe^{pt} = 0$$

hay $$(R + pL)Ae^{pt} = 0 \qquad (8.1.13)$$

Phương trình (8.1.13) được thoả mãn nếu

$$Ae^{pt} = 0 \qquad (8.1.14)$$

hoặc $$R + pL = 0 \qquad (8.1.15)$$

Vì $e^{pt} \neq 0$ nên (8.1.14) sẽ dẫn đến

$$A = 0$$

Điều này có nghĩa là

$$i_{td}(t) = 0 \qquad (8.1.16).$$

Ta sẽ loại bỏ *nghiệm tầm thường* này.

Phương trình (8.1.15) được gọi là *phương trình đặc trưng của mạch RL*, có nghiệm là

$$p = -\frac{R}{L} \qquad (8.1.17)$$

được gọi là *số mũ đặc trưng của mạch RL*.

Vậy phương trình (8.1.11) sẽ có nghiệm không tầm thường nếu số mũ đặc trưng p được xác định bởi (8.1.17).

Người ta đưa vào *hệ số tắt*

$$\beta = \frac{R}{L} \qquad (8.1.18)$$

và viết nghiệm tự do dưới dạng:

$$i_{td}(t) = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (8.1.19)$$

Đến đây ta có thể viết nghiệm tổng quát của phương trình (8.1.14) dưới dạng

$$i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t)$$

$$= I + Ae^{-\beta t} = I + Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (8.1.20)$$

Để xác định hằng số tích phân A trong (8.1.20) ta cần dựa vào *điều kiện đầu* là trị số của dòng điện i(t) tại thời điểm t = 0, ký hiệu là i(0).

Trị số i(0) này có thể được cho trước hoặc là được xác định theo trị số của dòng điện trong điện cảm ở thời điểm ngay trước khi đóng mạch, ký hiệu là $i_L(0-)$ với ý nghĩa là

$$i_L(0-) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} i_L(t) \qquad (8.1.21)$$

Nếu ta giả thiết rằng trước khi đóng mạch dòng điện trong điện cảm có trị số là $i_L(0-)$ thì từ phương trình vi phân (8.1.4) với giả thiết rằng U = hữu hạn ta phải có

$$i_L(0) = i_L(0-) \tag{8.1.22}$$

để cho

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{i_L(0) - i_L(0-)}{\Delta t} \tag{8.1.23}$$

có trị số *hữu hạn*.

Hệ thức (8.1.22) thường được phát biểu dưới dạng *định luật đóng mở thứ nhất* : "*Dòng điện trong điện cảm phải liên tục tại thời điểm đóng mạch*".

Ta có thể giả thiết $i_L(0-)$ có một trị số tuỳ ý nào đó. Trong trường hợp trước khi đóng mạch vào nguồn áp không đổi u(t) = U, mạch RL chưa được nối với một nguồn nào thì ta có

$$i_L(0-) = 0 \tag{8.1.24}$$

Với giả thiết (8.1.24) theo (8.1.22) ta có:

$$i_L(0) = 0 \tag{8.1.25}$$

Trong (8.1.20) cho t = 0 và sử dụng (8.1.25) ta có

$$0 = I + A \tag{8.1.26}$$

Từ đó ta giải được

$$A = -I = -\frac{U}{R} \tag{8.1.27}$$

Thay (8.1.27) vào (8.1.19) ta được

$$i_{td}(t) = Ae^{-\beta t} = -Ie^{-\beta t} = -\frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{8.1.28}$$

Cuối cùng thay (8.1.9) và (8.1.28) vào (8.1.10) ta được

$$i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t)$$

$$= I - Ie^{-\frac{R}{L}t} = I\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

hay

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{8.1.29}$$

Để phân biệt dòng điện i(t) theo (8.1.29) với các thành phần xác lập $i_{xl}(t)$ theo (8.1.9) và thành phần tự do $i_{td}(t)$ theo (8.1.28) ta sẽ gọi i(t) là *dòng điện quá độ*.

Vậy

$$i(t) = i_{qd}(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t) \qquad (8.1.30)$$

Các đường cong của dòng điện xác lập $i_{xl}(t)$ và của dòng điện tự do $i_{td}(t)$ và của i(t) được vẽ trên H.8.1.3.

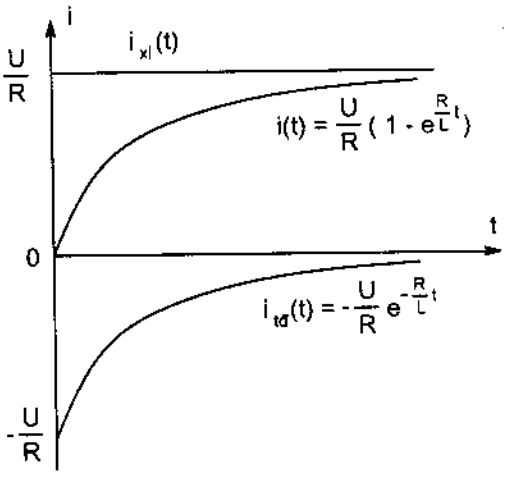
Hình 8.1.3 cho ta thấy rằng dòng điện quá độ i(t) tăng dần theo thời gian bắt đầu từ trị số ban đầu bằng không :

$$i(0) = 0$$

đến trị số xác lập

$$i_{xl}(t) = I = \frac{U}{R}$$

chứ không tăng một nhảy vọt từ 0 đến U/R.



Hình 8.1.3

Để đánh giá về tốc độ tăng của dòng điện quá độ i(t) cũng là tốc độ tắt dần của thành phần tự do của nó người ta dùng hệ số tắt

$$\beta = \frac{R}{L}$$

hoặc *hằng số thời gian*

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{L}{R} \qquad (8.1.31)$$

Từ (8.1.28) ta có:

$$i_{td}(t) = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (8.1.32)$$

Với $t = t + \tau$ ta có

$$i_{td}(t+\tau) = Ae^{-\frac{(t+\tau)}{\tau}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}e^{-1} = \frac{i_{td}(t)}{e} \qquad (8.1.33)$$

Vậy *hằng số thời gian* τ là khoảng thời gian mà dòng điện tự do giảm đi $e \approx 2{,}71828$ lần so với trị số trước của nó.

Sau thời điểm t = 0 một khoảng thời gian bằng 3τ thì dòng điện tự do sẽ chỉ còn bằng

$$\frac{i_{td}(0)}{e^3} \approx \frac{i_{td}(0)}{20,0855} \approx 0,0498\ i_{td}(0)$$

tức là nhỏ hơn 5% trị số ban đầu của nó.

Trong thực tế, với sai số nhỏ hơn 5% người ta coi là sau 3τ thì dòng điện tự do có trị số không đáng kể có thể bỏ qua được. Do đó, sau thời điểm t = 0 một khoảng thời gian là 3τ dòng điện quá độ i(t) sẽ đạt tới trên 95% trị số xác lập của nó. Vì thế, với sai số nhỏ hơn 5% người ta có thể cho rằng chế độ xác lập trong mạch RL được thành lập sau khi đóng mạch một khoảng thời gian bằng ba lần hằng số thời gian của mạch.

Ví dụ, với R = 100 Ω và L = 100 mH = 0,1 H thì hằng số thời gian

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,1}{100} = 0,001s = 1\ ms$$

và chế độ xác lập có thể coi là gần đạt được sau khi đóng mạch một khoảng thời gian bằng 3τ = 3ms.

Về lý thuyết chỉ khi t → ∞ thì dòng điện tự do mới tiến đến không và dòng điện quá độ mới tiến đến trị số dòng điện xác lập.

Về mặt vật lý sở dĩ chế độ xác lập trong mạch RL không thể thành lập một cách tức thời ngay sau khi đóng mạch là vì với nguồn điện có công suất hữu hạn thì cần phải có thời gian để làm tăng năng lượng từ trường trong điện cảm L từ trị số ban đầu đến trị số xác lập

$$W_{Mxl} = \frac{1}{2}Li_{Lxl}^2 = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (8.1.34)$$

Ví dụ 8.1.1:

Một cuộn dây có điện trở R = 10 Ω và điện cảm L = 0,1 H được đóng vào nguồn điện một chiều U = 10 V (H.8.1.1). Tính dòng điện quá độ i(t), điện áp quá độ $u_L(t)$ trên điện cảm. Giả thiết $i_L(0-) = 0$. Tính trị số của i(t) và $u_L(t)$ tại các thời điểm t = 0, τ, 2τ, 3τ, 5τ và 10τ, với τ là hằng số thời gian của mạch. Vẽ đường cong của i(t) và $u_L(t)$.

Giải :

Phương trình vi phân của mạch viết cho dòng điện i(t) là:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U$$

hay:

$$10i(t) + 0,1\frac{di(t)}{dt} = 10$$

Ở chế độ xác lập

$$i_{xl}(t) = I = \frac{U}{R} = \frac{10}{10} = 1\ A$$

Phương trình đặc trưng

$$R + pL = 0$$

hay $$10 + 0,1p = 0$$

có nghiệm là

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{10}{0,1} = -100\ \frac{1}{s}$$

Hệ số tắt của mạch là

$$\beta = \frac{R}{L} = 100\ \frac{1}{s}$$

Hằng số thời gian của mạch:

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{L}{R} = \frac{0,1}{10} = 0,01\ s = 10\ ms$$

Dòng điện tự do có dạng

$$i_{td}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Dòng điện quá độ

$$i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t)$$

$$= \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \left(1 + Ae^{-100t}\right) A$$

Với điều kiện đầu

$$i(0) = i_L(0) = i_L(0-) = 0$$

ta có

$$0 = \frac{U}{R} + A = 1 + A$$

hay $$A = -\frac{U}{R} = -1\ A$$

Vậy $$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \left(1 - e^{-100t}\right) A$$

Điện áp quá độ trên điện cảm bằng

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$= L\left(-\frac{U}{R}\right)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

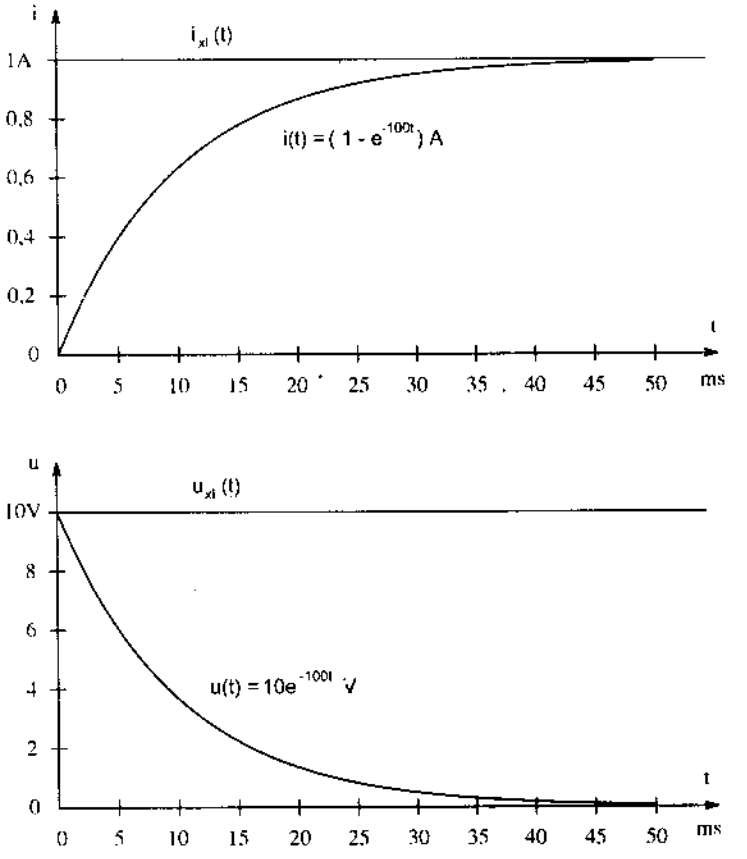
Vậy $$u_L(t) = Ue^{-\frac{R}{L}t} = 10e^{-100t}\ V$$

Các trị số của i(t) và $u_L(t)$ với t=0, τ, 2τ, 3τ, 5τ và 10τ được ghi trong bảng 8.1.1.

Các đường cong i(t) và $u_L(t)$ được vẽ ở H.8.1.4

Bảng 8.1.1

t(ms)	0	10	20	30	50	100
i(A)	0	0,63212	0,86466	0,95021	0,99326	0,99995
u(V)	10	3,6788	1,3533	0,49787	0,067379	$4,540\times10^{-4}$

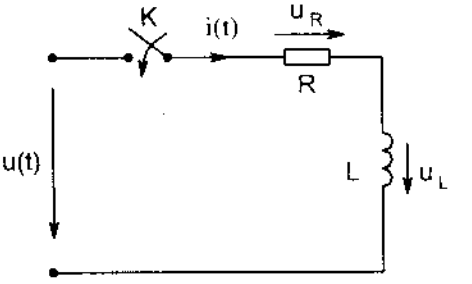


Hình 8.1.4

8.2. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ KHI ĐÓNG MẠCH RL VÀO NGUỒN ĐIỆN ÁP HÌNH SIN

Nếu mạch RL được đóng vào một nguồn điện áp hình sin $u(t) = U_m \sin\omega t$ ở thời điểm t = 0 (H.8.2.1) thì phương trình vi phân viết cho quá trình quá độ của mạch sẽ là

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U_m \sin\omega t \qquad (8.2.1)$$



Hình 8.2.1

Nghiệm tổng quát của (8.2.1) có thể coi là tổng của dòng điện xác lập và dòng điện tự do

$$i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t) \qquad (8.2.2)$$

Ở chế độ xác lập dòng điện xác lập của mạch RL là dòng điện hình sin có tần số góc ω

$$i_{xl}(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) \qquad (8.2.3)$$

với $$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \text{ và } \varphi = \text{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

Dòng điện tự do $i_{td}(t)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất

$$Ri_{td} + L\frac{di_{td}}{dt} = 0 \qquad (8.2.4)$$

Như đã xét trong mục 8.1, ta có:

$$i_{td}(t) = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (8.2.5)$$

với hệ số tắt

$$\beta = \frac{R}{L} \qquad (8.2.6)$$

và hằng số thời gian

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (8.2.7)$$

Thay (8.2.3) và (8.2.7) vào (8.2.2) ta được

$$i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t)$$

$$= I_m \sin(\omega t - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (8.2.8)$$

Để xác định hằng số tích phân A trong (8.2.8) ta cần biết điều kiện đầu của bài toán. Giả thiết đã cho điều kiện đầu

$$i(0) = i_L(0) = i_L(0-) = 0 \qquad (8.2.9)$$

Theo (8.2.8) với t = 0 ta có

$$0 = I_m \sin(-\varphi) + A$$

Từ đó

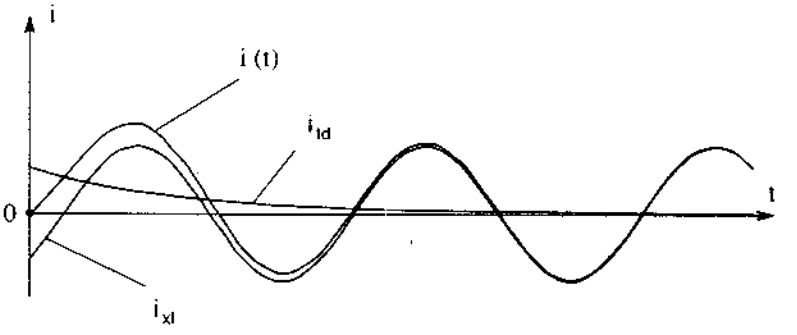
$$A = -I_m \sin(-\varphi) = I_m \sin\varphi \qquad (8.2.10)$$

Thay (8.2.9) vào (8.2.10) ta được:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) + I_m \sin(\varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (8.2.11)$$

Ta gọi nghiệm i(t) theo (8.2.11) là dòng điện quá độ để phân biệt với các thành phần xác lập và thành phần tự do của nó.

Các đường cong của i(t) theo (8.2.11) và của các thành phần xác lập và tự do của nó được vẽ ở hình 8.2.2.



Hình 8.2.2

Từ H.8.2.2 ta thấy rõ rằng dòng điện quá độ trong mạch RL bắt đầu từ trị số ban đầu i(0) = 0 chuyển dần đến một dòng điện hình sin ở chế độ xác lập theo với sự tắt dần của thành phần dòng điện tự do.

Ví dụ 8.2.1 :

Một cuộn dây có điện trở R = 10 Ω, điện cảm L = 0,1 H được đóng vào điện áp $u(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^0)$ V với tần số f = 50 Hz tại thời điểm t = 0 (H.8.2.1). Tính dòng điện quá độ i(t) và điện áp quá độ $u_L(t)$. Vẽ các đường cong của i(t) và $u_L(t)$ trong ba chu kì của điện áp nguồn. Giả thiết $i_L(0-) = 0$.

Giải :

Phương trình vi phân của quá trình quá độ đối với dòng điện i(t)

$$R\,i(t) + L\frac{di}{dt} = U_m \sin\left(\omega t + 30^0\right)$$

hay $$10\,i(t) + 0,1\frac{di}{dt} = 100\sqrt{2}\sin\left(314t + 30^0\right)$$

Để tính dòng điện xác lập $\dot{I}$ ta dùng phương pháp số phức

$$R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = \dot{U}$$

hay $$\left(R + j\omega L\right)\dot{I} = \dot{U}$$

Từ đó $$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\left(R + j\omega L\right)} =$$

$$= \frac{100\angle 30^0}{10 + j\left(314 \times 0,1\right)} = \frac{100\angle 30^0}{10 + j31,4} =$$

$$= 2,2432 - j2,0436 = 3,0345\angle -42,33^0 \text{ A}$$

Vậy $$i_{xl}(t) = 3,0345\sqrt{2}\sin\left(314t - 42,33^0\right) \text{ A}$$

Dòng điện tự do có dạng

$$i_{td} = Ae^{pt} = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-100t}$$

với

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{10}{0,1} = -100\ \frac{1}{s}$$

Hệ số tắt

$$\beta = \frac{R}{L} = 100\ \frac{1}{s}$$

và hằng số thời gian

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{L}{R} = 0,01s = 10 \text{ ms}$$

Vậy dòng điện quá độ

$$i(t) = i_{xl}(t) + i_{td}(t)$$

$$= 3,0345\sqrt{2}\sin\left(314t - 42,33^0\right) + Ae^{-100t} \text{ A}$$

Để xác định hằng số tích phân A ta dùng điều kiện đầu

$$i(0) = i_L(0) = i_L(0\text{-}) = 0$$

Ta có

$$0 = 3,0345\sqrt{2}\sin\left(-42,33^0\right) + A$$

Từ đó

$$A = -3,0345\sqrt{2}\sin\left(-42,33^0\right) = 2,8898\ A$$

Cuối cùng ta được dòng điện quá độ

$$i(t) = 3,0345\sqrt{2}\sin\left(314t - 42,33^0\right) + 2,8898e^{-100t}\ A$$

Điện áp quá độ trên điện cảm

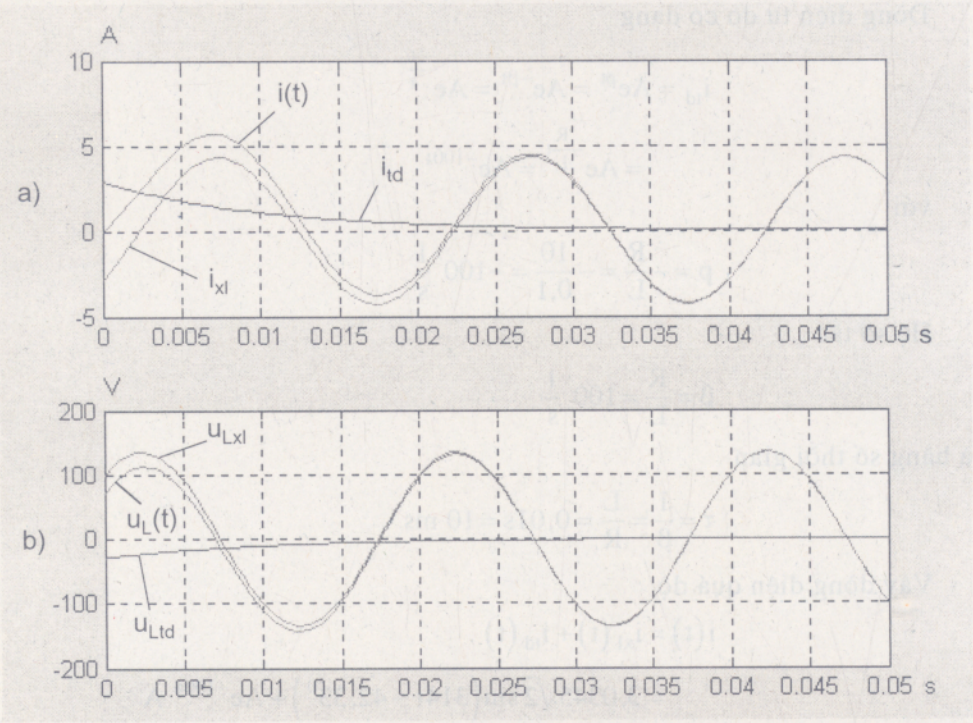
$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$= 0,1\frac{d}{dt}\left[3,0345\sqrt{2}\sin\left(314t - 42,33^0\right) + 2,8898e^{-100t}\right]$$

$$= (0,1)\left(3,0345\sqrt{2}\right)(314)\cos\left(314t - 42,33^0\right) + (0,1)(2,8898)(-100)\,e^{-100t}$$

$$= 95,283\sqrt{2}\cos\left(314t - 42,33^0\right) - 28,898e^{-100t}\ V$$

Các đường cong của i(t) và $u_L(t)$ được vẽ trên các H.8.2.3a và H.8.2.3b.



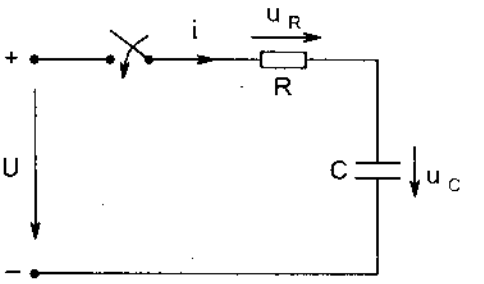
Hình 8.2.3

8.3. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ KHI ĐÓNG MẠCH RC VÀO NGUỒN ĐIỆN ÁP KHÔNG ĐỔI

Giả thiết một mạch điện gồm có điện trở R và điện dung C nối tiếp (ta sẽ gọi tắt là mạch RC) được đóng vào một nguồn điện áp không đổi theo thời gian

$$u(t) = U = const$$

(thường gọi là nguồn điện áp một chiều H.8.3.1).



Hình 8.3.1

Ta lập phương trình vi phân viết cho quá trình quá độ của mạch. Ta có các phương trình :

$$u_R(t) + u_C(t) = U \qquad (8.3.1)$$

$$u_R = Ri(t) \qquad (8.3.2)$$

và

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} \qquad (8.3.3)$$

Kết hợp các phương trình (8.3.1) - (8.3.3) ta được

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U \qquad (8.3.4)$$

Phương trình (8.3.4) là một phương trình vi phân *tuyến tính cấp một* có các hệ số là các hằng số. Nghiệm tổng quát $u_C(t)$ của (8.3.4) có thể coi là tổng của thành phần xác lập và thành phần tự do

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t) \qquad (8.3.5)$$

Để tìm $u_{Cxl}(t)$ ta chú ý rằng ở chế độ xác lập với nguồn áp hằng thì điện áp xác lập trên điện dung là hằng số và dòng điện xác lập qua điện dung bằng không:

$$u_{Cxl}(t) = U_C \qquad (8.3.6)$$

$$i_{xl}(t) = C\frac{du_{Cxl}(t)}{dt} = C\frac{dU_C}{dt} = 0 \qquad (8.3.7)$$

Thay (8.3.6) và (8.3.7) vào (8.3.4) ta được

$$0 + u_{Cxl}(t) = U_C = U$$

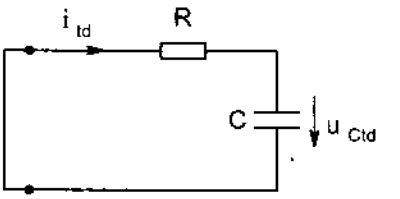
tức

$$u_{Cxl}(t) = U \qquad (8.3.8)$$

Thành phần điện áp tự do trên điện dung là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất

$$RC\frac{du_{Ctd}(t)}{dt} + u_{Ctd}(t) = 0 \qquad (8.3.9)$$

tương ứng với mạch RC không có nguồn kích thích (H.8.3.2).



Hình 8.3.2

Ta đặt nghiệm của (8.3.9) dưới dạng hàm mũ

$$u_{Ctd}(t) = Ae^{pt} \qquad (8.3.10)$$

trong đó A là một hằng số gọi là hằng số tích phân

và p là một hằng số gọi là số mũ đặc trưng.

Thay (8.3.10) vào (8.3.9) ta được:

$$RC\frac{d}{dt}(Ae^{pt}) + Ae^{pt} = 0$$

hay $$RCpAe^{pt} + Ae^{pt} = 0$$

hay $$(RCp + 1)Ae^{pt} = 0 \qquad (8.3.11)$$

Phương trình (8.3.11) được thoả mãn nếu

$$Ae^{pt} = 0 \qquad (8.3.12)$$

hoặc $$(RCp + 1) = 0 \qquad (8.3.13)$$

Vì $e^{pt} \neq 0$ nên (8.3.12) sẽ dẫn đến A = 0.

Điều này có nghĩa là:

$$u_{Ctd}(t) \equiv 0 \qquad (8.3.14)$$

Ta sẽ loại bỏ *nghiệm tầm thường* này.

Phương trình (8.3.13) được gọi là phương trình đặc trưng của mạch RC, có nghiệm là

$$p = -\frac{1}{RC} \qquad (8.3.15)$$

được gọi là *số mũ đặc trưng của mạch RC*.

Vậy phương trình (8.3.11) sẽ có nghiệm không tầm thường nếu số mũ đặc trưng p được xác định bởi (8.3.15).

Người ta đưa vào hệ số tắt

$$\beta = \frac{1}{RC} \qquad (8.3.16)$$

và hằng số thời gian $$\tau = \frac{1}{\beta} = RC \qquad (8.3.17)$$

và viết nghiệm của (8.3.9) dưới dạng

$$u_{Cld} = Ae^{-\frac{1}{RC}t} = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (8.3.18)$$

Bây giờ ta có thể viết nghiệm tổng quát của phương trình 8.3.4 dưới dạng

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Cld}(t)$$

$$= U + Ae^{-\beta t} = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = U + Ae^{-\frac{t}{RC}} \qquad (8.3.19)$$

Để xác định hằng số tích phân A trong (8.3.19) ta cần dựa vào *điều kiện đầu* là trị số của điện áp $u_C(t)$ tại thời điểm đóng mạch t = 0, ký hiệu là $u_C(0)$.

Trị số $u_C(0)$ này có thể được cho trước hoặc là được xác định theo trị số của điện áp trên điện dung ở thời điểm ngay trước khi đóng mạch, ký hiệu là $u_C(0-)$ với ý nghĩa là:

$$u_C(0-) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} u_C(t) \qquad (8.3.20)$$

Nếu ta giả thiết rằng trước khi đóng mạch điện áp trên điện dung có trị số là $u_C(0-)$ thì từ phương trình vi phân (8.3.4) với giả thiết rằng U = hữu hạn, ta phải có

$$u_C(0) = u_C(0-) \qquad (8.3.21)$$

để cho

$$\frac{du_C}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u_C(0) - u_C(0-)}{\Delta t} \qquad (8.3.22)$$

có trị số *hữu hạn*.

Hệ thức (8.3.21) thường được phát biểu dưới dạng *định luật đóng mở thứ hai* : "*Điện áp trên điện dung phải liên tục tại thời điểm đóng mở*".

Ta có thể giả thiết $u_C(0-)$ có một trị số tuỳ ý nào đó. Trong trường hợp trước khi đóng mạch vào nguồn áp không đổi u(t) = U mạch RC chưa được nối với một nguồn nào thì ta có:

$$u_C(0-) = 0 \qquad (8.3.23)$$

Với giả thiết (8.3.23), theo (8.3.21) ta có:

$$u_C(0) = 0 \qquad (8.3.24)$$

Trong (8.3.19) cho t = 0 và sử dụng (8.3.24) ta có

$$0 = U + A \qquad (8.3.25)$$

Từ đó ta giải được

$$A = -U \qquad (8.3.26)$$

Thay (8.3.26) vào (8.3.18) ta được:

$$u_{Ctd}(t) = Ae^{-\beta t} = -Ue^{-\beta t} = -Ue^{-\frac{t}{\tau}} = -Ue^{-\frac{t}{RC}} \qquad (8.3.27)$$

Cuối cùng, thay (8.3.8) và (8.3.27) vào (8.3.5) ta được

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t) = U - Ue^{-\frac{t}{RC}}$$

hay

$$u_C(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (8.3.28)$$

Để phân biệt điện áp $u_C(t)$ theo (8.3.28) với các thành phần xác lập $u_{Cxl}(t)$ theo (8.3.8) và thành phần tự do $u_{Ctd}(t)$ theo (8.3.27) ta sẽ gọi $u_C(t)$ là *điện áp quá độ trên điện dung.*

Vậy

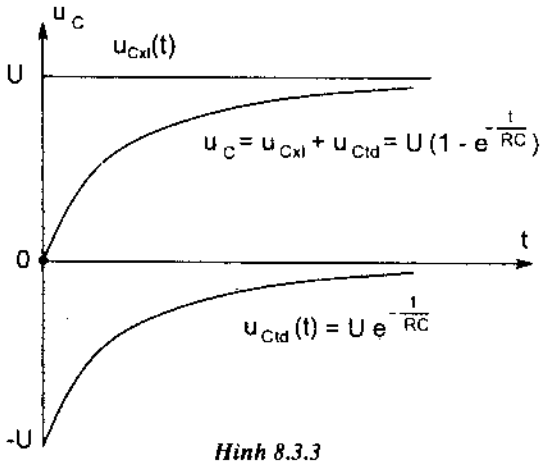
$$u_C(t) = u_{Cqd}(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t) \qquad (8.3.29)$$

Các đường cong của điện áp xác lập $u_{Cxl}(t)$, của điện áp tự do $u_{Ctd}(t)$ và của điện áp quá độ $u_C(t)$ được vẽ trên H.8.3.3.

Hình 8.3.3 cho ta thấy rằng điện áp quá độ $u_C(t)$ tăng dần theo thời gian bắt đầu từ trị số ban đầu $u_C(0) = 0$ đến trị số xác lập

$$u_{Cxl}(t) = U$$

chứ không tăng nhảy vọt từ không đến U.



Hình 8.3.3

Hằng số thời gian của mạch RC là $\tau = RC$ là khoảng thời gian mà điện áp tự do trên điện dung giảm đi $e \approx 2,71828$ lần so với trị số trước của nó.

$$u_{Ctd}(t+\tau) = \frac{u_{Ctd}(t)}{e}$$

Sau thời điểm t = 0 một khoảng thời gian bằng 3τ thì điện áp tự do trên điện dung sẽ chỉ còn bằng:

$$\frac{u_{Ctd}(0)}{e^3} \approx \frac{u_{Ctd}(0)}{20,0855} \approx 0,0498u_{Ctd}(0)$$

tức là nhỏ hơn 5% trị số ban đầu của nó.

Trong thực tế với sai số nhỏ hơn 5% người ta coi là sau 3τ thì điện áp tự do có trị số không đáng kể có thể bỏ qua được.

Do đó sau thời điểm t = 0 một khoảng thời gian bằng 3τ điện áp quá độ $u_C(t)$ sẽ đạt tới trên 95% trị số xác lập của nó. Vì thế với sai số nhỏ hơn 5% người ta có thể cho rằng chế độ xác lập trong mạch RC được thành lập sau khi đóng mạch một khoảng thời gian bằng ba lần hằng số thời gian của mạch.

Ví dụ, với R = 100 Ω và C = 10 μF thì hằng số thời gian

$$\tau = RC = 100 \times 10 \times 10^{-6} = 10^{-3}\ s = 1\ ms$$

và chế độ xác lập có thể coi là gần đạt được sau khi đóng mạch một khoảng thời gian bằng 3τ = 3 ms.

Về lý thuyết chỉ khi t → ∞ thì điện áp tự do mới tiến đến không và điện áp quá độ trên điện dung mới tiến đến trị số điện áp xác lập.

Về mặt vật lý, chế độ xác lập trong mạch RC không thể thành lập một cách tức thời ngay sau khi đóng mạch là vì với nguồn điện có công suất hữu hạn thì cần phải có thời gian để làm tăng năng lượng điện trường trong điện dung từ trị số ban đầu đến trị số xác lập.

$$W_{Exl} = \frac{1}{2}Cu_{Cxl}^2 = \frac{1}{2}CU^2$$

Ví dụ 8.3.1:

Một tụ điện có điện dung C = 10 μF được nối tiếp với điện trở R = 1 kΩ và được đóng vào nguồn điện áp không đổi u(t) = U = 100 V tại thời điểm t = 0 (H.8.3.1). Cho $u_C(0-) = 0$.

Tính điện áp quá độ $u_C(t)$ và dòng điện quá độ i(t). Tính trị số của $u_C(t)$ và i(t) với t = τ, 2τ, 3τ, 5τ và 10τ với τ là hằng số thời gian của mạch. Vẽ đường cong của $u_C(t)$ và i(t).

Giải:

Phương trình vi phân của quá trình quá độ đối với điện áp quá độ trên điện dung là

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U$$

Điện áp xác lập trên điện dung

$$u_{Cxl}(t) = U = 100\ V$$

Phương trình đặc trưng của mạch

$$RCp + 1 = 0$$

có nghiệm là

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{10^3 \times 10 \times 10^{-6}} = -100\ \frac{1}{s}$$

Hệ số tắt

$$\beta = \frac{1}{RC} = 100\ \frac{1}{s}$$

Hằng số thời gian của mạch:

$$\tau = \frac{1}{\beta} = RC = \frac{1}{100} = 0{,}01\ s = 10\ ms$$

Điện áp tự do trên điện dung có biểu thức là

$$u_{Ctd}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-100t}$$

Điện áp quá độ trên điện dung:

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$

$$= U + Ae^{-\frac{t}{RC}} = 100 + Ae^{-100t}$$

Theo điều kiện ban đầu

$$u_C(0) = u_C(0-) = 0$$

ta có $0 = U + A = 100 + A$

Từ đó $A = -U = -100\ V.$

Cuối cùng ta được điện áp quá độ trên điện dung

$$u_C(t) = U + Ae^{-\frac{t}{RC}} = U - Ue^{-\frac{t}{RC}} = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$u_C(t) = 100\left(1 - e^{-100t}\right)\ V$$

Để tính dòng điện quá độ trong mạch ta sử dụng quan hệ giữa i và u_C

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

Ta có

$$i(t) = C\frac{d}{dt}\left[U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right]$$

$$= -CU\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{100}{1000}e^{-100t}$$

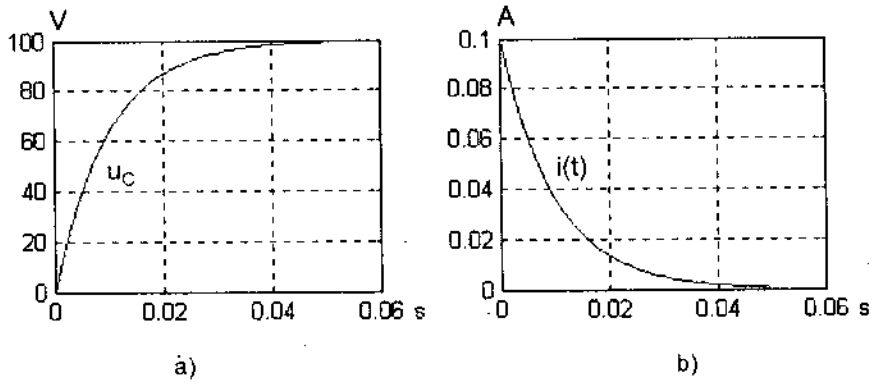
Vậy $i(t) = 0{,}1e^{-100t}\ A = 100e^{-100t}\ mA$

Các trị số của $u_C(t)$ và $i_C(t)$ tại các thời điểm t=0, t = τ, 2τ, 3τ, 5τ và 10τ được ghi ở bảng 8.3.1.

Bảng 8.3.1

t(ms)	0	10	20	30	50	100
u_C(V)	100	63,212	86,466	95,021	99,326	99,995
i(mA)	100	36,788	13,534	4,9787	0,67379	$4,540\times10^{-3}$

Các đường cong của $u_C(t)$ và i(t) được vẽ trong H.8.3.4



Hình 8.3.4

Ta nhận thấy $u_C(t)$ liên tục tại t = 0 trong khi dòng điện i(t) nhảy vọt từ i(0-) = 0 đến i(0) = U/R = 0,1 A.

8.4. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ KHI ĐÓNG MẠCH RC VÀO NGUỒN ĐIỆN ÁP HÌNH SIN

Nếu mạch RC được đóng vào một nguồn điện áp hình sin:

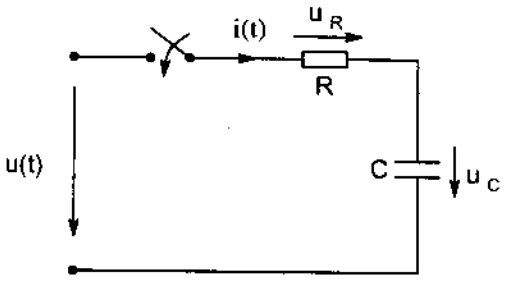
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

ở thời điểm t = 0 (H.8.4.1) thì phương trình vi phân viết cho quá trình quá độ của mạch sẽ là

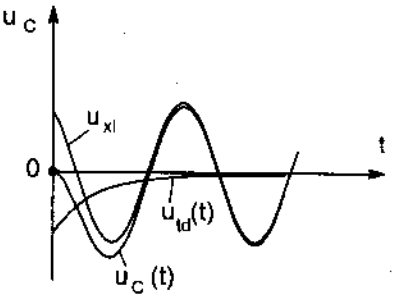
$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \qquad (8.4.1)$$

Nghiệm tổng quát $u_C(t)$ của (8.4.1) có thể coi là tổng của điện áp xác lập và điện áp tự do trên điện dung

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t) \qquad (8.4.2)$$



Hình 8.4.1



Hình 8.4.2

Ở chế độ xác lập dòng điện xác lập của mạch RC là một dòng điện hình sin có biểu thức là

$$i_{xl}(t) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) \qquad (8.4.3)$$

với
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

và
$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Điện áp xác lập trên điện dung là một điện áp hình sin có biểu thức là

$$u_{Cxl}(t) = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (8.4.4)$$

với
$$U_{Cm} = \left(\frac{1}{\omega C}\right) I_m$$

Điện áp tự do $u_{Ctd}(t)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất

$$RC\frac{d}{dt}u_{Ctd} + u_{Ctd} = 0 \qquad (8.4.5)$$

tương ứng với mạch RC không có nguồn kích thích (H.8.3.2). Như đã xét trong mục 8.3, nghiệm của (8.4.5) có dạng

$$u_{Ctd}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (8.4.6)$$

với *hệ số tắt*

$$\beta = \frac{1}{RC} \tag{8.4.7}$$

và *hằng số thời gian*

$$\tau = RC \tag{8.4.8}$$

Thay (8.4.4) và (8.4.6) vào (8.4.2) ta được

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$

$$= U_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.4.9}$$

Để xác định hằng số tích phân A trong (8.4.9) ta cần sử dụng điều kiện đầu là trị số của điện áp trên điện dung tại thời điểm đóng mạch $u_C(0)$. Giả thiết đã cho trị số của điện áp trên điện dung ngay trước khi đóng mạch $u_C(0-)$, theo định luật đóng mở thứ hai ta có

$$u_C(0) = u_C(0-) \tag{8.4.10}$$

Ví dụ, đã cho $u_C(0-) = 0$, ta sẽ có

$$u_C(0) = 0 \tag{8.4.11}$$

Thay t = 0 vào (8.4.9) và sử dụng (8.4.11) ta có

$$0 = U_{Cm}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A \tag{8.4.12}$$

Từ đó

$$A = -U_{Cm}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{8.4.13}$$

Cuối cùng, thay (8.4.13) vào (8.4.9) ta được

$$u_C(t) = U_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - U_{Cm}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8.4.14}$$

Các đường cong của $u_C(t)$, $u_{Cxl}(t)$ và $u_{Ctd}(t)$ được vẽ trên hình H.8.4.2 cho ta thấy rằng điện áp quá độ $u_C(t)$ bắt đầu từ trị số ban đầu $u_C(0) = 0$ chuyển dần đến quy luật hình sin ở chế độ xác lập theo với quá trình tắt dần của thành phần điện áp tự do. Vì sau khi đóng mạch một khoảng thời gian $3\tau = 3RC$ thành phần điện áp tự do chỉ còn nhỏ hơn 5% trị số ban đầu của nó nên với sai số nhỏ hơn 5% ta có thể coi rằng chế độ xác lập hình sin được thành lập sau khi đóng mạch một khoảng thời gian bằng ba lần hằng số thời gian của mạch RC.

Về mặt lý thuyết chỉ khi $t \to \infty$ thì điện áp tự do trên điện dung mới tiến đến không và điện áp quá độ trên điện dung mới tiến đến điện áp xác lập.

Ví dụ 8.4.1:

Một tụ điện có điện dung C = 10 μF được nối tiếp với một điện trở R = 1 kΩ và được đóng vào nguồn điện áp hình sin $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^0\right)$ với tần số f = 50 Hz tại thời điểm t = 0 (H.8.4.1). Cho $u_C(0-) = 0$.

Tính điện áp quá độ $u_C(t)$ và dòng điện quá độ i(t). Vẽ các đường cong của $u_C(t)$ và $i_C(t)$ trong khoảng thời gian bằng 3τ = 3RC.

Giải :

Phương trình vi phân của quá trình quá độ đối với điện áp quá độ trên điện dung là

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_m \sin\left(\omega t + 30^0\right)$$

Ở chế độ xác lập hình sin ta có:

$$R\dot{I} - j\left(\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I} = \dot{U}$$

Từ đó $$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R - j\frac{1}{\omega C}} =$$

$$= \frac{100\angle 30^0}{1000 - j\frac{1}{2\pi \times 50 \times 10 \times 10^{-6}}} = \frac{100\angle 30^0}{1000 - j318,3}$$

$$= \left(64,185 + j70,430\right) \times 10^{-3}\ A = \left(95,29 \times 10^{-3}\angle 47,66^0\right) A$$

Điện áp xác lập hiệu dụng phức trên điện dung

$$\dot{U}_C = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I} =$$

$$= \left(-j318,3\right)\left(64,185 + j70,430\right) \times 10^{-3}$$

$$= 22,42 - j20,43 = \left(30,33\angle -42,34^0\right) V$$

Vậy điện áp xác lập trên điện dung

$$u_{Cxl}(t) = (30,33)\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 42,340^0\right)\ V$$

Phương trình đặc trưng của mạch

$$RCp + 1 = 0$$

có nghiệm là

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{10^3 \times 10 \times 10^{-6}} = -100\ \frac{1}{s}$$

Hệ số tắt

$$\beta = \frac{1}{RC} = 100\ \frac{1}{s}$$

Hằng số thời gian

$$\tau = RC = \frac{1}{100} = 0{,}01\ s = 10\ ms$$

Điện áp tự do trên điện dung có biểu thức là

$$u_{Ctd}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-100t}$$

Vậy điện áp quá độ trên điện dung có biểu thức là

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$

$$= (30{,}33)\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 42{,}34^0\right) + Ae^{-100t}$$

Theo điều kiện đầu

$$u_C(0) = u_C(0-) = 0$$

ta có

$$0 = 30{,}33\sqrt{2}\sin\left(-42{,}34^0\right) + A$$

Từ đó

$$A = -30{,}33\sqrt{2}\sin\left(-42{,}34^0\right) = 28{,}89\ V$$

Cuối cùng, ta có điện áp trên điện dung bằng

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$

$$= 30{,}33\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 42{,}34^0\right) + 28{,}89e^{-100t}\ \ V$$

Để tính dòng điện quá độ i(t) ta sử dụng quan hệ giữa i(t) và $u_C(t)$:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

Ta có

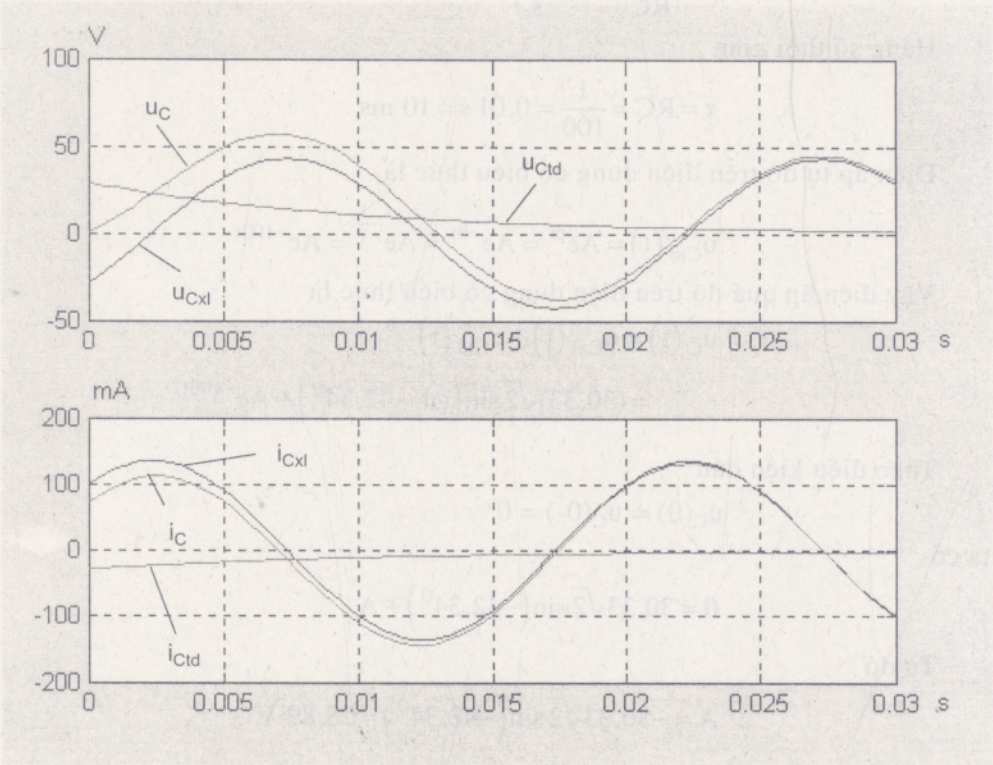
$$i(t) = \left(10 \times 10^{-6}\right)\frac{d}{dt}\left[(30{,}33)\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 42{,}34^0\right) + 28{,}89e^{-100t}\right]$$

$$= \left(10 \times 10^{-6}\right)\left[(30{,}33)\sqrt{2} \times 2\pi \times 50\cos\left(\omega t - 42{,}34^0\right) + 28{,}89(-100)e^{-100t}\right]$$

hay $\quad i(t) = 95,29\sqrt{2}\cos\left(\omega t - 42,34^0\right) - 28,89e^{-100t}$ mA

hay $\quad i(t) = 95,29\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 47,66^0\right) - 28,89e^{-100t}$ mA

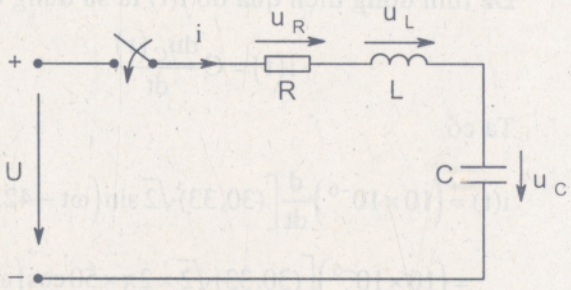
Các đường cong của $u_C(t)$ và $i(t)$ được vẽ ở hình 8.4.3



Hình 8.4.3

8.5. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ KHI ĐÓNG MẠCH RLC VÀO NGUỒN ĐIỆN ÁP KHÔNG ĐỔI

Ta xét quá trình quá độ khi đóng một mạch gồm có điện trở R, điện cảm L và điện dung C nối tiếp (sẽ gọi tắt là mạch RLC) vào một nguồn điện áp không đổi u(t) = U = const (thường gọi là điện áp một chiều).



Hình 8.5.1

Ta chọn gốc thời gian t = 0 là thời điểm đóng khoá K. Trước tiên ta hãy lập hệ phương trình vi phân cho quá trình quá độ trong mạch. Đối với sơ đồ ở hình 8.5.1 ta có các phương trình sau đây

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = U \qquad (8.5.1)$$

trong đó

$$u_R(t) = Ri(t) \qquad (8.5.2)$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (8.5.3)$$

và

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad (8.5.4)$$

Thay (8.5.2) và (8.5.3) vào (8.5.1) ta được

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_C(t) = U \qquad (8.5.5)$$

Thay (8.5.4) vào (8.5.5) ta được

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = U \qquad (8.5.6)$$

hay

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U \qquad (8.5.7)$$

Phương trình (8.5.7) là một *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai* đối với $u_C(t)$ với các hệ số là các hằng số.

Nghiệm tổng quát $u_C(t)$ của (8.5.7) có thể coi là tổng của các điện áp xác lập $u_{Cxl}(t)$ và điện áp tự do $u_{Ctd}(t)$ trên điện dung

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t) \qquad (8.5.8)$$

Với nguồn kích thích là một điện áp không đổi theo thời gian thì điện áp xác lập $u_{Cxl}(t)$ phải là một điện áp hằng

$$u_{Cxl}(t) = U_C = \text{const} \qquad (8.5.9)$$

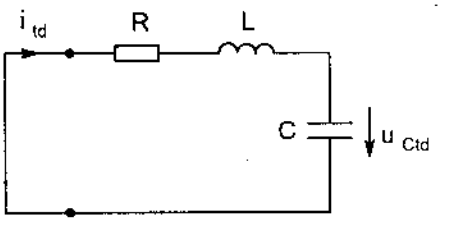
Để xác định trị số của U_C ta thay (8.5.9) vào (8.5.7) và chú ý rằng:

$$\frac{du_{Cxl}(t)}{dt} = \frac{dU_C}{dt} = 0$$

và

$$\frac{du^2_{Cxl}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}U_C = 0$$

ta được $U_C = U$ (8.5.10)



Hình 8.5.2

Thành phần điện áp tự do trên điện dung là nghiệm tổng quát của *phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất* :

$$LC\frac{d^2u_{Ctd}(t)}{dt^2}+RC\frac{du_{Ctd}(t)}{dt}+u_{Ctd}(t)=0 \qquad (8.5.11)$$

tương ứng với mạch RLC không có nguồn kích thích (H.8.5.2).

Ta có thể đặt nghiệm tổng quát của (8.5.11) dưới dạng hàm mũ:

$$u_{Ctd}(t)=Ae^{pt} \qquad (8.5.12)$$

trong đó A là một hằng số gọi là *hằng số tích phân* và p là hằng số gọi là *số mũ đặc trưng*.

Để tìm số mũ đặc trưng p ta thay (8.5.12) vào (8.5.11) chú ý rằng:

$$\frac{du_{C_{td}}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}Ae^{pt}=pAe^{pt} \qquad (8.5.13)$$

và

$$\frac{d^2u_{C_{td}}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}pAe^{pt}=p^2Ae^{pt} \qquad (8.5.14)$$

Thay (8.5.12) - (8.5.14) vào (8.5.11) ta được:

$$LCp^2Ae^{pt}+RCpAe^{pt}+Ae^{pt}=0$$

hay

$$\left(LCp^2+RCp+1\right)Ae^{pt}=0 \qquad (8.5.15)$$

Phương trình (8.5.15) được thoả mãn nếu

$$Ae^{pt}=0 \qquad (8.5.16)$$

hoặc

$$LCp^2+RCp+1=0 \qquad (8.5.17)$$

Vì $e^{pt}\neq 0$ phương trình (8.5.16) sẽ dẫn đến A = 0. Điều này có nghĩa là

$$u_{Ctd}(t)=Ae^{pt}\equiv 0 \qquad (8.5.18)$$

Ta sẽ loại bỏ *nghiệm tầm thường* này.

Phương trình (8.5.17) được gọi là *phương trình đặc trưng* tương ứng với phương trình vi phân thuần nhất (8.5.11), còn có thể viết là

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0 \qquad (8.5.19)$$

Đây là một phương trình bậc hai đối với p. Các nghiệm của (8.5.19) phụ thuộc vào trị số của biệt thức:

$$\Delta'=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}$$

Có 3 trường hợp:

Trường hợp 1 : Nếu $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ thì $\Delta' > 0$ và phương trình đặc trưng (8.5.19) có 2 nghiệm thực khác nhau:

và
$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ p_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned}\right\} \qquad (8.5.20)$$

Trong trường hợp này, nghiệm tổng quát của (8.5.11) có dạng *không dao động*:

$$u_{Ctd}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \qquad (8.5.21)$$

với A_1, A_2 là các hằng số tích phân.

Trường hợp 2 : Nếu $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ thì $\Delta' < 0$ và phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \\ p_2 &= -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (8.5.22)$$

hay

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\alpha + j\omega_0 \\ p_2 &= -\alpha - j\omega_0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.5.23)$$

với
$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad (8.5.24)$$

gọi là *hệ số tắt*.

và
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad (8.5.25)$$

gọi là *tần số dao động riêng*.

Trong trường hợp này nghiệm tổng quát của (8.5.11) có dạng *dao động* (tắt dần):

$$u_{Cld}(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t\right) = Ae^{-\alpha t}\sin\left(\omega_0 t + \beta\right) \qquad (8.5.26)$$

với A_1, A_2 hoặc A, β là các hằng số tích phân.

Trường hợp 3 : Nếu $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ thì $\Delta' = 0$ và phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực bằng nhau hay một nghiệm kép:

$$p_1 = p_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L} \qquad (8.5.27)$$

Trong trường hợp này nghiệm tổng quát của (8.5.11) có dạng *không dao động tới hạn*.

$$u_{Cld}(t) = \left(A_1 + A_2 t\right)e^{-\alpha t} \qquad (8.5.28)$$

với A_1, A_2 là các hằng số tích phân.

Như vậy, tuỳ theo quan hệ giữa các thông số R, L và C của mạch RLC mà điện áp tự do $u_{Cld}(t)$ có thể có biểu thức dạng (8.5.21) hay (8.5.26) hay (8.5.28).

Thay biểu thức của $u_{Cld}(t)$ theo (8.5.21) hoặc (8.5.26) hoặc (8.5.28) tuỳ theo trường hợp cụ thể của một mạch RLC đã cho và biểu thức $u_{Cxl}(t)$ theo (8.5.10) vào (8.5.8) ta sẽ được nghiệm tổng quát của (8.5.7) trong đó có hai hằng số tích phân.

Để xác định hai hằng số tích phân này ta cần biết hai điều kiện đầu là

1) Trị số của điện áp trên điện dung tại thời điểm đóng mở $u_C(0)$.

2) Trị số của đạo hàm cấp một của $u_C(t)$ tại thời điểm đóng mở:

$$u'_C(0) = \left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} \qquad (8.5.29)$$

Theo định luật đóng mở thứ hai ta có

$$u_C(0) = u_C(0-) \qquad (8.5.30)$$

Còn $u'_C(0)$ được suy ra từ (8.5.4) và từ hệ thức

$$i(0) = i_L(0) = i_L(0-) \qquad (8.5.31)$$

theo định luật đóng mở thứ nhất.

Như vậy ta có :

$$u'_C(0) = \frac{i(0)}{C} = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{i_L(0-)}{C} \qquad (8.5.32)$$

Các trị số của $u_C(0-)$ và $i_L(0-)$ hoặc là đã được cho trước hoặc là được tính theo tình trạng của mạch điện trước khi đóng mạch.

Ví dụ, trong trường hợp trước khi đóng mạch RLC vào nguồn điện áp hằng u(t) = U mạch điện chưa được nối với một nguồn điện nào khác thì ta có

$$i_L(0-) = 0$$

$$u_C(0-) = 0$$

và ta có *các điều kiện đầu bằng không*

$$u_C(0)=0 \quad \text{và} \quad u'_C(0)=0 \tag{8.5.33}$$

cho phương trình vi phân (8.5.7).

Sử dụng các điều kiện (8.5.30) và (8.5.32) ta sẽ xác định được các hằng số tích phân trong nghiệm tổng quát $u_C(t)$ của phương trình vi phân (8.5.7).

Cuối cùng, nếu muốn tính dòng điện quá độ i(t) trong mạch ta chỉ cần sử dụng (8.5.4). Muốn tính điện áp quá độ trên điện trở $u_R(t)$ và điện áp quá độ trên điện cảm ta sử dụng (8.5.2) và (8.5.3).

Ví dụ 8.5.1 :

Một mạch RLC với R = 100 Ω, L = 0,1 H được đóng vào nguồn điện áp không đổi u(t) = U = 100 V tại thời điểm t = 0 (H.8.5.1). Giả thiết $u_C(0-) = 0$ và $i_L(0-) = 0$. Tính điện áp quá độ trên điện dung $u_C(t)$ và dòng điện quá độ trong mạch i(t) trong mạch tương ứng với ba trường hợp:

1) C = 47,62 μF

2) C = 20 μF

3) C = 40 μF.

Giải:

Phương trình vi phân đối với điện áp quá độ trên điện dung $u_C(t)$ là:

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U$$

Trong chế độ xác lập hằng ta có

$$i_{xl}(t) = 0$$

$$u_{Cxl}(t) = U_C = U = 100 \text{ V}$$

1) Trường hợp 1 (C = 47,62 μF)

Với R = 100 Ω, L = 0,1 H và C = 47,62 μF, phương trình đặc trưng của mạch là

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

với $$\frac{R}{L} = \frac{100}{0,1} = 10^3 \ \frac{1}{s}$$

và $$\frac{1}{LC} = \frac{1}{0,1 \times 47,62 \times 10^{-6}} = 2,1 \times 10^5 \ \frac{1}{s^2}$$

tức là $$p^2 + 10^3 p + 2,1 \times 10^5 = 0$$

Vì $$R = 100\ \Omega > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0,1}{47,62 \times 10^{-6}}} = 91,65\ \Omega$$

nên phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực khác nhau:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -500 + \sqrt{500^2 - 2,1 \times 10^5} = -500 + 200 = -300 \ \frac{1}{s}$$

và $$p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -500 - 200 = -700 \ \frac{1}{s}$$

Quá trình tự do có tính chất không dao động. Điện áp tự do trên điện dung có biểu thức là

$$u_{Ctd}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$= A_1 e^{-300t} + A_2 e^{-700t}$$

Điện áp quá độ trên điện dung $u_C(t)$ có biểu thức là

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$

$$= U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$= 100 + A_1 e^{-300t} + A_2 e^{-700t}$$

Ta có hai điều kiện đầu là:

1) $u_C(0) = u_C(0-) = 0$

và 2) $u'_C(0) = \left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i(0)}{C}$

với $i(0) = i_L(0) = i_L(0-) = 0$

tức là $u'_C(0) = 0$

Sử dụng hai điều kiện đầu này ta lập được hai phương trình sau đây đối với A_1 và A_2

$$u_C(0) = 100 + A_1 + A_2 = 0$$

và $$u'_C(0) = -300A_1 - 700A_2 = 0$$

Giải hai phương trình này ta được

$$A_1 = -175 \text{ V}$$

và $$A_1 = 75 \text{ V}$$

Vậy điện áp quá độ trên điện dung là

$$u_C(t) = 100 - 175e^{-300t} + 75e^{-700t} \text{ V}$$

Để tìm dòng điện quá độ i(t) trong mạch ta sử dụng quan hệ

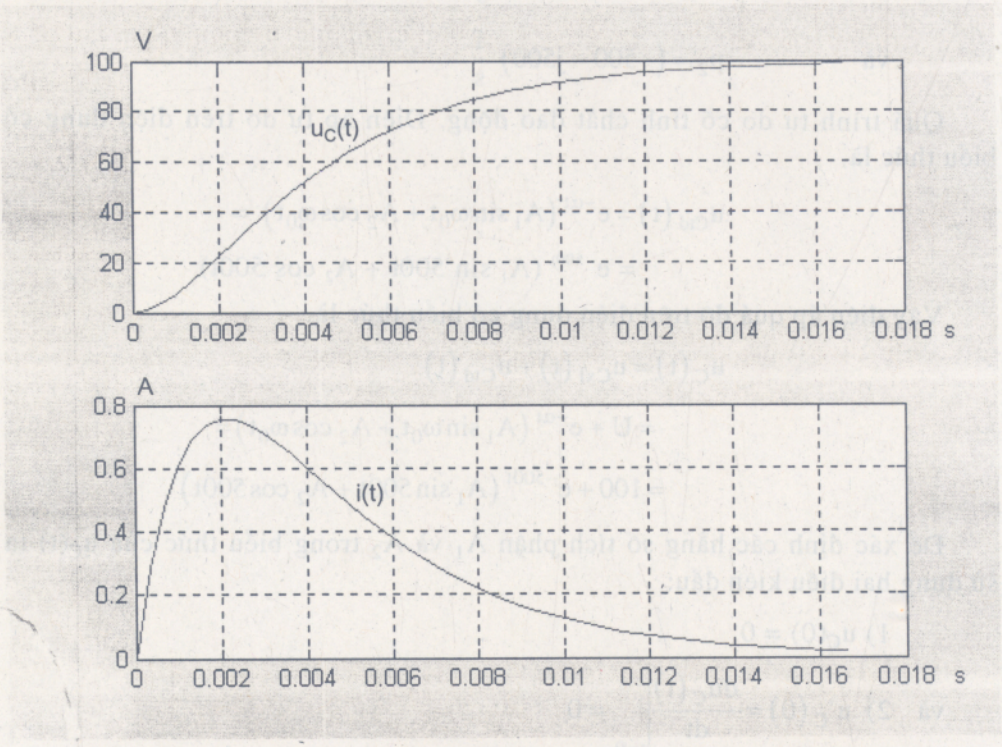
$$i(t) = i_C(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

Ta được

$$i(t) = \left(47{,}62\times10^{-6}\right)\frac{d}{dt}\left[100 - 175e^{-300t} + 75e^{-700t}\right]$$

$$= 2{,}5(e^{-300t} - e^{-700t}) \text{ A}$$

Các đường cong của $u_C(t)$ và i(t) được vẽ trên hình 8.5.3



Hình 8.5.3

2) Trường hợp 2 (C = 20 μF)

Với R = 100 Ω, L = 0,1 H và C = 20 μF phương trình đặc trưng của mạch là

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$= p^2 + 10^3 p + 5\times 10^5 = 0$$

Vì $$R = 100\ \Omega < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0,1}{20\times 10^{-6}}} = 141,42\ \Omega$$

nên phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$$

với $$\alpha = \frac{R}{2L} = 500\ \frac{1}{s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{5\times 10^5 - (500)^2} = 500\ \frac{rad}{s}$$

tức $$p_1 = (-500 + j500)\ \frac{1}{s}$$

và $$p_2 = (-500 - j500)\ \frac{1}{s}$$

Quá trình tự do có tính chất dao động. Điện áp tự do trên điện dung có biểu thức là

$$u_{Ctd}(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t) =$$

$$= e^{-500t}(A_1 \sin 500t + A_2 \cos 500t)$$

Vậy điện áp quá độ trên điện dung có biểu thức là

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$

$$= U + e^{-\alpha t}(A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t) =$$

$$= 100 + e^{-500t}(A_1 \sin 500t + A_2 \cos 500t)$$

Để xác định các hằng số tích phân A_1 và A_2 trong biểu thức của $u_C(t)$ ta sử dụng hai điều kiện đầu:

1) $u_C(0) = 0$

và 2) $u'_C(0) = \left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$

Từ các phương trình

$$u_C(0) = 100 + A_2 = 0$$

và $$u'_C(0) = -500A_2 + 500A_1 = 0$$

ta có $$A_1 = A_2 = -100 \text{ V}$$

Vậy $$u_C(t) = 100 + e^{-500t}\left(-100\sin 500t - 100\cos 500t\right)$$

hay $$u_C(t) = 100 - 100e^{-500t}\left(\sin 500t + \cos 500t\right)$$

$$= 100 - 100\sqrt{2}e^{-500t}\sin\left(500t + 45^0\right) \text{ V}$$

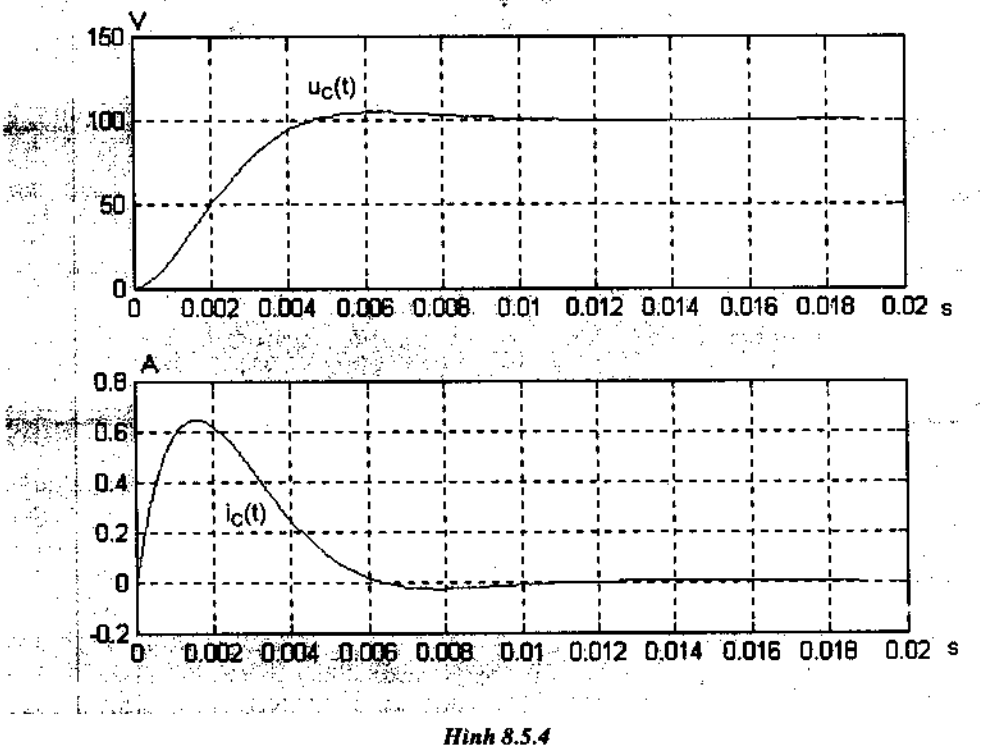
Dòng điện quá độ trong mạch là:

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \left(20\times 10^{-6}\right)\left(-100\right)\left[\left(-500\right)e^{-500t}\left(\sin 500t + \cos 500t\right)\right.$$

$$\left. + e^{-500t}\left(500\cos 500t - 500\sin 500t\right)\right]$$

$$= \left(2e^{-500t}\sin 500t\right) \text{ A}$$

Các đường cong của $u_C(t)$ và $i(t)$ đượcvẽ trên hình 8.5.4



Hình 8.5.4

Vậy điện áp quá độ trên điện dung bằng

$$u_C(t) = U + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} =$$

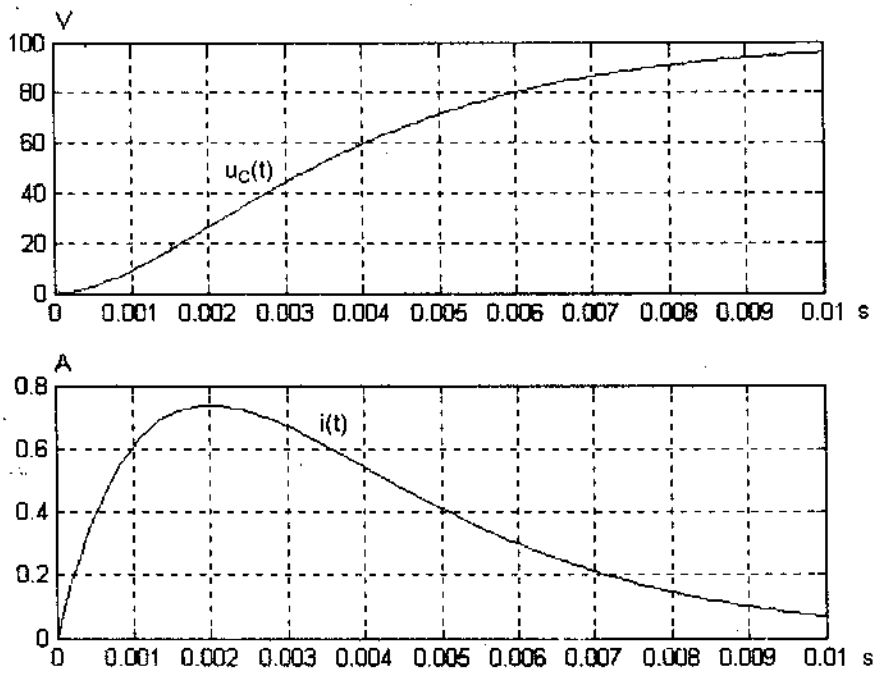
$$= 100 - \left(100 + 5\times 10^{-4} t\right)e^{-500t} \text{ V}$$

Dòng điện quá độ i(t) trong mạch

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \left(40\times 10^{-6}\right)\frac{d}{dt}\left[100 - \left(100 + 5\times 10^{4} t\right)e^{-500t}\right] =$$

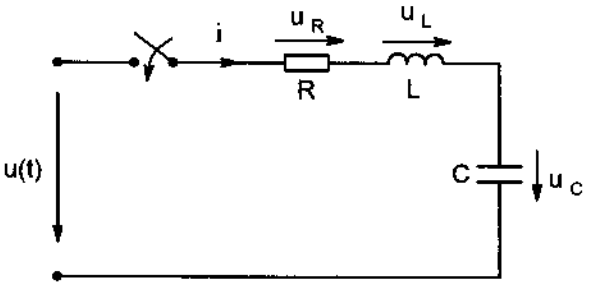
$$= 1000t\, e^{-500t} \text{ A}$$

Các đường cong của $u_C(t)$ và i(t) đượcvẽ trên hình 8.5.5



Hình 8.5.5

8.6. QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ KHI ĐÓNG MẠCH RLC VÀO NGUỒN ĐIỆN ÁP HÌNH SIN



Hình 8.6.1

Giả sử một mạch RLC được đóng vào một nguồn điện áp hình sin

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

ở thời điểm t = 0 (H.8.6.1) thì phương trình vi phân đối với điện áp trên điện dung sẽ là:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \qquad (8.6.1)$$

Nghiệm tổng quát $u_C(t)$ của (8.6.1) có thể coi là tổng của các điện áp xác lập và điện áp tự do trên điện dung

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t) \qquad (8.6.2)$$

Với nguồn kích thích là một điện áp hình sin thì dòng điện xác lập trong mạch sẽ là một dòng điện hình sin có biểu thức là

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) \qquad (8.6.3)$$

với

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

và $$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Điện áp xác lập trên điện dung là một điện áp hình sin có biểu thức là:

$$u_{Cxl}(t) = U_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (8.6.4)$$

với $\quad U_{Cm} = \left(\frac{1}{\omega C}\right) I_m$

Điện áp tự do $u_{Ctd}(t)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất

$$LC\frac{d^2u_{Ctd}(t)}{dt^2} + RC\frac{du_{Ctd}(t)}{dt} + u_{Ctd}(t) = 0 \qquad (8.6.5)$$

Tuỳ theo các nghiệm của phương trình đặc trưng

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (8.6.6)$$

mà $u_{Ctd}(t)$ có thể có một trong các dạng sau:

1) $u_{Ctd}(t) = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}$ nếu $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (8.6.7)

2) $u_{Ctd}(t) = e^{-\alpha t}(A_1\sin\omega_0 t + A_2\cos\omega_0 t) =$

$= Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t + \beta)$ nếu $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (8.6.8)

3) $u_{Ctd}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$ nếu $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (8.6.9)

trong đó $p_1 \neq p_2$ là hai nghiệm thực khác nhau

$-\alpha \pm j\omega_0$ là hai nghiệm phức liên hợp và

$-\alpha$ là một nghiệm kép

của phương trình đặc trưng, còn A_1, A_2 hoặc A và β là các hằng số tích phân.

Thay các biểu thức của $u_{Cxl}(t)$ theo (8.6.4) và của $u_{Ctd}(t)$ theo (8.6.7) hoặc (8.6.8) hoặc (8.6.9) vào (8.6.2) ta sẽ được biểu thức của nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (8.6.1).

Để xác định các hằng số tích phân trong biểu thức của $u_C(t)$ ta cần sử dụng các điều kiện đầu là các trị số $u_C(0) = 0$ và $u'_C(0) = \left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$ như đã nói ở mục 8.5.

Sau khi tính được điện áp quá độ trên điện dung $u_C(t)$ ta có thể tính được dòng điện quá độ i(t) và điện áp quá độ trên điện cảm bằng cách lấy đạo hàm của $u_C(t)$:

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

Ví dụ 8.6.1 :

Tính điện áp quá độ $u_C(t)$ và dòng điện quá độ $i(t)$ trong mạch điện ở ví dụ 8.5.1 khi nguồn điện áp là $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + 30^0\right)$ V

Giải :

1) Trường hợp 1 (C = 47,62 μF)

Phương trình vi phân đối với điện áp quá độ trên điện dung là:

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_m\sin(\omega t + \psi)$$

hay

$$4,762\times10^{-6}\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + 4,762\times10^{-3}\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + 30^0\right)$$

Trong chế độ xác lập hình sin, dòng điện hiệu dụng phức bằng

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} =$$

$$= \frac{100\angle30^0}{100 + j\left(100\pi\times0,1 - \frac{1}{100\pi\times47,62\times10^{-6}}\right)}$$

$$= \frac{100\angle30^0}{100 + j(31,416 - 66,844)} = \frac{100\angle30^0}{100 - j35,428}$$

$$= 0,6121 + j0,7168 = 0,9426\angle49,51^0 \text{ A}$$

Điện áp xác lập hiệu dụng phức trên điện dung bằng:

$$\dot{U}_C = -j\left(\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}$$

$$= (-j66,844)(0,6121 + j0,7168)$$

$$= 47,914 - j40,915 = 63,01\angle -40,50^0 \text{ V}$$

Vậy điện áp xác lập trên điện dung là

$$u_{Cxl}(t) = (63,01)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 40,50^0\right) \text{ V}$$

Phương trình đặc trưng của mạch

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} =$$

$$= p^2 + 10^3 p + 2,1\times 10^5 = 0$$

có hai nghiệm thực khác nhau

$$p_1 = -300\ \frac{1}{s}$$

và $$p_2 = -700\ \frac{1}{s}$$

Quá trình tự do có tính chất không dao động. Điện áp tự do trên điện dung có biểu thức là:

$$u_{Ctd}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$= A_1 e^{-300t} + A_2 e^{-700t}$$

Điện áp quá độ trên điện dung $u_C(t)$ có biểu thức là

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$

$$= 63,01\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 40,50^0\right) + A_1 e^{-300t} + A_2 e^{-700t}$$

Để xác định các hằng số tích phân A_1 và A_2 trong biểu thức của $u_C(t)$ ta sử dụng hai điều kiện đầu là

1) $u_C(0) = 0$

và 2) $u'_C(0) = \left.\dfrac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$

như trong ví dụ 8.5.1.

Ta lập được hai phương trình sau đây đối với A_1 và A_2

$$u_C(0) = (63,01)\sqrt{2}\sin\left(-40,50^0\right) + A_1 + A_2$$

hay $$A_1 + A_2 = 57,872$$

và $$u'_C(0) = (63,01)\sqrt{2}(100\pi)\cos\left(-40,50^0\right) - 300A_1 - 700A_2 = 0$$

hay $\quad 300A_1 + 700A_2 = 2,1287 \times 10^4 \ \ V/s$

Giải hai phương trình này ta được

$$A_1 = 48,059 \text{ V}$$

và $\quad A_2 = 9,8135 \text{ V}$

Vậy điện áp quá độ trên điện dung là

$$u_C(t) = (63,01)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 40,50^0\right) + 48,059e^{-300t} + 9,8135e^{-700t}$$

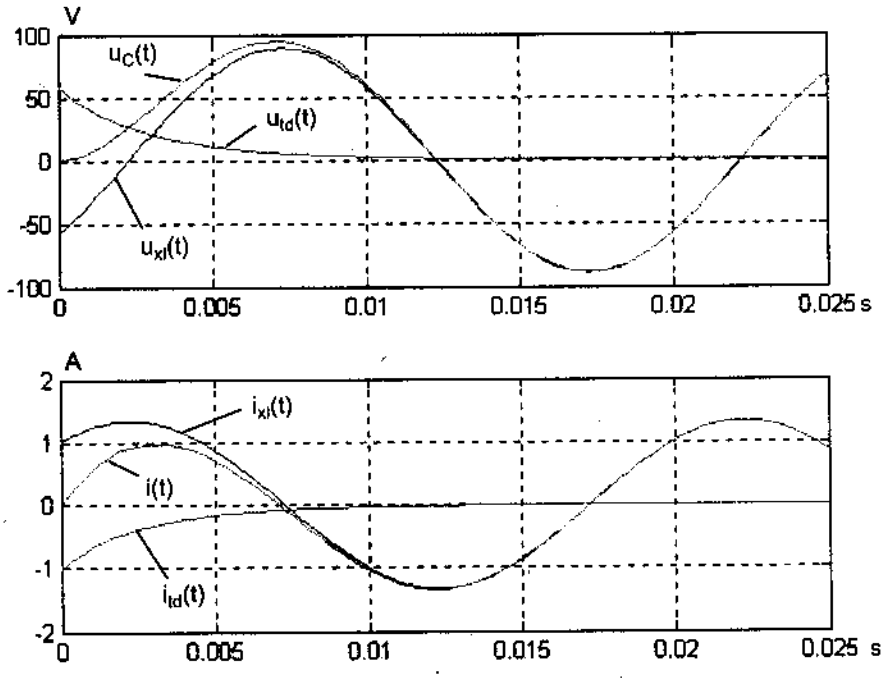
Dòng điện quá độ trong mạch bằng

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$= 47,62 \times 10^{-6}\frac{d}{dt}\left[(63,01)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 40,50^0\right) + 48,059e^{-300t} + 9,8135e^{-700t}\right] =$$

$$= (0,9426)\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - 40,50^0\right) + (-0,68657e^{-300t} - 0,32712e^{-700t}) \text{ A}$$

Các đường cong của $u_C(t)$ và $i(t)$ được vẽ trên hình 8.6.2



Hình 8.6.2

2) Trường hợp 2 (C = 20 μF)

Phương trình vi phân đối với điện áp quá độ trên điện dung là

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=$$

$$=2\times10^{-6}\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+2\times10^{-3}\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=$$

$$=100\sqrt{2}\sin\left(100\pi t+30^0\right)$$

Trong chế độ xác lập hình sin, dòng điện hiệu dụng phức bằng:

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=$$

$$=\frac{100\angle30^0}{100-j127,73}=$$

$$=0,08641+j0,6104=0,6165\angle81,94^0\ \text{A}$$

Điện áp hiệu dụng phức trên điện dung bằng:

$$\dot{U}_C=\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}$$

$$=(-j159,15)(0,08641+j0,6104)$$

$$=(98,11\angle-8,06^0)\ \text{V}$$

Vậy điện áp xác lập trên điện dung là:

$$u_{Cxl}(t)=(98,11)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t-8,06^0\right)\ \text{V}$$

Phương trình đặc trưng của mạch là

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=$$

$$=p^2+10^3p+5\times10^5=0$$

có hai nghiệm phức liên hợp :

$$p_1=(-500+j500)\ \frac{1}{s}$$

và $$p_2=(-500-j500)\ \frac{1}{s}$$

Quá trình tự do có tính chất dao động có hệ số tắt $\alpha = -500\ \frac{1}{s}$ và tần số dao động riêng $\omega_o = 500\ \frac{rad}{s}$

Điện áp tự do trên điện dung có biểu thức là

$$u_{Ctd}(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin\omega_o t + A_2 \cos\omega_o t\right)$$
$$= e^{-500t}\left(A_1 \sin 500t + A_2 \cos 500t\right)$$

Vây điện áp quá độ trên điện dung có biểu thức là:

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + u_{Ctd}(t)$$
$$= (98,11)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 8,06^0\right)$$
$$+ e^{-500t}\left(A_1 \sin 500t + A_2 \cos 500t\right)$$

Để xác định các hằng số tích phân A_1 và A_2 trong biểu thức của $u_C(t)$ ta sử dụng hai điều kiện đầu là

1) $u_C(0) = 0$

2) $u'_C(0) = \left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$

như ở ví dụ 8.5.1.

Ta lập được hai phương trình sau đây đối với A_1 và A_2 :

1) $u_C(0) = (98,11)\sqrt{2}\sin(-8,06^0) + A_2 = 0$

hay $A_2 = 19,454$.

2) $u'_C(0) = (98,11)\sqrt{2}(100\pi)\cos(-8,06^0) + (-500A_2 + 500A_1) = 0$

hay $500A_1 - 500A_2 = -4,3158\times10^4$ V/s.

Ta giải được

$A_1 = -66,862$ V

$A_2 = 19,454$ V

Vậy điện áp quá độ trên điện dung bằng

$$u_C(t) = (98,11)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 8,06^0\right) +$$
$$+ e^{-500t}(-66,862\sin 500t + 19,454\cos 500t)\ \text{V}$$

hay

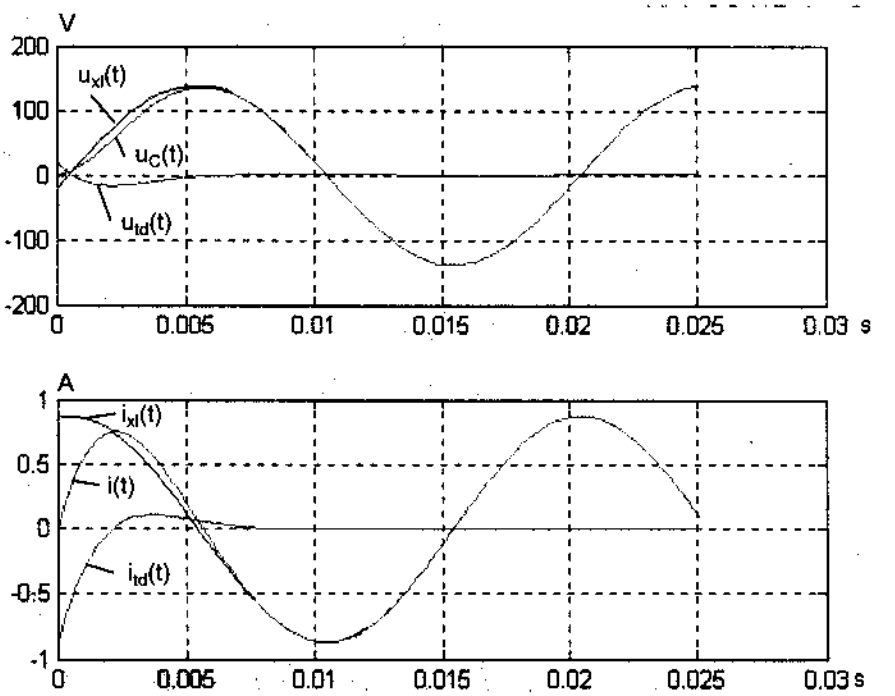
$$u_C(t) = (98,11)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 8,06^0\right) +$$
$$+ 69,635e^{-500t}\sin(500t + 163,78^0)\ \text{V}$$

Dòng điện quá độ trong mạch bằng

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$= (0,6165)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + 81,94^0\right) + 0,9848e^{-500t}\sin(500t - 61,22^0)\ \text{A}$$

Các đường cong của $u_C(t)$ và $i(t)$ được vẽ trên hình 8.6.3



Hình 8.6.3

3) Trường hợp 3 (C = 40 μF)

Phương trình vi phân đối với điện áp quá độ trên điện dung là

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=$$

$$=4\times10^{-6}\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+4\times10^{-3}\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=100\sqrt{2}\sin\left(100\pi t+30^0\right)$$

Trong chế độ xác lập hình sin dòng điện hiệu dụng phức bằng:

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{100\angle30^0}{100-j48,161}$$

$$=(0,5075+j0,7444)=0,9010\angle55,72^0\ \text{A}$$

Điện áp hiệu dụng phức trên điện dung bằng :

$$\dot{U}_C=\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}$$

$$=(-j79,577)(0,5075+j0,7444)$$

$$=(59,237-j40,385)=71,694\angle-34,28^0\ \text{V}$$

Điện áp xác lập trên điện dung bằng

$$u_{Cxl}(t)=(71,694)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t-34,28^0\right)\ \text{V}$$

Phương trình đặc trưng của mạch là

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=$$

$$=p^2+10^3p+2,5\times10^5=0$$

có hai nghiệm thực bằng nhau (hay một nghiệm kép)

$$p_1=p_2=-\alpha=-500\ \frac{1}{s}$$

Quá trình tự do có tính chất không dao động tới hạn.

Điện áp tự do trên điện dung có biểu thức là

$$u_{Ctd}(t)=(A_1+A_2t)e^{-\alpha t}=(A_1+A_2t)e^{-500t}$$

Vậy điện áp quá độ trên điện dung có biểu thức là:

$$u_C(t)=u_{Cxl}(t)+u_{Ctd}(t)$$

$$=(71,6939)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t-34,28^0\right)+(A_1+A_2t)e^{-500t}$$

Sử dụng các điều kiện đầu:

1) $u_C(0) = 0$

2) $u'_C(0) = \left.\dfrac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$

ta xác định được các hằng số tích phân

$$A_1 = 57,107 \text{ V}$$

và $$A_2 = 2,2335\times10^3 \text{ V/s}$$

Vậy, điện áp quá độ trên điện dung bằng

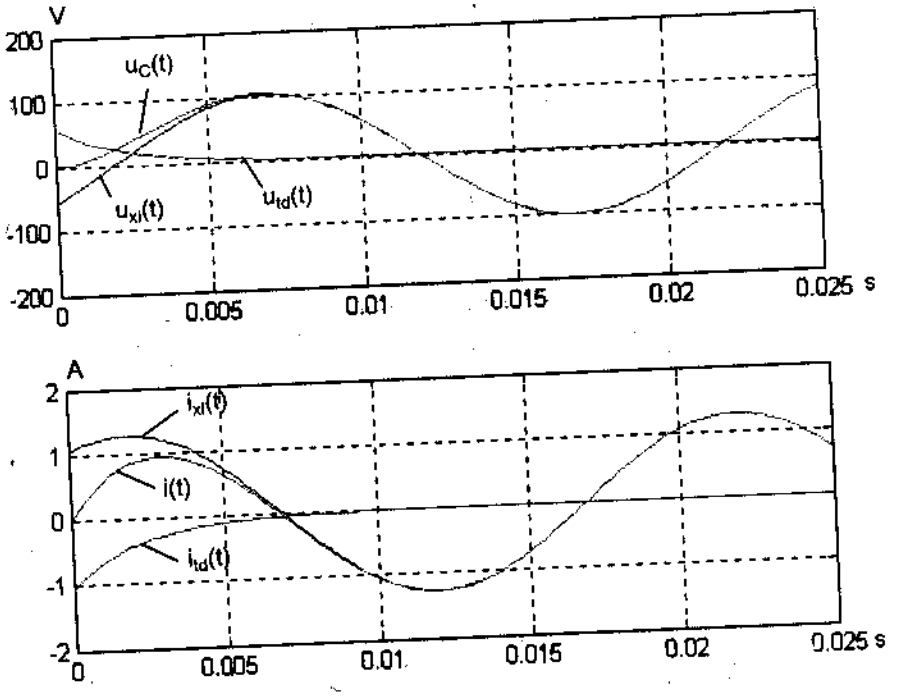
$$u_C(t) = (71,694)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - 34,28^0\right) + \left(57,107 + 2,2335\times10^3 t\right)e^{-500t} \text{ V}$$

Dòng điện quá độ trong mạch bằng

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$= (0,9010)\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + 55,72^0\right) - (1,0528 + 44,67t)e^{-500t} \text{ A}$$

Các đường cong của $u_C(t)$ và $i(t)$ được vẽ trên hình 8.6.4.



Hình 8.6.4

CÂU HỎI KIỂM TRA

8.1. Viết phương trình vi phân cho quá trình quá độ khi đóng mạch RL vào một nguồn điện áp không đổi. Vì sao phương trình này được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp một với các hệ số là các hằng số.

8.2. Tính dòng điện xác lập trong mạch RL với các nguồn áp không đổi.

8.3. Phương trình vi phân đối với *dòng điện tự do* trong mạch RL được lập như thế nào ? Tại sao phương trình này được gọi là *phương trình vi phân thuần nhất.*

8.4. Phương trình đặc trưng của mạch RL có dạng như thế nào. Nghiệm của phương trình này gọi là gì.

8.5. Nghiệm tổng quát của dòng điện tự do trong mạch RL có dạng như thế nào ? Hằng số thời gian của mạch RL là gì?

8.6. Điều kiện đầu của quá trình quá độ trong mạch RL là gì ?

8.7. Tại sao dòng điện trong điện cảm phải liên tục (tức không biến thiên nảy vọt) tại thời điểm đóng mở ?

8.8. Làm thế nào để xác định hằng số tích phân trong biểu thức của dòng điện quá độ trong mạch RL. Cho một số ví dụ.

8.9. Sau khi đóng mạch RL một thời gian bằng bao nhiêu thì dòng điện quá độ đạt tới 95% trị số dòng điện xác lập. Giải thích hiện tượng này.

8.10. Sau khi đóng mạch RL một thời gian bằng bao nhiêu thì dòng điện quá độ đạt tới 99% trị số dòng điện xác lập. Giải thích hiện tượng này.

8.11. Việc tính dòng điện quá độ trong mạch RL khi đóng mạch vào một nguồn điện áp hình sin có điểm gì khác so với việc tính dòng điện quá độ trong mạch RL khi đóng mạch vào một nguồn điện áp không đổi.

8.12. Lặp lại các câu hỏi (8-1) ÷ (8-11) cho mạch RC và thay dòng điện quá độ trong điện cảm bằng điện áp quá độ trên điện dung.

8.13. Viết phương trình vi phân đối với $u_C(t)$ (hoặc $i_L(t)$) của mạch RLC khi đóng mạch vào một nguồn điện áp không đổi (hoặc điện áp hình sin).

8.14. Dòng điện xác lập trong điện cảm và điện áp xác lập trên điện dung trong mạch RLC với nguồn điện áp không đổi hoặc nguồn điện áp hình sin được tính bằng cách nào ? Cho một số ví dụ.

8.15. Phương trình vi phân đối với dòng điện tự do trong điện cảm hoặc điện áp tự do trên điện dung trong mạch RLC được lập bằng cách nào ?

8.16. Phương trình đặc trưng của mạch RLC có dạng như thế nào. Với điều kiện gì đối với các thông số R, L, C thì quá trình tự do trong mạch RLC sẽ có dạng không dao động, dao động hoặc không dao động tới hạn. Cho một số ví dụ.

8.17. Các điều kiện đầu của quá trình quá độ của mạch RLC là gì ? Chúng được xác định như thế nào ? Cho một số ví dụ.

8.18. Làm thế nào để xác định các hằng số tích phân của điện áp trên điện dung (hoặc của dòng điện trong điện cảm) của mạch RLC ? Cho một số ví dụ.

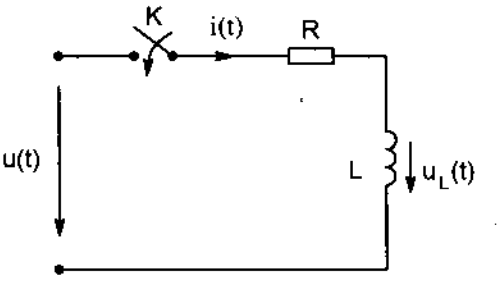
BÀI TẬP

BT.8.1. Cho mạch điện ở H.BT.8.1 với

R = 50 Ω; L = 0,2 H; u(t) = U = 50 V.

Tính dòng điện quá độ i(t) và điện áp quá độ trên điện cảm $u_L(t)$ nếu khoá K đóng mạch tại thời điểm t = 0. Giả thiết $i_L(0-) = 0$.

Tại các thời điểm nào dòng điện tự do giảm đến 5% và 1% trị số ban đầu của nó. Vẽ các đồ thị theo thời gian của các dòng điện xác lập, tự do và quá độ.



H.BT. 8.1

BT.8.2. Giải lại bài tập BT.8.1 với $u(t) = 50\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ V với f = 50 Hz.

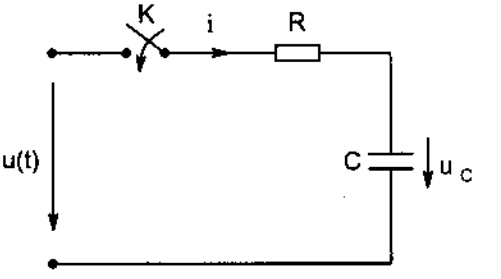
BT.8.3. Cho mạch điện ở H.BT.8.3 với

R = 100 Ω ; C = 10 μF

và u(t) = U = 100 V.

Tính dòng điện quá độ i(t) và điện áp quá độ trên điện dung $u_C(t)$ nếu khoá K đóng mạch tại thời điểm t = 0. Giả thiết $u_C(0-) = 0$.

Tại các thời điểm nào dòng điện tự do và điện áp tự do trên điện dung giảm đến 5% và 1% trị số ban đầu của nó.



H.BT8.3

Vẽ các đồ thị theo thời gian của các điện áp xác lập, tự do và quá độ trên điện dung.

BT.8.4. Giải lại bài tập BT.8.3 với $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ V với f = 50 Hz.

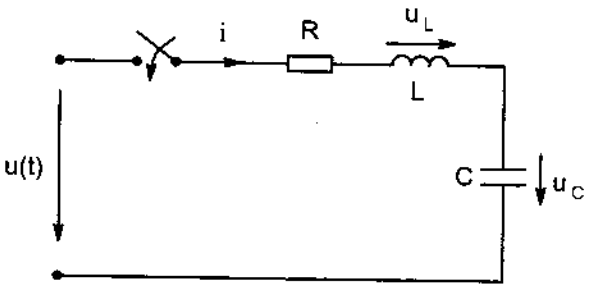
BT.8.5. Cho mạch điện ở H.BT.8.5 với

R = 250 Ω ; L = 0,1 H ; C = 10 μF và u(t) = U = 100 V.

Tính dòng điện qúa độ i(t), điện áp quá độ trên điện cảm $u_L(t)$ và điện áp quá độ trên điện dung $u_C(t)$ nếu khoá K đóng mạch tại thời điểm t = 0.

Giả thiết $i_L(0-) = 0$ và $u_C(0-) = 0$.

Vẽ các đường cong $i_L(t)$, $u_L(t)$ và $u_C(t)$.



H.BT.8.5

BT.8.6. Giải lại bài tập BT.8.5 với R = 200 Ω.

BT.8.7. Giải lại bài tập BT.8.5 với R = 100 Ω.

BT.8.8. Giải lại bài tập BT.8.5 với $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$ V

BT.8.9. Giải lại bài tập BT.8.6 với $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$ V

BT.8.10. Giải lại bài tập BT.8.7 với $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$ V

PHỤ LỤC 1

TÍNH CÁC SỐ PHỨC BẰNG MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ BỎ TÚI (SCIENTIFIC CALCULATOR)

Trong phụ lục này hướng dẫn sử dụng máy tính điện tử loại bỏ túi (scientific calculator) để tính các số phức và giải hệ phương trình bậc nhất với các hệ số phức.

Có nhiều loại máy tính điện tử bỏ túi cho phép thực hiện các phép tính với các số phức, ví dụ như CASIO fx - 570MS, CASIO fx - 2300, SHARP EL - 506 v.v...

Cho đến nay, máy CASIO fx - 570MS cho phép thực hiện các phép tính toán với các số phức một cách thuận lợi nên dưới đây sẽ hướng dẫn cách sử dụng máy này.

PL 1 - 1. Đổi một số phức từ dạng đại số *a + jb* sang dạng toạ độ cực *r∠θ*

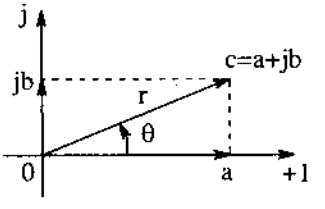
Một số phức có thể viết dưới dạng đại số c = a + jb, trong đó a là phần thực (real part) và b là phần ảo (imaginary part) (H.PL.1.1.1).

Người ta viết

a = Re{c},

b = Im{c}.

Số phức c = a + jb cũng có thể viết dưới dạng toạ độ cực (polar coordinates)



H.PL.1.1.1

$$c = re^{j\theta} = r\angle\theta$$

trong đó: r là bán kính véctơ, gọi là mô - đuyn (modulus) và θ là ac - guy - măng (argument).

Giữa a, b và r, θ có các quan hệ sau đây:

$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta,$$

và

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \text{arctg}\frac{b}{a}$$

Ví dụ PL 1.1.1. Với số phức c = 4 + j3 ta có a = 4, b = 3.

Vậy $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

và $\theta = \text{arctg}\frac{3}{4} = 36,87^0$

Do đó $4 + j3 = 5\angle 36,87^0$

Ví dụ PL.1.1.2. Với số phức $c = 5\angle 30^0$ ta có r = 5, $\theta = 30^0$

Vậy $a = 5\cos 30^0 = 4,3301$

và $b = 5\sin 30^0 = 2,5000$

Do đó $5\angle 30^0 = 4,3301 + j2,5000$.

Để thực hiện phép biến đổi một số phức từ dạng đại số sang dạng toạ độ độc cực bằng máy tính CASIO fx - 570MS ta tiến hành như sau:

- Trước tiên, ta cần thực hiện một số thao tác để chọn chế độ (MODE) cho máy tính.

- Sau khi ấn nút [ON] để cho máy tính bắt đầu hoạt động, ta ấn nút [MODE], trên màn hình của máy tính sẽ xuất hiện các thông tin sau đây:

COMP	CMPLX
1	2

Ta ấn vào nút [2] để chọn mode CMPLX (viết tắt của COMPLEX, có nghĩa là *số phức*). Trên màn hình sẽ xuất hiện chữ CMPLX báo rằng máy tính đã chuyển sang chế độ tính với các số phức.

- Tiếp theo ta ấn nút [MODE] bốn lần liên tiếp tức

[MODE] [MODE] [MODE] [MODE]

để cho trên màn hình xuất hiện các thông tin sau đây:

Deg	Rad	Gra
1	2	3

Ta sẽ ấn nút [1] để chọn Deg (viết tắt của *Degree* có nghĩa là "độ" tức là các góc sẽ được tính bằng độ và các phần lẻ thập phân của độ). Trên màn hình của máy tính sẽ xuất hiện chữ [D] (có nghĩa là Degree).

- Tiếp theo ta lại ấn nút [MODE] năm lần liên tiếp để màn hình xuất hiện các thông tin sau đây:

Fix	Sci	Norm
1	2	3

Ta sẽ ấn nút [2] để chọn "SCI", viết tắt của "Scientific", có nghĩa là chọn cách biểu diễn số dưới dạng scientific notation. Bây giờ, trên màn hình sẽ xuất hiện thông tin

Sci 0 ÷ 9 ?

Ta sẽ ấn nút [5] để chọn cách biểu diễn số với năm chữ số có nghĩa (5 significant digits) để cho các kết quả tính không có quá nhiều chữ số mà vẫn đảm bảo độ chính xác khá cao.

Sau khi chọn các chế độ (MODE) cho máy tính như trên, ta có thể bắt đầu tính toán với các số phức.

Để đổi số phức 4 + j3 sang dạng $r\angle\theta$, ta thực hiện các thao tác liên tiếp sau đây:

4 [+] 3 [i] [SHIFT] [r∠θ] [=]

Ta sẽ được kết quả sau đây hiện trên màn hình

4+3i >r∠θ 5.0000 ·10^00

tức là r = 5,0000

Để tìm góc θ ta ấn

[SHIFT] [Re ↔ Im]

ta sẽ được kết quả sau đây xuất hiện trên màn hình

4+3i >r∠θ ∠ 3.6870 ·10^01

tức là $\theta = 36{,}870^0$.

Vậy $4 + j3 = 5{,}000\angle 36{,}870^0$

Dưới đây là một số ví dụ về đổi số phức từ dạng a + jb sang dạng $r\angle\theta$:

$4 + j3 = 5{,}0000\angle 36{,}870^0$

$4 - j3 = 5{,}0000\angle -36{,}870^0$

$-4 + j3 = 5{,}0000\angle 143{,}13^0$

$-4 - j3 = 5{,}0000\angle -143{,}13^0$

Hình H.PL.1.1.2 minh hoạ các trường hợp này. Cần chú ý đối với trường hợp số phức - 4 - j3 :

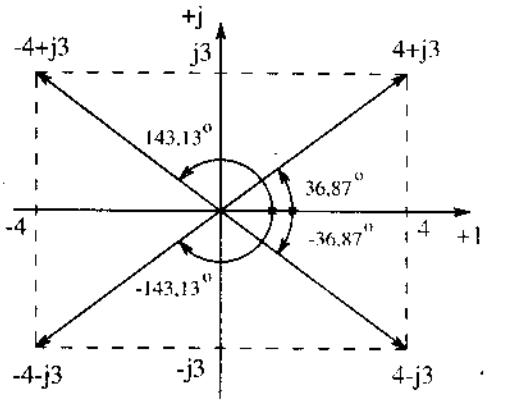
Ta có thể viết:

$$-4 - j3 = -(4 + j3) =$$

$$= -\left(5\angle 36,870^0\right) =$$

$$= 5\angle\left(36,870^0 - 180^0\right) =$$

$$= 5\angle -143,13^0$$



H.PL.1.1.2

Đôi khi người ta cũng viết:

$$-4 - j3 = -5\angle 36,870^0$$

thay cho cách viết chặt chẽ:

$$-4 - j3 = -(4 + j3) = -\left(5\angle 36,870^0\right)$$

Trong trường hợp tổng quát ta có:

$$-(r\angle\theta) = r\angle\left(\theta \pm 180^0\right)$$

Tuỳ theo trị số của θ ta sẽ chọn góc $\theta + 180^0$ hay góc $\theta - 180^0$ sao cho kết quả sẽ có trị số tuyệt đối bé hơn 180^0.

Ví dụ :

$$-\left(5\angle 60^0\right) = 5\angle\left(60^0 - 180^0\right) = 5\angle -120^0 = -2,5000 - j4,3301$$

$$-\left(5\angle -60^0\right) = 5\angle\left(-60^0 + 180^0\right) = 5\angle 120^0 = -2,5000 + j4,3301$$

Bài tập PL.1.1

Đổi các số phức sau đây từ dạng đại số (a + jb) sang dạng toạ độ độc cực $r\angle\theta$:

1) 2 + j3
2) 3 - j8
3) - 5 + j4
4) -4 - j4
5) 0 - j12

Đáp số:

1) $3,6056\angle 56,310^0$

2) $8,5440\angle -69,444^0$

3) $6,4031\angle 141,34^0$

4) $5,6569\angle -135,00^0$

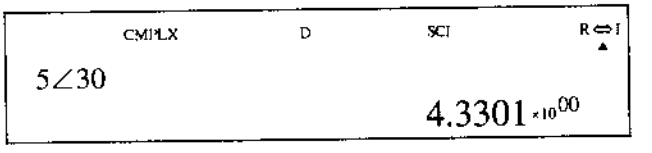
5) $12\angle -90^0$

PL 1 - 2. Đổi một số phức từ dạng toạ độ độc cực $r\angle\theta$ sang dạng đại số $a + jb$

Ví dụ PL.1.2.1 Để đổi số phức $5\angle 30^0$ sang dạng đại số bằng máy tính CASIO fx - 570MS ta thực hiện các thao tác sau đây (sau khi đã thực hiện việc chọn các chế độ CMPLX, D, Sci như đã nói ở phần trên).

5 [SHIFT] [∠] 30 [=]

Trên màn hình sẽ xuất hiện các thông tin sau đây

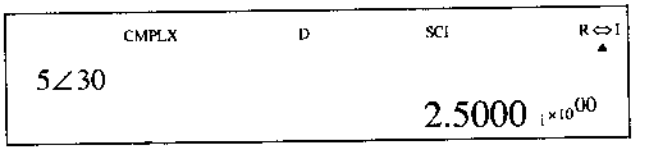


tức là phần thực (a) = 4,3301.

Để tìm phần ảo (b) ta ấn các nút

[SHIFT] [Re ↔ Im]

ta sẽ được màn hình với các thông tin sau đây:



tức là b = 2,5000

Vậy $5\angle 30 = 4,3301 + j2,5000$

Dưới đây là một số ví dụ khác:

$5\angle -30^0 = 4,3301 - j2,5000$

$-5\angle 30^0 = -\left(5\angle 30^0\right) = -\left(4,3301 + j2,5000\right) = -4,3301 - j2,5000$

$$-5\angle -30^0 = -\left(5\angle -30^0\right) = -\left(4{,}3301 - j2{,}5000\right) = -4{,}3301 + j2{,}5000$$

hay $-5\angle -30^0 = 5\angle\left(-30^0 + 180^0\right) = 5\angle 150^0 = -4{,}3301 + j2{,}5000$

Bài tập PL.1 - 2

Đổi các số phức sau đây từ dạng $r\angle\theta$ sang dạng a + jb

1) $10\angle 45^0$

2) $15\angle -120^0$

3) $-20\angle 60^0$

4) $40\angle 210^0$

5) $30\angle -90^0$

Đáp số:

1) 7,0711 + j7,0711

2) - 7,5000 - j12,990

3) - 10,000 - j17,321

4) -34,641 -j20,000

5) -j30.

PL.1 - 3. Cộng và trừ các số phức

Để cộng và trừ các số phức bằng máy tính CASIO fx - 570MS ta làm như sau (sau khi đã chọn các chế độ CMPLX, D và Sci).

Ví dụ PL.1.3.1

Để tính (5 + j4) + (6 - j10) ta thực hiện các thao tác

5 [+] 4 [i] [+] 6 [−] 10 [i] [=]

Ta sẽ có với các thông tin sau đây

CMPLX	D	SCI	R⇔I ▲
5+4i+6−10i			
			$1.1000_{\times 10^{01}}$

tức là phần thực (a) = 11,000.

Để được phần ảo (b) ta thực hiện các thao tác

SHIFT | Re ↔ Im

ta sẽ được màn hình với các thông tin sau

CMPLX	D	SCI	R⇔I
$5+4i+6-10i$			
		$-6.0000_{i\times10^{00}}$	

tức là b = - 6,0000

Vậy (5 + j4) + (6 - j10) = 11 - j6

Ví dụ PL.1.3.2

Để tính $10\angle60^0+5\angle45^0$ bằng máy tính CASIO fx - 570MS ta thực hiện các thao tác sau đây:

10 | SHIFT | ∠ | 60 | + | 5 | SHIFT | ∠ | 45 | =

ta sẽ được màn hình với các thông tin sau đây

CMPLX	D	SCI	R⇔I
$10\angle60+5\angle45$			
		$8.5355_{\times10^{00}}$	

tức là phần thực (a) = 8,5355.

Để được phần ảo (b) ta thực hiện thao tác

SHIFT | Re ↔ Im

ta sẽ được màn hình với các thông tin sau

CMPLX	D	SCI	R⇔I
$10\angle60+5\angle45$			
		$1.2196_{i\times10^{01}}$	

tức là phần ảo (b) = 12,196

Vậy $10\angle60^0+5\angle45^0=8,5355+j12,196$

Phép trừ hai số phức cũng được thực hiện tương tự như trên chỉ cần thay việc ấn nút | + | đối với phép cộng bằng việc ấn nút | − | đối với phép trừ và phải dùng dấu mở ngoặc đơn và đóng ngoặc đơn sau phép trừ.

Ví dụ PL.1.3.3

Để tính 5 + j4 - (6 - j10) ta cần thực hiện các thao tác sau

5 [+] 4 [i] [−] [(] 6 − 10 [i] [)] [=]

để được a = -1,000 rồi thực hiện các thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được b = 14,000.

Vậy 5 + j4 - (6 - j10) = -1 + j14

Ví dụ PL.1.3.4

Để tính $10\angle 60^0 - 5\angle 45^0$ ta thực hiện các thao tác

10 [SHIFT] [∠] 60 [−] 5 [SHIFT] [∠] 45 [=]

để được a = 1,4645 rồi thực hiện các thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được b = 5,1247

Vậy $10\angle 60^0 - 5\angle 45^0 = 1{,}4645 + j5{,}1247$

Bài tập PL.1.3

Thực hiện các phép cộng (hoặc trừ) các số phức sau đây:

1) $(5 - j2) + (6\angle 30^0)$

2) $(4\angle 60^0) - (2 - j3)$

3) $(5\angle 30^0) + (8\angle -45^0)$

4) $(10\angle 45^0) - (18\angle -30^0)$

5) $-(15\angle -30^0) - (20\angle -120^0)$

Đáp số:

1) 10,196 + j1,000

2) 0,0000 + j6,4641

3) 9,9870 - j3,1569

4) - 8,5174 + j16,071

5) - 2,9904 + j24,821

PL.1.4. Nhân hai số phức

Để nhân hai số phức bằng máy tính CASIO fx - 570MS ta làm như sau (sau khi đã chọn các chế độ CMPLX, D và SCI).

Ví dụ PL.1.4.1

Để tính (5 + j4)×(6 - j10) ta thực hiện các thao tác sau đây

[( ] 5 [+] 4 [i] [ )] [×] [( ] 6 − 10 [i] [ )] [=]

ta sẽ được phần thực a = 70,000.

Tiếp theo, ta thực hiện thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được phần ảo b = -26,000

Vậy (5 + j4)×(6 - j10) = 70 - j26.

Ví dụ PL.1.4.2

Để tính $(5+j4)\times\left(6\angle 30^0\right)$ ta thực hiện các thao tác sau đây

[( ] 5 [+] 4 [i] [ )] [×] [( ] 6 [SHIFT] [∠] 30 [ )] [=]

để được phần thực a = 13,981

Tiếp theo, ta thực hiện thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được phần ảo b = 35,785

Vậy $(5+j4)\times\left(6\angle 30^0\right)$ = 13,981 + j35,785.

Ví dụ PL.1.4.3

Để tính $\left(100\angle 30^0\right)\times\left(2\angle -90^0\right)$ ta thực hiện các thao tác sau đây

[( ] 100 [SHIFT] [∠] 30 [ )] [×]

[( ] 2 [SHIFT] [∠] [−] 90 [ )] [=]

để được phần thực a = 100,00

Tiếp theo, ta thực hiện thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được phần ảo b = -173,21

Vậy $\left(100\angle 30^0\right)\times\left(2\angle -90^0\right)$ = 100,00 - j173,21

Bài tập PL.1.4

Tìm các tích số của các số phức sau đây

1) $(5+j2)\times(3-j4)$

2) $(5\angle 45^0)\times(1-j1)$

3) $(10+j5)\times(2\angle -90^0)$

4) $(20\angle -60^0)\times(3\angle 120^0)$

5) $(100\angle -30^0)\times(-j0,1)$

Đáp số:

1) 23,000 - j14,000

2) 7,0711 + j0,0000

3) 10,000 - j20,000

4) 30,000 + j51,962

5) - 5 - j8,6603

PL.1.5. Chia một số phức cho một số phức

Để chia một số phức này cho một số phức khác bằng máy tính CASIO fx - 570MS ta làm như sau (sau khi đã chọn các chế độ CMPLX, D và SCI).

Ví dụ PL.1.5.1

Để tính (5 + j4)/(6 - j10) ta thực hiện các thao tác sau đây

[( ] 5 [+] 4 [i] [ )] [÷] [( ] 6 [−] 10 [i] [ )] [=]

ta sẽ được phần thực a = -7,3529 × 10^{-2}.

Tiếp theo ta thực hiện thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được phần ảo b = - 5,4412× 10^{-1}.

Vậy (5 + j4)/(6 - j10) = - 0,073529 - j0,54412

Ví dụ PL.1.5.2

Để tính $(5+j4)/(6\angle 30^0)$ ta thực hiện các thao tác sau đây

[( ] 5 [+] 4 [i] [ )] [÷] [( ] 6 [SHIFT] [∠] 30 [ )] [=]

ta sẽ được phần thực a = 1,0550

Tiếp theo ta thực hiện thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được phần ảo b = 0,16068

Vậy $(5+j4)/(6\angle 30^0) = 1,0550 + j0,16068$

Ví dụ PL.1.5.3

Để tính $(100\angle 30^0)/(2\angle -90^0)$ ta thực hiện các thao tác sau đây

[( ] 100 [SHIFT] [∠] 30 [ )] [÷]

[( ] 2 [SHIFT] [∠] [−] 90 [ )] [=]

để được phần thực a = -25,000

Tiếp theo ta thực hiện thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được phần ảo b = 43,301

Vậy $(100\angle 30^0)/(2\angle -90^0) = -25 + j43,301$

Bài tập PL.1.5

Tìm các thương số của các số phức sau đây:

1) $(5+j2)/(3-j4)$

2) $(5\angle 45^0)/(1-j1)$

3) $(10+j5)/(2\angle -90^0)$

4) $(20\angle -60^0)/(3\angle 120^0)$

5) $(100\angle -30^0)/(-j0,1)$

Đáp số:

1) 0,28000 + j1,0400

2) 0,0000 + j3,5355

3) - 2,5000 + j5,0000

4) - 6,6667 + j0,0000

5) 500 + j866,03

PL.1.6. Giải hệ phương trình bậc nhất với các hệ số phức

Máy tính CASIO fx - 570MS có chức năng EQN (viết tắt của Equations) cho phép giải hệ phương trình bậc nhất *với các hệ số là các số thực*.

Để giải hệ phương trình bậc nhất *với các hệ số phức* ta cần phải sử dụng các chức năng cộng, trừ, nhân và chia các số phức đã nói ở phần trên, kết hợp với quy tắc Cramer hoặc phương pháp thế hoặc phương pháp khử ẩn số.

Dưới đây trình bày việc giải một hệ hai phương trình hai ẩn số với các hệ số phức qua một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ PL.1.6.1

Giải hệ phương trình bậc nhất

$$(5+j3)\dot{I}_1 + (2-j1)\dot{I}_2 = 30\angle 0^0 \qquad (1)$$

$$(-j1)\dot{I}_1 + (2-j2)\dot{I}_2 = 0 \qquad (2)$$

1) Phương pháp áp dụng quy tắc Cramer

Theo quy tắc Cramer ta có

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ và } \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

trong đó $\Delta = \begin{vmatrix} 5+j3 & 2-j1 \\ -j1 & 2-j2 \end{vmatrix}$

$$= (5+j3)(2-j2) - (-j1)(2-j1) = 17 - j2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 2-j1 \\ 0 & 2-j2 \end{vmatrix}$$

$$= 30(2-j2) = 60 - j60$$

và $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5+j3 & 30 \\ -j1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -(-j1)(30) = j30$$

Vậy $\dot{I}_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{60-j60}{17-j2}$

$$= 3,8908 - j3,0717 = 4,9572\angle -38,290^0$$

và $\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{j30}{17 - j2} = -0,20478 + j1,7406 = 1,7526\angle 96,710^0$

2) Phương pháp thế

Từ phương trình (2) ta rút ra:

$$\dot{I}_2 = \frac{(j1)}{(2 - j2)}\dot{I}_1 \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được

$$(5 + j3)\dot{I}_1 + \frac{(2 - j1)(j1)}{(2 - j2)}\dot{I}_1 = 30\angle 0^0$$

hay $$\left[(5 + j3) + \frac{(2 - j1)(j1)}{(2 - j2)}\right]\dot{I}_1 = 30\angle 0^0$$

hay $$\left[(5 + j3) + (-0,25 + j0,75)\right]\dot{I}_1 = 30\angle 0^0$$

hay $$(4,7500 + j3,7500)\dot{I}_1 = 30\angle 0^0$$

Vậy $$\dot{I}_1 = \frac{30\angle 0^0}{(4,7500 + j3,7500)}$$

$$= 3,8908 - j3,0717 = 4,9572\angle -38,290^0 \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta có

$$\dot{I}_2 = \frac{(j1)}{(2 - j2)}(3,8908 - j3,0717)$$

$$= -0,20478 + j1,7406 = 1,7526\angle 96,710^0$$

3) Phương pháp khử ẩn (Gauss elimination method)

Chia phương trình (1) cho (5 + j3) ta được

$$\dot{I}_1 + \frac{(2 - j1)}{(5 + j3)}\dot{I}_2 = \frac{30}{5 + j3} \qquad (3')$$

Tiếp theo ta nhân (3') với -(-j1) rồi cộng vào phương trình (2) ta sẽ được phương trình:

$$0 \times \dot{I}_1 + \left[(2 - j2) + (j1) \times \frac{(2 - j1)}{(5 + j3)}\right]\dot{I}_2 = 30 \times \frac{(j1)}{(5 + j3)}$$

hay $\left[(2-j2)+(0,32353+j0,20588)\right]\dot{I}_2 = 2,6471+j4,4118$

hay $(2,3235-j1,7941)\dot{I}_2 = 2,6471+j4,4118$

Từ đó $\dot{I}_2 = \dfrac{2,6471+j4,4118}{2,3235-j1,7941} = -0,20478+j1,7407$

$$= 1,7526\angle 96,710^0 \qquad (4')$$

Thay (4') vào (1) ta có

$$(5+j3)\dot{I}_1 = \left(30\angle 0^0\right)-(2-j1)\dot{I}_2 =$$

$$= \left(30\angle 0^0\right)-(2-j1)(-0,20478+j1,7407) =$$

$$= \left(30\angle 0^0\right)-(1,3312+j3,6864)$$

$$= 28,669-j3,6864$$

Từ đó $\dot{I}_1 = \dfrac{28,669-j3,6864}{5+j3} = 3,8907-j3,0717 = 4,9572\angle -38,290^0$

Cả ba phương pháp giải đều cho ta cùng một kết quả.

Đối với hệ hai phương trình bậc nhất với hai ẩn số thì phương pháp áp dụng quy tắc Cramer là phương pháp đơn giản nhất. Nhưng khi số phương trình và số ẩn số lớn hơn hai thì phương pháp khử sẽ có số phép tính ít hơn so với phương pháp áp dụng quy tắc Cramer.

Ví dụ PL.1.6.2

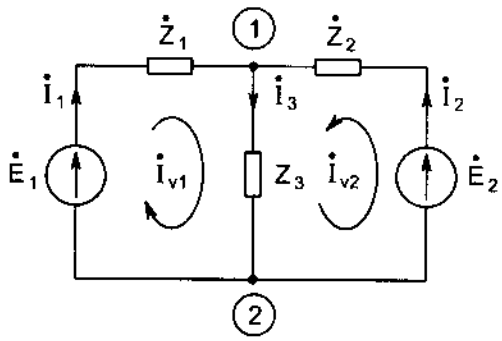
Cho mạch điện ở H.PL.1.6.1 với

$\dot{E}_1 = 3200\angle 0^0$ V, $\dot{E}_2 = 3000\angle 0^0$ V, $Z_1 = Z_2 = j1\ \Omega$, $Z_3 = (4 + j2,5)\ \Omega$.

Tính dòng điện các nhánh:

1) Bằng phương pháp dòng vòng

2) Bằng phương pháp thế nút



H.PL.1.6.1

Giải:

1) Phương pháp dòng vòng

Ta lập hệ phương trình dòng vòng sau đây cho $\dot{I}_{v_1}$ và $\dot{I}_{v_2}$:

$$(Z_1 + Z_3)\dot{I}_{v_1} + Z_3\dot{I}_{v_2} = \dot{E}_1$$
$$Z_3\dot{I}_{v_1} + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_{v_2} = \dot{E}_2$$

hay

$$(4 + j3,5)\dot{I}_{v_1} + (4 + j2,5)\dot{I}_{v_2} = 3200\angle 0^0 \text{ V}$$
$$(4 + j2,5)\dot{I}_{v_1} + (4 + j3,5)\dot{I}_{v_2} = 3000\angle 0^0 \text{ V}$$

Ta tính định thức Δ của các hệ số của hệ phương trình dòng vòng:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 + j3,5 & 4 + j2,5 \\ 4 + j2,5 & 4 + j3,5 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 + j3,5)^2 - (4 + j2,5)^2 = -6,0000 + j8,0000$$

(Để tính Δ bằng máy tính CASIO fx - 570MS ta thực hiện các thao tác sau

[( ] 4 [+] 3.5 [. i] [ )] [x^2] [−]

[( ] 4 + 2.5 [i] [ )] [x^2] [=]

ta sẽ được phần thực a = - 6,0000

Tiếp theo ta thực hiện thao tác

[SHIFT] [Re ↔ Im]

để được phần ảo b = - 8,0000).

Ta tính định thức Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3200\angle 0^0 & 4 + j2,5 \\ 3000\angle 0^0 & 4 + j3,5 \end{vmatrix} =$$

$$= (3200) \times (4 + j3,5) - (3000) \times (4 + j2,5)$$

$$= 800,00 + j3700,0$$

và định thức Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 + j3,5 & 3200\angle 0^0 \\ 4 + j2,5 & 3000\angle 0^0 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 + j3,5) \times (3000) - (4 + j2,5) \times (3200)$$

$$= -800,00 + j2500,0$$

Áp dụng quy tắc Cramer ta có :

$$\dot{I}_{v_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{800 + j3700}{-6 + j8} = (248 - j286)\ A$$

và $$\dot{I}_{v_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-800 + j2500}{-6 + j8} = (248 - j86)\ A$$

Ta tính dòng điện các nhánh :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{v_1} = (248 - j286)\ A = \left(378{,}55\angle -49{,}070^0\right)\ A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{v_2} = (248 - j86)\ A = \left(262{,}49\angle -19{,}125^0\right)\ A$$

và $$\dot{I}_3 = \dot{I}_{v_1} + \dot{I}_{v_2} = (248 - j286) + (248 - j86)$$

$$= (496 - j372)\ A = \left(620\angle -36{,}870^0\right)\ A$$

2) Phương pháp thế nút

Theo công thức của phương pháp điện áp hai nút ta có:

$$\dot{U}_{12} = \frac{(\dot{E}_1/Z_1) + (\dot{E}_2/Z_2)}{(1/Z_1) + (1/Z_2) + (1/Z_3)} =$$

$$= \frac{(3200/j1) + (3000/j1)}{(1/j1) + (1/j1) + 1/(4 + j2{,}5)} = \frac{-j6200}{0{,}17978 - j2{,}1124} =$$

$$= 2914{,}0 - j248{,}00$$

Ta tính các dòng điện các nhánh:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{12}}{Z_1} = \frac{3200 - (2914 - j248)}{j1}$$

$$= (248{,}00 - j286{,}00)\ A = (378{,}55\angle -49{,}070)\ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{12}}{Z_2} = \frac{3000 - (2914 - j248)}{j1}$$

$$= (248{,}00 - j86{,}00)\ A = (262{,}49\angle -19{,}125)\ A$$

và $$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_3} = \frac{2914 - j248}{4 + j2{,}5} =$$

$$= (496{,}00 - j372{,}00)\ A = 620{,}00\angle -36{,}870\ A$$

Ta được các kết quả trùng với các kết quả cho bởi phương pháp dòng vòng.

Bài tập PL.1.6

Giải các hệ phương trình sau đây:

1) $(40+j20)\dot{I}_1+(30+j70)\dot{I}_2=100\angle 0^0$

$(30+j70)\dot{I}_1+(50+j140)\dot{I}_2=100\angle 30^0$

2) $(6-j8)\dot{I}_1+(-3+j4)\dot{I}_2=220\angle 120^0$

$(-3+j4)\dot{I}_1+(6-j8)\dot{I}_2=220\angle 0^0$

3) $(5+j10)\dot{I}_1+(5+j0)\dot{I}_2=10\angle 0^0$

$(5+j0)\dot{I}_1+(5+j10)\dot{I}_2=10\angle 90^0$

Đáp số:

1) $\dot{I}_1=2,1461+j0,4023$

$\dot{I}_2=-0,59737-j0,5732$

2) $\dot{I}_1=-20,323+j15,242$

$\dot{I}_2=3,0386+j25,221$

3) $\dot{I}_1=-j0,5$

$\dot{I}_2=1+j0,5$

PHỤ LỤC 2

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MATLAB ĐỂ GIẢI MẠCH ĐIỆN

MATLAB (tên viết tắt của MATRIX LABORATORY) là một phần mềm dùng cho các tính toán trong lĩnh vực khoa học và kỹ thuật được phát triển bởi Mathworks.

MATLAB rất tiện dùng để giải các bài toán về kỹ thuật điện. Các mục dưới đây hướng dẫn sử dụng MATLAB để giải một số bài toán của lý thuyết mạch điện.

PL.2.1. Tính chế độ xác lập hình sin trong mạch điện tuyến tính bằng MATLAB

Cho mạch điện ở hình H.PL.2.1.1 với

$$\dot{E}_1 = \left(100\angle 0^0\right)\ \text{V},\ \dot{E}_2 = \left(100\angle\frac{\pi}{6}\right)\ \text{V},\ \dot{J} = \left(2\angle\frac{\pi}{3}\right)\ \text{A},$$

$R_1 = 10\ \Omega$, $\omega L_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $\omega L_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $\omega L_3 = 40\ \Omega$.

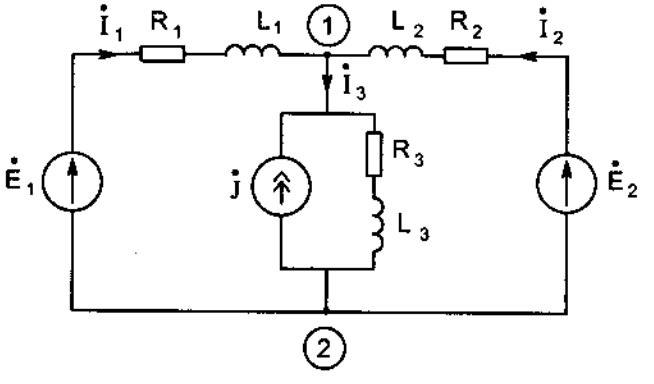
Giả thiết không có hỗ cảm giữa các điện cảm L_1, L_2 và L_3.

Hãy tính dòng điện trong các nhánh:

a) Bằng phương pháp dòng vòng.

b) Bằng phương pháp thế nút.

Tính các công suất tác dụng và công suất phản kháng của mỗi nhánh và kiểm nghiệm sự cân bằng công suất trong toàn mạch.

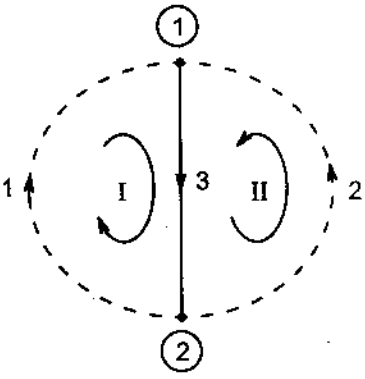


H.PL.2.1.1

Giải :

1. Tính dòng điện các nhánh bằng phương pháp dòng vòng

Ta vẽ graph của mạch điện đã cho như ở H.PL.2.1.2



H.PL.2.1.2

Ta chọn cây là nhánh 3 và các vòng cơ bản là vòng I (gồm nhánh 1 và nhánh 3) và vòng II (gồm nhánh 2 và nhánh 3). Ta lập ma trận B (ma trận các vòng cơ bản) như sau:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline \text{(Vòng I)} & 1 & 0 & 1 \\ \text{(Vòng II)} & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dưới đây là các lệnh viết theo ngôn ngữ MATLAB để giải mạch điện đã cho bằng phương pháp dòng vòng (với đơn vị của tổng trở là ohm (Ω), đơn vị của điện áp là volt (V), đơn vị của dòng điện là ampere (A)):

```
B=[ 1  0  1
    0  1  1] ;
Z1 = 10 + j*10;  Z2 = 5 + j*5;  Z3 = 30 + j*40;
E1 = 100;  E2 = 100*exp(j*pi/6);  J = 2*exp(j*pi/3);
Enh = [E1;  E2;  0];  Jnh = [0;  0;  J];
Znh (1, 1) = Z1; Znh (2, 2) = Z2; Znh (3, 3) = Z3;
Zv = B*Znh*B'  ↵
Ev = B*(Enh - Znh*Jnh)  ↵
Iv = Zv\Ev  ↵
Inh = B'*Iv  ↵
Unh = Znh*(Inh + Jnh) - Enh  ↵
```

Ta sẽ thấy xuất hiện trên màn hình của máy vi tính các kết quả sau đây

```
Zv =
      40+50i        30 + 40i
      30 + 40i      35 + 45i

Ev =
      139.28 - 91.962i
      125.88 - 41.962i
```

```
Iv =
      -1.0188 - 2.9611i
      1.6226 + 0.41746i
Inh =
      -1.0188 - 2.9611i
      1.6226 + 0.41746i
      0.60372 - 2.5437i
Unh =
      -80.577 - 39.8i
      -80.577 - 39.8i
       80.577 + 39.8i
```

2. Tính dòng điện các nhánh bằng phương pháp thế nút

Để tính các dòng điện các nhánh trong mạch điện ở H.PL.2.1.1 bằng phương pháp thế nút ta sử dụng các lệnh viết theo ngôn ngữ MATLAB sau đây (với đơn vị của tổng trở là ohm (Ω), đơn vị của điện áp là volt (V), đơn vị của dòng điện là (A)):

```
A = [-1  -1  1];
Z1 = 10 + j*10;  Z2 = 5 + j*5;  Z3 = 30 + j*40;
E1 = 100;  E2 = 100*exp(j*pi/6);
J = 2*exp(j*pi/3);  Enh = [E1;  E2;  0];  Jnh = [0;  0;  J];
Znh (1, 1) = Z1; Znh (2, 2) = Z2; Znh (3, 3) = Z3;
Ynh = inv(Znh);
Ynut = A*Ynh*A' ↵
Jnut = A*(Jnh - Ynh*Enh) ↵
Vnut = Ynut \ Jnut ↵
Unh = A'*Vnut ↵
Inh = Ynh*(Unh + Enh) - Jnh ↵
```

Ta sẽ được các kết quả sau đây xuất hiện trên màn hình của máy vi tính:

```
Ynut = 0.162 + 0.166i
Jnut = 19.66 - 6.9282i
Vnut = 80.577 + 39.8i
Unh =
      -80.577 - 39.8i
      -80.577 - 39.8i
       80.577 + 39.8i
```

```
Inh =
        -1.0188 - 2.9611i
        1.6226 + 0.41746i
        0.60372 - 2.5437i
```

3. Tính công suất các nhánh và kiểm tra cân bằng công suất

Để tính công suất phức của các nhánh và kiểm tra sự cân bằng công suất của các nhánh trong toàn mạch điện ta dùng các lệnh viết bằng MATLAB sau đây trên MATLAB command window:

```
>> Snh = Unh.*conj(Inh) ↵
>> Stong = Inh'*Unh ↵
```

Ta sẽ được các kết quả sau đây xuất hiện trên MATLAB command window (với đơn vị là VA):

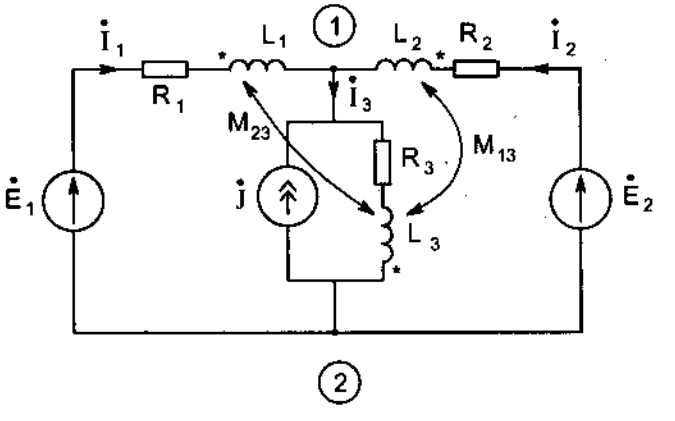
```
Snh =
        199.95 - 198.05i
        -147.36 - 30.94i
        -52.592 + 228.99i

Stong =
        0 + 2.8422e - 014i
```

Ví dụ PL.2.1.2.

Tính chế độ xác lập hình sin trong mạch tuyến tính có hỗ cảm.

Trong mạch điện ở ví dụ PL.2.1.1 cho $\omega M_{12} = 0$; $\omega M_{13} = 20\ \Omega$; $\omega M_{23} = 10\ \Omega$. Các cực cùng cực tính đã cho như ở H.PL.2.1.2. Các thông số khác của mạch điện vẫn như cũ.



H.PL.2.1.2

Hãy viết chương trình bằng ngôn ngữ MATLAB để tính dòng điện các nhánh

1) Bằng phương pháp dòng vòng.

2) Bằng phương pháp thế nút.

Tính công suất phức của các nhánh và kiểm tra cân bằng công suất của các nhánh trong toàn mạch điện.

Giải :

Để giải bài toán này ta thực hiện các lệnh sau đây viết bằng ngôn ngữ MATLAB trên MATLAB command window (với đơn vị của tổng trở là ohm (Ω), đơn vị của tổng dẫn là siemens (S), đơn vị của điện áp là volt (V), đơn vị của dòng điện là (A), đơn vị của công suất là volt - ampere (VA)):

```
>> disp ('1. Phuong phap dong vong') ↵
>> B = [1  0  1
        0  1  1];
Z1 = 10 + j*10;  Z2 = 5 + j*5;  Z3 = 30 + j*40;
E1 = 100;  E2 = 100*exp(j*pi/6);  J = 2*exp(j*pi/3);
Enh = [E1;  E2;  0];  Jnh = [0;  0;  J];
Znh (1, 1) = Z1; Znh (2, 2) = Z2; Znh (3, 3) = Z3;
Znh (1, 2) = 0; Znh (2, 1) = Znh (1, 2);
Znh (1, 3) = -j*20; Znh (3, 1) = Znh (1, 3);
Znh (2, 3) = -j*10; Znh (3, 2) = Znh (2, 3);
Zv = B*Znh*B' ↵
Ev = B*(Enh - Znh*Jnh) ↵
Iv = Zv \ Ev ↵
Inh = B'*Iv ↵
Unh = Znh*(Inh + Jnh) - Enh ↵
Snh = Unh.*conj(Inh) ↵
Stong = Inh'*Unh ↵
>> disp ('2. Phuong phap the nut') ↵
Ynh = inv(Znh);
Ynut = A*Ynh*A' ↵
Jnut = A*(Jnh - Ynh*Enh) ↵
Vnut = Ynut \ Jnut ↵
Unh = A'*Vnut ↵
```

```
Inh = Ynh*(Unh + Enh) - Jnh ↵
Snh = Unh.*conj(Jnh) ↵
Stong = Inh'*Unh ↵
```

Sau đây là các kết quả tính xuất hiện lần lượt theo thứ tự trên MATLAB command window:

```
1. Phuong phap dong vong
   Zv =
        40.0000 + 10.0000i   30.0000 + 10.0000i
        30.0000 + 10.0000i   35.0000 + 25.0000i
   Ev =
          1.0e + 002 *
        1.0464 - 0.7196i
        1.0856 - 0.3196i
   Iv =
      0.9309 - 2.0788i
      1.4173 - 0.4097i
   Inh =
        0.93089 - 2.0788i
        1.4173 - 0.40968i
        2.3482 - 2.4885i
   Unh =
        -85.032 - 78.444i
        -85.032 - 78.444i
         85.032 + 78.444i
   Snh =
         83.916 - 249.79i
        -88.382 - 146.02i
         4.4657 + 395.81i
   Stong = 1.1369e - 013 - 1.9895e - 013i
   2. Phuong phap the nut
   Ynut =
         0.11216 - 0.077027i
   Jnut =
         15.58 + 2.2487i
   Vnut =
         85.032 + 78.444i
```

```
Unh =
      -85.032 - 78.444i
      -85.032 - 78.444i
       85.032 + 78.444i

Inh =
      0.93089 - 2.0788i
      1.4173 - 0.40968i
      2.3482 - 2.4885i

Snh =
      83.916 - 249.79i
      -88.382 - 146.02i
      4.4657 + 395.81i

Stong =
      1.1369e - 013 - 1.9895e - 013i
```

PL.2.2. Nghiên cứu đặc tính tần số của mạch RLC bằng MATLAB

Dưới đây nêu ra chương trình viết bằng ngôn ngữ MATLAB để vẽ các đường cong cộng hưởng của mạch RLC

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

với Q = 1, Q = 3 và Q = 10.

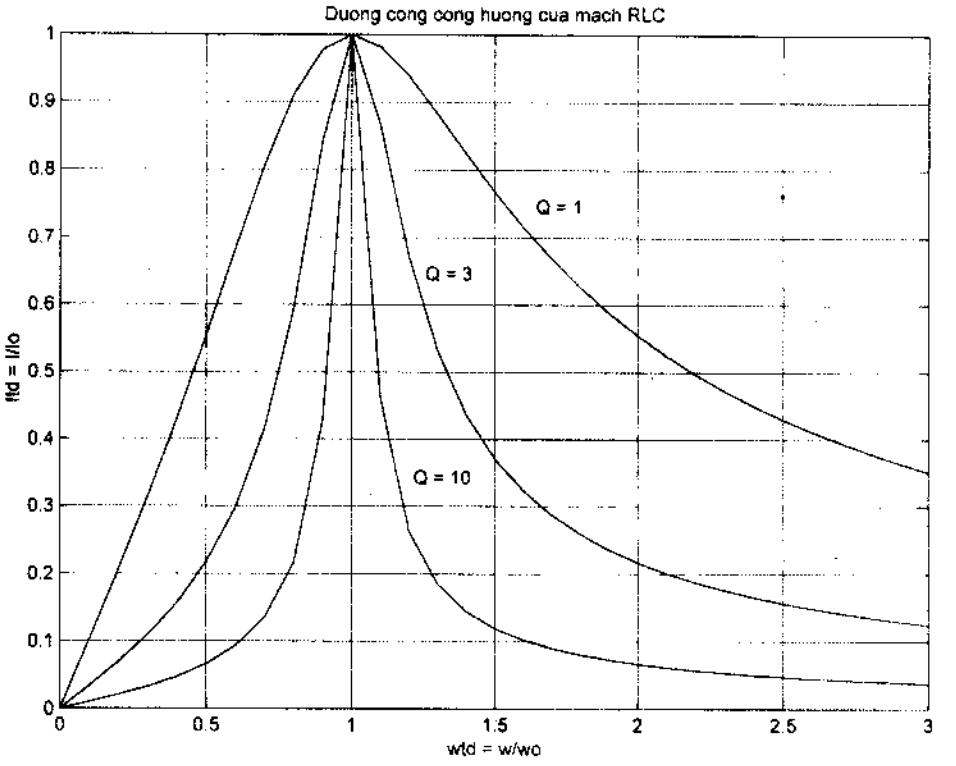
Sau khi mở MATLAB command window ta viết vào các lệnh sau đây:

```
% Chương trình viết bằng MATLAB để vẽ các đường cong cộng hưởng
% của mạch RLC
wtd = 0.0 : 0.1 : 3.0;
Q = 1;
mauso = 1 + (Q * (wtd - (wtd).^-1)).^2;
Itd1 = (mauso).^(-1/2);
Q = 3;
mauso = 1 + (Q * (wtd - (wtd).^-1)).^2;
Itd3 = (mauso).^(-1/2);
Q = 10;
```

```
mauso = 1 + (Q * (wtd - (wtd).^ -1)).^ 2;
Itd10 = (mauso).^ (-1/2);
Bangso = [wtd' Itd1' Itd3' Itd10']  ↵
plot(wtd, Itd1, wtd, Itd3, wtd, Itd10)  ↵
grid ↵
xlabel('wtd = w/wo') ↵
ylabel('Itd = I/I0) ↵
tiltle('Dương cong cong huong cua mach RLC')
%EOF
```

Ta sẽ thấy xuất hiện trên MATLAB command window bảng số liệu và các đường cong dẫn ra dưới đây

```
Bangso =
                Itd
   wtd      Q=1      Q=3      Q=10
    0        0        0        0
 0.1000   0.1005   0.0337   0.0101
 0.2000   0.2040   0.0693   0.0208
 0.3000   0.3131   0.1092   0.0329
 0.4000   0.4299   0.1568   0.0476
 0.5000   0.5547   0.2169   0.0665
 0.6000   0.6839   0.2983   0.0933
 0.7000   0.8082   0.4160   0.1360
 0.8000   0.9119   0.5952   0.2169
 0.9000   0.9784   0.8448   0.4281
 1.0000   1.0000   1.0000   1.0000
 1.1000   0.9823   0.8678   0.4640
 1.2000   0.9389   0.6727   0.2631
 1.3000   0.8833   0.5318   0.1851
 1.4000   0.8247   0.4372   0.1443
 1.5000   0.7682   0.3714   0.1191
 1.6000   0.7160   0.3235   0.1020
 1.7000   0.6687   0.2872   0.0896
 1.8000   0.6264   0.2587   0.0801
 1.9000   0.5885   0.2358   0.0726
 2.0000   0.5547   0.2169   0.0665
 2.1000   0.5244   0.2011   0.0615
 2.2000   0.4971   0.1876   0.0572
 2.3000   0.4725   0.1759   0.0535
 2.4000   0.4502   0.1657   0.0504
 2.5000   0.4299   0.1568   0.0476
 2.6000   0.4114   0.1488   0.0451
 2.7000   0.3944   0.1416   0.0429
 2.8000   0.3788   0.1352   0.0409
 2.9000   0.3644   0.1294   0.0391
 3:0000   0.3511   0.1240   0.0375
>>
```



PL.2.3. Tính quá trình quá độ trong mạch điện tuyến tính bằng MATLAB

Ta có thể sử dụng chương trình giải hệ phương trình vi phân tuyến tính bằng MATLAB (bằng phương pháp sai phân) để tính quá trình quá độ trong mạch điện tuyến tính bằng MATLAB. Muốn thế, trước tiên ta phải đưa các phương trình vi phân của quá trình quá độ trong mạch điện về dạng hệ phương trình trạng thái

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

với các điều kiện đầu x(0) = x0.

Ở đây x là vectơ biến trạng thái (state variable)

y là véc tơ biến ra (output)

u là véc tơ các kích thích (excitation)

A, B, C và D là các ma trận với các hệ số là các hằng số.

Nghiệm gần đúng của hệ phương trình trên có thể tìm được bằng cách sử dụng lệnh sau đây của MATLAB

[y, x] = lsim (A, B, C, D, u, t, x0);

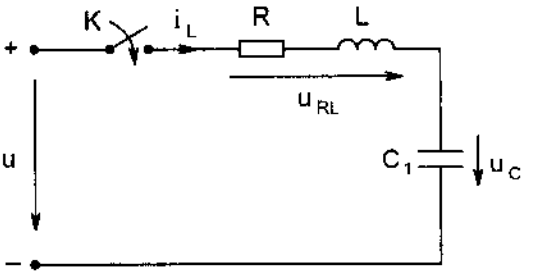
Dưới đây cho hai ví dụ về tính quá trình quá độ trong mạch RLC bằng MATLAB.

Ví dụ PL.2.3.1

Cho mạch điện RLC ở H.PL.2.3.1, với R = 80 Ω, L = 0,2 H, C_1 = 140 μF, u(t) = U = 100 V = const.

Khoá K đóng mạch tại t = 0. Cho $u_C(0-) = 0$ và $i_L(0-) = 0$.

Tìm các nghiệm gần đúng dưới dạng bảng số và vẽ các đường cong của $u_C(t)$ và $i_L(t)$ và $u_{RL}(t)$.



H.PL.2.3.1

Giải:

Phương trình vi phân của mạch RLC là

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} + u_C = u$$

$$i_L = C_1\frac{du_C}{dt}$$

Chọn các biến trạng thái là

$x_1 = u_C$

và $x_2 = i_L$

và biến ra là $y = u_{RL}$

Ta có hệ phương trình trạng thái

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1}x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

và phương trình đối với biến ra:

$y = u - u_C = -x_1 + u$

hay hệ phương trình dạng ma trận:

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

với $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C_1 \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

và $D = 1$

Ta viết vào MATLAB command window các lệnh sau đây:

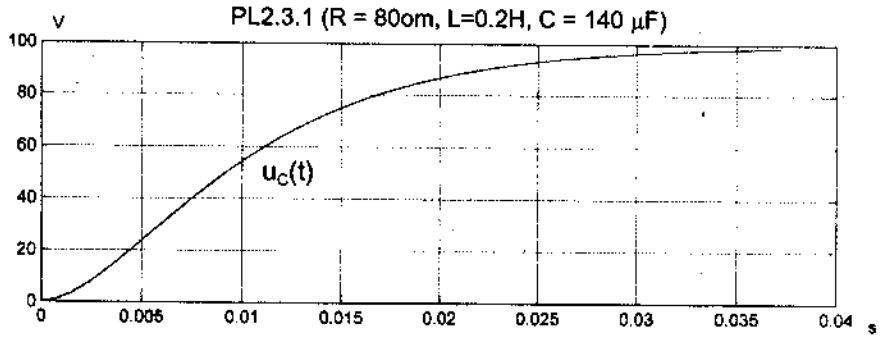
```
R = 80;  L = 0.2;  C = 140e – 06;
U = 100;
tau1 = 1/134.53; tau2 = 1/265.47;
t1 = 0.0; t2 = 5*tau1; step = tau1/10;
x0 = [0.0;  0.0];
A = [0  1/C1;  -1/L  -R/L];
B = [0;  1/L];
C = [-1;  0];
D = 1;
t = t1 : step : t2;
u = U*ones(1, length(t));
[y,x] = lsim(A,B,C,D,u,t,x0);
Bang_1 = [t',x,y]  ↵
clf;
subplot (2, 1, 1), plot (t, x(:, 1))  ↵
grid  ↵
subplot (2, 1, 2), plot (t, x(:, 2))  ↵
grid  ↵
pause  ↵
clf;
subplot (2, 1, 1), plot (t, y)  ↵
grid  ↵
tiltle ('Qua trinh qua do trong mach RLC voi nguon ap khong doi')
%EOF
```

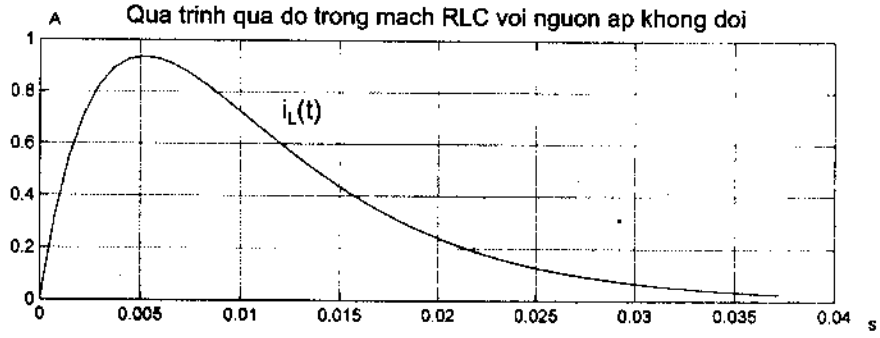
Ta sẽ thấy xuất hiện trên MATLAB command window bảng số liệu và các đồ thị sau đây:

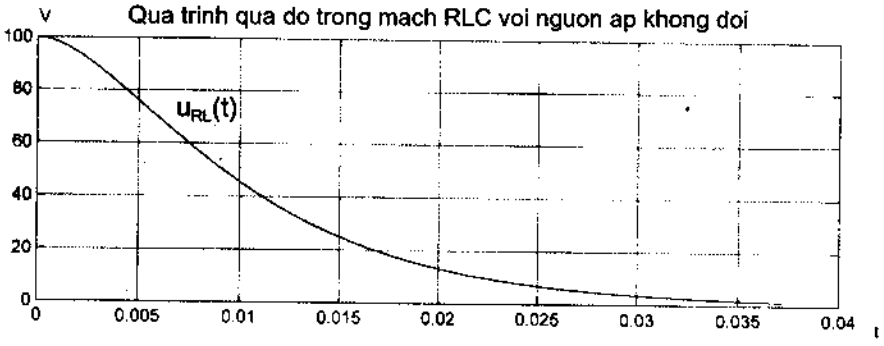
Bang_1

t(s)	u_C(V)	i_L(A)	u_{RL}(V)
0	0	0	100.0000
0.0007	0.8943	0.3204	99.1057
0.0015	3.2476	0.5530	96.7524
0.0022	6.6444	0.7163	93.3556
0.0030	10.7586	0.8255	89.2414
0.0037	15.3354	0.8924	84.6646
0.0045	20.1780	0.9270	79.8220
0.0052	25.1354	0.9368	74.8646
0.0059	30.0935	0.9282	69.9065
0.0067	34.9678	0.9060	65.0322
0.0074	39.6967	0.8740	60.3033
0.0082	44.2370	0.8354	55.7630
0.0089	48.5599	0.7924	51.4401
0.0097	52.6475	0.7470	47.3525
0.0104	56.4908	0.7006	43.5092
0.0111	60.0871	0.6541	39.9129
0.0119	63.4386	0.6085	36.5614
0.0126	66.5512	0.5642	33.4488
0.0134	69.4332	0.5217	30.5668
0.0141	72.0949	0.4813	27.9051
0.0149	74.5476	0.4430	25.4524
0.0156	76.8032	0.4070	23.1968
0.0164	78.8740	0.3734	21.1260
0.0171	80.7722	0.3420	19.2278
0.0178	82.5099	0.3129	17.4901
0.0186	84.0987	0.2859	15.9013
0.0193	85.5498	0.2610	14.4502
0.0201	86.8740	0.2381	13.1260
0.0208	88.0813	0.2170	11.9187
0.0216	89.1812	0.1976	10.8188
0.0223	90.1825	0.1799	9.8175
0.0230	91.0937	0.1636	8.9063
0.0238	91.9222	0.1487	8.0778
0.0245	92.6754	0.1352	7.3246
0.0253	93.3596	0.1228	6.6404
0.0260	93.9810	0.1115	6.0190
0.0268	94.5452	0.1012	5.4548
0.0275	95.0572	0.0918	4.9428
0.0282	95.5218	0.0833	4.4782
0.0290	95.9432	0.0756	4.0568
0.0297	96.3253	0.0685	3.6747
0.0305	96.6718	0.0621	3.3282
0.0312	96.9859	0.0563	3.0141
0.0320	97.2706	0.0510	2.7294
0.0327	97.5285	0.0462	2.4715
0.0334	97.7623	0.0419	2.2377
0.0342	97.9740	0.0379	2.0260
0.0349	98.1658	0.0344	1.8342
0.0357	98.3396	0.0311	1.6604
0.0364	98.4969	0.0282	1.5031
0.0372	98.6394	0.0255	1.3606

>>







Ví dụ PL. 2.3.2

Cho mạch điện ở ví dụ PL.2.3.1 với

$u(t) = 100\sin(2\pi ft + \pi/3)$ V với f=50 Hz, còn các thông số khác vẫn như đã cho ở ví dụ PL.2.3.1.

Tìm các nghiệm gần đúng dưới dạng bảng số và vẽ các đường cong của $u_C(t)$, $i_L(t)$ và $u_{RL}(t)$.

Giải:

Dưới đây là các lệnh viết bằng ngôn ngữ MATLAB để giải bài toán này:

```
R = 80;  L = 0.2;  C = 140 e – 06;
U = 100; f = 50; w = 2*pi*f ; T = 1/f;
tau1 = 1/134.53; tau2 = 1/265.47;
t1 = 0.0; t2 = max ([3*tau1, 3*tau2, 1.25*T]);
step = (t2 – t1)/100;
x0 = [0.0 ; 0.0];
A = [0    1/C1;  -1/L    -R/L];
B = [0;  1/L];
C = [-1   0];
D = 1;
t = t1 : step : t2;
u = U*sin(w*t + pi/3);
Bang_2 = [t' x y]  ↵
clf;
subplot (2, 1, 1), plot (t, x(:, 1))  ↵
grid  ↵
subplot (2, 1, 2), plot (t, x(:, 2))  ↵
grid  ↵
pause  ↵
clf;
subplot (2, 1, 1), plot (t, y)  ↵
grid  ↵
tiltle ('Qua trinh qua do trong mach RLC voi nguon ap hinh sin')
%EOF
```

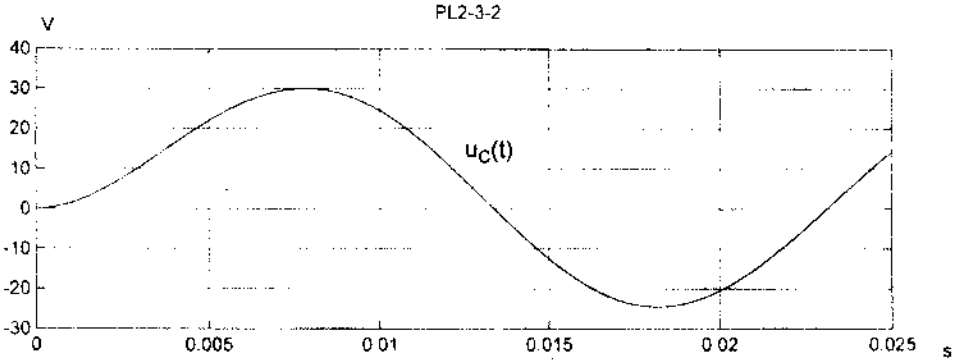
Ta sẽ thấy xuất hiện trên MATLAB command window bảng số liệu và các đường cong sau đây:

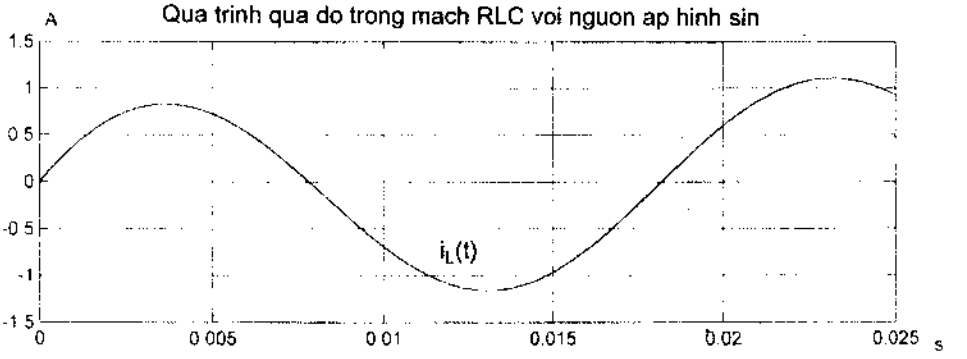
Bang_2

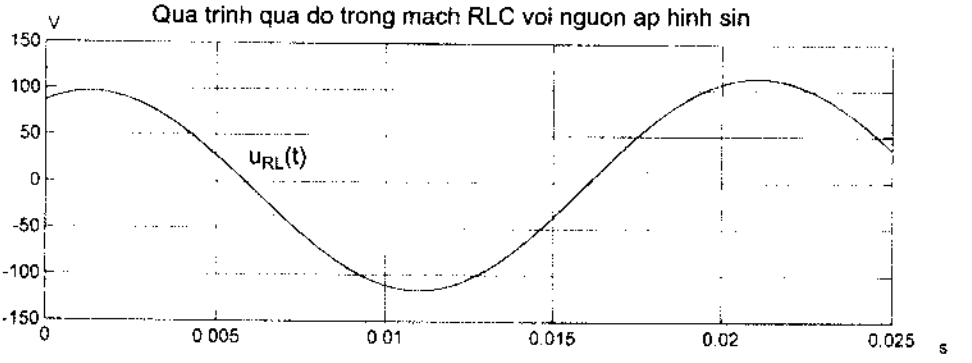
t(s)	u_C(V)	i_L(A)	u_{RL}(V)
0	0	0	86.6025
0.0003	0.0948	0.1052	90.1637
0.0005	0.3720	0.2042	92.9861
0.0008	0.8201	0.2966	95.0619
0.0010	1.4272	0.3823	96.3875
0.0013	2.1812	0.4609	96.9633
0.0015	3.0691	0.5323	96.7939
0.0018	4.0778	0.5963	95.8879
0.0020	5.1940	0.6526	94.2582
0.0023	6.4039	0.7012	91.9215
0.0025	7.6937	0.7420	88.8989
0.0027	9.0493	0.7749	85.2149
0.0030	10.4566	0.7999	80.8980
0.0033	11.9015	0.8171	75.9802
0.0035	13.3701	0.8264	70.4970
0.0037	14.8483	0.8280	64.4870
0.0040	16.3226	0.8220	57.9919
0.0043	17.7795	0.8085	51.0560
0.0045	19.2059	0.7879	43.7262
0.0047	20.5892	0.7603	36.0514
0.0050	21.9172	0.7260	28.0828
0.0053	23.1782	0.6853	19.8729
0.0055	24.3612	0.6387	11.4756
0.0057	25.4558	0.5864	2.9457
0.0060	26.4523	0.5289	-5.6611
0.0063	27.3417	0.4666	-14.2891
0.0065	28.1160	0.4000	-22.8824
0.0067	28.7679	0.3295	-31.3856
0.0070	29.2910	0.2558	-39.7438
0.0073	29.6797	0.1792	-47.9033
0.0075	29.9296	0.1004	-55.8115
0.0077	30.0372	0.0198	-63.4179
0.0080	29.9997	-0.0619	-70.6734
0.0083	29.8157	-0.1442	-77.5316
0.0085	29.4845	-0.2266	-83.9484
0.0088	29.0066	-0.3085	-89.8827
0.0090	28.3833	-0.3894	-95.2963
0.0092	27.6169	-0.4686	-100.1543
0.0095	26.7108	-0.5458	-104.4254
0.0098	25.6693	-0.6203	-108.0819
0.0100	24.4974	-0.6917	-111.1000
0.0103	23.2012	-0.7594	-113.4598
0.0105	21.7876	-0.8232	-115.1456
0.0108	20.2641	-0.8824	-116.1460
0.0110	18.6390	-0.9368	-116.4538
0.0113	16.9215	-0.9859	-116.0660
0.0115	15.1211	-1.0295	-114.9841
0.0118	13.2481	-1.0673	-113.2138
0.0120	11.3131	-1.0989	-110.7653
0.0123	9.3272	-1.1242	-107.6527
0.0125	7.3019	-1.1430	-103.8945
0.0128	5.2489	-1.1552	-99.5131
0.0130	3.1802	-1.1606	-94.5348

0.0133	1.1079	-1.1593	-88.9896
0.0135	-0.9560	-1.1511	-82.9111
0.0138	-2.9993	-1.1362	-76.3361
0.0140	-5.0100	-1.1147	-69.3045
0.0143	-6.9763	-1.0865	-61.8592
0.0145	-8.8866	-1.0520	-54.0455
0.0148	-10.7296	-1.0112	-45.9110
0.0150	-12.4945	-0.9645	-37.5055
0.0153	-14.1709	-0.9121	-28.8802
0.0155	-15.7489	-0.8543	-20.0879
0.0158	-17.2192	-0.7915	-11.1824
0.0160	-18.5731	-0.7241	-2.2181
0.0163	-19.8027	-0.6524	6.7500
0.0165	-20.9007	-0.5769	15.6672
0.0168	-21.8609	-0.4980	24.4786
0.0170	-22.6776	-0.4162	33.1304
0.0173	-23.3461	-0.3321	41.5696
0.0175	-23.8625	-0.2461	49.7444
0.0178	-24.2241	-0.1587	57.6048
0.0180	-24.4289	-0.0706	65.1026
0.0183	-24.4760	0.0179	72.1918
0.0185	-24.3652	0.1061	78.8291
0.0188	-24.0975	0.1935	84.9736
0.0190	-23.6749	0.2796	90.5879
0.0193	-23.1001	0.3638	95.6375
0.0195	-22.3770	0.4457	100.0916
0.0198	-21.5102	0.5246	103.9228
0.0200	-20.5053	0.6003	107.1078
0.0203	-19.3686	0.6721	109.6272
0.0205	-18.1075	0.7397	111.4655
0.0208	-16.7298	0.8026	112.6117
0.0210	-15.2442	0.8604	113.0589
0.0213	-13.6600	0.9129	112.8045
0.0215	-11.9872	0.9596	111.8502
0.0218	-10.2363	1.0004	110.2020
0.0220	-8.4182	1.0349	107.8704
0.0223	-6.5442	1.0629	104.8697
0.0225	-4.6261	1.0843	101.2187
0.0227	-2.6758	1.0989	96.9400
0.0230	-0.7055	1.1067	92.0600
0.0233	1.2726	1.1076	86.6091
0.0235	3.2461	1.1016	80.6209
0.0238	5.2028	1.0887	74.1325
0.0240	7.1305	1.0691	67.1840
0.0243	9.0171	1.0428	59.8183
0.0245	10.8510	1.0101	52.0810
0.0248	12.6208	0.9710	44.0199
0.0250	14.3153	0.9259	35.6847

>>


PL2-3-2
V
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
s
$u_C(t)$


Qua trinh qua do trong mach RLC voi nguon ap hinh sin
A
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
s
$i_L(t)$


Qua trinh qua do trong mach RLC voi nguon ap hinh sin
V
150
100
50
0
-50
-100
-150
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
s
$u_{RL}(t)$

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH–DN

TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập nội dung :

TRẦN TRỌNG TIẾN

Biên tập tái bản :

NGUYỄN DUY MẠNH

Trình bày bìa :

TÀO HUYỀN

Sửa bản in :

HOÀNG QUY

Chế bản :

LÊ NGỌC THẮNG

Giáo trình **LÝ THUYẾT MẠCH ĐIỆN**

Mã số : 6H145y9 – DAI

In 1.500 cuốn (QĐ : 02), khổ 16 x 24 cm. In tại Công ty CP In Thái Nguyên.

Địa chỉ: P. Quang Trung, TP. Thái Nguyên.

Số ĐKKH xuất bản: 04 – 2009/CXB/58 – 2117/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2009.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN – HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC GIÁO TRÌNH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐÀO TẠO HỆ TRUNG CẤP CHUYÊN NGHIỆP CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. An toàn điện	*Nguyễn Đình Thắng*
2. Kỹ thuật điện	*Đặng Văn Đào*
3. Máy điện	*Nguyễn Hồng Thanh*
4. Kỹ thuật lắp đặt điện	*Phan Đăng Khải*
5. Điện dân dụng và công nghiệp	*Vũ Văn Tẩm*
6. Cung cấp điện	*Ngô Hồng Quang*
7. Đo lường các đại lượng điện và không điện	*Nguyễn Văn Hoà*
8. Kỹ thuật điều khiển động cơ điện	*Vũ Quang Hồi*
9. Điện tử công suất	*Trần Trọng Minh*
10. Linh kiện điện tử và ứng dụng	*Nguyễn Viết Nguyên*
11. Điện tử dân dụng	*Nguyễn Thanh Trà*
12. Kỹ thuật số	*Nguyễn Viết Nguyên*
13. Kỹ thuật mạch điện tử	*Đặng Văn Chuyết*
14. Cơ kỹ thuật	*Đỗ Sanh*
15. An toàn lao động	*Nguyễn Thế Đạt*
16. Vẽ kỹ thuật	*Trần Hữu Quế*
17. Vật liệu và công nghệ cơ khí	*Hoàng Tùng*
18. Dung sai lắp ghép và kỹ thuật đo lường	*Ninh Đức Tốn*
19. Kỹ thuật sửa chữa ô tô máy nổ	*Nguyễn Tất Tiến*
20. Công nghệ hàn (lý thuyết và ứng dụng)	*Nguyễn Thúc Hà*
21. Cơ sở kỹ thuật cắt gọt kim loại	*Nguyễn Tiến Lưỡng*

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;

Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh ; Số 62 Nguyễn Chí Thanh ;

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng – Quận 3 ;
240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4 ;

Website : www.nxbgd.com.vn

8 934980 934302

Giá: 26.500 đ