

PGS. TS NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

QUYỂN 2

HỆ XUNG SỐ



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

PGS.TS NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

Lý thuyết ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

Quyển 2

HỆ XUNG SỐ

(In lần thứ 3 có chỉnh sửa)



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2009

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

Quyển 2

HỆ XUNG SỐ

Tác giả: PGS.TS NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

<i>Chịu trách nhiệm xuất bản:</i>	TS. PHẠM VĂN DIỄN
<i>Biên tập:</i>	NGUYỄN NGỌC KHUÊ
<i>Vẽ bìa:</i>	ĐẶNG NGỌC QUANG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

In 1.000 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Số đăng ký KHXB: 209-2009/CXB/63.2-10/KHKT ngày 18/3/2009
Quyết định xuất bản số: 150/QĐXB-NXBKHKT ngày 15/5/2009
In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2009.

LỜI NÓI ĐẦU

Điều khiển tự động có lịch sử phát triển từ trước công nguyên, bắt đầu từ đồng hồ nước có phao điều chỉnh của Ktesibios ở Hy Lạp. Hệ điều chỉnh nhiệt độ đầu tiên do Cornelis Drebbel (1572 - 1633) người Hà Lan sáng chế. Hệ điều chỉnh mức đầu tiên là của Polzunov người Nga (1765). Hệ điều chỉnh tốc độ được ứng dụng trong công nghiệp đầu tiên là của Jame Watt (1769).

Thời kỳ trước năm 1868 là thời kỳ chế tạo những hệ tự động theo trục giác. Các công trình nghiên cứu lý thuyết bắt đầu từ Maxwell, đề cập đến ảnh hưởng của thông số đối với chất lượng của hệ, I. A. Vyshe gradsku với công trình toán học về các bộ điều chỉnh.

Thế chiến lần thứ hai đòi hỏi sự phát triển về lý thuyết và ứng dụng để có những máy bay lái tự động, những hệ điều khiển vị trí của các loại pháo, điều khiển tự động của các radar vv... Những năm 1950, các phương pháp toán học và phân tích đã phát triển và đưa vào ứng dụng nhanh chóng. Ở Mỹ thịnh hành hướng nghiên cứu trong miền tần số với các công trình ứng dụng của Bode, Nyquist và Black ở các trung tâm thí nghiệm điện tín. Trong khi ấy, ở Liên Xô (cũ) chú trọng lĩnh vực lý thuyết điều khiển và ứng dụng trong miền thời gian.

Từ những năm 1980, máy tính số bắt đầu được sử dụng rộng rãi, cho phép điều khiển với độ chính xác cao các đối tượng khác nhau.

Với sự ra đời của vệ tinh, thời đại vũ trụ bắt đầu, các hệ điều khiển ngày càng phức tạp hơn và đòi hỏi chất lượng cao hơn. Các phương pháp của Liapunov, Minorsky cũng như lý thuyết điều khiển tối ưu hiện đại của L. S. Pontryagin (Liên Xô cũ) của R. Belman (Mỹ) có ý nghĩa rất lớn. Các nguyên tắc điều khiển thích nghi, điều khiển bền vững, điều khiển mờ, các "hệ thông minh" vv... ra đời và được áp dụng có hiệu quả vào thực tiễn.

Rõ ràng là trong việc phân tích và tổng hợp các hệ điều khiển hiện nay, việc sử dụng đồng thời miền tần số và miền thời gian là cần thiết [21].

Ở Việt Nam, từ những năm 1960, Đảng và nhà nước ta đã quan tâm đến việc đào tạo cán bộ và nghiên cứu khoa học trong lĩnh vực này.

Hiện nay, công nghệ tự động là một trong những hướng phát triển công nghệ mũi nhọn của đất nước trong thế kỷ 21. Nghị quyết 27CP của chính phủ về Chương trình Tự động hóa Quốc gia đã khẳng định vai trò quan trọng của ngành công nghệ này.

Những công trình công nghiệp lớn và trọng điểm hiện nay đều được tự động hóa ở mức độ tương đối cao và chủ yếu do nước ngoài đảm nhiệm. Để làm chủ được các công nghệ mới này, cán bộ kỹ thuật không những phải có khả năng sử dụng tốt mà phải có kiến thức cần thiết và chuyên tâm nghiên cứu, ứng dụng để hòa nhập vào trào lưu chung của thế giới.

Mạng internet ngày càng được sử dụng tối đa cho việc phổ biến những kiến thức mới, cho việc học tập, nghiên cứu. Tuy nhiên, không phải bất cứ ai, ở đâu cũng có thể sử dụng có hiệu quả, nhất là việc học tập, nghiên cứu những kiến thức cơ sở một cách có hệ thống.

Công cụ để điều khiển tự động không ngừng đổi mới và hoàn thiện, nhưng nguyên lý cơ bản vẫn không thay đổi đáng kể. Tuy vậy cho đến nay, các tài liệu về những vấn đề nêu trên vẫn còn ít và thiếu, điều đó thúc đẩy tác giả biên soạn bộ sách này. Bộ sách gồm bốn quyển. Quyển 1 - *"Lý thuyết điều khiển tự động - hệ tuyến tính"* đã xuất bản năm 2001. Quyển 3 - *"Lý thuyết điều khiển tự động thông thường và hiện đại - Hệ phi tuyến - Hệ ngẫu nhiên"* xuất bản năm 2003. Quyển 4 - *Hệ tối ưu và thích nghi* - có tên là *"Lý thuyết điều khiển tự động hiện đại"* đã tái bản năm 2000.

Đây là quyển 2 - *"Hệ xung số"* nhằm phục vụ cho việc sử dụng máy tính để điều khiển các đối tượng, các quá trình sản xuất. Nội dung sách một mặt nêu bật các đặc điểm của hệ gián đoạn nói chung cũng như hệ xung số nói riêng, mặt khác chú ý đến các phương pháp khảo sát và tổng hợp hệ đã dùng ở hệ liên tục, giúp người đọc dễ tiếp thu. Các phương pháp trong miền tần số và miền thời gian đều được đề cập đầy đủ nhằm giúp sinh viên vừa nắm được những kiến thức toán học gắn liền với kiến thức thực tế, vừa có khả năng giải quyết những bài toán phức tạp ở hệ thống lớn. Ở mỗi phần đều có hướng dẫn sử dụng máy tính để mô phỏng cũng như nhiều ví dụ, nhiều bài tập có chỉ dẫn cần thiết để đi đến đáp án... Sách đề cập nhiều vấn đề, nêu nhiều ví dụ thực tế, nhiều bài tập với đáp án đầy đủ và được dùng làm tài liệu học tập, tham khảo cho sinh viên, nghiên cứu sinh và cán bộ khoa học kỹ thuật.

Sách mới in lần đầu chắc không tránh khỏi thiếu sót, mong bạn đọc đóng góp ý kiến để lần tái bản sau được hoàn thiện hơn.

Tác giả chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, các cán bộ thuộc Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật đã giúp đỡ thiết thực để hoàn thành được tập sách này.

Tác giả

Chương 1

KHÁI NIỆM CHUNG

1.1. LƯỢNG TỬ HOÁ VÀ ĐẶC ĐIỂM

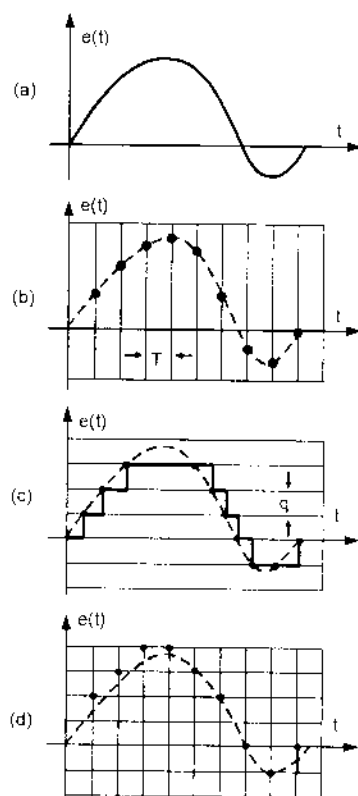
Lượng tử hoá là quá trình biến đổi tín hiệu liên tục thành tín hiệu gián đoạn. Ở các hệ liên tục, tín hiệu chứa đựng thông tin về sai lệch hay những tín hiệu nào khác là liên tục theo thời gian (hình 1.1a). Bên cạnh phương pháp truyền và biến đổi liên tục, còn có các phương pháp gián đoạn.

Lượng tử hoá hay gián đoạn hoá tín hiệu có thể thực hiện theo *thời gian*, theo *mức* hay *hỗn hợp*.

Lượng tử hoá theo thời gian là phương pháp lấy tín hiệu tại các thời điểm nhất định, thường là cách nhau một chu kỳ T gọi là *chu kỳ lượng tử hoá* hay *thời gian lấy mẫu* (hình 1.1b).

Lượng tử hoá theo mức là phương pháp lấy thông tin ở các mức mà tín hiệu đạt được. Thông thường các mức cách nhau một đại lượng q (hình 1.1c).

Lượng tử hoá hỗn hợp là phương pháp kết hợp hai dạng nói trên. Ở các



Hình 1.1

thời điểm nhất định, trị số nhận được là mức gần nhất mà tín hiệu đạt được (hình 1.1d).

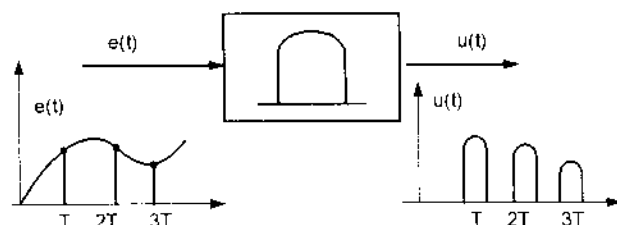
Tùy thuộc vào dạng lượng tử hoá mà các hệ tự động gián đoạn được

phân thành ba loại khác nhau: *hệ xung* - nếu ít nhất một trong các đại lượng đặc trưng cho trạng thái của hệ được lượng tử hoá theo thời gian; *hệ role* - tương ứng với lượng tử hoá theo mức và *hệ xung số* - tương ứng với lượng tử hoá

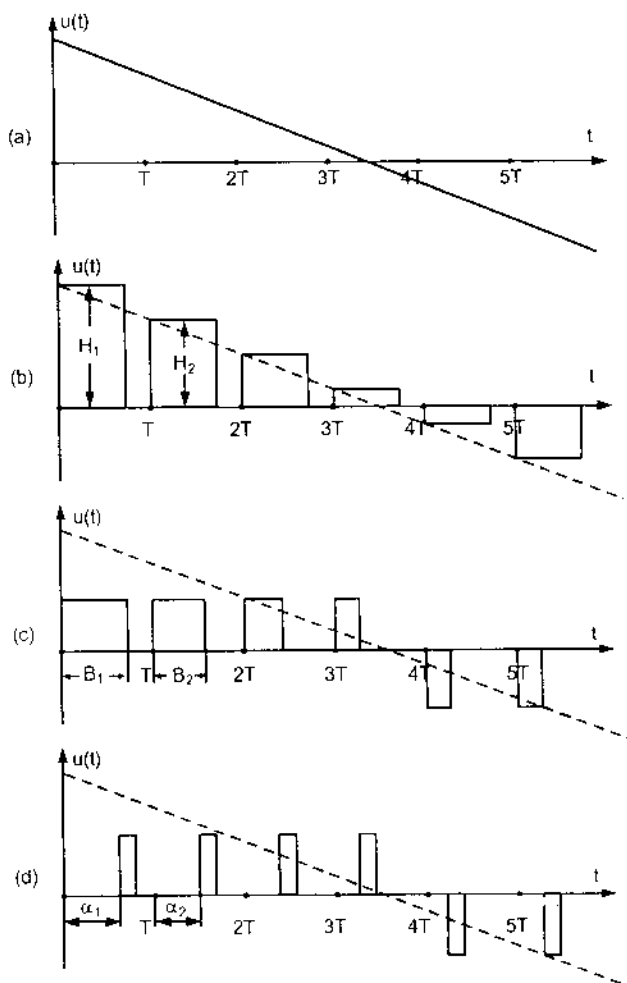
vừa theo thời gian, vừa theo mức. Ở một bảng ghi kết quả thực nghiệm nào đó mà ứng với các thời điểm nhất định (chu kỳ lượng tử hoá) người ta ghi những kết quả đã được quy tròn (mức), có thể xem là một dạng lượng tử hoá hỗn hợp.

Hệ role còn là hệ phi tuyến tính nói chung nên sẽ đề cập đến ở tập sau.

Lượng tử hoá theo thời gian biến đổi một hàm liên tục thành hàm rời rạc như ở hình 1.1b và tung độ của hàm là một chuỗi xung. Quá trình được thực hiện bởi bộ điều chế xung như ở hình 1.2. Bộ điều chế xung có chức năng biến đổi



Hình 1.2



Hình 1.3

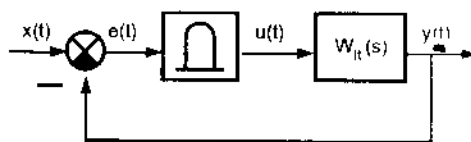
thông số của xung ở đầu ra theo thông số tín hiệu ở đầu vào. Ví dụ bộ điều chế xung tạo nên những xung chữ nhật thì thông số của xung ở đầu ra là:

H - Biên độ xung;

B - Độ rộng xung ;

T- Chu kỳ xung.

Ở hình 1.3a có $u(t)$ là tín hiệu liên tục; ở hình 1.3b, các xung chữ nhật có độ rộng không đổi ($B = \gamma T = \text{const}$), còn biên độ H tỷ lệ với tung độ của tín hiệu rời rạc ở đầu vào ứng với phương pháp *điều biên*. Ở hình 1.3c - độ rộng xung thay đổi theo tung độ tương ứng của tín hiệu rời rạc ở đầu vào ($H = \text{const}$, $B = \text{var}$ với hệ số lấp đầy $\gamma < 1$) ta có phương pháp *điều rộng*. Nếu ở đầu ra của bộ điều chế xung là những xung có biên độ và độ rộng không đổi nhưng pha α phụ thuộc tung độ tương ứng ở đầu vào, ta có phương pháp *điều pha* (hình 1.3d). Ngoài ra, nếu ở đầu ra là một chùm xung mà tần số phụ thuộc vào tín hiệu đầu vào, ta có phương pháp *điều tần*, trong trường hợp này $T \neq \text{const}$.

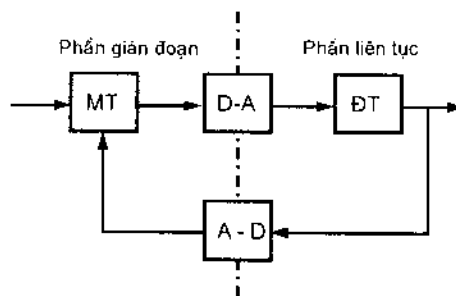


Hình 1.4

Sơ đồ tổng quát của hệ xung như ở hình 1.4 gồm có phần tử tạo xung và phần tử liên tục.

Hệ xung có thể tuyến tính hay phi tuyến tính (nếu có phần tử phi tuyến). Hệ xung theo phương pháp điều rộng là phi tuyến tính. Hệ xung - số là hệ phi tuyến vì lượng tử hoá theo mức là thuật toán phi tuyến tính. Nếu lượng tử hoá theo mức với chênh lệch rất bé, có thể xem hệ xung - số là hệ xung điều biên. Sơ đồ tổng quát của hệ xung số như ở hình 1.5.

Máy tính số MT thực hiện chức năng của cơ cấu đặt các đại lượng mong muốn, so sánh và điều khiển. Tín hiệu điều khiển gián đoạn của máy tính được biến đổi thành tín hiệu liên tục để điều khiển đối tượng DT qua bộ chuyển đổi D-A. Trạng thái của đối tượng được phản ánh về máy tính qua bộ chuyển đổi A-D từ tín hiệu liên tục của đối tượng thành tín hiệu gián đoạn của máy tính. Bộ chuyển đổi đóng vai trò của phần tử xung.



Hình 1.5

1.2. VÍ DỤ VỀ CÁC HỆ GIÁN ĐOẠN

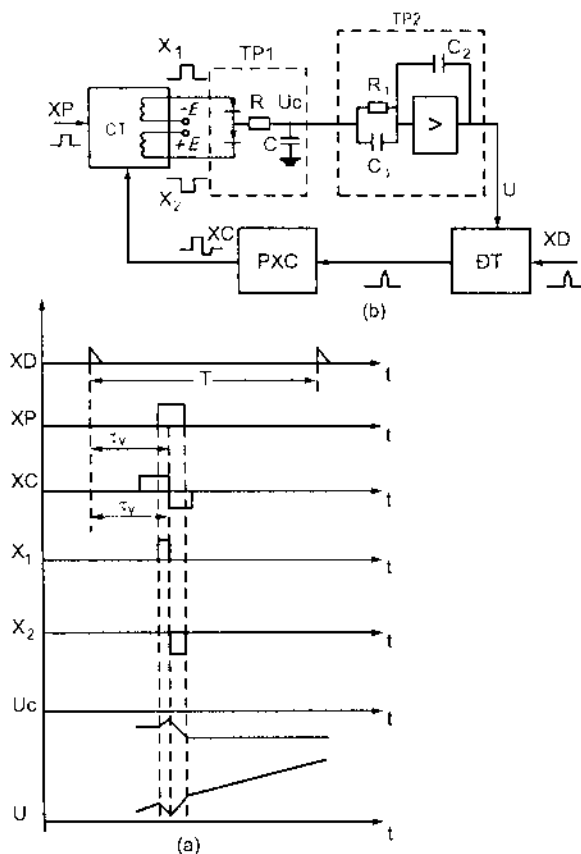
1.2.1. Hệ tự động đo khoảng cách mục tiêu của radar

Sơ đồ chức năng của thiết bị tự động đo khoảng cách như ở hình 1.6a. Thiết bị gồm có bộ chọn thời gian CT, hai khối tích phân TP1 và TP2, bộ điều chế thời gian DT và máy phát xung chọn PXC.

Xung dò XD được phát đi, đồng thời được đưa đến bộ điều chế thời gian DT và được giữ lại ở đó một thời gian tùy thuộc vào điện áp điều khiển u . Xung ấy khởi động cho máy phát xung chọn (dạng máy tạo sóng nhọn chẳng hạn) tạo ra hai xung ngược dấu nhau XC. Thời gian chênh nhau τ_v của biên giới hai xung XC ấy so với xung dò XD tỷ lệ với u . Xung chọn XC cùng với xung phản xạ từ mục tiêu XP đều được đưa đến bộ chọn thời gian CT. Thời gian chênh nhau τ_v của điểm giữa xung phản xạ XP so với xung dò XD tỷ lệ với khoảng cách đến mục tiêu.

Ở đầu ra của CT có hai xung: X_1 và X_2 có biên độ như nhau nhưng cực khác nhau và trùng với cực của

hai xung chọn XC. Chênh lệch về độ rộng của hai xung X_1 và X_2 tỷ lệ với $\tau_c = \tau_v - \tau_y$. Hai xung X_1 , X_2 được đưa đến khối TP1 gồm hai mạch khoá diôt và mạch RC với hằng số thời gian lớn để điện áp U_c trên tụ C là tuyến tính. Như vậy chênh lệch điện áp U_c sau khi kết thúc hai xung X_1 và X_2 (ngược dấu nhau) tỷ lệ với τ_c . Điện áp ở đầu ra của TP1 tỷ lệ với chênh lệch của τ_c ở mọi thời điểm trước đó nên TP1 là bộ cộng các trị số gián đoạn (bộ tích phân gián đoạn).



Hình 1.6

Điện áp u_e được đưa đến bộ tích phân TP2, là một khuếch đại thuật toán có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{-(1+sT_1)}{sT_2},$$

mà $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_1C_2$. Với R_1 được chọn đủ lớn để mạch đầu vào của khuếch đại không làm quá tải mạch RC. Điện áp ra u có hai thành phần: thành phần tỷ lệ $\frac{T_1}{T_2}$ và thành phần tích phân $\frac{1}{sT_2}$. Sau khi tác động của X_1 và X_2 kết thúc, u

thay đổi theo quy luật tuyến tính. Nếu $\tau_v > \tau_v$ ($\tau_v > 0$) thì u sẽ tăng (hình 1.6b) để sao cho ở thời điểm lấy mẫu kế tiếp τ_v sẽ tiến đến bằng τ_v . Nếu $\tau_v < 0$ thì u và τ_v sẽ giảm.

Như vậy, thiết bị tự động đo xa là hệ tự động điều chỉnh thời gian τ_v (tỷ lệ với điện áp u) mà lượng vào là τ_v (tỷ lệ với khoảng cách đến mục tiêu). Hai khối tích phân cho phép bám sát mục tiêu không có sai số khi mục tiêu chuyển động đều. Tần số phát xung thường trong khoảng 100 đến 1000 Hz ($T = 1$ đến 10 msec).

1.2.2. Hệ điều chỉnh nhiệt độ

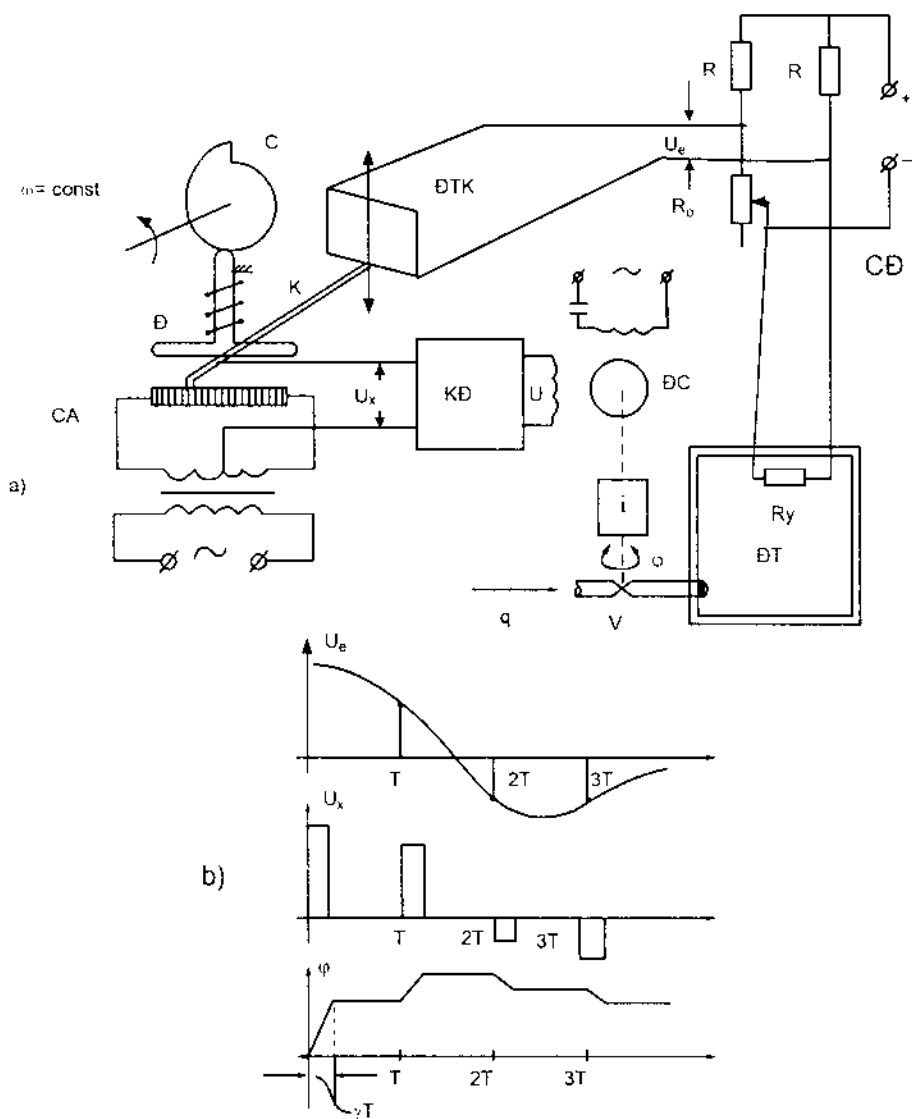
Sơ đồ chức năng của hệ điều chỉnh nhiệt độ như ở hình 1.7a. Hệ gồm có đối tượng điều chỉnh ĐT (lò nhiệt), mạch cầu đo CD, điện thế kế ĐTK với đệm Đ chuyển động bởi động cơ quay bánh cam C, chiết áp CA, khuếch đại KĐ, động cơ chấp hành ĐC điều chỉnh lưu lượng nhiên liệu đốt lò qua bộ giảm tốc i và van V.

Nhiệt độ lò được đo bằng nhiệt điện trở R_y là một nhánh ở cầu cân bằng. R_0 là điện trở đặt nhiệt độ lò.

Chênh lệch điện áp ở cầu cân bằng U_e được đưa vào cuộn dây điện thế kế ĐTK. Bánh cam C được quay với tốc độ không đổi ω làm cho đệm Đ dè kim K tiếp xúc với chiết áp CA trong khoảng thời gian γT theo chu kỳ T ($\gamma < 1$). Điện áp dạng xung chữ nhật U_x được đặt vào khuếch đại KĐ điều khiển động cơ ĐC quay van V những góc φ tương ứng để tăng hay giảm lưu lượng q của nhiên liệu vào lò.

Điện thế kế có đệm tạo tín hiệu xung có hệ số khuếch đại lớn vì loại trừ được sai số do ma sát giữa kim và chiết áp. Chu kỳ T thường được đo bằng phút vì lò nhiệt có quán tính lớn. Bộ điều chỉnh có đệm là một trong những bộ điều chỉnh dạng xung đầu tiên.

Ở hình 1.7b có các đặc tính thời gian, mô tả tính chất biến đổi của một số tín hiệu trong hệ.



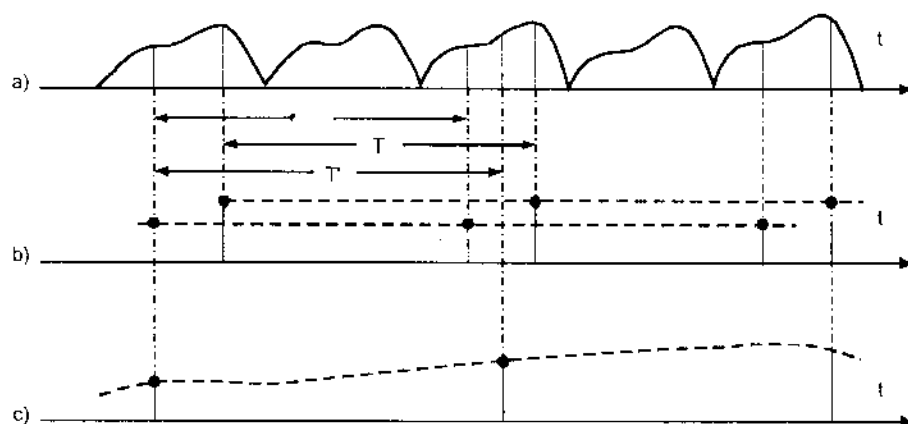
Hình 1.7

1.2.3. Bộ biến đổi tỷ lệ thời gian

Nguyên tắc thay đổi tỷ lệ thời gian như ở hình 1.8. Ví dụ, khi có tín hiệu là một hàm có chu kỳ theo thời gian như ở hình 1.8a; lượng tử hoá theo thời gian được phân tử xung thực hiện cố định những trị rời rạc như ở hình 1.8b. Nếu thời gian lượng tử hoá T là bội số của chu kỳ tín hiệu, những trị rời rạc bằng nhau. Thay đổi pha lượng tử hoá, ta có những tín hiệu bằng nhau khác của tín

hiệu rời rạc như ở hình 1.8b. Bây giờ, nếu chọn thời gian lượng tử hoá không phải là bội số của chu kỳ tín hiệu thì hình dạng của đường bao các trị rời rạc là hình dạng của tín hiệu nhưng được kéo dài ra về thời gian (hình 1.8c). Trong trường hợp này phần tử xung thực hiện chức năng biến đổi tỷ lệ xích của thời gian. Bộ biến đổi tỷ lệ thời gian nói trên là ứng dụng của hiệu ứng hoạt nghiệm.

Lượng tử hoá theo thời gian còn cho phép quan sát bất cứ một điểm nào của quá trình có chu kỳ, với tần số cao, bằng cách cố định nó ở một thời điểm chậm sau khá lâu.

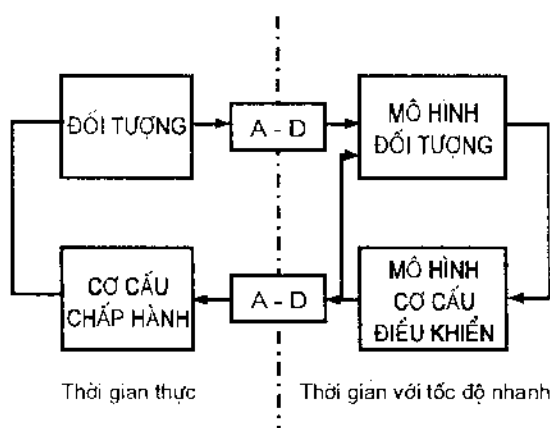


Hình 1.8

1.2.4. Hệ điều khiển hai thang thời gian

Thiết bị tính có thể được thực hiện với tốc độ rất nhanh nên có thể xác định trước tín hiệu điều khiển tối ưu trên mô hình cho đối tượng thực làm việc với tốc độ chậm hơn. Hệ điều khiển gồm mô hình đối tượng và mô hình cơ cấu điều khiển làm việc với tốc độ nhanh theo chu kỳ lặp lại để xác định điều khiển tốt nhất theo một nghĩa nào đó đối với đối tượng thực.

Tín hiệu điều khiển này lặp lại theo chu kỳ ở mô hình của hệ. Bộ biến đổi D-A có



Hình 1.9

phần tử xung biến đổi tỷ lệ xích về thời gian để điều khiển đối tượng thực, còn bộ biến đổi A-D đưa đến mô hình đối tượng tín hiệu hiệu chỉnh lại mô hình khi thay đổi chế độ làm việc của hệ thực như ở hình 1.9. Hệ điều khiển hai thang đo thời gian như vậy cho phép điều khiển tối ưu đối tượng mà không cần tính toán trước điều khiển tối ưu.

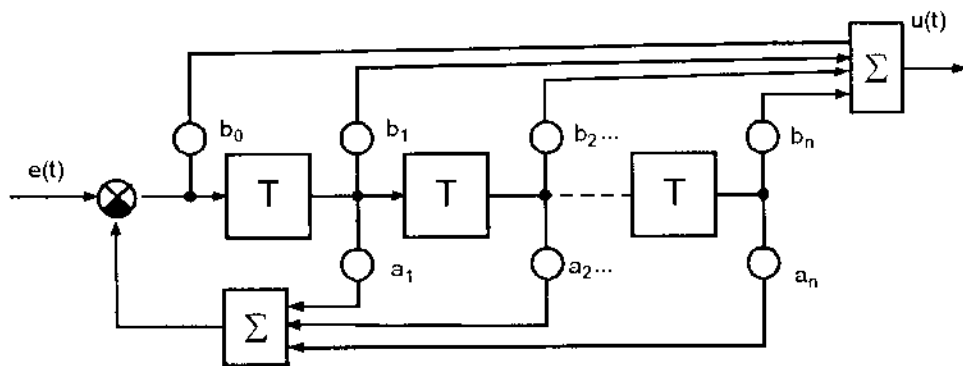
1.2.5. Các bộ lọc gián đoạn - liên tục

Phương trình của bộ lọc có thể viết dưới dạng:

$$u(t) = \sum_{k=0}^n b_k e(t - kT) - \sum_{k=1}^n a_k u(t - kT) \quad (1.1)$$

ở đây $e(t)$ là lượng vào; $u(t)$ là lượng ra. b_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) và a_k ($k = 1, 2, \dots$) là trọng số của các biến đầu vào và đầu ra tương ứng.

Phương trình (1-1) là phương trình sai phân với đối số liên tục - biến t . Phần tử cơ bản của bộ lọc gián đoạn là phần tử nhớ (duy trì hay trễ) có chức năng chuyển dịch lượng vào sau thời gian T mà không biến đổi hình dạng của nó. Sơ đồ khối bộ lọc như ở hình 1.10. Bộ cộng phía trên tương ứng với mạch thuận còn phía dưới là mạch hồi tiếp.



Hình 1.10

Trường hợp riêng của bộ lọc gián đoạn - liên tục là bộ lọc *không đệ quy*, khi không có hồi tiếp. Từ (1-1) với $a_i = 0$ ta có:

$$u(t) = \sum_{k=0}^n b_k e(t - kT) \quad (1.2)$$

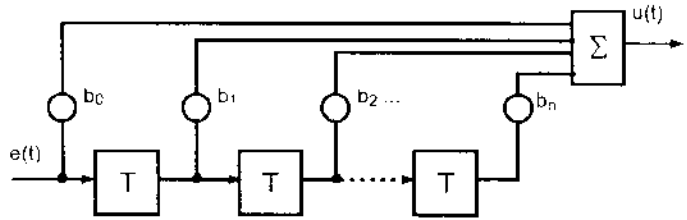
Sơ đồ khối bộ lọc không đệ quy như ở hình 1.11. Nếu ở đầu vào $e(t)$ là xung có dạng bất kỳ và độ dài bé hơn T thì đáp ứng của bộ lọc là một chuỗi xung hữu hạn; với $t \geq (n+1)T$ thì đáp ứng bằng không. Trường hợp $b_0 = 1, b_1 = -1$,

$b_2 = \dots = b_n = 0$ thì:

$$u(t) = e(t) - e(t - T) = \Delta e(t) \quad (1-3)$$

Sơ đồ khối tương ứng như ở hình 1.12 với T bé, sai phân bậc một gần như tỷ lệ với đạo hàm bậc một:

$$\Delta e(t) \approx T \frac{de(t)}{dt} \quad (1.4)$$



Hình 1.11

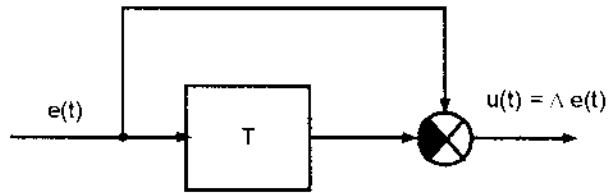
Bộ lọc gián đoạn

- liên tục có khả năng

lọc được nhiễu. Thực vậy, nếu $e(t)$ gồm có thành phần biến đổi chậm $e_0(t)$ và nhiễu cao tần có chu kỳ, nghĩa là:

$$e(t) = e_0(t) + a \sin \omega t \quad (1-5)$$

và dùng bộ vi phân lý tưởng, dạng liên tục, ta có ở đầu ra:



Hình 1.12

$$u(t) = \frac{de(t)}{dt} = \frac{de_0(t)}{dt} + a \omega \cos \omega t \quad (1.6)$$

Với tần số ω lớn, tín hiệu có ích sẽ hoàn toàn bị che khuất bởi biên độ ω của nhiễu. Trong khi đó, nếu dùng bộ vi phân gián đoạn - liên tục, ta có đáp ứng:

$$u(t) = e_0(t) - e_0(t - T) + a[\sin \omega t - \sin \omega(t - T)] \quad (1.7)$$

Chọn $T = \frac{2\pi n}{\omega}$ mà n là số nguyên thì:

$$\sin \omega \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) = \sin \omega t$$

$$\text{và } u(t) = e_0(t) - e_0(t - T) \approx T \frac{de_0(t)}{dt} \quad (1-8)$$

Ảnh hưởng của nhiễu hoàn toàn bị loại trừ. Từ biểu thức (1-1), với:

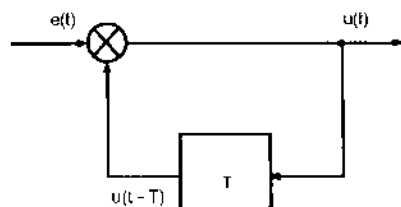
$$\left. \begin{aligned} b_0 = 1, \quad b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0 \\ a_1 = -1, \quad a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

ta có : $u(t) - u(t-T) = e(t)$ (1.10)

là phương trình sai phân. Sơ đồ khối tương ứng như ở hình 1.13, đó là bộ lọc gián đoạn-liên tục có hồi tiếp dương. Từ (1-10) ta suy ra:

$$u(t) = \sum_{k=0}^m e(t-kT) \quad (1-11)$$

$$(m-1)T \leq t \leq mT$$



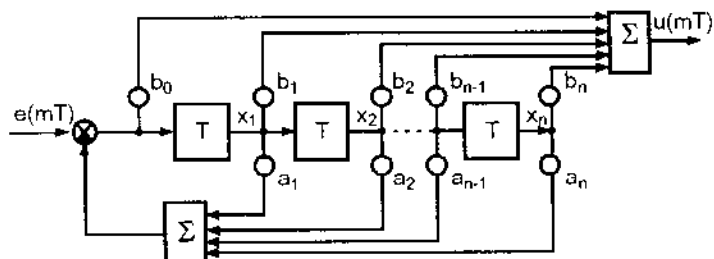
Hình 1.13

Như vậy bộ lọc này thực hiện phép cộng các tín hiệu vào.

1.2.6. Thiết bị tính số

Thiết bị tính số có dạng như bộ lọc gián đoạn biến đổi chuỗi số đầu vào $e(mT)$ thành chuỗi số đầu ra $u(mT)$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) như ở hình 1.14.

Nếu bỏ qua lượng tử hoá theo mức, nghĩa là tính hữu hạn của số liệu và giới hạn ở các phép biến đổi tuyến tính thì phương trình của thiết bị tính như biểu thức (1-1) với $t = mT$:



Hình 1.14

$$u(mT) = \sum_{k=0}^n b_k e[(m-k)T] - \sum_{k=1}^n a_k u[(m-k)T] \quad (1-12)$$

Sơ đồ cấu trúc của thiết bị tính (hình 1.14) và bộ lọc (hình 1.10) khác nhau ở chỗ: ở thiết bị tính số, tín hiệu vào và ra đều là hàm gián đoạn. Có thể xem (1-12) là chương trình của thiết bị tính.

Ví dụ chương trình cho phép tính tích phân:

$$u(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (1-13)$$

Lấy $t = mT$ ta có:

$$u(mT) = \int_0^{mT} e(\tau) d\tau = \int_0^{(m-1)T} e(\tau) d\tau + \int_{(m-1)T}^{mT} e(\tau) d\tau \quad (1-14)$$

nghĩa là :
$$u(mT) - u[(m-1)T] = \int_{(m-1)T}^{mT} e(\tau) d\tau \quad (1-15)$$

Các phương pháp tính tích phân khác nhau ở cách tính gần đúng vế phải của (1-15). Ví dụ ở phương pháp xấp xỉ đường cong $e(t)$ bằng hình thang như ở hình 1.15 :

$$\int_{(m-1)T}^{mT} e(\tau) d\tau \approx \frac{T}{2} \{e[(m-1)T] + e(mT)\} \quad (1-16)$$

Sau khi thay thế (1-16) vào (1-15) ta có :

$$u(mT) - u[(m-1)T] = \frac{T}{2} \{e[(m-1)T] + e(mT)\} \quad (1-17)$$

Sơ đồ thực hiện phép tính trên như ở hình 1.16, là trường hợp riêng của hình 1.14, với :

$$\left. \begin{aligned} b_N = b_{N-1} = \frac{T}{2}; \quad b_{N-2} = \dots = b_0 = 0 \\ a_{N-1} = -1; \quad a_{N-2} = \dots = a_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

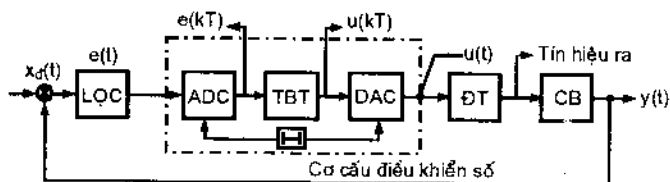
Trong các hệ tự động điều khiển, thiết bị tính số thường có chức năng là các bộ điều chỉnh hay cơ cấu điều khiển mà máy tính số thực hiện.

Trường hợp thiết bị tính có chức năng của cơ cấu điều khiển như ở hình 1.17.

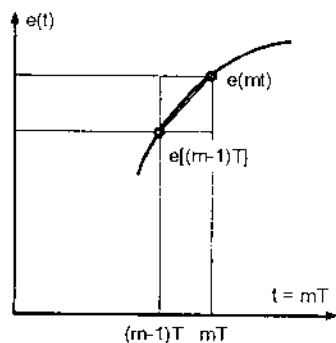
Thiết bị tính TBT nhận và xử lý tín hiệu sai lệch giữa đại

lượng đặt mong muốn $x_d(t)$ và tín hiệu ra của đối tượng DT sau khi qua cảm biến CB. Tổ hợp thiết bị tính cùng với các bộ biến đổi tương tự - số (ADC) và số - tương tự (DAC) có chức năng như bộ điều chỉnh PID chẳng hạn. Đồng hồ H đồng bộ hoá nhịp điệu làm việc của các bộ biến đổi. Bộ lọc đặt trước ADC có nhiệm vụ giảm ảnh hưởng của

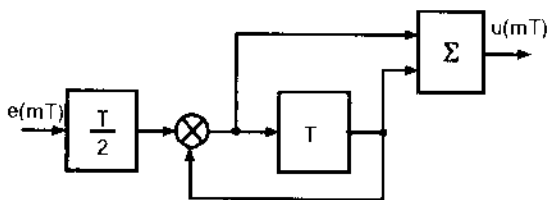
nhiễu trước khi lượng tử hoá. Thiết bị tính này là mô phỏng của thiết bị tương tự làm việc ở tần số lượng tử hoá.



Hình 1.17



Hình 1.15

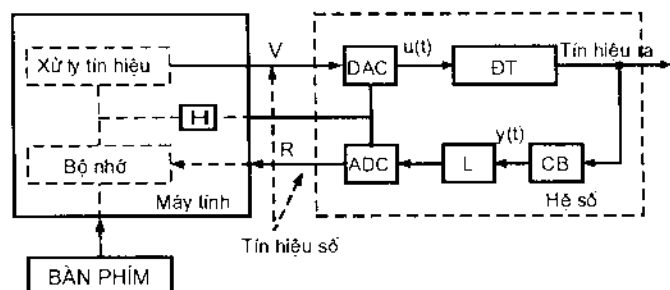


Hình 1.16

Ở hình 1.18. thiết bị tính được sử dụng tối ưu. Tín hiệu từ cảm biến sau khi qua bộ biến đổi ADC được đưa vào máy tính dạng tín hiệu số R so sánh với tín hiệu đặt đã được định trước trong máy tính. Từ máy tính, tín hiệu điều khiển số V đặt vào hệ

thống ở tần số lượng tử hoá, phụ thuộc vào thời điểm đặc trưng của đối tượng nên chất lượng cao hơn so với tín hiệu điều chỉnh từ PID chẳng hạn. Tổ hợp DAC-DT-CB-L-ADC là một hệ số. Nếu dùng

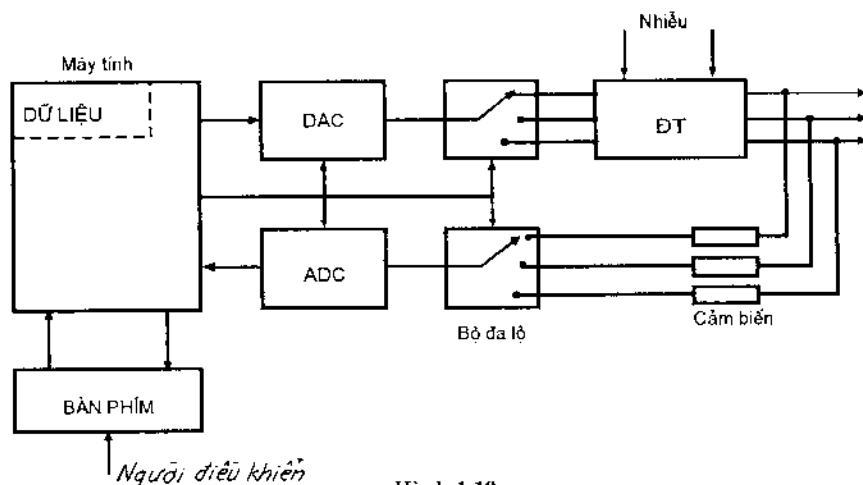
cảm biến số như trường hợp đo góc quay chẳng hạn, bộ biến đổi ADC trở nên không cần thiết. Tín hiệu đặt cũng có thể ở ngoài máy tính, dưới dạng tương tự, ở vị trí giữa cảm biến và bộ lọc (hình 1.18).



Hình 1.18

Máy tính có thể điều khiển đồng thời nhiều đại lượng như ở hình 1.19. tương ứng với hệ đa biến. Mỗi biến (ví dụ vị trí, lưu lượng, nhiệt độ, áp suất v.v...) được đo và điều khiển theo chu kỳ riêng (do nhiệt độ đòi hỏi nhiều thời gian hơn đo vị trí).

Thiết bị tính hay máy tính ở hình 1.17 hay 1.18, 1.19 có chức năng giải các phương trình dạng 1.12 mà sơ đồ tổng quát như ở hình 1.14



Hình 1.19

1.3. ĐẶC ĐIỂM CỦA HỆ GIÁN ĐOẠN

1. Điều khiển gián đoạn thuận tiện trong việc truyền và lưu giữ thông tin trong thời gian lâu, không hạn chế.

2. Các phân tử tạo xung, giản đơn và có thể chế tạo đồng loạt cho một số hệ điều khiển đối tượng khác nhau.

3. Ở các hệ lượng tử hoá theo thời gian có thể thực hiện điều khiển đồng thời nhiều kênh.

4. Ở các hệ lượng tử hoá theo mức, độ chống nhiễu của hệ tốt.

5. Hệ gián đoạn một mặt mang tính chất gần như của hệ liên tục, mặt khác có những tính chất đặc thù của nó.

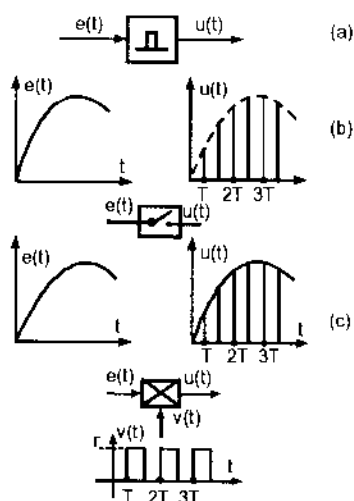
Chương II

CƠ SỞ TOÁN HỌC CỦA HỆ GIÁN ĐOẠN

II.1. SƠ ĐỒ TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA HỆ XUNG

Với mục đích ứng dụng lý thuyết hệ gián đoạn vào việc điều khiển các đối tượng hay các quá trình bằng máy tính, ở đây việc khảo sát nghiên cứu sẽ giới hạn chủ yếu đối với hệ xung.

Như ở hình 1.4, phần tử xung nhận tín hiệu liên tục $e(t)$ ở đầu vào và đầu ra là những xung $u(t)$ có hình dạng và thông số tùy thuộc vào $e(t)$ tại các thời điểm lấy mẫu và cấu trúc của phần tử xung. Như vậy phần tử lấy mẫu có thể được mô phỏng như một công tắc đóng mở (hình 2.1b) hay một bộ nhân (hình 2.1c) mà $v(t)$ là chuỗi xung có biên độ và độ rộng không đổi. Vậy phương trình của tín hiệu lấy mẫu có dạng:



Hình 2.1

$$u(t) = e(t)v(t) = e(t) \sum_{n=0}^{\infty} [r(t - nT) - r(t - nT - \gamma T)] \quad (2-1)$$

ở đây r là biên độ của các xung chữ nhật; γT là độ rộng xung ($\gamma \leq 1$).

Phương trình tích phân của hai hàm theo thời gian, việc xác định biến đổi Laplace đồng thời cho hai hàm có khó khăn. Nếu giả thiết độ rộng xung rất bé so với chu kỳ lượng tử hoá T và xem $e(t)$ tại các thời điểm lấy mẫu là một hằng: $e(t) = e(nT)$, ta có:

$$u(t) = e(t)v(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) [r(t - nT) - r(t - nT - \gamma T)] \quad (2-2)$$

Biến đổi Laplace của (2-2) cho ta:

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \left[\frac{e^{-nTs}}{s} - \frac{e^{-(n+1)Ts}}{s} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right] e^{-nTs} \quad (2-3)$$

Thay e^{-Ts} bằng chuỗi Padé:

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \left[\frac{1 - \left\{ 1 - Ts + \frac{(Ts)^2}{2!} - \dots \right\}}{s} \right] e^{-nTs}$$

với T bé ta có:

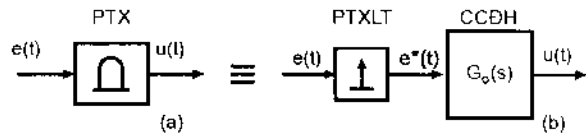
$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \left[\frac{Ts}{s} \right] e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) T e^{-nTs}$$

Cuối cùng, trở lại với hàm gốc:

$$u(t) = e(t)v(t) = T \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \quad (2-4)$$

$\delta(t-nT)$ là hàm Dirac (hàm có biên độ vô cùng lớn, độ rộng vô cùng bé và diện tích bằng đơn vị). Phương trình (2-4) cho thấy phần tử lấy mẫu gồm hai thành phần: phần tử xung lý tưởng không phụ thuộc dạng xung (phần tử xung tối giản) là một chuỗi xung dạng hàm delta mà diện tích mỗi xung bằng trị rời rạc của tín hiệu vào $e(t)$ tại thời điểm ấy; thành phần thứ hai phụ thuộc đặc tính của xung gọi là cơ cấu định hình. Như vậy, bất cứ

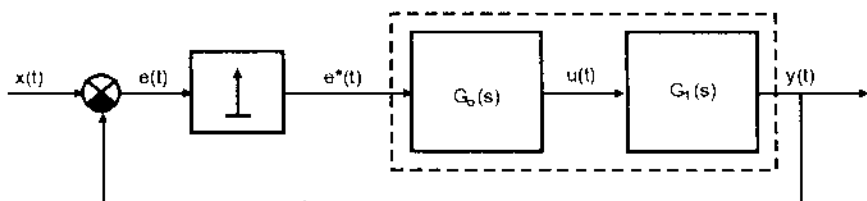
phần tử xung nào PTX có dạng xung bất kỳ ($v(t)$) đều có thể được thay thế bằng phần tử xung lý tưởng



Hình 2.2

PTXLT và cơ cấu định hình CCĐH như ở hình 2.2a và 2.2b. Vì tín hiệu vào của cơ cấu định hình là hàm $\delta(t)$ nên đáp ứng của cơ cấu định hình là hàm trọng lượng $g_0(t)$ xác định hình dạng xung. Do đó hàm truyền đạt của cơ cấu định hình sẽ bằng:

$$G_0(s) = L\{g_0(t)\} \equiv L\{v(t)\} \quad (2-5)$$



Hình 2.3

Như vậy, sơ đồ tương đương của hệ xung ứng với hình 1.4 như ở hình 2.3. Cơ cấu định hình cùng với phần liên tục của hệ thống hợp thành phần liên tục quy đổi có hàm truyền đạt:

$$W(s) = G_0(s) G_1(s) \quad (2-6)$$

Để đơn giản hoá cách viết, ta dùng $G_0(s)$ và $G_1(s)$ biểu thị cho hàm truyền đạt của cơ cấu định hình và phần liên tục của hệ thống.

Đặc tính tần số phần liên tục quy đổi :

$$W(j\omega) = G_0(j\omega) G_1(j\omega) \quad (2-7)$$

Hàm trọng lượng của phần liên tục quy đổi:

$$w(t) = \int_0^t g_0(\tau) g_1(t - \tau) d\tau \quad (2-8)$$

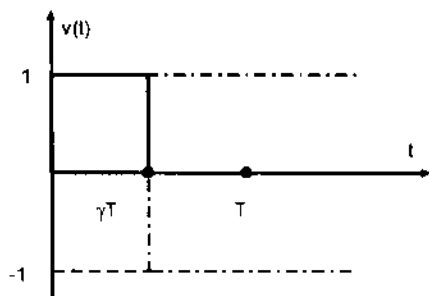
Để xác định khâu định hình, ta xét một vài trường hợp.

Ví dụ 2-1

Phần tử xung có dạng chữ nhật, biên độ $H = 1$ và độ rộng $B = \gamma T$ như ở hình 2.4.

Vì dạng xung $v(t)$ cũng là hàm trọng lượng của cơ cấu định hình $g_0(t)$ nên :

$$g_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq \gamma T \\ 0 & \gamma T < t < T \end{cases} \quad (2-9)$$



Hình 2.4

Xung chữ nhật có thể được thay thế bởi hai hàm bậc thang ngược dấu nhau như ở (2-1) và hình 2.4:

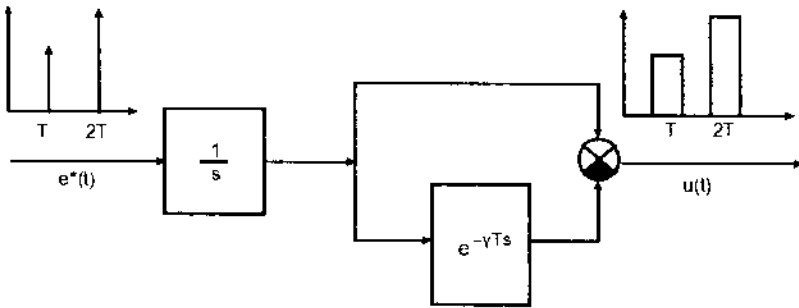
$$g_0(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T) \quad (2-10)$$

Vậy theo biểu thức (2-3) ta có:

$$G_0(s) = L\{g_0(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\gamma Ts} = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s} \quad (2-11)$$

Đặc tính tần của cơ cấu định hình:

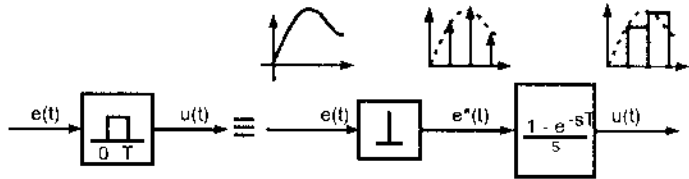
$$G_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad (2-12)$$



Hình 2.5

Sơ đồ cấu trúc của cơ cấu định hình như ở hình 2.5, gồm một khâu tích phân, phân tử trễ và khâu so sánh.

Trường hợp $\gamma = 1$
ta có bộ nội suy bậc
không hay bộ lưu giữ
bậc không mà sơ đồ
tương đương như ở
hình 2.6.



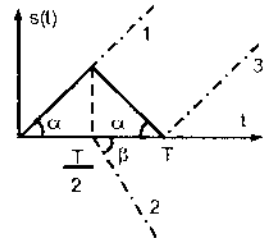
Ví dụ 2-2

Hình 2.6

Phần tử xung răng cưa, dạng tam giác cân như ở hình 2.7. Hàm trọng lượng của cơ cấu định hình có thể được thay thế bằng ba thành phần 1, 2, 3 trên hình vẽ với $\alpha = 45^\circ$ (để giản đơn):

$$g_0(t) = t - 2\left(t - \frac{T}{2}\right) + (t - T) \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } G_0(s) &= L\{g_0(t)\} = \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-s\frac{T}{2}} + \frac{1}{s^2} e^{-sT} = \frac{(1 - e^{-s\frac{T}{2}})^2}{s^2} \end{aligned} \quad (2-14)$$



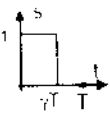
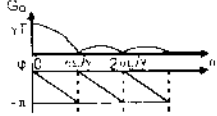
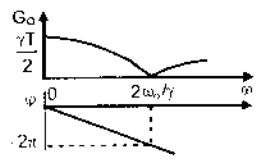
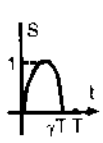
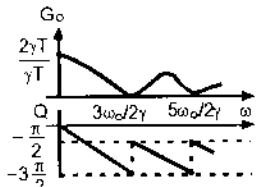
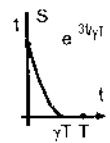
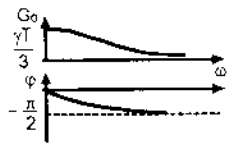
Hình 2.7

Đặc tính tần của khâu định hình tương ứng:

$$G_0(j\omega) = \left[\frac{1 - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} \right]^2 \quad (2-15)$$

Một số dạng xung và khâu định hình thường gặp nêu ở bảng 2 - 1.

Bảng 2.1

Dạng xung	$G_0(s)$	$G_0(j\omega)$	Đặc tính tần
	$\frac{1 - e^{-s\gamma T}}{s}$	$\gamma T \frac{\sin \frac{\omega \gamma T}{2}}{\frac{\omega \gamma T}{2}} e^{-j\omega \frac{\gamma T}{2}}$	
	$\frac{2}{\gamma T} \frac{\left(1 - e^{-\frac{s\gamma T}{2}}\right)^2}{s^2}$	$\frac{\gamma T}{2} \frac{\sin^4 \frac{\omega \gamma T}{4}}{\left(\frac{\omega \gamma T}{4}\right)^2} e^{-j\omega \frac{\gamma T}{2}}$	
	$T \frac{\pi}{\gamma} \frac{1}{s^2 T^2 + \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2} \times (1 + e^{-s\gamma T})$	$\frac{2\gamma T}{2} \frac{\cos \frac{\omega \gamma T}{2}}{1 - \left(\frac{2\omega \gamma T}{\pi}\right)^2} e^{-j\omega \frac{\gamma T}{2}}$	
	$\frac{T}{sT + \frac{3}{\gamma}}$	$\frac{\gamma T}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \gamma T}{3}\right)^2}} e^{j \arctan \frac{\omega \gamma T}{3}}$	

II.2. SƠ ĐỒ CHỨC NĂNG CỦA MỘT HỆ ĐIỀU KHIỂN CÓ DÙNG MÁY TÍNH

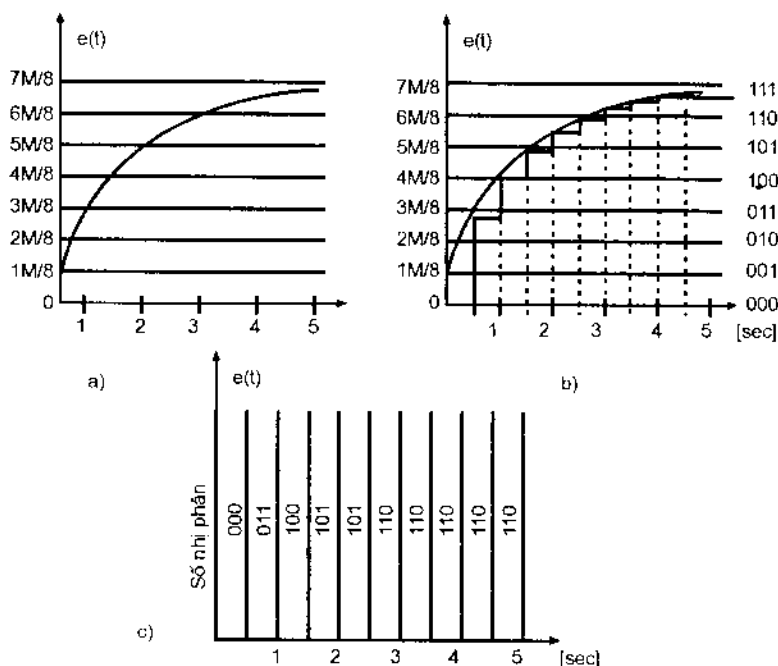
Như một ví dụ, ta xác định sơ đồ chức năng của hệ điều khiển ở hình 1.18. Trước tiên xác định chức năng của ba phần tử cơ bản: bộ chuyển đổi tương tự - số, bộ vi xử lý và bộ chuyển đổi số - tương tự.

II.2.1. Bộ chuyển đổi tương tự - số (A- D hay ADC)

Quá trình chuyển đổi tương tự - số không thể tức thời, cần có thời gian trễ để biến đổi tín hiệu tương tự là một đại lượng vật lý (điện áp) ở đầu vào thành tín hiệu số ở đầu ra.

Bộ chuyển đổi A-D có ba chức năng: lấy mẫu (lượng tử hoá theo thời gian), lượng tử hoá theo mức và mã hoá (hệ nhị phân). Ở hình 2.8a, $e(t)$ là tín hiệu

tương tự ở đầu vào. Bộ lấy mẫu có chức năng chủ yếu là xác định những tín hiệu rời rạc $e(t)|_{t=nT}$ tại các thời điểm nT ($n = 0, 1, 2, \dots$). Để làm việc phân minh, tín hiệu rời rạc được lưu giữ biên độ trong suốt chu kỳ lượng tử hoá nên bộ chuyển đổi A – D có thể là một tổ hợp lấy mẫu và lưu giữ bậc không như ở hình 2.6. Sau đó bộ chuyển đổi A – D thực hiện lượng tử hoá theo mức. Mỗi mức tương ứng với một số; ví dụ ở hình 2.8b tín hiệu tương tự được chia làm 8 mức. Một số 3 bit thể hiện các mức ấy, ví dụ mỗi mức cách nhau $M/8$ vôn mà M là trị số điện áp tương tự cực đại. Trong trường hợp chung khoảng cách ấy là $M/2^n$ vôn mà n là số lượng các bit ở mã nhị phân. Ở hình 2.8b có sự sai lệch của tín hiệu liên tục đã được lượng tử hoá vì lượng tử hoá theo mức quy tròn các đại lượng lân cận với mức đã xác định. Ở ví dụ này, sai lệch cực đại là $1/2$ của khoảng cách giữa các mức. Trong trường hợp chung, sai lệch lượng tử hoá là $\frac{M/2}{2^n} = \frac{M}{2^{n+1}}$.



Hình 2.8

Quá trình lượng tử hoá theo mức đã "cắt xén" đại lượng vật lý dạng liên tục ở đầu vào. Quá trình biến đổi không tuyến tính ấy sẽ không đề cập đến và mô hình tuyến tính của bộ biến đổi A–D mô tả tín hiệu ở đầu ra của nó chỉ là tín hiệu xung (được lượng tử hoá theo thời gian). Do đó ở đây chỉ đề cập đến việc nghiên cứu khảo sát hệ xung, độ chính xác phụ thuộc vào cấu tạo của máy tính.

II.2.2. Bộ vi xử lý

Bộ vi xử lý thực hiện các thuật toán như: dịch chuyển, cộng, nhân, lưu giữ; nó tạo nên tín hiệu điều khiển $u_k = u(kT)$ theo chu kỳ, là hàm của các đại lượng $u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-q}$ ở các thời điểm trước đó và các đại lượng sai lệch $e_k, e_{k-1}, \dots, e_{k-p}$. Algorit mô tả hàm ấy có dạng tuyến tính như ở (1-12):

$$u_k = a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + \dots + a_q u_{k-q} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_p e_{k-p} \quad (2-16)$$

Yêu cầu là xác định các hệ số a_j và b_j sao cho đáp ứng của hệ đối với đại lượng đặt $x_d(kT)$ là thích hợp mặc dù có nhiễu tác động đến hệ thống hay đèn cảm biến. Trong algorit, sai lệch $e(kT)$ xuất hiện đồng thời với điều khiển, đòi hỏi chu kỳ lượng tử hoá T đủ lớn (ít nhất là 20 lần) so với thời gian tính $u(kT)$. Thời gian lấy mẫu và thời gian biến đổi tín hiệu đều cần tính đến để chọn T .

Chu kỳ lấy mẫu T có ảnh hưởng rất lớn đối với chất lượng của hệ kín. Nếu T quá lớn hệ có thể mất ổn định. Nếu T và mức lượng tử hoá (mà quá trình phân tích không quan tâm đến) đủ bé thì tín hiệu số cũng như tín hiệu rời rạc có thể xem như liên tục.

II.2.3. Bộ chuyển đổi số - tương tự (D - A hay DAC)

Bộ chuyển đổi số - tương tự biến đổi một chuỗi các đại lượng $u(kT)$ thành tín hiệu liên tục $u(t)$ để điều khiển hệ thống. Bộ chuyển đổi D-A được mô phỏng bởi bộ lưu giữ, nhận ở thời điểm kT xung có biên độ tỷ lệ với trị số $u(kT)$ có độ rộng rất bé so với T (tín hiệu lấy mẫu) và duy trì hằng số ấy suốt cả chu kỳ T . Như vậy đáp ứng đối với một chuỗi xung là một chuỗi bậc thang có độ dài T . Quá trình biến đổi này là tức thời, không có trễ.

Ở hình 2.9, có một mạch điện nhận ở đầu vào một số nhị phân a_2, a_1, a_0 , mô tả bởi tiếp điểm nối các điểm 2, 1, 0 với đất hay x (hình 2.9a) tùy thuộc vào a_2, a_1, a_0 có giá trị 0 hay 1. Điện áp ra sẽ tương đương với tín hiệu tương tự: $y = k(a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0)(-x)$.

Thực vậy:

Nếu $a_0 = a_1 = 0; a_2 = 1$, ta có mạch tương đương như ở hình 2.9b vì các điểm 0 và 1 đều nối đất, điểm 2 nối với x. Điện trở giữa điểm P_0 và M bằng R ($2R // 2R$), giữa P_1 và M cũng bằng R , còn giữa P_2 và M là $2R$.

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} y = -3R \frac{i}{2} \\ x = 3Ri \end{array} \right\} y = \frac{1}{2}(-x)$$

Nếu $a_0=0, a_1=1, a_2=0$ ta có mạch tương đương như ở hình 2.9c.

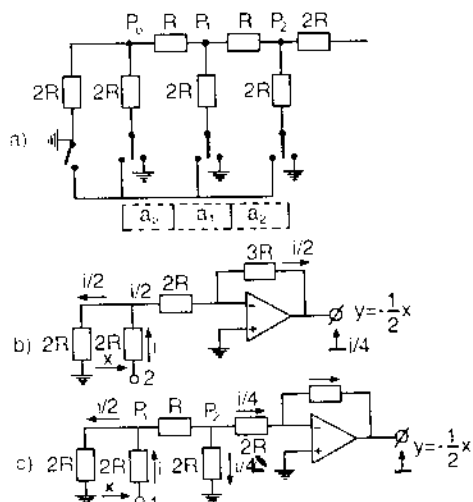
$$\text{Ta có: } \left. \begin{aligned} y &= 3R \frac{i}{4} \\ x &= 3Ri \end{aligned} \right\} \quad y = \frac{1}{4} (-x)$$

Nếu $a_0=1, a_1=a_2=0$ ta có $y = \frac{1}{8} (-x)$

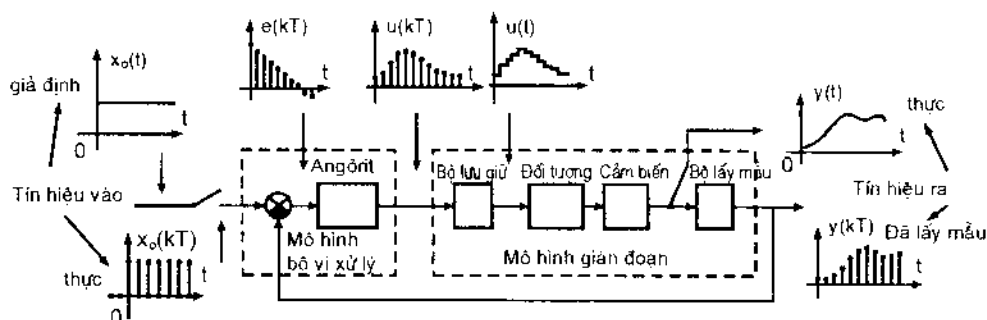
Như vậy, trong trường hợp chung, điện áp đầu ra là:

$$y = \frac{1}{8} (a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0) (-x)$$

Từ các phân tích trên, ta có sơ đồ chức năng của hệ điều khiển dùng máy tính cho các đối tượng tương tự như ở hình 2.10.



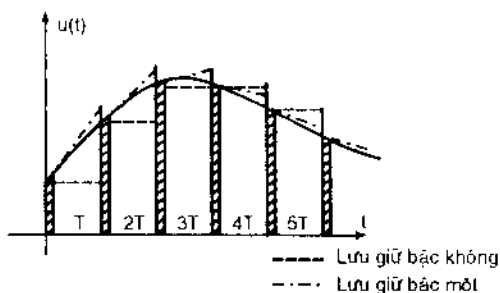
Hình 2.9



Hình 2.10

Bộ lưu giữ bậc không ở đây tương ứng với cơ cấu định hình với xung chữ nhật, hệ số lấy mẫu $\gamma = 1$. Những bộ lưu giữ bậc cao tạo nên những dạng sóng phức tạp hơn nhưng độ chính xác cao hơn. Ở hình 2.11 có so sánh bộ lưu giữ bậc không và bậc một.

Ở hình 2.10 tổ hợp "bộ lưu giữ, đối tượng, cảm biến, bộ lấy mẫu" là mô hình của hệ xung - số tương ứng với hình 1.18. Đầu vào và ra



Hình 2.11

của tổ hợp này là những tín hiệu đã được lấy mẫu và được mô tả bằng phương trình vi sai phân hay dùng các phép biến đổi Laplace gián đoạn (hoặc biến đổi z) sẽ đề cập đến ở phần tiếp theo.

II.3. PHỔ VÀ ẢNH CỦA TÍN HIỆU GIÁN ĐOẠN

Ở hình 2.12 có tín hiệu đầu vào và ra của phân tử xung lý tưởng. Hãy khảo sát phổ và ảnh của tín hiệu gián đoạn với điều kiện các tín hiệu đều bằng không khi $t < 0$.

Tín hiệu $x^*(t)$ là tổng của các xung đã được dịch chuyển. Tại thời điểm nT , mỗi xung có dạng hàm $\delta(t - kT)$ và diện tích bằng trị số rời rạc của tín hiệu vào tại thời điểm ấy $x(kT)$ như ở hình 2.12. Do đó ta có thể viết:

$$x^*(t) = x(0)\delta(t - 0) + x(T)\delta(t - T) + x(2T)\delta(t - 2T) + \dots + x(kT)\delta(t - kT) + \dots$$

Hay dưới dạng tổng quát:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (2-17)$$

Biến đổi Fourier (Furiê) hay phổ của tín hiệu ra được xác định như trong trường hợp liên tục của biểu thức Fourier :

$$X^*(j\omega) = \int_0^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT)e^{-j\omega t} dt$$

Vì phổ của một xung $\delta(t - nT)$ là $e^{-j\omega nT}$ nên :

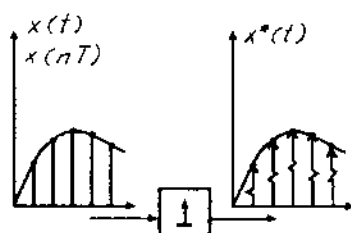
$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} \quad (2-18)$$

Thay thế s cho $j\omega$ ở (2-18) ta có ảnh của $x^*(t)$ theo Laplace :

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT} \quad (2-19)$$

So sánh với biến đổi Fourier và Laplace liên tục, ở phép biến đổi gián đoạn, dấu tích phân được thay thế bằng dấu tổng, hàm gốc $x(t)$ ở hệ liên tục được thay thế bằng $x(nT)$ là hàm rời rạc ở các thời điểm nT ($n = 0, 1, 2, \dots$).

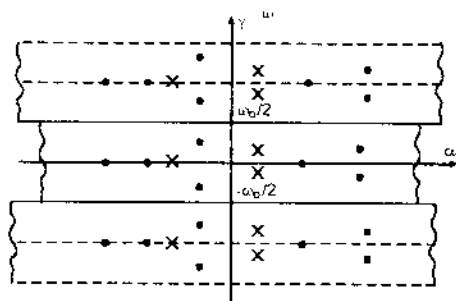
Đặc điểm quan trọng của phổ tín hiệu gián đoạn là tính tuần hoàn với tần số lặp lại $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - tần số lượng tử hoá. Điều ấy có thể kiểm tra bằng cách thay thế ω bởi $\omega + k\omega_0$ ở biểu thức (2-18):



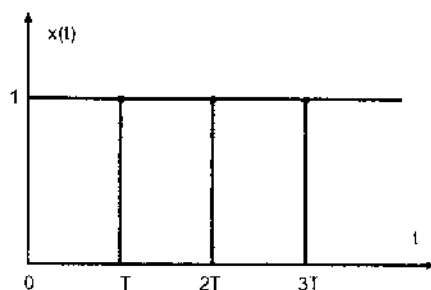
Hình 2.12

$$e^{j(\omega - k\omega_0)nT} = e^{-j\omega nT} \times e^{jk2\pi n} = e^{-j\omega nT} \times 1$$

Vì vậy chỉ cần khảo sát phổ của tín hiệu gián đoạn trong dải tần số $-\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$, ngoài dải ấy các đặc tính sẽ lặp lại một cách có chu kỳ. Ảnh của $X^*(s)$ cũng mang tính chất tuần hoàn trong mặt phẳng s . Ở hình 2.13 có ví dụ phân bố nghiệm trên mặt phẳng s của hệ gián đoạn. Phân bố nghiệm trong dải $-\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ được lặp lại ở các miền tần số khác.



Hình 2.13



Hình 2.14

Ví dụ 2.3

Tìm ảnh của tín hiệu gián đoạn $x^*(t)$ khi $x(t)$ là hàm bậc thang đơn vị như ở hình 2.14.

Hàm rời rạc của $x(t)$ là :

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Biến đổi Laplace gián đoạn được xác định theo (2.19) :

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} 1e^{-snT};$$

vế phải của biểu thức trên là tổng của một cấp số nhân nên:

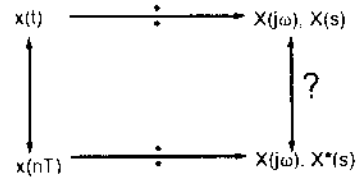
$$X^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1} \quad (2-20)$$

Phổ của $x^*(t)$ được xác định bằng cách thay $s = j\omega$ vào biểu thức trên.

II.4. QUAN HỆ GIỮA PHỔ VÀ ẢNH CỦA TÍN HIỆU GIÁN ĐOẠN VÀ TÍN HIỆU LIÊN TỤC

Ở hệ liên tục, từ hàm gốc $x(t)$ ta đã xác định phổ và ảnh của $x(t)$ tức là $X(j\omega)$ và $X(s)$. Từ hàm liên tục $x(t)$ ta đã xác định hàm gián đoạn của nó $x(nT)$

bằng cách thay thế $t = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) rồi từ hàm gốc $x(nT)$ xác định phổ và ảnh của tín hiệu gián đoạn $x^*(t)$ tức là $X^*(j\omega)$ và $X^*(s)$. Vậy giữa phổ và ảnh của tín hiệu liên tục và gián đoạn quan hệ nhau như thế nào?



Hình 2.15

Mối quan hệ lẫn nhau ấy mô tả ở hình 2.15. Tương tự như ở hình 2.12, tín hiệu

$1^*(t)$ được mô tả bằng chuỗi xung $\delta(t)$ như ở hình 2.16. Vậy: $x^*(t) = x(t)1^*(t)$ mà:

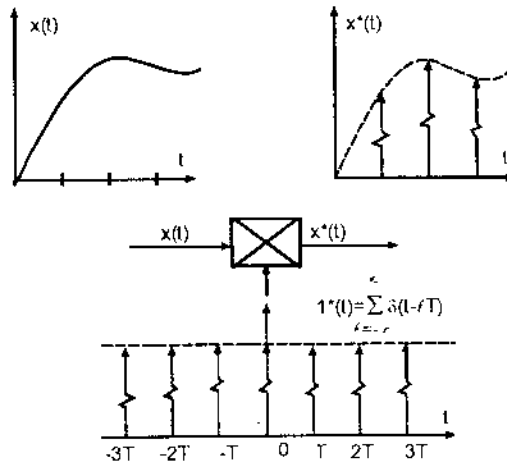
$$1^*(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT)$$

Phân tích theo chuỗi Fourier ta có :

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{với} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Các hệ số C_k được xác định theo :

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT) \right] e^{jk\omega_0 t} dt \quad \text{và bằng} \quad \frac{1}{T} \quad \text{cho mọi } k.$$



Hình 2.16

Như vậy phổ của $x^*(t)$ được xác định bởi:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt$$

Vì rằng : $\int_0^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt = X[j(\omega - k\omega_0)]$ nên ta có :

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_0)] \quad (2-21)$$

Thay k bằng $-k$ và đổi trình tự lấy tổng ta có:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + k\omega_0)] \quad (2-22)$$

Chú ý rằng, biểu thức (2-22) chỉ đúng với trường hợp $t \leq 0$ thì $x(t) = 0$. Nếu $x(0) \neq 0$, biểu thức (2-22) có dạng :

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + k\omega_0)] + \frac{1}{2} x(0) \quad (2-23)$$

Ứng với (2-22) ảnh của $x^*(t)$ là:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[s + jk\omega_0] \quad (2-24)$$

và khi $x(0) \neq 0$:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[s + jk\omega_0] + \frac{1}{2} x(0) \quad (2-25)$$

Ví dụ 2-4

Tìm quan hệ giữa $X^*(s)$ và $X(s)$ khi hàm liên tục có dạng : $x(t) = e^{-\alpha t}$

Hàm rời rạc của $x(t)$: $x(nT) = e^{-\alpha nT}$

Theo (2-19) : $X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} \cdot e^{-snT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+\alpha)nT}$

$$= \frac{1}{1 - e^{-(s+\alpha)T}} = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{-\alpha T}} \quad (2-26)$$

Khi $T \rightarrow 0$ (hay $\omega_0 \rightarrow \infty$) thì ảnh của hàm gián đoạn trở thành ảnh của hàm liên tục. Thật vậy, từ biểu thức (2-24) ta có thể viết :

$$\lim_{T \rightarrow 0} TX^*(s) = X(s)$$

$$\text{Do đó } X(s) = \lim_{T \rightarrow 0} T \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{-\alpha T}} = \frac{1}{s + \alpha}$$

Ở đây hàm mũ được xấp xỉ theo chuỗi Padé:

$$e^{sT} \approx 1 + sT ; e^{-\alpha T} \approx 1 - \alpha T$$

II.5. BIẾN ĐỔI z

Để đơn giản hoá việc mô tả toán học ở các hệ xung, dùng biến đổi z :

$$z \equiv e^{sT} \quad (2-27)$$

Như vậy, biểu thức (2-19) có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2-28)$$

$$\text{tương ứng với } X(z) = x(0) + X(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots \quad (2-29)$$

Có thể dùng các ký hiệu sau đây:

$$X(z) \equiv Z[x(k)] \equiv Z[x(t)] \quad (2-30)$$

Ký hiệu sau cùng được dùng khi tín hiệu liên tục đã được lấy mẫu, để có $x(k)$.

Như vậy ở ví dụ 2-3 với $x(t) = 1(t)$ ta có:

$$X^*(s) = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1} = \frac{z}{z - 1} = X(z)$$

Ở ví dụ 2-4 với $x(t) = e^{-\alpha t}$ ta có:

$$X^*(s) = \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{-\alpha T}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} = X(z)$$

Ví dụ 2-5

Với $x(t) = \sin \omega t$

$$\text{Biết rằng } \sin \omega t = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j} = \frac{e^{j\omega T}}{2j} - \frac{e^{-j\omega T}}{2j}$$

Theo ví dụ 2-4 suy ra:

$$\begin{aligned} Z[\sin \omega t] \equiv X(z) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1} \right) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

Biến đổi Laplace gián đoạn và biến đổi z của một số hàm thường gặp cho ở bảng 2-2. Tuy $X^*(s)$ và $X(z)$ là như nhau, nhưng ở bảng này chỉ ghi những dạng dễ nhớ nhất.

Bảng 2.2

$\frac{T}{T}$	$x(t)$	$x(kT), x(k)$	$x(s)$	$X^*(s)$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	$\delta_0(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$	1	1	1
2	$\delta(t-k)$	$\delta_0(n-k) = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$	e^{-kTs}	e^{-kTs}	z^{-k}
3	1(t)	1(k)	$\frac{1}{s}$	$\frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1}$	$\frac{1}{1 - Z^{-1}}$
4	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{-\alpha T}}$	$\frac{1}{1 - e^{-\alpha T} Z^{-1}}$
5	t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$T \frac{e^{sT}}{(e^{sT} - 1)^2}$	$T \frac{Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2}$
6	t^2	$(kT)^2$	$\frac{2}{s^3}$	$T^2 \frac{e^{sT}(e^{sT} + 1)}{(e^{sT} - 1)^3}$	$\frac{T^2 Z^{-1}(1 + Z^{-1})}{(1 - Z^{-1})^3}$
7	$1 - e^{-\alpha t}$	$1 - e^{-\alpha kT}$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha T})e^{sT}}{(e^{sT} - 1)(e^{sT} - e^{-\alpha T})}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha T})Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})(1 - e^{-\alpha T} Z^{-1})}$
8	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{e^{sT} \sin \omega T}{e^{2sT} - 2 \cos \omega T e^{sT} + 1}$	$\frac{Z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2Z^{-1} \cos \omega T + Z^{-2}}$
9	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{e^{sT}(e^{sT} - \cos \omega T)}{e^{2sT} - 2 \cos \omega T e^{sT} + 1}$	$\frac{1 - Z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2Z^{-1} \cos \omega T + Z^{-2}}$
10	$e^{-a} \sin \omega t$	$e^{-\alpha kT} \sin \omega kT$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{e^{-aT} \sin \omega T e^{sT}}{e^{2sT} - 2e^{-aT} \cos \omega T e^{sT} + e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-aT} Z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2e^{-aT} Z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} Z^{-1}}$
11	$e^{-a} \cos \omega t$	$e^{-\alpha kT} \cos \omega kT$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{e^{sT}(e^{sT} - e^{-aT} \cos \omega T)}{e^{2sT} - 2e^{-aT} \cos \omega T e^{sT} + e^{-2aT}}$	$\frac{1 - e^{-aT} Z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2e^{-aT} Z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} Z^{-1}}$
12		a^k			$\frac{1}{1 - aZ^{-1}}$
13		$a^k \cos k\pi$			$\frac{1}{1 + aZ^{-1}}$
14		a^{k-1} $k = 1, 2, 3$			$\frac{Z^{-1}}{1 - aZ^{-1}}$

II.5.1. Định lý cơ bản của biến đổi z

1 - *Định lý tuyến tính* : Biến đổi z của tổ hợp tuyến tính có dạng:

$$Z[ax(k) + by(k)] = aZ[x(k)] + bZ[y(k)] \quad (2-31)$$

2 - *Định lý trễ* : Biến đổi z của một tín hiệu trễ $x(k-n)$, n bước so với $x(k)$ là:

$$Z[x(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)Z^{-k} \quad (2-32)$$

thay $k-n = m$:

$$Z[x(k-n)] = \sum_{m=-n}^{\infty} x(m)Z^{-(m+n)} = Z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)Z^{-m}$$

$$\text{Vậy : } Z[x(k-n)] = z^{-n}X(z) \quad (2-33)$$

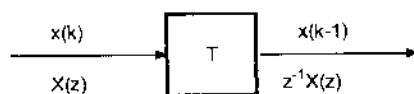
Để phân tích, khai triển biểu thức (2-32):

$$Z[x(k-n)] = x(-n) + x(-n+1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{n-1} + z^{-n}[x(0) + x(1)z^{-1} + \dots + x(m)z^{-m} + \dots]$$

Biểu thức trên có thể dùng để biến đổi phương trình sai phân bậc n có tính đến điều kiện đầu vì $x(k) = 0$ với $k < 0$ nên:

$$Z[x(k-n)] = z^{-n}X(z)$$

Trường hợp riêng, nhân với z^{-1} tương ứng với độ trễ một bước khi lấy mẫu như ở hình 2.17.



Hình 2.17

Khai triển của (2-33):

$$z^{-n}X(z) = x(0)z^{-n} + x_1z^{-(n+1)} + \dots + x(k-n)z^{-k} + \dots$$

cho thấy là hàm gốc của $z^{-n}X(z)$ là $x(k-n)$ khi $k \geq n$ và bằng không khi $k < n$.

Biến đổi ngược của Z :

$$Z^{-1}[z^{-n}X(z)] = x(k-n)1(k-n)$$

Ví dụ 2-6

$$\text{Tìm hàm gốc của } X(z) = \frac{1}{z-p}$$

$$\text{Ta có thể viết } X(z) = z^{-1} \frac{z}{z-p}$$

$$\text{Vậy } x(k) = \begin{cases} p^{k-1} & \text{nếu } k \geq 1 \\ 0 & \text{nếu } k < 1 \end{cases}$$

3. Biến đổi z của sai phân

Sai phân bậc một của hàm gián đoạn theo hình 2.19 là:

$$\Delta x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$Z[\Delta x(n)] = Z[x(n)] - Z[x(n-1)] = X(z) - z^{-1}X(z)$$

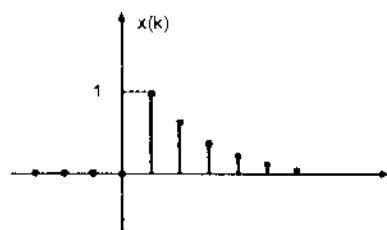
$$Z[\Delta x(n)] = (1 - z^{-1})X(z) \quad (2-34)$$

Như vậy, lấy sai phân tương ứng với nhân $X(z)$ với $(1 - z^{-1})$

Khi chu kỳ lượng tử hoá T rất bé :

$$1 - z^{-1} = 1 - e^{-sT} = 1 - 1 + sT = sT$$

nghĩa là khi $T \rightarrow 0$, lấy sai phân ở hàm gián đoạn tương ứng với lấy đạo hàm ở ảnh.

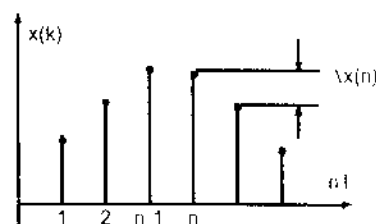


Hình 2.18

Ví dụ 2.7

Tính biến đổi z của sai phân $\Delta x(n-k)$ khi $x(t)$ là hàm bậc thang đơn vị.

Theo bảng 2.2 có $X(z) = \frac{z}{z-1}$



Hình 2.19

và theo định lý về biến đổi z của sai phân:

$$Z[\Delta x(n-k)] = (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1}$$

$$\text{với } n=1 \text{ có } Z[\Delta x(k)] = (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} = \frac{(z-1)}{z} \frac{z}{(z-1)} = 1$$

4. Định lý vượt trước

Biến đổi z của một chuỗi vượt trước một bước là :

$$Z[x(k+1)] = Z[X(z) - x(0)] \quad (2-35)$$

$$\text{vì rằng} \quad Z[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} = z \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

$$= z \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} - x(0) \right] = z [X(z) - x(0)]$$

5. Giá trị ban đầu: Nếu $x(k)$ có biến đổi z $-X(z)$ và nếu giới hạn $X(z)$ tồn tại khi $z \rightarrow \infty$ theo khai triển:

$$X(z) = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots + \frac{x(k)}{z^k} + \dots$$

$$\text{thì} \quad x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} [X(z)] \quad (2-36)$$

6. *Giá trị cuối*: Giá trị cuối được suy ra từ $(1-z^{-1})X(z)$ ở lân cận điểm $z = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1-z^{-1})X(z)] \quad (2-37)$$

Biểu thức này chỉ có nghĩa nếu hàm $(1-z^{-1})X(z)$ không có nghiệm cực ở trên hoặc ngoài đường tròn đơn vị trên mặt phẳng z . Thực vậy, theo định lý trên, vì $x(-1) = 0$ nên,

$$\lim [X(z) - z^{-1}X(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) - \sum_{k=1}^{\infty} x(k-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} [x(k)]$$

7. *Thay đổi tỷ lệ xích*: Theo định nghĩa (2-28) ta có thể viết :

$$X\left(\frac{z}{a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k}$$

Thay đổi tỷ lệ xích $z \rightarrow \frac{z}{a}$ tương ứng với nhân tín hiệu $X(k)$ với hàm mũ a^k :

$$X\left(\frac{z}{a}\right) = Z[a^k x(k)] \quad (2-38)$$

Ví dụ 2-8

Tín hiệu bậc thang đơn vị với biến đổi sang $\frac{z}{z-1}$ có hệ quả là:

$$Z[p^k] = \frac{z}{z-p} \quad (2-39)$$

8. *Nhân với k*:

$$Z[k \cdot x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x(k) z^{-k} = - \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z \frac{d}{dz} (z^{-k})$$

$$\text{và bằng :} \quad Z[k \cdot x(k)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (2-40)$$

Ví dụ 2-9

Tính $Z[k \cdot p^k]$. Theo (2-39) và (2-40):

$$Z[k \cdot p^k] = -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-p} \right] = \frac{pz}{(z-p)^2}$$

9. Định lý nhân ảnh - định lý cuộn

$$Z[x_1(k) * x_2(k)] = X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (2-41)$$

Biến đổi z của tích những chuỗi rời rạc:

$$x_1(k) * x_2(k) = \sum_{m=0}^k x_1(m)x_2(k-m) \quad (2-42)$$

bằng tích của các biến đổi z tương ứng.

Thực vậy, vì:

$$X_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)z^{-m}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)z^{-n}$$

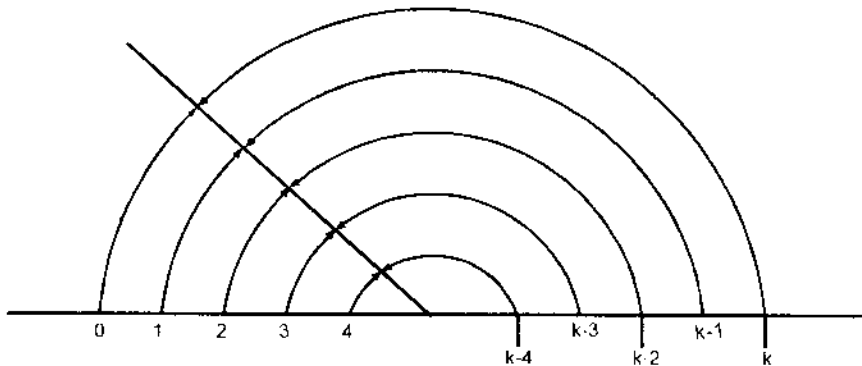
$$X_1(z) \cdot X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_2(n) \cdot x_1(m)z^{-(n+m)}$$

Đặt $k = n + m$, ta có:

$$X_1(z) \cdot X_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{m=0}^k x_2(k-m) \cdot x_1(m) \quad (2-43)$$

$$\text{hay} \quad X_1(z) \cdot X_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{n=0}^k x_2(n) \cdot x_1(k-n) \quad (2-44)$$

Vì $m > k$ hay $n > k$ thì $x_2(k-m)$ hay $x_1(k-n)$ đều bằng không nên lấy tổng đến ∞ hay đến k đều như nhau. Cũng vì thế mà lấy tổng từ n hay từ k đều như nhau.



Hình 2.20

So sánh (2-43) hay (2-44) với (2-42) ta có (2-41) phép nhân ở biểu thức (2-43) và (2-44) được thực hiện theo phương pháp "cuộn" là hàm có đối số đối xứng nhau nhân với nhau như ở hình 2.20.

Những tính chất cơ bản của biến đổi z nêu ở bảng 2-3.

Bảng 2-3

1	$x(k)$	$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$
2	$ax(k) + by(k)$ $x(k-1)$ $x(k-2)$ $x(k-n)$	$aX(z) + bY(z)$ $z^{-1}X(z) + x(-1)$ $z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$ $z^{-n}X(z) + z^{-(n-1)}x(-1) + \dots + z^{-1}x(-n+1) + x(-n)$
3	$x(k+1)$ $x(k+2)$ $x(k+n)$	$zX(z) - zx(0)$ $z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$ $z^nX(z) - z^nx(0) - z^{n-1}x(1) - \dots - zx(n-1)$
4	$x(0)$ $x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ nếu giới hạn tồn tại $\lim_{z \rightarrow 1} [(1-z^{-1})x(z)]$ nếu hàm $(1-z^{-1})X(z)$ không có nghiệm nằm trên hoặc ngoài đường tròn đơn vị.
5	$a^k x(k)$ $kx(k)$	$X(z/a)$ $-z \frac{d}{dz} X(z)$
6	$x_1(k) * x_2(k) =$ $\sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(k-m)$ $\sum_{m=0}^{\infty} x(k-m)$	$X_1(z).X_2(z)$ $\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

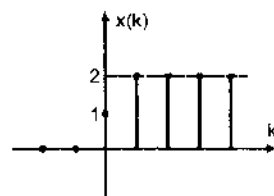
II.5.2. Cách xác định chuỗi rời rạc (hàm gốc) từ biến đổi z (biến đổi z ngược)

a) Khai triển thành chuỗi hàm mũ z^{-1}

Theo định nghĩa (2-29), $x(k)$ là hệ số bậc k của khai triển hàm $X(z)$ với chuỗi có hàm mũ z^{-1} . Trường hợp giản đơn có thể xác định ngay được $x(k)$, ví dụ:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = (1+z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots+z^{-k}+\dots) \\
 &= 1+2z^{-1}+2z^{-2}+\dots+2z^{-k}+\dots
 \end{aligned}$$

Từ đó thấy rằng $x(k)$ là tổng của các hàm bậc thang và hàm bậc thang chậm sau một bước như ở hình 2.21.



Hình 2.21

Vì $X(z)$ có dạng một tỷ số của đa thức theo z^{-1}

(hay z), nên các hệ số của khai triển được xác định bằng cách chia trực tiếp hay bằng phương pháp nhân dạng.

1- Phương pháp chia trực tiếp

Ví dụ 2-10

$$X(z) = \frac{0,5z}{(z-0,5)(z-0,7)} = \frac{0,5z}{z^2 - 1,2z + 0,35}$$

Chia tử cho mẫu số :

$0,5z$ $0,5z - 0,6 + 0,175z^{-1}$ $0,6 - 0,175z^{-1}$ $0,6 - 0,720z^{-1} + 0,21z^{-2}$ $0,545z^{-1} - 0,21z^{-2}$	$z^2 - 1,2z + 0,35$ $0,5z^{-1} + 0,6z^{-2} + 0,545z^{-3}$
---	--

Những hệ số đầu cho kết quả:

$$X(z) = 0,5z^{-1} + 0,6z^{-2} + 0,545z^{-3} \dots$$

hay $X^*(s) = 0,5e^{-sT} + 0,6e^{-2sT} + 0,545e^{-3sT} \dots$

Từ đó $x^*(t) = 0,5\delta(t-T) + 0,6\delta(t-2T) + 0,545\delta(t-3T) \dots$ (2-45)

2. Phương pháp nhân dạng (cân bằng hệ số)

Trong trường hợp chung:

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

Theo (2-29):

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots + x(n)z^{-n} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots$$

Từ hai phương trình trên ta có :

$$b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0 = x(0) z^n + [a_{n-1} x(0) + x(1)] z^{n-1} + \dots$$

Nếu $m = n$ $x(0) = b_m$

$m = n-1$ $x(0) = 0$; $x(1) = b_{m-1}$; ...

$m = n-2$ $x(0) = 0$; $x(1) = 0$; $x(2) = b_{m-2}$; ...

Bậc của tử số luôn bằng hay nhỏ hơn bậc của mẫu số ($m \leq n$) với điều kiện $x(k < 0) = 0$.

Ta xét cho trường hợp giới hạn : $m = n$

$$X(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$$= x(0) + x(1)z^{-1} + \dots + x(n)z^{-n} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots$$

Các hệ số $b_0, \dots, b_{m+1}$ bằng không với $m < n$.

Nhận dạng các thành phần cùng hàm mũ của z , ta thấy:

$$z^0 \rightarrow x(0) = b_0 \quad (2-46a)$$

$$z^{-1} \rightarrow x(1) = b_1 - a_0 x(0) \quad (2-46b)$$

$$\vdots$$

$$z^{-n} \rightarrow x(n) = b_n - a_{n-1}x(n-1) - \dots - a_1x(1) - a_0x(0) \quad (2-46c)$$

Dạng tổng quát có phương trình sai phân thuần nhất sau:

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \dots + a_1x(k+1) + a_0x(k) = 0 \quad \text{với } k > 0 \quad (2-47a)$$

Bài toán xác định biến đổi ngược của z dẫn đến việc giải phương trình sai phân thuần nhất với điều kiện đầu $x(0), x(1), \dots, x(n)$ từ các biểu thức (2-46). Những đại lượng tiếp theo $x(n+1), x(n+2)$ tính theo phương pháp lặp, luôn cho phép tìm được hàm gốc của phân số hữu tỷ theo z .

Lưu ý rằng đó không phải là trường hợp của phân số hữu tỷ theo s .

Ví dụ 2-11

$$X(z) = \frac{0,5z}{z^2 - 1,2z + 0,35} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

$$0,5z = [z^2 - 1,2z + 0,35](x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots)$$

$$= x(0)[z^2 - 1,2z + 0,35] + x(1)[z^2 - 1,2x(1) + 0,35]x(1)z^{-1} +$$

$$+ x(2)[z^2 - 1,2x(2)z^{-1} + 0,35]z^{-2} + x(3)[z^2 - 1,2x(3)z^{-2} + 0,35x(3)z^{-3} + \dots]$$

$$= x(1)z + [x(2) - 1,2x(1)]z^0 + [0,35x(1) - 1,2x(2) + x(3)]z^{-1} + \dots$$

$$\text{vì } b_2 = 0 \quad x(0) = 0 ;$$

$$b_1 = 0,5 \quad x(1) = 0,5 ;$$

$$b_0 = 0 \quad x(2) - 1,2x(1) = 0 ; x(2) = 0,6 ;$$

$$0,35x(1) - 1,2x(2) + x(3) = 0 ; x(3) = 0,545$$

$$\text{Như vậy } X(z) = 0,5z^{-1} + 0,6z^{-2} + 0,545z^{-3} + \dots \quad (2-47b)$$

và kết quả như ở ví dụ 2-10.

b) Phương pháp phân rã thành phân thức đơn giản

Ở biến đổi Laplace liên tục, phương pháp phân rã thành tổng của những

biểu thức giản đơn dạng $\frac{A}{s+a}$ cho phép sử dụng bảng tra cứu một cách thuận lợi. Trường hợp hệ gián đoạn cũng vậy, ví dụ hàm mũ e^{-akt} có biến đổi z là $Z\{e^{-akt}\} = \frac{z}{z - e^{-ak}}$ và khai triển $X(z)$ thành một tổng :

$$X(z) = \frac{Az}{z - z_1} + \frac{Bz}{z - z_2} + \dots$$

Vì $X(s)$ không chứa z ở tử số của các thành phần vế phải nên, thay vì dùng $X(z)$ ta dùng $\frac{X(z)}{z}$, sau đó nhân lại kết quả với z ở tử số

Ví dụ 2-12

$$X(z) = \frac{0,5z}{(z - 0,5)(z - 0,7)}$$

Chia cho z ta có:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{0,5}{(z - 0,5)(z - 0,7)} = \frac{A}{z - 0,5} + \frac{B}{z - 0,7}$$

Theo phương pháp đã nêu ở [18] ta xác định $A = -2,5$, $B = 2,5$. Vậy:

$$X(z) = \frac{0,5z}{(z - 0,5)(z - 0,7)} = \frac{2,5z}{z - 0,5} + \frac{2,5z}{z - 0,7}$$

Theo bảng ta có:

$$x(k) = -2,5(0,5)^k + 2,5(0,7)^k$$

$$\text{vì} \quad x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - k) = \sum_{k=0}^{\infty} [-2,5(0,5)^k + 2,5(0,7)^k] \cdot \delta(t - k)$$

Thay thế $k = 0, 1, 2, 3$ ta có 4 trị rời rạc sau :

$$x^*(t) = 0\delta(t) + 0,5\delta(t-T) + 0,6\delta(t-2T) + 0,545\delta(t-3T) \quad (2-48)$$

So sánh (2-48) với kết quả ở các ví dụ 2-10, 2-11 ta thấy ba phương pháp đã nêu không khác nhau, tuy nhiên phương pháp chia trực tiếp không cho ta biểu thức của $x(k)$ là hàm của k mà là những trị số.

II.6. SỰ TRUYỀN TÍN HIỆU QUA HỆ XUNG

Để khảo sát về sự truyền tín hiệu qua hệ xung như ở hình 2-3, trước tiên hãy xét đặc điểm của phần tử xung về đặc tính tần hay phổ của nó. Theo biểu thức (2-22), để đơn giản, giả thiết $e(t) = 0$ khi $t < 0$ thì phổ của tín hiệu đầu ra và đầu vào của phần tử xung tôi giản liên hệ với nhau bởi:

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[j(\omega + k\omega_0)] \quad (2-49)$$

Phổ $E^*(j\omega)$ tín hiệu ra $e^*(t)$ của phân tử xung tối giản tỷ lệ với tổng của các phổ $E[j(\omega + k\omega_0)]$ đã được dịch chuyển của tín hiệu vào liên tục $e(t)$.

Thay ω bởi $\omega \pm r\omega_0$ ở biểu thức (2-49) mà r là số nguyên ta có:

$$E^*[j(\omega \pm r\omega_0)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[j(\omega + (k \pm r)\omega_0)]$$

với biến $s = k \pm r$ ta có:

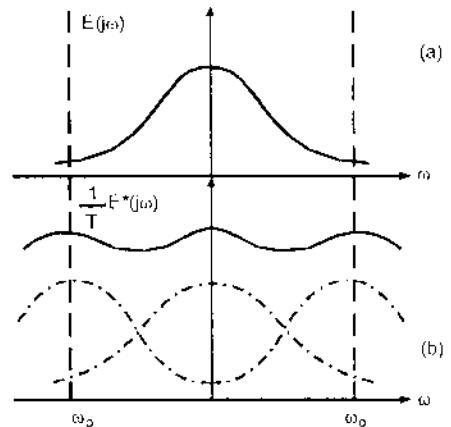
$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[j(\omega + (k \pm r)\omega_0)] = \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} E[j(\omega + s\omega_0)] = E^*(j\omega)$$

$$\text{Như vậy: } E^*[j(\omega \pm r\omega_0)] = E^*(j\omega) \quad (2-50)$$

Phổ $E^*(j\omega)$ tín hiệu ra $e^*(t)$ của phân tử xung tối giản được lặp lại một cách có chu kỳ với tần số lượng tử hoá ω_0 .

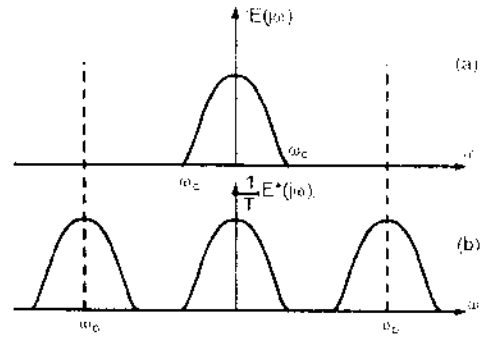
Phổ $E^*(j\omega)$ hoàn toàn được xác định trong phạm vi tần số $(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2})$. Nếu phổ $E(j\omega)$ có tần số ω_1 nằm ngoài dải tần $(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2})$ thì sẽ có hiệu ứng như đối với tần số $\omega_1' = \omega_1 - r\omega_0$ mà $|\omega_1 - r\omega_0| < \frac{\omega_0}{2}$, nghĩa là phân tử xung tối giản thực hiện việc chuyển vị tần số về dải tần $(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2})$. Ở hình 2.22a có phổ

$E(j\omega)$ của tín hiệu vào $e(t)$. Phổ $E^*(j\omega)$ của tín hiệu ra $e^*(t)$ của phân tử xung tối giản có được bằng cách dịch phổ $E(j\omega)$ theo trục tần số, những đại lượng $\pm r\omega_0$, ($r = 1, 2, \dots$), sau đó cộng chúng lại và thay đổi tỷ lệ xích trục tung với hệ số $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (hình 2.22b, đường đậm nét là phổ của $E^*(j\omega)$). Như đã biết, hàm có chu kỳ theo thời gian tương ứng với phổ gián đoạn dạng mạng. Ngược lại hàm gián đoạn theo thời gian dạng mạng tương ứng với phổ có chu kỳ, đó là đặc điểm của phương pháp biến đổi Fourier.



Hình 2.22

Nói chung, phổ $E^*(j\omega)$ khác với $E(j\omega)$, nghĩa là lượng tử hoá theo thời gian đối với phần tử xung tối giản sẽ làm biến dạng tín hiệu được lượng tử hoá, tức là làm mất mát lượng thông tin. Trong trường hợp này nếu dùng đến bộ lọc hạ tần cũng không phục hồi được $e(t)$ từ $e^*(t)$. Tuy nhiên, có thể xác định được điều kiện để không dẫn đến việc mất mát thông tin.



Hình 2.23

Nếu phổ $E(j\omega)$ có giới hạn như ở hình 2.23a, nghĩa là $E(j\omega) = 0$ với $|\omega| \geq \omega_c$, mà ω_c là tần số cắt và với tần số lượng tử hoá $\omega_0 \geq 2\omega_c$ thì $\frac{1}{T} |E^*(j\omega)|$ sẽ không biến dạng (hình 2.23b). Do đó:

$$\frac{\omega_0}{\omega_c} \geq 2 \quad (2-51)$$

Nếu tín hiệu liên tục $e(t)$ mà phổ $E(j\omega)$ bị giới hạn bởi tần số cắt ω_c được lượng tử hoá theo thời gian với tần số $\omega_0 \geq 2\omega_c$, thì sẽ không dẫn đến mất mát lượng thông tin. Đó là nội dung định lý Kachenicov, cơ sở của phương pháp truyền và biến đổi thông tin.

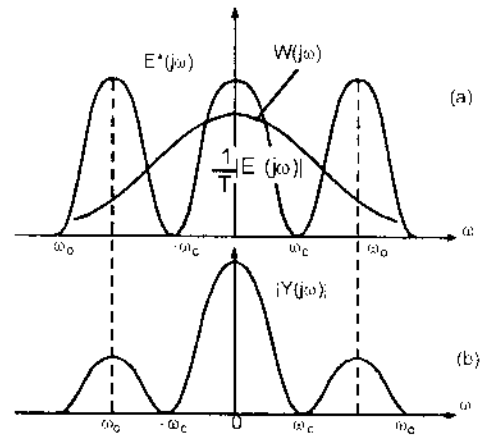
Bây giờ hãy xét tín hiệu $e(t)$ đi qua phần liên tục của hệ xung $W(s)$ là cơ cấu định hình và phần liên tục của hệ như ở hình 2.3. Phổ của $Y(j\omega)$ được xác định bởi:

$$Y(j\omega) = W(j\omega)E^*(j\omega) \quad (2-52)$$

Thay thế (2-49) vào (2-52) ta có:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{T} W(j\omega)E(j\omega) + \frac{1}{T} W(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[j(\omega + k\omega_0)] \quad k \neq 0 \quad (2-53)$$

Thành phần thứ nhất là phổ của $y(t)$ của phần liên tục quy đổi với đặc tính tần $\frac{1}{T} W(j\omega)$, còn thành phần thứ hai là phổ của các chuyển vị $E[j(\omega + k\omega_0)]$ phản ánh ảnh hưởng của phần tử xung.



Hình 2.24

Ở hình 2.24a có phổ của $|E^*(j\omega)|$, $\frac{1}{T} |E(j\omega)|$ và đặc tính tần của $|W(j\omega)|$.

Ở hình 2.24b có phổ của $|Y(j\omega)|$.

Ta nhận thấy, ngay cả khi thoả mãn điều kiện của định lý xung nhỏ được giới hạn bởi ω_c , với $\omega_0 \geq 2\omega_c$ phần tử xung cũng làm xuất hiện thành phần cao tần ở phổ của tín hiệu ra mà bản thân $E(j\omega)$ không có.

Ở hình 2.25a, với phân liên tục quy đổi có tần số giới hạn ω_{c1} thì theo (2-52) phổ $Y(j\omega)$ chỉ có một thành phần như ở hình 2.25b:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{T} W(j\omega) E(j\omega)$$

Như vậy, khi tăng tần số lượng tử hoá, tính chất của hệ xung tiến dần đến (với độ chính xác của hệ số $\frac{1}{T}$) tính chất của phân liên tục quy đổi.

Khi thoả mãn điều kiện:

$$\omega_0 \geq \omega_c + \omega_{c1} \quad (2-54)$$

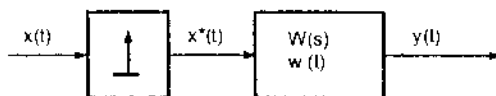
thì tính chất của chúng như nhau.

Trong thực tế, nếu hằng số thời gian lớn nhất của phân liên tục trội hơn hẳn chu kỳ lượng tử hoá thì điều kiện ấy được thoả mãn. Tuy nhiên phần tử xung lại ảnh hưởng đến tính chất của hệ vì đặc tính tần của phân liên tục quy đổi còn phụ thuộc ở cơ cấu định hình $G_0(j\omega)$ vì $W(j\omega) = G_0(j\omega)G_1(j\omega)$.

II.7. HÀM TRUYỀN ĐẠT CỦA HỆ XUNG

Như đã nêu trên, trong trường hợp chung, phổ và ảnh của $x(t)$ và $y(t)$ của hệ xung hữ không còn mối quan hệ tỷ lệ nhau nhưng mối quan hệ ấy vẫn tồn tại đối với các tín hiệu gián đoạn $x^*(t)$ và $y^*(t)$.

Sơ đồ khối của hệ xung hữ như ở hình 2.26. Tại các thời điểm lấy mẫu $T, 2T, 3T, \dots$ các xung $x^*(t)$ tạo nên đáp ứng đối với phân liên tục quy đổi như sau:



Hình 2.26

$$\begin{aligned}
 v(t) &= x(0) \quad w(t) = 0 & 0 \leq t < T \\
 y(t) &= x(0) \quad w(t) + x(T)w(t-T) & T \leq t < 2T \\
 y(t) &= x(0) \quad w(t) + x(T) \quad w(t-T) + x(2T) \quad w(t-2T); & 2T \leq t < 3T \\
 &\dots & \dots
 \end{aligned}$$

Dạng tổng quát, với điều kiện đầu bằng không là:

$$y(t) = \sum_{m=0}^n x(mT)w(t-mT) \text{ với } nT \leq t < (n+1)T \quad (2-55)$$

Thay $t = nT$ để có hàm rời rạc:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n x(mT)w[(n-m)T] \quad (2-56)$$

Vì hàm trọng lượng $w[(n-m)T] = 0$ khi $m > n$ nên, theo (2-19) ta có:

$$\begin{aligned}
 Y^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)e^{-snT} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w[(n-m)T]x(mT)e^{-snT}
 \end{aligned}$$

Đặt $l = n - m$ ta có:

$$\begin{aligned}
 Y^*(s) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w(lT)x(mT)e^{s(l+m)T} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} w(lT)e^{-slT} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT)e^{-smT}
 \end{aligned}$$

Từ đó:

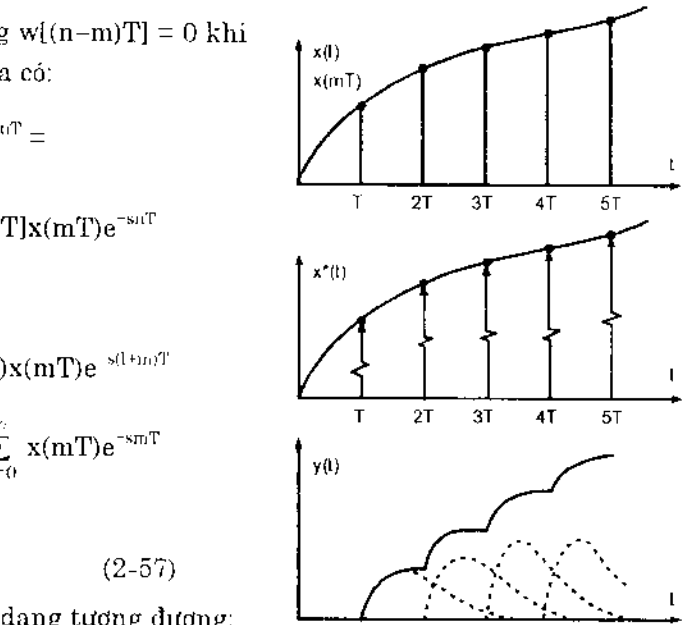
$$Y^*(s) = W^*(s)X^*(s) \quad (2-57)$$

hay với biến đổi z , ta có dạng tương đương:

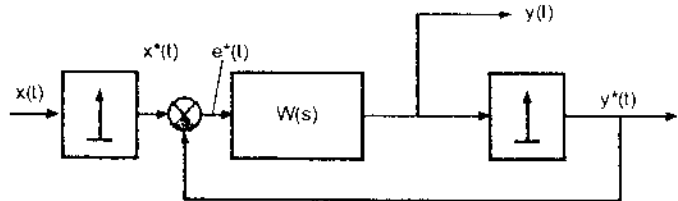
$$Y(z) = W(z) X(z)$$

Tương ứng với hình 2.3 của hệ kín, ta có sơ đồ khối như ở hình 2.28. Sau khi đã áp dụng biến đổi Laplace gián đoạn cho tín hiệu và hàm truyền,

các phép biến đổi sơ đồ khối của hệ liên tục [18] đều áp dụng được cho hệ gián đoạn. Từ hình 2.28 có hàm truyền hệ kín:



Hình 2.27

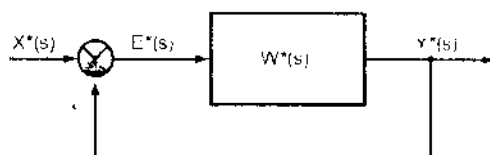


Hình 2.28

$$W_{K^*}(s) = \frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = \frac{W^*(s)}{1 + W^*(s)}$$

mà $W^*(s)$ là hàm truyền của hệ hở gián đoạn như ở hình 2.29. Hàm truyền đối với sai lệch là :

$$W_{K^*}(s) = \frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = \frac{1}{1 + W^*(s)}$$



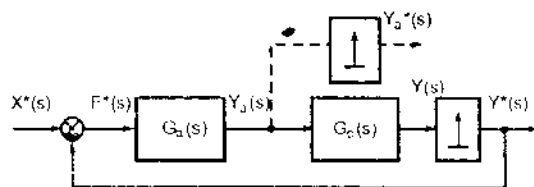
Hình 2.29

Đôi khi cần khảo sát tính chất biến đổi của một tín hiệu trung gian y_n của phân liên tục (như ở hình 2.30), sau khi đưa vào phần tử xung (đường nét đứt) để có biến đổi Laplace gián đoạn, ta có:

$$W_{K_n^*}(s) = \frac{Y_n^*(s)}{X^*(s)} = \frac{G_n(s)E^*(s)}{X^*(s)} = \frac{G_n(s)}{1 + W^*(s)} \text{ mà } G_n(s) \text{ được xác định theo}$$

$G_n(s)$ hoặc hàm trọng lượng của nó $g_n(t)$ dùng các biểu thức (2-17), (2-24), (2-25) hay theo bảng 2-2.

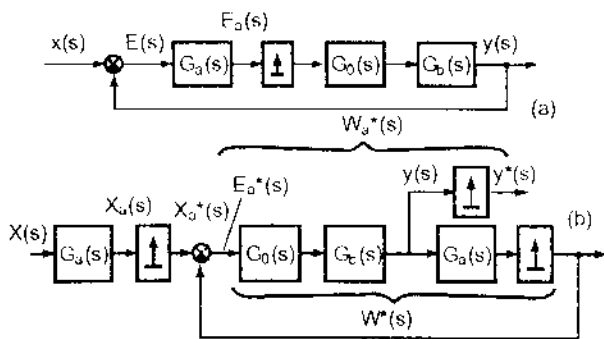
Khi khảo sát hệ xung, ta đã đặt vị trí phần tử xung ngay sau cơ cấu so sánh (hình 2.32). Trong thực tế, có khi giữa chúng còn có phân liên tục như ở hình 2.31a. Vị trí của phần tử xung lý tưởng và $G_n(s)$ không thể thay đổi mà phải dùng phép biến đổi tương đương như ở hình 2.31b. Ảnh của tín hiệu ra được xác định bởi :



Hình 2.30

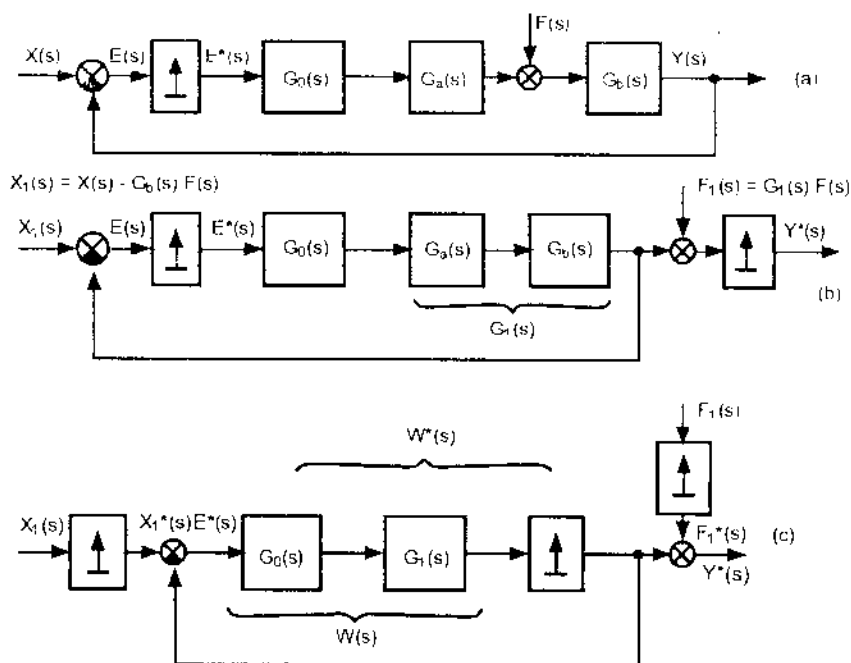
$$Y^*(s) = W_{K_n^*}(s) X_n^*(s) \text{ mà } W_{K_n^*}(s) = \frac{W_n^*(s)}{1 + W^*(s)}$$

Hàm truyền $W^*(s)$ tương ứng với phân liên tục quy đổi của hệ $G_n(s)G_c(s)$ $G_b(s)$. Trong trường hợp có nhiễu $f(t)$ tác động như ở hình 2.32a, sơ đồ cấu trúc có thể đưa về dạng tương đương như ở hình 2.32b và 2.32c. Ở đây: $F_1^*(s)$ là ảnh của tín hiệu gián đoạn xác định từ phương pháp lượng tử hoá $f_1(t)$ mà $f_1(t)$ là tín hiệu ra của nhiễu $f(t)$ đi qua khâu $G(s)$:



Hình 2.31

$$f_1(t) = L^{-1} \{F(s) G_1(s)\}$$



Hình 2.32

Khi có nhiễu, phần tử xung làm việc đồng bộ và đồng pha nhau, sơ đồ có thể được phân tích thành nhiều thành phần với phần tử xung tương ứng, mỗi thành phần có hàm truyền gián đoạn riêng và phép biến đổi chúng như ở hệ liên tục.

II.8. ĐẶC TÍNH TẦN BIÊN PHA CỦA HỆ XUNG

Đặc tính tần biên pha của hệ xung được xây dựng trên cơ sở thay thế $s = j\omega$ ở các biểu thức (2-57), (2-19), (2-24). Vậy:

$$W^*(j\omega) \equiv \frac{Y^*(j\omega)}{X^*(j\omega)} \quad (2-58)$$

$$W^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} w(nT)e^{-jn\omega T} \quad (2-59)$$

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + k\omega_0)] \quad (2-60)$$

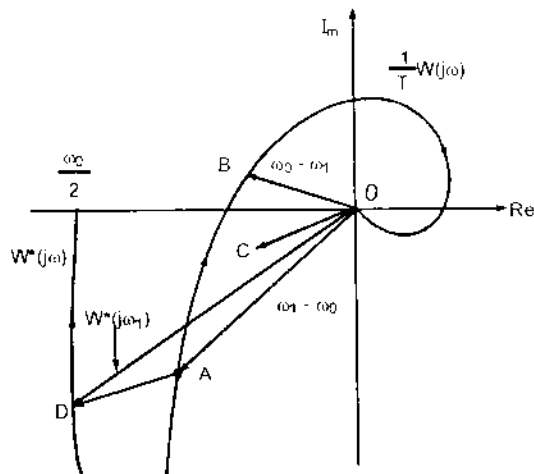
Ở đây $w(nT)$ với $n = 0, 1, 2, \dots$ là hàm trọng lượng dạng rời rạc của phần liên tục quy đổi và $W(j\omega)$ là đặc tính tần của phần liên tục quy đổi. Ta nhận thấy rằng, hệ số khuếch đại phức của phần liên tục quy đổi càng giảm nhanh khi tăng ω thì ở biểu thức (2-60) chuỗi càng chóng hội tụ.

Trong thực tế, khi $k > 1$, các thành phần của đặc tính tần biên pha rất bé. Do đó nếu bỏ qua các thành phần ứng với $k > 1$ và thành phần ứng với tần số $\omega + \omega_0$ (vì ω_0 thường rất lớn nên thành phần này có thể bỏ qua) ta có biểu thức xấp xỉ

$$W^*(j\omega) \approx \frac{1}{T} \left\{ W(j\omega) + W[j(\omega - \omega_0)] \right\} \quad (2-61)$$

Cách vẽ gần đúng $W^*(j\omega)$ như sau :

Trước tiên vẽ đặc tính $\frac{1}{T} W(j\omega)$ của phần liên tục quy đổi ứng với tần số ω_1 chẳng hạn, có điểm A tương ứng ở hình 2.33. Vectơ $W[j(\omega_1 - \omega_0)]$ nằm trên đặc tính đối xứng khi $\omega_0 > \omega_1$, do đó xác định $W[j(\omega_0 - \omega_1)]$ (vectơ OB) và vectơ đối xứng với nó (vectơ OC) qua trục thực là vectơ cần tìm. Cộng vectơ OA với OC cho ta vectơ OD chính là $W^*(j\omega_1)$. Để vẽ $W^*(j\omega)$, chỉ cần cho ω



Hình 2.33

biến thiên trong phạm vi $\omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ vì tính chất lặp lại của nó đối với tần số lượng tử hoá. Bạn đọc giải thích vì sao ứng với $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ thì $W^*(j\frac{\omega_0}{2})$ nằm trên trục thực?

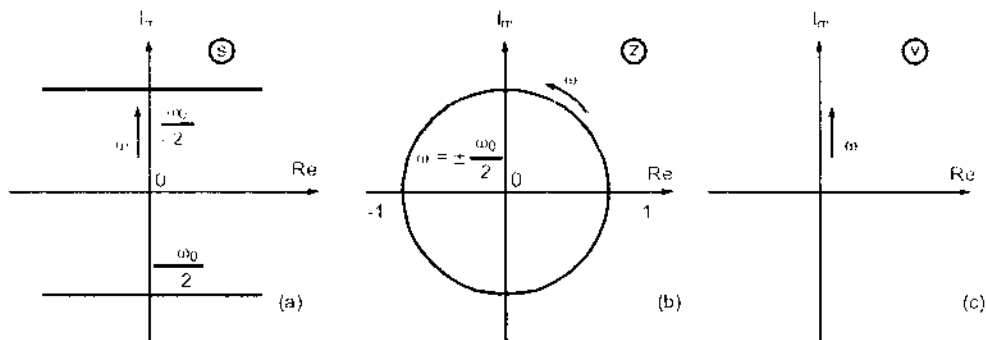
Phương pháp tần số có thể được dùng để phân tích và tổng hợp hệ xung như đối với hệ liên tục. Tuy nhiên đặc tính tần số lôgarít đòi hỏi phải có sự phát triển thêm do tính siêu việt của biểu thức hàm truyền.

Thay thế e^{sT} bằng z ở hàm truyền đạt $W^*(s)$, ta có :

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2-62)$$

trong khi ấy ở mặt phẳng s nửa dải có $\text{Re}.s < 0$, $-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im}.s < \frac{\omega_0}{2}$ được ánh xạ

bởi phần bên trong của đường tròn có bán kính đơn vị ($|z| < 1$) ở mặt phẳng z như ở hình 2.34a và 2.34b. Một đoạn thẳng của trục ảo từ $-\frac{\omega_0 T}{2}$ đến $\frac{\omega_0 T}{2}$ biến thành đường tròn bán kính đơn vị (hình 2.34a và b).



Hình 2.34

Nếu dùng biến v với:
$$z = \frac{(1+v)}{(1-v)} \quad (2-63)$$

$$v = \frac{(z-1)}{(z+1)} = \frac{(e^{sT} - 1)}{(e^{sT} + 1)} \quad (2-64)$$

thì đường tròn bán kính đơn vị ở mặt phẳng z biến thành cả trục ảo trên mặt phẳng v . Như vậy, một đoạn thẳng trên mặt phẳng s biến thành cả trục ảo trên mặt phẳng v (hình 2.34c):

$$v = \frac{(e^{j\omega T} - 1)}{(e^{j\omega T} + 1)} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (2-65)$$

Vùng nằm bên trong đường tròn bán kính đơn vị ở mặt phẳng z tương ứng với cả nửa mặt phẳng trái ở mặt phẳng v .

Nếu dùng biến w thay cho v và tỷ lệ với v :

$$w = \frac{2}{T} v = \frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)} = \frac{2}{T} \cdot \frac{(e^{sT} - 1)}{(e^{sT} + 1)} \quad (2-66)$$

ta có
$$Z = \frac{\left(1 + \frac{wT}{2}\right)}{\left(1 - \frac{wT}{2}\right)} \quad (2-67)$$

Phần thuần ảo sẽ là:

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\omega * \quad (2-68)$$

mà ω^* là tần số giả:

$$\omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (2-69)$$

Như vậy, nửa dải trái $\operatorname{Re} s < 0$, $-\frac{\omega_0}{2} < \operatorname{Im} s \leq \frac{\omega_0}{2}$ ở mặt phẳng s vẫn tương ứng với nửa mặt phẳng trái w , còn trục ảo $s = j\omega$ tương ứng với trục ảo $w = j\omega^*$.

Chú ý rằng với tần số bé $\operatorname{tg} \omega \frac{T}{2} \approx \omega \frac{T}{2}$, do đó $\omega^* \approx \omega$. Vì vậy với $\omega < \frac{2}{T}$ ta có thể dùng tần số thực thay cho tần số giả hay ngược lại khi tính toán.

Biến đổi w cho phép dùng đường cong Bode cũng như toán đồ Nichols như ở hệ liên tục, cho phép chuyển đổi hàm truyền dạng liên tục thành gián đoạn sử dụng phép biến đổi tuyến tính kép (hay biến đổi Tustin). Bằng cách thay thế z bằng w ở biểu thức (2-62) ta có hàm truyền hệ xung dạng:

$$\begin{aligned} W(w) &= \frac{b_0 \left(\frac{1+wT/2}{1-wT/2} \right)^m + b_1 \left(\frac{1+wT/2}{1-wT/2} \right)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 \left(\frac{1+wT/2}{1-wT/2} \right)^n + a_1 \left(\frac{1+wT/2}{1-wT/2} \right)^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= \left(1 - \frac{wT}{2} \right)^{n-m} \cdot \frac{b'_0 w^m + b'_1 w^{m-1} + \dots + b'_m}{a'_0 w^n + a'_1 w^{n-1} + \dots + a'_n} \end{aligned} \quad (2-70)$$

mà b'_i và a'_i phụ thuộc vào hệ số b_i , a_i và T .

Từ (2-70) thấy rằng $W(w)$ chứa thành phần pha không cực tiểu $1-wT/2$ (có bậc $n-m$ nói chung), do đó bậc của tử số và mẫu số như nhau. Đối với hệ gồm các khâu điển hình thì mẫu của $W(w)$ vẫn giữ dạng của mẫu hàm truyền phần liên tục, chỉ thay đổi hệ số mà thôi.

Vi dụ 2-13

Phần liên tục có hàm truyền:

$$W(s) = \frac{k(1+sT_2)}{s(1+sT_1)(1+sT_3)} \quad (2-71)$$

với phân tử xung chữ nhật có hệ số lấp đầy $\gamma = 1$.

Phân tích (2-71) thành phân thức đơn giản:

$$W(s) = k \left(\frac{A}{s} + \frac{B_1}{1+sT_1} + \frac{B_2}{1+sT_3} \right) \quad (2-72)$$

và A , B_1 , B_2 được xác định theo phương pháp hệ số bất định:

$$A_1 = 1; B_1 = \frac{T_1(T_1 - T_2)}{T_3 - T_1}, B_2 = \frac{T_3(T_2 - T_3)}{T_3 - T_1} \quad (2-73)$$

Tương ứng với (2-72) ta có:

$$W(w) = k \left(1 - w \frac{T}{2} \right) \left[\frac{1}{w} + \frac{B_1}{1 + wT_1'} + \frac{B_2}{1 + wT_3'} \right] \quad (2-74)$$

với: $T_1 = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + a_1}{1 - a_1}; T_3 = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + a_3}{1 - a_3}; a_1 = e^{-\frac{T}{T_1}}; a_3 = e^{-\frac{T}{T_3}}$

Sau khi thay các giá trị B_1, B_2 từ (2-73) vào (2-74) ta có:

$$\begin{aligned} W(w) &= k \left(1 - w \frac{T}{2} \right) \frac{w^2 (T_1' T_3' + B_2 T_1' + B_1 T_3') + w (T_1' + T_3' + B_1 + B_2) + 1}{w(1 + wT_1')(1 + wT_3')} \\ &= k \left(1 - w \frac{T}{2} \right) \frac{(1 + w\tau_1)(1 + w\tau_3)}{w(1 + wT_1')(1 + wT_3')} \end{aligned}$$

với $T = 0,1 \text{ sec}; T_1 = 10 \text{ sec}; T_2 = 0,79 \text{ sec}; T_3 = 0,025 \text{ sec}; K = 45 \text{ sec}^{-1}$, ta có:
 $T_1' = 9,95 \text{ sec}; T_3' = 0,052 \text{ sec}$ và:

$$W(w) = 45 \frac{(1 - 0,05w)(1 + 0,74w)(1 + 0,024w)}{w(1 + 9,95w)(1 + 0,052w)} \quad (2-75)$$

Thay $w = j\omega^*$ vào biểu thức trên ta có đặc tính tần theo ω^* :

$$W(j\omega^*) = 45 \frac{(1 - j0,05\omega^*)(1 + j0,74\omega^*)(1 + j0,024\omega^*)}{j\omega^* (1 + j9,95\omega^*)(1 + j0,052\omega^*)} \quad (2-76)$$

Đặc tính xấp xỉ của $L(\omega^*)$ và $\varphi(\omega^*)$ như ở hình 2.35. Do bậc ở tử và mẫu số như nhau nên với tần số lớn độ nghiêng của $L(\omega^*)$ là 0 db/dec và bằng:

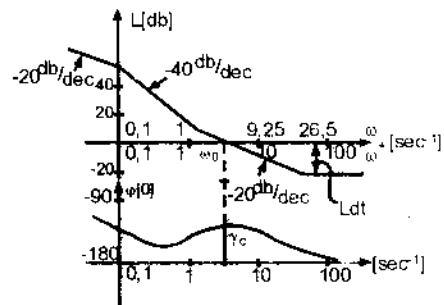
$$L(\omega^*) \approx 20 \lg W^* \left(j \frac{\omega}{2} \right)$$

Ở trục tần số ω^* trên hình 2.35 còn có trị số của ω tương ứng với (2-69).

Đặc tính pha được xây dựng theo biểu thức:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega^*) &= -\frac{\pi}{2} - \arctg 9,95\omega^* + \arctg \\ &0,74\omega^* - \arctg 0,052\omega^* \\ &- \arctg 0,05\omega^* + \arctg 0,024\omega^*, \quad (2-77) \end{aligned}$$

lấy trực tiếp từ (2-76). Đặc tính pha $\varphi(\omega^*)$ thấp hơn đặc tính pha cực tiểu có cùng $L(\omega^*)$ và khác nhau rõ rệt ở tần số lớn (tiệm cận với $-\pi$ khi $\omega^* \rightarrow \infty$).



Hình 2.35

II.9. DÙNG MATLAB CHO PHÉP BIẾN ĐỔI GIÁN ĐOẠN

1. Biến đổi từ tương tự sang gián đoạn và ngược lại

Ví dụ 2-14 $G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

numc1 = [1];

denc1 = [1 1 0];

T = 1

[numz, denz] = c2dm (num c1, den c1, T, 'zoh');

print sys (numz, denz, 'z')

$$G(z) = \frac{0,369z + 0,2642}{z^2 - 1,368z + 0,3679}$$

Ví dụ 2 -15

numz = [0,369 0,2642];

denz = [1 - 1,368 0,3679];

T = 1

[numc1, denc1] = d2cm (numz, denz, T, 'zoh');

printsys (numc1, denc1)

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

2. Đặc tính tần

Ví dụ 2 - 16

Vẽ đặc tính tần của hệ liên tục và hệ gián đoạn ở ví dụ 2-13.

Theo (2-71) ta có:

$$W(s) = \frac{45(0,79s + 1)}{s(10s + 1)(0,25s + 1)}$$

num = [0 0 35.5 45];

den = [0.25 10.025 1 0];

[numz, denz] =

= c2dm (num, den, 1, 'zoh');

w = logspace (1, pi);[magz, phasez] =

dbode (numz, denz, -1, w);

loglog (w, magz)

semilog x(w, phasez)

hold

[mag, phase] = bode (num, den);

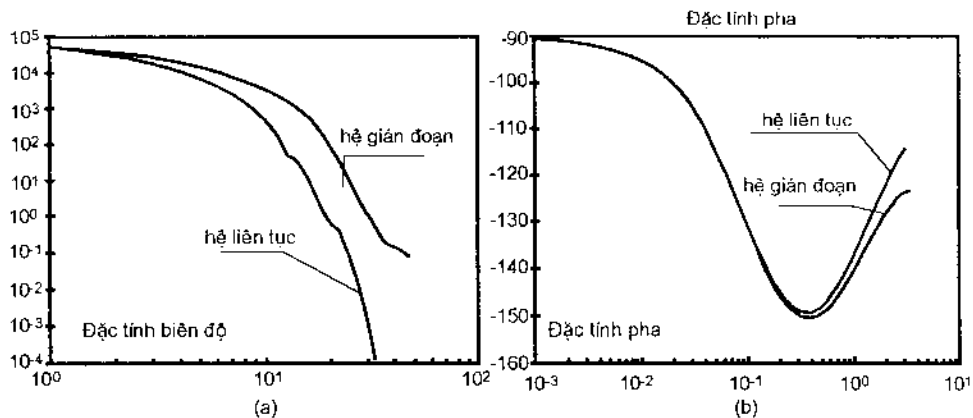
log log (w, mag)

semilogx (w, phase)

Ở hình 2.36a, b có đặc tính biên độ và pha của hệ liên tục và gián đoạn.

Để so sánh, ở hình 2.37 có đặc tính biên độ và pha của hệ liên tục và gián đoạn tính theo tần số giả ω^* ở biểu thức (2-71) và (2-75):

$$W(w) = 45 \frac{(1 - 0,05w)(1 + 0,74w)(1 + 0,024w)}{w(1 + 9,95w)(1 + 0,052w)}$$



Hình 2.36

```
num = [0 0 35.5 45];
```

```
den = [0.25 10.025 1 0];
```

```
bode(num, den)
```

```
hold
```

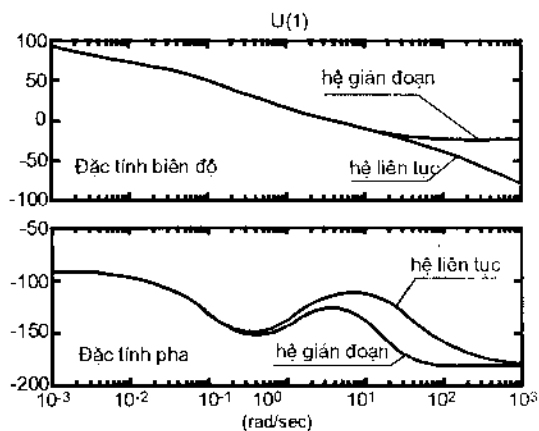
```
numw = [-0.00089
```

```
-0.0204 0.714 1] * 45;
```

```
denw = [0.5174 10.002 1 0];
```

```
bode(numw, denw)
```

Ở tần số bé, $L(\omega)$ và $L(\omega^*)$ cũng như $\varphi(\omega)$ và $\varphi(\omega^*)$ trùng nhau. Ở tần số lớn $L(\omega^*)$ là đường thẳng song song trục tần số vì bậc của tử và mẫu số của (2-75) bằng nhau.



Hình 2.37

Bài tập chương II

Bài tập 2.1 Tìm biến đổi z của các hàm sau:

- a) $x(t) = 1(t)$; b) $x(t) = a^k$; c) $x(t) = a^{k-1}$;
 d) $x(t) = e^{-\alpha t}$; e) $x(t) = \cos \omega t$; f) $x(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$

Đáp án

$$\begin{aligned} \text{a) } X(z) &= \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}; & \text{b) } X(z) &= \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}; \\ \text{c) } X(z) &= \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}; & \text{d) } X(z) &= \frac{z}{z-e^{-\alpha T}} \\ \text{e) } X(z) &= \frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}; & \text{f) } X(z) &= \frac{e^{-\alpha T} z \sin \omega T}{z^2 - 2e^{-\alpha T} z \cos \omega T + e^{-2\alpha T}} \end{aligned}$$

Bài tập 2-2 Tìm biến đổi z của hàm rời rạc sau:

- a) $Z\{x(k+1)\}$; b) $Z\{x(k+2)\}$;
 c) $Z\{x(k+n)\}$; d) $Z\{x(k-1)\}$

Đáp án

$$\begin{aligned} \text{a) } zX(z) - zx(0); & \quad \text{b) } z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) \\ \text{c) } z^nX(z) - z^n x(0) - z^{n-1}x(1) - z^{n-2}x(2) - \dots - zx(n-1) \\ \text{d) } z^{-1}X(z) \end{aligned}$$

Bài tập 2-3 Tìm biến đổi z của biểu thức, điều kiện đầu và cuối của x :

$$x(k) - ax(k-1) = 1(k) \quad -1 < a < 1$$

Đáp án $Z\{x(k) - ax(k-1)\} = X(z) - az^{-1}X(z)$,

$$\begin{aligned} Z\{1(k)\} &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ X(z) &= \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}} \right) \\ x(k) &= \frac{1}{1-a} (1 - a^{k+1}) = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} \\ x(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \frac{1-a}{1-a} = 1 \\ x(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 0} [(1-z^{-1})X(z)] = \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

Bài tập 2-4 Tìm biến đổi z của hàm truyền hệ liên tục:

$$\text{a) } G(s) = \frac{a}{s+a}; \quad \text{b) } G(s) = \frac{a}{s(s+a)}; \quad \text{c) } G(s) = \frac{a}{s^2(s+a)}$$

Đáp án

$$a) G(z) = \frac{az}{z - e^{-aT}}; \quad b) G(z) = z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right\} = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

$$c) G(z) = Z \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \right\} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

Bài tập 2-5

Tìm biến đổi z của phân liên tục quy đổi:

$$G(s) = G_0(s) G_1(s); \quad G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$a) G_1(s) = \frac{1}{s^2}; \quad b) G_1(s) = \frac{s+2}{s+1}; \quad c) G_1(s) = \frac{k}{s(s+a)}$$

Đáp án:

$$a) G(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$$

$$b) G(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{s+2}{s(s+2)} \right\} = \frac{z-0,214}{z-0,607} \text{ với } T=0,5$$

$$c) G(z) = \frac{K}{a} \frac{\left[T + \left(\frac{1}{a} \right) e^{-aT} - \frac{1}{a} \right] z + \left[\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a} \right) e^{-aT} - T e^{-aT} \right]}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

Bài tập 2-6 Tìm biến đổi z ngược bằng phương pháp chia trực tiếp:

$$a) X(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0,2)} \quad b) X(z) = \frac{0,5z}{(z-0,5)(z-0,7)}$$

$$c) X(z) = \frac{z(z+0,4)}{(z-1)(z-0,3)(z-0,8)}$$

Đáp án:

$$a) X(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18,4z^{-3} + 18,68z^{-4} + \dots$$

so sánh với (2-19):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Ta có: $x(0) = 0$; $x(1) = 10$; $x(2) = 17$; $x(3) = 18,4$; $x(4) = 18,68$

$$b) X(z) = 0,5z^{-1} + 0,6z^{-2} + 0,545z^{-3} + \dots$$

$$c) X(z) = z^{-1} + 2,5z^{-2} + 3,91z^{-3} + 5,101z^{-4} + \dots$$

Bài tập 2-7 Tìm biến đổi z ngược bằng phương pháp cân bằng hệ số với bài tập (2-6c).

$$X(z) = \frac{z(z+0,4)}{(z-1)(z-0,3)(z-0,8)} = \frac{z^{-1} + 0,4z^{-2}}{1 - 2,1z^{-1} + 1,34z^{-2} - 0,24z^{-3}}$$

Đáp án

$$(1 - 2,1z^{-1} + 1,34z^{-2} - 0,24z^{-3})X(z) = z^{-1} + 0,4z^{-2}$$

$$x(k) = 2,1x(k-1) - 1,34x(k-2) + 0,24x(k-3) + \delta(k-1) + 0,4\delta(k-2)$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 0 - 0 + 0 + 1 + 0 = 1$$

$$x(2) = 2,1 - 0 + 0 + 0,4 = 2,5$$

$$x(3) = 2,1 \times 2,5 - 1,34 \times 1 + 0 + 0 + 0 = 3,91$$

Bài tập 2-8 Tìm biến đổi z ngược bằng phương pháp phân rã thành phân thức đơn giản.

$$a) X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0,2)}; \quad b) X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z-2)^2(z-1)}$$

$$c) X(z) = \frac{z(z+0,4)}{(z-1)(z-0,3)(z-0,8)}$$

Đáp án

$$a) \frac{X(z)}{z} = \frac{12,5}{z-1} - \frac{12,5}{z-0,2}$$

$$X(z) = 12,5 \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0,2z^{-1}} \right)$$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} \right\} = 1 \quad Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-0,2z^{-1}} \right\} = (0,2)^k; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x(k) = 12,5 [1 - (0,2)^k] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x(0) = 0; \quad x(1) = 10; \quad x(2) = 12; \quad x(3) = 12,4; \quad x(4) = 12,48;$$

$$b) X(z) = \frac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} - \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-z^{-1}}$$

$$x(k) = \begin{cases} 2 & k=0 \\ 9k(2^{k-1}) - 2^k + 3; & k=1,2,3 \end{cases}$$

$$c) X(z) = \frac{10z}{z-1} + \frac{2z}{z-0,3} - \frac{12z}{z-0,8}$$

$$X(k) = 10 + 2(0,3)^k - 12(0,8)^k$$

Bài tập 2-9 Tìm biến đổi z ngược của:

$$a) X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} ; b) X(z) = \frac{2z(z^2-1)}{z^2+1}$$

$$c) X(z) = \frac{z^2+z+2}{(z-1)(z^2-z+1)}$$

Đáp án :

$$a) x(k) = 10(-1+2^k) \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$b) \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z+j)^2} + \frac{0}{z+j} + \frac{1}{(z-j)^2} + \frac{0}{z-j}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z+j)^2} + \frac{z}{(z-j)^2}$$

$$= \left[e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right] \frac{ze^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\left[z - e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right]^2} + \left[e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right] \frac{ze^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\left[z - e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right]^2}$$

$$x(k) = e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)k} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)k} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)k} e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)k}$$

$$= jk \left[\cos \frac{\pi k}{2} - j \sin \frac{\pi k}{2} \right] - jk \left[\cos \frac{\pi k}{2} + j \sin \frac{\pi k}{2} \right]$$

$$= 2k \sin \frac{\pi k}{2} \quad \text{với } k=0, 1, 2$$

$$c) X(z) = \frac{4}{z-1} + \frac{-3z+2}{z^2-z+1} = \frac{4z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{-3z^{-1}+2z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{4z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{0,5z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}} - 3 \left(\frac{z^{-1}-0,5z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}} \right)$$

$$= 4z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-1} \frac{0,5z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}} - 3z^{-1} \frac{1-0,5z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

$$x(k) = \begin{cases} 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{(k-1)\pi}{3} - 3 \cos \frac{(k-1)\pi}{3} & k=1, 2, 3, \dots \\ 0 & k=0 \end{cases}$$

$$x(0) = 0; \quad x(1) = 1; \quad x(2) = 3; \quad x(3) = 6; \quad x(4) = 7; \quad x(5) = 5 \dots$$

Bài tập 2-10 Tìm biến đổi z ngược của:

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z^2}$$

a) Theo phương pháp chia trực tiếp.

b) Theo phương pháp phân rã thành phân thức đơn giản.

Đáp án

$$a) X(z) = \frac{z^{-4}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$X(z) = z^{-4} + 2z^{-5} + 3z^{-6} + 4z^{-7} + 5z^{-8} + \dots$$

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, 3 \\ k-3 & k = 4, 5, 6, \dots \end{cases}$$

$$b) X(z) = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} + z^{-2} + 2z^{-1}$$

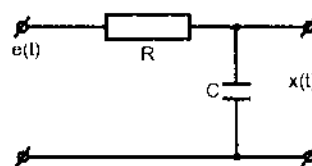
$$Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} \right\} = Z^{-1} \left\{ z^{-1} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right\} = \begin{cases} k-1 & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \right\} = Z^{-1} \left\{ z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} \right\} = \begin{cases} 1 & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

$$Z^{-1} \{ z^{-2} \} = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

$$Z^{-1} \{ z^{-1} \} = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

$$x(k) = \begin{cases} 0 - 0 + 0 + 0 = 0, & k = 0 \\ 0 - 2 + 0 + 2 = 0, & k = 1 \\ 1 - 2 + 1 + 0 = 0, & k = 2 \\ k - 1 - 2 + 0 + 0 = k - 3, & k = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$



Hình 2.38

Bài tập 2-11 Viết phương trình sai phân của mạch

RC (hình 2.38) khi điện áp vào :

$$e(t) = e(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

Đáp án :

$$\frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$\frac{X(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{RCs + 1}\right\} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right) z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}} z^{-1}}$$

$$zX(z) = e^{-\frac{T}{RC}} X(z) + (1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

$$x[(k+1)T] = e^{-\frac{T}{RC}} x(kT) + (1 - e^{-\frac{T}{RC}}) e(kT)$$

Bài tập 2-12

Giải phương trình sai phân sau bằng cách dùng biến đổi z .

$$x(k+2) + 3x(k+1) - 2x(k) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

Đáp án

$$Z\{x(k+2)\} = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

$$Z\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0)$$

$$Z\{x(k)\} = X(z)$$

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) + 3zX(z) - 3zx(0) + 2X(z) = 0$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bài tập 2-13

Tìm đáp ứng $x(k)$ của hệ sau :

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = u(k)$$

với $x(k) = 0 \quad k \leq 0$

$$u(0) = 1$$

$$u(k) = 0 \quad k < 0, k > 0$$

Đáp án

Thay $k = -1$ vào phương trình trên, $x(1) = 0$

$$(z^2 - 3z + 2) X(z) = U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = 1$$

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$x(k) = -1 + 2^{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Bài tập 2-14

Tìm nghiệm của phương trình sai phân sau phụ thuộc vào $x(0)$ và $x(1)$:

$$x(k+2) + (a+b)x(k+1) + abx(k) = 0$$

Đáp án :

$$X(z) = \frac{[z^2 + (a+b)z]x(0) + zx(1)}{z^2 + (a+b)z + ab}$$

a) Khi $a \neq b$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{bx(0) + x(1)}{b-a} \cdot \frac{1}{z+a} + \frac{ax(0) + x(1)}{a-b} \cdot \frac{1}{z+b}$$

$$x(k) = \frac{bx(0) + x(1)}{b-a} (-a)^k + \frac{ax(0) + x(1)}{a-b} (-b)^k, \quad k = 0, 1, 2$$

b) Khi $a = b$

$$X(z) = \frac{x(0)}{1+az^{-1}} + \frac{[ax(0) + x(1)]z^{-1}}{(1+az^{-1})^2}$$

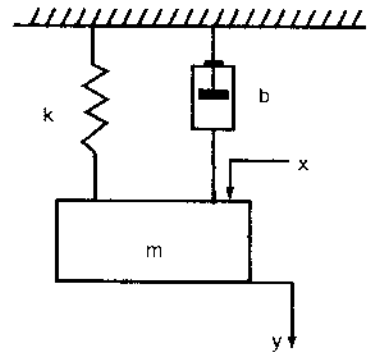
$$x(k) = x(0)(-a)^k + [ax(0) + x(1)]k(-a)^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bài tập 2-15 Một hệ cơ khí như ở hình 2.39 với hệ phương trình mô tả như sau:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = x(t); \quad T = 0,05 \text{ sec}$$

$$m = 1 \text{ kg}, \quad b = 4 \text{ N.sec/m}, \quad k = 25 \text{ N/m}$$

x - lực đặt vào, y - dịch chuyển



Hình 2.39

Đáp án

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 25}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-0,05s}}{s} G_1(s) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\}$$

$$\frac{G_1(s)}{s} = \frac{1}{25} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2 + 4s + 25} \right)$$

$$\frac{G_1(s)}{s} = \frac{1}{25} \left[\frac{1}{s} - \frac{2}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{(s+2)^2 + (\sqrt{21})^2} - \frac{s+2}{(s+2)^2 - (\sqrt{21})^2} \right]$$

$$Z \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\} = \frac{1}{25} \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{\sqrt{21}} \cdot \frac{e^{0,1} \sin(\sqrt{21} \times 0,05) z^{-1}}{1 - 2e^{-0,1} \cos(\sqrt{21} \times 0,05) z^{-1} + e^{-0,2} z^{-2}} - \frac{1 - e^{-0,1} \cos(\sqrt{21} \times 0,05) z^{-1}}{1 - 2e^{-0,1} \cos(\sqrt{21} \times 0,05) z^{-1} + e^{-0,2} z^{-2}} \right\}$$

$$= \frac{0,001165z^{-1} + 0,001089z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 1,7624z^{-1} + 0,8187z^{-2})}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,001165z^{-1} + 0,001089z^{-2}}{1 - 1,7624z^{-1} + 0,8187z^{-2}}$$

$$y(k+2) - 1,7624y(k+1) + 0,8187y(k) = 0,001165x(k+1) + 0,001089x(k).$$

Chương III

KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH VÀ CHẤT LƯỢNG HỆ XUNG

III.1. ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH

Cũng như đối với hệ liên tục, hệ xung ổn định nếu sau khi mất tác động kích thích (một xung đơn vị chẳng hạn) $x^*(t) = \delta(t)$, $X^*(s) = 1$ hệ sẽ trở lại trạng thái cân bằng ban đầu với tín hiệu ra $y \rightarrow 0$. Ảnh của tín hiệu ra lúc bấy giờ là:

$$Y^*(s) = W_K^*(s) = \frac{B^*(s)}{A^*(s)} \quad (3-1)$$

Trị số rời rạc của tín hiệu ra được xác định theo:

$$y(lT) = \sum \frac{B^*(s_i)}{e^{s_i T} A^*(s_i)} e^{s_i lT}, \quad l \geq 1 \quad (3-2)$$

mà s_i là nghiệm (đơn) của phương trình đặc trưng hệ kín:

$$F_K^*(s) = A^*(s) = a_0 e^{snT} + a_1 e^{s(n-1)T} + \dots + a_n = 0, \quad (3-3)$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng được khảo sát trong dải:

$$-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im}s \leq \frac{\omega_0}{2},$$

Nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực âm, nghĩa là nằm ở phía trái của dải nói trên thì khi $l \rightarrow \infty$ các thành phần ở (3-2) đều tiến đến không và quá trình $y(lT)$ tắt dần. Hệ điều chỉnh tự động xung như thế là *ổn định*. Nếu từ một nghiệm trở lên nằm ở nửa phải của dải nói trên thì thành phần tương ứng với nghiệm ấy ở (3-2) sẽ tăng về trị tuyệt đối một cách không có giới hạn, trong trường hợp ấy hệ *không ổn định*. Nếu một hay một vài nghiệm của phương trình đặc trưng nằm trên trục ảo thì hệ xung sẽ ở *biên giới ổn định*.

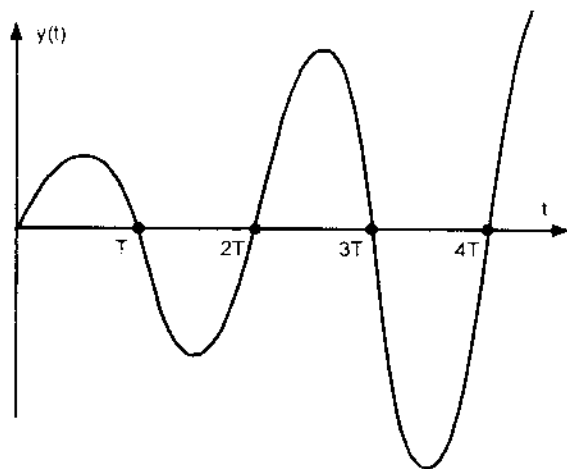
Như vậy điều kiện cần và đủ để hệ tự động xung ổn định là tất cả nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ kín đều nằm ở phía trái của dải

$$-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im}s < \frac{\omega_0}{2} \text{ trên mặt phẳng } s.$$

Việc phân bố về phía trái của nghiệm phương trình đặc trưng (3-3) như vậy chỉ bảo đảm hệ xung ổn định đối với các thời điểm lấy mẫu và không loại trừ khả năng mất ổn định giữa các thời điểm ấy. Dao động ẩn như vậy ở hệ xung có thể có khi phần liên tục quy đổi có nghiệm cực ở phía phải mà phần ảo của nó là bội số của nửa tần số lượng tử hoá ω_0 . Hiện tượng ấy được mô tả như ở hình 3.1 mà tại các thời điểm lấy mẫu:

$$y(lT) = 0 \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Để có hiện tượng này thì tần số lượng tử hoá phải bằng tần số riêng của phần liên tục mà thông thường ω_0 rất lớn, nên trong thực tế ít gặp. Để đánh giá về tính ổn định của hệ xung, cũng như ở hệ liên tục, có thể phân tích theo nghiệm của phương trình đặc trưng hoặc dùng các tiêu chuẩn đại số và tần số.



Hình 3.1

III.2. TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH ĐẠI SỐ

Trong trường hợp hệ giản đơn, dưới bậc ba, có thể dùng tiêu chuẩn Jury [6], đối với hệ bậc cao dùng tiêu chuẩn Hurwitz, Routh hay Shure - Kunt [10].

Phương trình đặc trưng của hệ xung có dạng (3-3):

$$F^*(s) = a_0 e^{sT} + a_1 e^{s(t-1)T} + \dots + a_n = 0$$

Hệ sẽ ổn định nếu tất cả nghiệm đều là nghiệm trái hay:

$$\operatorname{Re} s_i < 0; i = \overline{1, n}; \left(-\frac{\omega_0}{2} < \operatorname{Im} s \leq \frac{\omega_0}{2} \right).$$

Nếu dùng biến đổi z ta có:

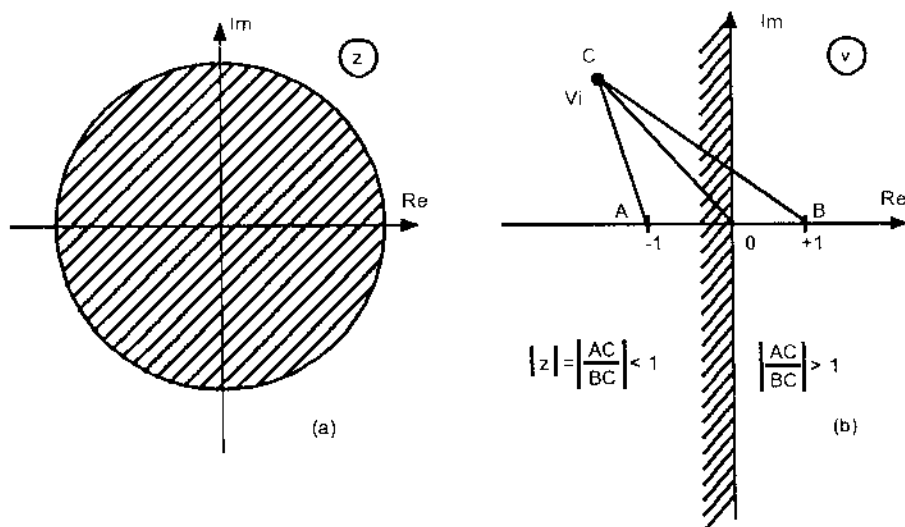
$$z = e^{sT}; s = \frac{1}{T} \ln z \quad (3-4)$$

Biểu thức đặc trưng có dạng:

$$F^* \left(\frac{1}{T} \ln z \right) = F_1(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (3-5)$$

Thay thế biến (3-4) làm cho đoạn thẳng $(-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im}s \leq \frac{\omega_0}{2})$ của trục ảo $\text{Res} = 0$ (như ở hình 2.34a) ở mặt phẳng s thành đường tròn đơn vị $z = e^{j\omega T}$ trên mặt phẳng z (hình 2.34b). Như đã nêu ở mục II.8, cần dùng đến biến mới v có mối quan hệ với z bởi:

$$z = \frac{1+v}{1-v} \quad \text{hay} \quad v = \frac{z-1}{z+1} \quad (3-6)$$



Hình 3.2

Việc dùng biến v một mặt cho phép sử dụng đường cong Bode trong việc phân tích và tổng hợp hệ xung, mặt khác biến dải trái ở mặt phẳng s ($\text{Res} < 0$; $-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im}s \leq \frac{\omega_0}{2}$) thành cả nửa trái của mặt phẳng v (hình 3.2b).

Hệ xung ổn định nếu tất cả các nghiệm đều nằm phía trái dải $(-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im}s \leq \frac{\omega_0}{2})$ trong mặt phẳng s , hoặc bên trong đường tròn bán kính đơn vị (vùng gạch sọc trên hình 3.2a) ở mặt phẳng z hay phía trái trục ảo mặt phẳng v (hình 3.2b).

Thật vậy vì:

$$|z_i| = \left| \frac{1+v_i}{1-v_i} \right| = \left| \frac{AC}{BC} \right|$$

Vecto $AC = AO + OC = 1 + v_i$,

$$BC = OB - OC = 1 - v_i$$

Khi nghiệm nằm bên trái trục ảo mặt phẳng v (vùng gạch sọc) thì $|z_i| = \left| \frac{1+v_i}{1-v_i} \right| = \left| \frac{AC}{BC} \right| < 1$ và hệ ổn định.

Nghiem nằm bên phải ứng với $|z_i| = \left| \frac{AC}{BC} \right| > 1$, hệ không ổn định.

Cuối cùng nghiệm trên trục ảo thì:

$$|z_i| = \left| \frac{AC}{BC} \right| = 1, \text{ hệ ở biên giới ổn định.}$$

Bây giờ với biến v có thể sử dụng các tiêu chuẩn ổn định đại số như ở hệ liên tục.

Phương trình đặc trưng (3-5) có dạng :

$$(1-v)^n F_1\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = F_2(v) = a_0(1+v)^n + a_1(1+v)^{n-1}(1-v) + \dots + a_n(1-v)^n \\ = A_0 v^n + A_1 v^{n-1} + \dots + A_n = 0 \quad (3-7)$$

Vậy, theo tiêu chuẩn Hurwitz chẳng hạn:

Hệ xung ổn định với các điều kiện sau:

$$A_0 > 0, \Delta_1 = A_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0 \quad (3-8)$$

$$\Delta_n = A_n \Delta_{n-1}$$

Cụ thể, với $n = 1$:

$$A_0 = a_0 + a_1 > 0,$$

$$A_1 = a_0 - a_1 > 0.$$

với $n = 2$:

$$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 > 0,$$

$$A_1 = 2(a_0 - a_2) > 0,$$

$$A_2 = a_0 - a_1 + a_2 > 0$$

với $n = 3$:

$$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0,$$

$$A_1 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0$$

$$A_2 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0,$$

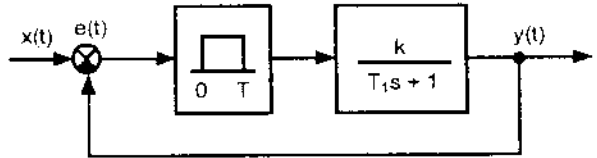
$$A_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0,$$

$$A_1 A_3 - A_0 A_2 = a_0^2 - a_3^2 + a_1 a_3 - a_0 a_2 > 0$$

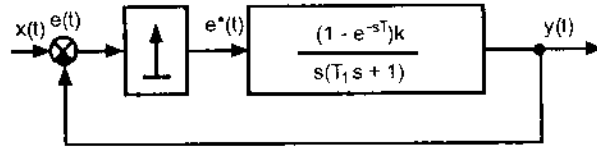
Bảng Routh cũng có thể được thành lập với các hệ số A_i ($i = \overline{0, n}$) của phương trình đặc trưng (3-7).

Ví dụ 3-1

Hệ xung có dạng xung chữ nhật với hệ số lấp đầy $\gamma = 1$. Hãy xác định điều kiện ổn định đối với K (hình 3.3) theo ví dụ 1-1 sơ đồ tương đương của hệ xung nói trên có dạng như ở hình 3.4. Theo định lý trễ và bảng 2-2 ta có hàm truyền hệ xung hở:



Hình 3.3



Hình 3.4

$$W^*(s) = k(1 - e^{-sT}) \left[\frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1} - \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{-\beta}} \right]; \quad \beta = \frac{T}{T_1}$$

$$= k \left[1 - \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} - e^{-\beta}} \right] = k \frac{1 - e^{-\beta}}{e^{sT} - e^{-\beta}} \quad (3-9)$$

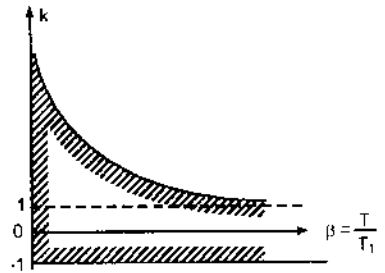
Nhân đây, ta nhận thấy rằng khi T rất bé ta có thể thay thế $e^{sT} \approx 1 + sT$ và $e^{-\beta} \approx 1 - \beta$, vậy (3-9) có dạng:

$$W^*(s) \approx \frac{k\beta}{1 + sT - 1 + \beta} = \frac{k}{T_1 s + 1},$$

nghĩa là khi chu kỳ lượng tử hoá rất bé ($T \rightarrow 0$) thì hệ xung trở về hệ liên tục.

Hàm truyền hệ xung kín :

$$W_K^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + W^*(s)} = \frac{k(1 - e^{-\beta})}{e^{sT} - [e^{-\beta} - k(1 - e^{-\beta})]} \quad (3-10)$$



Hình 3.5

Phương trình đặc trưng hệ kín là :

$F_K^*(s) = e^{sT} - [e^{-\beta} - k(1 - e^{-\beta})] = a_0 e^{sT} + a_1 = 0$, với $n = 1$, điều kiện ổn định là:

$$A_0 = a_0 + a_1 = 1 - e^{-\beta} + k(1 - e^{-\beta}) > 0,$$

$$A_1 = a_0 - a_1 = 1 + e^{-\beta} - k(1 - e^{-\beta}) > 0,$$

hay: $(1 - e^{-\beta})(1 + k) > 0.$

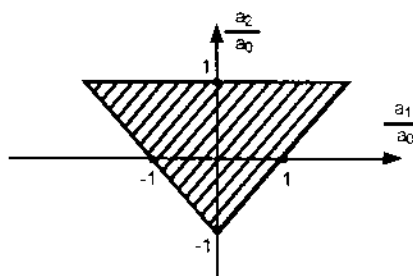
$$1 + e^{-\beta} > k(1 - e^{-\beta})$$

Từ đó:

$$-1 < k < \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} = \coth \frac{\beta}{2} \quad (3-11)$$

Miền ổn định của hệ xung ở ví dụ trên như ở hình 3.5.

Trong trường hợp hệ bậc hai $F_K^*(s) = a_0 e^{2sT} + a_1 e^{sT} + a_2$, miền ổn định nằm bên trong của tam giác cân trên mặt phẳng hệ số như ở hình 3.6.



Hình 3.6

III.3. TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH TẦN SỐ

III.3.1. Nguyên lý góc quay

Giả sử có đa thức dạng (3-5):

$$G_1(z) = a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_l \quad (3-12)$$

Nếu z_i là nghiệm của phương trình $G_1(z) = 0$ ($i = \overline{1, l}$), biểu thức trên có thể đưa về dạng :

$$G_1(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_l) \quad (3-13)$$

Sau khi thay thế $z = e^{j\omega T}$ vào (3-13), ta khảo sát biến đổi của góc quay của từng thành phần của (3-13):

$$\Delta \arg(e^{j\omega T} - z_i) \text{ khi } -\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$$

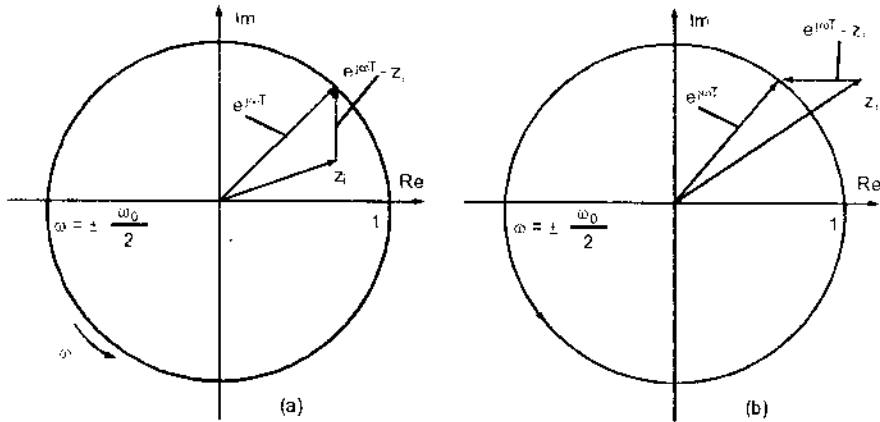
Có hai trường hợp:

Nếu nghiệm z_i nằm trong vòng tròn bán kính đơn vị (hình 3.7a) thì khi ω biến đổi từ $-\frac{\omega_0}{2}$ đến $\frac{\omega_0}{2}$, mút của vectơ $e^{j\omega T} - z_i$ trượt trên đường tròn ngược chiều kim đồng hồ tạo nên một góc quay:

$$\Delta \arg(e^{j\omega T} - z_i) = 2\pi; -\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$$

Nếu z_i nằm ngoài vòng tròn:

$$\Delta \arg(e^{j\omega T} - z_i) = 0; -\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$$



Hình 3.7

Vì góc quay của cả vectơ $G_1^*(j\omega)$ là tổng của góc quay các thành phần nên nguyên lý góc quay như sau :

Nếu phương trình $G_1(z) = 0$ có k nghiệm nằm trong vòng tròn bán kính đơn vị ở mặt phẳng z hay phân bố ở nửa dải trái $-\frac{\omega_0}{2} < \text{Im}s \leq \frac{\omega_0}{2}$ ở mặt phẳng s thì tổng của các góc quay là:

$$\Delta \arg G_1^*(j\omega) = 2k\pi; -\frac{\omega_0}{2} < \omega \leq \frac{\omega_0}{2} \quad (3-14)$$

$$\text{Vì } \text{Re}. e^{j\omega T} = \text{Re}. e^{-j\omega T} \text{ và } \text{Im}. e^{j\omega T} = -\text{Im}. e^{-j\omega T} \quad (3-15)$$

nên ta có thể viết:

$$\Delta \arg G_1^*(j\omega) = k\pi; 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} \quad (3-16)$$

III.3.2. Tiêu chuẩn ổn định Nyquist

Nếu hàm truyền hệ xung hở có dạng:

$$W^*(s) = \frac{B^*(s)}{A^*(s)} \quad (3-17)$$

Ta khảo sát góc quay của vectơ:

$$G^*(j\omega) = 1 + W^*(j\omega) = \frac{A^*(j\omega) + B^*(j\omega)}{A^*(j\omega)} \quad (3-18)$$

từ mẫu của hàm truyền hệ xung kín:

$$W_K^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + W^*(s)}$$

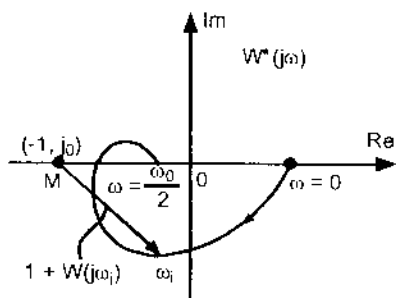
Tử số của (3-18) là đa thức đặc trưng của hệ xung kín. Tiêu chuẩn Mikhailov [16] khảo sát ổn định dựa vào biểu đồ của đa thức đặc trưng này. Mẫu số của (3-18) là đa thức đặc trưng của hệ hở (3-17). Trong thực tế bậc của tử số luôn nhỏ hơn bậc của mẫu số cho nên bậc của tử số và mẫu số của (3-18) đều bằng nhau.

Nếu hệ xung hở ổn định và hệ xung kín cũng ổn định thì góc quay của các vectơ ở mẫu số và tử số bằng nhau, góc quay của vectơ $G^*(j\omega) = 1 + W^*(j\omega)$ bằng không, gốc của vectơ ấy nằm ngoài biểu đồ $W^*(j\omega)$.

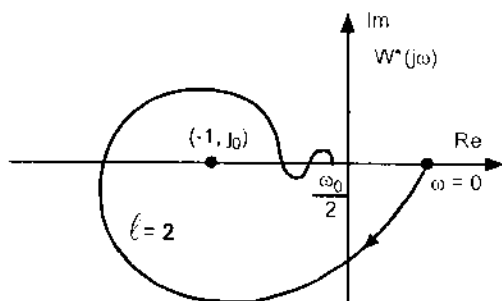
Cũng giống như đối với hệ liên tục, tiêu chuẩn ổn định Nyquist đối với hệ xung khi hệ hở ổn định, không ổn định hay ở biên giới ổn định không có gì khác.

a) Điều kiện cần và đủ để hệ xung kín ổn định khi phần liên tục ổn định là đường cong Nyquist $W^*(j\omega)$ không bao vây điểm có tọa độ $(-1, j_0)$ như ở hình 3.8.

b) Điều kiện cần và đủ để hệ xung kín ổn định khi phần liên tục không ổn định là đường cong Nyquist $W^*(j\omega)$ bao vây lấy điểm có tọa độ $(-1, j_0)$ $\frac{1}{2}$ lần mà l là số nghiệm cực phải của phần liên tục như ở hình 3.9.



Hình 3.8



Hình 3.9

Có thể đánh giá tính ổn định của hệ xung hở theo phần liên tục của nó vì các nghiệm cực từ hàm truyền của hệ xung hở trùng với nghiệm cực của phần liên tục.

Ngoại lệ là trường hợp khi phần liên tục quy đổi không ổn định và có hai hay nhiều hơn nghiệm cực $W(s)$ nằm bên phải mặt phẳng s và chỉ khác nhau ở phần ảo với khoảng cách $j\omega_0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Trường hợp này ít gặp, như đã nêu ở mục III.1.

c) Nếu phần liên tục qui đổi (hay hệ xung hở) là trung tính, nghĩa là $W^*(s)$ có nghiệm cực bằng không, thì thêm vào $W^*(j\omega)$ một cung có bán kính vô cùng lớn như ở hình 3.10 và tiêu chuẩn Nyquist có thể được áp dụng như khi hệ xung hở ổn định.

Ở hình 3.10, γ là chỉ số khâu tích phân. Tiêu chuẩn Nyquist dùng cho đặc tính tần số lôgarít để phân tích và tổng hợp hệ sau khi đã chuyển đổi sang tần số giả ω^* (ví dụ 2-13).

Ví dụ 3-2

Vẽ đường cong Nyquist cho hệ xung ở ví dụ 3-1 và phân tích ảnh hưởng của thông số đối với tính ổn định của hệ.

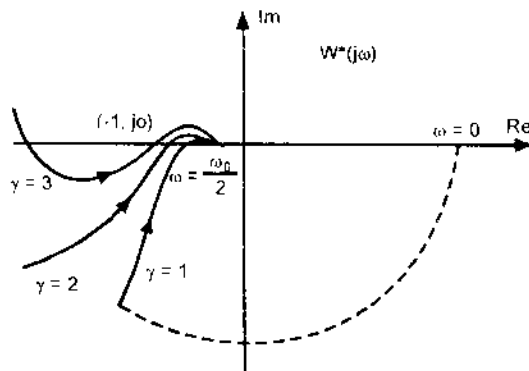
Đặc tính tần của hệ xung hở, theo (3-9) có dạng.

$$W^*(j\omega) = \frac{k(1 - e^{-\beta})}{e^{j\omega T} - e^{-\beta}}$$

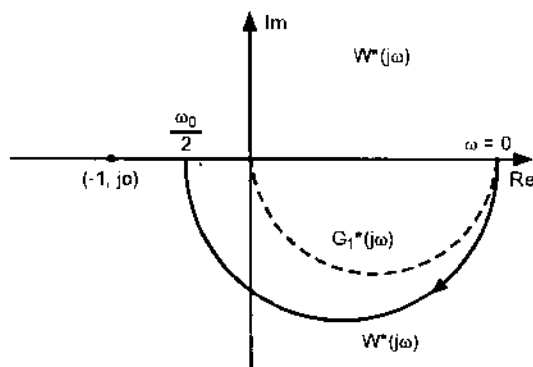
và đường cong Nyquist như ở hình 3.11 là nửa đường tròn có giá trị trên trục thực bằng:

$$\left. \begin{aligned} &+k \quad \text{với } \omega = 0 \\ &\frac{-k(1 - e^{-\beta})}{1 + e^{-\beta}}, \quad \text{với } \omega = \frac{\omega_0}{2} \end{aligned} \right\}$$

Ở hình 3.11 đường nét đứt là đường cong Nyquist của phần liên tục $G_1(s) = \frac{k}{T_1 s + 1}$ chỉ nằm ở góc phần tư thứ IV, hệ kín luôn ổn định.



Hình 3.10



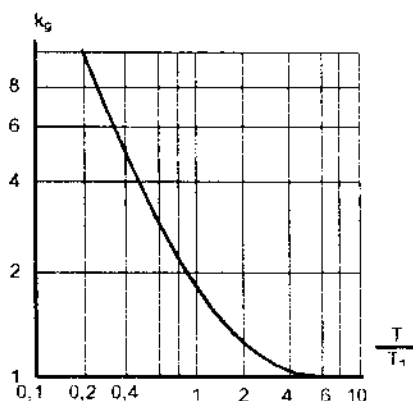
Hình 3.11

Ở hình 3.12 có mối quan hệ giữa trị số giới hạn của hệ số khuếch đại k_g và T, T_1 .

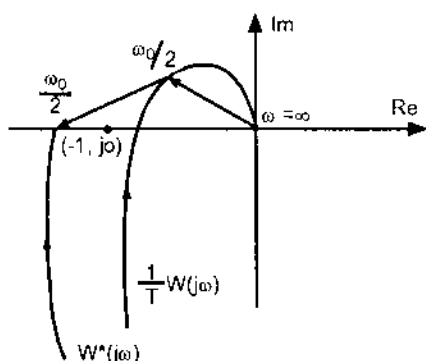
Giảm tần số lượng tử hoá (tăng thời gian lấy mẫu T) thường dẫn đến giảm hệ số khuếch đại giới hạn và càng làm xấu tính chất động học của hệ xung. Khi thiết kế nên chọn chu kỳ lượng tử hoá bé hơn hằng số thời gian cơ bản của phần liên tục.

Phần tử xung làm thay đổi khả năng ổn định của hệ liên tục.

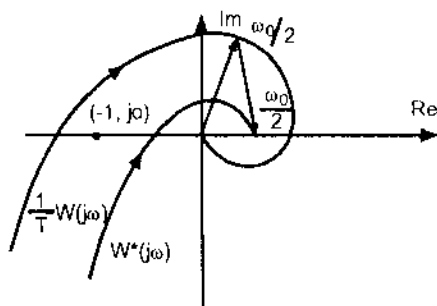
Ứng với (2-61), ở hình 3.13 và 3.14 có hai trường hợp khác nhau của đường đặc tính tần biên pha $\frac{1}{T} W(j\omega)$ của phần liên tục quy đổi.



Hình 3.12



Hình 3.13



Hình 3.14

Ở hình 3.13, khi $\frac{1}{T} \operatorname{Re} W(j\omega) \leq 0$, nghĩa là nằm bên trái trục ảo thì trên trục thực $W^*(j\frac{\omega_0}{2})$ càng dịch thêm về phía trái, nghĩa là càng dễ mất ổn định.

Ngược lại, ở hình 3.14 khi đặc tính $\frac{1}{T} W(j\omega)$ có phần thực dương, đặc trưng cho những hệ có khâu trễ, thì đặc tính $W^*(j\omega)$ càng dịch về bên phải so với $\frac{1}{T} W(j\omega)$ và phần tử xung làm tăng khả năng ổn định.

Ở hệ xung vẫn được dùng đến những khái niệm như độ dự trữ ổn định. Ở ví dụ 2-13 trên hình 2.35, độ dự trữ ổn định là $\gamma_r = 53^\circ$ và $L_{dt} = 23 \text{ db}$.

III.4. ỔN ĐỊNH VÔ TẬN Ở HỆ XUNG

Ví dụ hàm truyền của hệ xung kín có dạng:

$$W_K^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + W^*(s)} = \frac{B^*(s)}{A^*(s)}$$

ma

$$B^*(s) = b_0 e^{s(l-1)T} + b_1 e^{s(l-2)T} + \dots + b_{l-1}$$

$$A^*(s) = a_0 e^{sT} + a_1 e^{s(1-1)T} + \dots + a_l$$

Nếu hệ xung được xây dựng sao cho:

$$a_1 = a_2 = \dots a_l = 0 \quad (3-19)$$

nghĩa là $A^*(s) = a_0 e^{sT}$ thì ta có:

$$W_K^*(s) = b'_0 e^{-sT} + b'_1 e^{-s2T} + \dots + b'_{l-1} e^{-sT}$$

Mặt khác, theo biểu thức (2-19) ta có thể viết:

$$W_K^*(s) = w_K(0) + w_K(T)e^{-sT} + w_K(2T)e^{-s2T} + \dots + w_K(lT)e^{-sT} + \dots \quad (3-21)$$

ma $w_K(nT)$ là hàm trọng lượng của hệ kín với $n = 0, 1, 2, \dots$

Cân bằng các biểu thức (3-20) và (3-21) ta thấy :

$$\left. \begin{aligned} w_K(0) &= 0, \\ w_K(T) &= b'_0, \\ w_K(2T) &= b'_1, \\ \dots\dots\dots \\ w_K(lT) &= b'_{l-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

Điều đó có nghĩa là hàm trọng lượng có trị số gián đoạn đến l chu kỳ, sau đó quá trình quá độ sẽ kết thúc. Hiện tượng này không có ở hệ liên tục vì về nguyên tắc quá trình quá độ ở hệ liên tục chỉ kết thúc khi $t \rightarrow \infty$.

Hệ xung thoả mãn điều kiện (3-19) là hệ ổn định vô tận vì phương trình đặc trưng:

$$A^*(s) = a_0 e^{sT} = 0 \quad (3-23)$$

có l nghiệm ở vô tận.

Cần chú ý (3-22) là những trị rời rạc, giữa những thời điểm lấy mẫu có thể có dao động ẩn sau l chu kỳ.

Ví dụ 3-3

Với ví dụ 3-1, xác định hệ số khuếch đại k^* để hệ xung ổn định vô tận.

Theo (3-10), hàm truyền của hệ kín là :

$$W_K(s) = \frac{k(1 - e^{-\beta})}{e^{sT} - [e^{-\beta} - k(1 - e^{-\beta})]}$$

Điều kiện để có ổn định vô tận là:

$$a_1 = -e^{-\beta} + k(1 - e^{-\beta}) = 0$$

$$\text{Từ đó rút ra: } k = \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} = k^* \quad (3-24)$$

Thay trị số k^* vào hàm truyền hệ xung kín:

$$W_K(s) = \frac{k^*(1 - e^{-\beta})}{e^{sT}} = e^{-\beta} e^{-sT} \quad (3-25)$$

Vậy hàm trọng lượng hệ kín là :

$$w_K(0) = 0$$

$$w_K(T) = e^{-\beta}$$

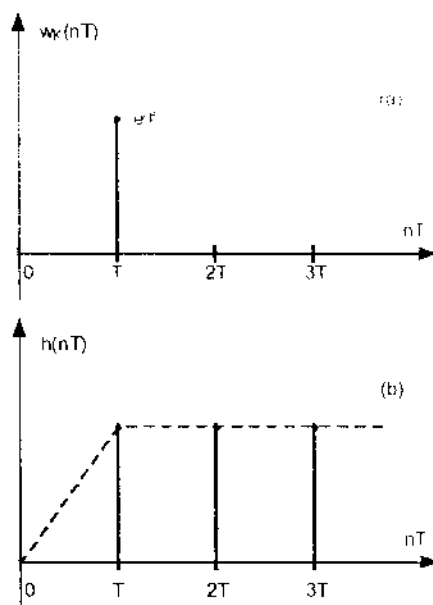
$$w_K(2T) = 0$$

Hàm trọng lượng $w_K(nT)$ chỉ là một xung ở thời điểm $n = 1$ như ở hình 3.15a.

Khi tín hiệu vào là bậc thang đơn vị thì hàm quá độ có dạng:

$$h(nT) = \sum_{m=0}^n w_K(nT) 1[(n-m)T]$$

như ở hình 3.15b.



Hình 3.15

III.5. KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG CỦA HỆ XUNG

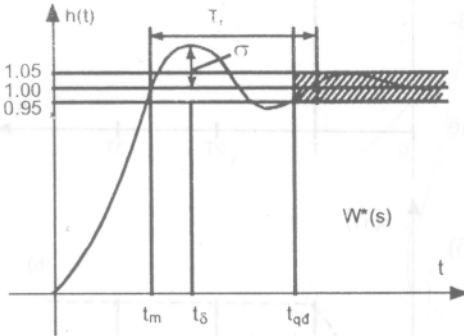
Một hệ điều khiển được đặc trưng bởi sự vận hành của nó ở quá trình quá độ và xác lập bởi cách hoạt động của nó khi có nhiễu, bởi độ nhạy cảm của nó khi có thông số và cấu trúc thay đổi. Cơ cấu điều khiển nhằm thoả mãn các tiêu chí được áp đặt trong những điều kiện hạn chế.

III.5.1. Quá trình quá độ

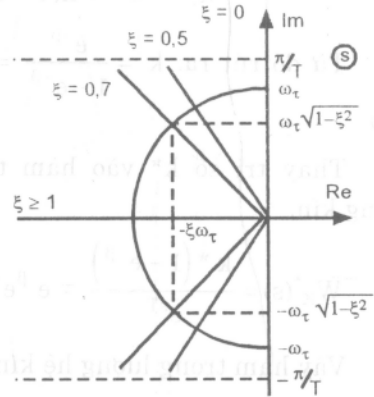
Tiêu chí ở quá trình quá độ được xác định theo hàm quá độ như ở hệ liên tục đối với hệ bậc hai, vì một mặt ở hệ bậc hai, chỉ tiêu chất lượng có thể được

xác định bằng phương pháp giải tích, mặt khác các mối quan hệ này vẫn có ý nghĩa đối với hệ có bậc cao hơn [6].

Nếu chu kỳ lượng tử hoá T nhỏ hơn nhiều so với chu kỳ riêng của đối tượng T_r thì điều khiển liên tục hay gián đoạn kiểu bậc thang nhờ bộ lưu giữ bậc không cũng cho đáp ứng giống nhau.



Hình 3.16



Hình 3.17

Ở hình 3.16 có đáp ứng của hệ liên tục với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị. Chỉ tiêu chất lượng ở quá trình quá độ được đánh giá theo:

1- Lượng quá điều chỉnh :

$$\sigma\% = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100$$

2- Thời gian quá độ t_{qd} ;

3- Thời gian đáp ứng t_m ;

4- Thời gian có quá điều chỉnh t_s .

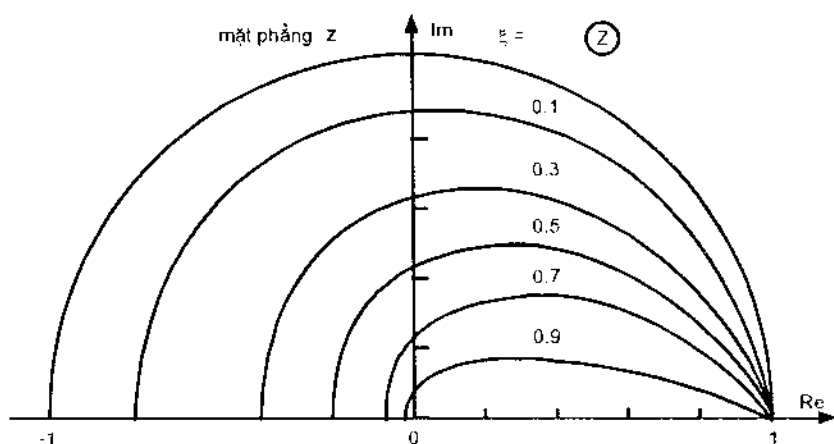
Có sự tương ứng giữa các chỉ tiêu này với đặc tính tần [6] như tần số cắt ω_c càng lớn thì thời gian đáp ứng t_m càng nhanh.

Trên mặt phẳng s , nghiệm s_i của hệ bậc hai là:

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega_1 = -\xi\omega_r \pm j\omega_r\sqrt{1-\xi^2}$$

Phân bố nghiệm xác định hệ số tắt dần ξ hay tần số riêng ω_r như trên hình 3.17.

Trên mặt phẳng z do mối tương quan giữa $z_i = e^{s_i T}$ ta có :



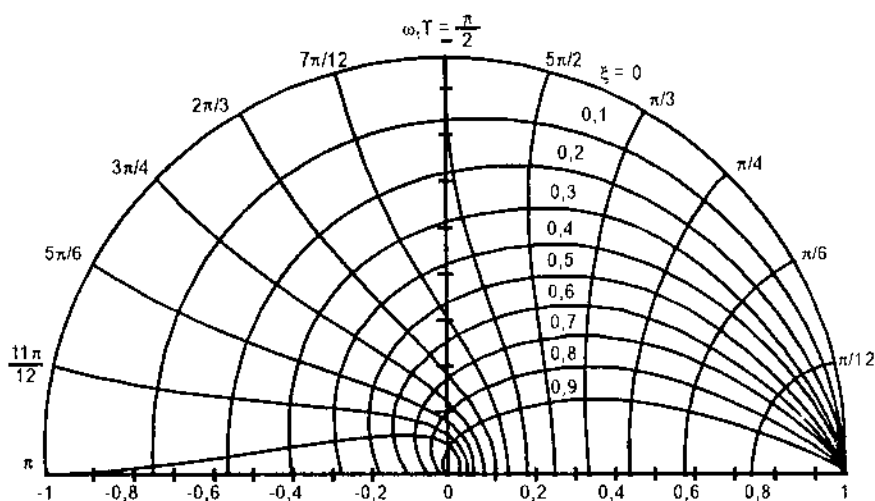
Hình 3.18

$$\left. \begin{aligned} z_{1,2} &= e^{-\xi\omega_r T} e^{j\omega_r T \sqrt{1-\xi^2}} = \rho e^{j\theta} \\ \rho &= e^{-\xi\omega_r T}, \quad \theta = \omega_r T \sqrt{1-\xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

góc θ biến đổi từ 0 đến π khi phần ảo của nghiệm s_1 bằng $\pm\omega_r \sqrt{1-\xi^2}$ thay đổi từ $-\frac{\pi}{T}$ đến $\frac{\pi}{T}$ trên mặt phẳng s . Với ξ nhất định, với nghiệm có phần ảo dương trong mặt phẳng z :

$$\rho = \exp\left(\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \theta\right); \quad \xi < 1 \quad \text{và} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3-27)$$

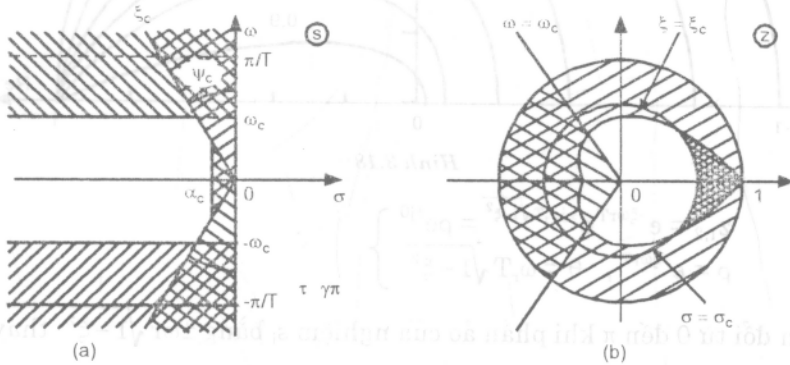
Những đường cong có ξ không đổi như ở hình 3.18.



Hình 3.19

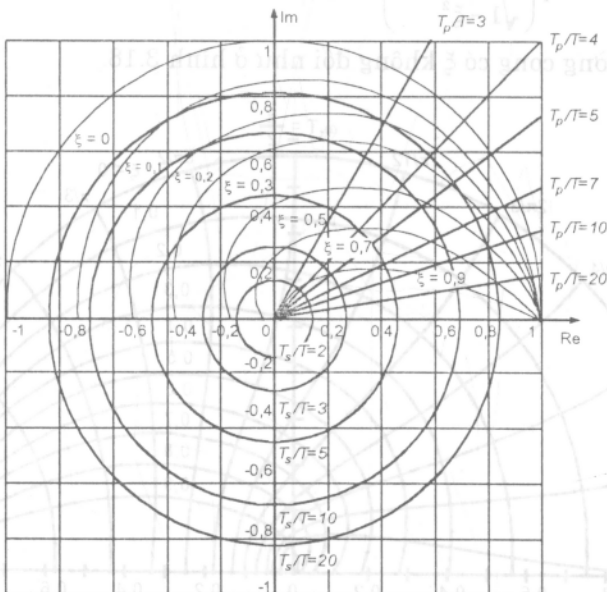
Trên hình 3.19 có các đường cong với $\omega_r T$ không đổi, luôn vuông góc với đường cong ξ . Ở hệ liên tục, hệ điều khiển phải được chọn sao cho nghiệm của phương trình đặc trưng nằm ngoài vùng cấm, vùng gạch sọc ở hình 3.20a nghĩa là phần thực của nghiệm $\alpha < \alpha_c$; $\xi \geq \xi_c = 0,4$: $\omega < \omega_c < \pi/T = \frac{\omega_0}{2}$ mà ω_c được chọn theo điều kiện không mất mát lượng thông tin (xem mục II.6).

Những ràng buộc ấy cũng được thể hiện ở hình 3.20b trên mặt phẳng z .



Hình 3.20

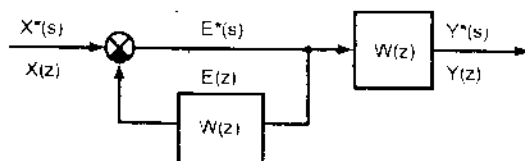
Ở hình 3.21 còn có các đường cong T_s/T hay T_p/T không đổi mà T_s và T_p là thời gian quá độ và thời gian có quá điều chỉnh (t_{qd} , t_σ) của hệ. Những đường cong này có thể đơn giản hoá được quá trình tính toán, tổng hợp hệ.



Hình 3.21

III.5.2. Quá trình xác lập

Việc đánh giá sai số xác lập của hệ xung tùy thuộc vào vị trí của các bộ lấy mẫu. Ở đây ta giới hạn việc khảo sát với cơ cấu lấy mẫu đặt sau cơ cấu so sánh như ở hình 2.3 mà sau khi biến đổi, ta đã đưa về dạng như ở hình 2.28 hay tương đương với nó - hình 3.22. Ở đây $W(z)$ là hàm truyền theo biến đổi Z của phần liên tục quy đổi.



Hình 3.22

Theo định lý tới hạn (2-37) :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)]$$

mà theo hình 3.22 :

$$E(z) = \frac{1}{1 + W(z)} X(z)$$

nên ta có:

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{X(z)}{1 + W(z)} \quad (3-28)$$

Phương trình (3-28) cho phép xác định sai lệch tĩnh của hệ xung với những dạng tín hiệu vào khác nhau:

1. Bậc thang đơn vị

$x(t) = 1(t)$; $X(s) = \frac{1}{s}$ và theo bảng 2-2 :

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} ; \quad (3-29)$$

vậy:
$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + W(z)} \quad (3-30)$$

Gọi k_p là hằng số sai lệch tĩnh:

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} W(z) \quad (3-31)$$

ta có:
$$e^*(\infty) = \frac{1}{1 + k_p} \quad (3-32)$$

2. Hàm tăng dần đều

$$x(t) = t; X(s) = \frac{1}{s^2}; X(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}; \quad (3-33)$$

ta có:
$$e^*(\infty) = \frac{1}{k_v} \quad (3-34)$$

với:
$$k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)W(z) \quad (3-35)$$

3. Hàm bậc hai

$$x(t) = t^2; X(s) = \frac{2}{s^3}; X(z) = T^2 \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad (3-36)$$

ta có:
$$e^*(\infty) = \frac{1}{k_a} \quad (3-37)$$

với:
$$k_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 W(z) \quad (3-38)$$

Các biểu thức (3-32), (3-34), (3-37) hoàn toàn phù hợp với bảng (5.1) ở tài liệu [18]. Ở hệ liên tục các nghiệm cực ở gốc trục làm cho sai lệch của hệ ở trạng thái tĩnh bằng không; còn ở hệ xung, các nghiệm cực ở $z = 1$ cũng làm cho sai lệch tĩnh giảm đến không. Điều đó cũng dễ nhận thấy vì khi $s = 0$ thì $z = e^{sT} = 1$.

Ví dụ 3.4

Hãy xác định sai lệch ở trạng thái xác lập của hệ xung với dạng xung chữ nhật ($\gamma = 1$) và phần liên tục:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)} \quad (3-39)$$

với các dạng tín hiệu vào khác nhau: bậc thang đơn vị, hàm tăng dần đều và hàm bậc hai.

Theo (2-11) ta có hàm truyền của cơ cấu định hình:

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (3-40)$$

Do đó phần liên tục quy đổi:

$$W(s) = G_0(s)G_1(s) = \frac{10(1 - e^{-sT})}{s^2(s+1)}$$

$$= 10(1 - e^{-sT}) \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] \quad (3-41)$$

Theo bảng 2.2 ta xác định hàm truyền gián đoạn:

$$\begin{aligned} W(z) &= 10(1 - z^{-1}) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] \\ &= 10 \left[\frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T}} \right] \end{aligned} \quad (3-42)$$

Với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị:

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} W(z) = \infty ; \quad e^*(\infty) = \frac{1}{1+k_p} = 0 \quad (3-43)$$

Với hàm tăng dần đều :

$$k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)W(z) = 10 ; \quad e^*(\infty) = \frac{1}{k_v} = 0,1 \quad (3-44)$$

Với hàm bậc hai:

$$k_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 W(z) = 0 ; \quad e^*(\infty) = \frac{1}{k_a} = \infty \quad (3-45)$$

Vì thời gian lấy mẫu ảnh hưởng đến tính ổn định của hệ nên sau khi chọn thời gian lấy mẫu, cần kiểm tra ổn định của hệ trước khi tính sai lệch ở chế độ xác lập.

III.5.3. Đáp ứng của hệ giữa các thời điểm lấy mẫu

Ở các chương đã nêu, đáp ứng của hệ chỉ được đánh giá tại các thời điểm lấy mẫu: 0, T, 2T... Trong thực tế, nếu thời gian lấy mẫu T (chu kỳ lượng tử hoá) nhỏ hơn nhiều so với hằng số thời gian cơ bản của phần liên tục của hệ, đáp ứng dạng rời rạc của hệ có thể đánh giá được hành vi của nó.

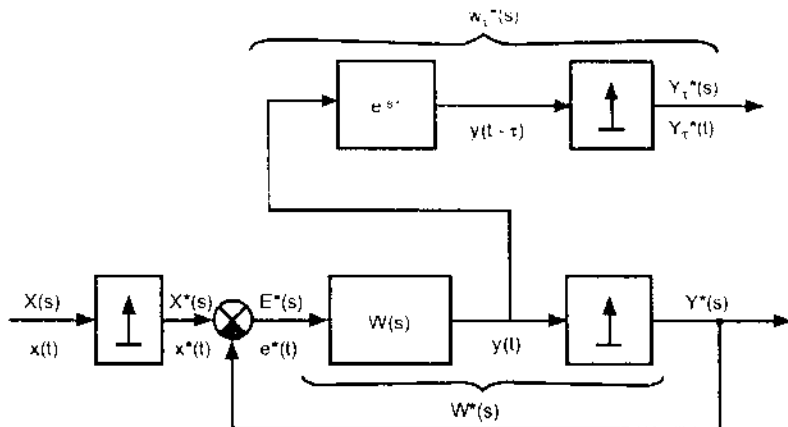
Tuy nhiên nếu chỉ biết các trị rời rạc, nhất là khi chu kỳ lượng tử hoá tương đương với hằng số thời gian của hệ, thì chưa đủ để đánh giá hệ xung. Do đó cần xác định đáp ứng $y(t)$ của hệ ở mọi thời điểm. Các phương pháp xác định đáp ứng rời rạc của tín hiệu ở hệ xung tại các thời điểm lấy mẫu có thể dùng để xác định đáp ứng rời rạc của tín hiệu giữa các thời điểm lấy mẫu.

Theo hình 2.28 ta có:

$$Y(s) = W(s)E^*(s) = W(s) \frac{X^*(s)}{1+W^*(s)} \quad (3-46)$$

Mặt khác :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} W(s) \frac{X^*(s)}{1+W^*(s)} e^{st} ds \quad (3-47)$$



Hình 3.23

Việc tính biểu thức dưới dấu tích phân khá phức tạp. Nếu đưa vào hệ xung một khâu trễ $e^{-s\tau}$ như ở hình 3.23 và τ thay đổi từ 0 đến T , ta có thể khảo sát tín hiệu ra của hệ giữa các thời điểm lấy mẫu. Trị số rời rạc của tín hiệu tại thời điểm lấy mẫu k ở đầu ra sau khâu trễ (hình 3.24a) bằng trị số của tín hiệu ở đầu ra của hệ (hình 3.24b) ở thời điểm $t = kT - \tau$.

Ảnh của tín hiệu ở đầu ra của khâu trễ là:

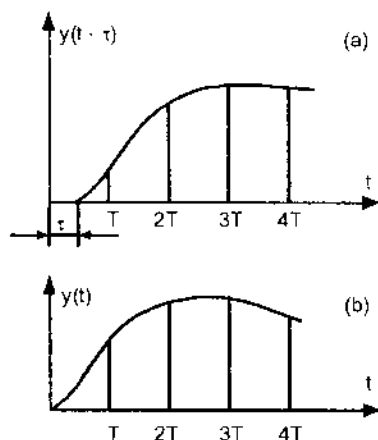
$$Y_\tau^*(s) = \frac{W_\tau^*(s)}{1+W^*(s)} X^*(s) = W_{K\tau}^*(s) X^*(s)$$

mà $W_\tau^*(s)$ hàm truyền hệ xung hở tính cả khâu trễ.

Chuyển từ ảnh sang hàm gốc $y(kT - \tau)$ có thể thực hiện bằng một trong các phương pháp đã nêu.

Có thể dùng phương pháp truy hồi (tính lặp) đối với phương trình sai phân.

Khi không có cơ cấu điều khiển, tín hiệu điều khiển $u(kT)$ là không đổi



Hình 3.24

giữa kT và $(k+1)T$, và tỷ lệ với sai lệch $e(kT) = x(kT) - y(kT)$. Đáp ứng ở thời điểm $t = kT + \tau$ giữa kT và $(k+1)T$, ($0 \leq \tau < T$) gồm có thành phần tự do $Y_d(\tau)$ và thành phần cưỡng bức đối với điều khiển dạng bậc thang $u(kT)$:

$$y(\tau + kT) = y_1(\tau) + u(kT)y_h(\tau); \quad 0 \leq \tau < T$$

$y_1(\tau)$ là thành phần tự do ứng với điều kiện đầu: $y_1 = y(kT)$, $\dot{y}_1 = \dot{y}(kT)$...

$y_h(\tau)$ là đáp ứng của hệ đối với tín hiệu bậc thang của $u(kT)$.

Ví dụ 3-5

Đối tượng là một khâu tích phân bậc hai $\ddot{y}(t) = u(t)$, được điều khiển bởi khâu hiệu chỉnh PD: $G_c(s) = 1 + T_1 s$.

Bằng cách lấy tích phân trực tiếp phương trình vi phân của đối tượng ta có:

$$\ddot{y}(t) = u(kT); \quad kT \leq t < (k+1)T$$

với biến τ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(\tau + kT) &= \dot{y}(kT) + \tau u(kT) & k \geq 0 \\ y(\tau + kT) &= y(kT) + \tau \dot{y}(kT) + \frac{\tau^2}{2} u(kT) & 0 \leq \tau < T \end{aligned} \right\} \quad (3-48)$$

Tín hiệu điều khiển của PD:

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \frac{de}{dt}$$

Phương trình gián đoạn tương đương:

$$u(kT) = k_p e(kT) + k_d \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}$$

Từ đó có algôrit điều khiển:

$$\left. \begin{aligned} u(kT) &= c_0 e(kT) + c_1 e[(k-1)T] \\ c_0 &= 1 + \frac{T_1}{T}; \quad c_1 = -\frac{T_1}{T} \\ k_p &= 1; \quad k_d = T_1 \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

Các trị số của y tại thời điểm lấy mẫu được xác định theo (3-48) với $\tau = T$. Tín hiệu điều khiển ở đầu ra của bộ lưu giữ $u(kT)$ rút ra từ (3-49) với $e(kT) = x(kT) - y(kT) = 1 - y(kT)$ trong trường hợp tín hiệu vào là bậc thang đơn vị. Đáp ứng tùy thuộc vào các điều kiện đầu $y(0^-)$, $\dot{y}(0^-)$ và $e(-T)$. Với điều kiện đầu bằng không: $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = 0$ và do quán tính nên khi $t = 0$: $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Nếu lấy $e(-T) = 0$ thì $e(0) = 1 - y(0) = 1$. Trị số điều khiển đầu tiên là

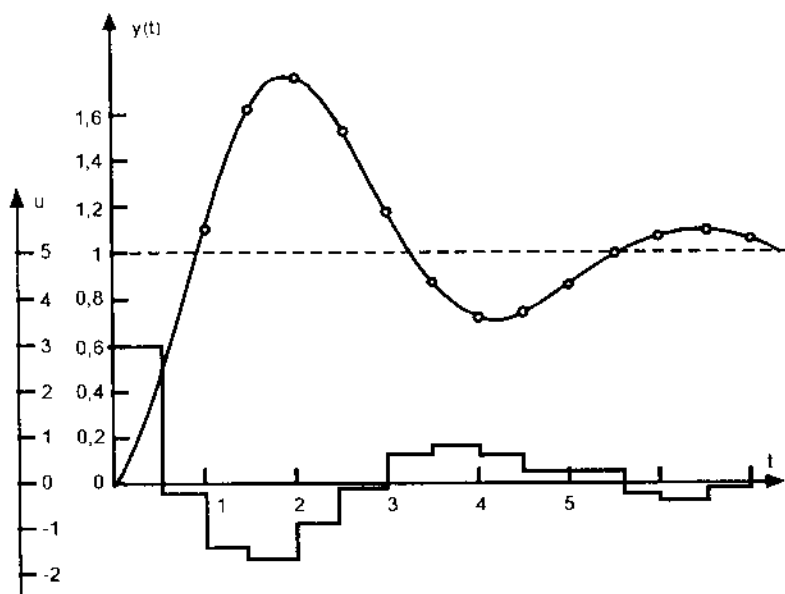
$u(0) = c_0$. Các phương trình (3-48) có dạng :

$$y(T) = \frac{T^2 c_0}{2} ; \dot{y}(T) = T c_0$$

Trị số sai lệch mới $e(T) = 1 - y(T)$ dẫn đến điều khiển tiếp theo:

$$u(T) = c_0 \left(1 - \frac{T^2 c_0}{2}\right) + c_1 \text{ v.v...}$$

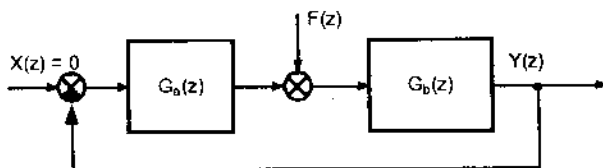
Ở hình 3.25 có đáp ứng của hệ nói trên với $T = 0,5 \text{ sec}$, $c_0 = 3$, $c_1 = -2$.



Hình 3.25

II.5.4. Ảnh hưởng của nhiễu

Khi có nhiễu (thay đổi điện áp nguồn, từ trường hay độ rung cơ học v.v...) đối tượng sẽ tạo nên tín hiệu ra không chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào, nghĩa là tạo nên sai lệch (hình 3.26). Tín hiệu ấy sẽ được xác định bởi:



Hình 3.26

$$Y_f(z) = \frac{G_b(z)}{1 + G_a(z)G_b(z)} F(z) \quad (3-50)$$

Nói chung, vì $G_a(z) G_b(z)$ rất lớn so với 1 nên:

$$Y_i(z) = \frac{1}{G_a(z)} F(z) \quad (3-51)$$

Như vậy $G_a(z)$ trước điểm đặt của nhiễu càng lớn thì ảnh hưởng của nhiễu càng bé. Nếu nhiễu là hằng ($F(z) = F_0 \frac{z}{z-1}$), và $G_a(z)$ có 1 nghiệm cực bằng $z = 1$ thì sai lệch tĩnh bằng không như ở ví dụ 3-4 (phương trình (3-43)). Nếu $G_a(z)G_b(z) \ll 1$, sai lệch sẽ giảm cùng với $G_b(z)$.

III.6. DÙNG MATLAB ĐỂ KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH VÀ ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG HỆ XUNG

III.6.1. Khảo sát ổn định

Ví dụ 3-6

Hệ xung ở ví dụ 3-1 có các thông số sau: $k = 30$; $T_1 = 20$ sec; $T = 1$ sec. Kiểm tra ổn định theo nghiệm của phương trình đặc trưng hệ gián đoạn.

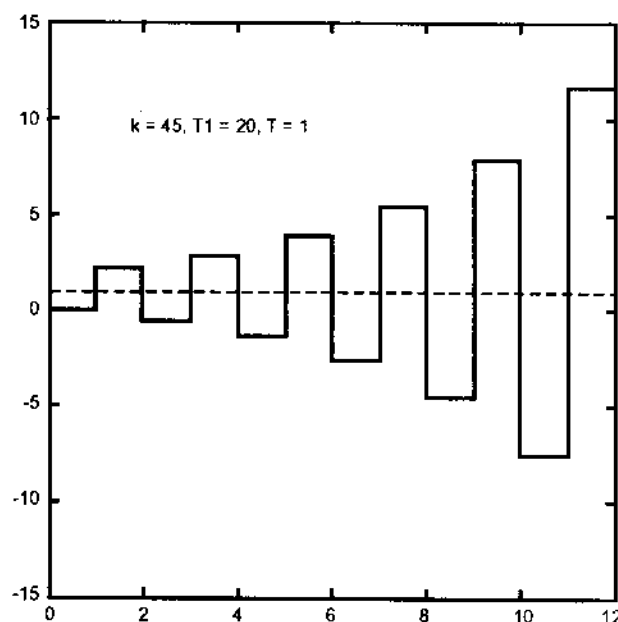
```
num = [30];
den = [20 1];
[numz, denz] = c2dm
(num, den, 1, 'zoh');
[numzK, denzK] =
cloop (numz, denz, -1);
roots (denzK)
ans = -0.5119
```

Như vậy hệ sẽ ổn định vì nằm trong đường tròn bán kính đơn vị trên mặt phẳng z .

Ví dụ 3.7

Khảo sát ổn định hệ trên theo nghiệm của phương trình đặc trưng với $k = 45$.

```
num = [45];
```



Hình 3.27

```
den= [20 1];
[numz, denz] = c2dm (num, den, 1, 'zoh' );
[numzK, denzK] = cloop (numz, denz, -1);
roots (denzK)
ans = -1.2434
```

Nghiệm nằm ngoài đường tròn bán kính đơn vị nên hệ không ổn định. Với các thông số trên hàm quá độ ở hình 3.27 cho thấy hệ xung không ổn định.

Ví dụ 3-8

Dùng tiêu chuẩn Nyquist để kiểm tra ổn định của hệ xung ở ví dụ 3-1 với các thông số sau :

$k = 45$; $T_1 = 5$ sec, $T = 1$ sec.

```
num = [45];
```

```
den = [5 1];
```

```
[numz, denz] = c2dm (num, den, 1, 'zoh' );
```

```
dnyquist (numz, denz, 1)
```

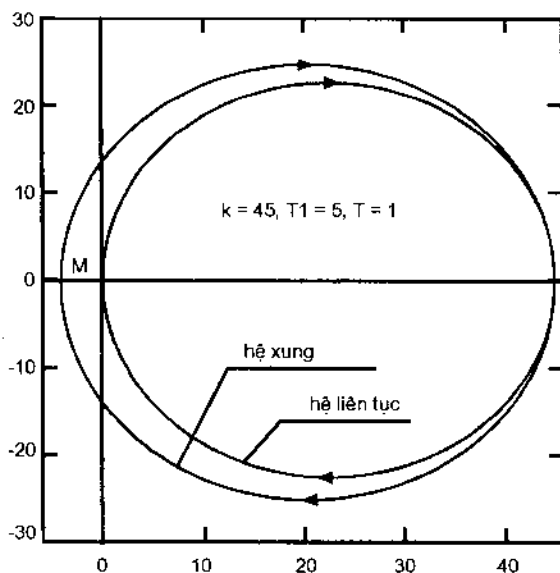
Ở hình 3-28 có đường cong Nyquist cho hệ xung bao vây lấy điểm M có tọa độ $(-1, j0)$ nên hệ xung không ổn định, còn đường cong Nyquist không bao vây lấy điểm M nói trên nên hệ liên tục tương đương là ổn định như đã vẽ ở hình 3.28.

Ví dụ 3-9

Dùng MATLAB để khảo sát ổn định của hệ theo quỹ đạo nghiệm số.

Phương pháp vẽ quỹ đạo nghiệm số và khảo sát ổn định của hệ xung như ở hệ liên tục. Ranh giới của miền ổn định là đường tròn đơn vị.

$$\text{Với đối tượng } G_1(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

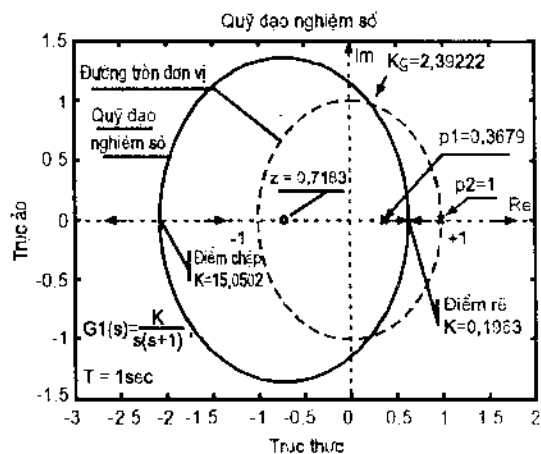


Hình 3.28

```

 $G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}; T = 1 \text{ sec}$ 
num = [1];
den = [1 1 0];
[numz, denz] = c2dm(num,
den, 1, 'zoh');
rlocus(numz, denz)
hold on
x = [-1: 0.1: 1];
y = sqrt(ones(1, length(x))
-x.^2);

```



Hình 3.29

Quỹ đạo nghiệm số bắt đầu từ hai nghiệm cực $p_1 = 0,3679$, $p_2 = 1$ trên trục thực và tách nhau tại điểm rẽ với $K = 0,1963$. Trị số giới hạn ổn định của $K = K_c = 2,39222$. Hai đường cong là hai nhánh của quỹ đạo chập nhau trên trục thực tại $K = 15,0502$. Theo trục thực, một quỹ đạo đi đến nghiệm không $z = -0,7183$ còn nhánh kia đi đến vô cùng. Như vậy giới hạn ổn định của K là:

$$K < K_c = 2,39222.$$

Ví dụ 3-10

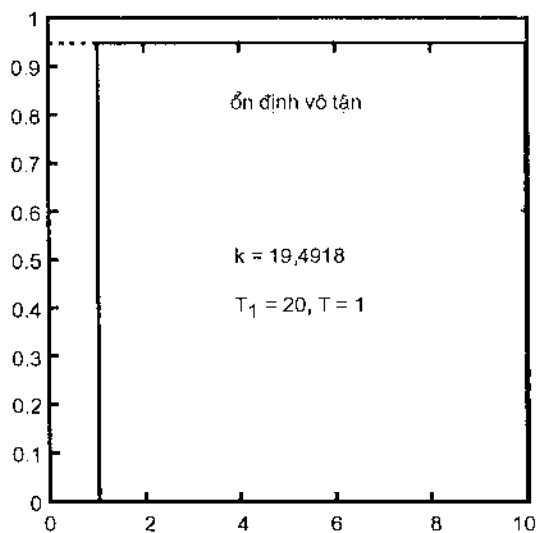
Dùng MATLAB để kiểm tra điều kiện ổn định vô tận ở ví dụ 3-3.

```

num = [19.4918];
den = [20 1];
[numz, denz] = c2dm(num,
den, 1, 'zoh');
[numKz, denKz] = cloop
(numz, denz, -1);
dstep(numKz, denKz)

```

Hàm quá độ như ở hình 3.30 theo ví dụ 3-3.



Hình 3.30

III.6.2. Khảo sát chất lượng

Để đánh giá chất lượng động, dùng các hàm quá độ của hệ xung.

Ví dụ 3-11

Ở các ví dụ 2-10, 2-11 và 2-12 đã dùng các phương pháp khác nhau để xác định hàm rời rạc $x(k)$ từ hàm gián đoạn $X(z)$. Kiểm tra lại theo MATLAB.

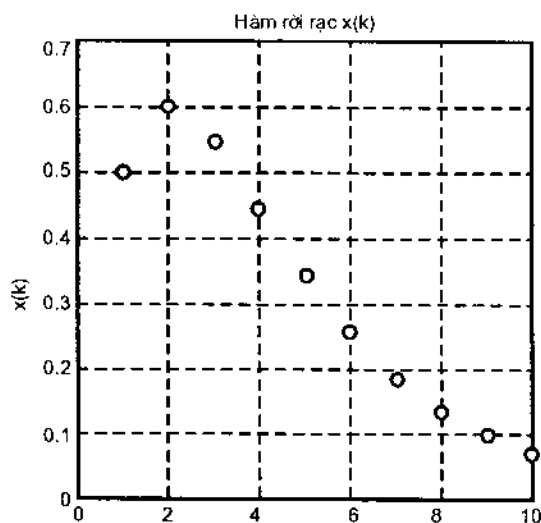
Với hàm gián đoạn:

$$X(z) = \frac{0,5z}{(z - 0,5)(z - 0,7)} = \frac{0,5z}{z^2 - 1,2z + 0,35}$$

ta dùng tín hiệu vào là hàm

Delta:

```
numz = [0 0,5 0];  
denz = [1 - 1,2 0,35];  
x = [1 zeros(1,10)];  
k = 0: 10;  
y = filter(numz, denz, x);  
plot(k, y, 'o')  
grid  
v = [0 10 0 0.7];  
axis(v)  
title('Hàm rời rạc',  
xlabel('k')  
ylabel('x(k)')
```



Hình 3.31

So sánh với các biểu thức (2-45), (2-47b) và (2-48), các trị số đã xác định là chính xác :

$$x(0) = 0; x(T) = 0,5; x(2T) = 0,6; x(3T) = 0,545.$$

Ví dụ 3-12

Ở ví dụ 2-14 có hàm truyền của hệ xung hở:

$$G(z) = \frac{0,369z + 0,2642}{z^2 - 1,3687z + 0,3679}$$

So sánh hàm quá độ của hệ xung kín và hàm quá độ của hệ liên tục với:

$$W(s) = G_0(s)G_1(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

Ở hệ liên tục, khâu trễ có thể thực hiện theo chuỗi Padé:

$$e^{-sT} \approx \frac{nd}{dd}$$

Vậy:
$$\frac{1 - e^{-sT}}{s} = \frac{dd - nd}{s * dd} = \frac{numd}{dend}$$

Do đó ta có:

```
numc1 = [1]; denc1 = [1 1 0];
```

```
[nd, dd] = pade(1, 2);
```

```
numd = dd - nd;
```

```
dend = conv([1 0], dd);
```

```
[numdm, dendm] = min  
real(numd, dend);
```

```
[numc, denc] = series  
(numdm, dendm, numc1,  
denc1);
```

```
[numck, denck] = cloop  
(numc, denc);
```

```
t = [0: 0.1: 25];
```

```
step(numck, denck, t)
```

```
hold
```

```
numz = [0 0.369 0.2642];
```

```
denz = [1-1.3687 0.3679];
```

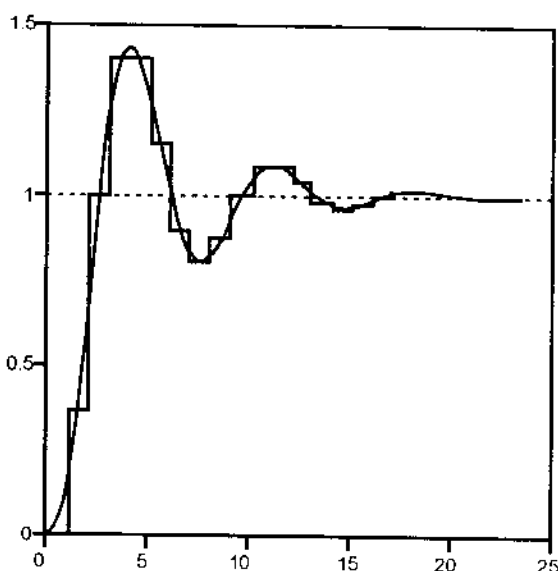
```
[numzK, denzK] = cloop  
(numz, denz, -1)
```

```
dstep(numzK, denzK);
```

Ở hình 3.32 có hàm quá độ hệ gián đoạn và hệ liên tục với phần liên tục quy đổi theo ví dụ (2-14).

Ví dụ 3-13

Dùng MATLAB xác định các hệ số K_p , K_v , K_a để từ đó đánh giá sai lệch ở trạng thái xác lập theo các biểu thức (3-31), (3-35) và (3-38) từ hệ xung cho ở ví dụ 3-6. Trước tiên chọn chu kỳ lượng tử hoá $T = 0,1$ chẳng hạn, ta có:



Hình 3.32

```

T = 0.1; % thời gian lấy mẫu
num = [10]; % tử số hệ liên tục
den = poly([0 -1]); % mẫu số hệ liên tục
[numz, denz] = c2dm(num, den, T, 'zoh'); % hệ xung hở
[numKz, denKz] = cloop(numz, denz, -1) % hệ xung kín
r = roots(denKz); % nghiệm cực hệ kín.
r = 0.9282 + j0.3
    0.9282 - j0.3

M = abs(r) % biên độ nghiệm
M = 0.9755
    0.9755

Kp = ddcgain(numz, denz) % tính hệ số Kp
Kp = inf % tính sai lệch theo Kp
ep = 1/(1 + Kp)
ep = 0
numzkv = (1/T)*conv([1-1], numz); % thực hiện biểu
denzkv = conv([10], denz); % thức  $\frac{1}{T}(z-1)W(z)$ 
[numzkv, denzkv] = minreal(numzkv, denzkv, 0.00001);
1pole - zero(s) cancelled
Kv = ddcgain(numzkv, denzkv) % tính hệ số kv
Kv = 10
ev =  $\frac{1}{k_v}$ ; % tính sai lệch theo kv
ev = 0.1
numzka = (1/T)^2*conv([1 -2 1], numz); % thực hiện
denzka = conv([1 0 0], denz); % biểu thức  $\frac{1}{T^2}(z-1)^2W(z)$ 
[numzka, denzka] = minreal(numzka, denzka, 0.00001);
ka = ddcgain(numzka, denzka) % tính hệ số ka
ka = 0 % tính sai lệch theo ka

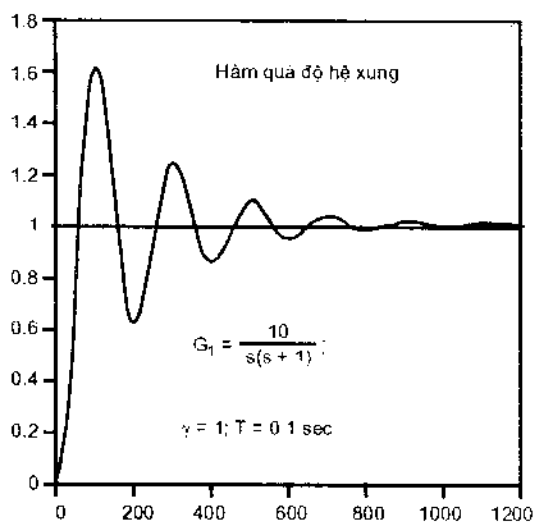
```

$$e_a = \frac{1}{k_a}$$

$$e_n = \inf$$

Kết quả tính toán như ở ví dụ 3-6 sau khi đã kết luận là hệ ổn định (nghiệm hệ kín nằm trong vòng tròn đơn vị ở mặt phẳng z).

Ở hình 3.33 có hàm quá độ của hệ xung kín theo (3-39). Với chu kỳ lượng tử hoá T bé (T = 0,1 sec), hàm quá độ được dùng để đánh giá trực tiếp chất lượng ở quá trình quá độ, và chất lượng tính theo (3-43) bằng không trong trường hợp này.



Hình 3.33

Bài tập chương III

Bài tập 3-1

Hệ tự động dùng máy tính điều khiển như ở hình 3.34a và sơ đồ khối như ở hình 3.34b, với hàm truyền của động cơ và biến tốc cùng dụng cụ đo:

$$G_1(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)}$$

a) Viết hàm truyền hệ hở và kín.

b) Xét điều kiện ổn định đối với k theo tiêu chuẩn Hurwitz.

Đáp án:

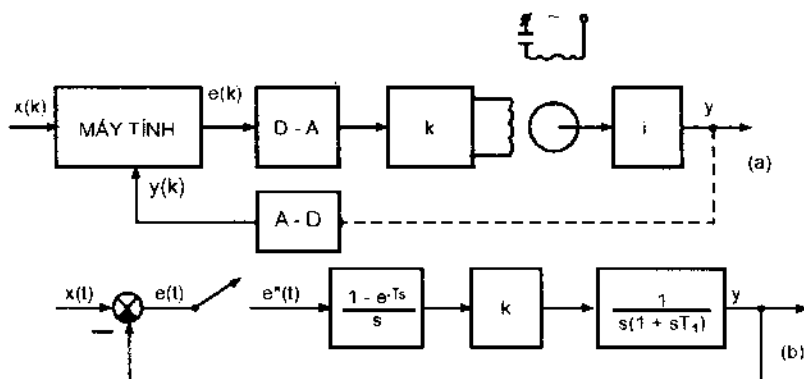
$$a) W(z) = k \frac{b_0 z + b_1}{z^2 - a_1 z + a_2} \quad (3-52)$$

$$\text{Với: } b_0 = T - T_1(1 - e^{-\beta}); \quad \beta = \frac{T}{T_1} \quad b_1 = T_1(1 - e^{-\beta}) - Te^{-\beta}$$

$$a_1 = (1 + e^{-\beta}) \quad a_2 = e^{-\beta}$$

$$W_K(z) = k \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a'_1 z + a'_2} \quad (3-53)$$

$$\text{với } a'_1 = k[T - T_1(1 - e^{-\beta})] - (1 - e^{-\beta}); \quad a'_2 = k[T_1(1 - e^{-\beta}) - Te^{-\beta}] + e^{-\beta}$$



Hình 3.34

b) Phương trình đặc trưng hệ kín:

$$z^2 + a'_1 z + a'_2 = 0$$

Thay $z = \frac{1+v}{1-v}$

$$(1 - a'_1 + a'_2)v^2 + 2(1 - a'_2)v + 1 + a'_1 + a'_2 = 0$$

Theo điều kiện ổn định (3-8) với $n = 2$:

$$kT(1 - e^{-\beta}) > 0$$

$$k < \frac{1 - e^{-\beta}}{T_1(1 - e^{-\beta}) - Te^{-\beta}} = k_{g1}; \quad k < \frac{2(1 + e^{-\beta})}{T(1 + e^{-\beta}) - 2T_1(1 - e^{-\beta})} = k_{g2}$$

Phân tích ba điều kiện trên thấy rằng:

a) $k > 0$

b) Khi β bé, k_{g1} bé hơn k_{g2} , ngược lại khi β lớn k_{g2} có trị số bé hơn k_{g1} .

c) Trong phạm vi $\beta = \frac{T}{T_1} < 0,5$ $k_{g1} = \frac{2}{T} = \frac{\omega_0}{\pi}$

Bài tập 3-2

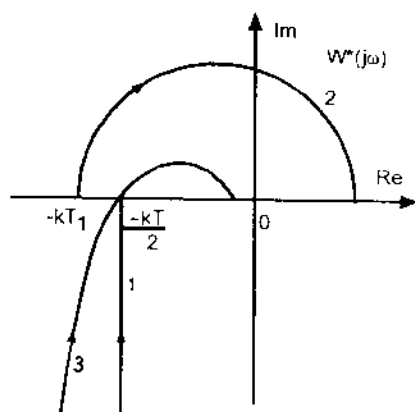
Với ví dụ trên vẽ đường cong Nyquist và xác định điều kiện ổn định.

Đáp án

Hàm truyền hệ hở: Từ biểu thức (3-52) thay thế $z = e^{j\omega T}$ ta có:

$$W^*(j\omega) = \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1} - \frac{kT_1(1 - e^{-\beta})}{e^{j\omega T} - e^{-\beta}} \quad (3-54)$$

Thành phần thứ nhất là phương trình đường thẳng (đường 1 ở hình 3.35) thành phần thứ hai là nửa đường tròn (đường 2) và đường cong Nyquist của hệ trên là đường 3 trên hình vẽ, có được bằng cách cộng đồ thị đường 1 và 2.



Hình 3.35

Khi $T_1 = 0$: $G_1(s) = \frac{k}{s}$, từ (3-54):

$$W^*(s) = k \frac{T e^{sT}}{e^{2sT} - e^{sT}} = \frac{kT}{e^{sT} - 1} \quad (3-55)$$

$$W^*(j\omega) = \frac{kT}{e^{j\omega T} - 1}$$

Biểu đồ là đường thẳng (đường 1 trên hình 3.35).

Bài tập 3-3

Với hệ tự động được mô tả bởi hàm truyền (3-53) ở ví dụ trên, khảo sát điều kiện ổn định.

Đáp án

Điều kiện duy nhất với $k > 0$ và biểu đồ được mô tả bởi đường 1 ở hình 3.35 là:

$$W^*(j\frac{\omega_0}{2}) = -\frac{kT}{2} > -1; \quad k < \frac{2}{T} = \frac{\omega_0}{\pi}$$

Bài tập 3-4

Hệ điều khiển tên lửa như ở hình 3.36a và sơ đồ khối tương đương như hình 3.36b.

Phân liên tục qui đổi của hệ là:

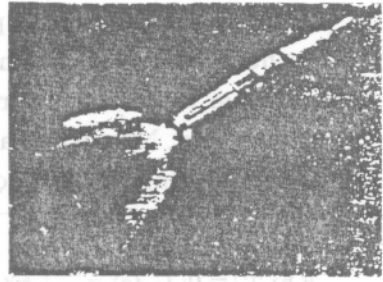
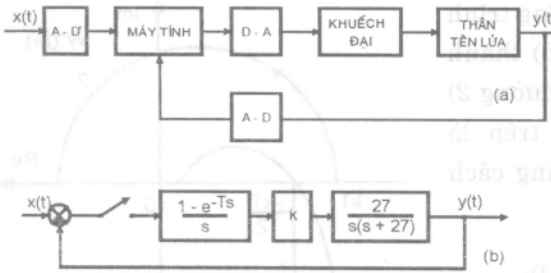
$$G(s) = G_0(s)G_1(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{Ka}{s(s+a)} \quad \text{với } T = 0,1 \text{ sec, } a = 27.$$

a) Kiểm tra ổn định của hệ với $K = 20$;

b) Kiểm tra ổn định của hệ với $K = 100$.

Đáp án

$$Z \left\{ \frac{Ka}{s^2(s+a)} \right\} = K \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z}{a(z-1)(z - e^{-aT})} \right]$$



Hình 3.36

$$G(z) = K \left\{ \frac{T(z - e^{-aT}) - (z-1) \left(\frac{1 - e^{-aT}}{a} \right)}{(z-1)(z - e^{-aT})} \right\}$$

với $T = 0,1 \text{ sec}$; $a = 27$:

$$G(z) = \frac{K(0,0655z + 0,02783)}{(z-1)(z - 0,0672)}$$

Hệ kín:

$$W_K(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K(0,0655z + 0,02783)}{z^2 + (0,0655K - 1,0672)z + 0,02783K + 0,0672}$$

a) $K = 20$: $z_{1,2} = 0,12 \pm j0,78$, hệ ổn định vì các nghiệm nằm trong đường tròn đơn vị.

b) $K = 100$: $z_1 = 0,58$ và $z_2 = -4,9$. Nghiệm thứ hai nằm ngoài đường tròn nên hệ không ổn định.

Bài tập 3-5

Hệ xung có phân liên tục quy đổi:

$$G(s) = G_0(s)G_1(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{10}{s+1}$$

Hỏi tần số lượng tử hoá là bao nhiêu để hệ ổn định?

Đáp án

$$G(z) = \frac{10(z-1)}{z} \left[\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z - e^{-T}} \right] = 10 \frac{(1 - e^{-T})}{(z - e^{-T})}$$

$$W_K(z) = \frac{10(1 - e^{-T})}{z - (11e^{-T} - 10)}$$

Nghiệm cực của hàm truyền là $11e^{-T}-10$ giảm từ +1 đến -1 khi T biến đổi từ 0 đến 0,2. Với $0,2 < T < \infty$ thì $(11e^{-T}-10)$ giảm từ -1 đến -10. Do đó để ổn định thì tần số lượng tử hoá ứng với:

$$f = \frac{1}{T} \geq \frac{1}{0,2} = 5 \text{ Hz}$$

Bài tập 3-6

Hệ xung hở có hàm truyền đạt :

$$G(z) = \frac{K(z+0,1)}{z(z-1)}$$

- Vẽ quỹ đạo nghiệm số;
- Xác định giới hạn của K để hệ ổn định.

Đáp án

a) Xuất phát từ hai nghiệm cực $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ đến điểm rẽ với $K_1 = 0,54$ tạo thành đường tròn, hai nhánh gặp nhau tại $K_2 = 1,85$, một đường theo trục thực đến nghiệm không với $z = -0,1$, đường thứ hai đến vô cùng, cắt đường tròn bán kính đơn vị tại $K_3 = 2,22$.

- $K_g < 2,22$.

Bài tập 3-7

Xác định biến đổi z ngược bằng phương pháp chia trực tiếp đối với hàm truyền:

$$G(z) = \frac{z(z+0,5)}{(z-1)(z^2 - 0,5z + 0,3125)}$$

Đáp án:

$$G(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 2,1875z^{-3} + 1,34375z^{-4} + \dots$$

Bài tập 3-8

Với bài tập trên xác định trị số ban đầu và trị số cuối của biến đổi z, nghĩa là tìm $y(0)$ và $y(\infty)$ mà tín hiệu vào $X(z) = \frac{z}{z-1}$.

Đáp án:

$$y(0) = 0 ; y(\infty) = 1,846.$$

Bài tập 3-9

Với $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ở bài tập 3-7, hãy xác định phương trình sai phân $y(kT)$.

Đáp án:

$$y(kT) = e[(k-1)T] + 0,5e[(k-2)T] + 1,5y[(k-1)T] - 0,8125y[(k-2)T] + 0,3125y[(k-3)T]$$

Bài tập 3-10

$$\text{Hệ có hàm truyền } G(z) = \frac{0,632z}{z^2 - 0,736z + 0,368}$$

Tín hiệu vào là bậc thang đơn vị : $X(z) = \frac{z}{z-1}$

a) Xác định $Y(z)$ theo phương pháp chia trực tiếp;

b) Tìm biến đổi ngược của $Y(z)$.

Đáp án

$$a) Y(z) = 0,632z^{-1} + 1,096z^{-2} + 1,205z^{-3} + 1,120z^{-4} + 1,014z^{-5} + 0,98z^{-6} + \dots$$

$$b) y(kT) = 0,8\delta(t) + 0,6238(t-T) + 1,096\delta(t-2T) + \dots$$

Bài tập 3-11

Với bài tập 3-10 dùng phương pháp phân rã thành phân thức đơn giản xác định $Y(z)$ và $y(kT)$.

Đáp án

$$a) \frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2 - 0,736z + 0,368}; A=1, B=-1, C=0,368$$

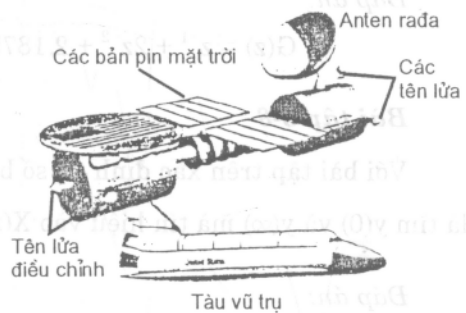
$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z(z - e^{-a} \cos b)}{z^2 - 2ze^{-a} \cos b + e^{-2a}};$$

$$a = 0,5; b = 1;$$

$$b) y(kT) = 1 - e^{-0,5k} \cos k$$

Bài tập 3-12

Để thuận tiện cho việc liên lạc với Trái đất và cung cấp năng lượng cho trạm không gian (hình 3.37), hệ điều khiển định hướng trạm có hàm truyền:



Hình 3.37

$$G(z) = \frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353}$$

- a) Trị số K mà hai nghiệm của phương trình đặc trưng bằng nhau?
b) Các nghiệm ấy là bao nhiêu?

Đáp án:

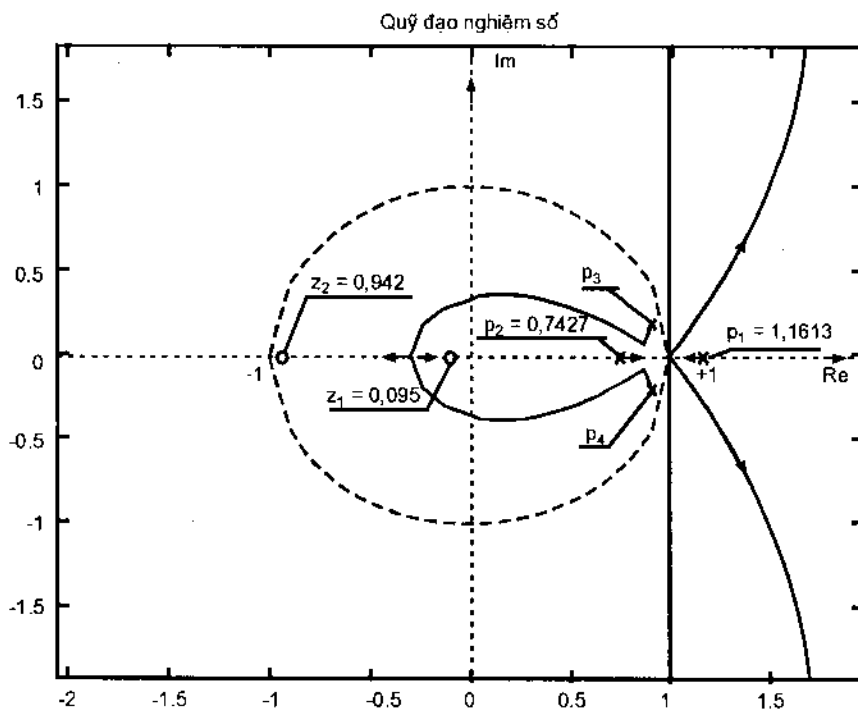
- a) $K = 5,9719e^{-0,4}$
b) $p_1 = 0,9969$; $p_2 = 0,3924$; $p_3 = 0,3460$.

Bài tập 3-13

Hệ xung với hàm truyền:

$$G(z) = \frac{K(z^3 + 10,3614z^2 + 9,758z + 0,8353)}{z^4 - 3,7123z^3 + 5,1644z^2 - 3,195z + 0,7408}$$

- a) Vẽ quỹ đạo nghiệm số.
b) Xác định trị số K khi hai nghiệm thực rẽ nhánh.
c) Xác định K_g cực đại để hệ ổn định.



Hình 3.38

Đáp án

a) Quỹ đạo nghiệm số như ở hình 3.38.

b) $K = 9,5657e - 005$

c) $K_g = 9,5657e - 005$

Bài tập 3 - 14 Đối tượng hệ xung có hàm truyền:

$$G_1(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Xác định K_g để hệ ổn định với $T = 1$ sec.

Đáp án

$K < K_g = 2,4184$ ứng với nghiệm $p_{1,2} = 0,2258 \pm j 0,9608$.

Bài tập 3-15

Đối tượng điều khiển như ở bài tập 3-1 với $k = 1$; $T_1 = 1$ sec; $T = 0,4$ sec.

a) Kiểm tra ổn định theo nghiệm của phương trình đặc trưng hệ kín.

b) Kiểm tra ổn định theo quỹ đạo nghiệm số.

c) Tính hàm truyền hệ xung kín theo (3-53) và vẽ hàm quá độ.

Đáp án:

$$a) W_K(z) = \frac{0,07032z + 0,061552}{z^2 - 1,6z + 0,73187}$$

Nghiệm cực :

$$p_{1,2} = 0,8 \pm j 0,3031$$

Hệ ổn định vì nghiệm đều nằm trong đường tròn đơn vị ở mặt phẳng z .

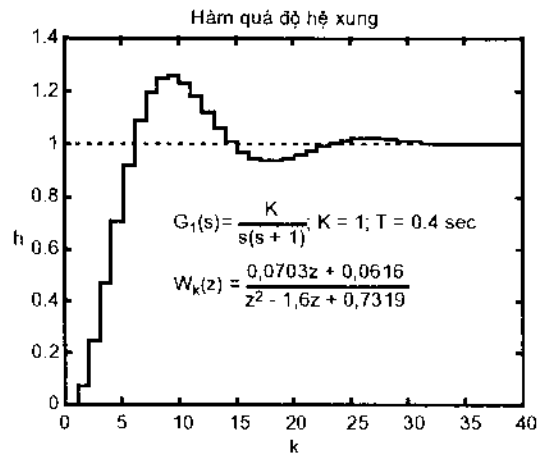
b) Theo quỹ đạo nghiệm số xác định trị số giới hạn:

$$K_g = 5,9712$$

Hệ ổn định vì $K = 1 < K_g$

$$c) b_0 = T - T_1(1 - e^{-\beta}) = 0,0703; a'_1 = -1,6;$$

$$b_1 = T_1(1 - e^{-\beta}) - T e^{-\beta} = 0,0616; a'_2 = 0,7319. \text{ Hàm quá độ như ở hình 3.39.}$$



Hình 3.39

Bài tập 3-16

Hệ điều khiển có hàm truyền đối tượng:

$$G_1(s) = K \frac{5s+1}{s(s+1)(10s+1)}$$

với $K = 0.4$.

Thời gian lấy mẫu $T = 0,1$ sec.

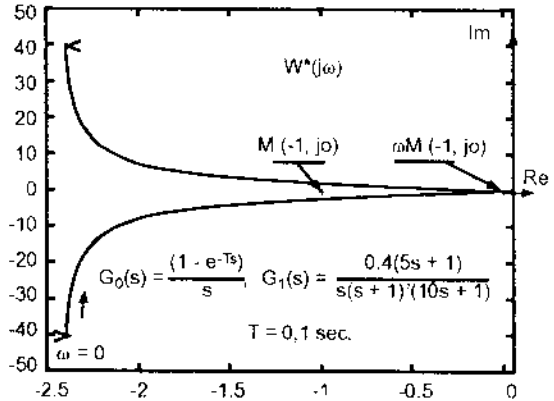
a) Kiểm tra ổn định theo tiêu chuẩn Nyquist;

b) Kiểm tra ổn định theo biểu đồ Bode.

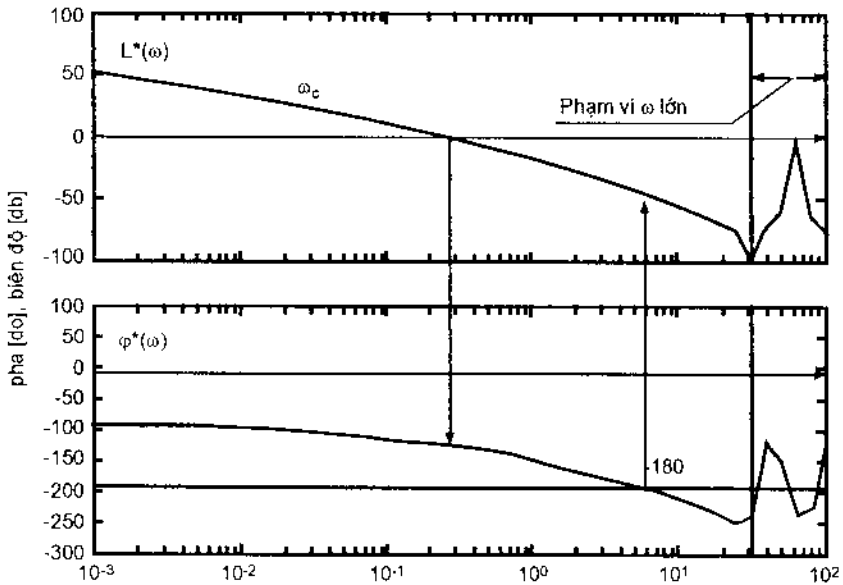
Đáp án

a) Hệ kín ổn định vì đặc tính $W^*(j\omega)$ không vây điểm $M(-1, j0)$ như ở hình 3-40.

Theo biểu đồ Bode hệ ổn định. Tần số cắt ω_c bé nên không cần dùng đến tần số giả ω^* cũng như biểu đồ Bode ở phạm vi tần số lớn như ở hình 3.41.



Hình 3.40



Hình 3.41

Chương IV

TỔNG HỢP HỆ XUNG

IV.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Hệ xung được tổng hợp theo hai hướng chủ yếu: trong miền tần số và trong không gian trạng thái. Tổng hợp trong miền tần số chủ yếu dựa vào mô tả động học của hệ bằng các biến đổi Laplace và Fourier (còn gọi là phương pháp tổng hợp dùng kỹ thuật biến đổi). Hướng thứ hai sẽ đề cập đến ở chương V.

Phương pháp dùng kỹ thuật biến đổi có các phương pháp gián tiếp (phương pháp tương tự) và phương pháp trực tiếp.

Ở *phương pháp gián tiếp*, một bộ điều khiển liên tục lý tưởng $G_c(s)$ được tổng hợp sau đó một tổ hợp "CAD - bộ điều khiển gián đoạn - DAC" được chọn sao cho tương ứng với $G_c(s)$ như ở hình 4.1. Phương pháp này được những người quen dùng điều khiển tương tự ưa chuộng vì chỉ cần biến đổi từ kỹ thuật tương tự sang số. Tuy nhiên việc gián đoạn hoá bộ điều khiển sẽ cho kết quả kém chính xác vì:

1- Tín hiệu liên tục dạng bậc thang từ phần tử lưu giữ không thể tạo nên tín hiệu lý tưởng $u^*(t)$.

2- Tín hiệu lý tưởng ấy phụ thuộc liên tục vào $y(t)$, còn bộ điều khiển số chỉ đo được $y(t)$ ở thời điểm lấy mẫu.

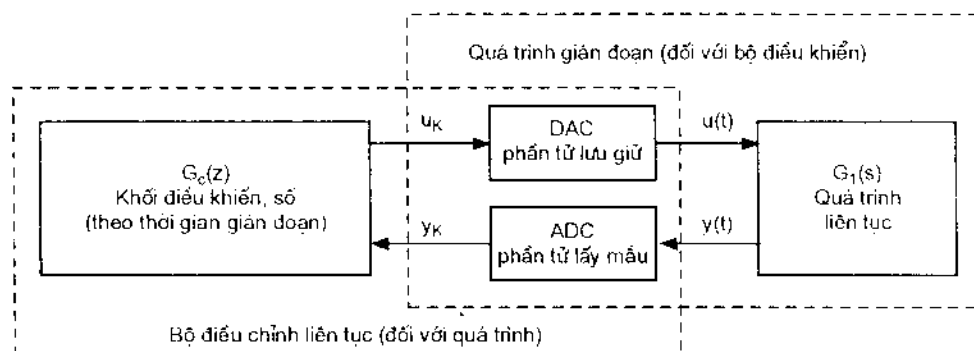
Tuy nhiên nếu so với phổ của các tín hiệu đầu vào đầu ra mà chọn tần số lượng tử hoá đủ lớn, có thể chọn được bộ điều khiển gián đoạn gần như $G_c(s)$.

Phương pháp chọn giản đơn nhất là theo :

$$G_c(z) = G_c(s)|_{s = (z-1)/T}$$

Một phương pháp chuẩn xác hơn:

$$G_c(z) = G_c(s)|_{s = 2/(z-1) \cdot T(z+1)}$$



Hình 4.1

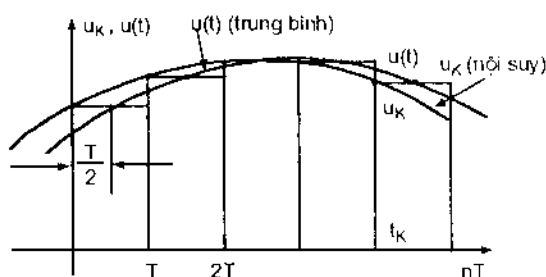
Phương pháp thứ hai là phương pháp biến đổi đơn ứng (biến đổi kép, biến đổi Tustin) duy trì được điều kiện ổn định của hàm truyền: nếu $G_c(s)$ ổn định thì $G_c(z)$ cũng ổn định do phép biến đổi đã chuyển miền bên trong đường tròn đơn vị ở mặt phẳng z sang nửa mặt phẳng trái của s (mục II-8). Tuy nhiên điều đó không có nghĩa là nếu $G_c(s)$ ổn định được quá trình thì bộ điều khiển gián đoạn "CAD – $G_c(z)$ – DAC" cũng sẽ ổn định được quá trình. Do vậy sau khi chọn bộ điều khiển số cần đánh giá lại sai lệch và tính ổn định của hệ.

Chú ý rằng phần tử lưu giữ bậc không tạo độ trễ trung bình là $\frac{T}{2}$ (như ở hình 4.2 và ví dụ 3-12), cho nên bộ điều khiển $G_c(s)$ phải thích hợp với đối tượng $G_1(s) e^{sT/2}$.

Lượng tử hoá có tần số lớn, khoảng 10 đến 20 lần tần số riêng của đối tượng.

Ở phương pháp trực tiếp, quá trình liên tục cùng với các phần tử lưu giữ và lấy mẫu được xem như một quá trình gián đoạn, tổng hợp trong miền z , cho phép khai thác tính năng mềm dẻo của máy tính mà phương pháp tương tự bị hạn chế.

Tín hiệu liên tục ở đầu vào $u(t)$ được xác định hoàn toàn bởi u_k . Kết quả là $y(t) = G_1(s)u(t)$ và tín hiệu được lấy mẫu y_k được xác định hoàn toàn bởi u_k . Như vậy việc dùng bộ điều khiển gián đoạn để điều khiển một quá trình đã gián đoạn hoá có đầu vào u_k và đầu ra y_k sẽ không cần đến sự xấp xỉ nào. Phương



Hình 4.2

pháp trực tiếp cơ sở trên đáp ứng được xác định trước (áp đặt) đối với tín hiệu vào hay nhiễu nhất định, nhằm thoả mãn những yêu cầu đặt ra như độ chính xác, lượng quá điều chỉnh, thời gian quá độ hay những chỉ tiêu đặt trưng khác đối với hệ xung như ổn định vô tận, thời gian cực tiểu...

Tuy nhiên cần chú ý rằng việc gián đoạn hoá sẽ làm mất khả năng quan sát được và điều khiển được đối tượng [9]. Mặc dù điều này chỉ xảy ra khi $T = n(\frac{\pi}{\omega_r})$ (ω_r là tần số riêng của đối tượng) và chỉ ở hệ đơn biến. Do đó cần chọn $T < \frac{T_i}{2}$ để tránh trường hợp ngưỡng $T = n(\frac{T_i}{2})$. Như vậy tần số lượng tử hoá lớn còn là để loại trừ mất khả năng quan sát được và điều khiển được.

Nếu đã ổn định được quá trình gián đoạn (nghĩa là $x_k \rightarrow 0$) thì bảo đảm được sự ổn định của quá trình liên tục (nghĩa là $x(t) \rightarrow 0$).

IV.2. ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN ĐƯỢC CỦA BỘ ĐIỀU KHIỂN SỐ

Ở hình 4.3 có sơ đồ khối của hệ xung mà máy tính số thực hiện chức năng của bộ điều khiển $G_c^*(s)$.

Hệ kín có hàm truyền:

$$W_k^*(s) \equiv \frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = \frac{G_c^*(s)G^*(s)}{1 + G_c^*(s)G^*(s)} \quad (4-1)$$

với $G^*(s)$ là phần không thay đổi của hệ xung.

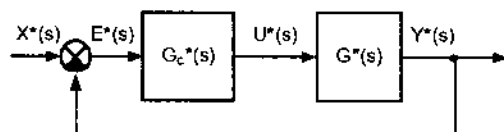
Bộ điều khiển được xác định bởi:

$$G_c^*(s) = \frac{1}{G^*(s)} \frac{W_k^*(s)}{[1 - W_k^*(s)]} \quad (4-2)$$

$G_c^*(s)$ có thể thực hiện được nếu bậc của mẫu số lớn hơn hoặc bằng bậc của tử số; nói cách khác tín hiệu ra không vượt trước tín hiệu vào.

Nếu $W_k^*(s) = w_k e^{-kT} + w_{k+1} e^{-(k+1)T} + \dots$ và sau khi chia tử cho mẫu số của hàm truyền $G^*(s)$ ta có:

$$G^*(s) = g_n e^{-nT} + g_{n+1} e^{-(n+1)T} + \dots$$



Hình 4.3

Biểu thức (4-2) có dạng:

$$G^*(s) = \frac{w_k e^{-kT} + w_{k+1} e^{-(k+1)T} + \dots}{(g_n e^{-nT} + \dots)(1 - w_k e^{-kT} - \dots)} \quad (4-3)$$

$$= C_{k-n} e^{-(k-n)T} + C_{k-n+1} e^{-(k-n+1)T} + \dots$$

Điều kiện thực hiện được là $k \geq n$ để tín hiệu ra của bộ điều khiển không thể có được khi chưa có tín hiệu vào.

Như vậy, bậc của hàm truyền hệ kín mong muốn $W_k^*(s)$ không thấp hơn bậc của thành phần không biến đổi $G^*(s)$ của hệ.

IV.3. CHỌN TẦN SỐ LƯỢNG TỬ HOÁ

Việc chọn tần số lượng tử hoá ω_0 (hay thời gian lấy mẫu T) rất quan trọng. Nếu ω_0 quá bé sẽ có hiện tượng méo tín hiệu, mất lượng thông tin (2-51), giảm chất lượng, thậm chí còn có thể mất ổn định (3-11). Nếu chọn ω_0 quá lớn (hay T quá bé) một mặt hệ có đáp ứng gần với hệ liên tục mong muốn, tổng hợp theo phương pháp biến đổi, mặt khác đòi hỏi tốc độ tính phải nhanh, giá thành sẽ cao tuy rằng hạn chế về phương diện này ngày càng giảm nhẹ do công nghệ và máy tính ngày càng phát triển. Việc chọn đúng tần số lượng tử hoá vẫn còn mang tính chất "nghệ thuật" hơn là tính chất khoa học.

1- Việc chọn tần số lượng tử hoá hợp lý trước tiên dựa vào bản chất của quá trình.

- Các phản ứng hoá học là quá trình chậm có thời gian điều khiển tính bằng giờ.
- Các quá trình nhiệt, thời gian điều khiển tính bằng phút.
- Các hệ điều khiển tàu thuỷ chẳng hạn tác động vào cần lái đòi hỏi nhiều giây để dẫn tàu đúng hướng.
- Các quá trình cơ học tác động nhanh (như người máy chẳng hạn) thời gian ấy tính đến phần trăm của giây.

Trong trường hợp thứ nhất chu kỳ lượng tử hoá T không phải bị giới hạn bởi công suất và tốc độ tính của máy. Trong trường hợp cuối những hạn chế về kinh tế (giá thành của máy tính chất lượng cao) lại đặt ra. Ngoài ra còn phải tính đến những khó khăn khác: Khi $T \rightarrow 0$ các mô hình của quá trình trở nên thô thiển ($F = I$, $G = 0$), tất cả các nghiệm cực đều bằng một. Do đó việc tính toán các bộ điều khiển số có khó khăn. Các phương trình truy hồi trở nên kém chính xác ở thời gian thực, các phương pháp xây dựng hệ "ổn định vô tận", "thời gian cực tiểu" không còn ý nghĩa. Do đó việc xác định T (hay ω_0) hợp lý là cần thiết, tuy rằng các khó khăn trên đều có biện pháp để khắc phục [20].

2- Tần số lượng tử hoá ω_0 được chọn phải thoả mãn định lí Kachenhicov (2-51)

Khi có tín hiệu liên tục đã gián đoạn hoá cần được phục hồi thì tần số lượng tử hoá ít nhất phải gấp đôi tần số lớn nhất của tín hiệu ấy ω_m . Đối với hệ điều khiển kín, tần số lượng tử hoá không bé hơn hai lần dải thông tần cần thiết ω_b mà dung lượng phổ tín hiệu vào phụ thuộc vào ω_b nên:

$$\frac{\omega_0}{\omega_b} > 2 \quad (4-4)$$

Đó là giới hạn thấp nhất có thể. Trong thực tế giới hạn này có thể quá thấp đối với đáp ứng thời gian chấp nhận được. Để đảm bảo độ chính xác cần thiết và tải của máy tính, thường được chọn:

$$4 \leq \frac{\omega_0}{\omega_b} \leq 20 \quad (4-5)$$

hay T được chọn khoảng 1/10 hằng số thời gian bé nhất của đối tượng.

Ở quá trình quá độ, khi lượng ra đạt được trị số xác lập ứng với thời gian đáp ứng t_m của hệ cần có 2 đến 4 chu kỳ lượng tử hoá T.

3- Trong nhiều trường hợp, cần có *độ trơn cao đối với hàm quá độ*. Mức độ trơn tùy thuộc vào đối tượng cụ thể: đối với động cơ điện, chu kỳ gián đoạn có thể lớn hơn đối với cơ cấu thừa hành thuỷ lực. Đôi khi giữa phần tử lưu giữ (ZOH) và cơ cấu thừa hành thuỷ lực có bộ lọc hạ tần. Mức độ trơn còn tùy thuộc vào phạm vi ứng dụng của hệ. Đối với con người, tác động có ảnh hưởng trực tiếp, đòi hỏi mức độ trơn cao hơn so với các thiết bị điều khiển vệ tinh không có người. Ví dụ với hệ có $t_m = 1$ sec (giải thông tần là 0,5 Hz) cần chọn ω_0 từ 3 đến 20 Hz để đáp ứng trơn và hạn chế lượng quá điều chỉnh. Do đó cần chọn:

$$6 \leq \frac{\omega_0}{\omega_d} \leq 40 \quad (4-6)$$

Nhiều tác động vào đối tượng rất đa dạng, từ nhiễu bậc thang đến ồn trắng (whitenoise). Đối với tần số lượng tử hoá thì nhiễu ngẫu nhiên có tần số cao là có ảnh hưởng nhất. Một hệ liên tục chống nhiễu tốt là hệ có sai số do nhiễu tạo nên là bé. Nếu dùng điều khiển số đối với hệ này thì chất lượng ấy sẽ giảm. Nếu tỷ số $\frac{\omega_0}{\omega_d}$ càng bé thì sự suy giảm chất lượng do lượng tử hoá càng lớn khi có nhiễu là

ồn trắng tác động. Đối với hệ điều khiển có bộ quan sát thì tỷ số tối ưu $\frac{\omega_0}{\omega_d} \approx 20$.

Nếu chu kỳ lượng tử hoá lớn hơn thời gian đáp ứng của quá trình thì nhiễu sẽ tác động vào quá trình trước khi bộ điều khiển có tác động hiệu chỉnh. Do đó tần số lượng tử hoá được chọn trên cơ sở đánh giá động học của quá trình và nhiễu, động học của quá trình và khả năng của máy tính. Các bộ điều khiển trên thường trường với ít mạch vòng điều khiển có chu kỳ lượng tử hoá bé và cố định.

IV.4. CHỌN BỘ ĐIỀU KHIỂN SỐ THEO PHƯƠNG PHÁP LIÊN TỤC

Phương pháp thông thường để thiết kế hệ điều khiển số là chọn bộ điều khiển $G_c(s)$ cho hệ liên tục tương đương, rồi xấp xỉ hoá bộ điều khiển liên tục ấy với bộ lọc số cần tìm $G_c^*(s)$ (hay $G_c(z)$). Có nhiều phương pháp để thực hiện.

IV.4.1. Bộ điều khiển được xác định theo phương pháp vi phân

Bộ điều khiển số được mô tả bằng phương trình lập, rất gần với phương trình vi phân của bộ điều khiển tương tự. Ví dụ bộ điều khiển PID có hàm truyền và phương trình vi phân tương ứng:

$$\left. \begin{aligned} G_c(s) &= k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s \equiv \frac{U(s)}{E(s)} \\ u(t) &= k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt + k_d \frac{de}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

Có ba phương pháp xấp xỉ hoá tín hiệu liên tục $e(t)$ thành tín hiệu gián đoạn $e(kT)$

1- Xấp xỉ sai phân hữu hạn bậc một đối với tích phân

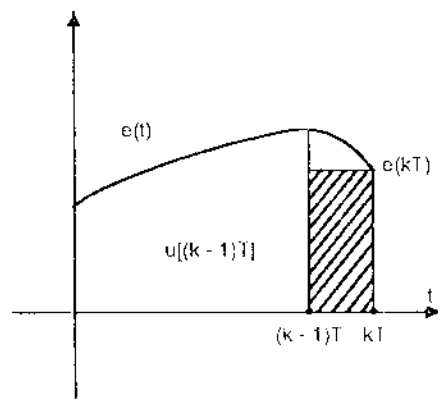
a) Luật chữ nhật theo tích phân tiến

Diện tích dưới đường cong $e(t)$ được xấp xỉ bằng diện tích chữ nhật như ở hình 4.4a. Tích phân của $e(t)$ tại $t = kT$ được xấp xỉ bởi:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + T e(kT) \quad (4-8)$$

Nếu lấy biến đổi z cho cả hai vế, hàm truyền của khâu tích phân gián đoạn là:

$$G_i(z) = k_i \frac{U(z)}{E(z)} = k_i \frac{Tz}{z-1} \quad (4-9)$$



Hình 4.4a

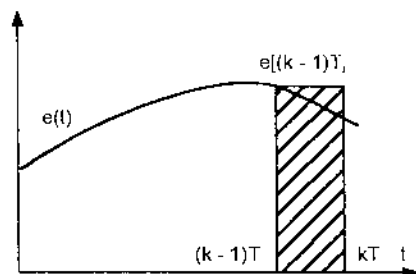
b) Luật chữ nhật theo tích phân lùi

Như ở hình 4.4b, tích phân của $e(t)$ tại $t = kT$ được xấp xỉ bởi:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te[(k-1)T] \quad (4-10)$$

và hàm truyền của khâu tích phân gián đoạn là:

$$G_i(z) \equiv k_i \frac{U(z)}{E(z)} = k_i \frac{T}{z-1} \quad (4-11)$$



Hình 4.4b

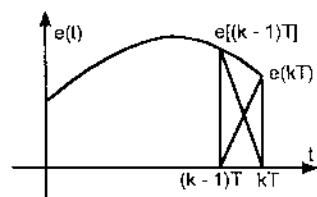
c) Luật hình thang theo tích phân giữa

Diện tích dưới đường cong được xấp xỉ bằng hình thang như ở hình 4.4c:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} \{e(kT) + e[(k-1)T]\} \quad (4-12)$$

Hàm truyền của khâu tích phân gián đoạn là:

$$G_i(z) \equiv k_i \frac{U(z)}{E(z)} = k_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad (4-13)$$



Hình 4.4c

2- Xấp xỉ sai phân hữu hạn bậc một đối với đạo hàm

Đạo hàm của $e(t)$ tại $t = kT$ có thể được xấp xỉ theo sai phân lùi bằng cách xác định $e(t)$ ở thời điểm $t = kT$ và $(k-1)T$:

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{1}{T} (e(kT) - e[(k-1)T]) \quad (4-14)$$

Lấy biến đổi z cho cả hai vế ta có:

$$u(z) = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) E(z) = \frac{z-1}{Tz} E(z)$$

và hàm truyền tương ứng:

$$G_d(z) \equiv k_d \frac{U(z)}{E(z)} = k_d \frac{z-1}{Tz} \quad (4-15)$$

Ví dụ, bộ điều khiển PD tạo nên tín hiệu điều khiển tỷ lệ với sai lệch và đạo hàm của nó nên có phương trình vi phân:

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \frac{de}{dt} \quad (4-16)$$

Dạng gián đoạn được xác định bởi phương pháp xấp xỉ hoá đạo hàm:

$$u(kT) = k_p e(kT) + k_d \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T} \quad (4-17)$$

Từ đó có angôrit:

$$u(kT) = c_0 e(kT) + c_1 e[(k-1)T]$$

với
$$c_0 = k_p + \frac{k_d}{T}; \quad c_1 = -\frac{k_d}{T}$$

Tín hiệu ở thời điểm kT phụ thuộc sai lệch ở cùng thời điểm và đại lượng trước đó. Hàm truyền của bộ điều khiển là :

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} = c_0 \frac{z - b}{z} \quad (4-18)$$

Hàm truyền có một nghiệm cực ở gốc toạ độ và một nghiệm không, ổn định vì $b < 1$.

So sánh với khai triển bậc một của z^{-1} , ta có:

$$z^{-1} = e^{-Ts} \approx 1 - Ts \text{ cho ta } s \approx \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz} \quad (4-19)$$

Như vậy (4-19) và (4-15) cho kết quả như nhau.

Đạo hàm $\frac{de(t)}{dt}$ không thể xấp xỉ bằng sai phân $\{e[(k+1)T] - e(kT)\} \frac{1}{T}$ vì nó dẫn đến bộ điều khiển không thể thực hiện được.

Phương pháp xấp xỉ nói trên tương ứng với:

$$z = e^{Ts} \approx 1 + Ts \text{ và } s \approx \frac{z - 1}{T} \quad (4-20)$$

Tổng hợp thành phần tỉ lệ, tích phân và vi phân ta có bộ điều khiển PID với hàm truyền theo:

a) Luật chữ nhật tích phân tiến :

$$G_c(z) = \frac{\left(k_p + \frac{k_d}{T} + Tk_i\right)z^2 - \left(k_p + \frac{2k_d}{T}\right)z + \frac{k_d}{T}}{z(z-1)} \quad (4-21)$$

b) Luật chữ nhật tích phân lùi:

$$G_c(z) = \frac{\left(k_p + \frac{k_d}{T}\right)z^2 - \left(Tk_i - k_p - \frac{2k_d}{T}\right)z + \frac{k_d}{T}}{z(z-1)} \quad (4-22)$$

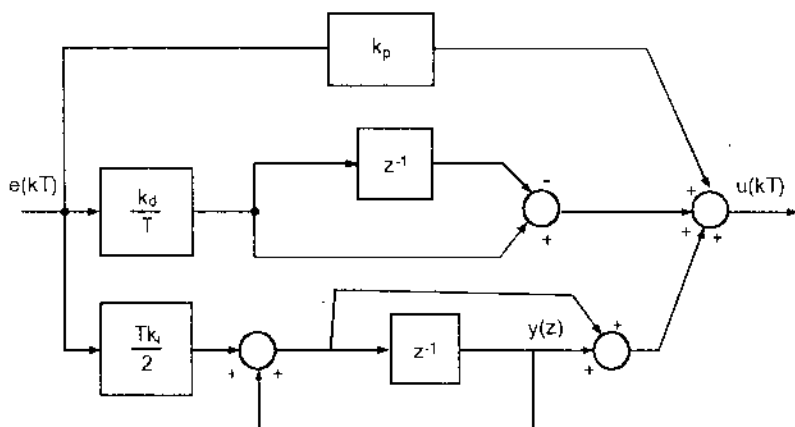
c) Luật tích phân hình thang

$$G_c(z) = \frac{\left(k_p + \frac{Tk_i}{2} + \frac{k_d}{T}\right)z^2 + \left(\frac{Tk_i}{2} - k_p - \frac{2k_d}{T}\right)z + \frac{k_d}{T}}{z(z-1)} \quad (4-23)$$

Sơ đồ khối để thực hiện bộ điều khiển PID gián đoạn như ở hình 4.5.

IV.4.2. Bộ điều khiển số được xác định theo hàm truyền đạt

Vì $z = e^{Ts}$ nên hàm truyền đạt của bộ điều khiển số về nguyên tắc có thể được xác định bằng cách thay thế $s = \frac{1}{T} \ln(z)$. Tuy nhiên biểu thức xác định $G_c(z)$ là siêu việt (như đã đề cập ở mục II.8). Để tổng hợp bộ điều khiển có thể dùng phương pháp khai triển $\ln(z)$ và chỉ giữ lại thành phần thứ nhất hoặc chỉ áp dụng biểu thức $z = e^{Ts}$ ở nghiệm không của $G_c(s)$.



Hình 4.5

1- Biến đổi tuyến tính kép

Khai triển $\ln(z)$ dưới dạng:

$$\ln(z) = 2 \left(v + \frac{v^3}{3} + \dots \right)$$

$$|v| = \left| \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right| < 1$$

và biểu thức $s = \frac{1}{T} \ln(z)$ bây giờ có dạng :

$$s \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} = w(z) \quad (4-24)$$

w là đại lượng xấp xỉ của s .

Phương pháp xấp xỉ này (phương pháp Tustin) tương ứng với phương pháp tích phân giữa - luật tích phân hình thang:

$$u(kT) = \int_0^{kT} e(t)dt = \int_0^{(k-1)T} e(t)dt + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt \quad (4-25)$$

$$\text{từ đó:} \quad u(kT) = u[(k-1)T] + T \frac{e[(k-1)T] + e(kT)}{2} \quad (4-26)$$

Biến đổi z của phương trình sai phân trên là :

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= z^{-1}u(z) + \frac{T}{2}(z^{-1} + 1)E(z) \\ \text{và} \quad \frac{u(z)}{E(z)} &= \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

Biểu thức (4-13) và (4-27) chỉ khác nhau ở hệ số k , mà bộ điều khiển tích phân đã được cho trước.

Trong miền tần $w = j\omega^*$ mà ω^* là tần số xấp xỉ của ω , môđun của:

$$z = \frac{2 + wT}{2 - wT} = \frac{1 + j\omega^* \frac{T}{2}}{1 - j\omega^* \frac{T}{2}} \text{ bằng } 1.$$

Như vậy biến đổi tuyến tính kép $s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ ánh xạ trục ảo $s = j\omega$ lên đường tròn bán kính đơn vị $|z| = 1$. Những điểm trên nửa mặt phẳng trái của s (miền ổn định của hệ tương tự) được tìm thấy trong đường tròn trên mặt phẳng z ứng với phương pháp tuyến tính kép (hình 4.6a). Các biểu thức thức (4-19) và (4-20) tương ứng với việc thay thế khâu tích phân bằng diện tích hình chữ nhật dưới đường cong có chiều cao $e[(k-1)T]$ hay $e(kT)$ biến miền ổn định thành đường thẳng có hoành độ bằng một, hay đường tròn có bán kính bằng $\frac{1}{2}$.

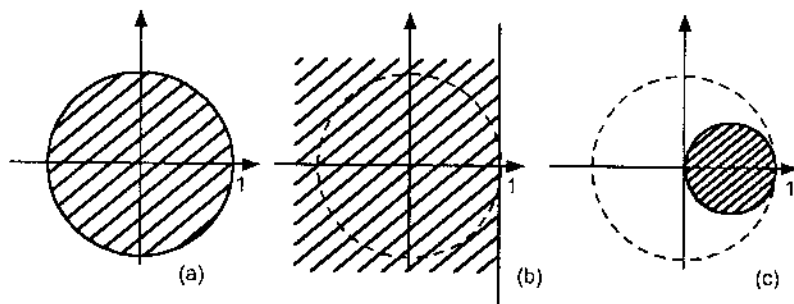
Ở hình 4-6b có $z = 1 + Ts$ theo (4-20) và ở hình 4.6c có $z^{-1} = 1 - Ts$ theo (4-19). Vì vậy việc kiểm tra lại tính ổn định của hệ bằng tiêu chuẩn ổn định hay bằng phân bố nghiệm sau khi chọn bộ điều khiển là cần thiết.

Ví dụ 4-1 Bộ điều khiển tương tự có dạng :

$$G_c(s) = \frac{s+a}{s+b}$$

được thay thế bằng bộ điều khiển gián đoạn tương đương theo (4-24):

$$G_c(z) = \frac{2(z-1) + aT(z+1)}{2(z+1) + bT(z+1)} = \frac{(aT+2)z + aT - 2}{(bT+2)z + bT - 2}$$



Hình 4.6

Ví dụ 4-2

Bộ điều khiển tương tự:

$$G_c(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$$

có bộ điều chỉnh gián đoạn tương đương:

$$G_c(z) = \frac{T[z^2(2+aT) + 2aTz + aT]}{z^2[4 + 2T(b+c) + bT^2] - 2z[4 - bT^2] + 4 - 2T(b+c) + bT^2}$$

Ví dụ 4-3

Bộ lọc tương tự bậc hai:

$$G_c(s) = \frac{1}{s^2 + 1,2s + 1} = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} \quad \text{với } a = 0,6 \text{ và } b = 0,8$$

ứng với $\omega_r = 1$, $\xi = 0,6$ có bộ lọc gián đoạn:

$$G_c(z) = \frac{T^2(z+1)^2}{4(z-1)^2 + 2,4T(z^2-1) + T^2(z+1)^2}$$

Chu kỳ riêng của bộ lọc $T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} = 6 \text{ sec}$, (với chu kỳ lượng tử hoá $T = 1 \text{ sec}$

là thích hợp) và ta có:

$$G_c(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{7,4z^2 - 6z + 2,6}; (T = 1 \text{ sec})$$

Biến đổi tuyến tính kép không làm thay đổi hệ số khuếch đại vì khi $s = 0$, $z = 1$, $\dot{w} = 0$ và không thay đổi tính ổn định của hệ nhưng có sai lệch do khi đặt $z = e^{Ts}$, tất cả trục $j\omega$ bị nén vào đường tròn đơn vị mà không dãn động đến tính chu kỳ. Tần số góc ω^* khác với ω . Sự tương ứng có được khi với tần số đặc trưng ω_p bằng tần số cắt của bộ lọc chẳng hạn, ta đưa vào hệ số quy đổi k ở biểu thức (4-24):

$$W(z) = k \frac{z-1}{z+1} = k \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = k \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = jk \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)} = j\omega^*$$

với $\omega^* = k \cdot \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ và $\omega T < 1$ có $\omega^* = k \frac{T}{2} \omega$.

Đặc tính tần của $G_c(s)$ và $G_c(z)$ có tần số khác nhau. Biến đổi tuyến tính kép có ưu việt là loại trừ được hiện tượng phổ chồng lên nhau khi ω^* biến đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$; ω biến đổi trong phạm vi $[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}]$ (hình 4-7).

Để các đặc tính tần tương ứng với cùng tần số ω_p , cần có tỷ lệ xích :

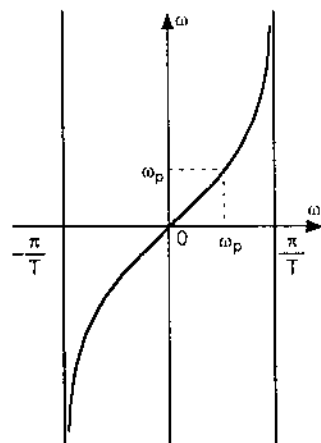
$$k = \frac{\omega_p}{\tan\left(\frac{\omega_p T}{2}\right)} \quad (4-28)$$

Với ví dụ trên, $\omega_p = \omega_r = 1$ rad/sec và $T = 1$ sec; $k = 1,8305$.

Biến đổi z được thực hiện bằng cách thay thế s bởi $k(z-1)/(z+1)$ ở bộ lọc tương tự bậc hai :

$$G_c(z) = \frac{(z+1)^2}{k^2(z-1)^2 + 1,2k(z-1) + (z+1)^2}$$

cho kết quả : $G_c(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{6,547z^2 - 4,701z + 2,154}$



Hình 4.7

2- Phương pháp tương thích nghiệm cực và nghiệm không.

Như đã biết, nghiệm cực và nghiệm không s_i của $G_c(s)$ ánh xạ vào nghiệm cực và nghiệm không của $G_c(z)$ tương ứng với $z_i = e^{s_i T}$, còn hệ số khuếch đại của $G_c(z)$ thì thỏa mãn điều kiện:

$$G_c(z)\big|_{z \rightarrow 1} = G_c(s)\big|_{s \rightarrow 0} \quad (4-29)$$

Nếu $G_c(s)$ có nhiều nghiệm cực hơn nghiệm không khi $\omega \rightarrow \infty$ thì $G_c(s) \rightarrow 0$. Điều ấy tương ứng với $G_c^*(s) = 0$ ở dải tần thứ nhất $[-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$ và $G_c(z) = 0$ với $z = 1$. Vì vậy, để bậc của tử số và mẫu số như nhau, cần thêm nhân tử $(z + 1)$ ở tử số của $G_c(z)$. Trong trường hợp chung, cần thêm tử số của $G_c(z)$ nhân tử $(z + 1)^{q-p}$ mà q và p là bậc của mẫu số và tử số của $G_c(s)$.

Ví dụ 4-4

$$G_c(s) = \frac{a}{s + a} \text{ được thay bằng: } G_c(z) = \frac{0,5(1 - e^{-aT})(z + 1)}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

Ví dụ 4-5

$$G_c(s) = k \frac{s + a}{s + b} \text{ được thay bằng: } G_c(z) = k \frac{a}{b} \cdot \frac{(1 - e^{-bT})(z - e^{-aT})}{(1 - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$

$G_c(z)$ có cùng hệ số khuếch đại với $G_c(s)$ ở tần số thấp vì:

$$G_c(s = j\omega = 0) = G_c(z = e^{j\omega T} = 1)$$

Ví dụ 4-6

$$G_c(s) = \frac{(s + a)}{(s + b)(s + c)} \text{ được thay bằng:}$$

$$G_c(z) = \frac{a}{2bc} \cdot \frac{(1 - e^{-bT})(1 - e^{-cT})}{1 - e^{-aT}} \cdot \frac{(z + 1)(z - e^{-aT})}{(z - e^{-bT})(z - e^{-cT})}$$

Một nhân tử $z + 1$ đã được đưa vào vì ở đây $q - p = 1$.

Ví dụ 4-7

Với bộ lọc bậc hai, $q - p = 2$:

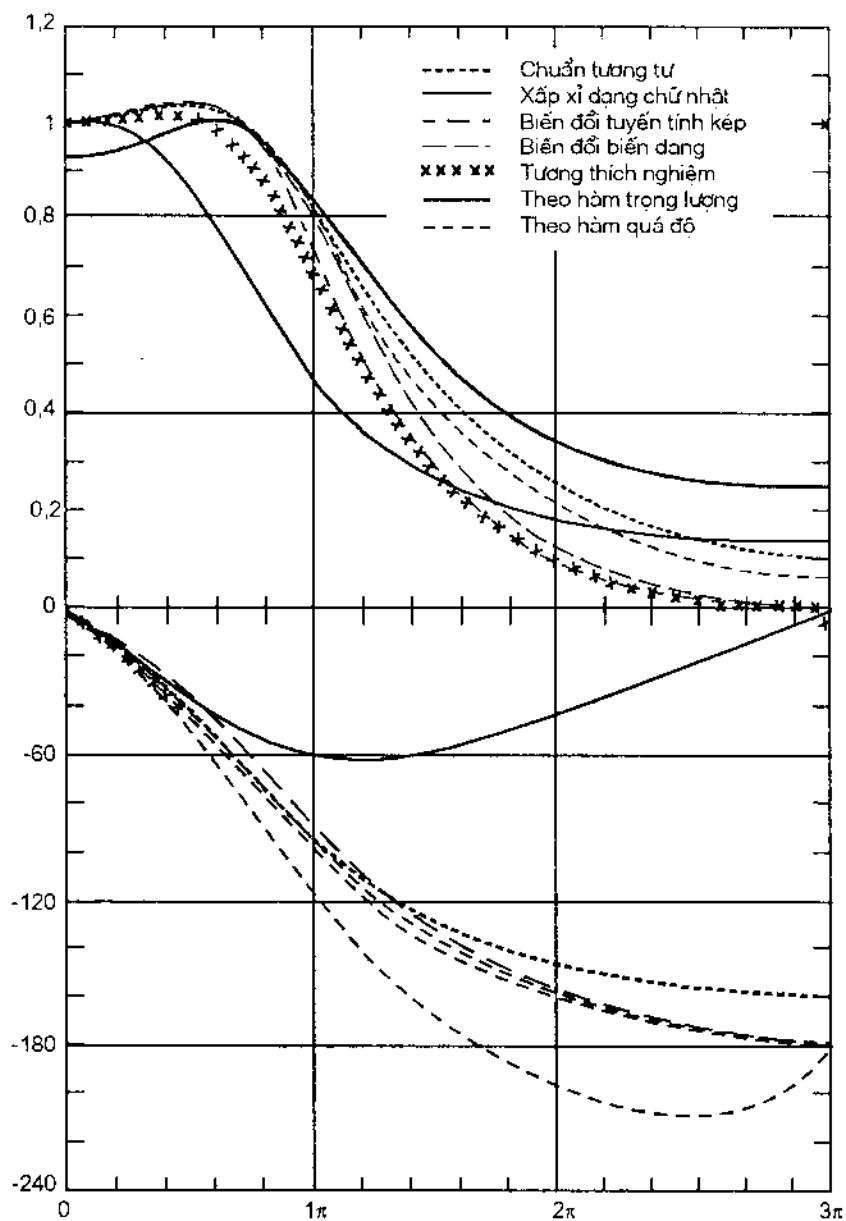
$$G_c(s) = \frac{1}{(s + a)^2 + b^2} \text{ với } a = 0,6; b = 0,8 \text{ được thay bằng:}$$

$$G_c(z) = k \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 0,765z + 0,301} \text{ với } k = 0,134; G_c(z) = 1$$

IV.4.3. Phương pháp dùng biến đổi z

Ở phương pháp này, $G_c(z)$ được xác định theo biến đổi z đối với $G_c(s)$ sao cho hàm trọng lượng hay hàm quá độ của chúng như nhau. Ở đây phần tử lưu

giữ (ZOH) chỉ tạo nên dạng bậc thang của hàm trọng lượng hay hàm quá độ, xấp xỉ với hàm liên tục tương ứng. Hệ kín sẽ cho chất lượng xấp xỉ kém. Ví dụ với hàm trọng lượng $G_c(z) = cz\{G_c(s)\}$ hằng số c được xác định theo điều kiện (4-29).



Hình 4.8

Ví dụ 4-8

$$G_c(s) = k \frac{s+a}{s+b}$$

$$z\left\{k \frac{s+a}{s+b}\right\} = kz\left\{1 + \frac{a-b}{s+b}\right\} = k\left[1 + \frac{a-b}{1 - e^{-bT} z^{-1}}\right] = k \frac{1+a-b-e^{-bT} z^{-1}}{1 - e^{-bT} z^{-1}}$$

$$\text{Để cho } G_c(z)|_{z=1} = k \frac{a}{b}, \text{ thì } G_c(z) = k \frac{a}{b} \cdot \frac{1 - e^{-bT}}{1 + a - b - e^{-bT}} \cdot \frac{1 + a - b - e^{-bT} z^{-1}}{1 - e^{-bT} z^{-1}}$$

Đáp ứng tần của bộ lọc số và tương tự khác nhau ở tần số cao nên phương pháp này chỉ dùng cho các bộ điều khiển có đáp ứng tắt nhanh ở tần số cao với thời gian lấy mẫu T bé để phổ tần chồng lên nhau.

Ở hình 4.8 có đáp ứng tần của bộ lọc bậc hai (theo ví dụ 4-7) nhằm so sánh các phương án xấp xỉ khác nhau nói trên. Chu kỳ lượng tử hoá $T = 1$ sec là nhỏ so với chu kỳ riêng của bộ lọc $T_0 = 2\pi$. Phương pháp xấp xỉ theo chữ nhật về biên độ và pha đều khác xa với đáp ứng tương tự làm chuẩn. Hệ số khuếch đại tĩnh không còn như trước sau khi dùng biến đổi z ở đáp ứng hàm trọng lượng. Biến đổi z với cả phần tử lưu giữ (đáp ứng hàm quá độ) cho đáp ứng tốt về biên độ nhưng không tốt về pha do độ trễ $\frac{T}{2}$. Biến đổi tuyến tính kép biến dạng được áp đặt cùng biên độ ở tần số riêng $\omega_r = 1$ rad/sec cho kết quả chấp nhận được về biên độ cũng như pha, nhưng ở tần số giới hạn $\frac{\pi}{T}$ biên độ bằng không. Phương pháp tương thích nghiệm không và nghiệm cực có biên độ thấp hơn đáp ứng tương tự.

Kết quả so sánh này giải thích vì sao biến đổi tuyến tính kép thường được dùng ở các bộ lọc số.

IV.4.4. Tổng hợp bộ điều khiển có tính đến phần tử lưu giữ (ZOH)

Ở các phương pháp đã nêu trên, phần tử lưu giữ không được tính đến khi xác định $G_c(z)$. Phần tử lưu giữ có thể thay thế bởi $G_{ca}(s) = e^{-Ts/2}$ vì tín hiệu ở đầu ra của nó chậm sau một thời gian $\frac{T}{2}$ hoặc bởi $G_{ob}(s) = \frac{T}{1 + \frac{Ts}{2}}$ suy ra từ

$$G_{ob}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \text{ và } e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}}$$

Việc chọn bộ điều khiển tương tự để đặt trước $G_{0a}(s)G_1(s)$ hay $G_{0b}(s)G_1(s)$ được thực hiện như ở hệ liên tục. Tuy nhiên cần biết trước chu kỳ lượng tử hoá T.

Một phương pháp khác được thực hiện theo các bước sau :

- Tính phần không biến đổi của hệ:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) z \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\}$$

- Dùng biến đổi tuyến tính kép bằng cách thay z bởi $\frac{2+wT}{2-wT}$ để có G(w).
- Vẽ đường cong Bode $L(\omega^*)$ và $\varphi(\omega^*)$ như ở ví dụ 2-13.
- Chọn khâu hiệu chỉnh dạng $G_c(w) = k \frac{w+a}{w+b}$ chẳng hạn, thoả mãn điều kiện ổn định và độ chính xác.
- Gián đoạn hoá khâu hiệu chỉnh $G_c(w)$ để có $G_c(z)$.

Ví dụ 4-9

Hiệu chỉnh hệ quán tính – vệ tinh nhân tạo. Đối tượng:

$$G_1(s) = \frac{\omega_r^2}{s^2}$$

Phần tử lưu giữ: $G_0(s) = e^{-Ts/2}$

$$\text{Vậy: } G(s) = G_0(s)G_1(s) = \frac{\omega_r^2}{s^2} e^{-Ts/2}$$

Đáp ứng tần: $G(j\omega) = \left(\frac{\omega_r}{s} \right)^2 e^{-j(\pi + \frac{\omega T}{2})}$ được vẽ trên toán đồ Black như ở

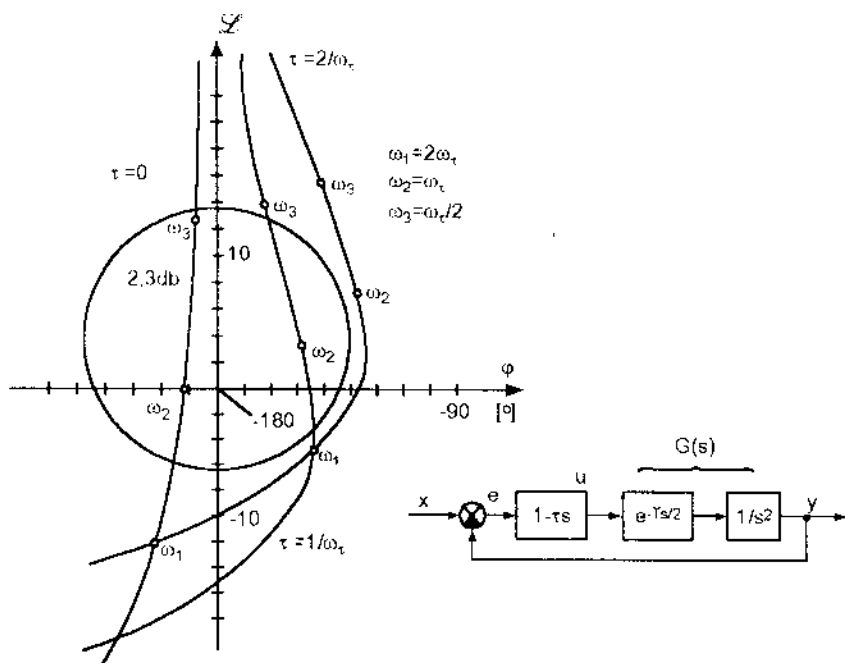
hình 4.9a với chu kỳ lượng tử hoá $T = \frac{1}{2\omega_r}$.

Một khâu hiệu chỉnh PD làm cho hệ ổn định: $G_c(s) = 1 + \tau s$

Đường cong được vẽ với $\tau = 2T = \frac{1}{\omega_r}$ cho thấy độ dự trữ ổn định chỉ có 36°

(đối với hệ liên tục $\gamma_c = 52^\circ$) là do ảnh hưởng của phần tử lưu giữ. Để có $\gamma_c > 45^\circ$ cần tăng τ . Với $\tau = 4T = \frac{2}{\omega_r}$, $\gamma_c = 52^\circ$. Độ dự trữ về biên độ là 10db.

Nếu chọn $\omega_r = 1$ rad/sec và $T = 0,5$ sec ta có $\tau = 2$ sec.



Hình 4.9a

Các hệ số của khâu hiệu chỉnh số theo (3-48) và (3-49) ta có:

$$k_p = 1, k_d = \tau \text{ và } c_0 = 1 + \frac{\tau}{T} = 5, c_1 = -\frac{k_d}{T} = -4$$

Angôrit điều khiển là:

$$u(kT) = 5e(kT) - 4e[(k-1)T] \text{ với } k \geq 0.$$

Hàm quá độ ở hình 4.9b có lượng quá điều chỉnh $\sigma > 80\%$. Nguyên nhân là $u(0)$ quá lớn vì $e(0) = 1$, nếu $e(-1) = 0$ thì :

$$u(0) = c_0 e(0) - c_1 e(-1) = c_0;$$

$$\text{với } \tau = 1 \quad u(0) = 3$$

$$\tau = 2 \quad u(0) = 5$$

Ở hệ liên tục $u(0) = 0$. Nếu đặt trị số ban đầu của bộ điều khiển $e(-1) = 0,5$, ta có $u(0) = 3$ và đáp ứng là chấp nhận được như ở hình 4-9b.

Ở phương pháp thứ hai trước tiên xác định phần không biến đổi:

$$\bullet \quad G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{\omega_r^2}{s^3} \right\} = \frac{\omega_r^2 T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

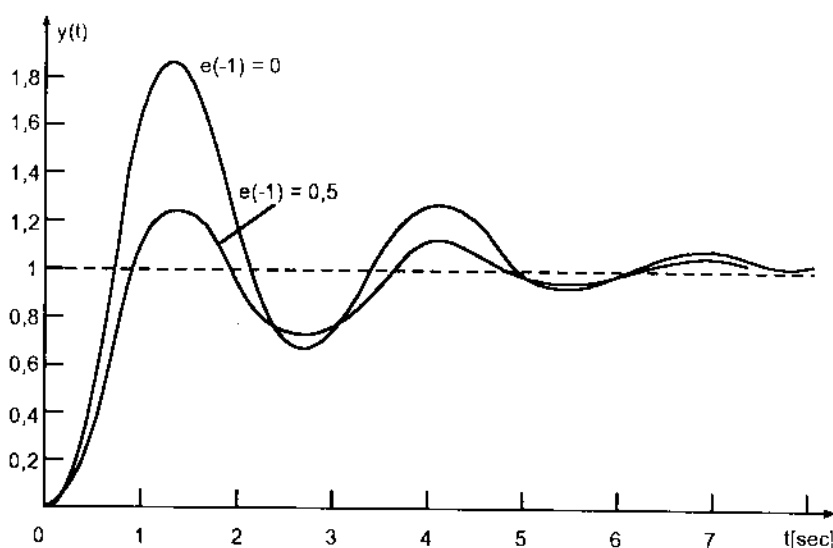
$$\text{Dùng biến đổi tuyến tính kép: } z = \frac{2+wT}{2-wT}$$

- $G(w) = \frac{1 - w^{\frac{T}{2}}}{\omega_r^2 - w^2}$

Chọn $T = 1/2\omega_r$ và có đáp ứng tần sau khi thay thế w bởi $j\omega^*$.

- $G(j\omega^*) = -\frac{\omega_r^2}{\omega^{*2}} \left(1 - j \frac{\omega^*}{4\omega_r} \right) = -\frac{1 - jX}{X^2}$ với $X = \frac{\omega^*}{\omega_r}$

Sau đó có thể dùng đường cong Bode và phương pháp xác định như ở hệ liên tục để chọn $G_c(w)$ và $G_c(z)$.



Hình 4.9b

IV.5. PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP

Như đã nêu, phương pháp gián tiếp không khai thác hết khả năng linh hoạt của máy tính trong điều khiển số. Ví dụ các nghiệm không và nghiệm cực của thiết bị bù đều nằm trên phần âm của trục thực ở mặt phẳng s . Các nghiệm ấy tương ứng với phần dương của trục thực trên mặt phẳng z . Thế nhưng các bộ điều khiển số cho phép có nghiệm cực và nghiệm không ở cả phần âm và phần dương của trục thực trên mặt phẳng z nên điều kiện hạn chế được mở rộng hơn. Điều khiển số còn cho phép tổng hợp các bộ điều khiển có hàm truyền hệ kín mong muốn.

IV.5.1. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số trên mặt phẳng z

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số đã được đề cập đến ở phần khảo sát ổn định của hệ. Ở đây chỉ nhắc lại những điểm chính.

Hàm truyền của hệ gián đoạn kín được xác định bởi:

$$W_K(z) = \frac{G_o(z)G(z)}{1 + G_o(z)G(z)} \quad (4-30)$$

với:
$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} \quad (4-31)$$

Phương trình đặc trưng:

$$1 + G_o(z)G(z) = 0 \quad (4-32)$$

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số thường dùng để xác định thông số K ở cơ cấu điều khiển nên có thể viết phương trình đặc trưng dưới dạng:

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^r (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} = 0 \quad (4-33)$$

mà p_j và z_i là nghiệm cực và nghiệm không của hệ xung hở. Từ đó:

$$-K = \frac{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}{\prod_{i=1}^r (z - z_i)} \quad (4-34)$$

Quỹ đạo nghiệm số của hệ gián đoạn được xây dựng theo những quy tắc tương tự như ở hệ liên tục:

1- Quỹ đạo nghiệm số đối xứng với trục thực và gồm có n nhánh xuất phát từ n nghiệm cực của phương trình đặc trưng khi $K = 0$; trong số đó r nhánh kết thúc ở r nghiệm không và $n - r$ nhánh đi về vô tận khi $K = \infty$.

2- Quỹ đạo tiệm cận khi $K \rightarrow \infty$ là $(n - r)$ tia đối xứng tạo với trục hoành một góc $\frac{\pi}{n - r}$.

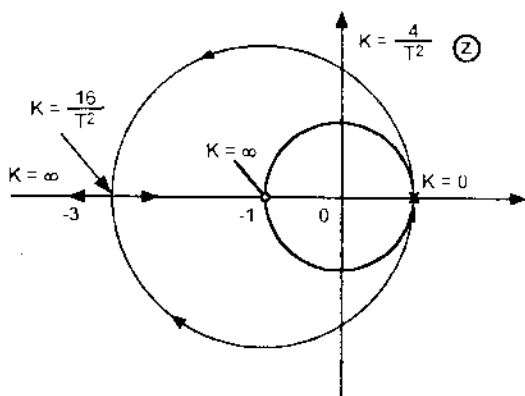
Ví dụ 4-10

Hệ điều khiển vệ tinh có đối tượng $G_1(s) = \frac{1}{s^2}$.

Phân tử lưu giữ: $G_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$

Do đó $G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$

Nếu bộ điều khiển đơn thuần là $G_c(z) = K$ thì hệ sẽ không ổn định với mọi K vì quỹ đạo nghiệm số nằm ngoài đường tròn đơn vị $z = e^{sT}$. Hàm truyền của $G(z)$ có hai nghiệm cực kép $z = 1$ và một nghiệm không ở $z = -1$. Quỹ đạo pha là một đường tròn, hai nhánh xuất phát từ $p_1 = p_2 = 1$, một nhánh đi đến nghiệm không $z = -1$, còn nhánh thứ hai sau khi gặp trục thực sẽ theo đường tiệm cận đi đến $-\infty$.



Hình 4.10

Để ổn định hệ thống, có thể dùng cơ cấu bù dạng:

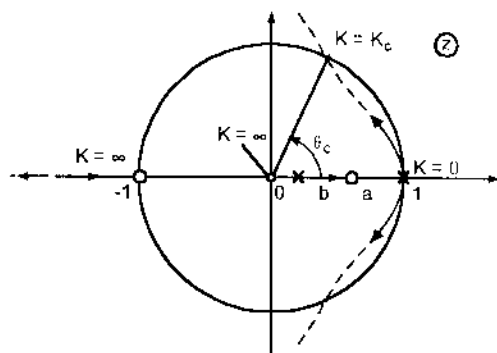
$$G_c(z) = K' \frac{z-a}{z-b}; 0 \leq b < a < 1 \quad (4-35)$$

vậy: $K \cdot G_c(z)G(z) = K' \frac{(z-a)(z+1)}{(z-b)(z-1)^2}; K = K' \frac{T^2}{2} \quad (4-36)$

Bây giờ quỹ đạo nghiệm số sẽ có ba nhánh vì hệ có ba nghiệm cực $p_1 = p_2 = 1; p_3 = b$. Một nhánh đến nghiệm không $z_1 = -1$, nhánh thứ hai đến $z_2 = a$ và nhánh thứ ba tiến đến $-\infty$ như ở hình 4.11.

Có thể có hai trường hợp:

1. Cả ba nghiệm đều thực nằm đồng thời trên hai đoạn thẳng của quỹ đạo $[b, a]$ và $[-1, -\infty]$. trong trường hợp ấy hai nghiệm bé hơn -1 trên đoạn $[-1, -\infty]$ và hệ sẽ không ổn định.



Hình 4.11

2. Khả năng để hệ ổn định là chỉ một nghiệm thực duy nhất nằm giữa a và b , hai nghiệm khác là nghiệm phức có môđun nhỏ hơn 1, nằm trong đường tròn đơn vị.

Phương trình đặc trưng là:

$$(z - b)(z^2 - 2z + 1) + K(z - a)(z + 1) = 0 \quad (4-37)$$

$$\text{hay: } z^3 - (b + 2 - K)z^2 + [1 + 2b + (1 - a)K]z - (b + Ka) = 0 \quad (4-38)$$

Nếu đặt các nghiệm:

$$z_1 = \rho e^{j\theta}, \quad z_2 = \rho e^{-j\theta} \quad \text{và } z_3 = r \in [b, a]$$

ta có: $(z^2 - 2\rho \cos\theta z + \rho^2)(z - r) = 0$.

Hệ sẽ ổn định nếu $\rho < 1$; khi $\rho = 1$ ta có trị số giới hạn K_c . Với θ_c là góc tạo nên bởi giao điểm của quỹ đạo và đường tròn đơn vị:

$$z^3 - (r + 2\cos\theta_c)z^2 + (1 + 2r\cos\theta_c)z - r = 0 \quad (4-39)$$

Cân bằng (4-38) với (4-39) ta rút ra :

$$\begin{cases} r + 2\cos\theta_c = b + 2 - K_c \\ 2r\cos\theta_c = 2b + (1 - a)K_c \\ r = b + aK_c \end{cases} \quad (4-40)$$

$$\text{Từ đó ta xác định: } K_c = 2 \frac{1 - \cos\theta_c}{1 + a} \quad \text{và} \quad \cos\theta_c = \frac{b(1 + a) + 1 - a}{2a} \quad (4-41)$$

Để $\cos\theta_c \leq 1$ thì $b(1+a) + 1 \leq 3a$ hay $a \geq (1+b)/(3-b)$. Thay thế $\cos\theta_c$ vào (4-41) ta có trị số giới hạn :

$$K_c = \frac{3a - b(1 + a) - 1}{a(1 + a)} \quad (4-42)$$

Kết quả này xác định từ điều kiện ổn định.

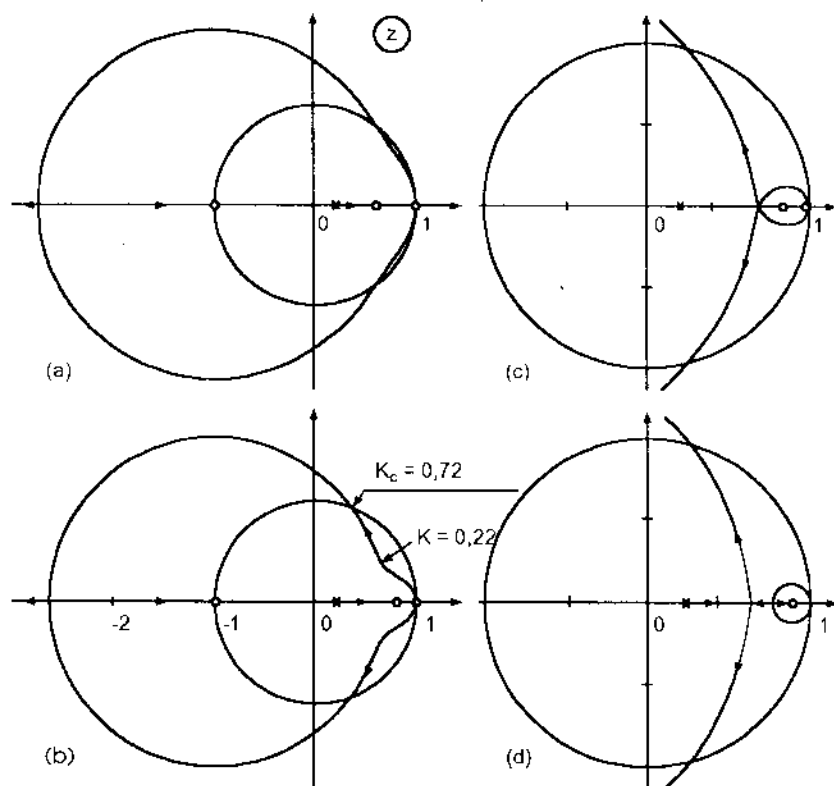
Nếu $b = 0,2$ thì $a \geq 0,43$. Những quỹ đạo pha tương ứng với các giá trị của a bằng 0,6 ; 0,8 ; 0,89 và 0,90 như ở hình 4.12a, b, c, d.

Khi $a = 0,89$, có ba nghiệm trùng nhau : $z = 0,692$.

Khi $a = 0,9$ có hai trị số của K tương ứng với nghiệm kép.

Nếu lấy $a = 0,8$ làm đại lượng định mức ($K_c = 0,72$) bộ điều khiển số sẽ có dạng:

$$G_c(z) = 2 \frac{K}{T^2} \cdot \frac{z - 0,8}{z - 0,2} \quad (4-43)$$



Hình 4.12

Muốn có tỷ số tắt dần $\xi = 0,5$ cần chọn $K = 0,22$. Để thấy rõ khả năng mềm dẻo của điều khiển số dùng máy tính, ta khảo sát ví dụ sau.

Ví dụ 4.11

Đối tượng điều khiển có hàm truyền đạt:

$$G_1(s) = \frac{0,5}{s(s + 0,5)}$$

Dùng phương pháp quỹ đạo nghiệm và phương pháp trực tiếp để xác định bộ điều khiển, so sánh với phương pháp liên tục.

1- Với đối tượng trên có thể dùng phép biến đổi gián đoạn để có:

$$G(z) = \frac{0,213(z + 0,847)}{(z - 1)(z - 0,6065)} \quad \text{với } T = 1 \quad (4-44)$$

với $G_c(z) = K = 1$ ta có:

$$G_c(z)G(z) = \frac{0,213 z + 0,1805}{z^2 - 1,6065z + 0,6065} \quad (4-45)$$

Với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị, $X(z) = \frac{z}{z-1}$, tín hiệu ra của hệ kín là:

$$Y(z) = \frac{0,213z^2 + 0,1805z}{z^3 - 2,3935z^2 + 2,1805z - 0,787}$$

$$= 0,213z^{-1} + 0,69z^{-2} + 1,188z^{-3} + 1,505z^{-4} + 1,557z^{-5} + 1,378z^{-6} + \dots$$

Hàm quá độ như đường 1 trên hình 4.15 tương ứng với $\xi = 0,2$. Hệ tương tự trong trường hợp trên có $\xi = 0,35$.

2 - Để cải thiện chất lượng, dựa vào đường cong Bode và yêu cầu, ở hệ liên tục chọn thiết bị bù: ví dụ : $G_c(s) = \frac{6(s+0,5)}{s+3}$.

Ở đây thiết bị bù đã loại trừ một nghiệm cực $s_1 = -0,5$ ở đối tượng. Hệ kín liên tục cho tỷ số tắt dần $\xi = 0,866$.

Dùng phương pháp tương thích nghiệm không và nghiệm cực, ta chọn bộ điều khiển gián đoạn:

$$G_c(z) = \frac{1 - e^{-0,5}}{1 - e^{-0,5}} \cdot \frac{z - e^{-0,5}}{z - e^{-3}} = 2,415 \frac{z - 0,6065}{z - 0,0498} \quad (4-46)$$

$$\text{Như vậy: } G_c(z)G(z) = \frac{0,514(z + 0,847)}{(z - 1)(z - 0,0498)} \quad (4-47)$$

So sánh (4-46) với (4-47) ta thấy một nghiệm cực của đối tượng cũng đã bị loại: $z_1 = 0,6065$. Hàm truyền của hệ kín là:

$$W_K(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,514z + 0,4354}{z^2 - 0,536z + 0,486} \quad (4-48)$$

Hàm quá độ được xác định bởi:

$$Y(z) = 0,514z^{-1} + 1,225z^{-2} + 1,356z^{-3} + 1,081z^{-4} + 0,87z^{-5} + 0,89z^{-6} + \dots$$

và được mô tả ở đường 2 trên hình 4-15.

Nếu xác định nghiệm từ phương trình đặc trưng của hệ kín (4-47) và theo đường cong ở hình 3-18 ta cũng xác định được $\xi = 0,3$; kém hơn nhiều so với hệ liên tục tương ứng (ở hệ xung $\sigma \% \approx 40\%$ còn ở hệ liên tục $\sigma \% \approx 0\%$).

3- Bây giờ ta thử áp đặt một nghiệm cực cho $G_c(z)$ bằng $-0,6$ trên phần âm của trục thực trên mặt phẳng z .

a) Nếu $G_c(z)$ cũng còn có mục đích loại trừ một nghiệm cực của đối tượng, ta chọn:

$$G_v(z) = \frac{1+0,6}{1-0,6065} \cdot \frac{z-0,6065}{z+0,6} = 4,066 \frac{z-0,6065}{z+0,6} \quad (4-49)$$

$$\text{Do đó: } G_v(z)G(z) = \frac{0,866(z+0,847)}{(z-1)(z+0,6)} \quad (4-50)$$

Quỹ đạo nghiệm số ứng với $K = 1$ ở đường a trên hình 4.13 cho thấy $\xi = 0,5$, các nghiệm cực gần gốc trục hơn nên hằng số thời gian của hệ bé hơn.

Hàm truyền hệ kín:

$$W_K(z) = \frac{0,866z + 0,7335}{z^2 + 0,466z + 0,1335} \quad (4-51)$$

Hàm quá độ được xác định bởi:

$$Y(z) = 0,866z^{-1} + 1,196z^{-2} + 0,927z^{-3} + 1,008z^{-4} + 1,006z^{-5} + 0,996z^{-6} + \dots$$

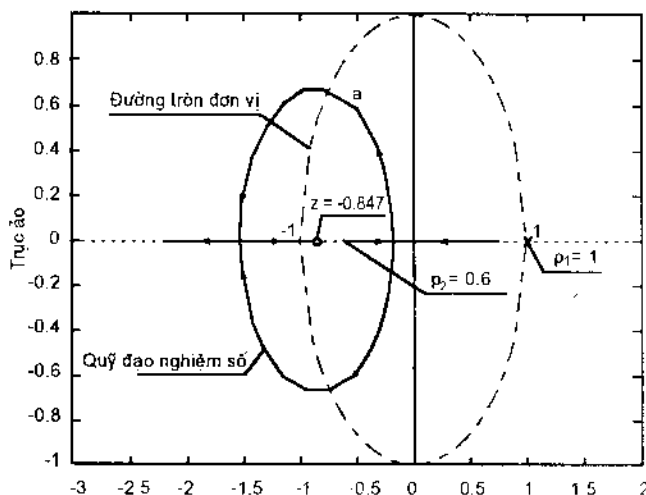
Lượng quá điều chỉnh $\sigma \approx 20\%$, thời gian quá độ ngắn hơn nhưng số lượng lấy mẫu trong một chu kỳ dao động bé do góc của các nghiệm cực gần với hướng của phần âm trục ảo.

b) Để loại trừ nhược điểm trên, làm cho quỹ đạo nghiệm số có điểm rẽ giữa trị số 0,6065 và 1, ta chuyển nghiệm không của $G_v(z)$ từ 0,6065 về 0,3:

$$G_v(z) = \frac{1+0,6}{1-0,3} \cdot \frac{z-0,3}{z+0,6} = 2,286 \frac{z-0,3}{z+0,6} \quad (4-52)$$

Quỹ đạo nghiệm số như ở hình 4.14. Với $K = 1$, nghiệm tương ứng với $\xi = 0,5$ trên hình 3.18:

$$G_v(z)G(z) = \frac{0,4869(z-0,3)(z+0,847)}{(z-1)(z+0,6)(z-0,6065)} \quad (4-53)$$



Hình 4.13

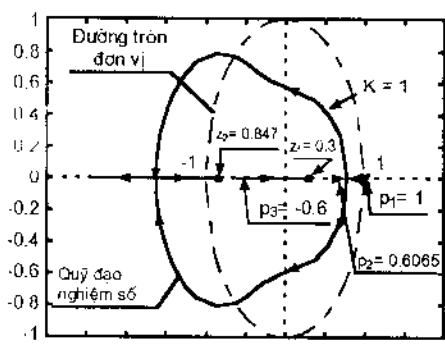
Hàm truyền hệ kín:

$$W_k(z) = \frac{0,4869(z^2 + 0,547z - 0,2541)}{z^3 - 0,5196z^2 - 0,09107z + 0,2402} \quad (4-54)$$

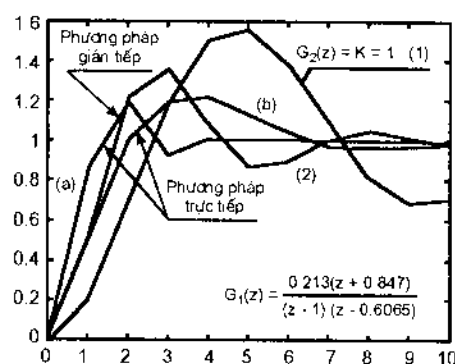
Hàm quá độ được xác định bởi :

$$Y(z) = 0,487z^{-1} + 1,006z^{-2} + 1,197z^{-3} + 1,226z^{-4} + 1,134z^{-5} + 1,043z^{-6} + \dots$$

ứng với đường cong b ở hình 4.15. Lượng quá điều chỉnh khoảng 25%. Góc của các nghiệm cực đối với phần dương trục thực bé hơn nên số lượng mẫu trong một chu kỳ lớn hơn ở đường a .



Hình 4.14



Hình 4.15

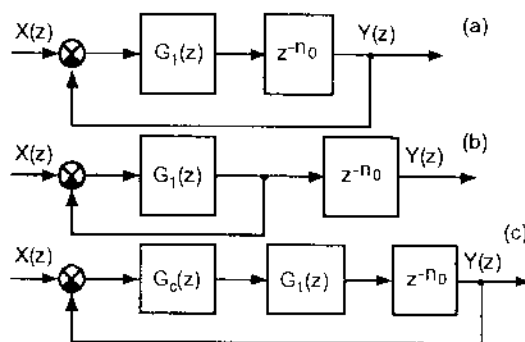
IV.5.2. Bù trừ ảnh hưởng của khâu trễ

Nếu thành phần không biến đổi của hệ có trễ, trong trường hợp thời gian trễ là bội số của thời gian lấy mẫu :

$$\tau = n_0 T; \quad (n_0 = 1, 2, 3, \dots)$$

$$G(z) = G_1(z) z^{-n_0}$$

Ở hình 4.16 trường hợp a) khâu trễ nằm trong mạch vòng sẽ làm ảnh hưởng đến tính ổn định của hệ. Ở hình 4.16 trường hợp b) khâu trễ nằm ngoài mạch vòng và sẽ không ảnh hưởng đến hệ. Yêu cầu đặt ra là tìm cơ cấu điều khiển $G_c(z)$ sao cho ảnh hưởng của khâu trễ không còn



Hình 4.16

nữa, nghĩa là ta có thể đẳng trị hai sơ đồ khối ở hình 4.16c và b:

$$\frac{G_c(z)G_1(z)z^{-n_0}}{1 + G_c(z)G_1(z)z^{-n_0}} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)} z^{-n_0} \quad (4.55)$$

$$\text{Từ đó: } \frac{G_c(z)}{1 + G_c(z)G_1(z)z^{-n_0}} = \frac{1}{1 + G_1(z)}$$

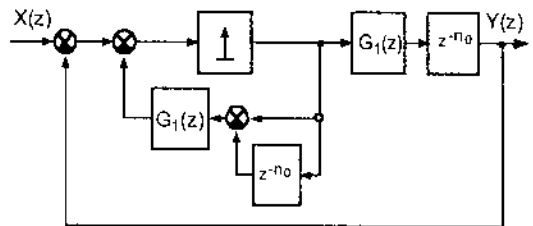
$$\text{hay: } G_c(z) + G_c(z)G_1(z) = 1 + G_c(z)G_1(z)z^{-n_0}$$

$$G_c(z) [1 + G_1(z)(1 - z^{-n_0})] = 1$$

Cuối cùng ta xác định được:

$$G_c(z) = \frac{1}{1 + G_1(z)(1 - z^{-n_0})} \quad (4-56)$$

Sơ đồ thực hiện cơ cấu điều khiển số như ở hình 4.17 (so sánh hình 6.62 ở tài liệu [18]). Như vậy việc dùng cơ cấu điều khiển số như trên tương ứng với việc đưa phân tử trễ ra ngoài mạch hồi tiếp. Thật vậy, vì:



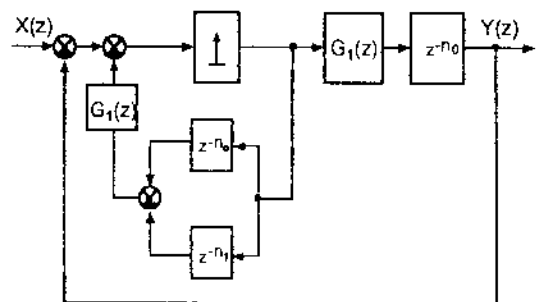
Hình 4.17

$$W_K(z) = \frac{G_c(z)G_1(z)}{1 + G_c(z)G_1(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)} z^{-n_0} \quad (4-57a)$$

Khi có trễ, hệ số khuếch đại của hệ có thể lớn hơn so với hệ không có phân tử trễ nên nhiều khi không cần bù toàn bộ thời gian trễ mà chỉ một phần của nó. Ví dụ cần bù:

$$\tau_1 = n_1 T < n_0 T.$$

Thay n_0 bởi n_1 ở biểu thức (4-56) và ứng với (4-57a) ta có hệ kín:



Hình 4.18

$$W_K(z) = \frac{G_1(z)z^{-n_0}}{1 + G_1(z)(1 - z^{-n_1} + z^{-n_0})} \quad (4-57b)$$

Sơ đồ khối như ở hình 4.18.

IV.5.3. Hệ ổn định vô tận

Hàm truyền của hệ xung kín có dạng:

$$W_K(z) = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)} \quad (4-58a)$$

với $E(z) = X(z) - Y(z) = X(z) [1 - W_K(z)] \quad (4-58b)$

Từ đó cơ cấu điều khiển được xác định, tương ứng với (4-2) bởi:

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{W_K(z)}{1 - W_K(z)} \quad (4-59)$$

Việc chọn $G_c(z)$ để đạt chất lượng mong muốn gặp phải những điều kiện hạn chế:

1- Theo (4-3), điều kiện thực hiện được đòi hỏi bậc của hệ kín lớn hơn hoặc bằng bậc của phần liên tục quy đổi ($k \geq n$):

$$W_K(z) = w_k z^{-k} + w_{k+1} z^{-(k+1)} + \dots \quad (4-60)$$

$$G(z) = g_n z^{-n} + g_{n+1} z^{-(n+1)} + \dots \quad (4-61)$$

2- Sai lệch ở trạng thái xác lập, theo (4-58b) và theo định lý tới hạn:

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) [1 - W_K(z)] X(z) \quad (4-62)$$

Để sai lệch bằng không, biểu thức trên phải chứa nhân tử $(1 - z^{-1})$. Ví dụ, với tín hiệu bậc thang đơn vị: $X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}$ thì $[1 - W_K(z)] = (1 - z^{-1})$.

3- Ổn định vô tận đạt được khi sai lệch ở trạng thái xác lập của các trị rời rạc bằng không, kể từ một thời điểm hữu hạn.

Với thời gian quá độ nhỏ nhất (đối với các trị rời rạc), khi tín hiệu vào là bậc thang đơn vị thì $W_K(z) = z^{-1}$, khi tín hiệu vào là hàm tăng dần đều đơn vị thì $W_K(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$ và cơ cấu điều khiển tương ứng, theo (4-59) là:

$$a) G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$b) G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Ví dụ 4-12

Với ví dụ 4-11:

$$G(z) = \frac{0,213(z + 0,8474)}{(z - 1)(z - 0,6065)}$$

Tín hiệu là tăng dần đều có hệ số góc đơn vị:

$$1 - W_K(z) = (1 - z^{-1})^2; W_K(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

Vì $W_K(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ nên $Y(z) = 2z^{-1} X(z) - z^{-2} X(z)$.

Các hệ số được tính theo:

$$y(k) = 2x(k-1) - x(k-2)$$

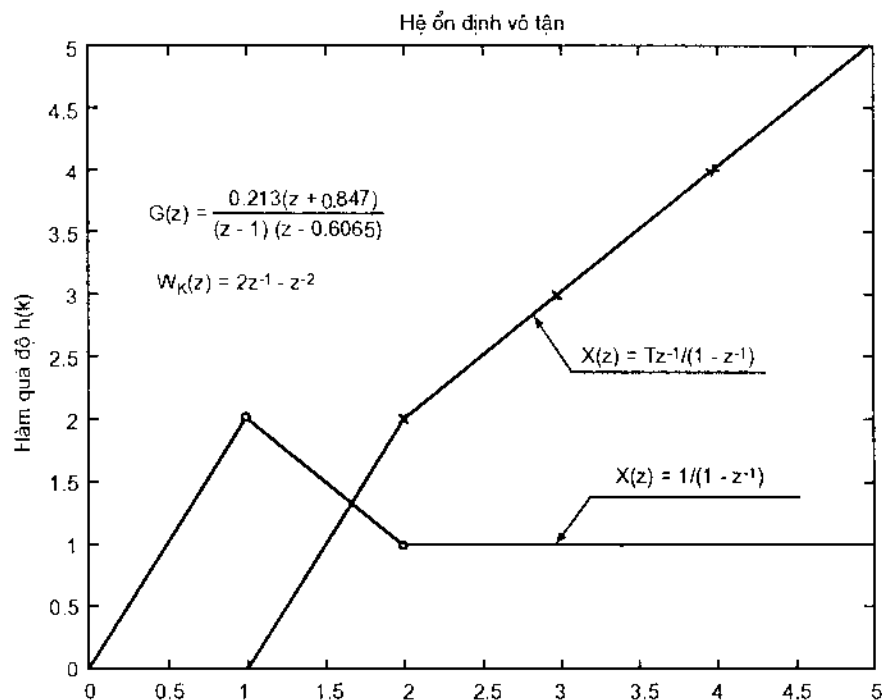
với tín hiệu tăng dần đều $x(k) = kT$:

Từ có $y(0) = 0$; $y(1) = 0$; $y(2) = 2T$; $y(3) = 3T \dots$

Với tín hiệu bậc thang đơn vị $x(k) = 1$:

$y(0) = 0$; $y(1) = 2$; $y(2) = y(3) = \dots = 1$.

Hàm quá độ được mô tả như ở hình 4.19 tương ứng với cùng hệ kín $W_K(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$ và tín hiệu vào khác nhau. Với cùng tín hiệu vào là bậc thang đơn vị với hệ kín mong muốn khác nhau, có đáp ứng khác nhau như ở hình 4.20.

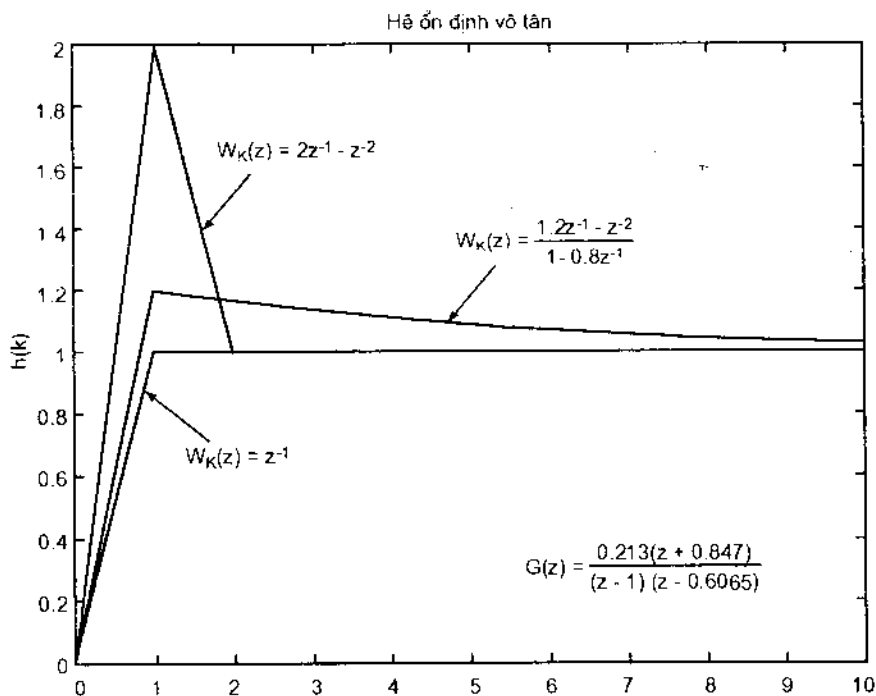


Hình 4.19

Để giảm quá điều chỉnh có thể đưa vào hàm truyền mong muốn những hệ số khác nhau.

$$W_K(z) = \frac{(2-c)z^{-1} - z^{-2}}{1 - cz^{-1}}$$

Ở hình 4.20. $c = 0,8$.



Hình 4.20

IV. 6. DÙNG MATLAB ĐỂ TỔNG HỢP HỆ XUNG

IV.6.1. Tổng hợp theo đặc tính tần Bode

Ví dụ 4-13

Với đối tượng ở ví dụ 4-12:

$$G(z) = \frac{0,213(z + 0,847)}{(z - 1)(z - 0,6065)} = \frac{0,213z + 0,1805}{z^2 - 1,6065z + 0,6065}; \quad T = 1$$

Thay (2-67) đối với z , ta có biến đổi w :

$$G(w) = \frac{\left(1 + \frac{w}{24,144}\right)\left(1 - \frac{w}{2}\right)}{w\left(1 + \frac{w}{0,49}\right)}, \quad T = 1$$

Dùng MATLAB vẽ $L(\omega^*)$ và $\varphi(\omega^*)$

```
num= [-0,0207 - 0,4586 1];
```

```
den = [2,0408 1 0];
```

```
w = logspace (-1,2);
```

```
bode (num, den, w)
```

```
[mag, phase] = bode (num, den, w);
```

```
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin (mag, phase, w)
```

Ta có kết quả:

$L_{dt} = 2,18 \text{ db}$; $\gamma_c = 21,2816^\circ$; $\omega_g = 1,0455 \text{ sec}^{-1}$; $\omega_p = 0,6389 \text{ sec}^{-1}$;

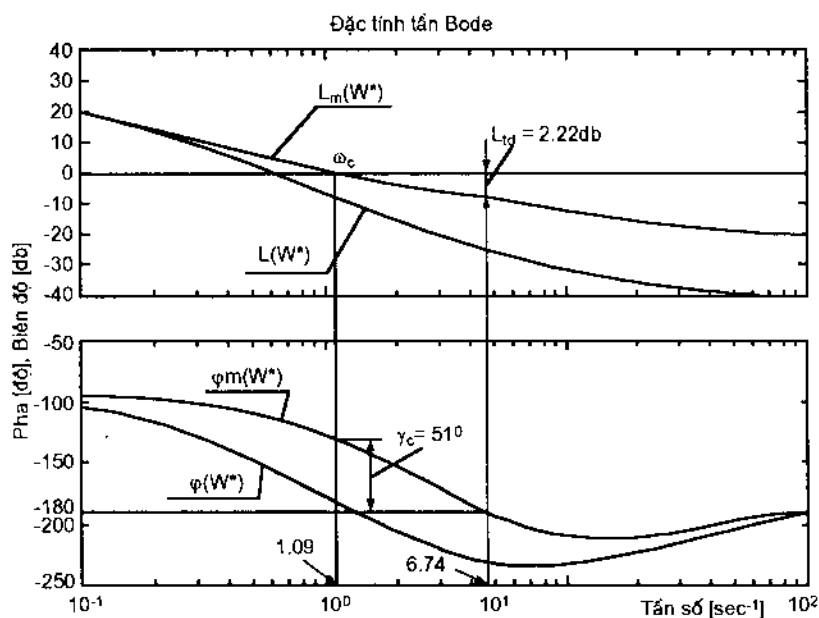
Độ dự trữ về pha bé, có thể dùng cơ cấu hiệu chỉnh:

$$G_c(w) = \frac{1 + \frac{w}{0,5}}{1 + \frac{w}{5}}$$

tương ứng với:

$$G_c(z) = \frac{5z - 3}{1,4z + 0,6} \text{ theo (2-67).}$$

Đặc tính tần của hệ hở $G_c(w)$ $G(w)$ xây dựng theo MATLAB như sau:



Hình 4.21

```
numc = [2 1]; denc = [0.2 1];
```

```
[numh, denh] = series (numc, denc, num, den);
```

```
bode (numh, denh, w)
```

```
[magh, phaseh] = bode (numh, denh, w);
```

```
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin (magh, phaseh, w)
```

Ta có kết quả: $L_{dt} = 2,22 \text{ db}$; $\gamma_c = 51,0564^\circ$; $\omega_g = 3,7416 \text{ sec}^{-1}$;
 $\omega_p = 1,0966 \text{ sec}^{-1}$;

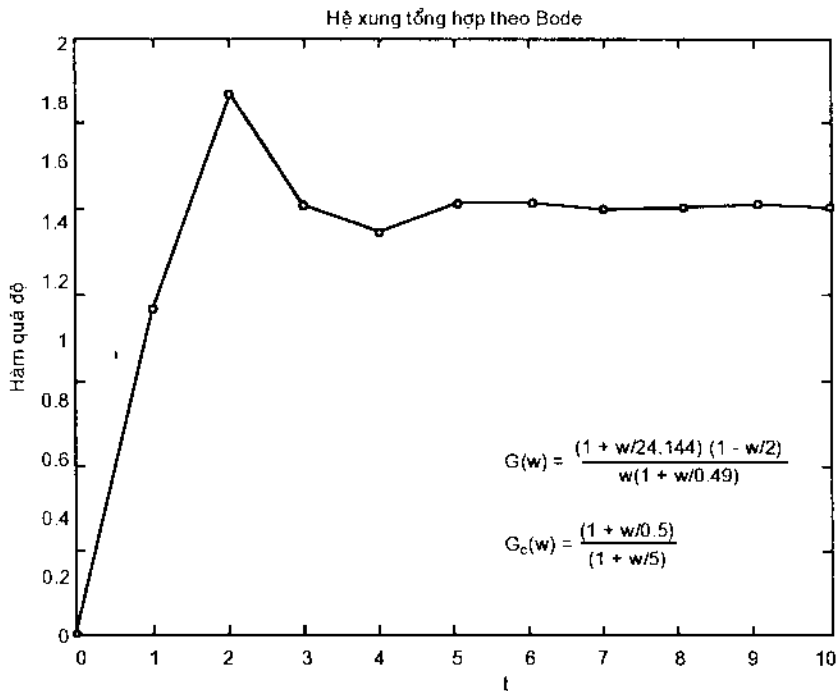
Tương ứng với biến đổi z:

$$G_c(z)G(z) = \frac{1,065z^3 + 0,263z - 0,5412}{1,4z^3 - 1,6491z^2 - 0,1148z + 0,3639}$$

Với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị:

$$Y(z) = \frac{1,065z^3 + 0,263z^2 - 0,5412z}{1,4z^4 - 1,9841z^3 + 0,7323z^2 - 0,3255z + 0,1773}$$

Hàm quá độ như ở hình 4.22 có thể so sánh với các phương pháp khác theo hình 4.15.



Hình 4.22

IV.6.2 Tổng hợp theo quỹ đạo nghiệm số

Ở ví dụ 4-11 với phương án cuối cùng 3b đã được lập trình theo MATLAB như sau:

```
num = [0 0.213 0.1805];  
den = [1 - 1.6065 0.6065];  
numc = 2.286* [1 - 0.3];  
denc = [1 0.6]  
[numh, denh] = series [num, den, numc, denc];  
rlocus (numh, denh)  
hold on  
x = [-1: 0.1: 1];  
y = sqrt (ones (1, length (x)) - x.^2);  
plot (x, y, ('-'), -x, -y, ('-'))  
rlocfind (num, den)
```

Với $k = 1.0134 \approx 1$, có nghiệm: $0.5138 + j 0.4248$

Quỹ đạo nghiệm số như ở hình 4.14.

Bài tập chương IV

Bài tập 4-1

Viết angôrit cho bộ điều khiển PI theo phương trình vi phân tổng quát (4-7) hay từ đó $u = k_i e + k_p \dot{e} + k_d \ddot{e}$ (4-7).

- Theo sai phân lùi,
- Theo luật chữ nhật tích phân tiến,
- Theo luật hình thang.

Đáp án

- a) Với $k_d = 0$ từ (4-7):

$$(u_k - u_{k-1})/T = k_i e_k + k_p (e_k - e_{k-1}) T$$
$$u_k = u_{k-1} + (k_p + k_i T) e_k - k_p e_{k-1}$$

- b) Theo (4-8):

$$u_k - u_{k-1} = k_p (e_k - e_{k-1}) + k_i T e_k = (k_p + k_i T) e_k - k_p e_{k-1}$$

c) Theo (4-12):

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &= k_p (e_k - e_{k-1}) + 0,5 k_i T (e_k + e_{k-1}) \\ &= (k_p + 0,5 k_i T) e_k + (0,5 k_i T - k_p) e_{k-1} \end{aligned}$$

Bài tập 4-2

Viết angôrit cho bộ điều khiển PD theo (4-14).

a) Dựa vào sai phân lùi bậc hai:

b) Dựa vào tích phân hình thang và sai phân lùi.

Đáp án:

Từ (4-14) suy ra:

$$a) \quad \left. \frac{d^2 e(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} = \frac{1}{T^2} (e(kT) - 2e[(k-1)T] + e[(k-2)T])$$

$$\text{Vậy } \frac{u_k - u_{k-1}}{T} = k_p \frac{e_k - e_{k-1}}{T} + k_i e_k + k_d \frac{e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}}{T^2}$$

$$u_k = u_{k-1} + \left(k_p + k_i T + \frac{k_d}{T} \right) e_k - \left(k_p + \frac{2k_d}{T} \right) e_{k-1} + \frac{k_d}{T} e_{k-2}$$

$$\begin{aligned} b) \quad u_k &= u_{k-1} + k_p (e_k - e_{k-1}) + \frac{k_d}{T} (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}) + 0,5 k_i T (e_{k-1} + e_k) \\ &= u_{k-1} + \left(k_p + \frac{k_i T}{2} + \frac{k_d}{T} \right) e_k - \left(k_p + \frac{2k_d}{T} - \frac{k_i T}{2} \right) e_{k-1} + \frac{k_d}{T} e_{k-2} \end{aligned}$$

Bài tập 4-3

Hàm truyền của khâu hiệu chỉnh:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K(s+b)}{s+a}$$

$$\dot{u} + au = K\dot{e} + Kbe$$

Viết angôrit của khâu hiệu chỉnh:

a) Theo sai phân lùi;

b) Theo luật tích phân hình thang.

Đáp án:

a) Theo (4-14):

$$\frac{1}{T} (u_k - u_{k-1}) + au_k = \frac{K}{T} (e_k - e_{k-1}) + Kbe_k$$

$$u_k = \frac{u_{k-1} + K(1+bT)e_k - Ke_{k-1}}{1+aT}$$

b) Theo angôrit tổng quát đã cho suy ra:

$$u - Ke = -au + Kbe$$

$$u - Ke = \int_0^1 (-au + Kbe) d\tau$$

Theo (4-12):

$$u_k - Ke_k = u_{k-1} - Ke_{k-1} + 0,5T(-au_{k-1} + Kbe_{k-1} - au_k + Kbe_k)$$

$$u_k = \frac{(1-0,5aT)u_{k-1} + K(1+0,5bT)e_k + K(0,5bT-1)e_{k-1}}{1+0,5aT}$$

Bài tập 4-4

Giải phương trình vi phân:

a) $\dot{y} + ay = x$

b) $\ddot{y} + a\dot{y} + by = x$

Đáp án

a) Theo sai phân lùi, tiến và sai phân giữa:

$$\frac{1}{T}(y_k - y_{k-1}) + ay_k = x_k; \quad y_k = \frac{y_{k-1} + Tx_k}{1+aT}$$

$$\frac{1}{T}(y_{k+1} - y_k) + a y_k = x_k; \quad y_{k+1} = (1-aT)y_k + Tx_k$$

$$\frac{1}{2T}(y_{k+1} - y_{k-1}) + ay_k = x_k; \quad y_{k+1} = -2aTy_k + y_{k-1} + 2Tx_k$$

b) Theo sai phân giữa:

$$\frac{1}{T^2}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) + \frac{a}{2T}(y_{k+1} - y_{k-1}) + by_k = x_k$$

$$y_{k+1} = \frac{(2-bT^2)y_k + (0,5aT-1)y_{k-1} + T^2x_k}{1+0,5aT}$$

Bài tập 4-5

Xác định hàm truyền gián đoạn từ angôrit điều khiển:

$$y_k = a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} + b_1 x_k + b_2 x_{k-1}$$

Đáp án :

$$Y(z) = a_1 z^{-1}Y(z) - a_2 z^{-2}Y(z) + b_1 X(z) + b_2 z^{-1}X(z)$$

$$G_c(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Bài tập 4-6

Xác định hàm truyền gián đoạn từ angôrit tích phân:

a) $u_k = u_{k-1} + T e_{k-1}$

b) $u_k = u_{k-1} + T e_k$

c) $u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2} (e_{k-1} + e_k)$

Đáp án

a) $G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}$

b) $G_c(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}}$

c) $G_c(z) = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1}$

Bài tập 4-7

Xác định hàm truyền PID từ angôrit:

a) $u_k = u_{k-1} + k_p(e_k - e_{k-1}) + k_i T e_k$

b) $u_k = u_{k-1} - a e_k + b e_{k-1} + c e_{k-2}$

$$a = k_p + 0,5k_i T + \frac{k_d}{T}$$

$$b = 0,5k_i T - k_p - 2\frac{k_d}{T}$$

$$c = \frac{k_d}{T}$$

Đáp án:

a) $G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = k_p + \frac{k_i T}{1 - z^{-1}}$

b) $G_c(z) = \frac{a + b z^{-1} + c z^{-2}}{1 - z^{-1}}$

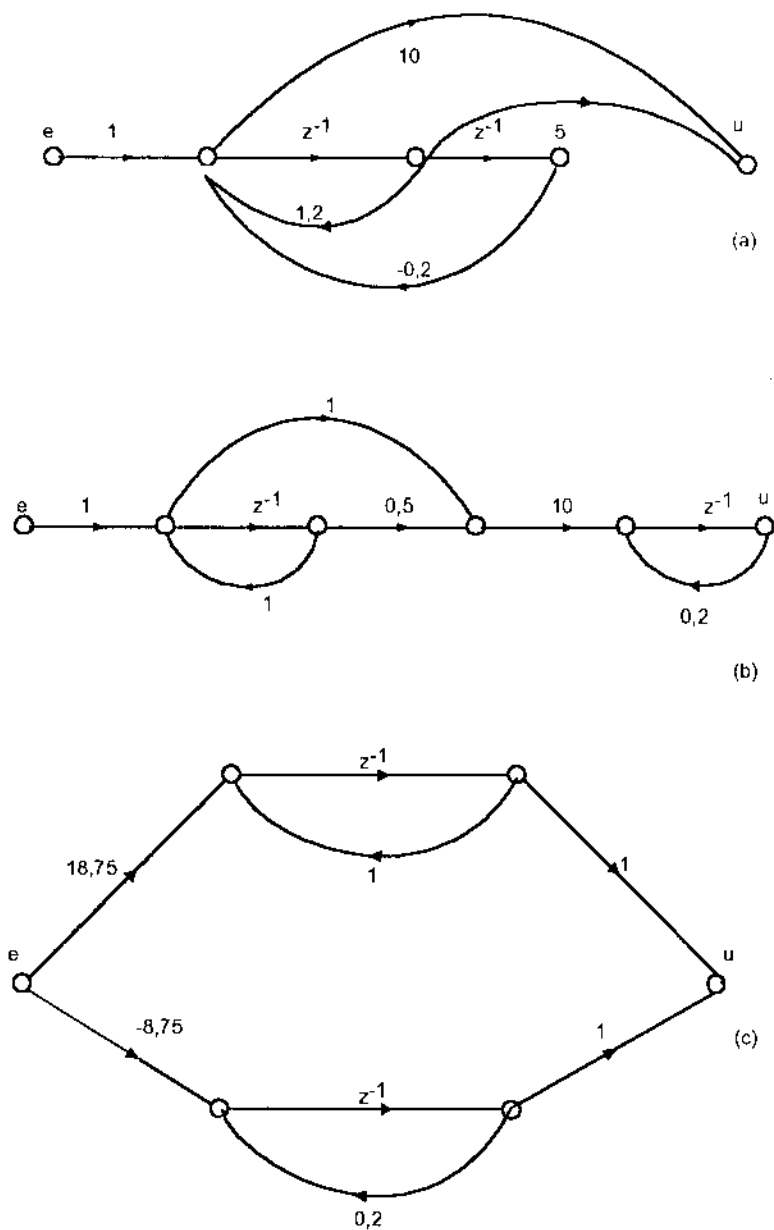
Bài tập 4-8

Bộ điều khiển có hàm truyền:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{10(1 + 0,5z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})}$$

Xây dựng sơ đồ graph:

a) Kiểu trực tiếp, b) Kiểu nối tiếp, c) Kiểu song song.



Hình 4.23

Đáp án

a) Kiểu trực tiếp:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{10(1 + 0,5z^{-1})X(z)}{(1 - z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})X(z)}$$

$$U(z) = (10 + 5z^{-1})X(z)$$

$X(z) = E(z) + 1,2z^{-1}X(z) - 0,2z^{-2}X(z)$. Sơ đồ graph kiểu trực tiếp như ở hình 4.23a.

b) Kiểu nối tiếp:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{10}{1 + 0,2z^{-1}}$$

Sơ đồ graph kiểu nối tiếp như ở hình 4.23b.

c) Kiểu song song:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{18,75}{1 - z^{-1}} - \frac{8,75}{1 + 0,2z^{-1}}$$

Sơ đồ graph kiểu song song như ở hình 4.23c.

Bài tập 4-9

Đối tượng có hàm truyền:

$$G_1(s) = \frac{1740}{s(0,25s + 1)}$$

a) Chọn khâu hiệu chỉnh theo Bode sao cho $\omega_r = 125$ rad/sec và $\gamma_r = 45^\circ$.

b) Tính cơ cấu hiệu chỉnh số $G_c(z)$ trên cơ sở $G_c(s)$ với $T = 0,001$ sec.

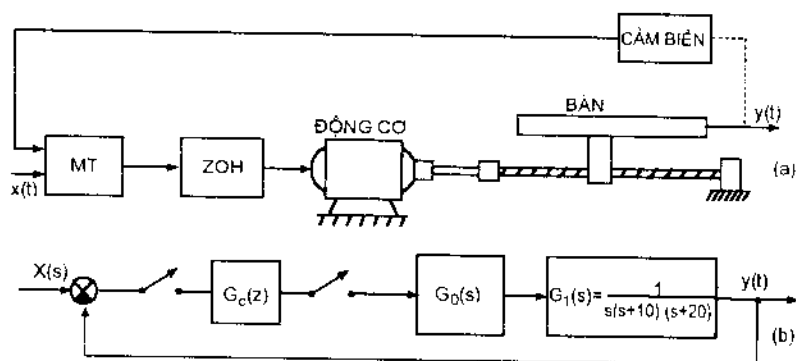
Đáp án

a) Chọn khâu hiệu chỉnh dạng:

$$G_c(s) = \frac{K(s + a)}{(s + b)}, \text{ với } \omega_r = 125 \text{ chọn } K = 5,6, a = 50, b = 312.$$

b) Cơ cấu hiệu chỉnh gián đoạn xác định theo phương pháp tương thích nghiệm (ví dụ 4-5):

$$G_c(z) = K \cdot \frac{a(1 - e^{-bT})(z - e^{-aT})}{b(1 - e^{-aT})(z - e^{-bT})} = 4,85 \frac{(z - 0,95)}{(z - 0,73)}$$



Hình 4.24

Bài tập 4-10

Hệ điều khiển vị trí bàn như ở hình 4.24a và sơ đồ khối như ở hình 4.24b.

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+20)}$$

Mục đích là đạt được thời gian đáp ứng t_m và thời gian quá độ t_{qd} nhỏ nhất, lượng quá điều chỉnh $\delta\% < 5\%$ với $G_c(s) = K$.

Đáp án

Theo phương pháp liên tục, với phương pháp quỹ đạo nghiệm số trong mặt phẳng s , để $\sigma\% \approx 5\%$ xác định $K = 700$ (ứng với $\xi = 0,707$).

Mô hình hoá cho kết quả như sau :

$$\sigma\% \approx 5\%; t_m = 0,40 \text{ sec}; t_{qd} = 1,12 \text{ sec}$$

Nếu dùng máy tính để điều khiển, với $T = 0,001 \text{ sec}$, có hàm truyền hệ kín:

$$W_K(z) = \frac{(1,158z^2 + 4,5973z + 1,1407)e^{-0,07}}{z^3 - 2,9702z^2 + 2,9407z - 0,97045}$$

Kết quả tương tự như ở hệ liên tục.

Bài tập 4-11

Với bài tập trên, chọn khâu hiệu chỉnh dạng:

a) $G_c(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)}$ và so sánh kết quả với đáp án bài tập 4.10.

b) Xác định cơ cấu điều khiển gián đoạn $G_c(z)$.

Đáp án

a) Chọn $a = -11$, $b = -62$, xác định $K = 8000$ và kết quả đạt được: $\delta\% = 5\%$; $t_m = 0,25$ sec; $t_{qd} = 0,6$ sec.

b) Theo phương pháp tương thích nghiệm, xác định:

$$G_c(z) = 6293 \frac{z - 0,8958}{z - 0,5379}, \quad (T = 0,001 \text{ sec}).$$

Vì T bé nên ở hệ liên tục và gián đoạn kết quả như nhau: $\sigma\% \approx 5\%$, $t_m = 0,25$ sec, $t_{qd} = 0,6$ sec.

Bài tập 4-12

Hàm truyền của đối tượng như ở ví dụ 4-10: $G_1(s) = \frac{K}{s^2}$

a) Xác định phạm vi ổn định của K theo phương pháp quỹ đạo nghiệm số ($G_c(z) = 1$), $T = \sqrt{2}$.

b) Chọn cơ cấu điều khiển $G_c(z)$ sao cho $\sigma\% \approx 20\%$ và $t_{qd} \approx 9$ sec.

c) Chọn cơ cấu điều khiển để hệ ổn định vô tận.

Đáp án :

a) $G_c(z)G_1(z) = \frac{K(z+1)}{(z-1)^2}$; trên trục thực $z = \alpha$

$$1 + \frac{K(z+1)}{(z-1)^2} = 1 + \frac{K(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2} = 0; \quad K = -\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)} = F(\alpha)$$

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = 0; \quad \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -3 \quad (\text{như ở hình 4-10}).$$

Hệ luôn không ổn định vì nằm ngoài đường tròn có bán kính đơn vị.

b) Chọn cơ cấu điều khiển:

$$G_c(z) = \frac{z-a}{z-b}; \quad G_c(z)G_1(z) = \frac{K(z+1)(z-a)}{(z-1)^2(z-b)}$$

Nghiệm không được chọn bằng -1 ($a = 1$) để bù một nghiệm cực, theo đường cong ở hình 3.19 xác định nghiệm ứng với $\xi = 0,5$ có $b = 0,2$; $K = 0,25$:

$$\text{Vậy hệ hở } W(z) = G_c(z)G_1(z) = \frac{0,25(z+1)}{(z-1)(z-0,2)}$$

$$\text{Hệ kín } W_K(z) = \frac{0,25z + 0,25}{z^2 - 0,95z + 0,45} \quad \text{với } \sigma\% \approx 20\% \text{ và } t_{qd} \approx 9 \text{ sec.}$$

c) Chọn $a = 1$, $b = -0,98$:

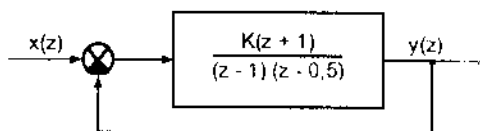
$$G_c(z)G_1(z) = \frac{K(z+1)}{(z-1)(z+0,98)} \approx \frac{K}{z-1}$$

Với $K = 1$, hệ kín có hàm truyền $W_K(z) = \frac{1}{z} = z^{-1}$

Đó là hệ ổn định vô tận (mục IV.4.3).

Bài tập 4-13

Hệ xung có sơ đồ khối như ở hình 4.25. Hãy xác định K sao cho tỷ số suy giảm $\xi = 0,7$.

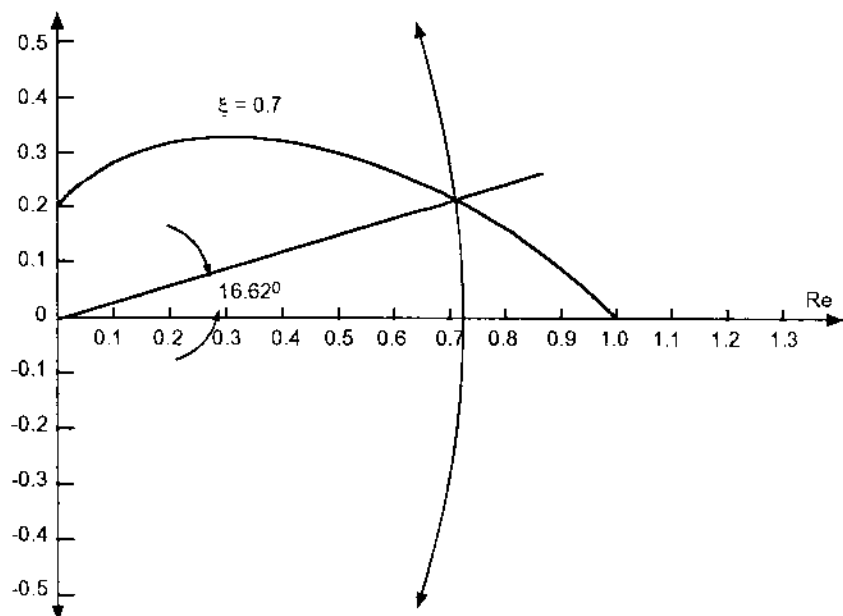


Hình 4.25

Đáp án

Vẽ quỹ đạo nghiệm, và theo dạng đường cong ở hình 4.26 ứng với $\xi = 0,7$ vẽ đường thẳng đến giao điểm và xác định K :

$K = 0,0627$ tại $0,719 + j0,215$.



Hình 4.26

Cũng có thể dùng MATLAB

`num = [ 1 1]; den = [1 -1,5 0.5];`

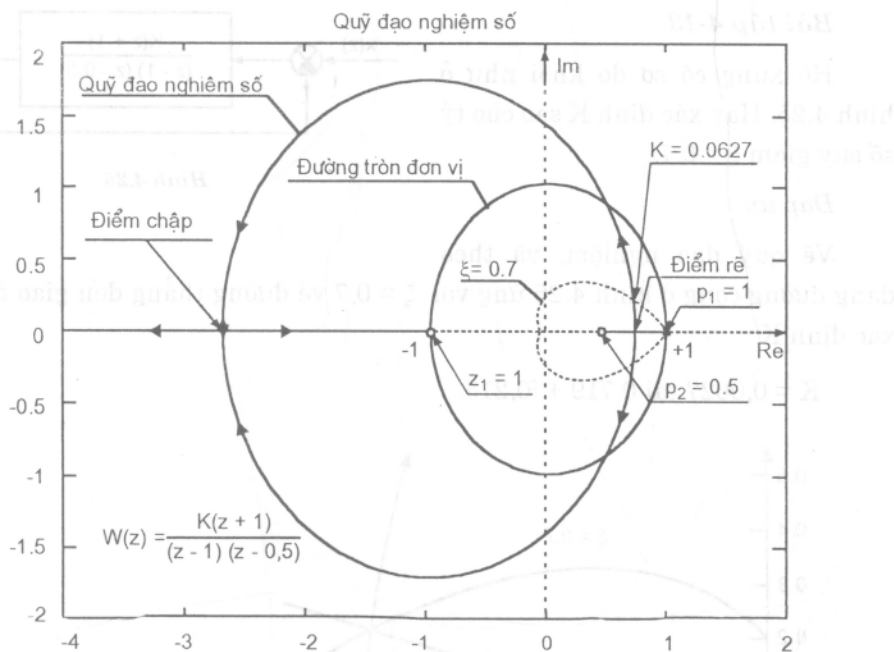
$z = \text{input}$ ('Tỷ số suy giảm')

Tỷ số suy giảm 0.7

rlocus (num, den)

zgrid (z, 0).

Quỹ đạo nghiệm số và cách xác định K như ở hình 4.27.



Hình 4.27

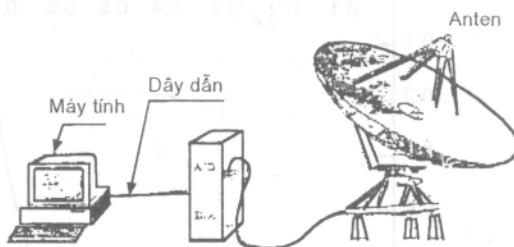
Bài tập 4-14

Hệ điều khiển anten dùng máy tính như ở hình 4.28a và sơ đồ khối như ở hình 4.28b. Để giản đơn, khuếch đại công suất được chọn bằng một thay vì:

$$G_{Kd}(s) = \frac{100}{s + 100}$$

a) Hãy chọn hệ số khuếch đại của hệ K mà máy tính thực hiện sao cho $\xi = 0,5$; với $T = 0,1$.

b) Với lượng quá điều chỉnh $\sigma\% \approx 15\%$, chọn K và xác định sai số xác lập

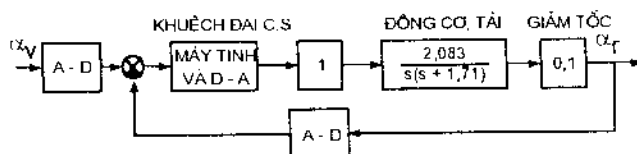


Hình 4.28a

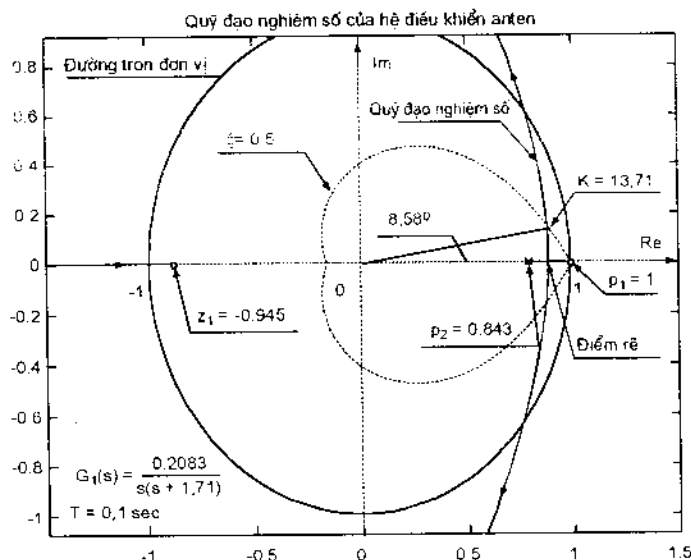
với tín hiệu vào là hàm tăng dần đến đơn vị.

Đáp án

a) Theo phương pháp quỹ đạo nghiệm, chọn $K = 13,71$ (với $\xi = 0,5$, $T = 0,1$ sec) như ở hình 4.29.



Hình 4.28b



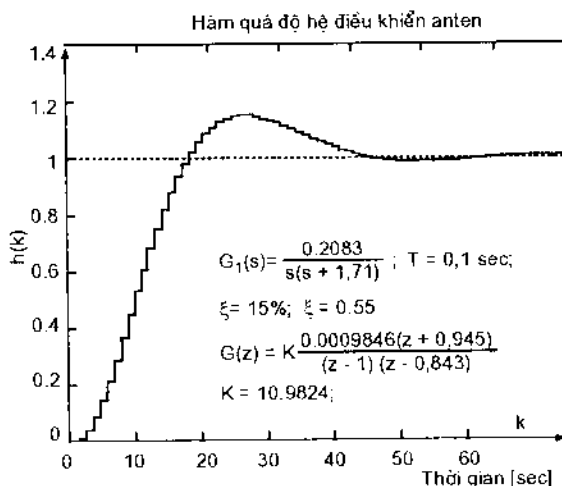
Hình 4.29

b) Với $\sigma \% \approx 15\%$ ta xác định $\xi = 0,55$ (theo đường cong ở hình 6.1, tài liệu [18]).

Bằng phương pháp tương tự với (a) ta xác định $K = 10,9824$.

Theo phương pháp tính sai lệch tĩnh ở ví dụ 1-28, tính $e^*(\infty) = 0,1220$.

Ở hình 4.30 có hàm quá độ của hệ điều khiển Anten nói trên.



Hình 4.30

Bài tập 4.15

Hệ anten có hàm truyền:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(10s + 1)} \text{ và yêu cầu về chất lượng:}$$

1- Sai lệch bám tín hiệu vào tăng dần đều không quá 0,01 rad.

2- Lượng quá điều chỉnh của hàm quá độ $\sigma\% \leq 16\%$.

3- Thời gian quá độ (với $\Delta = \pm 1\% h(\infty)$); $t_{qd} \leq 10$ sec.

a) Chọn khâu hiệu chỉnh liên tục, từ đó chuyển sang gián đoạn với $T = 0,2$ sec.

b) Với điều kiện trên, thay thế $T = 1$ sec và kết luận.

Đáp án:

a) Từ yêu cầu trên $\xi \geq 0,5$, vì thời gian quá độ được xác định trong miền $\Delta = \pm 0,01$ nên:

$$e^{-\xi\omega_r t_{qd}} = 0,01; \quad t_{qd} = \frac{4,6}{\xi\omega_r} \text{ do đó } \omega_r \approx 1 \text{ rad/sec.}$$

Chọn $G_c(s) = \frac{10s + 1}{s + 1}$ có nghiệm không $z_1 = 0,1$ để bù nghiệm cực $p_1 = -0,1$ ở

$$\text{đối tượng. Từ đó xác định: } G_c(z) = K \frac{z - e^{\frac{-0,1}{0,2}}}{z - e^{\frac{-1}{0,2}}} = 9,15 \frac{z - 0,9802}{z - 0,8187}$$

Hàm gián đoạn của đối tượng với $T = 0,2$ sec; $a = 0,1$ như sau:

$$G_1(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{a}{s^2(s+a)} \right\} = 0,00199 \frac{z + 0,9934}{(z-1)(z-0,9802)}$$

Phương trình đặc trưng $1 + G_c(s) G_1(z) = 0$ cho nghiệm $z = 0,900 \pm j0,162$ ứng với $\xi = 0,447$; $t_{qd} = 10,3$ sec; $\sigma\% = 20,8\%$.

b) Với ví dụ trên, chọn $T = 1$ sec:

$$\left. \begin{aligned} G_c(z) &= 6,64 \frac{z - 0,9048}{z - 0,3697} \\ G_1(z) &= 0,0484 \frac{z + 0,9672}{(z-1)(z-0,9048)} \end{aligned} \right\} \quad (4-63)$$

Phương trình đặc trưng cho nghiệm:

$z = 0,523 \pm j0,636$ ứng với $\xi = 0,21$; $t_{qd} = 23,7$; $\sigma\% = 52\%$.

Nguyên nhân của việc giảm chất lượng vì T quá lớn: Ở hệ bậc hai $\omega_r \approx \omega = 1 \text{ rad/sec} = 0,16 \text{ Hz}$, còn tần số lượng tử hoá $\omega_0 = \frac{1}{T} = 5 \text{ Hz}$ lớn hơn 30 lần nên trường hợp a) chất lượng tương đối thoả mãn; Trường hợp b): $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$.

Bài tập 4-16

Ở ví dụ trên (bài tập 4-15) chọn cơ cấu điều khiển theo quỹ đạo nghiệm số với $T = 1$.

a) Kiểm tra xem dùng $G_c(z) = K$ có đáp ứng chất lượng đã cho không?

b) Chọn $G_c(z)$ thích hợp.

Đáp án

a) Với $G_c(z) G_1(z) = K \frac{0,0484(z + 0,9672)}{(z - 1)(z - 0,9048)}$

$K_g = 1,3348$, K bé, không thoả mãn sai số xác lập.

b) Để bù nghiệm cực của đối tượng, chọn:

$$G_c(z) = K \frac{z - 0,9048}{z - 0,3679}$$

Nếu chọn $K = 6,64$, sai số xác lập thoả mãn nhưng $\xi = 0,2$ ứng với điểm có $z = 0,5276 + j 0,6405$ so với ở hình 3.19.

Không bù nghiệm cực của đối tượng mà dịch nghiệm cực của $G_c(z)$ về phía trái:

$$G_c(z) = K \frac{z - 0,88}{z + 0,5}$$

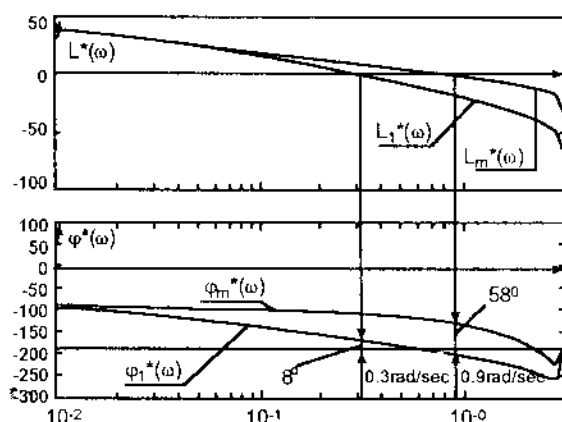
Chọn $K = 13$ để thoả mãn
 $\xi \approx 0,65$, $K_v = 1,04 > 1$.

Bài tập 4-17

Với đối tượng trên, chọn $G_c(z)$ theo phương pháp tần số.

Đáp án

Như ở hình 4.31, độ dư

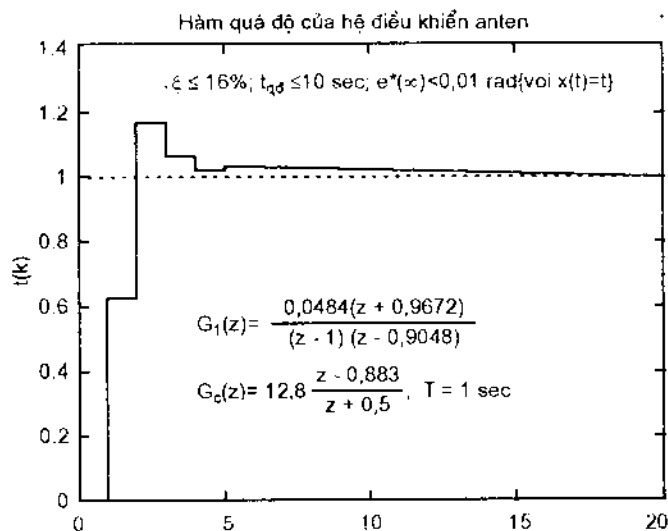


Hình 4.31

trở ổn định về pha $\gamma_c = 8^\circ$ (đường $\varphi_1^*(\omega)$ và $L_1^*(\omega)$) nên dùng khâu hiệu chỉnh với độ dư trữ $\gamma_r = 58^\circ$ và tần số cắt $\omega_c = 0,9 \text{ rad/sec}$:

$$G_c(z) = 12,8 \frac{z - 0,883}{z + 0,5}$$

Hệ đã hiệu chỉnh ứng với $L_m^*(\omega)$ và $\varphi_m^*(\omega)$ trên hình 4.31. Hàm quá độ như ở hình 4.32.



Hình 4.32

Bài tập 4-18

Với đối tượng trên, chọn $G_c(z)$ theo phương pháp tần số và biến đổi w .

Đáp án

Sau khi thay:

$$z = \frac{1 + w \frac{T}{2}}{1 - w \frac{T}{2}} \quad \text{với } T = 1 \text{ sec}$$

ta có:

$$G_1(w) = - \frac{\left(\frac{w}{120} + 1 \right) \left(\frac{w}{2} - 1 \right)}{w \left(\frac{w}{0,0999} + 1 \right)}$$

Để có độ dự trữ ổn định $\gamma_c = 50^\circ$ chọn:

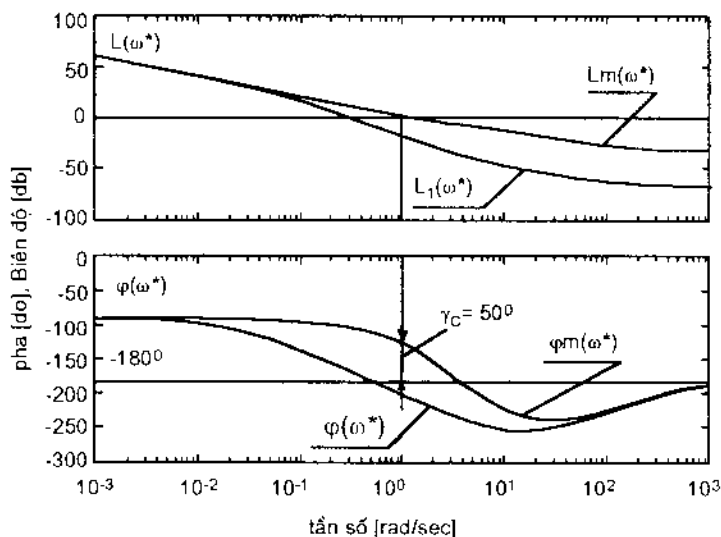
$$G_c(w) = \frac{1 + \frac{w}{0,0999}}{1 + \frac{w}{6}}$$

Biểu đồ Bode như ở hình 4.33.

Thay $w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ ta có:

$$G_c(z) = \frac{15,8(z - 0,9048)}{z + 0,5}$$

Quỹ đạo nghiệm số cho kết quả là $\xi = 0,37$, nghĩa là lượng quá điều chỉnh $\sigma\% \approx 30\%$.



Hình 4.33

Bài tập 4-19

Hệ điều chỉnh gương Mặt trời [15 - trang 136] có hàm truyền của đối tượng:

$$G_1(s) = \frac{2500}{s(s + 25)}$$

- Chọn cơ cấu hiệu chỉnh gián đoạn theo phương pháp tần số và biến đổi w .
- Chọn bộ điều khiển số PI theo biến đổi z .

Đáp án

a) Cơ cấu hiệu chỉnh có hàm truyền:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

Với: $a < 1$: cơ cấu hiệu chỉnh chậm sau.

$a > 1$: cơ cấu hiệu chỉnh vượt trước.

Biến đổi w của đối tượng và cơ cấu hiệu chỉnh có dạng tương ứng, với $T = 0,01$ sec:

$$G_0(w) G_1(w) = \frac{100(1 - 0,005w)(1 + 0,000208w)}{w(1 + 0,0402w)}$$

$$G_c(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w}$$

Cơ cấu hiệu chỉnh chậm sau

Để có độ dự trữ ổn định $\gamma_c = 50^\circ$, hạ đặc tính $L_1(\omega^*)$ (như ở hình 4.34) có tần số cắt $\omega_c = 12,8$ ứng với 16,7 db trên đặc tính $L_1(\omega^*)$;

$$20\log a = -16,7 \text{ db.}$$

$$a = 0,1462$$

$$1/a\tau = 1; \tau = 6,8399$$

$$\text{Do đó: } G_c(w) = \frac{1 + w}{1 + 6,84w}$$

$$G_c(z) = 0,1468 \frac{z - 0,99}{z - 0,9985}$$

Cơ cấu hiệu chỉnh vượt trước

Chọn $a = 20$ ta có:

$$20\log a = 26 \text{ db.}$$

Đặc tính $L_1(\omega^*)$ được nâng lên $26/2 = 13$ db ứng với tần số cắt $\omega_{cv} = 115$

$$\frac{1}{\tau} = 115\sqrt{a} = 514$$

$$\text{Do đó: } G_c(w) = \frac{1 + 0,03888w}{1 + 0,01944w}$$

$$G_c(z) = \frac{8,7776z - 6,7776}{1,3888z + 0,6112}$$

b) Dùng bộ điều chỉnh PI:
Hàm truyền của bộ điều chỉnh PI:

$$G_c(z) = k_p \frac{z - \left(1 - \frac{k_i T}{k_p}\right)}{z - 1}$$

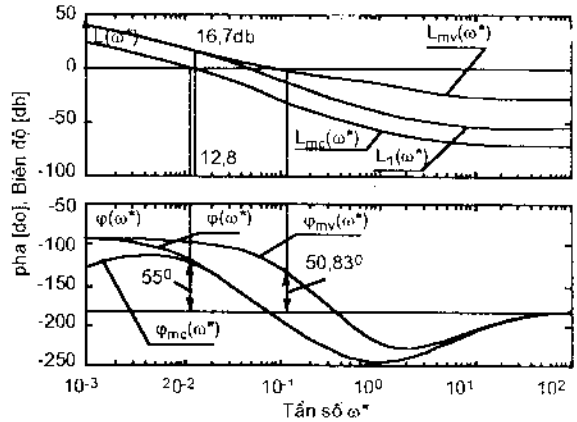
Nghiệm không cần chọn gần với cực $z = 1$. Vẽ quỹ đạo nghiệm cho:

$$G_1(z) = \frac{K(z + 0,9217)}{(z - 1)(z - 0,7788)}$$

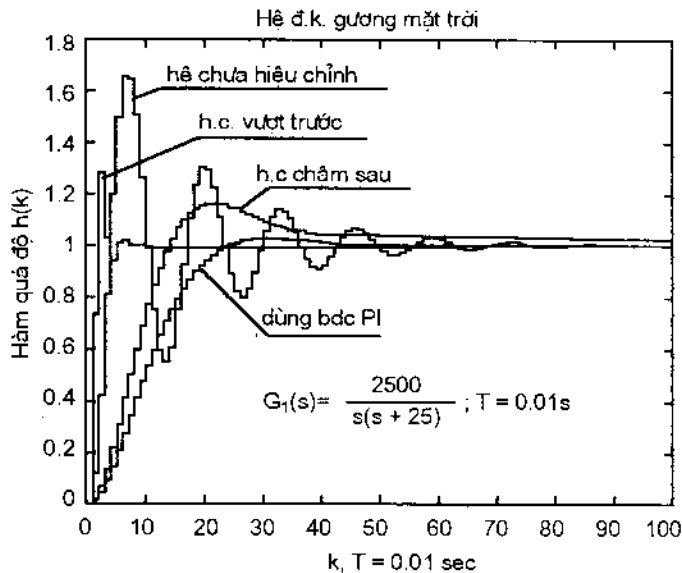
Với $K = 0,01152$ thì $\sigma\% = 3\%$. Vậy chọn $K_p = 0,1$. Do đó:

$$G_c(z) = 0,1 \frac{z - 0,995}{z - 1}$$

Hàm quá độ của các phương án trên như ở hình 4.35.



Hình 4.34



Hình 4.35

Chương V

TỔNG HỢP HỆ XUNG TRONG MIỀN TRẠNG THÁI

Ở chương IV đã xét đến phương pháp "cổ điển" để tổng hợp hệ xung dùng biến đổi z như ở hệ tương tự. Mục đích chương này là dùng phương pháp không gian trạng thái để giải quyết cùng một vấn đề. Sự khác nhau giữa hai hướng là ở phương pháp tổng hợp, còn kết quả cuối cùng có được hệ các phương trình điều khiển dạng sai phân - là như nhau.

Với sự xuất hiện của máy vi tính, các phương pháp điều khiển dùng hồi tiếp trạng thái mô tả hệ bậc n bằng n phương trình sai phân bậc một rất được thịnh hành, nhất là đối với các hệ gián đoạn đa biến. Phương pháp mô tả bằng vectơ - ma trận làm đơn giản hơn khi tính đến điều kiện đầu cũng như các chỉ tiêu chất lượng khác nhau.

Ưu việt của phương pháp không gian trạng thái rất rõ nét khi tổng hợp cơ cấu điều khiển của các hệ nhiều đầu vào đầu ra (MIMO). Tuy nhiên phương pháp không gian trạng thái cũng có ích khi tổng hợp các hệ một đầu vào một đầu ra (SISO) vì các công cụ biến đổi AD rất thông dụng.

Ở chương trước đã đề cập đến hai phương pháp cơ bản: phương pháp gián tiếp và phương pháp trực tiếp. Hai phương pháp này cũng được dùng đối với việc tổng hợp hệ trong miền trạng thái. Ở phương pháp gián tiếp, trước tiên tổng hợp cơ cấu điều khiển tương tự ở miền trạng thái sau đó chuyển đổi thành bộ điều khiển số bằng cách dùng một trong các biến đổi tương đương. Ở chương này chỉ đề cập đến các phương pháp trực tiếp.

V.1. PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA HỆ GIÁN ĐOẠN

Dạng tổng quát của phương trình trạng thái hệ gián đoạn như sau:

$$x[(k+1)T] = F(kT)x(kT) + G(kT)u(kT) \quad (5-1a)$$

$$y(kT) = C(kT)x(kT) + D(kT)u(kT) \quad (5-1b)$$

trong đó $x(kT)$ là vectơ trạng thái; $u(kT)$ là vectơ đầu vào (vectơ điều khiển của

hệ thống) $y(kT)$ là véctơ đầu ra tại các thời điểm $t = kT$ với ($k = 0, 1, 2, \dots$) và T là thời gian lấy mẫu hay chu kỳ lượng tử hoá; $F(kT)$ là ma trận trạng thái ($n \times n$), $G(kT)$ là ma trận đầu vào ($n \times r$), $C(kT)$ là ma trận đầu ra ($n \times q$) và $D(kT)$ là ma trận chuyển đổi trực tiếp ($q \times r$). Các ma trận này biến đổi theo thời gian. Để mô tả giản đơn, dùng $x(k)$ thay cho $x(kT)$, như vậy trục thời gian ứng với t/T .

Nếu hệ trên là gián đoạn tuyến tính và có hệ số hằng, các ma trận F, G, C , D ở các phương trình trên là ma trận hằng:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \quad (5-2a)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k) \quad (5-2b)$$

Trong trường hợp hệ là đơn biến, phương trình sai phân có dạng chung

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = \\ & = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k) \end{aligned} \quad (5-3)$$

Dang chính tắc đối với điều khiển

a) *Hê sơ đẳng:*

$$b_0 = 1, b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$$

Nếu chọn biến trạng thái là $y(k)$, $y(k+1)$, ...

[illegible]

Từ (5-3) ta có:

$$x_n(k+1) = - \sum_{i=0}^n a_i x_{n-i+1}(k) + u(k) \quad (5-5)$$

Phương trình trạng thái và phương trình quan sát, ứng với (5-2a, b) như sau:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \dots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (5-6a)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (5-6b)$$

Như vậy phương trình sai phân mô tả bằng vectơ ma trận cho trạng thái ở thời điểm $k + 1$ là hàm của trạng thái và điều khiển ở thời điểm k .

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

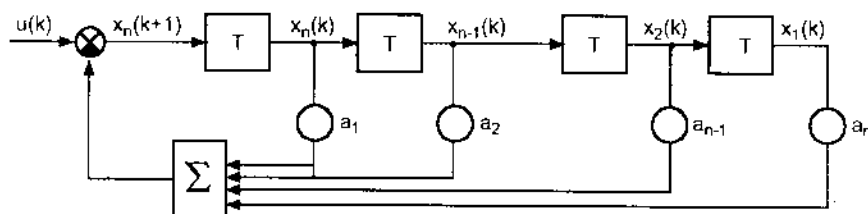
F, G là ma trận $(n \times n)$ và $(n \times 1)$.

Lượng ra là tổ hợp tuyến tính của vectơ trạng thái :

$$y(k) = Cx(k) \quad (5-7b)$$

với C là ma trận $(1 \times n)$.

Sơ đồ ở hình 5.1 tương ứng với phương trình (5-5), đó là dạng chính tắc của điều khiển. Tất cả các hệ số ở mạch hồi tiếp đều là hệ số ở vế thứ nhất của phương trình sai phân, tức là ở mẫu số của hàm truyền.



Hình 5.1

b) Hệ không sơ đẳng

Ở trường hợp này đại lượng quan sát không chỉ là $x_1(k)$ mà là một tổ hợp tuyến tính của r thành phần với hệ số b_j .

Phương trình đặc trưng của hệ này cũng như của hệ sơ đẳng

Dùng các biến trạng thái:

$$x_1(k), x_2(k) = x_1(k+1), \dots, x_{n-1}(k) = x_1(k+n-2), x_n(k) = x_1(k+n-1) \quad (5-8)$$

$$\text{với: } \sum_{i=1}^n a_i x_1[(k+n)-i] = u(k) \quad (5-9)$$

Đại lượng quan sát bây giờ là :

$$y(k) = \sum_{j=1}^r b_j x_1[(k+r)-j] = \sum_{j=1}^r b_j x_{r+1-j}(k) \quad (5-10)$$

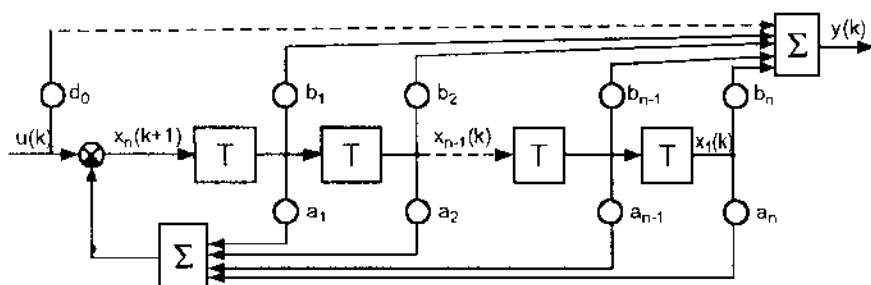
sao cho:

$$\sum_{i=1}^n a_i y[(k+n)-i] = \sum_{j=1}^r b_j \sum_{i=1}^n a_i x_1[(k+n)-j] = \sum_{j=1}^r b_j u(k-j) \quad (5-11)$$

Phương trình trạng thái(5-6a) không thay đổi nhưng phương trình quan sát trở thành:

$$y(k) = [b_r \ b_{r-1} \ \dots \ b_2 \ b_1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_r(k) \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

Mô tả trạng thái ở hình 5.2 rút ra từ hàm truyền gián đoạn z với hai thành phần như ở hình 5.3 thoả mãn các phương trình (5-9) và (5-12).



Hình 5.2

Nếu dùng biến đổi z , theo định nghĩa (2-30) và theo định lý vượt trước (2-35) ta có :

$$Z\{x_{k+1}\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n} = z \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} - x_0 \right) \quad (5-13)$$

với $n = k+1$.

Do đó (5-2a) có dạng:

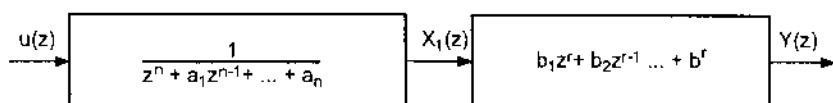
$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z) \quad (5-14)$$

và (5-2b):

$$Y(z) = W(z)U(z) + C(zI - F)^{-1}zx_0 \quad (5-15)$$

mà

$$W(z) = C(zI - F)^{-1}G \quad (5-16)$$



Hình 5.3

Ở biểu thức (5-15) thành phần thứ nhất là đáp ứng ra - vào với $x_0 = 0$, nghĩa là tương ứng với hàm truyền $W(z)$, còn thành phần thứ hai là đáp ứng của đầu ra với điều kiện đầu. Với $C = I$ ta có đáp ứng trạng thái $W(z)$ gồm có những hàm truyền thông thường theo z và mô tả một hệ ổn định nếu tất cả các nghiệm cực đều nằm trong đường tròn của mặt phẳng z . Nghiệm của phương trình đặc trưng ứng với:

$$\det |zI - F| = 0 \quad (5-17)$$

Từ đó có:

Điều kiện ổn định - Hệ được mô tả bởi (5-7a, b) là ổn định nếu và chỉ nếu

tất cả các nghiệm riêng (mọi nghiệm của phương trình đặc trưng (5-17)) đều nằm trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z .

Nghiệm của (5-7) có thể được xác định theo:

$$\begin{aligned}x_1 &= Fx_0 + Gu_0, \\x_2 &= Fx_1 + Gu_1 = F^2 x_0 + FG u_0 + Gu_1, \dots \\x_k &= F^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i} Gu_i\end{aligned}\quad (5-18)$$

Thành phần thứ nhất là đáp ứng của điều kiện đầu, so sánh với (5-15) tương ứng với (VII.3.2 tài liệu [18]), ta được:

$$F^k = Z^{-1}\{(zI - F)^{-1}z\} \quad (5-19)$$

Biến đổi z ngược được thực hiện như ở hệ liên tục.

V.2. ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ QUAN SÁT ĐƯỢC

Những khái niệm và định nghĩa về điều khiển được và quan sát được ở hệ liên tục đều không có gì thay đổi.

Một đối tượng được mô tả bằng phương trình trạng thái:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5-20)$$

$$y = C^T x \quad (5-21)$$

Do quá trình lấy mẫu và lưu giữ, tín hiệu đầu vào của đối tượng:

$$u(kT + \tau) = u(kT); \quad 0 \leq \tau < T \quad (5-22)$$

mà T là chu kỳ lấy mẫu và phương trình (5-20) được thay thế bằng phương trình gián đoạn :

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k), \quad (5-23)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (5-24)$$

$$\text{mà} \quad F = e^{AT} \quad (5-25)$$

$$G = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} B d\tau$$

Thay $\sigma = (\tau - kT)$ ở biểu thức trên:

$$G = \int_0^T e^{A(T-\sigma)} B d\sigma$$

với $\eta = T - \sigma$ ta có:

$$G = \int_0^T e^{A\eta} d\eta B \quad (5-26)$$

V.2.1. Gián đoạn hoá và điều kiện điều khiển được và quan sát được

Nếu phương trình trạng thái (5-20) là điều khiển được thì sau khi đưa vào phần tử lấy mẫu, phương trình (5-23) có còn điều khiển được không? Ma trận F và G đều phụ thuộc vào chu kỳ lấy mẫu T cho nên điều kiện điều khiển được cũng phụ thuộc vào T .

Trong trường hợp có nghiệm phức: $\alpha_i \pm j\omega_i$, ma trận chéo A có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & A_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ với } A_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & \alpha_i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

Do gián đoạn hoá với chu kỳ lượng tử T nên:

$$F_i = e^{A_i T} = \begin{bmatrix} \cos \omega_i T & \sin \omega_i T \\ -\sin \omega_i T & \cos \omega_i T \end{bmatrix} e^{\alpha_i T} \quad (5-28)$$

Nếu T là bội số của bán chu kỳ riêng $T_i = \frac{\pi}{\omega_i}$, nghĩa là $T = n \left(\frac{\pi}{\omega_i} \right)$ thì F_i sẽ suy biến thành:

$$F_i = (-1)^n e^{\alpha_i T} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_i I \quad (5-29)$$

Ma trận điều khiển được sẽ là:

$$C_0 = \begin{bmatrix} b_i & F_i b_i & F_i^2 b_i & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i & \rho_i b_i & \rho_i^2 b_i & \dots \end{bmatrix} \quad (5-30)$$

Số hạng sẽ giảm đi một.

Hệ quả cũng tương tự như vậy đối với ma trận quan sát.

Như vậy việc gián đoạn hoá có thể làm mất khả năng điều khiển được và quan sát được mà điều ấy chỉ xảy ra khi $T = n \left(\frac{\pi}{\omega_i} \right)$.

Để tránh hiện tượng này cần chọn $T < \frac{T_i}{2}$ và nói chung là cần chọn chu kỳ lấy mẫu bé.

V.2.2. Điều kiện điều khiển được

Hệ tuyến tính bậc n ở (5-23) mà điều khiển không có ràng buộc, với điều kiện đầu $x(0)$, trạng thái ở thời điểm kT được xác định bởi:

$$x(k) = F^k x(0) = F^{k-1} G u(0) + F^{k-2} G u(1) + \dots + F G u(k-2) + G u(k-1) \quad (5-31)$$

Trong trường hợp chung, hệ n phương trình với k chưa biết sẽ không có nghiệm với mọi điều kiện cuối $x(k)$ nếu $k < n$. Khi $k = n$ có thể giải các phương trình:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F^{n-1}G & F^{n-2}G & \dots & FG & G \end{bmatrix}}_{\text{Ma trận } C_0(n \times n)} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} = x(n) - F^n x(0) \quad (5-32)$$

với điều kiện là n cột $F^{n-1}G, \dots, FG, G$ của ma trận điều khiển C_0 , độc lập tuyến tính nghĩa là có số hạng là n . Hậu quả là tồn tại chuỗi điều khiển để đưa hệ từ trạng thái ban đầu $x(0)$ đến trạng thái cuối mong muốn $x(n)$.

Tóm lại, hệ là điều khiển được nếu:

$$\text{rank}[G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G] = n \quad (5-33)$$

Điều kiện (5-33) là điều kiện cần và đủ.

V.2.3. Điều kiện quan sát được

Theo (5-31) đáp ứng tự do ($u(i) = 0$) ở đầu ra $y = Cx$ tại thời điểm kt là:

$$y_i(k) = CF^k x(0).$$

Để xác định n thành phần của trạng thái ban đầu $x(0)$ cần ít nhất n quan sát ở các thời điểm $0, T, \dots, (n-1)T$ các đáp ứng tự do:

$$\begin{bmatrix} y_i(0) \\ y_i(1) \\ \vdots \\ y_i(n-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CF \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Ma trận } Ob(n \times n)} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad (5-34)$$

Hệ tuyến tính trên có một nghiệm và chỉ một mà thôi nếu n hàng của ma trận quan sát được Ob đều độc lập tuyến tính, nghĩa là rank của ma trận Ob là n :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CF \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5-35)$$

V.3. TỔNG HỢP LUẬT ĐIỀU KHIỂN

Mô tả trạng thái của hệ liên tục với dạng:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5-36a)$$

$$y = Cx \quad (5-36b)$$

Giả thiết từ máy tính, vectơ điều khiển được đưa đến hệ liên tục, bây giờ các biểu thức trên có dạng gián đoạn:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \quad (5-37)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (5-38)$$

$$\text{mà} \quad F = e^{\Delta T} \quad (5-39)$$

$$G = \int_0^T e^{A\eta} d\eta B \quad (5-40)$$

ở đây $\eta = kT + T - \tau$ là biến mới với giả thiết là phần tử lưu giữ không có thời gian trễ.

Có thể dễ dàng biến đổi hàm truyền liên tục cổ điển $W(s)$ sang mô tả trạng thái A, B, C và từ đây chuyển sang dạng rời rạc (với phần tử lưu giữ ZOH), trường hợp hệ đơn giản có thể tính bằng tay.

Một trong những điểm quan trọng của việc tổng hợp hệ trong miền trạng thái là tính đến điều kiện thực tế của hệ.

Ở bước một, giả thiết là ta có được tất cả các trạng thái và trên cơ sở ấy tổng hợp luật điều khiển (Đó là giả thiết không thực tế vì đòi hỏi một lượng cảm biến lớn).

Ở bước hai, tổng hợp bộ quan sát (bộ ước lượng) nhằm ước lượng cả véctơ trạng thái trên cơ sở đo được một phần của nó theo (5-36b). Algorit điều khiển là tổng hợp của luật điều khiển và bộ ước lượng mà luật điều khiển được tính toán theo trạng thái ước lượng hơn là trạng thái thực.

Trường hợp luật điều khiển là hồi tiếp của tổ hợp mọi trạng thái thì :

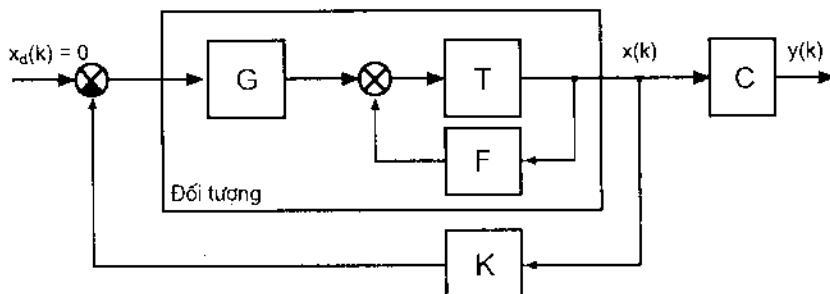
$$u = -Kx = -[K_1 \ K_2 \ \dots] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5-41)$$

Chú ý là luật điều khiển (5-41) có giả thiết là $x_d = 0$ (để phân biệt với mô tả trạng thái x , ở đây dùng x_d là tín hiệu đặt ở đầu vào).

Thay (5-41) vào (5-37) ta có:

$$x(k+1) = Fx(k) - GKx(k) \quad (5-42)$$

Biến đổi z của (5-42) là :



Hình 5.4

$$(zI - F + GK)X(z) = 0 \quad (5-43)$$

và phương trình đặc trưng của hệ với điều khiển giả định là:

$$\det[zI - F + GK] = 0 \quad (5-44)$$

So sánh (5-44) với (5-17) ta thấy việc thêm K vào mạch hồi tiếp làm thay đổi các đại lượng riêng của F bằng đại lượng riêng của ma trận $F - GK$. Như vậy có thể áp đặt một đáp ứng quá độ cho trước bằng cách chọn ma trận K. Bài toán là xác định K_i để dẫn đến nghiệm z_i mong muốn.

Chú ý là hồi tiếp trạng thái làm thay đổi vị trí các nghiệm cực chứ không phải nghiệm không của hàm truyền đối tượng $W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$

V.4. PHƯƠNG PHÁP ÁP ĐẶT NGHIỆM

Tổng hợp luật điều khiển là xác định các phương trình của K sao cho nghiệm của (5-44) ở vị trí mong muốn.

Ví dụ : $z_i = p_1, p_2, p_3 \dots$ tương ứng với phương trình đặc trưng mong muốn.

$$(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \dots = 0 \quad (5-45)$$

Các phương trình (5-44) và (5-45) đều là phương trình đặc trưng của hệ nên chúng bằng nhau. Cân bằng các hệ số cùng bậc của z ta sẽ xác định được K_i chứa đựng ở biểu thức (5-44).

Ví dụ 5-1

Tổng hợp luật điều khiển cho hệ điều khiển vệ tinh mô tả bởi phương trình trạng thái:

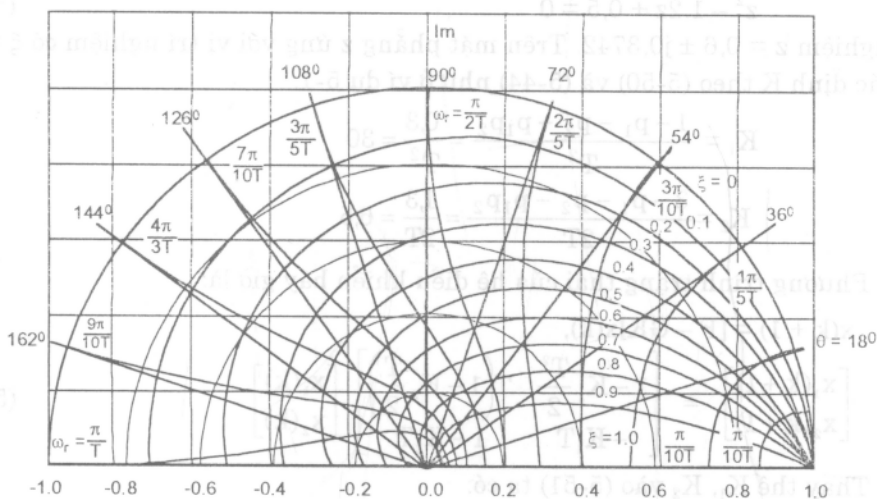
$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5-46)$$

Sau khi chuyển sang mô hình gián đoạn, ta có:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Cần áp đặt các nghiệm trong hệ kín trong mặt phẳng z sao cho ở mặt phẳng s các nghiệm tương đương có tỷ số tắt dần $\xi = 0,5$ và phần thực của nghiệm $s = -1,8 \text{ rad/sec}$ (nghĩa là $s = -1,8 \pm j3,12 \text{ rad/sec}$). Vì $z = e^{sT}$ với thời gian lấy mẫu $T = 0,1 \text{ sec}$ ta xác định $z = 0,8 \pm j0,25$ như ở hình 5.5. Phương trình đặc trưng tương đương sẽ là:

$$z^2 - 1,6z + 0,7 = 0 \quad (5-47)$$



Hình 5.5

Mặt khác (5-44) có dạng:

$$\det \left[z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\text{hay : } z^2 + (TK_2 + (\frac{T^2}{2})K_1 - 2)z + (\frac{T^2}{2})K_1 - TK_2 + 1 = 0 \quad (5-48)$$

So sánh hệ số cùng bậc của hàm mũ z ta rút ra hai phương trình với hai ẩn của K :

$$TK_2 + (\frac{T^2}{2})K_1 - 2 = -1,6.$$

$$(\frac{T^2}{2})K_1 - TK_2 + 1 = 0,7.$$

Với $T = 0,1$ sec, tính ra :

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{0,10}{T^2} = 10, \\ K_2 &= \frac{0,35}{T} = 3,5. \end{aligned} \right\} \quad (5-49)$$

Ví dụ 5-2

Cũng với hệ trên, áp đặt hai nghiệm phức ($p_1 = p_2^*$) mà tích của chúng và phần thực được xác định bởi.

$$\rho^2 = p_1 p_2 = 0,5, \quad p_1 + p_2 = 2\text{Re}(p_1) = 2\text{Re}(p_2) = 1,2$$

ứng với (5-47) ở ví dụ 5-1:

$$z^2 - 1,2z + 0,5 = 0 \quad (5-50)$$

và nghiệm $z = 0,6 \pm j0,3742$. Trên mặt phẳng z ứng với vị trí nghiệm có $\xi = 0,5$ ta xác định K theo (5-50) và (5-44) như ở ví dụ 5-1:

$$K_1 = \frac{1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2}{T^2} = \frac{0,3}{T^2} = 30$$

$$K_2 = \frac{3 - p_1 - p_2 - p_1 p_2}{2T} = \frac{1,3}{2T} = 6,5$$

Phương trình trạng thái của hệ điều khiển bây giờ là:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= [F - GK]\mathbf{x}(k), \\ \text{hay: } \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - K_1 \frac{T^2}{2} & T \left(1 - K_2 \frac{T}{2} \right) \\ -K_1 T & 1 - K_2 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-51)$$

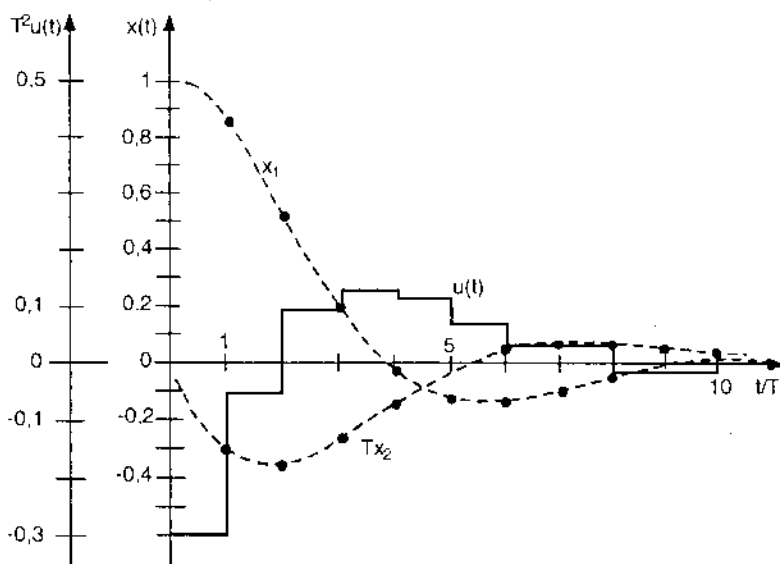
Thay thế K_1, K_2 vào (5-51) ta có:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,675 \\ -0,3 & 0,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (5-52)$$

và ta có điều khiển :

$$u(k) = -\frac{1}{T^2} [0,3x_1 + 0,65Tx_2] \quad (5-53)$$

Đáp ứng phụ thuộc vào điều kiện đầu $x_1(0), x_2(0)$. Ở hình 5.6 có $x_1(0) = 1$,



Hình 5.6

$x_2(0) = 0$. So sánh với hệ có đáp ứng với thời gian cực tiểu (cho các nghiệm $p_1 = p_2 = 0$, ta có $K_1 = \frac{1}{T^2}$, $K_2 = \frac{3}{2T}$), ta thấy đáp ứng chậm hơn nhưng điều khiển êm dịu hơn và ít tổn thất năng lượng hơn.

Điều cần lưu ý là khi bậc của hệ cao, phương pháp thuận tiện cho việc giải bài toán trên máy tính như sau.

Việc xác định K trở nên đơn giản nếu ma trận của hệ có dạng sơ đồ khối như ở hình 5.2. Đó là dạng "điều khiển chính tắc" vì rất thuận lợi trong việc tổng hợp luật điều khiển. Ở hình 5.2 xem biến trạng thái là đầu ra của các phân tử trễ, đánh số từ trái. Trong trường hợp này, với $n = 3$ và giả thiết $b_0 = 0$ ta có:

$$F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \quad (5-53)$$

với hàm truyền đạt dạng (2-62) và $n = 3$, phương trình đặc trưng là $\Delta(z) = z^3 - a_1 z^2 - a_2 z - a_3$. Các phân tử ở hàng thứ nhất của F_c là hệ số của đa thức đặc trưng của hệ. Bây giờ, nếu xét ma trận hệ kín $F_c - G_c K$ ta có:

$$F_c - G_c k = \begin{bmatrix} -a_1 - K_1 & -a_2 - K_2 & -a_3 - K_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-54)$$

Phương trình đặc trưng của hệ kín của (5-54) là:

$$\Delta_K(z) = z^3 + (a_1 + K_1)z^2 + (a_2 + K_2)z + (a_3 + K_3) = 0$$

Như vậy, nếu vị trí mong muốn của các nghiệm tương ứng với phương trình đặc trưng:

$$\Delta_K(z) = z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0$$

thì các đại lượng K cần thiết là:

$$K_1 = \alpha_1 - a_1, \quad K_2 = \alpha_2 - a_2, \quad K_3 = \alpha_3 - a_3 \quad (5-55)$$

Như vậy sau khi có F, G và phương trình đặc trưng mong muốn $\Delta_K(z) = 0$, chuyển F, G sang dạng điều khiển F_c , G_c và xác định K theo (5-55). Cuối cùng vì các đại lượng K được tính cho trạng thái ở dạng điều khiển nên cần đưa về trạng thái xuất phát. Phương pháp này thuận tiện cho người thiết kế và đã đưa vào chương trình mẫu thực hiện trên máy tính.

V.3. CÔNG THỨC ACKERMANN

Sau khi đánh giá hệ là điều khiển được, ma trận hồi tiếp K có thể xác định nhưng khá phức tạp, nhất là khi hệ có bậc cao, phương pháp dùng biến đổi

F_n, G_n làm đơn giản quá trình tính toán. Một công thức khác cũng rất thuận lợi khi áp dụng đã được Ackermann (1972) nêu lên. Công thức Ackermann được mô tả như sau :

$$K = [0 \dots 0 \ 1] [G \ FG \ F^2G \ \dots \ F^{n-1}G]^T \Delta_K(F) \quad (5-56)$$

mà $C_n = [G \ FG \ F^2G \ \dots \ F^{n-1}G]$ là ma trận quan sát được; n là bậc của hệ hay số lượng các trạng thái và F được thay cho z ở phương trình đặc trưng để có :

$$\Delta_K(F) = F^n + \alpha_1 F^{n-1} + \alpha_2 F^{n-2} + \dots + \alpha_n I \quad (5-57)$$

mà α_i là hệ số của phương trình đặc trưng mong muốn:

$$\Delta_K(z) = |zI - F + GK| = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n \quad (5-58)$$

Chú ý rằng nếu z được thay bằng s ở (5-58); F thay bằng A ; G thay bằng B ta có trường hợp áp đặt nghiệm ở hệ liên tục tương ứng. Do đó công thức Ackermann có thể dùng ở trường hợp gián đoạn cũng như liên tục.

Bây giờ ta chứng minh công thức Ackermann cho phương pháp áp đặt nghiệm để tổng hợp hệ.

Cho đối tượng có phương trình:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

Nếu dùng luật điều khiển $u = -Kx$ thì phương trình đặc trưng của hệ kín:

$$\Delta_K(z) = \det |zI - F + GK| = 0 \quad (5-59)$$

Trước hết chọn $\Delta_K(z)$ sao cho nghiệm cực của hệ kín được phân bố hợp lý, sau đó xác định K sao cho (5-59) được thoả mãn. Theo phương pháp này, cần biến đổi phương trình của đối tượng sang dạng điều khiển chính tắc.

Trước tiên ta nêu rõ hiệu quả của việc biến đổi tùy ý, không suy biến của trạng thái :

$$x = Tw \quad (5-60)$$

Từ (5-60) các phương trình chuyển động ở trạng thái mới là:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Tw_{k+1} \\ &= Fx_k + Gu_k \\ &= FTw_k + Gu_k \\ w_{k+1} &= T^{-1}F Tw_k + T^{-1}Gu_k \\ &= \tilde{A}w_k + \tilde{B}u_k \end{aligned} \quad (5-61)$$

Bây giờ dùng ma trận điều khiển được :

$$C_{OX} = [G : FG : F^2G : \dots : F^{n-1}G]$$

$$\text{và} \quad C_{OW} = [\tilde{B} : \tilde{A}\tilde{B} : \tilde{A}^2\tilde{B} : \dots : \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Xét hiệu quả của biến đổi (5-60) đối với ma trận bằng cách thay thế từ (5-61):

$$\tilde{B} = T^{-1}G, \quad \tilde{A} = T^{-1}FT.$$

$$\text{Từ đó} \quad C_{ow} = [T^{-1}G : T^{-1}FTT^{-1}G : \dots] = T^{-1}C_{ox}, \quad (5-62)$$

$$\text{và} \quad T = C_{ox}C_{ow}^{-1} \quad (5-63)$$

Từ (5-62) thấy rằng C_{ox} là không suy biến và với T không suy biến thì C_{ow} cũng không suy biến. Như vậy tính điều khiển được sẽ không thay đổi.

Đối với (5-63) ta dùng cách tiếp cận khác.

Giả sử ta tìm được phép biến đổi để phương trình chuyển động (F, G) được đặt dưới dạng điều khiển chính tắc như ở hình 1.10 và (5-53). Ta sẽ thấy C_{ow} luôn là không suy biến. Từ (5-63) ta kết luận rằng T sẽ tồn tại như phép biến đổi không suy biến nếu và chỉ nếu C_{ox} là không suy biến.

Như vậy: (F, G) có thể biến đổi sang dạng điều khiển chính tắc nếu và chỉ nếu $C_n(F, G)$ là không suy biến.

Ví dụ trường hợp hệ bậc ba như ở (5-53) :

$$\tilde{A} = F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-64)$$

Ma trận điều khiển được là:

$$C_{ow} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & a_1^2 + -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-65)$$

Vì là ma trận tam giác với 1 ở đường chéo nên không suy biến như đã khảo sát trên. Cũng cần chú ý rằng hàng cuối của C_{ow} là vectơ đơn vị với mọi phần tử bằng không ngoại trừ phần tử cuối cùng bằng 1.

Như đã nêu phần cuối của mục V-4, việc xác định luật điều khiển cho trạng thái w khi phương trình chuyển động ở dạng điều khiển chính tắc là hiển nhiên. Phương trình đặc trưng của F_c là:

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \quad (5-66)$$

và phương trình đặc trưng của hệ kín (w hồi tiếp) rút ra từ:

$$F_c - G_c K$$

có các hệ số: $z^3 + (a_1 + K_{w1})z^2 + (a_2 + K_{w2})z + (a_3 + K_{w3}) = 0$

Tương thích với phương trình đặc trưng của hệ kín :

$$\Delta_K(z) = z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3$$

Ta chỉ cần làm cho:

$$a_1 + K_{w1} = \alpha_1, \quad a_2 + K_{w2} = \alpha_2, \quad a_3 + K_{w3} = \alpha_3$$

hay dưới dạng tổng quát:

$$a + K_w = \alpha \quad (5-67)$$

mà a và α là vectơ hàng các hệ số từ đa thức đặc trưng của hệ hở và hệ kín tương ứng.

Ta cần tìm mối liên quan giữa những hệ số này với ma trận F . Định lý Cayley Hamilton chỉ ra rằng, nếu ma trận được thay vào đa thức đặc trưng của nó thì kết quả bằng không. Đối với F_c ta có :

$$F_c^n + a_1 F_c^{n-1} + a_2 F_c^{n-2} + \dots + a_n I = 0 \quad (5-68)$$

Giả sử ta xác định được đa thức $F_K(F)$ là đa thức đặc trưng hệ kín :

$$\Delta_K(F) = F^n + \alpha_1 F^{n-1} + \alpha_2 F^{n-2} + \dots + \alpha_n I \quad (5-69)$$

Nếu giải (5-68) đối với F^n và thay vào (5-69) ta có kết quả lý thú :

$$\Delta_K(F_c) = (\alpha_1 - a_1) F_c^{n-1} + (\alpha_2 - a_2) F_c^{n-2} + \dots + (\alpha_n - a_n) I \quad (5-70)$$

Vì F_c là dạng đặc biệt, ta sẽ thấy có cái gì đó đặc biệt sẽ xuất hiện nếu nhân (5-70) với vectơ đơn vị chuyển vị bậc n , $e_n^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$.

Ta thấy rằng:

$$e_n^T F_c = [0 \ \dots \ 1 \ 0] = e_{n-1}^T \quad (5-71)$$

như suy ra từ (5-64). Nếu nhân vectơ này với F_c lần nữa ta có:

$$(e_n^T F_c) F_c = [0 \ \dots \ 1 \ 0] F_c = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0] = e_{n-2}^T \quad (5-72)$$

Tiếp tục như thế ta sẽ có vectơ đơn vị:

$$e_n^T F_c^{n-1} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] = e_1^T \quad (5-73)$$

Nếu nhân (5-70) với e_n^T ta có:

$$\begin{aligned} e_n^T \Delta_K(F_c) &= (\alpha_1 - a_1) e_1^T + (\alpha_2 - a_2) e_2^T + \dots + (\alpha_n - a_n) e_n^T \\ &= [K_{w1} \ K_{w2} \ \dots \ K_{wn}] = K_w \end{aligned} \quad (5-74)$$

như (5-67) đã nói lên mối liên hệ của K_w với α và a .

Ở biểu thức (5-74) có mối liên hệ giữa K với hệ ở dạng điều khiển chính tắc. Ta cần tìm K_X dùng cho trạng thái xuất phát. Quay lại với biến đổi T để tìm biến dạng cần thiết.

Nếu $u = -K_w w$ thì $u = -K_w T^{-1} x$ sao cho:

$$\begin{aligned} K_X &= K_w T^{-1} \\ &= e_n^T \Delta_K(F_c) T^{-1} = e_n^T \Delta_K(T^{-1} F T) T^{-1} \\ &= e_n^T T^{-1} \Delta_K(F) \end{aligned} \quad (5-75)$$

Ở bước cuối cùng, ta dùng $(T^{-1}FT)^k$ tức là $T^{-1}F^kT$ và F_k là đa thức, tổng của các hàm mũ F_c . Còn T^{-1} ? Từ (V.62) ta rút ra:

$$T^{-1} = C_{OW} C_{OX}^{-1}$$

$$\text{nên } K_X = e_n^T (C_{OW} C_{OX}^{-1}) \Delta_K(F) \quad (5-76)$$

Bây giờ ta trở lại với nhận xét là hàng cuối cùng của C_{OW} , tức là $e_n^T C_{OW}$ lại là e_n^T ! Công thức Ackermann cuối cùng có dạng:

$$K_X = e_n^T C_{OX}^{-1} \Delta_K(F) \quad (5-77)$$

Giải hệ phương trình trên sẽ giản đơn. Nếu mô tả vectơ b^T như:

$$e_n^T C_{OX}^{-1} = b^T, \quad (5-78)$$

$$\text{ta giải } b^T C_{OX} = e_n^T \quad (5-79)$$

$$\text{và từ đó } K_X = b^T F_K(F).$$

Ví dụ 5-3

Dùng công thức Ackermann cho hệ điều khiển vệ tinh ở ví dụ 5-1 để xác định ma trận hồi tiếp K .

Từ (5-46) ta có: $\alpha_1 = -1,6$; $\alpha_2 = +0,7$ do đó:

$$\Delta_K(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1,6 \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0,7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4T \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Ta xác định:

$$\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 & 3T^2/2 \\ T & T \end{bmatrix}$$

$$\text{và } \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{T^2} \begin{bmatrix} -1 & +3T/2 \\ 1 & -T/2 \end{bmatrix}$$

cuối cùng:

$$K = [K_1 \ K_2] = \frac{1}{T^2} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3T}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4T \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$[K_1 \ K_2] = \frac{1}{T^2} [0,1 \ 0,357] = [10 \ 3,5]$$

Kết quả hoàn toàn như ở ví dụ 5-1.

V.6. BỘ QUAN SÁT ĐỘNG

Luật điều khiển đã được tổng hợp ở mục V.3 với giả thiết là mọi thành phần của trạng thái đều tồn tại ở hồi tiếp.

Thực tế không phải tất cả các thành phần đều đo được; những thành phần còn thiếu cần được tái tạo lại cho luật điều khiển.

Ở đây sẽ đề cập đến phương pháp ước lượng toàn bộ trạng thái theo đại lượng đo được đối với một trong các thành phần trạng thái. Điều đó sẽ bảo đảm có được các thành phần bị mất cũng như bảo đảm đại lượng đo được là trên mà sai số ngẫu nhiên hay nhiễu đã làm xấu đi. Có hai loại: *ước lượng hiện trạng*, $\hat{x}(k)$ nếu dựa vào lượng đo $y(k)$ và *ước lượng dự báo* $\bar{x}(k)$ nếu dựa vào các lượng đo $y(k-1)$. Nội dung phương pháp là dùng $u = -K \hat{x}$ hay $u = -K \bar{x}$ để thay thế cho trạng thái thực ở (5-41). Giải pháp là tạo nên vectơ $\hat{x}(k)$ dựa vào một hệ động học phụ.

V.6.1. Bộ quan sát (ước lượng) dự báo

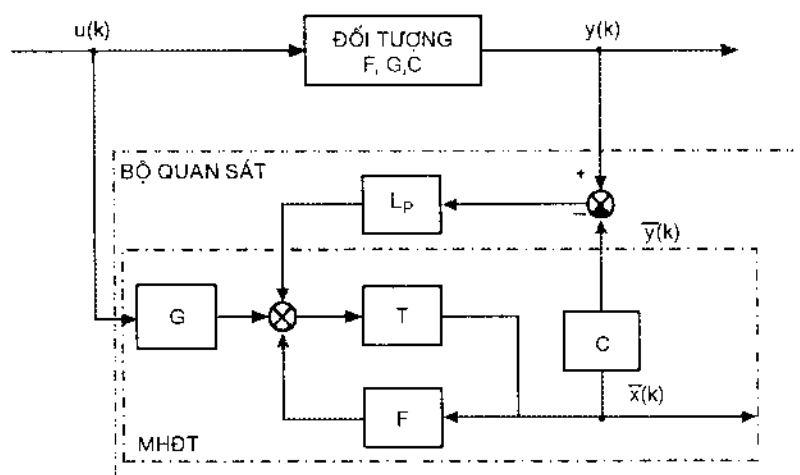
Phương pháp ước lượng trạng thái là lập mô hình cho đối tượng động học: $\bar{x}(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$ với $\bar{x}(0) = x(0)$ mà đầu vào là điều khiển $u(k)$ có nguy cơ ngày càng xa trạng thái thực vì:

- Điều kiện đầu không biết hay biết không đầy đủ.
- Ma trận F , G có được bằng nhận dạng cũng chỉ là gần đúng.
- Nhiều tác động vào hệ thống không được tính đến.

Do đó cần hiệu chỉnh lại trạng thái đo được ở từng thời điểm bằng cách đưa vào phương trình một thành phần tỷ lệ (hệ số L) với sai lệch giữa $y(k)$ và tín hiệu ra $\bar{y}(k) = C\bar{x}(k)$:

$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + Gu(k) + L_p[y(k) - \bar{y}(k)] \quad (5-80)$$

Đầu ra của đối tượng cũng là đầu vào của bộ quan sát.



Hình 5.7

Phương trình động học của bộ quan sát:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{F} - \mathbf{L}_p \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}u(k) + \mathbf{L}_p y(k) \quad (5-81)$$

được xác định bởi đại lượng riêng của $\mathbf{F} - \mathbf{L}_p \mathbf{C}$ và phụ thuộc ma trận hệ số $\mathbf{L}_p (m \times n)$.

Ma trận này được xác định sao cho sai lệch ước lượng trạng thái $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)$ tiến đến không càng nhanh càng tốt so với thời gian cực tiểu đặc trưng của hệ.

Sự khác nhau giữa (5-37), (5-38) và (5-80) cho ta:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{F} - \mathbf{L}_p \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) &= (\mathbf{F} - \mathbf{L}_p \mathbf{C})^k \tilde{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-82)$$

Các phần tử của ma trận $\mathbf{L}_p$ được tính như với ma trận hồi tiếp $\mathbf{K}$ theo phương pháp cân bằng hệ số:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}_p \mathbf{C}| = (z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n) = \Delta'_p(z) \quad (5-83)$$

mà μ_i là nghiệm mong muốn của phương trình đặc trưng, có thể bằng công thức Ackermann theo ma trận quan sát được như đã nêu ở mục V.2.3.

$$\mathbf{L}_p = \Delta'_p(\mathbf{F}) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CF} \\ \vdots \\ \mathbf{CF}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-84)$$

mà $\Delta'_p(\mathbf{F})$ là phương trình đặc trưng mong muốn của bộ quan sát.

Phương trình (5-81) xác định bộ quan sát dự báo vì nó cho trạng thái ở thời điểm $(k+1)T$ từ đại lượng đo được ở thời điểm kT .

Bộ quan sát ước lượng hiện trạng trước tiên ở thời điểm kT dự báo trạng thái ở $(k+1)T$ xuất phát từ trạng thái trước đó $\hat{\mathbf{x}}(k)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}u(k) \quad (5-85)$$

Bộ quan sát ước lượng hiện trạng sẽ đề cập đến ở mục kế tiếp.

Ví dụ 5-4

Với ví dụ 5-1 hãy xác định bộ quan sát dự báo.

Đại lượng đo được vẫn là vị trí - trạng thái x_1 nên $\mathbf{C} = [1 \ 0]$

Nghiệm được chọn để áp đặt là $z = 0,4 \pm j0,4$. Theo hình 5.5 tương ứng với $\xi = 0,6$ và ω_r quá trình nhanh hơn ba lần nghiệm đã chọn. Phương trình đặc trưng mong muốn là:

$$z^2 - 0,8z + 0,32 = 0 \quad (5-86)$$

cân bằng với (5-83) đối với $\mathbf{L} = \mathbf{L}_p$:

$$\det \left[z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{p1} \\ L_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (5-87)$$

$$\text{hay: } z^2 + (L_{p1} - 2)z + TL_{p2} + 1 - L_{p1} = 0 \quad (5-88)$$

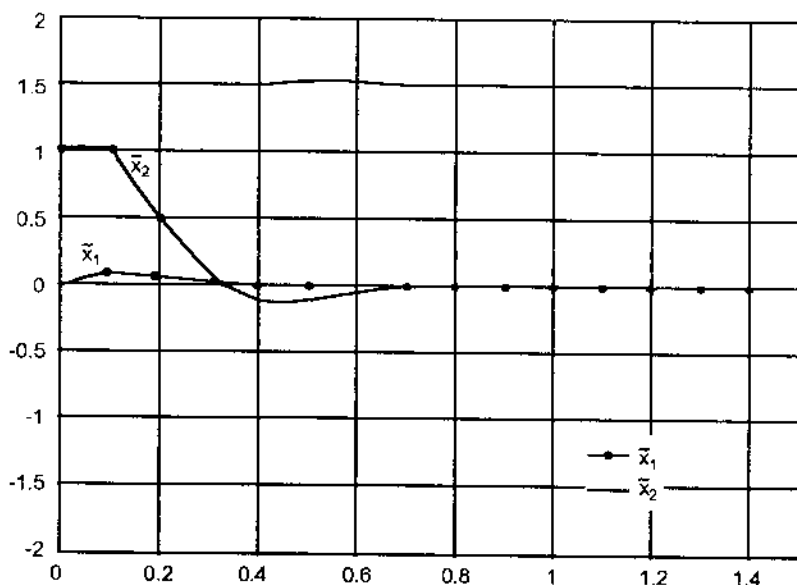
$$\text{Từ đó } L_{p1} - 2 = -0,8; \quad TL_{p2} + 1 - L_{p1} = 0,32$$

$$\text{với } T = 0,1; \quad L_{p1} = 1,2; \quad L_{p2} = \frac{0,52}{T} = 5,2 \quad (5-89)$$

Angorít của bộ quan sát (5-80) với L_p theo (5-89) cho kết quả:

$$\bar{x}_1(k+1) = \bar{x}_1(k) + 0,005u(k) + 0,1\bar{x}_2(k) + 1,2[y(k) - x_1(k)]$$

$$\bar{x}_2(k+1) = \bar{x}_2(k) + 0,1u(k) + 5,2[y(k) - x_1(k)]$$



Hình 5.8

Ở hình 5.8 có sai lệch của ước lượng $\tilde{x}_1$ và $\tilde{x}_2$ theo (5-82) với điều kiện đầu bằng không đối với x_1 và bằng 1 rad/sec đối với x_2 .

Thời gian quá độ của $\tilde{x}_2$ bé vì L_p lớn do chọn nghiệm của bộ quan sát nhanh, điều này thích hợp khi có nhiễu đáng kể. Đối với bài toán chọn bộ điều chỉnh thì những chỉ tiêu khác quan trọng hơn, nên khi nhiễu không đáng kể, L_p bé thì sai lệch ước lượng sẽ nhỏ.

V.6.2. Bộ quan sát (ước lượng) hiện trạng

Như đã nêu, dạng của phương trình (5-80) có được tại trạng thái ước lượng $\bar{x}(k)$ sau khi nhận được $y(k-1)$. Nghĩa là đại lượng điều khiển hiện tại không

phụ thuộc hoàn toàn vào đại lượng quan sát hiện tại và sẽ không đòi hỏi chính xác cao. Đối với các hệ bậc cao được điều khiển bằng máy tính có tốc độ chậm hay khi chu kỳ lấy mẫu là đáng kể so với thời gian tính, thời gian trễ giữa quan sát và thời gian tín hiệu điều khiển được đưa ra lại là thuận lợi, vì nó cho phép máy tính hoàn thành được việc tính toán. Trong nhiều hệ, thời gian trễ tính (5-80) rất ngắn so với chu kỳ lấy mẫu và độ trễ giữa thời gian đo tín hiệu và thời gian dùng kết quả tính để điều khiển trở nên thừa thãi. Do đó cần xây dựng bộ ước lượng hiện trạng $\hat{x}(k)$ trên cơ sở của đại lượng $y(k)$ đo được. Biến dạng của (5-80) cho ta:

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + L_c(y(k) - C\bar{x}(k)) \quad (5-90a)$$

mà $\bar{x}(k)$ là ước lượng dự báo trên cơ sở của mô hình dự báo nói trên, nghĩa là:

$$\bar{x}(k) = F\bar{x}(k) + Gu(k-1) \quad (5-90b)$$

Dạng điều khiển của ước lượng này không thể thực hiện chính xác được vì không thể lấy mẫu, tính và đưa ra tín hiệu tức khắc. Tuy nhiên việc xác định $u(k)$ trên cơ sở (5-90) nhằm giảm thiểu độ trễ do tính toán trước khi kết thúc chu kỳ lấy mẫu mà nó không phụ thuộc trực tiếp vào $y(k)$ đo được.

Để thấy rõ sự khác nhau giữa dạng dự báo và hiện trạng, hãy thay (5-90a) vào (5-90b), ta có:

$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + Gu(k) + FL_c[y(k) - C\bar{x}(k)] \quad (5-91)$$

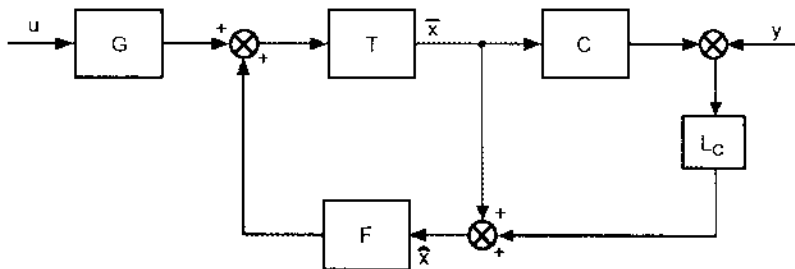
Sai số ước lượng đối với $\bar{x}(k)$ xác định từ (5-91) và (5-23), (5-24) theo (5-82):

$$\tilde{x}(k+1) = [F - FL_cC]\tilde{x}(k) \quad (5-92)$$

So sánh (5-91) với (5-80) và (5-92) với (5-82) ta thấy $\bar{x}$ ở phương trình ước lượng hiện trạng (5-92) cũng là $\bar{x}$ ở phương trình ước lượng dự báo (5-80) và từ đó có mối liên hệ:

$$L_p = FL_c \quad (5-93)$$

Mối liên hệ ấy có thể thấy ở sơ đồ khối như ở hình 5.9 theo (5-92). Ở đây $\hat{x}$ và $\bar{x}$ là những tín hiệu ra khác nhau của cùng một hệ ước lượng.



Hình 5.9

Phương trình sai số ước lượng đối với $\hat{x}(k)$ còn có thể xác định từ (5-90) và (5-23), (5-24):

$$\tilde{x}(k+1) = [F - L_c CF] \tilde{x}(k) \quad (5-94)$$

Cả hai phương trình (5-94) và (5-92) có cùng nghiệm. Biểu thức (5-94) giống (5-82) ngoại trừ CF được thay thế bởi C . Nếu dùng công thức Ackermann đối với L_c ta dùng (5-84) với C được thay thế bởi CF :

$$L_c = \Delta_c^{-1}(F) \begin{bmatrix} CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-95)$$

mà $\Delta_c^{-1}(F)$ cơ sở trên sự phân bố nghiệm mong muốn của bộ quan sát (ước lượng):

$$\Delta_c^{-1}(F) = F^n + \alpha_1 F^{n-1} + \alpha_2 F^{n-2} + \dots + \alpha_n I \quad (5-96)$$

mà α_i là hệ số của phương trình đặc trưng mong muốn:

$$\Delta_c^{-1}(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (5-97)$$

Nếu dùng dạng điều khiển của công thức Ackermann ta dùng chuyển vị của $F - L_c CF$ là $F^T - F^T C^T L_c^T$ cùng dạng với ma trận $F - GK$ của bài toán điều khiển. Cho nên, thay F^T cho F và $F^T C^T$ cho G dẫn đến kết quả L_c^T thay K . Ta có thể tính L_p theo (5-84) sau đó dùng (5-95) để xác định:

$$L_c = F^{-1} L_p \quad (5-98)$$

Ví dụ 5-5

Dùng ước lượng hiện trạng cho ví dụ 5-4. Phương trình (5-98) với L_p đã tính theo (5-89) ta có:

$$L_c^T = [0,68 \quad 5,2]$$

Như vậy việc thực hiện bộ quan sát theo (5-92) để giảm thời gian tính càng nhiều càng tốt, trước khi lấy mẫu là:

$$x_1(k) = \hat{x}_1(k-1) + 0,005u(k-1) + 0,1\hat{x}_2(k-1);$$

$$x_2(k) = \hat{x}_2(k-1) + 0,1u(k-1);$$

$$x_1' = (1 - 0,68) x_1(k);$$

$$x_2' = (1 - 5,2) x_2(k).$$

và sau khi lấy mẫu $y(k)$ là:

$$\hat{x}_1(k) = x_1' + 0,68y(k),$$

$$\hat{x}_2(k) = x_2' + 5,2y(k).$$

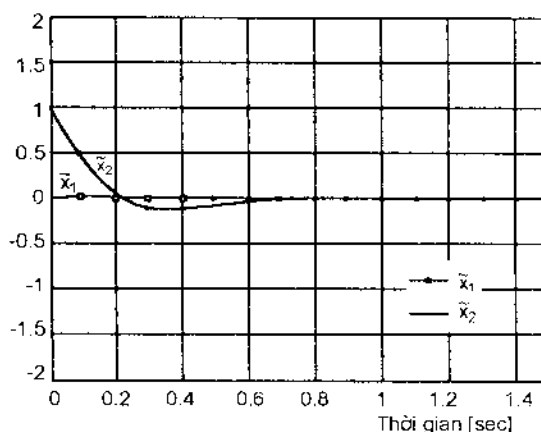
Ở thời điểm ấy bộ quan sát trạng thái sẵn sàng tính cho điều khiển.

Ở hình 5.10 có đặc tính sai số ước lượng theo (5-94) với điều kiện đầu bằng không đối với ước lượng vị trí và 1 rad/sec đối với ước lượng tốc độ. Hình 5.10 rất giống với hình 5.9 của bộ quan sát dự báo.

Nếu F suy biến như ở các hệ có trễ, (5-95) cũng như (5-98) đều không thể dùng được. Tuy nhiên nếu nhìn vào phương trình sai số ước lượng ta sẽ tìm thấy một nghiệm ở

gốc trục tọa độ của mặt phẳng z . Nghiệm bằng không này tương ứng với phần tử trạng thái trễ mà ước lượng của nó xem như bằng đại lượng đo được, cho nên rất logic nếu kết hợp hệ số khuếch đại với trạng thái này thành một.

Ta có hai dạng ước lượng : ước lượng dự báo ($\hat{x}(k)$ ở (5-91) hay (5-80)) và ước lượng hiện trạng ($\hat{x}(k)$ từ (5-91)). Ước lượng hiện trạng thường được dùng đến vì nó mang tính tức thời nhất của đại lượng đo được y . Nhược điểm của nó là trước khi máy tính xác định (5-91) và (5-41) thì sẽ chưa có dữ liệu nào cả, cho nên việc tạo nên độ trễ mà không tính đến ở quá trình thiết kế, sẽ làm giảm độ tắt dần của hệ còn hơn là xác định chính xác nghiệm mong muốn. Dùng ước lượng dự báo để điều khiển loại trừ được sai số mô phỏng do ẩn trạng mà có, vì nó có thể tính từ đại lượng đo được $y(k-1)$ bảo đảm được cả chu kỳ lấy mẫu để tính $u(k)$ trước khi cần đến nó. Nói chung người ta dùng ước lượng hiện trạng vì nó cho lời giải nhanh nhất để biết được nhiều và sai số đo, nghĩa là điều chỉnh tín hiệu ra mong muốn tốt hơn. Nhược điểm ở đáp ứng của hệ là ẩn trạng của độ trễ trong tính toán mà có thể tìm thấy khi mô phỏng hay thực nghiệm là có thể sửa lại được bằng phép tính lặp các vị trí nghiệm mong muốn, hay tính lại một cách chính xác sau khi đưa vào mô hình của đối tượng thời gian trễ.



Hình 5.10

V.6.3. Bộ quan sát (ước lượng) được giảm bậc

Các bộ quan sát đã được đề cập đến được thiết kế để phục hồi lại toàn bộ vectơ trạng thái dựa vào những trạng thái đã đo được. Người ta có thể hỏi : Vì sao lại phải phục hồi những trạng thái mà có thể trực tiếp đo được? Câu trả lời là: không cần phải thế, mặc dù khi có nhiều đáng kể ở đại lượng đo được. Bộ ước lượng với đầy đủ trạng thái nhằm làm trơn các trạng thái đã đo được và tái tạo lại những trạng thái không đo được.

Bộ ước lượng được giảm bậc do Luenberger (1964) nêu lên và Gopinath (1971) phát triển. Để nghiên cứu bộ ước lượng cho phần trạng thái không đo được, ta chia vectơ trạng thái ra hai thành phần: x_a là thành phần đo được trực tiếp, như y , còn x_b là thành phần còn lại cần ước lượng. Mô tả toàn bộ hệ thống, dạng (5-7a) và (5-7b) bây giờ là :

$$\begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ x_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} u(k) \quad (5-99a)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ x_b(k) \end{bmatrix} \quad (5-99b)$$

và thành phần mô tả động học của trạng thái không đo được là :

$$x_b(k+1) = F_{bb}x_b(k) + \underbrace{F_{ba}x_a(k) + G_b u(k)}_{\text{"đầu vào" đã biết}} \quad (5-100)$$

mà hai thành phần của vế phải đã biết và xem như tín hiệu vào của hệ động học x_b . Nếu thay đổi lại x_a ở (5-99a) ta có :

$$\underbrace{x_a(k+1) - F_{aa}x_a(k) - G_a u(k)}_{\text{"đại lượng đo được" đã biết}} = F_{ab}x_b(k) \quad (5-101)$$

Đó là mối quan hệ giữa các đại lượng đo được ở vế trái và trạng thái chưa biết ở vế phải. Do đó (5-100) và (5-101) có cùng mối liên hệ với x_b như (5-7) đã có đối với mọi trạng thái x .

Bây giờ ta có thể dùng những thay thế sau đây:

$$x \leftarrow x_b; \quad F \leftarrow F_{bb}; \quad Gu(k) \leftarrow F_{ba}x_a(k) + G_b u(k);$$

$$y(k) \leftarrow x_a(k+1) - F_{aa}x_a(k) - G_a u(k); \quad C \leftarrow F_{ab}.$$

vào phương trình bộ ước lượng dự báo (5-80).

Như vậy phương trình của bộ ước lượng được giảm bậc như sau :

$$\hat{x}_b(k+1) = F_{bb}\hat{x}_b(k) + F_{ba}x_a(k) + G_b u(k) + L_r[(x_a(k+1) - F_{aa}x_a(k) - G_a u(k) - F_{ab}\hat{x}_b(k))] \quad (5-102)$$

Từ (5-100) trừ đi (5-102), ta có phương trình sai số:

$$\tilde{x}_b(k+1) = [F_{bb} - L_r F_{ab}] \tilde{x}_b(k) \quad (5-103)$$

và L_r được chọn y như trước, nghĩa là:

a) Chọn nghiệm của :

$$|zI - F_{bb} + L_r F_{ab}| = \Delta_e(z) \quad (5-104)$$

sao cho đạt được vị trí mong muốn hay:

b) Dùng công thức Ackermann:

$$L_r = \Delta_e(F_{hb}) \begin{bmatrix} F_{ab} \\ F_{ab}F_{bb} \\ F_{ab}F_{bb}^2 \\ \vdots \\ F_{ab}F_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-105)$$

Gopinath (1971) cũng đã chứng minh rằng nếu bộ quan sát đầy đủ ở (5-80) là tồn tại thì bộ quan sát được giảm bậc ở (5-102) cũng tồn tại, có nghĩa là có thể đặt các nghiệm của (5-104) ở đâu tùy ý bằng cách chọn L_r .

Ví dụ 5-6

Xác định bộ quan sát được giảm bậc theo cùng trường hợp với ví dụ 5-4 và 5-5.

Theo (5-99) ta có:

$$\begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{trạng thái vị trí đo được } y \\ \text{tốc độ cần ước lượng} \end{bmatrix} \quad (5-106)$$

mà $F_{aa}, \dots$ là các đại lượng vô hướng nên L_r cũng vậy, chỉ có một nghiệm ước lượng là cần xác định, nghiệm tương ứng với tốc độ mà ước lượng của đại lượng tốc độ vô hướng hội tụ đến. Từ (5-104) tính L_r :

$$z - 1 + L_r T = 0$$

Để cho bộ quan sát này có cùng tốc độ với các bộ quan sát ở hai ví dụ trước với nghiệm $z = 0,4 \pm j0,4$, ta sẽ chọn nghiệm $z = 0,5$; do đó $L_r T - 1 = -0,5$ và $L_r = 5$. Phương trình ước lượng (5-102) là:

$$\hat{x}_b(k) = \hat{x}_b(k-1) + 0,1u(k-1) + 5[y(k) - y(k-1) - 0,005u(k-1) - 0,1\hat{x}_b(k-1)] \quad (5-107)$$

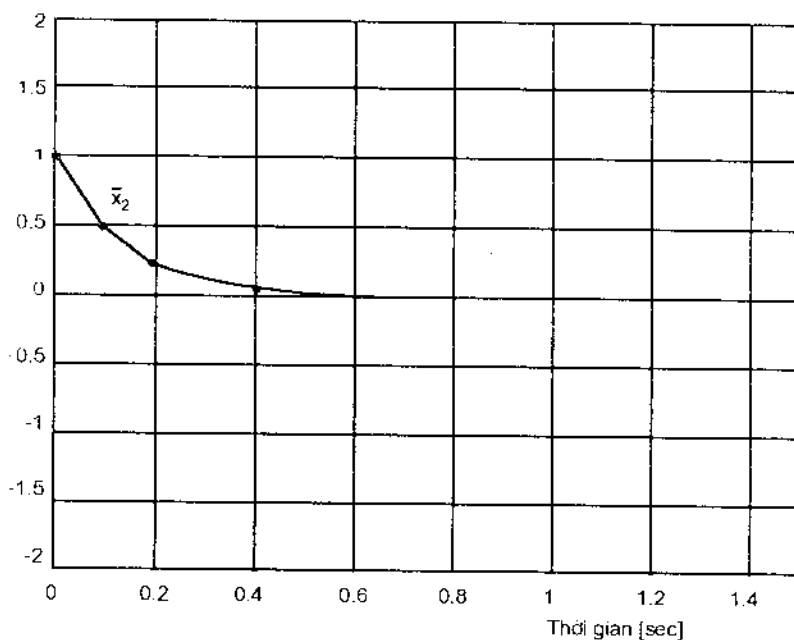
Việc thực hiện ở máy tính trước khi lấy mẫu có dạng như:

$$x' = 0,5\hat{x}_b(k-1) + 0,075u(k-1) - 5y(k-1)$$

và sau khi lấy mẫu:

$$\hat{x}_b(k) = x' + 5y(k).$$

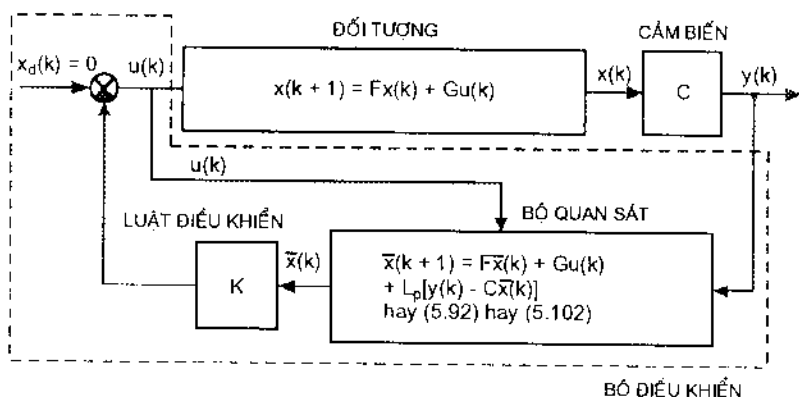
Ở hình 5.11 có đặc tính của sai số ước lượng theo (5-103) với sai số ước lượng ban đầu là 1 rad/sec. Đặc tính ở các hình 5.8, 5.10, 5.11 rất giống nhau. Tất nhiên ở hình 5.11 không có đặc tính sai số ước lượng vị trí vì đã giả thiết rằng đặc tính ấy đo trực tiếp được và không cần làm tròn.



Hình 5.11

V.7. THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN: TỔNG HỢP LUẬT ĐIỀU KHIỂN VÀ ƯỚC LƯỢNG

Khi có luật điều khiển (mục V.3) và để thực hiện, dùng vectơ trạng thái ước lượng (mục V.6) thì sẽ có được hệ điều khiển hoàn chỉnh như ở hình 5.12. Vì khi thiết kế luật điều khiển đã giả thiết rằng, trạng thái thực x đã được dùng để làm hồi tiếp (thay vì $\bar{x}(k)$ trên hình 5-12). Như vậy sẽ có hậu quả gì đối với động học của hệ?



Hình 5.12

Để khảo sát, dùng nguyên tắc "tách biệt" như sau:

Phương trình của đối tượng điều khiển (5-42) có dạng:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (5-108a)$$

mà nó cũng có thể được viết dưới dạng sai số ước lượng $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}\mathbf{K}(\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{x}}(k)) \quad (5-108b)$$

Kết hợp với phương trình sai số ước lượng (5-82) ta có hai phương trình mô tả hành vi của cả hệ thống.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{L}_p\mathbf{C} & 0 \\ -\mathbf{G}\mathbf{K} & \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} \quad (5-109)$$

Phương trình đặc trưng:

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}_p\mathbf{C} & 0 \\ \mathbf{G}\mathbf{K} & z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} \end{bmatrix} = 0 \quad (5-110)$$

Do có ma trận không, nên có thể viết:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{L}_p\mathbf{C}| |z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}| = \Delta_c(z)\Delta_K(z) = 0 \quad (5-111)$$

Nói cách khác, nghiệm của phương trình đặc trưng của cả hệ là tổng hợp của nghiệm bộ ước lượng và nghiệm điều khiển mà chúng không thay đổi so với giả thiết dùng hồi tiếp trạng thái thực. Hệ dùng tổ hợp ước lượng và điều khiển cũng có nghiệm cực như nghiệm cực riêng rẽ của điều khiển và ước lượng. Đó là trường hợp riêng của nguyên tắc "tách biệt": điều khiển và ước lượng có thể thiết kế riêng biệt nhau.

Để so sánh phương pháp thiết kế này với phương pháp nêu ở chương IV, ở hình 5.12 có đường nét đứt tương ứng với phương pháp bù cổ điển. Phương trình sai phân của bộ điều khiển hay các bộ "bù được thiết kế trong miền trạng thái" có được bằng cách đưa tín hiệu điều khiển hồi tiếp vào phương trình ước lượng vì nó là một phần của bộ điều khiển.

Với bộ ước lượng vượt trước, (5-80) cho:

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}_p\mathbf{C}] \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{L}_p\mathbf{y}(k-1) \quad (5-112a)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

còn với bộ ước lượng hiện trạng, (5-90) cho:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = [\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K} - \mathbf{L}_c\mathbf{C}\mathbf{F} + \mathbf{L}_c\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{K}] \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{L}_c\mathbf{y}(k)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (5-112b)$$

Nghiệm cực của các bộ điều khiển trên được xác định từ:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{L}_p\mathbf{C}| = 0 \quad (5-113a)$$

$$\text{hay} \quad |zI - F + GK + L_c CF - L_c CGK| = 0 \quad (5-113b)$$

Các nghiệm cực này không cần phải xác định trong quá trình thiết kế theo không gian trạng thái, mà chỉ cần để so sánh với các cơ cấu bù, thiết kế theo phương pháp biến đổi ở chương IV.

Nếu cần, (5-112a) có thể chuyển thành hàm truyền đạt (SS2TF theo MATLAB). Đó là lý do mà ở chương IV gọi là cơ cấu bù.

Đối với bộ ước lượng dự báo:

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = G_{cp}(z) = -K[zI - F + GK + L_p C]^{-1} L_p \quad (5-114a)$$

Cùng phương pháp tính toán đối với bộ ước lượng hiện trạng theo (5-112b):

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = G_{cc}(z) = -K[zI - F + GK + L_c CF - L_c CGK]^{-1} L_c z \quad (5-114b)$$

Với bộ quan sát (ước lượng) được giảm bậc:

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = G_{cr}(z) = [-K_u - K_b[zI - A]^{-1}](zI_r + B) \quad (5-114c)$$

$$\text{mà} \quad A = F_{bb} - G_b K_b - L_r F_{ab} + L_r G_a K_b,$$

$$B = F_{ba} - G_b K_a - L_r F_{aa} + L_r G_a K_a,$$

$$[K_u \ K_b] = K$$

Ở phần trước đã nêu phương pháp tính K và L_p (để xác định bộ điều khiển) cho trước vị trí mong muốn của nghiệm của phương trình đặc trưng của điều khiển và bộ ước lượng. Vị trí mong muốn của các nghiệm sẽ là nghiệm cực của hệ kín. Phương pháp xác định nghiệm ở chương IV và V là như nhau. Trong thực tế, nếu nhiều ở đại lượng đo không lớn lắm, cần xác định nghiệm điều khiển để thỏa mãn các chỉ tiêu đặc trưng và các điều kiện giới hạn, sau đó xác định các nghiệm ước lượng nhanh hơn (từ 3 đến 4 lần) sao cho đáp ứng chung bị khống chế bởi đáp ứng của nghiệm điều khiển chậm nhất. Không cần thiết phải tăng hệ số khuếch đại của ước lượng (và do đó tăng tốc độ đáp ứng) vì nó chỉ xuất hiện trong máy tính.

Ngưỡng lớn nhất của tốc độ đáp ứng của bộ quan sát tùy thuộc vào mức độ nhiễu ở cảm biến.

Để đánh giá đáp ứng của hệ, cần mô phỏng hệ thực và hệ ước lượng như ở (5-109). Tuy nhiên, để thấy hơn cái gì sẽ tiếp diễn nếu thay x hay $\hat{x}$ ở vị trí của $\tilde{x}$.

Kết quả đối với trường hợp dự báo, theo (5-112a) là:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \bar{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -GK \\ L_p C & F - GK - L_p C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \bar{x}(k) \end{bmatrix} \quad (5-115)$$

Kết quả đối với trường hợp ước lượng hiện trạng theo (5-112b) là:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{GK} \\ \mathbf{L}_c \mathbf{C} \mathbf{F} & \mathbf{F} - \mathbf{GK} - \mathbf{L}_c \mathbf{C} \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (5-116)$$

và kết quả đối với ước lượng được hạ bậc theo (5-102) là :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}[\mathbf{K}_a \ 0] & -\mathbf{GK}_b \\ \mathbf{L}_r \mathbf{C} \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ba} \mathbf{C} - \mathbf{G}_b \mathbf{K}_a \mathbf{C} - \mathbf{L}_f \mathbf{F}_{aa} \mathbf{C} & \mathbf{F}_{bb} - \mathbf{G}_b \mathbf{K}_b - \mathbf{L}_r \mathbf{F}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (5-117)$$

mà $\mathbf{K}_a$ và $\mathbf{K}_b$ là những thành phần của $\mathbf{K}$ có kích thước tùy thuộc $\mathbf{x}_a$ và $\mathbf{x}_b$.

Ví dụ 5-7.

Với hai ví dụ trên (ví dụ 5-1 và 5-4) ta có bộ điều khiển đầy đủ, với $\mathbf{K} = [10 \ 3.5]$ và $\mathbf{L}_p^T = [1.2 \ 5.2]$. Theo (5-112a) với trị số của $\mathbf{K}$ và $\mathbf{L}_p$ với dạng sai phân được mã hoá trực tiếp ở máy tính điều khiển. Nếu dùng (5-114a) ta cũng tính được:

$$G_{ep}(z) = -30,4 \frac{z + 0,825}{z + 0,2 \pm j0,557} \quad (5-118a)$$

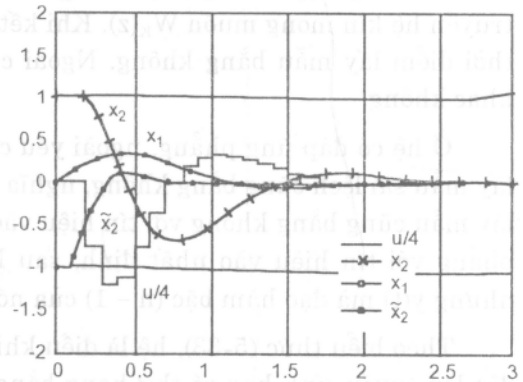
Ở hình 5-13 có đáp ứng của hệ và của bộ điều khiển với điều kiện đầu:

$x_1(0) = 0; x_2(0) = 1 \text{ rad/sec}$ của hệ;
và $\tilde{x}_1(0) = 0; \tilde{x}_2(0) = 0$ của bộ quan sát.

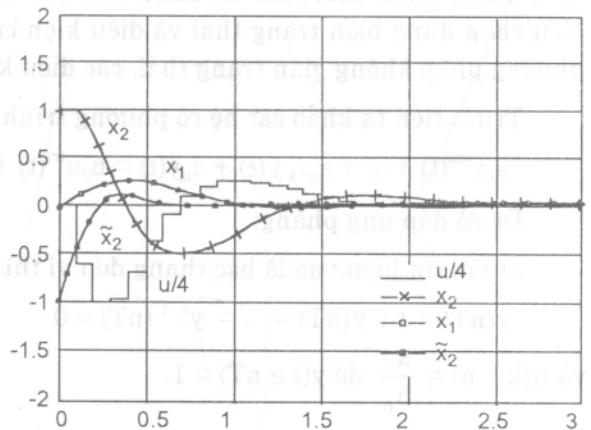
Ví dụ 5-8

Bộ điều khiển đầy đủ dựa vào kết quả tính toán ở ví dụ 5-1 và 5-5, cùng trị số $\mathbf{K}$ như trên. Bộ ước lượng hiện trạng được tính là $\mathbf{L}_c^T = [0,68 \ 5,2]$ với (5-112b) và (5-114b) cho ta:

$$G_{cc}(z) = -25,1 \frac{z(z + 0,788)}{z + 0,263 \pm j0,395} \quad (5-118b)$$



Hình 5.13



Hình 5.14

Ở hình 5.14 có đáp ứng của hệ và của bộ điều khiển với cùng điều kiện đầu như ở ví dụ 5-7.

Do sử dụng ngay tức khắc tín hiệu đo được nên đáp ứng nhanh hơn.

V.8. TỔNG HỢP HỆ CÓ ĐÁP ỨNG PHẪNG

Ở mục IV.5.3 có đề cập đến hệ ổn định vô tận, khi sai lệch ở trạng thái xác lập của các trị rời rạc bằng không, kể từ một thời điểm hữu hạn. Biểu thức (4-2) cho phép xác định cơ cấu điều khiển để có đáp ứng với *thời gian quá độ hữu hạn* trong trường hợp chung hay *thời gian quá độ tối thiểu*, tùy thuộc vào hàm truyền hệ kín mong muốn $W_K(z)$. Khi kết thúc quá trình quá độ, sai lệch tại các thời điểm lấy mẫu bằng không. Ngoài các thời điểm lấy mẫu, sai lệch có thể khác không.

Ở hệ có đáp ứng phẳng, ngoài yêu cầu trên còn đòi hỏi giữa các thời điểm lấy mẫu sai lệch cũng bằng không, nghĩa là đạo hàm của $y(kT)$ tại các thời điểm lấy mẫu cũng bằng không với tín hiệu vào là bậc thang. Như vậy để có đáp ứng phẳng với tín hiệu vào nhất định, sau khi kết thúc quá trình quá độ không những $y(t)$ mà đạo hàm bậc $(n - 1)$ của nó cũng được xác định trước.

Theo biểu thức (5-33), hệ là điều khiển được nếu các cột của ma trận C_0 là độc lập tuyến tính hay có thứ hạng bằng n . Như vậy cần ít nhất là n bước để chuyển từ trạng thái $x(0)$ đến trạng thái cuối $x(nT)$ của một hệ tuyến tính bậc n điều khiển được, thời gian tối thiểu của quá trình quá độ là n chu kỳ lấy mẫu. Nếu chọn đúng biến trạng thái và điều kiện cuối sẽ có được đáp ứng phẳng. Ở phương pháp không gian trạng thái, các điều kiện đầu được xác định đơn giản.

Trước tiên ta khảo sát hệ có phương trình vi phân sau:

$$a_0 y^{(n)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(r)}(t) + \dots + b_{r-1} \dot{u}(t) + b_r u(t), \text{ với } r < n$$

Để có đáp ứng phẳng:

a) Với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị thì:

$$y(nT) = 1; \dot{y}(nT) = \dots = y^{(n-1)}(nT) = 0$$

$$\text{và } u(k \geq n) = \frac{a_n}{b_n} \text{ để } y(t \geq nT) = 1.$$

b) Với tín hiệu vào là tăng dần đều:

$$y(nT) = nT; \dot{y}(nT) = 1; \ddot{y}(nT) = \dots = y^{(n-1)}(nT) = 0$$

$$\text{và } u(k \geq n) = \frac{a_{n-1}}{b_n} \text{ để } y(t \geq nT) = t.$$

c) Để không có lượng quá điều chỉnh trong thời kỳ quá độ thì n sai lệch đầu

tiên không đổi dấu (dương). Trường hợp tín hiệu vào là bậc thang đơn vị và hệ đang ở trạng thái chưa vận hành ($y(0^-) = 0$), sai số ban đầu:

$$e(0) = x_d(0^+) - y(0^+) = 1 \text{ vì hệ vật lý (} r < n \text{) có quán tính: } y(0^+) = y(0^-) = 0.$$

Với yêu cầu là sai số kế tiếp đều bằng không:

$$\begin{aligned} e(0) = x_d(0) - y(0) &\geq 0, \quad e(T) \geq 0, \quad \dots, \quad e((n-1)T) \geq 0 \\ e(nT) = 0, \quad \dots, \quad e(kT) &= 0 \quad \forall k > n \end{aligned}$$

Biến đổi z của tín hiệu sai lệch (với $T = 1$ sec) là:

$$E(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + \dots + e(n-1)z^{-(n-1)} \quad (5-119a)$$

Ví dụ 5.9

Xác định bộ điều khiển để có đáp ứng phẳng với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị đối với hệ có quán tính $G_1(s) = \frac{1}{s^2}$.

Trường hợp đối tượng có một hay nhiều khâu tích phân, $y(t)$ sau thời kỳ quá độ ($t \geq nT$) là một hằng nếu điều khiển $u(kT)$ bằng không ở thời điểm nT . Biến đổi z của $U(z)$ giới hạn với n thành phần:

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(n-1)z^{-(n-1)} \quad (5-119b)$$

Vậy hàm truyền của bộ điều khiển:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(n-1)z^{-(n-1)}}{e(0) + e(1)z^{-1} + \dots + e(n-1)z^{-(n-1)}}$$

có $2n$ hệ số mà $2n-1$ cần được xác định.

Bộ điều khiển có một khâu tích phân ứng với một nghiệm cực ở hàm truyền ($z = 1$):

$$G_c(z) = \frac{u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + [u(n) - u(n-1)]z^{-n}}{(1-z^{-1})[e(0) + e(1)z^{-1} + \dots + e(n-1)z^{-(n-1)}]}$$

vì $e(0) = 1$, $u(n) = \frac{a_n}{b_n}$ nên còn có $2n-1$ ẩn.

Nếu không quan tâm đến điều kiện đầu, ta có thể viết:

$$E(z) + U(z)G(z) = X_d(z)$$

với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị: $X_d(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$.

Biểu thức trên có thể đưa về dạng:

$$(1-z^{-1})E(z^{-1}) + (1-z^{-1})U(z^{-1})G(z^{-1}) = 1 \quad (5-119c)$$

Ở đây theo ví dụ 4-10: $G(z) = \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$

$E(z)$ và $U(z)$ xác định theo (5-119a) và (5-119b) với $n = 2$:

$$U(z^{-1}) = u(0) + u(1)z^{-1} = \frac{2}{T^2} (c_0 + c_1 z^{-1})$$

Từ đó:

$$(1 - z^{-1})^2 [1 + e(1)z^{-1}] + (c_0 + c_1 z^{-1})(z^{-1} + z^{-2}) = 1 - z^{-1}$$

Cân bằng các hệ số có hàm mũ z^{-1} , rút ra:

$$\left. \begin{aligned} z^{-1} &\rightarrow e(1) + c_1 = 0 \\ z^{-2} &\rightarrow 1 - 2e(0) + c_0 + c_1 = 0 \\ z^{-1} &\rightarrow e(1) + c_0 = 1 \end{aligned} \right\} c_0 + c_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} e(1) = \frac{1}{2} \\ c_0 = \frac{1}{2} \\ c_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

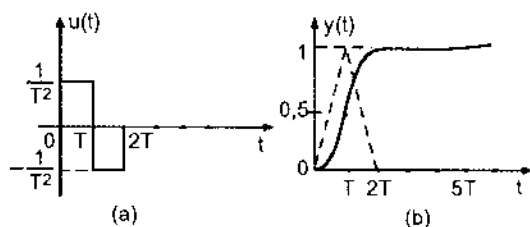
Hàm truyền của cơ cấu điều khiển:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}}$$

dẫn đến angôrit điều khiển sau:

$$u(k) = -0,5u(k-1) + \frac{1}{T^2} [e(k) - e(k-1)]$$

Ở hình 5-15a có tín hiệu điều khiển và ở hình 5-15b là đáp ứng phẳng của hệ. Đáp ứng giữa các thời điểm lấy mẫu ($0 \leq \tau \leq T$) được xác định trực tiếp từ phép lấy tích phân của $\dot{y}(t) = u(t)$:



Hình 5.15

$$u(0) = \frac{1}{T^2} \text{ và } y(0) = \dot{y}(0) = 0; \dot{y}(\tau) = \frac{\tau^2}{2T^2}$$

$$u(1) = -\frac{1}{T^2}; y(T) = \frac{1}{2}; \dot{y}(T) = \frac{1}{T}; y(\tau + T) = -\frac{\tau^2}{T^2} + \frac{\tau}{T} + \frac{1}{2}$$

Ở miền trạng thái, nếu chọn đúng biến trạng thái và điều kiện cuối sẽ có đáp ứng phẳng. Ưu việt của phương pháp không gian trạng thái là điều kiện đầu được tính đến một cách giản đơn.

V.8.1. Điều kiện có đáp ứng phẳng trong không gian trạng thái

Mục đích điều khiển là tín hiệu ra $y(t)$ đạt được và duy trì đại lượng mong muốn hay bám theo đại lượng đặt $x_d(t)$ mà vừa không có sai số xác lập, vừa

không có quá điều chỉnh ở thời kỳ quá độ. Do đó các biến trạng thái và đạo hàm của chúng là:

$$x_1 = y(t); x_2 = \dot{y}(t); \dots; x_n = y^{(n-1)}(t) \quad (5-120)$$

Trong trường hợp tín hiệu vào là bậc thang, trạng thái cuối là x áp đặt

$$x^T(nT) = [1, 0, \dots] \quad (5-121)$$

Thực tế là khi tín hiệu ra đạt trị số mong muốn $x_d = 1$ thì tín hiệu ấy không biến đổi nữa, vì ở thời điểm ấy (nT) các đạo hàm bậc $n-1$ của $y(t)$ đều bằng không.

Trong trường hợp tín hiệu vào là tăng dần đều $x_d(t) = t$, trạng thái cuối là:

$$x^T(nT) = [nT, 1, 0 \dots 0] \quad (5-122)$$

Ở mục V.2.2 đã nêu: ta có thể đưa một hệ điều khiển được từ trạng thái ban đầu $x(0)$ đến trạng thái cuối với số chặn bằng bậc của hệ. Chuỗi n tín hiệu điều khiển $u(0), u(1) \dots u(n-1)$ được xác định duy nhất bởi phương trình:

$$F^{n-1}Gu(0) + F^{n-2}Gu(1) + \dots + Gu(n-1) = x(n) - F^n x(0) \quad (5-123)$$

mà nghiệm có được bằng cách nghịch đảo ma trận điều khiển được C_0 :

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} + C_0^{-1} [x(n) - F^n(x(0))] \quad (5-124)$$

Ví dụ 5.10

Ở ví dụ về hệ bậc 2, $n = 2$:

$$F^{-1}Gu(0) + F^{-2}Gu(1) = F^{-2}x(2) - x(0) \quad (5-125)$$

Ở hệ bậc hai: $\ddot{y} = u(t)$ với phần tử lấy mẫu bậc không:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0] \quad (5-126)$$

Hai điều kiện đầu được xác định theo (5-125):

$$F^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \text{ và } F^2G = \begin{bmatrix} -3T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \quad (5-127)$$

Hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} -T^2/2 & -3T^2/2 \\ T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) - 2Tx_2(2) - x_1(0) \\ x_2(2) - x_2(0) \end{bmatrix} \quad (5-128)$$

có một nghiệm vì định thức $\Delta = T^3$ khác không: hệ quán tính đã cho là điều khiển được. Hệ có thể từ trạng thái ban đầu $x(0)$ bất kỳ đến trạng thái cuối cùng $x(2)$ áp đặt bởi điều khiển:

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{T^2} \begin{bmatrix} 1 & 3T/2 \\ -1 & -T/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(2) - 2Tx_2(2) - x_1(0) \\ x_y(2) - x_y(0) \end{bmatrix} \quad (5-129)$$

Xét các trường hợp sau:

a) Tín hiệu vào là bậc thang với điều kiện đầu $x(0) = 0$, $x^T(2) = [1 \ 0]$. Vì rỗng .

$$u(0) = \frac{1}{T^2} \text{ và } u(1) = -\frac{1}{T^2} \longrightarrow x(1) = Bu(0) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/T \end{bmatrix}$$

sai lệch $e(1) = \frac{1}{2}$ là dương và $e(2) = u(2) = 0$. Cơ cấu điều khiển là:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+0,5z^{-1}} \quad (5-130)$$

b) Tín hiệu vào là bậc thang với điều kiện đầu $x^T(0) = [0 \ 1/T]$ và $x^T(2) = [1 \ 0]$:

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{T^2} \begin{bmatrix} 1 & 3T/2 \\ -1 & -T/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2T^2 \\ -1/2T^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vì } e(0) = 1 \text{ và } x(1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/2T \end{bmatrix}$$

nên $e(1) = \frac{1}{4}$.

Hàm truyền của cơ cấu điều khiển là:

$$G_c(z) = -\frac{1}{2T^2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1+0,25z^{-1}} \quad (5-131)$$

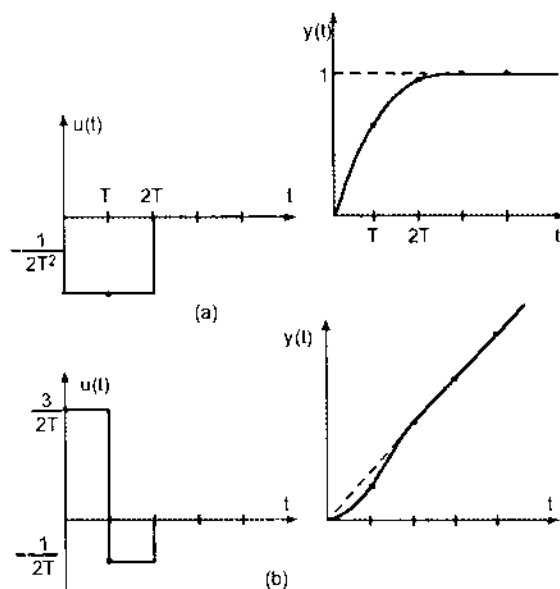
Đáp ứng là phẳng như ở hình 5.16a.

c) Tín hiệu vào là hàm tăng dần đều và điều kiện đầu bằng không, $x^T(2) = [2T \ 1]$.

$$u(0) = \frac{3}{2T}, \quad u(1) = -\frac{1}{2T}$$

$$\text{Vì } x(1) = Gu(0) \begin{bmatrix} 3T/4 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

nên $e(1) = \frac{1}{4}$ và $e(0) = 0$.



Hình 5.16

Cơ cấu điều khiển :

$$G_c(z) = \frac{2}{T^2} \cdot \frac{3-z^1}{z-1} \quad (5-131)$$

V. 8.2. Trượt về gốc trục của bộ điều khiển

Khi có tác động của nhiễu, sự trở về trạng thái cân bằng được thực hiện bằng cách đặt $x(n) = 0$ ở biểu thức (5-123) :

$$F^{-1}Gu(0) + F^{-2}Gu(1) + \dots + F^{-n}Gu(n-1) = -x(0) \quad (5-132)$$

Nếu dùng hồi tiếp trạng thái $u(k) = -Kx(k)$ thì điều kiện đối với biểu thức trên là:

$$KF^{-1}G = 1, KF^{-2}G = \dots = KF^{-n}G = 0 \quad (5-133)$$

Sau khi nhân K với hai vế của (5-132) ta có:

$$u(0) = -Kx(0)$$

Ở phương trình trạng thái $x(1) = Fx(0) + Gu(0)$ cho nên phương trình (5-132) có dạng:

$$F^{-2}Gu(1) + \dots + F^{-n}Gu(n-1) = -F^{-1}(Fx(0) + Gu(0)),$$

bằng cách nhân với KF cho hai vế, ta có :

$$u(1) = -Kx(1).$$

Như vậy, để trở về trạng thái cân bằng - trạng thái cuối cùng trượt về gốc trục $x(n) = 0$, hồi tiếp trạng thái được thực hiện bởi điều kiện (5-133) hay dưới dạng phương trình ma trận:

$$K[F^{-1}G : F^{-2}G : \dots : F^{-n}G] = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (5-134)$$

V.9. ĐIỀU KHIỂN TÍCH PHÂN

Trong thực tế, việc tổng hợp hệ theo phương pháp không gian trạng thái không tạo nên tác động tích phân khi chưa dùng đến những bước tiếp theo. Hai phương pháp cơ sở thường dùng là: *phương pháp gia tăng trạng thái* và *phương pháp ước lượng độ chệch*.

Nội dung của phương pháp gia tăng trạng thái là cộng thêm vào một thành phần tích phân như đã dùng ở hệ liên tục. Phương pháp ước lượng độ chệch cho kết quả tương tự nhưng nội dung là loại trừ sai lệch do nhiễu có hệ thống hơn là dạng nhiễu hằng như thường dùng.

V.9.1. Điều khiển tích phân theo phương pháp gia tăng trạng thái

Tăng một khâu tích phân cho mô hình của đối tượng có tác dụng như tăng ảnh hưởng tích phân đối với tín hiệu ra so với tín hiệu ra đã có trước đây. Mô

hình như vậy dùng để tổng hợp luật điều khiển và thể hiện ở hệ số hồi tiếp trạng thái khác trước, có tính đến tác động tích phân. Khâu tích phân không tồn tại ở đối tượng nên ta đưa vào bộ điều khiển. Ví dụ, với hệ:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

ta tăng thêm trạng thái x_1 cho phương trình sai phân:

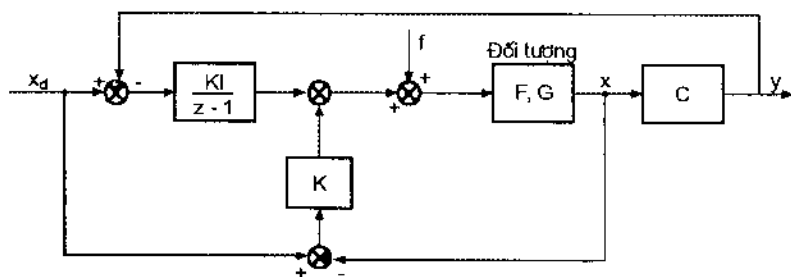
$$x_1(k+1) = x_1(k) + y(k) = x_1(k) + Cx(k) \quad (5-135)$$

Do đó mô hình của đối tượng là:

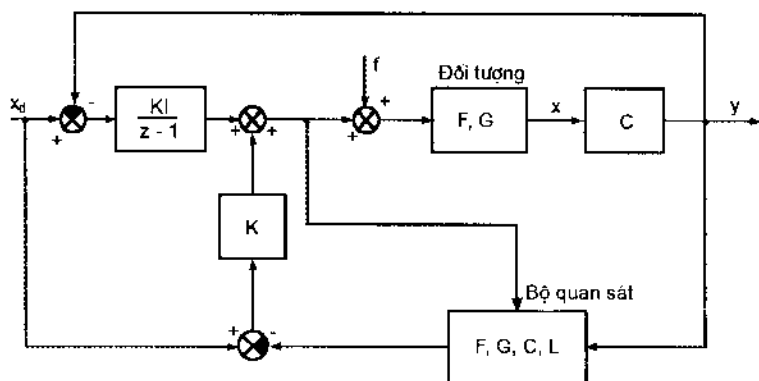
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & G \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u(k) \quad (5-136)$$

Luật điều khiển sẽ là:

$$u(k) = -[K_1 \quad K] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x(k) \end{bmatrix} \quad (5-137)$$



Hình 5.17a

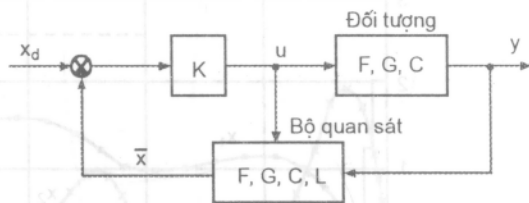


Hình 5.17b

Sơ đồ khối như ở hình 5-17a đối với hệ có hồi tiếp trạng thái toàn phần và hình 1.17b hệ có dùng bộ quan sát. Bộ quan sát (BQS) cơ sở trên mô hình chưa được gia tăng trạng thái và dùng để phục hồi trạng thái chưa được gia tăng.

Ví dụ 5-11

Dùng kết quả ở ví dụ 5-7, bây giờ cho tín hiệu đặt ở đầu vào là bậc thang đơn vị như ở hình 5-18. Bộ quan sát ở đây không phải (5-112a) và (5-112b) vì chúng dựa vào điều khiển ở mạch hồi tiếp với $x_d = 0$. Bộ

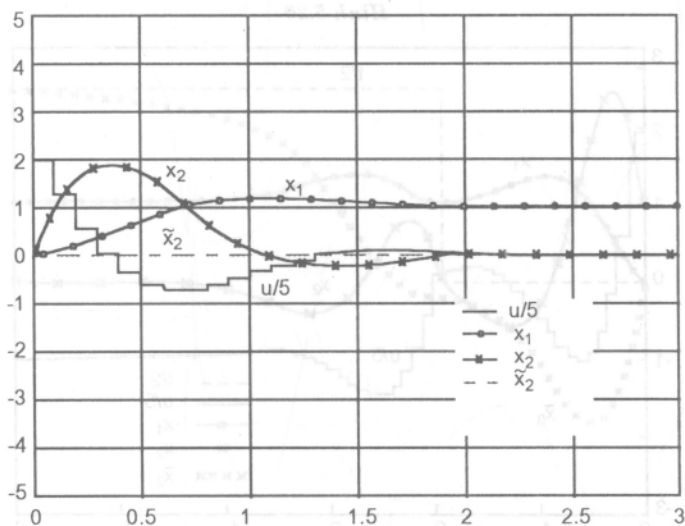


Hình 5.18

quan sát (5-80) với trạng thái x được thay bằng ước lượng $\bar{x}(k)$ và điều khiển :

$$u(k) = -K(\bar{x}(k) - x_d)$$

Hàm quá độ như ở hình 5.19. Lưu ý là sai số ước lượng bằng không, có nghĩa là hàm quá độ không có gì khác khi không có bộ quan sát tham gia hoặc với bộ quan sát hiện trạng hoặc bộ quan sát được giảm bậc.

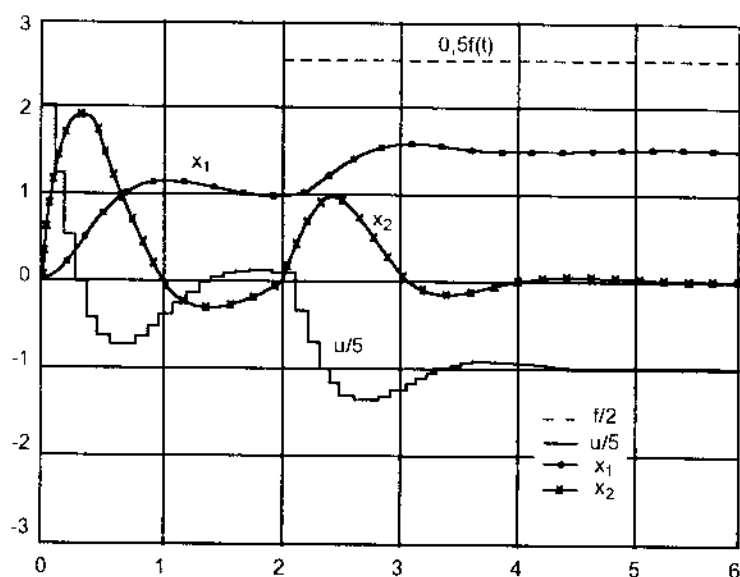


Hình 5.19

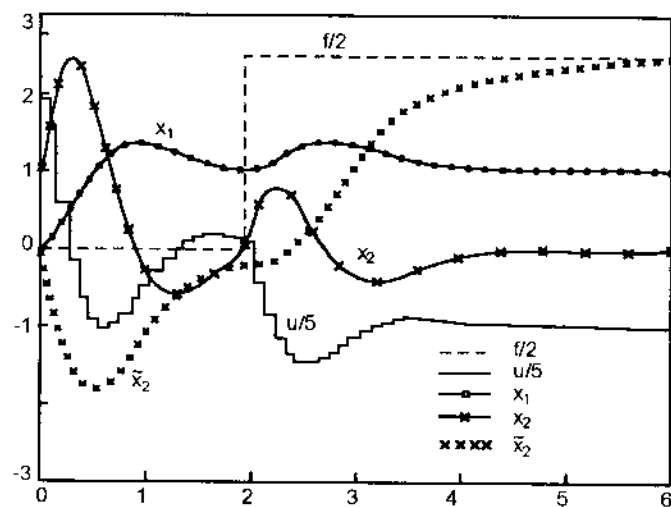
Ví dụ 5-12

Với ví dụ 5-7, tại thời điểm $t = 2$ sec hệ được đưa thêm vào nhiễu bậc thang $f = 5$ rad/sec. Như ở hình 5.20, sai lệch tĩnh khá lớn, còn khi $t < 2$ sec các đặc tính hoàn toàn như ở hình 5.19.

Giá trị xác lập của tín hiệu ra bây giờ là 1,5 chứ không phải 1 như ở ví dụ 5-11. Do đó phải dùng điều khiển tích phân.



Hình 5.20



Hình 5.21

Ví dụ 5-13

Với ví dụ 5-12, dùng điều khiển tích phân theo (5-135) với các trị số hồi tiếp:

$$[K, K] = [1.025 \quad 13.74 \quad 4.313]$$

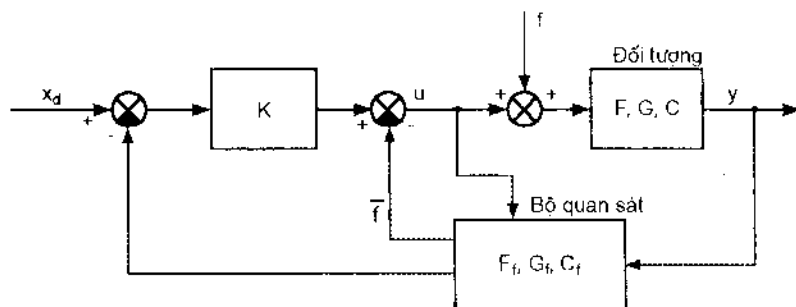
Sau khi áp đặt nghiệm cực $z = 0.8 \pm j0.25$, 0.9 ở hình 5.21, với sơ đồ khối như ở hình 5.17b nhưng không có bộ quan sát, điều khiển tích phân đã triệt tiêu sai lệch tĩnh. Tuy nhiên giá đã phải trả là lượng quá điều chỉnh ban đầu

không còn là 20% mà đã tăng đến 40%, mặc dù đã chọn cùng nghiệm như trước cộng với một nghiệm khác ở $z = 0,9$.

V.9.2. Điều khiển tích phân theo phương pháp ước lượng độ chệch

Một phương pháp khác là đánh giá nhiễu chưa biết và đưa ước lượng đã đánh giá vào luật điều khiển như ở hình 5.22.

Nếu ước lượng là đúng và hồi tiếp của nó như ở hình 5.22, nhiễu f sẽ bị loại trừ.



Hình 5.22

Giả sử nhiễu là độ chệch có hệ thống hay hằng, mô hình sẽ giảm đơn:

$$\dot{f} = 0$$

Tuy vậy, ta cần giả thiết thêm điều kiện, ví dụ nhiễu có dao động thì mô hình cần thêm:

$$\ddot{f} = -\omega_0^2 F$$

Để ước lượng độ chệch, mô hình (5-2a) phải được bổ sung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5-138)$$

hay dạng gián đoạn do phần tử lưu giữ tạo nên:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ f(k+1) \end{bmatrix} = F_f \begin{bmatrix} x(k) \\ f(k) \end{bmatrix} + G_f u \quad (5-139)$$

với: $y(k) = Cx(k)$,

$$C_f = [C \quad 0]$$

Các phương pháp chọn bộ quan sát ở mục V.6 đều có thể áp dụng để tái tạo trạng thái x và f . Phương pháp tính hệ số ước lượng cần thiết có khác ở chỗ là mô hình hệ được xác định bởi F_f và C_f . Ở hình 5.22 ma trận K được xác định theo F , G . Trong thực tế hệ có thể không điều khiển được, ở đây chỉ đề cập đến ước lượng nhiễu để giảm sai lệch.

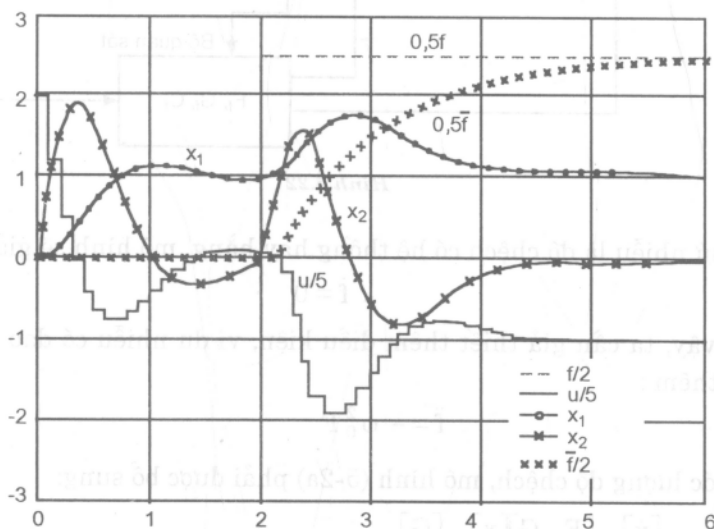
Ví dụ 5-14

Cũng với ví dụ trên và với ước lượng dự báo F . Tương ứng với (5-135) ta dùng F_f và G_f xác định:

$$L_p^T = [1.3 \quad 6.14 \quad 5.2]$$

đối với nghiệm ước lượng mong muốn $z = 0,4 \pm j0,4; 0,9$.

Với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị và nhiễu bậc thang bằng 5 ở thời điểm 2 sec. Cũng như ở ví dụ trước, trong trường hợp này không có sai lệch tĩnh nhưng lượng quá điều chỉnh ban đầu được cải thiện vì bộ ước lượng nhiễu không có đáp ứng đối với tín hiệu điều khiển bậc thang (theo hình 5.23), còn bộ ước lượng cùng với khâu tích phân x_1 ở hình 5.22 lại có đáp ứng từ đầu đối với tín hiệu điều khiển bậc thang.



Hình 5.23

V.10. DÙNG MATLAB ĐỂ MÔ HÌNH HOÁ HỆ ĐIỀU KHIỂN

V.10.1 Biến đổi từ phương trình trạng thái hệ liên tục sang gián đoạn

Từ: $\dot{X} = AX + Bu$ sang: $x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$, dùng: $[F, G] = c2d(A, B, T)$.

Ví dụ 5.15

Với hệ được mô tả bởi (5-46) ở ví dụ (5-1):

$$A = [0 \quad 1; 0 \quad 0]; B = [0; 1];$$

$$[F, G] = c2d(A, B, 0.2)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.2000 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.0200 \\ 0.2000 \end{bmatrix}$$

Khi cần tăng thêm độ chính xác, thay vì $T = 0,2$ sec dùng $T = 0,00125$ sec chẳng hạn:

$$A = [0 \ 1; 0 \ 0]; B = [0; 1];$$

format long

$$[F, G] = c2d(A, B, 0.00125)$$

$$F =$$

$$\begin{bmatrix} 1.000000000000000 & 0.001250000000000 \\ 0 & 1.000000000000000 \end{bmatrix}$$

$$G =$$

$$\begin{bmatrix} 0.00000078125000 \\ 0.00125000000000 \end{bmatrix}$$

V.10.2. Biến đổi từ hàm truyền hệ liên tục sang hàm truyền hệ xung

Ví dụ 5-16

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2} = \frac{\text{num}}{\text{den}}$$

$$\text{num} = 1; \text{den} = [1 \ 0 \ 0];$$

$$[A, B, C, D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den});$$

$$[F, G] = \text{c2d}(A, B, 0.2);$$

$$[\text{numz}, \text{denz}] = \text{ss2tf}(F, G, C, D);$$

$$\text{printsys}(\text{numz}, \text{denz}, 'z')$$

$$G_1(z) = \frac{0.02z + 0.02}{z^2 - 2z + 1}$$

V.10.3. Hàm quá độ của hệ xung trong miền trạng thái

Ví dụ 5-17

Với ví dụ trên, ngoài tín hiệu ra y cần xác định hàm quá độ với $x_1(k)$ và $x_2(k)$.

$$F = [1 \ 0.2; 0 \ 1]; G = [0.02; 0.2];$$

$$[\text{numz}, \text{denz}] = \text{ss2tf}(F, G, C, D);$$

$$\text{dstep}(\text{numz}, \text{denz}, 20)$$

$$I = [1 \ 0];$$

$$[\text{numz1}, \text{denz1}] = \text{ss2tf}(F, G, I, D);$$

$$\text{dstep}(\text{numz1}, \text{denz1}, 20)$$

$$J = [0 \ 1];$$

$$[\text{numz2}, \text{denz2}] = \text{ss2tf}(F, G, J, D);$$

$$\text{dstep}(\text{numz2}, \text{denz2}, 20)$$

Bài tập chương V

Bài tập 5-1

Một hệ bậc hai $T_1^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} = u(t)$

a) Phương trình trạng thái hệ liên tục với $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$

b) Phương trình trạng thái hệ xung với bộ duy trì bậc không và $T_1 = 1$ sec, $T = 0,2$ sec.

Đáp án:

$$a) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T_1^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,181 \\ 0 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,019 \\ 0,181 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Bài tập 5-2

Hệ bậc hai có tần số riêng ω_0 :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = u(t)$$

a) Phương trình trạng thái của hệ liên tục với $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$.

b) Phương trình trạng thái của hệ xung.

Đáp án

$$a) \dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b) x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

$$F = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 T & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 T \\ -\omega_0 \sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{bmatrix}; \quad G = \frac{1}{\omega_0^2} \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega_0 T \\ \omega_0 \sin \omega_0 T \end{bmatrix}$$

Bài tập 5-3

Hệ điều khiển vệ tinh có hàm truyền:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

a) Phương trình trạng thái của hệ liên tục với $x_1 = \alpha$ (góc quay), $x_2 = \dot{\alpha}$ (tốc độ góc).

b) Phương trình trạng thái của hệ xung.

Đáp án

a) $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

b) $x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$;

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Bài tập 5-4

Phương trình sai phân của hệ có dạng sau :

$$y(k+2) + y(k+1) + 0,16y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

Mô tả hệ bằng phương trình trạng thái.

Đáp án

So sánh với phương trình dạng chung (5-3):

$$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = b_0u(k+2) + b_1u(k+1) + b_2u(k)$$

$$a_1 = 1; a_2 = 0,16; b_0 = 0; b_1 = 1; b_2 = 2$$

$$x_1(k) = y(k) - h_0u(k); h_0 = b_0 = 0$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) - h_1(u(k)); h_1 = b_1 - a_1h_0 = 1$$

Vậy: $x_1(k+1) = x_2(k) + u(k)$

$$x_2(k+1) = -0,16x_1(k) - x_2(k) + u(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Phương trình của điều kiện đầu:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) - u(0) \end{bmatrix}$$

Bài tập 5 -5

Hệ liên tục có phương trình trạng thái:

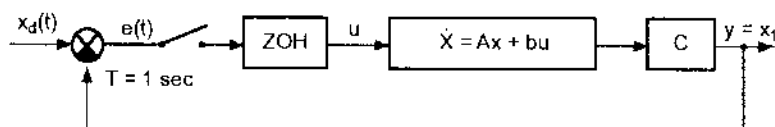
$$\dot{x} = Ax + bu; y = cx$$

với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $c = [1 \ 0]$

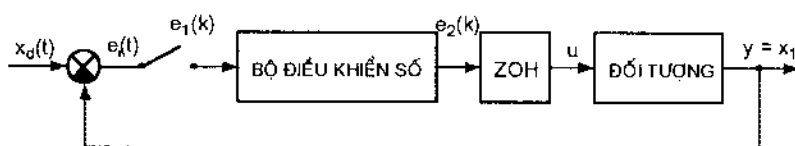
- Gián đoạn hoá phương trình trên với $T = 1$ sec.
- Với hệ kín như ở hình 5.24. Viết phương trình gián đoạn của hệ.
- Dùng bộ điều khiển số với:

$$e_2(k+1) + ae_2(k) = be_1(k)$$

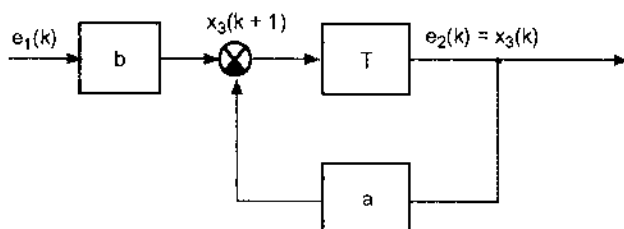
Viết phương trình của hệ gián đoạn với $e_2(k)$ là trạng thái mới.



Hình 5.24



Hình 5.25a



Hình 5.25b

Đáp án

a) $x(k+1) = Fx(k) + gu(k)$

$$F = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$g = \int_0^T e^{A\eta} b d\eta = \begin{bmatrix} \int_0^T (1 - e^{-\eta}) d\eta \\ 0 \\ \int_0^T e^{-\eta} d\eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 0 \\ 1 - e^{-T} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{với } T = 1 \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0.632 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad x(k+1) = Fx(k) + ge(k) = Fx(k) + g(x_d(k) - y(k))$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.632 & 0.632 \\ -0.632 & 0.368 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{bmatrix} x_d(k)$$

c) Theo hình 5.25b (bộ điều khiển số) :

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= -ax_3(k) + be_1(k) \\ &= -ax_3(k) + b(x_d(k) - x_1(k)) \\ &= -bx_1(k) - ax_3(k) + bx_d(k) \end{aligned}$$

Với phương trình trạng thái (theo a) và trạng thái thứ ba (theo c):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.632 & 0.368 \\ 0 & 0.368 & 0.632 \\ -b & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} x_d(k)$$

Bài tập 5-6

Xác định phương trình trạng thái của hệ xung từ hệ liên tục:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Đáp án

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

$$F(T) = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$G(T) = \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B = \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\tau}) \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

Với $T = 1$ sec:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4323 \\ 0 & 0.1353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2838 \\ 0.4323 \end{bmatrix} u(k)$$

Bài tập 5-7

Hệ xung có phần liên tục:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(s+2)}$$

a) Phương trình trạng thái của hệ liên tục.

b) Phương trình trạng thái của hệ xung kín.

Đáp án

$$a) \dot{x} = Ax + Bu; y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

$$b) x(k+1) = Fx(k) + Gu(k); y(k) = cx(k)$$

$$F = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$G = \left(\int_0^T e^{At} dt \right) B = \frac{1}{2}K \begin{bmatrix} T - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ 1 - e^{-2T} \end{bmatrix}$$

Hệ xung kín:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}K \left(T - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2T} \right) & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ -\frac{1}{2}K(1 - e^{-2T}) & e^{-2T} \end{bmatrix} x(k) + \frac{1}{2}K \begin{bmatrix} T - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ 1 - e^{-2T} \end{bmatrix} y_0(k)$$

$y_0(k)$ là tín hiệu vào của hệ xung kín.

Bài tập 5-8

Nghiệm không của hàm truyền đối tượng và của hệ kín có hồi tiếp trạng thái có khác nhau không?

Đáp án

Nghiệm không của hàm truyền đối tượng là những trị số của z mà tín hiệu ra bằng không (chứ không phải là vectơ trạng thái), nghĩa là nghiệm của phương trình (5-7) được viết dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} zI - F & -G \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = 0$$

Nghiệm không của hàm truyền hệ kín có hồi tiếp trạng thái ($u = -Kx + y_0$, mà x_d là tín hiệu vào) thoả mãn phương trình :

$$\begin{bmatrix} zI - F + GK & -G \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ x_d \end{bmatrix} = 0$$

hay
$$\begin{bmatrix} zI - F & -G \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ x_d - KX(z) \end{bmatrix} = 0$$

Định thức như nhau, nghiệm không như nhau.

Bài tập 5-9

Hãy chứng minh rằng xấp xỉ (4-19): $s \approx \frac{z-1}{Tz}$ biến nửa trái của mặt phẳng s thành phần bên trong của đường tròn có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ ở mặt phẳng z .

Đáp án

$$s = \frac{z-1}{Tz} \rightarrow z = \frac{1}{1-Ts} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+Ts}{1-Ts} \text{ như ở hình (4-6c) và (4-9).}$$

Bài tập 5-10

Hệ có phương trình trạng thái:

$$\dot{X} = FX + Gu$$

với
$$F = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

có điều khiển được không?

Đáp án

$\text{rank} [G \quad FG] = 2 < n$, như vậy không điều khiển được.

Bài tập 5-11

Hệ có phương trình trạng thái và quan sát:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} u = FX + Gu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = CX$$

a) Có ổn định không ?

b) Có điều khiển được và quan sát được không ?

Đáp án

a) Hệ không ổn định vì có nghiệm riêng :

$$\{-1, 1+j1, 1-j1\}$$

b) Hệ điều khiển được và quan sát được vì:

$$\text{rank } [G \quad FG] = 3 = n; \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix} = 3 = n$$

Bài tập 5-12

Với hệ bậc hai ở bài tập 5-1, hãy xác định điều kiện để hệ có đáp ứng phẳng.

Đáp án

Với đối tượng:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T_1^2 \end{bmatrix} u$$

đã xác định phương trình trạng thái hệ xung:

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

$$\text{với } F = \begin{bmatrix} 1 & T_1(1-a) \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \alpha - (1-a) \\ (1-a)/T_1 \end{bmatrix} \quad \text{với } \alpha = \frac{T}{T_1}, \quad a = e^{-T/T_1}$$

Ứng với (5-123) trong trường hợp chung và (5-125) trong trường hợp hệ bậc hai với điều kiện đầu bằng không và tín hiệu vào là bậc thang đơn vị, ta có:

$$x(0) = 0, \quad x^T(2) = [1 \quad 0],$$

Từ (5-125) ta rút ra hai phương trình sau:

$$\alpha[u(0) + u(1)] - (1-a)[au(0) + u(1)] = 1$$

$$\frac{(1-a)[au(0) + u(1)]}{T_1} = 0$$

$$\text{với } FG = \begin{bmatrix} \alpha - (1-a) + (1-a)^2 \\ \frac{a(1-a)}{T_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - a(1-a) \\ \frac{a(1-a)}{T_1} \end{bmatrix}$$

Từ hai phương trình trên:

$$u(0) = \frac{1}{\alpha(1-a)} ; u(1) = -\frac{a}{\alpha(1-a)}$$

Trạng thái trung gian $x(1) = Gu(0)$ nên:

$$x_1(1) = \frac{\alpha - (1-a)}{\alpha(1-a)} ; x_2(1) = \frac{1}{\alpha T_1} = \frac{1}{T}$$

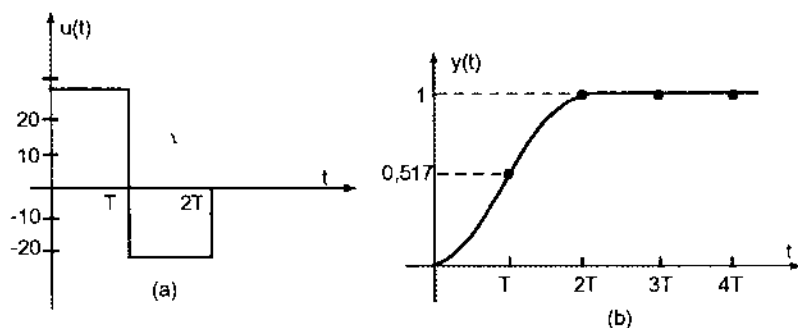
Thay bằng trị số: $T_1 = 1 ; T = 0,2 ; \alpha = 0,2 ; a = 0.819$

$$u(0) = 27,6 ; u(1) = -22,5 ; u(k \geq 2) = 0;$$

$$y(0) = 0 ; y(1) = 1 - e(1) = 0,517 ; y(k \geq 2) = 1$$

$$\text{với } e(1) = 1 - x_1(1) = 1 - \frac{\alpha - (1-a)}{\alpha(1-a)} = 0,483.$$

Ở hình 5.26 có các đặc tính $u(t)$ và $y(t)$ của hệ có đáp ứng phẳng.



Hình 5.26

Bài tập 5-13

Hệ liên tục có hàm truyền đạt:

$$G_1(s) = \frac{8}{s^2 + 2s + 4}$$

- Xác định $G(z)$ với thời gian lấy mẫu $T = 0,4$ sec.
- Xác định bộ điều khiển $G_c(z)$ để hệ ổn định vô tận.

Đáp án

- Bằng phương pháp cân bằng hệ số xác định:

$$G(z) = \frac{0.474069z + 0.361449}{z^2 - 1.03157z + 0.449329}$$

- Ổn định vô tận khi tín hiệu vào là bậc thang đơn vị, hàm truyền hệ kín là $W_K(z) = z^{-1}$, theo (4-59) :

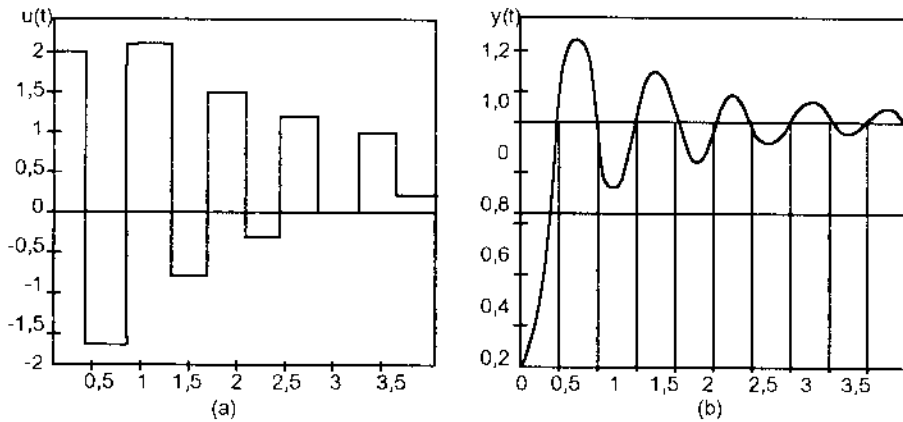
$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

Vậy :

$$G_c(z) = \frac{z^2 - 1.03157z + 0.449329}{0.474069z^2 - 0.11262z - 0.361449} = \frac{2.1094 - 2.176z^{-1} + 0.9478z^{-2}}{1 - 0.2376z^{-1} - 0.7624z^{-2}}$$

Ở hình 5.27 có đặc tính $u(t)$ và $y(t)$ của hệ ổn định vô tận.

Sau một chu kỳ $T = 0,4$ sec, các trị số rời rạc là không đổi nhưng giữa các chu kỳ $y(t)$ dao động khác với đáp ứng phẳng ở hình 5.26.



Hình 5.27

Bài tập 5-14

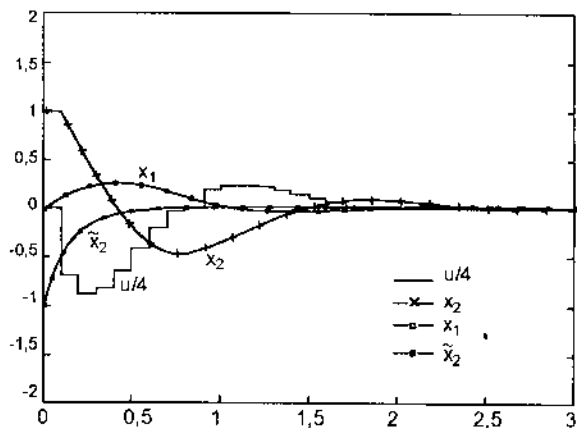
Theo tính toán ở ví dụ 5-1, với bộ ước lượng giảm bậc ở ví dụ 5-6, nghĩa là với $L_r = 5$, thiết kế bộ điều khiển đầy đủ (tổng hợp luật điều khiển và bộ quan sát giảm bậc).

Đáp án

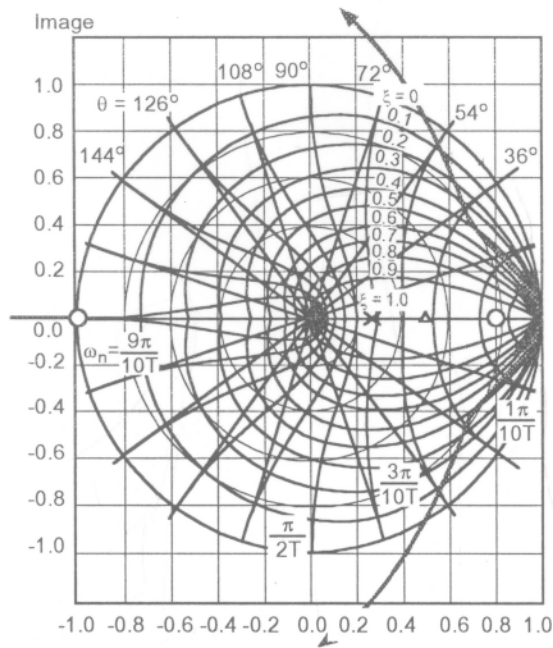
Theo (5-102) hay (5-114c) tính được:

$$G_r(z) = -27,7 \frac{z - 0.813}{z - 0.238}$$

Ở hình 5.28 của hệ cùng bộ điều khiển với cùng điều kiện đầu như ở ví dụ 5-7 và 5-8.



Hình 5.28



Hình 5.29

Việc chọn bộ điều khiển này rất giống như chọn cơ cấu hiệu chỉnh (ở chương IV) cho đối tượng bậc hai $\frac{1}{s^2}$ mà ở quỹ đạo nghiệm đã chọn $K = 27,7$ và các nghiệm $z = 0.8 \pm j0.25$ và một nghiệm $z = 0.5$ “của bộ ước lượng” (ở hình 5.29 có đánh dấu “Δ”).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] *Bühler H.* "Réglage échantillonné" T.1-1982, T.2 – 1983 P.P.R
- [2] *Benjamin C. Kuo* "Automatic Control Systems" Prentice - Hall Inter. Inc. 1995.
- [3] *Bequette Bayne B.* "Process Dynamics Modeling, Analysis and Simulation:"Prentice - Hall Inter. Inc. 1998
- [4] *Cochin I.* "Analysis and Design of Dynamic Systems " Addison - Wesley 1997.
- [5] *Derek R. and David N. N.* "System Dynamic. An Introduction "Prentice - Hall Inter. Inc. 1997
- [6] *Dieulesaint E. et Royer D.* "Automatique appliquée" 2. Systèmes linéaires de commande a signaux échantillonnés. Masson. Paris 1990.
- [7] *Gene F. Franklin, J. David Powell, Michael L. Workman.* "Digital Control of Dynamic Systems" . Addison -Wesley 1990.
- [8] *Gustaf Olson and Gianguido Piani* "Computer Systems for Automation and Control " Prentice - Hall Inter. Inc.
- [9] *Gopal M.* "Modern Control System Theory", New Delhi 1989.
- [10] *John Penny and George Lindfield .* "Numerical Methods using Matlab. "Prentice - Hall Inter. Inc. 2000.
- [11] *John Van de Vegte.* "Feedback Control Systems" Prentice - Hall Inter. Inc. 1990.
- [12] *John, J. D'Azzo* "Linear Control Systems. Analysis & Design. Conventional & Modern " Mc. Graw - Hill, Inc. 1995
- [13] *Johnson Curtis D.* "Process Control Instrumentation Technology" Prentice - Hall Inter. Inc. 1997
- [14] *Katshuhike Ogata* "System Dynamics " Prentice Hall Inter. Inc. 1998.
- [15] *Ken Dutton & others* "The Art of Control Engineering " Addison. Wesley 1997.

- [16] *Netushill A.V. (ped).* "Theory of Automatic Control", Moscow, 1978.ès, Paris, 1993,
- [17] *Nguyễn Thương Ngô* "Lý thuyết điều khiển tự động thông thường và hiện đại - Hệ tối ưu và thích nghi". Nhà xuất bản Khoa học & Kỹ thuật Hà Nội, 2005.
- [18] *Nguyễn Thương Ngô* "Lý thuyết điều khiển tự động thông thường và hiện đại - Hệ tuyến tính". Nhà xuất bản Khoa học & Kỹ thuật Hà Nội, 2006.
- [19] *Norman Nise.* "Control System Engineering". California State Polytechnic University - Addison - Wesley, 1995.
- [20] *Philippe de Larminat.* "Automatique Commande des systèmes linéaires". Hermes, Paris, 1993.
- [21] *Richard C. Dorf & Robert H. Bishop.* "Modern Control Systems". Addison - Wesley, 1997.
- [22] *Цылки Я.З.* "Основы теории автоматического управления". Наука Москва, 1977.



MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Chương I. Khái niệm chung	5
I.1. Lượng tử hóa và đặc điểm	5
I.2. Ví dụ về các hệ gián đoạn	8
I.2.1. Hệ tự động đo khoảng cách mục tiêu của radar	8
I.2.2. Hệ điều chỉnh nhiệt độ	
I.2.3. Bộ biến đổi tỷ lệ thời gian	10
I.2.4. Hệ điều khiển hai thang thời gian	11
I.2.5. Các bộ lọc gián đoạn - liên tục	12
I.2.6. Thiết bị tính số	14
I.3. Đặc điểm của hệ gián đoạn	17
Chương II. Cơ sở toán học của hệ gián đoạn	18
II.1. Sơ đồ tương đương của hệ xung	18
II.2. Sơ đồ chức năng của một hệ điều khiển có dùng máy tính	22
II.2.1. Bộ chuyển đổi tương tự số A-D	22
II.2.2. Bộ vi xử lý	24
II.2.3. Bộ chuyển đổi số - tương tự D-A	24
II.3. Phổ và ảnh của tín hiệu gián đoạn	26

II.4. Quan hệ giữa phổ và ảnh của tín hiệu gián đoạn và tín hiệu liên tục	27
II.5. Biến đổi z	30
II.5.1. Định lý cơ bản của biến đổi z	32
II.5.2. Cách xác định chuỗi rời rạc từ biến đổi z	36
II.6. Sự truyền tín hiệu qua hệ xung	39
II.7. Hàm truyền đạt của hệ xung	42
II.8. Đặc tính tần biên pha của hệ xung	45
II.9. Dùng MATLAB cho phép biến đổi gián đoạn	50
Bài tập chương II	52
Chương III. Khảo sát ổn định và chất lượng hệ xung	60
III.1. Điều kiện ổn định	60
III.2. Tiêu chuẩn ổn định đại số	61
III.3. Tiêu chuẩn ổn định tần số	65
III.3.1. Nguyên lý góc quay	65
III.3.2. Tiêu chuẩn ổn định Nyquist	66
III.4. Ổn định vô tận ở hệ xung	70
III.5. Khảo sát chất lượng của hệ xung	71
III.5.1. Quá trình quá độ	71
III.5.2. Quá trình xác lập	75
III.5.3. Đáp ứng của hệ giữa các thời điểm lấy mẫu	77
III.5.4. Ảnh hưởng của nhiễu	80
III.6. Dùng MATLAB để khảo sát ổn định và đánh giá chất lượng hệ xung	81

Bài tập chương III	87
Chương IV. Tổng hợp hệ xung	96
IV.1. Khái niệm chung	96
IV.2. Điều kiện thực hiện được của bộ điều khiển số	98
IV.3. Chọn tần số lượng tử hóa	99
IV.4. Chọn bộ điều khiển số theo phương pháp liên tục	101
IV.4.1. Bộ điều khiển được xác định theo phương pháp vi phân	101
IV.4.2. Bộ điều khiển số được xác định theo hàm truyền đạt	104
IV.4.3. Phương pháp dùng biến đổi z	108
IV.4.4. Tổng hợp bộ điều khiển có tính đến phần tử lưu giữ	110
IV.5. Phương pháp trực tiếp	113
IV.5.1. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số trên mặt phẳng z	114
IV.5.2. Bù trừ ảnh hưởng của khâu trễ	120
IV.5.3. Hệ ổn định vô tận	122
IV.6. Dùng MATLAB để tổng hợp hệ xung	124
Bài tập chương IV	127
Chương V. Tổng hợp hệ xung trong miền trạng thái	144
V.1. Phương trình trạng thái của hệ gián đoạn	144
V.2. Điều khiển được và quan sát được	148
V.2.1. Gián đoạn hóa và điều kiện điều khiển được và quan sát được	149
V.2.2. Điều kiện điều khiển được	149
V.2.3. Điều kiện quan sát được	150
V.3. Tổng hợp luật điều khiển	150
V.4. Phương pháp áp đặt nghiệm	152
	199

V.5. Công thức Ackermann	155
V.6. Bộ quan sát động	159
V.6.1. Bộ quan sát dự báo	160
V.6.2. Bộ quan sát hiện trạng	162
V.6.3. Bộ quan sát được giám bậc	165
V.7. Thiết kế bộ điều khiển: tổng hợp luật điều khiển và ước lượng	168
V.8. Tổng hợp hệ có đáp ứng phẳng	172
V.8.1. Điều kiện có đáp ứng phẳng trong không gian trạng thái	174
V.8.2. Trượt về gốc trục của bộ điều khiển	177
V.9. Điều khiển tích phân	177
V.9.1. Điều khiển tích phân theo phương pháp gia tăng trạng thái	177
V.9.2. Điều khiển tích phân theo phương pháp ước lượng độ chệch	181
V.10. Dùng MATLAB để mô hình hóa hệ điều khiển	182
Bài tập chương V	184
TÀI LIỆU THAM KHẢO	194

209139 M03

Ly thuyết điều khiển 12 (tổng cộng) 1



1211090000002

40,000

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Giá: 40.000đ