

TRẦN BÌNH

Bài tập giải sẵn
GIẢI TÍCH II & III

- TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN
- PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
- LÝ THUYẾT CHUỖI

→ TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CHỌN LỌC
→ PHỤ CHƯƠNG CÁC ĐỀ THI HỌC KỲ II
CÁC NĂM 2004 - 2008



NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

BÀI TẬP GIẢI SẴN
GIẢI TÍCH II+III

TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN - PHƯƠNG TRÌNH
VI PHÂN - LÝ THUYẾT CHUỖI

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CHỌN LỌC

PHỤ CHƯƠNG: CÁC ĐỀ THI HỌC KỲ II CÁC NĂM 2004 - 2008

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

(In lần thứ năm có sửa chữa và bổ sung)



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Sau khi bộ giáo trình **GIẢI TÍCH** (2 tập) của tác giả do Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật ấn hành (1998 - 2000), nhiều độc giả đã đề nghị tác giả viết tiếp bộ Bài tập giải tích giải sẵn có phần tóm tắt lý thuyết như một **Sổ tay toán học giải tích** cho sinh viên kỹ thuật và kỹ sư, dựa trên bộ giáo trình **GIẢI TÍCH**.

Để đáp ứng yêu cầu đó nhằm nâng cao chất lượng đào tạo trong hiện tại và tương lai, tác giả đã soạn bộ bài tập này: **GIẢI TÍCH I** (II, III), ứng với các nội dung học ở học kỳ I (II, III).

Phần bài tập, tác giả đã chọn lọc các bài từ dễ, trung bình đến khó, đại diện cho các loại tương ứng với các phần lý thuyết theo chương trình toán giải tích hiện tại. Những bài khó có đánh dấu * nhằm bồi dưỡng thêm cho sinh viên (nhất là các sinh viên khá, giỏi). Cuối sách có phần phụ chương: Các đề thi Giải tích học kỳ II các năm 2004 - 2008 của Đại học Bách khoa để sinh viên tham khảo.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, nhất là PGS. TS. Dương Quốc Việt đã đọc rất kỹ bản thảo và cho ý kiến quý báu.

Trong lần xuất bản thứ năm này, mặc dù đã cố gắng sửa chữa bổ sung song vẫn không tránh khỏi thiếu sót, rất mong bạn đọc đóng góp ý kiến để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

TÁC GIẢ

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
BÀI TẬP GIẢI TÍCH II	9
Chương I. ỨNG DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀO HÌNH HỌC (HÌNH HỌC VI PHÂN)	9
§1. Đường cong phẳng	9
1.1. Phương trình	9
1.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến	9
1.3. Vi phân cung	10
1.4. Độ cong	10
1.5. Đường tròn mật tiếp - bán kính và tâm cong	11
1.6. Túc bậc và thân khai	12
1.7. Hình bao	13
BÀI TẬP	13
§2. Đường trong không gian	32
2.1. Hàm vecteur	32
2.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường - Tam diện Frénet	34
2.3. Độ cong và độ xoắn	35
BÀI TẬP	36
§3. Tiếp diện và pháp tuyến của một mặt	54
3.1. Mặt cho theo phương trình không giải	5
3.2. Mặt cho theo phương trình tham số	55
BÀI TẬP	56
Chương 2. TÍCH PHÂN BỘI	65
§1. Tích phân kép	65
1.1. Định nghĩa - Tính chất	65
1.2. Cách tính	68
1.3. Quy tắc biến đổi tổng quát	68

1.4. Áp dụng	69
BÀI TẬP	70
§2. Tích phân bội ba	120
2.1. Định nghĩa	120
2.2. Cách tính trong toạ độ Descartes	121
2.3. Cách tính trong toạ độ cong bất kỳ	122
2.4. Toạ độ trụ	123
2.5. Toạ độ cầu	123
2.6. Áp dụng hình học	124
2.7. Áp dụng cơ học	124
BÀI TẬP	126
Chương 3. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ	152
§1. Tích phân thường phụ thuộc tham số	152
1.1. Định nghĩa	152
1.2. Định lý Leibniz	152
§2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số	153
2.1. Định nghĩa	153
2.2. Định lý	154
2.3. Các tích phân quan trọng	155
§3. Hàm Gamma và Beta	155
3.1. Hàm Gamma (Tích phân Euler loại hai)	155
3.2. Hàm Beta (Tích phân Euler loại một)	156
BÀI TẬP	156
Chương 4. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT	195
A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG	195
§1. Tích phân đường loại một	195
1.1. Định nghĩa	195
1.2. Cách tính	196
§2. Tích phân đường loại hai	196
2.1. Định nghĩa	196
2.2. Cách tính	198

§3. Công thức Green - sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân	198
3.1. Công thức Green	198
3.2. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân	199
§4. Áp dụng	199
4.1. Tính diện tích miền D	199
4.2. Tính tích phân đường	199
4.3. Tính công của lực	201
4.4. Moment tĩnh M_x , M_y - Moment quán tính	201
BÀI TẬP	202
B. TÍCH PHÂN MẶT	244
§1. Mặt định hướng	244
§2. Tích phân mặt loại một	245
2.1. Định nghĩa	245
2.2. Cách tính	246
§3. Tích phân mặt loại hai	246
3.1. Định nghĩa	246
3.2. Cách tính	247
§4. Công thức Ostrogradski và Stockes	248
4.1. Công thức Ostrogradski	248
4.2. Công thức Stokes	248
§5. Áp dụng	249
BÀI TẬP	250
C. CÁC YẾU TỐ CỦA GIẢI TÍCH VECTEURS (LÝ THUYẾT TRƯỜNG)	277
§1. Trường vô hướng	277
1.1. Định nghĩa	277
1.2. Đạo hàm theo hướng	278
1.3. Gradient	278
§2. Trường vecteurs	279
2.1. Định nghĩa	280

2.2. Thông lượng và divergence	280
2.3. Lưu số (hoàn lưu) và rotation	280
2.4. Các toán tử vi phân	281
2.5. Trường ống và trường thế	283
BÀI TẬP	283
PHỤ CHƯƠNG	308
Các đề thi giải tích học kỳ II (2004 - 2008)	308
Bảng hàm Gamma	386
BÀI TẬP GIẢI TÍCH III	387
Chương I. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	387
§1. Phương trình vi phân cấp một	387
1.1. Bài toán Cauchy	387
1.2. Phương trình biến số phân ly	388
1.3. Phương trình đẳng cấp	388
1.4. Phương trình tuyến tính	388
1.5. Phương trình Bernoulli	389
1.6. Phương trình vi phân toàn phần	389
1.7. Phương trình Clairaut và Lagrange	390
1.8. Bài toán quỹ đạo góc α	391
BÀI TẬP	392
§2. Phương trình vi phân cấp cao	423
2.1. Bài toán Cauchy	423
2.2. Phương trình cấp cao có thể hạ thấp cấp	424
2.3. Phương trình tuyến tính cấp cao	425
BÀI TẬP	427
§3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao với hệ số hằng số	444
3.1. Phương trình thuần nhất	444
3.2. Phương trình không thuần nhất	445
3.3. Phương trình Euler	446
BÀI TẬP	447

§4. Hệ phương trình vi phân	465
4.1. Bài toán chung	465
4.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính	466
4.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng số	468
BÀI TẬP	469
Chương 2. LÝ THUYẾT VỀ CHUỖI	478
§1. Chuỗi số	478
1.1. Định nghĩa	478
1.2. Điều kiện hội tụ	478
1.3. Tính chất	479
1.4. Chuỗi dương	479
1.5. Chuỗi có dấu bất kỳ và chuỗi đan dấu	481
1.6. Phép nhân chuỗi	482
BÀI TẬP	482
§2. Dãy và chuỗi hàm	498
2.1. Định nghĩa	498
2.2. Tiêu chuẩn hội tụ đều	499
2.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều	499
BÀI TẬP	500
§3. Chuỗi lũy thừa - Chuỗi Taylor - Chuỗi Maclaurin	511
3.1. Chuỗi lũy thừa	511
3.2. Chuỗi Taylor và Maclaurin	512
BÀI TẬP	514
§4. Chuỗi Fourier	539
4.1. Định nghĩa	539
4.2. Các hệ số Fourier	539
4.3. Định lý Dirichlet	541
BÀI TẬP	541
PHỤ CHƯƠNG	
Các đề thi giải tích học kỳ III (2004 - 2008)	561
Tài liệu tham khảo	617

BÀI TẬP GIẢI TÍCH II

CHƯƠNG I

ÁP DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀO HÌNH HỌC (HÌNH HỌC VI PHÂN)

§1. ĐƯỜNG CONG PHẪNG

1.1. Phương trình

Phương trình Descartes: $F(x, y) = 0$ hay $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (1)

Phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha < t \leq \beta \quad (2)$$

Phương trình độc cực: $r = f(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (3)

Phương trình tự hàm: $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$

s là độ dài cung đường cong tính từ một điểm góc nào đó của cung.

1.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến

Với (1): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, $y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$$\text{Với (2): } \frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{x-x_0}{x'_0}, \quad \frac{y-y_0}{x'_0} = -\frac{x-x_0}{y'_0}$$

Với $(x_0, y_0) \in$ đường $x'_0 = x'(t_0), y'_0 = y'(t_0)$

Cosin chỉ hướng của tiếp tuyến:

$$\text{Với (1): } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_x}}, \quad \sin\alpha = -\frac{y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x}}$$

$$\text{Với (2): } \cos\alpha = -\frac{x'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}, \quad \sin\alpha = \frac{y'_1}{\sqrt{x'^2_1+y'^2_1}}$$

1.3. Vi phân cung

$$\text{Với (1): } ds = \sqrt{1+y'^2_x} dx$$

$$(2): ds = \sqrt{x'^2_1+y'^2_1} dt$$

$$(3): ds = \sqrt{r^2+r'^2} d\varphi$$

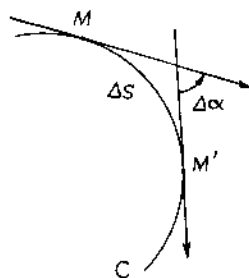
1.4. Độ cong

$$\text{Tại } M \in C: k = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\left| \frac{\Delta\alpha}{\widehat{MM'}} \right|}{\left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

$$\text{Với (1): } k = -\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\text{Với (2): } k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

$$\text{Với (3): } k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - r''^2|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$



Hình 1.

1.5. Đường tròn mật tiếp - Bán kính và tâm cong

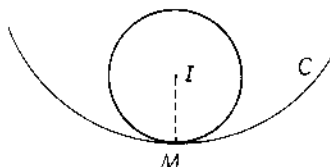
Đường tròn mật tiếp với đường cong (C) tại M là đường tròn:

- Tiếp xúc với (C) tại M

- Bề lõm trùng với bề lõm của (C)

- Độ cong tại M bằng độ cong của (C) tại M (hình 2)

- Tâm (x_0, y_0) và bán kính R của đường tròn mật tiếp là tâm cong và bán kính cong của (C) (Bán kính và tâm chính khúc).



Hình 2.

$$\text{Với (1): } R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \quad \begin{cases} x_0 = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''} \\ y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

$$\text{Với (2): } R = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}, \quad \begin{cases} x_0 = x - \frac{(x'^2+y'^2)y'}{x'y''-x''y'} \\ y_0 = y + \frac{(x'^2+y'^2)x'}{x'y''-x''y'} \end{cases}$$

$$\text{Với (3): } R = \frac{(r'^2+r''^2)^{3/2}}{|r'^2+2r'r''-r''^2|}$$

Phương trình đường tròn mật tiếp: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

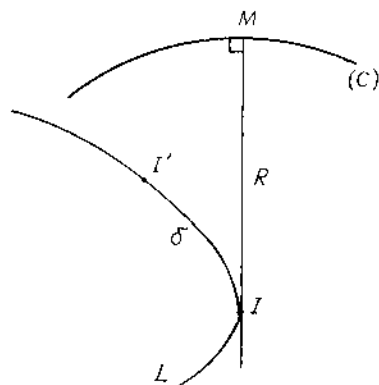
1.6. Túc bố và Thân khai

Quỹ tích (L) các tâm cong của đường cong (C) là túc bố của (C) và (C) là thân khai của L (hình 3).

- Tiếp tuyến với (L) là pháp tuyến với (C) (tại các điểm tương ứng).

- Nếu R biến thiên đơn điệu thì $R - \sigma = k = \text{const.}$

$\sigma = \widehat{\Pi'}$ độ dài cung trên L.



Hình 3.

Phương trình tham số của L:

Với (1):

$$\begin{cases} X = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''} \\ Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \quad (\text{Tham số } x)$$

Với (2):

$$\begin{cases} X = x - \frac{(x'^2+y'^2)y'}{x'y''-x''y'} \\ Y = y + \frac{(x'^2+y'^2)x'}{x'y''-x''y'} \end{cases} \quad (\text{Tham số } t)$$

Túc bố của đường tròn tâm O bán kính a:

$$x = a(t \sin t + \cos t)$$

$$y = a(\sin t - t \cos t).$$

1.7. Hình bao

a) Điểm bất thường

$M_0(x_0, y_0) \in$ đường $\gamma: F(x, y) = 0$ gọi là điểm bất thường của họ: $\exists F'_x, F'_y$ liên tục tại M_0 và:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ F'_x(x_0, y_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

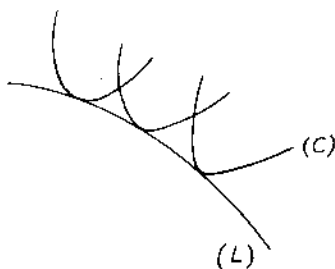
nếu $F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm bình thường của $\mathcal{C}$.

b) Hình bao (L) của họ đường cong (C)

$F(x, y, C) = 0$ là đường tiếp xúc với mọi đường của họ (C), và tại mỗi điểm của L chỉ có một đường của họ (C) tiếp xúc với nó (hình 4).

Nếu họ (C) có hình bao (L) thì $(x, y) \in L$ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ F'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$



BÀI TẬP

Hình 4.

1. Tìm vi phân cung ds

và các cosin chỉ hướng của tiếp tuyến tại M bất kỳ $\in$ đường (C) cho bởi các phương trình:

1) $y^2 = 2px$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

$$4) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$5) r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$6) r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad \begin{cases} \text{Tìm } \sin V \text{ hoặc } \cos V, \\ V: \text{ góc giữa bán kính vecteur và tiếp tuyến} \end{cases}$$

Bài giải

$$1) 2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} dx = \frac{1}{|y|} \sqrt{p^2 + y^2} dx$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}};$$

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}}$$

2) Đặt về tham số: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

$$ds = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

$$\text{hay } ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{-a \sin t}{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}} = \frac{-\sin t}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos t}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}}.$$

3) Đạo hàm 2 vế theo x: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ta có:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot y' = 0, \text{ do đó: } y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}} = \frac{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}{x^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$$

và: $ds = \sqrt[3]{\frac{a}{x}} dx.$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}; \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{a}{x}}} = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$$

4) Ta có: $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$

$$ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \cdot dt = 2a \sin \frac{t}{2} \cdot dt$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{a(1 - \cos t)}{2a \sin \frac{t}{2}} = \sin \frac{t}{2}; \quad \sin \alpha = \cos \frac{t}{2}$$

$$5) r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad r'_{\varphi} = \frac{a \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}$$

$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2} \cdot d\varphi = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} + \frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^6 \frac{\varphi}{2}}} \cdot d\varphi = \frac{a}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}} \cdot d\varphi$$

Ta biết: $\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'_{\varphi}} = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}{a \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$

Do đó: $\sin V = \cos \frac{\varphi}{2}; \cos V = \sin \frac{\varphi}{2}.$

6) Từ $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, đạo hàm 2 vế theo φ ta có:

$$2rr' = -2a^2 \sin 2\varphi, \quad r' = \frac{-a^2 \sin 2\varphi}{r}$$

$$ds = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}} \cdot d\varphi = \frac{a^2}{r} \cdot d\varphi$$

Tương tự 5): $\sin V = \cos 2\varphi.$

2. Tìm độ cong k và bán kính cong R tại một điểm tùy ý của các đường cong:

1) $y = x^3;$

2) $y = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$

3) $y = \operatorname{aln}(\cos \frac{x}{a});$

4) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a \operatorname{cht} \\ y = b \operatorname{sht} \end{cases};$

6) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

7) $r = a(1 + \cos \varphi);$

8) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$

Bài giải

1) Theo (1.4): $k = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

ở đây: $y = x^3$

$$y' = 3x^2, y'' = 6x, k = \frac{1}{R} = \frac{6x'}{\sqrt{(1+9x^4)^3}}.$$

$$2) y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}}{(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a})^{3/2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch}^3 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}.$$

$$3) y = a \ln(\cos \frac{x}{a}), y' = \frac{-\sin \frac{x}{a}}{\cos \frac{x}{a}} = -\operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

$$y'' = -\frac{1}{a \cos^2 \frac{x}{a}}, k = \frac{1}{R} = \frac{1}{a} \left| \cos \frac{x}{a} \right|$$

$$4) x = a \cos^3 t, x' = -3a \cos^2 t \sin t, x'' = 6a \cos t \sin^3 t - 3a \cos^3 t$$

$$y = a \sin^3 t, y' = 3a \sin^2 t \cos t, y'' = 6a \sin t \cos^3 t - 3a \sin^3 t$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^4 \sin^4 t \cos^2 t = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t.$$

$$\text{Tương tự: } x'y'' - x''y' = -9a^2 \sin^3 t \cos^3 t.$$

$$\text{Do đó: } k = \frac{1}{R} = \frac{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t}{(9a^2 \sin^2 t \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{2}{3a |\sin 2t|}$$

$$5) x = a \operatorname{ch} t, x' = a \operatorname{sh} t, x'' = a \operatorname{ch} t$$

$$y = b \operatorname{sh} t, y' = b \operatorname{ch} t, y'' = b \operatorname{sh} t.$$

$$\text{Do đó: } k = \frac{1}{R} = \frac{\left| ab\sinh^2 t - ab\cosh^2 t \right|}{\left(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t \right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t \right)^{3/2}}.$$

$$6) x = a(t - \sin t), x' = a(1 - \cos t), x'' = a \sin t$$

$$y = a(1 - \cos t), y' = a \sin t, y'' = a \cos t.$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\text{Tương tự: } |x'y'' - x''y'| = 2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\text{Do đó: } k = \frac{1}{R} = \frac{2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\left(4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{3/2}} = - \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}.$$

$$7) r = a(1 + \cos \varphi)$$

$$\text{Theo (1.4), ta tính } r' = -a \sin \varphi, r'' = -a \cos \varphi.$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r'^2 - rr'' &= a^2(1 + \cos \varphi)^2 + 2a^2 \sin^2 \varphi + a(1 + \cos \varphi)a \cos \varphi \\ &= 3a^2(1 + \cos \varphi) = 6a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r^2 + r'^2)^{3/2} &= [a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi]^{3/2} = (4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2})^{3/2} \\ &= 8a^3 \left| \cos^3 \frac{\varphi}{2} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } k = \frac{1}{R} = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{6a^2 \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{8a^3 \left| \cos^3 \frac{\varphi}{2} \right|} = \frac{3}{4a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|}.$$

$$8) r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Đạo hàm 2 vế theo φ , ta có:

$$2rr' = -2a^2 \sin 2\varphi \quad \text{hay} \quad rr' = -a^2 \sin 2\varphi$$

Lại đạo hàm theo φ :

$$r'^2 + rr'' = -2a^2 \cos 2\varphi = -2r^2$$

Do đó:

$$rr'' = -2r^2 - r'^2$$

$$\text{và:} \quad |r^2 + 2r'^2 - rr''| = |r^2 + 2r'^2 + 2r^2 + r'^2| = 3(r^2 + r'^2)$$

$$\text{Vậy:} \quad k = \frac{1}{R} = \frac{3(r^2 + r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{3}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

$$\text{Theo 6) bài 1: } \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{a^2}{r} \quad \text{nên:}$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{3r}{a^2}.$$

3. 1) Tìm bán kính cong bé nhất ($R_{\min}$) của đường: $y^2 = 2px$;

2) Tìm độ cong lớn nhất của đường: $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($a > 0$);

3) Lập phương trình đường tròn mật tiếp với đường:

$$\text{a) } y = x^2 - 6x + 10 \text{ tại } (3, 1);$$

$$\text{b) } xy = 1 \text{ tại } (1, 1).$$

Bài giải

1) Từ $y^2 = 2px$, đạo hàm 2 vế theo x :

$$y' = \frac{p}{y}, y'' = -\frac{p}{y^2} \cdot y' = -\frac{p^2}{y^3}$$

$$\text{Do đó: } R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(y'^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}$$

Từ công thức này suy ra: $R_{\min} = p$ khi $y = 0$.

$$2) \text{ Theo 2) bài 2: } R = a \cosh^2 \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow R' = 2a \cosh \frac{x}{a} \cdot \sinh \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} = \sinh \frac{2x}{a} = 0 \text{ khi } x = 0.$$

$$R'' = \frac{2}{a} \cosh \frac{2x}{a}$$

$$\Rightarrow R''(0) = \frac{2}{a} > 0 \text{ nên } R_{\min} = R(0) = a.$$

$$\text{và } k_{\max} = \frac{1}{a} \text{ tại } x = 0.$$

$$3) a) y = x^2 - 6x + 10, y' = 2x - 6, y'(3) = 0$$

$$y'' = 2, R = \frac{(1+0^2)^{3/2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Theo (1.5), các toạ độ tâm của tâm cong ở đây là:

$$x_0 = 3 + \frac{(1+0) \cdot 0}{2} = 3$$

$$y_0 = 1 + \frac{1+0}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình của đường tròn mật tiếp phải tìm là:

$$(x - 3)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) } xy = 1, \text{ ta có: } y = \frac{1}{x}, y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y'(1) = -1, y''(1) = 2$$

$$\text{Do đó: } R = \frac{(1+1)^{\frac{1}{2}}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_0 = 1 - \frac{1+1}{2}(-1) = 2$$

$$y_0 = 1 + \frac{1+1}{2} = 2$$

và phương trình đường tròn mật tiếp phải tìm là:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

4. Lập phương trình tics bề của các đường:

$$1) y = x^{3/2}$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$3) \begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t) \\ y = R(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = R(1 + \sin t) \\ y = R(1 + \cos t) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

$$6) r = a(1 + \cos \varphi)$$

$$7) x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \quad (\text{đường Tractrice})$$

Bài giải

$$1) y = x^{3/2}, y' = \frac{3}{2}x^{1/2}, y'' = \frac{3}{4}x^{-1/2},$$

Áp dụng các phương trình ở (1.6), ta có phương trình tức biến của đường đã cho, dưới dạng tham số x:

$$X = x - \frac{1 + \frac{9}{4}x}{\frac{3}{4}x^{1/2}} = -(9x + 2) \cdot \frac{x}{2}$$

$$Y = x^{3/2} + \frac{1 + \frac{9}{4}x}{\frac{3}{4}x^{1/2}} = 4(3x + 1) \frac{\sqrt{x}}{3}$$

Chú ý: Nếu đưa phương trình $y = x^{3/2}$ về dạng tham số $x = t^2, y = t^3$ thì:

$$X = -(9t^2 + 2) \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$Y = 4(3t^2 + 1) \cdot \frac{1}{3}$$

2) Đưa phương trình của hyperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ về dạng tham số:

$$\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}$$

Ta có: $x' = a \sinh t, x'' = a \cosh t$

$$y' = b \cosh t, y'' = b \sinh t,$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t$$

$$\begin{aligned}x'y'' - x''y' &= asht.bsht - acht.bcht \\ &= -ab(ch^2t - sh^2t) = -ab.\end{aligned}$$

Theo (1.6), ta có phương trình tức bề của hyperbole đã cho dưới dạng tham số:

$$\begin{aligned}X &= acht - \frac{a^2 sh^2t + b^2 ch^2t}{-ab}.bcht = \frac{a^2 + b^2}{a}ch^3t \\ Y &= asht + \frac{a^2 sh^2t + b^2 ch^2t}{-ab}.asht = \frac{a^2 + b^2}{b}sh^3t.\end{aligned}$$

Khử t ta có: $(aX)^{2/3} + (bY)^{2/3} = c^{4/3}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$3) \quad x = (R\cos t + t\sin t), \quad x' = R(-\sin t + \sin t + t\cos t) = Rt\cos t.$$

$$x'' = R\cos t - Rt\sin t.$$

$$y = R(\sin t - t\cos t), \quad y' = R(\cos t - \cos t + t\sin t) = Rt\sin t.$$

$$y'' = R\sin t + Rt\cos t$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2t^2\cos^2t + R^2t^2\sin^2t = R^2t^2$$

$$x'y'' - x''y' = R^2t^2$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} X = R(\cos t + t\sin t) + \frac{R^2t^2}{R^2t^2}.Rt\sin t \\ Y = R(\sin t - t\cos t) + \frac{R^2t^2}{R^2t^2}.Rt\cos t \end{cases}$$

$$\text{hay: } \begin{cases} X = R\cos t \\ Y = R\sin t \end{cases} \quad \text{và: } X^2 + Y^2 = R^2.$$

Vậy tức bề của đường đã cho là đường tròn tâm O , bán kính R . Theo định nghĩa thì đường đã cho là đường thân khai của đường tròn này.

$$4) \quad x = R(t - \sin t), \quad x' = R(1 - \cos t), \quad x'' = R\sin t$$

$$y = R(1 - \cos t), y' = R \sin t, y'' = R \cos t.$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t = 2R^2(1 - \cos t) = 4R^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$x'y'' - x''y' = R(1 - \cos t).R \cos t - R \sin t.R \sin t$$

$$= R^2 \cos t - R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = -2R^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

Theo (1.6) phương trình tức bề của đường Cycloïde đã cho là:

$$X = R(t - \sin t) - \frac{4R^2 \sin^2 \frac{t}{2}}{-2R^2 \sin^2 \frac{t}{2}}.R \sin t = R(t + \sin t)$$

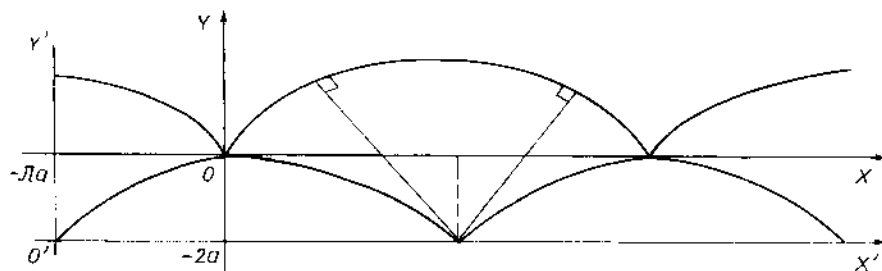
$$Y = R(1 - \cos t) + \frac{4R^2 \sin^2 \frac{t}{2}}{-2R^2 \sin^2 \frac{t}{2}}.R(1 - \cos t) = -R(1 - \cos t)$$

Đặt $t = \tau - \pi$ thì:

$$X = -\pi R + R(\tau - \sin \tau)$$

$$Y = -2R + R(1 - \cos \tau)$$

Vậy tức bề của đường Cycloïde cũng là một đường Cycloïde, suy từ Cycloïde bằng phép tịnh tiến các trục tọa độ: $X = X' - \pi R$, $Y = Y' - 2a$ (hình 5).



Hình 5.

$$5) \quad x = a \cos^3 t, \quad x' = -3a \cos^2 t \sin t = -3a(\sin t - \sin^3 t)$$

$$x'' = -3a(\cos t - 3\sin^2 t \cos t)$$

$$y = a \sin^3 t, \quad y' = 3a \sin^2 t \cos t = 3a(\cos t - \cos^3 t)$$

$$y'' = 3a(-\sin t + 3\cos^3 t \sin t)$$

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$$

$$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= -3a \cos^2 t \sin t \cdot 3a(-\sin t + 3\cos^3 t \sin t) \\ &\quad - (-3a)(\cos t - 3\sin^2 t \cos t) \cdot 3a \sin^2 t \cos t \\ &= 9a^2 \sin^2 t \cos^3 t - 27a^2 \cos^4 t \sin^3 t + 9a^2 \sin^3 t \cos^3 t - \\ &\quad - 27a^2 \sin^4 t \cos^3 t \\ &= -9a^2 \sin^2 t \cos^3 t \end{aligned}$$

Do đó ta có phương trình tức bề của đường astroïde đã cho:

$$\begin{cases} X = a \cos^3 t + \frac{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t}{-9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} \cdot 3a \sin^2 t \cos t \\ Y = a \sin^3 t + \frac{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t}{-9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} \cdot (-3a \cos^2 t \sin t). \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} X = a \cos^3 t + 3a \sin^2 t \cos t \\ Y = a \sin^3 t + 3a \cos^2 t \sin t \end{cases}$$

Rõ ràng:

$$X + Y = a(\cos t + \sin t)^3 = 2\sqrt{2}a \cos^3(t - \frac{\pi}{4})$$

$$X - Y = a(\cos t - \sin t)^3 = 2\sqrt{2}a \sin^3(t - \frac{\pi}{4})$$

Do đó, nếu làm một phép quay hệ trục tọa độ một góc $\frac{\pi}{4}$:

$$X_1 = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \quad Y_1 = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

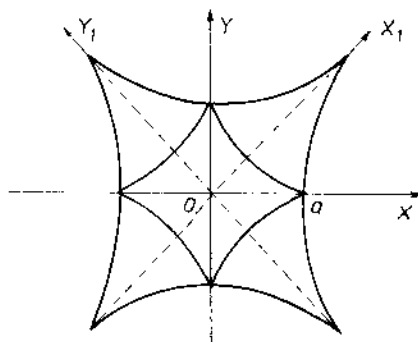
thì trong hệ mới X_1OY_1 ,
phương trình của túc bề là:

$$X = 2a \cos^3 \tau$$

$$Y = 2a \sin^3 \tau$$

với $\tau = t - \frac{\pi}{4}$ (hình 6).

Vậy túc bề của đường
astroïde cũng là một đường
astroïde.



Hình 6.

6) $r = a(1 + \cos \varphi)$. Ta
biết $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Do đó phương trình tham
số (với tham số φ) của đường
cardioïde đã cho là:

$$x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi = a(\cos \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi = a(\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi)$$

Tính toán, ta có:

$$x' = -a(\sin \varphi + 2\cos \varphi),$$

$$y' = a(\cos \varphi + \cos^2 \varphi),$$

....,

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1 + \cos \varphi)$$

$$x'y'' - x''y' = 3a^2(1 + \cos 2\varphi)$$

và phương trình túc bề của đường Cardioïde đã cho là:

$$X = \frac{a}{3}(1 - \cos \varphi) \cos \varphi + \frac{2a}{3}$$

$$Y = \frac{a}{3}(1 - \cos \varphi) \sin \varphi$$

Do đó, ta làm phép tịnh tiến hệ trục tọa độ:

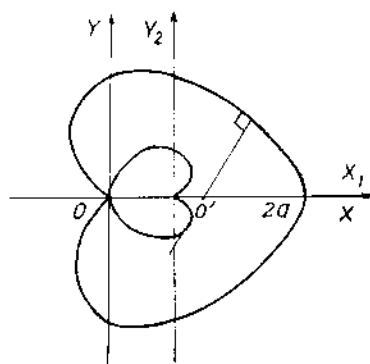
$$X = X_1 + \frac{2a}{3}$$

$$Y = Y_1$$

thì phương trình của túc bố này trong hệ tọa độ độc cực mới

$$O'X_1 \text{ là } r_1 = \frac{a}{3}(1 - \cos \varphi) \text{ đó}$$

cũng là một đường Cardioide kích thước thu lại bằng 1/3 kích thước của Cardioide đã cho và quay hướng ngược lại theo hướng của OX (hình 7).



Hình 7.

$$7) x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

Ta đưa phương trình này về dạng tham số, đặt $y = a \sin \varphi$, $0 < \varphi < \pi$ thì:

$$\begin{cases} x = a \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \end{cases}$$

Tính toán ta có:

$$x' = \frac{a \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, y' = a \cos \varphi, x'^2 + y'^2 = a^2 \cot^2 \varphi$$

$$x'' = \frac{-a \cos \varphi}{\sin^3 \varphi}, a \cos \varphi, y'' = -a \sin \varphi$$

$$x'y'' - x''y' = a^2 \cot^2 \varphi$$

Do đó, phương trình tham số của túc bề của đường tractrice đã cho là:

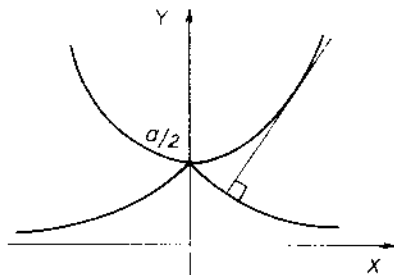
$$\begin{cases} x = a \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + a \cos \varphi - \frac{a^2 \cot^2 \varphi}{a^2 \cot^2 \varphi} a \cos \varphi = a \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \\ y = a \sin \varphi + \frac{a^2 \cot^2 \varphi}{a^2 \cot^2 \varphi} \left(\frac{a \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \right) = -\frac{a}{\sin \varphi} \end{cases}$$

Khử φ , ta có:

$$\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{x}{a}, \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = e^{\frac{x}{a}}$$

$$y = \frac{a}{\sin \varphi} = -\frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2} \frac{1 + e^{\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$\text{hay } y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$



Hình 8.

Đó là phương trình của đường dây xích (hình 8).

5. Tìm các điểm bất thường của các đường:

1) $(y - 1)^2 = (x - 1)^3$

2) $y^2 = -x^2 + x^4$

3) $y^2(a - x) = x^3$

4) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Bài giải

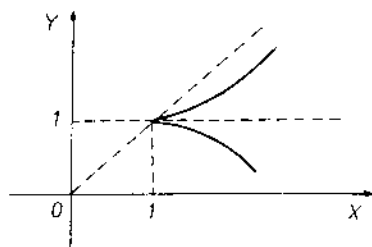
1) Theo a) (1.7), điểm bất thường của đường cong được xác định từ hệ:

$$F'_x = -3(x-1)^2 = 0$$

$$F'_y = 2(y-1) = 0$$

$$F(x, y) = (y-1)^2 - (x-1)^3 = 0$$

Giải hệ này, ta có điểm bất thường của đường cong đã cho: $x = 1, y = 1$ (điểm lùi) (hình 9).



Hình 9.

2) Tương tự 1):

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 4x^3 = 0 \\ F'_y = 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 4x^3 = 0 \\ F'_y = 2y = 0 \end{cases}$$

$$F(x, y) = y^2 + x^3 - x^4 = 0$$

Giải hệ này ta có: $y = 0, x = 0$ hoặc $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Điểm $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ không thuộc đường cong.

Điểm $(0, 0)$ thuộc đường cong, đó là điểm bất thường cô lập của đường cong (vì lân cận điểm này không có điểm nào thuộc đường cong).

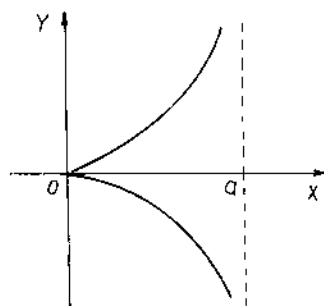
$$F'_{xxy} = y^2(a+x) + x^3 = 0$$

$$3) \begin{cases} F'_x = y^2 - 3x^2 = 0 \\ F'_y = -2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x = y^2 - 3x^2 = 0 \\ F'_y = -2xy = 0 \end{cases}$$

Hệ này cho nghiệm: $x = 0, y = 0$.

Vậy $(0, 0)$ là điểm bất thường của đường cong (điểm lùi) (hình 10).



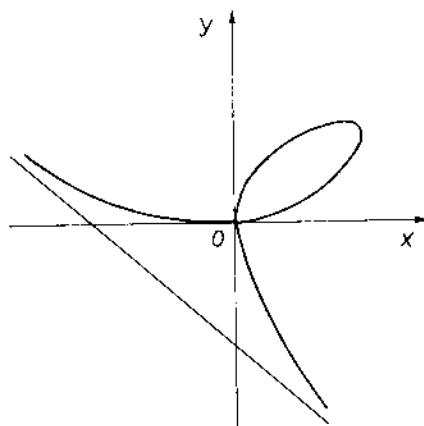
Hình 10.

$$4) F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$F'_x = 3x^2 - 3ay = 0$$

$$F'_y = 3y^2 - 3ax = 0$$

Hệ này cho nghiệm:
 $x = 0$, $y = 0$ và $(0, 0)$ là
 điểm bất thường của đường
 cong (điểm kép) (hình 11).



Hình 11.

6. Tìm hình bao của
 các họ đường cong:

$$1) y = (x - c)^3$$

$$2) y^3 = (x - c)^2$$

$$3) (a + x)(y - c)^2 =$$

$$= x^2(x - a),$$

$$a = \text{const} > 0.$$

$$4) y^2 = 2px + p^2$$

5) Họ đường thẳng lập với
 các trục tọa độ các tam giác có
 diện tích không đổi bằng S .

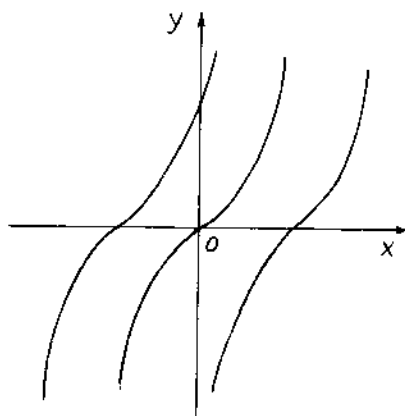
Bài giải

1) Theo b) (1.7), nếu họ
 đường cong có hình bao L thì
 $(x, y) \in L$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = y - (x - c)^3 = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có $x = c$,
 $y = 0$.

Theo hình 12, $y = 0$ (trục
 Ox) là hình bao của họ đường



Hình 12.

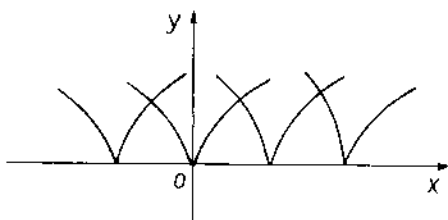
cong (quỹ tích các điểm uốn)
(đường cong không có điểm bất thường: $F'_y = 1 \neq 0$).

2) Tương tự 1):

$$\begin{cases} F(x, y, c) = y^3 - (x - c)^2 \\ F'_x(x, y, c) = -2(x - c) = 0 \end{cases}$$

Hệ cho nghiệm $x = c, y = 0$.

Theo hình 13, đường cong không có hình bao, $y = 0$ là quỹ tích các điểm bất thường (điểm lồi: $F = 0, F'_x = F'_y = 0$ tại $(c, 0)$).



Hình 13.

$$3) \begin{cases} F(x, y, c) = (a + x)(y - c)^2 - x^2(x - a) = 0 \\ F'_x(x, y, c) = -2(a + x)(y - c) = 0 \end{cases} \quad (\text{Strophoïde})$$

Hệ này cho nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases}$.

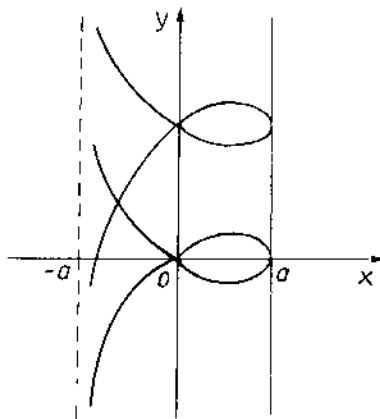
$$\begin{cases} x = a \\ y = c \end{cases}$$

Theo hình 14: $x = a$ là hình bao, còn $x = 0$ là quỹ tích các điểm kép của họ Strophoïde đã cho.

4) Không có hình bao.

5) Theo giả thiết, phương trình đường thẳng qua $(a, 0)$, $(0, b)$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ và } ab = 2S \text{ (hình 15).}$$



Hình 14.

(vì lý do đối xứng, xét trong góc phần tư thứ nhất).

Ta có:

$$b = \frac{2S}{a} \text{ và } \frac{x}{a} + \frac{ay}{2S} = 1 \quad (1)$$

Đạo hàm (1) theo a :

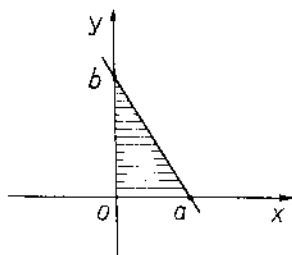
$$-\frac{x}{a^2} + \frac{y}{2S} = 0 \quad (2)$$

Khử a từ (1) và (2):

$$y = \frac{2S}{a^2}x, \quad \frac{x}{a} + \frac{a \cdot 2S}{a^2 \cdot 2S} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{2S}{a^2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{S}{a} \Rightarrow xy = \frac{S}{2} \text{ là hình bao phải tìm.}$$



Hình 15.

§2. ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^3$

2.1. Hàm Vecteur

Hàm Vecteur đối vô hướng t : $\vec{V} = \vec{V}(t)$ là một ánh xạ từ tập hợp các đại lượng vô hướng t : $\{t\}$ vào tập hợp các vecteur $\vec{V}$: $\{\vec{V}\}$.

Thường xét:

$$\vec{V} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1)$$

gọi là hàm bán kính vecteur của điểm M .

Khi t thay đổi, M vẽ nên một đường gọi là tốc độ của hàm vecteur và (1) gọi là phương trình vecteur của đường đó.

Hệ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in \{t\}$ gọi là phương trình tham số của đường.

Trong không gian: đường cũng có thể cho là giao tuyến của 2 mặt

Hệ $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ gọi là phương trình không giải trong không gian của đường;

$$\vec{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon.$$

Hàm $\vec{r} = \vec{r}(t)$ gọi là liên tục tại t_0 nếu $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Đạo hàm của hàm vecteur $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

$$\vec{r}''(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

...

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{a} = \text{const}, \vec{r}'(t) = 0$$

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 + \vec{r}'_2$$

$$(\alpha \vec{r})' = \alpha' \vec{r} + \alpha \vec{r}', \alpha = \alpha(t)$$

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1, \vec{r}'_2 + \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$$(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \wedge \vec{r}'_2$$

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)' = (\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}'_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}'_3)$$

$$\vec{r} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \Rightarrow \vec{r}' = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k}$$

$$\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t) \text{ với } |\vec{r}(t)| = C = \text{const} \Rightarrow \vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$$

$$\vec{r} = |\vec{r}(t)| \vec{e}_r, \dot{\vec{e}}_r = \text{const} \Rightarrow \vec{r}'(t) \parallel \dot{\vec{e}}_r$$

2.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường - Tam diện Frénet

Cho đường $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Nếu $t = s$: độ dài cung của $\mathcal{C}$ (tính từ 1 điểm nào đó) thì:

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

gọi là phương trình tự hàm của $\mathcal{C}$.

Tam diện Frénet tại $M \in \mathcal{C}$ lập nên bởi 3 vecteur:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}: \text{vecteur tiếp tuyến đơn vị}$$

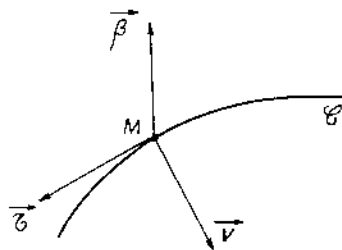
$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|} \perp \vec{\tau}: \text{vecteur pháp tuyến chính đơn vị}$$

$$\vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{\nu}: \text{vecteur trùng pháp tuyến đơn vị}$$

và các mặt phẳng mang 2 trong 3 vecteur đó (hình 16).

Đường thẳng mang $\vec{\tau}(\vec{\nu}, \vec{\beta})$ gọi là tiếp tuyến (pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến) của $\mathcal{C}$ tại M.

Mặt phẳng mang $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ $((\vec{\nu}, \vec{\beta}), (\vec{\beta}, \vec{\tau}))$ gọi là mặt phẳng mật tiếp (mặt phẳng pháp (pháp diện), mặt phẳng trực diện) của $\mathcal{C}$ tại M.



Hình 16.

Cho $\mathcal{C}$:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

thì:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)|}, \quad \vec{\nu} = \vec{\beta} \wedge \vec{\tau}$$

2.3. Độ cong và độ xoắn

Độ cong: $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right|$ (hình 17).

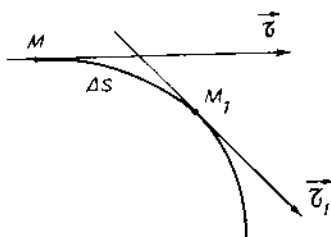
với $\vec{r} = \vec{r}(s)$ thì $k = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right|$

với $\vec{r} = \vec{r}(t)$ thì

$$k = \frac{|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \quad (1)$$

$R = \frac{1}{k}$ là bán kính cong

của $\mathcal{C}$ tại M.



Hình 17.

Độ xoắn: $T = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\beta}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right|$

với $\vec{r} = \vec{r}(s)$: $T = R^2 (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s))$

với $\vec{r} = \vec{r}(t)$: $T = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2} \quad (2),$

$\rho = \frac{1}{T}$ - bán kính xoắn.

Các công thức Frenet tại $M \in \mathcal{C}$.

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{\nu}}{R}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\frac{\vec{\tau}}{R} + \frac{\vec{\beta}}{\rho}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{-\vec{\nu}}{\rho}$$

BÀI TẬP

5. Xác định tốc độ (đường cong) của các hàm vecteur trong mặt phẳng:

$$1) \vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$$

$$2) \vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$$

$$3) \vec{r} = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t$$

$$4) \vec{r} = \vec{a}\cosh t + \vec{b}\sinh t$$

$$\text{với } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \text{const}, \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Bài giải

$$1) \text{ Giả sử } \vec{a} = (a_x, a_y), \vec{c} = (c_x, c_y).$$

Chiếu $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$ trên hai trục ta có:

$$x = a_x t + c_x$$

$$y = a_y t + c_y$$

Đây là phương trình tham số (t) của một đường thẳng. Vậy tốc độ của hàm vecteur đã cho là một đường thẳng.

$$2) \vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t \quad (1)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 t^2, \quad \vec{r} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 t \quad (\text{vì } \vec{a} \perp \vec{b}), \text{ khử } t: \frac{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2}{b^4} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{a^2}.$$

Với $\vec{b} = (b_x, b_y)$, $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{r} = (x, y)$ ta có:

$$(xb_x + yb_y)^2 = \frac{b^4}{a^2} (xa_x + ya_y)$$

$$\text{Đặt: } Y = xb_x + yb_y, X = xa_x + ya_y$$

thì ta có:

$$Y^2 = \Lambda X \quad (\Lambda = \frac{b^4}{a^2}).$$

Vậy tốc độ của (1) là một parabole.

3) Từ $\vec{r} = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t$, nhân 2 vế lần lượt với $\vec{a}$, $\vec{b}$ và chú ý $\vec{a}\vec{b} = 0$, ta có:

$$\vec{r}\vec{a} = a^2\cos t$$

$$\vec{r}\vec{b} = b^2\sin t$$

Do đó ta có phương trình phải tìm:

$$\frac{(\vec{r}\vec{a})^2}{a^4} + \frac{(\vec{r}\vec{b})^2}{b^4} = 1$$

Đó là phương trình của một ellipse.

4) Tương tự, phương trình tốc độ của $\vec{r} = \vec{a}\cosh t + \vec{b}\sinh t$ là đường hyperbole.

$$\frac{(\vec{r}\vec{a})^2}{a^4} - \frac{(\vec{r}\vec{b})^2}{b^4} = 1.$$

6. 1) Tìm thể tích lớn nhất của hình hộp dựng trên 3 vectơ:

$$\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2t\vec{i} - \vec{j} + t^3\vec{k}$$

$$\vec{c} = -t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k} \quad \text{với } 0 \leq t \leq 1.$$

2) Xác định quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của chuyển động có phương trình:

$$\vec{r} = \vec{i}\cos\alpha\cos\omega t + \vec{j}\sin\alpha\cos\omega t + \vec{k}\sin\omega t$$

Bài giải

1) Ta biết $V = \left\| \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\|$

$$\text{hay } V = \left\| \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 2t & -1 & t^3 \\ t^2 & t^3 & 1 \end{pmatrix} \right\| = (t^2 + 1)^2$$

$V' = 4t(t^2 + 1) > 0$, do đó V là hàm đơn điệu tăng:

$$V_{\max} = V(1) = 4 \quad \text{vì } 0 \leq t \leq 1$$

2) Ta có $x = \cos\alpha \cdot \cos\omega t$

$$y = \sin\alpha \cdot \cos\omega t$$

$$z = \sin\omega t$$

Bình phương 2 vế rồi cộng lại ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Từ 2 phương trình đầu ta có: $y = \tan\alpha \cdot x$.

Vậy quỹ đạo của chuyển động là đường tròn (lớn):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = \tan\alpha \cdot x \end{cases}$$

Vận tốc:

$$\vec{V} = \vec{r}' = \vec{i} \cdot (-\omega \cos\alpha \cdot \sin\omega t) + \vec{j} \cdot (-\omega \sin\alpha \cos\omega t) + \vec{k} \cdot \omega \cos\omega t$$

Gia tốc:

$$\vec{a} = \vec{r}'' = \vec{i} \cdot (-\omega^2 \cos\alpha \cos\omega t) + \vec{j} \cdot (-\omega^2 \sin\alpha \cos\omega t) + \vec{k} \cdot (-\omega^2 \sin\omega t)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\omega^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \omega t + \omega^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \omega t + \omega^2 \cos^2 \omega t} = |\omega|$$

$$|\vec{a}| = \omega^2.$$

7. Tìm các vecteur $\vec{r}$, $\vec{V}$, $\vec{\beta}$ của các đường:

1) $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = t e^t$ tại gốc tọa độ

2) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ tại một điểm tùy ý.

Bài giải

1) Ta có: $x' = \sin t + t \cos t$, $x'' = 2 \cos t - t \sin t$

$$y' = \cos t - t \sin t, y'' = -2 \sin t - t \cos t$$

$$z' = e^t + t e^t, z'' = 2e^t + t e^t$$

$$x'(0) = 0, x''(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 0, z'(0) = 1, z''(0) = 2$$

Theo (2.2), ta có:

$$\vec{r} = \frac{0\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{12}} = \frac{\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{v} = \vec{\beta} \wedge \vec{r} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$$

2) $x' = -3 \cos^2 t \sin t$, $y' = 3 \sin^2 t \cos t$, $z' = -2 \sin 2t$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{-3 \cos^2 t \sin t \vec{i} + 3 \sin^2 t \cos t \vec{j} - 2 \sin 2t \vec{k}}{\sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t + 4 \sin^2 2t}} \\ &= \frac{3 \cos t \vec{i} - 3 \sin t \vec{j} + 4 \vec{k}}{5} \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\vec{\beta} = \frac{4\cos\vec{i} - 4\sin\vec{j} - 3\vec{k}}{5}$$

$$\vec{v} = \sin\vec{i} + \cos\vec{j}$$

8. 1) Viết phương trình của tiếp tuyến và pháp diện với các đường:

a) $x = R\cos^2 t$, $y = R\sin t \cos t$, $z = R\sin t$ tại $t = \frac{\pi}{4}$;

b) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ tại $(1, 1, 2)$.

2) a) Viết phương trình của tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến tại 1 điểm M tùy ý của đường:

$$x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$$

b) Tìm M trên đường tại đó tiếp tuyến song song với mặt phẳng:

$$x + 3y + 2z - 10 = 0$$

Bài giải

1) Tại $t = \frac{\pi}{4}$, ta có $x = \frac{R}{2}$, $y = \frac{R}{2}$, $z = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$$x' = -2R\sin t \cos t, y' = R\cos 2t, z' = R\cos t$$

$$x'(\frac{\pi}{4}) = -R, y'(\frac{\pi}{4}) = 0, z'(\frac{\pi}{4}) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Do đó ta có phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại $t = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{x - \frac{R}{2}}{-R} = \frac{y - \frac{R}{2}}{0} = \frac{z - \frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{2}}{2}} \quad \text{hay} \quad \frac{x - \frac{R}{2}}{-R} = \frac{y - \frac{R}{2}}{0} = \frac{z - \frac{R\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}$$

và phương trình của pháp diện với đường cong tại đó là:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right).2 + \left(y - \frac{R}{2}\right).0 + \left(z - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right).(-\sqrt{2}) = 0$$

$$\text{hay } x\sqrt{2} - z = 0$$

b) Từ $z = x^2 + y^2$, $x = y$, coi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, và lấy đạo hàm 2 vế các phương trình đã cho theo t ta có:

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' = z' \\ x' = y' \end{cases}$$

Tại $(1, 1, 2)$ ta có hệ:

$$\begin{cases} 2x' + 2y' = z' \\ x' = y' \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x' = x' \\ y' = x' \\ z' = 4x' \end{cases}$$

và phương trình của tiếp tuyến và pháp diện với đường cong tại $(1, 1, 2)$ là:

$$\frac{x-1}{x'} = \frac{y-1}{x'} = \frac{z-2}{4x'} \quad \text{hay} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}$$

$$(x-1).1 + (y-1).1 + (z-2).4 = 0$$

$$\text{hay } x + y + 4z - 10 = 0$$

Chú ý

Có thể đưa phương trình của đường cong về dạng tham số:

$$x = t, y = t, z = 2t^2.$$

$$2) \text{ a) Ta có: } x' = t^2, y' = t^2, z' = 4t$$

$$x'' = 2t, y'' = 2t, z'' = 4.$$

Theo (2.2), vecteur chỉ phương của:

- Tiếp tuyến: $\vec{T} = \vec{r}'(t) = (t^3, t^2, t)$

- Trùng pháp tuyến:

$$\vec{B} = \vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^3 & t^2 & t \\ 3t^2 & 2t & 1 \end{vmatrix} = (-t^2, 2t^3, -t^4)$$

- Pháp tuyến chính:

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t^2 & 2t^3 & -t^4 \\ t^3 & t^2 & t \end{vmatrix} = (2t^4 + t^5, -t^2 + t^3, -t^4 - 2t^5).$$

Do đó phương trình của tiếp tuyến, pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến tại M tùy ý của đường đã cho là:

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{t^3} = \frac{y - \frac{1}{3}}{t^2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{t} \text{ hay } \frac{x - \frac{1}{4}}{t^3} = \frac{y - \frac{1}{3}}{t} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}$$

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{2t^4 + t^6} = \frac{y - \frac{1}{3}}{-t^7 + t^3} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-t^4 - 2t^6}$$

$$\text{hay } \frac{x - \frac{1}{4}}{t^3 + 2t} = \frac{y - \frac{1}{3}}{1 - t^4} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2t^3 - 1}$$

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{-t^2} = \frac{y - \frac{1}{3}}{2t^3} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-t^4} \text{ hay } \frac{x - \frac{1}{4}}{1} = \frac{y - \frac{1}{3}}{-2t} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-t^2}$$

b) Điều kiện để tiếp tuyến song song với mặt phẳng $x + 3y + 27 - 10 = 0$ là:

$$t^2.1 + t.3 + 1.2 = 0 \text{ hay } t^2 + 3t + 2 = 0$$

Do đó: $t = -1$, $t = -2$ và ta tìm được 2 điểm: $M_1(-1/4, -1/3, 1/2)$, $M_2(4, -8/3, 2)$ tại đó tiếp tuyến song song với mặt phẳng đã cho.

9. Viết phương trình mặt phẳng mặt tiếp, pháp diện và mặt phẳng trực giao của các đường:

1) $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = bt$ (xoắn ốc conique) tại gốc O;

2) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ tại một điểm bất kỳ;

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ tại M (1, 1, 2);

4) $y^2 = x$, $x^2 = z$ tại một điểm tùy ý.

Bài giải

1) Điểm (0, 0, 0) ứng với $t = 0$.

Ta có: $x' = \cos t - t \sin t$, $y' = \sin t + t \cos t$, $z' = b$.

$$x'' = -2 \sin t - t \cos t, y'' = -t \sin t + 2 \cos t, z'' = 0.$$

Tại $t = 0$: $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = b$

$$x'' = 0, y'' = 2, z'' = 0.$$

Do đó ta có vecteur pháp của pháp diện, mặt phẳng mặt tiếp, mặt phẳng trực giao và phương trình của chúng lần lượt là:

$$\vec{T} = (1, 0, b), (x - 0).1 + (y - 0).0 + (z - 0).b = 0 \text{ hay } x + bz = 0$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2b\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$(x - 0).(-2b) + (y - 0).0 + (z - 0).2 = 0 \text{ hay } bx - z = 0.$$

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2b & 0 & 2 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 2(b^2 + 1)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$(x - 0).0 + (y - 0).2(b^2 + 1) + (z - 0).0 = 0 \text{ hay } y = 0.$$

2) Tương tự như 1):

Pháp diện:

$$e^x - e^y + \sqrt{2} \cdot z + 2(1 + \operatorname{sh} 2t) = 0.$$

Mặt phẳng tiếp:

$$e^x - e^y + \sqrt{2} \cdot z + 2t = 0.$$

Mặt phẳng trực giao:

$$x + y + \sqrt{2} \operatorname{sh} t \cdot z + 2(t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t) = 0.$$

3) Gọi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, lấy đạo hàm 2 vế các phương trình đã cho theo t :

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' + 2zz' = 0 \\ 2xx' - 2yy' + 2zz' = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Tại $(1, 1, 2)$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x' + y' + 2z' = 0 \\ x' - y' + 2z' = 0 \end{cases}$$

Xét một nghiệm khác không của hệ $x' = 2$, $y' = 0$, $z' = -1$.

Ta có phương trình pháp diện của đường tại $(1, 1, 2)$:

$$(x - 1) \cdot 2 + (y - 1) \cdot 0 + (z - 2) \cdot (-1) = 0 \text{ hay } 2x - z = 0.$$

Lại lấy đạo hàm hệ (1) theo t ta có:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' = 0 \\ x'^2 - y'^2 + z'^2 + xx'' - yy'' + zz'' = 0 \end{cases}$$

Tại $(1, 1, 2)$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x'' + y'' + z'' = -5 \\ x'' - y'' + z'' = -5 \end{cases}$$

Lấy một nghiệm của hệ $x'' = -1$, $y'' = 0$, $z'' = -2$.

Ta có:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0, 5, 0)$$

và phương trình mặt tiếp phải tìm là:

$$(x - 1).0 + 5(y - 1) + (z - 2) = 0 \text{ hay } y - 1 = 0$$

Ta có: $\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 0, -10).$

do đó phương trình mặt phẳng trực đặc phải tìm là:

$$(x - 1)(-5) + (y - 1).0 + (z - 2)(-10) = 0 \text{ hay } x + 2z - 5 = 0.$$

4) Tương tự như 3):

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2yy' = x' \\ 2xx' = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' = 1 \\ x' = \frac{1}{2x} \\ y' = \frac{x'}{2y} = \frac{1}{4xy} \end{cases}$$

Phương trình của pháp diện:

$$(X - x) \cdot \frac{1}{2x} + (Y - y) \cdot \frac{1}{4xy} + (Z - z) \cdot 1 = 0$$

$$\text{hay } 2y(X - x) + (Y - y) + 4y^2(Z - z) = 0$$

Tương tự, ta có phương trình của các mặt phẳng mặt tiếp và trực đặc:

$$6y^2(X - x) - 8y^3(Y - y) - (Z - z) = 0$$

$$(1 - 32y^6)(X - x) - 2y(12y^4 + 1)(Y - y) + 2y^2(8y^2 + 3)(Z - z) = 0$$

10. Tìm độ cong của các đường:

1) $x = t \cos t, y = t \sin t, z = bt$ tại $(0, 0, 0)$;

2) $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t\sqrt{2}$ tại (x, y, z) ;

3) $x^2 = 2az, y^2 = 2bz$ tại (x, y, z) ;

4) $x^2 - y^2 + z^2 = 1, y^2 - 2y + z = 0$.

Bài giải

1) Theo (1) (2.3) ta tính: $|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|$ và $|\vec{r}'|^3$ tại $t = 0$.

Ta sẽ có:
$$k = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$$

Theo 1) bài 9, ta có:

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = \sqrt{(-2b)^2 + 2^2} = 2\sqrt{1 + b^2}$$

$$|\vec{r}'|^3 = \left(\sqrt{1 + b^2}\right)^3$$

Do đó độ cong phải tìm là:

$$k = \frac{2\sqrt{1 + b^2}}{\left(\sqrt{1 + b^2}\right)^3} = \frac{2}{1 + b^2}$$

2) $x = t \cos t, x' = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t, x'' = -\frac{1}{\cos^2 t}$

$$y = t \sin t, y' = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{cotg} t, y'' = -\frac{1}{\sin^2 t}$$

$$z = t\sqrt{2}, z' = \sqrt{2}, z'' = 0$$

$$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\cos^2 t} & \frac{\cot t}{\sin^2 t} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\cos^2 t} & -\frac{\cot t}{\sin^2 t} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t}, \frac{-\sqrt{2}}{\cos^2 t}, \frac{2}{\sin t \cos t} \right)$$

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t \cos^2 t}, |\vec{r}'|^3 = \left(\frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} \right)^{3/2}$$

Do đó:

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t \cos^2 t} \cdot \frac{(\sin^2 t \cos^2 t)^{3/2}}{1} = \frac{|\sin 2t|}{\sqrt{2}}$$

3) $\begin{cases} x^2 = 2az \\ y^2 = 2bz \end{cases}$, đưa về dạng tham số, đặt $x = t$ thì hệ trên có dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}t \\ z = \frac{t^2}{2a} \end{cases}$$

Ta tính: $x' = 1, x'' = 0$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}, y'' = 0$$

$$z' = \frac{1}{a}, z'' = \frac{1}{a}$$

Do đó: $|\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = \sqrt{\left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{(a+b)^{1/2}}{a^{3/2}}$

$$\begin{aligned} |r|^3 &= \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{t^2}{a^2}\right)^{3/2} = \left[\left(\frac{a+b}{a} + \frac{2az}{a^2}\right)\right]^{3/2} \\ &= \frac{(a+b+2z)^{3/2}}{a^{3/2}} \quad (\text{vì theo trên } t^2 = 2az) \end{aligned}$$

Vậy:
$$k = \frac{(a+b)^{1/2}}{(a+b+2z)^{3/2}}$$

$$4) \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Coi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ và lấy đạo hàm 2 vế của hệ (1) theo t , ta có:

$$\begin{cases} 2xx' - 2yy' + 2zz' = 0 \\ 2yy' - 2x' + z' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Tại $(1, 1, 1)$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x' - y' + z' = 0 \\ -2x' + 2y' + z' = 0 \end{cases}$$

Lấy một nghiệm của hệ này: $x' = 1$, $y' = 1$, $z' = 0$.

Lại lấy đạo hàm 2 vế của (2), theo t ta có:

$$\begin{cases} x'^2 - y'^2 + z'^2 + xx'' - yy'' + zz'' = 0 \\ 2y'^2 + 2yy'' - x'' + z'' = 0 \end{cases}$$

Tại $(1, 1, 1)$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x'' - y'' + z'' = 0 \\ 2y'' - 2x'' + z'' = 0 \end{cases}$$

Lấy 1 nghiệm của hệ này:

$$x'' = 1, y'' = \frac{1}{3}, z'' = \frac{-2}{3}$$

$$\text{Độ dóc: } k = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & -2/3 \end{vmatrix}}{|\bar{i} + \bar{j}|^3} = \frac{\sqrt{12}}{3(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

11. Tìm độ xoắn của các đường sau tại một điểm tùy ý:

1) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$

2) $x = a \cosh t, y = a \sinh t, z = at$

3) $2ay = x^2, 6a^2z = x^3$

4) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ (đường đinh ốc trụ tròn xoay)

(Tính cả độ cong).

Bài giải

1) Theo (2.3), ta tính:

$$x' = e^t(\cos t - \sin t), y' = e^t(\cos t + \sin t), z' = e^t$$

$$x'' = -2e^t \sin t, y'' = 2e^t \cos t, z'' = e^t$$

$$x''' = -2e^t(\sin t + \cos t), y''' = 2e^t(\cos t - \sin t), z''' = e^t.$$

$$\begin{aligned} (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') &= \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \\ -2e^t(\sin t + \cos t) & 2e^t(\cos t - \sin t) & e^t \end{vmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{vmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t & 1 \\ -(\cos t + \sin t) & \cos t - \sin t & 0 \\ -3\cos t - \sin t & \cos t - 3\sin t & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(lấy hàng đầu trừ các hàng sau)

$$\begin{aligned}
&= e^{3t}(-\cos^2 t - \sin t \cos t + 3 \sin t \cos t + 3 \sin^2 t + \\
&\quad + 3 \cos^2 t + \sin t \cos t - 3 \sin t \cos t - \sin^2 t) \\
&= 2e^{3t}
\end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned}
|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2 &= \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} \right\|^2 \\
&= \left(e^t \sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 4} \right)^2 = 6e^{2t}
\end{aligned}$$

Vậy: $T = \frac{2e^{3t}}{6e^{2t}} = \frac{e^t}{3}$

2) $x = acht, y = asht, z = at$

$$x' = asht, y' = acht, z' = a$$

$$x'' = acht, y'' = asht, z'' = 0$$

$$x''' = asht, y''' = acht, z''' = 0$$

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \begin{vmatrix} asht & acht & a \\ acht & asht & 0 \\ asht & acht & 0 \end{vmatrix} = a^3(ch^2t - sh^2t) = a^3$$

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2 = \left(\sqrt{a^4 sh^2 t + a^4 ch^2 t + a^4 (sh^2 t - ch^2 t)^2} \right)^2 = 2a^4 ch^2 t$$

Do đó: $T = \frac{a^3}{2a^4 ch^2 t} = \frac{1}{2ach^2 t}$.

3) $2ay = x^2, 6a^2z = x^3 - (1)$

Ta đưa phương trình của đường (1) về tham số.

$$\text{Đặt: } x = t, y = \frac{t^2}{2a}, z = \frac{t^3}{6a^2}$$

$$\text{Do đó: } x' = 1, y' = \frac{t}{a}, z' = \frac{t^2}{2a^2}$$

$$x'' = 0, y'' = \frac{1}{a}, z'' = \frac{t}{a^2}$$

$$x''' = 0, y''' = 0, z''' = \frac{1}{a^2}$$

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \begin{vmatrix} 1 & \frac{t}{a} & \frac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{t}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^3}$$

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2 = \frac{t^4}{4a^6} + \frac{t^2}{a^4} + \frac{1}{a^2}$$

$$T = \frac{1}{a^3 \left(\frac{t^4}{4a^6} + \frac{t^2}{a^4} + \frac{1}{a^2} \right)} = \frac{1}{\frac{t^4}{4a^3} + \frac{t^2}{a} + a}$$

$$\text{Theo trên: } t^2 = 2ay, \text{ do đó: } T = \frac{1}{\frac{y^2}{a} + 2y + a} = \frac{a}{(y+a)^2}$$

$$4) \text{ Ta có: } x = acost, y = asint, z = bt$$

$$x' = asint, y' = acost, z' = b$$

$$x'' = -acost, y'' = -asint, z'' = 0$$

$$x''' = a \sin t, y''' = -a \cos t, z''' = 0$$

$$|\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^2} = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = a^2 b, |\vec{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Do đó: } T = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$k = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Vậy, tại mọi điểm của đường dinh ốc, độ cong và độ xoắn của nó là những đại lượng không đổi, người ta cũng dùng tính chất này để định nghĩa đường dinh ốc.

12. Chứng minh rằng:

1) Nếu độ cong tại mọi điểm của một đường bằng không thì đường đó là một đường thẳng.

2) Nếu độ xoắn tại mọi điểm của một đường bằng không thì đường đó là một đường cong phẳng.

$$3) \text{ Đường } \begin{cases} x = 1 + 3t + 2t^2 \\ y = 2 - 2t + 5t^2 \\ z = 1 - t^2 \end{cases} \text{ là một đường cong phẳng. Tìm mặt}$$

phẳng chứa nó.

Bài giải

1) Ta biết độ cong của đường là:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\text{là } k = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$$

$k = 0 \Rightarrow |\vec{r}' \wedge \vec{r}''| = 0$: có thể xảy ra ba trường hợp:

$$\vec{r}' = 0 \Rightarrow x' = 0, y' = 0, z' = 0$$

$\Rightarrow x = c_1, y = c_2, z = c_3$: đó là một đường thẳng

hoặc

$$\vec{r}'' = 0 \Rightarrow x'' = 0, y'' = 0, z'' = 0$$

$$\Rightarrow x = a_1 t + a_2, y = b_1 t + b_2, z = c_1 t + c_2$$

Vậy đường cong là một đường thẳng hoặc $\vec{r}' \neq 0, \vec{r}'' \neq 0 \Rightarrow \vec{r}' \parallel \vec{r}''$

$$\text{hay } \frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \varphi(t).$$

Do đó:

$$d \ln x' = \varphi(t) dt \Rightarrow \ln x' = \int \varphi(t) dt$$

$$\Rightarrow x' = e^{\int \varphi(t) dt} = \Psi(t) \Rightarrow x = \int \Psi(t) dt + C_1$$

Tương tự:

$$y = \int \Psi(t) dt + C_2, z = \int \Psi(t) dt + C_3$$

$$\Rightarrow \frac{x - C_1}{1} = \frac{y - C_2}{1} = \frac{z - C_3}{1}$$

Đây là phương trình của một đường thẳng.

2) Ta biết (2.3) độ xoắn T của đường cong $\vec{r} = \vec{r}(t)$ là $T = \frac{|\vec{d}\vec{\beta}|}{|ds|}$.

Theo giả thiết $T = 0$, suy ra $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0$ hay $\vec{\beta} = \text{const}$ tại mọi điểm của

đường cong, mặt khác $\vec{\beta} \perp \vec{v}$, $\vec{\beta} \perp \vec{\tau}$, do đó $\vec{\tau}$, $\vec{v}$ luôn luôn nằm trong một mặt phẳng, nghĩa là đường cong là đường cong phẳng.

$$3) \begin{cases} x = 1 + 3t + 2t^2 \\ y = 2 - 2t + 5t^2 \\ z = 1 - t^2 \end{cases},$$

$$x' = 3 + 4t, x'' = 4,$$

$$y' = -2 + 10t, y'' = 10$$

$$z' = -2t, z'' = -2$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3+4t & -2+10t & -2t \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix}}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 38\vec{k}}{\sqrt{1198}}$$

Vậy $\vec{\beta} = \text{const}$, theo 2) đường cong là đường cong phẳng.

Lấy 3 điểm trên đường cong (không thẳng hàng):

$M_1(1, 2, 1)$ với $t = 0$; $M_2(6, 5, 0)$ với $t = 1$; $M_3(0, 9, 0)$ với $t = -1$.

Mặt phẳng qua M_1, M_2, M_3 chính là mặt phẳng chứa đường cong, phương trình của mặt phẳng đó là:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ hay } 2x + 3y + z - 27 = 0.$$

§3. TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN CỦA MỘT MẶT

3.1. Mặt cho theo phương trình không giải

Trong R^3 , cho mặt S , có phương trình không giải:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

Nếu F là hàm liên tục trên S thì S gọi là một mặt liên tục.

Nếu tồn tại F'_x, F'_y, F'_z liên tục tại $(x, y, z) \in S$ và:

$$F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$$

khi đó $(x, y, z) \in S$ gọi là một điểm bình thường.

Điểm $M(x, y, z) \in S$: $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 = 0$, hay ít nhất một trong F'_x, F'_y, F'_z không tồn tại gọi là một điểm bất thường của S .

Xét $M(x, y, z) \in S$ là một điểm bình thường.

Phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại M là:

$$(X-x)F'_x + (Y-y)F'_y + (Z-z)F'_z = 0$$

$$\text{và} \quad \frac{X-x}{F'_x} = \frac{Y-y}{F'_y} = \frac{Z-z}{F'_z} \quad (1)$$

X, Y, Z là toạ độ của M bất kỳ thuộc tiếp diện và pháp tuyến.

$\vec{N} = (F'_x, F'_y, F'_z)$ gọi là vecteur pháp tại $M(x, y, z)$ của S .

Đặc biệt S có phương trình: $z = f(x, y)$ thì phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại $M(x, y, z) \in S$ là:

$$(X-x)f'_x + (Y-y)f'_y - (Z-z) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{X-x}{f'_x} = \frac{Y-y}{f'_y} = \frac{Z-z}{-1}$$

3.2. Mặt cho theo phương trình tham số

Trong R^3 , xét mặt S cho theo phương trình tham số:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D \quad (1)$$

Phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại $M(x, y, z) \in S$ là:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}$$

trong đó: $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$

$\vec{N} = (A, B, C)$ là vecteur pháp của S .

BÀI TẬP

13. Viết phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với các mặt sau:

1) $3xyz - z^3 = a^3$ tại $M(0, a, -a)$.

2) $z = x^2 + y^2$ tại $M(1, -2, 5)$.

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ tại $M(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tiếp diện giao với các trục tọa độ những

đoạn thẳng (tính từ gốc) bằng nhau.

5) $x = a\cos\theta\cos\varphi, y = b\cos\theta\sin\varphi, z = c\sin\theta$ tại (φ, θ)

6) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = r\cot\alpha$ tại (φ, r) .

Bài giải

1) Ta có $F = 3xyz - z^3 - a^3 = 0$

$$F'_x = 3yz, F'_x(M) = -3a^2$$

$$F'_y = 3xz, \quad F'_y(M) = 0$$

$$F'_z = 3xy - 3z^2, \quad F'_z(M) = -3a^2$$

Theo (1) (3.1), ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho tại M:

$$-3a^2(x - 0) + 0(y - a) - 3a^2(z + a) = 0 \quad \text{hay} \quad x + z + a = 0$$

$$\text{và} \quad \frac{x - 0}{-3a^2} = \frac{y - a}{0} = \frac{z + a}{-3a^2} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{1} = \frac{y - a}{0} = \frac{z + a}{1}$$

$$2) \quad z = x^2 + y^2 \quad M(1, -2, 5)$$

$$\text{Ta có:} \quad z'_x = f'_x = 2x, \quad f'_x(M) = 2$$

$$z'_y = f'_y = 2y, \quad f'_y(M) = -4.$$

Theo (2), (3.1), ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho (paraboloïde tròn xoay) là:

$$(x - 1).2 + (y + 2)(-4) - (z - 5) = 0$$

$$\text{hay} \quad 2x - 4y - z - 5 = 0$$

$$\text{và} \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

$$3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz \quad M(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R).$$

$$\text{ở đây:} \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

$$F'_x = 2x,$$

$$F'_x(M) = 2R\cos\alpha, \quad F'_y(M) = 2R\sin\alpha, \quad F'_z(M) = 0.$$

Do đó ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt đã cho (mặt cầu) là:

$$(x - R\cos\alpha).2R\cos\alpha + (y - R\sin\alpha).2R\sin\alpha + (z - R).0 = 0$$

hay $x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0$

và
$$\frac{x - R \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y - R \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{z - R}{0}$$

4) Ở đây: $E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$E'_x = \frac{2x}{a^2}, E'_y = \frac{2y}{b^2}, E'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Do đó phương trình của tiếp diện với mặt (ellipsoïde) tại $M(x, y, z)$ của mặt là:

$$(X - x) \frac{2x}{a^2} + (Y - y) \frac{2y}{b^2} + (Z - z) \frac{2z}{c^2} = 0.$$

hay $\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1$ (vì $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$).

Tiếp diện này cắt các trục tọa độ tại:

$$X = \frac{a^2}{x}, Y = \frac{b^2}{y}, Z = \frac{c^2}{z}$$

Theo giả thiết thì: $|X| = |Y| = |Z|$ hay: $\frac{a^2}{|x|} = \frac{b^2}{|y|} = \frac{c^2}{|z|} = t$

Do đó: $|x| = \frac{a^2}{t}, |y| = \frac{b^2}{t}, |z| = \frac{c^2}{t}.$

Vì $M(x, y, z) \in$ mặt nên:

$$\frac{a^4}{a^2 t^2} + \frac{b^4}{b^2 t^2} + \frac{c^4}{c^2 t^2} = 1.$$

Do đó: $t = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

và:

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; z = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vậy phương trình của tiếp diện của mặt là:

$$\pm X \pm Y \pm Z = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

và phương trình của pháp tuyến của mặt là:

$$\frac{X-x}{\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} = \frac{Y-y}{\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} = \frac{Z-z}{\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$\text{hay: } \frac{X-x}{\pm 1} = \frac{Y-y}{\pm 1} = \frac{Z-z}{\pm 1}$$

$$5) x = a \cos \theta \cos \varphi, y = b \cos \theta \sin \varphi, z = c \sin \theta$$

Theo (3.2), xét vecteur pháp của mặt tại (φ, θ) ,

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin \theta \cos \varphi & -b \sin \theta \sin \varphi & c \cos \theta \\ -a \cos \theta \sin \varphi & b \cos \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \{ -bc \cos^2 \theta \cos \varphi, -ac \cos^2 \theta \sin \varphi, -ab \sin \theta \cos \theta \} \end{aligned}$$

Do đó phương trình của tiếp diện và pháp tuyến tại (φ, θ) của mặt là:

$$(x - a \cos \theta \cos \varphi)bc \cos^2 \theta \cos \varphi + (y - b \cos \theta \sin \varphi)ac \cos^2 \theta \sin \varphi + (z - c \sin \theta)ab \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\text{hay: } \frac{x}{a} \cos \theta \cos \varphi + \frac{y}{b} \cos \theta \sin \varphi + \frac{z}{c} \sin \theta = 1$$

$$\text{và} \quad \frac{x - a \cos \theta \cos \varphi}{bc \cos^2 \theta \cos \varphi} = \frac{y - b \cos \theta \sin \varphi}{ac \cos^2 \theta \sin \varphi} = \frac{z - c \sin \theta}{ab \sin \theta \cos \theta}$$

$$\text{hay} \quad \frac{x \sec \theta \sec \varphi - a}{bc} = \frac{y \sec \theta \csc \varphi - b}{ac} = \frac{z \csc \theta}{ab} = \frac{c}{ab}$$

$$6) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \cot \alpha.$$

Tương tự 5):

$$\dot{\mathbf{N}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & \cot \alpha \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = (-r \cot \alpha \cos \varphi, -r \cot \alpha \sin \varphi, r)$$

$$\text{Lấy } \dot{\mathbf{N}} = (\cos \varphi, \sin \varphi, -\tan \alpha).$$

Ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt tại (r, φ) của mặt là:

$$(x - r \cos \varphi) \cos \varphi + (y - r \sin \varphi) \sin \varphi + (z - r \cot \alpha)(-\tan \alpha) = 0$$

$$\text{hay} \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - z \tan \alpha = 0$$

$$\text{và} \quad \frac{x - r \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{y - r \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{z - r \cot \alpha}{-\tan \alpha}.$$

14. 1) Trên mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, tìm những điểm tại đó tiếp diện song song với các mặt phẳng tọa độ.

2) Tìm góc giữa các mặt: $x^2 + y^2 = R^2$, $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ tại $M(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$.

$$3) \text{ Tìm các điểm trên mặt } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tại đó pháp tuyến của mặt hợp với các trục tọa độ những góc bằng nhau.

4) Chứng minh rằng pháp tuyến tại một điểm bất kỳ trên mặt tròn xoay $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ ($f \neq 0$) cắt trục quay của nó.

5) Tìm hình chiếu của mặt $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$ trên các mặt phẳng tọa độ

Bài giải

$$1) F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0 \quad (1)$$

Các điểm tại đó tiếp diện song song với các mặt phẳng tọa độ là các điểm tại đó pháp tuyến của mặt thẳng góc với các mặt phẳng tọa độ:

$$\text{Ở đây: } F'_x = 2x - 2, F'_y = 2y, F'_z = -2z.$$

Vậy vecteur pháp của mặt tại (x, y, z) của mặt là:

$$\vec{N} = (2x - 2, 2y, -2z)$$

$$\vec{N} \perp yOz \Rightarrow 2y = 0, 2z = 0, \text{ thay vào (1) ta có:}$$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ hay } x = 0, x = 2$$

Vậy ta có 2 điểm $(0, 0, 0)$ và $(2, 0, 0)$.

$$\vec{N} \perp xOz \Rightarrow 2x - 2 = 0, 2z = 0 \text{ hay } x = 1, z = 0$$

Thay vào (1) ta có: $y^2 - 1 = 0$ hay $y = \pm 1$.

Vậy ta được 2 điểm $(1, \pm 1, 0)$.

$\vec{N} \perp xOy \Rightarrow 2x - 2 = 0, 2y = 0$, thay vào (1) ta có: $-z^2 - 1 = 0$ phương trình này vô nghiệm, vậy không có trường hợp này.

2) Góc giữa hai mặt đã cho tại $M\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ là góc giữa 2 tiếp diện của 2 mặt tại điểm đó hay góc giữa hai pháp tuyến của hai mặt tại điểm đó.

$$\text{Ở đây: } F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 0$$

$$F'_x(M) = R, F'_y(M) = R\sqrt{3}, F'_z(M) = 0$$

Vậy pháp tuyến của mặt thứ nhất là: $\vec{N}_1 = (\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Tương tự, pháp tuyến của mặt thứ hai là: $\vec{N}_2 = (-\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Vậy góc giữa 2 mặt đã cho được xác định bởi:

$$\cos \varphi = \frac{-\frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}}{\sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}} \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}}} = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

3) Ở đây: $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$F'_x = \frac{2x}{a^2}, F'_y = \frac{2y}{b^2}, F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Do đó, vecteur pháp của mặt tại một điểm bất kỳ trên mặt là:

$$\vec{N} = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$$

Để pháp tuyến này hợp với các trục tọa độ những góc bằng nhau thì:

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = t$$

Do đó $x = a^2t, y = b^2t, z = c^2t$, thay vào phương trình của mặt ta có:

$$\frac{a^4t^2}{a^2} + \frac{b^4t^2}{b^2} + \frac{c^4t^2}{c^2} = 1$$

$$\text{hay: } 1 = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vậy các điểm phải tìm có các tọa độ:

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; z = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4) Mặt $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ là một tròn xoay trục quay là Oz, vì cho $z = c = \text{const}$ thì $x^2 + y^2 = [f^{-1}(c)]^2$ là phương trình đường tròn tâm trên Oz. Pháp tuyến của mặt này là:

$$\vec{N} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u, -1 \right), u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Rõ ràng để $\vec{N}$ cắt trục Oz thì 3 vecteur $\vec{N}, \overrightarrow{OM}, \vec{k}$.

($M(x, y, z) \in$ mặt $\vec{k}$: vecteur đơn vị trên Oz)

Mặt khác, điều kiện đồng phẳng của 3 vecteur này là:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'_u & -1 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rõ ràng định thức này bằng không với mọi $M(x, y, z)$ của mặt vậy mọi pháp tuyến của mặt đều cắt trục quay.

5) Đường tiếp xúc của mặt với mặt trụ chiếu của mặt này trên một mặt phẳng là quỹ tích những điểm tại đó tiếp diện với mặt đã cho thẳng góc với mặt phẳng chiếu, hay cũng thế: pháp tuyến với mặt đã cho song song với mặt phẳng chiếu.

Ở đây, pháp tuyến của mặt đã cho là:

$$\vec{N} = (2x - y, 2y - x, 2z)$$

Xét: - Mặt phẳng chiếu là mặt phẳng xOy có vecteur pháp $\vec{k} = (0, 0, 1)$, theo điều kiện trên thì $\vec{k} \cdot \vec{N} = 0$

$$\text{hay: } 2z \cdot 1 = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Vậy hình chiếu của mặt đã cho trên mặt phẳng xOy là:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - xy - 1 \leq 0 \end{cases}$$

- Mặt phẳng chiếu yOz có vecteur pháp $\vec{i} = (1, 0, 0)$, theo điều kiện trên $\vec{N} \cdot \vec{i} = 0$ hay $(2x - y) \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y}{2}$, thay vào phương trình của mặt, ta có phương trình hình chiếu của nó trên mặt phẳng yOz là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{3y^2}{4} + z^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của mặt trên mặt phẳng xOz là:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{3x^2}{4} + z^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

CHƯƠNG 2

TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN KÉP

1.1. Định nghĩa - Tính chất

Tích phân kép của hàm bị chặn $z = f(P) = f(x, y)$ trên miền compact D là:

$$I = \iint_D f(P) ds = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

Với mọi cách chia miền D thành n phần riêng biệt ΔS_i có diện tích cũng là ΔS_i , với bất kỳ $P_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$, $d = \max d_i$, d_i là đường kính của ΔS_i (đường kính của một miền là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm tùy ý của miền).

Mọi hàm $f(P)$ có tích phân trên miền D gọi là khả tích trên miền đó.

Điều kiện Riemann. Điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn $f(P)$ khả tích trên miền compact D là:

$$\lim_{d \rightarrow 0} (S - s) = 0$$

với
$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i, S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i$$

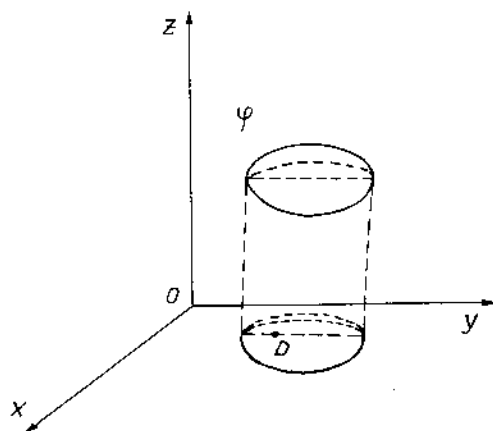
$$m_i = \inf_{P \in \Delta S_i} f(P), \quad M_i = \sup_{P \in \Delta S_i} f(P)$$

- Mọi hàm liên tục trên một miền compact đều khả tích trên miền đó.

Tích phân kép có các tính chất tương tự như các tính chất của tích phân đơn (tích phân xác định).

Về hình học: Tích phân kép $I = \iint_D f(x,y) dx dy$ với $f(x,y) \geq 0$ biểu

thị thể tích hình trụ cong giới hạn bởi mặt $\mathcal{S}: z = f(x,y)$ mặt phẳng xOy , và mặt trụ đường chuẩn là biên của D và đường sinh song song với Oz (hình 18). Nếu $f < 0$ thì $V = \iint_D |f(x,y)| dx dy$



Hình 18.

Về cơ học:

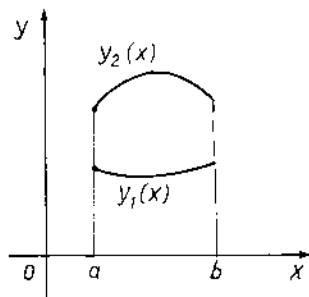
- Nếu coi $\rho = f(x,y) = \rho(x,y) > 0$ là mật độ khối lượng (mật) của miền D thì khối lượng của miền D là:

$$m = \iint_D \rho(x,y) dx dy.$$

1.2. Cách tính

- Xét miền giới hạn bởi các đường:

$y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ $a \leq x \leq b$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ (hình 19).



Hình 19.

Nếu hàm $f(x, y)$ khả trên D khi $x = \text{const}$, $\Phi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ tồn

tại, thì tồn tại $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$

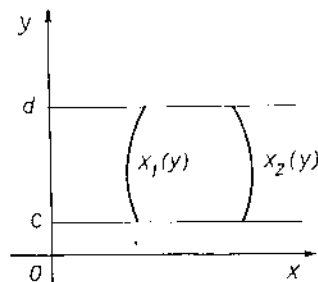
$$\text{và: } I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

- Nếu D giới hạn bởi các đường:

$x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, $c \leq y \leq d$ (hình 20), $x_1(y)$, $x_2(y)$ liên tục

$$\text{thì: } I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

Có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân theo x và theo y .



Hình 20.

1.3. Quy tắc đổi biến tổng quát

Xét $z = f(x, y)$ liên tục trong miền compact D , để tính:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Ta đặt: $x = x(u, v), y = y(u, v)$ (1)

Nếu:

1) Các hàm (1) có các đạo hàm riêng liên tục trong miền compact D' của mặt phẳng $O'uv$

2) Các hàm (1) xác định một song ánh từ D' vào D .

$$3) J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong } D'$$

$$\text{thì } I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J| du dv$$

Chú ý: $u = u(x, y), v = v(x, y)$ thì:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}$$

Đặc biệt: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ($u = r$, $v = \varphi$) thì $|J| = r$

$$\text{và } I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \quad (\text{Tọa độ cực})$$

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi \text{ thì } J = ab r$$

$$\text{và } I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(a \cos \varphi, b \sin \varphi) ab r dr d\varphi \quad (\text{Tọa độ cực})$$

suy rộng)

1.4. Áp dụng

Thể tích vật trụ cong:

$$V = \iint_D |f(x, y)| dx dy \quad (1)$$

Diện tích miền D:

$$S = \iint_D dx dy \quad (2)$$

Diện tích mặt cong $\mathcal{S}$ (trơn): $z = f(x, y)$ có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy \quad (3)$$

Trường hợp mặt S cho theo phương trình tham số:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$$

$$\text{thì: } \sigma = \iint_D \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Với: } E &= x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 \\ G &= x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 \\ F &= x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

- Moment tĩnh M_x, M_y của miền D , mật độ khối lượng $\rho(x, y) (> 0)$ đối với các trục Ox, Oy :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \iint_D y\rho(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint_D x\rho(x,y)dxdy \\ \text{Tọa độ trọng tâm } G \text{ của miền } D \\ x_G &= \frac{M_y}{M}, \quad y_G = \frac{M_x}{M} \\ M \text{ là khối lượng của miền } D: \\ M &= \iint_D \rho(x,y)dxdy \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

- Moment quán tính I_x, I_y, I_o của miền D đối với các trục Ox, Oy và gốc O :

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy, \\ I_y &= \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy, \\ I_o &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x,y)dxdy \end{aligned}$$

Đặc biệt: miền D là đồng chất: $\rho = 1$.

BÀI TẬP

15. Viết công thức tính tích phân kép $I = \iint_D f(x,y)dxdy$.

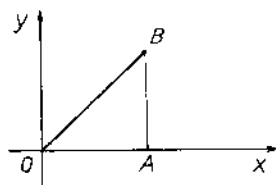
- 1) D là tam giác có các đỉnh $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)$.
- 2) D là hình thang có các đỉnh $O(0, 0), A(2, 0), B(1, 1), C(0, 1)$.
- 3) D là hình vành tròn $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 < 4$.
- 4) D giới hạn bởi các đường $y^2 - x^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, (0, 0) \in D$.

Bài giải

1) Phương trình đường thẳng OB là $y = x$

Do đó (hình 21):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

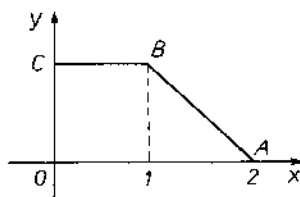


Hình 21.

2) Phương trình đường thẳng AB: $y = 2 - x$.

Vậy (hình 22):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dy \end{aligned}$$



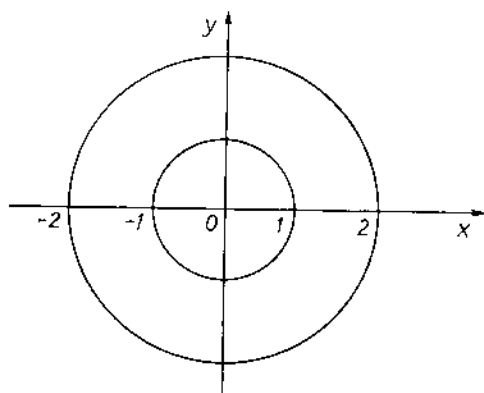
Hình 22.

3) Phương trình nửa trên (dưới) của các đường tròn là:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{1 - x^2} \\ (y &= -\sqrt{4 - x^2}, y = -\sqrt{1 - x^2}) \end{aligned}$$

Do đó (hình 23):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \\ &\quad + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \end{aligned}$$



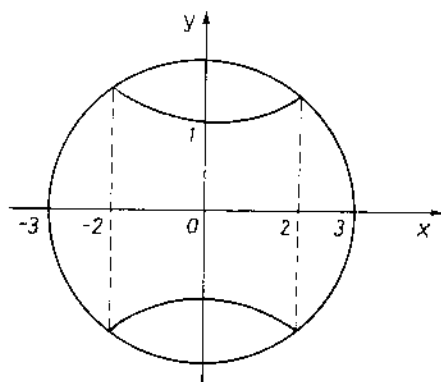
Hình 23.

4) Phương trình nửa trên (dưới) của đường tròn và hyperbole:

$$y = \sqrt{9 - x^2}, y = \sqrt{1 + x^2} \quad (y = -\sqrt{9 - x^2}, y = -\sqrt{1 + x^2})$$

Vậy (hình 24):

$$I = \int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy + \int_{-2}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy$$



Hình 24.

16. Thay đổi thứ tự các tích phân:

$$1) I = \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$$

$$2) I = \int_{\frac{a}{2}}^a dx \int_{\sqrt{x^2-a^2}}^{\sqrt{x^2}} f(x, y) dy$$

$$3) I = \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$$

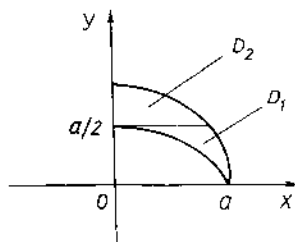
$$4) I = \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$$

Bài giải

$$1) I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \quad (\text{hình 25})$$

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{a}{2} \\ \sqrt{a^2 - 2ay} \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} \frac{a}{2} \leq y \leq a \\ 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases}$$

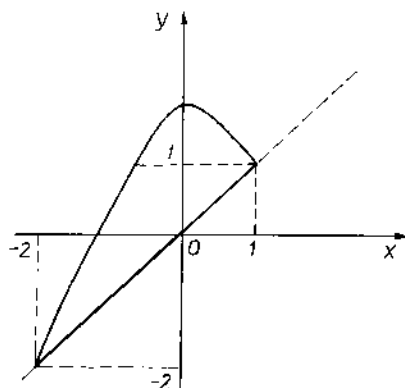


Hình 25.

$$\text{Vậy: } I = \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2 - 2ay}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx$$

2) Theo hình 26:

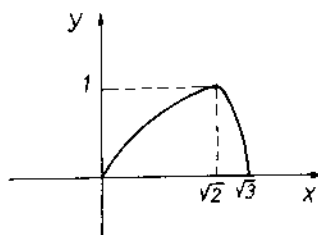
$$I = \int_{-2}^1 dy \int_{\sqrt{2-y}}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$



Hình 26.

3) Theo hình 27:

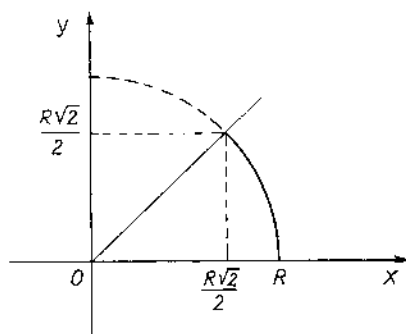
$$I = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy$$



Hình 27.

4) Theo hình 28:

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$



Hình 28.

17. Tính các tích phân:

$$1) I = \iint_D \frac{x^2 dx dy}{1 + y^2}, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

$$2) I = \iint_D (x^2 + y) dx dy, D \text{ giới hạn bởi: } y^2 = x, y = x^2.$$

$$3) I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy, D \text{ giới hạn bởi: } x = 1, y = 0, y = x.$$

$$4) I = \iint_D xy dx dy, D: \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$*5) I = \iint_D y dx dy, D \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t), y \neq 0. \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$*6) I = \iint_D xy dx dy, D \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$$7) I = \iint_D |\cos(x+y)| dx dy, D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi.$$

$$8) I = \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy, D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

$$9) I = \iint_D \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 4; \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$$

$$10) I = \iint_D E(x+y) dx dy, D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$$

$E(x)$: phần nguyên của x , $E(x) < x$.

$$11) I = \iint_D x \sin(x+y) dx dy, D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x$$

$$12) I = \iint_D (2-x-y)^2 dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x$$

13) Đổi biến $u = x + y, v = x - y$, viết công thức tính

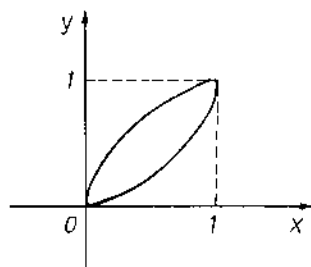
$$I = \iint_D f(x, y) dx dy \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Bài giải

$$1) I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2} = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \arctg y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

$$2) I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dx dy \quad (\text{hình 29}):$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + x^{5/2} - \frac{3x^4}{2} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{3x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{33}{140} \end{aligned}$$

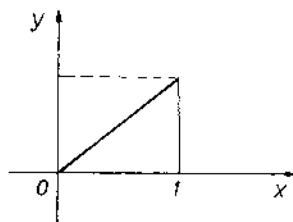


Hình 29.

$$\begin{aligned}
 3) I &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4x^2 - y^2}} \sqrt{4x^2 - y^2} dy \quad (\text{hình 30}): \\
 &= \int_0^1 dx \left(\frac{y}{2} \sqrt{4x^2 - y^2} + \frac{4x^2}{2} \arcsin \frac{y}{2x} \right) \bigg|_0^{\sqrt{4x^2 - y^2}} = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 2x^2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) dx \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{3} \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{9}
 \end{aligned}$$

(Áp dụng công thức:

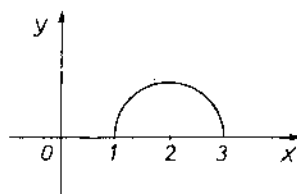
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C).$$



Hình 30.

$$4) I = \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{(x-2)^2}} xy dy \quad (\text{hình 31})$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 x dx \left(\frac{y^2}{2} \right) \bigg|_0^{\sqrt{(x-2)^2}} \\
 &= \int_1^3 \frac{1}{2} x \left[1 - (x-2)^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



Hình 31.

5) Hàm $f(x, y) = y$ lấy các giá trị bằng nhau tại các điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $x = \pi R$

Do đó:

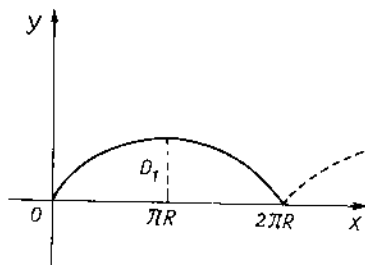
$$I = \iint_D y dx dy = 2 \iint_{D_1} y dx dy \quad (\text{hình 32})$$

$$= 2 \int_0^{\pi R} dx \int_0^{y(x)} y dy = \int_0^{\pi R} y^2(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} R^2 (1 - \cos t)^2 \cdot R(1 - \cos t) dt$$

$$= R^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 dt$$

$$= R^3 \int_0^{\pi} 8 \sin^6 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} dt = 16R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 u \cdot du$$



Hình 32.

$$\left(\frac{t}{2} = u, dt = 2du, 0 \leq t \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

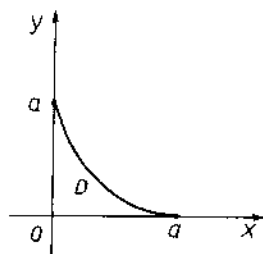
$$I = 16R^3 I_6 = 16R^3 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2} \pi R^3$$

$$\left[I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n \text{ chẵn} \\ 1 & n \text{ lẻ} \end{cases} \right]$$

6) Tương tự như bài trước:

$$I = \int_0^a dx \int_0^{y(x)} xy dy \quad (\text{hình 33})$$

$$= \int_0^a x \frac{y^2(x)}{2} dx$$

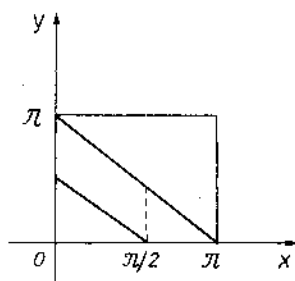


Hình 33.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^0 a \cos^3 t a^2 \sin^6 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = \frac{3}{2} a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 t \sin^7 t dt \\
&= \frac{3}{2} a^4 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^2 \sin^7 t dt \sin t \\
&= \frac{3}{2} a^4 \int_0^{\pi/2} (\sin^7 t - 2 \sin^9 t + \sin^{11} t) dt \sin t \\
&= \frac{3}{2} a^4 \left(\frac{\sin^8 t}{8} - \frac{2 \sin^{10} t}{10} + \frac{\sin^{12} t}{12} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^4}{80}.
\end{aligned}$$

7) Hàm $f(x, y) = |\cos(x + y)|$ nhận các giá trị bằng nhau tại các điểm đối xứng đối với đường chéo $x + y = \pi$ của hình vuông D (hình 34), do đó:

$$I = 2 \iint_{D_1} |\cos(x + y)| dx dy, \quad D_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi - x \end{cases}$$



Hình 34.

Rõ ràng, trong miền:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} - x \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x + y) \geq 0$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - x \leq y \leq \pi - x \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x + y \leq \pi \Rightarrow \cos(x + y) \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi - x \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x + y \leq \pi \Rightarrow \cos(x + y) \leq 0.$$

Vậy:

$$\begin{aligned} I &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y) dy - \int_0^{\pi/2} dx \int_{\pi/2-x}^{\pi-x} \cos(x+y) dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{\pi-x} \cos(x+y) dy \right) \\ &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx + \int_0^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

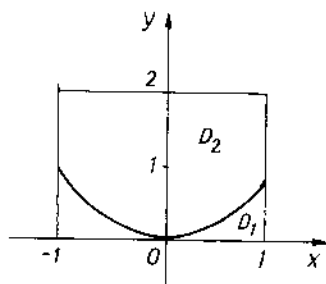
8) Trong miền $D_1: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2: y - x^2 \leq 0$

$D_2: -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2: y - x^2 \geq 0$

Do đó (hình 35):

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{y - x^2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \left[\left(x^2 - y \right)^{3/2} \Big|_{x^2}^{0} + \left(y - x^2 \right)^{3/2} \Big|_{x^2}^2 \right] dx \\
&= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \left[x^2 |x| + (2 - x^2)^{3/2} \right] dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (2 - x^2)^{3/2} dx
\end{aligned}$$



Hình 35.

Đặt $x = \sqrt{2} \sin t$ trong tích phân sau, ta được:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} 4 \cos^4 t dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{(1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t)}{4} dt \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{\cos 4t}{2} \right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

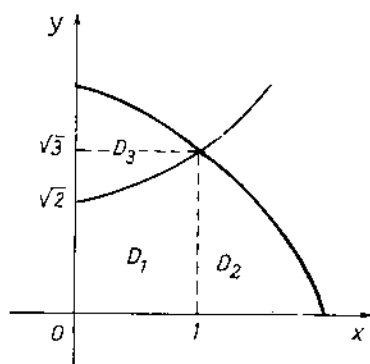
9) Hàm $f(x, y) = \text{sign}(x^2 - y^2 + 2)$ nhận những giá trị bằng nhau tại các điểm đối xứng với các trục tọa độ trong miền D , do đó:

$$I = 4 \iint_{\substack{x^2, y^2 \leq 4 \\ x, y \in \mathbb{R}}} \text{sign}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$$

Trong góc phần tư thứ nhất, hyperbole $x^2 - y^2 + 2 = 0$ và đường tròn cắt nhau tại $x = 1, y = \sqrt{3}$ và hyperbole chia miền lấy tích phân thành

hai phần mà $x^2 - y^2 + 2$ có dấu khác nhau (hình 36). Cụ thể trong D_1 và D_2 : $y \leq \sqrt{x^2 + 2}$ hay $x^2 - y^2 + 2 \geq 0$, theo định nghĩa:

$$\text{sign}(x^2 - y^2 + 2) = 1$$



Hình 36.

Trong D_3 thì $x^2 - y^2 + 2 \leq 0$ và $\text{sign}(x^2 - y^2 + 2) = -1$.

Vậy:

$$\begin{aligned} I &= 4 \left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) \\ &= 4 \left(\int_0^1 \left(2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x^2} \right) dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx \right) \\ &= 4 \left(2 \frac{x}{2} \sqrt{x^2+2} + 2 \ln \left(x + \sqrt{x^2+2} \right) \right) \Big|_0^1 - \\ &\quad - \left(\frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} \right) \Big|_1^2 + 4 \left(\frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} \right) \Big|_1^2 \end{aligned}$$

$$= 8 \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{3}.$$

10) Chia D thành 4 miền D_1, D_2, D_3, D_4 bởi các đường thẳng:

$$x + y = 1, x + y = 2, x + y = 3 \text{ (hình 37)}.$$

Diện tích của chúng là S_1, S_2, S_3, S_4 thì $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}, S_3 = S_4 = \frac{3}{2}$.

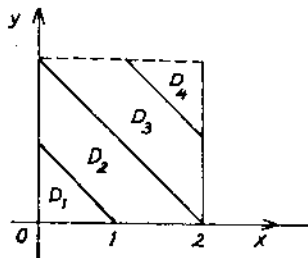
Trong $D_1: 0 \leq x + y < 1, E(x + y) = 0$

$$D_2: 1 \leq x + y < 2, E(x + y) = 1$$

$$D_3: 2 \leq x + y < 3, E(x + y) = 2$$

$$D_4: 3 \leq x + y < 4, E(x + y) = 3$$

(theo định nghĩa của hàm $E(x)$).



Hình 37.

Vậy:

$$I = \sum_{k=1}^4 \iint_{D_k} E(x+y) dx dy = S_2 + 2S_3 + 3S_4 = 6.$$

$$11) \text{ Đổi biến } \begin{cases} x = v \\ x + y = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases}; \quad \begin{matrix} 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \\ v \leq u \leq 2v \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v dv \int_v^{2v} \sin u du = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$12) \text{ Đổi biến } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}; \quad \begin{matrix} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ 0 \leq u \leq 2-v \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^2 dv \int_0^{2-v} (2-u)^2 du = 2$$

$$13) D \rightarrow D': \begin{cases} -v \leq u \leq 2-v \\ v \leq u \leq 2+v \end{cases}, \quad J = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 dv \int_v^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{1}{2} du + \int_0^1 dv \int_v^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{1}{2} du$$

18. Chuyển sang tọa độ cực, tính:

$$1) I = \iint_D y dx dy, D: \begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$2) I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

$$a) D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad b) D: \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$3) I = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$$

$$4) I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$5) I = \iint_D dx dy, D \text{ giới hạn bởi các đường:}$$

$$y = x, y = 4x, xy = 1, xy = 2.$$

$$6) I = \iint_D dx dy, D \text{ giới hạn bởi đường: } \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2},$$

$$(x, y) \geq 0.$$

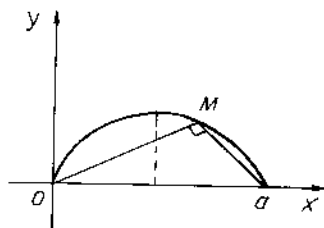
Bài giải

$$1) \text{ Ta có } x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$$

$$D \rightarrow D': 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \cos \varphi$$

Do đó (hình 38):

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r \sin \varphi \cdot r dr$$



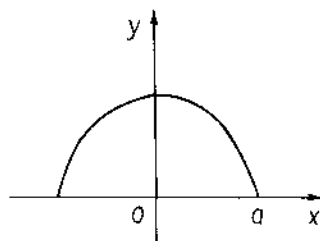
Hình 38.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \left(\frac{r^3}{3} \right) \bigg|_0^{a \cos \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{a^3}{3} \int_{\pi/2}^0 \cos^3 \varphi d \cos \varphi = \frac{a^3}{3} \left(-\frac{\cos^4 \varphi}{4} \right) \bigg|_{\pi/2}^0 = \frac{a^3}{12}.
 \end{aligned}$$

2) a) Chuyển sang tọa độ cực $D \rightarrow D': 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq a$ (hình 39).

Do đó:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r dr \\
 &= \pi \left(-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right) \bigg|_0^a \\
 &= \frac{\pi a^3}{3}
 \end{aligned}$$



Hình 39.

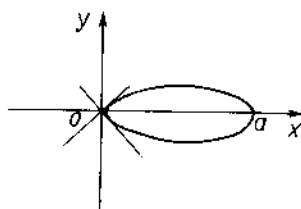
$$\text{b) } D: \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D': \begin{cases} 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (\text{hình 40})$$

Do đó:

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r dr$$

Xét:



Hình 40.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r dr = -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \\
 &= \frac{a^3}{3} (1 - 2\sqrt{2} |\sin \varphi|^3)
 \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/4} (1 - 2\sqrt{2} |\sin \varphi|^3) d\varphi = \frac{a^3}{3} \left[\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \varphi d\varphi \right] \\
 &= \frac{a^3}{3} \left[\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} (\cos^2 \varphi - 1) d\cos \varphi \right] \\
 &= \frac{a^3}{3} \left[\frac{\pi}{2} - 4\sqrt{2} \left(\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} \right] = \frac{a^3}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2} - 20}{9} \right)
 \end{aligned}$$

3) Chuyển sang tọa độ cực: $D \rightarrow D'$: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\pi \leq r \leq 2\pi$.

Do đó:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} \sin r \cdot r dr = 2\pi \left[-r \cos r \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos r dr \right] = -6\pi^2.$$

4) Chuyển sang tọa độ cực suy rộng:

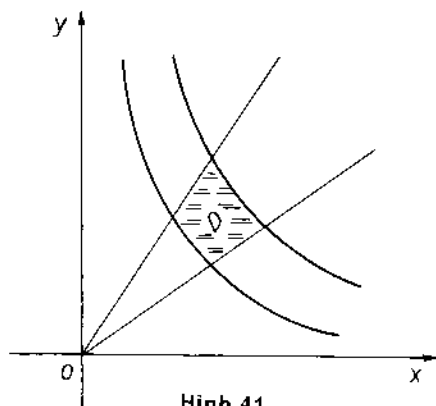
$$x = \arccos \varphi, y = b \sin \varphi$$

thì $D \rightarrow D'$: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, $|J| = ab r$.

Theo (1.3):

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} ab r dr = 2\pi ab \left(-\frac{1}{3} (1 - r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.$$

5) Theo giả thiết D giới hạn bởi 2 hyperbole và 2 đường thẳng (hình 41).



Hình 41.

$$\text{Đặt } \begin{cases} xy = u \\ y = vx \end{cases} \text{ thì } D \rightarrow D': \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{và } \begin{cases} x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \\ y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \end{cases}, J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

$$(J = \begin{vmatrix} \frac{y}{x^2} & \frac{x}{x} \end{vmatrix})^{-1} = \left(\frac{2y}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{2v}; \text{ chú ý 1, 3})$$

Vậy theo công thức đổi biến số tổng quát (1.3):

Ta có:

$$I = \int_1^2 du \int_1^4 \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{2} \ln v \Big|_1^4 = \ln 2.$$

6) Chuyển sang tọa độ cực suy rộng (1.3):

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, |J| = ab$$

Phương trình đường cong là:

$$r^4 = r^2 \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \varphi \right)$$

hay:

$$r = \pm \sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \varphi}$$

Vì $r(0) = r(2\pi)$ nên đường cong là khép kín.

Đường cong đối xứng đối với các trục toạ độ và xác định khi:

$$\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \varphi \geq 0,$$

do đó trong góc phân tư thứ nhất ta có điều kiện:

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{ak}{bh} \quad \text{và} \quad I = 4 \iint_{D_1} ab r dr d\varphi.$$

Với $D_1: 0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}$

$$0 \leq r \leq \sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \varphi}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} I &= 4ab \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \varphi}} r dr \\ &= 2ab \int_0^{\alpha} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \varphi \right) d\varphi, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{ak}{bh} \\ &= ab \left[\frac{a^2}{h^2} \int_0^{\alpha} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi - \frac{b^2}{k^2} \int_0^{\alpha} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ab \left[\frac{a^2}{h^2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right]_0^\alpha - \frac{b^2}{k^2} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right]_0^\alpha \\
&= ab \left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \sin 2\alpha \right] \\
&= ab \left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \operatorname{arctg} \frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk} \right]
\end{aligned}$$

$$(\text{Vì } \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \frac{ak}{bh}}{1 + \frac{a^2 k^2}{b^2 h^2}} = \frac{2abkh}{a^2 k^2 + b^2 h^2},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \frac{a^2 k^2 + b^2 h^2}{h^2 k^2} \cdot \frac{2abkh}{a^2 k^2 + b^2 h^2} = \frac{ab}{hk}).$$

19. 1) Xét dấu của các tích phân:

$$\text{a) } I = \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy, D: \begin{cases} |x| + |y| \leq 1 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } I = \iint_D \arcsin(x + y) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$

2) Tìm giá trị trung bình của các hàm:

$$\text{a) } f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y \text{ trong } D: 0 \leq x, y \leq \pi.$$

$$\text{b) } f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ trong } D: (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2.$$

Bài giải

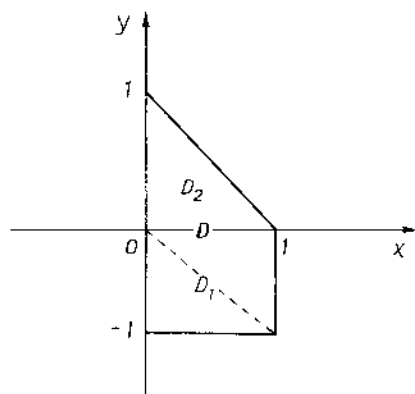
$$1) \text{ a) Từ } |x| + |y| \leq 1, \text{ suy ra: } x^2 + y^2 + 2|xy| \leq 1.$$

hay $x^2 + y^2 < 1$, ($x^2 + y^2 \neq 0$), do đó: $0 < x^2 + y^2 < 1$,
và $\ln(x^2 + y^2) < 0$, theo tính chất của tích phân:

$$I = \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy < 0.$$

b) Theo hình 42:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \arcsin(x + y) dx dy = \iint_{D_1} \arcsin(x + y) dx dy + \\ &\quad + \iint_{D_2} \arcsin(x + y) dx dy = I_1 + I_2 \end{aligned}$$



Hình 42.

$$\text{Với } D_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

Tại các điểm đối xứng với đường chéo $y = -x$ hàm $f(x, y) = \arcsin(x + y)$ nhận các giá trị đối nhau nên $I_1 = 0$.

$$\text{Với } D_2: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}, \text{ hàm } f(x, y) = \arcsin(x + y) > 0.$$

(Trừ tại $(0, 0)$: $f(x, y) = 0$). Do đó $I = I_1 + I_2 = 0 + I_2 = I_2 > 0$ theo tính chất của tích phân.

2) a) Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, giá trị trung bình của $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$ trong D là:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\pi^2} \iint_D \sin^2 x \sin^2 y dy = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \sin^2 x dx \int_0^\pi \sin^2 y dy = \frac{1}{4}$$

b) Tương tự như a):

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D (x^2 + y^2) dy$$

Đường tọa độ cực: $x = a + r \cos \varphi$, $y = b + r \sin \varphi$, ta có:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [(a^2 + b^2) + 2r^2(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + r^3] dr \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \left[\pi R^2 (a^2 + b^2) + \frac{\pi R^4}{2} \right] = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

20. Tính diện tích S của miền D giới hạn bởi các đường:

1) $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$

2) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

3) $r = a(1 + \cos \varphi)$, $r = a \cos \varphi$ ($a > 0$)

4) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$

5) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

6) $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$

$$0 < a < b, 0 < \alpha < \beta$$

7) $(y - x)^2 + x^2 = 1$

8) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

$$9) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = \frac{xy}{c^2}$$

Bài giải

1) Tìm giao điểm của hai đường:

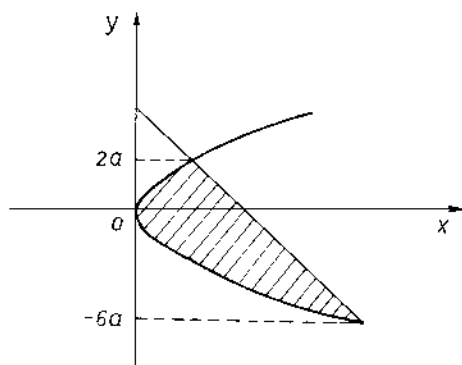
$$\frac{y^2}{4a} = 3a - y$$

$$\Rightarrow y^2 + 4ay - 12a^2 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = 2a, y_2 = -6a$$

Theo hình 43 và theo (1. 4) diện tích của hình đã cho là:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-6a}^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int_{-6a}^{2a} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a} \right) dy \\ &= \left(3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a} \right) \Big|_{-6a}^{2a} = \frac{64}{3} a^2 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

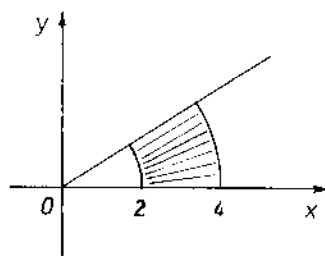


Hình 43.

2) Chuyển sang tọa độ cực:

$$D \rightarrow D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{hình 44}).$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_D r dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (16 \cos^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= 6 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi = 3 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= 3 \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \quad (d\varphi dt). \end{aligned}$$

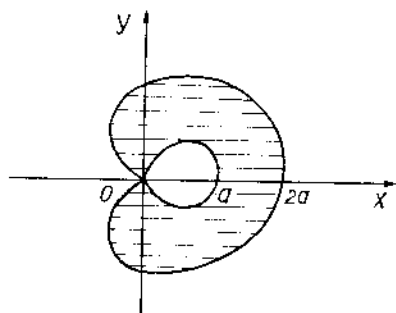


Hình 44.

3) Miền D giới hạn bởi đường Cardioïde: $r = a(1 + \cos \varphi)$ và đường tròn $r = a \cos \varphi$ (hình 45).

Do đối xứng nên:

$$\begin{aligned} S &= 2 \left[\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{a(1 + \cos \varphi)} r dr + \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1 + \cos \varphi)} r dr \right] \\ &= 2 \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \left(r^2 \Big|_{a \cos \varphi}^{a(1 + \cos \varphi)} \right) d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(r^2 \Big|_0^{a(1 + \cos \varphi)} \right) d\varphi \right] \\ &= a^2 \left[\int_0^{\pi/2} \left[(1 + \cos \varphi)^2 - \cos^2 \varphi \right] d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi \right] \\ &= \frac{5\pi a^2}{4} \quad (d\varphi dt). \end{aligned}$$



Hình 45.

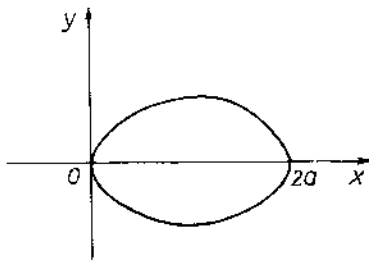
$$4) (x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$$

Chuyển sang tọa độ độ cực:

$$r^4 = 2ar^3 \cos^3 \varphi \quad \text{hay} \quad r = 2a \cos^3 \varphi.$$

Do đối xứng (hình 46), ta có:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos^3 \varphi} r dr \\ &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi d\varphi \\ &= 4a^2 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{5}{8} \pi a^2 \quad (\text{dvdt}) \quad ((2.3) \text{ C.5 TT}) \end{aligned}$$



Hình 46.

$$5) (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4).$$

Đường cong đối xứng với các trục tọa độ.

Điểm (0, 0) thuộc đường cong nhưng là điểm cô lập (hình 47), chuyển sang tọa độ độ cực, do đối xứng nên:

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}} r dr$$

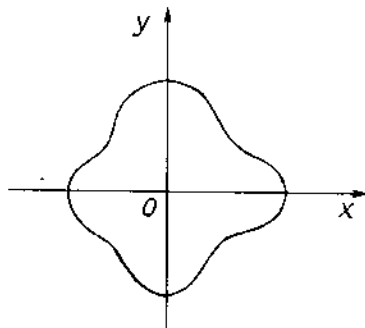
$$((r^2)^3 = a^2(r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi)$$

$$\Rightarrow r = \pm a\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

$$S = 2a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) d\varphi$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi d\varphi = 4a^2 \cdot \frac{3.1}{4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{4} a^2 \pi \quad (dvdt).$$



Hình 47.

$$6) y^2 = ax, y^2 = bx, xy = \alpha, xy = \beta \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$$

Chuyển sang tọa độ cong
tổng quát: (u, v) bằng cách

đặt: $\frac{y^2}{x} = u, xy = v$ thì miền D

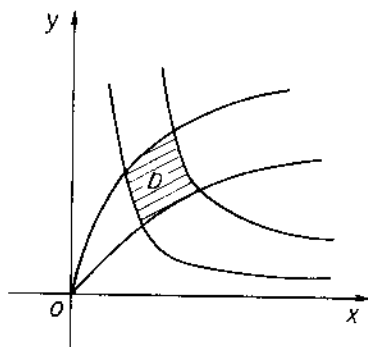
(hình 48) thành D' : $a \leq u \leq b,$
 $\alpha \leq v \leq \beta.$

$$x = u^{-3} v^3, y = u^3 v^3,$$

$$|J| = \frac{1}{3u} \text{ và:}$$

$$S = \int_a^b du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{3u}$$

$$= \frac{1}{3} (\beta - \alpha) \ln \frac{b}{a} \quad (dvdt).$$



Hình 48.

7) $(y - x)^2 + y^2 = 1$ (đường ellipse).

Đặt $y - x = u$, $x = v$, $D \rightarrow D'$: $u^2 + v^2 \leq 1$

$$x = v$$

$$y = u + v, J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$S = \iint_{D'} |J| du dv = \pi \cdot 1^2 = \pi \quad (dvdt).$$

8) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$ (đường ellipse).

Đặt $u = x - 2y + 3$, $v = 3x + 4y - 1$ thì $D \rightarrow D'$: $u^2 + v^2 = 100$.

$$\text{Theo đại số: } J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{1}{10} \iint_{D'} du dv = \frac{1}{10} \pi \cdot 10^2 = 10\pi \quad (dvdt).$$

9) Chuyển sang tọa độ cực suy rộng: $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ thì phương trình cực của đường cong là: $r^2 = \frac{ab}{c^2} \sin \varphi \cos \varphi$ (đường Lemniscate).

Đường cong đối xứng với gốc tọa độ:

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2} \sin \varphi \cos \varphi}} ab r dr d\varphi = \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{a^2 b^2}{2c^2} \quad (dvdt).$$

21. Tính thể tích V của hình giới hạn bởi các mặt:

1) $az = y^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

$$2) y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0$$

$$3) x + y + z = a, 3x + y = a, \frac{3}{2}x + y = a, y = 0, z = 0$$

$$4) x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$$

$$5) 2az \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

$$6) z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0$$

$$7) z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy (x, y \geq 0), z = 0$$

$$8) x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$$

$$9) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} (z > 0).$$

Bài giải

1) Hình cần tính thể tích là một hình trụ cong giới hạn bởi mặt trụ parabol $y^2 = az$, mặt trụ tròn xoay $x^2 + y^2 = R^2$ và mặt phẳng xOy (hình 49).

Do đó:

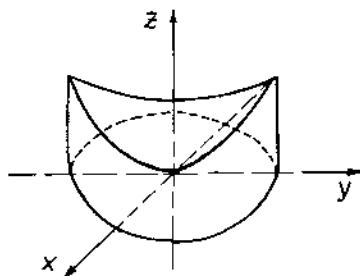
$$V = \iint_D \frac{y^2}{a} dx dy$$

$$D: x^2 + y^2 \leq R^2$$

Chuyển sang tọa độ độ cực ta có:

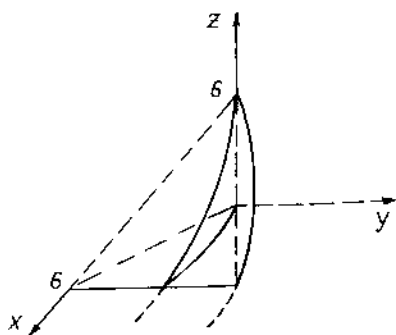
$$V = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{a} \left(\frac{4}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{4a} (dvdt).$$



Hình 49.

2) Hình đã cho giới hạn bởi các mặt trục parabol: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, mặt phẳng $x + z = 6$ và mặt phẳng xOy (hình 50).



Hình 50.

Do đó:

$$V = \iiint_D (6-x) dx dy \quad \text{với } D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x} \end{cases}$$

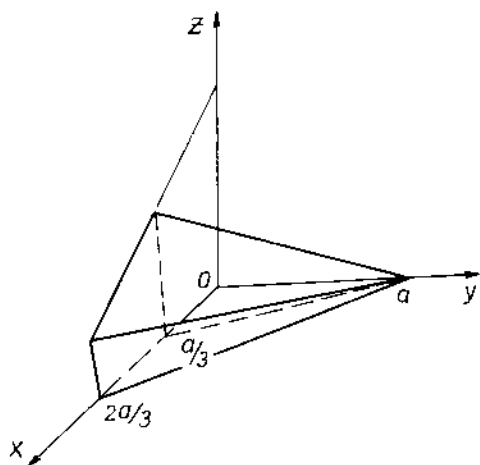
Vậy:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x) dy = \int_0^6 (6-x) \sqrt{x} dx \\ &= \left(6 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_0^6 = \frac{48\sqrt{6}}{5} \text{ (dvdt)}. \end{aligned}$$

3) Hình đã cho giới hạn bởi các mặt phẳng (hình 51):

Do đó:

$$V = \iiint_D (a-x-y) dx dy$$



Hình 51.

D: $0 \leq y \leq a$

$$\frac{a-y}{3} \leq x \leq \frac{2(a-y)}{3}$$

Vậy:

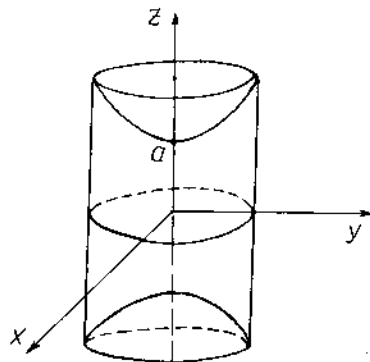
$$\begin{aligned} V &= \int_0^a dy \int_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} (a-x-y) dx = \int_0^a \left[(a-y)x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^a (a-y)^2 dy = \frac{1}{6} \left(a^2 y - ay^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{18} \quad (dvdt). \end{aligned}$$

4) Hình đã cho giới hạn bởi mặt trụ: $x^2 + y^2 = a^2$ và mặt hyperboloide 2 tầng tròn xoay: $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$ (hình 52).

Do đối xứng nên:

$$V = 2 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} dx dy$$

Với D: $x^2 + y^2 \leq a^2$



Hình 52.

Chuyển sang tọa độ cực, ta có:

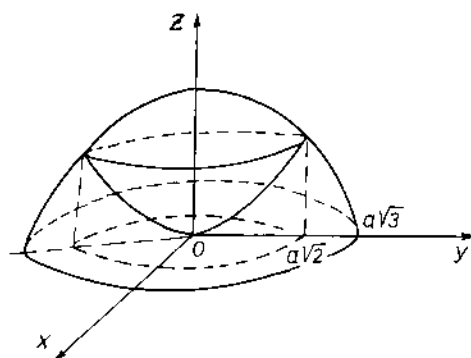
$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 + r^2} r dr \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{4\pi a^3}{3} (2\sqrt{2} - 1) \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

5) Hình đã cho giới hạn bởi mặt paraboloid tròn xoay $x^2 + y^2 = 2az$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ (phần chứa nửa dương của trục Oz) (hình 53).

Khử z ở hai phương trình trên, ta có phương trình hình chiếu của giao tuyến của hai mặt đã cho trên mặt phẳng xOy chính là phương trình đường biên giới của miền D:

$$x^2 + y^2 = 2az \Rightarrow z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \Rightarrow z = a \Rightarrow x^2 + y^2 = 2a^2$$

$$\text{Vậy: } V = \iint_D \left(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2a} \right) dx dy$$



Hình 53.

Chuyển sang tọa độ cực, ta có:

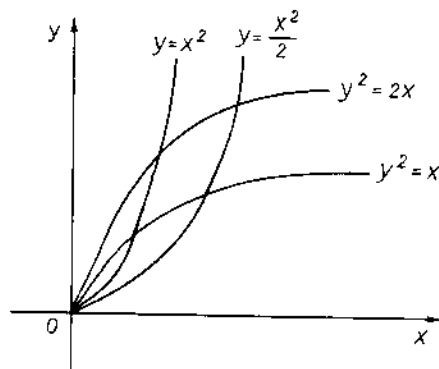
$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a} \right) r dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} (3a^2 - r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{8a} \right]_0^{a\sqrt{2}} = \frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 5) \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

6) Hình đã cho giới hạn phía trên bởi mặt parabolôide hyperbolique $z = xy$ (dùng phép biến đổi $x = X - Y$, $y = X + Y$, $z = Z$, thì phương trình của mặt là $Z = X^2 - Y^2$), phía dưới bởi mặt phẳng xOy . Hình chiếu của hình đã cho trên mặt phẳng xOy là tứ giác cong D giới hạn bởi các đường:

$$x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x \text{ (hình 54).}$$

Do đó:

$$V = \iint_D xy dx dy$$



Hình 54.

Chuyển sang tọa độ cong tổng quát: đặt $\frac{x^2}{y} = u$, $\frac{y^2}{x} = v$

thì $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 2$ và $x = u^{2/3}v^{1/3}$, $y = u^{1/3}v^{2/3}$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

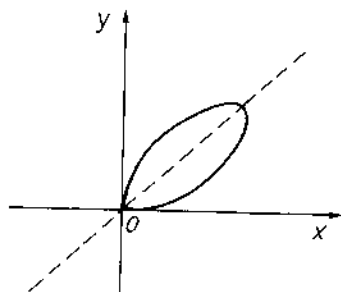
$$\text{Vậy: } V = \int_1^2 \int_1^2 uv \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 u du \int_1^2 v dv = \frac{3}{4} \quad (\text{đvtt}).$$

7) Hình đã cho giới hạn phía trên bởi mặt phẳng $z = x + y$, phía dưới bởi mặt phẳng xOy , và xung quanh giới hạn bởi mặt trụ:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

nghĩa là miền D giới hạn bởi các đường $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $x = 0$, $y = 0$.

Chuyển sang tọa độ độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ thì miền D giới hạn bởi $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ($r = \sqrt{\sin 2\varphi}$: đường Lemniscate, vì thay $\varphi = \frac{\pi}{4} - \varphi'$ thì $r = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi'\right)} = \sqrt{\cos 2\varphi'}$, đường này đối xứng đối với đường thẳng $y = x$, (hình 55)).



Hình 55.

Vậy chuyển sang tọa độ độ cực ta có:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x + y) dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 dr \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi) \frac{r^3}{3} \bigg|_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} 2\varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left[1 - (\sin \varphi - \cos \varphi)^2 \right]^{3/2} d(\sin \varphi - \cos \varphi).
\end{aligned}$$

Đặt $\sin \varphi - \cos \varphi = u$ thì: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1$.

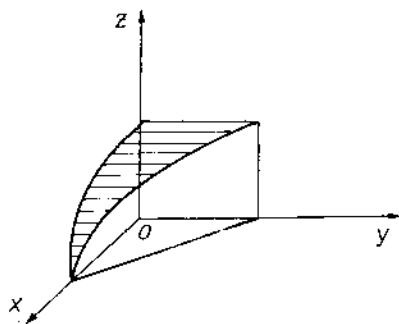
Khi đó:
$$V = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{3/2} du = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - u^2)^{3/2} du$$

Lại đặt $u = \sin t$ thì $0 \leq u \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

và
$$V = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \text{ (đvtt)}.$$

8) Hình đã cho giới hạn bởi mặt trụ trục Oz: $x^2 + y^2 = a^2$ và mặt trụ trục Oy: $x^2 + z^2 = a^2$ (hình 56, trong góc phần tám thứ nhất). Do đối xứng nên:

$$V = 8 \iiint_D \sqrt{a^2 - x^2} dx dy$$



Hình 56.

Với D: $0 \leq x \leq a, 0 < y < \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\text{Vậy: } V = 8 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \, dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3} \text{ (đvtt)}.$$

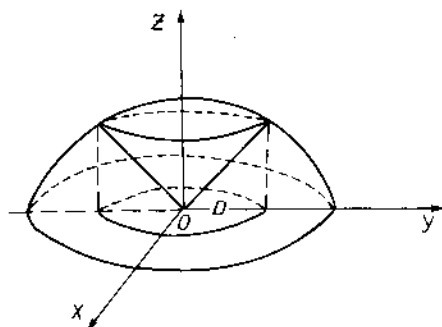
9) Hình đã cho giới hạn bởi mặt ellipsoïde: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ và

mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ với $z > 0$ (hình 57).

Do đó:

$$V = \iint_D \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) dx dy.$$

Với D là miền có biên giới là hình chiếu của đường giao của hai mặt trên.



Hình 57.

Khử z ở hai phương trình trên ta có phương trình ... a hình chiếu đó:

$$\frac{2z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

Chuyển sang tọa độ độ cực suy rộng:

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, |J| = ab$$

Ta có:

$$\begin{aligned} V &= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r \sqrt{1-r^2} - r^3 \right) dr \\ &= \frac{2}{3} \pi abc \left[\left(1-r^2 \right)^{3/2} - r^3 \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3} abc (2 - \sqrt{2}) \quad (\text{dvtt}). \end{aligned}$$

22. Tính diện tích σ của:

1) Phần mặt $x^2 + y^2 = R^2$ gồm giữa 2 mặt phẳng $z = mx, z = nx$ ($m > n > 0$)

2) Phần mặt $x^2 - y^2 = z^2$ trong góc phần tám thứ nhất và giới hạn bởi mặt phẳng $y + z = a$.

3) Phần mặt $x^2 + y^2 = 2ax$ gồm giữa mặt phẳng $z = 0$ và mặt $x^2 + y^2 = z^2$

4) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ở phía ngoài các mặt $x^2 + y^2 = \pm Ry$

5) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở phía trong mặt $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

6) Phần mặt $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ở phía trong mặt $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

7) Phần mặt giới hạn bởi các mặt: $x^2 + z^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$.

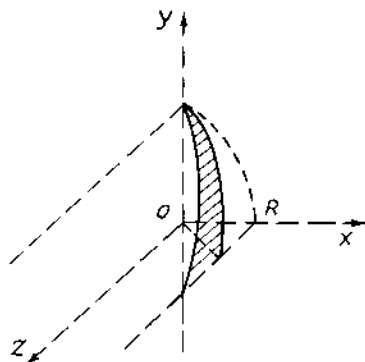
8) Phần mặt $x^2 + y^2 = Rx$ bao gồm trong hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (mặt bên của vật thể Viviani).

9) Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ giới hạn bởi hai kinh tuyến và hai vĩ tuyến.

Bài giải

1) $x^2 + y^2 = R^2$ là mặt trụ tròn xoay trục Oz

$z = mx$, $z = nx$ là các mặt phẳng qua Oy (hình 58)



Hình 58.

Xét: $y = y(x, z) = \sqrt{R^2 - x^2}$

Do đối xứng nên theo (1.4):

$$\sigma = 4 \iint_D \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz$$

Với D là miền giới hạn bởi các đường: $z = mx$, $z = nx$, $x = R$ trong mặt phẳng xOz (hình 59):

Ta có:

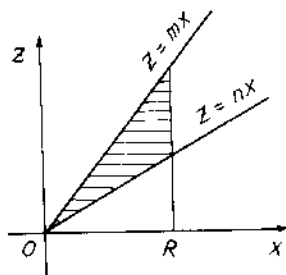
$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$y'_y = 0,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_y} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= 4 \int_0^R dx \int_{nx}^{mx} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dz = 4R(m - n) \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= 4(m - n)R^2 \text{ (đvdt)}.\end{aligned}$$



Hình 59.

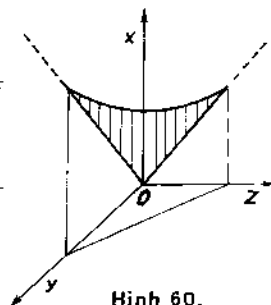
2) Mặt $x^2 - y^2 = z^2$ hay $y^2 + z^2 = x^2$ là mặt nón trục là trục Ox,
 $y + z = a$ là mặt phẳng song song với trục Ox (hình 60).

$$\text{Do đó: } \sigma = \iint_D \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} dydz$$

Với D là miền trong mặt phẳng yOz, giới hạn bởi các đường: $y = 0$,
 $z = 0$, $y + z = a$.

$$x = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad x'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad x'_z = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$\sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{y^2 + z^2}} = \sqrt{2}$$

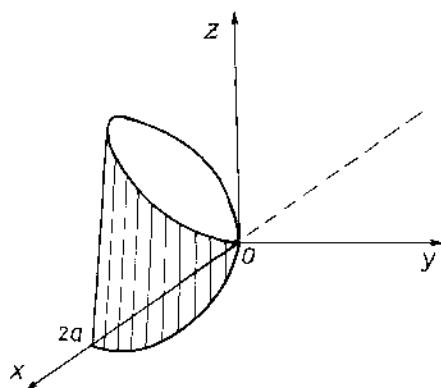


Hình 60.

$$\text{Vậy: } \sigma = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \quad (d\text{vdt})$$

3) Phần mặt đã cho là mặt trụ $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ đường sinh song song với Oz, giới hạn giữa mặt phẳng $z = 0$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Phần mặt đã cho có phương trình $y = \pm \sqrt{2ax - x^2}$ đối với mặt phẳng xOz.



Hình 61.

Do đối xứng nên xét $y = \sqrt{2ax - x^2}$

$$y'_x = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}, \quad y'_y = 0, \quad \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_y} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

Theo (1.4) ta có:

$$\sigma = 2 \iint_D \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz = 2 \iint_D \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} dx dz.$$

Với D là miền trong mặt phẳng xOz giới hạn bởi trục Ox , đường thẳng $x = 2a$ và đường L là hình chiếu của giao tuyến của mặt trụ và mặt nón trên mặt phẳng xOz . Phương trình của L có được bằng cách khử y ở các phương trình:

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad : \\ z^2 = 2ax, \text{ với } z \geq 0$$

Ta có:

$$z = \sqrt{2ax} \text{ (hình 62).}$$

Vậy:

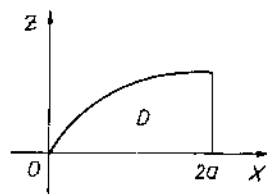
$$\begin{aligned} \sigma &= 2a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{dz}{\sqrt{2ax - x^2}} = 2a \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} dx \\ &= 2a \int_0^{2a} \sqrt{\frac{2a}{2a - x}} dx = 2a\sqrt{2a} \left(-2\sqrt{2a - x} \right) \Big|_0^{2a} = 8a^2 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

4) Phần mặt đã cho là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ở ngoài các mặt trụ: $x^2 + y^2 = \pm Ry$ (hình 63).

Vì lý do đối xứng nên xét phần mặt cầu trong góc phần tám thứ nhất:

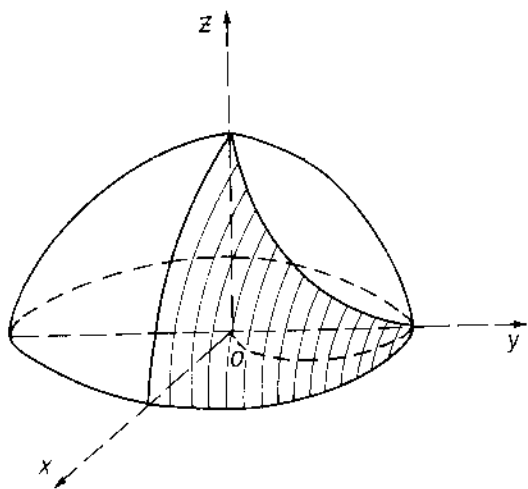
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$



Hình 62.

$$\text{Do đó: } \sigma = 8R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$



Hình 63.

D là hình chiếu của phần mặt trên mặt phẳng xOy (trong góc phần tám thứ nhất):

$$0 \leq y \leq R, \sqrt{Ry - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}$$

Chuyển sang tọa độ cực $y = r \cos \varphi$, $x = r \sin \varphi$, ta có:

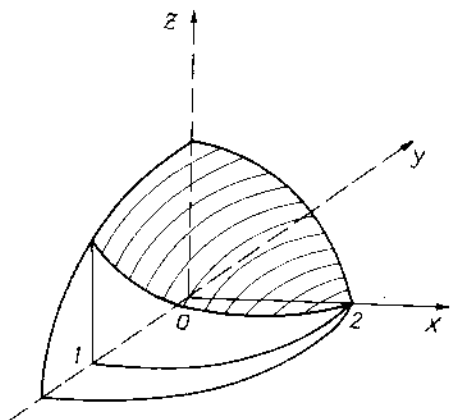
$$\begin{aligned} \sigma &= 8R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{R \cos \varphi}^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 8R \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{R^2 - r^2} \right) \Big|_R^{R \cos \varphi} d\varphi \\ &= 8R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 8a^2 (dvdt). \end{aligned}$$

5) Phần mặt đã cho là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở trong mặt trụ ellipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Do đối xứng, ta xét trong góc phần tám thứ nhất (hình 64):

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$



Hình 64.

Do đó:

$$\sigma = 8 \iint_D \frac{2 dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Với D là hình chiếu của phần mặt cầu trong góc phần tám thứ nhất trên mặt phẳng xOy, đó là hình ellipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$.

Vậy:

$$\begin{aligned}\sigma &= 16 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 16 \int_0^2 \arcsin \frac{y}{\sqrt{4-x^2}} \bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 16 \int_0^2 \arcsin \frac{1}{2} dx = 16 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2 = \frac{16}{3} \pi \text{ (đvdt)}.\end{aligned}$$

6) Phần mặt đã cho là mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ hay $y^2 + z^2 = x^2$ với $z \geq 0$, mặt nón này đỉnh tại gốc O và trục là Ox. Rõ ràng 1/4 diện tích cần tính nằm trong góc phần tám thứ nhất và có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D:

$$(x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0, y \geq 0 \text{ (Lemniscate)}$$

$$\text{ở đây: } z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$\text{Do đó: } \sigma = 4\sqrt{2} \iint_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta có:

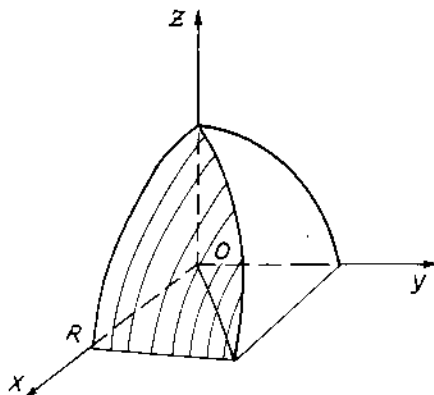
$$\begin{aligned}\sigma &= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr = 2\sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi/4} \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \sin \varphi)^2} d(\sqrt{2} \sin \varphi)\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{2} \sin \varphi = t$ ta được:

$$\sigma = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi a^2}{2} \quad (dydt).$$

7) Phần mặt đã cho giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + z^2 = R^2$ trục Oy và mặt trụ $y^2 + z^2 = R^2$ trục Ox (hình 65). Do đối xứng nên ta có:

$$\sigma = 16 \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$



Hình 65.

ở đây: $z = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

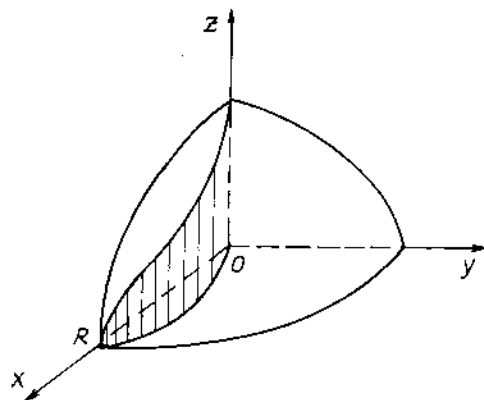
Còn D là miền: $0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq x$.

Vậy:

$$\begin{aligned}\sigma &= 16R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^y dy = 16R \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= 16R \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_R^0 = 16R^2 \text{ (đvdt)}.\end{aligned}$$

8) Phần mặt đã cho là phần mặt trụ: $x^2 + y^2 = Rx$, đường sinh song song với Oz, bao gồm trong hình cầu tâm O, bán kính R.

Vì lý do đối xứng nên xét trong góc phần tám thứ nhất (hình 66).



Hình 66.

Phương trình của phần mặt trụ đó là:

$$y = \sqrt{Rx - x^2} \quad (\text{đối với mặt phẳng } xOz)$$

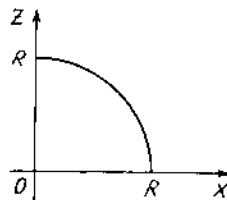
$$y'_x = \frac{R - x}{\sqrt{Rx - x^2}}, \quad y'_{x'} = 0, \quad \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_{x'}} = \frac{R}{2} \frac{1}{\sqrt{Rx - x^2}}$$

$$\text{Do đó: } \sigma = 4 \cdot \frac{R}{2} \iint_D \frac{dx dz}{\sqrt{Rx - x^2}}.$$

Với D là miền trong mặt phẳng xOz , giới hạn bởi các trục Ox , Oz và hình chiếu của đường $\begin{cases} x^2 + y^2 = Rx \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$ trên mặt phẳng đó, nghĩa là đường parabol: $z = \sqrt{R^2 - Rx}$ (hình 67).

Vậy:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2R \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - Rx}} \frac{dz}{\sqrt{Rx - x^2}} = 2R \int_0^R \sqrt{R} \sqrt{\frac{R-x}{x(R-x)}} dx \\ &= 2R\sqrt{R} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2R\sqrt{R} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_0^R = 4R^2 \text{ (dvdt)}. \end{aligned}$$



Hình 67.

9) Giả sử phần mặt cầu giới hạn bởi hai kinh tuyến φ_1, φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$) và hai vĩ tuyến ψ_1, ψ_2 ($\psi_1 > \psi_2$). Khi đó phương trình tham số của mặt cầu là:

$$x = R \cos \varphi \cos \psi, y = R \sin \varphi \cos \psi, z = R \sin \psi$$

Theo các công thức ở (1.4) ta tính:

$$E = x_{\varphi}^2 + y_{\varphi}^2 + z_{\varphi}^2 = R^2 \cos^2 \psi$$

$$G = x_{\psi}^2 + y_{\psi}^2 + z_{\psi}^2 = R^2$$

$$F = x'_{\varphi} x'_{\psi} + y'_{\varphi} y'_{\psi} + z'_{\varphi} z'_{\psi} = 0$$

$$\sigma = \iint_D R^2 \cos \varphi d\varphi d\psi = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos \psi d\psi$$

$$= R^2 (\varphi_2 - \varphi_1) (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)$$

$$D: \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2 \end{cases}$$

23. 1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi:

a) $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$

b) $r = 1 + \cos\varphi$

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi:

a) $x = a(1 - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$

$y = 0$ đối với Ox

b) $y^2 = ax, x = a$
đối với đường thẳng $D:$
 $y = -a$

Bài giải

1) a) Hình đã cho giới hạn bởi 2 paraboles là đối xứng với Ox (hình 68).

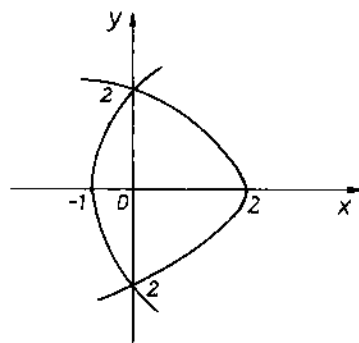
Theo các công thức (5) (1.4) và do đối xứng ta có:

$$y_G = 0, M_x = 0$$

$$x_G = \frac{M_y}{M},$$

$$M_y = \iint_D x dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{4}(4-y^2)} x dx = \frac{16}{5}$$

$$M = \iint_D dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{4}(4-y^2)} dx = 8.$$



Hình 68.

Vậy: $x_G = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{2}{5}, y_G = 0.$

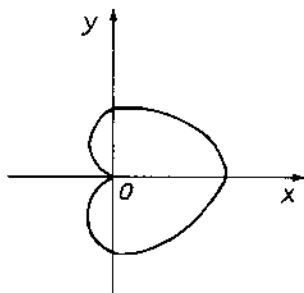
b) $r = a(1 + \cos\varphi)$: đường Cardioide (hình 69).

Do đối xứng với Ox nên:

$$y_G = 0 \Rightarrow M_y = 0$$

$$x_G = \frac{M_x}{M}, M = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr$$

$$M = \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2$$



Hình 69.

$$M_x = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \cos\varphi \cdot r^2 dr = \frac{2}{3} a^3 \int_0^\pi \cos\varphi (1 + \cos\varphi)^3 d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \int_0^\pi (\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \int_0^\pi (3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi) d\varphi$$

$$(\text{vì } \int_0^\pi (\cos\varphi + 3\cos^3\varphi) d\varphi = 0)$$

$$= \frac{5\pi}{4} a^3$$

Vậy:

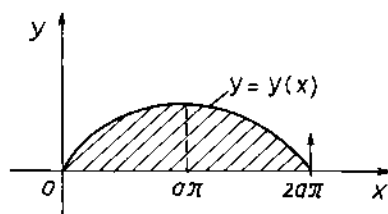
$$x_G = \frac{\frac{5\pi}{4} a^3}{\frac{3}{2} \pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$

2) a) Theo (6) (1.5) ta có:

$$I_1 = \iint_D y^2 dx dy$$

Theo hình 70:

$$I_1 = \int_0^{2a\pi} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{2a\pi} y^3(x) dx$$



Đổi sang biến t ta có:

Hình 70.

$$I_1 = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 a(1 - \cos t) dt$$

$$= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt = \frac{16a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2} dt$$

$$= \frac{32a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u du, (u = \frac{t}{2})$$

$$I_1 = \frac{64}{3} a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^8 u du = \frac{64}{3} a^4 \cdot \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{12} \pi a^4$$

(giá trị của $\sin^8 u$ đối xứng đối với đường thẳng $u = \frac{\pi}{2}$).

b) Tính tiến gốc tọa độ về O' : $x = X$, $y = Y - a$ thì phương trình của parabol là:

$$(Y - a)^2 = aX$$

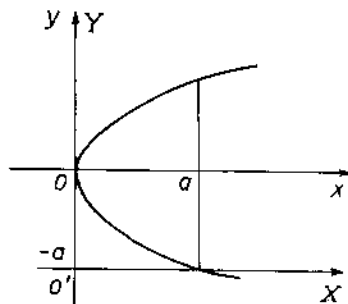
Parabole có hai nhánh: $Y = a \pm \sqrt{aX}$ (hình 71).

Do đó:

$$I_D = \int_0^a dX \int_{-\sqrt{aX}}^{\sqrt{aX}} Y^2 dY$$

Đặt $Y = t + a$ thì $-\sqrt{aX} \leq t \leq \sqrt{aX}$

$$\text{và: } I_D = \int_0^a dX \int_{-\sqrt{aX}}^{\sqrt{aX}} (t + a)^2 dt = \frac{1}{3} \int_0^a \left[(a + \sqrt{aX})^3 - (a - \sqrt{aX})^3 \right] dX = \frac{8a^2}{5}.$$



Hình 71.

§2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1. Định nghĩa

- Tích phân bội ba của hàm bị chặn $f(x, y, z)$ trong (trên) miền compact $V \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(M) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \lim_{\max \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i, \quad M_i(x_i, y_i, z_i) \end{aligned}$$

- Với mọi cách chia miền V thành n phần riêng biệt ΔV_i (thể tích cũng gọi là ΔV_i) $i = 1, 2, \dots, n$.

- Với mọi cách chọn các điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$, d_i là trung kính của ΔV_i .

Hàm $f(x, y, z)$ có tích phân trên miền V gọi là khả tích trên miền đó.

Mọi hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền V đều là khả tích trên miền đó.

Tích phân bội ba có các tính chất tương tự như các tính chất của tích phân kép.

- Về hình học, tích phân bội ba $I = \iiint_V dV = V$ là thể tích của miền V .

- Về cơ học, $I = \iiint_V f(x, y, z)dV$ là khối lượng của miền V có mật độ khối lượng (thể tích) $f(x, y, z) > 0$.

2.2. Cách tính trong tọa độ Descartes

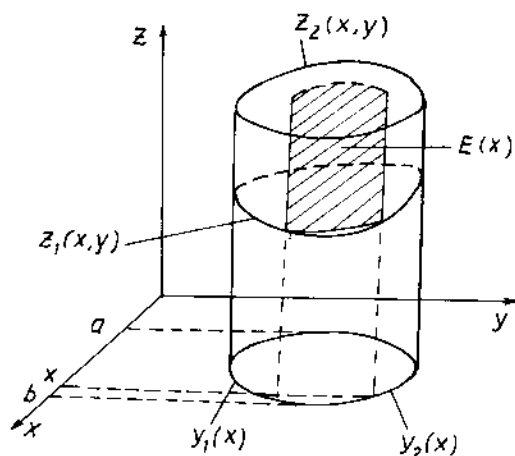
Miền V giới hạn bởi các mặt liên tục:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}$$

thì tương tự như tích phân kép:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(x, y, z)dV = \iiint_V f(x, y, z)dx dy dz \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz \\ &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz = \int_a^b dx \iint_{D(x)} f(x, y, z)dy dz \end{aligned}$$

$D(x)$ là thiết diện của mặt phẳng $X = x$ và miền V (hình 72).



Hình 72.

2.3. Cách tính trong tọa độ cong bất kỳ

Nếu đổi biến: $x = x(u, v, w)$

$$y = y(u, v, w) \quad (u, v, w) \in V' \quad (1)$$

$$z = z(u, v, w)$$

Các hàm (1) có các đạo hàm riêng liên tục trong V' , xác định một song ánh từ V' vào V và định thức Jacobi:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong } V'. \quad \left[J = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} \right]$$

thì:
$$I = \iiint_V f(x, y, z) dV$$

$$= \iiint_V r[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw$$

(u, v, w) là các tọa độ cong bất kỳ.

2.4. Tọa độ trụ

$$\varphi = \left(\overrightarrow{Ox} \wedge \overrightarrow{OP} \right), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$r = \left| \overrightarrow{OP} \right|, 0 \leq r < +\infty$$

$$z = \overrightarrow{PM}, -\infty < z < +\infty$$

(r, φ, z) gọi là tọa độ trụ của M :

$M(r, \varphi, z)$.

Liên hệ: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$,

$z = z$.



Hình 73.

Công thức tính tích phân bội ba chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ trụ:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

2.5. Tọa độ cầu

$$\varphi = \left(\overrightarrow{Ox} \wedge \overrightarrow{OP} \right), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\theta = \left(\overrightarrow{Oz} \wedge \overrightarrow{OM} \right), 0 \leq \theta \leq \pi$$

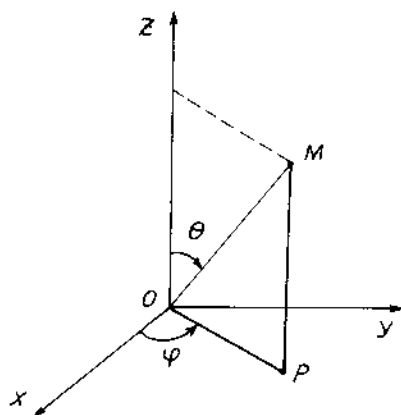
$$\rho = \left| \overrightarrow{OM} \right|, 0 \leq \rho < +\infty$$

(ρ, φ, θ) gọi là tọa độ cầu của M : $M(\rho, \varphi, \theta)$

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$x = \rho \cos \theta$$



Hình 74.

Công thức tính tích phân bội ba chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ cầu:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

2.6. Áp dụng hình học

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

2.7. Áp dụng cơ học

- Cho $\rho(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (thể tích) của miền V .

- Moment tĩnh của V đối với các mặt phẳng tọa độ:

$$M_{xy} = \iiint_V z \rho(x, y, z) dV ,$$

$$M_{yz} = \iiint_V x \rho(x, y, z) dV ,$$

$$M_{zx} = \iiint_V y \rho(x, y, z) dV$$

- Đối với các trục tọa độ:

$$M_x = \iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} \rho(x, y, z) dV ,$$

$$M_y = \iiint_V \sqrt{x^2 + z^2} \rho(x, y, z) dV .$$

$$M_z = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \rho(x, y, z) dV$$

- Tọa độ trọng tâm của V:

$$x_G = \frac{M_{yz}}{M} , y_G = \frac{M_{zx}}{M} , z_G = \frac{M_{xy}}{M}$$

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dV \text{ là khối lượng của miền V.}$$

- Moment quán tính của V đối với các mặt phẳng tọa độ, các trục tọa độ và gốc tọa độ:

$$I_{xy} = \iiint_V x^2 y^2 \rho(x, y, z) dV ,$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 z^2 \rho(x, y, z) dV ,$$

$$I_{zx} = \iiint_V y^2 z^2 \rho(x, y, z) dV$$

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_{(x,y,z)} = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

BÀI TẬP

24. Tính các tích phân bội ba

$$1) I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}, \quad V: \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$$

$$2) I = \iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz, \quad V: 2az \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$$

$$3) I = \iiint_V z dx dy dz, \quad V: \text{giới hạn bởi } z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \text{ và } z = h > 0$$

$$4) I = \iiint_V dx dy dz, \quad V \text{ giới hạn bởi: } x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz, x^2 + y^2 = z^2$$

và chứa $(0, 0, R)$.

$$5) I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad V \text{ giới hạn bởi } y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0, z = 0,$$

$z = a \ (a > 0)$

$$6) I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

$$7) I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 \leq x.$$

$$8) I = \iiint_V x^2 y^2 z^2 dx dy dz, \quad V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

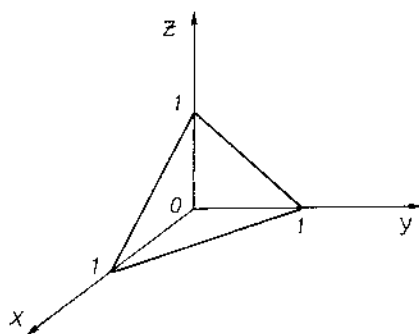
$$9) I = \iiint_V xyz dx dy dz, \quad V \text{ giới hạn bởi:}$$

$$z = x^2 + y^2, \quad z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x,$$

$$0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad (x, y, z \geq 0).$$

Bài giải

1) Miền lấy tích phân V là tứ diện giới hạn bởi ba mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$ (hình 75).



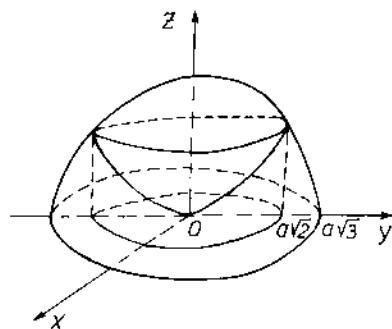
Hình 75.

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x + y + z + 1)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left. -\frac{1}{2(x + y + z + 1)^2} \right|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{4} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+y+1} \Big|_{y=0}^{1-x} - \frac{1}{4} y \Big|_0^{1-x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1-x) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln(1+x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

2) Miền tích phân V giới hạn bởi paraboloid tròn xoay $x^2 + y^2 = 2az$, và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ phần chứa Oz dương (hình 76).



Hình 76.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là miền D , phương trình đường biên giới của D có được bằng cách khử z ở hai phương trình trên:

$$2az = 3a - z^2 \Rightarrow z = a, \text{ do đó } D \text{ xác định bởi } x^2 + y^2 \leq 2a^2$$

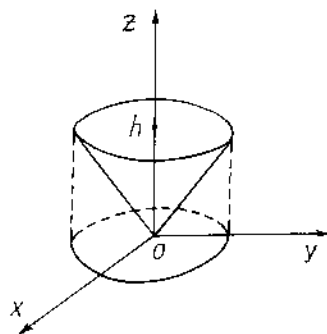
$$\text{và: } I = \int_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dz.$$

Chuyển sang tọa độ trụ: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ thì $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a\sqrt{2}$, $\frac{r^2}{2a} \leq z \leq \sqrt{3a^2 - r^2}$ và:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} \frac{z}{r} dz = 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} \bigg|_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} dr \\ &= \pi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2} \right) dr = \pi \left(3a^2 r - \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{20a^2} \right) \bigg|_0^{a\sqrt{2}} \\ &= \frac{32\sqrt{2}a^3}{15} \pi. \end{aligned}$$

3) Miền lấy tích phân V giới hạn bởi tầng trên $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ của mặt nón và mặt phẳng $z = h$ (hình 77).

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là hình tròn $x^2+y^2 \leq R^2$ (thay $z = h$ vào $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$).



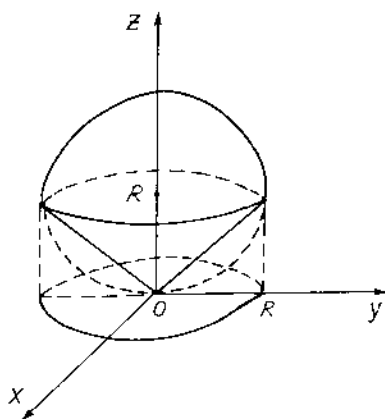
Hình 77.

Do đó chuyển sang tọa độ trụ ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\frac{h}{R}}^{\frac{h}{r}} z dz = 2\pi \int_0^R r \left(\frac{z^2}{2} \right) \bigg|_{\frac{h}{R}}^{\frac{h}{r}} dr = \pi \int_0^R r \left(h^2 - \frac{h^2}{R^2} r^2 \right) dr \\
 &= \pi \left(h^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{h^2}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \right) \bigg|_0^R = \frac{\pi h^2 R^2}{4}
 \end{aligned}$$

4) Miền lấy tích phân V giới hạn bởi tầng trên của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2 \text{ (hình 78).}$$



Hình 78.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là miền D :

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

(Thay $x^2 + y^2 = z^2$ vào $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$: $2z^2 = 2Rz \Rightarrow z = 0, z = R$)

Chuyển sang tọa độ trụ ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_r^{\sqrt{R^2 - r^2}} dz$$

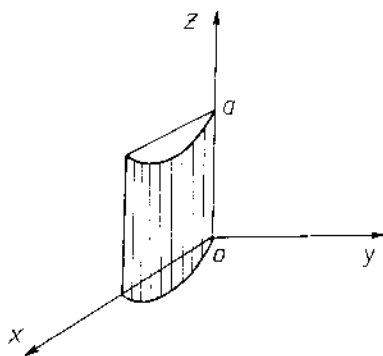
($z = R + \sqrt{R^2 - r^2}$: phương trình nửa trên của mặt cầu).

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^R r \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} - r \right) dr \\ &= 2\pi \left[\int_0^R (rR - r^2 - r\sqrt{R^2 - r^2}) dr \right] \\ &= 2\pi \left[R \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R = \pi R^3. \end{aligned}$$

5) Miền lấy tích phân V giới hạn bởi mặt trụ: $y = \sqrt{2x - x^2}$ đường sinh song song với Oz , các mặt phẳng xOz , xOy và mặt phẳng $z = a$ (hình 79).

Chuyển sang tọa độ trụ ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr \int_0^a z r dz = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{a^2}{6} \int_0^{\pi/2} 8\cos^3\varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi \\ &= \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{9} a^3 \end{aligned}$$



Hình 79.

6) Miền lấy tích phân là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

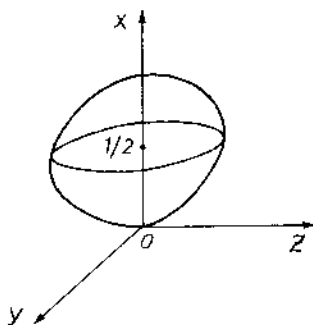
Chuyển sang tọa độ cầu:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \theta$$

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \left(\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \right) \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi R^5}{5} \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_{\pi}^0 = \frac{8\pi R^5}{15}. \end{aligned}$$

7) Miền lấy tích phân V là hình cầu $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ (hình 80).



Hình 80.

Chuyển sang tọa độ cầu:

$$y = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad x = \rho \cos \theta$$

$$\text{Khi đó } V: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq \cos \theta \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 = x \Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \theta \Rightarrow \rho = \cos \theta).$$

$$\begin{aligned} \text{Và: } I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} \rho^2 d\rho = 2\pi \int_{\pi/2}^0 -\frac{\cos^4 \theta}{4} d \cos \theta \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

8) Miền lấy tích phân giới hạn bởi ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, chuyển sang tọa độ cầu suy rộng $x = a\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = b\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\rho\cos\theta$ khi đó ellipsoïde biến thành mặt cầu $\rho = 1$, do đối xứng nên:

$$\begin{aligned} 1 &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 a^2 b^2 c^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \cos^2 \theta \rho^6 ab c \rho^2 d\rho \\ &= 8a^3 b^3 c^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^8 d\rho \\ &= 8a^3 b^3 c^3 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi \int_0^{\pi} (\sin^5 \theta - \sin^7 \theta) d\theta \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9} a^3 b^3 c^3 (I_2 - I_4)(I_5 - I_7) \\ &= \frac{8}{9} a^3 b^3 c^3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi}{945} a^3 b^3 c^3. \end{aligned}$$

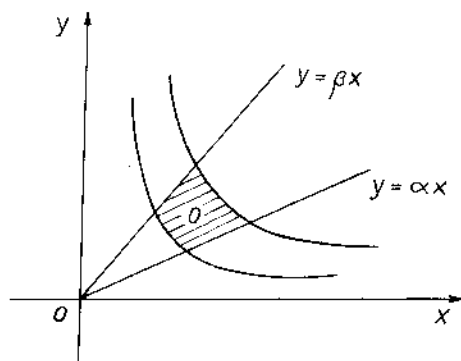
9) Miền lấy tích phân trong góc $1/8$ thứ nhất giới hạn bởi hai paraboloid tròn xoay $z = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, hai mặt trụ $xy = a^2$, $xy = b^2$ và hai mặt phẳng $y = \alpha x$, $y = \beta x$. Hình chiếu của V trên mặt phẳng xOy là miền D (hình 81). Dùng phép biến đổi tổng quát:

$$u = xy, v = \frac{y}{x}, w = z \text{ thì } a^2 \leq u \leq b^2, \alpha \leq v \leq \beta$$

Từ đó:

$$x = \frac{1}{u^2} v^{-1/2}, y = u^{1/2} v^{1/2}$$

Phương trình của các paraboloid trong hệ tọa độ (u, v, w) là $w = u(v + v^{-1})$, $w = \frac{u(v + v^{-1})}{2}$.



Hình 81.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_a^{b^2} u du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v} \int_{\frac{u}{\beta} \left(\sqrt{v} - 1 \right)}^{\frac{u}{\alpha} \left(\sqrt{v} - 1 \right)} w dw = \frac{3}{16} \int_a^{b^2} u^3 du \int_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{1}{v} \right) \frac{dv}{v} \\ &= \frac{3}{64} (b^8 - a^8) \int_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^3} \right) dv \\ &= \frac{3}{128} (b^8 - a^8) \left[\left(\beta^2 - \alpha^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right] \end{aligned}$$

25. 1) Tìm giá trị trung bình của hàm $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ trong miền $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$.

2) Tính $F'(t)$ nếu $F(t) = \iiint_V f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.

với $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$, f là hàm liên tục

3) Chứng minh rằng nếu f là hàm liên tục trong miền compact V và $\iiint_V f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 0 \quad \forall \omega \subset V$ thì $f(x, y, z) \equiv 0, \forall (x, y, z) \in V$

4) Chứng minh: $\iiint_V f(x).f(y).f(z) dV = \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(u) du \right)^3$

với $V: 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1, x \leq z \leq y$ và f liên tục trên $[0, 1]$.

Bài giải

1) Theo định lý lấy giá trị trung bình của một hàm trong một miền compact V thì giá trị trung bình của hàm đã cho là:

$$f(\overline{M}) = \frac{1}{V} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (1)$$

với V là thể tích hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ hay:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{do đó: } V = \frac{4}{3} \pi \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

Để lấy tích phân (1), tính tiền gốc tọa độ về $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ theo các

công thức $x = X + \frac{1}{2}, y = Y + \frac{1}{2}, z = Z + \frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình mặt cầu với gốc O' là:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{3}{4}$$

và:

$$f(\overline{M}) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \iiint_{X^2 + Y^2 + Z^2 \leq \frac{3}{4}} \left[\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Z + \frac{1}{2} \right)^2 \right] dXdYdZ.$$

Chuyển sang tọa độ cầu:

$$X = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad Y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad Z = \rho \cos \theta.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f(\overline{M}) &= \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}/2} \rho^2 \left[\frac{3}{4} + \rho^2 + \rho(\sin \theta (\sin \varphi + \cos \varphi) + \cos \theta) \right] d\rho \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \left(\frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^5}{5} + \frac{\rho^4}{4} \cos \theta \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{9\sqrt{3}}{100} \right) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{32} \left(1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

2) Miền lấy tích phân V là hình cầu tâm O bán kính t (> 0).

Chuyển sang tọa độ cầu thì V : $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 < \rho < t$.

Do đó:

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^t f(\rho^2) \cdot \rho^2 d\rho = 4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho$$

Áp dụng đạo hàm tích phân theo cận trên, ta có:

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$$

3) Xét điểm tùy ý: $M \in V$ và hình cầu V_ε tâm M , bán kính ε , $V_\varepsilon \subset V$ theo định lý lấy giá trị trung bình và theo giả thiết, ta có:

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon^3} \iiint_{V_\varepsilon} f(x, y, z) dV = f(\bar{M}), \bar{M} \in V_\varepsilon.$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$ thì $\bar{M} \rightarrow M$, theo giả thiết f liên tục trong V nên $f(\bar{M}) \rightarrow f(M) = 0$. Vậy $f(M) = 0, \forall M$ trong V . Theo giả thiết f liên tục trong miền đóng V nên $f = 0$ tại các điểm biên của V , nghĩa là $f = 0$ tại $\forall M \in V$.

4) Theo giả thiết hàm f liên tục trên $[0, 1]$ nên tồn tại hàm

$$F(t) = \int_0^t f(u) du \text{ xác định trên } [0, 1].$$

Cũng theo giả thiết thì:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 f(y) dy \int_0^1 f(z) dz = \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 F'(y) [F'(y) - F'(x)] dy \\ &= \int_0^1 f(x) \left[\frac{1}{2} (F'(y))^2 - F'(x)F'(y) \right] \Big|_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [F'(x) - F(1)]^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{6} [F'(x) - F(1)]^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6} [F'(1) - F(0)]^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(u) du \right)^3. \end{aligned}$$

26. Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt:

1) $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$ ($h > 0$)

2) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2az$, $z = 0$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ($z \geq 0$)

4) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$

5) $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

6) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

*7) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

*8) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$

*9) $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$

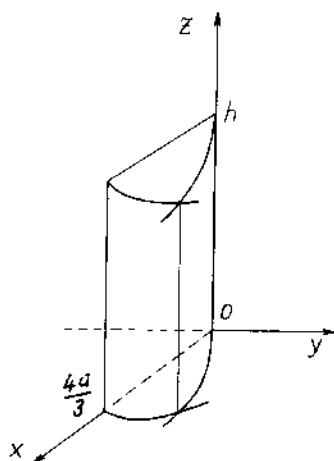
$$\text{với } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (h_1, h_2, h_3 > 0)$$

*10) $(a_1u + b_1v + c_1w)^2 + (a_2u + b_2v + c_2w)^2 + (a_3u + b_3v + c_3w)^2 = R^2$

$$\text{với } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Bài giải

1) Miền V giới hạn bởi hai mặt trụ $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, đường sinh song song với Oz và 2 mặt phẳng $z = \pm h$ vuông góc với Oz (hình 82).



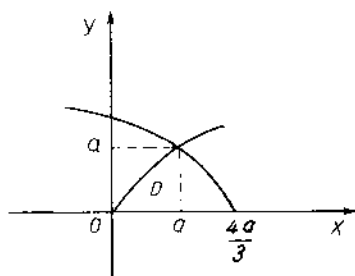
Hình 82.

Do đối xứng:

$$V = 4 \iiint_D dx dy dz,$$

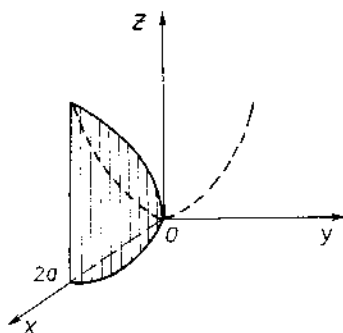
D là miền ở hình 83.

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^a dy \int_{y^2/a}^{4a^2/y^2} dx \int_0^h dz = 4h \int_0^a \left(\frac{4a^2}{3a} \frac{y^2}{y^2} - \frac{y^2}{a^2} \right) dy \\ &= 4h \left(\frac{4}{3} ay - \frac{4y^3}{9a} \right) \Big|_0^a = \frac{32}{9} a^2 h \quad (\text{đvtt}). \end{aligned}$$



Hình 83.

2) Miền V giới hạn bởi paraboloid tròn xoay $x^2 + y^2 = 2az$, mặt trụ $x^2 + y^2 = 2ax$ và mặt phẳng xOy (hình 84).



Hình 84.

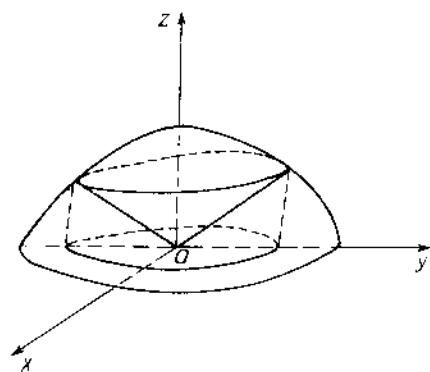
Do đối xứng:
$$V = 2 \iiint_V dx dy dz = 2 \iint_D dx dy \int_0^{\frac{x^2 + y^2}{2a}} dz$$

với D là nửa hình tròn: $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$.

Chuyển sang tọa độ trụ, ta có:

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r dr \int_0^{2a} dz = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \frac{r^3}{2a} dr \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{8a} \Big|_0^{2a \cos \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{16a^4 \cos^4 \varphi}{8a} d\varphi \\ &= 4a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = 4a^3 \frac{3.1}{4.2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^3}{4} \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

3) Miền V giới hạn bởi ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$ và tầng trên của mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (hình 85).



Hình 85.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là hình ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

(Khử z từ hai phương trình trên:

$$2 - \frac{z^2}{c^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow z = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = 1).$$

Chuyển sang tọa độ trụ suy rộng: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ ta có:

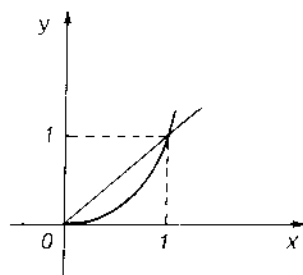
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{cr}^{c\sqrt{2-r^2}} dz = 2\pi abc \int_0^1 \left(c\sqrt{2-r^2} - cr \right) r dr \\ &= 2\pi abc \left(\frac{1}{3} (2-r^2)^{3/2} \Big|_1^0 - \frac{r^3}{3} \Big|_1^0 \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1) abc \text{ (dvtt)}. \end{aligned}$$

4) Miền V giới hạn bởi hai paraboloides tròn xoay: $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, mặt phẳng $y = x$ và mặt trụ: $y = x^2$

Do đó:

$$V = \iiint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz$$

với $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$



Hình 86.

(hình 86).

Vậy:

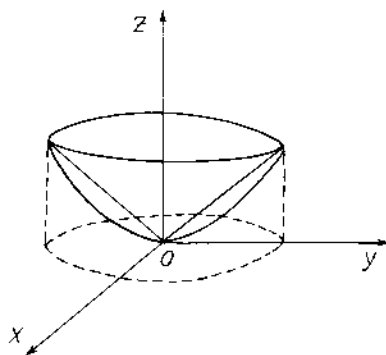
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \frac{3}{35} \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

5) Miền V giới hạn bởi parabolôide tròn xoay $az = x^2 + y^2$ và tầng trên của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (hình 87).

Hình chiếu của V trên mặt phẳng xOy là hình tròn: $x^2 + y^2 \leq a^2$.

(Từ hai phương trình đã cho ta có: $az = z^2 \Rightarrow z = a \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$).

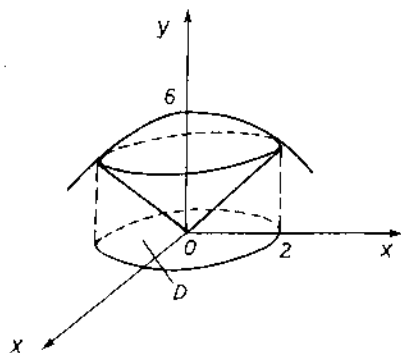
Chuyển sang tọa độ trụ, ta có:



Hình 87.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{r^2/a}^r dz = 2\pi \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a} \right) r dr \\ &= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi a^3}{6} \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

6) Miền V giới hạn bởi paraboloid tròn xoay: $z = 6 - x^2 - y^2$ và tầng trên của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (hình 88).



Hình 88.

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng xOy là hình tròn $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

$$(6 - z = z^2 \Rightarrow z = 2: x^2 + y^2 = 4).$$

Do đó chuyển sang tọa độ trụ, ta có:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 r(6 - r^2 - r) dr \\ &= 2\pi \left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{3} \text{ (dvii)}. \end{aligned}$$

7) Miền V đối xứng đối với các mặt phẳng tọa độ. Do đó thể tích của miền V bằng 8 lần thể tích của nó trong góc $1/8$ thứ nhất.

Chuyển sang tọa độ cầu, ta có phương trình của mặt cầu là:

$$\rho^4 = \rho^2 a^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad \text{hay} \quad \rho = a \sqrt{-\cos 2\theta}$$

Do đó ρ chỉ xác định khi $-\cos 2\theta \geq 0$ hay $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Trong góc phần tám thứ nhất thì: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Vậy:

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{a\sqrt{-2\cos\theta}} \rho^2 d\rho = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta (\sqrt{-\cos 2\theta})^3 d\theta$$

Đặt $\frac{\pi}{2} - \theta = t$, thì:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos t \cos^{3/2} 2t dt = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} (1 - 2\sin^2 t)^{3/2} d\sin t \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (1 - 2u^2)^{3/2} du \quad \text{với } u = \sin t \end{aligned}$$

Lại đặt $\sqrt{2} u = \sin v$ thì:

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4 v dv = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3.1}{4.2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3 a^3}{4\sqrt{2}} \quad (\text{dvtl}).$$

8) Miền V đối xứng đối với các mặt phẳng tọa độ, do đó:

$$V = 8 \cdot \iiint_{V'} dx dy dz$$

V' là $\frac{1}{8}$ thứ nhất của V (trong góc $\frac{1}{8}$ thứ nhất) chuyển sang tọa độ cầu suy rộng:

$$x = a \cos^3 \varphi \sin^3 \theta, \quad y = b \sin^3 \varphi \sin^3 \theta, \quad z = c \rho \cos^3 \theta \quad (1)$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1.$$

(Thay (1) vào phương trình $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$ ta được $\rho = 1$).

$$J = 9abc\rho^2\cos^2\theta\sin^5\theta\sin^5\varphi\cos^2\varphi$$

Ta có:

$$V = 72abc \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho$$

$$V = 72abc(I_5 - I_7)(I_2 - I_4) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi abc}{35}.$$

9) Thực hiện phép đổi biến:

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned} \quad \text{thì} \quad \begin{cases} -h_1 \leq u \leq h_1 \\ -h_2 \leq v \leq h_2 \\ -h_3 \leq w \leq h_3 \end{cases}$$

mặt khác theo (2.3), đối với phép biến đổi ngược:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{D}$$

$$\text{Vậy: } V = \frac{1}{|D|} \int_{h_1}^{h_1} du \int_{h_2}^{h_2} dv \int_{h_3}^{h_3} dw = \frac{8h_1h_2h_3}{|D|} \quad (dvtl).$$

$$\begin{aligned} 10) \text{ Đổi biến: } \quad x &= a_1u + b_1v + c_1w \\ y &= a_2u + b_2v + c_2w \end{aligned}$$

$$z = a_3u + b_3v + c_3w$$

thì mặt giới hạn miền V biến thành mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ giới hạn miền V' .

$$J = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}} = \frac{1}{D}$$

$$\text{Vậy: } V = \frac{1}{|D|} \iiint_{V'} dx dy dz = \frac{4\pi R^3}{3|D|} \quad (\text{dvt11}).$$

27. 1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi các mặt:

$$\text{a) } z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0).$$

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\rho = 1$) giới hạn bởi các mặt sau, đối với các mặt phẳng tọa độ:

$$\text{a) } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c.$$

Bài giải

1) a) Hình đã cho giới hạn bởi mặt paraboloid tròn xoay $z = x^2 + y^2$, các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y = a$.

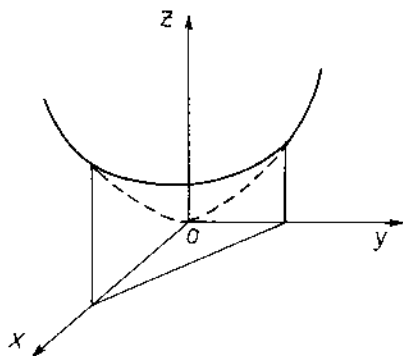
Theo các công thức (2.6), (hình 89) và do đối xứng ta có:

$$x_G = y_G = \frac{\iiint_V x dV}{\iiint_V dV} = \frac{\int_0^a x dx \int_0^x dy \int_0^{x^2+y^2} dz}{\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{x^2+y^2} dz}.$$

Tính toán ta có:

$$x_G = y_G = \frac{2}{5}a$$

$$z_G = \frac{\iiint_V z dV}{\iiint_V dV} = \frac{\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz}{\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz} = \frac{7}{30}a^2$$

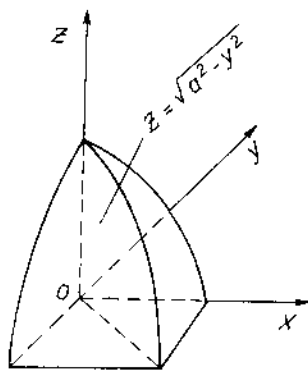


Hình 89.

b) Hình đã cho giới hạn bởi 2 mặt trụ tròn xoay và ở phía trên mặt phẳng xOy (hình 90) trong góc phần tám thứ hai một phần tám của hình, chiếu xuống mặt phẳng xOy là tam giác: $-a \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq -y$.

Do đó thể tích của hình là:

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_{-a}^0 dy \int_0^{-y} dx \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz = 8 \int_{-a}^0 -y \sqrt{a^2-y^2} dy \\ &= \frac{8}{3} (a^2-y^2)^{3/2} \Big|_{-a}^0 = \frac{8}{3} a^3. \end{aligned}$$



Hình 90.

Do đối xứng: trọng tâm của hình ở trên trục Oz nên $x_G = y_G = 0$, còn:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{8}{V} \int_{-a}^a dy \int_0^y dx \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} z dz = \frac{8}{2V} \int_{-a}^a y(a^2 - y^2) dy \\ &= \frac{8}{2V} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (a^2 - y^2)^2 \Big|_{-a}^0 \\ &= \frac{a^4}{8a^3} = \frac{3}{8}a. \end{aligned}$$

Vậy trọng tâm của hình là: $G(0, 0, \frac{3}{8}a)$.

2) a) Theo các công thức (2.7) thì moment quán tính của hình đã cho đối với mặt phẳng xOy là:

$$I_{xz} = \iiint_V z^2 dV = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b(1-x/a)}{1-x/a}} dy \int_0^{\frac{c(1-x/a-y/b)}{1-x/a-y/b}} z^2 dz = \frac{abc^3}{60}$$

Tương tự: $I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}$, $I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}$.

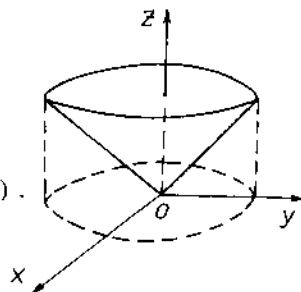
b) Hình đã cho giới hạn bởi tầng trên của mặt nón ($z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$) và mặt phẳng $z = c$ (hình 91), hình chiếu của nó trên mặt phẳng xOy là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

(thay $z = c$ vào phương trình $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$).

Vậy:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 dV$$



Hình 91.

Chuyển sang tọa độ trụ suy rộng và do đối xứng ta có:

$$I_{xy} = 4ab \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{cr}^c z^2 dz = \frac{2}{3} \pi abc^3 \int_0^1 r(1-r^3) dr = \frac{\pi}{5} abc^3$$

Tương tự ta có:

$$I_{yz} = \frac{\pi}{20} a^3 bc, \quad I_{zx} = \frac{\pi}{20} ab^3 c.$$

CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. TÍCH PHÂN THƯỜNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

1.1. Định nghĩa

$I(x) = \int_a^b K(x, t) dt$ gọi là tích phân phụ thuộc tham số x , nếu $K(x, t)$

khả tích trên $[a, b]$, $\forall x \in [c, d]$.

1.2. Định lý Leibniz

1) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong hình chữ nhật $D: a \leq t \leq b, c \leq x \leq d$

thì: (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} I(x) = \int_a^b \left[\lim_{x \rightarrow x_0} K(x, t) \right] dt, x_0 \in [c, d]$.

(2) $I(x)$ liên tục trên $[c, d]$.

(3) $\int_{\alpha}^{\beta} I(x) dx = \int_a^b dt \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t) dx, [\alpha, \beta] \subset [c, d]$.

(Quy tắc tích phân dưới dấu tích phân).

2) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong D và tồn tại $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ cũng liên tục trong D thì:

$$(4) \quad I'(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} dt$$

(Quy tắc đạo hàm dưới dấu tích phân).

3) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong D ; $\alpha(x), \beta(x)$ khả vi trên $[c, d]$,
 $a \leq \alpha(x) \leq b, a \leq \beta(x) \leq b, \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trong D thì:

a) $I(x)$ liên tục trên $[c, d]$; b) $\lim_{x \rightarrow x_0} I(x) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} K(x_0, t) dt : x_0 \in [c, d]$

$$\begin{aligned} \text{c) } I'(x) &= \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t) dt \right)' = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} dt + \beta'(x) K[x, \beta(x)] - \\ &\quad - \alpha'(x) K[x, \alpha(x)] \end{aligned}$$

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

2.1. Định nghĩa
$$I(x) = \int_a^b K(x, t) dt$$

gọi là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số x nếu nó hội tụ $\forall x \in [c, d]$.

$I(x)$ gọi là hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall b > N(\varepsilon),$

$$\forall x \in [c, d] \Rightarrow \left| \int_b^x K(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Tiêu chuẩn Weinstrass

Nếu tồn tại hàm $\varphi(t)$ sao cho:

$$1) |K(x, t)| \leq \varphi(t), \forall x \in [c, d], \forall t \in [a, +\infty]$$

$$2) \int_a^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ tồn tại}$$

$$\text{thì: } \int_a^{+\infty} K(x, t) dt \text{ hội tụ tuyệt đối và đều trên } [c, d].$$

2.2. Định lý

1) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong miền $D: a \leq t < +\infty, c \leq x \leq d$ và

$$I(x) = \int_a^{+\infty} K(x, t) dt \text{ hội tụ đều } \forall x \in [c, d] \text{ thì:}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} I(x) = \int_a^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} K(x, t) dt, x_0 \in [c, d].$$

$$(2) I(x) \text{ liên tục trên } [c, d].$$

$$(3) \int_{\alpha}^{\beta} I(x) dx = \int_a^{+\infty} dt \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t) dx, [\alpha, \beta] \subset [c, d].$$

$$2) \text{ Nếu } \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \text{ tồn tại và liên tục trong miền } D, \int_a^{+\infty} K(x, t) dt \text{ hội tụ}$$

$$\text{và } \int_a^{+\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} dt \text{ hội tụ đều trên } [c, d] \text{ thì:}$$

$$I'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} dt.$$

Tích phân suy rộng

$$I(x) = \int_a^b K(x, t) dt \quad (1)$$

Với $K(x, t)$ không bị chặn theo t tại b ($a, c \in (a, b)$).

Ta cũng có các khái niệm và kết quả tương tự như ở (2. 2), với sự thay đổi bằng ngôn ngữ thích hợp, chẳng hạn (1) gọi là hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, b - b' < \delta(\varepsilon), \forall x \in [c, d], (a < b' < b)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{b'}^b K(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

2.3. Các tích phân quan trọng

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ (Dirichlet)}$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (Euler - Poisson)}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}, I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \\ a, b > 0 \text{ (Laplace)}$$

$$F = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ (Fresnel).}$$

§3. HÀM GAMMA VÀ BÊTA

3.1. Hàm Gamma (Tích phân Euler loại hai)

Định nghĩa $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ (Γ) hội tụ và có đạo hàm mọi cấp

$$\forall x > 0.$$

Tính chất

$$(2) \Gamma(1) = 1$$

$$(3) \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), (x > 0)$$

$$(4) \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(5) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$(6) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

3.2. Hàm Beta (Tích phân Euler loại một)

Định nghĩa $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$ (1)

hội tụ và có đạo hàm mọi cấp $\forall p, q > 0$.

Tính chất

$$(2) B(p, q) = B(q, p)$$

$$(3) B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$(4) B(p, q) = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$$

$$(5) \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Xem chứng minh ở cuối Bài tập giải sẵn Giải tích III.

BÀI TẬP

28. Xét sự hội tụ đều của:

$$1) I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$$

$$2) I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \cos t dt \quad (\alpha \geq 0)$$

$$3) I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x dx$$

$$4) I(y) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^y} dx, \quad y \leq y_0 \leq 2.$$

Bài giải

$$1) \forall x \geq x_0 > 0: e^{-xt^2} \leq e^{-x_0 t^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} d(\sqrt{x_0}t) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(theo (2.4)). Vậy theo (2.1), $I(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều $\forall x \geq x_0 > 0$.

$$2) \forall x \geq x_0 > 0: |e^{-xt^2} \cos t| \leq e^{-x_0 t^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x_0 t^2} dt \text{ hội tụ và}$$

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} t^{\alpha + \frac{1}{2}} e^{-xt^2} = 0 \text{ (Tiêu chuẩn Dirichlet II)}.$$

Vậy $I(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều $\forall x \geq x_0 > 0$.

$$3) I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+1)x + \sin(a-1)x}{x} dx$$

$$\text{mặt khác } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \text{ hội tụ đều } \forall \alpha \geq \alpha_0 > 0,$$

vì $\forall \varepsilon > 0$ và với b_0 đủ lớn, $\forall b > b_0$: $\left| \int_b^x \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| = \left| \int_{bx}^x \frac{\sin z}{z} dz \right| < \varepsilon$ chỉ khi $b > \frac{b_0}{\alpha_0}$.

Vậy $I(a)$ hội tụ đều $\forall a \neq \pm 1$.

$$4) \text{ Với } y \leq y_0 < 2: \frac{\sin x}{x^y} \leq \frac{1}{x^{y_0-1}}, \int_0^1 \frac{dx}{x^{y_0-1}} = \frac{x^{2-y_0}}{2-y_0} \Big|_0^1 = \frac{1}{2-y_0}$$

Vậy $I(y)$ hội tụ đều $\forall y \leq y_0 < 2$.

29. Xét sự liên tục của:

$$1) I(x) = \int_0^1 \sqrt{x^2 + t^2} dt, \text{ tìm } \lim_{x \rightarrow +0} I(x)$$

$$2) I(x) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}, \text{ tìm } \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$$

$$3) I(x) = \int_x^{1+x^2} \frac{dt}{1+t^2+x^3}, \text{ tìm } \lim_{x \rightarrow +0} I(x)$$

$$4) \text{ Tính } F'(x) \text{ nếu } F(x) = \int_0^x f(t+x, 1-x) dt$$

với f'_u, f'_v liên tục, $u = t+x, v = 1-x$

$$5) I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy \quad (\alpha > 0).$$

Bài giải

1) $K(x, t) = \sqrt{x^2 + t^2}$ liên tục $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$ do đó, theo (1.2), $I(x)$ là liên tục $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{và: } \lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + t^2} dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

2) $K(n, x) = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$ liên tục $\forall x \geq 0$ và $n > 0$, do đó $I(x)$ liên tục $\forall x \geq 0$ và $n > 0$.

Và:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} \\ &= \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = \ln \frac{2e}{e+1}, \quad (e^x = t). \end{aligned}$$

3) $K(x, t) = \frac{1}{1 + t^2 + x^3}$ liên tục $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$ do đó $I(x)$ là liên tục $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{và: } \lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x^2} \frac{dt}{1 + t^2 + x^3} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

4) Theo giả thiết và theo (3), (1.2), ta có:

$$I'(x) = \int_0^1 \left[f_u(u, v) - f_v(u, v) \right] dt + 1.f(2x, 0)$$

với $u = t + x$, $v = t - x$.

Mặt khác: $\frac{df}{dt} = f'_u + f'_v$ hay $f'_v = \frac{df}{dt} - f'_u$.

Do đó:

$$\int_0^x (f'_u - f'_v) dt = \int_0^x 2f'_v dt = \int_0^x \frac{df}{dt} dt = 2 \int_0^x f'_u dt = f(2x, 0) + f(x, -x)$$

và: $F(x) = f(x, -x) + 2 \int_0^x f'_u dt$.

5) $K(x, y) = e^{-\alpha y^2}$ và $\frac{\partial K(x, y)}{\partial \alpha} = y^2 e^{-\alpha y^2}$ liên tục trong D: $\forall \alpha > 0$,

$\forall y \in \mathbb{R}$. Rõ ràng $\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy$ hội tụ và $\int_{\alpha}^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy$ hội tụ đều trong

D.

Mặt khác:

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \int_{\alpha}^a e^{-\alpha y^2} dy + \int_a^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy$$

Do đó, theo 3) (1.2) và 2) (2.2), ta có:

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_{\alpha}^a -y^2 e^{-\alpha y^2} dy - e^{-\alpha a^2} + \int_a^{+\infty} -y^2 e^{-\alpha y^2} dy \\ &= - \int_{\alpha}^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy - e^{-\alpha a^2} \end{aligned}$$

30. Chứng minh rằng:

1) Hàm Bessel: $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt$

thỏa mãn phương trình Bessel:

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \text{ Hàm } u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz$$

thỏa mãn phương trình (dao động của dây):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

và các điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x)$$

với $f(x)$ khả vi 2 lần (có $f''(x)$) và $F(x)$ khả vi

Bài giải

1) Rõ ràng $K(x, t) = \cos(nt - x \sin t)$ thỏa mãn các điều kiện để lấy đạo hàm dưới dấu tích phân ((2), (1.2)):

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt - x \sin t) d(\cos t)$$

Tích phân từng phần, ta được:

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi} \sin(nt - x \sin t) \cos t \Big|_0^\pi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (n - x \cos t) \cos(nt - x \sin t) \cdot \cos t dt \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos t \cdot \cos(nt - x \sin t) dt - \\ &\quad - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (1 - \sin^2 t) \cos(nt - x \sin t) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) \cos t dt = x J_n'(x) - x J_n''(x) \quad (1)$$

Mặt khác vì:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t)(n - x \cos t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d \sin(nt - x \sin t) \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(nt - x \sin t) \Big|_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

nên:
$$\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) \cos t dt = \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt = n J_n(x) \quad (2)$$

Nhân (1) với x và theo (2) ta có:

$$\begin{aligned} x J_n'(x) &= \frac{nx}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) \cos t dt = x^2 J_n(x) - x^2 J_n''(x) \\ &= n^2 J_n(x) - x^2 J_n(x) - x^2 J_n''(x) \end{aligned}$$

hay:
$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 \text{ (d.c.m.)}.$$

2) Rõ ràng các điều kiện để lấy đạo hàm dưới dấu tích phân đều thỏa mãn.

Ta tính:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} [f'(x - at) + f'(x + at)] + \frac{1}{2a} [F(x + at) + F(x - at)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} [f''(x - at) + f''(x + at)] + \frac{1}{2a} [F'(x + at) + F'(x - at)] \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{2} [f'(x + at) - f'(x - at)] + \frac{1}{2a} [F(x + at) - F(x - at)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2} [f''(x+at) + f''(x-at)] + \frac{a}{2} [f'(x+at) + f'(x-at)] \quad (2)$$

Nhân (1) với a^2 và so sánh với (2) ta được: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Rõ ràng: $u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = F(x).$

31. Tính:

$$1) I = \int_0^1 x^{n-1} \ln x dx, \text{ biết } \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0)$$

$$2) I = \int_0^{\infty} t^2 e^{-pt} dt, \text{ biết } \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad (p > 0)$$

$$*3) I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{Dirichlet})$$

$$*4) I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (\text{Euler - Poisson})$$

$$*5) L_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx, L_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx \quad a, b > 0 \quad (\text{Laplace})$$

$$*6) F = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad (\text{Fresnel})$$

Bài giải

1) Rõ ràng $K(n, x) = x^{n-1}$ với $0 \leq x \leq 1, n > 0$ thỏa mãn các điều kiện của 2) (2.2) do đó lấy đạo hàm theo n 2 vế của: $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$

Ta được:
$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln x dx = -\frac{1}{n^2}.$$

2) Tương tự như 1):

$$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \quad (p > 0),$$

$$I'(p) = \int_0^{+\infty} -te^{-pt} dt = -\frac{1}{p^2},$$

$$I''(p) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt = \frac{2}{p^3}.$$

3) Xét $J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx$ ($k > 0, a \geq 0$).

Rõ ràng $J(a)$ hội tụ: $\forall a \geq 0$ ($k > 0$).

$$K(a, x) = \begin{cases} e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} & : x > 0 \\ a & : x = 0 \end{cases}$$

và $K_a(a, x) = e^{-kx} \cos ax$ là liên tục trong miền $D: a \geq 0, x \geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos ax dx \text{ hội tụ đều trong } D.$$

Vì theo (2.1):

$$\left| e^{-kx} \cos ax \right| \leq e^{-kx} \text{ và } \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx \text{ hội tụ } (k > 0).$$

Vậy có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$J'(a) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos ax \, dx = \frac{e^{-kx}(-k \cos ax + a \sin ax)}{a^2 + k^2} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{k}{a^2 + k^2} \quad (\text{tích phân từng phần hai lần}).$$

Tích phân theo a ta có:

$$J(a) = \arctg \frac{a}{k} + C.$$

Theo (1): $J(0) = 0$, do đó:

$$0 = \arctg 0 + C \quad \text{hay} \quad C = 0 \quad \text{và} \quad J(a) = \arctg \frac{a}{k}$$

Khi $a = \text{const}$ thì $J = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} \, dx$ là một hàm của k : $J = J(k) =$

$\arctg \frac{a}{k}$ liên tục khi $k = 0$.

Do đó:

$$\lim_{k \rightarrow 0} J(k) = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad \text{khi } a > 0$$

Vậy:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0)$$

Khi $a = 1$:
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Chú ý

1) Ta có thể dùng phương pháp tích phân dưới dấu tích phân để tính I như sau:

Ta có:
$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \quad (x > 0)$$

Do đó:
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\sin x \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \right) dx$$

Theo (2.2):

$$I = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx$$

(vì: $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx$ hội tụ đều trong miền được xét).

hay:
$$I = \int_0^{+\infty} \left[e^{-xt} \left(\frac{t \sin x - \cos x}{t^2 + 1} \right) \right]_{x=0}^{x=+\infty} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

2) Dễ dàng suy ra:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a, \quad a \neq 0$$

4) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, đặt $x = ut$ ta được $I = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt$, nhân 2 vế với

e^{-u^2} và lấy tích phân theo u từ 0 đến $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} I e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} \left(e^{-u^2} u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt \right) du$$

hay:
$$I \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = I^2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} dt \right) du$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)} du$$

(vì $\int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)} du$ hội tụ đều trong miền được xét)

Do đó:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-u^2(1+t^2)} d(u^2(1+t^2)) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

và: $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

5) $I_{x1} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2},$ đặt $\frac{x}{a} = u$, ta được:

$$I_{x1} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos abu}{1 + u^2} du = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta u}{1 + u^2} du = \frac{1}{a} I \quad \text{với } \beta = ab$$

vì $\frac{1}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} e^{-ut} \sin t dt$ nên:

$$I = \int_0^{+\infty} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-ut} \cos \beta u du = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t dt}{\beta^2 + t^2},$$

đặt $t = \beta z$, ta được:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\beta z \sin \beta z \beta dz}{\beta^2(1+z^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{z \sin \beta z}{1+z^2} dz = - \frac{dI}{d\beta}$$

hay $\frac{dI}{I} = -d\beta$ và $I = Ce^{-\beta}$.

Mặt khác $\beta = 0$ thì $I = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2} = Ce^0$ hay $C = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $I = \frac{\pi}{2}e^{-\beta}$ và $L_1 = \frac{1}{a}I = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}$ ($\beta = ab$).

Ta có:

$$L_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = -\frac{dL_1}{db} = -\frac{\pi}{2a}(-a)e^{-ab} = \frac{\pi}{2}e^{-ab}$$

6) Xét: $I = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$, đặt $x^2 = t$ thì:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

mặt khác: $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} d\sqrt{tu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (theo 4)} \right).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin t dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(e^{-u^2} \frac{(-u^2 \sin t - \cos t)}{u^4 + 1} \right)_{t=0}^{\infty} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^4 + 1} \end{aligned}$$

Đặt $u = \frac{1}{v}$ ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4 + 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{-dv}{v^2 \left(\frac{1}{v^4} + 1 \right)} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{v^2 dv}{v^4 + 1} = J.
 \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2}(I + J) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{v^2 + 1}{v^4 + 1} dv \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{v^2}}{v^2 + \frac{1}{v^2}} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{d\left(v - \frac{1}{v}\right)}{\left(v - \frac{1}{v}\right)^2 + 2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{v - \frac{1}{v}}{\sqrt{2}} \bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

và:
$$F = \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Tương tự:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

32. Dùng phương pháp lấy đạo hàm hoặc tích phân dưới dấu tích phân, tính các tích phân:

$$1) I = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx, a, b > 0$$

$$2) I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b > 0.$$

$$3) I = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1)$$

$$4) I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$5) I = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx \quad (|a| < 1)$$

$$6) I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx, (a, b > 0)$$

$$7) I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} dx, a > 0$$

$$8) I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos mx dx, a > 0$$

$$9) I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \quad (a, b > 0)$$

$$10) I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad (a > b > 0)$$

$$11) I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx \quad (a > 0)$$

$$12) I = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x \sqrt{1-x^2}} dx$$

13) Chứng minh $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{a}{b}$ với $a, b > 0$, f liên tục và

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \text{ tồn tại } \forall A > 0 \text{ (Định lý Frunali). Áp dụng tính } \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx$$

($a, b > 0$)

Bài giải

$$1) \text{ Xét } I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \quad (1), \quad (a > 0, b > 0)$$

Rõ ràng:

$$K(a, x) = \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) \text{ và } K'_a(a, x) = \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

là liên tục trong miền $D: a \geq a_0 > 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Vậy theo (1.2):

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx,$$

đặt $t = \cot g x$, thì:

$$I'(a) = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2 t^2)(1 + t^2)}$$

Phân tích:

$$\frac{1}{(a^2 + b^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{At + B}{a^2 + b^2 t^2} + \frac{Ct + D}{1 + t^2}$$

Tính toán ta có:

Khi đó: $A = C = 0, B = \frac{-b^2}{a^2 - b^2}, D = \frac{1}{a^2 - b^2}$

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= 2a \left[\int_0^1 \frac{-b^2}{a^2 - b^2} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} + \int_0^1 \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{dt}{1 + t^2} \right] \\ &= 2a \left[-\frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bt}{a} \right]_0^1 + \frac{1}{a^2 - b^2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{a + b} \end{aligned}$$

và: $I(a) = \pi \ln(a + b) + C$ (2)

Cho $a = b$ trong (1) ta được:

$$I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \ln b \, dx = \pi \ln b$$

và (2) viết được: $\pi \ln b = \pi \ln 2b + C$ hay $C = -\pi \ln 2$

Vậy: $I = I(a) = \pi \ln \left(\frac{a + b}{2} \right).$

2) Xét: $I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, b > 0$ (1).

Rõ ràng:
$$K(b, x) = \begin{cases} \frac{x^b - x^a}{\ln x} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x = 0 \\ b - a & : x = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad K'_b(b, x) = \frac{x^b \ln x}{\ln x} = x^b$$

là liên tục trong miền $D: \begin{cases} b \geq b_0 > 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Do đó theo (1.2):

$$I'_b(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}$$

và $I(b) = \ln(b+1) + C$, thay $b = a$ trong (1) ta được: $I(a) = 0$, suy ra $0 = \ln(a+1) + C$ hay $C = -\ln(a+1)$.

Vậy:
$$I = I(b) = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Chú ý

Vì $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^t dt$, nên có thể áp dụng quy tắc lấy tích phân

dưới dấu tích phân như sau:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^t dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^t dx \right) dt = \int_a^b \frac{dt}{t+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

3) Xét $I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (1) \quad (|a| < 1).$

ở đây:
$$K(a, x) = \begin{cases} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

và:
$$K'_x(a, x) = \frac{2}{1-a^2 \cos^2 x}$$
 là liên tục trong miền D:

$$|a| \leq a_0 < 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Do đó có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$I'(a) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a^2 \cos^2 x},$$

đặt $\operatorname{tg} x = t$, ta được:

$$I'(a) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 - a^2 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Do đó: $I(a) = \pi \arcsin a + C$.

Theo (1): $I(0) = 0$ do đó $0 = \pi \arcsin 0 + C$ hay $C = 0$.

Vậy:

$$I = I(a) = \pi \arcsin a.$$

$$4) I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{vì } \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + x^2 t^2} \text{ nên:}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int_0^1 \frac{dt}{1 + x^2 t^2} = \int_0^1 dt \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2 t^2) \sqrt{1 - x^2}}$$

$$(K(t, x) = \frac{1}{(1 + x^2 t^2) \sqrt{1 - x^2}} \text{ liên tục trong miền D:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq x_0 < 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right\}$$

Để tính:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2 t^2) \sqrt{1 - x^2}},$$

đặt $x = \sin u$, thì:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + t^2 \sin^2 u} = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{1 + t^2 \tan^2 u} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d(\tan u)}{1 + (t^2 + 1)\tan^2 u} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2 + 1} \tan u\right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{t^2 + 1}} \end{aligned}$$

Do đó:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

Chú ý

Có thể dùng phương pháp lấy đạo hàm dưới dấu tích phân để tính I bằng cách xét:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$5) I = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |a| < 1 \quad (1)$$

Xét $I = I(a)$, rõ ràng các hàm:

$$K(a, x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}, & x \neq 0 \\ -a^2, & x = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad K'_a(a, x) = \frac{-2a}{(1 - a^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

là liên tục trong miền D:
$$\begin{cases} |a| \leq a_0 < 1 \\ |x| \leq x_0 < 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $I(a)$ hội tụ và $\int_0^1 \frac{-2adx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \text{ hội tụ đều trên}$

$$|x| \leq x_0 < 1.$$

$(K(a, x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \quad (x \rightarrow 1), \alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (1) \text{ hội tụ}$

$$|K'_a(a, x)| \leq \frac{2}{(1-a_0^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \varphi(x), \int_0^1 \varphi(x)dx \text{ hội tụ}$$

do đó theo tiêu chuẩn Weierstrass (2.1) thì (2) hội tụ đều trên $|x| \leq x_0 < 1$.

Vậy:
$$I'(a) = -2a \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

đặt $x = \sin t$ thì:

$$I'(a) = -2a \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-a^2 \sin^2 t} = \frac{-\pi a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Do đó:
$$I(a) = \pi\sqrt{1-a^2} + C$$

Theo (1), $I(0) = 0$ nên $0 = \pi + C$ hay $C = -\pi$.

Vậy:
$$I = I(a) = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1).$$

6) Xét $I = I(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-ax}}{x} \cdot \frac{e^{-bx}}{x} \sin mx dx \quad (1) \quad (a, b > 0)$

Xét tương tự như 5) ta đi đến:

$$\begin{aligned}
 I'(m) &= \int_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \cos mx dx \\
 &= e^{-ax} \left(\frac{-a \cos mx + m \sin mx}{a^2 + m^2} \right) \Big|_0^{+\infty} \\
 &\quad - e^{-bx} \left(\frac{-b \cos mx + m \sin mx}{b^2 + m^2} \right) \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{a}{a^2 + m^2} - \frac{b}{b^2 + m^2}
 \end{aligned}$$

Do đó:

$$I(m) = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} - \operatorname{arctg} \frac{m}{b} + C$$

Theo (1): $I(0) = 0$ nên $0 = C$.

Vậy:

$$I = I(m) = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} - \operatorname{arctg} \frac{m}{b} = \operatorname{arctg} \frac{m(b-a)}{ab + m^2}$$

Chú ý

Có thể dùng phương pháp tích phân dưới dấu tích phân để tính I như sau:

$$\text{vì: } \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xt} dt, \quad (x \neq 0)$$

$$\text{nên: } I = \int_a^b dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin mx dx$$

$$= \int_a^b e^{-xt} \frac{(-t \sin mx - m \cos mx)}{t^2 + m^2} \Big|_0^{+\infty} dt = \int_a^b \frac{+ m dt}{t^2 + m^2}$$

$$= + \operatorname{arctg} \frac{t}{m} \Big|_a^b = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} - \operatorname{arctg} \frac{m}{b}$$

7) Xét $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} dx \quad (a > 0) \quad (1).$

Rõ ràng tích phân này thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}$$

Phân tích:

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+a^2x^2}$$

Ta có: $A = C = 0, B = \frac{1}{1-a^2}, D = \frac{a^2}{a^2-1}$

Do đó:

$$I'(a) = \frac{1}{1-a^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \frac{a^2}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+a^2x^2}$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} - \frac{a}{1-a^2} \operatorname{arctg} ax \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1-a}{1-a^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(1+a)} \quad \text{và} \quad I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C$$

Theo (1): $I(0) = 0$, do đó: $0 = 0 + C$ hay $C = 0$

vậy: $I(a) = I = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$

Chú ý

Từ nhận xét: $\frac{\arctg ax}{x} = \int_0^a \frac{dt}{1+x^2t^2}$ nên có thể tính I bằng cách lấy tích phân dưới dấu tích phân.

8) Xét $I(m) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos mx dx \quad (a > 0) \quad (1).$

Các hàm $K(m, x) = e^{-ax^2} \cos mx$ và $K'_m(m, x) = -x e^{-ax^2} \sin mx$ là liên tục trong miền $D: x \geq 0, -\infty < m < +\infty$.

Rõ ràng $I(m)$ hội tụ $\forall m \in \mathbb{R}$, còn $\int_0^{+\infty} K'_m(m, x) dx$ hội tụ đều $\forall m \in \mathbb{R}$ theo tiêu chuẩn Weierstrass (2.1).

Do đó, theo (2.2):

$$I'(m) = - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin mx dx$$

Lấy tích phân từng phần, đặt $u = \sin mx, x e^{-ax^2} dx = dv$ thì:

$$I'(m) = \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin mx \Big|_0^{+\infty} - \frac{m}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos mx dx$$

hay $I'(m) = \frac{-m}{2a} I(m)$

Từ đó:

$$\frac{dI}{I} = \frac{-m}{2a} dm$$

$$\text{và:} \quad \ln I = \frac{-m^2}{4a} + \ln|C|, \quad C = \text{const} \neq 0 \text{ hay } I = Ce^{\frac{m^2}{4a}}$$

Theo (1):

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} d(\sqrt{a}x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(Tích phân Poisson).

Do đó:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = Ce^0 \text{ hay } C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ và } I = I(m) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{m^2}{4a}} \quad (a > 0).$$

$$9) \text{ Xét } I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \quad (a, b > 0) \quad (1)$$

$$\text{Rõ ràng } K(a, x) = \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \text{ và } K'_a(a, x) = -xe^{-ax^2} \text{ liên tục}$$

trong D: $x \geq x_0 > 0, a \geq a_0 > 0$.

$$I(a) \text{ hội tụ và } \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx \text{ hội tụ đều } \forall a \geq a_0 > 0$$

$$(xe^{-ax^2} \leq xe^{-a_0x^2})$$

Vậy:

$$I'(a) = - \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx = - \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} e^{-u^2} d(-u^2) = - \frac{1}{2a}$$

$$\text{và} \quad I(a) = - \frac{1}{2} \ln a + C.$$

Theo (1): $I(b) = 0$, do đó:

$$0 = -\frac{1}{2} \ln b + C \quad \text{hay} \quad C = \frac{1}{2} \ln b.$$

Vậy: $I = I(a) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}.$

$$\begin{aligned} 10) I &= \int_0^{\pi} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad (a > b > 0) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(a+b)x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(a-b)x}{x} dx \end{aligned}$$

Theo (2.4):

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Chú ý: Nếu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm b$ thì $I = \frac{\pi}{4} [\text{sign}(a+b) + \text{sign}(a-b)]$

$$11) \text{ Vì } \sin^3 ax = \frac{3}{4} \sin ax - \frac{1}{4} \sin 3ax$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx = \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3ax}{x} dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (a > 0). \end{aligned}$$

$$12) \text{ Xét } I(a) = \int_0^1 \frac{\arctg ax}{x \sqrt{1-x^2}} dx \quad (1)$$

Rõ ràng $I(a)$ thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, do đó:

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{xdx}{(1+a^2x^2)x\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Đặt $x = \cos t$ thì: $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a^2 \cos^2 t}$, lại đặt $t = \operatorname{tg} u$ thì:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+a^2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1+a^2}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

và: $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) + C$

Theo (1): $I(0) = 0$, do đó:

$$0 = \frac{\pi}{2} \cdot 0 + C \quad \text{hay} \quad C = 0.$$

Vậy: $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ và $I = I(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) \frac{\pi}{2}$

Chú ý

Vì $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2 t^2}$ nên có thể tính I bằng phương pháp tích

phân dưới dấu tích phân (các điều kiện đều thỏa mãn):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dt}{1+x^2 t^2} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 dt \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2 t^2) \sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

13) Xét $F(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx$, $A > 0$ xét:

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{aA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = F(+\infty) - F(aA)$$

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{bA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = F(+\infty) - F(bA)$$

$$\Rightarrow \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = F(bA) - F(aA) = \int_{aA}^{bA} \frac{f(bx)}{x} dx = f(\xi) \ln \frac{b}{a}, \quad aA \leq \xi \leq bA$$

(DLTQTQ, tr 222 TI)

$$I = \lim_{A \rightarrow +0} \lim_{\xi} f(\xi) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng: } I &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|, \quad a \neq \pm b \end{aligned}$$

33. Tính các tích phân: (Trong các đề thi Giải tích học kỳ II, 1997-1998, ĐHBK)

$$1) I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a, b > 0)$$

$$2) I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x} dx$$

$$3) I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx \quad (a > 0)$$

$$4) I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + yx)}{1 + x^2} dx$$

Bài giải

$$1) \text{ Xét } I(b) = \int_a^b \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (1)$$

Xét tương tự như các bài trước, ta thấy $I(b)$ thỏa mãn mọi điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, do đó:

$$I'(b) = \int_a^b e^{-bx} dx = \frac{1}{b} \quad \text{và} \quad I(b) = \ln b + C$$

Theo (1): $I(a) = 0$ nên $\ln a + C$ hay $C = -\ln a$.

$$\text{Vậy:} \quad I = I(b) = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \quad (a, b > 0).$$

Có thể tính I theo phương pháp tích phân dưới dấu tích phân:

$$\text{vì:} \quad \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt$$

$$\text{nên:} \quad I = \int_a^b dx \int_a^b e^{-tx} dt = \int_a^b dt \int_a^b e^{-tx} dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{e^{-tx}}{-1} \right]_{t=a}^{t=b} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}$$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx \text{ hội tụ đều } \forall t \geq t_0 > 0 \right).$$

$$2) \text{ Ta có:} \quad \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t \cos x}$$

$$\text{Do đó:} \quad I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 \frac{dt}{1 + t \cos x} = \int_0^1 dt \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + t \cos x}$$

vì $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+t \cos x}$ hội tụ đều trong miền được xét.

Đặt $z = tg \frac{x}{2}$, ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+t \cos x} &= 2 \int_0^1 \frac{dz}{1+1+(1-t)z^2} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} z \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \quad \text{và} \quad I = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } u = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \quad dv = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{thì} \quad du = -\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}},$$

$$v = \operatorname{arcsin} t$$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \operatorname{arcsin} t \Big|_0^1 + \int_0^1 \operatorname{arcsin} t \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{arcsin} t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Chú ý} \quad \text{Xét } I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx, \quad 0 \leq a < 1.$$

Và ta thấy $I(a)$ thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân:

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a \cos x},$$

$$\text{đặt } tg \frac{x}{2} = t \text{ ta có:}$$

$$\Gamma(a) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+a) + (1-a)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

Tích phân từng phần như trên ta được:

$$I(a) = \operatorname{arcsin} a \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \frac{(\operatorname{arcsin} a)^2}{2} + C$$

$I(0) = 0$ nên $C = 0$.

Do đó:
$$I = \lim_{a \rightarrow 1} I(a) = \frac{\pi^2}{8}.$$

3) Ta có $I = I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$, ($a > 0$)

Rõ ràng $I(a)$ có đủ điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân (?)

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} dx = \frac{1}{a+1}$$

Do đó $I(a) = \ln(a+1) + C$, $I(0) = 0$, nên $C = 0$.

Vậy: $I = I(a) = \ln(a+1)$.

Chú ý

Vì $\frac{1 - e^{-ax}}{x} = \int_0^a e^{-xt} dt$, nên có thể dùng quy tắc lấy tích phân dưới dấu tích phân để tính I :

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_0^a e^{-(x+1)t} dt = \int_0^a dt \int_0^{+\infty} e^{-(t+1)x} dx$$

($\int_0^{+\infty} e^{-(t+1)x} dx$ hội tụ trong miền được xét).

$$1 = \int_0^a \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1) \Big|_0^a = \ln(a+1).$$

4) Ta có $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2} dx$, $I(y)$ thỏa mãn các điều kiện để có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân (?)

Theo 3) (1.2):

$$I'(y) = \int_0^y \frac{xdx}{(1+yx)(1+x^2)} + 1 \cdot \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$$

Tính toán ta có:

$$I'(y) = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2} \operatorname{arctg} y$$

Lấy tích phân và xác định hằng số C, cuối cùng ta được:

$$1 = I(y) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y \cdot \ln(1+y^2).$$

34. Biểu diễn các tích phân sau qua các hàm B, Γ và tính các tích phân đó trong trường hợp không cần dùng bảng.

$$1) I = \int_0^{\pi/2} \sin^v x \cos^\mu x dx.$$

Xét trường hợp $v = n$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $\mu = 0$.

$$2) I = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx, \quad n > 0.$$

$$3) I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x dx$$

$$4) I = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0).$$

$$5) I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad (n > 0)$$

$$6) I = \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$7) I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$$

$$8) I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1).$$

$$9) I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx \quad 0 < p < 1.$$

$$10) K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \quad (\text{Tích phân elliptique loại 1})$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (\text{Tích phân elliptique loại 2}).$$

$$11) \text{ Tính diện tích hình } x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2; \quad x \geq 0, y \geq 0$$

$$12) \text{ Tính thể tích hình } \begin{cases} z^2 \leq xy \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Bài giải

1) Đặt $\sin x = \sqrt{t}$, $t \geq 0$, khi đó:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{\nu+1}{2}} (1-t)^{\frac{\mu+1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\mu+1}{2}\right)$$

1 hội tụ khi $\nu + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$ hay $\nu > -1$, $\mu > -1$.

Trường hợp $\nu = n$, $\mu = 0$ ta có:

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Xét $n = 2m$ (chẵn), ta có:

$$I = I_n = \frac{1}{2} B\left(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}$$

Theo (3) và (4) (3.1) ta có:

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{1}{2} \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{1.2.3\dots m} \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1 \cdot \frac{\pi}{2}}{2m(2m-2)\dots 4.2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Tương tự:

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 3.1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

Đó là các công thức đã biết (chương Tích phân xác định T1).

2) Đặt $x = \sqrt{t}$, $t > 0$ thì: $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

và:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^x t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \quad (\text{theo (6), (3.1)}). \end{aligned}$$

3) $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x dx$, đặt $\operatorname{tg} x = \sqrt{t}$ thì:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < t < +\infty, x = \operatorname{arctg} \sqrt{t}, dx = \frac{1}{2\sqrt{t(1+t)}} dt$$

$$\begin{aligned} \text{và: } I &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, 1 - \frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{n+1}{2} \pi} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi n}{2}} \end{aligned}$$

Rõ ràng tích phân đã cho chỉ hội tụ khi $n+1 > 0$, $1 - \frac{n+1}{2} > 0$ hay $|n| < 1$.

$$4) I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-ax} \ln x dx, (a > 0)$$

Đặt $ax = t$, ta được:

$$I = \frac{1}{a^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} \ln t dt = \frac{\ln a}{a^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$$

Mặt khác:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt, \quad \Gamma'(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} \ln t dt$$

$$\text{Do đó: } I = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{a^{\alpha+1}} - \frac{\ln a}{a^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{a^{\alpha+1}} \right)$$

I tồn tại khi $\alpha+1 > 0$ hay $\alpha > -1$.

5) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad (n > 0)$. Đặt $x^n = t$ thì:

$$I = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{n}-1} dt}{1+t} = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

Tích phân hội tụ khi $1 - \frac{1}{n} > 0$ hay $n > 1$.

6) $I = \int_0^2 x \cdot \sqrt{4-x^2} dx$. Đặt $x = 2\sqrt{t}$, $t > 0$ thì:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 4t \sqrt{4-4t} \cdot \frac{2dt}{2\sqrt{t}} = 8 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = 8B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= 8 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 8 \left(\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) I &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2} dx = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

8) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1)$. Đặt $x = t^{\frac{1}{n}}$ ($t > 0$) thì:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (n > 1).
 \end{aligned}$$

$$9) I = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx, \quad 0 < p < 1.$$

Xét:

$$B(p, 1-p) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

$$\begin{aligned}
 \text{thì:} \quad I &= B_p' = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx = \frac{d}{dp} [\Gamma(p)\Gamma(1-p)] \\
 &= \frac{d}{dp} \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) = -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}.
 \end{aligned}$$

$$10) K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}, \text{ đặt } \cos \varphi = t \quad (1).$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \geq t \geq 0, \quad \varphi = \arccos t.$$

$$d\varphi = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}(1-t^2)}}$$

$$K = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad \text{lại đặt } t^4 = z \quad (2) \text{ thì } K = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^1 z^{-\frac{3}{4}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$$

Cũng với phép thế (1) và (2) ta được:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{4}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 z^{-\frac{1}{4}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz \right\} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \right] = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{4} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi^2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} \right] \end{aligned}$$

Chú ý

Người ta đã lập bảng các giá trị của hàm $\Gamma(x)$ (trang 386), theo bảng đó:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 0.9064$$

Do đó: $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 4\Gamma\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 3,6256.$

11) Đổi sang toạ độ cực: $x = r \cos^{2/3} \varphi$, $y = r \sin^{2/3} \varphi$

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \cos^{4/3} \varphi + \sin^{4/3} \varphi$$

$$I = \frac{2}{3} r \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi$$

$$S = \iint_D dx dy = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi d\varphi \times \int_0^{\cos^{4/3} \varphi + \sin^{4/3} \varphi} r dr$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3} \left(1 + \int_0^{\pi/2} (\sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi + \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi) d\varphi \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi d\varphi \right). \text{ Theo 1):}$$

$$S = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/3) \cdot \frac{2}{3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(2)} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$12) V = 4 \iint_D \sqrt{xy} \, dx \, dy \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2$$

Đổi sang tọa độ cực:

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr$$

$$\text{Theo 1): } V = \frac{2a^3}{3} \frac{\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4a^3}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2(\frac{3}{4})$$

$$\text{với: } \frac{4}{3} \Gamma(1 + \frac{3}{4}) = \frac{4}{3} \times 0,9190 \text{ (Bảng ở trang 386).}$$

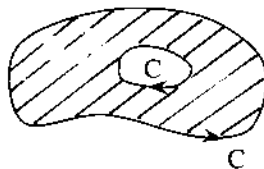
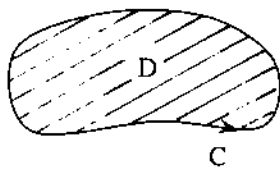
CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Đường. Đường $C \subset \mathbb{R}^2$: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ (1) là:

- liên tục nếu các hàm (1) là liên tục.
- trơn nếu $\exists x'_t, y'_t$ liên tục và $x'^2_t + y'^2_t \neq 0$ ($\alpha \leq t \leq \beta$).
- trơn từng phần nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn.
- khép kín nếu $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$.
- miền D là đơn (đa) liên nếu nó giới hạn bởi (có biên giới là) một (nhiều) đường trơn từng phần và khép kín.



Quy ước: chiều dương (+) trên biên giới C của D là chiều đi của một QSV sao cho phần của D kề bên QSV ở bên trái, chiều âm (-) là chiều ngược lại.

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

1.1. Định nghĩa

Tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ lấy theo hay trên cung đường cong C nối 2 điểm A, B : $C = \widehat{AB}$ là:

$$I = \int_C f(M) ds = \int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

Với một cách chia bất kỳ $C = \widehat{AB}$ thành n phần độ dài Δs_i ($i = 1, 2, \dots$) và một cách chọn bất kỳ điểm $M_i(x_i, y_i)$ trên phần được chia Δs_i :

C là đường khép kín, ký hiệu $\oint_C$

C là đường trong $\mathbb{R}^3$, định nghĩa tương tự: $\int_C f(x, y, z) ds$

Đặc biệt $f = 1$ thì $I = \int_C ds = s$ là độ dài của C .

Mọi hàm $f(x, y)$ có tích phân trên C gọi là khả tích trên C . Mọi hàm $f(x, y)$ liên tục trên đường tròn từng phần C đều khả tích trên C .

- Tích phân đường loại 1 có các tính chất tương tự như tích phân xác định, trừ tính chất đổi chiều đường lấy tích phân:

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds$$

Về cơ học nếu xét $f(x, y) > 0$ là mật độ khối lượng của C thì khối lượng của C là:

$$m = \int_C f(x, y) ds.$$

1.2. Cách tính

$I = \int_C f(x, y) ds$ ($f(x, y)$ liên tục trên đường tròn từng phần C)

$$C: \begin{cases} y = y(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \Rightarrow I = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2} ds \quad (1)$$

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta \Rightarrow I = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt \quad (2)$$

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta \Rightarrow I = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt \quad (3)$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

2.1. Định nghĩa

- Tích phân đường loại hai (hay tích phân đường theo các tọa độ) của hàm vecteur $\vec{F} = \vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$, $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hay của các hàm P, Q lấy trên hay theo đường cong $C \in \mathbb{R}^2$ nối hai điểm A, B là:

$$I = \int_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_C [P(M) \cos \alpha(M) + Q(M) \sin \alpha(M)] ds$$

$$\text{Ký hiệu: } I = \int_C P(M) dx + Q(M) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

$\vec{\tau} = (\cos \alpha(M), \sin \alpha(M))$: vecteur tiếp tuyến tại $M \in C$

$\oint_C$: C khép kín

Về cơ học, nếu coi $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ là lực tác dụng vào một chất điểm chuyển động trên đường cong $C = \widehat{AB}$ thì công của lực đó là:

$$T = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

- Tích phân đường loại hai của hàm:

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k},$$

$M(x, y, z) \in R^3$ hay của ba hàm $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ trên đường $C \subset R^3$ là:

$$\begin{aligned} I &= \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \end{aligned}$$

Với $\vec{\tau} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ là vecteur tiếp tuyến với C tại $M \in C$ (α, β, γ là góc giữa tiếp tuyến với ba trục Ox, Oy, Oz).

Mọi hàm liên tục $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ trên đường trơn từng phần C : $x = x(t)$, $y = y(t)$ đều khả tích (có tích phân) trên C .

Các tính chất của tích phân đường loại hai đều tương tự như các tính chất của tích phân xác định.

2.2. Cách tính

(với giả thiết: tích phân tồn tại)

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = y(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad I &= \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx \end{aligned}$$

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'_t + Q[x(t), y(t)]y'_t\}dt$$

$$C \subset \mathbb{R}^3: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$I = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'_t + Q[x(t), y(t), z(t)]y'_t + R[x(t), y(t), z(t)]z'_t\}dt$$

§3. CÔNG THỨC GREEN - SỰ ĐỘC LẬP CỦA TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI ĐƯỜNG LẤY TÍCH PHÂN

3.1. Công thức Green

Nếu $P(x, y)$, $Q(x, y)$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền Compact D giới hạn bởi đường khép kín, trơn từng phần C (liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn).

$$\text{thì: } \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

với tích phân đường lấy theo chiều dương của C (chiều đi trên C của một quan sát viên nhìn thấy phần của D kề bên quan sát viên ở bên trái).

3.2. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân

Nếu các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền đơn liên D thì 4 mệnh đề sau là tương đương:

$$1) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D.$$

$$2) \oint_L Pdx + Qdy = 0, \forall L \in D \text{ (L: khép kín)}.$$

$$3) \int_{C \text{ từ } A \text{ đến } B} Pdx + Qdy \text{ không phụ thuộc đường nối các điểm } A, B \in D.$$

4) $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó trong miền D: $du = Pdx + Qdy$.

§4. ỨNG DỤNG

4.1. Tính diện tích miền D

$$S = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \oint_C xdy = - \oint_C ydx$$

C là biên giới của D theo chiều dương.

4.2. Tính tích phân đường

$$I = \int_{C \text{ từ } A \text{ đến } B} Pdx + Qdy, P, Q \text{ có các đạo hàm riêng liên tục:}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ (không phụ thuộc đường lấy tích phân } C \text{ nối } A, B) \text{ trong}$$

miền đơn liên D , thì: $Pdx + Qdy = du$

và:

$$I = \int_{\widehat{C:AB}} = \int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} du = u|_{(A)}^{(B)} = u(B) - u(A).$$

Tìm u khi biết $du = Pdx + Qdy$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dy + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C$$

$$\text{hay: } u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dy + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C$$

với $(x_0, y_0), (x, y) \in D$ đơn liên.

Trong không gian R^3 :

$$I = \int_{\widehat{C:AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

P, Q, R có các đạo hàm liên tục trong miền: đơn liên V và:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

thì:

$$du(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz$$

và:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz + C$$

$(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in V$.

4.3. Công của lực

$$T = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

với $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ là lực tác động vào một chất điểm chuyển động theo đường C .

Nếu $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ thì công không phụ thuộc đường C nối A, B .

4.4. Moment tĩnh M_x, M_y - Moment quán tính

I_x, I_y của đường $C = \widehat{AB}$ đối với Ox, Oy và tọa độ trọng tâm của C :

$$M_x = \int_C y \rho(x, y) ds, \quad M_y = \int_C x \rho(x, y) ds,$$

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds, \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds,$$

$$x_G = \frac{M_y}{M}, \quad y_G = \frac{M_x}{M}$$

với $M = \int_C \rho(x, y) ds$ là khối lượng và ρ là mật độ khối lượng (đài) của C .

- Với $C \subset \mathbb{R}^3$:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds,$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds,$$

$M = \int_C \rho(x, y, z) ds$ là khối lượng và ρ là mật độ khối lượng (đài) của C .

BÀI TẬP

35. Tính các tích phân đường loại một:

1) $I = \oint_C xy \, ds$, C là chu vi của hình: $|x| + |y| \leq a$ ($a > 0$).

2) $I = \int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, C là đoạn thẳng nối $O(0, 0)$ đến $A(1, 2)$.

3) $I = \int_C y^2 \, ds$, C là cung $\begin{cases} x = a(1 - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$.

4) $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, C là cung $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$.

5) $I = \int_C (x + y) \, ds$, C là cung $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

6) $I = \oint_C (x^{4/3} + y^{4/3}) \, ds$, C là đường: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

7) $I = \int_C z \, ds$, C là cung $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq t_0$.

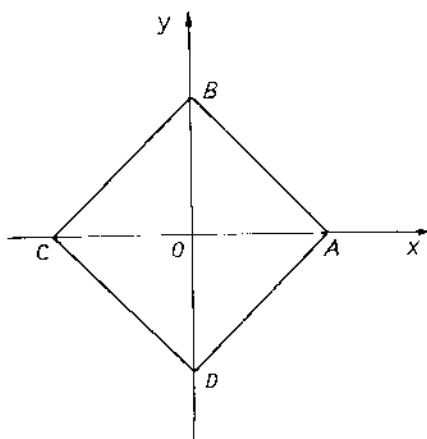
8) $I = \int_C z \, ds$, C là cung $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ từ điểm $(0, 0, 0)$ đến điểm $(a, a, a\sqrt{2})$.

9) $I = \oint_C \sqrt{2y^2 + z^2} \, ds$, C là đường $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}$.

Bài giải

1) Theo giả thiết, C là chu vi hình vuông ABCD (hình 92):

$$I = \int_{\Gamma} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$



Hình 92.

Phương trình của AB: $x + y = a$ hay $y = a - x$, $0 \leq x \leq a$, $y' = -1$.

Theo (1.2):

$$\int_{AB} xy ds = \int_{BA} xy ds = \int_0^a x(a-x)\sqrt{1+1^2} dx = \sqrt{2} \int_0^a x(a-x) dx \quad (1)$$

Phương trình của DA: $x - y = a$, $y = x - a$, $0 \leq x \leq a$, $y' = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{DA} xy ds &= \int_0^a x(x-a)\sqrt{1+1^2} dx = \sqrt{2} \int_0^a x(x-a) dx \\ &= - \int_{AB} xy ds \text{ (theo (1))} \end{aligned}$$

Do đó: $\int_{DA} xy ds + \int_{AB} xy ds = 0$, tương tự $\int_{BC} xy ds + \int_{CD} xy ds = 0$

2) Phương trình đường thẳng OA là $y = 2x$, $0 \leq x < 1$, $y' = 2$.

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{ds}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + 2^2} dx}{\sqrt{x'^2 + (2x)^2 + 4}} \\ &= \int_0^1 \frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{5x^2 + 4}} = \ln \left(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}. \end{aligned}$$

3) $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$. Theo (1.2):

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

$$I = \int_C y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

$$\text{vì: } 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin \frac{t}{2} \geq 0$$

nên:

$$\begin{aligned} I &= 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = 8a^3 \left(\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt \right) \\ &= 16a^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^5 u du + \int_0^{\pi/2} \sin^5 \left(u + \frac{\pi}{2} \right) du \right] \end{aligned}$$

$$(\text{trong tích phân thứ nhất: } u = \frac{t}{2}, \text{ thứ hai: } u = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned}
&= 32a^3 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^5 u du, \left(\int_0^{\pi/2} \sin^5 \left(u + \frac{\pi}{2} \right) du = \int_0^{\pi/2} \cos^5 u du = \int_0^{\pi/2} \sin^5 u du \right) \\
&= 32a^3 \cdot \frac{4,2}{5,3} = \frac{256}{15} a^3.
\end{aligned}$$

4) Ta có: $C: \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

C là đường tặc bế của đường tròn: $x^2 + y^2 = a^2$

$$x' = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$$

$$y' = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = a|t| dt.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (\cos t + t \sin t)^2 + a^2 (\sin t - t \cos t)^2} \cdot a|t| dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{a^2}{3} \cdot \left[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1 \right].
\end{aligned}$$

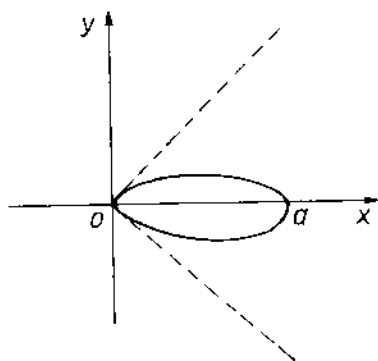
5) C là $\frac{1}{2}$ bên phải của đường Lemniscate (hình 93).

Ta có:

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

$$2rr' = -2a^2 \sin 2\varphi,$$

$$r' = \frac{-a^2 \sin 2\varphi}{r}$$



Hình 93.

Trong tọa độ cực:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi = \sqrt{r^2 + \frac{a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}} \cdot d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 2\varphi + a^4 \sin^2 2\varphi}{r^2}} \cdot d\varphi = \frac{a^2}{r} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } I &= \int_C (x + y) ds = \int_{\pi/4}^{\pi/2} r(\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot \frac{a^2}{r} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos \varphi d\varphi = 2a^2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

6) C là đường astroïde, phương trình tham số của nó là:

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$x' = -3a \cos^2 t \sin t, y' = 3a \sin^2 t \cos t$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \\ &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a |\sin t \cos t| dt \end{aligned}$$

Vì lý do đối xứng nên:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[(a \cos^3 t)^{4/3} + (a \sin^3 t)^{4/3} \right] 3a \sin t \cos t dt \\ &= 12a^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t dt \\ &= 12a^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^5 t \sin t + \sin^5 t \cos t) dt \\ &= 12a^{7/3} \left(-\frac{1}{6} \cos^6 t + \frac{1}{6} \sin^6 t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 4a^{7/3} \end{aligned}$$

7) C là đường đỉnh ốc nón tròn xoay ($x^2 + y^2 = z^2$)

$$x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

$$x'_t = \cos t - t \sin t, y'_t = \sin t + t \cos t, z'_t = 1$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{t^2 + 2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_C z ds = \int_0^{t_0} t \sqrt{t^2 + 2} dt = \frac{1}{3} (t^2 + 2)^{3/2} \Big|_0^{t_0} \\ &= \frac{1}{3} \left[(t_0^2 + 2)^{3/2} - 2^{3/2} \right] \end{aligned}$$

8) C là giao của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ và mặt trụ $y^2 = ax$, đưa phương trình của C về phương trình tham số, đặt $x = t$, $y = \sqrt{at}$.

$$z = \sqrt{t^2 + at}, \quad 0 \leq t \leq a \Leftrightarrow (0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, a\sqrt{2})$$

$$x'_t = 1, \quad y'_t = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}, \quad z'_t = \frac{2t + a}{2\sqrt{t^2 + at}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a}{4t} + \frac{(2t + a)^2}{4\sqrt{t^2 + at}}} dt = \frac{\sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}}{2\sqrt{t^2 + at}} dt$$

$$I = \int_C z ds = \int_0^a \sqrt{t^2 + at} \cdot \frac{\sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2}}{2\sqrt{t^2 + at}} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2} dt$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^a \sqrt{\left(2\sqrt{2}t + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}a^2} dt \left(2\sqrt{2}t + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[\left(2\sqrt{2}t + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right) \sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{17a^2}{32} \ln \left(2\sqrt{2} + \frac{9a}{4\sqrt{2}} + \sqrt{8t^2 + 9at + 2a^2} \right) \right] \Bigg|_0^a \\ &= \frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25 + 4\sqrt{38}}{17} \right) \end{aligned}$$

9) C là đường tròn lớn trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ và mặt phẳng $x = y$ qua góc O.

Đưa phương trình của C về tham số:

đặt $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t$, $z = a \sin t$ thì khi $0 \leq t \leq 2\pi$ ta có cả đường tròn.

$$x'_t = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, y'_t = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, z'_t = a \cos t$$

$$ds = \sqrt{\frac{a^2}{2} \sin^2 t + \frac{a^2}{2} \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = a dt$$

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \sqrt{2y^2 + z^2} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2a^2}{2} \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \cdot a dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 dt = 2\pi a^2 \end{aligned}$$

Chú ý

Vì $x = y$ nên:

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \sqrt{2y^2 + z^2} ds = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds \\ &= \oint_C \sqrt{a^2} ds = a \oint_C ds = a \cdot 2\pi a = 2\pi a^2 \\ \left(\oint_C ds &= 2\pi a: \text{độ dài đường tròn bán kính } a \right). \end{aligned}$$

36. 1) Tính diện tích S của phần mặt trụ $y = \frac{3}{8}x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2) Tính độ dài s của đường $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ từ điểm $(0, 0, 0)$ đến điểm $(0, 0, a)$.

3) Tính khối lượng M của đường $x = acost$, $y = bsint$, $0 \leq t \leq 2\pi$ nếu mật độ khối lượng (đài) của đường đó là $\rho(x, y) = |y|$.

4) Tìm tọa độ trọng tâm của:

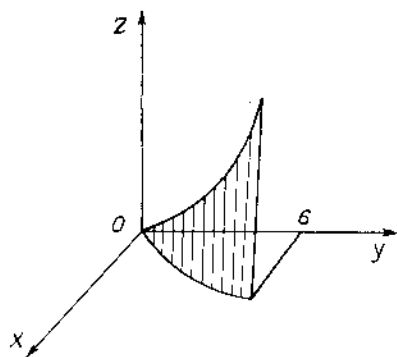
a) Cung tròn chất ($\rho = 1$): $x = a(1 - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$)

b) Chu vi tam giác cầu tròn chất ($\rho = 1$), $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

5) Tìm moment quán tính I_x đối với trục Oz của cung tròn chất ($\rho = 1$): $x = acost$, $y = bsint$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Bài giải

1) Tích phân đường $\int_C f(x, y) ds$ ($f > 0$), về hình học có thể xem là diện tích phần mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz , đường chuẩn là đường lấy tích phân C và chiều cao là những giá trị của hàm dưới dấu tích phân f (hình 94).



Hình 94.

Do đó, ở đây:
$$S = \int_C z ds = \int_C x ds$$

C là cung $y = \frac{3}{8}x^2$ từ điểm (0, 0) đến điểm (4, 6). Ta có:

$$y' = \frac{3}{4}x, \quad ds = \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2} \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó:} \quad S &= \int_0^4 x \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2} \, dx = \frac{8}{9} \left(1 + \frac{9}{16}x^2 \right)^{3/2} \frac{2}{3} \Big|_0^4 \\ &= \frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1) \quad (\text{dvd}). \end{aligned}$$

2) Về hình học $\int_C f(x, y) ds$ khi $f \equiv 1$ là độ dài cung đường cong C.

$$\begin{aligned} \text{ở đây:} \quad x' &= ae^t \cos t - ae^t \sin t, \\ y' &= ae^t \sin t + ae^t \cos t, \\ z' &= ae^t \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2 e^{2t} [(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1]} dt \\ &\quad (t \rightarrow -\infty, x, y, z \rightarrow 0, t = 0, x = a, y = 0, z = a) \end{aligned}$$

$$s = \int_{-\infty}^0 ae^t \sqrt{3} dt = a\sqrt{3} \, e^t \Big|_{-\infty}^0 = a\sqrt{3} \quad (\text{dvd}).$$

3) Theo ý nghĩa cơ học

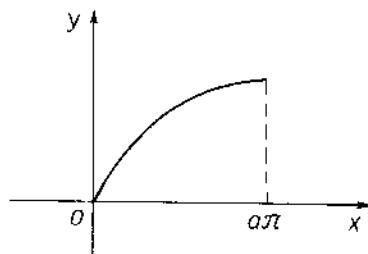
$$M = \int_C \rho(x, y) ds = \int_C |y'| ds.$$

Xét $a > b$, $x' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$

và do đối xứng, nên:

$$\begin{aligned}
 M &= b \int_0^{2\pi} |b \sin t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\
 &= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \sin t dt \\
 &= 4b \int_{\pi/2}^0 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} \cdot d(\cos t) \\
 &= \frac{4ab}{e} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} \cdot d(e \cos t) \\
 &\quad \text{với } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ là tâm sai của ellipse} \\
 &= \frac{4ab}{e} \left(\frac{e \cos t}{2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} + \frac{1}{2} \arcsin(e \cos t) \right) \Big|_{\pi/2}^0 \\
 &= 2b \left(b + \frac{a}{e} \arcsine \right) \text{ (đvkl)}.
 \end{aligned}$$

4) a) Theo (4.4), ở đây: (hình 95)



Hình 95.

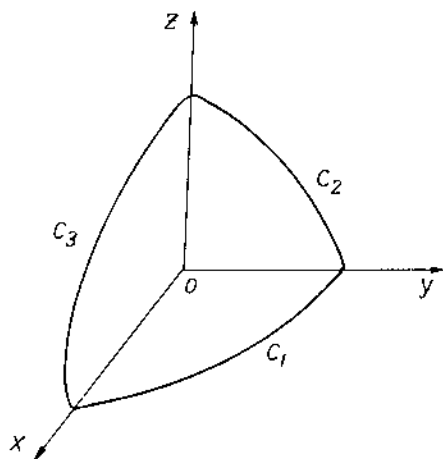
$$\begin{aligned}
M &= \int_C ds = \int_0^\pi \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\
&= \int_0^\pi 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \\
x_G &= \frac{M_y}{M} = \frac{1}{4a} \int_C x ds = \frac{1}{4a} \int_0^\pi a(1 - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\
&= \frac{a}{2} \int_0^\pi (1 - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt \\
&= \frac{a}{2} \left(2t \cos \frac{t}{2} \Big|_\pi^0 + 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \right) \\
&= \frac{a}{2} \left(4 - 4 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} d\left(\sin \frac{t}{2}\right) \right) = 2a \left(1 - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \Big|_0^\pi \right) = \frac{4a}{3} \\
y_G &= \frac{M_x}{M} = \frac{1}{4a} \int_C y ds = \frac{1}{4a} \int_0^\pi a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\
&= \frac{a}{2} \left(2 \cos \frac{t}{2} \Big|_\pi^0 - 2 \int_\pi^0 \left(2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 \right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) \right) \\
&= \frac{a}{2} \left(2 - \left(\frac{4}{3} \cos^3 \frac{t}{2} - 2 \cos \frac{t}{2} \right) \right) \Big|_\pi^0 = \frac{4a}{3}
\end{aligned}$$

b) Theo (4.4), ở đây:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_C x ds = \frac{1}{M} \left[\int_{C_1} x ds + \int_{C_2} x ds + \int_{C_3} x ds \right]$$

$$= \frac{1}{M} \left[\int_{C_1} x ds + \int_{C_3} x ds \right]$$

($\int_{C_2} x ds = 0$ vì trong mặt phẳng yOz : $x = 0$) (hình 96)



Hình 96.

Phương trình tham số của C_1 là $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), của

C_2 là $x = a \cos t$, $z = a \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

Khi đó trên C_1 và C_3 :

$$ds = \sqrt{(-a \sin t)^2 + a^2 \cos^2 t} dt = a dt$$

Khối lượng:

$$M = \frac{3}{4} \cdot 2\pi a = \frac{3\pi a}{2}$$

Vậy:

$$x_G = \frac{2}{3\pi a} \left[\int_0^{\pi/2} a^2 \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} a^2 \cos \varphi d\varphi \right] = \frac{4a}{3\pi}$$

vì lý do đối xứng nên $y_G = z_G = x_G = \frac{4a}{3\pi}$.

5) Ta có: $I_z = \int_C (x^2 + y^2) ds$

ở đây: $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$
 $= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$

Do đó:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} dt = 2a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \pi. \end{aligned}$$

37. Tính các tích phân đường loại hai:

1) $I = \int_{\widehat{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$, $\widehat{AB}$: $y = x^2$ nối A (1, 1) đến B (2, 4).

2) $I = \int_C (2a - y) dx + x dy$, C : $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

3) $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, C : $x^2 + y^2 = a^2$ theo chiều ngược kim đồng hồ

4) $I = \oint_C \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$; C: phần bên phải của đường $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, ngược chiều kim đồng hồ

5) $I = \oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$; C: chu vi hình vuông $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$, ngược chiều kim đồng hồ.

6) $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, C: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$ theo chiều tăng của t

$$7) I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x \tan \alpha$, ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Ox

$$8) I = \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

C là chu vi tam giác cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ theo chiều sao cho phía ngoài của tam giác ở bên trái.

Bài giải

1) Theo (2.2):

$$\begin{aligned} I &= \int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy \\ &= \int_1^2 \left[x^2 - 2x^3 + (2x^3 + x^4) \cdot 2x \right] dx \\ &= \int_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{1}{3}x^6 \right) \bigg|_1^2 = 40 - \frac{19}{30} \end{aligned}$$

2) Theo (2.2):

$$\begin{aligned}
 I &= \int_C (2a - y)dx + xdy \\
 &= \int_0^{2\pi} \{[2a - a(1 - \cos t)]a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)(a \sin t)\} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t dt = a^2 \left(-t \cos t \right) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt = -2\pi a^2.
 \end{aligned}$$

3) Phương trình tham số của C: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Do đó:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{[a \cos t + a \sin t)(-a \sin t) - (a \cos t - a \sin t)a \cos t]}{a^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-a^2}{a^2} dt = -2\pi
 \end{aligned}$$

4) C là nửa bên phải của đường Lemniscate (hình 97).

Phương trình của C là: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ với $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Phương trình tham số φ của C là:

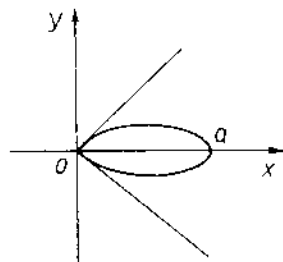
$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos \varphi, \quad y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

mặt khác:
$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -d(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}) = -d\varphi.$$

Do đó:

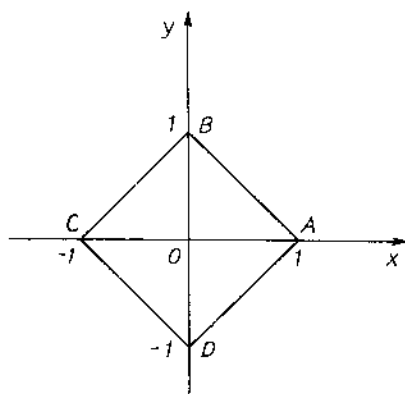
$$\begin{aligned} I &= \oint_C \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2} \\ &= - \int_{\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi \cdot \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Vì hàm dưới dấu tích phân là lẻ.



Hình 97.

5) $I = \int \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$
(hình 98).



Hình 98.

Phương trình của AB: $x + y = 1$, do đó trên AB: $dx + dy = 0$, vậy:

$$\int_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0$$

Phương trình của BC: $y - x = 1 \Rightarrow dx = dy$. Do đó:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_0^1 \frac{2dx}{-x + x + 1} = 2 \int_0^1 dx = 2.$$

Phương trình của CD: $x + y = -1 \Rightarrow dx + dy = 0$. Do đó:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0.$$

Phương trình của DA: $y - x = -1 \Rightarrow dx = dy$. Do đó:

$$\int_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 2 \int_0^1 dx = 2.$$

$$(|x| = x, |y| = |x - 1| = 1 - x, |x| + |y| = x + 1 - x = 1)$$

$$\text{Vậy } I = 0 - 2 + 0 + 2 = 0.$$

6) Theo (2.2) $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$, $dz = b dt$

$$\begin{aligned} I &= \int_C y dx + z dy + x dz = \int_0^{2\pi} \{ (a \sin t)(-a \sin t) + b t a \cos t + a \cos t \cdot b \} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin^2 t + 2ab t \cos t) dt = -\pi a^2 \end{aligned}$$

$$7) C \text{ là đường tròn } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \tan \alpha \quad (1)$$

(nằm trong mặt phẳng $y = \tan \alpha \cdot x$) bán kính a .

Phương trình tham số của C là:

$$x = a \cos \alpha \cos t, y = a \sin \alpha \cos t, z = a \sin t \quad (2).$$

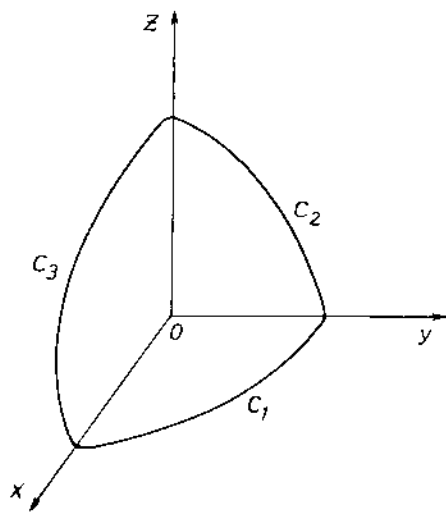
Vì x, y, z xác định bởi (2), thỏa mãn hệ (1).

Rõ ràng t tăng từ 0 đến 2π thì hướng đi trên đường tròn là ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ phía dương của Ox .

Do đó:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz \\
 &= \int_0^{2\pi} [(a \sin \alpha \cos t - a \sin t)(-a \cos \alpha \sin t) + (a \sin t - a \cos \alpha \cos t) \\
 &\quad \cdot (-a \sin \alpha \sin t) + (a \cos \alpha \cos t - a \sin \alpha \cos t)a \cos t] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) dt = 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) = 2\sqrt{2}a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).
 \end{aligned}$$

8) $I = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$ (hình 99) trên C_1 : $z = 0, dz = 0$



Hình 99.

Do đó $I_1 = \int_{C_1} y^2 dx - x^2 dy$, phương trình tham số của C_1 :

$$x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t (-\sin t) - \cos^2 t \cos t) dt \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = -2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Rõ ràng: $I_2 = \int_{C_2} = I_3 = \int_{C_3} = I_1 = \int_{C_1} = -\frac{4}{3}$

Vậy: $I = I_1 + I_2 + I_3 = -4.$

38. Tính các tích phân đường:

1) $I = \oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, C : chu vi tam giác $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

2) $I = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy$, C : $x^2 + y^2 = R^2$, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

3) $I = \int_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, C : nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ từ $A(a, 0)$ đến $O(0, 0)$.

4) $I = \oint_C \frac{dx + dy}{x + y}$, C : chu vi hình vuông: $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

$$5) I = \int_{(2, 1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$$

$$6) I = \int_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}, \quad C: \text{không cắt đường } y = -x.$$

$$7) I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right) dy$$

$$8) I = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ với } (x_1, y_1, z_1) \in \text{mặt cầu } x^2 + y^2 +$$

$$z^2 = a^2, (x_2, y_2, z_2) \in \text{mặt cầu } x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

$$9) I = \int_{\widehat{AB}} xydx + yzdy - zxdz, \quad \widehat{AB}: x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z = x, y > 0$$

($R > 0$).

$$10) G = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds \quad (\text{tích phân Gauss})$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad A(\xi, \eta), M(x, y) \in C, \quad \vec{r} = \overline{AM}$$

$(\vec{r} \wedge \vec{n})$ góc giữa $\vec{r}$ và $\vec{n}$, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài đơn vị tại M của C .

Bài giải

1) Phương trình các cạnh của tam giác (hình 100).

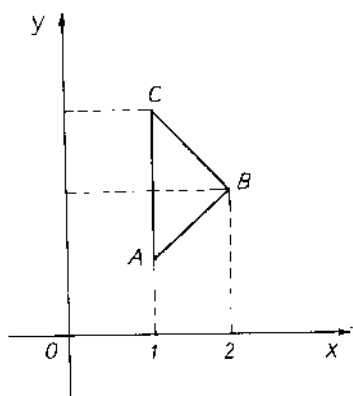
$$AB: y = x, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

$$BC: \frac{y-2}{3-2} = \frac{x-2}{1-2} \text{ hay } y = -x + 4, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$\text{ở đây: } P = 2(x^2 + y^2), Q = (x + y)^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y) \text{ là các hàm liên tục trong miền compact } D$$

là tam giác ABC ,



Hình 100.

Vậy áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_C = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2(x - y) dx dy \\
 &= 2 \int_1^2 dx \int_x^4 (x - y) dy = 2 \int_1^2 \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{(4-x)^2}{2} \right] dx \\
 &= 2 \left(2x^2 - \frac{3x^3}{6} + \frac{(4-x)^3}{6} \right) \bigg|_1^2 = -\frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

2) Tương tự như 1), ở đây:

$$P = -x^2y, Q = xy^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2, \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$$

Áp dụng công thức Green:

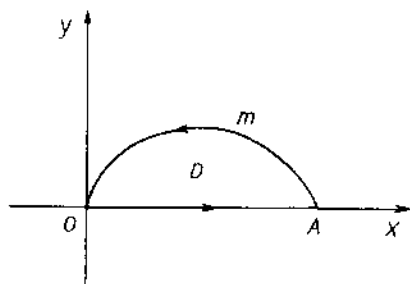
$$I = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

với D là hình tròn: $x^2 + y^2 \leq R^2$

Chuyển sang tọa độ cực:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

3) Ta có: $I = \int_C = \oint_{\widehat{OAmO}} - \int_{\widehat{OA}}$ (hình 101).



Hình 101.

Trên $\widehat{OA}$: $y = 0$, do đó:

$$\int_{\widehat{OA}} = \int_0^a 0 \cdot dx + (e^x - m)0 = 0$$

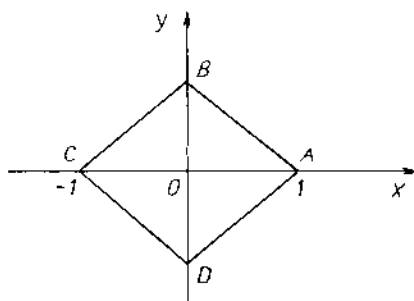
Áp dụng công thức Green:

$$\oint_{\widehat{OAmO}} = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + m) dx dy = m \iint_D dx dy$$

D là nửa trên hình tròn, bán kính $\frac{a}{2}$.

$$\text{Do đó: } \oint_{\widehat{OAmO}} = m \frac{\pi a^2}{8}. \text{ Vậy } I = \frac{m\pi a^2}{8} - 0 = \frac{m\pi a^2}{8}.$$

4) Ở đây $P = \frac{1}{x+y}$, $Q = \frac{-1}{x+y}$ không liên tục tại $(0, 0) \in$ hình vuông (hình 102) nên không áp dụng được công thức Green để tính I.



Hình 102.

Tính trực tiếp, ta có:

$$I = \oint_C = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

Phương trình của $\overline{AB}$: $x + y = 1$, $1 \geq x \geq 0$, $\int_{AB} = \int_1^0 \frac{2dx}{x + (1-x)} = -2$.

Phương trình của $\overline{BC}$: $y - x = 1 \Rightarrow dx = dy \Rightarrow \int_{BC} = 0$.

Phương trình của $\overline{CD}$: $x + y = -1$, $-1 \leq x \leq 0$, $\int_{CD} = \int_1^0 \frac{2dx}{x + (-1-x)}$

$$= -2$$

Phương trình của $\overline{DA}$: $x - y = 1 \Rightarrow dx = dy \Rightarrow \int_{DA} = 0$.

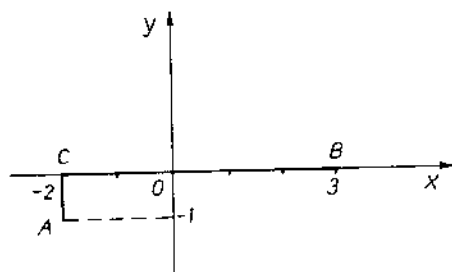
Vậy $I = -4$.

5) Ở đây: $P = x^4 + 4xy^3, Q = 6x^2y^2 - 5y^4$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$$

Vậy I không phụ thuộc đường lấy tích phân. Chọn C là đường gấp khúc ACB : $x = -2$ và $y = 0$.

Nối 2 điểm $A(-2, -1)$ và $B(3, 0)$ (hình 103).



Hình 103.

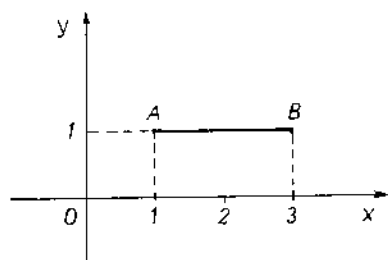
$$I = \int_{AC} + \int_{CB} = \int_{-1}^0 () \cdot 0 + (24y^2 - 5y^4)dy + \int_{-2}^3 x^4 dx + () \cdot 0 = 62.$$

(Trên $\overline{AC}$: $x = -2, dx = 0$, trên $\overline{CB}$: $y = 0, dy = 0$).

6) Ở đây: $P = \frac{x + 2y}{(x + y)^2}, Q = \frac{y}{(x + y)^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x+y)^2 \cdot 2 - 2(x+y)(x+2y)}{(x+y)^4} = \frac{-2y}{(x+y)^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Vậy I không phụ thuộc đường lấy tích phân không cắt đường $y = -x$ trên $\overline{AB}$, $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ (hình 104).



Hình 104.

Ta có: $y = 1$, $dy = 0$.

Vậy:

$$I = \int_1^3 \frac{(x+2)dx}{(x+1)^2} = \int_1^3 \frac{dx}{x+1} + \int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} = \ln 2 + \frac{1}{4}.$$

7) Biểu thức dưới dấu tích phân có thể viết:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy &= \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + ydx + xdy \\ &= d\sqrt{x^2 + y^2} + d(xy). \end{aligned}$$

Theo (4.2):

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d\left(\sqrt{x^2 + y^2} + xy\right) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + xy\right) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \sqrt{2} + 1.$$

8) Tương tự như (7):

$$\begin{aligned} I &= \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = b - a \end{aligned}$$

(vì $(x_1, y_1, z_1) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x_2, y_2, z_2) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$).

9) Phương trình tham số của cung $\widehat{AB}$:

$$x = 1, z = 1, y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{Rt - t^2}, 0 \leq t \leq R.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\widehat{AB}} xy dx + yz dy + zx dz = \int_0^R \left(2\sqrt{2}t \cdot \sqrt{Rt - t^2} + t^2 \right) dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^R \left\{ (2t - R) \sqrt{Rt - t^2} + R \sqrt{Rt - t^2} \right\} dt + \int_0^R t^2 dt \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{2}{3} (Rt - t^2)^{3/2} \right) \Big|_0^R + \\ &\quad + R\sqrt{2} \left[\frac{1-R}{2} \sqrt{Rt - t^2} + \frac{R^2}{8} \arcsin \frac{t-R}{2} \right] \Big|_0^R + \frac{1}{3} \Big|_0^R \\ &= R\sqrt{2} \cdot \frac{R^2}{8} \cdot \pi + \frac{R^3}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right) R^3 \end{aligned}$$

10) Ta có $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r}$, do đó:

$$\begin{aligned} G &= \oint_C \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r} ds = \oint_C \frac{(\xi - x) \cos \alpha' + (\eta - y) \cos \beta'}{r^2} ds \\ &= \oint_C \frac{(\xi - x) d\eta - (\eta - y) d\xi}{r^2} \quad \text{với } \vec{n} = (\cos \alpha', \cos \beta'). \end{aligned}$$

Nếu $A(\xi, \eta) \in C$ thì:

$$G = \int_C \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\ln r) d\eta - \frac{\partial}{\partial \eta^2} (\ln r) d\xi$$

và áp dụng công thức Green:

$$G = \iint_D \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\ln r) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\ln r) \right] d\xi d\eta = 0$$

Nếu A nằm trong đường C , thì G không phụ thuộc đường lấy tích phân, do đó lấy C là đường tròn tâm A , bán kính ξ thì:

$$G = \oint_C \frac{(\xi - x) d\eta - (\eta - y) d\xi}{r^2}$$

Đặt: $\xi - x = e \cos \varphi$, $\eta - y = e \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ thì:

$$G = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

39. Tìm hàm u biết:

1) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$

2) $du = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$

3) $du = e^{x+y}[(1+x+y)dx + (1-x-y)dy]$

$$4) du = \frac{(x - y - z)dx + (x + y - z)dy + (x + y + z)dz}{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy}$$

$$5) du = (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

$$6) du = \frac{y(1 - x^2 + ay^2)dx + x(1 - y^2 + bx^2)dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} : \text{Xác định a, b?}$$

$$7) du = \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{(x^2 + y^2)^n} : \text{Xác định n?}$$

Bài giải

$$1) P = 3x^2 - 2xy + y^2, Q = -x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Vậy $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ nào đó.

Theo (4.2), lấy $x_0 = y_0 = 0$ trong miền liên tục của P, Q .

Ta có:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (-x^2 + 2xy - 3y^2) dy + C \\ &= x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C. \end{aligned}$$

$$2) P = \frac{y}{3x^3 - 2xy + 3y^2}, Q = -\frac{x}{3x^3 - 2xy + 3y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3(x^2 - y^2)}{3x^3 - 2xy + 3y^2},$$

do đó, lấy $x_0 = 1, y_0 = 0$ ($\in$ miền liên tục của P, Q).

Ta có:

$$u(x, y) = \int_1^x 0 dx + \int_0^y \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} dy + C.$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -x \int_0^y \frac{dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = -\frac{x}{3} \int_0^y \frac{dy}{\left(y - \frac{x}{3}\right)^2 + \frac{8x^2}{9}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3y - x}{2\sqrt{2} \cdot x} + C. \end{aligned}$$

$$3) P = e^{x-y}(1+x+y), Q = e^{x-y}(1-x-y),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{x-y}(x+y)$$

Lấy $x_0 = y_0 = 0$ thuộc miền liên tục của P, Q :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x e^x(1+x)dx + \int_0^y e^{x-y}(1-x-y)dy \\ &= e^{x-y}(x+y) + C. \end{aligned}$$

4) Theo (4.2), lấy $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1$ trong miền liên tục của:

$$P = Q = \frac{(x+y-z)}{x^2+y^2+z^2+2xy}, R = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$

Rõ ràng P, Q, R thoả mãn (4.2).

Ta có:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x \frac{x-1}{x^2+1} dx + \int_0^y \frac{x+y-1}{(x+y)^2+1} dy + \int_1^z \frac{(x+y+z)dz}{(x+y)^2+z^2} \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x \right] \Big|_0^x + \left[\frac{1}{2} \ln[(x+y)^2+1] \right] - \end{aligned}$$

$$= \operatorname{arctg}(x+y) \Big|_0^y + \left\{ \frac{1}{2} \ln[(x+y)^2 + z^2] + \operatorname{arctg} \frac{z}{x+y} \right\} \Big|_0^z$$

$$= \ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg} \frac{z}{x+y} + C.$$

5) Ở đây:

$$du = x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz - (yz dx + xz dy + xy dz)$$

$$= d \left[\frac{1}{3} (x^3 + y^3 + z^3) \right] - d(xyz)$$

Vậy: $u(x, y, z) = \frac{1}{3} (x^3 + y^3 + z^3) - xyz + C.$

6) Ở đây: $P = \frac{y - yx^2 + ay^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}, Q = \frac{x - xy^2 + bx^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1 - x^4 + 3(a+1)x^2y^2 + 3(a-1)y^2 - ay^4}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 + 3(b-1)x^2 - bx^4 + 3(b+1)x^2y^2 - y^4}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

Theo (3.2): $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ khi $\begin{cases} 3(a+1) = 3(b+1) \\ 3(a-1) = 0 \\ a = 1 \\ b - 1 = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

Do đó $a = b = 1$ thì $du = Pdx + Qdy$.

Lấy $x_0 = 0, y_0 = 0$ trong miền liên tục của P, Q và các đạo hàm của nó, ta có:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_0^y 0 dx + \int_0^y \frac{x - xy^2 + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy \\
&= x(1 + x^2) \int_0^y \frac{dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} - x \int_0^y \frac{1}{2} y \frac{d(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\
&= x(1 + x^2) \left[\frac{y}{2(1 + x^2)(1 + x^2 + y^2)} + \frac{1}{2(1 + x^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} \right] + \\
&\quad + \frac{xy}{2(1 + x^2 + y^2)} - \frac{x}{2\sqrt{1 + x^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} \\
&= \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} + C
\end{aligned}$$

(với tích phân thứ nhất, ta đã áp dụng công thức:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C).$$

7) Ta có: $P = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^n}$, $Q = \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^n}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) - 2ny(x - y)}{(x^2 + y^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2nx(x + y)}{(x^2 + y^2)^{n+1}}$$

Ta phải có điều kiện: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, hay:

$$2(x^2 + y^2) = 2n(x^2 + xy - xy + y^2) = 2n(x^2 + y^2)$$

suy ra $2 = 2n$ và $n = 1$.

Vậy khi $n = 1$:

$$\begin{aligned} du &= \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= d\left(\ln\sqrt{x^2 + y^2}\right) + d\left(\arctg\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Tích phân ta có:

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctg\frac{y}{x} + C.$$

40. Tính diện tích S (bằng tích phân đường) các hình giới hạn bởi:

1) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

2) $x = a(2\cos t - \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t)$

3) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

4) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{y}{b}\right), x = 0, y = 0, (a, b > 0)$

Bài giải

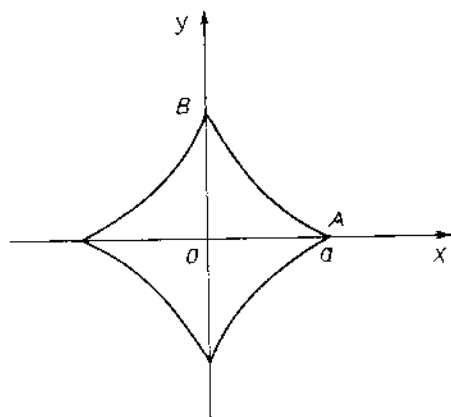
1) Hình giới hạn bởi đường astroïde (bài 75. TI).

Theo (4. 1) và do đối xứng (hình 105):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \left(4 \int_{AB} xdy - ydx \right) \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} [a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t \cos t - a\sin^3 t(-3a\cos^2 t \sin t)] dt \\ &= 6a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 6a^2(I_2 - I_4) \end{aligned}$$

$$= 6a^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} \right)$$

$$= \frac{3a^2\pi}{8} \quad (dvd\mathbf{t}).$$



Hình 105.

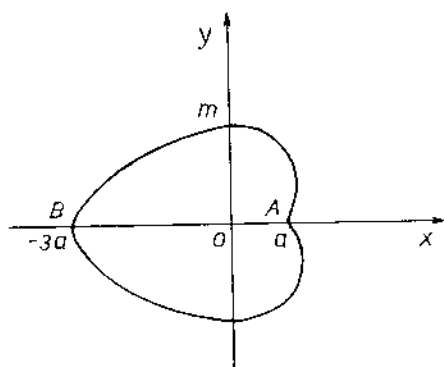
2) Hình giới hạn bởi đường Cardioïde (bài 75. T1).

Ta có:

$$S = \frac{1}{2} \left(2 \underbrace{\int_{A \rightarrow B} x dy - y dx}_{\text{A} \rightarrow \text{B}} \right) \quad (\text{Hình 106})$$

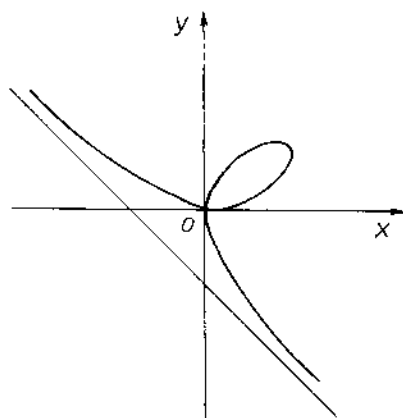
$$= \int_0^{\pi} [(2a \cos t - a \cos 2t)(2a \cos t - 2a \cos 2t) - \\ - (2a \sin t - a \sin 2t)(-2a \sin t + 2a \sin 2t)] dt$$

$$= \int_0^{\pi} (6a^2 - 6a^2 \cos t) dt = 6a^2\pi \quad (dvd\mathbf{t}).$$



Hình 106.

3) Hình giới hạn bởi đường C (lá Descaste) (hình 107) (bài 75. TT).



Hình 107.

Phương trình tham số của đường C:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}, 0 \leq t < +\infty.$$

(Đặt $y = tx$, ta có phương trình này).

Vậy:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{3at}{1+t^3} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} \right)' - \frac{3at^2}{1+t^3} \left(\frac{3at}{1+t^3} \right)' \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3a^2}{2} (dvdt), \end{aligned}$$

4) Đưa phương trình của C về phương theo tọa độ cực suy rộng:

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi.$$

Ta có: $r = \cos \varphi + \sin \varphi$.

Do đó phương trình tham số của C là:

$$x = a(\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot \cos \varphi = \frac{a(\cos^2 \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi \cos \varphi)}{\sin \varphi}$$

$$y = b(\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = \frac{b(\cos^2 \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi \cos \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\text{với } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Mặt khác:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \tan \varphi,$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x dy - y dx) &= \frac{1}{2} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{ab}{2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi, \quad 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}S &= ab \left(\int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \right) = ab \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{ab}{2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (dvd\tau).\end{aligned}$$

41. 1) Tính công của lực đàn hồi hướng về gốc tọa độ, độ lớn của nó tỉ lệ với khoảng cách từ chất điểm đến gốc tọa độ, nếu chất điểm vạch một cung ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

2) Tính công của lực $\vec{F}$, $|\vec{F}| = \frac{k}{r^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tác dụng vào một chất điểm M khối lượng m, chuyển động từ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ đến điểm $M_2(x_2, y_2, z_2)$. ($M_1, M_2 \neq (0,0,0)$)

Bài giải

1) Theo giả thiết độ lớn của lực:

$$|\vec{F}| = k \sqrt{x^2 + y^2}$$

k là hệ số tỷ lệ.

Do đó:

$$\vec{F} = k \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \alpha' \cdot \vec{i} + k \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \alpha' \cdot \vec{j}$$

$$\begin{aligned}
&= k \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \right) \\
&= k(-x\vec{i} - y\vec{j})
\end{aligned}$$

Theo ý nghĩa cơ học, công T của lực phải tìm là:

$$\begin{aligned}
T &= -k \int_C xdx + ydy = -k \int_0^{\pi/2} [a \cos t(-a \sin t) + b \sin t.b \cos t] dt \\
&= -k \int_0^{\pi/2} (b^2 - a^2) \sin t \cos t dt = \frac{k}{2} (a^2 - b^2) \quad (dvC).
\end{aligned}$$

2) Theo giả thiết:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= |\vec{F}| \cos \alpha . \vec{i} + |\vec{F}| \cos \beta . \vec{j} + |\vec{F}| \cos \gamma . \vec{k} \\
&= \frac{k}{r^3} \left(\frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} \right) = \frac{k}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
T &= k \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= k \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -k \frac{1}{r} \Big|_{M_1}^{M_2} \\
&= k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)
\end{aligned}$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad ,$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

*42. 1) Xác định các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ hai lần khả vi liên tục (có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục) sao cho tích phân:

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

không phụ thuộc các hằng số α, β với C là đường khép kín bất kỳ.

2) Hàm khả vi $f(x, y)$ phải thỏa mãn các điều kiện nào để $\int_{AB} f(x, y)(ydx + xdy)$ không phụ thuộc đường nối A, B .

3) Tìm $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, S là diện tích miền D giới hạn bởi đường C bao quanh điểm (x_0, y_0) , d là đường kính của miền D , $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của C , $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ khả vi liên tục trong D .

4) Chứng minh:

$$a) \iint_D \Delta u dx dy = \oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds, \text{ trong đó:}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta): \text{ vecteur pháp của } C$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta$$

$$b) \iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$c) \iint_D (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

Bài giải

1) Giả sử P, Q thỏa mãn các điều kiện của bài toán thì:

$$\oint_C P(x + \alpha, y + \beta)dx + Q(x + \alpha, y + \beta)dy \\ = \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$\text{Do đó: } I_1 = \oint_C P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$$

$$\text{với: } P_1 = P(x + \alpha, y + \beta) - P(x, y);$$

$$Q_1 = Q(x + \alpha, y + \beta) - Q(x, y)$$

Theo (3.2): $\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial y}$ (1), đặt $u = x + \alpha, v = y + \beta$ thì (1) viết được:

$$\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \\ \text{hay } \frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \quad (2)$$

vế trái chỉ phụ thuộc u, v , vế phải chỉ phụ thuộc x, y , vậy để có (2) thì:

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C = \text{const}$$

$$\text{hay: } \frac{\partial}{\partial x} (Q(x, y) - Cx) = \frac{\partial}{\partial y} (P(x, y)).$$

$$\text{Do đó: } Q(x, y) - Cx = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \varphi(y)$$

$$\text{hay: } Q(x, y) = Cx + \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi(y) \quad \text{và} \quad P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \Psi'(x)$$

với $\varphi(y), \Psi'(x)$ là hai hàm tùy ý của y và x và hai lần khác vì liên tục.

2) Theo giả thiết:

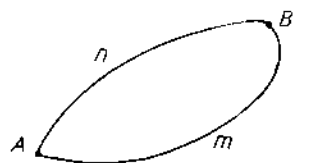
$$\oint_{\text{AmB}} f(x, y)(ydx + xdy) = \oint_{\text{AmB}} f(x, y)(ydx + xdy) \quad (\text{hình 108})$$

hay: $\oint_{\text{AmBmA}} f(x, y)(ydx + xdy) = 0$

Theo (3.2):

$$\frac{\partial}{\partial x}(xf(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(yf(x, y)) \quad (1)$$

Đó là điều kiện phải tìm.



Hình 108.

3) Giả sử $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ và gọi α là góc giữa tiếp tuyến của C với trục Ox thì pháp tuyến $\vec{n} = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$ và:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C (P \sin\alpha - Q \cos\alpha) ds = \oint_C P dy - Q dx$$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\oint_C P dy - Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

Theo giả thiết $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ liên tục, áp dụng định lý trung bình, ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{S} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial Q(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} \end{aligned}$$

$$4) \text{ a) Theo 3): } \oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos\alpha \right) ds = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(- \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D \Delta u dx dy
\end{aligned}$$

b) Theo 3):

$$\begin{aligned}
\oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
&= \iint_D v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy + \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra công thức phải chứng minh.

Chú ý: a) là trường hợp đặc biệt của b) khi $v = 1$.

c) Theo b):

$$\iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

Thay $v \Delta u$ bởi $u \Delta v$ ta có:

$$\iint_D u \Delta v dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

Trừ vế với vế ta có:

$$\iint_D (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

B. TÍCH PHÂN MẶT

§1. MẶT ĐỊNH HƯỚNG

Cho đường $C \subset \mathbb{R}^3$:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta \quad (1)$$

C gọi là *liên tục* nếu các hàm (1) là liên tục.

C gọi là *trơn* nếu tồn tại x'_t, y'_t, z'_t liên tục và $x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t \neq 0$.

C gọi là *trơn từng phần* nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn.

Cho $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

là một mặt liên tục (hàm (2) liên tục trên S).

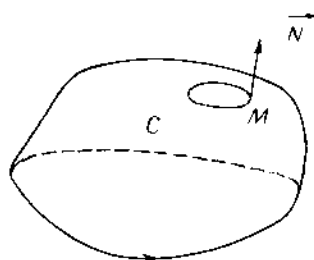
S gọi là *trơn* nếu tồn tại F'_x, F'_y, F'_z liên tục và $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \neq 0$ trên S . ($\forall M \in S$ đều là điểm bình thường).

S gọi là *trơn từng phần* nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần trơn bởi các đường trơn từng phần.

Mặt trơn S gọi là một mặt hai phía (hình 109) nếu di chuyển pháp tuyến $\vec{N}$ tại $M \in S$, đi theo một đường $l \subset S$.

Không cắt biên giới của S , trở lại vị trí xuất phát $\vec{N}$ không đổi hướng. Nếu ngược lại thì S gọi là một mặt một phía.

Mặt hai phía S gọi là



Hình 109.

mặt định hướng được. S gọi là định hướng được từng phần nếu nó là liên tục và chia được thành một số hữu hạn phần định hướng được.

Quy ước: Chiều dương trên C ứng với một phía đã chọn của S với pháp tuyến $\vec{N}$ là chiều từ chân đến đầu của một quan sát viên nằm theo C và nhìn thấy phía đã chọn của S ở bên trái (hình 109).

Mặt $S: z = f(x, y)$ là mặt hai phía: phía trên (dưới) ứng với pháp tuyến làm với Oz một góc nhọn (tù).

Mặt kín S (mặt cầu, ellipsoïde ...) là một mặt hai phía, phía trong có pháp tuyến hướng vào phía trong của thể tích giới hạn bởi S phía ngược lại gọi là phía ngoài của S .

§2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

2.1. Định nghĩa

- Tích phân mặt loại một của hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt trơn S là:

$$I = \iint_S f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

với mọi cách chia mặt S thành n phần phân biệt ΔS_i , có diện tích ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$) và với mọi cách chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta S_i$, đi là đường kính của ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Nếu S là mặt kín thì ký hiệu $\iint_S$

Đặc biệt $f \equiv 1$ thì:

$$I = \iint_S ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = S \text{ là diện tích của mặt } S.$$

Nếu coi $f(x, y, z) > 0$ là mật độ khối lượng (mật) của mặt S thì khối lượng của mặt S là $M = \iint_S f(x, y, z) ds$.

Mọi hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt trơn S đều có tích phân hay khả tích trên mặt đó.

Mọi tính chất của tích phân mặt loại một đều tương tự như các tính chất của tích phân đường loại một.

2.2. Cách tính

Nếu mặt trơn S có phương trình $z = z(x, y)$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D thì:

$$I = \iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

§3. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

3.1. Định nghĩa

- Tích phân mặt loại hai của hàm:

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k},$$

hay của các hàm $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, $M = M(x, y, z)$ xác định trên mặt định hướng S lấy theo một phía đã chọn của S ứng với pháp tuyến $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ tại $M \in S$ là:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S P(M) dy dz + Q(M) dz dx + R(M) dx dy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds \\ &= \iint_S [P(M)\cos\alpha + Q(M)\cos\beta + R(M)\cos\gamma] ds. \end{aligned}$$

Nếu S là mặt kín thì ký hiệu $\oint_S$

Xét mặt S đặt trong một chất lỏng nào đó, $\vec{F}(M)$ là vecteur vận tốc của chất lỏng tại M thì lưu lượng của chất lỏng qua mặt S trong một đơn vị thời gian theo hướng của pháp tuyến $\vec{N}$ tại $M \in S$ là:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, ds = \iint_S P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dx dy$$

- Mọi hàm $\vec{F}(M)$ liên tục trên mặt định hướng S đều có tích phân hay khả tích trên mặt đó.

- Các tính chất của tích phân mặt loại hai đều tương tự như các tính chất của tích phân đường loại hai.

3.2. Cách tính

$$I = \iint_S P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dx dy$$

- Nếu mặt S có phương trình $z = z(x, y)$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D_1 thì:

$$I_1 = \iint_S R(x, y, z) \, dx dy = + \iint_{D_1} R(x, y, z(x, y)) \, dx dy$$

$(- \iint_{D_1} R(x, y, z(x, y)) \, dx dy)$ nếu lấy theo phía trên (dưới) của S .

Tương tự:

$$I_2 = \iint_S Q(x, y, z) \, dz dx = \iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z) \, dz dx$$

$$I_3 = \iint_S P(x, y, z) \, dy dz = \iint_{D_3} P(x(y, z), y, z) \, dy dz$$

lấy theo phía trên của S đối với các mặt phẳng zOx, yOz :

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Nếu S là mặt kín (định hướng).

S có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D và đường trên S có hình chiếu là biên giới của D , chia S làm 2 phần, phần trên (dưới) có phương trình $z = z_2(x, y)$, ($z = z_1(x, y)$) và tích phân lấy theo phía ngoài của S thì:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_S R(x, y, z) dx dy \\
 &= \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dx dy
 \end{aligned}$$

Tương tự cho I_2 , I_3 và $I = I_1 + I_2 + I_3$.

§4. CÔNG THỨC OSTROGRADSKI VÀ STOCKES

4.1. Công thức Ostrogradski

Nếu các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền compact V giới hạn bởi mặt kín, định hướng từng phần S thì ta có công thức Ostrogradski:

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S .

Đặt $P = x$, $Q = y$, $R = z$, ta có công thức tính thể tích của miền V bằng tích phân mặt:

$$V = \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

4.2. Công thức Stokes

Nếu các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên mặt định hướng từng phần S giới hạn bởi đường khép kín, trên từng phần C thì ta có công thức Stokes:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS \\
 = \oint_C [P \cos \alpha' + Q \cos \beta' + R \cos \gamma'] ds.
 \end{aligned}$$

Tích phân mặt lấy theo hướng đã chọn ứng với pháp tuyến $\vec{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ của S .

Tích phân đường lấy theo chiều dương với tiếp tuyến $\vec{\tau}(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ ứng với phía đã chọn của S .

Dạng khác:

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz \end{aligned}$$

hay ký hiệu hình thức:

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

§5. ỨNG DỤNG

Cho mặt $S \subset \mathbb{R}^3$ có mật độ khối lượng (mật) $\rho(x, y, z)$:

- Khối lượng M của S :

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

- Các moment tính M_{xy} , M_{yz} , M_{zx} của S đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy , Oyz , Oxz :

$$M_{xy} = \iint_S \rho(x, y, z) z dS,$$

$$M_{yz} = \iint_S \rho(x, y, z) x dS,$$

$$M_{zx} = \iint_S \rho(x, y, z) y dS$$

- Tọa độ trọng tâm x_G, y_G, z_G của S:

$$x_G = \frac{M_{Oy}}{M}, y_G = \frac{M_{Ox}}{M}, z_G = \frac{M_{Oz}}{M}$$

- Các moment quán tính $I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_x, I_y, I_z$ đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx, gốc tọa độ O và các trục tọa độ Ox, Oy, Oz:

$$I_{xy} = \iint_S \rho(x, y, z)xy \, ds, I_{yz} = \iint_S \rho(x, y, z)yz \, ds; I_{zx} = \iint_S \rho(x, y, z)xz \, ds$$

$$I_x = \iint_S \rho(x, y, z)(y^2 + z^2) \, ds, I_y = \iint_S \rho(x, y, z)(x^2 + z^2) \, ds$$

$$I_z = \iint_S \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, ds, I_x = \iint_S \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, ds$$

BÀI TẬP

- 43.** Tính các tích phân mặt loại 1:

1) $I = \iint_S (x^2 + y^2) \, ds$, S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

2) $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, S là phần mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$, $0 \leq z \leq b$

3) $I = \iint_S (xy + yz + zx) \, ds$, S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ: $x^2 + y^2 = ax$.

4) $I = \iint_S z \, ds$, S là mặt giới hạn của hình giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = x + a$, $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

Bài giải

- 1) Do đối xứng nên:

$$I = 2 \iint_{S_1} (x^2 + y^2) ds$$

S_1 là nửa trên của mặt cầu đã cho, phương trình của nó là:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Theo (2.2), ta tính:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= 2 \iint_D \frac{a(x^2 + y^2)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \end{aligned}$$

D là hình chiếu của S_1 trên mặt phẳng xOy , đó là hình tròn:

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

Chuyển sang tọa độ cực:

$$I = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{ar^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 4\pi a \int_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Đặt $r = a \sin t$, $0 \leq r \leq a \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Do đó: } I = 4\pi a \int_0^{\pi/2} \frac{a^3 \sin^3 t \cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = 4\pi a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt$$

$$= 4\pi a^4 . I_1 = 4\pi a^4 . \frac{2}{3} = \frac{8\pi a^4}{3}$$

2) Phương trình của phần mặt nón là:

$$z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq b.$$

Do đó:

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{b^2}{a^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

và:
$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy.$$

D là hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy, đó là hình tròn:

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

(thay $z = b$ trong phương trình của mặt nón).

Chuyển sang tọa độ cực ta có:

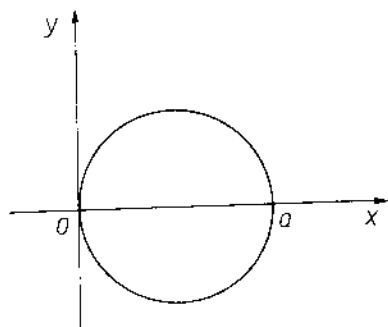
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r . x . \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dr = \frac{2\pi\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a r^2 dr \\ &= \frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3}. \end{aligned}$$

3) Hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D: $x^2 + y^2 \leq ax$ (hình 110).

Ta có:

$$z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$



Hình 110.

Do đó:

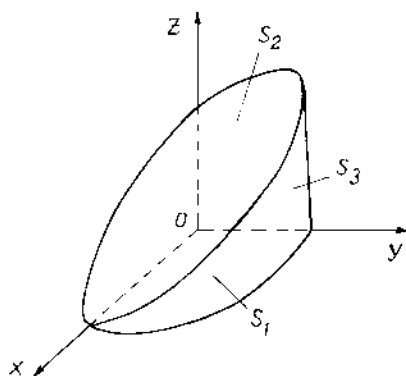
$$I = \sqrt{2} \iint_D \left[xy + \sqrt{x^2 + y^2} (x + y) \right] dx dy$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta có:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \left[r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) \right] dr \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^3 dr \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi + \sin \varphi) a^4 \cos^4 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}a^4}{4} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^4}{2} I_5 = \frac{\sqrt{2}a^4}{2} \frac{4,2}{5,3} = -\frac{4\sqrt{2}a^4}{15}.
\end{aligned}$$

4) Mặt S gồm các mặt S_1 , S_2 , S_3 (hình 111).



Hình 111.

Do đó:

$$1 = \iiint_S = \iiint_{S_1} + \iiint_{S_2} + \iiint_{S_3}$$

Trên S_1 : $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1$

Do đó: $I_1 = \iint_{S_1} 0 dx dy = 0.$

- Trên S_2 : $z = -x + 1, x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

Do đó:

$$I_2 = \iint_{S_2} z ds = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (-x + 1) \sqrt{2} dx dy$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta có:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r \cos \varphi + 1) r dr d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r^3}{3} \cos \varphi + \frac{r^2}{2} \right) \bigg|_0^1 d\varphi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \cos \varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{3} \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{2} \cdot \pi. \end{aligned}$$

- Trên S_3 : $0 \leq z \leq -x + 1, x^2 + y^2 = 1.$

S_3 đối xứng với mặt phẳng xOz do đó: $I_3 = \iint_{S_3} z ds = 2 \iint_{S_3'} z ds.$

Đối với mặt phẳng xOz , phương trình của S_3 là $y = \sqrt{1 - x^2}.$

$$\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2} + 0} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Hình chiếu của S_3 trên mặt phẳng xOz là miền D :

$$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq -x + 1$$

Do đó:

$$I_3 = 2 \iint_D \frac{z dx dz}{\sqrt{1 - x^2}} = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int_0^{-x+1} z dz = \int_{-1}^1 \frac{(1 - x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

đặt $x = \sin t$, $-1 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin t)^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin^2 t - 2 \sin t) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 t) dt = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Vậy: $I = I_1 + I_2 + I_3 = \pi \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2} \right)$.

44. Tính các tích phân mặt loại hai:

1) $I = \iint_S yz dydz + xz dzdx + xy dx dy$

S là phía ngoài của tứ diện: $x = y = z = 0$, $x + y + z = a$ ($a > 0$).

2) $I = \iint_S z dx dy$

S là phía ngoài của mặt ellipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

3) $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$

S là phía ngoài của:

a) Nửa hình cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$

b) Hình cầu: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = a^2$

4) $I = \iint_S (y - z) dydz + (z - x) dzdx + (x - y) dx dy$

S là phía ngoài của mặt nón: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$

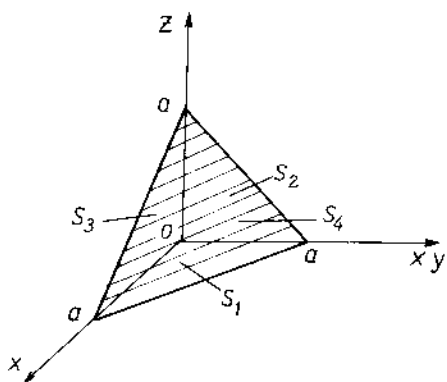
5) $I(1) = \iint_S f(x, y, z) ds$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1^2, \Gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 : z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Bài giải

1) Ta có (hình 112):

$$I = \iiint_S = \iiint_{S_1} + \iiint_{S_2} + \iiint_{S_3} + \iiint_{S_4}$$



Hình 112.

Trên S_1 : $z = 0$, $dz = 0$.

Phía ngoài của tứ diện ứng với phía dưới của S_1 .

Do đó và theo (3.2):

$$I_1 = - \iint_{S_1} xy dx dy = - \int_0^a dx \int_0^{a-x} xy dy = - \frac{1}{2} \int_0^a x(a-x)^2 dx = \frac{-a^3}{24}$$

Tương tự:

$$I_2 = \iiint_{S_2} = I_3 = \iiint_{S_3} = -\frac{a^4}{24}$$

Cũng theo (3.2):

$$I_4 = + \iiint_{S_4} = \iiint_{S_1} xydx dy + \iiint_{S_2} yzdy dz + \iiint_{S_3} zx dz dx$$

S_1, S_2, S_3 là hình chiếu trên các mặt phẳng tọa độ xOy, yOz, zOx của S_4 . Dấu + chỉ phía trên của mặt phẳng $x + y + z = a$, ứng với phía ngoài của tứ diện đối với các mặt phẳng tọa độ đó.

Theo trên thì: $I_4 = \frac{3a^4}{24}$.

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{-a^4}{24} - \frac{a^4}{24} - \frac{a^4}{24} + \frac{3a^4}{24} = 0.$$

2) Ta có phương trình của nửa trên (dưới) của ellipsoïde đã cho là

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}), \text{ các nửa này có hình chiếu}$$

trên mặt phẳng xOy là miền $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Do đó, theo (1.2):

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \left(-c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) \right) dx dy \\ &= 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy \end{aligned}$$

Chuyển sang tọa độ cực suy rộng: $x = arcos\varphi, y = brsin\varphi$, ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= 2c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} ab r dr = 4\pi abc \left(-\frac{1}{3} (1-r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{4\pi abc}{3}.
 \end{aligned}$$

3) a) Phương trình của nửa mặt cầu đã cho đối với các mặt phẳng tọa độ xOy , yOz , zOx là:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad x = \pm \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}, \quad y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_S x^2 dydz \\
 &= \int_{y^2+z^2 \leq a^2, z \geq 0} \left[\left(\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \right)^2 - \left(-\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \right)^2 \right] dydz \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Tương tự: $I_2 = \iint_S y^2 dzdx = 0,$

$$I_3 = \iint_S z^2 dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)^2 dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực ta có:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = 2\pi \left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 0 + \frac{\pi a^4}{2} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

b) Xét $I_1 = \iint_S z^2 dx dy$

Mặt S gồm 2 phần:

S_1 (phía trên mặt phẳng $z = 2$): $z = 2 + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

S_2 (phía dưới mặt phẳng $z = 2$): $z = 2 - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

Hình chiếu của S_1, S_2 trên mặt phẳng xOy là miền D :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq a^2$$

Theo (1.2):

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_D \left[\left(2 + \sqrt{a^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(2 - \sqrt{a^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2} \right)^2 \right] dx dy \\ &= 8 \iint_D \sqrt{a^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2} dx dy \end{aligned}$$

Chuyển sang tọa độ cực:

$$x - 1 = r \cos \varphi, \quad y - 1 = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

thì:

$$I_1 = 8 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = 16\pi \left(-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^a = \frac{16\pi}{3} a^3$$

Tương tự: $I_2 = \frac{8\pi}{3} a^3, \quad I_3 = \frac{8\pi}{3} a^3.$

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{32}{3} \pi a^3$$

4) Xét $I_1 = \iint_S (x - y) dx dy$, hình chiếu của mặt nón trên mặt phẳng

xOy là miền $D: x^2 + y^2 \leq h^2$, phía ngoài của mặt nón có pháp tuyến hợp với Oz một góc tù, do đó:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \iint_S (x - y) dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r(\cos\varphi - \sin\varphi) r dr \\ &= - \int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi) d\varphi \int_0^h r^2 dr = 0 \end{aligned}$$

Xét $I_2 = \iint_S (z - x) dz dx$, đối với mặt phẳng xOy , S gồm 2 phần S_1 :

$y = \sqrt{z^2 - x^2}$, $S_2: y = -\sqrt{z^2 - x^2}$, cùng có hình chiếu trên mặt phẳng xOy là miền D giới hạn bởi: $z = x$, $z = -x$, $z = h$ và có pháp tuyến ngược hướng nhau. Do đó $I_2 = 0$, tương tự $I_3 = 0$.

Vậy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

5) Ở đây: $z = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{t^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{t^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

vì $t > 0$ trên mặt cầu S_1 giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nên:

$$F(t) = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) ds = |t| \iint_D \frac{(x^2 + y^2) dx dy}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}$$

D là hình chiếu của phần mặt cầu S_t trên mặt phẳng xOy :

$$x^2 + y^2 \leq \frac{t^2}{2}$$

(khử z từ: $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ và $z = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Chuyển sang tọa độ độ cực và do đối xứng, ta có:

$$\begin{aligned} V(t) &= 4|t| \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{r^3 dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \pi|t| \int_0^{t/\sqrt{2}} \frac{r^3 dr^2}{\sqrt{t^2 - r^2}} \\ &= \pi|t| \int_0^{t/\sqrt{2}} \frac{(t^2 - r^2 - t^2)d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \\ &= \pi|t| \left(\int_0^{t/\sqrt{2}} \sqrt{t^2 - r^2} d(t^2 - r^2) - t^2 \int_0^{t/\sqrt{2}} \frac{d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right) \\ &= \pi|t| \left[\frac{2}{3} (t^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{t/\sqrt{2}} - t^2 \cdot 2\sqrt{t^2 - r^2} \Big|_0^{t/\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{\pi}{6} t^4 (8 - 5\sqrt{2}). \end{aligned}$$

45. Áp dụng công thức Ostrogradski, tính:

1) $I = \iiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, S : phía ngoài của hình lập

phương: $0 \leq x, y, z \leq a$

2) $I = \iiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, S : phía ngoài của tứ diện:

$$x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$$

$$3) I = \iiint_S (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$$

S: phía ngoài của mặt: $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

$$4) I = \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) ds$$

S: phía ngoài của phần mặt nón: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ ($0 \leq z \leq b$)

$$5) I(x, y, z) = \iiint_S \cos(\vec{n}, \vec{e}) dS$$

S: mặt tròn kín, $\vec{e} = \text{const}$, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của S.

$$6) I(x, y, z) = \iiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS \quad (\text{tích phân Gauss})$$

S: tròn, kín giới hạn miền V; $\vec{n}$: pháp tuyến ngoài của S tại (ξ, η, ζ)

$\in S, r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Bài giải

1) Các hàm $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$ là các hàm lũy thừa nên chúng cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong hình lập phương $0 \leq x, y, z \leq a$, đó là một miền compact.

Do đó theo (4.1):

$$\begin{aligned} I &= \iiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = 2 \iiint_V (x + y + z) dV \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = 2 \int_0^a dx \int_0^a \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^a dy \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy = 2 \int_0^a \left(axy + a \frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2} y \right) \Big|_0^a dx \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^a (a^2 x + a^3) dx = 2 \left(\frac{a^2 x^2}{2} + a^3 x \right) \bigg|_0^a = 3a^4.$$

2) Tương tự như 1):

$$I = \iiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_V (1 + 1 + 1) dV = 3V$$

V là thể tích tứ diện: $V = \frac{a^3}{6}$.

Do đó: $I = 3 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{2}$.

3) Ở đây: $P = x - y + z$, $Q = y - z + x$, $R = z - x + y$

Do đó:

$$I = \iiint_V (1 + 1 + 1) dV = 3V$$

V: thể tích của miền giới hạn bởi S.

Dùng phép đổi biến tổng quát:

$$u = x - y + z, v = y - z + x, w = z - x + y.$$

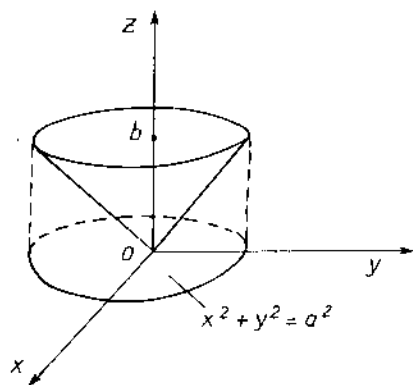
Ta có:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{D(u, v, w)} = \frac{1}{D(x, y, z)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4}$$

Do đó:

$$I = \frac{3}{4} \iiint_{\substack{u+v+w=1 \\ u, v, w \geq 0}} du dv dw = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot \iiint_{\substack{u+v+w=1 \\ u, v, w \geq 0}} du dv dw = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

4) S : không kín, ta bổ xung thêm mặt $S_1: z = b$ để được mặt $S + S_1$ kín (hình 113).



Hình 113.

Áp dụng công thức Ostrogradski, đối với mặt kín $S + S_1$ ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy \\ &= \iiint_{S+S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy - \iint_{S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy \end{aligned}$$

Trên $S_1: z = b$, $dz = 0$

nên:

$$\iint_{S_1} = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} b^2 dxdy = b^2 \cdot a^2 \cdot \pi, \quad \iiint_{S+S_1} = 2 \iiint_V (x + y + z) dV$$

Chuyển sang tọa độ trụ:

$$\begin{aligned}
\iiint_{S \times S_1} &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{b}{r}}^{\frac{b}{r}} [r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z] dz \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[(br^2 - \frac{b}{a} r^3 (\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{b^2}{2} r - \frac{b^2}{2a^2} r^3) \right] dr \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3 b}{12} (\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{a^2 b^2}{8} \right) d\varphi \\
&= 0 + 2 \cdot \frac{a^2 b^2}{8} \cdot 2\pi = \frac{a^2 b^2}{2} \cdot \pi
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } I = \frac{a^2 b^2 \pi}{2} - a^2 b^2 \pi = -\frac{a^2 b^2 \pi}{2}.$$

5) Giả sử $\vec{c} = (a, b, c) = \text{const}$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

$$\cos(\vec{c}, \vec{n}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{c}}{\|\vec{n}\| \|\vec{c}\|} = \frac{a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\begin{aligned}
I(x, y, z) &= \iiint_S \cos(\vec{n}, \vec{c}) ds = \iiint_S \frac{a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ds \\
&= \iiint_S \frac{a dy dz + b dz dx + c dx dy}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \right] dV
\end{aligned}$$

$$= \iiint_V 0, dV = 0.$$

6) Xét:

a) S không bao quanh điểm (x, y, z) :

Ta có: $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| |\vec{n}|}$

và:
$$I(x, y, z) = \iint_S \left[\frac{\xi - x}{r^3} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r^3} \cos \beta + \frac{\zeta - z}{r^3} \cos \gamma \right] ds$$

Áp dụng công thức Ostrogradski (các hàm thỏa mãn các điều kiện của công thức):

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \iiint_V \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2 + 3(\eta - y)^2 + 3(\zeta - z)^2}{r^5} \right) dv \\ &= \iiint_V \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) dV = 0. \end{aligned}$$

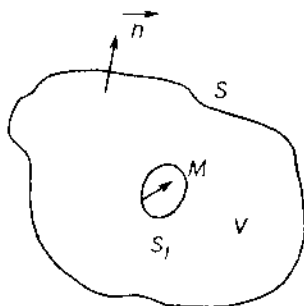
b) Mặt S bao quanh điểm (x, y, z) (hình 114).

Xét mặt cầu S_1 tâm M bán kính ϵ . Khi đó các hàm lại có đủ các điều kiện để áp dụng công thức Ostrogradski trong miền V_1 gồm giữa S và S_1 .

$$\iint_{S \cup S_1} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds = \iiint_{V_1} 0, dV = 0$$

(theo a)

Do đó:



Hình 114.

$$I(x, y, z) = \iiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds = \iiint_{S_1} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds$$

(Pháp tuyến ngoài của S và pháp tuyến trong của S_1 là ngược nhau, cũng là pháp tuyến ngoài của $S + S_1$).

Vậy:

$$I(x, y, z) = \iiint_{S_1} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} ds = \iiint_{S_1} \frac{r}{r^3} ds = \frac{1}{e^2} \iiint_{S_1} ds = \frac{1}{e^2} 4\pi e^2$$

$$= 4\pi$$

(vì với S_1 : $\vec{r} \parallel \vec{n}$ và $r = e$).

46. Áp dụng công thức Stokes, tính:

$$1) I = \oint_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$$

C là đường $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox .

$$2) I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

C là ellipse $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Ox .

$$3) I = \oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

C là đường $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R$, $z > 0$) theo chiều sao cho phần nhỏ nhất của phía ngoài của phần mặt cầu giới hạn bởi C ở bên trái.

$$4) I = \oint_C y^2 z^2 dx + z^2 x^2 dy + x^2 y^2 dz$$

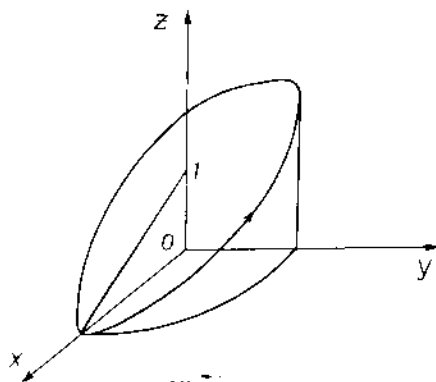
C là đường khép kín: $x = a \cos t$, $y = a \cos 2t$, $z = a \cos 3t$, theo chiều tang của t .

Bài giải

1) Áp dụng công thức Stokes đối với S là mặt tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ (ở đây $P = y + z$, $Q = z + x$, $R = x + y$ thỏa mãn các điều kiện của công thức). Theo (4.2):

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & z + x & x + y \end{vmatrix} ds \\ &= \iint_S [(1 - 1)\cos\alpha + (1 - 1)\cos\beta + (1 - 1)\cos\gamma] ds = 0. \end{aligned}$$

2) Áp dụng công thức Stokes vào S là hình ellipse giới hạn bởi ellipse $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$ (hình 115).



Hình 115.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_C (y - z)dx - (z - x)dy + (x - y)dz \\
 &= -2 \iint_S dydz + dzdx + dx dy \\
 &= -2 \cdot \left(\iint_{D_1} dydz + \iint_{D_2} dzdx + \iint_{D_3} dx dy \right)
 \end{aligned}$$

D_3 : hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy : $x^2 + y^2 \leq 1$, do đó:

$$\iint_{D_3} dx dy = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

D_2 : hình chiếu của S trên mặt phẳng xOz : $D_2 = \emptyset$, do đó:

$$\iint_{D_2} dz dx = 0.$$

D_1 : hình chiếu của S trên mặt phẳng yOz : khi x từ $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$, ta có: D_1 : $y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$, do đó:

$$\iint_{D_1} dy dz = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

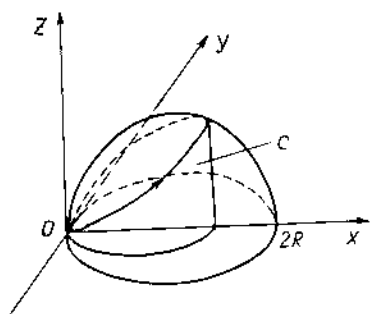
Vậy:

$$I = -2(\pi + 0 + \pi) = -4\pi.$$

3) Áp dụng công thức Stokes đối với phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2Rx$ với $z \geq 0$ (hình 116).

Ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz \\
 &= 2 \iint_S [(y - z)\cos\alpha + (z - x)\cos\beta + (x - y)\cos\gamma] ds
 \end{aligned}$$



Hình 116.

ở đây phương trình của S:

$$z = \sqrt{R^2 - (x - R)^2 - y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} = \frac{x - R}{z\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} = \frac{y}{z\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

(lấy $\cos \gamma > 0$, vì pháp tuyến của phía trên của S làm với Oz một góc tù).

Do đó:

$$\cos \alpha = \frac{x - R}{z} \cos \gamma, \quad \cos \beta = \frac{y}{z} \cos \gamma$$

$$\begin{aligned}
\text{và: } I &= 2 \iint_S \left[\frac{(y-z)(x-R)}{z} + \frac{(z-x)y}{z} + x - y \right] \cos \gamma \, ds \\
&= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 2R} \left[\frac{(y-z)(x-R)}{z} + \frac{(z-x)y}{z} + x - y \right] dx dy \\
&= 2R \iint_{x^2+y^2 \leq 2R} \left(1 - \frac{y}{z} \right) dx dy = 2\pi R r^2
\end{aligned}$$

(vì $\iint_{x^2+y^2 \leq 2R} \frac{y}{z} dx dy = 0$ do hàm $\frac{y}{z}$ trên hai nửa hình tròn lấy các giá

trị: $\left| \frac{y}{z} \right|$ như nhau nhưng trái dấu nhau).

4) Khi $0 \leq t \leq \pi$ thì $M(x, y, z)$ vẽ đường C tại $A(a, a, a)$ đến $B(-a, a, -a)$ và khi $\pi \leq t \leq 2\pi$, M vẫn vẽ đường C nhưng theo hướng ngược lại từ $B(-a, a, -a)$ đến $A(a, a, a)$, do đó đường C là khép kín nhưng không giới hạn mặt S nào, do đó theo công thức Stokes: $I = 0$.

47. Tìm tọa độ trọng tâm của:

1) Phần mặt đồng chất ($\rho = 1$): $az = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq a$)

2) Phần mặt đồng chất ($\rho = 1$): $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$.

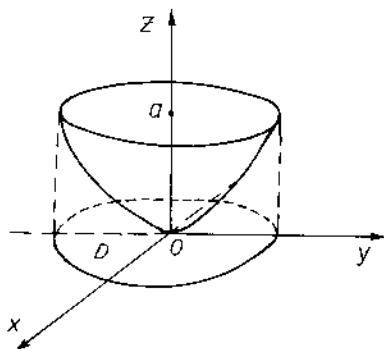
Tìm moment quán tính đối với gốc tọa độ của các mặt đồng chất ($\rho = 1$).

3) Mặt toàn phần: $-a \leq x, y, z \leq a$

4) Mặt toàn phần: $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq H$ của hình trụ.

Bài giải

1) Vì là mặt đồng chất và do đối xứng nên trọng tâm của nó phải ở trên trục Oz (hình 117) nghĩa là $x_G = y_G = 0$.



Hình 117.

Theo (5.1) ta có:

$$z_G = \frac{M_{xy}}{M}$$

$$\text{với: } M_{xy} = \iiint_S z ds = \frac{1}{a^2} \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)} dx dy,$$

$$\text{với } D: x^2 + y^2 \leq a^2$$

Chuyển sang tọa độ cực ta có:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sqrt{a^2 + 4r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{16a^2} \left\{ \int_0^a \left[(a^2 + 4r^2)^{3/2} - a^2 (a^2 + 4r^2)^{1/2} \right] l(a^2 + 4r^2) \right\} \\ &= \frac{\pi}{16a^2} \left[\frac{2}{5} (a^2 + 4r^2)^{5/2} \Big|_0^a - a^2 \cdot \frac{2}{3} (a^2 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^a \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{60} a^3 (25\sqrt{5} + 1)$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} M &= \iint_S dS = \frac{1}{a} \iint_D \sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \frac{\pi a^2}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Vậy:

$$z_G = \frac{\frac{\pi}{60} a^3 (25\sqrt{5} + 1)}{\frac{\pi a^2}{6} (5\sqrt{5} - 1)} = \frac{25\sqrt{5} + 1}{10(5\sqrt{5} - 1)} a.$$

2) Tương tự như 1), ta có:

$$M = \iint_S dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

ở đây:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Vậy:

$$M = \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \sqrt{2} dx dy = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi a^2}{4}$$

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_S x ds = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \pi a^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} x \sqrt{2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr = \frac{4a}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi \\
&= \frac{8a}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi \\
&= \frac{8a}{3\pi} \cdot \frac{3.1}{4.2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a}{2}. \\
y_G &= \frac{1}{M} \iint_S y ds = \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr \\
&= \frac{4a}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0,
\end{aligned}$$

vì $\cos^3 \varphi \sin \varphi$ là hàm lẻ

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M} \iint_S z ds = \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr \\
&= \frac{4a}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4a}{3\pi} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{16a}{9\pi}.
\end{aligned}$$

3) Theo (5.2) moment quán tính của mặt toàn phần của hình lập phương đã cho đối với gốc tọa độ là:

$$I_0 = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} (x^2 + y^2 + z^2) ds.$$

S_i ($i = 1, \dots, 6$) là các mặt của khối lập phương

Xét S_1 : $-a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, z = a, ds = dxdy$.

Do đó:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2 + a^2) dy \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2 + a^2) dy \\ &= 4 \int_0^a (ax^2 + \frac{4}{3}a^3) dx = \frac{20a^4}{3}. \end{aligned}$$

Do đối xứng nên:

$$I_0 = 6I_1 = \frac{6 \cdot 20a^4}{3} = 40a^4.$$

5) Moment quán tính của mặt toàn phần S của hình trụ đối với gốc tọa độ là:

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds = \iint_{S_d} + \iint_{S_1} + \iint_{S_b}$$

S_d , S_1 , S_b là đáy dưới, đáy trên và mặt bên của hình trụ.

Với S_d : $z = 0$, S_1 : $z = H$, $ds = dxdy$, hình chiếu của chúng trên mặt phẳng xOy cũng là miền D : $x^2 + y^2 \leq R^2$, do đó:

$$\begin{aligned} \iint_{S_d} + \iint_{S_1} &= \iint_D [2(x^2 + y^2) + H^2] dxdy \\ &= \pi R^2 H^2 + 2 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy \\ &= \pi R^2 H^2 + 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr \quad (\text{tọa độ cực}) \\ &= \pi R^2 H^2 + \pi R^4 \end{aligned}$$

với $S_0: y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ đối với mặt phẳng xOz , $dS = \frac{R dx dz}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ và

hình chiếu của S_0 trên mặt phẳng xOz là D_0 :

$$-R \leq x \leq R, 0 \leq z \leq H,$$

do đó:

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} &= 2R \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot \int_0^H (R^2 + z^2) dz \\ &= 2\pi RH \left(R + \frac{H^2}{3} \right) \end{aligned}$$

Vậy:

$$I_0 = \pi R \left[R(R + H)^2 + \frac{2}{3} H^3 \right].$$

C. CÁC YẾU TỐ GIẢI TÍCH VECTEUR (LÝ THUYẾT TRƯỜNG)

§1. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

1.1. Định nghĩa

- Trường vô hướng u là phần không gian $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mà tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ có một đại lượng vô hướng $u = u(M)$.

$\Rightarrow u$ là hàm của M , gọi là hàm vô hướng của trường.

Quy tích các điểm $M \in \Omega$: $u(M) = C = \text{const}$ gọi là mật đồng mức hay mật đẳng trị của trường. Trường dừng: u không phụ thuộc thời gian, trường phẳng: $u = u(M)$, $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Đạo hàm theo hướng

- Cho trường vô hướng Ω với hàm vô hướng $u = u(M)$ và vecteur $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Đạo hàm của u tại M theo hướng của $\vec{e}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\rho}$$

với $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M(x, y, z)$, $\overrightarrow{MM_1} // \vec{e}$.

$$x_1 = x + \rho \cos\alpha, y_1 = y + \rho \cos\beta, z_1 = z + \rho \cos\gamma,$$

$$\rho = \left| \overrightarrow{MM_1} \right|,$$

$$\vec{e} // Ox \ (Oy, Oz)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

- Nếu hàm $u = u(x, y, z)$ khả vi tại $M(x, y, z)$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

nếu $\vec{e}'$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial e'} = - \frac{\partial u}{\partial e}$$

1.3. Gradient

Gradient của trường vô hướng $u = u(M)$ tại M :

$$\overrightarrow{\text{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \overrightarrow{\text{grad} u} \cdot \vec{e} = \text{proj}_{\vec{e}} (\overrightarrow{\text{grad} u})$$

$$\max \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| \overrightarrow{\text{grad} u} \right|$$

Tính chất

$$1^0. \overrightarrow{\text{grad}}(C_1 u + C_2 v) = C_1 \overrightarrow{\text{grad}} u + C_2 \overrightarrow{\text{grad}} v$$

$$2^0. \overrightarrow{\text{grad}}(u.v) = u \overrightarrow{\text{grad}} v + v \overrightarrow{\text{grad}} u$$

$$3^0. \overrightarrow{\text{grad}} f(u) = f'_u \overrightarrow{\text{grad}} u$$

$$4^0. \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \overrightarrow{\text{grad}} u - u \overrightarrow{\text{grad}} v}{v^2}$$

§2. TRƯỜNG VECTEUR

2.1. Định nghĩa

- Trường vecteur $\vec{F}$ là phần không gian Ω mà tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ có một vecteur $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}(M) \Rightarrow \vec{F} \text{ là hàm của } M$$

Trường dừng: $\vec{F}$ không phụ thuộc thời gian

Trường phẳng: $\vec{F} = \vec{F}(M), M(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Đường dòng của trường vecteur $\vec{F}$ là mọi đường C mà tiếp tuyến với C tại $\forall M \in C$ đồng phương với vecteur của trường qua M

- Hệ phương trình xác định đường dòng của trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

2.2. Thông lượng và divergence

- Thông lượng Φ của trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt S đặt trong trường theo hướng của pháp tuyến $\vec{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ của S là:

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS \\ &= \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy\end{aligned}$$

- Divergence của trường $\vec{F}$ tại M :

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- Công thức Ostrogradski dạng vecteur:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \iiint_V \text{div} \vec{F} dV$$

$\text{div} \vec{F}(M) > 0 (< 0)$, M : điểm nguồn (rò).

Tính chất

$$1^0. \text{div}(C_1 \vec{F}_1 + C_2 \vec{F}_2) = C_1 \text{div} \vec{F}_1 + C_2 \text{div} \vec{F}_2$$

$$C_1, C_2 = \text{const.}$$

$$2^0. \text{div}(u \vec{F}) = \vec{F} \text{grad} u + u \text{div} \vec{F}$$

2.3. Lưu số (hoàn lưu) và rotation

- Lưu số Γ của trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc đường C trong trường là:

$$\varphi = \int_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds$$

$\vec{\tau} (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$: vecteur tiếp tuyến với C .

- Rotation của trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ tại M trong trường là vecteur:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} (M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

$\text{rot } \vec{F} (M) > 0 (< 0)$: M là điểm xoáy thuận (ngược).

- Dạng vecteur của công thức Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N} ds$$

($\vec{N}$ vecteur pháp của mặt S)

- *Tính chất*

1^o. $\text{rot}(C_1 \vec{F}_1 + C_2 \vec{F}_2) = C_1 \text{rot } \vec{F}_1 + C_2 \text{rot } \vec{F}_2$, $C_1, C_2 = \text{const.}$

2^o. $\text{rot}(u \vec{F}) = u \text{rot } \vec{F} + \overrightarrow{\text{grad } u} \wedge \vec{F}$

2.4. Các toán tử vi phân

$$\overrightarrow{\text{grad } u} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

với $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, gọi là các toán tử vi phân

- Toán tử Nabla hay toán tử Hamilton là vecteur tượng trưng:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

sao cho:

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \overline{\operatorname{grad} u}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{F}$$

- Toán tử Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

sao cho:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \vec{\nabla} \cdot \overline{\operatorname{grad} u} = \Delta u$$

Tính chất

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\operatorname{grad} u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = \Delta u$$

$$2^0, \operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) = 0$$

$$3^0, \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0.$$

2.5. Trường ống và trường thế

- Trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ gọi là một trường *ống* nếu:

$$\operatorname{div} \vec{F}(\mathbf{M}) = 0$$

- Gọi là một trường *thế* nếu $\operatorname{rot} \vec{F}(\mathbf{M}) = 0, \forall \mathbf{M} \in \text{trường}$.

- Gọi là một trường *điều hòa* nếu $\vec{F}$ vừa là trường ống vừa là trường thế.

- Nếu $\vec{F}$ là trường thế thì $\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}$, u gọi là *thế vô hướng* (hàm thế vị) của trường.

- Nếu $\vec{F}$ lại là trường ống, nghĩa là $\vec{F}$ là một trường điều hòa thì $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) = \Delta u = 0$; thế vô hướng u của trường thỏa mãn phương trình Laplace, u cũng gọi là một hàm *điều hòa*.

BÀI TẬP

48. 1) Xác định mặt đồng mức (đẳng trị) của các trường vô hướng:

$$a) u = f(\rho), \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$b) u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$c) u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

2) Xác định đường dòng của các trường vecteurs:

$$a) \vec{V}(M) = \vec{C} = \text{const}$$

$$b) \vec{V}(P) = -w\vec{y}\vec{i} + w\vec{x}\vec{j}, w = \text{const.}$$

$$c) \vec{V} = \frac{m\vec{r}}{r^3}, m = \text{const.}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, r = |\vec{r}|$$

Bài giải

1) a) Theo định nghĩa, mặt đồng mức của trường vô hướng u là quỹ tích những điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình:

$$u = f(\rho) = C = \text{const.}$$

Giả sử tồn tại Γ^{-1} thì $\rho = \Gamma^{-1}(c)$ hay $x^2 + y^2 + z^2 = [\Gamma^{-1}(c)]^2$.

Đó là những mặt cầu đồng mức tâm O .

b) Tương tự như a) đường đồng mức của trường là các đường tròn đồng tâm: $x^2 + y^2 = [\Gamma^{-1}(c)]^2$.

$$c) \text{ Từ } u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C \text{ suy ra } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin C$$

hay $z^2 = \sin^2 C (x^2 + y^2)$ nghĩa là mặt đồng mức là các mặt nón cùng đỉnh O và trục là trục Oz .

$$2) a) \text{ Giả sử } \vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k} = \text{const}$$

Theo định nghĩa, đường dòng của trường thỏa mãn hệ:

$$\frac{dx}{C_x} = \frac{dy}{C_y} = \frac{dz}{C_z} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{C_x} = \frac{y}{C_y} = \frac{z}{C_z}$$

vậy đường dòng của trường là các đường thẳng song song với $\vec{C}$.

b) Tương tự như a), từ: $\frac{dx}{-w_x} = \frac{dy}{w_x}$ ta có $x dx + y dy = 0$ hay $x^2 + y^2 = C = \text{const.}$

Vậy đường đồng của trường là những đường tròn đồng tâm O.

c) Ta có:

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k})}{r^3}$$

Đường đồng của trường thỏa mãn hệ:

$$\frac{dx}{mx} = \frac{dy}{my} = \frac{dz}{mz}$$

hay:
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Từ hệ này suy ra (lấy tích phân):

$$\frac{x}{k_1} = \frac{y}{k_2} = \frac{z}{k_3}, \quad k_1, k_2, k_3 = \text{const tùy ý}$$

Vậy các đường đồng của trường là một họ đường thẳng qua gốc O.

49. Tính đạo hàm theo hướng của:

1) $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ tại M(x, y, z) theo hướng bán kính vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Khi nào thì: $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |\text{grad}u|$.

2) $u = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, theo hướng của $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ tại M(x, y, z) $\neq 0$. Khi nào thì: $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = 0$.

3) $u = xy - z^2$ tại M(-9, 12, 10) theo hướng của phân giác thứ nhất của góc tọa độ xOy. Tính $\text{grad}u$ tại M.

Bài giải

1) Ở đây $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$

Do đó theo (1.2) ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \\&= \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\&\quad + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\&= 2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2u}{r}\end{aligned}$$

Mặt khác theo (1.3):

$$\overrightarrow{\text{gradu}} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = 2 \left(\frac{x}{a^2} \vec{i} + \frac{y}{b^2} \vec{j} + \frac{z}{c^2} \vec{k} \right)$$

$$|\overrightarrow{\text{gradu}}| = 2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

Do đó:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = |\overrightarrow{\text{gradu}}|$$

hay:

$$2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

khí $a = b = c$.

2) Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} &= \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \cos \beta + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \cos \gamma \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{x \cos \alpha}{r} + \frac{y \cos \beta}{r} + \frac{z \cos \gamma}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \cos(\vec{r}, \vec{e}).\end{aligned}$$

Do đó $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = 0$ khi $\vec{e} \perp \vec{r}$.

3) Rõ ràng $\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + 0\vec{k}$ hướng theo phân giác thứ nhất của góc tọa độ xOy, ta tính:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = y|_M = 12,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = x|_M = -9,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -2z|_M = -20$$

$$\text{Do đó: } \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad} u}(M) = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 20\vec{k}$$

50. 1) Cho $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại điểm nào:

a) $\overrightarrow{\text{grad} u} \perp Oz$

$$b) \vec{\text{grad}} u = 0$$

$$2) \text{ Cho } u = \ln \frac{1}{r}, r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \text{ tại điểm nào:}$$

$$|\vec{\text{grad}} u| = 1.$$

$$3) \text{ Tìm góc giữa } \vec{\text{grad}} u, u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ tại các điểm } A(1, 2, 2),$$

$$B(-3, 1, 0).$$

4) Chứng minh:

$$a) \vec{\text{grad}}(C_1 u + C_2 v) = C_1 \vec{\text{grad}} u + C_2 \vec{\text{grad}} v, C_1, C_2 = \text{const.}$$

$$b) \vec{\text{grad}}(u \cdot v) = u \vec{\text{grad}} v + v \vec{\text{grad}} u$$

$$c) \vec{\text{grad}} \left(\frac{u \cdot v}{v^2} \right) = \frac{v \vec{\text{grad}} u - u \vec{\text{grad}} v}{v^2}$$

Bài giải

1) Ta có:

$$\vec{\text{grad}} u = 3 \left[(x^2 - yz) \vec{i} + (y^2 - xz) \vec{j} + (z^2 - xy) \vec{k} \right]$$

a) $\vec{\text{grad}} u \perp Oz$ khi $z^2 - xy = 0$ nghĩa là tại các điểm trên mặt nón $z^2 = xy$

b) $\vec{\text{grad}} u = 0$ khi $x^2 - yz = 0, y^2 - xz = 0, z^2 - xy = 0$ nghĩa là tại các điểm trên đường thẳng $x = y = z$.

$$2) \text{ Ta có: } u = -\ln \frac{1}{r} = -\ln r$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r} r_x = -\frac{(x-a)}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(y-b)}{r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-(z-c)}{r^3}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}u} = -\frac{1}{r^3}[(x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}]$$

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right| = \sqrt{\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^4}} = \frac{1}{r}$$

Vậy: $\left|\overrightarrow{\text{grad}u}\right| = 1$ khi $\frac{1}{r^2} = 1$ hay $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$.

nghĩa là tại các điểm trên mặt cầu tâm (a, b, c), bán kính R = 1.

3) Ta có $u = \frac{x}{r^2}$ với $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xz}{r^4}$$

$$r(A) = 3, \quad r(B) = \sqrt{10}.$$

Do đó:

$$\overrightarrow{\text{grad}u}(A) = \frac{1}{81}(7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}),$$

$$\overrightarrow{\text{grad}u}(B) = \frac{-2}{25}\vec{i} + \frac{3}{50}\vec{j} + 0\vec{k}$$

Vậy góc φ giữa $\overrightarrow{\text{grad}u}(A)$, $\overrightarrow{\text{grad}u}(B)$ được xác định bởi:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{\text{grad}u}(A) \cdot \overrightarrow{\text{grad}u}(B)}{\left|\overrightarrow{\text{grad}u}(A)\right| \left|\overrightarrow{\text{grad}u}(B)\right|}$$

$$= \frac{-4}{405} : \frac{1}{90} = \frac{-8}{9}.$$

4) a) Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(C_1 u + C_2 v) &= \\&= \frac{\partial}{\partial x}(C_1 u + C_2 v)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(C_1 u + C_2 v)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(C_1 u + C_2 v)\vec{k} \\&= C_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \right) + C_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k} \right) \\&= C_1 \overrightarrow{\text{grad}} u + C_2 \overrightarrow{\text{grad}} v.\end{aligned}$$

b), c): chứng minh tương tự như a).

51. Tính thông lượng của các trường vecteurs:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua phía ngoài:

a) Mật toàn phần

b) Mật bên của hình trụ $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq H$

2) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ qua phía ngoài

a) Mật bên S_b

b) Mật toàn phần S của hình nón: $\frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2}$, $0 \leq z \leq H$.

c) Phía ngoài của $x^2 + y^2 + z^2 = y$.

3) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ qua phía ngoài mặt cầu:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

$$4) \vec{r} = \frac{m\vec{r}}{-r^3}, m = \text{const}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, r = |\vec{r}| \text{ qua phía ngoài}$$

của mặt kín S bao quanh gốc toạ độ.

Bài giải

1) a) Theo (2.2) thông lượng của trường qua mặt toàn phần S của hình trụ là:

$$\Phi = \iiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

ở đây các hàm $P = x, Q = y, R = z$ liên tục và có các đạo hàm liên tục $\forall (x, y, z) \in R^3$, đặc biệt nó liên tục trong hình trụ trên, do đó áp dụng công thức Ostrogradski ta có:

$$\Phi = \iiint_V (1 + 1 + 1) dx dy dz = 3V = 3 \cdot \pi R^2 H$$

b) Rõ ràng thông lượng qua mặt bên (xung quanh):

$$\Phi_b = \Phi - \Phi_d - \Phi_t,$$

Φ_d, Φ_t là thông lượng qua đáy dưới và đáy trên.

với đáy dưới: $z = 0$ và do đó: $\Phi_d = 0$.

$$\text{với đáy trên: } z = H, \Phi_t = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} H dx dy = \pi R^2 H$$

Vậy:

$$\Phi_b = 3\pi R^2 H - \pi R^2 H = 2\pi R^2 H$$

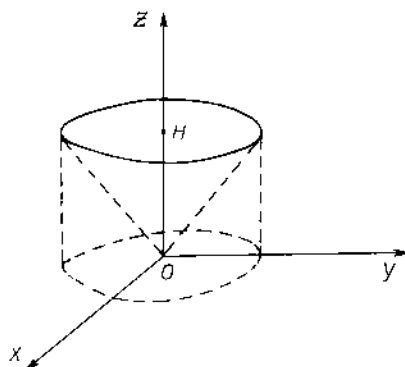
2) a) Theo (2.2) thông lượng Φ qua mặt bên S_b của hình nón là:

$$\Phi = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy \quad (\text{hình 118})$$

$$\text{Xét: } I = \iint_{S_b} z^2 dx dy = - \iint_D \frac{H^2}{R^3} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$$

với $D: x^2 + y^2 \leq R^2$.

(- : vì pháp tuyến của phía ngoài của mặt nón làm với trục Oz một góc tù).



Hình 118.

Chuyển sang tọa độ độ cực, ta có:

$$I_1 = -\frac{H^3}{R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 \cdot r \cdot dr = -\frac{2}{5} \pi R^2 H^3$$

Xét:
$$I_2 = \iint_{S_b} x^3 dy dz,$$

đối với mặt phẳng yOz , phương trình của S_b :

$$x = \pm \sqrt{a^2 z^2 - y^2}, \quad a = \frac{R}{H}$$

hình chiếu của S_b trên mặt phẳng yOz là miền D_1 :

$$0 < z \leq H, \quad -az < y \leq az.$$

Do đó:

$$I_2 = 2 \int_0^H dz \int_{y/z}^{y/z} (a^2 z^2 - y^2)^{3/2} dy$$

$$\text{đặt } y = az \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_0^H dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 z^3 \cos^3 t az \cos t dt \\ &= 2a^4 \int_0^H z^4 dz \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt \\ &= \frac{2a^4 H^5}{5} \cdot 2 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi R^4 \cdot H}{20} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } I_3 = \iiint_{S_b} y^3 dz dx = \frac{3\pi R^4 \cdot H}{20}.$$

Vậy:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{S_b} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy \\ &= \frac{-2}{5} \pi R^2 H^3 + 2 \cdot \frac{3\pi R^4 \cdot H}{20} \\ &= \frac{1}{10} \pi R^3 H (3R^2 - 4H^2). \end{aligned}$$

b) Thông lượng Φ của trường qua mặt toàn phần S của hình nón là:

$$\Phi = \iiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$$

Các hàm $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$, cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong hình nón V đã cho, do đó áp dụng công thức Ostrogradski, ta có:

$$\Phi = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Chuyển sang tọa độ trụ, ta được:

$$\begin{aligned}\Phi &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\frac{H}{R}r}^H (r^2 + z^2) dz \\ &= 6\pi \int_0^R r \left(r^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \bigg|_{\frac{H}{R}r}^H dr \\ &= 6\pi \int_0^R \left(r^3 H + \frac{H^3}{3} r - \frac{H}{R} r^4 - \frac{H^3}{3R^3} r^4 \right) dr \\ &= \frac{3}{10} \pi R^2 H (R^2 + 2H^2).\end{aligned}$$

Chú ý: - Có thể tính thông lượng qua mặt bên: Φ_b bằng cách tính thông lượng qua mặt toàn phần: Φ_v trừ đi thông lượng qua đáy: Φ_d , ở đây:

$$\Phi_d = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} H^3 dx dy = H^3 \pi R^2$$

Theo b):

$$\begin{aligned}\Phi_b &= \frac{3}{10} \pi R^2 H (R^2 + 2H^2) - H^3 \pi R^2 \\ &= \frac{1}{10} \pi R^2 H (3R^2 - 4H^2)\end{aligned}$$

c) Thông lượng Φ của trường qua mặt ngoài (từ trong ra ngoài) của mặt cầu S : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ là:

$$\Phi = \oiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$$

Tương tự như b) áp dụng công thức Ostrogradski, ta có:

$$\Phi = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 \leq y$$

Chuyển sang tọa độ cầu:

$$z = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad x = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Ta có phương trình của mặt cầu là:

$$\rho^2 = \rho \cos \theta \quad \text{hay} \quad \rho = \cos \theta \quad \text{và} \quad 0 \leq \rho \leq \cos \theta$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \Phi &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} \rho^4 d\rho = 6\pi \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos^5 \theta}{5} d(\cos \theta) \\ &= 6\pi \cdot \frac{\cos^6 \theta}{5 \cdot 6} \bigg|_{\pi/2}^0 = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

3) Thông lượng Φ của trường qua phía ngoài mặt cầu S :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$\text{là:} \quad \Phi = \oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

ở đây $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền V giới hạn bởi S , do đó áp dụng công thức Ostrogradski ta được:

$$\Phi = 2 \iiint_V (x + y + z) dV.$$

Đùng biến đổi $x - a = X$, $y - b = Y$, $z - c = Z$ ta được:

$$\Phi = 2 \int_{-R}^R dX \int_{\sqrt{R^2 - X^2}}^{\sqrt{R^2 - X^2}} dY \int_{\sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}}^{\sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}} (X + Y + Z) dZ + 2(a + b + c) \iiint_V dV$$

$$\text{hay:} \quad \Phi = 2I + 2(a + b + c) \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Với:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_{-R}^R dX \int_{\sqrt{R^2 - X^2}}^{\sqrt{R^2 - X^2}} \left((X+Y) \sqrt{R^2 - X^2 - Y^2} \right) dY \\ &= 8 \int_{-R}^R dX \int_0^{\sqrt{R^2 - X^2}} X \sqrt{R^2 - X^2 - Y^2} dY \\ &= 8 \int_{-R}^R \frac{X \sqrt{R^2 - X^2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} dX = 0 \text{ (hàm lẻ)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy:} \quad \Phi = \frac{8}{3} (a + b + c) \cdot \pi R^3$$

Chú ý, khi tính I ta đã dùng công thức:

$$\int_{-c}^c f(x) dx = \int_0^c [f(x) + f(-x)] dx.$$

4) Theo định nghĩa, thông lượng Φ của trường: $\vec{E} = \frac{m\vec{r}}{r^3} = \frac{m}{r^3}(\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k})$ qua mặt tròn, kín S bao quanh gốc tọa độ O là:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = m \iiint_S \left[\frac{x}{r^3} \cos \alpha + \frac{y}{r^3} \cos \beta + \frac{z}{r^3} \cos \gamma \right] dS \\ &= m \iiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds = 4\pi m. \end{aligned}$$

(Theo 6) bài 45: Tích phân Gauss).

52. Tính lưu số của các trường vecteur:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ trên đường C:

$x = acost, y = asint, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ theo chiều tang của t.

2) $\vec{r} = (y - z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ dọc theo cung bé nhất C của đường tròn lớn nhất của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm M(3, 4, 0), N(0, 0, 5).

3) $\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\arctg \frac{y}{x}\right)$ dọc theo đường C:

a) không bao quanh Oz; b) bao quanh Oz

4) $\vec{r} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ dọc theo đường tròn: $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ giới hạn mặt cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ theo chiều dương.

Bài giải

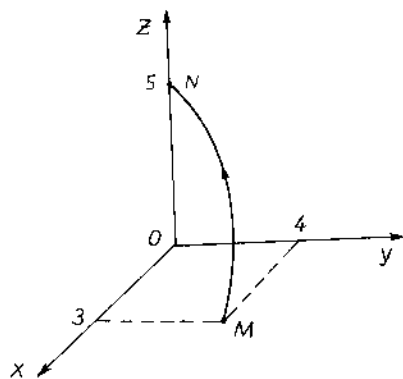
1) Theo định nghĩa, lưu số của trường dọc theo C:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \oint_C xdx + ydy + zdz \\ &= \int_0^{2\pi} [a \cos t(-a \sin t) + a \sin t(a \cos t) + b.t.b] dt \\ &= \int_0^{2\pi} b^2 t dt = b^2 \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2 b^2. \end{aligned}$$

2) Phương trình tham số của C (hình 119).

$$x = 3\cos\varphi, y = 4\cos\varphi, z = 5\sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Do đó lưu số $\mathcal{L}$ của trường dọc theo C là:



Hình 119.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} [(-4\cos\varphi + 5\sin\varphi)(-3\sin\varphi) + (5\sin\varphi + 3\sin\varphi)(-4\sin\varphi) + \\
 &\quad + (3\cos\varphi + 4\cos\varphi) \cdot 5\cos\varphi] d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} (35\cos^2\varphi - 24\sin\varphi\cos\varphi) d\varphi = -12.
 \end{aligned}$$

3) a) Ta có: $\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2} + 0\vec{k}$

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0, (x, y) \neq 0.$$

Do đó khi C không bao quanh trục Oz , giả thiết C là biên của mặt S thì $\vec{F}$ là liên tục và có các đạo hàm liên tục trên $S + C$, áp dụng công thức Stokes, ta có lưu số:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \iiint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$\vec{\tau}$ là vecteur tiếp tuyến đơn vị của C

$\vec{n}$ là vecteur pháp của mặt S theo phía ứng với chiều dương trên C .

b) Khi C bao quanh trục Oz , ta có:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds &= \oint_C \overline{\operatorname{grad} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)} \cdot \vec{\tau} ds \\ &= \oint_C \frac{\partial}{\partial s} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) ds = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_C \\ &= \varphi \Big|_C = 2\pi n, \end{aligned}$$

n là số vòng đi theo C , (ta đã sử dụng công thức $\frac{\partial u}{\partial \vec{c}} = \overline{\operatorname{grad} u} \cdot \vec{c}$, với

$$\frac{d}{dc} = \frac{d}{ds} \Big).$$

4) Ta tính:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = -3x^2 y^2 \vec{k}.$$

Áp dụng công thức Stokes đối với nửa mặt cầu S :

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

hệ cung bởi đường tròn C : $x^2 + y^2 = R^2$ ($z = 0$), ta có lưu số:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \iint_S 3x^2 y^2 dx dy \\
&= - 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi r dr \\
&= - 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^5 dr \\
&= - 3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi \cdot \frac{R^6}{6} \\
&= - 3 \cdot \frac{2\pi}{8} \cdot \frac{R^6}{6} = - \frac{\pi R^6}{8}.
\end{aligned}$$

53. Các trường sau đây là trường ống hay trường thế, nếu là trường thế thì tìm hàm thế vị của trường:

1) $\vec{F} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$

2) $\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$

3) $\vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{i} + zx(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$

4) $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r}$, (hệ xuyên tâm), $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, f : hàm khả vi

Bài giải

Theo định nghĩa (2.5) ta phải tính $\text{div} \vec{F}$ hoặc $\text{rot} \vec{F}$.

1) $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (5x^2y - 4xy) + \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 2y) = 10xy - 2$

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5x^2y - 4xy & 3x^2 - 2y & 0 \end{vmatrix} = (5x^2 - 10x)\vec{k}$$

Ta thấy $\vec{F}$ xác định $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{div} \vec{F}$ và $\operatorname{rot} \vec{F}$ không bằng không tại $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, do đó $\vec{F}$ không phải là trường ống và cũng không phải là trường thế.

$$2) \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(z+x) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0$$

Vậy $\vec{F}$ là trường ống $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 0$$

Vậy $\vec{F}$ là trường thế $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Theo (2.5) hàm thế của trường được xác định từ $\overline{\operatorname{grad} u} = \vec{F}$, hay:

$$\begin{aligned} du &= (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz \\ &= ydx + xdy + zdx + xdz + ydz + zdy \\ &= d(xy) + d(zx) + d(yz) \end{aligned}$$

do đó:

$$u = xy + xz + yz + C.$$

$$3) \vec{F} = yz(2x+y+z)\vec{i} + zx(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$$

xác định $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2yz + 2zx + 2xy \text{ không triệt tiêu tại } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Vậy $\vec{F}$ không phải là trường ống.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz(2x+y+z) & zx(x+2y+z) & xy(x+y+2z) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [x(x + 2y + 2z) - x(x + 2y + 2z)] \cdot \vec{i} + [y(2x + y + 2z) - \\
&\quad - y(2x + y + 2z)] \cdot \vec{j} + [z(2x + 2y + z) - z(2x + 2y + z)] \cdot \vec{k} \\
&= 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Vậy $\vec{F}$ là trường thế.

Hàm thế u được xác định từ:

$$du = yz(2x + y + z)dx + zx(x + 2y + z)dy + xy(x + y + 2z)dz$$

Do đó, theo (4.2):

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^x 0dx + \int_0^y 0dy + \int_0^z xy(x + y + 2z)dz \\
&= xyz^2 + xy^2z + x^2yz + C \\
&= xyz(x + y + z) + C.
\end{aligned}$$

(lấy $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ trong miền xác định của $\vec{F}$).

4) Ta có: $\vec{F} = f(r) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F} &= f(r) + f'(r) \frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r) \frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r) \frac{z^2}{r} \\
&= 3f(r) + rf'(r)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow 3f(r) + rf'(r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{df(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r} dr$$

$$\Rightarrow \ln f(r) = -3 \ln r + \ln C$$

$$f(r) = \frac{C}{r^3}$$

Vậy $\vec{F}$ là trường ống khi $f(r) = \frac{C}{r^3}$.

Xét:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge f(r) \vec{r} = f(r)(\vec{\nabla} \wedge \vec{r}) + \overrightarrow{\operatorname{grad} f(r)} \wedge \vec{r}$$

Nhưng: $\vec{\nabla} \wedge \vec{r} = \operatorname{rot} \vec{r} = 0$, $\overrightarrow{\operatorname{grad} f(r)} = \frac{f'(r)}{r} \vec{r}$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} f(r)} \wedge \vec{r} = \frac{f'(r)}{r} \vec{r} \wedge \vec{r} = 0$$

Vậy $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ và $\vec{F}$ là trường thế. Hàm thế u của trường được xác định từ:

$$\begin{aligned} du &= f(r)(x dx + y dy + z dz) \\ &= f(r) \cdot \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2} f(r) dr^2 = f(r) dr \end{aligned}$$

Do đó: $u = \int_0^r f(r) dr$.

Đặc biệt: $f(r) = \frac{C}{r^3}$ thì:

$$u = \int_{r_0}^r \frac{C}{r^3} dr = -\frac{C}{r^2} + \bar{C},$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \neq 0.$$

54. Chứng minh các công thức: (với giả thiết tồn tại các đạo hàm trong miền được xét):

$$1) \operatorname{div}(\vec{C}_1 \vec{F}_2 + \vec{C}_2 \vec{F}_1) = \vec{C}_1 \operatorname{div} \vec{F}_1 + \vec{C}_2 \operatorname{div} \vec{F}_2, \vec{C}_1, \vec{C}_2 = \text{const.}$$

$$2) \operatorname{div}(\vec{u} \vec{C}) = \vec{C} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u}, \vec{C} = \text{const}$$

$$3) \operatorname{div}(\vec{u} \vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u} + \vec{u} \operatorname{div} \vec{F}$$

$$4) \operatorname{rot}(\vec{C}_1 \vec{F}_2 + \vec{C}_2 \vec{F}_1) = \vec{C}_1 \operatorname{rot} \vec{F}_1 + \vec{C}_2 \operatorname{rot} \vec{F}_2, \vec{C}_1, \vec{C}_2 = \text{const.}$$

$$5) \operatorname{rot}(\vec{u} \vec{C}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u} \wedge \vec{C}, \vec{C} = \text{const}$$

$$6) \operatorname{rot}(\vec{u} \vec{F}) = \vec{u} \operatorname{rot} \vec{F} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u} \wedge \vec{F}$$

$$7) \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u}) = \Delta \vec{u} \quad (\Delta \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2})$$

$$8) \operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u}) = 0$$

$$9) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

$$10) \vec{\nabla}^2(u, v) = u \vec{\nabla}^2 v + v \vec{\nabla}^2 u + 2 \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \quad (\vec{\nabla}^2 = \Delta)$$

$$11) \operatorname{div}(\vec{u} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u}) = \left| \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u} \right|^2 + \vec{u} \Delta \vec{u}$$

$$12) \operatorname{div}(\vec{u} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{v}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{v} + \vec{u} \Delta \vec{v}$$

$$*13) \operatorname{div}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{F}_2 \operatorname{rot} \vec{F}_1 - \vec{F}_1 \operatorname{rot} \vec{F}_2$$

$$*14) \operatorname{rot}(\vec{C} \wedge \vec{F}) = \vec{C} \operatorname{div} \vec{F} - (\vec{C}, \vec{\nabla}) \vec{F}, \vec{C} = \text{const}$$

$$*15) \operatorname{rot}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = (\vec{F}_2, \vec{\nabla}) \vec{F}_1 - (\vec{F}_1, \vec{\nabla}) \vec{F}_2 + \vec{F}_1 \operatorname{div} \vec{F}_2 - \vec{F}_2 \operatorname{div} \vec{F}_1$$

Bài giải

Ta chỉ chứng minh một số công thức, các công thức khác chứng minh tương tự.

$$3) \text{ Giả sử } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \text{ thì } \vec{u} \vec{F} = uP\vec{i} + uQ\vec{j} + uR\vec{k}$$

Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{u}\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}P) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}Q) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}R) \\ &= \mathbf{u}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + Q\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + R\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \\ &= \mathbf{u}\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\overrightarrow{\operatorname{gradu}} \quad (\text{vì } \overrightarrow{\operatorname{gradu}} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right))\end{aligned}$$

Có thể chứng minh cách khác như sau:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\vec{F}) = \vec{\nabla}(\mathbf{u}\vec{F}),$$

toán tử $\vec{\nabla}$ là toán tử đạo hàm, áp dụng vào tích $\mathbf{u}\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{u}\vec{F}) &= \vec{\nabla}(\mathbf{u}\vec{F}) = \vec{\nabla}\mathbf{u}\cdot\vec{F} + \mathbf{u}\vec{\nabla}\vec{F} \\ &= \vec{F}\overrightarrow{\operatorname{gradu}} + \mathbf{u}\operatorname{div}\vec{F} \quad (\text{theo định nghĩa}).\end{aligned}$$

6) $\operatorname{rot}(\mathbf{u}\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{u}\vec{F})$, tương tự như 3):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{u}\vec{F}) &= \vec{\nabla}\mathbf{u} \wedge \vec{F} + \mathbf{u}\vec{\nabla} \wedge \vec{F} \\ &= \overrightarrow{\operatorname{gradu}} \wedge \vec{F} + \mathbf{u}\operatorname{rot}\vec{F} \quad (\text{theo định nghĩa})\end{aligned}$$

7) $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{gradu}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\mathbf{u}) = \vec{\nabla}^2\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}$.

8) $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{gradu}}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\mathbf{u}) = 0$ (tích có hướng 2 vecteur bằng nhau)

9) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}, \vec{F})$ (tích hỗn hợp có 2 vecteur bằng nhau).

$$\begin{aligned}
10) \quad \vec{\nabla}^2(u, v) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(u, v) \\
&= \vec{\nabla}(u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u) = (\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v) + u\vec{\nabla}^2v + \vec{\nabla}v \cdot \vec{\nabla}u + v\vec{\nabla}^2u \\
&= 2\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v + u\vec{\nabla}^2v + v\vec{\nabla}^2u \quad (\vec{\nabla}^2 = \Delta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12) \quad \operatorname{div}(\overrightarrow{u \operatorname{grad} v}) &= \vec{\nabla}(u\vec{\nabla}v) = \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v + u\vec{\nabla}^2v \\
&= \overrightarrow{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v} + u\Delta v
\end{aligned}$$

$v = u$, ta có 11).

13) Ký hiệu $\vec{F}^c$: chỉ toán tử $\vec{\nabla}$ không tác dụng vào $\vec{F}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) &= \vec{\nabla}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) \\
&= (\vec{\nabla}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{\nabla}, \vec{F}_1, \vec{F}_2^c) + (\vec{\nabla}, \vec{F}_1^c, \vec{F}_2) \\
&= (\vec{F}_2^c, \vec{\nabla}, \vec{F}_1) + (\vec{F}_1^c, \vec{F}_2, \vec{\nabla}) \\
&= \vec{F}_2 \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_1) - (\vec{F}_1 \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_2) \\
&= \vec{F}_2 \operatorname{rot} \vec{F}_1 - \vec{F}_1 \operatorname{rot} \vec{F}_2
\end{aligned}$$

(Ta đã sử dụng tính chất của tích hỗn hợp $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$).

15) Ta có:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) \\
&= \vec{\nabla} \wedge (\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2^c) + \vec{\nabla} \wedge (\vec{F}_1^c \wedge \vec{F}_2)
\end{aligned}$$

$\vec{F}^c$ chỉ: toán tử $\vec{\nabla}$ không tác dụng vào $\vec{F}$.

Bây giờ áp dụng tính chất của tích có hướng của 3 vecteur:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

ta có:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) &= \vec{F}_1(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2) - \vec{F}_2(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1) + \vec{F}_1(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2) - \vec{F}_2(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1) \\ &= (\vec{F}_2 \cdot \vec{\nabla})\vec{F}_1 - \vec{F}_2 \cdot \text{div}\vec{F}_1 + \vec{F}_1 \cdot \text{div}\vec{F}_2 - (\vec{F}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{F}_2 \end{aligned}$$

Trường hợp $\vec{F}_1 = \vec{C} = \text{const}$, $\vec{F}_2 = \vec{F}$ ta có 14).

PHỤ CHƯƠNG
CÁC ĐỀ GIẢI TÍCH HK II 2004 - 2008 (ĐHBK)

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. 1) Lập phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

$$x = e^t \cos t, z = t - 1 \text{ tại điểm ứng với } t = 0$$

2) Cho $U = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ và 2 điểm: A(1; -1; 0), B(2; 1; -2). Tính đạo

hàm của U tại điểm B theo hướng $\vec{AB}$. Tìm $\max \left| \frac{\partial U}{\partial t} (B) \right|$.

Câu II. 1) Tính $\iint_D e^{|x-y|} dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

2) Tính $\iiint_V \frac{2x^2 + z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Câu III. 1) Dùng tích phân đường tính diện tích hình xy giới hạn bởi các đường: $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$.

2) Tính $\int_{ABC} \arctg \frac{x}{y} dx + \arccot g \frac{y}{x} dy$, với ABC là đường gấp khúc A(1; 1), B(2; 1), C(2; 2).

Câu IV. 1) Tính $\iint_S x^2 (y^2 + z^2) dy dx$, S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \leq 0$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu.

2) Chứng minh rằng với mọi $a < 3$ ta có $\int_0^{+\infty} \frac{2^{ax} - 1}{x \cdot 2^{3x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x \cdot e^{3x}} dx = 0$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) $x' = e^t \cdot (\cos t - \sin t)$, $y' = e^t \cdot (\sin t + \cos t)$, $z' = 1$

Tại $t = 0 \Rightarrow$ điểm $M_0(1; 0; -1)$, vectơ tiếp tuyến $\vec{v}_M = (1; 1; 1)$ (0,5đ)

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$; phương trình pháp diện:

$$x + y + z = 0 \quad (0,5đ)$$

2) $U'_x = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$; $U'_y = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$;

$$U'_z = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\Rightarrow \vec{\text{grad}}U(B) = \left(\frac{-2}{27}; \frac{-1}{27}; \frac{2}{27} \right)$ (0,5đ)

$\vec{AB} = (1; 2; -2) \Rightarrow \vec{e} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right)$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(B) = \frac{-2}{27} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{27} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{-8}{81}$ (0,5đ)

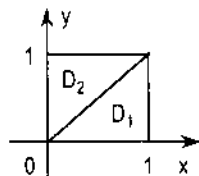
$\text{Max} \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(B) = |\vec{\text{grad}}U(B)| = \frac{1}{27} \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{9}$ (0,5đ)

Câu II. (2,5đ)

1) $D_1 = \{(x, y) \in D, x \geq y\}$, $D_2 = \{(x, y) \in D, x \leq y\}$

$$\iint_{D_1} e^{|x-y|} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^x \cdot e^{-y} dy$$

$$= \int_0^1 e^x \left(-e^{-y} \Big|_0^x \right) dx = \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - 2 \quad (0,5đ)$$



$$\text{Tương tự } \iint_{D_2} e^{|x-y|} dx dy = e - 2 \Rightarrow I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = 2.(e - 2) \quad (0,5d)$$

Chú ý: Lấy đối xứng qua đường $y = x$ thì $D_1 \rightarrow D_2$; $e^{|x-y|}$ không đổi
 $\Rightarrow I = 2 \iint_{D_1} = 2.(e - 2)$

$$2) I = 2 \iiint_V \frac{x^2}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz + \iiint_V \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2+1} dx dy dz = 2I_1 + I_2$$

$$\text{Đổi sang tọa độ cầu } \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow |J| = r^2 \sin \theta; \quad V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \frac{r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta}{1+r^2} \cdot r^2 \sin \theta dr = \dots = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) \quad (0,5d)$$

$$\text{Tương tự } I_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right). \text{ Vậy } I = 4\pi \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) = \pi^2 - \frac{8\pi}{3} \quad (0,5d)$$

Chú ý: x, y, z , đối xứng trong $V \Rightarrow I = 3I_2$; tính I_2 đơn giản hơn I_1 (xem đáp án đề 2).

Cách 2: Hoặc hoán vị x, y, z

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iiint_V \frac{x^2 + y^2 + z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_V \left[1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \right] dx dy dz \\ &= V - \iiint_V \frac{dx dy dz}{1 + x^2 + y^2 + z^2} = V - J \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$\text{Đổi sang tọa độ cầu...} \Rightarrow J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} \cdot r^2 \sin \theta dr = 4\pi - \pi^2 \quad (0,5d)$$

$$V = \text{khối cầu}, R = 1 \Rightarrow V = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow I = \frac{4\pi}{3} - (4\pi - \pi^2) = \pi^2 - \frac{8\pi}{3} \quad (0,5d)$$

Chú ý: Sinh viên không tách, thay tọa độ cầu thẳng vào I , tính đúng đến đâu cho điểm tương ứng đến đó.

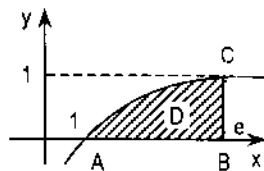
Câu III. (2,5đ)

1) Biên của D là $L = AB \cup BC \cup \widehat{CA}$ (hình vẽ)

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx.$$

Phương trình AB: $y = 0$; phương trình BC: $x = e$

$$\Rightarrow \int_{BC} = \int_0^1 edx = e \quad (1) \quad (0,5đ)$$



Phương trình $\widehat{CA}$: $y = \ln x$

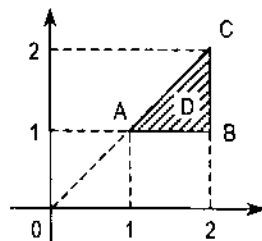
$$\Rightarrow \int_{\widehat{CA}} = \int_e^1 \left(x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \right) dx = [x - (x \ln x - x)] \Big|_e^1 = 2 - e \quad (2)$$

$$(2) + (1) \Rightarrow S(D) = 1 \quad (0,5đ)$$

$$2) P = x \arctg \frac{x}{y} \Rightarrow P'_y = \frac{-x^2}{x^2 + y^2}$$

$$Q = \operatorname{arccotg} \frac{y}{x} \Rightarrow Q'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow Q'_x - P'_y = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} \quad (0,5đ)$$



Phương trình CA: $y = x$

$$\Rightarrow \int_{CA} Pdx + Qdy = \int_2^1 \left(x \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_2^1 = -\frac{5\pi}{8} \quad (0,5đ)$$

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng Green: } I &= \int_{ABC} Pdx + Qdy = \oint_{ABCA} - \int_{CA} = \iint_D \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} dx dy + \frac{5\pi}{8} \\ &= \dots = \frac{3}{2} \arctg 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \ln \frac{8}{5} \quad (0,5đ) \end{aligned}$$

Cách 2: (Tính trực tiếp)

$$\text{Phương trình AB: } y = 1 \Rightarrow \int_{AB} = \int_1^2 x \arctg x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \arctg x dx^2$$

$$= \dots = \frac{1}{2} \left(5 \operatorname{arctg} 2 - 1 - \frac{\pi}{2} \right) \quad (0,5d)$$

Phương trình BC: $x = 2$

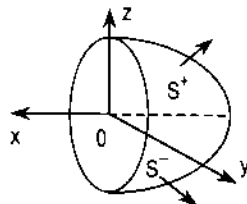
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{BC} &= \int_1^2 \operatorname{arccotg} \frac{y}{2} dy = y \cdot \operatorname{arccotg} \frac{y}{2} \Big|_1^2 - \int_1^2 y \cdot \frac{-1}{1 + \frac{y^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} dy \\ &= \dots = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} + \ln \frac{8}{5} \quad (0,5d) \end{aligned}$$

Vì $\operatorname{arccotg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 2 \Rightarrow I = \frac{3}{2} \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \ln \frac{8}{5} \quad (0,5d)$

Câu IV, (2,5d)

1) $S = S^+ \cup S^-$, S^+ (S^-) là phần mặt S ứng

với $z \geq 0$ ($z \leq 0$) $I = \iint_{S^+} + \iint_{S^-}$



S^+ , S^- đối xứng qua Oxy

$$\Rightarrow \text{chúng có cùng hình chiếu } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ trên Oxy} \quad (0,5d)$$

Phương trình S : $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, $\vec{n}_{S^+}$ tạo với $\vec{Oz}$ góc nhọn

$$\Rightarrow \iint_{S^+} = \iint_D x^2 (1 - x^2) dy dx \quad (1) \quad (0,5d)$$

$\vec{n}_{S^-}$ tạo với $\vec{Oz}$ góc tù

$$\Rightarrow \iint_{S^-} = - \iint_D x^2 (1 - x^2) dy dz; \quad (2) + (1) \Rightarrow I = 0 \quad (0,5d)$$

Cách 2:

Bổ sung mặt D hướng lên trên theo $\vec{Ox}$, phương trình D : $z = 0$

$$\Rightarrow \iint_D = 0 \Rightarrow I = \oint_{S \cup D} x^2 (y^2 + z^2) dy dx \quad (0,5d)$$

Áp dụng Ostrogradski $\Rightarrow I = \iiint_V x^2 2z dx dy dz$

$$(V = \frac{1}{2} \text{ khối cầu: } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \leq 0; x \leq 0) \quad (0,5d)$$

V đối xứng qua mặt $z = 0$, hàm lấy tích phân lẻ theo $z \Rightarrow I = 0$ (0,5đ)

2) Đặt $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{2^{ax} - 1}{x \cdot 2^{3x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x \cdot e^{3x}} dx$. Với $a < 3$, $I(a)$ thoả mãn điều

kiện lấy được đạo hàm.

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(2^{ax} \ln 2) \cdot x}{x \cdot 2^{3x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-e^{ax} \cdot x}{x \cdot e^{3x}} dx \quad (0,5đ)$$

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{+\infty} 2^{(a-3)x} \ln 2 dx - \int_0^{+\infty} e^{(a-3)x} dx \\ &= \frac{2^{(a-3)x}}{(a-3)} \Big|_0^{+\infty} - \frac{e^{(a-3)x}}{(a-3)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{0-1}{a-3} - \frac{0-1}{a-3} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow I(a)$ không đổi $\forall a < 3$. $I(0) = 0 \Rightarrow I(a) = 0, \forall a < 3$ (đpcm) (0,5đ)

Cách 2: Có thể tính trực tiếp từng tích phân rồi lấy tổng:

$$\left(\text{có: } \frac{2^{ax} - 1}{x} = \int_0^a 2^{yx} \ln 2 dy \Rightarrow \dots \right)$$

Chú ý: + Nếu sinh viên không nói gì cứ tính đạo hàm hoặc đổi thứ tự lấy tích phân (cách 2) thì trừ 0,25 điểm.

+ Tổng điểm cả bài làm tròn $0,75 = 1$.

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. 1) Lập phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt:

$$2x - e^{-y'} + \arctg \frac{z}{y} = 1 \text{ tại } M(1; -1; 0)$$

2) Cho $U = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ và điểm $A(1; 2; -2)$.

Tính đạo hàm của U tại điểm A theo hướng $\vec{OA}$. Tìm $\max \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right| (A)$.

Câu II. 1) Tính $\iint_D |x - y| dx dy$, $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

2) Tính $\iiint_V \frac{5y^2 + z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$.

Câu III. 1) Dùng tích phân đường tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi các đường: $y = e^{-x}$; $y = e$; $x = 0$.

2) Tính $\int_{ABC} \arctg \frac{y}{x} (xdx + ydy)$, với ABC là đường gấp khúc A(1; 1), B(1; 2), C(2; 2).

Câu IV. 1) Tính $\iint_S y^2 (x^2 + z^2) dx dz$, S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \geq 0$ ($a > 0$), hướng của S là phía ngoài mặt cầu.

2) Chứng minh rằng với mọi $a < 2$ ta có $\int_0^{+\infty} \frac{3^{ax} - 1}{x \cdot 3^{2x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x \cdot e^{2x}} dx = 0$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) Phương trình mặt: $F(x, y, z) = 2x - e^{-yz} + \arctg \frac{z}{y} - 1 = 0$

$$\begin{cases} F'_x = 2; & F'_y = z \cdot e^{-yz} - \frac{z}{y^2 + z^2} \\ F'_z = y \cdot e^{-yz} + \frac{y}{y^2 + z^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vecteur pháp tuyến tại M, $\vec{n} = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1)$ (0,5đ)

Phương trình tiếp diện: $1 \times (x - 1) + 0 - 1 \times (z - 0) = 0$ hay: $x - z - 1 = 0$

Phương trình pháp tuyến: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$ (0,5đ)

2) $U'_x = \frac{x}{\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, thay x bởi y, z ta có U'_y .

$\vec{U'} \Rightarrow \text{grad}U(A) = \left(\frac{1}{12}; \frac{2}{12}; \frac{-2}{12}\right)$ (0,5đ)

$$\vec{e} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(A) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{12} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad (0,5d)$$

$$\text{Max} \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(A) = |\text{grad} U(A)| = \frac{1}{12} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{4} \quad (0,5d)$$

Câu II. (2,5đ)

$$1) D = D_1 \cup D_2, D_1 = \{(x, y) \in D, x \geq y\};$$

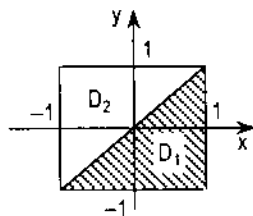
$$D_2 = \{(x, y) \in D, x \leq y\}.$$

$$\iint_{D_1} |x - y| dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x (x - y) dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-1}^x dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{2} dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \quad (0,5d)$$

$$\text{Tương tự } \iint_{D_2} = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } \iint_D |x - y| dx dy = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \quad (0,5d)$$



$$2) (\text{Tương tự đề 1}): I = 5I_1 + I_2; I_2 = \iiint_V \frac{z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

$$\text{Đổi sang tọa độ cầu...; } V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^2 \cdot \cos^2 \theta}{1 + r^2} \cdot r^2 \sin \theta dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi \right) \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(r^2 - 1 + \frac{1}{1 + r^2} \right) dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{r^3}{3} - r + \arctgr \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{4\pi^2}{9} \quad (0,5d)$$

$$\text{Tương tự } I_1 = I_2 \Rightarrow I = 6 \cdot \frac{4\pi^2}{9} = \frac{8\pi^2}{3} \quad (0,5d)$$

Cách 2: Hoán vị x, y, z

$$\Rightarrow \text{Tổng: } 3I = \iiint_V \frac{6 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

$$\Rightarrow I = 2 \iiint_V \left[1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \right] dx dy dz = 2V - 2J \quad (0,5d)$$

$$\text{Đổi sang toạ độ cầu...} \Rightarrow J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1 + r^2} \right) \sin \theta dr$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1 + r^2} \right) dr \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot (r - \arctgr) \Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$V = \text{khối cầu}, R = \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{3})^3 = 4\pi\sqrt{3}$$

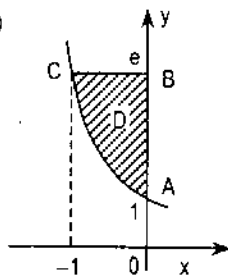
$$\Rightarrow I = 2 \cdot \left[4\pi\sqrt{3} - 4\pi \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{8\pi^2}{3} \quad (0,5d)$$

Câu III. (2,5đ)

1) Biên của D là $L = AB \cup BC \cup \widehat{CA}$ (hình vẽ)

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

Phương trình AB: $x = 0$; $\int_{AB} = 0$; phương trình BC: $y = e$



$$\Rightarrow \int_{BC} = - \int_0^{-1} e dx = +e \quad (1) \quad (0,5d)$$

Phương trình CA: $y = e^{-x}$

$$\Rightarrow \int_{\widehat{CA}} = \int_{-1}^0 (-xe^{-x} - e^{-x}) dx = \int_{-1}^0 (x+1) de^{-x} = 2 - e \quad (2)$$

$$(2) + (1) \Rightarrow S(D) = 1 \quad (0,5d)$$

$$2) P = x \arctg \frac{y}{x} \Rightarrow P'_y = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$Q = y \arctg \frac{y}{x} \Rightarrow Q'_x = \frac{-y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow Q'_x - P'_y = -1 \quad (0,5d)$$

Áp dụng Green: $I = \oint_{ACBA} Pdx + Qdy = \iint_D (-1) dx dy = -S(ABC) = -\frac{1}{2}$

Mặt khác: $\oint_{ACBA} = \int_{AC} + \int_{CBA} \Rightarrow I = \int_{ABC} Pdx + Qdy = \int_{AC} - \oint_{ACBA} \quad (0,5d)$

Phương trình AC: $y = x \Rightarrow \int_{AC} Pdx + Qdy = \int_1^2 \arctg 1 \cdot (2x dx)$
 $= \frac{\pi}{4} x^2 \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{4}$. Vậy $I = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad (0,5d)$

Cách 2: (Trực tiếp)

Phương trình AB: $x = 1 \Rightarrow \int_{AB} = \int_1^2 (\arctg y) \cdot y dy$
 $= \dots = \frac{1}{2} \left(5 \arctg 2 - \frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (0,5d)$

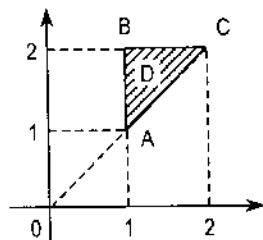
Phương trình BC: $y = 2$

$$\Rightarrow \int_{BC} = \int_1^2 \left(\arctg \frac{2}{x} \right) x dx = \dots = \frac{1}{2} \left(4 \arctg \frac{1}{2} - \arctg 2 + 2 \right) \quad (0,5d)$$

$$\text{Vì } \arctg 2 + \arctg \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad (0,5d)$$

Câu IV. (2,5d)

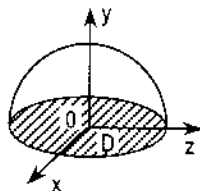
1) Hình chiếu S lên Oxz là D: $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 \leq a^2 \end{cases}$



Phương trình S: $y^2 = a^2 - x^2 - z^2$

$\vec{n}_S$ tạo với Oy góc nhọn

$$\Rightarrow I = \iint_D (a^2 - x^2 - z^2)(x^2 + z^2) dx dz \quad (0,5d)$$



$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r; D \rightarrow D', \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2) r^2 dr \quad (0,5d)$$

$$I = 2\pi \cdot \left[a^2 \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]_0^a = \frac{\pi a^6}{6} \quad (0,5d)$$

Cách 2:

Bổ sung mặt D hướng ngược với $\vec{Oy}$. Vì phương trình D: $y = 0$

$$\Rightarrow \iint_D = 0 \Rightarrow \iint_S = \iint_{S \cup D} = \iiint_V 2y(x^2 + z^2) dx dy dz$$

$$\text{Đổi sang tọa độ cầu} \Rightarrow I = \frac{\pi a^6}{6}$$

2) (Tương tự đề 1)

$$\text{Đặt } I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{3^{ax} - 1}{x \cdot 3^{2x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{ax}}{x \cdot e^{2x}} dx.$$

Với $a < 2 \Rightarrow I(a)$ thỏa mãn điều kiện lấy được đạo hàm.

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(3^{ax} \ln 3) \cdot x}{x \cdot 3^{2x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-e^{ax} \cdot x}{x \cdot e^{2x}} dx \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{+\infty} 3^{(a-2)x} \ln 3 dx - \int_0^{+\infty} e^{(a-2)x} dx \\ &= \frac{3^{(a-2)x}}{(a-2)} \Big|_0^{+\infty} - \frac{e^{(a-2)x}}{(a-2)} \Big|_0^{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(a) \text{ không đổi } \forall a < 2. \text{ Mà } I(0) = 0 \Rightarrow I(a) = 0, \forall a < 2 \text{ (dpcm)} \quad (0,5d)$$

Chú ý: Có thể tính trực tiếp từng tích phân rồi lấy tổng.

ĐỀ 3**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')**

Câu I. 1) Tính độ cong của đường: $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = 1$

2) Cho $\vec{F} = [y \cos(xy)] \cdot \vec{i} + [x \cos(xy)] \cdot \vec{j} + \left(z \sqrt{1+z^2} \right) \cdot \vec{k}$. Chứng minh rằng $\vec{F}$ là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. 1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$

2) Tính thể tích miền V xác định bởi $0 \leq z \leq 2 - y - x$, $y \geq 0$, $y + 2x \geq 1$, $y + x \leq 1$.

Câu III. 1) Tính $\int_{AB} (4x^3 + 3y) dx - (2x - 3y^2) dy$

AB là nửa đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$, chiều đi từ $A(1; 0)$ đến $B(-1; 0)$.

2) Gọi C_a là đường elip:

$$ax^2 + y^2 = 1, a > 0 \text{ và } I_a = \oint_{C_a} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$$

Chứng minh rằng $I_a = -2\pi$ với mọi $a > 0$.

Câu IV. 1) Tính $\iint_S y^2 \sqrt{x^2 + z^2} dx dz$, S là biên của miền V : $y^2 \geq x^2 + z^2$,

$-1 \leq y \leq 0$, hướng ra ngoài.

2) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{3^{ax^2} - 1}{x \cdot 3^{x^2}} dx$, với $a < 1$.

ĐÁP ÁN**Câu I.** (2,5đ)

$$1) x'_1 = t \sin t; y'_1 = t \cos t \Rightarrow x'^2_1 + y'^2_1 = t^2 \quad (0,5đ)$$

$$\begin{cases} x'' = \sin t + t \cos t \\ y'' = \cos t - t \sin t \end{cases} \Rightarrow |y''x' - y'x''| = \dots = |-t^2|$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow C = \frac{t^2}{|t|^3} = 1 \quad (0,5d)$$

2) Đặt $P = y \cos xy$, $Q = x \cos xy$, $R = z\sqrt{1+x^2}$, ta có:

$$R'_y - Q'_z = 0; \quad P'_z - R'_x = 0 \quad (0,5d)$$

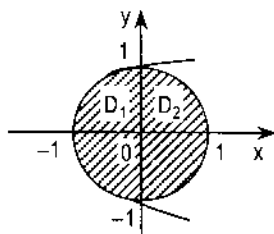
$$Q'_x = \cos xy - x y \sin xy = P'_y \Rightarrow Q'_x - P'_y = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\text{Rot}} \vec{F} = 0 \quad (\text{đpcm}) \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} \text{Hàm thế vị } U &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y x \cos xy \, dy + \int_0^z z \sqrt{1+z^2} \, dz + C \\ &= \sin xy + \frac{1}{3} \sqrt{(1+z^2)^3} + C \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Câu II. (2,5d)

1) Miền lấy tích phân D: $\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ y^2 - 1 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$



$$\begin{aligned} D &= D_1 \cup D_2; \quad D_1: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{x+1} \leq y \leq \sqrt{x+1} \end{cases} \\ D_2: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

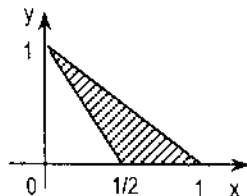
$$\Rightarrow I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \quad (0,5d)$$

$$2) V = \iiint_V dx dy dz = \iint_D dy dx \int_0^{2-y-x} dz,$$

$$D = \{(x,y): y \geq 0, y + 2x \geq 1, y + x \leq 1\} \quad (0,5d)$$

$$\Leftrightarrow D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1-y}{2} \leq x \leq 1-y \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 dy \int_{\frac{1-y}{2}}^{1-y} (2-y-x) dx \quad (0,5d)$$



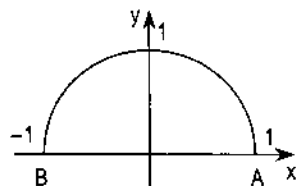
$$V = \int_0^1 \left[(2-y)x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1-y}{2}}^{1-y} dy = \int_0^1 \left[\frac{1-y}{2} + \frac{(1-y)^2}{8} \right] dy$$

$$= \left[\frac{(1-y)^2}{4} + \frac{(1-y)^3}{8 \cdot 3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}$$

$$V = \frac{7}{24} \quad (0,5d)$$

Câu III. (2,5đ)

$$1) \widehat{AB}: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t_A = 0, t_B = \pi$$



$$I = \int_{AB} 4x^3 dx + \int_{AB} 3y^2 dy + \int_{AB} (3ydx - 2xdy) \quad \begin{array}{c} -1 \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ A \end{array} \quad x$$

$$= \int_0^\pi (4 \cos t)^3 d \cos t + \int_0^\pi 3 \sin^2 t d \sin t + \int_0^\pi (-3 \sin^2 t - 2 \cos^2 t) dt \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} I &= (\cos^4 t + \sin^3 t) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{5}{2} - \frac{\cos 2t}{2} \right) dt \\ &= 0 - \left(\frac{5}{2} t - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^\pi = -\frac{5\pi}{2} \end{aligned} \quad (0.5 \text{ dt})$$

Cách 2: $I = \int_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB \cup BA}} - \int_{\widehat{BA}}$;

Phương trình BA: $y = 0 \Rightarrow \int_{BA} = \int_{-1}^1 4x^3 dx = 0$

$$\underbrace{\phi}_{AB \cup BA} = \iint_D (-2-3) dx dy = -5S(D), D = \frac{1}{2} \text{ hình tròn, } R = 1$$

$$\Rightarrow S(D) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = -\frac{5\pi}{2}$$

2) Với $a = 1 \Rightarrow$ phương trình $C_1 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \text{ từ } 0 \text{ đến } 2\pi$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi \quad (0,5d)$$

$$\text{Đặt } P = \frac{x+y}{x^2+y^2}; \quad Q = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q'_x &= \frac{-1(x^2+y^2) - 2x(y-x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = P'_y, \quad \forall (x, y) \neq (0; 0) \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$\forall a \neq 1, C_1 \cup C_a$ giới hạn miền D không chứa $O(0; 0)$

$$\Rightarrow \oint_{C_a} Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy = -2\pi$$

Vậy $\forall a > 0$ ta có $I_a = -2\pi$ (đpcm) (0,5d)

Câu IV. (2,5đ)

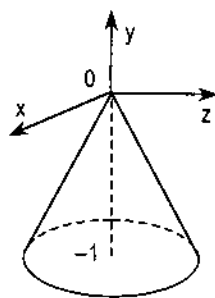
1) Áp dụng Ostrogradski $\Rightarrow I = \iiint_V 2y\sqrt{x^2+z^2} dx dy dz$ (0,5d)

Đổi sang tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \\ y = y \end{cases} \Rightarrow |J| = r; \quad V \rightarrow V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{-1}^1 r y dy \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^1 r^2 \left(y^2 \Big|_{-1}^1 \right) dr = 2\pi \int_0^1 r^2 (r^2 - 1) dr \\ &= 2\pi \left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{-4\pi}{15} \end{aligned} \quad (0,5d)$$



2) $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{3^{ax^2} - 1}{x \cdot 3^{x^2}} dx$, với $a < 1$, $I(a)$ thỏa mãn điều kiện lấy được

đạo hàm (0,5d)

$$I'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{(a-1) \cdot x^2}}{a-1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \cdot \left(0 - \frac{1}{a-1} \right) = \frac{1}{2 \cdot (1-a)}$$

$$\begin{aligned} \forall I(0) = 0 \Rightarrow I(a) &= \int_0^a \frac{1}{2 \cdot (1-t)} dt \\ &= \frac{-1}{2} \ln|1-t| \Big|_0^a = -\frac{1}{2} \ln(1-a) \quad (0,5đ) \end{aligned}$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K49 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. 1) Tính độ cong của đường: $r = 1 + \sin\varphi$ tại điểm ứng với $\varphi = 0$.

2) Cho $\vec{F} = e^x \cdot \vec{i} + [z \sin(yz)] \cdot \vec{j} + [(y \sin(yz))] \cdot \vec{k}$. Chứng minh rằng $\vec{F}$ là trường thế. Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. 1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x, y) dy$.

2) Tính thể tích miền V xác định bởi $x \geq 0$, $x + 2y \geq 2$, $x + y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3 - x - y$.

Câu III. 1) Tính $\int_{AB} (5x^4 + 4y)dx - (4y^3 + 3x)dy$

AB là nửa đường tròn $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, chiều đi từ $A(0; -a)$ đến $B(0; a)$, ($a > 0$).

2) Gọi C_b là đường elip:

$$x^2 + by^2 = 1, b > 0 \text{ và } I_b = \oint_{C_b} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$$

Chứng minh rằng $I_b = 2\pi$ với mọi $b > 0$.

Câu IV. 1) Tính $\iiint_S x^3 \sqrt{y^2 + z^2} dydz$, S là biên của miền $V: x^2 \geq y^2 + z^2$,

$0 \leq x \leq 1$, hướng ra ngoài.

2) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{1 - 2^{a\sqrt{x}}}{x \cdot 2^{\sqrt{x}}} dx$, với $a < 1$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

$$1) r' = \cos \varphi; r'' = -\sin \varphi$$

$$\text{Tại } \varphi = 0 \Rightarrow r = 1, r' = 1, r'' = 0, r'^2 + r''^2 = 2 \quad (0,5đ)$$

$$|r^2 + 2r'^2 - rr''| = |1 + 2 - 0| = 3 \Rightarrow C = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (0,5đ)$$

2) Đặt $P = e^x$, $Q = z \sin yz$, $R = y \sin yz$, ta có:

$$R'_y = Q'_z = \sin yz + yz \cos yz \Rightarrow R'_y - Q'_z = 0 \quad (0,5đ)$$

$$P'_z - R'_x = 0 - 0 = 0, Q'_x - P'_y = 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\text{Rot}} \vec{F} = 0 \quad (\text{dpcm}) \quad (0,5đ)$$

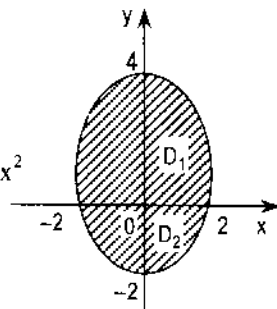
$$\begin{aligned} \text{Hàm thế vị } U &= \int_0^x e^x \cdot dx + \int_0^y 0 \cdot dy + \int_0^z y \sin yz dz + C \\ &= e^x - \cos yz + C \quad (0,5đ) \end{aligned}$$

Câu II. (2,5đ)

$$1) \text{ Miền lấy tích phân } D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 4-x^2 \end{cases}$$

$$D = D_1 \cup D_2; D_1: \begin{cases} -2 \leq y \leq 0 \\ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y} \end{cases} \quad (0,5đ)$$

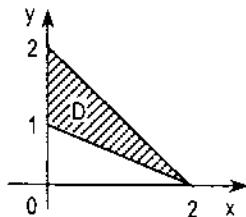


$$\Rightarrow I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_{-2}^0 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y) dx \quad (0,5đ)$$

$$2) V = \iiint_V dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{3-x-y} dy,$$

$$D: x \geq 0, x + 2y \geq 2, x + y \leq 2 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2-x}{2} \leq y \leq 2-x \end{cases}$$

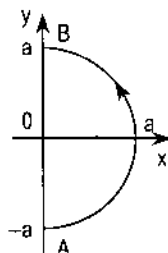


$$\Rightarrow V = \int_0^2 dx \int_{\frac{2-x}{2}}^{2-x} (3-x-y) dy \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left[(3-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{2-x}{2}}^{2-x} dx = \int_0^2 \left[\frac{2-x}{2} + \frac{(2-x)^2}{8} \right] dx \\ &= - \left[\frac{(2-x)^2}{4} + \frac{(2-x)^3}{8 \cdot 3} \right]_0^2 = \frac{4}{4} + \frac{8}{24} = \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Câu III. (2,5đ)

1) Phương trình $\widehat{AB}$: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t_A = -\frac{\pi}{2}, t_B = \frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned} I &= \int_{\widehat{AB}} 5x^4 dx - \int_{\widehat{AB}} 4y^3 dy + \int_{\widehat{AB}} 4y dx - 3x dy \\ &= a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos^4 t \, t d \cos t - a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^3 t \, t d \sin t + \\ &\quad + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [4(-\sin^2 t) - 3 \cos^2 t] dt \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} I &= (a^4 \cos^5 t - a^3 \sin^4 t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7 - \cos 2t}{2} dt \\ &= a^2 \cdot \left(0 - \frac{7\pi}{2} \right) = \frac{-7\pi a^2}{2} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Cách 2: $I = \int_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB} \cup BA} - \int_{BA};$

Phương trình BA: $x = 0 \Rightarrow \int_{BA} = \int_a^{-a} 4y^3 dy = 0 \quad (0,5d)$

$$\oint_{\widehat{AB \cup BA}} \phi = \iint_D (-3-4) dx dy = -7S(D), D = \frac{1}{2} \text{ hình tròn, } R = a$$

$$\Rightarrow S(D) = \frac{\pi a^2}{2} \Rightarrow I = \frac{-7\pi a^2}{2}$$

$$2) \text{ Với } b = 1 \Rightarrow \text{phương trình } C_1 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \text{ từ } 0 \text{ đến } 2\pi$$

$$\Rightarrow I_b = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \quad (0,5d)$$

$$\text{Đặt } P = \frac{x-y}{x^2+y^2}; Q = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow Q'_x = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = P'_y, \forall (x, y) \neq (0; 0) \quad (0,5d)$$

$\forall b \neq 1, C_1 \cup C_b$ giới hạn miền D không chứa $O(0; 0)$

$$\Rightarrow \oint_{C_b} P dx + Q dy = \oint_{C_1} P dx + Q dy = 2\pi$$

Vậy $\forall b > 0$ ta có $I_b = 2\pi$ (đpcm) $(0,5d)$

Câu IV. (2,5d)

$$1) \text{ Áp dụng Ostrogradski } \Rightarrow I = \iiint_V 3x^2 \sqrt{z^2 + y^2} dx dy dz \quad (0,5d)$$

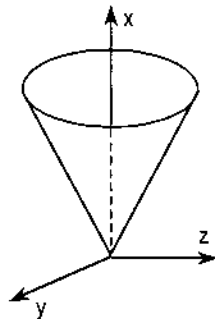
Đổi sang tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \\ x = x \end{cases} \Rightarrow |J| = r; V \rightarrow V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^1 r 3x^2 dx \quad (0,5d)$$

$$I = 3.2\pi \int_0^1 r^2 \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_r^1 dr = 2\pi \int_0^1 r^2 (1 - r^3) dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3} \quad (0,5d)$$



$$2) I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - 2^{a\sqrt{x}} - 1}{x \cdot 2^{\sqrt{x}}} dx, \text{ với } a < 1, I(a) \text{ thỏa mãn điều kiện lấy}$$

được đạo hàm:

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(-2^{a\sqrt{x}} \ln 2) \cdot \sqrt{x}}{x \cdot 2^{\sqrt{x}}} dx = - \int_0^{+\infty} \left(2^{(a-1)\sqrt{x}} \ln 2 \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (0,5d)$$

$$I'(a) = -2 \cdot \left. \frac{2^{(a-1)\sqrt{x}}}{a-1} \right|_0^{+\infty} = -2 \cdot \left(0 - \frac{1}{a-1} \right) = \frac{2}{a-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } I(0) = 0 \Rightarrow I(a) &= \int_0^a \frac{2}{t-1} dt \\ &= 2 \ln|t-1| \Big|_0^a = 2 \ln|a-1| = 2 \ln(1-a) \end{aligned} \quad (0,5d)$$

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5đ)

- 1) Tính độ cong tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{4}$ của đường $\begin{cases} x = \sin^4 t \\ y = \cos^4 t \end{cases}$
- 2) Tính $\iint_S x^3 dydz$, trong đó S là nửa mặt elipxoit $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$, hướng ra ngoài elipxoit là hướng của S .

Câu II. (2,5đ)

- 1) Tìm giới hạn $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\sin y}^{1+y^2} \arctg(y-x) dx$.
- 2) Tính $\iiint_V ze^{x^2+y^2} dx dy dz$, trong đó V xác định bởi $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

Câu III. (2,5đ)

- 1) Chứng minh rằng biểu thức $\frac{3xdx + 2ydy}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^4}$ là vi phân toàn phần của một hàm số $U(x, y)$ nào đó. Tìm $U(x, y)$.
- 2) Tính $\int_{AB} \sqrt{x^3 y} [(x+y)dx - (x-y)dy]$, trong đó AB là đoạn thẳng đi từ A(0;2) đến B(2;0).

Câu IV. (2,5đ)

- 1) Tính $\iint_D (x+y)e^{x-y} dx dy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $x=0, x=1, y=0, y=1$.
- 2) Tính thông lượng của trường vector $\vec{F} = (x^2y + y^2z + z^2x) \left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \right)$ qua nửa mặt cầu S: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ hướng ra ngoài mặt cầu là hướng của S.

ĐÁP ÁN**Câu I. (2,5)**

- 1) $\left. \begin{aligned} x' &= 4\sin^3 t \cos t; & x'' &= 12\sin^2 t \cos^2 t - 4\sin^4 t \\ y' &= -4\cos^3 t \sin t; & y'' &= 12\cos^2 t \sin^2 t - 4\cos^4 t \end{aligned} \right\} (0,5đ)$
- Tại $t = \frac{\pi}{4} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} x' &= 1; & x'' &= 2 \\ y' &= -1; & y'' &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \left. \right\} (0,5đ)$

- 2) Gọi D là mặt $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$, hướng ngược với $\vec{Oz}$

$$\rightarrow \iint_S x^3 dy dz = 0 \rightarrow I = \iint_S = \iint_{SUD} \quad (0,5đ)$$

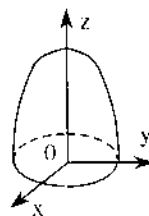
Áp dụng Ostro $\Rightarrow I = \iiint_V 3x^2 dx dy dz$, với

$$V: \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} r \cos \varphi \sin \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \varphi \sin \theta \rightarrow |J| = \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin \theta; V \rightarrow V' \end{cases} \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{3} r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta)(-d \cos \theta) \int_0^1 r^4 dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{15\sqrt{6}} \end{aligned}$$

(0,5d)



Chú ý: (1) Có thể đặt: $z = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \sin \theta$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}} r \cos \theta$

$$\rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{3} r^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin \theta dr$$

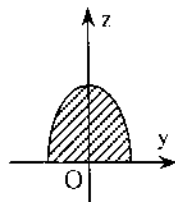
$$I = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi} \right) \cdot \left(\frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{15\sqrt{6}}$$

Cách 2: Có thể đưa I về thẳng tích phân kép: $S = S^+ OS^- \vec{n}_{S^+}, \vec{n}_{S^-}$ tạo với $\vec{Ox}$ góc nhọn, từ

$$\Rightarrow I = 2 \iint_D \left(\frac{1 - 2y^2 - z^2}{3} \right)^{3/2} dydz; D: \begin{cases} 2y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \rightarrow |J| = \frac{1}{\sqrt{2}} r; D \rightarrow D' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} r dr = \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{6}} \cdot \left[-\frac{(1 - r^2)^{5/2}}{5} \Big|_0^1 \right] = \frac{2\pi}{15\sqrt{6}} \end{aligned}$$



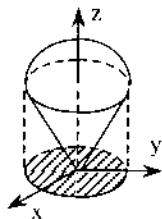
Câu II. (2,5đ)

1) Hàm $f(x,y) = \arctg(y-x)$ liên tục $\forall (x,y)$; cận siny và $1+y^2$ liên tục $\forall y \rightarrow 1$ liên tục $\forall y \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} I(y) = I(0)$. (0,5đ)

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} I(y) &= \int_0^1 \arctg(-x) dx = -x \arctg x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

2) Đổi sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$$V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq z \leq \sqrt{2-r^2} \end{cases} \quad (0,5đ)$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} e^{r^2} \cdot z dz = 2\pi \cdot \int_0^1 r e^{r^2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_r^{\sqrt{2-r^2}} dr = \pi \int_0^1 e^{r^2} (2-2r^2) r dr$$

$$= \pi \int_0^1 e^{r^2} (1-r^2) dr^2 = \pi \int_0^1 e^t (1-t) dt = \pi [(1-t)e^t + e^t] \Big|_0^1 = \pi (e-2) \quad (0,5đ)$$

Cách 2: Đổi sang tọa độ cầu $\rightarrow |J| = r^2 \sin \theta$; $V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad (0,5đ)$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \cos \theta \cdot e^{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} e^{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{2} dr^2 \sin^2 \theta$$

(Đổi thứ tự θ, r) (0,5đ)

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (e^{r^2 \sin^2 \theta} \Big|_0^{\pi/4}) r dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (e^{r^2/2} - 1) d \frac{r^2}{2} = \pi (e-2) \quad (0,5đ)$$

Câu III. (2,5đ)

$$1) P = \frac{3x}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^4} \Rightarrow P'_y = \frac{3x \cdot (-4) \cdot 4y}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^5} \quad (0,5đ)$$

$$Q = \frac{2y}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^4} \Rightarrow Q'_x = \frac{2y \cdot (-4) \cdot 6x}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^5} \quad (0,5d)$$

$$\rightarrow Q'_x = P'_y \text{ (dpcm)}$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x \frac{3xdx}{(3x^2 + 1)^4} + \int_0^y \frac{2ydy}{(3x^2 + 2y^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{-1/2}{3(3x^2 + 1)^3} \Big|_0^x + \frac{-1/2}{3(3x^2 + 2y^2 + 1)^3} \Big|_0^y + C = \frac{-1}{6(3x^2 + 2y^2 + 1)^3} + C \quad (0,5d) \end{aligned}$$

Cách 2. Nhận thấy: $3xdx + 2ydy = \frac{1}{2} d(\underbrace{3x^2 + 2y^2 + 1})_1 \rightarrow$

$$\rightarrow Pdx + Qdy = \frac{\frac{1}{2} dt}{t^4} = \frac{\frac{1}{2} dt^{-3}}{-3} = d \frac{t^{-3}}{-6}$$

$$\text{hay } Pdx + Qdy = d\left(\frac{1}{-6(3x^2 + 2y^2 + 1)^3}\right) \rightarrow u = \frac{1}{-6(3x^2 + 2y^2 + 1)^3} + C$$

2) Phương trình AB: $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$; $x_A = 0$; $x_B = 2$

$$I = \int_{AB} = \int_0^2 \sqrt[4]{x^3(2-x)} [2 + (2x-2)] dx = 2 \int_0^2 x \sqrt[4]{x^3(2-x)} dx \quad (*) \quad (0,5d)$$

$$\text{Đặt } x = 2t \Rightarrow dx = 2dt; x \Big|_0^2 \rightarrow t \Big|_0^1;$$

$$I = 2 \int_0^1 2t \sqrt[4]{2^3 t^3 \cdot 2(1-t)} \cdot 2dt = 16 \int_0^1 t^{7/4} (1-t)^{1/4} dt = 16B\left(\frac{11}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

$$I = 16 \cdot \frac{\Gamma(\frac{11}{4}) \cdot \Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(4)} = 16 \cdot \frac{\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{4} \cdot \Gamma(\frac{1}{4})}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi}{4\sqrt{2}} \quad (0,5d)$$

Câu IV. (2,5đ)

$$\begin{aligned} 1) I &= \int_0^1 dx \int_0^1 x e^{x-y} dy + \int_0^1 dx \int_0^1 e^{x-y} dy = \\ &= \int_0^1 x e^x dx \int_0^1 e^{-y} dy + \int_0^1 e^x dx \int_0^1 y e^{-y} dy = I_1 + I_2 \quad (0,5d) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (xe^x - e^x) \Big|_0^1 \cdot (-e^{-y}) \Big|_0^1 = (0+1) \cdot \left(-\frac{1}{e} + 1\right) = \frac{e-1}{e} \\ I_2 &= (e^x) \Big|_0^1 \cdot (-ye^{-y} - e^{-y}) \Big|_0^1 = (e-1) \cdot \left(-\frac{2}{e} + 1\right) = \frac{(e-1)(e-2)}{e} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow I = \frac{(e-1)^2}{e} \quad (0,5d)$$

2) Thông lượng cần tìm $\Phi = \iint_S (x^2y + y^2z + z^2x) (dydz + dzdx + dxdy)$

Gọi D là mặt tròn: $\begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, hướng ngược với Ox $\rightarrow \Phi = \iint_{\text{SUB}} \left(\text{do } \iint_D = 0 \right)$

Áp dụng Ostro với V: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$\rightarrow \Phi = \iiint_V [x^2 + (z^2 - y^2) + 2(xy + yz - zx)] dx dy dz \quad (0,5d)$$

Vai trò y, z trong V như nhau $\rightarrow \iiint_V (z^2 - y^2) dx dy dz = 0$

Miền V đối xứng qua y = 0 (z = 0) hàm lấy tích phân lẻ theo y(z) $\rightarrow$

$$\rightarrow \iiint_V 2(xy + yz - zx) dx dy dz = 0 \quad (0,5d)$$

$\rightarrow \Phi = \iiint_V x^2 dx dy dz$. Chuyển tọa độ cầu ($x = r \cos \theta$)

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr = 2\pi \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) \cdot \left(\frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{15} \quad (0,5d)$$

(*) **Chú ý:** Câu III 2)

$$I = 2 \int_0^1 x \sqrt[4]{x^3(2-x)} dx \quad \text{có thể đặt } x = 2 \sin^2 t \rightarrow dx = 4 \sin t \cos t dt$$

$$\rightarrow I = 8.4 \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{9}{2}} t \cos^2 t dt = 32 \cdot \frac{1}{2} B \left(\frac{\frac{9}{2}+1}{2}, \frac{\frac{3}{2}+1}{2} \right) = 16B \left(\frac{11}{4}, \frac{5}{4} \right)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5đ)

1) Viết phương trình tiếp tuyến và tiếp diện tại điểm $A(1; -1; \pi)$ của mặt

$$Z = 4\arctg xy.$$

2) Tính $\iint_S y^3 dz dx$, trong đó S là nửa mặt elipxoit $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$ hướng

ra ngoài elipxoit là hướng của S .

Câu II. (2,5đ)

1) Tìm giới hạn $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{\cos y} \arccos(x - y^2) dx$.

2) Tính $\iiint_V z \cos(x^2 + y^2) dx dy dz$, trong đó V xác định bởi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \\ z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Câu III. (2,5đ)

1) Chứng minh rằng biểu thức $\frac{x^3 dx + 2y^3 dy}{(x^4 + 2y^4 + 5)^2}$ là vi phân toàn phần của một hàm số $U(x, y)$ nào đó. Tìm $U(x, y)$.

2) Tính $\int_{AB} \frac{\sqrt[3]{xy^2} [x dy - (x - y) dx]}{(x - y)^2}$

trong đó AB là đoạn thẳng đi từ $A(3; 0)$ đến $B(0; -3)$

Câu IV. (2,5đ)

1) Tính $\iint_D xy \ln(xy) dx dy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $x = 1$

$x = e$, $y = 1$, $y = e$.

2) Tính thông lượng của trường vector:

$$\vec{F} = (xy^2 + yz^2 - zx^2) \left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \right), \text{ qua nửa mặt cầu}$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ hướng ra ngoài mặt cầu là hướng của } S.$$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) Viết phương trình mặt dạng $F(x, y, z) = z - 4\arctgxy = 0$

$$\Rightarrow F'_x = \frac{-4y}{1+x^2y^2}, F'_y = \frac{4x}{1+x^2y^2}, F'_z = 1.$$

$$\Rightarrow \text{Tại } A(1; -1; -\pi), \text{ vectơ pháp tuyến của mặt: } \vec{n}_A = (2, -2, 1) \quad (0,5\text{đ})$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình pháp tuyến tại } A: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+\pi}{1}$$

Phương trình tiếp diện tại A:

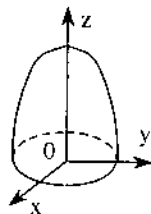
$$2(x-1) - 2(y+1) + 1(z+\pi) = 0 \text{ hay } 2x - 2y + z + \pi - 4 = 0 \quad (0,5\text{đ})$$

2) Gọi D là mặt $\begin{cases} x^2 + 2y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$, hướng ngược với $\vec{Oz}$

$$\rightarrow \iint_D y^3 dy dx = 0 \rightarrow I = \iiint_S = \iiint_{\text{SUD}} \quad (0,5\text{đ})$$

Áp dụng Ostro $\Rightarrow I = \iiint_V 3y^2 dx dy dz$, với

$$V: \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\varphi \sin\theta \rightarrow |J| = \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin\theta; V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0,5\text{đ}) \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} r \cos\theta \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{3} r^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin\theta dr$$

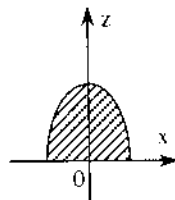
$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta)(-d \cos \theta) \int_0^1 r^4 dr \\
 &= \frac{3}{2\sqrt{6}} \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5\sqrt{6}} \quad (0.5d)
 \end{aligned}$$

Cách 2: Gọi S^+ , S^- là hai nửa mặt S tương ứng với $y \geq 0$ và $y \leq 0 \Rightarrow \vec{n}_{S^+}$ và $\vec{n}_{S^-}$ tạo với $\vec{Oy}$ góc nhọn, từ

Phương trình S^+ : $y = \left(\frac{1-x^2-3z^2}{2} \right)^{1/2}$, phương trình S^- : $y = -\left(\frac{1-x^2-3z^2}{2} \right)^{1/2}$

S^+ , S^- có cùng hình chiếu D : $\begin{cases} x^2 + 3z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \quad (y=0) \end{cases}$

$$\rightarrow I = 2 \iint_D \left(\frac{1-x^2-3z^2}{2} \right)^{3/2} dx dz \quad (0.5d)$$



Đặt $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} r \sin \varphi \end{cases} \rightarrow |J| = \frac{r}{\sqrt{3}}; D \rightarrow D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0.5d)$

$$I = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1-r^2}{2} \right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}} dr = \frac{2\pi}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \left[-\frac{(1-r^2)^{5/2}}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5\sqrt{6}} \quad (0.5d)$$

Câu II. (2,5d)

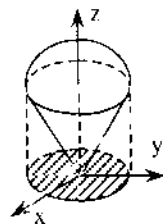
1) Hàm $f(x,y) = \arccos(x - y^2)$ liên tục $[0;1] \times [-\varepsilon;\varepsilon]$; cận cosy, y liên tục $[-\varepsilon;\varepsilon] \rightarrow I(y)$ liên tục $[-\varepsilon;\varepsilon] \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} I(y) = I(0)$. (0,5d)

$$\lim_{y \rightarrow 0} I(y) = \int_0^1 \arccos x dx = x \arccos x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{-dx}{1-x^2} = 0 - \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1 \quad (0.5d)$$

2) Đổi sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$$V \rightarrow V' \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq z \leq \sqrt{2-r^2} \end{cases}$$

(0,5d)



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z \cdot \cos r^2 dz = 2\pi \cdot \int_0^1 r \cos r^2 \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_r^{\sqrt{2-r^2}} dr = \pi \int_0^1 \cos r^2 \cdot (2 - 2r^2) r dr \\
 &= \pi \int_0^1 \cos t (2 - 2t) \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (2 - 2t) d \sin t = \pi \left[(1 - t) \sin t \right]_0^1 - \int_0^1 \sin t (-dt) \Bigg] = \\
 &= \pi (1 - \cos 1) \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Cách 2: Đổi sang tọa độ cầu $\rightarrow |J| = r^2 \sin \theta$; $V \rightarrow V: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases}$ (0,5d)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \cos \theta \cdot \cos(r^2 \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_0^{\pi/4} \cos(r^2 \sin^2 \theta) \frac{1}{2} d(r^2 \sin^2 \theta) = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sin(r^2 \sin^2 \theta) \right) \Big|_0^{\pi/4} r dr \quad (0,5d) \\
 &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{r^2}{2}\right) d\left(\frac{r^2}{2}\right) = \pi \left(-\cos\left(\frac{r^2}{2}\right) \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi(1 - \cos 1) \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu III. (2,5d)

$$1) P = \frac{x^3}{(x^4 + 2y^4 + 5)^2} \Rightarrow P'_y = \frac{x^3 \cdot (-2) \cdot 8y^3}{(x^4 + 2y^4 + 5)^3} \quad (0,5d)$$

$$Q = \frac{2y^3}{(x^4 + 2y^4 + 5)^2} \Rightarrow Q'_x = \frac{2y^3 \cdot (-2) \cdot 4x^3}{(x^4 + 2y^4 + 5)^3} \quad (0,5d)$$

$$\rightarrow Q'_x = P'_y \text{ (đpcm)}$$

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_0^x \frac{x^3 dx}{(x^4 + 5)^2} + \int_0^y \frac{2y^3 dy}{(x^4 + 2y^4 + 5)^2} + C = \\
 &= \frac{-1/4}{(x^4 + 5)} \Big|_0^x + \frac{-1/4}{(x^4 + 2y^4 + 5)} \Big|_0^y + C = \frac{-1}{4(x^4 + 2y^4 + 5)} + C \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Cách 2. Nhận thấy: $\frac{x^3 dx + 2y^3 dy}{(x^4 + 2y^4 + 5)^2} = \frac{1}{4} \frac{d(x^4 + 2y^4 + 5)}{(x^4 + 2y^4 + 5)^2} =$

$$= \left(\frac{\frac{1}{4} dt}{t^2} = \frac{-dt}{4t} \right) = d \left[\frac{-1}{4(x^4 + 2y^4 + 5)} + C \right]$$

2) Phương trình AB: $x - y = 3 \Leftrightarrow y = x - 3$; $x_A = 3$, $x_B = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int_{AB} = \int_3^0 \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2} [x-3] dx}{3^2} \quad (*) \quad (0,5d)$$

Đặt $x = 3t \Rightarrow dx = 3dt$; $x|_3^0 \rightarrow t|_1^0 \Rightarrow I = \int_1^0 \sqrt[3]{t(t-1)^2} (t-1) 3dt$

$$\Rightarrow I = 3 \int_0^1 t^{1/3} (1-t)^{5/3} dt = 3B\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$$I = 3 \cdot \frac{\Gamma(\frac{4}{3}) \cdot \Gamma(\frac{8}{3})}{\Gamma(4)} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \Gamma(\frac{1}{3}) \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \Gamma(\frac{2}{3})}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{27} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{10\pi}{27\sqrt{3}} \quad (0,5d)$$

Câu IV. (2,5d)

$$\begin{aligned} 1) I &= \iint_D xy(\ln x + \ln y) dx dy = \int_1^e x \ln x dx \int_1^e y dy + \int_1^e x dx \int_1^e y \ln y dy = \\ &= 2 \int_1^e x dx \int_1^e y \ln y dy \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^e x dx \int_1^e \ln y dy^2 = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^e \right) \cdot \left(y^2 \ln y \Big|_1^e - \int_1^e y^2 \frac{1}{y} dy \right) = \\ &= \frac{e^2 - 1}{2} \cdot \left[e^2 - \frac{e^2 - 1}{2} \right] = \frac{e^4 - 1}{4} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$2) \text{ Thông lượng } \Phi = \iiint_S (xy^2 + yz^2 - zx^2) (dydz - dzdx + dx dy)$$

Gọi D là mặt tròn: $\begin{cases} x^2 + z^2 \leq 1 \\ y = 0 \end{cases}$, hướng ngược với Oy $\rightarrow \Phi = \iint_S = \iint_{S \cup D} \left(\text{vì } \iint_D = 0 \right).$

Áp dụng Ostro với V: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\rightarrow \Phi = \iiint_V [y^2 + (z^2 - x^2) + 2(xy + yz - zx)] dx dy dz \quad (0,5d)$$

Vai trò x, z trong V như nhau $\rightarrow \iiint_V (z^2 - x^2) dx dy dz = 0$

Miền V đối xứng qua $x = 0$ ($z = 0$) hàm lấy tích phân lẻ

$$\rightarrow \iiint_V 2(xy + yz - zx) dx dy dz = 0 \quad (0.5d)$$

$\rightarrow \Phi = \iiint_V y^2 dx dy dz$. Chuyển qua tọa độ cầu ($y = r \cos \theta$)

$$\dots \rightarrow \Phi = \frac{2\pi}{15} \quad (0.5d)$$

(Xem đáp án đề 5).

ĐỀ 3

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5đ)

1) Tìm hình bao của họ đường thẳng $x \cos \alpha + 2y \sin \alpha = 3$ (α là tham số).

2) Cho hàm số $U = x \sin y - \arctg \frac{x}{z}$ và 2 điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 1; -1)$.

Tính $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}$ (A) theo hướng $\overrightarrow{AB}$. Tìm $\max \frac{\partial U}{\partial \vec{l}}$ (A).

Câu II. (2,5đ)

1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^{\pi/2} \int_{x-\pi/2}^{\cos x} f(x, y) dy$.

2) Tính $\iiint_V \sqrt{(x^2 + y^2)z^3} dx dy dz$, trong đó V xác định bởi $\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$

Câu III. (2,5đ)

1) Tìm hệ thức giữa a và b để tích phân $\int_{AB} \frac{ax dx - by dy}{(x^2 + 2y^2 + 3)^3}$ không phụ thuộc đường đi từ A đến B.

- 2) Tính $\iint_S x^3 dydz - 2y^4 dzdx + z^4 dxdy$, trong đó S là mặt elipxoit $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Câu IV. (2,5đ)

1) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{x^5 dx}{2^{x^4}}$

- 2) Gọi L là biên của miền phẳng D xác định bởi: $1 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, hướng dương.

Chứng minh rằng với mọi $a > 1$ ta có $\oint_L \frac{\ln(x^2 + ay^2)(xdy + ydx)}{x^2 + y^2} = 0$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

- 1) Phương trình họ đường thẳng: $F(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + 2y\sin\alpha - 3 = 0$ (1)

$$F'_\alpha = -x\sin\alpha + 2y\cos\alpha = 0 \quad (2) \quad (0,5đ)$$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \frac{3}{2}\sin\alpha \end{cases} \rightarrow$ Đó là phương trình tham số của hình bao (hay: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(3/2)^2} = 1$) (0,5đ)

2) $U'_x = \sin y - \frac{z}{x^2 + z^2}$; $U'_y = x\cos y$; $U'_z = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Tại } A(-1;0;1) \text{ ta có } \overrightarrow{\text{grad } U(A)} = \left(\frac{-1}{2}; -1; \frac{-1}{2} \right) \quad (0,5đ)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2;1;-2) \rightarrow \vec{l} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(A) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{-1}{3} \quad (0,5đ)$$

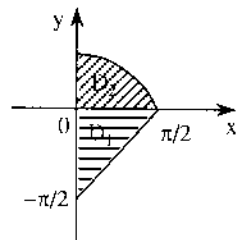
$$\text{Max } \frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(A) = \left| \overrightarrow{\text{grad } U(A)} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (0,5đ)$$

Câu II. (2,5đ)

$$1) \text{ Miền lấy tích phân } D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} \leq y \leq \cos x \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2$ (như hình vẽ)

$$D_1 = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq y + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



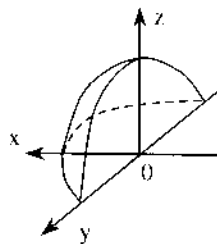
(0,5đ)

$$D_2 = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \arccos y \end{cases} \rightarrow I = \int_{-\pi/2}^0 dy \int_0^{y+\pi/2} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x,y) dx \quad (0,5đ)$$

2) Chuyển sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r \quad V \rightarrow V' : \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - r^2 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} (r^2 \cdot z^3)^{1/4} dz dr d\varphi = \pi \int_0^1 r^{2/4} \left(\frac{7}{4} z^{7/4} \Big|_0^{1-r^2} \right) \frac{dr^2}{2} = \\ &= \frac{2\pi}{7} \int_0^1 r^{2/4} (1-r^2)^{7/4} dr^2 = \frac{2\pi}{7} \int_0^1 t^{1/4} (1-t)^{7/4} dt = \frac{2\pi}{7} B\left(\frac{5}{4}; \frac{11}{4}\right) \\ &= \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{\pi}{64} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi^2}{32\sqrt{2}} \quad (0,5đ) \end{aligned}$$



Câu III. (2,5đ)

$$1) P = \frac{ax}{(x^2 + 2y^2 + 3)^3} \rightarrow P'_y = \frac{ax \cdot (-3) \cdot 4y}{(x^2 + 2y^2 + 3)^4}$$

$$Q = \frac{-by}{(x^2 + 2y^2 + 3)^3} \rightarrow Q'_x = \frac{-by \cdot (-3) \cdot 2x}{(x^2 + 2y^2 + 3)^4} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Điều kiện: } Q'_x = P'_y \Leftrightarrow 4a = -2b \text{ hay } 2a + b = 0 \quad (0,5đ)$$

$$2) \text{ Áp dụng Ostro: } I = \iiint_V (3x^2 - 6y^2 + 3z^2) dx dy dz,$$

$$V: x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1 \quad (0,5d)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Đặt } x = X, y = \frac{1}{\sqrt{2}} Y, z = \frac{1}{\sqrt{3}} Z \rightarrow |J| = \frac{1}{\sqrt{6}}; \\ V \rightarrow V': X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow I = \iiint_{V'} (3X^2 - 3Y^2 + Z^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} dXdYdZ. \quad (0,5d)$$

Hoán vị vòng quanh X, Y, Z rồi cộng lại (V' không đổi)

$$\Rightarrow 3I = \frac{1}{\sqrt{6}} \iiint_{V'} (X^2 + Y^2 + Z^2) dXdYdZ$$

$$\text{Chuyển sang tọa độ cầu} \Rightarrow 3I = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4\pi}{15\sqrt{6}} \quad (0,5d)$$

Chú ý:

Sinh viên có thể tách I thành 3 tích phân để tính (đổi sang tọa độ cầu mở rộng).

Tính đúng đến đâu cho điểm tới đó.

Câu IV. (2,5d)

$$1) I = \int_0^{+\infty} x^5 \cdot e^{-x^4 \ln 2} dx.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Đặt } t = x^4 \ln 2 \rightarrow x = \left(\frac{t}{\ln 2} \right)^{1/4} \\ dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-3/4} dt}{(\ln 2)^{1/4}}; x \Big|_0^{+\infty} \rightarrow t \Big|_0^{+\infty} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{5/4}}{(\ln 2)^{5/4}} \cdot \frac{t^{1/4-1} \cdot e^{-t} dt}{4(\ln 2)^{1/4}} \quad (0,5d)$$

$$I = \frac{1}{4(\ln 2)^{3/2}} \cdot \int_0^{+\infty} t^{3/2-1} e^{-t} dt = \frac{1}{4(\ln 2)^{3/2}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4(\ln 2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{8(\ln 2)^{3/2}} \quad (0,5d)$$

2) Gọi C_1 , C_a lần lượt là đường tròn: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = a$; hướng dương.

$$\Rightarrow \oint_L = \oint_{C_a} - \oint_{C_1}. \text{ Phương trình } C_1 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \text{ phương trình } C_a \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

$$(t \text{ tăng từ } 0 \text{ đến } 2\pi) \quad (0,5đ)$$

$$\oint_{C_1} = \int_0^{2\pi} \ln(\cos^2 t + a \sin^2 t) (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = I_1$$

$$\begin{aligned} \oint_{C_a} &= \int_0^{2\pi} \frac{\ln(a^2 \cos^2 t + a^3 \sin^2 t) (a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t) dt}{a^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} \ln[a^2 (\cos^2 t + a \sin^2 t)] \cdot \cos 2t \cdot dt \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln a^2 \cdot \cos 2t + I_1 = \ln a^2 \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} + I_1 = 0 + I_1$$

$$\Rightarrow \oint_L = \oint_{C_a} - \oint_{C_1} = 0 \quad (\text{dpcm}) \quad (0,5đ)$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K50 (Thời gian làm bài 90')

Câu I. (1,5đ)

1) Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại điểm $A(1;0;-1)$ của đường $x = e^{-t} \cos t$; $y = e^{-t} \sin t$; $z = t - 1$.

2) Cho hàm số $U = y \cos x - \operatorname{arccotg} \frac{z}{y}$ và điểm $M(0;-1;1)$. Tính $\frac{\partial U}{\partial t}(M)$ theo

hướng $\vec{OM}$ (O là gốc toạ độ). Tìm x sao cho theo hướng $\vec{a} = (1; x; x^2)$ thì

$$\frac{\partial U}{\partial t}(M) = 0.$$

Câu II. (2,5đ)

1) Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^{\pi/2} \int_{-x}^{\sin x} f(x,y) dy \cdot dx$.

2) Tính $\iiint_V \sqrt{z(x^2 + y^2)^2} dx dy dz$, trong đó $V: \begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$

Câu III. (2,5đ)

1) Tìm hệ thức giữa a và b để tích phân $\int_{AB} \frac{ax^3 dx + by^3 dy}{(3x^4 + y^4 + 1)^2}$ không phụ thuộc đường đi từ A đến B .

2) Tính $\iint_S 2xy^2 dy dz + yz^2 dz dx - 3zx^2 dx dy$, trong đó S là mặt elipxoit $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Câu IV. (2,5đ)

1) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{3x^2}$

2) Gọi L là biên của miền phẳng $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, hướng dương.

Chứng minh rằng với mọi $0 < a < 1$ ta có $\oint_L \frac{\ln(ax^2 + y^2)(xdy + ydx)}{x^2 + y^2} = 0$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) $x' = e^{-t}(-\cos t - \sin t)$; $y' = e^{-t}(-\sin t + \cos t)$; $z' = 1$

Điểm $A(1; 0; -1)$ ứng với $t = 0 \Rightarrow$ Vectơ tiếp tuyến tại A là

$$\vec{v}_a = (-1; 1; 1) \quad (0,5đ)$$

Phương trình tiếp tuyến tại A : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$

Phương trình pháp diện: $-1(x-1) + y + (z+1) = 0$

$$\text{hay } x - y - z - 2 = 0 \quad (0,5đ)$$

2) $U'_x = -y \sin x$; $U'_y = \cos x - \frac{z}{y^2 + z^2}$; $U'_z = \frac{y}{y^2 + z^2}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad } U(M)} = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2} \right). \quad (0,5đ)$$

$$\vec{l} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \left(0; \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{+1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(M) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{2} \cdot \frac{+1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (0,5d)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}(M) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} U(M) \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 0,1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

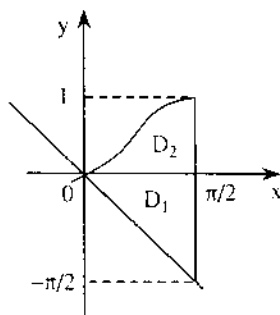
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

Câu II. (2,5đ)

1) Miền lấy tích phân D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -x \leq y \leq \sin x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2$ (như hình vẽ) (0,5đ)

$$D_1 = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0 \\ -y \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad D_2 = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \arcsin y \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (0,5d)$$



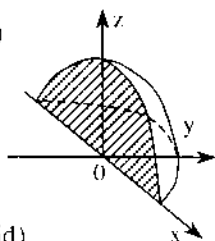
$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy \rightarrow I = \int_{-\pi/2}^0 dy \int_{-y}^{\pi/2} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x,y) dx \quad (0,5d)$$

2) Chuyển sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r \quad V \rightarrow V: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - r^2 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} \sqrt{z} \cdot r^4 dz = \pi \int_0^1 r^{4/3} \left(\frac{3}{4} z^{4/3} \Big|_0^{1-r^2} \right) \frac{dr^2}{2}$$

Đặt $t = r^2 \Rightarrow I = \frac{3\pi}{8} \int_0^1 t^{2/3} (1 - t^{4/3}) dt = \frac{3\pi}{8} \cdot B\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$ (0,5d)



$$I = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{-\frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{\pi}{54} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{27\sqrt{3}} \quad (0,5d)$$

Câu III. (2,5đ)

$$1) P = \frac{ax^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^2} \rightarrow P'_y = \frac{ax^3 \cdot (-2) \cdot 4y^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^3}$$

$$Q = \frac{by^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^2} \rightarrow Q'_x = \frac{by^3 \cdot (-2) \cdot 12x^3}{(3x^4 + y^4 + 1)^3} \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow Q'_x = P'_y \Leftrightarrow 4a = 12b \Leftrightarrow a = 3b \quad (0,5đ)$$

$$2) \text{ Áp dụng Ostro: } I = \iiint_V (2y^2 + z^2 + 3x^2) dx dy dz,$$

$$V: 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1 \quad (0,5đ)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{\sqrt{3}} X, y = \frac{1}{\sqrt{2}} Y, z = Z \Rightarrow I = \iiint_{V''} (Y^2 + Z^2 - X^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} dXdYdZ.$$

$$V'': X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1$$

Hoán vị X, Y, Z rồi cộng lại (V'' không đổi):

$$3I = \frac{1}{\sqrt{6}} \iiint_V (X^2 + Y^2 + Z^2) dXdYdZ \quad (0,5đ)$$

Chuyển sang tọa độ cầu

$$\Rightarrow 3I = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4\pi}{5\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4\pi}{\sqrt{6}} \quad (0,5đ)$$

Chú ý:

Sinh viên có thể tách I thành 3 tích phân để tính, đúng đến đâu cho điểm tối đó.

$$I_1 = \iiint_V 2y^2 dx dy dz = \iiint_V z^2 dx dy dz = \iiint_V 3x^2 dx dy dz$$

(Mỗi tích phân đúng = 1/4 điểm)

Câu IV. (2,5đ)

$$1) I = \int_0^{+\infty} x^4 \cdot e^{-x^2 \ln 3} dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \ln 3 \rightarrow x = \left(\frac{t}{\ln 3} \right)^{1/2} ; x|_0^{+\infty} \rightarrow t|_0^{+\infty} ; dx = \frac{dt}{2(t \ln 3)^{1/2}} ;$$

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\ln 3} \right)^2 e^{-t} \cdot \frac{dt}{2(t \ln 3)^{1/2}} = \frac{1}{2(\ln 3)^{5/2}} \cdot \int_0^{+\infty} t^{3/2} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{2(\ln 3)^{5/2}} \quad (0,5d)$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3)^{5/2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8(\ln 3)^{3/2}} \quad (0,5d)$$

2) Gọi C_1 , C_a lần lượt là đường tròn: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = a$; hướng dương.

$$\rightarrow \oint_L = \oint_{C_a} - \oint_{C_1} . \text{ Phương trình } C_1 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \text{ phương trình } C_a \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

$$(t \text{ tăng từ } 0 \text{ đến } 2\pi) \quad (0,5d)$$

$$\oint_{C_1} = \int_0^{2\pi} \ln(a \cos^2 t + \sin^2 t) (\cos^2 t - \sin^2 t) dt =$$

$$\oint_{C_a} = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(a^3 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) (a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t) dt}{a^2} = I_1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\ln a^2 (a \cos^2 t + \sin^2 t)] \cdot \cos 2t \cdot dt \quad (0,5d)$$

$$= \int_0^{2\pi} (\ln a^2) \cdot \cos 2t dt + I_1 = I_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_L = 0 \quad \left(\int_0^{2\pi} (\ln a^2) \cdot \cos 2t dt = \ln a^2 \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \right) \quad (\text{đpcm}) \quad (0,5d)$$

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu 1. (1 điểm)

Tìm hình bao của họ đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có diện tích giới hạn bởi

elip: $S = \text{const.}$

Câu II. (1 điểm)

Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$, trong đó D là hình phẳng

$$x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \leq x\sqrt{3}.$$

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_{\Omega} y \cos(x+z) dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi

các mặt $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.

Câu V. (1 điểm)

$$I = \oint_C \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 2y + x \cos y + x^3 \right) dy - (y^3 + x \cos^2 y - \sin y) dx$$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) lấy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Câu VI. (1 điểm)

Tính $I = \oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$, trong đó L là đường cong

kín giao của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y - 3z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz .

Câu VII. (1 điểm)

$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, trong đó S là phần của mặt nón

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq h, \quad (h > 0), \text{ hướng ra phía ngoài.}$$

Câu VIII. (1 điểm)

Tính $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r}$ với $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{3}} dx$.

Câu X. (1 điểm)

Tính diện tích của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm phía trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

ĐÁP ÁN

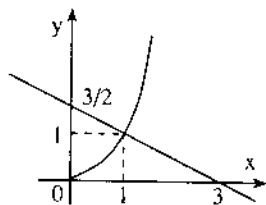
Câu I. (1đ)

$$F = x^2 + \frac{\pi^2}{s^2} a + y^2 - a^2 = 0 \quad (0,5\text{đ})$$

Hình bao: $xy = \pm \frac{s}{2\pi} \quad (0,5\text{đ})$

Câu II. (1đ)

Vẽ hình



(0,5đ)

$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx \quad (0,5\text{đ})$$

Câu III. (1đ)

Đặt $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Miền D trở thành miền D' : $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, $1 \leq r \leq 3$.

$$I = \iint_{D'} \arctg(\operatorname{tg} \varphi) \cdot r dr d\varphi = \iint_{D'} \varphi r dr d\varphi \quad (0,5\text{đ})$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi d\varphi \cdot \int_1^3 r dr = \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{\pi^2}{6} \quad (0,5\text{đ})$$

Câu IV. (1đ)

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+z) dz \quad (0,5đ)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \sin(x+z) \Big|_0^{\pi/2-x} ; I = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x(1 - \sin x) dx ; I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \quad (0,5đ)$$

Câu V. (1đ)

Đặt $P = -(y^3 + x \cos^2 y - \sin y)$, $Q = \frac{1}{2} x^2 \sin 2y + x \cos y + x^3$ ta có:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3(x^2 + y^2).$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad (0,5đ)$$

Đặt $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Miền D trở thành miền D^* : $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= 3 \iint_{D^*} r^2 \cdot r dr d\varphi = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr \\ &= 3\varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^a = 6\pi \frac{a^4}{4} = \frac{3\pi a^4}{2} \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

Câu VI. (1đ)

Theo công thức Stokes, ta có:

$$\oint (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = -2 \iint_S dydz + dzdx + dx dy.$$

trong đó S là mặt tròn có biên là đường tròn L , có hướng lên trên so với trục Oz . Khi đó cosin chỉ hướng của vector pháp tuyến của mặt S : $x + y - 3z = 0$ là

$$\left\{ \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right\}. \quad (0,5đ)$$

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds = \\
 &= \iint_S \left(\frac{-1}{\sqrt{11}} + \frac{-1}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}} \right) dS = \frac{2}{\sqrt{11}} \iint_S dS = \frac{2}{\sqrt{11}} \pi. \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu VII. (1đ)

Mặt S_1 $z = h$, vectơ pháp tuyến hướng lên trên, nên

$\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 1$, từ đó:

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy &= \iint_{S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\
 &= \iint_{S_1} h^2 dxdy = \pi h^4 \quad (0,5đ)
 \end{aligned}$$

Gọi V là khối nón $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, h > 0$, theo công thức Ostrogradski

ta có:

$$\begin{aligned}
 \iint_{S \cup S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy &= 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \int_0^h [r \cos \varphi + \sin \varphi + z] dz = \frac{1}{2} \pi h^4
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4 \quad (0,5đ)$$

Câu VIII. (1đ)

$$\overrightarrow{\text{div grad}} \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r} \right)''_{xx} + \left(\frac{1}{r} \right)''_{yy} + \left(\frac{1}{r} \right)''_{zz} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{r} \Rightarrow u'_x = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r},$$

$$u''_{xx} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad u''_{yy} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad u''_{zz} = \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}.$$

$$\overrightarrow{\text{div grad}} \frac{1}{r} = \frac{3}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{r^3} = 0 \quad (0,5đ)$$

Cách khác: $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r} = \operatorname{div} \left(-\frac{1}{r} \overrightarrow{\operatorname{grad}} r \right) = \operatorname{div} \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0$ với

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Câu IX. (1đ)

$$\text{Đặt } \operatorname{tg}^2 x = t \Rightarrow 2 \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} = dt, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/6} dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \quad (0,5đ)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}-1} dt}{(1+t)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (0,5đ)$$

Câu X. (1đ)

Hình chiếu của phần mặt nón cần tính diện tích trên mặt phẳng Oxy là hình tròn D giới hạn bởi $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ hay $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

$$\text{Ta có } \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2} \quad (0,5đ)$$

Diện tích của phần mặt nón cần tính là

$$S_c = \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} S_D = 2\sqrt{2}\pi \quad (dvdt) \quad (0,5đ)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (1 điểm)

Tìm độ cong của đường cong $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ tại điểm $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Câu II. (1 điểm)

Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y) dx$.

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D \arccot g \frac{x}{y} dx dy$, trong đó D là hình phẳng

$$x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \geq x, \quad y \leq x\sqrt{3}.$$

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_{\Omega} y \sin(x+z) dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi

$$\text{các mặt } y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + z = \frac{\pi}{2}.$$

Câu V. (1 điểm)

Tính $\int_{\widehat{AB}} \frac{(3y-x)dx + (y-3x)dy}{(x+y)^3}$ trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y = 2 - x^2$

đi từ điểm $A(0;2)$ đến điểm $B(1;1)$.

Câu VI. (1 điểm)

Tính $I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, trong đó L là đường cong

kín giao của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + 2y + 3z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz .

Câu VII. (1 điểm)

Tính $I = \iint_S x^3 dy dz + 4y^3 dz dx + z^3 dx dy$, trong đó S là phần của mặt

elipxoit $z = -\sqrt{1-x^2-4y^2}$, hướng ra phía ngoài.

Câu VIII. (1 điểm)

Trường vectơ $\vec{F} = [y + \ln(x+1)] \vec{i} + [x+1 - e^y] \vec{j}$ có phải là trường thế không? Nếu đúng, tìm hàm thế vị của nó.

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\int_0^{\pi/2} (\cot gx)^{\frac{1}{3}} dx$.

Câu X. (1 điểm)

Tính diện tích của phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm phía trong mặt trụ $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (1đ)

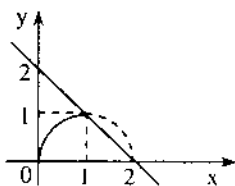
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3\cos^2 t \sin t \\ y' = 3\sin^2 t \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t \\ y'' = 6\cos^2 t \sin t - 3\sin^3 t \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y' = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y'' = \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{3} \quad (0,5d)$$

Câu II. (1đ)

Vẽ hình



(0,5d)

$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy \quad (0,5d)$$

Câu III. (1đ)

Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Miền D' : $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, $1 \leq r \leq 3$.

$$I = \iint_{D'} \arccot \cot g(\cot g \varphi) \cdot r dr d\varphi = \iint_{D'} \varphi r dr d\varphi \quad (0,5đ)$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \varphi d\varphi \cdot \int_1^3 r dr = \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{7\pi^2}{72} \quad (0,5đ)$$

Câu IV. (1đ)

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{\pi/2-x} \sin(x+z) dz \quad (0,5đ)$$

$$I = - \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \cos(x+z) \Big|_0^{\pi/2-x} \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \cos x dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \frac{1}{2} \left[x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] \quad (0,5đ)$$

Câu V. (1đ)

Đặt $P = \frac{3y-x}{(x+y)^3}$, $Q = \frac{y-3x}{(x+y)^3}$ ta có: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{6x-6y}{(x+y)^4}$, $x \neq y$.

I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ điểm $A(0;2)$ đến $B(1;1)$ (0,5đ)

Chọn đường lấy tích phân là đường thẳng AB , có phương trình $y = 2 - x$,
 $x: 0 \rightarrow 1$

$$I = \frac{1}{8} \int_0^1 4 dx = \frac{1}{2} \quad (0,5đ)$$

Câu VI. (1đ)

Theo Stokes, ta có:

$$\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = -2 \iint_S dydz + dzdx + dxdy,$$

trong đó S là mặt tròn có biên là đường tròn L hướng lên trên so với trục Oz .
 Khi đó cosin chỉ hướng của vectơ pháp tuyến của mặt S : $x + 2y + 3z = 0$ là

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}. \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } I &= -2 \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds = \\ &= -2 \iint_S \left(\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \right) dS = -\frac{12}{\sqrt{14}} \iint_S dS = -\frac{12}{\sqrt{14}} \pi. \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Câu VII. (1đ)

$$\text{Mặt } S_1: z = 0, \quad I_1 = \iint_{S_1} x^3 dydz + 4y^3 dx dz + z^3 dx dy = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Theo Ostrogradski } I_2 &= \iint_{S \cup S_1} x^3 dydz + 4y^3 dx dz + z^3 dx dy = \\ &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + 4y^2 + z^2) dx dy dz \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$\text{trong đó } \Omega: -\sqrt{1-x^2-4y^2} \leq z \leq 0, \quad I = I_2 - I_1 = I_2$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\theta \int_0^1 \rho^4 \sin \theta d\rho = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sin \theta d\theta \int_0^1 \rho^4 d\rho = \\ &= \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^1 \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \cdot 2\pi(-1) \cdot \frac{1}{5} = -\frac{3\pi}{5} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Câu VIII. (1đ)

$$P = y + \ln(x+1), \quad Q = x + 1 - e^y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \vec{\text{rot}} \vec{F} = [1-1] \vec{k} = 0 \quad (0,5d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow u = yx + x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow C'(y) = 1 - e^y, \quad C(y) = y - e^y$$

$$\text{Vậy } u = yx + x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + y - e^y \quad (0,5d)$$

Câu IX. (1đ)

$$\cot g^2 x = t \Rightarrow -2 \operatorname{tg} x \frac{dx}{\sin^2 x} = dt, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1+t)}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} (\cot g x)^{\frac{1}{3}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{6}} dt}{\sqrt{t(1+t)}} \quad (0,5đ)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}-1} dt}{(1+t)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2} B\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (0,5đ)$$

Câu X. (1đ)

Hình chiếu của phần mặt nón cần tính diện tích trên mặt phẳng Oxy là hình tròn D giới hạn bởi $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ hay $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

$$\text{Ta có } \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2} \quad (0,5đ)$$

Diện tích của phần mặt nón cần tính là

$$S_c = \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} S_D = 5\sqrt{2}\pi \quad (đvdt) \quad (0,5đ)$$

ĐỀ 3**ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)****Câu I. (1 điểm)**

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

$$x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = t^3 \quad \text{tại điểm } (1; 0; 1).$$

Câu II. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D (x+y)(x+2y) dx dy$, trong đó D là hình phẳng giới

hạn bởi các đường $y = -x$, $y = 1 - x$, $2x + y = 0$, $2x + y = 2$.

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy$, trong đó D là hình phẳng giới

hạn bởi các đường $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, ($a > 0$).

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi các

mặt $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

Câu V. (1 điểm)

Sử dụng tích phân bội ba tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

$z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Câu VI. (1 điểm)

Tính $\int_{\widehat{AB}} (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$ trong đó $\widehat{AB}$ là

cung parabol $y = \frac{1}{\pi} x^2$ đi từ $A(0;0)$ đến $B(\pi;\pi)$.

Câu VII. (1 điểm)

Tính $\iiint_S 2xz dy dz + x^2 y dz dx + y^2 z dx dy$, trong đó S là mặt ngoài của vật

thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

Câu VIII. (1 điểm)

Tính lưu số của trường $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ dọc theo đường tròn $x^2 + (y-2)^2 = 1$, $z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz .

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3 - x^4}}$.

Câu X. (1 điểm)

Tính $I = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, ($\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^+$).

ĐÁP ÁN

Câu I. (1đ)

$$t = 1, x' = 2t, y' = -1, z' = 3t^2, t = 1 \Rightarrow x' = 2, y' = -1, z' = 3. \quad (0,5đ)$$

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện

$$2x - y + 3z - 5 = 0, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3} \quad (0,5đ)$$

Câu II. (1đ)

$$\text{Đặt } u = x + y, v = 2x + y, \text{ ta có } J = -1, D': \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{matrix} \quad (0,5đ)$$

$$I = \iint_{D'} u \cdot v \cdot 1 \cdot du dv = \int_0^1 u du \cdot \int_0^2 v dv = \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} v^2 \Big|_0^2 = 1 \quad (0,5đ)$$

Câu III. (1đ)

Đổi biến $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, J = r, D': 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq a.$

$$I = \iint_{D'} \ln(1 + r^2) r dr d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1 + r^2) r dr \quad (0,5đ)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1 + r^2) d(1 + r^2) = \frac{\pi}{2} [(1 + a^2) \ln(1 + a^2) - a^2] \quad (0,5đ)$$

Câu IV. (1đ)

$$I = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz \quad (0,5đ)$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364} \quad (0,5đ)$$

Câu V. (1đ)

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz; x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, J = r,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^r r dz \quad (0,5đ)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \text{ (đvtt)} \quad (0,5d)$$

Câu VI. (1đ)

$$P = 2x \cos y - y^2 \sin x, \quad Q = 2y \cos x - x^2 \sin y.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \sin x - 2x \sin y = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}^2, \text{ I không phụ thuộc vào}$$

đường lấy tích phân từ A(0;0) đến B(π ; π). (0,5đ)

Ta chọn đường lấy tích phân là đường gấp khúc ACB, trong đó C(0; π).

Khi đó ta được:

$$\begin{aligned} I &= \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy \\ &= \int_0^\pi 2y dy - \int_0^\pi (2x + \pi^2 \sin x) dx = -2\pi^2 \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

Câu VII. (1đ)

$$I = \iiint_{\Omega} (2z + x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \Omega \text{ là vật thể } x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2$$

$$I = \iint_D dx dy \int_0^{x^2+y^2} (2z + x^2 + y^2) dz = 2 \iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |J| = r, \quad D': \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \quad (0,5đ)$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^5 dr = 2 \cdot \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^6 \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \cdot 2^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^3 d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 3 \cos 2\varphi + \frac{3}{2} (1 + \cos 4\varphi) + (1 - \sin^2 2\varphi) \cos 2\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin 2\varphi + \frac{3}{2} \varphi + \frac{3}{8} \sin 4\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sin^3 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{20\pi}{3} \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

Câu VIII. (1đ)

Lưu số của trường $\vec{F}$ trên đường cong kín $I = \oint_L -ydx + xdy + 2dz$

trong đó L là đường tròn $x^2 + (y - 2)^2 = 1, z = 0$

Phương trình tham số của đường tròn $\begin{cases} x = \cos t \\ y - 2 = \sin t \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow 2\pi \quad (0,5đ)$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(-2 - \sin t)(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t] dt = \int_0^{2\pi} [1 + 2 \sin t] dt = \\ &= [t - 2 \cos t] \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

Câu IX. (1đ)

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3 - x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}} = \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} dx = \quad (0,5đ)$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{4}-1} (1-x)^{\frac{3}{4}-1} dx = B\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \pi\sqrt{2} \quad (0,5đ)$$

Câu X. (1đ)

$f(x, \alpha) = e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}$, đạo hàm $f'_\alpha(x, \alpha) = e^{-kx} \cos \alpha x$.

$$|e^{-kx} \cos \alpha x| \leq e^{-kx}, \forall x, \forall \alpha;$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx \text{ hội tụ nên } \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx \text{ hội tụ đều.} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Do đó } \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}, I(\alpha) = \arctg \frac{\alpha}{k} + C.$$

$$I(0) = 0. \text{ Vậy } I = \arctg \frac{\alpha}{k} \quad (0,5đ)$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K51 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (1 điểm)

Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy \text{ tại điểm } (3;4;-7).$$

Câu II. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D (y-x)(y+2x) dx dy$, trong đó D là hình phẳng giới

hạn bởi các đường $y = x$, $y = 1 + x$, $2x + y = 0$, $2x + y = 2$.

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \iint_D \arctg(1+x^2+y^2) dx dy$, trong đó D là hình phẳng

giới hạn bởi các đường $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, ($a > 0$).

Câu IV. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể được giới hạn bởi các mặt

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad z = 0.$$

Câu V. (1 điểm)

Sử dụng tích phân bội ba tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = h^2, \quad hz = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad (h > 0).$$

Câu VI. (1 điểm)

Tính tích phân $I = \int_{(1;2)}^{(3;-1)} (y^2 e^x + 6xy) dx + (3x^2 + 2ye^{yx}) dy$.

Câu VII. (1 điểm)

Tính $I = \iiint_S 4x^3 dy dz + 9y^3 dx dz + y^3 dx dy$, trong đó S là mặt ngoài của vật

thể giới hạn bởi $z = \sqrt{1-4x^2-9y^2}$, $z = 0$.

Câu VIII. (1 điểm)

Tính lưu số của trường $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$ dọc theo đường tròn $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$, có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía hướng dương của trục Oz.

Câu IX. (1 điểm)

Tính $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2 - x^4}}$.

Câu X. (1 điểm)

Tính $I = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}^+)$.

ĐÁP ÁN**Câu I. (1đ)**

$$F(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} + xy = 0,$$

$$F_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y, F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x, F_z = 1$$

$$F_x(M) = \frac{17}{5}, F_y(M) = \frac{11}{5}, F_z(M) = 1, \text{ chọn } \vec{n} = (17; 11; 5) \quad (0,5\text{đ})$$

$$\text{Phương trình tiếp diện } 17(x-3) + 11(y-4) + 5(z+7) = 0$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5} \quad (0,5\text{đ})$$

Câu II. (1đ)

$$\text{Đặt } u = x - y, v = 2x + y, \text{ ta có } |J| = -1, D': \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{matrix} \quad (0,5\text{đ})$$

$$I = \iint_{D'} u \cdot v \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_0^1 u du \cdot \int_0^2 v dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} v^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{3} \quad (0,5\text{đ})$$

Câu III. (1đ)

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \text{ ta có } D': \pi \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D'} \arctg(1+r^2) r dr d\varphi = \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^a \arctg(1+r^2) r dr = & (0,5d) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^a \arctg(1+r^2) d(1+r^2) = \frac{\pi}{2} \int_1^{1+a^2} \arctg t dt = \\
 &= \frac{\pi}{2} [(1+a^2)\arctg(1+a^2) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+(1+a^2)^2) + \frac{1}{2} \ln 2] & (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu IV. (1đ)

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \theta, |J| = \rho^2 \sin \theta,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho \quad (0,5d)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho = 0 \quad (0,5d)$$

Câu V. (1đ)

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, J = r,$$

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^h dr \int_0^{r^2/h} r dz \quad (0,5d)$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^h \frac{r^3}{h} dr = \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{r^4}{h} \Big|_0^h = \frac{\pi h^3}{2} \quad (dvt) \quad (0,5d)$$

Câu VI. (1đ)

$$P = y^2 e^x + 6xy, Q = 3x^2 + 2ye^x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 2ye^x = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}^2,$$

tích phân I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ A(1;2) đến B(3;-1).

(0,5d)

Ta chọn đường lấy tích phân là đường gấp khúc ACB, trong đó C(1;-1).

Khi đó ta được:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy = \int_2^{-1} (3+2ey)dy + \int_1^3 (e^x - 6x)dx = \\
 &= (3y + ey^2) \Big|_2^{-1} + (e^x - 3x^2) \Big|_1^3 = e^3 - 4e - 33 \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu VII. (1đ)

Theo công thức Ostrogradski

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} (4x^2 + 9y^2 + z^2) dx dy dz, \Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2}. \\
 x &= \frac{1}{2} \rho \cos \varphi \sin \theta, y = \frac{1}{3} \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \theta, J = \frac{1}{6} \rho^2 \sin \theta, \\
 I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^4 \sin \theta d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho = \\
 &= \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{5} \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu VIII. (1đ)

Lưu số của trường $\vec{F}$ trên đường cong kín $I = \oint_L -ydx + xdy + 3dz$

trong đó L là đường tròn $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$

$$\text{Phương trình tham số của đường tròn } \begin{cases} x-2 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow 2\pi \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (2 + \cos t) \cdot \cos t] dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} [1 + 2 \cos t] dt = [t + 2 \sin t] \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu IX. (1đ)

$$\text{Đặt } x^2 = t, x = t^{\frac{1}{2}}, dx = t^{\frac{1}{2}-1} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2-x^4}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1} (1-t)^{-\frac{1}{4}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1} (1-t)^{\frac{3}{4}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (0.5d)$$

Câu X. (1đ)

$f(x, \alpha) = e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}$, đạo hàm $f'_\alpha(x, \alpha) = e^{-kx} \cos \alpha x$.

$$|e^{-kx} \cos \alpha x| \leq e^{-kx}, \forall x, \forall \alpha;$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx \text{ hội tụ nên } \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx \text{ hội tụ đều.} \quad (0.5d)$$

$$\text{Do đó } \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}, I(\alpha) = \arctg \frac{\alpha}{k} + C.$$

$$I(0) = 0. \text{ Vậy } I = \arctg \frac{\alpha}{k} \quad (0.5d)$$

ĐỀ 1

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Lập phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại $A(1;-1;\pi)$ của mặt $Z = 4\arctg \sqrt{2x^2 - y^2}$.

b) Chứng minh rằng trường vector

$$\vec{F} = \left[\sin(x^2 + 2y^2 - 3z^2) \right] (x \vec{i} + 2y \vec{j} - 3z \vec{k}) \text{ là trường thế.}$$

Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint_D \frac{dx dy}{1 + (x^2 + y^2)^2}$, với $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Tính $\iiint_V \frac{\sin x \sin(y+z)}{\sin y \sin z} dx dy dz$

với V là hình hộp: $0 \leq x \leq \pi, \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$.

Câu III. (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng tích phân đường

$$I = \int_{AB} (3y^2 \cos^2 x + 1) y \sin x dx - (3y^2 \cos^3 x + \cos x) dy \text{ không phụ thuộc}$$

đường đi từ A đến B. Tính I, biết A(0; π), B(π ; 0).

b) Tính $\int_{AB} (2y + y \sin xy) dx - (2x - x \sin xy) dy$ với AB là cung nhỏ của

đường tròn $x^2 + y^2 = 1$; A(0; 1), B(1; 0).

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint_S z^2 \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy$, với S là mặt kín giới hạn vật thể:

$$0 \leq z \leq \sqrt{2x - x^2 - y^2}, \text{ hướng ra ngoài.}$$

b) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + 4x^4)^2}$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) Phương trình mặt $F(x,y,z) = 4 \arctg \sqrt{2x^2 - y^2} - z$

$$\Rightarrow F'_x = \frac{8x}{(1 + 2x^2 - y^2) \sqrt{2x^2 - y^2}}; F'_y = \frac{-4y}{(1 + 2x^2 - y^2) \sqrt{2x^2 - y^2}}; F'_z = -1$$

$$\Rightarrow \text{Vectơ pháp tuyến tại A: } \vec{n}_A = (4; 2; -1) \quad (0,5đ)$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp diện tại A:

$$4(x - 1) + 2(y + 1) - (z - \pi) = 0 \text{ hay } 4x + 2y - z - 2 + \pi = 0$$

Phương trình pháp tuyến: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-\pi}{-1}$ (0,5đ)

b) $R'_y = 4y(-3z)\cos(x^2 + 2y^2 - 3z^2) = Q'_z = -6z \cdot 2y \cdot \cos(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$

$P'_z = -6z \cdot x \cdot \cos(x^2 + 2y^2 - 3z^2) = R'_x$;

$Q'_z = 2x \cdot 2y \cdot \cos(x^2 + 2y^2 - 3z^2) = P'_x$

$\Rightarrow \vec{F}$ là trường thế (0,5đ)

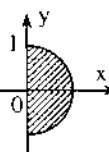
Hàm thế vị

$U = \int_0^x x \sin x^2 dx + \int_0^y 2y \sin(x^2 + 2y^2) dy + \int_0^z -3z \cdot \sin(x^2 + 2y^2 - 3z^2) dz + C$ (0,5đ)

$= -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^x - \frac{1}{2} \cos(x^2 + 2y^2) \Big|_0^y - \frac{1}{2} \cos(x^2 + 2y^2 - 3z^2) \Big|_0^z + C$

$= -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 2y^2 - 3z^2) + C$ (0,5đ)

Câu II. (2,5đ)

a) Đặt $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r; D \rightarrow D': \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$  (0,5đ)

$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{r dr}{1+r^4} = \pi \cdot \frac{1}{2} \arctan r^2 \Big|_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$ (0,5đ)

b) $I = \iiint_V \frac{\sin x (\sin y \cos z + \cos y \sin z)}{\sin y \sin z} dx dy dz =$

$= \int_0^\pi \sin x dx \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\cos y}{\sin y} \right) dz$ (0,5đ)

$= \left(-\cos \Big|_0^\pi \right) \left[\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\ln \sin z + z \cdot \frac{\cos y}{\sin y} \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} dy \right]$

$= 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\left(0 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} \right] dy$ (0,5đ)

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[\left(y \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \ln \sin y \right) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2 \left[\frac{\pi}{4} \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \left(0 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
 &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} (\ln \sqrt{2} + \ln \sqrt{2}) = \pi \ln \sqrt{2} \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

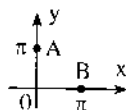
Câu III (2,5d)

a) $P'_y = 9y^2 \cos^2 x \sin x + \sin x = Q'_x \rightarrow I$ không phụ thuộc đường đi. (0,5d)

$$I = \int_{AO} + \int_{OA};$$

phương trình AO: $x = 0 \rightarrow \int_{AO} = \int_{\pi}^0 -(3y^2 + 1)dy = \pi^3 + \pi$ (0,5d)

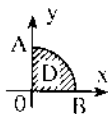
phương trình OB: $y = 0 \rightarrow \int_{OB} = 0$. Vậy $I = \pi^3 + \pi$ (0,5d)



b) Cách 1:

$$I = \int_{\widehat{AB} \cup BO \cup OA} - \int_{BO} - \int_{OA}.$$

Để thấy $\int_{OB} = 0 = \int_{OA}$, $I = - \oint_{AOBA}$ (0,5d)



$$Q'_x = -2 + \sin xy + xy \cos xy$$

$$P'_x = 2 + \sin xy + xy \cos xy$$

Gọi D là $\frac{1}{4}$ hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Áp dụng Gren $\rightarrow I = - \iint_D (-2 - 2) dx dy = 4SCD = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$ (0,5d)

Cách 2: (trực tiếp, chú ý chiều từ t_A đến $t_B \rightarrow$ sai 0 điểm)

Phương trình $\widehat{AB}$: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t_A = \frac{\pi}{2}, t_B = 0$

$$\Rightarrow I = \int_{\pi/2}^0 [(2 \sin t + \sin t \cdot \sin(\cos t \sin t))(-\sin t) - (2 \cos t - \cos t \sin(\cos t \sin t) \cos t)] dt \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \left\{ (-2 \sin^2 t - 2 \cos^2 t) + [\sin(\cos t \sin t)](-\sin^2 t + \cos^2 t) \right\} dt \\
&= \int_0^{\pi/2} 2 dt - \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) \cdot \cos 2t dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) d\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) \\
&= \pi + \cos\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi + 0 = \pi \quad (0,5d)
\end{aligned}$$

Câu IV (2,5đ)

a) *Cách 1:* Gọi S^+ là nửa mặt cầu $z = \sqrt{2x - x^2 - y^2}$, hướng ra ngoài mặt cầu.

D là hình tròn $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$, hướng ngược với $\vec{Oz}$.

Vì phương trình $D: z = 0 \Rightarrow \iint_D z^2 \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy = 0$

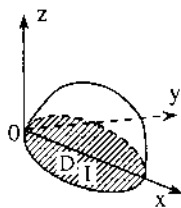
$$\rightarrow \iint_S = \iint_{S^+ \cup D} = \iint_{S^+}$$

phương trình $S^+: z = \sqrt{2x - x^2 - y^2} \Rightarrow I = \iint_{S^+} z^2 \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy$

$$= \iint_{S^+} z^2 z dx dy = \iint_{S^+ \cup D} z^3 dx dy \quad (0,5d)$$

Áp dụng Ostrogradski $\rightarrow I = \iiint_V 3z^2 dx dy dz$

(V giới hạn bởi $S \rightarrow V: \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$)



$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 1 + r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \rightarrow |J| = r^2 \sin \theta; V \rightarrow V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 3r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi \left(-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) \cdot \left(3 \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{5}
 \end{aligned} \tag{0,5d}$$

Cách 2: Vì phương trình D: $z = 0 \rightarrow I = \iint_{S^+} z^2 \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy$,

hình chiếu của S lên Oxy là $D^+ : x^2 + y^2 \leq 2x$

$\vec{n}_s$ tạo với $\vec{Oz}$ góc nhọn $\rightarrow I = \iint_{D^+} (2x - x^2 - y^2)^{3/2} dx dy$ (0,5d)

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r, D^+ \rightarrow D^*: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$ (0,5d)

$$\begin{aligned}
 \rightarrow I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2)^{3/2} r dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - r^2 \right)^{5/2} \frac{2}{5} \Big|_0^1 \\
 &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2}{5} \right) = \frac{2\pi}{5}
 \end{aligned} \tag{0,5d}$$

Cách 3: Áp dụng ngay Ostrogradski $\rightarrow I = \iiint_V 2z \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy dz$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 2r \cos \theta (1 - r^2 \sin^2 \theta)^{1/2} r^2 \sin \theta dr \\
 &= 4\pi \int_0^1 r dr \int_0^{\pi/2} (1 - r^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \left(\frac{1}{2} d(1 - r^2 \sin^2 \theta) \right) \\
 &= -2\pi \int_0^1 r \left[(1 - r^2 \sin^2 \theta)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} dr = -\frac{4\pi}{3} \int_0^1 r \left[(1 - r^2)^{3/2} - 1 \right] dr
 \end{aligned} \tag{0,5d}$$

$$= + \frac{4\pi}{3} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} (1-r^2)^{5/2} \frac{2}{5} \right] \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \right) = \frac{2\pi}{5} \quad (0,5d)$$

$$b) \text{ Đặt } y = 4x^4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{y}{4} \right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} y^{1/4} \rightarrow dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} y^{1/4-1} dy \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}} y^{1/4-1} dy}{(1+y)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{3}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Lập phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến tại A(1: 1) của đường

$$2\sin(x^2 - y^2) = \pi - 4\arctg \frac{y}{x}.$$

b) Chứng minh rằng trường vector

$$\vec{F} = \left[\cos(3x^2 - 2y^2 - z^2) \right] (3x \vec{i} + 2y \vec{j} - z \vec{k}) \text{ là trường thế.}$$

Tìm hàm thế vị của $\vec{F}$.

Câu II. (2,5 điểm)

$$a) \text{ Tính } \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}, \text{ với } D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \text{ Tính } \iiint_V \frac{\cos x \cos(y-z)}{\cos y \sin z} dx dy dz$$

với V là hình hộp: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$.

Câu III. (2,5 điểm)

a) Chứng minh rằng tích phân đường

$$I = \int_{AB} (x^2 \cos^3 y - \cos y) dx - (x^2 \cos^2 y - 1)x \sin y dy \text{ không phụ thuộc}$$

đường đi từ A đến B. Tính I, biết A(π ; 0), B(0; π).

b) Tính $\int_{AB} (3y + y \lg xy) dx - (x - x \lg xy) dy$ với AB là cung nhỏ của đường

tròn $x^2 + y^2 = 1$; A(1; 0), B(0; -1).

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iiint_S \sqrt{2y - y^2 - x^2} dx dy$, với S là mặt kín giới hạn vật thể:

$$0 \leq z \leq \sqrt{2y - y^2 - x^2}, \text{ hướng ra ngoài.}$$

b) Tính $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2 + x^2)^2}$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) Phương trình đường $F(x, y) = 2\sin(x^2 - y^2) + 4\arctg \frac{y}{x} - \pi = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = 4x \cos(x^2 - y^2) - \frac{4y}{x^2 + y^2} \\ F'_y = -4y \cos(x^2 - y^2) + \frac{4x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

→ Vector pháp tuyến tại A(1;1): $\vec{n}_A = (2; -2) = 2(1; -1)$ (0,5đ)

Phương trình tiếp tuyến tại A: $(x - 1) - (y - 1) = 0$ hay $x - y = 0$

Phương trình pháp tuyến: $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1}$ hay $x + y - 2 = 0$ (0,5đ)

$$b) R'_y = -4y.z.\sin(x^2 - 2y^2 - 2z^2) = Q'_z$$

$$P'_z = +6z.x.\sin(3x^2 - 2y^2 - z^2) = R'_x;$$

$$Q'_x = 12x.y.\sin(3x^2 - 2y^2 - z^2) = P'_y$$

$$\Rightarrow \vec{F} \text{ là trường thế} \quad (0,5d)$$

Hàm thế vị

$$U = \int_0^x 3x \cos(3x^2) dx + \int_0^y (-2y) \cos(3x^2 - 2y^2) dy + \\ + \int_0^z (-z) \cos(3x^2 - 2y^2 - z^2) dz + C \quad (0,5d)$$

$$= \frac{1}{2} \sin(3x^2 - 2y^2 - z^2) + C \quad (0,5d)$$

Câu II. (2,5d)

$$a) \text{ Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow |J| = r; D \rightarrow D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{---} \sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \text{---} \\ \text{---} x \end{array} \quad (0,5d)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r dr}{\sqrt{4-r^2}} = \pi \left(-\sqrt{4-r^2} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi(-1+2) = \pi \quad (0,5d)$$

$$b) I = \iiint_V \frac{\cos x (\cos y \cos z + \sin y \sin z)}{\cos y \sin z} dx dy dz =$$

$$= \int_0^\pi \cos x dx \left[\int_{\pi/4}^{\pi/3} dy \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin y}{\cos y} \right) dz \right] \quad (0,5d)$$

$$= \left(\sin x \Big|_0^{\pi/2} \right) \left[\int_0^{\pi/3} dy \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos z}{\sin z} dz + \int_{\pi/6}^{\pi/2} dz \int_0^{\pi/3} \frac{\sin y}{\cos y} dy \right] \quad (0,5d)$$

$$= 1 \left[\frac{\pi}{3} \ln \sin z \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{\pi}{3} (-\ln \cos y) \Big|_0^{\pi/3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[-\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} \right] = \frac{2\pi \ln 2}{3} \quad (0,5d)$$

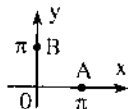
Câu III. (2,5d)

a) $P'_y = -3x^2 \cos^2 y \sin y + \sin y = Q'_x$

→ I không phụ thuộc đường đi.

$$I = \int_{AO} + \int_{OA} ;$$

(0,5d)



phương trình AO: $y = 0 \rightarrow \int_{AO} = \int_{\pi}^0 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{\pi}^0 = \pi - \frac{\pi^3}{3} \quad (0,5d)$

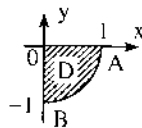
phương trình OB: $x = 0 \rightarrow \int_{OB} = 0$. Vậy $I = \pi - \frac{\pi^3}{3} \quad (0,5d)$

b) *Cách 1:*

$$I = \int_{\widehat{AB} \cup BO \cup OA} - \int_{BO} - \int_{OA} .$$

Để thấy $\int_{OB} = 0 = \int_{OA} \Rightarrow I = - \oint_{\widehat{AOBA}}$

(0,5d)



$$Q'_x = 1 - \left(\operatorname{tg} xy + \frac{xy}{\cos^2 xy} \right)$$

$$P'_x = \left[3 - \left(\operatorname{tg} xy + \frac{xy}{\cos^2 xy} \right) \right]$$

Gọi D là $\frac{1}{4}$ hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq 0$.

Áp dụng Gren $\rightarrow I = - \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \frac{\pi}{2} \quad (0,5d)$

Cách 2: (trực tiếp)

Phương trình $\widehat{AB}$: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t_A = 0; t_B = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{-\pi/2} [3 \sin t \dots] dt \quad (0,5d)$$

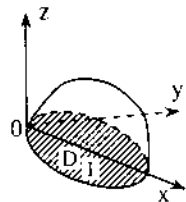
$$= \dots \quad (0,5d)$$

Câu IV. (2.5d)

a) Tương tự đề 1.

Cách 1: Gọi S^+ là nửa mặt cầu $z = \sqrt{2y - y^2 - x^2}$, hướng ra ngoài mặt cầu.

D là hình tròn $\begin{cases} (y-1)^2 + x^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$, hướng ngược với $\vec{Oz}$.



Vì phương trình D: $z = 0 \Rightarrow \iint_D z^2 \sqrt{2y - y^2 - x^2} dx dy = 0$

$$\rightarrow \iint_S = \iint_{S^+ \cup D} = \iint_{S^+} = \iint_{S^+} z^2 dx dy = \iint_S z^3 dx dy \quad (0,5d)$$

Áp dụng Ostrogradski $\rightarrow I = 3 \iiint_V z^2 dx dy dz$

(V là nửa khối cầu có biên là S)

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = 1 + r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r^2 \sin \theta; V \rightarrow V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr$$

$$= 3.2\pi \left(-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) \cdot \left(\frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{5} \quad (0,5d)$$

Cách 2: (tương tự đề 1)...

$$I = \iint_D (2y - y^2 - x^2)^{3/2} dx dy; D: x^2 + y^2 \leq 2y^2 \quad (0,5d)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = 1 + r \sin \varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r, D \rightarrow D': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)^{3/2} r dr = \dots = \frac{2\pi}{5} \quad (0,5d)$$

Cách 3: Áp dụng ngay Ostrogradski, tương tự đề 1 (với $y = 1 + r \cdot \sin \varphi \cos \theta$)

$$\text{b) Đặt } x^2 = 2y \Leftrightarrow x = \sqrt{2y} \rightarrow dx = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy, \quad y|_0^{+\infty}$$

$$\rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2} y^{\frac{1}{2}-1} dy}{2 \cdot (2+2y)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2^3} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}-1} dy}{(1+y)^2} \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

ĐỀ 3

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Tìm hình bao của họ đường cong $1 + k^2(x+1) = ky^2$ (k là tham số).

b) Cho hàm số $u = \ln(x + y^2 + z^2)$ và điểm $M(2; -2; 1)$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M)$

theo hướng $\overrightarrow{OM}$, (O là gốc tọa độ). Tìm $\max \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) \right|$

Câu II. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint_D \frac{\cos(x-y)}{\sin x \cos y} dx dy$, với D là hình vuông $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{3}$.

b) Tính $\iiint_V |z| \sin(x^2 + y^2) dx dy dz$ với V xác định bởi: $x^2 + y^2 \leq \pi$, $x \geq 0$.

$$|z| \leq 2.$$

Câu III. (2,5 điểm)

a) Tìm a để biểu thức $y(ax^3 - \sqrt[3]{1+xy})dx + x(x^3 - \sqrt[3]{1+xy})dy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u.

b) Tính $\int_{AB} [\sin(x^2 + y^2)] (y^3 dx - x^3 dy)$ với AB là cung tròn

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - x^2} \cdot A\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}; 0\right) \cdot B\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}; 0\right)$$

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iiint_S 2xy^2 dy dz + 2yz^2 dz dx + 3xz^2 dx dy$,

với S là mặt elipxoit $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

b) Chứng minh rằng $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{3^{yx} - 1}{x 9^x} dx$ ($x < 2$), là hàm số khả vi trong

khoảng $(-\infty, 2)$. Tính $I'(y)$ và $I(y)$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) Phương trình họ đường cong $F(x,y,k) = 1 + k^2(x+1) - ky^2 = 0$ (1).

Để thấy không có điểm kỳ dị.

$$F'_k = 2k(x+1) - y^2 = 0 \quad (2) \quad (0,5đ)$$

Từ (1), (2) $\rightarrow (x+1) \neq 0 \rightarrow k = \frac{y^2}{2(x+1)}$. Thế vào (1) ta được:

$$1 + \frac{y^4}{4(x+1)} - \frac{y^4}{2(x+1)} = 0 \Rightarrow y^4 = 4(x+1) \quad (0,5đ)$$

$$\text{b) } U'_x = \frac{1}{x+y^2+z^3}, U'_y = \frac{2y}{x+y^2+z^3}, U'_z = \frac{3z^2}{x+y^2+z^3}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\text{Grad } U(M)} = \left(\frac{1}{7}; \frac{-4}{7}; \frac{3}{7} \right) \quad (0,5d)$$

$$\overrightarrow{OM} = 3 \Rightarrow \vec{e} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial e}(M) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{13}{21} \quad (0,5d)$$

$$\text{Max } \left| \frac{\partial U}{\partial e}(M) \right| = |\overrightarrow{\text{Grad } U(M)}| = \frac{\sqrt{26}}{7} \quad (0,5d)$$

Câu II. (2,5d)

$$\text{a) } I = \iint_D \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\sin x \cos y} dx dy = \iint_D \frac{\cos x}{\sin x} dx dy + \iint_D \frac{\sin y}{\cos x} dx dy \quad (0,5d)$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} dy \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin x} + \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\pi}{6} \left[\ln \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \ln \cos y \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot 2 \ln \sqrt{3} = \frac{\pi \ln \sqrt{3}}{3} \quad (0,5d)$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r; \quad V \rightarrow V': \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{\pi} \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi}} dr \int_{-2}^2 |z| \cdot (\sin r^2) \cdot r dz = \pi \cdot \int_0^{\sqrt{\pi}} (\sin r^2) \frac{dr^2}{2} \cdot \int_{-2}^2 |z| dz$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \left(-\cos r^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} \right) \cdot 2 \int_0^2 z dz = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(z^2 \Big|_0^2 \right) = 4\pi \quad (0,5d)$$

Câu III. (2,5đ)

$$a) P'_y = ax^3 - \left[\sqrt[3]{1+xy} + \frac{1}{3}xy(1+xy)^{\frac{1}{3}-1} \right]$$

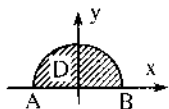
$$Q'_x = 4x^3 - \left[\sqrt[3]{1+xy} + \frac{1}{3}xy(1+xy)^{\frac{1}{3}-1} \right]$$

$$\text{Điều kiện } Q'_x = P'_y \Rightarrow a = 4 \quad (0,5\text{đ})$$

$$U(x,y) = \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x^4 - x \sqrt[3]{1+xy}) dy + C = x^4 y - \frac{3}{4} (1+xy)^{4/3} + C \quad (0,5\text{đ})$$

b) *Cách 1:* Phương trình $\widehat{AB}$: $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_{\widehat{AB}} 1 \cdot (y^3 dx - x^3 dy) \quad (0,5\text{đ})$$



Vì phương trình $\widehat{BA}$: $y = 0 \rightarrow \int_{\widehat{BA}} y^3 dx - x^3 dy = 0$

$$\rightarrow I = \int_{\widehat{AB} \cup \widehat{BA}} - \oint_{\widehat{AB} \cup \widehat{BA}} \quad (0,5\text{đ})$$

Áp dụng Gren $\rightarrow I = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$

$$= 3 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} r^2 \cdot r \cdot dr = 3\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{3\pi^3}{16} \quad (0,5\text{đ})$$

Cách 2: (trực tiếp)

$$\text{Phương trình } \widehat{AB}: \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos t \\ y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin t \end{cases}; \quad t_A = \pi; t_B = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_0^{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin t \right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-\sin t) - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos t \right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos t \right] dt \quad (0,5d) \\
&= \int_0^{\pi} 1 \cdot \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin^4 t + \frac{\pi^2}{4} \cos^4 t \right) dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi} (1 - 2 \sin^2 t \cos^2 t) dt \\
&= \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4} \right) dt = \frac{3\pi^3}{16} \quad (0,5d)
\end{aligned}$$

Câu IV. (2,5đ)

a) Áp dụng Ostrogradski $\rightarrow I = \iiint_V (2y^2 + 2z^2 + 3x^2) dx dy dz$

$$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 1$$

Đặt
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} r \cos \varphi \sin \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \varphi \sin \theta \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \varphi \end{cases} \quad |J| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot r^2 \sin \theta; \quad V \rightarrow V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 \frac{r^2 dr}{2\sqrt{3}} = 2\pi \cdot \left(-\cos \theta \Big|_0^{\pi} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \quad (0,5d)$$

b) Chứng minh $I(y)$ khả vi

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{3^{yx} \ln 3}{9^x} dx = \int_0^{+\infty} 3^{(y-2)x} (\ln 3) dx = \frac{3^{(y-2)x}}{y-2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{y-2} \quad (0,5d)$$

$$\text{Vì } I(0) = 0 \rightarrow I(y) = \int_0^y \frac{-1}{t-2} dt = -\ln|t-2| \Big|_0^y$$

$$= -\ln|y-2| + \ln 2 = \ln \frac{2}{2-y} \quad (y < 2) \quad (0,5d)$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH HỌC KỲ II - K52 (Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

a) Tìm độ cong tại điểm ứng với $t = 1$ của đường $\begin{cases} x = t \cos t - \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$

b) Cho hàm số $u = \sqrt[3]{x^3 - y^3 - z^3}$ và 2 điểm $M(1;1;-1)$, $N(-1;2;1)$. Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M)$ theo hướng $\overrightarrow{MN}$. Tìm $\max \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) \right|$

Câu II. (2,5 điểm)

a) Tính $\iint_D \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} dx dy$, với D là hình vuông $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

b) Tính $\iiint_V |z| \cos(x^2 + y^2) dx dy dz$ với V xác định bởi: $x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$, $y \geq 0$, $|z| \leq 1$.

Câu III. (2,5 điểm)

a) Tìm a để biểu thức $\left(y^3 + \frac{y}{1+x^2 y^2} \right) dx + \left(a x y^2 + \frac{y}{1+x^2 y^2} \right) dy$ là vi

phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u .

b) Tính $\int_{AB} \left[\cos(x^2 + y^2) \right] (y^3 dx - x^3 dy)$ với AB là cung tròn

$$x = \sqrt{\pi - y^2}, A(0; \sqrt{\pi}), B(0; -\sqrt{\pi})$$

Câu IV. (2,5 điểm)

a) Tính $\iiint_S 3x^3 dx dz + 2y^3 dz dx + z^3 dx dy$,

với S là mặt elipxoid $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

b) Chứng minh rằng $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1-2^{yx}}{x8^x} dx$ ($y < 3$), là hàm số khả vi trong khoảng $(-\infty, 3)$. Tính $I'(y)$ và $I(y)$.

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

a) $x' = -t \sin t$, $x'' = -\sin t - t \cos t$

$y' = t \cos t$, $y'' = \cos t - t \sin t$ (0,5đ)

$\rightarrow x'^2 + y'^2 = t^2 - 1$,

$y''x' - y'x'' = (-t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t) - (-t \sin t \cos t - t^2 \cos^2 t) = t^2 = 1$

$\rightarrow C = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{1} = 1$ (0,5đ)

b) $U'_x = \frac{x^2}{(x^3 - y^3 - z^3)^{2/3}}$, $U'_y = \frac{-y^2}{(x^3 - y^3 - z^3)^{2/3}}$, $U'_z = \frac{-z^2}{(x^3 - y^3 - z^3)^{2/3}}$
 $\rightarrow \overrightarrow{\text{Grad } U(M)} = (1; -1; -1)$ (0,5đ)

$\overrightarrow{MN} = (-2; 1; 2) \rightarrow |MN| = 3 \Rightarrow \vec{e} = \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(M) = \frac{-2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{3}$ (0,5đ)

$\text{Max} \left| \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(M) \right| = |\overrightarrow{\text{Grad } U(M)}| = \sqrt{3}$ (0,5đ)

Câu II. (2,5đ)

a) $I = \iint_D \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} dx dy = \iint_D \frac{\sin x}{\cos x} dx dy + \iint_D \frac{\sin y}{\cos y} dx dy$ (0,5đ)

$= \int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} \frac{\sin y}{\cos y} dy$

$$= 2 \times \frac{\pi}{4} (-\ln \cos x) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi \ln \sqrt{2}}{2} \quad (0,5d)$$

$$b) I = 2 \iiint_{V^+} z(r)(x^2 + y^2) dx dy \quad \text{với } V^+: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2} \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r; \quad V^+ \rightarrow V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{\pi/2} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 2 \int_0^1 z dz \int_0^\pi d\varphi \int_{-2}^{\sqrt{\pi/2}} (\cos r^2) \cdot r dr \\ &= 2 \cdot \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^1 \right) \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \sin r^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Câu III. (2,5đ)

$$a) P'_y = 3y^2 + \frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

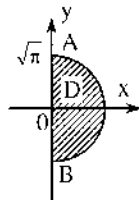
$$Q'_x = ay^2 + \frac{1}{1+x^2y^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\text{Điều kiện } Q'_x = P'_y \Rightarrow a = 3 \quad (0,5d)$$

$$U(x,y) = \int_0^x dx + \int_0^y \left(3xy^2 + \frac{x}{1+x^2y^2} \right) dy + C = xy^3 + \arctg xy + C \quad (0,5d)$$

$$b) \text{ Cách 1: Phương trình } \widehat{AB}: x^2 + y^2 = \pi$$

$$\Rightarrow I = \int_{\widehat{AB}} (-1)(y^3 dx - x^3 dy) \quad (0,5d)$$



$$\text{Vì phương trình BA: } x = 0 \rightarrow \int_{BA} (-1)(y^3 dx - x^3 dy) = 0$$

$$\rightarrow I = \int_{\widehat{AB} \cup BA} (-1)(y^3 dx - x^3 dy) = \oint_{\widehat{AB} \cup BA} y^3 dx - x^3 dy \quad (0,5d)$$

$$\text{Áp dụng Gren} \rightarrow I = \iint_D -3(x^2 + y^2) dx dy$$

$$= -3 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi}} r^2 r dr = -3\pi \cdot \frac{r^4}{4} \bigg|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{3\pi^3}{4} \quad (0,5d)$$

Cách 2: (trực tiếp) (tương tự đề 3)

$$\text{Phương trình } \widehat{AB}: \begin{cases} x = \sqrt{\pi} \cos t \\ y = \sqrt{\pi} \sin t \end{cases}; \quad t_A = \frac{\pi}{2}; t_B = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} (-1)(-\pi^2 \sin^4 t - \pi^2 \cos^4 t) dt = -\frac{3\pi^3}{4} \quad (0,5d)$$

Câu IV. (2,5d)

$$a) \text{ Áp dụng Ostrogradski} \rightarrow I = \iiint_V 3(3x^2 + 2y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} r \cos \varphi \sin \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \varphi \sin \theta; \quad |J| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot r^2 \sin \theta; \quad V \rightarrow V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 \frac{r^2 dr}{\sqrt{6}} = 3 \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos \theta \bigg|_0^\pi \right) \cdot \frac{r^5}{5\sqrt{6}} \bigg|_0^1 = \frac{2\pi\sqrt{6}}{5} \quad (0,5d)$$

b) Chứng minh $I(y)$ khả vi

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln 2}{2^{(3-y)x}} dx = \frac{-2^{(y-2)x}}{-(3-y)} \bigg|_0^{+\infty} = \frac{-1}{3-y} \quad (0.5d)$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } I(0) = 0 \rightarrow I(y) &= \int_0^y I'(t) dt = \int_0^y \frac{1}{t-3} dt \\ &= \ln|t-3| \bigg|_0^y = \ln \frac{3-y}{3} \end{aligned} \quad (0.5d)$$

VII. BẢNG HÀM GAMMA

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ với } 1 \leq x \leq 2$$

(với các giá trị khác sử dụng công thức $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	,90640	1,50	,88623	1,75	,91906
1,01	,99433	1,26	,90440	1,51	,88659	1,76	,92137
1,02	,98884	1,27	,90250	1,52	,88704	1,77	,92376
1,03	,98355	1,28	,90072	1,53	,88757	1,78	,92623
1,04	,97844	1,29	,89904	1,54	,88818	1,79	,92877
1,05	,97350	1,30	,89747	1,55	,88887	1,80	,93138
1,06	,96874	1,31	,89600	1,56	,88964	1,81	,93408
1,07	,96415	1,32	,89464	1,57	,89049	1,82	,93685
1,08	,95973	1,33	,89338	1,58	,89142	1,83	,93969
1,09	,95546	1,34	,89222	1,59	,89243	1,84	,94264
1,10	,95136	1,35	,89115	1,60	,89352	1,85	,94561
1,11	,94740	1,36	,89018	1,61	,89468	1,86	,94869
1,12	,94359	1,37	,88931	1,62	,89592	1,87	,95184
1,13	,93993	1,38	,88854	1,63	,89724	1,88	,95507
1,14	,93642	1,39	,88785	1,64	,89864	1,89	,95838
1,15	,93304	1,40	,88726	1,65	,90012	1,90	,96177
1,16	,92980	1,41	,88676	1,66	,90167	1,91	,96523
1,17	,92670	1,42	,88636	1,67	,90330	1,92	,96788
1,18	,92373	1,43	,88604	1,68	,90500	1,93	,97240
1,19	,92089	1,44	,88581	1,69	,90678	1,94	,97610
1,20	,91817	1,45	,88566	1,70	,90864	1,95	,97988
1,21	,91558	1,46	,88560	1,71	,91057	1,96	,98374
1,22	,91311	1,47	,88563	1,72	,91258	1,97	,98768
1,23	,91075	1,48	,88575	1,73	,91467	1,98	,99171
1,24	,90852	1,49	,88595	1,74	,91683	1,99	,99581
						2,00	1,00000

BÀI TẬP GIẢI TÍCH III

CHƯƠNG I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

1.1. Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp một:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

là bài toán tìm nghiệm của (1): $y = y(x)$ thoả mãn điều kiện ban đầu (sơ kiện) hay điều kiện Cauchy:

$$y(x_0) = y_0 \text{ hay } y|_{x=x_0} = y_0 \quad (2)$$

Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Nếu hàm $f(x, y)$ và $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ liên tục tại lân cận điểm (x_0, y_0) thì trong lân cận đó phương trình (1) tồn tại một nghiệm duy nhất $y = y(x)$ thoả mãn điều kiện (2) nghĩa là khi $x = x_0$ thì $y(x_0) = y_0$.

Nghiệm của bài toán Cauchy (1), (2) gọi là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân (1).

Nghiệm tổng quát (hay tích phân tổng quát) của (1) là hàm $y = y(x, C)$, ($\varphi(x, y, C) = 0$), $C = \text{const}$:

- nó thoả mãn (1) $\forall C \in \mathbb{R}$

- cho điều kiện (2) thì xác định được C duy nhất (để có nghiệm riêng của (1)).

Nghiệm bất thường của (1) là nghiệm không thoả mãn các điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm trong lân cận của điểm (x_0, y_0) .

1.2. Phương trình biến số phân ly

Dạng:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Tích phân tổng quát:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C$$

1.3. Phương trình đẳng cấp

Dạng:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

Cách giải: đặt $\frac{y}{x} = u$.

Dạng:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}$$

Có thể đưa về (1) bằng cách đặt $x = \xi + h$, $y = \eta + k$.

1.4. Phương trình tuyến tính

Dạng:

$$y' + P(x).y = Q(x) \quad (1)$$

Phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y' + P(x).y = 0 \quad (2)$$

Cách giải

Giải (2) có:

$$y = C.e^{-\int P(x)dx} \quad (3)$$

Coi $C = C(x)$ và coi (3) là nghiệm của (1), ta có công thức nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int_{x_0}^x Q.e^{\int_{x_0}^x P(x_0)dx} + C \right) \quad (4)$$

$((x_0, y_0) \in \text{miền liên tục của } P, Q)$.

1.5. Phương trình Bernoulli

Dạng:

$$y' + P(x)y = Q(x).y^\alpha, \quad \alpha \neq 0; 1$$

Cách giải

Đưa về phương trình tuyến tính bằng cách đặt: $y^{-\alpha+1} = z$.

1.6. Phương trình vi phân toàn phần

Dạng:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

với $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trong miền được xét D.

Cách giải

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C$$

hay:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

$$((x_0, y_0), (x, y) \in D)$$

Chú ý

Phương trình $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ với $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ có thể đưa về

(1):

$$\mu \neq 0: \mu P dx + \mu Q dy = 0 \text{ với điều kiện } \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Nếu $\mu = \mu(x)$; ($\mu = \mu(y)$) ta có phương trình xác định μ :

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$$

hoặc:

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}.$$

1.7. Phương trình Clairaut và Lagrange

Phương trình Clairaut

$$y = xy' + \varphi(y')$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = Cx + \varphi(C)$$

Nghiệm bất thường có được bằng cách khử C từ hệ:

$$\begin{cases} y = Cx + \varphi(C) \\ x + \varphi'(C) = 0 \end{cases}$$

Phương trình Lagrange

$$y = x\varphi(y') + \Psi(y')$$

Cách giải:

Đặt $y' = p(x)$.

1.8. Bài toán quỹ đạo góc α

- Tìm họ đường cong Γ cắt mọi đường của họ C : $\Phi(x, y, C) = 0$ (1) dưới một góc $\alpha = \text{const}$ ($\alpha = \pi/2$), Γ gọi là quỹ đạo góc α (trực giao) của họ C .

- *Cách giải:*

Khử C từ (1) và $\Phi'_x(x) + \Phi'_y(y) = 0$ ta được phương trình vi phân của họ C :

$$F(x, y, y') = 0$$

Thay y' bởi $\frac{y' - \tan \alpha}{1 + y' \tan \alpha}$ $\left(\frac{-1}{y'} \right)$ ta có phương trình vi phân của quỹ đạo góc α (trực giao) của họ C .

Trường hợp họ C cho theo phương trình độc cực $\Phi(r, \varphi, C) = 0$ thì thay trong phương trình vi phân của họ C : r' bởi $\left(1 + \tan \alpha \frac{r}{r'} \right) r / \left(\frac{r}{r'} - \tan \alpha \right)$ và bởi $\frac{-r^2}{r'}$ với $\alpha = \pi/2$.

BÀI TẬP

1. Nghiệm lại rằng các hàm sau đây là nghiệm hay tích phân của các phương trình tương ứng:

$$1) y = \frac{C - x^2}{2x} : (x + y)dx + xdy = 0$$

$$4) y = \ln(xy) : (xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$$

Bài giải

$$1) \text{ Ta có } y = \frac{C}{2x} - \frac{x}{2}, y' = \frac{-C}{2x^2} - \frac{1}{2}, (x \neq 0).$$

$$\text{Mặt khác, từ phương trình đã cho: } y' = -1 - \frac{y}{x}, (x \neq 0).$$

Thay y, y' vào phương trình này ta có:

$$\frac{-C}{2x^2} - \frac{1}{2} \equiv -1 - \frac{C}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } y = \frac{C - x^2}{2x} \text{ là nghiệm của phương trình đã cho } (x \neq 0).$$

$$2) \text{ Từ } y = \ln x + \ln y, \text{ coi } y = y(x) \text{ đạo hàm theo } x \text{ phương trình này ta được } y' = \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} \text{ hay } xy y' = y + xy'.$$

Lại đạo hàm theo x phương trình này ta được:

$$xyy'' + xy'^2 + yy' = y' + xy'' + y'$$

$$\text{hay: } (xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$$

$$\text{Vậy } x = \ln xy \text{ là tích phân của phương trình đã cho } (x, y > 0).$$

2. Giải các phương trình biến số phân ly:

$$1) \operatorname{tg}^2 x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot^2 y dy = 0$$

$$2) xy' - y = y^3$$

$$3) y' \sin x = y \ln y, \quad y|_{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$4) y' = (8x + y + 1)^2$$

$$5) (2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$$

$$6) y' = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right) \frac{1}{y}$$

Bài giải

$$1) \operatorname{tg}^2 x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot^2 y dy = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x} + \frac{\cot y dy}{\sin^2 y} = 0 \quad (\cos^2 x \cdot \sin^2 y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \cot^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$$

$$2) xy' - y = y^3 \Rightarrow x dy = (y^3 + y) dx \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^3 + y} = \frac{dx}{x} \quad (y \neq 0) \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{y dy}{y^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y + \ln \sqrt{1 + y^2} = \ln x + \ln |C|, \quad C \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{Cy}{\sqrt{1 + y^2}} \text{ là tích phân tổng quát của (1).}$$

Thử trực tiếp: $y = 0$ cũng là nghiệm (nghiệm riêng) của (1).

$$3) y' \sin x = y \ln y, \quad y > 0, \quad y|_{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Phân ly biến số ta được:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln(\ln y) = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \ln |C|, \quad C \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln y = C \lg \frac{x}{2}, \text{ theo điều kiện ban đầu:}$$

$$\ln 1 = C \lg \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln y = 0.$$

Vậy $y = 1$ là nghiệm riêng của phương trình với điều kiện ban đầu đã cho.

$$4) y' = (8x + 2y + 1)^2$$

$$\text{Đặt } u = 8x + 2y + 1 \Rightarrow u' = 8 + 2y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'-8}{2}, \text{ ta có } \frac{u'-8}{2} = u^2$$

$$\Rightarrow u' = 8 + 2u^2 \Rightarrow \frac{du}{8+2u^2} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \arctg \frac{u}{2} = x + \frac{C}{4} \Rightarrow \arctg \frac{u}{2} = 4x + C$$

$u = 2 \lg(4x + C) \Rightarrow 8x + 2y + 1 = 2 \lg(4x + C)$: là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

$$5) (2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0 \quad (1)$$

Đặt $u = 2x + 3y \Rightarrow du = 2dx + 3dy$, $dy = \frac{du - 2dx}{3}$, thay vào (1) ta được:

$$(u - 1)dx + (2u - 5) \frac{du - 2dx}{3} = 0$$

hay phân ly biến số:

$$\left(\frac{2u-5}{u-7} \right) du = dx \quad (u \neq 7)$$

Tích phân ta được:

$$2u + 9\ln|u - 7| = x + 3C$$

Trở lại biến cũ:

$$4x + 6y - x + 9\ln|u - 7| = 3C$$

hay $x + 2y + 3\ln|2x + 3y - 7| = C$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

$$6) \ y' = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right) \frac{1}{y} \quad (1)$$

Chuyển sang tọa độ cực: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$y' = y'_{\varphi} = \frac{y'_{\varphi}}{x'_{\varphi}} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

Thay vào phương trình (1) ta có:

$$\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r - r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\text{hay} \quad r'(1 - \cos\varphi) = -r\sin\varphi$$

Phân ly biến số ta được:

$$\frac{dr}{r} = \frac{d(\cos\varphi)}{1 - \cos\varphi} \Rightarrow \ln r = -\ln(1 - \cos\varphi) + \ln|C_1|, C \neq 0$$

hay $r = \frac{C}{1 - \cos\varphi}$. Trở lại biến x, y ta được $y^2 = 2Cx + C^2$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

3. Các phương trình sau đây có nghiệm bất thường không?

$$1) \ y' = \frac{\sin y}{1 + x^2}$$

Bài giải

1) Ở đây $f(x, y) = \frac{\sin y}{1+x^2}$, $f'_y = \frac{\cos y}{1+x^2}$ liên tục $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, do đó theo (1.1) thì có 1 nghiệm duy nhất $y = y(x)$ của phương trình thoả mãn điều kiện ban đầu $y|_{x=x_0} = y_0$.

Vậy phương trình không có nghiệm bất thường.

Nếu $f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, P, Q là các đa thức của các biến x, y thì phương trình cũng không có nghiệm bất thường vì khi đó $f(x, y)$ và $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ là liên tục $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, trừ các điểm $(x, y): Q(x, y) = 0$ có thể là điểm bất thường của phương trình.

Vì 2), 3), 4) đều có dạng $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ nên các phương trình này không có nghiệm bất thường.

4. 1) Tìm một đường cong có đoạn tiếp tuyến gồm giữa tiếp điểm và trục hoành bằng khoảng cách từ tiếp điểm đến gốc toạ độ.

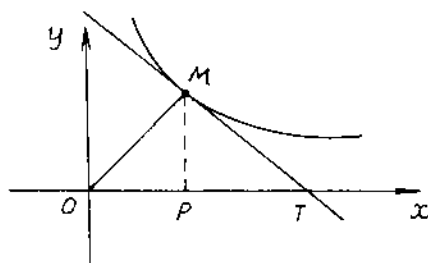
2) Theo định luật Newton: tốc độ giảm nhiệt của một vật tỉ lệ với độ chênh lệch nhiệt độ của vật và không khí.

Tìm quy luật giảm nhiệt của vật, biết rằng sau 20 phút nhiệt độ của vật giảm từ 100°C xuống 60°C và nhiệt độ của không khí là 20°C . Sau bao lâu nhiệt độ của vật giảm xuống 30°C ?

Bài giải

1) Phương trình của tiếp tuyến với đường $y = y(x)$ tại $M(x, y)$ là:

$$Y = y + y'(X - x) \quad (\text{hình 1})$$



Hình 1.

$$\overline{OT} = X = x - \frac{y}{y'} \quad (Y = 0)$$

$$\overline{PT} = \overline{OT} - \overline{OP} = -\frac{y}{y'}, \quad \overline{MT} = \overline{PM}^2 + \overline{PT}^2 = y'^2 + \frac{y^2}{y'^2}$$

Theo đầu bài $\overline{MT} = \overline{OM}$ hay $y'^2 + \frac{y^2}{y'^2} = x^2 + y^2$

Do đó: $y' = \pm \frac{y}{x}$ và $y = Cx$ hoặc $y = \frac{C}{x}$

là phương trình của các họ đường cong phải tìm.

2) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm và theo đầu bài, giả sử $T = T(t)$ là nhiệt độ của vật tại thời điểm t thì ta có phương trình:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20) \text{ với } k \text{ là hệ số tỉ lệ}$$

Từ phương trình này ta có:

$$T = 20 + C.e^{kt}$$

Tại $t = 0$: $100 = 20 + C.e^0 \rightarrow C = 80$

Khi đó: $T = 20 + 80e^{kt}$

Theo giả thiết, hệ số tỉ lệ k được xác định từ:

$$60 = 20 + 80e^{20k}$$

hay $k = -\frac{\ln 2}{20}$

Vậy: $T = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t} = 20 + 80.2^{-\frac{t}{20}}$

Bây giờ ta xác định t khi vật giảm xuống 30°C :

$$30 = 20 + 80.2^{-\frac{t}{20}}$$

$$\text{hay } \frac{1}{8} = 2^{-\frac{1}{20}} \quad \text{và } t = 60'.$$

5. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp:

1) $(x - y)ydx - x^2dy = 0$

2) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

3) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, y|_{x=2} = 1$

4) $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$

5) $\left(\frac{2}{x^2} - y^2\right)dx + dy = 0$

Bài giải

1) $(x - y)ydx - x^2dy = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{xy - y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2, x \neq 0$$

Đặt $\frac{y}{x} = u, y' = u + x.u'$, ta có:

$$u + xu' = u - u^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-du}{-u^2}$$

$$\ln x = \frac{1}{u} + \ln|C|, C \neq 0$$

$\Rightarrow x = Ce^{\frac{1}{u}}$ hay $x = Ce^{\frac{x}{y}}$ là tích phân tổng quát của phương trình.

Rõ ràng $x = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (nghiệm riêng?).

$$2) y dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + 2\sqrt{xy}} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}}}, (x \neq 0)$$

Đặt $y = xu$ ta được:

$$u + xu' = \frac{u}{1 + 2\sqrt{u}} \Rightarrow \frac{1 - 2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}} du = \frac{dx}{x} \quad (u \neq 0 \text{ hay } y \neq 0)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{u}} - \ln|u| = \ln|x| + C$$

hay $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Rõ ràng $x = 0, y = 0$ cũng là các nghiệm của phương trình (nghiệm riêng).

$$3) (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}, (x \neq 0)$$

Đặt $\frac{y}{x} = u$ ta được:

$$u + xu' = \frac{3u^2 - 1}{2u} \text{ hay } \frac{2udu}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|u^2 - 1| = \ln|x| + \ln|C|, (C \neq 0)$$

$$\rightarrow u^2 - 1 = Cx \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = Cx + 1$$

$$\Rightarrow y = \pm x\sqrt{Cx+1}.$$

theo điều kiện $y_{x=2} = 1$ ta lấy nghiệm: $y = x\sqrt{Cx+1} \Rightarrow 2C+1 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$C = -\frac{3}{8}.$$

Ta có nghiệm riêng: $y = x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$

$$4) (x-y)dx + (2y-x+1)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-2y-1}$$

Đặt $x = x_1 + h, y = y_1 + k$ ta được:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1+h-y_1-k}{x_1+h-2(y_1+k)-1} = -\frac{x_1-y_1+h-k}{x_1-2y_1+h-2k-1}$$

Chọn $h = k = -1$ thì:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1-y_1}{x_1-2y_1} = \frac{1-y_1}{1-2\frac{y_1}{x_1}}, (x_1 \neq 0)$$

Đặt $y_1/x_1 = u$, ta được:

$$u + x_1 u' = \frac{1-u}{1-2u} \quad \text{hay} \quad \frac{(1-2u)du}{2u^2-2u+1} = \frac{dx_1}{x_1}$$

Lấy tích phân ta được:

$$x_1^2(2u^2 - 2u + 1) = C$$

$$\text{hay } x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y = \bar{C}, \quad \bar{C} = \text{const}$$

$$5) \left(\frac{2}{x^2} - y^2 \right) dx + dy = 0 \text{ hay } \frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\text{Đặt } y = \frac{z}{x}, (x \neq 0), \quad y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}, \text{ ta được:}$$

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = \frac{z^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow xz' - z = z^2 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z^2 + z - 2} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân ta được:

$$\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+2}} = Cx \quad (C \neq 0) \text{ hay } \frac{xy-1}{xy+2} = x^3 C^3$$

Giải theo y ta có:

$$y = \frac{\bar{C} + 2x^3}{(\bar{C} - x^3)x}; \quad \left(\bar{C} = \frac{1}{C^3} \right)$$

6. 1) Tìm một đường có độ dài của hình chiếu của đoạn tiếp tuyến gồm giữa tiếp điểm và trục hoành trên trục hoành (gọi là tiếp ảnh) bằng trung bình cộng các toạ độ của tiếp điểm.

2) Tìm dạng của một gương biết rằng mọi chùm tia tới song song chiếu vào gương thì các tia phản chiếu hội tụ tại một điểm.

Bài giải

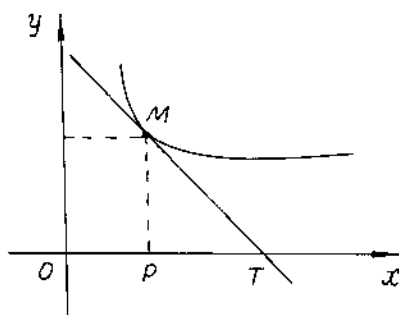
1) Theo 1) bài 4:

$$\overline{PT} = -\frac{y}{y'} \quad (\text{hình 2}).$$

Theo giả thiết:

$$\left| \frac{y}{y'} \right| = \frac{x+y}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{y}{y'} = \pm \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Xét dấu + ta có } y' = \frac{2y}{x+y}.$$



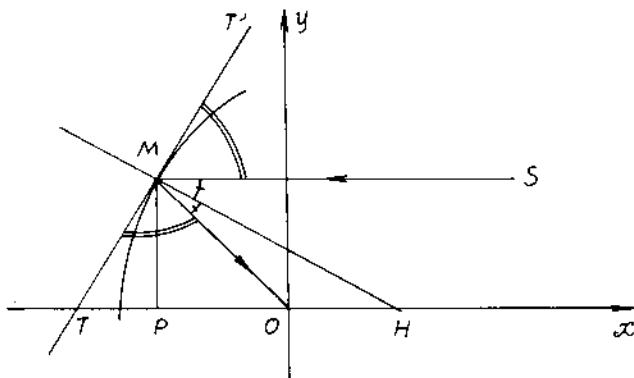
Hình 2.

Phương trình này là phương trình đẳng cấp, giải ta được tích phân tổng quát của nó là:

$$(x - y)^2 = Cy \quad (C \neq 0)$$

Đó là phương trình của một họ đường paraboles trong mặt phẳng ($AC - B^2 = 0$: tiêu chuẩn phân loại).

2) Theo giả thiết và chọn hệ toạ độ như hình 3 ta có:



Hình 3.

$$\widehat{SMH} = \widehat{OMH}, \quad \widehat{OTM} = \widehat{MT'}$$

$$\Rightarrow \widehat{OTM} = \widehat{MT'} \Rightarrow \Delta MOT \text{ cân} \Rightarrow OT = OM$$

$$\operatorname{tg} \widehat{OTM} = y' \quad (1), \text{ mặt khác } \operatorname{tg} \widehat{OTM} = \frac{\overline{PM}}{\overline{TP}}$$

$$PM = y, \quad \overline{TP} = \overline{TO} - \overline{PO} = \overline{OM} - \overline{PO}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} + x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \widehat{OTM} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \quad (2)$$

$$\text{Theo (1) và (2), ta có: } y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

Đó là phương trình dạng cấp. Đặt $x = z \cdot y$ ta được:

$$(\sqrt{z^2 y^2 + y^2} + zy) dy - y(z dy + y dz) = 0$$

$$\text{hay} \quad \sqrt{z^2 + 1} dy - y dz = 0.$$

$$\text{Do đó:} \quad \frac{dy}{y} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = 0$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) = -\ln C_1 \quad (C_1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow z + \sqrt{z^2 + 1} = C_1 y$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x^2 + y^2} = C_1 y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{2}{C_1} \left(x + \frac{1}{2C_1} \right)$$

$$\text{hay: } y^2 = 2C \left(x + \frac{C}{2} \right), \left(C = \frac{1}{C_1} \right)$$

Vậy dạng của gương là mặt paraboloid tròn xoay.

7. Giải các phương trình tuyến tính cấp một và Bernoulli:

$$1) \quad y' - y \sin x = \sin x \cos x$$

$$2) \quad y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$$

$$3) \quad (1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)dy$$

$$4) \quad y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y|_{x=0} = 0$$

$$5) \quad xy' + y = y^2 \ln x, \quad y|_{x=1} = 1$$

$$6) \quad y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$$

Bài giải

$$1) \quad y' - y \sin x = \sin x \cos x \quad (1)$$

Giải phương trình thuần nhất:

$$y' - y \sin x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \sin x dx$$

$$\Rightarrow y = C e^{-\cos x}$$

Coi $C = C(x)$ thì $y = C(x)e^{-\cos x}$ thay vào (1):

$$C' e^{-\cos x} + C \sin x e^{-\cos x} - C e^{-\cos x} \sin x = \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow C' = \sin x \cos x e^{\cos x}$$

$$\Rightarrow C(x) = - \int \cos x e^{\cos x} d(\cos x) = - \int u e^u du \quad (u = \cos x);$$

$$\begin{aligned} C(x) &= - u \cdot e^u + e^u + \bar{C} \\ &= e^u (1 - u) + \bar{C} \\ &= e^{\cos x} (1 - \cos x) + \bar{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } y &= (e^{\cos x} (1 - \cos x) + \bar{C}) e^{-\cos x} \\ &= \bar{C} e^{-\cos x} + (1 - \cos x) \end{aligned}$$

là nghiệm tổng quát của (1).

Coi $C = C(x)$: $y = C(x)(1 + x^2)$ thay vào (1):

$$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + \bar{C} \Rightarrow y = (1 + x^2)(\bar{C} + x)$$

$$\bar{C} = \text{const}$$

$$2) y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y} \quad (1) \Rightarrow y' \cos y + \sin y = x \quad (\cos y \neq 0)$$

Đặt $\sin y = u \Rightarrow y' \cos y = u'$

$$\Rightarrow u' + u = x \Rightarrow u = C \cdot e^{-x} + (x - 1)$$

$$\Rightarrow \sin y = C \cdot e^{-x} + (x - 1) \text{ là tích phân tổng quát của (1).}$$

$$3) (1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)dy \quad (1)$$

Coi $x = x(y)$, (1) viết được:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} x = \frac{\sin y}{\sqrt{1 + y^2}} \quad (2)$$

Giải phương trình thuần nhất:

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = - \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow x = \frac{C}{\sqrt{1+y^2}}$$

Coi $C = C(y)$: $x = \frac{C(y)}{\sqrt{1+y^2}}$ thay vào (2)

$$C'(y) = \sin y \Rightarrow C(y) = -\cos y + \bar{C}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\cos y + \bar{C}}{\sqrt{1+y^2}} \text{ hay } x\sqrt{1+y^2} + \cos y = \bar{C}$$

là tích phân tổng quát của (1).

4) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ (1), $y|_{x=0} = 0$ (2)

Giải: $y' - y \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx = \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$$\ln y = -\ln \cos x + \ln C, C \neq 0$$

$$y = \frac{C}{\cos x}, \text{ coi } C = C(x) : y = \frac{C(x)}{\cos x}$$

Thay vào (1), $C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + \bar{C}$

Vậy $y = \frac{x + \bar{C}}{\cos x}$ là nghiệm tổng quát của (1)

Theo (2): $0 = \frac{\bar{C}}{\cos 0}$. Vậy $y = \frac{x}{\cos x}$ là nghiệm riêng phải tìm.

5) $xy' + y = y^2 \ln x$ (1), $y|_{x=1} = 1$ (2)

Từ (1): $y^2 y' + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{\ln x}{x}$: phương trình Bernoulli.

Ở đây: $\alpha = 2$, đặt $z = y^{-\alpha+1} = y^{-1}$.

Ta được:

$$-z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

hay
$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

Giải phương trình này ta được:

$$z = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \right) x = \ln x + 1 + Cx$$

Theo (2) thì: $z|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$

Do đó: $1 = 0 + 1 + C$ hay $C = 0$.

Thay $z = \frac{1}{y}$, ta có nghiệm của bài toán (1), (2):

$$y = \frac{1}{\ln x + 1}$$

6)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x \cos y}{2} + \frac{a \sin 2y}{2} \cdot x^{-1}$$

Phương trình Bernoulli với ẩn hàm $x = x(y)$ và $\alpha = -1$. Đặt $z = x^{-\alpha+1} = x^2$ ta được:

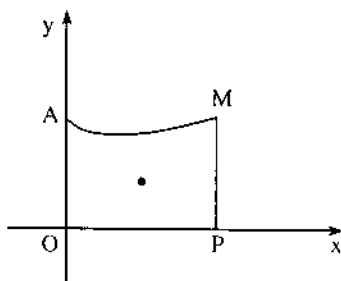
$$z' = z \cos y + a \sin 2y$$

Giải phương trình này và thay $z = x^2$ ta được tích phân tổng quát của (1) là:

$$x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$$

8. 1) Tìm một đường cong biết rằng diện tích tam giác giới hạn bởi trục Ox, tiếp tuyến và bán kính vecteur tại tiếp điểm bằng một hằng số a.

2) Tìm cung $\widehat{AM}$ biết rằng hoành độ trọng tâm của hình OPMA (hình 4) bằng 3/4 hoành độ của điểm M.



Hình 4.

3) Tìm y từ phương trình:

$$\int_0^x y dx = (x + 1) \int_0^x x y dx$$

4) Đổi biến $t = \psi(x)$ để đưa phương trình $y' = p(x).y = 0$ về phương trình với hệ số hằng số rồi giải phương trình này.

5) Nghiệm tổng quát của một phương trình tuyến tính cấp một có dạng $y = A(x)C + B(x)$ (1) ($C = \text{const}$). Chứng minh điều ngược lại: Nếu một phương trình vi phân cấp một có nghiệm tổng quát (1) thì phương trình đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

Bài giải

1) Ta có diện tích tam giác $a = \frac{OT \cdot PM}{2}$, $PM = |y|$ (hình 5).

Phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại $M(x, y)$:

$$Y - y = y'(X - x)$$

Do đó:

$$OT = |X| = \left| \frac{xy' \cdot y}{y'} \right|.$$

Vậy ta có phương trình:

$$\left| \frac{xy' - y}{y'} \cdot y \right| = 2a$$

hay: $y(xy' - y) = \pm 2ay'$

Xét dấu + ta có:

$$(xy - 2a)y' = y^2$$

Coi $x = x(y)$ ta được:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{2a}{y^2}$$

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một với ẩn hàm $x = x(y)$, giải ta có nghiệm tổng quát: $x = \frac{a + cy^2}{y}$ hay $xy = cy^2 + a$ ($y \neq 0$).

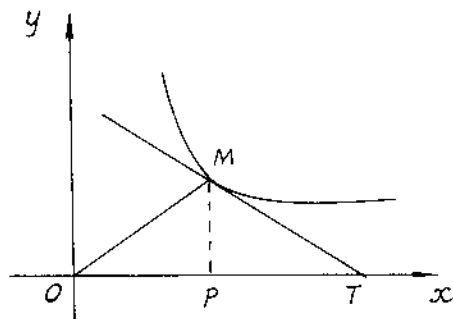
Rõ ràng $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Vậy đường cong phải tìm là một họ đường hyperboles:

$$cy^2 - xy + a = 0 \quad (AC - B^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 < 0)$$

và trục Ox: $y = 0$.

2) Ta biết nếu $\widehat{AM}$: $y = y(x)$, $M(x, y)$ thì hoành độ trọng tâm của hình OAMP (hình 4) là:



Hình 5.

$$x_G = \frac{\int_0^x xy dx}{\int_0^x y dx}$$

Theo giả thiết:

$$\int_0^x xy dx = \frac{3}{4} \int_0^x y dx \cdot x$$

Đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$xy = \frac{3}{4} \int_0^x y dx + \frac{3}{4} xy \quad \text{hay} \quad xy = 3 \int_0^x y dx$$

Lại đạo hàm theo x :

$$xy' + y = 3y$$

$$\text{hay} \quad y' - \frac{2}{x}y = 0$$

Giải phương trình này ta được $y = Cx^2$ là họ đường cong phải tìm (cung $\widehat{AM}$).

$$3) \quad x \int_0^x y dx = (x+1) \int_0^x xy dx$$

Tương tự như 2), đạo hàm 2 lần ta được phương trình:

$$x^2 y' + (3x-1)y = 0$$

Giải phương trình này ta được:

$$y = \frac{C e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$4) y' + p(x)y = 0$$

Đổi biến $t = t(x)$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot t'_x$, thay vào phương trình:

$$\frac{dy}{dt} \cdot t'_x + p(x) \cdot y = 0$$

Chọn $t'_x = p(x)$, hay $t(x) = \int p(x)dx$ thì ta được phương trình:

$$p(x) \left[\frac{dy}{dt} + y \right] = 0 \text{ hay } \frac{dy}{dt} + y = 0$$

với hệ số hằng số ($p(x) = 1$)

Tích phân phương trình này ta được:

$$y = C e^{-t} = C e^{-\int p(x)dx}$$

5) Từ nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y = \Lambda(x) \cdot C + B(x) \quad (1)$$

Đạo hàm theo x ta được:

$$y' = C \cdot \Lambda'(x) + B'(x) \quad (2)$$

Khử C từ (1), (2):

$$y' = \frac{y - B(x)}{\Lambda(x)} \Lambda'(x) + B'(x)$$

$$\text{hay} \quad y' - \frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)} y = \frac{\Lambda(x)B'(x) - \Lambda'(x)B(x)}{\Lambda(x)}$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một với:

$$P(x) = -\frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)}; \quad Q(x) = \frac{\Lambda(x)B'(x) - \Lambda'(x)B(x)}{\Lambda(x)}$$

9. Giải các phương trình vi phân toàn phần hoặc các phương trình đưa được về phương trình vi phân toàn phần:

$$1) (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$$

$$2) (x + e^{xy})dx + e^{xy}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y|_{x=0} = 2$$

$$3) xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$4) \frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2} = 0, \quad y|_{x=1} = 0$$

$$5) (x + y^2)dx - 2xydy = 0$$

$$6) \frac{y}{x}dx + (y^2 - \ln x)dy = 0$$

Bài giải

$$1) (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0 \quad (1)$$

Theo (1.6), ở đây $P = x^2 + y^2 + 2x$, $Q = 2xy$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

Vậy phương trình (1) là phương trình vi phân toàn phần. Tích phân tổng quát của (1) là:

$$u(x, y) = \int_0^x (x^2 + 2x)dx + \int_0^y 2xydy = C \quad (\text{theo 1.6})$$

$$\text{hay:} \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + xy^2 = C.$$

($x_0 = y_0 = 0$ trong R^2 : miền liên tục của P, Q).

$$2) \left(x + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0 \quad (1), \quad y|_{x=0} = 2 \quad (2)$$

$$P = x + e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$Q = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right) + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y} \right) \\ = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \quad \text{vậy } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{và}$$

$$u(x, y) = \int 1 dx + \int_0^x \left(x + e^{\frac{x}{y}} \right) dx = C \\ = y - 1 + \frac{x^2}{2} + y e^{\frac{x}{y}} - y = C$$

$$\text{hay:} \quad \frac{x^2}{2} + y e^{\frac{x}{y}} = \bar{C} \quad (\bar{C} = 1 + C)$$

$$\text{Theo (2):} \quad 0 + 2 = \bar{C} \quad \text{hay } \bar{C} = 2.$$

Vậy $\frac{x^2}{2} + y e^{\frac{x}{y}} = 2$ là tích phân riêng của bài toán (1), (2).

$$3) x dx + y dy + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0 \quad (1), \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(1) là phương trình vi phân toàn phần, vì nó có thể viết:

$$\frac{1}{2} d(x^2 + y^2) + d \left(\arctg \frac{x}{y} \right) = 0$$

Vậy tích phân tổng quát của (1) là:

$$x^2 + y^2 + 2 \arctg \frac{x}{y} = C$$

$$4) \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0, \quad y|_{x=1} = 0$$

$$P = \frac{(x+2y)}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{x-y}{(x+y)^3} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$$

$$Q = \frac{y}{(x+y)^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$$

$$\text{Vậy } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Trong miền liên tục của P, Q ta có tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\int_0^x \frac{x+2y}{(x+y)^2} dx + \int_1^y \frac{dy}{y} = C$$

($x_0 = 0, y_0 = 1$ trong miền liên tục của P, Q)

$$\text{hay:} \quad \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} = C$$

Theo điều kiện ban đầu $0 = C$.

Vậy tích phân riêng của phương trình là:

$$\ln(x+y) - \frac{y}{x+y} = 0$$

$$5) (x + y^2)dx - 2xydy = 0 \quad (1)$$

$$P = x + y^2; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y; \quad Q = -2xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}: \text{ phương trình (1) không là phương trình vi phân toàn phần.}$$

Theo chú ý ở (1.6) ta sẽ tìm thừa số μ để nhân với hai vế của (1), phương trình sẽ thành phương trình vi phân toàn phần, ở đây:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{-\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}{Q} = -\frac{2}{x}$$

Do đó $\mu = \frac{1}{x^2}$ và ta có phương trình vi phân toàn phần:

$$\frac{(x + y^2)dx + 2xydy}{x^2} = 0 \quad (2) \quad (x \neq 0)$$

hay
$$\frac{dx}{x} + \frac{y^2}{x^2} dx - 2 \frac{y}{x} dy = 0$$

Lấy $x_0 = 1, y_0 = 0$ ta có tích phân tổng quát của phương trình là:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{y^2}{x^2} dx - \int_0^y 2y dy = C$$

hay
$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$$

6) $\frac{y}{y} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$

Tương tự như (5), ở đây
$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = -\frac{\frac{2}{x}}{\frac{y}{x}} = -\frac{2}{y}.$$

Do đó $\mu = \frac{1}{y^2}$ và ta có phương trình vi phân toàn phần:

$$\frac{dx}{xy} + \left(y - \frac{\ln x}{y^2}\right) dy = 0$$

Lấy $x_0 = y_0 = 1$, tích phân ta được:

$$\int_1^x \frac{dx}{xy} + \int_1^y \left(y - \frac{\ln 1}{y^2}\right) dy = C$$

hay
$$\frac{1}{y} \ln x + \frac{y^2}{2} = C$$

10. Tìm quỹ đạo trực giao của các họ đường con:

1) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ($a, b = \text{const}$)

2) $r = 2a \sin \varphi$

Tìm họ quỹ đạo góc $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3) Họ các nửa đường thẳng qua gốc tọa độ O.

Bài giải

1) Ta có phương trình vi phân của họ đường tròn bằng cách khử R từ hệ đã cho

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ 2(x - a) + 2(y - b)y' = 0 \end{cases}$$

ta được:

$$(x - a) + 2(y - b)y' = 0$$

Thay y' bởi $-\frac{1}{y}$ ta được phương trình vi phân của họ quỹ đạo trực giao phải tìm:

$$(x - a) - (y - b) \frac{1}{y'} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b}$$

$\Rightarrow y - b = C(x - a)$ là phương trình của họ đường thẳng qua tâm của họ đường tròn đã cho.

2)
$$\begin{cases} r = 2a \sin \varphi \\ r'_{\varphi} = 2a \cos \varphi \end{cases}$$

Khử a ta có phương trình vi phân của họ đã cho: $r' = r \cot \varphi$.

Theo (1.8), thay r' trong phương trình này bởi $-\frac{r^2}{r'}$ ta có phương trình vi phân của họ quỹ đạo trực giao của họ đã cho;

$$-\frac{r^2}{r'} = r \cot \varphi \quad \text{hay} \quad r' = -r \tan \varphi \quad (1)$$

(Trong trường hợp quỹ đạo trực giao: ta biết v, v' là góc giữa bán kính vecteur của giao điểm của hai đường của hai họ và tiếp tuyến với hai đường tại giao điểm đó thì $\tan v = -\cot v'$, ta lại biết $\tan v = \frac{r}{r'}$ (tập 1, C3, §4).

Do đó r/r' được thay bởi $-r'/r$ hay r' được thay bởi $-r^2/r'$.

Bây giờ giải (1):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} &= -\tan \varphi d\varphi \\ \Rightarrow r &= 2C \cos \varphi \end{aligned}$$

Vậy quỹ đạo trực giao của họ đường tròn $r = 2a \sin \varphi$ (qua gốc O và tâm trên Oy) cũng là một họ đường tròn (cũng qua gốc O nhưng tâm trên Ox).

Chú ý

Ta có thể đưa phương trình $r = 2a \sin \varphi$ về phương trình Descartes:

$$\sqrt{x^2 + \varphi^2} = 2a \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{hay} \quad x^2 + y^2 = 2ay$$

rồi tìm quỹ đạo trực giao của họ này như 1) hoặc 2).

3) Phương trình của họ các nửa đường thẳng qua gốc toạ độ O : $y = kx$. Do đó $y' = k$, khử k ta được:

$$y' = \frac{y}{x}$$

Theo (8.1) thay y' bởi $\frac{y'-1}{y'+1}$, ($\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$), ta được phương trình

vì phân của họ phải tìm là: $y' = \frac{x+y}{x-y}$, đây là phương trình đẳng cấp, đặt $y = ux$ và giải ta được họ quỹ đạo phải tìm là:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C \cdot e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

Đổi sang tọa độ cực ta được $r = C \cdot e^{\varphi}$, đó là họ đường xoắn ốc logarithmes.

11. Giải các phương trình Clairaut và Lagrange:

$$1) \quad y = xy' + y'$$

$$2) \quad y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$$

$$3) \quad y = (1+y')x + y'^2$$

Bài giải

1) Theo (1.7), phương trình $y = xy' + y'$ (1) là phương trình Clairaut. Nghiệm tổng quát là:

$$y = Cx + C, \quad (\varphi(y') = y')$$

Nghiệm bất thường: khử C từ hệ:

$$\begin{cases} y = Cx + C \\ 0 = x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -1$: không là nghiệm của (1). Vậy phương trình (1) không có nghiệm bất thường.

$$2) y = xy' + \sqrt{1+y'^2} \quad (1)$$

Nghiệm tổng quát của (1):

$$y = Cx + \sqrt{1+C^2}$$

Nghiệm bất thường, khử C từ hệ:

$$\begin{cases} y = Cx + \sqrt{1+C^2} \\ 0 = x + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{C}{\sqrt{1+C^2}};$$

$$y = -\frac{C^2}{\sqrt{1+C^2}} + \sqrt{1+C^2} = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ là tích phân bất thường của (1).}$$

$$3) y = (1 + y')x + y'^2 \quad (1)$$

Đây là phương trình Lagrange ($\varphi(y') = 1 + y'$, $\psi(y') = y'^2$).

Đặt $y' = p$, ta được:

$$y = (1 + p)x + p^2 \quad (2)$$

Vì phân theo x ta được:

$$pdx = (1 + p)dx + xdp + 2pdp$$

$$\text{hay} \quad \frac{dx}{dp} + x = -2p$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một ẩn hàm $x = x(p)$, giải ta được:

$$x = Ce^{-p} + 2(1 - p) \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta có nghiệm tổng quát của (1) dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = C \cdot e^{-p} + 2(1 - p) \\ y = C(1 + p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$$

12. Giải các phương trình vi phân cấp một các loại:

1) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

2) $x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0$

3) $y = xy' + y' \ln y'$

4) $y' = \frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

5) $y' \cot g + y = 2, \quad y|_{x=0} = 2$

Bài giải

1) $xy'^2 + 2xy' - y = 0 \quad (1)$

Giải (1) đối với y' , ta được:

$$y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}} \quad (2), \quad y' = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}} \quad (3)$$

y' xác định trong miền $x(x + y) > 0$.

(2), (3) là các phương trình đẳng cấp. Giải (2), đặt $y = ux$ ta được:

$$xu' = -1 + \sqrt{1 + u} - u$$

hay
$$\frac{du}{1 + u - \sqrt{1 + u}} = -\frac{dx}{x}$$

Đặt $\sqrt{1 + u} = t, \quad 1 + u = t^2, \quad du = 2tdt$

$$\Rightarrow \frac{2t dt}{t^2 - 1} = - \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{2dt}{1 - t} = - \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(t - 1)^2 = \ln \left| \frac{C}{x} \right| \quad (C \neq 0)$$

$$\Rightarrow (t - 1)^2 = \frac{C}{x}, \text{ trở lại biến cũ, ta được tích phân tổng quát của (2):}$$

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} - 1 \right)^2 = \frac{C}{x} \quad (4)$$

Tương tự, nghiệm tổng quát của (3) là:

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1 \right)^2 = \frac{C}{x} \quad (5)$$

(4), (5) có thể viết:

$$(2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy} = 0 \quad (4')$$

$$(2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy} = 0 \quad (5')$$

Nhân (4') với (5') ta được tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$(2x + y - C)^2 - 4(x^2 + xy) = 0$$

$$\text{hay} \quad (y - C)^2 = 4Cx \quad (6) \quad (\text{họ các paraboles})$$

Đạo hàm (6) theo C:

$$- 2(y - C) = 4x \quad (7)$$

Khử C từ (6), (7) ta được nghiệm bất thường của (1):

$$x + y = 0$$

(thứ: $y = -x$ là 1 nghiệm của (1)).

Chú ý

Nghiệm bất thường cũng nhận được bằng cách khử p từ hệ:

$$\begin{cases} xp^2 + 2xp - y = 0 \\ 2px + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0$$

Nếu $2p - x = 0$ thì $p = \frac{x}{2}$, thay vào (1) ta được: $y = \frac{x^2}{4}$

Nghiệm này chính là nghiệm bất thường của (1).

$$2) x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \ln \frac{x}{y} \quad (2): \text{phương trình đẳng cấp với ẩn hàm } x = x(y).$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{y} = u \Rightarrow \frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|Cy|, C \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln u = Cy + 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = e^{Cy+1}$$

$$\Rightarrow x = ye^{Cy+1} \text{ là tích phân tổng quát của (1).}$$

$$3) y = xy' + y' \ln y' \quad (1): \text{phương trình Clairaut với } \varphi(y') = y' \ln y'$$

Theo (1.7) nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = Cx + C \ln C \quad (2)$$

Nghiệm bất thường có được bằng cách khử C từ hệ gồm (2) và phương trình:

$$0 = x + \ln C + 1$$

ta được: $y = e^{-x+1} \quad (3)$

(Để dàng thử lại (3) là nghiệm của (1)).

4) $y = \frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (1)$: phương trình đẳng cấp.

Đặt $u = \frac{y}{x}$ thì $u + xu' = \operatorname{tg} u + u$ hay $\frac{du}{\operatorname{tg} u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \sin u = Cx$

$\Rightarrow u = \arcsin Cx \Rightarrow y = x \arcsin Cx$ là nghiệm tổng quát của (1).

5) $y' \cot x + y = 2 \quad (1), y|_{x=0} = 2 \quad (2)$

$\Rightarrow y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 2 \operatorname{tg} x$: phương trình tuyến tính.

Giải phương trình này ta được nghiệm tổng quát của (1):

$$y = 2 + C \cos x$$

Theo (2): $2 = 2 + C \Rightarrow C = 0$.

Vậy nghiệm của bài toán: $y = 2$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

2.1. Bài toán Cauchy

Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp n :

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu (điều kiện Cauchy):

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

gọi là bài toán Cauchy của phương trình (1).

- Nghiệm của bài toán Cauchy (1) - (2) gọi là nghiệm riêng của phương trình (1).

- Nghiệm tổng quát của (1) là hàm:

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

thoả mãn (1), $\forall C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ và từ (2) xác định được $C_1, C_2, \dots, C_n$ duy nhất.

Định lý tồn tại duy nhất

Nếu hàm $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ thì (1) có nghiệm $y = y(x)$ trong lân cận của x_0 thoả mãn (2).

Nếu $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ cũng liên tục tại điểm M_0 thì $y = y(x)$ là nghiệm duy nhất.

2.2. Phương trình cấp cao có thể hạ thấp cấp

- Dạng: $y^{(n)} = f(x)$ (1)

Cách giải: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$

...

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n \text{ lần}} f(x) dx dx \dots dx + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

- Dạng: $y'' = f(x, y')$ ($F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$) (váng y) (2)

Cách giải: Đặt $y' = p$, ($y^{(k)} = p$).

Ta được phương trình cấp một (cấp $n - k$).

- Dạng $y'' = f(y, y')$ ($F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$) (váng x) (3)

Cách giải: Đặt $y' = p(y)$ thì hạ được cấp của (3) xuống một đơn vị.

2.3. Phương trình tuyến tính cấp cao

Dạng: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$

Đặt $L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$

Phương trình thuần nhất:

$$L[y] = 0 \quad (1)$$

Phương trình không thuần nhất:

$$L[y] = f(x) \quad (2)$$

Định nghĩa:

Hệ hàm $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, ($y_i(x) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) $\forall x \in X$ gọi là độc lập tuyến tính nếu:

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) = 0$$

chỉ khi $\forall C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Ngược lại thì hệ hàm đó gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Đặc biệt $n = 2$: $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$ ($= \text{const}$) thì $y_1(x), y_2(x)$ là độc lập

(phụ thuộc) tuyến tính.

Định lý

1^o. Nếu $L[y_i] = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) thì:

$$L[y] = L[C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)] = 0, \forall x \in X$$

2^o. Điều kiện cần và đủ để hệ nghiệm $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ của (1) là độc lập tuyến tính (hệ nghiệm cơ bản) là:

Định thức Wronskien của (1):

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in X$$

3^o. Nếu $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \forall x \in X$ là độc lập tuyến tính (hệ nghiệm cơ bản của (1)) thì $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ là nghiệm tổng quát của (1).

4^o. Nếu Y là nghiệm tổng quát của (1), $\bar{y}$ là một nghiệm riêng của (2) thì $y = Y + \bar{y}$ là nghiệm tổng quát của (2).

5^o. Nếu $L[\bar{y}_1] = f_1(x), L[\bar{y}_2] = f_2(x), \dots, L[\bar{y}_n] = f_n(x)$ thì:

$$L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n] = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

6^o. Cách giải: $L[y] = f(x)$ (2)

Đặt $y = y_1 z$ với $L[y_1] = 0$ thì (2) sẽ đưa về được một phương trình tuyến tính cấp $n - 1$ với ẩn hàm z .

Đặc biệt với phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

nếu biết một nghiệm riêng y_1 của nó thì có nghiệm riêng thứ hai:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int p(x) dx}}{y_1^2} dx$$

(y_1, y_2 : độc lập tuyến tính).

7^o. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Nếu $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ là nghiệm tổng quát của

(1) thì $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$ là nghiệm tổng quát của (2) với $C_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) được xác định từ hệ:

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0$$

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Đặc biệt với $n = 2$ thì $C_1(x), C_2(x)$ được xác định từ hệ:

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0$$

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x)$$

BÀI TẬP

13. Giải các phương trình cấp cao có thể hạ thấp cấp:

$$1) \ y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$2) \ x - \sin y'' + 2y'' = 0$$

$$3) \ (1 + x^2)y'' y'^2 + 1 = 0$$

$$4) \ y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} y' = 2 + \ln x, \quad y|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad y'|_{x=1} = 1$$

$$5) \ 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0$$

$$6) \ 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$$

$$7) \ y'''' = 4y''$$

Bài giải

$$1) \ y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C_1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2-1} + C_1x + C_2$$

$$2) x - \sin y'' + 2y'' = 0 \quad (1) \quad (\text{váng } y)$$

$$\text{Đặt } y'' = t, (1) \Rightarrow x = \sin t - 2t \quad (2)$$

$$dy' = y''dx = t(\cos t - 2)dt$$

$$\Rightarrow y' = \int t(\cos t - 2)dt = -t \sin t - \cos t - t^2 + C_1$$

$$\Rightarrow dy = y'dx = (-t \sin t - \cos t - t^2 + C_1)(\cos t - 2)dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = \frac{3}{8} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t + (C_1 - 2 - t^2) \sin t + \\ + \left(\frac{1}{2} - 2C_1 \right) t + \frac{2}{3} t^3 + C_2 \quad (3) \end{aligned}$$

Vậy ta đã tìm được tích phân tổng quát của (1) dưới dạng tham số (2), (3).

$$3) (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0 \quad (1) \quad (\text{váng } y)$$

Theo (2), (2.2) đặt $y' = p(x)$

$$\Rightarrow (1+x^2)p' = -(1+p^2) \Rightarrow \frac{dp}{p^2+1} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \arctg p = -\arctg x + \arctg \bar{C}_1$$

$$y' = p = \frac{\bar{C}_1 - x}{1 + \bar{C}_1 x} = \frac{\bar{C}_1}{1 + \bar{C}_1 x} - \frac{x}{1 + \bar{C}_1 x}$$

$$\Rightarrow y = \ln|1 + \bar{C}_1 x| - \frac{1}{\bar{C}_1} x + \frac{1}{\bar{C}_1^2} \ln(1 + \bar{C}_1 x) + C_2$$

$$y = -C_1 x + (1 + C_1^2) \ln(C_1 + x) + C_2 \quad (\text{với } C_1 = \frac{1}{\bar{C}_1})$$

là nghiệm tổng quát của (1).

$$4) y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} y' = 2 + \ln x \quad (1) \quad (\text{vắng } y), \quad y|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad y'|_{x=1} = 1 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } y' = p(x), \quad (1) \Rightarrow p' + \frac{p}{x(1 + \ln x)} = \frac{2 + \ln x}{1 + \ln x} \quad (3)$$

(3) là phương trình tuyến tính cấp 1 đối với p.

$$\text{Giải: } p' + \frac{p}{x(1 + \ln x)} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x(1 + \ln x)}$$

$$\Rightarrow p = \frac{C_1}{1 + \ln x}, \quad (C_1 \neq 0)$$

Coi $C_1 = C_1(x)$:

$$p' = \frac{C_1'}{1 + \ln x} - \frac{C_1}{x(1 + \ln x)^2}$$

Thay vào (3) ta được:

$$C_1'(x) = 2 + \ln x$$

$$\Rightarrow C_1(x) = x(1 + \ln x) + C_2$$

Vậy nghiệm tổng quát của (3) là:

$$p = x + \frac{C_1}{1 + \ln x} \quad \text{hay } y' = x + \frac{C_1}{1 + \ln x}$$

Theo (2): $1 = 1 + \frac{C_1}{1+0} \Rightarrow C_1 = 0$

Do đó: $y' = x$ và $y = \frac{x^2}{2} + C_2$

Cũng theo (2): $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

Vậy ta được nghiệm của bài toán Cauchy (1) - (2):

$$y = \frac{x^2}{2}$$

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2 \quad (1) \quad (\text{vắng } x), \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

Theo (3), (2.2) đặt $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$

$$(1) \Rightarrow 2yp \frac{dp}{dy} - 3p^2 = 4y^2$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{3p}{2y} = 2yp^{-1} \quad (3)$$

(3) là phương trình Bernoulli với $\alpha = -1$, đặt $z = p^{\alpha+1} = p^2 \Rightarrow z' = 2pp'$, thay vào (3) ta được:

$$z' - \frac{3}{y}z = 4y \quad (4)$$

(4) là phương trình tuyến tính đối với $z = z(y)$.

Giải (4) ta được:

$$z = -4y^2 + C_1 y^3$$

Thay $z = p^3$ ta được:

$$p = \pm \sqrt{-4y^2 + C_1 y^3}$$

Theo (2) (lấy dấu +):

$$0 = + \sqrt{-4 + C_1}$$

$$\Rightarrow C_1 = 4$$

$$\text{Do đó } p = y' = \sqrt{4y^3 - 4y^2} = 2y\sqrt{y-1}.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{2y\sqrt{y-1}} = dx \quad (5)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y-1} = t \Rightarrow \int \frac{dy}{2y\sqrt{y-1}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \int x dx.$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} t = x + C_2 \Rightarrow t = \operatorname{tg}(x + C_2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-1} = \operatorname{tg}(x + C_2) \quad \text{theo (2): } 0 = \operatorname{tg}(0 + C_2)$$

$$\Rightarrow C_2 = 0.$$

$$\text{Vậy: } y = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$6) 2yy'' + y'^2 + y^4 = 0 \quad (1) \quad (\text{váng } x)$$

$$\text{Đặt } y' = p(y)$$

$$(1) \rightarrow 2yp \frac{dp}{dy} + p^2 + p^4 = 0$$

$$\Rightarrow 2y \frac{dp}{dy} = -p(p^2 + 1) \Rightarrow \frac{dp}{p(1+p^2)} = -\frac{dy}{2y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} - \int \frac{p}{p^2+1} dp = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln C_1 + \ln p - \frac{1}{2} \ln(p^2+1) = -\frac{1}{2} \ln y$$

$$\Rightarrow \frac{C_1 p}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{C_1^2 p^2}{p^2+1} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow (C_1^2 y - 1)p^2 = 1 \Rightarrow (C_1^2 y - 1)^{1/2} dy = \pm dx$$

$$\Rightarrow (C_1^2 y - 1)^{3/2} = \pm \frac{3}{2} C_1^2 x + C_2 : \text{ là tích phân tổng quát của (1).}$$

$$7) \quad y'''^2 = 4y'' \quad (1)$$

Đặt $y'' = p(x)$.

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 = 4y'' \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \pm 2\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{2\sqrt{p}} = \pm dx \Rightarrow \sqrt{p} = \pm x + C_1$$

$$\Rightarrow p = (C_1 \pm x)^2 \Rightarrow y'' = (C_1 \pm x)^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(C_1 \pm x)^3}{3} + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{(C_1 \pm x)^4}{12} + C_2 x + C_3 \text{ là nghiệm tổng quát của (1).}$$

14. 1) Tìm các đường có bán kính cong (khúc bán kính) không đổi.

2) Tìm các đường có bán kính cong tại một điểm bằng hai lần đoạn pháp tuyến tại điểm ấy.

3) Xác định tốc độ bé nhất của một vật để ném vật theo hướng thẳng đứng ra không trung sao cho vật không trở lại trái đất nữa (Bài toán xác định tốc độ vũ trụ cấp hai).

Bài giải

1) Theo công thức tính bán kính cong (1.4) CI, tập II:

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = R \quad (= \text{const})$$

Xét $y'' > 0$, ta có:

$$(1 + y'^2)^{3/2} = Ry'' \quad (1), \quad (\text{váng } x)$$

$$\text{Đặt } y' = p(y) \quad (1) \Rightarrow (1 + p^2)^{3/2} = Rp \frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{Rpdp}{(1 + p^2)^{3/2}} = dy$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{\sqrt{1 + p^2}} = y + C_1 \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{\frac{R^2}{(y + C_1)^2} - 1}$$

Trở lại: $p = y' = \frac{dy}{dx}$ ta được:

$$\frac{(y + C_1)dy}{\sqrt{R^2 - (y + C_1)^2}} = dx$$

$$\Rightarrow -\sqrt{R^2 - (y + C_1)^2} = x + C_2$$

$$\Rightarrow (x + C_2)^2 + (y + C_1)^2 = R^2 \quad (2)$$

Vậy các đường phải tìm là họ đường tròn (2).

Trường hợp $y'' < 0$, làm tương tự ta cũng được kết quả trên.

2) Theo 1), bài 53 tập I: đoạn pháp tuyến tại một điểm $M(x, y)$ trên đường cong $y = y(x)$ là:

$$\left| y\sqrt{1+y'^2} \right|$$

Vậy theo 1) và theo giả thiết ta có:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = 2 \left| y\sqrt{1+y'^2} \right|$$

$$\text{hay} \quad 1 + y'^2 = |yy''|$$

Xét $yy'' \geq 0$ ta được $1 + y'^2 = 2yy''$ (1). Đây là phương trình vắng x , đặt $y = p(y)$.

$$(1) \Rightarrow 1 + p^2 = 2yp \frac{dp}{dy} \quad \text{hay} \quad \frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln(1 + p^2) = \ln y + \ln C_1$$

$$\Rightarrow 1 + p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \sqrt{C_1 y - 1} \quad (\text{lấy dấu } +)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx \Rightarrow \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2$$

$$C_1 y = \frac{C_1^2}{4} (x + C_2)^2 + 1 \Rightarrow y = \frac{C_1}{4} (x + C_2)^2 + 1$$

Vậy các đường phải tìm là một họ đường paraboles.

3) Gọi m là khối lượng của vật, M là khối lượng và R là bán kính Trái Đất (hình 6).

Theo định luật hấp dẫn vạn vật của Newton, ta có phương trình chuyển động của vật là:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{mM}{r^2} \quad (1)$$

với r là khoảng cách từ vật đến tâm Trái Đất, k là hằng số hấp dẫn.

Rõ ràng ta phải đưa vào các điều kiện ban đầu:

$$r|_{t=0} = R \quad (2)$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \quad (3)$$

v_0 là tốc độ ban đầu của vật.

(1) thuộc loại vãng biến độc lập t .

Đặt $r' = v(r)$, $r'' = v \frac{dv}{dr}$.

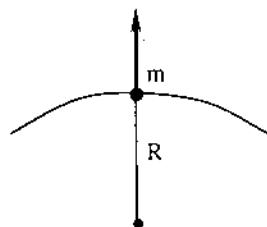
$$(1) \Rightarrow v \frac{dv}{dr} = - \frac{kM}{r^2} \quad \text{hay} \quad v dv = - kM \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + C_1$$

Theo (2), (3) ta có: $\frac{v_0^2}{2} = kM \frac{1}{R} + C_1$

hay: $C_1 = - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$

Vậy: $\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \right)$



Hình 6.

Theo giả thiết vật không trở lại trái đất thì $\frac{v^2}{2} > 0$, mặt khác khi r

khá lớn thì $\frac{kM}{r}$ khá bé nên suy ra:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \text{ hay } v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

Vậy tốc độ bé nhất phải tìm là:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}} \quad (4)$$

Khi vật ở trên mặt đất ta có:

$$-g = -\frac{kM}{r^2} \text{ hay } k = \frac{gR^2}{M}$$

Thay vào (4) ta được:

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

Ta biết $g = 981 \text{ cm/s}^2$, $R = 63.10^7 \text{ cm}$, do đó sau khi tính toán ta có:

$$v_0 = 11,2 \text{ km/s}$$

đó là tốc độ vũ trụ cấp hai phải tìm.

Chú ý

Ở đây chỉ cần tìm v , không phải tìm r nên không phải quay lại $r' = v$.

15. Lập phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai biết hệ nghiệm cơ bản:

$$1) \quad y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3$$

$$2) \quad y_1 = x, \quad y_2 = \sqrt{1-x^2}$$

3) Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất thoả mãn điều kiện ban đầu: $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = -1$, $y''|_{x=1} = 2$, biết hệ nghiệm cơ bản của phương trình đó là: $y_1 = x_1$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$.

Bài giải

1) Ta biết (2.3), phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai có dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

$$(p(x) = a_1(x), q(x) = a_2(x))$$

$$y_1 = x^2, \quad y_1' = 2x, \quad y_1'' = 2.$$

$$y_2 = x^3, \quad y_2' = 3x^2, \quad y_2'' = 6x.$$

Thay vào (1) ta được một hệ phương trình để xác định $p = p(x)$, $q = q(x)$:

$$\begin{cases} 2 + 2xp + x^2q = 0 \\ 6x + 3x^2p + x^3q = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$p(x) = -\frac{4}{x}, \quad q(x) = \frac{6}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

Vậy ta được phương trình phải tìm:

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0 \quad \text{hay} \quad x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

2) Tương tự như 1) ta có:

$$\begin{cases} p + xq = 0 \\ -xp + (1 - x^2)q = \frac{1}{1 - x^2} \quad (x \neq \pm 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{x}{1-x^2}, q = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

3) Vì hệ nghiệm cơ bản của phương trình gồm 3 hàm, nên cấp của phương trình là cấp 3.

Theo (3), (2.3), nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

Do đó:

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2$$

$$y'' = 2C_2 + 6C_3 x$$

Cho thoả mãn điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} y|_{x=1} = C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ y'|_{x=1} = C_1 + 2C_2 + 3C_3 = -1 \\ y''|_{x=1} = 2C_2 + 6C_3 = 2 \end{cases}$$

Giải hệ này dễ dàng ta được: $C_1 = 3, C_2 = -5, C_3 = 2$.

Vậy nghiệm riêng phải tìm là:

$$y = 3x - 5x^2 + 2x^3$$

16. Giải các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất:

1) $(1-x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = \sqrt{1+x}$.

2) $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$, biết một nghiệm riêng có dạng một đa thức.

3) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ ($n \in \mathbb{N}$, phương trình Legendre)
 biết nghiệm riêng $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$ (đa thức Legendre). Tìm
 nghiệm tổng quát của phương trình khi $n = 1, n = 2$.

Bài giải

1) Theo bài (6), (2, 3)

$$\begin{aligned} y_2 &= \sqrt{1+x} \int \frac{e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx}}{1-x} dx \\ &= \sqrt{1+x} \int \frac{e^{-\ln \sqrt{1-x^2}}}{1-x} dx = \sqrt{1+x} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sqrt{1+x} \int d\left(-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = -\sqrt{1-x} \end{aligned}$$

Vậy ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 \sqrt{1+x} + C_2 \sqrt{1-x}$$

$$2) (x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0 \quad (1)$$

$$\text{nghiệm } y_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$y_1' = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

$$y_1'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + \dots + 2a_{n-2}$$

Thay vào (1):

$$\begin{aligned} (x-1)[n(n-1)x^{n-2} + \dots] - (x+1)[nx^{n-1} + \dots] + \\ + 2[xx^n + a_1 x^{n-1} + \dots] \equiv 0 \end{aligned}$$

Hệ số của x^n : $-n + 2 = 0$, do đó nghiệm có dạng đa thức là một đa thức bậc hai:

$$y_1 = x^2 + ax + b$$

$$y_1' = 2x + a, y_1'' = 2$$

Thay vào (1):

$$\begin{aligned} 2(x-1) - (x+1)(2x+a) + 2(x^2+ax+b) &\equiv 0 \\ \Rightarrow ax - a - 2 + 2b &\equiv 0 \Rightarrow a = 0, b = 1. \end{aligned}$$

Vậy:

$$y_1 = x^2 + 1$$

$$y_2 = (x^2 + 1) \int \frac{e^{\int \frac{x+1}{x-1} dx}}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Ta có:

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) dx = x + \ln(x-1)^2$$

$$e^{\int \frac{x+1}{x-1} dx} = e^{x + \ln(x-1)^2} = e^x (x-1)^2$$

Do đó:

$$y_2 = (x^2 + 1) \int \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$y_2 = (x^2 + 1) \int d\left(\frac{e^x}{x^2 + 1} \right) = e^x$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1(1 + x^2) + C_2 e^x$$

$$(3) (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (1)$$

$$y_n = p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (2)$$

$$n = 1, (1) \Rightarrow y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

$$(2) \Rightarrow y_1 = P_1(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 1)' = x$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$$

$$= x \left[\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1-x^2} \right]$$

$$= x \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$$

$$= -1 - \frac{x}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) khi $n = 1$ là:

$$y = C_1 x + C_2 \left(1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)$$

$$n = 2, (1) \Rightarrow y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{6}{1-x^2}y = 0$$

$$(2) \Rightarrow y_2 = P_2(x) = \frac{1}{8} [(x^2 - 1)^2]'' = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

Làm tương tự như trường hợp $n = 1$ ta được nghiệm tổng quát của (1) khi $n = 2$ là:

$$y = C_1(3x^2 - 1) + C_2 \left[8x + (3x^2 - 1) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right]$$

17. Giải các phương trình:

1) $x^2 y'' + xy' - y = x^2$, biết $y_1 = x$ là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất.

2) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$, biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất $y_1 = e^{x^2}$.

$$3) y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$$

Bài giải

1) Ta sẽ dùng phương pháp hạ cấp để giải phương trình này.

Đặt: $y = y_1 z = xz$

$$y' = z + xz', \quad y'' = 2z' + xz''$$

thay vào phương trình ta được:

$$xz'' + 3z' = 1, \quad (x \neq 0)$$

Đặt $z' = p$ ta được $xp' + 3p = 1$. Đây là phương trình tuyến tính cấp một, giải ta được:

$$p = \frac{1}{3} + \frac{\bar{C}_2}{x^3} \quad \text{hay} \quad z' = \frac{1}{3} + \frac{\bar{C}_2}{x^3}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{3}x - \frac{\bar{C}_2}{2x^2} + C_1$$

$$\text{và } y = xz = \frac{x^2}{3} + C_1 x + \frac{C_2}{x}, \quad (C_2 = \bar{C}_2/2)$$

$$2) y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$$

$$y_1 = e^{x\sqrt{2}}, \quad y_2 = e^{x\sqrt{2}} \int \frac{e^{\int 0 dx}}{e^{2x\sqrt{2}}} dx = e^{x\sqrt{2}} \int e^C e^{-2x\sqrt{2}} dx$$

$$y_2 = \frac{e^C}{-2\sqrt{2}} e^{x\sqrt{2}} e^{-2x\sqrt{2}} = \bar{C} e^{-x\sqrt{2}}$$

Lấy $y_2 = e^{-x\sqrt{2}}$ (vì phương trình là thuần nhất), ta có: $y_1 = e^{x\sqrt{2}}$
 $y_2 = e^{-x\sqrt{2}}$.

Ở đây dễ dàng thấy $\bar{y} = e^{x^2}$ là một nghiệm riêng của (1).

Thực vậy:

$$\bar{y}' = 2xe^{x^2}, \quad \bar{y}'' = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2e^{x^2} \equiv 4x^2 e^{x^2}$$

Do đó theo 4° (2,3), ta có nghiệm tổng quát của (1):

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$$

Chú ý: Phương pháp Lagrange:

$$C_1' = \sqrt{2}x^2 e^{x^2 - x\sqrt{2}}, \quad C_2' = -\sqrt{2}x^2 e^{x^2 + x\sqrt{2}}$$

$$\bar{y} = e^{x\sqrt{2}} \int C_1' dx + e^{-x\sqrt{2}} \int C_2' dx = e^{x^2}$$

$$3) y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x \quad (1)$$

Dễ dàng thấy $y_1 = 1$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất:

$$y_2 = 1 \cdot \int \frac{e^{\int 1 \cdot dx}}{1^2} = e^x$$

Ta sẽ tìm nghiệm tổng quát của (1):

$$y = C_1(x).1 + C_2(x)e^x$$

$C_1(x), C_2(x)$ được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot e^x = 0 \\ C_1' \cdot 0 + C_2' \cdot e^x = \frac{2-x}{x^3} e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2' = \frac{2-x}{x^3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$C_1' = -C_2' e^x = -\frac{2-x}{x^3} e^x = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3}$$

$$\Rightarrow C_1 = \int \frac{e^x}{x^2} dx + \int e^x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$C_1 = \int \frac{e^x}{x^2} dx + \frac{e^x}{x^2} - \int \frac{e^x}{x^2} dx + \bar{C}_1$$

$$C_1 = \frac{e^x}{x^2} + \bar{C}_1$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = 1 \cdot \left(\frac{e^x}{x^2} + \bar{C}_1 \right) + e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \bar{C}_2 \right)$$

$$= C_1 + C_2 e^x + \frac{e^x}{x}$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP CAO VỚI HỆ SỐ HẲNG SỐ

3.1. Phương trình thuần nhất

Xét phương trình cấp hai:

$$y'' = py' + qy = 0, \quad p, q = \text{const} \quad (1)$$

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (2)$$

Nếu (2) có các nghiệm $k_1 \neq k_2$ ($k_1 = k_2 = k$, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) thì nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

$$(y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}, y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x))$$

Tương tự, cho phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

$$a_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, n$$

Phương trình đặc trưng:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Tuỳ theo phương trình đặc trưng có nghiệm thực, phức, bội, ta sẽ có các nghiệm riêng tương ứng của phương trình, và do đó sẽ có nghiệm tổng quát của phương trình đó.

3.2. Phương trình không thuần nhất

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

Theo (3.1) ta đã có hệ nghiệm cơ bản của (2).

1^o. Trường hợp chung

Từ hệ nghiệm cơ bản của (2), theo phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange (7^o, (2.3)) ta sẽ được nghiệm tổng quát của (1).

2^o. Trường hợp đặc biệt

$$a) f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Nghiệm riêng của (1) được tìm dưới dạng:

$$\bar{y} = x^\lambda Q_n(x) e^{\alpha x}$$

với: $Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n$

$\lambda = 0$ ($\lambda = 1, \lambda = 2$) nếu α không là nghiệm (là nghiệm đơn, nghiệm kép) của phương trình đặc trưng.

Đạo hàm $\bar{y}$, thay vào (1) ta sẽ được 2 đa thức đồng nhất nhau, từ đó ta có một hệ phương trình để xác định $b_0, b_1, \dots, b_n$.

$$b) f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

$P_n(x)$ ($Q_m(x)$) là các đa thức bậc n (m) của x .

Nghiệm riêng của (1) được tìm dưới dạng:

$$\bar{y} = x^\lambda [R_p(x) \cos \beta x + S_p(x) \sin \beta x] e^{\alpha x}$$

$R_p(x), S_p(x)$ là các đa thức bậc p của x :

$$p = \max(n, m)$$

$\lambda = 0$ ($\lambda = 1$) nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm (là nghiệm) của phương trình đặc trưng.

Trường hợp phương trình cấp n ta cũng có các kết quả hoàn toàn tương tự.

Theo (3.1) ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, theo 2^o (3.2), ta có một nghiệm riêng y của phương trình không thuần nhất. Theo 4^o (2.3), ta có nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất:

$$y = Y + \bar{y}$$

3.3. Phương trình Euler

Dạng:

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b)y + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Trong miền $ax + b > 0$ (< 0) đặt $ax + b = e^t$, ($-e^t$) thì phương trình đưa được về phương trình với hệ số hằng số.

- Dạng (đặc biệt):

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

Đặt $y = x^k$.

Phương trình đặc trưng:

$$k(k-1)\dots(k-n+1) + k(k-1)\dots(k-n+2)a_1 + \dots + k a_{n-1} + a_n = 0 \quad (3)$$

Nếu k là một nghiệm thực bội m của (3) thì k ứng với m nghiệm độc lập tuyến tính của (2):

$$x^k, x^k \ln x, x^k (\ln x)^2, \dots, x^k (\ln x)^{m-1}$$

Nếu $k = \alpha \pm i\beta$ là một cặp nghiệm phức liên hợp bội m của (3) thì k ứng với $2m$ nghiệm độc lập tuyến tính của (2):

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{m-1} \cos(\beta \ln x), \\ x^\alpha \sin(\beta \ln x), x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{m-1} \sin(\beta \ln x)$$

BÀI TẬP

18. Giải các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp cao với hệ số hằng số:

1) $y'' - 6y' + 8y = 0$

2) $y'' - 2y' = 0$

3) $y'' - y' + y = 0$

4) $y''' - y = 0$

5) $y^{(4)} + y = 0$

Bài giải

1) Theo (3.1), phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 4$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

2) Phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 2k = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 2$$

Nghiệm tổng quát: -

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$3) y'' - y' + y = 0 \Rightarrow k^2 - k + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Theo (3.1):

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

$$4) y''' - y = 0 \Rightarrow k^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 1, k_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

$$5) y^{(4)} + y = 0 \Rightarrow k^4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \pm \sqrt{i} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{-i} = \pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} & \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + \\ & + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \end{aligned}$$

19. Giải các phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp cao với hệ số hằng số:

$$1) y'' - 3y' + 2y = 3e^x + 2x^2$$

$$2) y'' + y = \cos x + \cos 2x$$

$$3) y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$$

$$4) y'' + y = \frac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$$

$$5) y'' + 4y = \cos^2 x$$

$$6) \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda^2 x = f(t), \quad x|_{t=0} = 0, \quad x'|_{t=0} = 0$$

Bài giải

$$1) y'' - 3y' + 2y = 3e^x + 2x^2 \quad (1)$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$f(x) = 3e^{1x} + e^{0x} 2x^2$$

$\alpha = 1$ (0) là nghiệm (không là nghiệm) của (2):

$$\Rightarrow \bar{y} = axe^x + \Lambda x^2 + Bx + C$$

$$\bar{y}' = a.e^x + axe^x + 2\Lambda x + B$$

$$\bar{y}'' = 2ae^x + axe^x + 2\Lambda$$

$$(1) \Rightarrow 2ae^x + axe^x + 2\Lambda - 3(ae^x + axe^x + 2\Lambda x + B) + 2(axe^x + \Lambda x^2 + Bx + C) \equiv 3e^x + 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ 2\Lambda = 2 \\ -6A + 2B = 0 \\ 2C + 2\Lambda - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \Lambda = 1 \\ B = 3 \\ C = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy: $\bar{y} = -3xe^x + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$

và: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 3xe^x + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$

2) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$ (1)

$$k^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

Theo 6):

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ở đây: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Xét:

$$f_1(x) = \cos x = e^0(\cos x + 0.\sin x)$$

$\alpha \pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của (2).

Vậy: $\bar{y}_1 = x(a\cos x + b\sin x)$

Thay vào: $y'' + y = \cos x$ ta được $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$. Vậy $\bar{y}_1 = \frac{1}{2}x\sin x$.

Xét: $f_2(x) = \cos 2x = e^0(\cos 2x + 0.\sin 2x)$

$\alpha \pm i\beta = 0 = \pm 2i$ không là nghiệm của (2).

Vậy $\bar{y}_2 = a\cos 2x + b\sin 2x$, đạo hàm thay vào $y'' + y = \cos 2x$, ta được: $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$. Vậy $\bar{y}_2 = \frac{1}{3}\cos 2x$.

Theo 5⁰ (2.3):

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{3}\cos 2x$$

Cuối cùng:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{3}\cos 2x$$

3) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$ (1)

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = 1 \pm i \Rightarrow Y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

$$f(x) = e^x(2\cos x - 4x\sin x) \Rightarrow \alpha \pm i\beta = 1 \pm i \text{ là nghiệm của (2)}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = xe^x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x]$$

Đạo hàm thay vào (1) và tính toán ta được:

$$a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y} = x^2e^x\cos x$$

$$\Rightarrow y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2e^x\cos x$$

Vậy:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x = 1 + 2xe^{-x} + x \cos x$$

$$4) \quad y'' + \dot{y} = -\frac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$$

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i \Rightarrow Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$f = -\frac{1}{(\sin 2x)^{3/2}} \text{ không thuộc dạng đặc biệt nên dùng phương}$$

pháp biến thiên hằng số Lagrange, 7^o, (2.3) ta có:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = -1/(\sin 2x)^{3/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1' = -\frac{\sin x}{(\sin 2x)^{3/2}} \Rightarrow C_1 = -\frac{\sin x}{\sqrt{\sin 2x}} + \bar{C}_1$$

$$C_2' = \frac{\cos x}{(\sin 2x)^{3/2}} \Rightarrow C_2 = -\frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}} + \bar{C}_2$$

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\sin 2x}$$

$$5) \quad y'' + 4y = \cos^2 x \quad (1)$$

$$k^2 + 4 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow k = \pm 2i \Rightarrow Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$f(x) = \cos^2 x$ không thuộc dạng đặc biệt nhưng có thể đưa về các dạng đó:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = f_1(x) + f_2(x)$$

với $f_1(x) = \frac{1}{2}$ ứng với $\bar{y}_1 = \frac{1}{8}$ (thử trực tiếp).

$$f_2(x) = \frac{\cos 2x}{2} = e^{0x} \left(\frac{1}{2} \cos 2x + 0 \sin 2x \right)$$

$$\Rightarrow \alpha \pm i\beta = \pm 2i \text{ là nghiệm của (2)}$$

$$\Rightarrow \bar{y}_2 = x(\alpha \cos 2x + b \sin 2x)$$

đạo hàm và thay vào: $y'' + 4y = \frac{1}{2} \cos 2x$ ta được: $a = 0$, $b = \frac{1}{8}$.

Vậy:
$$\bar{y}_2 = \frac{1}{8} x \sin 2x$$

và:
$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} x \sin 2x$$

$$6) \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda^2 x = f(t) \quad (1),$$

$$x|_{t=0} = 0, \quad x'|_{t=0} = 0 \quad (2), \quad (\lambda > 0)$$

$$\Rightarrow k^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow k = \pm i\lambda.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất của (1) là:

$$x = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t$$

Coi $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$ và $x = C_1(t) \cos \lambda t + C_2(t) \sin \lambda t$ là nghiệm của (1). Theo phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange 7^o (2.3), ta có:

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos \lambda t + C_2'(t) \sin \lambda t = 0 \\ C_1'(t) (-\lambda \sin \lambda t) + C_2'(t) \lambda \cos \lambda t = f(t) \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$C_1'(t) = -\frac{1}{\lambda} f(t) \sin \lambda t$$

$$C_2'(t) = \frac{1}{\lambda} f(t) \cos \lambda t$$

Do đó:

$$C_1(t) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t f(\tau) \sin \lambda \tau d\tau + \bar{C}_1$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t f(\tau) \cos \lambda \tau d\tau + \bar{C}_2$$

$$\bar{C}_1, \bar{C}_2 = \text{const}$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là:

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{C}_1 \cos \lambda t + \bar{C}_2 \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t f(\tau) [\sin \lambda t \cos \lambda \tau - \cos \lambda t \sin \lambda \tau] d\tau \\ &= \bar{C}_1 \cos \lambda t + \bar{C}_2 \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t f(\tau) \sin \lambda (t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Theo (2): $x|_{t=0} = 0 \Rightarrow 0 = \bar{C}_1$

$$x' = -\bar{C}_1 \sin \lambda t + \bar{C}_2 \lambda \cos \lambda t + \frac{1}{\lambda} f(t) [\sin \lambda (t - t)]$$

$$x'|_{t=0} = 0 \Rightarrow 0 = \bar{C}_2$$

Vậy nghiệm của bài toán (1), (2) là:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t f(\tau) \sin \lambda (t - \tau) d\tau$$

20. Viết dạng nghiệm riêng của các phương trình:

1) $y'' + y = 2x \cos 2x \cos 2x$

2) $y'' - 2y' + 5y = x e^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$

3) $y''' - 3y'' + 3y' + y = e^x(x^4 + 1)$

Bài giải

1) $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x \quad (1)$

$$k^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow k = \pm i$$

$$f = 2x \cos 2x \cos x = 2x \frac{1}{2} [\cos 3x + \cos x]$$

$$= x \cos 3x + x \cos x = f_1 + f_2$$

$f_1(x) = x \cos 3x \Rightarrow \alpha \pm i\beta = 0 \pm 3i$ không là nghiệm của (2):

$$\Rightarrow \bar{y}_1 = (ax + b) \cos 3x + (cx + d) \sin 3x \quad (3)$$

$f_2(x) = x \cos x \Rightarrow \alpha \pm i\beta = 0 \pm i = \pm i$ là nghiệm của (2)

$$\Rightarrow \bar{y}_2 = x[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x] \quad (4)$$

Vậy: $y = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$

$\bar{y}_1, \bar{y}_2$ xác định bởi (3), (4) là nghiệm riêng của (1).

2) $y'' - 2y' + 5y = x e^x \cos 2x + x^2 e^x \sin 2x \quad (1)$

$$k^2 - 2k + 5 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow k = 1 \pm 2i$$

$$f = x e^x \cos 2x + x^2 e^x \sin 2x = e^x (x \cos 2x + x^2 \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i \text{ là nghiệm của (2). Do đó nghiệm}$$

riêng của (1) có dạng:

$$\bar{y} = xe^x[(Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x]$$

$$3) y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad (1)$$

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (k - 1)^3 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ là nghiệm bội ba của (2).}$$

$$f = e^x(x^4 + 1) \Rightarrow \alpha = 1 \text{ là nghiệm bội ba của (2).}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = x^3 \cdot e^x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)$$

21. Giải các phương trình Euler và các phương trình đưa được về phương trình với hệ số hằng số:

$$1) x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0$$

$$2) (2x + 1)^2 y'' - 4(2x + 1)y' + 8y = -8x - 4$$

$$3) x^4 y'' + 2x^2 y' + n^2 y = 0, \text{ đổi biến } x = \frac{n}{t}$$

Bài giải

$$1) x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0 \quad (1)$$

Theo (3.3) đặt $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ (2).

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} t' = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right)' \cdot t' \\ &= \left(e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) e^{-t} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

Thay vào (1) và đơn giản ta được:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow k^2 + 4k + 13 = 0 \Rightarrow k = -2 + 3i$$

Vậy nghiệm tổng quát của (3):

$$y = e^{-2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

Trở lại biến x , theo (2), nghiệm tổng quát của phương trình Euler (1) là:

$$y = \frac{1}{x^2}(C_1 \cos(3 \ln x) + C_2 \sin(3 \ln x))$$

$$2) (2x + 1)^2 y'' - 4(2x + 1)y' + 8y = -8x - 4 \quad (1)$$

Đặt: $2x + 1 = e^t, (2x + 1) > 0$

$$t = \ln(2x + 1),$$

$$t'_x = \frac{2}{2x+1} = \frac{2}{e^t} = 2 \cdot e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} t'_x = \frac{dy}{dt} \cdot 2e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} \cdot 2e^{-t} - 2e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \cdot 2e^{-t}$$

Thay vào (1):

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = -4e^t \quad (3)$$

$$\Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$\Rightarrow Y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$f = -4e^t$, $\alpha = 1$ là nghiệm của (4).

$$\Rightarrow \bar{y} = ate^t$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = ae^t + ate^t$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = 2ae^t + ate^t$$

Thay vào (3), ta có $a = 4$ và $\bar{y} = 4te^t$.

Vậy nghiệm tổng quát của (3) là:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 4te^t$$

Theo (2), trở lại biến x ta có:

$$y = C_1(2x + 1) + C_2(2x + 1)^{-1} + 4(2x + 1)\ln(2x + 1)$$

$$3) x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{n}{t}, t = \frac{n}{x} \quad (2)$$

$$\Rightarrow x'_t = -\frac{n}{t^2}, t'_x = \frac{1}{x'_t} = -\frac{t^2}{n}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(\frac{-t^2}{n} \right)$$

$$y''_x = \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{dy}{dt} \left(\frac{-t^2}{n} \right) \right]_t' \cdot \left(\frac{-t^2}{n} \right)$$

$$= \frac{t^4}{n^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2t^3}{n^2} \frac{dy}{dt}$$

Thay vào (1):

$$\frac{n^4}{t^4} \left(\frac{t^4}{n^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2t^3}{n^2} \frac{dy}{dt} \right) + \frac{2n^3}{t^3} \left(\frac{-t^2}{n} \frac{dy}{dt} \right) + n^2 y = 0$$

hay:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow k = \pm i$$

Vậy nghiệm tổng quát của (3) là:

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Theo (2) ta có nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1 \cos \frac{n}{x} + C_2 \sin \frac{n}{x}$$

22. 1) Cho phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)

Với điều kiện nào để phép biến đổi $t = \varphi(x)$ đưa (1) về phương trình với hệ số hằng số?

Áp dụng giải các phương trình:

2) $2xy'' + y' - 2y = 0$

3) $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$

Bài giải

1) Giả sử $t = \varphi(x)$ là một song ánh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \varphi', \quad (\varphi' = \varphi'(x))$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \varphi' \right) = \left(\varphi' \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\varphi''}{\varphi'} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \cdot \varphi$$

Thay vào (1) ta được phương trình:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\varphi'' + p\varphi'}{\varphi'^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{qy}{\varphi'^2} = \frac{f}{\varphi'^2} \quad (1')$$

Rõ ràng (1') là phương trình với hệ số hằng số khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{q}{\varphi'^2} = a \\ \frac{\varphi'' + p\varphi'}{\varphi'^2} = b \end{cases} \quad (1'') \quad (a, b = \text{const})$$

Đó là điều kiện phải tìm.

$$2) \quad 2xy'' + y' - 2y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad (1)$$

Theo (2) ta tìm $t = \varphi(x)$ từ hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{x\varphi'^2} = a \\ \frac{\varphi'' + \frac{1}{2x}\varphi'}{\varphi'^2} = b \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (2):} \quad \varphi' = \frac{1}{\sqrt{ax}}, \quad (a > 0) \Rightarrow \varphi = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$$

$$\varphi'' = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x^3}}$$

Thay vào (3):

$$-\frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{ax}} = b \text{ hay } b = 0$$

Chọn $a = 1$ thì $t = \varphi(x) = 2\sqrt{x}$ và (1) đưa về được phương trình với hệ số hằng số:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

$$\rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

Thay $t = 2\sqrt{x}$ ta có nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$$

$$3) (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0 \quad (1)$$

$t = \varphi(x)$ phải thoả mãn:

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^2 \varphi'^2} = a & (2) \\ \varphi'' + \frac{2x}{1+x^2} \varphi' = b & (3) \end{cases}$$

Từ (2):

$$\varphi' = \frac{1}{\sqrt{a(1+x^2)}}, \quad (a > 0)$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} x$$

$$\varphi'' = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{(-2x)}{(1+x^2)^2}$$

thay φ' , φ'' vào (3) ta được:

$$\frac{\frac{-2x}{\sqrt{a}(1+x^2)^2} - \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}(1+x^2)}}{\frac{1}{a(1+x^2)^2}} = b$$

$\Rightarrow b = 0$, chọn $a = 1$, ta có $\varphi = \operatorname{arctg} x$

$\varphi' = \frac{1}{1+x^2}$, khi đó (1) biến thành:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Trở lại $t = \operatorname{arctg} x$, ta được nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1 \cos(\operatorname{arctg} x) + C_2 \sin(\operatorname{arctg} x)$$

23. 1) Cho phương trình:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

Tìm điều kiện để phép biến đổi ẩn hàm $y = \alpha(x)z$ đưa được (1) về một phương trình vắng y' và khi nào thì phương trình này là phương trình hệ số hằng số.

Áp dụng 1) để giải các phương trình:

$$2) x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (\text{Phương trình Bessel})$$

$$3) y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 2, \quad (a > 0)$$

Bài giải

$$1) y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } y = \alpha(x)z \quad \text{thì } y' = \alpha'z + \alpha z'$$

$$y'' = \alpha''z + 2\alpha'z' + \alpha z''$$

Thay vào (1) ta được:

$$\alpha z'' + (2\alpha' + p\alpha)z' + (\alpha'' + p\alpha' + q\alpha)z = 0$$

Chọn α sao cho:

$$2\alpha' + p\alpha = 0$$

hay:

$$\alpha(x) = e^{\int \frac{p}{2} dx} \quad (2)$$

thì (1) đưa được về phương trình vãng z' .

$$z'' + Q(x)z = 0 \quad (3)$$

với:

$$Q(x) = \frac{\alpha'' + p\alpha' + q\alpha}{\alpha} = -\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q \quad (4)$$

Vậy (2) là điều kiện phải tìm của phép biến đổi ẩn hàm:

$$y = \alpha(x)z$$

Nếu $Q(x) = \text{const}$ thì (3) là phương trình hệ số hằng số, nghĩa là (1) đưa được về phương trình hệ số hằng số.

$$2) x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

$$\text{hay: } y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0 \quad (1)$$

$$\text{ở đây: } p = \frac{1}{x}, q = 1 - \frac{1}{4x^2}$$

Đặt $y = \alpha(x)z$ theo 1) thì:

$$\alpha(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$Q(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + 1 - \frac{1}{4x^2} = 1$$

Vậy (1) đưa được về phương trình:

$$z'' + z = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow k^2 + 1 = 0, k = \pm i$ và nghiệm của (2) là:

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Trở lại $y = \alpha z$, ta có nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$3) y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 2 \quad (1)$$

$$\text{Xét: } y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 0 \quad (2)$$

Tương tự 2), đặt $y = \alpha(x)z$, ở đây $p = \frac{2}{x}, \alpha(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$.

$$Q(x) = \frac{2}{2x^2} - \frac{4}{4x^2} + (-a^2) = -a^2$$

Vậy (1) đưa được về phương trình:

$$z'' - a^2 z = 0 \quad (3)$$

Nghiệm tổng quát của (3) là:

$$z = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$$

Trở lại $y = \alpha z$, ta có nghiệm tổng quát của (2) là:

$$y = C_1 \frac{e^{ax}}{x} + C_2 \frac{e^{-ax}}{x}$$

Để dàng thấy một nghiệm riêng của (1) là:

$$\bar{y} = -\frac{2}{a^2}$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = C_1 \frac{e^{ax}}{x} + C_2 \frac{e^{-ax}}{x} - \frac{2}{a^2}$$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1. 1. Bài toán chung

Hệ phương trình vi phân cấp 1 dạng chính tắc:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

$y_1, y_2, \dots, y_n$ là các ẩn hàm, x là biến độc lập.

Bài toán Cauchy của hệ (1) là bài toán: tìm nghiệm của hệ đó thoả mãn các điều kiện ban đầu:

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}, y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_{n0} \quad (2)$$

2. Định lý tồn tại duy nhất

Nếu $f_i, i = 1, \dots, n$ cùng các đạo hàm riêng của chúng đối với các đối số $y_1, y_2, \dots, y_n$ liên tục trong lân cận của điểm $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ thì tồn tại duy nhất 1 nghiệm $y_i = y_i(x), (i = 1, 2, \dots, n)$ của hệ (1) thoả mãn điều kiện (2).

- Nghiệm của bài toán Cauchy (1) - (2) là nghiệm riêng của hệ (1).

- Nghiệm tổng quát của hệ (1) là hệ hàm:

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

thoả mãn:

- là nghiệm của hệ $\forall (C_1, C_2, \dots, C_n)$

- từ (2) xác định được C_1, C_2, C_n duy nhất.

Cách giải

3. Phương pháp khử

Đưa hệ (1) về một phương trình cấp cao.

4. Phương pháp tổ hợp

Với hệ số đối xứng:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

4.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$Y' = AY + F \quad (1)$$

trong đó: Y, Y', A, F là các ma trận:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, Y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, Y' = AY \quad (2) : \text{hệ thuần nhất.}$$

Định lý ($y_i = y_i(x), a_{ij} = a_{ij}(x), i, j = 1, 2, \dots, n$)

Nếu hệ vecteurs $Y_i(x), (i = 1, 2, \dots, n)$ là một hệ nghiệm cơ bản (độc lập tuyến tính) của (2) thì nghiệm tổng quát của nó là:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n$$

Nếu $\bar{Y}$ là 1 nghiệm riêng của (1) thì nghiệm tổng quát của nó là:

$$Y = \sum_{i=1}^n C_i Y_i + \bar{Y}$$

- Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Nghiệm tổng quát của (1) là:

$$Y = C_1(x) Y_1 + C_2(x) Y_2 + \dots + C_n(x) Y_n$$

$Y_i, (i = 1, 2, \dots, n)$: hệ nghiệm cơ bản của (2).

$C_i(x), (i = 1, 2, \dots, n)$ được xác định từ hệ:

$$\sum_{i=1}^n C''_i(x) y_{ik} = f_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$y_{ik} (i = 1, 2, \dots, n)$: toạ độ của vecteur Y_k

$f_k (k = 1, 2, \dots, n)$: toạ độ của vecteur F .

- Nếu λ_i là 1 nghiệm phức đơn thì ta có các nghiệm phức liên hợp tổ hợp các nghiệm đó ta có các nghiệm thực của hệ:

- Nếu λ_j là 1 nghiệm bội m thì ta tìm nghiệm của (1) dưới dạng:

$$y_1 = P_1(x) e^{\lambda_j x}, y_2 = P_2(x) e^{\lambda_j x}, \dots, y_n = P_n(x) e^{\lambda_j x}$$

$P_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) là các đa thức bậc không quá $m - 1$, các hệ số của chúng được xác định bằng cách đạo hàm thay vào hệ.

BÀI TẬP

24. Giải các hệ phương trình vi phân sau đây bằng phương pháp khử hoặc tổ hợp:

$$1) \begin{cases} y' = y + z & y|_{x=0} = 0 \\ z' = -5y - 5z & z|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x \\ \frac{d^2 z}{dx^2} - y - 3z = -x \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

$$4) \quad \frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

Bài giải

$$1) \begin{cases} y' = y + z & (1) \\ z' = -5y - 5z & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow z = y' - y \Rightarrow z' = y'' - y,$$

thay vào (2):

$$y'' - y' = -5y - (y' - y)$$

$$\Rightarrow y'' + 4y' = 0$$

$$\Rightarrow k^2 + 4k = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -4$$

$$\Rightarrow y = C_1 + C_2 e^{-4x}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow z = y' - y &= -4C_2 e^{-4x} - C_1 - C_2 e^{-4x} \\ &= -C_1 - 5C_2 e^{-4x}\end{aligned}$$

Theo điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = -C_1 - 5C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = -\frac{1}{4}$$

Vậy nghiệm riêng của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} y = \frac{1 - e^{-4x}}{4} \\ z = -\frac{1 - 5e^{-4x}}{4} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x & (1) \\ \frac{d^2 z}{dx^2} - y - 3z = -x & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = z'' - 3z + x \quad (3)$$

$$y'' = z^{(4)} - 3z''$$

$$(1) \Rightarrow z^{(4)} - 3z'' + 2(z'' - 3z + x) + 4z = e^x$$

$$\Rightarrow z^{(4)} - z'' - 2z = e^x - 2x \quad (4)$$

$$\Rightarrow k^4 - k^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \pm \sqrt{2}, k_{3,4} = \pm i$$

$$\Rightarrow z = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$f = e^x - 2x$, $\alpha = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\Rightarrow \bar{z} = a.e^x + bx + c$$

$$\bar{z}'' = a.e^x$$

$$\bar{z}^{(4)} = a.e^x, \text{ thay vào (4)}$$

$$a.e^x - a.e^x - 2(a.e^x + bx + c) = e^x - 2x$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2}e^x + x$$

Vậy nghiệm tổng quát của (4) là:

$$z = Z + \bar{z}$$

$$= C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{1}{2}e^x + x \quad (5)$$

Theo (3), tính toán ta có:

$$y = -C_1 e^{\sqrt{2}x} - C_2 e^{-\sqrt{2}x} - 4C_3 \cos x - 4C_4 \sin x + e^x - 2x \quad (6)$$

Vậy nghiệm của hệ (1), (2) được xác định bởi (5), (6).

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y & (1) \\ \frac{dy}{dt} = -x & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với x, (2) với y rồi cộng lại ta được:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = C_1^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{C_1^2 - x^2}, \quad (y \geq 0)$$

Thay vào (1): $\frac{dx}{dt} = \sqrt{C_1^2 - x^2}$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{C_1} = t + C_2$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 = C_2 \quad (4)$$

Vậy tích phân tổng quát của hệ (1) - (2) được xác định bởi (3) & (4).

$$4) \frac{dx}{mx - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2x dx}{2x(mx - ny)} &= \frac{2y dy}{2y(nx - lz)} = \frac{2z dz}{2z(ly - mx)} \\ &= \frac{2(x dx + y dy + z dz)}{0} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2 \quad (2)$$

Mặt khác, từ (1):

$$\begin{aligned}\frac{ldx}{l(mx - ny)} &= \frac{mdy}{m(nx - lz)} = \frac{ndz}{n(ly - mx)} \\ &= \frac{ldx + mdy + ndz}{0} \\ \Rightarrow lx + my + nz &= C_2 \quad (3)\end{aligned}$$

Vậy tích phân tổng quát của (1) được xác định bởi (2) và (3).

25. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Euler:

$$1) \begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}, \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = -1$$

$$2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z \end{cases}$$

Bài giải

$$1) \begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases} \quad (1) \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = -1 \quad (2)$$

Theo phương pháp Euler (4.3) ta giải:

Phương trình đặc trưng của (1):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

Ứng với $\lambda_1 = 2$ ta có vectơ đặc trưng: $H_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} -h_1 + h_2 = 0 \\ -2h_1 + 2h_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

Lấy $h_1 = h_2 = 1$.

Vậy với số đặc trưng $\lambda_1 = 2$ ta có nghiệm riêng tương ứng của hệ (1) là:

$$y_1 = e^{2x}, \quad z_1 = e^{2x}$$

Tương tự với số đặc trưng $\lambda_2 = 3$ ta có nghiệm riêng tương ứng của hệ đó là:

$$y_2 = e^{3x}, \quad z_2 = 2e^{3x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ (1) là:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \\ z = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x} \end{cases}$$

Theo điều kiện (2):

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ -1 = C_1 + 2C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -1$$

Nghiệm riêng của hệ (1) với điều kiện (2) là:

$$\begin{cases} y = e^{2x} - e^{3x} \\ z = e^{2x} - 2e^{3x} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y & (1) \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 5y & (2) \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng của hệ (1), (2) là:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

$$\lambda = 2i \text{ ứng với vecteur đặc trưng } H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

h_1, h_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (4 - 2i)h_1 + 5h_2 = 0 \\ -4h_1 - (4 + 2i)h_2 = 0 \end{cases}$$

lấy nghiệm:

$$h_1 = 5, h_2 = 2i - 4$$

Ta được nghiệm phức của hệ (1), (2):

$$x = 5e^{2it}, \quad y = (2i - 4)e^{2it}$$

hay:

$$x = 5(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$y = - (4\cos 2t + 2\sin 2t) + i(2\cos 2t - 4\sin 2t)$$

Tách phần thực và phần ảo ta được 2 hệ nghiệm cơ bản của hệ (1), (2):

$$x_1 = 5\cos 2t, \quad y_1 = -(4\cos 2t + 2\sin 2t)$$

$$x_2 = 5\sin 2t, \quad y_2 = 2\cos 2t - 4\sin 2t$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ (1), (2) là:

$$\begin{cases} x = 5C_1\cos 2t + 5C_2\sin 2t \\ y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + 4C_2)\sin 2t \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình đặc trưng của hệ (1):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 12 & -4 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & -12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{hay:} \quad -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$$

Phương trình này có 3 nghiệm:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

Với $\lambda_1 = 1$ ta có vecteur đặc trưng H_1 có các tọa độ h_1, h_2, h_3 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2h_1 + 12h_2 - 4h_3 = 0 \\ -h_1 - 4h_2 + h_3 = 0 \\ -h_1 - 12h_2 + 5h_3 = 0 \end{cases}$$

Ta chọn nghiệm:

$$h_1 = -2, h_2 = 1, h_3 = 2$$

Vậy ứng với $\lambda_1 = 1$ ta có hệ nghiệm riêng của (1):

$$x_1 = -2e^t, y_1 = e^t, z_1 = 2e^t$$

Tương tự, ứng với $\lambda_2 = 2, (\lambda_3 = 3)$ ta có các nghiệm riêng của hệ (1):

$$x_2 = -8e^{2t}, y_2 = 3e^{2t}, z_2 = 7e^{2t}$$

$$(x_3 = -3e^{3t}, y_3 = e^{3t}, z_3 = 3e^{3t})$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ (1) là:

$$\begin{cases} x = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t} \\ y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t} \\ z = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t} \end{cases}$$

CHƯƠNG 2

LÝ THUYẾT VỀ CHUỖI

§1. CHUỖI SỐ

1.1. Định nghĩa

Chuỗi số có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1) \quad (\infty = +\infty)$$

u_n - số hạng tổng quát hay số hạng thứ n

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$: tổng riêng thứ n

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$: tổng của chuỗi

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

S : hữu hạn, (1) gọi là hội tụ (về S)

$S = \infty$ hoặc không tồn tại (1) gọi là phân kỳ.

1.2. Điều kiện hội tụ

1^o. Nếu chuỗi (1) hội tụ thì $u_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

2^o. $u_n \not\rightarrow 0$ thì chuỗi phân kỳ.

3^o. Điều kiện cần và đủ để chuỗi (1) hội tụ là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall m > m_0 \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$$

hay:

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n| < \varepsilon, \quad (m < n)$$

(Điều kiện Cauchy).

1.3. Tính chất

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) hội tụ thì:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 u_n \pm c_2 v_n), \quad c_1, c_2 = \text{const} \neq 0, \text{ hội tụ.}$$

- Tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi không thay đổi nếu thêm vào (bớt đi) một số hữu hạn số hạng đầu của chuỗi.

1.4. Chuỗi dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

1^o. Điều kiện hội tụ

(1) hội tụ khi và chỉ khi S_n bị chặn trên.

2^o. Tiêu chuẩn so sánh

$$\text{Cho } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2)$$

a) Nếu $\forall n \geq n_0: u_n \leq c \cdot v_n$ ($c > 0$) và nếu (2) hội tụ ((1) phân kỳ) thì (1) hội tụ ((2) phân kỳ).

b) Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad 0 < k < +\infty$

thì (1), (2) đồng thời hội tụ hay phân kỳ.

$k = 0$: (2) hội tụ thì (1) hội tụ

$k = +\infty$: (2) phân kỳ thì (1) phân kỳ

Hệ quả

$$\forall n > n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, (u_n, v_n \neq 0)$$

(2) hội tụ ((1) phân kỳ) $\Rightarrow$ (1) hội tụ ((2) phân kỳ).

Các chuỗi dùng để so sánh:

- Chuỗi nhân: $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$

$|q| < 1$: hội tụ

$|q| \geq 1$: phân kỳ

- Chuỗi Dirichlet: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ($\alpha > 0$)

$\alpha > 1$: hội tụ

$\alpha \leq 1$: phân kỳ

$\alpha = 1$: chuỗi điều hoà.

3^o. Tiêu chuẩn D'Alembert

Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ và :

$$\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow (1) \text{ hội tụ} \\ \ell > 1 \Rightarrow (1) \text{ phân kỳ} \\ \ell = 1 : \text{không kết luận} \end{cases}$$

4^o. Tiêu chuẩn Cauchy

Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ và:

$$\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow (1) \text{ hội tụ} \\ \ell > 1 \Rightarrow (1) \text{ phân kỳ} \\ \ell = 1 : \text{không kết luận} \end{cases}$$

5^o. Tiêu chuẩn Raabe

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 \right) = \Re$ và:

$$\begin{cases} \Re > 1 \Rightarrow (1) \text{ hội tụ} \\ \Re < 1 \Rightarrow (1) \text{ phân kỳ} \end{cases}$$

6^o. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy

Nếu $f(x)$ liên tục và đơn điệu giảm $\forall x \geq 1$:

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots \text{ và } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ (phân kỳ)}$$

thì (1) hội tụ (phân kỳ).

1.5. Chuỗi có dấu bất kỳ và đan dấu

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, u_n có dấu bất kỳ: chuỗi có dấu bất kỳ.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots$, $u_n > 0$: chuỗi đan dấu.

(3) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì (1) hội tụ, (1) gọi là hội tụ tuyệt đối. Nếu (1)

hội tụ và (3) phân kỳ thì (1) gọi là bán hội tụ hay hội tụ có điều kiện.

- Nếu (1) hội tụ tuyệt đối và có tổng là S thì chuỗi số có được bằng cách thay đổi tùy ý các số hạng của (1) cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là S .
- Nếu (1) không hội tụ tuyệt đối thì cho trước một số ℓ , ta luôn luôn có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để được một chuỗi hội tụ đến ℓ .
- Nếu chuỗi đan dấu (2) có u_n đơn điệu giảm, $u_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) thì (2) hội tụ và có tổng $S \leq u_1$.

(Định lý Leibniz).

Chú ý: Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy xét $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$;

chuỗi này phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ phân kỳ.

1.6. Phép nhân chuỗi

Tích của $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ (3)

$$\text{với: } w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1$$

- Nếu (1) và (2) hội tụ về S_1, S_2 và một trong chúng là hội tụ tuyệt đối thì (3) hội tụ về $S_1.S_2$. Nếu cả 2 chuỗi (1), (2) đều hội tụ tuyệt đối thì (3) cũng hội tụ tuyệt đối về $S_1.S_2$.

BÀI TẬP

26. Tìm tổng riêng S_n và tổng S (nếu có) của các chuỗi:

$$1) \quad \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots$$

$$2) \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n}}, \quad x \neq \pm 1$$

Bài giải

1) Rõ ràng:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

$$2) \quad u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}, \quad x \neq \pm 1$$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{x^{2^{n-1}}(1-x^{2^{n-1}})}{(1-x^{2^{n-1}})(1-x^{2^n})} \\ &= \frac{x^{2^{n-1}} \cdots x^{2^{n-1}} \cdot x^{2^{n-1}} + 1 - 1}{(1-x^{2^{n-1}})(1-x^{2^n})} \\ &= \frac{(x^{2^{n-1}} - 1) + (1-x^{2^n})}{(1-x^{2^{n-1}})(1-x^{2^n})} = \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^2} - \dots + \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \end{aligned}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & : |x| < 1 \\ \frac{1}{1-x} & : |x| > 1 \end{cases}$$

27. Dùng điều kiện Cauchy xét sự hội tụ của các chuỗi:

$$1) \quad \frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

$$2) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Bài giải

$$\begin{aligned} 1) S_{2n} - S_n &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} \\ &> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{n}{2n+1} > \frac{n}{4n} = \frac{1}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

Vậy chuỗi đã cho là chuỗi phân kỳ.

$$2) S_{n+p} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{n+p} - S_n &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vậy theo điều kiện Cauchy, chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ.

28. Xét sự hội tụ của các chuỗi:

$$1) \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \dots$$

$$2) \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n+1}{2n+1} + \dots$$

$$3) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^n$$

$$*7) \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \dots$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

$$*13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}}$$

$$14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}, \quad (p > 1)$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$$

Bài giải

$$1) \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \dots \quad (1)$$

Ở đây: $u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n \leq \left(\frac{2}{5} \right)^n = v_n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là chuỗi nhân hội tụ

vì $q = \frac{2}{5} < 1$.

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2^0 (1.4), chuỗi (1) hội tụ.

$$2) \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n+1}{2n+1} + \dots \quad (2)$$

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Vậy theo 2^0 (1.2), chuỗi (2) phân kỳ.

$$3) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^2} + \dots$$

Ta có:

$$u_n = \frac{1}{(3n-1)^2} < \frac{1}{9(n-1)^2} = v_n$$

Mặt khác chuỗi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \frac{1}{9} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{9} \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'^2}, \quad n' = n - 1$$

là chuỗi hội tụ và chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ (theo 2^0 (1.4)).

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}, \text{ theo } 3^o (1.4):$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1} = \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$u_n = \frac{n^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}}{n^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right) \approx \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} \rightarrow e^0 = 1, n \rightarrow \infty$$

Vậy theo 2^o (1.2) chuỗi đã cho phân kỳ.

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n-1} \right)^n$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy 4^o (1.4), xét:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n-1} \right)^n} = \frac{n-1}{2n-1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

Vậy chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ.

$$7) \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \dots$$

ở đây: $u_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}$,

n căn, $n = 1, 2, \dots$

Đặt $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$ thì:

$$u_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{8}} = 2\sin\frac{\pi}{8} = 2\sin\frac{\pi}{2^3}$$

...

$$u_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < 2\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n} = v_n$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ là chuỗi nhân hội tụ vì công bội $q = \frac{1}{2} < 1$.

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi đã cho hội tụ.

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

Ở đây $u_n = n^3/e^n$, theo tiêu chuẩn D'Alembert: 3^0 (1.4):

Xét:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{e} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Theo 2^o, (1.4), xét: $u_n = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Ta biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha = \frac{1}{2} < 1 \right)$.

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

$$10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

Xét:
$$f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

Hàm $f(x)$ là liên tục và đơn điệu giảm $\forall x \geq 2$.

$$f(n) = u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln(\ln x)} = \ln \ln(\ln x) \Big|_2^{\infty} = +\infty$$

Theo 6^o (1.4), chuỗi đã cho là chuỗi phân kỳ.

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

$$u_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$$

mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2}$ hội tụ ($\alpha > 1$).

Vậy theo 2° (1.4) chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ.

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

Xét:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{e^n n!} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} > 1$$

$$\text{vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ và } \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e$$

Vậy u_n tăng dần, không thể dần đến không, theo 2° (1.2): chuỗi đã cho phân kỳ.

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \sqrt[n]{n}}$$

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha} \sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha} \sqrt[n]{n}} = 1$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ ($\alpha = 1$).

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho là chuỗi phân kỳ.

$$\Re = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty$$

Theo tiêu chuẩn Raabe: chuỗi đã cho hội tụ.

$$14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \quad (p > 1)$$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ thì $f(n) = \frac{1}{n \ln^p n}$ và rõ ràng khi $x > 1$, $f(x)$

là liên tục và đơn điệu giảm.

Theo tiêu chuẩn tích phân Cauchy 6⁰ (1.9), xét:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x) dx &= \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^p x} \\ &= \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}} < +\infty \text{ khi } p > 1 \end{aligned}$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$$

Rõ ràng: $0 \leq \frac{\sin^3 x}{1+x} \leq x^3$ khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó:} \quad 0 \leq u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} x^3 dx \\ &= \frac{\pi^4}{4n^4} = v_n \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ hội tụ } (\alpha = 4 > 1).$$

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

29. Xét sự hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện của các chuỗi:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right), a \in \mathbb{R}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$$

Bài giải

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Đây là chuỗi đan dấu, theo định lý Leibniz (1.5), ở đây $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

giảm dần đến 0, do đó chuỗi 1) hội tụ.

Mặt khác, chuỗi trị số tuyệt đối của chuỗi 1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ phân kỳ } \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha = \frac{1}{2} < 1 \right)$$

Vậy chuỗi 1) hội tụ có điều kiện hay bán hội tụ.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Tương tự 1), $u_n = \frac{1}{n^2}$ giảm dần đến 0, nên 2) hội tụ.

Chuỗi trị số tuyệt đối của 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$).

Vậy theo (1.5) chuỗi 2) hội tụ tuyệt đối.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$$

Tương tự 1), chuỗi 3) hội tụ theo định lý Leibniz, chuỗi trị số tuyệt đối của 3):

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} > \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} = v_n \end{aligned}$$

mà $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Vậy 3) hội tụ có điều kiện.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

Ta có $u_n = \frac{\ln n}{n}$ giảm dần đến không khi $n \rightarrow \infty$, theo định lý Leibniz 4) hội tụ.

Mặt khác chuỗi trị số tuyệt đối của 5) có $u_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, \forall n > 3$.

Mà chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ ($\alpha = 1$).

Vậy chuỗi trị số tuyệt đối của 5) phân kỳ và chuỗi 5) là chuỗi hội tụ có điều kiện.

$$5) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

Ta có:

$$u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}, u_{2k} = \frac{-1}{\sqrt{k+1}+1}$$

Vậy chuỗi đã cho có dạng: $\sum_{k=1}^n (u_{2k-1} + u_{2k}) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}$ phân kỳ.

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

Chuỗi 6) là chuỗi phân kỳ vì $u_n = \sin n^2$ không dẫn đến không (theo 2^o (1.2)).

Thực vậy, giả sử ngược lại:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)^2 = 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n^2 \cos(2n+1) + \sin(2n+1) \cos n^2) &= \end{aligned}$$

$$= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(2n+1) \cos n^2]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+3) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(2n+1) \cos 2 + \cos(2n+1) \sin 2] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)] = 0, \text{ vô lý}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad u_n &= \sin \pi \left[\sqrt{n^2 + a^2} - n + n \right] \\ &= \sin n \pi \cos \pi \left[\sqrt{n^2 + a^2} - n \right] + \cos n \pi \sin \pi \left[\sqrt{n^2 + a^2} - n \right] \\ &= (-1)^n \sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2 + a^2} + n}, \quad \sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Theo định lý Leibniz: chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, $|u_n| \sim \frac{\pi a^2}{2n} = v_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$: phân kỳ (chuỗi điều hoà) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$: phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$: bán hội tụ.

$$\begin{aligned} 8) \quad u_n &= \sin \left\{ \pi \left[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right] - \pi (2 - \sqrt{3})^n \right\}, \quad (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} \left[(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k \right] = \begin{cases} 0: & k \text{ lẻ} \\ m \in \mathbb{N}: k \text{ chẵn} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_n &= \sin \left[m\pi - \pi (2 - \sqrt{3})^n \right] \\ &= \sin m\pi \cos \left[\pi (2 - \sqrt{3})^n \right] - \cos m\pi \sin \left[\pi (2 - \sqrt{3})^n \right] \end{aligned}$$

$$= (-1)^{m+1} \sin \frac{\pi}{(2+\sqrt{3})^n}$$

$$\Rightarrow |u_n| \sim \frac{\pi}{(2+\sqrt{3})^n} = v_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n : \text{hội tụ (chuỗi nhân } q = \frac{1}{2+\sqrt{3}} < 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n : \text{hội tụ tuyệt đối}$$

30. Xét sự hội tụ của các chuỗi:

$$1) \text{ Tổng của } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$$

$$2) \text{ Hiệu của } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

$$3) \text{ Tích của } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Bài giải

$$1) \text{ Tổng } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{3^n}$$

$$|u_n| = \left| \frac{1+(-1)^n}{3^n} \right| \leq \frac{2}{3^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \text{ hội tụ vì là chuỗi nhân công bội } q = \frac{1}{3} < 1.$$

Vậy chuỗi tổng của các chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

$$2) \text{ Hiệu } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$$

$$u_n = \frac{1}{2n(2n-1)} \leq \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \text{ hội tụ (dạng } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha = 2 > 1).$$

Vậy chuỗi hiệu của các chuỗi đã cho hội tụ.

3) Chuỗi tích của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ là chuỗi w_n , theo (1.6):

$$\begin{aligned} w_n &= u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot 1 \end{aligned}$$

Chuỗi tích của các chuỗi đã cho là một chuỗi hội tụ vì:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}, \quad (\alpha = \frac{3}{2} > 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ hội tụ (vì } q = \frac{1}{2} < 1) \text{ theo (1.6).}$$

(sự hội tụ của chuỗi dương cũng là sự hội tụ tuyệt đối).

§2. DÃY VÀ CHUỖI HÀM

2.1. Định nghĩa

1⁰. Dây hàm $f_n(x)$ (1) gọi là hội tụ về hàm $f(x)$ trong miền X , nếu $\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x_0), \forall n > n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Dãy (1) gọi là hội tụ đều về $f(x)$ trong X nếu trong mệnh đề trên $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (chỉ phụ thuộc ε , không phụ thuộc $x_0 \in X$).

2⁰. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ (2) gọi là

hội tụ (hội tụ đều) về hàm $S(x)$, trong miền X , nếu dãy các tổng riêng của nó: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ hội tụ (hội tụ đều) về $S(x)$, $\forall x \in X$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

Đặt $r_n = S_n(x) - S(x)$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$.

2.2. Tiêu chuẩn hội tụ đều

1^o. Tiêu chuẩn Cauchy

Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) hội tụ đều về hàm $S(x)$ khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right| < \varepsilon.$$

$$\text{hay:} \quad \left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon$$

2^o. Tiêu chuẩn Weierstrass

Nếu $\exists M_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : |u_n(x)| \leq M_n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ hội tụ thì (1) hội tụ đều trong X .

3^o. Tiêu chuẩn Dirichlet

Nếu $u_n(x) = v_n(x) \cdot w_n(x)$ và $\exists c > 0$:

$$|\sigma_n(x)| = |v_1(x) + v_2(x) + \dots + v_n(x)| \leq c$$

($\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$) và dãy $w_n(x)$ là đơn điệu không tăng và dẫn đến không, $\forall x \in X$ thì chuỗi (1) hội tụ đều trong X .

2.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

1^o. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) có $u_n(x), n = 1, 2, \dots$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$ và chuỗi hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên $[a, b]$ thì:

a) $S(x)$ là một hàm liên tục trên $[a, b]$.

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(t) dt$ hội tụ đều về hàm $\int_{x_0}^x S(t) dt$:

$$\int_{x_0}^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(t) dt, \quad x_0, x \in [a, b]$$

2^o. Nếu chuỗi (1) hội tụ về $S(x)$ trên $[a, b]$ có $u'_n(x)$, ($n = 1, 2, \dots$) liên tục trên $[a, b]$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều về hàm $\sigma(x)$ trên $[a, b]$ thì:

chuỗi (1) hội tụ đều trên $[a, b]$ và :

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

3^o. Nếu chuỗi (1) hội tụ đều trong lân cận x_0 và $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = C_n$ ($n = 1, 2, \dots$) thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ hội tụ và:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

Chú ý

- 1) Các tính chất trên cũng gọi là các tính chất: tích phân từng số hạng (1^o), đạo hàm từng số hạng (2^o) và chuyển qua giới hạn từng số hạng (3^o) của chuỗi hàm.
- 2) Có thể phát biểu các tính chất trên đối với dãy hàm bằng ngôn ngữ thích hợp.

BÀI TẬP

31. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n (x-5)^n}$$

Bài giải

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Xét $x > 0$, chuỗi 1) là chuỗi Dirichlet (1.4) hội tụ cũng là hội tụ tuyệt đối khi $x > 1$, phân kỳ khi $0 < x \leq 1$.

Xét $x \leq 0$, đặt $x = -x'$, $x' > 0$ thì:

$$u_n(x) = \frac{1}{n^{x'}} = n^{x'}$$

không dẫn đến không khi $n \rightarrow \infty$: chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ tuyệt đối của 1): $(1, +\infty)$.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}, u_n = \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

Rõ ràng $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|u_n| = \frac{|\sin(2n-1)x|}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{(2n-1)^2} = v_n$$

Ta biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ (có dạng chuỗi Dirichlet (1.4), $\alpha = 2 > 1$).

Vậy theo định nghĩa chuỗi 3) hội tụ tuyệt đối $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n \sin x}$$

$$\text{Xét: } |u_n(x)| = |(-1)^{n-1} e^{-n \sin x}| = e^{-n \sin x} = \frac{1}{e^{n \sin x}}$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n \sin x}}$ hội tụ khi $\sin x > 0$ hay $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, khi đó

chuỗi 3) là hội tụ tuyệt đối.

Rõ ràng tại các điểm còn lại của trục số, chuỗi 3) phân kỳ.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n (x-5)^n}, u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n (x-5)^n}$$

Xét:

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left| \frac{1}{(n+1) 3^{n+1} (x-5)^{n+1}} \cdot \frac{n 3^n (x-5)^n}{1} \right| \\ &= \frac{n}{3(n+1)} \cdot \frac{1}{|x-5|} \rightarrow \frac{1}{3|x-5|} \end{aligned}$$

Do đó chuỗi 4) hội tụ tuyệt đối khi $\frac{1}{3|x-5|} < 1$ hay $x < 4\frac{2}{3}$ hoặc

$$x > 5\frac{1}{3}.$$

Tại $x = 4\frac{2}{3}$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (chuỗi điều hoà).

Tại $x = 5\frac{1}{3}$, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ hội tụ có điều kiện.

Khi $4\frac{2}{3} < x < 5\frac{1}{3}$, chuỗi này phân kỳ (chú ý 1.5).

Tóm lại: 4) có miền hội tụ $x < 4\frac{2}{3}$, $x \geq 5\frac{1}{3}$, miền hội tụ tuyệt đối, $x < 4\frac{2}{3}$, $x > 5\frac{1}{3}$ và miền phân kỳ $4\frac{2}{3} \leq x < 5\frac{1}{3}$.

32. Chứng minh rằng: Dãy hàm $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ hội tụ đều đến hàm $f(x)$ trên miền X khi và chỉ khi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup |r_n(x)| \right) = 0 \text{ với } r_n(x) = f(x) - f_n(x)$$

Bài giải

Giả sử $f_n(x)$ hội tụ đều đến hàm $f(x)$, $\forall x \in X$, nghĩa là: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon), \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ hay $|r_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$, từ đó suy ra $\sup |r_n(x)| \leq \varepsilon$ hay $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup |r_n(x)| \right) = 0$, $\forall x \in X$.

Giả sử ngược lại: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup |r_n(x)| \right) = 0$, $\forall x \in X$ nghĩa là $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0 \Rightarrow \sup |r_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.

Suy ra $|r_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$, theo định nghĩa: $f_n(x)$ là dãy hội tụ đều đến $f(x)$.

33. Xét sự hội tụ đều, không đều của các chuỗi hàm:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \text{ trong } (-1, 1)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}, \quad |x| < +\infty$$

$$*5) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad 0 < x < +\infty$$

Bài giải

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}, \quad (-1, 1)$$

Rõ ràng chuỗi 1) hội tụ $\forall x \in (-1, 1)$ (dùng tiêu chuẩn D'Alembert).

Xét:

$$r_n(x) = (-1)^n \left[\frac{x^{2(n+1)}}{n+1} - \frac{x^{2(n+2)}}{n+2} + \dots \right]$$

Theo định lý Leibniz (1.5):

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} < \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\text{vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ nên } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), \forall n > n_0: |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Theo định nghĩa (2.1), chuỗi 1) hội tụ đều trên $(-1, 1)$.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{Ta có:} \quad |u_n| = \left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ hội tụ (chuỗi nhân, công bội } q = \frac{1}{2} < 1).$$

Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi 2) hội tụ tuyệt đối và đều trên $(-\infty, +\infty)$.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Tổng của 3) là $S(x) = e^x$ (§3).

Do đó:

$$r_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Rõ ràng: $\sup_{0 < x < +\infty} |r_n(x)| = +\infty$. Theo bài 30 chuỗi 3) hội tụ không đều

trên $(0, +\infty)$.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}, |x| < +\infty$$

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5 x^2} \text{ liên tục sản xuất } \in (-\infty, +\infty).$$

$$\text{Ta tìm } \sup |u_n(x)|, \text{ ta có: } u'_n(x) = \frac{n - n^6 x^2}{(1+n^5 x^2)^2} = 0 \text{ khi } x = \pm \frac{2}{n^{5/2}}.$$

Rõ ràng:

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |u_n(x)| = \frac{1}{2n^{3/2}} \text{ tại } x = \frac{2}{n^{5/2}}.$$

$$\text{Chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}} \text{ hội tụ } (\alpha = \frac{3}{2} > 1).$$

Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass 2^o, chuỗi 4) hội tụ đều $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, 0 < x < +\infty$$

$$\text{Ta có: } u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$$

$$\text{Xét: } v_n = \frac{1}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n(x)|}{v_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\left|\sin \frac{1}{3^n x}\right|}{\frac{1}{3^n}} = 0 \text{ với } x > 0 \text{ cố định.}$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ (chuỗi nhân công bội $q = \frac{1}{3} < 1$), vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2^0 , (1.4) chuỗi 5) hội tụ tuyệt đối khi $0 < x < +\infty$.

Để xét sự hội tụ đều của chuỗi 5) theo tiêu chuẩn Cauchy 1^0 , (2.2): cho $\varepsilon = 1$, $p = n$, $x = \frac{1}{3^n}$, ta có:

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| &= \left| 2^{n+1} \sin \frac{1}{3} + 2^{n+2} \sin \frac{1}{3^2} + \dots + 2^{2n} \sin \frac{1}{3^n} \right| \\ &> 2^{n+1} \sin \frac{1}{3} > 1 = \varepsilon \text{ khi } n > 1 \end{aligned}$$

Vậy chuỗi 5) không thoả mãn điều kiện Cauchy tại một điểm cố định, $x > 0$ nghĩa là chuỗi đó không đều khi $0 < x < +\infty$.

34. Tìm miền xác định (tồn tại) và xét tính khả vi của $f(x)$ trên miền đó:

$$1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

$$2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

$$3) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$$

Bài giải

1) Khi $x \neq -n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ là chuỗi đan dấu, xét:

$u_n(x) = \frac{x}{n+x}$ là đơn điệu giảm và $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$

$$\left(\frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)} = \frac{n+1+x}{n+x} > 1 \right) \Rightarrow u_n(x) > u_{n+1}(x)$$

Do đó theo định lý Leibniz: chuỗi 1) hội tụ $\forall x \neq -n$, tức là miền tồn tại của $f(x)$ là $\forall x \neq -n$.

Ta có $u'_n(x) = \frac{n}{(n+x)^2}$ liên tục $\forall x \neq -n$, hơn nữa chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+x)^2}$ hội tụ đều theo tiêu chuẩn Dirichlet 3⁰ (2.2) ($|(-1)^n| \leq 1$, $W_n(x) = \frac{n}{(n+x)^2}$ là đơn điệu không tăng và $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$).

Vậy có thể đạo hàm từng số hạng của 1) nghĩa là:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+x)^2}, \quad x \neq -n$$

$$2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

Ta có:

$$u_n(x) = \frac{|x|}{n^2 + x^2} \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{A}{n^2} = M_n$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$). Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass 2⁰

(2.2): chuỗi 2) hội tụ đều $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Xét:

$$u'_n(x) = \frac{n^2 \operatorname{sign} x - x|x|}{(n^2 + x^2)^2}, \quad x \neq 0$$

$$|u'_n(x)| \leq \frac{n^2 + A^2}{n^4} \leq \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}, \quad \forall n > n^2$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ hội tụ, vậy cũng theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều $\forall x \neq 0$ và theo tính chất 2^o (2.3) ta có thể lấy đạo

hàm từng số hạng của 2) nghĩa là:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sign} x - x|x|}{(n^2 - x^2)^2}, \quad \forall x \neq 0$$

Xét tại $x = 0$:

$$f'(\pm 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \Delta x^2} \right)$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \Delta x^2}$ hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass

$\left(\frac{1}{n^2 + \Delta x^2} < \frac{1}{n^2} \right)$, do đó theo 3^o (2.3) ta có:

$$f'(\pm 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \Delta x^2} = \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Vậy $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

$$3) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$$

$$\text{Chuỗi 3) hội tụ } \forall x \in \mathbb{R} \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \left| \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}}{\frac{x}{n^2}} \right| = |x| > 0.$$

(Tiêu chuẩn so sánh: 20 (1.4).

Mặt khác dãy hàm:

$$u_n(x) = \arctg \frac{x}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

có $u'_n(x) = \frac{n^2}{n^4 + x^2}$ liên tục $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$ hội tụ đều $\forall x \in \mathbb{R}$, theo tiêu chuẩn Weierstrass

$$\left(u_n \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}, \quad \alpha = 2 > 1 \right).$$

Do đó theo 3⁰ (2.3) có thể đạo hàm từng số hạng của chuỗi 3):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

*35. 1) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 - nx^2}$.

2) Tính tích phân của hàm:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right] \text{ trên } [0, 1]$$

Bài giải

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 - nx^2}$

Ta có: $u_n(x) = \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}$

$$\sup u_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{n^2}$$

vì $u'_n(x) = \frac{2n}{(1 + n^2 x^2)^2} = 0$ tại $x = 0 \Rightarrow u_n(x)$ chỉ có một cực tiểu tại $x = 0$.

Vậy $\forall n \in \mathbb{N} : u_n(x) \leq \frac{1}{n^2} = v_n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$)

nên theo tiêu chuẩn Weierstrass 2^0 (2.2) chuỗi 1) hội tụ đều khi $-\infty < x < +\infty$, theo 3^0 (2.3), ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right], 0 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_n(x) &= x^{\frac{1}{3}} - x + x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}} + \dots + x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \\ &= -x + x^{\frac{1}{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 - x & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Do đó tổng $f(x)$ của chuỗi là một hàm gián đoạn trên $[0, 1]$ nên theo 1^0 (2.3): chuỗi 2) không hội tụ đều trên đoạn đó.

$$\text{Tuy nhiên } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{và: } \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{\frac{1}{2n+1}+1}}{\frac{1}{2n+1}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2n-1}+1}}{\frac{1}{2n-1}+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\left(S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ khi } n \rightarrow \infty \right),$$

nghĩa là:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) dx$$

Vậy vẫn có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi 2) trên $[0, 1]$ mặc dù chuỗi này hội tụ không đều trên đoạn đó.

§3. CHUỖI LŨY THỪA - CHUỖI TAYLOR - MACLAURIN

3.1. Chuỗi lũy thừa

1. Định nghĩa

Dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

hay:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

2. Miền hội tụ

Định lý Abel

Nếu (1) hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối $\forall x : |x| < |x_0|$. Nếu nó phân kỳ tại x_1 thì nó phân kỳ $\forall x : |x| > |x_1|$.

Bán kính hội tụ: Tồn tại một số duy nhất $R : 0 \leq R \leq +\infty$ gọi là bán kính hội tụ của (1) sao cho chuỗi hội tụ khi $-R < x < R$ và phân kỳ khi $-\infty < x < -R$, $R < x < +\infty$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ hay } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Miền hội tụ đều của chuỗi (1) là đoạn $[-\rho, \rho]$ với $0 < \rho < R$.

Tính chất

Nếu R là bán kính hội tụ của (1):

- Tổng $S(x)$ của (1) là một hàm liên tục trên khoảng $(-R, R)$. Nếu (1) hội tụ tại một đầu mút của khoảng này thì $S(x)$ liên tục bên trái hoặc bên phải đầu mút đó.
- Các chuỗi có được bằng cách lấy đạo hàm hay tích phân từng số hạng của (1) cũng có khoảng hội tụ là $(-R, R)$ và miền hội tụ đều là $[-\rho, \rho]$ với $0 < \rho < R$.

$$c) \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx \quad \text{với } x_1, x_2 \in (-R, R)$$

$$d) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R)$$

3.2. Chuỗi Taylor và Maclaurin

1° Định nghĩa

Chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ trong lân cận của điểm x_0 :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ &+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \quad (T) \end{aligned}$$

Đặc biệt $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (M)$$

gọi là chuỗi Maclaurin của $f(x)$.

2^o Điều kiện khai triển

Nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của x_0 thì $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Taylor trong lân cận đó khi và chỉ khi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

$0 < \theta < 1$ là số dư trong công thức Taylor cấp n của $f(x)$.

$$: f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

Hệ quả

$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |f^{(n)}(x)| \leq M$ trong lân cận của x_0 thì $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Taylor trong lân cận đó.

3^o Các khai triển quan trọng

$$\text{I.} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{II.} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad \forall x$$

$$\text{III.} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad \forall x$$

$$\text{IV.} \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$V. \quad \ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$VI. \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$VII. \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+1)} + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

VIII. Công thức Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch} ix$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \operatorname{sh} ix$$

$$i^2 = -1, \quad i: \text{đơn vị ảo}$$

Chú ý

Các công thức trên vẫn đúng khi thay x bởi z là một số phức bất kỳ:
 $z = a + ib$, a, b thực.

BÀI TẬP

36. Tìm miền (khoảng) hội tụ của các chuỗi lũy thừa:

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

$$2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)^n}{n^n}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Bài giải

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}, a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Theo 2⁰ (3.1) bán kính hội tụ của 1):

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot \frac{(n+1)2^{n+1}}{1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n+1}{n} = 2 \end{aligned}$$

Tại $x = -2$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ (chuỗi đan dấu điều hoà).

Tại $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (chuỗi điều hoà).

Vậy miền hội tụ của (1) là khoảng $[-2, 2)$.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$$

Đặt $x^2 = X \geq 0$, ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 X^n}{2n+1} \quad (1)$

$$\Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{(n+2)^5} = 1$$

Tại $X = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}$ phân kỳ vì:

$$u_n = \frac{(n+1)^5}{2n+1} \rightarrow \infty (\nrightarrow 0).$$

Vậy miền hội tụ của (1) là $[-1, 1)$. Do đó miền hội tụ của 2) là $(-1, 1)$.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n$$

Theo 2^o (3.1), bán kính hội tụ của 3) là:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{2n-1}{n}} = 4$$

Tại $x = 4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} 4^n$

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} 4^n \\ &= \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n} \cdot \frac{2n+1}{n} \rightarrow \frac{2}{e} \neq 0: \text{chuỗi phân kỳ} \end{aligned}$$

$$\text{Tại } x = -4: \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n+1} (-4)^n$$

$$u_n = (-1)^n = \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n} \cdot \frac{2n+1}{n} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{e} & : n = 2m \\ -\frac{2}{e} & : n = 2m+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 0$: chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của 3) là: $(-4, 4)$.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 2^n} \cdot \frac{(n+2)2^{n+1}}{n+1} = 2$$

$$\text{Tại } x = 2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} : \text{phân kỳ} \left(\frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \neq 0 \right)$$

$$x = -2 : \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} : \text{phân kỳ}$$

Vậy miền hội tụ của 4) là $(-2, 2)$.

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$$

$u_n = x^{n!}$. Theo tiêu chuẩn D'Alembert, xét:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}} \right| = |x^{n!}| \rightarrow 0 \text{ khi } |x| < 1.$$

Vậy 5) hội tụ tuyệt đối khi $-1 < x < 1$.

phân kỳ khi $|x| > 1$ hay $x < -1, x > 1$.

Tại $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$: phân kỳ

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$: phân kỳ (?)

Vậy miền hội tụ của 5) là $(-1, 1)$.

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)^n}{n^n}$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, xét:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x|^n}{n} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{ khi } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{ khi } |x| > 1 \end{cases}$$

Vậy miền hội tụ của 6) là $-1 \leq x \leq 1$.

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$$

Đặt $X = (x-3)^2$, ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \cdot \frac{(n+2) \ln(n+2)}{1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1 \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1, \text{ theo quy tắc}$$

L' Hôpital).

Vậy chuỗi hội tụ khi $0 \leq X = (x-3)^2 < 1$ hay $2 < x < 4$.

Tại $x = 2$, ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} : \text{phân kỳ}$$

vì theo tiêu chuẩn tích phân Cauchy:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \ln(\ln(x+1)) \Big|_1^{+\infty} = +\infty$$

Tương tự, tại $x = 4$, chuỗi cũng phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là khoảng $(2, 4)$.

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ chuỗi hội tụ khi $-4 < x < 4$.

$$\text{Tại } x = 4, \text{ ta có: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

$$\text{Xét} \quad u_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 6n + 2} > 1$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$: u_n tăng dần, không thể dẫn đến không nên chuỗi phân kỳ.

Tương tự $x = -4$, chuỗi cũng phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là khoảng $(-4, 4)$.

37. Khai triển theo chuỗi Taylor tại lân cận điểm tương ứng:

1) $f(x) = \ln x, x = 1$

2) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x + 2}, x = 4$

*3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ theo chuỗi lũy thừa của $\frac{x}{1+x}$

Bài giải

1) Theo 1^o (3.2), ta tính $f(1) = 0$.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó:} \quad f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy chuỗi Taylor của $f(x)$ hội tụ về $f(x) : \forall x \in (0, 2)$ (?).

$$2) f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$f(-4) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+2} \right)^{(n)} \\ &= (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(-4) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(-3)^{n+1}} - \frac{1}{(-2)^{n+1}} \right]$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = 2^{n+1} - 3^{n+1}$$

Do đó:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 3^{n+1})(x+4)^n$$

Chuỗi Taylor của $f(x)$ hội tụ về $f(x)$: $\forall x \in (-6, -2)$.

$$3) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{1+x} = t \Rightarrow x = \frac{t}{1-t}, f(x) = \varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t}}$$

Theo 3.0 (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= (1-t)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1.3}{2.4}t^2 + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots (2n-2)} t^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \varphi(t) = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2.4}t^3 + \dots + \frac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n-2)}t^n + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{và: } f(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots + \\ + \frac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n + \dots \end{aligned}$$

Để dàng thấy chuỗi này hội tụ $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

38. Khai triển theo chuỗi Maclaurin:

1) $f(x) = a^x$

2) $f(x) = \ln(2+x)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

4) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx$

6) $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$

*7) $f(x) = e^x \cos x$

*8) $f(x) = \operatorname{ch} x$

Bài giải

Áp dụng các khai triển ở 3° (3.2) ta có:

1) $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (\ln a)^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$2) \quad f(x) = \ln(2+x) = \ln \left[2 \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right] = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)$$

$$f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \dots$$

$$\text{với } -2 < x < 2 \text{ (vì } -1 < \frac{x}{2} < 1).$$

$$3) \quad f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!} + \dots \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

$$4) \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{với } -1 < x < 1$$

$$5) \quad f(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx$$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned}$$

với $-\infty < x < +\infty$

$$6) \quad f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \quad \text{với } -1 < x \leq 1$$

Tại $x=1$, chuỗi hội tụ có điều kiện (chuỗi đan dấu, điều hoà).

$$7) \quad f(x) = e^{ix} \cos x$$

Xét hàm $F(x) = e^{x(1+i)}$ ($i^2 = -1$, i : đơn vị ảo).

Theo các công thức Euler:

$$F(x) = e^x (\cos x + i \sin x)$$

Khi đó:

$$f(x) = \operatorname{Re} F(x) \quad (\operatorname{Re} : \text{phần thực}).$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[x(1+i)]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[x \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n}{n!}$$

$$\text{vì: } (1 + i)^n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

nên:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\text{và: } f(x) = \operatorname{Re} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{4}$$

Ta có:

$$\left| \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{4} \right| \leq \frac{(\sqrt{2})^n |x|^n}{n!}$$

và chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n |x|^n}{n!}$ hội tụ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

$$8) f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) + \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

39. Dùng phương pháp đạo hàm và tích phân từng số hạng, tính tổng của các chuỗi:

$$1) x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$2) \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots$$

$$3) \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

Bài giải

$$1) \quad S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{1} = 1$$

Do đó theo 2^o, (3.1), có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi:

$$S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots$$

với $-1 < x < 1$

Mặt khác:

$$1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots = \frac{1}{1+x^2}, \text{ với } -1 < x < 1$$

Do đó:

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Lấy tích phân đẳng thức này ta có:

$$S(x) = \arctg x + C$$

Cho $x = 0$ ta được $C = 0$.

$$\text{Vậy: } S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \arctg x \quad (1)$$

Chuỗi này cũng hội tụ tại $x = \pm 1$, nghĩa là (1) đúng $\forall x \in [-1, 1]$ và $S(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn này.

$$2) \quad S(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots$$

Chuỗi này hội tụ $\forall |x| > 1$.

Đặt $\frac{1}{x} = t$ thì $|t| < 1$ và $S(x) = S\left(\frac{1}{t}\right) = \varphi(t)$.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t + 2t^2 + \dots + nt^n + \dots + (t + t^2 + \dots + t^n + \dots) - \\ &\quad - (1 + t^2 + \dots + t^n + \dots) \\ &= (2t + 3t^2 + \dots + (n+1)t^n + \dots) - (1 + t^2 + \dots + t^n + \dots) \\ &= (t^2 + t^3 + \dots + t^{n+1} + \dots)' - (1 + t^2 + \dots + t^n + \dots) \\ &= \left(\frac{t^2}{1-t}\right)' - \frac{1}{1-t} = \frac{2t-t^2}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2} \end{aligned}$$

Trở lại biến x , ta có tổng phải tìm là:

$$S(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right)^2 = \frac{x}{(x-1)^2}, \quad \forall |x| > 1.$$

$$3) \quad S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

Xét chuỗi:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n-2} \quad \text{với } |x| < 1.$$

$$\text{thì:} \quad \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = S,$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n-1})' \\ &= \frac{1}{2} (x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n-1} + \dots)' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

Vậy:

$$S = \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 3$$

40. Áp dụng chuỗi, tính gần đúng với độ chính xác tương ứng:

1) $\sin 18^\circ, 10^{-5}$

2) $\pi, 10^{-4}$

3) $\int_0^1 e^{-x^2} dx, 10^{-4}$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}, 10^{-3}$

Bài giải

Chú ý:

Giả sử:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

Nếu tính gần đúng:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

thì sai số mắc phải sẽ là:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Đặc biệt nếu chuỗi là chuỗi đan dấu thì $|R_n(x)| \leq u_{n+1}$.

1) Theo 3^o (3.2):

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

Ta có:

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}$$

Đây là chuỗi đan dấu, theo chú ý trên và theo giả thiết sai số phải thoả mãn:

$$|R_n| \leq \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)! \cdot 10^{2n-1}} \leq 10^{-5}$$

Rõ ràng $n \geq 3$ thì: $\frac{\pi^7}{7! \cdot 10^7} < 10^{-5}$.

Vậy:

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! \cdot 10^3} + \frac{\pi^5}{5! \cdot 10^5} = 0,30402$$

với độ chính xác 10^{-5} .

2) Ta biết:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ với } -1 < x < 1$$

Cho $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ta được:

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \dots \right)$$

$$= 3,1415 \text{ với độ chính xác } 10^{-4}$$

$$3) \quad I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad 10^{-3}$$

Ta có:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow I = \left(x - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots \right) \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \dots$$

Đây là chuỗi đan dấu:

$$R_n \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} \leq 10^{-3} \text{ khi } n \geq 4$$

Vậy:

$$I \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,747$$

với độ chính xác 10^{-3} .

$$4) \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Theo 3^o, (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{3(n+1)}} \quad \text{với } |x| > 1 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{3(n+1)}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n-2}}$$

Đây là chuỗi đan dấu:

$$R_n \leq \frac{1}{(3n+5)2^{3n+5}} \leq 10^{-3} \quad \text{với } n \geq 1$$

Do đó:
$$I \approx \frac{1}{8} - \frac{1}{160} = 0,118 \quad \text{với độ chính xác } 10^{-3}.$$

41. Áp dụng chuỗi, giải các phương trình vi phân:

1) $y' = 2y + x - 1, \quad y|_{x=1} = y_0$

2) $y'' = 2xy' + 4y, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1$

3) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad p = \text{const}$

Bài giải

1) Theo định lý tồn tại duy nhất nghiệm thì nghiệm của bài toán Cauchy:

$$y' = 2y + x - 1, \quad y|_{x=1} = y_0(1) \text{ là tồn tại duy nhất}$$

$$(f(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \text{ là liên tục } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Giả sử nghiệm đó khai triển được theo chuỗi Taylor tại lân cận điểm $x = 1$:

$$y = y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots \\ \dots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \dots$$

Từ (1) ta có $y(1) = y_0, y'(1) = 2y_0$:

$$y''(1) = (2y' + 1)|_{x=1} = 4y_0 + 1$$

$$y'''(1) = 2y''|_{x=1} = 2(4y_0 + 1)$$

...

$$y^{(n)}(1) = 2y^{(n-1)}(1) = 2^{n-2}(4y_0 + 1), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$= 2^n \left(y_0 + \frac{1}{4} \right)$$

Do đó:

$$y(x) = y_0 + \frac{2y_0}{1!}(x-1) + \frac{y_0 + \frac{1}{4}}{2!}[(2(x-1))]^2 + \frac{y_0 + \frac{1}{4}}{3!}[(2(x-1))]^3 +$$

$$+ \dots + \frac{y_0 + \frac{1}{4}}{n!} [(2(x-1))^n + \dots], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

hay

$$y(x) = \left(y_0 + \frac{1}{4}\right) e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) y'' = 2xy' + 4y \quad (1), \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

(1) là phương trình tuyến tính, do đó có thể tìm nghiệm của bài toán (1), (2) dưới dạng chuỗi lũy thừa:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3)$$

Các hệ số a_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ sẽ được xác định theo (1) và (2) (phương pháp hệ số bất định).

Lấy đạo hàm (3):

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

thay vào (1):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Cân bằng các hệ số của x^n ở hai vế ta được:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = 2na_n + 4a_n$$

hay:

$$a_{n+2} = \frac{2n+4}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{2a_n}{n+1} \quad (4)$$

Từ (3) và (2) ta có:

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

và từ (4) ta có:

$$a_2 = 2a_0 = 0, a_3 = \frac{2a_1}{2} = a_1 = 1, a_4 = 0$$

...

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = \frac{2 \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}$$

Thay số vừa tìm được vào (3) ta được:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x e^{x^2}$$

Chuỗi này hội tụ $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó nó là nghiệm của bài toán (1), (2), $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$3) x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, p = \text{const} \quad (1)$$

(Phương trình Bessel cấp p)

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0$$

Phương trình có điểm bất thường khi $x = 0$.

Tìm nghiệm của (1) dưới dạng:

$$y^{(x)} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, a_0 \neq 0 \quad (2)$$

Ta sẽ xác định $r, a_0, a_1, a_2, \dots$ để (2) là nghiệm của (1).

Đạo hàm (2):

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}$$

Thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1} + \\ + (x^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0 \end{aligned}$$

Cho đồng nhất không các hệ số của các lũy thừa của x:

$$\left. \begin{aligned} x^2 & \quad [r(r-1) + r - p^2]a_0 = 0 \quad \text{hay} \quad [x^2 - p^2]a_0 = 0 \\ x^{r+1} & \quad [(r+1)r + (r+1) - p^2]a_1 = 0 \quad \text{hay} \quad [(r+1)^2 - p^2]a_1 = 0 \\ & \quad \dots \\ x^{r+n} & \quad [(r+n)(r+n-1) + (r+n - p^2)]a_n + a_{n-2} = 0 \quad \text{hay} \quad [(r+n)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hệ (3) là hệ những phương trình để xác định $n+1$ ẩn số $r, a_0, a_1, \dots, a_n$. Ta đã giả thiết $a_0 \neq 0$, ta có thể chọn $a_0 \neq 0$ tùy ý, chẳng hạn $a_0 = 1$. Khi đó $r, a_1, a_2, \dots, a_n$ sẽ được xác định duy nhất theo $a_0 = 1$.

Từ phương trình đầu của hệ (3) ta có:

$$(r^2 - p^2)a_0 = (r^2 - p^2)1 = 0 \quad \text{hay} \quad r = \pm p$$

Xét $p > 0$ và $r_1 = p > 0$.

Từ phương trình cuối của hệ (3) ta có:

$$[(r+n)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0$$

hay:

$$[(r+n-p)(r+n-p)]a_n + a_{n-2} = 0$$

Theo trên $r = r_1 = p > 0$, nên:

$$n(2p+n)a_n + a_{n-2} = 0$$

$$\text{hay: } a_n = - \frac{a_{n-2}}{n(2p+n)} \quad (4)$$

Từ phương trình (2) của hệ (3) ta có:

$$[(r+1)^2 - p^2]a_1 = 0$$

với $r = r_1 = p > 0$ thì:

$$[(p+1)^2 - p^2]a_1 = 0 \quad \text{hay } a_1 = 0$$

Do đó và từ (4) suy ra:

$$a_3 = 0, \dots, a_{2m+1} = 0.$$

và:

$$a_2 = - \frac{a_0}{2(2p+2)} = - \frac{1}{2^2(p+1)} = - \frac{1}{2^2.1!(p+1)}$$

$$a_4 = - \frac{a_2}{4(2p+4)} = \frac{1}{2^4.2!(p+1)(p+2)}$$

...

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!(p+1)(p+2)\dots(p+m)}$$

Thay vào (2), ta có một nghiệm riêng của (1):

$$y(x) = x^p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!(p+1)(p+2)\dots(p+m)} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(theo tiêu chuẩn D'Alambert dễ dàng thấy chuỗi này hội tụ $\forall x \in \mathbb{R}$).

Đặt $J_p(x) = y(x)$, $J_p(x)$ gọi là hàm Bessel cấp p .

Xét $p = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Vì (1) là phương trình tuyến tính nên hàm $\frac{1}{2^n n!} y(x)$ cũng là nghiệm của (1).

$$\text{Đặt:} \quad J_n(x) = \frac{1}{2^n n!} y(x)$$

$$\text{hay:} \quad J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \text{ là hàm Bessel cấp } n.$$

$$n = 0: \quad J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \text{ là hàm Bessel cấp } 0.$$

42. Tìm tổng $S(x)$ trong miền hội tụ của các chuỗi:

$$1) \quad 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^k + \dots$$

$$2) \quad 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \dots$$

$$3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$4) \quad S = \frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \dots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \dots}$$

Bài giải

$$1) \text{ Chuỗi hội tụ } \forall x: |x| < 1$$

$$S'(x) = n + n(n-1)x + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 3x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
\frac{S'(x)}{n} + \frac{xS'(x)}{n} &= 1 + (n-1)x + \frac{(n-1)(n-2)x^2}{2!} + \dots \\
&\quad \dots + x + (n-1)x^2 + \dots + \frac{(n-1)(n-2)x^3}{2!} + \dots \\
&= 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots = S(x)
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
(1+x)S' &= nS \\
\Rightarrow \frac{dS}{S} &= \frac{ndx}{1+x} \Rightarrow S = C(x+1)^n
\end{aligned}$$

Vì $x=0$, $S=1$ nên $C=1$ và $S(x) = (1+x)^n$, $\forall |x| < 1$.

$$\begin{aligned}
2) \quad S(x) &= 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \dots, \quad |x| < 1 \\
\Rightarrow xS(x) &= x - 4x^2 + 7x^3 - 10x^4 + \dots \\
\Rightarrow S(x) + xS(x) &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + \dots \\
&= 1 + 3(-x + x^2 - 3x^3 + \dots) \\
&= 1 - \frac{3x}{1+x}, \quad |x| < 1
\end{aligned}$$

$$3) \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

Xét:

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^{n-1}, \quad \forall |x| < 1$$

$$\text{thì } S\left(\frac{1}{3}\right) = S.$$

$$S(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} \right]'$$

$$= x \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right]'' = x \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{x}{(1-x)^3}$$

$$S = S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}.$$

$$4) \text{ Đặt } S = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow p\pi - q\pi^3 = \sin\pi = 0$$

$$\Rightarrow S = \frac{p}{q} = \pi^2$$

§4. CHUỖI FOURIER

4.1. Định nghĩa - Đặt bài toán

Chuỗi lượng giác là chuỗi hàm có dạng:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

Bài toán

Cho trước một hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π , tìm chuỗi lượng giác có dạng (1) có tổng là $f(x)$ hay hội tụ về $f(x)$ hay $f(x)$ khai triển được theo chuỗi (1).

4.2. Các hệ số Fourier

1° Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π , khai triển được theo chuỗi lượng giác (1) thì các hệ số $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$ được xác định bởi các

công thức:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$n = 1, 2, \dots$$

gọi là các hệ số Fourier và chuỗi lượng giác của $f(x)$ gọi là chuỗi Fourier của $f(x)$.

Đặc biệt: $f(x)$ là hàm chẵn thì:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0$$

$f(x)$ là hàm lẻ thì:

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

2° $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2ℓ thì:

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Đặc biệt: $f(x)$ chẵn

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

3° $f(x)$ cho trên $[0, \ell]$:

- Kéo dài chẵn (lẻ) $f(x)$ thành hàm tuần hoàn $f_1(x)$ chu kỳ 2ℓ :

$$f_1(x) = f(x), \forall x \in [0, t]$$

$f(x)$ gọi là khai triển theo chuỗi Fourier dưới dạng $\cos(\sin)$.

4.3. Định lý Dirichlet

Nếu: 1^o hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π , khả tích trên $[-\pi, \pi]$

2^o $f(x)$ là liên tục và đơn điệu từng phần (khúc) trên $[-\pi, \pi]$

(có thể chia $[-\pi, \pi]$ thành một số hữu hạn phần, trên mỗi phần: $f(x)$ là liên tục và đơn điệu) thì: chuỗi Fourier của $f(x)$ hội tụ về $f(x)$ tại những điểm liên tục:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

tại các điểm gián đoạn:

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Chú ý:

Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \forall a \in \mathbb{R}$$

BÀI TẬP

43. Khai triển hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π thành chuỗi Fourier:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} ax & : -\pi < x \leq 0 \\ bx & : 0 < x < \pi \end{cases}$$

Xét a) $a = b = 1$

b) $a = -1, b = 1$

c) $a = 1, b = 0$

2) a) $f(x) = \sin ax : -\pi < x < \pi$

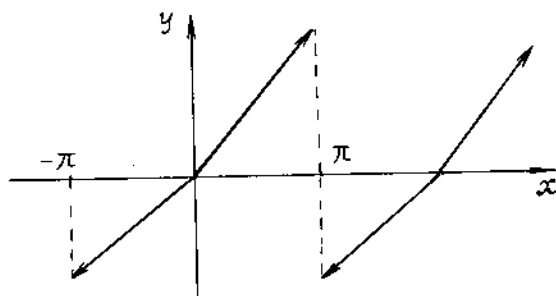
b) $f(x) = \cos px, -\pi < x < \pi, 0 < p < 1$

3) $f(x) = \arcsin(\cos x) : -\pi < x < \pi$

Bài giải

Ta có thể kiểm tra dễ dàng các hàm đã cho đều thỏa mãn điều kiện khai triển (4.3).

$$1) f(x) = \begin{cases} ax : -\pi < x \leq 0 \\ bx : 0 < x < \pi \end{cases} \quad (\text{hình 7})$$



Hình 7.

Theo 1^o (4.2):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax dx + \int_0^{\pi} bx dx = \frac{b-a}{2} \cdot \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 ax \cos nx dx + \int_0^{\pi} bx \cos nx dx \right]$$

$$\text{vì:} \quad \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx = \int_{\pi}^0 -t \cos nt(-dt) = \int_{\pi}^0 x \cos nx dx$$

$$\text{nên:} \quad a_n = \frac{b-a}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{b-a}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right]$$

$$= \frac{b-a}{\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{b-a}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{b-a}{\pi n^2} \cdot [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & : n = 2m \\ -\frac{2(b-a)}{\pi(2m+1)^2} & : n = 2m+1 \end{cases}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 ax \sin nx dx + \int_0^{\pi} bx \sin nx dx \right]$$

$$\begin{aligned} \text{vì:} \quad \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx &= \int_{\pi}^0 -t \sin n(-t)(-dt) \\ &= \int_{\pi}^0 t \sin t dt = \int_0^{\pi} x \sin nx dx \end{aligned}$$

nên:

$$b_n = \frac{a+b}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{a+b}{\pi} \cdot \left(-\frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx$$

$$= \frac{a+b}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{a+b}{\pi} \cdot \frac{\pi(-1)^{n-1}}{n} = (a+b) \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Vậy:

$$f(x) = \frac{b-a}{4} \pi - \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} + \\ + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \neq k\pi$$

Tại $x = 0$:

$$0 = \frac{b-a}{4} \pi - \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

Do đó:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

và:

$$f(\pm \pi) = \frac{b-a}{2} \pi$$

Xét:

$$a) \quad a = b = 1 \Rightarrow f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

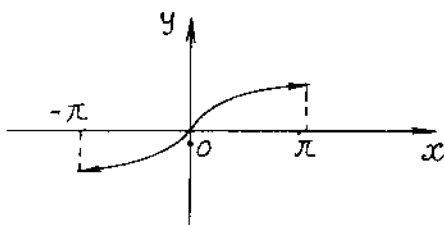
$$b) \quad a = -1, b = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$$

$$c) \quad a = 1, b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

$$3) \quad a) \quad f(x) = \sin ax, \quad -\pi < x < \pi, \quad a \neq k \in \mathbb{Z}$$



Hình 8.

$f(x)$ là hàm lẻ trên $(-\pi, \pi)$ (hình 8) nên:

$$a_0 = a_n = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(a-n)x - \cos(a+n)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(a-n)x}{a-n} - \frac{\sin(a+n)x}{a+n} \right) \Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} - \frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} \\ &= \frac{2n(-1)^{n-1}}{\pi(n^2 - a^2)} \sin a\pi, \quad a \neq n \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2} \\ f(\pm \pi) &= 0 \end{aligned}$$

$$b) f(x) = \cos px$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos px dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin p\pi}{p}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos px \cos nx dx = (-1)^{n-1} \frac{2p \sin p\pi}{n^2 - p^2}$$

$$\Rightarrow \cos p\pi = \frac{\sin p\pi}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n}{n^2 - p^2} \cos nx \right]$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + \frac{2p}{1-p^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 2p}{1-p^2} + \dots$$

$$5) f(x) = \arcsin(\cos x)$$

$f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π , $f(x)$ là hàm chẵn nên $b_n = 0$.

Trong $(0, \pi)$: $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$. Do đó:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2}$$

Vậy:

$$f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

44. Khai triển các hàm sau đây trên $(0, \pi)$ thành chuỗi Fourier:

1) $f(x) = e^{ax}$

a) dưới dạng sin;

b) dưới dạng cos.

2) $f(x) = x(\pi - x)$ dưới dạng sin.

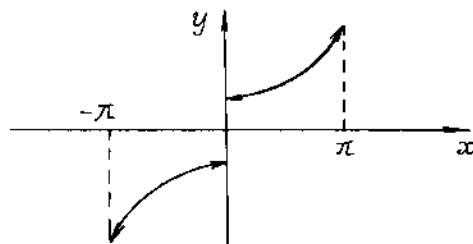
$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \cos x & : 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x & : \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad \text{dưới dạng cos.}$$

Bài giải

Các hàm đã cho đều thoả mãn điều kiện khai triển (4.3):

$$1) \quad f(x) = e^{ax}$$

a) Kéo dài $f(x)$ thành hàm lẻ $f_1(x)$ tuần hoàn, chu kỳ 2π (hình 9) .



Hình 9.

$$f_1(x) = f(x) : 0 < x < \pi$$

Theo 1^o (4.2):

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(1 - (-1)^n e^{a\pi})n}{a^2 + n^2} \end{aligned}$$

Vậy:

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{a\pi}] \cdot \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

và:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{in\pi}] \cdot \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}, \forall x \in (0, \pi)$$

b) Kéo dài $f(x)$ thành hàm chẵn $f_1(x)$, tuần hoàn, chu kỳ 2π :

$$f_1(x) = f(x) : 0 < x < \pi$$

Theo 1⁰, (4.2):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} e^{ax} dx = \frac{2}{a\pi} (e^{a\pi} - 1)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} e^{ax} \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{e^{ax} (a \cos nx + n \sin nx)}{a^2 + n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a(e^{a\pi} \cos n\pi - 1)}{a^2 + n^2} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{[(-1)^n e^{a\pi} - 1]}{a^2 + n^2} \end{aligned}$$

Vậy:

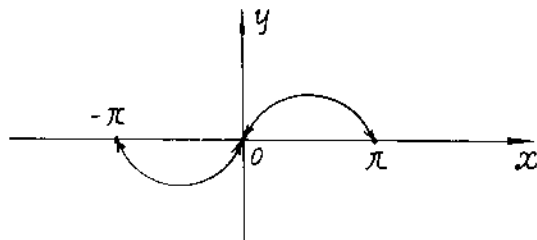
$$f(x) = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n e^{a\pi} - 1] \cdot \frac{\cos nx}{a^2 + n^2}, \forall x \in (0, \pi)$$

2) $f(x) = x(\pi - x)$ dưới dạng sin, $0 < x < \pi$

Kéo dài $f(x)$ thành hàm lẻ: $f_1(x)$ tuần hoàn, chu kỳ 2π : $f_1(x) = f(x)$, $0 < x < \pi$ (hình 10).

Ta có:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$



Hình 10.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\cos nx}{n} (\pi x - x^2) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} (\pi - 2x) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin nx}{n^2} (\pi - x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2 \sin nx}{n^2} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{2 \cos nx}{n^3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \\
 &= \begin{cases} 0 & : n = 2m \\ \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{(2m-1)^3} & : n = 2m-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

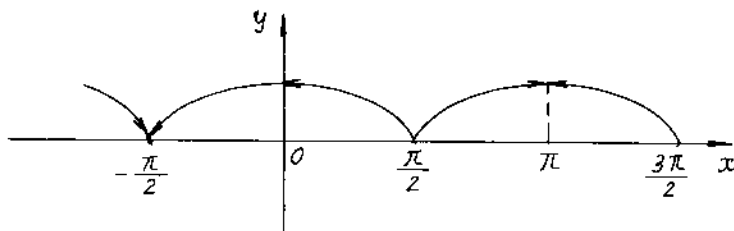
Vậy:
$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \cos x & : 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x & : \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Kéo dài $f(x)$ thành hàm chẵn: $f_1(x)$, tuần hoàn chu kỳ $\pi = 2\ell$,

$$\ell = \frac{\pi}{2}:$$

$$f_1(x) = f(x) : 0 < x < \pi \text{ (hình 11).}$$



Hình 11.

Theo 2^o (4.2):

$$b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{4}{\pi} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x] dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$$

Do đó: $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2 - 1}, \quad 0 < x < \pi$

45. Khai triển các hàm sau đây thành chuỗi Fourier:

1) $f(x) = 2x$ trên $(0, 1)$

2) $f(x) = x^2$ dưới dạng:

a) $\cos$ trên $[0, \pi]$

Áp dụng tính các tổng của các chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

b) $\sin$ trên $[0, \pi]$

c) trên $(0, 2\pi)$

3) $f(x) = 10 - x$ trên $(5, 15)$

Bài giải

Các hàm đã cho đều thoả mãn điều kiện khai triển (4.3).

1) $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$

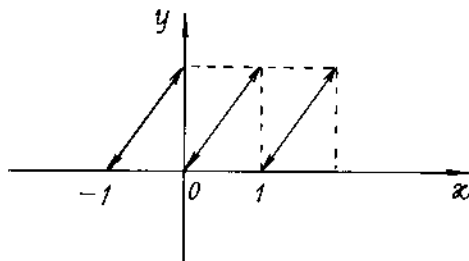
Kéo dài $f(x)$ thành hàm $f_1(x)$, tuần hoàn chu kỳ $2\ell = 1, \quad \ell = \frac{1}{2}$:

$$f_1(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \text{ (hình 12)}$$

Theo chú ý ở 2^o (4.2):

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 2$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2 \int_0^1 2x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = 4 \left[\frac{x \sin 2n\pi x}{2n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi} dx \right] \\
 &= 4 \left[0 + \frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2} \Big|_0^1 \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



Hình 12.

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 2x \sin 2n\pi x dx \\
 &= 4 \left[-\frac{x \cos 2n\pi x}{2n\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi} dx \right] \\
 &= 4 \left[-\frac{\cos 2n\pi}{2n\pi} + \frac{\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^2} \Big|_0^1 \right] = -\frac{2}{n\pi}
 \end{aligned}$$

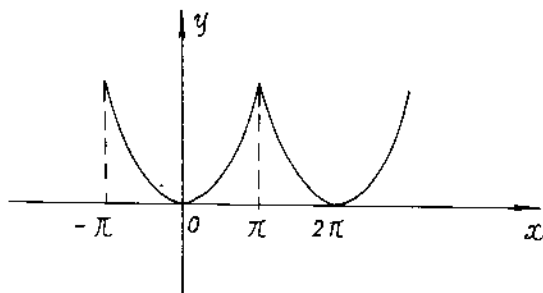
Do đó:

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

2) a) $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq \pi$

Kéo dài $f(x)$ thành hàm chẵn $f_1(x)$, tuần hoàn chu kỳ 2π :

$$f_1(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ (hình 13).}$$



Hình 13.

Ta có: $b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \left[\frac{x \cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} dx \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi \cos n\pi}{n^2} - \frac{\sin nx}{n^3} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Vậy:

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad (1) \quad \text{với } 0 \leq x \leq \pi$$

Đặt $x = \pi$ ở (1), ta được:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2}$$

Do đó:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (2)$$

Đặt $x = 0$ ở (1), ta được:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

hay:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad (3)$$

Cộng từng số hạng của (2) và (3) ta được:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

b) Kéo dài $f(x)$ thành hàm lẻ $f_1(x)$, tuần hoàn chu kỳ 2π :

$$f_1(x) = f(x) : 0 \leq x < \pi \quad (\text{hình 14}).$$

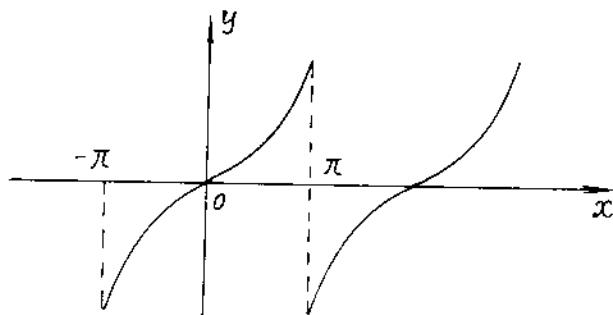
Ta có:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx$$

Tính tương tự a) ta được:

$$b_n = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \dots$$



Hình 14.

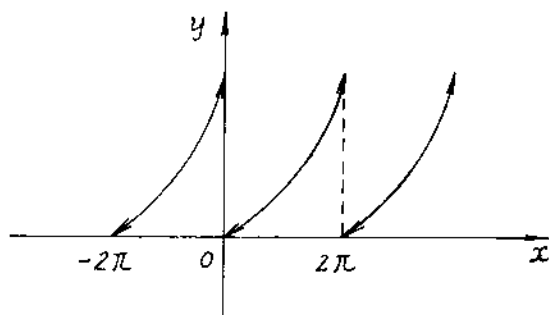
Vậy:

$$f(x) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right] \sin nx$$

với $0 \leq x < \pi$

c) Kéo dài $f(x)$ thành hàm tuần hoàn $f_1(x)$ chu kỳ 2π :

$$f_1(x) = f(x) : 0 < x < 2\pi \text{ (hình 15).}$$



Hình 15.

Ta có:

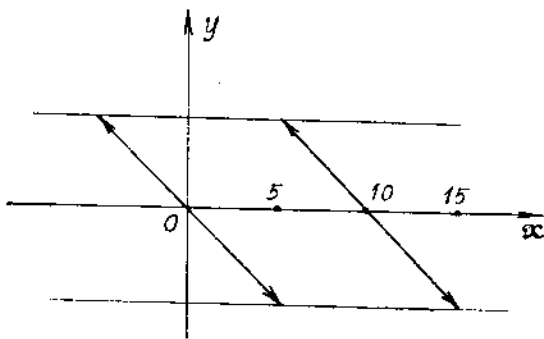
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3} \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}
 \end{aligned}$$

Vậy:

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi$$

3) $f(x) = 10 - x$ trên $(5, 15)$

Kéo dài $f(x)$ thành hàm lẻ: $f_1(x)$ tuần hoàn, chu kỳ $2\ell = 10$, $\ell = 5$ (hình 16).



Hình 16.

$$f_1(x) = f(x) : 5 \leq x \leq 15$$

$$f_1(x) = -x : 0 \leq x < 5$$

Do đó:

$$a_0 = a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{5} \cdot \int_0^5 -x \sin \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{2}{5} \cdot \left[\frac{x \cos \frac{n\pi x}{5}}{\frac{n\pi}{5}} - \int_0^5 \frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} dx \right] \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{n\pi} \cdot 5 \cos n\pi + \frac{5^2}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_0^5 \\ &= \frac{10}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Vậy:

$$f(x) = \frac{10}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}, \quad 5 < x < 15$$

46. 1) Cho hàm $f(x) : f(x + \pi) = -f(x)$, (hàm phản tuần hoàn chu kỳ π). Tính các hệ số Fourier của $f(x)$ trên $(-\pi, \pi)$.

2) Biết các hệ số Fourier của hàm $f(x)$ chu kỳ 2π , tính các hệ số Fourier $\bar{a}_0, \bar{a}_n, \bar{b}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) của hàm:

$$f(x + h), \quad h = \text{const (hàm chệch)}$$

Bài giải

1) Giả sử $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Fourier trên $(-\pi, \pi)$, khi

đó:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Theo giả thiết: $f(x + \pi) = -f(x)$ nên:

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = -a_0$$

$$(x + \pi = t, -\pi < x < \pi \Leftrightarrow 0 < t < 2\pi)$$

hay: $2a_0 = 0$ và $a_0 = 0$.

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi) \cos nx dx$$

Đặt $x + \pi = t$ thì $dx = dt$:

$$-\pi < x < \pi \Leftrightarrow 0 < t < 2\pi$$

và:

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n(\pi - t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) [\cos n\pi \cos nt + \sin n\pi \sin nt] dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt (-1)^n dt = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt \\ &= (-1)^{n+1} a_n \end{aligned}$$

Với $n = 2m$ thì $a_{2m} = -a_{2m}$ hay $a_{2m} = 0$.

Tương tự:

$$b_{2m} = 0, m = 1, 2, \dots$$

Vậy chuỗi Fourier của $f(x)$ chỉ có những số hạng lẻ ứng với $a_{2m-1}, b_{2m-1}, m = 1, 2, \dots$

2) Rõ ràng $f(x + h)$ cũng là hàm khả tích, tuần hoàn chu kỳ 2π , do đó:

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx dx$$

Đặt $x + h = t$ thì $dx = dt, -\pi < x < \pi \Leftrightarrow -\pi + h < t < \pi + h$ và:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)(\cos nt \cos nh + \sin nt \sin nh) dt \\ &= \cos nh \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt + \sin nh \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \\ &= a_n \cos nh + b_n \sin nh \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$$

$$n = 1, 2, \dots, \bar{a}_0 = a_0$$

47. Chứng minh:

$$1) I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = \frac{-\pi^2}{12}; \quad 2) I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (0 < p < 1)$$

Bài giải

$$1) \text{ Theo 3.2, } 3^o: I = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ln x \right) dx, \quad (0 < x < 1)$$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 (x^n \ln x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Theo bài 45.3): $I = \frac{-\pi^2}{12}$

$$2) I = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

$$I_1 = \int_0^1 \left(x^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{1+p} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+p} + \dots \quad (1)$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x} dx \text{ (thay } x \text{ bởi } \frac{1}{x} \text{)}$$

$$I_2 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{2-p} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1-p} + \dots \quad (2)$$

(thay $p-1$ bởi $-p$ trong (1))

Cộng (1) và (2) và theo bài 43.3) ta có 2).

PHỤ CHƯƠNG
CÁC ĐỀ GIẢI TÍCH HK III 2004 - 2008 (ĐHBK)

ĐỀ I

ĐỀ THI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ CHUỖI - K49

(Thời gian làm bài 90')

Câu I. (2,5 điểm) Tìm nghiệm của các phương trình vi phân:

1) $e^x(2 + 2x - y^2)dx - 2e^x y dy = 0$.

2) $(x + 1)y'' + x(y')^2 = y'$ thoả mãn $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Câu II. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân:

1) $y'' + y = xe^x + \cos x$.

2) $x^2(x + 1)y'' = 2y$ biết một nghiệm riêng $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$.

Câu III. (2 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + \sqrt{n} + 1}{4n^2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n}$

Câu IV. (1,5 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2x+1}{1-x} \right)^n$$

Câu V. (1 điểm) Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) \sin(nx) \quad \text{trên } \mathbb{R}$$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) (1đ) $P(x, y) = e^x(2 + 2x - y^2)$, $Q(x, y) = -2e^xy$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ cùng với các đạo hàm riêng.

$P'_y = Q'_x = -2e^xy \Rightarrow$ phương trình vi phân toàn phần $\Rightarrow du = 0$ với

$$u = \int_0^x e^\xi (2 + 2\xi) d\xi + \int_0^y (-2e^x \eta) d\eta \quad (0,5đ)$$

Tích phân tổng quát: $2xe^x - e^xy^2 = C$ (C hằng số bất kỳ) (0,5đ)

2) (1,5đ) Đặt $y' = P(y)$

$\Rightarrow$ phương trình Bernoulli: $P' - \frac{P}{x+1} = -\frac{x}{x+1} P^2 \quad (x \neq -1)$

Đặt $z = P^{-1} \Rightarrow z' + \frac{z}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ (0,5đ)

Phương trình thuần nhất $z' + \frac{z}{x+1} = 0$ có nghiệm: $z = \frac{C}{x+1}$

Tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng: $z = \frac{C(x)}{x+1}$
(hoặc dùng công thức) (0,5đ)

$\Rightarrow z = \frac{x^2 + C_1}{2(x+1)}$. Do $y'(0) = 2 \Rightarrow z(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 1$ (0,5đ)

$\Rightarrow y = \int \frac{2x+2}{x^2+1} dx = \ln(1+x^2) + 2\arctg x + C_2$. Do $y(0) = 1 \rightarrow C_2 = 1$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng: $y = \ln(1+x^2) + 2\arctg x + 1$ (0,5đ)

Câu II. (3đ)

1) (1,5đ) Phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$

$\Rightarrow$ phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = \pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm phương trình: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (0,5đ)

Phương trình: $y'' + y = xe^x$ có nghiệm riêng $Y_1 = e^x(Ax + B)$. Thay vào phương trình $\Rightarrow A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2} \Rightarrow Y_1 = \frac{e^x}{2}(x-1)$ (0,5đ)

Phương trình: $y'' + y = \cos x$ có nghiệm riêng $Y_2 = x(C \cos x + D \sin x)$.

Thay vào phương trình $\Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{2} \Rightarrow Y_2 = \frac{x}{2} \sin x$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x + \frac{e^x}{2} (x-1) \quad (0,5d)$$

2) (1.5đ) Phương trình $\Rightarrow y'' - \frac{2}{x^2(x+1)} y = 0 \quad (x \neq 0, x \neq -1)$

Tìm nghiệm riêng y_2 bằng công thức Liouville:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} dx = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \int \frac{x^2}{(1+x)^2} dx \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) \int \left[1 - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right] dx \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left[x - 2 \ln|1+x| - \frac{1}{1+x}\right] \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 \left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2 \left[x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x} \ln(x+1)^2\right] \quad (0,5d)$$

Câu III. (2đ) 1) (1đ) Dùng dấu hiệu D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} \quad (0,5d)$$

$$\text{Vì } 0 < e < 3 \Rightarrow \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ} \quad (0,5d)$$

2) (1đ) Dùng dấu hiệu Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{4n^2}\right)^{2 - \frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{\ln n}{n}} \quad (0,5d)$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{9}{16} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5d)$$

Câu IV. (1,5đ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{2x+1}{1-x} \right| < 1 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 0 \quad (0,25đ)$$

Tại $x = -2$ chuỗi trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n(n-1)}$ hội tụ theo dấu hiệu

Leibniz vì $\frac{n+1}{n(n-1)}$ đơn điệu giảm đến 0.

Tại $x = 0$ chuỗi trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)}$ phân kỳ vì

$$\frac{n+1}{n(n-1)} > \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \text{ mà chuỗi } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ phân kỳ} \quad (0,5đ)$$

Vậy tập hội tụ của chuỗi là $[-2; 0]$ (0,25đ)

$$\text{Câu V. (1đ)} \quad |u_n(x)| \leq \int_0^{1/n} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}) \quad (0,5đ)$$

$$\text{Do } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^{3/2}} \text{ hội tụ nên } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ hội tụ đều trên } \mathbb{R}. \quad (0,5đ)$$

ĐỀ 2**ĐỀ THI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ CHUỖI - K49**

(Thời gian làm bài 90')

Câu I. (2,5 điểm) Tìm nghiệm của các phương trình vi phân:

1) $(2xy + x^2y^3)dx + (x^2 + x^3y^2)dy = 0$.

2) $y'' + \frac{y'}{x} = x^2(y')^4$ thoả mãn $y(1) = 2, y'(1) = 1$.

Câu II. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân:

1) $y'' + y = \sin x + xe^{-x}$.

2) $y'' \tan x + y'(\tan^2 x - 2) + 2y \cot x = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = \sin x$.

Câu III. (2 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + \sqrt{n} + 1}{3n^2 + \sin n} \right)^{3n - \ln n}$$

Câu IV. (1,5 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \left(\frac{2x-3}{x} \right)^n$$

Câu V. (1 điểm) Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cos(nx) \quad \text{trên } \mathbb{R}$$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

1) (1đ) $P(x, y) = 2xy + x^2y^3$, $Q(x, y) = x^2 + x^3y^2$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng.

$P'_y = Q'_x = 2x + 3x^2y^2 \Rightarrow$ phương trình vi phân toàn phần: $du = 0$ với

$$u = \int_0^x 0 d\xi + \int_0^y (x^2 + x^3\eta^2) d\eta \quad (0,5đ)$$

Tích phân tổng quát: $x^2y + \frac{1}{3}x^3y^3 = C$ (C hằng số tùy ý) (0,5đ)

2) (1,5đ) Đặt $y' = P(x) \Rightarrow P' + \frac{P}{x} = x^2P^4$ là phương trình Bernoulli ($x \neq 0$)

$$\text{Đặt } z = P^{-3} \Rightarrow z' - 3\frac{z}{x} = -3x^2 \quad (0,5đ)$$

Phương trình thuần nhất $z' - 3\frac{z}{x} = 0$ có nghiệm: $z = Cx^3$.

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng $z = C(x)x^3$ (0,5đ)

$$\text{Tìm được } z = x^3(K_1 - 3\ln|x|) \Rightarrow P = \frac{1}{x(K_1 - 3\ln|x|)^{1/3}} = y' \quad (0,5đ)$$

$$\text{Vì } y'(1) = 1 \Rightarrow K_1 = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{x(1 - 3\ln|x|)^{1/3}}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(1 - 3\ln|x|)^{2/3} + K_2. \text{ Do } y(1) = 2 \Rightarrow K_2 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \text{ Nghiệm riêng: } y = \frac{1}{2} [5 - (1 - 3\ln|x|)^{2/3}] \quad (0,5đ)$$

Câu II. (3đ)

1) (1,5đ) Phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$

$\Rightarrow$ phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = \pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm phương trình: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (0,5đ)$

Phương trình: $y'' + y = xe^{-x}$ có nghiệm riêng $Y_1 = e^{-x}(Ax + B)$. Thay vào

$$\text{phương trình} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2} e^{-x}(x + 1) \quad (0,5đ)$$

Phương trình: $y'' + y = \sin x$ có nghiệm riêng $Y_2 = x(A \cos x + B \sin x)$.

$$\text{Thay vào phương trình} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 0 \Rightarrow Y_2 = -\frac{x}{2} \cos x$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} e^{-x}(x + 1) \quad (0,5đ)$$

2) (1,5đ) Tìm nghiệm riêng thứ hai dưới dạng $y_2 = u(x) \sin x$. Thay vào

$$\text{phương trình} \Rightarrow u'' + u' \tan x = 0 \quad (x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}) \quad (0,5đ)$$

$$\text{Suy ra } \frac{u''}{u'} = -\tan x \Rightarrow u' = \cos x \quad (0,5đ)$$

Vậy $u = \sin x \Rightarrow y_2 = \sin^2 x \Rightarrow$ nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x \quad (0,5đ)$$

Câu III. (2đ) 1) (1đ) Dùng dấu hiệu D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Vì } e > 2 \Rightarrow \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5đ)$$

2) (1đ) Dùng dấu hiệu Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2} \right)^{3 - \frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}^{3 - \frac{\ln n}{n}} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{8}{27} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5đ)$$

Câu IV. (1,5đ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{2x-3}{x} \right| < 1 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 3 \quad (0,25đ)$$

Tại $x = 1$ chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ nó hội tụ theo Leibniz vì $\frac{n}{n^2 + 1}$ đơn điệu giảm về 0.

Tại $x = 3$ chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$. Vì $\frac{n}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow \infty$ mà chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ phân kỳ nên chuỗi trên phân kỳ} \quad (0,5đ)$$

Vậy tập hội tụ của chuỗi là $[1; 3]$ (0,25đ)

Câu V. (1đ) Xem đáp án đề số 1.

ĐỀ 3

ĐỀ THI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ CHUỖI - K49

(Thời gian làm bài 90')

Câu I. (2,5 điểm)

1) Giải phương trình: $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ với $y(1) = 1$

2) Tìm hàm số $h(x)$ sao cho phương trình:

$$h(x)[(y + \cos y)dx + (1 - \sin y)dy] = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(x)$ tìm được.

Câu II. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân:

1) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

2) $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = e^x$ bằng cách đổi hàm số $y = \frac{z}{x^2}$.

Câu III. (2 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})$.

Câu IV. (2,5 điểm) 1) Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin của hàm số sau:

$$f(x) = 1 - x, 0 \leq x \leq \pi$$

2) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}$$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5đ)

$$1) (1đ) \text{ Phương trình } \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{y^2 - 6x}{2y} = 0, (y \neq 0) \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$$

$$\text{Phương trình thuần nhất: } \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \text{ có nghiệm } x = C \cdot y^3 \quad (0,5đ)$$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng $x = C(y)y^3$

$$\text{Thay vào phương trình } \Rightarrow C' = -\frac{1}{2y^2} \Rightarrow C = \frac{1}{2y} + K$$

$$\Rightarrow x = Ky^3 + \frac{y^2}{2}. \forall y(1) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^2}{2} (1 + y) \quad (0,5đ)$$

2) (1,5đ) Đặt $P(x, y) = h(x) \cdot (y^2 + \cos y)$; $Q(x, y) = h(x) \cdot (-\sin y + 1)$ chúng liên tục cùng với các đạo hàm riêng trên $\mathbb{R}^2$ nếu $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Để phương trình là vi phân toàn phần $\Leftrightarrow P'_y = Q'_x$

$$\Leftrightarrow h' = h \left(y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \Rightarrow h = K_1 e^x \quad (0,5đ)$$

Phương trình $\Leftrightarrow e^x(y + \cos y)dx + e^x(1 - \sin y)dy = 0 \Rightarrow du = 0$ với

$$u = \int_0^x e^{\xi} d\xi + \int_0^y e^x (1 - \sin \eta) d\eta \quad (0,5đ)$$

$$u = e^x(y + \cos y) + K_2 \Rightarrow e^x(y + \cos y) = C \text{ là tích phân tổng quát} \quad (0,5đ)$$

Câu II. (3đ)1) (1,5đ) Phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$ $\Rightarrow$ phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = \pm i$ $\Rightarrow$ nghiệm phương trình: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (0,5đ)Nghiệm phương trình không thuần nhất: $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow C_1' = -1, C_2' = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (0,5đ)$$

 $\Rightarrow C_1 = -x + K_1, C_2 = \ln|\sin x| + K_2 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát:

$$y = (-x + K_1) \cos x + (\ln|\sin x| + K_2) \sin x \quad (0,5đ)$$

$$2) (1,5đ) y' = \frac{z'x - 2z}{x^3}; y'' = [(z''x + z' - 2z')x^3 - 3x^2(z'x - 2z)] : x^6$$

$$= [z''x^2 - 4z'x + 6z] : x^4$$

Thay vào phương trình $\Rightarrow z'' + z = e^x$ (0,5đ)Phương trình thuần nhất: $z'' + z = 0$ $\Rightarrow$ Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$ $\Rightarrow$ Nghiệm: $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (0,5đ)Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $Z = A \cdot e^x$.

$$\text{Thay vào phương trình} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow Z = \frac{1}{2} e^x$$

$$\Rightarrow \text{Nghiệm tổng quát: } z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{e^x}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{C_1}{x^2} \cos x + \frac{C_2}{x^2} \sin x + \frac{e^x}{2x^2} \quad (0,5đ)$$

Câu III. (2đ) 1) (1đ) Dùng dấu hiệu D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}} = \frac{7}{e^2} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Vì } e > 2,7 \Rightarrow e^2 > 7,29 \Rightarrow \frac{7}{e^2} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5đ)$$

$$2) (1đ) \ln(1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}) = \ln\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}\right)$$

$$\sim \frac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}} \quad \text{khi } n \rightarrow \infty \quad (0,5d)$$

Do $\frac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{3}{2\sqrt{n}}$ khi $n \rightarrow \infty$ mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2\sqrt{n}}$ phân kỳ nên chuỗi đã cho phân kỳ (0,5d)

Câu IV. (2,5d)

1) (1d) Xây dựng hàm số $g(x)$ chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2π sao cho

$$g(x) = 1 - x \text{ với } 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \text{hệ số có } b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (0,25d)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x) dx = 2 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right); \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} [1 - (-1)^n]$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \text{ với } n \text{ chẵn, } a_n = \frac{4}{\pi n^2} \text{ với } n \text{ lẻ } (n = 1, 2, \dots) \quad (0,5d)$$

$$\text{Vậy } f(x) = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (0,25d)$$

$$2) (1,5d) \text{ Tìm được } |x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \quad (0,25d)$$

$$\text{Tại } x=0 \text{ chuỗi trở thành } - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ.}$$

$$\text{Tại } x=2 \text{ chuỗi trở thành } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \text{ hội tụ theo dấu hiệu Leibniz vì } \frac{1}{3n+1}$$

$$\text{đơn điệu giảm và hội tụ về } 0 \quad (0,25d)$$

$$\text{Miền hội tụ là } (0; 2] \quad (0,25d)$$

$$S(x) = (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{3n+1}}{3n+1} \equiv (x-1)f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{3n} = \frac{1}{1+(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{1+(x-1)^3} \quad (0 < x < 2) \quad (0,5d)$$

$$S(x) = (x-1) \left[\frac{1}{3} \ln \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right] \quad (0,25)$$

ĐỀ 4**ĐỀ THI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ CHUỖI - K49**

(Thời gian làm bài 90')

Câu I. (2,5 điểm)1) Giải phương trình: $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$ với $y(0) = 1$ 2) Tìm hàm số $h(y)$ sao cho phương trình:

$$h(y)[(1 - \sin x)dx + (\cos x + x)dy] = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(y)$ tìm được.**Câu II. (3 điểm)** Giải các phương trình vi phân:

1) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

2) $xy'' + 2(1 - x)y' + (x - 2)y = e^{-x}$ bằng cách đổi hàm số $z = yx$.**Câu III. (2 điểm)** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} 5^n}{2^n (n+1)^{n^2}}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$$

Câu IV. (2,5 điểm) 1) Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số sin của hàm số sau:

$$f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi$$

2) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm sau:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{3n+2}}{3n+1}$$

ĐÁP ÁN**Câu I. (2,5đ)**

1) (1đ) Phương trình $\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = \frac{3}{y^2} \quad (y \neq 0)$

Phương trình thuần nhất: $\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = 0$ có nghiệm $x = C \cdot y^2$ (0,5đ)

Nghiệm phương trình không thuần nhất: $x = C(y)y^2$

Thay vào phương trình $\Rightarrow C' = \frac{3}{y^4} \Rightarrow C = -y^{-3} + K$

$$\Rightarrow x = Ky^2 - \frac{1}{y}. \quad \forall y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow x = y^2 - \frac{1}{y} \quad (0,5d)$$

2) (1,5d) Đặt $P(x, y) = h(y).(1 - \sin x)$; $Q(x, y) = h(y).(\cos x + x)$.

P, Q và các đạo hàm riêng liên tục trên R^2 nếu $h(y)$ liên tục trên R .

Để phương trình là vi phân toàn phần $\Leftrightarrow P'_y = Q'_x$

$$\Leftrightarrow h' = h \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right) \Leftrightarrow h = K_1 e^y \quad (0,5d)$$

Phương trình $\Leftrightarrow e^y(1 - \sin x)dx + e^y(x + \cos x)dy = 0 \Rightarrow du = 0$ với

$$u = \int_0^y e^\eta d\eta + \int_0^x e^y(1 - \sin \xi)d\xi \quad (0,5d)$$

$$u = e^y(x + \cos x) + K_2 \Rightarrow e^y(x + \cos x) = C \text{ là tích phân tổng quát} \quad (0,5d)$$

Câu II. (3d)

1) (1,5d) Phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$

$\Rightarrow$ phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = \pm i$

$\Rightarrow$ nghiệm phương trình: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (0,5d)$

Nghiệm phương trình không thuần nhất: $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \Leftrightarrow C'_1 = -\frac{\sin x}{\cos x}, C'_2 = 1 \quad (0,5d)$$

$\Rightarrow C_1 = \ln|\cos x| + K_1, C_2 = x + K_2 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát:

$$y = (K_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (K_2 + x)\sin x \quad (0,5d)$$

$$2) (1,5d) y = \frac{z}{x} \quad (x \neq 0) \Rightarrow y' = \frac{z'x - z}{x^2}; y'' = \frac{z''x^2 - 2z'x + 2z}{x^3}$$

Thay vào phương trình $\Rightarrow z'' - 2z' + z = e^{-x} \quad (0,5d)$

Phương trình thuần nhất: $z'' - 2z' + z = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k = 1$

$$\Rightarrow \text{ Nghiệm } z = e^x(C_1x + C_2) \quad (0,5d)$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $Z = A.e^{-x}$.

$$\text{Thay vào phương trình } \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow Z = \frac{1}{4}e^{-x}$$

$$\Rightarrow \text{ Nghiệm tổng quát: } z = e^x(C_1x + C_2) + \frac{1}{4}e^{-x}$$

$$\Rightarrow y = C_1e^x + \frac{C_2}{x}e^x + \frac{1}{4x}e^{-x} \quad (0,5d)$$

Câu III. (2đ) 1) (1đ) Dấu hiệu Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{5}{2e} \quad (0,5d)$$

$$\text{Do } e > 2,5 \Rightarrow \frac{5}{2e} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5d)$$

$$\begin{aligned} 2) (1d) \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) &= \sin \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \text{ khi } n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$\text{Do } \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ mà chuỗi } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ phân kỳ nên}$$

chuỗi đã cho phân kỳ (0,5d)

Câu IV. (2,5đ)

1) (1đ) Xây dựng hàm số $g(x)$ lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2π sao cho

$$g(x) = \pi - x \text{ với } 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow a_n = 0 \text{ (} n = 0, 1, 2, \dots \text{)} \quad (0,25d)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx = \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0,5d)$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (0,25d)$$

$$2) (1,5d) \text{ Tìm được } |x+1| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \quad (0,25d)$$

$$\text{Tại } x = -2 \text{ chuỗi trở thành } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ.}$$

Tại $x = 0$ chuỗi trở thành $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibniz vì $\frac{1}{3n+1}$ đơn điệu giảm và hội tụ về 0

(0,25đ)

Miền hội tụ là $(-2; 0)$

(0,25đ)

$$\text{Tổng } S(x) = (x+1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{3n+1}}{3n+1} \equiv (x+1)f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^{3n} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{1+(x+1)^3} \quad (-2 < x < 0) \quad (0,5đ)$$

Tìm được:

$$S(x) = (x+1) \left[\frac{1}{3} \ln \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right] \quad (0,25đ)$$

ĐỀ 1

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K50

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (3 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $ydx - (x + y^2 \sin y)dy = 0$

2) $y'' - y' \cot x - y \sin^2 x = 0$, biết một nghiệm riêng $y_1 = e^{\cos x}$

Câu II. (2 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^2 \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln^2 \frac{n+1}{n}$

Câu III. (1,5 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+3}}{3^{2n}(2n+3)}$.

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Giải phương trình $xy'' + 2y' + xy = x$ bằng cách đặt $y = \frac{u}{x}$

2) Khai triển hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{khi } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ thành chuỗi Fourier theo sin.

Câu V. (1 điểm) Cho phương trình tuyến tính $y' + k^2 y = q(x)$, trong đó k là số thực khác 0, $q(x)$ là hàm liên tục theo biến x và $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = b$. Chứng minh rằng phương trình trên chỉ có một nghiệm dẫn tới $\frac{-b}{k^2}$ khi $x \rightarrow +\infty$. Hãy tìm nghiệm đó.

ĐÁP ÁN

Câu I.

$$1) y \neq 0 \rightarrow x' - \frac{1}{y} x = y \sin y$$

$$x' - \frac{1}{y} x = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow x = C \cdot y \quad (0,5d)$$

$$C = C(y) \rightarrow x = C' \cdot y + C \rightarrow C' = \sin y \rightarrow C = \mathcal{C} - \cos y \quad (0,5d)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nghiệm tổng quát: } x = (\mathcal{C} - \cos y) \cdot y \\ y = 0 \text{ cũng là nghiệm.} \end{array} \right\} \quad (0,5d)$$

$$2) y_1 = e^{\cos x} \rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} = e^{\cos x} \int \frac{e^{\int \frac{d \sin x}{\sin x}}}{e^{2 \cos x}} dx \quad (0,5d)$$

$$= e^{\cos x} \int \frac{\sin x dx}{e^{2 \cos x}} = \frac{1}{2} e^{-\cos x} \quad (0,5d)$$

$$\text{Nghiệm tổng quát: } y = C_1 e^{\cos x} + C_2 e^{-\cos x} \quad (0,5d)$$

Câu II.

$$1) a_n = n \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2\sqrt{n}} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \rightarrow \frac{\pi^2}{4} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (0,5d)$$

$$\rightarrow \text{Chuỗi phân kỳ} \quad (0,5d)$$

$$2) a_n = \ln \frac{(n+1)}{n} > 0 \quad \forall n \geq 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0 \quad (0,5d)$$

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x} \rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x > 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ đ.đ.giảm}$$

Theo Leibnitz chuỗi hội tụ. (0,5d)

Câu III.

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+3}}{3^{2n}(2n+3)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{x^2}{9} < 1 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \quad (0,5d)$$

$$\text{Tại } x = -3: \Sigma (-3)^3 \sum (-3)^3 \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3} \quad \text{Theo Leibnitz (có CM)}$$

Chuỗi hội tụ (0,5d)

$$\text{Tại } x = 3: \sum \frac{3^3}{2n+3} \quad \text{Chuỗi phân kỳ (có CM)}$$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ $-3 \leq x < 3$ (0,5d)

Câu IV.

$$1) y = \frac{u}{x} \rightarrow y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}; \quad y'' = \frac{u''}{x} - \frac{2u'}{x^2} + \frac{2u}{x^3} \Rightarrow u'' + u = x \quad (0,5d)$$

$$+ u'' + u = 0 \rightarrow k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i \Rightarrow \bar{u} = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (0,5d)$$

$$+ u^* = Ax + B \rightarrow A = 1, B = 0 \Rightarrow u^* = x$$

$$\rightarrow \text{Nghiệm tổng quát: } y = \frac{u}{x} = \frac{1}{x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x + x) \quad (0,5d)$$

2) Xét $F(x)$ lẻ, tuần hoàn $T = 2\pi$

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$* F(x) \text{ lẻ} \rightarrow a_n = a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad (0,5d)$$

$$* b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \sin nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 dx \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos n \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{4} \right) \sin nx \quad (0,5d)$$

Câu V.

$$\text{Nghiệm tổng quát: } y(x) = \frac{y(0) + \int_0^x q(t)e^{-k^2 t} dt}{e^{-k^2 x}} \quad (*)$$

Ta có $e^{-k^2 x} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \text{Để } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{-b}{k^2} \text{ thì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[y(0) + \int_0^x q(t)e^{-k^2 t} dt \right] &= 0 \\ \rightarrow y(0) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x q(t)e^{-k^2 t} dt \quad (**) \text{ hội tụ} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

Thay (**) vào (*) ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{-b}{k^2}$

(Kiểm chứng bằng quy tắc Lôpitan).

$$\text{Vậy } y(x) = \int_{+\infty}^0 q(t)e^{-k^2(t-x)} dt \quad (\text{duy nhất}) \quad (0,5d)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K50

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (3 điểm) Giải các phương trình sau:

- 1) $(1 + y^2)dx - (\arctg y - x)dy = 0$
- 2) $y'' + y' \tan x - y \cos^2 x = 0$, biết một nghiệm riêng $y_1 = e^{\sin x}$.

Câu II. (2 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$;
- 2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

Câu III. (1,5 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+3}}{3^{2n} \sqrt{2n+3}}.$$

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 y'' - (6x^2 + 2x)y' + (9x^2 + 6x + 2)y = 4x^3 e^{3x}$ bằng cách đặt $y = u.x$.

2) Khai triển hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khí } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{khí } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ thành chuỗi Fourier theo cosin.

Câu V. (1 điểm) Cho phương trình tuyến tính $y' - k^2 y = q(x)$, trong đó k là số thực khác 0, $q(x)$ là hàm liên tục theo biến x và $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = b$. Chứng minh rằng phương trình trên chỉ có một nghiệm dẫn tới $\frac{-b}{k^2}$ khi $x \rightarrow +\infty$. Hãy tìm nghiệm đó.

ĐÁP ÁN**Câu 1.**

$$1) x' + \frac{1}{1+y^2} x = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2}$$

$$* \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{1+y^2} \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{1+y^2} \Rightarrow x = C.e^{-\operatorname{arctg} y} \quad (0,5d)$$

$$* C = C(y) \Rightarrow x' = C'.e^{-\operatorname{arctg} y} - C.e^{-\operatorname{arctg} y} \frac{1}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow C' = \frac{\operatorname{arctg} y.e^{\operatorname{arctg} y}}{1+y^2} \Rightarrow C(y) = (\operatorname{arctg} y - 1)e^{\operatorname{arctg} y} + \mathcal{C} \quad (0,5d)$$

$$\text{Nghiệm tổng quát: } x = \operatorname{arctg} y - 1 + \mathcal{C}.e^{-\operatorname{arctg} y} \quad (0,5d)$$

$$2) y_1 = e^{\sin x} \rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx = e^{\sin x} \int \frac{e^{\frac{\cos x}{\cos x}}}{e^{2\sin x}} dx \quad (0,5d)$$

$$= e^{\sin x} \int \frac{d\sin x}{e^{2\sin x}} = -\frac{1}{2} e^{-\sin x} \quad (0,5d)$$

$$\text{Nghiệm tổng quát: } y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x} \quad (0,5d)$$

Câu II.

$$1) a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{-2} \cdot \frac{n}{n+1} (-2)} \rightarrow e^{-2} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (0,5d)$$

$$\rightarrow \text{Chuỗi phân kỳ} \quad (0,5d)$$

$$2) a_n = \frac{\ln n}{n} > 0 \quad \forall n \geq 2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad (0,5d)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \geq 2 \Rightarrow \{a_n\} \text{ d.đ.giảm} \\ \text{Theo Leibnitz chuỗi hội tụ.} \end{aligned} \right\} \quad (0,5d)$$

Câu III.

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+3}}{3^{2n} \sqrt{2n+3}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{x^2}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \quad (0,5d)$$

$$\text{Tại } x = -3: \sum_{n=1}^{\infty} (-3)^3 \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n+3}} \quad \text{Chuỗi hội tụ theo Leibnitz (có CM)} \quad (0,5d)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Tại } x = 3: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}}{\sqrt{2n+3}} \quad \text{Phân kỳ (có CM)} \\ \Rightarrow \text{Miền hội tụ } -3 \leq x < 3 \end{aligned} \right\} \quad (0,5d)$$

Câu IV.

$$1) y = u.x \rightarrow y' = u'.x + u \rightarrow y'' = u''.x + 2u' \Rightarrow u'' - 6u' + 9u = 4e^{3x} \quad (0,5d)$$

$$+ u'' - 6u' + 9u = 0 \rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 3 \Rightarrow \bar{u} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \quad (0,5d)$$

$$+ u = A.x^2.e^{3x} \rightarrow A = 2 \rightarrow u = 2x^2 e^{3x} \rightarrow \text{Nghiem tổng quát: } y = u.x = e^{3x}(C_1 x + C_2 x^2 + 2x^3) \quad (0,5d)$$

$$2) \text{ Xét } F(x) \text{ chẵn, tuần hoàn } T = 2\pi$$

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$* F(x) \text{ chẵn} \rightarrow b_n = 0 \quad \forall x \geq 1 \quad (0,5d)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 dx \right] = 1 \quad (0,5d)$$

$$* a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos nx dx + 0 \right] = \frac{2}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2} \right) \cos nx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(4n+1)x}{4n+1} - \frac{\cos(4n+3)x}{4n+3} \right] \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

Câu V.

(1,0đ)

Như đề 9.

ĐỀ 3

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K50

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (3 điểm)

1) Giải phương trình sau: $y'' - \frac{1}{x-1} y' = x(x-1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

2) Tìm hàm số $h(x)$ sao cho phương trình $h(x)[(y + \ln x)dx - xdy] = 0$ là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(x)$ tìm được.

Câu II. (2 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$

Câu III. (1,5 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}(x+2)^n}$$

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Giải phương trình $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$

2) Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^n$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Câu V. (1 điểm) Cho phương trình $\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$ trong đó $a(t), f(t)$ là những hàm số liên tục và thoả mãn $a(t) \geq C > 0, f(t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow +\infty$.

Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình trên đều dần tới 0 khi $t \rightarrow +\infty$.

ĐÁP ÁN

Câu I.

$$\begin{aligned} 1) y' = P; y'' = P' \rightarrow P' - \frac{1}{x-1}P &= x(x-1) \\ \Rightarrow P &= \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right)(x-1) \end{aligned} \quad (0.5d)$$

$$\Rightarrow P = y'; y'(2) = -1 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \quad (0.5d)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + C_2; y(2) = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Nghiệm tổng quát: } y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \quad (0.5d)$$

$$2) P = h(x)(y + \ln x); Q = -h(x).x$$

$$P'_y = Q'_x \Leftrightarrow h = -h'x - h \Rightarrow h = \frac{C}{x^2}, C \neq 0 \quad (0.5d)$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình vi phân toàn phần: } \frac{y + \ln x}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0$$

$$\text{Chọn } (x_0, y_0) = (1; 0) \Rightarrow \int_1^x \frac{\ln x dx}{x^2} - \int_0^y \frac{1}{x} dy = C \quad (0.5d)$$

$$\Rightarrow \text{Tích phân tổng quát: } -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} - \frac{y}{x} + 1 = C \quad (0.5d)$$

Câu II.

$$1) a_n = \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 1}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (0.5d)$$

$$\Rightarrow \text{Chuỗi phân kỳ} \quad (0.5d)$$

$$2) a_n = \frac{1}{n} \left(2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \ln 2 = b_n; n \rightarrow \infty \quad (0,5d)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ } (\alpha = \frac{3}{2} > 1) \Rightarrow \text{Chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \quad (0,5d)$$

Câu III.

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}(x+2)^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{1}{|x+2|} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -3 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\text{Tại } x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \text{ phân kỳ (có CM)} \quad (0,5d)$$

$$\text{Tại } x = -3: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n+1}} \text{ hội tụ theo Leibnitz (có CM)}$$

$$\text{Miền hội tụ } \begin{cases} x > -1 \\ x < -3 \end{cases} \quad (0,5d)$$

Câu IV.

$$1) * y'' + 3y' + 2y = 0 \rightarrow k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1, k_2 = -2 \\ \Rightarrow \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \quad (0,5d)$$

$$* y^* = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x} \text{ trong đó:}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1' e^{-x} + C_2' e^{-2x} &= 0 \\ -C_1' e^{-x} - 2C_2' e^{-2x} &= \frac{1}{e^x + 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1' &= \frac{e^x}{e^x + 1} \\ C_2' &= \frac{-e^{2x}}{e^x + 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \ln(1 + e^x); C_2(x) = -e^{-x} + \ln(1 + e^x) \Rightarrow y^* \quad (0,5d)$$

$$\text{Nghiệm tổng quát: } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x) \quad (0,5d)$$

$$2) \text{ Với } \forall x \in [-1, 1] \Rightarrow \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| < 1$$

$$\Rightarrow |u_n(x)| \leq \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \quad \forall n \geq 1; \forall x \in [-1; 1] \quad (0,5d)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \text{ hội tụ theo Cauchy}$$

$$\text{Theo định lý Vayestrat} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ hội tụ đều trên } [-1; 1] \quad (0,5d)$$

Câu V.

$$x(t) = e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau} \left[x(0) + \int_0^t f(s) e^{\int_0^s a(\tau) d\tau} ds \right]$$

$$= \frac{x(0) + \int_0^t f(s) e^{\int_0^s a(\tau) d\tau} ds}{e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}} \quad (0,5d)$$

Vì $f(t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow +\infty$ nên:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall t > \delta \Rightarrow |f(t)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x(t) \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow +\infty \quad (0,5d)$$

ĐỀ 4

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K50

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (3 điểm)

1) Giải phương trình sau: $yy'' - y'^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2) Tìm hàm số $h(y)$ sao cho phương trình $h(y)[y(1 + xy)dx - xdy] = 0$ là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(y)$ tìm được.

Câu II. (2 điểm) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

Câu III. (1,5 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}(x+1)^n}$$

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 2xe^x$

2) Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^n$ trên đoạn $[-1;1]$.

Câu V. (1 điểm)

Cho phương trình $\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$ trong đó $a(t), f(t)$ là những hàm số

liên tục và thỏa mãn $a(t) \geq C > 0, f(t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow +\infty$.

Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình trên đều dần tới 0 khi $t \rightarrow +\infty$.

ĐÁP ÁN

Câu I.

$$1) y' = P \rightarrow y'' = P \cdot \frac{dP}{dy} \Rightarrow y \cdot P \cdot \frac{dP}{dy} - P^2 = y^4 (*)$$

$$* y \neq 0: (*) \Leftrightarrow P \cdot \frac{dP}{dy} - \frac{1}{y} \cdot P^2 = y^3 \text{ (Bécnuli)}$$

$$\text{Đặt } P^2 = z \Rightarrow z' - \frac{2}{y}z = 2y^3 \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow z = (y^2 + C_1)^2, P^2 = y'^2 = z$$

$$\text{Kết hợp } y'(0) = 1, y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y'^2 = y^4 \quad (0,5đ)$$

$$y'(0) = 1 > 0 \Rightarrow y' = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C_2$$

$$\text{Kết hợp } y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = -1 \Rightarrow \text{Nghiệm tổng quát: } y = \frac{1}{1-x} \quad (0,5đ)$$

* $y = 0$ cũng là nghiệm.

$$2) P = h(y)(y + xy^2); Q = -x \cdot h(y)$$

$$P'_y = Q'_x \Leftrightarrow h'(y + xy^2) + h(1 + 2xy) = -h$$

$$xy + 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{dh}{h} = -\frac{2dy}{y} \Rightarrow h = \frac{C}{y^2} \quad \left(\begin{matrix} C \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix} \right) \quad (0,5d)$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình vi phân toàn phần: } \left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

$$\text{Chọn } (x_0, y_0) = (0; 1): \int_1^y 0 dy + \int_0^x \left(\frac{1}{y} + x \right) dx = C \quad (y > 0) \quad (0,5d)$$

$$\Rightarrow \text{Tích phân tổng quát: } \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C \quad (y \neq 0) \quad (0,5d)$$

Chú ý: Nếu sinh viên không lý luận $y < 0$, $y > 0$ cũng cho tối đa 1,5 điểm khi kết quả đúng.

Câu II.

$$1) a_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \rightarrow C^{-1} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (0,5d)$$

$$\Rightarrow \text{Chuỗi phân kỳ} \quad (0,5d)$$

$$2) a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \ln 2 = b_n \quad (0,5d)$$

$$\text{Chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ } (\alpha = \frac{3}{2} > 1) \Rightarrow \text{Chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \quad (0,5d)$$

Câu III.

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}(x+1)^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{1}{|x+1|} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$\text{Tại } x = 0: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ phân kỳ (có CM)} \quad (0,5d)$$

$$\text{Tại } x = -2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ hội tụ theo Leibnitz (có CM)}$$

$$\Rightarrow \text{Miền hội tụ } \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad (0,5d)$$

Câu IV.

$$1) * \quad y'' - xy' + y = 0 \rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \leftrightarrow k_1 = k_2 = 1$$

$$\Rightarrow \bar{y} = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x \quad (0,5đ)$$

$$* \quad y^* = e^x (Ax + B)x^2 \rightarrow A = \frac{1}{3}, B = 0$$

$$\rightarrow y^* = \frac{1}{3} x^3 e^x \quad (0,5đ)$$

$$* \text{ Nghiệm tổng quát: } y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x \quad (0,5đ)$$

$$2) \text{ Với } \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| < 1$$

$$\Rightarrow |u_n(x)| \leq \frac{n+1}{3^n} \quad \forall n \geq 1; \forall x \in [-1; 1] \quad (0,5đ)$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$ hội tụ theo Đalambé (có CM)

Theo định lý Vâyestrat chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên $[-1; 1]$ (0,5đ)

Câu V.(1,0đ)

Như đề 3.

ĐỀ 1**ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K51**

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

Giải phương trình: 1) $y' - \frac{y}{x} = x \cos x$ thoả mãn $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

$$2) \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

Câu II. (3 điểm)

Giải phương trình: 1) $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = x$.

$$2) y'' + 2y' + y = e^{-x} + \frac{e^{-x}}{x}.$$

Câu III. (2 điểm)

Xét sự hội tụ của chuỗi số: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{\sqrt{n^5 + 1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{4^n \ln(n+1)}$.

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x+1)^n$.

2) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x) = x(\pi - x)$ trong khoảng $(0, \pi)$ theo các hàm số cos.

ĐÁP ÁN**Câu I.**

$$1) y' - \frac{y}{x} = x \cos x$$

$$* y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = Cx. \text{ Tìm nghiệm PTKTN: } y = C(x)x \Rightarrow \quad (0,5đ)$$

$$* C'(x) = \cos x \Rightarrow C(x) = K + \sin x \Rightarrow y = (K + \sin x)x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 1 \Rightarrow y = x + x \sin x \quad (0,5đ)$$

$$2) \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

$$* P = \frac{2x}{y^3}, Q = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \neq (x, 0) \quad (0,5đ)$$

$$* \text{Chọn } x_0 = 0, y_0 = 1 \Rightarrow \int_0^x 2\xi d\xi + \int_1^y \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{3x^2}{y^4} \right) d\eta = C_1 \Rightarrow \quad (0,5đ)$$

$$* \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + 1 = C_1 \text{ hay } \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C_1 - 1 \equiv C \quad (0,5d)$$

Câu II.

$$1) y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0, \quad y_1 = x$$

$$* y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x}}}{x^2} dx \quad (\text{hoặc } y_2 = y_1 \cdot u(x)) \quad (0,5d)$$

$$* y_2 = x \int \frac{dx}{x} = x \ln |x| \quad (0,5d)$$

$$* y = C_1 x + C_2 x \ln |x| \quad (0,5d)$$

$$2) y'' + 2y' + y = e^{-x} + \frac{e^{-x}}{x}$$

$$* y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -1 \Rightarrow \bar{y} = (C_1 + C_2 x) e^{-x} \quad (0,5d)$$

$$* y'' + 2y' + y = e^{-x} \Rightarrow Y_1 = A x^2 e^{-x} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \quad (0,5d)$$

$$* y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow Y_2 = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) \cdot x e^{-x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0 \\ -C_1' e^{-x} + C_2' (e^{-x} - x e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} \end{cases} \Rightarrow Y_2 = (-x + x \ln |x|) e^{-x}$$

$$\text{Nghiem tổng quát: } y = e^{-x} (C_1 + C_2 x - x + x \ln |x| + \frac{x^2}{2}) \quad (0,5d)$$

Câu III.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{\sqrt{n^5 + 1}}$$

$$* a_n = \frac{n + \cos n}{\sqrt{n^5 + 1}} \sim \frac{1}{n^{3/2}} \text{ khi } n \rightarrow \infty \quad (0,5d)$$

$$* \text{Do chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ hội tụ} \Rightarrow \text{chuỗi đã cho hội tụ} \quad (0,5d)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{4^n \ln(n+1)}$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \quad (0,5d)$$

$$* \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \stackrel{\text{Lôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow \ln n \sim \ln(n+1) \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9}{4} > 1 \text{ nên chuỗi phân kỳ} \quad (0,5d)$$

Câu IV.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+1)^n}{n}$$

$$* u_n(x) = -\frac{[-(1+x)]^n}{n}, \text{ đặt } t = -(1+x) \Rightarrow \text{chuỗi: } -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \Rightarrow$$

$$\text{Khoảng hội tụ: } -1 < t < 1. \quad (0,5d)$$

* Tại $t = -1$ chuỗi hội tụ theo Leibnitz

$$\text{Tại } t = 1 \text{ chuỗi phân kỳ} \Rightarrow \text{miền hội tụ (đối với } x) : (-2; 0] \quad (0,5d)$$

$$* \tilde{S}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \Rightarrow \tilde{S}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = -\frac{1}{1-t} \Rightarrow \tilde{S}(t) = \ln|t-1| + C$$

$$\tilde{S}(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(x) = \ln|x+2| \quad (0,5d)$$

$$2) f(x) = x(\pi - x) \text{ với } 0 < x < \pi$$

* Xây dựng hàm số $g(x)$ chẵn, tuần hoàn, chu kỳ 2π và bằng $f(x)$ trên khoảng $(0, \pi) \Rightarrow b_n = 0, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx = \frac{\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) d(\sin nx) = \frac{-2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \sin nx dx \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$* a_n = -\frac{2}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) d(\cos nx) = -\frac{2}{n^2 \pi} [(\pi - 2x) \cos nx]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n^2}, & \text{chẵn} \\ 0, & \text{n lẻ} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} \quad (0,5d)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K51

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

Giải phương trình: 1) $y' - y = \frac{e^x}{x}$ thoả mãn $y(1) = e$.

$$2) \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0.$$

Câu II. (3 điểm)

Giải phương trình: 1) $y'' - \frac{2xy'}{x^2 + 1} + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = x$.

$$2) y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^{3x}.$$

Câu III. (2 điểm)

Xét sự hội tụ của chuỗi số: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin n}{\sqrt{n^3 + 1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n \ln(n+1)}$.

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n+1)(x-1)^n$.

2) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x) = x(\pi - x)$ trong khoảng $(0, \pi)$ theo các hàm số $\sin$.

ĐÁP ÁN

Câu I.

$$1) y' - y = \frac{e^x}{x}$$

$$* y' - y = 0 \Rightarrow y = ce^x. \text{ Tìm nghiệm PTKTN: } y = c(x) e^x \Rightarrow (0,5d)$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow c(x) = K + \ln|x| \Rightarrow y = (K + \ln|x|)e^x$$

$$y(1) = e \Rightarrow K = 1 \quad (0,5d)$$

$$2) \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$$

$$* P = \frac{y}{x}, Q = y^3 + \ln x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \neq (0, y) \quad (0,5d)$$

$$* \Rightarrow \int_1^x 0 d\xi + \int_0^y (\eta^3 + \ln x) d\eta = C \quad (0,5d)$$

$$* \Rightarrow \frac{y^4}{4} + y \ln x = C \quad (0,5d)$$

Câu II.

$$1) y'' - \frac{2xy'}{x^2 + 1} + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0, \quad y_1 = x$$

$$* y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx}}{x^2} dx \quad (\text{hoặc } y_2 = y_1 \cdot u(x)) \quad (0,5d)$$

$$* y_2 = x \int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = x^2 - 1 \quad (0,5d)$$

$$* y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1) \quad (0,5d)$$

$$2) y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^{3x}$$

$$* y'' - 6y' + 9y = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 3 \Rightarrow \bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \quad (0,5d)$$

$$* y'' - 6y' + 9y = 3x \Rightarrow Y_1 = Ax + B \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \quad (0,5d)$$

$$* y'' - 6y' + 9y = -8e^{3x} \Rightarrow Y_2 = Cx^2 e^{3x} \Rightarrow Y_2 = -4x^2 e^{3x}$$

$$\text{Nghiệm tổng quát: } y = (C_1 + C_2 x - 4x^2) e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \quad (0,5d)$$

Câu III.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$* a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ khi } n \rightarrow \infty \quad (0,5d)$$

$$* \text{Do chuỗi } \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ phân kỳ} \Rightarrow \text{chuỗi đã cho phân kỳ} \quad (0,5d)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n \ln(n+1)}$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \quad (0,5d)$$

$$* \text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \stackrel{\text{Lôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \Rightarrow \ln n \sim \ln(n+1) \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5d)$$

Câu IV.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n+1)(x-1)^n$$

$$* \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n+1)(x-1)^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \text{ với } t = 1-x, u_n(t) = -(n+1)t^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} \right| = |t| < 1 \Leftrightarrow -1 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \quad (0,5d)$$

$$* \text{Tại } x=0 \text{ và } x=2 \text{ được hai chuỗi: } -\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n+1) \text{ đều}$$

phân kỳ vì số hạng tổng quát $\nrightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ miền hội tụ $(0; 2)$ (0,25d)

$$* \tilde{S}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)t^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (t^{n+1})' = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\right)'$$

$$= -\left(\frac{t^2}{1-t}\right) = \frac{t^2 - 2t}{(1-t)^2} \quad (0,5d)$$

$$\tilde{S}(x) = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \text{ với } 0 < x < 2 \quad (0,25d)$$

$$2) f(x) = x(\pi - x) \text{ với } 0 < x < \pi$$

* Xây dựng hàm số $g(x)$ lẻ, tuần hoàn, chu kỳ 2π và bằng $f(x)$ trên khoảng $(0, \pi) \Rightarrow a_n = 0, \forall n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left[x(\pi - x) \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx (\pi - 2x) \, dx \right] \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$* b_n = - \int_0^{\pi} \cos nx (\pi - 2x) \, dx = \dots = -\frac{4}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3}, & n \text{ lẻ} \\ 0, & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} \text{ với } x \in (0, \pi) \quad (0,5d)$$

ĐỀ 3

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K51

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

$$\text{Giải phương trình: 1) } y' = \frac{e^x}{x+1} - \frac{y}{x+1}$$

$$2) \left(\sin x + \frac{y}{x} \right) dx + (y^3 + \ln x) dy = 0.$$

Câu II. (3 điểm)

$$\text{Giải phương trình: 1) } 2yy'' - y'^2 = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

$$2) y'' + y = \cot x.$$

Câu III. (2 điểm)

Tìm miền hội tụ của chuỗi số: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n^n}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{(n+2)^2}$.

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^2} \left(\frac{4x-3}{x} \right)^n$

2) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ hội tụ trong khoảng $(0, +\infty)$.

ĐÁP ÁN

Câu I.

1) $y' = \frac{e^x}{x+1} - \frac{y}{x+1}$

* $y' + \frac{y}{x+1} = 0 \Rightarrow y = \frac{C}{x+1}$. Tìm nghiệm PTKTN: $y = \frac{C(x)}{x+1}$ (0,5đ)

$\Rightarrow C'(x) = e^x \Rightarrow C(x) = e^x + K \Rightarrow y = \frac{e^x + K}{x+1}$ (0,5đ)

2) $\left(\sin x + \frac{y}{x} \right) dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$

* $P = \sin x + \frac{y}{x}$, $Q = y^3 + \ln x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ($\forall x > 0$, $\forall y$) (0,5đ)

* Chọn $x_0 = 1$, $y_0 = 0 \Rightarrow \int_1^x \sin \xi d\xi + \int_0^y (\eta^3 + \ln x) d\eta = C$ (0,5đ)

* $\Rightarrow -\cos x + \frac{y^4}{4} + y \ln x = C$ ($\forall x > 0$) (0,5đ)

Câu II.

$$1) \quad 2yy'' - y'^2 = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

$$* \text{ Đặt } P(y) = y' \Rightarrow y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow p \cdot p' - \frac{1}{2p} p^2 = \frac{1}{2y} \text{ là phương trình Bernoulli} \quad (0,5d)$$

$$* \text{ Đặt } z = p^2 \Rightarrow z' - \frac{z}{y} = \frac{1}{y} \Rightarrow z = -1 + C_1 y. \text{ Vì } y'(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 2 \quad (0,5d)$$

$$* y'^2 = 2y - 1 \Rightarrow y' = \sqrt{2y - 1} \quad (\text{do } y'(1) = 1 > 0) \Rightarrow x = \sqrt{2y - 1} + C_2 \quad (0,5d)$$

$$\text{Vì } y(1) = 1 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2} \quad (0,5d)$$

$$2) \quad y'' + y = \cot x$$

$$* y'' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (0,5d)$$

$$* Y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x \Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1' (-\sin x) + C_2' \cos x = \cot x \end{cases}$$

$$C_1 = \sin x \Rightarrow C_2 = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \cos x \quad (0,5d)$$

$$* y = \bar{y} + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \quad (0,5d)$$

Câu III.

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n^n}.$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad (0,5d)$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5d)$$

$$2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{(n+2)^2}$$

$$* \sum_{n=1}^{\infty} a_n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+2)} \cdot \frac{\ln n}{(n+2)^2} \leq \frac{\ln n}{n^2}, \quad \forall n \geq 1. \quad (0,5d)$$

$$* \text{ Xét } I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int_1^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^A + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \right]$$

I hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (có thể dùng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$ để suy ra

$$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ}. \quad (0,5d)$$

Câu IV.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^2} \left(\frac{4x-3}{x} \right)^n$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{4x-3}{x} \right| < 1 \Leftrightarrow \quad (0,5d)$$

$$* 16x^2 - 24x + 9 < x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < x < 1 \quad (0,25d)$$

* Tại $x = \frac{2}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^2+1)^2}$ hội tụ theo Leibnitz do a_n đơn điệu giảm và hội tụ đến 0.

$$\text{Tại } x = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^2} \text{ phân kỳ do } a_n \sim \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n} \text{ mà } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ phân kỳ} \quad (0,5d)$$

$$* \text{ Miền hội tụ } \left[\frac{3}{5}, 1 \right) \quad (0,25)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad x \in [0, +\infty)$$

$$* u_n(x) > 0, \quad \forall x > 0 \text{ và } u_n(0) = 0, \quad u'_n(x) = e^{-nx} (2x - nx^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = x_n = \frac{2}{n}, \quad u'_n(x) > 0 \text{ với mọi } x \in (0, x_n) \text{ và } u'_n(x) < 0 \text{ với mọi } x > x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{[0, +\infty)} u_n(x) = u_n(x) = \frac{4e^{-2}}{n^2} \quad (0,5d)$$

$$* |u_n(x)| = u_n(x) \leq \frac{4e^{-2}}{n^2}, \quad \forall n \geq 1, \forall x \geq 0.$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4e^{-2}}{n^2}$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều theo định lý Weierstrass. (0,5d)

ĐỀ 4

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K51

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2,5 điểm)

Giải phương trình: 1) $y' = 1 + \frac{y}{x(x+1)}$

$$2) \left(\sin x - \frac{y^2}{x^2} \right) dx + \left(\cos y - \frac{2y}{x} \right) dy = 0$$

Câu II. (3 điểm)

Giải phương trình: 1) $yy'' + y'^2 = 1, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

$$2) y'' + y = \tan x.$$

Câu III. (2 điểm)

Xét sự hội tụ có chuỗi số: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6...(2n)}{n^n}$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+3)^2}$$

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$

2) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ hội tụ đều trên khoảng $[0, +\infty)$.

Câu I.

$$1) y' = 1 + \frac{y}{x(x+1)}$$

$$* y' - \frac{y}{x(x+1)} = 0 \Rightarrow y = \frac{Cx}{x+1}. \text{ Tìm nghiệm PTKTN } y = \frac{C(x)x}{x+1} \Rightarrow (0,5d)$$

$$* C'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow C(x)x + \ln|x| + K \Rightarrow y = \frac{x}{x+1} (x + \ln|x| + K) \quad (0,5d)$$

$$2) \left(\sin x - \frac{y^2}{x^2} \right) dx + \left(\cos y + \frac{2y}{x} \right) dy = 0$$

$$* P = \sin x - \frac{y^2}{x^2}, Q = \cos y + \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y) \neq (0,y) \quad (0,5d)$$

$$* \text{Chọn } x_0 = 1, y_0 = 0 \Rightarrow \int_1^x \sin \xi d\xi + \int_0^y \left(\cos \eta + \frac{2\eta}{x} \right) d\eta = C_1 \Rightarrow \quad (0,5d)$$

$$* -\cos x + \sin y + \frac{y^2}{x} = C_1 - \cos 1 \equiv C \quad (0,5d)$$

Câu II.

$$1) yy'' + y'^2 = 1, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$* \text{Đặt } p(y) = y' \Rightarrow y'' = p \cdot \frac{dp}{dy} \Rightarrow p \cdot p' + \frac{1}{y} p^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow P. \text{ tr. Bernoulli} \quad (0,5d)$$

$$* \text{Đặt } z = p^2 \Rightarrow z' + \frac{y}{2} z = \frac{2}{y} \Rightarrow z = \frac{y^2 + C_1}{y^2}, \forall y'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (0,5d)$$

$$* p^2 = 1 \Rightarrow y' = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x + C_2. \text{ Từ } y(0) = y'(0) = 1 \Rightarrow y = x + 1 \quad (0,5d)$$

$$2) y'' + y = \operatorname{tg} x$$

$$* y'' + y = 0 \Rightarrow k^2 = -1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (0,5d)$$

$$* Y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x \Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1' (-\sin x) + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 = \sin x - \ln \left| \cot g \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, C_2 = -\cos x \quad (0,5d)$$

$$* y = \bar{y} + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \cot g \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \quad (0,5d)$$

Câu III.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6...(2n)}{n^n}$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \Rightarrow \quad (0,5d)$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ} \quad (0,5d)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+3)^2}$$

$$* a_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+3)^2} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}, \forall n = 1, 2, \dots \quad (0,5d)$$

$$* \text{Xét } I = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = -\frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \Big|_2^A - \int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx \right] \Rightarrow I \text{ hội tụ} \Rightarrow \text{chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \quad (0,5d)$$

(có thể dùng $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0, \forall \varepsilon > 0$ để suy ra $\frac{\ln n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}, \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow$ chuỗi hội tụ).

Câu IV.

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 \Leftrightarrow \quad (0,5d)$$

$$* 1 - 2x + x^2 < 1 + 2x + x^2 \Leftrightarrow x > 0 \quad (0,25d)$$

* Tại $x = 0$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 - 1}}$ hội tụ theo Leibnitz vì là chuỗi đan dấu có a_n đơn

điệu giảm đến 0. (0,5đ)

* Miền hội tụ $[0, +\infty)$. (0,25đ)

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad x \in [0, +\infty).$$

* $u_n(x) > 0, \forall x > 0$ và $u_n(0) = 0, u'_n(x) = e^{-nx}(2x - nx^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = x_n = \frac{2}{n}, u'_n(x) > 0$ với mọi $x \in (0, x_n)$ và $u'_n(x) < 0$ với mọi $x > x_n$

$$\Rightarrow \max_{[0, +\infty)} u_n(x) = u_n(x_n) = \frac{4e^{-2}}{n^2} \quad (0,5đ)$$

$$* |u_n(x)| = u_n(x) = -\frac{4e^{-2}}{n^2}, \quad \forall n \geq 1, \forall x \geq 0.$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4e^{-2}}{n^2}$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ theo định lý Weierstrass. (0,5đ)

ĐỀ 1

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K52

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2 điểm)

Xét hội tụ của các chuỗi sau: a) $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})$; b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{3n^2}$

Câu II. (2 điểm)

a) Chứng minh chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n + 1}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+4}{4n+1} \right)^{n/2} (x+4)^n$

Câu III. (2 điểm)

- a) Giải bài toán Cauchy $2ydx - (6x - y^2)dy = 0$, $y(1) = 0$;
 b) Tìm hàm số $h(y)$ sao cho phương trình $h(y)[(1 - \sin x)dx + (\cos x + x)dy] = 0$,
 là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(y)$ tìm được.

Câu IV. (3 điểm)

- a) Giải phương trình $2yy'' - y'^2 - 1 = 0$, với điều kiện $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;
 b) Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2e^x \cos \frac{x}{2}$

Câu V. (1 điểm)

Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1) \cdot 2^{3n+2}}$

ĐÁP ÁN**Câu I.**

a) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = \frac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{3}{2\sqrt{n}}$, $n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$. (0,5đ)

Chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2\sqrt{n}}$ phân kỳ ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi đã cho phân kỳ. (0,5đ)

b) $a_n = f(n) = \frac{\ln n}{3n^2}$; $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ liên tục, dương trên $[2; +\infty)$.

$f(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 3x^2 - 6x \ln x}{9x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{3x^3} < 0$, với $\forall x \geq 2$, $f(x)$ đơn điệu giảm trên $[2; +\infty)$. (0,5đ)

Mặt khác $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{3x^2} dx = -\frac{1}{3} \int_2^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln x \Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \right] =$
 $= -\frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} \cdot \ln x + \frac{1}{2} \Big|_2^{+\infty} \right] = \frac{1}{6} (\ln 2 + 1)$ (Tích phân hội tụ).

Theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi số đã cho hội tụ. (0,5đ)

Câu II.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n + 1}$ hội tụ với $\forall x \in \mathbb{R}$, theo tiêu chuẩn Leibnitz. Ta có:

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (0,5đ)$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Chọn $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ với $\forall n > n_0, \forall x \in \mathbb{R}$ ta có $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ theo định nghĩa chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. (0,5đ)

b) $X = x + 4, \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+4}{4n+1} \right)^{n/2} X^n$ (*) $a_n = \left(\frac{n+4}{4n+1} \right)^{n/2} > 0$. Chuỗi (*) có bán kính hội tụ là $R = 2$, khoảng hội tụ là $-2 < X < 2$. (0,5đ)

$X = 2, \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4(n+4)}{4n+1} \right)^{n/2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4(n+4)}{4n+1} \right)^{n/2} = e^{15/8} \neq 0$, chuỗi phân kỳ.

$X = -2, \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4(n+4)}{4n+1} \right)^{n/2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4(n+4)}{4n+1} \right)^{n/2} = e^{15/8} \neq 0$, chuỗi phân kỳ.

Miền hội tụ của chuỗi (*) là $-2 < X < 2$, do đó $-2 < x + 4 < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2$ (0,5đ)

Câu III.

a) $y \neq 0, \frac{dx}{dy} + \frac{y^2 - 6x}{2y} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}, (*)$

+ Phương trình $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0$ có nghiệm tổng quát $x = Cy^3$. (0,5đ)

+ Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $x = \left(\frac{1}{2y} + C \right) y^3$

Vì $y(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Vậy nghiệm cần tìm là $x = \frac{y^2}{2}(1+y)$. (0,5đ)

b) Đặt $P(x,y) = h(y) (1 - \sin x)$, $Q(x,y) = h(y) (\cos x + x)$; $P(x,y)$, $Q(x,y)$. Để phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần thì:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow h' = h, \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow h = Ce^y, C \neq 0 \quad (0,5d)$$

$h = Ce^y$, ta có phương trình vi phân toàn phần

$$e^y(1 - \sin x)dx + e^y(x + \cos x)dy = 0.$$

$$\text{Chọn } (x_0, y_0) = (0; 0), \quad \int_0^y e^y dy + \int_0^x e^y (1 - \sin x) dx = C \Rightarrow e^y(x + \cos x) = C \quad (0,5d)$$

Câu IV.

a) Đặt $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, $p \frac{dp}{dy} - \frac{1}{2y} p^2 = \frac{1}{2y}$, (*) là phương trình

Bernoulli. (0,5d)

$$\text{Đặt } p^2 = z \Rightarrow 2p \frac{dp}{dy} = z', \text{ ta được } z' - \frac{1}{y} z = \frac{1}{y},$$

(phương trình tuyến tính) (0,5d)

$$z = \left(-\frac{1}{y} + C_1 \right) y, \text{ mà } p^2 = y'^2 = z, \quad y'(1) = 1, y(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'^2 = 2y - 1. \quad (0,5d)$$

$$\text{Vì } y'(1) = 1 > 0 \Rightarrow y' = \sqrt{2y-1} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{2y-1}} \Rightarrow x = \sqrt{2y-1} + C_2$$

$$\text{Kết hợp } y(1) = 1 \Rightarrow C_2 = 0. \text{ Vậy nghiệm cần tìm là } y = \frac{x^2 + 1}{2} \quad (0,5d)$$

b) + Phương trình $y'' - 3y' + 2y = 0$ (*), $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. (0,5d)

+ $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$, $\alpha = 2$ trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng, nên $y_1^* = A x e^{2x} \Rightarrow y_1^* = 3x e^{2x}$. (0,5d)

+ $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos \frac{x}{2}$, $\alpha \pm i\beta = 1 \pm \frac{1}{2}i$ không là nghiệm của

phương trình đặc trưng, nên $y_1^* = e^{2x} \left(C \sin \frac{x}{2} + B \cos \frac{x}{2} \right)$

$$\Rightarrow y_2^* = \frac{8}{3} e^x \left(\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \right).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \bar{y} + y_1^* + y_2^*$ (0,5d)

Câu V.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1) \cdot 2^{3n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}. \text{ Xét}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} x^{3n+2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} x^{3n+1} = xG(x), \quad -1 < x < 1,$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} x^{3n+1} \quad (*) \Rightarrow G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1+x^3} \end{aligned} \quad (0,5d)$$

$$G(x) = \int \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có } G(0) = 0 = -\frac{\pi}{6\sqrt{3}} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$S(x) = x \left[\frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{3} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right].$$

$$\text{Vậy } S(x) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \ln \sqrt{3} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right]. \quad (0,5d)$$

ĐỀ 2

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K52

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2 điểm)

$$\text{Xét sự hội tụ của các chuỗi sau: a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n+1}{2^n(3n+2)}; \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$$

Câu II. (2 điểm)

a) Chứng minh chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n + 2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 1)^n}{(n+1)\sqrt{n+2}}$.

Câu III. (2 điểm)

a) Giải bài toán Cauchy $(y + 2)dx + (y - x + 2)dy = 0$, $y(1) = 1$;

b) Tìm hàm số $h(x)$ sao cho phương trình $h(x)[(\dot{y} + \cos y)dx + (1 - \sin y)dy] = 0$ là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(x)$ tìm được.

Câu IV. (3 điểm)

a) Giải phương trình $2xy'' - 6y' + x^2 = 0$, với điều kiện $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$;

b) Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x) + 5\sin 2x$.

Câu V. (1 điểm)

Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1) \cdot 2^{3n+2}}$

ĐÁP ÁN**Câu I.**

a) Đặt $a_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{2^2(3n+2)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} = D < 1$ (0,5đ)

theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi số đã cho hội tụ. (0,5đ)

b) Ta có $n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \sim n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, $n \rightarrow \infty$ (0,5đ)

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ phân kỳ, theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi số đã cho phân kỳ. (0,5đ)

Câu II.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n + 2}$ hội tụ với $\forall x \in \mathbb{R}$, theo tiêu chuẩn Leibnitz. Ta có:

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 2} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (0,5d)$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Chọn $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ với $\forall n > n_0, \forall x \in \mathbb{R}$ ta có $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ theo định nghĩa chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. (0,5d)

b) Đặt $X = x^2 - x + 1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)\sqrt{n+2}}$ (*), $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$.

Chuỗi (*) có bán kính hội tụ là $R = 1$, khoảng hội tụ là $-1 < X < 1$. (0,5d)

$+ X = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$ hội tụ (vì $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}, n \rightarrow \infty$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ).

$+ X = -1$, có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n+2}}$ là chuỗi đan dấu, hội tụ theo Leibnitz (CM)

Miền hội tụ của chuỗi (*) là $-1 \leq X \leq 1$,

do đó $-1 \leq x^2 - x + 1 \leq 1$ hay $0 \leq x \leq 1$ (0,5d)

Câu III.

a) Nếu $y \neq 0, \frac{dx}{dy} + \frac{y+2-x}{y+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y+2}x = -1, (*)$

+ Phương trình thuần nhất $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y+2}x = 0$ có nghiệm tổng quát

$$x = C(y+2). \quad (0,5d)$$

+ Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $x = (-\ln|y+2| + C)(y+2)$.

Vì $y(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$. Vậy nghiệm cần tìm là $x = \left(\frac{1}{3} - \ln|y+2|\right)(y+2)$ (0,5d)

b) $P(x,y) = h(x)(y + \cos y)$, $Q(x,y) = h(x)(-\sin y + 1)$. Để phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần thì

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow h' = h, \left(y \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow h = Ce^x, C \neq 0 \quad (0.5d)$$

Với $h = Ce^x$, ta có phương trình $e^x(y + \cos y)dx + e^x(1 - \sin y)dy = 0$. (*)

Chọn $(x_0, y_0) = (0; 0)$, $\int_0^x e^x dx + \int_0^y e^x (1 - \sin y) dy = C$.

Vậy $e^x(y + \cos y) = C \quad (0.5d)$

Câu IV.

a) $2xy'' - 6y' + x^2 = 0$, đặt $y' = p$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dx} - \frac{3}{x}p = -\frac{x}{2}$, (*)

+ Phương trình thuần nhất $\frac{dp}{dx} - \frac{3}{x}p = 0$ có nghiệm tổng quát $p = Cx^3$. (0,5d)

+ Nghiệm tổng quát của (*) là $p = \left(\frac{1}{2x} + C_1 \right) x^3$, $y' = \left(\frac{1}{2x} + C_1 \right) x^3$. (0.5d)

Vì $y'(1) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$ do đó $y' = \frac{1}{2}(x^3 + x^2) \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) + C_2$.

$y(1) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{7}{24}$. Vậy nghiệm cần tìm là $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \frac{7}{24}$. (0,5d)

b) $y'' - 3y' + 3y = 0$ (*), $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$.

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \quad (0.5d)$$

$$+ y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x), \alpha = 1, y_1^* = (Ax + B)xe^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1^* = (2x + 1)xe^x. \quad (0.5d)$$

$$+ y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x, \alpha \pm i\beta = \pm 2i, y_2^* = A \cos 2x + B \sin 2x$$

$$\Rightarrow y_2^* = \frac{1}{4}(3 \cos 2x - \sin 2x).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \bar{y} + y_1^* + y_2^*$ (0,5d)

Câu V.

Tính tổng $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1) \cdot 2^{3n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3n+2}$. Xét

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} x^{3n+2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} x^{3n+1} = xG(x),$$

khoảng hội tụ $-1 < x < 1$, trong đó $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)} x^{3n+1} \quad (*) \Rightarrow$

$$\Rightarrow G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1+x^3}$$

$$G(x) = \int \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \quad (**)$$

(0,5d)

Từ (*) và (**) ta có $G(0) = 0 = -\frac{\pi}{6\sqrt{3}} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

$$S(x) = x \left[\frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right], \text{ với } -1 < x < 1.$$

$$\text{Vậy } S(x) = S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \ln \frac{2}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right].$$

(0,5d)

ĐỀ 3**ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K52**

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2 điểm)

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n(n+4)}$: b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \sin(2n\beta)}{\sqrt[3]{n^7 + 2n^3 + 3}}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Câu II. (2 điểm)

a) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ có chu kỳ $2l = 6$, xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{3}, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{3n^2+4n+1} \cdot x^{2n+1}$

Câu III. (2 điểm)

a) Giải phương trình $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

b) Giải phương trình $xy' - y = y(\ln y - \ln x)$ với điều kiện $y(1) = e$.

Câu IV. (3 điểm)

a) Giải phương trình $x^2y'' - 3xy' + 4y = 3x^2$, $x > 0$ bằng cách đặt $x = e^x$;

b) Giải phương trình $y'' + 2y' + y = 4xe^x + \frac{e^{-x}}{x}$.

Câu V. (1 điểm)

Tìm đường cong trên mặt phẳng sao cho tại mỗi tiếp điểm M của nó tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm A, cắt trục tung tại điểm B và đoạn thẳng OA bằng đoạn thẳng MA (O là gốc tọa độ).

ĐÁP ÁN**Câu I.**

a) Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n+4} = e^{-1} = C < 1$ (0,5đ)

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi số đã cho hội tụ. (0,5đ)

b) $n+1 \leq 2n$, $|\sin(2n\beta)| \leq 1$, $n^7 + 7n^3 + 1 \geq n^7$.

$$|a_n| = \left| \frac{(n+1)\sin(2n\beta)}{\sqrt[3]{n^7 + 7n^3 + 1}} \right| \leq \frac{2n}{n^{7/3}} = 2 \frac{1}{n^{4/3}} \quad (0,5d)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1}{n^{4/3}} \text{ hội tụ (vì } \alpha = \frac{4}{3} > 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ hội tụ.}$$

Vậy chuỗi số hội tụ tuyệt đối (0,5d)

Câu II.

$$a) \quad a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 0 dx + \int_0^3 \frac{x}{3} dx \right) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 0 dx + \int_0^3 \frac{x}{3} \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2}{n^2 \pi^2} & \text{khi } n = 2k + 1 \\ 0 & \text{khi } n = 2k \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 0 dx + \int_0^3 \frac{x}{3} \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{3} + \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{3} \right] \quad (0,5d)$$

$$b) \quad a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{3n^2 + 4n + 1} x^{2n+1}, \quad \rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = x^2,$$

khoảng hội tụ là $-1 < x < 1$. (0,5d)

$$x = 1, \text{ có chuỗi } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{3n^2 + 4n + 1}, \text{ chuỗi hội tụ theo TC Leibnitz (có CM)}$$

$$x = -1, \text{ có chuỗi } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{3n^2 + 4n + 1}, \text{ chuỗi hội tụ theo TC Leibnitz (có CM)}$$

Như vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $-1 \leq x \leq 1$. (0,5d)

Câu III.

a) $y \neq 0, y^{-3}y' + 2xy^{-2} = 2x^3$. (*), $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y', z' - 4xz = -4x^3$, (**)

(**) có nghiệm tổng quát là $z = \frac{1}{2} \left(Ce^{2x^2} + 2x^2 + 1 \right)$. (0,5đ)

Vậy phương trình đã cho có tích phân tổng quát là $y^{-2} = \frac{1}{2} \left(Ce^{2x^2} + 2x^2 + 1 \right)$

Ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho. (0,5đ)

b) $y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ (*), đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$, ta được $u'x = u \ln u$. (0,5đ)

Nếu $\ln u \neq 0, \frac{dx}{x} = \frac{du}{u \ln u}$. Tích phân hai vế, ta được $\ln |x| = \ln |\ln u| + \ln |C|$,

$C \neq 0$, do đó $x = C \ln u \Rightarrow x = C \ln \frac{y}{x}$, do $y(1) = e$ ta có $x = \ln \frac{y}{x}$. Ngoài ra

$\ln u = 0 \rightarrow u \equiv 1$, tức $y = x$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho (0,5đ)

Câu IV.

a) $x > 0, t = \ln x$ ta có phương trình vi phân $y''_{tt} - y'_t + 4y = 3e^{2t}$ (*). (0,5đ)

$+ y'' - 4y' + 4y = 0, k^2 - 4k + 4 = 0$, có nghiệm kép $k = 2, \bar{y} = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$.

+ Vế phải $f(t) = 3e^{2t}, \alpha = 2$ trùng với nghiệm kép

$y^* = At^2 e^{2t} \Rightarrow y^* = \frac{3}{2} t^2 e^{2t}$. (0,5đ)

Phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$y = \bar{y} + y^* = (C_1 + C_2 \ln x)x^2 + \frac{3}{2} x^2 \ln^2 x$ (0,5đ)

b) $y'' + 2y' + y = 0, k^2 + 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = -1, \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ (0,5đ)

$+ y'' + 2y' + y = 4x e^x$ (*), $y_1^* = (Ax + B)e^x \Leftrightarrow y_1^* = (x - 1)e^x$ (0,5đ)

$+ y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}, y_2^* = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$, trong đó $C_1(x) \neq C_2(x)$;

$$\begin{cases} e^{-x}C_1' + xe^{-x}C_2' = 0 \\ -e^{-x}C_1' + (1-x)e^{-x}C_2' = \frac{e^{-x}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + xC_2' = 0 \\ C_1' + (1-x)C_2' = \frac{1}{x} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) + (2)} \Rightarrow C_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2 = \ln|x|, \quad C_1' + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = x, \quad y_2^* = -xe^{-x} + xe^{-x}\ln|x|.$$

$$\text{Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là } y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* \quad (0,5đ)$$

Câu V.

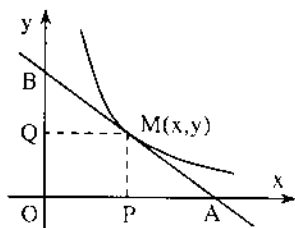
Giả sử $M(x,y)$ là điểm nằm trên đường cong phải tìm $y = y(x)$. Phương trình tiếp tuyến tại M : $Y - y = y'(x)(X - x)$.

$$OA = x - \frac{y'}{y}, \quad MA^2 = \left(-\frac{y'}{y}\right)^2 + y^2. \quad \text{Theo giả}$$

thiết $MA^2 = OA^2$ ta có phương trình vi phân

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \quad \text{Đây là phương trình đẳng cấp.} \quad (0,5đ)$$

$$\text{Vậy các đường cong cần tìm là } x^2 + y^2 - Cy = 0. \quad (0,5đ)$$



ĐỀ 4

ĐỀ THI CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - K52

(Thời gian làm bài 90 phút)

Câu I. (2 điểm)

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n(n+4)}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(n+1)}{\sqrt[3]{n^7 + 2n^3 + 3}}$$

Câu II. (2 điểm)

a) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ có chu kỳ $2l = 4$, xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{3n^2+4n+5} \cdot x^{2n}$

Câu III. (2 điểm)

a) Giải phương trình $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

b) Giải phương trình $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$ với điều kiện $y(\pi) = \pi$.

Câu IV. (3 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3x^2$, $x > 0$ bằng cách đặt $x = e^t$;

b) Giải phương trình $y'' + 2y' + y = 3xe^x - \cot^2 x$.

Câu V. (1 điểm)

Tìm đường cong trên mặt phẳng sao cho tại mỗi tiếp điểm M của nó tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm A , cắt trục tung tại điểm B và đoạn thẳng OB bằng đoạn thẳng MB (O là gốc toạ độ).

ĐÁP ÁN**Câu I.**

a) Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n+4} = e = C > 1$ (0,5đ)

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi số đã cho phân kỳ. (0,5đ)

b) $n+1 \leq 2n$, $n^7 + 7n^3 + 1 \geq n^7$, do đó

$$a_n \sim \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7 + 7n^3 + 1}} \sim \frac{1}{n^{4/3}}, n \rightarrow \infty \quad (0,5d)$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ hội tụ ($\alpha = \frac{4}{3} > 1$), theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số đã cho hội tụ. (0,5d)

Câu II.

$$a) \quad a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 0 dx + \int_0^2 \frac{x}{2} dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{x}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2}{n^2 \pi^2} & \text{khi } n = 2k + 1 \\ 0 & \text{khi } n = 2k \end{cases} \quad (0,5d)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{x}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} + \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2} \right] \quad (0,5d)$$

$$b) \quad a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{3n^2 + 4n + 5} x^{2n}, \quad \rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = x^2,$$

khoảng hội tụ là $-1 < x < 1$. (0,5d)

$x = 1$, có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{3n^2 + 4n + 5}$, chuỗi hội tụ theo TC Leibnitz (có CM)

$x = -1$, có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{3n^2 + 4n + 5}$, chuỗi hội tụ theo TC Leibnitz (có CM)

Như vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $-1 \leq x \leq 1$. (0,5d)

Câu III.

$$a) y \neq 0, y^{-2}y' + \frac{1}{x+1}y^{-1} = -1, (*). \text{ Đặt } z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y', z' - \frac{1}{x+1}z = 1.$$

$$(**) \text{ có nghiệm tổng quát là } z = (1+x)(\ln|1+x| + C). \quad (0,5đ)$$

$$\text{Phương trình đã cho có tích phân tổng quát là } y^{-1} = (1+x)(\ln|1+x| + C)$$

$$\text{Ngoài ra } y = 0 \text{ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.} \quad (0,5đ)$$

$$b) y' = \sin \frac{x+y}{2} - \sin \frac{x-y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{\sin \frac{y}{2}} = -2 \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{Phương trình đã cho có tích phân tổng quát là } \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{4} \right| = C - 2 \sin \frac{x}{2}.$$

$$\text{Do } y(\pi) = \pi \Rightarrow C = 2. \text{ Vậy nghiệm cần tìm } \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{4} \right| = 2 - 2 \sin \frac{x}{2}. \quad (0,5đ)$$

Câu IV.

$$a) x > 0, t = \ln x \text{ ta có } y''_{tt} - 3y'_t + 2y = 3e^{2t} \quad (*). \quad (0,5đ)$$

$$+ y'' - 3y' + 2y = 0, k^2 - 3k + 2 = 0, k_1 = 1, k_2 = 2, \bar{y} = C_1 e^t + C_2 e^{2t}. \quad (0,5đ)$$

$$+ f(t) = 3e^{2t}, \alpha = 2 \text{ nghiệm riêng } y^* = Ate^{2t} \Rightarrow y^* = 3te^{2t}. \quad (0,5đ)$$

Phương trình (*) có nghiệm tổng quát

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 3te^{2t}$$

Do $e^t = x$ nên phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + 3x^2 \ln x \quad (0,5đ)$$

$$b) y'' + y = 0, k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i, \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (0,5đ)$$

$$+ y'' + y = 3xe^x, y_1 = e^x(Ax + B) \Rightarrow y_1^* = \frac{3}{4} e^x(x - 1) \quad (0,5đ)$$

$$+ y'' + y = -\cot g^2 x, y_2^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \text{ trong đó } C_1(x) \quad C_2(x):$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = -\cot g^2 x \end{cases} \Rightarrow C_1 = \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, C_2 = \frac{1}{\sin x} + \sin x$$

Như vậy $y_1 = 2 \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \bar{y} + y^* = \bar{y} + y_1^* + y_2^* \quad (0,5đ)$$

Câu V.

Giả sử $M(x,y)$ là điểm nằm trên đường cong phải tìm $y = y(x)$. Phương trình tiếp tuyến tại M : $Y - y = y'(x)(X - x)$.

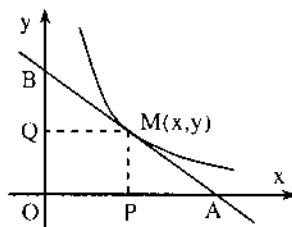
$OB = y - xy'$, $MB^2 = (-xy')^2 + x^2$. Theo giả thiết

$MA^2 = OA^2$ ta có $y' = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$. Đây là phương

trình đẳng cấp. (0,5đ)

Vậy các đường cong cần tìm là $x^2 + y^2 - Cx = 0$.

(0,5đ)



TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ia. S. Bugrov, S. M. Nikolski, *Matemática para Engenharia* (1987).
- [2] Raymond Couty, *Analyse* (1970).
- [3] T.Bass, *Cours de Mathematiques* (1964).
- [4] M.Nicocescu, *Analiza mamematica* (1970).
- [5] SzeTenshu, *Elements of real analysis* (1978).
- [6] G. Lefor, *Toán cao cấp dùng cho sinh học* (1972).
- [7] Lesieur, *Toán cao cấp dùng cho đại học kỹ thuật* (1972).
- [8] Trần Bình, *Bài giảng toán cao cấp* (1968).
- [9] Nguyễn Đình Trí, *Toán cao cấp* (1985).
- [10] Hoàng Tuy, *Giải tích hiện đại* (1979).
- [11] B. Demidovitch, *Problemas e exercicios de Análize Matemática* (1977).
- [12] V. Smirnov, *Cours de mathématiques Supérieures* (1972).
- [13] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, I, II, III (1962).
- [14] В. Немыцкий, *Курс Математического Анализа* (1957).
- [15] А. П. Маркушевич, *Теория Аналитических Функций* (1967).
- [16] П. П. Ляшко, *Математический Анализ (В примерах и задачах)* (1978).
- [17] Ю. С. Очип, *Математический Анализ* (1961).

- [18] Пидкунов, *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (1982).
- [19] Л. Т. Курош, *Курс высшей алгебры* (1965).
- [20] Н. М. Матвеев, *Сборник Задач. и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (1960).
- [21] Trần Bình, *Giải tích, I, II, III* (1999 - 2000).

BÀI TẬP GIẢI SẴN
GIẢI TÍCH II + III

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ CHỌN LỌC

PHỤ CHƯƠNG: CÁC ĐỀ THI HỌC KỲ II CÁC NĂM 2004 – 2008

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

(In lần thứ năm có sửa chữa và bổ sung)

Tác giả: TRẦN BÌNH

Chịu trách nhiệm xuất bản : TS. Phạm Văn Diên

Biên tập Ngọc Khuê

Vẽ bìa Trịnh Tiến Hùng

In 700 cuốn khổ 14,5 x 20,5 cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Văn hoá dân tộc.
Số đăng ký KHXB : 82 – 2008/ CXB/3.2-02/ KHKT ngày 14 / 1/ 2008.
Quyết định xuất bản số: 28/QĐXB- NXBKHKKT ngày 29 / 1 / 2009.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 / 2009.

209026 M05
BT giải sản giải tích 2_3



0610090000029

87,000

Giá: 87.000đ