PGS. TS NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

# LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

QUYỂN 1

## HỆ TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

PGS.TS NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

# Lý thuyết
# ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

## Quyển 1

## HỆ TUYẾN TÍNH

*(In lần thứ 4 có sửa chữa bổ sung)*

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2009

# LỜI MỞ ĐẦU

*Điều khiển tự động có lịch sử phát triển từ trước Công nguyên, bắt đầu từ đồng hồ nước có phao điều chỉnh Ktesibios ở Hy Lạp. Hệ điều chỉnh nhiệt độ đầu tiên do Cornelis Drebbel (1572-1633) người Hà Lan sáng chế. Hệ điều chỉnh mức đầu tiên là của Polzunov người Nga (1776). Hệ điều chỉnh tốc độ được ứng dụng trong công nghiệp đầu tiên là của Jame Watt (1769).*

*Thời kỳ trước năm 1868 là thời kỳ chế tạo những hệ tự động theo trực giác. Các công trình nghiên cứu lý thuyết bắt đầu từ Maxwell, đề cập đến ảnh hưởng của thông số đối với chất lượng của hệ. I. A. Vysnhegradshi với công trình toán học về các bộ điều chỉnh.*

*Thế chiến lần thứ Hai đòi hỏi sự phát triển về lý thuyết và ứng dụng để có những máy bay lái tự động, những hệ điều khiển vị trí của các loại pháo, điều khiển tự động rađa ... Những năm 1950, các phương pháp toán học và phân tích đã phát triển và đưa vào ứng dụng nhanh chóng. Ở Mỹ thịnh hành hướng nghiên cứu trong miền tần số với các công trình ứng dụng của Bode, Nyquist, Black ở các trung tâm thử nghiệm điện tín. Trong khi ấy ở Liên Xô (cũ) ngự trị lĩnh vực lý thuyết điều khiển và ứng dụng trong miền thời gian.*

*Từ những năm 1980, máy tính số bắt đầu được sử dụng rộng rãi, cho phép điều khiển với độ chính xác cao các đối tượng khác nhau.*

*Với sự ra đời của vệ tinh, thời đại vũ trụ bắt đầu, các hệ điều khiển ngày càng phức tạp hơn và đòi hỏi chất lượng cao hơn. Các phương pháp của Liapunốp, Minorsky cũng như lý thuyết điều khiển tối ưu hiện đại của L. S. Pontryagin (Liên Xô cũ), Bellman (Mỹ) có ý nghĩa rất lớn. Các nguyên tắc điều khiển thích nghi, điều khiển bền vững, điều khiển mờ, các "hệ thông minh"... ra đời và được áp dụng có hiệu quả vào thực tiễn.*

*Rõ ràng là trong việc phân tích và tổng hợp các hệ điều khiển hiện nay, việc sử dụng đồng thời miền tần số và miền thời gian là cần thiết [7].*

*Ở Việt Nam từ những năm 1960, Đảng và Nhà nước ta đã quan tâm đến việc đào tạo cán bộ và nghiên cứu khoa học trong lĩnh vực này.*

*Hiện nay công nghệ tự động là một trong những hướng phát triển công nghệ mũi nhọn của đất nước trong thế kỷ 21. Nghị quyết 27CP của Chính phủ về Chương trình Tự động hoá Quốc gia đã khẳng định vai trò quan trọng của ngành công nghệ này.*

*Những công trình công nghiệp lớn và trọng điểm hiện nay đều được tự động hoá ở mức độ tương đối cao và chủ yếu do nước ngoài đảm nhiệm. Để làm chủ được các công nghệ mới này, cán bộ kỹ thuật không những có khả năng sử dụng tốt mà phải có kiến thức cần thiết và chuyên tâm nghiên cứu, ứng dụng để có thể theo kịp nhịp điệu phát triển chung của thế giới.*

*Mạng Internet ngày càng được sử dụng rộng rãi cho việc phổ biến những kiến thức cho việc học tập, nghiên cứu. Tuy nhiên không phải bất cứ ai, ở đâu cũng có thể sử dụng có hiệu quả, nhất là việc học tập, nghiên cứu những kiến thức cơ sở một cách có hệ thống.*

*Công cụ để điều khiển tự động không ngừng đổi mới và hoàn thiện, nhưng nguyên lý cơ bản vẫn không thay đổi đáng kể. Tuy nhiên cho đến nay, các tài liệu về những vấn đề đã nêu vẫn còn ít, những điều trên đã thúc bách tác giả biên soạn bộ sách này. Bộ sách* ***"Lý thuyết điều khiển tự động thông thường và hiện đại"*** *gồm bốn quyển: Quyển 1:* ***"Hệ tuyến tính"****, Quyển 2:* ***"Hệ xung số"****, Quyển 3:* ***"Hệ phi tuyến - Hệ ngẫu nhiên"****, và Quyển 4:* ***"Hệ tối ưu - Hệ thích nghi"****.*

*Quyển 1:* ***"Hệ tuyến tính"*** *tái bản lần này có sửa chữa và bổ sung. Quyển này có 7 chương:*

*Chương I: Sau khi bắt đầu bằng 3 ví dụ về ba thời kỳ phát triển của kỹ thuật tự động, nêu lên phân loại các hệ điều khiển khác nhau để có khái niệm bao quát về các hệ tự động nói chung.*

*Chương II: Cơ sở toán học của lý thuyết điều khiển tự động. Sau khi nhắc lại phương trình vi phân và toán tử Laplace, nêu lên khái niệm về hàm truyền đạt, các đặc tính vào ra trong miền thời gian và miền tần số, cũng như đặc tính của những phần tử thường gặp.*

*Chương III: Nêu lên các tiêu chuẩn thường dùng như Hurwitz, Routh, Nyquist để khảo sát ổn định các hệ điều khiển cũng như cách dùng công cụ máy tính theo chương trình Tutsim [6] , Matlab [7] để mô phỏng.*

*Chương IV: Đề cập đến phương pháp xác định cấu trúc và thông số của*

*các đối tượng cũng như phương pháp quỹ đạo nghiệm số, chia miền ổn định là phương pháp hữu hiệu trong việc phân tích cũng như tổng hợp hệ thống.*

*Chương V: Nêu lên khái niệm về chất lượng cũng như những tiêu chuẩn để đánh giá chất lượng một hệ thống điều khiển tự động.*

*Chương VI: Tổng hợp hệ điều khiển tự động. Ở đây nêu lên việc dùng các khâu hiệu chỉnh cũng như các bộ điều chỉnh khác nhau, điện tử, khí nén để nâng cao chất lượng các hệ điều khiển (SISO cũng như MIMO), có bổ sung thêm phần dùng máy tính để tổng hợp hệ thống tối ưu.*

*Chương VII: Phương pháp biến trạng thái đối với các hệ điều khiển tự động. Ở đây có nêu lên mối liên hệ giữa các phương pháp khảo sát hệ thống trong miền tần số và miền thời gian, cũng như phương pháp dùng máy tính để mô tả hệ thống trong không gian trạng thái, khái niệm về điều khiển được và quan sát được, dùng máy tính để phân tích và tổng hợp hệ thống. Trong chương này cũng đề cập đến điều khiển tích phân, cách xây dựng bộ quan sát động...*

*Quyển sách này đề cập đến nhiều vấn đề cơ bản gắn liền với những khái niệm thực tế, khá nhiều ví dụ chứng minh, dùng máy tính để minh hoạ, cũng như nhiều bài tập với đáp án đầy đủ. Sách dùng làm tài liệu học tập, tham khảo cho sinh viên, nghiên cứu sinh và cán bộ khoa học kỹ thuật trong lĩnh vực tự động và điều khiển.*

*Tác giả rất mong bạn đọc góp ý kiến để sách ngày càng hoàn thiện hơn.*

*Tác giả chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, các cán bộ thuộc Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật đã giúp đỡ thiết thực để hoàn thành được bộ sách này.*

**Tác giả**

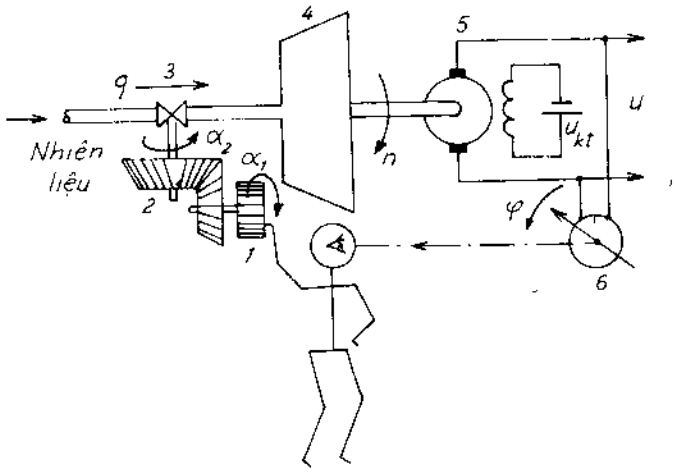
*Chương I*

# KHÁI NIỆM CHUNG

## I.1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

### I.1.1. Ví dụ về hệ điều chỉnh điện áp bằng tay

Ở hình 1.1 có *sơ đồ nguyên lý* của một hệ điều chỉnh điện áp máy phát bằng tay.




***Hình 1.1.***

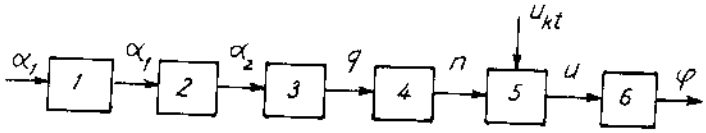
**1. Vô lăng; 2. Bộ giảm tốc; 3. Van; 4. Tuabin 5. Máy phát; 6. Đồng hồ đo;**

Theo sơ đồ nguyên lý, có thể biết được nguyên tắc làm việc của hệ : Người điều khiển luôn quan sát đồng hồ đo điện áp *6*. Nếu điện áp thấp hơn trị số định mức (khi phụ tải tăng chẳng hạn), người điều khiển quay vô lăng *1*, qua bộ biến tốc *2* mở thêm van *3* để tăng lưu lượng nhiên liệu q vào tuabin *4*. Lưu lượng nhiên liệu tăng sẽ làm tăng tốc độ n của

tuabin *4*. Trục của tuabin cũng là trục của rôto máy phát *5*, do đó sức điện động (hay điện áp U) của máy phát sẽ tăng cho đến khi phục hồi lại điện áp định mức cần thiết. Nếu điện áp tăng vượt quá định mức, quá trình sẽ ngược lại khi người điều khiển đóng bớt van để giảm lưu lượng nhiên liệu vào tuabin.

Ứng với hình 1.1, nếu mỗi *phần tử* được mô tả bằng khối chữ nhật như ở hình 1.2, ta có *sơ đồ khối*. Sơ đồ khối giúp cho việc nghiên cứu phân tích hệ thống giản đơn hơn khi hệ có nhiều phần tử.

Mỗi phần tử có *đầu vào, đầu ra*. Người điều khiển quan sát góc $\varphi$ của kim đồng hồ đo *6*, quay vô lăng một góc tương ứng $\alpha_1$, bộ giảm tốc nhận góc quay $\alpha_1$ để tạo thành góc quay $\alpha_2$ mở thêm van *3* và tăng lưu lượng q của nhiên liệu, tốc độ tuabin tăng và máy phát *5* sẽ tăng điện áp U trong trường hợp tăng phụ tải.




***Hình 1.2***

Mỗi phần tử có hướng tác động nhất định được thể hiện bằng chiều của mũi tên. Mỗi phần tử có thể có nhiều đầu vào, ví dụ máy phát *5* có đầu vào là tốc độ n của tuabin và điện áp kích từ $U_{kt}$ của máy phát. Cả hai đầu vào này đều có thể làm thay đổi điện áp ra U. Ở đây điện áp kích từ là không đổi ($U_{kt}$ = const) nên chỉ cần quan tâm đến sự thay đổi tốc độ n của tuabin làm ảnh hưởng đến quá trình.

Phần tử là khái niệm tương đối. Có thể xem mỗi bánh răng của bộ giảm tốc là một phần tử (về mặt cấu trúc vật lý) hay có thể xem bộ giảm tốc và vô lăng là một phần tử có đầu vào là $\alpha_1$ và đầu ra là $\alpha_2$.

Về phương diện chức năng, các phần tử trên có thể hợp thành ba khối chính trong hệ như ở hình 1.3, đó là :

1. Cơ cấu thừa hành (CCTH) bao gồm vô lăng, bộ giảm tốc và van ;
2. Đối tượng điều chỉnh (ĐTĐC) gồm tổ hợp tuabin và máy phát ;
3. Dụng cụ đo (DCĐ) là đồng hồ đo điện áp U.

Hệ trên là một *hệ hở* vì tín hiệu ra $\varphi$ không liên hệ trực tiếp với *tác động* vào $\alpha_1$ mà thông qua người điều khiển.

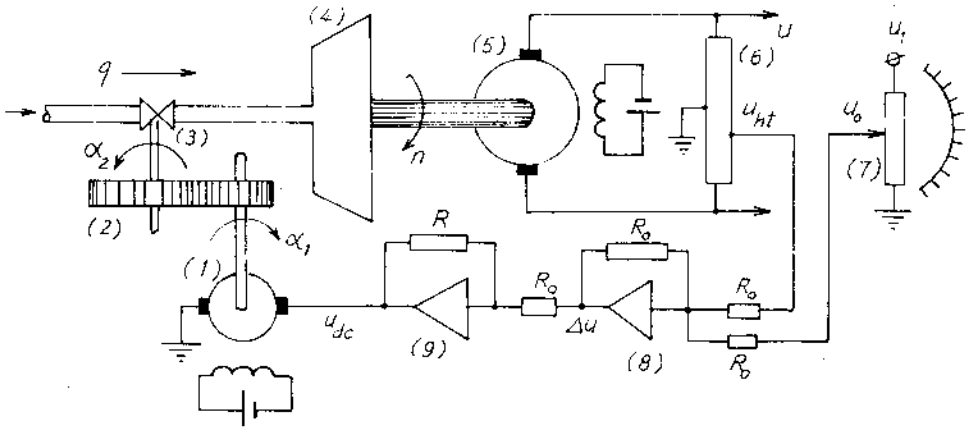

*Hình 1.3*

Nhược điểm cơ bản của hệ điều chỉnh bằng tay nói trên là người điều khiển luôn theo dõi một cách căng thẳng vị trí của kim đồng hồ đo, và khả năng tác động nhanh hay chậm tùy thuộc vào người điều khiển. Dưới đây là một phương án khắc phục các nhược điểm trên.

### I.1.2. Một phương án tự động hóa hệ điều chỉnh điện áp máy phát

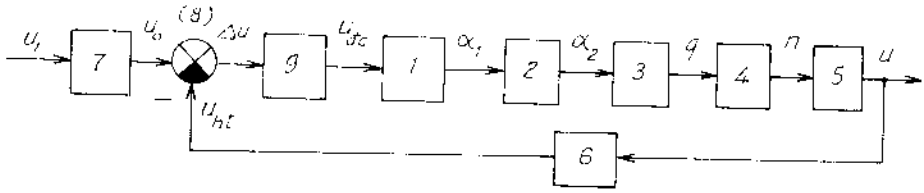
Hình 1.4 là sơ đồ tự động hóa hệ điều chỉnh điện áp máy phát.

Sơ đồ khối tương ứng như ở hình 1.5. Ở đây, hệ tự động điều chỉnh điện áp là một *hệ kín*, làm việc theo *sai lệch* $\Delta U = U_o - U_{ht}$. Hệ kín là hệ có *hồi tiếp (phản hồi, liên hệ ngược)*. Hồi tiếp có *hồi tiếp âm, hồi tiếp dương*. Ở hệ kín, đầu ra của phần tử này là đầu vào của phần tử sau nó.




*Hình 1.4*

**1. Động cơ điều khiển van ; 2. Bộ giảm tốc ; 3. Van ; 4. Tuabin ; 5. Máy phát ; 6. Biến trở ; 7. Chiết áp ; 8. Cơ cấu so sánh ; 9. Khuếch đại**




*Hình 1.5.*

Hệ làm việc có mục đích là triệt tiêu sai lệch ΔU, nghĩa là $U_{ht}$ = $U_o$, ΔU = 0 ; đồng thời sai lệch cũng là động lực của hệ. Trên chiết áp *7* có các trị số của điện áp đặt (setpoint) : $U_o$ tương ứng với điện áp định mức mong muốn U. Khi ΔU = 0, mọi tác động trong mạch vòng kín đều không thay đổi : điện áp $U_{dc}$ đặt vào mạch phần ứng của động cơ bằng 0, động cơ không chuyển động, $\alpha_1$ và $\alpha_2$ đều giữ nguyên vị trí của nó, lưu lượng nhiên liệu q không thay đổi, tuabin giữ nguyên tốc độ n và máy phát không thay đổi điện áp (U) phát ra, vì nó đang có trị số định mức cần thiết.

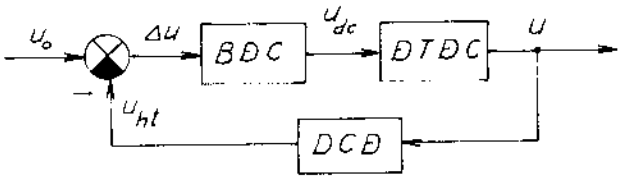
Khi phụ tải tăng, U giảm, điện áp hồi tiếp $U_{ht}$ là một phần của U cũng giảm theo và ΔU = $U_o$ - $U_{ht}$ > 0 (điện áp đặt $U_o$ không thay đổi). Điện áp đặt vào mạch phần ứng động cơ $U_{dc}$ làm cho động cơ quay, mở thêm van *3* và tăng lưu lượng nhiên liệu q, tuabin tăng tốc độ n, điện áp máy phát sẽ tăng và sau một thời gian phục hồi lại trị số định mức cần thiết.

Quá trình sẽ ngược lại khi vì lý do nào đấy mà U tăng quá mức cần thiết.

Muốn thay đổi đại lượng điện áp U, ta thay đổi lượng đặt $U_o$ bằng cách thay đổi vị trí con trượt ở chiết áp *7*.

Sơ đồ tổng quát của hệ điều chỉnh tự động nói trên như ở hình 1.6. Ở đây đối tượng điều chỉnh (ĐTĐC) bao gồm các phần tử từ 1 đến 5 ở hình 1.5. Cơ cấu so sánh *8*, khuếch đại *9* cùng chiết áp *7* tạo thành bộ điều chỉnh tỷ lệ vì điện áp ra $U_{dc}$ tỷ lệ với sai lệch ΔU. Khi khảo sát chỉ cần quan tâm đến $U_o$ nên bỏ qua chiết áp tạo lượng đặt. Khối dụng cụ đo (DCĐ) có khi được ghép chung vào đối tượng điều chỉnh, lúc ấy sẽ có *hồi tiếp đơn vị*. Trong trường hợp ấy, vì $U_{ht}$ có cùng thứ nguyên với tín hiệu đặt $U_o$ ( $U_o$ thể hiện cho lượng ra mong muốn) nên ΔU thể hiện cho sai lệch e của hệ, mặc dù về bản chất vật lý, $U_{ht}$ nói chung không đồng nhất với đại lượng ra của hệ mà đã qua cảm biến hay cơ cấu chuyển đổi. Ở ví dụ trên, dụng cụ đo là biến trở *6* biến đổi từ một đại lượng điện U lớn thành một lượng điện áp phản hồi bé $U_{ht}$. Đối

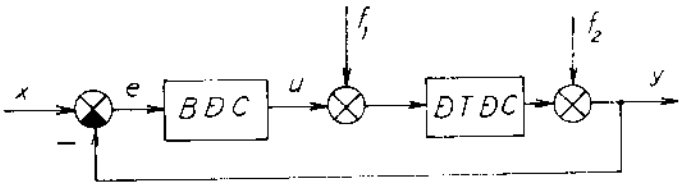
tượng điều chỉnh (ĐTĐC) ở đây thực chất là những phần tử có thông số cố định, vì ngoài tuabin và máy phát còn có thể bao gồm cả cơ cấu thừa hành gồm động cơ, bộ giảm tốc và van.




*Hình 1.6.*

Tín hiệu ra của hệ là *tín hiệu* (hay đại lượng) *được điều chỉnh (y).* Tín hiệu từ bộ điều chỉnh tác động vào đối tượng là *tín hiệu* (hay đại lượng) *điều chỉnh u(t)* (sự phân biệt giữa điều khiển và điều chỉnh sẽ được đề cập đến ở mục I.2).

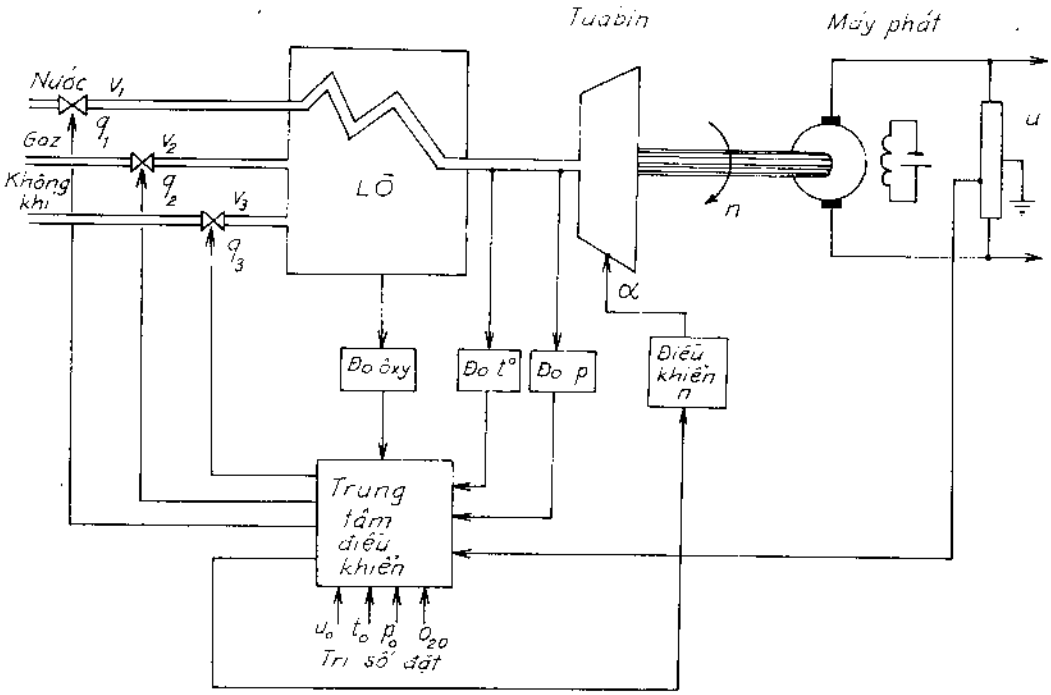
Khác với hệ hở, ở hệ kín, khi có nhiễu ($f_1$, $f_2$ ở hình 1.7) tác động, thông qua mạch hồi tiếp, bộ điều chỉnh cảm nhận được sai lệch e mà hiệu chỉnh lại tín hiệu điều chỉnh U để nâng cao chất lượng của hệ. Sơ đồ khối ở hình 1.7 là sơ đồ tổng quát với hồi tiếp đơn vị (âm), không có cơ cấu tạo tín hiệu đặt, các ký tự cũng không mang tính chất vật lý như ở các ví dụ trên.




*Hình 1.7.*

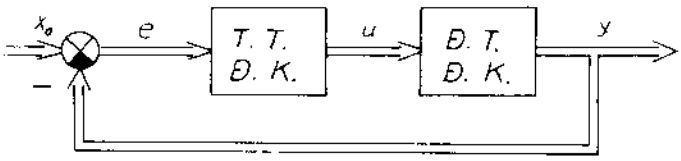
### I.1.3. Dùng máy tính để điều khiển tổ hợp tuabin - máy phát [7]

Sơ đồ điều khiển tổ hợp tuabin - máy phát được thể hiện trên hình 1.8. Khác với các ví dụ trên, lưu lượng hơi nước được điều khiển từ nguồn nước (van $V_1$). Ngoài ra, từ trung tâm điều khiển (máy tính) còn điều khiển lưu lượng khí đốt (gaz) $q_2$ (van $V_2$), lưu lượng không khí vào lò $q_3$ (van $V_3$) cũng như tốc độ của tuabin thông qua điều khiển độ nghiêng của cánh tĩnh. Trị số đặt không chỉ là điện áp mong muốn $U_o$, mà còn là nhiệt độ lò $t_o$, áp suất $P_o$ cũng như lượng ôxy cần thiet $O_{20}$. Các tín hiệu hồi tiếp lấy từ dụng cụ đo : điện áp, nhiệt độ, áp suất, lượng khí oxy. Vì máy tính điều khiển là công cụ số nên từ các cơ cấu đo điện áp, nhiệt độ, áp suất, khí oxy, các đại lượng liên tục này phải




*Hình 1.8.*

qua bộ biến đổi tương tự - số (A/D) cũng như các tín hiệu điều khiển các van $V_1$, $V_2$, $V_3$, tốc độ phải qua bộ biến đổi số - tương tự (D/A), mà trên hình vẽ không mô tả. Sơ đồ khối của hệ như ở hình 1.9, đường hai nét biểu thị cho tín hiệu dưới dạng vectơ.



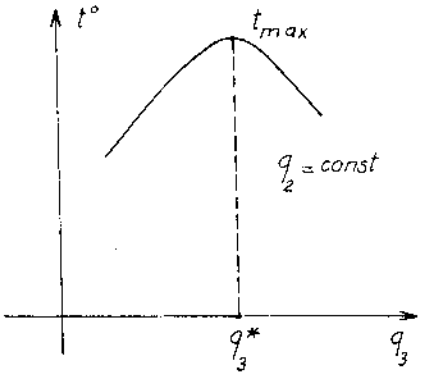

*Hình 1.9.*

$$x_o = (U_o,\ t_o,\ P_o,\ O_{20})'$$
$$y = (U,\ t,\ P,\ O_2)'$$
$$u = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ n)'$$

Dấu "'" là dấu chuyển vị của vectơ. Ở đây, trung tâm điều khiển có khả năng điều độ tập trung. Máy tính thực hiện chức năng của bộ điều

chỉnh hay cơ cấu điều khiển ; một máy tính có thể đồng thời điều khiển nhiều kênh.

Do khả năng tác động nhanh và dung lượng bộ nhớ lớn, máy tính cho phép điều khiển những hệ thống lớn với chất lượng và hiệu quả kinh tế cao. Ví dụ nhiệm vụ đặt ra là làm sao để sử dụng nhiệt độ cực đại của lò khi chất lượng khí đốt luôn thay đổi [20]. Lúc ấy hệ sẽ tự động điều khiển lượng không khí $q_3$ theo nguyên tắc thích nghi. Ở hình 1.10 có đặc tính nhiệt độ $t^0$ phụ thuộc lưu lượng không khí $q_3$ khi lưu lượng khí đốt $q_2$ không đổi. Khi lưu lượng và chất lượng khí đốt không thay đổi, tồn tại một lưu lượng không khí nhất định $q_3$ để nhiệt độ lò lớn nhất. Nhưng thực tế, lưu lượng và chất lượng khí đốt thay đổi một cách không biết trước nên một nguyên tắc thích nghi có thể được lập trình trên máy tính theo một angorit (thuật toán) thích hợp để bảo đảm hiệu quả tối đa có thể, như đã đề ra. Nói chung máy tính có thể giải quyết nhiều bài toán khác nhau để có chất lượng tối ưu.




*Hình 1.10.*

## I.2. PHÂN LOẠI CÁC HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Để có cái nhìn tổng quát và xác định vị trí của vấn đề đang nghiên cứu, xác định mối liên hệ giữa các vấn đề, cũng như tiện đi sâu vào từng vấn đề, cần tạm phân loại các hệ điều khiển theo các đặc điểm sau đây.

### I.2.1. Theo tính liên tục với thời gian của các tín hiệu

Như ở ví dụ trên hình 1.4, tất cả các tín hiệu tồn tại trong hệ đều liên tục theo thời gian, hệ ấy là *hệ liên tục*. Ngược lại, ở một nơi nào đó tín hiệu không liên tục, hệ trở thành *hệ gián đoạn*. Như ở hình 1.8, máy tính là một công cụ làm việc theo chế độ rời rạc (gián đoạn) nên phải dùng các bộ chuyển đổi A/D, D/A (hay ADC, DAC) để giao tiếp với phần liên tục của hệ thống.

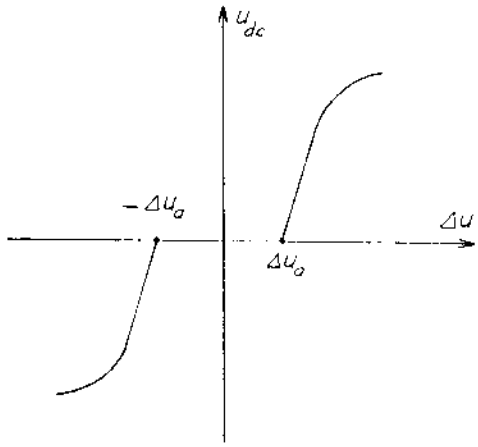
### I.2.2. Theo đặc tính tĩnh của các phần tử

Đặc tính tĩnh của một phần tử là mối quan hệ y(x) giữa tín hiệu vào và ra của phần tử ấy ở trạng thái xác lập.

Ở hình 1.4, các phần tử đều có thể được xem như tuyến tính và cả hệ thống được xem như *hệ tuyến tính*.

Tuy nhiên, khi đòi hỏi khảo sát với độ chính xác cao, hay khi hệ làm việc trong phạm vi biến đổi lớn của tín hiệu, một số phần tử không còn là tuyến tính nữa. Ví dụ, khuếch đại *8, 9* ở hình 1.4 đều có vùng kém nhạy và vùng bão hòa. Khi điện áp vào quá bé : $|\Delta U| < \Delta U_a$ thì ở đầu ra của khuếch đại không có tín hiệu (vùng kém nhạy), còn khi điện áp vào quá lớn thì khuếch đại sẽ làm việc ở chế độ bão hòa như ở hình 1.11.

Bộ giảm tốc *2* khi đã cũ, các bánh răng sẽ "rơ" và cũng là một khâu phi tuyến tính.




***Hình 1.11.***

Một phần tử khác là máy phát *5*. Máy phát có hai đầu vào : dòng kích từ và tốc độ quay của rôto. Ở ví dụ trên, kích từ không thay đổi nên:

$$U = C_e\phi.n = K_e n$$

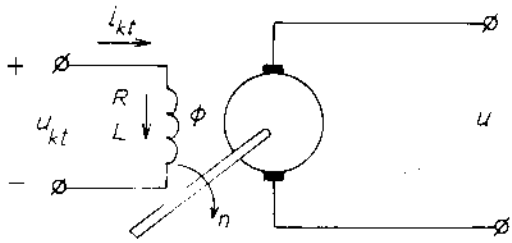
$C_e$ - hằng số phụ thuộc cấu trúc của máy phát ;

$\phi$ - từ thông kích thích;

n - tốc độ của máy phát.

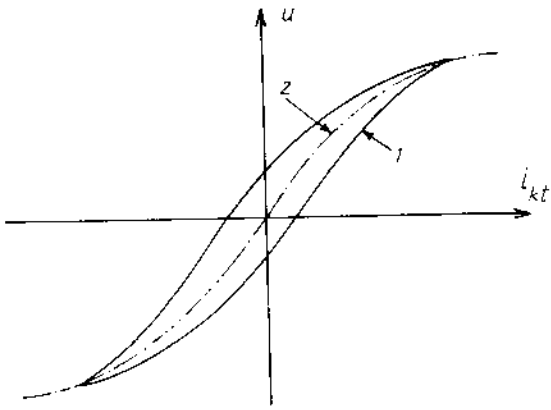
Khi đại lượng này không thay đổi thì sức điện động (hay điện áp ra U) của máy phát tỷ lệ với tốc độ n và máy phát là một phần tử tuyến tính.

Nếu xét đầu vào là dòng điện kích từ, từ thông $\phi$




***Hình 1.12.***

sẽ thay đổi không theo quy luật tuyến tính và quan hệ giữa điện áp của máy phát với dòng kích từ là phi tuyến tính. Ở hình 1.13, đường *1* có tính đến từ dư máy phát, đường *2* bỏ qua từ dư và trong phạm vi biến đổi của dòng điện không lớn thì máy phát là một phần tử tuyến tính.




*Hình 1.13.*

### I.2.3. Theo mục đích điều khiển

*1. Hệ điều chỉnh hay hệ ổn định hóa*

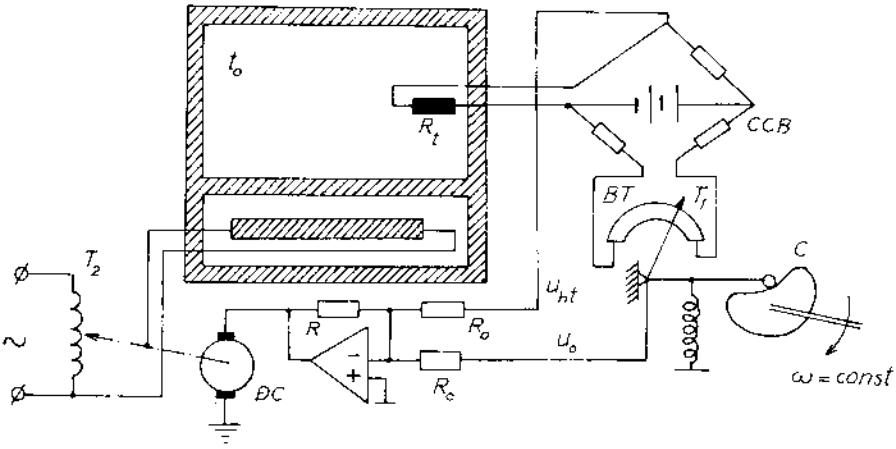
Trong các ví dụ trên, đại lượng được điều chỉnh (U) được duy trì ở một trị số nhất định (với độ chính xác nào đó) nên đó là *hệ điều chỉnh*. Hệ điều chỉnh thường gặp trong công nghiệp và đời sống như điều chỉnh mực nước, điều chỉnh nhiệt độ, điều chỉnh tốc độ v.v... Ở những hệ này, mực nước, nhiệt độ, tốc độ v.v... được giữ ở một đại lượng mong muốn nhất định.

*2. Hệ điều khiển theo chương trình*

Trong nhiều trường hợp, đại lượng được điều khiển cần thay đổi theo một quy luật định trước nào đó ; ví dụ ở lò tôi kim loại, nhiệt độ theo thời gian cần thay đổi theo một chương trình định sẵn.

Ở hình 1.14, nhiệt độ lò được đo bằng điện trở nhiệt $R_t$ ở một nhánh của cầu cân bằng (CCB). Nhiệt độ lò được xác định bởi vị trí của con trượt ($T_1$) trên biến trở (BT). Khi nhiệt độ lò tương ứng với trị số mong muốn thì $U_o = U_{ht}$, động cơ đứng yên và con trượt của biến áp tự ngẫu $T_2$ được xác định ở một vị trí nhất định. Khi nhiệt độ lò lệch khỏi trị số cần thiết, điện trở nhiệt thay đổi theo (tăng khi nhiệt độ tăng và ngược lại), cầu lệch khỏi trạng thái cân bằng. Lượng sai lệch $U_o - U_{ht}$ điều khiển động cơ quay con trượt $T_2$ làm thay đổi điện áp vào lò đến khi đạt được nhiệt độ cần thiết. Muốn nhiệt độ lò thay đổi theo một

chương trình nhất định nào đó, người ta dùng bánh cam C quay với tốc độ không đổi và có hình dáng đường biên tương ứng với chương trình mong muốn. Cầu sẽ ở trạng thái cân bằng khi điện trở nhiệt (hay nhiệt độ lò) tương ứng với trị trí nhất định của con trượt $T_1$ trên bánh cam C, nghĩa là khi nhiệt độ thay đổi theo chương trình đã định.



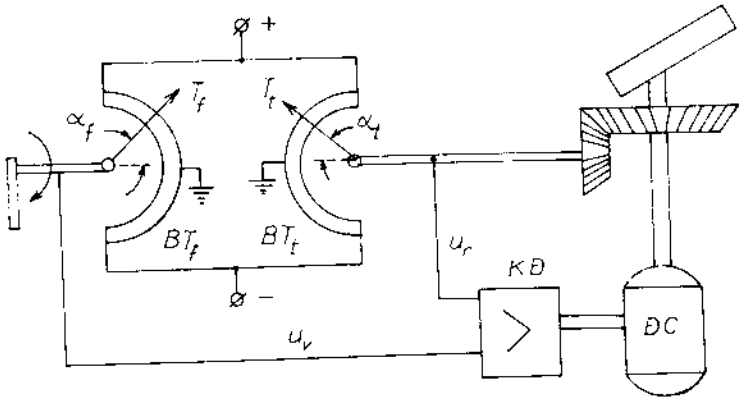

*Hình 1.14.*

Trở lại hệ điều chỉnh điện áp ở hình 1.4, vị trí con trượt trên chiết áp 7 xác định điện áp đặt $U_o$ tương ứng với điện áp ra của máy phát. Nếu dùng bánh cam điều khiển $U_o$ thay đổi theo thời gian, ta cũng có thể có hệ điều khiển điện áp (hay công suất) của máy phát theo chương trình.

### *3. Hệ điều khiển phụ thuộc*

Nếu đại lượng được điều khiển thay đổi một cách ngẫu nhiên, không theo một quy luật nào, ta có hệ *điều khiển phụ thuộc*. Nếu đại lượng được điều khiển là vị trí (góc quay chẳng hạn), ta có *hệ tùy động* (hệ bám, hệ theo dõi).

Mục đích của hệ là thay đổi vị trí phụ tải (như kính thiên văn, anten rađa, nòng pháo v.v...) theo một quy luật không biết trước mà cơ cấu đặc biệt – cơ cau phát tín hiệu – nhận được. Cơ cấu phát nhận được tín hiệu thể hiện ở vị trí con trượt $T_f$ trên biến trở $BT_f$ chẳng hạn (ví dụ như khi con trượt gắn với trục của rađa bám mục tiêu). Khuếch đại KĐ nhận được một lượng điện áp $U_v$ nào đó. Nếu vị trí con trượt $T_f$ khác với $T_f$, nghĩa là $U_r \neq U_v$ thì động cơ ĐC sẽ quay thiết bị được điều khiển (nòng pháo chẳng hạn), đồng thời quay con trượt $T_f$ của biến




*Hình 1.15.*

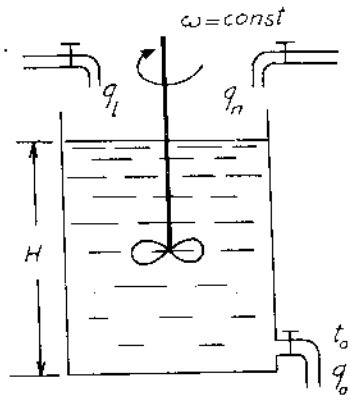
trở $BT_t$. Hệ sẽ ở trạng thái cân bằng khi góc quay của cơ cấu phát $\alpha_f$ (rađa) và cơ cấu thu $\alpha_t$ (nòng pháo) như nhau.

Trong các hệ tùy động người ta không dùng biến trở có góc quay hạn chế mà dùng *xenxin* để thực hiện chế độ phát và thu.

Hệ tùy động thực chất là một khuếch đại công suất : một lực nhỏ đặt vào cơ cấu phát, điều khiển với một nguồn năng lượng lớn để thay đổi vị trí của phụ tải.

### I.2.4. Theo số lượng đầu vào và ra

Trong các ví dụ trên (hình 1.4, 1.14, 1.15) hệ chỉ có một đầu vào và một đầu ra (là điện áp của máy phát U, nhiệt độ $t_o$ hoặc góc quay $\alpha_t$ tương ứng). Đó là *hệ một vào một ra* (SISO). Ở các hệ thống lớn, điều khiển đồng thời nhiều đại lượng, chúng còn có liên hệ qua lại với nhau. Ví dụ ở hệ điều khiển điện năng, cần duy trì điện áp máy phát, tần số, công suất ; ở lò hơi cần duy trì mực nước, nhiệt độ, áp suất hơi (như ở hình 1.8). Hệ có mối liên hệ nhau giữa các đại lượng gọi là *hệ nhiều liên hệ*. Hệ có nhiều đầu vào đầu ra gọi là *hệ nhiều vào nhiều ra* (MIMO). Trong thực tế còn gặp *hệ nhiều vào một ra* (MISO).




*Hình 1.16*

Ở hình 1.16 có đối tượng điều chỉnh là bể nước với hai đầu vào : vòi

nước lạnh với lưu lượng $q_l$ và vòi nước nóng với lưu lượng $q_n$. Đại lượng được điều chỉnh là chiều cao mực nước H trong bể và nhiệt độ của nước chảy ra ngoài $t^o$ chẳng hạn. Như vậy ở sơ đồ khối tổng quát, ứng với hình 1.9, đối tượng điều chỉnh được mô tả với tín hiệu :

$$u = \begin{bmatrix} q_n \\ q_l \end{bmatrix} \text{ và } y = \begin{bmatrix} H \\ t^o \end{bmatrix}$$

Rõ ràng là chiều cao của mực nước H cũng như nhiệt độ ở đầu ra $t^o$ phụ thuộc cả $q_n$ và $q_l$. Mối liên hệ chéo này đòi hỏi chọn bộ điều chỉnh thích hợp để bảo đảm đại lượng H và $t^o$ mong muốn (sẽ đề cập đến ở mục VI.6).

### I.2.5. Theo tính xác định của tín hiệu trong hệ

Trong hệ thống, tín hiệu có thể tiền định hay ngẫu nhiên và tương ứng với chúng là *hệ tiền định* và *hệ ngẫu nhiên*. Ở các hệ điều chỉnh như điều chỉnh điện áp, nhiệt độ, tốc độ v.v... tín hiệu đặt, tín hiệu điều khiển và tín hiệu được điều khiển cũng như sai lệch (x, u, y, e) thường là tiền định nếu nhiễu tác động vào hệ thống cũng là tiền định. Trong thực tế, nhiễu tác động vào hệ thống (như $f_1$, $f_2$ ở hình 1.7) là ngẫu nhiên, không xác định trước được ở từng thời điểm, mà nếu có, cũng chỉ biết được đặc tính thống kê của chúng như trị số trung bình, phương sai, phổ v.v... Trong trường hợp phải tính đến những tác động ngẫu nhiên của hệ thống, ta có hệ ngẫu nhiên. Ở nhiều hệ tùy động, không những nhiễu mà tín hiệu có ích mà cơ cấu phát nhận được ở đầu vào cũng thay đổi một cách ngẫu nhiên.

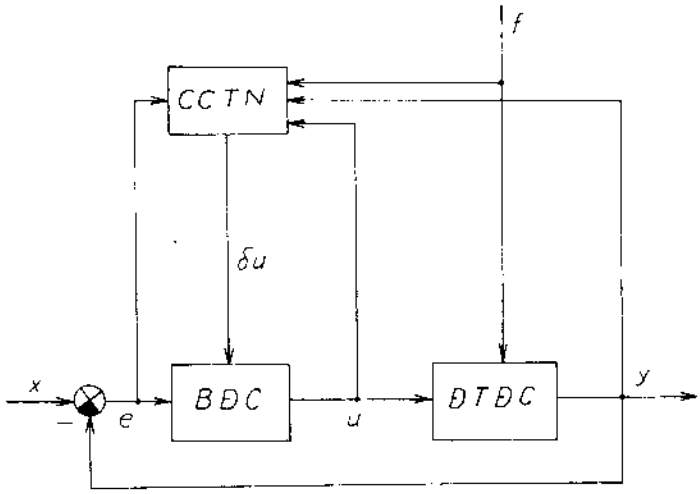
### I.2.6. Theo lượng thông tin ban đầu

Phương pháp khảo sát hệ tiền định và ngẫu nhiên có khác nhau. Trong nhiều trường hợp, do mức độ ảnh hưởng của nhiễu quá lớn hay do lượng thông tin ban đầu cần thiết trong quá trình thiết kế chưa đủ để hệ luôn làm việc ở chế độ tối ưu, do đó phải dùng nguyên tắc thích nghi. Hệ thích nghi sử dụng lượng thông tin có được trong quá trình làm việc để bù đắp cho lượng thông tin ban đầu còn thiếu.

Ở hình 1.10 có mối quan hệ giữa nhiệt độ $t^o$ và lưu lượng không khí $q_3$. Nếu lưu lượng và chất lượng khí đốt không thay đổi, ta có thể xác định trước được lưu lượng tối ưu của không khí $q_3^*$ để nhiệt độ lò luôn cực đại. Mặt khác, nếu biết trước được một cách đầy đủ về sự thay

đổi lưu lượng và chất lượng khí đốt, một hệ thống tự động thông thường cũng có thể bảo đảm nhiệt độ lò luôn cực đại.

Như vậy, khác với *hệ thông thường, hệ thích nghi* tự thay đổi thông số hay cấu trúc của nó khi điều kiện bên ngoài hay bên trong thay đổi một cách không biết trước được, để bảo đảm hệ luôn làm việc ở chế độ tối ưu.




*Hình 1.17.*

Ở hình 1.17 có sơ đồ cấu trúc của một hệ điều chỉnh thích nghi. Ngoài mạch vòng cơ bản của một hệ điều chỉnh thông thường còn có các mạch vòng thích nghi. Cơ cấu thích nghi (CCTN) nhận tín hiệu từ đầu vào, đầu ra, tín hiệu điều chỉnh, tác động của nhiễu đo được (hay một số trong các tín hiệu nói trên) để phân tích và tạo nên tác động phụ δu cho bộ điều chỉnh, nhằm giữ cho hệ luôn làm việc ở chế độ tối ưu theo một nghĩa nào đó [20].

## I.3. NỘI DUNG CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Lý thuyết điều khiển tự động nghiên cứu các nguyên tắc chung để xây dựng hệ tự động, các phương pháp để khảo sát chúng mà không phụ thuộc vào bản chất vật lý của các quá trình. Lý thuyết điều khiển tự động là cơ sở lý thuyết để thiết kế các hệ tự động trong các lĩnh vực khác nhau của kỹ thuật, kinh tế cũng như nghiên cứu các hệ trong cơ thể sống hoặc trong mối quan hệ xã hội.

Nhiệm vụ cơ bản của lý thuyết điều khiển tự động là khảo sát các đặc tính tĩnh (ở chế độ xác lập) và đặc tính động của các hệ tự động, nhằm thiết kế hệ thống thỏa mãn các yêu cầu kỹ thuật cho trước.

Nội dung của lý thuyết điều khiển tự động bao gồm :

1. *Nhiệm vụ phân tích* là khảo sát nguyên lý hoạt động của các phần tử và của hệ với cấu trúc và thông số đã cho cùng với những tác động khác nhau đối với hệ thống. Nhiệm vụ phân tích bao gồm việc khảo sát tính ổn định của hệ, đánh giá chất lượng tĩnh và động, nghĩa là khảo sát quá trình điều khiển.

2. *Nhiệm vụ tổng hợp* là nhiệm vụ tương đối phức tạp hơn, bao gồm việc thiết kế hệ thống : chọn sơ đồ thực hiện cơ cấu điều khiển đối tượng, chọn các phần tử và xác định thông số của chúng để bảo đảm chất lượng và yêu cầu đã được đặt ra đối với hệ tự động. Nhiệm vụ tổng hợp gắn liền với nhiệm vụ tối ưu hóa, nghĩa là nhiệm vụ tổng hợp tối ưu theo một nghĩa nào đó đối với hệ tự động.

Phương pháp giải bài toán tối ưu phụ thuộc vào lượng thông tin ban đầu, nghĩa là những hiểu biết sơ bộ về đối tượng được điều khiển và các tác động từ ngoài vào. Nếu lượng thông tin ban đầu là xác định, nhiệm vụ tổng hợp được thực hiện theo phương pháp tiền định. Nếu lượng thông tin ấy là ngẫu nhiên, dùng phương pháp xấp xỉ ngẫu nhiên.

Ở tập sách này, nhiệm vụ tổng hợp chỉ giới hạn ở việc chọn các khâu hiệu chỉnh, các bộ điều chỉnh cùng với việc xác định thông số của chúng để bảo đảm chất lượng đặt ra.

Lý thuyết điều khiển tự động liên hệ chặt chẽ với những lĩnh vực khoa học kỹ thuật khác như lý thuyết dao động, lý thuyết mạch, lý thuyết về quá trình ngẫu nhiên cũng như những kiến thức về máy điện, thiết bị điện, khí nén, thủy lực, các thiết bị cảm biến và đo lường.

Những vấn đề liên quan đến lý thuyết điều khiển tự động càng nhiều, hệ tự động càng đa dạng ; cho nên việc nghiên cứu lý thuyết điều khiển tự động bắt đầu từ việc làm quen với một số sơ đồ khác nhau của các hệ thống, nghiên cứu nguyên tắc chung để xây dựng chúng cùng với tính chất chung, đặc điểm và những khả năng có thể có của các hệ ấy.

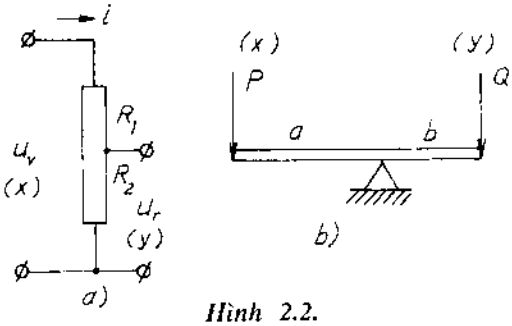
*Chương II*

# CƠ SỞ TOÁN HỌC CỦA LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

## II.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Như đã nêu trên, một phần tử hay một hệ thống có thể được mô tả bằng một khối chữ nhật với đầu vào và đầu ra như ở hình 2.1. Phương trình vi phân xác định mối quan hệ giữa tín hiệu vào x và tín hiệu ra y của phần tử hay hệ thống. Ví dụ ở hình 2.2a có biến trở với mối quan hệ của điện áp vào $U_v$ và điện áp ra $U_r$ như sau :


*Hình 2.1.*




*Hình 2.2.*

$$U_r = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_v$$

Trạng thái thăng bằng của cầu thăng bằng ở hình 2.2b được xác định bởi :

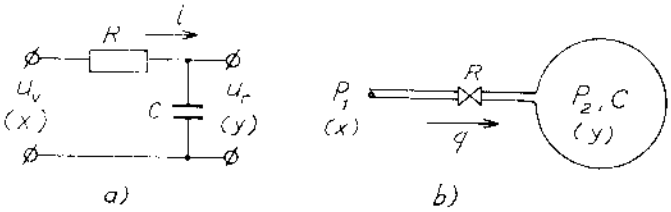
$$Q = \frac{a}{b} P$$

Nếu xem $U_r$ hay Q là tín hiệu ra, $U_v$ hay P là tín hiệu vào, cả hai trường hợp trên được mô tả bởi phương trình vi phân của một khâu khuếch đại với hệ số khuếch đại k :

$$y = k.x \qquad (2\text{-}1)$$

mà $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ cho trường hợp a) và $k = \frac{a}{b}$ cho trường hợp b). Bản

chất vật lý của 2 phần tử này khác nhau (điện và cơ) nhưng chúng đều được mô tả bởi phương trình vi phân như nhau (2-1).




*Hình 2.3.*

Một ví dụ khác, mạch RC ở hình 2.3a được xác định bởi :

$$U_v = i.R + U_r$$

$$U_r = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} i dt$$

Với điều kiện đầu : $U_r(o) = 0$ ta có :

$$i = C\frac{dU_r}{dt}$$

Từ đó : $$RC\frac{dU_r}{dt} + U_r = U_v$$

Ở hình 2.3b với bình chứa khí có dung tích C ; $P_1$ và $P_2$ là áp suất ở đầu vào và ở trong bình, R là trở kháng của van và q là lưu lượng khí qua van. Ta có hệ phương trình :

$$P_1 - P_2 = R.q$$

$$P_2 = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} q dt$$

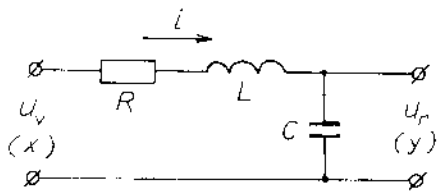
Từ đó : $$RC\frac{dP_2}{dt} + P_2 = P_1$$

Hai phương trình vi phân của mạch RC và bình chứa khí có chung dạng bậc một :

$$T\frac{dy}{dt} + y = k.x \qquad (2\text{-}2)$$

với T = RC và k = 1 cho cả hai trường hợp.

Phương trình (2-2) là phương trình vi phân bậc một của khâu quán tính mà k là hệ số khuếch




*Hình 2.4*

đại và T là hằng số thời gian. Trở càng lớn, dung tích bình hay điện dung càng lớn, quán tính càng lớn.

Một mạch điện RLC như ở hình 2.4 cho ta mối quan hệ vào ra như sau :

$$U_v = I.R + L\frac{di}{dt} + U_r$$

$$U_r = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} i\,dt$$

Từ đó : $$LC\frac{d^2U_r}{dt^2} + RC\frac{dU_r}{dt} + U_r = U_v$$

Hay dạng tổng quát :

$$T_1T_2\frac{d^2y}{dt^2} + T_2\frac{dy}{dt} + y = k.x \qquad (2\text{-}3)$$

với $T_1 = \frac{L}{R}$ ; $T_2 = RC$ ; $k = 1$. Đó là khâu dao động bậc hai.

Từ các ví dụ trên ta nhận thấy :

1. Các phần tử khác nhau về bản chất vật lý có thể được mô tả bằng phương trình vi phân như nhau.

2. Ở các hệ thực, bậc của vế phải luôn luôn nhỏ hơn hay bằng bậc của vế trái vì ở đầu ra không thể có tín hiệu vượt trước tín hiệu đầu vào.

Trong trường hợp chung, phương trình vi phân có dạng :

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_ny =$$

$$= b_0\frac{d^mx}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1}\frac{dx}{dt} + b_mx$$

với $m \leqslant n$ (2-4)

## II.2. BIẾN ĐỔI LAPLACE (LAPƠLAXƠ) VÀ FOURIER (PHURIE)

Biến đổi Laplace là công cụ toán học trung gian để đơn giản hóa việc tính toán. Biến đổi Laplace của x(t) được xác định bởi :

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \quad ,$$

mà s là toán tử Laplace ; $s = \alpha \pm j\omega$ là biến phức, x(t) là hàm gốc và X(s) là ảnh. Biến đổi Laplace ngược của X(s) được xác định theo :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

Nếu x(t) khả vi và x(t) = 0 khi t < 0, biến đổi Fourier của x(t) được xác định bởi :

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Để có biến đổi Fourier, chỉ cần thay thế $s = j\omega$ ở biến đổi Laplace nên đôi khi theo thói quen người ta gọi là biến đổi Laplace trong "miền tần số", trong khi các tín hiệu và hệ nguyên thủy ở miền thời gian.

Các định lý liên quan đến biến đổi Laplace có thể tóm tắt như sau :

*1. Định lý trễ*

$$\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = X(s)e^{-\tau s} \qquad (2\text{-}5)$$

*2. Định lý về đạo hàm*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s.X(s) - x(o) \qquad (2\text{-}6)$$

*3. Định lý về tích phân*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s) \qquad (2\text{-}7)$$

*4. Định lý tới hạn (nếu tồn tại)*

Trị số ban đầu : $x(o) = \lim_{s \to \infty} s.X(s)$ (2-8)

Trị số cuối : $x(\infty) = \lim_{s \to o} s.X(s)$ (2-9)

*5. Định lý về diện tích*

$$\int_0^{\infty} x(t)\,dt = \lim_{s \to o} X(s) = X(o) \qquad (2\text{-}10)$$

*6. Định lý nhân ảnh (định lý cuộn)*

$$X(s) = X_1(s)X_2(s)$$

$$x(t) = \int_0^t x_1(t - \tau)\,x_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t x_1(\tau)\,x_2(t - \tau)\,d\tau \qquad (2\text{-}11)$$

Biến đổi Laplace của một số hàm thường gặp cho ở bảng 2.1 sau đây.

*Bảng 2.1*

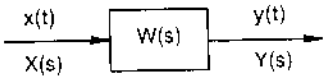
| x(t) | X(s) | x(t) | X(s) |
|---|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $\frac{t^{n-1}e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ |
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $\sin\omega t e^{-\alpha t}$ | $\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ |
| $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ | $\cos\omega t e^{-\alpha t}$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ |

Ứng dụng định lý về đạo hàm, phương trình vi phân tổng quát có thể viết dưới dạng toán tử Laplace như sau :

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)Y(s) =$$
$$= (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1} + b_m)X(s) \qquad (2\text{-}12)$$

## II.3. HÀM TRUYỀN ĐẠT

Hàm truyền đạt của một phần tử hay một hệ thống là ảnh theo Laplace của tín hiệu ra trên tín hiệu vào với điều kiện đầu bằng 0:




*Hình 2.5*

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Hàm truyền của một hệ là hàm nối liền đầu ra và đầu vào của hệ ấy. Khác với phương trình vi phân, hàm truyền cho phép tách rời ba thành phần riêng biệt : tín hiệu vào, hệ thống và tín hiệu ra.

Trong các ví dụ trên, theo phương trình (2-1) ta có biến đổi Laplace :

$$Y(s) = k.X(s)$$

và hàm truyền của khâu khuếch đại là :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = k.$$

Theo phương trình (2-2) :

$$(Ts + 1)Y(s) = k.X(s)$$

và hàm truyền của khâu quán tính :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$$

Khâu dao động, theo (2-3) ứng với :

$$(T_1T_2s^2 + T_2s + 1)Y(s) = k.X(s)$$

và hàm truyền :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T_1T_2s^2 + T_2s + 1}$$

Trường hợp chung, theo (2-12) :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2\text{-}13)$$

B(s), A(s) là những đa thức với s, mũ bậc m và n tương ứng. Với hệ thực $m \leqslant n$.

Trị số của s mà hàm truyền bằng 0 gọi là *nghiệm không*, ứng với B(s) = 0. Trị số của s mà hàm truyền bằng vô cùng là *nghiệm cực* hay gọi tắt là *cực*. Cực là nghiệm của *phương trình đặc trưng* A(s) = 0.

Bảng 2.1 cho phép tính hàm gốc khi biết ảnh theo Laplace.

**Ví dụ 2-1**

Hệ có hàm truyền đạt :

$$W(s) = \frac{2(s + 3)}{(s + 1)(s + 6)}$$

và tín hiệu vào có dạng hàm mũ $x(t) = e^{-2t}$

Theo bảng 2.1 ta xác định $X(s) = \frac{1}{s + 2}$. Vậy ảnh theo Laplace của tín hiệu ra là :

$$Y(s) = X(s)W(s) = \frac{2(s + 3)}{(s + 2)(s + 1)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 2} + \frac{K_2}{s + 1} + \frac{K_3}{s + 6};$$

Các hệ số của phân thức đơn giản có thể tính như sau :

$$K_1 = [(s + 2)Y(s)]_{s=-2} = \left[\frac{2(s+3)}{(s+1)(s+6)}\right]_{s=-2} = -0,5$$

$$K_2 = [(s + 1)Y(s)]_{s=-1} = \left[\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+6)}\right]_{s=-1} = +0,8$$

$$K_3 = [(s + 6)Y(s)]_{s=-6} = \left[\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+1)}\right]_{s=-6} = -0,3$$

Như vậy :

$$Y(s) = -\frac{0,5}{s+2} + \frac{0,8}{s+1} - \frac{0,3}{s+6}$$

Đáp ứng của hệ trên theo bảng 2.1 sẽ là :

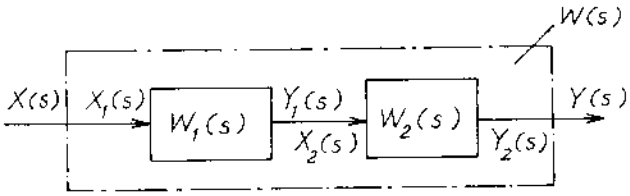
$$y(t) = -0,5e^{-2t} + 0,8e^{-t} - 0,3e^{-6t}$$

Hàm truyền cho phép kết hợp đại số các hệ con thành một hệ lớn tùy theo phương thức kết hợp. Đó là các định lý cơ bản sau đây.

### II.3.1. Mắc nối tiếp các phần tử

Ở hình 2.6, hệ gồm hai phần tử nối tiếp nhau, hàm truyền của hệ cần xác định là :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)}$$




*Hình 2.6*

Hai phần tử có hàm truyền đã biết là :

$$W_1(s) \equiv \frac{Y_1(s)}{X_1(s)}, \quad W_2(s) \equiv \frac{Y_2(s)}{X_2(s)}$$

mà theo hình 2.6 :

$$Y_1(s) \approx X_2(s); \; X(s) = X_1(s); \; Y(s) = Y_2(s)$$

Từ đó :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} \cdot \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = W_1(s)W_2(s)$$

Suy rộng ra, trong trường hợp nhiều phần tử nối tiếp :

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s) \qquad (2\text{-}14)$$

Hàm truyền của hệ là tích các hàm truyền thành phần.

### II.3.2. Mắc song song các phần tử

Trong trường hợp hai phần tử nối song song như ở hình 2.7, ta nhận thấy :

$$X(s) = X_1(s) = X_2(s)$$
$$Y(s) = Y_1(s) \overset{+}{(-)} Y_2(s)$$

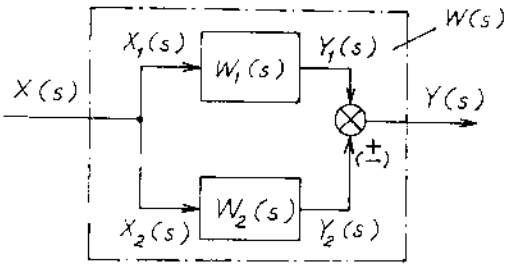
Từ đó :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)\overset{+}{(-)}Y_2(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} \overset{+}{(-)} \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = W_1(s) \overset{+}{(-)} W_2(s)$$

Trong trường hợp nhiều phần tử :

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s) \qquad (2\text{-}15)$$

Khi mắc song song, hàm truyền của hệ là tổng đại số các hàm truyền thành phần.




*Hình 2.7*

### II.3.3. Mắc kiểu liên hệ ngược (hồi tiếp, phản hồi)

Ở hình 2.8, hai phần tử $W_1(s)$ và $W_2(s)$ được mắc theo kiểu có liên hệ ngược, nghĩa là đầu vào của $W_2(s)$ là đầu ra của $W_1(s)$. Liên hệ ngược có thể dương hay âm. Liên hệ ngược âm có dấu (−) trong ngoặc hoặc được tô đen ở một phần tư hình tròn mô tả khâu so sánh như ở hình 2.8.

Từ hình 2.8 ta nhận thấy :

$$Y(s) = Y_1(s) = X_2(s)$$

$$X_1(s) = X(s) \ (\pm) \ Y_2(s) \text{ hay } X(s) = X_1(s) \ (\mp) \ Y_2(s)$$

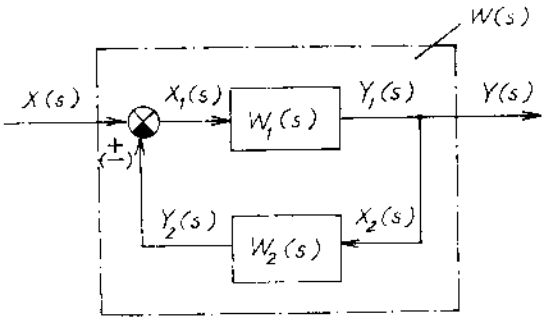
Do đó :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)\,(\mp)\,Y_2(s)}$$

Chia tử và mẫu số cho $X_1(s)$ và theo điều kiện $Y_1(s) = X_2(s)$ ta có :

$$W(s) = \frac{\dfrac{Y_1(s)}{X_1(s)}}{1(\mp)\,\dfrac{Y_1(s)\;Y_2(s)}{X_1(s)\;X_2(s)}} = \frac{W_1(s)}{1\,(\mp)\,W_1(s)\,W_2(s)} \qquad (2\text{-}16)$$

Hàm truyền của hệ có liên hệ ngược là một tỷ số mà tử số là hàm truyền của mạch thuận và mẫu số bằng 1 *cộng* (nếu *phản hồi âm*) hoặc *trừ* (*nếu phản hồi dương*) với tích của hàm truyền mạch thuận và mạch hồi tiếp. Mạch thuận là mạch được tính từ đầu vào X(s) đến đầu ra Y(s), mạch ngược lại là mạch hồi tiếp.

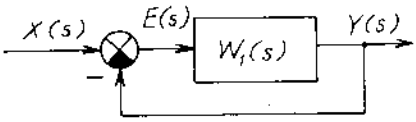



***Hình 2.8***

**Ví dụ 2-2**

Xác định hàm truyền của một hệ có hồi tiếp đơn vị như ở hình 2.9.

Hồi tiếp đơn vị là hồi tiếp mà trong đó hàm truyền bằng 1; đầu vào cũng chính là đầu ra, do đó :




***Hình 2.9***

$$W_{xy}(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)} \qquad (2\text{-}17)$$

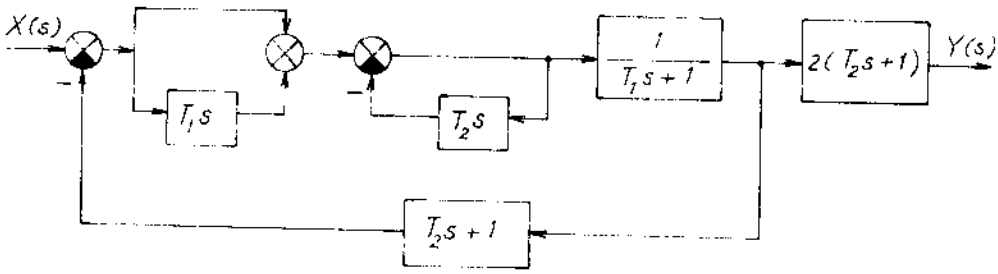
**Ví dụ 2-3**

Cũng theo hình 2.9, xác định hàm truyền đối với sai lệch e. Trong trường hợp này tín hiệu ra là e(t) ÷ E(s) do đó mạch thuận không tồn tại một khâu nào và bằng 1, từ đó theo (2-16) ta có :

$$W_{xe}(s) \equiv \frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + W_1(s)} \qquad (2\text{-}18)$$

**Ví dụ 2-4**

Xác định hàm truyền $W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)}$ theo hình 2.10 và đơn giản hóa tối đa.




*Hình 2.10*

Sử dụng tổng hợp ba định lý trên ta có :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(T_1s + 1)\dfrac{1}{(1 + T_2s)} \cdot \dfrac{1}{(T_1s + 1)}}{1 + (T_1s + 1)\dfrac{1}{(1 + T_2s)} \cdot \dfrac{1}{(T_1s + 1)} \cdot (T_2s + 1)} \; 2(T_2s + 1)$$

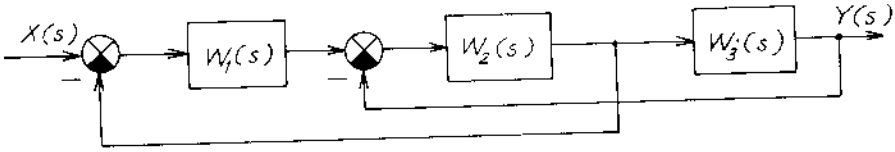
$$W(s) = 1$$

**Ví dụ 2-5**

Ba khâu $W_1(s)$, $W_2(s)$ và $W_3(s)$ nối tiếp nhau, đồng thời có hai hồi tiếp chéo nhau như ở hình 2.11, xác định $W(s) = Y(s)/X(s)$.

Ở đây không thể đơn thuần dùng định lý về mắc kiểu liên hệ ngược mà phải qua một số biến đổi. Có nhiều phương án để loại trừ mối liên hệ chéo. Ví dụ đưa mạch hồi tiếp từ đầu ra của $W_2(s)$ ra sau cùng. Ta sẽ có sơ đồ tương đương nếu mắc vào mạch hồi tiếp ấy một khâu nghịch

đảo với hàm truyền khâu thứ ba : $\frac{1}{W_3(s)}$ như ở hình 2.12.

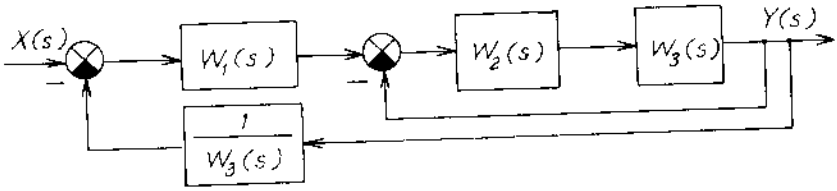



*Hình 2.11*

Từ đó ta có :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_1 \dfrac{W_2W_3}{1 + W_2W_3}}{1 + W_1 \dfrac{W_2W_3}{(1 + W_2W_3)} \dfrac{1}{W_3}} = \frac{W_1W_2W_3}{1 + W_2W_3 + W_1W_2} \quad (2\text{-}19)$$

Ở đây, để giản đơn đã bỏ qua ký hiệu của toán tử Laplace: s.




*Hình 2.12*

*Chú ý :*

Khi biến đổi có thể thay đổi vị trí các điểm rẽ cũng như các cơ cấu so sánh với nhau nhưng không thể hoán vị một cách đơn thuần điểm rẽ với cơ cấu so sánh.

Ở hình 2.13a và b có hai cấu trúc khác nhau nhưng tương đương nhau để bảo đảm thay đổi vị trí của $X_1$ và $X_2$ mà luôn có :

$$X_3 = X_1 + X_2$$

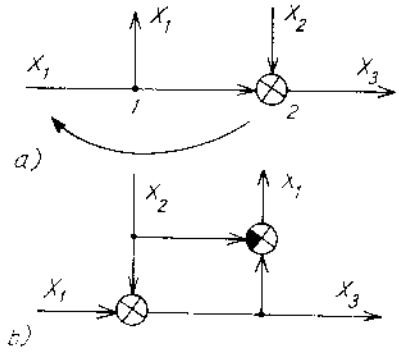
Ở ví dụ 2-5 bạn đọc có thể dùng các phương án khác để biến đổi và xác định hàm truyền W(s) = Y(s)/X(s) sao cho kết quả cuối cùng như

ở biểu thức (2–19).

**Ví dụ 2-6**

Biến đổi sơ đồ khối ở hình 2.14a để có sơ đồ tương đương như ở hình 2.14d.

Theo phương pháp chuyển đổi vị trí cơ cấu so sánh và điểm rẽ như ở hình 2.13, từ hình 2.14a ta có hình 2.14b. Hình 2.14b tương đương với 2.14c và từ đó so sánh với hình 2.14d ta xác định :




*Hình 2.13*

$$W_a = W_1$$

$$W_c = W_3$$

$$W_d = -W_4$$

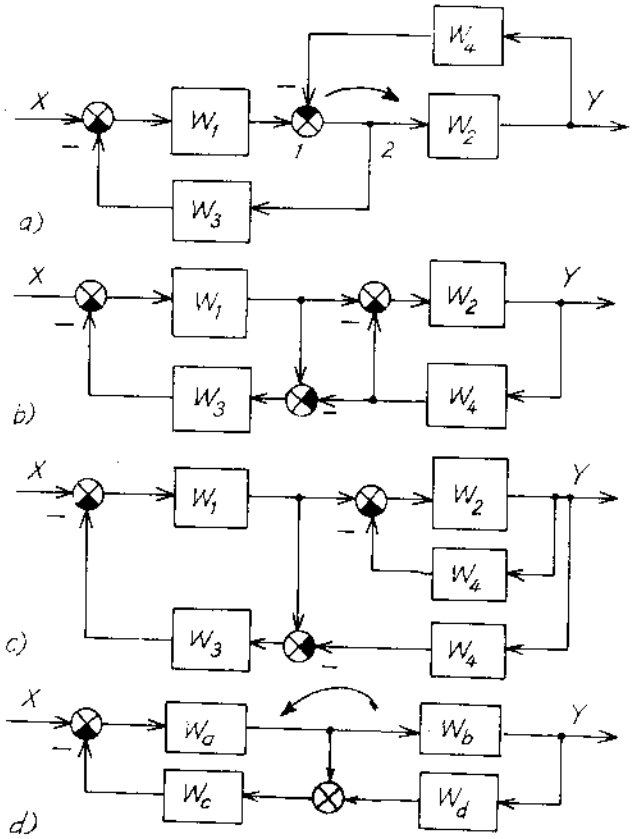
$$W_b = \frac{W_2}{1 + W_2W_4}$$

**Ví dụ 2-7**

Xác định hàm truyền theo sơ đồ khối ở hình 2.14d theo kết quả biến đổi ở ví dụ 2–6.

Để xác định hàm truyền $W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)}$ ta cần biến đổi sơ đồ khối ở hình 2.14d bằng cách đưa khâu $W_b$ ra trước mạch rẽ như ở hình 2.15.

Như vậy ở mạch hồi tiếp có hai khâu mắc song song :




*Hình 2.14*

$\frac{1}{W_b}$ và $W_d$. Do đó :

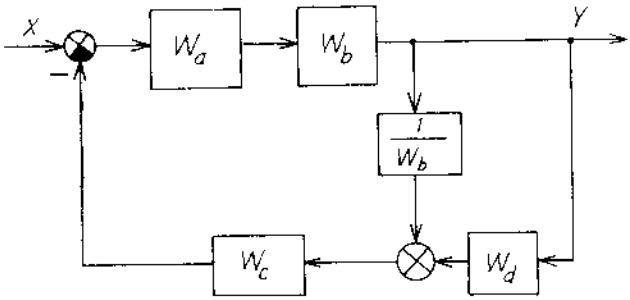
$$W = \frac{W_aW_b}{1 + W_aW_bW_c(W_d + \frac{1}{W_b})} = \frac{W_aW_b}{1 + W_aW_bW_cW_d + W_aW_c}$$

Thay thế kết quả đã tính ở ví dụ 2-6 ta có :

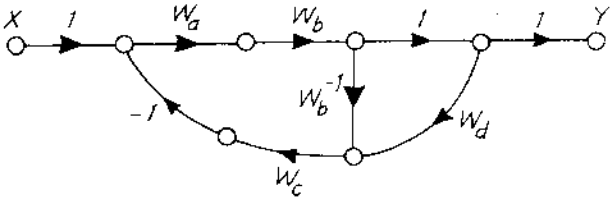
$$W = \frac{W_1W_2}{1 + W_2W_4 + W_1W_3}$$

Bên cạnh sơ đồ khối, người ta còn dùng biểu đồ graph tín hiệu. Ở các nhánh của graph có đánh dấu mũi tên và hàm truyền tương ứng. Ở các nút của graph có mối liên hệ giữa các phần tử. Hàm truyền bằng 1 vẫn phải kể đến khi vẽ.

Tương ứng với hình 2.15, có biểu đồ graph tín hiệu ở hình 2.16.




*Hình 2.15*

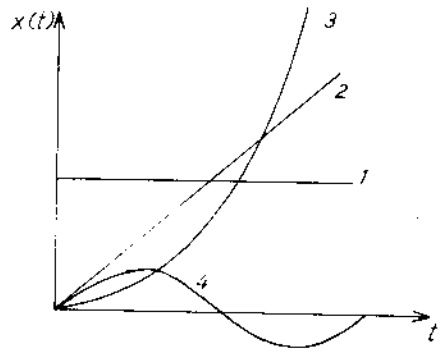



*Hình 2.16*

## II.4. ĐẶC TÍNH CÁC PHẦN TỬ VÀ HỆ THỐNG

Mọi tác động vào hệ thống đều gây nên sự thay đổi của đại lượng được điều khiển, gây nên sự chênh lệch so với đại lượng cho trước. Tính chất của quá trình phụ thuộc vào bản thân hệ (cấu trúc và thông số) cũng như điểm đặt của tác động vào và dạng của tín hiệu tác động.

Có hai loại tác động từ ngoài vào hệ thống : tác động của tín hiệu đặt và tác động của nhiễu. Trong các hệ điều chỉnh, tác động vào mà theo đó xác định bộ điều chỉnh là một hằng $x(t) = a_0$ (đường *1* hình 2.17). Ở các hệ điều khiển theo chương trình, nó là hàm định trước theo thời gian. Ở các hệ tùy động, nó là một hàm bất kỳ từ cơ cấu phát. Khi anten bám mục tiêu, máy bay (mục tiêu) chuyển động đều thì tín hiệu tác động vào hệ tùy động để chuyển động anten là hàm tuyến tính theo thời gian : $x(t) = a_1t$ (đường *2* trên hình 2.17). Khi máy bay tăng tốc đều – là hàm bậc hai chẳng hạn : $x(t) = a_2t^2$ (đường *3*).



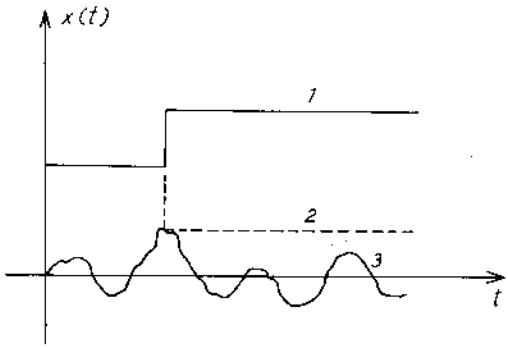

*Hình 2.17*

Trường hợp tổng quát :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i!} t^i$$

Để ổn định bệ anten hay bệ pháo trên tàu thủy khi bị lắc, tác động vào của hệ tùy động có dạng sóng điều hòa $x(t) = X_m\sin(\omega t + \varphi)$ (đường *4*).

Tác động của nhiễu khi thay đổi phụ tải hay những nguyên nhân khác làm cho đại lượng được điều khiển lệch khỏi trị số cần thiết. Tác động loại này thường là những thay đổi đột biến tăng (đường *1* hình 2.18) hay giảm (đường *2*). Nhiễu tác động có thể theo một quy luật nhất định (tiền định) hay ngẫu nhiên (đường *3*). Trong trường hợp biết được thời điểm ban đầu của nhiễu tiền định, có thể xác định được nó ở mọi




*Hình 2.18*

thời điểm kế tiếp. Đối với nhiễu ngẫu nhiên, biết được quy luật của nó ở thời điểm ban đầu cũng chỉ xác định được xác suất của nó ở thời điểm tiếp theo.

Nhiệm vụ của điều khiển tự động là loại trừ hoặc giảm nhỏ ảnh hưởng của nhiễu đến mức có thể. Để phân tích khảo sát hệ thống người ta đánh giá đáp ứng của nó về tính ổn định, về chất lượng với các dạng tác động vào thường gặp cũng như những dạng khác với mục đích nghiên cứu phân tích.

### II.4.1. Đặc tính thời gian

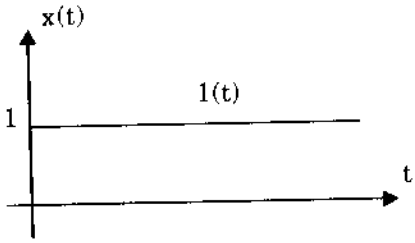
Mọi tín hiệu tiền định đều có thể xem như tổ hợp của những dạng tín hiệu đơn giản sau đây.

*1. Tín hiệu bậc thang đơn vị*

Tín hiệu bậc thang đơn vị có thể được mô tả bởi :

$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ khi } t < 0 \\ 1 \text{ khi } t \geqslant 0 \end{cases}$$

như ở hình 2.19.



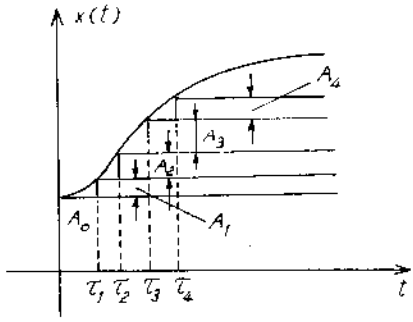

*Hình 2.19*

Một tín hiệu tiền định dạng bất kỳ có thể xem như tổ hợp các tín hiệu bậc thang :

$$x(t) \approx A_0 1(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, 1(t - \tau_i) \quad (2\text{-}20)$$

như ở hình 2-20.

Đối với hệ tuyến tính, *nguyên lý xếp chồng* (xếp chồng nguyên nhân và hậu quả) cho phép xem đáp ứng của một khâu hay một hệ đối với tín hiệu tiền định bất kỳ như tổng hợp của đáp ứng các thành phần ở biểu thức (2-20). Càng nhiều bậc thang, độ chính xác càng cao. Theo tích phân Đuamen có thể tính :

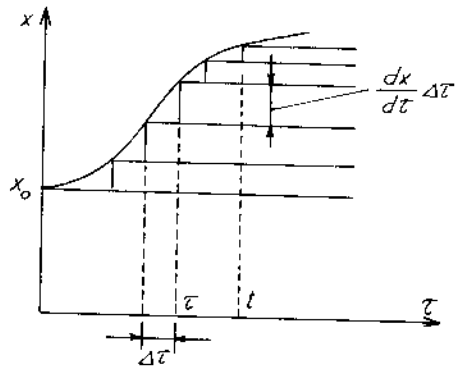



*Hình 2.20*

$$x(t) = x(o)1(t) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} 1(t-\tau)\, d\tau \qquad (2\text{-}21)$$

như ở hình 2.21.

Tín hiệu bậc thang thường gặp ở các hệ điều chỉnh. Do vậy, nếu dùng đại lượng tương đối với tín hiệu vào, bậc thang đơn vị 1(t) có thể dùng để đơn giản hóa việc khảo sát các hệ điều chỉnh. Một điện áp 220 V đặt vào động cơ xoay chiều hay một tín hiệu đặt ứng với 6 V một chiều đưa vào hệ điều chỉnh nhiệt độ, ở hệ tương đối đều có thể xem là tín hiệu bậc thang đơn vị 1(t).




*Hình 2.21.*

Khi tín hiệu bậc thang đơn vị tác động vào một khâu hay một hệ, đáp ứng của khâu ấy hay hệ ấy là *hàm quá độ h(t)*. Vậy hàm quá độ là đáp ứng của một khâu hay một hệ thống mà tín hiệu đầu vào là hàm bậc thang đơn vị :

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\equiv 1(t) \\ y(t) &\equiv h(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}22)$$

Ảnh theo Laplace của tín hiệu vào $x(t) \equiv 1(t)$ là $X(s) = \frac{1}{s}$ nên ảnh của tín hiệu ra hay hàm quá độ là :

$$Y(s) \equiv H(s) = \frac{W(s)}{s} ;$$

Trở lại với hàm gốc từ ảnh, ta có hàm quá độ :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

Hàm quá độ có thể được tính theo phương pháp toán tử hay phương pháp cổ điển. Hàm quá độ liên hệ đơn trị với hàm truyền. Bằng cách phân tích hàm truyền thành những phân thức đơn giản, từ ảnh trở về gốc, ta có thể viết :

$$h(t) = \left[\frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{s_i A'(s_i)} e^{s_i t}\right] 1(t) \qquad (2\text{-}23)$$

Thành phần xác lập (cưỡng bức) của hàm quá độ được xác định bởi :

$$h_{xl} = h(\infty) = \frac{B(0)}{A(0)} = W(0) \qquad (2\text{-}24)$$

đặc trưng cho đặc tính tĩnh.

Thành phần quá độ (thành phần tự do) được xác định bởi :

$$h_{qđ} = h(t) - h_{xl} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s) - W(0)}{s}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{s_i A'(s_i)} e^{s_i t} \qquad (2\text{-}25)$$

Ở đây $s_i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $F(s) = A(s) = 0$ lấy từ mẫu của hàm truyền đạt :

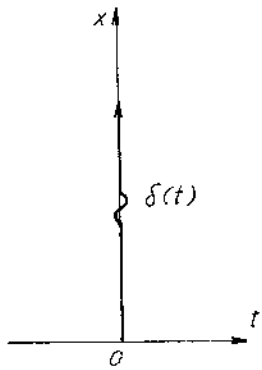
$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

với điều kiện là phương trình đặc trưng không có nghiệm lặp.

***2. Tín hiệu xung đơn vị (hàm Đirắc hay hàm $\delta(t)$)***

Xung đơn vị là xung có độ rộng bằng 0, biên độ bằng vô cùng và diện tích xung bằng 1. Xung đơn vị được mô tả như ở hình 2.22.

$$\left.\begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ khi } t \neq 0 \\ \infty \text{ khi } t = 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}26)$$




*Hình 2.22*

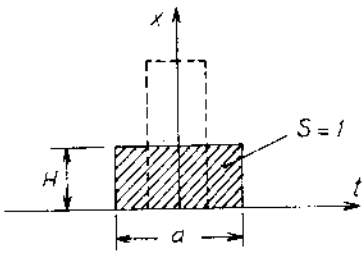
Xung đơn vị là tín hiệu lý tưởng, có thể hình dung như sau :

Một xung chữ nhật như ở hình 2.23 với điều kiện :

$$S = a \times H = 1 = \text{const}$$

thì $\lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{a} = H = \infty$.

Một xung như vậy có thể xem là xung đơn vị vì $S = 1$, $H = \infty$. Liên hệ với hàm bậc thang đơn vị ta cũng có :




*Hình 2.23*

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a}[1(t) - 1(t - a)] \qquad (2\text{-}27)$$

Cũng như tín hiệu bậc thang đơn vị, tín hiệu tiền định bất kỳ có thể xem như tổng hợp của các xung đơn vị :

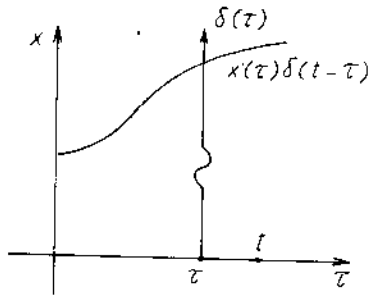
$$x(t) = \int_0^t x(\tau)\,\delta(t - \tau)\,d\tau \qquad (2\text{-}28)$$

x(t) là tích phân của các hàm $\delta(t)$ nhân với x tại thời điểm $\tau$ (hình 2.24).

Tín hiệu nhận được ở đầu ra của một khâu hay một hệ thống khi đầu vào là một xung đơn vị $\delta(t)$ gọi là *hàm trọng lượng* hay *hàm quá độ xung* w(t). Vì biến đổi Laplace của $\delta(t)$ là $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ nên Y(s) = W(s).

Và từ đó :

$y(t) \equiv w(t) = \mathcal{L}\{W(s)\}$




*Hình 2.24*

$$w(t) = \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{A(s_i)} e^{s_i t} \right] \qquad (2\text{-}29)$$

Biểu thức (2-25) và (2-29) dùng để xác định hàm quá độ và hàm trọng lượng của hệ.

### II.4.2. Đặc tính tần

Ví dụ, đối tượng là một chiếc thuyền buồm (hình 2.25), xem sóng là tác động đầu vào với dạng :

$$x(t) = X_m \sin\omega t \qquad (2\text{-}30)$$

Đầu ra là dao động của chiếc thuyền :

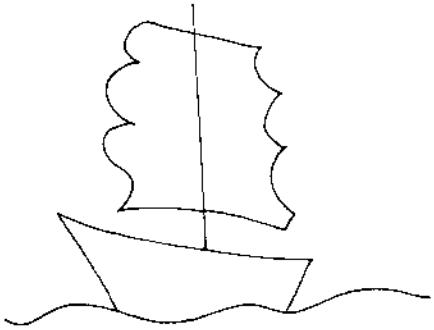
$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2\text{-}31)$$

Với $X_m$, $Y_m$ – biên độ sóng biển và biên độ dao động của thuyền;

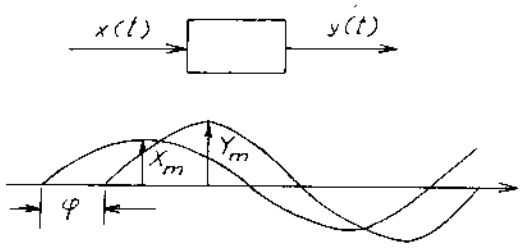
$\varphi$ – góc chậm sau của thuyền so với sóng.

Mối quan hệ với tần số của $A(\omega) = \frac{Y_m}{X_m}$, $\varphi(\omega)$ là các đặc tính *tần*

*số biên độ* và *tần số pha* của thuyền do tác động của sóng biển như ở hình 2.27.



*Hình 2.25*




*Hình 2.26*

Trị số cực đại của $A(\omega)$ ứng với hiện tượng cộng hưởng của dao động. Kết hợp cả hai đặc tính $A(\omega)$ và $\varphi(\omega)$ trong hệ tọa độ góc, ta có *đặc tính tần biên pha* như ở hình 2.28. Ứng với mỗi tần số $\omega_i$ có biên độ $A(\omega_i)$ và pha $\varphi(\omega_i)$. Toàn bộ đặc tính của hệ mô tả sự biến đổi của hệ số khuếch đại phức khi tần số biến đổi từ 0 đến ∞ (hướng tăng tần số thể hiện theo chiều mũi tên). Đường cong này còn mang tên *đường cong Nyquist* (Naiquyt).

Đặc tính tần biên pha có thể vẽ được theo thực nghiệm : lấy các trị số $X_m$, $Y_m$ và $\varphi$ từ tín hiệu đầu vào và ra của mô hình khi tần số thay đổi từ trị số nhỏ nhất đến lớn nhất có thể :

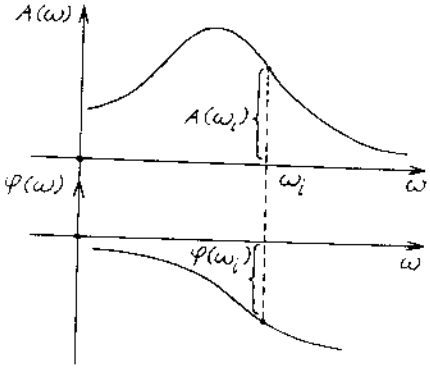
$A(\omega_i) = \left.\dfrac{Y_m}{X_m}\right|_{\omega i}$, $\varphi(\omega_i)$ và với ba thông số ấy khi thay đổi $\omega$, ta vẽ được một đoạn cong của đặc tính tần biên pha theo mô hình của khâu hay của hệ.

Vì biên độ phức của tín hiệu vào là $\dot{X}_m = X_m$ và của tín hiệu ra : $\dot{Y}_m = Y_m e^{j\varphi}$ nên :

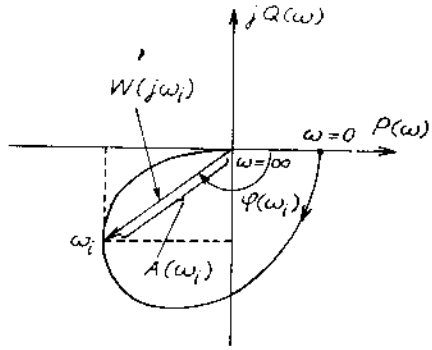
$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{Y_m}{X_m}e^{j\varphi} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \qquad (2\text{-}32)$$

Như vậy, muốn có đặc tính tần biên pha của một khâu hay hệ, chỉ

cần thay toán tử Laplace ở hàm truyền s bằng jω. Vì ở hệ thực m < n nên khi $\omega \to \infty$ thì trị số của $W(j\omega) \to 0$, như ở hình 2.28.




*Hình 2.27*




*Hình 2.28*

Do tính chất vectơ trong hệ tọa độ, đặc tính tần biên pha còn được thể hiện qua phần thực $P(\omega)$ và phần ảo $Q(\omega)$ :

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{2-33}$$

và

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \end{aligned}\right\} \tag{2-34}$$

Vì phạm vi biến đổi của tần số cũng như biên độ rất lớn, nên để thuận tiện cho việc khảo sát còn dùng đến *đặc tính tần số biên độ lôgarit* và *đặc tính tần số pha lôgarit*, còn gọi là *đường cong Bode.*

Theo đặc tính logarit, tần số được tính theo decade [dec] (decadơ) – tương ứng với sự biến đổi 10 lần tần số. Biên độ được tính theo decibel [db] (dexiben) :

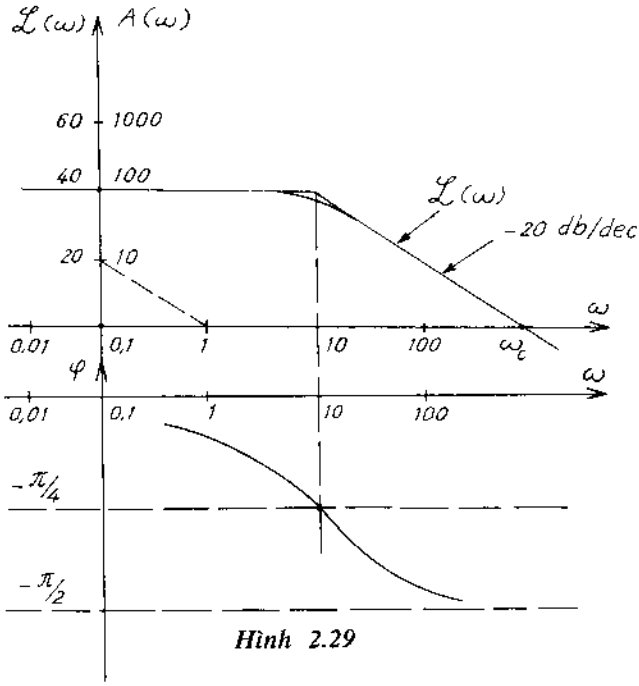
$$\mathcal{L}(\omega) \equiv 20\lg A(\omega) \tag{2-35}$$

Như vậy :

$$\mathcal{L}(\omega) < 0 \text{ khi } A(\omega) < 1;$$
$$\mathcal{L}(\omega) = 0 \text{ khi } A(\omega) = 1;$$
$$\mathcal{L}(\omega) > 0 \text{ khi } A(\omega) > 1.$$

Vì khi $\omega \to \infty$, ở các hệ thực $A(\omega) = |W(j\omega)| \to 0$ nên $\mathcal{L}(\omega) \to -\infty$. Ở hình 2.29 có đường cong Bode $\mathcal{L}(\omega)$ và $\varphi(\omega)$. Độ nghiêng của đường cong $\mathcal{L}(\omega)$ được đánh giá theo đơn vị ± db/dec. Độ nghiêng ± 20 db/dec

còn được xem là độ nghiêng đơn vị ± 1. Đường cong liên tục khi thay thế bằng đường xấp xỉ bởi hai đoạn thẳng thì giao điểm của chúng ứng với *tần số gãy*. Tần số $\omega_c$ khi $\mathcal{L}(\omega)$ cắt trục hoành (hay $\mathcal{L}(\omega) = 0$) gọi là *tần số cắt*.



*Hình 2.29*

– Như vậy, một hệ được xác định bởi hàm truyền đạt, đặc tính thời gian hay đặc tính tần.

– Hàm truyền đạt thực chất là cách viết gọn của phương trình vi phân.

– Đặc tính thời gian mô tả hành vi của hệ theo thời gian khi có tác động ở đầu vào.

– Đặc tính tần mô tả hành vi của hệ khi có tác động điều hòa với tần số khác nhau.

## II.5. CÁC KHÂU ĐỘNG HỌC ĐIỂN HÌNH

Một hệ thống gồm có các phần tử nối với nhau theo các phương thức chung như nối tiếp, song song và kiểu hồi tiếp. Tính chất của quá trình quá độ toàn hệ thống phụ thuộc tính chất động học của các phần tử hợp thành. Trong hệ thống, số lượng các phần tử có thể rất nhiều và đa dạng về bản chất vật lý, nhưng số lượng các phương trình mô tả động học các khâu tối giản là có hạn, việc khảo sát chúng là cần thiết.

Các phần tử thực làm việc ở phạm vi tần số nhất định. Còn việc mô tả động học các khâu điển hình được thực hiện cho mọi tần số, từ

$\omega = 0$ đến $\infty$, nhưng sử dụng chúng để nghiên cứu sẽ giản đơn và thuận lợi nhiều.

### II.5.1. Khâu khuếch đại (khâu tỷ lệ)

Khâu khuếch đại là khâu mà ở mỗi thời điểm, lượng ra tỷ lệ với lượng vào theo phương trình :

$$y = k.x \qquad (2\text{-}36)$$

Biến đổi Laplace của (2-36) có dạng :

$$Y(s) = k.X(s)$$

Từ đó hàm truyền đạt của khâu khuếch đại là :

$$W(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = k \qquad (2\text{-}37)$$

Nếu tín hiệu vào của khâu khuếch đại là :

$$x(t) = X_m \sin\omega t$$

thì đầu ra có tín hiệu :

$$y(t) = Y_m \sin\omega t \text{ mà } Y_m = k.X_m$$

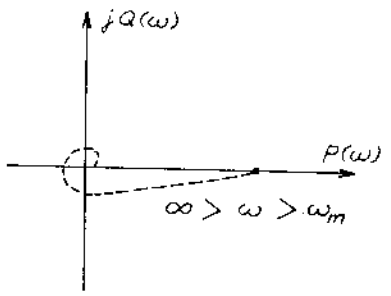
Dưới dạng phức $\dot{Y} = k.\dot{X}$ hay $Y(j\omega) = k.X(j\omega)$.

Do đó đặc tính tần biên pha của khâu khuếch đại là :

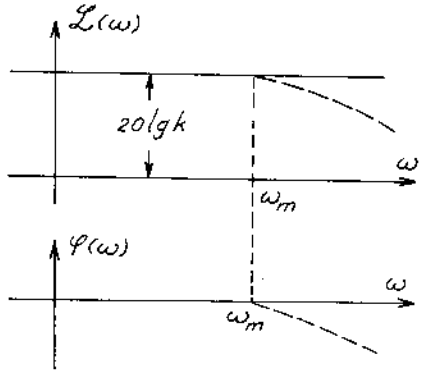
$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = k \qquad (2\text{-}38)$$

Đặc tính tần biên pha là một điểm trên trục thực như ở hình 2.30.

Trong thực tế, khi tần số lớn hơn một trị số $\omega_m$ nào đó, do có




*Hình 2.30*




*Hình 2.31*

những thông số bé đã bỏ qua nên hệ số truyền sẽ giảm dần đến 0 như đường nét đứt trên hình 2.30. Đặc tính tần số logarit như ở hình 2.31 và đường nét đứt tương ứng với đặc tính thực.

Thông số nhỏ ở khâu khuếch đại mà ta đã không tính đến như điện dung của dây dẫn ở biến trở ; điện dung, điện cảm ở mạch khuếch đại, độ đàn hồi của các đòn bẩy cơ khí v.v... Tuy vậy, từ đây ta khảo sát các khâu động học như một khâu lý tưởng và khâu khuếch đại có hệ số truyền là k với mọi giải tần $0 < \omega < \infty$.

Theo (2-36), hàm quá độ tương ứng với đầu vào là bậc thang đơn vị :

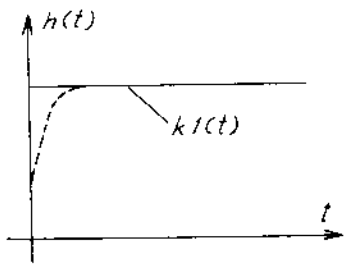
$$h(t) = k.1(t) \qquad (2\text{-}39)$$

và hàm trọng lượng với đầu vào là xung đơn vị :

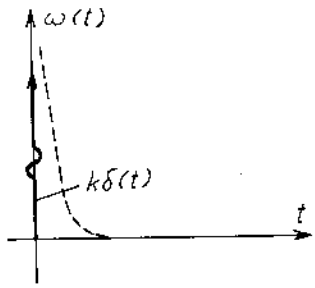
$$w(t) = k.\delta(t) \qquad (2\text{-}40)$$

Khâu khuếch đại có đặc tính thời gian như ở hình 2.32 và 2.33 với đường nét đứt là các đặc tính thực.

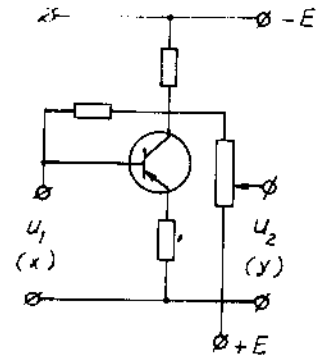
Khâu khuếch đại thường gặp ở các phần tử như : biến trở, chiết áp (hình 2.2a), đòn bẩy cơ khí (hình 2.2b), khuếch đại bán dẫn (hình 2.34), khuếch đại thuật toán (hình 2.35), bộ biến tốc (hình 2.36), máy phát đo tốc độ (hình 2.37), tổ hợp vòi phun lá chắn và khuếch đại khí nén (hình 2.38a). Khi giảm khe hở $\varepsilon$ giữa vòi phun *VP* và lá chắn *LC*, áp suất $P_2$ tăng và cửa *A* đóng, cửa *B* mở và tăng áp suất ở đầu ra P. Thực ra, mối quan hệ $P(\varepsilon)$ là phi tuyến nhưng trong phạm vi biến đổi nhỏ của $\Delta\varepsilon$, có thể xem tổ hợp vòi phun lá chắn và khuếch đại là tuyến tính như ở hình 2.38b với hệ số khuếch đại lớn. Các van thủy lực hay khí nén (hình 2.39a, b, c) đều được xem là một khâu khuếch đại. Cặp nhiệt để đo nhiệt độ mà tín hiệu ra là sức điện động e cũng tỷ lệ với nhiệt độ đầu vào $t^0$ (hình 2.40).



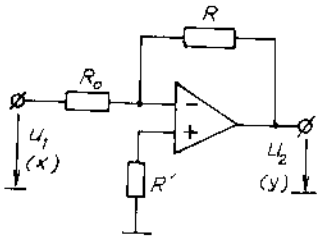

*Hình 2.32*



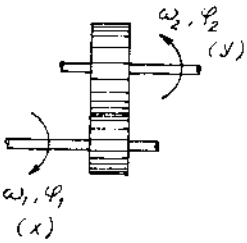

*Hình 2.33*



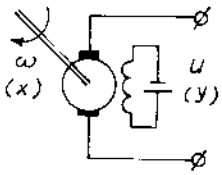

*Hình 2.34*



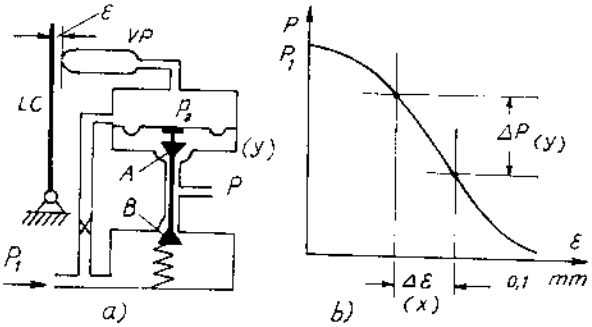

*Hình 2.35*



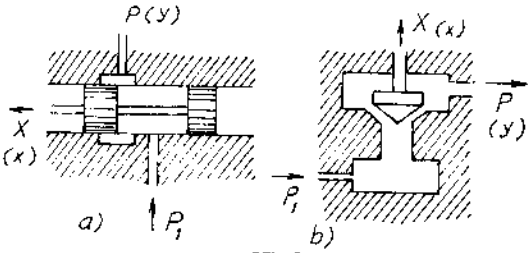

*Hình 2.36*



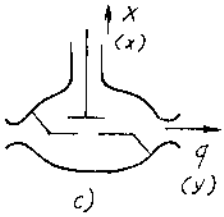

*Hình 2.37*

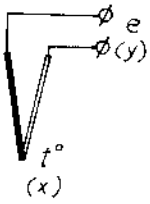



*Hình 2.38*

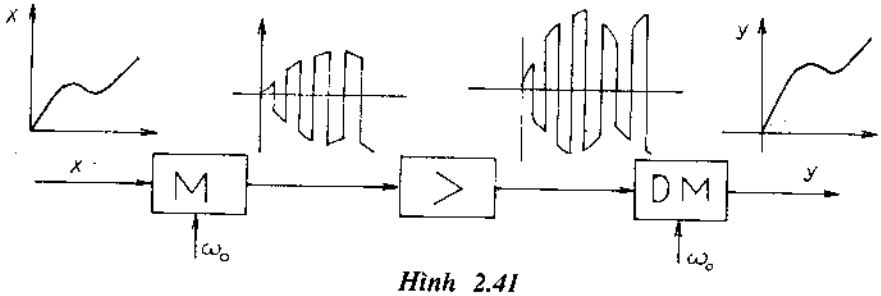



*Hình 2.39*



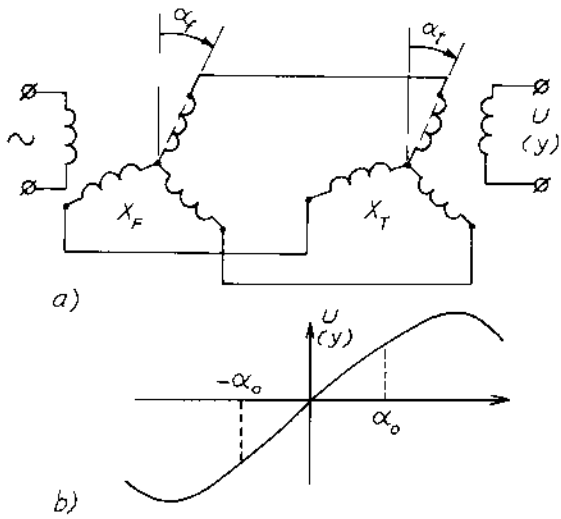

*Hình 2.40*




*Hình 2.41*

Trong các hệ tự động thường dùng các khuếch đại xoay chiều với các bộ biến điệu *M* và hoàn điệu *DM* hay tách sóng pha mà tần số sóng mang $\omega_o$ rất cao so với tần số lớn nhất của tín hiệu vào (hình 2.41). Những mạch này cho phép làm việc ổn định với hệ số khuếch đại lớn.

Trong các hệ tùy động người ta dùng các *xenxin* làm việc ở chế độ biến thế. Sức điện động ở stato của *xenxin* thu *U* phụ thuộc sai lệch góc giữa rôto *xenxin* phát *XF* và thu *XT*




*Hình 2.42*

($\Delta\alpha = \alpha_f - \alpha_t$) theo biểu thức :

$$U = U_m.\sin\Delta\alpha$$

Trong phạm vi sai lệch bé, có thể xem điện áp ra U tỷ lệ với sai lệch góc :

$U = U_m\Delta\alpha$ với $|\Delta\alpha| < \alpha_o$ như ở hình 2.42.

### II.5.2. Khâu quán tính (khâu phi chu kỳ)

Khâu quán tính được mô tả bởi phương trình vi phân :

$$T\frac{dy}{dt} + y = k.x \qquad (2\text{-}41)$$

với T – hằng số thời gian ; k – hệ số khuếch đại.

Ứng với (2-41) có hàm truyền đạt :

$$W(s) = \frac{k}{1 + Ts} \qquad (2\text{-}42)$$

Đặc tính tần biên pha được xác định theo (2-43) với $s = j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + Tj\omega} = \frac{k(1 - Tj\omega)}{(1 + Tj\omega)(1 - Tj\omega)} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{k.T\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

Biên độ và pha được xác định theo (2-34) :

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \qquad (2\text{-}43)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \text{arctg}\,(-T\omega) \qquad (2\text{-}44)$$

So sánh phần thực $P(\omega)$ với biên độ $A(\omega)$ ta thấy :

$$A^2(\omega) = P^2(\omega) + Q^2(\omega) = k.P(\omega).$$

Sau khi thêm vào hai vế sau của biểu thức trên một đại lượng như nhau : $\left(\frac{k}{2}\right)^2$, ta có thể biến đổi :

$$P^2(\omega) - k.P(\omega) + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

hay

$$\left[\, P(\omega) - \frac{k}{2} \,\right]^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \qquad (2\text{-}45)$$

Đó là phương trình đường tròn có bán kính $\frac{k}{2}$ và tâm trên trục thực cách gốc tọa độ một đại lượng $\frac{k}{2}$ như ở hình 2.43.

Ứng với tần số thực ($\omega > 0$) đường cong Nyquist là nửa đường tròn (đường đậm nét).

Đặc tính logarit được xác định theo :

$$\mathcal{L}(\omega) \equiv 20\lg A(\omega) = 20\lg\frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

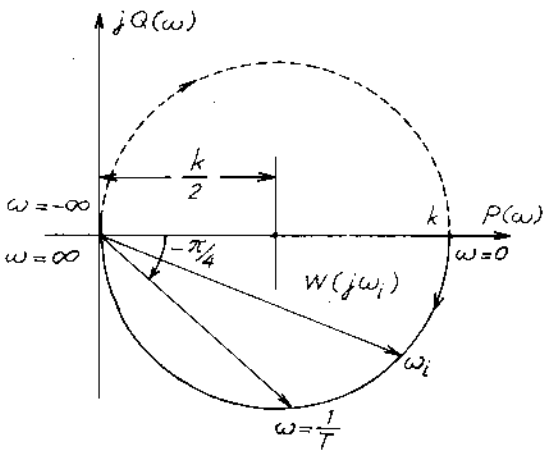
Trong phạm vi tần số rất bé, bé hơn tần số gãy $\omega << \frac{1}{T}$ hay $T^2\omega^2 << 1$, ta có :

$$\mathcal{L}(\omega) = 20\lg k,$$

Với $\omega >> \frac{1}{T}$ :

$$\mathcal{L}(\omega) = 20\lg k - 20\lg T\omega.$$

Đó là phương trình đường thẳng, đi qua hai điểm sau :




*Hình 2.43*

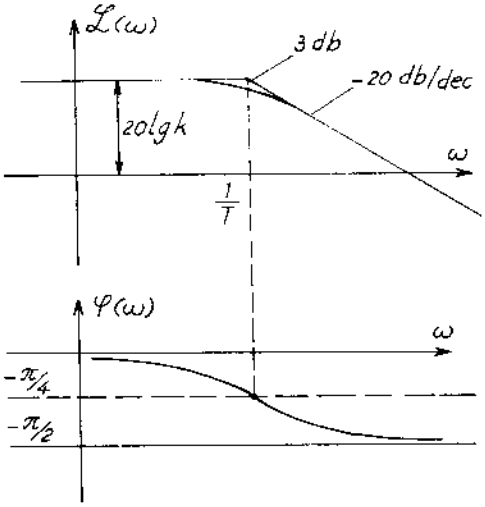
$$\mathcal{L}(1\omega) = 20\lg k - 20\lg T$$

$$\mathcal{L}(10\omega) = 20\lg k - 20\lg T - 20\lg 10$$

$$\mathcal{L}(1\omega) - \mathcal{L}(10\omega) = 20 \text{ db.}$$

Như vậy, trong phạm vi biến đổi tần số 10 lần (1 dec), đặc tính biên độ logarit thay đổi 20 db và độ nghiêng là - 20 db/dec.

Đặc tính pha theo biểu thức (2-44) tiệm cận với trục hoành khi $\omega \to 0$ và với đường thẳng $-\frac{\pi}{2}$ khi $\omega \to \infty$. Ở tần số gãy $\omega = \frac{1}{T}$, đặc tính pha đi qua điểm $-\frac{\pi}{4}$.



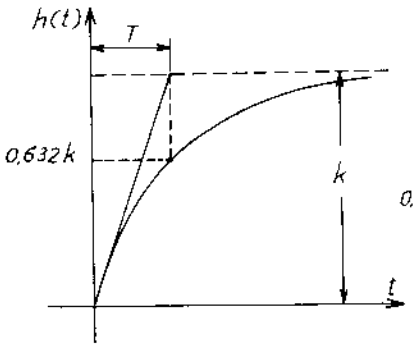

*Hình 2.44*

Hàm quá độ được xác định bởi (2-41) và có dạng như ở hình 2.45 :

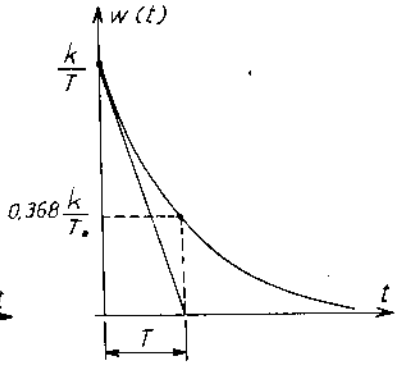
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{(Ts+1)}\,\frac{1}{s}\right\} = k(1 - e^{-\frac{1}{T}t})\,1(t) \qquad (2\text{-}46)$$

Hàm trọng lượng như ở hình 2.46 :

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k}{T}\,e^{-\frac{1}{T}t} \qquad (2\text{-}47)$$




*Hình 2.45*




*Hình 2.46*

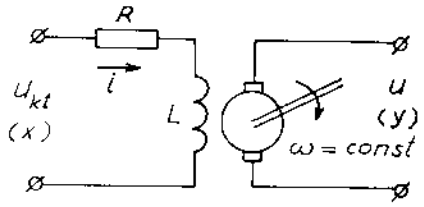
Hằng số thời gian được xác định theo tiếp tuyến với các đặc tính

thời gian tại t = 0 hay theo biểu thức (2-46) khi t = T :

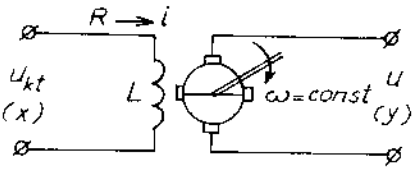
$$h(T) = k(1 - e^{-1}) = k(1 - 0{,}368) = 0{,}632k$$

Các phần tử thường gặp là khâu quán tính như : mạch RC (hình 2.3a) hay LR, bình chứa khí nén (hình 2.3b), máy phát điện một chiều (hình 2.47) với tác động điều khiển là điện áp kích từ $U_{kt}$ khác với trường hợp máy phát làm dụng cụ đo (hình 2.37).

Máy điện khuếch đại (hình 2.48) có thể xem như sự ghép nối của hai máy phát (hai khâu quán tính nối tiếp) với hệ số khuếch đại lớn nhờ tầng thứ hai, kích từ bởi dòng ở cuộn ngắn mạch.




*Hình 2.47*



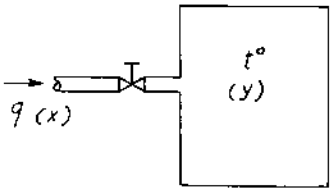

*Hình 2.48*

Lò nhiệt độ (hình 2.49) có phương trình cân bằng nhiệt :

$$\Delta q = g\Delta t^{o} + e\,\frac{dt^{o}}{dt}$$

với q - nhiệt lượng trong đơn vị thời gian ; g - nhiệt dẫn của lò ; c - nhiệt dung lò ; $\Delta t^{o}$ - chênh lệch nhiệt độ giữa nhiệt độ bên ngoài và nhiệt độ trung bình trong lò.

Với q ≡ x, $\Delta t^{o}$ ≡ y, 1/g ≡ k, c/g ≡ T, ta có phương trình (2-41) nếu không tính đến độ trễ trung bình do tính chất phân bố nhiệt khác nhau trong lò.




*Hình 2.49*

### II.5.3. Khâu dao động

Khâu dao động được mô tả bởi phương trình vi phân bậc 2 :

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta T\frac{dy}{dt} + y = k.x \qquad (2\text{-}48)$$

với k - hệ số khuếch đại ; T - hằng số thời gian ; ζ - tỷ số tắt dần.

Đôi khi (2-48) có dạng :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta.\omega_o \frac{dy}{dt} + \omega_o^2 y = k\omega_o^2 x \qquad (2-49)$$

mà $\omega_o = \frac{1}{T}$ là tần số tự nhiên (tần số riêng). Từ đó hàm truyền của khâu dao động là :

$$W(s) = \frac{k\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta.\omega_o s + \omega_o^2} \text{ theo } (2-49) \qquad (2-50a)$$

hay :

$$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\zeta .Ts + 1} \text{ theo } (2-48) \qquad (2-50b)$$

Từ phương trình đặc trưng :

$$F(s) = s^2 + 2\zeta.\omega_o s + \omega_o^2 = 0$$

ta có nghiệm :

với $\zeta < 1$ ; $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega_1 = -\zeta.\omega_o \pm j\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}$

$\zeta = 1$ ; $s_1 = s_2 = -\omega_o$

$\zeta > 1$ ; $s_{1,2} = -\zeta\omega_o \pm j\omega_o\sqrt{\zeta^2 - 1}$

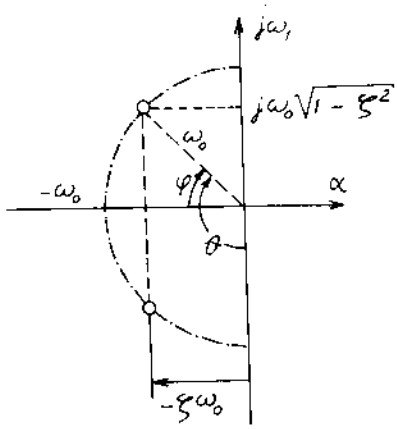
Theo phân bố nghiệm trên mặt phẳng nghiệm số như ở hình 2.50 :

$\cos\varphi = \zeta.\omega_o/\omega_o = \zeta$ nên

$\varphi = 45^o$ thì $\zeta = 0,707$

$\varphi = 60^o$ ; $\zeta = 0,5$

Khi $\zeta = 1$, ta có hai nghiệm trùng nhau và đó là tỷ số tắt dần tới hạn. Với $\zeta > 1$ có hai nghiệm thực âm và khác nhau tương ứng với quá trình là hai hàm mũ tắt dần với hằng số thời gian khác nhau (của hai khâu quán tính).




*Hình 2.50*

Ứng với (2-48) ta có đặc tính tần biên pha :

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega T)^2 + 2\zeta j\omega T + 1} \qquad (2-51)$$

như ở hình 2.51.

Đặc tính logarít xấp xỉ của khâu dao động có thể xác định theo :

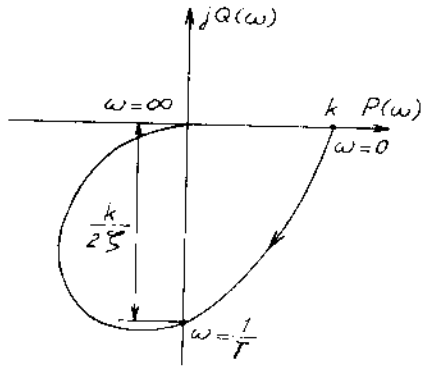
$$\mathcal{L}(\omega) = \begin{cases} 20\lg k \ ; \ \omega << \dfrac{1}{T} \\ 20\lg k - 40\lg\omega \ ; \ \omega >> \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

như ở hình 2.52 với $\zeta > 1$ có tần số gãy ứng với $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{T}$.

Khi tỷ số tắt dần $\zeta < 1$ cần hiệu đính lại trị số $\mathcal{L}(\omega)$ và $\varphi(\omega)$ theo đường cong ở hình 2.53.

Theo hình 2.53a có thể thấy rằng, tần số tự nhiên $\omega_0$ không đồng nghĩa với tần số cộng hưởng với mọi $\zeta$.

Hàm quá độ theo 2-48 có dạng :




*Hình 2.51*

$$h(t) = k[1 - e^{-\alpha t}(\cos\omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1}\sin\omega_1 t)]1(t) \qquad (2\text{-}52)$$

và hàm trọng lượng :

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k.\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\alpha t}\sin\omega_1 t \qquad (2\text{-}53)$$

Theo các thông số ở hàm quá độ có thể tính các thông số khác như :

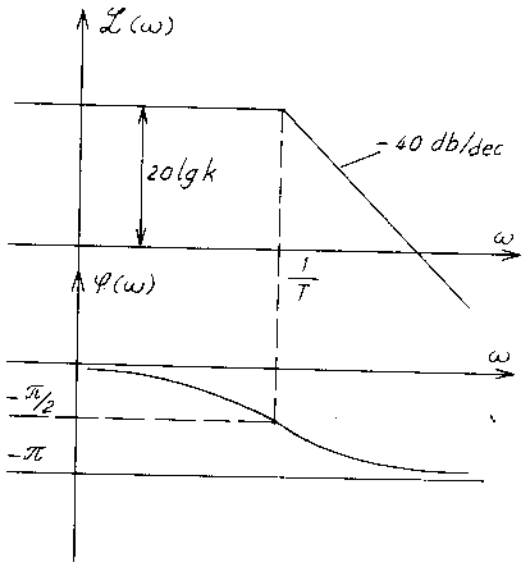
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1},$$

$$\alpha T_1 = \ln(A_1/A_2),$$

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2} = \frac{1}{T}$$

$$\zeta = \alpha T.$$

Khâu dao động có thể gặp ở các mạch RLC như ở




*Hình 2.52*

hình 2.4 với $T^2 = LC$, $2\zeta T = RC$ và $k = 1$.

Hệ cơ khí có đàn hồi – trọng khối – đệm giảm xóc có phương trình vi phân :

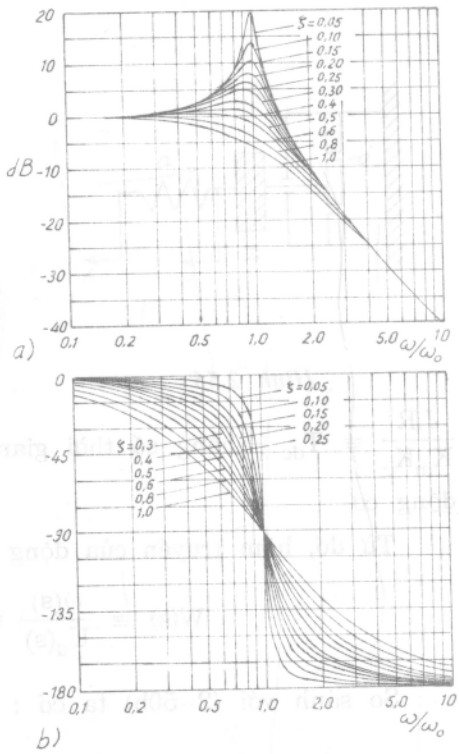
$$a(x - y) = M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt}$$

với các lực tác dụng x và y như ở hình 2.56 là một khâu dao động.

Động cơ một chiều kích từ độc lập như ở hình 2.57 có phương trình cân bằng điện áp và mômen như sau :

$$U_u = R.i + \mathcal{L}\frac{di}{dt} + K_e\omega$$

$$M = J\frac{d\omega}{dt} + M_c = K_m i$$

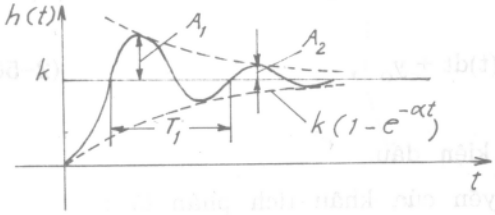



*Hình 2.53*

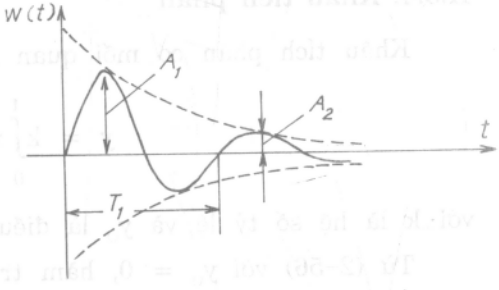
Trường hợp động cơ làm việc không tải : $M_c = 0$, từ hai phương trình trên ta có :

$$\frac{\mathcal{L}}{R}\cdot\frac{J.R}{K_mK_e}\cdot\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{J.R}{K_mK_e}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{K_e}U$$

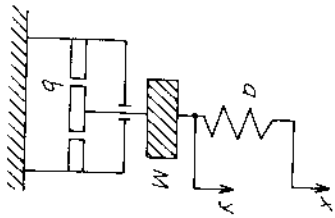
Ở đây $K_e$, $K_m$ – hệ số sức điện động phản kháng và hệ số mômen ; J – mômen vôlăng của động cơ ; $\frac{\mathcal{L}}{R} \equiv T_{dt}$ – hằng số thời gian điện từ ;



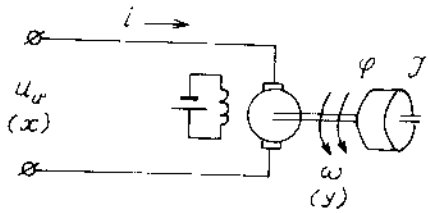

*Hình 2.54*




*Hình 2.55*



*Hình 2.56*




*Hình 2.57*

$\frac{J.R}{K_m K_e} \equiv T_{dc}$ – hằng số thời gian điện cơ ; $\frac{1}{K_e}$ – hệ số khuếch đại của động cơ.

Từ đó, hàm truyền của động cơ một chiều kích từ độc lập có dạng :

$$W(s) \equiv \frac{\omega(s)}{U_u(s)} = \frac{k}{T_{dt}T_{dc}s^2 + T_{dc}s + 1} \qquad (2\text{-}54)$$

So sánh với (2-50b) ta có :

$$T = \sqrt{T_{dt}T_{dc}} \; ; \quad 4\xi^2 = \frac{T_{dc}}{T_{dt}}$$

Nếu quan tâm đến đầu ra của động cơ là góc quay, mà ta biết :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \rightarrow \varphi(s) = \frac{1}{s}\omega(s)$$

thì :

$$W(s) \equiv \frac{\varphi(s)}{U_u(s)} = \frac{k}{(T_{dt}T_{dc}s^2 + T_{dc}s + 1)s} \qquad (2\text{-}55)$$

### II.5.4. Khâu tích phân

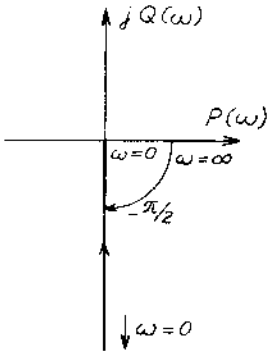
Khâu tích phân có mối quan hệ giữa lượng vào và ra dưới dạng :

$$y = k\int_0^t x(t)dt + y_o \; , \qquad (2\text{-}56)$$

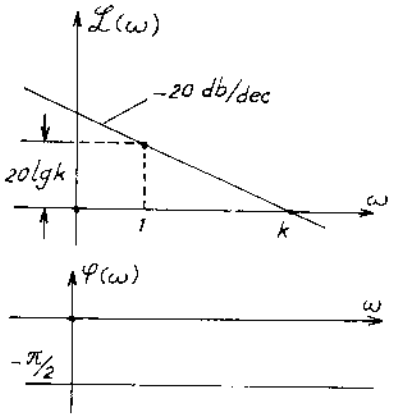
với k là hệ số tỷ lệ và $y_o$ là điều kiện đầu.

Từ (2-56) với $y_o = 0$, hàm truyền của khâu tích phân là :

$$W(s) = \frac{k}{s} \qquad (2\text{-}57)$$




*Hình 2.58*




*Hình 2.59*

và đặc tính tần biên pha :

$$W(j\omega) = -j\frac{k}{\omega} = \frac{k}{\omega}e^{-\frac{\pi}{2}} \qquad (2\text{-}58).$$

như ở hình 2.58.

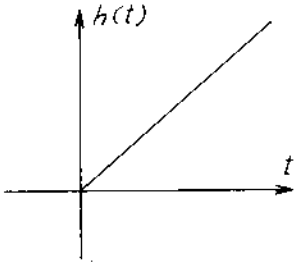
Hình 2.59 là đặc tính tần số logarit có biên độ $\mathcal{L}(\omega) = 20\lg k$ ở tần số $\omega = 1$, hay khi $\omega = k$ thì $\mathcal{L}(\omega) = 0$.

Hàm quá độ và hàm trọng lượng của khâu tích phân được xác định tương ứng :

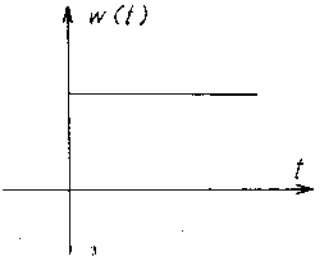
$$h(t) = k.t\,.\,1(t) \qquad (2\text{-}59)$$

$$w(t) = k \qquad (2\text{-}60)$$

và được mô tả như ở hình 2.60 và 2.61.




*Hình 2.60*




*Hình 2.61*

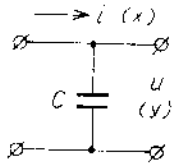
Trong thực tế, các phần tử là khâu tích phân như tụ điện (hình 2.62) với điện áp trên tụ :

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + u_0$$

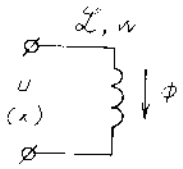
hay cuộn cảm (hình 2.63) với từ thông $\phi$ trên cuộn dây :

$$\phi = \frac{1}{w}\int_0^t u(t)dt + \phi_0$$

mà w là số vòng dây.




*Hình 2.62*




*Hình 2.63*

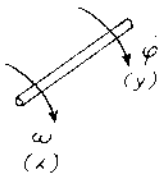
Góc quay của trục đối với tốc độ quay của nó có phương trình vi phân :

$$\varphi = \int_0^t \omega\, dt + \varphi_0$$

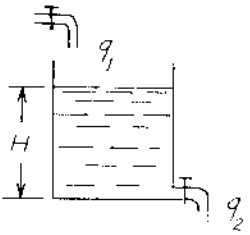
như ở hình 2.64 hoặc như ở hàm truyền của động cơ (2–55) đã được thêm vào khâu tích phân $\frac{1}{s}$.

Mực nước trong bình chứa H có diện tích đáy S không thay đổi (hình 2.65) và lưu lượng vào $q_1$ và lưu lượng ra $q_2$ với $x = q_1 - q_2$ :

$$H = \frac{1}{S}\int_0^t (q_1 - q_2)dt + H_0$$




*Hình 2.64*

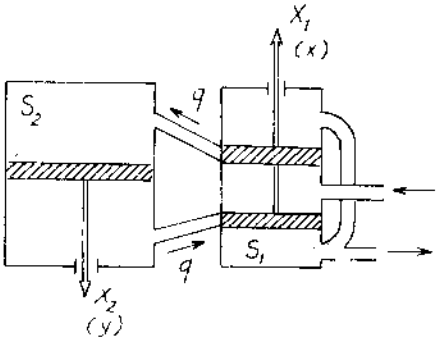



*Hình 2.65*

Khuếch đại thủy lực (hình 2.66) có thể xem là một khâu tích phân : Thay đổi vị trí $X_1$ của pittông làm thay đổi lưu lượng q trong xylanh $S_2$ và thay đổi vị trí của pittông $X_2$ so với trị số ban đầu của nó $x_{20}$.

Từ điều kiện không thể nén được của chất lỏng, ta có :

$$q = S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \approx a.x_1$$




*Hình 2.66*

Do đó :

$$x_2 = \frac{1}{S_2}\int_0^t q.dt + x_{20}$$

$$x_2 \approx \frac{a}{S_2}\int_0^t x_1 dt + x_{20}$$

### II.5.5. Khâu vi phân

Khâu vi phân lý tưởng được mô tả bởi phương trình :

$$y = k\frac{dx}{dt} \qquad (2\text{-}61)$$

có nghĩa là tín hiệu ra tỷ lệ với tốc độ biến đổi của tín hiệu vào. Đầu vào là bậc thang đơn vị, đầu ra sẽ là xung đơn vị – hàm $\delta(t)$. Đó là điều không có trong thực tế nhưng trong phép biến đổi sơ đồ khối có khi phải dùng đến. Tương ứng với (2-61) có hàm truyền :

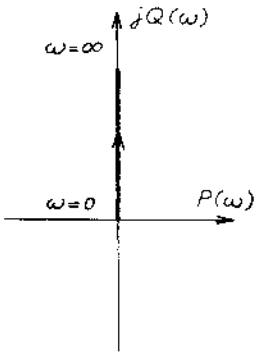
$$W(s) = k.s \qquad (2\text{-}62)$$

Đặc tính tần biên pha :

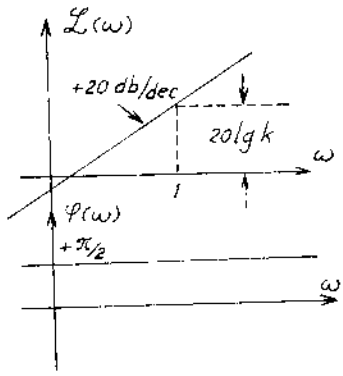
$$W(j\omega) = jk\omega \qquad (2\text{-}63)$$

như ở hình 2.67 trùng với phần dương của trục ảo.

Đặc tính tần số logarit như ở hình 2.68.




*Hình 2.67*




*Hình 2.68*

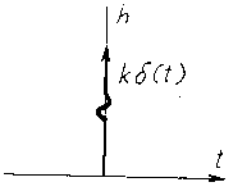
Hàm quá độ là hàm Dirắc như ở hình 2.69 :

$$h(t) = k\frac{d1(t)}{dt} = k\delta(t) \qquad (2\text{-}64)$$

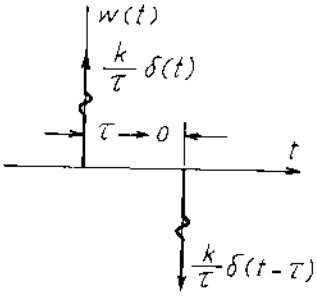
và hàm trọng lượng $w(t) = k\delta'(t)$ như ở hình 2.70.

Đối với tụ điện như ở hình 2.71, mối quan hệ giữa dòng điện với điện áp là :

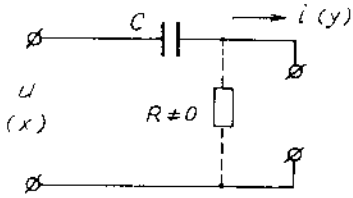
$$i = C\frac{du}{dt}$$




*Hình 2.69*




*Hình 2.70*




*Hình 2.71*

Trong thực tế ở tụ điện luôn tồn tại điện trở $R \neq 0$.

Phương trình vi phân của khâu vi phân thực tế (hay *vi phân quán tính*) có dạng :

$$T\frac{dy}{dt} + y = k\frac{dx}{dt} \qquad (2\text{-}65)$$

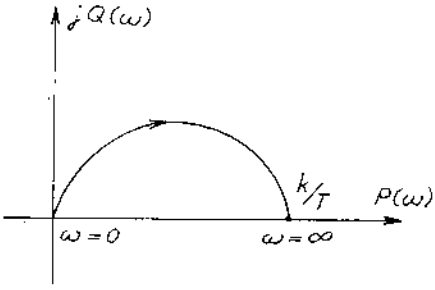
Hàm truyền :

$$W(s) = \frac{k.s}{1 + Ts}$$

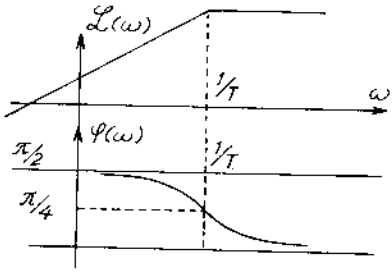
và đặc tính tần biên pha như ở hình 2.72 :

$$W(j\omega) = \frac{k\,j\omega}{1 + j\omega T} \qquad (2\text{-}66)$$

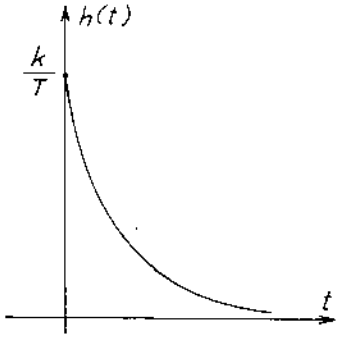
Đặc tính tần số logarit xấp xỉ là hai đoạn thẳng như ở hình 2.73.



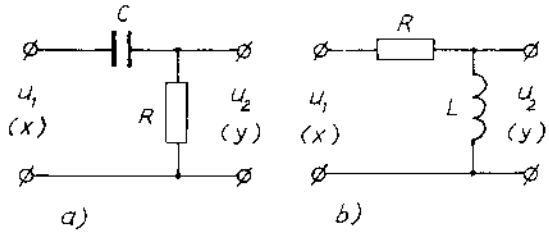

*Hình 2.72*




*Hình 2.73*




*Hình 2.74*




*Hình 2.75*

Hàm quá độ được xác định bởi :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k.s}{1+Ts}\,\frac{1}{s}\right\} = \frac{k}{T}e^{-\frac{1}{T}t} \qquad (2\text{-}67)$$

như ở hình 2.74 và hàm trọng lượng :

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T}\delta(t) - \frac{k}{T^2}e^{-\frac{1}{T}t} \qquad (2\text{-}68)$$

Khâu vi phân quán tính thường gặp là các mạch RC, RL như ở hình 2.75a, b hay hệ cơ khí có phản hồi mềm thủy lực như ở hình 2.76.

*Khâu cưỡng bức* có phương trình vi phân :

$$y = k\left(x + T\frac{dx}{dt}\right) \qquad (2\text{-}69)$$

cũng là một dạng khâu lý tưởng vì tín hiệu ra vượt trước tín hiệu vào. Hàm truyền khâu cưỡng bức :

$$W(s) = k(1 + sT) \qquad (2\text{-}70)$$

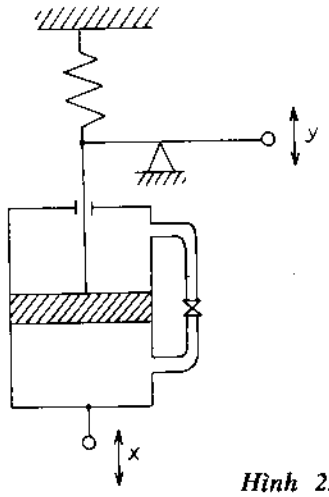
và đặc tính tần biên pha :

$$W(j\omega) = k(1 + j\omega T) \qquad (2\text{-}71)$$

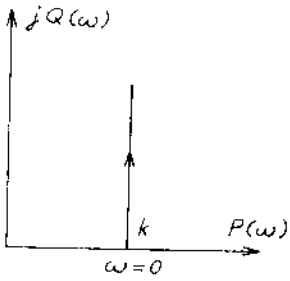
như ở hình 2.77.

Đặc tính tần số logarit như ở hình 2.78.

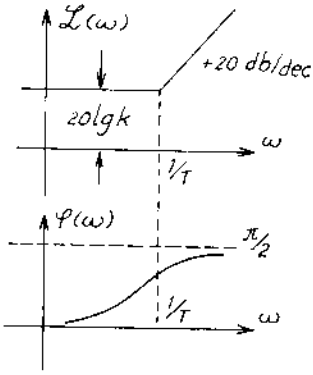
Khâu cưỡng bức gồm có hai khâu tỷ lệ và vi phân nối song song với nhau.




*Hình 2.76*




*Hình 2.77*



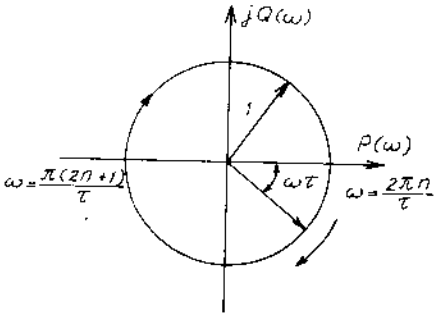

*Hình 2.78*

Hàm quá độ và hàm trọng lượng tương ứng với :

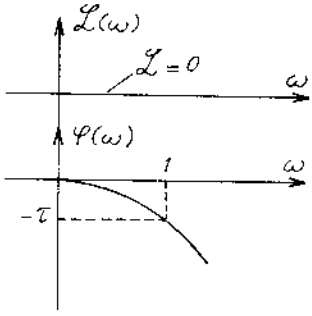
$$h(t) = k.1(t) + k\delta(t) \qquad (2\text{-}72)$$

$$w(t) = k.\delta(t) + k.T\delta'(t) \qquad (2\text{-}73)$$

Ở các khâu cưỡng bức thực tế, cũng như khâu vi phân, luôn có những thông số nhỏ tạo nên quán tính và bậc của mẫu số hàm truyền lớn hơn ở tử số.




*Hình 2.79*




*Hình 2.80*

### II.5.6. Khâu trễ

Khâu trễ được mô tả bởi phương trình vi phân :

$$y(t) = x(t - \tau) \qquad (2\text{-}74)$$

với $\tau$ – thời gian trễ.

Hàm truyền có dạng :

$$W(s) = e^{-s\tau}; \qquad (2\text{-}75)$$

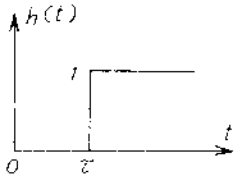
Đặc tính tần biên pha như ở hình 2.79 :

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \qquad (2\text{-}76)$$

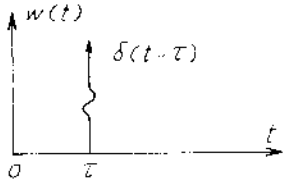
Ở hình 2.80 là đặc tính tần số logarit :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega) &= 20\lg 1 = 0 \\ \varphi(\omega) &= -\omega\tau \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}77)$$

Hàm quá độ, ứng với (2–74) có dạng như ở hình 2.81 và hàm trọng lượng như ở hình 2.82.




*Hình 2.81*

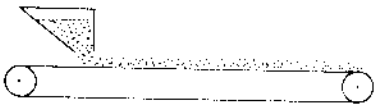



*Hình 2.82*

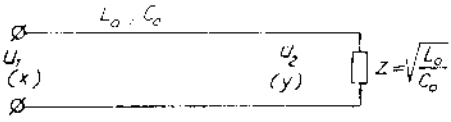
Các phần tử trễ thường gặp như các đường ống dẫn, các băng chuyền (hình 2.83), ở các hệ thuỷ lực cũng như ở các đường dây dẫn điện dài (hình 2.84) (mà không tính đến tổn thất, điện cảm và điện dung) ở các lò nhiệt độ với độ trễ tính theo chênh lệch giữa nhiệt độ trung bình và nhiệt độ nơi đặt vật nung.

Ngoài các khâu trên, còn có những khâu đặc biệt khác có thể gặp trong thực tế như khâu pha không cực tiểu, khâu không ổn định, các khâu có thông số rải.

Trong một số thiết bị như mạch cầu, mạch vi phân, còn gặp những khâu mà ở vế phải có hệ số âm (hay nghiệm không ở phía phải của trục ảo trên mặt phẳng nghiệm số).



*Hình 2.83*




*Hình 2.84*

### II.5.7. Khâu pha không cực tiểu

Phương trình vi phân của khâu pha không cực tiểu, ổn định có dạng :

$$T_2 \frac{dy}{dt} + y = k\left(x - T_1 \cdot \frac{dx}{dt}\right) \qquad (2\text{-}78)$$

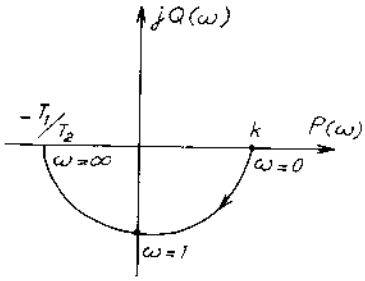
Hàm truyền tương ứng là :

$$W(s) = \frac{k(1 - T_1 s)}{1 + T_2 s} \qquad (2\text{-}79)$$

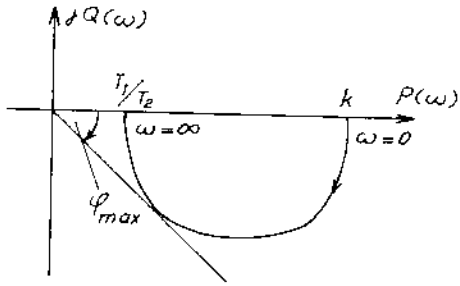
Đặc tính tần biên pha :

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega T_1)}{1 + j\omega T_2} \qquad (2\text{-}80)$$

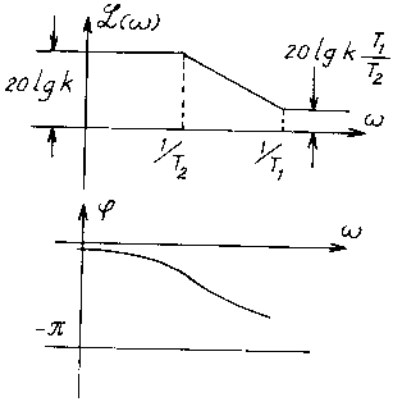
như ở hình 2.85 ứng với $T_1/T_2 < 1$.



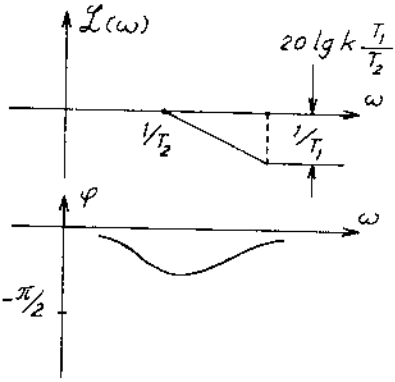

*Hình 2.85*




*Hình 2.86*




*Hình 2.87*




*Hình 2.88*

Khâu tích phân cưỡng bức pha cực tiểu không có nghiệm không như ở trường hợp trên, có đặc tính tần biên pha :

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega T_1)}{1 + j\omega T_2} \qquad (2\text{-}81)$$

như ở hình 2.86 với $\frac{T_1}{T_2} < 1$.

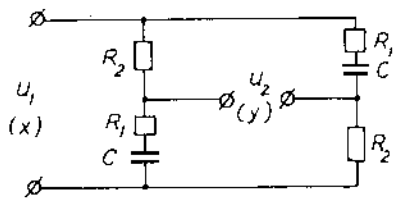
Góc dịch pha chỉ ở phần tư thứ tư nên gọi là *pha cực tiểu*. Cả hai trường hợp nếu $\frac{T_1}{T_2} > 1$, đặc tính sẽ nằm phía trên trục hoành và mang tính chất vi phân. Đặc tính tần số logarit của chúng giống nhau về biên độ nhưng khác nhau về pha như ở hình 2.87 (pha không cực tiểu) và hình 2.88 (pha cực tiểu).

Ở hình 2.89 có mạch cầu ứng với pha không cực tiểu nói trên. Phương trình vi phân có dạng :

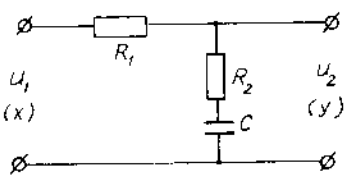
$$U_2 + (R_1 + R_2)C\frac{dU_2}{dt} = U_1 - (R_2 - R_1)C\frac{dU_1}{dt} \qquad (2\text{–}82)$$

Còn ở hình 2.90 là mạch tích phân cưỡng bức ứng với phương trình vi phân :

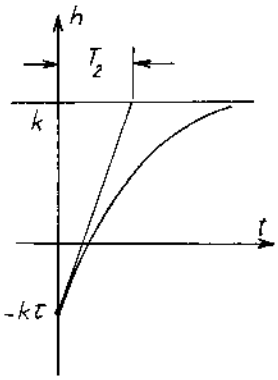
$$U_2 + (R_1 + R_2)C\frac{dU_2}{dt} = U_1 + R_2C\frac{dU_1}{dt} \qquad (2\text{–}83)$$



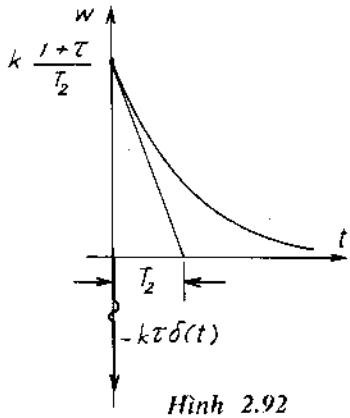

*Hình 2.89*




*Hình 2.90*




*Hình 2.91*




*Hình 2.92*

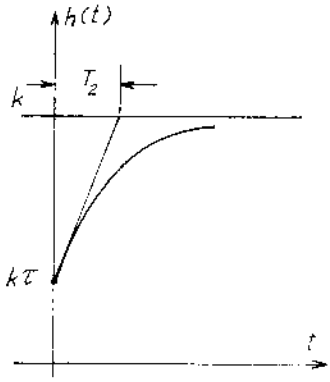
Hàm quá độ và hàm trọng lượng của khâu pha không cực tiểu có dạng tương ứng :

$$h(t) = k\left[1 - \left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right)e^{-\frac{1}{T_2}t}\right]1(t) \qquad (2\text{-}84)$$

$$w(t) = -k\frac{T_1}{T_2}\delta(t) + \frac{1+\tau}{T_2}\,ke^{-\frac{1}{T_2}t} \qquad (2\text{-}85)$$

như ở hình 2.91 và 2.92.

Hàm quá độ của khâu pha không cực tiểu (hình 2.91) đổi dấu trong khi khâu tích phân cưỡng bức pha cực tiểu không đổi dấu (hình 2.93).




*Hình 2.93*

### II.5.8. Khâu không ổn định

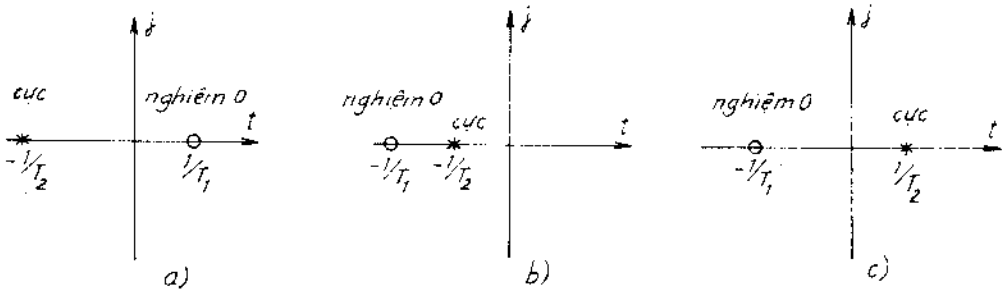
Khâu không ổn định bậc một có dạng sau :

$$y - T_2 \cdot \frac{dy}{dt} = k\left(x + T_1 \cdot \frac{dx}{dt}\right) \qquad (2\text{-}86)$$

Hàm truyền của khâu không ổn định :

$$W(s) = k\,\frac{1 + s.T_2}{1 - s.T_1} \qquad (2\text{-}87)$$

Các khâu pha không cực tiểu (2-78), tích phân cưỡng bức (2-81) và khâu không ổn định (2-86) khác nhau ở sự phân bố nghiệm tương ứng với các trường hợp a, b, c trên hình 2.94.



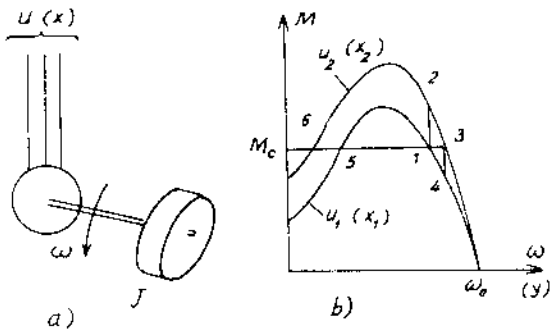

*Hình 2.94*

**Ví dụ 2-8**

Động cơ xoay chiều (hình 2.95a) có đặc tính cơ như ở hình 2.95b. Khảo sát chế độ làm việc của động cơ khi điều khiển bằng cách thay đổi điện áp U ta thấy :

Với $\omega \equiv y$ có phương trình vi phân :

$$T_1 \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega = k.u$$




*Hình 2.95*

với $T_1$ – hằng số thời gian điện cơ (bỏ qua hằng số điện từ). Phương trình cân bằng mômen có dạng :

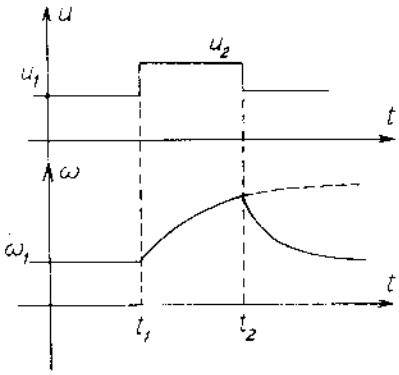
$$M = J\frac{d\omega}{dt} + M_c$$

với J – mômen quán tính của động cơ, $M_c$ – mômen cản.

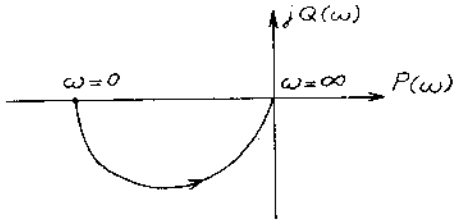
Đặc tính cơ cắt trục $M_c = M$ tại hai điểm. Điểm *1* (ứng với điện áp $u_1$) là điểm làm việc ổn định. Khi tăng điện áp $u = u_2$ động cơ sẽ có gia tốc $d\omega/dt = \Delta M_1/J$. Tốc độ tăng dần đến điểm làm việc *3* – điểm làm việc ổn định với điện áp $u_2$. Bây giờ nếu giảm điện áp $u = u_1$, động cơ sẽ giảm tốc độ ứng với $\Delta M_2/J$ và tốc độ giảm đến $\omega_1$ (hình 2.96).

Chế độ ổn định là chế độ mà khi tốc độ tăng, ΔM giảm. Điểm *5* và *6* là chế độ không ổn định vì kết quả ngược lại. Ứng với hàm truyền :

$$W(s) = \frac{k}{T_1 s - 1} \qquad (2\text{-}88)$$




*Hình 2.96*




*Hình 2.97*

và đặc tính tần biên pha :

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_1 j\omega - 1} \qquad (2\text{-}89)$$

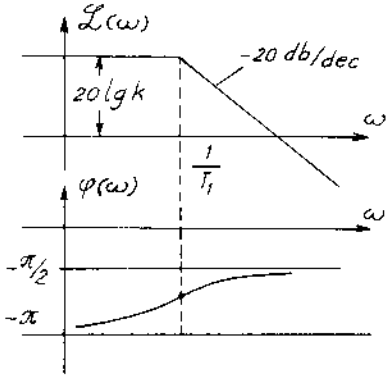
như ở hình 2.97, đối xứng với đặc tính tần biên pha của khâu quán tính (hình 2.43) và có biên độ :

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \qquad (2\text{-}90)$$

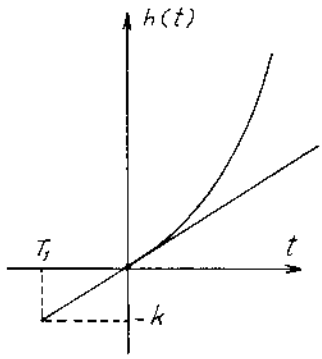
nên đặc tính biên độ logarit trùng hợp với khâu quán tính. Đặc tính pha thì khác hẳn :

$$\varphi(\omega) = -\pi + \operatorname{arctg}(\omega T_1) \qquad (2\text{-}91)$$

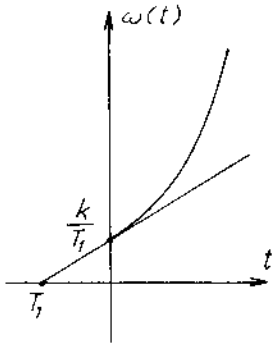
như ở hình 2.98.



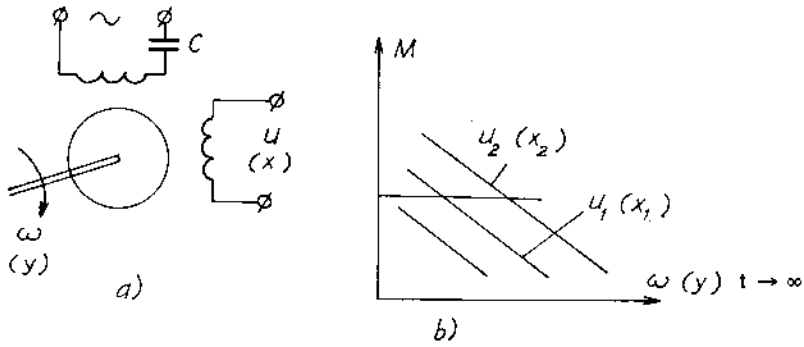

*Hình 2.98*




*Hình 2.99*




*Hình 2.100*




*Hình 2.101*

Hàm quá độ và hàm trọng lượng :

$$h(t) = k\left[e^{\frac{1}{T_1}t} - 1\right] \qquad (2-92)$$

$$w(t) = \frac{k}{T_1}\, e^{\frac{1}{T_1}t} \qquad (2-93)$$

tương ứng với hình 2.99 và 2.100.

Động cơ xoay chiều hai pha (hình 2.101a và b) không có điểm làm việc không ổn định như trên. Khi thay đổi điện áp điều khiển, đặc tính cơ hầu như là những đường song song với nhau.

## BÀI TẬP CHƯƠNG II

**Bài tập 2-1**

Ứng dụng định lý tới hạn để xác định sai lệch tĩnh $e_{ss} = \lim\limits_{t \to \infty} e(t)$ cho các trường hợp :

a) $E(s) = \dfrac{s + 11}{(s + 2)(s + 5)}$ ; b) $E(s) = \dfrac{2}{s(s + 3)}$

c) $E(s) = \dfrac{4s^2 + 5s + 6}{s(2s^3 + 7s^2 + 13s + 2)}$ ; d) $E(s) = \dfrac{2s^2 + 5s + 1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$

*Đáp số :*

a) $e_{ss} = 0$ ; b) $= \dfrac{2}{3}$ ; c) $= 3$ ; d) $= 0$

**Bài tập 2-2**

Dùng phân thức đơn giản như ở ví dụ 2-1 và bảng 2.1 (mục II.2) xác định hàm quá độ đối với hàm truyền :

$$W(s) = \frac{5(1 - 0{,}4s)}{(s + 1)(0{,}2s + 1)} \text{ với } x(t) = 1(t)$$

*Đáp án*

$$H(s) = \frac{5(1 - 0{,}4s)}{s(s + 1)(0{,}2s + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1} + \frac{K_3}{s + 5} ;$$

$$K_1 = \frac{25(1 - 0{,}4s)}{(s + 1)(s + 5)}\Big|_{s\ 0} = 5 \ ; \ K2 = \frac{25(1 - 0{,}4s)}{s(s + 5)}\Big|_{s=-1} = -8{,}75$$

$$K_3 = \frac{25(1 - 0{,}4s)}{s(s+1)}\Big|_{s=-5} = +3{,}75$$

$$h(t) = 5 - 8{,}75e^{-t} + 3{,}75e^{-5t}$$

**Bài tập 2-3**

Dùng phương pháp trên, xác định y(t) với tín hiệu vào $x(t) = e^{-t}$ và hàm truyền :

$$W(s) = 3\,\frac{s^2 + 9s + 18}{s^2 + 6s + 8}\ ;$$

*Đáp án*

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{3(s^2 + 9s + 18)}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}$$

$$K_1 = \frac{3(s^2 + 9s + 18)}{(s+2)(s+4)}\Big|_{s=-1} = 10\ ;\ K_2 = \frac{3(s^2 + 9s + 18)}{(s+1)(s+4)}\Big|_{s=-2} = -6$$

$$K_3 = \frac{3(s^2 + 9s + 18)}{(s+2)(s+1)}\Big|_{s=-4} = -1 \qquad y(t) = 10e^{-t} - 6e^{-2t} - e^{-4t}$$

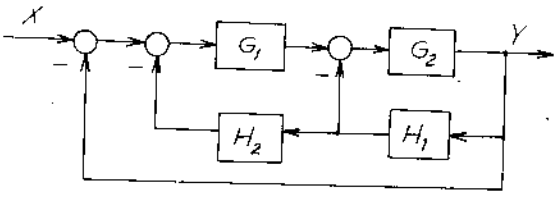
**Bài tập 2-4**

Xác định và đơn giản hóa hàm truyền W = Y/X theo hình 2.102 và 2.103.

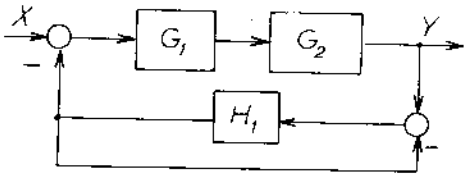
*Đáp án :*

$$\text{a)}\ W = \frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2}{1 + G_2H_1 + G_1G_2 + G_1G_2H_1H_2}$$

$$\text{b)}\ W = \frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2(1 + H_1)}{1 + H_1 + G_1G_2H_1}$$



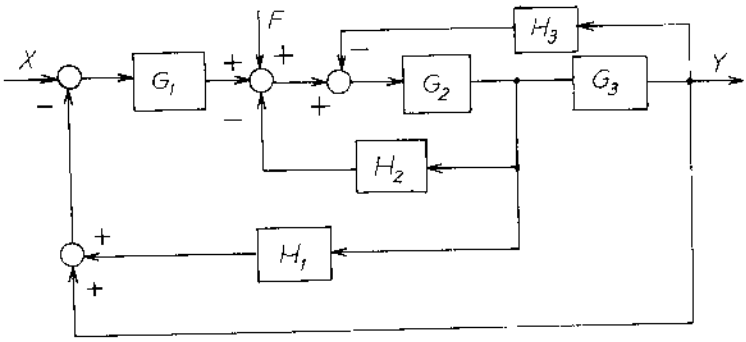

*Hình 2.102*




*Hình 2.103*

**Bài tập 2-5**

Xác định hàm truyền Y/X và Y/F theo hình 2.104.




*Hình 2.104*

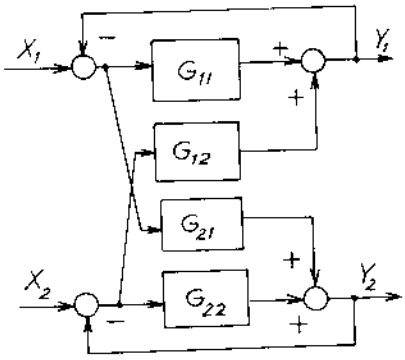
*Đáp án*

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2G_3}{\Delta}\ ; \qquad \frac{Y}{F} = \frac{G_2G_3}{\Delta}$$

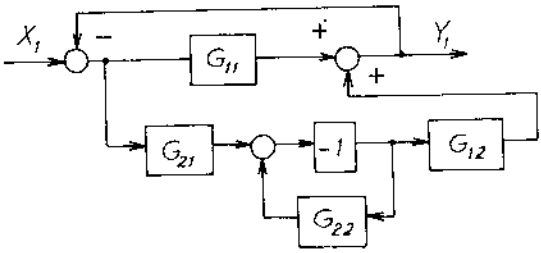
$$\Delta = 1 + G_2H_2 + G_2G_3H_3 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3$$

**Bài tập 2-6**

Xác định hàm truyền $Y_1/X_1$ và $Y_1/X_2$ theo hình 2.105.




*Hình 2.105*




*Hình 2.106*

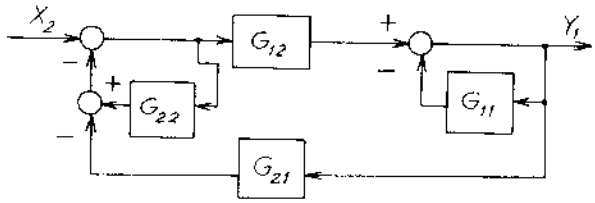
*Đáp án :*

a) Với $X_2 = 0$ (xem hình 2.106)

$$Y_1/X_1 = \frac{G_{11} + G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}{1 + G_{22} + G_{11} + G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}$$

b) Với $X_1 = 0$ (xem hình 2.107)

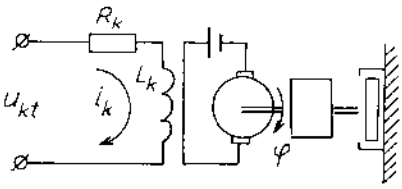
$$\frac{Y_1}{X_2} = \frac{G_{12}}{1 + G_{22} + G_{11} + G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}}$$




*Hình 2.107*

**Bài tập 2-7**

Xác định hàm truyền động cơ một chiều điều khiển điện áp kích từ $\frac{\varphi}{U_{kt}}$ theo hình 2.108.




*Hình 2.108*

*Đáp án*

Mạch kích từ :

$$U_{kt} = R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt}$$

Mômen động cơ :

$$M = K_m i_k = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt}$$

Từ đó : $$\frac{\varphi}{U_{kt}} = \frac{K_m/R_k B}{s(T_{dc}s + 1)(T_{dt}s + 1)}$$

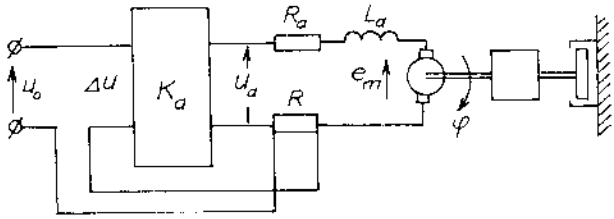
$T_{dc} = J/B$ - hằng số thời gian điện cơ (J- mômen quán tính, B - hằng số giảm chấn) :

$T_{dt} = L_k/R_k$ - hằng số điện từ.

Thông thường $T_{dt} << T_{dc}$ $\quad \frac{\varphi}{U_{kt}} = \frac{K_m/(R_k B)}{s(T_{dc}s + 1)}$

**Bài tập 2-8**

Xác định hàm truyền của động cơ một chiều có hồi tiếp dòng như ở hình 2.109.




*Hình 2.109*

*Đáp án*

Phương trình cân bằng điện áp và mômen :

$$U_a = (R_a + R + L_a s) I_a + E_m$$

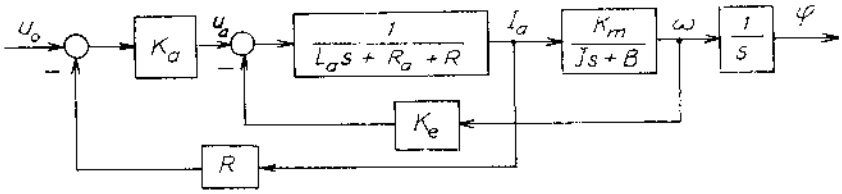
$$E_m = K_e s.\varphi$$

$$M = K_m I_a = s(J.s + B)\varphi$$

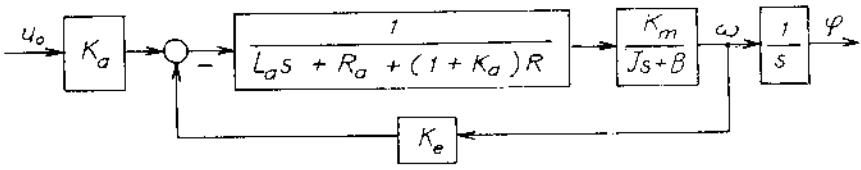
$$\Delta U = U_o - I_a R \ ; \ U_a = K_a \Delta U.$$

Sơ đồ khối như ở hình 2.110 và sau khi đưa hồi tiếp dòng ra sau, xác định sơ đồ tương đương (hình 2.111) và :

$$\frac{\varphi}{U_0} = \frac{K_a}{s} \frac{K_{dc}}{T_{dt}T_{dc}s^2 + (T_{dc} + \gamma T_{dt})s + \gamma + 1}$$




*Hình 2.110*




*Hình 2.111*

với :

$$K_{dc} = \frac{1}{K_e}$$

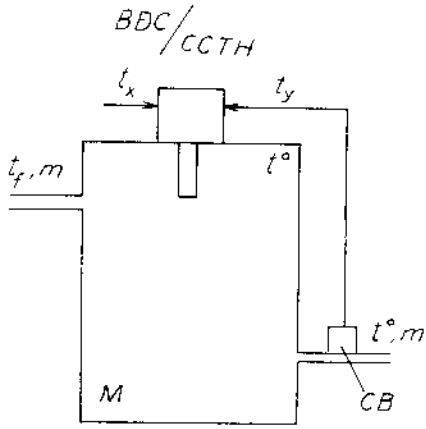
$$T_{dt} = \frac{L_a}{R_a + (1 + K_a)R}$$ là hằng số điện từ

$$T_{dc} = \frac{J[R_a + (1 + K_a)R]}{K_e K_m}$$ là hằng số điện cơ ;

$$\gamma = \frac{B[R_a + (1 + K_a)R]}{K_e K_m}$$ là hệ số tắt dần.

**Bài tập 2-9**

Hệ điều chỉnh nhiệt độ như ở hình 2.112. Nhiệt độ đặt $t_x$ và nhiệt độ $t_y$ cảm biến đo được với quán tính $\tau$ đưa vào bộ điều chỉnh có hàm truyền $G_c$. Lưu lượng dòng nhiệt từ thiết bị tạo nhiệt tỷ lệ với tín hiệu ra của bộ điều chỉnh. Viết phương trình và vẽ sơ đồ khối với tỷ nhiệt c, khối lượng trong lò M và khối lượng của dòng chảy qua lò m.

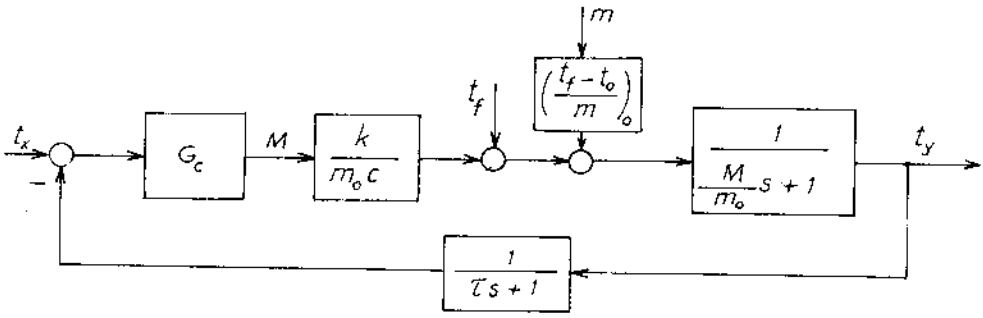



*Hình 2.112*

*Đáp án*

Tốc độ thay đổi nhiệt độ trong lò :

$$Mc\frac{dt_o}{dt} = mc(t_f - t_o) + q.$$




*Hình 2.113*

Sau khi tuyến tính hóa tại điểm làm việc :

$$Mc\frac{dt_o}{dt} = c(t_f - t_o)_o m + m_o c(t_f - t_o) + q$$

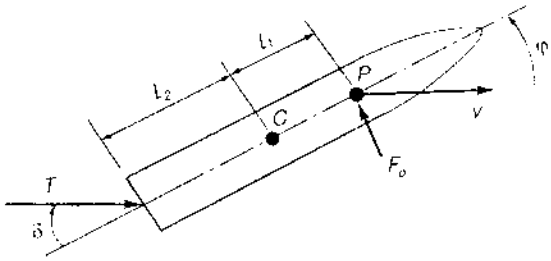
$$\left(\frac{M}{m_o}s + 1\right)t_o = t_f + \frac{1}{m_o c}q + \left(\frac{t_f - t_o}{m}\right)_o m$$

$$\frac{t_y}{t_o} = \frac{1}{\tau s + 1} \; ; \quad M = G_c(t_x - t_y) \; ; \quad Q = kM$$

Sơ đồ khối như ở hình 2.113.

**Bài tập 2-10**

Do có các lực tác động mà tên lửa là một hệ không ổn định (hình 2.114). Các lực này tác động vào trọng tâm áp lực P, tỷ lệ với góc tấn $\varphi$, tạo nên mômen $C_n l_1 \varphi$ quanh trọng tâm C theo hướng tăng $\varphi$ (làm mất ổn định hệ) mà $C_n$ là hệ số của lực, phụ thuộc tốc độ tên lửa v và các yếu tố khác. Sức đẩy phản lực T điều khiển độ lệch $\delta$, nhằm làm cho $\varphi$ = 0 và hệ ổn định. Mômen quán tính của tên lửa đối với C là J. Nhiều khi còn dùng con quay làm phản hồi tốc độ để hệ ổn định. Viết phương trình và vẽ sơ đồ khối.

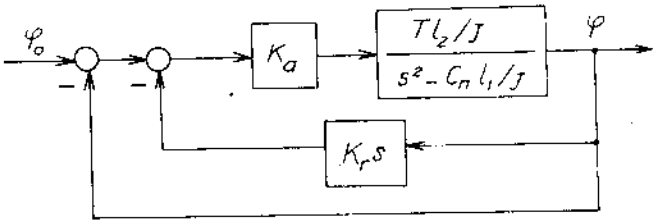



*Hình 2.114*

*Đáp án*

Phương trình mômen của tên lửa :

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = C_n l_1 \varphi + T.l_2\delta$$

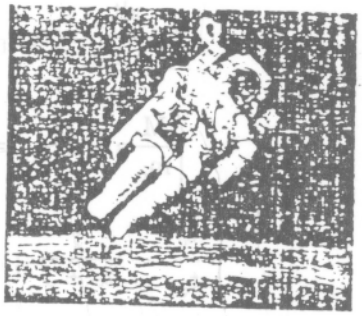



*Hình 2.115*

Từ đó :

$$\frac{\varphi}{\delta} = \frac{T.l_2/J}{s^2 - C_n l_1/J}.$$

Ở hình 2.115, $K_a$ là khuếch đại, từ cơ cấu thừa hành của phản lực. $K_r$ là hệ số hồi tiếp của con quay đo tốc độ $\omega$.



*Hình 2.116*

**Bài tập 2-11**

Nhà du hành vũ trụ Bruce Mc Candless đã dùng thiết bị tạo xung lực bằng vòi khí nén để di chuyển trong không gian (hình 2.116). Cơ cấu điều khiển được thực hiện bằng khuếch đại $K_2$ như ở hình 2.117. Quán tính của người và thiết bị bằng $J = 25$ kg.m$^2$. $K_3$ có chức năng làm giảm sai lệch tĩnh $e_{ss}$. Các hệ số $K_1$, $K_2$, $K_3$ có tác dụng xác định chất lượng tĩnh và động của hệ.

a) Viết hàm truyền của hệ kín.

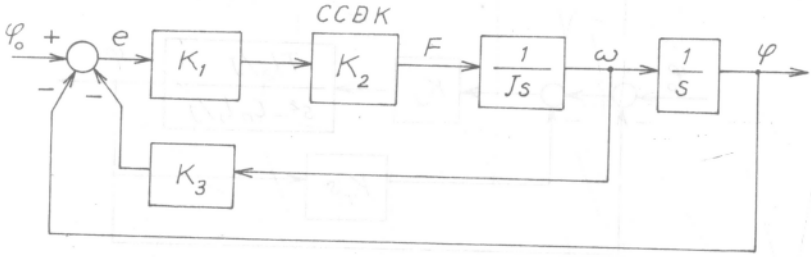
b) Xác định E(s) khi đầu vào là $x(t) = \varphi_o(t) = t$.

*Đáp án*

a) $$W_k(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)} = \frac{K_1K_2}{s(J.s + K_1K_2K_3) + K_1K_2}$$

b) $$W_e(s) = \frac{E(s)}{\varphi_o(s)} \quad \rightarrow \quad \varphi_o(s) = \frac{1}{s}$$

$$E(s) = \frac{Js + K_1K_2K_3}{s(Js + K_1K_2K_3) + K_1K_2} = K_3$$



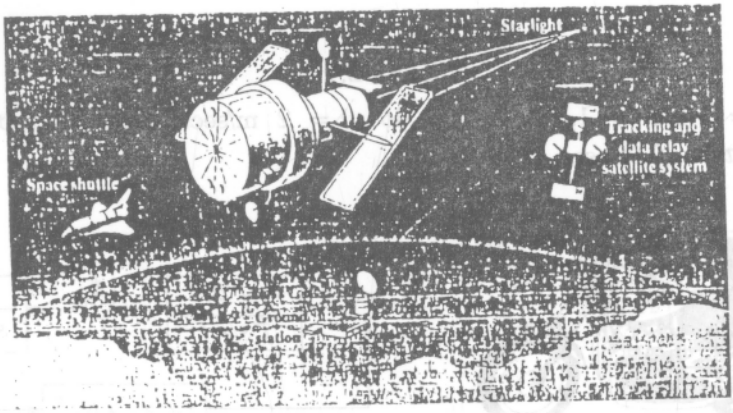

*Hình 2.117*

**Bài tập 2-12**

Kính viễn vọng vũ trụ như ở hình 2.118, có sơ đồ khối như ở hình 2.119 mà K và $K_1$ là những hệ số cần chọn để đạt chất lượng tĩnh và động cho trước.

a) Đơn giản hóa sơ đồ khối và viết hàm truyền đối với tín hiệu vào x(t) và nhiễu f(t) : Y/X, Y/F

b) Xác định E(s) khi tín hiệu vào là 1(t) và t.



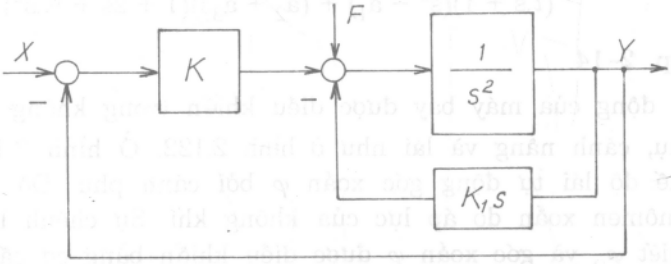

*Hình 2.118*

*Đáp án*

a)
$$\frac{Y}{X} = \frac{K}{s(s+K_1)+K}$$

$$\frac{Y}{F} = \frac{1}{s(s+K_1)+K}$$

b)
$$\frac{E}{X} = \frac{s(s+K_1)}{s(s+K_1)+K}$$




*Hình 2.119*

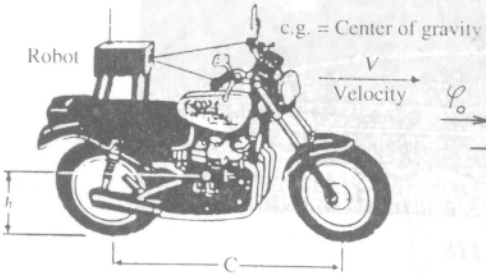
nên khi $x(t) = 1(t)$ : $e_{ss} = \frac{K_1}{K}$ ; khi $x(t) = t$ : $e_{ss} = 0$.

**Bài tập 2-13**

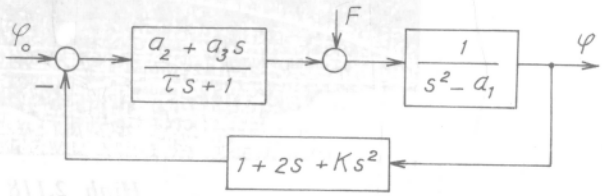
Một người máy điều khiển mô tô như ở hình 2.120 có sơ đồ khối như ở hình 2.121 và $\varphi_o$ là góc nghiêng cần thiết so với phương thẳng đứng. K là hệ số cần xác định để mô tô hoạt động ổn định với :

$$a_1 = g/h = 9 \;;$$
$$a^2 = v^2/hc = 2{,}7$$

$a_3 = v/h.c = 1{,}35$ với tốc độ $v = 2$ m/sec. Hằng số thời gian của rôbốt là $\tau = 0{,}02$ sec.




*Hình 2.120*




*Hình 2.121*

Viết hàm truyền đối với tín hiệu vào và nhiễu.

*Đáp án :*

$$\varphi/\varphi_o = \frac{a_2 + a_3}{(\tau.s + 1)(s^2 - a_1) + (a_2 + a_3 s)(1 + 2s + K.s^2)}$$

$$\varphi/F = \frac{\tau s + 1}{(\tau.s + 1)(s^2 - a_1) + (a_2 + a_3 s)(1 + 2s + K.s^2)}$$

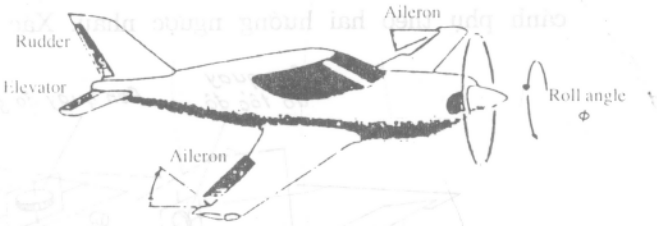
**Bài tập 2-14**

Chuyển động của máy bay được điều khiển trong không gian 3 chiều bởi cánh phụ, cánh nâng và lái như ở hình 2.122. Ở hình 2.123 có sơ đồ khối của chế độ lái tự động góc xoắn $\varphi$ bởi cánh phụ. Độ lệch của góc $\theta$ tạo nên mômen xoắn do áp lực của không khí. Sự chênh lệch giữa góc xoắn cần thiết $\varphi_o$ và góc xoắn $\varphi$ được điều khiển bằng cơ cấu thừa hành thủy lực. $K_1$, $K_2$ là các hệ số hồi tiếp góc và tốc độ thực hiện bởi các con quay đo góc và đo tốc độ. Hãy xác định hàm truyền $\varphi/\varphi_o$ và $E/\varphi_o$.

*Đáp án :*

$$\frac{\varphi}{\varphi_o} = \frac{K_o}{s[s(s+1) + K_oK_2] + K_oK_1}$$

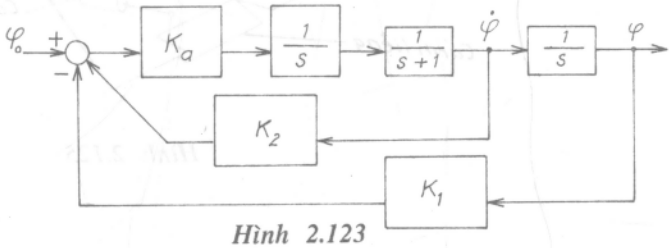
$$\frac{E}{\varphi_o} = \frac{s[s(s+1) + K_oK_2]}{s[s(s+1) + K_oK_2] + K_oK_1}$$



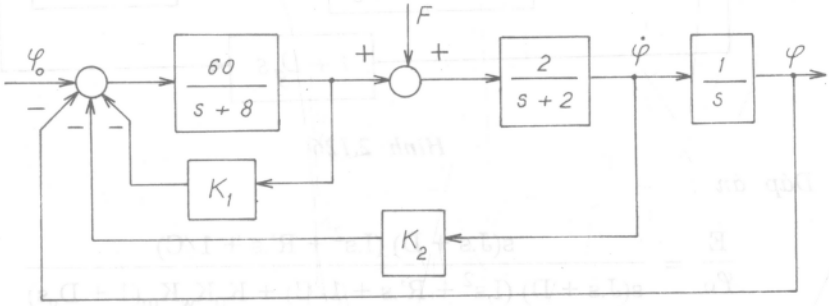

*Hình 2.122*

**Bài tập 2-15**

Tàu thủy Radisson Diamond dùng phao nổi và cánh ổn định để giảm va đập của sóng có sơ đồ khối như ở hình 2.124. Hãy xác định hàm truyền đạt $\varphi/\varphi_o$ và $\varphi/F$.




*Hình 2.123*




*Hình 2.124*

*Đáp án :*

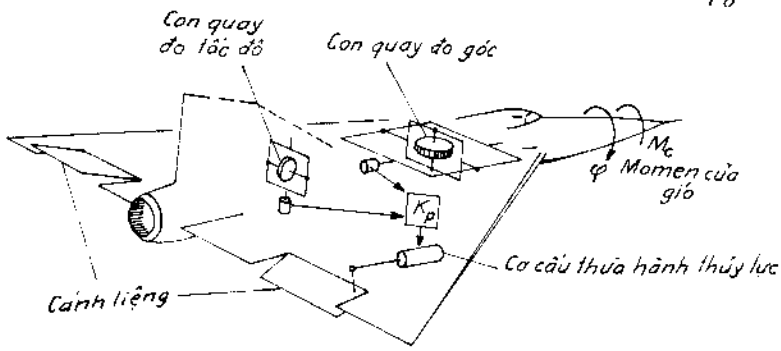
$$\frac{\varphi}{\varphi_o} = \frac{120}{s\{(s+2)[(s+8) + 60K_1] + 120K_2\} + 120}$$

$$\frac{\varphi}{F} = \frac{2\{[(+8) + 60K_1 + 120K_2\}}{s\{(s+2)[(s+8) + 60K_1] + 120K_2\} + 120}$$

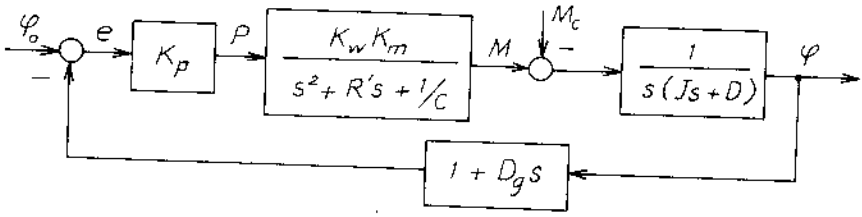
**Bài tập 2-16**

Máy bay siêu âm điều khiển cánh phụ (hình 2.125) có sơ đồ khối như ở hình 2.126. Hai con quay dùng làm hồi tiếp góc và tốc độ. Mômen M tác động vào trục thẳng đứng của máy bay bằng cách làm nghiêng hai

cánh phụ theo hai hướng ngược nhau. Xác định hàm truyền $\frac{\varphi}{\varphi_o}$, $E/\varphi_o$, $E/M_c$




*Hình 2.125*




*Hình 2.126*

*Đáp án :*

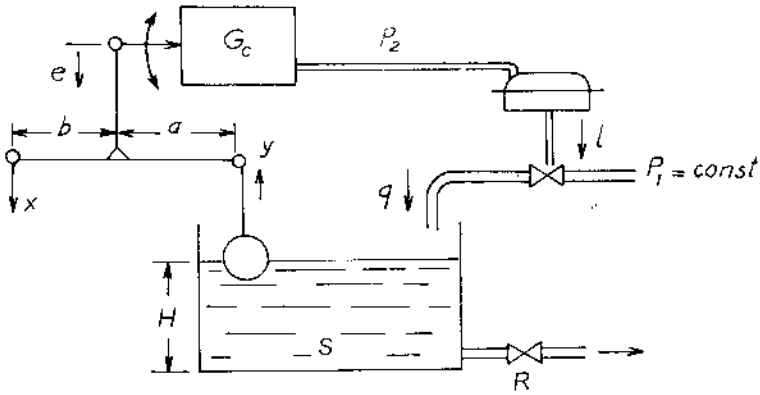
$$\frac{E}{\varphi_o} = \frac{s(J.s + D)(I.s^2 + R'.s + 1/C)}{s(J.s + D)(I.s^2 + R'.s + 1/C) + K_pK_wK_m(1 + D_gs)}$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_o} = \frac{K_pK_wK_m}{s(J.s + D)(I.s^2 + R'.s + 1/C) + K_pK_wK_m(1 + D_gs)}$$

$$\frac{E}{M_c} = \frac{-(1 + D_gs)(I.s^2 + R'.s + 1/C)}{s(J.s + D)(I.s^2 + R'.s + 1/C) + K_pK_wK_m(1 + D_gs)}$$

**Bài tập 2-17**

Hệ điều chỉnh mực nước có sơ đồ nguyên lý như ở hình 2.127. Vẽ sơ đồ khối với các thông số đã cho. Mực nước H được phao đo và cùng với lượng đặt x tạo nên sai lệch. Bộ điều chỉnh $G_c$ biến đại lượng cơ học thành áp suất $P_2$ đủ để tác động vào cơ cấu thừa hành đóng mở van bằng cách xê dịch l thay đổi lưu lượng q vào bể chứa. Vẽ sơ đồ khối và xác định hàm truyền Y/X.




*Hình 2.127*

*Đáp án*

Với : S – diện tích bể chứa

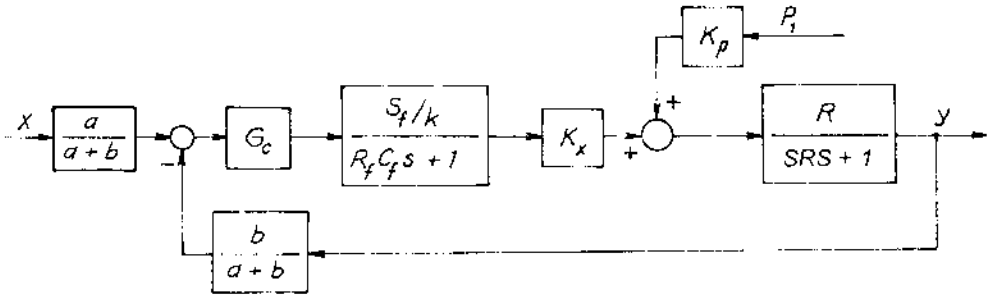
R – trở của van

$R_f$, $C_f$ – trở và dung tích của cơ cấu thừa hành

$S_f$ – diện tích màn (ở cơ cấu thừa hành)

k – hệ số đàn hồi của lò xo.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_c \frac{S_f}{k} K_x R_a}{(R_f C_f s + 1)(R.S.s + 1) + G_c \frac{S_f}{k} K_x R_b}$$




*Hình 2.128*

*Chương III*

# KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH CÁC HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

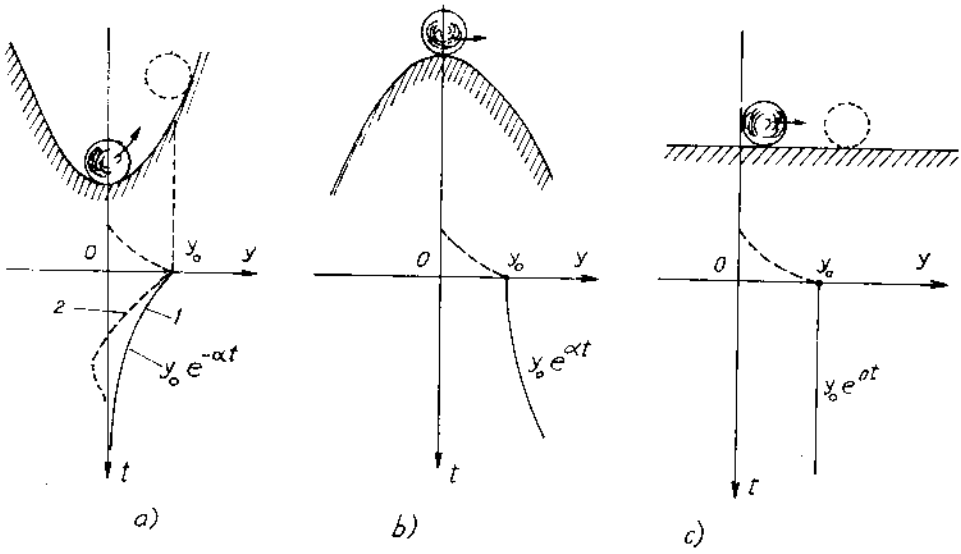
## III.1. KHÁI NIỆM CHUNG

### III.1.1. Ví dụ và định nghĩa về ổn định

Trên hình 3.1 cho trạng thái cân bằng của ba viên bi ở ba vị trí khác nhau. Dễ nhận thấy rằng a) là trạng thái ổn định, b) trạng thái không ổn định và c) trạng thái trung gian giữa hai trạng thái ổn định và không ổn định.

*Trạng thái cân bằng* là trạng thái đứng yên nếu không có lực tác động nào khác lên nó.

Nếu có một tác động nhỏ đến ba vị trí khác nhau của viên bi (được mô tả bằng đường nét đứt trên đặc tính y(t) – chuyển động của viên bi ở




*Hình 3.1*

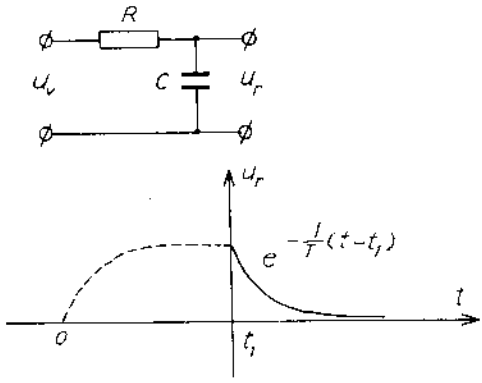
thời gian trước đó : t < 0), ta thấy :

Trường hợp a) : viên bi sẽ trở lại trạng thái cân bằng ban đầu ;

Trường hợp b) : viên bi sẽ ngày càng xa vị trí cân bằng ban đầu ;

Trường hợp c) : sau khi chuyển động, viên bi sẽ đứng yên ở vị trí mới.

Vậy : *Ổn định là sự trở về trạng thái cân bằng ban đầu khi mất tác động kích thích.*




***Hình** 3.2*

Một ví dụ khác : Một mạng 4 cực RC có hàm truyền W(s) = $\frac{1}{Ts + 1}$ như ở hình 2.3a hay 3.2. Nếu trước đó, tại thời điểm $t < t_1$ có một tác động kích thích dạng bậc thang bằng cách đặt vào một điện áp $U_v$ thì điện áp ra là :

$$U_r(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}$$

Bây giờ, tại thời điểm $t_1$, làm mất tác động kích thích ấy thì điện áp ra sẽ trở về không của trạng thái ban đầu theo biểu thức :

$$U_r(t) = e^{-\frac{1}{T}(t - t_1)}$$

Vậy khâu quán tính nói trên có quá trình ổn định.

### III.1.2. Điều kiện ổn định

Ở cả hai thí dụ trên, chuyển động của hệ ổn định khi mất tác động kích thích có thể mô tả bởi phương trình $y = y_0e^{-\alpha t}$. Đối với khâu quán tính, $\alpha$ là nghiệm của phương trình đặc trưng :

$$Ts + 1 = 0$$

$s_1 = -\frac{1}{T}$ là nghiệm thực và âm. Ở hình 3.1a, dấu trước $\alpha$ cũng là âm.

Trường hợp chung, hệ thống được mô tả bằng phương trình vi phân (2–4), nghiệm của phương trình là :

$$y(t) = y_{xl}(t) + y_{qd}(t) \qquad (3\text{–}1)$$

mà $y_{xl}(t)$ là nghiệm riêng của (2–4) có vế phải đặc trưng cho quá trình xác lập, $y_{qd}(t)$ là nghiệm tổng quát của (2–4), không có vế phải đặc trưng cho quá trình quá độ.

Quá trình xác lập là quá trình luôn ổn định vì năng lượng của một hệ luôn có giới hạn. Cho nên đánh giá tính ổn định của hệ chỉ cần căn cứ vào quá trình quá độ. Như ở biểu thức (2–25), quá trình quá độ ở hệ tuyến tính được xác định bởi :

$$y_{qd}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t} \qquad (3\text{–}2)$$

mà $s_i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng :

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (3\text{–}3)$$

Để hệ ổn định thì quá trình sẽ tắt dần theo thời gian :

$$\lim_{t \to \infty} y_{qd}(t) = 0 \qquad (3\text{–}4)$$

hay để hệ ổn định thì điều kiện cần và đủ là tất cả các nghiệm cực đều có phần thực âm :

$$\mathrm{Re}\ \{s_i\} < 0 \ (i = \overline{1, n}) \qquad (3\text{–}5)$$

Ở hình 3.1a đường 2 ứng với chuyển động của viên bi có dao động :

$$y(t) \approx y_0 e^{-\alpha t} \cos\omega_1 t$$

và nghiệm của phương trình đặc trưng là $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_1$.

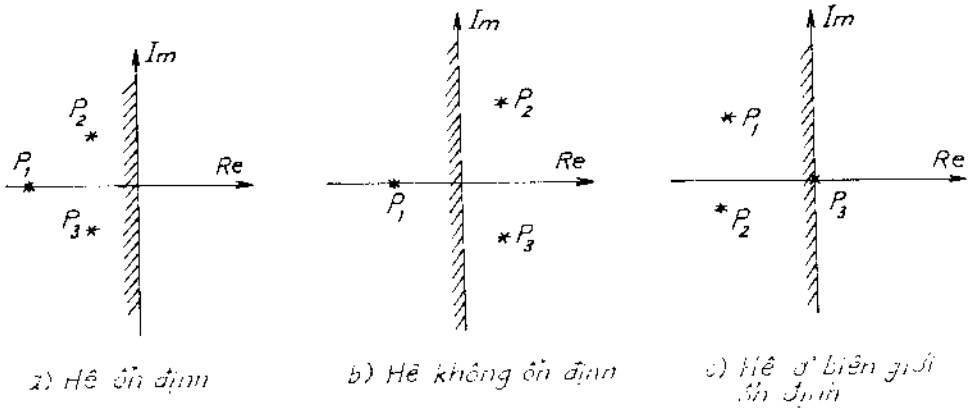
Dấu của phần thực là yếu tố quyết định tính ổn định của hệ thống.

Điều kiện ổn định có thể thể hiện bằng phân bố nghiệm trên mặt phẳng nghiệm số : *nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng đều là nghiệm trái* (nằm ở nửa trái của mặt phẳng nghiệm số hay nằm bên trái trục ảo) *thì hệ sẽ ổn định.*

Hình 3.3a tương ứng với phân bố nghiệm của một hệ ổn định. Khi có từ một nghiệm phải, hệ trở nên không ổn định (hình 3.3b) và khi nghiệm có phần thực bằng 0 : hệ ở biên giới ổn định (hình 3.3c).

Như vậy, giải phương trình đặc trưng (3–3), xét dấu phần thực của các nghiệm, ta đánh giá được tính ổn định của hệ. Trường hợp hệ bậc cao, nếu không sử dụng công cụ tính toán, thì việc xét ổn định của một

hệ là khá phức tạp và không hợp lý vì chỉ cần biết dấu của các nghiệm mà thôi. Các tiêu chuẩn ổn định cho phép đánh giá tính ổn định của hệ mà không phải giải phương trình đặc trưng nói trên.




*Hình 3.3*

## III.2. TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH ĐẠI SỐ

### III.2.1. Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz (Huốc vít)

Đối với hệ có phương trình đặc trưng (3-3), *điều kiện cần và đủ để hệ ổn định với $a_0 > 0$ là các định thức Hurwitz đều dương.*

Định thức Hurwitz lập từ ma trận hệ số theo quy tắc sau :

- Theo đường chéo của ma trận, viết các hệ số từ $a_1$ đến $a_n$.
- Phía trên đường chéo, các hệ số tăng dần, phía dưới giảm dần.
- Các hệ số nhỏ hơn $a_0$ và lớn hơn $a_n$ đều bằng 0.

Ma trận có dạng như sau :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}6)$$

Các định thức Hurwitz dương ứng với :

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \ ;$$

$$\Delta_2 = \begin{matrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{matrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1\ (a_2a_3 - a_1a_4) - a_3^2 a_0 + a_5a_1a_0 > 0$$

. . . . . .

$$\Delta_{n-1} > 0 \qquad (3\text{-}7)$$

$$\Delta_n = a_n\ \Delta_{n-1} > 0$$

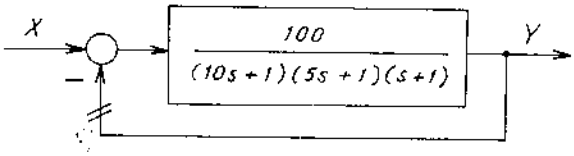
*Chú thích :*

1. Khi khảo sát ổn định, với $a_0 > 0$, nếu có hệ số bất kỳ nào âm ($a_i < 0$) thì đủ để kết luận là hệ không ổn định.

2. Với điều kiện $a_i > 0$ ($i = \overline{0, n}$) thì chỉ cần xét $\Delta_i > 0$ với ($i = \overline{2, n-1}$) vì $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$.

**Ví dụ 3-1**

Hãy khảo sát ổn định của hệ hở và hệ kín gồm ba khâu quán tính nối tiếp như ở hình 3.4.




*Hình 3.4*

*a) Trường hợp hệ hở*

Sau khi cắt hồi tiếp, ta có hàm truyền hệ hở :

$$W(s) = \frac{100}{(10s + 1)(5s + 1)(s + 1)}$$

với phương trình đặc trưng :

$$F(s) = 50s^3 + 65s^2 + 16s + 1 = 0.$$

Các hệ số $a_i (i = \overline{0,3}) > 0$ và chỉ cần xét $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 65 \times 16 - 50 = 990 > 0$$

Vậy hệ hở ổn định với $a_0 = 50$ ; $a_1 = 65$ ; $a_2 = 16$ ; $a_3 = 1$.

Thực ra, ta có thể đánh giá giản đơn hơn, vì theo phương trình đặc trưng của hệ hở :

$$F(s) = (10s + 1)\ (5s + 1)\ (s + 1) = 0$$

ta có ba nghiệm thực âm :

$$p_1 = -0,1\ ;$$
$$p_2 = -0,2\ ;$$
$$p_3 = -1.$$

*b) Trường hợp hệ kín*

Hàm truyền hệ kín $F_k(s) = 50s^3 + 65s^2 + 16s + 101 = 0$ với $a_0 = 50$ ; $a_1 = 65$ ; $a_2 = 16$ ; $a_3 = 101$.

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 65 \times 16 - 50 \times 101 = -4010 < 0$$

Hệ kín không ổn định.

**Ví dụ 3-2**

Với ví dụ trên, nhưng hệ số khuếch đại chung của cả hệ là k. Vậy, hãy xác định trị số của k để hệ ổn định.

Trong trường hợp này, phương trình đặc trưng của hệ kín là :

$$F_k(s) = 50s^3 + 65s^2 + 16s + (1 + k) = 0$$

$$\Delta_2 = 65 \times 16 - 50\ (1 + k) > 0$$

từ đó $k < 19,8$.

Chế độ dao động ứng với $k = k_{gh} = 19,8$ là dao động ở biên giới ổn định. Hệ số khuếch đại càng bé, mức độ ổn định càng cao.

### III.2.2. Tiêu chuẩn ổn định Routh (Rao)

Đối với hệ có phương trình đặc trưng (3-3), *điều kiện cần và đủ để hệ ổn định là các hệ số ở cột 1 của bảng Routh đều dương.*

Bảng Routh (bảng 3.1) được thành lập theo quy tắc sau :

– Hai hàng đầu tiên viết các hệ số tăng dần từ $a_0$ đến $a_n$ sao cho hàng thứ nhất có các hệ số $a_0$ và hệ số chẵn, hàng thứ hai là các hệ số lẻ.

– Ở cột phụ, hệ số $r_i$ là tỷ số các hệ số của cột bên cạnh với hai hàng bên trên nó.

– Các hệ số khác ($C_{ij}$) là hiệu của hệ số cột bên cạnh và của hai hàng bên trên, hệ số sau nhân với hệ số cột phụ cùng hàng.

*Bảng 3.1*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Hệ số chẵn | $C_{11} = a_0$ | $C_{21} = a_2$ | $C_{31} = a_4$ |
| Hệ số lẻ | $C_{12} = a_1$ | $C_{22} = a_3$ | $C_{32} = a_5$ |
| $r_3 = C_{11}/C_{12}$ | $C_{13} = C_{21} - r_3C_{22}$ | $C_{23} = C_{31} - r_3C_{32}$ | $C_{33} = C_{41} - r_3C_{42}$ |
| $r_4 = C_{12}/C_{13}$ | $C_{14} = C_{22} - r_4C_{23}$ | $C_{24} = C_{32} - r_4C_{33}$ | $C_{34} = C_{42} - r_4C_{43}$ |

Nếu có một hệ số nào ở cột một $(C_{1j}) < 0$, $j = \overline{1, n+1}$, hệ không ổn định.

**Ví dụ 3-3**

Với cùng ví dụ trên, ta lập bản Routh để xét ổn định đối với hệ kín.

| | | |
|---|---|---|
| Hệ số chẵn | $C_{11} = a_0 = 50 > 0$ | $C_{21} = a_2 = 16$ |
| Hệ số lẻ | $C_{12} = a_1 = 65 > 0$ | $C_{22} = a_3 = 101$ |
| $r_3 = \frac{50}{65}$ | $C_{13} = 16 - \frac{50}{65} 101 = -61{,}7 < 0$ | $C_{23} = 0$ |
| $r_4 = \frac{65}{61{,}7}$ | $C_{14} = 101 > 0$ | $C_{24} = 0$ |

Như vậy, ở cột *1* ta có $C_{13} = -61{,}7 < 0$ nên hệ kín không ổn định.

*Chú thích :*

1. Khi lập bảng Routh, để giản đơn trong tính toán, có thể nhân hay chia các hệ số trong cột với cùng một đại lượng, kết quả vẫn không thay đổi.

2. Trong trường hợp hệ không ổn định, bao nhiêu lần đổi dấu ở cột *1*, thì có bấy nhiêu nghiệm phải.

Trong ví dụ trên, hệ có hai lần đổi dấu : từ $C_{12} > 0$ sang $C_{13} < 0$ và trở lại $C_{14} > 0$ nên hệ kín có hai nghiệm phải. Nếu giải phương trình đặc trưng của hệ kín nói trên ta có ba nghiệm như sau :

$$s_1 = -6{,}6815 \;;$$

$$s_{2,3} = 2{,}6908 \pm j\,5{,}3886$$

hai nghiệm có phần thực dương.

3. Nếu trị số gần cuối ở cột một bằng 0 ($C_{1n} = 0$), có nghĩa là nghiệm kép thuần ảo. Trị số cuối cùng sẽ không tính được vì $r_{n+1} = \infty$. Nếu trị số cuối cùng bằng 0 ($C_{1n+1} = 0$) thì phương trình đặc trưng có một nghiệm 0 vì $a_n = 0$.

4. Nếu các hệ số của một hàng bằng 0, hệ có một nghiệm phải hay trên trục ảo.

5. Cả hai tiêu chuẩn Hurwitz và Routh đều có thể sử dụng máy tính để khảo sát nhưng angorit đối với tiêu chuẩn Routh giản đơn hơn.

6. Tiêu chuẩn Hurwitz và Routh có mối liên hệ nhau, ví dụ $C_{13} = C_{21} - r_3C_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{a_1} > 0$ chẳng khác nào $\Delta_1 > 0$ ; $\Delta_2 > 0$.

## III.3. TIÊU CHUẨN TẦN SỐ

### III.3.1. Tiêu chuẩn ổn định Nyquist theo đặc tính tần biên pha

*1. Nguyên lý góc quay*

Phương trình đặc trưng của một hệ :

$$F(s) = A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

có thể đưa về dạng :

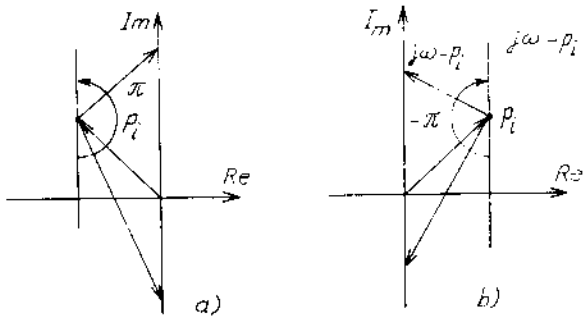
$$A(s) = a_0(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0 \qquad (3\text{-}9)$$

Với $p_i$ (i = 1, n) là nghiệm cực. Thay $s = j\omega$ ta có :

$$A(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n) = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

Hãy xem góc quay của một vectơ $(j\omega - p_i)$ mà gốc ở nghiệm $p_i$ và đỉnh chuyển động trên trục ảo.

Nếu $p_i$ là nghiệm trái (hình 3.5a), khi $\omega$ thay đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$, vectơ sẽ quay một góc :




*Hình 3.5*

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg}\,(j\omega - p_i) = +\pi$$

Ngược lại, nếu $p_i$ là nghiệm phải (hình 3.5b) vectơ $(j\omega - p_i)$ quay một góc :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg}\,(j\omega - p_i) = -\pi$$

Tổng biến đổi của tất cả các góc quay ứng với (3-10) là :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} A(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \underset{-\infty<\omega<\infty}{\arg} (j\omega - p_i)$$

Giả sử phương trình đặc trưng có l nghiệm phải, số nghiệm trái là n − l, vậy :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} A(j\omega) = (n - 2l)\pi \qquad (3\text{-}11)$$

Biểu thức (3-11) thể hiện nguyên lý góc quay của đa thức đặc trưng A(s).

Như vậy, để hệ ổn định, điều kiện cần và đủ là số nghiệm phải bằng 0 (l = 0), nghĩa là :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} A(j\omega) = n\pi \qquad (3\text{-}12)$$

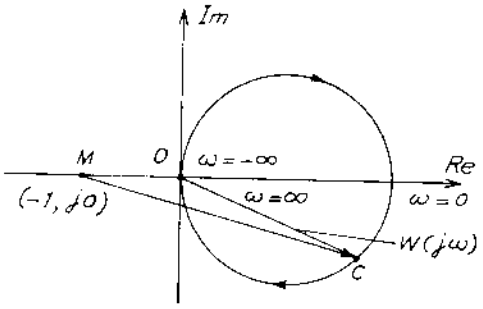
Nhân đây cũng thấy rằng, bằng cách vẽ quỹ đạo của $A(j\omega)$ ta cũng có thể đánh giá khả năng ổn định của hệ thống (theo tiêu chuẩn Mikhailov [15] mà ở đây sẽ không đề cập đến.

*2. Khái niệm về bao vây*

Trên hình 3.6 có đường cong Nyquist của một khâu quán tính khi tần số thay đổi trong phạm vi $-\infty < \omega < +\infty$ (hình 2.43). Điểm M nằm trên trục thực có tọa độ (−1, j0). Điểm C dịch chuyển trên đường cong Nyquist vectơ $\overrightarrow{MC}$ được xác định bởi :

$$\overrightarrow{MC} = 1 + \overrightarrow{OC} = 1 + W(j\omega)$$

Trong trường hợp đường cong Nyquist không bao vây lấy điểm M (như ở hình 3.6), ta có :




*Hình 3.6*

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} \overrightarrow{MC} = \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} [1 + W(j\omega)] = 0 \qquad (3\text{-}13)$$

Nếu đường Nyquist bao vây lấy điểm M thì :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} [1 + W(j\omega)] = 2\pi \neq 0 \qquad (3\text{-}14)$$

*3. Tiêu chuẩn ổn định Nyquist*

*A. Khi hệ hở ổn định*

Điều kiện cần và đủ để cho hệ kín ổn định khi hệ hở ổn định là đường cong Nyquist không bao vây lấy điểm có tọa độ (−1, jo).

Hàm truyền của hệ hở có dạng :

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{3-15}$$

Vậy hệ kín có hàm truyền :

$$W_k(s) = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)} \tag{3-16}$$

với hồi tiếp đơn vị. Vectơ $\overrightarrow{MC}$ trên hình 3.6 ứng với :

$$G(s) = [1 + W(j\omega)] = \left[\frac{A(s) + B(s)}{A(s)}\right] \tag{3-17}$$

Tử số của (3-17) là đa thức đặc trưng của hệ kín (3-16), còn mẫu số là đa thức đặc trưng của hệ hở (3-15). Nếu A(s) có bậc là n, bậc của B(s) là m thì bậc của đa thức đặc trưng của hệ hở hay kín đều là n vì m ≤ n. Ứng với (3-17) có :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} G(j\omega) = \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} [A(j\omega) + B(j\omega)] - \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} A(j\omega) \tag{3-18}$$

Theo tiêu chuẩn ổn định và điều kiện (3-12):

Nếu hệ hở ổn định :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} A(j\omega) = n\pi$$

Để hệ kín ổn định :

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} [A(j\omega) + B(j\omega)] = n\pi$$

Như vậy, $\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta\arg} G(j\omega) = 0$, nghĩa là đường cong Nyquist không bao vây lấy điểm có tọa độ (−1, jo).

Ở hình 3.7 có ba trường hợp :

a) Hệ kín ổn định

b) Hệ kín không ổn định và

c) Hệ kín ở biên giới ổn định khi hệ hở ổn định trong cả ba trường hợp trên.

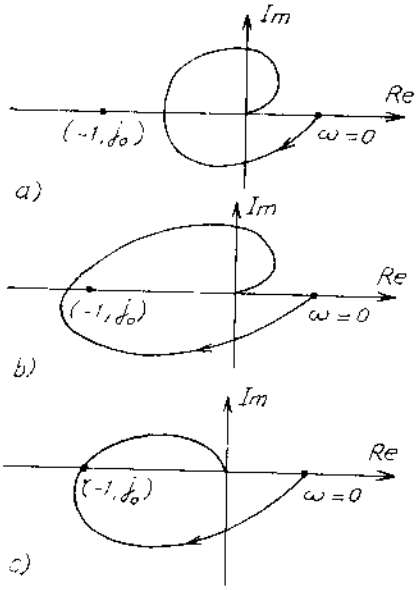
*B. Khi hệ hở không ổn định*

Giả sử hệ hở không ổn định và có l nghiệm phải, vậy số nghiệm trái là n - l. Đối với hệ hở, nếu chỉ xét phần tần số dương thì (3-11) có dạng :

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} A(j\omega) = \left(\frac{n-2l}{2}\right)\pi$$

Hệ kín ổn định với điều kiện (3-12) :

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} [A(j\omega) + B(j\omega)] = \frac{n}{2}\pi$$




*Hình 3.7*

Do đó góc quay của vectơ $\overrightarrow{MC}$ sẽ là :

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} G(j\omega) = \frac{n}{2}\pi - \left(\frac{n-2l}{2}\right)\pi = l\pi = \left(\frac{l}{2}\right)2\pi \qquad (3\text{-}19)$$

nghĩa là :

Điều kiện cần và đủ để cho hệ kín ổn định khi hệ hở không ổn định là đường cong Nyquist bao vây lấy điểm có tọa độ $(-1, j_0)$ $\frac{l}{2}$ lần theo chiều dương mà l là số nghiệm phải của phương trình đặc trưng của hệ hở.

**Ví dụ 3-4**

Hệ hở có hàm truyền :

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s - 1)(T_2 s + 1)}$$

Vậy hệ hở không ổn định với phương trình đặc trưng có 2 nghiệm cực :

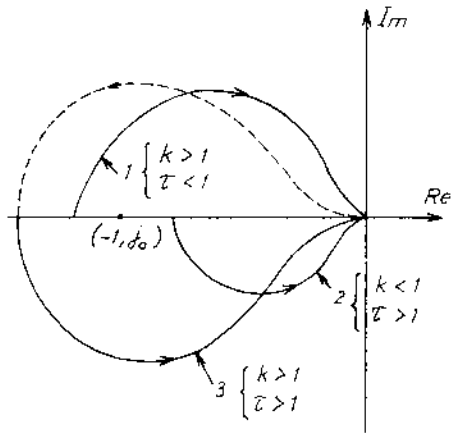
$$p_1 = \frac{1}{T_1} \quad \text{và} \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}.$$

Như vậy n = 2 và l = 1. Để hệ kín ổn định thì đường cong Nyquist

vậy lấy điểm có tọa độ (−1, jo) $\frac{1}{2}$ lần theo chiều dương khi tần số biến thiên từ 0 đến ∞. Trên hình 3.8 có 3 đường cong :

Đường *1* ứng với k > 1, $\tau = \frac{T_1}{T_2} < 1$ và vậy lấy điểm có tọa độ (−1, jo) theo chiều âm.

Đường *2* ứng với k < 1, $\tau > 1$ và không vậy lấy điểm (− 1, jo ).




***Hình 3.8***

Cả hai trường hợp trên, hệ kín đều không ổn định.

Đường *3* ứng với k > 1, $\tau > 1$ và bao vậy nửa lần $\left(\frac{1}{2}\ 2\pi\right)$ điểm có tọa độ (−1, jo) theo chiều dương khi tần số biến đổi từ 0 đến ∞ (hay 1 lần khi tần số biến đổi từ −∞ đến ∞, tính cả đường nét đứt trên hình).

*Chú thích :*

1. Để sử dụng tiêu chuẩn Nyquist, trước hết cần đánh giá tính ổn định của hệ hở. Thông thường việc này khá giản đơn. Nếu không đánh giá trực tiếp các nghiệm, có thể dùng tiêu chuẩn đại số.

2. Tiêu chuẩn Nyquist đánh giá tính ổn định của hệ kín trên cơ sở đặc tính tần biên pha của hệ hở (hệ kín có hồi tiếp đơn vị).

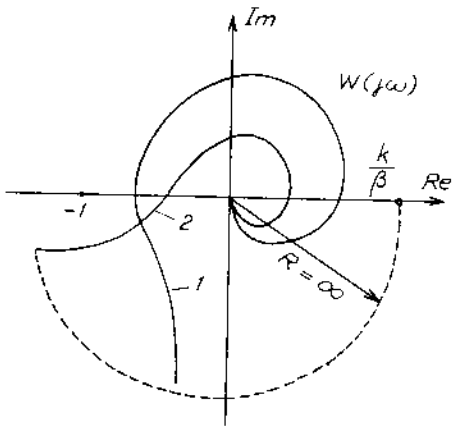
3. Trong trường hợp hệ hở có khâu tích phân ứng với hệ hở ở biên giới ổn định, có thể xem khâu tích phân như giới hạn của khâu quán tính :

$$W(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{B(s)}{A(s)} = \lim_{\beta \to 0} \frac{k\,B(s)}{(s+\beta)A(s)} = \lim_{\beta \to 0} \frac{k}{\beta} \frac{B(s)}{\left(\frac{1}{\beta}s + 1\right)A(s)} \quad (3\text{-}20)$$

Khi tần số $\omega = 0$, điểm xuất phát sẽ từ *trục thực* với trị số $\frac{k}{\beta}\Big|_{\beta \to 0}$ và tiêu chuẩn Nyquist có thể được áp dụng như khi hệ hở ổn định. Trên

hình 3.9, đường *1* ứng với trường hợp hệ hở có một khâu tích phân, đường *2* ứng với trường hợp hai khâu tích phân.

Ở hình 3.9, các cung có bán kính $\frac{k}{\beta}$ vẽ bằng đường nét đứt mô tả phần biên độ rất lớn của $W(j\omega)$ nối liền với trục thực.




*Hình 3.9*

**Ví dụ 3-5**

Hệ hở có hàm truyền :

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \qquad (3\text{-}21)$$

Hãy xác định $k_g$ ở biên giới ổn định ($k < k_g$ hệ ổn định). Ở hình 3.10 có $W(j\omega)$ với hai trị số k khác nhau. Điều kiện biên giới ổn định được xác định bởi :

$$|W(j\omega_\pi)| = 1 \qquad (3\text{-}22)$$

và

$$I_m[W(j\omega_\pi)] = 0 \qquad (3\text{-}23)$$

Đối với hệ đã cho, tử số là một số thực, điều kiện (3-23) tương đương với :

$$I_m[j\omega_\pi(1 + j\omega_\pi T_1)(1 + j\omega_\pi T_2)] = 0$$

hay :

$$1 - T_1T_2\omega_\pi^2 = 0$$

Từ đó

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}$$

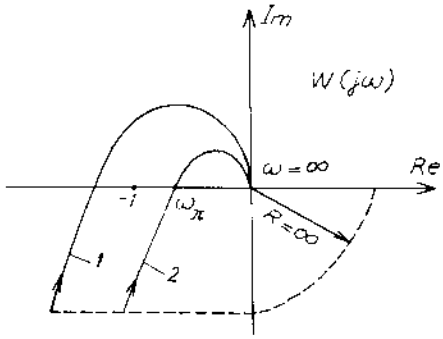
Ở tần số $\omega_\pi$, mẫu số của $W(j\omega_\pi)$ là một đại lượng thực và bằng $-\omega_\pi^2(T_1 + T_2)$ nên :

$$|W(j\omega_\pi)| = kT_1T_2/(T_1 + T_2)$$

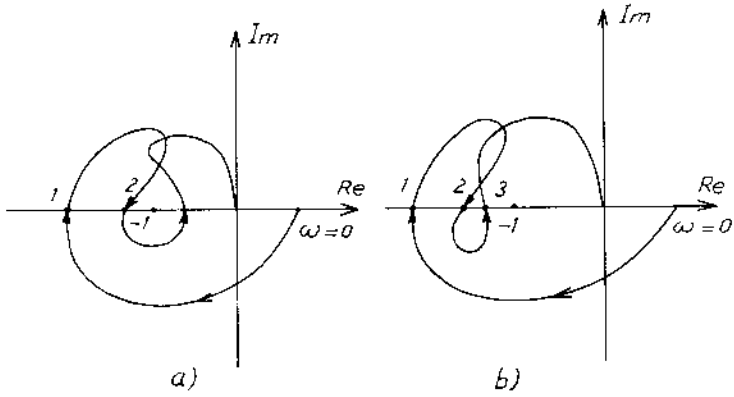
Sau khi thay thế vào (3-22) ta xác định được :

$$k_g = (T_1 + T_2)/(T_1T_2) = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

Độc giả đánh giá về điều kiện bao vây của hình 3.11a và b




*Hình 3.10*




*Hình 3.11*

### III.3.2. Tiêu chuẩn ổn định Nyquist theo đặc tính tần số logarit

*1. Vẽ đặc tính tần số logarit cho cả hệ thống*

Khi khảo sát các khâu động học điển hình, ta đã biết đặc tính tần số logarit của từng phần tử. Hệ thống hở thường gồm có nhiều phần tử nối tiếp :

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s)$$

cho nên :

$$\mathcal{L}(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i(\omega)$$

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \prod_{i=1}^{n}|W_i(j\omega)|e^{j\varphi_i(\omega)}$$

và

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)$$

Như vậy bằng phương pháp cộng đồ thị đặc tính biên độ và pha của các phần tử, ta có đặc tính tần số logarit của cả hệ.

*2. Tiêu chuẩn ổn định Nyquist theo đường cong Bode (Bôđơ)*

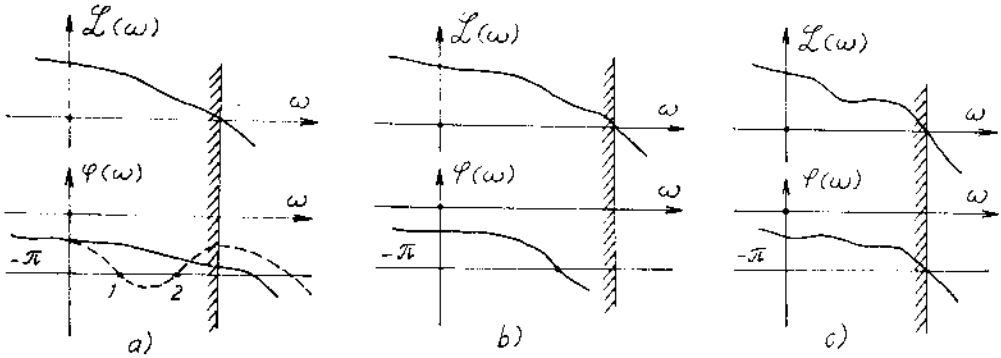
Hệ kín ổn định nếu hệ hở ổn định và khi đặc tính biên độ logarit $\mathcal{L}(\omega)$ dương, đặc tính pha logarit $\varphi(\omega)$ không cắt đường thẳng đi qua trị số $-\pi$ hay cắt với số lần chẵn.

Ở hình 3.12 có ba trường hợp khi hệ hở ổn định thì :

a) Hệ kín ổn định ;

b) Hệ kín không ổn định ;

c) Hệ kín ở biên giới ổn định.




***Hình 3.12***

Đường nét đứt ở hình 3.12a ứng với trường hợp ở hình 3.11a – đường Nyquist cắt trục thực hai lần ở phía trái điểm có tọa độ (−1, j0). Tại hai điểm này biên độ đều lớn hơn 1 nên $\mathcal{L}(\omega_1)$ và $\mathcal{L}(\omega_2)$ đều dương.

**Ví dụ 3-6**

Khảo sát ổn định của hệ đã cho ở ví dụ 3-1 và 3-3.

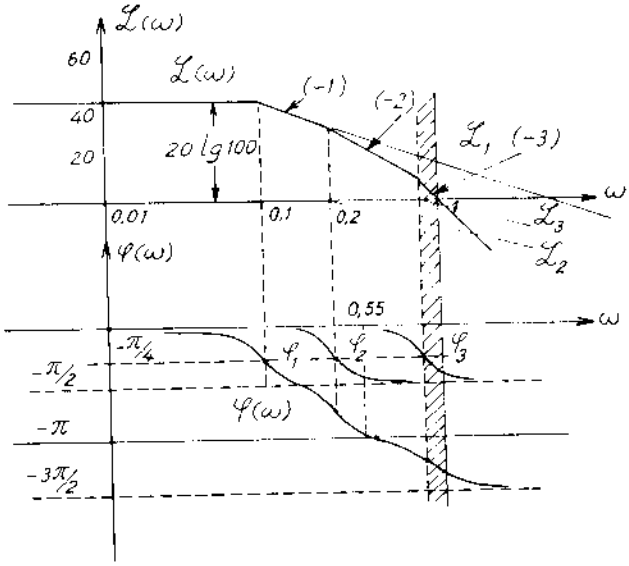
Hệ hở có hàm truyền :

$$W(s) = \frac{100}{(10s + 1)(5s + 1)(s + 1)}$$

gồm ba khâu quán tính có đặc tính xấp xỉ như ở hình 2.44 với tần số gãy :

$\omega_1 = 0,1\ sec^{-1}$ ; $\omega_2 = 0,2\ sec^{-1}$ ; $\omega_3 = 1\ sec^{-1}$.

Trong trường hợp này hệ hở đã ổn định. Ở hình 3.13 có đặc tính tần số logarit của cả ba khâu cũng như của hệ thống, xây dựng theo phương pháp cộng đồ thị. Ta nhận thấy khi $\mathcal{L}(\omega) > 0$, đặc tính pha logarit $\varphi(\omega)$ cắt đường thẳng $-\pi$ tại tần số $\omega \approx 0,55\ sec^{-1}$ nên hệ kín không ổn định.




*Hình 3.13*

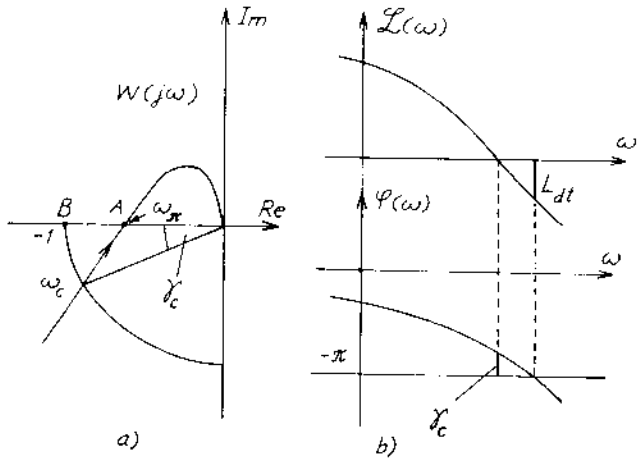
## III.4. ĐỘ DỰ TRỮ ỔN ĐỊNH

Ở ví dụ trên (hình 3.13), nếu giảm hệ số khuếch đại k, đặc tính $\mathcal{L}(\omega)$ sẽ hạ xuống gần trục tần số $\omega$ hơn, trong khi đặc tính $\varphi(\omega)$ không thay đổi (vì ba khâu quán tính đều không thay đổi hằng số thời gian ứng với tần số gãy của chúng). Hệ có thể từ không ổn định tiến đến biên giới ổn định và trở thành ổn định. Quá trình sẽ diễn biến ngược lại nếu tăng hệ số khuếch đại.

Như vậy, với độ dự trữ ổn định nhỏ, hệ có thể từ ổn định trở thành mất ổn định khi thông số vì lý do nào đó thay đổi đáng kể. Bởi vậy, khi thiết kế cần chọn độ dự trữ ổn định cần thiết.

Độ dự trữ ổn định được đánh giá theo khoảng cách của đặc tính tần biên pha hệ hở $W(j\omega)$ so với điểm giới hạn B có tọa độ $(-1, j0)$ như ở hình 3.14a.

*Độ dự trữ ổn định về pha* $\gamma_c$ được đánh giá theo cung của đường tròn bán kính bằng 1, tâm ở gốc tọa độ, tạo thành góc giữa trục hoành và giao điểm với đường Nyquist $W(j\omega_c)$. Tại giao điểm ấy, tần số là tần




*Hình 3.14*

số cắt $\omega_c$ vì biên độ bằng 1 ($|W(j\omega_c| = 1$), với $\gamma_c$ càng lớn, độ dự trữ ổn định càng lớn. Độ dự trữ ổn định về pha bảo đảm khả năng ổn định khi tăng quán tính trong giới hạn đã cho.

*Độ dự trữ ổn định về biên độ* được xác định bởi tỷ số của hệ số khuếch đại giới hạn $k_g$ với hệ số khuếch đại hiện hành. Như vậy độ dự trữ ổn định càng lớn hệ càng ổn định và khoảng cách BA (hình 3-14a) càng lớn.

$$\beta = \frac{k_g}{k} = \frac{1}{|W(j\omega_\pi)|}$$

Độ dự trữ ổn định về biên độ bảo đảm hệ ổn định khi tăng hệ số khuếch đại của hệ trong phạm vi nhất định.

Theo đặc tính tần số logarit (hình 3.14b), độ dự trữ ổn định theo biên độ được xác định bởi :

$$\mathcal{L}_{dt} = 20\lg\beta = -20\lg|W(j\omega_\pi)| = -\mathcal{L}(\omega_\pi)$$

Độ dự trữ ổn định của hệ điều chỉnh tự động không những bảo đảm khả năng ổn định của hệ khi thông số thay đổi mà còn ảnh hưởng đến tính chất quá trình của hệ thống. Trị số cụ thể của độ dự trữ ổn định được chọn dựa theo yêu cầu của quá trình quá độ. Thông thường được chọn trong phạm vi :

$$\gamma_c \approx 30^o \div 50^o;$$

$$\mathcal{L}_{dt} \approx 8 \div 12 \text{ db}.$$

## III.5. DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ KHẢO SÁT HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Máy tính được dùng để mô hình hóa hệ thống. Để khảo sát ổn định chẳng hạn, có thể đánh giá theo phân bố nghiệm của phương trình đặc tính, theo các tiêu chuẩn ổn định Hurwitz, Routh, cũng như tiêu chuẩn Nyquist theo đường cong Nyquist hay Bode.

Phần mềm ngày càng được viết đơn giản hơn cho người sử dụng. Hai loại chương trình thịnh hành là TUTSIM và MATLAB mà một số lệnh thường dùng có thể xem ở phụ lục C. Dưới đây là một vài ví dụ.

### III.5.1. Mô hình hóa theo chương trình TUTSIM

**Ví dụ 3-7**

Mô hình hóa hệ kín gồm ba khâu quán tính nối tiếp như ở các ví dụ 3–1 (hình 3.4) 3–2 và 3–3. Sơ đồ khối dùng để mô hình hóa hệ trên như ở hình 3.15.

Chương trình có thể được viết như sau :

a) *Model structure* (cấu trúc mô hình)

1, CON

2, SUM, 1, -5

3, F10, 2

4, F10, 3

5, F10, 4

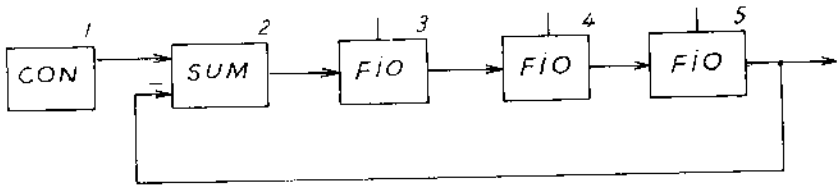
b) *Model parameters* (thông số mô hình)

1, 1

3, 19.8, 10

4, 1, 5

5, 1, 1




*Hình 3.15*

c) *Plot blocks and Ranges* (khối vẽ và giới hạn)

X : 0, 0, 25

Y1 : 1, 0, 2

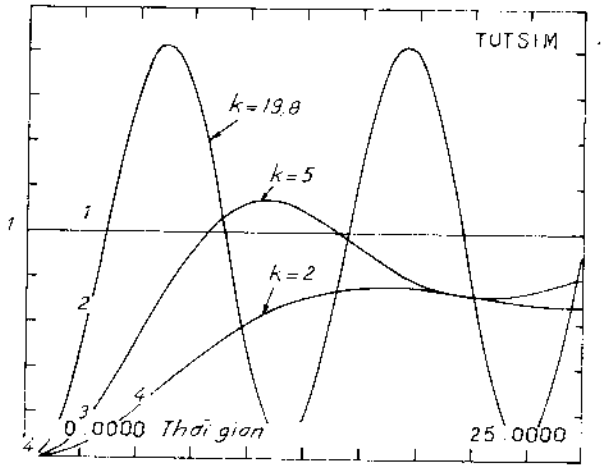
Y2 : 5, 0, 2

d) *Timing* (thời khoảng, thời gian lấy mẫu)

10E-6, 25

e) *Command* : SD (lệnh)

Kết quả mô hình hóa như ở hình 3.16 với hệ số khuếch đại khác nhau :




*Hình 3.16*

- Đường *1* : tín hiệu vào 1(t)
- Đường *2* : hàm quá độ với k = 19,8 (biên giới ổn định ứng với $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 65 \times 6 - 50(1 + k) = 0$
- Đường *3* : k = 5
- Đường *4* : k = 2

Bằng cách thay đổi hệ số khuếch đại của khâu quán tính thứ nhất, ta có sai lệch tĩnh tương ứng như ở bảng 3.3.

*Bảng 3.3*

| k | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 1 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_{ss}$ | 0,09 | 0,11 | 0,14 | 0,19 | 0,33 | 0,50 | 0,66 |

### III.5.2. Mô hình hóa theo chương trình MATLAB

**Ví dụ 3-8**

Với các thông số như trong ví dụ 3-7.

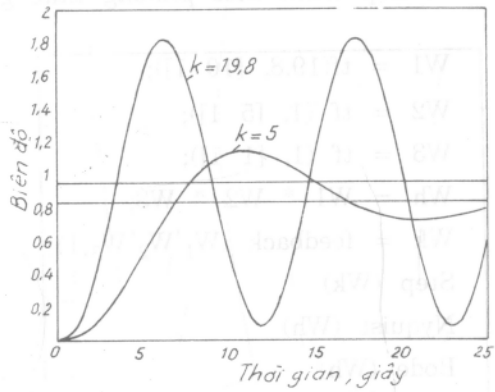
a) *Lập trình theo hàm truyền hệ kín*

$$W_k(s) = \frac{19,8}{(10s + 1)(5s + 1)(s + 1) + 19,8}$$

$$= \frac{19,8}{50s^3 + 65s^2 + 16s + 20,8}$$

```
num = [19.8] ;
den = [50 65 16 20.8] ;
t = [0 : 0.1 : 25] ;
Step (num, den, t)
```

Ở hình 3.17 có hàm quá độ được mô hình hóa theo MATLAB với k = 19,8 và k = 5. Biểu đồ Nyquist và Bode đối với hệ hở :

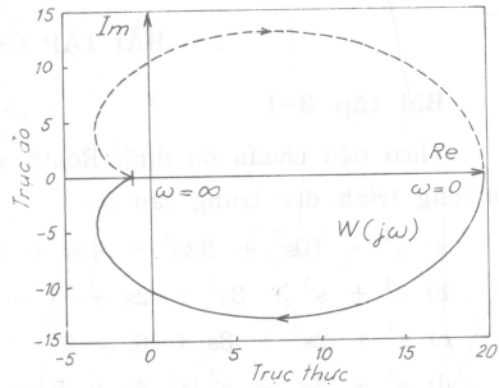



*Hình 3.17*

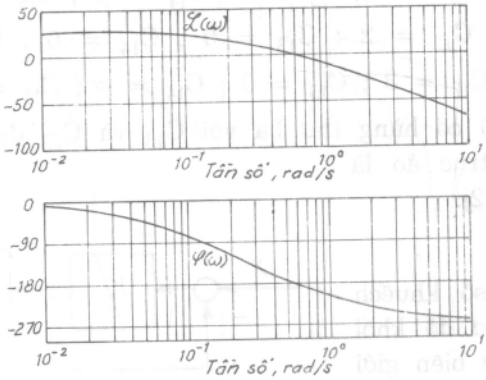
$$W(s) = \frac{19,8}{50s^3 + 65s^2 + 16s + 1}$$

```
num = [19.8] ;
den = [50 65 16 1] ;
Nyquist (num, den)
Bode (num, den)
```

Đặc tính tần biên pha W(jω) như ở hình 3.18 và đặc tính logarit $\mathcal{L}(\omega)$, $\varphi(\omega)$ như ở hình 3.19.




*Hình 3.18*




*Hình 3.19*

b) *Lập trình theo phương thức ghép nối các khâu*

```
W1 = tf(19.8, [10 1]);
W2 = tf (1, [5 1]);
W3 = tf (1, [1 1]);
Wh = W1 * W2 * W3;
Wk = feedback (W1*W2*W3,1);
Step (Wk)
Nyquist (Wh)
Bode (Wh)
```

## BÀI TẬP CHƯƠNG III

**Bài tập 3-1**

Theo tiêu chuẩn ổn định Routh xác định tính ổn định của hệ có các phương trình đặc trưng sau :

a) $s^4 + 10s^3 + 33s^2 + 46s + 30 = 0$

b) $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 5 = 0$

c) $s^3 + 2s^2 + 3s + 6 = 0$

d) $s^4 + 3s^3 + s^2 + 3s + 5 = 0$

*Đáp án :*

a) $C_{11} = 1$ ; $C_{12} = 10$ ; $C_{13} = 28{,}4$ ; $C_{14} = 35{,}4$ ; $C_{15} = 30$ : ổn định

b) $C_{11} = 1$ ; $C_{12} = 1$ ; $C_{13} = 1$ ; $C_{14} = -3$ ; $C_{15} = 5$ : không ổn định

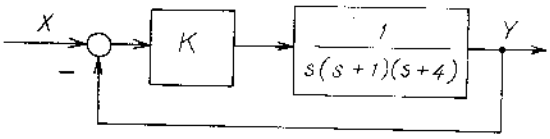
c) $C_{11} = 1$ ; $C_{12} = 2$ ; $C_{13} = 0$ ; $C_{14} = 6$ : biên giới ổn định

d) $C_{11} = 1$ ; $C_{12} = 3$ ; $C_{13} = 0$ ; $C_{14} = -\infty$; $C_{15} = 5$ : không ổn định

Trường hợp c) có hàng thứ ba với $C_{13}$ và $C_{23}$ đều bằng 0 : có một cặp nghiệm trên trục ảo là $\pm\sqrt{-3} = \pm 1{,}732j$.

**Bài tập 3-2**

Xác định hệ số khuếch đại k để hệ (có sơ đồ khối như ở hình 3.20) ở biên giới ổn định và vị trí nghiệm cực trên mặt phẳng nghiệm số.




*Hình 3.20*

*Đáp án*

Phương trình đặc trưng của hệ kín :

$$F_k(s) = s^3 + 5s^2 + 4s + K = 0$$

Hệ số ở cột một :

$$C_{11} = 1 \; ; \; C_{12} = 5 \; ; \; C_{13} = \frac{20 - K}{5} \; ; \; C_{14} = K$$

Hệ ở biên giới ổn định với K = 20. Ở hàng thứ ba :

$C_{13} = 0$ ; $C_{23} = 0$ nên $5s^2 + 20 = 0$ có hai nghiệm $p_{1,2} = \pm 2j$.

**Bài tập 3-3**

Thay thế K ở hình 3.20 bởi hàm truyền $\frac{K(0,5s + 1)}{0,1s + 1}$, xác định K ở biên giới ổn định và nghiệm trên trục ảo.

*Đáp án*

Phương trình đặc trưng của hệ kín :

$$F_k(s) = s(s + 1)(s + 4)(0,1s + 1) + K(0,5s + 1) = 0$$
$$= 0,1s^4 + 1,5s^3 + 5,4s^2 + (4+0,5K)s + K = 0.$$

Hệ số ở cột một :

$$C_{11} = 0,1 \; ; \; C_{12} = 1,5 \; ; \; C_{13} = \frac{7,7 - 0,05K}{1,5} \; ;$$

$$C_{14} = 4 + 0,5K - \frac{2,25K}{7,7 - 0,05K} \; ; \quad C_{15} = K$$

Điều kiện từ các hệ số $C_{15}$ và $C_{13}$ xác định :

$$0 < K < 154$$

Điều kiện từ $C_{14} > 0$ :

$$(4 + 0,5K)(7,7 - 0,05K) - 2,25K =$$
$$= 30,8 + 1,4K - 0,025K^2 > 0 \qquad K = 72,9$$

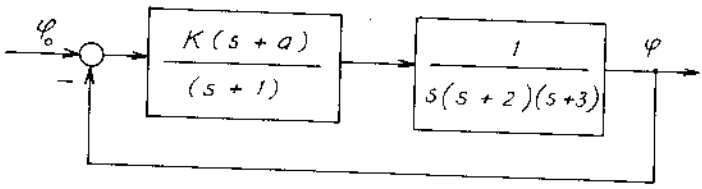
Với điều kiện này $C_{14} = 0$ ; $C_{24} = 0$

$$\frac{7,7 - 0,05K}{1,5} s^2 + K = 2.7033s^2 + 72,9 = 0$$

$$p_{1,2} = \pm 5,193j$$

Bài tập 3-4

Đầu đọc ổ đĩa ở máy tính chuyển động theo rãnh. Đáp ứng của hệ phải nhanh và chính xác. Sơ đồ khối như ở hình 3.21.




*Hình 3.21*

Xác định điều kiện đối với K và a của cơ cấu điều khiển để hệ ổn định.

*Đáp án*

Phương trình đặc trưng của hệ kín :

$$F_k(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + K.a = 0$$

Hệ số ở cột một :

$$C_{11} = 1 \; ; \; C_{12} = 6 \; ; \; C_{13} = \frac{60 - K}{6} \; ;$$

$$C_{14} = \frac{C_{13}(K + 6) - 6K.a}{C_{15}} \; ; \quad C_{15} = K.a$$

Từ $C_{13}$ có điều kiện $K < 60$ từ $C_{14} = 0$:

$$(K - 60)(K + 6) + 36\,K.a = 0$$

và K, a liên hệ nhau bởi điều kiện :

$$a \leqslant \frac{(60 - K)(K + 6)}{36K}$$

ví dụ $K = 40$ ; $a \leqslant 0{,}639$.

Kiểm tra tính ổn định theo MATLAB

```
num = [40 40*0.639] ;(biên giới ổn định)
den = [1 6 11 46 40*0.639] ;
t = [0 : 0.1 : 20] ;
Step (num, den, t)
```

**Bài tập 3-5**

a) Vẽ vị trí phân bố của một cặp nghiệm trội (có ảnh hưởng lớn nhất đối với quá trình) của hệ thống nếu tỷ số tắt dần có trị số khoảng $\zeta \approx 0{,}5$ và hằng số thời gian khoảng 0,1 sec.

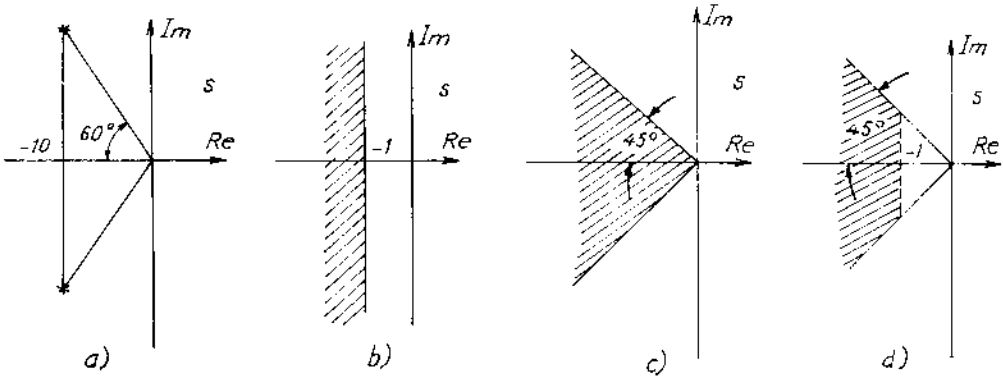
b) Chỉ ra vùng của các nghiệm cực có hằng số thời gian không quá 1 sec.

c) Vị trí của một cặp nghiệm trội của hệ có tỷ số tắt dần khoảng $\zeta \approx 0,7$.

d) Với điều kiện b) và c) chỉ ra vùng phân bố nghiệm.

*Đáp án*

Xem hình 3.22

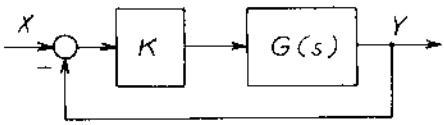



***Hình 3.22***

**Bài tập 3-6**

Ở hệ thống hình 3.23 với :

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+20)}$$




***Hình 3.23***

Hãy xác định K sao cho hằng số thời gian trội nhất T = 0,667 sec và với K ấy, xác định nghiệm cực còn lại.

*Đáp án*

Phương trình đặc trưng hệ kín :

$$F_k(s) = s^2 + (22 + K)s + 40 + K = 0$$

Nếu nghiệm thứ nhất là $s_1 = -\frac{1}{T} = -1,5$ ; ta có :

$$F_k(s) = (s + 1,5)(3 + p) = s^2 + (1,5 + p)s + 1,5p$$

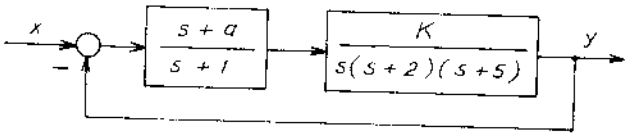
mà p là nghiệm còn lại cần tìm.

$$\left.\begin{aligned} 22 + K &= 1{,}5 + p \\ 40 + K &= 1{,}5p \end{aligned}\right\}$$

Từ đó K = 18,5 ; p = 39, vậy nghiệm thứ hai $s_2 = -39$ và nghiệm thứ nhất $s_1 = -1{,}5$ chính là nghiệm trội.

**Bài tập 3-7**

Sơ đồ khối hệ điều khiển chuyển động quay xe như ở hình 3.24. Xác định mối quan hệ giữa K và a để hệ ổn định.




*Hình 3.24*

*Đáp án*

Phương trình đặc trưng của hệ kín :

$$F_k(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + K.a = 0$$

Các hệ số ở cột một :

$$C_{11} = 1 \; ; \; C_{12} = 8 \; ; \; C_{13} = \frac{126 - K}{8} \; ;$$

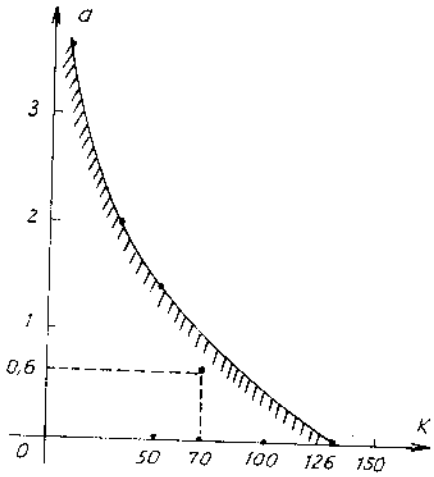
$$C_{14} = \frac{C_{13}(K + 10) - 8K.a}{C_{13}} \; ; \quad C_{15} = K.a$$

Từ các điều kiện $C_{13} > 0$ ; $C_{15} > 0$ ; $K < 126$ ; $K.a > 0$

Từ điều kiện $C_{14} > 0$ :

$(K + 10)(126 - K) - 64K.a > 0$. Vùng ổn định như ở hình 3.25.

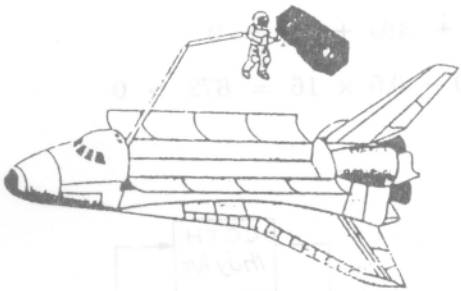
Ví dụ, nếu chọn K = 70, a = 0,6, điều kiện ổn định sẽ được thỏa mãn.



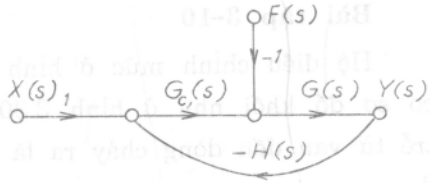

*Hình 3.25*

**Bài tập 3-8**

Tàu con thoi (hình 3.26) có thể dùng để sửa chữa vệ tinh và kính viễn vọng Hubble. Sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 3.27, với $G_c(s) = K = 8$ ; $G(s) = \dfrac{1}{s(s + 4)}$ ; $H(s) = 1$



*Hình 3.26*




*Hình 3.27*

Xác định hàm truyền Y(s)/X(s) và Y(s)/F(s).

Hệ trên có ổn định không ? vì sao ?

Vẽ đặc tính tần số logarit của hệ hở và kiểm tra lại theo đường cong Bode theo MATLAB.

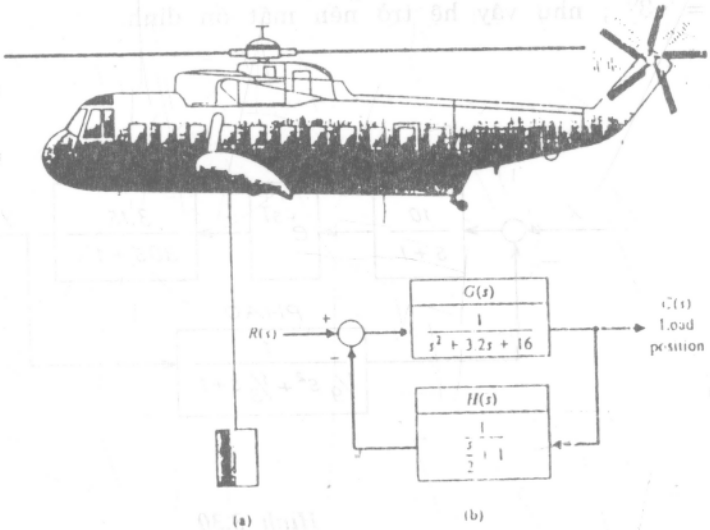
*Đáp án* Xem hình 3.27.

$$Y(s)/X(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8} \; ; \; Y(s)/F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8} \; ;$$

Hệ trên ổn định vì phương trình đặc trưng của hệ kín $F_k(s) = s^2 + 4s + 8 = 0$ là bậc hai, các hệ số đều dương.

**Bài tập 3-9**

Một máy bay trực thăng có tải ở cuối dây cáp như ở hình 3.28a. Hệ điều khiển vị trí có sơ đồ khối như ở hình 3.28b. Kiểm tra ổn định hệ trên theo tiêu chuẩn Hurwitz và kiểm tra ổn định theo đường cong Bode (dùng MATLAB).




*Hình 3.28*

*Đáp án*

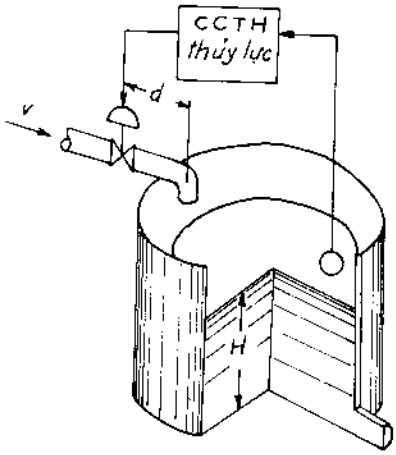
Phương trình đặc trưng hệ kín :

$$F_k(s) = 0{,}5s^3 + 17s^2 + 40s + 16 = 0$$

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 17 \times 40 - 0{,}5 \times 16 = 672 > 0$$

**Bài tập 3-10**

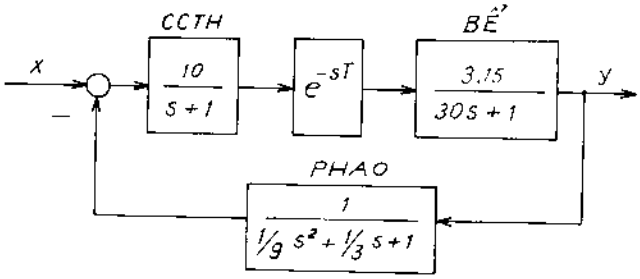
Hệ điều chỉnh mức ở hình 3.29 có sơ đồ khối như ở hình 3.30. Độ trễ từ van đến dòng chảy ra là $T = \frac{d}{v}$. Với $v = 5\ m^3/sec$ ; $d = 5\ m$ ; tiết diện đường ống : $S = 1\ m^2$ ; độ trễ $T = 1$ sec. Vẽ đường cong Bode khi không tính thời gian trễ và có trễ. Đánh giá về ổn định do ảnh hưởng của thời gian trễ.




*Hình 3.29*

*Đáp án*

Tại tần số cắt $\omega_c = 0{,}8\ sec^{-1}$ khi không có trễ, $\gamma_c = 40^o$. Sau khi vẽ đặc tính $\varphi(\omega)$ có khâu trễ, $\gamma_c = -3^o$ ; như vậy hệ trở nên mất ổn định.




*Hình 3.30*

*Chương IV*

# ẢNH HƯỞNG CỦA THÔNG SỐ ĐỐI VỚI TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ

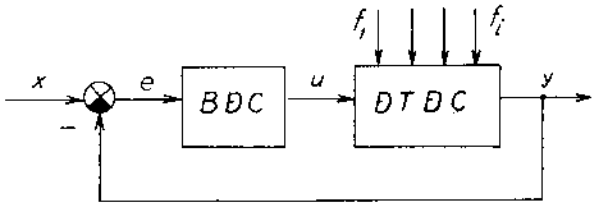
## IV.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Ở chương trước, tiêu chuẩn ổn định cho phép đánh giá khả năng ổn định của hệ với thông số cụ thể. Nhờ các tiêu chuẩn ấy mà có thể khảo sát ảnh hưởng của một vài thông số đến tính ổn định của hệ, ví dụ xác định trị số giới hạn của hệ số khuếch đại, của hằng số thời gian để đảm bảo hệ ổn định. Có nhiều phương pháp nhưng ở đây chỉ đề cập tới một số phương pháp thông dụng như phương pháp quỹ đạo nghiệm số, phương pháp chia miền ổn định.

Tuy nhiên, trước khi xét ảnh hưởng của thông số đối với tính ổn định của hệ, cần đề cập đến phương pháp xác định cấu trúc và thông số của đối tượng điều khiển mà ta thường gọi là *nhận dạng đối tượng điều khiển.*

## IV.2. PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CẤU TRÚC VÀ THÔNG SỐ CỦA ĐỐI TƯỢNG ĐIỀU KHIỂN

Đặc điểm của các đối tượng công nghiệp là có quán tính khá lớn so với quán tính của cơ cấu điều khiển. Thông thường đối tượng điều khiển có một hoặc hai hằng số thời gian lớn như quán tính điện từ, quán tính điện cơ của các thiết bị quay mà trị số từ 0,1 đến 10 sec, trong khi thời gian trễ của các bộ lọc, các cơ cấu điều khiển có trị số từ 1 đến khoảng 100 msec.

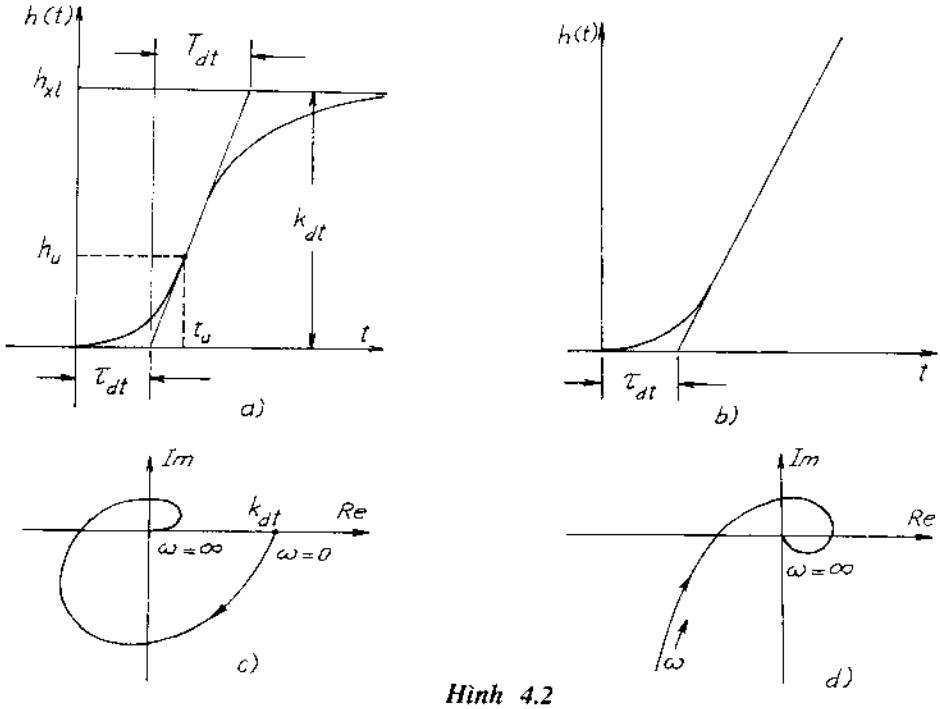



*Hình 4.1*

Ngoài ra, trong quá trình vận hành, ở các đối tượng công nghiệp, có

một lượng khá lớn tác động của nhiễu vào đại lượng được điều chỉnh theo các kênh khác nhau mà đặc tính động học của chúng cũng khác nhau. Khi mô tả đối tượng, cần tính đến ảnh hưởng của chúng. Sơ đồ khối tổng quát như ở hình 4.1, ở đó $f_i$ là tác động của nhiễu.

Hàm quá độ của một đối tượng công nghiệp thường có hai dạng : *Đối tượng có tự cân bằng* là đối tượng mà đại lượng được điều chỉnh tiến đến trị số xác lập như ở hình 4.2a. Dạng thứ hai là *đối tượng không có tự cân bằng* (hình 4.2b). Hàm quá độ, bản thân nó không có trị số xác lập và ở phần đầu của đặc tính luôn thể hiện tính trễ sau khi có tác động vào. Đặc tính tần biên pha tương ứng với hình 4.2c và d.




***Hình 4.2***

Những đặc điểm trên cho phép ta xác định hàm truyền đạt xấp xỉ cho các đối tượng điều chỉnh thường gặp bằng các dạng xấp xỉ dưới đây.

### IV.2.1. Đối tượng có quán tính và có trễ

$$G_x(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(Ts + 1)^m} e^{-\tau s} \text{ với } m = 1, 2, 3,... \qquad (4\text{-}1)$$

Để xác định các thông số của hàm truyền xấp xỉ (4-1), cơ sở của chỉ tiêu đánh giá độ chính xác như sau :

Hàm quá độ từ thực nghiệm được phân tích theo chuỗi Taylor ở lân cận điểm uốn của nó như ở hình 4.3.

Nếu h(t) là hàm quá độ của đối tượng có được từ thực nghiệm và $h_x(t)$ là hàm quá độ xấp xỉ, thì phương pháp xấp xỉ tối ưu dùng làm chỉ tiêu đánh giá là :

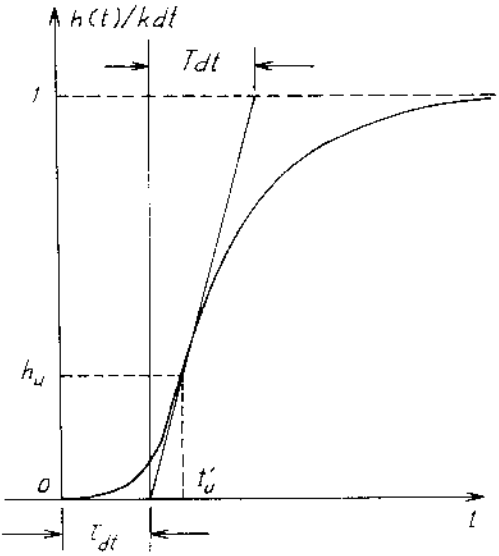
$$\left.\begin{aligned} h(t_u) &= h_x(t_u) \;; \\ \frac{dh(t_u)}{dt} &= \frac{dh_x(t_u)}{dt} \\ &\cdots\cdots \\ \frac{d^n h(t_u)}{dt^n} &= \frac{d^n h_x(t_u)}{dt^n} \end{aligned}\right\} \qquad (4-2)$$

với điều kiện $h(\infty) = h_x(\infty) = k_{dt} = k$

Trong thực tế chỉ cần sử dụng hai phương trình đầu của (4-2) : Điều kiện xấp xỉ có thể xem là được thỏa mãn nếu tọa độ của điểm uốn và tiếp tuyến tại điểm uốn của đặc tính thực (từ thực nghiệm) và đặc tính xấp xỉ (mô hình) trùng nhau là đủ.

Hệ số khuếch đại của hàm truyền xấp xỉ (4-1) được xác định theo hàm quá độ thực nghiệm h(t) với điều kiện là các hàm quá độ ấy trùng nhau khi $t \to \infty$, nghĩa là $k = h_{xl}$.

Để xác định đạo hàm bậc một của đặc tính thực nghiệm $\frac{dh(t_u)}{dt}$, ta vẽ đường tiếp tuyến tại điểm uốn cho đến các giao điểm với đường thẳng có trị số xác lập và với trục thời gian. Như vậy, theo hình 4.2a ta có :




*Hình 4.3*

$$\frac{dh(t_u)}{dt} = \frac{h_{xl}}{T_{dt}} = \frac{k}{T_{dt}}$$

mà $T_{dt}$ là khoảng thời gian giữa hai giao điểm nói trên (hình 4.3).

Đối với các đối tượng có quán tính lớn, đặc tính thực nghiệm có thể vẽ trực tiếp bằng cách lấy đại lượng đo được ở từng thời điểm nhất định rồi nối chúng lại thành đường cong liên tục. Với các đối tượng quán tính bé có thể sử dụng máy tính, thông qua cơ cấu biến đổi A/D để ghi lại, sau đó xác định thông số theo đường cong từ máy tính. Trong mọi trường hợp đều cần chú ý đến thông số của dụng cụ đo.

Theo dạng của đường cong đã xây dựng được mà giả thiết về cấu trúc hàm truyền xấp xỉ (4-1).

Trường hợp giản đơn, đối tượng là một khâu quán tính và trễ :

$$G_x(s) = \frac{k}{Ts + 1} e^{-\tau s} \tag{4-3}$$

Hàm quá độ tương ứng sẽ là :

$$h_x(t) = k(1 - e^{-(t-\tau)/T}) \; ; \; t > \tau \tag{4-4}$$

Điều kiện (4-2) có dạng :

$$h(t_u) = k[1 - e^{-(t_u-\tau)/T}] \tag{4-5}$$

$$\frac{dh(t_u)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-(t_u-\tau)/T} \tag{4-6}$$

Dùng ký hiệu :

$$b = h(t_u)/h_{xl} \tag{4-7}$$

và sau khi giải hệ phương trình trên ta có:

$$\left.\begin{aligned} T &= (1 - b)\, T_{dt} \; ; \\ \tau &= t_u - (1 - b)\, T_{dt} \ln (1 - b)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{4-8}$$

Khi b < 0,5, biểu thức xác định đơn giản hơn và bằng :

$$\tau = t_u - T_{dt}\,(1{,}025b - 0{,}625b^2) \tag{4-9}$$

Khi b < 0,05 có thể xem $T \approx T_{dt}$ và $\tau \approx \tau_{dt}$.

Nếu giả thiết $\tau = 0$ và với m = 1 ta có :

$$G_x(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(Ts + 1)} \tag{4-10}$$

Hàm quá độ tương ứng là :

$$h_x(t) = k\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T}{T_1 - T} e^{-\frac{t}{T}}\right) \tag{4-11}$$

Sau khi lấy đạo hàm đối với (4-11) hai lần và cân bằng 0, ta xác định tọa độ của điểm uốn $h(t_u)$ và hệ số của đường tiếp tuyến tại điểm uốn :

$$h_u = h_x(t_u) = k\left[1 - \left(\frac{T}{T_1} + 1\right)e^{-\frac{t_u}{T_1}}\right]; \qquad (4\text{-}12)$$

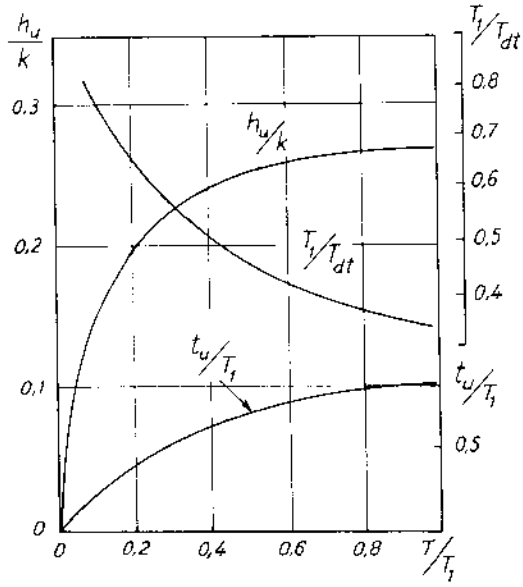
$$t_u = T_1 \frac{T/T_1}{T/T_1 - 1} \ln \frac{T}{T_1}; \qquad (4\text{-}13)$$

$$h'(t_u) = \frac{k}{T_{dt}} = \frac{k}{T_1} e^{-\frac{t_u}{T}} \qquad (4\text{-}14)$$

Từ các biểu thức này, ta có mối quan hệ giữa các thông số của hàm truyền giả thiết cần xác định $W_x(s)$ và thông số từ đặc tính thực nghiệm h(t). Mối quan hệ ấy được thể hiện dưới dạng các đường cong như ở hình 4.4. Cách sử dụng như sau :

Theo trị số $h_u/k$ và đường cong $h_u/k = f_1(T/T_1)$ ta xác định $T/T_1$, đồng thời theo đường cong $T_1/T_{dt} = f_2(T/T_1)$ ta xác định $T_1/T_{dt}$. Biết $T_{dt}$ sẽ xác định được $T_1$, biết $T_1$ xác định được T.

Đường cong $t_u/T_1 = f_3(T/T_1)$ chỉ dùng để kiểm tra lại thông số $t_u$. Nếu $t_u$ xác định theo đường cong nhỏ hơn trị số $t_u$' từ thực nghiệm (hình 4.3), thì ở giả thiết cần thêm một lượng trễ bằng :




*Hình 4.4*

$$\tau = t_u' - t_u \qquad (4\text{-}15)$$

hoặc dùng hàm truyền xấp xỉ với m lớn hơn.

**Ví dụ 4-1**

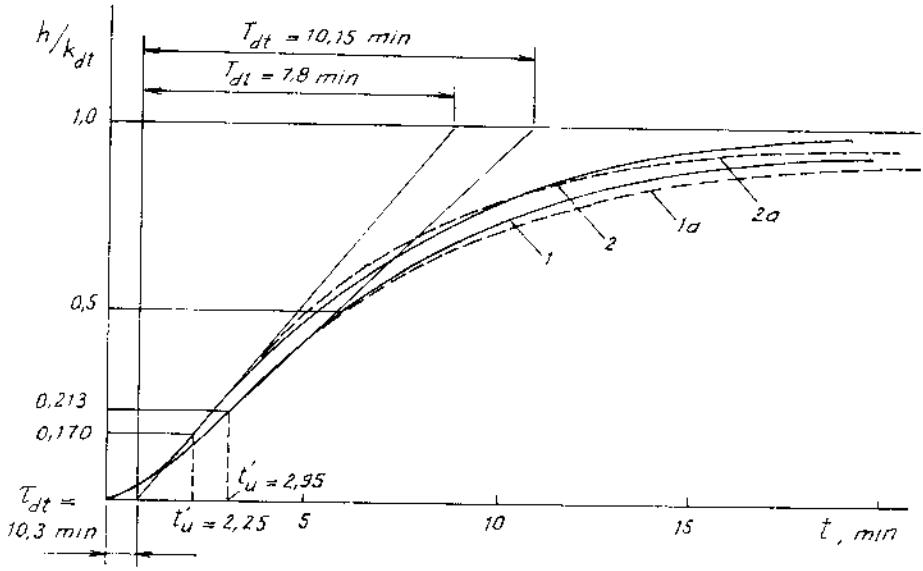
Ở hình 4.5 có đặc tính thực nghiệm của một đối tượng khí nén với hai phụ tải khác nhau.

Đặc tính *1* của đối tượng có các thông số từ thực nghiệm như sau : $h_u/k = 0{,}213$, $T_{dt} = 10{,}15$ min, $t_u' = 2{,}95$ min. Theo đường cong $h_u/k$ ở hình 4.4, xác định $T/T_1 = 0{,}25$ và $T_1/T_{dt} = 0{,}63$, do đó $T_1 = 0{,}63T_{dt} =$

0,63 x 10,15 = 6,4 min và T = $T_1$ x 0,25 = 6,4 x 0,25 = 1,6 min. Theo đường cong $t_u/T_1$ thì trị số này bằng 0,46 ; do đó $t_u$ = 0,46 x 6,4 = 2,95 min. Như vậy trị số $t_u$ từ đường cong và thực nghiệm như nhau nên hàm truyền của đối tượng có dạng :

$$G_x(s) = \frac{1}{(6,4s + 1)(1,6s + 1)}$$

Đặc tính xấp xỉ được mô tả bằng đường *1a* ở hình 4.5.




*Hình 4.5*

Đặc tính thực nghiệm *2* có các thông số như sau :

$h_u/k$ = 0,170 ; $T_{dt}$ = 7,8 min ; $t'_u$ = 2,2 min. Theo đường cong $h_u/k$, với thông số xác định được bằng 0,170, ta có $T/T_1$ = 0,14 ; $T_1/T_{dt}$ = 0,73. Từ đó $T_1$ = 5,7 min ; T = 0,8 min. Theo đường cong $t_u/T_1$ ta xác định $t_u$ = 0,32. $T_1$ = 0,32 x 5,7 = 1,83. Như vậy $t_u$ theo tính toán nhỏ hơn trị số thực nghiệm $t'_u$, do đó cần thêm vào hàm truyền xấp xỉ thời gian trễ :

$$\tau = 2,2 - 1,83 = 0,37 \text{ min}$$

Cuối cùng :

$$G_x(s) = \frac{1}{(5,7s + 1)(0,8s + 1)} e^{-0,37s}$$

và hàm quá độ xấp xỉ theo hàm truyền trên được mô phỏng để so sánh là đường *2a* trên hình 4.5.

Chú ý rằng khi nhận dạng, đầu vào của đối tượng là một tín hiệu bậc thang (không có các bộ điều chỉnh) và hệ số khuếch đại k ở hàm truyền xấp xỉ $G_x(s)$ được xác định theo tỷ số của trị số xác lập từ thực nghiệm $h_{xl}$ so với biên độ của tác động bậc thang ở đầu vào của đối tượng.

### IV.2.2. Phương pháp Strejc

Theo phương pháp này, hàm truyền của đối tượng được dùng với dạng :

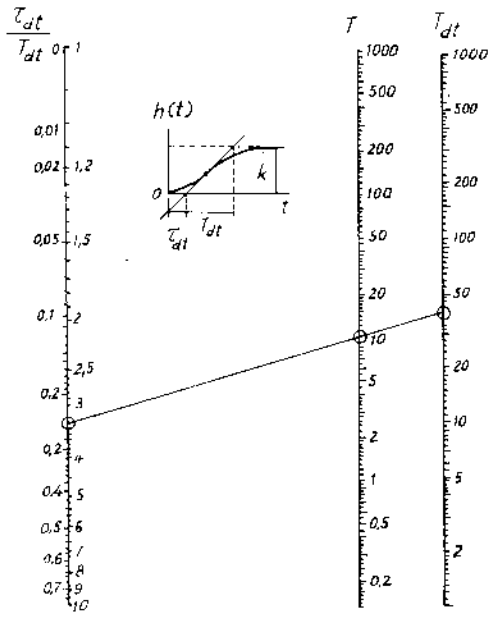
$$G_x(s) = \frac{k}{(Ts + 1)^n} \qquad (4\text{-}16)$$

Ở đây T và n được xác định theo thông số thực nghiệm $\tau_{dt}$, $T_{dt}$ như ở hình 4.2a, và mối quan hệ giữa chúng với T và n được thể hiện như ở hình 4.6.

**Ví dụ 4-2**

Từ thực nghiệm xác định được $\tau_{dt} = 10$, $T_{dt} = 40$, với hai trị số $T_{dt} = 40$, và $\frac{\tau_{dt}}{T_{dt}} = 0{,}25$, vẽ đường thẳng như ở hình 4.6 ta xác định n = 3,3 và T = 10.

Ví dụ tín hiệu vào là điện áp 10 V và hàm quá độ có trị số xác lập bằng 30 V, vậy $k = \frac{30}{10} = 3$ và hàm truyền 4-16 có dạng :




*Hình 4.6*

$$G_x(s) = \frac{3}{(10s + 1)^{3.3}}$$

### IV.2.3. Đối tượng không có tự cân bằng

Trong trường hợp hàm truyền xấp xỉ được giả thiết có một khâu tích phân :

$$G_x(s) = \frac{k}{s(Ts+1)^n} \qquad (4\text{-}17)$$

Laplace của tín hiệu ra sẽ là :

$$Y = U\frac{k}{s(Ts+1)}$$

và biến đổi ngược cho ta :

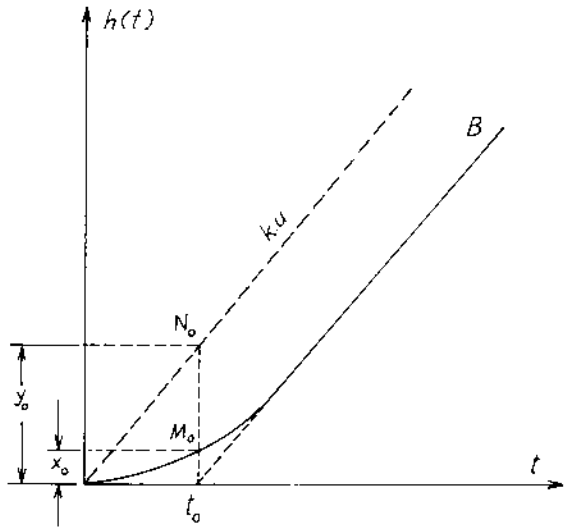
$$y = k.u\left[t - nT + e^{-\frac{t}{T}}\left(nT + \frac{n-1}{1!}T\left(\frac{t}{T}\right) + \ldots + \frac{T}{(n-1)!}\left(\frac{t}{T}\right)^{n-1}\right)\right]$$

Khi $t \to \infty$, y sẽ tiến đến đường tiệm cận $t_oB$ và $y \to k.u\ (t - nT)$ mà $t_o = nT$ và đường thẳng có độ nghiêng $k_u$.

Thay thế t bởi $t_o$ ta có điểm $M_o$ :

$$M_o = k.u\left[t_o - nT + e^{-\frac{t_o}{T}}\left(nT + \frac{(n-1)T}{1!}\left(\frac{t_o}{T}\right) + \ldots + \frac{T}{(n-1)!}\left(\frac{t_o}{T}\right)^{n-1}\right)\right]$$

Và thay thế $t_o$ bởi nT ta có :




*Hình 4.7*

$$M_o = k.ue^{-n}\left[nT + \frac{n-1}{1!}nT + \ldots + \frac{T}{(n-1)!}n^{n-1}\right]$$

Bây giờ, ta xác định tỷ số :

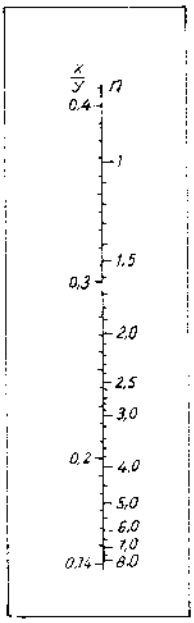
$$\frac{M_o}{k.u.nT} = e^{-n}\left[1 + \frac{n-1}{1!} + \frac{(n-2)n}{2!} + \ldots + \frac{n^{n-2}}{(n-1)!}\right]$$

Mối quan hệ này chỉ phụ thuộc vào n. Từ đó có thể xây dựng toán đồ như ở hình 4.8 để xác định bậc n.

Vì $k.u.nT = k.u.t_0$. Như vậy $k.u.t_0$ được xác định bởi điểm $N_0$ ở hình 4.7. Biết n sẽ xác định được T vì $T = \frac{t_0}{n}$.

Hệ số k được xác định theo đường nét đứt ở hình 4.7 với khâu tích phân đơn thuần (hệ số góc), có tính đến biên độ của tín hiệu vào u(t).

Để phân tích và tổng hợp hệ thống, bước đầu tiên là nhận dạng đối tượng với nội dung là xác định cấu trúc và thông số của đối tượng như đã nêu trên. Có nhiều phương pháp như nhận dạng đối tượng theo đặc tính tần, dùng phương pháp tương quan [15], dùng mô hình thích nghi, dùng phương pháp quy hoạch thực nghiệm [20] v.v... mà ở đây chỉ đề cập đến một vài phương pháp thông dụng trong công nghiệp.




*Hình 4.8*

## IV.3. PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO NGHIỆM SỐ

Mức độ ổn định và đặc tính quá độ của một hệ kín liên quan trực tiếp đến vị trí phân bố nghiệm của phương trình đặc trưng. Thường thường người ta thay đổi một hay vài thông số của hệ để có được vị trí phân bố nghiệm thích hợp. Do đó khi các thông số của hệ thay đổi cần xem các nghiệm của phương trình đặc trưng di chuyển như thế nào trên mặt phẳng nghiệm số.

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số được nhà bác học Nga K. F. Theodorchic, đề xuất năm 1948, sau đó được phát triển và đưa vào ứng dụng nhanh chóng bởi E. G. Yderman (Liên Xô cũ), Evans (Mỹ) v.v...

*Quỹ đạo nghiệm số là quỹ tích các nghiệm số của phương trình đặc trưng khi thông số của hệ thay đổi từ 0 đến ∞.*

Thông thường, thông số được khảo sát là k với hàm truyền hệ hở :

$$W(s) = k\frac{P(s)}{Q(s)}$$

thì phương trình đặc trưng của hệ kín là :

$$1 + k\frac{P(s)}{Q(s)} = 0$$

hay

$$A(s) = Q(s) + v.P(s) = 0 \qquad (4\text{-}18)$$

ở đây P(s), Q(s) là đa thức của s, còn v là thông số cần biến đổi trong

trường hợp chung. Để khảo sát quỹ đạo nghiệm số, cần xác định quy luật dịch chuyển của tất cả n nghiệm khi v thay đổi : $0 < v < \infty$.

Trước tiên ở biểu thức (4-18) cần chọn v sao cho các hệ số ở bậc cao nhất của P(s) và Q(s) đều bằng 1 :

$$P(s) = s^r + b_1 s^{r-1} + b_2 s^{r-2} + \ldots + b_r \qquad (4\text{-}19)$$

$$Q(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (4\text{-}20)$$

Nghiệm của phương trình (4-19) : $P(s) = 0$ là $z_1, z_2, \ldots, z_r$ và nghiệm của (4-20) : $Q(s) = 0$ là $p_1, p_2, \ldots p_n$. Vậy phương trình (4-16) có thể viết :

$$\prod_{i=1}^{n} (s - p_i) + v \prod_{i=1}^{r} (s - z_i) = 0 \qquad (4\text{-}21)$$

hoặc khi $v \neq 0$ :

$$\frac{1}{v} \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) + v \prod_{i=1}^{r} (s - z_i) = 0 \qquad (4\text{-}22)$$

với $n \geqslant r$.

Ứng với (4-21) khi $v = 0$, nghiệm của $s_i$ trùng với nghiệm cực $p_i$, còn ứng với (4-22) khi $v = \infty$, nghiệm của $s_i$ trùng với nghiệm không $z_i$, hay tiến đến vô cùng.

Vì nghiệm phức của phương trình đặc trưng đối xứng với trục thực trong mặt phẳng nghiệm số nên có thể hình thành các quy tắc xây dựng quỹ đạo nghiệm số như dưới đây :

*Quy tắc 1.* Quỹ đạo nghiệm số đối xứng với trục thực và gồm có n nhánh xuất phát từ n nghiệm của phương trình $Q(s) = 0$ khi $v = 0$, trong số đó có r nhánh kết thúc ở r nghiệm của phương trình $P(s) = 0$ và $(n - r)$ nhánh đi về vô tận khi $v \to \infty$.

Phương trình (4-21) có thể viết dưới dạng :

$$-v = \frac{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}{\prod_{i=1}^{r} (s - z_i)} = \frac{Q(s)}{P(s)} \qquad (4\text{-}23)$$

Chia đa thức (4-20) cho (4-19) ta có :

$$-v = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n}{s^r + b_1 s^{r-1} + b_2 s^{r-2} + \ldots + b_r} =$$

$$= s^{n-r} + c_1 s^{n-r-1} + c_2 s^{n-r-2} + \ldots \qquad (4\text{-}24)$$

Nhân hai vế cuối của (4-24) với P(s) sau đó cân bằng các hệ số cùng hàm mũ của s ta có :

$$a_1 = c_1 + b_1 \quad \dashrightarrow \quad c_1 = a_1 - b_1$$

$$a_2 = c_2 + b_2 + c_1b_2 \quad \dashrightarrow \quad c_2 = a_2 - b_2 - b_2c_1$$

. . . . . .

Biểu thức (4-24) là tổng của một chuỗi vô hạn các thành phần có hàm mũ của s đến $-\infty$. Khi $|s| \rightarrow \infty$, tương ứng với đường tiệm cận của n - r nhánh, chỉ có hai thành phần đầu của (4-22) là có ý nghĩa nên chỉ cần khảo sát một hệ số của (4-24) là đủ.

$$c_1 = a_1 - b_1 = \sum_r z_i - \sum_n p_i \tag{4-25}$$

vì

$$a_1 = -\sum_n p_i \; ; \quad b_1 = -\sum_r z_i$$

Phương trình (4-24) chính là phương trình của (n - r) tia đối xứng hình sao.

Thật vậy, vì các tia đối xứng có (n - r) nhánh hình sao mà tâm ở điểm $x_o$ có thể được mô tả bởi phương trình :

$$-v = (s - x_o)^{n-r} \tag{4-26}$$

khi v thay đổi từ 0 đến $\infty$.

Phân tích (4-26) theo nhị thức Newton, ta có :

$$-v = s^{n-r} - (n - r)\, s^{n-r-1}x_o + \frac{(n-r)(n-r-1)}{2!}\, s^{n-r-2}x_o^2 + \ldots \tag{4-27}$$

So sánh (4-24) và (4-27) ta xác định được :

$$c_1 = -(n - r)\, x_o \tag{4-28}$$

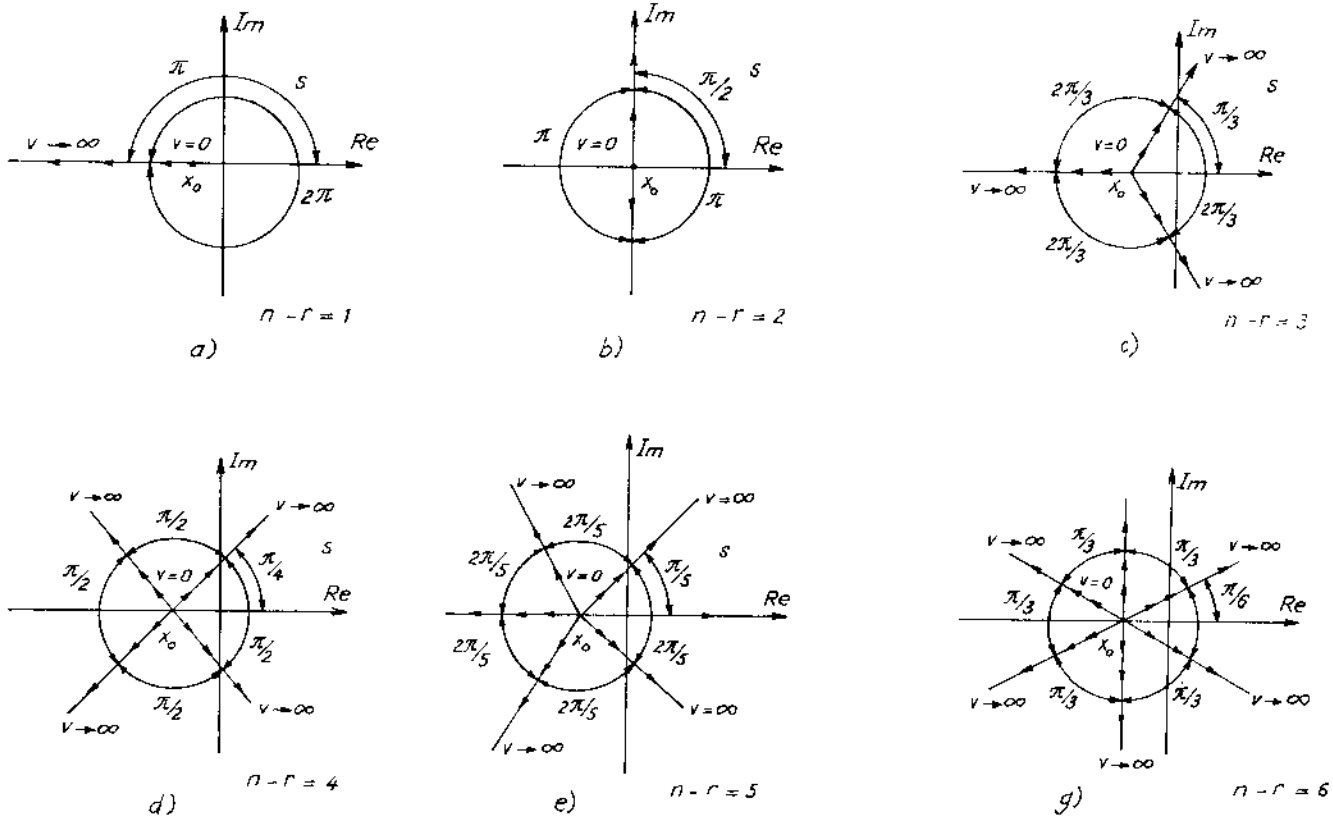
Ở hình 4.9a - g có các tia hình sao xuất phát từ $x_o$ và là đường tiệm cận của (n - r) quĩ đạo.

Xét môđun và góc quay của (4-26) ta có :

$$\text{mod}(s - x_o) = \sqrt[n-r]{v} \tag{4-29}$$

$$\arg(s - x_o) = \frac{\pi(2k + 1)}{(n - r)} \tag{4-30}$$

Lưu ý là $e^{j\pi(2k+1)} = -1$ mà k là số nguyên bất kỳ. Từ (4-30) ta nhận thấy góc giữa hai tia gần nhau bằng $2\pi/(n - r)$, còn góc giữa trục thực và tia gần nhất bằng $\pi/(n - r)$.


Im
Re
s
v → ∞
v = 0
x₀
π
2π
n − r = 1
a)
π/2
n − r = 2
b)
2π/3
π/3
n − r = 3
c)
π/2
π/4
n − r = 4
d)
2π/5
π/5
n − r = 5
e)
π/6
n − r = 6
g)

*Hình 4.9*

Trị số $x_o$ được xác định từ (4-25) và (4-28) :

$$x_o = \frac{\sum_n p_i - \sum_r z_i}{n - r} \qquad (4\text{-}31)$$

Từ đó, để xây dựng quỹ đạo nghiệm số tiệm cận dùng quy tắc sau.

*Quy tắc 2.* Quỹ đạo nghiệm số tiệm cận khi $v \to \infty$ là $(n - r)$ tia đối xứng, hình sao, có góc giữa các tia bằng $2\pi/(n - r)$ và tia gần nhất tạo với trục thực một góc $\pi/(n - r)$.

Tổng hợp hai quy tắc trên cho phép vẽ phần đầu và phần cuối của quỹ đạo pha khi $v = 0$ và $v \to \infty$. Các trị số trung gian của quỹ đạo nghiệm khi v thay đổi, hoặc theo trục thực hoặc nằm trong mặt phẳng phức.

Toàn bộ quỹ đạo nghiệm được vẽ theo chương trình chuẩn hóa trên máy vi tính mà MATLAB là công cụ hữu hiệu.

**Ví dụ 4-3**

Vẽ quỹ đạo nghiệm của hệ có hàm truyền đạt :

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

Khi k thay đổi từ 0 đến $\infty$ và $T_1 = 0{,}1$ sec ; $T_2 = 0{,}02$ sec. Phương trình (4-18) có dạng :

$$A(s) = s\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right) + \frac{k}{T_1T_2} = 0$$

với $Q(s) = s\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)$; $P(s) = 1$ ; $v \equiv \frac{k}{T_1T_2}$

Như vậy $n = 3$ ; $r = 0$ với :

$$p_1 = 0 \; ; \; p_2 = -\frac{1}{T_1} = -10 \text{ sec}^{-1} \; ; \; p_3 = -\frac{1}{T_2} = -50 \text{ sec}^{-1}$$

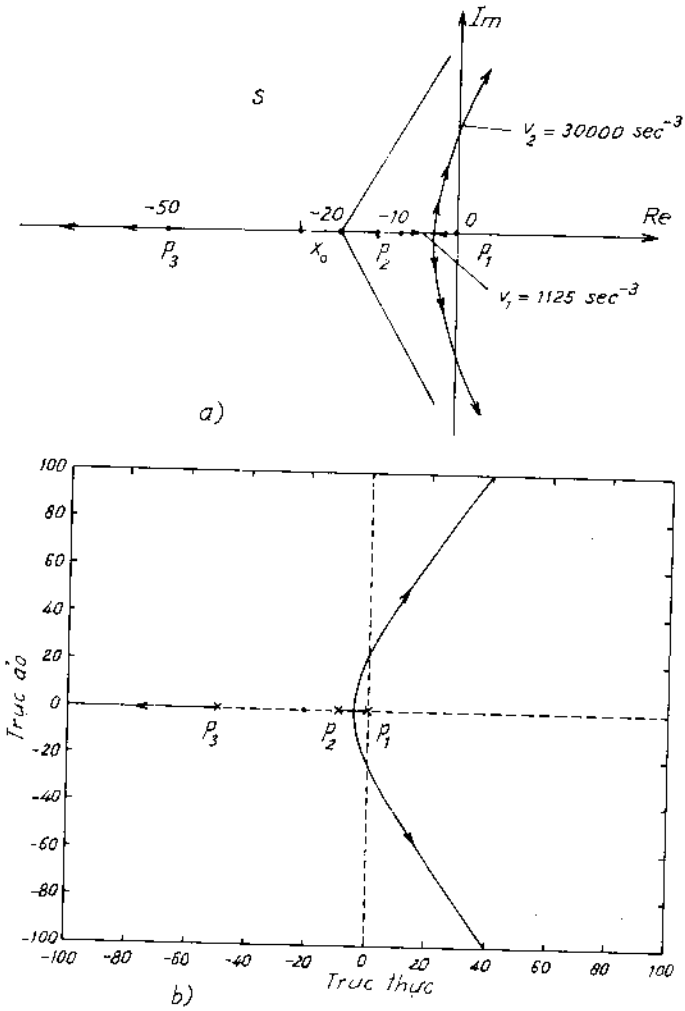
Vì $n - r = 3$ nên quỹ đạo pha tiệm cận là ba tia hình sao như ở hình 4.9c có tâm xác định bởi (4-31) :

$$x_o = \frac{(-10 - 50)}{3} = -20 \text{ sec}^{-1}$$

Quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ $p_1 = 0$, $p_2 = -10 \text{ sec}^{-1}$, $p_3 = -50 \text{ sec}^{-1}$ khi $v = 0$ và tiệm cận với ba tia hình sao khi $v \to \infty$. Trên hình 4.10a các trị số trung gian khi cắt trục hoành ứng với $v_1 = 1125 \text{ sec}^{-3}$ và cắt

trục tung với $v_2$ = 30.000 $sec^{-3}$. Ở hình 4.10b là quỹ đạo nghiệm số của hệ trên được vẽ trên máy tính với chương trình MATLAB như sau :

```
num = [1] ;
den = [0.002 0.12 1 0] ;
rlocus (num, den)
rlocfind (num, den)
```




*Hình 4.10*

**Ví dụ 4-4**

Vẽ quỹ đạo nghiệm của hệ trên khi $T_2$ biến đổi từ 0 đến ∞, với $T_1$ = 0,1 sec ; k = 1,6 $sec^{-1}$.

Trong trường hợp này biểu thức (4-18) có dạng :

$$A(s) = s^2\left(s + \frac{1}{T_1}\right) + \frac{1}{T_2}\left(s^2 + \frac{1}{T_1}s + \frac{k}{T_1}\right) = 0$$

tương ứng với :

$$Q(s) = s^2\left(s + \frac{1}{T_1}\right) ;$$

$$P(s) = s^2 + \frac{1}{T_1}s + \frac{k}{T_1} ;$$

$$v \equiv \frac{1}{T_2}$$

Biểu thức P(s) có thể viết :

$$P(s) = s^2 + \frac{1}{T_1}s + \frac{1}{T_1}k = (s - z_1)(s - z_2) =$$

$$= s^2 - (z_1 + z_2)\,s + z_1z_2 = 0 \qquad (4\text{-}32)$$

Như vậy n = 3 ; r = 2 ; $p_1 = p_2 = 0$ ; $p_3 = -\frac{1}{T_1} = -10\ sec^{-1}$

$$z_1z_2 = \frac{k}{T_1} = 16\ sec^{-1} ;\ z_1 + z_2 = -\frac{1}{T_1} = -10\ sec^{-1}$$

từ đó $z_1 = -2\ sec^{-1}$ ; $z_2 = -8\ sec^{-1}$.

Vì n - r = 1 nên quỹ đạo nghiệm số tiệm cận là một tia duy nhất xuất phát từ $p_3$ với thông số đã cho và mọi trị số dương của v. Hệ luôn ổn định vì quỹ đạo nghiệm số đều nằm bên trái trục ảo như ở hình 4.11a.

Khi (4-32) có nghiệm phức, với điều kiện $z_1 + z_2 < 4z_1z_2$ (hệ bậc hai) ứng với $k > \frac{1}{4T_1}$ thì quỹ đạo nghiệm số đi qua miền không ổn định và cắt trục ảo ở trị số giới hạn $v_g = k - \frac{1}{T_1}$ như ở hình 4.11b. Vì nghiệm của P(s) = 0 là nghiệm phức nên quỹ đạo nghiệm số khi v →

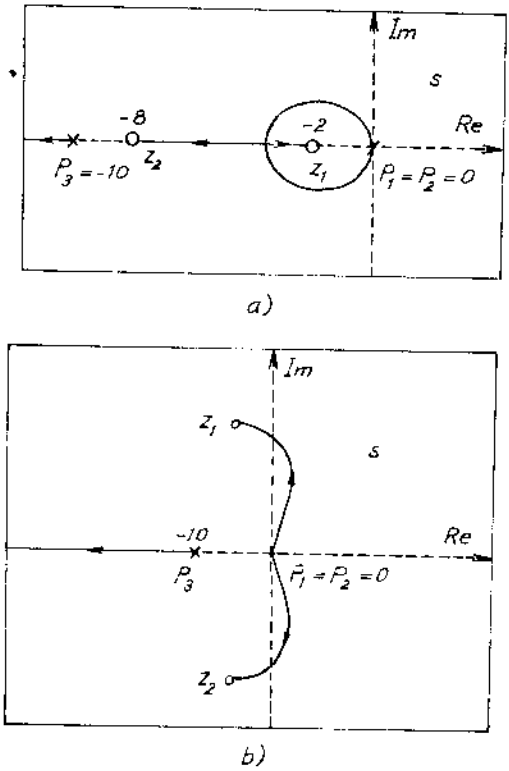
$\infty$ sẽ tiến đến các nghiệm $z_1$ và $z_2$, không còn nằm trên trục thực.

## IV.4. PHƯƠNG PHÁP CHIA MIỀN ỔN ĐỊNH

Chia miền ổn định (còn gọi là chia miền D) là chia không gian thông số (hay hệ số) ra các vùng có phân bố nghiệm của phương trình đặc trưng khác nhau. Mỗi vùng được ký hiệu là D(l) với l là số nghiệm phải. Như vậy vùng D(0) là vùng ổn định.

Việc nhận biết được vùng thông số mà hệ ổn định có ý nghĩa thực tế lớn cho việc thiết kế hệ thống hay chỉnh định thông số của hệ.

Iu.I. Neymark đề xuất phương pháp này cho trường hợp một và hai thông số (1948).




*Hình 4.11*

Trong trường hợp một thông số, phương trình đặc trưng có dạng :

$$A(s) = Q(s) + v.P(s) = 0 \qquad (4\text{-}33)$$

và v là thông số cần khảo sát.

Ranh giới miền D ứng với (4-33) được xác định bởi phương trình :

$$Q(j\omega) + v.P(j\omega) = 0$$

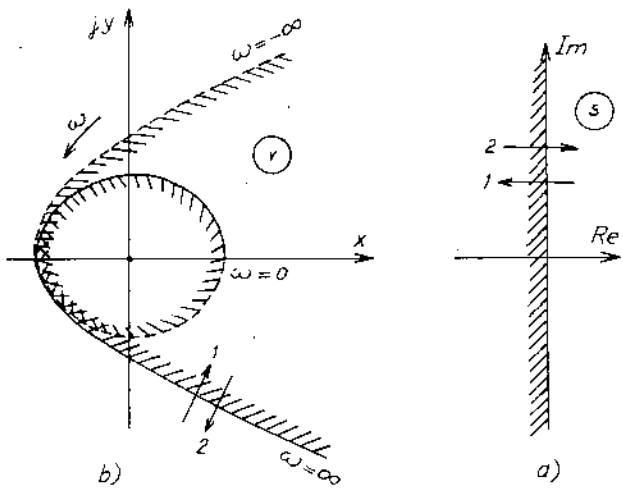
vì ranh giới giữa phần trái và phải của mặt phẳng nghiệm số là trục ảo ứng với $s = j\omega$ $(-\infty < \omega < \infty)$. Giải phương trình đối với v ta xác định được miền D :

$$v = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = x + jy \qquad (4\text{-}34)$$

với v là nghiệm phức.

Khi xác định miền ổn định chỉ cần dùng miền tần số dương $(0 < \omega < \infty)$ như đường đậm nét trên hình 4.12b. Sau đó vẽ đường có tần

số âm đối xứng (như đường nét đứt ở hình 4.12b). Đường cong v có thể xem như kết quả biến đổi của trục ảo mặt phẳng s (hình 4.12a) tương ứng với biểu thức (4-34). Nửa mặt phẳng trái của biến s tương ứng với một phần mặt phẳng v trên hình 4.12b. Bên trái đường cong miền D cũng có đánh dấu gạch sọc khi tần số biến đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$.




*Hình 4.12*

Trong mặt phẳng v, nếu chuyển động qua ranh giới miền D vào vùng gạch sọc (hướng mũi tên *1*) thì trong mặt phẳng s, một nghiệm đi từ nửa mặt phẳng phải sang trái. Ngược lại mũi tên *2* ở hình 4.12b tương ứng với một nghiệm đi từ nửa mặt phẳng trái sang phải. Hướng gạch sọc xác định hướng chuyển đổi nghiệm qua trục ảo cũng như số lần chuyển đổi. Cho nên muốn đánh dấu vùng D(l) chỉ cần biết phân bố nghiệm đối với trục ảo ứng với giá trị nào đó của thông số. Bằng cách tính số lần cắt đường ranh giới miền D khi thay đổi thông số và hướng chuyển động đối với miền gạch sọc, có thể xác định trị số l.

Với những bài toán tuyến tính, thông số biến đổi là các trị số thực (hệ số khuếch đại, hằng số thời gian) nên chỉ cần quan tâm đến trục x. Đối với bài toán phi tuyến, thông số được khảo sát có thể là cả mặt phẳng xy.

**Ví dụ 4-5**

Hệ kín có phương trình đặc trưng :

$$(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3) + k = 0 \qquad (4\text{-}35)$$

Để xây dựng miền ổn định đối với k, ta vẽ đường ranh giới miền D trên mặt phẳng phức của thông số k nói chung và chỉ quan tâm đến các trị số thực.

Theo (4-35), ta có phương trình đường ranh giới miền D :

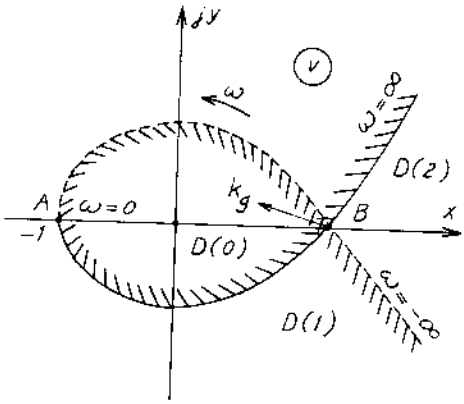
$$k = x + jy = -(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) \qquad (4\text{-}36)$$

Trên hình 4.13, vùng nằm giữa A, B và đường cong là miền có khả năng ổn định vì vùng gạch sọc hướng về đó. Thực vậy, một điểm tại gốc trục ứng với k = 0 làm cho hệ thống ổn định vì phương trình đặc trưng lúc bấy giờ là :

$$(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3) = 0$$

Cả ba nghiệm đều thực và âm nằm bên trái của mặt phẳng nghiệm số. Do đó miền ổn định k ứng với đoạn AB :

$$-1 < k < k_g$$




*Hình 4.13*

Trị số giới hạn được xác định bởi $\omega_0$ ở biểu thức (4-34) :

$$y(\omega_0) = 0 \text{ và } x(\omega_0) = k_g$$

Sau khi tính ta có kết quả :

$$k_g = (1 + \tau_2 + \tau_3)\left(1 + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}\right) - 1$$

mà

$$\tau_2 = \frac{T_2}{T_1} \; ; \qquad \tau_3 = \frac{T_3}{T_1}$$

Trên hình 4.13 có các vùng D(0), D(1), D(2). Miền D(3) không tồn tại có nghĩa là khi $T_1$, $T_2$ dương và k bất kỳ, không thể cả ba nghiệm của phương trình đặc trưng (4-33) đều nằm ở nửa phải của mặt phẳng nghiệm số. Điều này phù hợp với ví dụ (3-3) ở cột *1* của bảng Routh, hệ số đổi dấu hai lần và có hai nghiệm phải.

Bây giờ nếu chọn thông số $v \equiv -\frac{1}{k}$ ta có :

$$-\frac{1}{k} = x + jy = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}$$

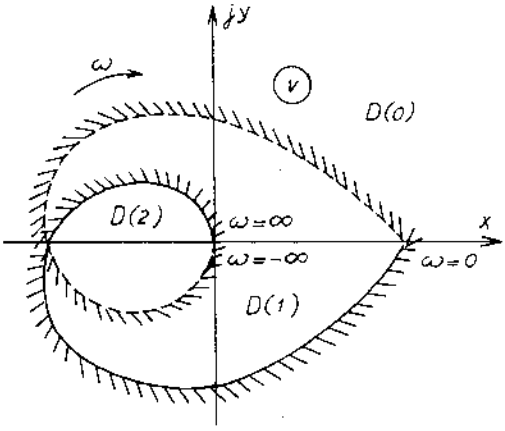
Sau khi vẽ đường ranh giới miền D, gạch sọc phía trái đường cong

khi tần số biến đổi từ $-\infty$ đến $\infty$, ta thấy hệ ổn định nếu thông số $-\frac{1}{k}$ nằm ngoài đường cong khép kín như ở hình 4.14.

Trường hợp hai thông số biến đổi $-v_1$ và $v_2$, phương trình (4-33) có dạng :

$$v_1P(s) + v_2Q(s) + R(s) = 0$$

Với tốc độ tính toán nhanh, máy tính sẽ xác định miền ổn định trên mặt phẳng $v_1v_2$ như sau :




*Hình 4.14*

Sau khi chia miền cần khảo sát của biến $v_1$ và $v_2$, một tổ hợp thông số $v_{10}$, $v_{20}$ được sử dụng để tính toán theo tiêu chuẩn ổn định Routh chẳng hạn và lập bảng cho n + 1 hàng và $m = M\left(n + \frac{3}{2}\right)$ cột (M là số nguyên). Số nghiệm phải l được xác định theo số lần đổi dấu ở cột 1, máy tính sẽ in thông số l. Nếu l = 0, một dấu hiệu khác được đánh dấu, đó là vùng ổn định. Cứ như vậy máy tính sẽ "quét" trên toàn bộ mặt phẳng thông số $v_1$, $v_2$ và để lại kết quả đã phân vùng.

Tiêu chuẩn Hurwitz có dạng khép kín, tiêu chuẩn Routh mang tính chất angôrít (từng phần ở bảng Routh được xác định trong quá trình tính toán) nên việc lập trình theo tiêu chuẩn Routh giản đơn hơn.

## BÀI TẬP CHƯƠNG IV

**Bài tập 4-1**

Dùng MATLAB (xem Phụ lục) để kiểm tra lại kết quả đã tính toán ở các bài tập sau :

a) 3 – 2 ; b) 3 – 3 ; c) 3 – 4 ; d) 3 – 7 ; e) 3 – 9.

*Đáp án*

a) $F_k(s) = s^3 + 5s^2 + 4s + 20 = 0$ có nghiệm :

$p_1 = -5$ ; $p_{2,3} = \pm 2j$.

b) $F_k(s) = 0,1\ s^4 + 1,5s^3 + 5,4s^2 + 40,45s + 72,9 = 0$ có nghiệm :

$p_1 = -12,9052$ ; $p_{2,3} = \pm 5,1929j$ ; $p_4 = -2,0948$.

c) $F_k(s^2) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 46s + 25,56 = 0$ có nghiệm :

$p_1 = -5,3805$ ; $p_{2,3} = \pm 2,7689j$ ; $p_4 = -0,6196$.

d) $F_k(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 80s + 42 = 0$ có nghiệm :

$p_1 = -7,0767$ ; $p_{2,3} = -0,1726 \pm 3,1995j$ ; $p_4 = -0,5781$.

e) $F_k(s) = 0,5s^3 + 17s^2 + 40s + 16 = 0$ có nghiệm :

$p_1 = -31,4919$ ; $p_2 = -2$ ; $p_3 = -0,5081$.

**Bài tập 4-2**

Vẽ quỹ đạo nghiệm số của :

a) $$\frac{K(2s+1)}{s(4s+1)(s+3)}$$

b) $$K\ \frac{s^2+2s+2}{(s+2)(s^2+2s+10)}$$

*Đáp án*

a) $z_1 = -\frac{1}{2}$ ; $p_1 = 0$ ; $p_2 = -\frac{1}{4}$ ; $p_3 = -3$.

b) $z_{1,2} = -1 \pm j$ ; $p_1 = -2$ ; $p_{2,3} = -1 \pm 3j$.

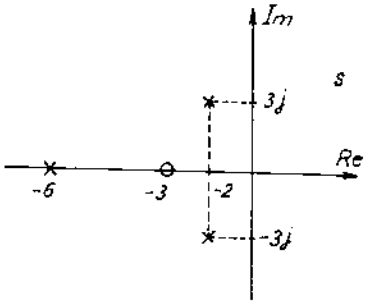
**Bài tập 4-3**

Phân bố nghiệm như ở hình 4.15 với K = 80. Xác định hàm truyền.

*Đáp án*

$$W(s) = \frac{80(s+3)}{(s+6)(s+2-3j)(s+2+3j)} =$$

$$= \frac{80(s+3)}{(s+6)(s^2+4s+13)}$$




*Hình 4.15*

**Bài tập 4-4**

Hệ có hàm truyền :

$$W(s) = \frac{2(s^2+9s+19)}{s^2+6s+8}$$

a) Đa thức đặc trưng của hệ là gì ?

b) Phương trình đặc trưng của hệ ?

c) Xác định nghiệm không và nghiệm cực ?

d) Vẽ quỹ đạo nghiệm số.

e) Vẽ quỹ đạo nghiệm số của Y(s) = W(s).X(s) với tín hiệu vào là hàm mũ : $x(t) = e^{-t}$.

*Đáp án*

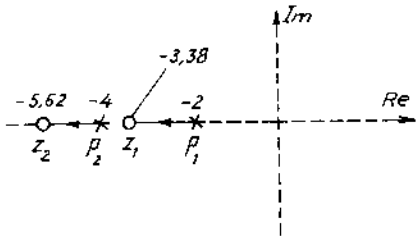
a) $F(s) = s^2 + 6s + 8$ ;

b( $F(s) = s^2 + 6s + 8 = 0$

c) $z_1 = -5{,}62$ ; $z_2 = -3{,}38$ ;

$p_1 = -2$ ; $p_2 = -4$

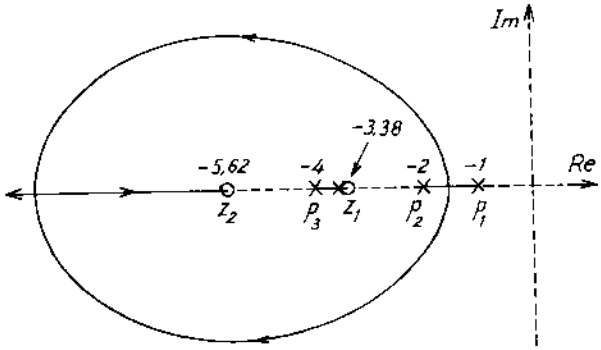
d) Quỹ đạo nghiệm số như ở hình 4.16.




***Hình 4.16***

e) $X(s) = \dfrac{1}{s+1}$ ; $\quad Y(s) = \dfrac{2(s^2 + 9s + 19)}{(s+1)(s^2 + 6s + 8)}$

Xuất hiện một nghiệm cực p = −1 và quỹ đạo nghiệm số như ở hình 4.17.




***Hình 4.17***

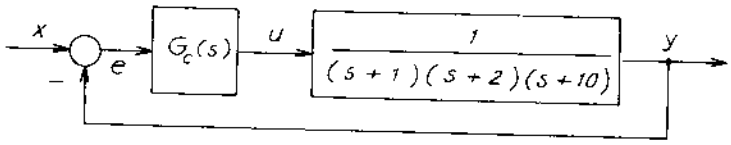
**Bài tập 4-5**

Ở hình 4.18 có sơ đồ khối của một hệ điều chỉnh, với $G_c(s)$ là hàm truyền của bộ điều chỉnh.

Vẽ quỹ đạo nghiệm số cho các trường hợp sau :

a) $G_c(s) = K$ ;

b) $G_c(s) = \dfrac{K(s + 0{,}1)}{s}$ ; c) $G_c(s) = \dfrac{K(s + 0{,}111)}{(s + 0{,}01)}$




*Hình 4.18*

*Đáp án*

a) $G(s) = \dfrac{K}{s^3 + 13s^2 + 32s + 20}$

với điều kiện ở biên giới ổn định;

$k_g \approx 340{,}8627$ với $p_{1,2} = \pm\ 5{,}2632j$

b) $G(s) = K\dfrac{(s + 0{,}1)}{s^4 + 13s^3 + 32s^2 + 20s}$

$k_g \approx 396{,}0912$ với $p_{1,2} = \pm\ 5{,}6579j$

c) $G(s) = K\dfrac{(s + 0{,}111)}{s^4 + 13{,}01s^3 + 32{,}13s^2 + 20{,}32s + 0{,}2}$

$k_g \approx 377{,}033$ với $p_{1,2} = \pm\ 5{,}5263j$

**Bài tập 4-6**

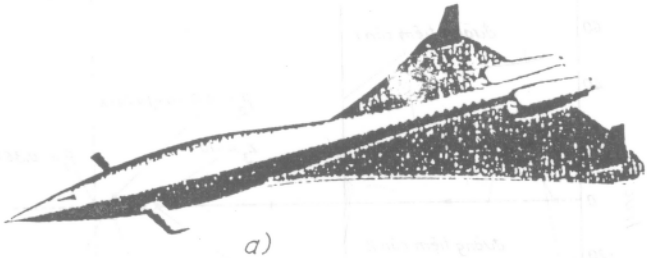
Máy bay siêu âm hiện đại với tốc độ ba lần tiếng động, trọng tải 300 hành khách, sử dụng chất liệu nhẹ, hệ điều khiển hiện đại, thuận lợi và hiệu quả kinh tế cao (hình 4.19a). Sơ đồ khối của hệ điều khiển tốc độ nâng hạ cánh như ở hình 4.19b với cơ cấu điều khiển :

$$G_c(s) = \frac{(s + 2)^2 K_2}{(s + 10)(s + 100)}$$

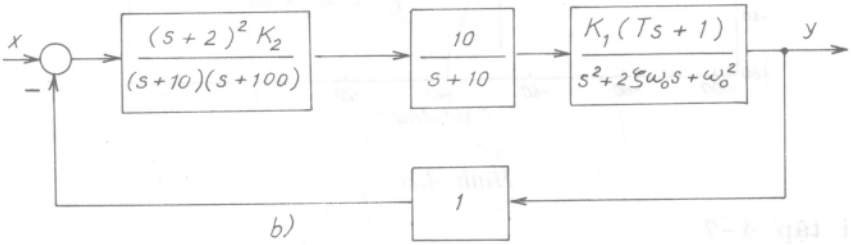
Cơ cấu thừa hành : $G_1(s) = \dfrac{10}{s + 10}$

Máy bay : $$G_2(s) = \frac{K_1(Ts + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Vẽ quỹ đạo nghiệm của hệ theo $K_1K_2$, với $\omega_0 = 2{,}5$ ; $\zeta = 0{,}3$ ; $T = 0{,}1$.



a)




b)

*Hình 4.19*

*Đáp án*

Hàm truyền của hệ hở :

$$W(s) = G_c(s)G_1(s)G_2(s) = \frac{K_1K_2 10\,(s+2)^2\,(0{,}1s+1)}{(s+10)\,(s+100)\,(s+10)\,(s^2+1{,}5s+15{,}625)}$$

$$= K_1K_2\,\frac{s^3+14s^2+44s+40}{s^5+121{,}5s^4+2295{,}625s^3+15025s^2+47812{,}5s+15625}$$

với ba nghiệm không :

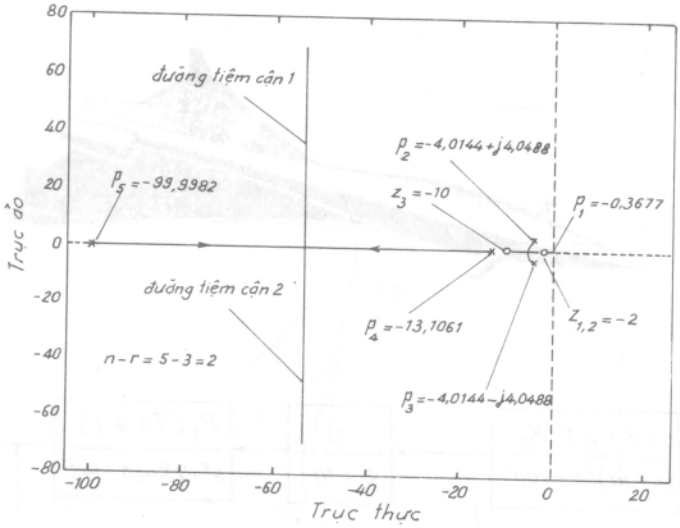
$z_1 = z_2 = -2$ ; $z_3 = -10$

và năm nghiệm cực :

$p_1 = -0{,}3677$ ; $p_{2,3} = -4{,}0144 \pm j\,4{,}0488$ ;

$p_4 = -13{,}1061$ ; $p_5 = -99{,}9982$.

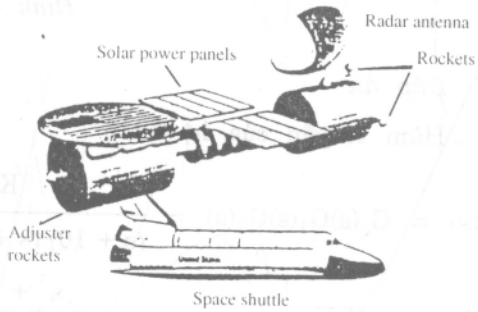
Hệ luôn ổn định và có hai đường tiệm cận ($n - r = 5 - 3 = 2$) như ở hình 4.20. $p_1 \to z_1$ ; $p_2 \to z_2$ ; $p_3 \to z_3$ còn $p_4$, $p_5 \to$ đường tiệm cận *1* và *2*.




*Hình 4.20*

**Bài tập 4-7**

Một trạm vũ trụ như ở hình 4.21, cần duy trì định hướng giữa Mặt Trời và Trái Đất để duy trì năng lượng và liên lạc. Hệ định hướng là hệ kín có hồi tiếp đơn vị với cơ cấu chấp hành và điều khiển.




*Hình 4.21*

$$G(s) = \frac{K(s + 20)}{s(s^2 + 24s + 144)}$$

a) Vẽ quỹ đạo nghiệm ;

b) Xác định K để hệ dao động với $\zeta = 0,5$.

*Đáp án*

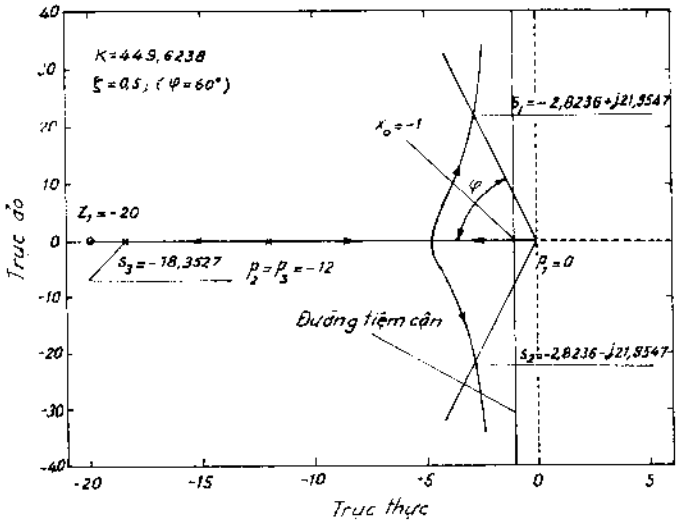
a)
$$W(s) = K\frac{s + 20}{s^3 + 24s^2 + 144s}$$

r = 1, nghiệm không : $z_1 = -20$,

n = 3, nghiệm cực : $p_1 = 0$ ; $p_2 = p_3 = -12$

n − r = 2. Đường tiệm cận đi qua :

$$x_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - r} = -1$$

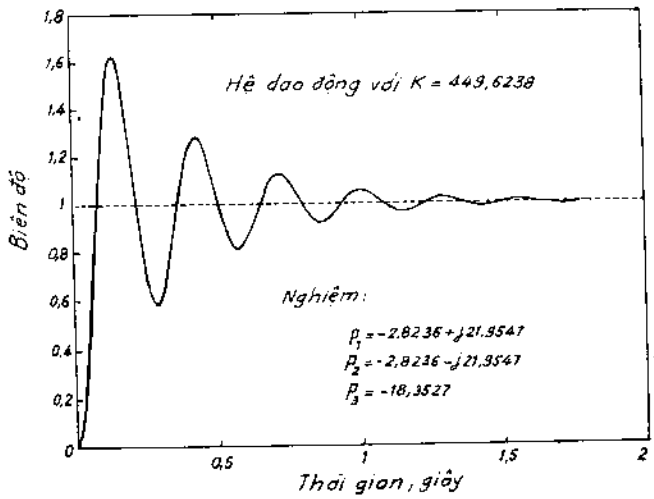



*Hình 4.22*

b) Với $\xi = 0,5$ ; $K = 449,6238$ :

$$W_k(s) = \frac{449,6238s + 8992,476}{s^3 + 24s^2 + 593,6238s + 8992,476}$$

Hàm quá độ như ở hình 4.23.




*Hình 4.23*

**Bài tập 4-8**

Vẽ quỹ đạo nghiệm của hệ :

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)} \text{ với hồi tiếp đơn vị}$$

a) Xác định K khi cả ba nghiệm đều thực và như nhau.

b) Xác định nghiệm ở trường hợp a.

*Đáp án*

$$K = 27 \; ; \quad s = -3.$$

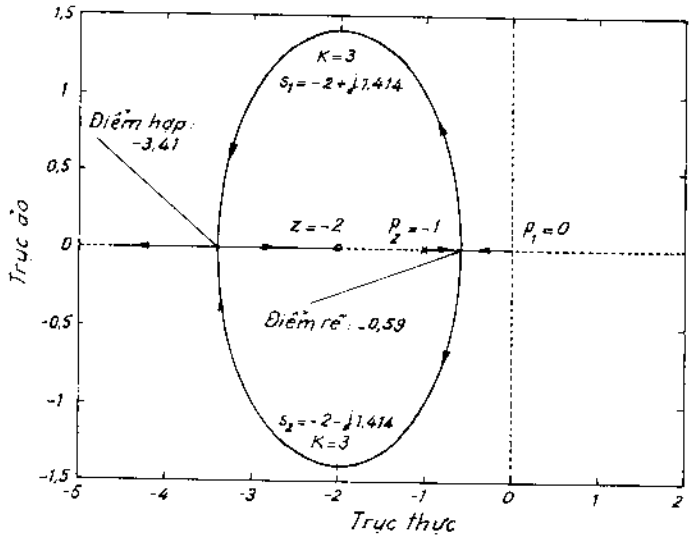
**Bài tập 4-9**

Vẽ quỹ đạo của hệ :

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}$$

a) Xác định điểm rẽ và điểm hợp trên trục thực.

b) Xác định K và nghiệm phức khi phần thực là -2.




*Hình 4.24*

*Đáp án*

a) Quỹ đạo nghiệm số như ở hình 4.24. Điểm rẽ và hợp có nghiệm bằng

$s_r = -0,59$ ; $s_h = -3,41$

b) Khi nghiệm phức có phần thực bằng $-2$ :

$K = 3$ ; $s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{2}$

**Bài tập 4-10**

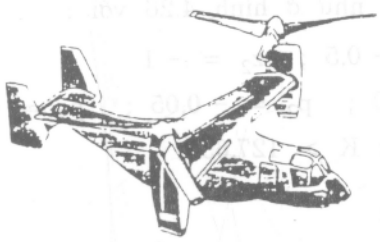
Máy bay Boeing V-22 (hình 4.25a) vừa là phản lực vừa là trực thăng có khả năng quay một góc $90^o$ quanh trục đứng khi hạ cánh và chạy trên mặt đất khi đậu. Sơ đồ khối như ở hình 4.25b.

a) Vẽ quỹ đạo nghiệm và xác định K để hệ ổn định.

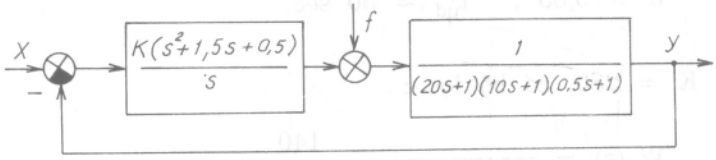
b) Xác định $\sigma\%$ và $t_{qd}$ theo h(t) khi K = 280 và không có nhiễu.

c) Xác định $\sigma\%$ và $t_{qd}$ theo h(t) khi K = 280 và có bộ lọc ở đầu vào :

$$W_L(s) = \frac{0,5}{s^2 + 1,5s + 0,5}$$



a)

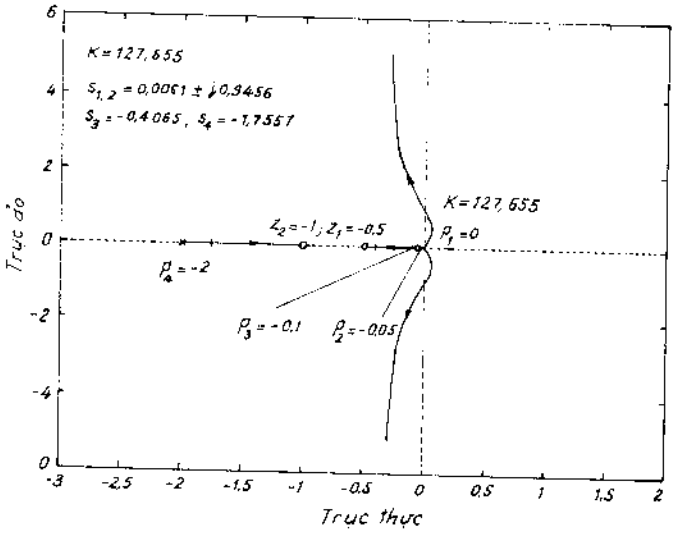



b)

*Hình 4.25*

*Đáp án*

a) $W(s) = G_c(s)G(s) = K\dfrac{s^2 + 1,5s + 0,5}{100s^4 + 215s^3 + 30,5s^2 + s}$




*Hình 4.26*

Quỹ đạo nghiệm như ở hình 4.26 với :

$z_1 = -0,5$ ; $z_2 = -1$

$p_1 = 0$ ; $p_2 = -0,05$ ; $p_3 = -0,1$ ; $p_4 = -2$

Để hệ ổn định : $K > 127,655$.

b) Với $K = 280$

$$W_K(s) = \frac{280(s^2 + 1,5s + 0,5)}{100s^4 + 215s^3 + 310,5s^2 + 421s + 140}$$

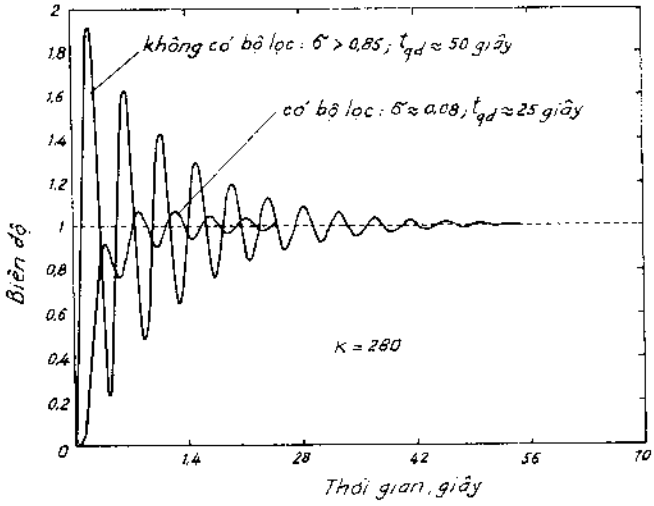
$\sigma > 0,85$ ; $t_{qđ} \approx 50$ sec

c) Với $K = 280$, có bộ lọc :

$$W_K(s) = \frac{140}{100s^4 + 215s^3 + 310,5s^2 + 421s + 140}$$

$\sigma \approx 0,08$ ; $t_{qđ} \approx 25$ sec.

Hàm quá độ như ở hình 4.27.


không có bộ lọc : δ > 0,85 ; $t_{qd}$ ≈ 50 giây
có bộ lọc : δ ≈ 0,08 ; $t_{qd}$ ≈ 25 giây
K = 280
Biên độ
Thời gian, giây
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1,4
28
42
56
70

*Hình 4.27*

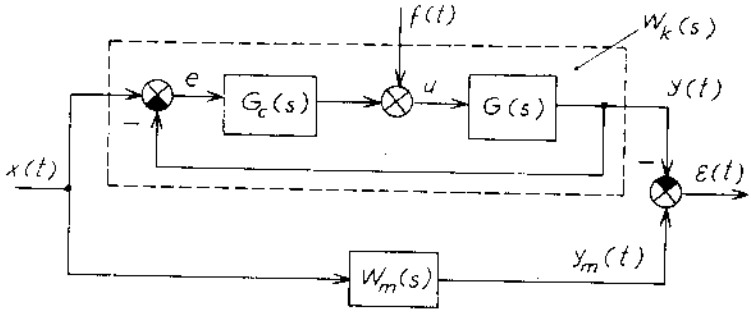
*Chương V*

# KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

## V.1. KHÁI NIỆM VỀ CHẤT LƯỢNG

Ổn định là điều kiện cần đối với một hệ điều khiển tự động. Một hệ ổn định có thể chưa đủ chính xác hay quá trình quá độ có thể quá dài. Vì vậy có thể có nhiều yêu cầu cùng một lúc được đặt ra khi hệ làm việc với một tín hiệu vào nhất định nào đó.

Khi khảo sát quá trình điều khiển của các hệ ổn định, người ta dùng tín hiệu vào có dạng thường gặp hay một dạng tác động nặng nề tiền định nào đó. Đó là các tín hiệu dạng bậc thang đơn vị, dạng hàm tăng dần đều hay sóng điều hòa.




*Hình 5.1*

Ở hình 5.1 có sơ đồ khối mà hệ điều khiển gồm cơ cấu điều khiển $G_c(s)$ và đối tượng điều khiển G(s) có tác động vào x(t) (lượng đặt của các bộ điều chỉnh, góc quay của trục phát ở các hệ tùy động) và nhiễu

f(t). Chất lượng của quá trình được đánh giá trực tiếp theo tín hiệu ra y(t) hay theo sai lệch ε(t) là chênh lệch của tín hiệu ra của hệ và của mô hình mẫu lý tưởng $W_m(s)$ :

$$\varepsilon = y_m - y$$

Ứng với hình 5.1 ta có :

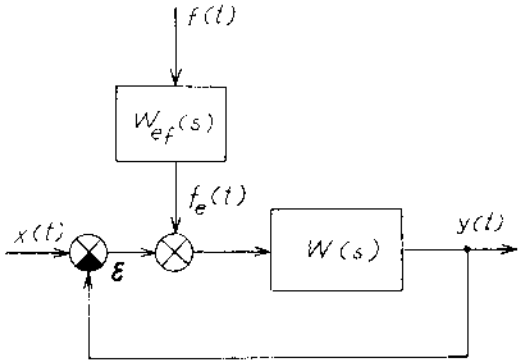
$$E(s) = W_m(s)X(s) - W_k(s)X(s) - W_f(s)F(s) =$$

$$= \left[W_m(s) - \frac{G_c(s)\,G(s)}{1 + G_c(s)\,G(s)}\right]X(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)\,G(s)}\,F(s)$$

$$= W_{\varepsilon x}(s)X(s) - W_{\varepsilon f}(s)F(s).$$

Mô hình mẫu $W_m(s)$ bảo đảm biến đổi tuyến tính tín hiệu vào x(t) thành tín hiệu mong muốn của y(t). Như vậy, ở các hệ điều chỉnh, trong trường hợp lý tưởng y = x và $W_m(s) = 1$. Ở các hệ chép hình với hệ số tỷ lệ y = k.u thì $W_m(s) = k$. Ở các hệ tích phân $y = \frac{1}{T_i}\int_0^t u\,dt$ thì $W_m(s) = \frac{1}{T_i s}$ v.v...

Khi khảo sát các hệ điều chỉnh với hồi tiếp đơn vị e(t) = ε(t), hình 5.1 có thể tương đương với hình 5.2 và :




*Hình 5.2*

$$W(s) = G_c(s)G(s) \;;$$

$f_e(t)$ là nhiễu tương đương quy đổi về đầu vào với hàm truyền được xác định bởi :

$$F_e(s) = W_{ef}(s)F(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$$

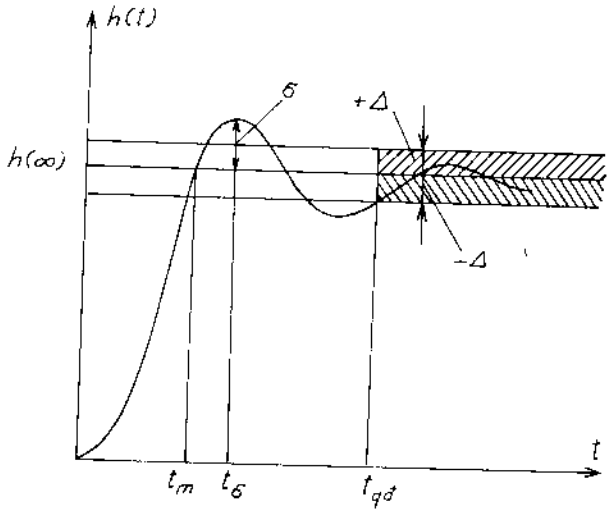
Không phải trong mọi trường hợp đều đạt được chất lượng mong muốn. Ví dụ với $W_m(s) = 1$ tức là hệ kín $W_k(s)$ không có quán tính. Điều này không thể thực hiện được trong thực tế vì như vậy phải có công suất vô cùng lớn, hơn nữa, hệ như vậy lại không lọc được nhiễu.

Ở hình 5.3 có hàm quá độ của một hệ điều chỉnh. Các chất lượng được đánh giá trực tiếp gồm :

*1. Sai lệch tĩnh*

Sai lệch tĩnh xác định độ chính xác tĩnh của hệ. Sai lệch tĩnh được tính theo định lý tới hạn (2-9) :

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s.E(s)$$




***Hình 5.3***

*2. Lượng quá điều chỉnh*

Lượng quá điều chỉnh được xác định bởi trị số cực đại của hàm quá độ so với trị số xác lập của nó :

$$\sigma\% = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100 \qquad (5\text{-}2)$$

*3. Thời gian quá độ :* Thời gian quá độ $t_{qd}$ được xác định bởi thời điểm mà hàm quá độ h(t) không vượt ra khỏi biên giới của miền giới hạn Δ quanh trị số xác lập. Δ = ± 5% h(∞) hay có khi dùng Δ = ± 2% h(∞).

*4. Thời gian đáp ứng* : Thời gian đáp ứng $t_m$ xác định bởi thời điểm mà hàm quá độ lần đầu tiên đạt trị số xác lập h(∞) khi có quá điều chỉnh.

*5. Thời gian có quá điều chỉnh* : Thời gian có quá điều chỉnh $t_\sigma$ được xác định bởi thời điểm hàm quá độ đạt cực đại.

*6. Số lần dao động* : Số lần dao động N được tính bởi số lần mà hàm quá độ dao động quanh trị số xác lập trong thời kỳ quá độ ($0 < t < t_{qd}$).

Lượng quá điều chỉnh $\sigma$, thời gian có quá điều chỉnh $t_\sigma$ và số lần dao động đặc trưng cho tính chất suy giảm của quá trình quá độ. Thời gian quá độ $t_{qd}$ và thời gian đáp ứng $t_m$ đặc trưng cho tính tác động nhanh của hệ.

## V.2. CHẤT LƯỢNG TĨNH

Ứng với hình 5.2, nếu đầu vào của hệ thống có tín hiệu tác động là x(t) thì sai lệch tĩnh được xác định bởi :

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s.E(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + W(s)} X(s) \qquad (5\text{-}3)$$

Như vậy sai lệch tĩnh phụ thuộc vào tín hiệu vào X(s) cũng như cấu trúc và thông số của hệ thống W(s).

**Ví dụ 5-1**

Với tín hiệu vào là bậc thang đơn vị $x(t) = 1(t)$ và $X(s) = \frac{1}{s}$.

a) Nếu hệ là khâu quán tính $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ thì sai lệch tĩnh được xác định bởi :

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + \frac{k}{1 + Ts}} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{1 + Ts}{1 + k} = \frac{1}{1 + k}$$

Sai lệch tĩnh hầu như tỷ lệ nghịch với hệ số khuếch đại.

b) Nếu hệ là khâu quán tính cùng với một khâu tích phân :

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + \frac{k}{s(1 + Ts)}} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{s(1 + T_1 s)}{s(1 + Ts) + k} = 0$$

Sai lệch tĩnh bằng 0 và hệ được gọi là *vô sai tĩnh*.

**Ví dụ 5-2**

Với tín hiệu vào là hàm tăng dần đều $x(t) = t$ và $X(s) = \frac{1}{s^2}$, hệ cũng là khâu quán tính và một khâu tích phân. Sai lệch tĩnh được tính như trên và bằng :

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + \frac{k}{s(1 + Ts)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1 + Ts}{k} = \frac{1}{k}$$

Hệ số không còn là vô sai tĩnh và sai lệch tĩnh tỷ lệ nghịch với hệ số khuếch đại của hệ thống.

Khâu tích phân và hệ số khuếch đại có ảnh hưởng lớn trong việc xác định sai lệch tĩnh hay sai lệch ở chế độ xác lập ; nếu tách riêng hai thành phần này trong hàm truyền của hệ, ta có dạng chung :

$$W(s) = \frac{k}{s^r} \cdot \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} \qquad (5\text{-}4)$$

và r là *bậc vô sai tĩnh* của hệ.

Ta có bảng tổng kết như ở bảng 5.1 cho một số trường hợp thường gặp.

Ở đây $k_p$, $k_v$, $k_a$ là hệ số khuếch đại ứng với trường hợp tín hiệu vào là không đổi, tốc độ tín hiệu vào không đổi hay gia tốc của tín hiệu vào không đổi.

***Bảng 5.1***

| Bậc vô sai tĩnh r / Tín hiệu vào | r = 0 | r = 1 | r = 2 |
|---|---|---|---|
| $x(t) = 1(t)$ ; $X(s) = \frac{1}{s}$ | $\frac{1}{1 + k_p}$ | 0 | 0 |
| $x(t) = t$ ; $X(s) = \frac{1}{s^2}$ | $\infty$ | $\frac{1}{k_v}$ | 0 |
| $x(t) = \frac{1}{2} t^2$ ; $X(s) = \frac{1}{s^3}$ | $\infty$ | $\infty$ | $\frac{1}{k_a}$ |

Khi tín hiệu vào có dạng bất kỳ, có thể mô tả bằng đa thức :

$$x(t) = \left[A_0 + A_1 t + \ldots + \frac{A_l}{l!} \cdot t^l\right] \qquad (5\text{-}5)$$

Ảnh sẽ có dạng :

$$X(s) = A_0 \frac{1}{s} + A_1 \frac{1}{s^2} + \ldots + A_l \frac{1}{s^{l+1}} = \frac{N(s)}{s^{l+1}} \qquad (5\text{-}6)$$

Hàm truyền của sai lệch đối với tín hiệu vào bằng :

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + W(s)} = W_e(s) \qquad (5\text{-}7)$$

Vậy : $$E(s) = W_e(s)X(s) = W_e(s)\frac{N(s)}{s^{l+1}} \qquad (5-8)$$

Phân tích (5-8) thành phân thức tối giản :

$$\frac{W_e(s)}{s^{l+1}} = \frac{C_o}{s^{l+1}} + \frac{C_1}{s^l} + \ldots + \frac{C_l}{s} + S(s) \qquad (5-9)$$

$C_o$, $C_1$, ..., $C_l$ - các hệ số không xác định ;

S(s) - thành phần còn lại từ các nghiệm cực $W_e(s)$ (với giả thiết không có nghiệm cực s = 0 và $W_e(o) \neq \infty$).

Do đó :

$$W_e(s) = C_o + C_1 s + \ldots + C_l s^l + S(s)s^{l+1} \qquad (5-10)$$

Như vậy, theo (5-6), (5-7) và (5-10) :

$$E(s) = [C_o + C_1 s + \ldots + C_l s^l]X(s) + S(s)N(s) \qquad (5-11)$$

Theo 5-11, sai lệch gồm hai thành phần :

Thành phần tự do (thành phần quá độ) :

$$E_{qd}(s) = S(s)N(s)$$

sẽ tắt dần khi $t \to \infty$ và thành phần xác lập (thành phần cưỡng bức) :

$$E_{xl}(s) = [C_o + C_1 s + C_2 s^2 + \ldots + C_l s^l]\ X(s) \qquad (5-12)$$

mà $$C_K = \frac{1}{K!}\frac{d^K We(s)}{ds^K}\Big|_{S=0} \quad K = 0, 1, 2... \qquad (5-13)$$

Mỗi thành phần của biểu thức (5-12) : $C_K s^K X(s)$ tương ứng với một thành phần của sai lệch cưỡng bức, do đó sai lệch cưỡng bức nói chung sẽ là :

$$e_{xl}(t) = C_o x(t) + C_1\frac{dx}{dt} + \ldots + C_l\frac{d^l x}{dt^l} = \sum_{K=0}^{l} C_k\frac{d^K x}{dt^K} \qquad (5-14)$$

Các hệ số $C_K$ xác định theo (5-13) khá phức tạp.

Bằng cách phân tách hàm truyền $W_e(s)$ theo hàm mũ :

$$W_e(s) = \frac{b_o + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_o + a_1 s + \ldots a_n s^n} =$$

$$= C_o + C_1 s + C_2 s^2 + \ldots = \sum_{K=0}^{\infty} C_K s^K \qquad (5-15)$$

và dùng phương pháp cân bằng hệ số (4-22) ta xác định được :

$$\left.\begin{aligned}
b_o &= C_o a_o \;; \\
b_1 &= C_1 a_o + C_o a_1 \;; \\
b_2 &= C_2 a_o + C_1 a_1 + C_o a_2 \;; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_m &= C_m a_o + C_{m-1} a_1 + \ldots + C_o a_m \\
0 &= C_{m+1} a_o + C_m a_1 + \ldots + C_o a_{m+1}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}16)$$

từ đó :

$$C_K = \frac{1}{a_o}\left\{b_K - \sum_{r=1}^{k} C_{K-r}\, a_r\right\} \qquad (5\text{-}17)$$

với $b_K = 0$ khi $k > m$ ; $a_r = 0$ khi $r > n$.

**Ví dụ 5-3**

Tính sai số cưỡng bức của hệ tùy động với hàm truyền hệ hở :

$$W(s) = \frac{k}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

và $k = 100\ \text{sec}^{-1}$ ; $T_1 = 0{,}1$ sec ; $T_2 = 0{,}01$ sec.

Tác động ở đầu vào :

$$x(t) = 20 + 2t - 0{,}5t^2 \ [\text{rad}]$$

Hàm truyền đối với sai lệch :

$$W_e(s) = \frac{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) + k} = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k}$$

Theo (5-17) xác định các hệ số $C_K$ :

$$C_o = \frac{b_o}{a_o} = 0 \;;\; C_1 = \frac{b_1 - C_o a_1}{a_o} = \frac{1}{k} = 0{,}01 \text{ sec}$$

$$C_2 = \frac{b_2 - C_1 a_1 + C_o a_2}{a_o} = \frac{1}{k}\left(T_1 + T_2 + \frac{1}{k}\right) = 0{,}001 \text{ sec}^2$$

Đạo hàm của tác động vào :

$$\dot{x} = 2 - t \text{ rad/sec} \;;\; \ddot{x} = -1 \text{ rad/sec}^2.$$

Sai số cưỡng bức theo tác động điều khiển đầu vào ứng với (5-14) là :

$$e_{xl}(t) = C_o x(t) + C_1 \dot{x}(t) + C_2 \ddot{x}(t) = 0{,}01(2 - t) + 0{,}001 =$$
$$= 0{,}019 - 0{,}01t \text{ rad.}$$

Tín hiệu ra sẽ là :

$$y = x - e_{xl}(t) = 19,981 + 2,01t - 0,5t^2 \text{ rad.}$$

Từ ví dụ trên ta nhận thấy :

1. Sai lệch cưỡng bức của hệ tùy động đối với tác động điều khiển đầu vào không phụ thuộc thành phần không đổi của tác động điều khiển ($A_0$ = 20 rad) vì $C_0$ = 0.

2. Thành phần tỷ lệ với thời gian của tín hiệu ($A_1t$ = 2t rad – tín hiệu có tốc độ không đổi) tạo nên sai lệch cưỡng bức không đổi và tỷ lệ ngược với hệ số khuếch đại : $C_1 = \frac{1}{k} = 0,01$ sec.

3. Thành phần tỷ lệ với bình phương của thời gian ($\frac{A_2}{2}t^2 = 0,5t^2$ rad – tín hiệu có gia tốc không đổi) có sai lệch ngày càng tăng và hệ tùy động này có gia tốc không theo kịp với tín hiệu điều khiển.

Ba kết luận ở ví dụ này có thể so sánh với tín hiệu vào là tổng hợp của ba dạng ở bảng 5.1 với r = 1.

## V.3. CHẤT LƯỢNG Ở QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ

Chất lượng ở quá trình quá độ được đánh giá qua các chỉ tiêu như : lượng quá điều chỉnh $\sigma\%$, thời gian quá độ $t_{qd}$, thời gian đáp ứng $t_m$, thời gian có quá điều chỉnh $t_\sigma$ v.v.

Có hai phương pháp đánh giá chất lượng này : phương pháp trực tiếp và phương pháp gián tiếp. Phương pháp trực tiếp cơ sở trên việc đo và xác định chất lượng của hệ theo tín hiệu đầu ra như hàm quá độ. Phương pháp gián tiếp xác định ảnh hưởng của cấu trúc và thông số của hệ đối với độ tác động nhanh, lượng quá điều chỉnh v.v... của quá trình quá độ.

### V.3.1. Phương pháp trực tiếp

Nội dung của phương pháp trực tiếp là xây dựng đặc tính của quá trình nên nó là phương pháp giải phương trình vi phân tuyến tính. Phương pháp toán tử đã đơn giản hóa một phần việc tính toán. Một thời gian dài, phương pháp tần số cơ sở trên mối liên hệ giữa hàm quá độ và đặc tính tần biên pha cho phép xây dựng bằng đồ thị hàm quá độ h(t) của hệ theo các đặc tính tần số mẫu.

Với sự phát triển của máy tính, đầu tiên là những máy chuyên dụng tương tự cho phép mô hình hóa các hệ tự động theo phương trình vi phân hay theo hàm truyền đạt để nghiên cứu khảo sát và đánh giá chất lượng của hệ.

Máy tính số phát triển nhanh chóng và với dung lượng bộ nhớ lớn đã không những thay thế được vai trò của máy tính tương tự mà còn cho phép khảo sát và đánh giá các hệ tự động với tốc độ và độ chính xác ngày càng cao.

Trong lĩnh vực nghiên cứu các hệ tự động, những phần mềm chuyên dụng như TUTSIM, MATLAB không những được dùng để mô phỏng nghiên cứu khảo sát mà còn điều khiển trực tiếp các hệ tự động, không phải lập trình phức tạp. Công việc lập trình được thực hiện bằng một số thao tác ngày càng giản đơn hơn.

### V.3.2. Phương pháp gián tiếp

Đối với hệ bậc 2, các mối quan hệ giữa chỉ số dao động $M_P$ :

$$M_P = \frac{W_K(\omega_P)}{W_K(0)}$$

($\omega_P$ là tần số ở biên độ cực đại) với $\sigma\%$, $t_{qd}$, $t_m$, $\zeta$, $\gamma_c$, $\omega_o$ cũng như những mối liên hệ giữa k, T với các chỉ số chất lượng nói trên đã được đánh giá chính xác theo định lượng. Những mối quan hệ trên có thể được áp dụng cho các đặc tính tần gần giống như ở bậc 2 nói trên [20].

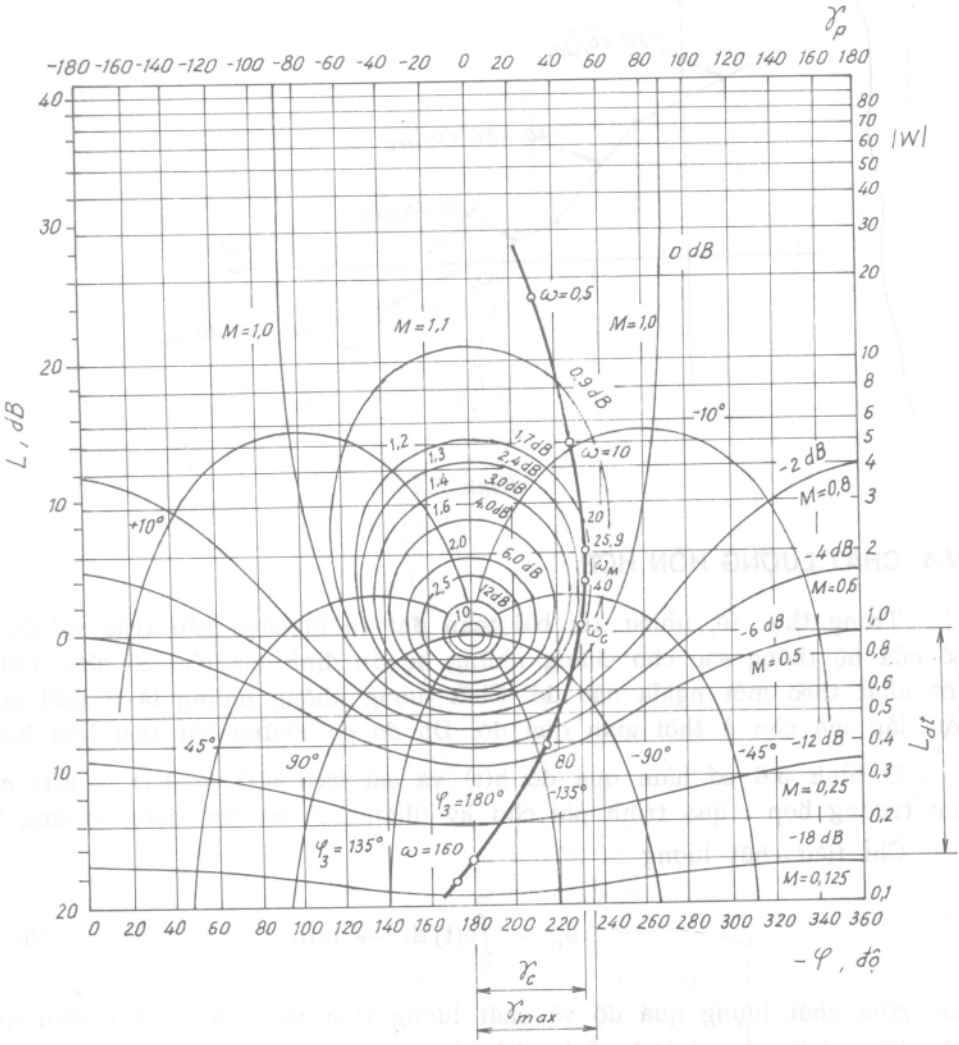
Trong kỹ thuật tự động, rất thông dụng toán đồ Nichols (hình 5.4). Ở trục tung có các trị số của $\mathcal{L}(\omega)$ hay $|W(j\omega)|$ của hệ hở. Trục hoành là độ dịch pha của hệ hở $\varphi$. Những đường đồng mức của biên độ $M = W_K$ và pha $\varphi_K$ của hệ kín cho phép xây dựng đặc tính tần của hệ kín theo đặc tính tần của hệ hở. Ví dụ, trên hình 5.4 có đường cong (đậm nét) của hệ hở theo $\mathcal{L}(\omega)$ và $\varphi(\omega)$ có đánh dấu tần số từ $\omega = 160\ sec^{-1}$ đến $\omega = 0{,}5\ sec^{-1}$. Theo đó dễ dàng xác định $M = W_K$ và $\varphi_K$ của hệ kín cũng như độ dự trữ ổn định về pha $\gamma_c$ và biên độ $\mathcal{L}_{dt}$.

Thường quá trình quá độ có chất lượng chấp nhận được ứng với :

$$\sigma\% = (10 \div 30)\% \ ; \ M_P = 1{,}1 \div 1{,}5 \ ; \ \gamma_c = 30^o \div 50^o.$$

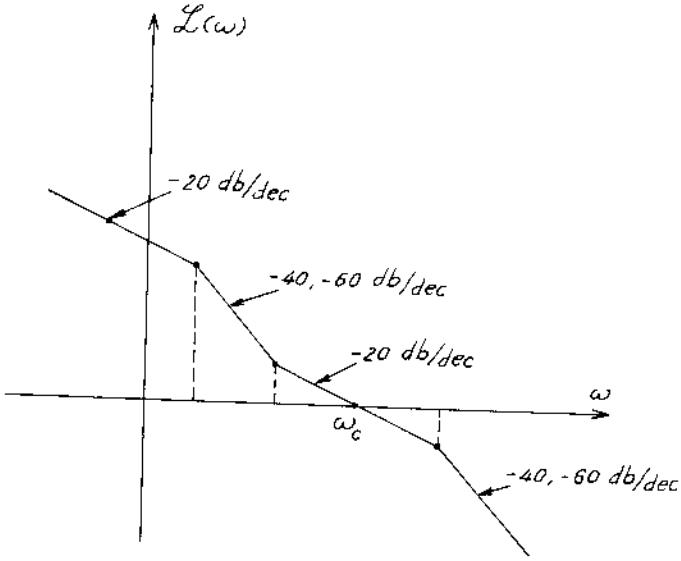
Với hệ pha cực tiểu, đặc tính tần số logarit $\mathcal{L}(\omega)$ có độ nghiêng −20 db/dec ở hai phía của tần số cắt $\omega_c$ như ở hình 5.5. Đoạn thẳng này

càng dài, độ dự trữ ổn định về pha càng lớn và chỉ số dao động $M_P$ càng bé. Ở hình 5.5 có *đặc tính* $\mathcal{L}(\omega)$ *mẫu*. Có thể sử dụng các toán đồ để thể hiện mối liên hệ giữa các thông số của đặc tính tần hệ hở với chỉ số của đặc tính tần hệ kín cũng như hàm quá độ của nó.




*Hình 5.4*

Ngoài phương pháp gián tiếp nói trên còn có các phương pháp đánh giá theo tích phân, phương pháp quỹ đạo nghiệm số, sẽ đề cập ở mục V.4 và VI.4.




*Hình 5.5*

## V.4. CHẤT LƯỢNG HỖN HỢP

Trong thực tế, nhiều khi bài toán đặt ra là chọn cấu trúc và thông số của hệ thống sao cho chẳng những hệ ổn định mà còn có chất lượng tốt nhất theo một nghĩa nào đó. Chất lượng không những là ở thời gian xác lập mà còn ở thời gian quá độ. Do đó có những chỉ tiêu hỗn hợp.

Ở hình 5.6 có hàm quá độ h(t) và sai lệch e(t) = 1(t) − h(t) cho hai trường hợp : quá trình phi chu kỳ (đường *1*) và dao động (đường *2*).

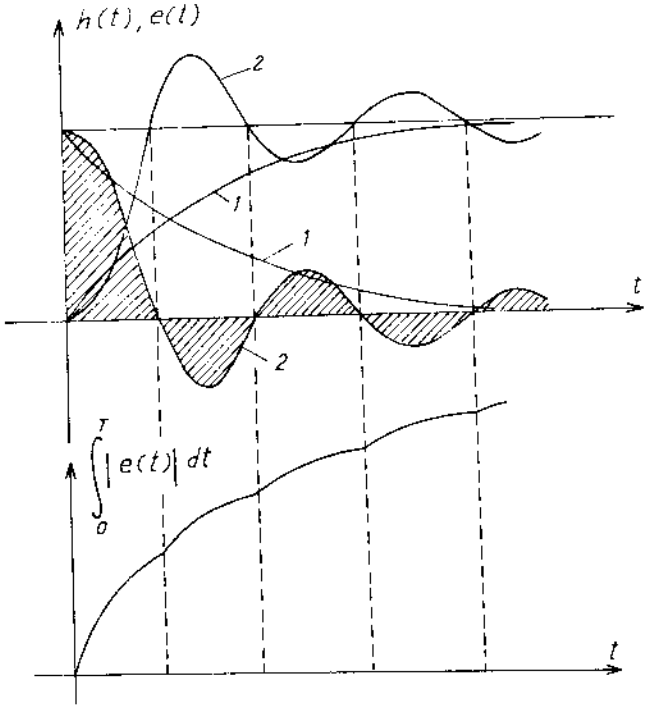
Chỉ tiêu chất lượng :

$$J_o = \int_0^\infty e(t)\,dt \rightarrow \min \qquad (5\text{-}18)$$

bao gồm chất lượng quá độ và chất lượng tĩnh tốt nhất : thời gian quá độ ngắn nhất và sai lệch tĩnh nhỏ nhất ứng với $J_o = J_{omin}$

Trong trường hợp có dao động, $e_2(t)$ hợp với trục thời gian tạo thành những diện tích âm và dương nên phải dùng chỉ tiêu tích phân trị số tuyệt đối của sai lệch (IAE) :

$$J_1 = \int_0^\infty |e(t)|\,dt \qquad (5\text{-}19)$$




*Hình 5.6*

$J_1$ đạt được cực tiểu khi lượng quá điều chỉnh, thời gian quá độ, sai lệch tĩnh v.v... là nhỏ nhất ứng với vùng gạch sọc trên hình 5.6a hay trị số $J_1$ tại thời điểm lấy tích phân T. Ở hệ bậc hai, trường hợp này ứng với $\zeta = 0,7$ (xem bảng 6.1).

Ở các hệ tối ưu và thích nghi, chỉ tiêu chất lượng thường dùng là tích phân của bình phương sai lệch (ISE) :

$$J_2 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt \qquad (5\text{-}20)$$

Cực tiểu của $J_2$ ứng với tỷ số tắt dần $\zeta = 0,5$ của hệ bậc hai, có lượng quá điều chỉnh lớn hơn ở $J_1$. $J_2$ xem nhẹ những diện tích bé vì bình phương một số nhỏ hơn một bé hơn trị số tuyệt đối của số ấy. Tuy vậy (5-20) cho phép tính toán và thực hiện giản đơn hơn (5-19).

Biến đổi Fourier ngược có dạng :

$$e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$$

nên nếu nhân hai vế với e(t) và lấy tích phân theo t từ 0 đến ∞ ta có (5 -20) như sau :

$$J_2 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)\left[\int_0^\infty e(t)\,e^{j\omega t}dt\right]d\omega$$

vì
$$\int_0^\infty e(t)\,e^{j\omega t}dt = E(-j\omega)$$

nên cuối cùng
$$J_2 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E(j\omega)|^2\,d\omega \qquad (5-21)$$

Đó là biểu thức Parceval cho phép tính $J_2$ và thông số tối ưu của hệ theo $J_2$.

Để giảm ảnh hưởng của sai lệch ban đầu và chú trọng hơn sai lệch sau đó, dùng chỉ tiêu chất lượng với hệ số thời gian (ITAE) :

$$J_3 = \int_0^\infty t\,|e(t)|\,dt \qquad (5-22)$$

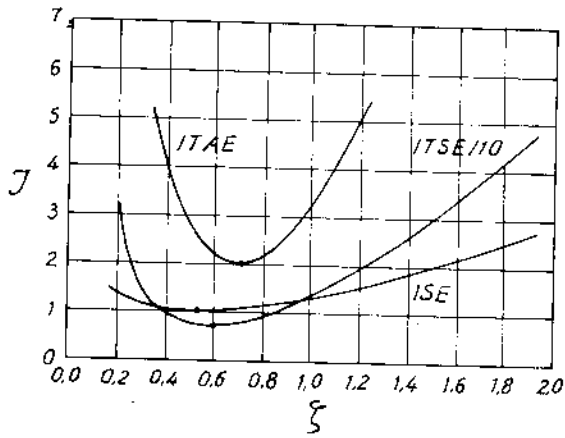
Chỉ tiêu (5 – 22) thể hiện rõ nét cực tiểu của $J_3$ khi có sự thay đổi nhỏ của thông số.

Tương ứng với (5 – 20) có chỉ tiêu (ITSE) :

$$J_4 = \int_0^\infty t\,.\,e^2(t)\,dt \qquad (5-23)$$

Để so sánh, trên hình 5.7 có các đường cong của $J_2$, $J_3$ và $J_4$ phụ thuộc tỷ số tắt dần $\zeta$ và hệ số khuếch đại của hệ bậc hai.

Cần chú ý rằng, đối với cùng điều kiện như nhau) trị số của $J_{min}$ theo chỉ tiêu khác nhau cũng khác nhau và thông số tối ưu cũng không như nhau. Ở hình 5.8 với $J_2$ (ISE) có $K_3^* = 3{,}2$ ứng với $\zeta = 0{,}5$; còn với $J_1$ (IAE) có $K_3^* = 4{,}2$ ứng với $\zeta = 0{,}665$ cho cùng một ví dụ.




*Hình 5.7*

Nhiều khi, ngoài e(t), để hạn chế tốc độ biến đổi của sai lệch, còn có chỉ tiêu :

$$J_5 = \int_0^\infty \left[ e^2(t) + \alpha^2 \left( \frac{de(t)}{(dt)} \right)^2 \right] dt \qquad (5\text{-}24)$$

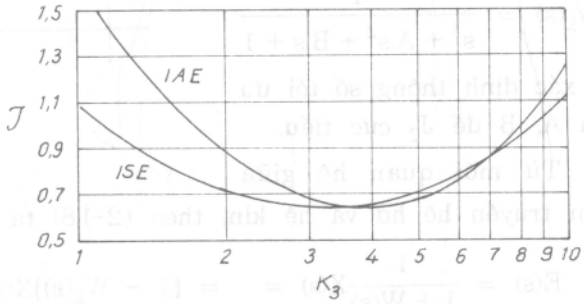
Đó là chỉ tiêu $J_2$ với điều kiện hạn chế tốc độ biến đổi của e(t). Ở đây $\alpha$ là trọng số, thông thường được chọn trong khoảng :

$$\frac{t_{qd}}{6} < \alpha < \frac{t_{qd}}{3}$$

Có thể nhận thấy ý nghĩa vật lý của chỉ tiêu (5-24) sau một vài biến đổi :

$$J_5 = \int_0^\infty \left[ e(t) + \alpha \frac{de(t)}{dt} \right]^2 dt$$

$$- 2\alpha \int_0^\infty e(t) \frac{de(t)}{dt} dt$$




*Hình 5.8*

với hệ mà e(∞) = 0 ta có :

$$\int_0^\infty e(t) \frac{de(t)}{dt} dt = \frac{e^2(0)}{2},$$

từ (5-24) :

$$J_5 = \int_0^\infty \left[ e(t) + \alpha \frac{de(t)}{dt} \right]^2 dt - \alpha e^2(0)$$

$J_5$ đạt cực tiểu nếu e(t) là nghiệm của phương trình :

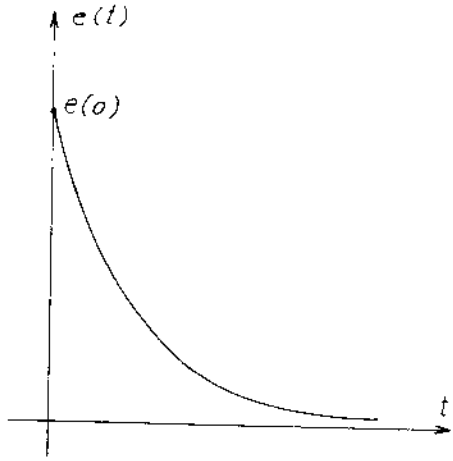
$$\alpha \frac{de(t)}{dt} + e(t) = 0$$

với điều kiện đầu e(0), nghĩa là :

$$e(t) = e(0) e^{-\frac{1}{\alpha} t} \qquad (5\text{-}25)$$

Đường cong (5-25) là đường cực trị của phiếm hàm (5-24) (khác với một hàm có biến là trị số, phiếm hàm có biến là một hàm).

Đường cực trị của chỉ tiêu tích phân bình phương (5-20) có được từ (5-25) khi $\alpha \to 0$ tương ứng với trường hợp lý tưởng mà đường cong ở hình 5.9 trùng khớp với trục tung.




*Hình 5.9*

**Ví dụ 5-4**

Hãy xác định $J_2$ của hệ có hàm truyền :

$$W_k(s) = \frac{1}{s^3 + A.s^2 + B.s + 1}$$

và xác định thông số tối ưu của A, B để $J_2$ cực tiểu.

Từ mối quan hệ giữa hàm truyền hệ hở và hệ kín, theo (2-18) ta có :

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)}X(s) = \quad = [1 - W_k(s)]X(s)$$

Khi tín hiệu vào là bậc thang đơn vị :

$$E(s) = \left[1 - \frac{1}{s^3 + A.s^2 + B.s + 1}\right]\frac{1}{s} = \frac{s^2 + A.s + B}{s^3 + A.s^2 + B.s + 1}$$

Theo Phụ lục B với n = 3 ta có :

$$J_2 = \frac{b_2^2 a_0 a_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2)\, a_0 a_3 + b_0^2 a_2 a_3}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}$$

$$b_0 = a_1 = B \; ; \; b_1 = a_2 = A \; ; \; b_2 = a_3 = a_0 = 1$$

$$J_2 = \frac{B + (A^2 - 2B) + B^2 A}{a(A.B - 1)} = \frac{B(A.B - 1) + A^2}{2(A.B - 1)} = \frac{B}{2} + \frac{A^2}{2(A.B - 1)}$$

Lấy đạo hàm riêng theo A và B, cân bằng 0 ta có :

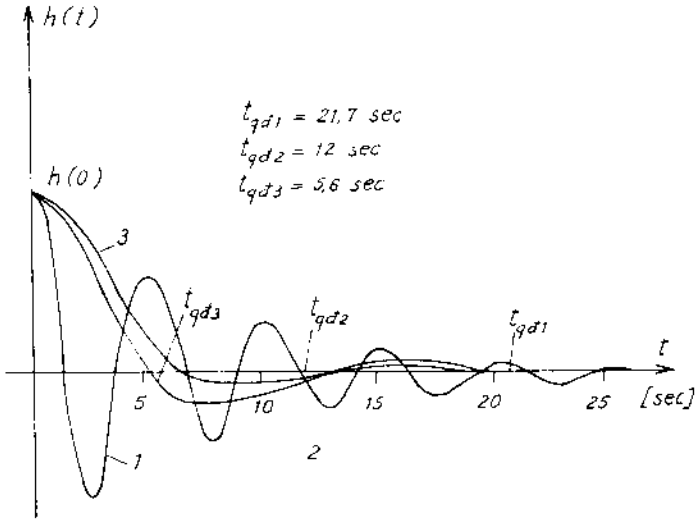
$$\frac{\partial J_2}{\partial A} = \frac{2A(A.B - 1)\, A^2 B}{2(A.B - 1)^2} = 0$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial B} = \frac{1 - A^3/(A.B - 1)^2}{2}$$

và xác định được $A^* = 1$, $B^* = 2$ ứng với $J_{2min} = 1,5$.

Đặc tính quá độ của e(t) như ở hình 5.10. Rõ ràng là theo chỉ tiêu chất lượng $J_2$, lượng quá điều chỉnh khá lớn (theo bảng 2.1 với hệ bậc hai $\sigma\% = 16,3\%$) $J_5$ loại trừ được nhược điểm trên của $J_2$.

Ở hình 5.10 có ba đường cong có cùng một trị số $J_2$ như nhau nhưng đường *1* có chất lượng động xấu và đường *3* tương ứng với trường hợp có chất lượng tốt nhất.




*Hình 5.10*

*Chương VI*

# TỔNG HỢP HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

## VI.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Như đã nêu, phần này chỉ đề cập đến việc chọn các cơ cấu hiệu chỉnh, các bộ điều chỉnh và xác định thông số của chúng để bảo đảm hệ làm việc với chất lượng mong muốn.

Thông thường, hệ càng giản đơn về cấu trúc càng dễ chọn thông số mong muốn có thể. Đối với hệ bậc hai, tồn tại mối quan hệ định lượng giữa thông số và chất lượng của hệ thống. Do đó có một số phương pháp chọn thông số và cấu trúc của cơ cấu hiệu chỉnh và của bộ điều chỉnh sau khi đưa hệ thống về dạng bậc hai hay có thể áp dụng những mối quan hệ gần đúng đối với hệ bậc hai.

Nếu hệ kín có dạng bậc hai (2-49) với hàm truyền :

$$W_k(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad (6\text{-}1)$$

thì nghiệm được phân bố trên mặt phẳng nghiệm số như ở hình 2-50.

Hàm quá độ tương ứng với (2-52) hoặc :

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\, t + \theta) \qquad (6\text{-}2)$$

với k = 1 như ở (6-1). Cân bằng đạo hàm bậc một của (6-2) với không, xác định được lượng quá điều chỉnh $\sigma\%$ và thời gian có quá điều chỉnh $t_\sigma$ :

$$t_\sigma = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (6\text{-}3)$$

$$\sigma\% = 100\exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \qquad (6\text{-}4)$$

Thời gian quá độ $t_{qd}$ ứng với vùng giới hạn $\Delta = \pm 2\%$ trị số xác lập được tính gần đúng bằng :

$$e^{-\zeta\omega_0 t_{qd}} < 0{,}02 \; ; \quad \zeta\omega_0 t_{qd} \approx 4$$

$$t_{qd} \approx \frac{4}{\zeta\omega_0} = \frac{4}{\alpha} \qquad (6\text{-}5)$$

Chú ý rằng trong khi $t_{qd}$, $t_\sigma$, $t_m$ phụ thuộc vào $\omega_0$ và $\zeta$ thì lượng quá điều chỉnh $\sigma\%$ chỉ phụ thuộc vào tỷ số tắt dần $\zeta$ như ở bảng 6.1 ; hay ở hình 6.1 cho quan hệ $\sigma$ và $\omega_0 t_\sigma(\zeta)$.

*Bảng 6.1*

| $\zeta$ | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma$ % | 0,2 | 1,5 | 4,6 | 9,5 | 16,3 | 25,4 | 37,2 |

Đối với khâu bậc hai (6-1), đặc tính biên tần của hệ (kín) :

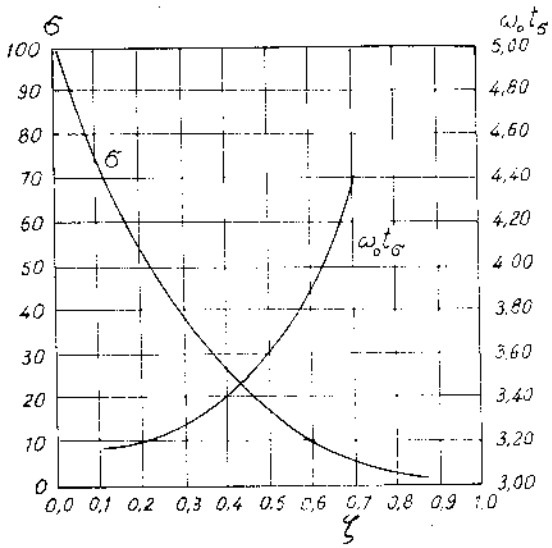
$$|W_k(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_0)^2}} \qquad (6\text{-}6)$$

như ở hình 6.2 với các thông số :

a) Chỉ số dao động $M_p$ tại tần số cộng hưởng $\omega_p$ thể hiện mức độ ổn định tương đối của hệ.

b) Dải thông tần $\omega_b$ là thước đo của tốc độ đáp ứng, được xác định bởi giới hạn của tần số, mà $|W_k(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$ của biên độ khi tần số $\omega = 0$ :

$$W_k(j\omega_b) = 0{,}707 W_k(0)$$




*Hình 6.1*

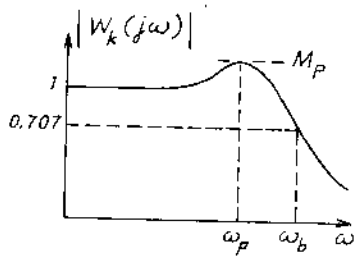
Ứng với đường cong ở hình 6.2 và biểu thức (6-6) còn xác định được các mối liên hệ khác như :

$$\frac{\omega_p}{\omega_o} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \; ; \; M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\zeta \leqslant 0{,}707 \qquad (6-7)$$

mà ở hình 6.3 mô tả các mối liên hệ ấy.

Từ (6-6) có thể xác định được mối quan hệ của dải thông tần $\omega_b/\omega_o$ với tỷ số tắt dần :

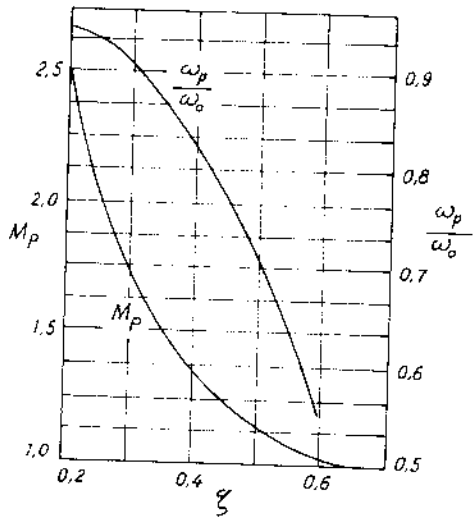



*Hình 6.2*

$$\frac{\omega_b}{\omega_o} = \left[1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2(1 - \zeta^2)}\right]^{1/2} \qquad (6-8)$$

và mối quan hệ ấy như ở đường cong trên hình 6.4. Ứng với $\zeta = 0{,}707$, $\omega_b = \omega_o$. Với trị số nhất định của $\zeta$, $\omega_b$ tỷ lệ với $\omega_o$ và khi tăng $\omega_b$, thời gian quá độ và thời gian đáp ứng giảm. Mối quan hệ với $\zeta$ của tần số cắt $\omega_c$ ở đường cong Bode cũng như độ dự trữ ổn định về pha thể hiện ở hình 6.5.

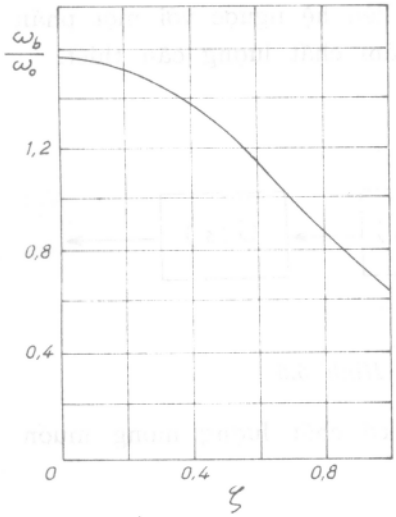
Từ hình 6.4 và 6.5, có thể xác định mối quan hệ giữa tần số cắt $\omega_c$ và dải thông tần $\omega_b$ theo bảng 6.2.



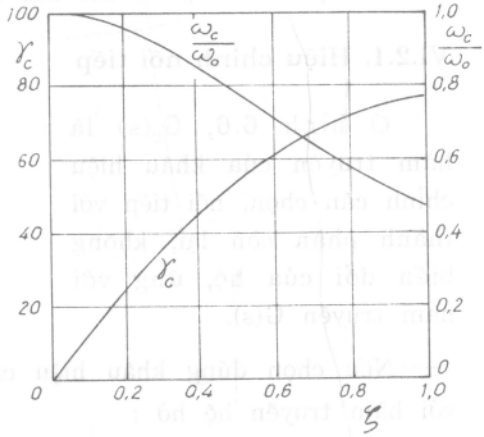

*Hình 6.3*

Đối với hệ bậc cao, hàm quá độ cũng là tổng hợp của những hàm tắt dần nên yêu cầu đặt ra là lượng quá điều chỉnh không vượt quá trị số cho phép và quá trình ít dao động (nghĩa là góc $\varphi$ ở hình 2.52 không quá lớn và nghiệm trội không quá gần trục ảo).

Trong trường hợp ấy, nghiệm nào gần trục ảo nhất sẽ có ảnh hưởng lớn hơn đối với quá trình. Vì vậy, khi tổng hợp, nếu áp đặt được vị trí thích hợp của một cặp nghiệm trội có thể sử dụng gần đúng những mối quan hệ trên mà ta có thể tóm tắt như sau :




*Hình 6.4*




*Hình 6.5*

**Bảng 6.2**

| $\zeta$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,707 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_c/\omega_b$ | 0,64 | | | 0,63 | 0,62 | | 0,63 | 0,64 | 0,68 | 0,71 | 0,77 |
| $\gamma_c^o$ | 0 | 12 | 24 | 35 | 45 | 53 | 61 | 67 | 72 | 75 | 78 |

1. Lượng quá điều chỉnh càng nhỏ khi góc $\varphi$ bé. Theo yêu cầu kỹ thuật mà chọn $\sigma\%$ thích hợp.

Trong nhiều trường hợp thường chọn $\varphi = 45^o$ ứng với $\zeta = \cos\varphi = 0,7$ có lượng quá điều chỉnh khoảng 5%, hoặc $\varphi = 60^o$ ứng với $\zeta = 0,5$ với lượng quá điều chỉnh có lớn hơn nhưng thuận lợi trong kỹ thuật thực hiện và có độ tác động nhanh lớn hơn.

2. Càng tăng khoảng cách của nghiệm đến trục thực, càng giảm thời gian quá độ và hằng số thời gian tương đương của hệ.

3. Càng tăng khoảng cách phần ảo của nghiệm $\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}$ (hay tần số cộng hưởng), thời gian tác động $t_m$ và thời gian có cực đại càng giảm.

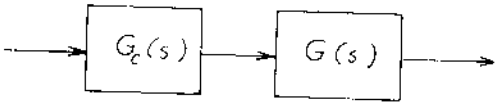
4. Tần số riêng $\omega_o$ được xác định từ vị trí nghiệm đến gốc trục. Khi $\varphi$ không đổi ($\zeta$ cũng không đổi), nghiệm càng xa gốc trục thì $t_{qd}$, $t_\sigma$, $t_m$ càng giảm trong khi $\sigma\%$ không thay đổi.

## VI.2. CHỌN KHÂU HIỆU CHỈNH

Trong hệ thống, khâu hiệu chỉnh có thể được nối tiếp với các phần còn lại không biến đổi của hệ hay mắc kiểu liên hệ ngược với một phần nào đó tạo thành phản hồi cục bộ để bảo đảm chất lượng cần thiết.

### VI.2.1. Hiệu chỉnh nối tiếp

Ở hình 6.6, $G_c(s)$ là hàm truyền của khâu hiệu chỉnh cần chọn, nối tiếp với thành phần còn lại, không biến đổi của hệ, ứng với hàm truyền G(s).




*Hình 6.6*

Nếu chọn đúng khâu hiệu chỉnh, hệ sẽ có chất lượng mong muốn với hàm truyền hệ hở :

$$G_m(s) = G_c(s)G(s)$$

Nếu dùng đặc tính tần số logarit :

$$\mathcal{L}_m(\omega) = \mathcal{L}_c(\omega) + \mathcal{L}(\omega)$$

Do đó khâu hiệu chỉnh được xác định bởi :

$$\mathcal{L}_c(\omega) = \mathcal{L}_m(\omega) - \mathcal{L}(\omega) \qquad (6\text{-}9)$$

$\mathcal{L}(\omega)$ đã biết theo cấu trúc và thông số của đối tượng và các phần tử khác gắn liền với đối tượng (IV.2). $\mathcal{L}_m(\omega)$ là đặc tính mong muốn được xác định trên cơ sở của chất lượng cho trước (sẽ đề cập đến ở VI.2.3.). Bằng cách xác định theo đồ thị $\mathcal{L}_c(\omega)$ và dựa theo đó mà chọn khâu hiệu chỉnh cùng thông số thích hợp.

### VI.2.2. Hiệu chỉnh ở mạch hồi tiếp cục bộ

Ở hình 6.7, phần không biến đổi của hệ :

$$G(s) = G_1(s)G_0(s)$$

gồm hai thành phần mà $G_1(s)$ là thành phần được khâu hiệu chỉnh làm hồi tiếp cục bộ và $G_0(s)$ là thành phần không bị bao vây. Vậy hệ hở sau khi hiệu chỉnh có hàm truyền :

$$G_m(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)\,G_c(s)}\,G_0(s)$$

Trong phạm vi tần số mà :

$$|G_1(j\omega)G_c(j\omega)| >> 1$$

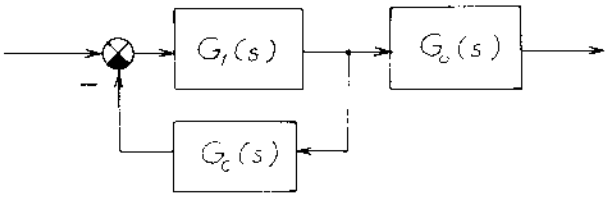
ta có :

$$G_m(s) \approx \frac{G_o(s)}{G_c(s)} \qquad (6\text{-}10)$$

Như vậy, đặc tính mong muốn hầu như không phụ thuộc thành phần bị bao vây $G_1(s)$. Tương ứng với (6-10) ta có :

$$\mathcal{L}_c(\omega) = \mathcal{L}_o(\omega) - \mathcal{L}_m(\omega) \qquad (6\text{-}11)$$

Việc xác định khâu hiệu chỉnh ở cả hai phương pháp không có gì khác nhau. Ở phương pháp dùng hồi tiếp cục bộ, trước hết cần kiểm tra xem mạch vòng ấy có thỏa mãn điều kiện ổn định không.




*Hình 6.7*

Phương pháp nối tiếp giản đơn hơn, không cần những phần tử để đưa phản hồi cục bộ về như ở hình 6.7 nhưng, từ (6-10) ta nhận thấy nếu $G_1(s)$ là những phần tử tính toán không chính xác, thông số có thể biến đổi trong quá trình vận hành hoặc gồm những phần tử phi tuyến tính đã được tuyến tính hóa gần đúng v.v... thì những ảnh hưởng ấy sẽ không đáng kể nếu dùng khâu hiệu chỉnh $G_c(s)$ để bao vây lấy chúng.

### VI.2.3. Trình tự chọn khâu hiệu chỉnh

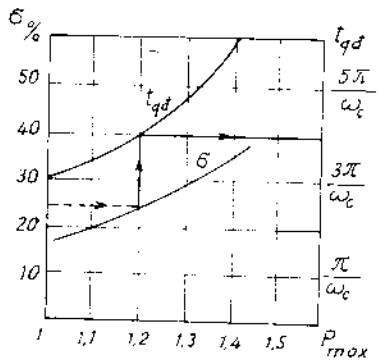
1. Theo cấu trúc và thông số của thành phần không biến đổi G(s) mà vẽ $\mathcal{L}(\omega)$ cho trường hợp hiệu chỉnh nối tiếp hay $\mathcal{L}_o(\omega)$ cho trường hợp hiệu chỉnh ở mạch hồi tiếp.

2. Theo chất lượng cho trước, vẽ đặc tính $\mathcal{L}_m(\omega)$ của hệ mong muốn (sau khi đã hiệu chỉnh đúng).

a) Xác định tần số cắt $\omega_c$

Đặc tính mong muốn (dạng đặc tính mẫu như ở hình 5.5) có mối liên hệ giữa tần số cắt $\omega_c$, lượng quá điều chỉnh $\sigma\%$, thời gian quá độ $t_{qd}$ và trị số cực đại của phần thực đặc tính tần biên pha của hệ kín

$P_{max}$ như ở hình 6.8. Do đó theo chất lượng đã cho trước : $\sigma\%$ và thời gian quá độ $t_{qđ}$, xác định được tần số cắt. Ví dụ với $\sigma\% = 25\%$ theo đường mũi tên ở hình 6.8, ta xác định $t_{qđ} = \frac{4\pi}{\omega_c}$. Biết trước thời gian quá độ cần thiết đối với hệ, xác định được tần số cắt $\omega_c$.




*Hình 6.8*

b) Qua tần số cắt $\omega_c$ vẽ một đoạn thẳng có độ nghiêng - 20 db/dec (như ở hình 5.5), với độ dài khoảng nửa đêcađơ về mỗi phía, chú ý bảo đảm độ dự trữ ổn định về biên độ $L_{dt} \approx 8 \div 10$ db.

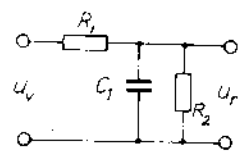
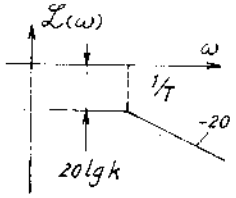
c) Phần hạ tần chú ý không làm giảm hệ số khuếch đại của hệ và sao cho khâu hiệu chỉnh sau này theo mẫu (bảng 6.2) và giản đơn (tần số gãy của $\mathcal{L}_m(\omega)$ nên trùng với tần số gãy của $\mathcal{L}(\omega)$ hay $\mathcal{L}_{tr}(\omega)$.

Phần cao tần không ảnh hưởng lớn đến quá trình cho nên ưu tiên chú ý đến tính giản đơn của khâu hiệu chỉnh sẽ chọn.

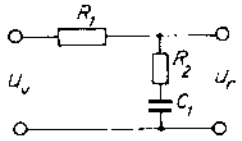
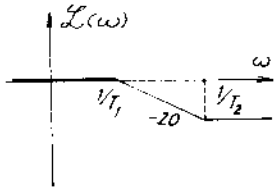
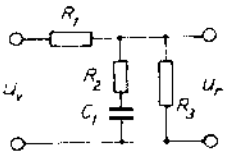
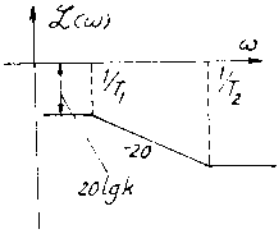
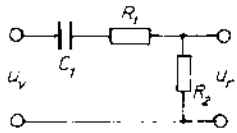
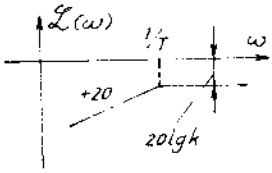
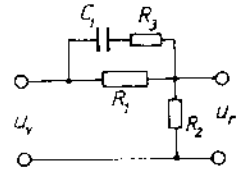
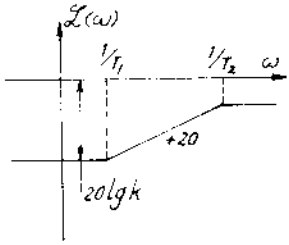
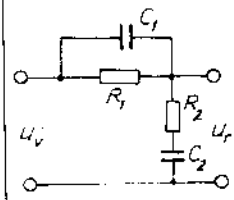
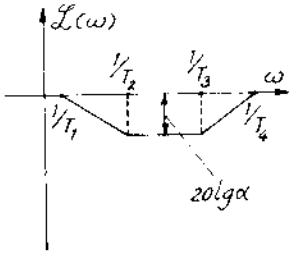
3. Xác định khâu hiệu chỉnh theo (6-9) hay (6-11) và theo bảng 6.3 để chọn thông số từng phần tử trong khâu.

4. Mắc khâu hiệu chỉnh vào hệ thống.

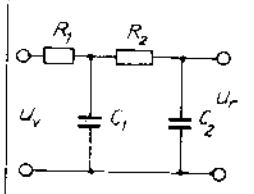
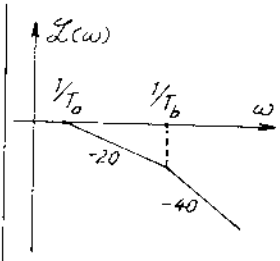
*Bảng 6.3*

| *Sơ đồ mạch* | *Đặc tính $\mathcal{L}_c(\omega)$* | *Hàm truyền* |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|   |   | $G_c(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ <br> $T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C_1$ ; $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ |

*(tiếp bảng 6.3)*

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
|  |  | $G_c(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$<br>$T_1 = (R_1 + R_2)C_1$ ; $T_2 = R_2 C_1$ |
|  |  | $G_c(s) = k\,\frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$<br>$T_1 = \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right)C_1$ ; $T_2 = R_2 C_1$<br>$k = \frac{R_3}{R_1 + R_3}$ |
|  |  | $G_c(s) = \frac{\alpha T s}{T s + 1}$<br>$T = (R_1 + R_2)C_1$ ; $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ |
|  |  | $G_c(s) = k\,\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$<br>$T_1 = (R_1 + R_2)C_1$; $T_2 = \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)C_1$ ; $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ |
|  |  | $G_c(s) = \frac{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_4 s + 1)}$<br>$T_1 T_4 = T_2 T_3$; $T_2 = R_2 C_2$; $T_3 = R_1 C_1$<br>$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $T_1 = \frac{1}{\alpha} T_2$; $T_4 = \alpha T_3$ |

*(tiếp bảng 6.3)*

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
|  |  | $G_c(s) = \dfrac{1}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2 + R_1C_2)s + 1}$<br>$T_1 = R_1C_1$ ; $T_2 = R_2C_2$<br>với $R_1C_2 << T_1 + T_2$<br>thì $T_a = T_1$ ; $T_b = T_2$ |

**Ví dụ 6-1**

Hàm truyền của hệ tùy động có dạng sau :

$$G(s) = \frac{20}{s(0,1s + 1)(0,0136s + 1)(0,01s + 1)}$$

Chất lượng cần đảm bảo :

a) Khi tốc độ quay của trục cơ cấu phát $A_1 = 36^0$/sec, sai số động học không quá $0,18^0$.

b) $\sigma \leqslant 30\%$.

c) $t_{qd} \leqslant 0,8$ sec.

Hãy chọn khâu hiệu chỉnh.

a) Xác định hệ số khuếch đại của hệ để bảo đảm sai số động đã cho.

Theo bảng 5.1, khi tín hiệu vào $x(t) = A_1t$ thì :

$$k_v = 36/0,18\ [0/\text{sec} - 0] = 200\ \text{sec}^{-1}$$

b) Vẽ đặc tính $\mathcal{L}(\omega)$ với hàm truyền đã cho G(s) nhưng $k_v = 200$ như ở hình 6.9.

c) Vẽ đặc tính $\mathcal{L}_m(\omega)$. Tần số cắt $\omega_c$ :

Ứng với $\sigma\% = 25\%$ ta có $t_{qd} = \dfrac{4\pi}{\omega_c}$ hoặc $\omega_c = \dfrac{4\pi}{t_{qd}} = \dfrac{4\pi}{0,8} = 11\ \text{sec}^{-1}$.

Với đoạn thẳng miền tần số gần tần số cắt, độ nghiêng −20 db/dec đảm bảo độ dự trữ về biên độ lớn hơn 15 db.

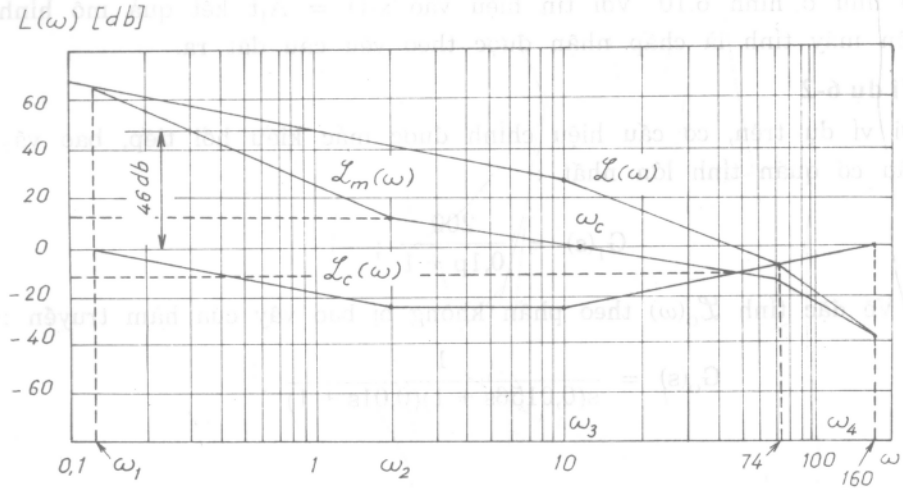
d) Hàm truyền của khâu hiệu chỉnh

Sau khi vẽ đặc tính logarit của khâu hiệu chỉnh theo hình 6.9 :

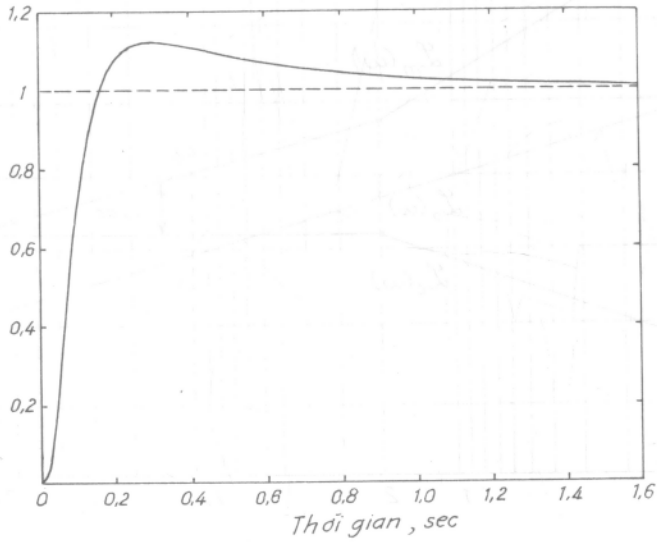
$$\mathcal{L}_c(\omega) = \mathcal{L}_m(\omega) - \mathcal{L}(\omega)$$

ta có hàm truyền tương ứng :

$$G_c(s) = \frac{(T_2s + 1)(T_3s + 1)}{(T_1s + 1)(T_4s + 1)} = \frac{(0,5s + 1)(0,1s + 1)}{(8s + 1)(0,00625s + 1)}$$




*Hình 6.9*




*Hình 6.10*

Để tính thông số của khâu hiệu chỉnh, dùng bảng 6.2. Ở đây có 4 trị số cần xác định cho khâu hiệu chỉnh này : $R_1$, $R_2$, $C_1$, $C_2$ mà thực chất chỉ có 3 phương trình nên cần cho trước một thông số nào đó, $C_1$ chẳng hạn. Sau khi mắc khâu hiệu chỉnh trên, có thể dùng mô hình để kiểm tra. Trong trường hợp cho tín hiệu vào là bậc thang, ta có hàm quá độ như ở hình 6.10. Với tín hiệu vào $x(t) = A_1t$ kết quả mô hình hóa trên máy tính là chấp nhận được theo yêu cầu đặt ra.

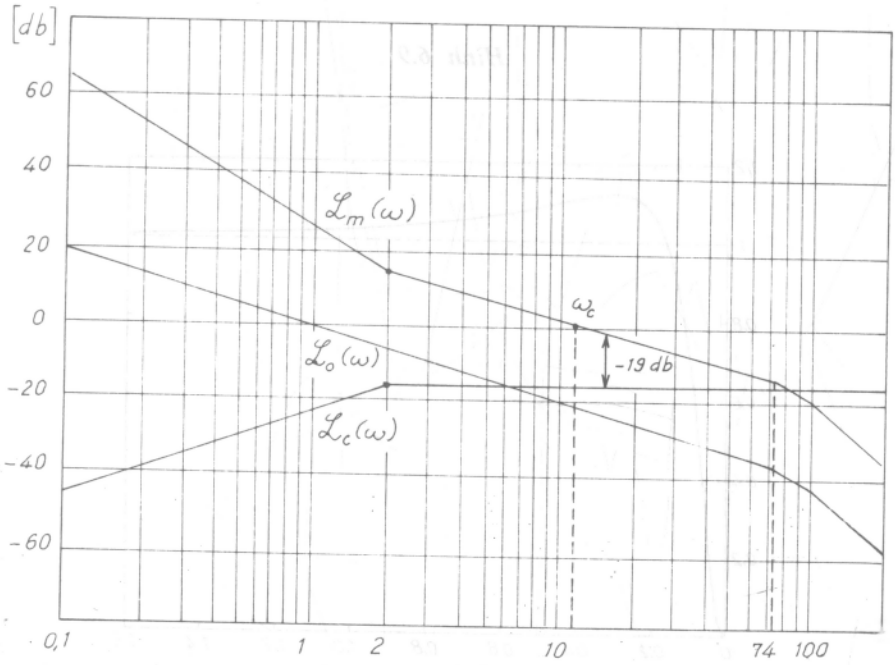
**Ví dụ 6-2**

Với ví dụ trên, cơ cấu hiệu chỉnh được mắc kiểu hồi tiếp, bao vây lấy khâu có quán tính lớn nhất :

$$G_1(s) = \frac{200}{0{,}1p + 1};$$

a) Vẽ đặc tính $\mathcal{L}_o(\omega)$ theo phần không bị bao vây của hàm truyền :

$$G_o(s) = \frac{1}{s(0{,}0156s + 1)(0{,}01s + 1)}.$$




*Hình 6.11*

b) Vẽ đặc tính mong muốn $\mathcal{L}_m(\omega)$ dựa vào kết quả đã tính toán ở ví dụ 6-1.

c) Xác định khâu hiệu chỉnh theo (6-11) :

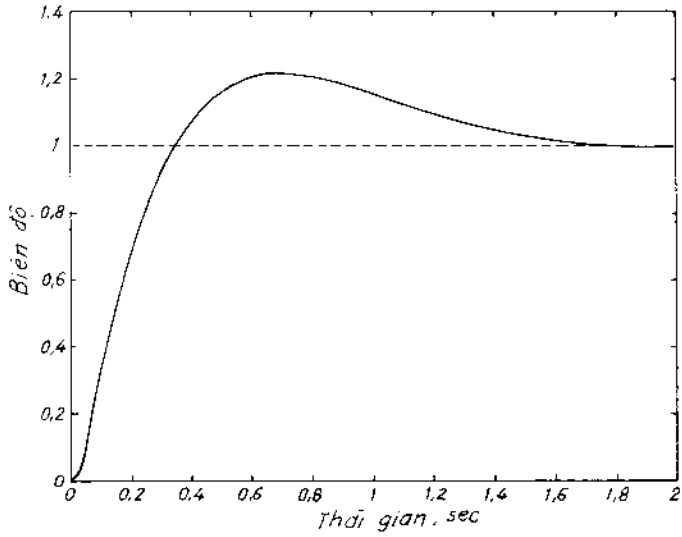
$$\mathcal{L}_c(\omega) = \mathcal{L}_o(\omega) - \mathcal{L}_m(\omega)$$

$$G_c(s) = \frac{\alpha Ts}{Ts + 1} \quad ; \text{ mà } 20\lg(\alpha T) = -19 \text{ db}$$

$\alpha T = 0{,}11$ mà $T = 0{,}5$ sec (theo hình 6.11).

$$G_c(s) = \frac{0{,}11s}{0{,}5s + 1}$$

Kết quả mô hình hóa cho cùng hệ trên với khâu hiệu chỉnh ở mạch hồi tiếp cục bộ như ở hình 6.12.




*Hình 6.12*

## VI.3. CHỌN BỘ ĐIỀU CHỈNH

Bộ điều chỉnh là cơ cấu có cấu trúc nhất định và thông số có thể thay đổi trong phạm vi nhất định. Khác với bộ điều chỉnh, khâu hiệu chỉnh được lắp ráp với thông số cố định sau khi tính toán đối với một đối tượng cụ thể, chức năng của bộ điều chỉnh và khâu hiệu chỉnh như nhau. Đôi khi người ta còn mắc kết hợp cả khâu hiệu chỉnh và bộ điều chỉnh trong cùng một hệ thống.

### VI.3.1. Phân loại các bộ điều chỉnh

*1. Theo chức năng*

- Bộ điều chỉnh tỷ lệ (P)
- Bộ điều chỉnh tích phân (I)
- Bộ điều chỉnh tỷ lệ tích phân (PI)
- Bộ điều chỉnh tỷ lệ vi phân (PD)
- Bộ điều chỉnh tỷ lệ vi tích phân (PID).

Bộ điều chỉnh giản đơn nhất là bộ điều chỉnh tỷ lệ (P). Tác dụng của nó như một khâu khuếch đại với hệ số thay đổi được. Thay đổi hệ số khuếch đại có thể làm thay đổi sai lệch tĩnh nhưng không thể triệt tiêu được nó vì càng tăng hệ càng mất khả năng ổn định. Tác dụng của phần tử tích phân (I) trong bộ điều chỉnh là triệt tiêu sai lệch tĩnh còn vai trò của phần tử vi phân (D) là cải thiện quá trình quá độ nếu xác định đúng thông số của nó.

Ở hình 6.13 có nêu (định tính) ảnh hưởng của các bộ điều chỉnh khác nhau đối với sai lệch e(t) của hệ :

a) Trường hợp không có bộ điều chỉnh.

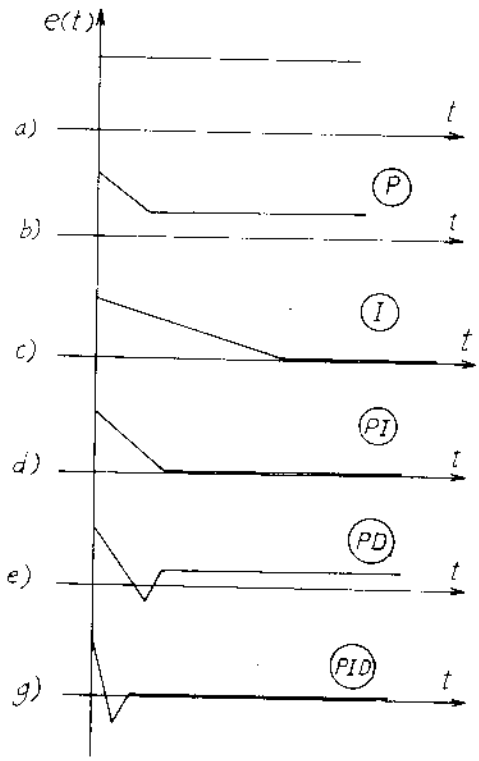
b) Bộ điều chỉnh tỷ lệ (P) làm giảm sai lệch nhưng không thể triệt tiêu vì hệ số khuếch đại không thể quá lớn.

c) Bộ điều chỉnh tích phân (I) có thể triệt tiêu sai lệch tĩnh.

d) Bộ điều chỉnh tỷ lệ tích phân (PI) có thể thay đổi được tốc độ giảm sai lệch.

e) Bộ điều chỉnh tỷ lệ vi phân (PD) cải thiện chất lượng động nhưng không triệt tiêu được sai lệch tĩnh.

g) Bộ điều chỉnh tỷ lệ vi tích phân (PID) kết hợp được các đặc điểm của cả ba thành phần P, I và D.




*Hình 6.13*

*2. Theo cách ghép nối giữa các phần tử*

Các phần tử của bộ điều chỉnh có thể mắc nối tiếp hay song song.

Ví dụ bộ điều chỉnh PI có thể có dạng nối tiếp:

$$G_c(s) = \frac{T_n s + 1}{T_i s} \qquad (6\text{-}12)$$

hay dạng song song: $G_c(s) = k_p + k_i/s$ (6-13)

hoặc dạng hỗn hợp: $G_c(s) = k_p(1 + 1/T_i s)$ (6-14)

Bộ điều chỉnh PID có dạng nối tiếp:

$$G_c(s) = \frac{(T_n s + 1)(T_v s + 1)}{T_i s} \qquad (6\text{-}15)$$

hay dạng song song: $G_c(s) = k_p + k_i/s + k_d s$ (6-16)

hoặc dạng hỗn hợp: $G_c(s) = k_p(1 + 1/T_i s + T_d s)$ (6-17)

cũng như: $G_c(s) = k_p[\ 1/T_i s + (T_d s + 1)/(\alpha T_d s + 1)]$ (6-18)

Ở các biểu thức trên, $k_p$ - hệ số khuếch đại; $T_n$ - hằng số tương quan; T - hằng số tích phân; $T_v$, $T_d$ - hằng số vi phân. Ở biểu thức (6-18), nếu $T_d = 0$ hay $\alpha = 1$ thì bộ điều chỉnh PID trở thành PI. Còn nếu $T_i >> 1$ thì PID có tác dụng như PD.

Việc chuyển đổi từ bộ điều chỉnh dạng song song sang dạng nối tiếp tương đương được tính theo bảng 6.4a.

***Bảng 6.4a***

| Bộ điều chỉnh | $G_c(s)$ | $T_i$ | $T_n$ | $T_v$ | $T_{v2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $k_p$ | – | – | – | – |
| I | $1/T_i s$ | $1/k_i$ | – | – | – |
| PI | $(T_n s+1)/T_i s$ | $1/k_i$ | $k_p/k_i$ | – | – |
| PD | $k_p(1+T_v s)$ | – | – | $k_d/k_p$ | – |
| PID | $\frac{(T_n s+1)(T_v s+1)}{T_i s}$ | $1/k_i$ | $\frac{k_p}{2k_i} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{k_p}{k_i}\right)^2 - \frac{k_d}{k_i}}$ | | – |
| PD2 | $k_p(T_v s+1)(T_{v2} s+1)$ | – | – | $\frac{k_d}{2k_p} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{k_d}{k_p}\right) - \frac{k_{d2}}{k_p}}$ | |

Ở bảng trên, với bộ điều chỉnh PID, dấu cộng ứng với $T_n$ và dấu trừ ứng với $T_v$ cũng như ở bộ điều chỉnh PD2, $T_v$ và $T_{v2}$ tương ứng.

Chuyển đổi ngược lại từ bộ điều chỉnh nối tiếp sang dạng song song tương đương được tính theo bảng 6.4b.

***Bảng 6.4b***

| Bộ điều chỉnh | $G_c(s)$ | $k_p$ | $k_i$ | $k_d$ | $k_{d2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $k_p$ | $k_p$ | – | – | – |
| I | $k_i$ | – | $1/T_i$ | – | – |
| PI | $k_p + k_i/s$ | $T_n/T_v$ | $1/T_i$ | – | – |
| PD | $k_p + k_d s$ | $k_p$ | – | $k_p T_v$ | – |
| PID | $k_p + k_i/s + k_d s$ | $(T_n+T_v)/T_i$ | $1/T_i$ | $T_n T_v/T_i$ | – |
| PD2 | $k_p + k_d s + k_{d2} s$ | $k_p$ | – | $k_p(T_v+T_{v2})$ | $k_p T_v T_{v2}$ |

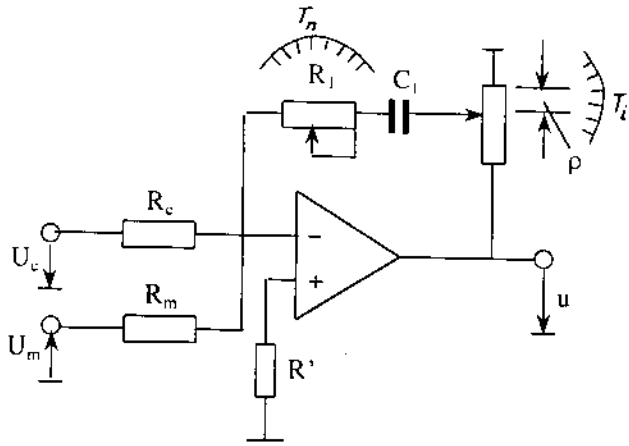
Hiện nay, các bộ điều chỉnh có cấu trúc nối tiếp là khá phổ biến nhưng vẫn tồn tại các bộ điều chỉnh điện tử dạng song song. Tuy nhiên, các bộ điều chỉnh khí nén không có cấu trúc song song.

### *3. Theo bản chất vật lý*

Theo bản chất vật lý có các bộ điều chỉnh điện, điện tử, khí nén, thủy lực hay hỗn hợp giữa chúng.

*a) Bộ điều chỉnh điện tử PI* như ở hình 6.14 ứng với (6-12).

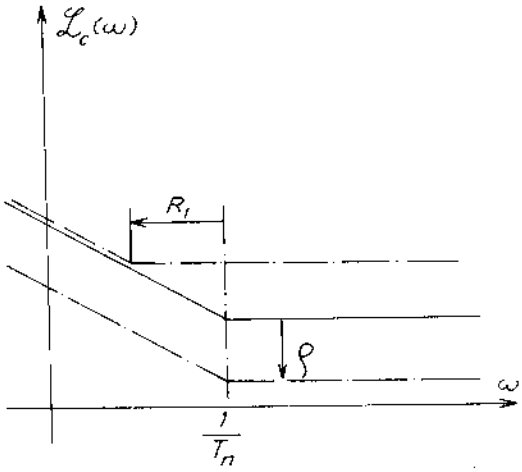
Các thông số được xác định bởi:




***Hình 6.14***

$$\left.\begin{aligned} T_n &= R_1C_1 \\ T_i &= \rho R_cC_1 = \rho R_mC_1 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}19)$$

Đặc tính tần số logarit $\mathcal{L}(\omega)$ của bộ điều chỉnh PI như ở hình 6.15. Dấu mũi tên chỉ hướng dịch chuyển của $\mathcal{L}_c(\omega)$ khi thay đổi $R_1$ hay $\rho$ tương ứng với $T_n$ và $T_i$.

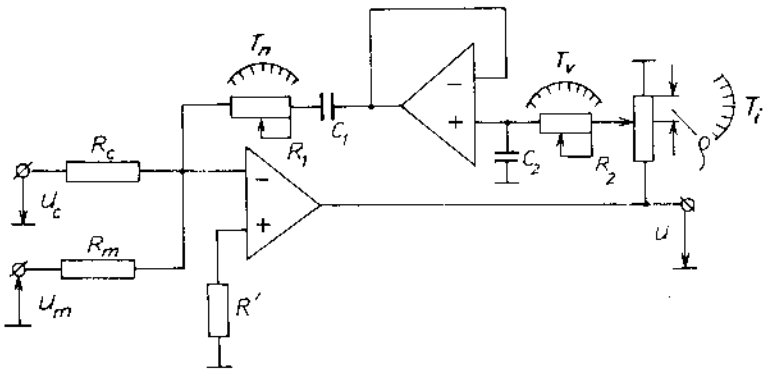



*Hình 6.15*

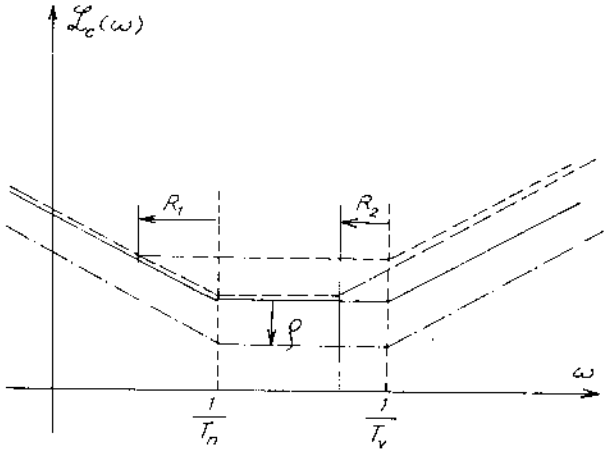
Sơ đồ mạch *bộ điều chỉnh PID điện tử* như ở hình 6.16. Với :

$$\left.\begin{aligned} T_n &= R_1C_1 \\ T_v &= R_2C_2 \\ T_i &= \rho R_cC_1 = \rho R_mC_1 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}20)$$

Hai mạch $R_1C_1$ và $R_2C_2$ được chỉnh định độc lập nhau nhờ khuếch đại trung gian. Khi tăng $T_n$, $T_v$, $T_i$ chẳng hạn, tương ứng với tăng các thông số $R_1$, $R_2$ và $\rho$ thì đặc tính $\mathcal{L}_c(\omega)$ dịch chuyển theo hướng mũi tên ở hình 6.17.



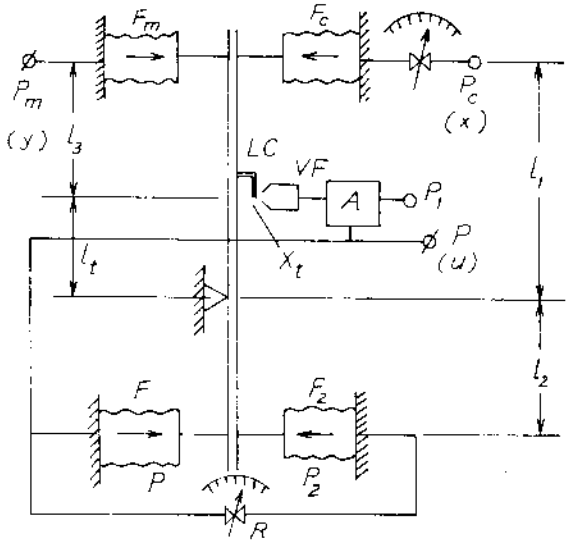

*Hình 6.16*




*Hình 6.17*

*b. Bộ điều chỉnh khí nén kiểu xiphông*

Ở hình 6.18, trên thanh cân bằng có tổ hợp vòi phun lá chắn *VF-LC* và khuếch đại *A* như ở hình 2.38a. $P_c$ là áp suất đặt (x) ; $P_m$ – áp suất đo được (y) và là áp suất ở mạch hồi tiếp ; P – áp suất đầu ra của bộ điều chỉnh (u).

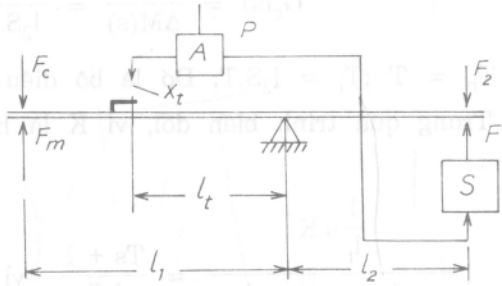



*Hình 6.18*

Như ở ví dụ hình 2.3b, bình chứa khí là khâu quán tính với hàm truyền :

$$\frac{P_2(s)}{P(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

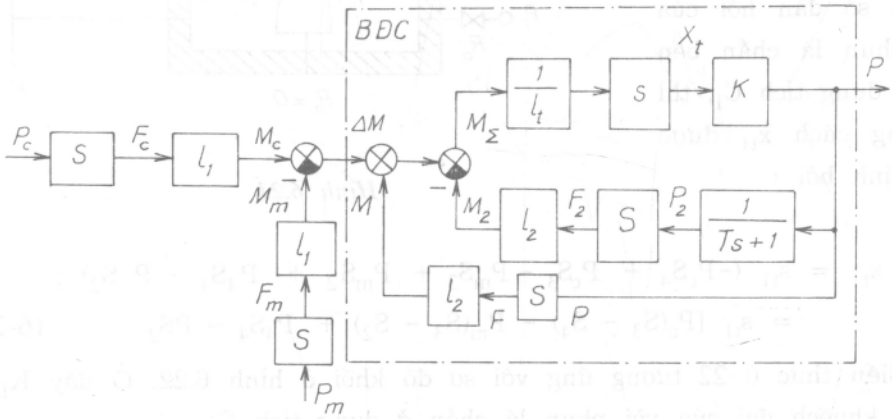
với T = RC, R – trở kháng của van điều chỉnh (hình 6.18), C – dung tích của xiphông. Mômen do các lực $F_c$, $F_m$, $F_2$ và F tác dụng vào thanh cân bằng :




*Hình 6.19*

$$F_c l_1 - F_m l_1 + F\ l_2 - F_2 l_2 = M_\Sigma$$

Mômen $M_\Sigma$ này sẽ tạo nên khoảng cách $x_t$ giữa vòi phun và lá chắn (hình 6.18 và 6.19). Do đó có sơ đồ khối tương đương như ở hình 6.20, với P – áp suất ; F – lực ; M – mômen ; S – diện tích đáy xiphông ; l – cánh tay đòn ; s – hệ số đàn hồi của vòi phun lá chắn ; K – hệ số khuếch đại của vòi phun lá chắn và khuếch đại khí nén *A* ; $X_t$ – khoảng cách giữa vòi phun và lá chắn.




*Hình 6.20*

Theo hình 6.20, ta có hàm truyền của bộ điều chỉnh :

$$G_c(s) = \frac{P(s)}{\Delta M(s)} = \frac{Ts + 1}{l_2S.Ts} \equiv \frac{T_ns + 1}{T_is}$$

mà $T_n = T$ ; $T_i = l_2S.T$. Đó là bộ điều chỉnh PI (6-12).

Trong quá trình biến đổi, vì K là hệ số khuếch đại rất lớn nên đã tính :

$$\frac{\frac{1}{l_t}s.K}{1 + \frac{1}{l_t}s.K.l_2S\frac{1}{Ts + 1}} \approx \frac{Ts + 1}{l_2S} \quad \text{vì } \frac{1}{l_t}s.K.l_2S\frac{1}{Ts + 1} >> 1$$

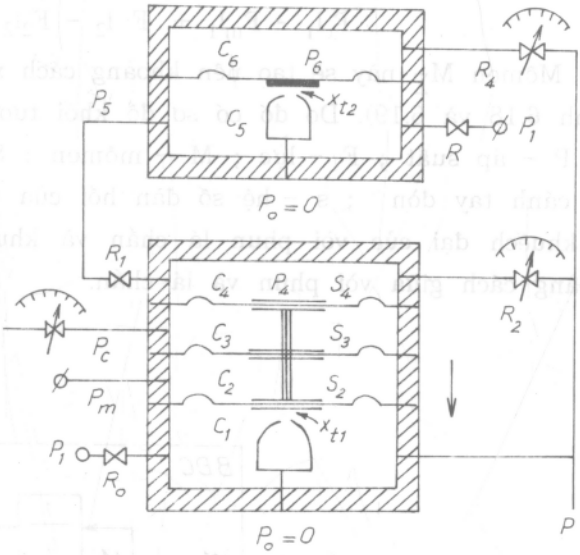
c) *Bộ điều chỉnh khí nén kiểu màn*

Ở hình 6.21 áp suất P và $P_6$ qua van có trở kháng $R_4$ :

$$\frac{P_6(s)}{P(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

với $T = R_4C_6$ (6-21)

Nếu quy định hướng mũi tên trên hình vẽ là dương, $s_{t1}$ là hệ số đàn hồi của vòi phun lá chắn bên trong dung tích $C_1$, thì khoảng cách $x_{t1}$ được xác định bởi :




*Hình 6.21*

$$x_{t1} = s_{t1}(-P_cS_4 + P_cS_3 - P_mS_3 + P_mS_2 + P_4S_4 - P\,S_2) ;$$
$$= s_{t1}[P_c(S_3 - S_4) - P_m(S_3 - S_2) + P_4S_4 - PS_2 \qquad (6\text{-}22)$$

Biểu thức 6-22 tương ứng với sơ đồ khối ở hình 6.22. Ở đây $K_1$ - hệ số khuếch đại của vòi phun lá chắn ở dung tích $C_1$.

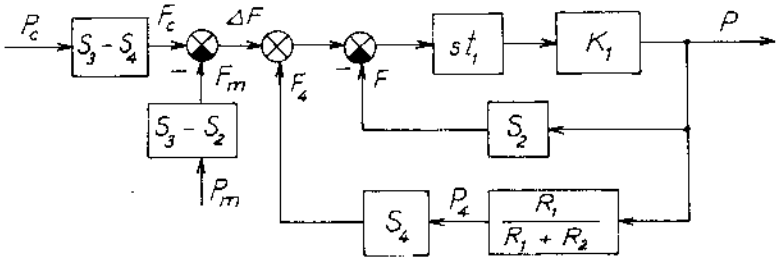
Lưu lượng đi qua $R_1$ và $R_2$ như nhau, vì $C_4$ có dung tích bé nên :

$$\frac{P_4 - P_5}{R_1} = \frac{P - P_5}{R_1 + R_2}$$

hay :
$$P_4 = P_5 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = P \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (6\text{-}23)$$

Từ đó có hàm truyền :

$$\frac{P(s)}{\Delta F(s)} = \frac{\dfrac{s_{t1}K_1}{1 + s_{t1}K_1S_2}}{1 - \dfrac{s_{t1}K_1}{1 + s_{t1}K_1S_2} S_4 \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{S_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} \qquad (6\text{-}24)$$




*Hình 6.22*

Đối với khối thứ hai (với hai buồng, dung tích $C_5$ và $C_6$) ta có phương trình :

$$x_{t_2} = s_{t_2} (P_6S_6 - P_5S_6) \qquad (6\text{-}25)$$

Sử dụng các biểu thức (6-21) và (6-24) có sơ đồ tương đương như ở hình 6.23. Ở đây $s_{t2}$, $x_{t2}$ và $K_2$ là hệ số đàn hồi, khe hở giữa vòi phun và lá chắn, và hệ số khuếch đại của tổ hợp vòi phun – lá chắn thứ hai.

Cuối cùng hàm truyền của bộ điều chỉnh có dạng :

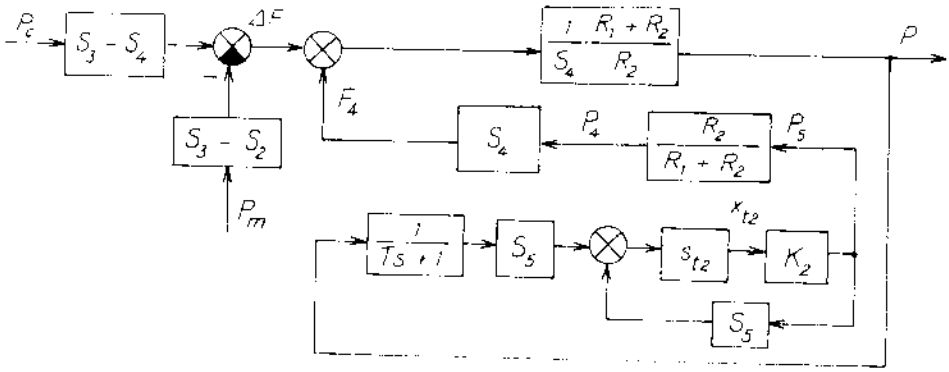
$$\frac{P(s)}{\Delta F(s)} = \frac{\dfrac{1}{S_4} \cdot \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}}{1 - \dfrac{1}{S_4} \cdot \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} S_4 \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \dfrac{s_{t2}K_2}{1 + s_{t2}K_2S_5} \cdot \dfrac{1}{Ts + 1} S_5} \approx$$

$$\approx \frac{1}{S_4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} \left( \frac{Ts + 1}{Ts} \right) \qquad (6\text{-}26)$$

Đó là bộ điều chỉnh PI (6-12).

Bộ điều chỉnh kiểu màng có tổ hợp vòi phun - lá chắn được bảo vệ tốt, nguyên lý hoạt động không có gì thay đổi.

Ở bộ điều chỉnh kiểu màn, có thể có những cách ghép nối khác nhau để có những bộ điều chỉnh khác nhau.




*Hình 6.23*

### VI.3.2. Xác định thông số của bộ điều chỉnh theo thực nghiệm

Bằng thực nghiệm, Ziegler-Nichols đã nêu các biểu thức xác định thông số của bộ điều chỉnh đã chọn trước.

Trường hợp đối tượng được nhận dạng như ở mục IV.2 (hàm quá độ của đối tượng tự cân bằng có dạng như ở hình 4.2), thông số của bộ điều chỉnh được xác định theo bảng 6.5.

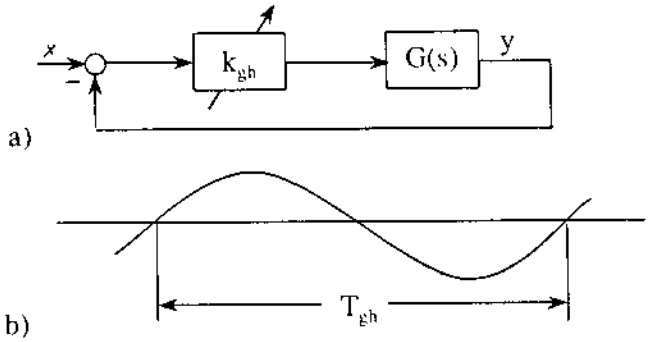
*Bảng 6.5*

| Bộ điều chỉnh | Hàm truyền | $k_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $k_p$ | $\frac{Tdt}{\tau dt}$ | – | – |
| PI | $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$ | $0,9.\frac{Tdt}{\tau dt}$ | $3.\frac{Tdt}{\tau dt}$ | – |
| PID | $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$ | $1,2.\frac{Tdt}{\tau dt}$ | $2.\frac{Tdt}{\tau dt}$ | $0,5.\frac{Tdt}{\tau dt}$ |

Phương pháp này chỉ dùng được với điều kiện:

$$0,1 < \frac{\tau dt}{Tdt} < 0,6 \qquad (6\text{-}27)$$

Thông dụng hơn là trường hợp đối tượng được mô phỏng trong một hệ kín với bộ điều chỉnh tỷ lệ P, làm việc ở biên giới ổn định [24]. Các thông số giới hạn của hệ số khuếch đại $k_{gh}$ và chu kỳ $T_{gh}$ được dùng để xác định thông số của bộ điều chỉnh như ở hình 6.24 và bảng 6.6.




*Hình 6.24*

*Bảng 6.6*

| Bộ điều chỉnh | Hàm truyền | $k_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $k_p$ | $0,5k_{gh}$ | – | – |
| PI | $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$ | $0,45.k_{gh}$ | $0,83.T_{gh}$ | – |
| PID | $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$ | $0,6.k_{gh}$ | $0,5.T_{gh}$ | $0,125.T_{gh}$ |

Hạn chế của phương pháp này là ở các hệ thực, chế độ làm việc ở biên giới ổn định với dao động kéo dài là khó được chấp nhận. Nếu tỷ số của hằng số thời gian trội và hằng số thời gian bé nhất của đối tượng là quá lớn thì hệ có thể mất ổn định, nhất là với bộ điều chỉnh PI.

Để khắc phục nhược điểm trên, có thể dùng phương pháp Tyreus - Luyben mà thông số của bộ điều chỉnh được xác định theo bảng 6.7.

***Bảng 6.7***

| Bộ điều chỉnh | Hàm truyền | $k_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $k_p$ | $\frac{k_{gh}}{2}$ | – | – |
| PI | $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$ | $\frac{k_{gh}}{3,2}$ | $2,2.T_{gh}$ | – |
| PID | $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$ | $\frac{k_{gh}}{2,2}$ | $2,2.T_{gh}$ | $\frac{k_{gh}}{6,3}$ |

### VI.3.3. Chọn và xác định thông số của bộ điều chỉnh theo "tiêu chuẩn phẳng"

Như đã nêu ở mục IV.2, các đối tượng công nghiệp thường có một hoặc hai hằng số thời gian trội, trong khi cơ cấu điều khiển có hằng số thời gian rất bé. Đó là các thời gian thuần trễ bé hay thời gian trễ từ các bộ lọc. Hằng số thời gian bé chung được tính theo:

$$(1 + s.T_{b1})(1 + s.T_{b2}) \dots (1 + s.T_{bn}) = (1 + s\sum_{K=1}^{n} T_{bK}) \qquad (6\text{-}28)$$

có nghĩa là:

$$T_b = \sum_{K=1}^{n} T_{bK} \qquad (6\text{-}29)$$

và hàm truyền tương ứng với một khâu quán tính có hằng số thời gian bằng tổng các thời gian trễ cộng lại.

Có nhiều phương pháp để chọn và xác định thông số bộ điều chỉnh [6, 7, 13, 15], một số nêu ở mục tiếp theo, ở đây chỉ đề cập đến một phương pháp đơn giản nhưng chất lượng của hệ: tĩnh cũng như động lại rất cao (tối ưu).

Như đã nêu ở mục 6.1, đối với hệ bậc hai có thể xác định định lượng thông số của nó (k và $\zeta$) để có chất lượng tối ưu theo một chỉ tiêu chất lượng nhất định. Nhiều phương pháp chọn và xác định thông số của bộ điều chỉnh cơ sở trên điều kiện này như phương pháp gián tiếp (V.3.2), phương pháp đa thức đặc trưng [20-I-2-1], các phương pháp dùng quỹ đạo nghiệm số v.v... sao cho hệ bậc cao hơn có chất lượng gần như ở hệ bậc hai. "Tiêu chuẩn phẳng" là tiêu chuẩn tối ưu vì sau khi chọn và xác định đúng thông số của bộ điều chỉnh, hệ sẽ có dạng bậc hai với chất lượng tối ưu theo tiêu chuẩn $J_{Imin}$.

Nguyên tắc chung là bù đủ các hằng số thời gian trội trong mạch hở và chỉ còn lại hằng số thời gian bé (6-29) và chất lượng của hệ được xác định bởi chính một hằng số thời gian bé này. Do vậy, khi hệ có một hằng số thời gian trội, chọn bộ điều chỉnh PI; khi hệ có hai hằng số thời gian trội, chọn bộ điều chỉnh PID. Trong trường hợp số lượng các hằng số thời gian trội lớn hơn hai, dùng phương pháp nối tiếp các bộ điều chỉnh hay kết hợp với các phương pháp khác.

Như vậy, nếu đối tượng (phần không thay đổi của hệ thống (VI.2.1)) có hàm truyền :

$$G(s) = \frac{k}{(1 + sT_b)} \prod_{K=1}^{n_s} \frac{1}{(1 + sT_K)}$$

thì bộ điều chỉnh được chọn có dạng :

$$G_c(s) = \frac{1}{sT_i} \prod_{K=1}^{n_c} (1 + sT_{cK})$$

Thông số của bộ điều chỉnh được chọn theo điều kiện :

$$\left.\begin{aligned} n_s &= n_c \\ T_{cK} &= T_K \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}30)$$

Sau khi đã bù đủ, hệ hở có dạng :

$$W(s) = \frac{k}{sT_i(1 + sT_b)}$$

Hệ kín có hàm truyền :

$$W_k(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{W(s)}} = \frac{1}{1 + \frac{sT_i(1 + sT_b)}{k}} \qquad (6\text{-}31)$$

Khâu tích phân ở bộ điều chỉnh có chức năng triệt tiêu sai lệch tĩnh, và ở (6-31) chỉ còn cần xác định hằng số tích phân $T_i$.

Bình phương môđun đặc tính tần hệ kín được xác định bởi :

$$W_k^2(j\omega) = W_k(j\omega)W_k(-j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{k}\left(\frac{T_i}{k} - 2T_b\right)\omega^2 + \ldots} \qquad (6\text{-}32)$$

Điều kiện để hệ tối ưu còn là môđun của đặc tính tần hệ kín với tần số bé là một hằng :

$$|W_k(j\omega)| \approx 1 \qquad (6\text{-}33)$$

nghĩa là khi $\omega \to 0$, môđun của đặc tính tần hệ hở $|W(j\omega)| \to \infty$, do đó trong hệ phải có khâu tích phân.

Với tần số cao, điều kiện (6-33) không thể thỏa mãn được ; khi $\omega \to \infty$ thì $|W_k(j\omega)| \to 0$. Do đó tần số cắt càng lớn càng tốt.

Từ điều kiện (6-33), nếu không quan tâm đến thành phần bậc cao của $\omega$ thì ở mẫu số của (6-32) thành phần thứ hai phải bằng 0, nghĩa là :

$$\frac{T_i}{k} = 2T_b \text{ hay } T_i = 2k.T_b \qquad (6\text{-}34)$$

Hàm truyền của hệ kín sau khi đã chọn bộ điều chỉnh có dạng :

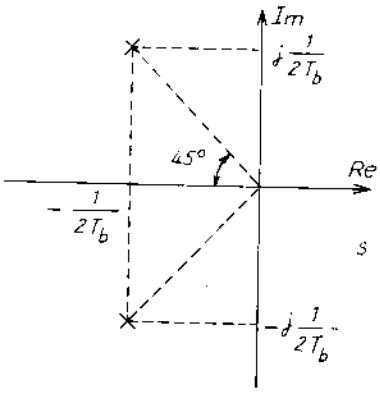
$$W_k^*(s) = \frac{1}{1 + s2T_b + s^2 2T_b^2}$$

Nghiệm được phân bố như ở hình 6.25. So sánh với khâu dao động (6-1), ta có :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,T_b} \; ; \; \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

là thông số tối ưu theo $J_1$ với chất lượng : $\sigma\% = 4{,}3\%$, $t_m = 4{,}71T_b$.

Lưu ý rằng $T_b$ là tổng của các thời gian trễ bé trong hệ, do đó không thể




*Hình 6.25*

bù hằng số thời gian bé, vì đặc tính pha của khâu quán tính tương đương sẽ không tương đương với đặc tính pha của một khâu quán tính. Mặt khác, khi không có điều kiện bù đủ, mà cộng các hằng số thời gian bé còn lại vào $T_b$, thì độ tác động nhanh của hệ sẽ giảm rõ rệt và không còn là tối ưu.

"Tiêu chuẩn phẳng" được tổng kết như ở bảng 6.8.

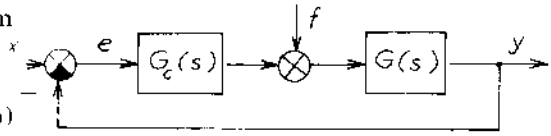
*Bảng 6.8*

| $n_s$ | Bộ điều chỉnh | $T_m$ | $T_v$ | $(T_{v2})$ | $T_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | PI : $\dfrac{sT_n + 1}{sT_i}$ | $T_1$ | - | - | $2kT_b$ |
| 2 | PID : $\dfrac{(sT_n + 1)(s.T_v + 1)}{sT_i}$ | $T_1$ | $T_2$ | - | $2k.T_b$ |
| 3 | $(PID_2)$ : $\dfrac{(sT_n + 1)(s.T_v + 1)(s.T_{v2} + 1)}{sT_i}$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $2k.T_b$ |

Bộ điều chỉnh $PID_2$ ít dùng vì khó thực hiện.

Trong trường hợp có tác động của nhiễu như ở hình 6.26, hàm truyền với nhiễu là :

$$W_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_c(s)\,G(s)} \qquad (6\text{-}35)$$




*Hình 6.26*

Sau khi chọn đúng bộ điều chỉnh và xác định đúng thông số của nó, ta có :

$$G_c(s)G(s) = W^*(s) = \frac{1}{s2T_b(1 + s.T_b)} \qquad (6\text{-}36)$$

Đặc tính tần số logarit của $W^*(j\omega)$ như ở hình 6.27. Đường $\mathcal{L}(\omega)$ có dạng "phẳng" nên tiêu chuẩn mang tên "tiêu chuẩn phẳng".

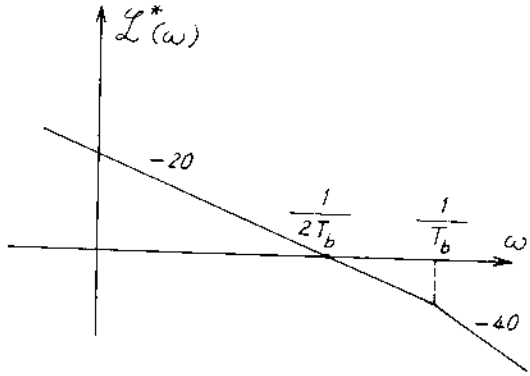
Nếu đối tượng có hai hằng số thời gian trội, sau khi thay (6-36) vào (6-35) ta có :

$$W_f(s) = \frac{k}{(1 + s.T_1)(1 + s.T_2)} \cdot \frac{s2T_b(1 + s.T_b)}{(1 + s2T_b + s^2 2T_b^2)} \qquad (6\text{-}37)$$

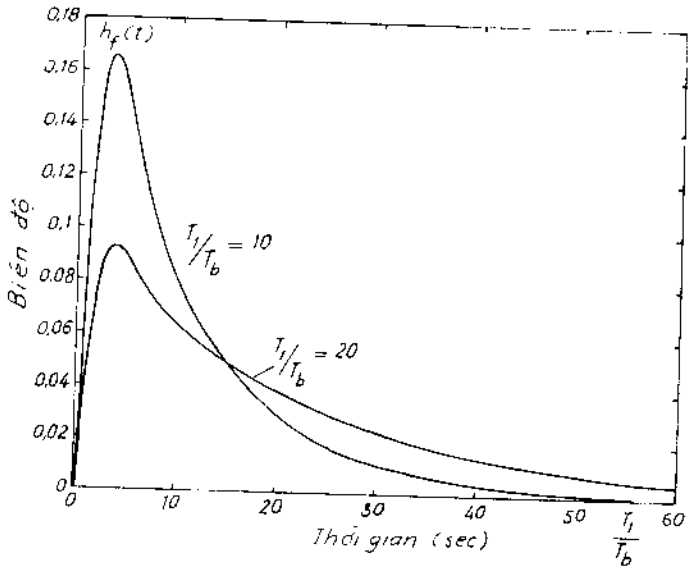
và với một hằng số thời gian trội :

$$W_f(s) = \frac{k}{(1+s.T_1)} \frac{s2T_b(1+s.T_b)}{(1+s.2T_b+s^2 2T_b^2)} \qquad (6\text{-}38)$$

Khác với tác động của tín hiệu đặt x(t), đối với nhiễu f(t), hàm truyền này có bốn hoặc ba nghiệm cực và hai nghiệm 0 (một nghiệm không bằng 0). Việc tính toán phức tạp, kết quả mô hình hóa đối với (6-38) như ở hình 6.28. Khi $T_1$ càng lớn, lượng quá điều chỉnh giảm nhưng thời gian điều chỉnh càng dài, mặc dầu ở trạng thất xác lập (s = 0) ảnh hưởng của nhiễu không còn nữa ($W_f(0) = 0$).




*Hình 6.27*




*Hình 6.28*

### VI.3.2. Xác định thông số của bộ điều chỉnh theo phương pháp tính tổng hằng số thời gian theo Kuhn

"Tiêu chuẩn phẳng" nói trên cho phép chọn và xác định thông số tối ưu của bộ điều chỉnh, có lượng quá điều chỉnh và thời gian quá độ cực tiểu. Nếu đối tượng có hằng số thời gian quá lớn mà việc chọn bộ điều chỉnh phù hợp

có khó khăn, hoặc số lượng các hằng số thời gian quá lớn (nhiều hơn 4), có thể dùng phương pháp tính tổng số hằng số thời gian theo Kuhn để xác định thông số bộ điều chỉnh.

Ví dụ đối tượng có hàm truyền đạt:

$$G(s) = k_{dt}\frac{B(s)}{A(s)}e^{-\tau s}$$

mà: $B(s) = (1 + T_{d1}s)(1 + T_{d2}s) \ldots\ldots (1 + T_{dm}s)$

mà: $A(s) = (1 + T_1s)(1 + T_2s) \ldots\ldots (1 + T_ns)$.

Ở hình 6.29 có hàm quá độ của đối tượng mà diện tích A được xác định bởi:

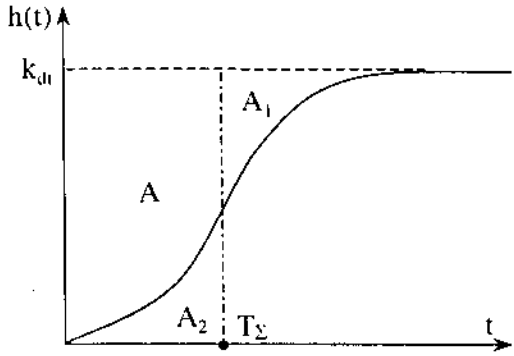
$$A = \int_0^\infty \left[\frac{y(t \to \infty)}{u_0} - \frac{y(t)}{u_0}\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[k_{dt} - \frac{y(t)}{u_0}\right]dt$$

Mặt khác, theo định lý tới hạn:

$$A = \lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{s\to 0} A(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{k_{dt}}{s} - \frac{Y(s)}{u_0}\right],$$




***Hình 6.29***

mà $Y(s) = G(s)U(s)$ và $U(s) = \frac{1}{s}u_0$ nên:

$$A = \lim_{s\to 0}\left[\frac{k_{dt}}{s} - \frac{G(s)}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{k_{dt}}{s} - \frac{k_{dt}B(s)}{A(s)}e^{-\tau s}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} k_{dt}\left[\frac{\frac{A(s)}{s} - \frac{B(s)}{s}e^{-\tau s}}{A(s)}\right]$$

Sau khi thay A(s) và B(s) bằng các giá trị của chúng, ta có kết quả:

$$A = \lim_{s\to 0} k_{dt}\left[(T_1 + T_2 + \ldots + T_n) + \frac{1}{s} - (T_{d1} + T_{d2} + \ldots + T_{dm}) - \frac{e^{-\tau s}}{s}\right]$$

Vì: $$\lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-\tau s}}{s}\right] = \tau$$

nên cuối cùng $A = k_{dt}T_\Sigma$ mà $T_\Sigma = T_1 + T_2 + ... + T_n + \tau - T_{d1} - T_{d2} ... T_{dm}$ .

Trong trường hợp thông số của đối tượng chưa biết, mà hàm quá độ có được từ nhận dạng như ở hình 6.29, ta có thể xác định T như sau:

Vẽ đường thẳng đứng chia đôi hai diện tích $A_1$ và $A_2$ sac cho chúng gần bằng nhau, ta có:

$$A = \int_0^\infty \left[ k_{dt} - \frac{y(t)}{u_0} \right] dt = k_{dt}T_\Sigma = \int_0^{T_\Sigma} \left[ k_{dt} - \frac{y(t)}{u_0} \right] dt + A_1$$

và đường thẳng ấy xác định $T_\Sigma$ .

Ở phương pháp này, thông số của bộ điều chỉnh dựa vào "hằng số thời gian trung bình" của đối tượng. Ví dụ khi đối tượng là hai khâu quán tính (hay có khi nhiều khâu quán tính) thì chọn bộ điều chỉnh PI với thông số $T_n = T_\Sigma/2$.

***Bảng 6.9***

| Bộ điều chỉnh | Hàm truyền | $k_p$ | $T_n$ | $T_v$ | $T_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| PI | $k_p \frac{(T_n s + 1)}{T_i s}$ | $0,5\, k_{dt}$ | $\frac{T_\Sigma}{2}$ | – | $\frac{T_\Sigma}{2}$ |
| PID | $k_p \frac{(T_n s + 1)(T_v s + 1)}{T_i s}$ | $0,5\, k_{dt}$ | $\frac{T_\Sigma}{3}$ | $\frac{T_\Sigma}{3}$ | $\frac{T_\Sigma}{3}$ |

Chú ý rằng, trị số trung bình của tổng các hằng số thời gian mà dựa vào đó để xác định thông số bộ điều chỉnh (theo bảng 6.9) luôn lớn hơn hằng số thời gian bé nhất của đối tượng mà "tiêu chuẩn phẳng" đã tính đến.

Một phương pháp khác dùng đến $T_\Sigma$ là trước hết bù đủ các hằng số thời gian trội của đối tượng, còn trung bình của những hằng số thời gian còn lại được xem như hằng số thời gian bé. Trong trường hợp này, thời gian quá độ vẫn khác với kết quả tính theo "tiêu chuẩn phẳng".

### VI.3.5. Điều chỉnh hệ có hành vi tích phân

Trong thực tế còn gặp các đối tượng có hành vi tích phân (hình 4.2b), liệu có cần đến bộ điều chỉnh PI không, hay chỉ bộ điều chỉnh tỷ lệ là đủ, vì thành phần tích phân của đối tượng triệt tiêu được sai lệch tĩnh chăng.

Ví dụ đối tượng có hàm truyền :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s.T_b)\, s.T}$$

và bộ điều chỉnh :

$$G_c(s) = K_c$$

mà nhiễu f đặt trước khâu tích phân, hoặc như ở hình 6.26.

Hàm truyền đối với sai lệch :

$$W_f(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{1}{(1 + s.T_b)\, s.T + K_c}$$

Vậy $e_{ss} = \lim\limits_{s \to 0} sE(s) = \frac{1}{K_c}$ : Khi nhiễu là bậc thang hệ vẫn tồn tại sai lệch tĩnh.

Mặt khác, khâu tích phân ở đối tượng có thể xem như một khâu quán tính có hằng số thời gian rất lớn và :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s.T_b)(1 + s.T_I)} \qquad \text{với } T_I >> 1$$

Nếu dùng tiêu chuẩn phẳng và chọn bộ điều chỉnh PI :

$$G_c(s) = \frac{1 + s.T_n}{s.T_i} = \frac{1 + s.T_I}{s2T_b} \approx \frac{T_I}{2T_b}$$

Khi $T_I$ rất lớn thì tác dụng của thành phần tích phân ở bộ điều chỉnh cũng không còn nữa và bộ điều chỉnh PI có tác dụng như bộ điều chỉnh P. Tương tự như thế, bộ điều chỉnh PID có hiệu quả như PD.

Ở biểu thức (6-38), khi $T_I$ quá lớn :

$$W_f(s) = \frac{k}{s.T_I} \frac{s2T_b(1 + s.T_b)}{(1 + s2T_b + s^2 2T_b^2)} = \frac{2T_b}{T_I} \cdot \frac{1 + s.T_b}{(1 + s2T_b + s^2 2T_b^2)}$$

với $T_I = \frac{T_I}{k}$. Ở chế độ xác lập (s = 0) hàm truyền $W_f(0)$ khác 0.

Như vậy, trong trường hợp có nhiễu tác động, với đối tượng có hành vi tích phân, vẫn phải dùng đến bộ điều chỉnh có thành phần tích phân.

Vì khâu tích phân ở đối tượng, có thể xem là trạng thái giới hạn của khâu quán tính khi hằng số thời gian $T \to \infty$, nên "tiêu chuẩn phẳng" không loại trừ được nhiễu và phải dùng đến "tiêu chuẩn đối xứng".

### VI.3.6. Chọn và xác định thông số của bộ điều chỉnh theo "tiêu chuẩn đối xứng"

Để có tác động nhanh đối với nhiễu, cần có hệ số khuếch đại lớn khi tần số bé, có thể chọn các hằng số thời gian của bộ điều chỉnh như nhau :

$$T_{c1} = T_{c2} = \ldots = T_{cn} = T_c \qquad (6\text{-}39)$$

và bộ điều chỉnh có dạng :

$$G_c(s) = \frac{(1 + s.T_c)^{n_c}}{s.T_i} \qquad (6\text{-}40)$$

Hệ hở sẽ có hàm truyền :

$$W(s) = \frac{k(1 + s.T_c)^{n_c}}{s.T_i(1 + s.T_b)\prod_{K=1}^{n_s}(1 + s.T_K)} \qquad (6\text{-}41)$$

Khi hằng số thời gian của đối tượng có trị số rất lớn thì (6-41) có dạng :

$$W(s) = \frac{k(1 + s.T_c)^{n_c}}{s.T_i(1 + s.T_b)\, s^{n_s}\prod_{K=1}^{n_s} T_K} \qquad (6\text{-}42)$$

Cũng như ở "tiêu chuẩn phẳng", điều kiện trước tiên là : $n_c = n_s$. Để giản đơn, ta dùng ký hiệu :

$$K_o = \frac{k.T_c^{n_s}}{\prod_{K=1}^{n_s} T_K} \qquad (6\text{-}43)$$

và (6-42) có dạng :

$$W(s) = \frac{K_o}{s.T_i(1 + s.T_b)}\left(\frac{1 + s.T_c}{s.T_c}\right)^{n_s} \qquad (6\text{-}44)$$

Dùng một số phép biến đổi với (6-44) :

$$\left(\frac{1 + s.T_c}{s.T_c}\right)^{n_s} = \left(1 + \frac{1}{s.T_c}\right)^{n_s} \approx 1 + \frac{n_s}{s.T_c} =$$

$$= 1 + \frac{1}{s.T_{ce}} = \frac{1 + s.T_{ce}}{s.T_{ce}} \qquad (6\text{-}45)$$

Với giả thiết $\frac{1}{s.T_c} << 1$ và $s.T_c >> 1$ cũng như ở (6-45) đã được đưa vào hằng số thời gian tương đương của bộ điều chỉnh :

$$T_{ce} = \frac{T_c}{n_s} \tag{6-46}$$

Biểu thức (6-44) bây giờ có dạng :

$$W(s) \approx \frac{K_o}{s.T_i(1 + s.T_b)} \cdot \frac{1 + s.T_{ce}}{s.T_{ce}} \tag{6-47}$$

Tương ứng với (6-47), hệ kín có hàm truyền :

$$W_k(s) \approx \frac{1 + s.T_{ce}}{1 + s.T_{ce} + s^2 \frac{T_{ce}T_i}{K_o}(1 + s.T_b)} \tag{6-48}$$

Bình phương của môđun đặc tính tần hệ kín có dạng :

$$W_k^2(j\omega) = W_k(j\omega)W_k(-j\omega) \approx \frac{1 + \omega^2 T_{ce}^2}{D(\omega^2)} \tag{6-49}$$

với :

$$D(\omega^2) = 1 + T_{ce}\left(T_{ce} - 2\frac{T_i}{K_o}\right)\omega^2 + \frac{T_{ce}^2 T_i}{K_o}\left(\frac{T_i}{K_o} - 2T_b\right)\omega^4 + \left(\frac{T_{ce}T_i}{K_o}T_b\right)^2 . \omega^6 \tag{6-50}$$

Để mẫu số của (6-49) bằng một ($D(\omega^2) = 1$), ta rút ra :

$$\left.\begin{aligned} T_i &= 2K_oT_b \\ T_{ce} &= 2\frac{T_i}{K_o} = 4T_b \end{aligned}\right\} \tag{6-51}$$

Thông số của bộ điều chỉnh được chọn theo :

$$T_c = n_sT_{ce} = 4n_sT_b \tag{6-52}$$

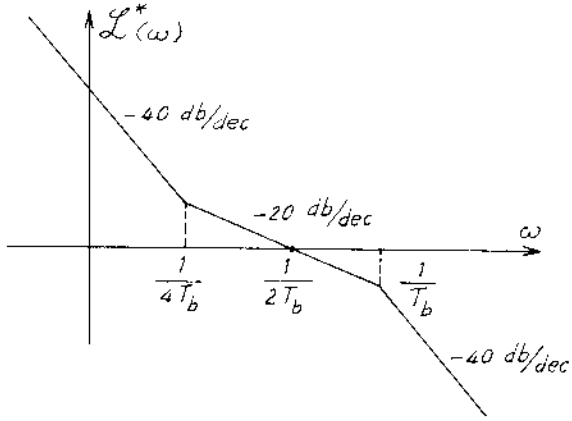
$$T_i = 2\frac{k.T_c^{n_s}}{\prod_{K=1}^{n_s} T_K}T_b \tag{6-53}$$

Sau khi thay thế (6-51) vào (6-47) ta có hàm truyền hệ hở :

$$W^*(s) \approx \frac{(1 + s4T_b)}{s4T_b} \times$$

$$\times \frac{1}{s2T_b} \frac{1}{(1 + s.T_b)} \qquad (6\text{-}54)$$

và đặc tính tần số logarit của hệ hở đối xứng qua tần số cắt $\omega_c = \frac{1}{2T_b}$ nên gọi là "tiêu chuẩn đối xứng" như ở hình 6.29. Quy tắc xác định bộ điều chỉnh và thông số của nó theo "tiêu chuẩn đối xứng" như ở bảng 6.10




*Hình 6.29*

*Bảng 6.10*

| $n_s$ | Bộ điều chỉnh | $T_n$ | $T_v$ | $(T_{v2})$ | $T_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | PI | $4T_b$ | - | - | $8 \frac{k}{T_1} T_b^2$ |
| 2 | PID | $8T_b$ | $8T_b$ | - | $128 \frac{k}{T_1 T_2} T_b^3$ |
| 3 | $(PID_2)$ | $12T_b$ | $12T_b$ | $12T_b$ | $3456 \frac{k}{T_1 T_2 T_3} T_b^4$ |

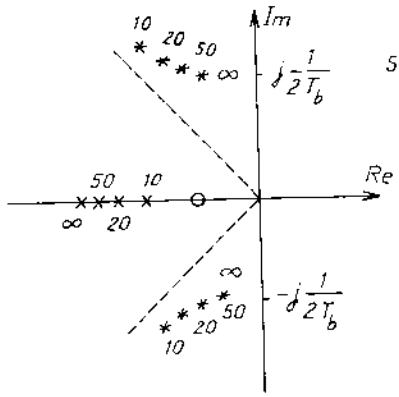
Biểu thức (6–54) chỉ là biểu thức xấp xỉ khi hệ là bậc một và có hành vi tích phân. Trong trường hợp ấy ($n_s = 1$), theo bảng 6.10 ta có :

$$W(s) = \frac{T_1}{T_b} \frac{1 + s4T_b}{s8T_b(1 + s.T_1)(1 + s.T_b)} \qquad (6\text{–}55)$$

Hệ kín với tín hiệu đặt x(t) :

$$W_k(s) = \frac{1 + s4T_b}{1 + s4T_b + s8\frac{T_b^2}{T_1}(1 + s.T_1)(1 + s.T_b)} \qquad (6\text{–}55a)$$

Dễ nhận thấy rằng khi $T_1 >> 1$ thì (6-55a) trùng với (6-54). Ở hàm truyền theo (6-55a) có ba nghiệm cực phụ thuộc $T_1$, $T_b$ và một nghiệm không, phụ thuộc $T_b$. Phân bố nghiệm như ở hình 6.30.

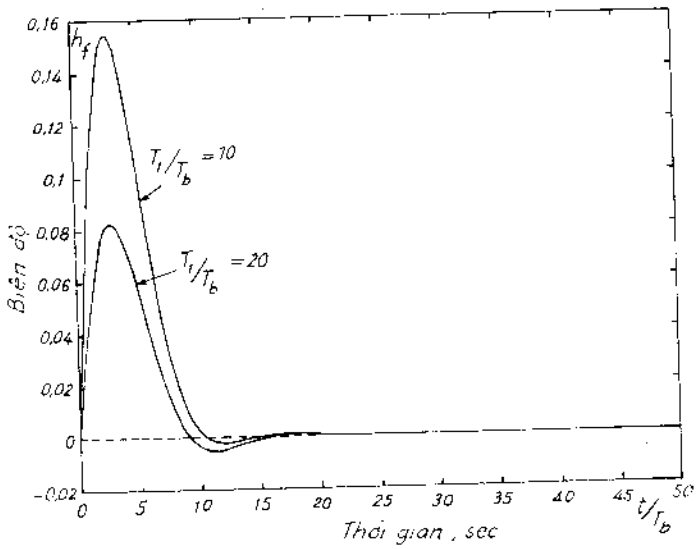



*Hình 6.30*

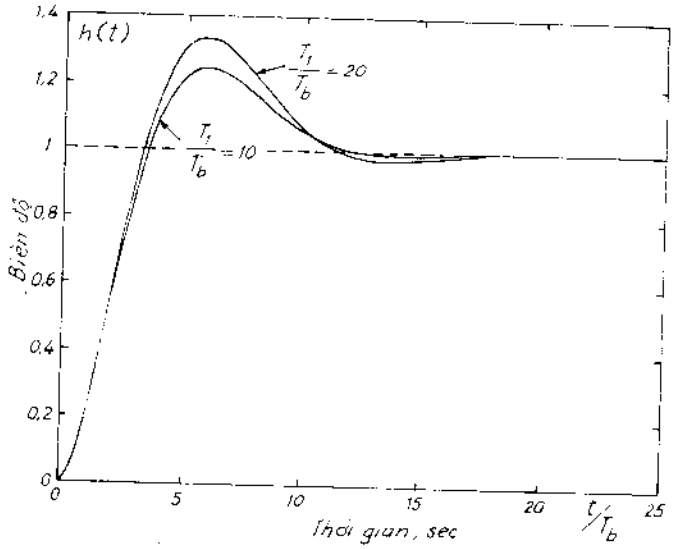
Theo sơ đồ khối ở hình 6.26, khi đối tượng có một hằng số thời gian trội, hàm truyền đối với nhiễu có dạng :

$$W_f(s) = \frac{sk8\dfrac{T_b^2}{T_1}(1 + s.T_b)}{1 + s4T_b + s8\dfrac{T_b^2}{T_1}(1 + s.T_1)(1 + s.T_b)} \quad ... \qquad (6\text{-}56)$$

Trên hình 6.31 có hàm quá độ với tác động của nhiễu bậc thang. So sánh với hình 6.28, "tiêu chuẩn đối xứng" có quá trình quá độ ngắn




*Hình 6.31*

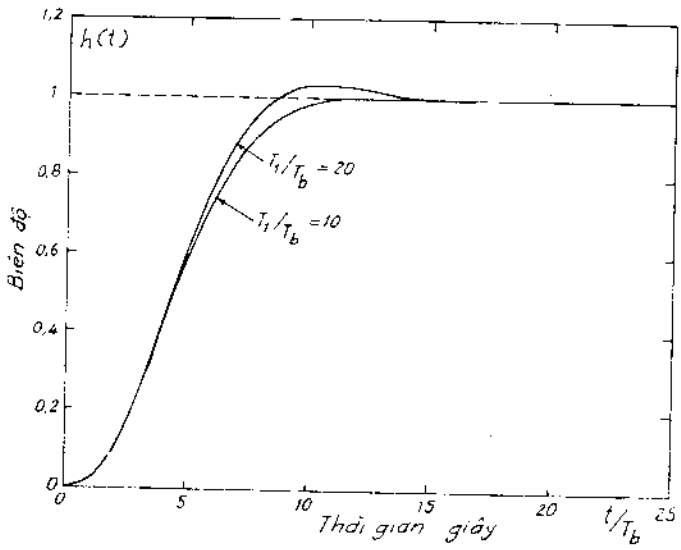



*Hình 6.32*

hơn ở "tiêu chuẩn phẳng". Tuy nhiên với tín hiệu đặt, tiêu chuẩn đối xứng không phải tối ưu, lượng quá điều chỉnh lớn cùng với hằng số thời gian trội như ở hình 6.32, được mô hình hóa theo (6-55). Để giảm lượng quá điều chỉnh, người ta dùng các bộ lọc ở đầu vào có mục đích bù trừ ảnh hưởng điểm không ở tử số của hàm truyền. Do đó, bộ lọc được chọn trong trường hợp trên có hàm truyền ứng với :

$$W_l(s) = \frac{1}{1 + s4T_b} \qquad (6\text{-}57)$$

và hàm quá độ khi có bộ lọc như ở hình 6.33.




*Hình 6.33*

**Ví dụ 6-3**

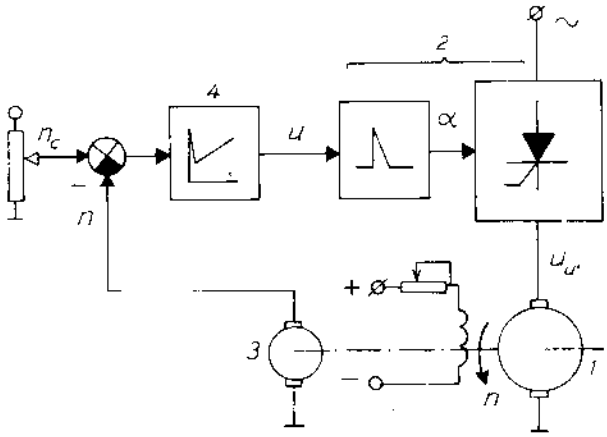
Hệ điều chỉnh tốc độ động cơ như ở hình 6.34 với các thông số của các phần tử như sau :

1. Động cơ : $k_{dc} = 1$, $T_1 = 0{,}327$ sec, $T_2 = 0{,}033$ sec (với kích từ $\varphi = 0{,}5$).

2. Thyristor : $k_{th} = 1{,}2$ ; $\tau_{th} \approx 0{,}00167$ sec.

3. Máy phát đo tốc độ $k_f = 1$.

Hãy chọn và xác định thông số bộ điều chỉnh 4.




*Hình 6.34*

Thyristor là một khâu trễ, có thể được xấp xỉ bằng một khâu quán tính với $T_{th} = \tau_{th} = 0{,}00167$ sec. Với điều kiện đã cho, dùng "tiêu chuẩn phẳng" chọn bộ điều chỉnh PID, theo bảng 6.10 có các thông số sau :

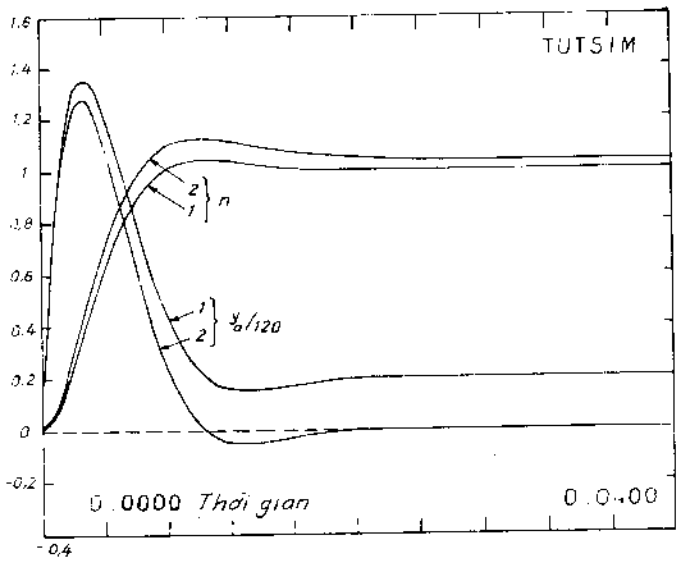
$$G_c(s) = \frac{(s.T_n + 1)(s.T_v + 1)}{s.T_i}$$

$T_n = 0{,}327$ sec ;

$T_r = 0{,}033$ sec ;

$T_i = 0{,}004$ sec.

Kết quả mô phỏng như ở hình 6.35. Đặc tính tốc độ (n) khi không có nhiễu (đường *1*) là tối ưu nhưng khi có nhiễu (đường *2*) thì quá trình quá độ lại kéo dài. Đó là đặc điểm của "tiêu chuẩn phẳng". Cả hai trường hợp đều có dòng điện của mạch phần ứng động cơ lớn (đường $y_a$) cho nên.



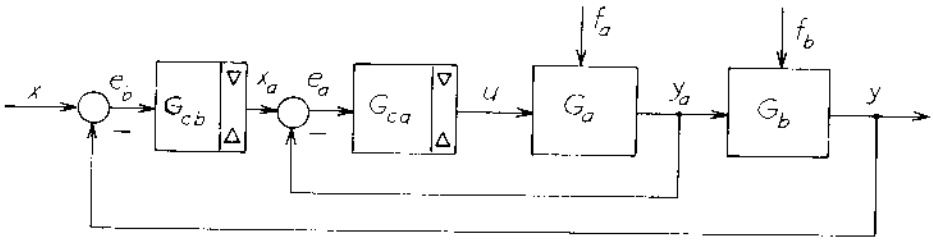

*Hình 6.35*

thay vì dùng một bộ điều chỉnh PID như ví dụ trên, thường dùng hai bộ điều chỉnh PI nối tiếp để hạn chế dòng như sẽ đề cập đến ở phần tiếp theo.

### VI.3.7. Nối tiếp các bộ điều chỉnh

Trong công nghiệp thường dùng phương pháp nối tiếp các bộ điều chỉnh, nhất là khi cần hạn chế những đại lượng nội tại ; như ở ví dụ trên, cần hạn chế dòng điện mạch phần ứng động cơ quá lớn. Ngoài ra, khi số lượng các hằng số thời gian trội của đối tượng lớn hơn hai, ba ... thì phải dùng phương pháp nối tiếp các bộ điều chỉnh thông thường, hay kết hợp với các phương pháp khác hoặc dùng bộ điều chỉnh trạng thái.

Sơ đồ khối của một hệ dùng hai bộ điều chỉnh nối tiếp như ở hình 6.36.




*Hình 6.36*

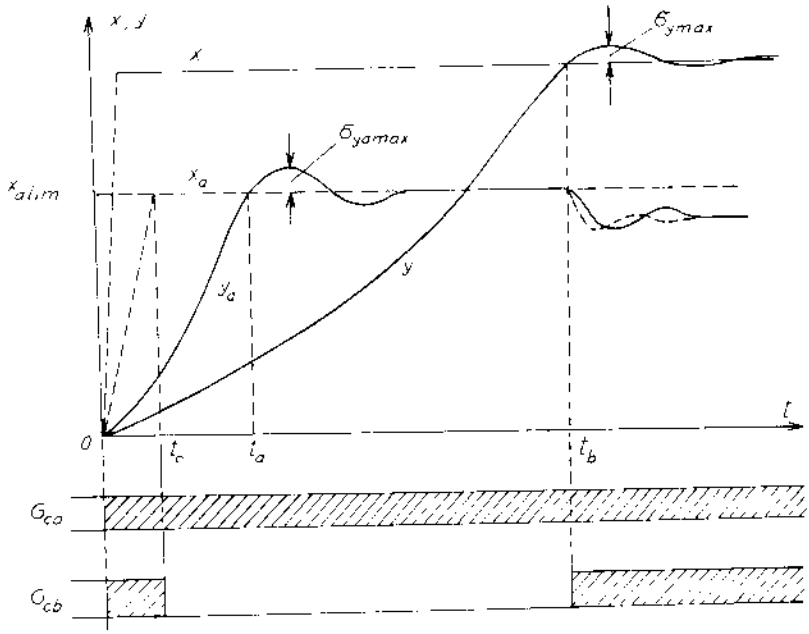
Bộ điều chỉnh $G_{ca}$ tham gia ở mạch vòng trong với sai lệch $e_a = x_a - y_a$. Lượng ra của $G_{ca}$ là tác động điều khiển u của hệ và được hạn chế bởi trị số cực đại và cực tiểu ($U_{max}$ và $U_{min}$) được mô tả bằng hai tam giác. Đại lượng đặt của bộ điều chỉnh này là tín hiệu ra $x_a$ của bộ điều chỉnh $G_{cb}$ mà đầu vào lấy từ sai lệch của hệ thống : $e_b = x - y$. Ở bộ điều chỉnh $G_{cb}$, tín hiệu ra $x_a$ cũng được giới hạn bởi $x_{amax}$ và $x_{amin}$ nên $y_a$ sẽ được hạn chế những dao động quá lớn của nó.

Như vậy, điều kiện cần thiết là có thể phân chia hệ thống thành những thành phần mà các hồi tiếp vòng trong có thể lấy được tín hiệu và thực hiện được trong thực tế.

Khi khởi động, quá trình làm việc của hệ được mô tả như ở hình 6.37.

Ở thời điểm t = 0, khi đặt vào hệ tín hiệu x, $G_{cb}$ nhận đại lượng cực đại làm cho tín hiệu đặt của bộ điều chỉnh $G_{ca}$ đạt trị số cực đại

$x_{alim}$ một cách nhanh chóng ở thời điểm $t_o$. Tín hiệu ra $y_a$ thay đổi theo tính chất động học của mạch vòng trong (theo $W_{ka}(s) = Y_a(s)/X_a(s)$). Ở thời điểm $t_a$, lần đầu tiên $y_a$ đạt ngưỡng $x_a = x_{alim}$. Nếu chỉnh định tốt, sau một thời gian, $y_a$ sẽ xác lập ở $y_a = x_{alim}$ với lượng quá điều chỉnh $\sigma_{yamax}$




*Hình 6.37*

Đại lượng được điều chỉnh của cả hệ y sẽ thay đổi theo dáng dấp của $y_a$ và tính chất động học của thành phần $G_b(s)$ của hệ. Ở thời điểm $t_b$, y đạt trị số ngưỡng x = y. Trong suốt cả thời gian này bộ điều chỉnh $G_{cb}$ ở chế độ ngưỡng và không có ý nghĩa điều chỉnh.

Sau thời điểm $t_b$, bộ điều chỉnh $G_{cb}$ lại làm việc. Lượng ra của hệ – y, có quá điều chỉnh $\sigma_{ymax}$ làm giảm ảnh hưởng thành phần tích phân của bộ điều chỉnh $G_{cb}$. Cuối cùng y sẽ tự xác lập theo lượng đặt x.

Do hệ làm việc ở những trị số giới hạn nên quá trình quá độ có tính chất phi tuyến.

Hệ có thể làm việc với các chế độ khác nhau : chế độ thông thường

(không có giới hạn nào đạt đến), giới hạn chỉ có đối với $x_a$ hoặc giới hạn đối với cả $x_a$ và u.

Các bộ điều chỉnh được chọn lần lượt, bắt đầu từ mạch vòng trong.

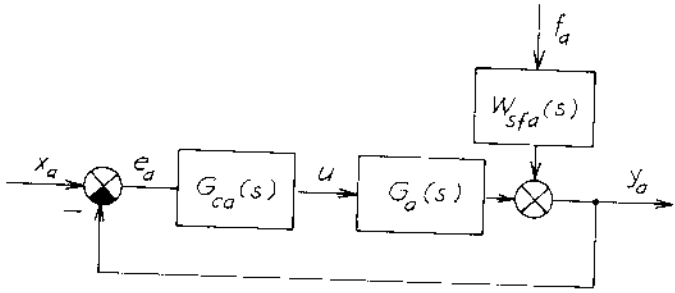
Theo hình 6.38 ta có :

$$Y_a(s) = W_{xa}(s)X_a(s) + W_{fa}(s)F_a(s)$$

với :

$$W_{xa}(s) = \frac{W_{oa}(s)}{1 + W_{oa}(s)} \; ; \quad W_{fa}(s) = \frac{W_{sfa}(s)}{1 + W_{oa}(s)} \; ,$$

mà $W_{oa}(s) = G_{ca}(s)G_a(s)$.




*Hình 6.38*

Như vậy, theo $G_a(s)$ mà xác định bộ điều chỉnh $G_{ca}(s)$ theo phương pháp thông thường.

Ảnh hưởng của nhiễu $f_a$ được giảm thiểu ở mạch kín vòng trong.

Mạch vòng ngoài kế tiếp được mô tả ở hình 6.39, ở đó cả mạch kín vòng trong được thay thế bởi $W_{xa}(s)$ như một thành phần của mạch vòng ngoài kế tiếp.

Bộ điều chỉnh $G_{cb}$ được chọn cũng theo tiêu chuẩn phẳng hay đối xứng tùy thuộc vào $G_b(s)$ và hàm truyền xấp xỉ của $W_{xa}(s)$ trên cơ sở đơn giản hóa bằng cách bỏ đi những hằng số thời gian quá bé.

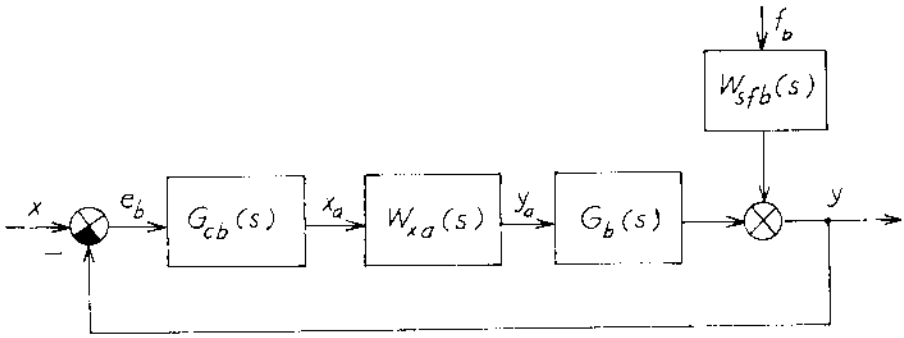
Tín hiệu ra của hệ, theo hình 6.39 được xác định bởi :

$$Y(s) = W_{xb}(s)X(s) + W_{fb}(s)F_b(s)$$

với :

$$W_{xb}(s) = \frac{W_{ob}(s)}{1 + W_{ob}(s)} \; ; \quad W_{fb}(s) = \frac{W_{sfb}(s)}{1 + W_{ob}(s)}$$

mà $W_{ob}(s) = G_{cb}(s)W_{xa}(s)G_b(s)$




*Hình 6.39*

Theo hàm truyền của $W_{xa}(s)G_b(s)$ mà xác định bộ điều chỉnh $G_{cb}(s)$. Nếu còn mạch vòng ngoài nữa thì tiếp tục xác định hàm truyền xấp xỉ của mạch vòng $W_{xb}(s)$ mà ở đó có hằng số thời gian bé tương đương. Ở các hình 6.38 và 6.39, các hàm truyền $W_{sfa}(s)$ và $W_{sfb}(s)$ là hàm truyền quy đổi của nhiễu $f_a$ và $f_b$ tương ứng về đầu ra của mạch vòng tương ứng.

Ở hình 6.40 có tín hiệu ra của mạch vòng trong $y_a$ và mạch vòng ngoài n theo ví dụ 6-3. Khi dùng một bộ điều chỉnh PID, so với việc dùng hai bộ điều chỉnh PI nối tiếp, ta có $y_{a1} > y_{a2}$, Ở đây chưa dùng khâu hạn chế ở các bộ điều chỉnh.

Chất lượng ở đặc tính tốc độ khi dùng hai bộ điều chỉnh nối tiếp ($n_2$) có khác trường hợp một bộ điều chỉnh vì mạch vòng trong đã được đơn giản hóa khi tính.

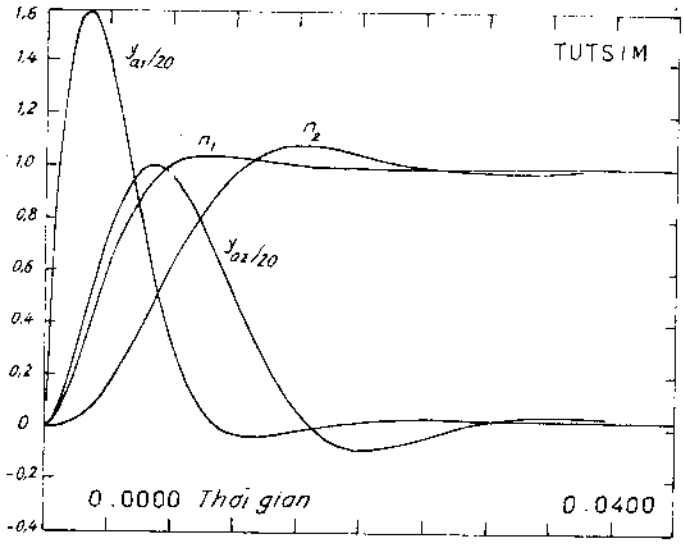
Điều chỉnh nối tiếp có các đặc điểm sau :

1. Các đại lượng mạch vòng trong có thể được hạn chế dễ dàng.

2. Nhờ phân chia được hệ thống nên dễ ổn định hóa được các mạch vòng vì bậc của nó thấp.

3. Việc chọn và xác định thông số của các bộ điều chỉnh, bắt đầu từ mạch vòng trong.

4. Ảnh hưởng của nhiễu đối với các mạch vòng trong được hạn chế hay giảm thiểu và không gây nên những thay đổi lớn đối với đại lượng được điều chỉnh chính.




*Hình 6.40*

5. Chất lượng động tốt hơn vì mạch vòng có tác dụng làm giảm hằng số thời gian.

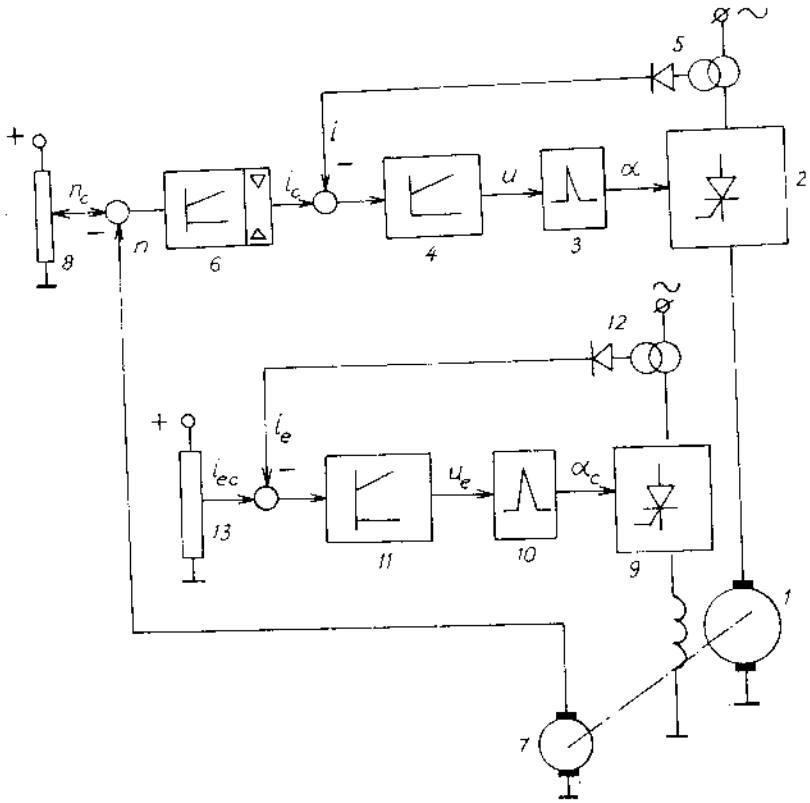
6. Trong nhiều trường hợp có thể dùng bộ điều chỉnh PI thay cho PID nhờ bậc của từng mạch vòng giảm, hơn nữa PID nhạy cảm với nhiễu và những đột biến của tín hiệu hơn là PI.

**Ví dụ 6-4**

Với hệ điều chỉnh tốc độ động cơ ở ví dụ 6-3, thường dùng phản hồi dòng và nối tiếp các bộ điều chỉnh như ở hình 6.41.

Động cơ một chiều *1* được cung cấp điện từ bộ biến đổi dòng *2*, còn mạch kích từ, từ bộ biến đổi dòng *9* có công suất bé hơn.

Ở đây mạch điều chỉnh dòng điện có cơ cấu *3* tạo góc mở $\alpha$, bộ điều chỉnh dòng *4*, biến dòng và chỉnh lưu *5*. Trong mạch điều chỉnh tốc độ còn có bộ điều chỉnh tốc độ *6*, máy phát đo tốc độ *7* và chiết áp đặt tốc độ *8*. Ở mạch điều chỉnh kích từ có cơ cấu *10* tạo góc mở $\alpha_e$, bộ điều chỉnh dòng kích từ *11*, biến dòng và chỉnh lưu *12* cùng chiết áp đặt dòng kích từ *13*. Dòng kích từ không thay đổi và không phụ thuộc nguồn cung cấp và nhiệt độ của cuộn kích thích.




*Hình 6.41*

Sơ đồ trên là sơ đồ đơn giản để chọn các bộ điều chỉnh nên không đi sâu vào chi tiết như các bộ biến đổi để đảo chiều quay động cơ v.v...

Từ phương trình cân bằng điện áp và mômen của động cơ, viết ở hệ tương đối ta có :

$$i_u = \frac{u_{di\alpha} - \varphi.n}{r_t\,(1 + s.T_t)} \qquad (6\text{-}58)$$

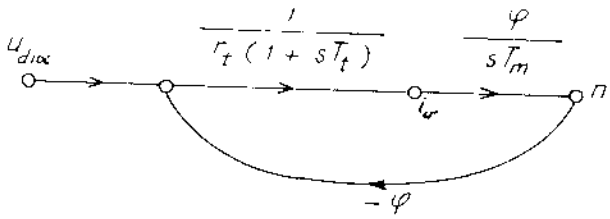
$$n = \frac{\varphi.i_u}{s.T_m} \qquad (6\text{-}59)$$

trong đó : $u_{di\alpha}$ – điện áp mạch phần ứng động cơ từ bộ biến đổi ; $\varphi$ – từ thông kích thích ; n – tốc độ động cơ ; $i_u$ – dòng điện mạch phần ứng ;

$r_t$ = 0,06 – tổng trở mạch phần ứng ; $T_t$ = 3 msec – hằng số thời gian điện từ toàn mạch phần ứng ; $T_m$ = 1,5 sec – hằng số thời gian điện cơ của động cơ.

*a) Chọn bộ điều chỉnh dòng*

Sơ đồ graph tín hiệu theo hai phương trình trên như ở hình 6.42. Qua phân tích, sức điện động phản kháng e = $\varphi$.n không ảnh hưởng đáng kể đến việc chọn bộ điều chỉnh dòng, do đó có hàm truyền đơn giản sau :




*Hình 6.42*

$$W_i(s) = \frac{i_u(s)}{u_{dio}(s)} = \frac{1}{r_t(1 + s.T_t)} \qquad (6\text{-}60)$$

Từ đó ta có sơ đồ graph tín hiệu để chọn bộ điều chỉnh dòng $G_{ci}$ như ở hình 6.43, trong đó :

$$W_i(s) = \frac{1}{0{,}06(1 + 0{,}003s)}$$

$$W_t(s) = \frac{1{,}2}{1 + 0{,}00167s}$$

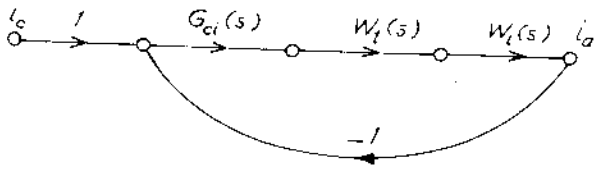
là bộ biến đổi dòng, thông số như ở ví dụ 6-3.

Theo hình 6.38, chọn bộ điều chỉnh mạch vòng trong theo tiêu chuẩn phẳng :

$$G_{ci}(s) = \frac{T_{ni}s + 1}{T_{ii}s}$$

với $T_{ni} = T_t = 0{,}003$ sec ;

$T_{ii} = 2 \times 1{,}2 \times 16{,}6 \times 0{,}00167 = 0{,}067$ sec.




*Hình 6.43*

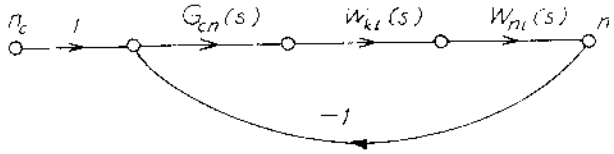
*b) Chọn bộ điều chỉnh tốc độ*

Hàm truyền hệ kín theo hình 6.42 là :

$$W_{ki}(s) = \frac{i_a(s)}{i_c(s)} = \frac{1}{2 \times 0{,}00167s(1 + 0{,}00167s) + 1}$$

$$= \frac{1}{2 \times 0{,}00167^2 s^2 + 2 \times 0{,}00167s + 1} \approx \frac{1}{2 \times 0{,}00167s + 1}$$

Vì bình phương của hằng số thời gian bé quá nhỏ nên đã bỏ qua. Vậy sơ đồ graph tín hiệu để chọn bộ điều chỉnh tốc độ như ở hình 6.44. Tương ứng với hình 6.41 :




*Hình 6.44*

$$W_{ni}(s) = \frac{\varphi}{s.T_m}$$

là khâu tích phân nên dùng "tiêu chuẩn đối xứng" (bảng 6.10). Vậy bộ điều chỉnh tốc độ là :

$$G_{cn}(s) = \frac{T_{nn}s + 1}{T_{ni}s}$$

với : $T_{nn} = 4 \times 2 \times 0{,}00167 = 0{,}01336$ sec ;

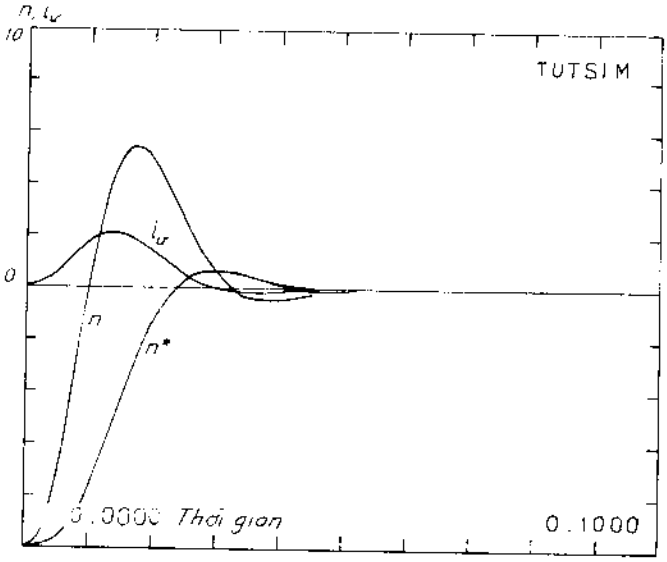
$T_{ni} = 8 \cdot \frac{0{,}5}{1{,}5}\, 0{,}00334^2 = 0{,}0000297$ sec.

với $\varphi = 0{,}5$

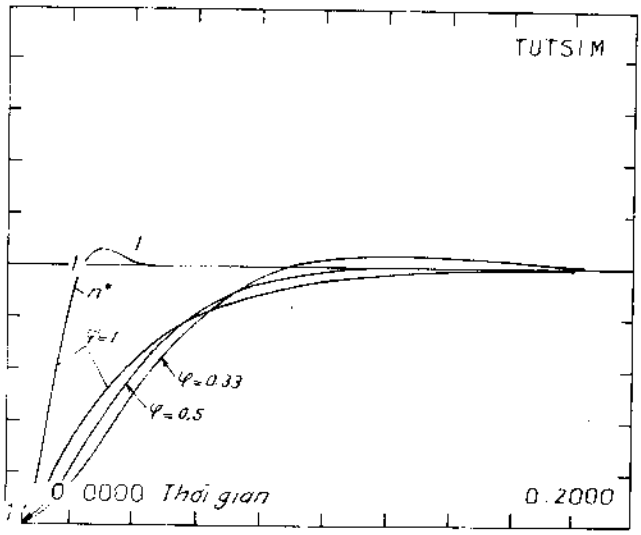
Phân tích đặc tính tần cho thấy, mô hình giản đơn trên có thể chấp nhận được để đánh giá chất lượng hệ theo các bộ điều chỉnh dòng và tốc độ đã chọn [2].

Ở hình 6.45, nhờ phản hồi dòng cục bộ mà dòng điện mạch phần ứng giảm (so với $y_a$ ở hình 6.35), ảnh hưởng của nhiễu không đang kể nhưng lượng quá điều chỉnh lớn : $\sigma\% \approx 55\%$, $t_m \approx 0{,}009$ sec. Với bộ lọc ở đầu vào sẽ làm giảm lượng quá điều chỉnh : $\sigma\% \approx 6{,}6\%$ và $t_m \approx 0{,}024$ sec (đường $n^*$ ở hình 6.46).

Tuy nhiên khi từ thông thay đổi, thời gian quá độ kéo dài. Ở hình 6.46 còn có hàm quá độ với từ thông khác nhau : $\varphi$ = 1 ; 0,5 ; 0,33, với thông số thỏa hiệp : $T_{nn}$ = 40msec. Do đó cần chọn bộ điều chỉnh cho mạch kích từ để giữ cho từ thông luôn cố định.




*Hình 6.45*




*Hình 6.46*

**Ví dụ 6-5**

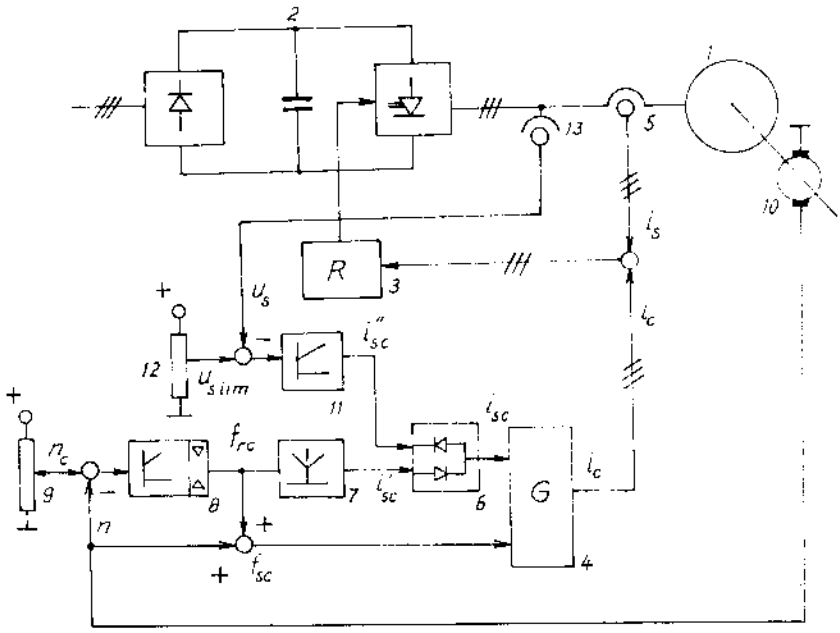
Chọn bộ điều chỉnh cho hệ điều chỉnh tốc độ động cơ xoay chiều không đồng bộ.

Ò hình 6.47 trình bày phương án điều chỉnh trực tiếp từ thông bằng dòng stato. Động cơ không đồng bộ *1* được cung cấp điện bởi bộ biến tần *2*. Nghịch lưu được điều khiển bởi bộ điều chỉnh dòng stato *3* cho cả ba pha làm việc kiểu rơle hai vị trí.

Theo đặc tính tĩnh của động cơ, cần giữ cho từ thông stato không đổi bằng cách thay đổi dòng stato theo tần số trượt.

Sai lệch giữa tốc độ đặt $n_c$ (ở chiết áp *9*) và tốc độ đo được n (ở máy phát đo tốc độ *10*) đưa vào bộ điều chỉnh *8* (PI). Tín hiệu ra $f_{rc}$ tương ứng với tần số trượt, được giới hạn về cả hai phía để hạn chế tải cực đại của động cơ.

Tổng của n và $f_{rc}$ (đại lượng tương đối) là đại lượng đặt của tần số nguồn cung cấp của stato $f_{sc}$ được đưa vào máy phát đặt chuẩn ba pha *4*.




*Hình 6.47*

Mặt khác, tín hiệu tương tự $f_{rc}$ được đưa đến một khâu phi tuyến *7* xác định tín hiệu đặt của dòng stato $i_{sc}$ theo một hàm định trước $i_s = \varphi(f_r)$. Ở đầu vào khác của máy phát đặt chuẩn *4* có dòng $i_{sc}$, bình thường bằng dòng $i'_{sc}$. Khi điện áp stato đạt trị số ngưỡng $U_{slim}$, bộ điều chỉnh *11* thông qua cơ cấu lấy cực tiểu *6* sẽ làm giảm dòng đặt của stato $i_{sc}$. Cơ cấu *6* đồng thời làm chức năng tách rời hai bộ điều chỉnh *8* và *11*. Nhờ đó, khi tần số nguồn $f_s > 1$, động cơ không đồng bộ sẽ làm việc với từ thông giảm.

Máy phát đặt chuẩn *4* cấp dòng stato chuẩn cho cả ba pha, biên độ của nó tỷ lệ với $i_{sc}$, tần số tỷ lệ với $f_{sc}$. Cấu tạo và nguyên tắc hoạt động chi tiết hơn, xem các tài liệu [2, 3].

Ở đây, phương pháp khảo sát chính xác phải là khảo sát hệ phi tuyến, nhưng với giả thiết là mạch điều chỉnh dòng stato là lý tưởng, bỏ qua những thời gian trễ bé, $i_c$ phụ thuộc tần số và biên độ như đã nêu trên. Mặt khác ta chỉ khảo sát với phạm vi biến đổi tần số của stato là $0 < f_s < 1$.

Trên cơ sở các phương trình cơ bản đối với động cơ không đồng bộ ba pha lồng sóc, sau khi tuyến tính hóa những phần tử phi tuyến như tích của hai biến, đơn giản hóa sơ đồ graph tín hiệu, với điều kiện giữ cho từ thông stato không đổi, mạch điều chỉnh tốc độ có sơ đồ như ở hình 6.48, trong đó :

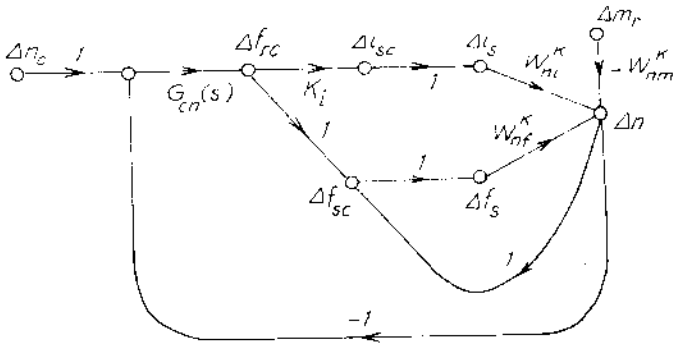
$m_r$ là mômen tải ; $W^k_{nm}(s)$, $W^k_{ni}(s)$, $W^k_{nf}(s)$ là các hàm truyền mà đầu ra là tốc độ với đầu vào là phụ tải, dòng điện stato, và tần số stato ở dạng hệ kín.

Dòng stato $i_s$ là hàm của tần số trượt $f_r$ và hệ số tuyến tính hóa $K_i = \dfrac{di_{sc}}{df_{rc}}$ phụ thuộc nhiều vào điểm làm việc, xác định bởi trị số đặt $f_{rc}$ như ở hình 6.49. Biến đổi các nhánh nối song song ở hình 6.48, ta có :

$$\Delta n = W^k_{nf}(s)(\Delta f_{rc} + \Delta n) + K_i W^k_{ni}(s)\Delta f_{rc} - W^k_{nm}(s).\Delta m_r =$$

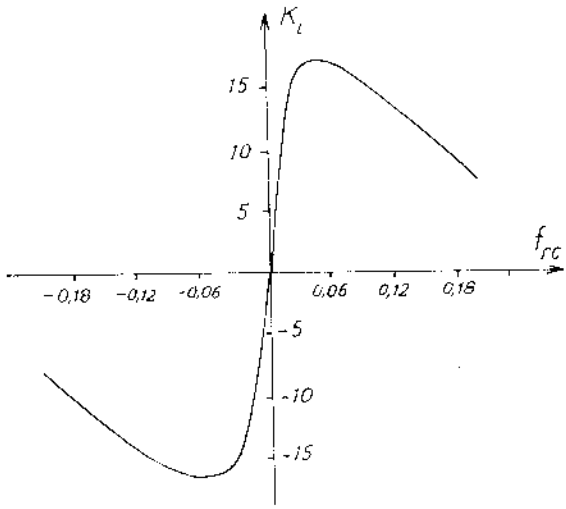
$$= W_{nf}(s)\Delta f_{rc} - W_{nm}(s).\Delta m_r$$

trong đó : $$W_{nf}(s) = \frac{W^k_{nf}(s) + K_i W^k_{ni}(s)}{1 - W^k_{nf}(s)} \; ; \quad W_{nm}(s) = \frac{W^k_{nm}(s)}{1 - W^k_{nf}(s)} .$$




*Hình 6.48*

Thay thế $W_{nf}^k(s)$ bằng thông số của nó và khảo sát phân tích phương trình đặc trưng $1 - W_{nf}^k(s)$, ta thấy $W_{nf}(s)$ luôn ổn định vì là hệ bậc hai mà nghiệm có phần thực âm. Liên hệ hồi tiếp dương của nhánh $\Delta n$ và $\Delta f_{sc}$ ở hình 6.48 là nguyên nhân cần ổn định hóa hệ.




*Hình 6.49*

Ở hình 6.50, để chọn bộ điều chỉnh tốc độ $G_{cn}(s)$, hàm truyền $W_{nf}(s)$ có cấu trúc phụ thuộc chế độ làm việc :

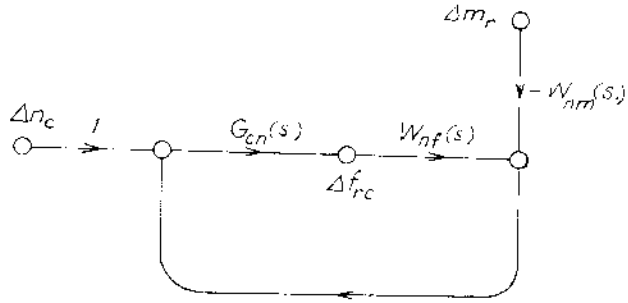
Khi không tải : $f_r = 0$:

$$W_{nf}(s)\Big|_{f_r=0} = \frac{1}{s.T'_m(1 + s.T_r)} .$$

Ngược lại với tải định mức ($f_r = f_{rn} = 0{,}0475$) :

$$W_{nf}(s)\Big|_{f_{rc}} \approx \frac{1}{s.T'_m}$$

mà $T'_m$ là hằng số thời gian điện cơ tương đương, phụ thuộc $f_r$ và $i_s$ :




*Hình 6.50*

$$T'_m = \left(\frac{x_s}{x_h}\right)^2 [1 + (f_r\omega_n T'_r)^2 \frac{x_r}{\omega_n T_r} T_m \ ;$$

$$T_r = \frac{x_r}{\omega_n r_r} \ .$$

Thông số của động cơ có công suất từ 15 đến 30 kVA ; $U_n = 220$ V ; $n_n = 1500$ vg/ph được cho như sau : $f_n = 50$ Hz ; $\omega_n = 314$ sec$^{-1}$ ; $x_h = 2{,}50$ ; $x_s = 2{,}61$ ; $r_s = 0{,}04$, $x_r = 2{,}61$ ; $r_r = 0{,}05$ ; $T_r = 0{,}166$ sec ; $T'_r = 0{,}0137$ sec ; $T_m = 0{,}2$ sec. Từ đó :

$T_r = 0{,}166$ sec ; với $f_r = 0$ : $T'_m = 0{,}010915$ sec.

Qua đặc tính tần, chế độ không tải dễ mất ổn định, trong trường hợp ấy dùng bộ điều chỉnh PID, như vậy :

$$G_{cn}(s)W_{nf}(s) = \frac{(1 + s.T_{nn})(1 + s.T_{vn})}{s.T_{in}} \cdot \frac{1}{s.T'_m(1 + s.T_r)}$$

Chú ý là ở đây không tính đến hằng số thời gian bé, do đó $T_{vn}$ có thể chọn để bù cho $T_r$ ($T_{vn} = T_r = 0{,}166$ sec) sau đó chọn $T_{nn}$ và $T_{in}$ sao cho bộ điều chỉnh có tác dụng điều chỉnh nhanh hệ thống.

Với bộ điều chỉnh PID, nếu làm việc ở chế độ định mức ($T_r = 0$) :

$$W_{no}(s) = G_{cn}(s)W_{nf}(s) = \frac{(1 + s.T_{nn})\,(1 + s.T_r)}{s.T_{in}} \cdot \frac{1}{s.T'_m}$$

Khi $s \to \infty$, đường tiệm cận ứng với :

$$\frac{T_{nn}T_r}{T_{in}T'_m} > 1$$

và hệ dễ mất ổn định.

Như vậy chỉ xét khả năng dùng bộ điều chỉnh PI, ta có :

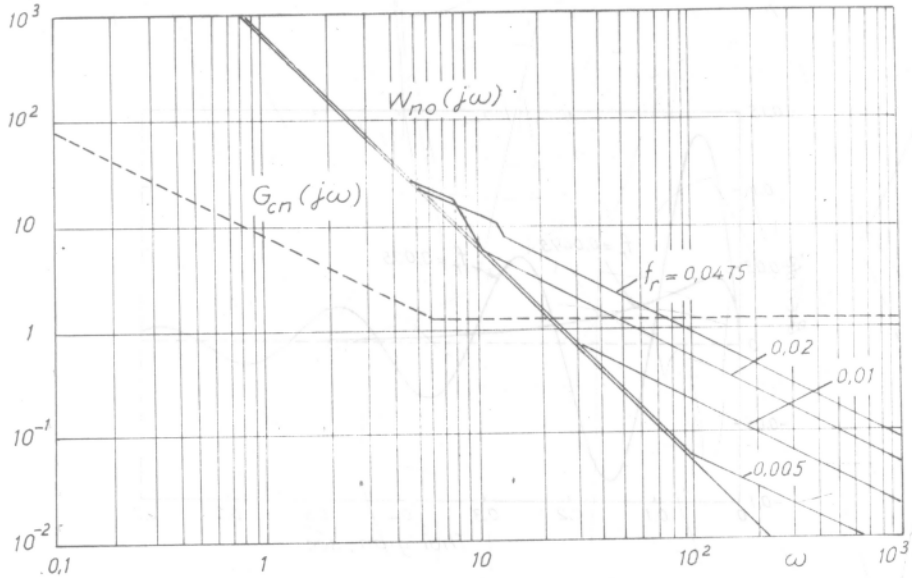
$$G_{cn}(s)W_{nt}(s) = \frac{1 + sT_{nn}}{sT_{in}} \cdot \frac{1}{sT_m}$$

Theo đặc tính tần ở hình 6.51, hệ số tỷ lệ $T_{nn}/T_{in}$ được chọn sao cho $|G_{cn}(j\omega)W_{nt}(j\omega)| = 1$, nằm trong vùng tần số cắt ; ta chọn $\omega_1 = 100\ sec^{-1}$. Như vậy :

$$\frac{T_{nn}}{T_{in}} = 1{,}33 \text{ như ở hình 6.51.}$$

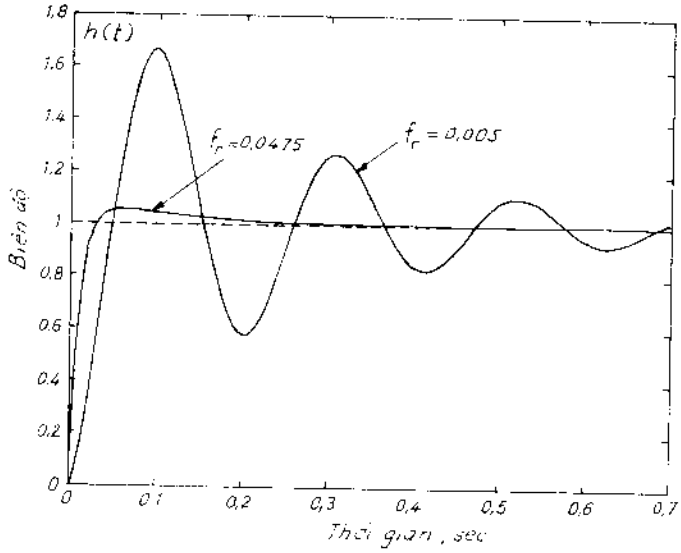
Nếu chọn $T_{nn} = T_r = 0{,}166$ sec thì $T_{in} = \dfrac{T_{nn}}{1{,}33} = 0{,}125$ sec.

Trong trường hợp làm việc ở chế độ không tải, đặc tính tần cũng không có độ nghiêng lớn hơn – 40 db/dec ở vùng tần số cắt ; cho nên khi tải nhỏ, hệ có dao động lớn nhưng khi tần số $f_r$ tăng, hệ số tắt dần cũng tăng và biên độ sẽ giảm.

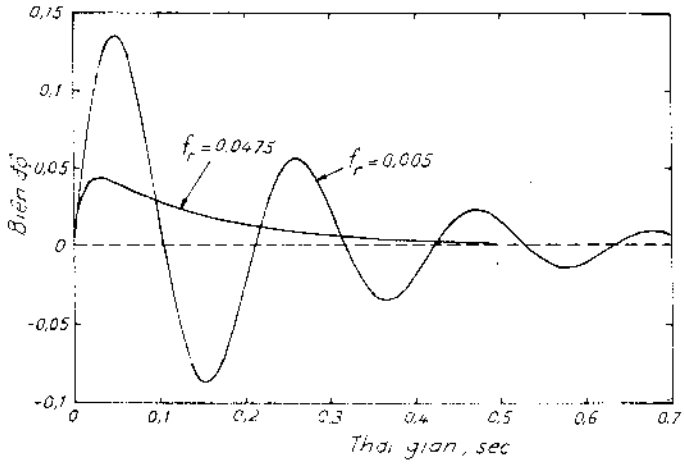



*Hình 6.51.*

Hàm quá độ đối với tín hiệu đặt (hình 6.52) và nhiễu (hình 6.53) được thực hiện theo sơ đồ graph tín hiệu hệ kín ở hình 6.50, với hai tần số khác nhau. Ở trị số định mức, chất lượng tốt hơn nhưng vẫn




*Hình 6.52*




*Hình 6.53*

chưa phải là tối ưu vì $T_{nn}$ = 0,166 sec khá lớn so với trị số tối ưu của nó $T_{nn} = \frac{2}{\omega_1}$ = 0,02 sec.

Từ đặc tính tần của $W_{nf}(s)$ và $W_{nm}(s)$, ta có hàm truyền hệ kín:

$$W_n^K(s) = \frac{W_{no}(s)}{1 + W_{no}(s)} \text{ và } W_{nm}^K(s) = \frac{W_{nm}(s)}{1 + W_{no}(s)}$$

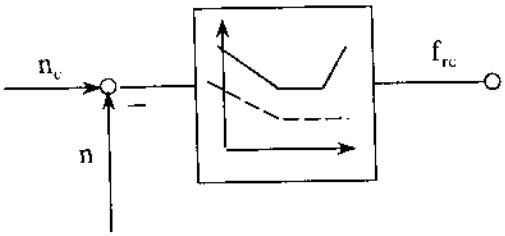
mà với $f_r$ = 0,0475:

$$W_{no}(s) = \frac{1 + 0{,}143\,s}{0{,}00143\,s^2}$$

và với $f_r$ = 0,005:

$$W_{no}(s) = \frac{1 + 0{,}0094\,s}{0{,}00111\,s^2}$$

Khi làm việc khác với tần số định mức sẽ có dao động lớn. Do vậy muốn hệ có chất lượng cao có thể dùng bộ điều chỉnh thích nghi, có khả năng thay đổi cấu trúc: lúc tần số bé, bộ điều chỉnh là PID và khi làm việc định mức, bộ điều chỉnh trở thành PI như mô tả ở hình 6.54. Dùng phương pháp điều chỉnh định hướng từ thông có thể làm cho độ tác động nhanh của hệ tốt hơn nhưng khá phức tạp.




*Hình 6.54*

## VI 3.8. Dùng MATLAB để xác định thông số của bộ điều chỉnh PID

Một phương pháp để giải bài toán tối ưu là cực tiểu hoá sai lệch giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào. Trong trường hợp này, biến là các thông số của bộ điều chỉnh PID. Nếu cực tiểu hoá sai lệch tại một đơn vị thời gian, ta dùng hàm một bước. Nếu mục tiêu là cực tiểu hoá sai lệch ở mọi bước từ 0 đến 100 chẳng hạn, ta có hàm nhiều bước (một hàm cho mỗi bước).

Để cụ thể ta hãy xác định thông số tối ưu của PID, mô phỏng theo Simulink với đối tượng sau:

$$G(s) = \frac{1,5}{50s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1}$$

mà các hệ số $a_2$, $a_1$ sẽ được nạp vào chương trình trong quá trình mô phỏng.

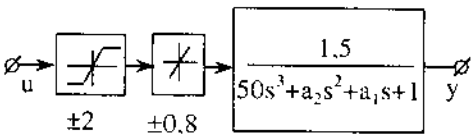
Ở đây sẽ đề cập đến phương pháp bình phương cực tiểu phi tuyến theo hàm lsqnonlin tương ứng với:

$$\min_x \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2 = \frac{1}{2}\sum_i F_i(x)^2$$

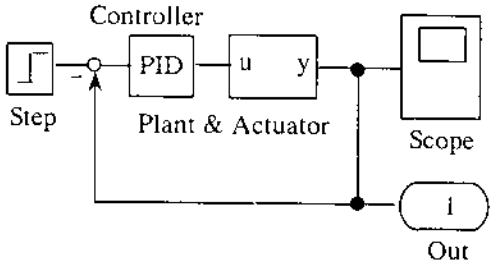
và hàm fminimax ứng với:

$$\min_x \max_{\{F_i\}}\{F_i(x)\}$$

Phần tử phi tuyến ở đây là mô hình của cơ cấu thừa hành có chức năng hạn chế tín hiệu vào trong phạm vi ±2 đơn vị và hạn chế tốc độ của tín hiệu trong phạm vi ± 0,8 đơn vị / giây chẳng hạn. Mô hình của đối tượng cùng cơ cấu thừa hành như ở hình 6.55.




*Hình 6.55*




*Hình 6.56*

Bộ điều chỉnh được mắc vào hệ kín với đối tượng trên như ở hình 6.56. Sơ đồ được mô phỏng với tên gọi là "fig 06_56".

### *VI.3.8.1. Tối ưu hoá theo hàm lsqnonlin*

***Bước 1. Mở M.file tracklsq.m***

```
function F = tracklsq (pid, a1, a2)
Kp = pid (1); % đưa các biến vào mô hình
Ki = pid (2);
Kd = pid (3);
% chọn thuật toán
opt = simset ( ' solver ',' ode5 ',' SrcWorkspace ',' Current ' );
[ tout xout, yout ] = sim ( ' fig 06_05 ', [ 0 100 ] , opt );
F = yout - 1; % Tính sai lệch.
```

***Bước 2. Gọi chương trình con tối ưu hoá***

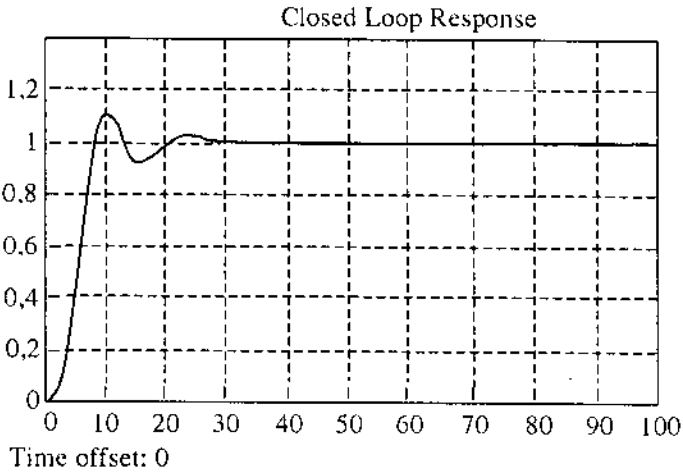
```
fig 06_05 % Nạp vào mô hình
pi d0 = [ 0.63 0.054 1.9688 ] % Giá trị ban đầu của pid
a1 = 3 ; a2 = 43 ; % Thông số của đối tượng.
options = optimset ( ' LargeScale ',' off ',' Display ',' iter , ...
TolX ', 0.001 , ' TolFun ', 0.001 );
pid = lsqnonlin ( ' tracklsq ', pid0 , [] , [] , options , a1 , a2 )
% Xác định thông số của bộ điều chỉnh
Kp = pid ( 1 ) ; Ki = pid ( 2 ) ; Kd = pid ( 3 ) ;
```

Quá trình tối ưu hoá sẽ cho kết quả sau 64 ước lượng:

| Iteration | Func-count | Residual | Step-size | Directional derivative | Lambda |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 8.66531 | 1 | -3.48 | |
| 2 | 17 | 5.21602 | 85.4 | -0.00813 | 0.0403059 |
| 3 | 24 | 4.54036 | 1 | -0.0331 | 0.393189 |
| 4 | 31 | 4.47786 | 0.918 | -0.00467 | 0.201985 |
| 5 | 39 | 4.47552 | 2.12 | 0.00121 | 0.100992 |
| 6 | 46 | 4.47524 | 0.203 | -0.00193 | 0.0718569 |
| 7 | 64 | 4.47524 | -4.11e-007 | -0.00157 | 2595.3 |

```
Optimization terminated successfully:
Search direction less than tolX
pid =
2.9186      0.1398      12.6221
```

Hàm quá độ của hệ kín với bộ điều chỉnh PID có thông số tối ưu như ở hình 6.57. Chú ý rằng, thông số ban đầu của bộ điều chỉnh pid0 khá quan trọng, có thể được xác định theo phương pháp của Ziegler Nichols chẳng hạn.




***Hình 6.57***

### *VI.3.8.2. Tối ưu hoá theo hàm fminimax*

***Bước 1. Mở M-file trackmmobj.m***

```
function F = trackmmobj  ( pid , a1 , a2 )
Kp = pid ( 1 ) ;
Ki = pid ( 2 ) ;
Kd : pid ( 3 ) ;
% Tính hàm
opt = simset ( ' solver ', ' ode5 ',' SrcWorkspace ',' Current ' );
[ tout xout yout ] = sim ( ' fig 06_56 ' , [0 100] ,opt );
F = out ;
assignin (' base ',' F_TRACKMMOBJ ' ) ;
```

***Bước 2. Mở M-file trackmmcon.m để tính các giới hạn phi tuyến***

```
function [ c , ceq ] = trackmmcon ( pid , a1 , a2 )
F=  evalin ( ' base ',' F TRACKMMOBJ ' ) ;
% Tính các giới hạn
c = -F ( 20 : 100 ) + .95 ;
ceq = [ ] ;
```

***Bước 3. Gọi chương trình con tối ưu hoá có giới hạn***

```
fig 06_56
pid0 = [ 0.63 0.0504 1.9688 ]
a1 = 3 ; a2 = 43 ;
options = optimset ( ' Display ',' iter ', ...
                        ' TolX ', 0.001 , ' TolFun ', 0.001 ) ;
pid = fminimax ( ' trackmmobj ', pid0 , [] , [] , [] , [] , [] , [] , ...
                    ' trackmmcon ', options , a1, a2 )
% Xác định thông số của bộ điều chỉnh
Kp = pid ( 1 ) ; Ki = pid ( 2 ) ; Kd = pid ( 3 ) ;
```

Quá trình tối ưu hoá cho kết quả như sau:

| Iter | F-count | Max {F,constraints} | Step-size | Directional derivative | Procedure |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 1.264 | 1 | 1.18 | |
| 2 | 17 | 1.055 | 1 | -0.172 | |
| 3 | 23 | 1.004 | 1 | -0.0128 | Hessian modified twice |
| 4 | 29 | 0.9997 | 1 | 3.48e-005 | Hessian modified |
| 5 | 35 | 0.9996 | 1 | -1.36e-006 | Hessian modified twice |

Optimization terminated successfully:

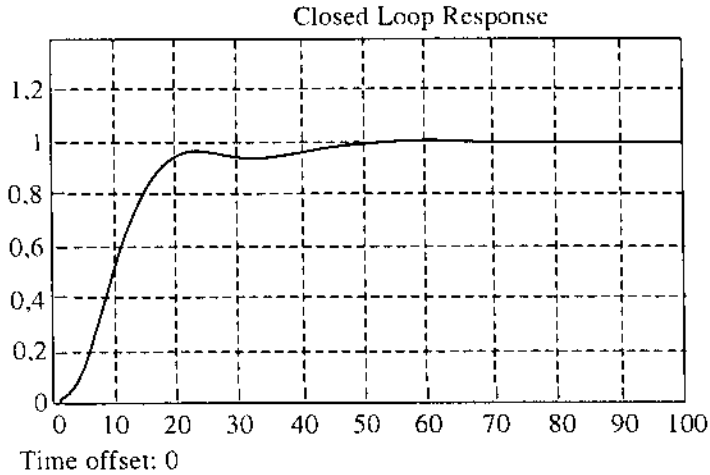
```
Search direction less than 2*options. TolX and
maximum constraint violation is less than options. TolCon
Active Constraints:
     1
    14
   182
ptd =
      0.5894      0.0605      5.5295
```

Hàm quá độ của hệ với phương pháp tối ưu hoá theo minimax như ở hình 6.58. Chú ý rằng các hệ số tỷ lệ tích phân, vi phân ở đây ứng với cấu trúc song song như (6-16)

$K_p = k_p$;

$K_i = 1/T_i$.

$K_d = T_d$




***Hình 6.58***

### VI.3.9. Bộ điều chỉnh của các hệ ổn định và có trễ lớn

Trong nhiều quá trình như quá trình nhiệt, có độ thuần trễ lớn, các phương pháp điều chỉnh cổ điển bị hạn chế. Trong những trường hợp ấy, có thể dùng các phương pháp khác như điều chỉnh vượt trước, điều chỉnh hỗn hợp.

Ví dụ đối tượng có hàm truyền:

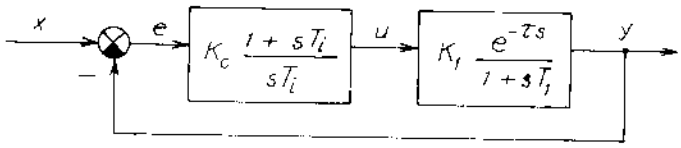
$$G(s) = \frac{K_1}{1 + s.T_1} \cdot e^{-\tau s} \qquad (6\text{-}61)$$

$\tau$ - thời gian thuần trễ lớn của đối tượng.

Nếu dùng bộ điều chỉnh PI ta có :

$$G_c(s) = K_c \frac{1 + sT_i}{sT_i} \qquad (6\text{-}62)$$

như ở hình 6.59.




*Hình 6.59*

Thông thường, thông số tối ưu được chọn là $T_i = T_1$ và hệ hở có hàm truyền :

$$W(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K}{sT_1} e^{-\tau s}, \text{ với } K = K_cK_1$$

Môđun và pha được xác định như ở hình 6.60 và bằng :

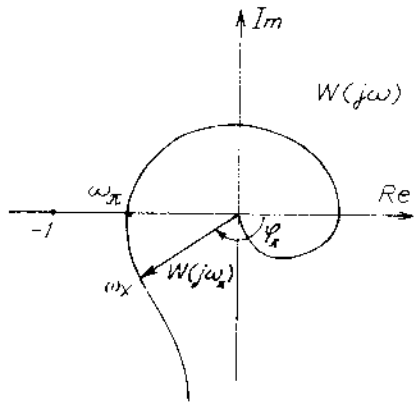
$$|W(j\omega)| = \frac{K}{\omega T_1}$$

$$\varphi = -\omega\tau - \frac{\pi}{2}.$$

Nếu độ dự trữ ổn định về biên độ được chọn là 0,5 ; ứng với góc dịch pha :

$$-\pi = -\omega_\pi\tau - \frac{\pi}{2};$$

từ đó : $$|W(j\omega_\pi)| = \frac{K}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_1}{\tau}}$$




*Hình 6.60*

Với độ dự trữ ổn định trên ta có :

$$K = K_cK_1 \leqslant \frac{\pi}{4} \cdot \frac{T_1}{\tau}$$

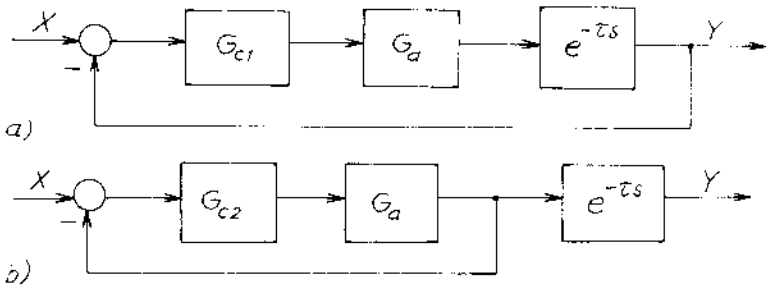
Thang tỷ lệ của bộ điều chỉnh phụ thuộc vào tỷ số $\tau/T_1$. Khi độ thuần trễ càng lớn, $K_c$ của bộ điều chỉnh sẽ bị hạn chế. Với $\tau/T_1 > 1$, chất lượng ở quá trình quá độ của hệ sẽ không thể chấp nhận được.

*1. Điều chỉnh vượt trước*

Ở hình 6.61a có hàm truyền của hệ mà đối tượng có thuần trễ lớn :

$$G(s) = G_a(s)e^{-\tau s} \qquad (6\text{-}63)$$

và $G_{c1}(s)$ là bộ điều chỉnh cần xác định sao cho hai sơ đồ (a và b) tương đương nhau.




*Hình 6.61*

Ở hình 6.61b, tính ổn định của hệ không phụ thuộc vào khâu thuần trễ vì không nằm trong mạch vòng kín. Với điều kiện tương đương, ta có :

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_{c1}G_a e^{-\tau s}}{1 + G_{c1}G_a e^{-\tau s}} = \frac{G_{c2}G_a}{1 + G_{c2}G_a} e^{-\tau s}$$

hay :

$$\frac{G_{c1}}{1 + G_{c1}G_a e^{-\tau s}} = \frac{G_{c2}}{1 + G_{c2}G_a}$$

và $$G_{c1}[1 + G_{c2}G_a(1 - e^{-\tau s})] = G_{c2} \;;$$

từ đó :

$$G_{c1} = \frac{G_{c2}}{1 + G_{c2}G_a[1 - e^{-\tau s}]} \qquad (6\text{-}64)$$

Chú ý rằng, một hệ có thuần trễ ổn định (6-63) có thành phần $G_a = \dfrac{K_1}{1 + sT_1}$ là bậc một nên bộ điều chỉnh cần được chọn sẽ là loại

PI, nghĩa là :

$$G_{c2} = K_c\left(\frac{1 + sT_i}{sT_i}\right)$$

và chọn $T_i = T_1$ ; do đó :

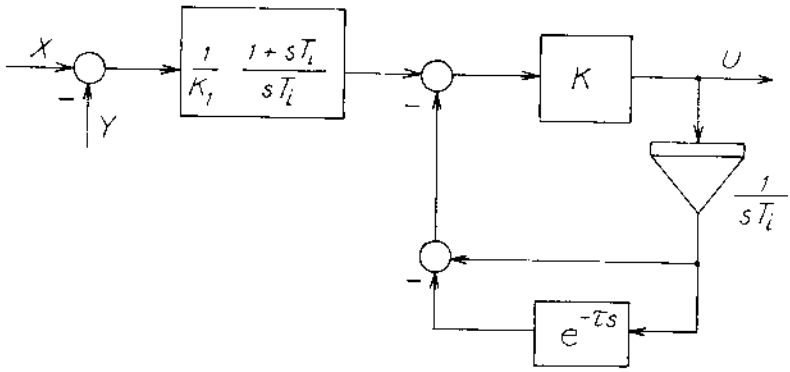
$$G_{c2}G_{đ} = K_c\left(\frac{1 + sT_i}{sT_i}\right)\left(\frac{K_1}{1 + sT_1}\right) = \frac{K_cK_1}{sT_i}.$$

Biểu thức (6-64) sẽ có dạng :

$$G_{c1} = \frac{1}{K_1}\left(\frac{1 + sT_i}{sT_i}\right)\cdot\frac{K}{1 + \frac{K}{sT_i}(1 - e^{-\tau s})} \qquad (6\text{-}65)$$

với $K = K_cK_1$.

Bộ điều chỉnh $G_{c1}$ cần xác định gồm hai thành phần cơ bản : thành phần của bộ điều chỉnh cổ điển và thành phần bù thuần trễ (hình 6.62). Với kỹ thuật tính hiện đại, việc thực hiện khâu thuần trễ lớn không có khó khăn.




*Hình 6.62*

*2. Điều chỉnh hỗn hợp*

Khi hệ có độ thuần trễ lớn hay hệ có bậc cao thì trở ngại chính ở hệ kín là bộ điều chỉnh chỉ tác động khi có biến đổi của đại lượng được điều chỉnh chứ không phải khi có tác động của nhiễu. Để khắc phục nhược điểm này, dùng bộ điều chỉnh thứ hai ở mạch hở như ở hình 6.63. Ta có :

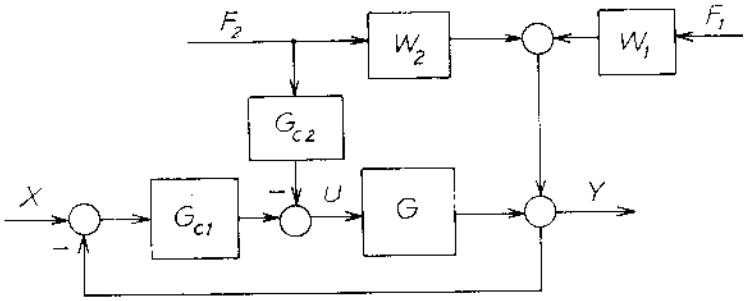
$$Y = F_1W_1 + F_2W_2 + U.G$$

mà $$U = G_{c1}(X - Y) - F_2G_{c2}$$

Từ hai phương trình trên ta có :

$$Y = F_1W_1 + F_2W_2 + X.G_{c1}G - Y.G_{c1}G - F_2G_{c2}G \ ;$$

và $$Y = F_1 \frac{W_1}{1 + G_{c1}G} + F_2\frac{W_2 - G_{c2}G}{1 + G_{c1}G} + X \frac{G_{c1}G}{1 + G_{c1}G}$$




*Hình 6.63*

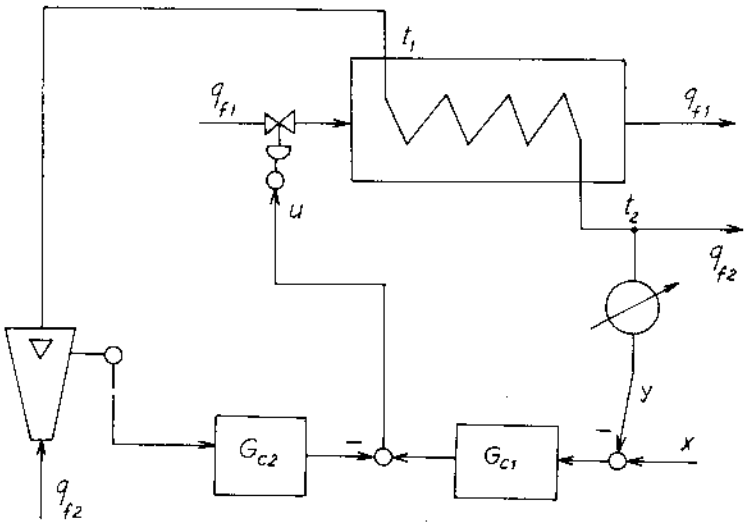
Mẫu của ba thành phần chỉ phụ thuộc $G_{c1}$ và G. Khi bộ điều chỉnh $G_{c1}$ được chọn đúng, bộ điều chỉnh $G_{c2}$ không ảnh hưởng đến tính ổn định của mạch vòng kín và bộ điều chỉnh $G_{c2}$ có tác dụng loại trừ ảnh hưởng của nhiễu $F_2$ theo điều kiện :

$$G_{c2} = \frac{W_2(s)}{G(s)} \ ,$$

và $W_2(s)$, $W_1(s)$ là những hàm truyền quy đổi đối với nhiễu $f_2$ và $f_1$.

Vai trò của bộ điều chỉnh $G_{c2}$ được giải thích ở hệ điều chỉnh nhiệt độ trong quá trình trao đổi nhiệt (hình 6.64).

Nhiễu chính là sự thay đổi lưu lượng $q_{f2}$ được bộ điều chỉnh $G_{c2}$ cảm nhận và tác động ngay đến tín hiệu điều khiển u để điều khiển van trước khi nhiệt độ đầu ra $t_2$ cảm nhận được ảnh hưởng của sự thay đổi $q_{f2}$. Do đó có thể xem bộ điều chỉnh $G_{c2}$ có tác dụng như bộ điều chỉnh vượt trước.




*Hình 6.64*

## VI.4. TỔNG HỢP HỆ ĐIỀU KHIỂN THEO PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO NGHIỆM SỐ

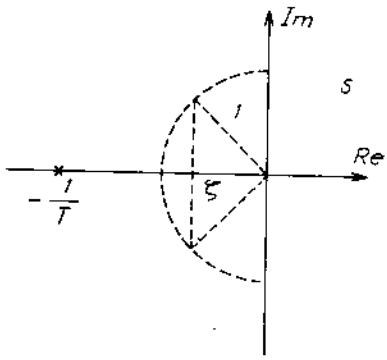
Phương pháp quỹ đạo nghiệm số (IV.2) chẳng những dùng để đánh giá khả năng ổn định của hệ trong phạm vi biến đổi của một thông số nào đó mà còn cho phép tổng hợp hệ theo một hoặc nhiều thông số.

Trường hợp thuận lợi nhất khi hệ kín là bậc hai, vị trí phân bố nghiệm trên mặt phẳng thông số xác định chất lượng của hệ theo định lượng (VI.1).

Nếu hệ kín là bậc ba dạng chuẩn hóa ($\omega_o = 1$) ta có :

$$W_k(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(T.s + 1)} \qquad (6\text{-}66)$$

và nghiệm cực $s = -\frac{1}{T}$ xa trục ảo với khoảng cách :




*Hình 6.65*

$$\left|\frac{1}{T}\right| \geqslant 10|\zeta\omega_o| \ .$$

thì ảnh hưởng của nghiệm cực này không còn nữa. Ảnh hưởng của nghiệm cực thứ ba (với $\zeta = 0{,}45$) cho ở bảng 6.11.

Nếu hệ kín có một nghiệm cực :

$$W_k(s) = \frac{(\omega_o^2/a)(s + a)}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2} \ ; \qquad (6\text{-}67)$$

ảnh hưởng của nó cho ở bảng 6.12 (với $\zeta = 0{,}45$).

*Bảng 6.11*

| T | $\frac{1}{T}$ | $\sigma\%$ | $\omega_o t_{qd}$ |
|---|---|---|---|
| 2,25 | 0,444 | 0 | 9,63 |
| 1,5 | 0,666 | 3,9 | 6,3 |
| 0,9 | 1,111 | 12,3 | 8,81 |
| 0,4 | 2,50 | 18,6 | 8,67 |
| 0,05 | 20 | 20,5 | 8,37 |
| 0 | ∞ | 20,5 | 8,24 |

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số cổ điển chỉ khảo sát cho một thông số (thường là K) khi thông số ấy thay đổi từ 0 đến ∞. Phương pháp được mở rộng cho trường hợp hai hoặc nhiều thông số.

Với phương trình đặc trưng dạng :

$$a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Nếu $a_{n-1}$ được chọn làm thông số cần xét thì theo (4-18) ta có :

$$a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-2} s^2 + a_n + a_{n-1} s = 0,$$

hay :

$$1 + \frac{a_{n-1} s}{a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-2} s^2 + a_n} = 0$$

*Bảng 6.12*

| $a/\zeta\omega_o$ | $\sigma\%$ | $\omega_o t_{qd}$ | $\omega_o t_\sigma$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 23,1 | 8,0 | 3,0 |
| 2 | 39,7 | 7,6 | 2,2 |
| 1 | 89,9 | 10,1 | 1,8 |
| 0,5 | 210 | 10,3 | 1,5 |

Nếu thông số cần quan tâm không phải là hệ số thì :

$$a_o s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + (a_{n-q} - v_1) s^{n-q} + v_1 s^{n-q} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \ ;$$

Ví dụ, với phương trình bậc ba :

$$s^3 + (3 + v_1) s^2 + 3s + 6 = 0 \ ,$$

có thể viết : $$1 + \frac{v_1 s^2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 6} = 0$$

Đối với thông số thứ hai cần quan tâm :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + (a_{n-q} - v_1)s^{n-q} + v_1 s^{n-q} + \ldots$$
$$+ (a_{n-r} - v_2)s^{n-r} + v_2 s^{n-r} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0.$$

Hai thông số $v_1$ và $v_2$ đã được tách rời, có thể khảo sát chúng theo quỹ đạo nghiệm số.

Ví dụ, xem $v_1$ và $v_2$ là hai hệ số ở phương trình đặc trưng :

$$s^3 + s^2 + v_2 s + v_1 = 0 , \qquad (6\text{-}68)$$

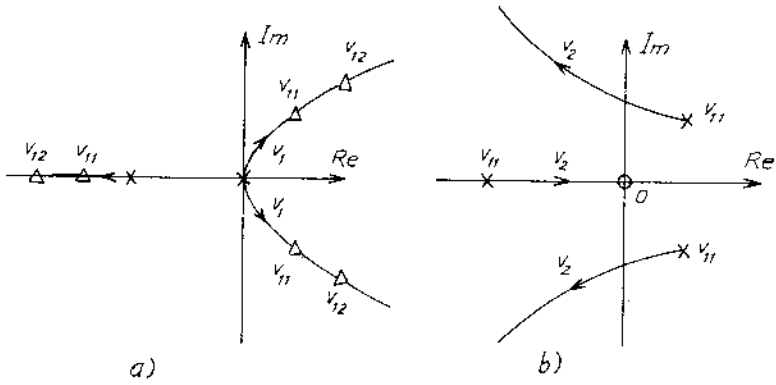
Khi $v_2$ biến đổi từ 0 đến ∞ ta có :

$$1 + \frac{v_2 s}{s^3 + s^2 + v_1} . \qquad (6\text{-}69)$$

Mẫu số ứng với phương trình đặc trưng (6-68) khi $v_2 = 0$. Từ đó, ta có thể xét ảnh hưởng của $v_1$ khi biến đổi từ 0 đến ∞ theo phương trình đặc trưng :

$$s^3 + s^2 + v_1 = 0$$

hoặc : $$1 + \frac{v_1}{s^2(s+1)} = 0 . \qquad (6\text{-}70)$$




*Hình 6.66*

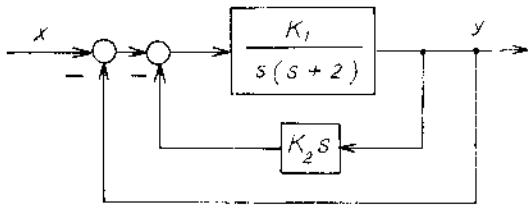
Trên cơ sở (6-70), khảo sát quỹ đạo nghiệm số để xác định $v_1$. Sau đó, theo (6-69) khảo sát quỹ đạo nghiệm số để xác định $v_2$ mà nghiệm cực của (6-69) lấy từ quỹ đạo nghiệm số của (6-70).

Ví dụ quỹ đạo nghiệm số đối với $v_1$ theo (6-70) có dạng như ở hình 6.66a và ta chọn trị số $v_{11}$ chẳng hạn. Vậy nghiệm của (6-70) trở thành nghiệm cực của (6-69) như ở hình 6.66b và theo đó chọn $v_2$ thích hợp.

**Ví dụ 6-6**

Bộ phận quay ổ đĩa của máy tính đòi hỏi điều khiển chính xác vị trí đầu đọc và ghi. Hệ điều khiển cần thỏa mãn những yêu cầu sau :

1. Sai số ở chế độ xác lập với tín hiệu vào tăng dần đều ($x(t) = |A|t$) không quá 35%.




*Hình 6.67*

2. Tỷ số tắt dần $\zeta \geqslant 0{,}707$.

3. Thời gian quá độ $t_{qd} \leqslant 3$ sec.

Sơ đồ cấu trúc của hệ như ở hình 6.67 mà $K_1$ và $K_2$ cần được xác định.

Sai số ở chế độ xác lập :

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + \dfrac{1}{s(s+2) + K_1K_2 s}} \cdot |A| \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2 + K_1K_2}{K_1} \cdot |A| \ .$$

Vậy điều kiện 1) là : $\dfrac{e_{ss}}{|A|} = \dfrac{2 + K_1K_2}{K_1} \leqslant 0{,}35.$

Để có sai số $e_{ss}$ bé cần chọn $K_2 < K_1$.

Tỷ số tắt dần $\zeta = 0{,}707$ ứng với nghiệm trên đường thẳng với độ nghiêng $45^0$ phía trái mặt phẳng nghiệm số (hình 2.52, 6.68). Thời gian quá độ được xác định bởi phần thực của nghiệm trội :

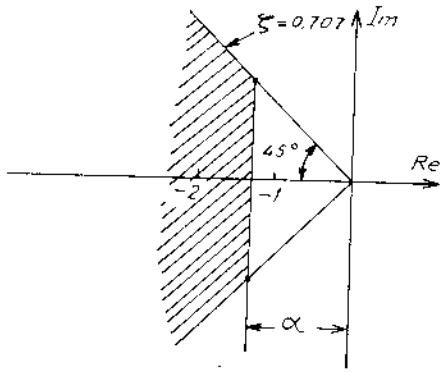
$$t_{qd} = \frac{4}{\zeta\omega_0} \leqslant 3 \text{ sec.}$$

Do đó phần thực của nghiệm $\alpha = \zeta . \omega_0 \geqslant \frac{4}{3}$, nghĩa là nằm trong miền gạch sọc ở hình 6.68.

Thông số được chọn là $v_1 \equiv K_1$, $v_2 \equiv K_1K_2$ ứng với phương trình đặc trưng :

$$1 + W(s) = s^2 + 2s + v_2s + v_1 = 0 ;$$

Với $v_2 = 0$, quỹ đạo nghiệm của $v_1$ như ở hình 6.69a được xác định bởi :




*Hình 6.68*

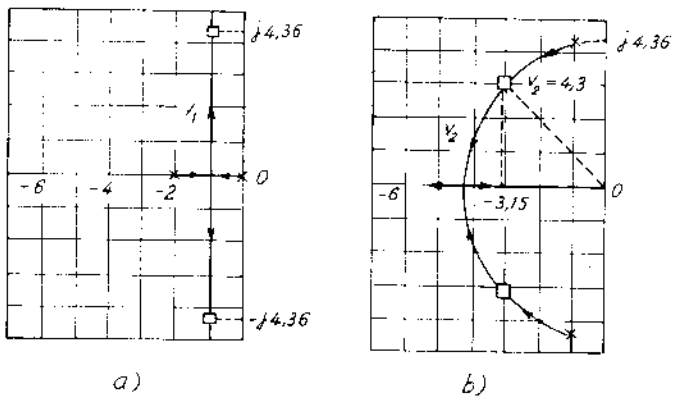
$$1 + \frac{v_1}{s(s+2)} = 0 ; \qquad (6-71)$$

$$v_1 = K_1 = 20.$$

Quỹ đạo nghiệm của $v_2 \equiv 20K_2$ được xác định từ phương trình :

$$1 + \frac{v_2 s}{s^2 + 2s + v_1} = 0 \qquad (6-72)$$

mà nghiệm cực được xác định từ điều kiện trước đó. Quỹ đạo nghiệm của (6-72) như ở hình 6.69b và nghiệm được chọn với $\zeta = 0,707$ có $v_2 = 4,3$, nghĩa là $K_2 = 0,215$. Phần thực của nghiệm này là $\alpha = \zeta.\omega_0 = 3,15$




*Hình 6.69*

ứng với thời gian quá độ :

$$t_{qd} = \frac{4}{3,15} = 1,27 \text{ sec bé hơn thời gian quá độ đã cho (3 sec).}$$

## VI.5. XÁC ĐỊNH THÔNG SỐ TỐI ƯU THEO CHẤT LƯỢNG HỖN HỢP

Ở mục V.4 tài liệu này cũng như ở mục I.3 tài liệu [20] đã đề cập phương pháp giải tích xác định thông số tối ưu theo sai lệch cực tiểu. Ở mục I.2.5 tài liệu [20] cũng đã đề cập đến việc xác định thông số tối ưu của bộ điều chỉnh theo phương pháp quy hoạch thực nghiệm.

Các phương pháp giải tích đòi hỏi phải biết đầy đủ cấu trúc và thông số của hệ. Bậc của hệ càng cao, tính toán càng phức tạp.

Phương pháp quy hoạch thực nghiệm không đòi hỏi lượng thông tin đầy đủ, số lần làm thực nghiệm không lớn lắm nhưng độ chính xác không cao, và có thể rơi vào cực trị cục bộ nếu giảm thiểu phạm vi biến đổi của các nhân tố nhằm tăng độ chính xác.

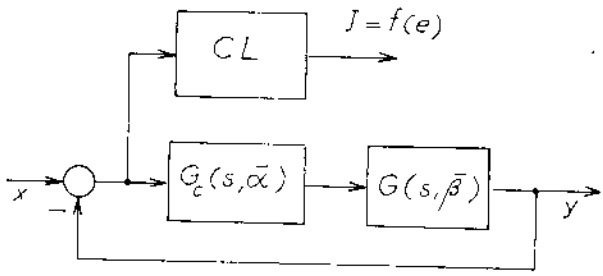
Với các đối tượng có cực trị lộ (có phần phi tuyến là đặc tính cực trị) việc phục hồi mặt cực trị để chọn thông số tối ưu giản đơn như ở các hệ cực trị. Ở các hệ giải tích, chỉ tiêu chất lượng tối ưu do kỹ thuật viên chọn (áp đặt) nên cần biết thông số tối ưu xác định theo phương pháp giải tích có tồn tại không, dưới dạng nào, là cực trị toàn bộ hay cục bộ, nói chung là cần biết mặt cực trị như thế nào.

Nội dung của phương pháp này là dùng máy tính với tốc độ tính toán nhanh để phục hồi mặt cực trị trong phạm vi cần khảo sát. Trên cơ sở quan sát phần lớn mặt cực trị mà chọn thông số tối ưu của bộ điều chỉnh nói riêng hay của hệ thống nói chung. Mặt cực trị dễ quan sát cho trường hợp một hoặc hai thông số. Trong trường hợp chung, thông số tối ưu được xác định theo một trong những angôrit chuyển động đến cực trị [20], ví dụ như chuyển động theo phương pháp đơn hình.

Thực chất phương pháp này là phương pháp thực nghiệm đầy đủ trên hệ thực hay trên mô hình. Chỉ tiêu chất lượng có thể riêng biệt như lượng quá điều chỉnh, thời gian quá độ, sai số tĩnh v.v... cũng như chất lượng hỗn hợp.

Ở các hệ điều chỉnh, chất lượng là hàm của sai lệch và thông số tối ưu là thông số của bộ điều chỉnh. Với những tổ hợp thông số nhất

định của bộ điều chỉnh đã cho, máy tính nhanh chóng xác định chỉ tiêu chất lượng. Khi các tổ hợp thông số thay đổi tuần tự theo một ma trận thông số thì chỉ tiêu chất lượng xác định được mặt cực trị cần thiết và so sánh chúng với nhau để đưa ra tổ hợp thông số tối ưu ứng với cực trị của ma trận thông số đã xét.




*Hình 6.70*

Sơ đồ khối tổng quát như ở hình 6.70 với chất lượng là hàm của sai lệch e chẳng hạn, được xác định cụ thể ở cơ cấu đánh giá chất lượng *CL*.

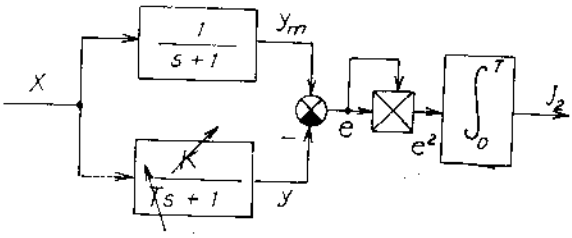
Trong trường hợp dùng mô hình, đối tượng điều chỉnh phải được biết đầy đủ về cấu trúc và thông số ($\bar{\beta}$). Bộ điều chỉnh thường là PI hay PID có thông số $\bar{\alpha}$ = ($K_{dc}$, $T_n$, $T_v$, $T_i$, $\alpha$, $T_d$ ...). Đối tượng điều chỉnh không thay đổi cấu trúc và thông số trong quá trình thực nghiệm.

**Ví dụ 6-7a**

Hãy xác định mặt cực trị của chỉ tiêu chất lượng là bình phương của sai lệch giữa mô hình mẫu bậc 1 và mô hình có hai thông số thay đổi K, T như ở hình 6.71a.

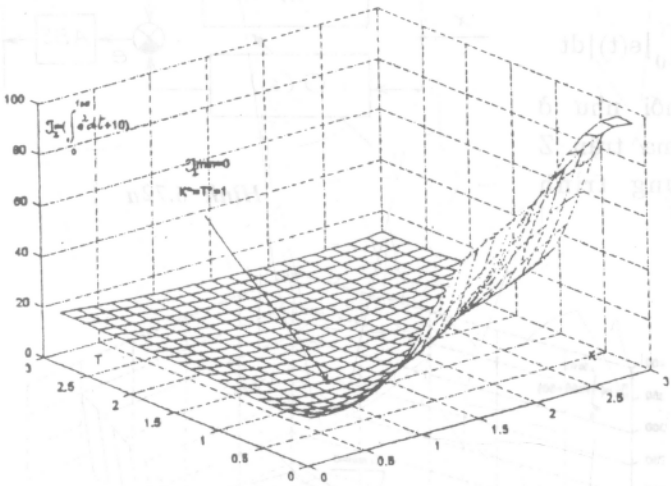
Dễ nhận thấy rằng e(t) = 0 khi K = K* = 1 và T = T* = 1. Với những tổ hợp $K_i$, $T_j$ khác nhau có kết quả là ma trận Z theo chương trình MATLAB với các trị số $J_{2ij}$ tương ứng.

Theo mặt cực trị ở hình 6.71b cho thấy, độ dốc của J(K) lớn hơn trong khi J(T) có độ dốc không đáng kể, nhất là trong miền có K nhỏ.




*Hình 6.71a*

```
» x=[0.01 0.5 1 1.5 2 2.5 3];
» y=[0.01 0.5 1 1.5 2 2.5 3];
» z=[6.62 9.55 32.13 74.5 74.5 74.5 74.5;
     6.56 0.8   3    14    33   60   74.5;
     6.62 1.6   0    1.6   6.7  15   27;
     6.66 2.8   0.6  0.19  1.4  4.4  9;
     6.69 3.6   1.56 0.5   0.49 1.5  3.5;
     6.70 4.18  2.3  1.1   0.59 0.78 1.65;
     6.71 4.57  2.8  1.68  0.97 0.75 1.63];
» mesh(x,y,z)
» xi=linspace(0,3,21);
» yi=linspace(0,3,21);
» [xxi,yyi]=meshgrid(xi,yi);
» zzi=interp2(x,y,z,xxi,yyi,'cubic');
» mesh(xxi,yyi,zzi)
»
```




*Hình 6.71b*

**Ví dụ 6-7b**

Với mô hình mẫu :

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Mô hình có thông số thay đổi :

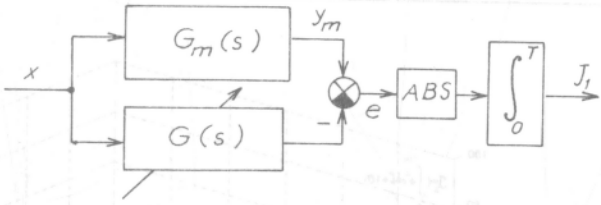
```
» x=[0.1 0.2 0.6 1 1.4 1.8 2.2];
» y=[0.1 0.2 0.6 1 1.4 1.8 2.2];
» z=[81.75 69.65 87.37 152.6 224.2 297.5 371.6;
     82.91 70.75 51.12 85.69 138.3 189.4 241.0;
     84.96 74.70 33.81 18.49 48.87 89.96 131.0;
     85.71 76.18 38.09  0    38.09 76.18 114.2;
     86.37 77.52 42.14 10    30.46 64.98 100.3;
     87.06 78.90 46.42 17.24 31.88 57.59 88.36;
     87.75 80.30 50.72 23.13 34.83 55.92 81.28];
» mesh(x,y,z)
» xi=linspace(0,2.2,20);
» yi=linspace(0,2.2,20);
» [xxi,yyi]=meshgrid(xi,yi);
» zzi=interp2(x,y,z,xxi,yyi,'cubic');
» meshc(xxi,yyi,zzi+50)
»
```

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + \zeta s + 1}$$

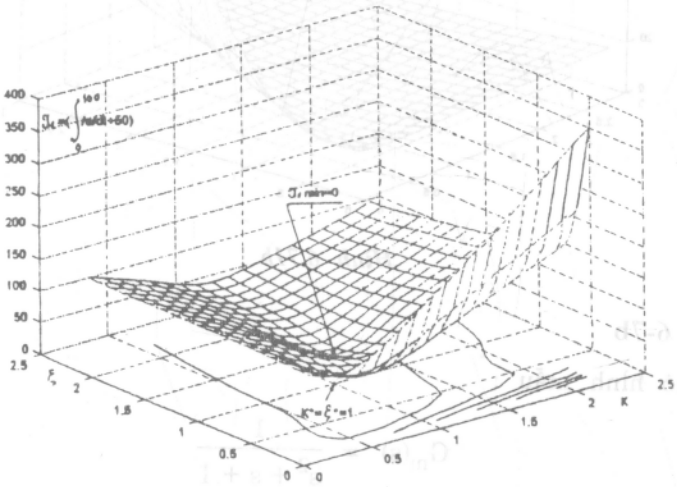
Chỉ tiêu chất lượng :

$$J_1(K, \zeta) = \int_0^t |e(t)|dt$$

có sơ đồ khối như ở hình 6.72a, ma trận Z như ở chương trình MATLAB.




*Hình 6.72a*




*Hình 6.72b*

Mặt cực trị như ở hình 6.72b cho thấy, đối với cả hai thông số K và $\zeta$ đều có độ dốc nhất định của $J_1$, việc xác định thông số tối ưu thuận lợi và nhanh chóng hơn. Cần chú ý là thời gian lấy tích phân T không bé hơn tồn tại dao động dài nhất, và T không thay đổi trong quá trình mô hình hóa.

**Ví dụ 6-8**

Hệ điều chỉnh với đối tượng :

$$G(s) = \frac{1}{(0{,}002s + 1)(0{,}3s + 1)(0{,}035s + 1)}$$

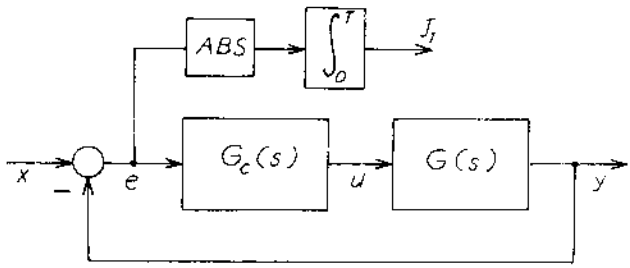
Bộ điều chỉnh PID :

$$G_c(s) = \frac{(T_n s + 1)(T_v s + 1)}{T_i s}$$

Chỉ tiêu chất lượng :

$$J_1(T_n, T_v, T_i) = \int_0^t |e(t)|dt$$

Sơ đồ khối để lấy kết quả thực nghiệm như ở hình 6.73. Để giản đơn, chọn $T^*_i = 0{,}004$. Ma trận $Z \equiv J_1(T_n, T_v)$ như ở chương trình MATLAB.




*Hình 6.73*

Mặt cực trị như ở hình 6.74.

Thông số tối ưu của bộ điều chỉnh :

$$T^*_n = T_1 = 0{,}3 \text{ sec} ; T^*_v = T_2 = 0{,}035 \text{ sec}$$

với :

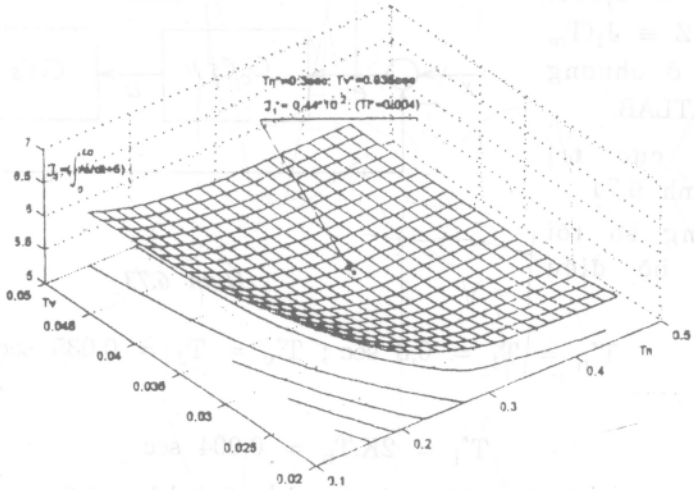
$$T^*_i = 2K.T_b = 0{,}004 \text{ sec}$$

như cách xác định theo "tiêu chuẩn phẳng" ở bảng 6.8.

Như vậy, việc sử dụng máy tính cho phép nhanh chóng xác định thông số tối ưu của các bộ điều chỉnh, các cơ cấu điều khiển mà cấu

trúc đã được xác định trước cùng với cấu trúc và thông số của đối tượng. Cả ba thông số $T_i$, $T_n$, $T_v$ của bộ điều chỉnh PID có thể thay đổi trong phạm vi cho trước và máy tính nhanh chóng xác định tổ hợp tối ưu $T^*_i$, $T^*_n$, $T^*_v$ cùng chỉ tiêu chất lượng $J_{min}$ tương ứng.

```
» x=[0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45];
» y=[0.05 0.045 0.04 0.035 0.03 0.025 0.02];
» z=[0.80 0.61 0.52 0.47 0.49 0.50 0.52;
     0.84 0.62 0.51 0.46 0.48 0.50 0.51;
     0.89 0.64 0.52 0.45 0.47 0.49 0.50;
     0.98 0.68 0.53 0.44 0.47 0.48 0.50;
     1.13 0.79 0.58 0.45 0.47 0.48 0.50;
     1.31 0.95 0.72 0.56 0.54 0.53 0.53;
     1.53 1.14 0.89 0.72 0.67 0.65 0.64];
» mesh(x,y,z)
» xi=linspace(0.15,0.45,20);
» yi=linspace(0.05,0.02,20);
» [xxi,yyi]=meshgrid(xi,yi);
» zzi=interp2(x,y,z,xxi,yyi,'cubic');
» meshc(xxi,yyi,zzi+5)
» view(-37.5,60)
```

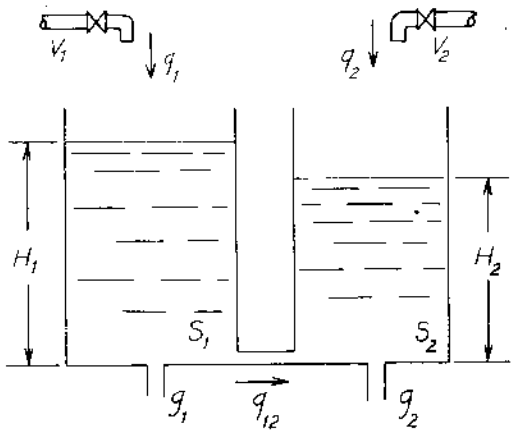



*Hình 6.74*

## VI.6. CHỌN BỘ ĐIỀU CHỈNH CHO CÁC ĐỐI TƯỢNG NHIỀU ĐẦU VÀO VÀ NHIỀU ĐẦU RA

Ở các phần trên, chỉ khảo sát các hệ đơn giản một đầu vào và một đầu ra. Việc khảo sát hệ nhiều đầu vào và ra cùng những mối liên hệ chéo của chúng phức tạp hơn.

Một đối tượng có hai đầu vào $u_1$ và $u_2$ cùng hai đầu ra là $y_1$ và $y_2$ như ở hình 6.75 của hai bình thông nhau.

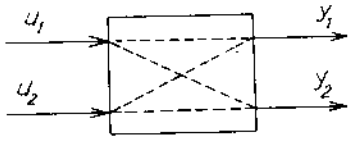



*Hình 6.75*

Đại lượng điều khiển đối tượng là lưu lượng $q_1$ và $q_2$ ở hai đầu vào. Đại lượng được điều khiển là mực nước $H_1$ và $H_2$. Lưu lượng nước chảy ra khỏi bình là $g_1$ và $g_2$, còn lưu lượng thông nhau giữa hai bình là $q_{12}$. Hai bình có tiết diện không đổi $S_1$ và $S_2$. Đối tượng được mô tả bởi hai phương trình sau :

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_1 dH_1}{dt} &= q_1 - g_1 - q_{12} \\ \frac{S_2 dH_2}{dt} &= q_2 - g_2 + q_{12} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}73)$$

Lưu lượng thông nhau giữa hai bình $q_{12} = q_{12}(H_1 - H_2)$ nói chung là một hàm phi tuyến tính. $g_1$ và $g_2$ trong trường hợp này đóng vai trò của nhiễu $f_1 \equiv g_1$, $f_2 \equiv g_2$. Vì lượng ra $y_1 \equiv H_1$ và $y_2 \equiv H_2$ là hai đại lượng có liên hệ nhau và phụ thuộc cả hai tín hiệu điều khiển đối tượng $u_1 \equiv q_1$, $u_2 \equiv q_2$ nên đó là đối tượng có nhiều mối liên hệ như ở hình 6-76a. Dưới dạng toán tử, đối tượng được mô tả bởi hệ phương trình :




*Hình 6.76a*

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ Y_2 &= G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{–}74)$$

Hoặc dưới dạng vectơ :

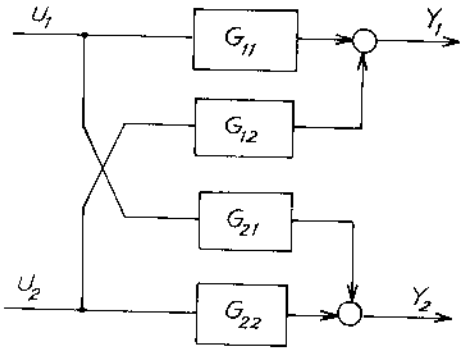
$$Y = G.U$$

mà $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ ;

$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ ,

$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$.

Sơ đồ tương đương như ở hình 6.76b.

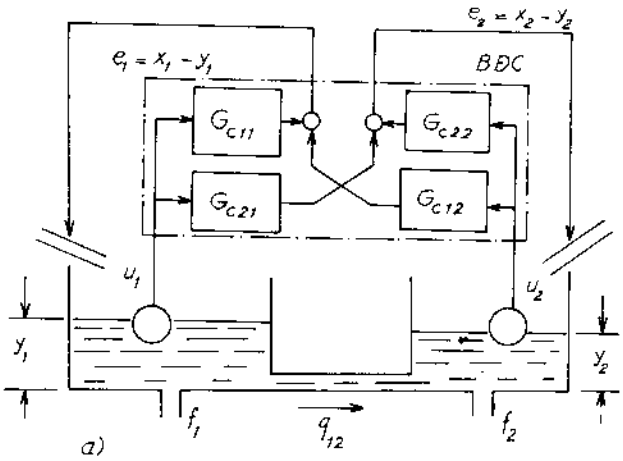



*Hình 6.76b*

Ngoài các hệ thủy lực, những đối tượng nhiều đầu vào và ra còn gặp ở các hệ điều hòa nhiệt độ và độ ẩm không khí, hệ điều chỉnh tốc độ và áp suất tuabin, các hệ điều chỉnh nhiệt độ và mức của các cột chưng cất v.v...

Để duy trì các lượng ra không đổi, cần dùng các bộ điều chỉnh theo sai lệch. Ở ví dụ trên : $y_1$, $y_2$ được so sánh với lượng đặt $x_1$, $x_2$ và chênh lệch $e_1$, $e_2$ được đưa đến các bộ điều chỉnh (các khâu $G_{c11}$, $G_{c12}$, $G_{c21}$, $G_{c22}$) để có tín hiệu điều khiển đối tượng ($u_1$ và $u_2$) như ở hình 6.77.

Tương ứng với 6.77a là hình 6.77b. Giả sử cần xác định ảnh hưởng của biến đổi $x_1$ với đại lượng được điều khiển $y_2$ hay với sai lệch $e_2$, ta xác định hàm truyền :

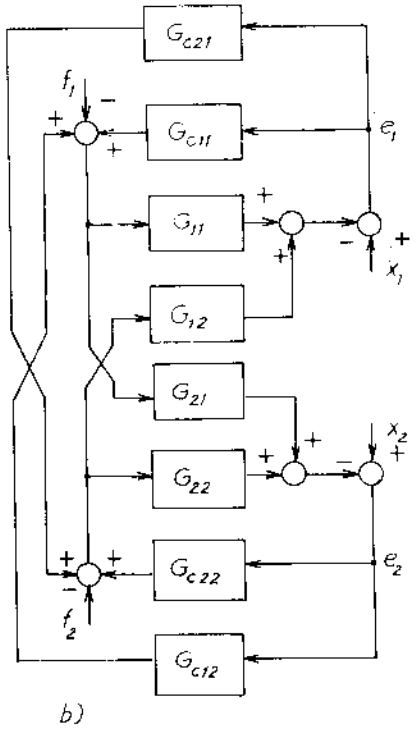



*Hình 6.77a*

$$W_{e2x1} = \frac{E_2}{X_1} \qquad (6-75)$$

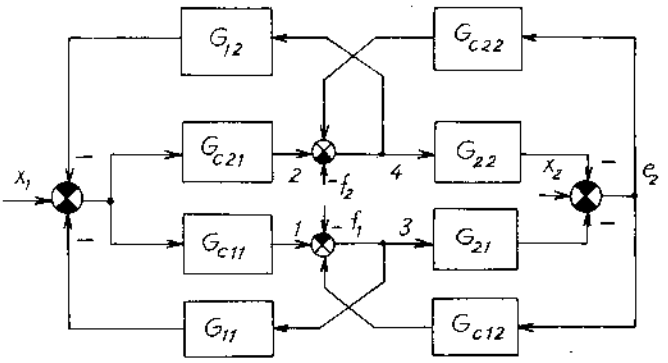
Khi $W_{e2x1} = 0$, tín hiệu đặt $x_1$ không làm ảnh hưởng $y_2$ và tác động điều chỉnh theo kênh ấy là bất biến. Để tính $W_{e2x1}$ cần xác định sơ đồ tương đương như ở hình 6.77c.

Ở đây các điểm *2*, *4* và *1*, *3* cần được biến đổi theo quy tắc như ở hình 2.13 và không tính đến ảnh hưởng của nhiễu $f_1$ và $f_2$, ($f_1 = f_2 = 0$). Sơ đồ tương đương như ở hình 6.78a sau khi chuyển khâu cộng *1* và *2* ra sau các điểm rẽ *3* và *4*.




*Hình 6.77b*

Tiếp theo có thể chuyển đổi vị trí các điểm rẽ và khâu cộng với các hàm truyền bên cạnh, theo dấu mũi tên để có hình 6.78b. Các số *1* ÷ *4* cũng như *a* ÷ *d* ở hai sơ đồ khối đều giữ đúng vị trí của nó để dễ so sánh. Cuối cùng các khâu nối song song được thay thế bằng khâu tương đương và sơ đồ khối như ở hình 6.78b với :




*Hình 6.77c*

$$\left.\begin{aligned} W_a &= (1 + G_{11}G_{c11} + G_{12}G_{c21})^{-1} ; \\ W_b &= (1 + G_{22}G_{c22} + G_{21}G_{c12})^{-1} ; \\ W_c &= G_{c21}G_{22} + G_{c11}G_{21} ; \\ W_d &= G_{c22}G_{12} + G_{c12}G_{11} ; \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}76)$$

Từ đó xác định được :

$$\left.\begin{aligned} W_{e1X1} &= \frac{E_1}{X_1} = \frac{W_a}{1 - W_aW_bW_cW_d} \\ W_{e2X1} &= \frac{E_2}{X_1} = \frac{W_a W_b W_c}{W_aW_bW_cW_d - 1} \\ W_{e2X2} &= \frac{E_2}{X_2} = \frac{W_b}{1 - W_aW_bW_cW_d} \\ W_{e1X2} &= \frac{E_1}{X_2} = \frac{W_a W_b W_d}{W_aW_bW_cW_d - 1} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}77)$$

Điều kiện bất biến đã đặt ra tương ứng với :

$$W_{e1X2} = \frac{E_1}{X_2} = 0 \text{ và } W_{e2X1} = \frac{E_2}{X_1} = 0 \text{ là } W_c = W_d = 0 \quad (6\text{-}78)$$

Theo đó xác định :

$$\left.\begin{aligned} G_{c21} &= -G_{c11}\frac{G_{21}}{G_{22}} \\ G_{c12} &= -G_{c22}\frac{G_{12}}{G_{11}} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}79)$$

và

$$\left.\begin{aligned} W_{e1X1} &= \frac{E_1}{X_1} = W_a \\ W_{e2X2} &= \frac{E_2}{X_2} = W_b \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}80)$$

Như vậy khi thay đổi lượng đặt $x_1$ không làm thay đổi $e_2$ (hay $y_2$) cũng như thay đổi $x_2$ không làm thay đổi $e_1$ (hay $y_1$). Hai kênh điều chỉnh này hoàn toàn độc lập nhau hay còn gọi là được *điều chỉnh bất biến*.

Trong ví dụ trên hình 6.75 nếu $q_{12}$ là tuyến tính ta có :

$$q_{12} = b_o(y_1 - y_2) = b_o(H_1 - H_2) \text{ mà}$$

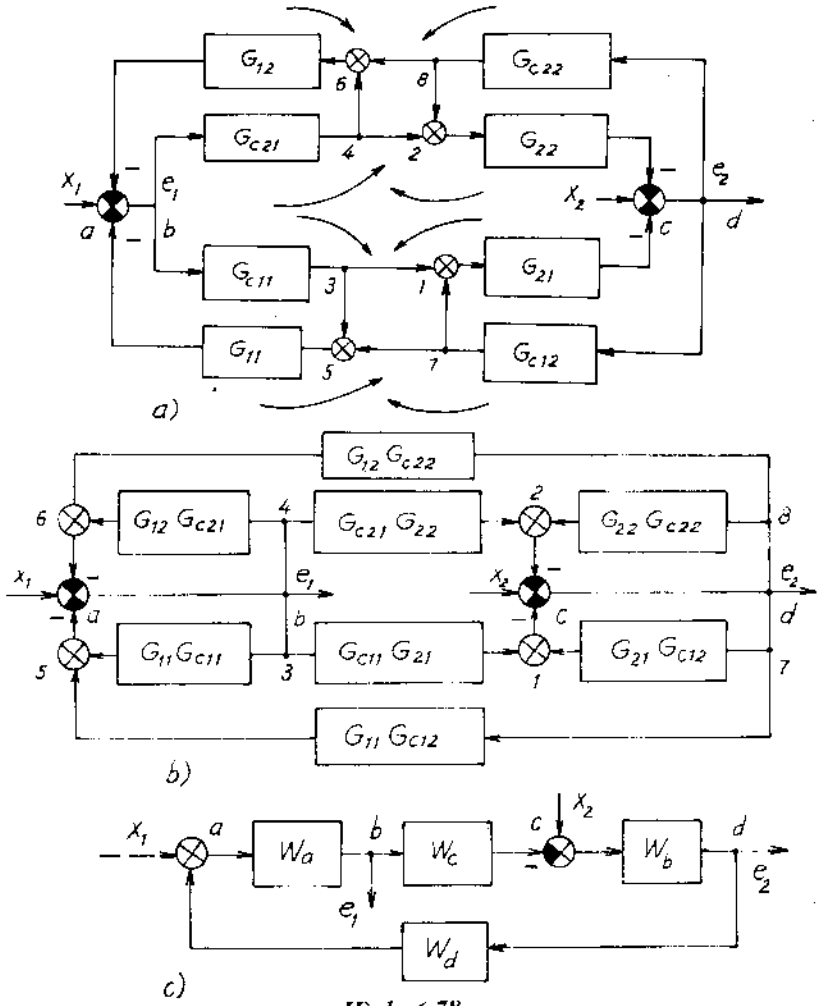
$$b_o = \frac{\partial q_{12}}{\partial y_1} = \frac{\partial q_{12}}{\partial y_2}$$

thì hệ phương trình (6-73) có dạng :

$$\left.\begin{aligned} S_1 s.Y_1 &= X_1 - b_o(Y_1 - Y_2) \; ; \\ S_2 s.Y_2 &= X_2 + b_o(Y_1 - Y_2) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}81)$$

Giải hệ phương trình trên ta có :

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= G_{11}X_1 + G_{12}X_2 \\ Y_2 &= G_{21}X_1 + G_{22}X_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}82)$$




*Hình 6.78*

mà

$$\left.\begin{aligned} G_{11} &= (b_o + S_2 s)\ \{s[b_o(S_1 + S_2) + S_1S_2s]\}; \\ G_{22} &= (b_o + S_1 s)\ \{s[b_o(S_1 + S_2) + S_1S_2s]\}; \\ G_{12} &= G_{21} = \frac{b_o}{\{s[b_o(S_1 + S_2) + S_1S_2s]\}} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}83)$$

Để đảm bảo điều khiển bất biến nói trên, thay (6-83) vào (6-79), ta có :

$$G_{c21} = \frac{G_{c11}}{(1 + sT_1)}\ ;\ G_{c12} = -\frac{G_{c22}}{(1 + sT_2)}$$

với :

$$T_1 = \frac{S_1}{b_o}\ ;\ T_2 = \frac{S_2}{b_o}$$

Trong trường hợp bất biến, mọi tác dụng đối với $u_1$ đều kèm theo tác dụng ngược lại đối với bình thứ hai ($u_2$) với quán tính phụ thuộc vào mối liên hệ giữa hai bình ($b_o$). Tác dụng ngược này bù trừ cho tác động phụ ở bình thứ hai do mức $H_1$ đã được nâng lên. Quán tính của dòng chất lỏng đối với bình thứ hai bằng quán tính của quá trình nâng mức $H_2$ do mối liên quan với bình thứ nhất.

Để tính các hàm truyền giữa hai nút, có thể dùng công thức Mezon (1953) sau đây :

$$W_{mn} = \frac{\left[\left(\sum_{k=1}^{r} W_{npk}\right) \prod_{i=1}^{s} \left(1 + W_{pki}\right)\right]^*}{\left[\prod_{i=1}^{s} (1 + W_{pki})\right]^*} \quad (6\text{-}84)$$

ở đây $\sum_{k=1}^{r} W_{npk}$ - tổng của r hàm truyền các mạch thuận từ nút m đến nút n ; $W_{pKi}$ - hàm truyền của các mạch hở có tính đến dấu của hồi tiếp. Dấu nhân (Π) bao gồm s mạch vòng kín ; dấu "*" cho phép đưa ra ngoài dấu ngoặc vuông là tích của hàm truyền các khâu như nhau.

**Ví dụ 6-9**

Với sơ đồ khối như ở hình 2.14d, hãy xác định $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

So sánh với (6-84) ta thấy r = 1 với mạch thuận $W_a$, $W_b$ ; s = 2

với hai mạch kín $W_aW_bW_cW_d$ và $W_aW_c$ đối với mạch hở, có hồi tiếp âm. Do đó :

$$W(s) = \frac{[W_aW_b(1 + W_aW_c)(1 + W_aW_bW_cW_d)]^*}{[(1 + W_aW_c)(1 + W_aW_bW_cW_d)]^*}$$

Từ đó tính được :

$$W(s) = \frac{W_aW_b}{[(1 + W_aW_c + W_aW_bW_cW_d)]^*}$$

Kết quả tính toán trùng khớp với hình 2.15 ở ví dụ 2-6

**Ví dụ 6-10**

Đối tượng là một thùng nước có vòi nước lạnh và nóng chảy vào như ở hình 6.79a và vòi nước ấm chảy ra ($u_1 \equiv q_l$ ; $u_2 \equiv q_n$ ; $f \equiv q_o$). Đại lượng được điều khiển là mực nước và nhiệt độ ($y_1 \equiv H$, $y_2 \equiv \theta_o$). Hệ phương trình được mô tả như sau :

$$y_1 \equiv H = \frac{1}{s.S}(q_n + q_l - q_o)$$

$$y_2 = \theta_o = \frac{1}{\rho\frac{S.\bar{y}_1}{\bar{q}_o}s + 1}\left[\left(\frac{\bar{\theta}_n - \bar{\theta}_o}{\bar{q}_o}\right)q_n + \left(\frac{\bar{\theta}_l - \bar{\theta}_o}{\bar{q}_o}\right)q_l + \frac{\bar{q}_n}{\bar{q}_o}\theta_n\right]$$

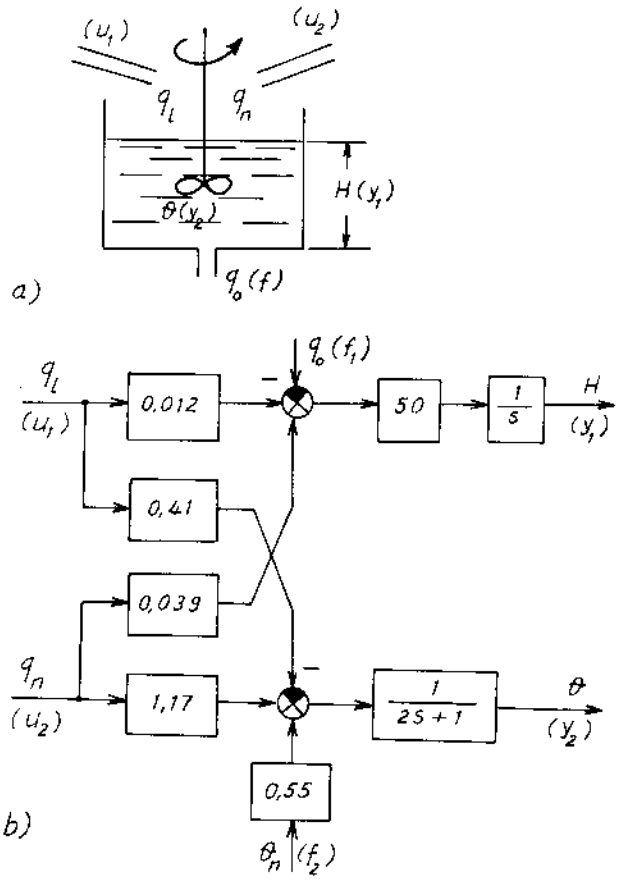
Ứng với hình 6.79a có sơ đồ như ở hình 6.79b.

Ở các biểu thức trên : S là diện tích đáy bình không đổi ; $\rho$ là hệ số. Các dấu gạch đầu ứng với trị số trung bình. Các hệ số đã được tính toán theo điều kiện đã cho.

Để xét ảnh hưởng của vòi nước lạnh, ta dùng $u_1 = 1(t)$ với điều kiện không thay đổi những lượng vào khác: $u_2 = 0$, $f_1(t) = f_2(t) = 0$. Kết quả là mực nước $H(y_1)$ tăng tuyến tính, trong khi nhiệt độ $\theta_0(y_2)$ giảm dần theo quán tính như ở hình 6.80a. Ngược lại, để xét ảnh hưởng của vòi nước nóng: $u_2 = 1(t) = q_n$ với điều kiện $u_1 = 0$; $f_1(t) = f_2(t) = 0$ mực nước tăng tuyến tính $H(y_1)$, trong khi đó nhiệt độ $\theta_0(y_2)$ tăng dần theo quán tính với cùng hằng số thời gian T = 2 như ở trường hợp đầu (hình 6.80b). Bây giờ dùng các bộ điều chỉnh PI cho mỗi kênh mà không xét đến các tác động chéo, ứng với $K_{12} = K_{21} = 0$;

$$G_{c11}(s) = 2,5\left(1+\frac{1}{2,3s}\right); \quad G_{c22}(s) = 0,9\left(1+\frac{1}{2,4s}\right);$$

ta có hàm truyền hệ kín: $W_k(s) = \dfrac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$




*Hình 6.79*

với đối tượng :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} ;$$

Ta có trường hợp hệ không ôtônôm, có đặc tính như ở hình 6.82.

Trường hợp hệ ôtônôm (bất biến) với cơ cấu điều khiển dạng (hình 6-81):

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c11}(s)K_{12} \\ G_{c22}(s)K_{21} & G_{c22}(s) \end{bmatrix}$$

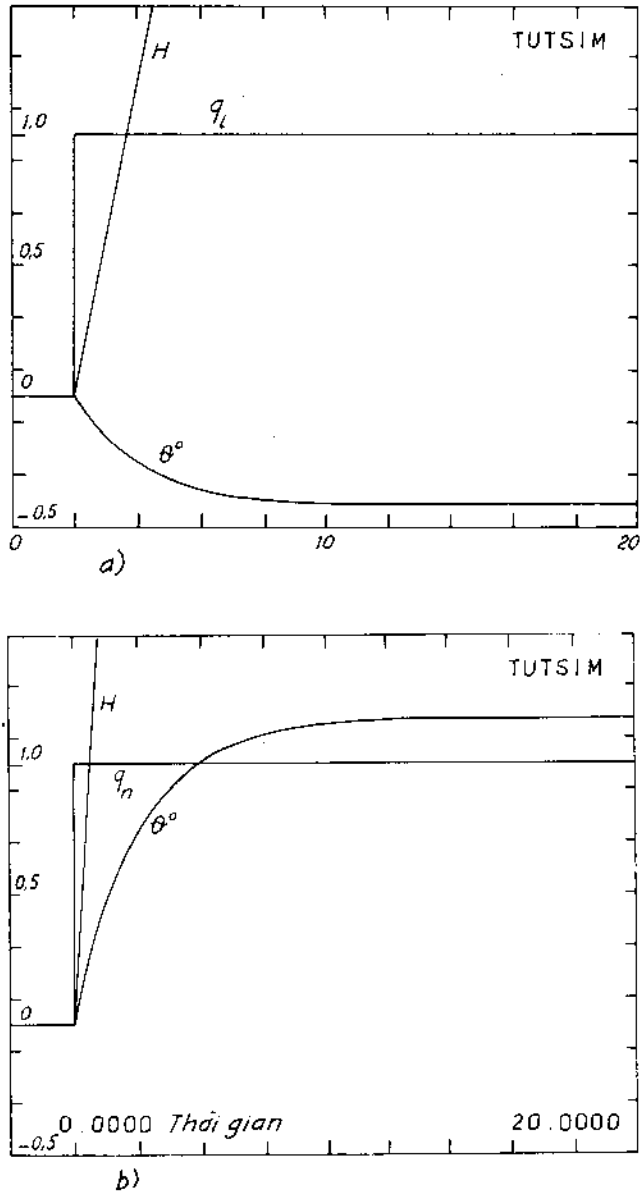
Từ điều kiện bất biến:

$$W_{K12}(s) = [1 + G_c(s)G(s)]^{-1}[G_{c11}(s)G_{12}(s) + G_{c11}(s)K_{12}G_{22}(s)] = 0$$

$$W_{K21}(s) = [1 + G_c(s)G(s)]^{-1}[G_{c22}(s)K_{21}G_{11}(s) + G_{c22}(s)G_{21}(s)] = 0$$

Từ đó rút ra: $K_{12} = 0{,}350427$; $K_{21} = 3{,}25$

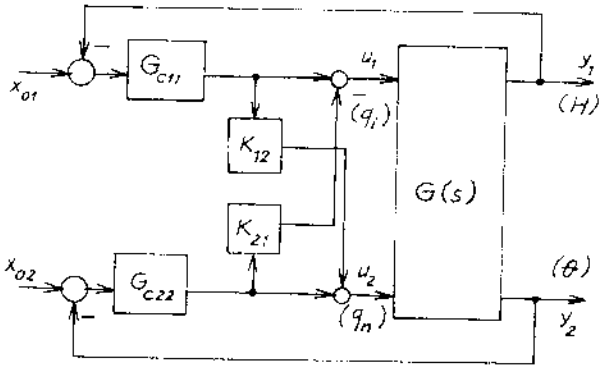
và ta có đặc tính như ở hình 6.83.




*Hình 6.80*

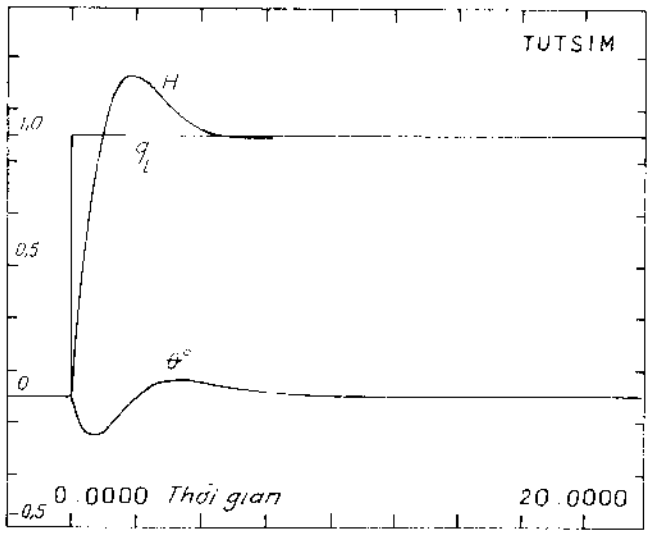
Ở hình 6.82, sau khi thay đổi lượng đặt mực nước $x_1 = 1(t)$, lượng ra $H(y_1)$ có dao động và xác lập ở trị số cần thiết, trong khi lượng ra

thứ hai là nhiệt độ $\theta^0(y_2)$ trước khi trở lại trị số ban đầu đã dao động do ảnh hưởng của sự thay đổi lượng đặt $x_1$ ở kênh thứ nhất.

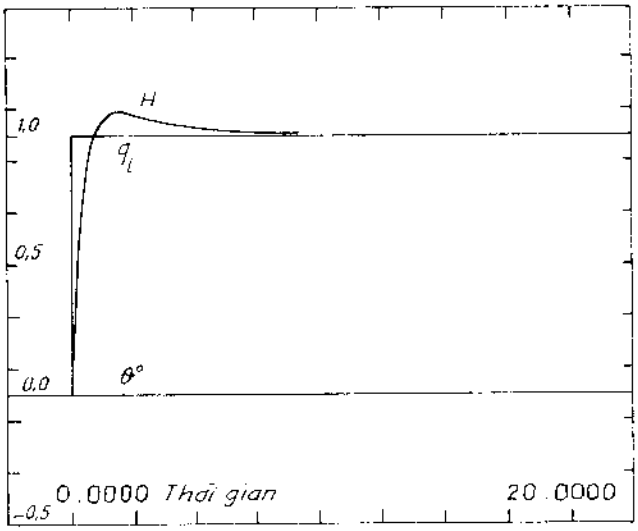



*Hình 6.81*

Ở hình 6.83 với điều kiện bất biến, sau khi thay đổi tín hiệu đặt $x_1 = 1(t)$, lượng ra thứ nhất $H(y_1)$ sau khi kết thúc quá trình quá độ đã xác lập ở trị số mong muốn, trong khi lượng ra thứ hai là nhiệt độ $\theta^0(y_2)$ không hề chịu ảnh hưởng của tác động từ kênh thứ nhất.




*Hình 6.82*

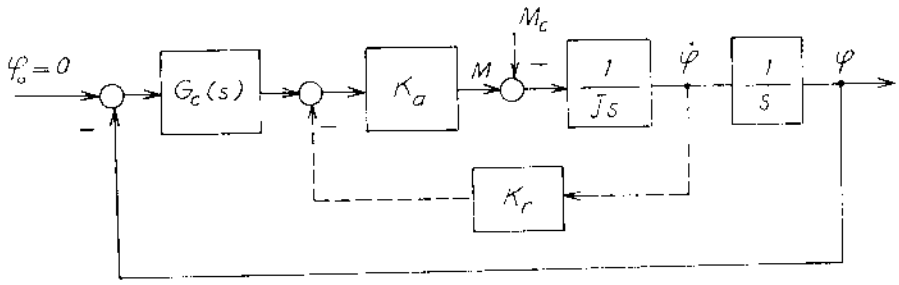



*Hình 6.83*

## BÀI TẬP CHƯƠNG VI

**Bài tập 6-1**

Hệ điều khiển bay của vệ tinh có sơ đồ khối như ở hình 6.84 (sơ đồ đối với một trong ba tọa độ của hệ).




*Hình 6.84*

Một cảm biến đo chênh lệch góc $\varphi$ so với trị số mong muốn nên ở hình vẽ tín hiệu đặt $\varphi_0 = 0$, con quay đo tốc độ $\dot{\varphi}$ với hệ số phản hồi $K_r$ làm ổn định hệ và đơn giản hóa cơ cấu điều khiển $G_c(s)$. Phản lực tạo nên mômen điều khiển M đối với vệ tinh có quán tính J. Mômen nhiễu $M_c$ là gió mặt trời và các tác động khác. Như vậy phương trình động học của đối tượng là :

$$\frac{\varphi(s)}{M(s) - M_c(s)} = \frac{1}{J.s^2}$$

a) Hãy xác định $G_c(s) \equiv K_c$ sao cho $\zeta = 0,7$ theo phương pháp quỹ đạo nghiệm số. Để dễ tính toán, cho trước : $K_a = K_r = J = 1$.

b) Với $\sigma\% = 22\%$ ; $t_{qd} = 2$ sec, xác định tần số cắt theo đường cong ở hình 6.81 và chọn khâu hiệu chỉnh theo phương pháp gần đúng. Hàm truyền của đối tượng $G(s) = 10/s^2$.

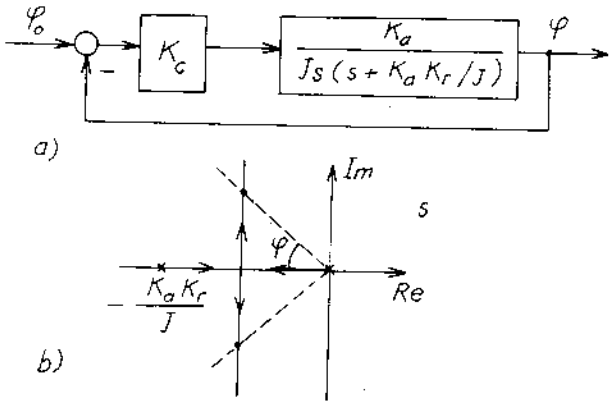
c) Tính toán chính xác cho khâu hiệu chỉnh $G_c(s) = \dfrac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$ và dùng MATLAB kiểm tra lại chất lượng.

*Đáp án*

a) Với $M_c = 0$, sơ đồ khối ở hình 6.84 tương đương với hình 6.85a. Quỹ đạo nghiệm số như ở hình 6.85b. Với $\varphi = 45^0$ ($\zeta = 0,7$) có :

$$K_c = \frac{K_a K_r^2}{2J}$$

Vậy $K_c = 0,5$.

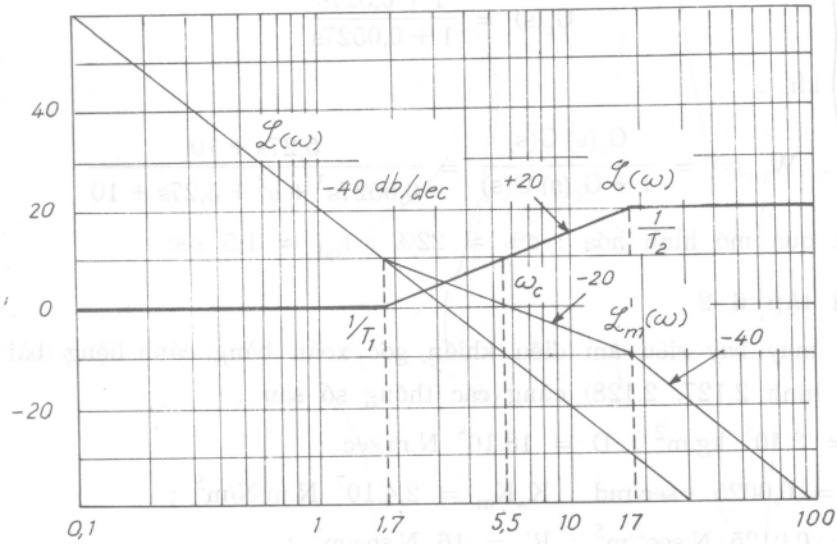



*Hình 6.85*

b) Theo đồ thị ở hình 6.8 (trang 154) với $\sigma\% = 22\%$ có $t_{qd} = \dfrac{3,5\pi}{\omega_c}$, với $t_{qd} = 2$ sec, $\omega_c = 5,5$. Qua tần số cắt vẽ đoạn thẳng có độ nghiêng – 20 db/dec xác định $1/T_1 = 1,7$ sec$^{-1}$ và $1/T_2 = 17$ sec$^{-1}$.

Vậy :

$$G_c(s) = \frac{1 + 0{,}588s}{1 + 0{,}0588s}$$




*Hình 6.86*

c) Tính toán chính xác khâu hiệu chỉnh :

Tần số cắt của đối tượng $G(s) = \frac{10}{s^2}$ được tính theo :

$$\left|\frac{K}{(j\omega)^2}\right| = \frac{K}{\omega^2} = 1 \text{ ứng với } \omega = \sqrt{K} = \sqrt{10} = 3{,}163.$$

Nếu $\zeta = 0{,}5$ ; theo bảng 6.2 cần có $\gamma_c = 53^o$. Khâu hiệu chỉnh $\frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$ có trị số pha cực đại $\varphi_{max} = 53^o$ với tần số giữa hai trị số $1/T_1$ và $1/T_2$ có khả năng đáp ứng độ dự trữ ổn định cần thiết. Chọn tần số cắt của hệ bằng tần số giữa hai trị $1/T_1$ và $1/T_2$ . Biên độ giữa hai đường nằm ngang của khâu hiệu chỉnh là $20\log(T_1/T_2)$. Vậy biên độ tại tần số cắt : $10\log(T_1/T_2) = 10\log 10 = 10$ (cho tần số ứng với $T_2$ bằng 10 lần ứng với $T_1$). Còn tần số tại $\varphi_{max}$ bằng $\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ nên :

$$\omega_c = 5,5 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2\sqrt{10}}$$

Vậy : $$\frac{1}{T_1} = 1,739 \text{ và } \frac{1}{T_2} = 17,396$$

$$G_c(s) = \frac{1 + 0,527s}{1 + 0,0527s}$$

Hệ kín :

$$W_{km}(s) = \frac{G_c(s)\,G(s)}{1 + G_c(s)\,G(s)} = \frac{5,27s + 10}{0,0527s^3 + s^2 + 5,27s + 10}$$

Kết quả mô hình hóa : $\sigma\% \approx 22\%$ ; $t_{qd} \approx 1,5$ sec.

**Bài tập 6-2**

Với máy bay siêu âm điều khiển góc xoắn bằng cánh liệng (bài tập 2-16 và hình 2.127, 2.128) cùng các thông số sau :

$J = 3.10^5$ kg.m$^2$ ; $D = 18.10^8$ N.m.sec ;

$D_g = 0,0025$ r.sec/rad ; $K_wK_m = 2,4.10^7$ N.m.N/m$^5$ ;

$I = 0,0125$ N.sec$^2$/m$^5$ ; $R' = 16$ N.sec/m$^5$ ;

$C = 1,25.10^{-4}$ m$^5$/N ; $K_p = 3,5.10^7$ ;

$V_i = 0,6$ rad/sec (biên độ của tín hiệu vào tăng dần đều).

$U_d = 1,2.10^8$ N.m (biên độ của mômen nhiễu bậc thang).

Hãy xác định $K_p$ với yêu cầu về chất lượng :

1. $|e_{ss}| \leqslant 0,001$ ;
2. $\gamma_c \geqslant 45^o$ ;
3. $\beta \geqslant 3$ ;
4. $\zeta \geqslant 0,5$ ;
5. $\sigma\% \leqslant 16,3\%$ ;
6. $t_1 \leqslant 0,008$ sec ;
7. $t_{qd} \leqslant 0,026$ sec ;

*Đáp án*

Với tín hiệu đặt $\varphi_o$ :

$$\frac{E}{\varphi_o} = \frac{s(J.s + D)\,(I.s^2 + R'.s + \frac{1}{C})}{s(J.s + D)\,(I.s^2 + R'.s + \frac{1}{C}) + K_pK_wK_m\,(1 + D_gs)}$$

- với $\varphi_o = V/s^2$ :

$$e_{ss} = \frac{D.V}{K_pK_wK_mC} = 0{,}001029$$

$$e_{ss} = 0{,}001 \;;\; |K_p| \geqslant 3{,}6\ E7$$

- với nhiễu $M_c$ :

$$\frac{E}{M_c} = \frac{-(1 + D_gs)\,(I.s^2 + R'.s + \frac{1}{C})}{s(J.s + D)\,(I.s^2 + R'.s + \frac{1}{C}) + K_pK_wK_m\,(1 + D_gs)}$$

- với $M_c = \frac{U_d}{s}$ :

$$e_{ss} = \frac{-U_d}{K_pK_wK_mC} = -0{,}001143$$

$$|e_{ss}| \leqslant 0{,}001 \;;\; |K_p| = \;\geqslant 4{,}0E+7$$

Do đó lấy trị số $K_p$ lớn hơn và bằng $K_p = 4{,}0$ E7. Hàm truyền hệ hở bằng :

$$W(s) = \frac{K_pK_wK_m(1 + D_gs)}{s(J.s + D)(I.s^2 + R'.s + \frac{1}{C})} = \frac{C_oK_p\,(s + 400)}{s(s + 600)\,(s^2 + 1280s + 640.000)}$$

với $C_o = 16$ ; $K_p = 4{,}0E+7$

**Bài tập 6-3**

Ở hình 6.87 có đặc tính tần số của hệ thống hở.

a) Viết hàm truyền của hệ hở.

b) Xác định chỉ số dao động $M_p$ và dải thông tần $\omega_b$ của hệ kín.

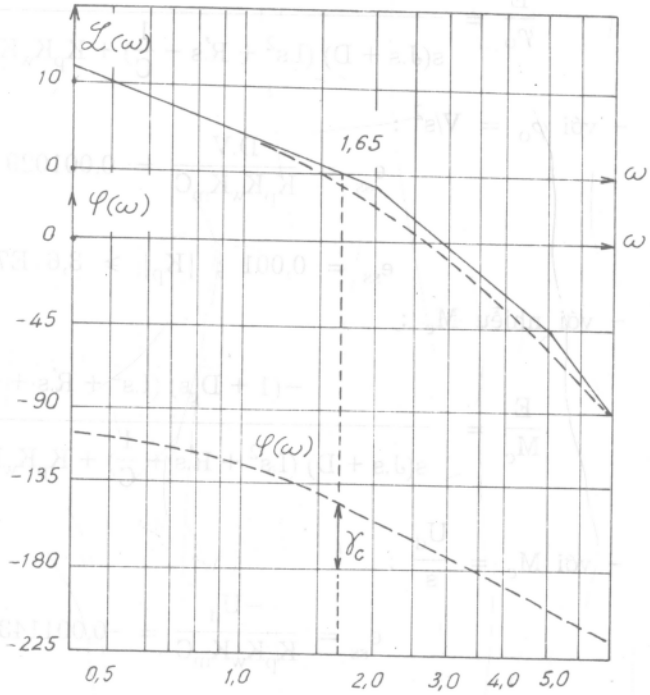
*Đáp án*

a) $$W(s) = \frac{1{,}65}{s(0{,}5s + 1)\,(0{,}2s + 1)}$$

b) Theo hình 6.87, ứng với $\omega_c$ có $\gamma_c = 40^o$, theo đường cong $\gamma_c(\zeta)$

ở hình 6.5 xác định $\zeta = 0,35$. Theo hai đường cong $\frac{\omega_c}{\omega_o}(\zeta)$ và $\frac{\omega_b}{\omega_o}(\zeta)$ ở hình 6.5 và 6.4, xác định $\frac{\omega_c}{\omega_b} = 0,625$.

Từ đó $\omega_b = \frac{\omega_c}{0,625} = 2,64\ sec^{-1}$. Theo đường cong $M_P(\zeta)$ xác định $M_P = 1,52$.




*Hình 6.87*

**Bài tập 6-4**

Với bài tập 6-3, vẽ lại đường cong Bode trên biểu đồ Nichols.

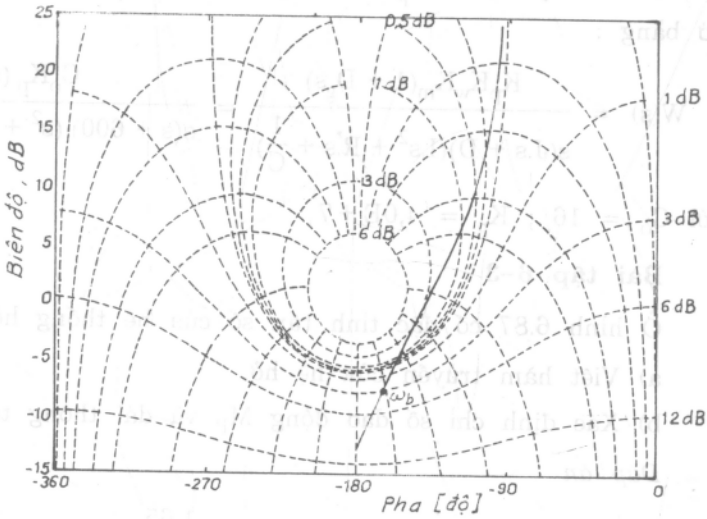
a) So sánh $\omega_b$ và $M_P$ ở biểu đồ Nichols với kết quả ở bài tập 6-3b.

b) Vẽ đặc tính tần của hệ kín.

*Đáp án*

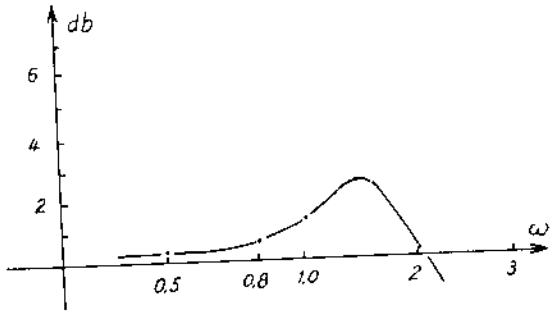
a) Theo hình 6.88 có $\omega_b = 2,42$.

$M_P = 3,3$ db $\equiv 1,46$. Kết quả so với bài tập 6-3b không khác nhau nhiều.




*Hình 6.88*

b) Giao điểm của đường cong W(jω) và quỹ đạo M cho phép xây dựng đặc tính tần của hệ kín như ở hình 6.89.




*Hình 6.89*

**Bài tập 6-5**

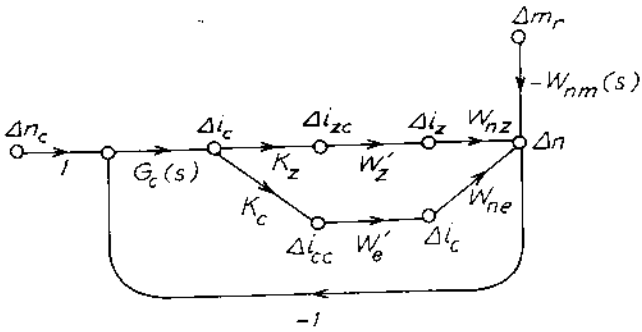
Hệ điều chỉnh tốc độ động cơ đồng bộ có sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 6.90. Thông số đã cho :

Động cơ đồng bộ có công suất S = 4 MVA ; $n_n$ = 1500 vg/ph.

$T_c$ = 2,71 sec ; $T_m$ = 2,5 sec.

Bộ biến tần : $u_{dio}$ = 1,05 ; $T_{cm}$ = 1,67 msec ;

$r_z$ = 0,132 ; $T_z$ = 87 msec ;




*Hình 6.90*

Hãy chọn bộ điều chỉnh tốc độ động cơ $G_c(s)$ sau khi đã tuyến tính hóa nhiều thành phần phi tuyến và đơn giản hóa sơ đồ khối để có sơ đồ theo hình vẽ trên với :

$$W'_z(s) = \frac{1}{1 + s.T'_z} \; ; \; W'_e(s) = \frac{1}{1 + s.T'_e}$$

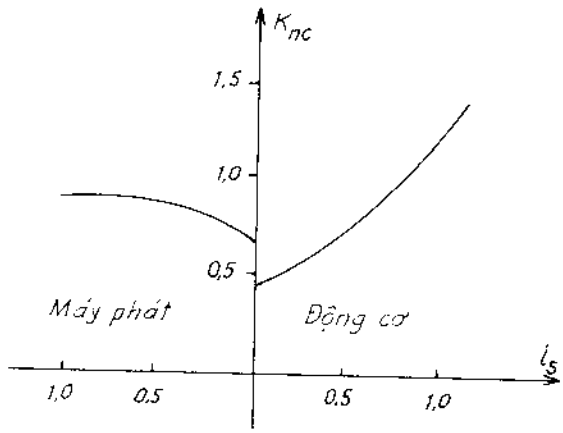
$$W_{nz}(s) \approx \frac{K_{nz}}{s.T_m};$$

$$W_{ne}(s) \approx \frac{K_{ne}}{s.T_m};$$

$$W_{nm}(s) = \frac{1}{s.T_m}$$

và $T'_z = 4T_{cm} = 6{,}67$ msec.

$T'_e = 2\ (T_{cm} + 2\ T_f) = 75$ msec mà $T_f = 18$ msec là hằng số thời gian của bộ lọc trong mạch điều chỉnh dòng kích từ.




*Hình 6.91*

Ở hình 6.91 có mối quan hệ giữa $K_{nc} = K_{nz}K_z + K_{ne}K_e$ với dòng điện stato $i_s$.

*Đáp án*

Hàm truyền của mạch song song giữa $\Delta n$ và $\Delta i_c$ do mạch dòng trung gian và dòng kích từ tạo nên là :

$$W_{nc}(s) = W_{nz}(s)W_{z'}(s)K_z + W_{ne}(s)W_{e'}(s)K_e$$

$$= \frac{1}{s.T_m}\left(\frac{K_{nz}K_z}{1 + s.T'_z} + \frac{K_{ne}K_e}{1 + s.T'_e}\right)$$

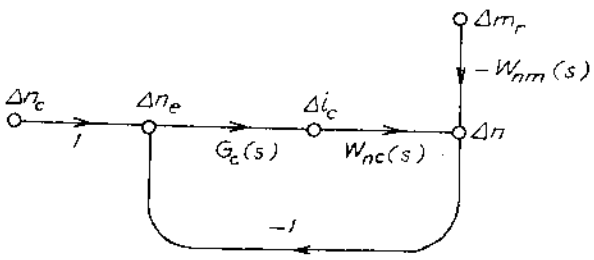
Thông thường $K_{nz}K_z > K_{ne}K_e$ và xấp xỉ :

$$\frac{(1 + s.T'_z)}{(1 + s.T'_e)} \approx 1$$

Ta có :

$$W_{nc}(s) = \frac{K_{nc}}{s.T_m(1 + s.T'_z)}$$

Theo sơ đồ graph ở hình 6.92, ta chọn bộ điều chỉnh tốc độ theo tiêu chuẩn đối xứng :




*Hình 6.92*

$$G_c(s) = \frac{s.T_n + 1}{s.T_i}.$$

Mối quan hệ giữa $\frac{T_n}{T_i}$ - thành phần tỷ lệ được chọn theo :

$$\frac{T_n}{T_i} = \frac{1}{2}\frac{T}{T_b},$$

ở đây $T = \frac{T_m}{K_{nc}}$ ; $T_b = T'_z$ và $K_{nc}$ lấy trị số cực đại theo đường cong ở hình 6.91. Vậy :

$$\frac{T_n}{T_i} = \frac{T_m}{2K_{ncmax}T'_z}$$

và theo bảng 6.5 chọn :

$$T_n = 4T'_z \cdot \frac{K_{ncmax}}{K_{ncmin}} = 92 \text{ msec},$$

$$T_i = 8\frac{T'^2_z}{T_m} \cdot \frac{K^2_{ncmax}}{K_{ncmin}} = 0{,}72 \text{ msec},$$

với $K_{ncmax} = 1{,}466$ ; $K_{ncmin} = 0{,}4193$.

**Bài tập 6-6**

Một đối tượng có hàm truyền :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0{,}25s+1)(0{,}1s+1)}$$

a) Xác định thông số của bộ điều chỉnh PI sao cho $\omega_c = 2$ rad/sec và $\gamma_c = 50^0$.

b) Dùng tiêu chuẩn phẳng để chọn và xác định thông số tối ưu bộ điều chỉnh.

c) So sánh chất lượng hệ theo mục a) và b).

*Đáp án*

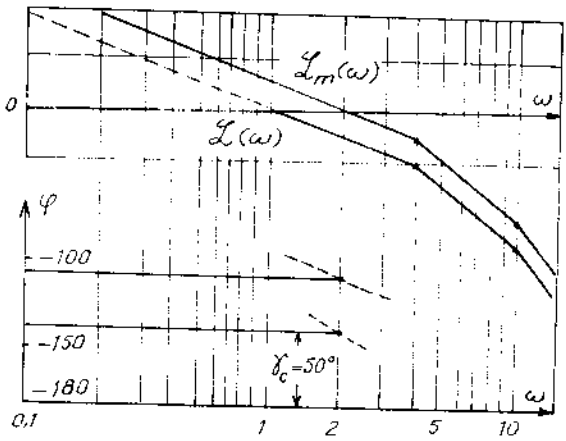
a) Với bộ điều chỉnh PI : $G_c(s) = K\frac{1 + \frac{1}{a}s}{s}$

Theo đặc tính tần ở hình 6.88 : $\varphi(\omega)|_{\omega=2} = -101{,}3^0$, vậy để $\gamma_c$ =

50°, điểm không phải nâng $\varphi_m(\omega)$ một góc 61°,3 ở tần số $\omega$ = 2 rad/sec vì khâu tích phân của bộ điều chỉnh đã làm cho $\varphi(\omega)|_{\omega=2} = -101,3 - 90 = -191°3$. $\tan^{-1}\frac{2}{a} = 61,3$, chọn a = 1.

Để đạt tần số cắt $\omega = \omega_c = 2$ rad/sec. $\mathcal{L}_m(\omega)$ đã nâng lên 6 db vậy K = 2 :

$$G_c(s) = 2\,\frac{(1+s)}{s}$$

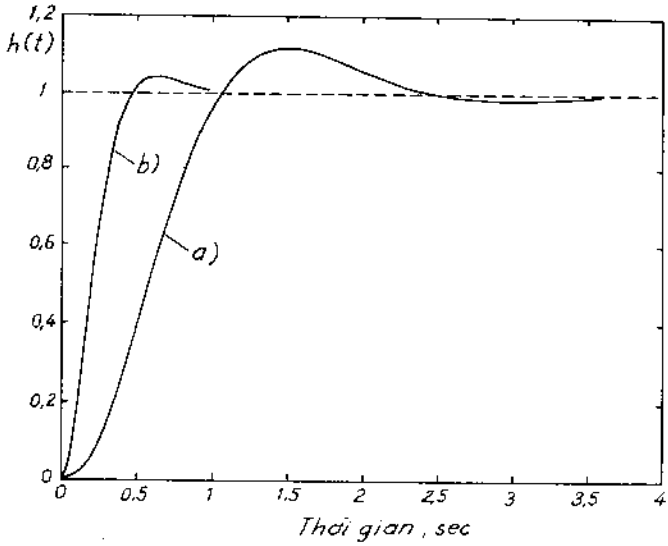



*Hình 6.93*

b) Theo tiêu chuẩn phẳng, chọn bộ điều chỉnh PID (bảng 6.8) :

$$G_c(s) = \frac{(T_n s + 1)(T_v s + 1)}{T_i s}$$

Chọn $T_n$ = 1 sec ; $T_v$ = 0,25 sec ; $T_i$ = 2 x 0,1 = 0,2 sec.




*Hình 6.94*

c) So sánh hai bộ điều chỉnh PI và PID :

Hệ kín theo a) :

$$W_k(s) = \frac{2s + 2}{0{,}025s^4 + 0{,}375s^3 + 1{,}35s^2 + 3s + 2}$$

Hệ kín theo b) :

$$W_k(s) = \frac{1}{0{,}02s^2 + 0{,}2s + 1}$$ (đã đơn giản hóa hàm truyền)

Theo hình 6.94 :

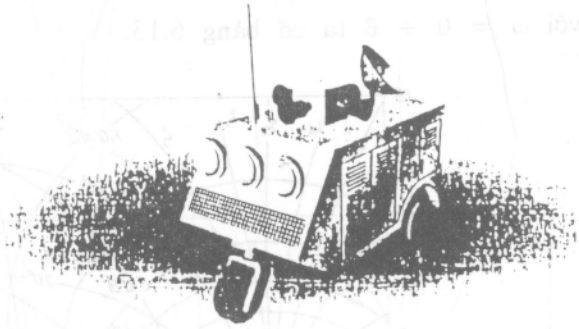
a) $\sigma\% = 12{,}5\%$ ; $t_{qd} \approx 2{,}4$ sec.

b) $\sigma\% = 4{,}7\%$ ; $t_{qd} \approx 0{,}75$ sec.

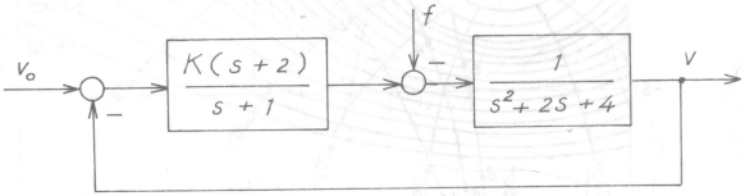
vì "tiêu chuẩn phẳng" là tiêu chuẩn tối ưu.

**Bài tập 6-7**

Xe trinh sát điều khiển từ xa (hình 6.95) có sơ đồ khối như ở hình 6.96. Tốc độ cần thiết được đặt theo kênh vô tuyến. Nhiễu f là mô phỏng của đồi và đất đá. Mục tiêu là hệ có sai lệch tĩnh và lượng quá điều chỉnh nhỏ.



*Hình 6.95*




*Hình 6.96*

a) Hãy xác định K để có sai lệch tĩnh 0,09.

b) Xây dựng mối quan hệ giữa K và các thông số khác như $\sigma\%$, $t_{qd}$, $t_\sigma$, $e_{ss}$.

c) Chọn phương án tối ưu, đánh giá chất lượng và xét ảnh hưởng của nhiễu.

*Đáp án*

a) Sai lệch tĩnh với tín hiệu đầu vào bậc thang đơn vị :

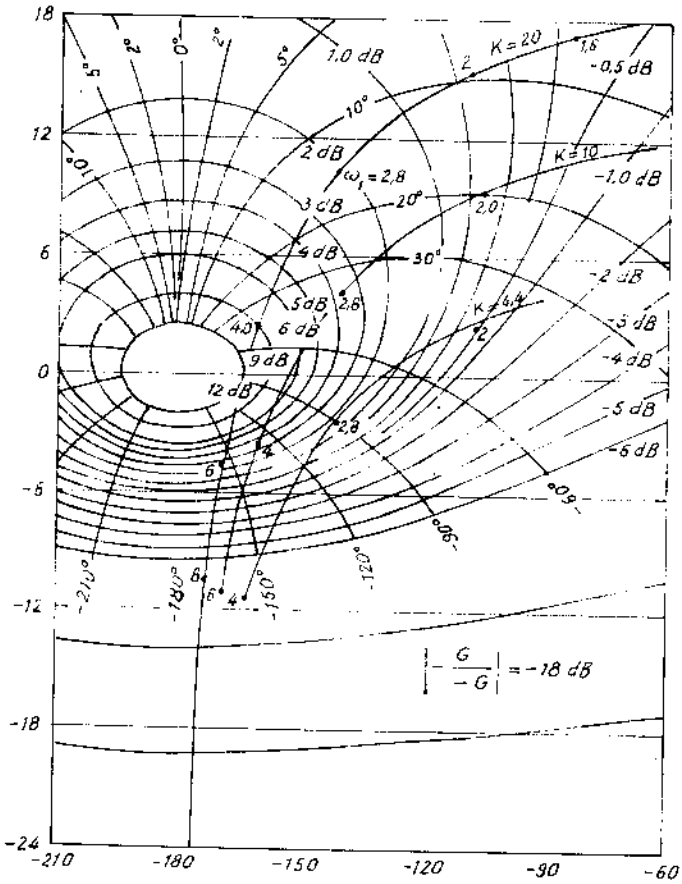
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s.E(s) = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{1}{1 + \dfrac{K(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+4)}}\right]\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{1+\dfrac{K}{2}} = 0{,}09$$

vậy K = 20.

b) Với K = 20 :

$$W(s) = \frac{10\left(1+\frac{1}{2}s\right)}{(1+s)\left(1+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}s^2\right)},$$

với $\omega = 0 \div 6$ ta có bảng 6.13.




*Hình 6.97*

*Bảng 6.8*

| $\omega$ | 0 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,8 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 20 | 18,4 | 17,8 | 16 | 10,5 | 2,7 | -5,2 |
| $\varphi$ | 0 | -65° | -86° | -108° | -142° | -161° | -170° |

Đường cong Nichols như ở hình 6.97, theo đó $M_p$ = 12 db, $\gamma_c$ = 15°. Lượng quá điều chỉnh quá lớn. Giảm K tương ứng với hạ đường cong $W(j\omega)$. Với $\sigma\%$ = 25% theo hình 6.1 xác định $\zeta$ = 0,4. Theo hình 6.3 xác định $M_p$ = 1,35 hay 20log(1,35) = 2,6 db.

Với tần số $\omega$ = 2,8 và đường cong hệ kín 2,6 db, $W(j\omega)$ đã giảm 13 db hay $M_p$ = 4,5, vậy : $K = \frac{20}{4,5} = 4,44$.

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \frac{4,4}{2}} = 0,31$$

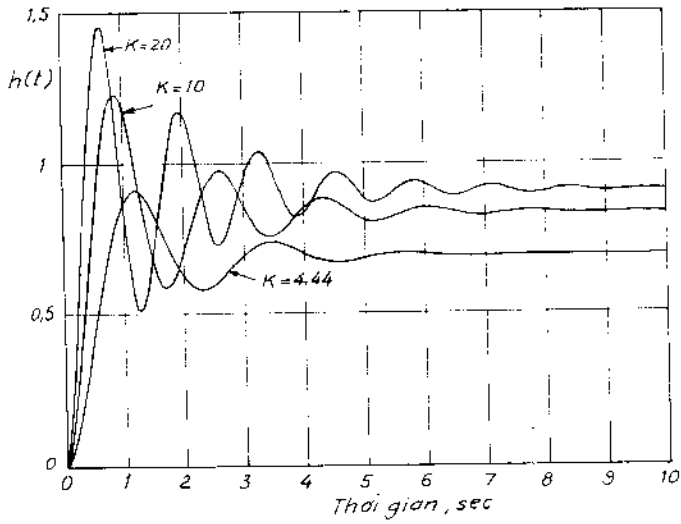
*Bảng 6.14*

| K | 4,44 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|
| $\sigma\%$ | 32,4 | 48,4 | 61,4 |
| $t_{qd}$ (sec) | 4,94 | 5,46 | 6,58 |
| $t_p$ (sec) | 1,19 | 0,88 | 0,67 |
| $e_{ss}$ | 31% | 16,7% | 9,1% |

Với ba trị số của K : 20 ; 10 ; 4,44, hệ có chất lượng như ở bảng 6.14.

Với K = 10, cần hạ đường cong ứng với K = 20 xuống 20log2 = 6 db, ta có $M_p$ = 7 db, $\gamma_c$ = 26°, $\zeta$ = 0,34 và $\sigma\%$ = 30%.

Hàm quá độ của ba trường hợp trên như ở hình 6.98 và đặc




*Hình 6.98*

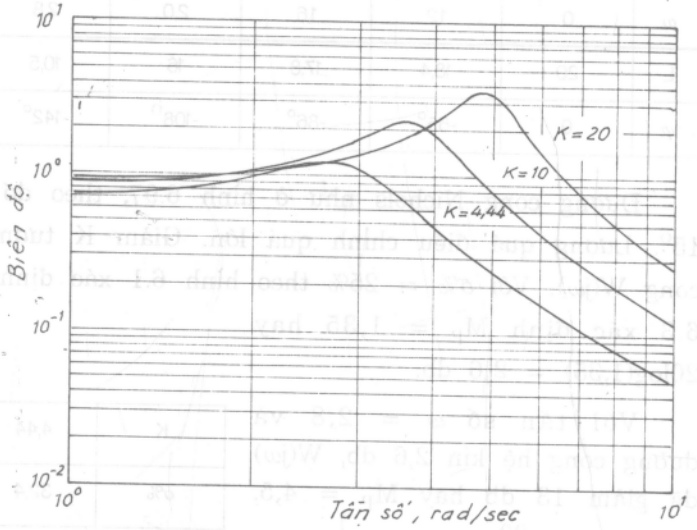
tính tần của hệ kín như ở hình 6.99.

c) Thỏa hiệp các điều kiện trên chọn K = 10, dải thông tần $\omega_b \approx 5$.

Vậy thời gian quá độ ước tính :

$$t_{qd} = \frac{4}{\zeta\omega_o} = \frac{4}{(0{,}34)\,(\omega_b/1{,}44)}$$

vì $\omega_b \approx 1{,}4\omega_o$ theo hình 6.4. Vậy $t_{qd}$ = 3,3 sec, nhưng theo đường cong quá độ ở hình 6.98 có trị số $t_{qd} \approx 5{,}4$ sec.




*Hình 6.99*

Đối với nhiễu f(t) = 1(t) ($v_o(t) = 0$), tín hiệu ra các đường cong ở hình 6.97, 6.98, 6.99 vẽ theo chương trình MATLAB sau đây.

*Biểu đồ Nichols :*

```
numgc = [1 2] ; dengc = [1 1] ;
numg = [1] ; deng = [1 2 4] ;
[num, den] = series (numgc, dengc, numg, deng) ;
W = logspace (-1, 2, 200) ;
axis ([-210, -60, -24, 18) ;
K1 = 20 ; K2 = 10 ; K3 = 4.44 ;
[mag1, ph1, w] = nichols (K1*num, den, w) ;
[mag2, ph2, w] = nichols (K2*num, den, w) ;
[mag 3, ph3, w] = nichols (K3*num, den, w) ;
plot (ph1, 20*log10 (mag1), (-), ph2, 20* log10 (mag2), (-), ph3,
20* log10 (mag3), (-)), ngrid
```

*Hàm quá độ*

```
t = (0 ; 0,1 ; 10) ; K = 20
for i = 1 : 3
```

```
    numgc = K*[1 2] ; dengc = [1 1] ;
    numg = [1] ; deng = [1 2 4] ;
    [nums, dens] = series (numgc, dengc, numg, deng) ;
    [num, den] = cloop (nums, dens)
    [y,x] = stop (num, den, t) ;
    if i = = 1, y1 = y ; K = 10 ; end
    if i = = 2, y2 = y ; K = 4.44 ; end
    if i = = 3, y3 = y ; end
end
Plot (t, y1,(-), t, y2,(-), t, y3,(-) ), grid
xlabel ('thời gian [sec]'), ylabel ('h(t)')
```

*Đặc tính tần hệ kín*

```
W = logspace (0, i, 200) ; K = 20 ;
for i = 1 : 3
    numgc = K*[1 2] ; dengc = [1 1] ;
    numg = [1] ; deng = [1 2 4] ;
    [nums, dens] = series (numgc, dengc, numg, deng) ;
    [num, den] = cloop (nums, dens) ;
    [mag, phase, w] = bode (num, den, w) ;
    if i = = 1, mag1 = mag ; phase1 = phase ; K = 10 ; end
    if i = = 2, mag2 = mag ; phase2 = phase ; K = 4.44 ; end
    if i = = 3, mag3 = mag ; phase3 = phase ; end
end
log log(W, mag1,(-), w, mag2,(-),w, mag3,(-)), grid
xlabel ('tanso [rad/sec]'), ylabel ('biendo')
```

**Bài tập 6 - 8**

Tàu con thoi Columbia (hình 6.100a) có sơ đồ khối như ở hình 6.100b. Bộ cảm biến có hệ số H(s) = 0,5.

Hàm truyền của tàu :

$$G(s) = \frac{0{,}3\,(s + 0{,}05)\,(s^2 + 1600)}{(s^2 + 0{,}05s + 16)(s + 70)}$$

a) Vẽ biểu đồ Bode với $G_c(s) = 2$ và xác định độ dự trữ ổn định.

b) Vẽ biểu đồ Bode với $G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$ và $\frac{K_2}{K_1} = 0,5$.

Chọn $K_1$ sao cho $L_{dt} = 10$ db

*Đáp án*

a) $L_{dt} = 44,26$ db ; $\gamma_c = 83,22^o$ ứng với $\omega = 39,72$ rad/sec và $\omega = 8,43$ rad/sec

$$W(s) = G_c(s)G(s)H(s) = \frac{0,3s^3 + 0,015s^2 + 480s + 24}{s^3 + 70,05s^2 + 19,5s + 1120}$$

b) Với $K_2 = 0,5K_1$ ;

$$G_c(s) = \frac{K_1(s + 0,5)}{s}.$$

$$W(s) = \frac{0,3s^4 + 0,165s^3 + 480,0075s^2 + 264s + 12}{s^4 + 70,05s^3 + 19,5s^2 + 1120s + 0}$$

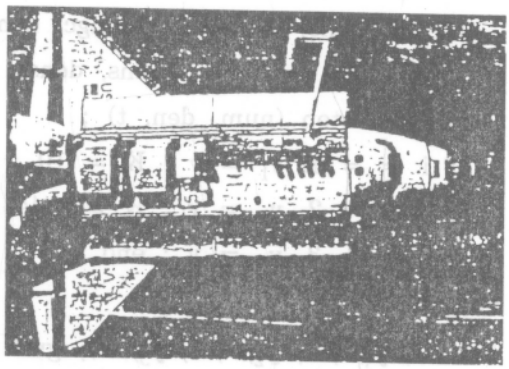
$K_1 = 1$ ; $L_{dt} = 44,26$ db ($\omega = 39,72$ rad/sec)

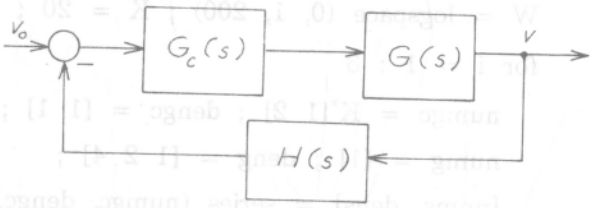
$\gamma_c = 79,82^o$ ($\omega = 8,45$ rad/sec)

cần tăng 34,36 db ứng với $K_1 = 51,3$.

$K_1 = 51,3$ ; $L_{dt} = 10,06$ db ($\omega = 39,72$ rad/sec) ;

$\gamma_c = 61,06^o$ ($\omega = 37,5$ rad/sec).






*Hình 6.100*

**Bài tập 6 - 9**

Hệ điều chỉnh nồng độ dung dịch (hình 6.101a) có sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 6.101b.

Hóa chất ở bình cấp liệu có nồng độ không đều, cần được điều khiển từ van để có nồng độ mong muốn thuần nhất. Hàm truyền của van và

bình chứa là :

$$G(s) = \frac{5}{5s + 1}$$

Bộ điều chỉnh PI :

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$$

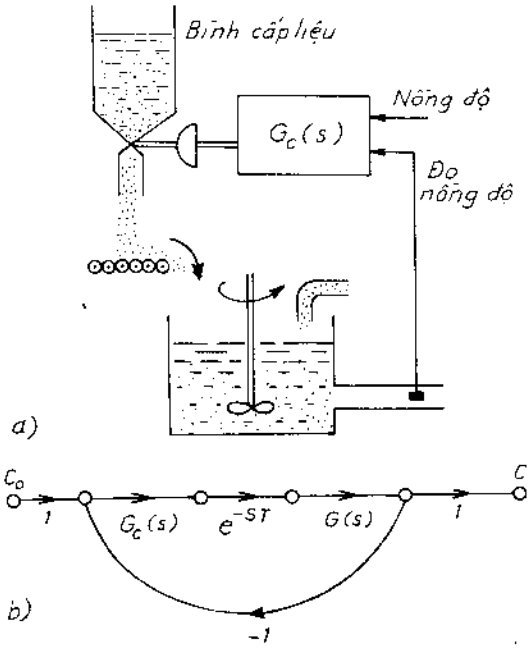
Thời gian trễ của băng chuyền là T = 1,5 sec.

a) Vẽ đường cong Bode với $K_1 = K_2 = 1$ và đánh giá hệ.

b) Với $K_1 = 0,1$ ; $K_2 = 0,04$. Theo đường cong Bode đánh giá hệ.

c) Với $K_1 = 0$. Theo phương pháp quỹ đạo nghiệm số xác định $K_2$ để hệ ổn định.

d) Chọn bộ điều chỉnh vượt trước theo VI.3.9 và so sánh với b).




*Hình 6.101*

*Đáp án*

a) Với hàm Pade bậc hai :

$$e^{-1,5s} = \frac{0,1483s^2 - 0,5934s + 0,7911}{0,1483s^2 + 0,5934s + 0,7911}$$

$$G_c(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s + 1}{s} \quad ; \quad G(s) = \frac{5}{5s + 1}$$

$$W(s) = G_c(s)e^{-1,5s}\,G(s) = 5\,\frac{0,1483s^3 - 0,4451s^2 + 0,1977s + 0,7911}{0,7415s^4 + 3,1153s^3 + 4,5489s^2 + 0,7911s}$$

Hệ trên không ổn định.

b) Với $K_1 = 0,1$ ; $K_2 = 0,04$

$$W(s) = \frac{0,074s^3 - 0,267s^2 + 0,277s + 0,1582}{0,7415s^4 + 3,1153s^3 + 4,5489s^2 + 0,7911s}$$

Hệ ổn định với độ dự trữ :

$L_{dt} = 8{,}567$ db ($\omega = 0{,}9148$ rad/sec)

$\gamma_c = 58{,}51^o$ ($\omega = 0{,}1664$ rad/sec)

c) Với $K_1 = 0$

$$W(s) = K_2 \frac{0{,}7415s^2 - 2{,}967s + 3{,}9555}{0{,}7415s^4 + 3{,}1153s^3 + 4{,}5489s^2 + 0{,}7911s}$$

```
num = [0.7415 - 2.967 3.9555] ;
den = [0.7415 3.1153 4.5489 0.7911 0];
rlocus (num, den)
rlocfind (num, den)
[K, P] = rlocfind (num, den)
```

$K < 0{,}1356$

$p_{1,2} = -2{,}0983 \pm j\,1{,}315$

$p_{3,4} = -0{,}0024 \pm j\,0{,}3434$

d) Dùng bộ điều chỉnh vượt trước (hình 6.57)

$$G_c(s) = \frac{1}{K_1}\left(\frac{1 + s.T_i}{s.T_i}\right)\frac{K}{1 + \frac{K}{s.T_i}(1 - e^{-\tau s})}$$

với $K_1 = 5$ ; $\tau = 1{,}5$ sec

Chọn $T_i = 5$ sec, $K_c = 1$

Hàm Pade bậc một : $e^{-1.5s} = \dfrac{0{,}8 - 0{,}6s}{0{,}8 + 0{,}6s}$

$$W(s) = G_c(s)e^{-1.5s}\,G(s) = \frac{(1 + 5s)\,5K(0{,}6s + 0{,}8)(0{,}8 - 0{,}6s)\,5}{25s\,[5(0{,}6s + 0{,}8) + 1{,}2K](0{,}8 + 0{,}6s)(5s + 1)} =$$

$$= \frac{K(0{,}8 - 0{,}6s)}{s[5(0{,}6s + 0{,}8) + 1{,}2K]} = \frac{K(0{,}8 - 0{,}6s)}{s(3s + 4 + 1{,}2K)}$$

* Cùng điều kiện với b) : $K_c = 0{,}1$ ; $K = 0{,}1 \times 5 = 0{,}5$

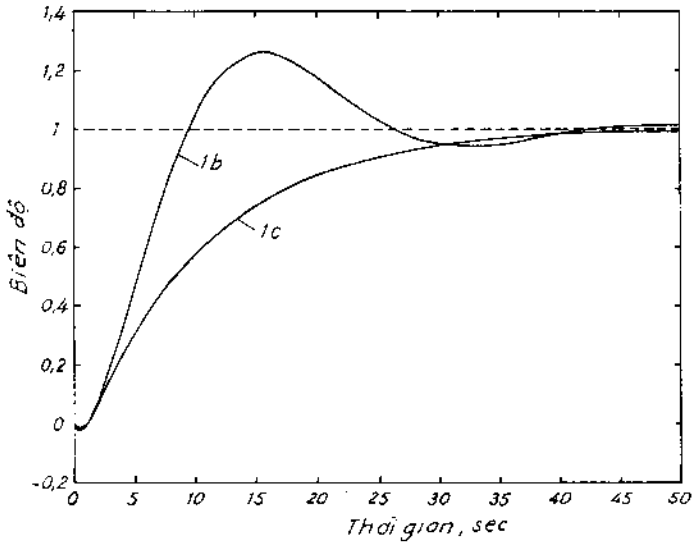
$$W_k(s) = \frac{0{,}4 - 0{,}3s}{0{,}4 + 4{,}3s + 3s^2}$$

Trường hợp b) cùng điều kiện với c) :

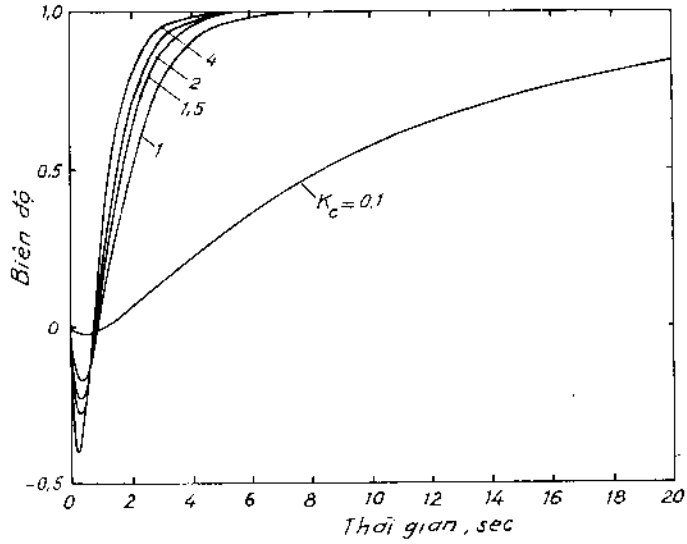
$$e^{-1.5s} = \frac{0{,}8 - 0{,}6s}{0{,}8 + 0{,}6s}$$

$$W_k(s) = \frac{0{,}16 + 0{,}28s - 0{,}3s^2}{0{,}16 + 0{,}8s + 4{,}3s^2 + 3s^3}$$

Ở hình 6.102 đường cong *1c* ứng với dùng bộ điều chỉnh vượt trước còn đường *1b* ứng với bộ điều chỉnh thông thường. Chúng có cùng thời




***Hình 6.102***




***Hình 6.103***

gian quá độ nhưng đường *1c* không có quá điều chỉnh và có bậc thấp hơn trường hợp b).

Ở hình 6.103 có các đường cong khác nhau ứng với $K_c$ khác nhau : $K_c = 0,1 \div 4$.

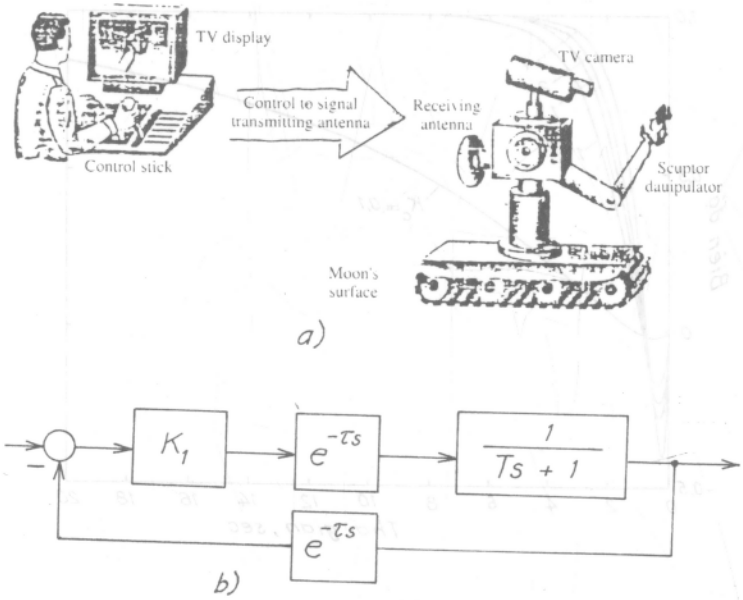
Ở mọi trường hợp, hàm quá độ đều có phần âm vì là hệ có pha không cực tiểu.

**Bài tập 6-10**

Hệ điều khiển từ xa người máy bằng vô tuyến (hình 6.104a) có sơ đồ khối như ở hình 6.104b. Với khoảng cách 238.855 dặm đến Mặt Trăng, độ trễ là T = 1,28 sec. Người điều khiển dùng cần điều khiển để điều khiển maníp đặt ở Mặt Trăng và nhận đáp ứng của maníp với hằng số thời gian là $\frac{1}{4}$ sec.

a) Để có sai lệch tĩnh $e_{ss} = 0,05$ thì $K_1$ là bao nhiêu và đánh giá về ổn định của hệ.

b) Chọn bộ điều chỉnh vượt trước để bù hằng số thời gian trễ lớn của hệ.




*Hình 6.104*

*Đáp án*

a) Hàm Pade bậc hai đối với khâu trễ :

$$e^{-2x1,28s} = \frac{0,3178s^2 - 0,7469s + 0,5835}{0,3178s^2 + 0,7469s + 0,5835}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_1} = 0,05 \ ; \ K_1 = 19$$

$$W(s) = 19 \frac{0,3178s^2 - 0,7469s + 0,5835}{(0,3178s^2 + 0,7469s + 0,5835)} \cdot \frac{1}{(0,25s + 1)}$$

$$= 19 \frac{0,3178s^2 - 0,7469s + 0,5835}{0,0794s^3 + 0,5045s^2 + 0,8927s + 0,5835}$$

Hệ trên không ổn định.

b) Dùng bộ điều chỉnh vượt trước :

$$\frac{1}{K_1}\left(\frac{1 + s.T_i}{s.T_i}\right) \frac{K}{1 + \frac{K}{s.T_i}(1 - e^{-2\tau s})}$$

Chọn $T_i = T = 0,25$ sec ;

$2\tau = 2 \times 1,28 = 2,56$ sec ;

$K = K_c K_1 = 1.$

$$W(s) = \frac{K(0,3178s^2 - 0,7469s + 0,5835)}{0,0794s^3 + 0,1867s^2 + 0,1458s + 1,4938Ks}$$

$K_c = K = 1$

$$W(s) = \frac{0,3178s^2 - 0,7469s + 0,5835}{0,0794s^3 + 0,1867s^2 + 1,6396s}$$

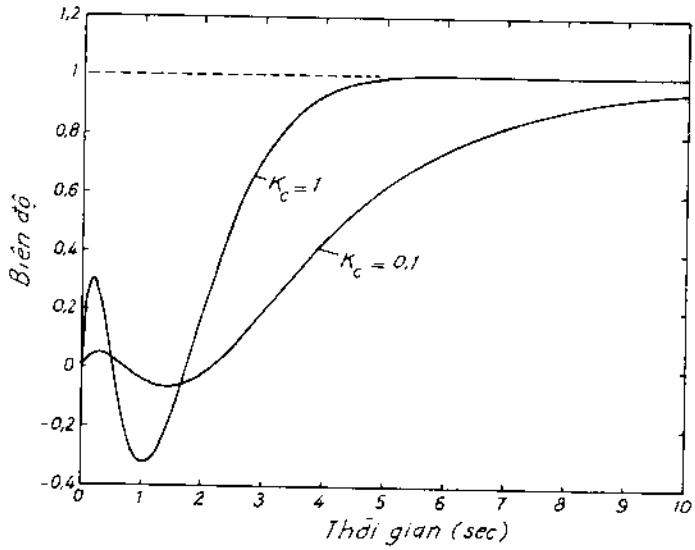
$$W_k(s) = \frac{0,3178s^2 - 0,7469s + 0,5835}{0,0794s^3 + 0,5045s^2 + 0,9072s + 0,5835}$$

$K_c = K = 0,1$

$$W_k(s) = \frac{0,03178s^2 - 0,07469s + 0,05835}{0,0794s^3 + 0,2184s^2 + 0,2205s + 0,05835}$$

Ở hình 6.105 có hàm quá độ với $K_c = 0,1$ và $K_c = 1$. Càng tăng $K_c$ phần âm của đặc tính quá độ càng lớn nhưng thời gian quá độ càng

ngắn. Sai lệch tĩnh luôn bằng 0. Thời gian trễ được mô hình hóa bằng hàm xấp xỉ liên tục.




*Hình 6.105*

*Chương VII*

# PHƯƠNG PHÁP BIẾN TRẠNG THÁI ĐỐI VỚI HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

## VII.1. PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI ĐỐI VỚI HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Hệ động học có thể mô tả bằng hàm truyền hay mô hình không gian trạng thái. Mô hình trạng thái được biểu thị bằng hệ phương trình vi phân bậc một và dưới dạng ma trận khi hệ phức tạp.

Ở phương pháp hàm truyền, các phương trình vi phân được biến đổi mà không quan tâm đến các biến trạng thái để rút ra mối quan hệ giữa đầu ra và đầu vào. Ở mô hình trạng thái, các phương trình đều đưa về dạng vi phân bậc một với các biến trạng thái được chọn và đầu ra cũng được xem là một trạng thái. Giữa hai phương pháp, tất nhiên có mối liên hệ hữu cơ.

**Ví dụ 7-1**

Động cơ điện một chiều kích từ độc lập có phương trình cân bằng điện áp và mômen ở hệ tương đối [20 - ví dụ 1-2-2-9] như sau :

$$u_{di\alpha} = r_i i_a + r_i T_i \frac{di_a}{dt} + u_i \;;$$

$$\frac{J.\Omega_n}{M_n}\frac{dn}{dt} = m_e - m_r \,.$$

từ đó :
$$\frac{di_a}{dt} = \frac{u_{di\alpha} - u_i - r_i i_a}{r_r T_i} \;;\; \frac{dn}{dt} = \frac{m_e - m_r}{T_m}$$

Vậy :
$$i_a = \frac{u_{di\alpha} - \varphi.n}{r_i(1 + s.T_i)}$$

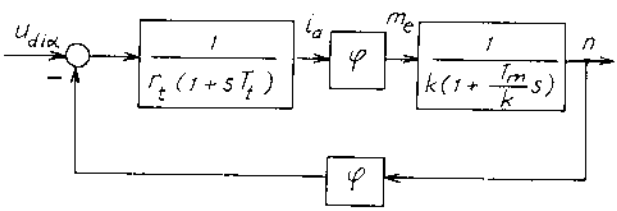
Nếu mômen tải tỷ lệ với tốc độ : $m_r = k.n$

$$n = \frac{m_e}{k\left(1 + \frac{T_m}{k}s\right)}$$

Ở đây
$$r_t = \frac{(R_a + R_i)\, I_{an}}{u_{dn}}$$

$$T_t = \frac{L_a + L_i}{R_a + R_i} \quad \text{và} \quad T_m = \frac{J.\Omega_n}{M_n}$$

Sơ đồ khối như ở hình 7.1. Với thông số cụ thể : $\varphi = 0{,}5$, $r_t = 5$ ; $T_t = 1$, $k = 0{,}8$ ; $T_m = 0{,}8$ thì sơ đồ khối như ở hình 7.2 và sơ đồ tương đương như ở hình 7.3.




*Hình 7.1*

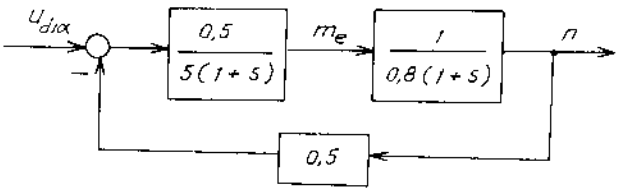
Theo hình 7.3 có thể có phương trình chính tắc sau :

$$\dot{m}_e = 0{,}1\ (u_{di\alpha} - 0{,}5n) - m_e$$

$$\dot{n} = 1{,}25\, m_e - n$$

và dạng ma trận :

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_e \\ \dot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0{,}05 \\ 1{,}25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_e \\ n \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} u_{di\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$




*Hình 7.2*

Tổng quát, ta có phương trình trạng thái :

$$\dot{X} = A.X + B.u$$

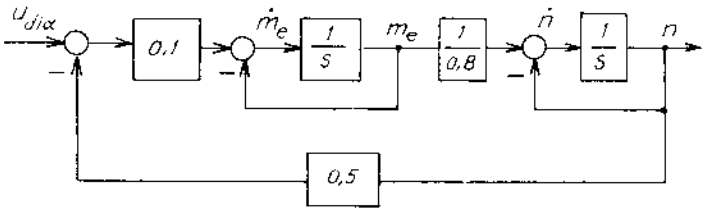
$$y = C^T.X$$

với $X = \begin{bmatrix} m_c \\ n \end{bmatrix}$ – vectơ trạng thái ; $u = \begin{bmatrix} u_{di\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$ – vectơ điều khiển.

với $A = \begin{bmatrix} -1 & -0{,}05 \\ 1{,}25 & -1 \end{bmatrix}$; $B^T = [\ 0{,}1 \quad 0\ ]$ ; $C^T = [\ 0 \quad 1\ ]$.

Danh từ trạng thái nói lên rằng, như ở ví dụ trên – ở một thời điểm t nhất định, động cơ ở một trạng thái nhất định, xác định bởi mômen $m_c$, tốc độ n v.v.. của nó.

Mô tả và phân tích thông qua vectơ và ma trận rất thuận lợi, nhất là đối với các hệ thống lớn. Nếu phương pháp hàm truyền dùng cho điều kiện đầu bằng 0 thì phương pháp biến trạng thái dùng cho trường hợp có điều kiện đầu khác 0. Phương pháp biến trạng thái còn dùng cho các hệ có thông số biến đổi và có các phần tử phi tuyến tính.




*Hình 7.3*

## VII.1.1. Các dạng phương trình trạng thái của hệ

***1. Hệ tuyến tính nhiều biến***

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (7\text{-}1a)$$

$$\dot{y}(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (7\text{-}1b)$$

với x – n × 1 vectơ trạng thái ; u – p × 1 vectơ đầu vào (vectơ điều khiển đối tượng) ; y – q × 1 vectơ đầu ra và A, B, C, D là các ma trận n × n, n × p, q × n, q × p có giá trị thực mà đầu vào là các hàm liên tục theo thời gian xác định trong miền (–∞, ∞).

Nghiệm của phương trình (7–1a) với điều kiện đầu $x(t_o) = x^o$ là :

$$x(t) = \phi(t - t_o)x^o + \int_{t_o}^{t} \phi(t_o, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \qquad (7\text{-}2)$$

mà $\phi(t, \tau)$ là ma trận trạng thái chuyển đổi của $\dot{x}(t) = A(t).x(t)$.

Từ phương trình (7-1a) và (7-2), phương trình đầu ra là :

$$y(t) = C(t)\ \phi(t, t_0)\left[x^0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t_0, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right] + D(t)u(t) \qquad (7\text{-}3)$$

*2. Hệ tuyến tính với hệ số hằng*

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \qquad (7\text{-}4a)$$

$$y(t) = C.x(t) + D.u(t) \qquad (7\text{-}4b)$$

A, B, C, D là các ma trận n x n, n x p, q x n, q x p với các hệ số hằng. Thời gian được xác định trong miền $(0, \infty)$.

Nghiệm của phương trình (7-4a) với $x(0) = x^0$ là :

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B.u(\tau)\, d\tau$$

$$= e^{At}\left[x^0 + \int_0^t e^{-A(\tau)}\, B.u(\tau)\, d\tau\right] \qquad (7\text{-}5)$$

Phương trình đầu ra :

$$y(t) = C.e^{At}\left[x^0 + \int_0^t e^{-A(\tau)}\, B.u(\tau)\, d\tau\right] + D.u(t) \qquad (7\text{-}6)$$

*3. Hệ tuyến tính gián đoạn*

$$x(k + 1) = F(k).x(k) + G(k).u(k) \qquad (7\text{-}7a)$$

$$y(k) = C(k).x(k) + D(k).u(k) \qquad (7\text{-}7b)$$

với $k = k_0, k_0+1, k_0+2 \ldots$ ($k_0$ là số nguyên) và F, G, C, D là các ma trận n x n, n x p, q x n, q x p có giá trị thực biến đổi theo thời gian.

Nghiệm của (7-7a) với $x(k_0) = x^0$ là :

$$x(k) = \phi(k, k_0)\left[x^0 + \sum_{j=k_0+1}^{k} \phi^{-1}(j, k_0)\, G(j-1)\, u(j-1)\right] \qquad (7\text{-}8)$$

mà $\phi(k, j)$ – ma trận trạng thái chuyển đổi của $x(k+1) = F(k).x(k)$.

Phương trình đầu ra là :

$$y(k) = C(k)\phi(k, k_0)\left[x^0 + \sum_{j=k_0+1}^{k} \phi^{-1}(j, k_0)G(j-1)u(j-1)\right] + D(k).u(k) \qquad (7\text{-}9)$$

*4. Hệ tuyến tính gián đoạn với ma trận hằng*

Hệ phương trình (7-7) sẽ có dạng :

$$x(k+1) = F.x(k) + G.u(k) \; ; \qquad (7\text{-}10a)$$

$$y(k) = C.x(k) + D.u(k) \; ; \qquad (7\text{-}10b)$$

với F, G, C, D là các ma trận n × n, n × p, p × n, q × p, hệ số hằng với k = 0, 1, 2, ...

Nghiệm của (7-10a) với $x(0) = x^o$ là :

$$x(k) = F^k[x^o + \sum_{j=1}^{k} F^{-j} G.u(j-1)] \qquad (7\text{-}11)$$

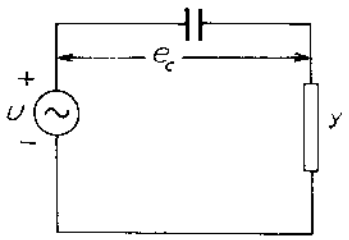
và phương trình đầu ra :

$$y(k) = C.F^k [x^o + \sum_{j=1}^{k} F^{-j} G.u(j-1)] + D.u(k) \qquad (7\text{-}12)$$

**Ví dụ 7-2**

Quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của mạch điện ở hình 7.4 được xác định bởi phương trình :

$$u = I.R + \frac{1}{C}\int i dt$$




*Hình 7.4*

Chọn biến trạng thái là $x \equiv e_c$ , ta có :

$$R.C\frac{dx}{dt} + x = u \; ;$$

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dx}{dt} + e^{\frac{t}{RC}}.\frac{x}{RC} = e^{\frac{t}{RC}}.\frac{u}{RC}$$

hay: $$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{RC}}.x\right) = e^{\frac{t}{RC}}.\frac{u}{RC}$$

Lấy tích phân hai vế từ $t_o$ đến t :

$$e^{\frac{t}{RC}}x(t)\Big|_{t_o}^{t} = \frac{1}{RC}\int_{t_o}^{t} e^{\tau/RC}.\ u(\tau)d\tau$$

cho ta: $$x(t) = \phi(t, t_o, x^o, u) = e^{-(t-t_o)/RC}.x^o + \frac{1}{RC}\int_{t_o}^{t} e^{-(t-\tau)/RC}.\ u(\tau)d\tau.$$

$$y = u(t) - x(t)$$

### VII.1.2. Mối liên hệ giữa phương trình trạng thái và hàm truyền

*1. Hàm truyền có bậc ở tử số bằng 0*

**Ví dụ 7-3**

$$\frac{y}{u} = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 9s + 3},$$

hay dạng phương trình vi phân :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} + 3y = 5u.$$

Chọn biến trạng thái :

$$x_1 \equiv y \; ; \; x_2 \equiv \frac{dy}{dt} \; ; \; x_3 \equiv \frac{d^2y}{dt^2},$$

hay $\dot{x}_1 = x_2$ ; $\dot{x}_2 = x_3$ ; $\dot{x}_3 = -3x_1 - 9x_2 - 6x_3 + 5u$

với :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ; \; \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u \; ;$$

$$y = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]x$$

*2. Hàm truyền có bậc ở tử số khác 0*

**Ví dụ 7-4**

$$\frac{y}{u} = \frac{5s^2 + 2s + 2}{s^3 + 6s^2 + 9s + 3}$$

hay dạng phương trình vi phân :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} + 3y = 5\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + 2u$$

Nếu đặt $Y = (5s^2 + 2s + 2)V$ thì :

$$\frac{V}{U} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 9s + 3}$$

và với : $x = \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ \ddot{v} \end{bmatrix}$ ; ta có $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ;

$$y = 5\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2v = [\ 2 \quad 2 \quad 5\ ]x$$

Từ đó ta có : y = C.x với C = [2 2 5]

*3. Trường hợp bậc ở tử số bằng ở mẫu số*

**Ví dụ 7-5**

$$\frac{y}{u} = \frac{K(s+a)}{s+b} = \frac{K(s+a)}{1}\ \frac{1}{s+b}$$

Phương trình vi phân có dạng :

$$\frac{dy}{dt} + b.y = K.a.u + K\frac{du}{dt}$$

Như ở ví dụ trên, phân tích $\frac{V}{U} = \frac{1}{s+b}$

$$\frac{dv}{dt} = -b.v + u \text{ với biến v.}$$

Sau đó đặt Y = K(s + a)V thì :

$$y = K\frac{dv}{dt} + K.a.v$$

và v bây giờ không phải biến trạng thái.

Khi bậc của tử số và mẫu số như nhau, ta có :

$$Y = K(1 + \frac{a-b}{s+b})\ U = K.U + X$$

mà $\frac{X}{U} = \frac{K(a-b)}{s+b}$ . Từ đó :

$$\frac{dx}{dt} = -bx + K(a-b)u\ ;$$

$$y = K.u + x$$

So sánh (7-4a) và (7-4b) với kết quả ở ba ví dụ trên ta thấy, khi bậc ở tử số bằng bậc ở mẫu số, ma trận D khác 0. Trường hợp bậc ở tử số lớn hơn bậc ở mẫu số là không phù hợp với thực tế.

*4. Ví dụ dùng chương trình MATLAB để chuyển đổi*

Với ví dụ 7-4 :

$$W(s) = \frac{5s^2 + 2s + 2}{s^3 + 6s^2 + 9s + 3}$$

*a) Từ hàm truyền sang phương trình trạng thái :*

```
num = [5, 2, 2] ; den = [1, 6, 9, 3] ;
[a, b, c, d] = tf2ss (num, den)
```

Kết quả :

$$a = \begin{bmatrix} -6 & -9 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \; c = [\ 5\ 2\ 2\ ]; \; d = 0$$

*b) Từ trạng thái trở về hàm truyền :*

```
[num, den] = ss2tf (a, b, c, d)
```

Kết quả :

```
num = 0  5  2  2
den = 1  6  9  3
```

c) Từ hàm truyền sang nghiệm 0 và cực :

```
[z, p, k] = tf2zp (num, den)
```

Kết quả :

```
z =  - 0,2000 + 0.6000i ;      p = -3.8794 ;  k = 5
     - 0,2000 - 0.6000i          = -1.6527
                                 = -0.4697
```

*d) Nghiệm không và cực trở về hàm truyền :*

```
[num, den] = zp2tf (z, p, k)
```

Kết quả :

```
num = 0  5  2  2
den = 1  6  9  3
```

*e) Nghiệm không và cực trở về trạng thái :*

```
[a, b, c, d] = zp2ss (z, p, k)
```

Kết quả :

$$a = \begin{bmatrix} -0.4679 & 0 & 0 \\ 1 & -5.5321 & -2.5321 \\ 0 & 2.5321 & 0 \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = [\ 5 \quad -25.6604 \quad -11.8706\ ]$$

*f) Từ trạng thái về nghiệm không và cực :*

```
[z, p, k] = ss2zp (a, b, c, d)
```

Kết quả :

$$z = -0.2000 + 0.6000i \; ; \qquad p = -1.6527 \; ; \; k = 5$$
$$-0.2000 - 0.6000i \qquad = -3.8794$$
$$= -0.4679$$

So sánh a) và e) thấy ma trận A có thể mô tả trạng thái hệ một cách khác nhau.

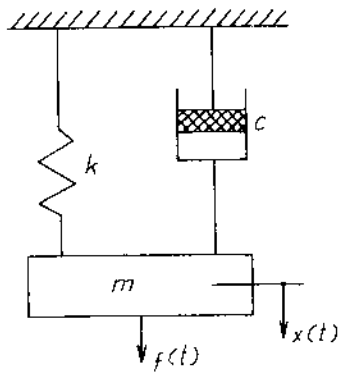
### VII.1.3. Vấn đề chọn biến trạng thái ở một hệ vật lý

Các biến trạng thái từ biến thứ hai trở đi có thể không hoặc ít có ý nghĩa vật lý, có thể không hoặc khó đo được. Đó là nhược điểm quan trọng của phương pháp biến trạng thái.

Các biến trạng thái cần được chọn sao cho chúng có thể đo được và có ý nghĩa vật lý. Điều đó có nghĩa là mô hình trạng thái không được chọn từ hệ kín mà trực tiếp từ các phương trình vi phân nguyên thủy (bậc một) và loại trừ các biến trung gian không cần thiết. Ví dụ như sau :

**Ví dụ 7-6**

Tổ hợp lò xo – trọng khối – giảm xóc như ở hình 7.5. Theo định luật Newton 2, $m.\ddot{x}$ bằng tổng các lực bên ngoài kéo trọng khối m xuống từ trạng thái cân bằng ban đầu : x = 0. Lò xo bị dãn nên có lực kéo lên $-k.x$. Trọng khối có lực đi xuống, lực giảm xóc sẽ hướng lên $-c.\dot{x}$. Lực bên ngoài f(t) tạo nên gia tốc hướng xuống, từ đó :




*Hình 7.5*

$$m.\ddot{x} = -k.x - c.\dot{x} + f(t)$$

hay $$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = f(t)$$

Với điều kiện đầu bằng 0, ta có hàm truyền :

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{m.s^2 + c.s + k},$$

Vị trí của trọng khối và tốc độ của nó có thể được chọn làm biến trạng thái :

$$x_1 = x \; ; \; x_2 = \dot{x} \; ; \; u = f \; ; \; y = x_1 \; ;$$

từ đó :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \; ,$$

$$y = [\,1 \quad 0\,]\; x.$$

**Ví dụ 7-7**

Động cơ một chiều điều khiển kích từ như ở hình 7.6. Ta có phương trình cân bằng điện áp và mômen sau :

$$\left.\begin{aligned} u_{kt} &= R.i + \mathcal{L}\frac{di}{dt} \\ U_{kt}(s) &= (R + \mathcal{L}s)I(s) \end{aligned}\right\}$$

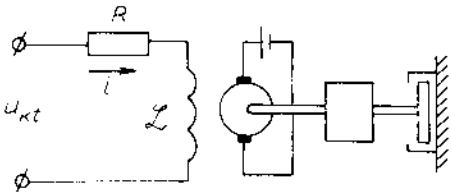
$$\left.\begin{aligned} M &= K_m i, \\ M(s) &= K_m I(s) \end{aligned}\right\}$$

Mặt khác :

$$M(t) = J.\ddot{\theta}_o(t) + B.\dot{\theta}_o(t),$$

$$M(s) = s(Js + B)\theta_o(s).$$

Từ đó :




*Hình 7.6*

$$\frac{\theta_o(s)}{u_{kt}(s)} = \frac{K_m/R.B}{(T_{dc}s + 1)\,(T_{dt}s + 1)s}$$

với $T_{dc} = J/B$ – hằng số điện cơ (J – mômen quán tính, B – hệ số giảm xóc) ; $T_{dt} = \mathcal{L}/R$ – hằng số điện từ mạch kích thích.

Vị trí động cơ, tốc độ và dòng kích từ có thể được chọn làm biến trạng thái và đầu vào, đầu ra là :

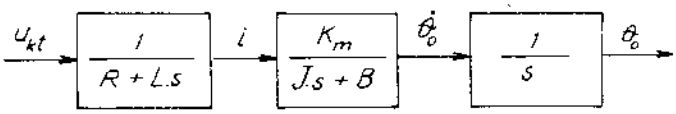
$$u \equiv u_{kt} \; ; \qquad y \equiv \theta_o$$

với :

$$x = \begin{bmatrix} \theta_o \\ \dot{\theta}_o \\ i \end{bmatrix}; \text{ ta có } \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-B}{J} & \frac{K_m}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{\mathcal{L}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\mathcal{L}} \end{bmatrix} u$$

$$y = [\,1 \;\; 0 \;\; 0\,]\; x$$

Sơ đồ khối tương ứng với hàm truyền trên như ở hình 7.7.




*Hình 7.7*

**Ví dụ 7-8**

Với ví dụ trên và các thông số cụ thể :

$B = J = \mathcal{L} = 1$ ; $R = 6$ ; $K_m = 30$, ta có hàm truyền :

$$\frac{\theta_o(s)}{u_{kt}(s)} = \frac{30}{(s+1)(s+6)s} = \frac{30}{s^3 + 7s^2 + 6s}$$

Tương ứng với phương trình vi phân :

$$\frac{d^3\theta_o}{dt^3} + 7\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 6\frac{d\theta_o}{dt} = 30u_{kt} ,$$

Với : $x = \begin{bmatrix} \theta_o \\ \dot{\theta}_o \\ \ddot{\theta}_o \end{bmatrix}$; ta có $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} u$ ,

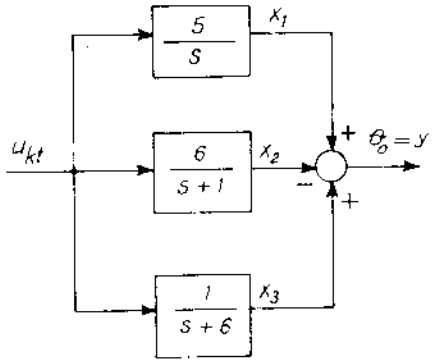
và $y = \theta_o = [1 \ 0 \ 0]x$

Ta cũng có thể biến đổi hàm truyền trên sang dạng tương đương sau :

$$\frac{\theta_o(s)}{u_{kt}(s)} = \frac{5}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{1}{s+6}$$

Sơ đồ khối gồm ba khâu nối song song như ở hình 7.8, tương ứng với phương trình :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} u ;$$




*Hình 7.8*

$$y = [1 \quad -1 \quad 1]x \text{ với } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ở đây, trong khi ma trận A là ma trận chéo thì biến trạng thái không có ý nghĩa vật lý.

### VII.1.4. Hệ nhiều biến trạng thái (hai vào, hai ra)

Đầu vào là hai vòi nước nóng và lạnh như ở hình 6.75, có van điều khiển lưu lượng và nhiệt độ. Phương trình đầu ra ứng với hình 7.9 là :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Từ hệ phương trình :

$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1$ ; $\dot{x}_2 = -5x_2 + 5u_2$ ; $\dot{x}_3 = -0{,}5x_3 + 0{,}4u_1$ ;

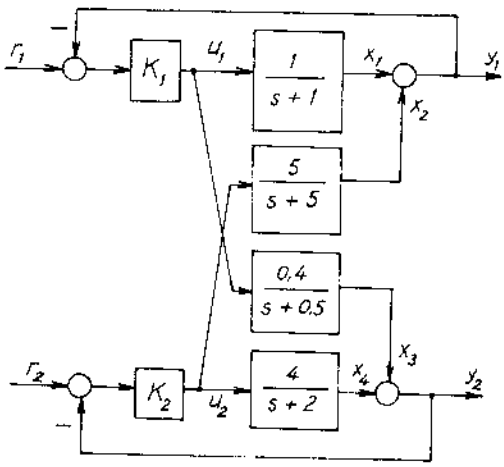
$u_1 = K_1(r_1 - y_1)$ ; $u_2 = K_2(r_2 - x_3 - x_4)$ ; $\dot{x}_4 = -2x_4 + 4u_2$ ;

$= K_1(r_1 - x_1 - x_2)$ ;

suy ra các phương trình khác và ta có hệ phương trình trạng thái:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1-K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5K_2 & -5K_2 \\ -0{,}4K_1 & -0{,}4K_1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -4K_2 & -2-4K_2 \end{bmatrix} x +$$

$$+ \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 5K_2 \\ 0{,}4K_1 & 0 \\ 0 & 4K_2 \end{bmatrix} u \; ; \qquad \text{mà } u = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$




*Hình 7.9*

## VII.2. MA TRẬN HÀM TRUYỀN ĐẠT VÀ VẤN ĐỀ ỔN ĐỊNH

Ma trận của các hàm truyền hay ma trận hàm truyền đạt được xác định theo phương trình trạng thái. Biến đổi Laplace của vectơ là biến đổi Laplace của các thành phần :

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{x_1\} \\ \cdots\cdots \\ \mathcal{L}\{x_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \cdots\cdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} ;$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{\dot{x}_1\} \\ \cdots\cdots \\ \mathcal{L}\{\dot{x}_n\} \end{bmatrix} ;$$

mà $\mathcal{L}\{\dot{x}_i(t)\} = sX_i(s) - x_i(0)$, do đó :

$$\dot{X} = A.X + B.u \tag{7-13}$$

có

$$s.X(s) - x_o = A.X(s) + B.U(s) ; \tag{7-14}$$

$$(s.I - A)X(s) = B.U(s) + x_o \tag{7-15}$$

s là đại lượng vô hướng, A là ma trận nên I là ma trận đơn vị. Đáp ứng trạng thái X(s) với điều kiện đầu duy nhất (U(s) = 0) và đáp ứng đầu ra với điều kiện đầu và tín hiệu vào có dạng :

$$X(s) = (s.I - A)^{-1}x_o ; \tag{7-16}$$

$$Y(s) = W(s)U(s) + C(s.I - A)^{-1}x_o. \tag{7-17}$$

Ma trận hàm truyền sẽ là :

$$W(s) = C(s.I - A)^{-1}B. \tag{7-18}$$

Ma trận liên hệ giữa đầu vào và đầu ra theo Laplace với điều kiện đầu bằng 0.

Ở biểu thức (7-17) thành phần thứ nhất là đáp ứng đầu vào với $x_o$ = 0 và thành phần thứ hai là đáp ứng đầu ra với điều kiện đầu (u = 0).

Với hệ r đầu vào và m đầu ra ta có :

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \cdots\cdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \cdots\cdots & W_{1r}(s) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ W_{m1}(s) & \cdots\cdots & W_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \cdots\cdots \\ u_r(s) \end{bmatrix} ;$$

$$Y_i(s) = Y_{i1}(s) + \ldots + Y_{ir}(s) ;$$

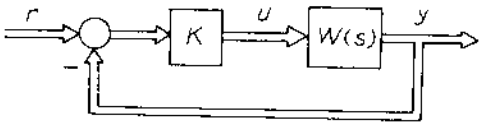
$$Y_{ij}(s) = W_{ij}(s)U_j(s).$$

**Ví dụ 7-9**

Với hệ hai vào hai ra và :

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}; \; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \; K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \text{ ta có :}$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{5}{s+5} \\ \dfrac{0,4}{s+0,5} & \dfrac{4}{s+2} \end{bmatrix}$$




Sơ đồ khối như ở hình 7.10. *Hình 7.10*

Để hệ ổn định, mọi nghiệm từ hàm truyền đạt đều là nghiệm trái. Nghịch đảo của (s.I − A) bằng ma trận liên hợp chia cho định thức tương ứng nên :

$$W(s) = \frac{C.\text{adj}\,(s.I - A)\,B}{|s.I - A|} \tag{7-19}$$

***Định lý về ổn định***

Hệ được mô tả bằng phương trình trạng thái :

$$\dot{X} = A.X + B.u, \tag{7-20}$$

$$y = C.X + D.u \tag{7-21}$$

ổn định khi và chỉ khi các giá trị riêng của ma trận hay nghiệm của phương trình đặc trưng $|s.I - A| = 0$ đều nằm ở nửa trái của mặt phẳng s.

**Ví dụ 7-10**

Kiểm tra ổn định hệ (7-20) với :

$$C = [1 \quad 0]; \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$s.I - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}; \; (s.I - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

$$W(s) = C(s.I - A)^{-1}B = \frac{[1 \;\; 0]}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$|s.I - A| = s^2 + 3s + 2.$$

Giá trị riêng là −1 và −2 nên hệ ổn định.

**Ví dụ 7-11**

Kiểm tra ổn định hệ (7–20) với :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad (s.I - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$|s.I - A| = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2).$$

Giá trị riêng là −1 và −2 nên hệ ổn định.

Chú ý là ở ví dụ này A là ma trận chéo và giá trị riêng được xác định bởi các thành phần ở đường chéo của ma trận.

## VII.3. NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI

Cũng như đối với phương pháp hàm truyền, mô hình trạng thái cho phép đánh giá về ổn định và chất lượng theo hàm quá độ. Ở đây sẽ đề cập đến một số phương pháp giải phương trình trạng thái $\dot{X} = A.X + B.u$.

### VII.3.1. Phương pháp dùng biến đổi Laplace

Phương pháp này thường dùng cho các hệ không lớn lắm hoặc hệ có một số ít mối quan hệ vào ra cần xác định.

**Ví dụ 7-12**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = [\,1 \quad 0\,]; \quad x_o = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(s.I - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}; \quad (s.I - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix};$$

vì $|s.I - A| = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ nên (7–18) có dạng :

$$W(s) = C(s.I-A)^{-1}B = \frac{[\,1 \;\; 0\,]}{(s + 1)(s + 2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s + 1)(s + 2)}$$

Đó là hàm truyền thông thường, nếu hệ có một vào một ra có thể xác định đáp ứng với tín hiệu vào theo phương pháp thông thường. Từ (7–16) có thể xác định đáp ứng của hệ với điều kiện đầu $x_o$.

$$X(s) = (s.I - A)^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Ở đây dùng phương pháp khai triển thành phân thức đơn giản, từ đó :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

**Ví dụ 7-13**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_o = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Đáp ứng đầu ra của $x_o$ với đầu vào là bậc thang đơn vị.

$$Y = C.X = C(s.I - A)^{-1}(B.U + x_o) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

vì

$$(s.I - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

Sau khi dùng phân thức đơn giản :

$$Y = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 + \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{1-3s}{s(s+2)} \end{bmatrix},$$

ta có :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 0{,}5(1 - 7e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

### VII.3.2. Phương pháp dùng ma trận chuyển tiếp

Đối với phương trình vô hướng $\dot{x} = a.x + b.u$, $x(0) = x_o$ có nghiệm là $x(t) = e^{at}x_o + \int_0^t e^{a(t-\tau)}b.u(\tau)d\tau$ mà :

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!} a^2t^2 + \frac{1}{3!} a^3t^3 + \ldots$$

Tương tự như thế cho trường hợp ma trận: $\dot{X} = A.X$ (phương trình thuần nhất) :

$$X(t) = e^{At}X_o \; ; \qquad (7\text{-}22a)$$

$$\dot{X} = A.X + B.u \; : \; X(t) = e^{At}Xo + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B.u(\tau)d\tau \ldots \qquad (7\text{-}22b)$$

với :

$$e^{At} = I + A.t + \left(\frac{1}{2!}\right)A^2t^2 + \left(\frac{1}{3!}\right)A^3t^3 + \ldots \qquad (7\text{-}23)$$

Để chứng minh (7-22a), lấy đạo hàm (7-23) :

$$\frac{de^{At}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(I + At + \left(\frac{1}{2!}\right) A^2t^2 + \ldots\right)$$

$$= A + \left(\frac{2}{2!}\right)A^2t + \left(\frac{3}{3!}\right) A^3t^2 + \ldots$$

$$= A\left(I + A.t + \left(\frac{1}{2!}\right) A^2t^2 + \ldots\right.$$

$$= Ae^{At} = e^{At}A.$$

Lấy đạo hàm của nghiệm (7-22a) :

$$\dot{X} = \frac{d}{dt} e^{At}X_o = Ae^{At}X_o = A.X,$$

còn điều kiện đầu $X(0) = e^{AO}X_o = (I + AO + \ldots)X_o = X_o$

Như vậy, cả phương trình vi phân và điều kiện đầu cũng được thỏa mãn.

Ma trận $e^{At}$ nối tiếp trạng thái ở thời điểm t với trạng thái ở điểm 0 nên gọi là *ma trận chuyển tiếp* :

$$\phi(t) = e^{At}.$$

Để chứng minh (7-22b) ta dùng đến một số đặc điểm tương tự với trường hợp vô hướng.

Vì $x(t_2 + t_1) = e^{A(t_2+t_1)}x_o$ hay $x(t_2 + t_1) = e^{At_2}x(t_1) = e^{At_2}e^{At_1}x_o$ nên :

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} \; ;$$

$$\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2). \qquad (7\text{-}24)$$

Với :

$$t_2 = -t_1 = t \; ; \; I = e^{-At} \, e^{At}; \; (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

Giả thiết nghiệm :

$$x(t) = e^{At}f(t) \; ; \; \dot{x} = Ae^{At}f + e^{At}\dot{f} = Ax + e^{At}\dot{f}$$

Để thỏa mãn $\dot{x} = A.x + B.u$ thì $e^{At}\dot{f} = B.u$. (7-25)

Từ (7-25) : $\dot{f} = e^{-At}Bu$. Bây giờ lấy tích phân ta có :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \, B.u(\tau)d\tau.$$

Sau khi thay thế f(t) vào nghiệm đã giả thiết trên, ta có (7-22b), vì $x(0) = e^{A0}f(0) = f(0)$.

Một dạng khác của ma trận chuyển tiếp rút ra từ phương trình $X(s) = (s.I - A)^{-1}x_0$ ở (7-16) với đáp ứng trạng thái của điều kiện đầu. Nếu so sánh $x(t) = e^{At}x_0$ với (7-16) ta thấy :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s.I - A)^{-1}\}.$$

### VII.3.3. Nghiệm gián đoạn

Như ở hình 7.11, trục thời gian được gián đoạn hóa với chu kỳ T và $u_i(t)$ được xấp xỉ hóa bằng đường bậc thang. Như vậy (7-22b) với t = T có dạng :

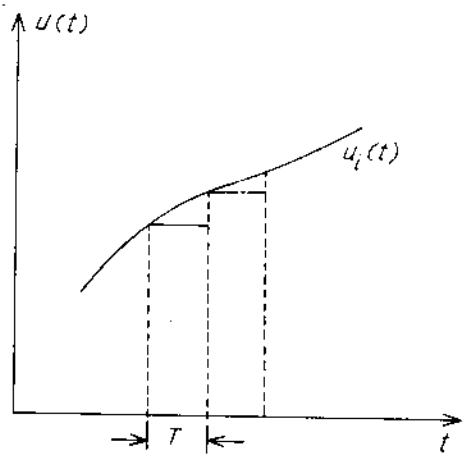
$$X(T) = e^{AT}X(0) + $$

$$+ \; e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau}d\tau \, . \, B.u(0)$$

hay $X(T) = \phi X(0) + \Delta u(0)$

với $\phi = e^{AT}$,

$$\Delta = e^{AT}\int_0^T e^{-A\tau}d\tau.B \qquad (7\text{-}26)$$




*Hình 7.11*

Với thời khoảng T tiếp theo, X(T) là điều kiện đầu :

$$X(2T) = \phi X(T) + \Delta u(T).$$

Ở thời khoảng k, biểu thức chung là :

$$X_{k+1} = \phi X_k + \Delta u_k. \qquad (7\text{-}27)$$

Để tính toán $\phi$, dùng chuỗi (7-23) với số lượng các thành phần sao cho đủ chính xác. Xem $\phi(T)$ như $\left[\phi\left(\frac{T}{n}\right)\right]^n$ (mà n là một số dương) sao cho $\frac{A.T}{n}$ đủ nhỏ.

Xác định $\Delta$ theo tích phân (7-26) :

$$\Delta = e^{AT}(-e^{-AT}A^{-1} + A^{-1})B = (\phi - I)A^{-1}B. \qquad (7\text{-}28)$$

Nếu A suy biến, $e^{A(T-\tau)}$ ở (7-26) có dạng chuỗi và :

$$\Delta = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(T-\tau)^k}{k!} d\tau . B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} B. \qquad (7\text{-}29)$$

### VII.3.4. Nghiệm giián đoạn xấp xỉ

Vectơ xấp xỉ của $\dot{X}$ có thể được mô tả bởi :

$$\dot{X} = \frac{1}{T}[X(t+T) - X(t)], \qquad (7\text{-}30)$$

và phương trình $\dot{X} = A.X + B.u$ được xấp xỉ bởi :

$$X(t+T) = (I + A.T)X(t) + T.B.u(t).$$

Đó là phương trình (7-27) với :

$$\phi = I + A.T \; ; \; \Delta = T.B,$$

mà $\phi$ và $\Delta$ chỉ có một thành phần của chuỗi cho nên T cần chọn đủ nhỏ, thường là 1/10 của hằng số thời gian bé nhất của hệ.

**Ví dụ 7-14**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix}; \qquad (s.I - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & s + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$|s.I - A| = \left(s + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (s+1)(s+0{,}5) \; ;$$

$$(s.I - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+0{,}5)} \begin{bmatrix} s + \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & s + \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Sau khi dùng phân thức đơn giản đối với $e^{At}$, ta có :

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s.I - A)^{-1}\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-0,5t} & e^{-t} - e^{-0,5t} \\ e^{-t} - e^{-0,5t} & e^{-t} + e^{-0,5t} \end{bmatrix}.$$

Kết quả tính toán theo (7-26) và (7-30) cho T = 1 và T = 0,1 như sau :

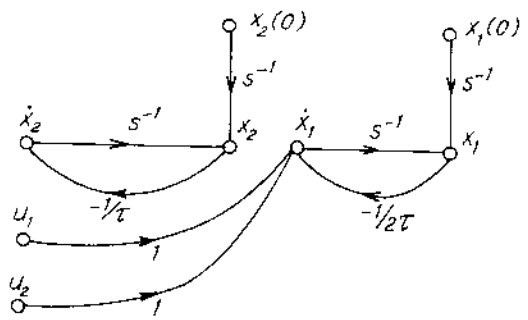
| | T = 1 | T = 0,1 |
|---|---|---|
| Với (7-26) : | $\begin{bmatrix} 0,4872 & -0,1193 \\ -0,1193 & 0,4872 \end{bmatrix}$; | $\begin{bmatrix} 0,9280 & -0,0232 \\ -0,0232 & 0,9280 \end{bmatrix}$ |
| Với (7-30) : | $\begin{bmatrix} 0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$; | $\begin{bmatrix} 0,9250 & -0,0250 \\ -0,0250 & 0,9250 \end{bmatrix}$ |

Từ kết quả trên, với T = 1, biểu thức xấp xỉ (7-30) có sai số lớn vì rằng hằng số thời gian của hệ là $T_1 = 1$, $T_2 = 2$. Chỉ khi T = 0,1 bằng 1/10 của hằng số thời gian bé ($T_1 = 1$) thì độ chính xác mới có thể chấp nhận được.

Các phương pháp dùng chương trình chuẩn như Runge - Kutta hay phương pháp dự báo - hiệu đính thỏa mãn với các hệ bé ; với hệ lớn đòi hỏi nhiều thời gian tính.

## VII.4. ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ QUAN SÁT ĐƯỢC

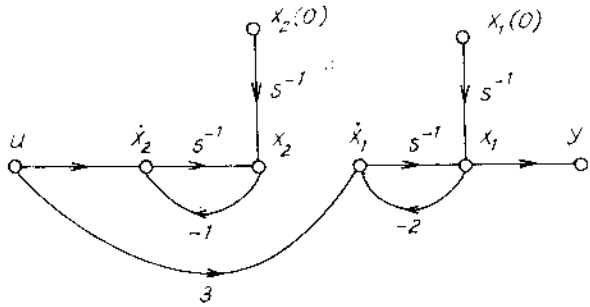
Các biến trạng thái xuất hiện từ các biến đổi toán học. Số lượng các biến trạng thái thường lớn hơn số lượng các biến đầu ra có thể đo được. Có phải tất cả các biến trạng thái đều có thể điều khiển được hay không ? Có thể xác định được tất cả các trạng thái từ các đầu ra đo được hay không ? Theo hình 7.12 và 7.13 có thể có nhận xét trực quan về khả năng điều khiển được và quan sát được.




*Hình 7.12*

Ở hình 7.12, điều khiển u(t) chỉ tác động được biến trạng thái $x_1(t)$ chứ không

tác động được đến trạng thái $x_2(t)$ nên biến trạng thái ở hình 7.12 là không điều khiển được hoàn toàn. Ở hình 7.13 trạng thái $x_2(t)$ không thể tác động đến đầu ra y(t) dầu bằng cách nào đi nữa, nên biến trạng thái ở hình 7.13 là không quan sát được hoàn toàn.




*Hình 7.13*

Không phải mọi trường hợp về điều khiển được và quan sát được đều dễ nhận thấy như ở ví dụ trên nên cần xét đến điều kiện điều khiển được và quan sát được một cách đầy đủ hơn.

***1. Định nghĩa***

Hệ điều khiển :

$$\left.\begin{aligned} \dot{X} &= A.X + B.u \\ y &= C.X + D.u \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}31)$$

hay còn gọi là một cặp ma trận (A, B) *là điều khiển được* nếu và chỉ nếu tồn tại điều khiển u có thể đưa trạng thái x(0) của hệ đến trạng thái x(T) trong một thời gian hữu hạn T.

Hệ điều khiển (7-31) hay một cặp ma trận (C, A) *là quan sát được* nếu biến trạng thái x(0) được xác định khi biết được u và y trong thời khoảng hữu hạn $0 < t < T$.

***2. Xác định điều kiện điều khiển được và quan sát được***

Nếu dùng biến đổi trung gian X = U.z, biểu thức (7-31) có dạng :

$$\dot{Z} = \Lambda . z + (V'B)u \ ;$$

$$y = (C.U).z + D.u.$$

Giả sử ở hàng thứ i của (V'B) chỉ có các phần tử bằng 0, $z = \lambda_i z_i$, thì trạng thái ấy sẽ không điều khiển được bởi u. Cũng như vậy, nếu cột thứ j của (CU) chỉ có các phần tử bằng 0 thì "mốt" (mode) ấy sẽ không quan sát được ở đầu ra.

*Định lý 1.*

Hệ (7-1) là điều khiển được nếu và chỉ nếu V'B không có hàng chứa

các phần tử đều bằng 0. Hệ là quan sát được nếu và chỉ nếu CU không có cột chứa các phần tử đều bằng 0.

*Định lý 2.*

Cặp ma trận (A, B) là điều khiển được nếu và chỉ nếu ma trận :

$$C_0 = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; . \; . \; . \;\; A^{n-1}B] \qquad (7\text{-}32)$$

có số hạng bằng n, tức là n x n ma trận $C_0$ không suy biến hoặc có n cột tuyến tính độc lập, hay định thức của $C_0$ khác 0.

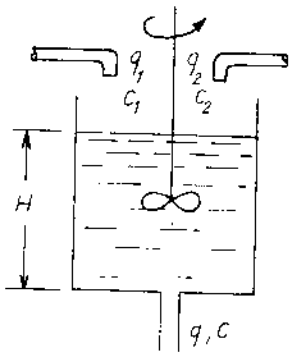
Cặp ma trận (C'A) là quan sát được nếu và chỉ nếu ma trận :

$$O_b = [C' \;\; A'C' \;\; A'^2C' \;\; ... \;\; A'^{n-1}C'] \qquad (7\text{-}33)$$

có số hạng bằng n hay khi định thức của $O_b$ khác 0. Dấu "'" là dấu của ma trận chuyển vị tương ứng.

**Ví dụ 7-15**

Ở hình 7.14 có bể trộn với $q_1$, $c_1$ và $q_2$, $c_2$ là lưu lượng và nồng độ hai vòi ở đầu vào ; q, c là lưu lượng và nồng độ vòi chảy ra của dung dịch ; V là dung tích của bình chứa ; H là chiều cao của dung dịch trong bình.




*Hình 7.14*

Phương trình cân bằng khối lượng là :

$$\frac{d}{dt} V(t) = q_1(t) + q_2(t) - q(t) \;;$$

$$\frac{d}{dt} [c(t)V(t)] = c_1q_1(t) + c_2q_2(t) - c(t)q(t).$$

Lưu lượng q(t) được đặc trưng bởi dòng chảy rối:

$$q(t) = k\sqrt{H(t)} = k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} \qquad (7\text{-}34)$$

mà S là diện tích bình chứa (S = const) ; k là hệ số tỷ lệ.

Ở trạng thái cân bằng :

$$q_1(t) = q_{10} \;;\; q_2(t) = q_{20} \;;\; q(t) = q_0 \;;$$

$$V(t) = V_0 \;;\; c(t) = c_0.$$

Do đó từ hệ phương trình trên ta có :

$$0 = q_{10} + q_{20} - q_0 \;;$$

$$0 = c_1q_{10} + c_2q_{20} - c_0q_0 \;,$$

và $$q_o = k\sqrt{\frac{V_o}{S}}$$

Tuyến tính hóa (7-34) theo chuỗi Taylor ở lân cận $(q_o, V_o)$ ta có :

$$q(t) - q_o = \frac{k}{\sqrt{S}} \frac{\partial\sqrt{V(t)}}{\partial V(t)}\Big|_{V=V_o} (V(t) - V_o)$$

hay $$\tilde{q}(t) = \frac{k}{2V_o}\sqrt{\frac{V_o}{S}} \cdot \tilde{V}(t)$$

mà $$\tilde{q}(t) = q(t) - q_o \; ; \; \tilde{V}(t) = V(t) - V_o \; ;$$

$$q_1(t) = q_{10} + \tilde{q}_1(t) \; ; \; q_2(t) = q_{20} + \tilde{q}_2(t)$$

$$c(t) = c_o + \tilde{c}(t).$$

Cuối cùng từ các biểu thức trên ta có dao động quanh trạng thái cân bằng :

$$\dot{\tilde{V}}(t) = \tilde{q}_1(t) + \tilde{q}_2(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_o}{V_o}\tilde{V}(t) \; ;$$

$$\dot{\tilde{c}}(t)V_o + c_o\dot{\tilde{V}}(t) = c_1\tilde{q}_1(t) + c_2\tilde{q}_2(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{c_o q_o}{V_o}\tilde{V}(t) - q_o\tilde{c}(t)$$

Dùng $\tau \equiv \frac{V_o}{q_o}$ và các biến trạng thái :

$$x_1(t) = \tilde{V}(t) \; ; \qquad u_1(t) = \tilde{q}_1(t) \; ; \qquad y_1(t) = \tilde{q}(t) \; ;$$

$$x_2(t) = \tilde{c}(t) \; ; \qquad u_2(t) = \tilde{q}_2(t) \; ; \qquad y_2(t) = \tilde{c}(t) \; .$$

ta có :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1 - c_o}{V_o} & \frac{c_2 - c_o}{V_o} \end{bmatrix} u(t) \; ;$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \; .$$

Với các thông số cho trước sau đây :

$q_{10} = 10$ l/sec ; $c_1 = 9$ g.mol/l ; $V_o = 1500$ l

$q_{20} = 20$ l/sec ; $c_2 = 18$ g.mol/l

Từ đó tính ra $\tau = 50$ và $c_o = 15$ g.mol/l.

Do đó :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0 \\ 0 & -0{,}02 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}004 & 0{,}002 \end{bmatrix} u(t) \; ;$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Với điều kiện các nồng độ $c_1$ và $c_2$ đều như nhau thì $c_1 = c_2 = c_o$ nên :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t).$$

và sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 7.12.

Vậy khi nồng độ như nhau thì biến $x_2(t)$ (sự thay đổi của nồng độ đầu ra $c_o$) không có liên quan gì đến điều khiển u (sự thay đổi lưu lượng ở hai đầu vào). Nói cách khác là ta không thể đưa trạng thái $x_2(t)$ từ $x_2(t_o)$ đến $x_2(t_1)$ trong thời khoảng hữu hạn $(t_1 - t_o)$. Nếu $c_1 \neq c_2$ thì hệ thống hoàn toàn điều khiển được. Trong ví dụ trên, việc phân tách biến trạng thái $x_2(t)$ khỏi điều khiển u(t) như ở hình 7.12 trên chỉ là *điều kiện đủ*. Hãy xem một trường hợp khác.

**Ví dụ 7-16**

Một mạch điện như ở hình 7.15a, với :

$x_1(t) \equiv e_1(t)$ ;

$x_2(t) \equiv e_2(t)$.

Phương trình vi phân đối với hệ trên là :

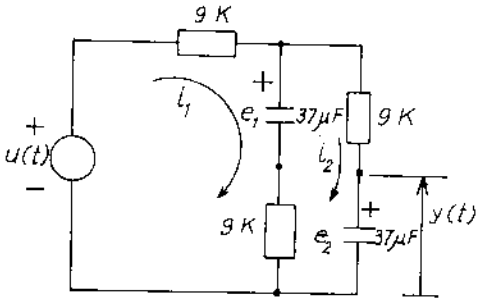
$$9.10^3 i_1 + x_1 + 9 \cdot 10^3 (i_1 - i_2) - u = 0 \; ;$$

$$9 \cdot 10^3 i_2 + x_2 + 9 \cdot 10^3 (i_2 - i_1) - x_1 = 0.$$

$$37 \cdot 10^{-6} \frac{dx_1}{dt} = i_1 - i_2 \; ;$$

$$37 \cdot 10^{-6} \frac{dx_2}{dt} = i_2 \; .$$

Phương trình trạng thái có dạng :




*Hình 7.15a*

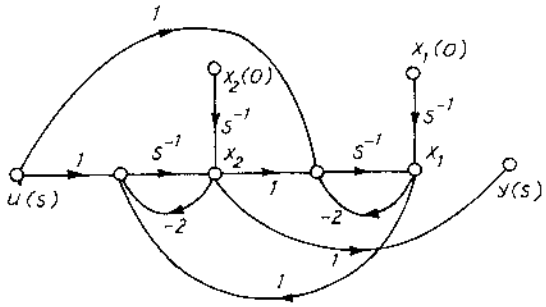
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \ ;$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 7.15b với điều kiện ban đầu bằng không, $x(0) = 0$ :

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} b.u(\tau) d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) \ d\tau \right)$$




*Hình 7.15b*

Như vậy $x_1(t) = x_2(t)$ cho nên không thể có điều khiển u(t) nào có thể chuyển trạng thái x(0) đến trạng thái $x_1(t) \neq x_2(t)$. Hệ trở nên không điều khiển được mặc dù cả hai biến trạng thái $x_1$ và $x_2$ đều liên hệ với điều khiển u(t) như ở hình 7.15b.

**Ví dụ 7-17**

Nếu luật điều khiển là u(t) = k.x(t) thì điều kiện điều khiển được được thỏa mãn nhưng chưa đủ để có bộ điều khiển thích hợp. Để có điều này phải dùng hồi tiếp của mọi trạng thái. Trong thực tế không phải mọi biến trạng thái đều đo được cho nên ta cần *bộ quan sát* xây dựng trên cơ sở tính chất quan sát được – cơ sở của khả năng ước lượng trạng thái x(t) từ đầu ra. Đối tượng là quan sát được nếu mọi biến của x(t) có thể được quan sát bằng cách đo đầu vào và đầu ra. Ở hình 7.13 việc phân tích trạng thái $x_2(t)$ so với đầu ra y(t) cũng chỉ là điều kiện đủ. Xét mạch điện ở hình 7.16 với trạng thái được chọn :

$$x_1(t) \equiv i_1(t) \ ;$$
$$x_2(t) \equiv i_2(t).$$

Phương trình vi phân có dạng :

$$\dot{x}_{(1)} + x_1 + \dot{x}_2 + x_2 - u = 0 \ ,$$
$$(x_1 - x_2) - x_2 - \dot{x}_2 = 0.$$

Phương trình trạng thái như sau :

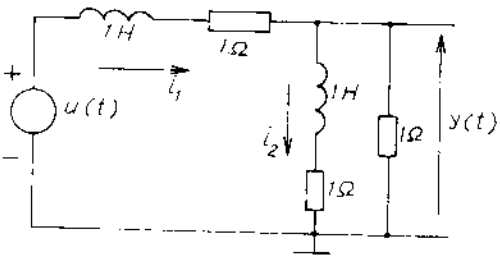
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \; ;$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Cả hai biến trạng thái đều liên hệ với y(t). Với u(t) = 0 ta có :

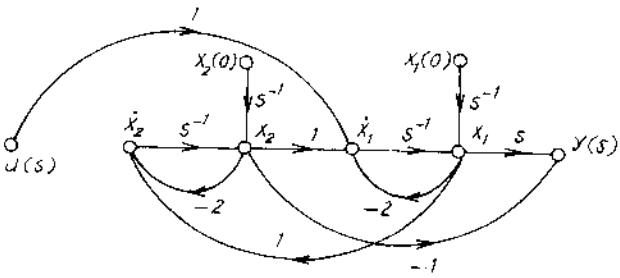
$y(t) = C.e^{At}x^{0} = (x^{0}_1 - x^{0}_2)e^{-3t}$;

Sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 7.17. Như vậy tín hiệu ra tùy thuộc vào $x^{0}_1 - x^{0}_2$ nên với trạng thái ban đầu như nhau, hệ trên sẽ không quan sát được vì sẽ không tạo nên tín hiệu ra.




*Hình 7.16*

Trên đây là những ví dụ minh họa điều kiện điều khiển được và quan sát được dựa trên cơ sở phân tích hệ theo điều kiện vật lý. Dưới đây là các ví dụ áp dụng các biểu thức (7-32) và (7-33) về ma trận điều khiển được và quan sát được.




*Hình 7.17*

**Ví dụ 7-18**

Hệ gồm khối lượng – lò xo – giảm xóc như ở hình 7.18. Hai mặt bằng liên hệ nhau và với mặt đất bằng các hệ lò xo và đệm giảm xóc.

Vị trí ban đầu là vị trí cân bằng của lò xo và giảm xóc (bỏ qua lực hút của Trái Đất).

Có bốn đại lượng tích lũy năng lượng nên chọn bốn biến trạng thái là :

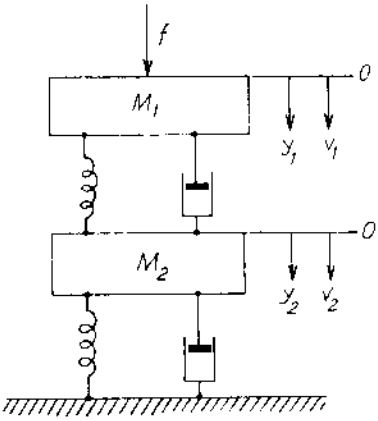
$x_1(t) \equiv y_1(t)$ – độ dịch chuyển của mặt bằng *1*

$x_2(t) \equiv y_2(t)$ – độ dịch chuyển của mặt bằng *2*

$x_3(t) \equiv v_1(t)$ – tốc độ di chuyển của mặt bằng *1*

$x_4(t) \equiv v_2(t)$ – tốc độ di chuyển của mặt bằng *2*

Biến đầu vào : $u \equiv f(t)$ là lực tác dụng.




*Hình 7.18*

Phương trình vi phân mô tả động học của hệ nối trên như sau :

$$\dot{x}_1 = x_3 \; ; \; \dot{x}_2 = x_4.$$

$$M_1\dot{x}_3 + B_1(x_3 - x_4) + K_1(x_1 - x_2) = u \; ;$$

$$M_2\dot{x}_4 + B_1(x_4 - x_3) + K_1(x_2 - x_1) + B_2x_4 - K_2x_3 = 0.$$

Phương trình trạng thái tương ứng là :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{K_1}{M_1} & \dfrac{K_1}{M_1} & -\dfrac{B_1}{M_1} & \dfrac{B_1}{M_1} \\ \dfrac{K_1}{M_2} & -\dfrac{K_1 + K_2}{M_2} & \dfrac{B_1}{M_2} & -\dfrac{(B_1 + B_2)}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} u;$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Để giản đơn trong tính toán, bỏ qua khối lượng của hai mặt bằng ($M_1 = M_2 = 0$), giả thiết $K_1 = B_1 = K_2 = 1$ còn $B_2$ là thông số biến đổi được. Vậy, độ dịch chuyển của hai mặt bằng được mô tả bởi phương trình :

$$\dot{X}(t) = A.x(t) + b.u(t)$$

với : $$A = \begin{bmatrix} -1 & \dfrac{B_2 - 1}{B_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{B_2} \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} \dfrac{B_2 + 1}{B_2} \\ \dfrac{1}{B_2} \end{bmatrix};$$

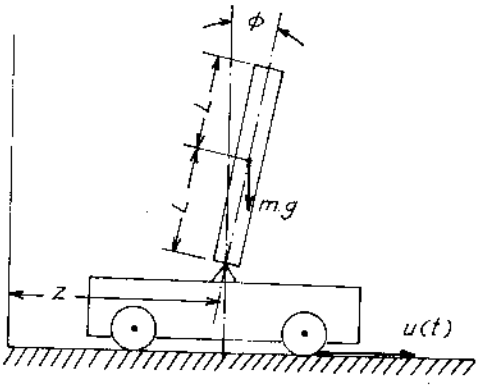
Ma trận điều khiển được là :

$$C_o = [\,b \quad A.b\,] = \begin{bmatrix} \dfrac{B_2 + 1}{B_2} & \dfrac{-1 - B_2^2}{B_2^2} \\ \dfrac{1}{B_2} & -\dfrac{1}{B_2^2} \end{bmatrix}.$$

Nếu $B_2 \neq 1$ thì $\det(C_o) \neq 0$, hệ là điều khiển được và ta cũng có $n = 2$.

**Ví dụ 7-19**

Hệ con trỏ và bàn trượt như ở hình 7.19. Bàn trượt được điều khiển bằng động cơ con và tạo nên lực u(t). Nếu không có sự tham gia của lực điều khiển thì con trỏ sẽ ở trạng thái không ổn định. Như vậy, hệ không ổn định có thể điều khiển được không ?




*Hình 7.19*

Trọng tâm của con trỏ và bàn trượt được xác định theo hệ tọa độ sau :

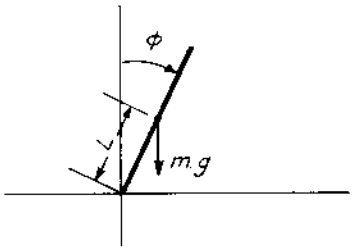
- xe trượt : – vị trí nằm ngang ≡ z
- con trỏ : – vị trí nằm ngang ≡ z + L$\sin\phi$
  – vị trí thẳng đứng ≡ L$\cos\phi$

Mô tả động học của hệ trên được xác định bởi vị trí và tốc độ của xe trượt cũng như vị trí góc và tốc độ góc của con trỏ. Do đó chọn các biến trạng thái sau :

- vị trí xe trượt : $x_1(t) \equiv z(t)$
- tốc độ xe trượt : $x_2(t) \equiv \dot{z}(t)$
- vị trí (góc) của con trỏ : $x_3(t) \equiv \phi(t)$
- tốc độ góc của con trỏ : $x_4(t) \equiv \dot{\phi}(t)$

Với m – trọng khối con trỏ ; J – mômen quán tính con trỏ quy về trọng tâm : M – trọng khối xe trượt. Tác dụng lên con trỏ có lực m.g, phản lực ngang H và phản lực dọc V. Mômen đối với trọng tâm là :

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2} = V.L\sin\phi(t) - H.L\cos\phi(t) \quad (7\text{–}35)$$




*Hình 7.20*

Tổng lực tác động lên con trỏ theo cả hai hướng là :

$$V - m.g = m\frac{d^2}{dt^2}(L\cos\phi(t)) \; ; \quad (7\text{–}36)$$

$$H = m.\frac{d^2}{dt^2}\left[z(t) + L\sin\phi(t)\right]. \quad (7\text{–}37)$$

Tổng lực tác động lên xe lăn :

$$u - H = M\frac{d^2z(t)}{dt^2}. \quad (7\text{–}38)$$

Mục tiêu để giữ cho con trỏ ở vị trí thẳng đứng nên có thể giả thiết là $\phi$ rất bé và $\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1$. Từ đó các biểu thức (7–35) ÷ (7–38) cho ta :

$$m.L\ddot{\phi} + (m + M)\ddot{z} = u \; ; \quad (7\text{–}39)$$

$$(J + m.L^2)\ddot{\phi} + m.L\ddot{z} - m.g.L.\phi = 0 \; . \quad (7\text{–}40)$$

Với các thông số sau đây : M = 1 kg ; m = 0,15 kg ; L = 1 m ; g = 9,81 m/sec$^2$ ; $J = \frac{4}{3}m.L^2 = 0{,}2$ kg.m$^2$. Các phương trình (7–39) và (7–40) có dạng :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5809 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4,4537 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,9211 \\ 0 \\ -0,3947 \end{bmatrix} u \ ;$$

$$y = [0\ 0\ 1\ 0]X = CX$$

Ma trận quan sát là :

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4,4537 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,4537 \end{bmatrix}$$

Định thức này bằng 0 ($\det(O_b) = 0$) nên hệ không quan sát được.

Nếu lấy độ dịch chuyển của bàn trượt z(t) làm tín hiệu ra, lúc ấy :

$$C = [1\ 0\ 0\ 0] \ ;$$

thì ma trận quan sát là :

$$O_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5809 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5809 \end{bmatrix}$$

và $\det(O_b) = 0,3374 \neq 0$, hệ trở nên quan sát được. Các đại lượng $\dot{z}(t)$, $\phi(t)$ và $\dot{\phi}(t)$ đều có thể xác định được bằng cách quan sát z(t) trong thời khoảng bất kỳ.

*3. Dùng chương trình MATLAB để đánh giá hệ thống*

Với ví dụ 7-17 :

```
a = [-2, 1 ; 1, -2] ;
b = [1 ; 0] ; c = [1, -1] ;
Ob = obsv (a, c)
rank (Ob)
det (Ob)
```

ta có kết quả $\text{rank}(O_b) = 1$ hay đối với hệ một đầu ra thì $\det(O_b) = 0$ thì hệ là không quan sát được.

```
C_O = ctrb (a, b)
rank (C_O)
det (C_O)
```

Kết quả là rank($C_O$) =2 hay đối với hệ một đầu vào det($C_O$) = 1 ≠ 0 thì hệ trên là điều khiển được.

## VII.5. TỔNG HỢP HỆ KÍN THEO BIẾN TRẠNG THÁI

Theo biến trạng thái, thường dùng các phương pháp tổng hợp sau :

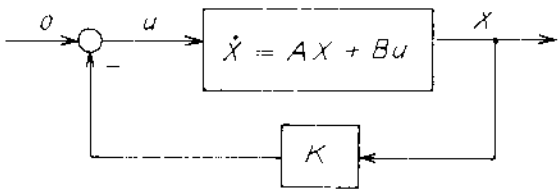
- Phương pháp áp đặt nghiệm số ;
- Phương pháp xác định điều khiển tối ưu ;
- Phương pháp dùng mô hình tích phân.

### VII.5.1. Tổng hợp theo phương pháp áp đặt nghiệm

Nội dung của phương pháp là dùng các phản hồi trạng thái với các hệ số $K_i$ sao cho phân bố nghiệm của hệ kín là tối ưu. Như vậy, đối với hệ :

$\dot{X} = A.X + B.u.$ (7-41)

Điều khiển tối ưu là :




*Hình 7.21*

$$u = -K.X. \qquad (7\text{-}42)$$

mà vectơ K được tính theo phân bố tối ưu của nghiệm số hệ kín (hình 7.21).

**Ví dụ 7-20a**

Hệ điều chỉnh góc quay của động cơ có graph tín hiệu như ở hình 7.22. Hàm truyền của đối tượng có dạng :

$$G(s) = \frac{30}{(s+6)(s+1)s} = \frac{30}{s^3 + 7s^2 + 6s}$$

Nếu dùng bộ điều chỉnh PD thông thường, ví dụ : $G_c(s) = K_c + K_d s$ thì phương trình đặc trưng của hệ kín có dạng :

$$1 + G_c(s)G(s) = s^3 + 7s^2 + (6 + 30K_d)s + 30K_c = 0 \quad (7\text{-}43)$$

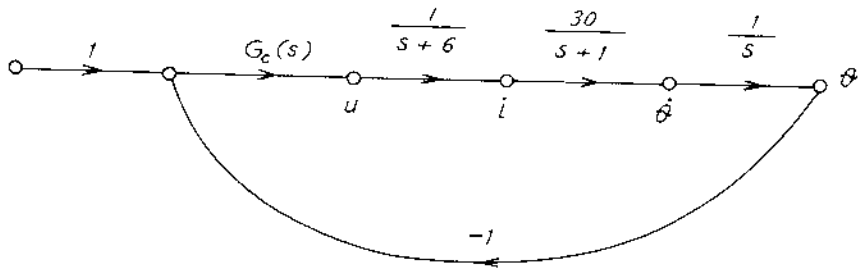
$K_c$ và $K_d$ được chọn theo phân bố nghiệm của hệ kín. Đối với ví dụ trên, hệ bậc ba có phương trình đặc trưng với ba nghiệm $p_1$, $p_2$, $p_3$ là :

$$(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 - (p_1 + p_2 + p_3)s^2 + \ldots = 0 \quad (7\text{-}44)$$

Tổng của các nghiệm này, so sánh với (7-43) :

$$(p_1 + p_2 + p_3) = -7$$

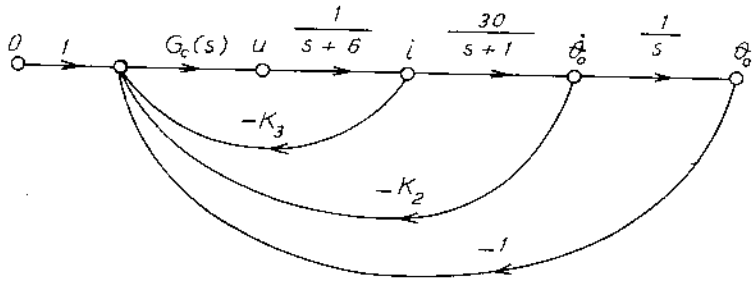
Do đó $K_c$ và $K_d$ có thể thay đổi được trong phạm vi hạn chế.




*Hình 7.22*

Bây giờ nếu dùng bộ điều chỉnh trạng thái với hệ số phản hồi $K_2$, $K_3$ như ở hình 7.23. Ba hồi tiếp trên có thể được thay thế bằng hồi tiếp tương đương :

$$1 + K_2 s + \left(\frac{K_3}{30}\right)s(s+1) = \left(\frac{K_3}{30}\right)s^2 + \left(K_2 + \frac{K_3}{30}\right)s + 1$$




*Hình 7.23*

Phương trình đặc trưng của hệ kín là :

$$s^3 + 7s^2 + 6s + 30G_c(s)\left[\left(\frac{K_3}{30}\right)s^2 + \left(K_2 + \frac{K_3}{30}\right)s + 1\right] =$$

$$= s^3 + (7 + G_c(s)K_3)s^2 + (6 + 30G_c(s)K_2s +$$

$$+ G_c(s)K_3s + 30G_c(s) = 0 \qquad (7\text{-}45)$$

Các hệ số của $G_c(s)$, $K_2$, $K_3$ có thể được xác định trong phạm vi rộng hơn để có phân bố nghiệm thích hợp.

Ví dụ ba nghiệm ấy là $-7$, $-3 \pm 3j$. Vậy phương trình đặc trưng mong muốn là :

$$(s + 7)(s + 3 - 3j)(s + 3 + 3j) = s^3 + 13s^2 + 60s + 126 = 0 \qquad (7\text{-}46)$$

Cân bằng các hệ số ở (7-45) và (7-46) :

$7 + G_c(s)K_3 = 13$; $6 + 30\,G_c(s)\,K_2 + G_c(s)\,K_3 = 60$; $30\,G_c(s) = 126$

ta có :

$$G_c(s) = 4{,}2\ ;\ K_3 = \frac{1}{0{,}7};\ K_2 = \frac{0{,}8}{2{,}1} \qquad (7\text{-}47)$$

Phương trình trạng thái của hệ là :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \qquad (7\text{-}48)$$

Theo hình 7.23 và (7-47), điều khiển u là các hệ số từ mọi biến trạng thái :

$$u = -G_c(s)(\theta_o + K_2\dot{\theta}_o + K_3i) = -[G_c(s)\ \ G_c(s)K_2\ \ G_c(s)K_3]X =$$

$$= -[4{,}2\ \ 1{,}6\ \ 6]\,.\,X \qquad (7\text{-}49)$$

Ở hình 7.23 và 7.21, đầu vào của hệ là 0 vì mục tiêu điều khiển là thay đổi trạng thái ban đầu từ $x_o$ trở thành $x = 0$. Phản hồi trạng thái (7-49) được thực hiện bởi phản hồi như ở hình 7.23 mà K là một ma trận thể hiện như ở hình 7.21 và bộ điều chỉnh $G_c(s)$ đã có ở mạch thuận.

Tương ứng với (7-41) và (7-42) phương trình của hệ kín là :

$$\dot{X} = (A - B.K)\,X \qquad (7\text{-}50)$$

mà ma trận của mạch vòng kín là (A − B.K) và phương trình đặc trưng của hệ kín :

$$|s.I - (A - B.K)| = 0 \qquad (7\text{-}51)$$

Với ví dụ trên về động cơ, nếu thay thế (7-49) vào (7-48) có thể có được phương trình đặc trưng (7-45). Phương trình đặc trưng mong muốn được xác định từ đại lượng riêng của hệ kín mong muốn như ở (7-46). Nếu chúng là $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n$ thì phương trình đặc trưng mong muốn là :

$$(s - \hat{p}_1)(s - \hat{p}_2) \ldots (s - \hat{p}_n) = s^n + a_{dn}s^{n-1} + \ldots + a_{d2}s + a_{d1} = 0 \qquad (7\text{-}52)$$

Các phần tử của K được xác định từ điều kiện cân bằng các hệ số cùng bậc ở (7-51) và (7-52). Chú ý là điều kiện điều khiển được phải được thỏa mãn hay cặp ma trận (A, B) là điều khiển được.

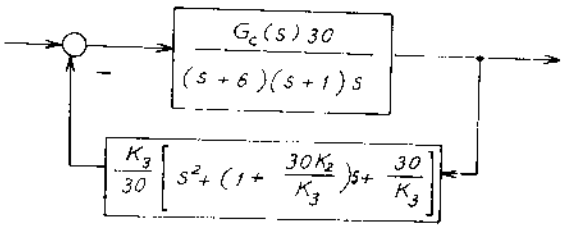
**Ví dụ 7-20b**

Một phương án khác là hệ trên có thể mô tả bằng sơ đồ tương đương như ở hình 7.24 mà mạch hồi tiếp tương ứng với (7.45) :

$$H(s) = \left(\frac{K_3}{30}\right)\left[s^2 + \left(1 + \frac{30K_2}{K_3}\right)s + \frac{30}{K_3}\right],$$

và : $$G_c(s)G(s)H(s) = \frac{M(s^2 + Q.s + \frac{30}{K_3})}{(s+6)(s+1)s}$$

mà $M = G_cK_3$ ; $Q = \left(1 + \frac{30K_2}{K_3}\right)$ ; $K_3$ và $K_2$ có thể được chọn theo vị trí của nghiệm không mong muốn. Ví dụ có thể chọn nghiệm không sao cho bù hoàn toàn được các nghiệm cực. Ta chọn đa thức ở tử số :




*Hình 7.24*

$$H(s) = \frac{K_3}{30}\left[s^2 + Q.s + \frac{30}{K_3}\right] = \frac{K_3}{30}(s+6)(s+1).$$

Từ đó $K_3 = 5$ ; $Q = 7$, nghĩa là $K_2 = 1$.

Do đó : $G_c(s)G(s)H(s) = \dfrac{M(s+6)(s+1)}{(s+6)(s+1)s} = \dfrac{M}{s}$

Như vậy hàm truyền hệ kín bằng :

$$W_K(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} = \frac{G_c(s)30}{(s+6)(s+1)(s+M)}$$

Nếu lấy cùng trị số $G_c(s) = 4{,}2$ như ví dụ trên, ta có $M = 4{,}2 \times 5 = 21$. Vậy:

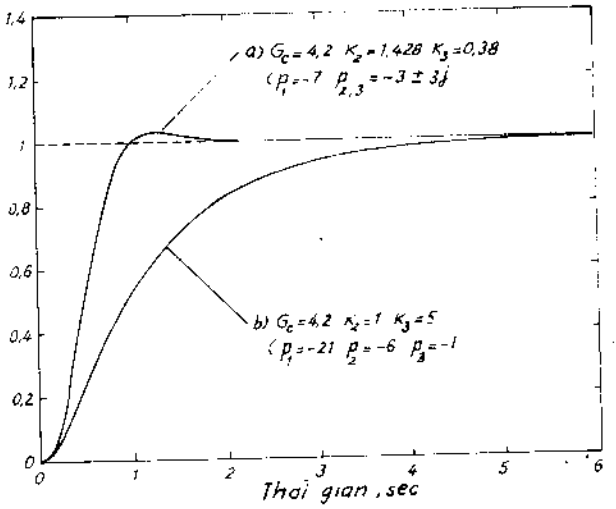
$$W_K(s) = \frac{126}{s^3 + 28s^2 + 153s + 126}$$

tương ứng với đường b) ở hình 7.25 với ba nghiệm đều thực:

$$p_1 = -21 \; ; \; p_2 = -6 \; ; \; p_3 = -1.$$

Còn đường a) ứng với (7-45) và nghiệm là:

$p_1 = -7$ ; $p_2 = -3 + 3j$ ; $p_3 = -3 - 3j$.




***Hình 7.25***

Đối với hệ một vào một ra (SISO), công thức Ackerman cho phép xác định tương đối giản đơn ma trận trạng thái hồi tiếp K:

$$K = [\, k_1, k_2 \ldots k_n]$$

mà $u = Kx$

Theo phương pháp này, như những phương pháp khác, trước tiên cần chọn phương trình đặc trưng của hệ kín dựa theo chất lượng cho trước dưới dạng:

$$F(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n$$

Ma trận trạng thái hồi tiếp cần tìm được xác định bởi:

$$K = [\,0, 0, \ldots, 1\,]\; C_0^{-1} F(A)$$

mà $C_0^{-1}[\,B \;\; AB \;\; A^2B \ldots \;\; A^{n-1}B\,]$ là ma trận điều khiển được (7-32),

và $F(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I$

Trong trường hợp dùng máy tính và chương trình MATLAB để xác định K thì K = acker (A, B, P) mà P là các nghiệm của phương trình đặc trưng F(s) = 0.

**Ví dụ 7.20c:** Hệ bậc hai có hàm truyền đạt:

$$G(s) = 1/s$$

Chọn phương trình đặc trưng với nghiệm s = 1 + j ;

Như vậy = $F(s) = s^2 + 2s + 2$ ; $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$.

Hệ đã cho có phương trình trạng thái:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Ma trận điều khiển :

$$C_0 = [\,B \;\; AB\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_0^{-1} = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$F(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó : $K = [\,0 \;\; 1\,]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [\,0 \;\; 1\,]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [\,2 \;\; 2\,]$.

Nếu dùng MATLAB ta có:

A = [ 0 1 ] ; B=[ 0 ; 1 ] ; P= [−1 + i , −1 − i ] ;

K = acker(A, B, P)

ta cũng có kết quả : K = [ 2 2 ] như trên.

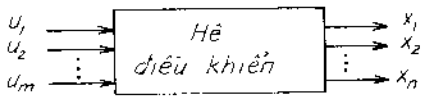
## VII 5.2. Tổng hợp theo phương pháp điều khiển tối ưu

Chất lượng của hệ điều khiển có thể được đánh giá bằng chỉ tiêu hỗn hợp (V.4), ví dụ:

$$J = \int_0^T G(x, u, t)dt \qquad (7\text{-}56)$$

mà x – vectơ trạng thái ; u – vectơ điều khiển ; T – thời điểm cuối.

Vì ta quan tâm đến cực tiểu của sai lệch, khi trạng thái mong muốn $x_d = 0$ thì sai lệch là đại lượng x của vectơ trạng thái. Khi hệ ở trạng thái cân bằng $x = x_d = 0$ thì mọi chênh lệch khỏi trạng thái cân bằng là sai lệch. Việc tổng hợp điều khiển tối ưu có thể dùng biến trạng thái phản hồi và chỉ tiêu chất lượng là bình phương của sai lệch.




*Hình 7.26*

Hệ điều khiển được mô tả như ở hình 7.26 với phương trình vi phân :

$$\dot{X} = A.X + B.u. \qquad (7\text{–}57)$$

Bộ điều chỉnh trạng thái được chọn sao chu u là hàm của trạng thái có thể đo được X :

$$u = -K.X \qquad (7\text{–}58)$$

Ví dụ : $u_1 = -k_1x_1$ ; $u_2 = -k_2x_2$ ; ... ; $u_m = -k_mx_m$ ;

hay : $u_1 = -k_1(x_1+x_2)$ ; $u_2 = -k_2(x_2+x_3)$ ; ...

Việc chọn tín hiệu điều khiển là tùy ý và một phần tùy thuộc vào chất lượng mong muốn cụ thể cũng như tùy thuộc vào mức độ phức tạp của cấu trúc phản hồi, bởi không phải trạng thái nào cũng đo được. Thông thường hàm hồi tiếp là tuyến tính : u = –K.X mà K là ma trận m × n:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (7\text{–}59)$$

Thay (7–59) vào (7–57) ta có :

$$\dot{X} = (A - B.K)X. \qquad (7\text{–}60)$$

Chỉ tiêu chất lượng (7–56) trong trường hợp một biến trạng thái có dạng :

$$J = \int_0^T \left[ x_1(t) \right]^2 dt \qquad (7\text{-}61)$$

Với hai biến trạng thái :

$$J = \int_0^T (x_1^2 + x_2^2)\, dt \qquad (7\text{-}62)$$

Trong trường hợp chung :

$$X'X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1^2 + \ldots x_n^2) \qquad (7\text{-}63)$$

Dấu "'" là dấu chuyển vị của ma trận.

Chỉ tiêu chất lượng thường dùng có dạng chung :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x'x)\, dt \qquad (7\text{-}64)$$

Thời điểm cuối có thể lấy $T = \infty$. Để J có cực tiểu, ta giả định tồn tại đạo hàm :

$$\frac{d}{dt}(X'P.X) = -X'X, \qquad (7\text{-}65)$$

mà P là ma trận đối xứng ($p_{ij} = p_{ji}$). Lấy đạo hàm của vế trái (7-65) :

$$\frac{d}{dt}(X'P.X) = \dot{X}'P.X + X'P.\dot{X}.$$

Thay $\dot{X}$ từ (7-60) :

$$\frac{d}{dt}(X'P.X) = [(A - B.K)X]'P.X + X'P[(A - B.K)X]$$

$$= X'(A - B.K)'P.X + X'P(A - B.K)X$$

$$= X'[(A - B.K)'P + P(A - B.K)]X$$

Nếu $[(A - BK)'P + P(A - B.K)] = I$ thì:

$$\frac{d}{dt}(X'P.X) = -X'X. \qquad (7\text{-}66)$$

và (7-66) là biểu thức chính xác của (7-65).

Thay (7-66) vào (7-64) ta có :

$$J = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}(X'P.X)dt = -\frac{1}{2}X'P.X\Big|_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2}X'(\infty)P.X(\infty) + \frac{1}{2}X'(0)\ P.X(0)$$

và :
$$J = \frac{1}{2}X'(0)P.X(0). \qquad (7\text{-}67)$$

với :
$$(A - B.K)'P + P(A - B.K) = -I \qquad (7\text{-}68)$$

Như vậy, có hai bước để tổng hợp hệ là :

1. Xác định ma trận P thỏa mãn (7-68) mà (A - B.K) đã biết.

2. Cực tiểu hóa J bằng cách xác định cực tiểu của (7-67) theo một hay vài thông số của hệ.

Trong trường hợp chỉ tiêu chất lượng (7-56) có tính đến tổn thất năng lượng cực tiểu thì :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(X'M.X + u'.N.u)\,dt \qquad (7\text{-}69)$$

mà M, N là các ma trận trọng lượng và là ma trận chéo. X'M.X và u'.N.u có dạng bình phương, đánh giá chất lượng cũng như tổn thất của điều khiển.

$$X'M.X = \begin{bmatrix} x_1 \dots x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots\ x_n]\begin{bmatrix} m_1x_1 \\ . \\ . \\ . \\ m_nx_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i^2 \qquad (7\text{-}70)$$

$$u'.N.u = \sum_{j=1}^{r} n_ju_j^2 \ \dots \qquad (7\text{-}71)$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} m_ix_i^2 + \sum_{j=0}^{r} n_j\,u_j^2\right)dt. \qquad (7\text{-}72)$$

Nếu thay thế u= - K.X vào (7-69) ta có :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[X'(M + K'.N.K)X]dt. \qquad (7\text{-}73)$$

Như vậy, nếu hệ kín là ổn định [x(∞) = 0], sẽ tồn tại ma trận hằng P, thực, đối xứng và xác định dương sao cho :

$$\frac{d}{dt}(X'P.X) = -X'(M + K'.N.K)X \; ; \; P = \{p_{ij}\}. \qquad (7\text{-}74)$$

P xác định dương nếu mọi định thức con đều dương :

$$p_{11} > 0 \; ; \; \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} > 0 \; ; \; . \; . \; . \; \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & . \; . \; . & p_{1n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ p_{1n} & p_{2n} & . \; . \; . & p_{nn} \end{bmatrix} > 0 \qquad (7\text{-}75)$$

So sánh (7-64) với (7-74) ta có :

$$(A - B.K)'P + P(A - B.K) = -M - K'.N.K, \qquad (7\text{-}76)$$

với mọi X. Phương trình (7-76) là *phương trình Liapunov*.

Cực tiểu của (7-67) được xác định từ điều kiện :

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = 0. \qquad (7\text{-}77)$$

Hệ số $\frac{1}{2}$ ở các chỉ tiêu chất lượng - ở (7-69) chẳng hạn - làm cho tính toán thêm đơn giản, không ảnh hưởng đến điều kiện tối ưu.

Khi số lượng các hệ số $k_{ij}$ lớn, cần dùng các chương trình máy tính đã có sẵn để giải.

Điều kiện tối ưu là hồi tiếp trạng thái với hệ số hằng :

$$u^* = -K.X \; ; \; K = N^{-1}B'.P. \qquad (7\text{-}78)$$

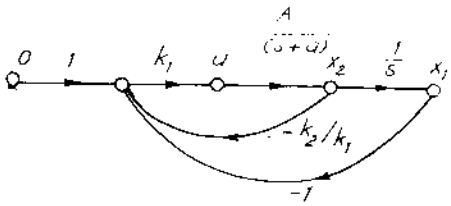
mà P là ma trận đối xứng xác định dương, nghiệm của *phương trình ma trận đại số Riccati* :

$$P.A + A'.P - P.B.N^{-1}B'.P + M = 0 \qquad (7\text{-}79)$$

Phương pháp hình thành phương trình Riccati còn có thể xem ở mục II.2.4 [20]. Với bài toán tổng hợp bộ điều chỉnh mà thời điểm cuối T = ∞ (7-66, 7-69) thì P = 0. Nghiệm tối ưu không phụ thuộc điều kiện đầu.

**Ví dụ 7-21**

Hệ điều khiển vị trí có sơ đồ graph như ở hình 7.27.




*Hình 7.27*

Hàm truyền của đối tượng :

$$G(s) = \frac{A}{s(s+a)}$$

có phương trình trạng thái :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} u. \qquad (7\text{-}80)$$

với phản hồi của tín hiệu điều khiển duy nhất tương đương với phản hồi trạng thái tổng quát :

$$u = -K.X = -[k_1 \;\; k_2]X. \qquad (7\text{-}81)$$

Ma trận trọng số M, N cũng như P có dạng :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad N = n \; ; \; P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}82)$$

*a) Dùng phương trình Liapunov (7-76)*

Ma trận hệ kín :

$$(A - B.K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A.k_1 & -A.k \end{bmatrix}$$

$$\text{với } A.k = a + A.k_2 \; ; \; k = k_2 + \frac{a}{A}.$$

Phương trình Liapunov có dạng :

$$\begin{bmatrix} -A.k_1p_2 & -A.k_1p_3 \\ p_1 - A.k.p_2 & p_2 - A.k.p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A.k_1p_2 & p_1 - A.k.p_2 \\ -A.k_1p_3 & p_2 - A.k.p_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 + k_1^2n & k_1k_2.n \\ k_1k_2.n & m + k_2^2.n \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương ứng với ba phương trình khác nhau sau :

$$2A.k_1p_2 = 1 + k_1^2 . n \; ;$$

$$p_1 - A.k.p_2 - A.k_1p_3 = -k_1k_2.n \; ; \qquad (A.k = a + A.k_2)$$

$$2p_2 - 2A.k.p_3 = -m - k_2^2 . n.$$

$p_2$ xác định theo phương trình thứ nhất, $p_3$ theo phương trình thứ ba và $p_1$ theo phương trình thứ hai sau khi thay thế vào phương trình này các nghiệm $p_2$, $p_3$. Cuối cùng ta có :

$$p_1 = \frac{k_1m}{2k} + \frac{k_1k_2^2n}{2k} + \frac{1}{2A.k} + \frac{k_1^2n}{2A.k} + \frac{k}{2k_1} + \frac{a.k_1n}{2A} - \frac{k_1k_2n}{2} \; ;$$

$$p_2 = \frac{1}{2A.k_1} + \frac{k_1 n}{2A} ;$$

$$p_3 = \frac{m}{2A.k} + \frac{k_2^2 n}{2A.k} + \frac{1}{2A^2 k.k_1} + \frac{k.n}{2A^2 k}$$

Trị số tối ưu của $k_1$, $k_2$ xác định từ điều kiện (7-77). Để giản đơn, với $k = k_1 = k_2$, $a = 0$, $A = 1$. Với điều kiện đầu $X'_0 = [1\ 0]$, bỏ qua hệ số $\frac{1}{2}$, biểu thức (7-67) có dạng :

$$J = [1\ 0]\ P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_1 = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2} k_1 n$$

Điều kiện tối ưu (7-77) là :

$$\frac{dJ}{dk_1} = \frac{dp_1}{dk_1} = \frac{1}{2} n - \frac{1}{2k_1^2} = 0$$

và $$k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

*b. Dùng phương trình Riccati*

Với ví dụ trên, phương trình Riccati (7-79) có dạng :

$$P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} n^{-1} [0\ A] P = 0 ;$$

hay :

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 - ap_2 \\ p_1 - ap_2 & 2p_2 - 2ap_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^2 p_2^2 & A^2 p_2 p_3 \\ A^2 p_2 p_3 & A^2 p_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên ứng với ba phương trình khác nhau :

$$1 - A^2 n^{-1} p^2_2 = 0 ;$$

$$p_1 - ap_2 - A^2 n^{-1} p_2 p_3 = 0 ;$$

$$2p_2 - 2ap_3 - A^2 n^{-1} p^2_3 = 0.$$

Nghiệm của phương trình Riccati là :

$$p_1 = \sqrt{\frac{a^2 n}{A^2} + \frac{2n^{1/2}}{A} + m} ;\ p_2 = \frac{1}{A} \sqrt{n} ;$$

$$p_3 = -\frac{an}{A^2} + \frac{\sqrt{n}}{A}\sqrt{\frac{a^2n}{A^2} + \frac{2n^{1/2}}{A} + m}$$

Ở đây chỉ tính đến các nghiệm dương theo điều kiện (7-75).

Theo (7- 78) :

$$K = n^{-1}B'.P = \frac{A}{n}[P_1 \quad P_2].$$

Điều khiển tối ưu là :

$$u^* = -K.X = -\left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{A} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{a^2n}{A^2} + \frac{2n^{1/2}}{A} + m}\right].X$$

Phương pháp hồi tiếp biến trạng thái có những hạn chế của nó với những lý do sau : Hồi tiếp biến trạng thái tương ứng với các bộ điều chỉnh PD, $PD_2$ (biểu thức 1-86 ở [20]) hay PID có dải tần vô tận, khác với các bộ điều chỉnh thực với dải tần hữu hạn. Mặt khác, ở các hệ thực, chỉ có một số ít trạng thái là có thể đo được.

### VII.5.3. Điều khiển tích phân

Ở đây sẽ nêu lên phương pháp tổng hợp hệ với mô hình bám tín hiệu vào mà sai lệch tĩnh bằng 0. Tín hiệu định hướng đầu vào có thể bậc thang, dạng tăng dần đều, sóng điều hòa hay những dạng khác. Với dạng bậc thang, để trở thành vô sai tĩnh, phải là hệ có tích phân bậc một chẳng hạn.

Mô hình biến trạng thái của đối tượng :

$$\dot{x} = A.x + b.u \; ; \; y = c.x \; , \qquad (7\text{-}83)$$

x – vectơ trạng thái ; u – tín hiệu vào đối tượng ; y – tín hiệu ra.

Tín hiệu vào định hướng được hình thành dưới dạng tổng quát :

$$\dot{x}_r = A_r x_r \; ; \quad r = C_r x_r \; , \qquad (7\text{-}84)$$

Với điều kiện đầu chưa biết, mô hình của tín hiệu vào định hướng tương đương $r(t)$ là :

$$r^{(n)} = \alpha_{n-1}r^{(n-1)} + \alpha_{n-2}r^{(n-2)} + \ldots + \alpha_1\dot{r} + \alpha_0 r, \qquad (7\text{-}85)$$

$r^{(n)}$ là đạo hàm bậc n của r(t).

Ví dụ, bài toán đặt ra là tổng hợp cơ cấu điều khiển có khả năng bám tín hiệu vào là bậc thang với sai lệch tĩnh bằng 0. Trong trường

hợp này, tín hiệu vào định hướng sẽ là :

$$\dot{x}_r = 0 \; ; \; r = x_r \; ; \tag{7-86}$$

hoặc :

$$\dot{r} = 0 \tag{7-87}$$

Sai lệch bám e được xác định bởi :

$$e = y - r. \tag{7-88}$$

Lấy đạo hàm : $\dot{e} = \dot{y} = \mathbf{c}.\dot{\mathbf{x}}$

mà ở đây đã dùng mô hình của tín hiệu vào định hướng từ (7-87). và mô hình của đối tượng (7-83). Nếu dùng hai biến trung gian :

$$\mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}} \; ; \quad w = \dot{u} \; ;$$

ta có :

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} w. \tag{7-89}$$

Nếu hệ thống được mô tả bởi (7-89) là điều khiển được, có thể tìm được hồi tiếp dạng :

$$w = -K_1 e - \mathbf{K}_2 \mathbf{z}. \tag{7-90}$$

mà hệ (7-89) ổn định. Điều ấy có nghĩa là sai lệch bám e(t) ổn định và mục tiêu của việc bám tiệm cận với sai lệch tĩnh bằng 0 sẽ đạt được. Tín hiệu điều khiển ở đầu vào của đối tượng được xác định theo tích phân của (7-90) :

$$u(t) = -K_1 \int_0^t e(\tau)\, d\tau - \mathrm{K}_2 \mathbf{x}(\mathbf{t}).$$

Sơ đồ khối như ở hình 7.28. Cơ cấu điều khiển có một khâu tích phân đối với tín hiệu đầu vào dạng bậc thang.

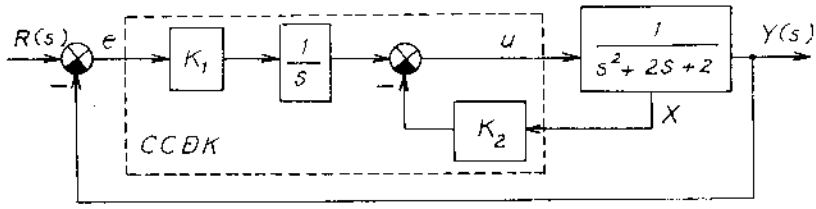
Nếu tín hiệu vào dạng tăng dần đều $r(t) = Mt$, $t \geq 0$, mà M là hệ số mô hình của tín hiệu vào định hướng là :

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathrm{A}_r \mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_r \; ; \tag{7-91}$$

$$r = \mathbf{c}_r \mathbf{x}_r = [\,1 \;\; 0\,] \mathbf{x}_r. \tag{7-91}$$

Trong trường hợp này $\ddot{r} = 0$ và sai số bám là :

$$e = y - r \; ;$$
$$\ddot{e} = \ddot{y} - \mathbf{c}.\ddot{\mathbf{x}}$$




*Hình 7.28*

với biến trung gian $\mathbf{z} = \ddot{x}$ ; $w = \ddot{u}$ ; ta có :

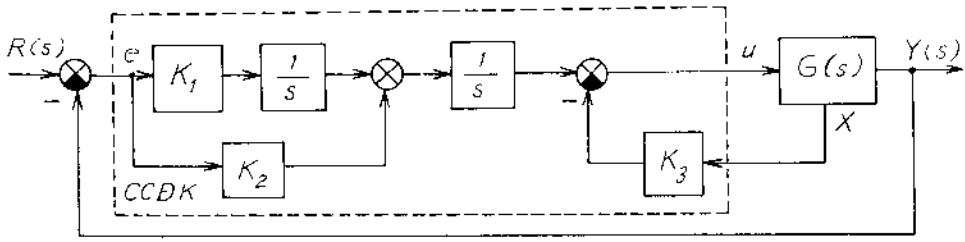
$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & \mathrm{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} w \qquad (7\text{-}92)$$

Nếu (7-92) điều khiển được, có thể xác định $K_i$ (i = 1, 2, 3) sao cho với :

$$w = -\,[K_1 \;\; K_2 \;\; K_3] \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}93)$$

thì hệ được mô tả bởi (7-92) ổn định tiệm cận, vì vậy sai số bám $e(t) \to 0$ khi $t \to \infty$. Điều khiển u(t) được xác định bởi (7-93) sau khi lấy tích phân hai lần, thể hiện ở hai khâu tích phân như ở hình 7.29.

Phương pháp này có thể mở rộng cho những tín hiệu vào khác cũng như để loại trừ ảnh hưởng của nhiễu bằng cách dùng mô hình của nhiễu trong mạch bù. Điều khiển tích phân còn là *điều khiển bền vững* vì nó luôn có hiệu lực khi thông số đối tượng thay đổi.




*Hình 7.29*

**Ví dụ 7-22**

Đối tượng có dạng:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \; ; \; y = [1 \;\; 0]\mathbf{x}; \qquad (7-94)$$

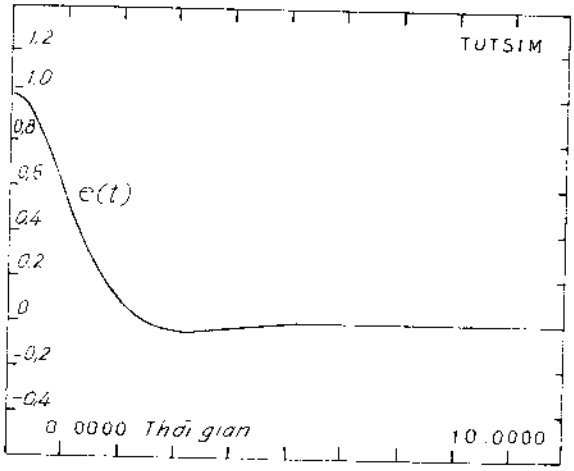
Hãy xác định cơ cấu điều khiển để bám tín hiệu vào dạng bậc thang với sai lệch tĩnh bằng 0. Từ (7-89) ta có :

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \; ; \qquad (7-95)$$

Kiểm tra cho thấy điều kiện điều khiển được thỏa mãn. Ta chọn :

$$K_1 = 20 \; ; \; K_2 = [20 \quad 10] \; ,$$

để nghiệm của phương trình đặc trưng của (7-95) là : $s = -1 \pm j$, $-10$. Với $w$ theo (7-93) thì (7-95) là ổn định tiệm cận. Với mọi trị số ban đầu của sai lệch $e(0)$, $e(t) \to 0$ khi $t \to \infty$ như ở hình 7.30. Ví dụ trên tương ứng với hình 7.28 mà đối tượng : $G(s)$ và cơ cấu điều khiển : $G_c(s) = \dfrac{K_1}{s}$ có chứa $R(s)$ thì $y(t)$ sẽ bám $r(t)$ một cách tiệm cận. Trong trường hợp ấy $R(s) = 1/s$ và hàm truyền của $G_c(s)G(s)$ có chứa $R(s)$.




*Hình 7.30*

## VII.5.4. Bộ quan sát động

Phương pháp hồi tiếp hằng u = − K.X đòi hỏi mọi trạng thái của X phải đo được. Trong thực tế, với các hệ tuyến tính quan sát được, thường chỉ có tín hiệu ra y là có thể dùng làm hồi tiếp. Một giải pháp để thiết kế hệ thống là dùng các bộ quan sát động (bộ ước lượng). Đối với các hệ quan sát được, bộ quan sát xác định ước lượng $\hat{X}$ của các

trạng thái X từ đầu ra đo được y. Hồi tiếp hằng sẽ sử dụng ước lượng X để thiết kế theo phương pháp áp đặt nghiệm hay điều khiển tối ưu.

Ước lượng $\hat{X}$ của trạng thái X được xác định bằng mô phỏng tương tự hay số $\dot{\hat{X}} = A.\hat{X} + B.u$ của đối tượng $\dot{X} = A.X + B.u$. Tuy nhiên $\hat{X}$ không thể phù hợp với X ở mọi thời điểm của t vì nó đòi hỏi $\hat{X}(0) = X(0)$ mà X(0) thì không biết được. Nếu lấy hiệu của hai phương trình trên, $X_e$ là sai lệch của ước lượng ta có :

$$X_e = X - \hat{X} \; ; \; \dot{X}_e = AX_e \; ; \; X_e(0) = X(0) - \hat{X}(0)$$

Nếu A ổn định thì $X_e(t) \to 0$ và ước lượng $\hat{X} \to X$. Yêu cầu đặt ra là A của đối tượng cũng là của ước lượng, nghĩa là đáp ứng của đối tượng và của ước lượng có tốc độ như nhau. Vì ước lượng là để điều khiển cho nên động học của bộ quan sát phải nhanh hơn động học của bộ điều khiển. Do vậy phải thêm vào phương trình mô hình một thành phần cưỡng bức tỷ lệ với chênh lệch giữa $y = C.X$ và $C.\hat{X}$ :

$$\dot{\hat{X}} = A.\hat{X} + B.u + L.(y - C.\hat{X}). \qquad (7\text{-}96)$$

Sơ đồ cấu trúc của bộ quan sát như ở hình 7.31 mà L là ma trận hằng.

Từ (7-96) ta có :

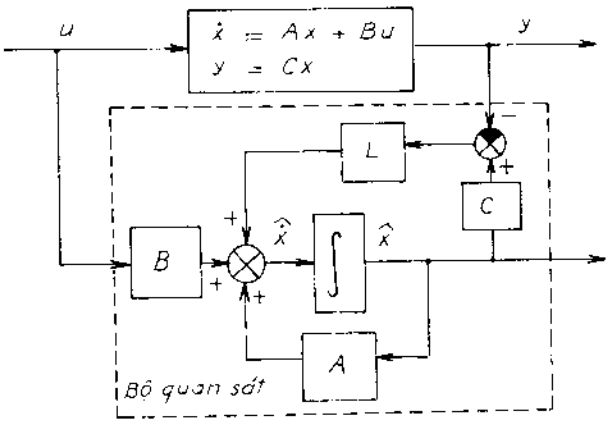
$$\dot{\hat{X}} = (A - L.C)\hat{X} + B.u + L.y. \qquad (7\text{-}97)$$

Sai lệch của ước lượng là :

$$\left.\begin{aligned} X_e &= X - \hat{X} \; ; \\ \dot{\hat{X}}_e &= (A - L.C)\, X_e. \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}98)$$

Nếu (A – L.C) là ổn định thì $X_e \to 0$ và $\hat{X} \to X$. L ở đây đóng vai trò thúc đẩy quá trình động học của ước lượng.

Phương pháp xác định L cũng như xác định K. Ví dụ L có thể được chọn theo phương pháp áp đặt nghiệm sao cho các nghiệm đều ở bên trái của các nghiệm của K, vì rằng nghiệm của bộ điều chỉnh phải là nghiệm trội, quyết định động học của hệ.




*Hình 7.31*

**Ví dụ 7-23**

Đối tượng được mô tả bởi :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \; ;$$

$$y = [\,0 \;\; 1\,]X.$$

Hồi tiếp trạng thái $u = -K.X$ được chọn sao cho nghiệm của phương trình đặc trưng hệ kín là $-4$ và $-9$. Ví dụ $x_1$ không đo được và cần ước lượng. Ma trận L cần tìm là :

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng của bộ quan sát :

$$|s.I - (A - L.C)| = \det \begin{bmatrix} s+3 & -2+l_1 \\ -4 & s+5+l_2 \end{bmatrix} =$$

$$= s^2 + (8 + l_2)s + (7 + 4l_1 + 3l_2).$$

Ta có thể lấy nghiệm của bộ quan sát có giá trị khoảng 3 lần lớn hơn bộ điều chỉnh, ví dụ $-12$ và $-15$. Vậy phương trình đặc trưng mong muốn là :

$$(s + 12)(s + 15) = s^2 + 27s + 18.$$

Từ đó ta có :

$$l_1 = 29 \text{ và } l_2 = 19.$$

Chú ý rằng bộ quan sát được xác định chỉ khi hệ là quan sát được (nghĩa là khi số hạng của ma trận quan sát (7–33) bằng thứ nguyên bậc n của A).

Bộ quan sát nói trên là bộ quan sát có bậc đầy đủ. Nếu chỉ ước lượng những trạng thái nào không đo được, ta có bộ quan sát giảm bậc.

Đầu vào của bộ quan sát (u và y) thường có nhiễu, có khi rất đáng kể (từ các dụng cụ biến đổi) mà "lý thuyết lọc" có ý nghĩa rất lớn. Bộ lọc Kalman để xác định điều khiển tối ưu trong kỹ thuật cho ta ước lượng tối ưu trong điều kiện có nhiễu.

### VII.5.5. Hồi tiếp từ tín hiệu ra

Bộ quan sát động nói trên cũng có thể xem như một dạng hồi tiếp từ tín hiệu ra nhưng có phần đặc biệt và phức tạp. Trong nhiều trường hợp ứng dụng thì sự phức tạp ấy là không cần thiết.

Đối với hệ :

$$\dot{X} = A.X + B.u \; ; \; y = C.X \qquad (7-99)$$

Có thể có những dạng hồi tiếp từ đầu ra như sau :

1. Hồi tiếp hằng từ đầu ra :

$$u = -K.y = -K.C.X \; ; \; \dot{X} = (A - B.K.C)X. \qquad (7-100)$$

2. Hồi tiếp động từ đầu ra :

$$u = H.z + N.y \; ; \; \dot{z} = F.z + G.y. \qquad (7-101)$$

Các vectơ X, y, u, z có thứ nguyên n, m, r và p.

Có thể kết hợp các phương trình trên như sau :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \dot{z} \end{bmatrix} : \dot{V} = \hat{A}.V + \hat{B}.\hat{u}. \qquad (7-102a)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & H \\ G & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ z \end{bmatrix};$$

$$\hat{y} = \hat{C}.V; \; \hat{u} = P.\hat{y} \qquad (7-102b)$$

Thay (7-102b) vào (7-102a) ta có phương trình kín :

$$\dot{V} = (\hat{A} + \hat{B}.P.\hat{C})V. \qquad (7-102c)$$

So sánh (7-99) và (7-100) ta thấy bài toán được kết hợp thành một phương trình kín với hồi tiếp hằng từ đầu ra. Ở hồi tiếp động từ đầu ra, các ma trận chưa biết như N, H, G và F được kết hợp thành ma trận P để thiết kế cho hệ có bậc (n + p). Phương pháp tính toán đối với hồi tiếp hằng từ đầu ra cũng được áp dụng cho hồi tiếp động.

Để xác định hồi tiếp hằng tối ưu từ đầu ra (7-100), ta cực tiểu hóa chỉ tiêu chất lượng (7-69), chẳng hạn :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (X'.M.X + u'.N.u)\, dt \qquad (7-103)$$

Có thể thấy rằng, từ phương trình ma trận Liapunov (7-76) nguyên thủy, K được thay thế bằng K.C với hồi tiếp đầu ra :

$$(A - B.K.C)'V + V(A - B.K.C) = -M - C'.K'.N.K.C. \qquad (7-104)$$

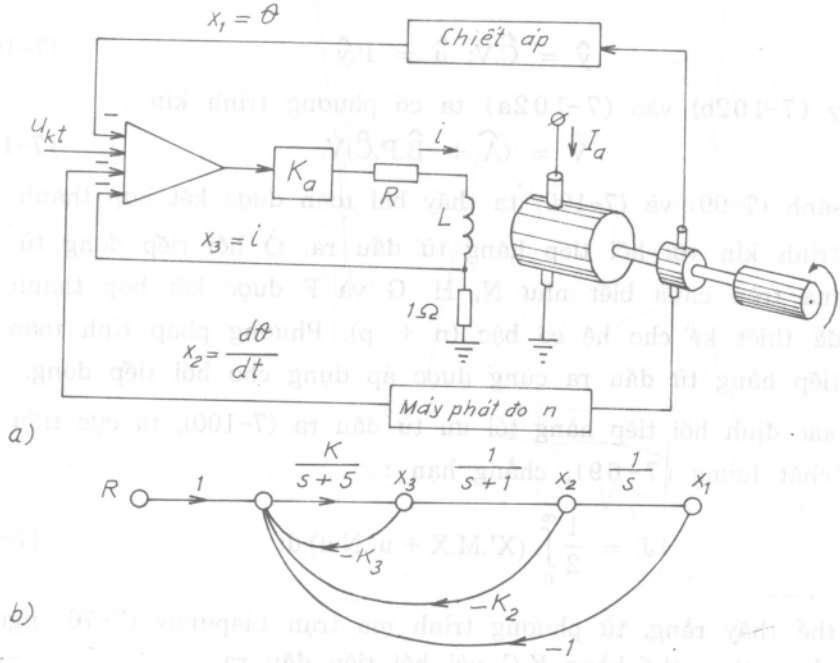
Các biểu thức (7-67), (7-76) và (7-77) cũng như ở ví dụ 7-21a, điều

khiển tối ưu cực tiểu hóa $J = \frac{1}{2} X'(0)V.X(0)$ và được xác định từ điều kiện tối ưu $dJ/dk_{ij} = 0$ với $K = \{k_{ij}\}$. Bài toàn cực tiểu hóa J từ (7-104) là *bài toán tối ưu thông số*. Các chương trình chuẩn để xác định thông số tối ưu theo phương pháp Newton - Raphson hay Rosenbrock cho phép phân tích và tổng hợp các hệ thống lớn.

## BÀI TẬP CHƯƠNG VII

**Bài tập 7-1**

Hệ điều khiển vị trí có hồi tiếp trạng thái đối với động cơ một chiều điều khiển kích từ như ở hình 7.32a và sơ đồ graph ở hình 7.32b cũng như ở ví dụ 7-7, 7-8 và hình 7-7.




*Hình 7.32*

Hàm truyền có dạng :

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \frac{B}{J})(s + \frac{R}{L})}$$

với $K = K_n K_{ny}/J.L$.

Giả thiết B/J = 1, R/L = 5, phản hồi vị trí bằng đơn vị. Hãy xác định $K_2$, $K_3$ theo phương pháp bù đủ như ở ví dụ 7-20b.

*Đáp án*

Với các điều kiện đã cho :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} ;$$

$$H(s) = K_3 \left[ s^2 + \left( \frac{K_3 + K_2}{K_3} \right) s + \frac{1}{K_3} \right];$$

$$G(s)H(s) = \frac{M\left[ s^2 + Q.s + \frac{1}{K_3} \right]}{s(s+1)(s+5)} .$$

mà $M = K.K_3$, $Q = (K_3 + K_2)K_3$. Để bù đủ :

$$H(s) = K_3(s^2 + Q.s + \frac{1}{K_3}) = K_3(s + 1)(s + 5)$$

với $$K_3 = \frac{1}{5} ; Q = 6 ; K_2 = 1$$

$$G(s)H(s) = \frac{M}{s}$$

Vậy hệ kín :

$$W_k(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+5)(s+M)} .$$

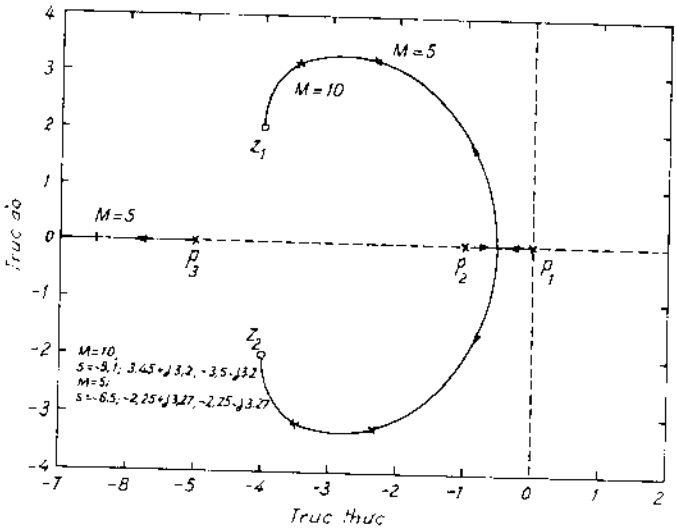
Với M = 10 hệ vẫn bảo đảm được ổn định vì đáp ứng của hệ kín được quyết định bởi hai nghiệm khác $p_2 = -1$ và $p_3 = -5$, $M = K.K_3 = 10$, vậy K = 5.

**Bài tập 7-2**

Với bài tập 7-1 chọn nghiệm không của hệ hở $z_1 = -4 + j_2$ và $z_2 = -4 - j_2$. Xác định :

a) Chất lượng của hệ khi $M = K.K_3 = 10$ và

b) Trị số $K_2$, $K_3$ sao cho nghiệm của hệ kín bằng s = -10, s = -5 +j




*Hình 7.33*

và s = -5 - j.

*Đáp án*

Với điều kiện đã cho :

$$H(s) = K_3\left(s^2 + Q.s + \frac{1}{K_3}\right) = K_3(s + 4 + j2)(s + 4 - j2) =$$

$$= K_3(s^2 + 8s + 20)$$

Từ đó $K_3 = \frac{1}{20}$ ; Q = 8 và $K_2 = \frac{7}{20}$.

Quỹ đạo nghiệm số của $G(s)H(s) = M\dfrac{s^2 + 8s + 20}{s(s + 1)(s + 5)}$ như ở hình 7.33. Hệ ổn định với mọi M.

a) M = 10, nghiệm phức của hệ kín ứng với $\zeta = 0{,}73$ mà lượng quá điều chỉnh $\sigma \approx 5\%$. Thời gian quá độ khoảng 1 sec. Hệ kín :

$$W_k(s) = \frac{200}{(s + 3{,}45 + j\,3{,}2)(s + 3{,}45 - j\,3{,}2)(s + 9{,}1)}$$

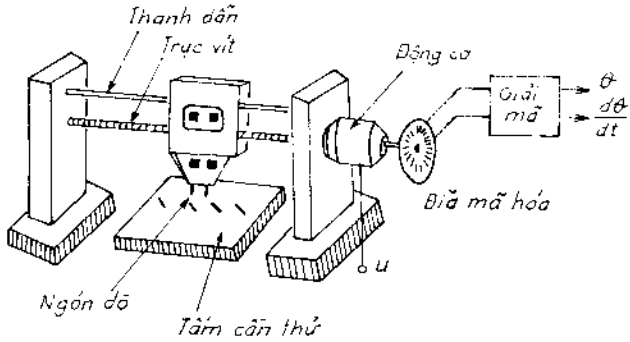
Ở hình 7.33 có phân bố nghiệm khi M = 5.

b) Khi phương trình đặc trưng của hệ kín có nghiệm đã cho $F(s) = (s + 10)(s^2 + 10s + 26) = s^3 + 20s^2 + 126s + 260 = 0$ vì $1 + G(s)H(s) = s(s + 1)(s + 5) + M(s^2 + Qs + \frac{1}{K_3}) = 0$ nên có thể cân bằng hai phương trình trên, từ đó :

$M = 14$ ; $Q = 121/14$ : $K_3 = 14/260$ và $K_2 = 0{,}41$.

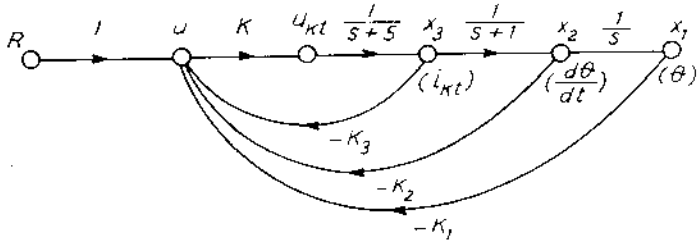
**Bài tập 7-3**

Thiết bị thử và kiểm tra chất lượng các bảng phân phối được điều khiển bằng động cơ một chiều có ngón dò kiểm tra như ở hình 7.34. Việc kiểm tra bằng tay sẽ chậm với sai số lớn. Kiểm tra tự động, từ cơ cấu điều khiển, đặt các ngón dò đúng chỗ và đánh giá liên tục điện trở (hay khả năng làm việc) của các bảng phân phối. Hệ sử dụng động cơ với đĩa mã hóa để đo vị trí và tốc độ. Sơ đồ graph như ở hình 7.35 với K - khuếch đại công suất mạch kích từ : $K_1$, $K_2$, $K_3$ là thông số cần xác định của bộ điều chỉnh trạng thái.




*Hình 7.34*

Hãy xác định K và $u = [-K_1 \; -K_2 \; -K_3]X$ sao cho $\sigma\% < 4\%$; $t_{qd} < 2$ sec.




*Hình 7.35*

*Đáp án*

Với hệ phương trình hở và kín :

$$\dot{X} = A.X + b.u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u \; ;$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -K & 1 \\ -K & -K.K_2 & -(5 + K_3K) \end{bmatrix} X.$$

mà $K_1 = 1$, ta có các hàm truyền :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} ;$$

$$H(s) = K_1 + s.K_2 + K_3(s+1)s = K_3 \left[s^2 + \frac{K_3 + K_2}{K_3}s + \frac{K_1}{K_3}\right].$$

Vẽ quỹ đạo nghiệm số theo chương trình MATLAB đối với $M = K.K_3$ của :

$$G(s)H(s) = M \frac{s^2 + Q.s + \frac{K_1}{K_3}}{s(s+1)(s+5)} .$$

Với $K_1 = 1$ ; $Q = 8$ ; $\frac{K_1}{K_3} = 20$ ta có nghiệm không $z = -4 \pm j2$ và $K_2 = 0,35$ ; $K_3 = 0,05$. Theo quỹ đạo nghiệm, nếu $M = K.K_3 = 12$, nghiệm kép hệ kín nằm trên đường thẳng có $\zeta = 0,76$ ứng với $\sigma\% = 3\%$ và $t_{qd} = 1,8$ sec là đáp ứng yêu cầu.

Vì $K_3 = 0,05$ nên $K = 240$ ứng với các nghiệm :

$$s_1 = -10,62 \ ; \ s_{2,3} = -3,69 \pm j3,00.$$

**Bài tập 7-4**

Cho một hệ :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ -6 & 8 & 10 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u ;$$

$$y = [\ 1 \quad 2 \quad 1\ ]X.$$

Kiểm tra khả năng điều khiển được và quan sát được của hệ trên theo chương trình MATLAB.

a) Hệ điều khiển được : $\text{rank}(C_o) = 3$

b) Hệ quan sát được : $\text{rank}(O_b) = 3$.

**Bài tập 7-5**

Hệ điều khiển chuyển động đều của tên lửa có dạng :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \; ;$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]X.$$

a) Kiểm tra điều khiển được của hệ.

b) Chuyển sang hàm truyền từ phương trình trạng thái, đơn giản hóa tử và mẫu của hàm truyền, sau đó trở về phương trình trạng thái.

c) Kiểm tra khả năng điều khiển được từ mục b.

d) Hệ trên có ổn định không ?

*Đáp án*

a) Hệ không điều khiển được : $\text{rank}(C_o) = 4$

b) [num, den] = ss2tf (a, b, c, d) cho kết quả :

$$\frac{5s}{s^5 + 0,5s^4 + 0,1s^3} = \frac{5}{s^4 + 0,5s^3 + 0,1s^2}$$

[a, b, c, d] = tf2ss (num, den)

$$a = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$c = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 5\,] \; ; \; d = 0$$

c) Hệ điều khiển được với $\text{rank}(C_o) = 4$.

d) Hệ ở biên giới ổn định :

$$s_{1,2} = 0 \; ; \qquad s_{3,4} = -0,25 \pm j\,0,1936.$$

**Bài tập 7-6**

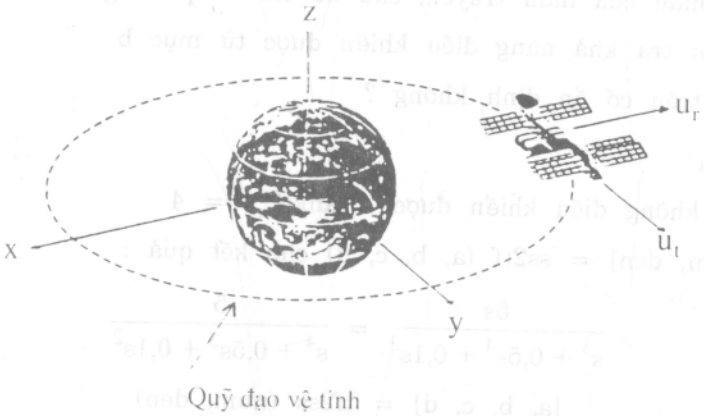
Vệ tinh bay quanh Trái Đất theo quỹ đạo có độ cao 250 dặm như ở hình 7.36.

Phương trình chuyển động của vệ tinh như sau :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t ,$$

ở đây X – trạng thái của vệ tinh theo quỹ đạo xích đạo ; $u_t$ – phản lực theo tiếp tuyến ; $u_r$ – phản lực theo bán kính ; $\omega$ = 0,0011 rad/sec (gần một vòng trong 90 phút). Nhiệm vụ là thiết kế cơ cấu điều khiển để giữ cho vệ tinh bay theo quỹ đạo khi có nhiễu vũ trụ tác động.

Trước hết cần kiểm tra khả năng điều khiển được của hệ bằng cách kiểm tra độc lập cho từng lực tác động $u_t$ và $u_r$ riêng biệt.




*Hình 7.36*

*Đáp án*

Theo chương trình MATLAB.

a) Khi $u_t$ = 0, vệ tinh không điều khiển được theo hướng bán kính vì rank($C_o$) = 3, (n = 4).

b) Khi $u_r$ = 0 vệ tinh điều khiển được theo hướng tiếp tuyến vì rank($C_o$) = 4, (n = 4).

**Bài tập 7-7**

Để quan sát phía sau Mặt Trăng người ta dùng vệ tinh với "quỹ đạo chiếu sáng" như ở hình 7.37. Nhiệm vụ là giữ cho vệ tinh có vị trí luôn quan sát được Mặt Trăng và từ Trái Đất luôn liên lạc được với vệ tinh. Các phương trình tuyến tính hóa và chuẩn hóa của vệ tinh quanh vị trí cân bằng với Mặt Trăng như sau :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7{,}3809 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2{,}1904 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3{,}1904 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3 ;$$

mà vectơ trạng thái X là vị trí, tốc độ và các tín hiệu vào $u_i$ (i = 1, 2, 3) là gia tốc phản lực theo các hướng $\zeta$, $\eta$ và $\zeta$. Hãy xác định :

a) Vị trí cân bằng với Mặt Trăng có ổn định không ?

b) Hệ có điều khiển được từ $u_1$ duy nhất không ?

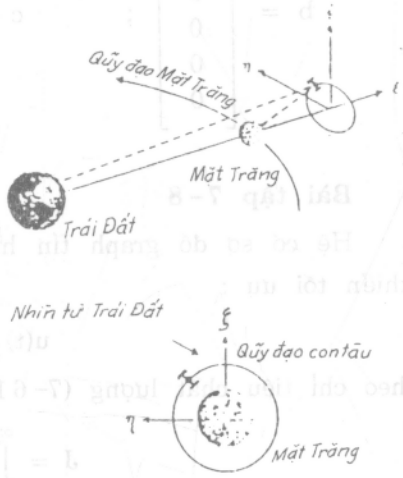
c) Hệ có điều khiển được từ $u_2$ duy nhất không ?

d) Hệ có điều khiển được từ $u_3$ duy nhất không ?

e) Giả thiết theo hướng $\eta$ hệ là quan sát được, xác định hàm truyền :

$$G_\eta(s) = \frac{\eta(s)}{u_2(s)}$$

với y = [0 1 0 0 0 0]X




*Hình 7.37*

f) Mô tả trạng thái đối với mục e) với lệnh tf2ss. Kiểm tra lại hệ là điều khiển được.

*Đáp án*

a) Vị trí cân bằng là không ổn định vì $s_{1,2} = \pm 2{,}1587$ ; $s_{3,4} = 0 \pm j\,1{,}8626$ ; $s_{5,6} = 0 \pm j\,1{,}7862$

b) Hệ không điều khiển được từ $u_1$ : $\text{rank}(C_o) = 4$

c) Hệ không điều khiển được từ $u_2$ : $\text{rank}(C_o) = 4$

d) Hệ không điều khiển được từ $u_3$ : $\text{rank}(C_o) = 2$

e) $$G_\eta(s) = \frac{s^4 - 4{,}1905s^2 - 23{,}548}{s^6 + 1{,}9999s^4 - 19{,}9653s^2 - 51{,}5796}$$

f) Hệ là điều khiển được vì $\text{rank}(C_o) = 6$ hay $\det(C_o) = 1 \neq 0$, ứng với :

$$a = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}9999 & 0 & 19{,}9653 & 0 & 51{,}5796 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad c = [\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4{,}1905 \quad 0 \quad -23{,}548\ ].$$

**Bài tập 7-8**

Hệ có sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 7.38a. Hãy xác định điều khiển tối ưu :

$$u(t) = -k_1x_1 - k_2x_2$$

theo chỉ tiêu chất lượng (7-61) :

$$J = \int_0^\infty (X'X)\,dt \rightarrow \min,$$

với $X'(0) = [1 \quad 1]$ và $k_1 = 1$.

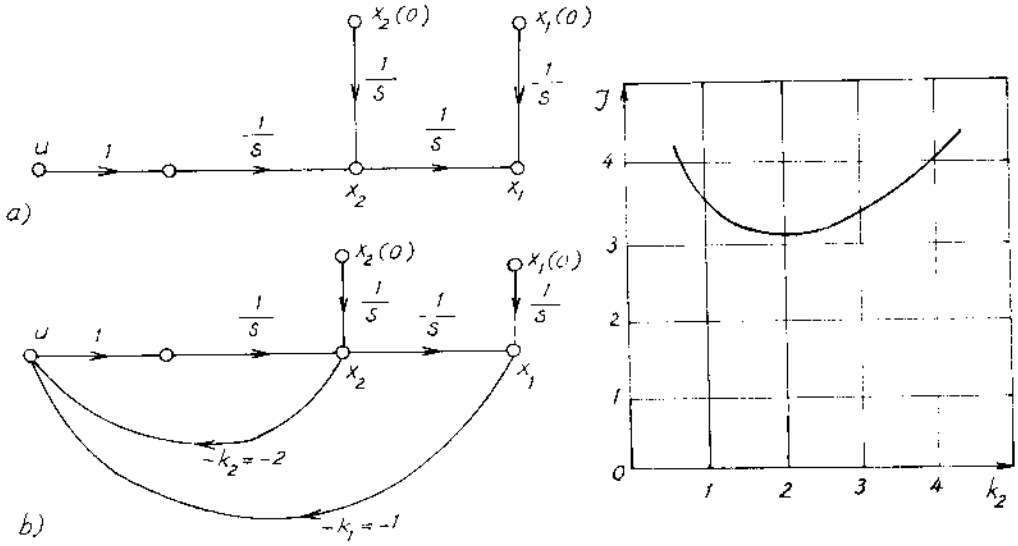
*Đáp án*

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = A.X + b.u ;$$

$$u = -K.X,$$

Vậy :

$$[A - b.K] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$




*Hình 7.38*

Theo (7-68) : $(A - b.K)'P + P(A - b.K) = -I$ ;

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &-p_{12} - p_{12} = -1 \ ; \\ &p_{11} - k_2p_{12} - p_{22} = 0 \ ; \\ &p_{12} - k_2p_{22} + p_{12} - k_2p_{22} = -1 \end{aligned}\right\}$$

$$p_{12} = \frac{1}{2} \ ; \quad p_{22} = \frac{1}{k_2} \ ; \quad p_{11} = \frac{k_2^2 + 2}{2k_2}$$

Theo (7-67) $J = X'(0)PX(0)$ ;

$$J = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{12} + p_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= (p_{11} + p_{12}) + (p_{12} + p_{22}) = p_{11} + 2p_{12} + p_{22} \ ;$$

$$J = \frac{k_2^2 + 2k_2 + 4}{2k_2} ;$$

$\frac{\partial J}{\theta k_2} = 0$ : $k_2 = 2$ với $J_{min} = 3$ như ở hình 7.38b và 7.38c.

**Bài tập 7-9**

Với bài tập 7-8 và điều kiện $k_1 = k_2 = k$ và $X'(0) = [1\ 0]$.

*Đáp án*

$$[A - b.K] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -k \end{bmatrix}$$

Theo (7-68) : $(A - b.K)'P + P(A - b.K) = -I$

$$p_{12} = \frac{1}{2k} ; \ p_{22} = \frac{(k+1)}{2k^2} ; \ p_{11} = \frac{(1+2k)}{2k} .$$

Theo (7-69) : $J = X'(0)P\ X(0) = p_{11}$,

$J = 1 + \frac{1}{2k}$ : $J \to 1$ khi $k \to \infty$

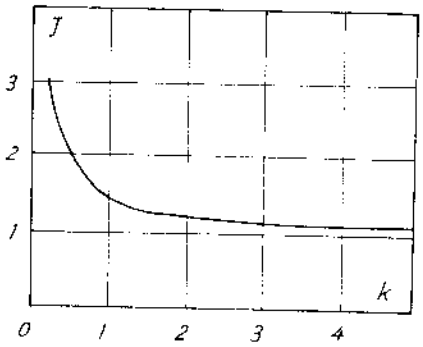
Tín hiệu phản hồi :

$u(t) = -k(x_1(t) + x_2(t))$

cần được hạn chế, ví dụ $|u(t)| \leqslant 50$ :

$$k_{max} = \frac{|u|_{max}}{x_1(0)} = 50 ;$$

vậy $J_{min} = 1 + \frac{1}{2k_{max}} = 1{,}01.$




*Hình 7.39*

**Bài tập 7-10**

Trong nhiều trường hợp cần quan tâm đến tổn hao năng lượng điều khiển, ví dụ $[u(t)]^2$ tương ứng với tổn hao năng lượng điều khiển phương tiện vận tải trên lộ trình.

Với bài tập 7-8 và chỉ tiêu chất lượng :

$$J = \int_0^\infty (X'.I.X + \lambda u'.u)\, dt \quad ,$$

I - ma trận đơn vị; $\lambda$ trọng số.

Hãy xác định điều khiển tối ưu $u = -K.X = -\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} X$ đối với hệ đã cho ở bài tập 7-9.

*Đáp án*

Ứng với (7-73):

$$J = \int_0^\infty [X'(I + \lambda K^T K)X]dt \ ;$$

Điều kiện (7-68) trở thành (7-76):

$$(A - B.K)'P + P(A - B.K) = -(I + \lambda K^T K) = -(1 + \lambda k^2)I \ ;$$

$$J = p_{11} = (1 + \lambda k^2)(1 + \frac{1}{2k}) \ ;$$

$$\frac{dJ}{dk} = 2\lambda.k + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2k^2} = \frac{4\lambda.k^3 + \lambda.k^2 - 1}{2k^2} = 0$$

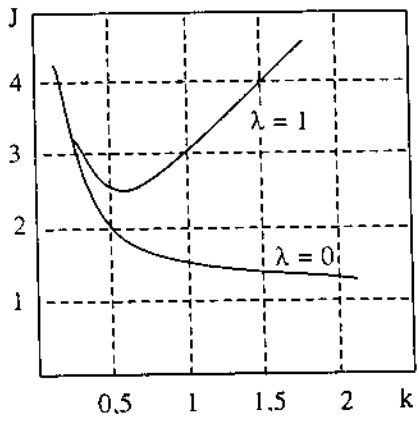
Nghiệm của phương trình trên được giải theo Newton - Raphson.

Với $\lambda = 1$ ; $4k^3 + k^2 - 1 = 0$,

$k^* = 0.555$.

Cực tiểu của J như ở hình 7.40.

Khi $\lambda = 0$ thì trở lại bài toán ở trường hợp không tính đến tổn hao năng lượng (bài tập 7-9).




***Hình 7.40***

**Bài tập 7-11**

Xác định ma trận chuyển tiếp $\Phi(t)$ của hệ sau:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

*Đáp án*

Theo (7- 23 ):

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4t & 4t \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 6t^2 & -8t^2 \\ 0 & 2t^2 & -2t^2 \end{bmatrix} + \ldots$$

Biến đổi:

$$1 - 4t + 6t^2 = (1-2t) + \frac{4}{2}t^2 - 2t(1-2t) = (1-2t)\left(1 - 2t + \frac{4}{2}t^2\right) = (1-2t)e^{-2t}$$

Cuối cùng $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}$

**Bài tập 7-12**

Xác định ma trận chuyển tiếp $\Phi(t)$ của hệ sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

*Đáp án*

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} + e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Vì $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ nên:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -e^{t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

**Bài tập 7-13**

Xác định hàm quá độ của hệ sau đây:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

*Đáp án*

Theo (7-22b), cũng như bài tập 7-12:

$$x(t) = e^{At}x(0) = \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}; & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}; & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] d\tau$$

Nếu điều kiện đầu x(0) = 0 thì

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 - e^{-t} + 0{,}5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

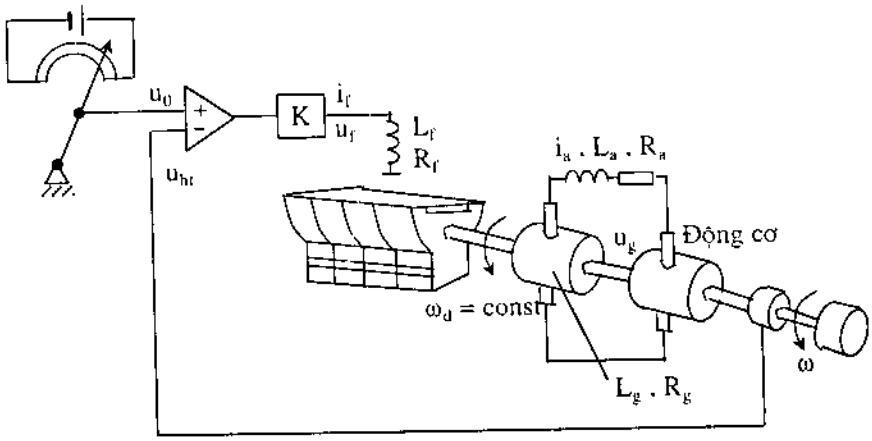
**Bài tập 7-14**

Đầu máy chạy điêzen có sơ đồ khối như ở hình 7.41a và sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 7.41b, còn thông số cho ở bảng 7.1

Hãy xác định $K_0$ và K:

$$K = [\ K_1\ \ K_2\ \ K_3\ ]$$

sao cho sai lệch tĩnh bé hơn 2%, lượng quá điều chỉnh bé hơn 10% và thời gian quá độ $t_{qd} < 1$ sec.




*Hình 7.41a*

*Đáp án*

Chọn trạng thái $x_1 = \omega$; $x_2 = i_a$ ;

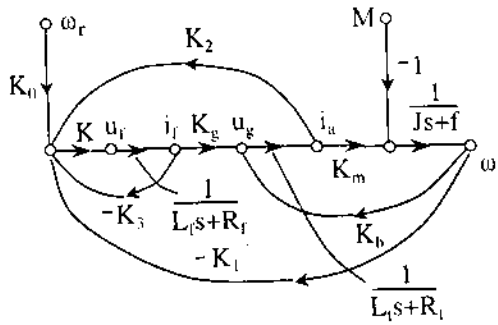
$x_3 = i_f$

Mô tả hệ thống:

$$\dot{x}_1 = \frac{f}{J}x_1 + \frac{K_m}{J}x_2 - \frac{1}{J}T_d$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K_b}{L_f}x_1 - \frac{R_f}{L_f}x_2 + \frac{K_g}{L_f}x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R_f}{L_f}x_3 + \frac{1}{L_f}u$$




*Hình 7.41b*

*Bảng 7.1*

| $K_m$ | $K_g$ | $K_b$ | J | f | $L_a$ | $R_a$ | $R_f$ | $L_f$ | $K_i$ | $K_0$ | $L_g$ | $R_g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 100 | 0,62 | 1 | 1 | 0,2 | 1 | 1 | 0,1 | 1 | 1 | 0,1 | 1 |

mà $u = KK_0\omega_r - KK_1x_1$ ; $L_t = L_a + L_g$ ; $R_t = R_a + R_g$ .

Giả sử chọn $K_0 = K_1 = 1$; ở hệ có hồi tiếp thông thường, sai số tĩnh xác định bởi:

$$e_{ss} = \frac{1}{KG(0)} = \frac{1}{1+121,95K}$$

Điều kiện ổn định Huocvit:

$$-0,008 < K < 0,0468$$

sẽ không thoả mãn sai số tĩnh đã cho nên phải chọn $K_1$, $K_2$, $K_3$. Chọn K = 1 và:

$$u = K_0\omega_r - K_1x_1 - K_2x_2 - K_3x_3 ;$$

Hệ kín có dạng:

$$\dot{X} = (A - BK)x + Bv$$

$$y = Cx$$

$$v = K_0$$

Hệ đã được kiểm tra khả năng điều khiển được với det $C_0 \neq 0$.

Theo phương pháp quỹ đạo nghiệm số chọn phương trình đặc trưng với nghiệm:

$s_1 = -50$ (nghiệm lớn để hệ có đặc tính bậc hai theo $s_2$ và $s_3$).

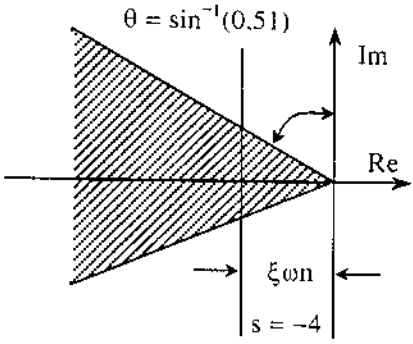
$s_2 = -4 + 3j$

$s_3 = -4 - 3j$

Với các thông số này: $\sigma\% < 10\%$; $t_{qd} < 1$ s; $\xi > 0,59$ và $\xi\omega_n > 4$.

Nghiệm nằm trong miền gạch sọc ở hình 7-42. Kết quả tính:

$K = [-0,0041 \quad 0,0035 \quad 4,0333]$.




*Hình 7.42*

Hàm truyền của hệ kín:

$$W_K(s) = C(sI - A + BK)B.$$

$$K_0 = 1/W_K(0) = 1 \text{ ; và } W(0) = 1.$$

**Bài tập 7-15**

Viên bi sắt được treo trong không gian nhờ từ trường nam châm như ở hình 7.43. Nhiệm vụ là điều chỉnh i để giữ viên bi ở khoảng cách y.

Phương trình động học của hệ như sau:

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\frac{i^2(t)}{x(t)}$$

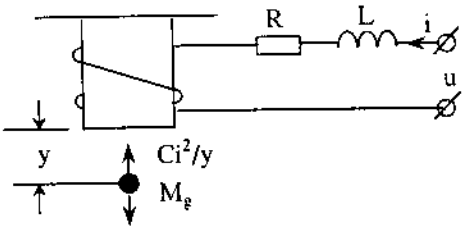
$$u(t) = R.i(t) + L\,di(t)/dt$$

với k = 1 ; L = 0,01 H ; R = 1 Ω ;

M = 1 kg ; g = 32,2 m/sec

Chọn : $x_1(t) = x(t) - y$ ;

$x_2(t) = dx(t)/dt$ ; $x_3 = i(t)$.




*Hình 7.43*

Sau khi tuyến tính hoá ta có mô hình:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A^*\Delta x(t) + B^*\Delta u(t)$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64,4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} ; \; B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Đối tượng trên là không ổn định ( s = – 100 ; – 8,025 ; 8,025).

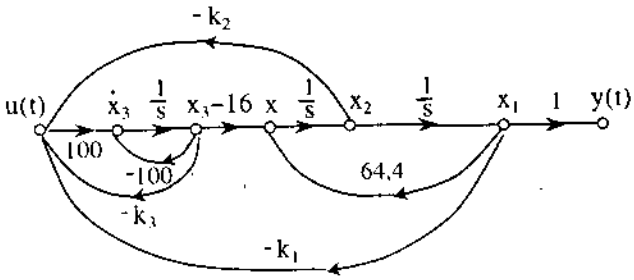
Hãy xác định K sao cho:

- Hệ ổn định.

- Khi thay đổi vị trí cân bằng của viên bi, nó sẽ trở về vị trí ban đầu không sai số.

- Thời gian quá độ $t_{qd} < 0,5$ sec (khi thay đổi 5% vị trí),

- Xác định K = [ $k_1$ $k_2$ $k_3$ ] như ở hình 7.44.




*Hình 7.44*

*Đáp án*

Chọn phương trình đặc trưng với các nghiệm: s = −20 , −6 + j4,9:

$$s^3 + 32s^2 + 300s + 1200 = 0$$

Phương trình đặc trưng của hệ kín, mặt khác được xác định bởi:

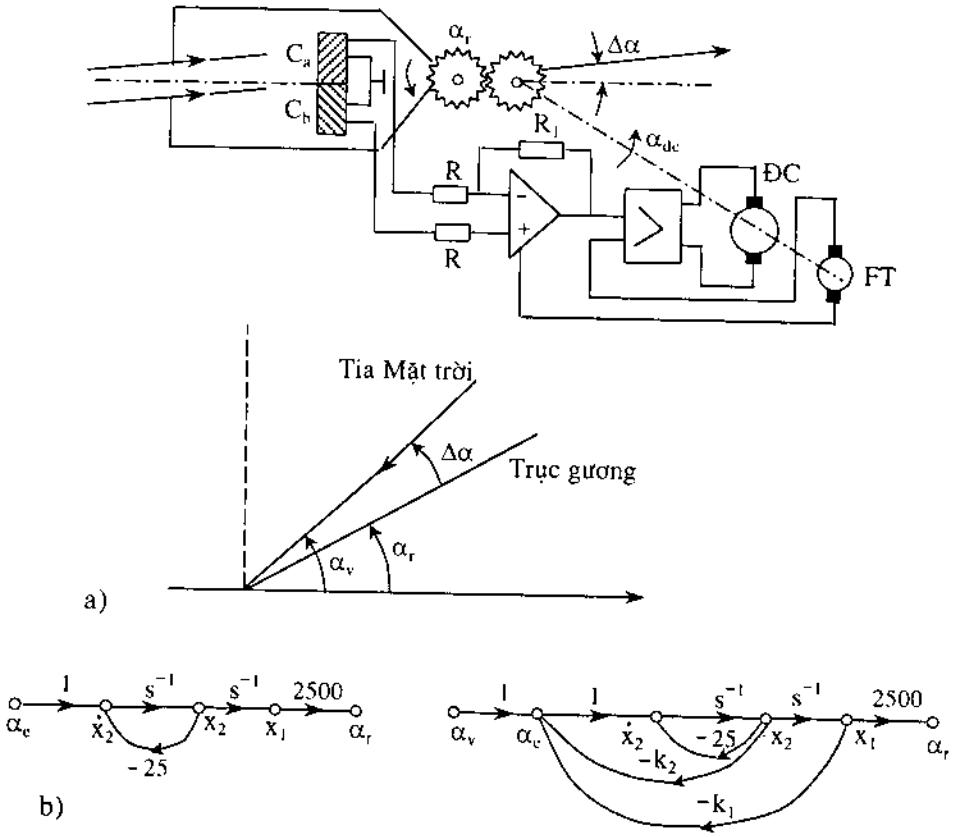
$$\left[sI - A^* + B^*K\right] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -64,4 & s & 16 \\ 100k_1 & 100k_2 & s + 100 + 100k_3 \end{bmatrix} =$$

$$= s^3 + 100(k_3 + 1)s^2 - (64,4 + 100k_2)s - 1600k_1 - 6440(k_3 + 1) = 0$$

Từ đó xác định: K = [ − 2,038 − 0,22775 − 0,68 ]

**Bài tập 7-16**

Hệ điều khiển bám Mặt trời có sơ đồ như ở hình 7.45a và hệ kín với ma trận K = [ $k_1$ $k_2$ ] như ở hình 7.45b.




***Hình 7.45***

Hệ cho trước: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$ ; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; $\alpha_r(t) = Cx(t)$; $C = [\ 1 \quad 0\ ]$;

Yêu cầu đối với hệ:

- Có sai lệch tĩnh bằng không với tín hiệu bậc thang ở đầu vào.
- Với điều khiển trạng thái hồi tiếp, thời gian quá độ $t_{qd}$ , lượng quá điều chỉnh $\sigma\%$, thời gian đáp ứng $t_m$ là cực tiểu.

*Đáp án*

Hàm truyền của hệ kín: $\dfrac{\alpha_r(s)}{\alpha_v(s)} = \dfrac{2500}{s^2 + (25 + k_2)s + k_1}$

Để sai lệch bằng không, chọn $k_1 = 2500$, bằng cách chọn nghiệm của phương trình đặc trưng $s_1 = s_2 = -50$, từ đó $k_2 = 75$. Với các thông số trên đạt được:

$$\sigma\% = 0\ ,\ t_{qd} = 0{,}09467 \text{ sec}\ ,\ t_m = 0{,}06717 \text{ sec.}$$

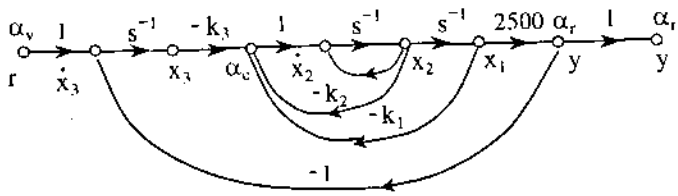
Tuy nhiên để hệ bám được Mặt trời với sai lệch bằng 0 thì phải dùng điều khiển tích phân hay dùng hệ bậc cao. Hãy xác định ma trận hồi tiếp K theo điều khiển tích phân sao cho:

- Sai lệch tĩnh bằng không;
- Thời gian quá độ và thời gian đáp ứng đều bé hơn 0,05 sec;
- Lượng quá điều chỉnh $\sigma\% < 5\%$.

Phương trình động học của hệ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ C = [\ 2500 \quad 0\ ];\ \ D = 0.$$

Sơ đồ graph tín hiệu như ở hình 7.46.




***Hình 7.46***

*Đáp án*

Do có thêm khâu tích phân và hệ số $k_3 = k_{n+1}$, điều khiển sẽ là:

$$u(t) = -Kx(t) - k_3x_3 \text{, mà } K = [\,k_1 \quad k_2\,].$$

Như vậy các ma trận trên sẽ biến đổi:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix};\ \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix};\ \bar{C} = [\,C - DK \quad DK\,]$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ -2500 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chọn phương trình đặc trưng mong muốn với:

$$s = -200;\ -50 + j50;\ -50 - j50;$$

từ đó: $s^3 + 300s^2 + 2500s + 1.000.000 = 0$

Phương trình đặc trưng của hệ kín tương ứng:

$$\left[sI - \bar{A} - \overline{BK}\right] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s + 25 + k_2 & k_3 \\ -2500 & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$= s^3 + (25 + k_2)s^2 + k_1s + 2500\,K_3 = 0$$

Vậy $k_1 = 25.000$ ; $k_2 = 275$ ; $k_3 = 400$.

**Bài tập 7-18**

Hệ có phương trình:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\,1 \quad 0\,]\,X;$$

Hãy xác định ma trận hồi tiếp K sao cho $\sigma\% = 10\%$ và $t_{qd} = 0{,}5$ sec.

*Đáp án*

Theo yêu cầu về chất lượng, chọn vị trí các nghiệm trên mặt phẳng nghiệm số tương ứng với phương trình đặc trưng:

$$s^2 + 16s + 183{,}137 = 0$$

Mặt khác phương trình đặc trưng của hệ kín khi tính đến các hồi tiếp:

$$s^2 + (5 + k_2)s + (3 + k_1) = 0$$

từ đó: $K = [\,180{,}137 \quad 11\,]$

**Bài tập 7-19**

Xác định sai lệch tĩnh theo bài tập 7-18 và điều khiển tích phân để hệ trở thành vô sai tĩnh.

*Đáp án*

Khi tín hiệu vào là bậc thang đơn vị r(t) = 1, vectơ trạng thái xác lập:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = V = \text{const}; \quad \dot{V} = \dot{X}_{ss} = 0$$

Ở trạng thái xác lập của hệ kín:

$$0 = [\,A - BK\,]\,V + B$$

$$Y_{ss} = CV$$

$$e(\infty) = 1 - Y_{ss} = I - CV = 1 + C\,[A - BK\,]^{-1}\,B$$

$$= 1 + [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -183{,}137 & -16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}995\ ;$$

Dùng điều khiển tích phân ($x_3$ , $k_3$) với tín hiệu vào bậc thang r(t):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (k_1 \; k_2) & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_3 \\ -[1 \;\; 0\,] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3+k_1) & -(5+k_2) & k_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [\,1 \;\; 0 \;\; 0\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Với hệ bậc ba, thêm nghiệm cực −100 (rất lớn so với nghiệm trội nhất) để có phương trình đặc trưng:

$$(s + 100)\,(s^2 + 16s + 183{,}137) = s^3 + 116s^2 + 1783{,}137s + 183{,}137 = 0$$

và cân bằng với đa thức đặc trưng của hệ kín:

$$s^3 + (\,5 + k_2)s^2 + (3 + k_1)s + k_3$$

$$K = [\,1780{,}137 \quad 111 \quad 18313{,}7\,]$$

$$e(\infty) = 1 + [\,1 \;\; 0 \;\; 0\,] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783{,}137 & -116 & 18313{,}7 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

*Bài tập 7-20*

Hệ điều khiển áp suất của ống dẫn hơi nóng có hàm truyền đạt:

$$Y(s)/\ U(s) = 1/s^2 + 3s + 4$$

Nghiệm của hệ là $s = -1,5 + j1,3$. Cần tăng độ tác động nhanh và giảm quá điều chỉnh bằng hồi tiếp trạng thái, tuy nhiên $x_2$ không đo được nên cần dùng đến bộ quan sát động.

*Đáp án*

Với đối tượng trên: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ ; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; $C = [\,1 \quad 0\,]$

Theo (7-97):

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [10] = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ -4 - l_2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\left| sI - (A - LC) \right| = s^2 + (3 - l_1)\, s - 3l_1 - l_2 = 0$$

Chọn phương trình đặc trưng: $(s + 15)^2 = s^2 + 30s + 225 = 0$

Vậy: $l_1 = 27$ , $l_2 = 140$.

**Bài tập 7-21**

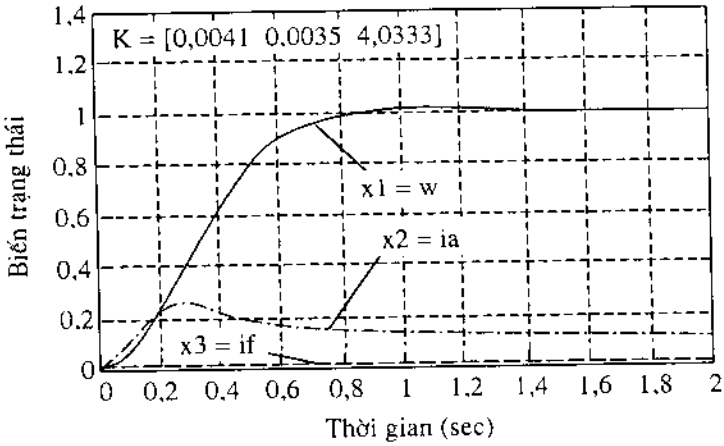
Dùng MATLAB để kiểm tra lại kết quả ở bài tập 7-14 và vẽ đặc tính của x(t)

*Đáp án*

Chương trình để xác định K theo Ackerman và vẽ x(t) như sau:

```
f=1; J=1; Km=10;Kb=0.62; Lt=0.2+0.1;
Rt=l+1; Kt=1;Kg=100; Rf=1; Lt=0.1;
A=[-f/J Km/J 0; -Kb/Lt -Rt/Lt Kg/Lt; 0 0 -Rf/Lf];
B=[0;0;1/Lf]; C=[1 0 0]; D=[0];
P=[-50,-4+3*i,-4-3*j];
K=acker(A,B,P)
[num,den]=ss2tf(A-B*K,B,C,D);
Ko=num(4)/den(4);
t=[0:0.05:2];
[y,x,t]=step(A-B*K,B/Ko,C,D,1,t);
plot(t,x:,1),t,x(:,2),'--',t,x(:,3),'-.'),grid
xlabel("Thoi gian(sec)',ylabel('Bien trang thai')
legend('-','w','--','ia,'-.','if',-1)
```

Đặc tính của x(t) như ở hình 7.47.




***Hình 7.47***

**Bài tập 7-22**

Cho một hệ sau:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ 6,5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Dùng máy tính để vẽ các đáp ứng của hàm bậc thang.

*Đáp án*

Vì: $X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$

$Y(s) = [\, C(sI - A)^{-1} B + D \,]\, U(s)$

nên: $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$

$$G(s) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -6,5 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + s + 6,5}\begin{bmatrix}s & -1\\ 6,5 & s-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+s+6,5}\begin{bmatrix} s-1 & s \\ s+75 & 6,5 \end{bmatrix}$$

Từ đó:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^2+s+6,5} & \dfrac{s}{s^2+s+6,5} \\ \dfrac{s+7,5}{s^2+s+6,5} & \dfrac{6,5}{s^2+s+6,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Vậy:

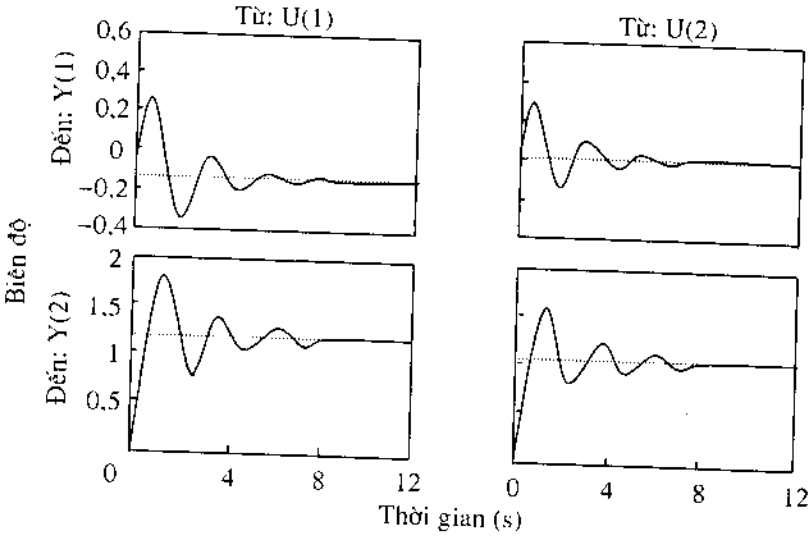
$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s-1}{s^2+s+6,5}; \quad \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s+7,5}{s^2+s+6,5};$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s}{s^2+s+6,5}; \quad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{6,5}{s^2+s+6,5};$$

Đáp ứng của hàm $l(t)$ được thực hiện theo chương trình sau:

```
A= [-1 -1 ; 6.5 0] ;
B= [1 1 ; 1 0] ;
C= [1 0; 0 1]
D= [0 0 0 0];
step(A,B,C,D)
```

Đáp ứng tương ứng như ở hình 7.48.




*Hình 7.48*

Trong trường hợp cần đường đặc tính ứng với đầu vào $u_1$ hay $u_2$ thì thêm vào lệnh vẽ hàm quá độ chỉ số 1 hay 2. Ví dụ:

step(A,B,C,D,1)

step(A,B,C,D,2)

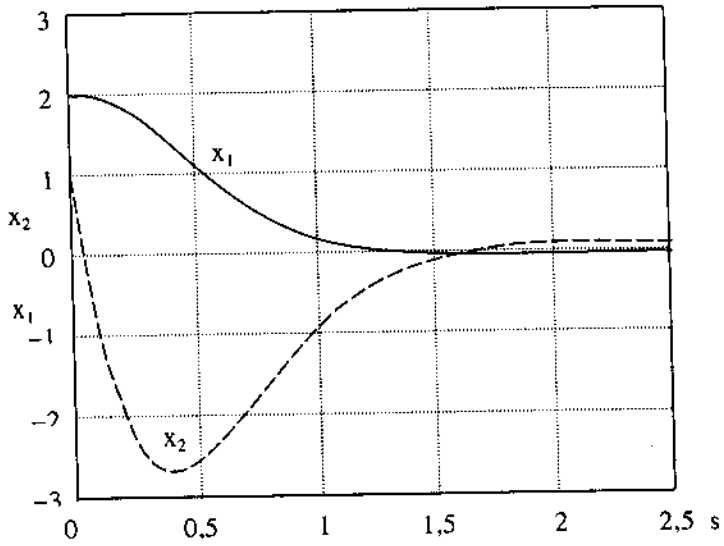
Có thể dùng biến trung gian z trong phương trình trạng thái để có đáp ứng với điều kiện đầu: $\dot{z} = Az + Bu$

$$x = Az + Bu$$

với $$B = x(0),\ u = 1(t)$$

Chương trình được viết với ví dụ sau:

```
A=[0 1;-10  -5]; B=[2; 1]
[x, z, t] =step(A,B,A,B);
x1 = [ 1  0]*x';
x2 = [ 0  1]*x';
plot(t, x1, '-', t, x2, '--')
 grid
 title( 'Đáp ứng có điều kiện đầu' )
text (0.55.1.2,'x1')
text (0.35, -2.5, 'x2')
```




*Hình 7.49*

# PHỤ LỤC

## A. PHỤ LỤC VỀ MA TRẬN

### A.1. Định nghĩa

Ma trận $A = \{a_{ij}\}$ là một bảng dạng chữ nhật mà các phần tử $a_{ij}$ là số hay hàm số, ví dụ :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{(A-1)}$$

Ma trận m x n là ma trận có bậc (m, n) hay có m hàng và n cột. Khi m = n, có ma trận vuông hay ma trận bậc n. Ma trận có một cột : m x 1 gọi là *ma trận cột* hay *vectơ cột*, ví dụ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad \text{(A-2)}$$

Tương tự, ma trận có một hàng : 1 x n gọi là *vectơ hàng*, ví dụ :

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]. \qquad \text{(A-3)}$$

Một số định nghĩa quan trọng :

1. *Ma trận chéo* là ma trận vuông có các phần tử đều bằng 0, trừ các phần tử ở đường chéo chính, ví dụ :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(A-4)}$$

2. *Ma trận đơn vị* là ma trận chéo có các phần tử ở đường chéo chính bằng 1, ví dụ :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A-5)}$$

3. *Ma trận không* là ma trận có mọi phần tử bằng 0.

4. *Ma trận đối xứng* có các phần tử đối xứng nhau bằng nhau $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i \neq j$, ví dụ :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{(A-6)}$$

5. *Ma trận chuyển vị* **A'** *hay* $\mathbf{A}^T$ của **A** có được bằng cách thay đổi hàng thành cột, cột thành hàng. Chuyển vị của vectơ cột X ở (A-2) là vectơ hàng $\mathbf{X'} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$.

$(\mathbf{A'})' = \mathbf{A}$ và ma trận đối xứng nếu $\mathbf{A'} = \mathbf{A}$.

6. *Vệt của ma trận vuông* **A** là tổng của những phần tử ở đường chéo chính :

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \qquad \text{(A-7)}$$

7. *Ma trận phân rã* thành ma trận con hay vectơ :

$$\begin{matrix} \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_n] \\ \mathbf{b'}_i = [b_{i1}\ \ldots\ b_{in}] \end{matrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b'}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b'}_m \end{bmatrix} ; \ \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}. \qquad \text{(A-8)}$$

Phương trình (A-8) nói rằng m × n ma trận $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ và $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ được phân rã thành vectơ cột và vectơ hàng tương ứng.

## A.2. Các phép tính

Đối với ma trận $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ hay vectơ $\mathbf{X} = \{x_i\}$, $\mathbf{y} = \{y_i\}$ có các tính chất và phép tính sau đây :

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ $(\mathbf{X} = \mathbf{y})$ nếu và chỉ nếu $a_{ij} = b_{ij}$ $(x_i = y_i)$ cho mọi i, j. Các ma trận ấy (vectơ ấy) bằng nhau.

2. Khi nhân cho một đại lượng vô hướng h, mỗi phần tử đều nhân cho đại lượng ấy :

$$h(\mathbf{A}) = \{ha_{ij}\} \ ; \ h\mathbf{X} = \{hx_i\}.$$

3. Hai ma trận có thể cộng hoặc trừ nhau khi chúng có cùng bậc và được thực hiện bằng cách cộng hoặc trừ các phần tử tương ứng :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \; ; \; \mathbf{Z} = \mathbf{X} \pm \mathbf{y}, \text{ nghĩa là :}$$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \; ; \; z_i = x_i \pm y_i$$

Một số tính chất :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \; ; \; (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \; ;$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A} \; ; \; \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \; ;$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

$$(h_1 + h_2)\mathbf{X} = h_1\mathbf{X} + h_2\mathbf{X}.$$

4. Ma trận nhân với nhau khi số cột của **A** bằng số hàng của **B**. Nếu **A** có bậc (m, n) và **B** có bậc (n, p) thì bậc của **C** là (m, p).

Với $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$ :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad \text{(A-9)}$$

Phần tử k ở hàng i của **A** nhân với phần tử k ở cột j của **B** và tích ấy được cộng lại cho mọi k trong hàng i và cột j để có $C_{ij}$. Hay dùng ma trận phân rã cũng có kết quả tương tự :

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix} [b_1 \; . \; . \; . \; b_p];$$

$$C_{ij} = \mathbf{a}'_i\mathbf{b}_j = [a_{i1} \; \ldots \; a_{in}] \begin{bmatrix} b_{ij} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \; .$$

Một số tính chất :

Nói chung $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ ;

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \; ; \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC} \; ;$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \; ; \; \mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{0}.$$

Nếu $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ không nhất thiết **A** hay **B** phải bằng 0, ví dụ :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ : Chuyển vị của một tích bằng tích của chuyển vị theo thứ tự ngược lại.

6. Biến đổi tuyến tính và phương trình đại số

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \; ; \; y_i = \sum a_{ij}x_j \; ; \; i = 1, \ldots, m$$

. . . . . .

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = y_n \; ; \; \mathbf{y} = \mathbf{Ax} \; ; \; \mathbf{A} = \{a_{ij}\}. \qquad (A\text{-}10)$$

Đó là hệ phương trình cần giải đối với **X**. Nếu **y = 0** hệ trên là thuần nhất và điều kiện cần để **X** có nghiệm (không phải tất cả đều bằng 0) là định thức của ma trận A bằng không.

7. *Dạng bình phương* **X'AX** :

$$\mathbf{X'AX} = [x_1 \ \ldots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; . \qquad (A\text{-}11)$$

mà $y_i$ như đã xác định theo (A–10). Chú ý tích của chúng là một đại lượng vô hướng.

8. *Tích của vectơ và tính trực giao*

Tích của hai vectơ là một đại lượng vô hướng :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X'y} &= [x_1 \ \ldots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{y'X} \; ; \\ \mathbf{X'X} &= x_i^2 \; ; \; |\mathbf{X}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\mathbf{X'X}} \; . \end{aligned}\right\} \qquad (A\text{-}12)$$

Vectơ được gọi là chuẩn nếu $|\mathbf{X}| = 1$.

Hai vectơ trực giao nhau nếu $\mathbf{X'y} = \mathbf{y'X} = 0$.

## A.3. Định thức, nghịch đảo và số hạng của ma trận

Định thức của ma trận A bậc n (det A hay $|A|$) là đại lượng vô hướng hay một hàm. Định thức của A được xác định bởi định thức con và phần phụ đại số của ma trận A.

1. *Định thức con* $m_{ij}$ của phần tử $a_{ij}$ là định thức của ma trận nhỏ hơn một bậc lấy từ ma trận A sau khi gạch bỏ hàng và cột chứa $a_{ij}$. Ví dụ :

Với n = 3 : $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$

$$m_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$m_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix};$$

Với n = 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = a_{22} \; ; \; m_{12} = a_{21} \; ; \; m_{21} = a_{12} \; ; \; m_{22} = a_{11}$$

2. *Phần phụ đại số* $c_{ij}$ của $a_{ij}$ là $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ (A-13)

Với n = 3 : $c_{11} = (-1)^2 m_{11} = m_{11}$ ;

$c_{12} = (-1)^3 m_{12} = -m_{12}$.

Với n = 2 : $c_{11} = m_{11} = a_{22}$ ;

$c_{12} = -m_{12} = -a_{21}$ ;

$c_{21} = -m_{21} = -a_{12}$ ;

$c_{22} = m_{22} = a_{11}$.

3. *Định thức của* A được xác định bởi :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \sum^{n} a_{ij} c_{ij} \qquad \text{(A-14)}$$

Với n = 2 :

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

$$= a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Với n = 3 :

$$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) -$$

$$- a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

*Tính chất của định thức* : $|A'| = |A|$ ; $|hA| = h^n|A|$ với h là đại lượng vô hướng ; $|AB| = |A|.|B|$.

Khi thay đổi hai hàng hay hai cột của A thì dấu của định thức A thay đổi. Nếu A có hai hàng hay hai cột như nhau thì $|A| = 0$.

4. *Ma trận nghịch đảo* của A được xác định bởi :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}, \qquad (A-15)$$

mà adj(A) là ma trận liên hợp của A có được bằng cách thay thế mỗi phần tử $a_{ij}$ bởi phần phụ đại số $c_{ij}$ sau đó chuyển vị lại ma trận đã được hình thành.

Với n = 2 :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}$$

Từ (A-14) nhận thấy : A adj(A) = adj(A)A = |A|I.

Nếu |A| = 0 ma trận A là suy biến, không tồn tại ma trận nghịch đảo $A^{-1}$.

*Một số tính chất của $A^{-1}$*

$(A^{-1})^{-1} = A$ ; $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ ; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (nghịch đảo của một tích bằng tích của các nghịch đảo theo thứ tự đảo ngược).

5. *Số hạng của ma trận* A – rank(A) là bậc lớn nhất của ma trận không suy biến A, nghĩa là với định thức khác 0. Đó là số lượng cực đại của các cột hay hàng tuyến tính độc lập của A. Các vectơ $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ là phụ thuộc tuyến tính nếu có các hằng $c_1, \ldots, c_n$ (mà không phải tất cả bằng 0) sao cho $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n\mathbf{X}_n = \mathbf{0}$ hay $\mathbf{AC} = \mathbf{0}$ mà $\mathbf{A} = [\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_n]$ và $\mathbf{C}' = [c_1; c_2 \ldots c_n]$.

Tính chất của rank(A) :

$$\text{rank}(A') = \text{rank}(A) \ ; \ \text{rank}(A) = \text{rank}(A'A).$$

## A.4. Ma trận và nghiệm đặc trưng

Hệ phương trình (A-10) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}.$$

mà vectơ **y** được xem như phép biến đổi của **X**. Nếu vectơ **y** là một tích vô hướng với **X**, ví dụ $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{X}$, vậy :

$$\lambda\mathbf{X} = \mathbf{AX},$$

$$\lambda\mathbf{X} - \mathbf{AX} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0$$

mà I là ma trận đơn vị. Vậy nghiệm của **X** tồn tại nếu và chỉ nếu :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \qquad \text{(A-16)}$$

Định thức trên là định thức đặc trưng. Khai triển của (A-15) là phương trình đặc trưng – là đa thức đặc trưng bậc n của $\lambda$. Nghiệm của phương trình đặc trưng là nghiệm đặc trưng. Với mỗi nghiệm $\lambda_i$ (i = 1, 2,. ..,n) có thể viết :

$$(\lambda_i I - A)X_i = 0.$$

mà vectơ $X_i$ là vectơ đặc trưng của nghiệm $\lambda_i$. Ví dụ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng được xác định bởi :

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -1 & -1 \\ -2 & (\lambda - 3) & -4 \\ 1 & 1 & (\lambda + 2) \end{bmatrix} = (-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3) = 0$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

Nghiệm đặc trưng là : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

Với $\lambda = \lambda_1 = 1$, vectơ đặc trưng thứ nhất được xác định từ :

$$\mathbf{AX}_1 = \lambda_1 \mathbf{X}_1$$

là $\mathbf{X'}_1 = k\,[1, -1, 0] = [1, -1, 0]$ ; k là số bất kỳ

Tương tự có : $\mathbf{X'}_2 = [0, 1, -1]$ ;

$\mathbf{X'}_3 = [2, 3, -1]$.

## B. BẢNG TÍNH TÍCH PHÂN $J_2$ (với n = 1, 2, 3, 4, 5)

$$J_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{b(s)\,b(-s)}{a(s)\,a(-s)}\,ds$$

$$b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0 ;$$

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0.$$

$$J_2 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1} \text{ với } n = 1 ;$$

$$J_2 = \frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2} \text{ với } n = 2.$$

$$J_2 = \frac{b_5^2 a_0 a_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_0^2 a_2 a_3}{2a_0 a_3 (-a_0 a_3 + a_1 a_2)} \quad \text{với } n = 3.$$

$$J_2 = \frac{b_3^2(-a_0^2 a_3 + a_0 a_1 a_2) + (b_2^2 - 2b_1 b_3)\, a_0 a_1 a_4 +}{2a_0 a_4 (-a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3)} \ldots$$

$$\ldots \frac{(b_1^2 - 2b_0 b_2)\, a_0 a_3 a_4 + b_0^2 (-a_1 a_4^2 + a_2 a_3 a_4)}{2a_0 a_4 (-a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3)} \quad \text{với } n = 4.$$

$$J_2 = \frac{1}{2\Delta} [b_4^2 m_0 + (b_3^2 - 2b_2 b_4)\, m_1 + (b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4)\, m_2 +$$

$$+ (b_1^2 - 2b_0 b_2)\, m_3 + b_0^2 m_4] \text{ với } n = 5$$

mà

$$m_0 = \frac{1}{a_5} (a_3 m_1 - a_1 m_2) \;;$$

$$m_1 = -a_0 a_3 + a_1 a_2 \;;$$

$$m_2 = -a_0 a_5 + a_1 a_4 \;;$$

$$m_3 = \frac{1}{a_0} (a_2 m_2 - a_4 m_1) \;;$$

$$m_4 = \frac{1}{a_0} (a_2 m_3 - a_4 m_2) \;;$$

$$\Delta = a_0 (a_1 m_4 - a_3 m_3 + a_5 m_4).$$

## C. PHỤ LỤC VỀ CHƯƠNG TRÌNH TUTSIM VÀ MATLAB

TUTSIM từ chữ Twente - University - Simulation, là chương trình mô phỏng có xuất xứ từ trường Đại học Tổng hợp Twente (Hà Lan). Mô hình hóa theo các khâu cơ bản tương tự cũng như số, tuyến tính cũng như phi tuyến tính. Có tất cả 999 khối.

MATLAB từ chữ Matrix - Laboratory. Đầu tiên chương trình MATLAB được viết cho các phép tính ma trận, về sau MATLAB được dùng cho các bài toán kỹ thuật cùng các chương trình chuyên dụng ngày càng hoàn thiện và sử dụng đơn giản hơn.

TUTSIM và MATLAB đều có những đặc điểm riêng [6, 7] và còn dùng để điều khiển các đối tượng thực.

Sau đây là tóm tắt một số khối và lệnh đã dùng trong tài liệu này.

## C.1. TUTSIM

*Bảng C.1.1.*

*Một vài khối thông dụng*

| TT | Ký tự | Thông số | Chú thích |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | CON | A | Trị số (biên độ) của hằng |
| 2 | PLS | $t_o$, $t_1$, A | Xung chữ nhật với thời điểm bắt đầu $t_o$, thời điểm kết thúc $t_1$, và biên độ A |
| 3 | GAI | K | Khâu khuếch đại (**gain**) |
| 4 | ATT | $\frac{1}{K}$ | Trị số nghịch đảo (**attenuator**) |
| 5 | FIO | K, T | Khâu quán tính (**first order**) |
| 6 | INT | $C_o$ | Khâu tích phân (**integrator**)<br>$C_o$ - điều kiện đầu |
| 7 | DEL | $\tau$ | Khâu trễ (**delay**) |
| 8 | REL | p | Khâu rơle (**Relay**) với 4 đầu vào<br>$y = u_1$ nếu $u_4 > p$<br>$= u_2$ nếu $u_4 = p$<br>$= u_3$ nếu $u_4 < p$ |
| 9 | PID | K, $T_i$, $T_d$, $\alpha$ | Bộ điều chỉnh tỷ lệ vi tích phân<br>$W(s) = K\left[\frac{1}{sT_i} + \frac{1+sT_d}{1+\alpha sT_d}\right]$ |
| 10 | FNC | $N_o$, X, y | Khối tạo hàm (**Function Generator**) y = f(x) |
| 11 | SUM | | Khối cộng |
| 12 | MUL | | Khối nhân (**Multiply**) |
| 13 | DIV | | Khối chia (**Divide**) |
| 14 | SPL | $\Delta t$ | Lấy mẫu và duy trì hàm (**Sampled and Hold**) |
| 15 | LIM | min, max | Khối hạn chế (**Limit** function) |
| 16 | SGN | | Khối lấy dấu (**sign**)<br>$y = \begin{cases} 1 \text{ khi } x \geq 0 \\ -1 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ |
| 17 | TIM | | Khối tạo hàm thời gian (**Time**) |
| 18 | SIN | | Khối tạo hàm lượng giác |
| 19 | COS | | |
| 20 | NOI | | Khối tạo nhiễu ngẫu nhiên |

*Bảng C.1.2.*

*Một số lệnh thông dụng*

| TT | Lệnh | Chú thích |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | H | Lệnh trợ giúp (Help). Trên màn ảnh có các lệnh cần thiết. |
| 2 | L | Xem mô hình trên màn hình (List) |
| 3 | LP | Xem và in lại mô hình với thông số |
| 4 | CL | Xóa màn hình (Clear) |
| 5 | SD | Bắt đầu mô phỏng và hiện hình (Start and Display) |
| 6 | V | Thể hiện trị số tính cuối cùng của khâu tương ứng |
| 7 | CS | Thay đổi cấu trúc (Change Structure) |
| 8 | CP | Thay đổi thông số (Change Parameters) |
| 9 | CB | Thay đổi các khối ra (Change output Blocks) |
| 10 | CT | Thay đổi thời gian lấy mẫu (Change Timing) |
| 11 | DF | Lưu giữ mô hình đã mô phỏng vào một tệp |
| 12 | A | Thoát khỏi TUTSIM (Abort) |

## C.2. MATLAB

*Bảng C.2.1.*

*Các hàm thông dụng*

| TT | Ký tự | Chú giải |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | sin(X) | Hàm sine từ các phần tử của X |
| 2 | cos(X) | Hàm cosine từ các phần tử của X |
| 3 | asin(X) | Arcsine từ các phần tử của X |
| 4 | acos(X) | Arccosine từ các phần tử của X |
| 5 | tan(X) | Tangent từ các phần tử của X |
| 6 | atan(X) | Arctangent từ các phần tử của X |
| 7 | abs(X) | Trị số tuyệt đối của X |
| 8 | sqrt(X) | Nghiệm bậc 2 của X |
| 9 | imag(X) | Phần ảo của X |
| 10 | real(X) | Phần thực của X |
| 11 | conj(X) | Phức liên hợp của X |
| 12 | log(X) | Logarit tự nhiên của X (lnX) |
| 13 | log10(X) | Logarit thập phân của X |
| 14 | exp(X) | Hàm mũ của X |

*Bảng C.2.2.*

*Các lệnh (hàm) thông dụng*

| TT | Ký tự | Chú giải |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | bode | Vẽ đặc tính tần số logarit (đường cong Bode) |
| 2 | c2dm | Chuyển từ biến trạng thái hệ liên tục sang gián đoạn |
| 3 | cloop | Tính hệ kín với hồi tiếp đơn vị |
| 4 | conv | Nhân hai đa thức với nhau |
| 5 | ctrb | Tính ma trận điều khiển được |
| 6 | d2cm | Chuyển từ biến trạng thái hệ gián đoạn sang liên tục |
| 7 | dstep | Tính hàm quá độ của hệ gián đoạn |
| 8 | eig | Tính giá trị riêng và vectơ riêng |
| 9 | feedback | Liên kết kín hai hệ |
| 10 | impulse | Tính hàm trọng lượng của hệ |
| 11 | linspace | Tạo vectơ không gian tuyến tính |
| 12 | isim | Tính đáp ứng của hệ có tín hiệu vào bất kỳ và có điều kiện đầu |
| 13 | margin | Tính độ dự trữ ổn định về biên độ và pha |
| 14 | mesh | Tạo mặt cong ba chiều |
| 15 | ngrid | Vẽ đường kẻ mạng trên biểu đồ Nichols |
| 16 | nichols | Tính đường cong Nichols |
| 17 | nyquist | Tính đường cong Nyquist |
| 18 | obsv | Tính ma trận quan sát được |
| 19 | pade | Tính hàm xấp xỉ bậc n Pade cho phần tử trễ |
| 20 | parallel | Nối song song |
| 21 | poly | Tính đa thức từ nghiệm |
| 22 | rank | Tính số hạng của ma trận |
| 23 | residue | Dư số |
| 24 | rlocfind | Xác định hệ số K ở quỹ đạo nghiệm |
| 25 | rlocus | Tính quỹ đạo nghiệm số |
| 26 | roots | Xác định nghiệm của đa thức |
| 27 | roots 1 | Như roots nhưng chính xác hơn khi có nghiệm lặp |
| 28 | series | Tính nối tiếp |
| 29 | ss2tf | Chuyển đổi từ trạng thái sang hàm truyền đạt |
| 30 | step | Tính hàm quá độ của hệ |
| 31 | title | Thêm đầu đề vào đồ thị hiện hành |
| 32 | tf2ss | Chuyển từ hàm truyền sang trạng thái |
| 33 | tf2zp | Chuyển từ hàm truyền sang nghiệm cực và nghiệm không |
| 34 | who | Thể hiện các biến ở bộ nhớ |
| 35 | whos | Thể hiện các biến cùng kích thước của chúng |
| 36 | zeros | Tạo ma trận không |
| 37 | zp2ss | Chuyển từ nghiệm không và cực sang trạng thái |
| 38 | zp2tf | Chuyển từ nghiệm không và cực sang hàm truyền đạt |

# TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] *Benjamin C. Kuo.* "Automatic Control Systems" Prentice. Hall International Inc, 1995.

[2] *Bühler H.* "Conception de systèmes automatiques" P.P.R, 1988.

[3] *Bühler H.* "Electronique de réglage et de commande". Dunod Edition Géorgi, 1980

[4] *Csaki E.* "Modern Control Theories" Moscow, 1975.

[5] *Солодовников В.В. (ред.).* "Теория автоматического управления". Москва. "Машиностроение". 1969.

[6] *Cochin I.* "Analysis and design of dynamic systems". Addison. Wesley, 1997.

[7] *Dorf C. and Bishop R. H.* "Modern Control Systems" Addison – Wesley, 1997.

[8] *Dutton Ken and others.* "The Art of Control Systems" Addison – Wesley, 1997.

[9] *Derek R. and David N. W.* "System dynamic – An introduction". Prentice – Hall Inc, 1997.

[10] *Daniel Dindeleux.* "Technique de la régulation indusrrielle". Paris, 1983.

[11] *Gille J. C. Decaulme P. et Pelegrin M.* "Dynnamique de la commande linéaire" Dunod. Paris, 1991

[12] *Gopal M.* "Modern control system theory". New Delhi, 1989

[13] *Jolm Van de Vegte.* "Feedback control systems" Prentice – Hall, 1990

[14] *Korn G. A. and Korn T. M.* "Mathematical handbook for scientists and engineers" Mc Graw – Hill. New york. Toronto. London, 1961

[15] *Netushill A. V.* "Theory of Automatic control" Mir Publisher. Moscow, 1972

[16] *Nguyen Thuong Ngo.* "Sensitivity of Automatic Control Systems". System Sensitivity Analysis. Edited by José B. Cruz. Illinois. USA, 1973

[17] *Nguyen Thuong Ngo.* "Application de la méthode de plamification des expériences pour identifier des systèmes et dimensionner les régulateurs" Algérie, 1992

[18] *Nguyễn Thương Ngô, Hồ Phương Dung.* "Chỉnh định thông số tối ưu của bộ điều khiển khi đối tượng chưa xác định" The Second Vietnam Conference on Automation. Hanoi, 1996

[19] *Нгуен Тхыонг Нго.* "Чувствительность систем автоматического управления" (Обзор) А и Т N°5, 1971 АНСССР. Москва.

[20] *Nguyễn Thương Ngô.* "Lý thuyết điều khiển tự động thông thường và hiện đại, quyển 4. Nhà xuất bản KHKT. Hà Nội, 2005

[21] *Norman S. Nise.* "Control Systems Enginecring" California. State Polytechinic University. Addison Wesley, 1995

[22] *Olson Gustab and Piani Gianguido.* "Computer Systems for Automation and Control". Prentice Hall.

[23] *Пугачёв В.С. (ред.).* "Основы автоматического управления". Москва. "Наука". 1968.

[24] *Philippe de Larminat.* "Automatique. Commande des systèmes linéaires" Hernes. Paris, 1993

[25] *Цыпкин Я.З.* "Основы теории автоматических систем". Москва. "Наука". 1977

## MỤC LỤC

# LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG
## THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

### Quyển 1

### HỆ TUYẾN TÍNH

Tác giả: PGS.TS NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

*Chịu trách nhiệm xuất bản:* TS. PHẠM VĂN DIỄN
*Biên tập:* NGUYỄN NGỌC KHUÊ
*Vẽ bìa:* ĐẶNG NGỌC QUANG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

In 1.000 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Số đăng ký KHXB: 209-2009/CXB/63.1-10/KHKT ngày 18/3/2009
Quyết định xuất bản số: 149/QĐXB-NXBKHKT ngày 15/5/2009
In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2009.

**Giá: 69.000đ**