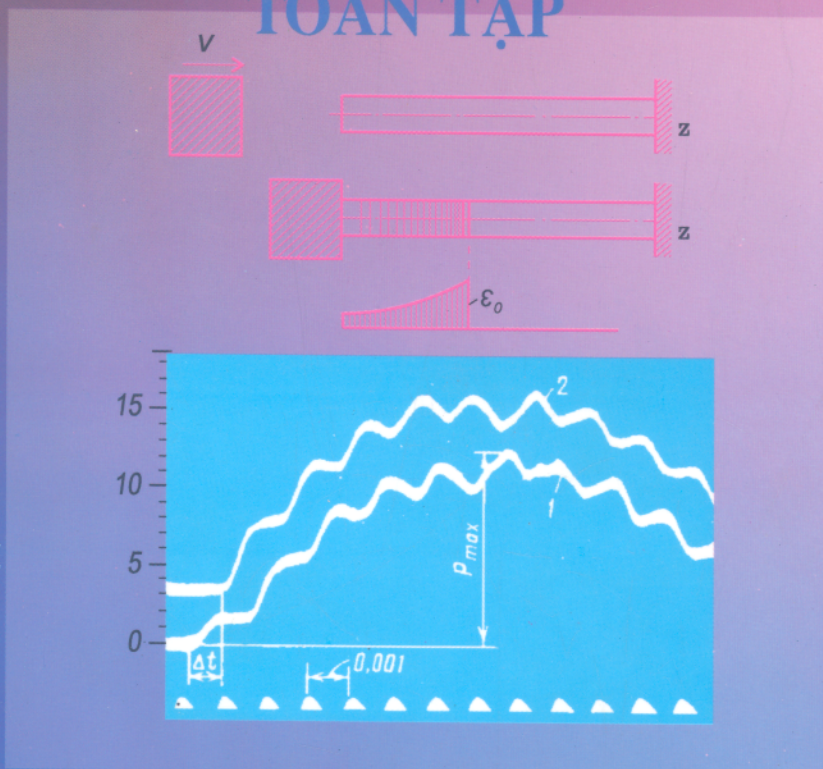


TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐẶNG VIỆT CƯƠNG

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TOÀN TẬP



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐẶNG VIỆT CƯỜNG

PGS. TS. GIẢNG VIÊN CAO CẤP

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TOÀN TẬP



**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI**

SỨC BỀN VẬT LIỆU

(TOÀN TẬP)

Tác giả:

PGS.TS. ĐẶNG VIỆT CƯƠNG – GIẢNG VIÊN CAO CẤP

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Biên tập và sửa bài:

Trình bày bìa:

PGS.TS. TÔ ĐĂNG HẢI

ThS. NGUYỄN HUY TIẾN

NGỌC DIỆP

HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội

In 500 cuốn, khổ 16 × 24 cm, in tại Xí nghiệp In Thương Mại (Bộ Công Thương)

Quyết định xuất bản số: 82 – 2008/CXB/55 – 02/KHKT – 21/2/2008

In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2008.

LỜI NÓI ĐẦU

Sức bền vật liệu là môn khoa học bán thực nghiệm thuộc khối kỹ thuật cơ sở trong các trường đại học kỹ thuật ở nước ta và trên thế giới. Mục đích của nó là tiếp tục cung cấp cho các kỹ sư tương lai những kiến thức tính toán công trình về độ bền, độ cứng và độ ổn định trong và ngoài giới hạn đàn hồi trên nền các môn khoa học cơ bản: Toán, Vật lý, Cơ học lý thuyết, Cơ học chất lỏng và Khoa học thực nghiệm, v.v... để giải quyết những vấn đề của thực tiễn liên quan tới các khâu từ thẩm định đến thiết kế, chế tạo và phục vụ cho việc nghiên cứu các môn học chuyên ngành kế tiếp trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học kỹ thuật. Hơn nữa, **Sức bền vật liệu** có một vị trí đặc biệt quan trọng trong cơ học, bởi nó đóng vai trò của một chiếc cầu nối về các phương pháp tư duy khoa học giữa các môn khoa học cơ bản với các môn cơ học chuyên ngành. Nó còn là viên gạch đầu tiên đặt nền móng cho lĩnh vực cơ học các vật rắn biến dạng – Một lĩnh vực chuyên nghiên cứu các quy luật tổng quát về sự hình thành và phát triển các tác dụng cơ học sinh ra ở trong lòng các vật rắn thực do các loại tác dụng ngoài khác nhau gây ra.

Chính vì thế, cũng như nhiều khoa học khác, đặc trưng cuối cùng của quá trình nghiên cứu đối với khoa học này là việc áp dụng các kết quả nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm vào thực tiễn và chỉ có thông qua việc áp dụng vào thực tiễn, khoa học này mới có thể đứng vững và phát triển.

Cuốn sách được xây dựng hết sức nghiêm túc, công phu, chặt chẽ với sự kế thừa chọn lọc và cập nhật các thông tin mới nhất. Giáo trình được biên soạn trong khuôn khổ phục vụ chương trình giảng dạy và nghiên cứu ở các trường đại học kỹ thuật, mà tác giả là người trực tiếp trải nghiệm hơn 40 năm giảng dạy cho các hệ đại học và sau đại học ở trong nước và nước ngoài thuộc các chuyên ngành khác nhau của cơ học. Giáo trình này là tài liệu rất hữu ích giúp cho không những việc học tập, nghiên cứu của sinh viên, mà còn là người bạn đường của các kỹ sư, các cán bộ khoa học trẻ thuộc các ngành: xây dựng công nghiệp và dân dụng, xây dựng cảng, xây dựng cầu đường sắt và đường bộ, xây dựng thủy lợi, cơ khí ô tô, chế tạo máy và luyện kim, kỹ thuật đóng tàu, kỹ thuật

hàng không v.v..., đang trực tiếp thiết kế, thi công và thẩm định trong các lĩnh vực nói trên.

*Ngày nay sự bùng nổ thông tin trong kỹ thuật và đời sống đã làm nảy sinh những mâu thuẫn gay gắt giữa nội dung cần truyền đạt và quỹ thời gian cho phép giảng dạy môn học này. Vì vậy, một mặt với mục đích hoàn thiện hơn nữa nội dung đào tạo chuyên sâu ở bậc đại học và sau đại học, đồng thời khắc phục những mâu thuẫn nói trên, mặt khác, để giảm bớt khó khăn cho người học, giúp các kỹ sư thiết kế, chế tạo, các nhà khoa học trẻ đang hoạt động trong các lĩnh vực khác nhau của cơ học, chúng tôi thấy cần phải giới thiệu cuốn **Sức bền vật liệu** này và kèm theo nó là bộ "**TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN MÔN SỨC BỀN VẬT LIỆU**" cùng các bạn. Vẫn biết, giới thiệu là cần thiết nhưng cái chính là "hữu xạ tự nhiên hương".*

*Giáo trình được biên soạn trong khuôn khổ môn **Sức bền vật liệu** theo nghĩa hẹp của từ này, nên không tham vọng trình bày được đầy đủ mọi khía cạnh vốn rất phong phú và đa dạng của **Sức bền vật liệu** theo nghĩa rộng. Mặc dù rất cố gắng trong biên soạn nhưng chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong và cảm ơn sự đóng góp ý kiến trao đổi của các chuyên gia, các thầy, cô giáo và tất cả các bạn sử dụng và đọc cuốn sách này, để cuốn sách được hoàn chỉnh hơn trong lần tái bản sau. Các ý kiến trao đổi xin các bạn liên hệ với số điện thoại của tác giả 0983.151242.*

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, các bạn đồng nghiệp đã tận tình giúp đỡ và kích lệ để cuốn sách được hoàn thành.

Hà Nội, ngày 15 tháng 12 năm 2007
Tác giả

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU

Khác với các môn học Cơ lý thuyết và Nguyên lý máy, môn học Sức bền vật liệu nghiên cứu các tác dụng cơ học trong của các vật rắn thực sinh ra do tác dụng ngoài: tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ, độ lún gối tựa, chuyển vị cưỡng bức do chế tạo không chính xác v.v.

§1. MÔ HÌNH NGHIÊN CỨU

1. Mô hình vật lý của vật liệu

Trong giáo trình này, mô hình vật rắn biến dạng được hiểu là một tập hợp chất điểm có các thuộc tính vật lý sau đây:

a) Liên tục, đồng nhất và đẳng hướng

Vật rắn được gọi là có cấu tạo liên tục nếu một phân tử bé tùy ý của nó đều chứa vô số chất điểm sao cho trong vật thể không có lỗ rỗng và được gọi là đồng nhất khi tính chất cơ lý của nó tại mọi điểm đều như nhau và được gọi là đẳng hướng khi tính chất cơ lý của nó tại mọi điểm, theo mọi phương đều như nhau.

Những vật thể bằng kim loại và hợp kim thường dùng trong kỹ thuật đều là những vật có thể xem như liên tục, đồng nhất và đẳng hướng. Những vật bằng gỗ, tre v.v... là những vật không đẳng hướng vì tính chất chịu lực của chúng theo các phương rất khác nhau.

b) Đàn hồi tuyệt đối tuyến tính, biến dạng và chuyển vị bé

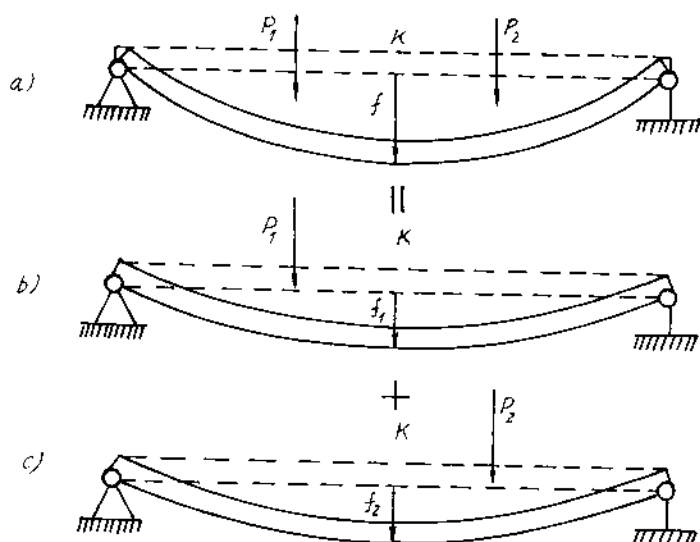
Dưới tác dụng của ngoại lực, mọi vật rắn thực đều bị biến dạng, nghĩa là biến đổi hình dạng và kích thước, đó là vì ngoại lực làm thay đổi vị trí tương đối vốn có giữa các phân tử cấu tạo nên vật rắn ấy. Lực liên kết vốn có giữa các phân tử để giữ cho vật rắn có hình dạng nhất định, lúc đó, sẽ thay đổi với xu hướng khôi phục lại vị trí ban đầu giữa các phân tử. Độ tăng đó của lực liên kết được gọi là lực đàn hồi hay nội lực.

Vật rắn được gọi là đàn hồi (hay rõ hơn, đàn hồi tuyệt đối) nếu nó có khả năng phục hồi hoàn toàn, hình dạng và kích thước vốn có sau khi không còn tác dụng ngoài nữa, biến dạng được khôi phục hoàn toàn sau khi hết tác dụng ngoài được gọi là biến dạng đàn hồi. Trong thực tế không có vật đàn hồi tuyệt đối. Đối với nhiều vật rắn, khi tác dụng ngoài chưa vượt quá một giới hạn nhất định thì biến dạng của nó là biến dạng đàn hồi, nhưng khi tác dụng này đã vượt quá giới hạn đó thì vật chỉ khôi phục lại được một phần biến dạng. Phần biến dạng không khôi phục được gọi là biến dạng dẻo hay biến dạng dư.

Vật đàn hồi tuyến tính là vật mà biến dạng đàn hồi tỷ lệ bậc nhất với nội lực. Những vật đàn hồi khác được gọi là vật đàn hồi phi tuyến.

Trong các bài toán khi biến dạng bé, có thể xem điểm đặt của ngoại lực và do đó, vị trí tương đối của các ngoại lực là không thay đổi khi vật bị biến dạng. Tính chất này cùng với tính chất tuyến tính nói trên cho phép khẳng định rằng nội lực và biến dạng là những hàm bậc nhất (tuyến tính) của các ngoại lực, nói một cách khác, chúng không phụ thuộc vào trình tự đặt lực và tác dụng cơ học trong của cả

hệ nội lực bằng tổng tác dụng cơ học trong của từng lực trong hệ. Đó là nội dung của nguyên lý độc lập tác dụng của các lực.



Hình 1.1.

Ví dụ, đối với dầm chịu lực như trên hình 1.1a, độ võng ở điểm K do tác dụng đồng thời của hai lực P_1 và P_2 bằng f . Theo nguyên lý độc lập tác dụng độ võng này bằng:

$$f = f_1 + f_2$$

trong đó f_1 và f_2 lần lượt là độ võng tại K do từng lực P_1 và P_2 tác dụng độc lập gây ra (hình 1.1b, c).

Ta hiểu chuyển vị và biến dạng bé như sau: Biến dạng được xem là bé nếu nó nhỏ đến mức có thể giải thích nó như những đại lượng vô cùng bé. Các thành phần của vectơ chuyển vị là rất bé so với kích thước của vật thể, còn bản thân đạo hàm bậc nhất của chuyển vị theo các tọa độ là rất nhỏ so với đơn vị. Trong tính toán có thể bỏ qua các tích và các bình phương của đạo hàm bậc nhất của các chuyển vị vì chúng là những đại lượng vô cùng bé bậc cao.

Mô hình vật lý mô tả ở trên là những giả thiết cơ bản của khoa học về sức bền của các vật liệu. Những giả thiết này là cơ sở để xây

dụng môn học sức bền vật liệu, cơ học kết cấu, tấm và vỏ... trong miền đàn hồi.

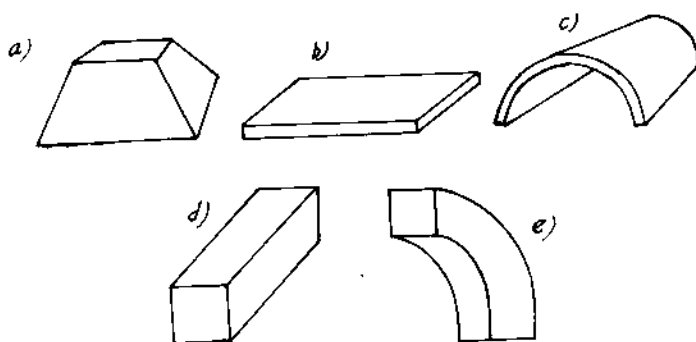
2. Mô hình hình học

Về mặt hình học, vật thể nghiên cứu có các dạng sau đây:

a) *Khối* là mô hình của những vật thể có kích thước theo ba phương (trục giao) đều tương đương nhau (hình 1.2a).

b) *Tấm và vỏ* là mô hình của những vật thể có kích thước theo hai phương rất lớn so với phương thứ ba (hình 1.2b, c).

c) *Thanh* là mô hình của những vật thể có kích thước theo một phương rất lớn so với hai phương còn lại (hình 1.2d, e).



Hình 1.2.

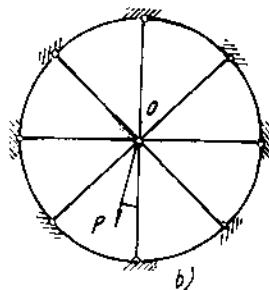
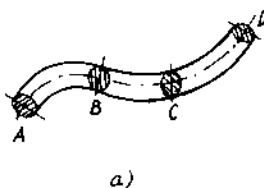
Trong giáo trình này, mô hình được khảo sát chủ yếu là mô hình thanh và hệ thanh đơn giản với những tính chất (a) và (b) đã nêu ở mục 1. Từ đây về sau ta sẽ gọi tắt là thanh đàn hồi tuyến tính. Phần lớn các chi tiết máy và kết cấu thường gặp đều được mô hình hóa thành những thanh đàn hồi tuyến tính.

Có thể làm một định nghĩa khác về thanh như sau:

- Thanh là hình khối do một hình phẳng có diện tích F vạch ra khi F di động trong không gian sao cho trọng tâm O của nó chuyển động trên một đường nhất định và F luôn luôn vuông góc với đường đó.

- Quỹ đạo của trọng tâm O gọi là trục thanh và F gọi là mặt cắt ngang (hay tiết diện) của thanh.

- Một thanh được gọi là thanh thẳng nếu trục thanh là đường thẳng và được gọi là thanh cong nếu trục thanh là đường cong (hình 1.3a).



Hình 1.3.

- Một cơ hệ gồm nhiều thanh được nối lại với nhau theo một cách nào đó, được gọi là hệ thanh (hình 1.3b).

§2. CÁC DẠNG TẢI TRỌNG VÀ SƠ ĐỒ HÓA TẢI TRỌNG

Có nhiều nguyên nhân gây ra biến dạng trong hệ. Ví dụ, do tải trọng, do sự thay đổi của nhiệt độ, do chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, do sự chế tạo không chính xác v.v.

Trong giáo trình này ta quan tâm nhiều tới nguyên nhân gây ra biến dạng là ngoại lực (tải trọng ngoài). Ngoại lực tác dụng lên các chi tiết máy và cấu kiện công trình được phân thành các loại sau đây:

Lực tập trung: Nếu ngoại lực tác dụng lên công trình trên một đơn vị diện tích rất bé so với bề mặt kết cấu thì ta quy ước coi ngoại lực đó là tập trung tại một điểm. Đơn vị đo của nó là kN, MN hoặc kG, T v.v. Áp lực bánh xe lửa trên đường ray, áp lực của các viên bi truyền lên ổ là loại lực này.

Lực phân bố: Nếu lực truyền lên vật thể trên một diện tích đủ lớn (để không được phép xem là lực tập trung) thì ta gọi đó là lực phân bố theo bề mặt hình 1.4a. Thử nguyên của nó là lực trên chiều dài bình phương: kG/cm^2 , T/m^2 hoặc kN/cm^2 , MN/m^2 ... Áp lực chất lỏng tác dụng lên thành thùng chứa, áp lực gió tác dụng lên thân và cánh máy bay... là những lực thuộc loại này.

Trong thực tế kỹ thuật nhiều khi cần phải thay thế tải trọng phân bố trên một dải diện tích hẹp bằng tải trọng phân bố theo đường (hình 1.4b), với cường độ là:

$$q = q_1 \cdot b_1$$

Thứ nguyên của tải trọng phân bố theo đường là lực trên chiều dài: T/m, kG/m hoặc MN/m, kN/m v.v.

Hợp lực của tải trọng phân bố theo đường với một quy luật bất kỳ được xác định bởi tổng vô hạn các lực sơ cấp $q(z)dz$ sau đây (hình 1.4c):

$$R = \int_a^b q(z) dz$$

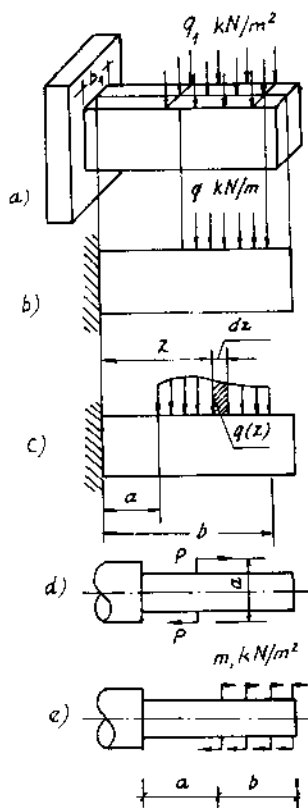
Biểu thức này chứng tỏ rằng hợp lực R của lực phân bố theo đường bằng diện tích giới hạn bởi đường cong $q(z)$ và đoạn chiều dài của dầm trên đó $q(z)$ đặt vào.

Mômen của tải trọng phân bố đối với một điểm nào đó được xác định bởi tổng mômen các lực sơ cấp $q(z)dz$:

$$M = \int_a^b q(z) z dz$$

Trên hình 1.4c, z là khoảng cách từ lực sơ cấp $q(z)dz$ đến ngàm (điểm lấy mômen).

Ngoài ra ta còn hay gặp tải trọng ngoài dưới dạng ngẫu lực tập trung hoặc phân bố tương ứng có các giá trị mômen tổng cộng là (hình 1.4d, e):



Hình 1.4.

$$M = P \cdot a ; \quad M = \int_a^b m(z) dz$$

Tùy theo tính chất thay đổi của tải trọng theo thời gian mà tải trọng được chia ra thành tải trọng tĩnh và động như sau:

- Tải trọng tĩnh là tải trọng đặt lên kết cấu thay đổi chậm chạp đến mức khi kết cấu bị biến dạng thì các chất điểm của nó hầu như không có gia tốc, nghĩa là có thể bỏ qua lực quán tính sinh ra khi kết cấu làm việc.

- Khác với tải trọng tĩnh, tải trọng động có đặc điểm là độ lớn và vị trí của nó bị thay đổi trong một khoảng thời gian rất ngắn. Nói một cách tổng quát tải trọng gây ra gia tốc đáng kể khi kết cấu làm việc là những tải trọng động.

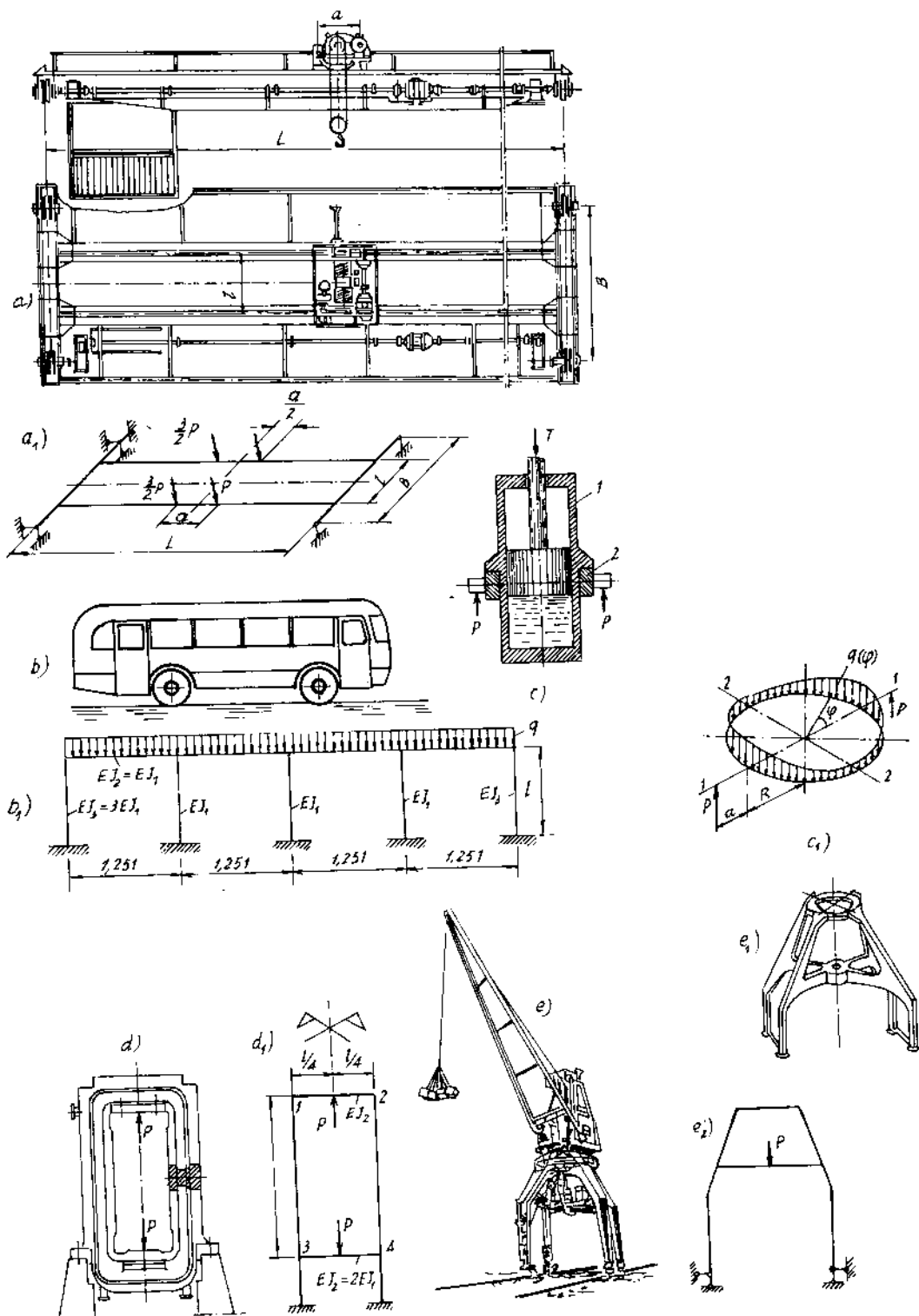
- Tùy thuộc vào thời gian tác dụng của tải trọng lên hệ, ta còn chia tải trọng thành tải trọng thường xuyên và tải trọng tạm thời.

- Tải trọng tác dụng liên tục lên hệ trong suốt thời gian phục vụ của nó gọi là tải trọng thường xuyên. Ví dụ, trọng lượng bản thân của hệ và các thiết bị cố định trên nó. Tải trọng tạm thời là tải trọng có thời gian tác dụng lên hệ không lâu. Ví dụ, áp lực của xe lửa lên cầu, trọng lượng hàng đặt lên ô tô khi ô tô chở hàng, tải trọng thi công v.v...

- Ngoài những lực tác dụng lên bề mặt của vật thể được nghiên cứu ở trên ta còn hay gặp những lực thể tích. Đó là những lực phân bố trên toàn bộ thể tích vật thể như: trọng lượng bản thân vật thể, lực quán tính, lực từ và điện trường... là những lực thuộc loại đó.

§3. SƠ ĐỒ HÓA CÔNG TRÌNH THỰC

Để có thể tính toán kiểm tra một công trình đã có hoặc thiết kế mới một công trình hay một thiết bị nào đó, trước hết các kỹ sư phải có một sơ đồ tính tương ứng. Về sau mọi tính toán cần thiết đều được thực hiện trên sơ đồ tính này. Trên hình 1.5a, b, c, d, e là các cơ hệ thực, còn trên hình 1.5a₁, b₁, c₁, d₁, e₁, e₂ là các sơ đồ hóa tương ứng dùng để thực hiện mọi tính toán trong quá trình kiểm tra hoặc thiết kế mới.



Hình 1.5.

Khi tính toán các thiết bị máy móc hay công trình, như một nguyên tắc bắt buộc, ngoài việc phải xác định đầy đủ, chính xác các tác dụng ngoài lên chúng, còn cần phải sơ đồ hoá chúng để có được một sơ đồ tính phản ánh tốt điều kiện làm việc thực của công trình được thiết kế hoặc kiểm tra. Quá trình này là một bước đặc biệt quan trọng trong tính toán thiết kế. Bởi vì, mọi phương pháp toán học dù chính xác đến đâu chẳng nữa với những máy tính hiện đại đến đâu chẳng nữa cũng đều vô nghĩa, khi mà xuất phát từ một sơ đồ không đúng. Trong thực tế kỹ thuật việc lập một sơ đồ tính từ một công trình thực là một việc rất khó và phức tạp. Điều này đòi hỏi người làm công tác thiết kế và kiểm định phải có một trình độ lý thuyết uyên bác về cơ học và vốn thực tiễn kỹ thuật phong phú.

Có thể tóm tắt các bước lập sơ đồ tính như sau:

Bước 1: Thay các thanh bằng trục hình học, thay các tấm và vỏ bằng mặt trung bình của chúng và ghi trên đó các đặc trưng hình học (diện tích của mặt cắt ngang, mômen quán tính v.v...) và các đặc trưng về vật liệu (E , G , μ v.v...).

Bước 2: Thay các đối tượng gây liên kết bằng các liên kết lý tưởng (hình 1.5).

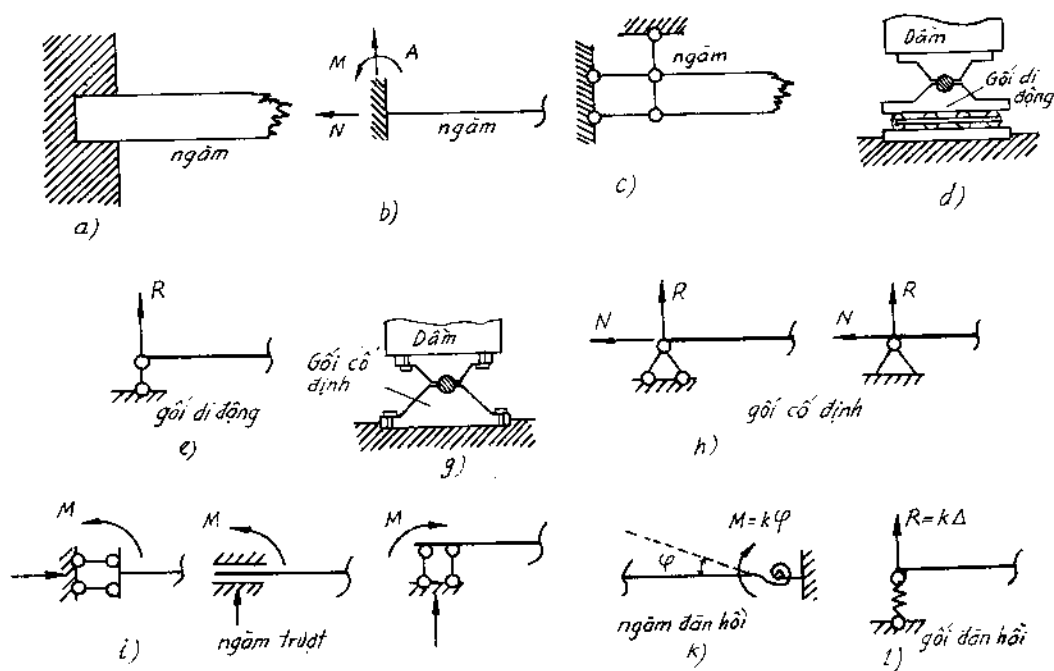
Bước 3: Dẫn tải trọng tác dụng trên công trình về mặt trung bình hay trục của nó.

§4. LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

Liên kết là những điều kiện hình học hay động học ràng buộc chuyển vị tự do của vật khảo sát.

Trong tập hợp các vật rắn (khâu, cấu kiện) nếu ta quan tâm tới vật nào thì vật ấy gọi là vật khảo sát. Các vật nối với vật khảo sát làm cản trở chuyển vị của vật khảo sát gọi là vật gây liên kết. Tác dụng tương hỗ giữa vật khảo sát và vật gây liên kết gọi là lực liên kết. Lực mà vật gây liên kết đặt vào vật khảo sát gọi là phản lực liên kết. Như vậy, phản lực liên kết chỉ xảy ra ở vùng tiếp xúc giữa vật khảo sát và vật gây liên kết. Phản lực liên kết cùng phương, trái

chiều với chiều chuyển vị bị cản trở. Cường độ của phản lực liên kết phụ thuộc vào lực tác dụng lên vật khảo sát. Trên hình 1.6, là một số liên kết thường gặp trong kỹ thuật và ký hiệu các sơ đồ hoá chúng.

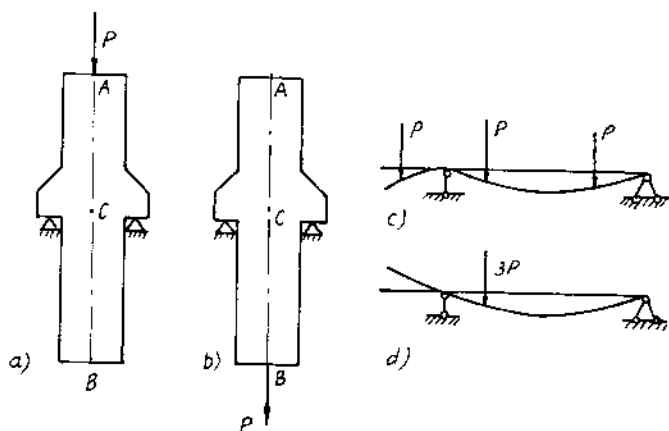


Hình 1.6.

Khi thiết lập sơ đồ tính cần chú ý rằng không được sử dụng các phép biến đổi bảo toàn vectơ chính và vectơ mômen chính của cơ học rắn tuyệt đối như: trượt lực trên đường tác dụng, di chuyển ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng của nó, thay thế các lực bằng một hợp lực v.v... Ví dụ, hãy xét các hệ được cho trên hình 1.7.

Nếu ta dời lực đặt tại A (hình 1.7a) về B theo đường tác dụng của nó thì trạng thái cân bằng của hệ thống không bị vi phạm, phản lực ở các gối tựa không thay đổi, nhưng trạng thái làm việc của hệ bị thay đổi hoàn toàn.

Đoạn AC của thanh (hình 1.7a) bị nén còn đoạn CB không làm việc. Trong khi đó đoạn AC của chính thanh này (hình 1.7b) lại không làm việc, còn đoạn CB bây giờ lại chịu kéo và sự phá hủy chỉ có thể xảy ra trên CB.



Hình 1.7.

Hãy xét một ví dụ thứ hai. Khi nghiên cứu sự cân bằng ta có quyền thay thế một nhóm lực bằng một hợp lực hoặc ngược lại, có thể phân hợp lực ra thành các thành phần. Thế nhưng, khi nghiên cứu các hiệu ứng bên trong (biến dạng, ứng suất) thì điều này không được phép.

Trên hình 1.7c là dạng đường cong của trục dầm chịu tác dụng của ba lực, đường cong của trục dầm sẽ thay đổi về chất nếu thay ba lực này bằng hợp lực của chúng (hình 1.7d).

Tóm lại, cần nhấn mạnh rằng, bước lập sơ đồ tính là bước quan trọng bậc nhất trong tất cả các bước giải quyết một bài toán về cơ học vật rắn biến dạng. Bởi vì, tất cả những tính toán cần thiết đều thực hiện trên sơ đồ tính này. Nếu sơ đồ tính không đúng thì dù phương pháp có chính xác đến đâu đi nữa, máy tính có mạnh đến đâu đi nữa cũng chỉ là vô ích.

§5. KHÁI NIỆM VỀ PHÂN LOẠI CƠ HỆ

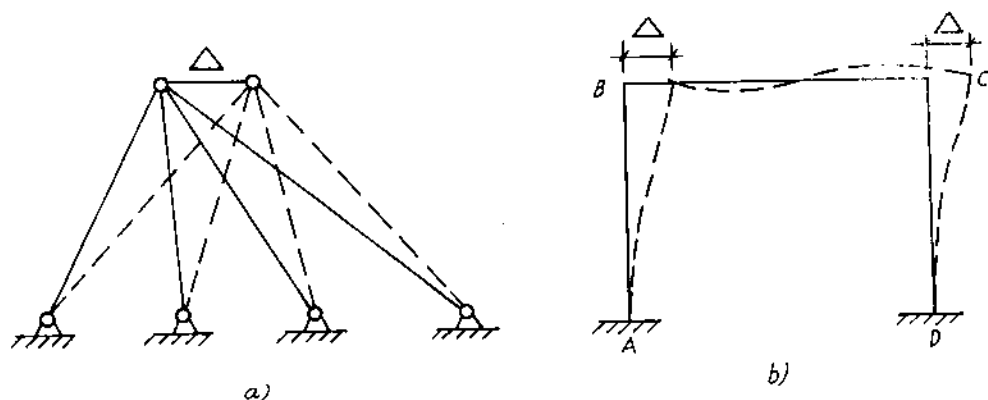
Sau khi đã sơ đồ hoá một công trình thực, chúng ta đã có một sơ đồ tính, tức là đã có một cơ hệ. Cơ hệ đó có thể là một cơ cấu hoặc một kết cấu. Cơ cấu cũng có thể là cơ hệ có một hoặc nhiều bậc tự do. Kết cấu cũng có thể là một hệ tĩnh định hoặc siêu tĩnh và cũng có thể là hệ xác định động hoặc là một hệ siêu động.

Hệ tĩnh định là một kết cấu mà khi chịu tải trọng ta có thể xác định được nội lực trong nó chỉ bằng các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Hệ siêu tĩnh là một kết cấu mà khi chịu tải trọng, người ta không thể xác định được nội lực trong hệ nếu chỉ dùng các điều kiện cân bằng tĩnh học. Đối với hệ này ngoài các điều kiện cân bằng tĩnh học còn cần phải sử dụng thêm các điều kiện động học và vật lý.

Hệ xác định động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức ta có thể xác định được biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học.

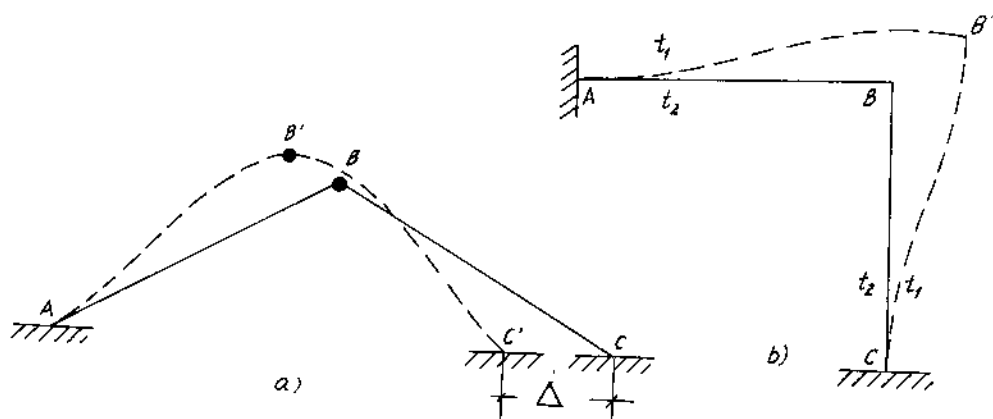
Hệ trên hình 1.8a là một hệ xác định động. Nút A chịu chuyển vị ngang cưỡng bức Δ , bằng các điều kiện hình học ta có thể xác định được biến dạng dài của từng thanh, tức là xác định được vị trí của hệ ở trạng thái biến dạng.



Hình 1.8.

Hệ siêu động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà

phải bổ sung các điều kiện cân bằng tĩnh học. Hệ trên hình 1.8b và 1.9a, b là những hệ siêu động, vì rằng khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức Δ thì các cấu kiện bị uốn cong và không thể xác định được đường cong đàn hồi của khung nếu chỉ dùng các điều kiện động học.



Hình 1.9.

Kết cấu là một cơ hệ gồm nhiều cấu kiện (các thanh thẳng hoặc các thanh cong) được nối lại với nhau theo một cách nào đó, sao cho hệ thu được là một hệ bất động và bất biến hình hình học. Nghĩa là, khi xem các cấu kiện là cứng tuyệt đối thì chuyển vị tương đối giữa chúng với nhau và với các liên kết tựa là không thể tồn tại. Nếu các cấu kiện đó của hệ có thể chuyển vị tương đối đối với nhau và đối với các liên kết tựa thì hệ đó là hệ biến hình hình học. Nói khác đi, nếu gọi W là bậc tự do của một cơ hệ thì nếu $W > 0$ ta gọi cơ hệ đó là một cơ cấu (hệ biến hình hình học), $W \leq 0$ ta gọi cơ hệ đó là một kết cấu tĩnh định ($W = 0$) hoặc siêu tĩnh ($W < 0$). Tùy thuộc vào đặc điểm liên kết giữa các cấu kiện với nhau và tác dụng ngoài lên chúng mà kết cấu được chia ra thành:

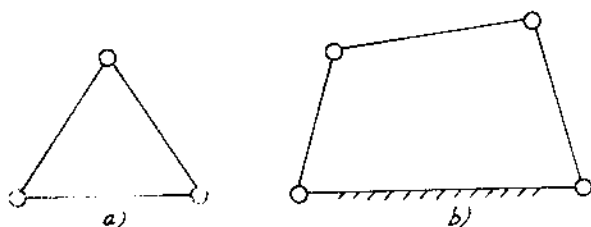
Dàn là một cơ hệ bất biến hình hình học gồm nhiều cấu kiện được nối động với nhau bằng các khớp và tải trọng chỉ tác dụng lên các nút của chúng.

Khung là một cơ hệ bất biến hình học gồm nhiều cấu kiện thẳng hoặc cong được nối cứng (nối tình) với nhau và tác dụng ngoài lên khung là bất kỳ. Tổ hợp dàn và khung ta có kết cấu hỗn hợp.

§6. KHÁI NIỆM VỀ CẤU TẠO HỆ BẤT BIẾN HÌNH HÌNH HỌC

Như đã rõ, ba đoạn thẳng chỉ dựng được duy nhất một tam giác. Do đó, một hệ gồm ba thanh nối khớp với nhau là hệ bất biến hình học và được gọi là một miếng cứng có $W = 0$ (hình 1.10a). Một tứ giác khớp (hình 1.10b) là một hệ biến hình hình học (cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng $W = 1$).

Như vậy, một hệ được gọi là bất biến hình học nếu hình dạng hình học của nó không bị thay đổi dưới các tác dụng ngoài, khi xem các cấu kiện của hệ là rắn



Hình 1.10.

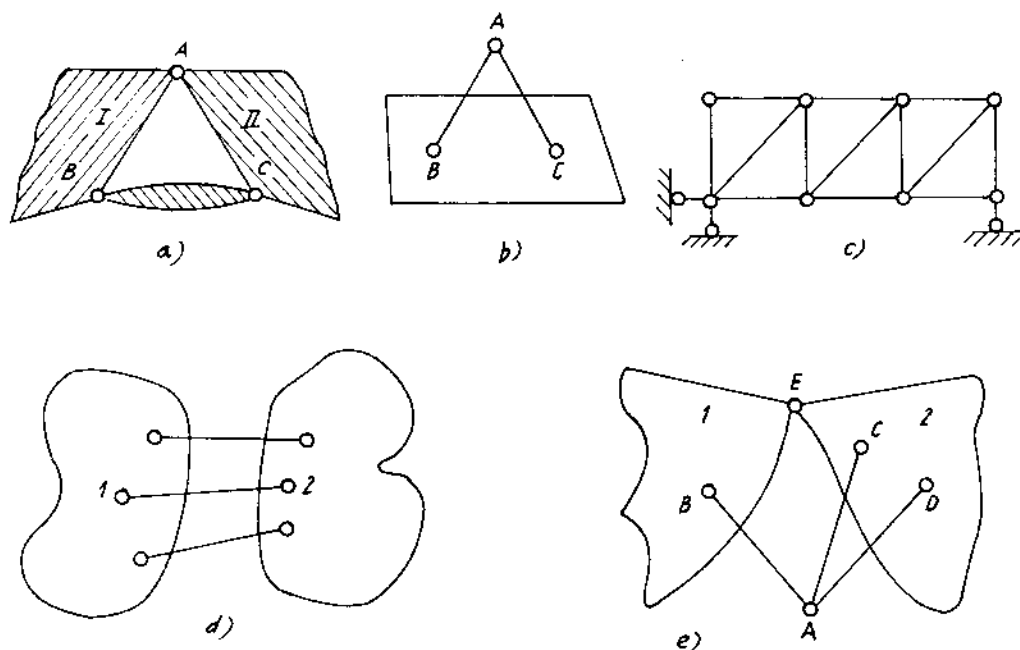
tuyệt đối. “Sức bền vật liệu” chỉ nghiên cứu các hệ bất biến hình học, tức là các kết cấu. Vì vậy, trước khi tính toán cần phải kiểm tra xem cơ hệ sẽ được tính là cơ hệ gì, có phải kết cấu hay không?

Trên hình 1.11 là một số phương án có tính nguyên tắc định hướng cách cấu tạo hệ bất biến hình học.

Nếu hai khối I và II nối khớp với nhau tại A, lại được nối khớp với khâu BC, để có một hệ bất biến hình thì đường tâm BC không được đi qua A (hình 1.11a). Khi nối nút A (hình 1.11b) với một khối bằng hai thanh AB và AC, muốn có một hệ bất biến hình thì các điểm A, B, C không được thẳng hàng. Cặp thanh BAC được gọi là một bộ đôi, nghĩa là hệ hai thanh AB và AC không được thẳng hàng.

Nếu hai khối 1 và 2 (hình 1.11d) được nối với nhau bằng ba thanh để có một hệ bất biến hình thì đường tâm của chúng không được giao nhau ở 1 điểm.

Trên hình 1.11c là một dàn bất biến hình được cấu tạo từ lý luận bộ đôi và miếng cứng. Hệ 1 bậc tự do 1 – 2 có khớp E được nối với nút A bằng ba thanh như hình 1.11e là hệ bất biến hình hình học.



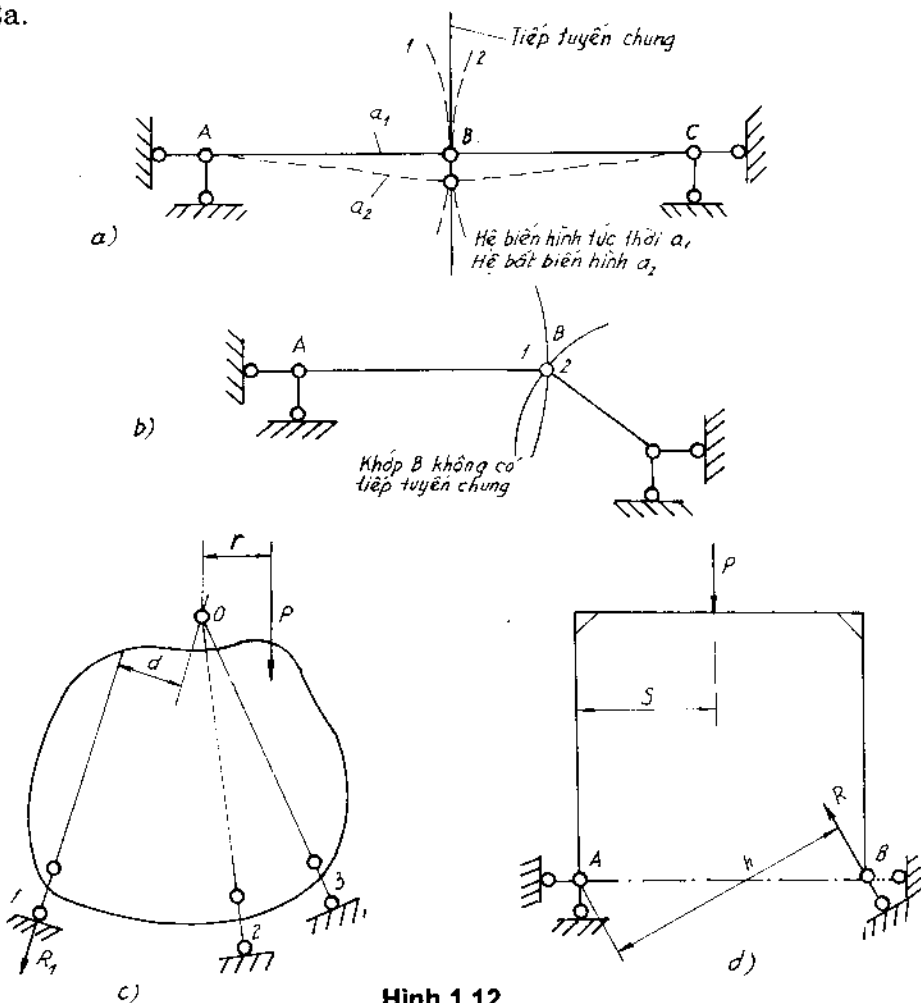
Hình 1.11.

§7. HỆ BIẾN HÌNH TỨC THỜI

Hệ biến hình tức thời là hệ khi chịu tác dụng ngoài, hệ bị thay đổi vô cùng nhỏ về hình dáng hình học và ngay sau đó hệ trở thành bất biến hình mặc dù trong quá trình ấy các cấu kiện của hệ được xem là rắn tuyệt đối (hình 1.12a). Đối với những hệ biến hình tức thời thì dưới tác dụng của ngoại lực chúng không có trạng thái cân bằng. Vì thế, các phương trình cân bằng tĩnh không được thỏa mãn. Do đó, các yếu tố lực trong hệ biến hình tức thời được xác định bằng các phương trình tĩnh cho giá trị hoặc là vô cùng lớn hoặc là không xác định (hình 1.12c, d).

Trên hình 1.12a là hệ biến hình tức thời (a_1) và hệ bất biến hình sau khi thực hiện một chuyển vị vô cùng bé (a_2).

Trên hình 1.12b là hệ bất biến hình khi cấu tạo lại hệ trên hình 1.12a để khớp B không có tiếp tuyến chung như khớp B trên hình 1.12a.



Hình 1.12.

Như đã nói ở trên về tính chất bất thường của các phản lực liên kết trong các hệ biến hình tức thời, ta sẽ làm rõ điều này qua các ví dụ sau đây:

Ví dụ 1: Xác định phản lực R_1 trên hình 1.12c với thanh gố 1 có phương bất kỳ?

Gọi d là khoảng cách từ khớp 0 đến phương của phản lực R_1 ta có:

$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow R_1 = Pr/d$$

Nếu $d \rightarrow 0$ (thanh 1 qua điểm O) thì $R_1 \rightarrow \infty$. Nếu $d \rightarrow 0$ và $r \rightarrow 0$ thì $R_1 = 0/0$ nghĩa là R_1 không xác định.

Ví dụ 2: Xác định phản lực R (hình 1.12d) theo vị trí của thanh gối đơn B?

Giả sử thanh gối đơn B có phương như hình vẽ thì điều kiện cân bằng sẽ là:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow R = P.s/h$$

Khi $h \rightarrow 0$ thì $R \rightarrow \infty$

Khi $h \neq 0$ thì $R \neq \infty$.

Các kết quả trên cho thấy hệ biến hình tức thời và các hệ gắn với nó là rất nguy hiểm, cần phải đặc biệt quan tâm trong công tác thiết kế.

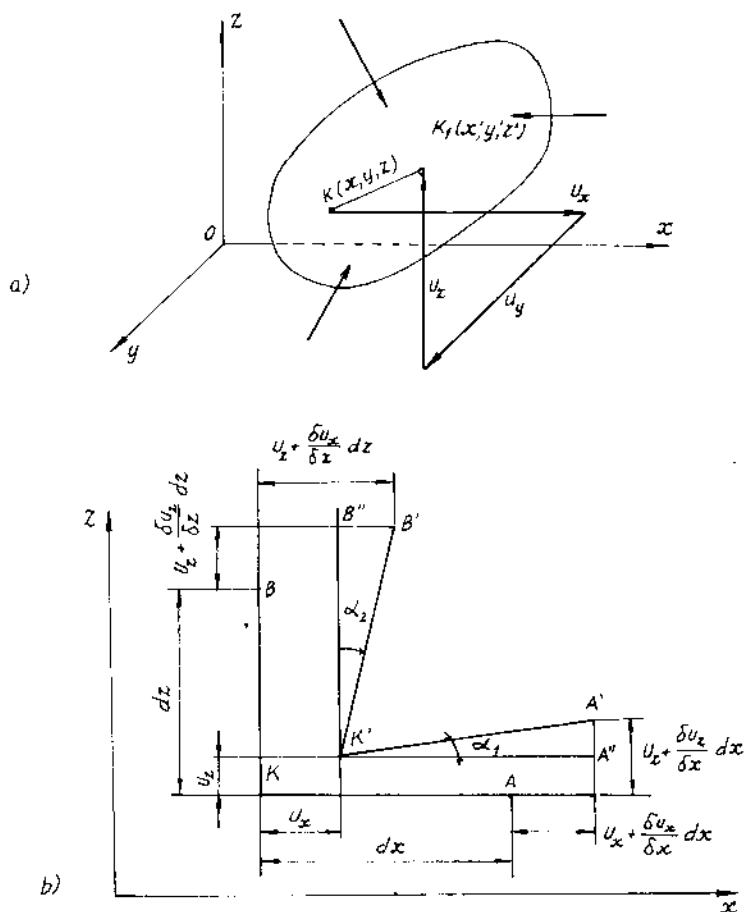
§8. KHÁI NIỆM VỀ CHUYỂN VỊ VÀ BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

Để khảo sát biến dạng của vật thể đàn hồi ta giả thiết rằng, số liên kết đặt vào đối tượng khảo sát là đủ để ngăn cản tất cả các chuyển động của hệ như một cố thể. Nghĩa là vật thể đàn hồi ấy là một kết cấu. Do đó chuyển vị của các phần tử không thể có nếu không có biến dạng. Để nghiên cứu biến dạng, ta tưởng tượng tách ra trong vật thể đàn hồi chịu lực một phần tử quanh điểm K (hình 1.13a). Do vật thể bị biến dạng mà điểm $K(x, y, z)$ chuyển đến vị trí mới $K_1(x', y', z')$.

Khoảng cách $\overline{KK_1}$ gọi là chuyển vị thẳng toàn phần $\bar{u}$ của điểm K, các thành phần của vectơ $\overline{KK_1} = \bar{u}$ trên các trục tọa độ x, y, z là u_x, u_y, u_z . Các thành phần này là rất bé và thay đổi liên tục theo các tọa độ x, y, z (hình 1.13b).

Vì thế, chuyển vị của điểm A lân cận K theo phương x có thể viết:

$$u_A = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$



Hình 1.13

Như vậy là khi x tăng thì hàm u_x tăng một lượng $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$. Sự thay đổi chiều dài cạnh KA do biến dạng gây ra bằng $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$.

Ta gọi lượng $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ là biến dạng dài tuyệt đối theo phương của đoạn thẳng có chiều dài ban đầu dx . Tỷ số:

$$\epsilon_x = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

được gọi là biến dạng dài tỷ đối (tương đối) theo phương x của điểm K . Tương tự như thế ta có biến dạng dài tỷ đối của điểm K theo phương y và z :

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Nếu chuyển vị của điểm K theo phương x và z là u_x và u_z thì chuyển vị của điểm A theo phương z và B theo phương x là (hình 1.15b):

$$u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx \quad ; \quad u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

Do các chuyển vị này mà các đoạn thẳng KA và KB trong mặt phẳng xz có vị trí mới $K'A'$ và $K'B'$ làm với các phương ban đầu những góc bé $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ và $\frac{\partial u_x}{\partial z}$. Điều này dẫn đến góc vuông ban đầu trong mặt phẳng xz giảm đi một góc bé $\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$. Tương tự như thế ta nhận được các góc γ_{yz} và γ_{xy} , trong các mặt phẳng yz và xy :

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Các đại lượng γ_{xy} , γ_{xz} và γ_{yz} gọi là biến dạng trượt tỷ đối hay biến dạng góc tỷ đối quanh điểm K . Các biến dạng trượt này được xem là dương nếu chúng làm giảm góc vuông ban đầu.

Như vậy, trong trường hợp tổng quát ở một điểm bất kỳ của vật thể chịu lực có ba thành phần biến dạng thẳng, ba thành phần biến

dạng góc và ba thành phần chuyển vị. Chúng đều là hàm của các tọa độ điểm x, y, z .

Cụ thể là:

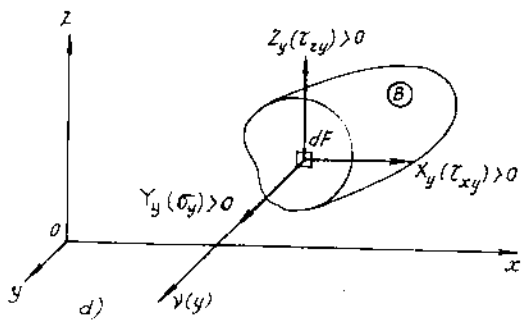
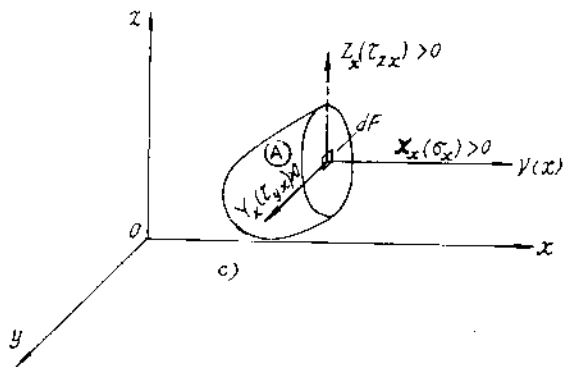
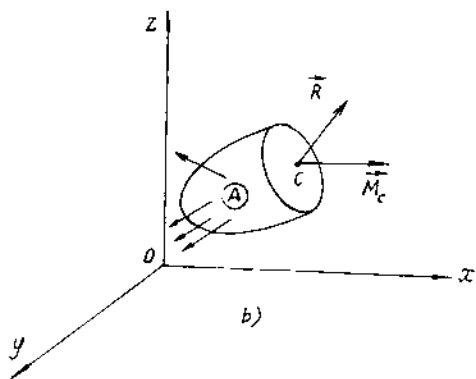
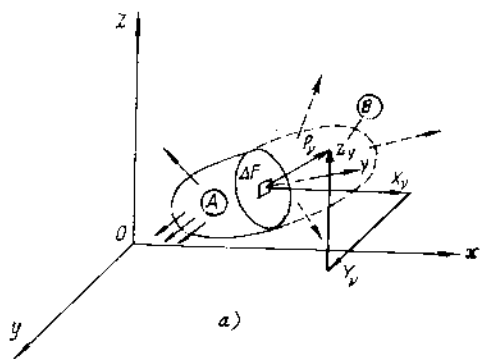
$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z) ; & \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} ; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ u_y &= u_y(x, y, z) ; & \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ u_z &= u_z(x, y, z) ; & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} ; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Các phương trình (1.1) thường được gọi là các phương trình hình học hoặc các phương trình côsi.

§9. KHÁI NIỆM VỀ ỨNG SUẤT

Hãy xét một vật rắn biến dạng chịu lực như hình 1.14a. Dưới tác dụng của hệ ngoại lực thể tích và bề mặt vật thể bị thay đổi vị trí và hình dáng. Đó là những biểu hiện bên ngoài của một vật chịu lực. Trong quá trình chịu lực như thế vị trí tương đối giữa các phần tử của vật thể bị thay đổi. Do đó lực (liên kết) tác dụng tương hỗ giữa các phần tử đảm bảo cho vật rắn có một hình dạng nhất định và đảm bảo tính liên tục của biến dạng, sẽ thay đổi với xu hướng khôi phục lại hình dáng và vị trí cũ. Độ tăng của lực (liên kết) tác dụng tương hỗ đó được gọi dưới tên chung là nội lực.

Để nghiên cứu những lực này cần phải sử dụng tiên đề giải phóng liên kết và điều kiện cân bằng. Cụ thể là tưởng tượng cắt vật thể chịu lực ở trạng thái cân bằng làm hai phần và khảo sát sự cân bằng của một trong hai phần đó, ví dụ, phần A (hình 1.14c). Để phần A được cân bằng như trạng thái vốn có của nó, cần phải thay thế tác dụng của phần B lên phần A bằng một vectơ chính $\vec{R}$ đặt vào trọng tâm c mặt cắt và một vectơ mômen chính $\vec{M}_c$. Các lực $\vec{R}$ và $\vec{M}_c$ được xác định từ điều kiện cân bằng của phần A và được gọi là các vectơ nội lực trên mặt cắt khảo sát (hình 1.14b).



Hình 1.14.

Ta hãy xét một phân tố diện tích ΔF trên mặt cắt. Lực tác dụng của phần B lên phần A đi qua ΔF này là $\overline{\Delta S}$. Tỷ số $\frac{\overline{\Delta S}}{\Delta F}$ được gọi là ứng suất trung bình trên ΔF , còn khi $\Delta F \rightarrow 0$ ta nhận được ứng suất toàn phần tại một điểm trên mặt cắt khảo sát có pháp tuyến $\vec{v}$:

$$\vec{p}_v = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta S}}{\Delta F}$$

Trong trường hợp tổng quát $\vec{p}_v$ không trùng với $\vec{v}$. Vì vậy ngoài độ lớn của $\vec{p}_v$ còn cần phải biết phương chiều của nó trong không gian. Thuận tiện nhất thay cho việc khảo sát $\vec{p}_v$ ta khảo sát ba thành phần X_v, Y_v, Z_v của nó trên các trục tọa độ Đề các xoyz (hình 1.14a). Pháp tuyến trên các mặt cắt song song với các mặt tọa độ khi ấy là các trục tọa độ. Ví dụ, trên hình 1.14c pháp tuyến ngoài của mặt cắt song song với mặt tọa độ yoz là trục ox, trên đó các thành phần của ứng suất toàn phần $\vec{p}_x$ là: X_x, Y_x, Z_x . Thành phần X_x vuông góc với mặt cắt, vì thế được gọi là ứng suất pháp tuyến, các thành phần còn lại Y_x, Z_x nằm trong mặt cắt được gọi là ứng suất tiếp tuyến. Trong “Sức bền vật liệu” người ta thường ký hiệu các ứng suất pháp và tiếp thay cho ký hiệu trên bằng các chữ Hy Lạp: σ và τ . Cụ thể là:

$$\sigma_x = X_x ; \quad \sigma_y = Y_y ; \quad \sigma_z = Z_z$$

$$\tau_{yx} = Y_x ; \tau_{zy} = Z_y ; \tau_{xz} = X_z ; \tau_{xy} = X_y ; \tau_{yz} = Y_z ; \tau_{zx} = Z_x$$

Các thành phần ứng suất trên mặt cắt song song với mặt tọa độ zox được mô tả trên hình 1.14d.

Dấu của các thành phần ứng suất được quy ước như sau:

Nếu pháp tuyến ngoài của mặt cắt khảo sát trùng với chiều dương của một trục tọa độ nào đó đã chọn thì các ứng suất σ và τ trên mặt cắt này được xem là dương khi các vectơ của chúng trùng với chiều dương các trục tọa độ tương ứng. Nếu pháp tuyến ngoài của mặt cắt khảo sát ngược với chiều dương của một trục tọa độ nào đó

thì các ứng suất $\vec{\sigma}$ và $\vec{\tau}$ được xem là dương khi các vectơ của chúng ngược chiều với chiều dương các trục tọa độ tương ứng đã chọn.

Quy ước dấu này gọi là quy ước dấu theo pháp tuyến ngoài. Trên hình 1.14c, d các ứng suất $\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}$ đều được vẽ theo chiều dương.

Các ứng suất ở những điểm khác nhau trong vật thể có thể khác nhau, vì vậy chúng là hàm của các tọa độ điểm:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z) ; \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z) ; \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z) ; \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z) ; \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z) ; \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Như vậy, ứng suất là nội lực tính trên một đơn vị diện tích của mặt cắt. Nó là độ đo cường độ nội lực tại một điểm. Đơn vị thường dùng để đo ứng suất là daN/cm², kN/cm², MN/m² và MPa. Để thuận tiện cho việc nghiên cứu, các ứng suất tiếp τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} ,... được viết với hai chỉ số dưới, trong đó chỉ số thứ nhất chỉ phương của ứng suất tiếp, còn chỉ số thứ hai chỉ pháp tuyến của mặt, trên đó có ứng suất tiếp tác dụng.

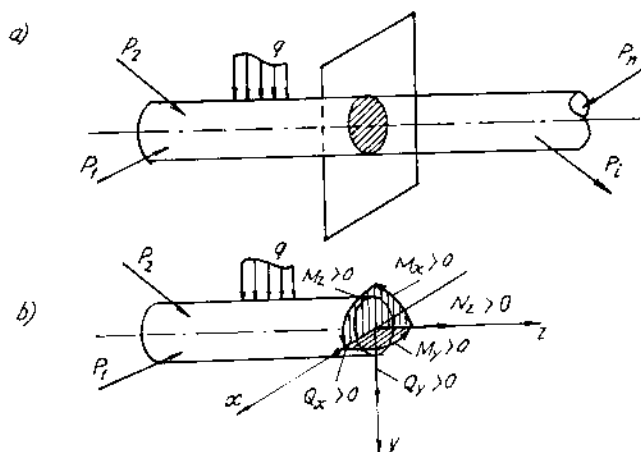
§10. KHÁI NIỆM VỀ NỘI LỰC TRÊN MẶT CẮT

Những tác dụng ngoài (ví dụ ngoại lực, sự biến thiên nhiệt độ) luôn luôn có khuynh hướng làm biến dạng vật thể, làm thay đổi vị trí tương hỗ giữa các phần tử của vật thể. Ngược lại, các ứng suất – những lực tác dụng tương hỗ trong tính trên một đơn vị diện tích mặt cắt là những nội lực phân bố trên mặt cắt khảo sát này lại có khuynh hướng chống lại mọi tác động ngoài gây ra sự biến dạng của vật thể. Do đó, độ lớn của các nội lực trong vật thể ở hai trạng thái chịu lực và không chịu lực là khác nhau.

Trong “Sức bền vật liệu” người ta không khảo sát và không quan tâm đến các nội lực trong vật thể ở trạng thái không chịu lực (trạng thái tự nhiên), mà chỉ nghiên cứu và tính toán các nội lực trong các vật thể chịu tác dụng ngoài. Vì thế, từ nay về sau khi nói về nội lực, ta cần phải hiểu cho đúng bản chất của nó là những lực tác

dụng tương hỗ bổ sung phát sinh chỉ trong vật thể chịu tác dụng ngoài. Để nghiên cứu những nội lực này như đã mô tả trong §9, ta hãy khảo sát điều kiện cân bằng của một trong hai phần A và B của một vật thể vốn đang cân bằng dưới tác dụng của hệ các loại ngoại lực tự cân bằng (hình 1.15a, b). Cần chú ý rằng theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng của Newton thì những nội lực tác dụng trên hai phần khác nhau được phân chia bởi cùng một mặt cắt thì tương hỗ bằng nhau.

Trong trường hợp vật thể là một thanh chịu lực tổng quát khi thu gọn hệ ứng suất về trọng tâm mặt cắt, ta được một vectơ chính $\vec{R}$ và một vectơ mômen chính $\vec{M}_0$. Về sau, để nghiên cứu cách xác định nội lực trong thanh, ta tưởng tượng cắt thanh bằng mặt cắt vuông góc với trục thanh và lập một hệ trục tọa độ Đề các $xOyz$ có gốc ở trọng tâm "O" mặt cắt, sao cho các trục Ox , Oy nằm trong mặt phẳng chứa mặt cắt ngang của thanh. Phân vectơ chính $\vec{R}$ thành ba thành phần theo ba trục tọa độ và ký hiệu là: N_z , Q_x , Q_y , còn vectơ mômen chính $\vec{M}_0$ thành ba mômen: M_x , M_y , M_z (hình 1.15b).



Hình 1.15.

Sáu thành phần N_z , Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_z được gọi là sáu thành phần nội lực trên toàn bộ mặt cắt đang khảo sát. Mỗi một thành

phần nội lực có một tên gọi riêng. Có nhiều cách gọi tên. Trong giáo trình này, ta dùng cách gọi tên và quy ước dấu thực hành như sau:

- Thành phần N_z có phương vuông góc với mặt cắt ngang được gọi là lực dọc. Lực dọc N_z được xem là dương, nếu nó có chiều trùng với chiều pháp tuyến ngoài của mặt cắt, trong trường hợp ngược lại N_z được xem là âm.

- Các lực Q_x , Q_y có phương vuông góc với trục thanh được gọi là lực ngang hay lực cắt. Lực cắt được xem là dương, nếu nó có xu hướng làm quay phần thanh khảo sát theo chiều thuận kim đồng hồ.

- Các đại lượng M_x , M_y được gọi là mômen uốn quanh các trục Ox , Oy , còn M_z - mômen xoắn quanh trục Oz . Mômen M_x được xem là dương nếu nó làm căng thớ dưới của thanh (phía dương của trục Oy). Hoàn toàn tương tự như thế, M_y được xem là dương nếu nó làm căng các thớ ngoài của thanh (phía dương trục Ox). Mômen xoắn M_z được xem là dương nếu ta nhìn ngược chiều pháp tuyến ngoài của mặt cắt đến mặt cắt, thấy M_z trên nó quay ngược chiều kim đồng hồ (hình 1.15b).

- Đặc trưng biến dạng của thanh chịu mômen uốn rất rõ: Một loạt các thớ dọc bị nén co lại, một loạt các thớ còn lại bị kéo giãn ra. Vì thế, về sau khi vẽ các biểu đồ mômen uốn có thể không dùng dấu mà mômen uốn nội lực căng phía nào của thanh ta sẽ đặt tung độ của mômen uốn về phía đó. Điều này rất thuận tiện cho việc bố trí vật liệu trong thanh và vẽ các biểu đồ mômen uốn trong hệ thanh không gian.

Theo quy ước này các nội lực mô tả trên hình 1.15b là những nội lực dương.

Vì biến dạng của vật thể được xem là rất bé, nên đồng thời có thể coi như phần vật thể đã tách ra (phần A) để xét như đã được hoá rắn lại. Điều này cho phép sử dụng các phương trình cân bằng như đối với vật rắn tuyệt đối. Khi đó để có thể xác định được các nội lực đã kể trên, cần phải viết 6 phương trình cân bằng đối với mỗi phần vật thể đã được tưởng tượng cắt ra:

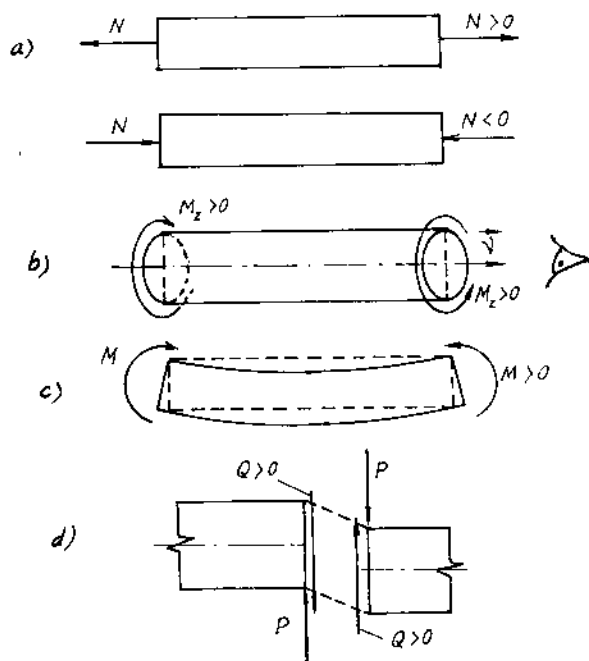
- a) $\Sigma X = 0$
 - b) $\Sigma Y = 0$
 - c) $\Sigma Z = 0$
 - d) $\Sigma m_x = 0$
 - e) $\Sigma m_y = 0$
 - f) $\Sigma m_z = 0$.
- (1.3)

Ba phương trình hình chiếu cho phép xác định các nội lực thẳng N_x , Q_x , Q_y còn ba phương trình mômen cho phép tìm các mômen nội lực M_x , M_y , M_z .

§11. CÁC LOẠI BIẾN DẠNG CƠ BẢN VÀ CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC NỘI LỰC TƯƠNG ỨNG

Dưới tác dụng của những ngoại lực phức tạp, trên mặt cắt ngang của thanh, trong trường hợp tổng quát có thể phát sinh 6 thành phần nội lực (hình 1.15b).

Ta sẽ nghiên cứu sự làm việc của thanh bắt đầu từ những bài toán chịu lực đơn giản nhất. Bởi vì cũng như khi nghiên cứu về chuyển động phức tạp của vật rắn tuyệt đối, biến dạng của vật thể nói chung rất phức tạp, song bao giờ cũng có thể coi là một tổ hợp của các biến dạng thành phần sau đây:



Hình 1.16.

1) Bài toán kéo (hoặc nén) đúng tâm:

Nếu hệ nội lực trên mặt cắt ngang tương đương với một lực dọc N thì ta có thanh chịu kéo khi $N > 0$ và thanh chịu nén khi $N < 0$. Khi đó thanh bị dãn ra hoặc co lại, xong trục của nó vẫn thẳng (hình 1.16a).

2) Bài toán xoắn

Nếu hệ nội lực trên mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực M_x thì ta có thanh chịu xoắn. Khi đó các mặt cắt ngang bị xoay tương đối, đối với nhau đi một góc nào đó quanh trục thanh, còn trục thanh vẫn luôn luôn thẳng (hình 1.16b).

3) Bài toán uốn

Nếu hệ nội lực trên mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực M_x hoặc M_y ta nói thanh bị uốn thuần túy phẳng quanh trục Ox (hoặc Oy). Trong trường hợp này trục thanh bị uốn cong theo một cung tròn phẳng nào đó (hình 1.16c).

4) Bài toán cắt (hay trượt)

Nếu hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một lực ngang Q thì ta gọi đó là hiện tượng cắt của thanh (hình 1.16d). Các thành phần nội lực trên hình 1.16 rất dễ dàng được thiết lập, khi lấy tổng hình chiếu của các lực sơ cấp và tổng mômen của chúng, đối với các trục Ox , Oy , Oz như sau:

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF & M_x &= \int_F y \sigma dF \\ Q_y &= \int_F \tau_{yz} dF & M_y &= \int_F x \sigma dF \\ Q_x &= \int_F \tau_{xz} dF & M_z &= \int_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dF \end{aligned} \quad (1.4)$$

trong đó, F là diện tích mặt cắt ngang – miền lấy tích phân. Các công thức này cho phép xác định các thành phần nội lực theo các ứng suất, nếu như đã biết các quy luật phân bố của ứng suất trên mặt cắt.

Dễ thấy là không thể giải được bài toán ngược, bởi vì quan hệ (1.4) là quan hệ phiến hàm. Ví dụ, cùng một giá trị của lực dọc N có thể tương ứng với nhiều quy luật phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ấy. Bài toán xác định ứng suất theo các thành phần nội lực là một bài toán cơ bản nhất của cơ học vật rắn biến dạng. Bài toán này chỉ có thể được giải quyết khi khảo sát đồng thời ba phương diện sau đây của nó:

- Phương diện tĩnh học;
- Phương diện hình học;
- Phương diện vật lý.

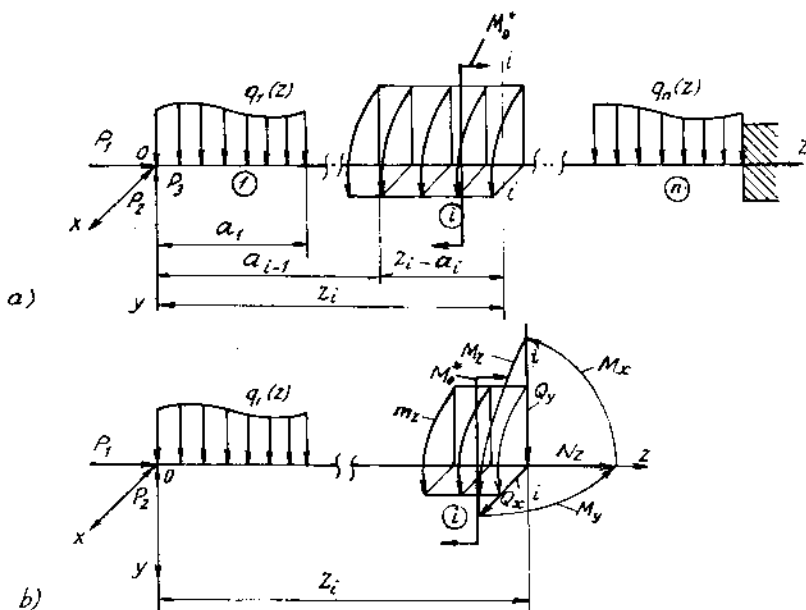
Phương diện tĩnh học cho mối liên hệ giữa các ứng suất và nội lực dạng (1.4). Phương diện hình học cho mối liên hệ giữa các biến dạng và chuyển vị (1.1). Phương diện vật lý (trong trường hợp của chúng ta là định luật Húc) cho phép tạo ra một cái cầu nối hai phương diện tĩnh học và hình học với nhau (nội dung này sẽ được nghiên cứu ở các chương sau).

Để có thể tính toán về độ bền của thanh chịu lực, cần phải biết ở mặt cắt nào của thanh nội lực có giá trị lớn nhất và quy luật biến thiên của từng thành phần nội lực dọc theo chiều dài thanh. Có nhiều cách xác định nội lực, trước hết ta nghiên cứu một phương án đơn giản nhất đã được giới thiệu ở §9 và §10.

Với mục đích cần thiết phải vẽ được đồ thị của các hàm nội lực, ta gọi các hàm nội lực theo các tọa độ là các biểu thức giải tích, còn đồ thị của chúng là các biểu đồ nội lực.

Ta hãy khảo sát một thanh chịu lực sau đây (hình 1.17a).

Căn cứ vào các ngoại lực đặt lên thanh, ta chia thanh thành các đoạn đánh số từ 1 đến n . Trên mỗi đoạn thứ i của thanh các hàm nội lực biến thiên liên tục theo cùng một quy luật trong đoạn đó.



Hình 1.17.

Để xác định nội lực tại mặt cắt có tọa độ z_i thuộc đoạn i , như đã làm trong §9 và §10, ta tưởng tượng cắt thanh làm hai phần bằng mặt cắt ngang $i-i$ và khảo sát sự cân bằng của một trong hai phần đã cắt ra, ví dụ phần trái, sau khi đã thay thế tác dụng của phần đã bỏ đi lên phần khảo sát bởi các thành phần nội lực. Các thành phần nội lực này được xác định từ một số hoặc tất cả các phương trình cân bằng (1.3) tùy thuộc vào đặc trưng tác dụng của ngoại lực và hình dạng thanh.

Để tiện lợi cho việc tính toán ta nên đặt các nội lực trên mặt khảo sát $i-i$ theo chiều dương (hình 1.17b) như đã quy ước ở §10.

Các thành phần nội lực được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \sum F_z^T - N &= 0 ; \quad \sum F_x^T - Q_x = 0 ; \quad \sum F_y^T - Q_y = 0 \\ \sum m_x^T - M_x &= 0 ; \quad \sum m_y^T - M_y = 0 ; \quad \sum m_z^T - M_z = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Do đó ta nhận được các hàm nội lực cần tìm tại mặt cắt $i-i$ phụ thuộc vào ngoại lực đặt ở phần trái của thanh và tọa độ z_i như sau:

$$\begin{aligned}
N &= \sum F_z^T = f_1(F^T, z_i) ; & Q_y &= \sum F_y^T = f_2(F^T, z_i) \\
Q_x &= \sum F_x^T = f_3(F^T, z_i) ; & M_x &= \sum m_x^T = f_4(F^T, z_i) \\
M_y &= \sum m_y^T = f_5(F^T, z_i) ; & M_z &= \sum m_z^T = f_6(F^T, z_i)
\end{aligned} \quad (1.6)$$

Các hàm này xác định trong miền $a_{i-1} \leq z_i \leq a_i$.

trong đó:

F^T là ngoại lực tổng quát tác dụng lên phần thanh bên trái của mặt cắt i-i;

$\sum F_z^T$, $\sum F_y^T$, $\sum F_x^T$ tương ứng là tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên đoạn thanh bên trái của mặt cắt i-i đang khảo sát lên các trục x, y, x;

$\sum m_z^T$, $\sum m_y^T$, $\sum m_x^T$ tương ứng là tổng mômen của tất cả các ngoại lực tác dụng vào đoạn thanh này đối với các trục z, y, x.

Khi khảo sát không phải phần trái mà là phần phải của mặt cắt i-i, ta có:

$$\begin{aligned}
N &= -\sum F_z^P ; & Q_x &= -\sum F_x^P ; & Q_y &= -\sum F_y^P \\
M_x &= -\sum m_x^P ; & M_y &= -\sum m_y^P ; & M_z &= -\sum m_z^P
\end{aligned} \quad (1.7)$$

Trên cơ sở của các công thức nhận được dễ dàng xác định các hàm nội lực đối với mặt cắt bất kỳ, sau đó vẽ được các biểu đồ của chúng. Cần chú ý các công thức (1.6) chỉ khác với công thức (1.7) về dấu. Trong các tính toán thực hành cần phải chú ý đến điều này. Phương pháp xác định nội lực như trên thường được gọi là phương pháp mặt cắt.

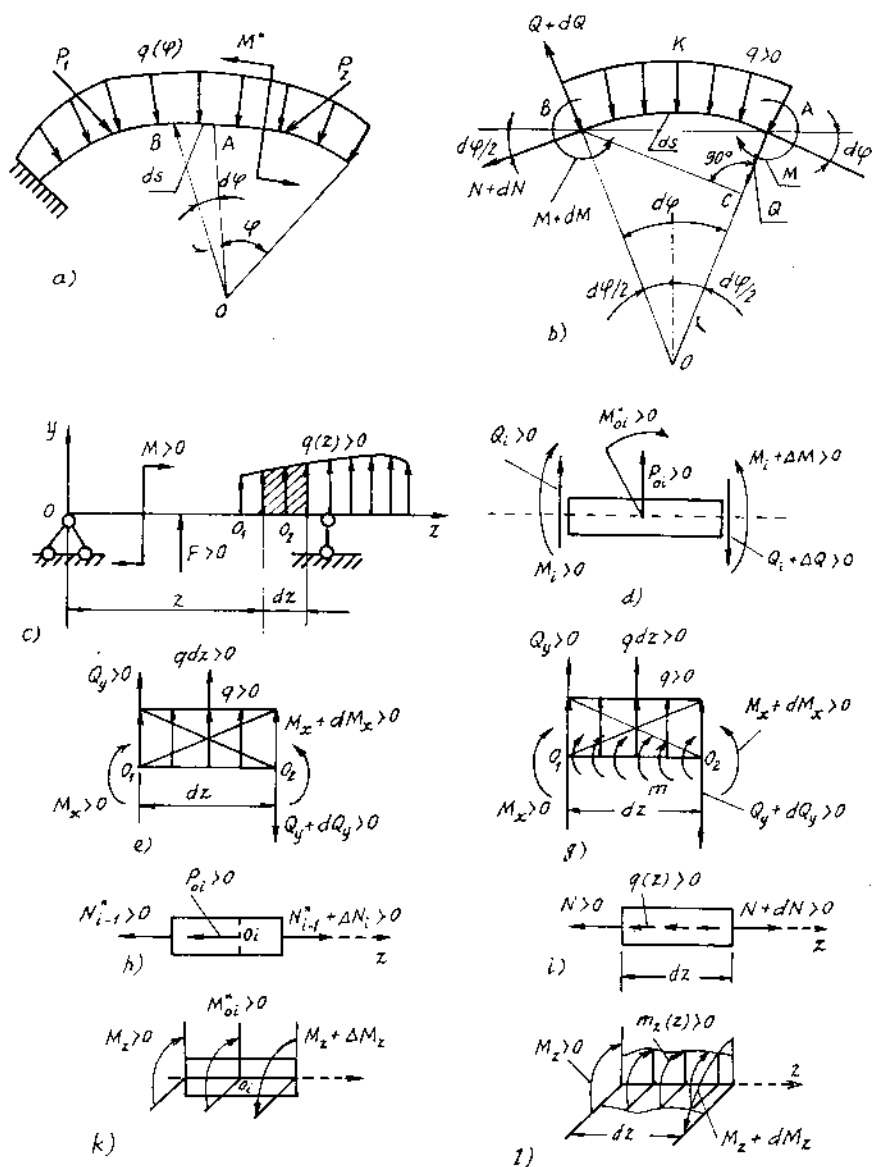
§12. LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NỘI LỰC VÀ NGOẠI LỰC

a) Trường hợp thanh cong

Giả sử thanh cong chịu lực như hình vẽ 1.18a. Để tìm mối liên hệ giữa nội lực và ngoại lực ta làm như sau. Ta tưởng tượng tách ra khỏi thanh một đoạn thanh rất bé có chiều dài dS bằng các mặt cắt

qua A và B vuông góc với trục thanh. Dưới tác dụng của các ngoại lực: $q(\varphi)$, P_i , M_i^* trong mặt phẳng chứa trục thanh, trên các mặt cắt ngang xuất hiện các nội lực tương ứng sau đây (hình 1.18b):

$$N, N + dN; Q, Q + dQ; M_x, M_x + dM_x$$



Hình 1.18.

Khi khảo sát điều kiện cân bằng của phân tố $dS = r d\varphi$ với các nội lực và ngoại lực như hình 1.18b, ta đi đến:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} &= -\frac{Q}{r} \\ \frac{dQ}{d\varphi} &= N + qr \\ \frac{dM}{d\varphi} &= Q \cdot r \end{aligned} \right\} \quad (1.8a)$$

Do $r d\varphi = dS$ cho nên có thể viết (1.8a) dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dS} &= -\frac{Q}{r} \\ \frac{dQ}{dS} &= q + \frac{N}{r} \\ \frac{dM}{dS} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (1.8b)$$

b) Trường hợp thanh thẳng

Khi $r = \infty$ thì trục cong S trùng với trục Z của thanh thẳng (hình 1.8c) và các quan hệ (1.8b) trở thành với quy ước chiều dương của ngoại lực và nội lực như từ hình 1.18c đến hình 1.18l).

- Uốn phẳng (hình 1.18c, d, e, g):

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_i &= P_{oi} \\ \Delta M_i &= M_{oi}^* \\ \frac{dQ}{dz} &= q \\ \frac{dM}{dz} &= Q + m \\ \frac{d^2 M}{dz^2} &= q + \frac{dm}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (1.8c)$$

- Thanh chịu kéo nén (hình 1.18h, i):

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_i &= P_{oiz} \\ \frac{dN}{dz} &= q(z) \\ \dots &\dots\dots \\ \frac{d^n N}{dz^n} &= q^{(n-1)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (1.8d)$$

- Thanh chịu xoắn (hình 1.18k, l):

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_{zi} &= M_{oi}^* \\ \frac{dM_z}{dz} &= m_z(z) \\ \dots &\dots\dots \\ \frac{d^n M_z}{dz^n} &= m_z^{(n-1)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (1.8e)$$

Các kết quả từ (1.8a) đến (1.8e) được gọi là mối liên hệ vi phân giữa các ngoại lực với nội lực và nội lực với chính nội lực.

Ta có thể phát biểu các kết quả này đối với các thanh thẳng như sau:

1) Đạo hàm cấp một theo tọa độ z của lực cắt $Q_y(z)$; lực dọc $N_z(z)$, mômen xoắn $M_z(z)$ tương ứng bằng cường độ của tải trọng phân bố $q_y(z)$, $q_z(z)$, $m_z(z)$ đặt tại mặt cắt tương ứng.

2) Đạo hàm cấp một theo hoành độ z của mômen uốn M_x bằng lực cắt $Q_y(z)$ tại mặt cắt tương ứng.

3) Đạo hàm cấp hai theo hoành độ z của mômen uốn $M_x(z)$ bằng cường độ tải trọng phân bố $q_y(z)$ tại mặt cắt tương ứng.

4) Bước nhảy của lực cắt ΔQ_y , ΔQ_x , của các mômen uốn ΔM_x , ΔM_y , của lực dọc ΔN và của mômen xoắn ΔM_z bằng chính vectơ tập trung tương ứng: P_{oiy} , P_{oix} , M_{oix}^* , M_{oiy}^* , P_{oiz} , M_{oiz}^* .

§13. QUY ƯỚC VỀ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC VÀ CÁC NHẬN XÉT

1. Quy ước vẽ biểu đồ

Để vẽ biểu đồ nội lực ta quy ước chọn hệ trục tọa độ xyz đặt vào sơ đồ tính như sau: trục z trùng với trục thanh, trục y hướng xuống dưới, trục x hướng ra ngoài (hướng về phía người quan sát).

Đối với biểu đồ lực dọc N và mômen xoắn M_z , ta chọn tùy ý về một phía của trục thanh làm chiều dương của trục tung N hoặc M_z , phía ngược lại là âm.

Đối với các biểu đồ mômen uốn M_x , M_y các mômen uốn tương ứng làm căng thớ nào của thanh thì tung độ của các biểu đồ này được đặt về phía đó. Với quy ước dấu về nội lực đã nói ở §10 thì khi $M_x > 0$ tung độ cần đặt ở phía dưới trục thanh (phía $y > 0$), còn $M_y > 0$ thì tung độ của nó cần đặt ở phía ngoài kể từ trục thanh (phía $x > 0$).

Đối với các biểu đồ lực cắt: khi $Q_y > 0$ thì tung độ của nó cần đặt lên phía trên trục thanh (phía $y < 0$), $Q_y < 0$ đặt phía dưới (phía $y > 0$). Khi lực cắt $Q_x > 0$ thì tung độ của nó cần đặt phía trong trục thanh (phía $x < 0$), các tung độ âm của Q_x đặt ở phía ngoài trục thanh (phía $x > 0$). Các quy ước về dấu của nội lực và cách vẽ biểu đồ của chúng cùng với các liên hệ vi phân đã mô tả trong §12 sẽ đặc biệt có lợi khi thực hành vẽ nhanh các biểu đồ nội lực và nó có ý nghĩa rất lớn khi bố trí vật liệu trong kết cấu.

2. Các nhận xét để vẽ nhanh và kiểm tra kết quả

Khi đi từ trái sang phải trên cơ sở của các liên hệ vi phân từ (1.8c đến 1.8e) ta có các nhận xét:

- Tại mặt cắt có đặt lực tập trung P_y hoặc P_z , biểu đồ lực cắt và lực dọc tương ứng có bước nhảy, trị số và chiều của bước nhảy, bằng trị số và chiều của lực tập trung đó.
- Tại mặt cắt có đặt mômen ngoại lực tập trung M'_x hoặc M'_z , các biểu đồ mômen uốn M_x và xoắn M_z tương ứng có bước nhảy chiều và trị số bước nhảy bằng chiều và trị số của vectơ mômen tập trung đó.

- Nếu trên đoạn trục nào đó chịu mômen xoắn ngoại lực phân bố m_z có dạng một đa thức bậc n thì trên đoạn đó biểu đồ mômen xoắn nội lực $M_z(z)$ là một đường cong bậc $(n + 1)$.
 - Tương tự như vậy, nếu trên đoạn thanh mà $q_z(z)$ hoặc $q_y(z)$, là một đa thức bậc n thì biểu đồ N_z và biểu đồ Q_y là một đường bậc $(n + 1)$ và biểu đồ mômen uốn M_x là đường bậc $(n + 2)$. Tại $z = z_0$ mà $q_z(z_0) = 0$, $q_y(z_0) = 0$ thì N và Q_y tương ứng đạt cực trị.
 - Nếu trên đoạn thanh có $q_y > 0$ (hướng lên) thì Q_y đồng biến; nếu trên đoạn có $q_y < 0$ (hướng xuống) thì Q_y nghịch biến.
 - Nếu trên đoạn thanh có $Q_y > 0$ thì M_x đồng biến và nếu trên đoạn thanh có $Q_y < 0$ thì M_x nghịch biến. Tại mặt cắt có $Q_y = 0$ thì M_x đạt cực trị. Nếu $q < 0$ thì biểu đồ M_x là đường cong lõm, còn nếu $q > 0$ thì biểu đồ M_x là đường cong lõm.
- Những nhận xét nêu trên dùng để vẽ nhanh các biểu đồ nội lực nhưng cũng đồng thời là những tiêu chí để kiểm tra tính đúng đắn của các biểu đồ nội lực được vẽ bằng bất kỳ phương pháp nào.

3. Các bước vẽ các biểu đồ nội lực

Biểu đồ nội lực (thường gặp là biểu đồ lực dọc, lực cắt, biểu đồ mômen xoắn, mômen uốn) là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của nội lực trên toàn thanh (hay kết cấu) khi thanh (hay kết cấu) chịu tác dụng ngoài. Nếu vẽ được biểu đồ nội lực thì ta dễ dàng thấy được độ lớn của nội lực trên tất cả các mặt cắt ngang của thanh (hay kết cấu).

Khi vẽ biểu đồ nội lực ta cần thực hiện các bước chính sau đây:

a. Xác định các phản lực liên kết (bằng cách lập các phương trình cân bằng tĩnh học theo các nguyên tắc cơ bản của vật rắn tuyệt đối hoặc các điều kiện biến dạng thực tại các liên kết).

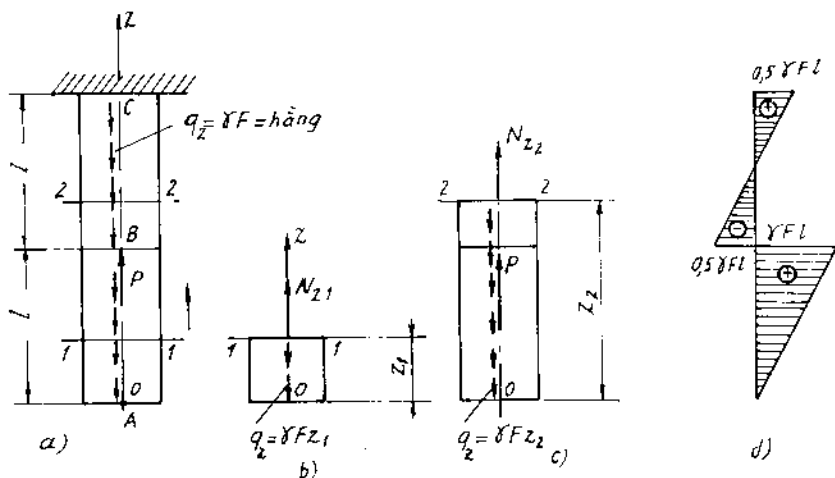
b. Lập biểu thức giải tích của các nội lực (N_z , M_z , Q_y , M_x ,...) đối với một mặt cắt bất kỳ cho từng đoạn thanh bằng phương pháp nào đó thích hợp nhất.

c. Trên cơ sở các biểu thức giải tích của nội lực, vẽ các biểu đồ của chúng theo chỉ dẫn ở mục 1, §13.

§14. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1

Cho một thanh thẳng đứng chịu tác dụng của trọng trường và lực $P = 1,5\gamma.F.l$, trong đó γ – trọng lượng riêng của vật liệu thanh, F – diện tích của mặt cắt ngang ; l – nửa chiều dài của thanh. Vẽ biểu đồ $N(z)$?



Hình 1.19.

GIẢI

Tưởng tượng cắt thanh tại mặt cắt 1-1 và giữ lại phần dưới và khảo sát điều kiện cân bằng:

$$\Sigma Z = 0 \rightarrow N_{z1} - \gamma F \cdot z_1 = 0$$

Do đó:

$$N_{z1} = \gamma F \cdot z_1 \text{ với } N_z > 0, \quad 0 \leq z_1 \leq l$$

Tương tự như vậy, tại mặt cắt z_2 (hình 1.19c) ta xét cân bằng phần dưới:

$$\Sigma Z = 0 \rightarrow N_{z2} + P - \gamma F \cdot z_2 = 0$$

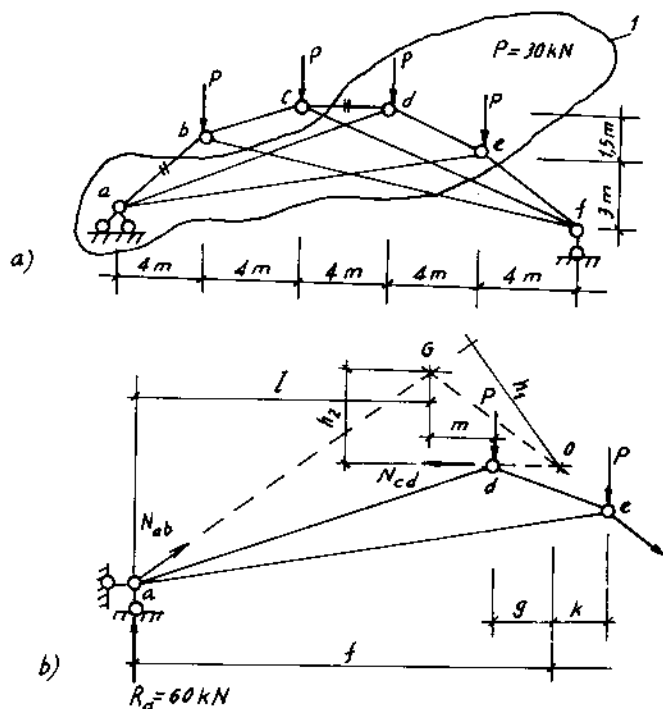
Suy ra:

$$N_{z2} = F\gamma(z_2 - 1,5l) \quad \text{với } l \leq z_2 \leq 2l$$

Vì các biểu thức N_{z1} và N_{z2} khác nhau nên rõ ràng không thể biểu diễn sự biến thiên của các lực dọc N_z trong toàn thanh bởi cùng một biểu thức. Sự khác nhau đó xảy ra tại các mặt cắt có lực tập trung đặt trùng với trục thanh hoặc có sự thay đổi đột ngột của trường lực phân bố dọc trục thanh. Dựa vào đặc điểm tác dụng của ngoại lực dọc theo thanh người ta chia thanh ra thành hai đoạn và lập biểu thức của N trên từng đoạn. Hình 1.19d là biểu đồ lực dọc N của thanh được khảo sát. Tại mặt cắt B có lực tập trung $P = 1,5 \gamma Fl$ nên tại đó biểu đồ N có bước nhảy bằng $\bar{P} < 0$.

Vi dụ 2

Một hệ khớp chịu lực như hình 1.20a. Hãy xác định lực dọc trong các thanh a-b và c-d đánh dấu trên hình 1.20a.



Hình 1.20.

GIẢI

Để xác định N_{ab} và N_{cd} ta sẽ sử dụng phương pháp đã giới thiệu trong §10 với mặt cắt kín 1 qua các thanh cần tìm N và các thanh ef, cf, bf. Trong đó các thanh cf, bf bị cắt hai lần. Hệ cân bằng nên mỗi phần được tưởng tượng cắt ra cũng phải cân bằng. Ta xét điều kiện cân bằng của phần bị cắt nằm trong đường cong 1. Cụ thể là (hình 1.20b):

$$\sum m_0(\bar{P}) = 0 = R_a \cdot f + N_{ab} \cdot h_1 - P \cdot g + P \cdot k = 0 \Rightarrow N_{ab} = -175 \text{ kN}$$

trong đó: $h_1 = 4,8 \text{ m}$, $f = 14 \text{ m}$, $g = 2 \text{ m}$, $k = 2 \text{ m}$, $R_a = 60 \text{ kN}$.

$$\sum m_G(\bar{P}) = 0 = R_a \cdot l + N_{cd} \cdot h_2 + P \cdot m + P(m + 4) = 0 \Rightarrow N_{cd} = 280 \text{ kN}$$

trong đó: $l = 10 \text{ m}$, $h_2 = 3 \text{ m}$, $m = 2 \text{ m}$.

Ví dụ 3

Một dầm chịu lực cân bằng như hình 1.21a. Hãy viết biểu thức của M_x , Q_y và vẽ (M_x) , (Q_y) theo phương pháp mặt cắt đã giới thiệu ở các §10, §11.

GIẢI

Thanh được chia làm hai đoạn, trên mỗi đoạn phải thực hiện một mặt cắt di động, trên đó các nội lực được đặt theo chiều dương. Khảo sát điều kiện cân bằng của một trong hai phần đã tưởng tượng cắt ra. Trong đoạn 1 – 2 thực hiện mặt cắt 1 – 1 gốc tọa độ chọn ở 2. Trong đoạn 0 – 1 thực hiện mặt cắt 2 – 2 gốc tọa độ chọn ở 2 (hình 1.21b, c).

Cụ thể là:

Đoạn 1 – 2 ($0 \leq z_1 \leq 2a$) gốc ở 2:

$$q(z_1) = \frac{3qz_1}{3a} = \frac{qz_1}{a};$$

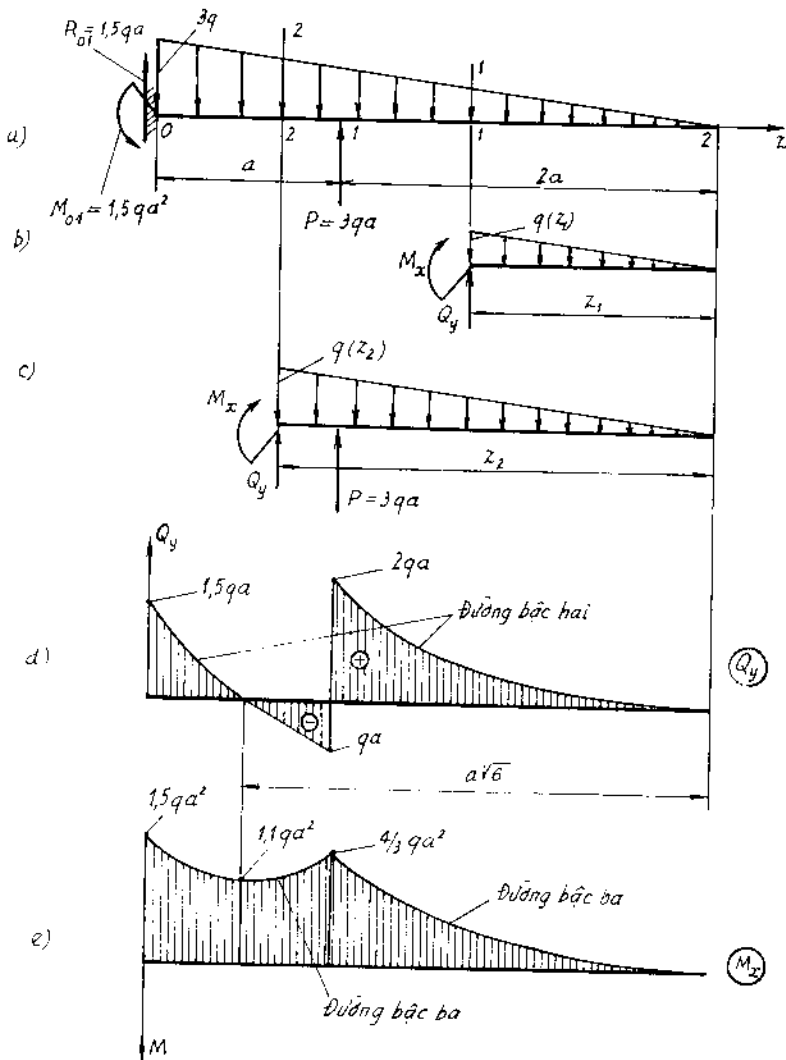
$$Q_y = \frac{q(z_1)z_1}{2} = -\frac{qz_1^2}{2a}$$

$$M_x = - \frac{q(z_1)}{2} \frac{z_1}{3} = - \frac{qz_1^3}{6a} \quad (a)$$

Đoạn 0 – 1 ($2a \leq z_2 \leq 3a$) gốc ở 2:

$$q(z_2) = \frac{3qz_2}{3a} = \frac{qz_2}{a} ;$$

$$Q_y = \frac{qz_2^2}{2a} - 3qa ; \quad (b)$$



Hình 1.21.

$$M_x = -\frac{qz_2^3}{6a} + 3qa(z_2 - 2a).$$

Trước hết, vẽ biểu đồ lực cắt Q_y , ta thấy Q_y có giá trị bằng không trong đoạn 0 - 1, tại:

$$\frac{qz_2^2}{2a} - 3qa = 0 \Rightarrow z_2 = a\sqrt{6}$$

Tại mặt cắt này, mômen uốn M_x có giá trị cực trị

$$M_x(z_2 = a\sqrt{6}) = -q \frac{(a\sqrt{6})^3}{6a} + 2qa(a\sqrt{6} - 2a) = -1,1qa^2$$

Giá trị của Q_y và M_x tại $z_2 = 3a$ cho ta giá trị phản lực tại ngàm "O". Cụ thể là:

$$R_{01} = 1,5qa; M_{01} = 1,5qa^2 \text{ chiều như hình 1.21a.}$$

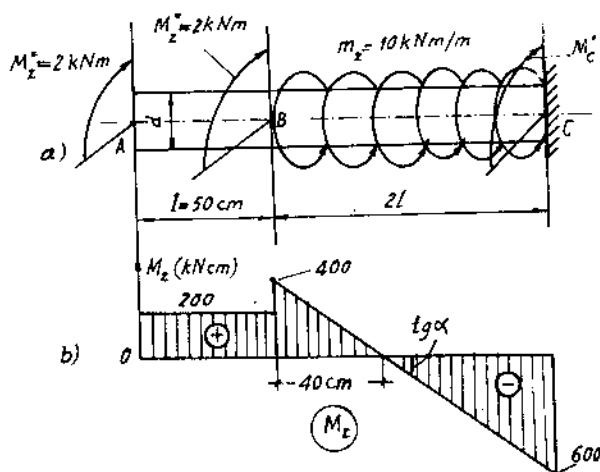
Biểu đồ (M_x) và (Q_y) được cho trên hình 1.21d, e.

Ví dụ 4

Một trục chịu xoắn như hình 1.22a. Hãy vẽ biểu đồ mômen xoắn M_x từ các nhận xét trong §13 và từ công thức (1.8e) về thanh chịu xoắn?

GIẢI

Tại A và B có mômen tập trung dương với $M_A^* = 200$ kNcm, $M_B^* = 200$ kNcm, nên khi đi từ trái sang phải tại A biểu đồ M_x có bước nhảy theo chiều dương bằng 200 kNcm. Trên đoạn AB không có mômen



Hình 1.22.

phân bố ($m_z = 0$) nên trên đoạn này $M_z = \text{hằng} = 200 \text{ kNcm}$. Tại B biểu đồ M_z cũng có bước nhảy dương $\Delta M_B = M'_B = 200 \text{ kNcm}$. Trên đoạn BC trục chịu mômen phân bố hằng $m_z = -10 \text{ kNcm/cm}$, nên biểu đồ M_z trong đoạn này là đường bậc nhất giảm (đi xuống) với hệ số góc $\text{tg} \alpha = \frac{dM_z}{dz} = m_z = -10$. Giao của đường thẳng xiên này với đường thẳng đứng qua c cho ta giá trị mômen xoắn phản lực ở ngàm c, $M'_c = 600 \text{ kNcm}$. Biểu đồ M_z được cho trên hình 1.22b.

Ví dụ 5

Một dầm có sơ đồ hình học và liên kết như hình 1.23a. Cho biết biểu đồ mômen uốn. Hãy tái hiện lại sơ đồ tải trọng và vẽ biểu đồ lực cắt Q_y ?

GIẢI

Trên cơ sở các liên hệ vi phân (1.8c) ta giải bài này như sau:

Trong đoạn 0 – 1, 1 – 2 và 2 – 3 biểu đồ mômen là những đoạn thẳng xiên cắt trục dầm. Cho nên trên các đoạn này biểu đồ Q là những đoạn thẳng song song với trục dầm. Trên đoạn 3 – 4 biểu đồ mômen là một parabol bậc 2, nên biểu đồ Q là một đoạn xiên, có tung độ bằng không tại vị trí $M_{\text{max}} = 62,5 \text{ kNm}$.

Từ liên hệ vi phân $\frac{dM}{dz} = Q(z)$ ta có lực cắt trong các đoạn như sau:

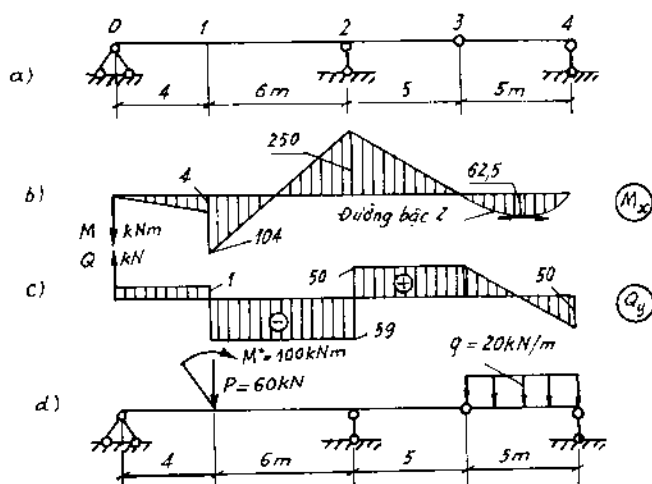
$$\text{Đoạn 0 – 1: } Q_{0-1} = \frac{dM_1}{dz} = \frac{4}{4} = 1 \text{ kN} > 0$$

$$\text{Đoạn 1 – 2: } Q_{1-2} = -\frac{dM_2}{dz} = -\frac{250+104}{6} = -59 \text{ kN} < 0$$

$$\text{Đoạn 2 – 3: } Q_{2-3} = \frac{dM_3}{dz} = \frac{250}{5} = 50 \text{ kN} > 0$$

Đoạn 3 – 4:

Tại 3 không có lực tập trung nên tại đó trên biểu đồ Q không có bước nhảy. Từ tung độ $Q_3 = 50 \text{ kN}$ tại điểm 3 nối với $Q = 0$ tại điểm giữa trên đoạn 3 – 4 và kéo dài ta được $Q_4 = -50 \text{ kN} < 0$.



Hình 1.23.

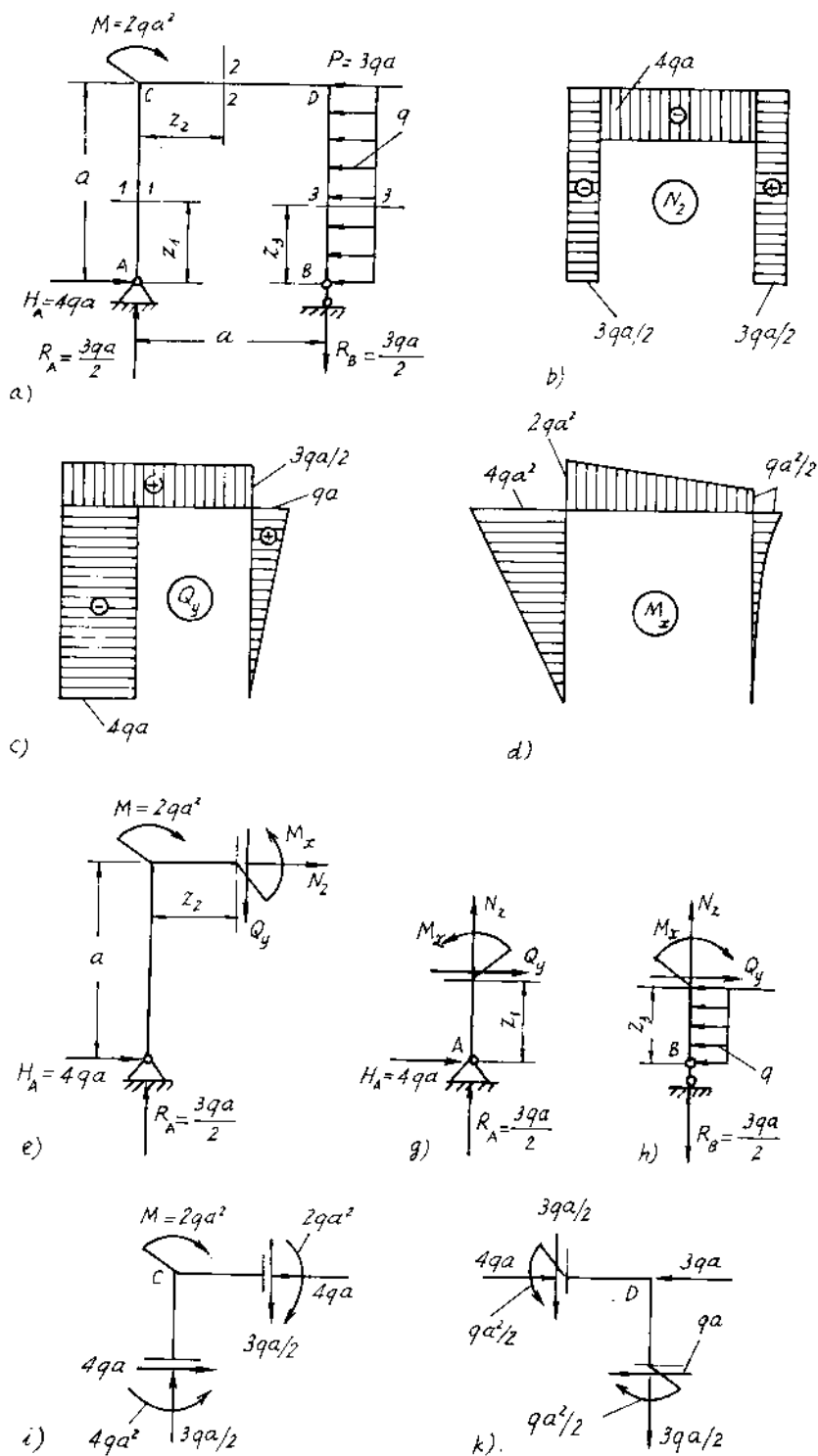
Các giá trị lực cắt tại 0, 1, 2, 4 chính là các phản lực liên kết và ngoại lực tập trung tại các điểm nói trên. Biểu đồ lực cắt được dựng lại trên hình 1.23c. Tại điểm 1 trên biểu đồ M có bước nhảy bằng 100 kNm từ trên xuống cho nên tại đây có mômen ngoại lực tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ. Trên đoạn 3 – 4 biểu đồ M là đường bậc 2 lồi và Q là bậc 1 giảm dần như trên hình 1.23b, c cho nên trên đoạn này ngoại lực phải âm và phân bố đều. Sơ đồ tải trọng được dựng lại trên hình 1.23d.

Vi dụ 6

Vẽ biểu đồ nội lực trong khung tĩnh định bằng phương pháp mặt cắt cho trên hình 1.24a, sau đó kiểm tra tính đúng đắn của biểu đồ đã vẽ được.

GIẢI

Để vẽ biểu đồ nội lực bằng phương pháp mặt cắt trong khung, trước hết phải xác định các phản lực liên kết bằng điều kiện cân bằng. Cụ thể là:



Hình 1.24.

$$\sum m_A(\bar{P}) = 0 ; \quad \sum m_B(\bar{P}) = 0 ; \quad \sum X = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{3qa}{2} \downarrow ; \quad R_A = \frac{3qa}{2} \uparrow ; \quad H_A = 4qa$$

Tưởng tượng cắt khung tại các đoạn AC, CD, DB như hình 1.24a. Chiều của mômen uốn trên các thanh đứng AC, DB được chọn tùy ý, nếu kết quả tính toán là dương, vẽ tung độ của biểu đồ M_x về phía thớ căng của mômen đã chọn. Chiều dương của lực cắt và lực dọc vẫn theo qui ước như thanh thẳng:

Đoạn AC ($0 \leq z \leq a$) (hình 1.14e):

$$N_z = -\frac{3qa}{2} ; \quad Q_y = -4qa ; \quad M_x = -4qa.z$$

Đoạn CD ($0 \leq z_2 \leq a$) (hình 1.24g):

$$N_z = -4qa ; \quad Q_y = \frac{3qa}{2} ; \quad M_x = \frac{3qa}{2} z_2 + 2qa^2 - 4qa^2 = \frac{3qa}{2} z_2 - 2qa^2$$

Đoạn DB ($0 \leq z_3 \leq a$) (hình 1.24h):

$$N_z = \frac{3qa}{2} ; \quad Q_y = qz_3 ; \quad M_x = -\frac{qz_3^2}{2}$$

Biểu đồ N_z , Q_y , M_x được vẽ trên hình 1.24b, c, d. Biểu đồ N_z , Q_y có đánh dấu dương âm. Để kiểm tra kết quả vẽ biểu đồ, ta kiểm tra bằng cách xét cân bằng các nút C và D (hình 1.24i). Căn cứ biểu đồ nội lực, vẽ các nội lực tác dụng lên các nút. Nếu biểu đồ nội lực vẽ đúng thì các thành phần nội lực và ngoại lực cân bằng nhau. Cụ thể là các phân tử trên các hình 1.24e, g, h, i, k phải cân bằng:

Ví dụ 7

Vẽ biểu đồ nội lực của một khung cho trên hình 1.25a.

GIẢI

Phải thiết lập biểu thức của các nội lực trên mỗi mặt cắt di động (1-1) và (2-2) (hình 1.25a) để từ đó vẽ các biểu đồ nội lực cho từng đoạn. Khi đi ở trong khung từ 0 đến 2, mômen được xem là dương

nếu căng trong, căng phía ngoài là âm, lực cắt và lực dọc vẫn giữ quy ước như trong thanh thẳng. Do đó, để thuận tiện ta ngầm định các nội lực cần tính trên mỗi mặt cắt di động (1-1) và (2-2) trên các đoạn 0-1 và 1-2 tương ứng đều đặt theo chiều dương.

Đối với đoạn 0-1:

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$N_1 = -P_2 = -\frac{3}{28} qa$$

$$Q_1 = P_1 - qz_1 = \frac{3}{7} qa - qz_1$$

$$M_1 = P_1 z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = \frac{3}{7} qaz_1 - q \frac{z_1^2}{2}$$

Đối với đoạn 1-2: $0 \leq z_2 \leq a$

$$N_2 = \frac{3}{7} qa - qa = -\frac{4}{7} qa$$

$$Q_2 = \frac{3}{28} qa$$

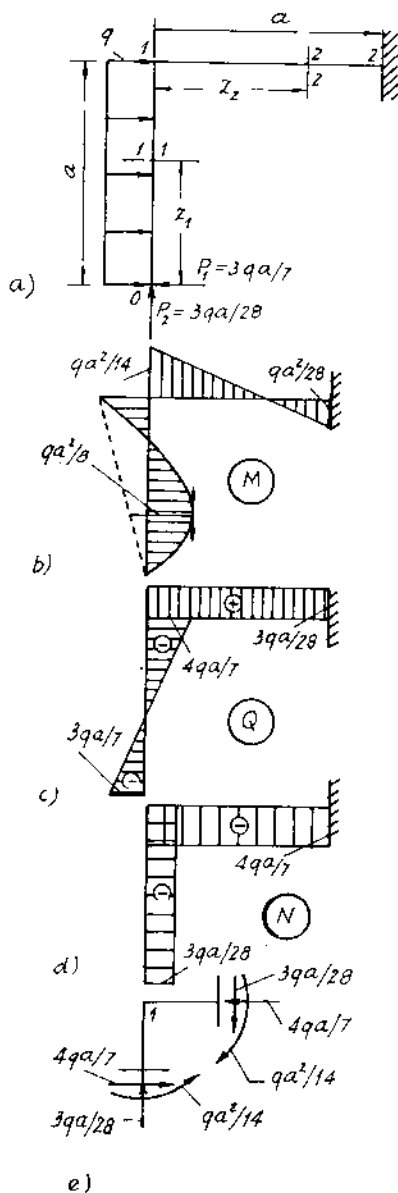
$$M_2 = -P_2 z_2 - P_1 a + q \frac{a^2}{2}$$

Biểu đồ M, Q, N được cho trên hình 1.25b, c, d.

Tính đúng đắn của các biểu đồ đã vẽ được thể hiện ở sự cân bằng nút "1" (hình 1.25e).

Ví dụ 8

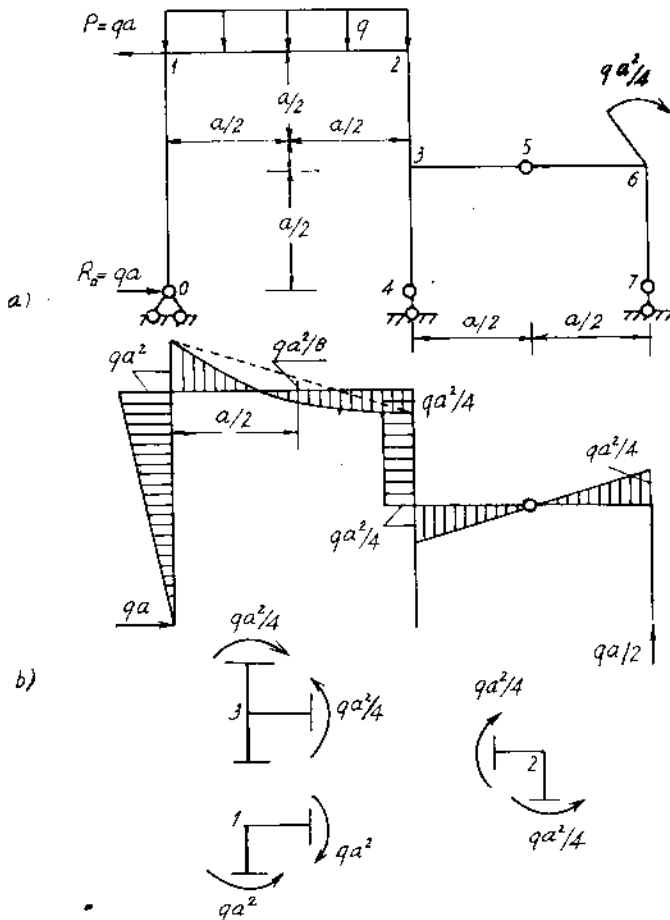
Một khung tĩnh định cân bằng như hình 1.26a. Hãy vẽ nhanh biểu đồ M (không viết biểu thức của M cho các đoạn).



Hình 1.25.

GIẢI

Nhận xét do liên kết như hình cho nên đoạn 3 – 4 và 6 – 7 không có mômen. Tại khớp 5 không có mômen, tại điểm 6 có mômen tập trung quay thuận kim đồng hồ, tại đây biểu đồ M có bước nhảy bằng $qa^2/4$ căng trên. Biểu đồ M trên đoạn 3 – 6 là đường xiên qua khớp 5.



Hình 1.26.

Từ điều kiện cân bằng nút 3, suy ra mômen đoạn 2 – 3 là hằng, căng trong.

Khi khảo sát điều kiện cân bằng của khung ta xác định được phản lực tại 0, như hình 1.26a. Mômen tại 1 thuộc đoạn 0 – 1 căng ngoài và có giá trị: qa^2 . Điều kiện cân bằng nút 1 và 2 cho ta các tung độ và chiều căng của M tại mặt cắt 1 và 2 thuộc đoạn 1 – 2. Các nhận xét trên cho phép vẽ biểu đồ M như hình 1.26b.

Ví dụ 9

Một thanh cong một phần tư vòng tròn chịu lực q phân bố đều theo phương thẳng đứng (hình 1.27a). Hãy vẽ các biểu đồ N , Q , M ?

GIẢI

Nội lực trên mặt cắt ngang có tọa độ φ so với phương thẳng đứng do lực sơ cấp $dP = qdS = qp d\alpha$ (hình 1.27b).

$$dN = -dP \sin \varphi = qp \sin \varphi d\varphi;$$

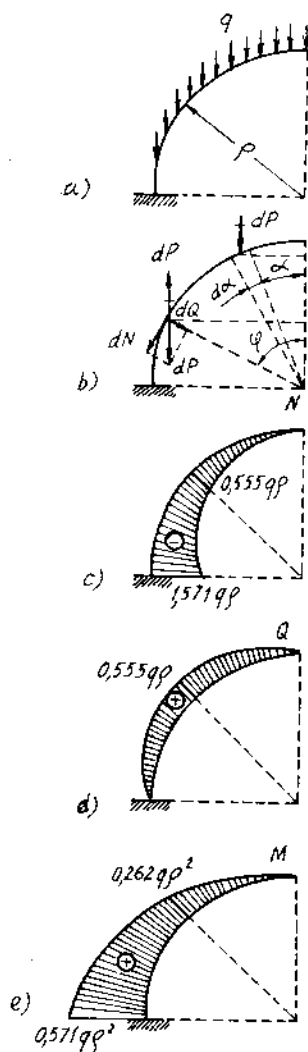
$$dQ = dP \cos \varphi = qp \cos \varphi d\varphi;$$

$$\begin{aligned} dM &= dP \cdot \rho (\sin \varphi - \sin \alpha) = \\ &= qp^2 (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Nội lực do toàn bộ ngoại lực tác dụng lên phần khảo sát từ $0 \div \varphi$ (phần trên) (hình 1.27b):

$$N = -qp \sin \varphi \int_0^{\varphi} d\alpha = -qp\varphi \sin \varphi;$$

$$Q = qp \cos \varphi \int_0^{\varphi} d\alpha = qp\varphi \cos \varphi;$$



Hình 1.27.

$$M = q\rho^2 \int_0^{\varphi} (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha =$$

$$= q\rho^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1);$$

tại $\varphi = 0 \Rightarrow N_0 = 0$; tại $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow N_{\pi/4} \approx -0,555 \rho q$

tại $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N_{\pi/2} = -q\rho \frac{\pi}{2} = -1,571 \rho q$.

Tương tự:

$$Q_0 = 0; \quad Q_{\pi/4} \approx 0,555 \rho q; \quad Q_{\pi/2} = 0$$

$$M_0 = 0; \quad M_{\pi/4} \approx q\rho^2 \left(\frac{\pi}{4} 0,707 + 0,707 - 1 \right) \approx 0,262 \rho q^2$$

$$M_{\pi/2} = q\rho^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,57 + q\rho^2$$

Biểu đồ N , Q , M được cho trên hình 1.27c, d, e.

Vi dụ 10

Một thanh cong là một nửa vòng tròn bán kính R chịu tải trọng phân bố đều q theo phương tiếp tuyến (hình 1.28a). Hãy vẽ các biểu đồ N , Q , M .

GIẢI

Gọi α là góc tạo bởi mặt cắt ngang phương hướng kính và phương ngang thì hợp lực của lực sơ cấp tại đây là:

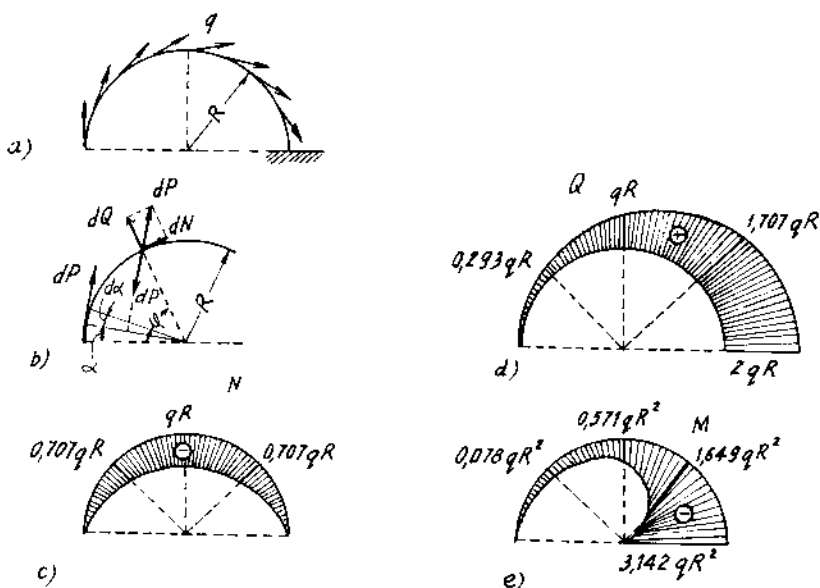
$$dP = qdS = qRd\alpha$$

Các nội lực sơ cấp tại mặt cắt φ do dP gây ra là:

$$dN = -dP \cos(\varphi - \alpha) = -qR \cos(\varphi - \alpha) d\alpha$$

$$dQ = dP \sin(\varphi - \alpha) = qR \sin(\varphi - \alpha) d\alpha$$

$$dM = -dP [R - R \cos(\varphi - \alpha)] = -qR^2 [1 - \cos(\varphi - \alpha)] d\alpha$$



Hình 1.28

Nội lực tổng cộng tại φ do toàn bộ tải trọng q tác dụng trên phần từ $0 \div \varphi$ là:

$$N = -qR \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) d\alpha = -qR \sin \varphi$$

$$Q = qR \int_0^{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = qR (1 - \cos \varphi)$$

$$M = -qR^2 \left[\int_0^{\varphi} d\alpha - \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \right] = qR^2 (\sin \varphi - \varphi);$$

$$\text{tại } \varphi = 0 \Rightarrow N_0 = 0; Q_0 = 0;$$

$$M_0 = 0$$

$$\text{tại } \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow N_{\pi/4} = -0,707 qR;$$

$$Q_{\frac{\pi}{4}} = 0,293 \, qR ; \quad M_{\pi/4} = -0,0789 \, R^2.$$

$$\text{Tại } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$N_{\frac{\pi}{2}} = -qR ; \quad Q_{\pi/2} = qR ;$$

$$M_{\pi/2} = -0,571 \, qR^2.$$

$$\text{Tại } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$N_{\frac{3\pi}{4}} = 0,707 \, qR;$$

$$Q_{\frac{3\pi}{4}} = 1,707 \, qR;$$

$$M_{\frac{3\pi}{4}} = -1,649 \, qR^2.$$

$$\text{Tại } \varphi = \pi$$

$$N_{\pi} = 0 ; \quad Q_{\pi} = 2qR;$$

$$M_{\pi} = -3,142 \, qR^2.$$

Các biểu đồ N , Q , M được cho trên hình 1.28c, d, e.

Ví dụ 11

Một thanh cong hình êlip $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$ hở tại “O”, chịu áp lực

q . Hãy xác định nội lực tại mặt cắt có tọa độ x , y bất kỳ theo q , a , b đã biết và biểu thức nội lực khi $a = b$? (hình 1.29a).

GIẢI

Do tính đối xứng với trục Ox nên ta chỉ cần khảo sát một nửa phía trên. Gọi q_x , q_y là hình chiếu của q lên các phương x , y . Nguyên lý cộng tác dụng cho ta:

$$N = qy \cos\beta - qx \sin\beta$$

$$Q = qx \cos\beta - qy \sin\beta$$

$$M = -\frac{q}{2} (x^2 + y^2).$$

Chú ý đến:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

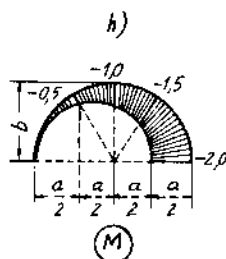
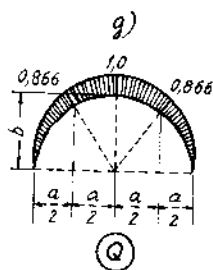
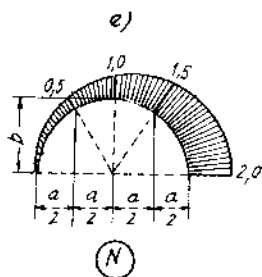
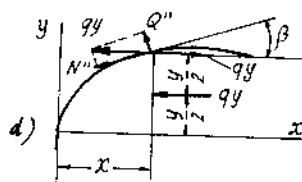
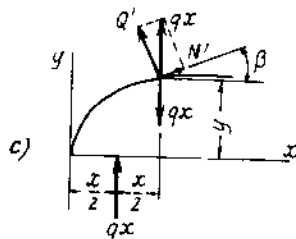
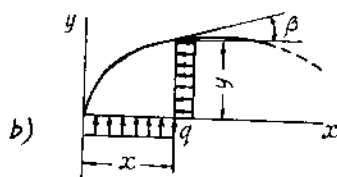
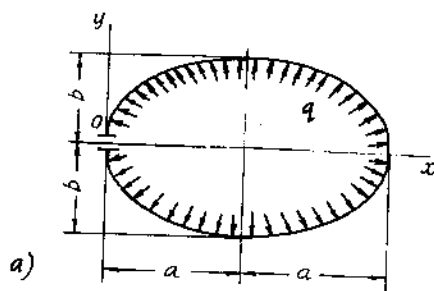
ta có:

$$\sin\beta = \frac{a-x}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{b}\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

Do đó:

$$N = \frac{qax}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$



Hình 1.29.

$$Q = \frac{q \left[\frac{a}{b}x + \frac{b}{a}(a-x) \right] \sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

$$M = -\frac{q}{2} \left[\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2) + x^2 \right].$$

Khi $a = b$ ta có một thanh cong tròn hồ tại "O". Trong trường hợp riêng này ta có:

$$N = q.x ; \quad Q = q\sqrt{2ax-x^2} ; \quad M = -qax$$

Biểu đồ lực dọc N, lực cắt Q và mômen M được cho trên hình 1.29e, g, h.

CHƯƠNG 2

ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

Để đảm bảo cho hệ làm việc được an toàn về độ bền, độ cứng và độ ổn định thì ta cần phải biết đặc tính ứng xử của từng loại vật liệu trong các điều kiện chất tải khác nhau. Điều này chỉ có thể giải quyết bằng con đường thí nghiệm. Các thí nghiệm này cho ta các đặc trưng bằng số của từng loại vật liệu. Những đặc trưng như thế gọi là đặc trưng cơ học của vật liệu. Từ những đặc trưng này người ta tìm những điều kiện toán học để đảm bảo sự làm việc an toàn cho hệ.

Thí nghiệm thường dùng nhất là thí nghiệm kéo và nén. Vì kết quả của thí nghiệm này có thể ứng dụng cho những trường hợp biến dạng khác nhau. Trong mục này chúng ta lần lượt nghiên cứu các thí nghiệm kéo và nén đối với vật liệu khác nhau.

Các vật liệu cổ điển được chia làm hai loại là vật liệu dẻo và vật liệu giòn.

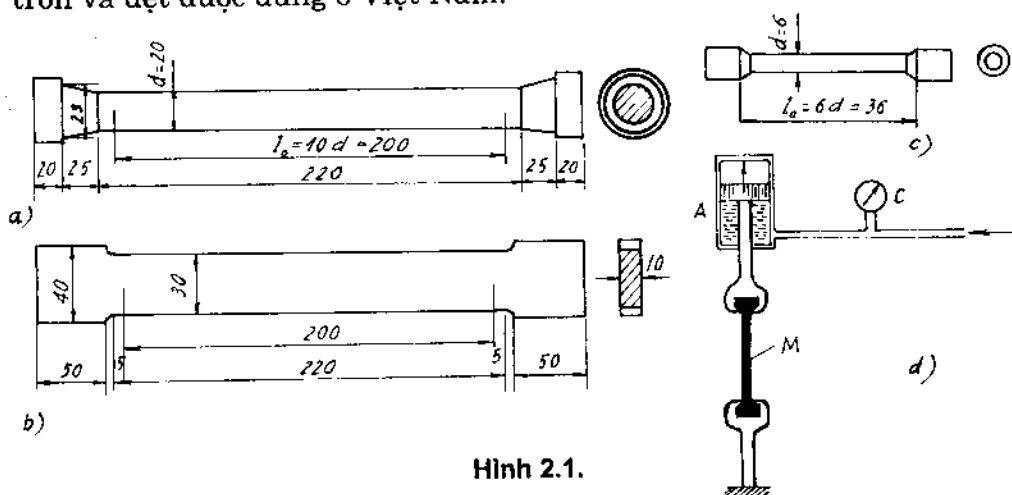
– Vật liệu dẻo là vật liệu có biến dạng dư (biến dạng dẻo) tương đối lớn trước khi cấu kiện bị phá hủy (như thép, đồng...).

– Vật liệu giòn là vật liệu hầu như không có biến dạng dư trước lúc bị phá hỏng (gang, gạch, đá, bê tông v.v...).

Nói một cách chính xác không phải về vật liệu dẻo hay giòn mà là về sự phá hủy chúng là phá hủy dẻo hay giòn.

§1. THÍ NGHIỆM KÉO VẬT LIỆU DẸO

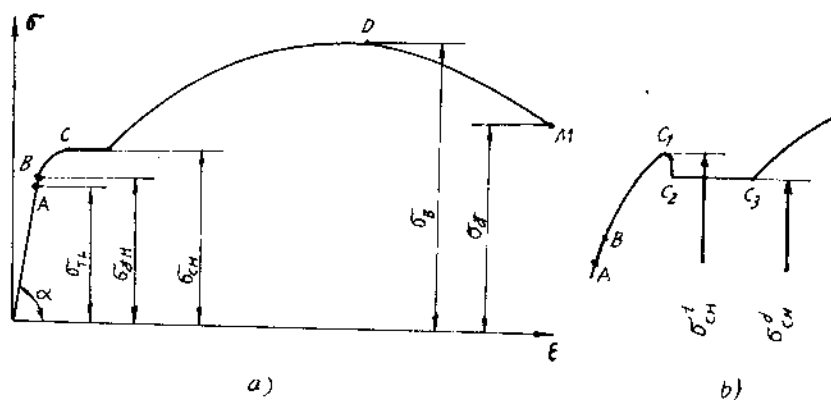
Để tiến hành thí nghiệm trước hết phải chế tạo các mẫu thí nghiệm theo tiêu chuẩn từng nước. Trên hình 2.1 là những mẫu thử tròn và dẹt được dùng ở Việt Nam.



Hình 2.1.

Phần thanh có chiều dài l_g , gọi là phần làm việc của mẫu. Thiết bị tạo lực kéo mẫu trong thí nghiệm có thể là các thiết bị cơ khí hoặc thủy lực. Hình 2.1d là sơ đồ nguyên lý của máy thí nghiệm có thiết bị thủy lực. Nhờ áp lực dầu trong trụ A tăng lên từ từ mà pistông được nâng lên và tạo ra lực kéo trong mẫu M. Lực kéo mẫu có thể xác định bởi giá trị cho trên đồng hồ đo áp lực C.

Để có những kết quả thí nghiệm chuẩn xác, sau khi kẹp chặt mẫu vào máy, người ta cho lực kéo mẫu tăng chậm chậm từ giá trị không. Quá trình biến dạng của mẫu được máy vẽ thành biểu đồ $(\sigma - \epsilon)$ trên hình 2.2. Ta thấy chiều dài mẫu tăng dần, chiều ngang hẹp dần cho đến khi lực kéo P đạt trị số cực đại P_0 , thì có một chỗ nào đó trên mẫu bị thắt hằn lại (ứng với điểm D). Sau đó thanh tiếp tục bị giãn dài trong khi lực kéo giảm dần và đến một giá trị P_d nào đó (ứng với điểm M) thì mẫu bị đứt tại chỗ thắt. Biểu đồ quan hệ giữa lực kéo P và độ giãn U gọi là biểu đồ kéo của vật liệu.



Hình 2.2.

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu các thuộc tính của vật liệu, người ta sử dụng biểu đồ quan hệ $(\sigma - \epsilon)$. Biểu đồ $(\sigma - \epsilon)$ nhận được trực tiếp từ biểu đồ $(P - U)$ bằng cách chia tung độ P cho diện tích mặt cắt ngang ban đầu F_0 của mẫu và chia hoành độ U cho chiều dài ban đầu l_0 . Quan hệ $\sigma = f(\epsilon)$ đối với thép CT3 có biểu đồ lực kéo như trên hình 2.2 với các điểm đặc trưng A, B, C, D và M. Biến dạng kéo của vật liệu gồm 3 giai đoạn chính sau:

** Giai đoạn thứ nhất*

Vật liệu có tính đàn hồi tuyệt đối, quan hệ $\sigma = f(\epsilon)$ là quan hệ tuyến tính được biểu diễn bởi đoạn thẳng OA:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.1)$$

Giai đoạn này gọi là giai đoạn tỷ lệ. Quan hệ (2.1) được gọi là định luật Húc khi kéo. E là môđun đàn hồi dọc (hay Young) của vật liệu. Gọi P_u là giá trị lớn nhất của lực kéo trong giai đoạn này và F_0 là diện tích mặt cắt ngang ban đầu của mẫu thử, ta có:

$$\sigma_u = \frac{P_u}{F_0} \quad (2.2)$$

Ứng suất σ_u gọi là giới hạn tỷ lệ (đối với thép CT3, $\sigma_u = 21 \text{ kN/cm}^2 \approx 210 \text{ MN/m}^2$).

Độ dốc của đoạn OA xác định bằng môđun đàn hồi E :

$$\operatorname{tg} \alpha = E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Kể từ trên điểm A biểu đồ không còn quan hệ tuyến tính nữa và từ đó định luật Húc mất hiệu lực. Ở rất gần điểm A trên đoạn cung này của biểu đồ có một điểm B, ứng suất ứng với nó ký hiệu là σ_{dh} và được gọi là giới hạn đàn hồi. Trong các tiêu chuẩn kỹ thuật σ_{dh} được xác định khi mà biến dạng dư của mẫu thử đạt được 0,05% và viết $\sigma_{dh} = \sigma_{0,05}$.

**Giai đoạn thứ hai*

Biến dạng đồng biến với lực chút ít rồi tăng rõ rệt trong khi lực không tăng được nữa (đoạn nằm ngang kể từ C). Ta gọi đoạn này là giai đoạn chảy dẻo. Lực kéo ứng với giai đoạn này được ký hiệu là P_{ch} .

$$\text{Ứng suất:} \quad \sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \quad (2.4)$$

được gọi là giới hạn chảy (đối với thép CT3, $\sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2 \approx 240 \text{ kN/m}^2$).

Trong giai đoạn chảy, nếu quan sát mẫu làm bằng thép ít cacbon được mài nhẵn, ta thấy những vết gợn nghiêng với trục thanh một góc 45° . Đó là những vết gây ra do sự trượt giữa các tinh thể vật liệu. Những vết trượt này được gọi là đường Liudertrenop.

**Giai đoạn thứ ba*

Sau khi kết thúc giai đoạn chảy dẻo, trong vật liệu lại xuất hiện khả năng "tự củng cố". Cụ thể là biến dạng chỉ có thể tăng nếu lực kéo mẫu tăng. Biểu đồ trong giai đoạn này là một đường cong trơn.

Ứng suất với điểm D cao nhất trong giai đoạn này gọi là giới hạn bền.

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (2.5)$$

(đối với thép CT3, $\sigma_B = 40 \text{ kN/cm}^2 \approx 400 \text{ kN/m}^2$).

Sau khi đạt giới hạn bền thì có một chỗ nào đó trên mẫu thử bị thắt lại và từ lúc đó biến dạng tiếp tục tăng nghịch biến với lực cho đến khi mẫu bị đứt ứng với điểm M.

Cần lưu ý rằng giới hạn bền được quy định ở trên chỉ mang một đặc trưng quy ước nào đó. Giới hạn bền này không phải là ứng suất gây ra sự phá hủy vật liệu. Bởi vì, khi phá hủy mặt cắt ngang của mẫu thử nhỏ hơn nhiều so với mặt cắt ngang ban đầu của nó.

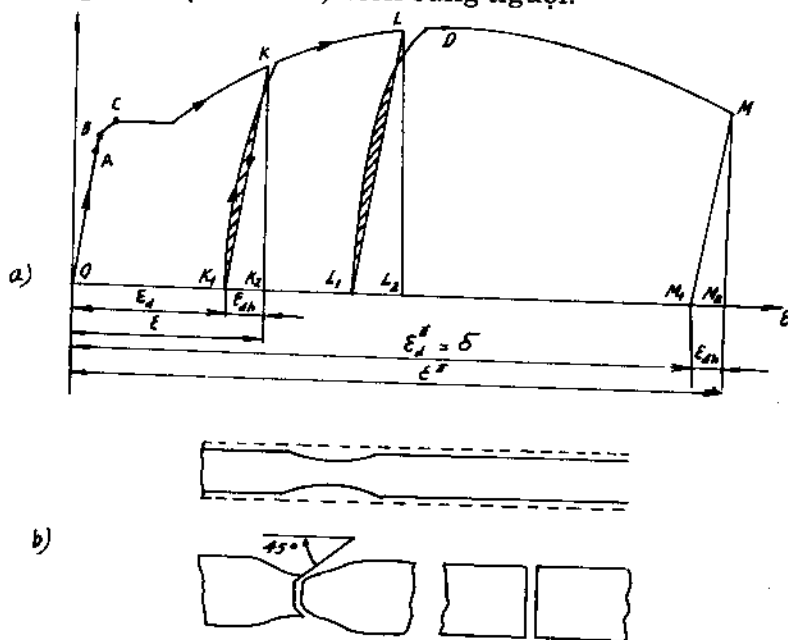
Nếu bắt đầu từ một điểm K nào đó trên biểu đồ (hình 2.3), ta hạ tải cho mẫu thì biểu đồ $(\sigma - \epsilon)$ diễn ra theo đường KK_1 hầu như song song với đoạn OA. Biến dạng tỷ đối của mẫu ứng với điểm K là:

$$\epsilon = OK_2 = OK_1 + K_1K_2 = \epsilon_d + \epsilon_{dh}$$

trong đó: $OK_1 = \epsilon_d$ là phần biến dạng dư;

$K_1K_2 = \epsilon_{dh}$ là phần biến dạng đàn hồi.

Nếu sau khi hạ tải đến điểm K_1 , ta lại tăng tải lên mẫu thì biểu đồ diễn ra theo đường cong K_1KDM thay cho đường cong OACDM ứng với mẫu lúc ban đầu chưa hạ tải lần nào. Qua biểu đồ cho thấy khi đã chất tải vào mẫu quá giới hạn chảy và sau đó là quá trình hạ tải thì thuộc tính cơ học của vật liệu mẫu bị thay đổi. Cụ thể là thêm chảy biến mất, giới hạn tỷ lệ được nâng cao và biến dạng toàn phần khi đứt bị giảm ($K_1M_2 < OM_2$), nghĩa là mẫu thử hình như trở nên giòn hơn. Sự thay đổi thuộc tính như vậy của vật liệu được gọi là hiện tượng (hoá giòn hoặc tái bền) biến cứng nguội.



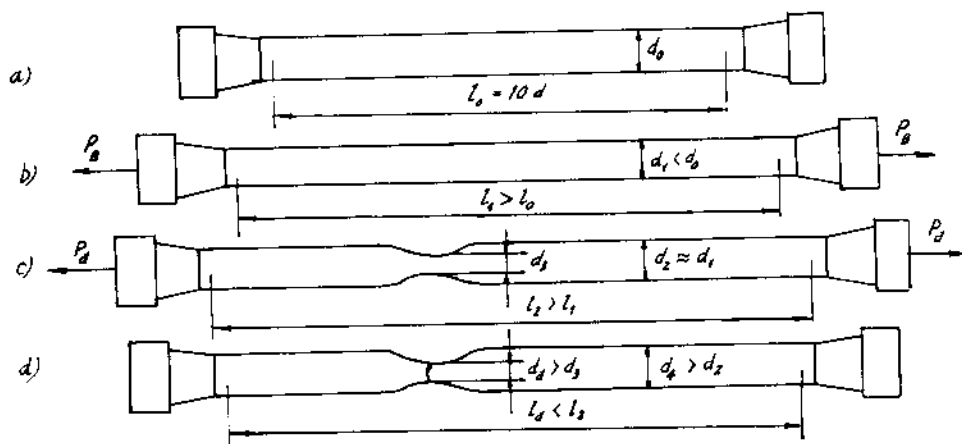
Hình 2.3.

Phân diện tích gạch sọc trên biểu đồ gọi là miền trễ. Hiện tượng tái bền không chỉ phát sinh khi chịu biến dạng kéo (nén) mà còn phát sinh ở bất kỳ loại biến dạng nào.

Nếu lặp lại quá trình hạ tải rồi tăng tải ở điểm L nào đó thì biểu đồ ($\sigma - \epsilon$) lặp lại hoàn toàn hiện tượng đã mô tả ở trên.

Tính song song của các đoạn OA, K_1K , L_1L , M_1M chứng tỏ là khi hạ tải môđun đàn hồi dọc của vật liệu không thay đổi.

Một vài hình ảnh của một mẫu thử tiêu chuẩn ở những thời điểm khác nhau, khi thử kéo cho trên (hình 2.4).



Hình 2.4.

Trong đó:

a là hình ảnh mẫu trước thí nghiệm;

b là hình ảnh mẫu chịu ứng suất nhỏ hơn giới hạn bền;

c là hình ảnh trước khi đứt;

d là hình ảnh mẫu sau khi đứt.

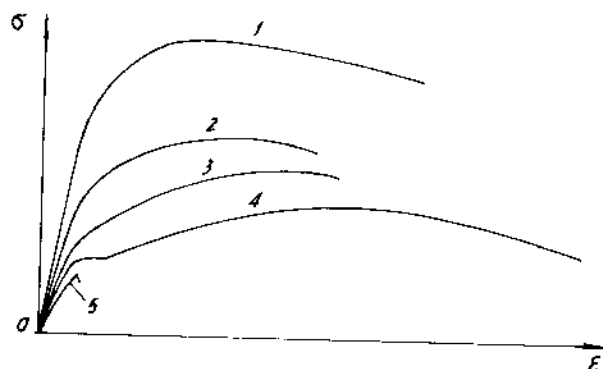
Sau khi đứt biến dạng đàn hồi không còn nữa, vì thế $l_d < l_2$.

Các ứng suất đặc trưng cho ba giai đoạn biến dạng khảo sát ở trên, cụ thể σ_{tb} , σ_{ch} , σ_B , được gọi là những đặc trưng về độ bền của vật liệu. Để xác định khả năng về biến dạng của vật liệu cho đến lúc đứt, người ta căn cứ vào hai đại lượng sau đây:

– Độ dài dư tương đối của mẫu sau khi đứt:

$$\delta = \frac{l_d - l_o}{l_o} = \frac{\Delta l_d}{l_o} \quad (2.6)$$

(đối với thép CT3, $\delta = 21 \div 23\%$).



Hình 2.5.

– Độ thất dư tương đối của mặt cắt ngang nơi bị đứt:

$$\Psi = \frac{F_o - F_d}{F_o} = \frac{\Delta F_d}{F_o} \quad (2.7)$$

ở đây: F_o – diện tích mặt cắt ngang của mẫu trước biến dạng;

F_d – diện tích mặt cắt ngang của mẫu tại chỗ bị đứt (đối với thép CT3, $\Psi \approx 60 \div 70\%$).

Để thấy rõ đặc điểm làm việc khác nhau trong suốt quá trình biến dạng kéo của những vật liệu khác nhau, ta hãy quan sát và so sánh các biểu đồ kéo được vẽ trên cùng hệ tọa độ ($\sigma - \epsilon$). Trên hình 2.5, đường 1 là thép hợp kim titan, đường 2 là thép CT6, đường 3 là đũa 16, đường 4 là thép CT3 và đường 5 là biểu đồ kéo một mẫu gang xám.

Ngày nay việc tạo ra những thép có độ bền cao với tính dẻo dầy đủ là một nhiệm vụ rất quan trọng của các nhà luyện kim. Điều đó

cắt nghĩa rằng, khi thép có cường độ cao thì tính dẻo giảm và thép trở nên giòn hơn. Và, nếu như vậy khả năng chịu tải trọng động của loại vật liệu này sẽ bị giảm. Để khắc phục những mâu thuẫn nói trên, người ta thường pha vào thép những lượng nhất định của các chất phụ trợ như đồng, niken, crôm v.v... Những thép như thế được gọi là thép hợp kim.

§2. THÍ NGHIỆM KÉO VẬT LIỆU GIÒN

Vật liệu giòn chịu kéo rất kém, nên bị phá hỏng đột ngột ngay khi độ giãn còn rất nhỏ. Nhìn biểu đồ đường 4 (hình 2.6) ta thấy không có giai đoạn tỷ lệ và giai đoạn chảy dẻo, biểu đồ là một đường cong ngay từ khi ứng suất còn rất nhỏ. Tuy vậy, trong giới hạn làm việc, thông thường đối với vật liệu giòn, vẫn có thể áp dụng định luật Húc, nghĩa là thay thế gần đúng đoạn cong của biểu đồ bằng một đoạn thẳng. Với vật liệu giòn ta chỉ có giới hạn bền là:

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (2.8)$$

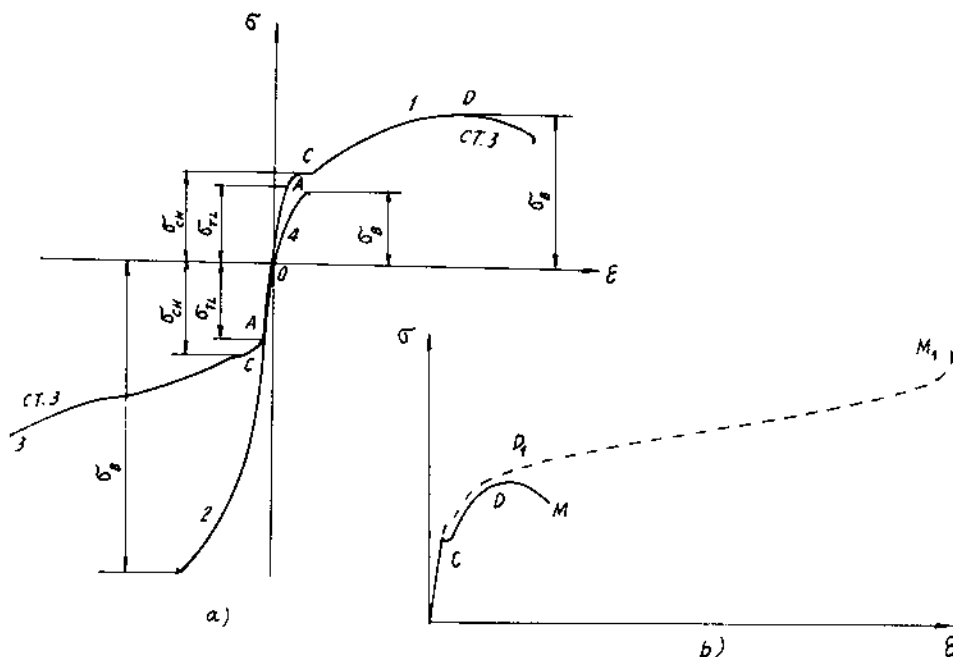
Môđun đàn hồi E khi ấy gọi là môđun đàn hồi cát tuyến.

Nếu đem so sánh với vật liệu dẻo thì giới hạn này nhỏ hơn nhiều.

Khi bị nén vật liệu cũng bị phá hủy ngay khi biến dạng còn bé, nhưng giới hạn bền có trị số lớn hơn nhiều so với khi kéo.

Ví dụ: đối với gang xám, khi kéo $\sigma_{Bk} = 0,12 \div 0,38 \text{ kN/mm}^2$, khi nén $\sigma_{Bn} = 0,60 \div 1,5 \text{ kN/mm}^2$.

Biểu đồ $(\sigma - \epsilon)$ thực và quy ước đối với thép ít cacbon được cho trên (hình 2.6b). Qua đây ta thấy biểu đồ thực $(\sigma - \epsilon)$ chỉ có ý nghĩa lý thuyết. Bởi vì, trong các tính toán thực hành, ứng suất tính toán không được vượt quá giới hạn chảy và trong giới hạn này biểu đồ thực và quy ước trùng nhau.



Hình 2.6.

§3. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU KHI NÉN

Để nghiên cứu sự ứng xử của vật liệu dẻo và giòn khi nén, người ta phải làm các thí nghiệm nén. Các mẫu thử nén bằng kim loại có dạng hình trụ (thông thường $d = h = 20 \text{ mm}$), còn đối với các loại vật liệu khác, mẫu thử có dạng hình lập phương cạnh là a .

Đối với gỗ: $a = 50 \text{ mm}$, xi măng $a = 70 \text{ mm}$, bê tông $a = 200 \div 300 \text{ mm}$.

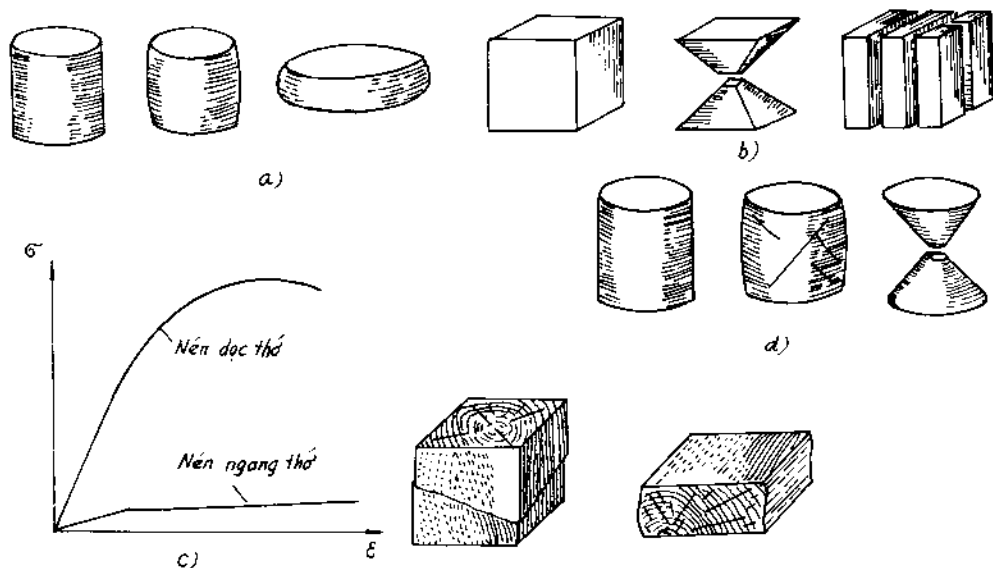
Biểu đồ $(\sigma - \epsilon)$ của vật liệu dẻo được cho bởi đường 3, còn biểu đồ nén $(\sigma - \epsilon)$ của vật liệu giòn được biểu diễn bằng đường 2 trên hình 2.6a. Trên hình 2.7 là những hình dạng của các loại mẫu thử dẻo và giòn ở các thời điểm khác nhau trong quá trình biến dạng. Đặc trưng cơ học chủ yếu nhận được từ các thí nghiệm nén này là:

– Vật liệu dẻo có giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy:

$$\sigma_{ll} = \frac{P_{ll}}{F_0} \quad \text{và} \quad \sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \quad (2.9)$$

– Vật liệu giòn chỉ có giới hạn bền:

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (2.10)$$



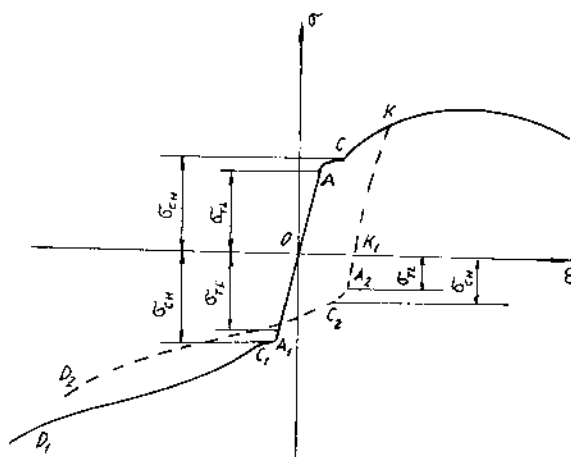
Hình 2.7.

Trên hình 2.7a là hình ảnh biến dạng của một mẫu thép chịu nén, trên hình 2.7b là hình ảnh của một mẫu bê tông hình lập phương chịu nén trước và sau khi bị phá hủy. Quá trình chịu nén của hai mẫu thử bằng gỗ dọc thớ và ngang thớ được mô tả trên hình 2.7c. Trên hình 2.7d là hình ảnh biến dạng của một mẫu gang chịu nén cho đến lúc phá hủy.

§4. HIỆU ỨNG BAO-XING-GHE VÀ HỆ SỐ POÁT-XÔNG

1. Hiệu ứng Bao-xing-ghe

Một hiện tượng cơ học rất đặc biệt và thú vị xảy ra đối với một mẫu thử kéo làm bằng vật liệu có tính dẻo, khi đã đạt được biến dạng dẻo thì quá trình hạ tải về không diễn ra và sau đó là quá trình chất tải ngược dấu (nén). Ta hãy khảo sát quá trình này qua biểu đồ ứng suất khi kéo và nén một mẫu thép (hình 2.8).



Hình 2.8.

Nếu bắt đầu từ một điểm K nào đó của biểu đồ kéo, mẫu bị hạ tải theo đường KK_1 và từ điểm K_1 mẫu được chắt tải ngược dẫu (nén) thì biểu đồ diễn ra theo đường $K_1A_2C_2D_2$ và hầu như song song với biểu đồ nén của một mẫu không bị kéo trước $OA_1C_1D_1$. Khi chưa có biến dạng dẻo trong một mẫu thử kéo và nén thì giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy của chúng là như nhau, nhưng khi mẫu kéo đang làm việc ở trạng thái dẻo mà ta lại hạ tải và nén tiếp tục như đã mô tả ở trên thì giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy khi nén bị giảm đáng kể. Nghĩa là, sau khi kết thúc giai đoạn chảy dẻo và khả năng tự củng cố của vật liệu xuất hiện mà vật liệu lại chịu biến dạng ngược dẫu thì giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy bị giảm. Hiện tượng này được gọi là hiện tượng Bao-xing-ghe.

2. Hệ số Poát-xông hay hệ số biến dạng ngang

Bằng thí nghiệm S. D. Poisson (Poát – xông) đã tìm thấy mối tương quan giữa độ lớn và dấu giữa biến dạng dọc và ngang tỷ đối như sau:

$$\epsilon_x = -\mu \epsilon_y$$

μ được gọi là hệ số Poát – xông và có giá trị từ 0 đến 0,5.

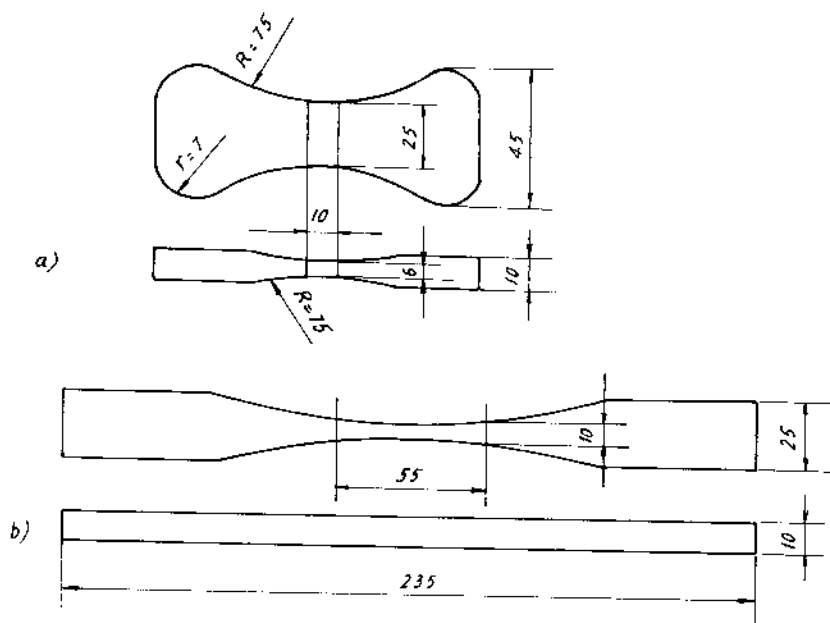
§5. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU MỚI

Trong những năm gần đây các loại vật liệu tổng hợp như các chất dẻo, cao su, nhựa và sơn được sử dụng rất nhiều trong kỹ thuật. Đặc biệt một số lớn các chất dẻo khác nhau đã được sử dụng rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật và đời sống.

Những chất dẻo có thuộc tính thuận nghịch được gọi là chất nhiệt dẻo. Loại này thường có môđun đàn hồi thấp và khả năng chịu kéo cao (ví dụ, pôlyêtylen có $E = (1,5 \div 2,5) \cdot 10^3 \text{ daN/cm}^2$, $\delta = 150 \div 600\%$).

Những chất dẻo có thuộc tính không thuận nghịch được gọi là chất cứng dẻo. Chất dẻo này có môđun đàn hồi cao và tính chịu kéo kém (ví dụ, nhựa êpôcxy có $E = (30 \div 40) \cdot 10^3 \text{ daN/cm}^2$, $\delta = 2,5 \div 8\%$). Đối với tuyệt đại đa số các trường hợp, ngoài thành phần pôlyme trong chất dẻo còn chứa các thành phần phụ (chất độn). Vật liệu độn được sử dụng với mục đích làm giảm lượng tiêu thụ pôlyme và làm tăng độ bền của chất dẻo. Các chất độn này thường được sử dụng dưới dạng bột (tre, gỗ, đá...), dạng sợi (bông, thủy tinh...) và dạng lá (giấy, vải bông, vải thủy tinh...). Thuộc tính cơ học của chất dẻo phụ thuộc nhiều vào sự bố trí và thành phần chất độn. Ví dụ, giới hạn bền khi kéo của chất dẻo phenôn không có chất độn là 350 daN/cm^2 , có độn bột gỗ là 400 daN/cm^2 , có độn vải thủy tinh là 2800 daN/cm^2 và có độn sợi thủy tinh định hình là 3000 daN/cm^2 còn CBAM 10:1 là $9000 \div 9500 \text{ daN/cm}^2$ (10 sợi dọc, một sợi ngang với công nghệ nung chảy nhựa êpôcxy và ép đồng thời). Các chất dẻo dạng lớp sợi và dạng lớp vải có độ bền cao hơn các loại bố trí khác với cùng một loại chất dẻo và công nghệ gia công. Có thể giải thích điều này như sau: Những sợi rất mảnh dùng làm cốt trong các mẫu chất dẻo nói trên thì bền hơn các mẫu dạng khối cùng vật liệu. Các chi tiết càng mảnh thì khuyết tật do chế tạo càng giảm và do đó độ bền của chúng càng cao và ngược lại.

Khác với mẫu thí nghiệm làm bằng vật liệu cổ điển, các mẫu thí nghiệm làm bằng vật liệu mới (hình 2.9a) chế tạo bằng cách ép, chỉ các mẫu làm bằng chất dẻo dạng lớp sợi và dạng lớp vải mới có thể chế tạo bằng công nghệ tiện hoặc mài (hình 2.9b).



Hình 2.9.

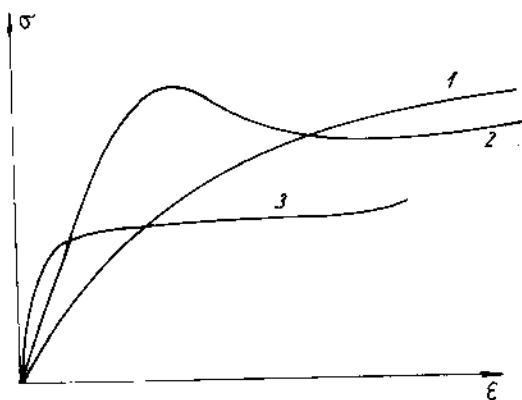
Để thấy rõ sự khác biệt về giới hạn bền khi kéo, trọng lượng riêng và độ bền riêng của một vài vật liệu khác nhau, bạn đọc có thể tham khảo bảng 2.1.

Bảng 2.1

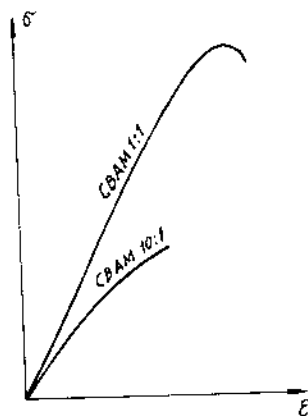
Tên vật liệu	Giới hạn bền kéo, daN/mm ²	Trọng lượng riêng, g/cm ³	Độ bền riêng (daN/mm ²)/(g/cm ³)
Thép cacbon CT3	40	7,85	5,1
Hợp kim titan BT4	85	4,5	18,9
Vải thủy tinh nhựa épôcxy CBAM 1:1	5,0	1,9	26,3
Vải thủy tinh nhựa épôcxy CBAM 10:1	90	1,9	47,4
Tếchtôlit ПТК	10	1,35	7,4

Trên hình 2.10 và hình 2.11 là một số biểu đồ kéo của chất nhiệt dẻo (1-pôlyêtylen; 2-polyprôpulen; 3 - polyvyninclorit) và CBAM 1:1 và CBAM 10:1.

Vật liệu cao su đóng một vai trò quan trọng trong kỹ thuật. Cao su gồm nhiều chủng loại như cao su mềm, cao su cứng, cao su chịu nhiệt, cao su chịu dầu v.v... Trên hình 2.12 là biểu đồ kéo cao su mềm (đường liên tục là quá trình chất tải, đường gián đoạn là quá trình hạ tải).

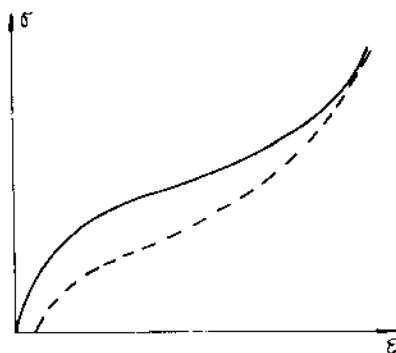


Hình 2.10.



Hình 2.11.

Đối với cao su này giới hạn bền là $\sigma_B \approx 4,5 \text{ MN/m}^2$, biến dạng khi đứt $\epsilon_d = 400\%$, còn biến dạng dư khi đứt $\delta = 20\%$. Từ biểu đồ cho thấy môđun đàn hồi của cao su là một đại lượng biến thiên. Ứng với $\epsilon = 200\%$ thì $E = E_{\min} = 0,4 \text{ MN/m}^2$ và ứng với lúc đứt $E = E_{\max} \approx 8 \text{ MN/m}^2$. Hệ số Poát - xông μ cũng là đại lượng biến thiên. $\mu_{\max} = 0,45$ khi $\epsilon = 10\%$ và $\mu_{\min} = 0,11$ khi đứt, còn đối với cao su nguyên chất $\mu = 0,5$.



Hình 2.12.

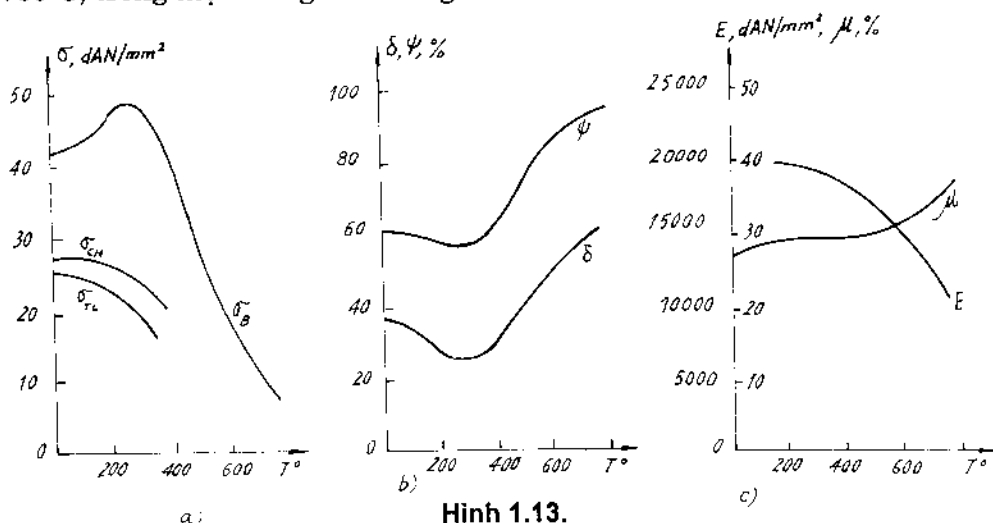
§6. CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

Các số liệu thí nghiệm về đặc trưng cơ học của vật liệu được giới thiệu trong các tiết trên của chương này là những số liệu thí nghiệm được tiến hành ở nhiệt độ trong phòng (20°C). Tuy nhiên, rất nhiều chi tiết máy và cấu kiện công trình làm việc ở chế độ nhiệt rất cao (tuốcbin khí, nồi hơi, động cơ đốt trong, động cơ phản lực, v.v.). Tuyệt đại đa số các vật liệu khi nâng cao nhiệt độ thì các đặc trưng về độ bền (σ_B , σ_{ch} , $\sigma_{\bar{u}}$) bị giảm, còn khi hạ thấp nhiệt độ thì các đặc trưng này lại tăng. Ngược lại, các đặc trưng dẻo (δ , ψ) khi nâng cao nhiệt độ thì các đặc trưng này tăng, còn khi hạ nhiệt độ thì chúng giảm. Các hằng số vật liệu E tăng khi nhiệt độ giảm còn μ giảm khi nhiệt độ giảm, còn khi tăng nhiệt độ thì hiện tượng này diễn ra ngược lại. Một số vật liệu lại không tuân thủ quy luật nói trên. Ví dụ như khi nung nóng thép cacbon, ban đầu giới hạn bền tăng và đạt được giá trị lớn nhất ở nhiệt độ 300°C ($\sigma_{B300^{\circ}} = 1,2 \sigma_{B20^{\circ}}$), sau đó lại giảm ($\sigma_{B400^{\circ}} = \sigma_{B20^{\circ}}$, $\sigma_{B600^{\circ}} = 0,4 \sigma_{B20^{\circ}}$). Môđun đàn hồi khi tăng nhiệt độ ban đầu giảm chậm, sau đó giảm rất nhanh ($E_{600^{\circ}} = 0,7 E_{20^{\circ}}$, $E_{800^{\circ}} = 0,5 E_{20^{\circ}}$), còn khi làm lạnh E lại tăng ($E_{200^{\circ}} = 1,1 E_{20^{\circ}}$). Hệ số μ tăng khi thép được nung nóng, còn μ giảm khi thép bị làm lạnh. Trên hình 2.13a là quan hệ nhiệt độ và σ_B , σ_{ch} , $\sigma_{\bar{u}}$, trên hình 2.13b là quan hệ δ , ψ và nhiệt độ, còn trên hình 2.13c là quan hệ E, μ và nhiệt độ đối với thép dẻo cacbon. Đặc biệt khi nung nóng các chất dẻo và cao su thì giới hạn bền của chúng giảm rất nhanh (ví dụ, chất dẻo vinyl $\sigma_{B100^{\circ}} = 0$). Khi làm lạnh các chất dẻo này trở nên giòn và các đặc trưng dẻo của chúng bị giảm.

Trong các tiết trên chúng ta đã khảo sát quá trình chất tải lên mẫu là quá trình chất tải tĩnh. Nếu quá trình chất tải diễn ra trong một khoảng thời gian ngắn thì biến dạng dẻo không kịp phát triển. Trên hình 2.14 là biểu đồ ứng suất kéo đến trạng thái dẻo một mẫu thép cacbon với quá trình chất tải tĩnh 1 và động 2. Từ các biểu đồ này rõ ràng là các đặc trưng bền và dẻo của cùng một loại thép phụ thuộc vào tốc độ chất tải. Với tốc độ chất tải cao, các vật liệu có tính dẻo thì quá trình biến dạng

Đối với các vật liệu có tính dẻo, giới hạn bền giảm đáng kể khi chịu tác dụng của nhiệt độ cao và của tải trọng dài hạn. Trên hình 2.15, σ_B^* là giới hạn bền tức thời, σ_B là giới hạn bền theo thời gian hay giới hạn bền dài lâu.

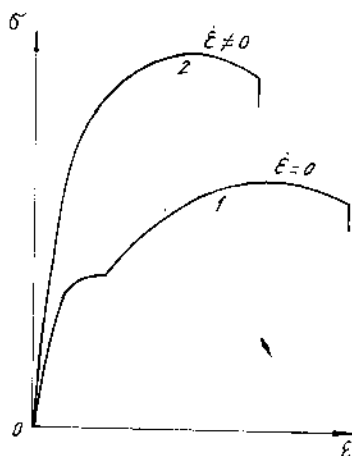
Người ta gọi độ bền dài lâu của vật liệu là ứng suất phá hủy mẫu sau một thời gian dài tác dụng của ứng suất ở một nhiệt độ nhất định. Giới hạn bền dài lâu được ký hiệu σ với hai chỉ số. Chỉ số trên chỉ nhiệt độ thí nghiệm, °C, chỉ số dưới cho biết thời gian thí nghiệm đến khi phá hủy, giờ. Ví dụ, σ_{10}^{700} là giới hạn bền dài lâu khi thí nghiệm ở nhiệt độ 700°C, trong một thời gian 1000 giờ.



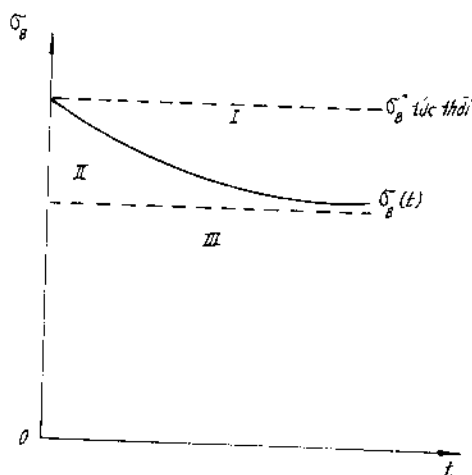
Hình 1.13.

Những điểm nằm trong miền I của đồ thị tương ứng với các ứng suất mà thanh chịu kéo không thể chịu được, vì $\sigma > \sigma_B$. Những điểm nằm trong miền II tương ứng với các ứng suất mà thanh có thể chịu được trong một khoảng thời gian cho đến khi sự phá hủy xuất hiện. Các điểm nằm trong miền III có ứng suất $\sigma < \sigma_B$ và vì vậy không xảy ra sự phá hủy. Tương tự như vậy, biến dạng xảy ra trong thanh chịu lực gồm hai phần: biến dạng tức thời ϵ_1 và biến dạng đàn nhót do chất tải dài hạn ϵ_2 . Tổng của hai biến dạng này là biến dạng dài lâu ϵ_t :

$$\epsilon_t = \epsilon_1 + \epsilon_2$$



Hình 2.14.



Hình 2.15.

Nếu khi ấy ứng suất lớn hơn giới hạn bền dài lâu thì biến dạng dẻo phát sinh ϵ_d . Biến dạng này cùng với biến dạng dài lâu ϵ_l tạo thành biến dạng toàn phần:

$$\epsilon = \epsilon_l + \epsilon_d$$

§7. XÁC ĐỊNH ĐỘ CỨNG CỦA VẬT LIỆU

Trong một số trường hợp để đánh giá độ bền tức thời ta có thể sử dụng phương pháp gián tiếp thông qua độ cứng của vật liệu. Độ cứng của vật liệu là khả năng chống đâm xuyên lên bề mặt của vật khảo sát từ một vật rắn khác có độ cứng lớn hơn.

Để xác định độ cứng người ta ép lên vật đo một vật có dạng hình cầu, hình nón hoặc hình tháp. Căn cứ vào vết lõm trên vật đo người ta xác định được độ cứng của vật liệu chế tạo ra nó. Phương pháp xác định độ cứng phổ biến nhất là phương pháp Brinel (hình 2.16). Cụ thể là, người ta ép một viên bi hình cầu đường kính D lên vật thí nghiệm với một lực bằng P trong một thời gian nhất định. Sau khi bỏ lực nén P người ta đo đường kính vết lõm trên vật thí nghiệm. Số độ cứng Brinel HB được xác định bằng tỷ số lực P , daN và diện tích bề mặt vết cầu lõm, mm^2 , hoặc theo công thức:

$$HB = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \text{ daN/mm}^2 \quad (2.12)$$

trong đó:

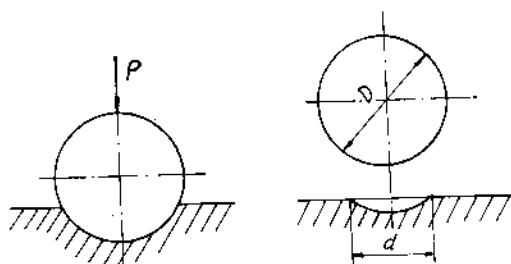
P – lực nén, daN; D - đường kính viên bi, mm;

d - đường kính vết lõm, mm.

Nếu độ cứng được đo bởi một viên bi $D = 10$ mm, lực $P = 300$ daN, duy trì nén trong 10 giây thì số độ cứng Brinel được ký hiệu là HB300. Trong các điều kiện đo khác thì số độ cứng được ký hiệu HB kèm các chỉ số theo thứ tự. Ví dụ HB 5/250/30–200 biểu thị số độ cứng Brinel là 200, khi thí nghiệm với $D = 5$ mm, $P = 250$ daN, thời gian nén 30 giây.

Khi độ cứng của vật liệu $HB \geq 400$ daN/mm² thì thay cho bi cầu người ta dùng những mũi nhọn hình tháp hoặc hình nón bằng kim cương. Ngoài ra, những phương pháp khác cũng hay được sử dụng. Ví dụ, độ cứng được xác định bằng độ cao bật trở lại của vật rơi từ độ cao cho trước lên bề mặt mẫu thí nghiệm hoặc theo chu kỳ qua lại của con lắc được đặt trên bề mặt mẫu.

Độ cứng nhận được bằng những phương pháp khác nhau đều có thể quy đổi theo độ cứng Brinel và bằng con đường thí nghiệm người ta xác định được quan hệ giữa độ cứng Brinel và độ bền tức thời khi phá hủy. Ví dụ, đối với thép ít cacbon $\sigma_B \approx 0,36$ HB, đối với gang xám $\sigma_B = \frac{HB - 40}{6}$. Đặc trưng



Hình 2.16.

cơ học của các loại vật liệu khác nhau được cho trên các bảng từ 2.1 đến 2.8 dưới đây để bạn đọc tiện tra cứu.

Giới hạn bền của một số vật liệu

Vật liệu	Giới hạn bền daN/mm ² , khi	
	Kéo	Nén
Gang xám:		
thông thường	14 – 18	60 – 100
hạt nhỏ	21 – 25	đến 140
Chất dẻo:		
bakelit	2 – 3	8 – 10
xenluyloit	5 – 7	–
tếchtôlit	8,5 – 10	13 – 25
hêtinac	15 – 17	15 – 18
gỗ dán tấm bakelit	13	11,5
Gỗ (độ ẩm 15%)		
thông dọc thớ	8	4
thông ngang thớ	–	0,5
sồi dọc thớ	9,5	5
sồi ngang thớ	–	1,5
Đá xây:		
Granit	0,3	12 – 26
Sa thạch	0,2	4 – 15
Đá vôi	–	5 – 15
Gạch xây	–	0,74 – 3
Bê tông	–	0,5 – 3,5
Khối xây đá có vữa	0,02 – 0,05	0,25 – 0,90

Đặc trưng cơ học của gang

Mác	Giới hạn bền, daN/mm ² , khi				Độ cứng HB	Giới hạn mỏi daN/mm ² , khi	
	Kéo σ_B	Nén σ_B	Uốn σ_B	Xoắn τ_B		Uốn σ_{-1}	Xoắn τ_{-1}
CY 12-28	12	50	28	—	143 – 229	—	—
CY 15-32	15	65	32	24	163 – 229	7	5
CY 18-36	18	70	36	—	170 – 229	—	—
CY 21-40	21	75	40	28	171 – 241	10	8
CY 22-44	24	85	44	30	187 – 217	12	10
CY 28-48	28	100	48	35	170 – 241	14	11
CY 32-52	32	110	52	39	187 – 255	14	11
CY 35-56	35	120	56	40	197 – 269	15	11,5
CY 38-60	38	140	60	46	207 – 269	15	11,5
BY 40-10	40	160 – 170	—	48 – 51	156 – 197	15 – 17	19,8
BY 50-1,5	50	186 – 200	—	74 – 79	187 – 255	23 – 27	17 – 21
BY 60-2	60	204 – 229	—	66 – 81	197 – 269	17 – 23	15 – 16

Đặc trưng cơ học của thép kết cấu cacbon

Mác thép	σ_B	σ_{ch}	τ_{ch}	Độ dẫn tỷ đối $\delta\%$ khi $l = 10d$	Độ dai va chạm a_K	σ_{-1}^H	σ_{-1}^o	τ_{-1}^x
	Không nhỏ hơn					daN/mm ²		
	daN/mm ²							
10	34	21	14	31	24	16 – 22	12 – 15	8 – 12
20	42	25	16	25	–	17 – 22	12 – 16	10 – 13
25	46	28	–	23	9	19 – 25	–	–
30	50	30	17	21	8	20 – 27	17 – 21	11 – 14
35	54	32	19	20	7	22 – 30	17 – 22	13 – 18
40	58	34	–	19	6	23 – 32	18 – 24	14 – 19
45	61	36	22	16	5	25 – 34	19 – 25	15 – 20
50	64	38	–	14	4	27 – 35	20 – 26	16 – 21
55	66	39	–	13	–	–	–	–
60	69	41	–	12	–	31 – 38	22 – 28	18 – 22
20Г	46	28	–	24	–	–	–	–
30Г	55	32	–	20	8	22 – 32	–	–
50Г	66	40	–	13	4	29 – 36	–	–
20X	80	65	–	11	6	38	–	17 – 23
40X	100	80	–	10	6	35 – 38	25	22,5
45X	105	85	–	9	5	40 – 50	–	–
30XM	95	75	–	11	8	31 – 41	37	23
35XM	100	85	–	12	8	47 – 51	–	–
40XH	100	80	39	11	7	40	29	24
50XH	110	90	–	9	5	55	–	–
40XΦA	90	75	–	10	9	38 – 49	–	–
38XMЮA	100	85	–	14	9	32 – 42	–	–
12XH3A	95	70	40	11	9	39 – 47	27 – 32	22 – 26
20XH3A	95	75	–	12	10	43 – 45	30 – 32	24,5-25,5
30XH3A	100	80	–	10	8	52 – 70	–	32 – 40
40XHMA	100	95	–	12	10	50 – 70	–	27 – 38
30XГCA	110	85	–	10	5	51 – 54	50-53,5	22-24,5

Đặc trưng cơ học của hợp kim bền nhiệt

Mác thép	σ_B	$\sigma_{0,2}$	σ_{-1}	E	δ	ψ	a_k daN/m/cm ²
	daN/mm ²				%		
ЭИ734	100	60	—	17 200	20	25	3
ЭИ589	91,8–102	79,5	—	21 100	15	15–25	3
ЭИ590	76,5–85,6	33,6–40,8	—	—	31–44	40–49	10
ХН77ТЮ	100	60	36,7	19 400	25	28	8
ЭИ826	105	72	38,8	20 400	10	12	2
ВЖ98	75	38,8	31	—	40	—	
ХН55ВТЮ	135	94	—	22 300	14	15–29	3,5–7
ЭП105	95	70	—	19 000	10	13	2,5
ХН35ВТР	80	45	—	21 400	20	35	10
ВТ5	77	72	45,9	10 700	8,5	40	4
ОТ4	80	68	38,8–43,8	11 000	13	25–50	4
ВН-2 ở T = 20°C	65 – 75	53 – 70	48,0	11 200	25–30	60–70	27,0
" " T = 1200°C	18 – 20	11 – 12	—	10 900	30–35	100	—
" " T = 1600°C	4 – 5	2,0	—	10 700	50–60	100	—
ВМ-1 ở T = 20°C	76,0	50,0	50	32 800	25	55	0,2
" " T = 1200°C	25,0	20,0	—	25 900	22	90	—
" " T = 1600°C	6,0	4,0	—	21 200	55	100	—

Bảng 2.4 tiếp

Mác thép	σ_B	$\sigma_{0,2}$	σ_{-1}	E	δ	ψ	a_K daN.m/cm ²
Ta+10% W ở T = 20°C	60,0	48-50	-	18 400	36,0	96	-
" " T = 1250°C	18,5	10,0	-	15 500	45,0	94	-
Ta+10% W ở T = 1500°C	15,0	8,5	-	14 700	50 - 53	95	-
BB-2 ở T = 1000°C	20 - 24	-	-	36 000	45 - 48	80 - 90	-
" " T = 1500°C	14 - 15	-	-	34 000	48 - 58	90 - 95	-
" " T = 2000°C	8 - 8,5	-	-	28 000	60 - 70	95 - 96	-

Bảng 2.5

Đặc trưng cơ học của thép lò xo

Kéo				Nén			Giới hạn mỏi τ_0 của lò xo daN/mm ²
σ_B	σ_{CH}	σ_{TL}	E	τ_B	τ_{CH}	G	
daN/mm ²							
150-160	100-120	75 - 90	2,1.10 ⁴	85-110	60 - 80	8,1.10 ³	50 - 65
145-170	95-135	80 - 100	2,0.10 ⁴ - 2,2.10 ⁴	110-140	65 - 90	7,6.10 ³ - 8,3.10 ³	50 - 70
160-175	150-160	90 - 100	2,01.10 ⁴	170-130	95 - 100	8,0.10 ³	55 - 60
160-170	140-150	90 - 95	2,05.10 ⁴	135	95 - 100	7,6.10 ³	50 - 55
140-150	95 - 105	60 - 65	2,3.10 ⁴	120-125	90	8,3.10 ³	45 - 50

Bảng 2.6

Đặc trưng cơ học của một số hợp kim mẫu

Mác thép hợp kim	σ_{CH}	σ_B	$\delta, \%$	HB	Phạm vi sử dụng
	daN/mm ²				
Л68	9,1; 52	32; 66	55; 3	55; 150	ống, dây, lá
ЛА77-2	14; -	40; 65	55; 12	60; 170	ống, ống ngưng tụ nhỏ
ЛМц58-2	15,6; -	40; 70	40; 10	85; 175	lá, thanh
Бр. 010	-	25; -	11; -	80; -	cốt
Бр. ОФ10-1	14; -	20; 30	-; 3	80; 100	ổ (trục), bánh răng nhỏ
Бр. А5	16; 50	38; 40	65; 4	60; 200	băng, dải
Бр. К3	-	25; -	10-20	-	sản phẩm đúc
Д1	11; 24	21; 42	18; 15	45; 113	ống
Д6	5; 38	18; 50	8; 20	50; 125	ống, thép hình
АМг	10; 21	18; 25	6; 23	45; 60	ống, tấm lá

Bảng 2.7

Đặc trưng cơ học của các chất dẻo cơ bản

Vật liệu	Trọng lượng riêng G/cm ³	Giới hạn σ_B khi			E	G	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}$
		Kéo	Nén	Uốn			
Chất dẻo thủy tinh nền vải	1,4 – 1,85	26 – 40	10 – 30	13 – 15	1800 – 2200	350 – 400	0,22 – 0,25
Chất dẻo thủy tinh nền sợi vuông góc	1,7 – 1,9	30 – 50	–	23 – 46	2400 – 3500	–	0,25 – 0,28
Tectolit	1,3 – 1,4	6 – 11	13 – 15	9 – 16	600 – 1000	250	0,25 – 0,3
Chất dẻo gỗ ép	1,2 – 1,4	14 – 22	12 – 15,5	16,5 – 22	1200 – 3400	80 – 250	0,25 – 0,3
Hetinac (nhựa cách điện)	1,3 – 1,4	7,0 – 10	–	8 – 14	1000–1800	80 – 250	0,2 – 0,3
Thớ, tấm xơ ép	1,1 – 1,25	6,5 – 10	8 – 14	6 – 9,5	700	–	0,2 – 0,3
Xơ, sợi	1,35 – 1,9	3,0 – 13,0	11 – 13	4,0 – 10,0	500 – 850	–	0,25 – 0,30
Bột ép nhiệt rắn	1,4 – 1,9	3,5 – 6,0	15 – 18	5,0 – 8,0	–	–	0,3 – 0,4
Thủy tinh hữu cơ	1,18	7,1 – 9,2	–	9,9 – 15,3	290 – 410	–	0,1 – 0,16
Chất dẻo nhiệt	0,92 – 2,10	1,2 – 8,0	–	1,2 – 10,0	15 – 70	–	0,15 – 0,2
Chất dẻo xốp	0,06 – 0,22	0,04 – 0,42	0,017 – 0,45	0,07 – 0,50	3,7 – 20,0	1,5 – 1,9	–
Teflon-4	2,1 – 2,3	1,4 – 2,5	2,0	1,1 – 1,4	47 – 85	–	–
Capron	1,14	3,5 – 7,0	6 – 8	4,5 – 7	140 – 200	45 – 48	–
Capron	1,14	6 – 8	7 – 8	9	70 – 105	–	–
Poliamit-68	1,13	4,5 – 5	4,5 – 5	7 – 9	120	–	–
Nhựa Vinyl	1,38 – 1,4	4 – 6	8 – 16	9	300 – 400	–	–
Polietilen	1,38 – 1,4	2,5 – 3,5	2,8 – 4	3	55 – 88	–	–
Poristirolen	1,05 – 1,07	3,5	10	9,5 – 10,0	120 – 320	–	–

Môđun đàn hồi và hệ số Poát Xông

Vật liệu	Môđun đàn hồi, daN/cm ²		Hệ số Poát Xông, μ
	E	G	
Gang xám và trắng	$(1,15 \div 1,60) 10^6$	$4,5.10^5$	0,23 – 0,27
Gang rèn	$1,55.10^6$	–	–
Thép cacbon	$(2,0 \div 2,1) 10^6$	$(8,0 \div 8,1) 10^5$	0,24 – 0,28
Thép hợp kim hoá	$(2,1 \div 2,2) 10^6$	$(8,0 \div 8,1) 10^5$	0,25 – 0,30
“ Đồng cán	$1,1.10^6$	$4,0.10^5$	0,31 – 0,34
“ kéo nguội	$1,3.10^6$	$4,9.10^5$	–
“ đúc	$0,84.10^6$	–	–
“ photphơ cán	$1,15.10^6$	$4,2.10^5$	0,32 – 0,35
“ mangan cán	$1,1.10^6$	$4,0.10^5$	0,35
“ nhôm đúc	$1,05.10^6$	$4,2.10^5$	–
“ thau kéo nguội	$(0,91 \div 0,99) 10^4$	$(3,5 \div 3,7) 10^5$	0,32 – 0,42
“ thau cán dùng trong đóng tàu	$1,0.10^6$	–	0,36
. Nhôm cán	$0,69.10^6$	$(2,6 \div 2,7) 10^5$	0,32 – 0,36
. Dây nhôm kéo	$0,7.10^6$	–	–
. Đura cán	$0,71.10^6$	$2,7.10^5$	–
. Kẽm cán	$0,84.10^6$	$3,2.10^5$	0,27
. Chì	$0,17.10^6$	$0,70.10^5$	0,42
. Thủy tinh	$0,56.10^6$	$2,2.10^5$	0,25
. Granit	$0,49.10^6$	–	–
. Đá vôi	$0,42.10^6$	–	–
. Đá cẩm thạch	$0,56.10^6$	–	–
. Sa thạch	$0,18.10^6$	–	–
. Khối xây đá granit	$(0,09 \div 0,1) 10^6$	–	–
“ “ vôi	$0,06.10^6$	–	–
“ “ gạch	$(0,027 \div 0,030) 10^6$	–	–

Bảng 2.8 tiếp

Bê tông theo giới hạn bền daN/cm ²			
100	$(0,146 \div 0,196) 10^6$	–	0,16 – 0,18
150	$(0,164 \div 0,214) 10^6$	–	0,16 – 0,18
200	$(0,182 \div 0,232) 10^6$	–	0,16 – 0,18
Gỗ dọc thớ	$(0,1 \div 0,12) 10^6$	$0,055 \cdot 10^5$	–
Gỗ ngang thớ	$(0,005 \div 0,01) 10^6$	–	–
Cao su	$0,00008 \cdot 10^6$	–	0,47
Tectôlit	$(0,06 \div 0,1) 10^6$	–	–
Hetinắc	$(0,1 \div 0,17) 10^6$	–	–
Bakêlit	$43 \cdot 10^6$	–	0,36
Xenlulo	$(14,3 \div 27,5) 10^6$	–	0,33 – 0,38

Bảng 2.9

Giá trị gần đúng của ứng suất cho phép khi kéo và nén

Vật liệu	Ứng suất cho phép daN/cm ² khi	
	Kéo	Nén
Gang xám	280 – 800	1200 – 1500
Thép CT2	1400	
Thép CT3	1600	
Thép CT3 trong cầu	1400	
Thép cacbon trong cơ khí và xây dựng	600 – 2500	
Thép hợp kim trong cơ khí và xây dựng	1000 – 4000	
Đồng	300 – 1200	
Đồng thau	700 – 1400	

Bảng 2.9 tiếp

Đồng thanh	600 – 1200	
Nhôm	300 – 800	
Đồng thanh nhôm	800 – 1200	
Đura	800 – 1500	
Tectôlít	300 – 400	
Hêtinắc	500 – 700	
Gỗ dán tấm bakêlít	400 – 500	
Gỗ thông dọc thứ	70 – 100	100 – 120
Gỗ thông ngang thứ	–	15 – 20
Gỗ sồi dọc thứ	90 – 130	130 – 150
Gỗ sồi ngang thứ	–	20 – 35
Khối đá xây	đến 3	4 – 40
Khối gạch xây	đến 2	6 – 25
Bê tông	1 – 7	10 – 90

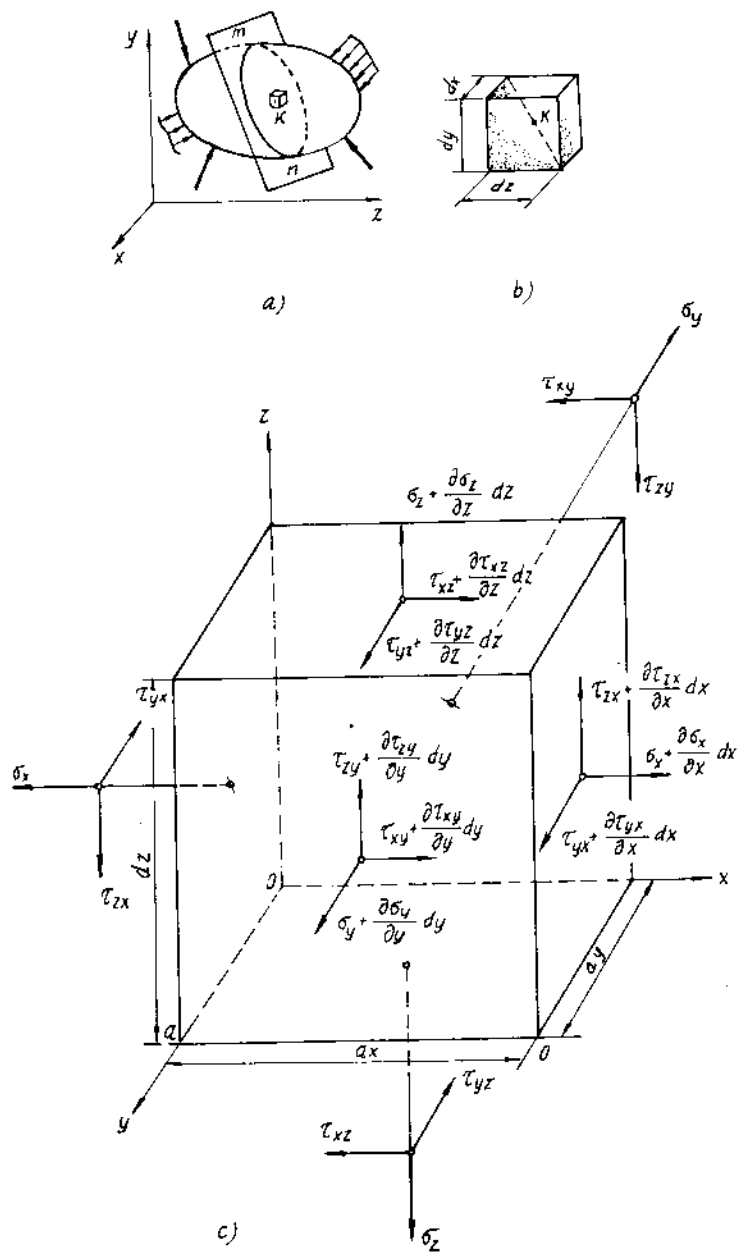
CHƯƠNG 3

CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

§1. KHÁI NIỆM VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Xét một điểm K trong vật thể đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực. Như đã nói trong tiết §9 của chương 1 trên mỗi mặt cắt qua K tồn tại trên mặt cắt đó có 3 thành phần ứng suất.

Để nghiên cứu trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực, ta tưởng tượng tách ra quanh điểm K một phân tố hình hộp có kích thước vô cùng bé dx, dy, dz (hình 3.1a, b). Trên những mặt vô cùng nhỏ của phân tố, nói chung, có ba thành phần ứng suất pháp tuyến σ và tiếp tuyến τ . Những ứng suất này khác nhau tùy theo từng vị trí của mặt cắt. Các thành phần ứng suất trên các mặt cắt song song nhau chỉ khác nhau một lượng vô cùng bé. Do đó theo mô hình vật liệu liên tục ta có thể biểu diễn các thành phần ứng suất trên các mặt đối diện với các mặt tọa độ như trên hình 3.1c. Từ điều kiện cân bằng của phân tố, các phương trình tổng hình chiếu và tổng mômen của các lực kể cả các lực khối đơn vị X, Y, Z đối với các trục tọa độ x, y, z , ta có:



Hình 3.1.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.1b)$$

Hệ phương trình (3.1a) gọi là hệ phương trình cân bằng của Naviê.

Quan hệ (3.1b) biểu thị định luật đối ứng của các ứng suất tiếp.

Bởi vậy, từ 18 thành phần ứng suất chưa biết tác dụng trên các mặt của phân tố thu về chỉ còn sáu thành phần:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z), \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z), \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z), \end{aligned} \right\} (a); \quad T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

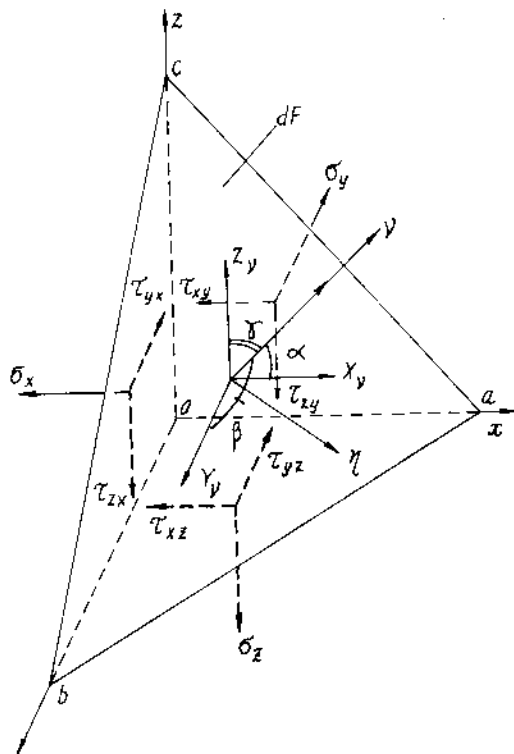
Sáu thành phần ứng suất (a) đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại điểm K của vật thể đàn hồi chịu lực. Ta gọi tập hợp tất cả những ứng suất trên tất cả các mặt cắt đi qua một điểm là trạng thái ứng suất tại điểm đó. Tập hợp ứng suất này được gọi là một tenxơ ứng suất và được ký hiệu T_σ có dạng (3.2).

§2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI VÀ PHÂN LOẠI TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Để nghiên cứu trạng thái ứng suất tại một điểm trong trường hợp tổng quát nhất, cần phải tìm được các ứng suất trên mặt nghiêng

abc bất kỳ so với các trục tọa độ x, y, z (hình 3.2). mặt nghiêng abc này có pháp tuyến $\vec{v}$, diện tích dF và các cosin chỉ phương là

- $\cos\alpha = \cos(x, v) = l$ và $Obc = dF.l$
- $\cos\beta = \cos(y, v) = m$ và $Oca = dF.m$
- $\cos\gamma = \cos(z, v) = n$ và $Oab = dF.n$.



Hình 3.2.

Ta ký hiệu X_v, Y_v và Z_v là hình chiếu của ứng suất toàn phần $\vec{p}_v$ trên mặt nghiêng và được biểu diễn qua các ứng suất trên các mặt phẳng tọa độ bằng các phương trình cân bằng dưới dạng hình chiếu lần lượt lên các trục tọa độ x, y, z như sau:

$$X_v = \sigma_x.l + \tau_{xy}.m + \tau_{xz}.n$$

$$Y_v = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n \quad (3.3)$$

$$Z_v = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n$$

Khi gọi l_1, m_1, n_1 là cosin chỉ phương của trục η nằm trên mặt nghiêng so với các trục tọa độ x, y, z thì ứng suất tiếp trên mặt nghiêng theo phương η là

$$\begin{aligned} \tau_{\eta v} = X_v \cdot l_1 + Y_v \cdot m_1 + Z_v \cdot n_1 = \sigma_x \cdot l \cdot l_1 + \sigma_y \cdot m \cdot m_1 + \sigma_z \cdot n \cdot n_1 + \\ + \tau_{xy} (l m_1 + l_1 m) + \tau_{yz} (m n_1 + m_1 n) + \tau_{zx} (n l_1 + n_1 l) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mặt cắt mà trên đó ứng suất tiếp $\tau_v = 0$ được gọi là mặt chính, các ứng suất pháp trên mặt này được gọi là ứng suất pháp chính và ký hiệu là σ .

Để có ứng suất pháp tuyến σ_v , ta chỉ việc chiếu các thành phần X_v, Y_v, Z_v lên phương $\vec{v}$ cụ thể là:

$$\sigma_v = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{xy} \cdot l m + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n l \quad (3.5)$$

Giả sử rằng mặt nghiêng $\vec{v}$ (hình 3.2) đã là mặt chính, nghĩa là $\tau_v = 0$ và $\vec{p}_v = \vec{\sigma}_v$. Ta ký hiệu ứng suất chính là σ , khi đó quan hệ (3.3) trở thành:

$$\sigma \cdot l = X_v ; \quad \sigma \cdot m = Y_v ; \quad \sigma \cdot n = Z_v \quad \text{hay:}$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0, \\ \tau_{yx} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n &= 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Ngoài ra, như đã biết từ hình giải tích các cosin chỉ phương có quan hệ:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (b)$$

Hệ bốn phương trình (a) và (b) chứa bốn ẩn cần tìm là: một ứng suất chính σ và ba cosin chỉ phương l, m, n của nó. Hệ phương trình (a) không cho phép nhận nghiệm tầm thường: $l = m = n = 0$, vì trái với (b).

Điều kiện để hệ (a) có nghiệm và không tầm thường là:

$$\det = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (c)$$

Dưới dạng khai triển phương trình (c) có dạng:

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma^2 + \\ & + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma \\ & - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \\ \text{hay} \quad & \sigma^3 - S_1 \sigma^2 + S_2 \sigma - S_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Trong (3.6) ta đã ký hiệu:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ S_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình (3.6) không phụ thuộc vào việc chọn hệ trục tọa độ x, y, z ; vì thế, các hệ số S_1, S_2, S_3 trong (3.6) luôn luôn không đổi khi biến đổi hệ trục tọa độ và được gọi là các bất biến thứ nhất, thứ hai và thứ ba của trạng thái ứng suất. Giải phương trình (3.6) ta nhận được ba nghiệm thực, lần lượt theo giá trị đại số được ký hiệu là $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Vì vậy, ở mỗi điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực ta luôn tìm được ba ứng suất chính. Để xác định mặt trên đó có ứng suất chính σ_i ($i = 1, 2, 3$), ta mang ứng suất chính σ_i vào phương trình (a) và giải hệ gồm hai phương trình của (a) và phương trình (b) ta có các cosin chỉ phương l_i, m_i, n_i xác định vectơ của ứng suất chính σ_i .

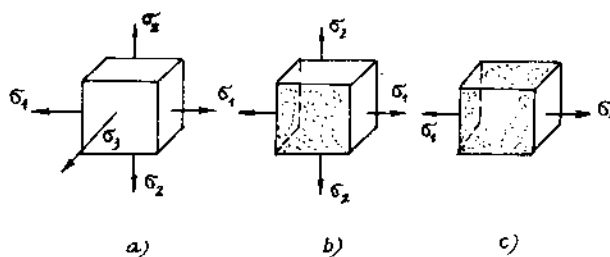
Ta đã chứng minh rằng tại mỗi điểm của vật thể chịu lực, bao giờ cũng có thể tìm được ba mặt vuông góc với nhau, trên đó chỉ có ứng suất pháp σ mà không có ứng suất tiếp τ . Những mặt ấy được gọi là *mặt chính*, phương pháp tuyến của chúng được gọi là các *phương chính*, và ứng suất pháp trên các mặt ấy được gọi là ứng suất chính. Những ứng suất chính còn là những ứng suất pháp cực trị của một trạng thái ứng suất.

Nếu cả ba ứng suất chính của một trạng thái ứng suất đều khác không thì *trạng thái ứng suất ấy được* gọi là *trạng thái ứng suất không* (hình 3.3a), nếu một ứng suất chính bằng không gọi là *trạng thái ứng suất phẳng* (hình 3.3b)) nếu hai ứng suất chính bằng không gọi là *trạng thái ứng suất đơn* (hay *đường*) (hình 3.3c):

Khi phân tố được tách ra đã là phân tố chính thì ứng suất tiếp và pháp trên mặt nghiêng bất kỳ $\bar{v}$ nhận được từ (3.4) và (3.5) có dạng:

$$\tau_{\eta v} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - \sigma_v^2} \quad (3.7)$$

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (3.8)$$



Hình 3.3.

Nếu mặt nghiêng $\bar{v}$ nào đó song song với một phương ứng suất chính σ_i , ($i = 1, 2, 3$) thì từ (3.7) và (3.8) ta rút ra các ứng suất σ , τ và ứng suất toàn phần p trên mặt nghiêng này như sau:

* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_3 (hình 3.4b)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_3 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_3 ; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_3 \\ p &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_3 + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha_3} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

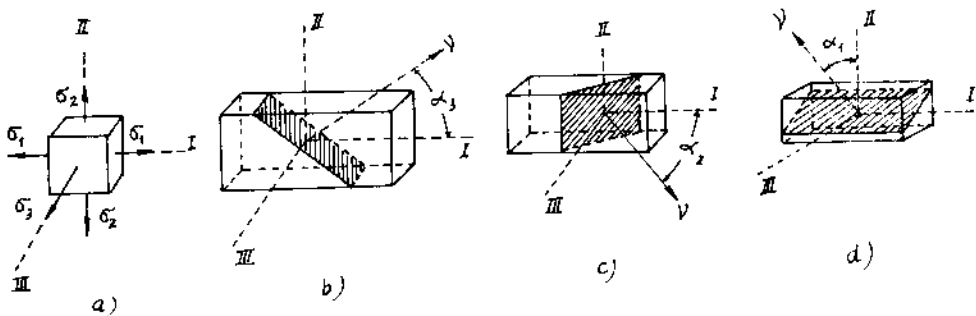
* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_2 (hình 3.4c)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_2 ; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_2 \\ p &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_1 (hình 2.4d)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_1 ; \quad \tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_1 \\ p &= \sqrt{\sigma_2^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Ngoài ra, trạng thái ứng suất còn có thể là trạng thái ứng suất thuần nhất hoặc không thuần nhất. Trong trạng thái ứng suất thuần nhất thì kích thước của phần tử được tách ra không có vai trò gì, bởi vì các ứng suất là như nhau ở mọi điểm trên một mặt cắt bất kỳ và trên mọi mặt cắt song song với nó. Ngược lại, đối với trạng thái ứng suất không thuần nhất, phần tử được tách ra phải vô cùng bé. Khi đó, ứng suất trên các bề mặt phần tử với độ chính xác đến vô cùng bé bậc hai có thể được xem là phân bố đều và do đó phần tử được tách ra sẽ luôn luôn ở trong trạng thái ứng suất thuần nhất.



Hình 3.4.

§3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẪNG

Giả sử ta đã tách ra được một phần tử chịu ứng suất từ một tấm vách ngăn chịu lực trên chu vi và từ một dầm mặt cắt hình chữ I như hình 3.5, mà những mặt vuông góc với trục Z là những mặt chính trên đó ứng suất pháp cũng bằng không.

1. Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

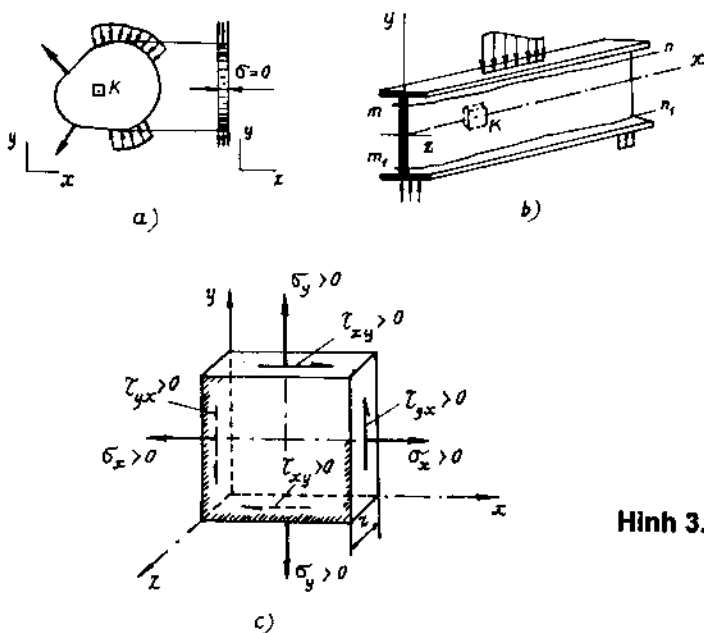
Theo công thức (3.1b) trong trường hợp này ta có:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.12)$$

Có thể thu được kết quả này từ phương trình cân bằng mômen của các lực đối với trục Z: $\Sigma m_z = 0$.

Như vậy, ứng suất tiếp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau có trị số bằng nhau, còn chiều của hai ứng suất tiếp này cùng hướng vào hoặc cùng hướng ra khỏi cạnh chung của hai mặt cắt (hình 3.5c). Đó là định luật *đối ứng của ứng suất tiếp* và được phát biểu như sau:

Nếu trên mặt cắt nào đó có ứng suất tiếp thì trên mặt cắt vuông góc với nó cũng phải có ứng suất tiếp với cùng trị số và cùng chiều.



Hình 3.5.

2. Ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt nghiêng bất kỳ song song với một phương chính

Giả sử một mặt cắt bất kỳ có pháp tuyến ngoài $\vec{n}$ làm với trục x một góc α . Tưởng tượng cắt ra tại O một phân tố lăng trụ tam giác như hình 3.6. Tại điểm O được xét, trên mặt nghiêng song song với

phương chính OZ ta lập một hệ trục ηOv . Ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt này được ký hiệu là: $\sigma_v = \sigma_\alpha$; $\tau_{\eta v} = \tau_\alpha$ và được xác định trực tiếp từ các công thức tổng quát (3.4) và (3.5). Cụ thể là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + 2\tau_{xy} \cdot lm \\ \tau_\alpha &= \sigma_x \cdot ll_1 + \sigma_y \cdot m \cdot m_1 + \tau_{xz} (lm_1 + l_1 m) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

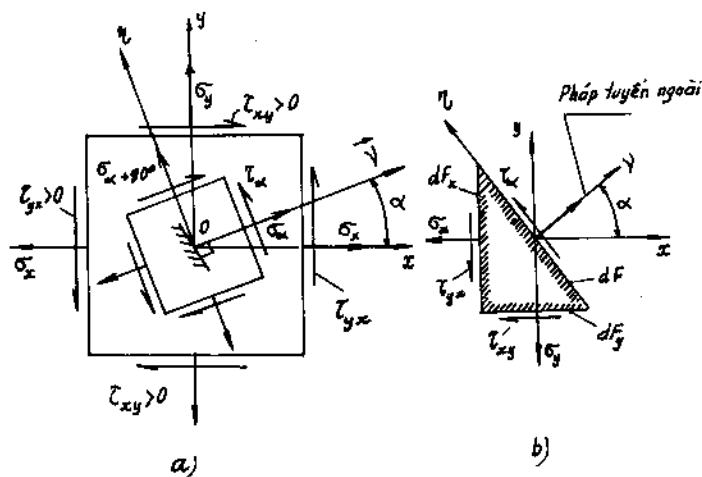
Thay các quan hệ lượng giác sau đây:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ vào (3.13) ta xác định được giá trị của σ_α và τ_α trên mặt nghiêng có pháp tuyến $\vec{v}$ theo α là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Rõ ràng là khi $\alpha = 0$ hoặc $\frac{\pi}{2}$ thì σ_α và τ_α có giá trị bằng σ_x , τ_{xy} và σ_y , τ_{yx} .



Hình 3.6

3. Các trường hợp đặc biệt

a) Trạng thái ứng suất đơn

Giả sử rằng, trên các mặt bên của phân tố (hình 3.6) tất cả các ứng suất đều bằng không, trừ ứng suất pháp $\sigma_x = \sigma_1 \neq 0$. Khi đó ta có

trạng thái ứng suất đơn. Tương ứng với trường hợp này các công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng α suy ra từ (3.13) có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

b) Trạng thái ứng suất trượt thuần túy

Giả sử, phân tố trên hình 3.6 chỉ chịu các ứng suất tiếp trên các mặt bên $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, còn các ứng suất khác đều bằng không. Trạng thái ứng suất như thế gọi là trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Với điều kiện đó ứng suất trên mặt cắt nghiêng α (hình 3.6b) được rút ra từ (3.13) như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \tau_{yx} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= \tau_{yx} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Các kết quả (3.15) và (3.16) được rút ra trực tiếp từ (3.13). Bạn đọc có thể nhận lại được các kết quả từ các công thức (3.14).

4. Ứng suất cực trị

a) Ứng suất chính

Khi xoay hệ trục η, ν gắn chặt trên mặt cắt nghiêng, ta sẽ nhận được một mặt cắt nghiêng α_1 nào đó.

Trên mặt α_1 này ứng pháp σ_1 sẽ đạt được giá trị lớn nhất đối với điểm khảo sát, còn trên mặt nghiêng α_2 vuông góc với mặt nghiêng α_1 ứng suất pháp σ_2 có giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ tìm các mặt và các ứng suất pháp cực trị này đối với những mặt đi qua một điểm theo điều kiện toán học sau đây.

Giả sử mặt nghiêng của phân tố (hình 3.6b) là một mặt chính nào đó. Ta sẽ ký hiệu góc xác định vị trí của mặt chính có ứng suất pháp lớn nhất $\sigma_{\max} = \sigma_1$ là α_1 , còn mặt có ứng suất pháp bé nhất $\sigma_{\min} = \sigma_2$ là α_2 .

Để tìm các góc $\alpha_{1,2}$, ta chiếu tất cả các lực tác dụng trên phân tố (hình 3.6b) lên phương thẳng đứng (trục y) và nhận được:

$$\sigma_{1,2} dF \sin \alpha_{1,2} - \sigma_y dF \sin \alpha_{1,2} - \tau_{xy} dF \cos \alpha_{1,2} = 0$$

Từ phương trình này, các phương chính α_1 và α_2 có dạng cuối cùng:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y} \quad (2.17)$$

Giá trị các ứng suất chính tương ứng được tìm từ điều kiện toán học sau đây:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$$

Chú ý đến biểu thức thứ hai trong (3.14):

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha = 0$$

và kí hiệu góc cần tìm $\alpha = \alpha_0$ ta có:

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_0 = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.18)$$

Thay $\alpha = \alpha_0$ vào công thức thứ nhất của (3.14) ta được các ứng suất chính σ_1 và σ_2 :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.19)$$

Trong công thức này dấu cộng (+) ứng với ứng suất pháp cực đại, $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, dấu trừ (-) ứng suất pháp cực tiểu $\sigma_2 = \sigma_{\min}$.

Ngoài công thức (3.17) và (3.19) cũng có thể tìm được giá trị ứng suất chính theo công thức (3.19) và phương chiều của nó theo công thức (3.18) với việc khảo sát đồng thời dấu của đạo hàm bậc hai $\frac{d^2 \sigma_\alpha}{d\alpha^2}$. Trong thực hành thường thay thế cho việc khảo sát dấu của $\frac{d^2 \sigma_\alpha}{d\alpha^2}$ bằng nhận xét toán học sau đây.

Từ $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha$, rút ra là, khi $\tau_\alpha > 0$ ta có $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} > 0$. Điều này nói lên rằng σ_α đồng biến cùng với α (hình 3.7a); Tương tự, khi khảo sát trường hợp $\tau_\alpha < 0$, ta rút ra kết luận thực hành sau đây:

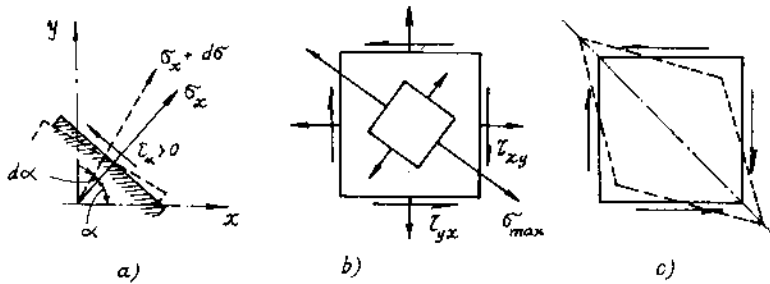
Chiều ứng suất $\sigma_{\max}$ luôn luôn đi qua hai góc phần tư của các trục tọa độ, trên đó mũi tên của các ứng suất tiếp τ_{xy} và τ_{yz} hội tụ vào cạnh chung (hình 3.7b).

Bạn đọc có thể nhận được σ_1 , σ_2 trực tiếp từ phương trình (3.6) dưới dạng:

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.20)$$

Các l_1 , m_1 và l_2 , m_2 lần lượt là nghiệm của hệ:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) l + \tau_{xy} m &= 0 \\ l^2 + m^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ với } i = 1, 2.$$



Hình 3.7.

b) Ứng suất tiếp cực trị

Cùng một trạng thái ứng suất có thể biểu diễn bằng những mặt cắt và các ứng suất khác nhau. Vì thế ta sẽ thừa nhận phân bố chính (hình 3.8a) làm trạng thái ứng suất, xuất phát tại một điểm. Để đơn giản ta kí hiệu $\sigma_{\max} = \sigma_1$ và $\sigma_{\min} = \sigma_2$.

Ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt có pháp tuyến làm với phương σ_1 một góc α được xác định theo công thức (3.14) với chú ý là $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\tau_{xy} = 0$:

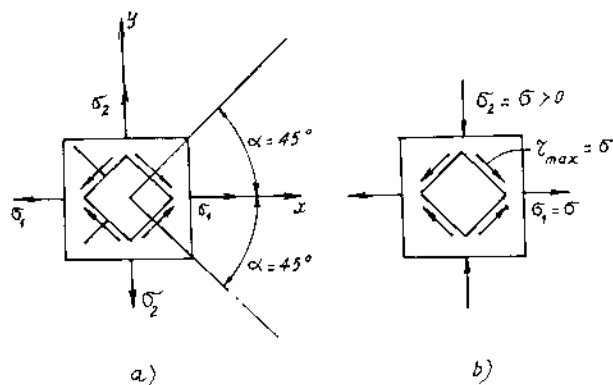
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (3.21)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (3.22)$$

Khi $\alpha = -45^\circ$, τ_α có giá trị cực đại

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.23)$$

Vậy, ứng suất tiếp có giá trị cực trị ở trên mặt cắt nghiêng so với các mặt chính một góc 45° (hình 3.8a).



Hình 3.8.

Thay (3.19) vào (3.23) ta nhận được $\tau_{\max}$ theo các ứng suất cho trước σ_x , σ_y và τ_{xy} :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.25)$$

Trong trường hợp riêng khi $\sigma_1 = -\sigma_2$ (hình 2.8b).

$$\tau_{\max} = \sigma$$

Khi đó, trên mặt cắt có ứng suất tiếp đạt cực trị, còn ứng suất pháp bằng không. Ta gọi trạng thái ứng suất này là trạng thái ứng suất trượt thuần túy.

Các kết quả nhận được trong tiết 1 và 2 này bằng con đường giải tích, đều có thể nhận được bằng con đường hình học đơn giản hơn – vòng tròn MO dưới đây.

§4. VÒNG TRÒN MO

1) Trạng thái ứng suất phẳng

Mối quan hệ giữa các ứng suất σ_α và τ_α vào góc nghiêng α của mặt nghiêng có dạng hình học đơn giản – dạng một đường tròn do MO (OTTO MORH) nhà bác học Đức đề xuất.

Công thức (3.21) có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= a + R \cos 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= -R \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (3.24)$$

trong đó,

$$a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} ; \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Trong hệ tọa độ $\sigma - \tau$ các đẳng thức (3.24) là phương trình vòng tròn bán kính R dưới dạng thông số (hình 3.9). Vòng tròn này gọi là:

Vòng tròn MO hay vòng tròn ứng suất.

Khử α trong (3.24) ta được:

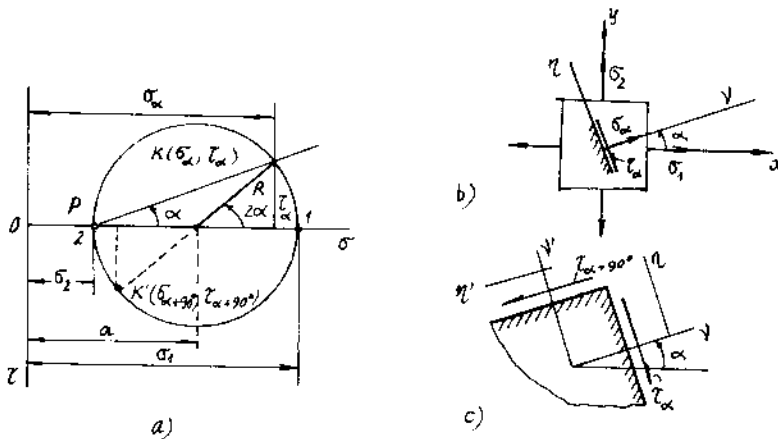
$$(\sigma_{\alpha} - a)^2 + \tau_{\alpha}^2 = R^2$$

Ta gọi một điểm $K (\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ nào đó ứng với mỗi mặt nghiêng xác định bởi góc α là điểm biểu diễn (hình 3.9b). Từ công thức (3.24) rút ra rằng:

Khi $\alpha > 0$ thì $\sin 2\alpha > 0$, do đó $\tau_{\alpha} < 0$. Vì vậy trục τ cần phải hướng ngược chiều với trục y (trong trường hợp này trục τ hướng xuống dưới khi trục y hướng lên).

Điểm $K' (\sigma_{\alpha+90}, \tau_{\alpha+90})$ đối xứng với $K (\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ qua tâm vòng tròn có $\tau_{\alpha+90} = \tau_{\alpha}$ (hình 3.9a, c).

Nếu biết các ứng suất chính và các mặt chính, thì vòng tròn ứng suất được vẽ theo các điểm 1 và 2.



Hình 3.9.

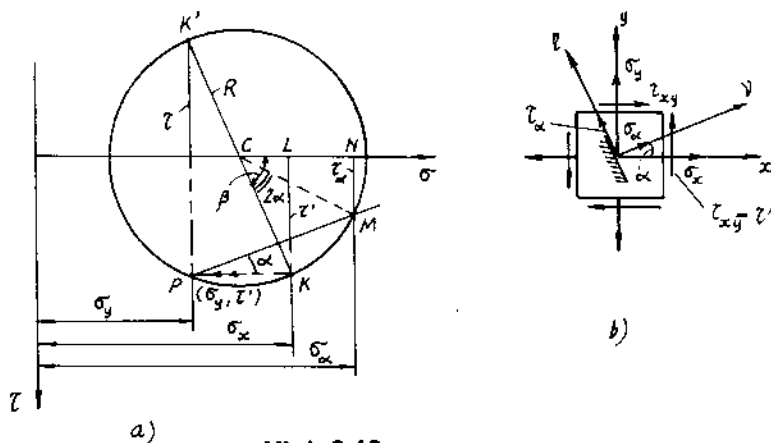
Để thiết lập sự tương ứng giữa mặt cắt và điểm biểu diễn trên vòng tròn ta sẽ sử dụng điểm P (gọi là cực của vòng tròn). Trong trường hợp này điểm cực P trùng với điểm 2. Tia PK song song với pháp tuyến của mặt nghiêng α sẽ cắt vòng tròn tại K ($\sigma_\alpha, \tau_\alpha$) cho ta điểm biểu diễn cần tìm. Điều này thấy rất rõ trên hình vẽ.

Nếu phân tố cho trước không phải là phân tố chính thì cần phải đặt τ_{xy} và τ_{yx} trên biểu đồ các tung độ bằng nhau nhưng ngược dấu.

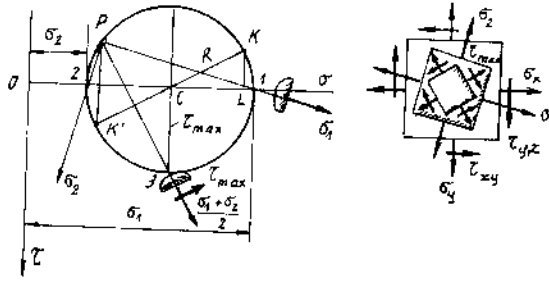
Ta sẽ ký hiệu chúng tương ứng là τ và τ' (hình (3.10b), các điểm biểu diễn tương ứng với các mặt thẳng đứng và nằm ngang là: K(σ_x, τ) và K'(σ_y, τ). Tâm C của vòng tròn là giao điểm của đường K K' và trục O σ . Vòng tròn có tâm C và bán kính R được xác định. Điểm cực P có tọa độ là P (σ_y, τ_{yx}). Trong thực hành cực P được xác định bằng cách vẽ các tia KP và K'P song song với các pháp tuyến của các mặt tương ứng. Trên hình 3.10a các mũi tên kép biểu diễn cách tìm giao điểm P của các tia KP và K'P.

Tia PM song song với pháp tuyến của mặt nghiêng cắt vòng tròn tại M. Đó chính là điểm biểu diễn ứng suất cần tìm trên mặt cắt nghiêng α (hình 3.10a).

Điều này dễ dàng chứng minh từ hình vẽ 3.10a.



Hình 3.10 .



Hình 3.11.

$$\sigma_{\alpha} = ON = OC + CN = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos(\beta - 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos\beta \cdot \cos 2\alpha + R \sin\beta \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Tương tự có thể chứng minh rằng:

$$MN = R \sin(\beta - 2\alpha) = \tau_{\alpha}$$

Nguyên tắc thực hành nêu trên cho phép thiết lập rất đơn giản sự tương ứng giữa mặt cắt nghiêng và điểm biểu diễn M trên vòng tròn Mohr. Theo cách đó độ nghiêng của các mặt chính đối với phân tố (hình 3.11) được xác định bởi các điểm 1 và 2 trên vòng Mohr (hình 3.11). Các mặt chính vuông góc với các tia P-1 và P-2. Hoàn thành độ các điểm 1 và 2 cho ta $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ và $\sigma_2 = \sigma_{\min}$. Điểm 3 có tung độ lớn nhất cho ta $\tau_{\max} = R$. Mặt cắt tương ứng với phương tia P-3 sẽ chịu ứng suất này.

Từ vòng Mohr dễ thấy là:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= OC \pm R = OC \pm \sqrt{CL^2 + KL^2} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

Kết quả này trùng với công thức (3.19) tìm được bằng con đường giải tích.

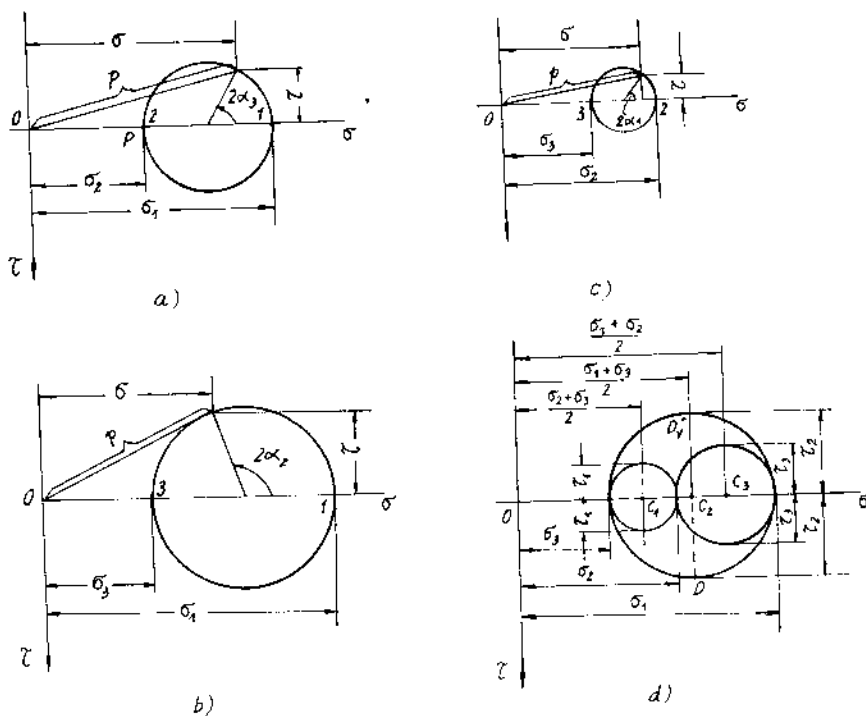
2) Trạng thái ứng suất khối

Ta khảo sát một phân tố chịu trạng thái ứng suất khối mà các mặt của nó đã là các mặt chính (hình 3.4a).

Để tính các ứng suất trên các mặt không phải là mặt chính, ta đã thiết lập được các công thức từ (3.9) đến (3.11). Các công thức này cho ứng suất tiếp và ứng suất pháp trên các mặt song song với phương ứng suất chính σ_1 nào đó không phụ thuộc vào ứng suất chính đó. Trạng thái ứng suất như thế có thể được mô tả bằng vòng tròn Mohr như đã làm ở mục 1 của §4. Cụ thể là:

Đối với mặt nghiêng song song với σ_3 (hình 3.4b) vòng tròn Mohr được cho trên hình 3.12a.

Mặt nghiêng song song với σ_2 (hình 3.4c) vòng tròn Mohr có dạng như hình 3.12b. Tương tự khi có mặt nghiêng song song với σ_1



Hình 3.12.

(hình 3.4d) vòng tròn Mohr tương ứng với hình 3.12c. Bằng cách xếp chồng ba vòng Mohr này trên cùng hệ tọa độ $\tau O \sigma$ ta được đồ thị vòng tròn Mohr đối với trạng thái ứng suất khối tổng quát (hình 3.12d).

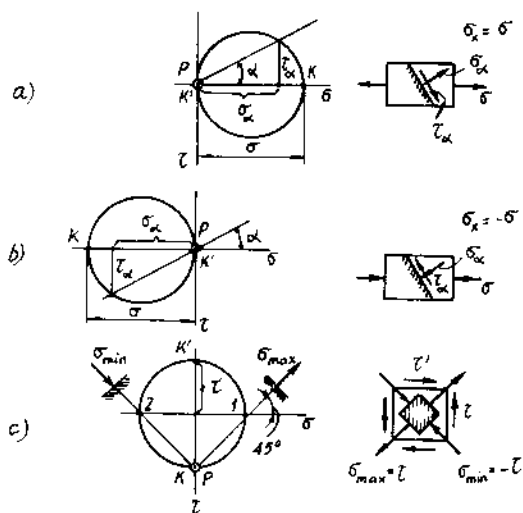
Khi phân bố là phân bố chính thì ứng suất trên mặt nghiêng có pháp tuyến $\vec{n}$ bất kỳ không song song với một trục chính nào được xác định bởi các điểm $D_v(\sigma_v, \tau_v)$ nằm trong miền giới hạn giữa ba vòng tròn Mohr (hình 3.12d). Các ứng suất σ_v và τ_v được xác định bởi các công thức (3.7) và (3.8). Điểm D nằm trên vòng tròn tâm C_2 là điểm đặc trưng cho trạng thái ứng suất, ở đó có ứng suất tiếp $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Như vậy, với trạng thái ứng suất khối bất kỳ ứng suất tiếp lớn nhất nằm trên mặt song song với phương σ_2 và nghiêng 45° so với các phương σ_1 và σ_3 .

§5. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1

Các phân tố chịu kéo, nén như hình 3.13 ab. Bằng vòng Mohr hãy xác định ứng suất trên mặt nghiêng α và $\sigma_{\max/\min}$ đối với phân tố chịu trượt thuần túy (hình 3.13c).



Hình 3.13.

GIẢI

Kết quả giải bằng vòng Morh được cho tương ứng trên các hình 3.13a, b, c.

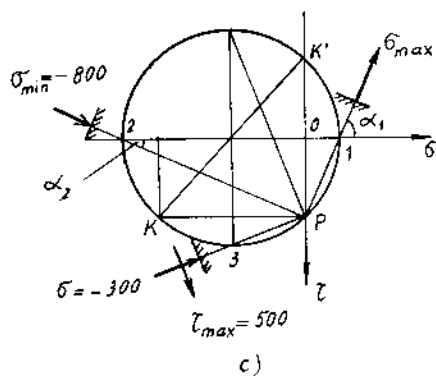
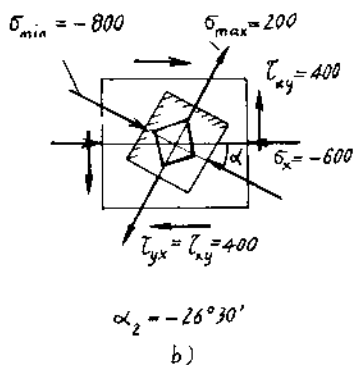
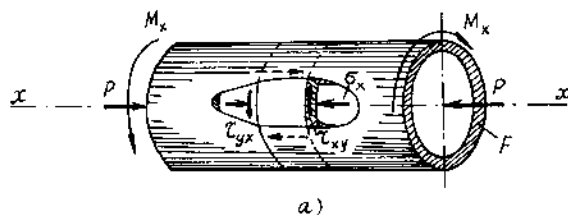
Ví dụ 2: Giả sử rằng một ống mỏng chịu tác dụng đồng thời mômen xoắn M_x và lực dọc P gây ra các ứng suất trên các mặt của phân tố $\sigma_x = -600 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 400 \text{ daN/cm}^2$ (hình 3.14a). Hãy tìm các phương chính, ứng suất chính và $\tau_{\max}$ bằng giải tích và vòng Morh.

Phân tố chịu ứng suất nói trên được cho trên hình 3.14b

GIẢI

Theo công thức (3.19) ta có:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= -300 \pm \frac{1}{2} \sqrt{600^2 + 4 \cdot 400^2} = -300 \pm 500 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}\end{aligned}$$



Hình 3.14.

Vì vậy $\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_2 = -800 \text{ daN/cm}^2$.

Theo công thức (3.23) $\tau_{\max}$ sẽ là:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 500 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

Phương các ứng suất chính có thể tìm theo công thức (3.17) hoặc (3.18).

Theo (3.17) ta có:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{400}{200} = 2;$$

$$\alpha_1 = 63^\circ 30'.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{400}{-800} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = -26^\circ 30'.$$

Lời giải bài toán bằng vòng Mohr được cho trên hình 3.14c.

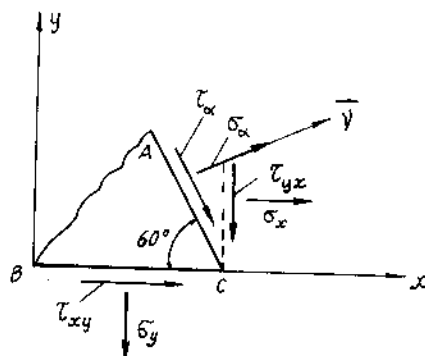
Ví dụ 3

Hai mặt cắt AC và BC đi qua điểm C (hình 3.15) nằm trong trạng thái ứng suất phẳng. Hãy tính các ứng suất chính và ứng suất σ_α trên mặt cắt xiên AC theo các ứng suất đã biết trên các mặt của phần tử ACB đã được

tách ra: $\sigma_y = 3 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{yx} = -5 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{xy} = -5 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_\alpha = -6 \text{ kN/cm}^2$.

GIẢI

Trên mặt cắt nghiêng có pháp tuyến $\bar{y}$ ta có công thức:



Hình 3.15.

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Phương của pháp tuyến ngoài $\bar{v}$ trên mặt cắt nghiêng làm một góc $\alpha = 30^\circ$ với trục x theo chiều dương. Vậy:

$$-6 = -\frac{\sigma_x - 3}{2} \sin 60^\circ - 5 \cos 60^\circ.$$

Suy ra $\sigma_x = 11,07 \text{ kN/cm}^2$.

Các ứng suất chính và σ_{α} có trị số:

$$\begin{aligned}\sigma_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{11,07 + 3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11,07 - 3}{2}\right)^2 + 5^2}\end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = 13,27 \text{ kN/cm}^2 ; \sigma_{\min} = 0,61 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{11,07 + 3}{2} + \frac{11,07 - 3}{2} \cos 60^\circ - 5 \sin 60^\circ = 4,73 \text{ kN/cm}^2.$$

Ví dụ 4

Một phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng như hình 3.16a. Hãy xác định phân tố chính tương ứng. Tìm phương và trị số của các ứng suất trên phân tố có ứng suất tiếp lớn nhất, trạng thái ứng suất này là gì?

GIẢI

Phân tố đã cho có $\sigma_x = 3 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_y = -3 \text{ kN/cm}^2$; $\tau_{xy} = 2 \text{ kN/cm}^2$.

Phương và trị số của ứng suất chính

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{3 - 3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 + 3}{2}\right)^2 + 2^2}$$

$$\sigma_{\max} = 3,6 \text{ kN/cm}^2; \sigma_{\min} = -3,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y} = \frac{2}{3,6 + 3,0} = 0,303; \quad \alpha_1 = 16^\circ 59'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\min} - \sigma_y} = \frac{2}{-3,6 + 3,0} = -3,33; \quad \alpha_2 = 106^\circ 51'$$

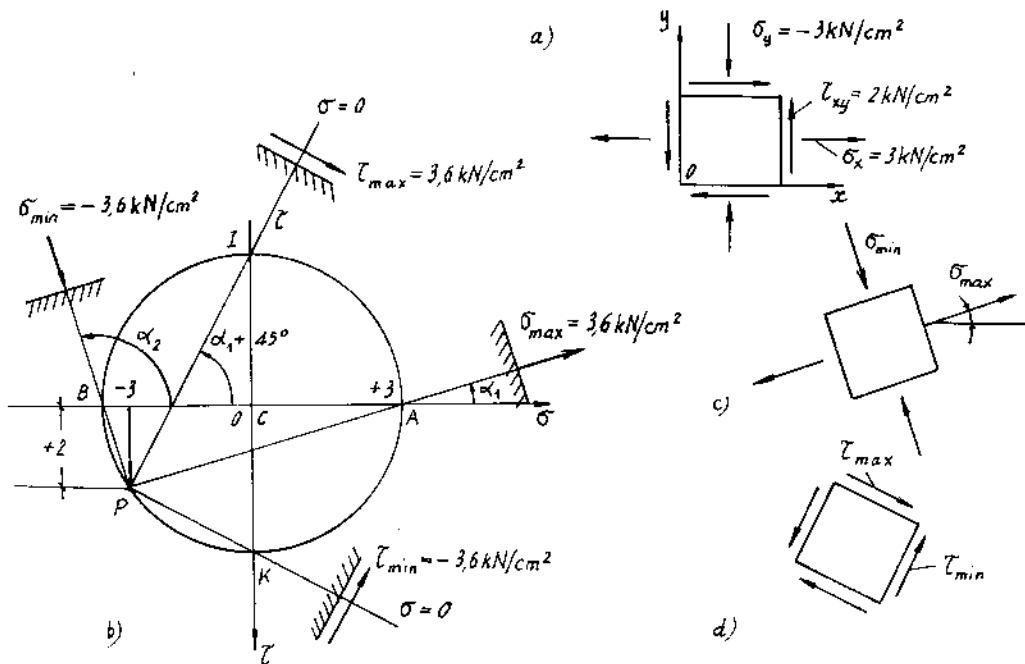
$$\text{Vòng tròn ứng suất có tâm tại } \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0;$$

Cực P của vòng tròn ứng suất được xác định từ

$$\sigma = \sigma_y = -3; \quad \tau = \tau_{xy} = 2$$

Bán kính của vòng Mohr là CP (hình 3.16b).

Từ P kẻ các tia PA và PB cho phương chính của phân tố chính, phân tố chính được vẽ trên hình 3.16c.



Hình 3.16.

Từ P kẻ các tia PI và PK cho phương của các mặt cắt có ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu, các phương này làm một góc 45° với các phương chính.

Phân tố này được vẽ trên hình (3.16d). Trị số của các ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu là:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}} = \pm \sqrt{\left(\frac{3+3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \pm 3,6 \text{ kN/cm}_2$$

Ta thấy trạng thái ứng suất của phân tố là trạng thái trượt thuần túy vì trên các mặt chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp.

Ví dụ 5

Một phân tố chính có các ứng suất chính được cho như trên hình 3.17a. Hãy xác định ứng suất tiếp và pháp trên các mặt nghiêng so với mặt chính các góc $\beta = -20^\circ$ và $\alpha = 70^\circ$.

GIẢI

Ta ký hiệu các mặt nghiêng lần lượt là (β) và (α) có pháp tuyến là $\vec{n}_\beta$ và $\vec{n}_\alpha$. Trạng thái ứng suất chính đã cho có:

$$\sigma_1 = 900 \text{ daN/cm}^2, \sigma_2 = 600 \text{ daN/cm}^2, \sigma_3 = 0, \alpha = +70^\circ$$

Ứng suất pháp và tiếp trên các mặt β và α được tính theo công thức (3.9):

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = (900.0,884 + 600.0,117) = 866 \text{ daN/cm}^2$$

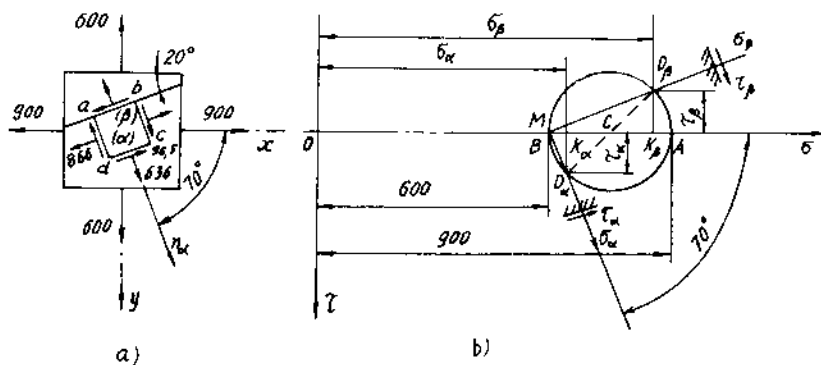
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = (900.0,117 + 600.0,884) = 636 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{900 - 600}{2} (0,643) = 96,5 \text{ daN/cm}^2$$

Các ứng suất này được biểu diễn trên các mặt (β) và (α) như hình 3.17a.

Kết quả trên có thể nhận được bằng vòng tròn Mohr ứng suất. Cụ thể là:

Theo σ_1, σ_2 ta dựng vòng tròn Mohr. Từ cực P $\equiv$ B vẽ các tia song song với $\bar{n}_\beta$ và $\bar{n}_\alpha$. Giao của các tia này với vòng tròn vừa vẽ là các điểm D_β và D_α . Hoành độ của chúng cho ta $\sigma_\beta = OK_\beta = 866 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_\alpha = OK_\alpha = 636 \text{ daN/cm}^2$.



Hình 3.17.

Tung độ cho : $\tau_\beta = K_\beta.D_\beta = -96,5 \text{ daN/cm}^2$;

$\tau_\alpha = K_\alpha.D_\alpha = 96,5 \text{ daN/cm}^2$.

Trên hình 3.17b, tỷ lệ xích đã thực hiện: 1 cm ứng với 200 daN/cm^2 và đơn vị tính là daN , cm.

Ví dụ 6

Một phân tố chịu ứng suất được cho trên hình 3.18a. Hãy xác định phân tố chính và các ứng suất trên nó.

GIẢI

Ứng suất trên các mặt của phân tố đã cho (hình 3.18a) là:

$$\sigma_x = 1000 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_y = -800 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{yx} = 500 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = 500 \text{ daN/cm}^2$$

Các ứng suất chính và phương chính được tính theo các công thức:

$$\sigma_{1/3} = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right)$$

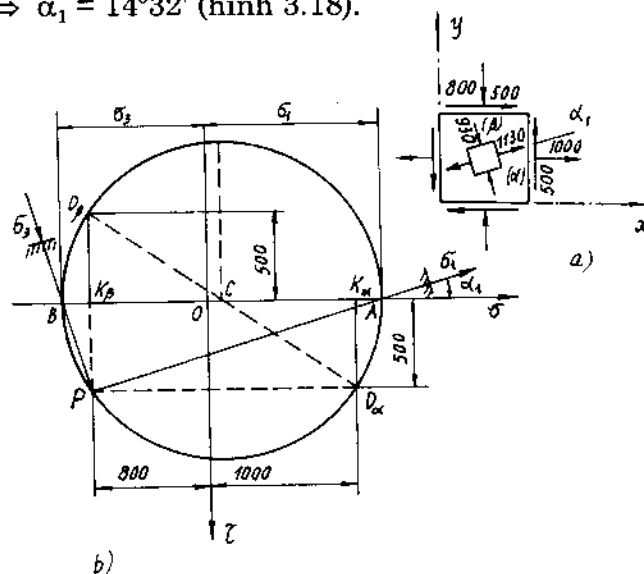
$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (1000 - 800) + \sqrt{(1000 + 800)^2 + 4 \cdot 500^2} =$$

$$= \frac{1}{2} (200 + 2060) = 1130 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (200 - 2060) = -930 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{500}{1130 - (-800)} = \frac{500}{1930} = 0,259 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 14^\circ 32' \text{ (hình 3.18).}$$



Hình 3.18.

Trên hình 3.18b, giới thiệu cách giải bài toán bằng phương pháp hình học (vòng Mohr ứng suất). Trong hệ tọa độ $\tau O \sigma$, theo các ứng suất đã cho trên phân tố ta dựng vòng tròn ứng suất và xác định

điểm cực $P(\sigma_y, \tau_{yx})$. Sau đó vẽ các tia PA và PB. Các tia này là pháp tuyến của các mặt chính tương ứng với σ_1 và σ_3 (hình 3.18b).

§6. BIẾN DẠNG Ở TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI. ĐỊNH LUẬT HÚC TỔNG QUÁT

1. Trạng thái biến dạng tại một điểm

Ở trên ta đã đưa ra định nghĩa về trạng thái ứng suất tại một điểm nó được đặc trưng bởi tenxơ ứng suất tại điểm đó. Khi xét biến dạng ở §8 của chương 1, ta đã đặc trưng các biến dạng dài và góc ở lân cận điểm đang xét bằng sự thay đổi chiều dài của một đoạn thẳng hoặc góc giữa hai đoạn thẳng vô vùng nhỏ vuông góc ở lân cận điểm khảo sát. Tương tự tenxơ ứng suất bằng các thành phần biến dạng bé lân cận điểm khảo sát xét trong hệ tọa độ vuông góc là những thành phần của một đại lượng vật lí không biến đổi khi thay đổi hệ trục tọa độ được gọi là tenxơ biến dạng và kí hiệu T_ϵ :

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Nó đặc trưng cho trạng thái biến dạng tại lân cận điểm khảo sát. Tại mỗi điểm, tương tự khi khảo sát trạng thái ứng suất, sẽ tồn tại một hệ trục tọa độ vuông góc gọi là hệ trục chính biến dạng sao cho tenxơ biến dạng trong hệ trục tọa độ này có dạng đường chéo

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ là các thành phần của tenxơ biến dạng theo phương chính được gọi là biến dạng chính. Cũng như trong trạng thái ứng suất ta quy ước kí hiệu $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ về trị số đại số. Các giá trị này được xác định từ phương trình

$$\epsilon^3 - J_1 \epsilon^2 - J_2 \epsilon - J_3 = 0 \quad (3.27)$$

trong đó:

$$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (3.28)$$

$$J_2 = - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_z & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \epsilon_x \end{vmatrix} \quad (3.29)$$

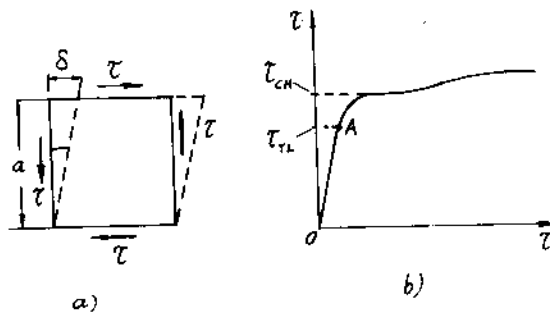
$$J_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \quad (3.30)$$

2. Định luật Húc khi trượt

Mô hình vật lý về vật liệu đã được mô tả trong chương 1, ở đó vật liệu được xem là tuân theo định luật Húc, còn biến dạng là bé.

Ta khảo sát sự biến dạng của phân tử chịu trượt thuần túy như trên hình 3.19a. Trên đó đường liềm nét biểu diễn phân tử khi chưa chịu lực, đường nét đứt là phân tử ở trạng thái biến dạng. Hình thức biến dạng này, gọi là trượt. δ là độ trượt tuyệt đối. Tỷ

số $\frac{\delta}{a}$ giữa độ trượt tuyệt đối của hai mặt cắt rất gần nhau với khoảng cách của chúng, được gọi là độ trượt tương đối. Vì biến dạng bé, nên:



Hình 3.19.

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{a} \quad (3.31)$$

Vậy biến dạng góc γ cũng chính là độ trượt tương đối.

Đối với vật rắn đàn hồi tuyến tính thí nghiệm chứng minh rằng ứng suất tiếp *tỷ lệ bậc nhất với độ trượt tương đối γ* .

$$\tau = G\gamma \quad (3.32)$$

Quan hệ này gọi là định luật Húc về trượt. Trong đó hệ số tỷ lệ G được gọi là *môđun đàn hồi khi cắt* (hoặc *môđun đàn hồi trượt*) đặc trưng cho tính chống biến dạng trượt của vật liệu, đơn vị là MN/m^2 , hoặc kG/cm^2 v.v.

Bảng 1 giới thiệu trị số trung bình của môđun đàn hồi G của một số vật liệu:

Bảng 1

Vật liệu	G (MN/m^2)
Thép	$8,1 \cdot 10^4$
Gang	$4,5 \cdot 10^4$
Đồng	$4 \cdot 10^4 - 4,9 \cdot 10^4$
Nhôm	$2,6 \cdot 10^4$
Gỗ	$0,055 \cdot 10^4$

Môđun đàn hồi trượt G là một hằng số vật lý đối với từng loại vật liệu. Giữa ba hằng số vật liệu E , μ và G có quan hệ sau đây.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.33)$$

Dạng điển hình của biểu đồ biến dạng trượt $\tau - \gamma$ đối với thép ít cacbon được cho trên hình 3.19b.

Biểu đồ này nhận được đồng thời ngay cả từ thí nghiệm về xoắn. Ứng suất τ_{TL} – giới hạn tỷ lệ khi trượt. Định luật Húc về trượt có hiệu lực với các giá trị $\tau \leq \tau_{TL}$.

τ_{ch} – giới hạn chảy khi trượt.

Quá trình biến dạng xảy ra tương tự như khi kéo mẫu cùng loại thép.

Đối với phần lớn các vật liệu τ_{ch} liên hệ với σ_{ch} khi kéo đơn như sau:

$$\tau_{ch} \approx \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \quad (3.34)$$

Kết luận này sẽ được giải thích kĩ trong các chương sau.

3. Định luật Húc tổng quát

Ta đã biết ở trong chương 2, mối liên hệ giữa ứng suất σ và biến dạng dài tương đối ϵ như sau:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3.35)$$

Ta gọi quan hệ này là định luật Húc khi kéo (nén) đơn. Định luật Húc về trượt cũng như định luật Húc kéo (nén) đơn được Robót Húc tìm ra bằng thực nghiệm

Khi thí nghiệm về kéo (nén) đơn ta đã thấy rằng, đồng thời với ϵ thì theo phương vuông góc với nó có kèm theo biến dạng dài ϵ' ngược dấu với ϵ .

Cụ thể là:

$$\epsilon' = -\mu\epsilon = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (3.36)$$

Bây giờ xét một phân tố ở trạng thái ứng suất khối thuộc vật đàn hồi tuyến tính với các ứng suất chính σ_1 , σ_2 và σ_3 theo các phương I, II, III (hình 3.20).

Trước hết hãy tìm biến dạng dài tương đối ϵ'_1 theo phương I của phân tố.

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta xét biến dạng dài tương đối do từng ứng suất gây ra theo phương I.

Biến dạng do σ_1 sinh ra bằng:

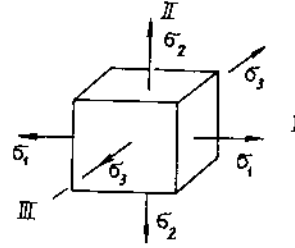
$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$$

Biến dạng do σ_2 sinh ra bằng:

$$\varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$$

Biến dạng do σ_3 sinh ra bằng:

$$\varepsilon_{13} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$$



Hình 3.20.

Cộng các biến dạng độc lập trên ta được biến dạng dài tương đối theo phương I do cả ba ứng suất σ_1 , σ_2 và σ_3 sinh ra:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$$

hay:
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

Cũng lý luận như trên, ta được quan hệ biến dạng dài tương đối theo phương II và phương III của phân tố theo ứng suất. Mỗi quan hệ giữa các biến dạng và ứng suất pháp nói trên tạo thành một hệ phương trình sau đây và gọi là định luật Húc tổng quát khi kéo (nén) phức tạp:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Vì biến dạng là rất bé, nên hoàn toàn có thể coi ứng suất pháp chỉ gây ra biến dạng dài, còn ứng suất tiếp chỉ gây ra biến dạng trượt; Vì thế, nếu phân tố khảo sát không phải là phân tố chính mà là phân tố bất kì (hình 3.1) thì công thức (3.31) vẫn đúng và định luật Húc tổng quát dạng thuận như sau:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}
\tag{3.38}$$

Khi biểu diễn ứng suất theo biến dạng ta có định luật Húc dạng ngược sau đây:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta \quad ; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta \quad ; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta \quad ; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}
\end{aligned}
\tag{3.39}$$

Trong đó, $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; $\lambda = 2\mu G/(1 - 2\mu)$.

§7. THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

Năng lượng tích lũy trong vật thể khi chịu biến dạng đàn hồi là thế năng biến dạng.

Ta hãy khảo sát một thanh có chiều dài l , diện tích mặt cắt ngang F chịu kéo bởi lực P tăng dần từ 0 đến P và bị dài thêm một đoạn Δ (hình 3.21a).

Khi chất tải tĩnh như thế, lực P sinh một công A . Trong giới hạn đàn hồi công A này về trị số bằng thế năng biến dạng U :

$$A = U \tag{3.40}$$

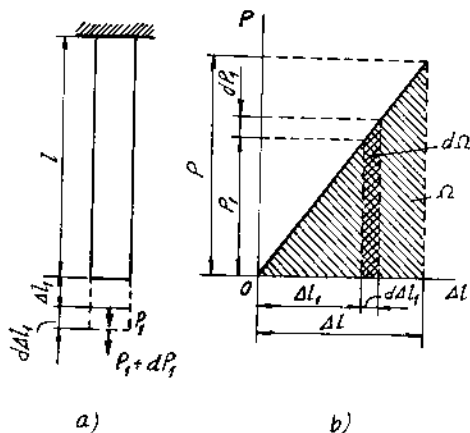
Giả sử trong quá trình chất tải lực P có giá trị P_1 và độ dãn tương ứng Δl_1 . Cho P_1 một số gia dP_1 và Δl_1 tăng một lượng $d\Delta l_1$.

Công của lực P_1 trên chuyển vị $d\Delta l_1$ này là:

$$dA = P_1 d\Delta l_1$$

Quan hệ giữa lực kéo P và Δ được cho trên hình 3.21b. Từ hình vẽ này ta thấy:

$$dA = d\Omega \Rightarrow A = \int_0^{\Omega} d\Omega = \Omega$$



Hình 3.21.

Bởi vậy, công (nghĩa là thế năng) bằng diện tích biểu đồ kéo và trong giới hạn đàn hồi biểu đồ này là một hình tam giác, vì thế:

$$U = A = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l \quad (3.41)$$

Khi thay lực P bằng nội lực N ta có:

$$U = \frac{N \cdot \Delta l}{2} \quad (3.42)$$

Thế năng biến dạng riêng là tỷ số:

$$u = \frac{U}{F \cdot l} = \frac{N \cdot \Delta l}{2 F \cdot l} = \frac{\sigma \cdot \epsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (3.43)$$

Bây giờ ta tính thế năng biến dạng riêng trong trường hợp trạng thái ứng suất khối. Muốn vậy, ta xét phân tố chính chiều dài các cạnh bằng đơn vị nằm ở trạng thái ứng suất khối (hình 3.20). Các ứng suất $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sinh công trên các chuyển vị của các mặt phân tố. Trong trường hợp này về số là bằng các độ dãn dài chính $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ vì các cạnh bằng đơn vị. Vì vậy theo (3.43):

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \epsilon_3}{2} \quad (3.44)$$

Thay ε_1 , ε_2 và ε_3 từ (3.37) vào (3.44) ta có thể năng biến dạng riêng được biểu diễn trực tiếp qua σ_1 , σ_2 , σ_3 :

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (3.45)$$

Khi biến dạng thì phân tử trên hình 3.20 sẽ bị thay đổi cả về thể tích và hình dáng. Do đó, thế năng riêng toàn phần có thể mô tả như tổng của thế năng riêng thay đổi thể tích u_v và thế năng riêng thay đổi hình dáng u_h .

$$u = u_v + u_h \quad (3.46)$$

Thế năng riêng thay đổi thể tích được xác định bởi:

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.47)$$

Do đó, thế năng riêng thay đổi hình dáng sẽ là:

$$u_h = u - u_v = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

hay

$$u_h = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.48)$$

Ví dụ 7

Một khối thép được đặt khít trong rãnh khuôn (hình 3.22) được xem là cứng tuyệt đối. Khối thép chịu nén bởi áp lực đều p . Hãy xác định áp lực đặt vào khối thép và áp lực khối thép tác dụng vào thành khuôn? Biết $E_T = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$; $\mu = 0,28$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

GIẢI

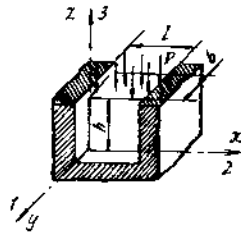
Theo hệ trục đã chọn trên hình vẽ, ta có điều kiện:

$$\sigma_z = -p \quad ; \quad \sigma_y = 0 \quad ; \quad \varepsilon_x = 0$$

Theo định luật Húc:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

Suy ra: $\sigma_x = -\mu p$ (a)



Hình 3.22.

Vậy theo phương x, khối thép bị nén. Theo qui ước dấu ứng suất chính ta có: $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = -\mu p$; $\sigma_3 = -p$.

Theo thuyết ứng suất tiếp lớn nhất, điều kiện bền là:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad \text{hay} \quad p \leq [\sigma] \quad (b)$$

Theo thuyết thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất điều kiện bền là:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} &\leq [\sigma] \Rightarrow \\ \sqrt{\mu^2 p^2 + p^2 - \mu p^2} = 0,8p &\leq [\sigma] \Rightarrow p \leq 1,25 [\sigma] \quad (c) \end{aligned}$$

Trị số lớn nhất có thể của p tác dụng lên khối thép là $p \leq [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng thì thành khuôn chịu áp lực do khối thép tác dụng vào $q = -\sigma_x = \mu p = 0,28.p$. Áp lực q này được dùng để tính khuôn.

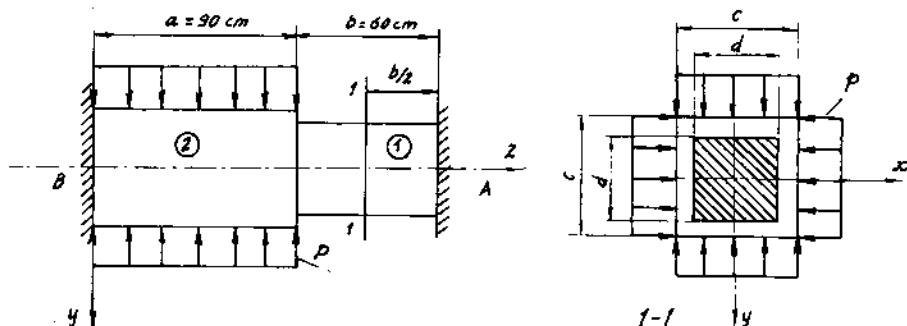
Ví dụ 8

Cho thanh có kích thước và chịu lực như hình 3.23a.

1. Tính ứng suất trong các đoạn thanh.
2. Tính chuyển vị của mặt cắt 1-1.

Cho $a = 0,9 \text{ m}$; $b = 0,6 \text{ m}$; $c = 6 \text{ cm}$; $d = 4 \text{ cm}$; $p = 15 \text{ kN/cm}^2$;
 $\mu = 0,3$, $E = 2,1.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

GIẢI



Hình 3.23.

Đoạn I: $\sigma_x^I = \sigma_y^I = 0$

$$\epsilon_z^I = \frac{1}{E} [\sigma_z^I - \mu (\sigma_x^I + \sigma_y^I)] = \frac{\sigma_z^I}{E}$$

Đoạn II: $\sigma_x^{II} = \sigma_y^{II} = -p$

$$\epsilon_z^{II} = \frac{1}{E} [\sigma_z^{II} - \mu (\sigma_x^{II} + \sigma_y^{II})] = \frac{1}{E} (\sigma_z^{II} + 2\mu p)$$

Điều kiện biến dạng:

$$u_I + u_{II} = 0$$

hay: $\epsilon_z^I \cdot b + \epsilon_z^{II} \cdot a = 0$

Vậy: $\sigma_z^I \times 60 + (\sigma_z^{II} + 2\mu p) \cdot 90 = 0 \quad (a)$

Mặt khác: $\sigma_z^I = \frac{N}{F_1} \quad ; \quad \sigma_z^{II} = \frac{N}{F_2} \quad (b)$

Thay (b) vào (a), ta được: $N = -129,6 \text{ kN}$.

$$\sigma_z^I = \frac{N}{F_1} = -8,1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z^{II} = \frac{N}{F_2} = -3,6 \text{ kN/cm}^2.$$

Chuyển vị của mặt cắt 1-1:

$$U_{1-1} = \frac{-N \cdot b/2}{EF_1} = \frac{129,6 \times 30}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 16} = +6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

Ví dụ 9

Một trụ thép tròn đặc đường kính $d = 50 \text{ mm}$ đặt khít trong ống đồng chiều dày $\delta = 1 \text{ mm}$. Trụ thép chịu lực nén phân bố đều có hợp lực P . Hãy xác định ứng suất trong ống đồng. Cho biết $E_T = 2E_d$; $\mu_T = 0,3$; bỏ qua ma sát giữa các chi tiết của hệ (hình 3.24a).

GIẢI

Lập hệ trục như trên hình 3.24a, ứng suất nén theo phương z có trị số là:

$$\sigma_z = -\frac{P}{F} = -\frac{4 \cdot 150}{\pi \cdot 5^2} = -7,6 \text{ kN/cm}^2$$

Ở đây chúng ta có bài toán biến dạng phẳng, cụ thể là:

Vì bề dày của ống đồng mỏng nên trong ống phát sinh ứng suất kéo được xem như phân bố đều dọc theo chiều dày và theo chiều cao ống, gọi ứng suất pháp đó là σ . Mặt khác khối trụ bằng thép chịu áp lực phân bố đều của ống đồng tác dụng dọc chiều cao, gọi áp lực này là q . Xét cân bằng của nửa ống đồng (hình 3.24b) có chiều cao bằng đơn vị, lực kéo trên thành ống là N cân bằng với hình chiếu của áp lực q theo phương x đã biết, ta có:

$$2N = qD \Rightarrow q = \frac{2\delta\sigma}{D}$$

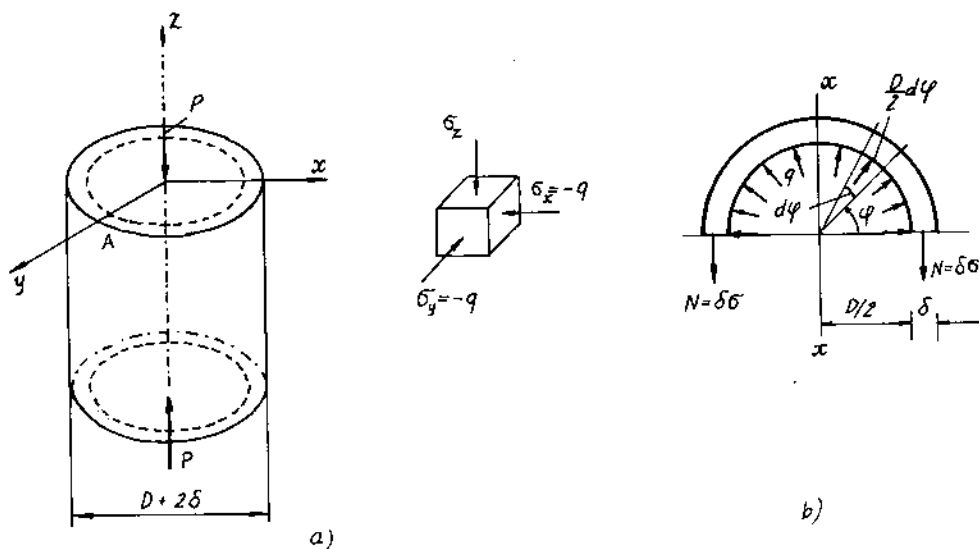
Tách phân tố A trên trục y của lõi thép, ta thấy phân tố chịu ứng suất σ_z và ứng suất $\sigma_x = \sigma_y = -q$. Vì ống đồng và lõi thép đặt khít nên điều kiện biến dạng tương thích của lõi thép và ống đồng là: $\epsilon_T = \epsilon_d$:

trong đó, $\epsilon_d = \frac{\sigma_d}{E_d}$; $\epsilon_T = \frac{1}{E_T} [\sigma_x - \mu_T \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$

Vậy: $\frac{\sigma}{E_d} = \frac{1}{E_T} [-q - \mu_T \cdot (-q - 7,6)]$ (a)

Thay các giá trị bằng số của μ_T , σ_z , $E_T = 2E_d$ và $q = \frac{2\delta\sigma}{D}$ vào phương trình (a), ta có ứng suất trong ống đồng:

$$\sigma = \frac{\mu_T \sigma_z}{2 \frac{\delta}{D} (1 - \mu_T) + \frac{E_T}{E_d}} = \frac{0,3 \cdot 7,6}{2 \frac{0,1}{5} (1 - 0,3) + 2} = 1,12 \text{ kN/cm}^2$$



Hình 3.24.

CHƯƠNG 4

KÉO VÀ NÉN

Hiện tượng kéo và nén rất hay gặp trong các chi tiết máy và cấu kiện công trình. Ví dụ, hiện tượng kéo phát sinh trong các nhánh căng của dây đai trong truyền động đai, trong mối ghép ren không xiết giữa vít và đai ốc. Mối ghép ren của móc cần trục là một ví dụ của loại mối ghép này. Hiện tượng kéo và nén luôn xuất hiện trong các nan hoa xe đạp, xe máy, trong các cáp cầu treo, trong các thanh của những kết cấu giàn nhà, giàn cầu và giàn cần trục v.v.

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC GIẢ THIẾT TÍNH TOÁN

Giả sử ta có một thanh chịu kéo như hình 4.1a.

Để thống nhất cách viết, ta dùng các ký hiệu:

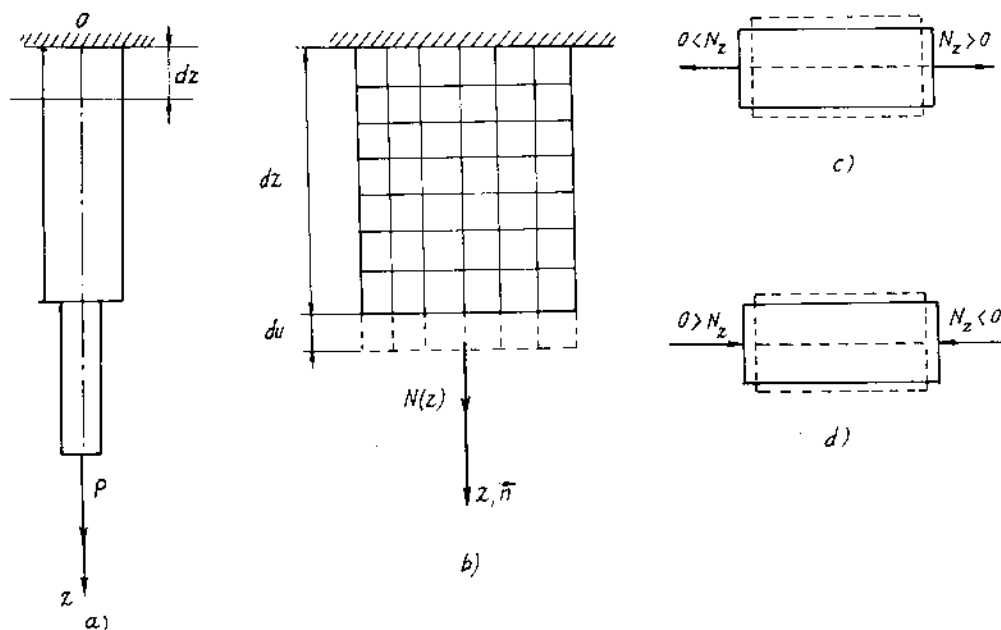
$\{ \}$ – biểu diễn vectơ, ví dụ $\{S\}$ biểu diễn vectơ $\vec{S}$.

$[\]$ – biểu diễn ma trận.

Ta hãy xét một đoạn thanh chịu kéo có chiều dài dz (hình 4.1b).

Hệ nội lực trên các mặt cắt ngang của cấu kiện nói trên tương

đương với một lực dọc N trùng với trục của thanh. Nếu $\{N\} \cdot \{n\} > 0$, ta nói thanh chịu kéo, còn nếu $\{N\} \cdot \{n\} < 0$ ta nói thanh chịu nén. Trong đó $\{n\}$ là vectơ pháp tuyến ngoài của mặt cắt ngang (hình 4.1b, c, d).



Hình 4.1.

Vậy ta có định nghĩa:

Một thanh được gọi là chịu kéo hoặc chịu nén đúng tâm nếu trên mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc N trùng với trục của thanh, còn tất cả các thành phần nội lực khác đều bằng 0.

Các giả thiết tính toán

a. Mặt cắt ngang của thanh trước và sau biến dạng vẫn luôn luôn phẳng và vuông góc với trục của thanh.

b. Trong quá trình biến dạng các thớ dọc luôn luôn thẳng, song song với trục của thanh và không tác dụng tương hỗ lên nhau (hình 4.1b).

§2. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Theo các giả thiết ở trên được rút ra từ thí nghiệm thì trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có biến dạng dài tỷ đối theo phương trục z và là hằng với mọi điểm trên mặt cắt, nghĩa là (hình 4.1b):

$$\epsilon_z = \frac{du}{dz} = \text{const} \quad (4.1)$$

Theo định luật Húc (được tìm ra bằng thí nghiệm) thì quan hệ $\sigma = f(\epsilon)$ có dạng:

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \frac{du}{dz} = \text{const} \quad (4.2)$$

Mặt khác:

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma F \quad \text{hay} \quad \sigma = \frac{N}{F} \quad (4.3)$$

Từ (4.2) và (4.3) ta rút ra phương trình vi phân của chuyển vị dọc trục $u(z)$ như sau:

$$\frac{du}{dz} = \frac{N(z)}{EF} \quad (4.4)$$

$$\text{Do đó:} \quad u = \int \frac{N(z)}{EF(z)} dz \quad (4.4a)$$

trong các công thức từ (4.1) đến (4.4a):

$N(z)$, $F(z)$, $u(z)$ lần lượt là nội lực dọc, diện tích mặt cắt ngang và chuyển vị dọc trục z tại mặt cắt có hoành độ z .

$EF(z)$ là độ cứng của mặt cắt ngang tại z .

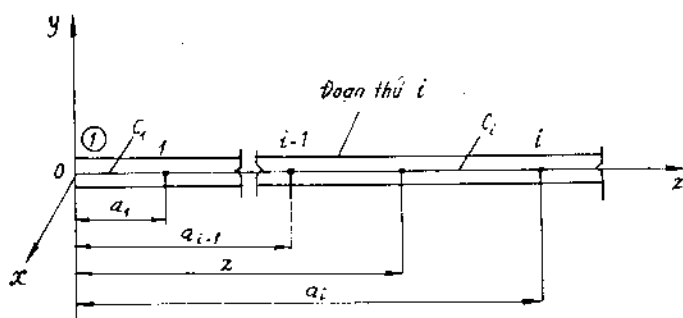
$EF(z)/l$ là độ cứng của đoạn thanh có chiều dài l .

§3. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ VÀ NỘI LỰC BẰNG PHƯƠNG PHÁP VẠN NĂNG - TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Chúng ta hãy khảo sát một thanh chiều dài l gồm n đoạn mặt cắt ngang khác nhau, chịu tác dụng của hệ ngoại lực bất kỳ, chịu liên

kết bất kỳ. Do tác dụng ngoài mà trên mặt cắt ngang của thanh có hoành độ z xuất hiện những tác dụng cơ học trong cần xác định. Ta gọi chúng là các đại lượng cần tính và ký hiệu là $F(z)$.

Để thống nhất cách trình bày và tiện sử dụng các đại lượng cần tính $F(z)$ được thiết lập trong hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$. Gốc tọa độ "O" được đặt cố định ở đầu trái của thanh, trục z trùng với trục thanh và hướng sang phải, các mặt cắt phân chia giữa các đoạn thanh được đánh số là "i" ($i = 1, 2, \dots, n$). Tên gọi của mỗi đoạn sẽ mang tên nút cuối phải của đoạn đó. Đầu trái của mỗi đoạn (mặt cắt $i-1$) được ký hiệu là "O_i" như là gốc tọa độ địa phương của đoạn "i" có chiều dài $l_i = a_i - a_{i-1}$. Hoành độ các mặt cắt phân chia giữa các đoạn được ký hiệu là $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n$ (hình 4.2).



Hình 4.2.

Giả sử đại lượng cần tính tổng quát $F_i(z)$ mô tả hiệu ứng cơ học trong của đoạn thanh thứ i là một hàm nào đó và các đạo hàm của nó là những hàm liên tục từng khúc trong khoảng $a_{i-1} \leq z \leq a_i$. Bây giờ chúng ta hãy tìm cách xác định đại lượng cần tính $F(z)$ thuộc đoạn thứ i , có chiều dài $l_i = a_i - a_{i-1}$.

Ta có thể bằng nhiều cách, tìm được $F_i(z)$ tổng quát theo F_{oi} và các đạo hàm của nó tại đầu trái O_i (khai triển Taylor là một trong những giải pháp như vậy). Cụ thể là:

$$F_i(z) = F_{O_i} + F'_{O_i}(z - a_{i-1}) + \\ F''_{O_i} \cdot \frac{(z - a_{i-1})^2}{2!} + F'''_{O_i} \cdot \frac{(z - a_{i-1})^3}{3!} + \dots$$

Khi ký hiệu

$$\Phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{với } \forall z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{với } \forall 0 \leq z < a_{i-1} \end{cases} \quad (4.5)$$

với $(k = \overline{0, n})$

Ta có thể viết đại lượng $F(z)$ và các đạo hàm của nó tại hoành độ z như sau:

$$\left. \begin{aligned} F_{i(z)} &= F_{O_i} \Phi_0 + F'_{O_i} \Phi_1 + F''_{O_i} \Phi_2 + F'''_{O_i} \Phi_3 + \dots \\ F'_{i(z)} &= 0 + F'_{O_i} \Phi_0 + F''_{O_i} \Phi_1 + F'''_{O_i} \Phi_2 + \dots \\ F''_{i(z)} &= 0 + 0 + F''_{O_i} \Phi_0 + F'''_{O_i} \Phi_1 + F^{(IV)}_{O_i} \Phi_2 + \dots \\ F'''_{i(z)} &= 0 + 0 + 0 + F'''_{O_i} \Phi_0 + F^{(IV)}_{O_i} \Phi_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Dưới dạng ma trận hệ (4.6) sẽ là:

$$\vec{S}_i(z) = [C_i] \vec{D}_{O_i} \quad (4.7)$$

trong đó:

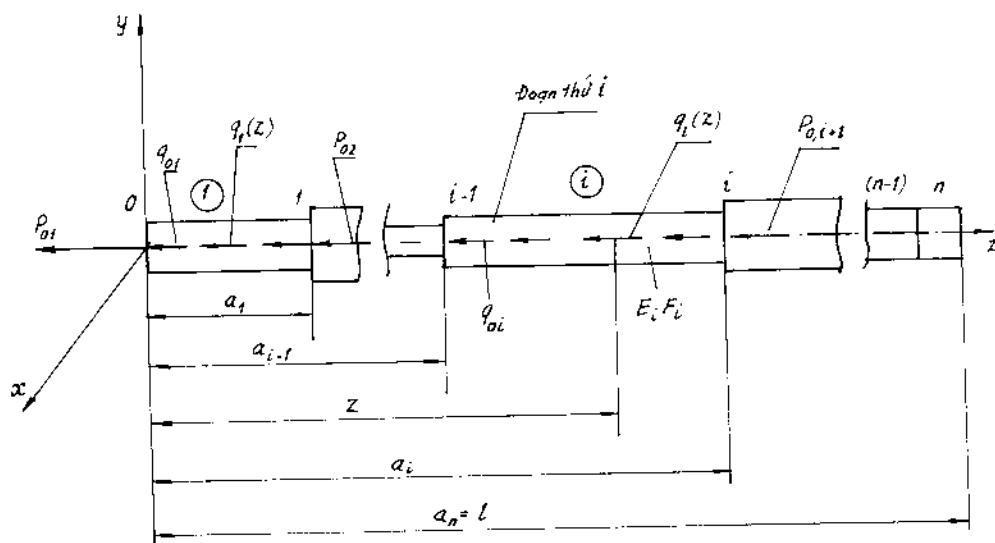
$$[C_i] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \\ 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0 & \dots \end{vmatrix}$$

$\vec{S}_i(z) = (F_i(z), F'_i(z), F''_i(z), F'''_i(z))^T$ là vectơ các đại lượng cần tính tại hoành độ z thuộc đoạn thứ "i".

$$\vec{D}_{O_i} = (F_{O_i}, F'_{O_i}, F''_{O_i}, F'''_{O_i}, F^{(IV)}_{O_i}, F^{(V)}_{O_i} \dots)^T \quad (4.8)$$

§4. CHUYỂN VỊ VÀ NỘI LỰC $U(z)$, $N(z)$ TRONG BÀI TOÁN KÉO (NÉN)

Đối với thanh chịu kéo, nén thì sơ đồ tính hình 4.2 có dạng cụ thể (hình 4.3).

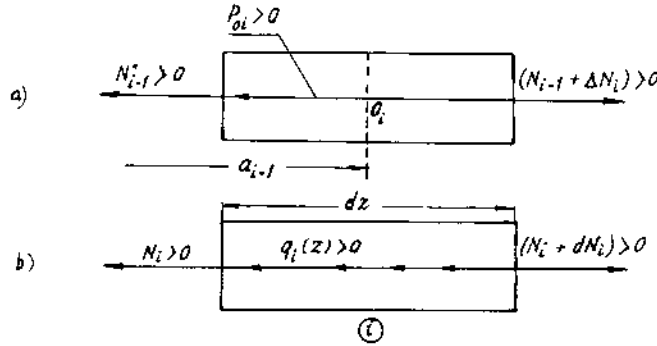


Hình 4.3.

1. Liên hệ vi phân giữa nội lực, chuyển vị và tải trọng ngoài

Liên hệ này nhận được khi ta xét điều kiện cân bằng của các đoạn thanh dz (hình 4.4a, b) được tách từ thanh hình 4.3. Các điều kiện cân bằng của các đoạn thanh này và các đạo hàm liên tiếp sau đó cho ta kết quả (4.9) như đã làm ở §12 chương 1). Bằng cách đạo hàm liên tiếp hai vế của phương trình (4.4) ta có hệ thống (4.10):

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= P_{0i} & \frac{dU_i}{dz} &= \frac{N_i}{E_i F_i} \\ \frac{dN_i}{dz} &= q_i(z) & \frac{d^2 U_i}{dz^2} &= \frac{q_i(z)}{E_i F_i} & (4.10) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^n N_i}{dz^n} &= q_i^{(n-1)}(z) & \frac{d^n U_i}{dz^n} &= \frac{q_i^{(n-2)}(z)}{E_i F_i} \end{aligned}$$



Hình 4.4.

2. Dạng ma trận

Nhờ các liên hệ vi phân (4.9) và (4.10) mà vectơ $\bar{D}_{oi}$ trong (4.8) được viết:

$$\bar{D}_{oi} = \left(U_{oi}, \frac{N_{oi}}{E_i F_i}, \frac{q_{oi}}{E_i F_i}, \frac{q'_{oi}}{E_i F_i}, \frac{q''_{oi}}{E_i F_i} \dots \right)^T \quad (4.11)$$

là vectơ mà các thành phần của nó là giá trị của hàm U_i và các đạo hàm của nó ở đầu trái "Oi" thuộc đoạn "i". Nghĩa là ở mặt cắt (i-1).

Biểu thức vectơ (4.7) trong trường hợp kéo, nén được viết lại như sau:

$$\bar{S}_i(z) = [B_i] \bar{S}_{oi} \quad (4.12)$$

trong đó: $\bar{S}_{oi}$ là vectơ chỉ các thông số trạng thái tại đầu trái "Oi" thuộc đoạn "i" được khảo sát khi đã loại bỏ phần thanh a_{i-1} và bổ sung vào đó tác dụng của phần đã bỏ đi.

$[B_i]$ là ma trận biến đổi của đoạn i.

$\bar{S}_i(z)$ là vectơ chỉ các đại lượng cần tính tại z thuộc đoạn "i".

Cụ thể là:

$$\bar{S}_{oi} = \{ U_{oi}, N_{oi}, q_{oi}, q'_{oi}, q''_{oi} \dots \}^T \quad (4.12a)$$

$$[B_i] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i F_i} & \frac{\Phi_2}{E_i F_i} & \frac{\Phi_3}{E_i F_i} & \frac{\Phi_4}{E_i F_i} & \frac{\Phi_5}{E_i F_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \dots \end{vmatrix} \quad (4.12b)$$

$$\tilde{S}_i(z) = \begin{Bmatrix} U_i(z) \\ N_i(z) \end{Bmatrix} \quad (4.12c)$$

Khi thay $(z - a_{i-1})$ bằng chiều dài l_i của đoạn "i" thì $\tilde{S}_i(z)$ trở thành $\tilde{S}_i^*(a_i)$, $[B_i(z)]$ trở thành $[B_i^*(l_i)]$ và quan hệ (4.12) sẽ là:

$$\tilde{S}_i^* = [B_i^*] \tilde{S}_{0i} \quad (4.12d)$$

Ta ký hiệu $\Delta \tilde{S}_{0i}$ là bước nhảy của vectơ các thông số trạng thái ở đầu trái "0i" nếu có của đoạn "i" sẽ được bổ sung vào $\tilde{S}_{i-1}^*$ là vectơ các thông số trạng thái của đại lượng cần tính tại cuối phải đoạn "i-1" thì ta có thể viết $\tilde{S}_{0i}$ như sau:

$$\tilde{S}_{0i} = \tilde{S}_{i-1}^* + \Delta \tilde{S}_{0i} \quad (4.12e)$$

* Đối với đoạn thứ nhất $i = 1$ biểu thức (4.12) có dạng:

$$\tilde{S}_1(z) = [B_1] \left(\tilde{S}_0^* + \Delta \tilde{S}_{01} \right) = [B_1] \cdot \Delta \tilde{S}_{01}$$

(Chú ý là $\tilde{S}_{i-1}^* = \tilde{S}_0^* = 0$) và

$$\tilde{S}_1(a_1) = [B_1^*] \Delta \tilde{S}_{01}$$

* Đối với đoạn $i = 2$:

$$\tilde{S}_2(z) = [B_2] \left\{ [B_1^*] \Delta \tilde{S}_{01} + \Delta \tilde{S}_{02} \right\} = [B_2] [B_1^*] \cdot \Delta \tilde{S}_{01} + [B_2] \Delta \tilde{S}_{02}$$

$$\tilde{S}_2^*(a_2) = [B_2^*] [B_1^*] \Delta \tilde{S}_{01} + [B_2^*] \Delta \tilde{S}_{02}$$

Bằng giải pháp bước tiếp bước kể từ đoạn đầu tiên như vậy, ta thiết lập được công thức tổng quát để xác định các đại lượng cần tính cho thanh có n đoạn độ cứng $E_i F_i$ khác nhau dưới dạng:

Đối với đoạn thứ i:

$$\tilde{S}_i(z) = [B_i] \left(\tilde{S}_{i-1}^* + \Delta \tilde{S}_{0,i} \right) = [B_i] \tilde{S}_{i-1}^* + [B_i] \Delta \tilde{S}_{0,i} \quad (4.13)$$

$$\vec{S}_i^*(a_i) = [B_i^*] [B_{i-1}^*] \vec{S}_{i-2}^* + [B_i^*] [B_{i-1}^*] \Delta \vec{S}_{0,i-1} + [B_i^*] \Delta \vec{S}_{0,i} \quad (4.13a)$$

Đối với đoạn thứ n:

$$\vec{S}_n(z) = [B_n] [B_{n-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \vec{S}_{01} + [B_n] [B_{n-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \vec{S}_{02} + \dots + [B_n] \Delta \vec{S}_{0n} \quad (4.14)$$

$$\vec{S}_n(a_n) = [B_n^*] [B_{n-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \vec{S}_{01} + [B_n^*] [B_{n-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \vec{S}_{02} + \dots + [B_n^*] \Delta \vec{S}_{0n} \quad (4.14a)$$

trong đó:

$$\overline{\Delta S_{0i}} = \{ \Delta U_{0i}, \Delta N_{0i} = P_{0i}, \Delta q_{0i}, \Delta q'_{0i}, \Delta q''_{0i} \dots \}^T, i = \overline{1, n}$$

* Khi $E_i F_i = \text{const}$ và $l_i = \text{const}$ với mọi "i" các phương trình (4.14) và (4.14a) được thu về:

$$\begin{aligned} \{ \vec{S}_n(z) \} &= [B_n] [B^*]^{n-1} \overline{\Delta S_{01}} + [B_n] [B^*]^{n-2} \overline{\Delta S_{02}} + \dots + \\ &+ [B_n] [B^*] \overline{\Delta S_{0,n-1}} + [B_n] \overline{\Delta S_{0n}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\vec{S}_n^*(a_n) = [B^*]^n \overline{\Delta S_{01}} + [B^*]^{n-1} \overline{\Delta S_{02}} + \dots + [B^*] \overline{\Delta S_{0n}} \quad (4.15a)$$

Các công thức từ (4.13) đến (4.15a) được xây cho mọi bài toán kéo, nén, uốn, xoắn. Sự khác nhau chỉ là các ma trận $[B_i(z)]$ và $\overline{\Delta S_{0i}}$.

3. Dạng biểu diễn tổng

Trong nhiều trường hợp các đại lượng cần tính được biểu diễn dưới dạng tổng lại tỏ ra thuận lợi hơn. Vì vậy, khi $EF = \text{const}$ và $l_i \neq \text{const}$ với mọi "i" thì phương trình (4.14) có dạng tổng quát như sau:

$$U_K(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left(\Delta U_{0i} \Phi_0 + P_{0i} \frac{\Phi_1}{EF} + \Delta q_{0i} \frac{\Phi_2}{EF} + \Delta q'_{0i} \frac{\Phi_3}{EF} + \dots \right) \quad (4.16)$$

$$N_K(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left(P_{0i} \Phi_0 + \Delta q_{0i} \Phi_1 + \Delta q'_{0i} \Phi_2 + \Delta q''_{0i} \Phi_3 + \dots \right) \quad (4.16a)$$

Ở đây k chỉ tên đoạn thanh trên đó cần tính $U(z)$ và $N(z)$.

Đối với thanh có cấu tạo liên tục ($\Delta U_{oi} = 0$ với $i > 1$), các công thức từ (4.13) đến (4.15a) cho thấy, để tính được chuyển vị và nội lực thì phải biết rõ tất cả các thành phần vectơ $\overline{\Delta S}_{oi}$, dù đó là thanh siêu tĩnh hay tĩnh định. Trong số các thành phần của vectơ $\overline{\Delta S}_{oi}$ thì các đại lượng Δq_{oi} , $\Delta q'_{oi}$, $\Delta q_{oi}''$... được biết trước từ điều kiện chất tải, còn một trong hai đại lượng ΔU_{oi} và P_{oi} hoặc đã biết từ điều kiện liên kết hoặc đã biết từ điều kiện chất tải tập trung tại mặt cắt $z = a_{i-1}$. Đại lượng chưa biết còn lại nhận được từ điều kiện liên kết của thanh với môi trường xung quanh (các điều kiện biên). Khi sử dụng các phương trình vạn năng đã thiết lập sẵn ở trên, trong nhiều trường hợp không cần một phương trình phụ nào để xác định $\overline{\Delta S}_{oi}$, nếu chỉ muốn xác định nội lực. Thuật toán xác định chuyển vị và nội lực trong các thanh dàn hồi chịu lực mà thanh chịu kéo (nén) là một trường hợp riêng vừa giới thiệu ở trên là điểm tựa vững chắc cho việc lập trình máy tính bằng ngôn ngữ nào mà bạn đọc ưa chuộng. Lời giải đối với một lớp rộng các bài toán bằng chương trình BK45 của tác giả được viết bằng ngôn ngữ Pascal 7.0 nhờ thuật toán này được cho ở cuối chương này và các chương tiếp sau.

§5. ỨNG SUẤT CHO PHÉP, ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ CỨNG

1. Ứng suất cho phép

Để đảm bảo sự làm việc an toàn, ứng suất lớn nhất phát sinh trong thanh phải nhỏ hơn giới hạn chịu lực của vật liệu. Ta gọi giới hạn chịu lực này là ứng suất nguy hiểm σ_0 .

Với vật liệu dẻo thường chọn giới hạn chảy làm ứng suất nguy hiểm $\sigma_0 = \sigma_{ch}$ để chi tiết không bị biến dạng quá lớn khi làm việc, còn đối với vật liệu giòn thường chọn giới hạn bền $\sigma_0 = \sigma_b$. Nhưng để đảm bảo an toàn cần phải hạn chế ứng suất lớn nhất có thể xuất hiện trong chi tiết máy hoặc kết cấu do tác dụng ngoài gây ra sao cho không vượt quá một trị số nhỏ hơn ứng suất nguy hiểm. Trị số này gọi là ứng suất cho phép.

Ứng suất cho phép được ký hiệu là $[\sigma]$ và được xác định theo công thức:

$$[\sigma] = \frac{1}{n} \sigma_0 \quad (4.17)$$

trong đó:

σ_0 là ứng suất nguy hiểm, n được gọi là hệ số an toàn về bền ($n > 1$).

Muốn chọn hệ số an toàn một cách đúng đắn cần kể đến những nguyên nhân dẫn đến sự không an toàn của chi tiết máy hay kết cấu như:

- Tính chất của vật liệu: dẻo hay giòn, đồng chất nhiều hay ít. Tính chất phân tán của σ_{ch} và σ_b tìm được bằng thí nghiệm.

- Tính chất quan trọng và thời gian sử dụng của thiết bị và công trình.

- Tính chất của tác dụng ngoài (tĩnh hay động,...) và độ chính xác của việc xác định chúng.

2. Điều kiện bền – ba bài toán thường gặp

Muốn đảm bảo sự làm việc an toàn khi thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (4.18)$$

Điều kiện này được gọi là điều kiện bền.

Từ bất đẳng thức trên, ta có thể gặp ba bài toán cơ bản sau đây:

a. Kiểm tra bền: Kiểm tra bền là bài toán kiểm tra điều kiện (4.18) đối với mọi mặt cắt của thanh, cụ thể là:

$$\sigma_{\max(\min)} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]_{k(n)} \quad (4.19)$$

trong đó:

$[\sigma]_{k(n)}$ – ứng suất cho phép khi kéo (k) hoặc nén (n).

b. Chọn kích thước mặt cắt: Yêu cầu của bài toán này là xác định kích thước tối thiểu của mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện sau:

$$F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \quad (4.20)$$

Để đảm bảo an toàn và tiết kiệm nên chọn F xấp xỉ tỷ số $\frac{N_z}{[\sigma]}$ chừng $\pm 5\%$ là đủ.

c. Xác định tải trọng cho phép: Khi biết kích thước mặt cắt và ứng suất cho phép, cần xác định tải trọng trong trường hợp tổng quát là tác dụng ngoài P lớn nhất cho phép đặt lên chi tiết máy hoặc kết cấu. Muốn thế phải có:

$$N = f(p) \leq F[\sigma] \quad (4.21)$$

3. Điều kiện cứng – ba bài toán thường gặp

Điều kiện cứng là điều kiện hạn chế biến dạng và chuyển vị đàn hồi dọc trục của thanh tùy thuộc vào yêu cầu kỹ thuật cụ thể cho trước của từng cấu kiện. Các biến dạng và chuyển vị này phải nhỏ hơn biến dạng và chuyển vị cho phép: $[\varepsilon]$ và $[u]$.

Điều kiện cứng được diễn đạt như sau:

$$\varepsilon \leq [\varepsilon] \text{ hoặc } u \leq [u] \quad (4.22)$$

Từ quan hệ (4.22) có thể rút ra ba bài toán sau đây theo điều kiện cứng.

a. Bài toán kiểm tra điều kiện cứng tức là kiểm tra điều kiện (4.22).

b. Bài toán chọn mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện:

$$F \geq \frac{N}{E[\varepsilon]} \quad (4.23)$$

c. Bài toán chọn tải trọng cho phép P : chọn chế độ tác dụng ngoài cho phép là thực hiện điều kiện:

$$N = f(p) \leq EF [\varepsilon] \quad (4.24)$$

§6. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Cho một thanh chịu lực dọc trục như hình 4.5a. Hãy tính và vẽ biểu đồ N và σ dọc theo thanh. Tính chuyển vị tại A? Biết $F = 40 \text{ cm}^2$, $E = 1.10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

GIẢI

1. Phương pháp mặt cắt và tích phân trực tiếp

Xét nội lực trong ba đoạn AB, BC, CD (hình 4.5a):

Đoạn AB: ($0 \leq z_1 \leq 2\text{m}$) ; $N_z = -60 - 15z_1$

Đoạn BC: ($2\text{m} \leq z_2 \leq 4\text{m}$) ; $N_z = -20 - 15z_2$

Đoạn CD: ($4\text{m} \leq z_3 \leq 6\text{m}$) ; $N_z = -80 - 15z_3$

Ứng suất trong các đoạn được tính theo công thức $\sigma_z = \frac{N_z}{F}$.

Biểu đồ lực dọc N_z và ứng suất pháp σ_z được vẽ trên hình 4.5b, c.

– Chuyển vị của điểm A là tổng đại số biến dạng dài trong các đoạn. Vì lực dọc là hàm số của z nên công thức tính biến dạng dài có dạng:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF}$$

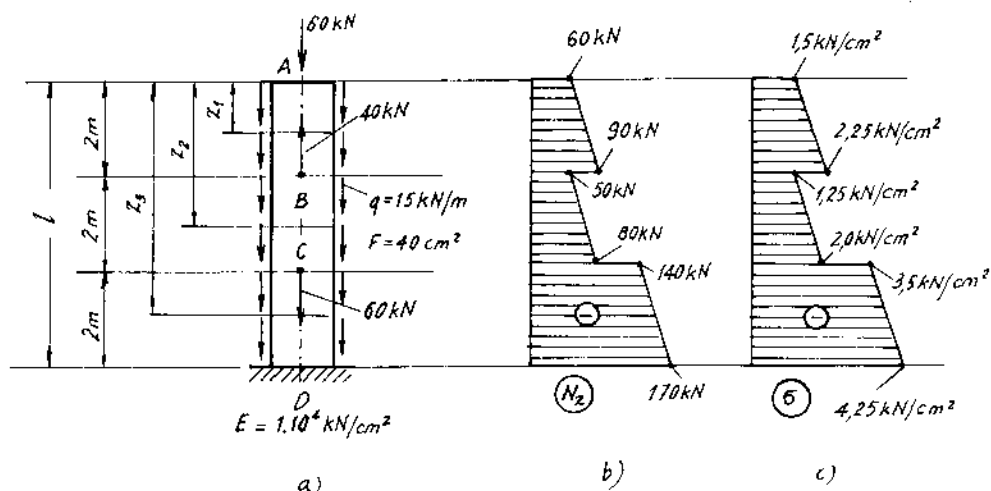
– Chuyển vị của điểm A là tổng biến dạng dài trong từng đoạn:

$$\Delta l = u_A = \int_{AB} \frac{N_z dz_1}{EF} + \int_{BC} \frac{N_z dz_2}{EF} + \int_{CD} \frac{N_z dz_3}{EF}$$

Sau khi đổi đơn vị và thay cận tích phân tương ứng, ta có:

$$u_A = \int_0^2 \frac{-60 - 15z_1}{1.10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} dz_1 + \int_2^4 \frac{-20 - 15z_2}{1.10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} dz_2 + \int_4^6 \frac{-80 - 15z_3}{1.10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} dz_3$$

$$u_A = -1,475 \cdot 10^3 \text{ m.}$$



Hình 4.5.

2. Phương pháp vạn năng

Khi chọn gốc tọa độ tại A, chiều dương trục z hướng xuống theo (4.16), ta có:

$$\begin{aligned}
 u(z) &= \Delta u_{01} - \frac{60z}{EF} - \frac{15z^2}{2EF} \Big|_1 + \frac{40(z-2)}{EF} \Big|_2 - \frac{60(z-4)}{EF} \Big|_3 \\
 N(z) &= \begin{array}{ccc} -60 & -15z & +40 \\ \hline & 1 & 2 \\ & -60 & \end{array} \\
 &\quad \begin{array}{ccc} 0 \leq z \leq 2m & 2m \leq z \leq 4m & 4m \leq z \leq 6m \end{array}
 \end{aligned} \tag{a}$$

Tại $z = 6m$ thì $u(6m) = 0$ suy ra $\Delta u_{01} = u_A = 1,475 \cdot 10^{-3} m$.

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F} = \frac{1}{F} \left[\begin{array}{ccc} (-60-15z) & +40 & -60 \\ \hline & 1 & 2 \\ & -60 & \end{array} \right]$$

Biểu đồ lực dọc (N) và ứng suất (σ) được cho trên hình 4.5b, c.

Ví dụ 2

Một vành tròn bằng thép được ghép có độ dôi với một vành nhôm (hình 4.6a). Thí nghiệm cho thấy trong một vài trường hợp sau khi nung nóng hệ đã ghép đến một nhiệt độ xác định rồi làm lạnh bề mặt này thì vành nhôm bên trong tách khỏi vành thép ngoài.

Hãy cho biết trong điều kiện nào hiện tượng này có thể xảy ra. Những số liệu như thế nào cần có để có được một sự đánh giá bằng số của hiện tượng nói trên?

GIẢI

Hiện tượng nêu ra trong đề bài là có thể, nếu khi nung nóng trong vành nhôm sẽ phát sinh biến dạng dẻo đủ lớn. Nếu ký hiệu Δ là hiệu giữa bán kính ngoài của vành nhôm và bán kính trong của vành thép trước khi ghép thì ta có:

$$\varepsilon_{nh} + \varepsilon_{th} = \frac{\Delta}{R} \quad (a)$$

ε_{nh} và ε_{th} lần lượt là độ co và độ giãn tương đối hướng kính của vành nhôm và thép.

Trong giới hạn đàn hồi khi có thêm sự nung nóng thì:

$$\varepsilon_{nh} = \frac{\sigma_{nh}}{E_{nh}} - \alpha_{nh} \cdot T, \quad \varepsilon_{th} = \frac{\sigma_{th}}{E_{th}} + \alpha_{th} \cdot T \quad (b)$$

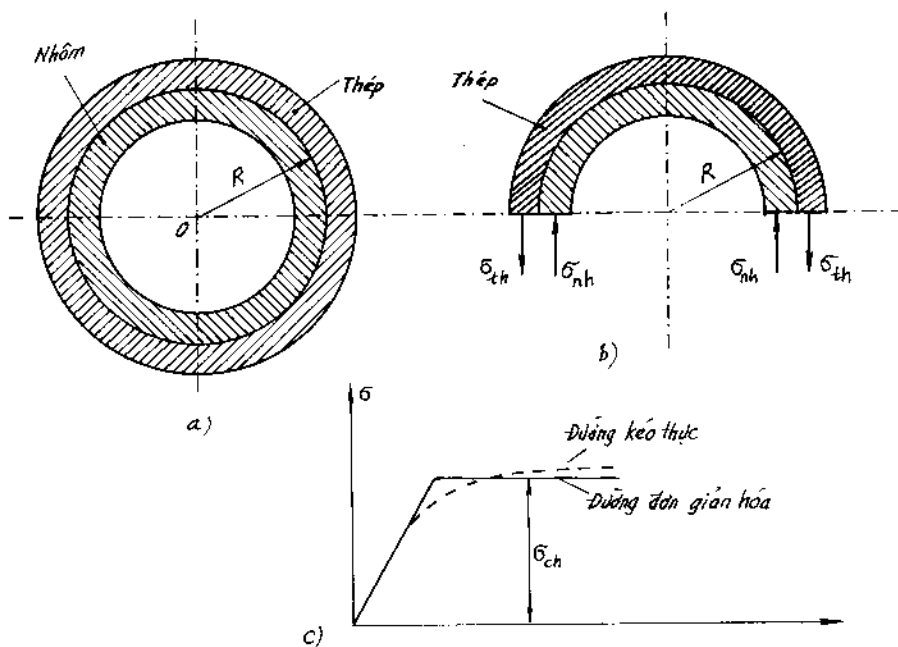
trong đó:

σ_{nh} , σ_{th} là ứng suất trong vành nhôm và thép;

α_{nh} , α_{th} là hệ số giãn nở dài tương ứng của nhôm và thép.

Mặt khác với chiều dày h như nhau thì điều kiện cân bằng (hình 4.6b) cho ta: $\sigma_{th} = \sigma_{nh} = \sigma$ và phương trình (a) được viết lại khi chú ý đến hệ (b) như sau:

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta}{R} + T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (c)$$



Hình 4.6.

Giả thiết nhận biểu đồ $\sigma(\epsilon)$ kéo hoặc nén của nhôm là đàn hồi dẻo lý tưởng (hình 4.6c). Giới hạn chảy của nhôm σ_{nh}^{ch} thấp hơn giới hạn chảy của thép. Do ứng suất trong cả hai vành thép và nhôm là như nhau như đã chỉ ra ở trên, cho nên khi vành nhôm đã chảy dẻo thì vành thép vẫn đàn hồi. Ứng suất ban đầu khi ghép căng σ_0 bằng:

$$\sigma_0 = \frac{\Delta / R}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (d)$$

Thay (d) vào (c) ta đi đến:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (e)$$

Điều này cho thấy σ không thể lớn hơn σ_{nh}^{ch} . Nếu nhiệt độ nung nóng:

$$T > (\sigma_{nh}^{ch} - \sigma_0) \left(\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}} \right) \frac{1}{\alpha_{nh} - \alpha_{th}}$$

thì trong vành nhôm biến dạng dẻo xuất hiện và $\sigma = \sigma_{nh}^{ch}$.

Bị làm lạnh các vành sẽ biến dạng đàn hồi. Khi đó ứng suất dư sẽ là tổng đại số σ_{nh}^{ch} và ứng suất do làm lạnh rút ra từ (e) khi T đổi dấu. Nghĩa là:

$$\sigma_{du} = \sigma_{nh}^{ch} - \frac{T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (g)$$

Khi mà $\sigma_{du} < 0$ thì vành nhôm bật ra khỏi vành thép. Do đó, điều kiện bật này sẽ là:

$$T(\alpha_{nh} - \alpha_{th}) > \sigma_{nh}^{ch} \left(\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}} \right) \quad (h)$$

Có thể có trường hợp biến dạng dẻo trong vành nhôm xuất hiện ngay trong khi lắp ghép trước khi nung thì bản chất hiện tượng vật lý được mô tả bởi quan hệ (g) và (h) vẫn được bảo toàn bất kể σ_{nh}^{ch} đạt được bằng cách nào.

Ví dụ 3

Cho một thanh chịu lực như trên hình 4.7a. Bằng phương pháp vụn năng, hãy viết bằng tay các biểu thức, vẽ biểu đồ chuyển vị và nội lực, tính ứng suất và chuyển vị lớn nhất, kiểm tra bền và cứng. Biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $F = 10^{-3} \text{ m}^2$; $[\sigma] = 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$; $[u] = 0,1 \text{ cm}$.

GIẢI

Trong trường hợp bài toán, thanh được chia làm 3 đoạn, biểu thức của $U(z)$ và $N(z)$ lần lượt là:

Gọi R_0 là phản lực tại ngàm trái, ta có phương trình $U(z)$ và $N(z)$ được viết theo (4.16) và (4.16a) như sau:

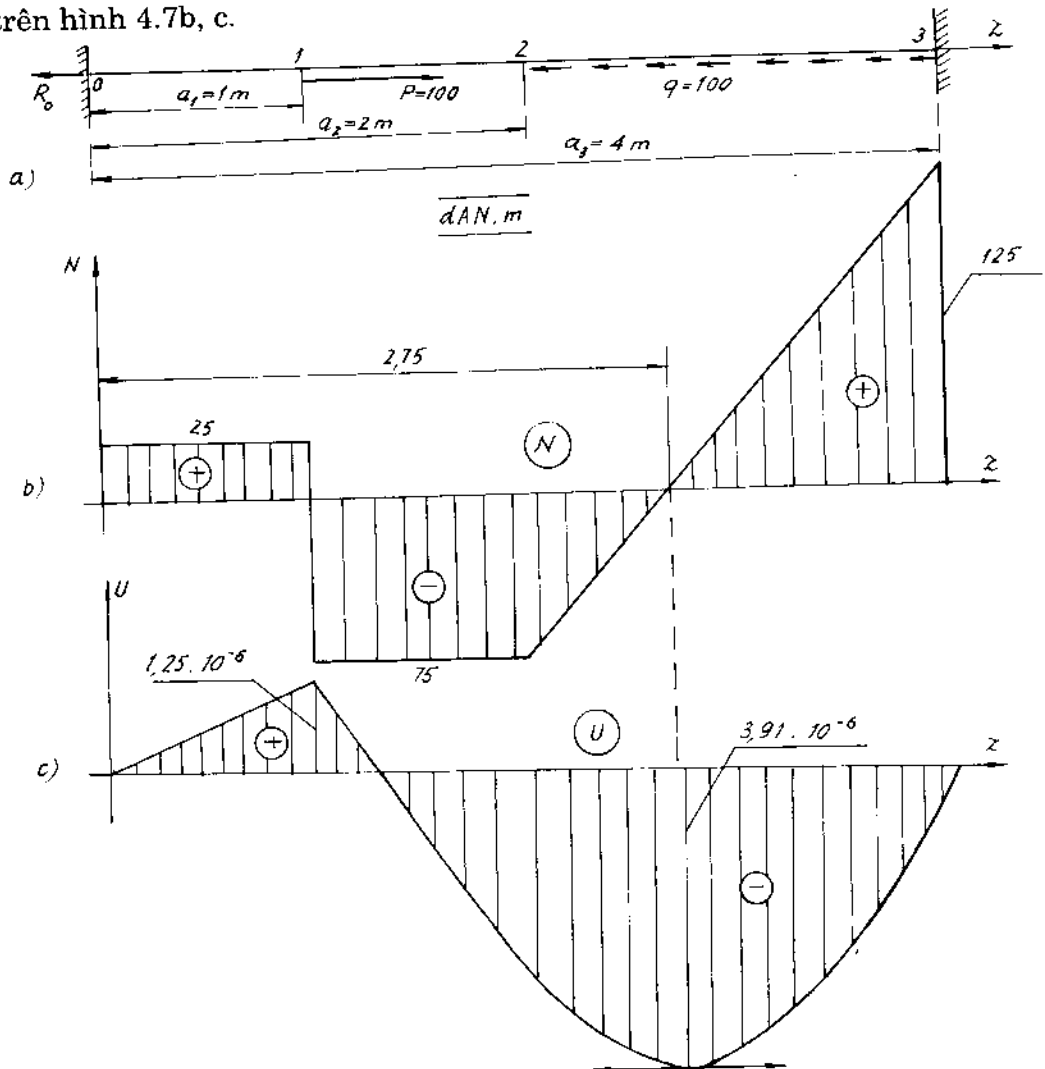
$$EFU(z) = R_0 z \left| \frac{-100(z-1)}{i=1} \right| \frac{+100(z-2)^2}{i=2 \quad 2!} \left| \frac{}{i=3} \right|$$

$$N(z) = R_0 \left| \frac{-100}{i=1} \right| \frac{+100(z-2)}{i=1} \left| \frac{}{i=3} \right|$$

$U(z = a_3 = 4m) = 0$, cụ thể là:

$$4R_0 - 100 \times 3 + 100 \times 2 = 0 \Rightarrow R_0 = 25 \text{ daN}$$

Thay $R_0 = 25 \text{ daN}$ vào phương trình $U(z)$, $(N(z))$ và vẽ các biểu đồ trên hình 4.7b, c.



Hình 4.7.

Ứng suất và chuyển vị lớn nhất lần lượt là:

$$\sigma_{\max} = \frac{125}{10^{-3}} = 125 \cdot 10^3 \text{ daN/m}^2 < [\sigma] = 16 \cdot 10^2 \text{ daN/cm}^2.$$

$$U_{\max}(z = 2,75 \text{ m}) = 3,91 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3,91 \cdot 10^{-4} \text{ cm} < [u] = 0,1 \text{ cm}.$$

Điều kiện bền và điều kiện cứng đều thỏa mãn tốt.

Ví dụ 4

Một thanh chịu lực dọc trục z , có quy luật $q(z) = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{l^n} \cdot z^n$.

Cho biết: $l = 80 \text{ cm}$, $F = 20 \text{ cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $q_0 = 0,1 \text{ kN/cm}$, $q_1 = 1 \text{ kN/cm}$ (hình 4.8a).

Hãy vẽ biểu đồ $U(z)$ và $N(z)$ với $n = 0, 1, 2, 3$.

GIẢI

a) Trường hợp $n = 0$

$$q(z) = q_1 = 1 \text{ kN/cm}$$

$$EFU(z) = R_{01}z + \frac{1 \cdot z^2}{2}$$

$$N(z) = R_{01} + 1 \cdot z$$

Tại $z = l$, $U(l) = 0 \Rightarrow R_{01} = -40 \text{ kN}$.

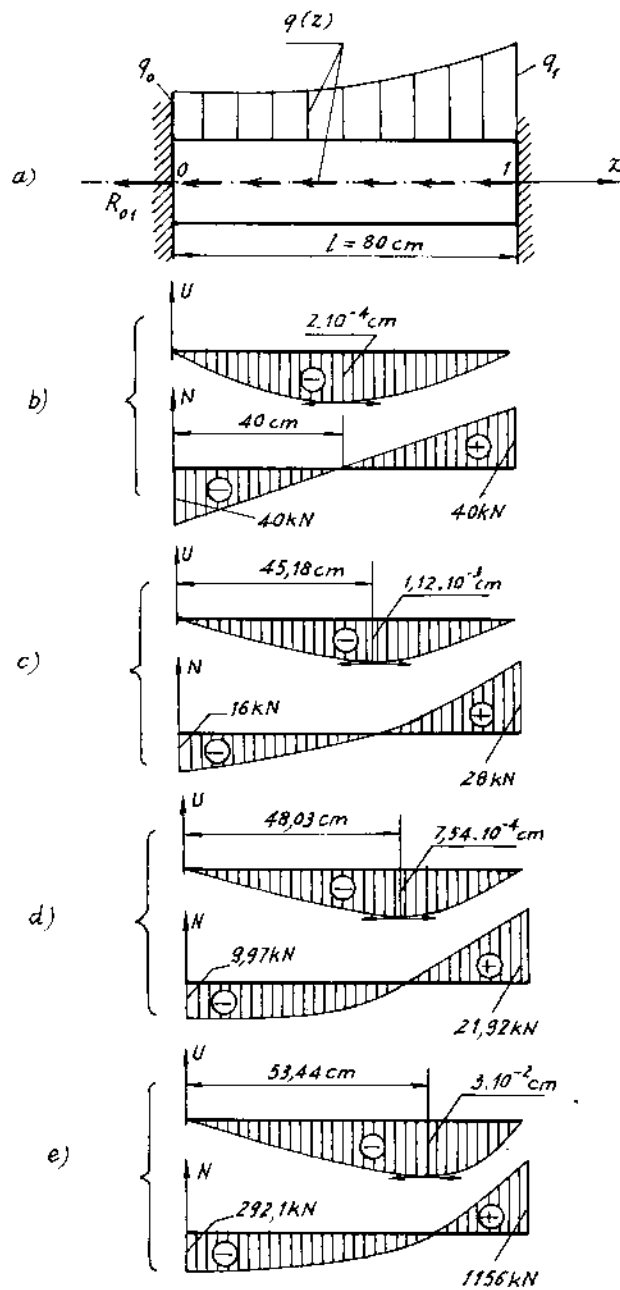
Biểu đồ $U(z)$ và $N(z)$ được cho trên hình 4.8b.

b) Trường hợp $n = 1$

$$q(z) = 0,1 + \frac{0,9z}{80}; \Delta q_{01} = 0,1; \Delta q'_{01} = 0,01125$$

$$EFU(z) = R_{01}z + 0,1 \frac{z^2}{2} + 0,01125 \frac{z^3}{3!}$$

$$N(z) = R_{01} + 0,1z + 0,01125 \frac{z^2}{2}$$



Hình 4.8.

Tại $z = l = 80 \text{ cm}$, $U(l) = 0$. Cụ thể là:

$$R_{01} \cdot l + 0,1 \frac{l^2}{2} + 0,01125 \frac{l^3}{6} = 0 \Rightarrow R_{01} = -16 \text{ kN}.$$

Thay $R_{01} = -16 \text{ kN}$ vào $U(z)$ và $N(z)$ và vẽ các biểu đồ $U(z)$ và $N(z)$ như hình 4.8c.

3. Trường hợp $n = 2$

$$q = 0,1 + \frac{0,9z^2}{80^2} ; \quad \Delta q_{01} = 0,1 ; \quad \Delta q'_{01} = \frac{1,8 \cdot 0}{80^2} = 0$$

$$\Delta q''_{01} = \frac{1,8}{80^2} = 0,00028.$$

$$EFU(z) = R_{01} \cdot z + 0,1 \frac{z^2}{2} + 0,00028 \frac{z^4}{4!}$$

$$N(z) = R_{01} + 0,1 z + 0,00028 \frac{z^3}{3!}.$$

Tại $z = 80 \text{ cm}$, $U(80 \text{ cm}) = 0$. Cụ thể là:

$$R_{01} \cdot 80 + 0,1 \cdot \frac{80^2}{2} + 0,00028 \frac{80^4}{4!} = 0 \Rightarrow R_{01} = -9,973 \text{ kN}.$$

Theo các hàm của U và N với $R_{01} = -9,873 \text{ kN}$ và các số liệu đề bài, biểu đồ (U) và (N) được cho trên hình 4.8d.

4. Trường hợp $n = 3$

Các bước tính toán trong trường hợp này hoàn toàn tương tự các bước trước. Với các số liệu của đề bài và $n = 3$, hàm chuyển vị dọc trục $U(z)$ và hàm lực dọc $N(z)$ dưới dạng tường minh là:

$$U(z) = 1,758 \cdot 10^{-11} z^5 + 1,25 \cdot 10^{-7} \cdot z^2 - 7,302 \cdot 10^{-4} \cdot z$$

$$N(z) = 3,517 \cdot 10^{-5} \cdot z^4 + 0,1 z - 292,1$$

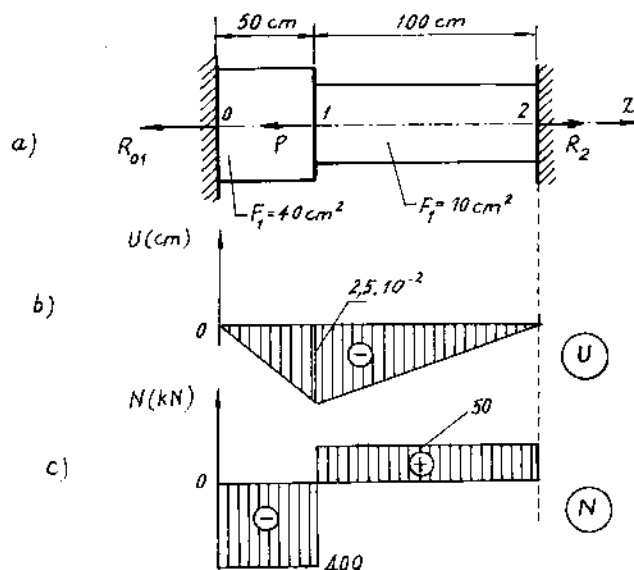
$$0 \leq z \leq 80 \text{ cm}.$$

Biểu đồ $(U(z))$ và $(N(z))$ được cho trên hình 4.8e.

Ví dụ 5

Một thanh mặt cắt ngang thay đổi chịu lực như hình 4.9a. Hãy kiểm tra bền và cứng cho thanh. Biết $[\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$; $[u] = 0,1 \text{ cm}$; $P = 450 \text{ kN}$.

GIẢI



Hình 4.9.

Chuyển vị và nội lực theo phương pháp vạn năng dạng ma trận theo công thức (4.14) có dạng:

$$\vec{S}_1(z) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z/EF_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{01} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

$$\vec{S}_2(z) = [B_2][B_1^*]\Delta S_{01} + [B_2]\Delta S_{02}$$

$$\begin{aligned}
S_2^*(150) &= [B_2^*] [B_1^*] \Delta S_{01} + [B_2^*] \Delta S_{02} = \\
&= \begin{Bmatrix} U_2^* \\ N_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{10E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{50}{40E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{01} \end{Bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & 100/10E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 450 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Giải hệ phương trình này ta có:

$$R_{01} = -400 \text{ kN (ngược chiều hình 4.9a).}$$

$$R_2 = 50 \text{ kN.}$$

Thay $R_{01} = -400 \text{ kN}$ vào $\bar{S}_1(z)$ và $\bar{S}_2(z)$ ta có các phương trình của $U(z)$, $N(z)$ trong các đoạn 1 và 2. Đồ thị của chúng cho trên hình 4.9b, c.

$$\max |\sigma| = \frac{400}{40} < [\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\max |u| = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm} < [u] = 0,1 \text{ cm.}$$

Vậy thanh làm việc an toàn theo cả hai điều kiện bền và cứng.

Ví dụ 6

Một thanh chịu lực như hình 4.10.

Khe hở giữa đầu dưới của thanh và nền cứng là Δ . Hãy tính chuyển vị δ của điểm đặt lực P khi $P \geq \frac{EF\Delta}{l}$, thế năng biến dạng đàn hồi trong thanh và vẽ đồ thị quan hệ $P = f(\delta)$?

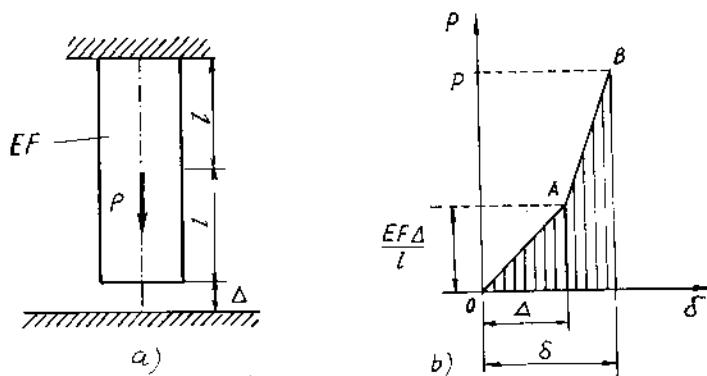
GIẢI

Khi $P \geq \frac{EF\Delta}{l}$ thì khe hở đã được đóng lại. Phản lực N đặt vào đầu dưới thanh được tìm từ điều kiện:

$$\frac{(P-N)l}{EF} - \frac{Nl}{EF} = \Delta$$

Do đó, nội lực trong phần dưới và phần trên thanh sẽ là:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{P}{2} - \frac{\Delta EF}{2l} \\ P - N &= \frac{P}{2} + \frac{\Delta EF}{2l} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$



Hình 4.10.

Chuyển vị của điểm đặt lực P có biểu thức:

$$\delta = \frac{Pl}{2EF} + \frac{\Delta}{2}$$

Thế năng tích lũy trong hai đoạn thanh sẽ là tổng thế năng biến dạng sau đây:

$$U = \frac{(P-N)^2 l}{2EF} + \frac{N^2 l}{2EF} = \frac{P^2 l}{4EF} + \frac{EF\Delta^2}{4l}$$

Đồ thị của quan hệ $P = f(\delta)$ (hình 4.10b).

Đoạn OA tương ứng khi $P \leq \frac{EF\Delta}{l}$ còn đoạn AB tương ứng khi $P \geq$

$\frac{EF\Delta}{l}$. Diện tích phần gạch sọc là công của lực P và có giá trị là U .

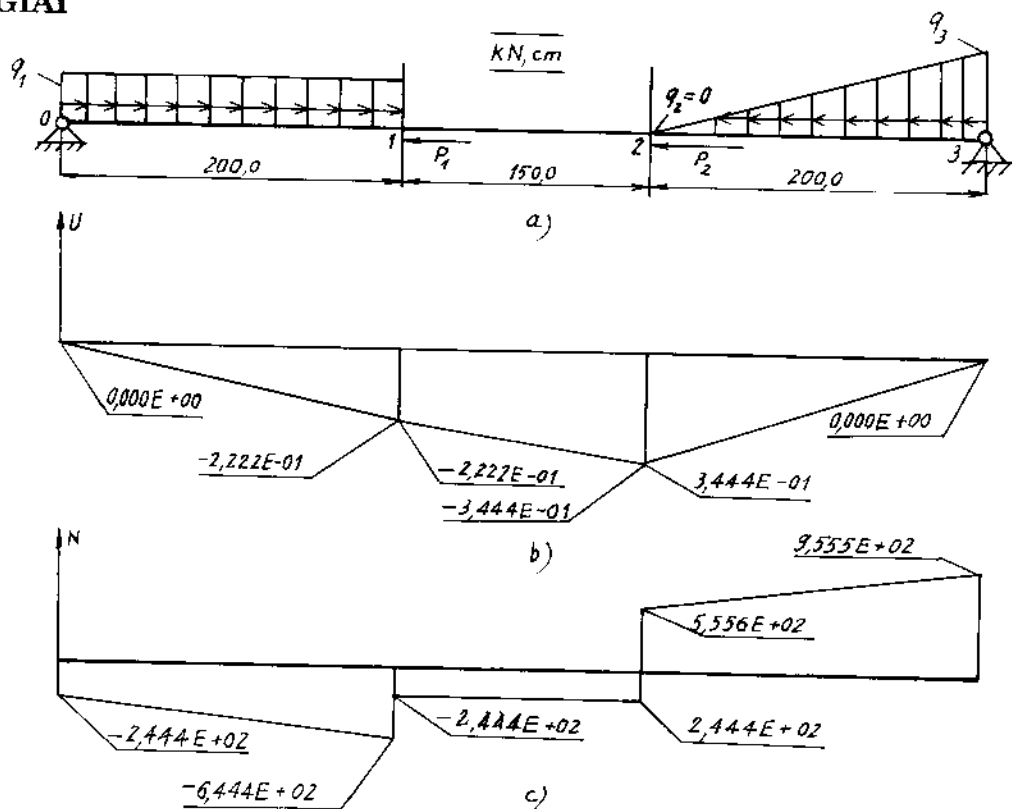
Ví dụ 7

Một thanh chịu kéo, nén như hình 4.11a. Hãy viết biểu thức của

$U(z)$ và $N(z)$ và vẽ biểu đồ của chúng. Cho biết: $q_1 = -2 \text{ kN/cm}$; $q_2 = 0$; $q_3 = 4 \text{ kN/cm}^2$; $P_1 = 400 \text{ kN}$, $P_2 = 800 \text{ kN}$.

$E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $F_1 = 20 \text{ cm}^2$, $F_2 = 15 \text{ cm}^2$, $F_3 = 20 \text{ cm}^2$.

GIẢI



Hình 4.11.

Phương trình ma trận của $U(z)$ và $N(z)$ đối với bài toán này theo công thức tổng quát từ (4.13) ÷ (4.14) của phương pháp vụn năng có dạng:

Đối với đoạn 0 – 1 : $0 \leq z \leq 200 \text{ cm}$;

$$\bar{S}_1(z) = \begin{Bmatrix} N_1(z) \\ U_1(z) \end{Bmatrix} = [B_1(z)] \bar{\Delta S}_{01}; \quad \bar{S}_1^*(z = 200 \text{ cm}) = [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01}$$

Đối với đoạn 0–2 : $200 \text{ cm} \leq z \leq 350 \text{ cm}$;

$$\bar{S}_2(z) = [B_2] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_2] \bar{\Delta S}_{02}$$

$$\bar{S}_2^*(z = 350 \text{ cm}) = [B_2^*] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_2^*] \bar{\Delta S}_{02}$$

Đối với đoạn 0-3 : $350 \text{ cm} \leq z \leq 550 \text{ cm}$;

$$\bar{S}_3(z) = [B_3] [B_2^*] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_3] [B_2^*] \bar{\Delta S}_{02} + [B_3] \bar{\Delta S}_{03}$$

$$\bar{S}_3(z = 550 \text{ cm}) = [B_3^*] [B_2^*] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_3^*] [B_2^*] \bar{\Delta S}_{02} + [B_3^*] \bar{\Delta S}_{03}$$

trong đó:

$$\bar{\Delta S}_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ R_{01} \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \bar{\Delta S}_{02} = \begin{vmatrix} 0 \\ 400 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \bar{\Delta S}_{03} = \begin{vmatrix} 0 \\ 800 \\ 0 \\ 1/50 \end{vmatrix} ;$$

$$[B_i] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{EF_i} & \frac{\Phi_2}{EF_i} & \frac{\Phi_3}{E_i F_i} \\ 0 & 1 & \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} \quad (i = \overline{1,3})$$

Phản lực dọc trục R_{01} tại gối 0 được xác định từ phương trình $U(z = 550 \text{ cm}) = 0$. Cụ thể là:

$$R_{01} = 244,4 \text{ kN}$$

Thay $\bar{\Delta S}_{01}$ với $R_{01} = -244,4 \text{ kN}$, $\bar{\Delta S}_{02}$, $\bar{\Delta S}_{03}$ vào các phương trình của $\bar{S}_1(z)$, $\bar{S}_2(z)$, $\bar{S}_3(z)$ và từ các phương trình ấy ta có các biểu đồ (U) và (N) như hình 4.11b, c.

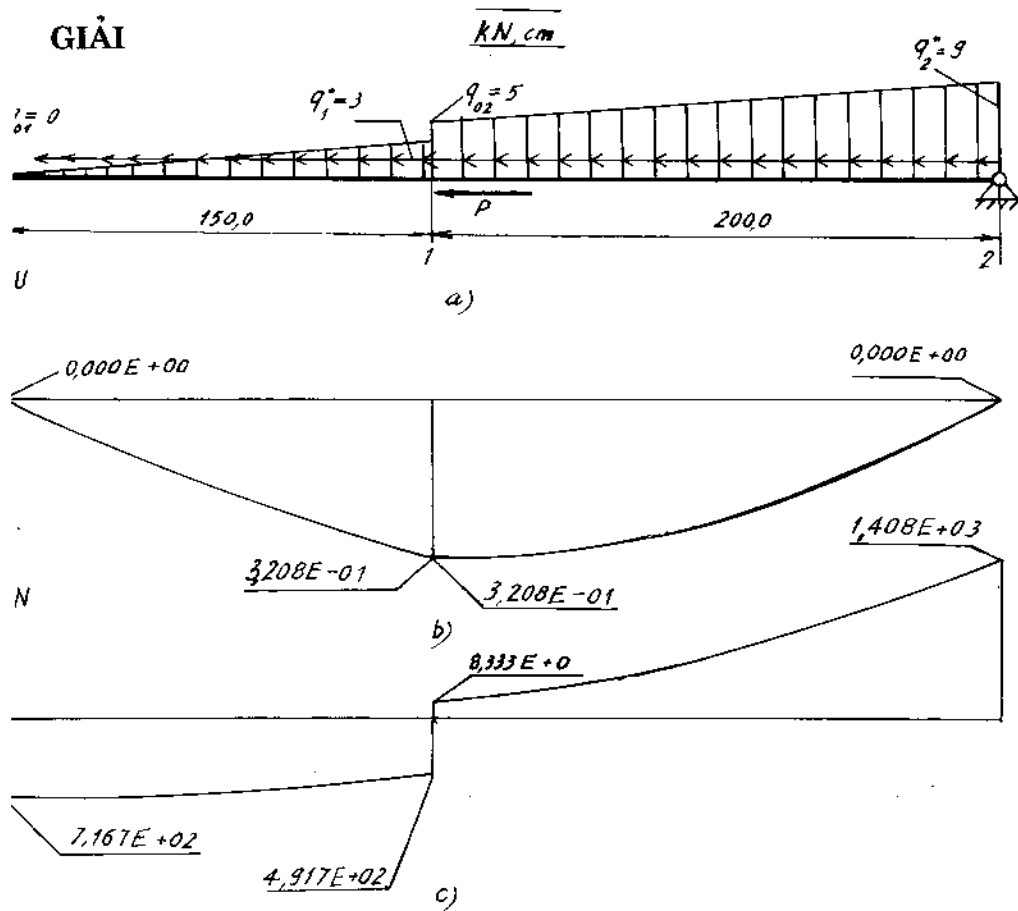
Ví dụ 8

Cho một thanh chịu kéo nén như hình 4.12a. Hãy chỉ ra mặt cắt nguy hiểm nhất về độ bền và độ cứng và vẽ các biểu đồ U và N?

Cho biết: $P = 500$, $q_1^* = 3$, $q_{02} = 5$, $q_2^* = 9 \text{ kN/cm}$,

$E = 2e4$, $F_1 = 15$, $F_2 = 20$, đơn vị tính là: kN, cm.

GIẢI



Hình 4.12.

Phương trình chuyển vị $U(z)$ và lực dọc $N(z)$ trong trường hợp này theo (4.13) có dạng:

Đoạn 1 : $0 \leq z \leq 150$ cm,

$$\bar{S}_1(z) = [B_1(z)] \Delta \bar{S}_{01} ; \quad \bar{S}_1^*(150 \text{ cm}) = [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01}$$

Đoạn 2 : $150 \text{ cm} \leq z \leq 350$ cm,

$$\bar{S}_2(z) = [B_1(z)] \cdot [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2(z)] \Delta \bar{S}_{02} ;$$

$$\bar{S}_2^*(350 \text{ cm}) = [B_2^*] [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02}$$

trong đó:

$$\overrightarrow{\Delta S_{01}} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{01} \\ -2 \\ \frac{1}{50} \end{bmatrix} ; \quad \overrightarrow{\Delta S_{02}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 500 \\ 2 \\ \frac{1}{50} \end{bmatrix} ;$$

$$B_2(z) = [B_2(z)] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(z-150)}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{(z-150)^2}{2! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{(z-150)^3}{3! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} \\ 0 & 1 & (z-150) & \frac{(z-150)^2}{2} \dots \end{bmatrix}$$

$$[B_2^*] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{200}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{200^2}{2! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{200^3}{3! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} \dots \\ 0 & 1 & 200 & \frac{200^2}{2} \dots \end{bmatrix} ;$$

$$[B_1(z)] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{EF_1} & \frac{z^2}{2EF_1} & \frac{z^3}{3!EF_1} \dots \\ 0 & 1 & z & \frac{z^2}{2} \dots \end{bmatrix}$$

R_{01} được xác định từ điều kiện:

$$U_2(z = 300 \text{ cm}) = 0 \Rightarrow R_{01} = -716,7 \text{ kN}.$$

Thay giá trị $R_{01} = -716,7 \text{ kN}$ và các $\overrightarrow{\Delta S_{01}}$, $\overrightarrow{\Delta S_{02}}$ vào $\vec{S}_1(z)$, $\vec{S}_2(z)$ rồi vẽ biểu đồ (U), (N) từ các hàm vừa nhận được. Các biểu đồ này được cho trên hình 4.12b, c.

Mặt cắt nguy hiểm nhất về độ bền là mặt cắt “2” với $N = 1408 \text{ kN}$ và $\sigma_{\max} = \frac{N}{F_2} = \frac{1408}{20} = 70,4 \text{ kN/cm}^2$.

Mặt cắt nguy hiểm nhất về độ cứng là mặt cắt “1”. Tại mặt cắt này chuyển vị có giá trị tuyệt đối lớn nhất bằng 0,321 cm.

Ví dụ 9

Một thanh thép có $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ chịu lực dọc trục và liên kết như hình 4.13a. Hãy thiết lập phương trình các đại lượng cần tính $U(z)$ và $N(z)$ dưới dạng ma trận tường minh và tính $\max |\sigma|$ và $|\epsilon|$?

GIẢI

Phương trình ma trận đối với từng đoạn:

Đoạn 1 : $0 \leq z \leq 200 \text{ cm}$;

$$\vec{S}_1(z) = [B_1] \cdot \Delta \vec{S}_{01} ; \vec{S}_1^*(200 \text{ cm}) = [B_1^*] \Delta \vec{S}_{01}$$

Đoạn 2 : $200 \leq z \leq 400 \text{ cm}$;

$$\vec{S}_2(z) = [B_2(z)] \cdot [B_1^*] \Delta \vec{S}_{01} + [B_2(z)] \Delta \vec{S}_{02} ;$$

$$\vec{S}_2^*(400 \text{ cm}) = [B_2^*] [B_1^*] \Delta \vec{S}_{01} + [B_2^*] \Delta \vec{S}_{02}$$

Đoạn 3 : $400 \text{ cm} \leq z \leq 600 \text{ cm}$;

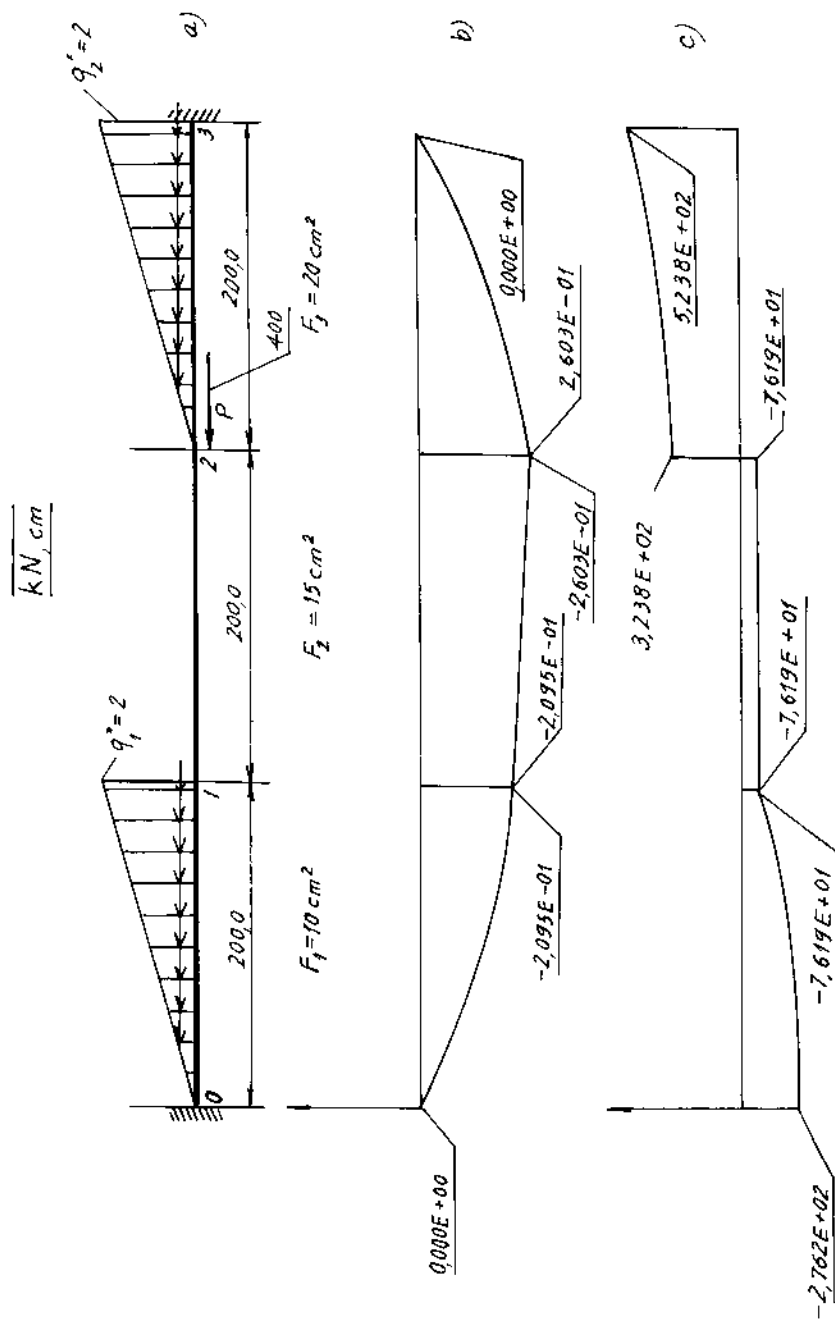
$$\vec{S}_3(z) = [B_3] [B_2^*] [B_1^*] \Delta \vec{S}_{01} + [B_3(z)] [B_2^*] \Delta \vec{S}_{02} + [B_3(z)] \Delta \vec{S}_{03} ;$$

$$\vec{S}_3^*(z = 600 \text{ cm}) = [B_3^*] [B_2^*] [B_1^*] \Delta \vec{S}_{01} + [B_3^*] [B_2^*] \Delta \vec{S}_{02} + [B_3^*] \Delta \vec{S}_{03}$$

Trong các phương trình này các ma trận $[B_i(z)]$ và $[B_i^*]$ với $i = \overline{1,3}$ có dạng không đổi và được xác định theo (4.13). Ví dụ:

$$[B_2^*(z = 400 \text{ cm})] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{200}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} & \frac{200^2}{2! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 15} & \frac{200^3}{3! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 15} \dots \\ 0 & 1 & \frac{200}{1} & \frac{200^2}{2!} \dots \end{vmatrix}$$

Các $\Delta \vec{S}_{0i}$ trong bài toán này có dạng cụ thể như sau:



Hinh 4.13.

$$\overline{\Delta S}_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ R_{01} \\ 0 \\ \frac{1}{100} \text{ kN/cm}^2 \end{vmatrix} ; \overline{\Delta S}_{02} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \text{ kN/cm} \\ -\frac{1}{50} \text{ kN/cm}^2 \end{vmatrix} ; \overline{\Delta S}_{03} = \begin{vmatrix} 0 \\ 400 \text{ kN} \\ 0 \\ \frac{1}{50} \text{ kN/cm}^2 \end{vmatrix}$$

R_{01} được tìm từ điều kiện:

$$U(z = 600 \text{ cm}) = 0 \Rightarrow R_{01} = -276,2 \text{ kN}.$$

Thay $\overline{\Delta S}_{01}$ với $R_{01} = -276,2 \text{ kN}$ và $\overline{\Delta S}_{02}$, $\overline{\Delta S}_{03}$ vào các phương trình $\bar{S}_1(z)$, $\bar{S}_2(z)$ và $\bar{S}_3(z)$ ta được các phương trình tường minh dạng ma trận cần tìm.

Biểu đồ của $U(z)$ và $N(z)$ được vẽ trên các hình 4.13b, c.

Ứng suất pháp lớn nhất về trị tuyệt đối xảy ra ở mặt cắt '0'. Cụ thể

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-276,2}{10} \right| = 27,62 \text{ kN/cm}^2$$

Biến dạng tỷ đối lớn nhất về trị tuyệt đối cũng xảy ra ở mặt cắt "0" và có giá trị là:

$$\max |\varepsilon| = \left| \frac{-N_{01}}{EF_1} \right| = \left| \frac{-276,2}{10} \right| = 13,81 \cdot 10^{-4}$$

CHƯƠNG 5

CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ

Như đã thấy ở trên, thanh là đối tượng nghiên cứu chủ yếu của “Sức bền vật liệu”. Sức bền của thanh (đối tượng) phụ thuộc không chỉ vào bản thân vật liệu, kích thước, liên kết mà còn vào tính chất tác dụng ngoài (tĩnh hay động), hình dạng thanh, dạng mặt cắt ngang, vị trí mặt cắt ngang. Vì vậy trong chương này chúng ta cần khảo sát trước đặc trưng hình học cơ bản của đối tượng nghiên cứu.

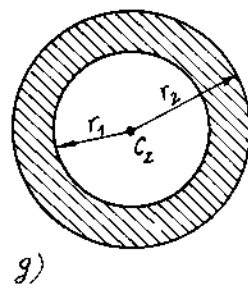
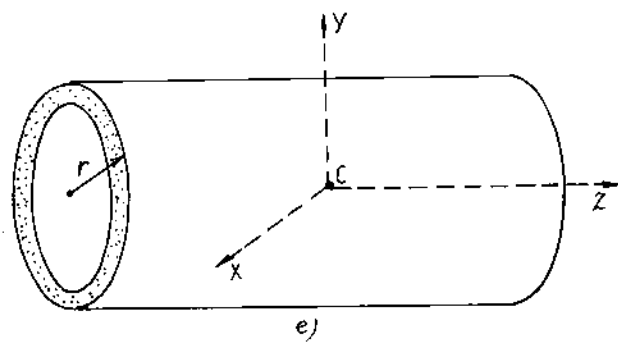
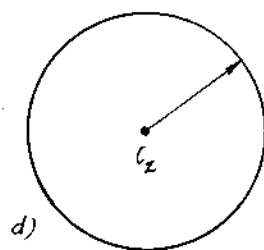
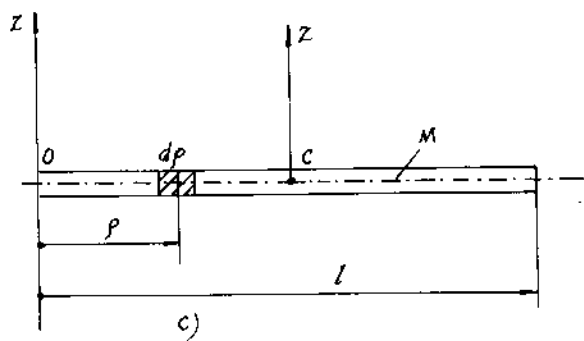
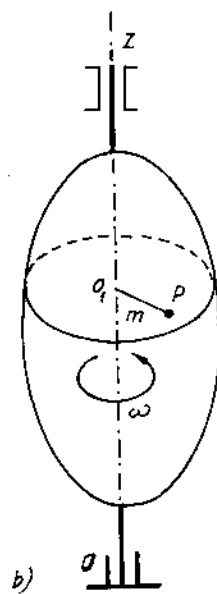
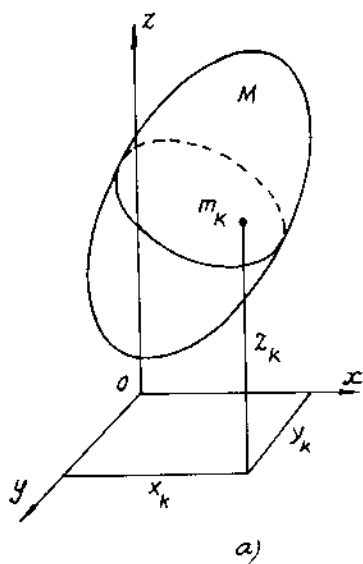
§1. MÔMEN KHỐI LƯỢNG

Sự phân bố của khối lượng có ảnh hưởng rất nhiều tới chuyển động của cơ hệ. Đặc trưng cho sự phân bố khối lượng này là các mômen khối lượng.

1. Các định nghĩa

** Mômen của một đại lượng đối với một chuẩn nào đó là tích của khoảng cách lũy thừa k với đại lượng ấy.*

Xét cơ hệ gồm n chất điểm, mỗi chất điểm thứ K nào đó có tọa độ và khối lượng x_K, y_K, z_K và m_K . Mômen khối lượng cấp $k = \alpha + \beta + \gamma$ được định nghĩa như sau (hình 5.1a, b).



Hình 5.1.

Biểu thức $\sum_{K=1}^n m_K x_K^\alpha y_K^\beta z_K^\gamma$ đối với hệ chất điểm rời rạc, $\int_M x^\alpha y^\beta z^\gamma dm$ đối với hệ chất điểm liên tục, được gọi là mômen khối lượng cấp $k = \alpha + \beta + \gamma$ của cơ hệ đối với hệ tọa độ $Oxyz$.

a) Mômen khối lượng cấp không

Nếu $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ta có mômen khối lượng cấp không.

Khối lượng của cơ hệ:

$$\sum m_K = M \text{ hay } \int_M dm = M \quad (5.1)$$

b) Mômen khối lượng cấp một

Nếu $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ ta có $\sum m_K x_K = S_{(yz)}$

hoặc
$$\int_M x \cdot dm = S_{(yz)} \quad (5.2)$$

gọi là mômen khối lượng cấp một của hệ đối với mặt phẳng tọa độ yz .

Các mômen khối lượng cấp một $S_{(yz)}, S_{(xy)}$ cũng được định nghĩa tương tự.

c) Vị trí của khối tâm

$$x_C = \frac{S_{(yz)}}{M}; \quad y_C = \frac{S_{(zx)}}{M}; \quad z_C = \frac{S_{(xy)}}{M} \quad (5.3)$$

d) Mômen khối lượng cấp hai

Nếu $\alpha = 2, \beta = \gamma = 0$ ta có: $\sum m_K x_K^2 = J_{(yz)}$

hoặc
$$\int_M x^2 \cdot dm = J_{(yz)} \quad (5.4)$$

gọi là mômen khối lượng cấp hai của hệ đối với mặt phẳng tọa độ yz .

Các mômen khối lượng cấp hai khác cũng được định nghĩa tương tự.

Cụ thể là:
$$J_o = \sum m_K (x_K^2 + y_K^2 + z_K^2)$$

$$\text{hoặc } J_o = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm \quad (5.5)$$

$$J_{xy} = \sum m_K x_K y_K \quad \text{hoặc } J_{xy} = \int_M xy \cdot dm \quad (5.6)$$

e) Trục quán tính chính trung tâm

Trục Ox được gọi là trục quán tính chính của hệ tại điểm O nếu ta có: $J_{xy} = J_{xz} = 0$. Các trục Oy và Oz cũng sẽ là những trục quán tính chính, nếu $J_{xy} = J_{yz} = 0$; $J_{zx} = J_{yz} = 0$.

Hệ trục $Oxyz$ được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm nếu " O " là khối tâm của vật và: $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$. Cụ thể hơn: $S_x = S_y = S_z = J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$.

2. Các trường hợp thường gặp của mômen khối lượng cấp hai

a) Thanh mảnh đồng chất (hình 5.1c)

$$J_{Oz} = \frac{Ml^2}{3} \quad ; \quad J_{Cx} = \frac{Ml^2}{12} \quad (5.7)$$

b) Vành tròn đồng chất và ống trục mỏng (hình 5.1de).

$$J_{Cz} = Mr^2 \quad (5.8)$$

c) Đĩa vành khăn đồng chất (hình 5.1g)

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} M (r_2^2 + r_1^2) \quad (5.9)$$

$$\text{Khi } r_1 = 0 \text{ và } r_2 = r \text{ thì } J_{Cx} = \frac{1}{2} Mr \quad (5.10)$$

§2. MÔMEN DIỆN TÍCH

Trong mục §1 ta đã làm quen với các mômen khối lượng của một vật thể đối với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ mà trên đó vị trí các vật thể được xác định. Cụ thể là:

$$\int_M x^\alpha y^\beta z^\gamma dm \quad (5.11)$$

Mômen khối lượng này có cấp $k = \alpha + \beta + \gamma$.

Dễ thấy là khi thể tích V của vật thể (mà trong đó khối lượng M được xác định) suy biến theo một phương nào đó. Ví dụ: theo phương Oz , thì ta sẽ nhận được một hình phẳng F trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi đường cong $f(x,y) = 0$. Nói cách khác, tích phân (5.11) tương đương với trường hợp đặc biệt mà ở đó $\gamma = 0$ và khối lượng phân bố đều trên hình phẳng F và bằng đơn vị.

Từ nay về sau, ta sẽ chỉ khảo sát các đặc trưng hình học của hình phẳng trong mặt phẳng này và ký hiệu diện tích của nó là F (hình 5.2). Các đặc trưng hình học của hình phẳng trong các mặt phẳng Oxz , Oyz do sự suy biến của dv tương ứng theo các phương Oy và Ox cũng được giải quyết hoàn toàn tương tự.

Theo cách đặt vấn đề nói trên, ta có thể dễ dàng rút ra một cách trực tiếp các mômen tương ứng từ công thức đã biết về các mômen khối lượng của vật thể.

1. Mômen diện tích cấp k

$$\int_F x^\alpha y^\beta dF = 0 \quad \text{với } k = \alpha + \beta \quad (5.12)$$

Đại lượng này gọi là mômen diện tích cấp k của hình phẳng F đối với hệ trục xy (hình 5.2a, b).

2. Mômen diện tích cấp 0

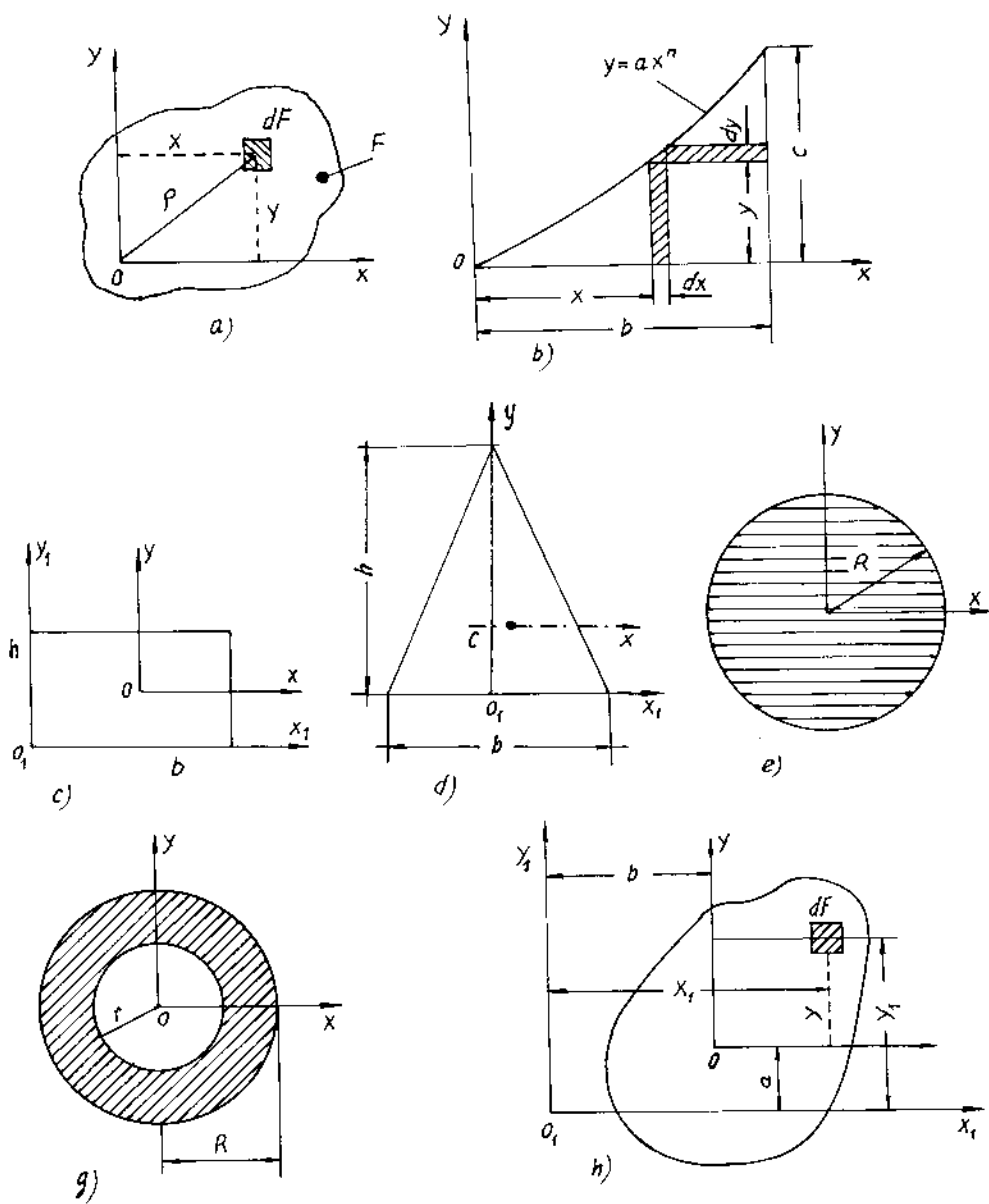
Khi $\alpha = \beta = 0$, tích phân (5.12) có dạng:

$$F = \int_F dF \quad (\text{cm}^2, \text{m}^2) \quad (5.13)$$

3. Mômen diện tích cấp 1

Khi $\alpha = 0$, $\beta = 1$ và $\alpha = 1$, $\beta = 0$, tương ứng ta có:

$$S_x = \int_F y \cdot dF \quad \text{và} \quad S_y = \int_F x \cdot dF \quad (\text{cm}^3, \text{m}^3) \quad (5.14)$$



Hình 5.2.

Các tích phân S_x, S_y có tên gọi là mômen tĩnh của hình phẳng đối với các trục x và y .

* Khi mômen tĩnh của hình phẳng F đối với một trục nào đó bằng không thì trục ấy gọi là trục trung tâm. Giao điểm của hai trục trung tâm gọi là trọng tâm của hình phẳng.

Nếu ký hiệu tọa độ trọng tâm của hình phẳng F trong hệ tọa độ xOy là X_C và Y_C , còn x, y là tọa độ phân tố dF trong hệ tọa độ xCy ta có:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{S_y}{F} = \frac{\int x \cdot dF}{F} \\ Y_C &= \frac{S_x}{F} = \frac{\int y \cdot dF}{F} \end{aligned} \quad (5.15)$$

4. Mômen diện tích cấp 2

Khi $\alpha = 1, \beta = 1$, tích phân (5.12) cho ta:

$$J_{xy} = \int_F xy \cdot dF \quad (\text{cm}^4, \text{m}^4) \quad (5.16)$$

J_{xy} : còn gọi là mômen quán tính ly tâm của hình phẳng F đối với hệ trục xOy .

Khi $\alpha = 2, \beta = 0$ và $\alpha = 0, \beta = 2$, ta nhận từ (5.12):

$$J_x = \int_F y^2 dF \quad \text{và} \quad J_y = \int_F x^2 dF \quad , \quad (\text{cm}^4, \text{m}^4) \quad (5.17)$$

Các đại lượng này gọi là mômen quán tính của hình phẳng F đối với trục x và y .

Nếu gọi ρ là khoảng cách từ phân tố khảo sát dF đến gốc tọa độ thì:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

và ta có:
$$J_\rho = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \int_F \rho^2 dF \quad (\text{cm}^4, \text{m}^4) \quad (5.18)$$

Tích phân J_p gọi là mômen quán tính độ cực của hình phẳng F đối với gốc tọa độ và bằng tổng mômen quán tính đối với các trục vuông góc với nhau tại O .

Từ các công thức định nghĩa các mômen quán tính cấp hai ở trên ta rút ra:

$$J_{xy} \geq 0 ; J_x > 0 ; J_y > 0 ; J_p > 0$$

Khi $J_{xy} = 0$ thì hệ trục xOy , gọi là hệ trục quán tính chính.

Hệ trục quán tính chính có gốc tọa độ đặt tại trọng tâm C của hình phẳng F được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm của hình phẳng đó. Nghĩa là: $J_{xy} = 0 ; S_x = 0 ; S_y = 0$.

5. Mômen diện tích cấp hai đối với các hình đơn giản

a) Hình chữ nhật (hình 5.2c)

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12} ; \quad J_y = \frac{b^3h}{12} \quad (5.19)$$

b) Hình tam giác (hình 5.2d)

Gọi trục x là trục qua trọng tâm và x_1 là trục trùng với cạnh đáy. Khi đó, theo định nghĩa ta có:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \cdot \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - y \right) dy = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \frac{b}{h} \int_0^h y_1^2 (h - y_1) dy_1 = \frac{bh^3}{12} \quad (5.20)$$

c) Hình tròn (hình 5.2e)

Theo định nghĩa của mômen quán tính độ cực, ta tính được:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F \rho^2 \rho d\varphi d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = 0,1 D^4 \quad (5.21)$$

Do tính chất đối xứng tỏa tròn và quan hệ $J_p = J_x + J_y$, ta rút ra mômen quán tính đối với các trục trung tâm:

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi R^4}{2} = 0,05 D^4 \quad (5.22)$$

d) Hình vành khăn (hình 5.2g)

Trong trường hợp này ta sẽ tìm các mômen quán tính của hình vành khăn như là hiệu giữa hai mômen quán tính của hai hình tròn đặc có bán kính R và r :

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \eta^4) \quad (5.23)$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4) = 0,05 D^4 (1 - \eta^4) \quad (5.24)$$

§3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC MÔMEN QUÁN TÍNH ĐỐI VỚI CÁC TRỤC SONG SONG

Giả sử mômen quán tính đối với trục Ox , Oy và diện tích hình phẳng như đã biết. Ta cần tìm các mômen quán tính của hình phẳng này đối với các trục mới O_1x_1 và O_1y_1 tương ứng song song với các trục xOy (hình 5.2h).

Từ (hình 5.2h) ta có:

$$Y_1 = y + a$$

$$X_1 = x + b$$

Vì vậy theo định nghĩa về mômen quán tính ta nhận được:

$$J_{x_1} = \int_F Y_1^2 dF = \int_F (Y + a)^2 dF = \int_F Y^2 dF + 2a \int_F Y dF + a^2 \int_F dF$$

$$J_{x_1} = J_x + 2aS_x + a^2F \quad (a)$$

$$\text{Tương tự như thế: } J_{y_1} = J_y + 2aS_y + b^2F \quad (b)$$

Đối với mômen quán tính ly tâm:

$$J_{x_1y_1} = \int_F X_1 Y_1 dF = J_{xy} + abF + aS_y + bS_x \quad (c)$$

Nếu các trục cũ Ox, Oy là những trục trung tâm (đối với các trục này $S_x = S_y = 0$), thì các công thức (a), (b), (c) có dạng:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2 F \\ J_{y_1} &= J_y + b^2 F \\ J_{x_1y_1} &= J_{xy} + abF \end{aligned} \quad (5.25)$$

Chú ý đến $J_{p_1} = J_{x_1} + J_{y_1}$, ta rút ra:

$$J_{p_1} = J_p + (a^2 + b^2) F$$

Trong trường hợp cần tìm các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm khi đã biết các mômen quán tính đối với hệ trục bất kỳ, ta giải các phương trình (5.25).

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} - a^2 F \\ J_y &= J_{y_1} - b^2 F \\ J_{xy} &= J_{x_1y_1} - abF \end{aligned} \quad (5.26)$$

§4. QUAN HỆ GIỮA CÁC MÔMEN QUÁN TÍNH CẤP 2 KHI XOAY TRỤC TỌA ĐỘ

Bài toán được đặt ra như sau: Giả sử mômen quán tính của diện tích F đối với hệ trục Oxy đã biết. Hãy xác định các mômen quán tính của F đối với hệ trục Ox_1y_1 xoay đi một góc α đối với hệ trục Oxy . Từ hình 5.3 ta có quan hệ giữa các tọa độ của dF trong hai hệ tọa độ này là:

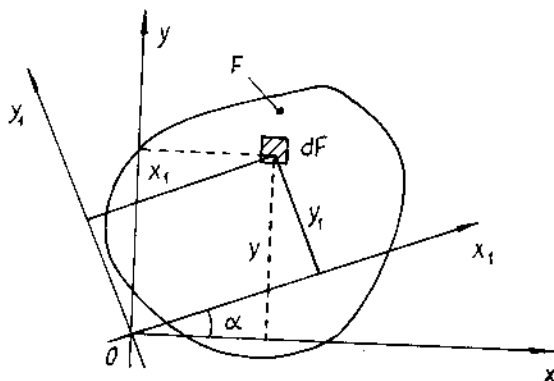
$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned}$$

Theo công thức (5.17), ta có:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dF$$



Hình 5.3.

Khai triển các tích phân này ta được:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{y_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Nếu hệ trục Ox_1y_1 là hệ trục quán tính chính ($J_{x_1 y_1} = 0$) thì công thức xác định phương các trục quán tính chính được rút ra từ công thức thứ ba của (5.27):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad (5.28)$$

Phương trình này luôn có hai nghiệm xác định 2 trục quán tính chính Ox_1y_1 .

Đối với những hình phẳng là những thép cán định hình chữ I, [, L, thì các đặc trưng hình học của chúng được tính theo các công thức lý thuyết ở trên và được cho sẵn trong bảng 5.1 “Quy cách thép định hình” dưới đây:

Quan hệ giữa J_{x_1} và J_{y_1} trong (5.27) tương tự như quan hệ σ_α và τ_α trong (3.14) phụ thuộc vào góc nghiêng α , mà dạng hình học của nó là một đường tròn do Mo (OTTO Mohr) đề xuất. Vì vậy, mọi thao tác tính toán bằng phương pháp hình học trong hai trường hợp hoàn toàn giống nhau.

§5. ÊLIP QUÁN TÍNH VÀ THUỘC TÍNH CỦA NÓ

Chúng ta đưa ra một đặc trưng hình học mới và gọi nó là bán kính quán tính, ký hiệu là i và có biểu thức là:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} \quad (5.29)$$

Giả sử có một hình phẳng diện tích F nào đó nhận trục Ox và Oy là các trục quán tính chính trung tâm và Ou là trục bất kỳ α (hình 5.4). Thì:

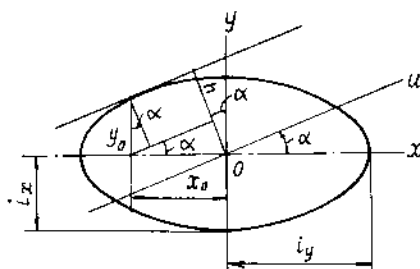
$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha \quad (a)$$

Chia cả hai vế của (a) cho F ta được:

$$i_u^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha \quad (b)$$

Ta dựng một êlip với bán trục là i_x và i_y (hình 5.4) có phương trình tương ứng là:

$$\frac{y^2}{i_x^2} + \frac{x^2}{i_y^2} = 1 \quad (5.30)$$



Hình 5.4.

Êlip này gọi là êlip quán tính.

Gọi h khoảng cách giữa trục nghiêng Ou bất kỳ và tiếp tuyến với êlip thì (5.30) có dạng:

$$\frac{i_x^2 \cos^2 \alpha}{h^2} + \frac{i_y^2 \sin^2 \alpha}{h^2} = 1$$

Do đó:

$$h^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha \quad (c)$$

Phương trình (c) cho thấy h chính là bán kính quán tính đối với trục Ou . Thuộc tính này của êlip quán tính cho phép tính ngay được J_u bất kỳ:

$$J_u = h^2 F \quad (5.31)$$

§6. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Vi dụ 1

Một hình phẳng vuông cạnh $7a\sqrt{2}$ được khoét một lỗ vuông cạnh $a = 2 \text{ cm}$ (hình 5.5). Hãy xác định trọng tâm c của mặt cắt, hệ trục và mômen quán tính chính trung tâm?

GIẢI

Mặt cắt ngang đối xứng đối với trục x , vậy $y_c = 0$, để xác định x_c , ta chọn hệ trục x_0Oy_0 có gốc tọa độ tại tâm hình vuông lớn:

$$x_c = \frac{\sum S_{y_0}}{\sum F} = \frac{-a^2 \cdot a\sqrt{2}/2}{(7a/\sqrt{2})^2 - a^2} = -0,03a = -0,06 \text{ cm}.$$

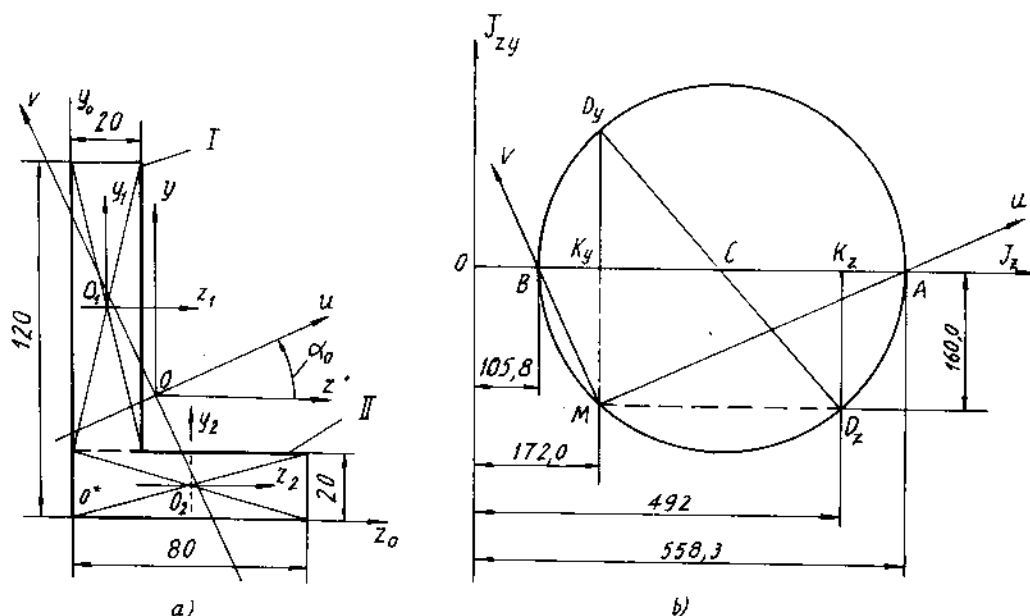
Hệ trục xcy là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Mômen quán tính chính trung tâm J_x và J_y là:

$$J_x = \frac{(7a/\sqrt{2})^4}{12} - \frac{a^4}{12} = 50,02 a^4 - 0,08 a^4 = 799,04 \text{ cm}^4.$$

$$y_0 = \frac{S_{z_0}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{140 + 16}{20 + 16} = \frac{156}{36} = 4,33 \text{ cm.}$$

Qua trọng tâm “O” ta lập hệ trục $zOy \parallel z_0O^*y_0$ và chia hình đã cho thành các hình đơn giản I và II (hình 5.6a), sau đó qua trọng tâm của các hình này lập các trục tọa độ z_1, y_1 và z_2, y_2 song song với các cạnh O^*z_0 và O^*y_0 .



Hình 5.6.

Do đó:

$$J_{z_1}^{(I)} = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166,7 \text{ cm}^4 ; \quad J_{y_1}^{(I)} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6,7 \text{ cm}^4$$

$$J_{z_2}^{(II)} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,33 \text{ cm}^4 ; \quad J_{y_2}^{(II)} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,3 \text{ cm}^4$$

Theo công thức chuyển trục song song (5.25) ta tính được:

$$J_z^{(I)} = J_{z_1}^{(I)} + F_{(I)} \cdot a_{(I)}^2 = 166,7 + 20 \cdot 2,67^2 = 308,1 \text{ cm}^4;$$

$$J_{zy}^{(I)} = J_{z_1 y_1}^{(I)} + F_{(I)} a_{(I)} b_{(I)} = 0 - 20 \cdot 2,67 \cdot 1,33 = -71 \text{ cm}^4.$$

Tương tự ta có:

$$J_y^{(I)} = 42,1 \text{ cm}^4;$$

$$J_z^{(II)} = 182,7 \text{ cm}^4; \quad J_y^{(II)} = 129,9 \text{ cm}^4; \quad J_{zy}^{(II)} = -89 \text{ cm}^4.$$

Do đó, mômen quán tính của toàn hình đối với hệ trục qua trọng tâm "O" là:

$$J_z = J_z^{(I)} + J_z^{(II)} = 309,3 + 182,7 = 492 \text{ cm}^4$$

$$J_y = J_y^{(I)} + J_y^{(II)} = 42,1 + 129,9 = 172 \text{ cm}^4$$

$$J_{zy} = J_{zy}^{(I)} + J_{zy}^{(II)} = -71 + (-89) = -160 \text{ cm}^4.$$

Các góc nghiêng của các trục quán tính chính trung tâm uOv so với hệ zOy được xác định theo công thức (5.28):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 160}{172 - 402} = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 22^\circ 30'$$

Các mômen quán tính chính trung tâm, khi ấy là:

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[(J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (664 + 452,5) = 558,3 \text{ cm}^4 \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[(J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (664 - 452,5) = 105,8 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Bán kính quán tính đối với trục Δ nào đó được thừa nhận và ký hiệu là i_{Δ} :

$$J_{\Delta} = \int_F y^2 dF = F i_{\Delta}^2$$

Vì vậy:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{558,3}{36}} = 3,94 \text{ cm},$$

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{105,8}{36}} = 1,71 \text{ cm}.$$

Nghiệm của bài toán được giải bằng vòng tròn Mohr quán tính cho trên hình 5.6b.

Ví dụ 3

Một hình phẳng hình chữ Z có kích thước tính bằng cm như hình 5.7a. Hãy xác định trọng tâm, hệ trục và các mômen quán tính chính trung tâm.

GIẢI

Đối với mặt cắt không có trục đối xứng, muốn xác định mômen quán tính chính trung tâm, cần xác định các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm, rồi dùng công thức xoay trục của mômen quán tính để xác định hệ trục chính và các mômen quán tính chính trung tâm.

Xác định trọng tâm

Lấy gốc tọa độ tại trọng tâm của hình chữ nhật đứng, lập hệ trục x_0, y_0 , ta tính:

$$x_c = \frac{\sum S_{y_0}}{\sum F} = \frac{2.4(-3) + 6.2.4}{2.4 + 2.14 + 2.6} = 0,5 \text{ cm};$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x_0}}{\sum F} = \frac{4.2.6 + 6.2.(-6)}{2.4 + 14.2 + 2.6} = -0,5 \text{ cm}.$$

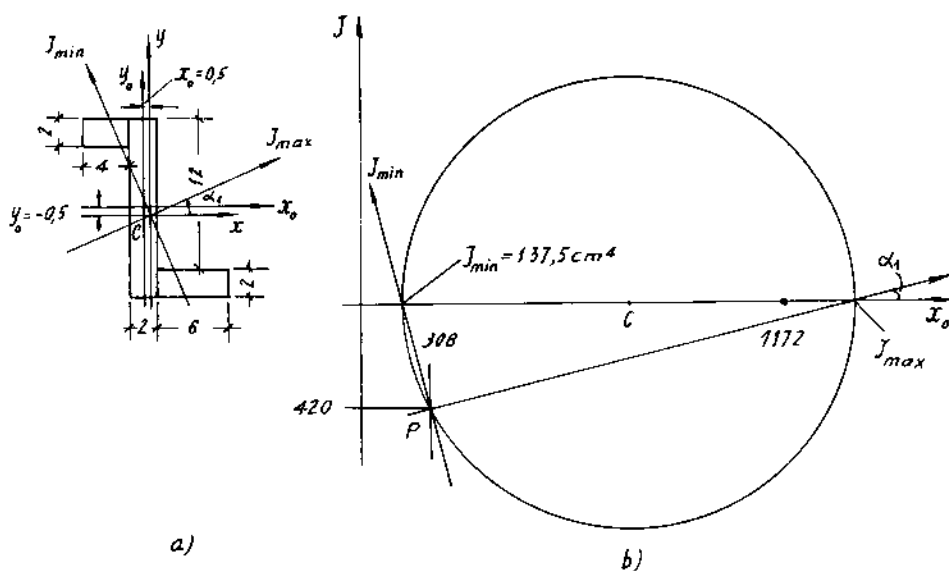
Lập hệ trục trung tâm xCy (hình 5.7a):

Tính các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm xCy:

$$J_x = \frac{6.2^3}{12} + 6.2.(5,5)^2 + \frac{2.14^3}{12} + 2.14(0,5)^2 - \\ - \frac{4.2^3}{12} + 2.4.(6,5)^2 = 1172 \text{ cm}^4.$$

$$J_y = \frac{2.6^3}{12} + 2.6.(3,5)^2 + \frac{14.2^3}{12} + 14.2(0,5)^2 + \\ + \frac{2.4^3}{12} + 2.4(3,5)^2 = 308 \text{ cm}^4.$$

$$J_{xy} = 2.6(3,5)(-5,5) + 14.2(-0,5)(-0,5) + 4.2(-3,5)(6,5) = -420 \text{ cm}^4.$$



Hình 5.7.

Tính mômen quán tính chính trung tâm:

Các mômen quán tính J_{max} , J_{min} và phương chính tính từ các công thức:

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1172 + 308}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1172 - 308}{2}\right)^2 + 420^2}$$

$$J_{\max} = 1342,5 \text{ cm}^4; J_{\min} = 137,5 \text{ cm}^4.$$

Phương chính $J_{\max}$ được xác định:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}} = \frac{-420}{308 - 1342,5} = 0,41; \alpha_1 = 22^\circ 20'$$

Vòng tròn quán tính và các phương chính được vẽ trên hình 5.7a, b.

Ví dụ 4

Một hình phẳng hình chữ Z có kích thước như hình 5.8. Hãy tính các mômen quán tính, hệ trục chính trung tâm.

GIẢI

Ta phải chia hình đã cho ra thành 3 hình đơn giản I, II, III.

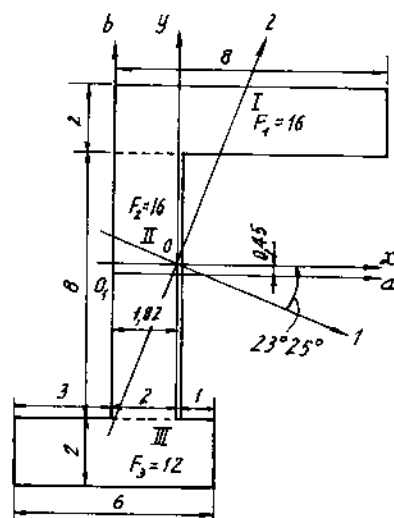
a) Xác định tọa độ trọng tâm

Lập hệ trục O_1a và O_1b . Trong đó O_1a đi qua trọng tâm hình II.

$$a_0 = \frac{16 \times 4 + 16 \times 1}{16 + 16 + 12} = 1,82 \text{ cm}$$

$$b_0 = \frac{16 \times 5 - 12 \times 5}{16 + 16 + 12} = 0,45 \text{ cm}$$

Từ a_0 , b_0 nhận được lập hệ trục trung tâm xOy như hình 5.8.



Hình 5.8.

b) Tính mômen quán tính đối với hệ trục xOy

$$J_x = \left(\frac{8 + 2^3}{12} + 4,55^2 \times 16 \right) + \left(\frac{2 \times 8^2}{12} + 0,45^2 \times 16 \right) + \\ + \left(\frac{6 \times 2^3}{12} + 5,45^2 \times 12 \right) = 785,6 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \left(\frac{2 + 8^3}{12} + 2,18^2 \times 16 \right) + \left(\frac{8 + 2^3}{12} + 0,82^2 \times 16 \right) + \left(\frac{2 \times 6^3}{12} + 1,82^2 \times 12 \right) \\ = 253,2 \text{ cm}^4.$$

c) Tính mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục xOy

$$J_{xy} = 4,55 \times 2,18 \times 16 + (-0,82) (-0,45) \times 16 + (-5,45) (-1,82) \times 12 \\ = 283,6 \text{ cm}^4.$$

d) Tính mômen quán tính chính:

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = \frac{785,6 + 253,2}{2} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{(785,6 - 253,2)^2 + 4 \times 283,6^2} = 908,2 \text{ cm}^4;$$

$$J_{\min} = 519,4 - 388,8 = 130,6 \text{ cm}^4.$$

e) Tính góc nghiêng của các trục chính

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2 \times 283,6}{785,6 - 253,2} = -1,065 \Rightarrow \alpha_0 = -23^\circ 25'$$

Hệ trục quán tính chính trung tâm 102 được cho trên hình 5.8.

CHƯƠNG 6

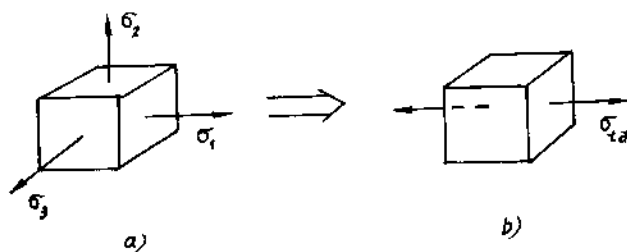
CÁC TIÊU CHUẨN BỀN VÀ DẪO

§1. NHIỆM VỤ VÀ CÁCH ĐẶT BÀI TOÁN LÝ THUYẾT BỀN

Việc đánh giá độ bền của các chi tiết máy hay các cấu kiện công trình đối với một trạng thái ứng suất đã biết là một bài toán quan trọng nhất của các tính toán kỹ thuật. Khác với trạng thái ứng suất đơn khi kéo (nén) việc đánh giá độ bền của các chi tiết chịu trạng thái ứng suất này (như đã làm ở chương 4) là rất đơn giản nhờ các kết quả thí nghiệm. Tuy nhiên đối với trạng thái ứng suất phức tạp, thí nghiệm đã chứng minh rằng cùng một loại vật liệu trạng thái nguy hiểm có thể xảy ra đối với những giá trị giới hạn khác nhau của các ứng suất chính $\sigma_{1,gh}$, $\sigma_{2,gh}$, $\sigma_{3,gh}$ phụ thuộc vào tỷ số giữa chúng. Vì thế việc xác định bằng thí nghiệm các giá trị giới hạn của các ứng suất chính là không thể vì, thứ nhất là chưa có những máy thí nghiệm đủ sức giải quyết được việc đó, thứ hai là khối lượng thí nghiệm quá lớn.

Một con đường khác giải quyết bài toán này là việc thiết lập các tiêu chuẩn bền (tiêu chuẩn về trạng thái ứng suất – biến dạng giới hạn). Để thiết lập các tiêu chuẩn bền người ta đưa ra những giả thuyết về các nhân tố có ảnh hưởng quyết định đến độ bền của vật

liệu và trên cơ sở đó thiết lập các quan hệ toán học để dẫn trạng thái ứng suất khảo sát về trạng thái ứng suất đơn tương đương với cùng một hệ số an toàn (hình 6.1a, b).



Hình 6.1.

Việc xác định chính xác nguyên nhân phá hủy vật liệu hay nguyên nhân chuyển nó vào trạng thái ứng suất giới hạn là một bài toán rất khó, cho đến nay vẫn còn chưa được giải quyết đầy đủ. Điều này đã không cho phép tạo ra một tiêu chuẩn bền duy nhất. Và, vì vậy đã có rất nhiều thuyết về trạng thái ứng suất biến dạng giới hạn được đề xuất như: tiêu chuẩn bền theo ứng suất pháp lớn nhất. Thuyết này cho rằng “Biến dạng dẻo hay sự phá hủy của các vật liệu giòn xuất hiện khi ứng suất chính lớn nhất về trị tuyệt đối đạt được giá trị giới hạn nào đó”.

Tiêu chuẩn bền về biến dạng dài lớn nhất lại thừa nhận rằng “Sự phá hủy hay sự chảy dẻo của vật liệu được bắt đầu khi biến dạng dài lớn nhất về trị tuyệt đối đạt được giá trị giới hạn nào đó”.

Các tiêu chuẩn bền và dẻo dựa trên quan điểm năng lượng như thuyết của Benterami, thì thừa nhận rằng “Vật liệu chuyển vào trạng thái dẻo hoặc giòn khi năng lượng biến dạng riêng toàn phần đạt được một giá trị giới hạn nào đó”. Theo tiêu chuẩn bền và dẻo của Slăyher thì “đối với vật liệu có khả năng chịu kéo và nén khác nhau thì giá trị của năng lượng biến dạng toàn phần với điều kiện giá trị giới hạn của nó không thể là một đại lượng hằng mà là hàm nào đó của ứng suất trung bình được thừa nhận làm tiêu chuẩn bền của vật liệu”.

Ngoài ra còn các tiêu chuẩn bền và dẻo như của Balandin, của Mirolubov, của Genhiev và Kixiuk v.v. Tuy nhiên thực tiễn cho thấy ba tiêu chuẩn bền và dẻo dưới đây cho kết quả phù hợp với thực nghiệm và được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật. Đó là các tiêu chuẩn: theo ứng suất tiếp lớn nhất, thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất và tiêu chuẩn của Mo. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn này.

§2. CÁC TIÊU CHUẨN BỀN ỨNG DỤNG CỦA VẬT LIỆU ĐẲNG HƯỚNG

1. Tiêu chuẩn bền và dẻo của Tơrexơ (thuyết bền thứ III)

Thuyết này được xây dựng trên cơ sở của giả thuyết “Biến dạng dẻo của kim loại và hợp kim hình thành khi ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ đạt được giá trị giới hạn nào đó”.

Qua các thí nghiệm trên kim loại và hợp kim Tơrexơ nhận thấy trạng thái dẻo của vật liệu phát sinh khi hiệu của σ_1 và σ_3 đạt đến một giới hạn nhất định. Hiệu của σ_1 và σ_3 lại bằng hai lần trị số ứng suất tiếp cực đại cho nên điều kiện dẻo của Tơrexơ cũng còn được gọi là điều kiện dẻo về ứng suất tiếp cực đại. Điều kiện đó được viết như sau:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ch}$$

σ_{ch} là một giới hạn chảy của vật liệu được xác định bằng thí nghiệm của trạng thái ứng suất đơn.

Như vậy để vật liệu làm việc trong miền đàn hồi với một hệ số an toàn nhất định ta phải có điều kiện:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.1)$$

Điều kiện đó thường được gọi là *điều kiện bền theo ứng suất tiếp lớn nhất hay thuyết bền thứ III*.

Đối với trạng thái ứng suất phẳng thì từ điều kiện (6.1) sau khi thay vào trong nó biểu thức ứng suất chính ta có:

$$\sigma_{T3} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma] \quad (6.2)$$

Đối với trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt thì $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$, σ_{T3} có dạng:

$$\sigma_{T3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (6.3)$$

2. Tiêu chuẩn bền và dẻo của Huybe - Midet - Henkin (thuyết bền thứ IV)

Thuyết này cho rằng “Vật liệu sẽ bị phá hủy tại một phân tố nào đó khi thế năng riêng biến đổi hình dáng ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới giá trị giới hạn ở trạng thái ứng suất đơn”.

Theo thuyết này chỉ có phần thế năng riêng tích lũy do sự biến đổi hình dáng của phân tố là nguyên nhân gây ra trạng thái ứng suất giới hạn.

Trong trường hợp trạng thái ứng suất đơn thì theo công thức (3.48) thế năng biến đổi hình dáng là:

$$u_h = \frac{(1+\mu)\sigma^2}{3E}$$

Điều kiện để thế năng riêng biến đổi hình dáng trong trường hợp này đạt được giá trị giới hạn là:

$$u_h = \frac{(1+\mu)\sigma^2}{3E} = \frac{(1+\mu)\sigma_{ch}^2}{3E} \quad (6.4)$$

Vì vậy trong trường hợp tổng quát của trạng thái ứng suất, điều kiện dẻo và do đó là điều kiện bền của phân tố là:

$$\sigma_{T4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.5)$$

hay:

$$\sigma_{T4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \sigma(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.6)$$

Đối với trạng thái ứng suất phẳng tổng quát (khi $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$) công thức (6.6) có dạng:

$$\sigma_{T4} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.7)$$

Khi $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$, $\sigma_z = \sigma$, $\tau_{zy} = \tau$ công thức (6.7) trở thành:

$$\sigma_{T4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.8)$$

Biểu thức ở vế trái (6.5), (6.6) là trị số của thế năng biến đổi hình dạng sai kém một hằng số tỷ lệ. Vì vậy điều kiện (6.5), (6.6) còn được gọi là điều kiện bền theo thế năng biến đổi hình dáng. Khi thế năng đó đạt đến một giá trị nhất định thì vật liệu chuyển vào giai đoạn chảy và ta xem như kết cấu không sử dụng được nữa.

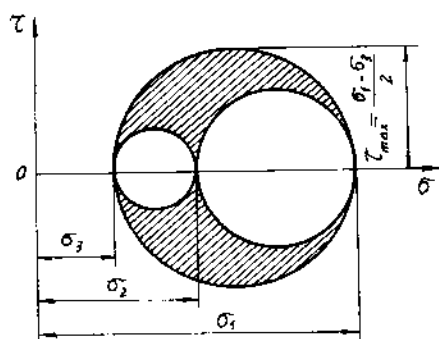
Cần lưu ý rằng các tiêu chuẩn dẻo và bền thứ ba và thứ tư chỉ phù hợp tốt với các vật liệu có tính dẻo đã được thí nghiệm và thực tế kỹ thuật khẳng định.

3. Tiêu chuẩn bền của Mo

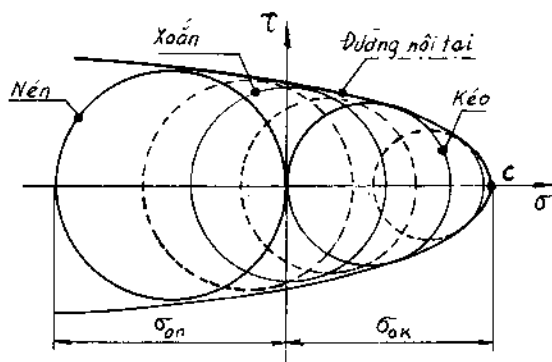
Trong tiêu chuẩn của Mo khác với các thuyết đã giới thiệu, Mo đã không sử dụng một giả thuyết nào về nguyên nhân gây ra trạng thái ứng suất giới hạn, mà thiết lập các thuộc tính bền của vật liệu từ những số liệu thí nghiệm đơn giản và các vòng tròn ứng suất do chính Mo đề ra. Như đã biết vòng tròn Mo đối với trạng thái ứng suất khối có dạng hình 6.2.

Tuy nhiên trong các thí nghiệm, ảnh hưởng của σ_2 đã không được kể đến và các thuộc tính bền của vật liệu, do đó chỉ liên quan đến σ_1 và σ_3 . Vì vậy, từ ba vòng tròn, Mo đã khảo sát chỉ một vòng tròn lớn nhất. Vòng tròn này được gọi là vòng tròn chính và được gọi

là vòng tròn giới hạn nếu trạng thái ứng suất khảo sát là trạng thái ứng suất giới hạn.



Hình 6.2.



Hình 6.3.

Hai giả thuyết thứ ba và thứ tư đều bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất cầu đến giới hạn dẻo của vật liệu. Vào năm 1880, Mo đã chỉ ra rằng khi một vật thể chịu kéo theo các phương như nhau, lực không thể tăng lên vô hạn được. Nếu ta biểu diễn các trạng thái ứng suất bằng những vòng tròn Mo ứng suất trong tọa độ σ , τ thì chắc chắn ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn về phía dương của trục σ (điểm c) tượng trưng cho trạng thái kéo đều theo các phương) mà khi đó vật liệu đã bắt đầu có biến dạng dẻo (hình 6.3).

Thực hiện nhiều thí nghiệm khác nhau với các trạng thái ứng suất khác nhau ta sẽ được các vòng Mo giới hạn, nghĩa là những vòng Mo tương ứng với trạng thái ứng suất đã bắt đầu có biến dạng dẻo. Đường bao của những vòng Mo đó được gọi là đường nội tại. Một cách gần đúng đường nội tại có thể xem như hai đường tiếp tuyến với hai vòng Mo giới hạn của trạng thái kéo đơn và nén đơn (hình 6.4). Một trạng thái ứng suất khảo sát nào đó, mà vòng Mo của nó tiếp xúc với đường nội tại này là trạng thái ứng suất giới hạn ở điểm khảo sát.

Giả sử một trạng thái ứng suất nào đó có σ_1 và σ_3 là một trạng thái giới hạn, nghĩa là vòng tròn ứng suất tiếp xúc với đường nội tại, tại C (hình 6.4). Ta hãy tìm mối tương quan giữa σ_1 và σ_3 với các giới hạn chảy khi kéo và khi nén. Gọi A và B là các điểm tiếp xúc của các vòng

tròn giới hạn khi kéo và nén với đường nội tại. Kẻ các đường song song với trục hoành từ A và từ C. Các đường đó cắt O_2B tại K và l. Từ điều kiện đồng dạng của tam giác ta có:

$$\frac{Bl}{BK} = \frac{Cl}{AK} \quad (a)$$

Nếu gọi k là tỷ số giữa $\sigma_{k,gh}$ khi kéo và $\sigma_{n,gh}$ khi nén, sau khi tính các độ dài Bl, BK, Cl, AK và thay vào (a) ta được:

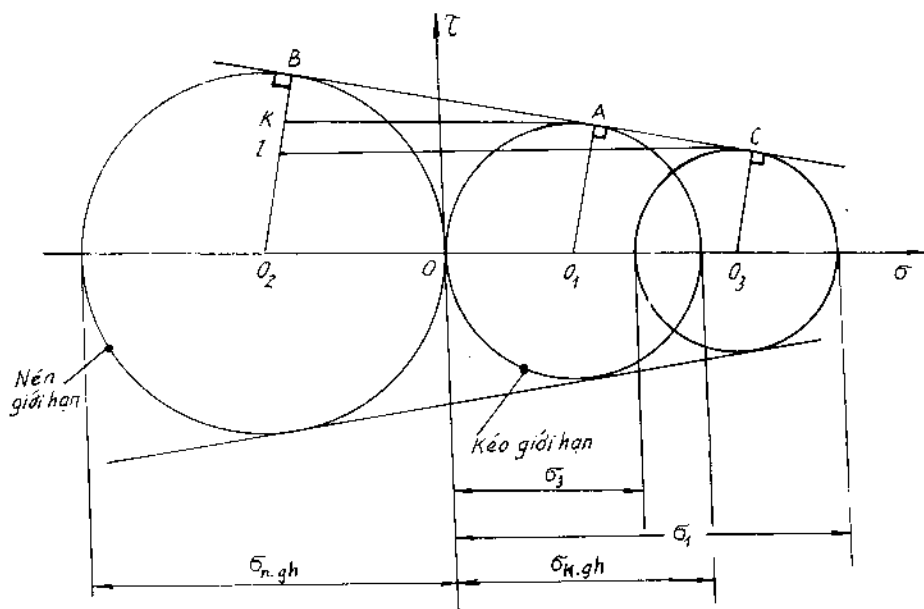
$$\sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{ch}$$

Như vậy để đạt được điều kiện vừa bền vừa an toàn ta phải có:

$$\sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma] \quad (6.9)$$

trong đó $[\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$

Thuyết bền này được áp dụng rộng rãi đối với vật liệu giòn vì vật liệu này có giới hạn bền khi kéo và khi nén khác nhau và ngay cả vật liệu dẻo (vật liệu có tính dẻo).



Hình 6.4.

Ta nhận thấy khi $K = \frac{\sigma_{k,gh}}{\sigma_{n,gh}} = 1$ thì tiếp tuyến AB song song với

trục hoành Oσ và điều kiện (6.9) trùng với thuyết bền thứ III.

Cuối cùng cần chú ý rằng tiêu chuẩn bền của Mo cho kết quả rất tin cậy đối với các trạng thái ứng suất mà vòng Mo của chúng nằm giữa hai vòng tròn chính kéo và nén.

§3. CÁC TIÊU CHUẨN BỀN VÀ DẪO CỦA VẬT LIỆU DỊ HƯỚNG

Khác với vật liệu đẳng hướng, giới hạn bền và chảy của các vật liệu dị hướng không phải là những đại lượng vô hướng, vì theo các hướng khác nhau thì các giới hạn này khác nhau. Đặc điểm này làm cho việc nghiên cứu thiết lập các tiêu chuẩn bền và dẻo đối với các vật liệu dị hướng trở nên rất phức tạp.

Cũng như các vật liệu đẳng hướng, ngày nay đối với vật liệu dị hướng đang tồn tại rất nhiều tiêu chuẩn bền và dẻo khác nhau như các tiêu chuẩn của Phiserơ, của Zakharôv, của Marin, của Zucôv, của Midetkhil, của Catranôv v.v. Để giúp bạn đọc sử dụng các tiêu chuẩn bền và dẻo đối với vật liệu dị hướng, dưới đây chúng tôi giới thiệu một số công thức tính toán trên cơ sở của lý thuyết bền tổng quát của những vật liệu này với những dạng khác nhau của trạng thái ứng suất phức tạp. Các công thức này được sử dụng chỉ với các vật liệu mà các hằng số bền của chúng thỏa mãn điều kiện tương thích:

$$\frac{1}{\sigma_1^k} - \frac{1}{\sigma_2^k} - \frac{1}{\sigma_1^n} + \frac{1}{\sigma_2^n} = \frac{1}{\tau_{b45}^+} - \frac{1}{\tau_{b45}^-} \quad (6.10)$$

Các điều kiện bền cho trong “Bảng các công thức tính toán” được viết trong hệ tọa độ cơ bản. Nghĩa là hệ tọa độ mà các trục của nó trùng với các trục đối xứng của các tính chất cơ học của vật liệu dị hướng. Các đại lượng trong (6.10) và trong “Bảng các công thức tính toán” được hiểu là:

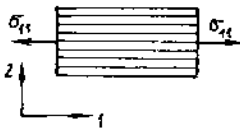
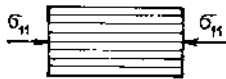
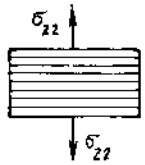
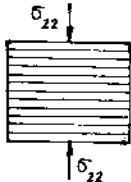
σ_1^k là giới hạn bền kéo của vật liệu dị hướng có khả năng chịu kéo và nén khác nhau;

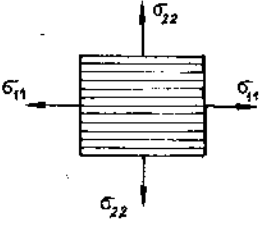
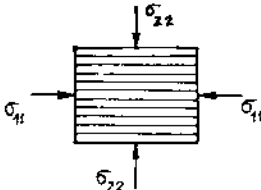
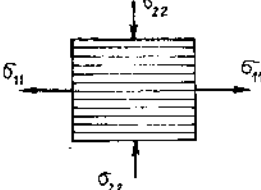
σ_1^n là giới hạn bền khi nén của vật liệu dị hướng có khả năng chịu kéo, nén khác nhau;

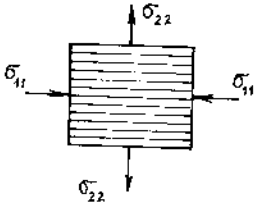
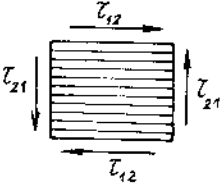
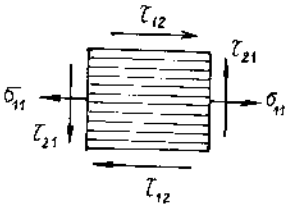
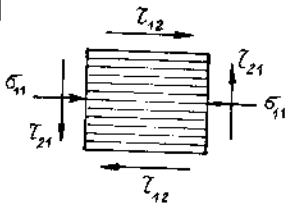
τ_{b45}^+ , τ_{b45}^- là giới hạn bền khi trượt trên mặt nghiêng 45° so với các phương cơ bản.

σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} là các thành phần ứng suất viết trong hệ tọa độ Đêcác đánh số.

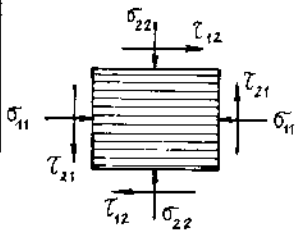
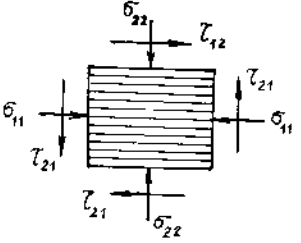
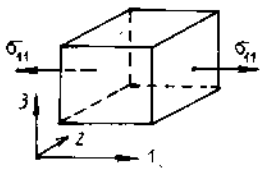
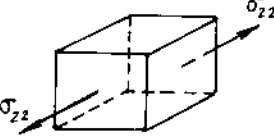
Bảng các công thức tính toán

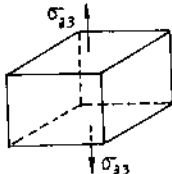
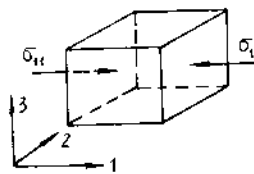
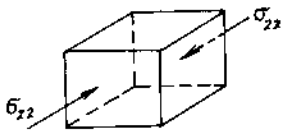
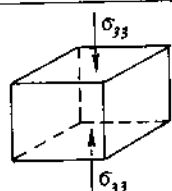
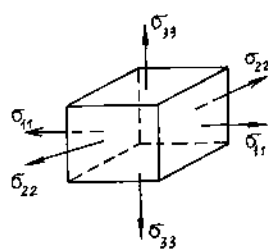
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
1		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^k$
2		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^n$
3		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^k$
4		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^n$

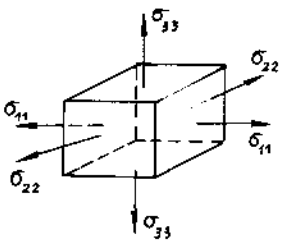
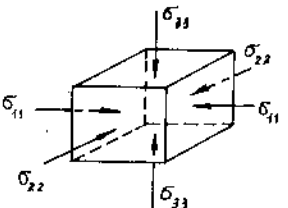
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
5		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right.$ $\left. + \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right.$ $\left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
6		$- \frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} - \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right.$ $\left. + \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right.$ $\left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
7		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \right.$ $\left. - \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right.$ $\left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$

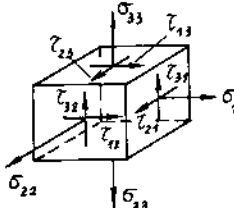
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
8		$\frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \right.$ $- \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right.$ $\left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{12} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
9		$\tau_{12} \leq \tau_{B0}$
10		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} +$ $+ \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$
11		$\frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} +$ $+ \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$

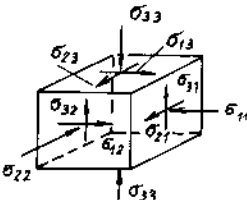
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
12		$\frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^n \sigma_2^k} \sigma_{22} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$
13		$\frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^n \sigma_2^k} \sigma_{22} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$
14		$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^n \sigma_2^k} \sigma_{22} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right. \\ & + \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned}$
15		$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \right. \\ & - \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned}$

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
16		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \right.$ $\left. - \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right.$ $\left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
17		$\frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} - \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right.$ $+ \left[\left(\frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right.$ $\left. \left. - \left(\frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
18		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^k$
19		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^k$

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
20		$\sigma_{33} \leq \sigma_3^k$
21		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^n$
22		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^n$
23		$\sigma_{33} \leq \sigma_3^n$
24		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^n \sigma_2^k} \sigma_{22} + \frac{\sigma_3^n - \sigma_3^k}{2\sigma_3^k \sigma_3^n} \sigma_{33} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right) \sigma_{22}^2 + \right.$ $+ \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right) \sigma_{33}^2 + \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \right.$ $+ \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right)^2 \left. \right] \sigma_{11} \sigma_{22} +$ $+ \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right.$

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
24		$ \begin{aligned} & - \left[\left(\frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{33} + \\ & + \left[\left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} \Big\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned} $
25		$ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^n} + \frac{1}{\sigma_1^k} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{\sigma_2^n} - \frac{1}{\sigma_2^k} \right) \sigma_{22} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{\sigma_3^n} - \frac{1}{\sigma_3^k} \right) \sigma_{33} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \right. \\ & + \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 \sigma_{33}^2 + \\ & + \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \right. \\ & + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{33} + \\ & + \left[\left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} \Big\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned} $

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
26		$ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} - \frac{1}{\sigma_1^n} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{\sigma_2^k} - \frac{1}{\sigma_2^n} \right) \sigma_{22} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} - \frac{1}{\sigma_3^n} \right) \sigma_{33} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 \sigma_{33}^2 + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \left[\left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{33} + \right. \\ & \left. + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{12(0)}^2} + \frac{4\tau_{13}^2}{\tau_{13(0)}^2} + \frac{4\tau_{23}^2}{\tau_{23(0)}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned} $

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
27		$ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^n} - \frac{1}{\sigma_1^k} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{\sigma_2^n} - \frac{1}{\sigma_2^k} \right) \sigma_{22} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\sigma_3^n} - \frac{1}{\sigma_3^k} \right) \sigma_{33} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 \sigma_{33}^2 + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \left[\left(\frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{33} + \right. \\ & \left. + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{12(0)}^2} + \frac{4\tau_{13}^2}{\tau_{13(0)}^2} + \frac{4\tau_{23}^2}{\tau_{23(0)}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned} $

CHƯƠNG 7

XOẮN THANH THẲNG

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ KHÁI NIỆM

Một thanh chịu xoắn thuần túy là thanh mà trên mọi mặt cắt ngang chỉ có duy nhất một thành phần nội lực là ngẫu lực xoắn có mômen M_x (còn gọi là mômen xoắn nội lực quanh trục x).

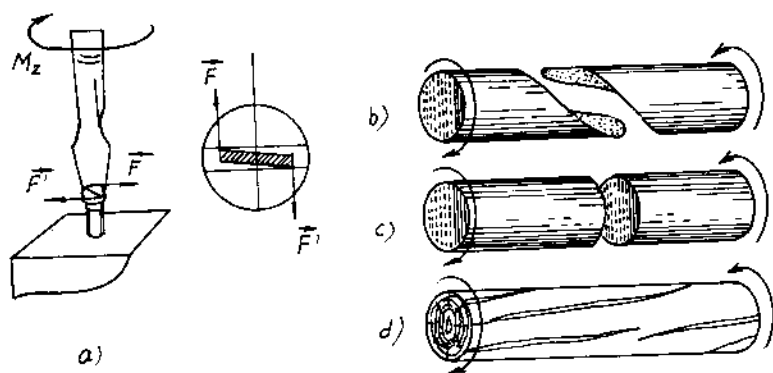
Các chi tiết chịu biến dạng xoắn được cho trên hình 7.1a, b, c, d lần lượt là: tuốcơ vít chịu xoắn đàn hồi, thanh làm bằng vật liệu giòn bị phá hủy theo mặt xoắn ốc, thanh làm bằng vật liệu dẻo bị phá hủy theo mặt cắt ngang dưới dạng cắt, thanh bằng gỗ bị phá hủy do xoắn dọc theo các thớ dọc.

Trên hình 7.2 là bức tranh biến dạng trong miền đàn hồi của thanh tròn chịu xoắn.

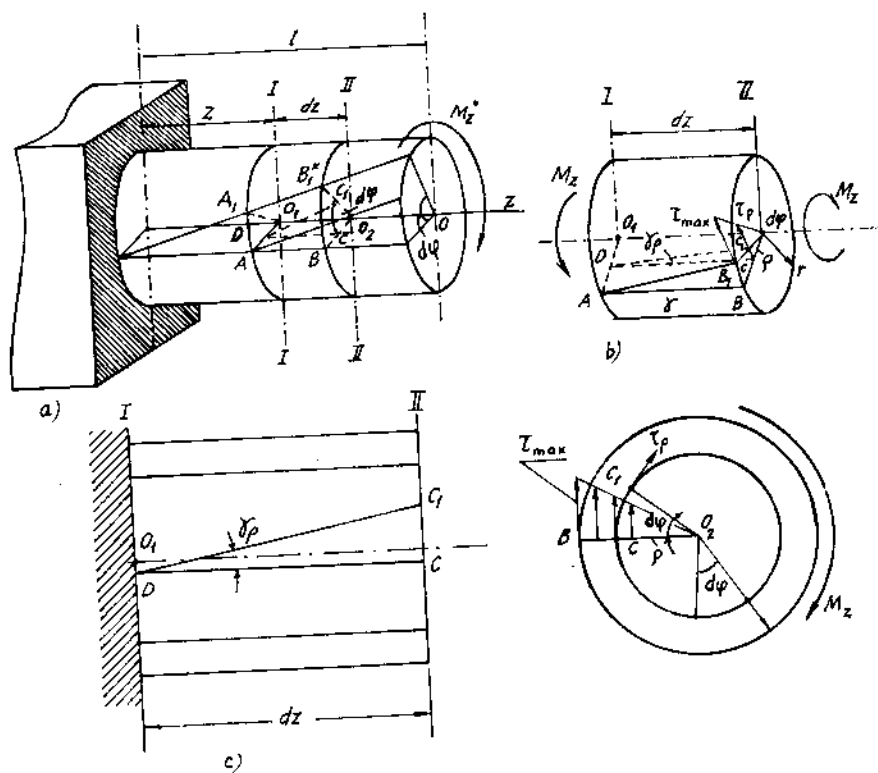
Khi tác dụng ngoài đặt lên các trục quay được cho bởi thông số vận tốc góc n (vg/ph) và công suất N (W) thì mômen xoắn ngoài tác dụng lên trục quay được quy đổi theo công thức:

$$M^* = \frac{N}{\omega} = 9,55 \frac{N}{n}, \text{ Nm.} \quad (7.1a)$$

ω – là vận tốc góc tính bằng 1/s.



Hình 7.1.



Hình 7.2.

hoặc là:

$$M^* = 97360 \frac{N}{n}, \text{ daNcm} \quad (7.1b)$$

N – là công suất tính bằng kW.

Nếu công suất đo bằng mã lực thì công thức trên có dạng:

$$M_z' = 7162 \frac{N}{n}, \text{ Nm} \quad (7.2)$$

§2. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Từ các kết quả nghiên cứu thí nghiệm xoắn đối với các loại vật liệu khác nhau, các nhà khoa học đã đúc kết thành các giả thiết sau đây:

1. Các giả thiết tính toán

- Tập hợp các chất điểm trước biến dạng nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh, ở trạng thái biến dạng vẫn nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh. Vắn tắt hơn, các mặt cắt ngang luôn luôn phẳng, vì biến dạng bé nên khoảng cách giữa các mặt cắt ngang coi như không thay đổi.

- Tập hợp các chất điểm trên mặt cắt vuông góc với trục thanh là hình phẳng rắn tuyệt đối, cụ thể hơn là các bán kính của mặt cắt ngang luôn luôn thẳng, có độ dài không đổi và làm thành những góc không đổi trong quá trình biến dạng.

2. Ứng suất và biến dạng

Các giả thiết trên cho thấy trạng thái ứng suất của phân tố được tách ra quanh điểm “C” hình 7.2 là trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Vì thế trên các mặt cắt ngang của thanh (hình 7.2) chỉ có biến dạng trượt thuần túy. Khi đó bán kính ρ tại điểm C của mặt cắt bị xoay đi một góc $d\varphi$, điểm C trên mặt cắt rời tới vị trí mới C_1 . Do đó trên mặt cắt ngang (vuông góc với trục z) chỉ có ứng suất tiếp τ_ρ , ứng suất này vuông góc với bán kính ρ tại C.

Gọi γ_ρ và τ_ρ là góc trượt (độ trượt tương đối), ứng suất trượt tại điểm C (ứng với bán kính ρ), $d\varphi$ là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt chỉ cách nhau một đoạn dz . Ta thấy từ (hình 7.2c):

$$\gamma_\rho \approx \operatorname{tg} \gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho d\varphi}{dz} \quad (a)$$

Theo định luật Húc (3.32) đối với trạng thái biến dạng trượt thuần túy thì quan hệ $\tau = f(\gamma)$ là:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho \quad (b)$$

Khi thu gọn hệ ứng suất $\{\tau_\rho\}$ về tâm mặt cắt ta được:

$$\int_F \rho \tau_\rho dF = M_z \quad (c)$$

Kế đến (b) thì công thức (c) trở thành:

$$G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} J_p = M_z \quad (d)$$

Từ (d) ta có phương trình vi phân của góc xoắn $\varphi(z)$ như sau:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (7.3)$$

trong đó:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \text{ trong (d) và (7.3) được gọi là mômen quán tính độ}$$

cực của mặt cắt ngang đối với trọng tâm mặt cắt.

Đại lượng $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ được gọi là góc xoắn tỷ đối của mặt cắt ngang tại hoành độ z .

G là môđun đàn hồi trượt của vật liệu.

Khi thay (7.3) vào (b) ta được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm C bất kỳ trên mặt cắt ngang:

$$\tau_\rho = G\theta\rho = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (7.4)$$

Công thức (7.4) cho ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo quy luật bậc nhất dọc theo bán kính ρ . Khi $\rho = R$, ứng suất có giá trị lớn nhất:

$$\tau_{\max} = G\theta R = \frac{M_z}{\frac{J_p}{R}} = \frac{M_z}{W_p} \quad (7.5)$$

trong đó:

R – bán kính mặt cắt ngang của thanh;

$W_p = J_p/R$ – mômen chống xoắn của mặt cắt ngang của thanh.

§3. ĐIỀU KIỆN BỀN - ĐIỀU KIỆN CỨNG

1. Điều kiện bền – ba bài toán thường gặp

Tương tự các bài toán thường gặp khi kéo (nén), trong trường hợp bài toán xoắn ta cũng có ba bài toán sau đây:

a) Bài toán kiểm tra điều kiện bền

Mục đích của bài toán là kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau] \quad (7.6)$$

Trong (7.6), $[\tau]$ được gọi là ứng suất tiếp cho phép.

b) Bài toán thiết kế

Đó là bài toán chọn mặt cắt ngang sao cho thỏa mãn bất đẳng thức:

$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]} \quad (7.7)$$

Cụ thể hơn, đối với thanh mặt cắt ngang tròn đường kính D :

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2[\tau] \cdot (1-\eta^4)}} \quad (7.7a)$$

trong đó: $\eta = \frac{d}{D}$, d và D là đường kính trong và ngoài của mặt cắt,

$\eta = 0$ ứng với thanh có mặt cắt tròn đặc.

c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z = f(z, P) \leq W_p [\tau] \quad (7.8)$$

Mômen xoắn nội lực M_z trong (7.8) là hàm được xác định theo tải trọng ngoài và hoành độ z . Quan hệ này cho phép suy ra tải trọng ngoài tác dụng lên hệ.

2. Điều kiện cứng – Ba bài toán thường gặp

Nếu gọi $[\theta]$ và $[\varphi]$ là góc xoắn tỷ đối và góc xoắn tuyệt đối cho phép của thanh thì tương tự thanh chịu kéo (nén) ta có ba bài toán sau đây theo điều kiện cứng:

a) Bài toán kiểm tra điều kiện cứng

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad \text{và} \quad \varphi_{\max} \leq [\varphi] \quad (7.9)$$

b) Bài toán thiết kế

$$J_p \geq \frac{M_z}{G[\theta]} \quad (7.10)$$

$$\text{Cụ thể hơn:} \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{0,1 \cdot [\theta] \cdot (1 - \eta^4) G}} \quad (7.11)$$

c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z = f(z, P) \leq G J_p [\theta] \quad (7.12)$$

Để có thể thực hiện được các tính toán theo các công thức từ (7.3) cho đến (7.12) ta phải biết trước quy luật biến thiên của các hàm $M_z(z)$ và $\varphi_z(z)$. Dưới đây ta sẽ giải quyết nội dung rất quan trọng này.

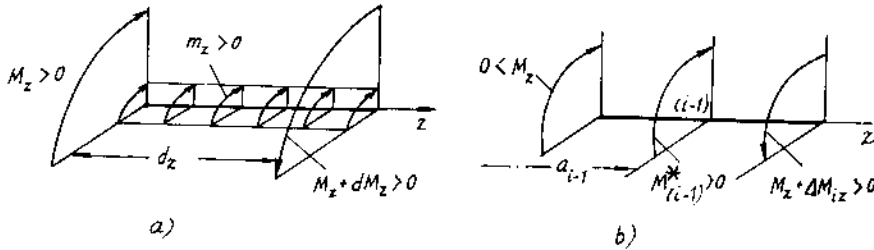
§4. CHUYỂN VỊ, NỘI LỰC VÀ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHÚNG

1. Các quan hệ vi phân giữa chuyển vị, nội lực và tải trọng ngoài

Ta hãy khảo sát điều kiện cân bằng của một đoạn thanh có chiều dài dz (hình 7.3a,b) như đã làm ở §12 chương 1. Kết quả của việc khảo sát cân bằng và các đạo hàm liên tiếp sau đó cho ta quan hệ

(7.13). Bằng cách đạo hàm liên tiếp theo z hai vế phương trình (7.3) ta nhận được quan hệ (7.14):

$$\begin{aligned} \Delta M_{iz} &= M_{(i-1)}^* = M_{oi}^+ & \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{M_z(z)}{G_i J_{pi}} \\ \frac{dM_z}{dz} &= m_z(z) & \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= \frac{m_z(z)}{G_i J_{pi}} & (7.14) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^n M_z}{dz^n} &= m_z^{(n-1)}(z) & \frac{d^n \varphi}{dz^n} &= \frac{m_z^{(n-2)}(z)}{G_i J_{pi}} \end{aligned}$$



Hình 7.3.

2. Cách xác định $M_z(z)$ và $\varphi_z(z)$ bằng phương pháp mặt cắt và tích phân trực tiếp

Việc xác định biểu thức và biểu đồ mômen xoắn $M_z(z)$ có thể được thực hiện bằng phương pháp mặt cắt như đã nghiên cứu kỹ ở chương 1. Tuy nhiên phương pháp này không thể sử dụng để tính chuyển vị (góc xoắn) $\varphi_z(z)$ được mà phải tích phân trực tiếp phương trình vi phân (7.3). Cụ thể là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đoạn l là:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z(z) dz}{GJ_p(z)} \quad (7.15)$$

Khi tỷ số $\frac{M_z}{GJ_p}$ = hằng với mọi $0 \leq z \leq l$ thì (7.15) trở thành:

$$\varphi = \theta.l = \frac{M_z l}{GJ_p} \quad (7.16)$$

Để xác định đồng thời mômen xoắn $M_z(z)$ và chuyển vị góc $\varphi_z(z)$ với cùng một công thức thuật toán duy nhất và tránh được phép tính tích phân (7.15) thì thuận lợi nhất là sử dụng phương pháp vụn năng được giới thiệu dưới đây và rút ra từ trường hợp tổng quát đã xây dựng ở §3 chương 4 với sơ đồ tính hình 7.4.

3. Phương pháp vụn năng

a) Dạng ma trận

Theo phương pháp vụn năng vectơ các đại lượng cần tính trong bài toán này gồm hai thành phần là góc xoắn $\varphi_z(z)$ và mômen xoắn $M_z(z)$ được xác định theo các công thức tổng (4.1), (4.16) đã thiết lập trong §3 của chương 4 với sơ đồ tính như hình 7.4.

$$\bar{S}_i(z) = [B_i][B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_i][B_{i-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} + \dots + [B_i] \Delta \bar{S}_{0i} \quad (7.17)$$

$$\bar{S}_i^*(a_i) = [B_i^*][B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_i^*][B_{i-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} + \dots + [B_i^*] \Delta \bar{S}_{0i}$$

$$i = \overline{1, n} \quad (7.18)$$

trong đó:

$$\Delta \bar{S}_{0i} = \left\{ \Delta \varphi_{0i}, M_{0i}^*, \Delta m_{0i}, \Delta m'_{0i}, \Delta m''_{0i} \dots \right\}^T; \quad (7.19)$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_2}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_3}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_4}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_5}{G_i J_{pi}} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \dots \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$\bar{S}_i(z) = \bar{S}_i = \begin{Bmatrix} \varphi_i(z) \\ M_i(z) \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\Phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{với } z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{với } 0 \leq z \leq a_{i-1} \end{cases} \quad (7.22)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

G_i – môđun đàn hồi trượt của vật liệu của đoạn thanh i ;

J_{pi} – mômen quán tính độ cực của mặt cắt ngang đối với trọng tâm mặt cắt ngang thuộc đoạn i ;

$\Delta\varphi_{O_i}$ – bước nhảy của góc xoắn bổ sung ở đầu trái đoạn i ;

$M^*_{O_i}$ – mômen xoắn ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn i ;

$\Delta m_{O_i}, \Delta m'_{O_i}, \Delta m''_{O_i}$ – lần lượt là bước nhảy của mômen xoắn ngoại lực phân bố và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của nó ở đầu trái đoạn i có hoành độ $z = a_{i-1}$ (hình 7.4).

b) Dạng biểu diễn tổng

$$\left. \begin{aligned} a/ \varphi_m(z) &= \sum_{i=1}^{m=\overline{1,n}} \left(\Delta\varphi_{O_i} \Phi_0 + M^*_{O_i} \frac{\Phi_1}{GJ_p} + \Delta m_{O_i} \frac{\Phi_2}{GJ_p} + \Delta m'_{O_i} \frac{\Phi_3}{GJ_p} + \dots \right) \\ b/ M_m(z) &= \sum_{i=1}^{m=\overline{1,n}} (M^*_{O_i} \Phi_0 + \Delta m_{O_i} \Phi_1 + \Delta m'_{O_i} \Phi_2 + \Delta m''_{O_i} \Phi_3 \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

với $l_i \neq \text{const}$ và $G_i J_{pi} = \text{const}$ với $\forall i$. Nếu thanh có cấu tạo liên tục thì $\Delta\varphi_{O_i} = 0$ với $\forall i > 1$.

Trong (7.23) $\Delta\varphi_{O_i}$ là bước nhảy của góc xoắn ở đầu trái đoạn “ i ”.

$M^*_{O_i}$ là mômen xoắn ngoại lực tập trung ở “ O_i ” có hoành độ $z = a_{i-1}$.

$\Delta m_{O_i}, \Delta m'_{O_i}, \Delta m''_{O_i} \dots$ lần lượt là bước nhảy của mômen xoắn ngoại lực phân bố và của các đạo hàm các cấp của nó ở “ O_i ” có hoành độ $z = a_{i-1}$.

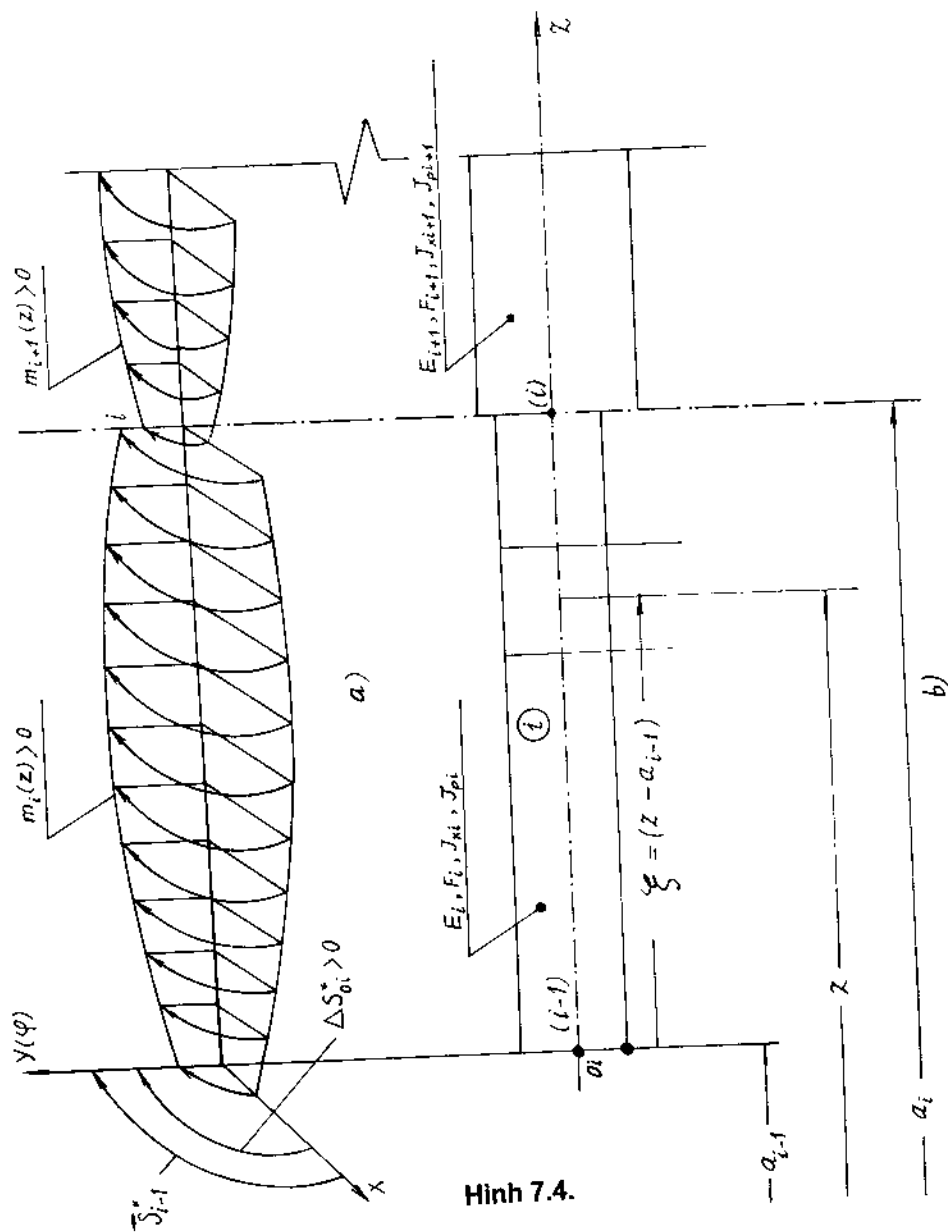
$m = \overline{1,n}$ là tên gọi của đoạn thanh thứ m trên đó cần tính $\bar{S}_m(z)$.

Cần nhấn mạnh rằng trong các công thức từ (7.17) đến (7.23):

- $\Delta\varphi_{O_i}, M^*_{O_i}, \Delta m_{O_i}, \Delta m'_{O_i}, \Delta m''_{O_i}$ v.v. lần lượt là bước nhảy của góc xoắn, mômen xoắn ngoại lực tập trung, bước nhảy của mômen xoắn phân bố và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của mômen xoắn phân bố ở đầu trái đoạn thứ i tức là ở mặt cắt $(i-1)$ có hoành độ $z = a_{i-1}$ và được tính theo quy tắc thông thường của toán học:

$$\Delta\varphi_{Oi} = \varphi_{Oif} - \varphi_{Oitr} ; \Delta m_{Oi} = m_{Oif} - m_{Oitr} ,$$

$$\Delta m'_{Oi} = m'_{Oitr} - m'_{Oif} ; \Delta m''_{Oi} = m'_{Oif} - m''_{Oitr} \text{ v.v.}$$



Hình 7.4.

- $G_p J_p$ là độ cứng của mặt cắt ngang của thanh khi xoắn.
- $[B_i]$ là ma trận biến đổi với các phần tử hàng thuộc đoạn i nhận được khi thay $z - a_{i-1} = a_i - a_{i-1} = l_i$ vào ma trận $[B_i]$.

Việc tính toán các nội lực và chuyển vị bằng thuật toán của phương pháp vụn năng nói trên đã được tự động hoá trên chương trình BK45 với một lớp rất rộng các bài toán Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu. Sơ đồ thuật toán chương trình BK45 và cách sử dụng chương trình được cho ở chương 8.

§5. XOẮN THANH MẶT CẮT NGANG KHÔNG TRÒN

1. Thanh mặt cắt ngang chữ nhật

Đối với các thanh có mặt cắt ngang không tròn, sau khi bị xoắn các mặt cắt không còn phẳng nữa mà bị vênh đi. Những nghiên cứu sâu hơn của cơ học vật rắn biến dạng cho thấy trên mặt cắt ngang của thanh cũng chỉ có ứng suất tiếp. Đối với thanh mặt cắt ngang chữ nhật, luật phân bố ứng suất tiếp được biểu diễn trên hình 7.5.

Ứng suất ở các điểm biên của mặt cắt phân bố không đều dọc theo chiều dài của các cạnh. Điểm giữa của cạnh dài có ứng suất lớn nhất $\tau_{\max}$. Cụ thể là:

– Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh dài:

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} \quad (7.24)$$

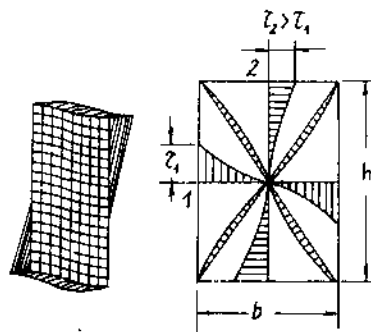
– Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh ngắn:

$$\tau_2 = \gamma \tau_1 \quad (7.25)$$

– Góc xoắn tương đối:

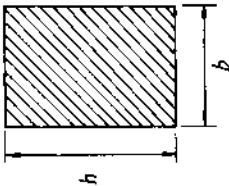
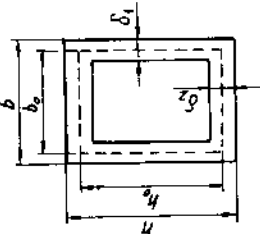
$$\theta = \frac{M_z}{G \beta h b^3} \quad (7.26)$$

Các hệ số α , γ , β phụ thuộc vào tỷ số h/b và được cho trong bảng 7.1.

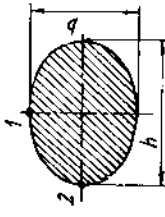
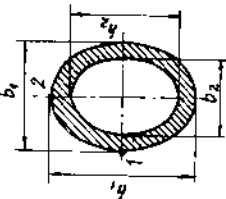
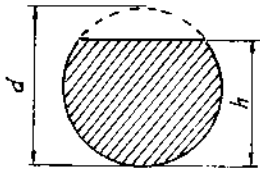


Hình 7.5.

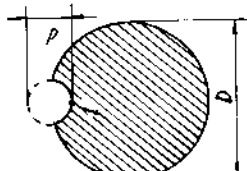
Bảng 7.1.

Dạng mặt cắt	Momen quán tính độc cực J_p , cm^4	Momen chống xoắn W_p , cm^3	Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất, $\tau_{\max}$	Chủ giải			
				$\frac{h}{b}$	α	β	γ
	$J_p = \beta h b^3$	$W_p = \alpha h b^2$	- Điểm giữa cạnh dài: $\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$; - Điểm giữa cạnh ngắn: $\tau = \gamma \tau_{\max}$; ở góc $\tau = 0$	1	0,208	0,141	1
				1,5	0,231	0,196	0,859
				1,75	0,239	0,214	—
				2,0	0,246	0,229	0,795
				2,5	0,256	0,249	—
				3,0	0,267	0,263	0,753
				4,0	0,282	0,281	0,745
				6,0	0,299	0,299	0,743
				8,0	0,307	0,307	0,743
				10,0	0,313	0,313	0,743
	$J_p = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{p1} = 2h_0 b_0 \delta_1$ $W_p = 2h_0 b_0 \delta_2$	- Điểm giữa cạnh dài: $\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$; - Điểm giữa cạnh ngắn: $\tau_2 = \frac{M_z}{W_p}$	Hệ số tập trung ứng suất ở các điểm góc trong: $\alpha_p = 1,74 \sqrt{\frac{\delta_{\max}}{r}}$ r là bán kính góc lượn.			

Bảng 7.1 (tiếp theo)

Dạng mặt cắt	Momen quán tính độc cực J_p , cm^4	Momen chống xoắn W_p , cm^3	Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất, $\tau_{\max}$	Chú giải
	$J_p = \frac{\pi h b^3}{64} (h^2 + b^2)$	$W_p = \frac{\pi b^2 h}{16}$	$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_z}{W_p}$ $\tau_2 = \frac{\tau_{\max}}{m}$	$\frac{h}{b} = m > 1$
	$J_p = \frac{\pi m^3 b_1^4}{16} (1 - \alpha^4)$ $16 (m^2 + 1)$	$W_p = \frac{\pi b_1^3}{16} \times$ $\times (1 - \alpha^4) m$	$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_z}{W_p}$ $\tau_2 = \frac{\tau_{\max}}{m}$	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1$ $\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$
	$J_p = \frac{d^4}{16} \cdot$ $\left(2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$	$W_p = \frac{d^3}{8} \cdot$ $2,6 \frac{h}{d} - 1$ $\frac{h}{d} (0,3 \frac{h}{d} + 0,7)$	$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$	$\frac{h}{d} > 0,5$

Bảng 7.1 (tiếp theo)

Dạng mặt cắt	Momen quán tính độc cực J_p , cm^4	Momen chống xoắn W_p , cm^3	Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất, $\tau_{\max}$	Chú giải					
				d/D	α	β	d/D	α	β
	$J_p = \alpha \frac{D^4}{16}$	$W_p = \beta \frac{D^3}{8}$	$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_z}{W_p}$	0,00	1,57	1,57	0,40	0,76	1,22
				0,05	0,80	1,56	0,60	0,66	0,92
				0,10	0,81	1,56	0,80	0,52	0,63
				0,20	0,82	1,46	1,00	0,38	0,38

2. Thanh mặt cắt ngang hình thang và elip

Trong tính toán các thanh chịu xoắn có mặt cắt ngang là hình thang cân, để có các giá trị gần đúng của $\tau_{\max}$ và $\theta_{\max}$ ta có thể sử dụng công thức từ (7.24) ÷ (7.26) khi thay hình thang bằng hình chữ nhật tương đương (hình 7.6a). Cụ thể là:

Từ tâm C của hình thang vẽ các tia vuông góc với các cạnh bên của hình thang. Sau đó, từ chân đường vuông góc A và B vẽ các tia thẳng đứng. Hình chữ nhật abcd nhận được là mặt cắt tương đương với mặt cắt hình thang.

Nếu thanh chịu xoắn có mặt cắt ngang hình elip thì $\tau_{\max}$ nằm ở điểm trên chu vi thuộc bán trục bé (hình 7.6b):

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16 M_z}{\pi b^2 h} \quad (7.27)$$

Trên chu vi thuộc bán trục lớn có:

$$\tau_2 = \frac{b}{h} \cdot \tau_{\max} \quad (7.28)$$

Mômen quán tính độc cực quy ước của mặt cắt elip khi xoắn là:

$$J_p = \frac{\pi b h}{64} (h^2 + b^2) \quad (7.29)$$

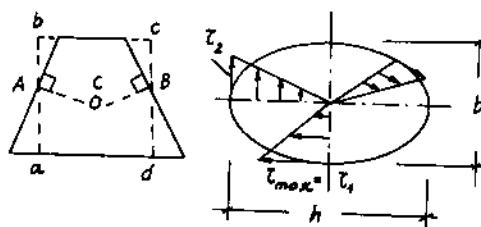
Công thức tính J_p , W_p và τ_1 , τ_2 đối với các mặt cắt ngang không tròn khác nhau được cho trong bảng 7.1.

Đối với những mặt cắt ngang hở phức tạp, ta cần chia chúng thành những mảng nhỏ để có J_{pi} , W_{pi} rồi lấy tổng:

$$J_p = \sum_{i=1}^n J_{pi} \quad (7.30)$$

Do đó, góc xoắn tỷ đối của toàn bộ mặt cắt và của từng phần là như nhau và bằng:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{M_{z1}}{GJ_{p1}} = \dots = \frac{M_{zn}}{GJ_{pn}} \quad (7.31)$$



Hình 7.6.

Mômen xoắn M_z được phân bố trên từng mảng của mặt cắt tổng thể tỷ lệ với độ cứng của chúng. Nghĩa là:

$$M_{z1} = M_z \cdot \frac{J_{p1}}{J_p} ; \dots ; M_{zn} = M_z \cdot \frac{J_{pn}}{J_p}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất trên mỗi phần thứ (i) của mặt cắt là:

$$\tau_i = \frac{M_{zi}}{W_{pi}} = \frac{M_z}{W_{pi}} \left(\frac{J_{pi}}{J_p} \right) = \frac{M_z}{J_p} \left(\frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)$$

Khi $\frac{J_{pi}}{W_{pi}}$ đạt cực đại thì τ_i đạt $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} \left(\frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (7.32)$$

trong đó:

$$W_p = \frac{J_{pi}}{\left(\frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)_{\max}} \quad (7.33)$$

4. Xoắn thanh thành mỏng

Trong kỹ thuật (nhất là kỹ thuật hàng không, kỹ thuật đóng tàu) người ta thường dùng thanh thành mỏng. Lý thuyết thanh thành mỏng (ví dụ của Vlasov) cung cấp cho ta đầy đủ nhất cách xác định sự ứng xử của các loại thanh này đối với những vật liệu khác nhau.

a) Thanh có thành mỏng kín (hình 7.7a)

Khi bị xoắn, trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều dày của thành. Ứng suất tại một điểm bất kỳ A của thành được cho bởi:

$$\tau_A = \frac{M_z}{2F^* \cdot b_A} \quad (7.34)$$

trong đó: b_A – chiều dày của thành tại A;

F^* – diện tích giới hạn bởi đường tâm của thành (còn gọi là đường chu vi trung gian S của thành).

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{4GF^*} \oint_S \frac{dS}{b} \quad (7.35)$$

trong đó:

$\oint_S$ – tích phân theo đường cong kín S.

b) Thanh có thành mỏng hở

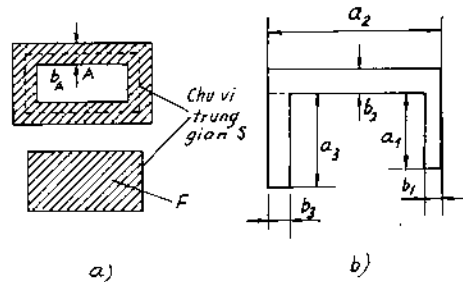
Giả sử mặt cắt ngang của thanh gồm nhiều mảnh chữ nhật ghép lại (hình 7.7b). Ký hiệu a_i , b_i là bề dài và bề rộng của dải chữ nhật thứ i. Ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm giữa cạnh a_i được tính theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J^*} b_i \quad (7.36)$$

trong đó:

$$J^* = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^m a_i b_i^3 \quad (7.37)$$

η – hệ số điều chỉnh được cho trong bảng 7.2.



Hình 7.7.

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ^*} \quad (7.38)$$

Bảng 7.2.

Mặt cắt ngang	η
L	1,00
I	1,20
T	1,15
$\square$	1,12

Nếu mặt cắt ngang là một dải cong thì khi tính ứng suất và góc xoắn tỷ đối được coi như một dải chữ nhật có chiều dài bằng chu vi.

§6. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1

Một trục chân vịt của tàu thủy loại trung bình có đường kính ngoài $D = 25$ cm, đường kính trong $d = 17$ cm. Trục quay với vận tốc góc $n = 250$ vg/ph. Hãy xác định công suất của trục này và đánh giá độ an toàn cho trục. Biết góc xoắn đo trực tiếp trên đoạn trục dài 5 m là 1° và vật liệu làm trục có: $[\tau] = 1156$ daN/cm²; $\tau_{CH} = 1500$ kN/cm²; $G = 8.10^6$ N/cm².

GIẢI

1) Xác định công suất N của trục

Công thức xác định công suất N được suy ra từ công thức liên hệ giữa M_z^* và N dưới đây:

$$M_z^* = 97400 \frac{N}{n} \Rightarrow N = \frac{M_z \cdot n}{97400} \quad (1)$$

Mặt khác giữa góc xoắn và M_z có hệ thức:

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{GJ_p} \Rightarrow M_z = \frac{\varphi GJ_p}{l} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta tìm được:

$$N = \frac{\varphi G J_p \cdot n}{97400 \cdot l} = \frac{\pi \cdot 1^\circ \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 30700 \cdot 250}{180 \cdot 97400 \cdot 500} = 2200 \text{ kW},$$

trong đó:

$$\varphi = 1^\circ = \frac{\pi}{180}; J_p = 0,1 D^4 (1 - \alpha^4) = 0,1 \cdot 25^4 \left(1 - \frac{17}{25}\right)^4 = 30700 \text{ cm}^4.$$

Ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{\max}$ có giá trị:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{97400 \cdot 2200}{250 \cdot 0,2 \cdot 25^3 \left(1 - \frac{17}{25}\right)^4} = 3500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 350 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Độ an toàn theo ứng suất cho phép là:

$$n_1 = \frac{[\tau]}{\tau_{\max}} = \frac{1156}{350} = 3,3.$$

Độ an toàn theo giới hạn chảy là:

$$n_2 = \frac{\tau_{\text{ch}}}{\tau_{\max}} = \frac{1500}{350} = 4,286.$$

Ví dụ 2

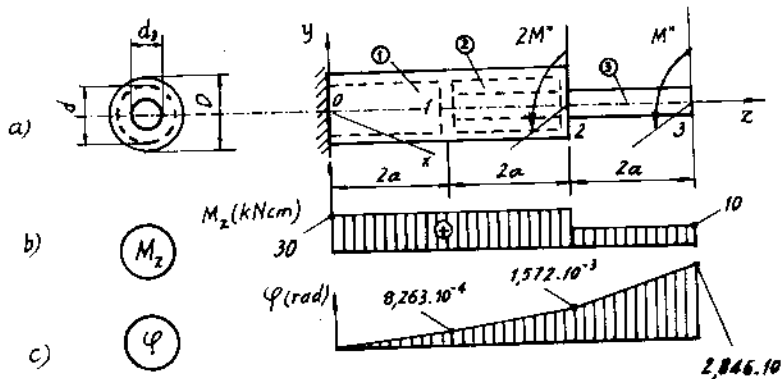
Một trục tổ hợp chịu xoắn gồm một trục rỗng dài 4a liên kết cứng với trục đặc dài 4a tại các mặt cắt 1 và 2. Trục tổ hợp có mặt cắt thay đổi từng khúc được làm bằng thép, chịu lực, có kích thước và liên kết như hình 7.8. Cho biết đường kính phần trục đặc $d_3 = \frac{D}{2} = \frac{d}{1,6} = 10 \text{ cm}$, môđun đàn hồi trượt của phần rỗng và đặc là $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$.

Hãy tính ứng suất tiếp lớn nhất trong phần trục đặc và phần trục rỗng.

Vẽ biểu đồ (M_x) và (φ_x).

GIẢI

Trong đoạn 2 – 3 mômen xoắn nội lực $M_z = M^*$. Mômen phản lực tại ngàm 0 có giá trị: $M_0 = 3M^*$. Mômen xoắn nội lực trong phần 0 – 1 là $M_z = 3M^*$.



Hình 7.8.

Ta ký hiệu M_2 là mômen xoắn mà trục đặc 1 – 2 phải chịu trong đoạn 1 – 2; M_1 là mômen xoắn mà phần trục rỗng 1 – 2 phải chịu. Theo điều kiện cân bằng tĩnh ta có:

$$M_1 + M_2 = 3M^* \quad (a)$$

Vì tại các mặt cắt 1 và 2 liên kết giữa hai trục là cứng tuyệt đối nên ta có góc xoắn trong phần 1 – 2 của cả hai loại trục phải bằng nhau, nghĩa là:

$$\frac{M_2 2a}{GJ_{3p}} = \frac{M_1 2a}{GJ_{1p}} \Rightarrow M_1 = M_2 \frac{J_{1p}}{J_{3p}} \quad (b)$$

Thay quan hệ (b) vào (a) ta được:

$$M_2 \left(1 + \frac{J_{1p}}{J_{3p}} \right) = 3M^* \Rightarrow M_2 = \frac{3M^*}{1 + \frac{J_{1p}}{J_{3p}}}; \quad M_1 = \frac{3M^*}{1 + \frac{J_{3p}}{J_{1p}}}$$

trong đó:

$$J_{1p} = 0,1D^4 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad ; \quad J_{3p} = 0,1d_3^4 \Rightarrow \frac{J_{1p}}{J_{3p}} \approx 9,45$$

Vậy ta có:

$$M_2 = \frac{3M^*}{1+9,45} \approx 0,287 M^* \quad ; \quad M_1 = 2,713 M^*$$

Ứng suất tiếp lớn nhất xảy ra:

– Đối với trục đặc trong phần 2 – 3:

$$\tau_{2\max} = \frac{M^*}{W_{3p}} = \frac{M^*}{0,2d_3^3} = 5,09 \frac{M^*}{d_3^3} = 5,09 \frac{10}{10^3} = 0,051 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

– Đối với trục rỗng trong đoạn 0 – 1:

$$\tau_{\max 1} = \frac{3M^*}{0,2D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]} \approx 0,636 \tau_{\max 2} = 3,24 \frac{M}{d_3^3} = 0,0324 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Góc xoắn tại mặt cắt 3 là:

$$\begin{aligned} \varphi_{3-0} = \varphi_3 = \varphi_{3-2} + \varphi_{2-1} + \varphi_{1-0} &= \frac{M^* a}{GJ_{3p}} + 0,287 \frac{M^* \cdot 2a}{GJ_{3p}} + \frac{3M^* \cdot 2a}{GJ_{3p} \cdot 9,45} = \\ &= 2,21 \frac{M^* a}{GJ_{3p}} \approx 22,5 \frac{M^* a}{Gd_3^4} = 2,846 \cdot 10^{-3} \text{ rad.} \end{aligned}$$

Biểu đồ (M_z) và (φ_z) được cho trên hình 7.8b, c.

Ví dụ 3

Một trục thép tròn đường kính d , có liên kết và chịu lực như hình 7.9a. Cho biết $l = 50 \text{ cm}$, $d = 5 \text{ cm}$, $M^* = 2 \text{ kNm}$, $G = 0,8 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ (đĩa tuyệt đối cứng có $D = 8 \text{ cm}$).

Tính ứng suất pháp σ trong thanh giằng 2 và ứng suất tiếp τ trong trục? (thanh giằng có chiều dài $a = 2 \text{ m}$, mặt cắt ngang $F = 4 \text{ cm}^2$. Hai thanh cùng vật liệu như trục thép có $E = 2,5 \text{ G}$).

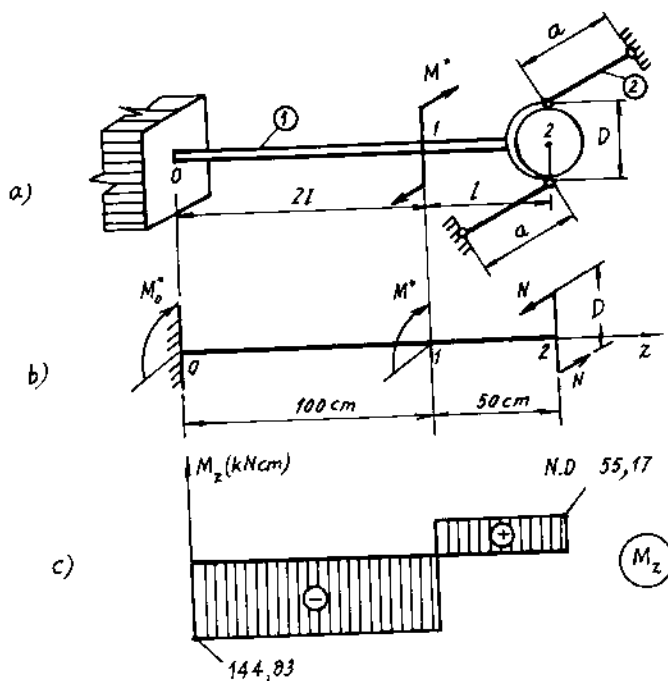
GIẢI

Ký hiệu N là lực dọc trong các thanh giằng, ta có sơ đồ tính trục như hình 7.9b. Phương trình cân bằng mômen đối với trục Oz :

$$M_0 + M^* - N.D = 0 \quad (a)$$

Điều kiện biến dạng của trục là góc xoắn của trục tại $z = 3l$ phải bằng góc quay của đĩa do các lực dọc N gây ra. Cụ thể là:

$$-\frac{M_0 \cdot 100}{GJ_p} + \frac{N.D.50}{GJ_p} = \frac{2N.a}{EF.D} \quad (b)$$



Hình 7.9.

Thay (a) vào (b) ta có:

$$\frac{100}{GJ_p} (N.D - M^*) + \frac{N.D.50}{GJ_p} = \frac{400N}{2.5G.4}$$

Do đó, lực dọc N được xác định:

$$N = \frac{20000}{2900} = 6,896 \text{ kN}$$

Ứng suất trong các thanh giằng là:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{6,896}{4} = 1,724 \text{ kNcm}^2$$

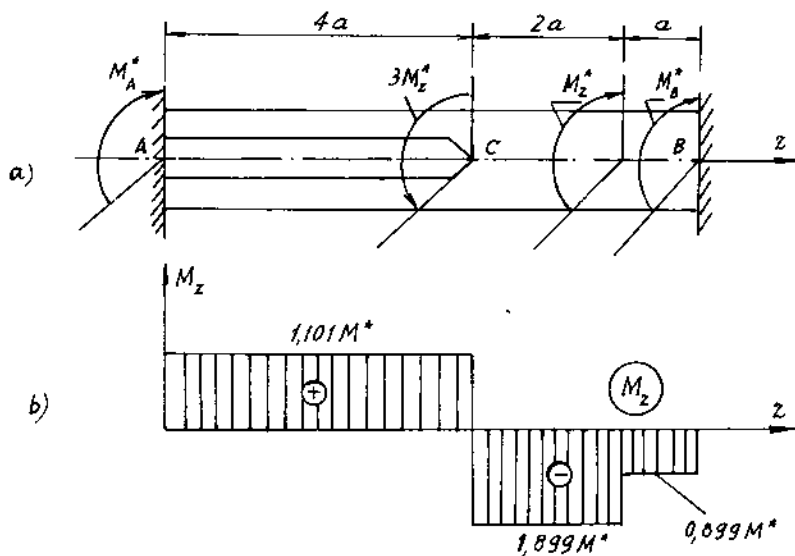
Ứng suất tiếp lớn nhất trong trục có giá trị:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{144,83}{0,2 \cdot 5^3} = 5,783 \text{ kN/cm}^2$$

Ví dụ 4

Một trục chịu xoắn như hình 7.10a có khoan một lỗ dọc trục từ đầu trái A. Hãy xác định mômen xoắn ngoài M_z^* cho phép tác dụng lên trục để trục làm việc an toàn về độ bền? Biết:

$$[\tau] = 6 \text{ kN/cm}^2 ; D = 20 \text{ cm} ; d = 0,5D.$$



Hình 7.10.

GIẢI

Đây là bài toán siêu tĩnh bậc 1. Giải phóng ngàm B và thay vào đó M_B^* . Theo nguyên lý cộng tác dụng, điều kiện biến dạng của trục được viết:

$$\frac{M_B \cdot 3a}{GJ_{p1}} + \frac{M_B \cdot 4a}{GJ_{p2}} + \frac{M^* \cdot 2a}{GJ_{p1}} + \frac{M^* \cdot 4a}{GJ_{p2}} - \frac{3M^* \cdot 4a}{GJ_{p2}} = 0$$
$$\Rightarrow M_B = 2 \cdot \frac{4J_{p1} - J_{p2}}{4J_{p1} + 3J_{p2}} \cdot M^* = 2 \cdot \frac{4D^4 - D^4(1-\alpha^4)}{4D^4 + 3D^4(1-\alpha^4)} \cdot M^* \approx 0,899 M^*$$

Ở đây $\alpha = \frac{d}{D} = 0,5$. Biểu đồ mômen xoắn M_x của trục được vẽ trên hình 7.10b.

Giá trị của M^* được xác định theo điều kiện bền của hai đoạn trục 1 và 2.

Đối với đoạn trục 1 đường kính $D = 20$ cm:

$$\max |\tau_1| = \frac{\max |M_{x1}|}{W_{p1}} = \frac{1,899 M^*}{\pi D^3 / 16} \leq [\tau] \Rightarrow M_D^* = 4960,5 \text{ kNcm.}$$

Đối với đoạn trục 2 đường kính $(D - d) = 10$ cm:

$$\max |\tau_2| = \frac{\max |M_{x2}|}{W_{p2}} = \frac{1,101 M^*}{\pi D^3 (1 - \alpha^4) / 16} \leq [\tau] \Rightarrow M_d^* = 8021 \text{ kNcm.}$$

So sánh hai kết quả (1) và (2) ta chọn $M_D^* = 4960,5 \text{ kNcm}$.

Ví dụ 5

Một trục chịu xoắn có sơ đồ như hình 7.11a, trên đó: $m = 80 \text{ Nm/m}$, $M^* = 400 \text{ Nm}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $[\tau] = 40 \text{ MN/m}^2$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$. Hãy tính đường kính d và vẽ biểu đồ góc xoắn $\varphi(z)$?

GIẢI

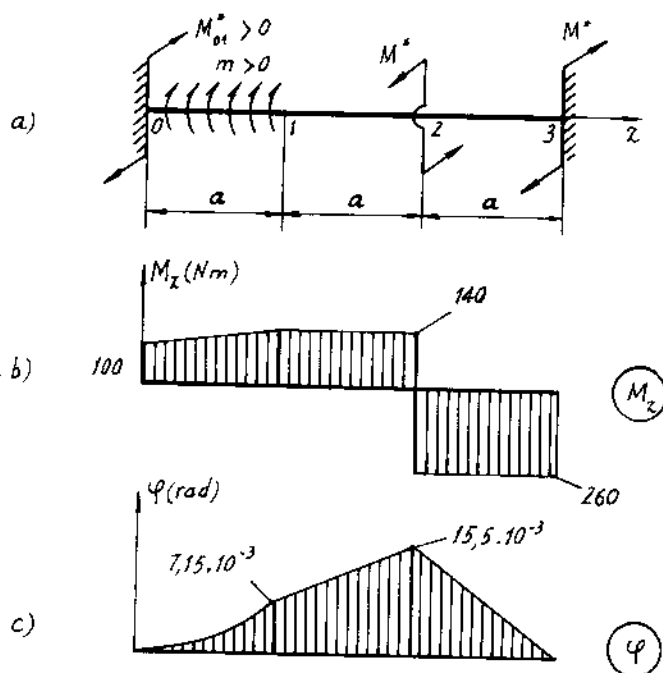
Phương trình góc xoắn φ theo phương pháp vạn năng:

$$\varphi(z) = M_{01}^* \frac{z}{GJ_p} + \frac{m \cdot z^2}{2GJ_p} \Big|_0^z - \frac{m(z-a)^2}{2GJ_p} \Big|_a^z - \frac{M^*(z-2a)}{GJ_p} \Big|_{2a}^z \quad (a)$$

Tại $z = 3a$ thì $\varphi(z = 3a) = 0$.

Do đó: $M_{01}^* = \frac{1}{3} (M^* - 2,5ma) = 100 \text{ Nm}$.

$$M(z) = M_{01}^* + mz \Big|_0^z - m(z-a) \Big|_a^z - M^* \Big|_{2a}^z$$



Hình 7.11.

Tại $z = 0$ thì $M_1(0) = M_{01}^* = 100 \text{ Nm}$.

Tại $z = a$ thì $M(a) = 100 + 80 \cdot 0,5 = 140 \text{ Nm}$.

Tại $z = 3a$ thì $M(3a) = 100 + 80 \cdot 1,5 - 80 \cdot 1 - 400 = 260 \text{ Nm}$.

Biểu đồ mômen xoắn được mô tả trên hình 7.11b. Mômen xoắn lớn nhất về trị số ở đoạn 2 – 3, cho nên điều kiện để xác định đường kính d như sau:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{\max M_z}{[\tau]} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \max M_z}{\pi [\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{260}{40 \cdot 10^6}} = 3,2 \text{ cm.}$$

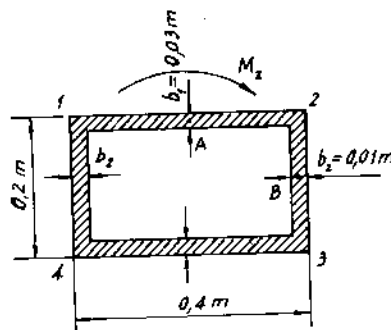
Thay M_{01} và d vào (a) ta có:

$$\varphi(z = a) = 0,00715 \text{ rad} ; \varphi(z = 2a) = 0,0155 \text{ rad.}$$

Xuất phát từ hàm (a) và các giá trị này chúng ta vẽ được biểu đồ $\varphi(z)$ như hình 7.11c.

Ví dụ 6

Tính ứng suất $\tau_{\max}$ tại các điểm A, B và góc xoắn của thanh dài 2 m có thành mỏng kín bị xoắn, mặt cắt ngang của thanh như hình 7.12. Mômen xoắn $M_z = 2 \cdot 10^4 \text{ Nm}$. Vật liệu gang có $G = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.



Hình 7.12.

GIẢI

Diện tích giới hạn bởi đường tâm của thành:

$$F_0 = (0,4 - 0,01) \cdot (0,2 - 0,03) = 0,0663 \text{ m}^2$$

Ứng suất tại A là:

$$\tau_A = \frac{2 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,0663 \cdot 0,03} = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Ứng suất tại B là:

$$\tau_B = \frac{2 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,0663 \cdot 0,01} = 15 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Góc xoắn của thanh:

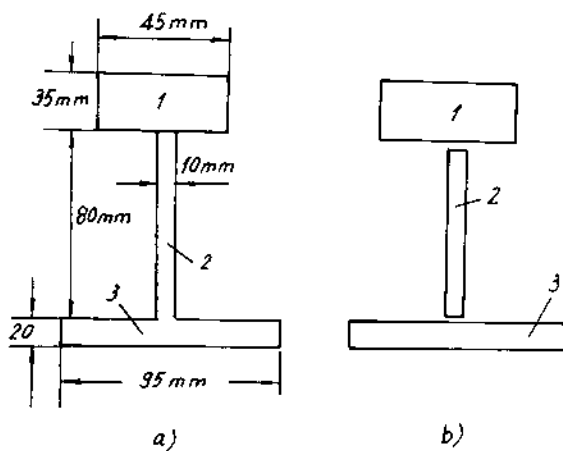
$$\begin{aligned}\varphi &= \theta \cdot l = \frac{M_z \cdot l}{4GF^{*2}} \oint_s \frac{dS}{b} \\ &= \frac{M_z \cdot l}{4GF^{*2}} \cdot \left(\int_{1-2} \frac{dS}{b_1} + \int_{2-3} \frac{dS}{b_2} + \int_{3-4} \frac{dS}{b_1} + \int_{4-1} \frac{dS}{b_2} \right) \\ &= \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 2}{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{10} \cdot (0,0663)^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{0,39}{0,03} + 2 \cdot \frac{0,17}{0,01} \right) \\ &\approx 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}\end{aligned}$$

Ví dụ 7

Một thanh thép chiều dài $l = 5 \text{ m}$ có mặt cắt ngang như hình 7.13. Thanh chịu xoắn bởi hai mômen xoắn đặt ở hai đầu thanh là $M_z^* = 5000 \text{ daNcm}$. Hãy tính ứng suất tiếp lớn nhất và kiểm tra độ cứng cho thanh nếu $[\varphi] = 0,06 \text{ rad}$.

GIẢI

Để tính ứng suất và biến dạng của thanh chịu xoắn loại này, ta cần chia mặt cắt ra thành ba phần như hình 7.13b.



Hình 7.13.

Ứng suất tiếp lớn nhất được xác định theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{pi}^*}$$

với
$$W_{pi}^* = \frac{J_p}{\left(\frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)}$$

Ta cần tính các đặc trưng hình học:

$$J_p = J_{p1} + J_{p2} + J_{p3}$$

Đối với phần 1: $h_1 = 45 \text{ mm}$; $b_1 = 35 \text{ mm}$; $\frac{h_1}{b_1} = 1,285 \Rightarrow$

$$J_{p1} = \beta h_1 b_1^3 = 0,172.4,5.3,5^3 \text{ cm}^4 = 33,2 \text{ cm}^4$$

$$W_{p1} = \alpha_1 h_1 b_1^2 = 0,221.4,5.3,5^2 \text{ cm}^3 = 12,2 \text{ cm}^3$$

$$\frac{J_{p1}}{W_{p1}} = \frac{33,2}{12,2} = 2,72 \text{ cm.}$$

Đối với phần 2: $h_2 = 80 \text{ mm}$; $b_2 = 10 \text{ mm}$; $\frac{h_2}{b_2} = 8$. Do đó:

$$J_{p2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,307.8.1^3 \text{ cm}^4 = 2,5 \text{ cm}^4$$

$$W_{p2} = \alpha_2 h_2 b_2^2 = 0,307.8.1^2 \text{ cm}^3 = 2,5 \text{ cm}^3$$

$$\frac{J_{p2}}{W_{p2}} = 1 \text{ cm.}$$

Phần 3: $h_3 = 95 \text{ mm}$; $b_3 = 20 \text{ mm}$; $\frac{h_3}{b_3} = \frac{95}{20} = 4,75$

$$J_{p3} = \beta_3 h_3 b_3^3 = 0,288.9,5.2^3 \text{ cm}^4 = 21,9 \text{ cm}^4$$

$$W_{p3} = \alpha_3 h_3 b_3^2 = 0,288.9,5.2^2 \text{ cm}^3 = 10,9 \text{ cm}^3$$

$$\frac{J_{p3}}{W_{p3}} = \frac{21,9}{10,9} = 2 \text{ cm.}$$

Cuối cùng ta có:

$$J_p = 33,2 + 2,5 + 21,9 = 57,6 \text{ cm}^4.$$

Vì W_{pl}^* là lớn nhất, nên $\tau_{\max}$ ở giữa cạnh trên:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{pl}^*} = \frac{5000}{21,2} = 236 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\text{trong đó: } W_{pl}^* = \frac{J_p}{J_{pl} / W_{pl}} = \frac{57,6}{2,72} = 21,2 \text{ cm}^3.$$

Góc xoắn lớn nhất và điều kiện cứng:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_z \cdot l}{GJ_p} = \frac{5000 \cdot 500}{8 \cdot 10^5 \cdot 57,6} \text{ rad} = 0,0542 \text{ rad} < 0,06 \text{ rad}.$$

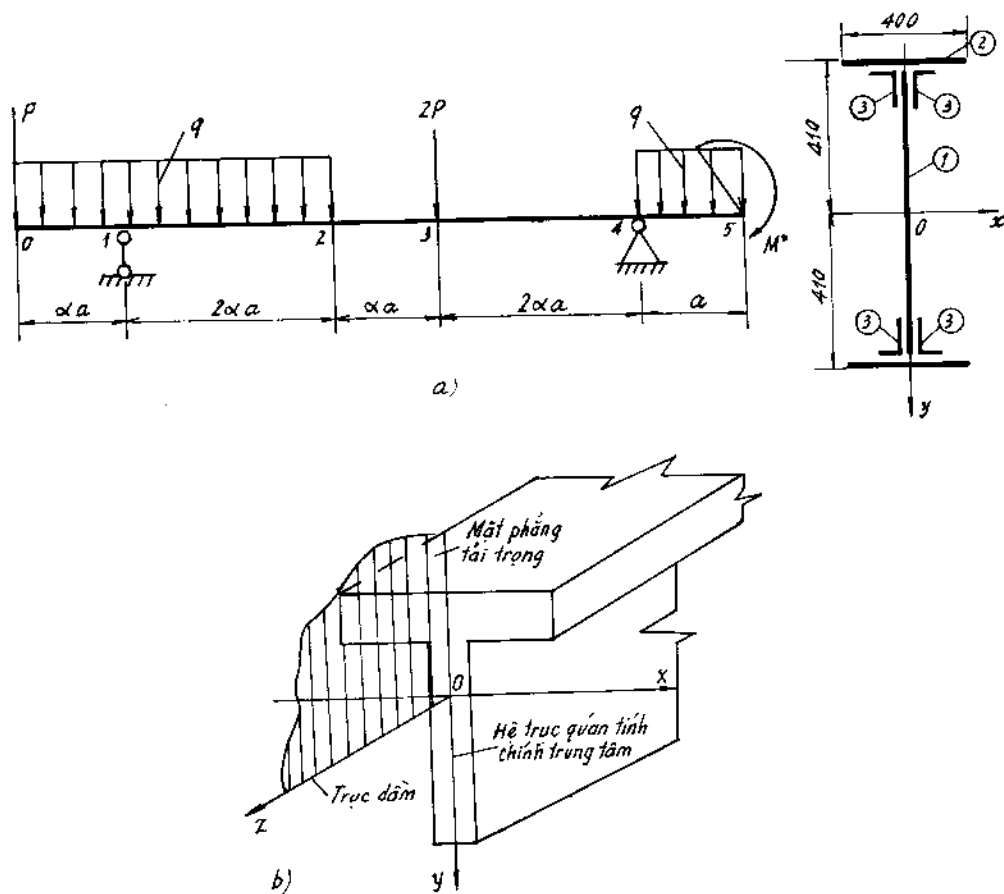
Điều kiện cứng của thanh hoàn toàn thỏa mãn.

Chương 8

UỐN PHẪNG VÀ CẮT

§1. KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

Ta thường gặp trong kỹ thuật những chi tiết máy và các cấu kiện công trình khi chịu tác dụng ngoài thì trục của chúng bị cong. Hiện tượng biến dạng như thế được gọi là hiện tượng uốn. Ví dụ như các dầm cầu trục, trục truyền, dầm cầu, dầm đỡ cầu thang, dầm đỡ sàn v.v... Những thanh sinh ra để chịu uốn được gọi là dầm. Ngoại lực gây uốn có thể là những ngẫu lực nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh, nhưng thường là các tập trung hoặc phân bố vuông góc với trục thanh. Mặt phẳng chứa ngoại lực và trục thanh gọi là mặt phẳng tải trọng (hình 8.1). Giao tuyến giữa mặt cắt ngang và mặt phẳng tải trọng gọi là đường tải trọng. Mặt phẳng tạo bởi trục thanh và một trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang gọi là mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Khi chịu biến dạng uốn mà trục của dầm là một đường cong phẳng nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì hiện tượng uốn đó được gọi là uốn phẳng. Ngược lại, nếu mặt phẳng tải trọng không chứa một trục quán tính chính trung tâm nào của mặt cắt ngang thì ta gọi đó là thanh bị uốn xiên.



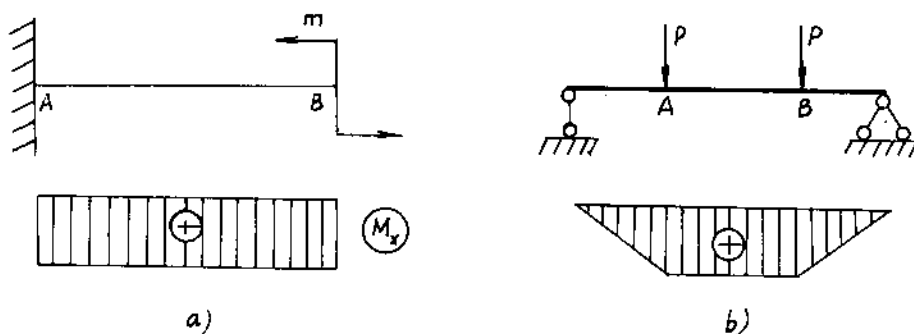
Hình 8.1.

Trong thực tế những thanh chịu uốn thường là những thanh mà mặt cắt ngang của nó có ít nhất một trục đối xứng. Trong chương này ta chỉ nghiên cứu những ngoại lực tác dụng trong mặt phẳng chứa trục dầm và trục đối xứng của mặt cắt ngang.

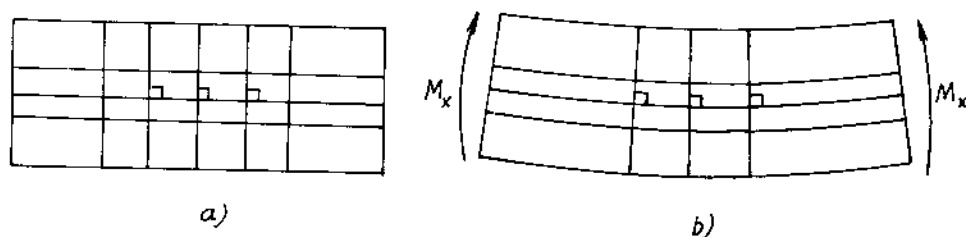
Khi thanh bị uốn phẳng bởi các lực vuông góc với trục thanh thì trên mặt cắt ngang của thanh chỉ xuất hiện nhiều nhất hai thành phần nội lực sau đây: lực cắt Q_y (hoặc Q_x), mômen uốn M_x (hoặc M_y). Mômen uốn là nội lực chủ yếu, còn ảnh hưởng của lực cắt đến sự làm việc của thanh rất bé, nên trong tính toán các dầm dài và khung về độ bền và độ cứng ảnh hưởng này được bỏ qua.

Nếu thanh bị uốn mà trên mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn M_x (hoặc M_y), thì ta gọi đó là trường hợp uốn thuần túy phẳng.

Ví dụ. Các đoạn dầm AB dưới đây chịu uốn thuần túy phẳng (hình 8.2a, b).



Hình 8.2.



Hình 8.3.

§2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG KHI UỐN THUẦN TÚY

2.1. QUAN SÁT BIẾN DẠNG CỦA THANH CHỊU UỐN TUẦN TÚY

Trước khi thanh bị uốn ta kẻ trên các mặt biên những đoạn thẳng song song và vuông góc với trục của nó (hình 8.3a).

Trong suốt quá trình biến dạng ta thấy:

– Những đoạn thẳng kẻ song song với trục thanh biến thành những đoạn đường cong đều song song với nhau, chiều dài của chúng thay đổi: các phần trên co lại, các phần dưới dãn ra.

– Các đoạn thẳng kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng và vuông góc với các đường cong nói trên (hình 8.3b).

– Hình dáng của mặt cắt ngang ở 2 đầu thanh coi như không thay đổi.

Dựa vào những kết quả quan sát và đo đạc thực nghiệm người ta đưa ra các giả thiết sau đây về biến dạng của thanh chịu uốn thuần túy phẳng.

2.2. CÁC GIẢ THIẾT

1. Tập hợp các chất điểm trước khi biến dạng nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh, sau khi biến dạng vẫn nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh, hay vắn tắt, các mặt cắt ngang luôn luôn phẳng.

2. Tập hợp các chất điểm trước khi biến dạng nằm trên đường cách đều trục thanh, sau khi biến dạng vẫn nằm trên đường cách đều trục thanh hay vắn tắt hơn, các thớ dọc không nén ép, xô đẩy nhau.

2.3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHI UỐN THUẦN TÚY PHẪNG

Tách ra khỏi thanh một phân tố hình hộp giới hạn bởi các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ (hình 8.4).

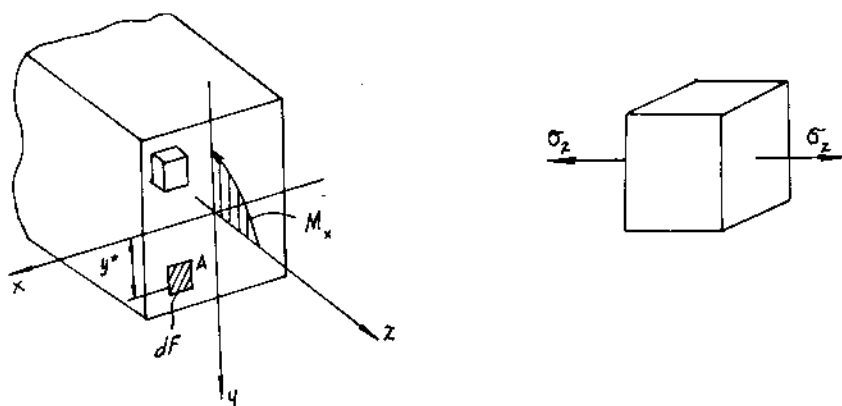
Dựa vào hai giả thuyết trên ta thấy:

– Phân tố không có biến dạng góc hay nói cách khác đó là phân tố chính. Trên mỗi phân tố chính chỉ có ứng suất chính σ_z song song với trục thanh, còn hai ứng suất chính kia bằng không.

Vậy trạng thái ứng suất trong thanh chịu uốn thuần túy phẳng là trạng thái ứng suất đơn. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của thanh là ứng suất chính:

$$\sigma_z = \sigma_1 \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (1)$$

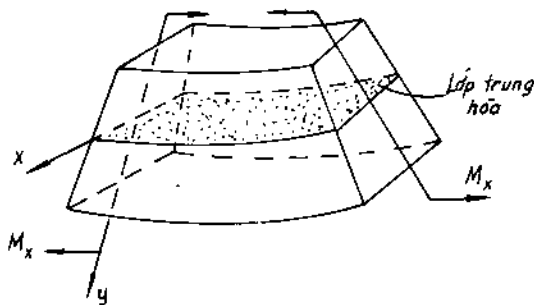
hoặc: $\sigma_z = \sigma_3 < 0 \quad ; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0$



Hình 8.4.

2.4. BIẾN DẠNG CỦA CÁC THỚ DỌC

Khi thanh bị uốn thuần túy phẳng thì các thớ dọc bị co lại hoặc dãn ra. Lớp thớ trên cùng bị co nhiều nhất, lớp thớ dưới cùng bị dãn ra khi M_x căng dưới (hình 8.3b). Nếu mômen uốn đổi chiều thì kết quả sẽ ngược lại. Từ lớp thớ bị co sang lớp thớ bị dãn tồn tại lớp thớ không co không dãn. Lớp thớ này gọi là lớp trung hoà. Giao tuyến của lớp trung hoà với mặt cắt ngang là một đoạn thẳng trên mặt cắt, gọi là trục trung hoà (hình 8.5). Dễ dàng thấy khi thanh bị uốn thì mặt cắt ngang của nó chỉ quay tương đối với nhau quanh trục trung hoà.



Hình 8.5.

Trên cơ sở phân tích này ta có thể xác định được biến dạng tương đối của các thớ dọc. Xét một đoạn thanh giữa 2 mặt cắt 1-1, 2-2. Sau biến dạng hai mặt cắt này tạo với nhau một góc dφ (hình 8.6a, b).

Gọi ρ là bán kính cong của lớp trung hoà, vì các thớ thuộc lớp trung hoà không bị co, dẫn nên độ dài của nó vẫn bằng dz .

$$\text{Vậy} \quad dz = \rho d\varphi \quad (a)$$

Một thớ AB nào đó song song với lớp trung hoà 0_10_2 và cách nó một khoảng y^* , khi biến dạng có độ dài bằng:

$$dz + \Delta dz = (\rho + y^*) d\varphi \quad (b)$$

Từ (a) và (b) suy ra:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{(\rho + y^*) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y^*}{\rho} \quad (2)$$

Đại lượng $\frac{1}{\rho}$ là độ cong của lớp trung hoà.

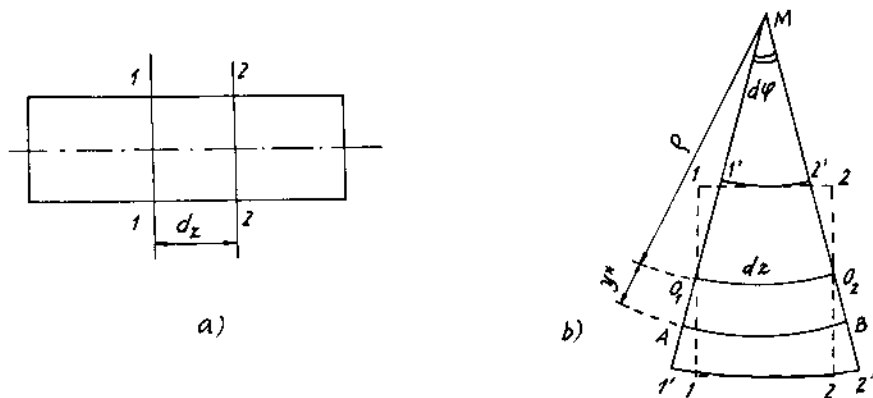
2.5. VỊ TRÍ TRỤC TRUNG HOÀ VÀ ĐỘ CONG CỦA TRỤC DẪM

Dựa vào kết luận (1) về trạng thái ứng suất trong thanh chịu uốn thuần túy và định luật Húc ta có:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (3)$$

thay (2) vào (3) ta được:

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} y^* \quad (4)$$



Hình 8.6.

Từ (4) ta thấy ứng suất pháp σ_z tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm cần tính ứng suất đến lớp trung hoà (trục trung hoà).

Nhưng ta chưa xác định được vị trí của trục trung hoà, nghĩa là y^* ?

Ta sẽ chứng minh trục trung hoà trùng với trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Lấy quanh điểm A một phần tử diện tích dF . Ta có vectơ chính N_z của hệ ứng suất trên mặt cắt ngang (hình 8.4) theo định nghĩa phải bằng không:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0$$

Thay giá trị của σ_z từ (4) vào tích phân này ta được:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^* dF = 0 \quad \text{mà} \quad S_x = \int_F y^* dF,$$

Còn $E \neq 0$; $\rho \neq 0$.

Từ đó, suy ra mômen tĩnh của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà bằng không. Vậy theo định nghĩa về trục trung tâm thì trục trung hoà phải đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Ngoài ra như ta đã phân tích ở trên, trục trung hoà là một đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng tải trọng, mà mặt phẳng tải trọng chính là mặt phẳng đối xứng. Do đó trục trung hoà vuông góc với trục đối xứng Oy của mặt cắt ngang tức vuông góc với trục quán tính chính trung tâm Oy của nó.

Vậy ta kết luận: Trục trung hoà là một trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang, mà ta đã ký hiệu là Ox .

Do đó: $y^* = y$.

Và công thức (4) được viết dưới dạng:

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} y \quad (5)$$

Mặt khác ta có quan hệ giữa M_x và σ_z khi thu gọn σ_z về trọng tâm mặt cắt:

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_x.$$

Suy ra độ cong:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (8.1)$$

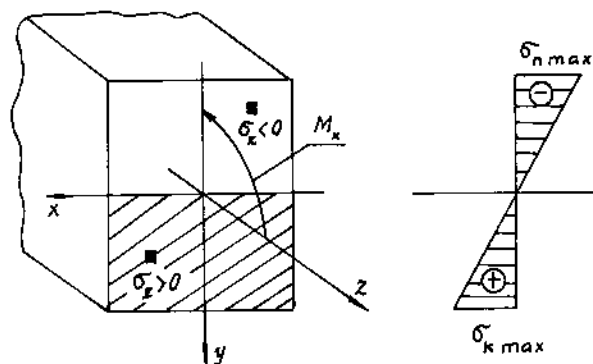
Độ cong của trục dầm tỉ lệ nghịch với tích số EJ_x , do đó EJ_x gọi là độ cứng chống uốn của dầm. Cuối cùng từ (5) và (8.1) ta tìm được công thức sau đây dùng để tính ứng suất trên mặt cắt ngang:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (8.2)$$

Như vậy ứng suất pháp tại điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn thuần túy tỉ lệ thuận với mômen uốn và khoảng cách từ điểm đó đến trục trung hoà và tỉ lệ nghịch với mômen diện tích cấp 2 của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà x.

2.6. ỨNG SUẤT CỰC TRỊ TRÊN MẶT CẮT NGANG

Ta nhận thấy tại các điểm biên trên và biên dưới, tức là tại các điểm xa nhất đối với trục trung hoà của mặt cắt ngang, ứng suất pháp có trị số tuyệt đối lớn nhất.



Hình 8.7.

Nếu mặt cắt ngang đối xứng qua trục trung hoà và ký hiệu chiều cao của mặt cắt ngang là h thì tọa độ các điểm biên là $y = h/2$. Ứng

suất kéo lớn nhất và ứng suất nén lớn nhất trên mặt cắt ngang đó được xác định bởi các công thức (hình 8.7).

$$\sigma_{z \max}^k = \frac{|M_x|}{W_x} ; \quad \sigma_{z \max}^n = \frac{|M_x|}{W_x} \quad (8.3)$$

Trong đó ta ký hiệu: $W_x = J_x / y_{\max} = J_x / h/2 = \frac{2J_x}{h}$

W_x gọi là mômen chống uốn của mặt cắt ngang.

– Nếu mặt cắt ngang không đối xứng qua trục trung hoà thì trị số tuyệt đối của ứng suất kéo và ứng suất nén lớn nhất sẽ khác nhau.

Nếu ký hiệu khoảng cách từ điểm chịu kéo (nén) xa nhất tới trục trung hoà là $y_{\max}^k$ ($y_{\max}^n$). Khi đó ta có công thức tính ứng suất kéo (nén) lớn nhất như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z \max}^k &= \frac{|M_x|}{J_x / y_{k \max}} = \frac{|M_x|}{W_{kx}} \\ \sigma_{z \min}^n &= \frac{|M_x|}{J_x / y_{n \max}} = \frac{|M_x|}{W_{nx}} \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

2.7. MÔMEN CHỐNG UỐN CỦA MỘT SỐ MẶT CẮT NGANG ĐƠN GIẢN

a) Mặt cắt ngang hình chữ nhật (hình 8.8a)

Ta có:

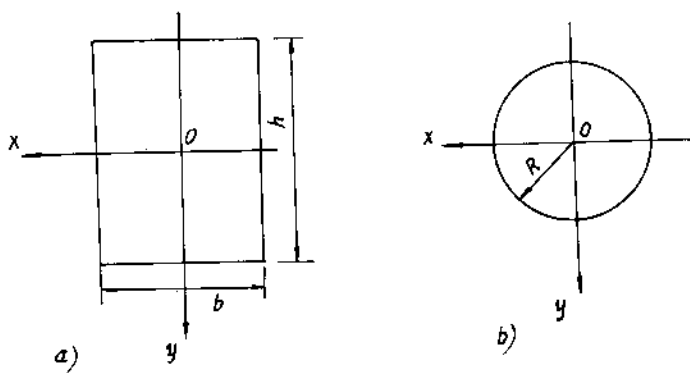
$$J_x = \frac{bh^3}{12} , \quad y_{k \max} = \frac{h}{2}$$

Do đó:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{6}$$

Ta thấy khi bố trí mặt cắt sao cho cạnh dài của nó song song với phương tải trọng thì khả năng chống uốn của dầm sẽ lớn hơn khi đặt cạnh ngắn song song với phương tải trọng (vì lúc này mômen chống

uốn bằng $\frac{hb^2}{6} < \frac{bh^2}{6}$). Điều này một lần nữa cho ta thấy rõ thêm ý nghĩa của các đặc trưng hình học: mômen diện tích các cấp.



Hình 8.8.

b) Mặt cắt ngang hình tròn (hình 8.8b)

Ta có:

$$J_x = \frac{\pi R^4}{4} \approx 0,05 D^4.$$

$$y_{k \max} = y_{n \max} = R$$

Do đó:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1 D^3$$

Với mặt cắt ngang hình vành khăn:

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4) ; y_{k \max} = y_{n \max} = \frac{D}{2}$$

Do đó:

$$W_x = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \eta^4) = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \eta^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \eta^4)$$

trong đó: $\eta = \frac{d}{D}$.

Với một số loại thép định hình (mặt cắt ngang hình chữ L, chữ I, chữ T, v.v...) các đặc trưng hình học được cho sẵn trong các bảng số liệu theo kích thước của mặt cắt ngang.

§3. HÌNH DẠNG HỢP LÝ CỦA MẶT CẮT NGANG

Hình dạng hợp lý của mặt cắt ngang là hình dạng sao cho dầm có khả năng chống uốn lớn nhất đồng thời tốn ít vật liệu nhất.

Đặc điểm của dầm bằng vật liệu giòn là khả năng chịu kéo và khả năng chịu nén khác nhau, do đó mặt cắt của dầm sẽ hợp lý nhất khi:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} y_{k \max} = [\sigma]_k$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{J_x} y_{n \max} = [\sigma]_n$$

chia hai vế của các đẳng thức trên cho nhau ta được:

$$\frac{y_{k \max}}{y_{n \max}} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \quad (a)$$

Như vậy, mặt cắt ngang phải có hình dạng sao cho đường trung hoà chia chiều cao của mặt cắt theo tỉ số (a). Ví dụ, các mặt cắt hình chữ T, hoặc chữ I không đối xứng (hình 8.9a, b).

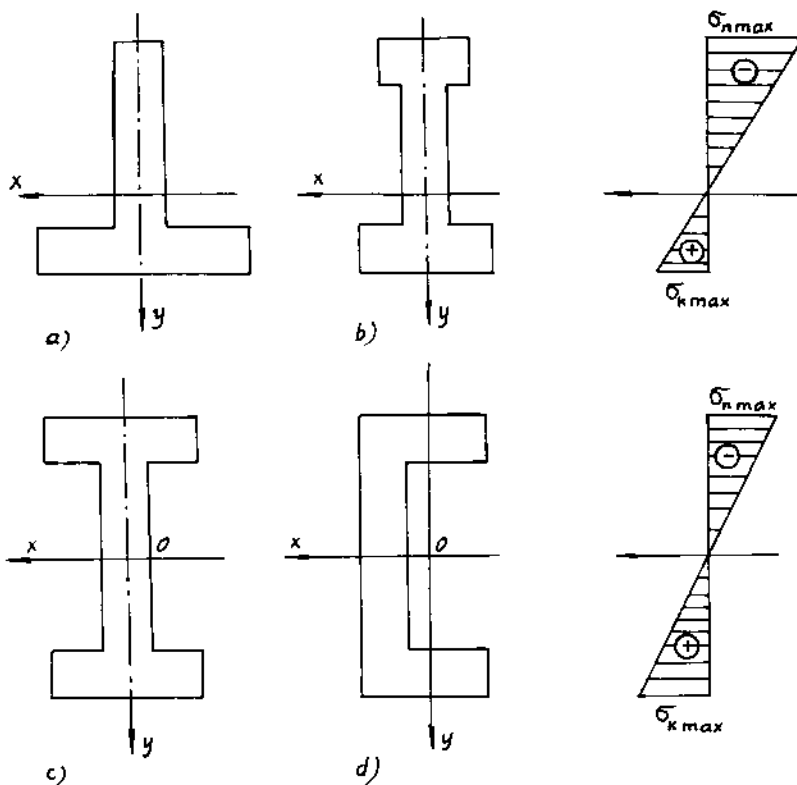
Đối với dầm bằng vật liệu dẻo thì khả năng chịu kéo và chịu nén như nhau, do đó tỉ số (a) trên đây bằng 1, nghĩa là $y_{k \max} = y_{n \max}$ cho nên trục trung hoà phải là trục đối xứng của mặt cắt ngang.

Qua biểu đồ ứng suất (hình 8.9) ta thấy ở những điểm càng gần trục trung hoà, trị số ứng suất pháp càng nhỏ, vì vậy để tiết kiệm vật liệu, mặt cắt ngang nên có hình dạng sao cho phần lớn vật liệu được phân bố xa trục trung hoà. Ví dụ: các mặt cắt hình chữ I chữ C (hình 8.8c, d).

a) Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$

– Nếu dầm có mặt cắt đối xứng đối với trục trung hoà thì điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (8.4a)$$



Hình 8.9.

– Khi dầm có mặt cắt không đối xứng qua trục trung hoà, điều kiện bền là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_{x \min}} \leq [\sigma] \quad (8.4b)$$

trong đó: $W_{x \min}$ là mômen chống uốn bé nhất của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà.

b) Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ điều kiện bên của dầm sẽ bao gồm cả hai điều kiện sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k \max} &\leq [\sigma]_k \\ \sigma_{n \max} &\leq [\sigma]_n \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Nếu dầm có mặt cắt đối xứng qua trục trung hoà thì $\sigma_{k \max} = |\sigma_{n \max}| = \sigma_{\max}$, nên chỉ cần thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k \quad (8.6)$$

§4. ĐƯỜNG ĐÀN HỒI, ĐỘ VÔNG VÀ GÓC XOAY

1. Khái niệm và định nghĩa

Khi bị uốn phẳng, trục của dầm không bị co dãn (vì nó nằm trên lớp trung hoà) nhưng bị cong đi trong mặt phẳng tải trọng (hình 8.10). Trục của dầm sau khi bị uốn cong được gọi là đường đàn hồi của dầm. Gọi K là một điểm nào đó trên trục dầm và K' là vị trí của K sau khi dầm bị biến dạng thì khoảng cách KK' được gọi là *chuyển vị thẳng hay độ võng tại K*. Có thể phân KK' thành hai thành phần u và V song song với các trục z và y. Vì biến dạng rất bé nên có thể coi $u \approx 0$, $y = KK' \approx V(z)$. Nghĩa là khi biến dạng, điểm K chuyển vị theo phương vuông góc với trục dầm. Chuyển vị V(z) theo phương y được gọi là *độ võng tại K của dầm*. Độ võng V phụ thuộc hoành độ z của điểm K nghĩa là $V = V(z)$, như vậy phương trình của đường đàn hồi V(z) là:

$$V = V(z) \quad (a)$$

Tiếp tuyến tại K' của đường đàn hồi làm với phương ban đầu của trục dầm (trục z) một góc φ_x và gọi là *chuyển vị góc hay góc xoay của mặt cắt ngang quanh trục Ox*. Do tính bé của chuyển vị nên ta có thể viết:

$$\varphi_x \approx \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dV}{dz} = V'(z) \quad (b)$$

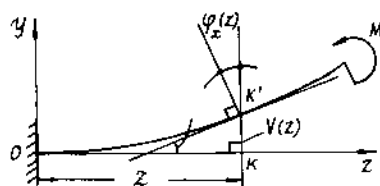
2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi

Khi dầm bị biến dạng, độ cong của nó có thể tính theo công thức gần đúng (8.1):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Công thức xác định bán kính cong đối với đường cong phẳng $V(z)$ trong hình học vi phân có dạng:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 V}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}$$

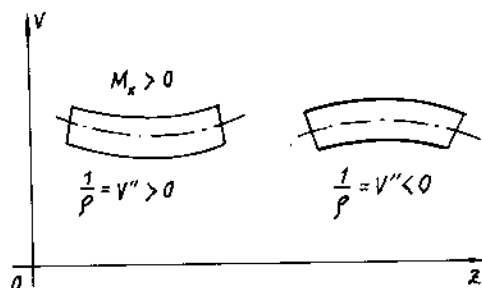


Hình 8.10.

So sánh hai công thức trên, ta thu được phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi của trục dầm chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng VOz như hình 8.11.

$$\frac{d^2 V / dz^2}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M_x^{(z)}}{EJ_x(z)} \quad (c)$$

Trong thực tế kỹ thuật không cho phép các công trình hay chi tiết máy bị biến dạng nhiều, vì thế góc xoay $\varphi_x = V'(z)$ thường rất bé và ta có thể bỏ qua $(V'(z))^2$ so với 1. Do đó phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng gần đúng sau:



Hình 8.11.

$$V''(z) = + \frac{M_x(z)}{EJ_x(z)} \quad \text{hay} \quad EV''(z) = \frac{M_x(z)}{J_x(z)}, \quad (8.6)$$

Phương trình này được gọi là phương trình Becnuli – Ôle.

3. Điều kiện cứng khi uốn

Nếu bằng một phương pháp nào đó ta giải được phương trình vi phân (8.6) với nghiệm thỏa mãn điều kiện biên của bài toán khảo sát thì ta luôn luôn xác định được các độ võng và góc xoay lớn nhất $V_{\max}$, $\varphi_{\max}$. Điều kiện cứng của một công trình là điều kiện được đưa ra nhằm hạn chế sự phát triển của các chuyển vị đàn hồi do tác dụng ngoài gây ra, sao cho thỏa mãn yêu cầu kỹ thuật của một loại công nghệ cụ thể nào đó.

Điều kiện cứng của dầm chịu uốn được diễn đạt như sau:

$$\begin{aligned}\max |V| &\leq [V] \\ \max |\varphi| &\leq [\varphi]\end{aligned}\quad (8.7)$$

Trong đó: $[V]$ và $[\varphi]$ là chuyển vị thẳng (độ võng) và góc xoay cho phép đối với kết cấu khảo sát được quy định bởi yêu cầu kỹ thuật của công nghệ.

Để thực hiện các tính toán về độ bền và độ cứng cho dầm thì từ các công thức mô tả các điều kiện bền và cứng (8.5) và (8.7), ta cần phải biết quy luật biến thiên của mômen uốn, lực cắt, độ võng và góc xoay dọc theo trục của dầm. Với mục đích xác định các đại lượng này người ta đã phải sử dụng nhiều phương pháp khác nhau. Tuy nhiên, có những phương pháp giải quyết được nội dung này nhưng lại không giải quyết được nội dung khác. Ví dụ, phương pháp mặt cắt có thể xác định được nội lực trong kết cấu tĩnh định mà không thể xác định được ngay cả nội lực và chuyển vị đối với các kết cấu siêu tĩnh. Ngày nay, chưa có một phương pháp nào cho phép giải quyết đồng thời hai mục tiêu là nội lực và chuyển vị trên cùng một thuật toán, ngay cả đối với các thanh chịu lực và liên kết đơn giản nhất, trừ phương pháp vạn năng. Phương pháp này cho phép giải quyết đồng thời tất cả các nội dung của sức bền vật liệu với các quy luật chịu lực và liên kết bất kỳ theo cùng một mô hình toán mà tác giả đã đề xuất, xây dựng và giới thiệu ở chương 4.

Dưới đây là một vài phương pháp cổ điển và vạn năng.

§5. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Lấy tích phân lần thứ nhất phương trình (8.6) ta được phương trình của góc xoay:

$$\varphi_x(z) = \frac{dV}{dz} = \int \frac{M_x}{EJ_x(z)} dz + C \quad (a)$$

Lấy tích phân lần thứ hai phương trình (8.6) ta được phương trình của đường đàn hồi:

$$V(z) = \int \left[\int \frac{M_x}{EJ_x(z)} dz \right] dz + Cz + D \quad (b)$$

trong đó C và D là các hằng số tích phân được xác định bằng các *điều kiện biên* của từng đoạn.

Chú ý rằng $\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z)$, cho nên trong kỹ thuật phương trình vi phân của đường đàn hồi thường được viết trực tiếp qua tải trọng $q(z)$ như sau:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EJ_x(z) \frac{d^2 V(z)}{dz^2} \right] = q(z) \quad (8.8)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi dạng (8.8) thường được sử dụng để tính dầm trên nền đàn hồi và tính toán dao động của dầm.

Theo phương pháp tích phân không xác định, nếu quy luật tác dụng của tải trọng và của $J_x(z)$ trên mỗi đoạn dầm khác nhau thì biểu thức của mômen uốn $M_x(z)$ và $J_x(z)$ sẽ khác nhau. Do đó, phương trình vi phân của đường đàn hồi trong những đoạn như thế cũng khác nhau. Vì vậy, dễ thấy là nếu dầm có n đoạn thì ta cần phải xác định $2n$ hằng số tích phân. Muốn xác định $2n$ hằng số này ta phải tìm được $2n$ điều kiện biên và thiết lập $2n$ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn là các hằng số tích phân đó.

Vì thế phương pháp này không có tính khả thi trong các tính toán kỹ thuật. Do những khó khăn trong tính toán như thế mà

phương pháp tích phân không xác định nói trên chỉ có ý nghĩa lý thuyết. Đây cũng chính là lý do làm xuất hiện nhiều phương pháp khác nhau khi tính toán độ cứng của kết cấu và cũng là nội dung khó và phức tạp nhất của sức bền vật liệu.

§6. PHƯƠNG PHÁP ĐỒ TOÁN (DẦM VÀ TẢI TRONG GIẢ TẠO)

Đối với các dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng ngoài đơn giản thì phương pháp đồ toán cho kết quả nhanh bằng chính phương pháp mặt cắt xác định mômen uốn và lực cắt đã biết ở chương 1.

Trong chương 1 và chương này ta đã biết:

a) Trường hợp mặt cắt không đổi dọc theo trục dầm

$$\frac{d^2 M_x(z)}{dz^2} = q(z) \quad (a)$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EJ_x} \quad (b)$$

Hai phương trình (a) và (b) hoàn toàn tương tự nhau về phương diện toán học. Do đó, bài toán xác định độ võng và góc xoay dẫn về việc xác định mômen uốn và lực cắt do một tải trọng giả tạo nào đó gây ra trên một dầm giả tạo tương ứng, nếu ta đặt:

$$\frac{M_x(z)}{EJ_x} = q_{gt}(z) \quad \text{và} \quad V(z) = M_{gt}(z) \quad (c)$$

thì phương trình (b) có dạng tương tự (a):

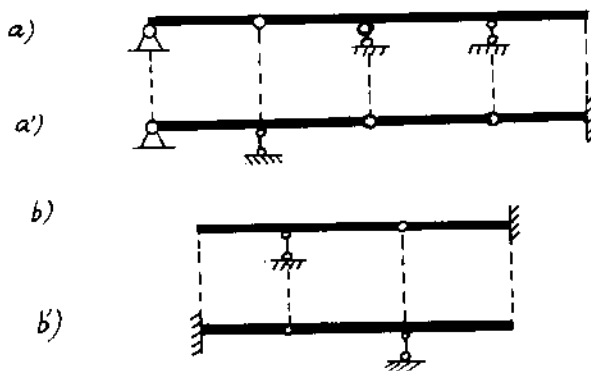
$$\frac{d^2 M_{gt}}{dz^2} = q_{gt}(z) \quad (8.9)$$

Nghiệm của phương trình (8.9) cho ta:

$$M_{gt}(z) = V(z) \quad \text{và} \quad Q_{gt}(z) = q(z) \quad \text{với } \forall z. \quad (8.10)$$

Các quan hệ (c) và (8.10) cho thấy $M_x(z)$ và $q_{gt}(z)$ cùng dấu, mômen $M_{gt}(z)$ và lực cắt $Q_{gt}(z)$ trong dầm giả tạo do tải trọng giả tạo gây ra cũng chính là độ võng $V(z)$ và góc xoay $\varphi(z)$ trong dầm thực đã

cho cả về dấu và giá trị. Do đó, điều kiện (8.10) cho ta quy tắc để cấu tạo liên kết cho dầm giả tạo. Theo quy tắc đó các dầm thực trên hình 8.12a, b có các dầm giả tạo tương ứng trên hình 8.12a', b'.



Hình 8.12.

b) Trường hợp dầm có mặt cắt thay đổi dọc theo trục dầm

Trong §4 của chương này ta đã thiết lập được đối với mỗi đoạn dầm phương trình vi phân (8.6):

$$EV'' = \frac{M_x}{J_x(z)}$$

Thay cho phương trình này ta có thể sử dụng phương trình sau đây bằng cách nhân cả hai vế với $J_0 \neq 0$:

$$EJ_0 V'' = M_x \cdot \frac{J_0}{J_x(z)} = M_{dx}, \quad (8.11a)$$

trong đó: J_0 là mômen quán tính ở mặt cắt nào đó được chọn trước làm chuẩn so sánh.

M_{dx} được gọi là mômen uốn dẫn xuất.

Trong trường hợp này tải trọng giả tạo tác dụng trên dầm giả tạo không phải là $M_x / EJ_x(z)$, mà là mômen M_{dx} theo quan hệ (8.11a). Khi đó, các chuyển vị được xác định như sau:

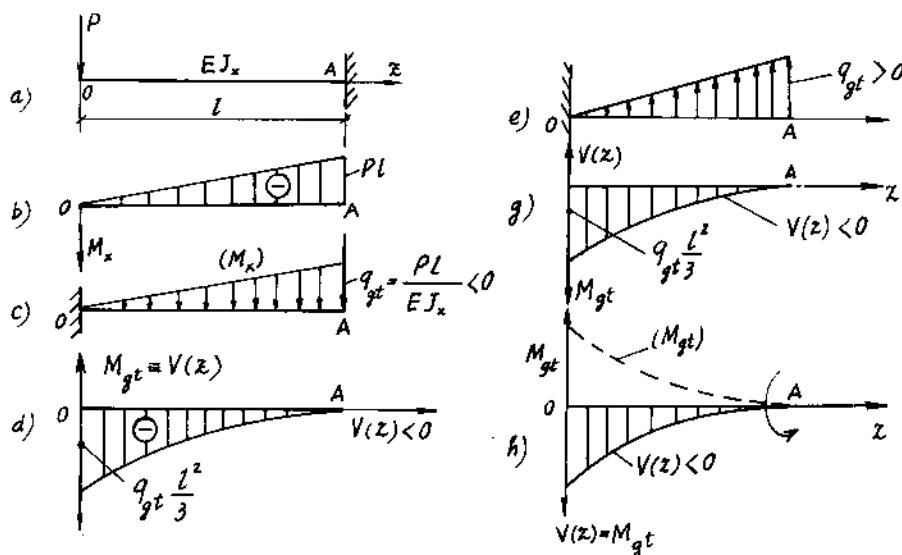
$$\varphi_x = \frac{Q_{gt}}{EJ_0}, \quad V = \frac{M_{xgt}}{EJ_0} \quad (8.11b)$$

Để nhận được đồ thị của các hàm $V(z)$ và $\varphi_x(z)$ cho cả trường hợp (a) và (b), trong thực hành ta có thể thực hiện theo các phương án sau đây thông qua một minh họa cụ thể là một dầm chịu lực như hình 8.13a với biểu đồ mômen uốn thực (hình 8.13b).

Phương án 1:

Dầm giả tạo và tải trọng giả tạo theo công thức (8.9) và (8.10) có dạng như hình 8.13c.

Vẽ biểu đồ M_{gt} trong hệ tọa độ $M_{gt}Oz$ như hình 8.13d.



Hình 8.13.

Phương án 2:

Lấy tải trọng giả tạo ngược dấu với M_x và vẽ M_{gt} (vẽ theo thói quen) trong hệ tọa độ $M_{gt}OZ$ (hình 8.13e, g).

Phương án 3:

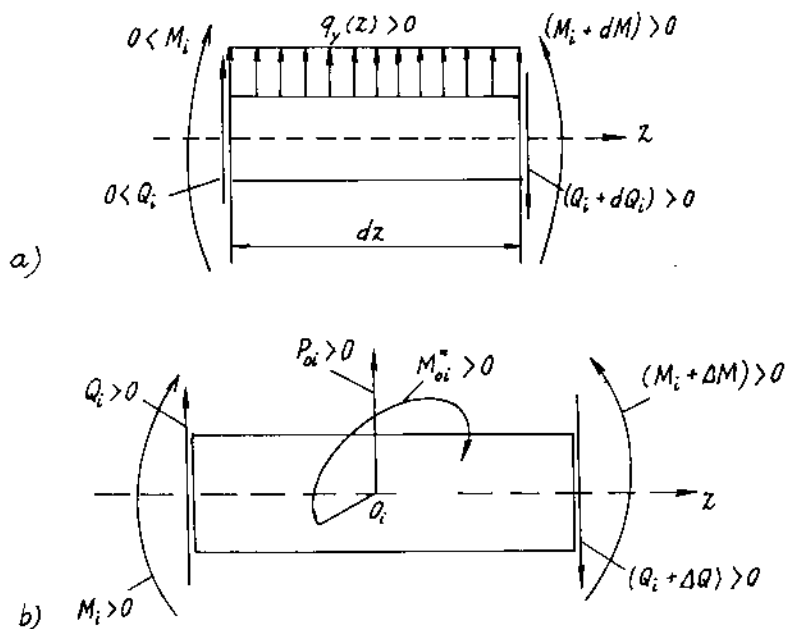
Vẽ biểu đồ M_{gt} (đường nét đứt) trong hệ tọa độ như hình 8.13h với q_{gt} như hình 8.13c. Sau đó quay đường cong M_{gt} (đường nét đứt) đi một góc 180° quanh trục z để có biểu đồ $V(z)$.

§7. PHƯƠNG PHÁP VẠN NĂNG

Như đã giới thiệu ở cuối §4 của chương này và ở chương 4. Phương pháp vạn năng là một phương pháp rất mạnh cho phép giải quyết đồng thời hai nội dung cơ bản của sức bền vật liệu là chuyển vị và nội lực do tính duy nhất của thuật toán của nó. Dưới đây là sự vận dụng phương pháp vào bài toán uốn.

1. Các liên hệ vi phân trong bài toán uốn ngang phẳng

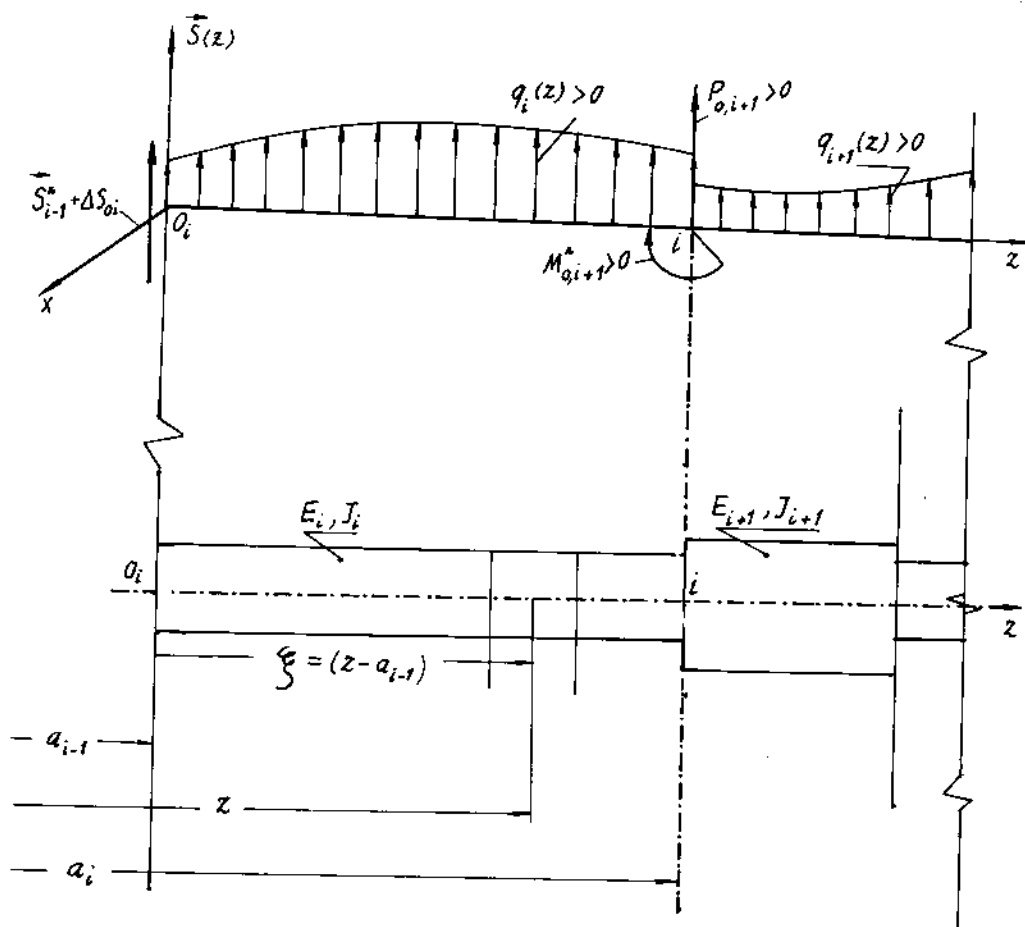
Khi khảo sát điều kiện cân bằng của một phân tố có chiều dài dz của dầm chịu uốn phẳng và đạo hàm liên tiếp theo z phương trình (8.6), ta có các liên hệ vi phân sau đây (hình 8.14a):



Hình 8.14a.

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_i &= P_{oi} \\ \frac{dV}{dz} &= \varphi(z) \\ \frac{d^2 V}{dz^2} &= \frac{M(z)}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (8.12a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta M_i &= M_{oi}^* & \frac{d^3 V}{dz^3} &= \frac{Q(z)}{EJ} \\
 \frac{dQ}{dz} &= q(z) & \frac{d^4 V}{dz^4} &= \frac{q(z)}{EJ} \\
 \frac{dM}{dz} &= Q(z) & \dots\dots\dots & \\
 \frac{d^2 M_x}{dz^2} &= q(z) & \frac{d^n V}{dz^n} &= \frac{q^{(n-4)}(z)}{EJ} \\
 \dots & \dots & & \\
 \frac{d^n M_x}{dz^n} &= q^{(n-2)}(z). & &
 \end{aligned} \right\} (8.12a)$$



Hình 8.14b.

Dạng ma trận

Trong trường hợp này vectơ các đại lượng cần tìm ở mặt cắt z bất kỳ thuộc đoạn i , $\bar{S}_i(z)$ có bốn thành phần là chuyển vị thẳng $V_i(z)$, chuyển vị góc (góc xoay) $\varphi_i(z)$, mômen uốn $M_i(z)$ và lực cắt $Q_i(z)$. Vectơ này được xác định theo công thức tổng quát (4.13) ở §3 của chương 4 với sơ đồ thuật toán như trên hình 8.14b. Cụ thể là:

$$\bar{S}_i(z) = [B_i] [B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{0i} + \dots + [B_i] \Delta \bar{S}_{0i} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (8.12b)$$

$$\bar{S}_i(z) = [B_i^*] [B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{0i} + \dots + [B_i^*] \Delta \bar{S}_{0i}$$

Trong đó:

$$\Delta \bar{S}_{0i} = \{\Delta V_{0i}, \Delta \varphi_{0i}, M_{0i}^*, P_{0i}, \Delta q_{0i}, \Delta q_{0i}', \Delta q_{0i}''\}^T \quad (8.13)$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \frac{\Phi_2}{E_i J_i} & \frac{\Phi_3}{E_i J_i} & \frac{\Phi_4}{E_i J_i} & \frac{\Phi_5}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i J_i} & \frac{\Phi_2}{E_i J_i} & \frac{\Phi_3}{E_i J_i} & \frac{\Phi_4}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

$$\bar{S}_i(z) = \begin{bmatrix} V_i(z) \\ \varphi_i(z) \\ M_i(z) \\ Q_i(z) \end{bmatrix}; \quad \phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{với } \forall z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{với } 0 \leq z \leq a_{i-1} \end{cases} \quad (8.15)$$

2. Dạng biểu diễn tổng

Trong trường hợp $l_i \neq \text{const}$ và $E_i J_i = \text{const}$ với mọi " i " ta có dạng biểu diễn tổng của uốn $\bar{S}_i(z)$ trong uốn ngang phẳng:

$$V_m(z) = \sum_{i=1}^{m=\overline{1, n}} \left\{ \Delta V_{0i} \cdot \Phi_0 + \Delta \varphi_{0i} \cdot \Phi_1 + M_{0i}^* \frac{\Phi_2}{EJ} + P_{0i} \frac{\Phi_3}{EJ} + \Delta q_{0i} \frac{\Phi_4}{EJ} + \Delta q_{0i}' + \frac{\Phi_5}{EJ} + \Delta q_{0i}'' + \frac{\Phi_6}{EJ} \dots \right\}; \quad (8.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m(z) &= \sum_{i=1}^{\overline{m=1,n}} \left(\Delta\varphi_{O_i} \cdot \Phi_0 + M_{O_i}' \frac{\Phi_1}{EJ} + P_{O_i} \frac{\Phi_2}{EJ} + \Delta q_{O_i} \frac{\Phi_3}{EJ} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta q_{O_i}' \frac{\Phi_4}{EJ} + \Delta q_{O_i}'' + \frac{\Phi_5}{EJ} \dots \right); \\ M_m(z) &= \sum_{i=1}^{\overline{m=1,n}} \left(M_{O_i}' \cdot \Phi_0 + P_{O_i} \cdot \Phi_1 + \Delta q_{O_i} \cdot \Phi_2 + \Delta q_{O_i}' \cdot \Phi_3 + \Delta q_{O_i}'' \cdot \Phi_4 \dots \right) \\ Q_m(z) &= \sum_{i=1}^{\overline{m=1,n}} \left(P_{O_i} \Phi_0 + \Delta q_{O_i} \Phi_1 + \Delta q_{O_i}' \Phi_2 + \Delta q_{O_i}'' \Phi_3 \dots \right) \end{aligned} \right\} (8.16)$$

$m = \overline{1, n}$ là tên gọi của đoạn thanh trên đó cần tính $\bar{S}_m(z)$

Trong các công thức từ (8.12) đến (8.16) (hình 8.14):

E_i – môđun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu của đoạn thanh i ;

J_i – mômen quán tính của mặt cắt ngang thuộc đoạn i đối với trục trung hoà;

ΔV_{O_i} – chuyển vị thẳng bổ sung vào đầu trái đoạn i (bước nhảy của V tại $z = a_{i-1}$).

$\Delta\varphi_{O_i}$ – góc xoay bổ sung vào đầu trái đoạn i (bước nhảy của φ tại $z = a_{i-1}$).

Khi thanh có cấu tạo liên tục thì $\Delta V_{O_i} = \Delta\varphi_{O_i} = 0$ với $\forall i > 1$.

M_{O_i}' là mômen uốn ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn i (ở mặt cắt $z = a_{i-1}$).

P_{O_i} là ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn i (ở mặt cắt $z = a_{i-1}$).

$\Delta q_{O_i}, \Delta q_{O_i}', \Delta q_{O_i}'' \dots$ là bước nhảy của tải trọng ngang phân bố $q(z)$ và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của nó ở mặt cắt $(i-1)$ có hoành độ $z = a_{i-1}$. Trong (8.12) dấu của tất cả các ngoại lực đều dương để chúng gây ra các nội lực dương như đã quy ước trong chương 1.

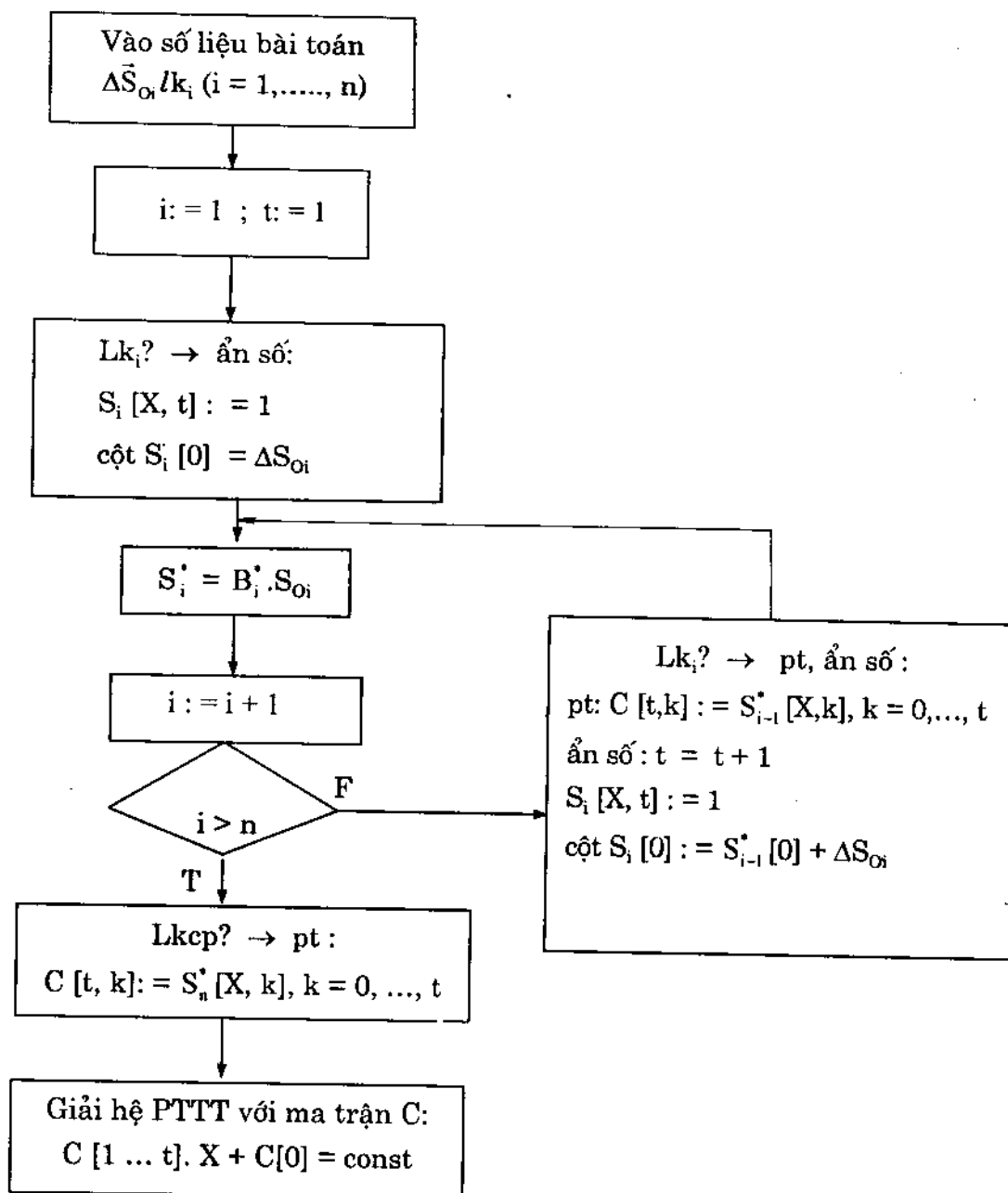
Phương pháp vụn năng và các công thức thuật toán của nó đã được giới thiệu và thiết lập căn cứ ở trên cho phép tính toán tất cả các loại thanh chịu các loại biến dạng đàn hồi có mặt cắt thay đổi,

chế độ chất tải và liên kết tùy ý cả về số lượng và thể loại. Nhiệm vụ của cơ học vật rắn biến dạng nói chung và “Sức bền vật liệu” nói riêng là xác định trường chuyển vị và nội lực trong hệ do tác dụng ngoài gây ra.

Như đã giới thiệu ở các mục trên của chương này, để xác định chuyển vị và nội lực bằng phương pháp vạn năng đã xây dựng sẵn ở trên thì vấn đề còn lại đối với bài toán cơ bản của “Sức bền vật liệu” là làm rõ các thành phần của vectơ $\Delta \bar{S}_{O_i}$. Trong số đó các thành phần liên quan đến bước nhảy của tải trọng phân bố và các đạo hàm các cấp của nó được biết trước theo điều kiện chất tải lên thanh. Các thành phần còn lại của vectơ $\Delta \bar{S}_{O_i}$ dù là bài toán kéo hay nén, uốn hay xoắn, tĩnh định hay siêu tĩnh với bất kỳ số lượng và loại liên kết thừa như thế nào, đều có thể xác định được bằng các điều kiện biên nhờ sử dụng trực tiếp các chương trình vạn năng đã thiết lập sẵn dưới dạng ma trận hay dưới dạng biểu diễn tổng mà không nhất thiết phải dùng đến các phương trình cân bằng tĩnh học. Đối với các bài toán tĩnh định bất kể số đoạn thanh có chế độ chất tải như thế nào, số các thành phần cần xác định trước trong $\Delta \bar{S}_{O_i}$ không quá hai đối với dầm chịu uốn, không quá một đối với thanh chịu kéo (nén) và xoắn. Trong nhiều trường hợp không cần phải xác định một thành phần nào của $\Delta \bar{S}_{O_i}$ nếu chỉ muốn tính nội lực. Thuật toán xác định đồng thời nội lực và chuyển vị vừa giới thiệu ở trên là điểm tựa vững chắc cho việc lập trình bằng ngôn ngữ nào mà bạn đọc ưa chuộng. Lời giải đối với một lớp rộng các bài toán với chương trình BK45 được cung cấp bởi tác giả, bằng chính thuật toán của mình sẽ được giới thiệu dưới đây.

§8. SƠ ĐỒ THUẬT TOÁN CHƯƠNG TRÌNH BK45 VÀ CÁCH SỬ DỤNG CHƯƠNG TRÌNH

1. Sơ đồ khối thuật toán tìm các ẩn số tại đầu trái của đoạn



2. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình gồm ba cửa sổ làm việc, dùng phím sang phải, sang trái hoặc kích chuột để chuyển đổi cửa sổ.

Cửa sổ thứ nhất để xác định bài toán cần tính (kéo, nén, uốn hay xoắn), số đoạn của thanh và các thông số tại cuối phải $z = a_n$ của thanh (lực tập trung, mômen tập trung, liên kết).

Cửa sổ thứ hai dùng để nhập thông số cho từng đoạn như sau:

a) Trên hộp thoại “đoạn thứ” khi chọn sẽ xuất hiện cửa sổ cho phép nhập số thứ tự của đoạn đang quan tâm.

b) Trên hộp thoại “chiều dài” khi chọn cho phép nhập chiều dài của đoạn đó.

c) Trên hộp thoại “liên kết” khi chọn cho phép nhập liên kết đầu trái mỗi đoạn.

d) Trên hộp thoại “E, G” khi chọn cho phép nhập môđun đàn hồi E với bài toán kéo, nén và uốn hoặc G đối với bài toán xoắn của mỗi đoạn.

e) Trên hộp thoại “F, J” khi chọn cho phép nhập các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang đối với từng loại bài toán.

g) Trên hộp thoại “P, M” khi chọn cho phép nhập các thông số về các yếu tố lực và mômen tập trung trong vectơ $\Delta \vec{S}_{O_i}$ ở đầu trái mỗi đoạn thứ i đang quan tâm.

h) Trên hộp thoại “lực phân bố” khi chọn cho phép nhập bước nhảy của ngoại lực phân bố và các đạo hàm các cấp của nó, nếu có trong vectơ $\Delta \vec{S}_{O_i}$ ở đầu trái đoạn i này (tức là ở mặt cắt phân chia giữa đoạn i và đoạn i-1 có hoành độ $z = a_{i-1}$).

Cửa sổ thứ ba dùng để xem kết quả của bài toán.

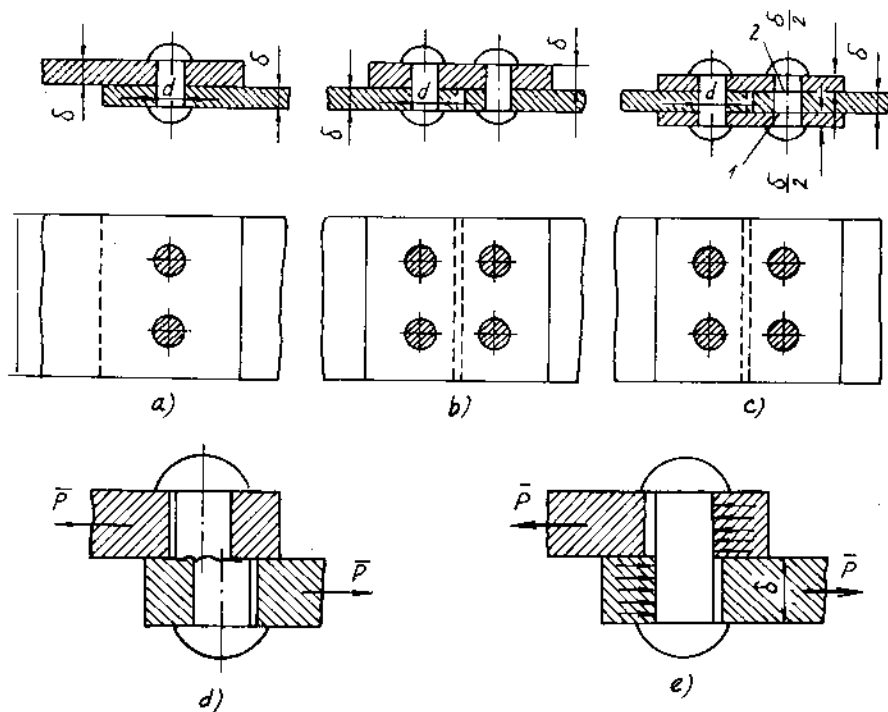
Chọn nút “Tính” và “Vẽ đồ thị” chương trình sẽ làm việc và xuất kết quả:

– Dưới dạng bảng các giá trị max của hàm chuyển vị, nội lực và vị trí các mặt cắt có giá trị max đó.

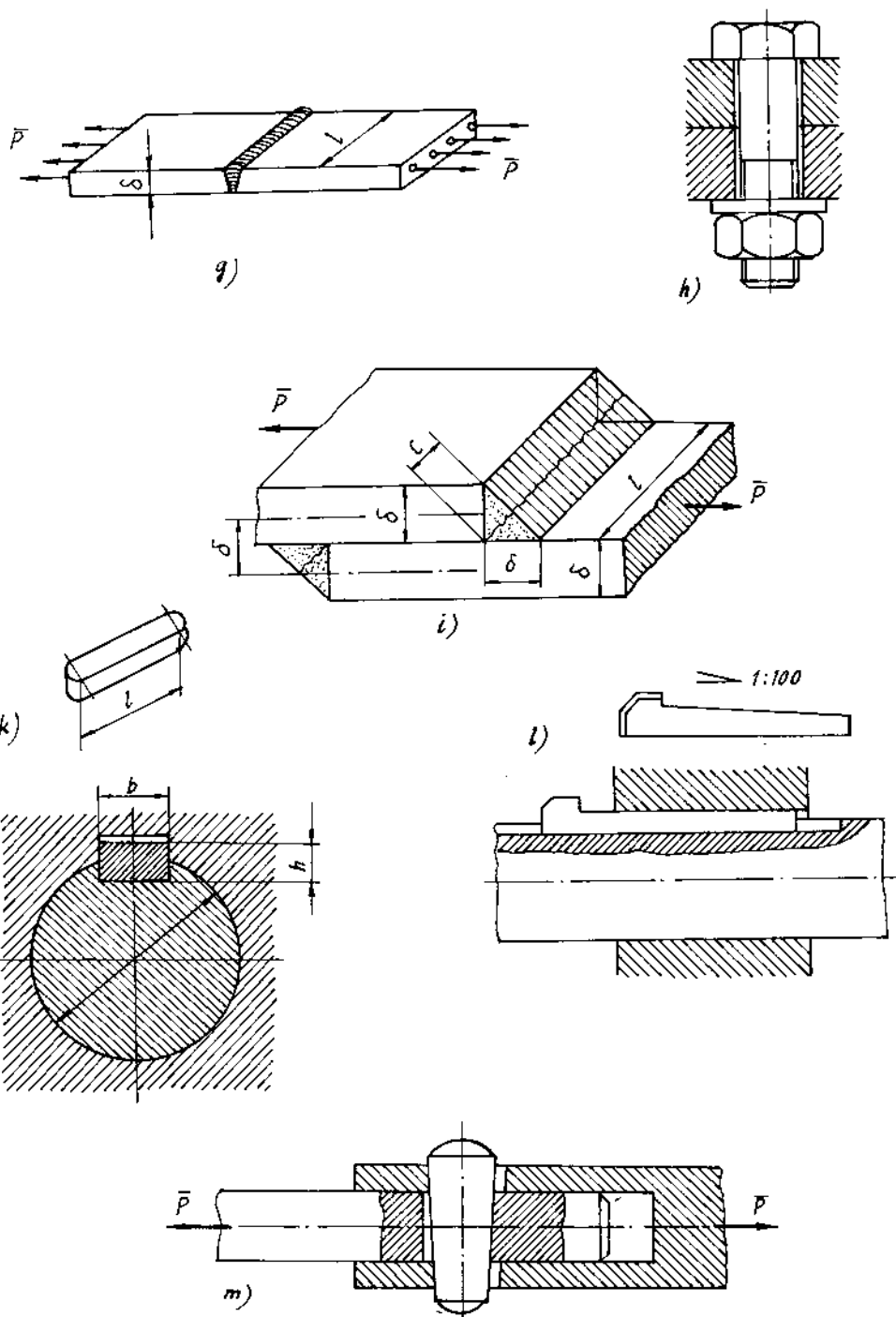
- Dưới dạng đồ thị, bảng số đối với mỗi đoạn và giá trị của $\tilde{S}(z)$ tại một mặt cắt cụ thể nào đó nếu có nhu cầu tính.
- Dưới dạng biểu thức giải tích của chuyển vị và nội lực.

§9. TRƯỢT THUẦN TÚY VÀ CÁC TÍNH TOÁN THỰC HÀNH CÁC MỐI GHÉP

Trong tất cả các lĩnh vực kỹ thuật, đặc biệt trong ngành chế tạo máy và xây dựng ta thường hay gặp những chi tiết làm việc trong điều kiện trạng thái ứng suất phức tạp khó xác định. Đó là những bài toán về cắt và dập trong các mối ghép: đinh tán, bulông, hàn, then, chêm, chốt (hình 8.15). Để giải quyết đầy đủ những bài toán đó đòi hỏi người thực hiện phải có một kiến thức sâu sắc về cơ học và toán học. Điều này vượt ra ngoài giới hạn của giáo trình này. Nhưng do tính chất thực dụng của những vấn đề nói trên, trong tiết này ta sẽ làm quen với cách tính thực hành và những khái niệm cơ bản về cách giải quyết những bài toán đó.



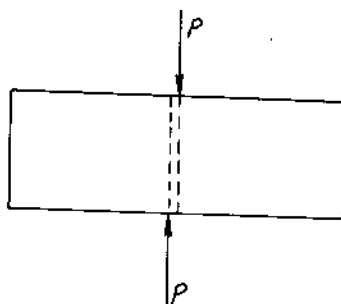
Hình 8.15.



Hình 8.15.

1. Khái niệm về hiện tượng trượt

Trong một số trường hợp độ bền cũng như độ cứng của các cấu kiện kết cấu liên quan trực tiếp tới khả năng chịu trượt của vật liệu. Do đó cần thiết phải nghiên cứu biến dạng trượt và trạng thái ứng suất tương ứng với nó. Không nên quên rằng, trong trường hợp tổng quát biến dạng trượt là một bộ phận tổ thành của trạng thái biến dạng tại một điểm.



Hình 8.16.

Như đã rõ từ chương 3, một dạng của trạng thái ứng suất và biến dạng phẳng, mà ở nó trên hai mặt cắt vuông góc của phân tố chỉ có các ứng suất tiếp tác dụng, được gọi là trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Từ đó ta định nghĩa một thanh được gọi là chịu trượt thuần túy như sau.

Định nghĩa: Một thanh được gọi là chịu trượt thuần túy, nếu trên các mặt cắt ngang của thanh chỉ có một loại nội lực là lực cắt ngang Q .

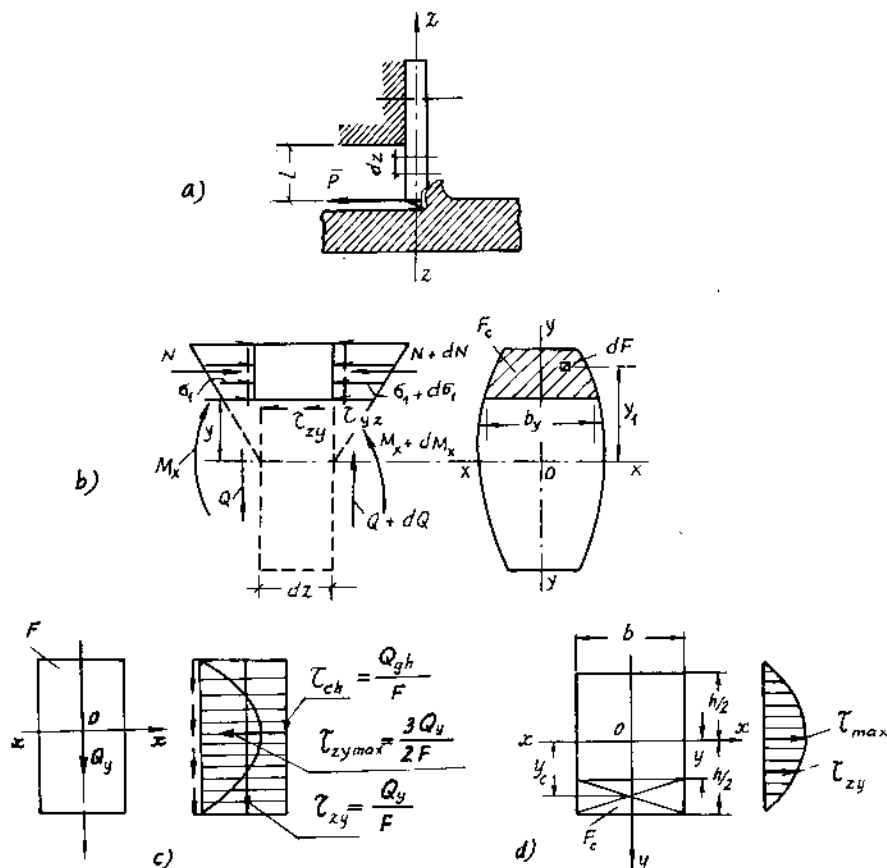
Trong thực tế rất ít gặp những thanh chịu lực lý tưởng như thế. Nghĩa là những thanh chịu cắt bởi hai lực trực đối P (hình 8.16).

Theo mối liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt, hiện tượng trượt luôn luôn kèm theo hiện tượng uốn. Trong trường hợp mômen uốn của ngẫu ($\bar{P}$, $\bar{P}$) rất bé (khoảng cách giữa hai đường tác dụng của các lực $\bar{P}$ rất nhỏ), trong tính toán kỹ thuật có thể bỏ qua ngẫu này và chỉ kể đến lực cắt Q .

Ví dụ, những dầm chịu các lực ngang có thể xem là những thanh chỉ chịu cắt, nếu chiều dài l của chúng là khá bé. Cụ thể là $l \leq 5h$, h – kích thước lớn nhất của mặt cắt.

2. Ứng suất tiếp khi trượt

Để xác định ứng suất tiếp khi trượt ta tưởng tượng tách ra khỏi dầm (hình 8.17a) một phần tử chiều dài dz bằng hai mặt cắt vuông góc với trục dầm và mặt cắt vuông góc với hai mặt cắt trên. Sau đó



Hình 8.17.

khảo sát sự cân bằng của một trong hai phần của phân tố đã được tách ra, ví dụ phần trên (hình 8.17b).

$$dN = \int_{F_c} d\sigma_1 dF = \int_{F_c} \frac{dM_x}{J_x} \cdot y_1 \cdot dF = \frac{dM_x}{J_x} \int_{F_c} y_1 dF$$

Tích phân $S_x^c = \int_{F_c} y_1 dF$ theo định nghĩa là mômen tĩnh của phần diện tích bị cắt F_c đối với trục trung hoà ox .

Vì thế:

$$dN = \frac{dM_x}{J_x} S_x^c$$

Để phần đã được tách ra cân bằng thì trên mặt cắt dọc phải tồn tại các ứng suất tiếp τ_{zy} . Những ứng suất này tạo thành hợp lực dT .

Theo điều kiện cân bằng của phân tố khảo sát, ta có:

$$\Sigma Z = 0 \Rightarrow dT = dN,$$

Hoặc:

$$dT = \frac{dM_x}{J_x} S_x^c \quad (a)$$

Để xác định ứng suất tiếp τ_{zy} cần phải biết quy luật phân bố của nó theo chiều rộng b_y của mặt cắt ngang. Thực tế quy luật này phụ thuộc vào hình dáng mặt cắt ngang. Tuy nhiên, đối với phần lớn các mặt cắt ngang hẹp có thể giả thiết rằng, ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều rộng b_y của mặt cắt.

Thừa nhận giả thiết này, ta có thể tính lực trượt dT như sau:

$$dT = \tau_{zy} dz b_y \dots \quad (b)$$

ở đây b_y – là chiều rộng mặt cắt ngang tại điểm, mà ở đó cần xác định ứng suất tiếp $\tau = \tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Chú ý đến công thức (a) và (b) ta có:

$$\tau_{zy} = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^c}{J_x b_y}$$

Nhưng:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

Vì vậy, theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang bất kỳ sau đây:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot b_y} \quad (8.17)$$

Công thức này gọi là công thức tính ứng suất tiếp của Zuravski. Nếu một lần nữa giả thiết rằng, ứng suất tiếp phân bố đều trên toàn bộ mặt cắt thì rõ ràng là:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y}{F} \quad (8.18)$$

Khi biến dạng trượt còn chưa vượt quá giới hạn đàn hồi, về thực chất ứng suất tiếp được tìm theo (8.18) là ứng suất trung bình hoá nào đó. Nó luôn luôn nhỏ hơn ứng suất tiếp lớn nhất được xác định theo (8.17). Nếu biến dạng trượt ở tất cả các điểm trên mặt cắt đã vượt quá giới hạn đàn hồi và chuyển vào trạng thái dẻo thì công thức xác định ứng suất tiếp (8.18) là đúng. Khi đó:

$$\tau_{ch} = \frac{Q_{gh}}{F} \quad (8.19)$$

trong đó: F – diện tích mặt cắt ngang;

Q_{gh} – lực cắt giới hạn, còn τ_{ch} – ứng suất tiếp chảy (giới hạn chảy khi cắt).

Hình 8.17c biểu diễn sự phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt dạng chữ nhật được xác định theo các công thức tương ứng từ (8.17) đến (8.19).

4. Tính toán thực hành các mối ghép

Trong mục này ta sẽ làm quen với cách tính toán thực hành một số mối ghép thường gặp như: đinh tán, bulông, hàn, then, chêm và chốt.

Biến dạng thực của những mối ghép này rất phức tạp và chỉ có thể được khảo sát gần đúng như những biến dạng trượt. Vì vậy những tính toán trình bày trong mục này là dựa trên những giả thiết khá thô và chúng chỉ có đặc trưng quy ước. Nhưng do tính an toàn và đơn giản của các giả thiết đó mà cách tính toán này được sử dụng rất rộng rãi trong thực tế thiết kế.

Ngoài ra một số đại lượng sử dụng trong tính toán được lấy từ những số liệu thí nghiệm. Điều này có nghĩa là những sự hiệu chỉnh tương ứng đã đưa vào trong tính toán và làm cho những tính toán này trở thành đủ tin cậy.

Ta khảo sát sự làm việc của một đinh tán có ba tấm ghép (hình 8.15c và 8.18). Đinh tán có thể bị cắt tại các mặt cắt 1 và 2. Đó là một trong những dạng phá hỏng chủ yếu của mối ghép này. Ta gọi đinh tán như thế là đinh tán có hai mặt bị cắt. Mối ghép bulông (hình 8.15h) cũng làm việc trong những điều kiện tương tự như mối ghép đinh tán. Phương pháp tính toán mối ghép đinh tán được trình bày dưới đây cũng đúng đối với một số loại liên kết bulông (mối ghép bulông thô).

A. PHƯƠNG PHÁP TRẠNG THÁI GIỚI HẠN

1. Mối ghép đinh tán

Ta cần tìm lực giới hạn P_{gh} mà đinh tán có hai mặt bị cắt có thể chịu được theo điều kiện cắt. Chúng ta sẽ xem trạng thái chảy trên các mặt bị cắt là lúc mối ghép hết khả năng làm việc. Ở trạng thái này sự trượt đáng kể của các tấm ghép đồng thời xảy ra. Thực tế, sự phá hỏng mối ghép loại này có thể xảy ra với tải trọng vượt quá tải trọng gây ra sự chảy khoảng 1,5 – 2 lần.

Có thể xem ở thời điểm xuất hiện hiện tượng chảy ở mỗi điểm của mặt bị cắt ứng suất đạt được giới hạn chảy tính toán R_c . Do đó, giả sử rằng ở trạng thái giới hạn các ứng suất tiếp phân bố đều trên diện tích bị cắt và bằng R_c .

Vậy ta có:

$$P_{gh} = F_c R_c \quad (8.20)$$

trong đó: F_c là diện tích của hai mặt bị cắt 1 và 2 của đỉnh tán.

Nếu gọi d là đường kính của đỉnh tán thì:

$$F_c = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (8.21)$$

Khi thay (8.21) vào công thức (8.20) ta tìm được lực giới hạn P_{gh} đối với đỉnh tán có hai mặt bị cắt sau đây:

$$P_{gh} = \frac{\pi d^2}{2} \cdot R_c \quad (8.22)$$

Nếu mỗi ghép có số tấm ghép lớn hơn ba thì đỉnh tán có thể có không phải hai mà là một số mặt bị cắt lớn hơn. Bởi vậy, nếu đỉnh tán có k mặt bị cắt thì lực giới hạn P_{gh} được xác định theo công thức:

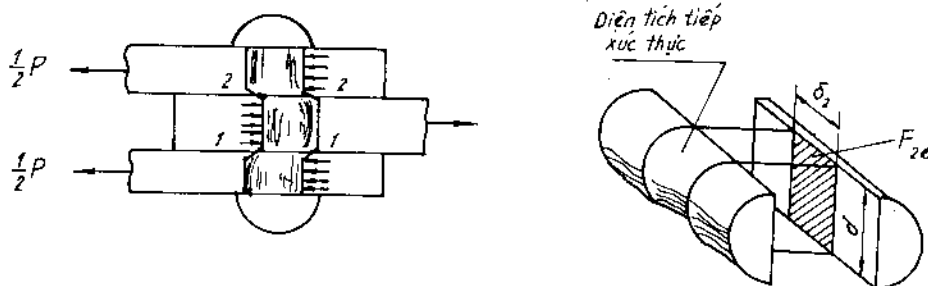
$$P_{gh} = k \frac{\pi d^2}{4} R_c \quad (8.23)$$

Ngoài sự phá hỏng do đỉnh tán bị cắt, sự phá hỏng mỗi ghép có thể xảy ra khi những tấm ghép tương đối mỏng, do đó mặt tiếp xúc giữa lỗ và thân đỉnh bị dập (ép mặt). Quy luật phân bố thực của ứng suất trên bề mặt tiếp xúc này rất phức tạp. Tuy nhiên sự nguy hiểm do ép mặt (dập) có thể đánh giá không phải giá trị thực của ứng suất tiếp xúc, mà là giá trị trung bình của ứng suất này tính trên diện tích ép mặt quy ước F_e (hình 8.18). F_e là hình chiếu của diện tích tiếp xúc trực tiếp trên mặt phẳng vuông góc với phương lực kéo tấm ghép P .

Các diện tích ép mặt quy ước đối với liên kết cho trên hình (8.18) $F_{1e} = \delta_1 d$ và $F_{2e} = \delta_2 d$. Cả hai diện tích ép mặt này chịu cùng một lực vì thế cần phải lấy diện tích nhỏ nhất trong chúng làm diện tích để tính toán $F_e^{\min}$. Trong trường hợp tổng quát:

$$F_e^{\min} = d \sum \delta \quad (8.24)$$

ở đây $\Sigma \delta$ là chiều dày tổng cộng nhỏ nhất của các tấm ghép được đặt theo một phương.



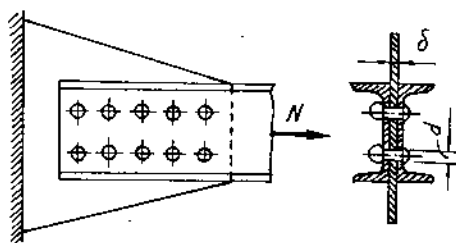
Hình 8.18.

Giá trị tính toán của ứng suất ép mặt quy ước R_e được tìm bằng thực nghiệm. Lực tính toán giới hạn cho một đinh tán theo điều kiện chịu ép mặt là:

$$P_e = F_e^{\min} \cdot R_e \quad (8.25)$$

Rõ ràng là lực nhỏ nhất trong hai lực tính toán giới hạn tìm được theo điều kiện chịu cắt và ép mặt là lực tính toán giới hạn đối với đinh tán.

Một câu hỏi được đặt ra là số lượng đinh tán cần thiết đối với một mối ghép chịu tác dụng của lực dọc N là bao nhiêu? (hình 8.19). Để giải quyết vấn đề này ta giả thiết là lực N được chia đều cho các đinh tán. Cần chú ý là trong giai đoạn đàn hồi



Hình 8.19.

các đinh tán trong mối ghép làm việc không giống nhau: Trên các

đầu cuối của mỗi ghép các đỉnh tán chịu lực nhiều hơn, còn ở giữa các đỉnh tán chịu lực ít hơn.

Tuy nhiên, trong giai đoạn biến dạng dẻo do hiện tượng chảy mà các nội lực trong các đỉnh tán được san đều. Điều này cho phép sử dụng những giả thiết đã nêu trên về sự chịu tải đều của tất cả các đỉnh tán của mỗi ghép.

Bởi vậy, số đỉnh tán cần thiết được xác định theo công thức dưới đây:

$$n = \frac{N}{P^{\min}} \quad (8.26)$$

trong đó: $P^{\min}$ là lực nhỏ nhất trong hai lực tính toán giới hạn nói trên mà một đỉnh tán phải chịu theo điều kiện cắt và ép mặt.

Việc chọn mặt cắt ngang và kiểm tra bền các cấu kiện ghép cần phải kể đến sự giảm yếu của mặt cắt do lỗ đỉnh tán. Nghĩa là diện tích mặt cắt ngang tính toán là diện tích bị giảm yếu F_{gy} .

2. Tính mỗi hàn chịu cắt

Dưới đây giới thiệu nguyên tắc tính toán mỗi hàn qua một ví dụ cụ thể của hai tấm ghép được liên kết với nhau bằng những mối hàn góc (hình 8.20). Liên kết hàn không gây ra sự giảm yếu các cấu kiện. So với những mối ghép khác, mối ghép hàn cần một khối lượng lao động ít hơn, vì thế, về mặt này nó kinh tế hơn.

Biến dạng xảy ra trong các mối hàn khá phức tạp, nhưng thí nghiệm đã chứng tỏ rằng sự phá hỏng mối hàn chủ yếu xảy ra do bị cắt theo mặt cắt dọc yếu nhất. Mặt cắt này làm với mép tấm một góc 45° . Khi đó mặt cắt ngang tính toán của mỗi hàn được thừa nhận dưới dạng một hình tam giác.

Nếu ký hiệu chiều cao mỗi hàn là h , thì diện tích bị cắt của hai mối hàn:

$$F_c = 2lh \cos 45^\circ = 1,4lh \quad (8.27)$$

Quy luật biến thiên của ứng suất tiếp trên diện tích bị cắt của mối hàn được xem là phân bố đều. Khi đó điều kiện bền có dạng:

$$\frac{N}{F_c} = \frac{N}{1,4lh} \leq R_c \quad (8.28)$$

trong đó: R_c – sức bền tính toán của vật liệu mối hàn góc khi cắt;

l – chiều dài tính toán của một mối hàn (thường được lấy nhỏ hơn chiều dài thực của mối hàn là 10 mm do chất lượng hàn không tốt ở các đầu mối hàn).

Như một nguyên tắc, vật liệu mối hàn không có thêm chảy rõ ràng. Vì thế khác với mối ghép đinh tán, ứng suất tiếp ở trạng thái giới hạn trong mối hàn hoàn toàn không được san bằng. Chính vì lý do đó người ta hạn chế chiều dài mối hàn là: $l \leq 60 h$. Khi đó độ sai lệch với giả thiết về sự phân bố đều của ứng suất tiếp trong mối hàn sẽ không lớn lắm. Mặt khác, chiều dài mối hàn cần phải là $l \geq 40 \text{ mm}$ và $l \geq 4 h$.

Từ công thức (8.28) khi quy định trước chiều cao mối hàn h , ta dễ dàng tìm được chiều dài yêu cầu của mối hàn l .

Khi tính toán mối hàn đối đầu chịu kéo ta sẽ sử dụng công thức tính toán đối với tấm ghép. Khi đó cần lấy sức bền tính toán R_K nhỏ hơn sức bền kéo của tấm ghép khoảng 10%. Điều này là do tính dẻo của vật liệu mối hàn và vật liệu tấm ghép quanh mối hàn giảm đi trong quá trình hàn.

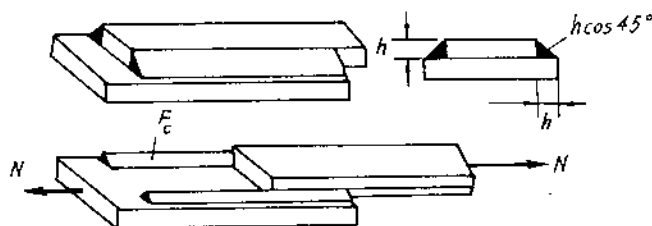
B. PHƯƠNG PHÁP ỨNG SUẤT CHO PHÉP

Khi tính toán các chi tiết chịu cắt theo ứng suất cho phép cần phải đảm bảo điều kiện bền cắt sau đây:

$$\tau_{\max} \leq [\tau_c] \quad (8.29)$$

trong đó: $\tau_{\max}$ là ứng suất tiếp phát sinh trong chi tiết do tải trọng ngoài gây ra và được xác định theo các công thức (8.17) hoặc (8.18);

$[\tau_c]$ – ứng suất cắt cho phép.



Hình 8.20.

Như đã nói ở trên hiện tượng cắt thường đi đôi với hiện tượng ép mặt (dập). Điều kiện ép mặt theo ứng suất cho phép là như sau:

$$\sigma_{\max}^e = \frac{N}{F_c^{\min}} \leq [\sigma_e] \quad (8.30)$$

trong đó: $\sigma_{\max}^e$ – là ứng suất ép mặt gây ra do ngoại lực N;

$F_c^{\min}$ – được xác định theo công thức (8.24);

$[\sigma_e]$ – ứng suất ép mặt cho phép.

1. Tính mỗi ghép đinh tán

Gọi n là số đinh trong mỗi ghép đinh tán. Giả thiết tải trọng P phân bố đều cho các đinh tán, thì tải trọng trên mỗi đinh là:

$$p = \frac{P}{n} \quad (8.31)$$

Để tránh các khả năng hỏng do cắt và dập các điều kiện bên sau đây phải được thỏa mãn:

a. Đinh không bị cắt đứt

$$\tau_{\max} = \frac{p}{k \cdot \pi d^2 / 4} \leq [\tau_c] \quad (8.32)$$

trong đó: τ_c – ứng suất cắt cho phép của đinh tán.

b. Mặt lỗ và đỉnh không bị dập

$$\sigma_{\max}^e = \frac{P}{F_e^{\min}} \leq [\tau_e] \quad (8.33)$$

trong đó: $F_e^{\min}$ là hình chiếu trên mặt phẳng vuông góc với p của mặt (trụ) tiếp xúc giữa lỗ đỉnh và đỉnh, được tính theo công thức (8.27).

Khi giải bài toán về chọn kích thước mặt cắt của đỉnh tán, người ta thường xuất phát từ *điều kiện bền đều* của đỉnh và tấm ghép. Chẳng hạn, các công thức (8.33) và (8.34) suy ra:

$$d = \frac{4}{\pi k} \frac{[\sigma]_E}{[\tau_e]} \sum \delta \quad (8.35)$$

2. Tính mối hàn

Dưới đây giới thiệu cách tính mối hàn góc song song với lực kéo (hình 8.20).

Ứng suất tiếp (cắt) trên mặt cắt của mối hàn bằng:

$$\tau = \frac{N}{1,4lh}$$

và điều kiện bền là:

$$\tau = \frac{N}{1,4lh} \leq [\tau_e] \quad (8.36)$$

$[\tau_e]$ – ứng suất tiếp khi cắt của vật liệu mối hàn góc.

3. Tính mối ghép then, chêm và chốt

Then, chêm và chốt thường bị hỏng vì cắt và dập và cách tính cũng tương tự như trường hợp đỉnh tán.

Dưới đây, giới thiệu cách tính then lạng trụ làm ví dụ:

Giả thiết áp lực phân bố đều trên mặt tiếp xúc của then với các chi tiết được ghép (trục và lỗ) và P là hợp lực của lực phân bố đó, ta có:

$$P = \frac{h}{2} \cdot l \cdot \sigma_d$$

trong đó:

l – chiều dài của then;

h – chiều cao của then.

Gọi M_z là mômen của ngoại lực đối với trục, dễ dàng thấy:

$$P \cdot y = M_z$$

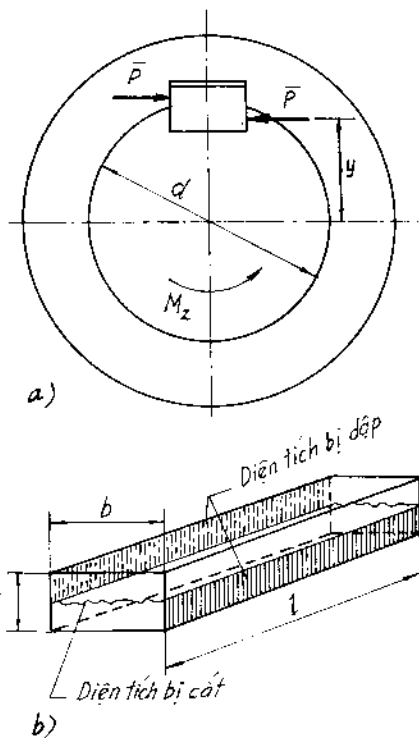
Có thể coi $y = d/2$ (d – đường kính trục).

Từ đó suy ra điều kiện bền về dập của then:

$$\tau_d = \frac{2P}{hl} = \frac{4M_z}{hld} \leq [\sigma_d]$$

Điều kiện bền về cắt của then:

$$\tau_c = \frac{P}{F_c} = \frac{P}{b \cdot l} = \frac{2M_z}{b \cdot l \cdot d} \leq [\tau_c].$$



Hình 8.21.

§10. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1: Cho một dầm với mặt cắt hình chữ T có kích thước, hình dạng và sơ đồ chịu lực như trên hình 8.22a, c.

Hãy kiểm tra điều kiện bền của dầm khi chỉ kể đến tác dụng của mômen uốn.

Biết: $[\sigma]_k = 30 \text{ MN/m}^2$, $[\sigma]_n = 100 \text{ MN/m}^2$

GIẢI

Nếu chọn hệ tọa độ oxy như hình 8.22c thì trục trung hoà x của mặt cắt ngang song song với trục x_1 và cách x_1 một khoảng là:

$$y_o = \frac{(2.10^{-2})(10.10^{-2})(9.10^{-2}) + (8.10^{-2})(2.10^{-2})(4.10^{-2})}{(2.10^{-2})(10.10^{-2}) + (2.10^{-2})(8.10^{-2})} = 6,78.10^{-2} \text{ m.}$$

Mômen diện tích cấp hai của mặt cắt đối với trục trung hoà x (cũng là mômen quán tính chính trung tâm) bằng:

$$J_x = \frac{(10.10^{-2})(2.10^{-2})^3}{12} + (2.10^{-2})(10.10^{-2})(2,22.10^{-2})^2 + \frac{(2.10^{-2})(8.10^{-2})^3}{12} + (2.10^{-2})(8.10^{-2})(2,78.10^{-2})^2 = 314.10^{-8} \text{ m}^4.$$

Biểu đồ mômen uốn của dầm như hình 8.22b.

Vì vật liệu làm dầm có khả năng chịu kéo và chịu nén khác nhau nên mặt cắt nguy hiểm cần kiểm tra là các mặt cắt trong đoạn BC và DE.

Tại các mặt cắt trong đoạn DE mômen uốn $M_x = -3000 \text{ Nm}$, phần đầu chữ T bị kéo và phần chân chữ T bị nén. Theo công thức (8.4) ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{3000}{314.10^{-8}} 3,22.10^{-2} = 30,7.10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{3000}{314.10^{-8}} 6,78.10^{-2} = 64,7.10^6 \text{ N/m}^2.$$

Ta thấy:

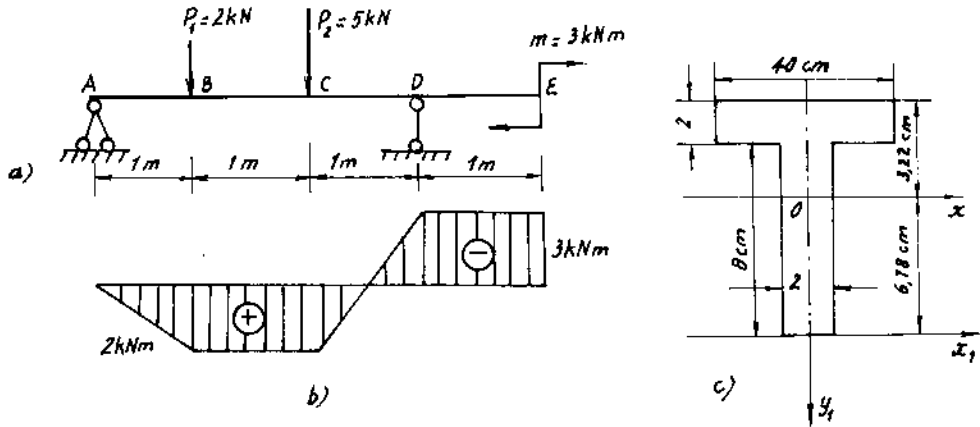
$$\sigma_{\min} = 64,7 \text{ MN/m}^2 < [\sigma]_n = 100 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{\max} = 30,7 \text{ MN/m}^2 > [\sigma]_k = 30 \text{ MN/m}^2$$

Tuy $\sigma_{\max} > [\sigma]_k$ nhưng chưa quá 5% mà chỉ mới vượt quá

$$\frac{30,7 - 30}{30} 100\% = 2,5\%$$

trong đoạn DE điều kiện bền của dầm vẫn được bảo đảm.



Hình 8.22.

Tại các mặt cắt trong đoạn BC mômen uốn $M_x = 2000 \text{ Nm}$, phần đầu chữ T bị nén, phần chân chữ T bị kéo. Do đó:

$$\sigma_{\min} = - \frac{2000}{314 \cdot 10^{-8}} 3,22 \cdot 10^{-2} = -20,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2000}{314 \cdot 10^{-8}} 6,78 \cdot 10^{-2} = 43,2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Ta thấy:

$$|\sigma_{\min}| = 20,5 \text{ MN/m}^2 < [\sigma]_n$$

$$\sigma_{\max} = 42,2 \text{ MN/m}^2 > [\sigma]_k$$

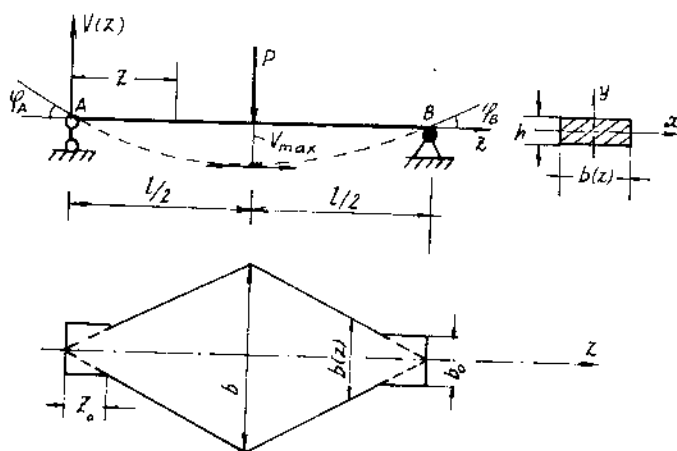
Do đó tại các mặt cắt trong đoạn BC điều kiện bền của dầm không được bảo đảm.

Ví dụ 2:

Một dầm độ bền đều mặt cắt ngang chữ nhật (hình 8.23) có chiều cao $h = \text{const}$, chiều rộng thay đổi $b = b(z)$ dọc theo z . Cho trước:

P, l, h và $[\sigma], [\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma]$

Hãy xác định: $b(z)$ để dầm có độ bền đều và sau đó tính $\varphi_{\max}$ và $V_{\max}$?



Hình 8.23.

GIẢI

a) Tính $b(z)$

$$M_x(z) = \frac{Pz}{2}$$

Mômen chống uốn tại mặt cắt z:

$$W_x(z) = \frac{b(z)h^2}{6}$$

Từ điều kiện bền tại mặt cắt bất kỳ z, ta rút ra:

$$W_x(z) = \frac{M_x(z)}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{b(z).h^2}{6} = \frac{P.z}{2[\sigma]} \Rightarrow b(z) = \frac{3Pz}{h^2[\sigma]}$$

$$b(z=0) = 0 ; b(z=l/2) = \frac{3Pl}{2h^2[\sigma]} \quad (1)$$

Tại mặt cắt gối A và B thì $M_z = 0$, $Q_y = \frac{P}{2}$. Do đó, nếu chỉ xét đến ảnh hưởng của M_x thì chiều rộng b tại các mặt cắt này phải bằng không. Tuy nhiên tại các mặt cắt này có $Q_{\max} = \frac{P}{2}$ và trong thực tế thiết kế đòi hỏi phải kể đến lực cắt tại đây. Cụ thể là:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3P}{4b_0 h} \leq [\tau] \Rightarrow b_0 \geq \frac{3P}{4h[\tau]} = \text{const}$$

trong đó b_0 là chiều rộng mặt cắt tại các gối tựa trên một chiều dài z_0 được tìm từ điều kiện (hình 8.23):

$$b_0 = \frac{3P}{4h[\tau]} = \frac{3Pz_0}{h^2[\tau]} \Rightarrow z_0 = \frac{h[\sigma]}{4[\tau]} \approx (0,5 \div 0,42) h$$

b. Tính $\varphi_{\max}$ và $V_{\max}$

$$I_x = \frac{b(z)h^3}{12} = \frac{Phz}{4[\sigma]} ; \quad M_x = \frac{Pz}{2}$$

Phương trình vi phân (8.6) có dạng cụ thể như sau:

$$EV'' = \frac{M_x(z)}{I_x(z)} = \frac{2[\sigma]}{h} \quad \text{hoặc là} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]} V'' = 1$$

Câu phương liên tiếp ta có:

$$\frac{Eh}{2[\sigma]} V' = z + C \quad \text{và} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]} V = \frac{z^2}{2} + Cz + D$$

Điều kiện liên kết của dầm cho ta:

$$\text{tại } z = 0, V(z = 0) = 0 ; \text{ tại } z = \frac{l}{2}, \varphi(z = l/2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{l}{2}, c_2 = 0$$

Vì vậy:

$$\varphi_{\max} = \varphi_A = -\varphi_B = (V') \Big|_{z=0} = \frac{2C[\sigma]}{Eh} = -\frac{l[\sigma]}{Eh}$$

$$\text{và} \quad V_{\max} = (V)_{z=l/2} = - \frac{l^2 [\sigma]}{4Eh}$$

Theo (1) ở trên, ta biết rằng:

$$[\sigma] = \frac{3Pl}{2h^2b}$$

Do đó:

$$\varphi_{\max} = - \frac{3}{2} \frac{Pl^2}{Eh^3b} \quad \text{và} \quad V_{\max} = - \frac{3}{8} \frac{Pl^3}{Eh^3b}$$

Ví dụ 4:

Một dầm thép mặt cắt chữ I thay đổi từng khúc chịu lực và liên kết như hình 8.24a. Cho trước: $P = 5 \text{ kN}$, $a = 100 \text{ cm}$, $M^* = 2 \text{ Pa} = 10^3 \text{ kNcm}$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $J = 3460 \text{ cm}^4$. Bằng phương pháp tải trọng giả tạo. Hãy tính độ võng tại các điểm H, A, D và góc xoay tại các điểm A, B, G và vẽ các biểu đồ (V) , (φ) ?

GIẢI

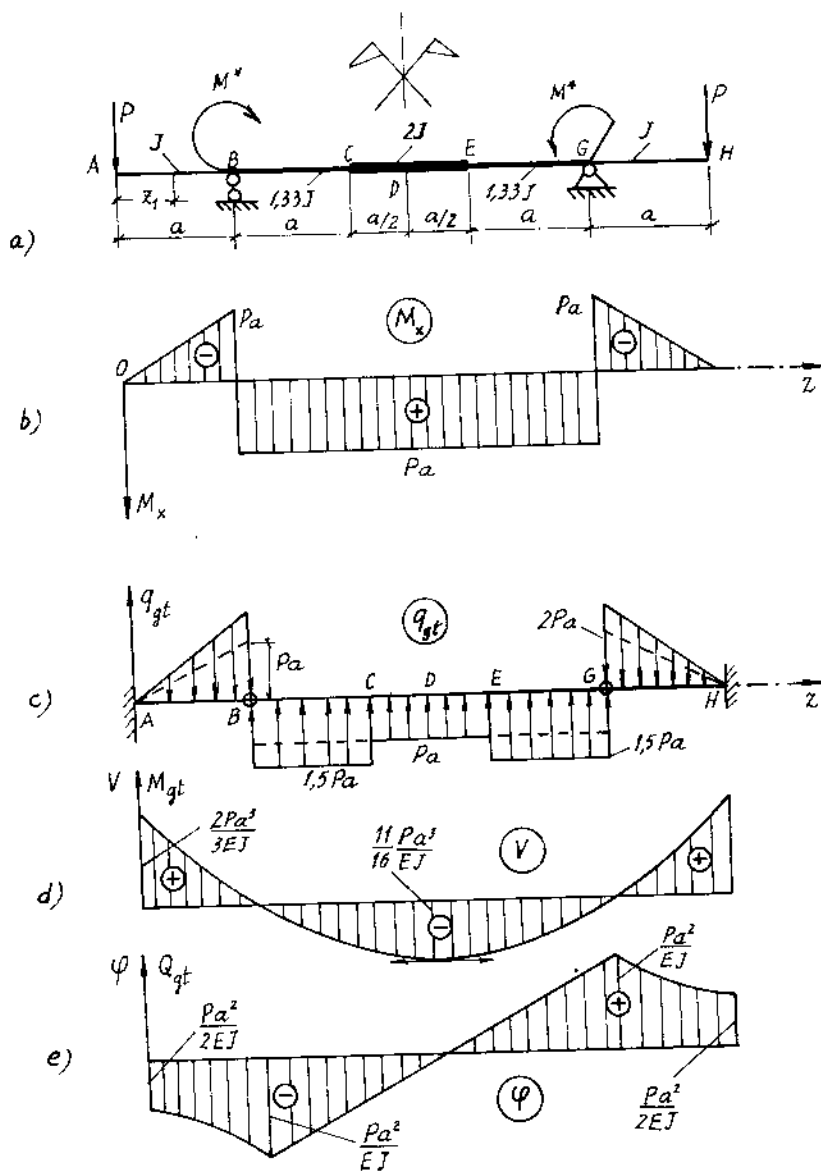
Biểu đồ mômen uốn trên dầm thực được cho trên hình 8.24b. Ta chọn $J_0 = 2J$ và tính mômen dẫn xuất theo công thức (8.12a) cho từng đoạn dầm. Cụ thể là:

$$M_{dx1} = M_{x1} \cdot \frac{2J}{J} = -2Pz_1$$

$$M_{dx2} = M_{x2} \cdot \frac{2J}{1,33J} = 1,5 \text{ Pa}$$

$$M_{dx3} = M_{x3} \cdot \frac{2J}{2J} = \text{Pa}$$

Dầm giả tạo và tải trọng giả tạo được xây dựng như hình 8.24c.



Hình 8.24.

Tách dầm phụ BG ra khỏi dầm chính AB và GH. Thực hiện các tính toán trên dầm phụ, sau đó truyền tác dụng của dầm phụ lên dầm chính qua các khớp B, G. Cụ thể ta có:

Lực tác dụng tương hỗ qua các khớp B, G giữa dầm phụ và các dầm chính là:

$$R_B = R_G = 1,5 Pa^2 + 0,5 Pa^2 = 2Pa^2.$$

Mômen giả tạo và lực cắt giả tạo và do đó là độ võng và góc xoay tại A là:

$$M_{gtA} = \frac{4}{3} Pa^3 \Rightarrow V_A = \frac{M_{gtA}}{2EJ} = \frac{2Pa^3}{3EJ} = V_H = +0,0303 \text{ cm.}$$

$$Q_{gtA} = -Pa^2 \Rightarrow \varphi_A = \frac{Q_{gt}}{2EJ} = -\frac{Pa^2}{2EJ} = -\varphi_H = -1,825.10^{-4} \text{ rad}$$

Đối với điểm B:

$$M_{gt} = V = 0, Q_{gt} = -2 Pa^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_B = \frac{Q_{gt}}{2EJ} = -\frac{Pa^2}{EJ} = -\varphi_G = -5,437.10^{-4} \text{ rad}$$

Đối với điểm D:

$$M_{gt} = -\frac{11Pa^3}{8} \Rightarrow V_D = \frac{M_{gt}}{2EJ} = -\frac{11}{16} \frac{Pa^3}{EJ} = -0,0279 \text{ cm}$$

Biểu đồ mômen giả tạo và lực cắt giả tạo được vẽ trong hệ tọa độ có các trục tung cùng chiều với các trục V và φ hướng lên trên (hình 8.24d, e) xem phương án 1§6.

CHƯƠNG 9

KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP

§1. NGUYÊN TẮC TÍNH TOÁN KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP

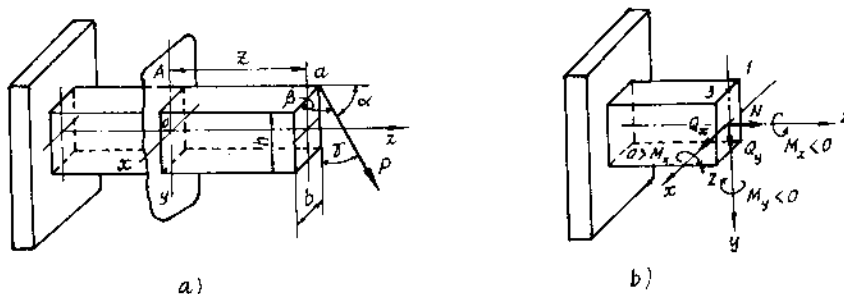
Một kết cấu được xem là chịu lực phức tạp, nếu trên các mặt cắt ngang của nó có ít nhất hai trong số sáu thành phần nội lực N , Q_y , Q_x , M_y , M_x , M_z .

Ta hãy xét một mặt cắt ngang A nào đó và gắn trên đó một hệ trục quán tính chính trung tâm $oxyz$ của dầm chịu lực như hình 9.1a. Lực P nghiêng với các trục tọa độ z , x , y tương ứng những góc α , β , γ . Các nội lực trên mặt cắt A gồm có (hình 9.1b).

$$N = P \cos \alpha ; M_x = -P \left(\frac{h}{2} \cos \alpha + Z \cos \gamma \right) ;$$

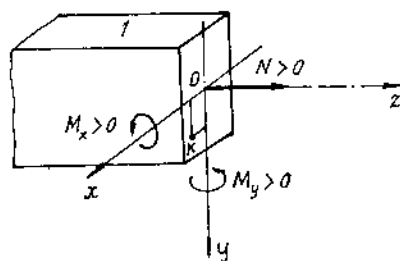
$$Q_y = P \cos \gamma ; M_y = -P \left(\frac{b}{2} \cos \alpha + Z \cos \beta \right) ;$$

$$Q_x = P \cos \beta ; M_z = P \left(\frac{b}{2} \cos \gamma - h/2 \cos \beta \right).$$



Hình 9.1.

Các nội lực dọc N và mômen uốn M_x, M_y gây ra ở mỗi điểm $K(x, y)$ của mặt cắt ngang hệ các ứng suất pháp đồng phương: $\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_{M_x}, \bar{\sigma}_{M_y}$, còn các lực cắt Q_x, Q_y và mômen xoắn M_z gây ra tại $K(x, y)$ hệ các ứng suất tiếp đồng phẳng: $\bar{\tau}_{Q_x}, \bar{\tau}_{Q_y}, \bar{\tau}_{M_z}$.



Hình 9.2.

1. Đối với nhóm các ứng suất tiếp

Ứng suất tiếp toàn phần do các nội lực Q_x, Q_y và M_z gây ra tại điểm $K(x, y)$ nào đó, theo nguyên lý độc lập tác dụng, bằng tổng hình học các ứng suất tiếp thành phần do riêng từng nội lực gây ra. Cụ thể là:

$$\tau = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (9.1)$$

trong đó:

$$\tau_{yz(1)} = \tau_{Q_y} = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \delta_y} ; \quad \tau_p = \frac{M_z}{J_\rho} \cdot \rho$$

$$\tau_{xz(2)} = \tau_{Q_x} = \frac{Q_x \cdot S_y^c}{J_y \delta_x} ;$$

Chú ý đến $\bar{\tau}_p = \bar{\tau}_{yz(3)} + \bar{\tau}_{xz(4)}$, ta có:

$$\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{yz(1)} + \bar{\tau}_{yz(3)} ; \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{xz(2)} + \bar{\tau}_{xz(4)}$$

2. Nhóm các ứng suất pháp tại điểm K(x, y)

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_N + \bar{\sigma}_{M_x} + \bar{\sigma}_{M_y}$$

hay dưới dạng tổng đại số ta có:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \quad (9.2)$$

Dấu các số hạng trong (9.2) phụ thuộc dấu của các nội lực và dấu của tọa độ điểm K(x, y).

Nếu trên các mặt cắt ngang chỉ có N, M_x, M_y thì ta gọi bài toán đó là bài toán uốn và kéo (nén) đồng thời hoặc kéo (nén) lệch tâm với độ lệch tâm e (hình 9.18 và 9.20 thuộc §7).

Trong thực hành ta xác định dấu của σ như sau:

$$\sigma = \pm \frac{|N|}{F} \pm \frac{|M_x| |y|}{J_x} \pm \frac{|M_y| |x|}{J_y} \quad (9.3)$$

Trong công thức này dấu dương (+) ứng với điểm cần tính ứng suất nằm ở miền chịu kéo do các nội lực tương ứng gây ra; dấu (-) ứng với điểm cần tính ứng suất nằm ở miền chịu nén do các nội lực tương ứng gây ra. Bản thân các nội lực và tọa độ điểm tính ứng suất trong công thức (9.3) được lấy theo các trị tuyệt đối. Như vậy theo cách xác định thực hành dấu của σ ta không phải quan tâm đến chiều các trục tọa độ và dấu các nội lực. Tuy nhiên, ta cũng có thể xác định dấu của σ theo dấu của các nội lực và tọa độ x, y bằng cách đặt vào mặt cắt khảo sát một hệ trục tọa độ (hình 9.2) sao cho các mômen uốn dương gây ra các ứng suất kéo ở các điểm thuộc góc phần tư dương thứ nhất của hệ tọa độ.

Ví dụ: cần xác định ứng suất tại điểm $K(x, y)$ thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt cắt có hoành độ z do các nội lực gây ra (hình 9.1). Theo công thức (9.2) ta có:

$$\sigma = + \frac{N}{F} + \frac{-M_x(+y)}{J_x} + \frac{-M_y(+x)}{J_y}$$

Do đó:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_x \cdot y}{J_x} - \frac{M_y \cdot x}{J_y} \quad (a)$$

Theo công thức (9.3) số hạng thứ nhất lấy dấu dương vì N gây ứng suất kéo trên toàn bộ mặt cắt chứa điểm $K(x, y)$. Số hạng thứ hai và ba lấy dấu âm vì M_x và M_y gây ra các ứng suất nén ở điểm $K(x, y)$.

Vậy theo (9.3) ta cũng nhận lại được kết quả (a):

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{|M_x| |y|}{J_x} - \frac{|M_y| |x|}{J_y} \quad (b)$$

Tương tự như các trường hợp chịu lực đơn giản, muốn biết vật liệu có bị phá hoại hay không tại một phân tử nào đó trên mặt cắt ngang của thanh chịu lực phức tạp ta phải sử dụng một cách thích hợp các thuyết bền đã được trình bày ở §2 của chương 6. Nghĩa là, cần phải tính các ứng suất tương đương theo hai nhóm ứng suất pháp và tiếp nối trên, sau đó so sánh với các ứng suất cho phép (theo phương pháp ứng suất cho phép) hoặc các cường độ ứng suất (theo phương pháp trạng thái giới hạn). Đó là nội dung của bài toán kiểm tra bền đối với thanh chịu lực phức tạp.

Một câu hỏi được đặt ra là: đối với mỗi mặt cắt xác định thì điểm nào trên mặt cắt là điểm nguy hiểm nhất?

Câu trả lời có tính chất nguyên tắc là: điểm nào có ứng suất tương đương lớn nhất sẽ là điểm nguy hiểm nhất.

Trong trường hợp tổng quát không thể chỉ ngay ra được điểm nguy hiểm nhất. Vì thế, trên cơ sở các ứng suất thành phần ta có thể phán đoán được một số điểm trên mặt cắt khảo sát có khả năng là

những điểm nguy hiểm và việc kiểm tra bền được tiến hành đối với tất cả những điểm này. Việc kiểm tra bền này đối với hệ phải được thực hiện đối với mặt cắt nguy hiểm nhất. Mặt cắt nguy hiểm này được thể hiện trên các biểu đồ nội lực và quy luật biến thiên của mặt cắt ngang dọc theo trục dầm.

Ta sẽ minh họa những chỉ dẫn ở trên qua việc kiểm tra bền đối với hệ cho trên hình 9.1a theo một thuyết bền nào đó.

Mặt cắt nguy hiểm nhất là mặt cắt ở ngàm (đầu trái của dầm) với các nội lực có độ lớn như sau:

$$N = P \cos \alpha \quad ; \quad M_x = -P \left(\frac{h}{2} \cos \alpha + l \cos \gamma \right) \quad (\text{căng trên})$$

$$Q_y = P \cos \gamma \quad ; \quad M_y = -P \left(\frac{b}{2} \cos \alpha + l \cos \beta \right) \quad (\text{căng trong})$$

$$Q_x = P \cos \beta \quad ; \quad M_z = P \left(\frac{b}{2} \cos \gamma - \frac{h}{2} \cos \beta \right) \quad (\text{thuận kim đồng hồ})$$

Phương và chiều của các nội lực này trên mặt cắt tại ngàm giống như phương, chiều các nội lực trên mặt cắt có hoành độ z (hình 9.1b).

Các điểm có tọa độ sau đây có thể là những điểm nguy hiểm cần kiểm tra:

$$1 \left(-\frac{b}{2} - \frac{h}{2} \right); \quad 2(b/2, h/2); \quad 3(0, -h/2); \quad 4(0, h/2); \quad 5\left(\frac{b}{2}, 0\right); \quad 6\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$$

Đối với điểm 1:

$$\tau_1 = 0 \quad ; \quad \sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{|N|}{F} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

Điều kiện bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất như sau:

$$\sigma_{td} = \sigma_{T3} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4\tau_1^2} = \sigma_1 = \frac{|N|}{F} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma] \quad (9.4)$$

Đối với điểm 2:

$$\tau_2 = 0 ; \sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{|N|}{F} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}$$

Do đó:

$$\sigma_{td} = \sigma_{T3} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2} = \frac{|N|}{F} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma] \quad (9.5)$$

Đối với điểm 5:

$$\sigma_5 = \frac{|N|}{F} - \frac{|M_y|}{W_y}$$

$$\bar{\tau}_{yz5} = \frac{3Q_y}{2F} \text{ (do lực cắt } Q_y \text{ gây ra);}$$

$$\tau_{yz5}^* = \frac{M_z}{\alpha hb^2} \text{ (do mômen xoắn } M_z \text{ gây ra);}$$

$$\tau_5 = \bar{\tau}_{yz5} + \tau_{yz5}^* = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} + \frac{M_z}{\alpha hb^2}$$

Vậy điều kiện bền là:

$$\sigma_{td} = \sigma_{T3} = \sqrt{\sigma_5^2 + 4\tau_5^2} \leq [\sigma] \quad (9.6)$$

Việc kiểm tra bền đối với các điểm còn lại cũng được tiến hành tương tự.

Thực tế tính toán cho thấy rằng đối với thanh dài chịu lực phức tạp ảnh hưởng của lực cắt đến độ bền của thanh không đáng kể so với các thành phần nội lực khác. Vì thế, trong các tính toán có thể bỏ qua lực cắt đối với những thanh có chiều dài $l > 5h$ (h – là kích thước lớn nhất của mặt cắt ngang).

Cần phải nhấn mạnh lại một lần nữa là việc chọn thuyết bền này hay thuyết bền khác để tiến hành kiểm tra bền cho kết cấu chịu lực phụ thuộc vào vật liệu chế tạo kết cấu đó và vào quan điểm của người tính toán. Ví dụ, đối với vật liệu có khả năng chịu kéo và nén

khác nhau, ta nhất thiết phải dùng thuyết bền MO trong số các thuyết bền được trình bày ở chương 6. Đối với vật liệu đẳng hướng có khả năng chịu kéo và nén như nhau thì có thể sử dụng một trong ba thuyết bền: thuyết bền thứ ba, thuyết bền thứ tư và thuyết bền MO. Đối với các vật liệu dị hướng cần phải sử dụng các tiêu chuẩn bền và dẻo cho loại vật liệu này đã được mô tả ở §3 của chương 6. Dưới đây là cách áp dụng lý thuyết tổng quát ở trên vào bài toán hệ chịu lực phức tạp thường gặp.

§2. TÍNH DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Trong thực hành ta rất hay gặp những dầm chịu tác dụng của ngoại lực vuông góc với trục dầm, sao cho trên mặt cắt ngang chỉ có hai thành phần nội lực: mômen uốn M_x và lực cắt Q_y cùng nằm trong mặt phẳng đối xứng yz của dầm. Người ta thường gọi dầm chịu lực như thế là dầm chịu uốn ngang phẳng. Nó là sự tổ hợp của bài toán uốn thuần túy phẳng và cắt (theo quan điểm của nguyên lý độc lập tác dụng). Đây là một bài toán về thanh chịu lực phức tạp hay gặp nhất trong kỹ thuật và được khảo sát đầu tiên.

Ứng suất pháp do mômen uốn gây ra:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$$

Ứng suất tiếp do lực cắt Q_y gây ra:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \delta_y}$$

Như vậy, trạng thái ứng suất tại một điểm bất kỳ này của dầm chịu uốn ngang phẳng là trạng thái ứng suất phẳng.

Điều kiện bền của dầm theo thuyết thế năng biến đổi hình dáng như sau:

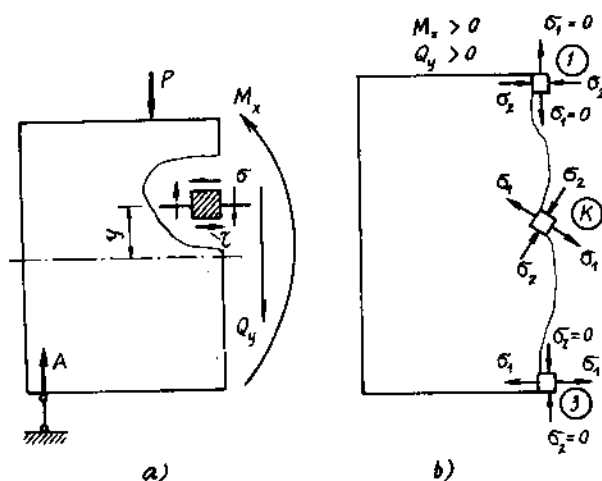
$$a) \quad \tau_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Điều kiện này được thực hiện ở mặt cắt nguy hiểm nhất đối với M_x và Q_y và ở điểm K có σ và τ đều lớn ở trên mặt cắt này.

$$b) \quad \sigma_{T_k} = |\sigma_{\max/\min}| \leq [\sigma]_{K/n}$$

Điều kiện này được thực hiện ở mặt cắt nguy hiểm nhất đối với M_x và ở điểm (1, 3) có ứng suất pháp cực trị $\sigma_{\max/\min}$ trên mặt cắt đó so với tất cả các ứng suất pháp lớn nhất trên các mặt cắt còn lại.

$$c) \quad \sigma_{T_k} = \sqrt{3} \tau_{\max} \leq [\sigma]$$



Hình 9.3.

Điều kiện này được thực hiện ở mặt cắt nguy hiểm nhất đối với Q_y và ở điểm có ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt đó so với tất cả các ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt còn lại.

Đối với dầm chịu uốn và cắt đồng thời cần phải kiểm tra bền theo cả ba điều kiện (a), (b), (c) là vì trạng thái ứng suất của các phần tử dọc theo chiều cao mặt cắt ngang được đặc trưng bởi những phân bố khác nhau cả về phương (hình 9.3b) của các ứng suất chính và trị số của chúng.

§3. VÍ DỤ MINH HỌA

Một dầm tĩnh định mặt cắt không đổi hình chữ I, chịu lực và liên kết như hình 9.4a. Biết: $a = 200 \text{ cm}$, $E = 2.10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $[\sigma] = 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $[V] = \frac{l}{400}$, $[\varphi] = 0,05 \text{ rad}$, $q = 0,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$, $J_x = 218200 \text{ cm}^4$, 4 thép góc không đều cạnh $80 \times 50 \times 5 \text{ (mm)}$, chiều dày bản bụng $\delta = 12 \text{ mm}$, chiều dày bản cánh $t = 10 \text{ mm}$.

Yêu cầu:

1. Viết các phương trình lực cắt $Q_y(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, độ võng $V(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$ và vẽ các biểu đồ này?
2. Hãy chỉ ra các mặt có $\max|Q_y|$, $\max|M_x|$, $\max|V|$ và $\max|\varphi|$?
3. Hãy kiểm tra toàn diện điều kiện làm việc cho dầm?

GIẢI

1. Viết phương trình và vẽ biểu đồ lực cắt $Q_y(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, độ võng $V(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$.

– Chọn trục z trùng với trục thanh hướng sang phải.

– Chọn gốc tọa độ ở đầu trái của dầm.

Gọi phản lực tại gối đỡ 1 là R_1 .

Gọi phản lực tại gối đỡ 4 là R_4 .

Giả định chúng có phương chiều như hình 9.4a.

Đối với dầm đã cho và với yêu cầu đề bài, phương pháp tối ưu nhất trong số các phương pháp đã giới thiệu là phương pháp vạn năng.

a) Tính phản ứng tại gối đỡ 1 (R_1) và 4 (R_4)

$$\Sigma m_4 = P.9,6a - R_1.8a + 4,8aq.7,2a + 2P.3,2a - aq.0,5a - M^* = 0$$

$$= qa.9,6a - R_1.8a + 4,8aq.7,2a + 2qa.3,2a - aq.0,5a - qa^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R_1 \cdot 8a = 9,6qa^2 + 34,56qa^2 + 6,4qa^2 - 0,5qa^2 - qa^2$$

$$\Rightarrow R_1 \cdot 8a = 49,06qa^2$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{49,06qa^2}{8a} = 6,132qa \text{ (kN)}$$

$$\Sigma m_1 = P \cdot 1,6a - 4,8aq \cdot 0,8a - 2P \cdot 4,8a + R_4 \cdot 8a - aq \cdot 8,5a - M^* = 0$$

$$= qa \cdot 1,6a - 4,8aq \cdot 0,8a - 2qa \cdot 4,8a + R_4 \cdot 8a - aq \cdot 8,5a - qa^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R_4 \cdot 8a = 3,84qa^2 + 9,6qa^2 + 8,5qa^2 - 1,6qa^2 + qa^2$$

$$\Rightarrow R_4 \cdot 8a = 21,34qa^2$$

$$\Rightarrow R_4 = \frac{21,34qa^2}{8a} = 2,667qa \text{ (kN)}$$

b) Phương trình lực cắt $Q_x(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$ và độ võng $V(z)$

Theo phương pháp vụn năng ta có:

$$\bullet Q_k(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[p_{oi} + \Delta q_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta q'_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^2}{2!} + \Delta q''_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^3}{3!} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q(z) &= -P - qz \Big|_1 + R_1 \Big|_2 + q(z - 4,8a) \Big|_3 - 2P \Big|_4 + R_4 - q(z - 9,6a) \Big|_5 \\ &= -qa - qz \Big|_1 + 6,132qa \Big|_2 + q(z - 4,8a) \Big|_3 - 2qa \Big|_4 \\ &\quad + 2,667qa - q(z - 9,6a) \Big|_5 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } M_x(z) &= \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[M^*_{oi} + P_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta q_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^2}{2!} + \Delta q'_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^3}{3!} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta q''_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^4}{4!} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(z) = -P - \frac{qz^2}{2} \Big|_1 + R_1(z - 1,6a) \Big|_2 + \frac{q(z - 4,8a)^2}{2} \Big|_3 -$$

$$\begin{aligned}
 & -2P(z-6,4a) \Big|_4 + R_4(z-9,6a) - \frac{q(z-9,6a)^2}{2} \Big|_5 \\
 \Rightarrow M(z) = & -qaz - \frac{qz^2}{2} \Big|_1 + 6,132(z-1,6a) \Big|_2 + \frac{q(z-4,8a)^2}{2} \Big|_3 - \\
 & -2qa(z-6,4a) \Big|_4 + 2,667qa(z-9,6a) - \frac{q(z-9,6a)^2}{2} \Big|_5 \quad (b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \varphi_k(z) = \Delta\varphi_{01} - \frac{Pz^2}{2!EJ} - \frac{qz^2}{3!EJ} \Big|_1 + R_1 \frac{(z-1,6a)^2}{3!EJ} \Big|_2 + \frac{q(z-4,8a)^3}{3!EJ} \Big|_3 - \\
 - 2P \frac{(z-6,4a)^2}{2!EJ} \Big|_4 + R_4 \frac{(z-9,6a)^2}{2!EJ} - \frac{q(z-9,6a)^3}{3!EJ} \Big|_5 \quad (c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) V_k(z) = \Delta V_{01} + \Delta\varphi_{01}z - \frac{Pz^2}{3!EJ} - \frac{qz^4}{4!EJ} \Big|_1 + R_1 \frac{(z-1,6a)^3}{3!EJ} \Big|_2 + \\
 + \frac{q(z-4,8a)^4}{4!EJ} \Big|_3 - 2P \frac{(z-6,4a)^3}{3!EJ} \Big|_4 + R_4 \frac{(z-9,6a)^3}{3!EJ} - \frac{q(z-9,6a)^4}{4!EJ} \Big|_5 \quad (d)
 \end{aligned}$$

Trong hệ phương trình a, b, c, d có 4 ẩn số cần xác định là: R_1 , R_4 và ΔV_{01} , $\Delta\varphi_{01}$. Các phản lực R_1 và R_4 đã được xác định nhờ điều kiện cân bằng ở trên. Tuy nhiên, thuận tiện hơn cả là sử dụng chính hai hệ phương trình độc lập của phương pháp vụn năng để xác định đồng thời các ẩn số này. Cụ thể là:

$$\left. \begin{aligned} Q(z=2120 \text{ cm}) &= 0 \\ M(z=2120 \text{ cm}) &= -qa^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} R_1 &= 6,132qa = 613,3 \text{ kN} \uparrow \\ R_4 &= 2,667qa = 366,7 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} V(z=320 \text{ cm}) &= 0 \\ V(z=1920 \text{ cm}) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta\varphi_{01} &= -3,91 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ \Delta V_{01} &= 1,426 \text{ cm} \end{aligned}$$

Sau khi thay các giá trị R_1 , R_4 , ΔV_{01} , $\Delta\varphi_{01}$ vào các phương trình a, b, c, d ta có các biểu thức tường minh của lực cắt $Q(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$ và độ võng $V(z)$.

Với các số liệu đề bài, phương trình độ võng $V(z)$ trong các đoạn, cụ thể như sau:

$$V_1(z) = -4,774 \cdot 10^{-12} \cdot z^4 - 3,82 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 - 3,90 \cdot 10^{-3} \cdot z + 1,420, \\ 0 \leq z \leq 320 \text{ cm}$$

$$V_2(z) = -4,774 \cdot 10^{-12} \cdot z^4 + 1,34 \cdot 10^{-8} \cdot z^3 - 6,59 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 - 5,70 \cdot 10^{-3} \cdot z + 3,41 \cdot 10^{-13}, \\ 320 \leq z \leq 960 \text{ cm}$$

$$V_3(z) = 1,27 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 + 7,57 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 - 2,58 \cdot 10^{-3} \cdot z - 3,62, \\ 960 \leq z \leq 1280 \text{ cm}$$

$$V_4(z) = -6,365 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 + 8,79 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 + 2,65 \cdot 10^{-3} \cdot z - 3,629 \\ 1280 \leq z \leq 1920 \text{ cm}$$

$$V_5(z) = -4,77 \cdot 10^{-12} \cdot z^4 + 3,81 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 - 3,43 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 + 6,078 \cdot 10^{-3} \cdot z - 1,60, \\ 1920 \leq z \leq 2120 \text{ cm}$$

Hoàn toàn tương tự như vậy, ta dễ dàng viết được phương trình góc xoay, mômen uốn và lực cắt với hệ số bằng số cho mỗi đoạn khi trực tiếp sử dụng các phương trình c, b, a hoặc bằng các liên hệ vi phân đã biết giữa các đại lượng khảo sát: chuyển vị, nội lực, ngoại lực.

Biểu đồ của (Q_y) , (M_x) , (V) , (φ_x) được cho trên hình 9.4b, c, d, e.

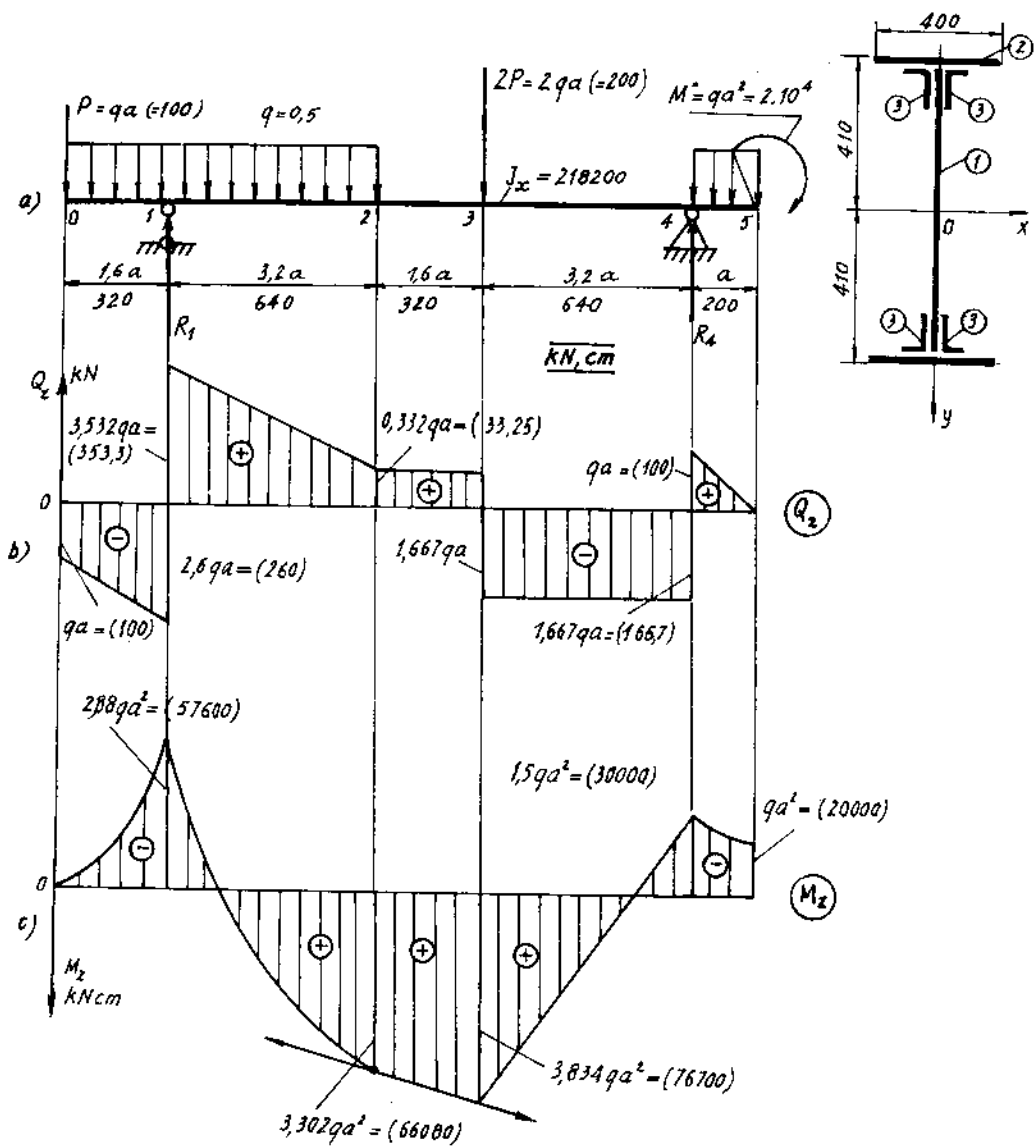
2. Các đại lượng cực trị phải tìm tại các mặt cắt tương ứng (hình 9.4b, c, d, e)

$$\max |Q_y| = 353,3 \text{ kN} \quad (\text{bên phải gối tựa 1});$$

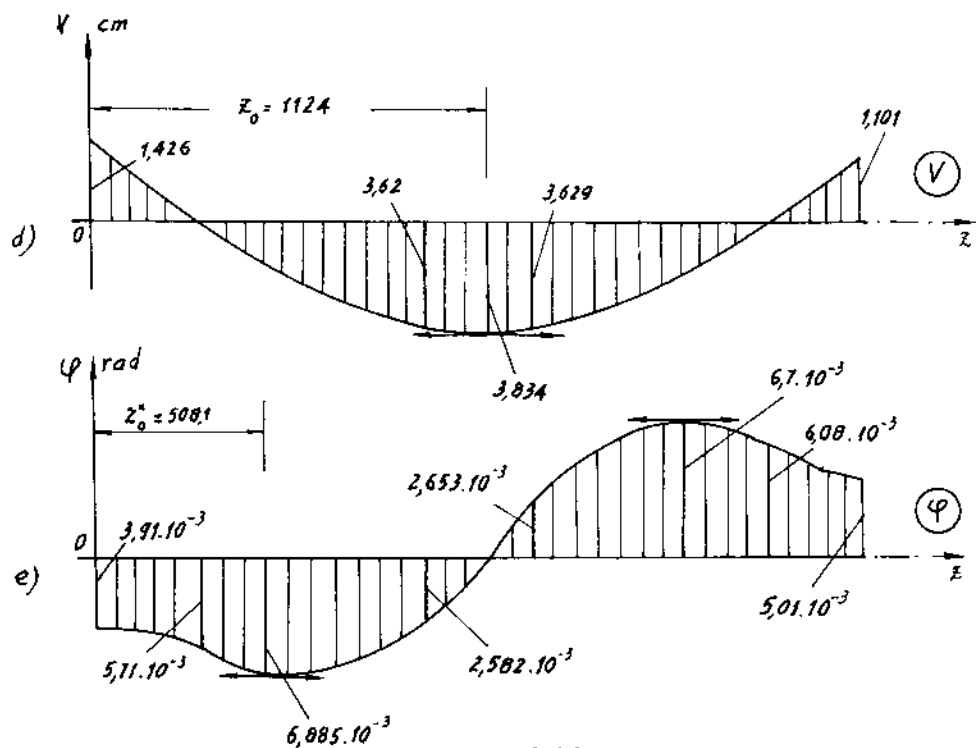
$$\max |M_x| = 76700 \text{ kNcm} \quad (\text{ở mặt cắt 3});$$

$$\max |V| = 3,834 \text{ cm} \quad (\text{tại } z_0 = 1124 \text{ cm});$$

$$\max |\varphi_x| = 6,885 \quad (\text{tại } z_0^* = 508,10 \text{ cm}).$$



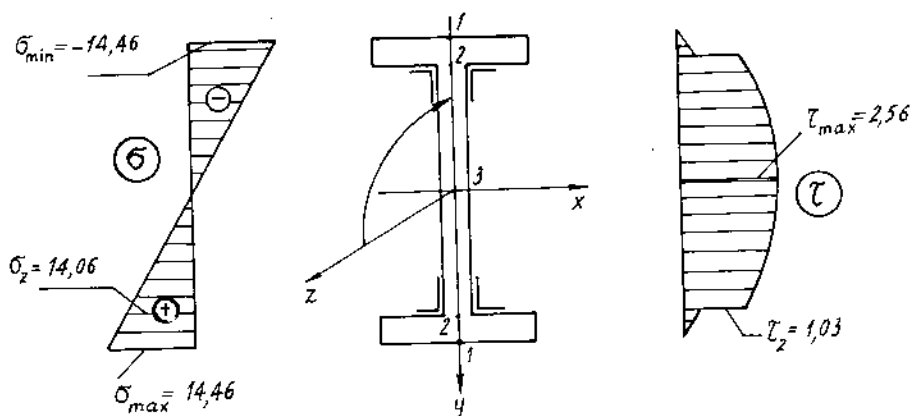
Hình 9.4a, b, c.



Hình 9.4d, e.

3. Kiểm tra toàn diện điều kiện làm việc của dầm

a) Kiểm tra bền toàn diện



Hình 9.5.

a. Kiểm tra phân bố ở trạng thái ứng suất đơn và phẳng nguy hiểm nhất.

Từ biểu đồ lực cắt Q_y và mômen M_x ta thấy tại $z = 1280 \text{ cm}$, $M_{x\max} = 3,834 \text{ qa}^2 = 3,834.0,5.200^2 = 76700 \text{ kNcm}$.

Tương ứng ở bên phải mặt cắt “3” này lực cắt có giá trị:

$$Q_y = 1,667 \text{ qa} = 1,667.0,5.200 = 166,7 \text{ kN}$$

Trên mặt cắt này cần kiểm tra tại 2 điểm 1 và 2 (hình 9.5) như sau:

Tại điểm 1:

$$\sigma_{\max} = \frac{76700}{218200} \cdot 41 = 14,41 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Tại điểm 2: tiếp giáp giữa lòng và đế nhưng thuộc về lòng:

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{J_x} y_2 = \frac{76700}{218200} \cdot 40 = 14,06 \text{ kN/cm}^2$$

• Tính ứng suất tiếp:

$$\tau_2 = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \cdot \delta_c} = \frac{166,7 \cdot 40 \cdot 40,5}{218200 \cdot 1,2} = 1,03 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất tương đương tại 2:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \tau_2^2} = 14,21 \text{ kN/cm}^2 \leq [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Vậy tại các điểm 1, 2 của mặt cắt 3 đảm bảo điều kiện bền. Quy luật phân bố ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt 3 được cho trên hình 9.5.

b. Kiểm tra phân bố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy nguy hiểm nhất

Mặt cắt có lực cắt lớn nhất là mặt cắt tại bên phải gối tựa 1, có $Q_{\max}^{(1)} = 3,532 \text{ qa} = 353,3 \text{ kN}$.

Do đó:

$$\tau_{\max}^{(1)} = \frac{Q_{\max}^{(1)} S_x^c}{J_x \delta_c} = \frac{353,2.4015,73}{218200.1,2} = 5,42 \text{ kN/cm}^2 < [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2.$$

Như vậy tại điểm 3 trên mặt cắt bên phải gối 1 điều kiện bền được đảm bảo rất tốt.

b. Kiểm tra toàn diện điều kiện cứng

Từ các kết quả ở mục 2 và các biểu đồ (φ) , (V) ta rút ra:

$$\max |V| = 3,834 \text{ cm} < [V] = \frac{l}{400} = \frac{1580}{400} = 3,95 \text{ cm}$$

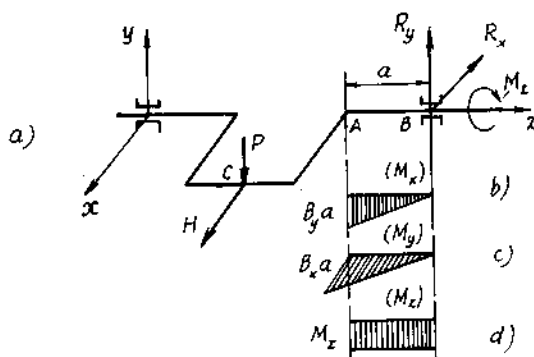
$$\max |\varphi| = 6,885.10^{-3} \text{ rad} < [\varphi] = 0,05 \text{ rad}.$$

Các điều kiện cứng cũng được thỏa mãn.

§4. TÍNH KẾT CẤU CHỦ YẾU CHỊU UỐN VÀ XOẮN ĐỒNG THỜI

Đây là bài toán thường gặp trong các chi tiết máy, mà trục khuỷu là một ví dụ điển hình và cũng là rất phức tạp.

Hãy xét một trục khuỷu chịu tác dụng của lực thẳng đứng P và lực ngang ở mặt cắt C của khuỷu như hình 9.6a. Khuỷu như thế tiếp thu chủ yếu mômen xoắn, ngoài ra còn tiếp thu cả mômen uốn và lực cắt. Giả sử rằng do hai lực này ở ổ B có các phản lực R_y , R_x và M_z . Khi chỉ xét một đoạn trục AB thì các biểu đồ mômen uốn trong hai mặt phẳng vuông góc và mômen xoắn có dạng như hình 9.6b, c, d.



Hình 9.6.

Đối với trục có mặt cắt ngang tròn thì mọi trục trung tâm đều là những trục quán tính chính. Do đó, ta có thể tính mômen uốn tổng:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Nếu xác định được mômen uốn tổng ở một dãy các mặt cắt ngang thì có thể dựng được biểu đồ M_u cho tất cả các đoạn trục và trong trường hợp tổng quát biểu đồ này là một đường cong. Ngoài ra, nếu đặt các tung độ của biểu đồ này vào mặt phẳng tác dụng của mômen uốn tổng thì đối với một lớp rộng các bài toán, biểu đồ này là một đường cong không gian.

Ở mỗi mặt cắt có M_u , M_z xác định (bỏ qua tác dụng của các nội lực khác), ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} \quad \text{và} \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Một câu hỏi được đặt ra ở đây là ứng suất nào trong hai ứng suất này là nguy hiểm hơn theo quan điểm về độ bền của vật liệu làm trục. Câu trả lời cuối cùng cho câu hỏi này là nội dung của chương 6 – “Các tiêu chuẩn bền và dẻo”.

Trong tiết này ta sẽ xét cách tính toán cụ thể các thanh có mặt cắt ngang là hình tròn và hình chữ nhật chịu uốn và xoắn đồng thời.

1. Trường hợp thanh mặt cắt ngang tròn

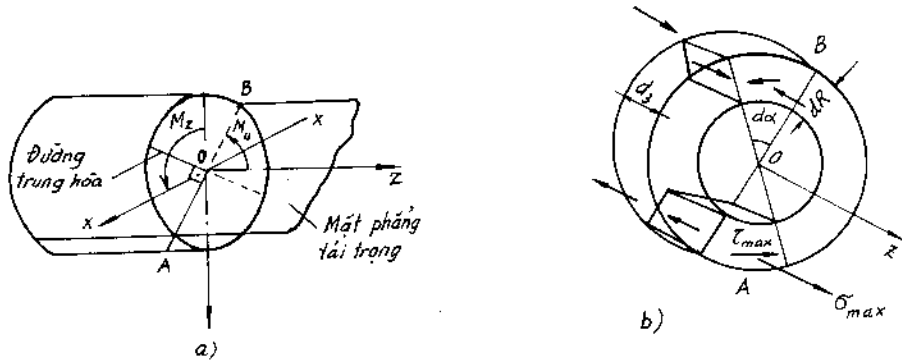
Các thanh tròn không bao giờ bị uốn xiên, cho nên nếu trên mặt cắt ngang có hai ngẫu lực uốn M_x và M_y thì luôn luôn có thể hợp hai ngẫu lực đó thành một ngẫu lực uốn M_u trong mặt quán tính chính trung tâm. Như vậy, ta được mô hình của thanh chịu uốn phẳng. Đường trung hoà vuông góc với mặt phẳng tải trọng và ứng suất pháp có trị số lớn nhất tại các giao điểm A và B giữa mặt phẳng tải trọng với đường chu vi của mặt cắt ngang (hình 9.7a). Tại đây:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} \tag{a}$$

trong đó:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$W_u = W_x = W_y$$



Hình 9.7.

Ngoài ứng suất pháp do ngẫu lực uốn M_u gây nên ở trên mặt cắt ngang còn ứng suất tiếp do ngẫu lực xoắn M_z gây nên. Ứng suất tiếp lớn nhất tại các điểm trên đường chu vi của mặt cắt. Vậy tại các điểm A và B trên đây, ngoài ứng suất pháp lớn nhất, còn ứng suất tiếp lớn nhất.

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (b)$$

Vậy các điểm A và B là các điểm nguy hiểm nhất. Tại A và B, ta tách ra những phân tố hình hộp với các mặt cắt như sau (hình 9.7b): hai mặt trụ đồng trục với hiệu bán kính vô cùng bé dR , hai mặt cắt đi qua trục thanh và làm với nhau một góc vô cùng bé $d\alpha$, hai mặt cắt ngang với khoảng cách vô cùng bé dz , ta thấy trạng thái ứng suất của các phân tố trên là trạng thái ứng suất phẳng. Do đó điều kiện bền của phân tố theo thuyết bền thứ 3 và thứ 4 như sau:

– Theo giả thiết ứng suất tiếp lớn nhất

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Thay σ và τ từ các công thức (a) và (b) vào công thức trên và chú ý rằng đối với mặt cắt ngang hình tròn.

$W_p = W_x + W_y = 2 W_x$, ta được:

$$\sigma_{T_1} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \leq [\sigma] \quad (9.7)$$

– Theo giả thiết thế năng biến đổi hình dạng lớn nhất

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Cụ thể hơn:

$$\sigma_{T_1} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + \frac{3}{4} M_z^2} \leq [\sigma] \quad (9.8)$$

Có thể viết các công thức (9.7) và (9.8) dưới dạng chung sau đây:

$$\sigma_{T_1} = \frac{M_{T_1}}{W_x} \quad (9.9)$$

trong đó:

M_{T_1} – gọi là mômen tương đương theo các thuyết bền tương ứng:

$$M_{T_1} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad , \quad M_{T_1} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + \frac{3}{4} M_z^2}$$

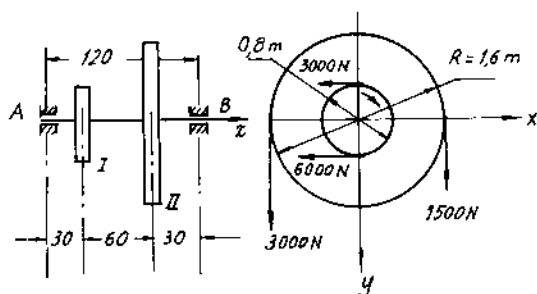
2. Trường hợp thanh mặt cắt chữ nhật

Đối với mặt cắt ngang hình chữ nhật, ứng suất tiếp có trị số lớn nhất ở điểm giữa của cạnh dài và có trị số tương đối lớn ở điểm giữa của cạnh ngắn. Trong số các điểm góc và các điểm giữa của các cạnh, rất khó xác định điểm nào là nguy hiểm nhất. Vì vậy khi kiểm tra bền, thường phải kiểm tra tất cả các phân tố tại các điểm nói trên. Cách thiết lập điều kiện bền cũng tương tự như trường hợp trên, do đó ở đây không nhắc lại nữa. Để minh họa nguyên tắc tính toán vừa mô tả ta xét vài ví dụ bằng số sau đây.

§5. VÍ DỤ MINH HỌA

Vi dụ 1: Trên trục AB (hình 9.8a) có hai bánh đai: bánh bị dẫn I của truyền động đai theo phương x và bánh dẫn II của truyền động đai theo phương y. Sức căng trên các nhánh đai được ghi trên hình 9.8a.

Ứng suất cho phép của trục: $[\sigma] = 6 \text{ kN/cm}^2$. Hãy xác định đường kính của trục (bỏ qua trọng lượng của trục và bánh đai).



GIẢI

Xác định ngoại lực trên trục. Gọi

Hình 9.8a.

S'_1 và S'_2 là sức căng trên nhánh căng và nhánh chùng thuộc bánh đai I. Do các sức căng đó, trục chịu một tải trọng tập trung tại mặt cắt I bằng:

$$P' = S'_1 + S'_2 \quad (a)$$

Trong bài toán này do $S'_1 \parallel S'_2$ ta có:

$$P' = P_x = 6 + 3 = 9 \text{ kN}$$

Tương tự như vậy, tại mặt cắt II, có tải trọng tập trung:

$$P'' = P_y = 3 + 1,5 = 4,5 \text{ kN}.$$

Vẽ biểu đồ nội lực

Trong mặt phẳng Axz (hình 9.8b)

$$\Sigma M_B = A_x \cdot 120 - P' \cdot 90 = 0$$

Suy ra:

$$A_x = \frac{9 \cdot 90}{120} = 6,75 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = -B_x \cdot 120 + P' \cdot 30 = 0$$

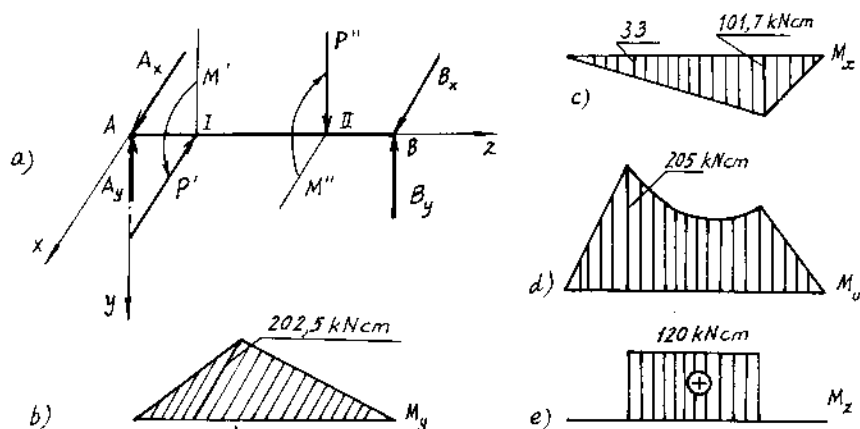
Suy ra: $B_x = \frac{9 \cdot 30}{120} = 2,25 \text{ kN}$

Mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt I:

$$M_y^I = A_x \cdot 30 = 6,75 \cdot 30 = 202,5 \text{ kNcm}$$

Trong mặt phẳng Ayz:

$$\Sigma M_B = -A_y \cdot 120 + P'' \cdot 30 = 0$$



Hình 9.8b.

Suy ra:

$$A_y = \frac{4,5 \cdot 30}{120} = 1,13 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = B_y \cdot 120 - P'' \cdot 90 = 0$$

Suy ra:

$$B_y = \frac{4,5 \cdot 90}{120} = 3,37 \text{ kN}$$

Mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt II:

$$M_x^II = A_y \cdot 90 = 1,13 \cdot 90 = 101,7 \text{ kNcm}$$

Mômen uốn tổng hợp được tính theo công thức:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Biểu đồ mômen uốn tổng hợp $M_u(z)$ có dạng hình 9.8d. Ta thấy mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt I:

$$M_{\max} = \sqrt{(202,5)^2 + (33,9)^2} = 205 \text{ kNcm.}$$

Biểu đồ mômen xoắn M_z được vẽ trên hình 9.8e.

Xác định đường kính của trục

Tại mặt cắt nguy hiểm I, điều kiện bền của trục là:

$$\begin{aligned} \sigma_{T_1} &= \frac{1}{W_x} \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \leq [\sigma] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{0,1d^3} \sqrt{(202,5)^2 + (120)^2} \leq [\sigma] \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra đường kính của trục:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(205)^2 + (120)^2}}{0,1 [\sigma]}} = 7,34 \text{ cm}$$

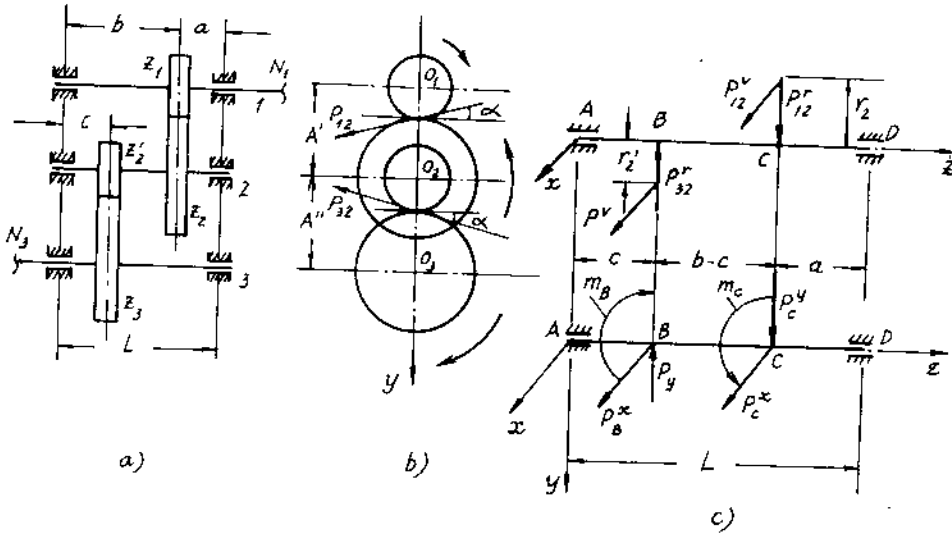
Theo tiêu chuẩn TCVN, ta chọn $d = 7,5 \text{ cm}$.

Ví dụ 2: Xác định đường kính d_2 của trục 2 trong hộp giảm tốc hai cấp, làm bằng bánh răng trụ tròn răng thẳng thân khai như trên hình 9.9a. Cho trước: các kích thước a, b, c ; số răng z và môđun m của các bánh răng, góc ăn khớp α ; công suất ra N_3 và số vòng quay trong một phút n_3 của trục ra 3, hiệu suất η_i của các cặp ổ và hiệu suất η_{ij} của các cặp bánh răng; ứng suất cho phép của vật liệu $[\sigma] \text{ N/mm}^2$.

GIẢI

Công suất trên trục 2 bằng:

$$N_2 = \frac{1}{\eta_3 \eta_{32} \eta_2} N_3, \text{ kW}$$



Hình 9.9.

Dời lực tác dụng trên các bánh răng về trục hình học z của trục 2, ta có sơ đồ tính trục 2 như hình 9.9c.

Trị số mômen xoắn trong đoạn BC trên trục 2 là:

$$M_2 = \frac{9,55 \cdot 10^6 N_1}{n_2} = \frac{9,55 \cdot 10^6 N_2}{i_{23} n_3}, \text{ Nmm}$$

trong đó: n_2, n_3 – số vòng quay trong một phút của trục 2 và trục 3 với tỷ số truyền i_{23} :

$$i_{23} = \frac{z_3}{z_2}$$

Lực vòng và lực hướng tâm trên bánh răng 2' hình 9.9c:

$$P_{32}^v = P_B^x = \frac{M_2}{r_2'} = \frac{2M_2}{m z_2'}$$

$$P_{32}^r = P_B^y = P_B \cdot \tan \alpha$$

Lực vòng và lực hướng tâm trên bánh răng 2:

$$P_{12}^y = P_C^x = \frac{M_2}{r_2} = \frac{2M_2}{m.z_2}$$

$$P_{12}^x = P_C^y = P_C \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Sau khi đã có sơ đồ tải trọng có thể dễ dàng xác định phản lực ở các ổ A và D và vẽ biểu đồ nội lực trong từng mặt phẳng Axz và Ayz. Ta thấy ở trong đoạn BC, trục 2 bị uốn và xoắn đồng thời. Trị số mômen uốn tại mặt cắt nguy hiểm phụ thuộc trị số cụ thể của ngoại lực. Trong bài toán này chỉ có một trong hai mặt cắt B và C thuộc BC là nguy hiểm nhất.

Đường kính d_2 của trục tại mặt cắt nguy hiểm này được xác định theo công thức:

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{0,1 [\sigma]}}, \text{ mm}$$

Vi dụ 3:

Hãy xét một trường hợp riêng của bài toán trên. Đó là bài toán trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có hai thành phần nội lực là mômen xoắn M_z và lực dọc N_z . Bài toán này có tên gọi là *xoắn và kéo (nén) đồng thời*.

Đối với thanh tròn, tại các điểm trên đường chu vi của mặt cắt ngang ta có:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} = \frac{4N_z}{\pi d^2}, \quad \tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16M_z}{\pi d^3}$$

Theo thuyết ứng suất tiếp lớn nhất, điều kiện bền tại các điểm đó là:

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < [\sigma]$$

hay:

$$\sigma_{T_1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{16N^2}{d^4} + \frac{1024M_z^2}{d^6}} \leq [\sigma]$$

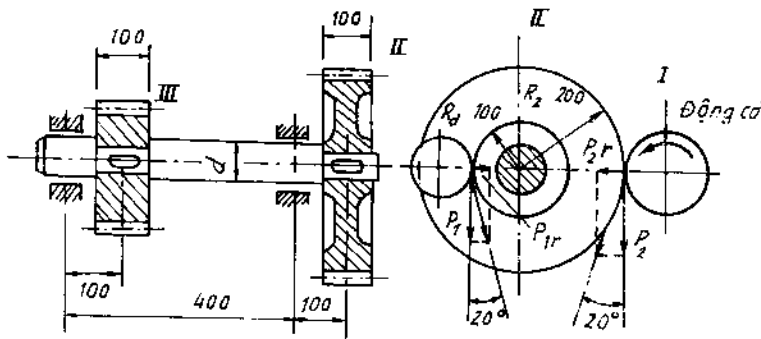
Đối với thanh mặt cắt chữ nhật $b \times h$ thì điểm nguy hiểm nhất cần kiểm tra là điểm ở giữa cạnh dài h . Cụ thể là theo thuyết bền 4:

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\left(\frac{4N_z}{\pi d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Ví dụ 4:

Một trục truyền được lắp bánh răng II hình trụ răng thẳng để nhận năng lượng từ một động cơ có công suất $W = 10$ mã lực, quay 100 vòng trong một phút và truyền chuyển động cho bánh răng III. Phương các lực tác dụng được cho trên hình 9.10a. Ứng suất cho phép của vật liệu chế tạo trục là $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$.

Xác định kích thước cần thiết của trục truyền theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng và thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Xét hai trường hợp có kể đến thành phần lực hướng tâm và không kể đến lực này. Khi tính bỏ qua trọng lượng trục và sự mất mát lực truyền chuyển động giữa các bánh răng và ổ trục.



Hình 9.10a.

GIẢI

Mômen xoắn tác dụng vào trục:

$$M_z = 716200 \frac{W}{n} = 716200 \frac{10}{100} = 71620 \text{ Ncm}$$

Trường hợp 1 (không kể đến lực hướng tâm P_r). Trục chịu uốn bởi lực P_1 và P_2 :

$$P_1 = \frac{M_z}{r_1} = \frac{71620}{10} = 7162 \text{ N}$$

$$P_2 = \frac{M_z}{r_2} = \frac{71620}{20} = 3581 \text{ N}$$

Từ biểu đồ mômen uốn M_x (hình 9.10b) ta có $M_{x\max} = 447 \text{ Nm}$ tại mặt cắt I.

Đường kính tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{x\max}^2 + M_z^2}}{0,1 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{44700^2 + 71620^2}{0,1 \cdot 10000}} \approx 4,1 \text{ cm.}$$

Tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng:

$$d_4 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{x\max}^2 + 0,75M_z^2}}{0,1 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{44700^2 + 0,75 \cdot 71620^2}{0,1 \cdot 10000}} \approx 3,9 \text{ cm.}$$

Trường hợp 2 (có kể đến lực hướng tâm P_r). Ngoài mômen uốn và xoắn M_x , M_z , trục còn bị uốn do mômen uốn M_y (hình 9.10b).

Thành phần lực hướng tâm:

$$P_{1r} = P_1 \tan 20^\circ = 762 \cdot 0,364 = 2160 \text{ N,}$$

$$P_{2r} = P_2 \tan 20^\circ = 3581 \cdot 0,364 = 1305 \text{ N.}$$

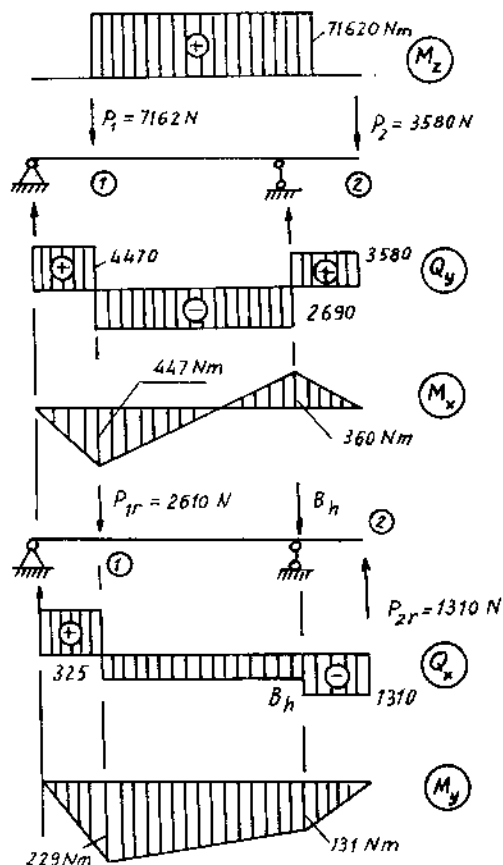
Từ biểu đồ mômen uốn M_y , ta có $M_{y\max} = 229 \text{ Nm}$ ở cùng mặt cắt với $M_{x\max}$.

Mômen tương đương tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$M_{t3} = \sqrt{M_{x\max}^2 + M_{y\max}^2 + M_z^2} = \sqrt{44700^2 + 22900^2 + 71620^2} = 76450 \text{ Ncm.}$$

Đường kính trục:

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{M_{t3}}{0,1 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{76450}{0,1 \cdot 10000}} \approx 4,3 \text{ cm.}$$



Hình 9.10b.

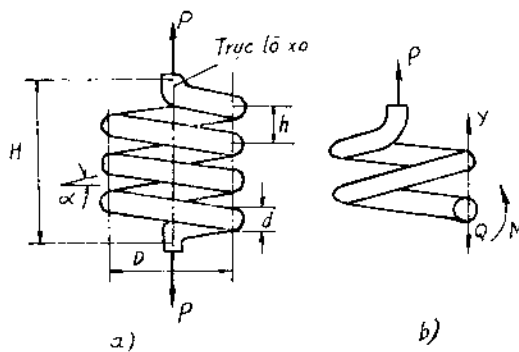
§6. TÍNH LÒ XO XOẮN ỐC HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN CHỊU KÉO HOẶC NÉN

Lò xo là một chi tiết được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật, ví dụ trong các bộ phận giảm chấn, các thiết bị bảo vệ của các máy chịu áp lực lớn.

Hình 9.11a biểu diễn một lò xo xoắn ốc hình trụ bị kéo bởi lực P với:

- h là bước của dây lò xo;
- d là đường kính dây lò xo;

- D là đường kính trung bình của vòng dây lò xo;
- α là góc nghiêng của các dây lò xo so với mặt phẳng nằm ngang;
- n là số vòng dây lò xo.



Hình 9.11.

Nội lực trong các lò xo chịu kéo (nén), xét một cách đầy đủ có các nội lực sau đây: Mômen xoắn $M_x = \frac{PD}{2} \cos \alpha$, mômen uốn $M_u = \frac{PD}{2} \sin \alpha$, lực cắt $Q = P \cos \alpha$, lực dọc $N = P \sin \alpha$.

Để đơn giản việc tính toán, ta giả thiết:

1. Góc nghiêng α rất bé ($\alpha \leq 8^\circ + 10^\circ$). Với góc α đó thì nội lực M_x trên mặt cắt ngang của dây lò xo đóng vai trò quan trọng nhất:
2. Đường kính d của dây lò xo và đường kính trung bình D của lò xo thỏa mãn điều kiện về chỉ số $C = \frac{D}{d}$ của lò xo như sau: $4 \leq C \leq 12$.

1. Ứng suất

Ta tưởng tượng cắt lò xo bằng một mặt phẳng chứa trục của lò xo và vuông góc với dây lò xo. Xét sự cân bằng của một trong hai phần đó, thí dụ phần trên (hình 9.11b).

Với lò xo bước ngắn, ta có thể coi mặt phẳng của tiết diện dây lò xo trùng với mặt phẳng chứa trục lò xo. Để cân bằng với lực kéo P , trên mặt cắt dây lò xo phải xuất hiện hai thành phần nội lực là lực cắt Q và mômen xoắn M_x :

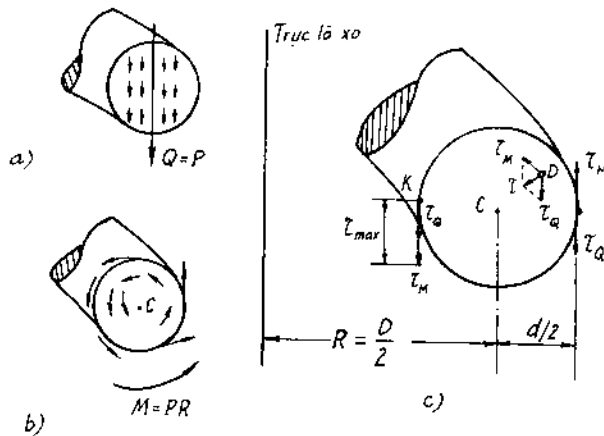
$$Q = P \quad ; \quad M_z = P \cdot \frac{D}{2} \quad (a)$$

Lực cắt Q sinh ra ứng suất tiếp τ_Q cùng chiều với nó. Một cách gần đúng, ta xem ứng suất tiếp τ_Q phân bố đều (hình 9.12a):

$$\tau_Q = \frac{Q}{F} \quad (b)$$

hoặc tính chính xác:

$$\tau_{Q_{\max}} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \quad (c)$$



Hình 9.12.

Mômen xoắn M_z sinh ra ứng suất tiếp τ_M . Vì góc nghiêng α rất bé nên ta có thể tính theo thanh tròn thẳng:

$$\tau_M = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho \quad (d)$$

Ứng suất τ_M có giá trị lớn nhất tại những điểm trên chu vi mặt cắt (hình 9.12b, c).

$$\tau_M^{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (9.10)$$

Theo hình 9.12c ta thấy, điểm K mép trong của tiết diện (tức là tại điểm nằm gần trục lò xo) là điểm nguy hiểm vì hai ứng suất tiếp

thành phần cùng chiều. Vậy ứng suất tiếp tổng cộng đạt giá trị lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \tau_M^{\max} + \tau_Q = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2}$$

hay:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \cdot \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \quad (9.11)$$

Trong thực tế, đường kính của dây lò xo thường bé hơn rất nhiều so với đường kính trung bình của lò xo (theo giả thiết 2 thì tỉ số $\frac{d}{2D} < 0,1$), do đó ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai. Khi đó ta có:

$$\tau_{\max} = K_1 \cdot \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (9.12)$$

trong đó K_1 – hệ số điều chỉnh, kể đến ảnh hưởng của lực cắt Q và ảnh hưởng của độ cong vòng dây lò xo, kể đến sự phân bố và giá trị của ứng suất tiếp do mômen xoắn M_z gây ra.

Các trị số của K_1 được cho trong bảng 9.1.

Bảng 9.1.

D/d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K_1	2,06	1,58	1,4	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1
K_2	1,12	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1

Trong trường hợp mặt cắt ngang dây lò xo là hình chữ nhật (hình 9.13) thì do chỉ kể đến ảnh hưởng của mômen xoắn nên công thức tính $\tau_{\max}$ sẽ có dạng sau:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{\text{XOẮN}}} = \frac{PD}{2\alpha ab^2} \quad (9.13)$$

Muốn lò xo đảm bảo độ bền thì ứng suất tiếp lớn nhất trong lò xo không được vượt quá ứng suất cho phép, tức là:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

2. Biến dạng của lò xo

Gọi λ là độ giãn hay co của lò xo do lực P gây ra. Công của ngoại lực trên biến dạng đó là:

$$A = \frac{1}{2} P\lambda \quad (9.14)$$

Công này chuyển hoá thành thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong lò xo. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q thì:

$$U = \frac{M_z^2 \cdot l}{2GJ_p} \quad (9.15)$$

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, ta có:

$$A = U \quad (9.16)$$

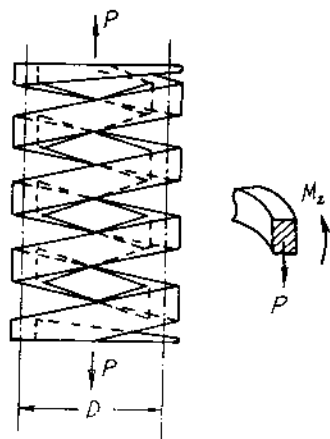
Cân bằng công ngoại lực và thế năng với chú ý $l = n\pi D$ (n là số vòng dây lò xo) và $J_p = \pi d^4/32$, ta tính được độ giãn (hay co) λ của lò xo:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \quad (9.17a)$$

hay:
$$\lambda = \frac{P}{C} \quad (9.17b)$$

trong đó: $C = \frac{Gd^4}{8D^3n}$ gọi là độ cứng của lò xo, đơn vị là N/mm, N/cm.

Nghĩa là lực cần thiết đặt vào lò xo để độ co hoặc độ giãn λ bằng một đơn vị dài.

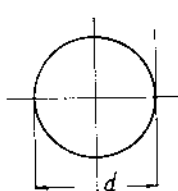
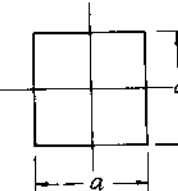
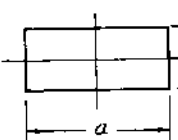


Hình 9.13.

Các công thức tính toán lò xo trụ bước ngắn chịu kéo – nén được cho ở bảng 9.2.

Bảng 9.2

Công thức tính toán lò xo trụ chịu kéo – nén

Dạng mặt cắt	$\tau_{\max}$ daN/cm ²	$P_{\max}$ daN	λ , cm	C daN/cm
	$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} = 2,55 \frac{PD}{d^3}$	$P_{\max} = \frac{\pi d^3}{8D} [\tau] = 0,392 \frac{d^3}{D} [\tau]$	$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4} = \frac{P}{C}$	$C = \frac{Gd^4}{8D^3 n}$
	$\tau_{\max} = \frac{2,4 \cdot PD}{a^3}$	$P_{\max} = 0,416 \frac{a^3}{D} [\tau]$	$\lambda = 5,567 \cdot \frac{PD^3 n}{Ga^4}$ $\lambda = \frac{P}{C}$	$C = \frac{Ga^4}{5,567 \cdot D^3 \cdot n}$
	$\tau_{\max} = \gamma \frac{PD^3}{b^3}$	$P_{\max} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{b^3}{D} [\tau]$	$\lambda = \Delta \frac{PD^3 \cdot n}{Gb^4}$ $\lambda = \frac{P}{C}$	$C = \frac{Gb^4}{\Delta D^3 \cdot n}$
Giá trị của các hệ số γ , Δ được cho trong bảng 9.3				

Bảng 9.3

$\frac{a}{b}$	γ	Δ	$\frac{a}{b}$	γ	Δ
1,0	2,404	5,567	2,5	0,775	1,256
1,5	1,442	2,670	3,0	0,625	0,995
1,75	1,195	2,086	4,0	0,442	0,698
2,00	1,016	1,713	6,0	0,278	0,439
			10,0	0,160	0,252

Vi dụ

Hai lò xo có cùng số vòng $n = 10$, cùng đường kính dây $d = 8 \text{ mm}$. Đường kính trung bình $D_1 = 80 \text{ mm}$, $D_2 = 100 \text{ mm}$, tổng chiều dài của hai lò xo là $l_1 + l_2 = 400 \text{ mm}$, chịu lực nén Q như (hình 9.14a).

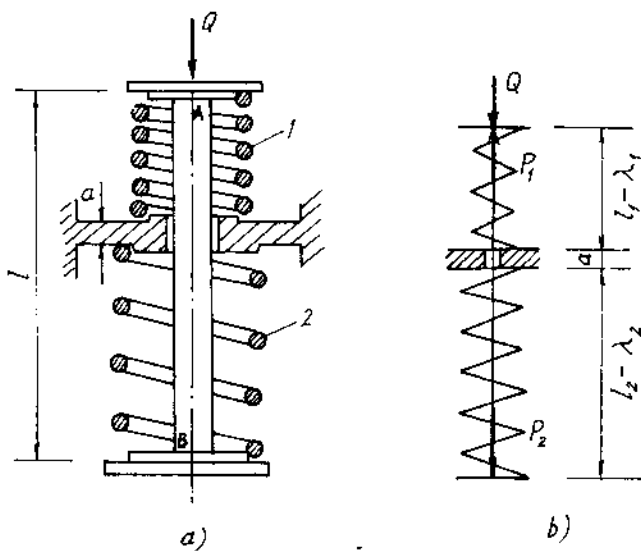
- 1) Tính ứng suất và biến dạng của mỗi lò xo sau khi lắp ghép?
- 2) Xác định lực Q cần thiết để lò xo 2 không làm việc?
- 3) Xác định lực Q theo ứng suất cho phép $[\tau]$ và lực Q theo trạng thái dẻo giới hạn?

Cho $l = 210 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ mm}$, $G = 8.106 \text{ N/cm}^2$, $[\tau] = 50000 \text{ N/cm}^2$, $\tau_{CH} = 75000 \text{ N/cm}^2$.

GIẢI

Gọi lực mà lò xo 1 và lò xo 2 phải chịu là P_1 và P_2 , phương trình cân bằng của thanh thép AB là:

$$P_1 - P_2 - Q = 0 \quad (a)$$



Hình 9.14.

Đặt λ_1 và λ_2 là độ co của hai lò xo, ta có phương trình biến dạng trong trường hợp này là:

$$l = l_1 - \lambda_1 + l_2 - \lambda_2 + a$$

hay $210 = 410 - \lambda_1 - \lambda_2$

hay $\lambda_1 + \lambda_2 = 200 \text{ mm.}$

Thay λ bằng biểu thức tính theo lực nén các lò xo ta có:

$$\frac{8P_1 D_1^3 n}{Gd^4} + \frac{8P_2 D_2^3 n}{Gd^4} = 20 \text{ cm}$$

hay $\frac{8.8^3.10}{8.10^6.0,8^4} P_1 + \frac{8.10^3.10}{8.10^6.0,8^4} P_2 = 20 \text{ cm}$

hay $0,0125 P_1 + 0,0244 P_2 = 20 \text{ cm} \quad (b)$

Giải hệ phương trình (a), (b) ta rút ra:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 540 + 0,661Q \\ P_2 &= 542 - 0,339Q \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Sau khi lắp $Q = 0 \Rightarrow P_1 = P_2 = 542 \text{ N.}$

Ứng suất sau khi lắp chưa có ngoại lực Q là:

$$\tau_1 = k_1 \frac{8P_1 D_1}{\pi d^3} = 1,14 \frac{8.542.8}{3,14.0,8^3} = 24600 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_2 = k_2 \frac{8P_2 D_2}{\pi d^3} = 1,14 \frac{8.542.8}{3,14.0,8^3} = 29900 \text{ N/cm}^2$$

Biến dạng nén của mỗi lò xo sau khi lắp:

$$\lambda_1 = \frac{8P_1 D_1^3 n}{Gd^4} = \frac{8.542.8^3.10}{8.10^6.0,8^4} = 6,78 \text{ cm}$$

$$\lambda_2 = \frac{8P_2 D_2^3 n}{Gd^4} = \frac{8.542.810^3.10}{8.10^6.0,8^4} = 13,2 \text{ cm}$$

Điều kiện để lò xo 2 ở trạng thái tự do khi $Q \neq 0$ thì $P_2 = 0$ và từ (c) ta suy ra:

$$Q = \frac{542}{0,339} = 1600 \text{ N}$$

Tải trọng cho phép tính theo điều kiện bền của lò xo 1 (vì theo (c) khi có Q lò xo 2 giảm ứng suất).

$$\tau_1 = k \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1}{\pi d^3} \leq 50000 \Rightarrow [Q] \leq 0,847 \text{ kN.}$$

Lực Q dẻo giới hạn đạt được khi ứng suất tiếp ở mọi điểm trên các mặt cắt của lò xo 1 đạt được giới hạn chảy τ_{CH} với giả thiết vật liệu là đàn dẻo lý tưởng ta có:

$$M_{CH} = W_d \cdot \tau_{CH} \Rightarrow P_1 R_1 \cdot \cos \alpha = \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \tau_{CH} \Rightarrow Q_1 = Q_{gh}^d$$

$$Q_{gh}^d \approx \frac{\tau_{CH} \cdot 2\pi r^3 - 542 R_1}{3 \cdot 0,661 R_1} = 2980,33 \text{ N} = 2,98 \text{ kN.}$$

Lực nén Q trong hai trường hợp có tỷ lệ:

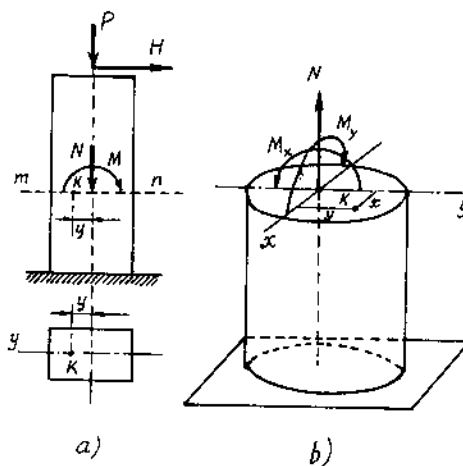
$$\frac{Q_{gh}^d}{[Q]} = 35$$

§7. ĐƯỜNG TRUNG HOÀ VÀ LỖI MẶT CẮT

1) Đường trung hoà

Đường trung hoà, như đã biết trong bài toán uốn, là đường trên đó ứng suất pháp bằng không. Nó là giao tuyến giữa mặt cắt ngang và mặt các ứng suất pháp $\bar{\sigma}$.

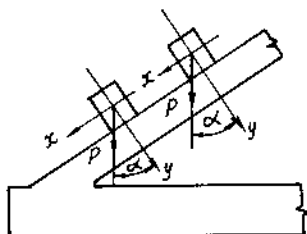
Ta hãy xét trường hợp chịu lực tổng quát nhất như hình 9.1a, b. Từ (9.2), theo định nghĩa về đường trung hoà $\bar{\sigma} = 0$ ta có:



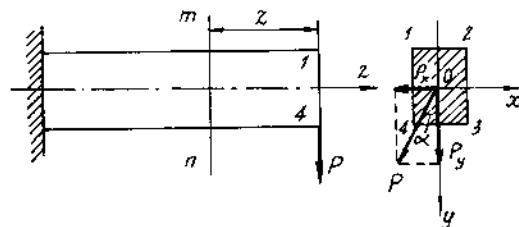
Hình 9.15.

$$\frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x = 0 \quad (9.18)$$

Nếu trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp hình 9.15a, b do cả ba nội lực: N , M_x , M_y gây ra, ta có đường trung hoà dạng (9.18). Nếu trong công thức (9.2) hoặc (9.18) $N = 0$, còn $M_x \neq 0$, $M_y \neq 0$. Khi ấy ta có một dầm chịu uốn xiên (hình 9.16).



Hình 9.16.



Hình 9.17.

Ứng suất tại điểm 1, 2, 3, 4 trên mặt cắt z bất kỳ là (hình 9.17)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_y \cdot z}{W_x} - \frac{P_x \cdot z}{W_y} ; \sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{P_y \cdot z}{W_x} + \frac{P_x \cdot z}{W_y} ; \\ \sigma_3 &= -\frac{P_y \cdot z}{W_x} + \frac{P_x \cdot z}{W_y} ; \sigma_{\min} = \sigma_4 = -\frac{P_y \cdot z}{W_x} - \frac{P_x \cdot z}{W_y} \end{aligned}$$

Ứng suất tại một điểm bất kỳ (x, y) trên mặt cắt bất kỳ z là:

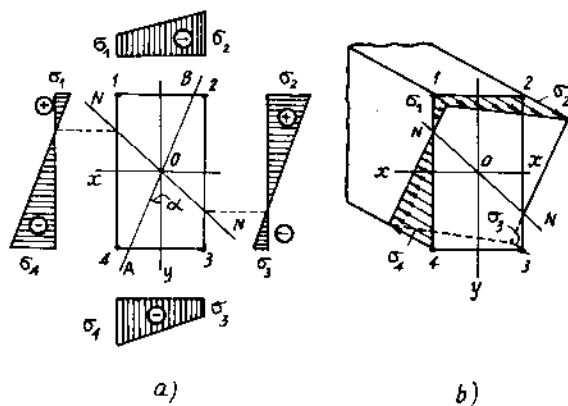
$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \quad (a)$$

Từ bốn ứng suất tại 4 điểm: 1, 2, 3, 4 ta có thể dựng được mặt ứng suất σ như hình (9.18a, b).

Ứng với các điểm không trên biểu đồ ứng suất ta tìm được các điểm N – N trên biên của mặt cắt. Nhờ các điểm này ta vẽ được một đường thẳng N – N trên mặt cắt. Ứng suất ở mọi điểm trên đường

này đều bằng không. Theo định nghĩa, đường này gọi là đường trung hoà.

Thực chất phương trình (a) là phương trình mặt phẳng đi qua đường không. Khoảng cách từ một điểm của mặt phẳng này đến mặt cắt ngang bằng ứng suất σ được xác định từ phương trình (a) (hình 9.18b).



Hình 9.18.

Vì vậy, đường trung hoà khi uốn xiên được xác định từ phương trình:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y} = 0 \quad \text{hay} \quad y = ax \quad (9.19)$$

trong đó:

$$a = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (9.19a)$$

Đường trung hoà được dùng để tìm điểm có ứng suất pháp cực trị (điểm xa nhất đối với trục trung hoà) đối với những dầm có mặt cắt ngang bất kỳ không có một trục đối xứng nào cả và chủ yếu để tìm lõi của mặt cắt ngang thường gặp trong công tác thiết kế các công trình xây dựng. Ví dụ, thiết kế các móng đơn.

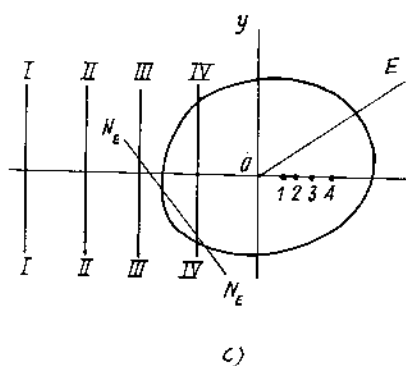
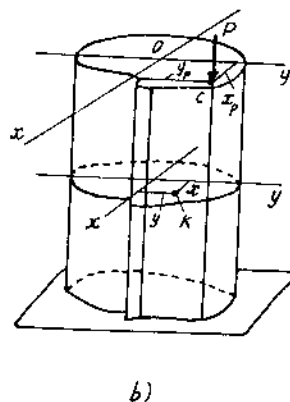
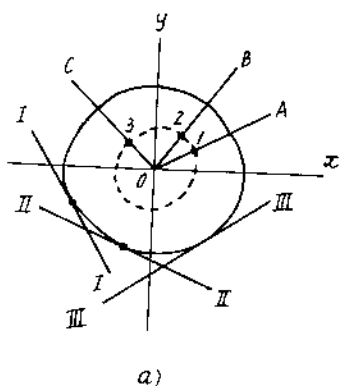
2. Lõi mặt cắt

Ta hãy tiếp tục khảo sát một mặt cắt ngang bất kỳ chịu một lực nén lệch tâm P di chuyển theo đường OA kể từ tâm O của mặt cắt. Khi lực P di chuyển như thế thì đường trung hoà di chuyển ngược lại từ vô cùng về tâm O và luôn luôn song song với chính nó hình 9.19a. Giả sử ở thời điểm mà đường trung hoà vừa tiếp xúc với chu vi mặt cắt (đường I – I) thì lực P di chuyển theo phương OA có vị trí tương ứng là điểm 1 (hình 9.19a). Nếu tiếp tục cho P di chuyển xa hơn đoạn $O1$ thì đường trung hoà di chuyển vào trong mặt cắt và chia mặt cắt thành hai phần kéo và nén. Nếu muốn trên mặt cắt chỉ tồn tại một loại ứng suất nén thì điểm 1 là điểm giới hạn vị trí của P di chuyển theo tia OA . Hoàn toàn tương tự như vậy, có thể xác định được các điểm 2, 3 theo các tia tương ứng OB và OC . Khi lực P dừng di chuyển ở các điểm này ta có các tiếp tuyến tương ứng II – II và III – III. Chúng là những đường trung hoà. Cứ mỗi một tia đi ra từ O ta luôn có một điểm giới hạn. Tập hợp tất cả những điểm giới hạn như thế bao quanh trọng tâm O của mặt cắt, xác định một miền chứa trọng tâm O gọi là *lõi mặt cắt*. Một lực nén P bất kỳ đặt ở trong lõi mặt cắt đều gây ra trên toàn bộ mặt cắt chỉ những ứng suất nén. Hiện tượng cũng diễn ra tương tự, nếu có một lực kéo P đặt ở vùng lõi mặt cắt cũng gây ra chỉ những ứng suất kéo trên toàn bộ mặt cắt. Những điều nói trên đặc biệt quan trọng khi thiết kế các cấu kiện chịu nén làm bằng các vật liệu giòn như gang, bê tông, gạch, đá v.v. và cần phải xác định trước kích thước của lõi mặt cắt. Tức là phải xác định vị trí của các điểm giới hạn. Ta hãy xét một cột chịu nén lệch tâm (hình 9.19b). Với cột này, công thức tính ứng suất (9.2) có dạng mới:

$$\sigma = - \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p}{i_x^2} \cdot y + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x \right) \quad (9.20)$$

Khi ký hiệu x_N và y_N là tọa độ của một điểm bất kỳ trên đường trung hoà, ta có phương trình đường trung hoà trong trường hợp này:

$$1 + \frac{x_p \cdot x_N}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y_N}{i_x^2} = 0 \quad (9.21)$$



Hình 9.19.

Nếu gọi a_x và a_y là tọa độ của các giao điểm của đường trung hoà với các trục tọa độ (hình 9.20a) thì những đoạn thẳng này xác định đường trung hoà N – N. Cụ thể là:

Khi đặt $x_N = 0$, $y_N = a_y$ và đặt $y_N = 0$, $x_N = a_x$, từ (9.21) ta thu được hệ phương trình:

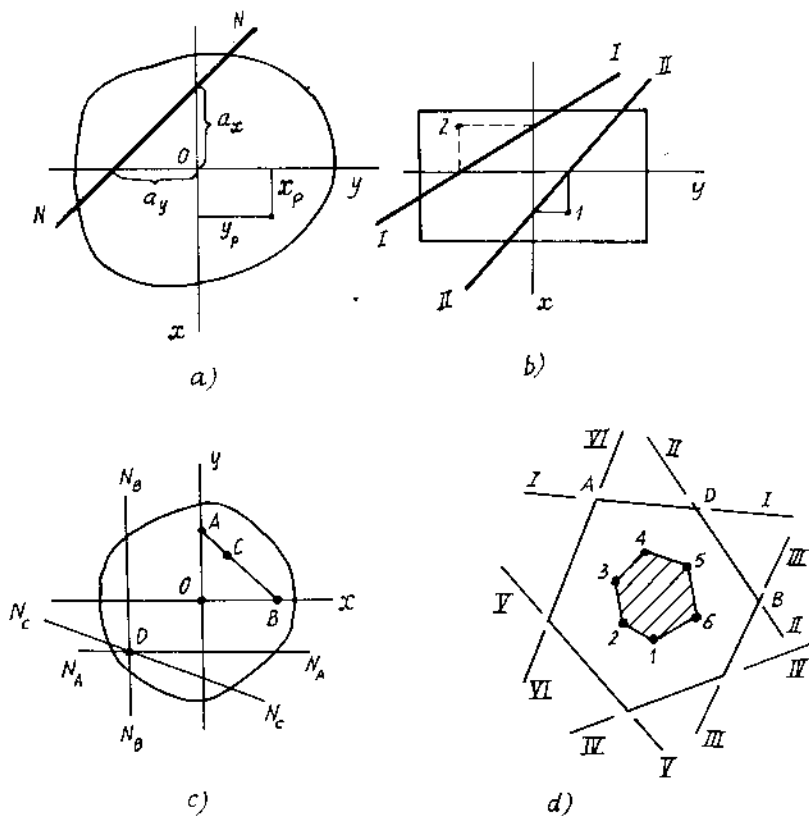
$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{y_p a_y}{i_x^2} &= 0 \\ 1 + \frac{x_p a_x}{i_y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_x &= -\frac{i_y^2}{x_p} \\ a_y &= -\frac{i_x^2}{y_p} \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

Từ phương trình (9.22) suy ra:

$$\frac{a_x}{a_y} = \left(\frac{i_x}{i_y} \right)^2 \cdot \frac{x_p}{y_p} = \left(\frac{i_x}{i_y} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (9.23)$$

Ngược lại, ta cũng có tọa độ của điểm đặt lực x_p, y_p khi đã có a_x, a_y như sau:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= -\frac{i_y^2}{a_x} \\ y_p &= -\frac{i_x^2}{a_y} \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$



Hình 9.20.

Các nhận xét:

a) Nếu đặt lực vào điểm có tọa độ a_x và a_y thì đường trung hoà cắt các trục tọa độ ở các điểm x_p và y_p . Từ hình 9.20b ta thấy khi lực đặt vào điểm 1 thì đường trung hoà tương ứng là I – I.

Khi lực đặt vào điểm 2 thì đường trung hoà tương ứng là II – II.

b) Khi lực P di chuyển trên trục Oy thì đường trung hoà cắt trục Ox tại $a_x = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{i_y^2}{0} = \infty$ và ngược lại. Ví dụ như khi lực P đặt lần lượt vào các điểm 1, 2, 3, 4 trên trục x thì đường trung hoà tương ứng là I – I, II – II, III – III, IV – IV v.v. (hình 9.19c).

c) Khi lực P di chuyển trên đường OE qua tâm O nhưng không trùng với một trục quán tính chính nào thì đường trung hoà di chuyển song song với chính nó và quan hệ (9.23) cho thấy tang góc nghiêng của đường trung hoà $\tan \beta = \frac{a_y}{a_x}$ chỉ phụ thuộc $\tan \alpha = \frac{x_p}{y_p}$ mà không phụ thuộc vào giá trị của các tọa độ x_p và y_p (hình 9.19c).

d) Khi lực P di chuyển trên một đường AB nào đó không qua gốc tọa độ thì đường trung hoà quay quanh điểm D nào đó (hình 9.20c) và ngược lại.

e) Nếu đường trung hoà tiếp tuyến với chu vi mặt cắt thì điểm đặt lực tương ứng là x_p, y_p được tính theo (9.24). Đối với mặt cắt ngang dạng đa giác lồi (hình 9.20d) theo nhận xét, để có được lõi mặt cắt, ta cho các tiếp tuyến (các đường trung hoà) ví dụ tiếp tuyến I – I (cạnh AD của mặt cắt) quay quanh D đến vị trí DB, khi đó lực P sẽ di chuyển trên đường 1 – 2 tạo ra một cạnh của lõi v.v... Lõi nhận được cũng là một đa giác 123456 (hình 9.20d).

§8. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 6

Hãy thực hành xây dựng lõi mặt cắt đối với các trường hợp thường gặp nhất được cho trên hình 9.21a, b, c, d.

Trường hợp a: (hình 9.21a)

Đối với tiếp tuyến I-I: $a_x = \infty$, $a_y = h/2$. Tọa độ của đỉnh 1 của lõi được tìm theo công thức (9.24):

$$x_p = 0; y_p = - \frac{i_x^2}{(h/2)} = - \frac{2J_x}{hF} = - \frac{2bh^3}{12bh^2} = - \frac{h}{6}.$$

Điểm “1” này nằm trên trục y đối diện với tiếp tuyến I-I.

Tương tự như vậy, ta sẽ xác định được tọa độ các điểm (“3”, “2” và “4”) tương ứng như sau:

$(0, h/6)$; $(\pm \frac{b}{6}, 0)$. Lõi của mặt cắt chữ nhật là miền hình thoi

1234. Có thể nhận được lõi này bằng cách quay các tiếp tuyến quanh các góc của chữ nhật như các nhận xét d và e.

Trường hợp b (hình 9.21b)

Tương ứng với 4 tiếp tuyến ta có 4 điểm là 4 đỉnh của lõi 1234. Do tính đối xứng của mặt cắt, nên chỉ cần xác định hai điểm:

$$C_y = \pm \frac{i_x^2}{(h/2)} \quad \text{và} \quad C_x = \pm \frac{i_y^2}{(b/2)}$$

Những giá trị bằng số của các C_y , C_x phụ thuộc vào kích thước cụ thể của mặt cắt chữ I. Lõi của mặt cắt chữ I cũng là một hình thoi (hình 9.21b).

Trường hợp c (hình 9.21c)

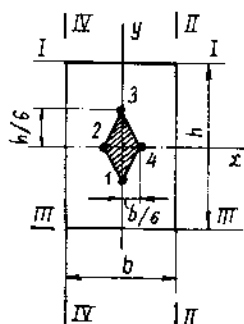
Mặt cắt là hình tròn đặc bán kính R . Do tính đối xứng tỏa tròn của mặt cắt nên chỉ cần xác định một điểm bất kỳ trên chu vi lõi. Điểm đó là:

$$r = - \frac{J_x}{FR} = - \frac{\pi R^4}{4\pi R^2 \cdot R} = - \frac{R}{4}.$$

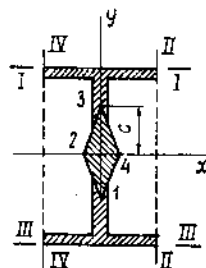
Lõi mặt cắt là một hình tròn đồng tâm với mặt cắt và có bán kính r .

Trường hợp d (hình 9.21d)

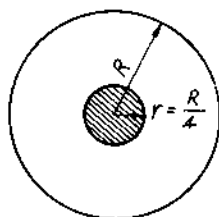
Mặt cắt là một hình chữ T (một đa giác lõm). Hệ các đường tiếp tuyến với chu vi tạo thành một lục giác, vì thế mặt cắt này cũng là một lục giác 123456 (hình 9.21d).



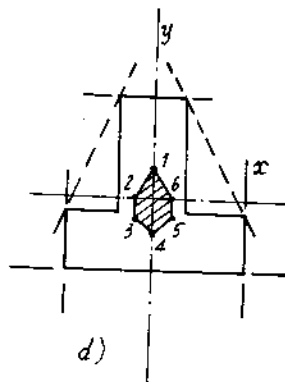
a)



b)



c)



d)

Hình 9.21a, b, c, d.

CHƯƠNG 10

CÁC NGUYÊN LÝ VÀ CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU

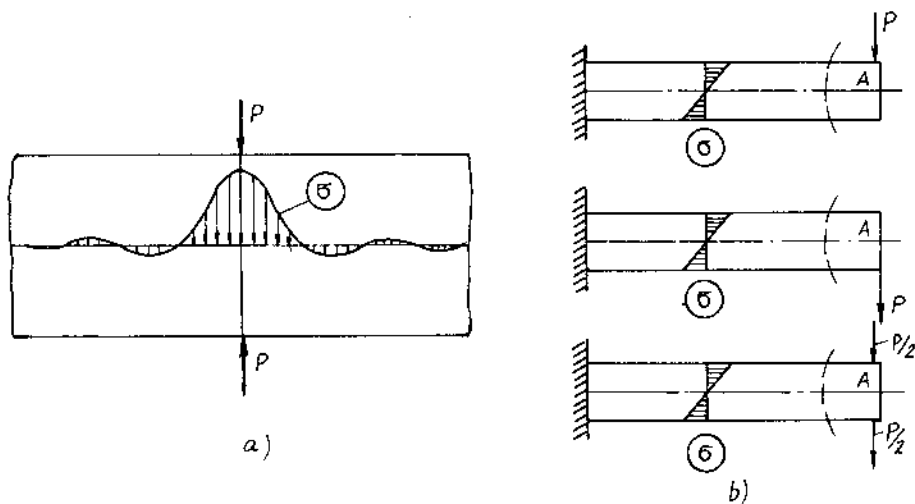
I. CÁC NGUYÊN LÝ TỔNG QUÁT

§1. NGUYÊN LÝ ĐỘC LẬP TÁC DỤNG

Do tính bé của chuyển vị cũng như biến dạng và do quan hệ tuyến tính giữa ứng suất – biến dạng, nên có thể sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực trong các tính toán. Nguyên lý này có nội dung như sau: “Tác dụng đồng thời của nhiều yếu tố (lực) bằng tổng các tác dụng riêng rẽ của từng yếu tố (lực) gây ra:

§2. NGUYÊN LÝ SAINTEVENANT

Nguyên lý này có ý nghĩa rất lớn trong các bài toán của sức bền vật liệu. Theo nguyên lý này thì nếu một hệ lực tương hỗ cân bằng đặt vào một miền nhỏ nào đó của vật thể thì nó chỉ gây ra những ứng suất cục bộ quanh vùng đặt lực và tắt rất nhanh khi càng đi xa miền (này) (hình 10.1a).



Hình 10.1.

Một cách diễn đạt khác nguyên lý này như sau:

Ở những điểm đứng đủ xa miền đặt lực thì các ứng suất phụ thuộc rất ít vào quy luật đặt lực trên bề mặt vật thể ở miền đó. Ví dụ, ứng suất trong dầm (hình 10.1b) sẽ rất khác nhau trong miền đặt lực A, nhưng ở ngoài miền này thì các ứng suất khác nhau rất ít và các kết quả tính toán của sức bền vật liệu chỉ phù hợp ở phần vật thể xa miền đặt lực. Trên cơ sở của nguyên lý này trong tính toán ta có thể thay tải trọng phân bố trên một miền đủ bé của bề mặt vật thể bằng một lực tập trung hoặc một mômen tập trung.

§3. NGUYÊN LÝ BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG CƠ HỌC

Nếu một kết cấu chịu tác dụng của ngoại lực thì nó bị biến dạng.

Giả sử dầm AB (hình 10.3b) chịu một lực đặt tĩnh (tăng dần từ 0 đến P). Độ võng của dầm ở điểm đặt lực là V . Trong quá trình biến dạng P thực hiện một công:

$$A_e = \frac{1}{2} P \cdot V \quad (10.1)$$

Dưới tác dụng của ngoại lực, vật thể đàn hồi bị biến dạng và trong lòng nó sẽ xuất hiện các thành phần nội lực. Công do các nội lực này được ký hiệu là A_i . Khi xem lực là bảo toàn, nghĩa là sau khi bỏ tải thì kết cấu hoàn toàn trở về trạng thái và vị trí ban đầu, thì công cũng như biến dạng là thuận nghịch (không có sự mất mát nào về năng lượng xảy ra). Năng lượng mà kết cấu tích lũy được trong quá trình bị biến dạng để đưa kết cấu từ trạng thái biến dạng về trạng thái hoàn toàn ban đầu gọi là thế năng. Thế năng này phụ thuộc vào vị trí của các chất điểm, nghĩa là phụ thuộc vào biến dạng. Thế năng của các nội lực được gọi là thế năng biến dạng và được ký hiệu là U . Nó bằng công của nội lực với dấu ngược lại:

$$U = - A_i \quad (10.2)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$A_e = - A_i \quad (10.3)$$

hay

$$A_e + A_i = 0 \quad (10.4)$$

Đây chính là nội dung của nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học.

§4. NĂNG LƯỢNG BIẾN DẠNG VÀ NĂNG LƯỢNG BÙ

Chúng ta hãy tưởng tượng một thanh chịu kéo bởi lực P (hình 10.3c), được tăng dần từ 0 đến P_1 (hình 10.2a), độ giãn dài khi ấy là Δ_1 . Một cách tổng quát biến dạng đó trong miền đàn hồi là phi tuyến. Công mà lực P sinh ra là:

$$A = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta \quad (10.5)$$

Tích phân này tương ứng với diện tích tam giác cong Oac trên hình 10.2a. Công này được lưu trữ lại trong thanh dưới dạng thế năng biến dạng:

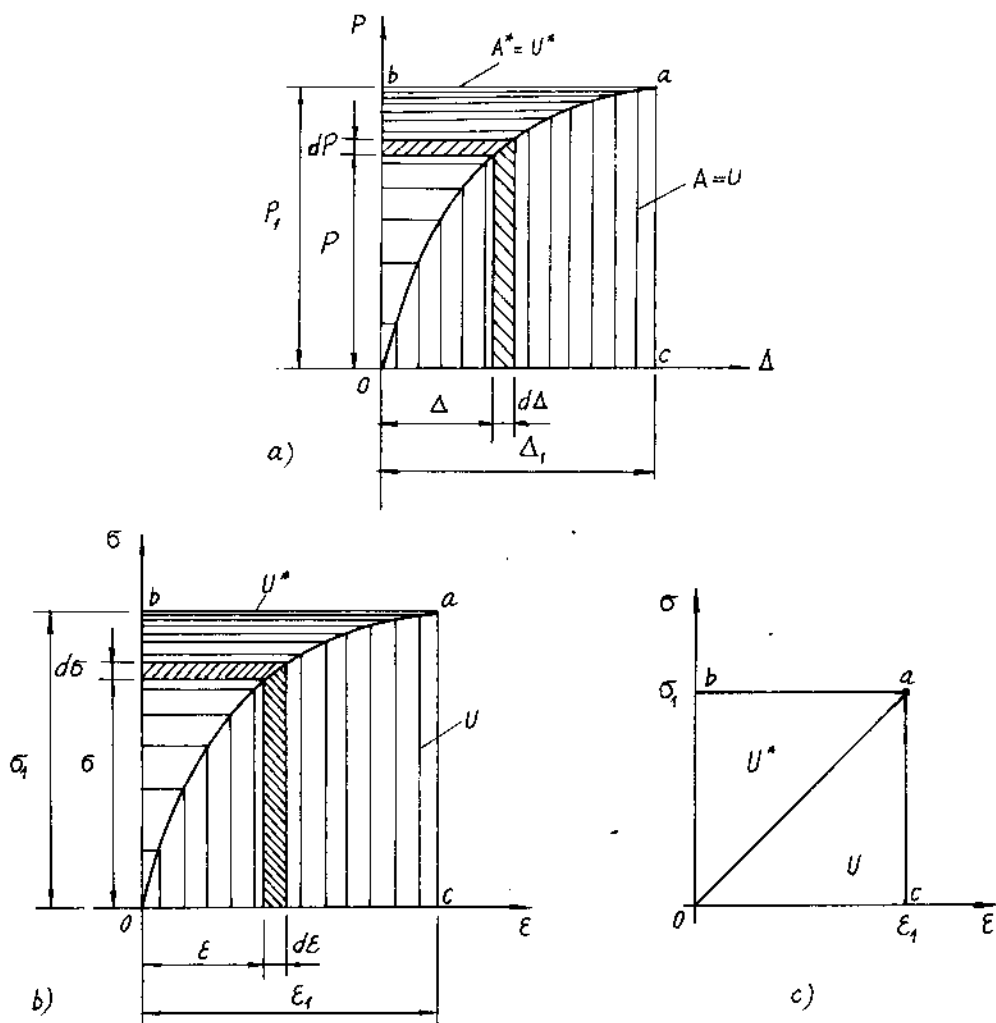
$$A = U \quad (10.6)$$

Tương tự ta có năng lượng riêng (hình 10.2b):

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \quad (10.7)$$

Do đó, năng lượng toàn phần là:

$$U = \int_V u dV \quad (10.8)$$



Hình 10.2.

Trong trường hợp biến dạng là tuyến tính (hình 10.2c):

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} \quad (10.9)$$

Bây giờ chúng ta khảo sát phần diện tích Oab (hình 10.2a). Diện tích này được gọi là công bù và ký hiệu là A^* và được xác định bởi tích phân:

$$A^* = \int_0^{P_1} \Delta dP \quad (10.10)$$

Chúng ta gọi độ lớn của công bù A^* là năng lượng bù và ký hiệu là U^* . Cụ thể là:

$$U^* = A^* \quad (10.11)$$

Từ hình 10.2a, ta rút ra:

$$A + A^* = P_1 \cdot \Delta_1 \quad (10.12)$$

Năng lượng bù riêng và năng lượng bù toàn phần tương ứng có biểu thức:

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma \quad (10.13)$$

và

$$U = \int_V u^* dV \quad (10.14)$$

Trường hợp các quan hệ $P = P(\Delta)$ và $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ là tuyến tính thì:

$$A = A^* ; U = U^* ; u = u^* \quad (10.15)$$

§5. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN PHÂN VÀ PHIẾM HÀM

Ta hãy xét hai đường cong $y(x)$ và $y_1(x)$ cùng đi qua hai điểm A và B trong mặt phẳng xOy (hình 10.3a). Hiệu giữa $y(x)$ và $y_1(x)$ là vô cùng bé được gọi là biến phân (chính xác là biến phân loại 1) và ký

hiệu là δy . Biến phân δy biểu thị sự thay đổi vô cùng bé của hàm tại một giá trị biến x cố định.

Khi ký hiệu độ dài của đường cong $y(x)$ là L thì đường cong $y_1(x)$ sẽ có chiều dài khác. Vì vậy, nói chung có thể nói rằng:

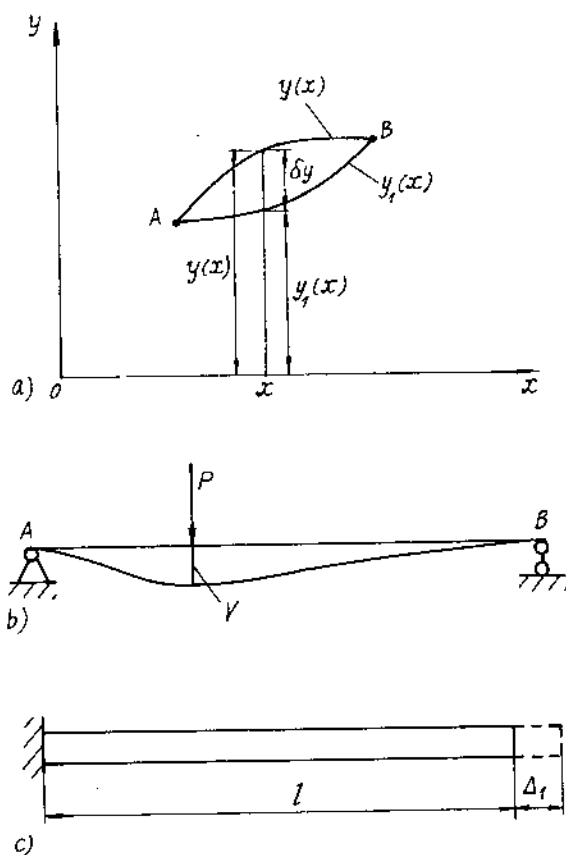
$$L = L[y(x)] \quad (10.16)$$

hay là

$$\Pi = \Pi[y(x)] \quad (10.17)$$

Đại lượng biến đổi L hoặc Π được gọi là phiếm hàm. Nó là hàm của hàm $y(x)$ và ứng với mỗi hàm $y(x)$ ta có L hoặc Π là một số xác định. Về sau chúng ta hiểu Π là một đại lượng năng lượng nào đó (một tích phân xác định) và được gọi là thế năng toàn phần.

Thế năng này có thể được biểu diễn qua chuyển vị hoặc ứng suất. Chúng là những hàm của 1, 2 hoặc 3 biến tùy thuộc vào dạng bài toán. Về sau ta sẽ thấy, việc tìm nghiệm của các bài toán liên quan đến việc tìm cực tiểu (chính xác hơn là giá trị bình ổn) của một phiếm hàm nào đó. Bài toán của phép tính biến phân chính là ở đó. Chính vì vậy mà những phương pháp giải các bài toán trong cơ học có dùng đến phép tính biến phân được gọi là phương pháp biến phân.



Hình 10.3.

§6. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ CỦA LAGRANGE ĐỐI VỚI MỘT CHẤT ĐIỂM

Giả sử có một chất điểm tự do m chịu tác dụng của một hệ lực $\{F_i\}$ cân bằng (hình 10.4).

Chúng ta ký hiệu δr là chuyển vị khả dĩ của chất điểm m không do các lực F_i này mà do một nguyên nhân khác nào đó gây ra, còn độ lớn cũng như phương chiều của các lực được xem là không đổi.

Khi đó, công khả dĩ của lực F_1 được tính:

$$F_1 \delta r \cos \theta_1 = F_{1r} \delta r$$

ở đây, F_{1r} là hình chiếu của F_1 lên phương δr . Vì vậy, công nguyên tố của tất cả các lực có dạng:

$$\delta A = F_{1r} \delta r + F_{2r} \delta r + \dots + F_{nr} \delta r = \left(\sum_{i=1}^n F_{ir} \right) \delta r \quad (10.18)$$

Vì chất điểm ở trạng thái cân bằng cho nên $\sum_{i=1}^n F_{ir} = 0$. Do đó:

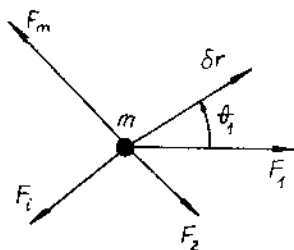
$$\delta A = 0 \quad (10.19)$$

Nguyên lý công khả dĩ (nguyên lý Lagrange) đối với một chất điểm được phát biểu như sau:

“Nếu một chất điểm ở trạng thái cân bằng thì tổng công của các lực trên các chuyển vị khả dĩ bằng không”.

Nhân tiện, ta cũng có thể chứng minh điều kiện cân bằng của hệ lực như sau: Vì δr là chuyển vị khả dĩ tùy ý nên $\delta r \neq 0$, do vậy từ (10.19) ta rút ra: $\sum_{i=1}^n F_{ir} = 0$.

Đây là điều kiện cân bằng của hệ lực $\{F_i\}$ đặt vào điểm m .



Hình 10.4.

§7. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ CỦA POISSON – LAGRANGE ĐỐI VỚI HỆ THANH ĐÀN HỒI

1. Công khả dĩ của ngoại lực

Bởi vì, công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng khả dĩ do một nguyên nhân bất kỳ nào đó không phải do các lực này gây ra, cho nên để tính công khả dĩ đối với hệ thanh đàn hồi ta cần tạo ra trạng thái “k” và trạng thái “m” và được hiểu như sau:

– Trạng thái “k” là trạng thái chịu các lực P_k .

– Trạng thái “m” là trạng thái chịu các nguyên nhân “m”. Các nguyên nhân này có thể là tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ và có thể là các chuyển vị cưỡng bức của các liên kết v.v (khác với các lực P_k ở trạng thái “k”).

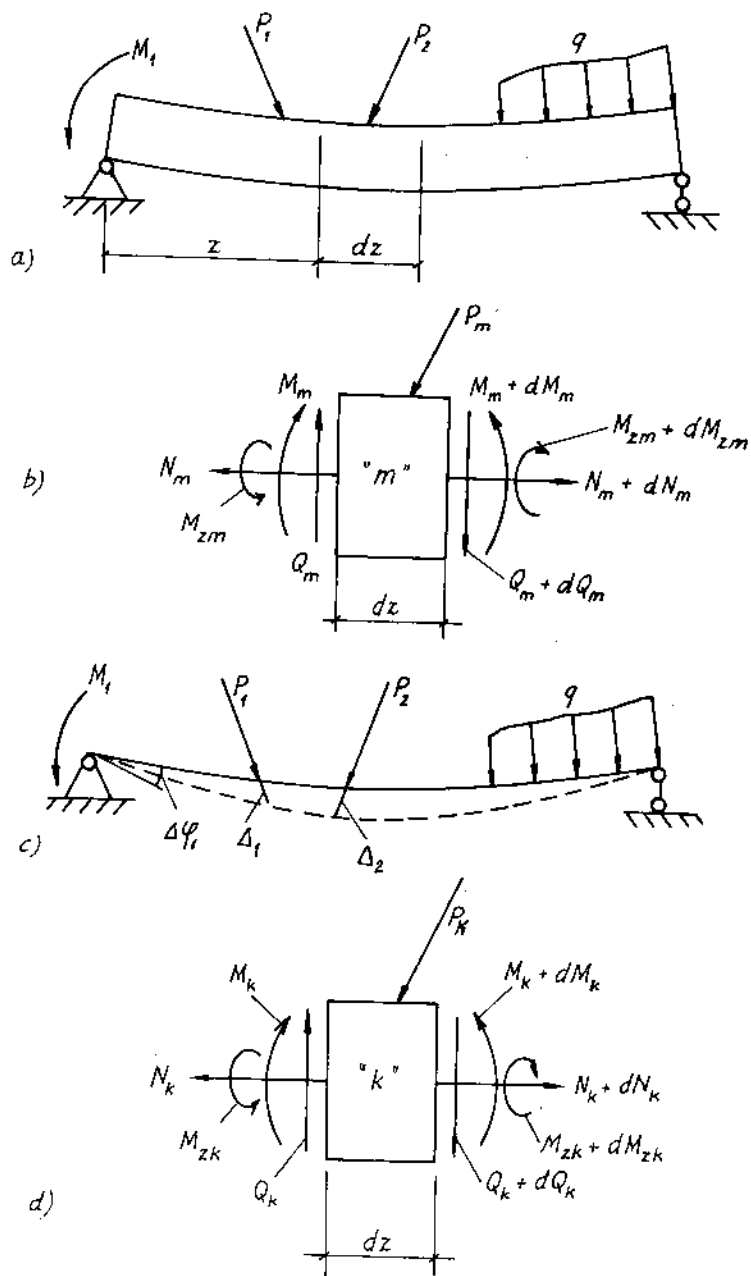
Giả sử dưới tác dụng của tác dụng ngoài (hình 10.5a) dầm bị biến dạng và nằm ở trạng thái cân bằng.

Ta tách từ dầm bị biến dạng một phân tố có chiều dài dz , trên các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực như hình 10.5b. Bây giờ chúng ta truyền cho dầm ở trạng thái biến dạng một chuyển vị khả dĩ (đường nét đứt trên hình 10.5c) khi không phá hủy các liên kết nội và ngoại của dầm. Ngoại lực và nội lực tác dụng lên phân tố khảo sát khi chịu các chuyển vị khả dĩ Δ_k đều có trị số và phương chiều không đổi. Khi đó tổng công khả dĩ của các ngoại lực P_m ở trạng thái thực “m” (hình 10.5a) trên các chuyển vị khả dĩ Δ_k là:

$$\delta A_{me} = P_1 \Delta_1 + M_1 \Delta_{\phi_1} + P_2 \Delta_2 + \dots \quad (10.20)$$

Khác với công thực, trong công thức (10.1), ở đây không có thừa số $1/2$ vì lực sinh công trong quá trình thực hiện các chuyển vị khả dĩ là bất biến về độ lớn và phương. Hoàn toàn tương tự, nếu gọi Δ_{km} là các chuyển vị ở trạng thái “m” do các nguyên nhân “m” gây ra tương ứng với các lực P_k ở trạng thái “k”, ta có thể mở rộng định nghĩa công khả dĩ như sau:

$$\delta A_{ke} = \sum P_{ik} \Delta_{km} \quad (10.21)$$



Hình 10.5.

Nghĩa là tổng công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái “m” bằng tổng các tích giữa các ngoại lực tác dụng ở trạng thái “k” với những chuyển vị tương ứng ở trạng thái “m”.

2. Công khả dĩ của nội lực

Công của nội lực có thể được xác định qua các thành phần nội lực, ứng suất và biến dạng. Đối với dầm (hình 10.5a), ta có thể lấy chuyển vị do một hệ lực mới bất kỳ P_K nào đó gây ra làm chuyển vị khả dĩ. Giả sử dưới tác dụng của hệ ngoại lực mới này, trên các mặt cắt của phân tố (hình 10.5d) có các thành phần nội lực là: M_k , Q_k , M_{zk} và N_k . Khi đó, ví dụ biến dạng góc do M_k gây ra là: $\frac{M_k dz}{EJ}$. Biến

dạng này có thể xem như một chuyển vị khả dĩ đối với M_m v.v... Tương tự như vậy, ta có thể viết công khả dĩ của các nội lực như sau:

$$\begin{aligned} \delta A_i = & \sum \int_{l_j} \frac{M_{xm} M_{xk} dz}{EJ_x} + \sum \int_{l_j} \frac{M_{ym} M_{yk} dz}{EJ_y} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_{ym} Q_{yk} dz}{GF} + \\ & + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_{xm} Q_{xk} dz}{GF} + \sum \int_{l_j} \frac{N_m N_k dz}{EF} + \sum \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk} dz}{GJ_p} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Để thấy rằng công thức của các nội lực M , Q , M , N được viết như công thức (10.22) nhưng có thừa số 1/2. Cụ thể là:

$$\begin{aligned} A_i = & \sum \int_{l_j} \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} + \sum \int_{l_j} \frac{M_y^2 dz}{2GJ_y} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_x^2 dz}{2GF} + \\ & + \sum \int_{l_j} \frac{N^2 dz}{2EF} + \sum \int_{l_j} \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p} \end{aligned} \quad (10.23)$$

ở đây γ – hệ số kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang do Q gây ra.

Các tích phân trong (10.22) và (10.23) là những tích phân xác định được lấy trên tất cả các đoạn l_j của hệ.

Bây giờ ta xác định công khả dĩ của nội lực khi hệ chịu sự biến thiên của nhiệt độ. Ta gọi t_{1m} và t_{2m} là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh.

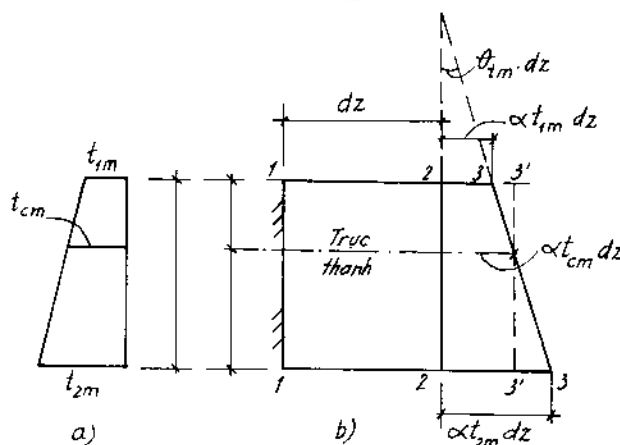
Giả sử rằng quy luật biến thiên của nhiệt độ theo chiều cao mặt cắt là luật bậc nhất thì biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng như trên hình 10.6a.

Từ hình 10.6a, ta xác định luật biến thiên nhiệt độ ở trục thanh:

$$t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}$$

Nếu $a = b = h/2$; ta có:

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2} \quad (a)$$



Hình 10.6.

Để lập công thức tính công này ta giả thiết $t_{1m} > 0$ và $t_{2m} > t_{1m}$; mặt cắt 1-1 ở đầu trái của phân tố là cố định. Gọi α là hệ số dẫn nở vì nhiệt của vật liệu, ta có: thớ trên của phân tố sẽ dẫn dài bằng $\alpha t_{1m} dz$, trục phân tố sẽ dẫn dài là $\alpha t_{cm} dz$ và thớ dưới phân tố sẽ dẫn dài là $\alpha t_{2m} dz$ (hình 10.6b). Như vậy phân tố có hai thành phần biến dạng vì nhiệt như sau:

Độ dẫn dài dọc trục δz do nhiệt độ t_{cm} gây ra:

$$\delta z = \epsilon_{tm} dz = \alpha t_{cm} dz \quad (b)$$

Góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt 1-2 và 2-2 là $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \theta_{cm} dz = \frac{\alpha t_{2m} dz - \alpha t_{1m} dz}{h} = \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz \quad (c)$$

Vậy công khả dĩ δA_{it} của các nội lực ở trạng thái “k” trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” do sự biến thiên nhiệt độ gây ra bằng:

$$\delta A_{it} = \sum_{l_i} \int M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{l_i} \int N_k \cdot \alpha t_{cm} dz \quad (10.24)$$

Năm 1833, S. D. Poisson đã phát biểu nguyên lý công khả dĩ của Lagrange đối với hệ đàn hồi như sau:

Nếu một cơ hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ δA_e của các ngoại lực trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng và tổng công khả dĩ của các nội lực δA_i trên các biến dạng khả dĩ tương ứng phải bằng không.

Cụ thể là:

$$\delta A_e + \delta A_i = 0 \quad \text{hay} \quad \delta A_e = -\delta A_i \quad (10.25)$$

§8. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP MAXWELL – MOHR – ВЕРЕСЛАГИН

1. Công thức Maxwell - Mohr

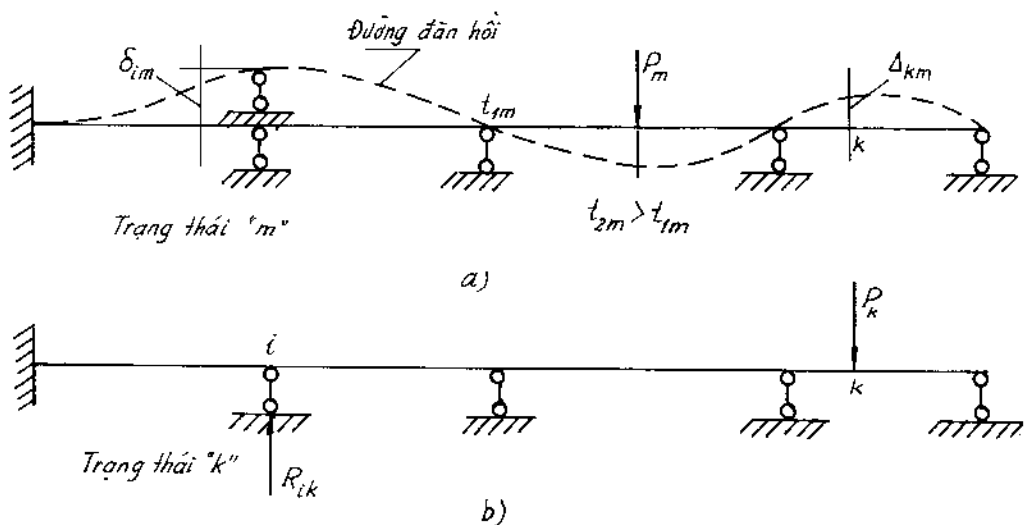
Trong mục này ta sẽ áp dụng nguyên lý công khả dĩ vào việc xây dựng một công thức tổng quát nhất để tính những chuyển vị bất kỳ của các hệ đàn hồi bất kỳ dạng hệ thanh. Giả sử có một hệ đàn hồi bất kỳ ở trạng thái “m” chịu đồng thời các tác dụng ngoài cho trước như: tải trọng P_m ; các chuyển vị cưỡng bức δ_{im} tại liên kết “i”; sự thay đổi nhiệt độ t_{2m}, t_{1m} (hình 10.7a).

Yêu cầu tính chuyển vị Δ_{km} bất kỳ tại mặt cắt k bất kỳ?

Ví dụ, tính chuyển vị thẳng đứng tại k? Để có công khả dĩ ta cần tạo ra một trạng thái khả dĩ “k” suy ra từ trạng thái thực “m”, trên

đó hệ chỉ chịu một lực P_k đặt tại k theo phương cần tính chuyển vị (hình 10.7b). Theo công thức (10.25) về công khả dĩ của nội lực và ngoại lực ở trạng thái "k" trên các chuyển vị và biến dạng ở trạng thái "m", ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
 P_k \Delta_{km} + \sum_{i=1}^n R_{ik} \delta_{im} = & \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{M_k M_m}{EJ} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{N_k N_m}{EF} dz + \\
 & + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\gamma Q_k Q_m}{GF} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk}}{GJ_p} dz + \\
 & + \sum_{j=1} \int_{l_j} M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} N_k \alpha t_{cm} dz
 \end{aligned} \quad (10.26)$$



Hình 10.7.

Khi ký hiệu:

$$\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k} ; \quad \bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k} ; \quad \bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k} ; \quad \bar{M}_{kz} = \frac{M_{kz}}{P_k} ; \quad \bar{R}_{ik} = \frac{R_{ik}}{P_k} ,$$

(chúng là những nội lực và phản lực do lực $\bar{P}_k = 1$ gây ra ở trạng thái “k”), ta có công thức tính chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính trong trường hợp tổng quát như sau:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & - \sum_i \bar{R}_{ik} \delta_{im} + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{xk} M_m}{EJ_x} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{yk} M_{ym}}{EJ_y} dz + \\ & + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{N}_k N_m}{EF} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\gamma \bar{Q}_{xk} Q_{xm}}{GF} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\gamma \bar{Q}_{yk} Q_{ym}}{GF} dz + (10.27) \\ & + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm}}{GJ_p} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \bar{N}_k \alpha t_{cm} dz \end{aligned}$$

Chú ý khi sử dụng công thức:

- Công thức (10.27) chỉ đúng với các hệ thanh thẳng và thanh cong có độ cong bé $h/\rho_{\min} < 1/5$, trong đó:
 - Lực $\bar{P}_k = 1$ được chọn chiều tùy ý, còn phương thì phụ thuộc vào phương chuyển vị cần tìm. Nếu kết quả tính ra $\Delta_{km} > 0$ thì chiều chuyển vị cần tính là chiều của lực $\bar{P}_k = 1$ đã chọn. Nếu $\Delta_{km} < 0$ thì chiều chuyển vị cần tính là chiều ngược với chiều $\bar{P}_k = 1$ đã chọn.
 - Dấu tổng trong số hạng thứ nhất ở vế phải được lấy theo “i” (số liên kết có chuyển vị cưỡng bức $i = 1, n$). $\bar{R}_{ik}$ là phản lực ở liên kết “i” do $\bar{P}_k = 1$ gây ra ở trạng thái “k”. δ_{im} là chuyển vị cưỡng bức ở liên kết “i” của trạng thái “m” do các nguyên nhân ở trạng thái “m” gây ra. Khi $\bar{R}_{ik}$ cùng chiều với δ_{im} thì $\bar{R}_{ik} \cdot \delta_{im} > 0$.
 - Các tích phân trong (10.27) là những tích phân xác định trong đoạn thanh thứ j có chiều dài l_j , trên đó hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng $\left(\sum_{j=1} \int_{l_j} \dots \right)$ được áp dụng cho tất cả các đoạn thanh của hệ. Các đại lượng $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k, \bar{M}_{zk}, M_m, N_m, Q_m, M_{zk}$ lần lượt là các hàm nội lực trong đoạn l_j ở trạng

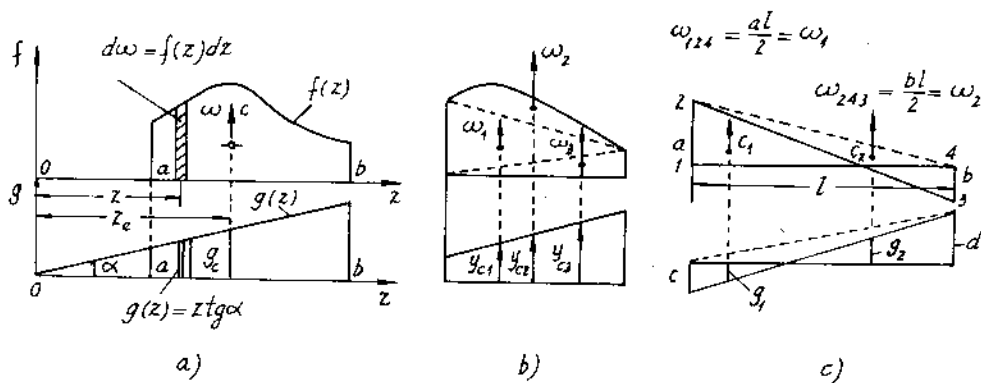
thái “k” có bậc không hoặc bậc 1, và trạng thái thực “m” có bậc tùy ý.

- h là chiều cao của mặt cắt ngang ; $\rho_{\min}$ là bán kính cong nhỏ nhất của thanh ở trạng thái chưa biến dạng.

2. Thuật toán Vêrêxaghin (Верещагин)

Ta sẽ chứng minh rằng nếu độ cứng của mặt cắt không đổi trong một đoạn nào đó thì mỗi tích phân Maxwell – Mohr trong (10.27) có thể được tính bằng cách nhân diện tích ω của biểu đồ nội lực gây ra do tải trọng ngoài cho trước với tung độ g_c của biểu đồ nội lực đó nhưng do lực ảo suy rộng $\bar{P}_k = 1$ gây ra. Tung độ g_c đi qua trọng tâm “C” của biểu đồ thứ nhất ω .

Thật vậy, giả sử trong khoảng $[a, b]$ hàm $f(z)$ có bậc bất kỳ, còn hàm $g(z)$ là hàm bậc nhất (hình 10.8a).



Hình 10.8.

Ta có thể viết tất cả các tích phân trong (10.27) dưới cùng một mô hình toán sau:

$$\Delta = \int_a^b \frac{f(z)g(z)dz}{\beta_K} = \operatorname{tg}\alpha \int_a^b \frac{z d\omega}{\beta_K} = \operatorname{tg}\alpha \frac{Z_c \omega}{\beta_K} = \omega g_c / \beta_K$$

Do đó, mỗi tích phân Mohr có giá trị là:

$$\Delta = \frac{\omega \cdot g_c}{\beta_K} \quad (\beta_K = \overline{1,4}) \quad (10.28a)$$

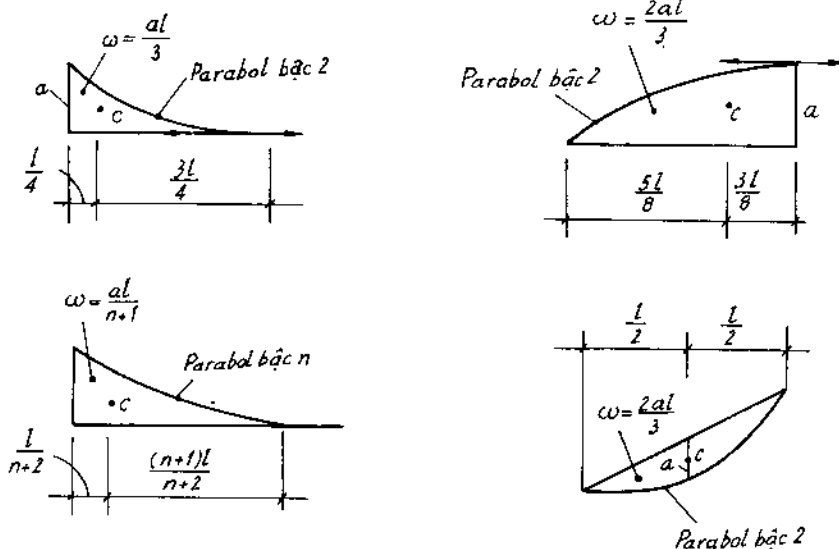
Với β_K tương ứng là các độ cứng của mặt cắt khi uốn EJ, khi kéo (nén) EF, khi cắt GF / γ , khi xoắn GJ_p.

Chuyển vị chỉ do các ngoại lực gây ra là Δ_{kp} có công thức theo Vêrêxaghin:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \cdot g_{ci}}{\beta_K} \quad (10.28b)$$

Khi chịu tác dụng đồng thời của ngoại lực, nhiệt độ biến thiên, chuyển vị cưỡng bức, công thức (10.27) có dạng:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & \sum_{i=1}^n \overline{R}_{ik} \delta_{im} + \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j \cdot g_{ej}}{\beta_K} + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \overline{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) + \\ & + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \overline{N}_k \cdot \alpha \cdot t_{cm} \cdot dz \end{aligned} \quad (10.29)$$



Hình 10.9.

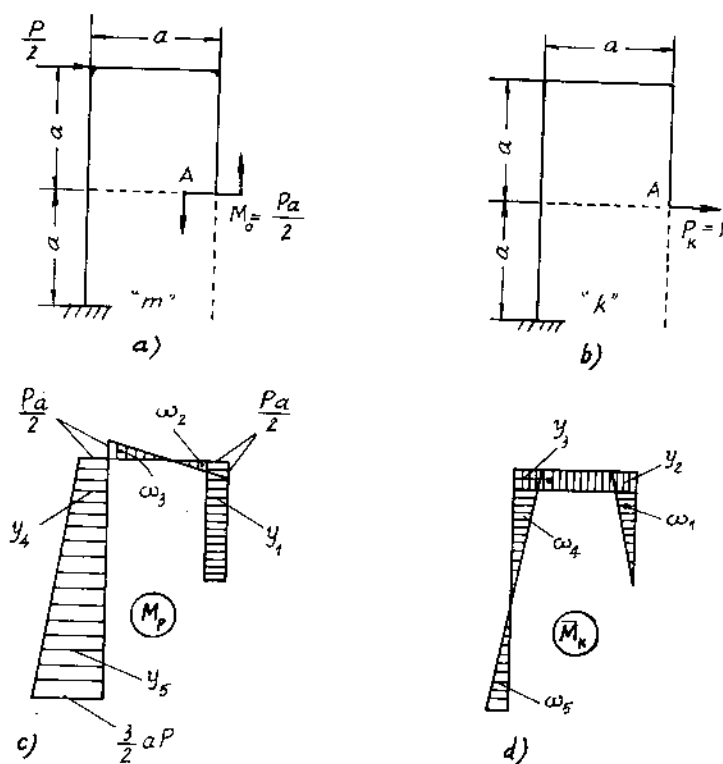
Cách tính tích phân Maxwell – Mohr bằng cách “nhân” biểu đồ này được gọi là thuật toán Vêrêxaghin.

Khi diện tích ω là một hình phức tạp ta có thể chia thành nhiều hình đơn giản để tính diện tích và trọng tâm để áp dụng riêng biệt cách nhân cho từng hình đơn giản rồi cộng kết quả lại (hình 10.8b, c). Diện tích và trọng tâm của một số biểu đồ dạng đường cong bậc n thường gặp được cho trên hình 10.9.

Ví dụ 1:

Cho một khung chịu lực và liên kết cân bằng như hình 10.10. Cho trước P , a , E , J . Hãy tính chuyển vị ngang tại A ?

GIẢI



Hình 10.10.

Biểu đồ mômen do tải trọng và $\bar{P}_k = 1$ gây ra được cho trên hình 10.10c, d.

$$\omega_1 = \frac{a^2}{2} ; \omega_2 = \frac{P \cdot a^2}{8} = \omega_3 ; \omega_4 = \frac{a^2}{2} = \omega_5$$

$$y_1 = \frac{P \cdot a}{2} ; y_2 = a = y_3 ; y_4 = \frac{2P \cdot a}{3} ; y_5 = \frac{4P \cdot a}{3}$$

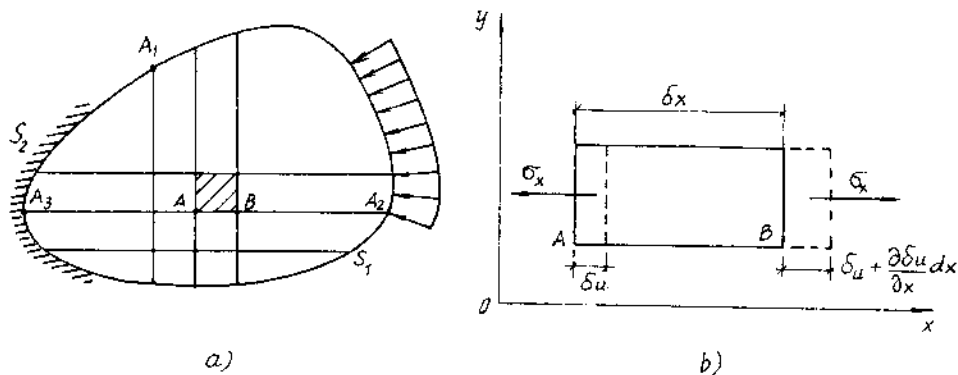
Theo công thức (10.28b) ta có:

$$\Delta_{KP} = U_A = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5}{EJ} = \frac{7Pa^2}{12EJ} \quad (\text{điểm A di chuyển sang phải})$$

§9. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ ĐỐI VỚI VẬT THỂ ĐÀN HỒI BA CHIỀU. PHƯƠNG TRÌNH BIẾN PHÂN CỦA LAGRANGE

Có thể xem vật thể đàn hồi như một hệ chất điểm (hình 10.11a). Giả sử rằng mỗi chất điểm của vật chịu một chuyển vị khả dĩ và công khả dĩ của các lực đặt vào chất điểm đó bằng không. Vì vậy công khả dĩ tổng cộng cũng phải bằng không. Bạn đọc hãy chú ý đến một đặc điểm quan trọng của chất điểm thuộc vật (ví dụ, điểm A) so với chất điểm tự do. Tất cả các chất điểm của vật đều được ràng buộc với nhau để tạo thành vật. Liên kết này không bị phá hủy mỗi khi có chuyển vị khả dĩ nào đó. Nói khác đi, điều kiện liên tục phải luôn được bảo đảm. Điều kiện này sẽ luôn được thực hiện nếu chuyển vị khả dĩ được biểu diễn qua những hàm liên tục. Chuyển vị của điểm A không được cố định và ở đây việc lấy biến phân là được phép. Hoàn toàn như vậy có thể lấy biến phân của chuyển vị trên phần bề mặt tự do S_1 (ví dụ, điểm A_1 hoặc điểm A_2). Nếu điểm (ví dụ, điểm A_3) thuộc phần bề mặt ngàm chặt S_2 (các chuyển vị được cố định và bằng không) thì biến phân của chuyển vị bằng không.

Ta hãy xét một phân tố được tách ra từ vật thể đàn hồi (hình 10.11a). Gọi các chuyển vị thực của điểm A là u, v, w và các chuyển vị khả dĩ tương ứng là $\delta u, \delta v, \delta w$. Chúng là những hàm liên tục của các tọa độ x, y, z phù hợp các điều kiện biên.



Hình 10.11a, b.

Chúng ta hãy khảo sát chuyển vị và công theo phương x . Nếu cho chuyển vị u một số gia δu , thì phân tố có vị trí mới khi điểm A có chuyển vị δu , còn điểm B nhận chuyển vị $\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx$ (hình 10.11b).

Công khả dĩ của các lực tác dụng lên phân tố sẽ là:

$$\delta dA = \sigma_x \left(\delta u + \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x \delta u dydz = \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx dydz \quad (a)$$

Số gia của biến dạng:

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (b)$$

$$\text{Nhưng với } \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ thì } \delta \epsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (c)$$

Từ đó:

$$\delta \epsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \quad (d)$$

Chú ý đến (d) thì biểu thức (a) được viết:

$$\delta dA = \sigma_x \delta \epsilon_x dx dydz = E \epsilon_x \delta \epsilon_x dx dydz \quad (10.30)$$

Năng lượng biến dạng phân tử theo phương x:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz = \frac{E}{2} \epsilon_x^2 dx dy dz \quad (e)$$

Khi lấy biến phân theo ϵ_x , ta có số gia của thế năng phân tử:

$$\delta dU = E \epsilon_x \delta \epsilon_x dx dy dz \quad (10.31)$$

Từ đó theo (10.30) và (10.31) ta có:

$$d\delta A = d\delta U \quad (10.32)$$

Khi tích phân (10.32) ta nhận được công toàn phần δA của các lực tác dụng tương hỗ giữa các phân tử và bằng số gia của thế năng δU . Cụ thể là:

$$\delta A = \delta U \quad (10.33)$$

hoặc là:

$$\delta U - \delta A = 0 ; \delta(U - A) = \delta \Pi = 0 \quad (10.34)$$

Ở đây ta đã đặt:

$$\Pi = U - A \quad (10.35)$$

là thế năng toàn phần của hệ.

Đó là nguyên lý biến phân của Lagrange.

Nguyên lý được diễn đạt như sau: *“Trong số tập hợp các chuyển vị khả dĩ phù hợp các điều kiện biên thì những chuyển vị thỏa mãn điều kiện cân bằng sẽ cho thế năng của hệ một giá trị bình ổn. Ở trạng thái cân bằng ổn định đại lượng Π có giá trị cực tiểu”.*

Phương trình biến phân của Lagrange là cơ sở để xây dựng các phương trình cân bằng và điều kiện biên. Nó còn là cơ sở của nhiều phương pháp tính trong cơ học các vật rắn biến dạng và các lĩnh vực khác.

Trong trường hợp tổng quát của bài toán trong không gian đàn hồi thì (10.34) viết như thế nào?

Giả sử vật T có thể tích V chịu các lực thể tích đơn vị X, Y, Z, lực bề mặt đơn vị trên phần bề mặt S_1 , và phần bề mặt S_2 được ngâm

chặt (hình 10.12a). Khi lấy biến phân các chuyển vị, ta viết biểu thức δA như sau:

$$\delta A = \iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \iint_{S_1} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS \quad (10.36a)$$

Trên cơ sở (10.36a) biểu thức (10.34) được viết:

$$\iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \iint_{S_1} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS - \delta U = 0 \quad (10.36b)$$

Bởi vì khi lấy biến phân các chuyển vị thì các thành phần lực X , Y , Z và $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ không thay đổi, cho nên dấu δ có thể đưa ra ngoài tích phân như một thừa số. Khi đó:

$$\delta \left[\iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV + \iint_{S_1} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS - U \right] = 0 \quad (10.37)$$

Trong dấu móc vuông là hiệu giữa công của các lực thể tích, lực bề mặt trên các chuyển vị khả dĩ và thế năng (năng lượng biến dạng với dấu ngược lại).

Năng lượng biến dạng riêng:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (10.38)$$

Khi sử dụng định luật Hooke dạng thuận và dạng ngược, biểu thức u có dạng:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (10.39)$$

Và dạng ngược của u theo biến dạng:

$$u = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_0 + G (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (10.40)$$

trong đó:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z ; \lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (10.41)$$

Đôi khi năng lượng biến dạng riêng u thường được viết qua các thành phần chuyển vị. Đối với dầm và tấm các thành phần chuyển vị chỉ có một. Cụ thể là độ võng w.

Con đường giải bài toán được mô tả ở trên khi các chuyển vị được lấy biến phân, tương đương với phương pháp chuyển vị. Có thể giải bài toán bằng con đường khác khi không phải chuyển vị được lấy biến phân mà các lực hoặc ứng suất được lấy biến phân. Quá trình này tương đương với phương pháp lực. Khi đó cần phải thỏa mãn điều kiện cân bằng bên trong cũng như trên biên S_1 của vật thể.

§10. NGUYÊN LÝ NĂNG LƯỢNG BÙ CỦA CASTIGLIANO

Đối với vật thể T (hình 10.12a) lực thể tích X, Y, Z ở trong toàn bộ vật thể và lực bề mặt $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ cố định trên phần S_1 , vì vậy không thể lấy biến phân. Trên phần mặt S_2 chuyển vị được cho trước, lực bề mặt chưa biết, vì vậy có thể lấy biến phân. Do đó, tương tự (10.36b) ta có:

$$\int_{S_2} (u\delta\bar{X} + v\delta\bar{Y} + w\delta\bar{Z}) dS - dU = 0 \quad (10.42)$$

Vì khi lấy biến phân các lực bề mặt thì các chuyển vị không đổi, nên dấu δ được đưa ra ngoài dấu tích phân:

$$\delta \left[\int_{S_2} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) dS - U \right] = 0 \quad (10.43)$$

Người ta gọi đại lượng:

$$A^* = \int_{S_2} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) dS \quad (10.44)$$

là công bù, còn:

$$U - A^* = \Pi^* \quad (10.45)$$

là năng lượng bù.

Từ đó nguyên lý mới được rút ra:

$$\delta \Pi^* = 0 \quad (10.46)$$

được gọi là nguyên lý Castigliano hay nguyên lý năng lượng bù.

Nguyên lý được phát biểu như sau:

“Trong tập hợp các ứng suất tĩnh thỏa mãn điều kiện cân bằng bên trong vật thể và trên phần bề mặt có ngoại lực cho trước thì các ứng suất thỏa mãn điều kiện liên tục sẽ cho năng lượng bù giá trị bình ổn. Trong điều kiện cân bằng ổn định đại lượng Π có giá trị cực tiểu”.

§11. PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH – RITS

1. Nội dung của phương pháp

Phương pháp biến phân được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học là phương pháp dựa trên nguyên lý cực tiểu của thế năng toàn phần “ Π ” đã được nghiên cứu ở trên. Khi không làm giảm tính tổng quát của phương pháp chúng ta hãy minh họa nó qua bài toán uốn tấm (và dầm). Ta biểu diễn mặt đàn hồi của tấm dưới dạng chuỗi:

$$w(x, y) = c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x, y) \quad (10.47)$$

Ở đây $f_i(x, y)$ là những hàm liên tục và được gọi là hàm tọa độ hay hàm cơ sở. Mỗi một hàm riêng biệt $f_i(x, y)$ phải thỏa mãn các điều kiện biên động học và phản ánh tốt nhất mặt vồng thực của tấm: $c_1, c_2, \dots, c_n$ là những thông số chưa biết được xác định từ điều kiện cực tiểu của thế năng toàn phần. Đối với dầm các $f_i(x, y)$ trong (10.47) được thay bằng $f_i(x)$.

Điều kiện:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.48)$$

dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính đối với các c_i . Giải hệ này ta được các hệ số c_i và thay chúng vào (10.47) để được mặt vồng cần tìm.

2. Công khả dĩ của ngoại lực và thế năng biến dạng

Nếu gọi u, v, w là các thành phần của chuyển vị thực, q_x, q_y, q_z là các thành phần của cường độ tải trọng phân bố, P_i là lực tập trung, Δ_i là chuyển vị của điểm đặt lực này, M_i là mômen tập trung, θ_i là góc xoay tương ứng (hình 10.12b), thì công khả dĩ của các ngoại lực này có biểu thức:

$$A_e = - \left[\iint_F (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy + \sum_i P_i \Delta_i + \sum_i M_i \theta_i \right] \quad (10.49)$$

Nếu biên của tấm cho phép chuyển vị thì các lực biên $\bar{v}_n, \bar{m}_n, \bar{m}_m$ cũng sẽ sinh công khả dĩ:

$$A_l = - \int \left[\bar{v}_n \cdot w + \bar{m}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{m}_m \frac{\partial w}{\partial t} \right] dS \quad (10.50)$$

Trong trường hợp tổng quát năng lượng biến dạng gồm hai thành phần U_u do uốn và U_m do lực màng:

$$U_u = \frac{1}{2} \iint_F (M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) dx dy \quad (10.51)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_F (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy$$

Trong hệ tọa độ Đêcac vuông góc đại lượng trong (10.51) như sau:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10.52)$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Thay biểu thức (10.52) vào (10.51) ta có:

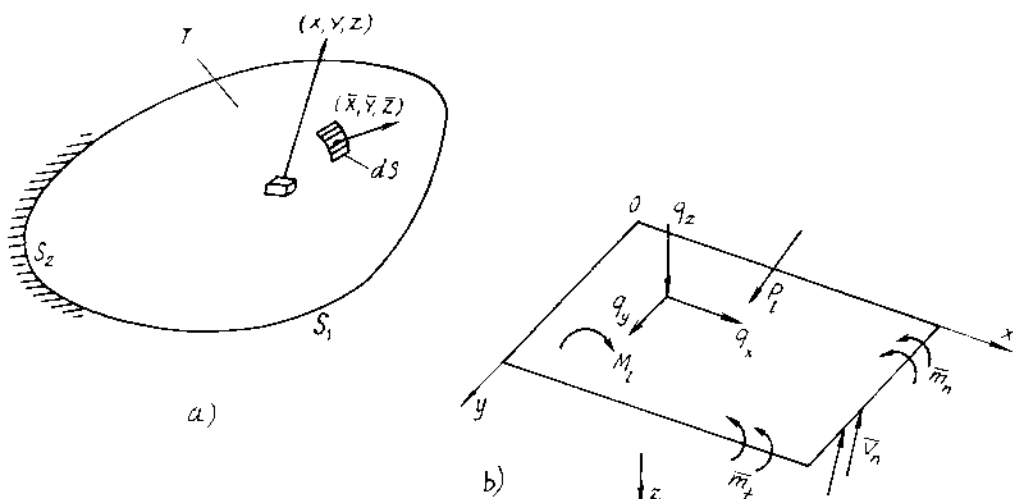
$$U_u = \frac{1}{2} \iint_F D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (10.53)$$

Đối với tấm đa giác có chu vi ngàm và tấm chữ nhật tựa trên chu vi, biểu thức (10.53) có dạng đơn giản:

$$U_u = \frac{1}{2} \iint_F D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad (10.54a)$$

Đối với hệ thanh dàn hồi theo (10.3) và (10.23) U có dạng:

$$U = \sum \int \frac{M^2 dz}{2EJ} + \sum \int \frac{N^2 dz}{2EF} + \sum \int \gamma \frac{Q^2 dz}{2GF} \quad (10.54b)$$



Hình 10.12.

Hiệu ứng màng

Phần năng lượng màng là:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \iint_F (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_F \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (10.55)$$

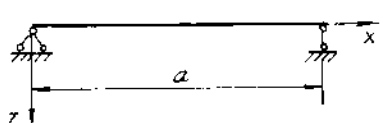
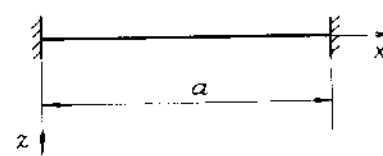
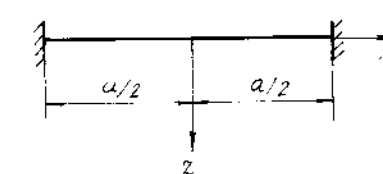
Biểu thức của U_m được viết qua chuyển vị có dạng:

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (10.56)$$

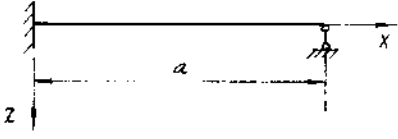
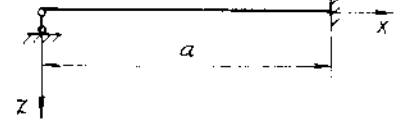
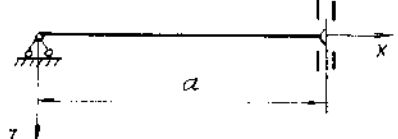
Cũng có thể viết U_m qua ứng suất:

$$U_m = \frac{h}{2E} \iint_F \left[(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(1+\mu)(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] dx dy \quad (10.57)$$

Bảng 1

No	Điều kiện biên	Hàm tọa độ
1		$\sum_m X_m = \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)
2		$\sum_m X_m = \sum_m \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right)$ ($m = 1, 3, 5, \dots$) $\sum_m X'_m = \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \sum_m (-1)^m \times$ $\times \frac{x^2}{a^2} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$
3		$\sum_m X_m = \sum_m (a^2 - 4x^2)^2 x^m$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) $\sum_m X_m = \sum_m \left[1 - (-1)^m \cos \frac{2m\pi x}{a} \right]$ ($m = 1, 3, 5$)

Tiếp bảng 1

Số	Điều kiện biên	Hàm tọa độ
4		$\sum_m X_m = \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \left(\frac{x}{2a} - 1 \right) - \sum_m \frac{x}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$
5		$\sum_m X_m = \sum_m \frac{x}{2a} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) (-1)^m - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$
6		$\sum_m X_m = \sum_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a}$

Đối với phương pháp Rayleigh – Rits vấn đề quan trọng là chọn các hàm tọa độ thích hợp $f_i(x)$ đối với dầm hoặc $f_i(x, y)$ đối với tấm thỏa mãn các điều kiện biên động học và xấp xỉ tốt nhất dạng đường hoặc mặt đàn hồi của cấu kiện, mà không cần thỏa mãn phương trình vi phân. Độ chính xác của phương pháp này phụ thuộc rất nhiều vào việc chọn các hàm tọa độ có phản ánh được gần đúng đường hoặc mặt đàn hồi hay không? Đối với tấm, nghiệm có dạng dưới đây thường được sử dụng nhất:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (10.58)$$

$$\text{Đối với dầm: } V(x) = \sum_m C_m X_m(x) \quad (10.59)$$

trong đó: $X_m(x)$ và $Y_n(y)$ là những hàm tọa độ dạng lượng giác hoặc đại số đã được tách biến. Ý nghĩa của những hàm này trong một số trường hợp được cho sẵn trong bảng 1.

Ưu điểm của phương pháp này là ở tính đơn giản và cho kết quả tốt. Những tấm và dầm khác nhau có thể có hình dạng, chiều dày, v.v... khác nhau, nhưng thủ tục giải luôn luôn gắn liền với việc tính các tích phân xác định và giải hệ các phương trình. Cái khó của phương pháp này và ngay cả các phương pháp năng lượng khác là ở việc chọn hàm tọa độ. Khi xác định chuyển vị bằng phương pháp này dễ dàng đạt được độ chính xác cao, nhưng khi xác định nội lực thì độ chính xác giảm, bởi vì nội lực liên quan đến các đạo hàm cấp cao của chuyển vị.

3. Ví dụ

Ví dụ 1. Tấm vuông ($a \times a$) chiều dày không đổi tựa tự do trên chu vi chịu tải dạng mái nhà như hình 10.13a.

$$p_z = \frac{2p_0x}{a} \quad \text{khi } 0 < x < \frac{a}{2}$$

$$p_z = 2p_0 - \frac{2p_0x}{a} \quad \text{khi } \frac{a}{2} < x < a$$

Theo công thức (10.58) và bảng 1, ta chọn hàm tọa độ như sau:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

Tính công khả dĩ của ngoại lực δA_e và thế năng biến dạng uốn U_u . Cụ thể là:

$$\delta A_e = - \int \int_F [p_z(x, y) w(x, y)] dx dy$$

và

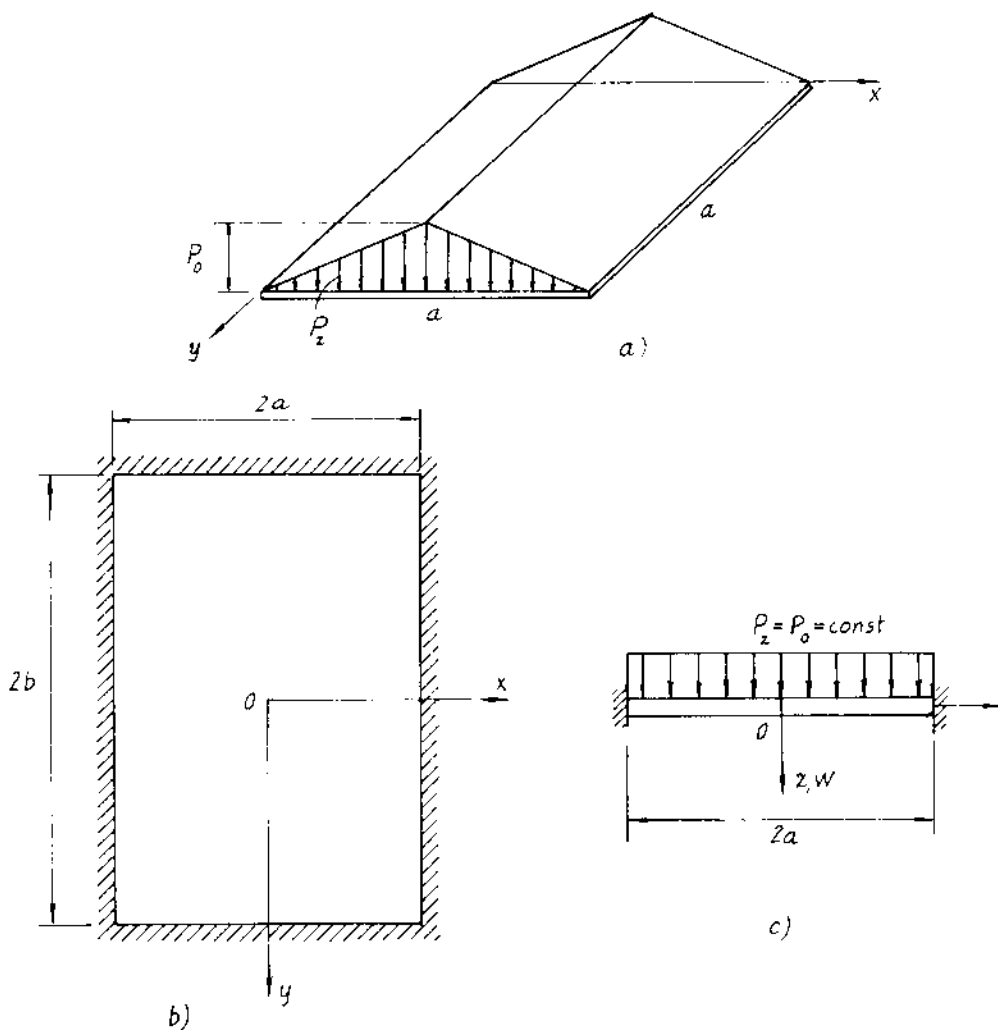
$$U_u = \frac{1}{2} \int \int_F D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Khi làm cực tiểu năng lượng toàn phần, ta có:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_{mn}} = \frac{\partial \delta A_e}{\partial c_{mn}} - \frac{\partial U_u}{\partial c_{mn}} = 0$$

hay là:

$$\frac{D\pi^4 a^2}{4} c_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2 - \frac{8p_0 a^2}{m^2 n \pi^3} \sin \frac{m\pi}{2} = 0$$



Hình 10.13.

Từ đây ta rút ra:

$$c_{mn} = \frac{32 p_0 a^4 \sin \frac{m\pi}{2}}{m^2 n \pi^2 D (m^2 + n^2)^2}$$

Phương trình độ võng cần tìm sẽ là:

$$w(x, y) = \frac{32 p_0 a^4}{D \pi^2} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2 n (m^2 + n^2)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left(\begin{matrix} n = 1, 3, 5, \dots \\ m = 1, 3, 5, \dots \end{matrix} \right)$$

Độ võng cực đại tại $x = y = \frac{a}{2}$ với ba số hạng đầu tiên ($m = 1$; $n = 1$; $m = 1$; $n = 3$; $m = 3$; $n = 1$) là:

$$w_{\max} = 0,002625 \frac{p_0 a^4}{D} \text{ với } p_0 = 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2, a = 400 \text{ cm}, \mu = 0,3; h = 10 \text{ cm} \text{ thì } w_{\max} = 3,6 \text{ cm}.$$

$$\text{Nghiệm chính xác hơn có giá trị: } w_{\max} = 0,00263 \frac{p_0 a^4}{D}.$$

Ví dụ 2. Tấm chữ nhật $2a \times 2b$ với $b = 1,5a$ hình 10.13b, c, chịu tải trọng phân bố đều $q_z = q_0 = \text{const}$. Tìm hàm độ võng và độ võng lớn nhất?

Trên cơ sở bảng 1, ta chọn hàm chuyển vị $w(x, y)$ như sau:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{mn}}{4} \left[1 - (-1)^m \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{b} \right] \\ (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

Chuỗi này thỏa mãn điều kiện biên:

$$w_{x=\pm a} = 0; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = 0; \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = 0$$

Tính với một số hạng của chuỗi:

$$w(x, y) = \frac{C_{11}}{4} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)$$

Khi đó thế năng biến dạng có giá trị:

$$U_u = \frac{D}{2} \int_a^b \int_b^a (\nabla^2 w)^2 dx dy = \frac{D\pi^4 c_{11}^2}{32} \left(\frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab} \right)$$

Công khả dĩ của ngoại lực:

$$\delta A_e = -p_0 \int_a^b \int_b^a w(x, y) dx dy = -p_0 c_{11} ab$$

Thực hiện điều kiện $\partial \pi / \partial c_i = 0$, ta suy ra:

$$c_{11} = \frac{16 p_0 a^4}{D \pi^4} \frac{1}{3 + 3 \left(\frac{a^4}{b^4} \right) + 2 \left(\frac{a^2}{b^2} \right)}$$

Nếu $\frac{a}{b} = 1,5$; $\mu = 0,3$ thì độ võng ở tâm của tấm là:

$$w_{\max} = 0,379 \frac{p_0 a^4}{Eh^3} \text{ với } p_0 = 0,40 \text{ kN/cm}^2; E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2;$$

$\mu = 0,3$; $a = 200 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$ thì $w_{\max} = 3,032 \text{ cm}$.

Nghiệm chính xác có giá trị:

$$w_{\max} = 0,386 \frac{p_0 a^4}{Eh^3}$$

§12. PHƯƠNG PHÁP BUBNOV – GALOORKIN

1. Nội dung của phương pháp

Phương pháp Bubnov – Galoorkin là một phương pháp tổng quát rất mạnh được dùng để giải các bài toán tuyến tính cũng như phi tuyến, các bài toán dao động và ổn định cũng như các bài toán khác nhau của cơ học kết cấu, của lý thuyết đàn hồi, của vật lý toán.

Ví dụ, giả sử điều kiện cân bằng của vật thể theo chuyển vị trong trường hợp của bài toán không gian có dạng:

$$L_1(u, v, w) - q_x = 0$$

$$L_2(u, v, w) - q_y = 0$$

$$L_3(u, v, w) - q_z = 0$$

trong đó: L_1, L_2, L_3 là các toán tử vi phân trên các hàm của các chuyển vị; q_x, q_y, q_z là cường độ của tải trọng ngoài.

Chúng ta cho các chuyển vị những biến phân vô cùng bé $\delta u, \delta v, \delta w$. Mặc dù các chuyển vị u, v, w bị ràng buộc với nhau, nhưng các biến phân bất kỳ của chúng thì không bị ràng buộc với nhau. Các toán tử L_1, L_2, L_3 được xem như những nội lực, vì thế có thể trực tiếp viết công khả dĩ của các ngoại lực và nội lực khi không cần xác định thế năng của hệ.

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V [L_1(u, v, w) - q_x] \delta u dV &= 0 \\ \iiint_V [L_2(u, v, w) - q_y] \delta v dV &= 0 \\ \iiint_V [L_3(u, v, w) - q_z] \delta w dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.60)$$

Một cách chặt chẽ mà nói, phương trình biến phân (10.60) chỉ đúng khi và chỉ khi các hàm u, v, w là nghiệm chính xác của bài toán. Tuy nhiên, cũng như phương pháp Rayleigh - Ritz, ở đây nghiệm chính xác được thay thế bằng nghiệm gần đúng dưới dạng:

$$u = \sum_{i=1}^m a_i \beta_i(x, y, z) ; \quad v = \sum_{i=1}^m b_i \eta_i(x, y, z) ; \quad w = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x, y, z) \quad (10.61)$$

trong đó: $\beta_i(x, y, z), \eta_i(x, y, z), \varphi_i(x, y, z)$ là những hàm thỏa mãn đồng thời cả các điều kiện biên động học và tĩnh học;

a_i, b_i, c_i là các thông số chưa biết.

Các hàm (10.61) phải có các đạo hàm phù hợp với các toán tử, mặc dù không đòi hỏi phải thỏa mãn hệ phương trình (10.60).

Khi lấy biến phân các chuyển vị u, v, w , ta nhận được:

$$\delta u = \sum \beta_i(x, y, z) \delta a_i; \quad \delta v = \sum \eta_i(x, y, z) \delta b_i; \quad \delta w = \sum \varphi_i(x, y, z) \delta c_i \quad (10.62)$$

Thay $\delta u, \delta v, \delta w$ vào phương trình biến phân (10.60) và chú ý là các phương trình này đúng đối với mọi $\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i$ và vì $\delta u_i \neq 0, \delta v_i \neq 0, \delta w_i \neq 0$, cho nên $\delta a_i \neq 0, \delta b_i \neq 0, \delta c_i \neq 0$, ta rút ra hệ phương trình biến phân cơ bản của bài toán ba chiều như sau:

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V [L_1(u, v, w) - q_x] \beta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \iiint_V [L_2(v, v, w) - q_y] \eta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \iiint_V [L_3(u, v, w) - q_z] \varphi_i(x, y, z) dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.63)$$

Hệ ba phương trình (10.63) cho một hệ $m + n + r$ phương trình với cùng số các hệ số a_i, b_i, c_i . Chúng ta hãy áp dụng kết quả trên vào bài toán tấm. Nghiệm của bài toán – chuyển vị $w(x, y)$ được tìm dưới dạng:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x, y) \quad (10.64)$$

Mỗi một số hạng của chuỗi đều phải thỏa mãn các điều kiện biên, nhưng không nhất thiết phải thỏa mãn phương trình vi phân sau đây của bài toán:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q_z(x, y) \quad (10.65)$$

Bởi vì phương trình (10.65) là phương trình cân bằng vi phân của các ngoại và nội lực theo phương z , công của các lực này trên các chuyển vị khả dĩ δw cho ta:

$$\iint [D \nabla^4 w - q_z(x, y)] \delta w dx dy = 0 \quad (10.66)$$

Chuỗi lượng giác này thỏa mãn các điều kiện biên động học:

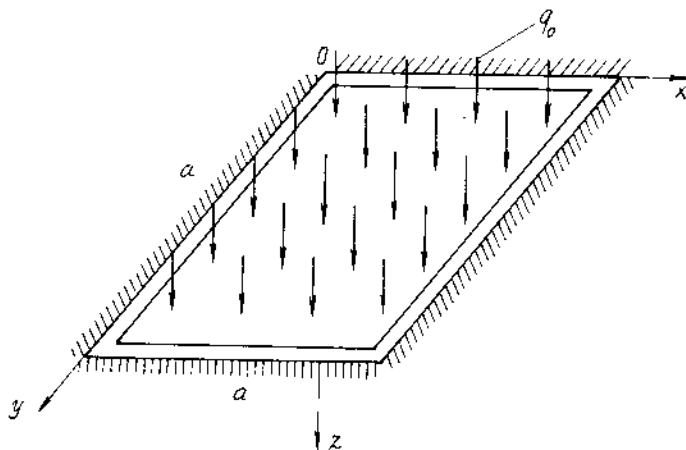
$$\begin{aligned} (w)_{x=0} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \\ (w)_{x=a} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0; \\ (w)_{y=0} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0; \\ (w)_{y=b} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = 0; \end{aligned}$$

Khi giữ lại chỉ một số hạng của chuỗi ($m = n = 1$):

$$w(x, y) = c_{11} \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

Ta có phương trình biến phân theo Bubnov – Galoorkin trong trường hợp này như sau:

$$\int_0^a \int_0^b \left[D c_{11} \nabla^2 \nabla^2 f_1(x, y) - q_0 \right] f_1(x, y) dx dy = 0 \quad (a)$$



Hình 10.14.

Thay $f_1(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$ vào (a) và thực hiện phép tính tích phân này. Ta rút ra thông số chưa biết c_{11} như sau:

$$c_{11} = \frac{q_0 a^4}{8D\pi^4}.$$

Độ võng lớn nhất tại tâm $x = y = \frac{a}{2}$ là:

$$w_{\max} = c_{11} = \frac{q_0 a^4}{8D\pi^4} = 0,00128 \frac{q_0 a^4}{D}$$

Giá trị chính xác $w_{\max} = 0,00126 \frac{q_0 a^4}{D}$ sai khác cỡ 1,6%.

Phương trình mặt đàn hồi gần đúng chỉ với một số hạng của chuỗi có dạng:

$$w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{32D\pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

§13. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

1. Nội dung của phương pháp

Cũng như phương pháp Bubnov – Galoorkin, phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp giải gần đúng các phương trình vi phân và được sử dụng nhiều trong cơ học các vật rắn biến dạng.

Nội dung của phương pháp như sau:

Giả sử cần tìm nghiệm của một phương trình vi phân thường hay đạo hàm riêng nào đó xác định trong một miền nào đó.

Ví dụ, xét phương trình vi phân thường bất kỳ sau đây:

$$L(x, v, v', v'') = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (10.68a)$$

Ta sẽ tìm nghiệm phương trình này dưới dạng gần đúng và ít nhất phải thỏa mãn điều kiện biên hình học:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x) \quad (10.68b)$$

Thay (10.68b) vào (10.68a) ta được hàm sai lệch:

$$L(x, a_i) = f(x) \neq 0 \text{ (vì (10.68b) là nghiệm gần đúng)}.$$

Các hằng số a_i được chọn như thế nào đó để tích phân của bình phương làm sai lệch $f^2(x)$ có giá trị cực tiểu. Điều này có nghĩa là ta đã biến hàm sai lệch $f(x)$ thành hàm có độ lệch trung bình nhỏ nhất so với không.

Vì thế, lấy tích phân hàm $f^2(x)$ trong miền biến thiên của x , ta sẽ xác định được các hằng số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ từ các phương trình sau đây:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_a^b f^2(x) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \int_a^b f^2(x) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_3} \int_a^b f^2(x) dx = 0$$

.....

Hay là:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b f(x) \frac{\partial f(x)}{\partial a_1} dx &= 0 \\ \int_a^b f(z) \frac{\partial f(x)}{\partial a_2} dx &= 0 \\ \int_a^b f(z) \frac{\partial f(x)}{\partial a_3} dx &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \right\} \quad (10.69)$$

Dưới đây ta sử dụng phương pháp này để giải bài toán được nêu ra sau đây.

Ví dụ

Hãy xác định độ võng và ứng suất lớn nhất sinh ra ở trong dầm chịu lực và liên kết như hình 10.15.

GIẢI

Với sự gần đúng thứ nhất ta chọn gần đúng chỉ một số hạng của chuỗi (10.68b) dưới dạng một hàm lượng giác thỏa mãn tất cả các điều kiện biên hình học. Cụ thể là:

$$V(x) = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \text{ tại } x = 0 \Rightarrow V = 0, V' = 0.$$

Thay $V(x)$ vào phương trình (10.69) ta có:

$$f(x) = EJ_z a \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{q}{2} (l - x)^2$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial a} = EJ_z \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l}$$

Thực hiện phép tính đã chỉ ra ở (10.69) ta tìm được:

$$V_{\max}(x=l) = a = \frac{ql^4}{EJ_z} \frac{32}{\pi^4} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,11937 \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Nghiệm chính xác là:

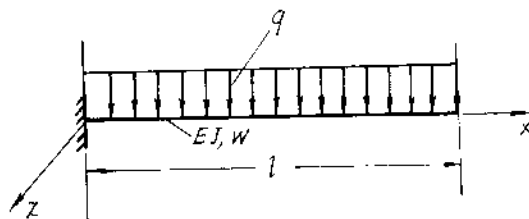
$$V_{\max} = 0,125 \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Tính ứng suất:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} = \frac{EJ_z V''}{W_z} = 0,2946 \frac{ql^4}{W_z}$$

Nghiệm chính xác là:

$$\sigma_{\max} = 0,45936 \frac{ql^4}{W_z}.$$



Hình 10.15.

II. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT TRONG HỆ ĐÀN HỒI

§14. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÔNG KHẢ DĨ CỦA NGOẠI LỰC

Ta hãy khảo sát một hệ đàn hồi tuyến tính ở trạng thái “k” và trạng thái “m”, chịu các ngoại lực tương ứng P_{ik} và P_{qm} . Theo công thức (10.25) và (10.21), (10.22) ta có thể viết.

Công khả dĩ của các ngoại lực P_{ik} ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái “m” như sau:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ik} \Delta_{km} = & \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_m M_k}{EJ} dz + \sum_j^n \int_{l_j} \frac{N_m N_k}{EF} dz + \\ & + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma \frac{Q_m Q_k}{GF} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk}}{GJ_p} dz \end{aligned} \quad (a)$$

Mặt khác, công khả dĩ của các ngoại lực P_{qm} ở trạng thái “m” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “k” bằng:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{qm} \Delta_{mk} = & \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_k M_m}{EJ} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{N_k N_m}{EF} dz + \\ & + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma \frac{Q_k Q_m}{GF} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_{zk} M_{zm}}{GJ_p} dz \end{aligned} \quad (b)$$

Thay (a) và (b) vào (10.25) ta rút ra:

$$\sum_{i=1}^n P_{ik} \Delta_{km} = \sum_{i=1}^n P_{qm} \Delta_{mk} \quad (10.70)$$

Công thức này do E. Betti đề xuất năm 1872 và được phát biểu dưới dạng một định lý sau đây:

Định lý: Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” bằng công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “m” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “k”.

§15. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÁC CHUYỂN VỊ ĐƠN VỊ

Giả sử có một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái “m” và “k” như hình 10.16. Ở mỗi trạng thái hệ chỉ chịu một lực tập trung suy rộng tương ứng là P_m và P_k .

Theo định lý Betti ta có thể viết:

$$P_k \cdot \Delta_{km} = P_m \Delta_{mk}$$

hay

$$\Delta_{km} / P_m = \Delta_{mk} / P_k \quad (a)$$

Tỷ số $\Delta_{km} / P_m = \delta_{mk}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực $P_m = 1$ gây ra.

Tương tự như vậy ta có:

$$\delta_{km} = \frac{\Delta_{mk}}{P_k} \text{ là chuyển}$$

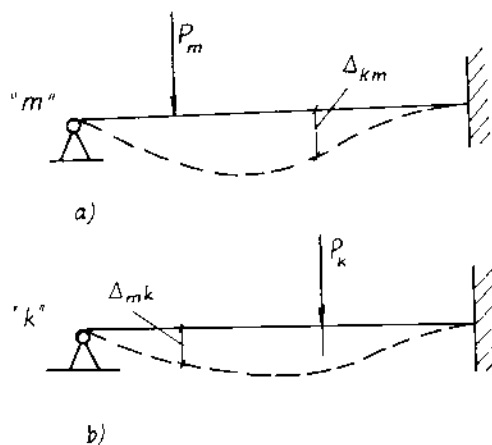
vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực $P_k = 1$ gây ra.

Từ (a) rút ra:

$$\delta_{mk} = \delta_{km} \quad (10.71)$$

Kết quả này do J. Maxwell đề xuất năm 1834 cho thấy nếu ở mỗi trạng thái chỉ chịu một lực bằng đơn vị thì các chuyển vị theo phương của lực này do lực kia gây ra sẽ bằng nhau.

Định lý: Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực P_k gây ra tương hỗ bằng

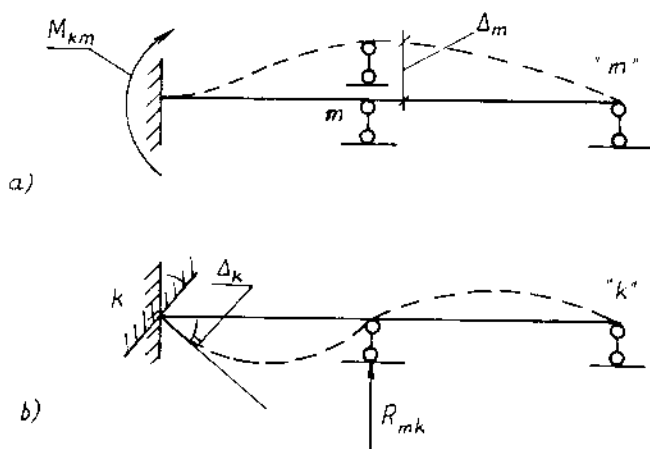


Hình 10.16.

chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m gây ra.

§16. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÁC PHẢN LỰC ĐƠN VỊ

Chúng ta hãy xét một hệ dàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái “m” và “k” chịu các chuyển vị cưỡng bức ở các liên kết m và k (hình 10.17).



Hình 10.17.

Theo định lý về công tương hồ của ngoại lực (10.70) ta có:

$$R_{mk}\Delta_m = M_{km}\Delta_k$$

hay:

$$R_{mk} / \Delta_k = M_{km} / \Delta_m \quad (b)$$

Tỷ số $\frac{R_{mk}}{\Delta_k} = r_{mk}$ là phản lực “đơn vị” tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra.

Tương tự tỷ số $\frac{M_{km}}{\Delta_m} = r_{km}$ là phản lực “đơn vị” tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m gây ra.

Theo (b) ta có:

$$r_{mk} = r_{km} \quad (10.72)$$

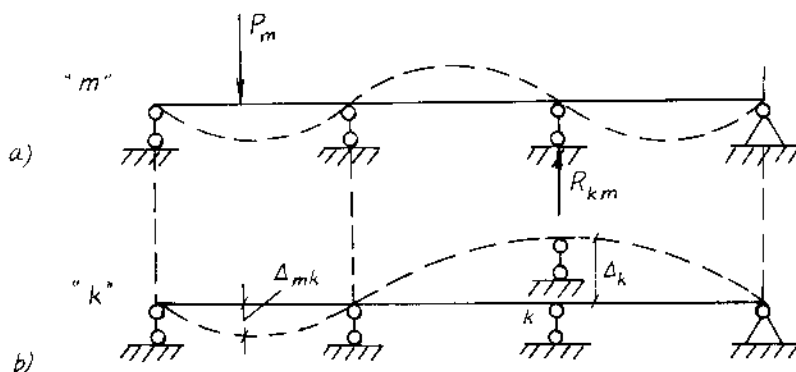
Kết quả (10.72) do L. Rayleigh đề xuất năm 1875 và được phát biểu như sau:

Định lý: Đối với với hệ đàn hồi tuyến tính phản lực “đơn vị” tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.

Cần chú ý rằng thuật ngữ phản lực “đơn vị” ở đây là do nguyên nhân bằng đơn vị gây ra chứ không phải nó bằng đơn vị.

§17. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỖ VỀ CÁC CHUYỂN VỊ ĐƠN VỊ VÀ PHẢN LỰC ĐƠN VỊ

Ta lại khảo sát một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái “m” và “k” (hình 10.18).



Hình 10.18.

Ở trạng thái “m” hệ chịu một lực P_m , còn ở trạng thái “k” hệ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_k tại liên kết k .

Nếu gọi δA_e^k là công khả dĩ của các phản lực ở trạng thái “k” trên những chuyển vị tương ứng của hệ ở trạng thái “m” ta có:

$$\delta A_e^k = 0$$

Theo định lý Betti (10.70) thì:

$$P_m \cdot \Delta_{mk} + R_{km} \cdot \Delta_k = \delta A_e^k = 0$$

hay:

$$R_{km} / P_m = -\Delta_{mk} / \Delta_k$$

Tỷ số $R_{km} / P_m = \tilde{r}_{km}$ là phản lực tại liên kết k do lực $\bar{P}_m = 1$ gây ra.

Tỷ số $\Delta_{mk} / \Delta_k = \tilde{\delta}_{mk}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí đặt lực P_m nhưng do chuyển vị cưỡng bức $\bar{\Delta}_k = 1$ gây ra.

Do đó với ký hiệu trên ta có:

$$\tilde{r}_{km} = -\tilde{\delta}_{mk} \quad (10.73)$$

Đây là công thức của định lý Rayleigh thứ hai.

Định lý: Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do lực $\bar{P}_m = 1$ gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực $\bar{P}_m$ do chuyển vị cưỡng bức $\bar{\Delta}_k = 1$ tại liên kết k gây ra nhưng ngược dấu.

§18. ĐỊNH LÝ CASTIGLIANO. ĐỊNH LÝ LAGRANGE

1. Định lý Castigliano

Giả sử có một hệ đàn hồi dạng bất kỳ (thanh, tấm, vỏ, khối) chịu tác dụng tĩnh của một hệ ngoại lực bất kỳ Q và một yếu tố lực tập trung tổng quát $\bar{F}$ (lực hoặc mômen) đặt tại K (hình 10.19).

Ta ký hiệu Δ_{FF} là chuyển vị của điểm đặt lực F và theo phương của chính nó khi không có Q và Δ_{FQ} là chuyển vị của điểm đặt lực $\bar{F}$ theo phương của lực này nhưng do hệ lực bất kỳ Q gây ra.

Do đó chuyển vị toàn phần của điểm đặt lực F và theo phương của chính nó do cả F và Q gây ra là:

$$\Delta_F = \Delta_{FF} + \Delta_{FQ} \quad (a)$$

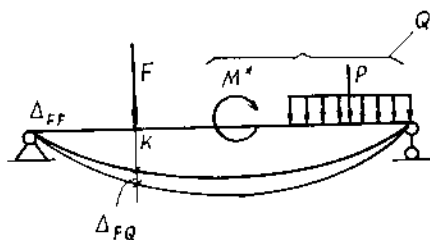
Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ theo (10.6) ta có:

$$U = A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{FF} + F \cdot \Delta_{FQ} + U_{QQ} \quad (b)$$

trong đó: U_{QQ} là thế năng tích lũy trong hệ chỉ do Q gây ra bằng công của Q trên những chuyển vị gây ra bởi chính nó.

Số hạng $F \cdot \Delta_{FQ}$ không chứa hệ số $1/2$ vì trên đoạn Δ_{FQ} lực $\bar{F}$ luôn bằng hằng.

Gọi δ_{FF} là chuyển vị của điểm đặt lực $\bar{F} = 1$ theo phương của nó do chính nó gây ra, ta có thể viết lại (b) như sau:



Hình 10.19.

$$U = \frac{1}{2} F^2 \delta_{FF} + F \cdot \Delta_{FQ} + U_{QQ} \quad (c)$$

Đạo hàm (c) theo F , ta được:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = F \cdot \delta_{FF} + \Delta_{FQ} = \Delta_F \quad (d)$$

và

$$\frac{\partial^2 U}{\partial F^2} = \delta_{FF} \quad (10.74a)$$

Suy ra:

$$\Delta_F = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (10.74b)$$

Kết quả này là định lý Castigliano và được phát biểu như sau:

“Chuyển vị của điểm đặt lực tổng quát theo phương tác dụng của nó bằng đạo hàm riêng của thế năng biến dạng theo lực này”.

Định lý này cho một phương pháp tổng quát để xác định chuyển vị không chỉ đối với hệ thanh mà cho hệ bất kỳ (tám, vỏ, khối).

Đối với trường hợp hệ thanh phẳng, trên các mặt cắt chỉ tồn tại 3 nội lực là $M(z)$, $N(z)$, $Q(z)$ thì khi sử dụng quy tắc vi phân theo thông số công thức (10.54b), ta tìm được:

$$\Delta_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \sum \int \frac{M dz}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} + \sum \int \frac{N dz}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial F} + \sum \int \frac{Q dz}{GF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial F} \quad (10.75)$$

Khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, ta có:

$$\Delta_F = \sum \int \frac{M dz}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} \quad (10.76)$$

2. Định lý Lagrange

Khi biểu diễn thế năng biến dạng theo hàm của các chuyển vị độc lập $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, có thể chứng minh rằng: “Đạo hàm riêng của thế năng theo chuyển vị bất kỳ nào đó bằng lực tác dụng theo phương của chuyển vị đó”.

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i. \quad (10.77)$$

Đó là nội dung của định lý mang tên Lagrange.

§19. ĐỊNH LÝ MENABREA VỀ SỰ CỰC TIỂU CỦA THẾ NĂNG

Ta khảo sát một hệ bất biến hình thừa liên kết chịu lực cân bằng như hình 10.20a. Để xác định các phản lực X_1, X_2, X_3 tại các liên kết thừa (hình 10.20b) thì các điều kiện cân bằng tĩnh là không thể. Hệ như thế gọi là hệ không xác định tĩnh hay gọn hơn là hệ siêu tĩnh.

Phản lực tại các liên kết thừa nội hoặc ngoại gọi là phản lực thừa. Theo định lý Castigliano thì các chuyển vị $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ của các

điểm đặt phản lực X_1, X_2, X_3 theo phương của các phản lực này hoàn toàn được xác định theo thế năng biến dạng của hệ:

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} ; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} ; \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3} \dots$$

Ở đây $U = U(X_1, X_2, X_3, \dots P)$.

Khi các liên kết gối tựa 1, 2, 3 là cứng tuyệt đối thì $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$ và ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 ; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 ; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \dots \quad (10.78)$$

Phương trình này là điều kiện cần để hàm U đạt cực trị. Để thấy cực trị này là cực tiểu. Thật vậy, theo công thức (10.74a) ta có:

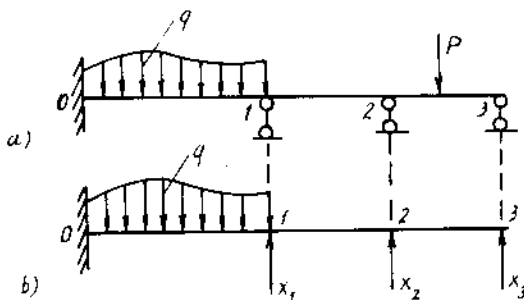
$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33} > 0 \dots \quad (10.79)$$

Dấu dương của các đạo hàm bậc hai chứng tỏ rằng điều kiện (10.79) là điều kiện cực tiểu của hàm U . Vì vậy, ta đi đến định lý về sự cực tiểu của thế năng mang tên Menabrea như sau:

“Trong những hệ siêu tĩnh các phản lực thừa nhận các giá trị sao cho thế năng biến dạng của hệ có giá trị cực tiểu”.



Hình 10.20.

Ví dụ:

Một thanh cong siêu tĩnh có độ cong nhỏ chịu lực và liên kết như hình 10-21. Hãy xác định phản lực thừa tại gối "1".

GIẢI

Theo công thức (10.78) của định lý cực tiểu của thế năng biến dạng ta có:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \text{ mà}$$

$$U = \int_s \frac{M^2(\varphi) dS}{2EJ} \Rightarrow$$

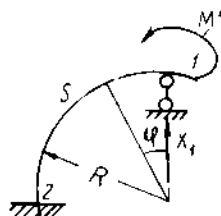
$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EJ} \frac{dM(\varphi)}{dX_1} = 0 \quad (a)$$

Trong đó:

$$M(\varphi) = M^* + X_1 \cdot R \sin \varphi ; \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial X_1} = R \sin \varphi ; \quad dS = R d\varphi$$

Thay các giá trị này vào (a) ta thu được:

$$M^* + X_1 R \frac{\pi}{4} = 0 ; \quad X_1 = - \frac{4M^*}{\pi R} \quad (\text{dấu } (-) \text{ biểu thị chiều của } X_1 \text{ hướng xuống dưới}).$$



Hình 10.21.

Chương 11

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH HỆ SIÊU TĨNH

I. PHƯƠNG PHÁP LỰC

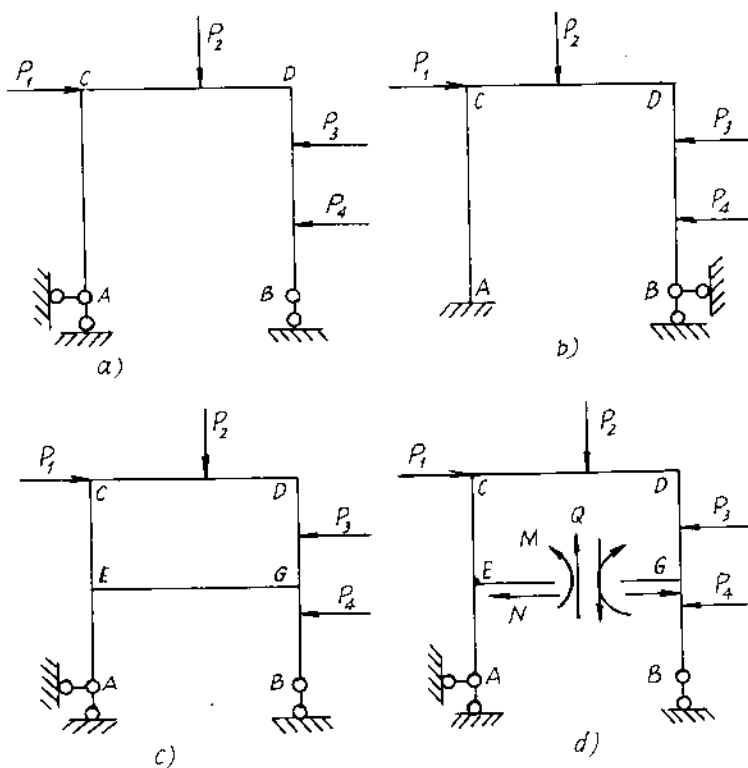
Như đã thấy ở chương 1, hệ siêu tĩnh là một hệ cân bằng, bất biến hình hình học và thừa liên kết. Đối với hệ loại này, các phương trình cân bằng tĩnh học không cho phép xác định đầy đủ tất cả các nội lực và phản lực trong hệ.

§1. SỰ HÌNH THÀNH HỆ SIÊU TĨNH

1. Liên kết thừa và liên kết cần thiết

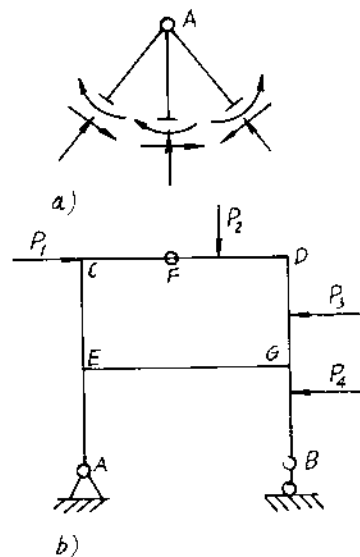
Ta hãy xét một hệ bất biến hình – một khung tĩnh định – chịu lực cân bằng như trên hình 11.1a.

Khi bổ sung vào A một liên kết chống xoay và vào B một liên kết chống chuyển vị thẳng ngang thì khung 11.1a có dạng hình 11.1b. Những liên kết được bổ sung vào mặc dù làm tăng độ cứng của hệ, nhưng về phương diện hình học và tĩnh học thì chúng là “thừa” bởi vì có chúng hay không có chúng thì hệ vẫn cân bằng và bất biến hình. Ngược lại, nếu ta loại đi một liên kết bất kỳ trong khung (hình 11.1a) thì khung trở thành hệ biến hình hình học (một cơ cấu). Do đó, tất cả các liên kết đặt vào khung (hình 11.1a) là những liên kết cần thiết để đảm bảo cho hệ cân bằng và bất biến hình hình học.



Hình 11.1.

Nếu ta thêm vào khung (hình 11.1a) một thanh ngang EG và hàn cứng vào các thanh đứng thì độ cứng của khung tăng, nhưng về phương diện đảm bảo tính bất biến hình học thì thanh này là “thừa” (cũng như những liên kết thừa ngoài). Các nội lực trong thanh “thừa” này (hình 11.1d) không thể được xác định chỉ từ các điều kiện cân bằng. Sự có mặt của liên kết “thanh thừa” EG trong khung (hình 11.1c) đã tạo ra ba ẩn số thừa tương ứng. Đối với khung



Hình 11.2.

phẳng (hình 11.1c) để có thể xác định được nội lực trên tất cả các mặt cắt của khung thì trước hết cần phải xác định phản lực ở các liên kết “cần thiết” A, B và ba phản lực thừa (tức là các nội lực trên các mặt cắt ngang của liên kết “thừa” nội GE). Nghĩa là, mỗi chu vi kín CDGE có ba phản lực “thừa”. Số liên kết “thừa” xác định bậc siêu tĩnh của kết cấu. Nếu mỗi chu vi kín có một khớp thì số bậc siêu tĩnh của chu vi này bằng 2 (hình 11.2b). Khớp này gọi là khớp đơn. Mỗi khớp đơn làm triệt tiêu một ẩn số là mômen. Nếu có s thanh nối với nhau bằng một khớp thì khớp này tương đương với $s - 1$ khớp đơn (hình 11.2a). Khớp A tương đương với $s - 1 = 3 - 1 = 2$ khớp đơn.

2. Bậc siêu tĩnh

Để xác định bậc siêu tĩnh n của kết cấu, ta có thể dùng các công thức đơn giản sau đây:

n = số phản lực liên kết ngoại và nội cần xác định trừ đi số phương trình cân bằng cần thiết.

Ví dụ đối với hệ trên hình 11.1c: $n = (3 + 3) - 3 = 3$.

Ngoài ra có thể tính bậc siêu tĩnh của hệ như sau:

1) Tính số liên kết đơn “thừa” ngoại (số thanh gối đơn “thừa” nối kết cấu với nền): T

2) Tính số chu vi kín: K

3) Tính số khớp đơn trong khung: D

Đối với hệ phẳng:

$$n = 3K + T - D \quad (1)$$

Ví dụ hệ trên hình 11.1c có:

$$K = 1 ; T = D = 0$$

$$\Rightarrow n = 3 \cdot 1 + 0 - 0 = 3$$

Đối với hệ không gian mỗi chu vi kín có 6 bậc siêu tĩnh. Bởi vì mỗi mặt cắt có sáu ẩn số là sáu thành phần nội lực gồm 2 mômen.

uốn, 1 mômen xoắn, 2 lực cắt và 1 lực dọc. Do đó, bậc siêu tĩnh của hệ không gian được tính như sau:

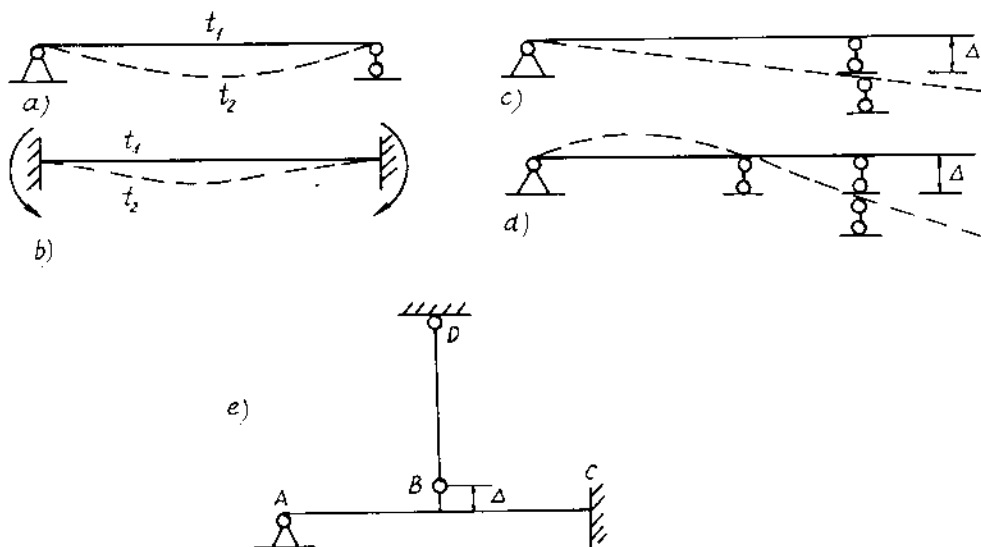
$$n = 6K + T - Đ \quad (2)$$

Từ các phân tích trên ta thấy liên kết “thừa” cũng có thể là những liên kết ngoại hoặc những liên kết nội. Ta gọi những hệ có những liên kết ngoại “thừa” là những hệ siêu tĩnh ngoại và gọi hệ có liên kết “thừa” nội là những hệ siêu tĩnh nội. Cần phải hiểu rằng thuật ngữ “liên kết thừa” chỉ có tính chất quy ước. Bởi vì, chỉ để đảm bảo cho hệ cân bằng và bất biến hình hình học thì chúng là “thừa”, nhưng sự có mặt của chúng sẽ tạo cho hệ làm việc tốt hơn rất nhiều so với hệ tĩnh định cùng loại.

3. Đặc điểm làm việc của hệ siêu tĩnh

Tất cả các hệ siêu tĩnh đều có những thuộc tính chung sau đây:

- Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào quan hệ độ cứng của các cấu kiện.
- Các liên kết thừa được cấu tạo thích hợp sẽ tạo ra sự phân bố nội lực hợp lý trong các cấu kiện kết cấu.



Hình 11.3.

- c) Chuyển vị gây ra do tác dụng ngoài ở trong hệ siêu tĩnh nhỏ hơn so với hệ tĩnh định tương ứng, bởi vì các liên kết thừa làm tăng độ cứng của hệ.
- d) Dưới tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ của môi trường xung quanh hoặc do sự nung nóng các cấu kiện của kết cấu, cũng như sự có mặt các chuyển vị cưỡng bức do lắp ráp hoặc chế tạo không chính xác v.v. trong các hệ siêu tĩnh sẽ xuất hiện các nội lực. Điều này không xảy ra trong các hệ tĩnh định. Trên hình 11.3a, c là các hệ tĩnh định, còn trên các hình 11.3b, d là các hệ siêu tĩnh tương ứng. Trên hình 11.3e mô tả chuyển vị cưỡng bức do chế tạo không chính xác ở mỗi nối B.
- e) Khi các liên kết “thừa” vì một lý do nào đó bị loại bỏ thì kết cấu vẫn không thể bị phá hủy, bởi vì khi đó kết cấu vẫn là hệ bất biến hình.

Ngày nay tồn tại nhiều phương pháp tính toán các hệ siêu tĩnh, chủ yếu dựa trên các tiên đề “Giải phóng liên kết” (trong phương pháp lực) và tiên đề “Bổ sung liên kết” (trong phương pháp chuyển vị). Dưới đây trong chương này và chương “Động lực học kết cấu” chúng ta sẽ nghiên cứu cách triển khai hai tiên đề nói trên vào các bài toán “Sức bền vật liệu”.

I. PHƯƠNG PHÁP LỰC

§2. THỰC CHẤT CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC ĐỐI VỚI HỆ CHỊU TẢI TRỌNG

Để tính toán hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực người ta không trực tiếp tính trên hệ đã cho (hệ xuất phát) mà tính trên hệ tương đương với trợ giúp của hệ cơ bản, sao cho biến dạng của hệ tương đương phản ánh đúng biến dạng của hệ đã cho. Hệ tương đương này được xây dựng trên cơ sở của tiên đề “Giải phóng liên kết” và được định nghĩa như sau:

Hệ tương đương là hệ suy ra từ hệ đã cho sau khi đã loại đi các liên kết “thừa” và thay thế vào đó các phản lực “thừa”.

Hệ cơ bản là hệ nhận được từ hệ tương đương sau khi đã bỏ đi tất cả các phản lực thừa và tải trọng ngoài.

Như vậy, đối với một kết cấu siêu tĩnh cho trước ta có thể xây dựng được vô số hệ tương đương và do đó là hệ cơ bản.

Để thấy rõ tư tưởng và trình tự tính toán của phương pháp ta hãy khảo sát một ví dụ cụ thể (hình 11.4a). Đó là một dầm liên tục có hai bậc siêu tĩnh. Một phương án có thể của hệ tương đương được cho trên (hình 11.4b). Đối với phương án này, phương trình biến dạng được viết như sau:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1x_1} + \Delta_{1x_2} + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{2x_1} + \Delta_{2x_2} + \Delta_{2p} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

trong đó: Δ_{1x_1} là chuyển vị tại vị trí của X_1 theo phương của lực X_1 do chính lực X_1 gây ra trong hệ cơ bản; Δ_{1x_2} là chuyển vị theo phương lực X_1 do lực X_2 gây ra trong hệ cơ bản; Δ_{1p} là chuyển vị theo phương lực X_1 do tải trọng đặt lên hệ gây ra trong hệ cơ bản. Các chuyển vị Δ_{2x_1} , Δ_{2x_2} , Δ_{2p} cũng có ý nghĩa tương tự.

Δ_1 là chuyển vị (góc xoay tại ngàm A) theo phương lực X_1 (trong trường hợp này X_1 là mômen) do các lực X_1 , X_2 và tải trọng gây ra bằng không. Chuyển vị Δ_2 cũng có ý nghĩa tương tự. Từ điều kiện biến dạng tại những liên kết bị loại bỏ ta thấy rõ ý nghĩa của phương trình thứ hai của hệ (11.1) là chuyển vị thẳng Δ_2 , tại gối tựa cứng C theo phương lực X_2 do các lực X_1 , X_2 và tải trọng gây ra phải bằng không.

Chuyển vị do các ẩn số X_1 , X_2 gây ra có thể biểu diễn như sau:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1x_1} &= \delta_{11}X_1; & \Delta_{1x_2} &= \delta_{12}X_2 \\ \Delta_{2x_1} &= \delta_{21}X_1; & \Delta_{2x_2} &= \delta_{22}X_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.1a)$$

Khi thay (11.1a) vào (11.1) ta nhận được:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.1b)$$

$$B = \begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{bmatrix} \quad \text{là ma trận cột của các số hạng tự do của hệ các phương trình chính tắc.}$$

Các hệ số của hệ các phương trình chính tắc trên đường chéo chính được gọi là các hệ số chính hay các chuyển vị chính; chúng luôn luôn dương.

Các hệ số còn lại của ma trận A gọi là các hệ số phụ. Chúng có thể có dấu âm, hoặc dương, hoặc bằng không và $\delta_{kj} = \delta_{jk}$.

Nghiệm của hệ (3.3) viết dưới dạng ma trận như sau:

$$A = A^{-1} \cdot B \quad (11.4)$$

trong đó: A^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận A. Việc giải hệ (11.2) hoặc việc tính ma trận nghịch đảo sẽ đơn giản đáng kể khi giải hệ (11.4), nếu có nhiều hệ số phụ δ_{kj} bằng không. Điều này phụ thuộc vào việc chọn hệ cơ bản.

Cần chú ý là tất cả những lập luận trong tiết 1 này chỉ đúng với hệ cho phép sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực.

Ví dụ. Hãy vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 11.4a.

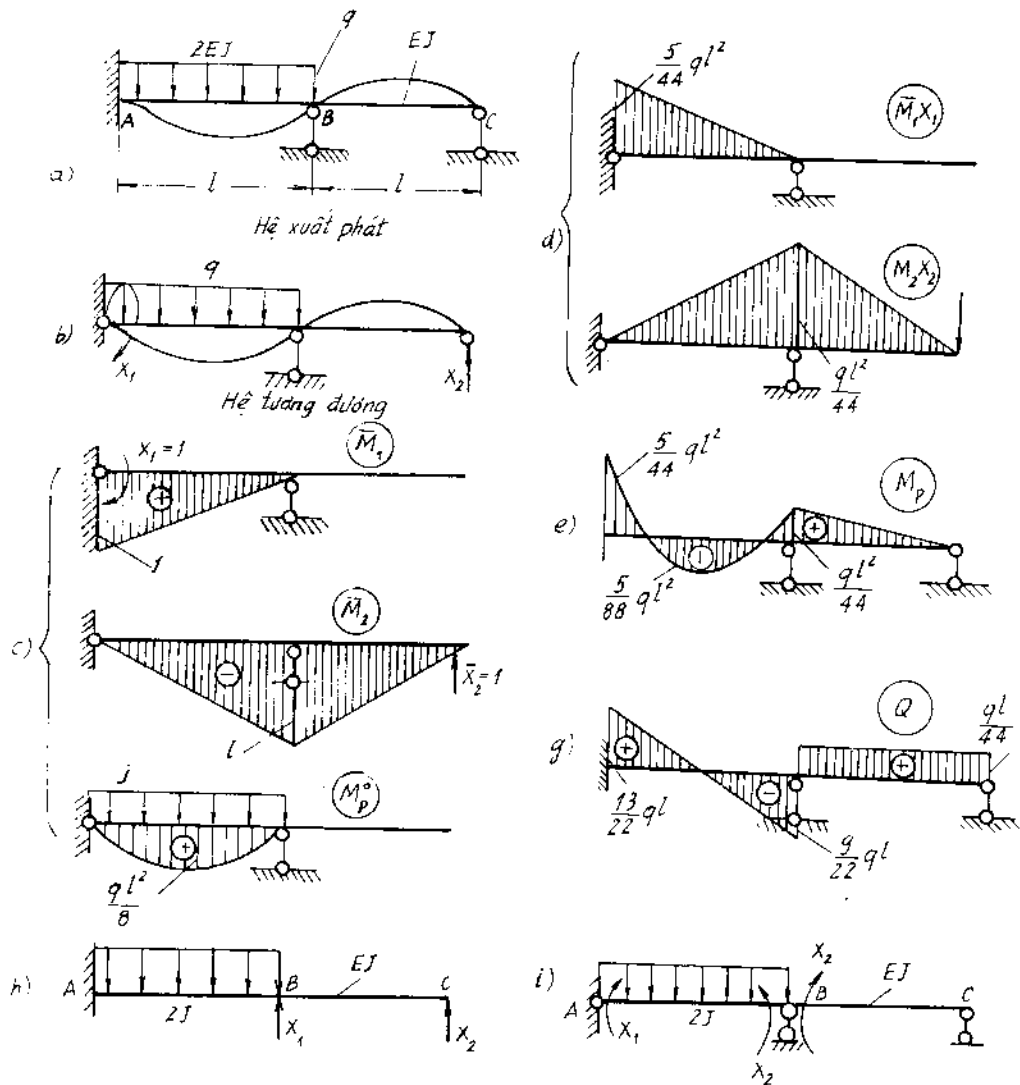
GIẢI

Ta chọn hệ tương đương như hình 11.4b. Biểu đồ mômen trong hệ cơ bản do các lực $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ và tải trọng gây ra được cho trên hình vẽ (hình 11.4c). Bằng cách nhân biểu đồ ta sẽ xác định được các hệ số và số hạng tự do trong các phương trình chính tắc của hệ (11.1b) như sau:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \left[l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] \frac{1}{2FJ} = \frac{l}{6FJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1 = \left[l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{3} \cdot l \right] \frac{1}{2GJ} = \frac{l^2}{12EJ}$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 = \frac{l^3}{2EJ}$$



Hình 11.4.

$$\Delta_{1p} = \left[\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[\frac{1}{2} \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^3}{48EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \left[\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[\frac{l}{2} \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^4}{48EJ}$$

Thay các hệ số δ_{mn} và các số hạng tự do Δ_{kp} này vào hệ các phương trình chính tắc (11.1b) và giải nó ta tìm được:

$$X_1 = -\frac{5}{44} ql^2 \quad ; \quad X_2 = -\frac{ql}{44}$$

Theo nguyên lý độc lập tác dụng của các lực, tung độ của biểu đồ mômen cuối cùng M_p đối với hệ siêu tĩnh đã cho được tính như sau:

$$(M_p) = (M_p^0) + (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2$$

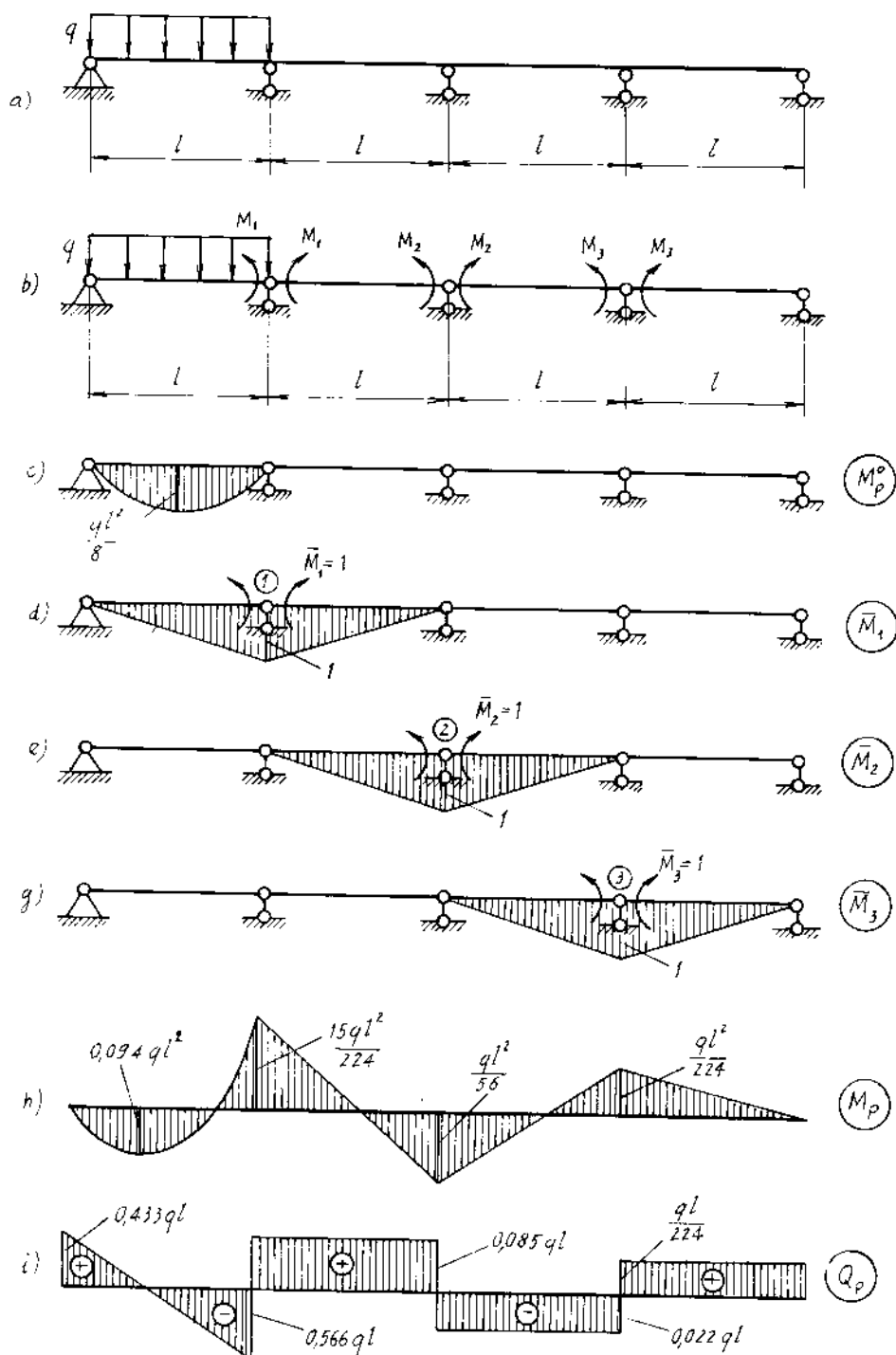
Hình 11.4d là biểu đồ mômen uốn $(\bar{M}_1)X_1$ và $(\bar{M}_2)X_2$ ứng với chiều đúng của X_1 và X_2 .

Biểu đồ mômen và lực cắt trong hệ siêu tĩnh được cho trên hình 11.4e, g. Ta sẽ có lại kết quả này khi sử dụng các hệ tương đương được chọn như hình 11.4h, i. Đặc biệt đối với các dầm liên tục nhiều nhịp hình 11.5a thì hệ tương đương dạng hình 11.4i và hình 11.5b, sẽ dẫn hệ n phương trình (11.2) bất kỳ, về hệ n phương trình mà mỗi phương trình chỉ có 3 ẩn số X_i là 3 mômen uốn M_{i-1} , M_i , M_{i+1} ở các gối trung gian (hình 11.5a, b). Sau khi vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_p^0)$, $(\bar{M}_j)$ (hình 11.5c, d, e, g) và tính các hệ số δ_{kj} , Δ_{kp} ($k, j = \overline{1,3}$) rồi thay vào (11.2) và giải ta có:

$$M_1 = -\frac{15ql^2}{224} \quad ; \quad M_2 = \frac{ql^2}{56} \quad ; \quad M_3 = -\frac{ql^2}{224}$$

Biểu đồ mômen uốn và lực cắt cuối cùng trong dầm liên tục được cho trên hình 11.5h, i.

Phương pháp lực đối với dầm liên tục với các hệ tương đương tối ưu nhất cũng vẫn rất công kênh, tốn kém giấy mực và công sức mà kết quả nhận chỉ ở nội lực.



Hình 11.5.

Đối với các dân loại này, muốn nhận được đồng thời không chỉ nội lực mà cả chuyển vị nữa thì hiệu quả nhất là dùng phương pháp vận năng đã giới thiệu kỹ trong các chương 4, 7 và 8.

§3. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU NHIỆT ĐỘ THAY ĐỔI

Việc tính hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của nhiệt độ thay đổi cũng tương tự như tính hệ chịu tác dụng của tải trọng, chỉ khác ở đây là sự biến thiên của nhiệt độ là nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ. Và vì thế, các số hạng tự do Δ_{kp} trong hệ (11.2) được thay thế bằng Δ_{kt} là chuyển vị theo phương án số X_k do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Cu thể là:

[illegible]

trong đó các Δ_{K_i} được xác định như sau:

$$\Delta_{Kt} = \sum_0^l \int \alpha t_c \bar{N}_K dz + \sum_0^l \int \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} \bar{M}_K dz$$

$$\text{hay : } \Delta_{Kl} = \sum \Omega(\bar{N}_K) \alpha t_c + \sum \Omega(\bar{M}_K) \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1)$$

Trong công thức tính Δ_{Kl} thì $\Omega(\bar{N}_K)$ và $\Omega(\bar{M}_K)$ là diện tích của biểu đồ lực dọc và mômen uốn do $\bar{X}_K = 1$ gây ra trong hệ cơ bản; $t_c = \frac{t_1 + t_2}{2}$;

α hệ số dẫn nở nhiệt của vật liệu của hệ; h là chiều cao mặt cắt ngang;
 t_1 và t_2 là độ biến thiên của nhiệt độ ở hai phía của mặt cắt ngang.

Các hệ số δ_{kj} được xác định như trường hợp hệ chịu tải trọng. Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc ta sẽ tìm được các ẩn số $X_1, X_2, X_3 \dots$. Việc vẽ các biểu đồ nội lực được tiến hành theo các phương pháp đã biết.

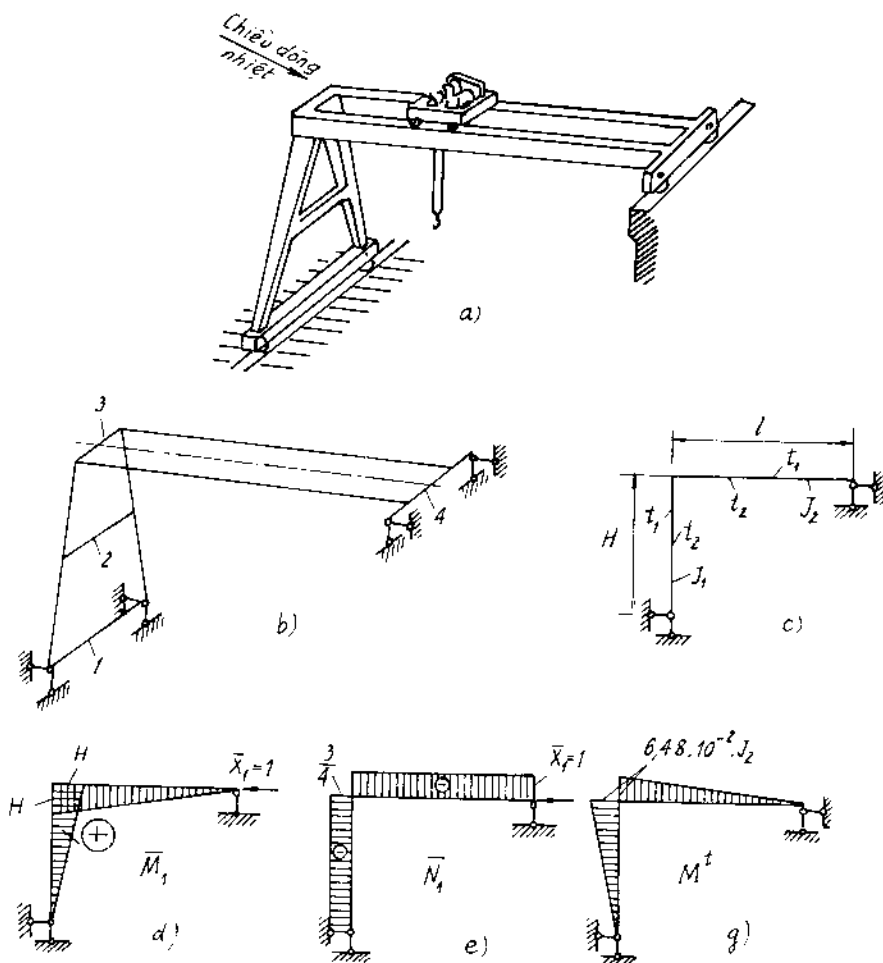
Ví dụ

Một cầu trượt bằng thép làm việc trong điều kiện nhiệt độ dưới tác dụng của ánh nắng mặt trời (hình 11.6a) và có sơ đồ tính hình 11.6b. Hãy vẽ biểu đồ nội lực trong trường hợp cầu trượt bị nung nóng không đều nhưng đối xứng đối với trục dọc của nó.

GIẢI

Theo điều kiện đề bài thì không có một lực nào sinh ra trong các thanh 1, 2, 3, 4 và chỉ cần tính một nửa khung cầu trượt như một khung phẳng (hình 11.6c) với các số liệu như sau:

$$l = 8 \text{ m} ; H = 6 \text{ m} ; t_1 = 60^\circ ; t_2 = 40^\circ ; J_2 = 2 J_1.$$



Hình 11.6.

Chiều cao mặt cắt chân cầu trục $h_1 = 0,4$ m. Chiều cao mặt cắt của dầm chính $h_2 = 1,5.h_1 = 0,6$ m. Tất cả các mặt cắt đều có hai trục đối xứng. Các biểu đồ nội lực đơn vị $\bar{M}_1$ và $\bar{N}_1$ được cho trên hình 11.6d, e.

Trong trường hợp này hệ có một bậc siêu tĩnh và phương trình chính tắc tương ứng có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t}^o = 0$$

trong đó:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ_2} \left[\frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 600 \right] + \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 600 \right] = \\ &= \frac{240 \cdot 10^6}{EJ_2}, \text{ cm/daN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1t}^o &= \alpha \frac{(t_1 + t_2)}{2} \Omega_{\bar{N}_1} + \alpha \frac{(t_1 - t_2)}{h} \Omega_{\bar{M}_1} = -0,12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot \\ &\cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 600 + 800 \right) + 0,12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(60 - 40)}{60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 600 + 0,12 \cdot 10^{-6} \cdot \\ &\cdot \frac{(60 - 40)}{60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 600 = 0,0129 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Phương trình chính tắc với hệ số bằng số là:

$$\frac{240 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 J_2} X_1 + 0,0129 = 0$$

Do đó:

$$X_1 = -1,076 \cdot 10^{-1} J_2, \text{ daN}.$$

Biểu đồ mômen uốn trong cầu trục do nung nóng không đều được cho trên hình 11.6g.

§4. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC

Để tính toán những hệ siêu tĩnh có các gối tựa chịu chuyển vị cường bức ta cũng sẽ sử dụng những lý luận vừa mô tả ở trên. Khác

với các trường hợp trên trong trường hợp này nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ là do các gối tựa chịu các chuyển vị cưỡng bức.

Để áp dụng hệ phương trình chính tắc (11.2) vào trường hợp này ta phải chú ý khi chọn hệ cơ bản không nên loại bỏ các liên kết có chuyển vị cưỡng bức mà phải cắt các liên kết ấy.

Giả sử cho một dầm như hình 11.7a, nếu chọn hệ tương đương bằng cách loại bỏ liên kết tại gối tựa B có chuyển vị cưỡng bức thì điều kiện biến dạng theo phương của ẩn số X_1 do các ẩn số X_k nếu có (trên hình 11.7a không chỉ ra những ẩn số này) và chuyển vị cưỡng bức gây ra sẽ không bằng 0. Cụ thể là:

$$\Delta_{X_1} = (X_1, X_2, \dots, X_n) = \delta \neq 0$$

Bây giờ nếu ta chọn hệ tương đương bằng cách cắt liên kết có chuyển vị cưỡng bức B thì điều kiện chuyển vị theo phương liên kết ấy vẫn bằng 0. Vì lúc này điều kiện vừa nói này là điều kiện mô tả chuyển vị tương đối của hai mặt cắt của liên kết vừa bị cắt.

$$\Delta_{X_1} = (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

Ngoài ra còn có thể chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết không có chuyển vị cưỡng bức. Nếu chọn hệ tương đương bằng cách cắt các liên kết thừa có chuyển vị cưỡng bức thì phương trình thứ K có dạng:

$$\delta_{K1}X_1 + \delta_{K2}X_2 + \dots + \delta_{KK}X_K + \dots + \delta_{Kn}X_n + \Delta_{K\Delta}^o = 0, \\ (k = \overline{1, n}) \quad (11.6)$$

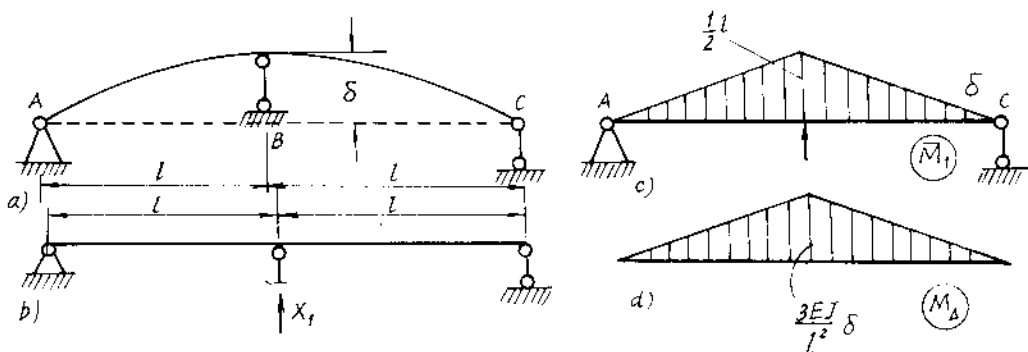
Các hệ số δ_{kj} tính như đối với trường hợp hệ chịu tải trọng.

$\Delta_{K\Delta}^o$ là chuyển vị theo phương của lực X_K do chuyển vị cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Nó được xác định theo công thức sau đây:

$$\Delta_{K\Delta}^o = - \sum_{i=1}^n \bar{R}_{iK} \Delta_{i\Delta} - \sum_{i=1}^n \bar{M}_{iK} \theta_{i\Delta} \quad (11.7)$$

trong đó: $\bar{R}_{iK}$, $\bar{M}_{iK}$ là phản lực theo phương liên kết thứ i do lực $\bar{X}_K = 1$ gây ra trong hệ cơ bản. $\Delta_{i\Delta}$ là chuyển vị thẳng cho trước theo

phương liên kết thứ i và $\theta_{i\Delta}$ là góc xoay biết trước tại liên kết thứ i trong hệ siêu tĩnh đã cho.



Hình 11.7.

Ví dụ:

Tính mômen uốn lớn nhất trong trục được cho trên hình 11.7a, nếu khi chế tạo tâm của ổ đỡ giữa bị lệch một đoạn δ .

GIẢI

Hệ tương đương chọn như hình 11.7b. Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta}^0 = 0, \quad (a)$$

trong đó:

$$\Delta_{1\Delta}^0 = -\bar{R}_1 \cdot \delta = -1 \cdot \delta = -\delta$$

Biểu đồ $\bar{M}_1$ cho trên hình 11.7c và sau khi nhân biểu đồ, này với chính nó ta có:

$$\delta_{11} = 2 \left(\frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \right) = \frac{l^3}{6EI}$$

Thay $\Delta_{1\Delta}^0$ và δ_{11} vừa tìm được vào phương trình (a) và giải nó ta đi đến:

$$X_1 = \frac{6EJ}{l^3} \delta$$

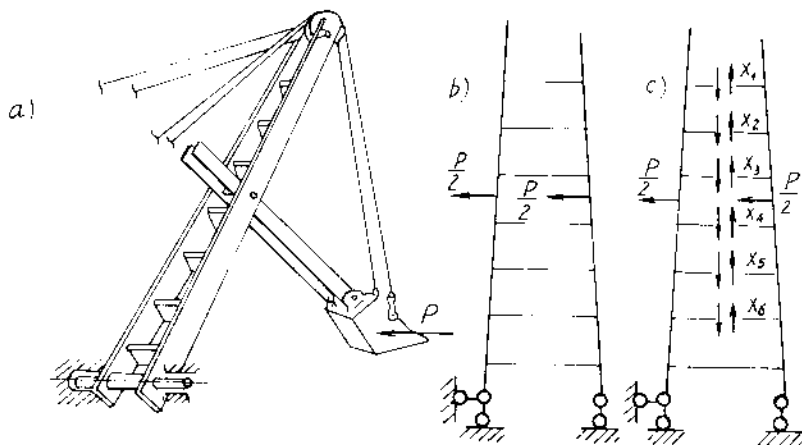
Biểu đồ mômen uốn và giá trị mômen uốn lớn nhất được cho trên hình 11.7d.

§5. SỬ DỤNG TÍNH ĐỐI XỨNG KHI TÍNH HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

Với một hệ đối xứng hình học chịu tải trọng bất kỳ ta luôn luôn có thể phân tích thành hai hệ chịu tải trọng đối xứng và phản xứng.

Hệ đối xứng qua trục Δ chịu tải trọng cũng đối xứng thì như đã rõ trong các chương trên, các hàm nội lực mômen uốn, lực dọc và do đó là biểu đồ của chúng là đối xứng qua trục đối xứng Δ . Ngược lại đối với hệ đối xứng hình học chịu tải phản xứng, biểu đồ lực cắt là đối xứng qua trục đối xứng Δ . Nghĩa là ở mặt cắt trên trục đối xứng đối với hệ đối xứng chịu tải đối xứng thì các nội lực đối xứng khác không, các nội lực phản xứng bằng không. Ngược lại đối với hệ đối xứng chịu tải trọng phản xứng thì trên trục đối xứng Δ các nội lực đối xứng bằng không, các nội lực phản xứng khác không.

Các nhận xét đó cho phép giảm nhẹ rất nhiều tính toán hệ siêu tĩnh đối xứng và phản xứng. Ta hãy xét trường hợp trục đối xứng không trùng với một thanh nào của hệ (hình 11.8). Trên đó a) là công trình thực; b) là sơ đồ hoá kết cấu; c) là sơ đồ tính.



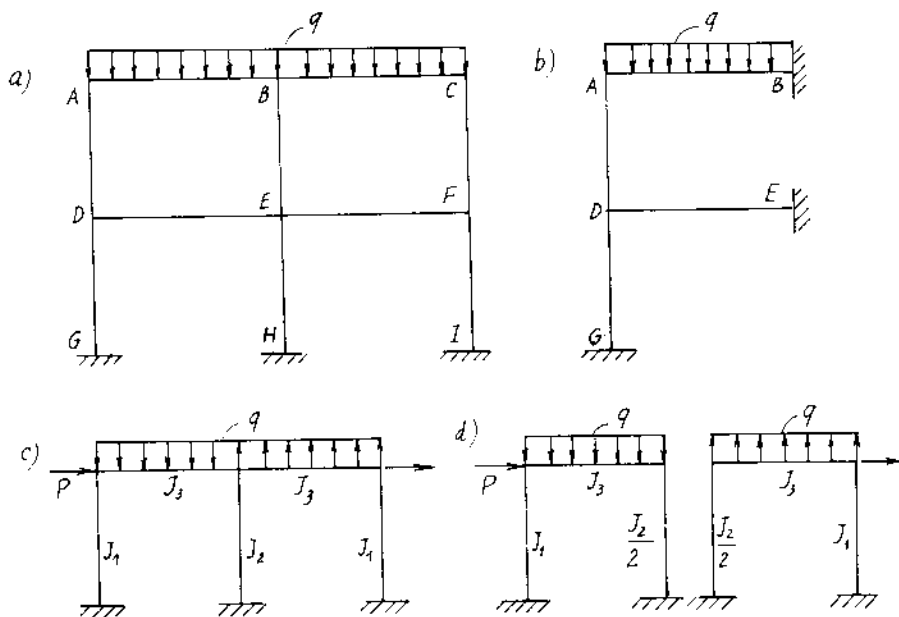
Hình 11.8.

Hãy xét các trường hợp trục đối xứng hình học trùng với một thanh nào đó của hệ (hình 11.9a).

– Khi hệ chịu tải trọng đối xứng thì thanh trùng với trục đối xứng (BEH) không thể uốn được. Các mặt cắt B, E của nó không có chuyển vị xoay và thẳng. Do đó, hệ đã cho được thay bằng hệ trên hình 11.9b và việc tính toán được thực hiện trên hệ này. Cuối cùng, theo tính chất đối xứng suy ra kết quả của nửa còn lại.

– Khi hệ chịu tải trọng phản xứng (hình 11.9c) thì thanh trùng với trục đối xứng bị uốn, các biểu đồ lực cắt của hệ là đối xứng, còn các biểu đồ mômen uốn và lực dọc là phản xứng. Từ đây rút ra sơ đồ tính cho hệ loại này như trên hình 11.9d.

Để tính hệ đối xứng có một thanh trùng với trục đối xứng, hệ chịu tải trọng phản xứng ta có thể chia đôi hệ để tính cho một nửa. Khi ấy độ cứng của thanh trùng với trục đối xứng phải chia đôi (hình 11.9d). Theo tính chất phản xứng ta suy ra nội lực cho nửa còn lại với chú ý là mômen uốn trong thanh trùng với trục đối xứng phải nhân đôi.



Hình 11.9.

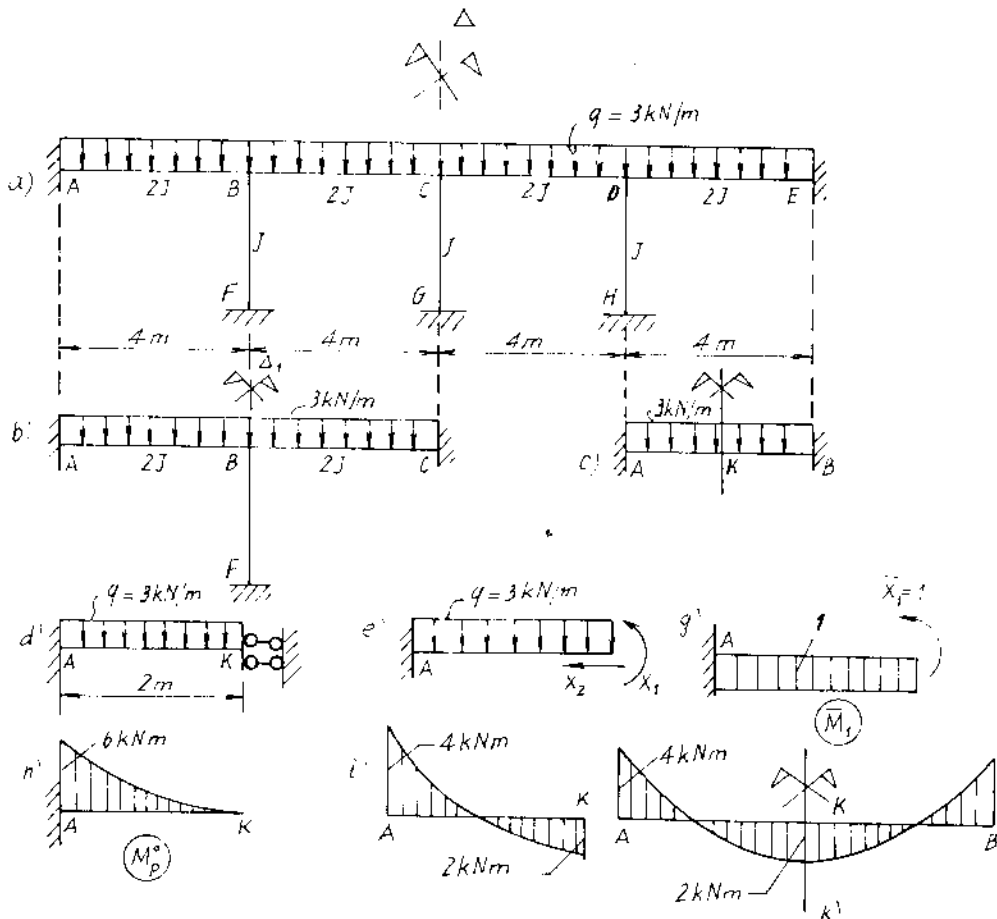
Ví dụ

Cho một khung có số liệu chịu lực như hình 11.10.

Hãy vẽ biểu đồ mômen uốn M sinh ra trong khung?

GIẢI

Ta nhận thấy khung đã cho là một khung đối xứng qua thanh CG cả về tải trọng và cả về hình học. Trong trường hợp này khung là một hệ siêu tĩnh bậc 12 và nếu không kể đến tính đối xứng ta cần phải thiết lập và giải một hệ gồm 12 phương trình chính tắc của phương pháp lực. Việc làm đó tốn rất nhiều công sức, cho nên trong ví dụ này ta triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ để giải quyết bài toán.

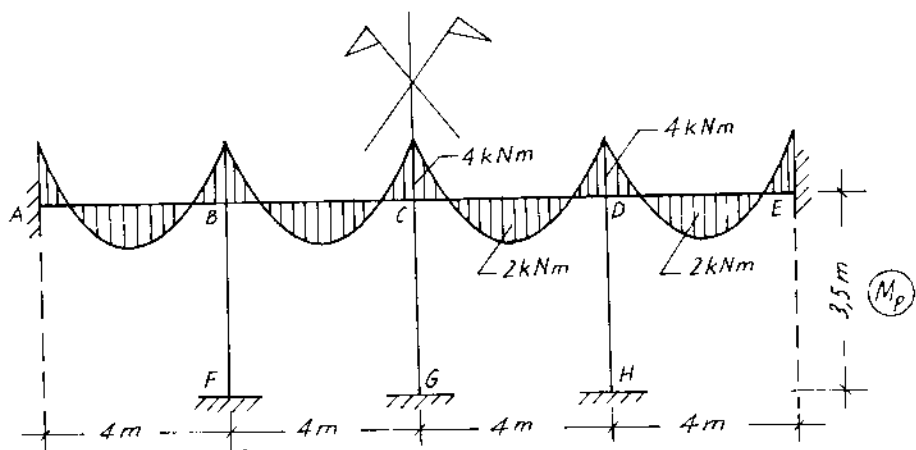


Ta thấy rằng mặt cắt C trên trục đối xứng sẽ không bị xoay, vì nếu xoay thanh CG bị cong và làm cho tính đối xứng không còn nữa. Mặt khác mặt cắt C cũng không có chuyển vị ngang bởi vì nếu có thì hệ sẽ mất tính đối xứng. Do mặt cắt C không thể xoay và cũng không có chuyển vị ngang nên có thể thay liên kết nội tại C như một ngàm cứng (hình 11.10b). Hệ trên hình 11.10b cũng là một hệ đối xứng qua thanh BF cả về tải trọng và hình học. Do đó, thay cho các tính toán trên hệ hình 10.10b ta tính toán trên hệ tương đương được cho trên hình 11.10c. Một lần nữa hệ trên hình 11.10c cũng là đối xứng có trục đối xứng Δ_2 thẳng đứng qua trung điểm K của đoạn AB. Tại K lực cắt $Q_K = 0$ còn $M_K \neq 0$, $N_K \neq 0$, vì vậy sơ đồ tính cho nửa dầm AK có dạng như hình 11.10d.

Phương trình chính tắc của hệ hình (11.10e) có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p}^0 = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p}^0 = 0$$



Hình 11.11.

Do $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$; $\Delta_{2p}^0 = 0$, cho nên ta có:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p}^0 = 0$$

trong đó:

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot 2}{2EJ} \cdot 1 = \frac{1}{EJ} \quad ; \quad \Delta_{1p} = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2EJ} = \frac{-2}{EJ}$$

$$\text{Suy ra} \quad X_1 = \frac{2 \cdot EJ}{EJ} = 2 \text{ kNm.}$$

Biểu đồ mômen uốn trong hệ (hình 11.10d) được cho trên hình 11.10i. Bằng cách lấy đối xứng qua K ta có biểu đồ mômen hình 11.10k cho hệ trên hình 11.10c. Từ biểu đồ mômen hình 11.10k lấy đối xứng qua trục BF, sau đó lại lấy đối xứng qua trục CG ta có biểu đồ mômen uốn cuối cùng trong hệ đã cho (hình 11.11).

II. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

§6. THỰC CHẤT CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

1. Các giả thiết, ẩn số và hệ tương đương

Việc tính toán các hệ khung dầm siêu tĩnh trong rất nhiều trường hợp sẽ đơn giản đáng kể, nếu ta không chọn “tiên đề giải phóng liên kết” làm điểm xuất phát, nghĩa là không chọn lực trong các liên kết thừa làm ẩn số như trong phương pháp lực, mà chọn “tiên đề bổ sung liên kết” làm điểm xuất phát, nghĩa là chọn các chuyển vị ở các nút cứng làm ẩn cơ bản và được tìm ra đầu tiên. Sau khi đã tìm được các ẩn cơ bản là những chuyển vị nút ta có thể dễ dàng tính được các nội lực và chuyển vị tại mặt cắt bất kỳ nhờ các liên hệ vì phân đã biết trong các chương trên.

$$M = EJ V''(z) \quad ; \quad Q = EJ V'''(z)$$

Thực chất của phương pháp chuyển vị, cũng như phương pháp lực đều xuất phát từ ý tưởng giải bài toán của lý thuyết đàn hồi theo chuyển vị (phương pháp Lamé) và theo ứng suất (phương pháp Saintvenant). Vì chọn các chuyển vị nút làm ẩn cơ bản nên phương pháp được gọi là phương pháp chuyển vị hay phương pháp biến dạng. Phương pháp này cũng như phương pháp lực là những phương pháp chính xác, bởi vì chúng chỉ sử dụng những giả thiết thông thường đã mô tả ở §1 chương 1.

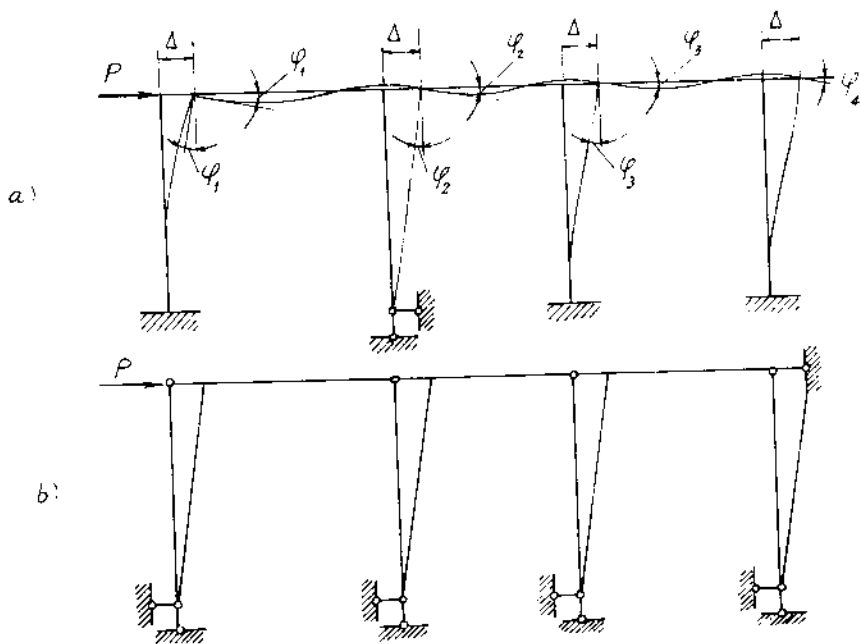
Phương pháp chuyển vị để tính các hệ siêu động được xây dựng trên các giả thiết sau đây:

1. Các nút của hệ được xem là rắn tuyệt đối. Vì vậy, khi hệ bị biến dạng các thanh đồng quy tại một nút sẽ có chuyển vị góc như nhau (hình 11.12a). Đối với mỗi thanh, đó là góc φ_i (ở đây $i = 1, 2, 3, 4$) giữa tiếp tuyến của đường đàn hồi ở vùng nút với phương ban đầu của cấu kiện. Do đó, số ẩn số là góc xoay bằng n_1 (bằng số nút cứng không cố định của khung).

2. Khi xác định số ẩn là các chuyển vị thẳng ở các nút, biến dạng của các thanh do lực dọc và lực cắt gây ra là rất bé so với biến dạng uốn, do đó được phép bỏ qua.

Giả thiết này dẫn đến kết luận là độ dịch gần giữa các nút ở hai đầu một thanh lên phương ban đầu do ngoại lực gây ra là không đổi.

Do đó các nút của khung trên hình 11.12a chỉ có duy nhất một chuyển vị thẳng theo phương ngang Δ . Nghĩa là $n_2 = 1$ và đối với khung này $n = 4 + 1 = 5$.



Hình 11.12.

Số ẩn số tổng quát còn gọi là bậc siêu động của hệ siêu động của phương pháp chuyển vị là:

$$n = n_1 + n_2, \quad (11.8)$$

trong đó:

n – số ẩn số tính theo phương pháp chuyển vị;

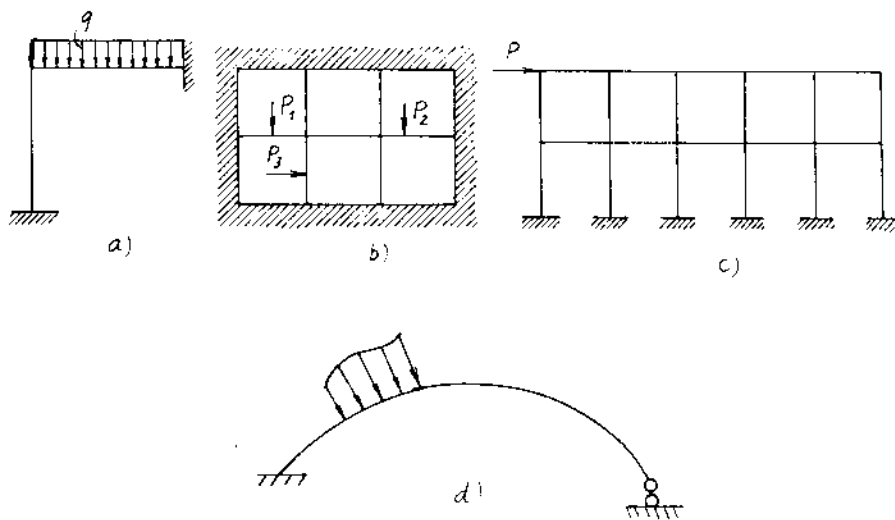
n_1 – số chuyển vị góc cần xác định ở các nút cứng không cố định;

n_2 – số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút.

Trên cơ sở của giả thiết hai, ta đưa ra cách xác định thực hành các ẩn số n_2 như sau:

Tưởng tượng thay thế tất cả các nút cứng và các liên kết ngàm với bên ngoài bằng các khớp bản lề, ta sẽ thu được một cơ cấu. Sơ đồ cơ cấu này cho ta thấy rõ chuyển vị thẳng độc lập n_2 của các nút của hệ. Muốn cho các nút của hệ đứng yên ta phải thêm vào cơ cấu vừa nhận được những thanh gối đơn hợp lý sao cho tất cả các chuyển vị thẳng của các nút đều bị chặn. Số thanh ít nhất cần thiết phải thêm vào để vừa đủ làm cho cơ cấu trở thành kết cấu bất biến hình học, nghĩa là khi ấy bậc tự do của hệ bằng không ($W = 0$), chính là số chuyển vị thẳng n_2 của các nút trong hệ ban đầu (hình 11.12b).

Trên hình 11.13 và bảng 1 đưa ra các kết quả so sánh một số khung nếu tính toán chúng bằng phương pháp chuyển vị sẽ giảm rất nhiều sức lao động so với phương pháp lực. Tuy nhiên, có những hệ nếu dùng phương pháp lực thì ẩn số sẽ ít hơn rất nhiều so với khi dùng phương pháp chuyển vị. Ví dụ hệ trên hình 11.13d có ẩn số theo phương pháp lực là 1, trong khi đó số ẩn số theo phương pháp chuyển vị bằng ∞ . Vì vậy, trong tính toán đòi hỏi phải có tư duy sáng tạo, có kiến thức lý thuyết tốt và có kinh nghiệm tính toán mới có thể đưa ra một hệ tương đương thích hợp, đặc biệt là khi sử dụng phương pháp lực, còn đối với phương pháp chuyển vị thì chỉ có một hệ tương đương duy nhất, dù hệ xuất phát là như thế nào.



Hình 11.13.

Bảng 1

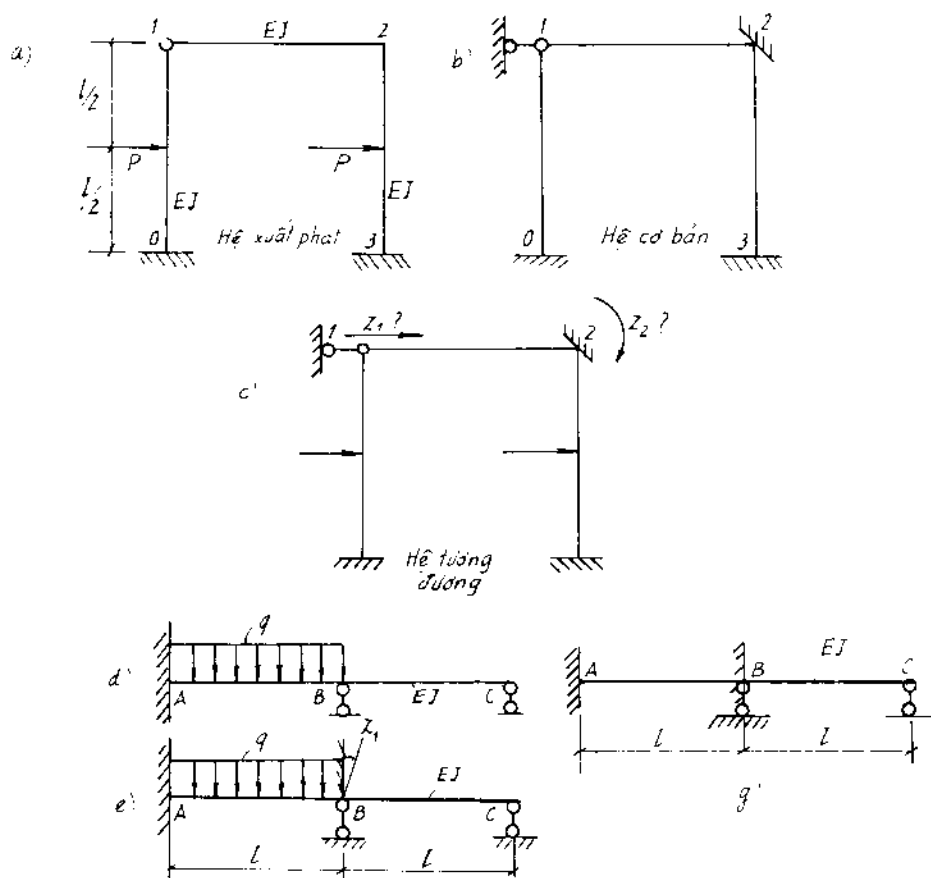
Dạng khung	Phương pháp chuyển vị			Phương pháp lực. Số ẩn (bậc siêu tĩnh)
	Số chuyển vị góc	Số chuyển vị thẳng	Số ẩn	
Hình 11.13a	1	0	1	3
Hình 11.13b	2	0	2	15
Hình 11.13c	12	2	14	30
Hình 11.13d	∞	∞	∞	1

Để tính toán hệ bằng phương pháp chuyển vị, cũng như trong phương pháp lực, người ta không tính trên hệ đã cho mà trên hệ tương đương với sự trợ giúp của hệ cơ bản. Chúng được định nghĩa như sau:

Ta hãy xét hai hệ siêu tĩnh hình 11.14a và hình 11.14d.

Hệ tương đương là hệ suy ra từ hệ đã cho (hình 11.14a, d) sau khi đã bổ sung vào đó các liên kết chống xoay Z_i và chống chuyển vị thẳng Z_k của các nút (hình 11.14c, e) ($i = \overline{1, n_1}$, $k = \overline{1, n_k}$). Hệ cơ bản

là hệ suy ra từ hệ tương đương trên đó không có ngoại lực và các chuyển vị nút tác dụng (hình 11.14b,g).



Hình 11.14.

Cần chú ý rằng các liên kết ngàm bổ sung vào hệ đã cho chỉ có tác dụng chống xoay mà không có tác dụng chống chuyển động thẳng của các nút. Trong những liên kết ngàm như thế chỉ có các phản lực mômen.

§7. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Tư tưởng chủ đạo để thiết lập phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị là sự phủ định sự có mặt của các mômen

phản lực ở các ngàm bổ sung và các phản lực thẳng ở các thanh gối bổ sung. Bởi vì trong hệ xuất phát không có những liên kết này cho nên phản lực tại những vị trí có liên kết bổ sung phải bằng không.

Chúng ta sẽ minh họa nội dung này thông qua một ví dụ cụ thể đối với khung cho trên hình 11.14a với số ẩn $n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$. Hệ cơ bản (hình 11.14b) và hệ tương đương (hình 11.14c).

Trong hệ tương đương phản lực R_1 trong thanh gối 1 do tất cả các nguyên nhân gây ra phải bằng không, tương tự như vậy đối với phản lực R_2 .

Cụ thể là:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0 \\ R_2 &= R_{21} + R_{22} + R_{2P} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

trong đó:

R_{11} là phản lực ở thanh gối 1 do chuyển vị thẳng z_1 đặt vào nút 1 gây ra;

R_{12} là phản lực cũng trong thanh gối 1 do chuyển vị góc z_2 đặt vào nút 2 gây ra;

R_{1P} là phản lực trong thanh gối 1 do tải trọng ngoài cho trước gây ra. Tương tự như vậy đối với R_{21} , R_{22} và R_{2P} .

Trong các ký hiệu trên chỉ số thứ 2 chỉ nguyên nhân gây ra phản lực tại các liên kết tương ứng với chỉ số thứ nhất.

Theo nguyên lý cộng tác dụng các phản lực R_{11} , R_{21} và R_{12} , R_{22} có thể viết như sau:

$$R_{11} = r_{11}Z_1 \text{ và } R_{12} = r_{12}Z_2 ; R_{22} = r_{22}Z_2 ; R_{21} = r_{21}Z_1.$$

Ở đây ta đã gọi r_{11} là phản lực trong các thanh gối 1 do chuyển vị thẳng $\bar{Z}_1 = 1 \text{ cm}$ gây ra. r_{12} là phản lực trong thanh gối 1 do góc xoay $\bar{Z}_2 = 1 \text{ rad}$ gây ra, hoàn toàn tương tự đối với r_{22} , r_{21} .

Phương trình (11.9) với ký hiệu ở trên có dạng:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

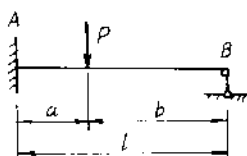
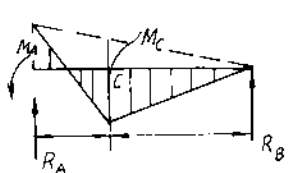
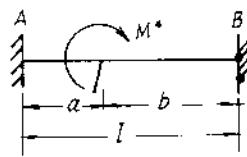
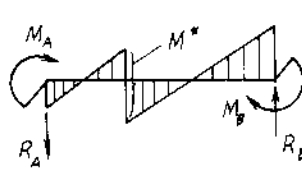
$$Z = -K^{-1} R_p, \quad (11.13)$$

trong đó K^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận K .

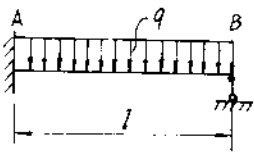
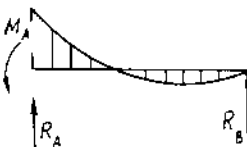
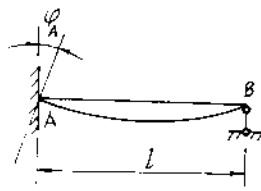
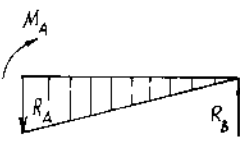
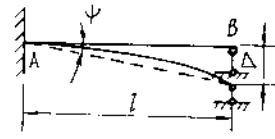
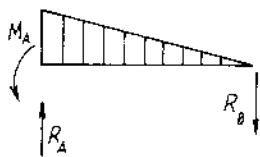
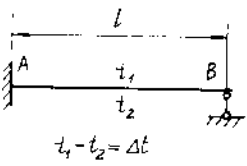
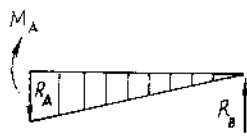
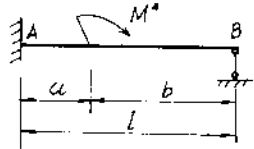
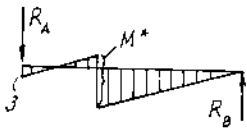
§8. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC PHẦN TỬ TRONG CÁC MA TRẬN K VÀ R_p BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách xác định các phần tử trong các ma trận K và R_p nghĩa là xác định các hệ số r_{kj} và R_{kp} của các hệ phương trình (11.12). Một lần nữa ta cần nhắc lại ý nghĩa vật lý của chúng. Cụ thể là: các hệ số r_{kj} và R_{kp} lần lượt là những phản lực tại các liên kết thứ k theo phương K trong hệ cơ bản chịu các chuyển vị cưỡng bức áp đặt đơn vị $\bar{Z}_j = 1$ và do tải trọng ngoài gây ra. Có nhiều cách xác định chúng, nhưng đơn giản và thuận tiện nhất là sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học (phương pháp tĩnh). Ngoài ra, bạn đọc cũng có thể sử dụng nguyên lý công khả dĩ (phương pháp động) để xác định các hệ số này.

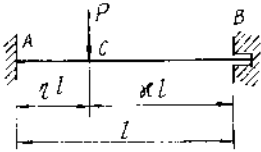
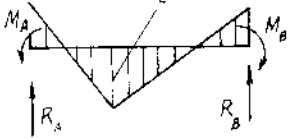
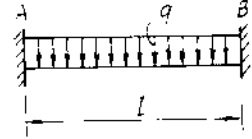
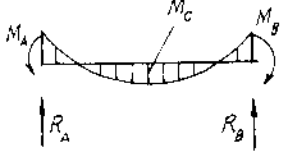
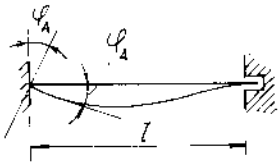
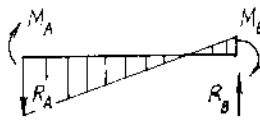
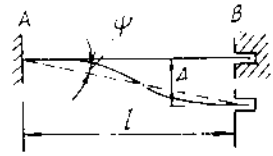
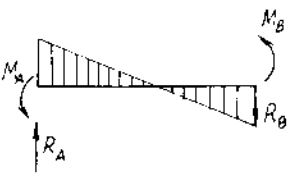
Bảng 2

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = -\frac{Pab}{2l^2} (2l - a)$ $M_C = \frac{P \cdot ab}{l};$ $R_A = \frac{Pl}{2l} \left(3 - \frac{b^2}{l^2} \right);$ $R_B = \frac{Pa^2}{2l^2} \left(3 - \frac{a}{b} \right)$
		$R_B = \frac{M^* \cdot a \cdot b}{l^3} = -R_A$ $M_B = \frac{-M^* \cdot a}{l^2} (2a - b)$ $M_A = \frac{M^* \cdot b}{l^2} (2a - b)$

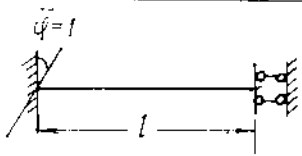
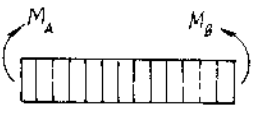
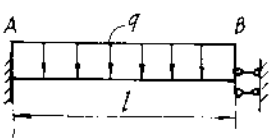
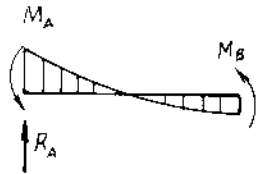
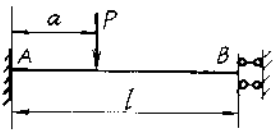
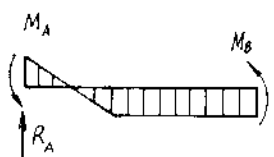
Bảng 2 tiếp theo

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = -\frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8} ql;$ $R_B = \frac{3}{8} ql$
		$M_A = \frac{3EJ}{l} \varphi_A;$ $-R_A = +R_B = +\frac{3EJ}{l} \varphi_A$
		$M_A = -\frac{3EJ}{l^2} \Delta =$ $= -\frac{3EJ}{l} \Psi$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3} \cdot \Delta =$ $= \frac{3EJ}{l^2} \cdot \Psi$
		$M_A = \frac{3EJ(\Delta t)\alpha}{2h}$ h – chiều cao của mặt cắt ngang $-R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{EJ\alpha(\Delta)}{hl}$
		$M_A = \frac{M^*}{2l^2} [l^2 - 3(l-a)^2]$ $M_B = 0$ $R_A = \frac{3M^*}{2l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) = -R_B$

Bảng 2 tiếp theo

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = -\eta \chi^2 P l$ $M_B = -\eta^2 \chi P l$ $M_C = 2\eta^2 \chi^2 P l$ $R_A = \chi^2 (1 + 2\eta) P$ $R_B = \eta^2 (1 + 2\chi) P$
		$M_A = M_B = -\frac{q l^2}{12};$ $R_A = R_B = +\frac{q l}{2};$ $M_C = +\frac{q l^2}{24}$
		$M_A = \frac{4EJ}{l} \varphi_A;$ $M_B = \frac{2EJ}{l} \varphi_A$ $R_B = -R_A = \frac{6EJ}{l^2} \varphi_A$
		$M_B = -M_A = \frac{6EJ}{l^2} \Delta =$ $= \frac{6EJ}{l} \psi$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^3} \Delta =$ $= \frac{12EJ}{l^2} \psi$

Bảng 2 tiếp theo

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = \frac{3EJ}{l};$ $R_B = R_A = 0$
		$M_A = -\frac{ql^2}{3};$ $M_B = \frac{ql^2}{6}; R_A = ql;$ $R_B = 0$
		$M_A = -\frac{pa}{2} \left(2 - \frac{a}{l} \right)$ $M_B = \frac{pa^2}{2l}$ $R_A = P; R_B = 0$

Với cách chọn hệ tương đương và hệ cơ bản như ở trên thì hệ siêu động xuất phát đã được chia ra thành các phần tử mà mỗi phần tử là một dầm đơn có liên kết ở mỗi đầu có thể là: ngàm, khớp, ngàm trượt. Vì vậy khi tải trọng tác dụng lên hệ cơ bản, cũng như các chuyển vị cưỡng bức ở các nút chỉ gây ra biến dạng trong phạm vi của mỗi thanh mà chúng tác dụng. Biểu đồ các đại lượng cần tính S_p^o trong hệ cơ bản do các tác dụng ngoài nói trên gây ra có thể được xây dựng dễ dàng bằng phương pháp lực và vụn năng. Biểu đồ các đại lượng cần tính này thường được thiết lập sẵn và được cho ở bảng 2.

Biểu đồ nội lực S_p do tải trọng gây ra trong hệ xuất phát chính là tổng biểu đồ nội lực S_p^o do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản và do các chuyển vị cưỡng bức áp đặt $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ [nghiệm của hệ (11.11)] gây

ra. Nếu gọi $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ lần lượt là biểu đồ nội lực do các chuyển vị cưỡng bức đơn vị gây ra ở những liên kết bổ sung trong hệ cơ bản, theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$S_{Z_1} = \bar{S}_1 Z_1 ; S_{Z_2} = \bar{S}_2 Z_2 ; S_{Z_3} = \bar{S}_3 Z_3, \dots, S_{Z_n} = \bar{S}_n Z_n$$

Và

$$S_p = S_p^o + \bar{S}_1 Z_1 + \bar{S}_2 Z_2 + \bar{S}_3 Z_3 + \dots + \bar{S}_n Z_n$$

Như vậy, để có được biểu đồ S_p bằng phương pháp chuyển vị ta cần phải làm các bước sau đây:

- Vẽ biểu đồ S_p^o trong hệ cơ bản do tải trọng gây ra.
- Vẽ các biểu đồ nội lực $\bar{S}_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) do các chuyển vị áp đặt bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản.
- Giải hệ phương trình chính tắc (11.11) hoặc (11.12) để có các chuyển vị thực cần tìm tại các liên kết bổ sung.

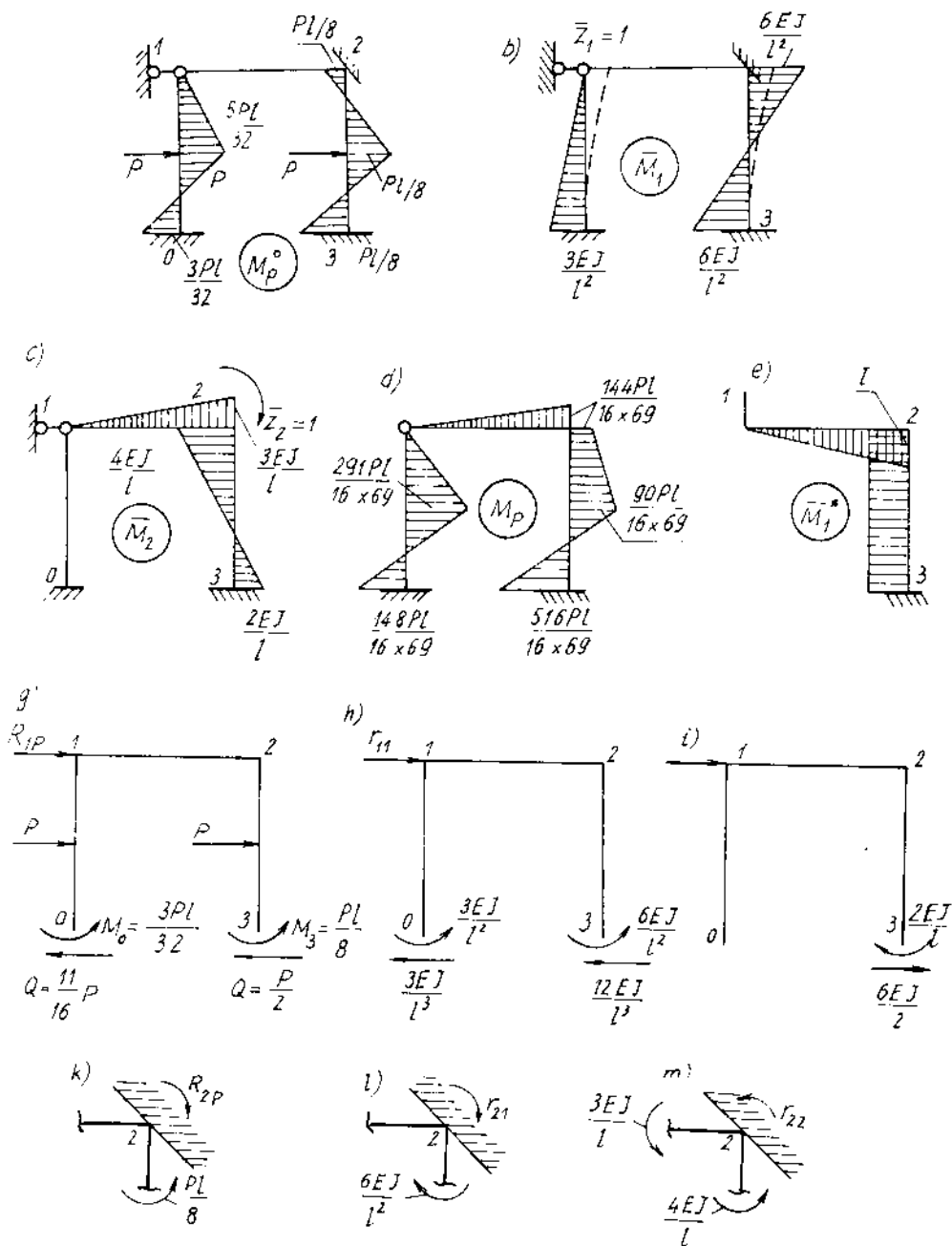
Nội dung này sẽ được giải quyết trong các mục dưới đây thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1

Để xác định các r_{kj} và R_{kp} ta cần phải xây dựng các biểu đồ mômen uốn trong các thanh của hệ cơ bản dưới tác dụng của ngoại lực và các chuyển vị đơn vị áp đặt. Các biểu đồ mômen tương ứng đối với khung trên hình 11.14 được cho trên hình 11.15a, b, c.

Khi vẽ các biểu đồ này ta sử dụng bảng 2, trên đó cho sẵn các biểu đồ mômen uốn đối với các dầm có hai đầu ngàm và dầm có một đầu ngàm, một đầu còn lại là khớp. Chú ý rằng khi vẽ biểu đồ mômen uốn do chuyển vị thẳng của các nút cần phải xác định chuyển vị tương đối giữa các đầu cuối của mỗi thanh theo phương vuông góc với trục của nó.

Các hệ số r_{21}, r_{22}, R_{2p} trong hệ phương trình (11.10) được xác định cụ thể từ điều kiện cân bằng của từng bộ phận khung được tách ra. Cụ thể là tách nút 2 trong các biểu đồ tương ứng (hình 11.15k, l, m) ta có:



Hình 11.15.

$$R_{2p} = \frac{Pl}{8} ; r_{21} + \frac{6EJ}{l^2} = 0 \Rightarrow r_{21} = -\frac{6EJ}{l^2} = r_{12}$$

$$r_{22} - \frac{4EJ}{l} - \frac{3EJ}{l} = 0 \Rightarrow r_{22} = \frac{7EJ}{l}$$

Để xác định R_{1p} , r_{11} , r_{12} ta tưởng tượng cắt các chân của khung và thay vào đó các mômen uốn và lực cắt được biết từ các biểu đồ đã vẽ trên hình 11.15a, b, c sau đó khảo sát các điều kiện cân bằng dưới dạng hình chiếu của các lực tác dụng lên phần khảo sát (phần khung) (hình 11.15g, h, i). Cụ thể là:

$$R_{1p} = \frac{11}{16} P + \frac{P}{2} - 2P = -\frac{13}{16} P$$

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l^3} + \frac{12EJ}{l^3} = \frac{15EJ}{l^3}$$

$$r_{12} = -\frac{6EJ}{l^2} = r_{21}.$$

Chú ý dấu của r_{kj} và R_{kp} được quy ước là dương khi xây dựng hệ phương trình chính tắc (11.10). Nghĩa là nếu chiều tác dụng của các phản lực trùng với chiều của các chuyển vị nút áp đặt cần tìm.

Với các hệ số vừa xác định, hệ phương trình (11.10) có dạng cụ thể như sau:

$$\frac{15EJ}{l^3} Z_1 - \frac{6EJ}{l^2} Z_2 - \frac{13}{16} P = 0$$

$$- \frac{6EJ}{l^2} Z_1 + \frac{7EJ}{l} Z_2 + \frac{Pl}{8} = 0$$

Giải hệ phương trình ta được các chuyển vị nút Z_1 và Z_2 :

$$Z_1 = \frac{79}{1104} \frac{Pl^3}{EJ} ; \quad Z_2 = \frac{1}{23} \frac{Pl^2}{EJ}$$

Biểu đồ mômen trong hệ siêu tĩnh đã cho M_p hình 11.15d được xây dựng trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng:

$$M_p = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p^0 \quad (11.14)$$

Một cách tổng quát ta có thể viết lại một lần nữa:

$$S_p = \bar{S}_1 Z_1 + \bar{S}_2 Z_2 + \bar{S}_3 Z_3 + \dots + \bar{S}_n Z_n + S_p^o \quad (11.15)$$

trong đó:

S_p là biểu đồ nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ siêu động cần tính. S_p^o là biểu đồ nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản của phương pháp này. $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ lần lượt là biểu đồ nội lực do các chuyển vị cưỡng bức đơn vị $\bar{Z}_i = 1$ tại từng liên kết áp đặt thứ j gây ra trong hệ cơ bản.

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ là các chuyển vị cần tìm thỏa mãn phương trình chính tắc 11.12.

Để kiểm tra tính đúng đắn của biểu đồ nội lực S_p đã vẽ, ta có thể nhân biểu đồ S_p với một biểu đồ đơn vị nào đó trên hệ cơ bản được tính bằng phương pháp lực. Ví dụ, biểu đồ M_p trên hình 11.15d và biểu đồ đơn vị trên hệ cơ bản theo phương pháp lực (hình 11.15e):

$$M_p \times \bar{M}_1 = 0$$

Ví dụ 2

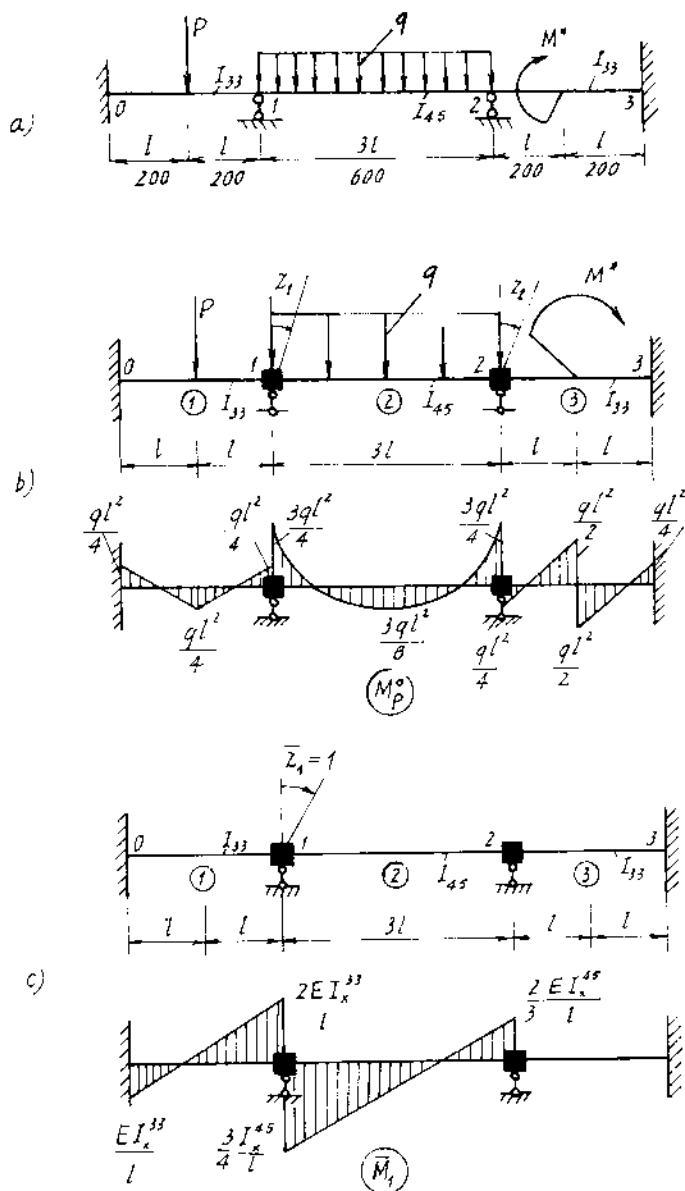
Một dầm liên tục mặt cắt thay đổi từng khúc chịu lực và liên kết cân bằng như hình 11.16a. Hãy vẽ biểu đồ (M) và (Q) trong dầm đã cho. Biết $P = ql$; $M^* = ql^2$, $q = 0,5 \text{ kN/cm}$, $l = 200 \text{ cm}$, đoạn (1) và đoạn (3) làm bằng thép chữ I_{33} , đoạn (2) thép I_{45} ; $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $J_{33} = 9840 \text{ cm}^4$; $J_{45} = 27450 \text{ cm}^4$.

GIẢI

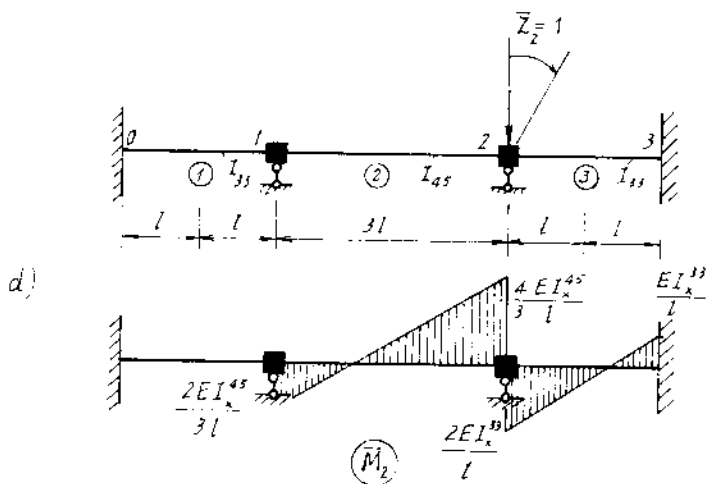
Với bài toán này ta không nên giải bằng phương pháp lực mà nên giải bằng phương pháp chuyển vị có hệ tương đương như hình 11.16b.

Các biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do tải trọng ngoài và các chuyển vị góc cưỡng bức bằng đơn vị $\bar{Z}_1 = 1$, $\bar{Z}_2 = 1$ được vẽ nhờ bảng 2 lần lượt cho trên các hình 11.16b, c, d. Phương trình chính tắc:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$



Hình 11.16.



Hình 11.16 d.

Các hệ số và số hạng tự do trong (a) là những mômen phản lực được tính bằng điều kiện cân bằng các nút tương ứng. Cụ thể là:

Phản lực tại ngàm 1 do $\bar{Z}_1$ gây ra:

$$r_{11} = \frac{4}{3} \frac{EI_x^{(45)}}{l} + 2 \frac{EI_x^{(33)}}{l} = \frac{E}{l} \left(\frac{4}{3} I_x^{(45)} + 2I_x^{(33)} \right) = 5628000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 2 do $\bar{Z}_1$ gây ra:

$$r_{12} = r_{21} = \frac{E}{l} \frac{2}{3} I_x^{(45)} = 1830000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 1 do ngoại lực gây ra:

$$R_{1p} = -\frac{3ql^2}{4} + \frac{ql^2}{4} = -\frac{ql^2}{2} = -10000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 2 do ngoại lực gây ra:

$$R_{2p} = \frac{ql^2}{4} + \frac{3ql^2}{4} = ql^2 = 20000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 2 do $\bar{Z}_2$ gây ra:

$$r_{22} = \frac{4}{3} \frac{EI_x^{(45)}}{l} + 2 \frac{EI_x^{(33)}}{l} = \frac{E}{l} \left(\frac{4}{3} I_x^{(45)} + 2I_x^{(33)} \right) = 5628000 \text{ kN.cm}$$

Phương trình chính tắc và nghiệm của phương trình chính tắc dưới dạng số:

$$\begin{cases} 5628000(Z_1) + 1830000(Z_2) - 10000 = 0 \\ 1830000(Z_1) + 5628000(Z_2) + 20000 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 0,003279 \text{ rad} \\ Z_2 = -0,004620 \text{ rad} \end{cases}$$

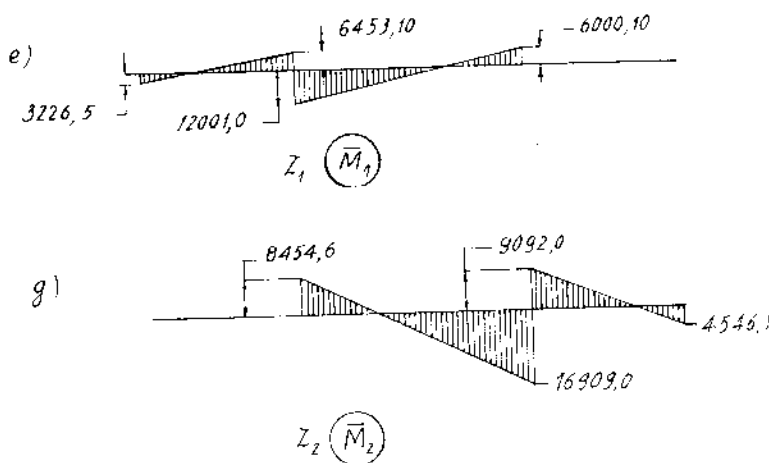
Biểu đồ mômen do các chuyển vị Z_1 , Z_2 và ngoại lực gây ra sau khi thay số (hình 11.16e, g, h).

Biểu đồ mômen uốn cuối cùng trong dầm liên tục đã cho được tìm theo nguyên lý cộng tác dụng:

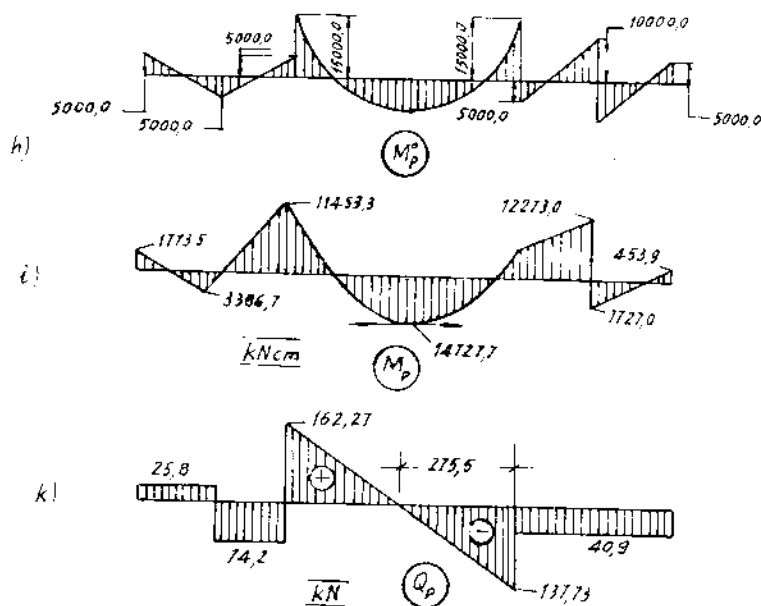
$$(M_p) = (M_p^0) + Z_1 (\bar{M}_1) + Z_2 (\bar{M}_2)$$

Biểu đồ lực cắt được tìm từ biểu đồ mômen theo quan hệ:

$\frac{dM}{dZ} = (QZ)$ hoặc khảo sát cân bằng mômen của từng đoạn một nhờ các mômen ở hai đầu mỗi đoạn đã biết. Các biểu đồ này được cho trên hình 11.16i, k.



Hình 11.16e, g.



Hình 11.16 h, i, k.

Bạn đọc có thể nhanh chóng nhận được kết quả cả về nội lực và chuyển vị mà không tốn công sức và giấy mực để vẽ các biểu đồ hỗ trợ từ (b) đến (h) khi bạn dùng công thức vạn năng cho sẵn (8.12b). Trong trường hợp này tại mặt cắt $Z_0 = 712,4$ cm, chuyển vị cực trị $\max |V| = |-0,902 \text{ cm}|$ và tại $Z^* = 968,5$ cm, góc xoay đạt cực đại $\varphi_{\max} = 4,735 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$.

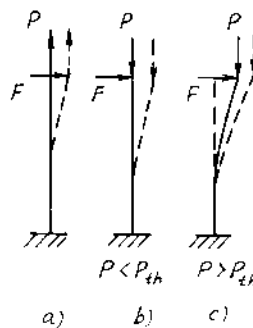
Chương 12

ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐÀN HỒI

§1. KHÁI NIỆM VỀ HIỆN TƯỢNG ỔN ĐỊNH

Trong các chương trên, ta đã xét độ bền và độ cứng của các thanh trong những trường hợp chịu lực khác nhau. Trong thực tế có nhiều trường hợp nếu chỉ tính độ bền và độ cứng thì chưa đủ bảo đảm an toàn cho cơ hệ (chi tiết máy hoặc công trình). Cơ hệ còn có thể bị phá hoại vì một nguyên nhân khác đó là sự mất ổn định. Để có khái niệm về sự ổn định của hệ đàn hồi, ta hãy xét ví dụ đơn giản sau:

Xét một thanh thẳng mảnh, được ngàm ở một đầu, còn đầu kia chịu lực kéo đúng tâm (hình 12.1a). Nếu có một kích động ngang nhỏ ngẫu nhiên nào đó (chẳng hạn, một lực đẩy rất nhỏ F , vuông góc với trục thanh) làm cho trục thanh cong đi (tức là dời khỏi vị trí cân bằng thẳng ban



Hình 12.1.

đầu) thì khi kích động triệt tiêu, thanh sẽ luôn luôn trở về dạng thẳng vốn có, không phụ thuộc giá trị của lực P .

Ta nói rằng trạng thái cân bằng của thanh luôn luôn ổn định dạng thẳng.

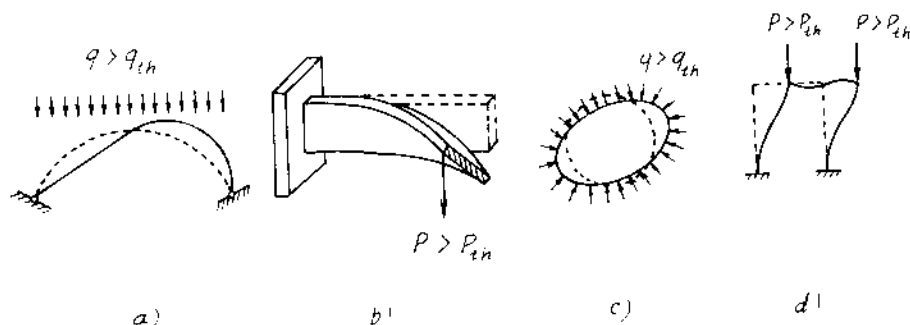
Trong trường hợp P là lực nén đúng tâm, tình hình sẽ khác. Khi lực P còn nhỏ hơn một giới hạn nhất định (hình 12.1b) thì thanh vẫn còn thẳng và vẫn trở về dạng đó sau khi kích động triệt tiêu. Nhưng khi lực P vượt quá giới hạn nói trên thì thanh không còn thẳng nữa và sẽ dời khỏi vị trí cân bằng ban đầu với biến dạng ngày càng tăng ngay cả khi kích động đã triệt tiêu cho đến khi cong hẳn về một phía, không trở về dạng thẳng ban đầu nữa. Lúc này ta nói rằng: *trạng thái cân bằng dạng thẳng của thanh không ổn định* (chú ý rằng trạng thái cân bằng mới của thanh – dưới dạng cong (hình 12.1c) lại được coi là dạng ổn định mới).

Tải trọng P ở giá trị giới hạn nói trên được gọi là *tải trọng tới hạn*. Trạng thái cân bằng ứng với tải trọng tới hạn là *trạng thái cân bằng bất định* (nghĩa là biến dạng giữ nguyên sau khi kích động triệt tiêu).

Như vậy một cơ hệ đàn hồi cũng có những trạng thái cân bằng khác nhau tương tự như một cơ hệ tuyệt đối.

Sau đây là vài ví dụ khác về mất ổn định (hình 12.2).

Một dầm một đầu ngàm còn một đầu tự do có mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp (hình 12.2b) bị uốn phẳng bởi lực P có đường tác



dụng trùng với trục đối xứng thẳng đứng của mặt cắt, khi P lớn hơn lực tới hạn P_{th} dầm sẽ bị mất ổn định: dầm bị vênh đi và bị uốn – xoắn đồng thời.

Khi mất ổn định, biến dạng của hệ tăng rất nhanh so với mức tăng của tải trọng. Chẳng hạn, với thanh thẳng chịu nén như hình 12.3.

Khi $P = 1,010 \cdot P_{th}$ thì $f = 9\% l$;

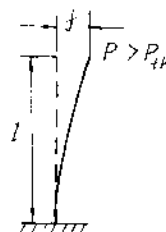
Khi $P = 1,015 \cdot P_{th}$ thì $f = 22\% l$.

Như vậy khi mất ổn định, cơ hệ làm việc trong trạng thái không bình thường và có thể bị phá hoại một cách bất ngờ. Trong thực tế đã có nhiều tai nạn lớn xảy ra (cầu cống hoặc công trình xây dựng bị sập) chỉ vì một bộ phận nào đó bị mất ổn định. Vì vậy, đối với các chi tiết máy hoặc công trình, ngoài việc đảm bảo an toàn về độ bền và độ cứng, còn phải đảm bảo cả độ ổn định nữa. Muốn thế phải đảm bảo sao cho tải trọng tác động nhỏ hơn tải trọng tới hạn.

$$P \leq \frac{P_{th}}{n_d} \quad (12.1)$$

trong đó: n_d – hệ số an toàn về ổn định.

Như vậy, vấn đề cơ bản của bài toán ổn định là xác định tải trọng tới hạn. Trong bài này, ta chỉ xét bài toán đơn giản nhất là xác định lực tới hạn của thanh bị nén đúng tâm (còn gọi là bài toán uốn dọc thanh thẳng hay bài toán Ôle (Euler).

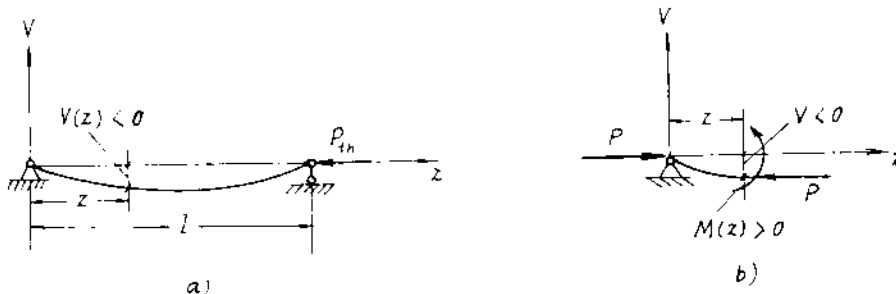


Hình 13.3.

§2. BÀI TOÁN UỐN DỌC

Xét một thanh thẳng chịu lực nén đúng tâm P (hình 12.4a). Khi P đạt tới giá trị tới hạn P_{th} thanh sẽ bị uốn cong trong mặt phẳng mà thanh có độ cứng nhỏ nhất. Để xác định lực tới hạn P_{th} ta hãy xét một đoạn thanh giới hạn bởi mặt cắt ngang ứng với tọa độ z và độ võng $V(z)$ (hình 12.4b). Bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh, phương trình cân bằng mômen của đoạn thanh trên có dạng:

$$M - P \cdot V = 0 \quad (a)$$



Hình 12.4.

Giả sử khi mất ổn định, thanh vẫn còn tính chất đàn hồi tuyến tính, do đó có thể dùng công thức tính mômen uốn ở chương 8 với chú ý $|M| = |P \cdot V|$ còn dấu của $V(z)$ và $V''(z)$ luôn ngược nhau:

$$M(z) = - EJ \frac{d^2 V}{dz^2} \quad (b)$$

Thay (b) vào (a), ta có:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V(z) = 0 \quad (c)$$

Trong đó ta đã đặt:

$$k^2 = \frac{P}{EJ} \quad (12.2)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (c) là:

$$V(z) = A \sin kz + B \cos kz \quad (d)$$

Các hằng số tích phân A, B được xác định từ điều kiện biên. Trong trường hợp được khảo sát (hình 12.4a).

Điều kiện biên có dạng:

a) Khi $z = 0$ thì $V(0) = 0$

b) Khi $z = l$ thì $V(l) = 0$

Điều kiện a) cho ta: $B = 0$ và (d) trở thành:

$$V(z) = A \sin kz.$$

Điều kiện b) $\Rightarrow A \sin kl = 0$.

Nếu $A = 0$ thì $V(z) = 0$ và thanh luôn luôn cân bằng ở dạng thẳng (ngheêm tâm thường). Nếu $A \neq 0$ thì $\sin kl = 0$ hay $k = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Thay giá trị của k vào (12.2) ta được công thức xác định lực P ứng với các dạng cân bằng của thanh:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (e)$$

Vì lực tối hạn P_{th} là lực khiến dạng cân bằng thẳng của thanh bắt đầu mất ổn định, nên P_{th} là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị (e), ứng với $n = 1$. Ngoài ra vì thanh bị uốn trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất nên J trong (e) là mômen quán tính chính trung tâm nhỏ nhất J_{min} của mặt cắt ngang. Do đó, lực tối hạn bằng:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (12.3)$$

Công thức này do Öle tìm ra năm 1774.

Đối với các thanh thẳng khác, bằng những suy diễn toán học tương tự như trên ta được công thức Euler dưới dạng tổng quát sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} \quad (12.4)$$

trong đó: μ là hệ số chiều dài dẫn suất phụ thuộc vào dạng liên kết ở hai đầu thanh; $\mu l = l_0$ – gọi là chiều dài dẫn suất (chiều dài tự do) (hình 12.5). Chiều dài tự do l_0 có thể giải thích như một chiều dài quy ước nào đó của thanh tựa khớp có cùng lực tối hạn như thanh đã cho.

Sau khi tính được lực tối hạn, có thể tính được ứng suất tối hạn σ_{th} của thanh. Vì khi $P = P_{th}$ thanh vẫn còn dạng thẳng ban đầu, nên vẫn còn bị nén thuần túy. Do đó ứng suất tối hạn bằng:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2 F}$$

hay:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}$$

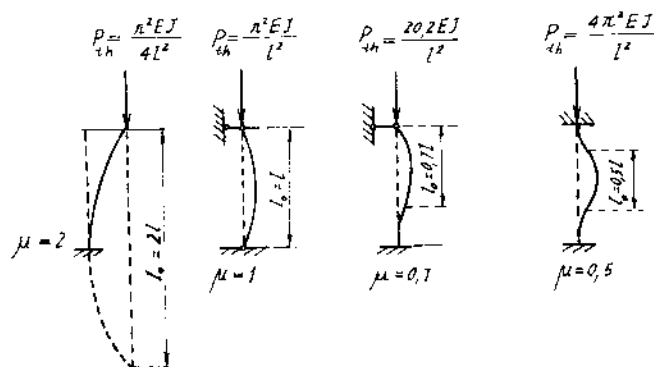
trong đó: $i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{F}$ là bán kính quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang.

Đặt:
$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad (12.5)$$

Công thức tính ứng suất tới hạn sẽ có dạng:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12.6)$$

Nếu σ_{th} của thanh càng bé thì tính ổn định của thanh càng kém, do đó, trị số λ càng lớn, thanh càng dễ mất ổn định. Đó là trường hợp của những thanh mảnh. Vì thế hệ số λ được gọi là độ mảnh của thanh.



Hình 12.5.

§3. GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC OLE

Các công thức Ole để tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn trên đây được thành lập với *giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính*, vì vậy

chúng chỉ đúng khi ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỉ lệ σ_{Ti} .
Như vậy muốn áp dụng các công thức Ôle, cần thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_{th} \leq \sigma_{Ti}$$

hay:
$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{Ti}$$

Suy ra:
$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Ti}}}$$

Như vậy công thức Ôle chỉ đúng với các thanh có độ mảnh lớn hơn độ mảnh giới hạn.

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Ti}}} \quad (12.7)$$

Với thép $E \approx 2.10^5 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{Ti} = 200 \text{ N/mm}^2$, ta thấy:

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2.10^5}{200}} \approx 100$$

Với gỗ $\lambda_o \approx 75$, với gang $\lambda_o \approx 80$.

Những thanh có độ mảnh $\lambda > \lambda_o$ được gọi là những thanh có *độ mảnh lớn*.

Những thanh có độ mảnh $\lambda < \lambda_o$ được gọi là những thanh có *độ mảnh vừa và bé*.

Đối với những thanh có độ mảnh vừa và bé, thường dùng công thức kinh nghiệm sau đây của F. S. Yaxinxky:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (12.8)$$

trong đó: a, b và c là các hằng số phụ thuộc vật liệu của thanh được xác định bằng thực nghiệm và được cho trong các sổ tay kỹ thuật.

Ví dụ, đối với thép nói trên:

$$\sigma_{th} = 3100 - 11,4 \lambda;$$

đối với gỗ:

$$\sigma_{th} = 293 - 1,94 \lambda.$$

Các công thức Ole và Yaxinxky cho phép giải bài toán ổn định của các thanh chịu nén trên toàn khoảng độ mảnh thường gặp trong thực tế kỹ thuật.

§4. CÔNG THỨC OLE TRONG MIỀN ĐÀN DẪO

Trong thực tế kỹ thuật ta còn gặp những thanh chịu nén làm việc trong miền đàn dẻo.

Rất nhiều nhà nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm đã kiến nghị cách xác định lực tới hạn P_{th} đối với các thanh loại này. Trong số những nghiên cứu này trước hết cần phải dẫn ra công trình của Yaxinxki. Trong đó, Yaxinxki đề nghị sử dụng công thức Ole đối với miền đàn hồi dẻo, nhưng thay thế cho mô đun đàn hồi thông thường E bằng mô đun đàn hồi dẫn xuất E_r , cụ thể là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E_r J}{(\mu l)^2} \quad (12.9)$$

trong đó: $E_r = \frac{4 E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2};$

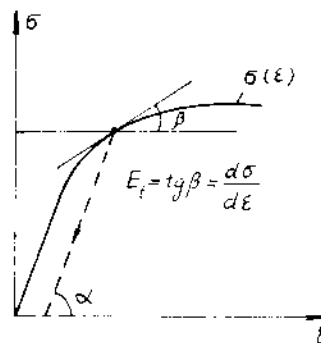
E_1 – mô đun đàn hồi khi hạ tải bằng mô đun đàn hồi ban đầu (ví dụ, đối với thép $E_1 = E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$);

$E_2 = E_t$ – mô đun đàn hồi lấy với ứng suất dọc trục ứng với thời điểm bắt đầu hạ tải. Mô đun này bằng tang góc nghiêng của tiếp tuyến với đường cong nén $\sigma = \sigma(\epsilon)$, vì thế ta gọi là mô đun tiếp tuyến (hình 12.6).

Tư tưởng của việc sử dụng mô đun dẫn xuất E_r là như sau:

Ta hình dung rằng có một thanh chịu nén đúng tâm và ứng suất trong thanh đã vượt quá giới hạn đàn hồi, còn lực tác dụng lên thanh

gần tới lực tới hạn. Khi đã đạt được giá trị của lực tới hạn thanh bằng đầu chịu uốn. Bắt đầu từ thời điểm chịu uốn này một phần của mặt cắt ngang của thanh bắt đầu xuất hiện ứng suất nén phụ, còn phần khác của mặt cắt ngang lại xuất hiện ứng suất kéo phụ. Chính vì vậy trong miền này xảy ra sự hạ tải.



Hình 12.6.

Như đã rõ môđun đàn hồi hạ tải trùng với môđun đàn hồi thông thường E , còn môđun đàn hồi của vật liệu ứng với đường đặt tải ở điểm bắt đầu hạ tải bằng tang góc nghiêng của tiếp tuyến với biểu đồ nén. Vì vậy, nếu thanh chịu nén đúng tâm có ứng suất vượt quá giới hạn đàn hồi và sau đó bắt đầu chịu uốn, thì khi uốn nó làm việc như một thanh có những môđun đàn hồi khác nhau khi kéo và nén.

§5. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH THANH CHỊU UỐN DỌC

Khi xác định kích thước của thanh chịu nén, trước hết phải quan tâm đến điều kiện sao cho thanh không bị mất ổn định dạng thẳng trong suốt quá trình sử dụng. Vì thế ứng suất trong thanh nhất thiết phải nhỏ hơn ứng suất tới hạn:

$$\sigma = \frac{N}{F_{ng}} < \frac{P_{th}}{F_{ng}} = \sigma_{th} \quad (12.10)$$

trong công thức (12.10):

N – lực dọc trong thanh; P_{th} – lực tới hạn;

F_{ng} – diện tích nguyên của mặt cắt ngang (diện tích mặt cắt ngang của thanh ở nơi không bị giảm yếu).

Nhiều nghiên cứu cho thấy rằng, những nơi mặt cắt ngang bị giảm yếu cục bộ, ví dụ, những lỗ ghép bằng đinh tán, những mộng

ghép v.v..., không gây ảnh hưởng thực chất đến trị số của lực tối hạn. Vì thế khi xác định nó, ta sẽ sử dụng công thức (12.10). Trong những trường hợp đặc biệt khi có sự giảm yếu đáng kể ta sẽ tiến hành việc kiểm tra bổ sung điều kiện bền ở những mặt cắt ngang bị giảm yếu khi chịu nén thuần túy.

Để thanh chịu uốn dọc làm việc tin cậy cần phải chỉ ra mức độ an toàn về ổn định, bởi vậy ứng suất trong thanh cần phải nhỏ hơn cường độ tính toán và cường độ tính toán này lại cần phải nhỏ hơn ứng suất tối hạn:

$$\sigma = \frac{N}{F_{ng}} \leq \frac{\sigma_{th}}{n_0} \quad (12.11)$$

ở đây: n_0 – hệ số an toàn về ổn định.

Như đã biết ở chương 2, điều kiện bền để chọn diện tích mặt cắt ngang của thanh chịu kéo là:

$$\sigma = \frac{N}{F_{gv}} \leq R, \quad (12.12)$$

trong đó: R – cường độ tính toán khi kéo.

F_{gv} – diện tích thực của mặt cắt ngang ở nơi có giảm yếu.

So sánh công thức (12.11) với công thức (12.12) và ký hiệu tỷ số các vế phải của các công thức này qua φ ta có:

$$\varphi = \frac{\sigma_{th}}{n_0 R}, \text{ từ đây rút ra là: } \frac{\sigma_{th}}{n_0} = \varphi \cdot R$$

Đại lượng φ được gọi là hệ số giảm cường độ tính toán cơ bản khi uốn dọc. Người ta thường gọi là hệ số uốn dọc. Hệ số φ phụ thuộc vào ứng suất tối hạn, và do đó, nó là hàm của độ mảnh và vật liệu của thanh:

$$\varphi = \frac{\sigma_{th}}{n_0 R} = f(\lambda) \quad (12.13)$$

Giá trị của φ đối với những độ mảnh khác nhau được thiết lập theo tiêu chuẩn thiết kế và thường được cho dưới dạng bảng I. Những

bảng này đã kể đến sự phụ thuộc của φ vào độ lệch tâm có thể của điểm đặt lực.

Bảng I

Bảng hệ số φ

Độ mảnh của thanh λ	Giá trị φ đối với các thanh theo mức thép		Độ mảnh của thanh	Giá trị φ đối với các thanh theo mức thép	
	CT.3, CT.4	CT.5		CT.3, CT.4	CT.5
0	1,00	1,00	120	0,45	0,37
10	0,99	0,98	130	0,40	0,32
20	0,97	0,96	140	0,36	0,28
30	0,95	0,93	150	0,32	0,25
40	0,92	0,89	160	0,29	0,23
50	0,89	0,85	170	0,26	0,21
60	0,86	0,80	180	0,23	0,19
70	0,81	0,74	190	0,21	0,17
80	0,75	0,67	200	0,19	0,15
90	0,69	0,59	210	0,17	0,14
100	0,60	0,50	220	0,17	0,13
110	0,52	0,43			

Đối với các thanh bằng gỗ chịu nén đúng tâm φ được xác định như sau:

$$\varphi = 1 - 0,8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad \text{ứng với } \lambda \leq 75 ;$$

$$\varphi = \frac{3100}{\lambda^2} \quad \text{ứng với } \lambda > 75.$$

Có thể viết lại công thức (12.11) dưới dạng:

$$\sigma = \frac{N}{F_{ng}} \leq \varphi.R.$$

Sau khi chia tất cả các số hạng của phương trình này cho φ , ta nhận được:

$$\frac{\sigma}{\varphi} = \frac{N}{\varphi \cdot F_{ng}} \leq R$$

ta sẽ gọi tỷ số $\frac{\sigma}{\varphi}$ là ứng suất tính toán σ_t :

$$\sigma_t = \frac{\sigma}{\varphi}.$$

$$\text{Do đó,} \quad \sigma_t = \frac{N}{\varphi \cdot F_{ng}} \leq R \quad (12.13)$$

Từ công thức (12.13) ta thấy rằng, về hình thức công thức này trùng với công thức (12.12) đối với thanh chịu kéo. Cách viết như thế là rất thuận tiện; bởi vì, nó cho phép sử dụng chỉ một cường độ tính toán đối với thanh chịu nén, cũng như đối với thanh chịu kéo.

Bài toán về việc chọn mặt cắt ngang của thanh chịu nén là bài toán phức tạp hơn so với bài toán về thanh chịu kéo. Lý do là đại lượng φ trong công thức (12.13) phụ thuộc vào chính kích thước, vật liệu và hình dáng mặt cắt ngang. Vì thế cần phải quy định trước φ . Cho nên việc chọn mặt cắt ngang được tiến hành bằng cách thử dần. Cụ thể là, ban đầu ta chọn trước một cách gần đúng kích thước mặt cắt ngang (hoặc là chọn trước một cách gần đúng giá trị φ , ví dụ $\varphi = 0,5$) và đối với mặt cắt ngang này ta tính diện tích mặt cắt ngang, mômen quán tính, bán kính quán tính và cuối cùng là độ mảnh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

Với trị số λ này ta tìm φ theo bảng I. Sau đó theo công thức (12.13) ta sẽ xác định được ứng suất. Có thể xảy ra điều là, với phép thử đầu tiên ứng suất tìm được sẽ có sự sai lệch lớn so với cường độ tính toán R .

Nếu ứng suất này nhỏ hơn cường độ tính toán R nhiều lần, thì cần phải giảm kích thước của mặt cắt ngang. Ngược lại, nếu ứng suất

tìm được lớn hơn cường độ tính toán, thì phải tăng kích thước của mặt cắt ngang. Quá trình thử dần như thế được tiếp tục cho đến khi độ sai lệch giữa σ_t và R không nhỏ hơn trị số quy định theo thiết kế. Thông thường quá trình thử này được dừng lại khi độ sai lệch nói trên không vượt quá $\pm (3 \div 5\%)$.

Ví dụ: Hãy chọn mặt cắt ngang hình chữ I của một cột chịu nén đúng tâm được làm bằng thép CT3. Cột được ngàm chặt ở một đầu còn một đầu tự do. Cột có chiều dài $l = 2,6$ m. Chịu một lực nén $P = 120000$ daN. Cường độ tính toán $R = 2100$ daN/cm².

GIẢI

Hệ số chiều dài dẫn suất là $\mu = 2$.

Phép thử thứ nhất: Ta chọn gần đúng $\varphi = 0,5$. Từ điều kiện $\frac{N}{\varphi \cdot F} = R$ ta có diện tích yêu cầu là:

$$F = \frac{N}{R \cdot \varphi} = \frac{120000}{2100 \cdot 0,5} = 114 \text{ cm}^2.$$

Diện tích này ứng với thép chữ I số hiệu №55 có $F = 114 \text{ cm}^2$, bán kính quán tính $i_{\min} = 3,44$ cm.

Từ những số liệu này ta tìm được độ mảnh của thanh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,44} = 151.$$

Theo bảng I ta tìm được $\varphi = 0,32$ và sau đó là σ_t :

$$\sigma_t = \frac{N}{\varphi \cdot F} = \frac{120000}{0,32 \cdot 114} = 3289 \text{ daN/cm}^2 > R.$$

Vì $\sigma_t > R$ nên theo chỉ dẫn trên ta phải tăng mặt cắt ngang của cột.

Phép thử thứ hai: Ta chọn thép chữ I số hiệu №60 có $F = 132 \text{ cm}^2$, $i_{\min} = 3,60$ cm.

$$\lambda = \frac{2.260}{3,60} = 144; \quad \varphi = 0,34;$$

$$\text{Do đó,} \quad \sigma_t = \frac{120000}{0,34.132} = 2674 \text{ daN/cm}^2 > R.$$

Phép thử thứ ba: Chọn thép chữ I số hiệu №65 có $F = 153 \text{ cm}^2$;
 $i_{\min} = 3,77 \text{ cm}.$

Ta tìm được:

$$\lambda = \frac{2.260}{3,77} = 138 \quad ; \quad \varphi = 0,37$$

$$\text{Do đó,} \quad \sigma_t = \frac{120000}{0,37.153} = 2120 \text{ daN/cm}^2 \approx R = 2100 \text{ daN/cm}^2.$$

Ta kết thúc quá trình thử ở đây, vì σ_t gần trùng với R . Bởi vậy mặt cắt ngang cần thiết là №65.

CHƯƠNG 13

CƠ SỞ TÍNH TOÁN VỎ MỎNG KHÔNG MÔMEN

§1. KHÁI NIỆM VỀ LÝ THUYẾT CÓ VÀ KHÔNG MÔMEN

Trong kỹ thuật ta thường phải tính các nồi hơi, bể chứa dầu, khí, các kết cấu bay và hơi. Đó là kết cấu vỏ.

Trong chương này ta chỉ khảo sát những vỏ có chiều dày không đổi, vì vậy dạng hình học của vỏ được xác định bởi dạng mặt trung bình và chiều dày δ của nó. Ta tách ra một phân tố trên mặt trung bình của vỏ (hình 13.1a).

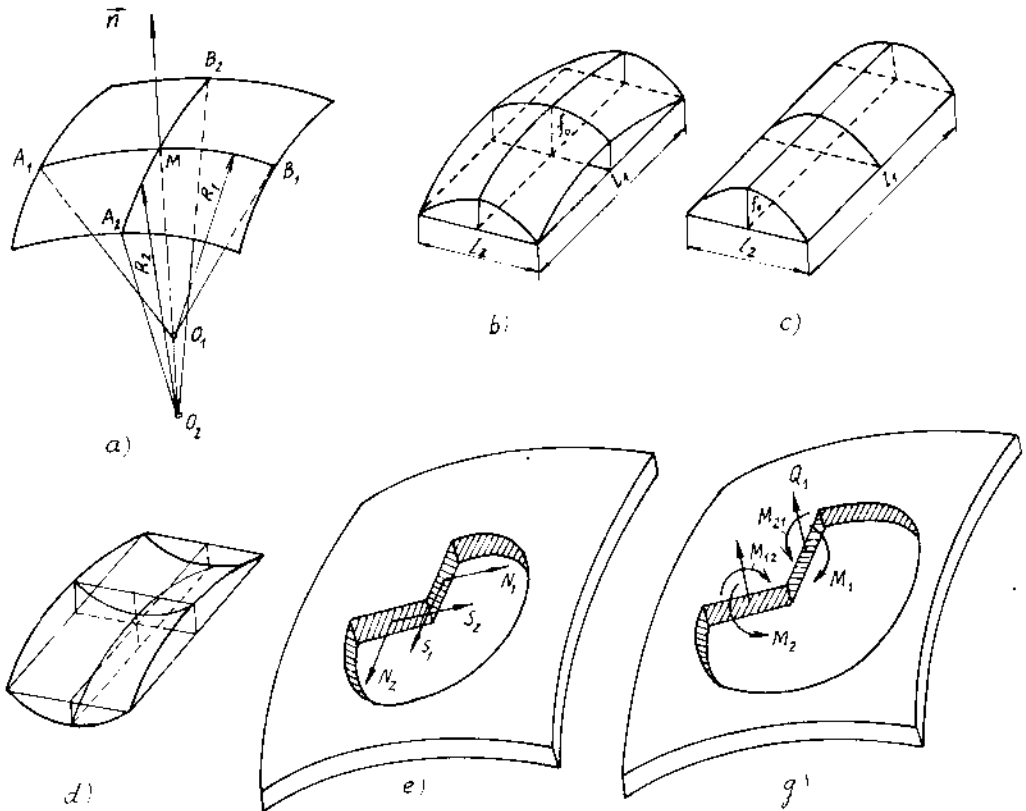
Giao của hai mặt phẳng vuông góc với nhau và cùng chứa pháp tuyến $\vec{n}$ cho ta các đường cong A_1MB_1 và A_2MB_2 trên mặt trung bình, có bán kính cong và độ cong tương ứng $R_1, k_1 = \frac{1}{R_1}$ và $R_2, k_2 = \frac{1}{R_2}$.

Ta luôn luôn có thể tìm được qua mỗi điểm M trên mặt trung bình hai đường cong chính vuông góc nhau mà độ cong của chúng có thuộc tính cực trị: một cực đại và một cực tiểu. Ta ký hiệu những độ cong chính này là k_1 và k_2 . Tích k_1k_2 trên mặt trung bình gọi là độ cong Gauss của vỏ và ký hiệu là:

$$G = k_1 \cdot k_2$$

Căn cứ vào độ cong Gauss người ta phân chia vỏ ra thành:

- Vỏ có độ cong $G > 0$ như vỏ cầu, vỏ elíp (hình 13.1b);
- Vỏ có độ cong $G = 0$ như vỏ trụ, vỏ côníc (hình 13.1c);
- Vỏ có độ cong $G < 0$ như vỏ hypebol (hình 13.1d).



Hình 13.1.

– Vỏ có độ cong hỗn hợp – đó là những vỏ gồm nhiều phần có độ cong khác nhau được ghép lại với nhau.

Dưới tác dụng của tải trọng ngoài bất kỳ ở trong vỏ tồn tại hai nhóm nội lực:

1) Các lực dọc N_1, N_2 và lực trượt S_1, S_2 tác dụng trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt trung bình (hình 13.1e).

2) Các mômen uốn M_1 , M_2 , mômen xoắn M_{12} và M_{21} và các lực cắt Q_1 , Q_2 (hình 13.1g).

Trạng thái ứng suất trong vỏ do nhóm nội lực 1 gây ra gọi là trạng thái ứng suất không mômen và lý thuyết tính toán vỏ chỉ kể đến nhóm nội lực này gọi là lý thuyết vỏ không mômen. Những điều kiện dẫn đến trạng thái ứng suất không mômen là như sau:

1. Bề mặt vỏ phải thay đổi liên tục và đủ trơn.
2. Tải trọng ngoài tác dụng lên vỏ phải trơn và liên tục.
3. Biên của vỏ phải có khả năng dịch chuyển tự do theo phương vuông góc với mặt vỏ. Tuy nhiên những điều kiện biên phải đảm bảo cho vỏ là một hệ bất biến hình hình học.
4. Lực đặt vào biên của vỏ phải nằm trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt trung bình.

Trạng thái ứng suất ở trong vỏ do nhóm nội lực 2 gây ra được gọi là trạng thái ứng suất có mômen. Lý thuyết tính toán vỏ có kể đến nhóm nội lực 2 này gọi là lý thuyết có mômen.

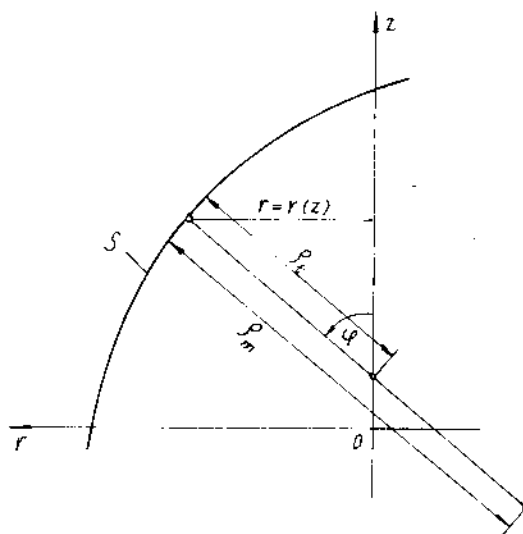
Căn cứ vào chiều dày δ của vỏ, mà vỏ được chia ra thành vỏ dày nếu $\frac{\delta}{\rho_{\min}} \geq \frac{1}{20}$ và vỏ mỏng nếu $\frac{1}{20} \geq \frac{\delta}{\rho_{\min}} \geq \frac{1}{500} \div \frac{1}{1000}$.

Một phân bố của mặt trung bình được tách ra bởi hai mặt kinh tuyến và hai mặt nón rất gần nhau (hình 13.3) sẽ bị kéo theo hai phương vuông góc với nhau. Ngoài ra, phân bố còn bị uốn cong. Sự phân bố đều của ứng suất pháp theo chiều dày δ của thành vỏ tương ứng với trường hợp kéo phân bố theo hai phương. Sự thay đổi độ cong của phân bố trong các mặt kinh tuyến và mặt nón gây ra ứng suất pháp thay đổi theo chiều dày của thành vỏ theo quy luật bậc nhất (hình 13.1g), giống như quy luật phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn thuần túy. Ứng với trường hợp thứ nhất trên các mặt cắt của phân bố chỉ chịu tác dụng của các lực dọc, còn ứng với trường hợp thứ hai các mômen uốn. Trong nhiều bài toán kỹ thuật khi mà ứng suất do các lực dọc gây ra lớn hơn rất nhiều ứng suất gây ra do các mômen uốn, ta có thể bỏ qua ứng suất khi uốn. Điều này có được khi dạng thành vỏ và tải trọng tác dụng lên nó phải

thỏa mãn các điều kiện trên để các nội lực dọc và các ngoại lực tạo thành một hệ lực cân bằng.

Về dạng mà nói, nét đặc trưng của phần lớn các vỏ mỏng là chúng có dạng của những vật thể tròn xoay. Nghĩa là bề mặt của chúng được tạo ra bởi sự xoay của một đường cong phẳng S nào đó quanh trục oz nằm trong mặt phẳng của đường cong đó (hình 13.2). Đường cong này được gọi là “kinh tuyến” và mặt phẳng chứa kinh tuyến và trục quay là “mặt phẳng kinh tuyến”.

Giao tuyến giữa mặt vỏ và mặt nón (có đỉnh trên trục quay) vuông góc với nó gọi là “đường tròn song song”. Mặt chia đôi chiều dày vỏ gọi là mặt trung bình.



Hình 13.2.

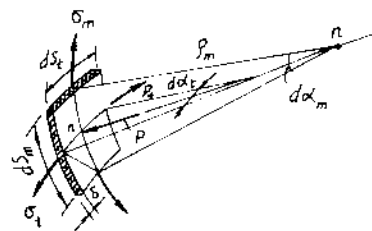
Vỏ mỏng là một trường hợp riêng của một lớp rộng các vỏ, lý thuyết tính

toán thường rất rộng và khá phức tạp. Lý thuyết này được nghiên cứu trong những phần riêng của cơ học vật rắn biến dạng. Đối với vỏ có chiều dày lớn cần phải kể đến không những các mômen uốn mà còn không được phép thừa nhận quy luật tuyến tính của sự phân bố ứng suất pháp theo chiều dày. Điều này làm cho bài toán phức tạp hơn nhiều và nó được giải quyết theo lý thuyết vỏ dày. Ở đây ta khảo sát lý thuyết không mômen của vỏ mỏng đối với các trường hợp khi mà bài toán xác định ứng suất ở trong thành vỏ là bài toán tĩnh định. Chúng ta cũng sẽ làm quen với khái niệm của lý thuyết có mômen qua một ví dụ đơn giản nhất về hiện tượng uốn của vỏ trụ.

§2. TÍNH TOÁN VỎ MỎNG TRÒN XOAY THEO LÝ THUYẾT KHÔNG MÔMEN

Ta khảo sát một vỏ mỏng đối xứng trục chịu tác dụng của trọng lượng chất lỏng hoặc là áp lực khí (hình 13.3). Ta sẽ tách ra từ thành vỏ một phân tố vô cùng bé bởi hai mặt kinh tuyến và hai mặt nón và khảo sát sự cân bằng của nó (hình 13.3).

Do tính đối xứng mà 2 phần vỏ tách ra bởi các mặt nón và các mặt kinh tuyến không có xu hướng trượt lên nhau, vì thế ở mặt cắt này của vỏ không có ứng suất tiếp, mà chỉ có những ứng suất pháp chính tác dụng trên các cạnh của phân tố đã tách ra. Ta ký hiệu những ứng suất này như sau:



Hình 13.3.

σ_m – là ứng suất kinh tuyến,

σ_t – là ứng suất vòng.

Ứng với lý thuyết không mômen ta xem rằng ứng suất σ_m và σ_t trên các diện tích của các cạnh phân tố là phân bố đều. Ngoài ra, tất cả các kích thước của vỏ ta sẽ biểu diễn trên mặt trung bình của nó. Mặt trung bình của vỏ là mặt có hai độ cong. Bán kính cong của kinh tuyến ở điểm khảo sát ta ký hiệu là ρ_m ; bán kính cong còn lại bằng đoạn thẳng trên pháp tuyến với bề mặt vỏ nằm giữa điểm khảo sát của mặt trung bình và trục oz (hình 13.2), ta ký hiệu là ρ_t .

Các lực $\sigma_m \cdot \delta \cdot ds_t$ và $\sigma_t \cdot \delta \cdot ds_m$ tác dụng trên các cạnh của phân tố, còn ở mặt trong của phân tố này chịu tác dụng của áp lực chất lỏng p. Áp lực này có hợp lực là $p ds_t ds_m$. Hình chiếu của tất cả các lực lên phương pháp tuyến n-n có dạng:

$$2 \sigma_m \delta ds_t \sin \frac{d\alpha_m}{2} + 2 \sigma_t \delta ds_m \sin \frac{d\alpha_t}{2} - p ds_t ds_m = 0 \quad (a)$$

Khi thay thế ở trong phương trình (a) sin bởi đối số của nó (do góc α_i rất bé) và khi chia tất cả cho $\delta ds_i ds_m$, ta nhận được:

$$\sigma_m \frac{d\alpha_m}{ds_m} + \sigma_i \frac{d\alpha_i}{ds_i} = \frac{p}{\delta}$$

Hoặc là, khi kể đến $\frac{d\alpha_i}{ds_i} = \frac{1}{\rho_i}$ và $\frac{d\alpha_m}{ds_m} = \frac{1}{\rho_m}$, cuối cùng ta tìm được:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_i}{\rho_i} = \frac{p}{\delta} \quad (13.1)$$

Quan hệ (13.1) gọi là phương trình Laplace, người đã nhận được phương trình này vào đầu thế kỷ XIX khi nghiên cứu sức căng bề mặt của các chất lỏng. Ở đây cần chú ý đến sự tương tự giữa màng mỏng của chất lỏng chịu sức căng bề mặt và thành vỏ. Sự tương tự này là ở chỗ màng mỏng cũng như là thành vỏ khi chịu kéo đều duy trì một thể tích nào đó của chất lỏng có dạng bề mặt xác định ở trạng thái cân bằng. Ví như một giọt chất lỏng nằm ở trên bề mặt khô không bị tràn ra là nhờ có lực căng bề mặt. Ví dụ đã chỉ ra gọi cho các nhà kết cấu dạng giọt nước của những bể chứa. Những bể chứa này được dùng để chứa các sản phẩm dầu mỏ và có hàng loạt những ưu điểm so với những bể chứa khác.

Phương trình Laplace là để tìm σ_i . Để xác định σ_m ta sẽ thiết lập phương trình hình chiếu của tất cả các lực tác dụng trên phần vỏ đã được tách ra lên trục oz (hình 13.4b). Diện tích của mặt cắt vòng của thành vỏ bằng: $2\pi R\delta$. Do tính đối xứng của hệ đối với trục oz mà các ứng suất σ_m được phân bố đều trên diện tích này. Do đó:

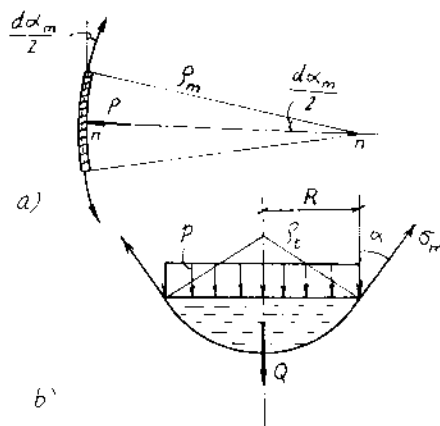
$$\sigma_m 2\pi R\delta \cos\alpha - p\pi R^2 - Q = 0$$

Từ đó rút ra:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta \cos\alpha} + \frac{Q}{2\pi R\delta \cos\alpha} \quad (13.2)$$

trong đó: Q là trọng lượng của phần thùng và phần chất lỏng ở phía dưới của vỏ kể từ mặt cắt song song.

p là áp lực ở một điểm trong chất lỏng, áp lực này là như nhau theo tất cả các phương và bằng $\gamma \cdot h$; ở đây h là độ sâu của điểm khảo sát, còn γ là trọng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng. Đôi khi chất lỏng được chứa ở trong vỏ có áp lực dư q nào đó so với áp lực khí quyển. Trong trường hợp này $p = \gamma h + q$. Phương trình (13.1) và công thức



Hình 13.4.

(13.2) cho phép tìm cả hai ứng suất σ_m và σ_t ở mỗi điểm của thành vỏ. Ta sẽ khảo sát những ví dụ cụ thể dưới đây:

a) Vỏ cầu chịu áp lực khí phân bố đều bên trong q , ta sẽ bỏ qua trọng lượng bản thân của thành thùng và trọng lượng khí. Do tính đối xứng của thùng mà các ứng suất σ_m và σ_t như nhau ở tất cả các điểm của nó, rõ ràng trong phương trình (13.1) $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$, $\rho_t = \rho_m = R$, còn $p = q$, ta sẽ có:

$$\sigma = \frac{qR}{2\delta} \quad (13.3)$$

b) Một nồi hơi hình trụ chịu áp lực khí hoặc hơi nước phân bố đều bên trong $p = q$ (hình 13.5). Đường sinh có $\rho_m = \infty$ là đường kinh tuyến ở trong phần hình trụ của nồi hơi. Vì thế từ phương trình (13.1) chúng ta sẽ tìm được ứng suất vòng khi đặt $\rho_t = R$, còn $p = q$:

$$\sigma_t = \frac{qR}{\delta} \quad (13.4)$$

Theo công thức (13.2) ta tìm được ứng suất kinh tuyến, khi xem $\cos \alpha = 1$, còn $Q = 0$:

$$\sigma_m = \frac{qR}{2\delta} \quad (13.5)$$

Khi so sánh biểu thức (13.4) với biểu thức (13.5) ta thấy rằng các ứng suất kéo thành nổi hơi theo phương vòng bằng hai lần lớn hơn ứng suất tác dụng dọc theo đường sinh.

Ở các đáy hình cầu của nổi hơi ứng suất được xác định theo công thức (13.3), với bán kính của chỏm cầu này là R_1 .

c) Một bể chứa hình trụ có đáy là hình nón chịu tác dụng của trọng lượng chất lỏng (hình 13.6). Trong tính toán ta sẽ bỏ qua trọng lượng của thành bể.

Bán kính cong của các kinh tuyến $\rho_m = \infty$. Theo công thức (13.1) σ_t được xác định như sau:

$$\sigma_t = \frac{p \rho_t}{\delta} \quad (b)$$

Ở độ sâu $(H + h - y)$ áp lực bằng:

$$p = \gamma (H + h - y) \quad (c)$$

Đối với phần hình nón ta có:

$$R_y = \frac{y}{h} R ; \quad \rho_t = \frac{R_y}{\cos \alpha} = \frac{yR}{h \cos \alpha} \quad (d)$$

Thay các biểu thức (c) và (d) vào công thức (b), ta được công thức để xác định ứng suất vòng đối phần hình nón:

$$\sigma_t = \frac{\gamma R}{\delta h \cos \alpha} (H + h - y) y \quad (13.6)$$

Đối với phần hình trụ có $\rho_t = R$, ứng suất vòng có dạng:

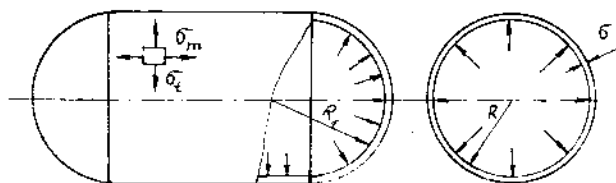
$$\sigma_t = \frac{\gamma R}{\delta} (H + h - y) \quad (13.7)$$

Biểu đồ σ_t được cho ở bên trái hình 13.6. Trên phần hình nón biểu đồ này là một parabol có cực đại tại $y = 0,5 (H + h)$. Khi $H > h$, cực đại này có giá trị quy ước, còn khi $H \leq h$ nó có giá trị thực nằm trong giới hạn của hình nón và bằng:

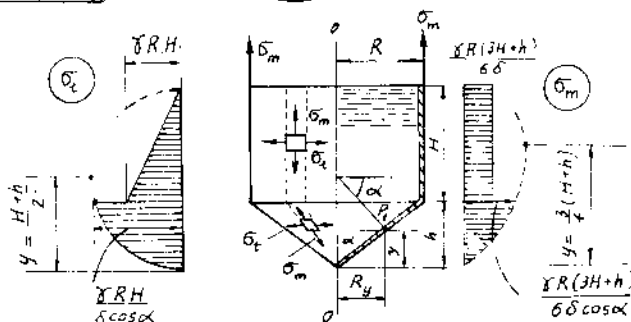
$$\max \sigma_t = \frac{1}{4} \frac{\gamma R (H + h)^2}{\delta h \cos \alpha} \quad (13.8)$$

Bây giờ ta chuyển sang tính σ_m . Trọng lượng Q của khối chất lỏng ở phần hình nón xác định bởi tọa độ y là:

$$Q = \frac{1}{3} \gamma \cdot y \cdot \pi \cdot R_y^2 = \frac{\gamma}{3} \frac{\pi y^3 R^2}{h^2} \quad (g)$$



Hình 13.5



Hình 13.6.

Thay các biểu thức (c), (d) và (g) vào công thức (13.2) ta có biểu thức σ_m như sau:

$$\sigma_m = \frac{\gamma R}{6 \delta h \cos \alpha} [3(H+h) - 2y] y \quad (13.9)$$

Biểu đồ σ_m được cho ở bên phải hình 13.6.

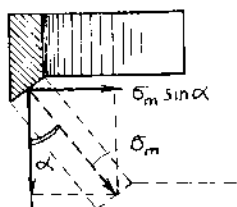
Biểu đồ σ_m trên phần hình nón cũng là một parabol. σ_m có cực đại quy ước ở tọa độ $y = 0,75(H+h)$ và có giá trị cực đại thực khi $H \leq \left(\frac{1}{3} h\right)$ và bằng:

$$\max \sigma_m = \frac{3}{16} \frac{\gamma R (H+h)^2}{\delta h \cos \alpha} \quad (13.10)$$

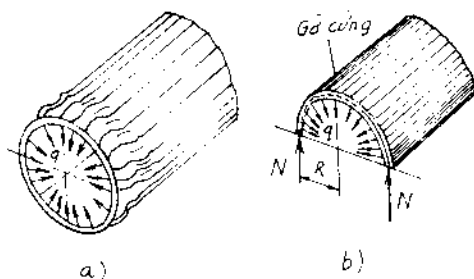
Trong phần hình trụ σ_m là một hằng và bằng ứng suất ở biên trên của vỏ:

$$\sigma_m = \frac{\gamma R (3H + h)}{6\delta} \quad (13.11)$$

Qua những ví dụ trên ta thấy rằng ở những miềm mà mặt vỏ có sự thay đổi đột ngột, ví dụ, miềm tiếp giáp giữa phần hình trụ với phần hình cầu (hình 13.5) và với phần hình nón hình (13.6), thành phần hướng kính của ứng suất kinh tuyến $\sigma_m \sin \alpha$ không được cân bằng (hình 13.7).



Hình 13.7.



Hình 13.8.

Thành phần này tạo ra tải trọng phân bố theo chu vi $q = \delta \sigma_m \sin \alpha$ và có xu hướng bóp méo vỏ trụ vào phía trong (hình 13.8a). Vì thế để khắc phục hiện tượng uốn này cần phải cấu tạo ở đây một đai gia cố bằng các thép chữ L hoặc chữ I. Đai gia cố sẽ chịu tải trọng hướng kính q (hình 13.8b),

Nếu bỏ qua sự tác dụng tương hỗ của đai gia cố và vỏ, thì từ điều kiện cân bằng của nửa đai ta sẽ tìm được lực dọc nén đai $N = Rq$.

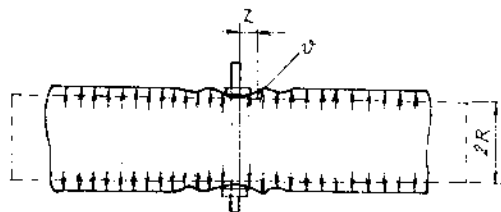
Tuy nhiên việc cấu tạo đai gia cố như thế không thể khắc phục được hoàn toàn hiện tượng uốn của thành vỏ. Vì rằng, đai gia cố lại cản trở sự giãn nở của mép vỏ liên kết với đai. Do đó, các đường sinh của vỏ ở gần đai lại bị uốn. Hiện tượng này gọi là hiệu ứng biên. Nó có thể gây ra sự tăng cục bộ đáng kể ứng suất ở thành vỏ. Dưới đây ta sẽ khảo sát một bài toán đơn giản nhất khi kể đến hiệu ứng biên của vỏ trụ.

§3. HIỆU ỨNG BIẾN TRONG VỎ TRỤ

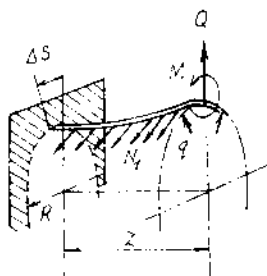
Ta xét một vỏ trụ dài thành mỏng chịu áp lực bên trong q . Hai đoạn vỏ được nối với nhau bằng các mặt bích. Nếu không có mặt bích, thì dưới tác dụng của q đường kính vỏ sẽ nở đều dọc theo suốt chiều dài vỏ. Giả sử mặt bích rất cứng, khi đó có thể xem rằng đường kính vỏ ở nơi đặt mặt bích không thay đổi (hình 13.9).

Rõ ràng là vỏ chỉ dẫn nở được ở những miền xa nơi có mặt bích, còn ở miền gần mặt bích thành vỏ sẽ bị uốn. Ta sẽ nghiên cứu hiệu ứng biến này của vỏ.

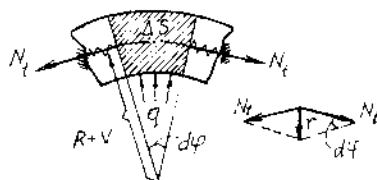
Giả sử là ban đầu trên các mặt cắt ngang của vỏ lực dọc bằng không ($N_m = 0$). Gọi R là đường kính trung bình của vỏ trước biến dạng, δ là chiều dày thành vỏ. Tưởng tượng tách ra khỏi vỏ một dải có chiều rộng là cung ΔS bởi các mặt cắt dọc qua trục vỏ. Trên hình 13.10 chỉ ra dải vỏ đó và các lực tác dụng lên nó.



Hình 13.9.



Hình 13.10



Hình 13.11.

Trước biến dạng và sau biến dạng vỏ luôn luôn có dạng một vật thể tròn xoay; vì thế, toàn bộ dải đều có cùng một điều kiện làm việc (hình 13.11).

Về sau ta sẽ lấy $\Delta S = 1$. Dải này có dạng của một dầm bị ngàm chặt ở nơi có mặt bích. Số gia của bán kính vỏ ta ký hiệu là v . Số gia v này chính là độ võng của dầm dải $V = V(z)$.

Áp lực bên trong là một trong những tải trọng ngoài tác dụng lên dầm có trị số là $q \cdot \Delta S = q$ (vì $\Delta S = 1$). Ngoài ra trên các mặt cắt dọc còn chịu các lực vòng phân bố N_t . Lực N_t này tỷ lệ với độ dẫn của chu vi mặt cắt ngang của vỏ. Vì thế, trên hình 13.11 là mặt cắt ngang của dầm dải với các lực vòng N_t được biểu diễn quy ước như những phản lực đàn hồi nào đó. Hợp lực của N_t là r . Dễ thấy là có thể xem hợp lực r này như một loại tải trọng thứ hai tác dụng lên dầm dải.

Từ hình 13.11 ta tìm được:

$$r = 2N_t \sin \frac{d\varphi}{2} = N_t \frac{\Delta S}{R + v}$$

Khi $\Delta S = 1$ và $R \gg v$ thì:

$$r = \frac{N_t}{R} \quad (13.12)$$

Độ dẫn tương đối của bán kính R , và do đó là độ dẫn tương đối của chu vi mặt cắt ngang bằng:

$$\varepsilon_t = \frac{v}{R}$$

Ứng suất vòng tương ứng với định luật Huc là:

$$\sigma_t = \varepsilon_t E = \frac{v}{R} E.$$

Từ đó rút ra lực N_t :

$$N_t = \sigma_t \cdot \delta \cdot 1 = \frac{\delta E}{R} v$$

Do đó tải trọng r có dạng:

$$r = \frac{N_1}{R} = \frac{\delta E}{R^2} v \quad (13.13)$$

Có thể xem lực r như là phản lực đàn hồi nào đó. Nó có tác dụng chống lại độ võng v của dầm dài với hệ số tỷ.

$$K = \frac{\delta E}{R^2} \text{ [kN/cm}^3\text{]}$$

Như vậy, tải trọng tác dụng lên dầm dài gồm có: q và r có chiều ngược nhau.

Gọi p là áp lực tổng cộng tác dụng vào dầm dài, ta có:

$$p = q + r = q - kv \quad (h)$$

Theo các liên hệ vi phân giữa nội lực với ngoại lực và phương trình vi phân của đường đàn hồi ta có:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M}{E_1 J}$$

hoặc là:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{p}{E_1 J} \quad (i)$$

Thay $p = q - kv$ vào (i) ta được phương trình sau đây:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q - kv}{E_1 J}$$

$$\text{Đặt: } \frac{k}{E_1 J} = 4\beta^4; \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4E_1 J}} \quad (k)$$

Cuối cùng ta có:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\beta^4 v = \frac{q}{E_1 J} \quad (13.14)$$

Trong (13.14) J – mômen quán tính mặt cắt ngang của dầm dài, khi $\Delta S = 1$, $J = \frac{\delta^3}{12}$.

E_1 – môđun đàn hồi khác nào đó được thay thế cho môđun đàn hồi thông thường E . Lý do là do sự tác dụng tương hỗ của các dải bên cạnh mà biến dạng dọc ε_1 phải thay đổi như thế nào đó, để biến dạng ngang tương ứng bằng không ($\varepsilon_2 = 0$). Từ công thức của định luật Húc đối với trạng thái ứng suất phẳng (hình 13.12).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Khi $\varepsilon_2 = 0$, rút ra là:

$$\sigma_2 = \mu \sigma_1.$$

Thay kết quả này vào phương trình thứ nhất của (1) ta có:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} (1 - \mu^2)$$

Hay là:

$$\sigma_1 = \frac{E}{(1 - \mu^2)} \varepsilon_1 = E_1 \varepsilon_1$$

trong đó:

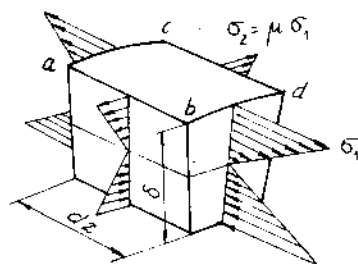
$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}$$

Quy luật phân bố ứng suất trên các mặt cắt phân tố được cho trên hình (13.12). Vì thế, độ cứng khi uốn của dầm dải là:

$$E_1 J = \frac{\delta^3 E}{12(1 - \mu^2)}, [\text{lực} \cdot \text{L}^2]$$

Khi đó, hệ số β có thứ nguyên $\left[\frac{1}{\text{chiều dài}} \right]$ sẽ là:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{E_1 J}} = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \mu^2)}{R^2 \delta^2}} \quad (13.15)$$



Hình 13.12.

Nếu trên mặt cắt ngang của vỏ có lực dọc N_m (nó được đặc trưng bởi sự phân bố đều của σ_m), thì độ dẫn tỷ đối theo phương vòng sẽ là:

$$\varepsilon_t = \frac{v}{R} = \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_m}{E}$$

Từ phương trình này ta tìm được σ_t và sau đó là N_t :

$$N_t = \sigma_t \cdot \delta \cdot 1 = \frac{\delta E}{E} v + \mu \delta \sigma_m$$

Tải trọng r bây giờ được tìm theo công thức (11.12):

$$r = \frac{\delta E}{R^2} v + \frac{\mu \delta \sigma_m}{R} \quad (m)$$

Như vậy khi chú ý đến các biểu thức (h), (i) và (m) phương trình vi phân của dầm dãi chịu uốn trong trường hợp này là:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\beta^4 v = \frac{1}{E_1 J} \left(q - \frac{\mu \delta \sigma_m}{R} \right) \quad (13.16)$$

Dễ thấy sự xuất hiện của số hạng thứ hai trong vế phải của phương trình (13.16) là do vỏ chịu kéo theo phương dọc với ứng suất σ_m thì đồng thời kèm theo sự thắt lại theo phương ngang. Do đó, số hạng này có dấu ngược lại với q .

Các phương trình (13.14) và (13.16) đúng đối với tải trọng đối xứng bất kỳ.

Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm của bài toán này đối với trường $q = \text{const}$ và $\sigma_m = 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình (13.14) được tìm dưới dạng:

$$v = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{\beta z} (C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z) + \frac{q}{4\beta^4 E_1 J} \quad (13.17)$$

Căn cứ vào ý nghĩa vật lý của bài toán ta thấy rằng, khi z tăng thì v cần phải tiến tới một giá trị xác định. Thế nhưng, từ (13.17) ta thấy có một sự mâu thuẫn là khi $z \rightarrow \infty$ thì đồng thời đại lượng $e^{\beta z} \rightarrow \infty$. Vì thế, cần phải lấy $C_3 = C_4 = 0$. Hai hằng số C_1, C_2 được tìm

từ điều kiện liên kết giữa mặt bích và vỏ. Nghĩa là, khi $z = 0$, $\frac{dv}{dz} = 0$ và $v = 0$. Thực hiện các điều kiện này ta có:

$$C_1 = C_2 = -\frac{q}{4\beta^4 E_1 J} = -\frac{qR^2}{8E}$$

và

$$v = \frac{qR^2}{8E} \left[1 - e^{-\beta z} (\sin \beta z + \cos \beta z) \right] \quad (13.18)$$

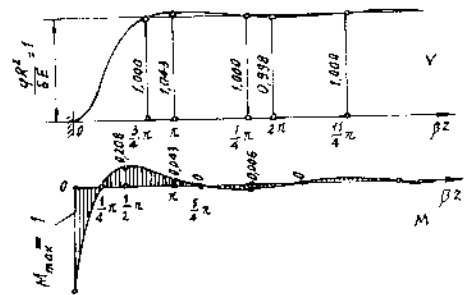
Mômen uốn M và lực cắt Q đối với dầm dài có chiều rộng $\Delta S = 1$ được tìm như sau:

$$M = E_1 J \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{qR\delta}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) \quad (13.19)$$

$$Q = \frac{dM}{dz} = -\frac{q\sqrt{R\delta}}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\beta z} \cos \beta z \quad (13.20)$$

Biểu đồ v và M có dạng như trên hình 13.13. Ở đó trên trục hoành được biểu diễn bởi tọa độ không thứ nguyên βz .

Từ các biểu đồ trên hình 13.13 có thể thấy rõ là sóng biến dạng uốn của thành vỏ càng xa mặt bích thì tắt càng nhanh. Cụ thể là khi $\beta z = \pi$, độ võng v chỉ khác với độ tăng bán kính vỏ $\frac{qR^2}{8E}$ khi dãn nở tự do không có mặt bích là 4,3%. Ở tọa độ này mômen uốn cũng bằng 4,3% mômen uốn lớn nhất tại mặt bích.



Hình 13.13.

với $\mu = 0,3$ ta có:

$$Z = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi \sqrt{2\delta}}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} = 2,4 \sqrt{R\delta}$$

Khi $\delta = 0,1R$ thì $Z = 0,76 R$.

Vì thế, với độ chính xác đến 5% ta có thể xem rằng, hiệu ứng biên chỉ có hiệu quả trên một chiều dài nhỏ hơn bán kính vỏ. Đến đây ta thấy rõ là, vì sao ta lại gọi hiện tượng vừa nghiên cứu là hiệu ứng biên. Đây là một minh chứng nữa về nguyên lý Xanh-vơ-năng

Do hiệu ứng biên mà ứng suất cực đại có thể có những giá trị rất lớn.

Ví dụ: khi $z = 0$ và $\mu = 0,3$ ta có:

$$M_{\max} = \frac{qR\delta}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot 6}{\delta^2} = \frac{3qR}{\delta \sqrt{3(1-\mu^2)}} = 1,82 \frac{qR}{\delta}$$

Nghĩa là trong trường hợp này ứng suất cực đại do hiệu ứng biên lớn hơn ứng suất cực đại xác định theo lý thuyết không mômen là 1,82 lần.

Đối với vật liệu dẻo thì sự nâng cao ứng suất do hiệu ứng biên không làm giảm độ bền tổng thể của vỏ, mà chỉ dẫn đến biến dạng dẻo cục bộ. Tuy nhiên, ứng suất này lại rất nguy hiểm đối với vật liệu giòn. Ví dụ, đối với các bể chứa bằng bê tông cốt thép, ứng suất nói trên có thể gây ra những vết nứt. Do đó, điều kiện không bị thấm của bể chứa bị vi phạm. Một trong những giải pháp kết cấu để khắc phục nhược điểm này là tạo ra những ứng suất nén trước trong các thành bể chứa. Đôi khi có thể liên kết giữa thành vỏ với đáy bằng một kết cấu cho phép thành bể giãn nở hoàn toàn tự do hoặc hầu như tự do. Giải pháp kết cấu này làm giảm đáng kể hoặc hoàn toàn khắc phục được những ứng suất của hiệu ứng biên.

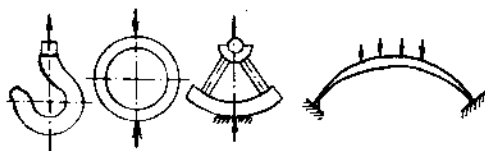
Lý thuyết tổng quát về hiệu ứng biên được trình bày trong các tài liệu riêng của cơ học vật rắn biến dạng với việc sử dụng lý thuyết vỏ có mômen.

CHƯƠNG 14

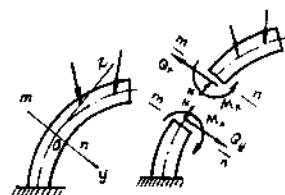
TÍNH TOÁN THANH CONG

§1. KHÁI NIỆM CHUNG

Trong nhiều lĩnh vực khoa học kỹ thuật đặc biệt là trong ngành xây dựng và chế tạo máy thường gặp những chi tiết và cấu kiện kết cấu có trục cong. Trên hình 14.1 là một vài ví dụ về những chi tiết và cấu kiện đó. Móc cần trục, đai vành tròn, bánh xe, vòm cầu hai khớp, v.v...



Hình 14.1.



Hình 14.2.

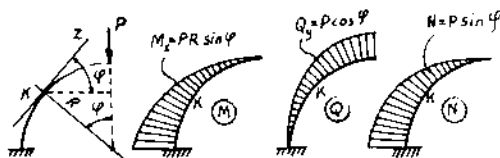
Những chi tiết và cấu kiện kết cấu có trục là đường cong không gian rất ít gặp, vì thế trong chương này ta sẽ chỉ quan tâm đến những thanh có trục là những đường cong phẳng và mặt cắt ngang của nó có một trục đối xứng trùng với đường tải trọng. Với những điều kiện như thế nội lực trên mặt cắt ngang bất kỳ của thanh cong chỉ có ba thành phần: lực dọc N , lực cắt Q và mômen uốn M_x (hình 14.2). Các thành phần nội lực này được xác định như thường lệ bằng phương pháp mặt cắt. Cũng như trước, trục Oz trùng với tiếp tuyến của trục thanh. Còn trục Oy trùng với trục đối xứng của mặt cắt ngang. Trên hình 14.3 là sơ đồ tính của một thanh cong tròn và các biểu đồ nội lực M_x , Q_y và N .

Khi tính toán thanh cong nên xác định vị trí của các mặt cắt ngang bằng tọa độ độ dọc cực R và φ .

§2. THANH CONG CHỊU KÉO VÀ NÉN

Khi ngoại lực tác dụng vuông góc với một mặt cắt ngang nào đó của thanh cong thì ở những mặt cắt ngang khác của nó sẽ phát sinh những mômen uốn. Vì thế, nếu chỉ có những lực tập trung tác dụng lên thanh cong thì không thể tạo ra được một thanh cong chỉ chịu kéo (hoặc nén).

Một thanh cong tròn chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều vuông góc với trục thanh sẽ làm việc trong điều kiện kéo (hoặc nén) đúng tâm. Trong trường hợp này, độ co và giãn tỷ đối của tất cả các thớ, và do đó là các ứng suất đều như nhau.



$$\epsilon = \text{hằng} ; \sigma = \text{hằng}.$$

Hình 14.3.

Trên cơ sở giả thiết mặt cắt ngang phẳng ta xét biến dạng của mặt phân tố thanh như trên hình 14.4:

Khi biến dạng mặt cắt ngang của thanh bị xoay đi một góc $\Delta d\varphi$ quanh tâm cong. Chiều dài ban đầu của một thớ bất kỳ cách trọng tâm mặt cắt một khoảng y bằng:

$$dS_y = d\varphi (R + y),$$

Còn độ giãn của thớ này là:

$$\Delta dS_y = \Delta d\varphi (R + y).$$

Vì thế, độ giãn tỷ đối:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dS_y}{dS_y} = \frac{\Delta d\varphi (R + y)}{d\varphi (R + y)} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \text{hằng}.$$

Nếu xem rằng các thớ dọc không nén ép lên nhau trong quá trình biến dạng thì theo định luật Húc ta có:

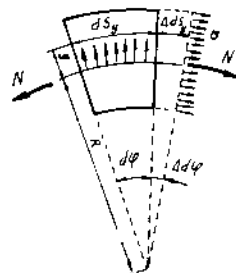
$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E = \text{hằng}.$$

Biểu đồ ứng suất được cho trên hình 14.4. Lực dọc được đặt vào trọng tâm mặt cắt bằng:

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma \cdot F \quad (a)$$

Từ công thức (a) rút ra:

$$\sigma = \frac{N}{F}$$



Hình 14.4.

§3. THANH CONG CHỊU UỐN THUẦN TÚY

Khi xác định ứng suất trong thanh cong phẳng chịu uốn thuần túy, ta vẫn sử dụng giả thiết mặt cắt ngang phẳng và bỏ qua ứng suất bé theo phương hướng kính.

Xét phân tố thanh chiều dài dS có mặt cắt ngang đối xứng đối với trục Oy (hình 14.5b). Trục Ox là trục trung hoà của mặt cắt ngang. Biểu đồ biến dạng dài tuyệt đối và tỷ đối của các thớ được cho trên hình 14.5c, d. Độ dãn tuyệt đối theo chiều cao mặt cắt biến thiên theo quy luật đường thẳng, còn độ dãn tỷ đối theo quy luật đường cong (hyperbol). Điều này được giải thích bởi biểu thức sau đây:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta dS_p}{\rho dS_p} = \frac{\Delta d\varphi \cdot y}{d\varphi \cdot \rho} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y}$$

Theo định luật Húc:

$$\sigma = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y} \quad (14.1)$$

Trong trường hợp này:

$$N = \int_F \sigma dF = \int_F E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y} dF = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y}{r + y} dF = 0$$

Nhưng thừa số

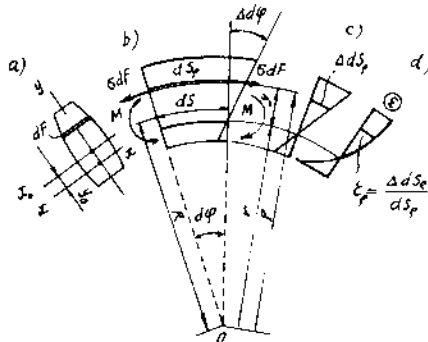
$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ trước dấu

tích phân không thể bằng không, nên:

$$\int_F \frac{y}{r + y} dF = 0$$

(14.2)

Điều kiện này cho phép xác định vị trí trục trung hoà



Hình 14.5.

(lớp trung hoà). Từ điều kiện xác định vị trí trục trung hoà (14.2) rõ ràng là trục trung hoà trong thanh cong không đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Tổng mômen của các lực sơ cấp σdF trên mặt cắt ngang đối với trục trung hoà sẽ là:

$$M = \int_F (\sigma dF) y = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y^2}{r+y} dF \quad (14.3)$$

Có thể viết tích phân trong (14.3) dưới dạng:

$$\int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F \left(y - \frac{ry}{r+y} \right) dF = \int_F y dF - r \int_F \frac{y}{r+y} dF$$

Kể đến (11.2) ta nhận được:

$$\int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F y dF = S_x = F \cdot y_0 \quad (14.4)$$

trong đó: $S_x = F \cdot y_0$ – là mômen tĩnh (mômen diện tích cấp không) của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà (y_0 – khoảng cách từ trọng tâm của mặt cắt đến trục trung hoà (hình 14.5)).

Thay (14.4) vào (14.3) ta có:

$$M = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} S_x.$$

Do đó:
$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{ES_x} \quad (14.5)$$

Thay kết quả (14.5) vào biểu thức (14.1) với chú ý là $r + y = \rho$ (ρ – khoảng cách từ tâm cong đến điểm cần xác định ứng suất) công thức tính ứng suất trong thanh cong có dạng cuối cùng:

$$\sigma = \frac{M y}{S_x \rho} \quad (14.6)$$

Công thức (14.6) khác với công thức tính ứng suất trong thanh thẳng trước hết bởi đại lượng thay đổi $\rho = \rho(y)$ ở mẫu số.

Để thấy là biểu đồ ứng suất trên mặt cắt của thanh cong thay đổi theo quy luật hyperbol.

Để thấy công thức tính ứng suất trong thanh thẳng là một trường hợp riêng của công thức tính ứng suất trong thanh cong ta làm các phép toán sau đây:

$$S_x = \int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \frac{1}{r} \int_F \frac{y^2}{1+y/r} dF = \frac{1}{r} J_x^* \quad (b)$$

trong đó: $J_x^* = \int_F \frac{y^2}{1+y/r} dF$ được gọi là mômen quán tính của mặt cắt ngang của thanh cong.

Rõ ràng là đối với thanh thẳng $r = \infty$ thì $J_x = J_x^* \int_F y^2 dF$.

Khi kể đến (b) công thức (11.6) có dạng:

$$\sigma = \frac{M}{J^*} \cdot \frac{y}{1+y/r} \quad (14.7)$$

Nếu $r \rightarrow \infty$, thì công thức (14.7) đến giới hạn trùng với công thức tính ứng suất trong thanh thẳng chịu uốn thuần túy.

§4. VỊ TRÍ TRỤC TRUNG HOÀ

Để tính được ứng suất theo công thức (11.6) ta cần phải biết được vị trí trục trung hoà.

Gọi r là bán kính cong của lớp trung hoà, R – bán kính cong của trục thanh. Còn y – khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt đến trục trung hoà (hình 14.6). Khi đó ta có:

$$y = R - r.$$

Khi xuất phát từ điều kiện (14.2) ta có thể tìm được lời giải chính xác cho bài toán này đối với từng mặt cắt ngang cụ thể.

Nếu đặt: $r + y = \rho$; $y = \rho - r$.

$$\text{Ta có: } \int_F \frac{y}{r+y} dF = \int_F \frac{\rho-r}{\rho} dF = \int_F dF - r \int_F \frac{dF}{\rho} = 0,$$

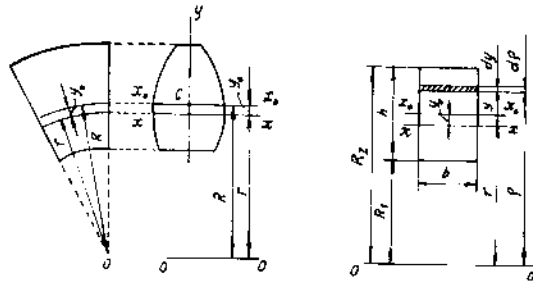
Từ đây rút ra là:

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} \quad (14.8)$$

Đối với trường hợp mặt cắt chữ nhật (hình 14.6):

$$\text{thì } \int_F \frac{dF}{\rho} = b \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = b (\ln R_2 - \ln R_1) = b \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$\text{Do đó, } r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (14.9)$$



Hình 14.6.

Trong nhiều trường hợp việc xác định vị trí trục trung hoà có thể được thực hiện theo các phương pháp gần đúng.

Để tìm nghiệm gần đúng ta dùng công thức:

$$S_x = \frac{1}{r} J'_x.$$

Mặt khác:

$$S_x = F \cdot y_o ;$$

$$\text{Vì vậy ta tìm được: } y_o = \frac{J_x^*}{r F}$$

Ta nhận xét rằng, bán kính cong càng lớn, thì mômen quán tính J_x^* của dầm cong càng gần tới mômen quán tính thông thường. Vì thế để giải gần đúng có thể đặt:

$$J_x^* \approx J_{x_0} ; \quad r \approx R ;$$

$$\text{do đó: } y_o \approx \frac{J_{x_0}}{R F} .$$

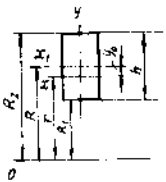
Đối với trường hợp khảo sát:

$$y_o \approx \frac{b}{12} \cdot \frac{h^3}{R \cdot b h} = \frac{h^2}{12 R}$$

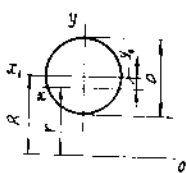
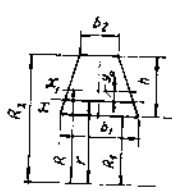
Lời giải của bài toán đối với một số dạng mặt cắt thường gặp được cho trong bảng 14.1 dưới đây. Những công thức gần đúng cho trong bảng này phù hợp tốt đối với những thanh có độ cong trung bình, khi:

$$\frac{h}{R} < \frac{1}{2}$$

Bảng 14.1.

Dạng mặt cắt	Nghiệm	
	đúng	gần đúng
	$y_o = \frac{h^2}{12R}$	$r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

Bảng 14.1 tiếp theo

Dạng mặt cắt	Nghiệm	
	đúng	gần đúng
	$y_0 = \frac{D^2}{16R}$	$r = \frac{D^2}{8 \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} \right)}$
	$y_0 = \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{18(b_1 + b_2)^2} \times \frac{h^2}{R}$	$r = \frac{(b_1 + b_2) h^2}{2 [(b_1 R_2 - b_2 R_1) \ln \frac{R_2}{R_1} + (b_1 - b_2) h]}$

§5. ỨNG SUẤT TRONG THANH CHỊU UỐN VÀ KÉO (NÉN) ĐỒNG THỜI

Nếu trên mặt cắt ngang của thanh cong chịu tác dụng đồng thời của mômen uốn và lực dọc thì ứng suất tại một điểm theo nguyên lý độc lập tác dụng:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{S_y} \cdot \frac{y}{\rho} \quad (14.10)$$

Trong công thức (14.10) mômen uốn M được lấy đối với trục đi qua trọng tâm $x_0 - x_0$, bởi vì ứng suất do lực dọc được tìm từ điều kiện lực dọc đặt ở trọng tâm mặt cắt ngang.

Ví dụ: Tìm ứng suất lớn nhất trong một móc cần trục chịu lực như hình 14.7.

Mặt cắt ngang của móc được xem là hình thang có $b_1 = 4$ cm, $b_2 = 1$ cm, $h = 9$ cm, $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 12$ cm, $P = 2,5$ tấn.

GIẢI

Khoảng cách từ tâm cong đến trọng tâm mặt cắt là:

$$R = R_1 + \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = 6,6 \text{ cm.}$$

Bán kính cong của lớp trung hoà được tìm theo công thức chính xác cho trong bảng (14.1).

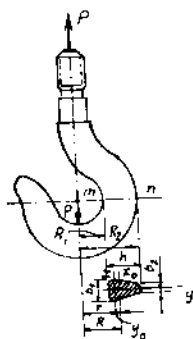
$$r = \frac{(4 + 1) 9^2}{2 \left[(4 \cdot 12 - 1 \cdot 3) \ln \frac{12}{3} - 9(4 - 1) \right]} = 5,72 \text{ cm.}$$

Do đó:

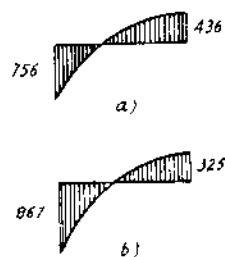
$$y_o = R - r = 0,88 \text{ cm}$$

Diện tích mặt cắt ngang:

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 22,5 \text{ cm}^2$$



Hình 14.7.



Hình 14.8.

Vì thế:

$$S_x = F y_o = 22,5 \cdot 0,88 = 19,8 \text{ cm}^3.$$

Tọa độ các điểm biên của mặt cắt:

$$y_n = R_2 - r = 12,00 - 5,72 = 6,28 \text{ cm}$$

$$y_m = R_1 - r = 3,00 - 5,72 = -2,72 \text{ cm}$$

$$\rho_n = R_2 = 12 \text{ cm} ; \rho_m = R_1 = 3 \text{ cm}.$$

Lực dọc và mômen ở trên mặt cắt:

$$N = 2500 \text{ kG} ; M = P \cdot R = 16.500 \text{ kGcm}.$$

Theo công thức (14.10) ta tìm được ứng suất ở các thớ biên:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{N}{F} + \frac{M}{S_x} \cdot \frac{y_m}{\rho_m} = \frac{2500}{22,5} + \frac{16500}{19,8} \cdot \frac{2,72}{3} = \\ &= 111 + 756 = 867 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$

$$\sigma_n = \frac{N}{F} - \frac{M}{S_x} \cdot \frac{y_n}{\rho_n} = 111 - 436 = -325 \text{ kG/cm}^2.$$

Biểu đồ ứng suất chỉ do mômen uốn gây ra được cho trên hình 14.8a, còn biểu đồ ứng suất do cả N và M đồng thời gây ra có dạng như trên hình 14.8b.

Nếu ứng suất uốn được tính theo công thức thông thường đối với thanh thẳng, ta có:

$$\sigma_m = \frac{M}{J_{xo}} y_m = \frac{16500}{134} \cdot 3,6 = 443 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_n = \frac{M}{J_{xo}} y_n = \frac{16500}{134} \cdot 5,4 = -665 \text{ kG/cm}^2$$

Những con số này thật là lý thú. Bởi vì chúng cho phép kết luận rằng, để tính toán thanh cong tuyệt đối không được sử dụng công thức đối với thanh thẳng. Sai số có thể rất lớn không những chỉ về trị số của ứng suất, mà còn cả bức tranh về chất của trạng thái ứng suất cũng bị thay đổi đột ngột. Ví dụ, điểm m là điểm chịu ứng suất lớn

nhất do uốn ($\sigma_m = 756 \text{ kG/cm}^2$), nhưng theo tính toán đối với thanh thẳng ($\sigma_m = 443 \text{ kG/cm}^2$) điểm này lại không phải nguy hiểm nhất mà ngược lại điểm n lại nguy hiểm nhất ($\sigma_n = -665 \text{ kG/cm}^2$). Sai số này sẽ khác nhau khi độ cong của thanh có những trị số khác nhau. Vì thế, thanh cong được chia làm hai nhóm: thanh có độ cong bé $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ và

thanh có độ cong lớn $\frac{h}{R} > \frac{1}{5}$. Để xác định ứng suất trong thanh cong có độ cong bé với sai số cho phép có thể sử dụng công thức đối với thanh thẳng.

Bảng 14.2 dưới đây cho sự sai lệch theo phần trăm giữa các ứng suất tính theo lý thuyết thanh thẳng đối với thanh mặt cắt chữ nhật có độ cong khác nhau.

Bảng 14.2.

R/h	Thanh độ cong lớn			Thanh độ cong nhỏ		
	2	3	5	8	10	
$\Delta\sigma, \%$	18,2	11,8	6,9	4,8	3,4	0

Từ bảng 14.2 thấy rõ là với $\frac{R}{h} < 5$ cho phép xác định ứng suất theo công thức đối với thanh thẳng.

CHƯƠNG 15

ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN

§1. KHÁI NIỆM VỀ SỰ PHÁ HỦY DO MỎI VÀ NGUYÊN NHÂN CỦA NÓ

Thực tế kỹ thuật cho thấy các chi tiết máy và cấu kiện công trình như đường ray, cánh tuốc bin, lò xo lá đỡ thùng xe v.v... khi làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi theo thời gian thường bị phá hủy đột ngột không phải ngay lập tức mà đôi khi sau một thời gian làm việc lâu dài với ứng suất khi phá hủy nhỏ hơn giới hạn bền tĩnh của vật liệu rất nhiều lần. Hình ảnh một trục toa xe lửa bị phá hủy được cho trên hình 15.1.

Ta hãy quan sát sự thay đổi của ứng suất theo thời gian đối với điểm K trên chu vi của trục quay như hình 15.2a với sơ đồ tính hình 15.2b. Tọa độ của điểm K ở thời điểm bất kỳ được xác định bởi $y = r \sin \varphi(t)$. Ứng suất ở điểm K trên mặt cắt m – n có mômen M:

$$\sigma_K = \frac{M}{J} \cdot y = \frac{M \cdot r}{J} \cdot \sin \varphi = \sigma_{\max} \sin \varphi$$

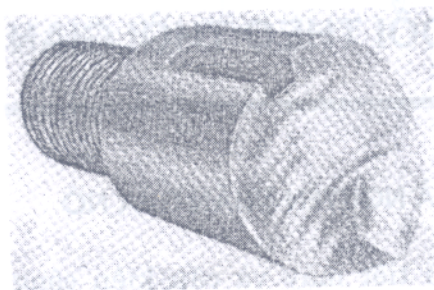
Khi trục quay với vận tốc góc không đổi ω thì

$$\sigma_K = \sigma_{\max} \sin \omega t. \quad (a)$$

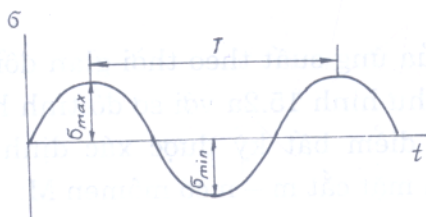
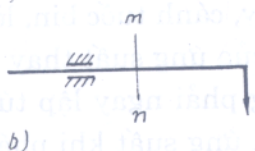
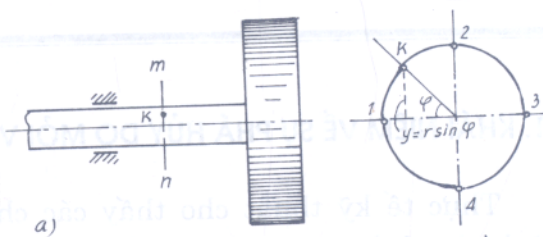
Ứng suất kéo lớn nhất ở điểm 2: $\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{M.r}{J}$. Ứng suất nén

lớn nhất ở điểm 4: $\sigma_{\min} = -\frac{M.r}{J} = \sigma_4$. Khi điểm K nằm trên trục trung

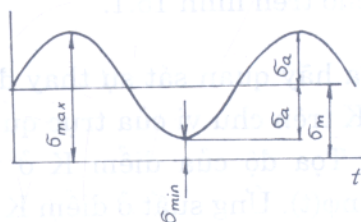
hoà $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$. Đồ thị của σ_K được cho trên hình 15.2c. Nếu trên trục này còn chịu thêm một lực kéo không đổi thì σ_K thay đổi theo quy luật hình 15.2d.



Hình 15.1.



c)



d)

Hình 15.2.

Cần nhấn mạnh rằng, đã từ lâu, người ta nhận thấy các chi tiết chịu ứng suất biến đổi theo thời gian thường bị phá hoại đột ngột (không có biến dạng dư tuy làm bằng vật liệu dẻo) với ứng suất còn

rất thấp so với giới hạn bền của vật liệu. Hiện tượng đó được gọi là *hiện tượng mỏi* của vật liệu.

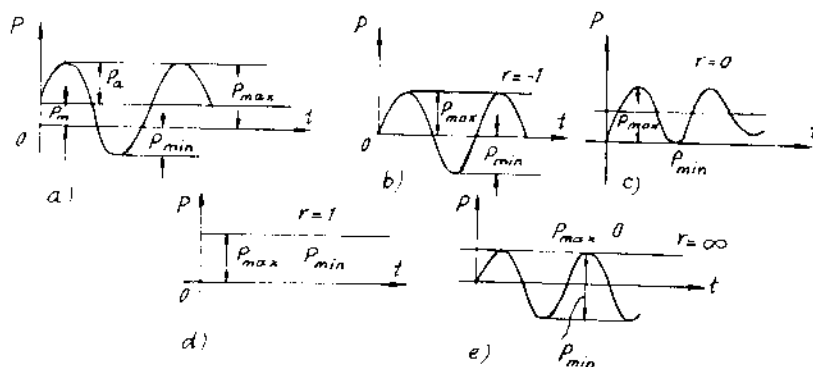
Sở dĩ xảy ra hiện tượng trên là vì khi chịu tác dụng của ứng suất biến đổi, tuy giá trị còn thấp hơn giới hạn đàn hồi của vật liệu, những biến dạng dẻo rất nhỏ bắt đầu xuất hiện và phát triển ở những nơi yếu nhất của vật thể (thí dụ ở những chỗ có sự tập trung ứng suất do thiếu sót khi chế tạo hoặc do ảnh hưởng của môi trường), dần dần tại những chỗ đó xuất hiện những vết nứt rất bé. Những vết nứt này ngày càng sâu và phát triển (do ứng suất biến đổi và sự tập trung ứng suất ở đáy kẽ nứt), dần dần trở thành những vết nứt lớn, mặt cắt ngang của vật thể bị yếu dần và cuối cùng khi không còn đủ để chịu lực nữa thì vật thể bị phá hoại đột ngột.

Hiện tượng mỏi được đặc biệt chú ý trong kỹ thuật. Chừng 90% các chi tiết máy bị hỏng đều do nguyên nhân mỏi. Vì thế, khi tính toán các chi tiết chịu ứng suất biến đổi, cần kiểm tra *độ bền mỏi* của chúng.

§2. CHU TRÌNH ỨNG SUẤT VÀ GIỚI HẠN MỎI

1. Chu trình ứng suất

Quá trình biến đổi của ứng suất theo thời gian, qua hai giá trị giới hạn kế tiếp nhau và lặp lại giá trị ban đầu, gọi là *chu trình ứng suất*. Thời gian T thực hiện một chu trình ứng suất gọi là *chu kỳ ứng suất*.



Hình 15.3.

Gọi $p_{\max}$ và $p_{\min}$ là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của ứng suất p (p có thể là σ hoặc τ tùy theo loại biến dạng). Đại lượng:

$$p_m = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad (15.1)$$

được gọi là *ứng suất trung bình*, còn đại lượng:

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} > 0 \quad (15.2)$$

được gọi là *biên độ của chu trình* hay *biên độ ứng suất*:

Biên độ luôn luôn có giá trị dương.

Từ (15.1) và (15.2) ta có:

$$\left. \begin{aligned} p_{\max} &= p_m + p_a \\ p_{\min} &= p_m - p_a \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Chu trình có $p_{\max} = -p_{\min}$ (hình 15.3b) gọi là chu trình đối xứng (lúc này $p_m = 0$). Chu trình có $p_{\max} \neq -p_{\min}$ (hình 15.3a) gọi là *chu trình không đối xứng*. Chu trình có $p_{\min}$ (hoặc $p_{\max}$) = 0, gọi là *chu trình mạch động* (hình 15.3c, e).

$$\text{Tỷ số} \quad r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \quad (15.4)$$

Gọi là *hệ số không đối xứng* của chu trình.

Theo định nghĩa này, ta có:

Khi $r = -1$ – chu trình đối xứng;

Khi $r = 1$ – chu trình hằng (ứng suất không đổi hình 15.3d);

Khi $r = 0$ – chu trình mạch động (dương);

Khi $r = \infty$ – chu trình mạch động (âm).

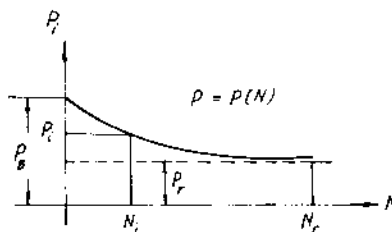
$-1 < r < 1$ – chu trình không đối xứng dương ($0 < r < 1$ hình 15.2d) và đối dấu ($-1 < r < 0$, hình 15.3a).

2. Giới hạn mỏi

Để tính độ bền mỏi của các chi tiết máy, người ta phải làm các thí nghiệm để xác định giới hạn mỏi của vật liệu ứng với các chu trình

có hệ số không đối xứng khác nhau. Đó là giá trị lớn nhất của ứng suất biến đổi tuần hoàn mà vật liệu có thể chịu đựng được với một số chu trình không hạn định và không xuất hiện vết nứt vì mỏi.

Gọi N_i là số chu trình mà vật liệu chịu đựng được (cho đến khi bị hỏng) với ứng suất p_i ; bằng thực nghiệm, người ta lập biểu đồ $p = p(N)$ – gọi là biểu đồ mỏi – như hình (15.4). Giá trị ứng suất ứng với đường tiệm cận của đường cong mỏi được coi là giới hạn mỏi p_r , vì đó là ứng suất lớn nhất mà vật liệu



Hình 15.4.

có thể chịu đựng được với một số chu kỳ vô hạn mà không bị hỏng. Thực nghiệm cho thấy, với mỗi loại vật liệu, có một số chu trình N_r , mà nếu vật liệu đã chịu đựng được thì sẽ chịu đựng được mãi mãi, nghĩa là với mọi $N > N_r$.

Đối với thép $N_r = 10^7$, đối với kim loại màu:

$$N_r = 20 \cdot 10^7 + 50 \cdot 10^7.$$

Giới hạn mỏi của vật liệu được ký hiệu với chỉ số không đối xứng r . Giới hạn mỏi uốn đối xứng của thép thường bằng:

$$\sigma_{-1}^u = 0,4 \sigma_B \quad (15.5)$$

Các giới hạn mỏi khi kéo (nén) đối xứng (σ_{-1}^{Kn}) hoặc xoắn đối xứng (τ_{-1}^*) có thể tính theo công thức:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{-1}^{Kn} &= 0,7 \sigma_{-1}^u = 0,28 \sigma_B \\ \tau_{-1}^* &= 0,55 \sigma_{-1}^u = 0,22 \sigma_B \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

Đối với kim loại màu:

$$\sigma_{-1}^u = (0,25 - 0,50) \sigma_B \quad (15.7)$$

§3. BIỂU ĐỒ GIỚI HẠN MỎI

Thực nghiệm cho thấy giới hạn mỏi phụ thuộc vào hệ số không đối xứng r . Với mỗi loại chu trình có thể xác định được một giới hạn mỏi với cặp giá trị (p_a, p_m) tương ứng. Tập hợp những điểm biểu thị giới hạn mỏi của những chu trình khác nhau, trong hệ tọa độ Op_ap_m (hình 15.5), gọi là biểu đồ giới hạn mỏi. Điểm A $(p_A, 0)$ ứng với chu trình đối xứng. Điểm B $(0, p_B)$ ứng với chu trình hằng (ứng suất tĩnh p_B – giới hạn bền của vật liệu).

Xét một chu trình bất kỳ biểu thị bởi điểm L (p_a, p_m) . Nối OL cho cắt đường cong trên biểu đồ tại điểm M (p'_a, p'_m) . Ta nói rằng *điểm M biểu thị một chu trình giới hạn có cùng một hệ số không đối xứng (hay là đồng dạng) với chu trình đã cho*.

Thực vật, với chu trình cho trước, biểu thị bởi điểm L, ta có:

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \frac{p_m - p_a}{p_m + p_a} = \frac{1 - \frac{p_a}{p_m}}{1 + \frac{p_a}{p_m}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta}$$

Đối với chu trình giới hạn biểu thị bởi điểm M, ta có:

$$r' = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}} = \frac{1 - \frac{p'_a}{p'_m}}{1 + \frac{p'_a}{p'_m}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta} = r$$

Như vậy, những chu trình được biểu thị bằng những điểm nằm trên một tia vẽ từ gốc tọa độ là những chu trình đồng dạng.

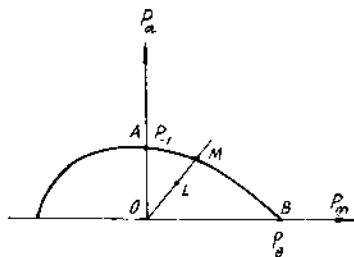
Tỷ số đồng dạng

$$n_r = \frac{OM}{OL} = \frac{p'_m}{p_m} = \frac{p'_a}{p_a} \quad (15.8)$$

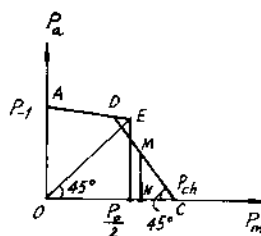
được gọi là *hệ số an toàn của chu trình cho trước*, vì nếu một chu trình được biểu thị bằng một điểm nằm trong đoạn thẳng OM ($n_r > 1$) thì chu trình đó là chu trình an toàn (vật liệu chưa bị hỏng vì mỏi),

ngược lại nếu một chu trình được biểu thị bằng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng OM ($n_r < 1$) thì chu trình đó là chu trình không an toàn.

Để vẽ biểu đồ giới hạn mỗi của mỗi loại vật liệu phải làm khá nhiều thí nghiệm với các loại chu trình khác nhau, cho nên, trong thực tế, khi tính toán người ta thường chỉ dùng những biểu đồ giới hạn mỗi gần đúng được lập dựa vào một số ít kết quả thí nghiệm. Đối với các vật liệu dẻo theo R. S. Kinaxosvili, có thể dựa vào các giới hạn p_{-1} , p_0 và p_{ch} (giới hạn chảy). Cách vẽ biểu đồ này như sau (hình 15.6).



Hình 15.5.



Hình 15.6.

Nối điểm A(p_{-1} , 0) biểu thị chu kỳ đối xứng với điểm E $\left(\frac{p_0}{2}, \frac{p_0}{2}\right)$ biểu thị chu kỳ mạch động, bằng 1 đường thẳng, sau đó từ điểm C(O, p_{ch}) biểu thị ứng suất tĩnh bằng giới hạn chảy, kẻ một đường thẳng làm với trục p_m một góc 45° .

Hai đường thẳng trên cắt nhau tại điểm D, đường ADC được coi là biểu đồ giới hạn mỗi gần đúng của Kinaxosvili.

Những điểm nằm trên đoạn thẳng CD biểu thị chu trình giới hạn có ứng suất cực đại bằng giới hạn chảy p_{ch} . Chẳng hạn với điểm M ta có:

$$p_{max} = p_m + p_a = ON + NM = ON + NC = p_{ch}$$

4. Các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỗi

Thực nghiệm cho thấy giới hạn mỗi không những chỉ phụ thuộc vào hệ số không đối xứng của chu trình mà còn phụ thuộc vào rất

nhiều nhân tố khác nữa, như sự tập trung ứng suất, chất lượng bề mặt, kích thước tuyệt đối của chi tiết, v.v... Để xét ảnh hưởng của các nhân tố đó, người ta dùng hệ số thực tế α_r là tỷ số giữa giới hạn mỗi p_{-1} của một mẫu thử có đường kính $d = 7 - 10$ mm, bề mặt đánh bóng, với giới hạn mỗi p_{-1t} của chi tiết thực tế:

$$\alpha_r = \frac{p_{-1}}{p_{-1t}} \geq 1 \quad (15.9)$$

Như vậy, giới hạn mỗi của một chi tiết thực tế làm việc theo chu trình đối xứng bằng:

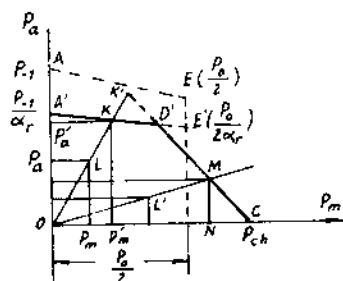
$$p_{-1} = \frac{p_{-1t}}{\alpha_r} \quad (15.10)$$

Hệ số α_r là tích của các hệ số: α_{tt} - xét đến ảnh hưởng của hiện tượng tập trung ứng suất (nhân tố tập trung ứng suất làm giảm giới hạn mỗi); α_{kt} - xét đến ảnh hưởng của kích thước tuyệt đối của chi tiết (trong những điều kiện như nhau, kích thước càng lớn giới hạn mỗi càng giảm) và α_m - xét đến ảnh hưởng của trạng thái bề mặt (bề mặt được đánh bóng hoặc được tăng cứng có tác dụng làm tăng giới hạn mỗi).

$$\alpha_r = \alpha_{tt} \alpha_{kt} \alpha_m \quad (15.11)$$

Các hệ số này được xác định bằng thực nghiệm và được cho trong các sổ tay kỹ thuật.

Đối với các chu trình không đối xứng, các nhân tố nói trên chỉ ảnh hưởng đến biên độ ứng suất và hệ số ảnh hưởng cũng giống như đối với



Hình 15.7.

chu trình đối xứng. Như vậy trên biểu đồ giới hạn mỗi (hình 15.7) nếu chia các tung độ (biên độ của chu trình) của đoạn AE (biểu thị giới hạn mỗi của mẫu thử) cho α_r ta sẽ được đoạn A'E' biểu thị giới hạn mỗi của chi tiết thực. Đường A'D'C là biểu đồ giới hạn mỗi gần đúng.

§4. CÁCH TÍNH ĐỘ BỀN MỖI

Khi tính độ bền mỗi của một chi tiết, người ta thường so sánh hệ số an toàn n_r (giữa chu trình cho trước và chu trình giới hạn đồng dạng với nó) với hệ số an toàn cho phép $[n]$ theo điều kiện:

$$n_r \geq [n] \quad (15.12)$$

Cách các định hệ số an toàn n_r của các chi tiết chịu ứng suất biến đổi như sau:

1. Trường hợp kéo, uốn, nén hoặc xoắn thuần túy

Giả thử có một chu trình ứng suất bất kỳ được biểu thị bằng điểm L nằm trong miền OA'D'CO (hình 15.7) nếu tia OL cắt đường giới hạn mỗi trong đoạn A'D' thì chu trình đã cho đồng dạng với chu trình giới hạn theo giới hạn mỗi (chi tiết bị phá hoại vì mỗi). Nếu tia OL' cắt đường giới hạn mỗi trong đoạn D'C thì chu trình đã cho đồng dạng với chu trình giới hạn theo giới hạn chảy (chi tiết bị phá hoại theo giới hạn chảy).

a. Trong trường hợp thứ nhất: hệ số an toàn của chu trình đã cho là:

$$n_r = \frac{OK}{OL} = \frac{p'_m}{p_m} = \frac{p'_a}{p_a}$$

do đó:

$$\left. \begin{aligned} p'_m &= n_r p_m \\ p'_a &= n_r p_a \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

vì điểm K nằm trên đường thẳng A'E' nên tọa độ của nó thỏa mãn phương trình:

$$p'_a = ap'_m + b \quad (b)$$

trong đó các hệ số a, b , có thể xác định nhờ tọa độ của các điểm A', E' .

$$\text{Tại điểm } A', \text{ khi } p_m = 0, \quad p'_a = \frac{p_{-1}}{\alpha_r}$$

$$\text{Tại điểm } E', \text{ khi } p'_m = 0,5 p'_o, \quad p'_a = \frac{0,5 p_o}{\alpha_r}.$$

Thay các giá trị trên vào phương trình (b), suy ra:

$$a = \frac{p_{-1} - 0,5 p_o}{0,5 \alpha_r p_o} = - \frac{\gamma}{\alpha_r}$$

trong đó:

$$\gamma = \frac{p_{-1} - 0,5 p_o}{0,5 p_o} = \frac{2p_{-1} - p_o}{p_o} \quad (15.13)$$

$$b = \frac{p_{-1}}{\alpha_r}$$

Như vậy phương trình (b) có dạng:

$$p'_a = - \frac{\gamma}{\alpha_r} p'_m + \frac{p_{-1}}{\alpha_r}$$

$$\text{hay:} \quad \gamma p'_a + \alpha_r p'_m = p_{-1} \quad (c)$$

Thay (a) vào (c), ta được:

$$n_r \gamma p_m + n_r \alpha_r p_a = p_{-1}$$

Từ đó rút ra hệ số an toàn n_r :

$$n_r = \frac{p_{-1}}{\gamma p_m + \alpha_r p_a} \quad (15.14)$$

Trong một số tài liệu khác hệ số α_r được xác định như sau, và để cho tiện ta ký hiệu α_r :

$$\alpha_r = \frac{K_p}{\beta \cdot \varepsilon_p} \quad (15.15)$$

trong đó K_p – hệ số tập trung ứng suất thực tế khi uốn và xoắn;

β – hệ số độ nhạy bề mặt.

ε_p – hệ số kích thước.

Tất cả các hệ số này có thể xác định theo các bảng hoặc biểu đồ cho sẵn.

Kể đến công thức (15.15), công thức (15.14) có dạng:

$$n_r = \frac{P_{-1}}{\gamma P_m + \frac{K_p}{\beta \varepsilon_p} P_a} \quad (15.16)$$

b. Trong trường hợp thứ hai:

Giả sử chu trình đã cho được biểu thị bởi điểm L'. Ứng với điểm M (hình 15.7), ta có:

$$P'_m + P'_a = ON + NM = ON + NC = P_{ch} \quad (d)$$

Thay (a) vào (d) suy ra:

$$n_r = \frac{P_{ch}}{P_m + P_a} \quad (15.17)$$

Vì đoạn D'C trên biểu đồ là tập hợp những điểm biểu thị giới hạn phá hủy vì chảy nên trong công thức (15.17) không có các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi.

Như vậy, trong trường hợp kéo (nén) uốn hoặc xoắn thuần túy, ta có hai công thức (15.14) hoặc (15.16) và (15.17) để tính hệ số an toàn n_r , tùy theo chu trình cho trước đồng dạng với chu trình giới hạn theo giới hạn mỏi hay theo giới hạn chảy. Khi tính toán, có thể tính theo cả hai công thức đó và lấy hệ số nhỏ trong hai kết quả để kiểm tra theo điều kiện (15.12).

2) Trường hợp uốn và xoắn biến đổi đồng thời

Trong trường hợp uốn và xoắn biến đổi đồng thời, ứng suất pháp và ứng suất tiếp thay đổi đồng bộ, có thể áp dụng giả thuyết ứng suất tiếp lớn nhất hay giả thuyết thế năng biến đổi hình dạng lớn nhất, để suy ra công thức tính hệ số an toàn n_r như sau:

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \quad (15.18)$$

hay:
$$n_r = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (15.18'')$$

trong đó n_σ và n_τ là các hệ số an toàn tính theo công thức (15.14) hoặc (15.16) hoặc (15.17) cho biến dạng uốn và biến dạng xoắn.

§5. VÍ DỤ ỨNG DỤNG

Các trục truyền động như trục bánh răng hoặc bánh đai v.v... bị uốn và xoắn đồng thời vì thế cần được kiểm tra độ bền mỏi, theo điều kiện (15.12). Hệ số an toàn của trục tại mặt cắt nguy hiểm nào đó được tính theo công thức (13.18'') trong đó n_σ và n_τ được tính theo công thức (15.14) hoặc (15.16).

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma_\sigma \sigma_m + \alpha_\sigma \sigma_a} \quad (15.19)$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\gamma_\tau \tau_m + \alpha_\tau \tau_a} \quad (15.20)$$

$$\text{Ở đây } \gamma_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad ; \quad \gamma_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$$

Các hệ số α_σ và α_τ được xác định theo công thức (15.11).

Nếu sử dụng công thức (15.16) thì theo (15.15) α_τ có dạng:

$$\alpha_\sigma = \frac{K_\sigma}{\beta \epsilon_\sigma} \quad ; \quad \alpha_\tau = \frac{K_\tau}{\beta \epsilon_\tau} \quad (15.21)$$

trong đó: K_σ và K_τ – hệ số tập trung ứng suất thực tế khi uốn và xoắn.

β – hệ số độ nhạy bề mặt phụ thuộc trạng thái bề mặt (độ nhẵn bề mặt);

ϵ_σ và ϵ_τ – hệ số kích thước mặt cắt ngang.

Tất cả các hệ số trên đều có thể xác định nhờ các bảng hay các biểu đồ cho sẵn trong các sổ tay kỹ thuật “Chi tiết máy”.

Trong điều kiện làm việc thông thường, hệ số an toàn cho phép $[n] = 1,5 - 2,5$. Khi cần tăng cường có thể lấy $[n] = 2,5 - 3$. Trong trường hợp này có thể không cần kiểm tra độ cứng của trục.

2. Tính ổ lăn

Những ổ lăn có số vòng quay $n \geq 10$ vg/ph, dưới tác dụng của ứng suất thay đổi, thường bị hỏng vì mỏi bề mặt tiếp xúc. Trên cơ sở thí nghiệm, người ta đã lập được quan hệ sau đây giữa tải trọng Q tác dụng lên ổ và tuổi thọ của ổ, biểu thị bằng số chu trình $N = 60 nh$, trong đó n – số vòng quay trong một phút, h – số giờ làm việc của ổ.

$$Q(nh)^{0,3} = C \quad (15.22)$$

hoặc là:

$$Q^{3,33} \cdot N = C$$

hằng số C được gọi là hệ số khả năng làm việc của ổ lăn. Hệ số khả năng làm việc cho phép $[C]$ của các loại và các cỡ ổ lăn được cho trong các sổ tay kỹ thuật.

Ổ lăn thường chịu đồng thời cả tải trọng ngang (hướng tâm) và tải trọng dọc, tải trọng có thể không đổi hoặc thay đổi theo thời gian, êm hoặc va đập; có trường hợp vòng trong của ổ hoặc vòng ngoài của ổ quay; Nhiệt độ làm việc có thể bình thường, cao hoặc thấp... Tất cả các nhân tố đó đều ảnh hưởng đến khả năng làm việc của ổ, và được xét đến khi tính tải trọng Q . Vì thế Q được gọi là *tải trọng qui ước*.

Đối với ổ đỡ chặn, tải trọng qui ước Q được tính theo công thức kinh nghiệm:

$$Q = (RK_v + mA) K_d K_n \quad (15.23)$$

trong đó: R – tải trọng ngang;

A – tải trọng dọc;

n – hệ số qui đổi, qui tải trọng dọc thành tải trọng ngang;

K_v – hệ số động học, nếu vòng trong quay $K_v = 1$, nếu vòng ngoài quay $K_v = 1,35$.

K_d – hệ số tải trọng động, xét đến ảnh hưởng do tải trọng biến đổi;

K_t – hệ số nhiệt độ, xét đến ảnh hưởng do nhiệt độ của môi trường làm việc.

Tất cả các hệ số trên đều được cho dưới dạng bảng trong các sổ tay kỹ thuật.

Đối với ổ chặn:

$$Q = AK_d K_t \quad (15.24)$$

Điều kiện bền mỏi của ổ lăn là:

$$C \leq [C] \quad (15.25)$$

Những hướng dẫn và tính toán đầy đủ hơn được khảo sát trong giáo trình chi tiết máy.

Ví dụ 1.

Một trục nhỏ dạng ống của động cơ (hình 15.8a) chịu tác dụng của lực P thay đổi trong giới hạn từ $P = 60000 \text{ N}$ đến $P = -20000 \text{ N}$. Các đặc trưng cơ học của vật liệu trục như sau:

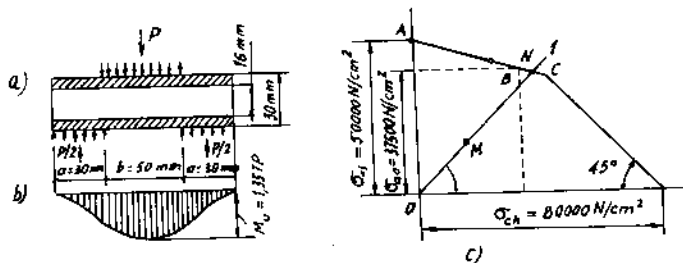
$$\begin{aligned} \sigma_B &= 100000 \text{ N/cm}^2 & \sigma_{ch} &= 80000 \text{ N/cm}^2; \\ \sigma_{-1} &= 50000 \text{ N/cm}^2 & \sigma_o &= 75000 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Mặt ngoài của trục được đánh bóng $\beta = 1$; $\varepsilon_\sigma = 0,9$; $K_\sigma = 1,1$.

Xác định hệ số an toàn về mỏi?

GIẢI

Hình 15.8a, b là sơ đồ truyền lực cho trục và biểu đồ mômen uốn. Mômen uốn ở mặt cắt tính toán là:



Hình 15.8.

$$M_u = \frac{1}{2} P \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) - \frac{1}{2} P \frac{b}{4}$$

Mômen chống uốn của mặt cắt:

$$W_u = \frac{\pi 3^3}{32} \left[1 - \left(\frac{1,6}{3,0} \right)^4 \right] = 2,44 \text{ cm}^3.$$

Giá trị lớn nhất và bé nhất của mômen uốn là:

$$M_{u \max} = 1,375 P_{\max} = 1,375 \cdot 60000 = 82500 \text{ Ncm.}$$

$$M_{u \min} = 1,375 P_{\min} = 1,375 (-2000) = -27300 \text{ Ncm.}$$

Ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất bằng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{u \max}}{W_u} = \frac{82500}{2,44} = 33800 \text{ N/cm}^2;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{u \min}}{W_u} = - \frac{27300}{2,44} = -11300 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất biên độ và ứng suất trung bình của chu trình làm việc được tìm theo công thức:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{33800 - (-11300)}{2} = 22550 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{33800 + (-11300)}{2} = 11250 \text{ N/cm}^2$$

Trị số giới hạn của ứng suất biên độ và ứng suất trung bình của chu trình mạch động là:

$$\sigma'_{ao} = \sigma'_{mo} = \frac{\sigma_o}{2} = 37500 \text{ N/cm}^2$$

Từ các giá trị đã biết của σ_{-1} , σ'_{ao} và σ_{ch} ta lập được biểu đồ giới hạn mỏi gần đúng như trên hình 15.8c.

Vì chu trình giới hạn có cùng một hệ số không đối xứng với chu trình làm việc nên ta có:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sigma_a K_a}{\sigma_m \beta \epsilon_\sigma} = \frac{22550}{11250} \frac{1,1}{1,0,9} = 2,45$$

$$\theta = 68^\circ.$$

Chu trình làm việc được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ $\sigma_a^* = 27200 \text{ N/cm}^2$ và $\sigma_m = 11250 \text{ N/cm}^2$. Chu trình giới hạn đồng dạng được biểu diễn bởi điểm N có tọa độ $n_r \sigma_a = 43500 \text{ N/cm}^2$ và $n_r \sigma_m = 17850 \text{ N/cm}^2$, các tọa độ này được tìm từ biểu đồ giới hạn mỏi gần đúng vừa vẽ. Theo định nghĩa của hệ số an toàn ta có:

$$n_r = \frac{43500}{27200} = 1,6.$$

Hệ số này còn có thể xác định bằng cách sử dụng trực tiếp công thức (15.16):

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma \sigma_m + \frac{K_\sigma}{\beta \epsilon_\sigma} \cdot \sigma_a} = \frac{50000}{0,333 \cdot 11250 + \frac{1,1}{1,0,9} \cdot 22550} = 1,59$$

$$\text{trong đó: } \gamma = \frac{\sigma_{-1} - 0,5 \sigma_o}{0,5 \sigma_o} = \frac{50000 - 37500}{37500} = 0,333.$$

Ví dụ 2.

Một trục quay có đường kính $d = 50 \text{ mm}$, chiều dài $l = 500 \text{ mm}$. Trên trục có một bánh răng đường kính $D = 300 \text{ mm}$ được liên kết với trục bằng mối ghép then. Công suất truyền cho trục $N = 50 \text{ kW}$ số vòng quay của trục $n = 60 \text{ vg/ph}$ (hình 15.9).

Các đặc trưng cơ học của vật liệu trục như sau:

$$\sigma_B = 50000 \text{ N/cm}^2 ; \sigma_{ch} = 36000 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\sigma_o = 35000 \text{ N/cm}^2 ; \sigma_{-1} = 24000 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\tau_{ch} = 22500 \text{ N/cm}^2 ; \tau_{-1} = 18000 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\tau_o = 27000 \text{ N/cm}^2.$$

GIẢI

Mômen xoắn trục:

$$M_z = 97360 \frac{\text{N}}{\text{n}} = 97360 \frac{50}{600} = 81133 \text{ Ncm}$$

Lực vòng P bằng:

$$P = \frac{2M_z}{D} = \frac{2 \cdot 81133}{30} = 5409 \text{ N}$$

Mômen uốn ở mặt cắt giữa trục là:

$$M_u = \frac{pl}{4} = \frac{5409 \cdot 50}{4} = 67600 \text{ Ncm}$$

Các ứng suất lớn nhất tại mặt cắt này:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} = \frac{67600}{0,1 \cdot 125} = 5400 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2 W_u} = \frac{81133}{0,2 \cdot 125} = 3240 \text{ N/cm}^2.$$

Khi trục quay, các thớ biên của nó sẽ chịu kéo và nén lớn nhất thay đổi. Bởi vậy, đối với ứng suất pháp ta có chu trình đối xứng và với chu trình đó:

$$\sigma_a = 5400 \text{ N/cm}^2 ; \quad \sigma_m = 0.$$

Mômen xoắn không đổi, do đó $\tau_a = 0$; $\tau_m = 3240 \text{ N/cm}^2$.

Các hệ số β , K_σ , ε_σ trong trường hợp này là:

$$\beta = 0,9 ; \quad K_\sigma = 2,8 ; \quad \varepsilon_\sigma = 0,86.$$

$$\gamma = \frac{\tau_{-1} - 0,5\tau_0}{0,5\tau_0} = \frac{18000 - 13500}{13500} = 0,33$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1} \frac{\beta \varepsilon_\sigma}{K_\sigma}}{\gamma \sigma_m + \sigma_a} = \frac{24000 \frac{0,9 \cdot 0,86}{2,8}}{0 + 540} = 1,23$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1} \frac{\beta \varepsilon_{\tau}}{K_{\tau}}}{\gamma \tau_{m} + \tau_a} = \frac{18000 \frac{0,9 \cdot 0,86}{2,8}}{0,33 \cdot 3240 + 0} = 4,14.$$

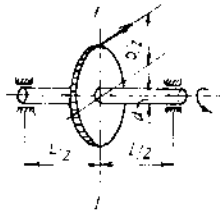
Hệ số an toàn đối với giới hạn chảy là:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{36000}{540 + 0} = 6,67 ;$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{ch}}{\tau_{max}} = \frac{\tau_{ch}}{\tau_a + \tau_m} = \frac{22500}{0 + 3240} = 6,94.$$

Để tính toán ta phải lấy các giá trị bé nhất của n_{σ} và n_{τ} . Hệ số an toàn chung là:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{1,23 \cdot 4,14}{\sqrt{(1,23)^2 + (4,14)^2}} = 1,2.$$



Hình 15.9.

Chương 16

ĐỘNG LỰC HỌC ĐỘ BỀN

I. HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Động lực học kết cấu là một phần quan trọng của cơ học vật rắn biến dạng, mục đích của nó là nghiên cứu sự làm việc của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng động đủ loại.

Kết cấu nói chung được đặc trưng bởi các đại lượng đặc trưng cho tính quán tính m , J và thuộc tính đàn hồi để có thể thực hiện được các chuyển động tương đối dưới tác dụng của tải trọng động. Nếu những chuyển động này là chuyển động lặp lại thì ta gọi nó là những chuyển động dao động.

Thông thường người ta hiểu “ứng xử động” là các chuyển động sinh ra bởi các lực biến đổi khá nhanh theo thời gian và chúng sinh ra các lực quán tính trong từng chất điểm của kết cấu.

Giả thiết rằng quan hệ giữa các lực và chuyển động là quan hệ tuyến tính và do đó, các dao động được nghiên cứu là các dao động tuyến tính. Trong mục này ta sẽ nhắc lại một số khái niệm cơ bản về hệ dao động tuyến tính có một bậc tự do mà ta đã biết trong các môn cơ học cơ sở để tiện sử dụng.

Để mô tả sự ứng xử vật lý của một hệ như vậy, ta cần một mô hình toán học. Mỗi phần tử của mô hình toán học được đặc trưng bởi các tính chất vật lý của hệ dao động.

Trong quá trình chuyển động, xảy ra sự biến đổi liên tục về mặt năng lượng: Thế năng biến dạng của hệ chuyển hóa thành động năng của hệ dao động và ngược lại. Theo quan điểm cơ học, chuyển động được đặc trưng bởi sự biến thiên của chuyển vị $x(t)$ và sự biến đổi của vận tốc $v(t)$. Chúng là các hàm của thời gian mà từ đó người ta có thể xác định được thế năng và động năng của đối tượng dao động.

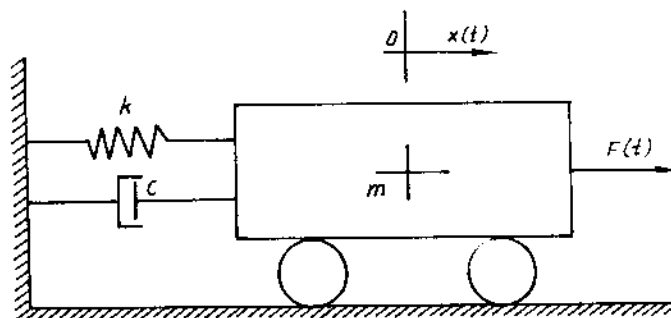
Các hệ dao động có năng lượng tổng không đổi được gọi là hệ bảo toàn. Chuyển động của chúng là những dao động tự do không cản.

Các hệ bị mất mát năng lượng do ma sát được gọi là các hệ không bảo toàn. Chúng thực hiện các chuyển động dao động tắt dần.

Khi một hệ liên tục nhận được kích động (năng lượng) từ bên ngoài, thì ta có các dao động cưỡng bức hoặc các dao động duy trì.

§1. DAO ĐỘNG TỰ DO

Xét một hệ dao động có một bậc tự do được mô hình hóa từ một chiếc xe lăn như hình 16.1.



Hình 16.1.

Khi đã xác định gốc tọa độ O, các yếu tố đặc trưng cho hệ (khối lượng, ma sát, độ cứng,...) và lực kích động $F(t)$, phương trình tổng quát mô tả chuyển động sẽ có dạng sau:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (16.1)$$

trong đó: m – khối lượng của hệ dao động;

c – hệ số cản nhớt;

k – hệ số cứng của hệ đàn hồi, nghĩa là lực cần thiết phải đặt lên khối lượng m theo phương dao động để gây ra một chuyển vị bằng đơn vị;

$x(t)$ – tọa độ (li độ) xác định chuyển vị của khối lượng m theo chiều bậc tự do tại một thời điểm t .

Phương trình (16.1) có thể viết dưới dạng sau:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} F(t) \quad (16.2)$$

trong đó: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, tính bằng radian/giây (rad/s) đại diện cho tần số góc của hệ dao động riêng ;

$2\beta = \frac{c}{m}$ – hệ số cản thu gọn;

$C_{th} = 2m \cdot \omega = 2m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ – hệ số cản tới hạn.

Phương trình vi phân (16.2) có nghiệm tổng quát là:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t), \quad (16.3)$$

trong đó: $x_L(t)$ đặc trưng cho nghiệm của phương trình thuần nhất, tương ứng với các dao động riêng và $x_F(t)$ là nghiệm của phương trình tương ứng với chế độ cưỡng bức.

Trong các phần sau ta sẽ xét cụ thể từng trường hợp dao động: tự do, tắt dần và cưỡng bức.

1. Các dao động tự do không cản (không tắt dần)

Ta giả thiết là hệ dao động sẽ thực hiện các dao động tự do ngay sau khi bị một kích động ban đầu kết thúc trong một khoảng thời gian rất ngắn. Ta cũng thừa nhận trong trường hợp này, hệ là bảo toàn ($c = 0$), nghĩa là không có sự mất mát năng lượng ra bên ngoài.

Phương trình (16.1) sẽ có dạng đơn giản nhất như sau:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (16.4)$$

và có nghiệm dưới dạng hàm điều hòa.

$$x(t) = x_L(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (16.5)$$

Trong đó hằng số tích phân A (biên độ của chuyển động) và φ (góc pha ban đầu, được tính thông qua các điều kiện ban đầu):

$$t = 0 ; x(0) = x_0 ; \dot{x}(0) = V_0$$

$$\text{Cụ thể là: } A = \sqrt{x_0^2 + V_0^2} ; \sin\varphi = x_0 / \sqrt{x_0^2 + V_0^2} .$$

Đặc tính cơ bản của hệ dao động có một bậc tự do không cản là giá trị riêng đặc trưng bởi tần số vòng ω , tần số f , và chu kỳ T . Biểu thức của các đại lượng đó như sau:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta T_Q}} \approx \frac{31,32}{\sqrt{\Delta T_Q}}, \text{ rad/s} ; \quad (16.6)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta T_Q}} \approx \sqrt{\frac{5}{\Delta T_Q}}, \text{ Hz} \quad (16.7)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta T_Q}{g}} \approx 0,2 \sqrt{\Delta T_Q}, \text{ s} \quad (16.8)$$

trong đó: $m = Q/g$ – đặc trưng cho khối lượng của hệ dao động (Q là trọng lượng của khối lượng lao động);

$\delta = \frac{1}{k}$ – hệ số độ mềm hay là chuyển vị đơn vị do một lực bằng một đơn vị đặt vào khối lượng m theo phương của bậc tự do gây ra;

$\Delta T_Q = Q$. $\delta = Q/k$ – độ võng tĩnh, sinh ra do một lực bằng trọng lượng của m đặt vào m theo phương của bậc tự do gây ra.

2. Các dao động tự do có cản nhớt

Phương trình chuyển động trong trường hợp này có dạng:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0 \quad (16.9)$$

Để giải phương trình này, chúng ta cần xác định các nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0 \quad (16.10)$$

$$\text{Cụ thể là: } r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \quad (16.11)$$

Tùy thuộc vào giá trị của nghiệm, ta có ba trường hợp tắt dần sau đây:

3. Tắt dần tới hạn

Khi mà căn thức bằng không:

$$\beta^2 - \omega^2 = 0 ; \text{ ta có } \beta_{th} = \omega$$

$$\text{nên } \frac{C_{th}}{2m} = \omega, \text{ từ đó } C_{th} = 2m\omega = 2\sqrt{mk} = \frac{2k}{\omega}$$

C_{th} là hệ số cản tới hạn biểu diễn đặc tính riêng của hệ dao động.

Quan hệ giữa hệ số cản thực C và hệ số cản tới hạn C_{th} biểu thị mức cản tới hạn và có biểu thức như sau:

$$\nu = \frac{C}{C_{th}} = \frac{C}{2m\omega} = \frac{2m\beta}{2m\omega} = \frac{\beta}{\omega} \quad (16.12)$$

Mức cản tới hạn đặc trưng cho khả năng tắt dần bên trong của kết cấu khảo sát.

Trong trường hợp này: $r_{1,2} = -\beta = -\nu\omega = -\omega$ (ν có giá trị bằng đơn vị).

Nghiệm của phương trình (16.9) sẽ là:

$$x(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot t \cdot e^{r_2 t} = e^{-\beta t} (C_1 + C_2 t) \quad (16.13)$$

Khi thừa nhận rằng tại $t = 0$ thì $x(0) = x_0$ và $\dot{x}(0) = V_0$, ta có:

$$x(t) = e^{-\omega t} [x_0 + (V_0 + \omega \cdot x_0) \cdot t] \quad (16.14)$$

Ta nhận thấy chuyển động mô tả bởi phương trình (16.14) là chuyển động không điều hoà (đường cong 1, hình 16.2).

4. Tắt dần quá tới hạn

Trong trường hợp mà $C > C_{th}$ ta nói độ tắt dần đã quá tới hạn, điều này dẫn đến $\beta > \omega$ và $\nu > 1$. Do đó r_1 và r_2 là các số thực và đều âm. Nghiệm của phương trình (16.9) sẽ là:

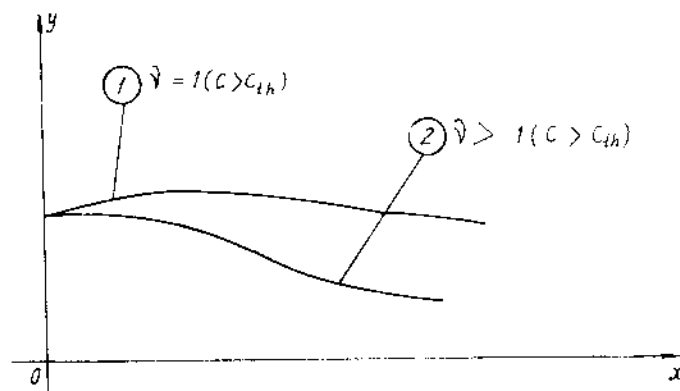
$$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} = e^{-\beta t} \left(A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \cdot t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \cdot t} \right) \quad (16.15)$$

Từ các điều kiện đầu ta có:

$$A = \frac{V_0 + x_0 (\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

$$B = - \frac{V_0 + x_0 (\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

Chuyển động này cũng là chuyển động không chu kỳ (đường cong 2, hình 16.2).



Hình 16.2.

5. Tắt dần dưới tới hạn

Trong trường hợp này: $C_{th} > C$, do vậy $\beta < \omega$ và các giá trị của căn thức sẽ là ảo:

$$r_{1,2} = -\beta \pm i \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad (16.16)$$

hay là: $r_{1,2} = -\beta \pm i\omega^*$.

trong đó: $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ đặc trưng cho tần số riêng của hệ khi ta kể tới ảnh hưởng của lực cản.

Phương trình mô tả chuyển động trong trường hợp này có dạng:

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cdot e^{i\omega^* t} + B e^{-i\omega^* t})$$

$$\text{hay là: } x(t) = e^{-\beta t} (C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) \quad (16.17)$$

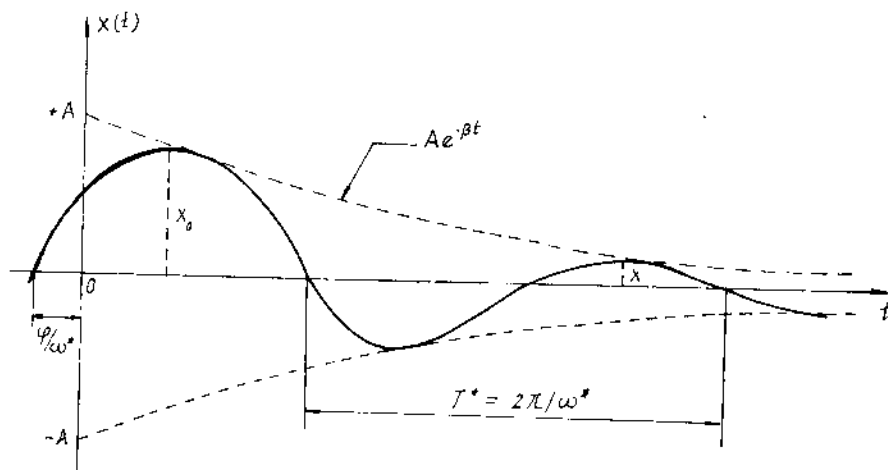
$$\text{Từ đó có: } x(t) = A e^{-\beta t} \sin(\omega^* t + \varphi) = A(t) \cdot \sin(\omega^* t + \varphi) \quad (16.18)$$

$$\text{với: } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ và } \tan \varphi = C_2 / C_1.$$

Từ các điều kiện đầu ta nhận được:

$$C_1 = \frac{V_0 + \beta x_0}{\omega} ; \quad C_2 = x_0$$

Cuối cùng ta có thể xác định được A và φ .



Hình 16.3

Trong trường hợp này các tần số vòng, tần số và chu kỳ khi dao động có cản được viết:

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - v^2} \approx \omega \quad (16.19)$$

$$f^* = f \sqrt{1 - v^2} \approx f \quad (16.20)$$

$$T^* = T \sqrt{1 - v^2} \approx T \quad (16.21)$$

Trong đa số các trường hợp người ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của sự cản, bởi vì trong thực tế ta thường gặp: $v < 0,1$.

Đối với các hệ chỉ có một bậc tự do, ta còn tìm được một đặc tính cơ bản nữa là độ cản tới hạn. Đặc tính này chỉ có thể được xác định theo thực nghiệm, bằng cách sử dụng gần đúng lượng giảm logarit của độ tắt dần Δ .

Theo hình 16.3 trên đó ta miêu tả các nghiệm dao động riêng có cản (biểu thức 16.18). Sự tắt dần của dao động được xác định bởi logarit tự nhiên của tỷ số 2 biên độ liên tiếp nhau và có cùng dấu nghĩa là:

$$\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi v}{\sqrt{1 - v^2}} \approx 2\pi v \quad (16.22)$$

Lúc này tỷ số tắt dần tới hạn sẽ là:

$$v = \frac{C}{C_{th}} = \frac{\Delta}{2\pi} \quad (16.23)$$

Giá trị của độ cản tới hạn phụ thuộc chủ yếu vào loại kết cấu và vật liệu được sử dụng. Dưới đây là một vài độ cản tới hạn:

Các kết cấu bằng bê tông cốt thép đổ toàn khối:

$$v = 0,02 \div 0,14$$

Kết cấu là tường chịu lực (khối xây hoặc panel đúc sẵn trong nhà máy):

$$\nu = 0,06 \div 0,18$$

Kết cấu kim loại: $\nu = 0,02 \div 0,06$.

- Các loại kết cấu bằng:
 - Bê tông cốt thép $\nu = 0,03 \div 0,16$
 - Thép $\nu = 0,02 \div 0,08$
- Kết cấu có cấu trúc lớn dạng khối $\nu = 0,05 \div 0,10$
- Nền đất $\nu = 0,06 \div 0,04$

§2. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

1. Dao động cưỡng bức

Nếu khối lượng m bị kích thích trực tiếp bởi một ngoại lực có dạng $F(t) = F_0 \cdot \sin \theta t$, trong đó F_0 là biên độ của lực kích động và θ là tần số vòng của lực đó, phương trình chuyển động (16.1) trở thành:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (16.24)$$

Bởi vì nghiệm ở chế độ bình ổn là rất trội nên người ta có thể bỏ qua các nghiệm tự do, do đó nghiệm của phương trình (16.24) có dạng:

$$x(t) = \Delta_{dmax} \sin \theta t \quad (16.25)$$

Thay vào phương trình (16.24) và nhớ rằng:

$$\ddot{x}(t) = -\Delta_{dmax} \cdot \theta^2 \sin \theta t$$

Ta nhận được:

$$-\Delta_{dmax} \cdot \theta^2 \sin \theta t + \Delta_{dmax} \cdot \omega^2 \sin \theta t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t$$

hay là:
$$\Delta_{dmax} (\omega^2 - \theta^2) = \frac{F_0}{m}$$

Từ đây rút ra:
$$\Delta_{dmax} = \frac{F_0 / m}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{F_0 / m}{k / m - \theta^2} = \frac{F_0}{k - m\theta^2}.$$

Chia cả tử số và mẫu số cho k ta có:

$$\Delta_{dmax} = \frac{F_0}{k - m\theta^2} = \frac{F_0/k}{1 - \frac{m}{k}\theta^2} = \frac{\Delta T_0}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = k_{dd} \cdot \Delta T_0 \quad (16.26)$$

trong đó: ΔT_0 là chuyển vị tĩnh do tác dụng tĩnh của lực F_0 theo phương dao động gây ra. Tuy nhiên, điều mà ta quan tâm ở đây là quan hệ giữa Δ_{dmax} và ΔT_0 . Tỷ số giữa biên độ dao động và độ võng tĩnh ΔT_0 gọi là hệ số động lực. Khi xuất phát từ (16.26) ta có:

$$k_{dd} = \frac{\Delta_{dmax}}{\Delta T_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \quad (16.27)$$

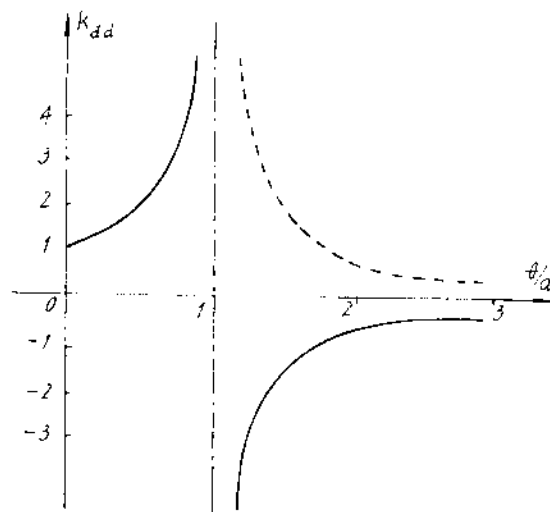
Giá trị của hệ số này phụ thuộc chủ yếu vào quan hệ giữa tần số vòng của lực kích động với tần số riêng của hệ (tần số dao động tự do). Trên hình 16.4 chỉ ra sự thay đổi của hệ số động lực k_{dd} , theo quan hệ θ/ω . Ta nhận thấy rằng với $\theta/\omega < 1$, biên độ của chuyển động có giá trị dương và cùng góc pha với lực kích động, còn với quan hệ $\theta/\omega > 1$, biên độ của chuyển động là âm và ngược pha so với lực kích động một góc là π .

Đối với trường hợp chuyển động được sinh ra dưới tác dụng của lực kích động có $\omega = \theta$, thì các biên độ của dao động có thể tăng lên vô cùng (theo lý thuyết). Hiện tượng này gọi là hiện tượng cộng hưởng và tần số riêng của hệ (ω) thường được gọi là “tần số cộng hưởng”. Cũng chính vì lý do trên mà đường cong trên hình 16.4 được gọi là “đường cong cộng hưởng”.

Cần nhấn mạnh rằng hệ số động k_{dd} còn cho khả năng tính được lực tác động tĩnh tương đương với hiệu ứng động của F_0 .

$$\text{Cụ thể là:} \quad F_d = F(t)_{max} = \pm k_d \cdot F_0 \quad (16.28)$$

$$\text{Cũng như vậy:} \quad x(t)_{max} = \Delta_{dmax} = k_d \cdot \Delta T_0 \quad (16.29)$$



Hình 16.4.

2. Dao động cưỡng bức có cản nhớt

Trong trường hợp này, ta xét loại lực kích động có dạng $F(t) = F_0 \sin \theta t$ đặt lên hệ dao động, phương trình của chuyển động sẽ trở thành:

$$\ddot{x}(t) + 2v\omega x(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \sin \theta t \quad (16.30)$$

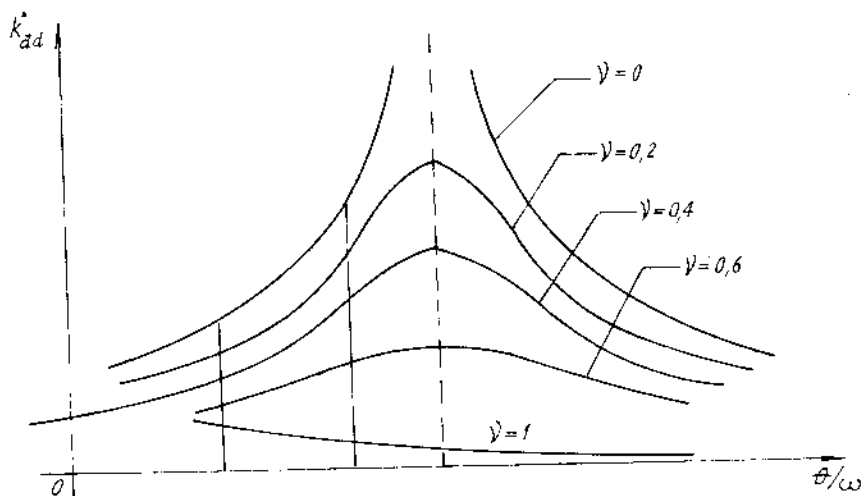
Nghiệm của (16.30) ở chế độ bình ổn có dạng:

$$x(t) = k_{dd}^* \Delta T_0 \sin \theta t \quad (16.31)$$

Hệ số động lực mới k_{dd}^* kể đến tính tắt dần có biểu thức:

$$k_{dd}^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4v^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}} \quad (16.32)$$

Trong hình 16.5 ta chỉ ra sự biến thiên của hệ số động lực k_{dd}^* theo tỷ số θ/ω và độ cản tới hạn ν . Dễ thấy là khi $\nu = 0$ thì $k_{dd}^* = k_{dd}^*$.



Hình 16.5.

Các giá trị cực đại của nghiệm ở chế độ bình ổn sẽ là:

$$x(t)_{\max} = \Delta_{d\max} = k_{dd}^* \Delta T_0 \quad (16.33)$$

$$F(t)_{\max} = F_d = k_{dd}^* F_0 \quad (16.34)$$

3. Dao động cưỡng bức gây ra bởi các vật quay không cân bằng

Trong trường hợp dao động sinh ra bởi vật không cân bằng khi quay, biên độ của lực kích động có biểu thức như sau:

$$F(t) = m_0 \cdot e \cdot \theta^2 \sin \theta t \quad (16.35)$$

trong đó: θ là vận tốc góc của trục quay, m_0 là khối lượng mất cân bằng và e là độ lệch tâm của khối lượng m_0 . Phương trình (16.30) có dạng:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = m_0 e \cdot \theta^2 \sin \theta t \quad (16.36)$$

hoặc là:

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{m_0}{m} e \cdot \theta^2 \sin \theta t \quad (16.37)$$

trong đó: $F_o = m_o \cdot e \cdot \theta^2$ đặc trưng cho giá trị biên độ của lực kích động biến đổi tuần hoàn.

Trong chế độ kích động duy trì, nghiệm của phương trình chuyển động trên có biểu thức:

$$x(t) = \frac{m_o}{m} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right) k_{dd}^* \sin \theta t = \frac{Q_o}{Q} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_{dd}^* \sin \theta t \quad (16.38)$$

trong đó: $Q = mg$ là trọng lượng bản thân động cơ gây kích thích và $Q_o = m_o \cdot g$ – trọng lượng của khối lượng mất cân bằng của rôto động cơ, e là độ lệch tâm.

* Các giá trị của biên độ đối với các chuyển động có biểu thức như sau:

– Khi bỏ qua sự tắt dần:

$$x(t)_{\max} = \Delta_{d\max} = \frac{Q_o}{Q} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_{dd} \quad (16.39)$$

– Khi không bỏ qua sự tắt dần:

$$x(t)_{\max} = \Delta_{d\max} = \frac{Q_o}{Q} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_{dd}^* \quad (16.40)$$

* Các lực động cực đại sẽ có giá trị:

$$F(t)_{\max} = F_d = m \cdot \Delta_{d\max} \cdot \omega^2 = m_o \cdot e \cdot \theta^2 \cdot k_{dd}^* = F_o \cdot k_{dd}^* \quad (16.41)$$

– Khi bỏ qua sự cản:

$$F(t)_{\max} = F_d = m_o \cdot e \cdot \theta^2 \cdot k_{dd} = F_o \cdot k_{dd} \quad (16.42)$$

II. HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

Một kết cấu bất kỳ đều có thể được mô hình hoá gần đúng như là một hệ dao động có số bậc tự do hữu hạn khi giả thiết các yếu tố quán tính tập trung trên một số đoạn xác định. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu các dao động tự do và cưỡng bức của các kết cấu kiểu này bằng hai phương pháp sau đây:

- Thứ nhất, phương pháp lực quán tính hay là phương pháp ma trận độ mềm.
- Thứ hai, phương pháp chuyển vị hay là phương pháp ma trận độ cứng.

§3. DAO ĐỘNG TỰ DO

1. Phương pháp ma trận độ mềm

Xét một hệ dao động có n bậc tự do như trên hình 16.6. Dưới tác dụng của một xung ban đầu, hệ sẽ thực hiện các chuyển động dao động quanh vị trí cân bằng tĩnh của nó. Tại một thời điểm bất kỳ của chuyển động, các chuyển vị thẳng tương ứng của các khối lượng $m_1, m_2, m_k, \dots, m_n$ là $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots, x_n(t)$. Do vậy theo phương dao động các lực quán tính đặt vào các khối lượng có biểu thức:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = -m_1 \ddot{x}_1(t) \\ I_2 = -m_2 \ddot{x}_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ I_k = -m_k \ddot{x}_k(t) \\ \dots\dots\dots \\ I_n = -m_n \ddot{x}_n(t) \end{array} \right. \quad (16.43)$$

Nếu gọi δ_{kj} là chuyển vị của m_k do một lực bằng đơn vị đặt vào m_j , theo phương dao động gây ra thì dưới tác dụng của các lực quán tính, khối lượng thứ k bất kỳ m_k ($k, j = 1, \dots, n$) có chuyển vị $x_k(t)$ và được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng như sau:

Phương trình thứ k dạng khai triển

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k(t) = I_1 \delta_{k1} + I_2 \delta_{k2} + \dots + I_k \delta_{kk} + \dots + I_n \delta_{kn} & & & & & & (16.44a) \\ \dots & \dots & (k = \overline{1, n}) & \dots & \dots & & \end{array}$$

Dạng ma trận:

$$\{X\} = [D] \{I\} \quad (16.44b)$$

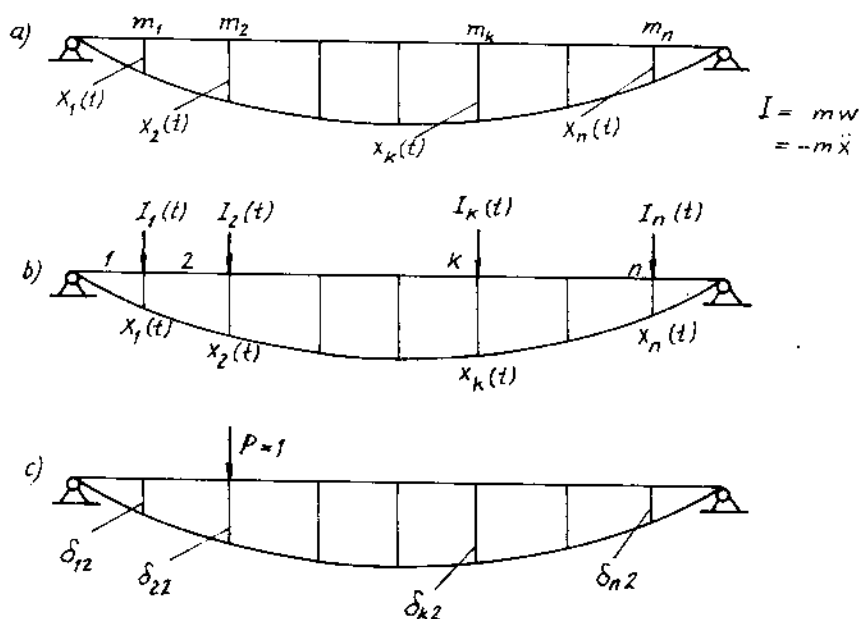
Thay vào hệ phương trình 16.44 các lực quán tính có giá trị tương ứng trong 16.43, ta nhận được dưới dạng khai triển và ma trận như sau:

Phương trình thứ k:

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & x_k(t) + m_1 \ddot{x}_1(t) \delta_{k1} + m_2 \ddot{x}_2(t) \delta_{k2} + \dots + m_k \ddot{x}_k(t) \delta_{kk} + \dots + \\ & + m_n \ddot{x}_n(t) \delta_{kn} = 0 \\ & \dots \dots (k = \overline{1, n}) \dots \dots \end{aligned} \quad (16.45a)$$

Dạng ma trận:

$$\{X\} + [M] \{\ddot{X}\} [D] = 0 \quad (16.45b)$$



Hình 16.6.

Nghiệm của hệ phương trình vi phân (16.45) được tìm dưới dạng:

$$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k(t) = A_k \sin(\omega t + \varphi) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (k = \overline{1, n}) \quad (16.46)$$

Thay (16.46) với $\ddot{x}_i(t) = -A_i \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) vào hệ (16.45) ta đi đến hệ phương trình dạng khai triển:

Phương trình thứ k của hệ:

$$m_1 \delta_{k1} \omega^2 \cdot A_1 + m_2 \delta_{k2} \omega^2 \cdot A_2 + \dots + (m_k \delta_{kk} \omega^2 - 1) \cdot A_k + \dots +$$

$$+ \dots + m_n \delta_{kn} \omega^2 \cdot A_n = 0, \quad (16.47)$$

$$(k = \overline{1, n})$$

Hệ phương trình (16.47) đặc trưng cho chuyển động của hệ dao động tự do nhiều bậc tự do. Trong các biểu thức trên ta đã ký hiệu:

$(A_1, A_2 \dots A_k \dots A_n)$ là các biên độ dao động tự do của hệ;

ω là tần số dao động tự do của hệ;

δ_{ij} là các hệ số ảnh hưởng biểu thị chuyển vị theo phương i do lực bằng đơn vị đặt vào khối lượng m_j (hình 16.6c) theo phương dao động gây ra.

Theo định lý của J. Maxwell, ta luôn có: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Các ẩn số của hệ (16.47) là các biên độ A_i . Các nghiệm tầm thường $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$ không làm chúng ta quan tâm bởi vì chúng đặc trưng cho trạng thái cân bằng tĩnh. Để hệ có thể thực hiện các dao động thì điều kiện cần và đủ là định thức chính của hệ (16.47) phải bằng 0:

$$\Delta(\omega) = 0 \text{ hoặc là } \left| \omega^2 [D] [M] - [E] \right| = 0 \quad (16.48)$$

Sau khi khai triển định thức, ta nhận được phương trình đại số bậc n của ω^2 , được gọi là “phương trình đặc trưng” hay “phương trình tần số”.

Giải phương trình (16.48) ta sẽ nhận được các nghiệm thực dương của ω thể hiện các tần số dao động tự do ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) của hệ dao động.

Để đơn giản tính toán, ta chia hai vế của (16.48) cho ω^2 và đặt $\lambda = 1/\omega^2$ và định thức (16.48) có dạng:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}-\lambda) & m_2\delta_{12} & \dots m_k\delta_{1k} & \dots m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22}-\lambda) & \dots m_k\delta_{2k} & \dots m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{k1} & m_2\delta_{k2} & \dots (m_k\delta_{kk}-\lambda) & \dots m_n\delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots m_k\delta_{nk} & \dots (m_n\delta_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = |[D][M] - \lambda[E]| = 0 \quad (16.49)$$

Khai triển định thức ta nhận được phương trình:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (16.50)$$

Giá trị lớn nhất của λ (trong số các nghiệm) tương ứng với giá trị nhỏ nhất của ω và được ký hiệu là ω_1 . Bất kỳ một nghiệm ω_i nào khác cũng sẽ có giá trị $\omega_i > \omega_1$, được gọi là tần số dao động tự do ứng với một thứ i .

Nhờ có các tần số riêng ω_i mà ta xác định được các tần số $f_i = \omega_i / 2\pi$ và các chu kỳ riêng $T_i = 1/f_i = 2\pi/\omega_i$. Số lượng các giá trị riêng sẽ tương ứng với số bậc tự do động lực. Do vậy quan hệ của các giá trị riêng được sắp xếp như sau:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix};$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ở đây: $[D]$ – ma trận độ mềm;

$[M]$ – ma trận khối lượng hay ma trận quán tính;

$[E]$ – ma trận đơn vị;

$[\Phi]$ – ma trận cột, biểu diễn một một dao động tự do.

Các trị riêng sẽ được tìm từ các phương trình đặc trưng sau đây:

$$\Delta(\omega) = \left| \omega^2 [D] [M] - [E] \right| = 0 \quad (16.56)$$

hoặc:

$$\Delta(\lambda) = \left| [D] [M] - \lambda [E] \right| = 0 \quad (16.57)$$

Các vectơ riêng có thể tìm bằng cách thay thế mỗi một lần giá trị λ_i vào phương trình (16.55), từ đó ta xác định được:

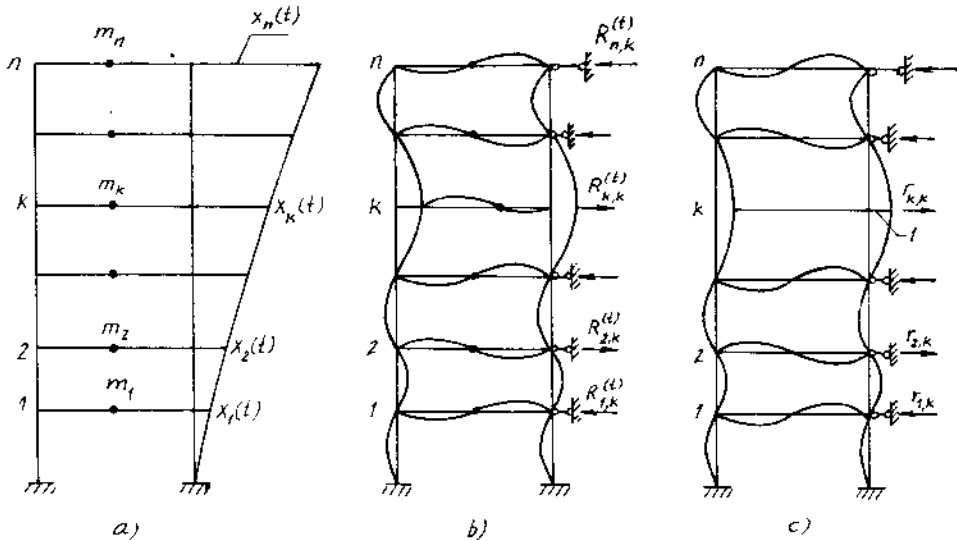
$$[\Phi]_i = \{\Phi_{ki}\}_{k=1, \dots, n} \quad (16.58)$$

Đối với hệ 1 bậc tự do phương trình (16.55) và (16.56) cho ta:

$$\Phi_{11} = +1 \text{ và } \omega^2 \delta_{11} m_1 - 1 = 0. \text{ Do đó: } \omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m_1} \text{ hay } \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}}.$$

2. Phương pháp ma trận độ cứng

Một hệ động lực được biểu diễn trên hình (16.8a) như là một ví dụ, có n bậc tự do, có thể thực hiện một chuyển động dao động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh sau một kích động tức thời bên ngoài. Khi ấy các chuyển vị ngang của các khối lượng là $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$.



Hình 16.8.

Nếu ta tưởng tượng rằng tất cả các bậc tự do đều bị chặn bởi các gối tựa đơn áp đặt theo phương các chuyển vị ngang $x(t)$ trừ chuyển vị $x_k(t)$, tại đó hệ chỉ chịu một lực $R_{kk}(t)$ và gây ra chuyển vị của m_k , thì ở các gối tựa áp đặt sẽ xuất hiện các phản lực R . Tương tự như vậy có thể lặp lại quá trình nói trên đối với mỗi mức đặt khối lượng và sẽ nhận được mỗi

lần như thế một lực quán tính $I_k(t)$ và các phản lực liên kết tương ứng R_j tại các gối đỡ áp đặt. Thực tế hệ là tự do chứ không có gối chặn các chuyển vị của các khối lượng, vì thế phản lực ở các gối tựa do tất cả các nguyên nhân gây ra phải bằng 0. Cụ thể là:

$$R_k = -I_k(t) + \sum_{j=1}^n r_{kj} \cdot x_j(t) = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \quad (16.59)$$

trong đó:

$$I_k = -m_k \ddot{x}_k(t) \text{ là lực quán tính đặt vào } m_k \quad (16.60)$$

Dưới dạng khai triển, hệ phương trình (16.59) được viết:

Đối với phương trình thứ k:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_k \ddot{x}_k(t) + r_{k1} x_1(t) + r_{k2} x_2(t) + \dots + r_{kk} x_k(t) + \dots + r_{kn} x_n(t) = 0 & (16.61) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Nếu thừa nhận nghiệm riêng của hệ này dưới dạng:

$$x_k(t) = A_k \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

thì hệ (16.61) trở thành:

Đối với phương trình thứ k:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} A_1 + r_{k2} A_2 + \dots + (r_{kk} - m_k \omega^2) A_k + \dots + r_{kn} A_n = 0 & (16.62) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & (k = \overline{1, n}) & & & & & \end{array}$$

trong đó r_{jk} biểu diễn các phản lực tìm được tại liên kết j, khi ta áp đặt một chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại gối k theo phương k. Theo định lý của L. Rayleigh ta luôn có: $r_{jk} = r_{kj}$.

Hệ (16.62) là hệ tuyến tính và thuần nhất. Do đó, để có nghiệm khác 0, thì định thức chính của nó phải bằng 0. Định thức này cho ta phương trình đặc trưng và các nghiệm của nó là các tần số dao động riêng của hệ ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k < \dots < \omega_n$).

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (r_{11} - m_1 \omega^2) & r_{12} & r_{1k} & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - m_2 \omega^2) & r_{2k} & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & (r_{kk} - m_k \omega^2) & r_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{nk} & (r_{nn} - m_n \omega^2) \end{vmatrix} \quad (16.63)$$

Dưới dạng ma trận, hệ phương trình (16.62) sẽ có dạng:

$$([R] - \omega^2 [M]) [A] = [0] \quad (16.64)$$

$$\text{Tương tự ta có: } ([R] - \omega^2 [M]) [\Phi] = [0] \quad (16.65)$$

Trong đó ma trận $[R]$ gọi là ma trận độ cứng chứa các hệ số cứng r_{jk} , là ma trận vuông đối xứng cấp $n \times n$.

Các trị riêng ω_i là các nghiệm của phương trình:

$$\Delta(\omega) = |[R] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (16.66)$$

Các vectơ riêng được tìm bằng cách thay thế lần lượt mỗi một lần các tần số riêng ω_i vào trong hệ (16.62) hoặc (16.65):

$$([R] - \omega_i^2 [M]) [\Phi]_i = [0] \quad (16.67)$$

Trường hợp hệ 1 bậc tự do, từ phương trình (16.65) ta rút ra:

$$\Phi_{11} = +1 \text{ và } \omega_1^2 = \frac{r_{11}}{m_1} \text{ hay } \omega_1 = \sqrt{\frac{r_{11}}{m_1}}.$$

3. Quan hệ giữa ma trận $[D]$ và $[R]$

Từ các phương trình (16.53) và (16.64), ta có thể tìm được mối liên hệ giữa hai ma trận $[D]$ và $[R]$. Thật vậy từ (16.53) ta có:

$$([E] - \omega^2 [D]) [\Phi] = [0] \quad (16.68)$$

Mặt khác từ phương trình (16.65) ta có:

$$([R] - \omega^2 [M]) [\Phi] = [0] \quad (16.69)$$

Nhân trái 2 vế của (16.69) với $[R]^{-1}$ ta nhận được:

$$([R]^{-1}[R] - \omega^2[R]^{-1}[M])[\Phi] = [0] \quad (16.70)$$

Vì rằng $[R]^{-1} [R] = [E]$, nên ta có:

$$([I] - \omega^2 [R]^{-1} [M]) [\Phi] = [0] \quad (16.71)$$

So sánh 2 phương trình (16.68) và (16.71) ta rút ra:

$$[D] = [R]^{-1} \quad \text{hay} \quad [D][R] = [E] \quad (16.72)$$

Vậy ma trận độ mềm chính là ma trận nghịch đảo của ma trận độ cứng.

§4. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

1. Phương pháp lực quán tính – ma trận độ mềm

Ta hãy xét một hệ dao động có n bậc tự do chịu các lực kích động có cùng tần số θ : $F_j(t) = F_{j,0} \cdot \sin \theta t$ ($j = 1, 2, \dots, n$) như trên hình 16.9a trong đó các biên độ $F_{j,0}$ và các tần số θ cho trước. Tại một thời điểm chuyển vị ngang của các khối lượng theo phương dao động là: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots, X_n(t)$.

Dưới tác dụng đồng thời của các lực quán tính I_x và lực kích động $F_j(t)$ (hình 16.9b) thì các chuyển vị này có thể được xác định qua các hệ số ảnh hưởng (đô mềm) theo nguyên lý công tác dụng:

Chuyển vi của khối lượng thứ k:

$$\left. \begin{aligned} & \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ & x_k(t) = I_1 \delta_{k1} + I_2 \delta_{k2} + \dots + I_k \delta_{kk} + \dots + I_n \delta_{kn} + \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{kj} \\ & \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ & k = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \quad (16.73)$$

Thay các $I_k(t)$ trong (16.43) vào (16.73) ta được đối với phương trình thứ k của hệ:

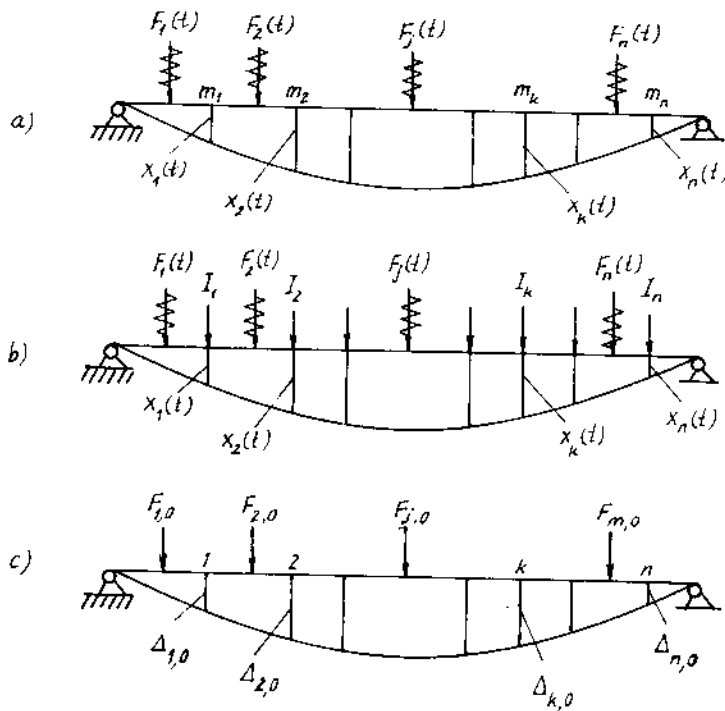
$$\left. \begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & x_k(t) + m_1 \ddot{x}_1(t) \delta_{k1} + m_2 \ddot{x}_2(t) \delta_{k2} + \dots + m_k \ddot{x}_k(t) \delta_{kk} + \dots + \\
 & \quad + m_n \ddot{x}_n(t) \delta_{kn} - \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{kj} = 0 \\
 & \dots\dots\dots k = \overline{1, n} \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} (16.74)$$

trong đó:

δ_{kj} là chuyển vị theo phương khối lượng m_k do lực $\bar{F}_j = 1$ gây ra.

δ_{ki} là chuyển vị theo phương dao động của khối lượng m_k do lực đơn vị đặt vào khối lượng m_i theo phương dao động của m_k gây ra. Nghiệm của hệ phương trình (16.74) trong trường hợp tổng quát có dạng:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t)$$



Hình 16.9.

Để biểu diễn dao động cưỡng bức theo biên độ các lực quán tính, ta có thể viết phương trình (16.77) dưới dạng:

$$\theta^2 [D] [M] \{B\} - [E] \{B\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (16.78)$$

Ma trận cột các biên độ lực quán tính có biểu thức:

$$\{J\} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} = \theta^2 [M] \{B\} = \begin{bmatrix} \theta^2 \cdot m_1 B_1 \\ \theta^2 \cdot m_2 B_2 \\ \vdots \\ \theta^2 \cdot m_k B_k \\ \vdots \\ \theta^2 \cdot m_n B_n \end{bmatrix} \quad (16.79)$$

Ta nhân (16.79) với $[M]^{-1}$. Cụ thể là:

$$[M]^{-1} \{J\} = \theta^2 [M]^{-1} [M] \{B\} \quad (16.80)$$

Mặt khác ta lại có: $[M]^{-1} [M] = [E]$

Phương trình (16.80) trở thành:

$$[E] \{B\} = \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \{J\} \quad (16.81)$$

Thay các kết quả (16.79) và (16.81) vào phương trình (16.78) ta có:

$$[D] \{J\} - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \{J\} + \{\Delta\} = \{0\}$$

Hoặc là:

$$\left([D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \right) \{J\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (16.82)$$

Nếu ký hiệu:

$$[D^*] = [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \quad (16.83)$$

Phương trình (16.82) trở thành:

$$[D^*] \{J\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (16.84)$$

Đây là phương trình biểu diễn dao động cưỡng bức theo biên độ lực quán tính dưới dạng ma trận. Nó cho phép ta tìm được ma trận cột $\{J\}$.

Để thấy rằng ma trận $[D^*]$ nhận được bằng cách thay đường chéo chính của ma trận $[D]$ bằng đường chéo chính với các phần tử:

$$\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k \theta^2} \quad (k = \overline{1, n})$$

Để cho phương trình (16.84) có nghiệm khác không thì định thức của nó phải khác không.

Trong trường hợp đó ta có:

$$\theta^2 [D][M] - [I] \neq 0 \quad (16.85)$$

$$\text{Hay là: } |D^*| = \left| [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \right| \neq 0 \quad (16.86)$$

Nếu $|D^*| = 0$ thì vectơ biên độ lực quán tính $\{J\}$ và vectơ biên độ dao động cưỡng bức $\{B\}$ có các giá trị tiến tới vô cùng, nghĩa là điều kiện cộng hưởng xảy ra: $\theta = \omega_i^*$.

2. Phương pháp chuyển vị - ma trận độ cứng

Giả sử rằng hệ khảo sát chịu tác dụng của các lực kích động điều hòa như mục trên. Khi ấy chuyển vị của các khối lượng theo phương dao động sẽ nhận được từ việc giải phương trình ma trận sau đây:

$$[R^*] \{B\} + \{R\} = \{0\} \quad (16.87)$$

Với: $[R^*] = [R] - \theta^2 [M]$ là ma trận độ cứng thu gọn.

Sau khi giải hệ này, ma trận biên độ chuyển vị được xác định và do đó các lực tương đương tĩnh cực đại sẽ là:

$$\{P_d\} = [R]\{B\} \quad (16.86)$$

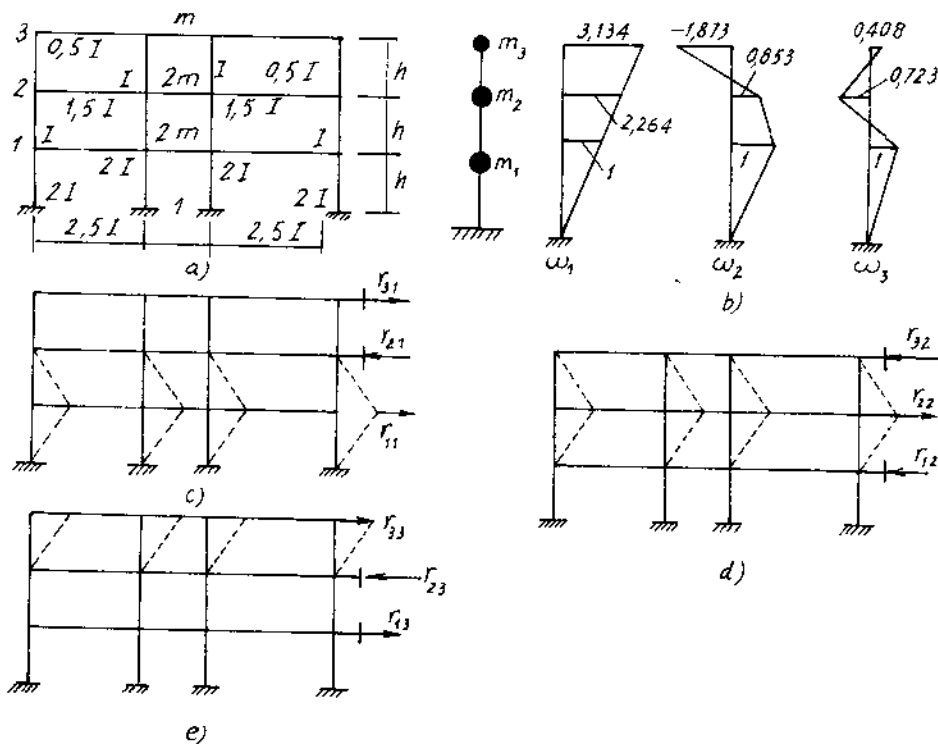
Để tránh cộng hưởng thì $[R]^*$ cần phải khác không, cụ thể là:

$$|[R] - \theta^2[M]| \neq 0.$$

§5. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Đối với khung 3 tầng như trên hình 16.10a bị dao động ngang do động đất gây ra, hãy xác định các giá trị riêng và vectơ riêng khi sử dụng phương pháp ma trận độ cứng. Giả thiết các dầm có độ cứng vô hạn.



Hình 16.10.

GIẢI:

Khi nghiên cứu dao động ngang của khung, chúng ta có thể giả thiết các khối lượng tập trung trên từng tầng, vì vậy hệ có 3 bậc tự do. Việc tính toán các chu kỳ riêng của nó nhờ vào phương trình sau:

$$| [R] - \omega^2 [M] | = 0$$

Các hệ số cứng hay còn gọi là các phản lực đơn vị được xác định như trong chương 11. Các hệ số này có giá trị như sau:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 156 \text{ EJ/h}^3; & r_{12} &= -60 \text{ EJ/h}^3; & r_{13} &= 0; \\ r_{21} &= -60 \text{ EJ/h}^3; & r_{22} &= 96 \text{ EJ/h}^3; & r_{23} &= -36 \text{ EJ/h}^3; \\ r_{31} &= 0; & r_{32} &= -36 \text{ EJ/h}^3; & r_{33} &= 36 \text{ EJ/h}^3; \end{aligned}$$

Kể đến các giá trị đã chỉ ra ở trên và các khối lượng trên hình 16.10b, c, d, e, ta có các ma trận tương ứng:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \frac{12 \text{ EJ}}{h^3} \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đưa vào ký hiệu: $\alpha = \frac{mh^3}{12 \text{ EJ}} \omega^2$, phương trình đặc trưng trở thành:

$$\left| \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 13-2\alpha & -5 & 0 \\ -5 & 8-2\alpha & -3 \\ 0 & -3 & 3-\alpha \end{bmatrix} \right| = 0$$

Hoặc là ở dạng khai triển:

$$4\alpha^3 - 54\alpha^2 + 187\alpha - 120 = 0$$

Từ đó các nghiệm của phương trình này là:

$$\alpha_1 = 0,827 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_1^2 ; \quad \alpha_2 = 4,366 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_2^2 ;$$

$$\alpha_3 = 8,307 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_3^2 .$$

Từ các α_i , các tần số riêng ω_i được rút ra như sau:

$$\omega_1 = 3,150 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} ; \quad \omega_2 = 7,238 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} ; \quad \omega_3 = 9,984 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} .$$

Các vectơ riêng được xác định từ phương trình tổng quát (16.67). Đó là hệ ba phương trình 3 ẩn:

$$\left. \begin{aligned} (13 - 2\alpha_i) \phi_{1,i} - 5\phi_{2,i} &= 0 \\ -5\phi_{1,i} + (8 - 2\alpha_i) \phi_{2,i} - 3\phi_{3,i} &= 0 \\ -3\phi_{2,i} + (3 - \alpha_i) \phi_{3,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ứng với mỗi giá trị của i sẽ có một tần số, ta giả thiết: $\phi_{1,1} = \phi_{1,2} = \phi_{1,3} = 1,000$.

– Để tìm dạng riêng thứ nhất của dao động, chúng ta lấy:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= 0,827 \\ \phi_{1,1} &= 1,000 \end{aligned} \right.$$

Sau đó thay vào hệ phương trình tổng quát, ta được:

$$\left\{ \begin{aligned} (13 - 2 \cdot 0,827) \cdot 1 - 5\phi_{2,1} &= 0 \\ -5 \cdot 1 + (8 - 2 \cdot 0,827) \phi_{2,1} - 3\phi_{3,1} &= 0 \\ -3\phi_{2,1} + (3 - 0,827) \phi_{3,1} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Từ đó chúng ta nhận được: $\phi_{2,1} = 2,264$ và $\phi_{3,1} = 3,134$.

– Để tìm dạng riêng thứ hai của dao động, ta lấy:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_2 &= 4,366 \\ \phi_{1,2} &= 1,000 \end{aligned} \right.$$

Tương tự như trên, ta có: $\phi_{2,2} = 0,853$; $\phi_{3,2} = -1,873$.

– Để tìm dạng riêng thứ ba của dao động, ta lấy:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 8,307 \\ \phi_{1,3} = 1,000 \end{cases}$$

Chúng ta tìm được: $\phi_{2,3} = -0,723$; $\phi_{3,3} = 0,408$.

Với các giá trị vừa tìm được, chúng ta có thể biểu diễn các dạng dao động riêng như trên hình 16.10b.

Ta thấy rằng các dao động riêng ở trên trực giao với nhau. Thật vậy:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,1} \cdot \phi_{k,2} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot 2,269 \cdot 0,853 + m \cdot 3,134 \cdot (-1,873) \cong 0 \\ \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,2} \cdot \phi_{k,3} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot 0,853 \cdot (-0,723) + m \cdot (-1,873) \cdot 0,428 \cong 0 \\ \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,1} \cdot \phi_{k,3} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot (-0,723) \cdot 2,269 + m \cdot 0,408 \cdot 3,134 \cong 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2

Hãy vẽ biểu đồ mômen uốn động lực, tính các độ võng động cực trị và kiểm tra bên đối với trục liên tục đường kính D cho trên hình 16.11a. Trục này chịu tác dụng đồng thời của tải trọng tĩnh $Q = m \cdot g = 50 \text{ kN}$ và lực kích động $F(t) = F_0 \sin \theta t$. Cho trước các giá trị: $F_0 = 30 \text{ kN}$; $\theta = 35 \text{ rad/s}$; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $l = 6,00 \text{ m}$; $D = 19,68 \text{ cm}$, $[\sigma] = 23 \text{ kN/cm}^2$.

GIẢI

Sau khi tính toán tĩnh, chúng ta thấy rằng dưới tác dụng của tải trọng Q, độ võng tĩnh của dầm siêu tĩnh này tại vị trí đặt khối lượng m có giá trị như sau:

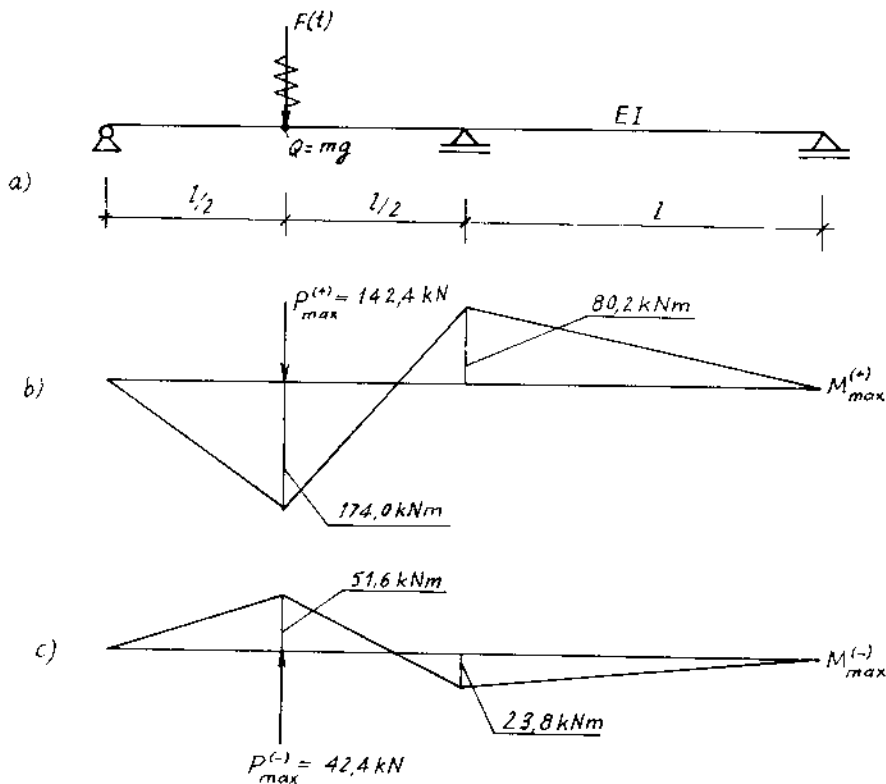
$$\Delta T_Q = \frac{23}{1536} \cdot \frac{Ql^3}{EI} = \frac{23}{1536} \cdot \frac{50 \cdot 6^3}{30000} = 0,0054 \text{ m} = 0,54 \text{ cm}$$

Vì vậy tần số riêng của hệ là:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta T_Q}} = \sqrt{\frac{981}{0,54}} = 42,6 \text{ rad/s}$$

và do đó hệ số động lực có giá trị:

$$k_d = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1 - (35/42,6)^2} = \frac{1}{1 - 0,675} = 3,08$$



Hình 16.11.

Biên độ lớn nhất sẽ là:

$$\Delta_{dmax} = k_d \Delta_{T_{F_0}} = k_d \cdot \frac{23}{1536} \cdot \frac{F_0 l^3}{EI} = \pm 3,08 \cdot \frac{23}{1536} \cdot \frac{30 \cdot 6^3}{3000} = \pm 0,0099 \text{ m} \approx \pm 1 \text{ cm}.$$

Giá trị lực tĩnh tương đương do ảnh hưởng động lực của lực kích động sẽ là:

$$F_d = \pm k_d F_0 = \pm 3,08 \cdot 30 = \pm 92,4 \text{ kN}$$

Lực này có thể tác dụng theo chiều này hoặc chiều kia, theo chiều này lực tổng cộng có giá trị lớn nhất:

$$P_{\max}^{(+)} = Q + F_d = 50 + 92,4 = 142,4 \text{ kN}$$

còn theo chiều kia có giá trị nhỏ nhất:

$$P_{\max}^{(-)} = Q - F_d = 50 - 92,4 = -42,4 \text{ kN}$$

Các biểu đồ mômen uốn tương ứng được cho trên hình 8.11b và c.

Đối với độ võng, ta có 2 giá trị ngược dấu nhau:

$$\Delta_{\max}^{(+)} = \Delta_{T_0} + \Delta_{d\max} = 0,54 + 0,99 = +1,53 \text{ cm}$$

$$\Delta_{\max}^{(-)} = \Delta_{T_0} - \Delta_{d\max} = 0,50 - 0,99 = -0,45 \text{ cm}.$$

Từ đó chúng ta tính được:

$$\sigma_{\max}^{(+)} = \frac{M_{\max}^{+}}{W} = \frac{174.100}{762,2} = 22,83 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]$$

$$\sigma_{\max}^{(-)} = \frac{M_{\max}^{-}}{W} = \frac{51,6.100}{762,2} = 6,77 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]$$

Trục làm việc an toàn về bền.

III. DAO ĐỘNG HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Trong mục này ta xét dao động ngang của dầm, một bài toán điển hình và thường gặp trong kỹ thuật.

§6. DAO ĐỘNG TỰ DO

Phương trình vi phân của dầm chịu tải trọng tĩnh đã gặp trong chương 8 có dạng:

$$V''(z) = \frac{M_x}{EJ_x} \quad \text{hoặc} \quad V^{(IV)}(z) = \frac{q(z)}{EJ_x} \quad (16.87)$$

Khi thay vào phương trình vi phân này tải trọng ngang bằng lực quán tính với $q(z) = 0$, theo nguyên lý D'Alembert ta nhận được phương trình vi phân dao động tự do:

$$EJ_x \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} = -m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (16.88)$$

ở đây m là khối lượng tính trên một đơn vị chiều dài của dầm.

Ta biểu diễn nghiệm (16.88) dưới dạng tách biến:

$$V(z, t) = \Psi(z) \cdot \varphi(t) \quad (a)$$

Thay (a) vào (16.88) với ký hiệu $\lambda^2 = \frac{m}{EJ_x}$ ta được:

$$\frac{1}{\lambda^2 \cdot \Psi(z)} \cdot \frac{d^4 \Psi(z)}{dz^4} = -\frac{1}{\varphi(t)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = \text{hằng}$$

Ta ký hiệu hằng này bằng ω^2 , khi ấy thu được hai phương trình vi phân thường là:

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot \varphi(t) = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d^4 \Psi(z)}{dz^4} - \omega^2 \cdot \lambda^2 \cdot \Psi(z) = 0 \quad (c)$$

Nghiệm của (b) có dạng:

$$\omega(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

Nghiệm của (c) có thể viết:

$$\Psi(z) = a \cdot \sin(z \sqrt{\lambda \omega}) + b \cdot \cos(z \sqrt{\lambda \omega}) + c \cdot \text{sh}(z \sqrt{\lambda \omega}) + d \cdot \text{ch}(z \sqrt{\lambda \omega})$$

Bởi vì phương trình đặc trưng của (c) là: $k^4 - \omega^2 \lambda^2 = 0$.

có nghiệm $k_1 = \sqrt{\lambda \omega}$, $k_2 = -\sqrt{\lambda \omega}$, $k_3 = i\sqrt{\lambda \omega}$, $k_4 = -i\sqrt{\lambda \omega}$.

Bây giờ nghiệm (a) sẽ là:

$$V(z, t) = \Psi(z) \cdot \varphi(t) =$$

$$= \left[A \cdot \sin(z \sqrt{\lambda \omega}) + B \cdot \cos(z \sqrt{\lambda \omega}) + C \cdot \text{sh}(z \sqrt{\lambda \omega}) + D \cdot \text{ch}(z \sqrt{\lambda \omega}) \right] \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (16.89)$$

Các hằng số A, B, C, D và δ được xác định từ các điều kiện biên và điều kiện đầu. Ví dụ, đối với dầm tựa khớp trên hai đầu cuối:

$$\text{tại } z = 0, \quad V(0, t) = 0, \quad V''(0, t) = 0$$

$$\text{tại } z = l, \quad V(l, t) = 0, \quad V''(l, t) = 0$$

Bốn điều kiện này xác định bốn phương trình thuần nhất tìm A, B, C, D. Để có nghiệm không tầm thường định thức của hệ này phải bằng không. Điều kiện này cho ta:

$$\sin(l \sqrt{\lambda \omega}) \cdot \text{sh}(l \sqrt{\lambda \omega}) = 0 \quad (16.90)$$

Khi $\text{sh}(l \sqrt{\lambda \omega}) = 0$ ta có nghiệm tầm thường $\sqrt{\lambda \omega} = 0$, do đó:

$$\sin(l \sqrt{\lambda \omega}) = 0 \quad (16.91)$$

Hay: $l \sqrt{\lambda \omega} = k\pi$ với $k = 1, 2, 3, \dots$

Do đó ω_k được xác định:

$$\omega_k = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{m l^4}} \quad (16.92)$$

Đối với một cơ bản của dao động, tần số vòng là:

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{EJ_x / m l^4}$$

Nghiệm đầy đủ của bài toán sẽ là:

$$V(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \sin(z \sqrt{\lambda \omega_k}) + B_k \cos(z \sqrt{\lambda \omega_k}) + C_k \text{sh}(z \sqrt{\lambda \omega_k}) + D_k \text{ch}(z \sqrt{\lambda \omega_k}) \right] \sin(\omega_k' t + \delta_k) \quad (16.93)$$

§7. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

Khi có mặt ngoại lực kích động $q_y(z, t)$ thì phương trình dao động cường bức có dạng:

$$EJ_x \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = q_y(z, t) \quad (16.94)$$

Xét trường hợp kích động là lực tập trung tại $z = z_0$ và có dạng:

$$P(t) = P_0 \cdot \sin \theta t$$

Đối với dầm tựa khớp ở hai đầu, ta có thể biểu diễn nghiệm cần tìm dưới dạng thỏa mãn điều kiện biên:

$$\bar{V}(z, t) = a(t) \cdot \sin(\pi z/l) \quad (16.95)$$

Nhân cả hai vế của (16.94) với (16.95) và tích phân từ 0 đến l ta đi đến:

$$\int_0^l \left[EJ_x \frac{\partial^4 \bar{V}}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} - q_y(z, t) \right] \bar{V} dz = 0$$

Hay là:

$$a(t) \cdot \left[EJ_x a(t) \frac{\pi^4}{l^4} + m \ddot{a}(t) \right] \cdot \frac{l}{2} - a(t) \cdot \int_0^l q_y(z, t) \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0$$

Có thể xem lực tập trung $P(t)$ như là lực phân bố trên đoạn $z_0 - \varepsilon \leq z \leq z_0 + \varepsilon$ có cường độ $q_y = P_0 \delta(z - z_0)$, khi đó:

$$\begin{aligned} \int_0^l q_y(z, t) \sin \frac{\pi z}{l} dz &= \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} P_0 \delta(z - z_0) \sin \theta t \sin \frac{\pi z}{l} dz = \\ &= P_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) \end{aligned}$$

Cuối cùng ta thu được:

$$\ddot{a}(t)m + EJ_x \frac{\pi^4 a(t)}{l^4} = \frac{2P_0}{l} \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right)$$

hay là:

$$\ddot{a}t + \omega_1^2 a(t) = Q_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) = f(t) \quad (a)$$

Trong đó ta đã đặt: $\omega_1^2 = EJ_x \frac{\pi^4}{l^4}$ và $Q_0 = \frac{2P_0}{ml}$.

Nghiệm riêng của (a) theo tích phân Duhamel như sau:

$$a_r(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(t) \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{Q_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right)}{\theta^2 - \omega_1^2}$$

Nghiệm tổng quát của (a) là:

$$a(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t) + B \cdot \cos(\omega_1 t) + a_r(t) \quad (16.96)$$

Do đó nghiệm của (16.94) với điều kiện nêu trên là:

$$\bar{V}(z, t) = a(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi z}{l} \right) \quad (16.97)$$

Các hằng số A, B trong (16.96) được xác định từ điều kiện đầu.

Ví dụ, tại $t = 0$, $V(z, 0) = 0$, $\dot{V}(z, 0) = 0$ thì $B = 0$ và

$$A = - \frac{Q_0 \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) \cdot \theta}{(\theta^2 - \omega_1^2) \cdot \omega_1}.$$

IV. HỆ CHỊU TẢI TRỌNG VA CHẠM

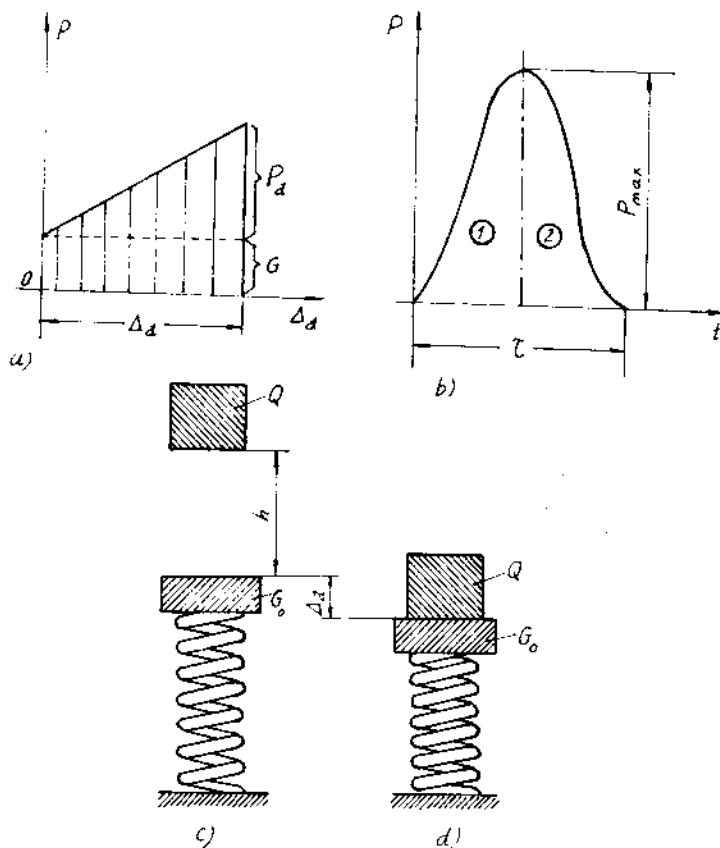
Va chạm là hiện tượng tác dụng tương hỗ cơ học diễn ra trong một khoảng thời gian rất ngắn và gây ra sự đột biến vận tốc của các chất điểm trong hệ (hình 16.12).

Trong giáo trình này chúng ta chỉ nghiên cứu va chạm giữa hai vật rắn khi sóng biến dạng truyền lan theo phương va chạm và sóng biến dạng truyền theo phương vuông góc với phương va chạm với thời gian va chạm kéo dài cỡ từ $10^{-3} \div 10^{-6}$ giây.

§8. PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG TRONG VA CHẠM

Đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên theo thời gian của lực va chạm giữa hai vật rắn được cho trên hình 16.12b. Ứng với điểm c lực va chạm có giá trị lớn nhất. Tung độ của đồ thị $P(t)$ qua c chia đồ thị thành hai phần, tương ứng với hai pha của va chạm.

Trong pha thứ nhất: trọng tâm của các vật va chạm dịch gần lại với nhau, còn lực va chạm (lực tương hỗ) tăng dần và đạt được giá trị cực đại ở thời điểm vận tốc tương đối giữa chúng bằng không và có độ dịch gần lớn nhất.



Hình 16.12.

Trong pha thứ hai: (pha phục hồi) trọng tâm của các vật va chạm dần xa nhau, còn lực tương hỗ giảm dần về không khi hai vật ngừng tiếp xúc hoặc dần đến giá trị hằng bằng trọng lượng vật gây va chạm, nếu va chạm là không đàn hồi tuyệt đối. Do quá trình va chạm diễn ra trong một khoảng thời gian rất ngắn, nên việc xác định chính xác các tác dụng ngoài lên đối tượng bị va chạm là hết sức khó khăn và phức tạp.

Chính vì lý do đó ta cần phải tính toán gần đúng quá trình này với giả thiết là vật gây va chạm truyền cho vật bị va chạm tại điểm va chạm chỉ một tốc độ ban đầu, còn vật bị va chạm chưa kịp chuyển vị. Bài toán đặt ra là xác định chuyển vị động lực của điểm bị va chạm. Khi đã biết chuyển vị này, ta hoàn toàn có thể giải quyết bài toán về ứng suất sinh ra trong hệ chịu va chạm bằng cách dẫn bài toán động lực này về bài toán tĩnh tương đương. Cụ thể là xác định một lực đặt tĩnh vào điểm va chạm sao cho nó gây ra chuyển vị động lớn nhất trong hệ. Người ta quy ước gọi lực như thế là lực động hay lực tĩnh tương đương và được ký hiệu là P_{dmax} . Dưới đây, chúng ta sẽ nghiên cứu hai giải pháp dẫn bài toán va chạm về bài toán tĩnh tương đương nói trên.

1. Giải pháp 1

Giả sử có một vật trọng lượng Q va chạm vào một vật khác trọng lượng G_0 gắn vào đầu một lò xo không trọng lượng (hình 16.12c). Va chạm được xem là tuyệt đối không đàn hồi. Gọi k là độ cứng của lò xo, chuyển vị tĩnh của lò xo do lực Q này đặt tĩnh gây ra là:

$$\Delta T_Q = \frac{Q}{k} \quad (a)$$

Sau va chạm, do nhận được tốc độ ban đầu ở đầu lò xo, mà lò xo bị co lại một đoạn Δ_d (hình 16.12d) do một lực động P_d nào đó gây ra là:

$$\Delta_d = \frac{P_d}{k} \quad (b)$$

Vận tốc của vật gây va chạm ngay trước lúc va chạm có biểu thức:

$$V_0^2 = 2gh \quad (c)$$

Gọi V_1 là vận tốc của hai vật sau khi kết thúc va chạm và cùng nén lò xo. Theo định lý biến thiên động lượng, ta có:

$$\frac{Q}{g} \cdot V_0 = \left(\frac{Q}{g} + \frac{G_0}{g} \right) V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{Q+G_0} V_0 \quad (d)$$

Ở thời điểm chịu nén lớn nhất thì lực nén lò xo đạt cực đại: $P_d + G_0$ và vận tốc V_2 ở thời điểm này cũng bằng không. Theo định lý biến thiên động năng ta có:

$$T_2 - T_1 = A \quad (e)$$

trong đó:

$$T_2 = 0 ; \quad T_1 = \frac{Q + G_0}{2g} V_1^2 = \frac{Q^2}{2g(Q + G_0)} \cdot V_0^2 ;$$

$$A = (Q + G_0) \Delta \quad (g)$$

Một lực thay đổi tác dụng từ lò xo vào G_0 trong quá trình va chạm được mô tả trên hình 16.12a.

Công của các lực này là âm (vì chúng ngược chiều với chiều chuyển động) và bằng diện tích của biểu đồ (hình 16.12a):

$$A = (G + G_0) \Delta_d - \left(G_0 \Delta_d + \frac{P_d \Delta_d}{2} \right) = Q \Delta_d - \frac{k \Delta_d^2}{2} .$$

Bây giờ, phương trình (e) trở thành:

$$\frac{Q^2 \cdot V_0^2}{2g(Q + G_0)} = Q \Delta_d - \frac{k \Delta_d^2}{2}$$

Thay (a), (c) và ta đi đến:

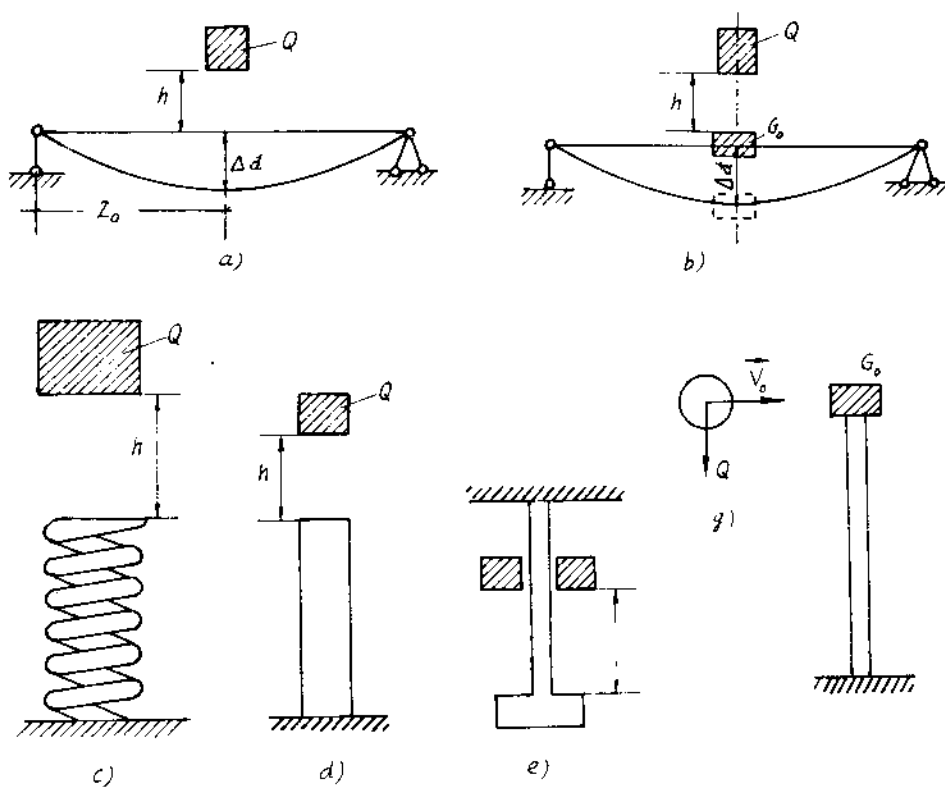
$$\Delta_d^2 - 2 \Delta T_Q \cdot \Delta_d - 2h \frac{\Delta T_Q}{1 + \frac{G_o}{Q}} = 0 \quad (16.98)$$

Giải phương trình này ta tìm được:

$$\Delta_d = \Delta T_Q + \sqrt{\Delta T_Q^2 + 2h \frac{\Delta T_Q}{1 + \frac{G_o}{Q}}} = k_{dv} \cdot \Delta T_Q \quad (16.99)$$

trong đó: k_{dv} gọi là hệ số động lực khi va chạm và bằng:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta T_Q} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_o}{Q}}} \quad (16.100)$$



Hình 16.13.

Nghiệm nhận được là nghiệm gần đúng, bởi vì khi thiết lập công thức (16.99) ta đã bỏ qua rất nhiều yếu tố ảnh hưởng đến nghiệm thực của bài toán.

Ví dụ, va chạm được xem là tuyệt đối không đàn hồi trên thực tế không hoàn toàn như vậy. Ngoài ra, ta đã bỏ qua biến dạng cục bộ ở vùng bị va chạm. Biến dạng cục bộ này có ảnh hưởng thực chất đến kết quả cuối cùng. Vì vậy công thức (16.99) cho nghiệm gần đúng thiên về an toàn. Nghĩa là giá trị chuyển vị động Δ_d nhận được từ (16.99) luôn lớn hơn chuyển vị động thực mà hệ phải chịu.

Trong phương án 1 để xây dựng công thức tính Δ_d ta đã sử dụng liên tiếp hai định lý đã biết trong giáo trình “Cơ học lý thuyết” là định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên động năng. Có thể thiết lập công thức tính Δ_d một cách đơn giản hơn khi sử dụng trực tiếp nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học dưới đây.

2. Phương án 2

Giả sử một lực Q tác dụng rất nhanh lên dầm ở điểm có tọa độ $z = z_0$ (hình 16.13a). Chuyển vị động lực cần tìm được xem là tỷ lệ với chuyển vị tĩnh.

$$\Delta_d(z) = k_{dv} \cdot \Delta_T(z) \quad (16.101)$$

$\Delta_T(z)$ – là chuyển vị tĩnh tại hoành độ z do lực P đặt tĩnh tại z_0 gây ra;

k_{dv} – hệ số động lực khi va chạm.

Theo định luật bảo toàn năng lượng cơ học thì tổng động năng T và thế năng U của hệ bảo toàn ở mỗi thời điểm là như nhau:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{const}$$

Ta chọn trạng thái không biến dạng và vị trí xuất phát của vật gây ra va chạm cách mặt dầm một khoảng là h làm vị trí thứ nhất của hệ. Ở trạng thái này mức thế năng của hệ được quy ước bằng không, nghĩa là $U_1 = 0$ và $T_1 = 0$, suy ra $T_1 + U_1 = 0$.

Trạng thái thứ hai là trạng thái hệ có chuyển vị lớn nhất, ở đó tốc độ của các điểm bằng không, do đó $T_2 = 0$.

Ở trạng thái này U_2 gồm có U'_2 của vật gây va chạm. U''_2 của trọng lượng vật bị va chạm (dầm) và thế năng biến dạng của vật bị va chạm U'''_2 cụ thể là:

$$U_2 = U'_2 + U''_2 + U'''_2 = 0$$

Cụ thể hơn:

$$U_2 = -Q[h + \Delta_d(z_0)] - \int_0^l mg \Delta_d(z) dz + \int_0^l \int_F \int \frac{E}{2} (\epsilon_d)^2 dF dz = 0$$

hay là:

$$k_{dv}^2 U_T - Q[h + \Delta_d(z_0)] - \int_0^l mg \Delta_d(z) dz = 0$$

Chú ý đến (16.101), phương trình này trở thành:

$$k_{dv}^2 U_T - k_{dv} \left[Q\Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \right] - Qh = 0 \quad (16.102)$$

Trong (16.102): U_T - thế năng biến dạng của dầm khi chịu uốn tĩnh:

Δ_{TO} - độ võng tĩnh của dầm tại $z = z_0$ do Q gây ra.

Từ (16.102) ta rút ra:

$$2k_{dv} U_{TO} = Q\Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \pm \sqrt{\left(Q\Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \right)^2 + 4Qh U_{TO}}$$

Ở đây $U_{TO} = \frac{Q\Delta_{TO}}{2}$. Nếu bỏ qua trọng lượng của vật bị va chạm (dầm) thì:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_T(z_0)}} \geq 2 \quad (16.103)$$

Đối với ứng suất σ_{dmax} ta có:

$$\sigma_{dmax} = E\epsilon_{dmax} = Ey_{dmax} \left| \frac{d^2 \Delta_{dmax}}{dz^2} \right| = Ey_{max} k_{dv} \left| \frac{d^2 \Delta_{Tmax}}{dz^2} \right| = k_{dv} \cdot \sigma_{Tmax}$$

Công thức (16.103) có thể được viết theo vận tốc v_o của vật va chạm ngay lúc sắp tiếp xúc với vật bị va chạm:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g\Delta_T(z_o)}} \quad (16.104)$$

Khi $h \gg \Delta_T(z_o)$ thì có thể bỏ qua đơn vị ở trong căn so với số hạng thứ hai trong nó và (16.104) trở thành:

$$k_{dv} = 1 + \frac{v_o}{\sqrt{g\Delta_T(z_o)}} \quad (16.105)$$

Khi va chạm ngang thì công thức trên được viết:

$$k_{dv} = \frac{v_o}{\sqrt{g\Delta_T(z_o)}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_T(z_o)}} \quad (16.106)$$

Trong trường hợp phải kể đến trọng lượng của đối tượng bị va chạm thì k_{dv} có dạng:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g\Delta_T(z_o)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \mu \cdot \frac{Q_o}{Q}\right)}} \quad (16.107)$$

Q_o là trọng lượng tổng cộng của vật bị va chạm.

μ – hệ số thu gọn trọng lượng phân bố của vật bị va chạm về điểm va chạm ($\mu < 1$). Hệ số μ được xác định gần đúng trên cơ sở cân bằng động năng của hệ khảo sát và hệ dẫn xuất có khối lượng dẫn xuất đặt ở điểm bị va chạm.

Khi đối tượng gây ra va chạm thực hiện chuyển động quay mà không phải chuyển động tịnh tiến như ở trên và gây ra chuyển vị góc trong vật bị va chạm thì có thể sử dụng trực tiếp các công thức trên

với điều kiện thay vào trong các công thức này v_o bởi ω_o , $\frac{Q}{g}$, $\frac{Q_o}{g}$ bởi mômen quán tính các khối lượng J_m và J_{m_o} đối với trục quay của chúng.

Điều kiện bền của bài toán động lực như sau:

$$\max \sigma_d = k_{dv} \cdot \sigma_{Tmax} \leq [\sigma_d] \text{ hoặc } \max \tau_d = k_{dv} \cdot \tau_{Tmax} \leq [\tau_d]$$

trong đó:

$\max \sigma_d$ và $\max \tau_d$ là ứng suất động tính toán lớn nhất;

σ_{Tmax} , τ_{Tmax} là ứng suất lớn nhất do Q đặt tĩnh gây ra;

$[\sigma_d]$ và $[\tau_d]$ là ứng suất động lực cho phép.

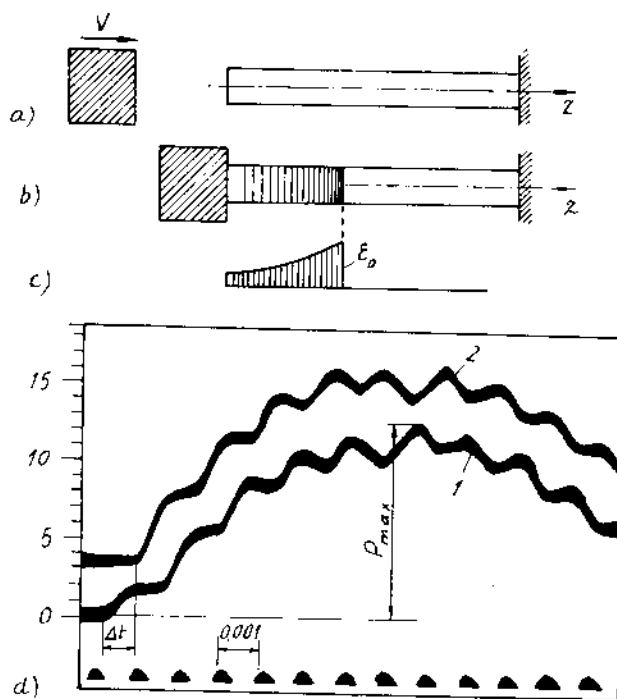
§9. KHÁI NIỆM VỀ LÝ THUYẾT SÓNG VA CHẠM

Những phương pháp nghiên cứu va chạm ở tiết §8 là dựa trên cơ sở thay thế hệ vô hạn bậc tự do bằng hệ một bậc tự do. Vì thế kết quả nhận được là gần đúng. Hệ có độ cứng càng lớn thì những kết quả tính toán theo phương pháp này càng kém chính xác hơn. Để có nghiệm chính xác phù hợp với kết quả thí nghiệm cần phải sử dụng lý thuyết truyền sóng va chạm.

Ta hãy nghiên cứu trường hợp một vật rắn tuyệt đối chuyển động với vận tốc V , đập vào đầu tự do của một thanh như hình 16.14a.

Nhiều nghiên cứu vấn đề này đã chỉ rõ rằng biến dạng nén ở thời điểm bắt đầu va chạm chỉ phụ thuộc vào tốc độ va chạm mà không phụ thuộc vào khối lượng của đối tượng bị va chạm. Quá trình hình thành và phát triển sóng va chạm trong thanh được mô tả trên hình 16.14b. Biến dạng lớn nhất ϵ_o và do đó là σ_o phát sinh ở thời điểm đầu của quá trình va chạm. Sau đó sóng biến dạng được truyền đi với tốc độ xác định dọc theo trục thanh. Sau khi sóng tới lan đến đầu ngàm của thanh thì bị phản xạ trở lại và tiếp tục lan truyền với cùng tốc độ trên theo hướng ngược lại. Ở thời điểm xuất hiện sóng

phản xạ thì ứng suất tại ngàm bằng $2\sigma_0$. Khi đi đến đầu tự do sóng lại phản xạ trở lại và đi đến đầu ngàm, quá trình cứ thế được lặp đi lặp lại liên tục. Bởi vậy biến dạng tổng cộng ở một mặt cắt nào đó sẽ bị thay đổi theo thời gian và theo một quy luật phức tạp. Ngày nay, các nghiên cứu bằng thí nghiệm cho phép xác định đủ chính xác tốc độ truyền sóng và giá trị cực đại của biến dạng. Ta hãy quan sát biến dạng theo thời gian ở hai mặt cắt tự do và ngàm của một sợi dây thép có chiều dài $l = 4,4$ m, đường kính $d = 0,8$ mm, một vật trọng lượng $Q = 0,5$ daN rơi tự do dọc theo dây từ độ cao $h = 10$ cm. Quá trình biến dạng thay đổi theo thời gian ở hai mặt cắt nói



Hình 16.14.

trên được mô tả trên hình 16.14d.

Đường cong 1 là quá trình biến dạng ở đầu dưới (tự do) của dây, đường cong 2 là quá trình biến dạng ở đầu trên (ngàm). Trục hoành hình răng cưa là thước đo thời gian. Đồ thị này cho thấy đầu trên bắt đầu biến dạng chậm sau đầu dưới một khoảng thời gian Δt . Đó là thời gian cần thiết để sóng chạy từ đầu dưới đến đầu trên và được tính theo tốc độ truyền sóng: $t_1 = l/a$. Đối với thép $a = 5120$ m/s. Trong trường hợp này:

$$t_1 = \frac{4,4}{5120} = 0,00086 \text{ gy}$$

Thời gian này được đo trên đồ thị $\Delta t = 0,0008 \text{ gy}$.

Lực kéo lớn nhất trong dây khi va chạm được cho từ đồ thị này là:

$$P_{\text{dmax}} = 12 \text{ daN.}$$

Do đó, ứng suất động lớn nhất là:

$$\sigma_{\text{dmax}} = \frac{P_{\text{dmax}}}{F} = \frac{12}{0,005} = 2400 \text{ daN/cm}^2$$

Khi đó hệ số động lực k_{dv} theo định nghĩa là:

$$k_{\text{dv}} = P_{\text{dmax}} / Q = \frac{12}{0,5} = 24.$$

Độ dãn dài tĩnh của thanh:

$$\Delta T_Q = \frac{0,5.440}{2,1.10^6.0,005} = 0,021.$$

Trọng lượng của đĩa chặn ở đầu dưới $G_0 = 0,475 \text{ daN}$. Do đó, $G_0 / Q = 0,95$.

Theo công thức gần đúng (16.107) ta có:

$$k_{\text{dv}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.10}{0,021} \frac{1}{1+0,95}} = 23,1 \approx k_{\text{dv}}^*$$

Khi G_0 rất nhỏ thì hệ số động lực k_{dv} hầu như không phụ thuộc Q . Điều này rất phù hợp với lý thuyết sóng va chạm.

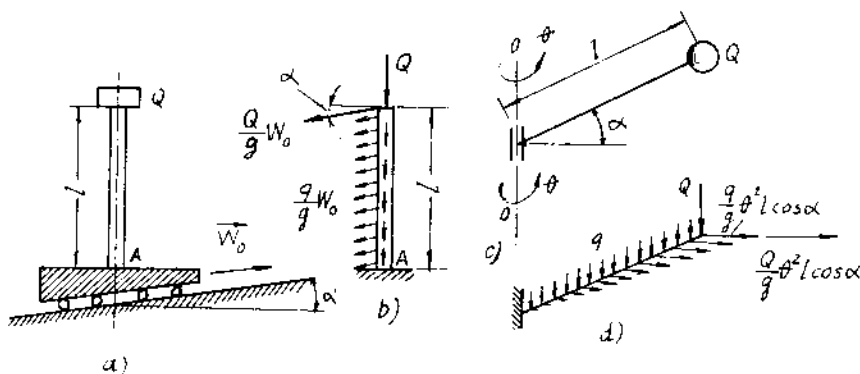
§10. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Vi dụ 1.

Một thiết bị như hình (16.15a) chuyển động với gia tốc $\bar{W}_0$ trên mặt nghiêng α . Hãy tính ứng suất cực đại tại ngàm A. Biết Q và trọng lượng 1 m của thanh là q , diện tích mặt cắt ngang của thanh là F , mômen chống uốn W .

GIẢI

Sơ đồ tính như hình 10.15b.



Hình 16.15.

Ứng suất nén do tải trọng tĩnh và động tại mặt cắt A là:

$$\sigma_n = - (Q + ql) \frac{W_0}{gF} \sin \alpha - \frac{Q + ql}{F}$$

Ứng suất uốn do lực quán tính sinh ra tại A như sau:

$$\sigma_u = \pm (Ql + 0,5 ql^2) \frac{W_0 \cos \alpha}{gW}$$

Giá trị ứng suất pháp cực trị tại mặt cắt nguy hiểm là:

$$\sigma = \pm (Ql + 0,5 ql^2) \frac{W_0 \cos \alpha}{gW} - \frac{(Q + ql) \cdot \left(1 + \frac{W_0 \cos \alpha}{g} \right)}{F}$$

Ví dụ 2

Một thanh nghiêng chịu trọng lượng Q và trọng lượng bản thân q quay quanh trục thẳng đứng $O-O$ với tốc độ góc θ như trên hình (16.15c). Hãy tính ứng suất pháp cực trị tại mặt cắt nguy hiểm nhất của thanh, nếu diện tích mặt cắt ngang và mômen chống uốn là F và W .

GIẢI

Mômen uốn tại ngàm A do Q, q và lực quán tính (hình 16.15d) tương ứng do chúng gây ra là:

$$M_u = (Q + 0,5 ql) \cdot l \cos \alpha + \left(Q + \frac{ql}{3} \right) \cdot \frac{\theta^2 l^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

Lực dọc do tác dụng tĩnh và động lực có dạng:

$$N = (Q + 0,5 ql) \cdot \frac{\theta^2 l \cos^2 \alpha}{g} - (Q + ql) \sin \alpha$$

Ứng suất pháp lớn nhất tại mặt cắt nguy hiểm của thanh là:

$$\begin{aligned} \max \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u}{W} = & \frac{(Q + 0,5 ql) \theta^2 l \cos^2 \alpha}{g} - (Q + ql) \sin \alpha \\ & + \frac{\left[\left(Q + \frac{ql}{3} \right) \theta^2 l \sin 2\alpha / 2g + (Q + 0,5 ql) \cos \alpha \right] \cdot l}{W} \end{aligned}$$

Ví dụ 3

Một thanh mặt cắt thay đổi chịu va chạm dọc như hình 16.16. Hãy tính ứng suất động lớn nhất?

GIẢI

Độ co ngắn tĩnh của thanh là:

$$\Delta L_{TQ} = \left(\frac{Q}{E} \right) \cdot \left(\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Theo công thức tính hệ số động lực ta có:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta L_T}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{1,8}} = 101$$

Ứng suất tĩnh ở phần dưới của cột là:

$$\sigma_{TQ} = \frac{100}{50} 2 \text{ daN/cm}^2$$

Ứng suất động là $\sigma_{d\max} = k_{dv} \cdot \sigma_{TQ} = 2.101 = 202 \text{ daN/cm}^2$.

Ví dụ 4

Một dầm chịu va chạm như hình 16.17. Hãy xác định các đại lượng động lực sau đây: M_{dA} , V_{dB} , V_{dK} ?

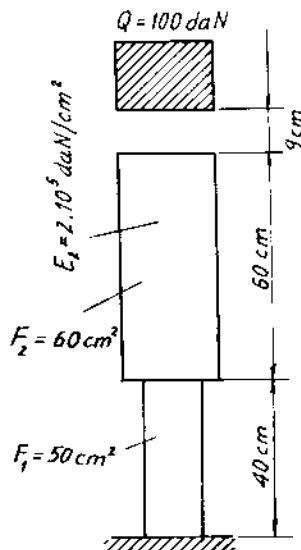
GIẢI

Chuyển vị tĩnh thẳng đứng tại điểm K là:

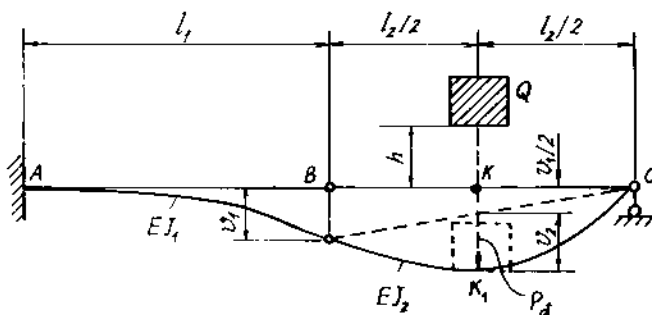
$$\begin{aligned} \Delta_{TQ} &= \frac{V_1}{2} + V_2 = \\ &= G \cdot \left(\frac{l_1^3}{12EJ_1} + \frac{l_2^3}{48EJ_2} \right) \end{aligned}$$

Do đó hệ số động lực có giá trị:

$$K_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{TQ}}}$$



Hình 16.16.



Hình 16.17.

Mômen động lực tại A là:

$$M_{dA} = K_{dv} \cdot M_{TA} = 0,5 K_{dv} \cdot Q \cdot l_1$$

Độ võng động tại điểm B và K lần lượt là:

$$\Delta_{dB} = K_{dv} \cdot Q \cdot \frac{l_1^3}{6EJ_1} ; \quad \Delta_{dk} = K_{dv} \cdot Q \cdot \left(\frac{l_1^3}{12EJ_1} + \frac{l_2^3}{48EJ_2} \right).$$

Ví dụ 5

Một vật nặng $Q = 10 \text{ kN}$ rơi từ độ cao $h = 10 \text{ cm}$ xuống dầm thép mặt cắt ngang I_{20} (hình 16.18a). Tính độ võng và ứng suất động tại mặt cắt C đối với hai trường hợp:

a) Gối B và D là gối cứng.

b) Gối B và D là các gối đàn hồi có độ cứng $C_B = 2000 \text{ N/cm}$ và $C_D = 5000 \text{ N/cm}$.

GIẢI

a) Các đặc trưng của dầm I_{20} :

$J_x = 1840 \text{ cm}^4$, $W_x = 184 \text{ cm}^3$, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$. Độ võng tĩnh do Q gây ra tại C và A được tính bằng phương pháp Mohr – Vérechtchaguinne là:

$$|\Delta_T^C| = 0,363 \text{ cm} ; \quad |\Delta_T^A| = 0,454 \text{ cm} \text{ (điểm A đi xuống, điểm C đi lên).}$$

$$K_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_T^A}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,454}} = 7,8 \text{ cm}$$

Do đó ta có:

$$V_d^C = -0,363 \times 7,8 = -2,80 \text{ cm}$$

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{tmax} \cdot K_{dv} = \frac{M_c}{W_x} \cdot K_{dv} = \frac{5 \cdot 10^5}{184} \cdot 7,5 = 21000 \text{ N/cm}^2$$

b) Trường hợp gối B và D tựa trên lò xo. Gọi Δ^A , Δ^B , Δ^C , Δ^D là chuyển vị tại A, B, C, D của dầm cứng tuyệt đối do độ lún của lò xo ở hai bên gối B và D gây ra, ta có:

$$\Delta^B = \frac{R_B}{C_B} = \frac{1.10^4 \cdot 5.10^2}{4.10^2 \cdot 2.10^3} = 6,25 \text{ cm}$$

$$\Delta^D = \frac{R_D}{C_{BD}} = \frac{1.10^4 \cdot 1.10^2}{4.10^2 \cdot 5.10^3} = 0,5 \text{ cm}$$

Từ hình vẽ suy ra:

$$\Delta^A = 7,94 \text{ cm} ; \Delta^C = 2,875 \text{ cm}$$

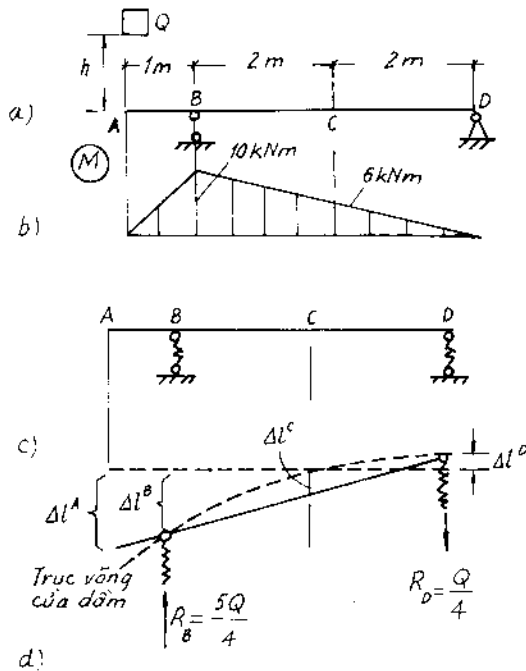
Độ võng tĩnh thực tại A, C (có kể đến độ lún hoặc giãn của lò xo).

$$\Delta_{TA} = \Delta_{TQ}^A = 0,454 + 7,94 = 8,394 \text{ cm}$$

$$\Delta_{TC} = \Delta_{TQ}^C = 2,875 - 0,364 = 2,512 \text{ cm}$$

Tính:

$$K_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{8,394}} \approx 2,84$$



Hình 16.18.

Do đó ta có:

$$V_d^C = 2,512 \times 2,84 = 7,13 \text{ cm}$$

$$\sigma_{d\max} = \sigma_{t\max} \cdot K_{dv} = \frac{5 \cdot 10^5}{184} \times 2,84 = 7725 \text{ N/cm}^2.$$

Ví dụ 6

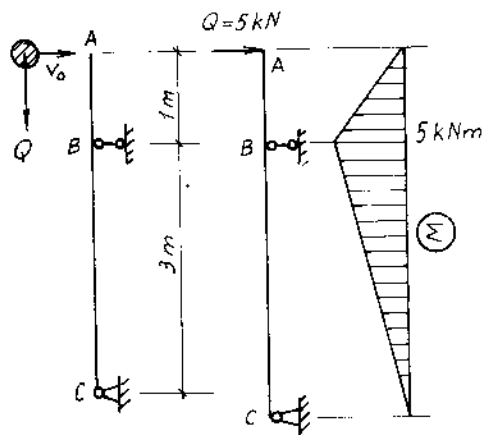
Một vật nặng $Q = 5 \text{ kN}$ bay ngang với vận tốc đều đến chạm vào đầu mút thừa A của một dầm chữ I (hình 16.19). Xác định vận tốc tối đa của vật nặng Q theo điều kiện bền? Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

GIẢI

Mặt cắt có: $I_x = 1080 \text{ cm}^4$; $W_x = 120 \text{ cm}^3$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

Từ điều kiện bền:

$$\max \sigma_d = \max \sigma_t \cdot k_{dv} \leq [\sigma]$$



Hình 16.19.

hay:

$$\frac{\max M_x}{W_x} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{g \cdot \Delta t_Q}} \leq [\sigma]$$

hay:

$$\frac{5.10^2}{120} \cdot \frac{v_o}{\sqrt{981.0,306}} \leq 16 \text{ kN/cm}^2$$

Ta rút ra:

$$v_o = 66,5 \text{ cm/s.}$$

Chương 17

TÍNH TOÁN KẾT CẤU NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI

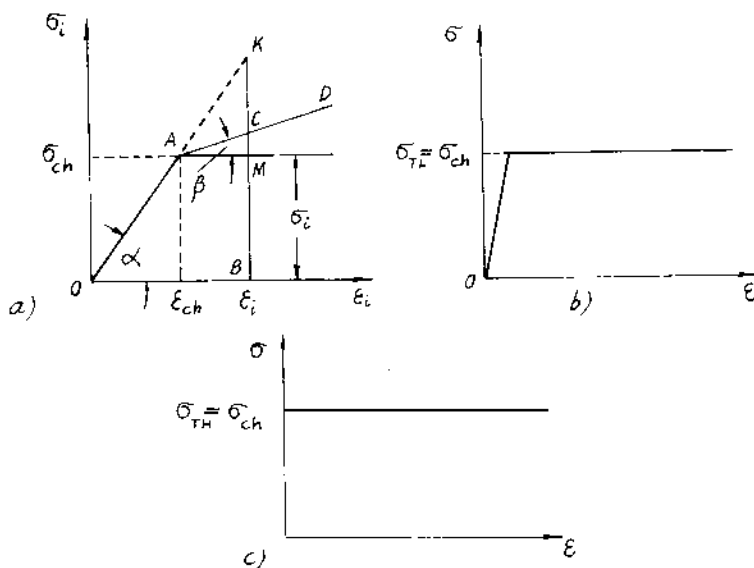
§1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu những vật rắn biến dạng mà thuộc tính vật liệu của chúng không tuân theo định luật Hooke. Đối với vật liệu này, sau khi triệt tiêu toàn bộ tác động ngoài, vật thể không thể phục hồi lại hình dạng ban đầu, nghĩa là trong vật thể xuất hiện biến dạng dư.

Vật thể được gọi là đàn hồi – dẻo nếu trong quá trình chịu tải như thế nào đó để trong nó tồn tại cả biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo.

Khi tính toán kết cấu, ngoài giới hạn đàn hồi theo truyền thống, người ta thường bắt đầu bằng việc nghiên cứu trạng thái đàn hồi, sau đó là trạng thái đàn dẻo và cuối cùng là xác lập tải trọng giới hạn. Đó là tải trọng mà dưới tác dụng của nó kết cấu không thể tiếp tục làm việc được nữa, nghĩa là khả năng làm việc của kết cấu đã được khai thác hết.

Về phương diện lý thuyết, điều đáng nói ở cách giải này là nó cho ta một bức tranh đầy đủ về cách ứng xử của kết cấu trong suốt quá trình chịu lực. Tuy nhiên, cách giải như thế quá cồng kềnh và phức tạp mà thực tế kỹ thuật thường lại chỉ yêu cầu xác định khả năng chịu tải thực của kết cấu.



Hình 17.1.

Để giảm bớt sự phức tạp không cần thiết khi tính toán kết cấu ngoài giới hạn đàn hồi người ta thường thay thế các biểu đồ thí nghiệm kéo bằng những đường cong hoặc thẳng, có biểu thức toán học đơn giản nhưng xấp xỉ tốt đường cong thí nghiệm đã biết trong chương 2 (hình 17.1).

Trong quá trình sơ đồ hóa này, dấu hiệu phân biệt giữa σ_{TL} và σ_{ch} không còn nữa. Điều này cho phép gọi giới hạn tỷ lệ là giới hạn chảy.

§2. UỐN THUẦN TÚY DẪM LÀM BẰNG VẬT LIỆU ĐÀN HỒI DẸO LÝ TƯƠNG (hình 17.1b)

1. Mômen uốn giới hạn M_{gh}

Chúng ta sẽ giải bài toán này bằng phương pháp ngược theo ứng suất. Cụ thể là:

Trong miền đàn hồi, nghiệm của bài toán này là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{M \cdot y}{J_x} \\ \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong miền dẻo đối với vật liệu có $\sigma_{ch}(k) = \sigma_{ch}(n)$, thì các ứng suất trong miền dẻo bây giờ là:

$$\sigma_{td} = |\sigma_z| = \sigma_{ch}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (b)$$

Trên hình (17.2) là biểu đồ ứng suất pháp σ_z dọc theo chiều cao của mặt cắt ngang. Tương ứng với biểu đồ này, các qui luật của ứng suất theo chiều cao như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\sigma_{ch} & \text{khi } y &\leq -\frac{h_{ch}}{2} \\ \sigma_z &= \sigma_{ch} \frac{2y}{h_{ch}} & \text{khi } -\frac{h_{ch}}{2} &\leq y \leq \frac{h_{ch}}{2} \\ \sigma_z &= \sigma_{ch} & \text{khi } y &\geq \frac{h_{ch}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

ở đây $h_{ch}/2$ là khoảng cách từ biên giới giữa vùng đàn hồi và dẻo đến lớp trung hòa.

Do các ứng suất trong (c) không phụ thuộc z , cho nên qui luật này như nhau trên mọi mặt cắt ngang bất kỳ.

Điều kiện cân bằng giữa mômen ngoại lực M và mômen nội lực do các σ_z tạo thành cho ta:

$$M = \int_F \sigma_z y \cdot dF = \int_{-h_{ch}/2}^{h_{ch}/2} \frac{2\sigma_{ch} y^2}{h_{ch}} b(y) dy + 2\sigma_{ch} \int_{h_{ch}/2}^{h/2} y \cdot b(y) dy \quad (d)$$

Nếu đặt:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{-h_{ch}/2}^{h_{ch}/2} y^2 b(y) dy \\ S_x &= 2 \int_{h_{ch}/2}^{h/2} y \cdot b(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

trong đó: J_x là mômen quán tính của nhân đàn hồi của mặt cắt đối với trục x và $S_x/2$ là giá trị tuyệt đối của mômen tĩnh của một trong hai miền dẻ đối với trục này. Khi đó công thức (d) có dạng thu gọn như sau:

$$M = \frac{2\sigma_{ch}}{h_{ch}} J_x + \sigma_{ch} S_x \quad (17.2)$$

Công thức này thiết lập quan hệ chiều cao vùng đàn hồi h_{ch} và mômen uốn M . Khi tăng M thì h_{ch} dần tới giới hạn $h_{ch} = 0$. Mômen uốn này được gọi là mômen uốn giới hạn M_{gh} của dầm chịu uốn thuần túy:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} S_x \quad (17.3)$$

Ứng suất đạt được giá trị giới hạn chảy ở mọi điểm trên mặt cắt và trên toàn dầm.

Các biểu đồ ứng suất trong trường hợp đàn dẻo lý tưởng vừa nghiên cứu được cho trên hình 17.2. Hình 17.2b là biểu đồ ứng suất khi biến dạng đàn hồi dẻo; hình 17.2c, d là biểu đồ ứng suất khi hạ tải và biểu đồ ứng suất dư. Hình 17.2e là biểu đồ ứng suất với trạng thái hoàn toàn dẻo. Từ biểu đồ này thấy rằng mặt phẳng trung hòa ở trạng thái giới hạn trở thành mặt phẳng gián đoạn của ứng suất. Trên thực tế không hình thành mặt phẳng gián đoạn này, bởi vì luôn còn một vùng đàn hồi chuyển tiếp rất nhỏ. Tuy nhiên khái niệm về mômen uốn giới hạn vẫn còn nguyên ý nghĩa, vì với chiều cao vùng dẻo không lớn thì mômen uốn cũng đã gần bằng M_{gh} .

Để khẳng định điều này ta hãy tính M_{gh} đối với mặt cắt hình chữ nhật có:

$$b(y).h = b.h, \quad J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad S_x = b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_{ch}^2}{4} \right) \quad (d)$$

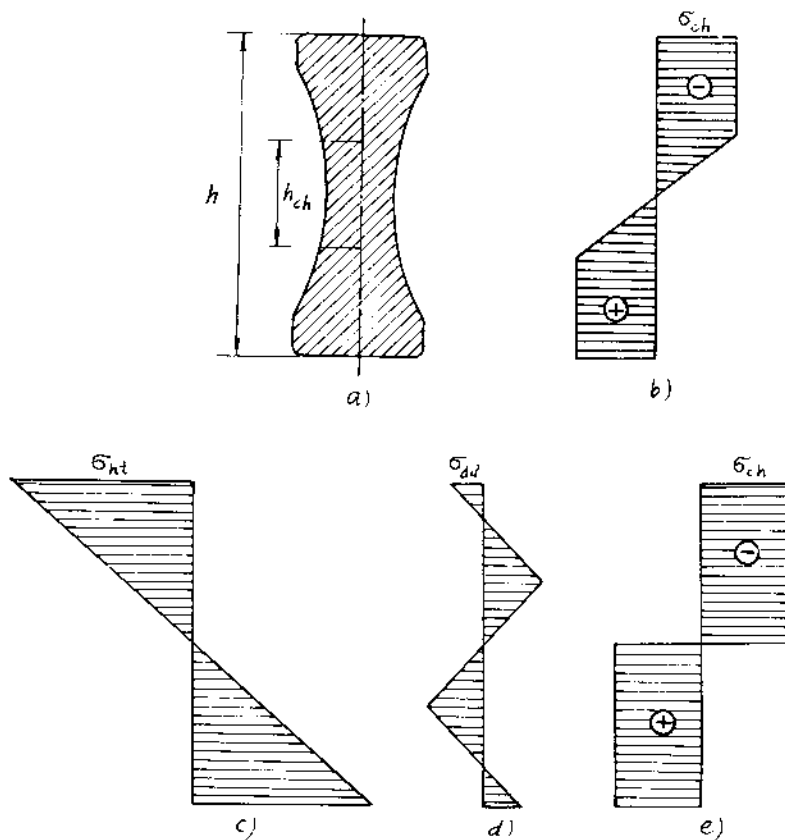
Thay các kết quả (b) vào biểu thức (17.2) ta tìm được:

$$M = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_{ch}}{h} \right)^2 \right) \quad (đ)$$

Khi $h_{ch} = 0$ thì $M_{gh} = \sigma_{ch} b h^2 / 4$.

Khi $\frac{h_{ch}}{h} = \frac{1}{3}$, ta có tỷ số:

$$\frac{M_{gh}}{M} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_{ch}}{b} \right)^2 = 0,963 \quad (17.4)$$



Hình 17.2.

Điều này cho thấy khi chiều cao vùng đàn hồi mới đạt được 1/3 chiều cao mặt cắt thì mômen uốn chỉ nhỏ hơn mômen giới hạn cỡ 4% và thực chất mặt cắt được xem như không chịu lực được nữa.

2. Mômen uốn giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ có trục đối xứng

Mômen giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ có trục đối xứng được trình bày trên hình 17.3.

Điều kiện xác định vị trí trục trung hòa ở trạng thái dẻo là:

$$N = \int_F \sigma dF = 0$$

Với $F = F_k + F_n$, ở vùng F_k thì $\sigma = \sigma_{ch}$; còn ở vùng F_n thì $\sigma = -\sigma_{ch}$ (chú ý đang xét ở trạng thái dẻo), ta có:

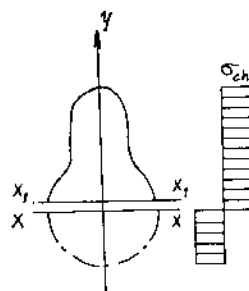
$$\int_{F_k} \sigma_{ch} dF - \int_{F_n} \sigma_{ch} dF = 0$$

Ta rút ra $F_k = F_n$, nghĩa là trục trung hòa X-X chia mặt cắt thành hai phần bằng nhau. Ở trạng thái dẻo giới hạn này, điều kiện tương đương tĩnh phải là:

$$\begin{aligned} M_{gh} &= \int_F \sigma_{ch} y \cdot dF = \int_{F_k} \sigma_{ch} (+y) dF - \int_{F_n} \sigma_{ch} (-y) dF = \\ &= \sigma_{ch} \int_{F_k} y \cdot dF + \sigma_{ch} \int_{F_n} y \cdot dF = \sigma_{ch} (S_k^* + S_n^*) = \sigma_{ch} \cdot S_x^* \end{aligned} \quad (17.5)$$

S_k^* và S_n^* là giá trị tuyệt đối của các mômen tĩnh của vùng kéo F_k và vùng nén F_n đối với trục trung hòa X-X. Đối với hình tròn đường kính d : $S_x^* = \frac{d^3}{6}$; hình vành khăn đường kính trong D , chiều dày δ : $S_x^* = D^2 \cdot \delta$; hình tam giác: $S_x^* = 0,097 bh^2$; hình chữ I: $S_x^* = (1,44 \div 1,17) W_x$; hình thang chiều cao h , đáy lớn b_2 , đáy nhỏ b_1 :

$$S_x^* = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)^2} \left[b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right].$$



Hình 17.3.

§3. PHÂN TÍCH ĐÀN ĐÈO LÝ TƯƠNG DẪM CHỊU UỐN NGANG

Chúng ta sẽ khảo sát những dầm dài mà mặt cắt ngang có hai trục đối xứng và bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp đến kết quả vì $\sigma_z \gg \tau_{yz}$. Sự khác nhau cơ bản giữa uốn thuần túy và uốn ngang là ở chỗ trong uốn ngang mômen uốn thay đổi dọc trục z của dầm. Do đó chiều cao vùng đàn hồi h_{ch} thay đổi theo z . Từ công thức (17.4), đối với dầm mặt cắt chữ nhật, chúng ta tìm được quan hệ chiều cao vùng đàn hồi và mômen uốn:

$$\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{M}{M_{gh}}} \quad (a)$$

Phương trình (a) cho quan hệ giữa chiều cao vùng đàn hồi và hoành độ z . Để có một khái niệm cụ thể, chúng ta hãy khảo sát vấn đề vài trường hợp chịu tải của dầm trên hai gối tựa.

1. Dầm chịu tải trọng phân bố đều

Dầm chịu tải trọng phân bố đều được thể hiện trên hình 17.4a.

Mômen uốn ở mặt cắt z bất kỳ:

$$M = \frac{q}{2} (l^2 - z^2) \quad (b)$$

Mômen giới hạn xuất hiện ở mặt cắt $z = 0$ với giá trị:

$$M_{gh} = \frac{q_{gh} l^2}{2} \quad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta có:

$$\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{q}{q_{gh}} \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)} \quad (d)$$

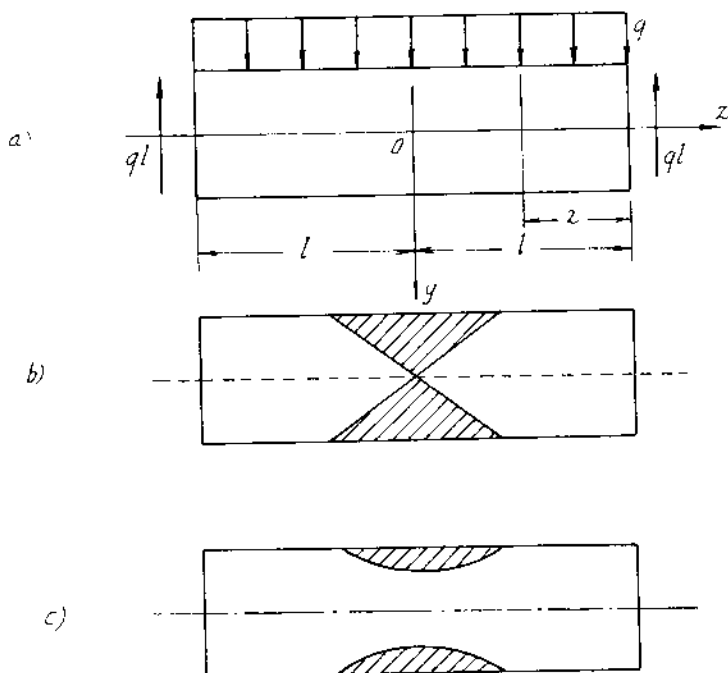
Kết quả này cho ta thấy: $h_{ch} = f(q, z)$.

Khi tải trọng đạt được giá trị giới hạn q_{gh} thì:

$$\frac{h_{ch}}{h} = \frac{z\sqrt{3}}{l} \quad (e)$$

Trên hình 17.4b là biên giới giữa vùng đàn hồi và vùng dẻo. Khác với uốn thuần túy, trong trường hợp này chỉ xuất hiện ở mặt cắt $z = 0$. Tại đây mômen uốn không thể tăng được nữa và bằng M_{gh} . Khi đó một khớp quay tại $z = 0$ được hình thành, khớp quay như thế được gọi là khớp dẻo. Với $q = 0,9 q_{gh}$ thì: $\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{0,1 + 0,9 \frac{z^2}{l^2}}$.

Vùng dẻo hình thành trong trường hợp này được cho trên hình 17.4c.



Hình 17.4.

Khi $q \leq \frac{2}{3} q_{gh}$, nói chung vùng dẻo không hình thành và dầm chỉ chịu biến dạng đàn hồi.

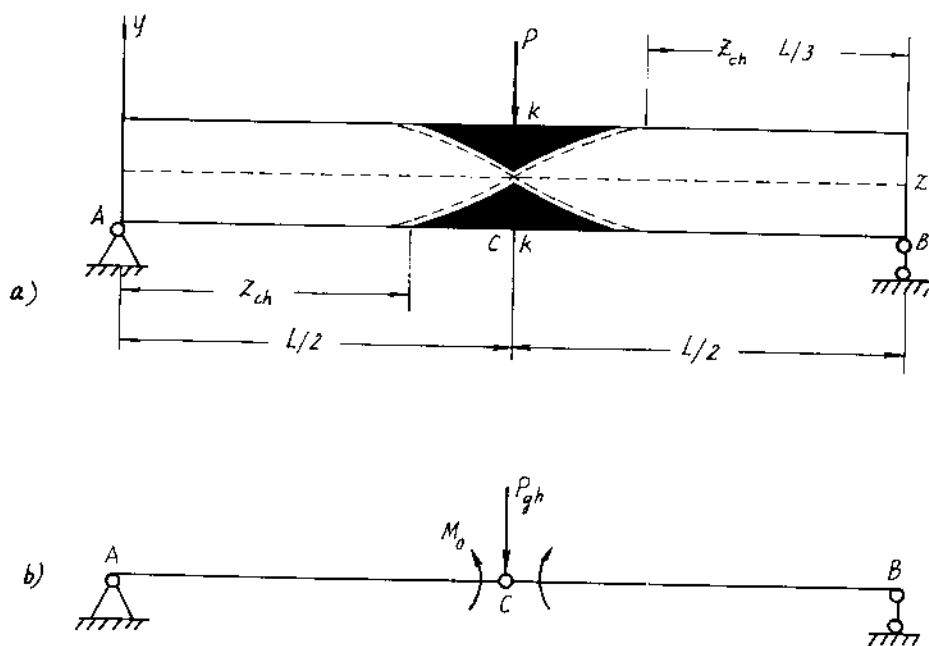
2. Dầm chịu một lực tập trung đặt ở giữa dầm

Bây giờ ta khảo sát vấn đề trường hợp chịu tải của dầm mặt cắt chữ nhật mà biểu đồ kéo của vật liệu không có sự cứng cố (hình 17.1c) chịu lực tập trung.

Xét dầm trên hình 17.5a. Giả sử P đã đạt được P_{ch} , với giá trị này thì chỉ điểm K ở mặt cắt giữa dầm đạt được σ_{ch} .

Tại $z = L/2$, $M = M_{max} = P.L/4$; khi $P = P_{ch}$ thì giá trị mômen uốn tương ứng với lúc bắt đầu biến dạng dẻo trên dầm là:

$$M_{ch} = P \frac{L}{4} \quad \text{và} \quad P_{ch} = 4 \frac{M_{ch}}{L} \quad (e)$$



Hình 17.5.

Khi P tăng lớn hơn P_{ch} thì một miền biến dạng dẻo được hình thành (nghĩa là trong đó $\sigma = \sigma_{ch}$).

a. Biên giới của các đoạn đàn hồi và dẻo

Biên giới của các đoạn đàn hồi và dẻo được xác định như sau:

$$M(z) = \frac{1}{2} P \cdot z_{ch} = M_{ch} = \frac{1}{4} P_{ch} L$$

$$\text{Do đó: } \frac{z_{ch}}{L} = \frac{P_{ch}}{2P} ; z_{ch} = L \frac{P_{ch}}{2P}.$$

trong đó: khi $0 \leq z \leq z_{ch}$ ta có dầm ở trạng thái đàn hồi; khi $z_{ch} \leq z \leq L/2$ ta có dầm ở trạng thái đàn hồi và dẻo.

Biên giới giữa vùng đàn hồi và vùng dẻo trong đoạn đàn hồi – dẻo được xác định như sau:

Khi $M > M_{ch} = \sigma_{ch} \cdot W_x$:

$$M = 2 \int_0^{h/2} b \cdot \sigma \cdot y \cdot dy = \frac{M_{ch}}{2} \left[3 - \left(\frac{\rho}{\rho_{ch}} \right)^2 \right] \quad (17.6)$$

$$\text{ta có: } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_{ch} \sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_{ch}}}}$$

trong đó ρ_{ch} là bán kính cong lúc dầm bắt đầu hình thành biến dạng dẻo. Cụ thể là: $\frac{1}{\rho_{ch}} = \frac{M_{ch}}{EJ_x}$.

$$\text{Từ } M_{ch} = \frac{P_{ch} L}{4} ; M(z) = \frac{P \cdot z}{2} ; \frac{h_{ch}}{h} = \frac{\rho}{\rho_{ch}}, \text{ rút ra } h_{ch} \text{ tại } z > z_{ch}:$$

$$h_{ch} = h \sqrt{3 - 4 \frac{P \cdot z}{P_{ch} L}} \quad (h)$$

Khi P tăng thì miền dẻo (tô đen trên hình 17.5) lan dần ra toàn bộ chiều cao dầm, nghĩa là: $h_{ch} \rightarrow 0$.

b. Tải trọng giới hạn

Ta gọi giá trị của lực ứng với lúc mặt cắt $z = L/2$ chiều cao vùng đàn hồi bị cạn kiệt, dầm không còn khả năng chịu tải nữa và nó trở thành một cơ cấu là tải trọng giới hạn (hình 17.5b).

Tại đây ($z = L/2$) mômen uốn không tăng được nữa và bằng mômen giới hạn (ở đó hình thành một khớp quay ta gọi khớp dẻo):

$$P_{gh} = \frac{4 \cdot M_{gh}}{L}$$

Theo (17.6), đối với mặt cắt chữ nhật:

$$M_{gh} = \frac{3}{2} M_{ch} = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{4}$$

Do đó:

$$P_{gh} = \frac{4 \cdot 3}{L \cdot 2} M_{gh} = \frac{4 \cdot 3}{L \cdot 2} \cdot P_{ch} \cdot \frac{L}{4} = \frac{3}{2} P_{ch}$$

$$P_{gh} = \frac{3}{2} P_{ch} \quad (i)$$

Khi $P = P_{ch}$ thì $z_{ch} = L/3$ (biên của đoạn đàn hồi bằng 1/3 chiều dài dầm) và theo (h) ta rút ra:

$$h_{ch} = \sqrt{3} \cdot h \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{z}{L}} \quad \text{với } z > L/3 \quad (k)$$

Đường nét đứt trên hình 17.5a là đồ thị của hàm (k).

3. Dầm siêu tĩnh

Đối với các hệ tĩnh định thì khả năng chịu tải của nó bị cạn kiệt lúc có một khớp dẻo được hình thành. Điều này lại không xảy ra đối với hệ siêu tĩnh khi mới chỉ có một số khớp dẻo $m \leq$ bậc siêu tĩnh của hệ được hình thành.

Dưới đây chúng ta hãy xét một ví dụ đơn giản về dầm siêu tĩnh hình 17.6a để minh họa cho những nhận xét vừa nêu và vẫn giữ giả thiết $\sigma_z \gg \tau_{yz}$.

Biểu đồ mômen uốn trong giới hạn đàn hồi cho trên hình 17.6b. Tại B: $M_{max} = 13 PL/64$, trên mặt cắt này sẽ xuất hiện điểm đầu tiên đạt giới hạn chảy $\sigma = \sigma_{ch}$ và mômen tương ứng lúc này là:

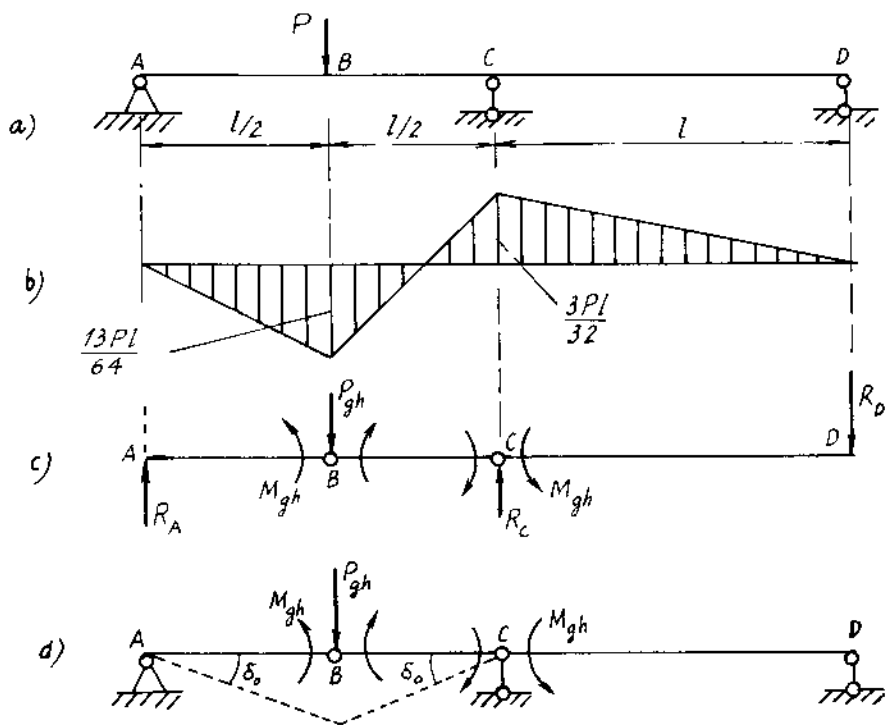
$$M_{ch} = \frac{13 P_{ch} L}{64}$$

do đó:
$$P_{ch} = \frac{64}{13} \cdot \frac{M_{ch}}{L}.$$

Đối với dầm mặt cắt chữ nhật:

$$M_{ch} = \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{6}$$

do đó:
$$P_{ch} = \frac{32}{39} \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{L}.$$



Hình 17.6.

Khi P tăng ($P > P_{ch}$) thì miến dẻo hình thành ở B sau đó ở C . Dầm trở thành cơ cấu khi các khớp dẻo B và C đã được hình thành (hình 17.6c), chiều các mômen tại các khớp dẻo cho ta biết chiều mở của các khớp dẻo.

Tải trọng giới hạn được xác định từ điều kiện cân bằng mômen giới hạn và mômen uốn tại các mặt cắt có khớp dẻo và các phương trình cân bằng. Cụ thể là:

$$\sum m_c(F_k) = 0 = R_A \cdot L - P_{gh} L/2 + R_D \cdot L = 0 \quad (a)$$

Mặt khác:

$$M_{gh}^B = R_A L/2 \rightarrow R_A = 2M_{gh}/L$$

$$M_{gh}^C = R_D L \rightarrow R_D = M_{gh}/L$$

Phương trình (a) trở thành:

$$\frac{2M_{gh}L}{L} - P_{gh} \frac{L}{2} + \frac{M_{gh}}{L} \cdot L = 0 \rightarrow P_{gh} = \frac{6M_{gh}}{L} \quad (b)$$

Đối với dầm mặt cắt chữ nhật:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{4} \rightarrow P_{gh} = 1,5 \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{L}$$

Nếu gọi n là hệ số an toàn thì lực cho phép theo phương pháp cân bằng giới hạn là:

$$[P_{gh}] = \frac{P_{gh}}{n} = 1,5 \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{n \cdot L}$$

Theo quan điểm của phương pháp ứng suất cho phép, tải trọng giới hạn là P_{ch} , vì thế tải trọng cho phép là:

$$[P_{ch}] = \frac{P_{ch}}{n} = \frac{32}{39} \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{n \cdot L}$$

Từ các kết quả này ta rút ra:

$$[P_{gh}] = 183\% [P_{ch}]$$

Tải trọng giới hạn còn có thể được xác định theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ. Cụ thể là:

Giả sử dầm vừa mới chuyển thành một cơ cấu, cho dầm một chuyển vị khả dĩ, ta phải có (theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ, từ hình 17.6d).

$$\sum F_k \delta r_k = 0 \rightarrow P_{gh} \delta S - 3M_{gh} \delta \theta = 0$$

Vì $\delta S = (L/2) \cdot \delta \theta$, do đó:

$$P_{gh} = \frac{3M_{gh}}{L/2} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta\theta} = \frac{6M_{gh}}{L} \quad (c)$$

Kết quả (c) $\equiv$ (b).

§4. PHÂN TÍCH ĐÀN HỒI DẪO LÝ TƯỜNG THANH MẶT CẮT TRÒN CHỊU XOẮN

Chúng ta sẽ tìm nghiệm của bài toán về xoắn đàn hồi dẻo của một thanh mặt cắt tròn với giả thiết rằng mặt cắt ngang vẫn luôn luôn phẳng ngay cả ngoài giới hạn đàn hồi và vật liệu của thanh đàn hồi dẻo là lý tưởng.

Ở trạng thái đàn hồi, ứng suất tiếp tại một mặt cắt ngang đã biết từ chương 7:

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (a)$$

Hai thành phần của ứng suất này theo các trục x và y là:

$$\tau_{xz} = - \frac{M_z}{J_p} y \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_p} x \quad (b)$$

Các thành phần còn lại bằng không.

Theo điều kiện dẻo của Xanhsơn ta nhận được τ trong miền dẻo:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} = \tau_{ch} \quad (c)$$

Như vậy qui luật phân bố ứng suất trong miền đàn hồi là quan hệ (a), còn trong miền dẻo là (c). Biểu đồ biểu diễn sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang dọc theo bán kính được cho trên hình 17.7a.

Trạng thái ứng suất trong thanh có thể được mô tả như sau:

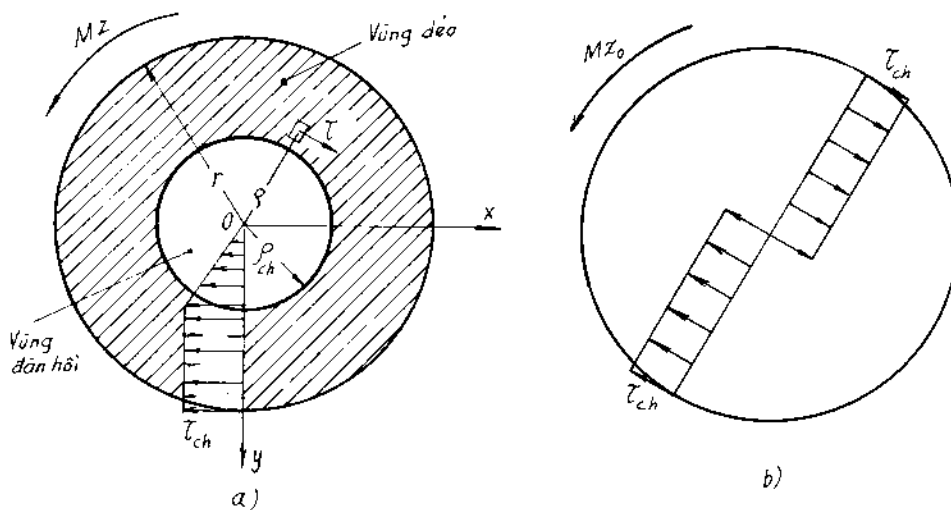
$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\rho}{\rho_{ch}} \tau_{ch} & \text{khi } \rho \leq \rho_{ch} \\ \tau &= \tau_{ch} & \text{khi } \rho \geq \rho_{ch} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

trong đó ρ_{ch} là bán kính của nhân đàn hồi.

Ở hai đầu cuối, ứng suất tiếp τ phải cân bằng với mômen xoắn ngoài:

$$M_z = \int_F \tau \rho dF = \frac{\tau_{ch}}{\rho_{ch}} \int_{F_d} \rho^2 dF + \tau_{ch} \int_{F_d} \rho dF \quad (d)$$

Để cho gọn ta đặt:



Hình 17.7.

$J_{pd} = \int_{F_d} \rho^2 dF = \frac{\pi \rho_{ch}^4}{2}$ là mômen quán tính độ cực của diện tích phần nhân đàn hồi.

$S_{pd} = \int_{F_d} \rho dF = \frac{2}{3} \pi (r^3 - \rho_{ch}^3)$ là mômen tĩnh độ cực của diện tích vùng dẻo.

F_d, F_d lần lượt là diện tích vùng đàn hồi và vùng dẻo.

Với những ký hiệu này, quan hệ (đ) có dạng:

$$M_z = \tau_{ch} \left(\frac{J_{pd}}{\rho_{ch}} + S_{pd} \right) \quad (17.7)$$

Thay các công thức J_{pd} và S_{pd} vào (17.7) và sau khi đơn giản ta được:

$$M_z = \tau_{ch} \frac{2}{3} \pi r^3 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_{ch}}{r} \right)^3 \right] \quad (e)$$

Khi $\rho_{ch} = 0$, ứng suất tại mọi điểm trên mặt cắt ngang đều đạt được giới hạn chảy τ_{ch} trạng thái này được gọi là trạng thái giới hạn. Mômen xoắn giới hạn tương ứng là M_{zgh} :

$$M_{zgh} = \frac{2\tau_{ch}}{3} \pi r^3 \quad (g)$$

Công thức (e) và (g) cho ta tỷ số:

$$\frac{M_z}{M_{zgh}} = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_{ch}}{r} \right)^3 \quad (17.8)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất ở trạng thái dẻo được biểu diễn trên hình 17.7b. Cũng như trong bài toán uốn với bán kính nhân đàn hồi đủ bé, ngay cả bằng một nửa bán kính mặt cắt ($\rho_{ch} = r/2$), công thức (17.8) cho độ lớn $M_z = 0,969 M_{zgh}$, nghĩa là nhỏ hơn mômen giới hạn 3%. Khi mômen xoắn $M_z \leq 3 M_{zgh}/4$ thì mặt cắt là đàn hồi.

§5. NGHIÊN CỨU KHẢ NĂNG CHỊU TẢI CỦA KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP LÀM BẰNG VẬT LIỆU CỨNG DẸO LÝ TƯỞNG (hình 17.1c)

Trong đại đa số các trường hợp, để có một nghiệm chính xác ngoài giới hạn đàn hồi, với mọi điều kiện thực của một quá trình biến dạng là điều hết sức khó khăn. Ví dụ, việc xác định bằng tính toán chỉ trường ứng suất đàn hồi trong vùng có sự tập trung ứng suất đã là một bài toán rất phức tạp. Tuy nhiên, đối với những chi tiết làm bằng vật liệu có tính dẻo lớn, sự tập trung ứng suất gây ra do tải trọng tĩnh sẽ không nguy hiểm và có thể không cần chú ý tới. Bởi lẽ là sau khi đã đạt được giới hạn chảy ứng suất lớn nhất trong miền có

hiện tượng tập trung ứng suất sẽ không tăng được nữa. Trong khi đó, cùng với quá trình tăng tải hiện tượng chảy vẫn tiếp tục lan dần vào phần còn lại của vật thể. Điều này dẫn đến sự san bằng ứng suất không những chỉ ở vùng có sự tập trung ứng suất mà còn trong tất cả các trường hợp ứng suất đàn hồi phân bố không đều trên mặt cắt của chi tiết. Trong thực tế kỹ thuật người ta cũng chỉ mong biết được lực lớn nhất có thể tác dụng lên kết cấu mà với lực đó khả năng làm việc của kết cấu vừa vãn bị cạn kiệt. Vì thế trong điều kiện có biến dạng dẻo lớn và chất tải tĩnh thì khả năng chịu tải của kết cấu được xác định không phải bởi ứng suất lớn nhất trong chúng mà bởi tải trọng giới hạn. Với tải trọng này biến dạng tổng thể của chi tiết sẽ tăng đột ngột khi tải trọng không tăng. Do tính thực dụng đó của việc xác định lực phá hủy cũng như việc xây dựng công thức đánh giá độ tin cậy của kết cấu sẽ được nghiên cứu trong tiết này.

1. Uốn dầm cứng dẻo

Trước hết hãy xét một thanh chịu một lực kéo đã đạt được giá trị $P_{ch} = F \cdot \sigma_{ch}$ (F là diện tích mặt cắt ngang). Với lực kéo này thì toàn thanh bị chảy dẻo và không có một điểm nào trong thanh có ứng suất lớn hơn σ_{ch} .

Vấn đề sẽ khác đi đối với thanh chịu uốn. Qui luật thay đổi ứng suất trên mặt cắt ngang từ lúc bắt đầu chất tải đến lúc đạt được trạng thái dẻo trên toàn bộ mặt cắt, tức là trạng thái giới hạn đã được nghiên cứu trong mục trên đối với biểu đồ biến dạng đàn dẻo lý tưởng. Nếu bỏ qua biến dạng đàn hồi và chỉ kể đến biến dạng dẻo, trong trường hợp này ta sẽ nhận được chỉ mômen giới hạn M_{gh} :

$$M_{gh} = \sigma_{ch} S_x = W_x \left(\frac{S_x}{W_x} \sigma_{ch} \right) = \sigma_{ch}^u W_x \quad (17.9)$$

Đại lượng $\sigma_{ch}^u = \frac{S_x}{W_x} \sigma_{ch}$ gọi là giới hạn chảy khi uốn.

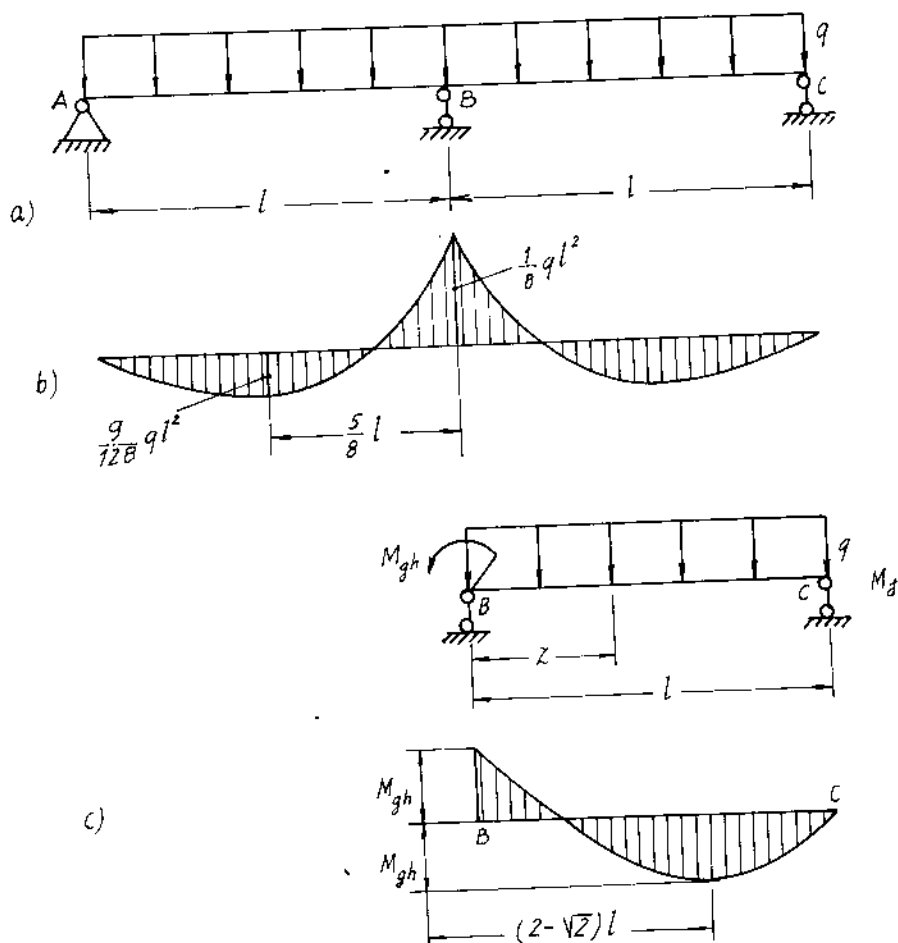
Tỷ số $\frac{S_x}{W_x}$ bằng 1,5 đối với mặt cắt chữ nhật; bằng 1,7 đối với mặt cắt tròn; bằng 1,15 đối với mặt cắt chữ I.

Việc tính toán theo tải trọng giới hạn cho phép xác định chính xác độ an toàn thực của chi tiết làm bằng vật liệu cứng dẻo.

Sau đây là một ví dụ về việc xác định tải trọng giới hạn với dầm liên tục chịu tải trọng phân bố đều (hình 17.8a), với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt tới kết quả.

Hình 17.8b là biểu đồ mômen uốn trong giới hạn đàn hồi. Mômen lớn nhất ở gối tựa giữa B là:

$$M_B = q.l^2/8.$$



Hình 17.8.

Nếu mômen này đạt được giá trị $M_{gh} = \sigma_{ch} S_x$ thì ở mặt cắt này xuất hiện một khớp dẻo. Khác với khớp thông thường, khớp dẻo có mômen khác không và bằng M_{gh} . Sự chảy dẻo ở mặt cắt này đã làm giảm một bậc siêu tĩnh trong hệ. Trong trường hợp của chúng ta dầm trở thành tĩnh định và khả năng làm việc của hệ chưa bị cạn kiệt. Khi tiếp tục tăng tải trọng, mỗi một nhịp của hệ làm việc như một dầm đơn giản trên hai gối tựa.

Mômen uốn ở mặt cắt z kể từ gối tựa giữa là:

$$M(z) = \frac{q l^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \quad (a)$$

Khi M đạt được giá trị M_0 tại mặt cắt $z = z_0$ nào đó, thì ở mặt cắt này hình thành khớp dẻo thứ hai và khả năng chịu tải của dầm bị cạn kiệt, vì khi ấy dầm đã biến thành một cơ cấu. Tải trọng gây ra trạng thái như thế được xác định bởi đẳng thức:

$$M_{gh} = \frac{q_{gh} l^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left(1 - \frac{z}{l} \right)$$

Kết quả cho ta:

$$q_{gh} = \frac{2 M_{gh}}{l^2} \cdot \frac{2 - \frac{z}{l}}{\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}} \quad (b)$$

Từ điều kiện cực tiểu q_{gh} ta có:

$$z_0 = l \left(2 - \sqrt{2} \right) \text{ và } q_{gh} = 11,7 \frac{M_{gh}}{l^2} = 11,7 \frac{\sigma_{ch} S_x}{l^2} \quad (c)$$

Nếu gọi q là tải trọng gây ra ứng suất lớn nhất ở một điểm trên mặt cắt và vừa bằng giới hạn chảy thì q_{ch} được xác định từ điều kiện:

$$\frac{q^2 \cdot l}{8} = \frac{q_{ch} \cdot l^2}{8} = \sigma_{ch} W_x$$

nghĩa là:

$$q_{ch} = \frac{8\sigma_{ch} W_x}{l^2}$$

Tỷ số các tải trọng nhận được từ hai quan điểm tính là:

$$\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 1,46 \frac{S_x}{W_x} \quad (d)$$

Đối với mặt cắt chữ nhật: $\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 2,2$.

2. Uốn và cắt đồng thời

Khi kể đến sự làm việc đồng thời của ứng suất pháp và ứng suất tiếp thì mômen giới hạn bị giảm. Vấn đề là cần phải thiết lập được quan hệ giữa các giá trị của mômen uốn và lực cắt ở trạng thái giới hạn $f(M_{gh}^*, Q_{gh}^*) = 0$. Biểu thức của M_{gh}^* và Q_{gh}^* có dạng:

$$M_{gh}^* = \int_F y \cdot \sigma \cdot dF; \quad Q_{gh}^* = \int_F \tau \cdot dF \quad (17.10)$$

ở đây F là diện tích mặt cắt ngang; y là tung độ tính từ trục chia mặt cắt thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Ở trạng thái giới hạn, ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại mọi điểm trên mặt cắt phải tuân theo điều kiện chảy. Ví dụ điều kiện dẻo Huber – Mises, trong trường hợp riêng này của trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt có dạng:

$$\sigma_{td}^2 = \sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_{ch}^2 = 3\tau_{ch}^2 \quad (a)$$

trong đó τ_{ch} là giới hạn chảy khi trượt thuần túy.

Để xác định sự phân bố của ứng suất trên mặt cắt, từ (a) ta tìm ứng suất tiếp:

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} \quad (b)$$

và đòi hỏi với ứng suất tiếp ấy lực cắt là lớn nhất với giá trị cho trước của mômen uốn:

$$Q_{gh}^* = \int_F \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} dF \quad (c)$$

Như đã chỉ rõ trong phép tính biến phân, để có điều đó thì điều kiện sau đây phải được thỏa mãn:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\lambda \cdot y \cdot \sigma + \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} \right] = 0 \quad (d)$$

Từ đây rút ra:

$$\sigma = \sigma_{ch} \frac{\sqrt{3} \lambda \cdot y}{\sqrt{1 + 3 \lambda^2 y^2}} \quad (đ)$$

và theo (b):

$$\tau = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3(1 + 3 \lambda^2 y^2)}} \quad (e)$$

ở đây λ là thông số đặc trưng cho tỷ số M_{gh}^* và Q_{gh}^* .

Từ (đ) và (e) ta được (17.10) dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} M_{gh}^* &= \sigma_{ch} \sqrt{3} \lambda \int_F \frac{y^2 dF}{\sqrt{1 + 3 \lambda^2 y^2}} \\ Q_{gh}^* &= \tau_{ch} \int_F \frac{dF}{\sqrt{1 + 3 \lambda^2 y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

Quan hệ (17.10) là phương trình đường cong giới hạn $Q_{gh}^* = f(M_{gh}^*, \lambda)$ dưới dạng thông số.

Trường hợp mặt cắt ngang là hình chữ nhật ($b \times h$), đường cong giới hạn này được xây dựng như sau:

- Khi không kể đến lực cắt thì mômen giới hạn là:

$$M_{gh} = S_x \sigma_{ch} = \frac{b \cdot h^4}{4} \sigma_{ch}$$

- Ngược lại, khi không kể đến mômen thì lực cắt giới hạn là:

$$Q_{gh} = F_x \tau_{ch} = b \cdot h \cdot \tau_{ch}$$

Nếu ký hiệu: $\xi = \frac{y}{h}$; $m = \frac{M'_{gh}}{M_{gh}}$; $q = \frac{Q'_{gh}}{Q_{gh}}$, từ quan hệ (17.10) ta

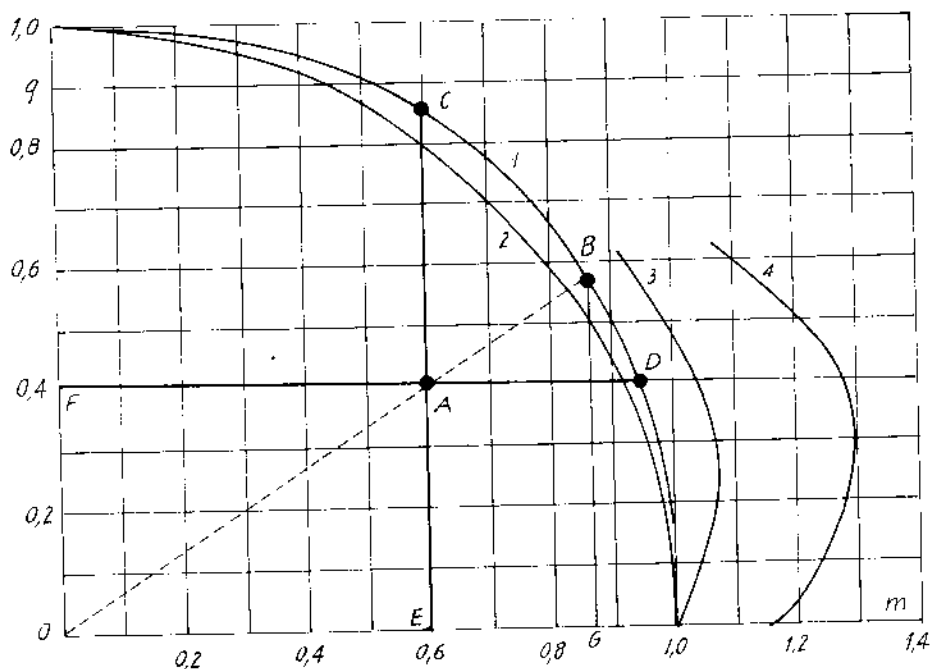
tìm được:

$$\left. \begin{aligned} m &= 8 \lambda_1 \int_0^{1/2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 \xi^2}} = \frac{\text{sh} 2\mu - 2\mu}{2\text{sh}^2 \mu} \\ q &= 2 \int_0^{1/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 \xi^2}} = \frac{\mu}{\text{sh} \mu} \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

Ở đây λ_1 là thông số mới thay thế cho λ , cụ thể là:

$$\lambda_1 = 2\text{sh} \mu = \sqrt{3} \lambda \cdot h$$

Trên hình (17.9) là đường cong giới hạn được xây dựng từ phương trình (17.11). Bạn đọc có thể nhận được các đường cong giới hạn với các tỷ số b/h khác nhau trực tiếp từ (17.10) bằng phần mềm Mathcad 2001.



Hình 17.9.

Với mặt cắt hình chữ I lý tưởng, nghĩa là có thành rất mảnh còn chiều cao lớn hơn cánh nhiều lần, đường cong giới hạn là một vòng tròn (hình 17.9).

$$m^2 + q^2 = 1 \quad (17.12)$$

Các đường cong giới hạn đối với các mặt cắt hình chữ I với các quan hệ khác nhau của kích thước mặt cắt sẽ nằm giữa đường cong 1 và 2.

Từ đồ thị ở hình (17.9) cho thấy, với lực cắt cho trước thì mômen uốn có thể xác định theo phương trình (17.12). Khi đó độ an toàn đảm bảo tới 13% với tỷ số b/h nhỏ và tới 40% với b/h lớn so với nghiệm chính xác của bài toán phẳng với vật liệu cứng dẻo. Sau khi đã xây dựng được đường cong giới hạn, ta có thể xác định được hệ số an toàn đối với trạng thái ứng suất của chi tiết chịu M và Q . Trước hết tính tỷ số $m_0 = M/M_{gh}$, $q_0 = Q/Q_{gh}$ và định vị điểm $A(m_0, q_0)$ trong hệ tọa độ (m, q) ; trên hình 17.9 ta đã chọn $m_0 = 0,6$; $q_0 = 0,4$.

Độ lớn của tải trọng giới hạn phụ thuộc vào qui luật tác dụng của M và Q . Khi Q là hằng và M tăng thì điểm A di chuyển theo đường FD . Do đó, hệ số an toàn (đối với mặt cắt chữ nhật):

$$k_1 = \frac{FD}{FA} = \frac{0,95}{0,60} = 1,58$$

Khi M là hằng thì hệ số an toàn theo lực cắt là:

$$k_2 = \frac{EC}{EA} = \frac{0,84}{0,40} = 2,10$$

Nếu M và Q cùng tăng theo một tỷ lệ thì:

$$k = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{0,87^2 + 0,58^2}}{\sqrt{0,60^2 + 0,40^2}} = 1,45$$

Trong trường hợp mặt cắt ngang có hình dạng bất kỳ, với một độ chính xác đầy đủ có thể lấy đường tròn (17.12) làm đường cong giới hạn. Khi ấy hệ số an toàn với sự tăng tỷ lệ của M và Q có thể xác định bằng giải tích như sau:

Từ hình (17.9) ta có:

$$k = \frac{OB}{OA} = \frac{q}{q_0} = \frac{m}{m_0}$$

$$\text{Do đó:} \quad m = k.m_0 = k/k_m ; \quad q = kq_0 = k/k_q \quad (g)$$

ở đây k_m và k_q là hệ số an toàn do tác dụng riêng rẽ của M và Q :

$$k_m = \frac{1}{\frac{1}{k_m}} = \frac{M_{gh}}{M} ; \quad k_q = \frac{1}{\frac{1}{k_q}} = \frac{Q_{gh}}{Q} ;$$

Thay (g) vào (17.12) ta tìm được hệ số an toàn tác dụng đồng thời của M và Q :

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_q}} = \frac{k_m k_q}{\sqrt{k_m^2 + k_q^2}} \quad (17.13)$$

3. Uốn và kéo đồng thời

Đối với thanh chịu uốn và kéo đồng thời, ở trạng thái giới hạn biểu đồ ứng suất trên mặt cắt ngang của thanh là hai mảnh chữ nhật, phần chịu kéo của mặt cắt ứng suất đạt giới hạn chảy kéo σ_{ch}^+ , còn phần kia chịu nén đạt σ_{ch}^- . Hãy xét mặt cắt có một trục đối xứng – trục thẳng đứng chẳng hạn (hình 17.10).

Ta gọi phần diện tích chịu nén của mặt cắt là F_1 và khoảng cách từ biên của phần này đến trục x là y_0 . Trục x là đường phân chia hai vùng kéo và nén của mặt cắt khảo sát. Giả sử diện tích F_1 nhỏ hơn diện tích vùng kéo và tách ra trong vùng kéo một diện tích định lượng $F_2 = F_1$. Khi đó phần diện tích còn lại của vùng kéo:

$$F_0 = F - (F_1 + F_2) = F - 2F_1$$

sẽ chịu lực kéo:

$$P_{gh} = F_0 \sigma_{ch} = (F - 2F_1) \sigma_{ch} \quad (a)$$

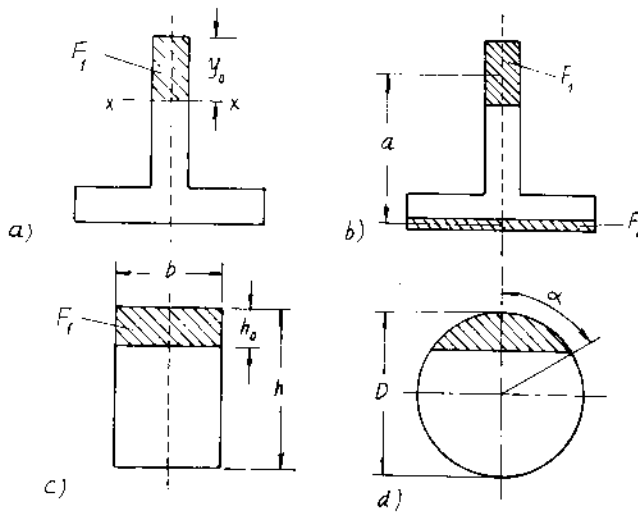
Còn mômen uốn nội lực tác dụng trong mặt phẳng thẳng đứng bằng:

$$M_{gh} = F_1 a \cdot \sigma_{ch} \quad (b)$$

trong đó: F là diện tích của toàn bộ mặt cắt;

a là khoảng cách giữa trọng tâm các phần F_1 và F_2 .

Để có mômen uốn lớn nhất với một giá trị cho trước của P_{gh} thì diện tích F_2 cần phải lấy sao cho a là lớn nhất, nghĩa là phải lấy F_2 ở biên của mặt cắt (hình 17.10b).



Hình 17.10.

Các đẳng thức (a) và (b) cho phương trình đường cong giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ chứa trong đó đại lượng F_1 như một thông số bất kỳ.

Ví dụ, đối với mặt cắt ngang hình chữ nhật, nếu chiều cao vùng nén là $y_0 = h_0$ (hình 17.10c) thì:

$$F_1 = F_2 = b \cdot h_0 \quad ; \quad a = h - h_0 \quad ;$$

$$P_{gh} = b(h - 2h_0) \sigma_{ch} = F \left(1 - 2 \frac{h_0}{h} \right) \sigma_{ch}$$

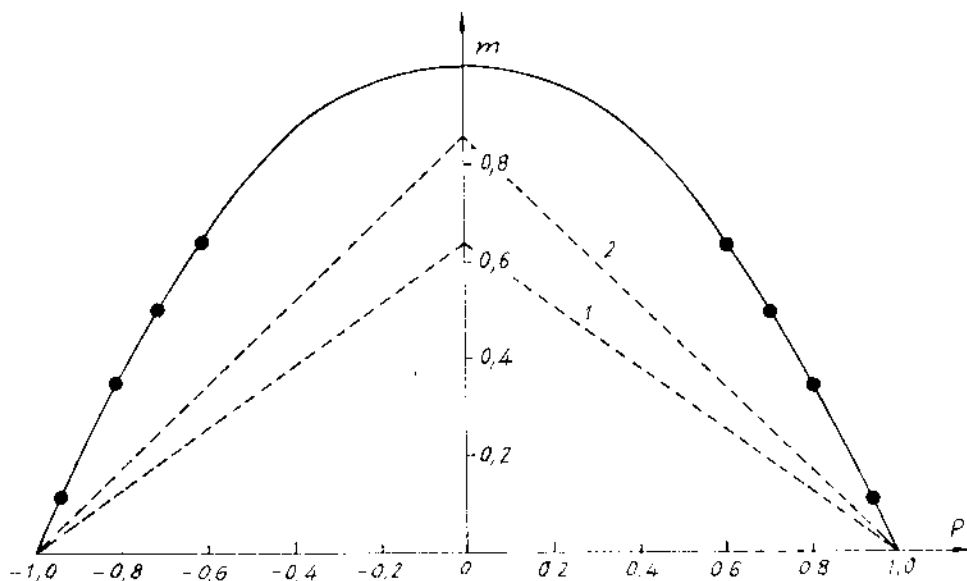
$$M_{gh} = b \cdot h_0 (h - h_0) \sigma_{ch} = W_{ch} \frac{4h_0}{h} \left(1 - \frac{h_0}{h} \right) \sigma_{ch}$$

Ta gọi $P_{gh} = F \cdot \sigma_{ch}$ và $M_{gh} = S_x \cdot \sigma_{ch}$ là lực kéo và mômen uốn giới hạn của mặt cắt khi chịu tác dụng riêng rẽ. Khử tỷ số h_0/h trong các phương trình trên ta có phương trình đường cong giới hạn trong hệ tọa độ (m, p) :

$$m = p_2 = 1 \quad (17.14)$$

trong đó: $m = \frac{M_{gh}^*}{M_{gh}}$ và $p = \frac{P_{gh}^*}{P_{gh}}$.

Đường cong giới hạn là đường parabol (17.14), đó là đường liên tục như trên hình 17.11.



Hình 17.11.

Đối với mặt cắt tròn đường kính D (hình 17.10d), với tư cách là thông số của vùng nén ta lấy góc α . Khi đó F_1 và hai lần mômen tĩnh $F_1 a$ đối với đường kính nằm ngang bằng:

$$F_1 = \frac{D^2}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha) \quad ; \quad F_1 a = \frac{1}{6} D^3 \sin^3 \alpha$$

$$\text{Mặt khác: } P_0 = F \cdot \sigma_{ch} = \frac{\pi D^2}{4} \sigma_{ch} ; \quad M_{gh} = S_x^* \cdot \sigma_{ch} = \frac{1}{6} D^3 \sigma_{ch}$$

Theo các công thức (a) và (b) phương trình đường cong giới hạn trong trường hợp này là:

$$\left. \begin{aligned} m &= \sin^3 \alpha \\ p &= 1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi} \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Các điểm đen trên hình (17.11) là các giá trị được tính theo công thức (17.15), nhưng đối với mặt cắt chữ nhật với giá trị p cho trước, m giới hạn chỉ khác với giá trị của nó không lớn hơn 8%.

Nếu tính theo ứng suất pháp cực đại: $\sigma_{max} = \frac{M}{W} + \frac{P}{F}$ thì từ điều kiện $\sigma_{max} = \sigma_{ch}$ ta nhận được vùng tải trọng giới hạn bị chặn bởi đường:

$$\frac{M}{\sigma_{ch} W} + \frac{P}{F \cdot \sigma_{ch}} = 1$$

hoặc là trong mặt phẳng (m, p) thì phương trình trên có dạng:

$$m \cdot \frac{S_x}{W} + p = 1$$

Những đường thẳng này được cho trên hình 17.11. Đường 1 đối với mặt cắt chữ nhật ($S_x/W = 1,5$); đường 2 đối với mặt cắt chữ I có $S_x/W = 1,25$.

Để xác định hệ số an toàn theo tải trọng giới hạn, ta sử dụng công thức (17.14) và thu được:

$$k = \frac{k_p}{2k_m} \left(\sqrt{k_p^2 + 4k_m^2} - k_p \right) \quad (17.16)$$

trong đó: $k_m = \frac{M_{gh}}{M}$; $k_p = \frac{P_{gh}}{P}$; $P_{gh} = F \cdot \sigma_{ch}$ và $M_{gh} = S_x^* \cdot \sigma_{ch}$.

4. Xoắn và kéo đồng thời các trục tròn

Mômen xoắn giới hạn M_{gh} và lực kéo tới hạn P_{gh} được biểu diễn qua ứng suất tiếp τ và ứng suất pháp σ như sau:

$$M_{gh} = 2\pi \int_a^b r^2 \tau \cdot dr ; P_{gh} = 2\pi \int_a^b r \cdot \sigma \cdot dr$$

trong đó: a và b là bán kính trong và ngoài của trục;

r là bán kính tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt.

Ở trạng thái giới hạn, các ứng suất σ và τ phải tuân thủ điều kiện dẻo Huber – Mises. Nhờ vậy mà biểu thức của lực dọc P_{gh} được viết như sau:

$$P_{gh} = 2\pi \int_a^b r \sqrt{\sigma_{ch}^2 - 3\tau^2} dr \quad (17.17)$$

Để P_{gh} đạt cực đại với giá trị cho trước của mômen xoắn như đã làm ở mục 2 §5, ta phải có điều kiện:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(r^2 \tau + \lambda \cdot r \sqrt{\sigma_{ch}^2 - 3\tau^2} \right) = 0$$

Từ đây và từ điều kiện dẻo (a) của mục 2 §5, ta tìm được sự phân bố ứng suất:

$$\tau = \frac{r \cdot \sigma_{ch}}{\sqrt{9\lambda^2 + 3r^2}} = \frac{r \cdot \tau_{ch}}{\sqrt{3\lambda^2 + 3r^2}}$$

$$\sigma = \sigma_{ch} \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}}$$

còn mômen và lực dọc bằng:

$$M_{gh} = 2\pi \tau_{ch} \int_a^b \frac{r^3 dr}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}} ; P_{gh} = 2\pi \tau_{ch} \sqrt{3}\lambda \int_a^b \frac{r \cdot dr}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}} \quad (17.18)$$

Khi $\lambda = 0$, ta có $P_{gh} = 0$ và mômen xoắn giới hạn:

$$M_0 = M_{gh} = 2\pi \tau_{ch} \frac{b^3 - a^3}{3} = \tau_{ch} W_{pch} \quad (a)$$

Đối với trục đặc ($a = 0$), mômen chống xoắn của mặt cắt $W_{pch} = \frac{2\pi b^3}{3}$; trong khi đó mômen chống xoắn đàn hồi của mặt cắt $W_p = \frac{\pi b^3}{2}$, nghĩa là $\frac{W_{pch}}{W_p} = 1,33$.

Khi $\lambda \rightarrow \infty$ thì mômen xoắn bằng không, lực dọc trục giới hạn là:

$$P_{gh} = \pi (b^2 - a^2) \sigma_{ch} = F \cdot \sigma_{ch} \quad (b)$$

còn ứng suất kéo (khi $\lambda = \infty$) thì phân bố đều trên mặt cắt.

Nếu ký hiệu: $\alpha = \frac{a}{b}$, $m = \frac{M_{gh}^*}{M_{gh}}$, $p = \frac{P_{gh}^*}{P_{gh}}$ và sau khi tính các tích phân (17.18) ta có phương trình giới hạn dưới dạng các thông số:

$$\left. \begin{aligned} p &= 2\mu \frac{\sqrt{\mu^2 + 1} - \sqrt{\mu^2 + \alpha^2}}{1 - \alpha^2} \quad \text{với} \quad \mu = \frac{\lambda \sqrt{3}}{b} \\ m &= \frac{1}{1 - \alpha^3} \left[(1 - 2\mu^2) \sqrt{\mu^2 + 1} - (\alpha^2 - 2\mu^2) \sqrt{\mu^2 + \alpha^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

Trong trường hợp hiệu $(b - a)$ rất nhỏ, khi khử dạng bất định trong (17.19) ta có:

$$p = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \quad m = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \quad p^2 + m^2 = 1 \quad (17.20)$$

nghĩa là đường cong giới hạn đối với vỏ mỏng là đường tròn.

Đối với trục đặc ($\alpha = 0$), sau khi khử μ từ (17.19), phương trình của m là:

$$m = \frac{2 + |p|}{2} \sqrt{1 - |p|} \quad (c)$$

Với mức độ an toàn thấp, có thể thừa nhận đường tròn $p^2 + m^2 = 1$ là đường cong giới hạn đối với chiều dày bất kỳ của thành ống, còn hệ số an toàn được tính theo công thức:

$$k = \frac{k_m k_p}{\sqrt{k_m^2 + k_p^2}} \quad (17.21)$$

Ở đây hệ số an toàn khi tác động riêng rẽ của lực dọc P và mômen M bằng:

$$k_m = \frac{M_{gh}}{M} ; \quad k_p = \frac{P_{gh}}{P}$$

Thêm vào đó các lượng M_{gh} và P_{gh} được tính theo công thức (a) và (b).

§6. PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG GIỚI HẠN

Phương pháp cân bằng giới hạn được giới thiệu dưới đây, cho phép xác định tải trọng phá hủy thực đối với mọi vật thể cứng dẻo (thanh, tấm, vỏ) trên cơ sở hai định lý tĩnh và động.

Trong phương pháp này cũng như mục đích nghiên cứu ở §5, trạng thái đàn hồi dẻo của kết cấu không được nghiên cứu trước như các phương pháp trước đó mà được bắt đầu ngay vào việc xác định trạng thái ở đó kết cấu hết khả năng làm việc, gọi là trạng thái giới hạn.

Với mục đích đó, biểu đồ quan hệ $\sigma = f(\epsilon)$ và $\sigma_i = f(\epsilon_i)$ được xấp xỉ bởi biểu đồ kéo đối với vật liệu cứng dẻo không củng cố. Nghĩa là khi $\sigma < \sigma_{ch}$ thì kết cấu không bị biến dạng, còn khi $\sigma > \sigma_{ch}$ thì kết cấu có thể biến dạng không hạn chế (hình 17.1c). Dưới đây chúng ta sẽ nghiên cứu hai định lý cơ bản nhất: tĩnh và động. Hai định lý này cho phép đánh giá hai phía của tải trọng giới hạn mà ta đã làm quen qua cách giải các bài toán đơn giản nhất ở §5.

1. Định lý tĩnh

1.1. Trạng thái khả dĩ tĩnh

Một trạng thái chịu lực của vật thể được gọi là trạng thái khả dĩ tĩnh, nếu đối với trạng thái ấy các điều kiện cân bằng theo ứng suất ở mọi điểm của vật thể đều được thỏa mãn.

Chúng ta ký hiệu những điểm này là M^* tương ứng với tenxơ ứng suất σ_{ij}^* (hình 17.12). Vì thế những trạng thái ứng suất này thỏa mãn điều kiện:

$$f_{ch}(\sigma_{ij}^*) \leq 0. \quad (17.22)$$

Những điểm biểu diễn trạng thái thực của vật thể được ký hiệu bằng chữ M ứng với tenxơ ứng suất σ_{ij} .

1.2. Định lý tĩnh

“Tải trọng tương ứng với trạng thái khả dĩ tĩnh luôn luôn bé hơn tải trọng phá hủy thực”.

Để đơn giản cách chứng minh, chúng ta giả thiết rằng lực khối bằng không và sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với các trạng thái thực và khả dĩ tĩnh. Với mục đích đó, ta ký hiệu V_i và ξ_{ij} là tốc độ chuyển vị của điểm đặt các ngoại lực và tốc độ biến dạng các điểm của vật thể ở trạng thái thực. Do đó đối với trạng thái thực ta có:

$$\int_S X_{vi} V_i ds = \int_v \sigma_{ij} \xi_{ij} dv \quad (17.23)$$

và đối với trạng thái khả dĩ tĩnh:

$$\int_S X_{vi}^* V_i ds = \int_v \sigma_{ij}^* \xi_{ij} dv \quad (17.24)$$

Trong các phương trình trên, X_{vi} , X_{vi}^* là hình chiếu của tải trọng tác dụng trên bề mặt vật thể lên phương các trục tọa độ. Thực hiện phép trừ quan hệ (17.23) và (17.24) ta được:

$$\int_S (X_{vi} - X_{vi}^*) V_i ds = \int_v (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \xi_{ij} dv$$

Có thể chứng minh mặt chảy dẻo là mặt lồi. Cho nên:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij} > 0$$

do đó:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \epsilon_{ij} > 0 \text{ (xem hình 17.12)}$$

$$\text{Vì vậy:} \quad \int_S X_w^* V_i ds < \int_S X_w V_i ds \quad (17.25)$$

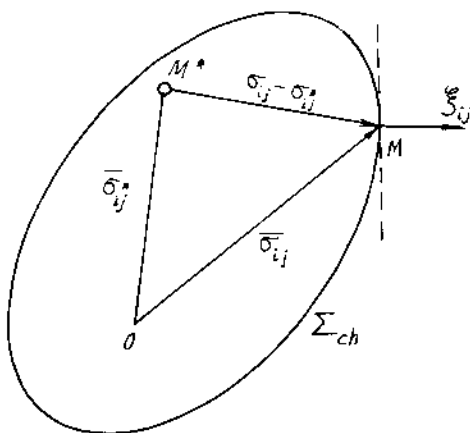
Kết quả này cho thấy công suất của tải trọng bề mặt ứng với trạng thái ứng suất khả dĩ tĩnh trên các tốc độ chuyển vị thực luôn nhỏ hơn công suất của tải trọng bề mặt ở trạng thái thực trên chính những tốc độ đó. Nếu ngoại lực là những lực tập trung suy rộng, theo (17.25) ta có:

$$\sum P_i^* V_i = \sum P_i V_i \quad (17.26)$$

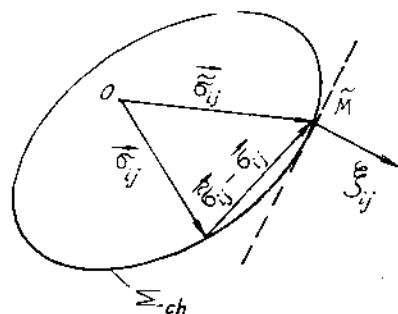
Trường hợp $i = 1$, kết quả này là:

$$P^* < P \quad (17.27)$$

Đó là điều phải chứng minh.



Hình 17.12.



Hình 17.13.

Định lý tĩnh thiết lập giá trị gần đúng dưới của tải trọng giới hạn. Khi khảo sát những trạng thái khả dĩ tĩnh khác nhau ta sẽ có những tải trọng khác nhau nhỏ hơn tải trọng giới hạn thực. Tải trọng

lớn nhất trong chúng sẽ gần nhất với tải trọng thực cần tìm. Vì lẽ đó phương pháp xác định tải trọng giới hạn bằng cách khảo sát các trạng thái khả dĩ tĩnh được gọi là *phương pháp tĩnh*.

2. Định lý động

2.1. Trạng thái khả dĩ động

Trạng thái chịu lực của vật thể được gọi là trạng thái khả dĩ động, nếu các điều kiện bề mặt theo chuyển vị và các điều kiện liên tục của biến dạng ở mỗi điểm của vật thể được thỏa mãn. *Các phương trình cân bằng có thể không cần phải thỏa mãn*. Như vậy, các điểm biểu diễn trạng thái ứng suất ở các điểm của vật thể đối với trạng thái khả dĩ động phải nằm trên mặt bắt đầu chảy dẻo $\sum_{ch}$ (hình 17.13).

2.2. Định lý động

Chúng ta ký hiệu những điểm này là $\tilde{M}$ và tenxơ ứng suất tương ứng là $\tilde{\sigma}_{ij}$ (hình 17.13).

Cũng như định lý tĩnh, ở đây ta giả thiết lực khối bằng không và sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với trạng thái thực, khi thừa nhận các chuyển vị tỷ lệ với tốc độ $\tilde{V}_i$ và $\tilde{\xi}_{ij}$ của trạng thái khả dĩ động là các chuyển vị khả dĩ. Do đó ta nhận được:

$$\int_s X_{vi} \tilde{V}_i ds = \int_v \sigma_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv$$

hoặc là:

$$\int_s X_{vi} \tilde{V}_i ds = \int_v \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv - \int_v (\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}) \tilde{\xi}_{ij} dv \quad (a)$$

Bởi vì, mặt dẻo là lồi (hình 17.13) nên ta có:

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}) \tilde{\xi}_{ij} > 0$$

Do đó rút ra:

$$\int_v \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv > \int_s X_{vi} \tilde{V}_i ds \quad (17.28)$$

Tích phân bên trái là công suất nội lực ở trạng thái khả dĩ động của vật thể. Rõ ràng là có thể chọn độ lớn của tải trọng bề mặt $\tilde{X}_{vi}$ sao cho công suất của chúng trên các tốc độ khả dĩ động bằng công suất của nội lực, nghĩa là:

$$\int_s \tilde{X}_{vi} \tilde{V}_i ds = \int \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv \quad (17.29)$$

So sánh quan hệ (17.28) và (17.29) ta có:

$$\int_s \tilde{X}_{vi} \tilde{V}_i ds > \int_s X_{vi} \tilde{V}_i ds \quad (17.30)$$

Nghĩa là công suất của tải trọng bề mặt tương ứng với trạng thái khả dĩ động trên các tốc độ chuyển vị khả dĩ động luôn lớn hơn công suất của tải trọng thực bề mặt trên chính những tốc độ này.

Nếu ngoại lực là những lực tập trung suy rộng thì theo (17.30):

$$\sum \tilde{P}_i \tilde{V}_i > \sum P_i \tilde{V}_i \quad (17.31)$$

Đối với trường hợp một lực ($i = 1$) thì:

$$\tilde{P} > P \quad (17.32)$$

trong đó theo (17.29):

$$\tilde{P} = \frac{1}{\tilde{V}} \int \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv$$

Đó là điều cần chứng minh.

Định lý động được phát biểu như sau:

“Tải trọng tương ứng với trạng thái khả dĩ động luôn lớn hơn tải trọng giới hạn phá hủy thực”.

Khác với định lý tĩnh, định lý động xác định giá trị gần đúng trên (giá trị giới hạn trên) của tải trọng giới hạn thực. Khi khảo sát những trạng thái khả dĩ động khác nhau, ta có thể xác định được những tải trọng khác nhau luôn lớn hơn tải trọng giới hạn thực. Tải trọng nhỏ nhất trong chúng cho ta giá trị giới hạn trên của tải trọng

giới hạn thực. Phương pháp xác định tải trọng giới hạn như thế được gọi là *phương pháp động*.

Vì thế, các định lý tĩnh và động cho ta khả năng xác lập sự đánh giá về hai phía của tải trọng phá hủy thực. Để một trạng thái khả dĩ là trạng thái thực thì nó đồng thời phải là trạng thái khả dĩ động và ngược lại. Nếu tải trọng giới hạn được xác định bằng các phương pháp tĩnh và động trùng nhau thì điều đó có nghĩa là tải trọng giới hạn nhận được là thực và nghiệm nhận được của bài toán là đầy đủ.

Ví dụ

Một dầm siêu tĩnh được cho như hình 17.14a. Hãy xác định tải trọng giới hạn q_{gh} ?

GIẢI

a) Tải trọng giới hạn theo định lý tĩnh

Với phản lực R_B ta sẽ khảo sát tất cả các trạng thái khả dĩ tĩnh của dầm.

Điều kiện cân bằng tại z bất kỳ cho ta:

$$M(z) = R_B \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}$$

Giá trị cực đại của M xuất hiện khi:

$$z = z_0 = \frac{R_B}{q}$$

và bằng:

$$M = M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B^2}{q}$$

Từ điều kiện $M_{\max}$ không thể vượt quá mômen giới hạn của mặt cắt M_{gh} :

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B^2}{q} < M_{gh},$$

ta rút ra điều kiện thứ nhất của tải trọng phá hủy:

$$q_{1t} \geq \frac{R_B^2}{2M_{gh}} \quad (a)$$

Mặt khác điều kiện cân bằng cho phép xác định giá trị mômen lớn nhất tại ngàm A:

$$M_{Amax} = -R_B.l + \frac{q.l^2}{2}$$

Tại đây $M_{Amax} \leq M_{gh}$, điều đó cho ta:

$$q_{2t} \leq \frac{2M_{gh}}{l^2} + \frac{2R_B}{l} \quad (b)$$

Đồ thị các hàm $q_{1t}(R_B)$ và $q_{2t}(R_B)$ được cho trên hình 17.14d. Các bất đẳng thức (a) và (b) được thỏa mãn trong miền gạch sọc giữa hai đồ thị này. Định lý tĩnh đã khẳng định rằng tải trọng phá hủy thực lớn hơn tất cả các tải trọng được xác định bởi các điểm của miền gạch sọc. Điểm K là giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn điều kiện này. Vì vậy R_B được tìm từ điều kiện:

$$q_{1t}(R_B) = q_{2t}(R_B)$$

Cụ thể là:

$$R_B = 2 \left(\sqrt{2} + 1 \right) \frac{M_{gh}}{l} = 4,82 \frac{M_{gh}}{l}$$

Khi thay R_B vào (b), ta nhận được tải trọng phá hủy (giới hạn) theo định lý tĩnh:

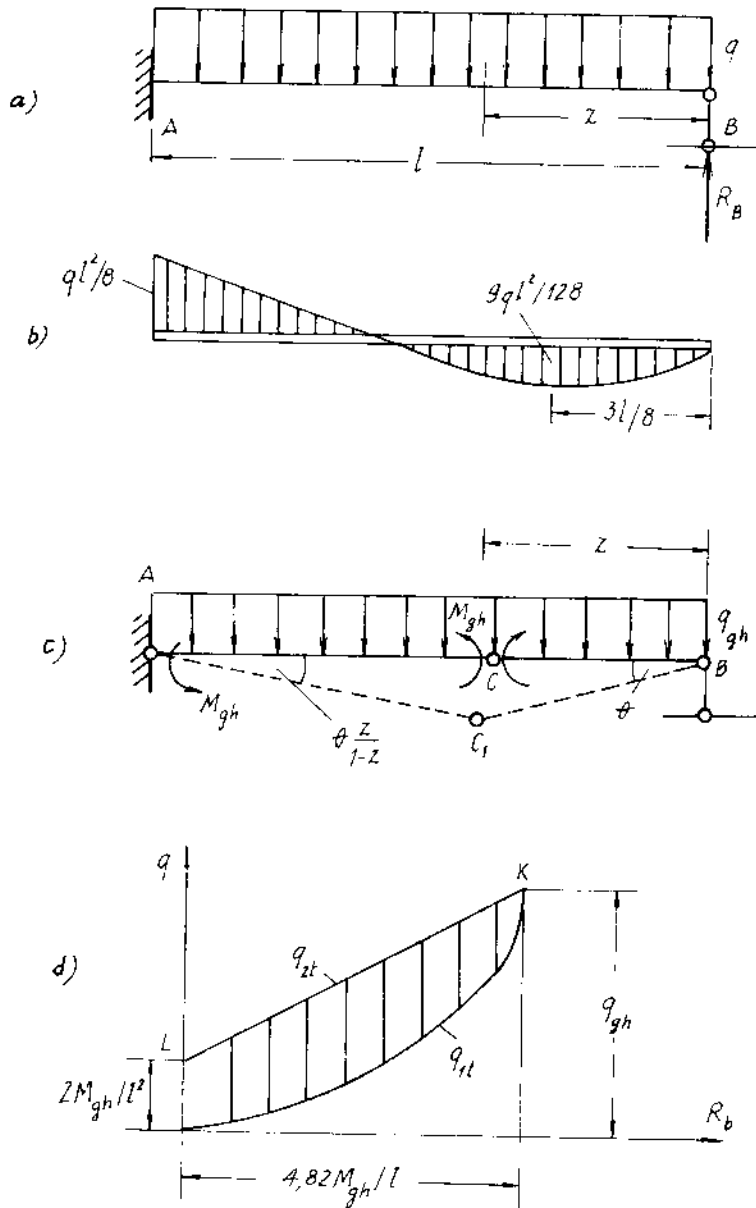
$$q_t = q_{gh} = 11,6 \cdot \frac{M_{gh}}{l^2} \quad (c)$$

b) Tải trọng giới hạn theo định lý động

Một trạng thái khả dĩ động được cho trên hình 17.14c bởi đường nét đứt. Định lý động cho ta phương trình công khả dĩ sau đây:

$$q \cdot S_{\Delta AC_1B} - \left(M_{gh} \cdot \delta\theta + 2M_{gh} \frac{\delta\theta \cdot z}{l-z} \right) = 0$$

trong đó: $S_{\Delta AC_1B}$ là diện tích tam giác AC_1B .



Hình 17.14.

Do đó:

$$q = \frac{M_{gh}}{l} \cdot \frac{1+z}{z(1-z)} \quad (d)$$

Tương ứng với định lý động thì cường độ tải trọng phá hủy sẽ phải là giá trị nhỏ nhất trong số các giá trị q trong (d). Để có $q = q_d$ nhỏ nhất ta phải tìm nghiệm của phương trình sau:

$$\frac{dq}{dz} = z^2 + 2l \cdot z - l^2 = 0$$

Nghiệm của phương trình này là $z = 0,414l$. Khi khảo sát dấu của đạo hàm bậc hai cho thấy:

Với $z = 0,414l$, hàm (d) có giá trị cực tiểu và đúng bằng kết quả (c);

Với $M_{gh} = 1$ và $l = 1$ thì $q = q_d = 11,616766$, và có đồ thị như hình (17.15).

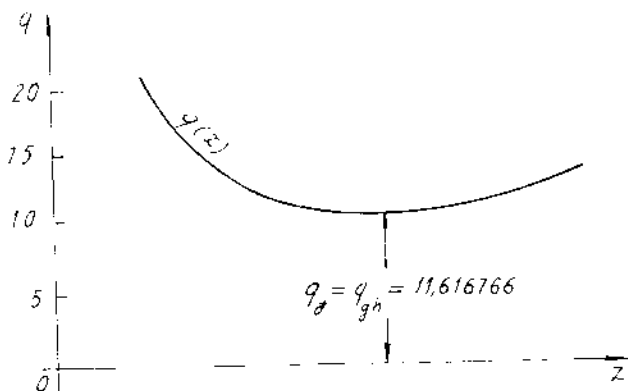
Điều này nói lên rằng các trạng thái khả dĩ tĩnh và động trùng nhau và trùng với trạng thái phá hủy thực.

§7. TÍNH ỔNG DÀY TRONG VÀ NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI

1. Bài toán phẳng – khái niệm và định nghĩa

Trong kỹ thuật người ta thường gặp phải những vật thể dài mà trục của nó trùng với trục z và chịu tải trọng vuông góc và không đổi dọc theo trục này.

Trong những vật thể như vậy, biến dạng và chuyển vị chỉ xảy ra trong một mặt phẳng trùng với mặt cắt ngang (vuông góc với trục z). Những tường chắn và đập chắn, đường hầm tàu điện ngầm, con lăn



Hình 17.15.

hình trụ, đặc biệt là các ống dày dài chịu áp lực p phân bố đều bên trong và bên ngoài dọc theo chiều dài z của ống v.v. Những bài toán mà chuyển vị chỉ xảy ra trong một mặt phẳng của mặt cắt ngang như thế gọi là bài toán biến dạng phẳng. Ngược với bài toán biến dạng phẳng là bài toán ứng suất phẳng. Đó là các vật thể mỏng dạng tấm chịu tác dụng của tải trọng nằm trong mặt phẳng tấm và phân bố đều theo chiều dày tấm. Những tường ngăn trong các nhà cao tầng, vách ngăn giữa các khoang trong máy bay, tàu biển v.v.

Trong mục này chúng ta chỉ quan tâm đến các ống dày dài mặt cắt tròn chịu áp lực phân bố đều bên trong và bên ngoài dọc theo chiều dài ống. Ống được gọi là dày nếu chiều dày của nó lớn hơn một phần mười bán kính trung bình của ống.

Do tính đối xứng trục cả về tải trọng và kết cấu đối với trục ống, mà các biến dạng và chuyển vị cũng đối xứng đối với trục này. Hãy khảo sát một ống dày dài bán kính trong a , bán kính ngoài b (hình 17.16a) chịu áp lực bên trong p_i , bên ngoài p_o .

2. Nghiệm bài toán trong miền đàn hồi

Ta hãy xét một phần tử sáu mặt được tách ra quanh một điểm bất kỳ trong ống như hình (17.16a, b, c, d, e). Từ điều kiện cân bằng của phần tử (hình 17.16e), ta rút ra:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (17.33)$$

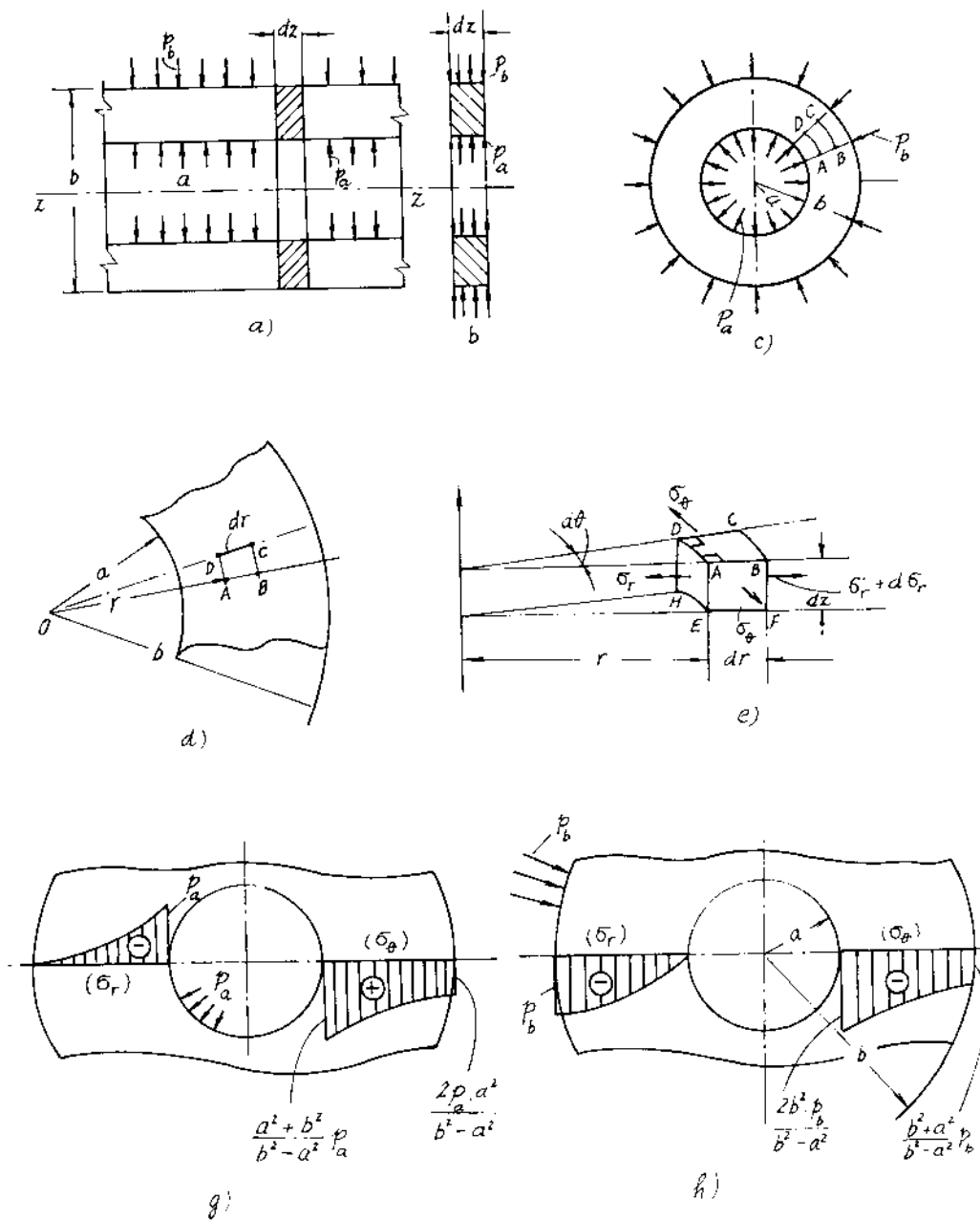
Quan hệ hình học (1.8) của Cauchy trong trường hợp bài toán đối xứng trục với hệ tọa độ cực r, θ là:

$$\epsilon_\theta = \frac{W}{r} ; \epsilon_r = \frac{dW}{dr} ; \gamma_{r\theta} = 0 \quad (17.34)$$

trong đó: W là chuyển vị hướng kính.

Định luật Húc dạng ngược trong bài toán này khi kể đến (17.34) có dạng:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{dW}{dr} + \mu \frac{W}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{W}{r} + \mu \frac{dW}{dr} \right) \end{aligned} \quad (17.35)$$



Hình 17.16.

Thay (17.35) vào (17.33) ta thu được phương trình vi phân cân bằng theo chuyển vị $W(r)$:

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r^2} = 0 \quad (17.36)$$

hoặc là:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(W.r)}{dr} \right) = 0$$

Tích phân liên tiếp hai lần phương trình này, ta có nghiệm tổng quát của bài toán theo chuyển vị:

$$W(r) = A \cdot r + \frac{B}{r} \quad (17.37)$$

Thay (17.37) vào (17.35) ta được nghiệm bài toán theo ứng suất:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) A - \frac{1-\mu}{r^2} B \right] \quad (17.38a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) + \frac{1-\mu}{r^2} B \right] \quad (17.38b)$$

Các hằng số tích phân A , B được tìm từ điều kiện biên của bài toán. Cụ thể là:

$$\sigma_r = -p_a \quad \text{và} \quad \sigma_r = -p_b \quad (a)$$

Giải hệ (a) ta được A và B , sau đó thay vào hệ (17.38a, b), cuối cùng ta được:

$$\sigma_r = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2 (b^2 - a^2)} \quad (17.39a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2 (b^2 - a^2)} \quad (17.39b)$$

Biểu đồ ứng suất σ_r và σ_θ khi chỉ chịu riêng biệt áp lực p_a bên trong và p_b bên ngoài được mô tả trên hình (17.16g, h).

3. Trạng thái đàn hồi dẻo lý tưởng của ống dày dài chịu áp lực bên trong

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu cách tìm nghiệm gần đúng của ống dày dài chịu áp lực p_a bên trong.

Trong miền đàn hồi các ứng suất pháp hướng kính σ_r và tiếp tuyến σ_θ được xác định từ các công thức (17.39a, b) khi $p_b = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.40)$$

Các ứng suất dọc trục σ_z đối với trạng thái biến dạng phẳng được rút ra từ điều kiện $\varepsilon_z = 0$ và định luật Húc có biểu thức:

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (b)$$

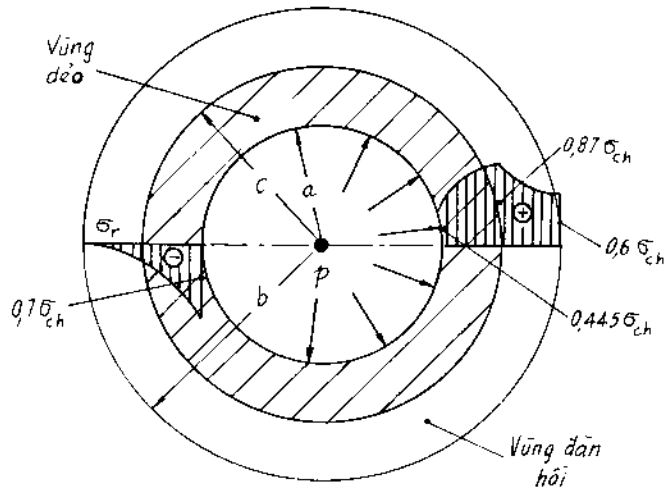
Đối với ống làm bằng vật liệu không chịu nén thì hệ số Poatxông $\mu = 0,5$. Khi đó công thức (b) có dạng:

$$\sigma_z = 0,5 (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (c)$$

Trong trạng thái đàn hồi dẻo, mặt cắt ngang của ống được chia thành hai vùng vành khăn đàn hồi và dẻo (hình 17.17). Vùng trong được gạch xọc $a \leq r \leq c$ là vùng biến dạng dẻo, còn vùng ngoài $c \leq r \leq b$ là vùng biến dạng đàn hồi.

Nếu gọi q là áp lực hướng kính trên biên giữa vùng đàn hồi và dẻo tại $r = c$, công thức (17.40) được viết lại như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{q c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{q c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.41)$$



Hình 17.17.

Khi xem vật liệu là đàn hồi dẻo lý tưởng và thừa nhận điều kiện dẻo của Huber – Mises. Ta có ứng suất tương đương trong hệ tọa độ trụ r, θ trong trường hợp này là:

$$\sigma_{td} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = \sigma_{ch} \quad (d)$$

Do ứng suất σ_θ luôn lớn hơn σ_r cho nên điều kiện dẻo của Huber – Mises trong trường hợp này có dạng:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \quad (g)$$

Để xác định ứng suất trong miền dẻo ta sẽ giải đồng thời phương trình cân bằng (17.33) và phương trình điều kiện dẻo (g). Thay (g) vào (17.33) ta nhận được:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{ch}}{r}$$

Đây là phương trình có biến số phân ly, vì vậy khi tích phân ta có:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln r + c \quad (h)$$

Hằng số c trong (h) được tìm từ điều kiện biên $\sigma_{r=a} = -p$. Cụ thể là:

$$-p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln a + c$$

Do đó:
$$c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln a - p$$

Thay kết quả này vào (h) ta thu được:

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{a}{r} \quad (17.42)$$

Từ (g) dễ dàng rút ra:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \quad (17.43)$$

Bởi vì, trạng thái ứng suất ở vùng dẻo của ống được mô tả bởi các ứng suất (17.42) và (17.43), cho nên tại $r = c$ ta nhận được hai phương trình xác định q và c:

$$\begin{aligned} -\frac{q \cdot c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} - 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{c}{a} \\ \frac{q \cdot c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} + 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{c}{a} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ nhất ta rút ra:

$$q = p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{c}{a} \quad (17.44)$$

Thay (17.44) vào phương trình thứ hai và sau khi biến đổi ta được phương trình xác định c:

$$\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = \frac{p \sqrt{3}}{2 \sigma_{ch}} \quad (17.45)$$

Sau khi đã tìm được c từ phương trình (17.45), theo công thức (17.44) ta tìm được áp lực hướng kính q giữa vùng đàn hồi và dẻo. Ứng suất trong vùng dẻo được tính theo công thức (17.42), (17.43), còn ứng suất trong vùng đàn hồi được tính theo công thức (17.41).

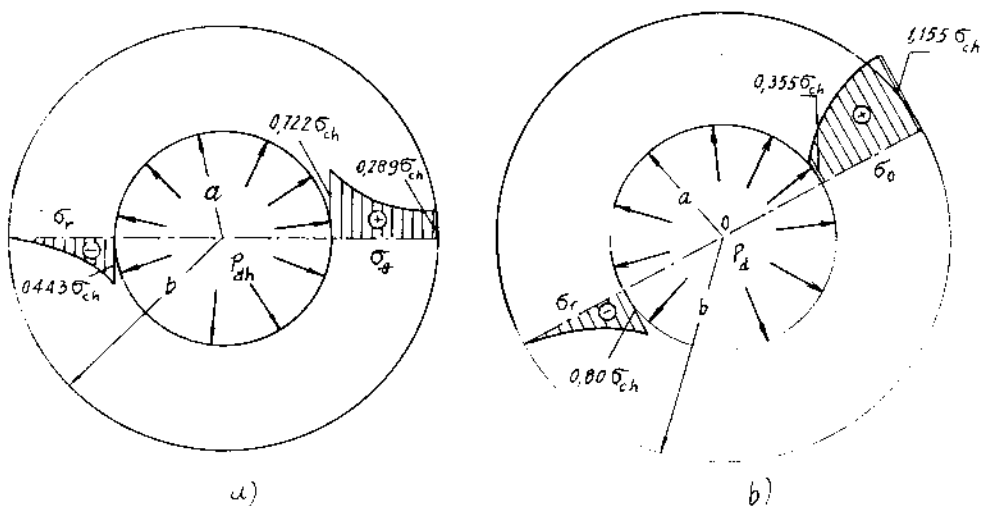
4. Trạng thái giới hạn bền đàn hồi của ống

Trạng thái giới hạn tương ứng với giá trị $c = a$ là trạng thái giới hạn bền đàn hồi của ống. Khi thay giá trị $c = a$ vào phương trình (17.45) và giải, ta tính được áp lực p_a tương ứng với trạng thái này:

$$p_a = p_{dh} = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (17.46)$$

Ở trạng thái này ứng suất trong ống theo (17.40) là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.47)$$



Hình 17.18 .

Hình (17.18a) là biểu đồ các ứng suất (17.47) với $b/a = 2$. Trong trường hợp này giới hạn đàn hồi của áp lực bên trong $p_a = p_{dh} = 0,433 \sigma_{ch}$.

Ứng suất ở mặt trong của ống $r = a$ là:

$$\sigma_r = 0,433 \sigma_{ch} ; \quad \sigma_\theta = 0,722 \sigma_{ch}$$

và ở mặt ngoài $r = b$ là:

$$\sigma_r = 0 ; \quad \sigma_\theta = 0,289 \sigma_{ch}.$$

5. Trạng thái giới hạn bên dẻo

Trạng thái này đạt được khi $c = b$. Sau khi thay $c = b$ vào (17.41) và giải, ta được áp lực giới hạn dẻo:

$$p_d = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{b}{a} \quad (17.48)$$

Ứng suất trong ống ở trạng thái giới hạn dẻo này được xác định theo (17.42), (17.43) sau khi thay (17.48) vào chúng. Cụ thể là:

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{b}{r} ; \quad \sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \left(1 - \ln \frac{b}{r} \right) \quad (17.49)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất (17.49) với tỷ số $b/a = 2$ được mô tả trên hình 17.18b. Trong trường hợp này áp lực $p_d = 0,800 \sigma_{ch}$.

Các ứng suất (17.49) ở mặt trong của ống $r = a$ bằng:

$$\sigma_r = -0,800 \sigma_{ch} ; \quad \sigma_\theta = 0,355 \sigma_{ch}.$$

còn ở mặt ngoài $r = b$:

$$\sigma_r = 0 ; \quad \sigma_\theta = 1,155 \sigma_{ch}.$$

Biểu đồ ứng suất σ_r và σ_θ ở trạng thái đàn dẻo với tỷ số $b/a = 2$ với áp lực bên trong $p = 0,700 \sigma_{ch}$, được biểu diễn trên hình 17.19. Trong trường hợp này bán kính đường biên giới giữa vùng dẻo và vùng đàn hồi được tìm từ phương trình (17.45). Cụ thể là:

$$c = 1,44a$$

Áp lực trên biên giới giữa các vùng đàn hồi và dẻo được xác định theo (17.44) bằng:

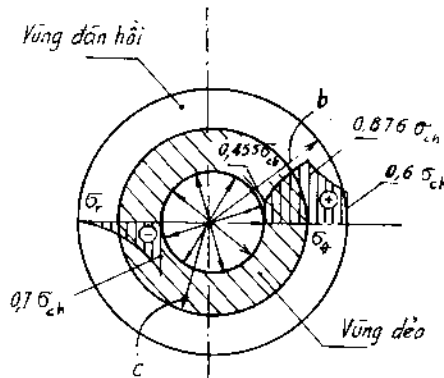
$$q = 0,279 \sigma_{ch}$$

Thay giá trị áp lực $p = 0,700 \sigma_{ch}$ vào công thức (17.42) và (17.43) ta nhận được công thức xác định ứng suất trong vùng dẻo $a \leq r \leq 1,44a$ của ống:

$$\sigma_r = \sigma_{ch} (1,155 \ln r/a - 0,700) ; \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 1,155 \sigma_{ch}$$

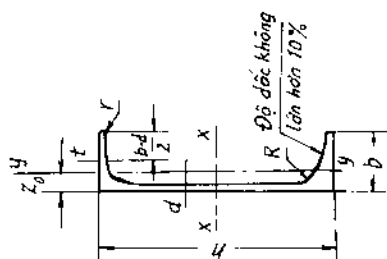
Ứng suất trong vùng đàn hồi $1,44a \leq r \leq 2a = b$ của ống với $b/a = 2$ và $q = 0,279 \sigma_{ch}$ được tính theo công thức (17.41), kết quả là:

$$\sigma_r = -0,300 \sigma_{ch} \left(\frac{4a^2}{r^2} - 1 \right) ; \quad \sigma_\theta = 0,300 \sigma_{ch} \left(\frac{4a^2}{r^2} + 1 \right).$$



Hình 17.19.

PHỤ LỤC

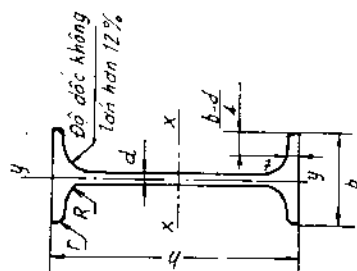


Bảng 1. Thép cán nóng TCVN 1654 – 75 thép chữ Γ

Số hiệu	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm^2	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
									X - X				Y - Y			
	h	b	d	t	R	r			I_x , cm^4	W_x , cm^3	i_x , cm	S_x , cm^3	I_y , cm^4	W_y , cm^3	i_y , cm	z_0 , cm
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,950	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,080	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44

Bảng 1 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
									X - X				Y - Y			
									h	b	d	t	R.	r	I _x , cm ⁴	W _x , cm ³
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	11,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	13,30	545,0	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,870	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,040	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,0	20,00	2,180	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,0	20,50	2,200	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	23,20	19,80	1670,0	167,0	8,15	95,90	139,0	24,20	2,350	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,10	2,370	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	22,60	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,00	2,550	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,60	2,600	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	25,80	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,20	2,780	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,0	262,0	37,30	2,730	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,0	327,0	43,60	2,840	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,0	410,0	51,80	2,970	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,0	513,0	61,70	3,100	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,0	642,0	73,40	3,230	2,75

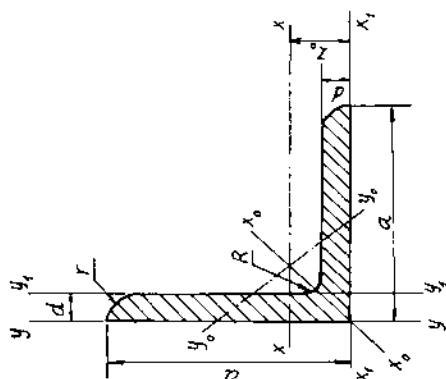


Bảng 2. Thép cán nóng TCVN 1655 – 75
Thép chữ I

Số hiệu	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng l m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục						
									X - X			Y - Y			
	h	b	d	t	R	r			I _x , cm ⁴	W _x , cm ³	i _x , cm	S _x , cm ³	I _y , cm ⁴	W _y , cm ³	i _y , cm
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	23,10	2,32

Bảng 2 tiếp theo

Số hiện	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục						
									X - X				Y - Y		
	h	b	d	t	R	r			I _x , cm ⁴	W _x , cm ³	i _x , cm	S _x , cm ³	I _y , cm ⁴	W _y , cm ³	i _y , cm
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	25,0
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	23,7
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,70	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,00	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54



Bảng 3. Thép cán nóng TCVN 1656 – 75

Thép góc L đều cạnh

Số hiệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm^2	Khối lượng chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
							X - X		$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$		$X_1 - X_1$	
	a	t	R	r			I_x , cm^4	i_x , cm	I_{x_0} max, cm^4	i_{x_0} max, cm	I_{y_0} min, cm^4	i_{y_0} min, cm		I_{x_1} , cm^4
2	20	3	3,5	1,2	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
		4			1,15	0,50	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64		
2,5	25	3	3,5	1,2	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
		4			1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	
2,8	28	3	4,0	1,3	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	

Bảng 3 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm			Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục						
						X - X		X ₀ - X ₀		Y ₀ - Y ₀		X ₁ - X ₁
						I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _{x0} max, cm ⁴	i _{x0} max, cm	I _{y0} min, cm ⁴	i _{y0} min, cm	
3,2	32	3	4,5	1,5	1,85	1,77	0,97	2,82	1,23	0,74	0,63	3,26
					2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64
					2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24
4,0	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35
					3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53
					3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04
					3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10
					4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30
5,0	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,554	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40
					3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60
					4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30
					5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20
					7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10
					6,13	23,10	1,94	36,00	2,44	9,52	1,25	41,50
					7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00
7,0	70	5	8,0	2,7	6,86	31,90	2,16	50,70	2,72	13,2	1,39	56,7
					8,15	37,60	2,15	59,60	2,71	15,5	1,38	68,4
					9,42	43,0	2,14	68,20	2,69	17,8	1,37	80,1
					10,70	48,2	2,13	76,40	2,68	20,0	1,37	91,9

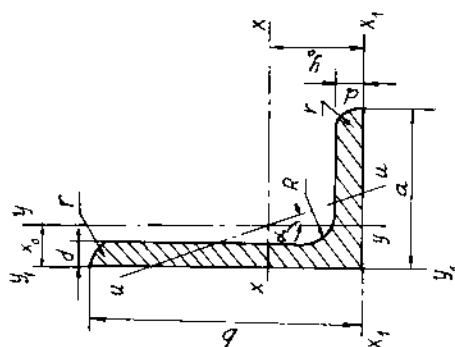
Bảng 3 tiếp theo

Số liệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng l m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
							X - X		X ₀ - X ₀		Y ₀ - Y ₀		X ₁ - X ₁	
	a	t	R	r			I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _{x0} max, cm ⁴	i _{x0} max cm	I _{y0} min, cm ⁴	i _{y0} min, cm	I _x , cm ⁴	Z ₀ , cm
8.0	80	6	9	3,0	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19
		7			10,80	8,51	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23
		8			12,30	9,65	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	157,0	2,27
9.0	90	6	10	3,3	10,60	8,33	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43
		7			12,30	9,64	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47
		8			13,90	10,90	106,0	2,76	168,0	3,49	43,8	1,77	194,0	2,51
		9			15,60	12,20	118,0	2,75	180,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55
10.0	100	7	12	4,0	13,80	10,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71
		8			15,60	12,20	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75
		10			19,20	15,10	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83
		12			22,80	17,90	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91
		14			26,30	20,60	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	427,0	2,99
		16			29,70	23,30	261,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06
11.0	110	7	12	4,0	15,20	11,90	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96
		8			17,20	13,50	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00
12.5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294,0	3,87	467,0	4,87	122	2,49	516,0	3,36
		9			22,0	17,3	327,0	3,86	520,0	4,86	135	2,48	582,0	3,40
		10			24,3	19,1	360,0	3,85	571,0	4,84	149	2,47	649,0	3,45
		12			28,9	22,7	422,0	3,82	670,0	4,82	174	2,46	782,0	3,53
		14			33,4	26,2	482,0	3,80	764,0	4,78	200	2,45	916,0	3,61
		16			37,8	29,6	539,0	3,78	853,0	4,75	224	2,44	105,1	3,68
14.0	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466,0	4,34	739,0	5,47	192	2,79	818,8	3,78
		10			27,3	21,5	512,0	4,33	814,0	5,16	211	2,78	911,0	3,82
		12			32,5	25,5	602,0	4,31	957,0	5,43	248	2,76	109,7	3,90

Bảng 3 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
							X - X		X ₀ - X ₀		Y ₀ - Y ₀		X ₁ - X ₁	
	a	t	R	r										
160	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774,0	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	27,0	844,0	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	29,4	913,0	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
18,0	180	18	16	5,3	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
		11			38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20,0	200	12	18	6,0	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07

Bảng 4. Thép cán nóng TCVN 1657 – 75
Thép góc L không đều cạnh



Số hiệu	Kích thước, mm					Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục										
								X - X		Y - Y		X ₁ - X ₁		Y ₁ - Y ₁		U - U		Góc lệch, tgα
	b	a	t	R	r			I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _y , cm ⁴	i _y , cm	I _{x1} , cm ⁴	Y ₀ , cm	I _{y1} , cm ⁴	X ₀ , cm	I _u min, cm ⁴	i _u min, cm	
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4			2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381

Bảng 4 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng l m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục										Góc lệch, tgα
							X - X		Y - Y		X ₁ - X ₁		Y ₁ - Y ₁		U - U		
b	a	t	R	r	I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _y , cm ⁴	i _y , cm	I _x , cm ⁴	Y ₁ , cm	I _{y1} , cm ⁴	X ₁ , cm	I _u , min, cm ⁴	i _u , min, cm			
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14 2,80	4,41 5,68	1,43 1,42	1,32 1,69	0,79 0,78	9,02 12,10	1,47 1,51	2,20 2,98	0,64 0,68	0,79 1,02	0,61 0,60	0,382 0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42 3,17	6,17 7,98	1,60 1,59	1,99 2,56	0,91 0,90	12,40 16,60	1,60 1,85	3,26 0,76	0,72 0,76	1,18 1,52	0,70 0,69	0,403 0,401
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58 4,41	11,40 13,80	1,78 1,77	3,70 4,48	1,02 1,01	23,20 29,20	1,82 1,86	6,25 7,91	0,84 0,88	2,19 2,66	0,78 0,78	0,406 0,404
6,3/4	63	40	4	7,0	2,3	4,04 4,98 5,90 7,68	16,30 19,90 23,30 29,60	2,01 2,00 1,99 1,96	5,16 6,26 7,28 9,15	1,13 1,12 1,11 1,09	33,0 41,40 49,90 66,90	2,03 2,08 2,12 2,20	8,51 10,80 13,10 17,90	0,91 0,95 0,99 1,07	3,07 3,72 4,36 5,58	0,87 0,86 0,86 0,85	0,387 0,396 0,393 0,386
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	56,70	2,28	15,20	1,05	5,34	0,98	0,406
8/5	80	5	5	8,0	2,7	6,36 7,55	41,60 49,00	2,56 2,55	12,7 14,8	1,41 1,40	84,6 102	2,60 2,65	20,80 25,20	1,13 1,17	7,58 8,88	1,09 1,08	0,387 0,386
9/5,6	90	56	5	9,0	3,0	7,86 8,54 11,18	65,30 70,60 90,90	2,88 2,88 2,85	19,7 21,2 27,1	1,58 1,58 1,56	132 145 194	2,92 2,95 3,04	32,20 35,20 47,80	1,26 1,28 1,36	11,8 12,7 16,3	1,22 1,22 1,21	0,384 0,384 0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	98,30	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,90	1,42	18,2	1,38	0,393
			7			11,10	113,0	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,70	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,69	127,0	3,48	39,2	1,77	266	3,32	67,60	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,50	154,0	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,80	1,58	28,3	1,35	0,387

Bảng 4 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng l m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục										Góc lệch, tgα	
							X - X		Y - Y		X ₁ - X ₁		Y ₁ - Y ₁		U - U			
							I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _y , cm ⁴	i _y , cm	I _{x1} , cm ⁴	Y _x , cm	I _{y1} , cm ⁴	X _y , cm	I _u , min, cm ⁴	i _u , min, cm		
11/7	110	70	6,5 8	10	3,3	11,40 13,90	8,98 10,90	142,0 172,0	3,53 3,51	45,6 54,6	2,00 1,98	286 353	3,55 3,61	74,30 92,30	1,58 1,64	26,9 32,3	1,53 1,52	0,402 0,400
12,5/8	125	80	7 8 10 12	11	3,7	14,10	11,00	227,0	4,01	73,7	2,29	452	4,0	119,0	1,80	43,4	1,76	0,407
						16,00	12,50	256,0	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137,0	1,84	48,8	1,75	0,406
						19,70	15,50	312,0	3,98	100,0	2,26	649	4,14	173,0	1,92	59,3	1,74	0,404
						23,40	18,30	365,0	3,95	117,0	2,21	781	4,22	210,0	2,00	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8 10	12	4,0	18,00 22,20	14,10 17,50	364,0 444,0	4,49 4,47	120,0 146,0	2,58 2,56	727 911	4,49 4,58	194,0 245,0	2,03 2,12	70,3 85,5	1,98 1,96	0,411 0,409
16/10	160	100	9 10 12 14	13	4,3	22,90 25,30 30,00 34,70	18,00 19,80 23,60 27,30	606,0 667,0 784,0 897,0	5,15 5,13 5,11 5,08	186,0 204,0 239,0 272,0	2,85 2,84 2,82 2,80	1221 1359 1634 1910	5,19 5,23 5,32 5,40	300,0 335,0 405,0 477,0	2,23 2,28 2,36 2,43	110,0 121,0 142,0 162,0	2,20 2,19 2,18 2,16	0,391 0,390 0,388 0,385
18/11	180	110	10 12	14	4,7	28,30 33,70	22,20 26,40	952,0 1123	5,80 5,77	276,0 324,0	3,12 3,10	1933 2324	5,88 5,97	444,0 537,0	2,44 2,52	165,0 194,0	2,42 2,40	0,375 0,374
20/12,5	200	125	11 12 14 16	14	4,7	34,90 37,90 43,90 49,80	27,40 29,70 34,40 39,10	1449 1568 1801 2026	6,45 6,43 6,41 6,38	446,0 482,0 551,0 617,0	3,58 3,57 3,54 3,52	2920 3189 3726 4264	6,50 6,54 6,62 6,71	718,0 786,0 922,0 1061	2,79 2,83 2,91 2,99	264,0 285,0 327,0 367,0	2,75 2,74 2,73 2,72	0,392 0,392 0,390 0,388
25/16	250	160	12 16 18 20	18	6,0	48,30 63,60 71,10 78,50	37,9 49,9 55,8 61,7	3147 4091 4545 4987	8,07 8,02 7,99 7,97	1032 1333 1475 1613	4,62 4,58 4,56 4,53	6212 8308 9358 10410	7,97 8,14 8,23 8,31	1634 2200 2487 2776	3,53 3,69 3,77 3,85	604,0 781,0 866,0 949,0	3,54 3,50 3,49 3,48	0,410 0,408 0,407 0,405

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. С. Д. Пономарев и других
Расчеты на прочность в машиностроении, Т1, Т3, Машгиз - 1959
2. А. А. Уманский – Строительная механика самолета, М. 1961
3. Clough R. W., Penzien J. – Dynamics of Structures, New – York, 1975
4. А. Ф. Смирнов – Сопротивление Материалов., М, 1975
5. Малинин Н. Н – Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1975
6. I. Miroloubov et les autres – Résistance des matériaux – Manuel de résolution des problèmes – Mir, 1977
7. Я. Г. Пановко, И. И. Губановас - Устойчивость и колебания упругих систем. М, 1979
8. С. П. Тимошенко, Дж. Гудер – Теория Упругости. М, 1979
9. Serge Laroze – Résistance des matériaux et structures T2, T3, Eyrolles Masson, 1984
10. Phan Kỳ Phùng, Đặng Việt Cường – Lý thuyết dẻo và từ biến, NXB Giáo dục, 1997
11. Đặng Việt Cường – Nghiên cứu đường cong dẻo giới hạn và hệ số an toàn của vỏ trụ làm bằng vật liệu cứng dẻo – TTCTKH.HNCH toàn quốc lần thứ VII – 2002
12. Đặng Việt Cường, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai – Sức bền vật liệu T1, T2, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2002
13. Đặng Việt Cường, Lê Quang Minh – Lý thuyết dẻo ứng dụng, NXB Khoa học và Kỹ thuật , 2003
14. Đặng Việt Cường, Nguyễn Đức Trung – Về một giải pháp tiếp cận các bài toán Sức bền vật liệu bằng tin học. TTCTKH.CHKT toàn quốc, 2001
15. Lều Thọ Trình – Cơ học kết cấu, T2, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005

16. Đặng Việt Cường – Cơ ứng dụng trong kỹ thuật, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005
17. Đặng Việt Cường – Cơ học kết cấu, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005
18. Đặng Việt Cường – Về một phương pháp mới nghiên cứu độ cứng của các công trình chịu tải trọng di động. TTHNKH toàn quốc CKT&TĐH, 2006
19. Đặng Việt Cường – Tuyển tập các bài toán giải sẵn môn Sức bền vật liệu – T1, T2 – NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2006
20. G. Korn, T. Korn – **Mathematical Handbook**, New York, 1968.

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Lời nói đầu	3
Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU	5
§1. Mô hình nghiên cứu	5
§2. Các dạng tải trọng và sơ đồ hóa tải trọng	9
§3. Sơ đồ hóa công trình thực	11
§4. Liên kết và phản lực liên kết	13
§5. Khái niệm về phân loại cơ hệ	16
§6. Khái niệm về cấu tạo hệ bất biến hình hình học	18
§7. Hệ biến hình tức thời	19
§8. Khái niệm về chuyển vị và biến dạng đàn hồi	21
§9. Khái niệm về ứng suất	24
§10. Khái niệm về nội lực trên mặt cắt	10
§11. Các loại biến dạng cơ bản và cách xác định các nội lực tương ứng	30
§12. Liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực	34
§13. Quy ước vẽ biểu đồ nội lực và các nhận xét	38
§14. Các ví dụ áp dụng	40
Chương 2. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU	57
§1. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo	58
§2. Thí nghiệm kéo vật liệu giòn	64
§3. Đặc trưng cơ học của vật liệu khi nén	65
§4. Hiệu ứng Baxinghe và hệ số Poát xông	66
§5. Đặc trưng cơ học của vật liệu mới	68
§6. Các yếu tố ảnh hưởng đến đặc trưng cơ học của vật liệu	71
§7. Xác định độ cứng của vật liệu	73

Chương 3. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG	85
§1. Khái niệm về trạng thái ứng suất	85
§2. Trạng thái ứng suất khối và phân loại trạng thái ứng suất	87
§3. Trạng thái ứng suất phẳng	92
§4. Vòng tròn MO	98
§5. Các ví dụ áp dụng	103
§6. Biến dạng ở trạng thái ứng suất khối. Định luật Húc tổng quát	111
§7. Thế năng biến dạng đàn hồi	116
Chương 4. KÉO VÀ NÉN	123
§1. Định nghĩa và các giả thiết tính toán	123
§2. Ứng suất và biến dạng	125
§3. Cách tính chuyển vị và nội lực bằng phương pháp vạn năng. Trường hợp tổng quát	125
§4. Chuyển vị và nội lực $U(z)$, $N(z)$ trong bài toán kéo (nén)	128
§5. Ứng suất cho phép, điều kiện bền và cứng	132
§6. Các ví dụ minh họa	135
Chương 5. CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ	155
§1. Mômen khối lượng	155
§2. Mômen diện tích	158
§3. Quan hệ giữa các mômen quán tính cấp hai đối với các trục song song	163
§4. Quan hệ giữa các mômen quán tính cấp hai khi xoay trục tọa độ	164
§5. Elip quán tính và thuộc tính của nó	166
§6. Các ví dụ minh họa	167
Chương 6. CÁC TIÊU CHUẨN BỀN VÀ DẪO	175
§1. Nhiệm vụ và cách đặt bài toán lý thuyết bền	175

§2. Các tiêu chuẩn bền ứng dụng của vật liệu đẳng hướng	177
§3. Các tiêu chuẩn bền và dẻo của vật liệu dị hướng	182
Chương 7. XOẮN THANH THẲNG	193
§1. Định nghĩa và khái niệm	193
§2. Ứng suất và biến dạng	195
§3. Điều kiện bền - Điều kiện cứng	197
§4. Chuyển vị, nội lực và phương pháp xác định chúng	198
§5. Xoắn thanh mặt cắt ngang không tròn	203
§6. Các ví dụ áp dụng	210
Chương 8. UỐN PHẪNG VÀ CẮT	223
§1. Khái niệm và định nghĩa	223
§2. Trạng thái ứng suất và biến dạng khi uốn thuần túy	225
§3. Hình dạng hợp lý của mặt cắt ngang	233
§4. Đường đàn hồi, độ võng và góc xoay	235
§5. Phương pháp tích phân bất định	238
§6. Phương pháp đồ toán (dầm và tải trọng giả tạo)	239
§7. Phương pháp vạn năng	242
§8. Sơ đồ thuật toán chương trình BK45 và cách sử dụng chương trình	247
§9. Trượt thuần túy và cách tính toán thực hành các mối ghép	249
§10. Các ví dụ áp dụng	262
Chương 9. KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP	271
§1. Nguyên tắc tính toán kết cấu chịu lực phức tạp	271
§2. Tính dầm chịu uốn ngang phẳng	277
§3. Ví dụ minh họa	279
§4. Tính kết cấu chủ yếu chịu uốn và xoắn đồng thời	286
§5. Ví dụ minh họa	290
§6. Tính lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn chịu kéo hoặc nén	297

§7. Đường trung hòa và lỗi mặt cắt	305
§8. Các ví dụ minh họa	311
Chương 10. CÁC NGUYÊN LÝ VÀ CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT TRONG SỨC BỀN VẬT LIỆU	315
I. CÁC NGUYÊN LÝ TỔNG QUÁT	315
§1. Nguyên lý độc lập tác dụng	315
§2. Nguyên lý Sainte – Venant	315
§3. Nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học	316
§4. Năng lượng biến dạng và năng lượng bù	317
§5. Khái niệm về biến phân và phiếm hàm	319
§6. Nguyên lý công khả dĩ của Lagrange đối với chất điểm	321
§7. Nguyên lý công khả dĩ của Poisson – Lagrange đối với hệ đàn hồi	322
§8. Cách tính chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính bằng phương pháp Maxwell – Mohr – Верещагин	326
§9. Nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với vật thể đàn hồi ba chiều. Phương trình biến phân của Lagrange	332
§10. Nguyên lý năng lượng bù của Castigliano	336
§11. Phương pháp Rayleigh – Ritz	337
§12. Phương pháp Bubnov – Galoorkin	345
§13. Phương pháp bình phương tối thiểu	350
II. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT TRONG HỆ ĐÀN HỒI	353
§14. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực	353
§15. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị	354
§16. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị	355
§17. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị	356
§18. Định lý Castighano. Định lý Lagrange	357
§19. Định lý Menabrea về sự cực tiểu của thế năng	359

Chương 11. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH HỆ SIÊU TĨNH	363
I. Phương pháp lực	363
§1. Sự hình thành hệ siêu tĩnh	367
§2. Thực chất của phương pháp lực. Hệ phương trình chính tắc đối với hệ chịu tải trọng	367
§3. Tính hệ siêu tĩnh chịu nhiệt độ thay đổi	374
§4. Tính hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức	376
§5. Sử dụng tính đối xứng khi tính hệ bằng phương pháp lực	379
II. Phương pháp chuyển vị	383
§6. Thực chất của phương pháp chuyển vị	383
§7. Phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị	387
§8. Cách xác định các phần tử trong ma trận K và R_p bằng phương pháp tĩnh	390
Chương 12. ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐÀN HỒI	403
§1. Khái niệm về hiện tượng ổn định	403
§2. Bài toán uốn dọc	405
§3. Giới hạn áp dụng công thức Ôle. Công thức kinh nghiệm của Yaxinsky	408
§4. Công thức Ôle trong miền đàn – dẻo	410
§5. Phương pháp thực hành tính thanh chịu uốn dọc	411
Chương 13. CƠ SỞ TÍNH TOÁN VỎ MỎNG KHÔNG MÔMEN	417
§1. Khái niệm về lý thuyết có và không mômen	417
§2. Tính toán vỏ mỏng tròn xoay theo lý thuyết không mômen	421
§3. Hiệu ứng biên trong vỏ trụ	427
Chương 14. TÍNH TOÁN THANH CONG	435
§1. Khái niệm chung	435
§2. Thanh cong chịu kéo và nén	436
§3. Thanh cong chịu uốn thuần túy	438
§4. Vị trí trục trung hòa	440

§5. Ứng suất trong thanh chịu uốn và kéo (nén) đồng thời	443
Chương 15. ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN	447
§1. Khái niệm về sự phá hủy do mỏi và nguyên nhân của nó	447
§2. Chu trình ứng suất và giới hạn mỏi	449
§3. Biểu đồ giới hạn mỏi	452
§4. Cách tính độ bền mỏi	455
§5. Ví dụ ứng dụng	458
Chương 16. ĐỘNG LỰC HỌC ĐỘ BỀN	465
I. HỆ MỘT BẬC TỰ DO	465
§1. Dao động tự do	466
§2. Dao động cưỡng bức	473
II. HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO	477
§3. Dao động tự do - Phương pháp ma trận độ mềm và phương pháp ma trận độ cứng	478
§4. Dao động cưỡng bức – Phương pháp ma trận độ mềm và phương pháp ma trận độ cứng	488
§5. Các ví dụ minh họa	493
III. DAO ĐỘNG HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO	498
§6. Dao động tự do	498
§7. Dao động cưỡng bức	501
IV. HỆ CHỊU TẢI TRỌNG VA CHẠM	502
§8. Phương pháp gần đúng trọng va chạm	503
§9. Khái niệm về lý thuyết sóng va chạm	510
§10. Các ví dụ áp dụng	512
Chương 17. TÍNH TOÁN KẾT CẤU NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI	521
§1. Những khái niệm cơ bản	521
§2. Uốn thuần túy dẻo làm bằng vật liệu đàn hồi dẻo lý tưởng	522
§3. Phân tích đàn dẻo lý tưởng dẻo chịu uốn ngang	527

§4.	Phân tích đàn hồi dẻo lý tưởng thanh mặt cắt tròn chịu xoắn	534
§5.	Nghiên cứu khả năng chịu tải của kết cấu chịu lực phức tạp làm bằng vật liệu cứng dẻo lý tưởng	536
§6.	Phương pháp cân bằng giới hạn	550
§7.	Tính ống dày trong và ngoài giới hạn đàn hồi	558
	Phụ lục	569
	Tài liệu tham khảo	580



Sách cùng tác giả

1. **LÝ THUYẾT DÈO VÀ TỪ BIẾN**
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1997
2. **CƠ SỞ CƠ HỌC ỨNG DỤNG**
NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI - 2002
3. **SỨC BỀN VẬT LIỆU, TẬP 1 VÀ TẬP 2**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2001
TÁI BẢN 2003
4. **LÝ THUYẾT DÈO ỨNG DỤNG**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2003
5. **BÀI TẬP SỨC BỀN VẬT LIỆU**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2004
6. **CƠ ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2005
TÁI BẢN 2007
7. **CƠ HỌC KẾT CẤU**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2005
8. **TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN**
MÔN "SỨC BỀN VẬT LIỆU", TẬP 1
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2006
9. **TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN**
MÔN "SỨC BỀN VẬT LIỆU", TẬP 2
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2007
10. **SỨC BỀN VẬT LIỆU - TOÀN TẬP**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2008

Xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc.

2 0 8 0 8 5

Sức bền vật liệu toàn tập



2105090000045

136,000

Giá: 136 000đ