TẠP CHÍ KHOA HỌC
Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Số 16 (6/2019) tr.25 - 30

HỘI TỤ THEO DUNG LƯỢNG C_{n-1} TRONG LỚP $\mathcal{F}(\Omega)$

Nguyễn Văn Phú

Trường Đại học Điện lực

Tóm tắt: *Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh định lý hội tụ theo dung lượng* C_{n-1} *trong lớp* $\mathcal{F}(\Omega)$ *Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng nếu dãy hàm* u_j *trong lớp* $\mathcal{F}(\Omega)$ *hội tụ theo dung lượng* C_{n-1} *đến hàm u thoả mãn* $u_j, u \geq v \in \mathcal{F}(\Omega)$ *thì ta có* $\varphi(dd^c u_j)^n$ *hội tụ yếu đến* $\varphi(dd^c u)^n$ *theo nghĩa yếu của độ đo với mọi hàm* $\varphi \lfloor PSH \cap L^{\infty}(\Omega)$.

Từ khóa: *Hàm đa điều hòa dưới, toán tử Monge- Ampere phức, miền siêu lồi, lớp hàm* $\mathcal{F}(\Omega)$, *hội tụ theo dung lượng*

1. Giới thiệu

Hàm đa điều hòa dưới là lớp hàm quan trọng trong lý thuyết đa thế vị. Hai bài toán cơ bản của lý thuyết đa thế vị là bài toán về sự tồn tại của toán tử Monge - Ampere và giải phương trình Monge - Ampere. E. Bedford và B. Taylor trong [1, 2]) đã chỉ ra sự tồn tại của toán tử Monge - Ampere trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương. Tiếp đó, U. Cegrell mở rộng đến các lớp hàm không bị chặn địa phương mà trên đó toán tử Monge-Ampere vẫn xác định (xem [3, 4]). Trong quá trình giải phương trình Monge-Ampere có một bài toán được các nhà toán học quan tâm đó là mối liên hệ giữa sự hội tụ theo dung lượng và sự hội tụ theo độ đo. Bài toán về sự hội tụ theo dung lượng trên lớp các hàm đa điều hoà dưới bị chặn địa phương được nghiên cứu bởi Y. Xing. Trong Định lý 2.1 của [10] Y. Xing chứng minh được rằng trên các lớp hàm đa điều hoà dưới bị chặn đều địa phương nếu dãy hàm u_j hội tụ theo dung lượng C_{n-1} đến hàm u thì ta có $\varphi(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến $\varphi(dd^c u)^n$ theo nghĩa yếu của độ đo với mọi hàm $\varphi \lfloor PSH \cap L^{\infty}(\Omega)$. Việc mở rộng kết quả của Y. Xing tới lớp các hàm đa điều hoà dưới không bị chặn được nhiều nhà toán học nghiên cứu như U. Cegrell, P. H. Hiep,... (xem [6], [7], [8], [9]....). Trong [6], U. Cegrell đã chứng minh được rằng nếu dãy hàm u_j trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ hội tụ theo dung lượng C_n đến hàm u thỏa mãn $u_j, u \geq v \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì ta có $(dd^c u_j)^n$ hội tụ theo nghĩa yếu của độ đo đến $(dd^c u)^n$. Tiếp theo, trong [7], U. Cegrell đã mở rộng kết quả trong [6] đến trường hợp hội tụ theo dung lượng C_{n-1}. Trong [8], [9], P. H. Hiep đã chứng minh được rằng nếu dãy hàm u_j trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ hội tụ theo dung lượng C_n đến hàm u thoả mãn $u_j, u \geq v \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì ta có $\varphi(dd^c u_j)^n$ hội tụ

Ngày nhận bài: 28/01/2019 Ngày nhận đăng: 16/04/2019.
Liên lạc: Nguyễn Văn Phú, e-mail: phunv@epu.edu.vn

yếu đến $\varphi(dd^c u)^n$ theo nghĩa yếu của độ đo với mọi hàm $\varphi \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả của P.H. Hiep đến trường hợp hội tụ theo dung lượng C_{n-1}

Bài báo được bố cục như sau: Trong mục 2, chúng tôi nhắc lại về lớp hàm đa điều hòa dưới được đưa ra gần đây bởi U. Cegrell. Tiếp sau đó chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về sự hội tụ theo C_n và C_{n-1} dung lượng. Trong mục 3, chúng tôi trình bày kết quả chính của bài báo.

2. Một số khái niệm

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại khái niệm hàm đa điều hòa dưới như sau.

Định nghĩa 2.1. Cho X là không gian tôpô. Hàm $u: X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên X nếu với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, tập:

$$X_\alpha = \{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở trong X. Hàm $v: X \to (-\infty, +\infty]$ gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu $-v$ nửa liên tục trên trên X.

Định nghĩa 2.2. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u: X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là điều hòa dưới trên Ω nếu nó nửa liên tục trên trên Ω và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω nghĩa là với mọi $\omega \in \Omega$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $0 \le r < \delta$ ta có:

$$u(\omega) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt.$$

Kí hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là $SH(\Omega)$.

Định nghĩa 2.3. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Một hàm $u: \Omega \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là hàm đa điều hòa dưới trên Ω nếu nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) u nửa liên tục trên trên Ω;

(2i) Với mọi đường thẳng phức $\ell \cap \Omega \neq \varnothing$, hạn chế của u lên mọi thành phần liên thông của $\ell \cap \Omega$ là một hàm điều hòa dưới. Ở đây $\ell = \left\{a + \lambda b : a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}\right\}$.

Tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên Ω kí hiệu là $PSH(\Omega)$.

Định nghĩa 2.4. Cho tập mở $\Omega \in \mathbb{C}^n$. Khi đó Ω được gọi là miền siêu lồi nếu Ω là tập mở, bị chặn, liên thông và tồn tại một hàm đa điều hòa dưới, âm, liên tục, vét cạn u trên Ω, nghĩa là:

$$\Omega_c = \left\{z \in \Omega : u(z) < c\right\} \subset\subset \Omega, \forall c < 0.$$

Dễ kiểm tra rằng mọi hình cầu trong $\mathbb{C}^n$ là một miền siêu lồi. Ta sẽ đưa ra một ví dụ về miền không siêu lồi là tam giác Hartogs:

$$D := \left\{(z, w) \in C^2 : |z| < |w| < 1\right\}.$$

Thật vậy, giả sử phản chứng rằng D là một miền siêu lồi. Khi đó, theo định nghĩa tồn tại một hàm đa điều hoà dưới, âm, liên tục, vét cạn u trên D và thoả mãn với mọi $(\xi, \eta) \in \partial D$ ta có:

$$\lim_{(z,w)\to(\eta,\eta)} u(z,w) = 0.$$

Ta đặt:

$$u_0(w) = u(0,w).$$

Khi đó, u_0 là hàm đa điều hoà dưới âm trên miền:

$$\Delta = \left\{ w \in C : 0 < |w| < 1 \right\}.$$

Vì $(0,0) \in \partial D$ và

$$\lim_{C \ni w \to 0} u_0(w) = \lim_{(0,w)\to(0,0)} u(0,w) = 0.$$

Do đó, theo định lý khử kì dị chúng ta có thể mở rộng u_0 tới một hàm đa điều hoà dưới trên miền:

$$\Delta' = \left\{ w \in C : |w| < 1 \right\}$$

bằng cách đặt $u_0(0) = 0$. Theo nguyên lý cực đại, ta có $u_0 \equiv 0$, điều này vô lý. Do đó, D là một miền không siêu lồi.

Trong bài báo này, ta luôn giả thiết Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ nếu không có giải thích gì thêm.

Bây giờ ta giả sử Ω là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$. Ta nhắc lại lớp hàm được đưa ra bởi U. Cegrell trong [3] và [4].

$$\mathcal{E}_0(\Omega) = \{\varphi \in PSH^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \lim_{z\to\partial\Omega} \varphi(z) = 0, \int_\Omega (dd^c\varphi)^n < \infty\}.$$

$$\mathcal{F}(\Omega) = \left\{ \varphi \in PSH(\Omega) : \exists \varphi_j \in E_0(\Omega), \varphi_j \downarrow \varphi \text{ } trên\ \Omega\ sao\ cho\ \sup_j \int \left(dd^c\varphi_j\right)^n < \infty \right\}$$

Tiếp theo, ta nhắc lại khái niệm về sự hội tụ theo dung lượng:

Định nghĩa 2.5. Với mọi tập Borel E trong Ω, dung lượng C_n và C_{n-1} của tập E được xác định như sau:

$$C_n(E) = C_n(E,\Omega) = \sup\left\{ \int_E (dd^c\varphi)^n : \varphi \in PSH(\Omega), -1 \le \varphi \le 0 \right\}.$$

$$C_{n-1}(E) = C_{n-1}(E,\Omega) = sup\left\{ \int_E (dd^c\varphi)^n \wedge dd^c|z|^2, 0 < \varphi < 1 \right\}$$

Dãy hàm $u_j \in PSH^-(\Omega)$ được gọi là hội tụ theo dung lượng C_n đến hàm u nếu

$$C_n(K \cap \{|u_j - u| > \delta\}) \to 0 \text{ khi } j \to \infty \text{ với } \forall K \subset\subset \Omega, \forall \delta > 0.$$

Dãy hàm $u_j \in PSH^-(\Omega)$ được gọi là hội tụ theo dung lượng C_{n-1} đến hàm u nếu

$$C_{n-1}(K \cap |u_j - u| > \delta) \to 0 \text{ khi } j \to \infty \text{ với } \forall K \subset\subset \Omega, \forall \delta > 0.$$

Từ định nghĩa trên chúng ta có nhận xét sau:

i) Nếu u_j hội tụ đến hàm u theo dung lượng C_n thì u_j hội tụ đến hàm u theo nghĩa độ đo.

ii) Theo Định lí Dini và tính tựa liên tục của các hàm đa điều hoà dưới ta có nếu dãy hàm đa điều hoà dưới u_j đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm tới hàm $u \in PSH(\Omega)$ khi $j \to \infty$ thì ta có u_j hội tụ đến hàm u theo dung lượng C_n.

iii) Nếu dãy hàm $u_j \in PSH^-(\Omega)$ được gọi là hội tụ theo dung lượng C_n đến hàm u thì nó cũng hội tụ theo dung lượng C_{n-1} đến hàm u. Thật vậy, với mọi $K \subset\subset \Omega$ và mọi $0 < \varphi < 1$ ta có $0 < \varphi + |z|^2 < M(\Omega)$ trên K, ở đó $M(\Omega)$ chỉ phụ thuộc vào đường kính của Ω. Ta có:

$$\int_K \left(dd^c(\varphi + |z|^2)\right)^n = (M(\Omega))^n \int_K \left(dd^c\left(\frac{\varphi + |z|^2}{M(\Omega)}\right)\right)^n \leq (M(\Omega))^n C_n(K).$$

Mặt khác, ta có:

$$\left(dd^c\varphi + dd|z|^2)\right)^n = \left(dd^c\varphi\right)^n + n\left(dd^c\varphi\right)^{n-1} \wedge dd|z|^2 + \ldots \quad n\left(dd^c\varphi\right)^{n-1} \wedge dd|z|^2.$$

Như vậy, ta có: $C_{n-1}(K) \leq A(\Omega)C_n(K)$.

3. Định lí hội tụ theo dung lượng trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$

Trong [7], U. Cegrell đã chứng minh được rằng nếu dãy hàm u_j trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ hội tụ theo dung lượng C_{n-1} đến hàm u với điều kiện $u_j \geq u_0 \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì chúng ta có $(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c u)^n$ khi $j \to \infty$. Trong phần này chúng tôi trình bày một kết quả là mở rộng của kết quả trên.

Định lý 3.1. *Nếu dãy hàm u_j trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ hội tụ theo dung lượng C_{n-1} đến hàm u thoả mãn $u_j, u \geq v \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì ta có $\varphi(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến $\varphi(dd^c u)^n$ theo nghĩa yếu của độ đo với mọi hàm $\varphi \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$.*

Chứng minh. Lấy $f \in C_0^\infty(\Omega), f \quad 0$, chúng ta cần chứng minh:

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f\varphi(dd^c u_j)^n = \int_\Omega f\varphi(dd^c u)^n.$$

Giả sử $\varphi(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến độ đo μ. Theo Định lý 2.1 trong [4] ta lấy dãy hàm $\varphi_k \in E_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\varphi_k \nearrow \varphi$. Từ giả thuyết u_j hội tụ theo dung lượng C_{n-1} đến hàm u và theo Định lý 1.1 trong [7] chúng ta có $(dd^c u_j)^n$ hội tụ đến $(dd^c u)^n$ khi $j \to \infty$ theo nghĩa yếu.

Do đó, chúng ta có:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega f\varphi(dd^c u_j)^n \le \limsup_{k\to\infty}\left(\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f\varphi_k(dd^c u_j)^n\right) = \limsup_{k\to\infty}\left(\int_\Omega f\varphi_k(dd^c u)^n\right) = \int_\Omega f\varphi(dd^c u)^n.$$

Như vậy, $\mu \le \varphi(dd^c u)^n$.

Mặt khác, từ chứng minh của Định lý 1.1 trong [6] chúng ta có:

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega h(dd^c u_j)^n = \int_\Omega h(dd^c u)^n, \forall h \in E_0(\Omega).$$

Do đó, $\int_\Omega \varphi(dd^c u)^n = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(dd^c u_j)^n = \int_\Omega d\mu$.

Từ đó, chúng ta có $\mu = \varphi(dd^c u)^n$.

Hệ quả 3.2. *Nếu dãy hàm u_j trong lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ hội tụ theo dung lượng C_{n-1} đến hàm u thoả mãn $u_j, u \ge v \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì ta có $h(\varphi)(dd^c u_j)^n$ hội tụ đến $h(\varphi)(dd^c u)^n$ theo nghĩa yếu của độ đo với mọi hàm $\varphi \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$, $h \in C(\mathbb{R})$.*

Trước khi chứng minh Hệ quả 3.2, chúng ta nhắc lại một kết quả bổ trợ trong Bổ đề 3.3 dưới đây. Nội dung của Bổ đề 3.3 chính là Mệnh đề 2.4 trong [9].

Bổ đề 3.3.

Đặt: $\delta PSH \cap L^\infty(\Omega) = \left\{\varphi - \psi : \varphi, \psi \in PSH \cap L^\infty(\Omega)\right\}$.

Khi đó, nếu $\varphi, \psi \in \delta PSH \cap L^\infty(\Omega)$ *thì* $\varphi\psi \in \delta PSH \cap L^\infty(\Omega)$.

Chứng minh Hệ quả 3.2.

Lấy $f \in C_0^\infty(\Omega), f \quad 0$, chúng ta cần chứng minh:

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega fh(\varphi)\left[(dd^c u_j)^n - (dd^c u)^n\right] = 0.$$

Đặt $A = \sup\left\{\varphi(z) : z \in \Omega\right\}$. Xấp xỉ hàm liên tục h bằng dãy các đa thức P_j thoả mãn:

$$\lim_{j\to\infty}\sup\left\{\left|P_j(x) - h(x)\right| : x \in [-A; A]\right\} = 0.$$

Theo Bổ đề 3.3 ta có $P_j(\varphi) \in \delta PSH \cap L^\infty(\Omega)$. Do đó, theo Định lý 3.1 chúng ta có:

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega fP_j(\varphi)\left[(dd^c u_j)^n - (dd^c u)^n\right] = 0.$$

Từ đó, chúng ta có điều phải chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] E. Bedford and B. A.Taylor, (1982), A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math, 149 no. 1-2, 1-40.

[2] E. Bedford and B. A.Taylor, (1987), Fine topology, Silov boundary, and (dd^c), J. Funct. Anal, 72 (2) 225-251.

[3] U. Cegrell, (1998), Pluricomplex energy, Acta Math, 180 187-217.

[4] U. Cegrell, (2004), The general definition of the complex Monge-Ampere operator, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 54 159-179.

[5] U. Cegrell, (1978), Delta-plurisubharmonic functions, Math. Scand. 43 343-352.

[6] U. Cegrell, (2001), Convergence in Capacity, Newton Intistute preprint NI01046-NPD(http://www.arxiv.org/).

[7] U. Cegrell, (2012), Convergence in Capacity, Canad. Math. Bull. Vol. 55 (2), 242-248.

[8] P. H. Hiep, (2008), Convergence in Capacity, Ann. Polon. Math. 93 91-99.

[9] P. H. Hiep, (2010), Convergence in Capacity and applications, Math. Scand. 107 90-102.

[10] Y. Xing, (2008), Convergence in capacity, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 58, 5 1839-1861.

CONVERGENCE IN C_{n-1} - CAPACITY IN $\mathcal{F}(\Omega)$

Nguyen Van Phu

Electric Power University

Abstract: *In this article, we study the theorem of convergence in C_{n-1}- capacity for functions in $\mathcal{F}(\Omega)$. Namely, we prove that if u_j is the sequence of functions in $\mathcal{F}(\Omega)$ converges to u in C_{n-1}- capacity and $u_j, u \geq v \in \mathcal{F}(\Omega)$ then $\varphi(dd^c u_j)^n$ converges to $\varphi(dd^c u)^n$ in the weak sense of measure.*

Keywords: *Plurisubharmonic functions, the complex Monge-Ampere operator, hyperconvex domain, a class of functions in $\mathcal{F}(\Omega)$, convergence in capacity.*