TẠP CHÍ KHOA HỌC
Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Số 14 (4/2019) tr.1-9

KHÁI NIỆM M-DUNG TÍCH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Đoàn Thị Chuyên, Vũ Tiến Thành
Trường Đại học Tây Bắc

Tóm tắt: *Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chứng minh một số tính chất cơ bản của m-dung tích, sau đó chúng tôi ứng dụng các kết quả về m-dung tích để đưa ra một số đánh giá cho năng lượng có trọng cho lớp hàm* $\mathcal{E}_0^m(\Omega)$. *Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra và chứng minh một nguyên lý so sánh cho lớp hàm* $\mathcal{F}_m(\Omega)$.

Từ khóa: *m-subharmonic functions, hàm đa điều hòa dưới,m-dung tích, toán tử Monge-Ampere phức, toán tử m-Hessian phức.*

1. Giới thiệu

Việc nghiên cứu toán tử Monge-Ampere phức của lớp hàm đa điều hòa dưới trên miền siêu lồi bị chặn $\Omega \in \mathbb{C}^n$ là một trong những chủ đề được quan tâm nhất trong nghiên cứu lý thuyết thế vị phức. Cho đến nay, nhiều tác giả đã nghiên cứu và phát triển vấn đề này như U. Cegrell, J. P. Demailly, V.Guedj, A.Zeriahi, S. Benelkourchi, L. M. Hai, P. H. Hiep… Tiếp theo đó, các tác giả nói trên cũng mở rộng việc nghiên cứu toán tử Monge-Ampere phức có trọng, từ đó đạt được những kết quả quan trọng về năng lượng có trọng cho một số lớp hàm đa điều hòa dưới trong các tài liệu [2], [3], [5] và [7]. Gần đây, trong [4], [6] và [9], các tác giả đã đưa ra lớp hàm mới, tổng quát hơn các lớp hàm đa điều hòa dưới đó là lớp hàm *m*-điều hòa dưới. Tương ứng với việc nghiên cứu toán tử Monge-Ampere trên lớp hàm đa điều hòa dưới, người ta nghiên cứu toán tử *m*-Hessian trên lớp hàm *m*-điều hòa dưới, nói trên. Những kết quả đáng quan tâm đầu tiên thuộc về các nghiên cứu của Z. Blocki trong [4] vào năm 2005 và L. H. Chinh trong [6] năm 2012. Tiếp theo đó, trong [9],... Hung đã đưa ra hai lớp hàm có trọng hữu hạn $\mathcal{E}_{m,\chi}(\Omega)$ và $\mathcal{F}_{m,\chi}(\Omega)$ và chỉ ra sự xác định của toán tử *m*-Hessian trên chúng. Mặt khác, trong [6], tác giả đã đưa ra khái niệm *m*-dung tích và bước đầu nghiên cứu sử dụng *m*-dung tích vào nghiên cứu toán tử *m*-Hessian. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số chứng minh khác cho kết quả trong [10] về *m*-dung tích, sau đó chúng tôi ứng dụng các kết quả về *m*-dung tích để đưa ra một số đánh giá cho năng lượng có trọng cho lớp hàm $\mathcal{E}_0^m(\Omega)$. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra và chứng minh một nguyên lý so sánh cho lớp hàm $\mathcal{F}_m(\Omega)$.

2. Một số khái niệm

2.1. Hàm m-điều hòa dưới

Cho Ω là một miền *m*-siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, với mỗi hàm thực khả vi liên tục cấp hai $u \in C^2(\Omega)$, đạo hàm cấp hai tại điểm cố định $z_0 \in \Omega$.

Ngày nhận bài: 02/08/2018. Ngày nhận đăng: 23/10/2018
Liên lạc: Đoàn Thị Chuyên, e-mail: doanchuyenkt@gmail.com

$$dd^c u = \frac{i}{2}\sum_{j,k}^{n} u_{j,\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

là một dạng Hermite bậc hai. Sau khi áp dụng phép biến đổi Unita ta thu được dạng chéo

$$dd^c u = \frac{i}{2}[\lambda_1 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \cdots + \lambda_1 dz_n \wedge d\bar{z}_n],$$

ở đó $\lambda_1(u),\ldots,\lambda_n(u)$ là các giá trị riêng của ma trận Hermite thực $(u_{j,\bar{k}})$, tức là $\lambda(u) = (\lambda_1(u),\ldots,\lambda_n(u)) \in \mathbb{R}^n$. Rõ ràng, ta có $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = m!(n-m)! H_m(u)\beta^n, \forall 1 \le m \le n$ (2.1) ở đó $H_m(u) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} \lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_m}$ là Hessian cấp *m* của vector $\lambda(u) = (\lambda_1(u),\ldots,\lambda_n(u)) \in \mathbb{R}^n$. Vậy thì toán tử $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \forall 1 \le m \le n,$ đối với hàm khả vi liên tục cấp hai được thay thế bởi Hessian của vector $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Bây giờ, chúng tôi nhắc lại định nghĩa của lớp hàm *m*- điều hòa dưới như trong [4], [6]. Trước hết, cho $\mathbb{C}_{(1,1)}$ là không gian các (1,1)-dạng với hệ số hằng trong $\mathbb{C}$. Với mỗi $1 \le m \le n$, ta đặt:

$$\Gamma_m = \{\eta \in \mathbb{C}_{(1,1)} : \eta \wedge \beta^{n-1} \ge 0, \ldots, \eta^m \wedge \beta^{n-m} \ge 0\}.$$

Định nghĩa 2.1. Cho u là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega \in \mathbb{C}^n$, u gọi là hàm m-điều hòa dưới nếu với mọi $\eta_1;\ldots;\eta_{m-1}$ trong Γ_m ta có:

$$dd^c u \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \ge 0,$$

theo nghĩa dòng. Ký hiệu $SH_m(\Omega)$ là tập các hàm m -điều hòa dưới trên Ω và $SH_m^-(\Omega)$ là tập các hàm m -điều hòa dưới âm trên Ω.

Với $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ và $1 \le m \le n$ ta đặt:

$$S_m(\lambda) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} \lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_m}$$

và

$$\Gamma_m = \{S_1 \ge 0\} \cap \{S_2 \ge 0\} \cap \cdots \cap \{S_m \ge 0\}.$$

Giả sử $\mathcal{H}$ ký hiệu là không gian vector (trên $\mathbb{R}$) các ma trận Hermite cấp $n \times n.$ Với $A \in \mathcal{H},$ ta đặt $\lambda(A) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ là các giá trị riêng của $A.$ Đặt:

$$\widetilde{S}_m(A) = S_m(\lambda(A)).$$

Như trong [8], ta đặt:

$$\widetilde{\Gamma}_m = \{A \in \mathcal{H} : \lambda(A) \in \Gamma_m\} = \{\widetilde{S}_1 \ge 0\} \cap \cdots \cap \{\widetilde{S}_m \ge 0\}.$$

Định nghĩa 2.2. Giả sử $u_1,\ldots,u_p \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega).$ Khi đó, toán tử *m*-Hessian $H_m(u_1,\ldots,u_p)$ được xác định bởi:

$$dd^c u_p \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m} = dd^c(u_p dd^c u_{p-1} \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m}).$$

Chú ý rằng, theo Định lý 2.1 trong [1] thì $H_m(u_1,\ldots,u_p)$ là một dòng dương đóng song bậc $(n-m+p, n-m+p)$ và toán tử này liên tục dưới dãy giảm các hàm *m*-điều hòa dưới bị chặn địa phương. Do đó, với $p = m,\ dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}$ là một độ đo Borel. Đặc biệt, khi $u = u_1 = \cdots = u_m \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ thì độ đo Borel:

$$H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m},$$

được gọi là *m*-Hessian phức của hàm *m*-điều hòa dưới *u*.

2.2. Các lớp Cegrell

Tiếp theo, dựa theo [6], chúng tôi nhắc lại các lớp hàm $\mathcal{E}_0^m(\Omega)$ và $\mathcal{F}^m(\Omega)$ như sau:

$$\mathcal{E}_0^m = \mathcal{E}_0^m(\Omega) = \{u \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \lim_{z\to\partial\Omega} u(z) = 0, \int_\Omega H_m(u) < +\infty\},$$

$$\mathcal{F}^m = \mathcal{F}^m(\Omega) = \{u \in SH_m^-(\Omega) : \exists u_j \in \mathbb{C}_m^0, u_j \searrow u, \sup \int_\Omega H_m(u_j) < +\infty\}.$$

ở đó $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ là Hessian của *u.*

Dựa theo [9], chúng tôi định nghĩa các lớp sau. Cho $\chi : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ là hàm tăng và $1 \le m \le n$. Đặt

$$\mathcal{F}_\chi^m = \{u \in PSH^-(\Omega) : \exists \{u_j\} \subset \mathcal{E}_0,\ u_j \searrow u : \sup_j e_\chi^m(u_j) = \sup_j \int_\Omega -\chi(u_j)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} < +\infty\}.$$

$$\mathcal{E}_\chi^m = \{u \in PSH^-(\Omega) : \forall\ K \Subset \Omega, \exists v \in \mathcal{F}_\chi^m, v = u \text{ trong } K\}.$$

Chú ý rằng, như trong [6] và [9] thì $\mathcal{F}_\chi^m(\Omega) \subset \mathcal{F}^m(\Omega)$. Do đó, từ [9] nếu $u \in \mathcal{F}_\chi^m(\Omega)$, thì toán tử Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ được xác định như một độ đo Radon. Vì vậy, tích phân:

$$\int_\Omega -\chi(u)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \text{ được hiểu theo nghĩa tích phân Lebesgue.}$$

2.3. Khái niệm m-dung tích

Định nghĩa 2.3. Giả sử $E \subset \Omega$ là Borel. Khi đó,*m*-dung tích của tập *E,* ký hiệu là $C_m(E)$ và được xác định bởi:

$$C_m(E) = \sup\left\{\int_E (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} : u \in SH_m(\Omega), -1 \le u \le 0\right\}.$$

3. Một số ứng dụng của *m*-dung tích

Trong mục này, trước hết chúng tôi đưa ra một đánh giá cho năng lượng có trọng của một lớp hàm*m*-điều hòa dưới. Trước hết, chúng tôi chứng minh kết quả tổng quát hơn trong [2] cho lớp hàm $SH_m(\Omega)$ và $\mathcal{E}_0^m(\Omega)$.

Mệnh đề 3.1. *Cho* $u, v \in SH_m(\Omega)$. *Khi đó:*

$$1_{\{u>v\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u>v\}}(dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Chứng minh. Đặt $u_j = \max\{u, -j\}, v_j = \max\{v, -j\}$. Khi đó $u_j, v_j \in PSH^-(\Omega) \cap L_{loc}^\infty$, từ đó theo [4], do $\lim_{z\to\partial}(u_j(z) - v_{j+1}(z)) = 0$ ta có

$$1_{\{u>v\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u>v\}}(dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Mặt khác, $\{u > v\} \subset \{u_j > v_{j+1}\}$ bởi vì nếu $u > v, u_j = \max\{u, -j\}, v_{j+1} = \max\{v, -j-1\}$ thì $u_j = \max\{u, -j\} > v_{j+1} = \max\{v, -j-1\}$. Từ đó ta có:

$$1_{\{u>v\}}1_{\{u>-j\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$$
$$= 1_{\{u>v\}}1_{\{u>-j\}}(dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m} 1_{\{u>v\}}1_{\{\max\{u,v\}>-j\}}(dd^c \max(u,v,-j))^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Sử dụng lý luận như trong [2] ta được $1_{\{u>-j\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ hội tụ mạnh theo độ đo Borel tới độ đo $\mu_u = 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$.

Nhưng do $1_{\{u>v\}}1_{\{u>-\infty\}} = 1_{\{u>v\}}$ nên $1_{\{u>v\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u>v\}}(dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}$.

Từ mệnh đề trên, ta thu được kết quả quan trọng sau:

Định lý 3.2. *Cho* $u, v \in SH_m(\Omega)$. *Khi đó*

$$\int_{\{u>v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_{\{u>v\}} (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Chứng minh. Trước ta chứng minh

$$\int_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \geq \int_\Omega (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.1}$$

Thật vậy, với mọi $h \in C_o^\infty(\Omega), h = -1$ trên giá của $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ ta đặt $\omega = \max\{u, v\}$ và theo công thức tích phân từng phần:

$$\int_\Omega -h(dd^c\omega)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega -\omega dd^c h \wedge (dd^c\omega)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} \leq \int_\Omega -u dd^c h \wedge (dd^c\omega)^{m-1} \wedge \beta^{n-m}$$
$$= \int_\Omega -h dd^c u \wedge (dd^c\omega)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} = \ldots = \int_\Omega -h(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Cho $h \to -1$ ta được (3.1).

Áp dụng Mệnh đề 3.1 ta được $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}$ trên $\{u > v\}$. Từ đó suy ra:

$$\int_\Omega (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m} = \int_{\{u>v\}} (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m} + \int_{\{u\leq v\}} (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}$$
$$\leq \int_{\{u>v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + \int_{\{u\leq v\}} (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Vậy từ (3.1) ta được:

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{u\leq v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.2}$$

Từ đó thay v bởi $v - \varepsilon$ trong (3.2) ta có:

$$\int_{\{u<v-\varepsilon\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{u\leq v-\varepsilon\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{u<v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ ta được:

$$\int\limits_{\{u<v\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \le \int\limits_{\{u<v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Tiếp theo, chúng ta có kết quả sau đây về m-dung tích của hàm trong lớp $\mathcal{E}_0^m(\Omega)$.

Định lý 3.3. *(i) Với mọi* $u \in \mathcal{E}_0^m$ *và* $t \ge 0$ *ta có* $\int\limits_{\{u\le -t\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \le t^m C_m(u \le -t)$.

(ii) Với mọi $u \in \mathcal{E}_0^m$ *và* $t \ge 0$ *ta có* $C_m(u \le -t) \le \dfrac{1}{t^m} \int\limits_{\{u\le -t\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$.

Chứng minh. (i) Do $\max\{u,-t\} = u$ trên $\{u \ge -t\}$ và $u \in \mathcal{E}_0^m$ nên $\lim\limits_{z\to\partial\Omega} u(z) = 0$.

Mặt khác $\partial\Omega \subset \{u \ge -t\}, \forall t > 0$ nên:

$$\int\limits_{\Omega} (dd^c \max(u,-t))^m \wedge \beta^{n-m} = \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Thật vậy, ta có thể coi u là liên tục. Khi đó, chọn $\Omega' \Subset \Omega$ sao cho $u = -t$ trên $\partial\Omega'$. Vậy với mọi ε đủ nhỏ, $u = -t$ gần $\partial\Omega'$, và nếu $\chi \in C_o^\infty(\Omega')$ với $\chi = 1$ gần $\{u \ne -t\}$ vì vậy $\{u \ne -t\}$ là tập mở nên $dd^c\chi = 0$ trên $\{u \ne -t\}$ và

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \chi(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} &= \int\limits_{\{u\ne -t\}} \chi(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + \int\limits_{\{u=-t\}} \chi(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int\limits_{\{u\ne -t\}} u dd^c\chi \wedge (dd^c u)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} + \int\limits_{\{u=-t\}} u dd^c\chi \wedge (dd^c u)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int\limits_{\{u=-t\}} u dd^c\chi \wedge (dd^c u)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} = \int\limits_{\{u=-t\}} \max(u,-t) dd^c\chi \wedge (dd^c u)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int\limits_{\{u=-t\}} \chi dd^c \max(u,-t) \wedge (dd^c u)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} = \ldots = \int\limits_{\{u=-t\}} \chi \wedge (dd^c \max(u,-t)u)^{m-1} \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Vậy $\int_{\Omega'} \chi(dd^c \max(u,-t))^m \wedge \beta^{n-m} = \int_{\Omega'} \chi(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$.

Áp dụng Mệnh đề 3.1, ta có $1_{\{u>v\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u>v\}}(dd^c \max(u,-t))^m \wedge \beta^{n-m}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{u\le -t\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} &= \int\limits_{\{u\le -t\}} (dd^c \max(u,-t))^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= t^m \int\limits_{\{u<-t\}} (dd^c \max(\frac{u}{t},-1))^m \wedge \beta^{n-m} \le t^m C_m(u<-t).
\end{aligned}$$

(ii) Ta có:

$$\begin{aligned}
C_m(u<-2t) &= \sup\{\int\limits_{\{u<-2t\}} (dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} : \varphi \in SH_m(\Omega), -1 \le \varphi \le 0\} \\
&= \sup\{\int_{\{\frac{u}{t}<-2\}} (dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} : \varphi \in SH_m(\Omega), -1 \le \varphi \le 0\} \\
&\le \sup\{\int_{\{\frac{u}{t}<\varphi-1\}} (dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} : \varphi \in SH_m(\Omega), -1 \le \varphi \le 0\}.
\end{aligned}$$

Khi đó, áp dụng Định lý 3.2 ta được:

$$\int_{\{\frac{u}{t}<\varphi-1\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}\le\int_{\{\frac{u}{t}<\varphi-1\}}(dd^c\frac{u}{t})^m\wedge\beta^{n-m}.$$

và

$$\begin{aligned}C_m(u<-2t)&\le\sup\{\int_{\{\frac{u}{t}<\varphi-1\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}:\varphi\in SH_m(\Omega),-1\le\varphi\le0\}\\&\le\sup\{\int_{\{\frac{u}{t}<\varphi-1\}}(dd^c\frac{u}{t})^m\wedge\beta^{n-m}:\varphi\in SH_m(\Omega),-1\le\varphi\le0\}\\&\le\frac{1}{t^m}\int_{\{\frac{u}{t}<-1\}}(dd^c\frac{u}{t})^m\wedge\beta^{n-m}=\frac{1}{t^m}\int_{\{u<-t\}}(dd^cu)^m\wedge\beta^{n-m}.\end{aligned}$$

Vậy $t^mC_m(u<-2t)\le\int\limits_{\{u<-t\}}(dd^cu)^m\wedge\beta^{n-m}$.

Tiếp theo, sử dụng kết quả trên, chúng tôi đưa ra một đánh giá cho năng lượng có trọng của hàm thuộc lớp $\mathcal{E}_0^m$.

Định lý 3.4. *Giả sử* $\chi:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^-$ *là hàm tăng sao cho* $\chi(2t)\ge a\chi(t),a>0.$ *Khi đó* $\forall\varphi\in\mathcal{E}_0^m$

$$e_\chi^m(\varphi)\sim\int_0^\infty\chi'(-t)t^mC_m(\varphi<-t)dt.$$

Chứng minh. Thật vậy, theo Định lý 3.3

$$t^mC_m(\varphi<-2t)\le\int\limits_{\{\varphi<-t\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}\le t^mC_m(\varphi<-t).$$

Chú ý rằng:

$$e_\chi^m(\varphi)=\int\limits_\Omega-\chi(\varphi)(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}=\int_0^\infty\chi'(-t)\int\limits_{\{\varphi<-t\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt.$$

Khi đó:

$$\int_0^\infty\chi'(-t)t^mC_m(\varphi<-2t)\le e_\chi^m(\varphi)\le\int_0^\infty\chi'(-t)t^mC_m(\varphi<-t).$$

Mặt khác:

$$\int_0^\infty\chi'(-t)\int\limits_{\{\varphi<-2t\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt=\frac{1}{2^{m+1}}\int_0^\infty\chi'(-\frac{t}{2})\int\limits_{\{\varphi<-t\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt.$$

Nhưng ta lại có:

$$\int_0^\infty-\chi(\frac{\varphi}{2})(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\chi'(-\frac{t}{2})\int\limits_{\{\varphi<-t\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt.$$

Do đó, từ giả thiết $\chi(2t)\geq a\chi(t), a>0$ ta được:

$$\int_0^\infty \chi'(-t)\int_{\{\varphi<-2t\}}(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt=\frac{1}{2^{m+1}}\int_0^\infty -\chi(\frac{\varphi}{2})(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt\geq\frac{1}{a2^m}\int_0^\infty -\chi(\varphi)(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}dt.$$

Suy ra:

$$\int_0^\infty \chi'(-t)t^mC_m(\varphi<-2t)\geq\frac{1}{a2^m}\int_0^\infty \chi'(-t)t^mC_m(\varphi<-t).$$

Vậy:

$$e_\chi^m(\varphi)\sim\int_0^\infty \chi'(-t)t^mC_m(\varphi<-t)dt.$$

Tiếp theo, dựa vào Mệnh đề 2.10 trong [6], chúng tôi có kết quả sau đây về *m*-dung tích, mở rộng các kết quả về dung tích trong [1] và [10].

Mệnh đề 3.5.

a) Nếu $E_1\subset E_2\subset\Omega_1\subset\Omega_2$ *thì* $C_m(E_1,\Omega_2)\leqslant C_m(E_2,\Omega_1)$;

b) $C_m(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)\leq\sum_{j=1}^\infty C_m(E_j)$;

c) Nếu $E\subset D\Subset\Omega_1\subset\Omega_2\Subset\mathbb{C}^n$ *thì* $C_m(E,\Omega_1)\leqslant C_{D,\Omega_1,\Omega_2}C_m(E,\Omega_2)$;

d) Nếu $E_j\nearrow E$ *thì* $C_m(E_j)\nearrow C_m(E)$.

Chứng minh. Đánh giá a), b) và d) dễ dàng suy ra từ định nghĩa của *m*-dung tích. Chúng ta chứng minh khẳng định c). Thật vậy, do ta có thể phủ D bởi hữu hạn các quả cầu chứa trong Ω_1 nên theo a) và b) ta có thể giả sử rằng $D=\mathbb{B}(z_0,r)$ và $\Omega_1=\mathbb{B}(z_0,R)$, ở đó $\mathbb{B}(z,r)$ là quả cầu tâm tại *z* bán kính *r*. Bây giờ lấy $u\in SH_m(\Omega_1)$ sao cho $-1\leqslant u\leqslant 0$. Đặt

$$\psi(z)=(R^2-r^2)^{-1}(|z-z_0|^2-R^2).$$

Khi đó $\psi\in SH_m(\mathbb{C}^n), \psi=0$ trên $\partial\Omega_1$ và $\psi\leqslant -1$ trên *D*. Đặt:

$$\tilde{u}=\begin{cases}\max\{u,\psi\} & \text{khi } z\in\Omega_1,\\ \psi & \text{khi } z\in\Omega_2\setminus\Omega_1\end{cases}$$

và $v=(1+c)^{-1}(\tilde{u}-c)$, với $c=\|\psi\|_{L^\infty(\Omega_2)}$. Khi đó ta có $v\in SH_m(\Omega_2), -1\leqslant v\leqslant 0$ và $H_m(v)=(1+c)^{-m}H_m(u)$ trên *D*. Do đó $C_m(E,\Omega_1)\leqslant(1+c)^mC_m(E_2,\Omega_2)$.

Cuối cùng, chúng ta có kết quả sau đây cho lớp hàm $\mathcal{F}^m(\Omega)$, tương tự như Mệnh đề 2.5 trong [6] cho hàm *m*-điều hòa dưới bị chặn triệt tiêu trên biên.

Định lý 3.6. *Giả sử* $u, v \in \mathcal{F}^m(\Omega)$ *với* $u \geq v$ *trên* Ω *và* $T = dd^c\varphi_1 \wedge \cdots \wedge dd^c\varphi_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$ *với* $\varphi_j \in \mathcal{E}_m(\Omega), \forall j = 1, \ldots, m-1$. *Khi đó ta có:*

$$\int_\Omega dd^c u \wedge T \leqslant \int_\Omega dd^c v \wedge T.$$

Chứng minh. Thật vậy, theo công thức Stokes và $u \geq v$ trên Ω, ta được:

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\varphi dd^c u \wedge T &= \int_\Omega -u dd^c \varphi \wedge T \\ &\leq \int_\Omega -v dd^c \varphi \wedge T \\ &= \int_\Omega -\varphi dd^c v \wedge T\end{aligned}$$

với mọi $\varphi \in \mathcal{E}_0^m(\Omega)$. Cho $\varphi \searrow -1$ ta được:

$$\int_\Omega dd^c u \wedge T \leq \int_\Omega dd^c v \wedge T.$$

Lời cảm ơn: *Bài báo được hoàn thành với sự tài trợ của Đề tài B2017-TTB-09.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] E. Bedford and B. A. Taylor (1982), *A new capacity for plurisubharmonic functions.* Acta Math, Vol.149, pp.1-40.

[2] S. Benelkourchi (2009), *Weighted Pluricomplex Energy*, Potential Analysis., 31(1), pp.1-20.

[3] S. Benelkourchi, V. Guedj and A. Zeriahi (2009), *Plurisubharmonic functions with weak singularities*, In: Proceedings from the Kiselmanfest, Uppsala University, Vastra Aros, pp. 57-74.

[4] Z. Blocki (2005), *Weak solutions to the complex Hessian equation*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 55(5), pp.1735-1756.

[5] U. Cegrell (2004), *The general definition of the complex Monge-Ampere operator*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble)., 54, pp.159-179.

[6] L. H. Chinh (2012), *On Cegrell's classes of m-subharmonic functions*, arXiv 1301.6502.

[7] V. Guedj and A. Zeriahi (2007), *The weighted Monge-Ampere energy of quasiplurisubharmonic functions*, J. Funct. Anal., 250(2), pp.442-482.

[8] L. Garding (1959), *An inequality for hyperbolic polynomials.* J. Math and Mec., Vol. 8, pp. 957-965.

[9] V. V. Hung (2016), *Local property of a class of m-subharmonic functions*, Vietnam Journal of Mathematics, 44(3), 603-621.

[10] V. V. Hung and N. V. Phu (2017), *Hessian measures on m-polar sets and applications to the complex Hessian equations*, Com. Var. and Elliptic Equations, 62(8), 1135-1164.

THE *M*-CAPACITY AND SOME APPLICATIONS

Doan Thi Chuyen, Vu Tien Thanh
Tay Bac University

Abstract: *In this article, we figure out some basic properties of m-capacity before applying the results of m-capacity to make several estimates for weighted energy in the class* $\mathcal{E}_0^m(\Omega)$. *Moreover, we also present and prove a principle of comparision in the class* $\mathcal{F}_m(\Omega)$.

Keywords: *m-subharmonic functions, plurisubharmonic functions, m-capacity, complex Monge-Ampere operator, complex m-Hessian operator.*