TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 16, Số 6 (2019): 29-37

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 16, No. 6 (2019): 29-37

ISSN: 1859-3100

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

VỀ ĐỒNG NHẤT THỨC NHÓM SUY RỘNG CỦA NHÓM TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT TRÊN VÀNH CHIA CÓ TÂM HỮU HẠN

Cao Minh Nam

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Tác giả liên hệ: Cao Minh Nam – Email: caominhnam.dhsp@gmail.com

Ngày nhận bài: 04-3-2019; ngày nhận bài sửa: 21-4-2019; ngày duyệt đăng: 05-6-2019

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả nổi tiếng của I. Z. Golubchik và A.V. Mikhalev cho đồng nhất thức nhóm suy rộng của nhóm tuyến tính tổng quát trên vành chia trong trường hợp tâm không nhất thiết vô hạn.

Từ khóa: vành chia, nhóm tuyến tính tổng quát, đồng nhất thức nhóm suy rộng.

1. Giới thiệu

Cho T là nhóm tự do sinh bởi k phần tử $\{x_i | 1 \le i \le k\}$ và G là một nhóm với tâm $Z(G) = \{x \in G | xy = yx \text{ với mọi } y \in G\}$. Kí hiệu $G * T$ là tích tự do của G và T. Một phần tử $w \not\equiv 1$ trong $G * T$ có dạng

$$w(x_1, x_2, ..., x_k) = a_1 x_{i_1}{}^{\varepsilon_1} a_2 x_{i_2}{}^{\varepsilon_2} ... a_m x_{i_m}{}^{\varepsilon_m} a_{m+1}$$

với $a_j \in G$, $\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$ và $i_j \in \{1, 2, ..., k\}$ được gọi là *đơn thức nhóm suy rộng* trên G. Số nguyên dương

$$l(w) = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + ... + |\varepsilon_m|$$

được gọi là *độ dài* của đơn thức nhóm suy rộng w. Không mất tính tổng quát, ta có thể biểu diễn sao cho các số mũ $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$. Trong trường hợp này thì độ dài $l(w) = m$.

Cho H là một nhóm con của G. Ta nói $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$ là *đồng nhất thức nhóm suy rộng* của H (hay H *thỏa đồng nhất thức nhóm suy rộng* $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$) nếu $w(h_1, h_2, ..., h_k) = 1$ với mọi $h_1, h_2, ..., h_k \in H$. Thêm vào đó, nếu tất cả hệ số $a_1, a_2, ..., a_{m+1}$ đều bằng 1 thì $w(x_1, x_2, ..., x_k)$ được gọi là *đồng nhất thức nhóm* của H. Đồng nhất thức nhóm suy rộng của nhóm tuyến tính có lẽ được nghiên cứu đầu tiên bởi (Amitsur, 1966). Cụ thể như sau. Cho D là vành chia có tâm F. Năm 1966, Amitsur đã chứng minh rằng nếu F vô hạn và nhóm nhân $D^* = D \setminus \{0\}$ thỏa một đồng nhất thức nhóm thì D giao hoán, tức là $D = F$. Golubchik và Mikhalev (1982) đã mở rộng kết quả của Amitsur lên nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(D)$ thỏa một đồng nhất thức nhóm suy rộng bằng cách chứng minh kết quả sau. Nếu F vô hạn và $\mathrm{GL}_n(D)$ thỏa đồng nhất thức nhóm suy rộng thì $n = 1$

và D giao hoán. Chebotar và Lee (2004) đã xét bài toán trên trong trường hợp tâm F hữu hạn: Giả sử D^* thỏa đồng nhất thức nhóm $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$ với $w(x_1, x_2, ...x_k) = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_m}^{\varepsilon_m}$. Nếu F chứa ít nhất $\frac{3l(w)}{2}$ phần tử thì D giao hoán. Gần đây nhất, Biên (2015), đã mở rộng các kết quả này khi xét trường hợp D^* thỏa một đồng nhất thức nhóm suy rộng với tâm không nhất thiết vô hạn. Cụ thể hơn, nếu D^* thỏa một đồng nhất thức nhóm suy rộng $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$ và F có nhiều hơn $l(w) + k$ phần tử thì D giao hoán.

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng nếu nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(D)$ thỏa đồng nhất thức nhóm suy rộng $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$ với D là vành chia có tâm F chứa ít nhất $2l(w) + 1$ phần tử thì D giao hoán và $n = 1$ (Định lí 2.7 trong bài báo này). Đây có thể xem là kết quả mở rộng của Định lí 2.6 trong bài báo (Biên, 2015) và mở rộng một phần của Định lí 1.2 trong bào báo (Kiani, Ramezan-Nassab, & Bien, 2016).

Kĩ thuật mà chúng tôi sử dụng trong bài báo này là dựa trên chứng minh gốc của (Golubchik & Mikhalev, 1982). Các kí hiệu chúng tôi dùng là thông thường. Nói riêng, một số kí hiệu dùng trong bài chẳng hạn như số phần tử của F được kí hiệu là $|F|$, trong khi đó,với không gian vectơ V trên D, vành $\mathrm{End}_D(V)$ là vành các tự đồng cấu của V và $\langle v_1, v_2, ..., v_m \rangle$ là không gian vectơ con của V sinh bởi các phần tử $v_1, v_2, ..., v_m \in V$. Với ma trận $A \in \mathrm{M}_n(D)$, kí hiệu A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A.

2. Đồng nhất thức nhóm suy rộng trên nhóm tuyến tính tổng quát

Trong trường hợp $D = K$ là trường và V là không gian vectơ n chiều trên D, ta có $\mathrm{M}_n(K) \cong \mathrm{End}_D(V)$. Một cách tổng quát, ta cũng có kết quả tương tự cho vành chia. Để tiện theo dõi, chúng tôi trình bày chứng minh ở đây.

Mệnh đề 2.1.

Cho D là vành chia và $\mathrm{M}_n(D)$ là vành các ma trận vuông cấp n trên D. Khi đó, với mọi không gian vectơ phải n chiều V trên D, ta có $\mathrm{M}_n(D) \cong \mathrm{End}_D(V)$.

Chứng minh. Gọi $\{e_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ là cơ sở của không gian vectơ V. Xét ánh xạ

$$\varphi : \mathrm{End}_D(V) \longrightarrow \mathrm{M}_n(D)$$

với $\varphi(f) = M_f$, trong đó M_f là ma trận xác định bởi ánh xạ tuyến tính f qua cơ sở $\{e_i\}$. Dễ thấy, ánh xạ được xác định như trên là một đẳng cấu vành. Thật vậy, hiển nhiên φ bảo toàn phép cộng và bảo toàn đơn vị. Do đó, ta cần chỉ ra φ bảo toàn phép nhân. Giả sử $\varphi(f) = (x_{ij})^T$, $\varphi(g) = (y_{ij})^T$ và $\varphi(gf) = (d_{ij})$. Đặt $\varphi(f)\varphi(g) = (c_{ij})$. Khi đó,

$c_{ij} = \sum_{1\le k\le n} y_{ki}x_{jk}$ với mọi $i, j \in \{1,2,...,n\}$. Mặt khác, do $gf(e_j) = g(e_1x_{j1} + e_2x_{j2} + ... + e_nx_{jn})$ nên $d_{ij} = \sum_{1\le k\le n} y_{ki}x_{jk}$. Do đó $d_{ij} = c_{ij}$. Từ đây, $\varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f)$. Hiển nhiên φ là song ánh. Từ những điều kiện trên ta kết luận được rằng $\mathrm{End}_D(D) \cong \mathrm{M}_n(D)$.

Từ Mệnh đề 2.1, ta thu được kết quả sau

$\mathrm{GL}_n(D) \cong \mathrm{Aut}_D(V)$

Tiếp theo, ta có một kết quả về sự mở rộng của không gian vectơ một chiều thỏa điều kiện không chứa một số lượng vectơ nhất định.

Mệnh đề 2.2.

Cho D là vành chia tâm F và V là một không gian vectơ phải trên D có số chiều là n. Giả sử $v_1, v_2, ...v_m$ là m phần tử nằm trong V. Nếu $|F| \ge m+1$ và V chứa một không gian vectơ con một chiều L thỏa $v_j \notin L$ với mọi $j \in \{1,2,...,m\}$ thì tồn tại không gian con $n-1$ chiều L_{n-1} của V và L_{n-1} chứa L sao cho $v_j \notin L_{n-1}$ với mọi $j \in \{1,2,...,m\}$.

Chứng minh. Vì $|F| \ge m+1$, nên ta có thể cố định tập hợp I gồm $m+1$ phần tử đôi một khác nhau trong F. Trong trường hợp $n = 2$, mệnh đề cần chứng minh hiển nhiên đúng. Do đó, ta xét trường hợp $n \ge 3$. Với $k \in \mathbb{N}$ thỏa $1 \le k \le n-2$, giả sử L_k là không gian con k chiều thỏa $v_j \notin L_k$ với mọi $j = \overline{1,m}$. Ta chứng minh tồn tại không gian con $k+1$ chiều L_{k+1} chứa L_k và $v_j \notin L_{k+1}$ với mọi $j = \overline{1,m}$. Thật vậy, do L_k là không gian k chiều, không mất tính tổng quát, nên ta có thể xem $L_k = \langle u_1, u_2, ..., u_k \rangle$, trong đó $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong V. Vì $k \le n-2$ nên có thể bổ sung u_{k+1}, u_{k+2} để hệ $\{u_1, u_2, ..., u_{k+1}, u_{k+2}\}$ độc lập tuyến tính. Ta khẳng định tồn tại không gian con một chiều K_1 thỏa

$K_1 \not\subseteq \langle v_j, u_1, u_2, ..., u_k \rangle$, với mọi $j = \overline{1,m}$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tức là, với mọi không gian con một chiều K_1 tồn tại $j \in \{1,2,...,m\}$ sao cho $K_1 \subseteq \langle v_j, u_1, u_2, ..., u_k \rangle$. Khi đó, với $m+1$ phần tử trong $\{u_{k+1} + u_{k+2}\lambda \mid \lambda \in I\}$, tồn tại $j \in \{1,2,...,m\}$ và các phần tử λ, λ' khác nhau trong I sao cho

$u_{k+1} + u_{k+2}\lambda, u_{k+1} + u_{k+2}\lambda' \in \langle v_j, u_1, u_2, ..., u_k \rangle$.

Điều này vô lí bởi hệ $\{u_1, ..., u_k, u_{k+1} + u_{k+2}\lambda, u_{k+1} + u_{k+2}\lambda'\}$ độc lập tuyến tính. Từ đây suy ra tồn tại không gian con một chiều K_1 thỏa $K_1 \not\subseteq \langle v_j, u_1, u_2, ..., u_k \rangle$, với mọi $j = \overline{1,m}$. Bằng cách đặt lại tên, ta có thể xem $K_1 = \langle u_{k+1} \rangle$. Cuối cùng ta có $v_j \notin \langle u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1} \rangle$, với mọi $j \in \{1,2,...,m\}$. Đặt $L_{k+1} = \langle u_1, u_2, ..., u_{k+1} \rangle$. Khi đó, L_{k+1} là không gian con thỏa $L_{k+1} \supseteq L_k$ và $v_j \notin L_{k+1}$, với mọi $j \in \{1,2,...,m\}$.

Hơn nữa, do L là không gian con một chiều của V thỏa $v_j \notin L$, với mọi $j \in \{1,2,...,m\}$, nên tồn tại các không gian con $L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ thỏa

$L = L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_{n-1}$,

$v_j \notin L_k$, với mọi $j \in \{1,2,...,m\}$ và mọi $k \in \{1,2,...,n-1\}$.

Tiếp theo là một kết quả về tính hữu hạn nghiệm của một đa thức trên vành R (Bien, 2015, Bổ đề 2.2).

Mệnh đề 2.3.

Cho R là vành, F là một trường nằm trong tâm $Z(R)$ của R. Nếu $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m \in R[x]$ là một đa thức không tầm thường trên R thì $p(x)$ có tối đa m nghiệm trên F.

Chứng minh. Xem bài báo (Bien, 2015).

Do Mệnh đề 2.1. đúng với mọi không gian vectơ phải V nên kể từ đây ta luôn xem $V = M_{n\times 1}(D)$ với phép cộng và phép nhân ngoài được định nghĩa một cách thông thường, nghĩa là:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} x_1d \\ x_2d \\ \vdots \\ x_nd \end{pmatrix},$$

với mọi $d \in D$ và mọi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ trong V. Kí hiệu $[v_1\ v_2\ ...\ v_n]$ là ma trận vuông cấp n có được bằng cách ghép các vectơ $v_1, v_2, ..., v_n$ theo cột.

Như vậy, theo Mệnh đề 2.1., tích của một ma trận m trong $\mathrm{M}_n(D)$ và phần tử $v \in V$ là ảnh của ánh xạ tuyến tính m và được xác định như tích của hai ma trận m và v. Các bổ đề dưới đây là mở rộng các kết quả theo (Mikhalev & Golubchik, 1982) cho vành chia có tâm không nhất thiết vô hạn.

Bổ đề 2.4.

Cho D *là vành chia tâm* F *và* $P = Z(\mathrm{M}_n(D))$. *Giả sử* $c_1, c_2, ..., c_m$ *là các phần tử thuộc* $\mathrm{M}_n(D) \setminus P$. *Nếu* $|F| \geq 2m+1$, *thì tồn tại phần tử* v *trong* V *sao cho* $c_j v \notin \langle v \rangle$ *với mọi* $j \in \{1, 2, ..., m\}$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề trên bằng phép quy nạp theo m. Trong trường hợp $m = 1$, ta giả sử với bất kì $v \in V$ thì $c_1 v = vd$, với d là phần tử nào đó của D. Từ đây suy ra $c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} d$, trong đó $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Đặt $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ là các vectơ đơn vị trong V. Vì thế $c_1 e_i = e_i d_i$, trong đó $d_i \in D$ với mọi $i = 1, 2, ..., m$ hay

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hơn nữa, do $e_1 d_1 + e_2 d_2 = c_1 e_1 + c_1 e_2 = c_1(e_1 + e_2) = (e_1 + e_2) d_3$ nên $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_3 \\ d_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Điều này cho ta $d_1 = d_2 = d_3$. Tiếp theo, với mỗi $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \setminus \{0\}$, ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $x_1 = 0$ thì $c_1(v + e_1) = c_1 v + c_1 e_1$. Điều này tương đương với

$(v+e_1)d''' = vd'' + e_1 d$ hay $\begin{pmatrix} (x_1+1)d \\ x_2 d'' \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 d' + d \\ x_2 d' \\ \vdots \\ x_n d' \end{pmatrix}$. Mặt khác, vì $x_1 = 0$ nên tồn tại $i \in \{2,3,...,n\}$ sao cho $x_i \neq 0$. Do đó $d'' = d' = d$ và $c_1 v = vd$.

2. Nếu $x_1 \neq 0$ thì $c_1(v+e_2) = c_1 v + c_1 e_2$. Điều này tương đương với $(v+e_2)d'' = vd' + e_2 d$ hay $\begin{pmatrix} x_1 d'' \\ (x_2+1)d'' \\ \vdots \\ x_n d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 d' \\ x_2 d' + d \\ \vdots \\ x_n d' \end{pmatrix}$. Mặt khác, vì $x_1 \neq 0$ nên $d'' = d' = d$.

Do đó $c_1 v = vd$. Kết hợp hai trường hợp trên ta suy ra tồn tại $d \in D$ sao cho với mọi $v \in V$ thì $c_1 v = vd$. Khi đó, với bất kì $c \in \mathrm{M}_n(D)$ và bất kì $v \in V$, thì $c(c_1 v) = c(vd) = (cv)d = c_1(cv)$. Điều này có nghĩa là $(cc_1)v = (c_1 c)v$. Từ đây suy ra $cc_1 = c\left[c_1 e_1 \;\; c_1 e_2 \;\; \cdots \;\; c_1 e_n\right] = \left[c(c_1 e_1) \;\; c(c_1 e_2) \;\; \cdots \;\; c(c_1 e_n)\right]$. Hơn nữa, do

$\left[c_1(ce_1) \;\; c_1(ce_2) \;\; \cdots \;\; c_1(ce_n)\right] = c_1\left[ce_1 \;\; ce_2 \;\; \cdots \;\; ce_n\right]$

Nên $cc_1 = c_1 c$ với mọi $c \in \mathrm{M}_n(D)$. Vì thế $c_1 \in P$. Mâu thuẫn.

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ sao cho $c_1 v_1 \in \langle v_1 \rangle$ và $c_j v_2 \notin \langle v_2 \rangle$ với mọi $i \in \{2,3,...,m\}$. Bổ đề cần chứng minh hiển nhiên đúng trong trường hợp $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$. Ngược lại, ta giả sử với mỗi $\lambda \in F$, tồn tại $j \in \{1,2,...,m\}$ thỏa $c_j(v_1 + v_2\lambda) \in \langle v_1 + v_2\lambda \rangle$. Xét tập hợp $I = \{\lambda_t \,|\, t = \overline{1, 2m+1}\}$ các phần tử đôi một khác nhau trong F. Theo đó tồn tại $j \in \{1,2,...,m\}$ thỏa $c_j(v_1 + v_2\lambda_{t_\alpha}) = \left(v_1 + v_2\lambda_{t_\alpha}\right)d_\alpha$, với $\alpha \in \{1,2,3\}$. Khi đó, với mỗi $\alpha \in \{1,2,3\}$, ta có $c_i \begin{pmatrix} x_1 + y_1\lambda_{t_\alpha} \\ x_2 + y_2\lambda_{t_\alpha} \\ \vdots \\ x_n + y_n\lambda_{t_\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1\lambda_{t_\alpha} \\ x_2 + y_2\lambda_{t_\alpha} \\ \vdots \\ x_n + y_n\lambda_{t_\alpha} \end{pmatrix} d_\alpha$. Đặt $w_1 = v_1 + v_2\lambda_{t_1}$ và $w_2 = v_1 + v_2\lambda_{t_2}$.

Suy ra $v_1 = w_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} + w_2(-\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1})$ và $v_2 = w_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} + w_2(-(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1})$. Hiển nhiên, vì v_1, v_2 độc lập tuyến tính nên w_1, w_2 cũng độc lập tuyến tính. Đặt $w_3 = w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2$. Do w_1, w_2 độc lập tuyến tính nên $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ và $\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 = \lambda_3$. Vì thế $\alpha_2 = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \in F \setminus \{0\}$ và $\alpha_1 = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \in F \setminus \{0\}$. Dễ thấy rằng $w_3 = w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2$, $v_1 = w_1\alpha_3 + w_2\alpha_4$ và $v_2 = w_1\alpha_5 + w_2\alpha_6$, trong đó $\alpha_i \in F$ và $\alpha_i \neq 0$. Ta thấy, $c_j w_3 = w_3 d_3 = w_1\alpha_1 d_3 + w_2\alpha_2 d_3$. Hơn nữa, $c_j w_3 = c_j(w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2) = c_j w_1\alpha_1 + c_j w_2\alpha_2$. Do w_1, w_2 độc lập tuyến tính và $\alpha_i \neq 0$ với mọi $i \in \overline{1,6}$, nên $d_1 = d_2 = d_3 = d$. Từ đó suy ra

$$c_j v_1 = c_j(w_1\alpha_3 + w_2\alpha_4) = (w_1\alpha_3 + w_2\alpha_4)d = v_1 d$$

và tương tự $c_j v_2 = v_2 d$. Trong trường hợp $j = 1$, do $c_1 v_1 = v_1 d$ nên mâu thuẫn với $c_1 v_1 \in \langle v_1 \rangle$. Ngược lại, trong trường hợp $j \neq 1$, vì $c_j v_2 = v_2 d$ nên mâu thuẫn với $c_j v_2 \notin \langle v_2 \rangle$. Từ đây, ta kết luận được rằng tồn tại $\lambda \in F$ thỏa $c_j(v_1 + v_2\lambda) \notin \langle v_1 + v_2\lambda \rangle$ với mọi j và do đó bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 2.5.

Cho D là vành chia tâm F và $c_1, c_2, ..., c_m$ là các phần tử trong $\mathrm{M}_n(D) \setminus P$. Nếu $|F| \geq 2m+1$ thì tồn tại $y \in \mathrm{M}_n(D)$ sao cho $yc_1yc_2y...yc_my \neq 0$ và $y^2 = 0$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.4, tồn tại $v_1 \in V \setminus \{0\}$ thỏa $c_j v_1 \notin \langle v_1 \rangle$ với mọi $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Theo Mệnh đề 2.2, tồn tại các phần tử $v_i \in V$, $i \in \overline{2, n-1}$ sao cho hệ $\{v_i | 1 \leq i \leq n-1\}$ độc lập tuyến tính và thỏa $\langle v_1, v_2, ..., v_{n-1} \rangle$ không chứa các phần tử $c_j v_1$ với $j \in \overline{1, m}$. Do V là không gian vectơ phải n chiều trên D, nên tồn tại v_n để hệ $\{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ là cơ sở của V. Đặt $v_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$ và $m = [v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_n] \in \mathrm{M}_n(D)$, nghĩa là, m được lập bằng cách ghép các vectơ v_i theo cột. Ta kí hiệu m^{-1} là ma trận khả nghịch của ma trận m. Đặt

$$y = m \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} m^{-1}.$$

Dễ thấy, $yv_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ với mọi $i \in \overline{1, n-1}$, $yv_n = v_1$ và $y^2 = 0$. Do đó, ta suy ra $(yc_1yc_2y...yc_my)v_n = v_1 d_1 d_2 ... d_n \neq 0$. Vậy $yc_1yc_2y...yc_my \neq 0$.

Bổ đề 2.6.

Cho D là vành chia tâm F và $\mathrm{GL}_n(D)$ là nhóm tuyến tính tổng quát trên D, với $n \geq 2$. Giả sử

$$w(x_1, x_2, ..., x_k) = a_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} a_2 x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... a_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} a_{m+1}$$

là đơn thức nhóm suy rộng trên $GL_n(D)$. Nếu $GL_n(D)$ thỏa đồng nhất thức $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$ và $|F| \geq l(w) + 1$ thì $\mathrm{GL}_n(D)$ cũng thỏa đồng nhất thức

$$c_1 x^{\varepsilon_1} c_2 x^{\varepsilon_2} ... c_m x^{\varepsilon_m} c_{m+1} = 1,$$

trong đó $c_j \in \mathrm{GL}_n(D) \setminus P$ với mọi $j \in \{1, 2, ..., m\}$.

Chứng minh. Do $l(w) = m$ và $|F| \geq 2l(w) + 1$ nên ta gọi $\Lambda = \{\lambda_t \,|\, -k \leq t \leq k\}$ là các phần tử đôi một khác nhau trong F và $J = \{j \,|\, a_j \notin P\}$. Theo Bổ đề 2.5, tồn tại $y \in \mathrm{M}_n(D)$ sao cho $y^2 = 0$ và $ya_j y \neq 0, ycy \neq 0$ với bất kì $j \in J$ và phần tử c nào đó trong $\mathrm{M}_n(D) \setminus P$. Đặt $s_j = \varepsilon_j i_j$ và $x_{i_j} = (1 - \lambda_{i_j} y)x(1 + \lambda_{-i_j} y)$ với mọi $j \in \overline{1, m}$, $-k \leq i_j \leq k$ và $x \in \mathrm{GL}_n(D)$. Dễ thấy, $x_{i_j} \in \mathrm{GL}_n(D)$. Vì thế $\mathrm{GL}_n(D)$ cũng thỏa đồng nhất thức $c_1 x^{\varepsilon_1} c_2 x^{\varepsilon_2} ... c_m x^{\varepsilon_m} c_{m+1} = 1$, trong đó $c_1 = a_1(1 - \lambda_{s_1} y), c_{m+1} = (1 + \lambda_{-s_{m+1}} y)a_{m+1}$ và $c_j = (1 + \lambda_{-s_{j-1}} y)a_j(1 - \lambda_{s_j} y)$ với mọi $j \notin \{1, m+1\}$. Nếu $s_{j-1} = -s_j$ thì $\varepsilon_{j-1} = -\varepsilon_j$ và $i_{j-1} = i_j$. Hơn nữa do $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$ là đồng nhất thức nhóm suy rộng trên $\mathrm{GL}_n(D)$ nên $a_j \notin P$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $c_j \notin P$. Thật vậy, nếu $a_j \notin P$ thì $yc_j y = y(1 + \lambda_{-s_{j-1}} y)a_j(1 - s_j y)y = ya_j y \neq 0$. Suy ra $c_j \notin P$. Ngược lại nếu $a_j \in P$ thì $\lambda_{-s_{j-1}} \neq \lambda_{s_j}$. Điều này dẫn đến

$$c_j = a_j(1 + \lambda_{-s_{j-1}} y)(1 - \lambda_{s_j} y) = a_j(\lambda_{-s_{j-1}} - \lambda_{s_j})y.$$

Dễ thấy $y \in P$ nếu $a_j \in P$. Từ đây suy ra $ycy = 0$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện $ycy \neq 0$. Do đó $c_j \notin P$.

Từ các bổ đề trên ta có được kết quả chính của bài báo.

Định lí 2.7.

Cho D là vành chia tâm F và $\mathrm{GL}_n(D)$ là nhóm tuyến tính tổng quát trên D. Giả sử $w(x_1, x_2, ..., x_k) = a_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} a_2 x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... a_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} a_{m+1}$ là đơn thức nhóm suy rộng trên $\mathrm{GL}_n(D)$. Nếu $\mathrm{GL}_n(D)$ thỏa đồng nhất thức $w(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$ và $|F| \geq 2l(w) + 1$ thì $n = 1$ và $D = F$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.6, nhóm $\mathrm{GL}_n(D)$ cũng thỏa đồng nhất thức $c_1 x^{\varepsilon_1} c_2 x^{\varepsilon_2} ... c_m x^{\varepsilon_m} c_{m+1} = 1$, trong đó $c_j \notin P$ với mọi $j \in \overline{1, m}$. Theo Bổ đề 2.5, tồn tại $y \in \mathrm{M}_n(D)$ sao cho $y^2 = 0$ và $yc_1 yc_2 y ... yc_m y \neq 0$. Đặt $x = (1 + \lambda y)$, trong đó $\lambda \in F$. Dễ thấy, $x \in \mathrm{GL}_n(D)$. Từ đây

$$c_1(1 + \lambda y)^{\varepsilon_1} c_2(1 + \lambda y)^{\varepsilon_2} ... c_m(1 + \lambda y)^{\varepsilon_m} c_{m+1} - 1 = 0,$$

Suy ra $b_0 + \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + ... + \lambda^m b_m = 1$, với mọi $\lambda \in F$. Hơn nữa, $yb_m y = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m) yc_1 y ... yc_{m+1} y \neq 0$. Mặt khác, do $|F| \geq 2m+1$ và theo Bổ đề 2.3, nên $b_0 = b_1 = ... = b_m = 0$. Mâu thuẫn với $b_m \neq 0$. Từ đây Định lí 2.7 đã được chứng minh.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Amitsur, S. A. (1966). Rational identities and applications to algebra and geometry. *J. Algebra, 3*, 304-359.

Bien, M. H. (2015). On some subgroups of D^* which satisfy a generalized group identity. *Bull. Korean. Math. Soc., 52*, 1353-1363.

Chebotar, M. A., & Lee, P. H. (2004). A note on group identities in division rings. *Proc. Edinb. Math. Soc., 47*, 557-560.

Kiani, D., Ramezan-Nassab, M., & Bien, M. H. (2016). Some skew linear groups satisfying generalized group identities. *Comm. Algebra*, 2362-2367.

Mikhalev, A. V., & Golubchik, I. Z. (1982). Generalized group identities in classical groups. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Inst. Steklov., 114*, 96-119.

Tomanov, G. M. (1982). Generalized group identities in linear groups. *Dokl. Akad. Nauk BSSR, 26*, 9-12.

ON GENERALIZED GROUP IDENTITIES OF GENERAL LINEAR GROUP OVER DIVISION RING WITH CENTER NOT NECESSARILY INFINITE

Cao Minh Nam

Ho Chi Minh City University of Education

[*] Corresponding author: Cao Minh Nam – Email: caominhnam.dhsp@gmail.com

Received: 04/3/2019; Revised: 21/4/2019; Accepted: 05/6/2019

ABSTRACT

This article extends a famous result of I. Z. Golubchik and A.V. Mikhalev for generalized group identities of general linear group over division ring with center not necessarily infinite.

Keywords: *division ring, general linear group, generalized group identities.*