

Phát triển lý thuyết dầm bậc cao dựa trên năng lượng biến dạng bù

■ TS. PHẠM VĂN PHÉ; ThS. ĐỖ THỊ HẰNG - Trường Đại học Giao thông vận tải

TÓM TẮT: Nghiên cứu phát triển một lý thuyết dầm bậc cao dựa trên nguyên lý năng lượng bù. Lý thuyết dầm này tính đến các ứng suất ở trạng thái ứng suất phẳng (bao gồm ứng suất pháp dọc trục, ứng suất pháp vuông góc trục và ứng suất tiếp). Các chuyển vị và ứng suất dựa trên lý thuyết này rất phù hợp với các kết quả dựa trên lời giải lý thuyết đàn hồi và phân tích phần tử hữu hạn bằng phần tử 3 chiều.

TỪ KHÓA: Năng lượng biến dạng bù, lý thuyết dầm bậc cao, trạng thái ứng suất phẳng, biến dạng

ABSTRACT: The study develops a higher order beam theory based on the principle of stationary complementary energy. The theory successfully captures transverse shear stresses and transverse and longitudinal normal stresses. The predicted displacements and stresses are shown to agree well with the theory of elasticity solution and 3D FEA analysis.

KEYWORDS: Complementary strain energy, higher order beam theory, plane stress state, higher deflection

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hầu hết các lý thuyết dầm hiện tại được phát triển dựa trên nguyên lý năng lượng biến dạng (phương pháp truyền thống) [1]. Tuy nhiên, có một số ít lý thuyết dầm được phát triển dựa trên nguyên lý năng lượng biến dạng bù [2]. Một so sánh giữa hai dòng lý thuyết được mô tả trong Hình 1.1. Nghiên cứu hiện tại sử dụng nguyên lý năng lượng biến dạng bù để phát triển một lý thuyết dầm biến dạng bậc cao. Trong khi phương pháp truyền thống dự đoán độ cứng của dầm lớn hơn giá trị chính xác (dẫn đến dự đoán chuyển vị nhỏ hơn kết quả chính xác), thì phương pháp nghiên cứu hiện tại dự đoán độ cứng dầm nhỏ hơn (dẫn đến dự đoán chuyển vị lớn hơn) và hội tụ tại lời giải đàn hồi khi có đủ số hạng bậc cao.



Hình 1.1: So sánh phương pháp nghiên cứu hiện tại và phương pháp truyền thống

2. THIẾT LẬP LÝ THUYẾT

Giả thiết trạng thái ứng suất của mỗi điểm trên dầm là trạng thái ứng suất phẳng bao gồm 3 thành phần σ_x , τ_{xy} và σ_y (Hình 2.1), trong đó $\sigma_x(y, z)$ là trường ứng suất pháp dọc trục và được giả thiết có dạng:

$$\sigma_x(y, z) = \sum_{n=1}^N \psi^{(n)} F_n(z) \quad (1)$$

Với $F_n(z)$ là các hàm ẩn số chưa biết của tọa độ dọc trục, y là tọa độ theo phương chiều cao mặt cắt dầm và n là một số nguyên dương (và là tổng số số hạng giả thiết). Trong Hình 2.2, $p_x(y, z)$ và $p_y(y, z)$ là các lực khối theo phương dọc và phương thẳng đứng.

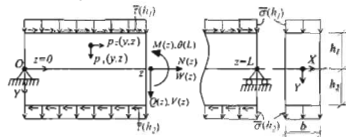


Hình 2.1: Trạng thái ứng suất phẳng

Từ phương trình (1), thay hàm $\sigma_x(y, z)$ vào các phương trình cân bằng của ứng suất:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= p_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= p_y \end{aligned} \quad (2)$$

Ta có thể thu được diễn giải của các hàm ứng suất $\sigma_x(y, z)$ và $\sigma_y(y, z)$ theo các ẩn số $F_i(z)$. Do các diễn giải này là phức tạp [3], nên để đơn giản hơn đây ta chỉ trình bày thiết lập công thức cho trường hợp đặc biệt giải đơn giản nhất ứng với hình chữ nhật khi $n = 3$ (Hình 2.2). Dầm chịu tải dọc của các ứng suất bề mặt $\bar{\sigma}(h_1) = \bar{\sigma}$ và $\bar{\tau}(h_1) = \bar{\sigma}(h_1) = \bar{\tau}(h_2)$.



Hình 2.2: Hình chiếu đứng và mặt cắt ngang dầm

Bằng việc áp các điều kiện biên về ứng suất ở mặt trên và dưới của dầm, diễn giải của ba thành phần ứng suất $\tau_x(y, z)$, $\sigma_y(y, z)$ và $\sigma_x(y, z)$ thu được như sau:

$$\begin{aligned} \tau_x(y, z) &= (-y + 4z^2/3)F_1'(z) + 6yz(F_1''(z) - v''(z))h^2 + 6Q(0)(h^2/4 - y^2)/h^2 \\ \sigma_y(y, z) &= (-h^2/6 + y^2/2 - z^2/h^2)F_1''(z) + 2(-3y/h + 4z^2/h^2)v''(z) \\ \sigma_x(y, z) &= (-12y^2/h^2)F_1(z) + 12y[yv(0) - zQ(0) + M(0)]/h^2 - (6yz^2/h^2)v''(z) \end{aligned} \quad (3a-c)$$

Trong đó: $N(0) = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x(x, 0) dx$, $Q(0) = \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xy}(x, 0) dx$ là lực dọc trục, lực cắt và mô-men uốn tại mặt cắt $z = 0$. Dựa trên mô hình vật liệu tuân theo định luật Hook, nghĩa là các biến dạng $\epsilon_x = (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E$, $\epsilon_y = (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E$, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, trong đó E , G và μ là mô-đun đàn hồi, mô-đun cắt và hệ số Poisson, năng lượng biến dạng bù của hệ được diễn giải theo hàm ẩn số $F_i(z)$ [3]. Sau đó, bằng việc áp dụng nguyên lý biến phân bậc nhất, ta thu được một phương trình tương tự như sau:

$$\frac{bh^3}{630E} F_1''''(z) + \left(\frac{4\mu bh^3}{105E} - \frac{2bh^3}{105G} \right) F_1'''(z) + \frac{4bh}{5E} F_1''(z) - \frac{4}{5E} N(0) = 0 \quad (4)$$

Trong đó: b và h - Bề rộng và chiều cao của mặt cắt ngang dầm. Các điều kiện biên của bài toán có được như sau:

$$\begin{aligned} F_1(0) &= \left(\frac{6h^3}{430E} F_1''(0) - \frac{2bh^3}{105E} F_1'''(0) \right) = 0, \quad F_1'(0) = \left(\frac{6h^3}{430E} F_1''(0) - \frac{2bh^3}{105E} F_1'''(0) \right) = 0 \\ F_1(L) &= \left(\frac{2bh^3}{105E} F_1''(L) - \frac{6h^3}{430E} F_1'''(L) \right) = 0, \quad F_1'(L) = \left(\frac{2bh^3}{105E} F_1''(L) - \frac{6h^3}{430E} F_1'''(L) \right) = 0 \\ F_1''(0) &= \left(\frac{M(0)}{bh^2} - \frac{6h^3}{430E} F_1''(0) - \frac{6h^3}{430E} F_1'''(0) \right) = 0 \\ F_1''(L) &= \left(\frac{M(L)}{bh^2} - \frac{6h^3}{430E} F_1''(L) - \frac{6h^3}{430E} F_1'''(L) \right) = 0 \\ F_1'''(0) &= \left(\frac{Q(0)}{bh} - \frac{6h^3}{430E} F_1'''(0) - \frac{6h^3}{430E} F_1''''(0) \right) = 0 \\ F_1'''(L) &= \left(\frac{Q(L)}{bh} - \frac{6h^3}{430E} F_1'''(L) - \frac{6h^3}{430E} F_1''''(L) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5a-g)$$

Ở đây: $W(z)$, $V(z)$, $\theta(z)$, $(z_0 = 0, L/2)$ là các chuyển vị theo phương dọc trục, phương thẳng đứng và góc xoay mặt cắt (Hình 2.2). Bộ qua lực dọc trong dầm bằng cách cho $N(0) = 0$ trong phương trình (4) và áp các điều kiện biên $\delta F_1(0) \neq 0$, $\delta F_1'(0) \neq 0$, $\delta F_1(L) = 0$, $\delta F_1'(L) \neq 0$, $\delta N(0) = 0$, $\delta Q(0) = 0$, $\delta M(0) = 0$ rồi giải ra được nghiệm $F_1(z)$ của phương trình (4) và 3 chuyển vị $W(L)$, $V(L)$, $\theta(L)$. Bằng việc thay các nội lực đã biết $Q(0) = -\sigma_b L/2$ và $M(0) = 0$, độ võng tại giữa nhịp $V(L/2)$ có thể thu được bằng cách lấy cận tích phân từ 0 tới $z = L/2$ trong phương trình (5f) trong khi góc xoay tại đầu dầm $\theta(L)$ có thể thu được bằng cách lấy tích phân phương trình (5f) trên cả chiều dài nhịp $z = L$ để thu được:

$$\theta(L) = \frac{\sigma_b L^3}{2E, h^3} + \frac{3\mu, \sigma_b L}{5E, h}, \quad V(L/2) = \frac{5\sigma_b L^4}{32E, h^3} + \frac{3\sigma_b L^4}{20hG} + \frac{3\mu, \sigma_b L^4}{20E, h} \quad (6a-b)$$

Lời giải dựa trên lý thuyết dầm Euler-Bernoulli chỉ

cho giá trị các chuyển vị nhỏ hơn là $\theta(L) = \sigma_b L^3 / 2E, h^3$ và $V(L/2) = 5\sigma_b L^4 / 32E, h^3$.

Từ phương trình (6b), thay thế $G = E/2(1 + \mu)$, độ võng ở giữa dầm được diễn giải lại là:

$$V(L/2) = 5\sigma_b L^4 / 32E, h^3 + 3\sigma_b L^4 / 10E, h + 9\mu, \sigma_b L^4 / 20E, h$$

Độ võng này cũng lớn hơn độ võng chính xác xác định được dựa trên lý thuyết đàn hồi là $V(L/2) = 5\sigma_b L^4 / 32E, h^3 + 3\sigma_b L^4 / 10E, h + 3\mu, \sigma_b L^4 / 16E, h$ [3, 4]. Lý thuyết dầm hiện tại cho kết quả chuyển vị lớn hơn kết quả chính xác.

Kết quả chuyển vị và ứng suất nêu trên là trường hợp $n = 3$ được lấy cho phương trình (1). Trường hợp $n \geq 4$, ta thực hiện cách làm tương tự. Phạm [3] đã xây dựng trường hợp tổng quát này.

3. THÍ DỤ TÍNH TOÁN

Xét một dầm giản đơn có $h = 1m$, $l/b = 100$, $L/h = 2$, $E = 200GPa$, $\bar{\sigma} = 100MPa$ và $\mu = 0.3$. Độ võng ở giữa dầm được trình bày trong Bảng 3.1. Các so sánh được thực hiện với lời giải của lý thuyết đàn hồi [4] và lý thuyết dầm Euler Bernoulli (EB). Lời giải dựa trên nghiên cứu hiện tại được thực hiện cho các giá trị $n = 3, 4, 5$ trong phương trình (1).

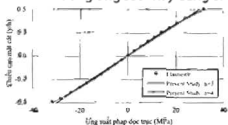
Kết quả thu được cho thấy: Độ võng dựa trên nghiên cứu hiện tại hơi tu về giá trị 1.96mm. Đây cũng là kết quả của lời giải của lý thuyết đàn hồi. Tuy nhiên, độ võng dựa trên lời giải EB dự đoán thấp nhất và thấp hơn 36.2% so với giá trị độ võng hội tụ. Do vậy, đối với dầm có tỷ số chiều dài nhịp/chiều cao dầm là ngắn thì lý thuyết dầm EB dự đoán kết quả chuyển vị thấp hơn chuyển vị thực tế. Trong khi nghiên cứu hiện tại cung cấp kết quả đúng như lời giải của lý thuyết đàn hồi.

Bảng 3.1. Độ võng ở giữa nhịp

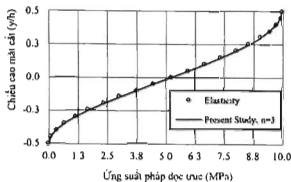
Lời giải	Độ võng (mm)	Chênh lệch (%) ^a	
Nghiên cứu hiện tại	$n=3$	1.98	1.0
	$n=4$	1.96	0.0
	$n=5$	1.96	0.0
Lý thuyết đàn hồi	1.96	0.0	
EB	1.25	36.2	

^a % Chênh lệch của một lời giải được so sánh với giá trị chuyển vị hội tụ (1.96mm)

Về ứng suất: Ứng suất pháp dọc trục trên mặt cắt giữa nhịp (Hình 3.1) dựa trên $n = 3$ của nghiên cứu hiện tại (Present study) có phân bố tuyến tính, giống với lời giải dựa trên lý thuyết dầm EB. Khi $n \geq 4$, phân bố ứng suất này của nghiên cứu hiện tại là hàm bậc 3, giống với lời giải của lý thuyết đàn hồi (Elasticity). Đối với ứng suất pháp thẳng đứng, lý thuyết dầm hiện tại và lời giải của lý thuyết đàn hồi là khớp nhau (Hình 3.2), trong khi lý thuyết dầm EB luôn cho trường ứng suất này bằng 0.



Hình 3.1: Phân bố ứng suất pháp dọc trục tại mặt cắt giữa nhịp



Hình 3.2: Phân bố ứng suất pháp thẳng đứng tại mặt cắt bất kỳ

4. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Nghiên cứu hiện tại đã phát triển thành công một lý thuyết dầm bậc cao có tính đến 3 thành phần ứng suất, bao gồm ứng suất pháp dọc trục, ứng suất pháp thẳng đứng và ứng suất tiếp. Lý thuyết dầm được phát triển dựa trên nguyên lý biến phân của năng lượng biến dạng bù. Các biến dạng, đồ võng tinh được từ lý thuyết này là lớn hơn hoặc bằng lời giải chính xác dựa trên lý thuyết đàn hồi. Lý thuyết dầm bậc cao này cũng có thể dự đoán chính xác phân bố ứng suất pháp dọc trục phi tuyến trên mặt cắt và có thể tính được ứng suất pháp theo phương thẳng đứng.

Dựa trên lý thuyết dầm bậc cao này, kiến nghị phát triển lý thuyết dầm bậc cao dành cho mặt cắt composite nhiều lớp nhằm dự báo chính xác, trong khi đảm bảo điều kiện cân bằng của ứng suất, phân bố ứng suất pháp thẳng đứng và ứng suất tiếp tại bề mặt tiếp xúc giữa các lớp vật liệu.

Tài liệu tham khảo

[1]. Jha, D., K., Kant, T. and Singh, R., K. (2013), *Stress analysis of transversely loaded functionally graded plates with a higher order shear and normal deformation theory*, J. of engineering mechanics, 139(12), 1663-1680.

[2]. Erkmén, R., E. and Mohareb, M. (2006), *Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects*, Journal of thin walled structures, 44(10), 1096-1108.

[3]. Pham, P. V (2018), *Analysis of wide flange steel beam adhesively-bonded GFRP plate*, Doctorate of Philosophy Thesis, University of Ottawa, Ottawa, ON, Canada.

[4]. Timoshenko, S. P. and Goodier, J., N. (1970), *Theory of elasticity* (McGraw-Hill, New York).

Ngày nhận bài: 3/4/2019

Ngày chấp nhận đăng: 19/4/2019

Người phản biện: TS. Nguyễn Xuân Tùng

TS. Bùi Thanh Quang