MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NHÓM CON GIAO HOÁN TỬ VÀ NHÓM THƯƠNG

Võ Văn Minh[1], Trần Văn Sự[2]

Tóm tắt: *Cho nhóm G, chúng ta ký hiệu nhóm con giao hoán tử của một nhóm G là* $G' = [G, G]$. *Trong bài báo này, chúng tôi cung cấp một số tính chất cơ bản của nhóm con giao hoán tử* G' *cùng với một số tính chất của nhóm thương* G/G'.

Từ khóa: *Nhóm con giao hoán tử; nhóm Abel; p-nhóm hữu hạn.*

1. Giới thiệu

Nhóm con giao hoán tử và nhóm thương có nhiều tính chất thú vị trong nghiên cứu lý thuyết nhóm, các nhóm con này có vai trò quan trọng trong việc biểu diễn *p*-nhóm, nghiên cứu các tính chất cơ bản của một nhóm lũy linh và ứng dụng trong biểu diễn xích, nghiên cứu tính khớp và tính chẻ trong xích chuẩn tắc, v.v... Để biểu diễn một *p*-nhóm hữu hạn với các nhóm con giao hoán tử cyclic, việc nghiên cứu các tính chất cơ bản của các nhóm giao hoán tử và nhóm thương là rất cần thiết. Năm 1977, R. Brauer [3] giới thiệu các nhóm xạ ảnh (hay nhóm phép chiếu) hữu hạn để biểu diễn một *p*-nhóm cho trước, với *p* là số nguyên tố. Năm 1978, đồng tác giả là R.S.Dark và M.L. Newell [5] đưa ra được các điều kiện cần và đủ của các giao hoán tử để thiết lập nên một nhóm con. Năm 1979, Y-Cheng [4] đã nghiên cứu các nhóm xạ ảnh (hay nhóm phép chiếu) dựa trên các nhóm con giao hoán tử cyclic.

Mục đích chính của chúng tôi trong bài báo này là xây dựng lại một vài tính chất cơ bản trong lý thuyết nhóm liên quan đến các nhóm con giao hoán tử cyclic, được ký hiệu bởi $G' = [G, G]$ với *G* là một nhóm được xác định trước và nhóm thương *G* trên một nhóm giao hoán tử $G' = [G, G]$, được ký hiệu bởi $G/[G, G]$ hay G/G'.

Cho *G* là một nhóm với phép toán nhân ".", được ký được bởi (*G*, .). Xét các phần tử tùy ý $x, y, z \in G$. Giao hoán tử của *x* và *y* được định nghĩa bởi

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Ta định nghĩa dạng mũ giữa *x* và *y* như sau

$$x^y = y^{-1}xy, \; y^x = x^{-1}yx.$$

Ở đây x^{-1}, y^{-1} ký hiệu thay cho dạng nghịch đảo của các phần tử *x* và *y* tương ứng và ký hiệu xy thay cho *x.y*

Tiếp theo, ta định nghĩa giao hoán tử cho 3 phần tử *x, y, z* được ký hiệu bởi [*x, y, z*] và được xác định như sau:

1. ThS., Trường Đại học Quảng Nam

2. TS., Trường Đại học Quảng Nam

$[x,y,z]=[[x,y],z]$.

Ta đặt

$G' = [G,G] = \langle\{[x,y] : x,\ y\in G\}\rangle$.

Khi đó, nhóm G' được gọi là nhóm con sinh bởi các giao hoán tử $[x, y]$.

Chú ý:

- Nếu $xy = yx$ ta nói x và y giao hoán được với nhau.

- Nếu X, Y là các tập con của G, ký hiệu $[X,Y]$ là nhóm con sinh bởi các giao hoán tử $[x, y]$, nghĩa là

$[X,Y]=\{[x,y]: x\in X, y\in Y\}$.

Hiển nhiên, ta luôn có được kết quả như sau:

$[X,Y]\leq G$.

Đặc biệt, $G' := [G,G]$ là một nhóm con hoán tử của G.

Gọi K, H là các nhóm con của G, ta luôn có các khẳng định sau là đúng:

(i). $[H,K]=[K,H]$.

(ii). $[H,K]\lhd\langle H,K\rangle$.

(iii). $K\lhd G$, G/K là nhóm abel nếu và chỉ nếu $G'\subseteq K$.

Trong bài báo này ta quy ước 1 chỉ ánh xạ đồng nhất và f^{-1}, x^{-1} tương ứng chỉ ánh xạ ngược và phần tử khả nghịch của ánh xạ f và phần tử x. Tâm của nhóm G được ký hiệu là $Z(G)$. Quy ước "$\subseteq$" thay thế một tập con và "$\subset$" thay thế một tập con thực sự, "$\rhd$" thay thế một nhóm con chuẩn tắc và "$\leq$" thay thế một nhóm con.

Các kết quả trong bài báo này được nghiên cứu dựa trên cấu trúc của một nhóm G với phép toán . mà để cho ngắn gọn ta thường bỏ trống phép toán "." khi thực hiện trên nó.

2. Kết quả chính

Đầu tiên chúng tôi cung cấp phép toán nhân và phép nghịch đảo của các giao hoán tử. Một số áp dụng của giao hoán tử cũng được đề xuất.

2.1 Mệnh đề. Cho G là một nhóm và $x,y\in G$ tùy ý. Ta có

(i). $[x,y][y,x]=[y,x][x,y]=1$.

(ii). $[x,y]^{-1}=[y,x]$.

(iii). $x^{-1}x^{y}y^{-1}y^{x}=y^{-1}y^{x}x^{-1}x^{y}=1$.

(iv). $x^{y}=x[x,y]$, $y^{x}=y[y,x]$.

Chứng minh.

(i). Ta có $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ và $[y,x]=y^{-1}x^{-1}yx$ suy ra

(1) $[x,y][y,x]=x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}x^{-1}yx=x^{-1}y^{-1}xx^{-1}yx=x^{-1}y^{-1}yx=x^{-1}x=1.$

(2) $[y,x][x,y] = y^{-1}x^{-1}yxx^{-1}y^{-1}xy = y^{-1}x^{-1}yy^{-1}xy = y^{-1}x^{-1}xy = y^{-1}y = 1.$

Từ (1) và (2) suy ra $[x,y][y,x]=[y,x][x,y]=1$.

(*ii*). Suy ra từ (*i*).

(*iii*). Ta có $x^{-1}x^{y} = x^{-1}y^{-1}xy = [x,y]$ và $y^{-1}y^{x} = y^{-1}x^{-1}yx = [y,x]$.

Áp dụng (*i*) suy ra điều phải chứng minh.

(*iv*). Suy ra từ chứng minh trong (*iii*) và định nghĩa nhóm giao hoán tử.

Điều phải chứng minh.

Tiếp theo, ta có các phép tính nhân kiểu lũy thừa của hai giao hoán tử.

2.2 Mệnh đề. Cho G là một nhóm và $x, y, z \in G$ tùy ý. Ta có

(*i*). $[x, yz] = [x,z][x,y]^{z}$.

(*ii*). $[x,z]^{y}[y,z] = [xy, z]$.

(*iii*). $[x, y^{p^r}] = 1 \Rightarrow [x, y^{m}] = [x, y^{m}] \Leftrightarrow m \equiv n(\text{mod } p^{r})$ với p là số nguyên tố và $r > 0$ tùy ý.

(*iv*). $G/[G, G]$ là nhóm Abel.

Chứng minh.

(*i*). Ta có $[x,z][x,y]^{z}. = x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz = x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz = x^{-1}(yz)^{-1}x(yz) = [x, yz].$

(*ii*). Ta có $[x,z]^{y}[y,z] = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz = (xy)^{-1}z^{-1}(xy)z = [xy, z].$

(*iii*). Chứng minh trường hợp tổng quát

$$[x, y^{mp^r}] = 1 \quad \text{với mọi } m \geq 1. \tag{3}$$

Với m =1 thì (3) thỏa mãn theo giả thiết.

Giả sử (3) đúng với một số tự nhiên $m = k \geq 1$.

Xét với $m = k+1$ ta có $[x, y^{(k+1)p^r}] = [x, y^{kp^r} y^{p^r}] = [x, y^{p^r}][x, y^{kp^r}]^{y^{p^r}} = 1.1^{y^{p^r}} = 1.$

Vậy (3) đúng với mọi số tự nhiên $m \geq 1$.

Tiếp theo chứng minh

$$[x, y^{m}] = [x, y^{n}] \text{ khi } m \equiv n(\text{mod } p^{r}). \tag{4}$$

Ta có $m \equiv n(\text{mod } p^{r}) \Leftrightarrow \exists s:\ m = sp^{r} + n.$ Suy ra

$[x, y^{m}] = [x, y^{sp^r+n}] = [x, y^{sp^r}y^{n}] = [x, y^{n}][x, y^{sp^r}]^{y^n} = [x, y^{n}]$ (do (3))

(iv). Thật vậy dễ dàng ta có $[G, G] \leq G$.

Với mọi $a \in [G, G]$, và với mọi $x \in G$ ta có $b := [a,x] \in [G, G]$.

Suy ra: $a[a, x] = a^x = ab \in [G, G]$.

Vậy $[G, G] \triangleright G \Rightarrow \exists\, G/[G, G]$.

Xét $\bar{a}, \bar{b} \in G/[G,G]$. Ta có $\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$; $\overline{ba} = \bar{b}\,\bar{a}$.

Mặc khác,

$[a, b] = (ba)^{-1}(ab) \in [G,G]$.

Suy ra

$\overline{ab} = \overline{ba}$,

hay

$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}, \ \forall \bar{a}, \bar{b} \in G, [G, G]$

Vậy $G/[G, G]$ là nhóm Aben.

Điều phải chứng minh.

Sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp, ta có kết quả sau.

2.3 Định lý. Cho G là nhóm và $[x^i, y^j] = z^{ij}, \forall i, j \geq 1.$. Giả sử $zx = xz, zy = yz$. Ta có

(*i*). $[x^i, y^j] = z^{ij}, \forall i, j \geq 1.$

(*ii*). $(yx)^i = z^{i(i-1)/2} y^i x^i, \forall i \geq 1.$

Chứng minh.

(*i*). Theo giả thiết ta có $xz = x^y$ suy ra $(xz)^2 = \left(x^y\right)^2 = \left(x^2\right)^y$.

Bằng quy nạp suy ra được $(xz)^j = \left(x^j\right)^y$ với mọi $j \geq 1$.

Vì z giao hoán với x nên với mọi $j \geq 1$. có

$$\left(x^j\right)^{y^i} = x^j z^{ji}$$

Vậy bằng quy nạp ta tính được $\left(x^j\right)^{y^i} = x^j z^{ji}$ với mọi $i \geq 1$.

Thay i bởi j, j bởi i sẽ có được điều cần chứng minh.

(*ii*). Chứng minh $(yx)^i = z^{i(i-1)/2} y^i x^i, \forall i \geq 1.$ (*)

Với $i = 1$ ta có $xy = yx$ đúng theo giả thiết.

Giả sử (*) đúng với một số nguyên dương $i = k\,(k \geq 1)$.

Xét với $i := k + 1$ ta có

$$\begin{aligned}(yx)^{k+1} &= (yx)^k (yx) = z^{k(k-1)/2} y^k x^k (yx) \\ &= z^{k(k-1)/2} y^{k+1} y^{-1} x^{k+1} (x^{-1} yx) \\ &= z^{k(k-1)/2} y^{k+1} y^{-1} x^{k+1} yz^{-1} \\ &= z^{k(k-1)/2} y^{k+1} x^{k+1} z^k \\ &= z^{k(k+1)/2} y^{k+1} x^{k+1}.\end{aligned}$$

Vậy (*) đúng với mọi số tự nhiên $x, y, z \in G$

Điều phải chứng minh.

Trường hợp nhóm con giao hoán tử gồm 3 phần tử, ta có kết quả phân tích cơ bản các giao hoán tử như sau.

2.4 Định lý. Cho G là nhóm, $x, y, z \in G$ và H, K, L là các tập con của G. Ta có

(i). $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$.

(ii). Nếu $[H, K, L] = 1$, $[K, L, H] = 1$ thì $[L, H, K] = 1$.

Chứng minh.

(i). Tính 2 cặp đầu tiên ta có

$$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z = [[x, y^{-1}], z]^y[[y, z^{-1}], x]^z = [x^{-1}yxy^{-1}, z]^y[y^{-1}zyz^{-1}, z]^z$$
$$= x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zyy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz$$
$$= x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}zyz^{-1}xz.$$

Hơn nữa,

$$[z, x^{-1}, y]^x = [[z, x^{-1}], y]^x = z^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx.$$

Suy ra

$$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}zyz^{-1}xzz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx = 1.$$

(ii). Với mọi $x \in H, y \in K, z \in L$ ta có

$$[x, y^{-1}, z] = [y, z^{-1}, x] = 1 \text{ suy ra}$$
$$[x, y^{-1}, z]^y = [y, z^{-1}, x]^z = 1.$$

Áp dụng (i) ta được $[z, x^{-1}, y]^x = 1$

$$\Rightarrow [z, x^{-1}, y] = 1.$$

Vậy, ta kết luận giao hoán tử $[L, H, K] = 1$.

Điều phải chứng minh.

Công thức biểu diễn mũ của các giao hoán tử được mô tả dưới đây như sau.

2.5 Định lý. Cho G là p-nhóm hữu hạn, $x, y \in G$, f là một tự đẳng cấu của G và hai số nguyên m, n. Giả sử

$$[x, f] = [x, y^n], \ [y, f]^{y^{-n}} = [y, x^n].$$

Khi đó $x^f = x^{x^m y^n}$, $y^f = y^{x^m y^n}$.

Chứng minh.

Với mỗi số tự nhiên n, ta chứng minh bằng quy nạp theo m đẳng thức sau:

$$[x, x^m x^n] = [x, f]. \qquad (**)$$

Hiển nhiên (**) đúng với $m = 0$.

Giả sử (**) đúng với một số tự nhiên $m = k$, nghĩa là

$$[x, x^{m=k} x^n] = [x, f].$$

Với $m = k+1$, ta có

$[x, x^{m=k+1} x^n] = [x, x.x^k.x^n] = [x, x^k y^n][x, x]^{x^k y^n} = [x, f]$ (áp dụng mệnh đề **2.2**).

Suy ra

$$x^f = x^{x^m y^n}$$

và $[y, x^m y^n] = [y, y^m][y, x^m]^{y^n} = [y, f]^{y^{-n} y^n} \Rightarrow [y, f] = y^{x^m y^n}$.

Điều phải chứng minh.

Nhận xét.

Ánh xạ $\widehat{f}_{x^m y^n} : G \to$ 'xác định bởi $\widehat{f}_{x^m y^n}(g) = (x^m y^n) g (x^m y^n)^{-1}\ \forall g \in G$, là một tự đẳng cấu trong của G. Do đó, ánh xạ f là một tự đẳng cấu trong của G với $f = \widehat{f}_{x^m y^n}$.

Cuối cùng, để kết thúc bài báo chúng tôi cung cấp một số tính chất cơ bản của nhóm thương như sau.

2.6 Mệnh đề. Cho G là nhóm và x, y, z là các phần tử của G, x giao hoán với z. Ta có các khẳng định sau là đúng:

(i). Nếu nhóm G có số mũ bằng 2 thì G là Abel.

(ii). Nếu $G / Z(G)$ là cyclic thì $G / Z(G)$ và G là Abel.

(iii). Nếu $[x, y] = [z^m, y]$ thì $z^{-m} x \in C_G(y)$ với mọi số nguyên m.

Chứng minh.

(i). Xét $u, v \in G$ tùy ý ta có $(uv)^2 = u^2 = v^2 = 1$. Suy ra

$$uvuv = uuvv = 1.$$

Áp dụng luật giản ước 2 phía ta được

$$vu = uv,$$

hay theo định nghĩa, G là một nhóm Abel.

(ii). Giả sử $w \in G$, w là ảnh sinh ra $G / Z(G)$. Khi này với mọi $t \in G$ có dạng

$$t = zw^j$$

với mọi số nguyên j và $z \in Z(G)$.

Vậy bất kỳ hai phần tử này của G cũng giao hoán với nhau, hay là $G = Z(G)$.

Do $Z(G)$ là nhóm Abel nên G cũng là nhóm Abel.

(iii). Dùng định nghĩa nhóm tâm hóa và sử dụng công thức

$$[x^{-1}, y^{-1}] = [z^{-m}, t^{-1}],$$

và định nghĩa của giao hoán tử ta suy ra điều phải chứng minh.

3. Kết luận.

Bài báo đã chỉ ra được các đặc trưng cơ bản của các giao hoán tử và dạng mũ của nó. Bài báo cũng đã chỉ ra được rằng $G/[G, G]$ là nhóm Abel và đồng thời G có số mũ 2 thì G là nhóm Abel. Các kết quả trong bài báo này làm nền tảng để nghiên cứu p-nhóm con giao hoán tử cyclic và ứng dụng trong việc biểu diễn p-nhóm, nghiên cứu tính chất của nhóm lũy linh và nghiên cứu biểu diễn xích, nghiên cứu tính khớp và tính chẻ trong một xích chuẩn tắc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Hữu Việt Hưng, 1998, *Đại số đại cương,* NXB GD, Nhà Máy In Bộ Tổng tham mưu.

[2] Hoàng Xuân Sính, 2000, *Đại số đại cương,* NXB GD.

[3] R. Brauer, 1977, *On finite projective Groups,* Contributions to Algebra: A Collection of Papers Dedicated To Ellis Kolchin, New York.

[4] Y-Cheng, 1979, *On finite projective groups with commutator subgroups,* Amer, Math, Soe, Notice, 79T-A229, ISS. A-509, 196.

[5] R.S.Dark and M.L. Newell, 1978, *On conditions for commutators to form a subgroup,* J.London Math, Soe, (2) 17, 251-262.

SOME PROPERTIES OF THE COMMUTATOR SUBGROUP AND THE QUOTIENT GROUP

VO VAN MINH, TRAN VAN SU
Quang Nam University

Abstract: *Given a group G, let us denote the commutator subgroup of a group G be G':=[G, G]. In this paper, we provide some basis properties of the commutator subgroup G' as well as some properties of the quotient group G / G'.*

Keywords: *Commutator subgroup; Abel group; Finite p-group.*