Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long

website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.145

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR KHÔNG LỒI

Nguyễn Thái Anh[1], Phạm Thanh Dược[2], Lâm Thị Vân Khánh[1] và Phạm Trần Anh Thư[3*]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ*

[3]*Bộ môn Toán, Trường Đại học FPT Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Phạm Trần Anh Thư (email: thupta9@fe.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 13/02/2022
Ngày nhận bài sửa: 12/04/2022
Ngày duyệt đăng: 18/04/2022

Title:
Connectedness of weakly efficient solution set of non-convex vector optimization problems

Từ khóa:
Bài toán tối ưu, hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty, phương pháp vô hướng hóa, tính liên thông

Keywords:
Optimization problem, Hiriart-Urruty oriented distance funtion, scalar method, connectedness

ABSTRACT

In this paper, the non-convex vector optimization problem was considered and discussed the properties of its weakly efficient solution set. Firstly, some concepts about generalized convexities of vector valued mappings were provided and studied their relationships. Next, based on the Hiriart-Urruty oriented distance function, a new nonlinear scalar function for the underlying problem was presented and investigated its pseudo semicontinuous property. Finally, these concepts and properties of the Hiriart-Urruty oriented distance function were used to formulate sufficient conditions for the existence and the connectedness of the weakly efficient solution set of the reference problem.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán tối ưu vector không lồi được xem xét và thảo luận các tính chất của tập nghiệm hữu hiệu yếu đối với bài toán này. Trước hết, một số khái niệm về tính lồi tổng quát của ánh xạ giá trị vector được đưa ra và nghiên cứu các mối quan hệ của chúng. Tiếp đó, dựa trên hàm khoảng cách định hướng theo nghĩa Hiriart-Urruty, một hàm vô hướng phi tuyến mới cho bài toán đang xét được giới thiệu và nghiên cứu tính giả nửa liên tục của nó. Cuối cùng, các khái niệm và tính chất của hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty được sử dụng để thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại và tính liên thông của tập nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán trên.

1. GIỚI THIỆU

Trong tối ưu hóa, việc nghiên cứu các tính chất tôpô của tập nghiệm như tính khác rỗng, tính compact, tính lồi,… là chủ đề được rất nhiều người quan tâm và có ý nghĩa quan trọng trong việc xem xét các mô hình tối ưu hai mức, tức là bài toán tối ưu với ràng buộc là tập nghiệm của một bài toán tối ưu khác (Bialas & Karwan, 1982; Farajzadeh, 2015). Một trong những tính chất mong muốn đạt được đó là tính lồi của tập nghiệm vì khi đó bài toán tối ưu hai mức có thể nghiên cứu được dựa trên các kết quả của tối ưu lồi. Tuy nhiên, đối với bài toán tối ưu vector điều kiện lồi của tập nghiệm là khá chặt và trong nhiều trường hợp thì tính chất này khó đạt được, chính vì vậy mà việc nghiên cứu tính chất nghiệm của mô hình tối ưu vector không sử dụng điều kiện lồi là chủ đề được rất nhiều nhà toán học quan tâm trong những năm gần đây (Ruíz-Canales & Rufían-Lizana, 1995; Flores-Bazán, 2004). Chính vì vậy, tính chất liên thông của tập nghiệm, một dạng giảm nhẹ của tính lồi, được nhiều người quan tâm, nghiên cứu trong thời gian gần đây (Han et al., 2019). Nói một cách tổng quát, điều kiện liên thông của tập nghiệm đảm bảo cho việc di chuyển liên tục từ một nghiệm hữu hiệu này sang một nghiệm hữu hiệu khác và do đó trong nhiều trường hợp tính chất này có thể sử dụng thay cho tính lồi đặc biệt là trong thuật giải. Vì vai trò quan trọng của chủ đề này nên nó đã được nghiên cứu rộng rãi cho nhiều lớp bài toán trong tối ưu hóa, chẳng hạn như bài toán cân bằng vector (Han & Huang, 2018; Xu & Zhang, 2018), bài toán bất đẳng thức biến phân vector (Cheng, 2001; Huong et al., 2017), bài toán tối ưu vector (Gong, 1994; Sun, 1996; Han & Huang, 2018; Han et al., 2019; Anh et al., 2022).

Đối với lớp bài toán tối ưu vector (VOP), ta có thể liệt kê một cách không đầy đủ các công trình tiêu biểu khảo sát về chủ đề này. Một trong những tác giả được ghi nhận có công trình đầu tiên về chủ đề này đối với bài toán tối ưu là Gong (1994). Tác giả đã sử dụng các giả thiết liên quan đến tính liên tục và tính lồi để nghiên cứu tính liên thông của tập không trội và tập nghiệm hữu hiệu cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu. Sau đó, bằng cách giảm nhẹ giả thiết lồi thành tính tựa lồi chặt của hàm mục tiêu, Sun (1996) đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm hữu hiệu bài toán đang xét. Các kết quả này sau đó đã được tổng quát và mở rộng cho lớp bài toán tối ưu vector trong không gian định chuẩn tổng quát bởi Han and Huang (2018) và Han et al. (2019). Một trong những giả thiết cốt lõi của các công trình vừa được đề cập đến chính là điều kiện lồi của tập ràng buộc. Theo nghĩa nào đó, giả thiết này có vẻ nặng hơn kết quả thu được của tập nghiệm, hơn nữa khi xem xét tính chất nghiệm của bài toán tối ưu hai mức giả thiết này dẫn đến điều kiện lồi của tập nghiệm bài toán tối ưu ràng buộc (bài toán tối ưu mức dưới). Do đó, một số công trình gần đây đã đề xuất các khái niệm lồi suy rộng dựa trên các tập liên thông và dùng chúng để thiết lập điều kiện liên thông của tập nghiệm cho lớp các mô hình tối ưu không lồi (Anh et al., 2022). Mục đích chính của bài toán này là sử dụng các điều kiện lồi giảm nhẹ của tính lồi để nghiên cứu tính chất liên thông cho bài toán tối ưu vector không lồi trong không gian định chuẩn tổng quát.

Đóng góp chính của bài báo này là giới thiệu các tính chất quan trọng của hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty và đề xuất các điều kiện liên thông của tập nghiệm bài toán tối ưu vector mà không sử dụng đến các giả thiết liên quan đến tính đơn điệu, tính lồi của hàm mục tiêu và tập ràng buộc.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong suốt bài báo, ngoại trừ một số trường hợp đặc biệt. Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ là hai không gian định chuẩn và $\mathcal{C}$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh và đặc trong $\mathbb{Y}$. Với mỗi $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$, ta định nghĩa mối quan hệ sau:

$$y_1 \preccurlyeq_{\mathcal{C}} y_2 \Leftrightarrow y_1 \in y_2 - \mathcal{C}.$$

Trước hết, một số khái niệm cần thiết được nhắc lại cho các kết luận của bài báo này.

Cho một tương ứng $F: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là một ánh xạ đa trị hay ánh xạ giá trị tập nếu với mỗi $x \in \mathbb{X}$ được cho tương ứng với một tập con duy nhất $F(x)$ trong $\mathbb{Y}$.

Định nghĩa 2.1. (Göpfert et al., 2003) Một ánh xạ đa trị $F: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) *nửa liên tục trên* (usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi lân cận $\mathcal{V}$ của $F(x_0)$ thì tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$;

(b) *nửa liên tục dưới* (lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi tập con mở $\mathcal{V}$ trong $\mathbb{Y}$ với $F(x_0) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ thì tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho
$$F(x) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset, \forall x \in \mathcal{U};$$

(c) *liên tục* tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu nó vừa là usc vừa là lsc tại x_0.

Nhận xét 2.1. Dựa vào Định nghĩa 2.1, ta dễ dàng suy ra các mệnh đề sau đây:

(a) Nếu ánh xạ F không nửa liên tục trên tại $x_0 \in \mathbb{X}$ thì khi đó tồn tại lân cận $\mathcal{V}_0$ của $F(x_0)$ sao cho với mỗi lân cận $\mathcal{U}_n$ của x_0, chúng ta có thể tìm thấy $x_n \in \mathcal{U}_n$ thỏa mãn $F(x_n) \cap (\mathbb{Y} \backslash \mathcal{V}_0) \neq \emptyset$, hay một cách tương đương là tồn tại dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 sao cho với mỗi n ta luôn tìm được $z_n \in F(x_n) \backslash \mathcal{V}_0$.

(b) Nếu ánh xạ F không nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathbb{X}$ thì khi đó tồn tại tập con mở $\mathcal{V}_0$ của $\mathbb{Y}$ với

$F(x_0) \cap \mathcal{V}_0 \neq \emptyset$ sao cho với mỗi lân cận $\mathcal{U}_n$ của x_0, tồn tại $x_n \in \mathcal{U}_n$ thỏa mãn $F(x_0) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset$, tương đương là khi đó tồn tại z_0 thuộc $F(x_0)$ và dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 sao cho với bất kỳ dãy $\{z_n\}$ với $z_n \in F(x_n)$ không thể hội tụ về z_0.

Định nghĩa 2.2. (Luc, 1989) Một ánh xạ giá trị vector $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) $\mathcal{C}$-*nửa liên tục dưới* ($\mathcal{C}$-lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi lân cận $\mathcal{V}$ của $f(x_0)$ thì đều tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho

$$f(x) \in \mathcal{V} + \mathcal{C}, \forall x \in \mathcal{U};$$

(b) $\mathcal{C}$-*nửa liên tục trên* ($\mathcal{C}$-usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ khi $-f$ là $\mathcal{C}$-lsc tại x_0;

(c) $\mathcal{C}$-liên tục tại $x_0 \in \mathbb{X}$ khi nó vừa là $\mathcal{C}$-usc vừa là $\mathcal{C}$-lsc tại x_0.

Nhận xét 2.2 Khi $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ và $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+$ thì $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới trở thành nửa liên tục dưới thông thường. Cụ thể hơn, một hàm f được gọi là nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathbb{X}$ khi với mọi số thực $y < f(x_0)$, đều tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $y < f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{U}$, hay nói cách khác, với mọi $\varepsilon > 0$ thì ta luôn tìm được lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{U}$ (Bourbaki 1987; Anh et al., 2019).

Một ánh xạ thỏa mãn một điều kiện cho trước nào đó trên một tập con $\mathcal{X}$ nếu như điều kiện đó được nghiệm đúng với mọi điểm của $\mathcal{X}$.

Khái niệm của tính giả liên tục cho các ánh xạ giá trị vector xuất phát từ Morgan and Scalzo (2004). Cho $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ và $k \in \mathbb{Y}$, ta xét k-tập mức dưới được ký hiệu là

$$\mathrm{lev}_{\preccurlyeq_k} f := \{x \in \mathbb{X} | \, f(x) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} k\}.$$

Định nghĩa 2.3. Một ánh xạ giá trị vector f được gọi là

(a) $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục dưới trong $\mathcal{X}$ khi $\mathrm{lev}_{\preccurlyeq_k} f$ đóng với mọi $k \in f(\mathcal{X})$;

(b) $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục trên trong $\mathcal{X}$ khi $-f$ là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục dưới trong $\mathcal{X}$;

(c) $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục trong $\mathcal{X}$ khi nó vừa là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục dưới vừa là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục trên trong $\mathcal{X}$.

Bổ đề 2.1. Nếu ánh xạ giá trị vector f là $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathbb{X}$ thì nó cũng là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục dưới tại x_0.

Chứng minh

Từ Định nghĩa 2.3, ta suy ra rằng f là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathbb{X}$ khi và chỉ khi tập $\mathrm{lev}_{\preccurlyeq_{f(x_0)}} f$ là đóng. Thật vậy, với $\{x_n\} \subset \mathrm{lev}_{\preccurlyeq_{f(x_0)}} f$ hội tụ về $\bar{x}$, giả sử rằng $\bar{x} \notin \mathrm{lev}_{\preccurlyeq_{f(x_0)}} f$, tương đương $f(\bar{x}) \in \mathcal{V} := \mathbb{Y} \backslash (f(x_0) - \mathcal{C})$. Vì tính mở của tập $\mathcal{V}$ và tính $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới của f tại x_0 nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$f(x_n) \in \mathcal{V} + \mathcal{C}, \forall n \geq n_0.$$

Do đó, với mỗi $n \geq n_0$, tồn tại $v_n \in \mathcal{V}$ và $c_n \in \mathcal{C}$ thỏa mãn

$$f(x_n) = v_n + c_n. \tag{2.1}$$

Mặt khác, $x_n \in \mathrm{lev}_{\preccurlyeq_{f(x_0)}} f$ nên $f(x_n) \in f(x_0) - \mathcal{C}$, và vì thế tồn tại $c_n' \in \mathcal{C}$ sao cho

$$f(x_n) = f(x_0) - c_n'.$$

Điều này cùng với (2.1) suy ra

$$v_n = f(x_0) - c_n' - c_n \in f(x_0) - \mathcal{C},$$

vô lý vì $v_n \in \mathcal{V} = \mathbb{Y} \backslash (f(x_0) - \mathcal{C})$. ■

Ví dụ sau đây minh họa cho chiều ngược lại của phát biểu trên nói chung là không đúng.

Ví dụ 2.1. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+$, sign: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{khi } x > 0, \\ 0, & \text{khi } x = 0, \\ -1, & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Khi đó, hàm sign vừa là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục dưới, vừa là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục trên tại $x_0 = 0$, nhưng nó không là $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới cũng không là $\mathcal{C}$-nửa liên tục trên tại x_0.

3. CÁC DẠNG TỔNG QUÁT CỦA ÁNH XẠ LIÊN THÔNG

Các loại ánh xạ liên thông tổng quát có giá trị vector được xem xét. Một số khái niệm cổ điển liên quan đến tính liên thông như sau:

Định nghĩa 3.1. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$.

(a) Với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, tập $\mathcal{D}_{x_1,x_2} := \{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 : \lambda \in [0,1]\}$ được gọi là *một đoạn thẳng* nối hai điểm x_1 và x_2. Khi đó, $\mathcal{X}$ được gọi là *lồi* nếu $\mathcal{D}_{x_1,x_2} \subset \mathcal{X}$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ (Rockafellar, 1970).

(b) Với hai điểm cho trước $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $\mathcal{O}_{x_1,x_2}: [0,1] \to \mathbb{X}$ là một ánh xạ liên tục có giá trị vector thoả mãn $\mathcal{O}_{x_1,x_2}(0) = x_1$ và

$\mathcal{O}_{x_1,x_2}(1) = x_2$. Khi đó, $\mathcal{O}_{x_1,x_2}$ được gọi là *một cung* trong $\mathbb{X}$ với điểm đầu và điểm cuối là x_1 và x_2. Tập $\mathcal{X}$ được gọi là *liên thông cung* nếu với hai điểm x_1, x_2 trong $\mathcal{X}$, có một cung $\mathcal{O}_{x_1,x_2}$ trong $\mathcal{X}$ (Avriel & Zang, 1980).

(c) Một tập con $\mathcal{X}$ khác rỗng của $\mathbb{X}$ được gọi là *tách được* nếu có hai tập con mở $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ của $\mathbb{X}$ sao cho $\mathcal{X} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $\mathcal{X} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ và $\mathcal{X} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Tập $\mathcal{X}$ được gọi là *liên thông* nếu nó không tách được (Warburton, 1983).

Nhận xét 3.1. Các mệnh đề dưới đây dễ dàng được suy ra từ định nghĩa.

(i) Mọi tập lồi đều là tập liên thông cung.

(ii) Mọi tập liên thông cung đều là tập liên thông.

Cách tiếp cận thống nhất cho các khái niệm liên quan đến tính lồi và tính liên thông của một ánh xạ có giá trị vector được đề xuất sau đây.

Định nghĩa 3.2. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$. Một ánh xạ có giá trị vector $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) $\mathcal{C}$-*lồi theo đoạn* trong $\mathcal{X}$ nếu với mỗi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, một đoạn $\mathcal{D}_{x_1,x_2}$ được chứa trong $\mathcal{X}$ và với mọi $\lambda \in [0,1]$,

$f\left(\mathcal{D}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ (Luc, 1989);

(b) $\mathcal{C}$-*lồi theo cung* trong $\mathcal{X}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, tồn tại một cung $\mathcal{O}_{x_1,x_2}$ trong $\mathcal{X}$ sao cho với mọi $\lambda \in [0,1]$,

$$f\left(\mathcal{O}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

(Avriel & Zang, 1980);

(c) $\mathcal{C}$-*lồi theo nghĩa liên thông* trong $\mathcal{X}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, tồn tại một tập liên thông $\mathcal{S}_{x_1,x_2}$ trong $\mathcal{X}$ chứa hai phần tử x_1, x_2 sao cho $\mathcal{M}_{x_1,x_2} \coloneqq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \mathcal{S}_{x_1,x_2}(\lambda)$ là liên thông, trong đó

$$\mathcal{S}_{x_1,x_2}(\lambda) \coloneqq \{x \in \mathcal{S}_{x_1,x_2} | f(x) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\}.$$

Từ định nghĩa trên, ta suy ra mọi hàm $\mathcal{C}$-lồi theo cung đều là $\mathcal{C}$-lồi theo nghĩa liên thông. Nếu f là $\mathcal{C}$-lồi theo cung trong một số tập con $\mathcal{X}$ của $\mathbb{X}$ thì với mọi điểm $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ tồn tại một cung $\mathcal{O}_{x_1,x_2}$ trong $\mathcal{X}$ sao cho với mọi $\lambda \in [0,1]$,

$$f\left(\mathcal{O}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Đặt $\mathcal{S}_{x_1,x_2} = \mathcal{O}_{x_1,x_2}([0,1])$, ta có

$$\mathcal{M}_{x_1,x_2} \coloneqq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \{x \in \mathcal{S}_{x_1,x_2} | f(x) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\} \subset \mathcal{O}_{x_1,x_2}([0,1]).$$

Ngoài ra, với mỗi $\lambda \in [0,1]$, vector $\mathcal{O}_{x_1,x_2}(\lambda)$ là một phần tử của $\mathcal{M}_{x_1,x_2}$ nên tập $\mathcal{M}_{x_1,x_2} = \mathcal{O}_{x_1,x_2}([0,1])$ là liên thông. Vì vậy, f là $\mathcal{C}$-lồi theo nghĩa liên thông trong $\mathcal{X}$.

Theo Tanaka (1994), sự tổng quát hóa của các khái niệm được xem xét trình bày trong Định nghĩa 3.3 như sau:

Định nghĩa 3.3. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$. Một ánh xạ có giá trị vector $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) $\mathcal{C}$-*tựa lồi tự nhiên theo đoạn* trong $\mathcal{X}$ nếu với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ thì $\mathcal{D}_{x_1,x_2}$ được chứa trong $\mathcal{X}$ và với mọi số thực $\lambda \in [0,1]$, tồn tại $\mu \in [0,1]$ thoả mãn

$$f\left(\mathcal{D}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\mu)f(x_1) + \mu f(x_2)$$

(Tanaka, 1994);

(b) $\mathcal{C}$-*tựa lồi tự nhiên theo cung* trong $\mathcal{X}$ nếu với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, tồn tại một cung $\mathcal{O}_{x_1,x_2}$ trong $\mathcal{X}$ sao cho với mọi số thực $\lambda \in [0,1]$, tồn tại $\mu \in [0,1]$ thoả mãn

$$f\left(\mathcal{O}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\mu)f(x_1) + \mu f(x_2)$$

(Avriel & Zang, 1980);

(c) $\mathcal{C}$-*tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông* trong $\mathcal{X}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, tồn tại một tập liên thông $\mathcal{S}_{x_1,x_2} \subset \mathcal{X}$ chứa x_1, x_2 sao cho với mọi $x \in \mathcal{S}_{x_1,x_2}$ và với mọi số thực $\lambda \in [0,1]$, tồn tại $\mu \in [0,1]$ thoả mãn

$$f(x) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\mu)f(x_1) + \mu f(x_2).$$

Nhận xét 3.2. Từ định nghĩa, ta có thể dễ dàng kiểm chứng trực tiếp các kết quả sau đây:

(i) Mọi ánh xạ $\mathcal{C}$-lồi theo đoạn (tương ứng $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn) là $\mathcal{C}$-lồi theo cung (tương ứng $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo cung).

(ii) Mọi ánh xạ $\mathcal{C}$-lồi theo cung (tương ứng $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo cung) là $\mathcal{C}$-lồi theo nghĩa liên thông (tương ứng $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông).

Ví dụ 3.1. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{X} = \mathbb{R}, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+$ và $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Rõ ràng, f không là $\mathbb{R}_+$-lồi theo đoạn trong $\mathbb{R}$. Bây giờ, ta chứng tỏ rằng f là $\mathbb{R}_+$-lồi theo cung trong $\mathbb{R}$. Lấy x_1, x_2 tùy ý và với mọi $\lambda \in [0,1]$, ta được:

$$\mathcal{O}_{x_1,x_2}(\lambda) := \left((1-\lambda)\sqrt[3]{x_1} - \lambda\sqrt[3]{x_2}\right)^3.$$

Vậy $\mathcal{O}_{x_1,x_2}$ là một cung trong $\mathbb{R}$. Hơn nữa, ta có:

$$f\left(\mathcal{O}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) = (1-\lambda)\sqrt[3]{x_1} + \lambda\sqrt[3]{x_2}$$
$$= (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

nên f là một $\mathbb{R}_+$-lồi theo cung trong $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.2. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2, \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{X} = \mathbb{R}_+^2, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+$ và $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(z) = \sqrt{xy}$ với mọi $z = (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. Ta chỉ ra rằng f là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung nhưng nó không $\mathbb{R}_+$-lồi theo đoạn.

⋆ f là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathbb{R}_+^2$: Với mỗi $z_1 = (x_1, y_1)$ và $z_2 = (x_2, y_2)$ thuộc $\mathbb{R}^2$, ta xét ánh xạ $\mathcal{O}_{z_1,z_2}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\mathcal{O}_{z_1,z_2}(\lambda) = \begin{cases}(1-2\lambda)z_1, \text{ nếu } 0 \le \lambda \le 0.5, \\ (2\lambda - 1)z_2, \text{ nếu } 0.5 < \lambda \le 1.\end{cases}$$

Khi đó, $\mathcal{O}_{z_1,z_2}$ là một cung trong $\mathbb{R}^2$. Tiếp theo, với mỗi $\lambda \in [0,1]$, ta chọn $\mu \in [0,1]$ sao cho

$$f\left(\mathcal{O}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) \le (1-\mu)f(z_1) + \mu f(z_2). \quad (3.1)$$

Xét 2 trường hợp.

Trường hợp 1. Nếu $\lambda \in [0,0.5]$, thì

$$f\left(\mathcal{O}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) = (1-2\lambda)\sqrt{x_1y_1}$$
$$< \sqrt{x_1y_1} = f(z_1),$$

và vì vậy (3.1) đúng khi $\mu = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $\lambda \in (0.5,1]$, thì

$$f\left(\mathcal{O}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) = (2\lambda-1)\sqrt{x_2y_2}$$
$$< \sqrt{x_2y_2} = f(z_2),$$

và dẫn đến kết quả (3.1) đúng khi $\mu = 1$.

⋆ f không là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong $\mathbb{R}_+^2$: Với $z_1 = (3,7), z_2 = (7,3)$ và $\lambda = 0.8$, khi đó với mọi $\mu \in [0,1]$,

$$f(0,.8z_1 + 0.8z_2) = f(8,8) = 8 \notin \sqrt{21} - \mathbb{R}_+$$
$$= (1-\mu)f(z_1) + \mu f(z_2) - \mathbb{R}_+.$$

Do đó, f không là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong $\mathbb{R}_+^2$.

Ví dụ 3.3. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2, \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+$. Ta xét một tập con $\mathcal{V}$ của $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi biểu thức $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, trong đó

$$\mathcal{V}_1 := \{z = (x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0\}$$

và $\mathcal{V}_2 := \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$.

Khi đó, $\mathcal{V}$ là liên thông nhưng không liên thông theo cung. Ta xác định một hàm $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$f(z) = \begin{cases}0, & \text{khi } z \in \mathcal{V}, \\ 1, & \text{khi } z \notin \mathcal{V}.\end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được f là $\mathbb{R}_+$-lồi theo nghĩa liên thông trong $\mathbb{R}^2$, nó không là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathbb{R}^2$.

4. HÀM KHOẢNG CÁCH ĐỊNH HƯỚNG

Định nghĩa 4.1. (Hiriart-Urruty, 1979) *Hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty* $\Delta_{\mathcal{C}}: \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa là

$$\Delta_{\mathcal{C}}(y) := d(y, \mathcal{C}) - d(y, \mathbb{Y}\backslash\mathcal{C})$$
$$= \begin{cases} d(y, \mathrm{bd}\mathcal{C}), \text{khi } y \notin \mathcal{C}, \\ -d(y, \mathrm{bd}\mathcal{C}), \text{khi } y \in \mathcal{C},\end{cases}$$

trong đó bd$\mathcal{C}$ là biên của $\mathcal{C}$.

Bổ đề 4.1. (Jiménez et al., 2020) Cho y, y_1 và y_2 thuộc $\mathbb{Y}$. Khi đó,

(a) $\Delta_{\mathcal{C}}$ *là liên tục và lồi;*

(b) $\Delta_{\mathcal{C}}(y) < 0$ *khi và chỉ khi* $y \in \mathrm{int}\mathcal{C}$;

(c) $\Delta_{\mathcal{C}}(y) = 0$ *khi và chỉ khi* $y \in \mathrm{bd}\mathcal{C}$;

(d) $\Delta_{-\mathcal{C}}(y_1 + y_2) \le \Delta_{-\mathcal{C}}(y_1) + \Delta_{-\mathcal{C}}(y_2)$;

(e) $y_1 \preccurlyeq_{\mathcal{C}} y_2$ *suy ra* $\Delta_{-\mathcal{C}}(y_1) \le \Delta_{-\mathcal{C}}(y_2)$;

(f) $y_1 \preccurlyeq_{\mathrm{int}\mathcal{C}} y_2$ *suy ra* $\Delta_{-\mathcal{C}}(y_1) < \Delta_{-\mathcal{C}}(y_2)$.

Dựa vào hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty, một hàm vô hướng hóa phi tuyến mới được giới thiệu và thảo luận các tính chất của nó.

Với một hàm vector $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, ta xét một hàm $\varphi: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$\varphi(x,z) := \Delta_{-\mathcal{C}}\big(f(z) - f(x)\big), \forall\, x, z \in \mathbb{X}. \quad (4.1)$$

Tiếp theo, các tính chất quan trọng của φ được nghiên cứu.

Bổ đề 4.2 Cho $\mathbb{W}$ là không gian định chuẩn và một ánh xạ $h: \mathbb{W} \to \mathbb{Y}$ là $\mathcal{C}$-nửa liên tục trên (tương ứng, $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới) tại $x_0 \in \mathbb{W}$. Khi đó, $\xi := \Delta_{-\mathcal{C}} \circ h$ là nửa liên tục trên (tương ứng, nửa liên tục dưới) tại $x_0 \in \mathbb{W}$. Từ đó, ta kết luận ξ là liên tục tại $x_0 \in \mathbb{W}$ nếu h là $\mathcal{C}$- liên tục tại $x_0 \in \mathbb{W}$.

Chứng minh

Do $\Delta_{-\mathcal{C}}$ là hàm liên tục nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\mathcal{U}$ là lân cận của $h(x_0)$ sao cho

$$\Delta_{-\mathcal{C}}(m) \leq \Delta_{-\mathcal{C}}\big(h(x_0)\big) + \varepsilon, \forall m \in \mathcal{U}.$$

Vì h là $\mathcal{C}$-usc và $\mathcal{U}$ là lân cận của $h(x_0)$ nên tồn tại lân cận $\mathcal{V}$ của x_0 sao cho

$$h(x) \in \mathcal{U} - \mathcal{C}, \forall x \in \mathcal{V}.$$

Khi đó, tồn tại $m_0 \in \mathcal{U}$ sao cho

$$h(x) \in m_0 - \mathcal{C}.$$

Áp dụng Bổ đề 4.1 (e), ta được

$$\Delta_{-\mathcal{C}}\big(h(x_0)\big) \leq \Delta_{-\mathcal{C}}(m_0).$$

Ta kết luận rằng

$$\Delta_{-\mathcal{C}}\big(h(x)\big) \leq \Delta_{-\mathcal{C}}\big(h(x_0)\big) + \varepsilon, \forall x \in \mathcal{V}.$$

Nên $\xi(x) \leq \xi(x_0) + \varepsilon$.

Do đó, ξ là usc tại x_0. Bằng cách chứng minh tương tự, ta kết luận được rằng ξ là lsc tại x_0. Ta suy ra ξ là liên tục tại x_0. ■

Bổ đề 4.3. Cho $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vector và $\mathcal{X}$ là một tập khác rỗng của $\mathbb{X}$. Khi đó, φ là

(a) *nửa liên tục dưới theo biến thứ nhất và nửa liên tục trên theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$ nếu f là $\mathcal{C}$-nửa liên tục trên trong $\mathcal{X}$;*

(b) *nửa liên tục trên theo biến thứ nhất và nửa liên tục dưới theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$ nếu f là $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới trong $\mathcal{X}$;*

(c) *liên tục trong $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ nếu f là $\mathcal{C}$-liên tục trong $\mathcal{X}$.*

Chứng minh

Cho $\bar{x}, \bar{z} \in \mathcal{X}$. Ta xét hàm có giá trị vector $u_{\bar{z}}, v_{\bar{x}}: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ thỏa mãn

$$u_{\bar{z}}(x) \coloneqq f(\bar{z}) - f(x), v_{\bar{x}}(z) \coloneqq f(z) - f(\bar{x}),$$

với mọi $z, x \in \mathcal{X}$. Vì f là $\mathcal{C}$-nửa liên tục trên, $u_{\bar{z}}$ là $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới và $v_{\bar{x}}(z)$ là $\mathcal{C}$-nửa liên tục trên. Áp dụng Bổ đề 4.2, ta kết luận được (a) và (b).

Ta xét các hàm có giá trị vector $h, h_1, h_2: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ thỏa mãn

$$h(x,z) = h_1(x,z) + h_2(x,z),$$

trong đó, $h_1(x,z) = f(z), h_2(x,z) = -f(x)$. Khi đó, các ánh xạ h, h_1 và h_2 là $\mathcal{C}$-liên tục trên $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, áp dụng Bổ đề 4.2 với $\mathbb{W} = \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, ta kết luận được (c). ■

Sử dụng các kĩ thuật tương tự trong Bổ đề 4.2 và Bổ đề 4.3 ta thu được kết quả sau:

Bổ đề 4.4. Cho $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vector và $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$. Khi đó, φ là

(a) *giả nửa liên tục dưới theo biến thứ nhất và giả nửa liên tục trên theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$ nếu f là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục trên trong $\mathcal{X}$;*

(b) *giả nửa liên tục trên theo biến thứ nhất và giả nửa liên tục dưới theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$ nếu f là $\mathcal{C}$-giả nửa liên tục dưới trong $\mathcal{X}$;*

(c) *giả liên tục trong $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ khi f là $\mathcal{C}$-giả liên tục trong $\mathcal{X}$.*

Bổ đề 4.5. Cho $\mathcal{X}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$ và $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vector. Khi đó,

(a) *nếu f là $\mathcal{C}$-lồi theo đoạn trong $\mathcal{X}$ thì φ là $\mathbb{R}_+$-lồi theo đoạn theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$;*

(b) *nếu f là $\mathcal{C}$-lồi theo cung trong $\mathcal{X}$ thì φ là $\mathbb{R}_+$-lồi theo cung theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$;*

(c) *nếu f là $\mathcal{C}$-lồi theo nghĩa liên thông trong $\mathcal{X}$ thì φ là $\mathbb{R}_+$-lồi theo nghĩa liên thông theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$.*

Chứng minh

Vì sự tương tự trong kỹ thuật chứng minh nên ta chỉ chứng minh khẳng định (a). Ta có, f là $\mathcal{C}$-lồi theo đoạn nên với mọi $z_1, z_2 \in \mathcal{X}$, thì $\mathcal{D}_{z_1,z_2} \subset \mathcal{X}$ và với mọi $\lambda \in [0,1]$,

$$f\left(\mathcal{D}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2).$$

Khi đó,

$$f\left(\mathcal{D}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) - f(x) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\lambda)\big(f(z_1) - f(x)\big) + \lambda\big(f(z_2) - f(x)\big).$$

Áp dụng Bổ đề 4.1 (e) và (a), ta được

$$\varphi\left(x, \mathcal{D}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) \leq \Delta_{-\mathcal{C}}\left((1-\lambda)\big(f(z_1) - f(x)\big) + \lambda\big(f(z_2) - f(x)\big)\right)$$

$$\varphi\left(x, \mathcal{D}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) \leq (1-\lambda)\Delta_{-\mathcal{C}}\left(f(z_1) - f(x)\right) + \lambda\Delta_{-\mathcal{C}}\left(f(z_2) - f(x)\right)$$

$$\varphi\left(x, \mathcal{D}_{z_1,z_2}(\lambda)\right) \leq (1-\lambda)\varphi(x, z_1) + \lambda\varphi(x, z_2).$$

Vậy φ là $\mathbb{R}_+$-lồi theo đoạn theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$. ■

5. SỰ LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR KHÔNG LỒI

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ và $\mathcal{C}$ như ở Mục 2, $\mathcal{X}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$ và $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vector. Chúng ta quan tâm đến bài toán tối ưu vector

$$\text{(VOP)} \quad \min_{x \in \mathcal{X}} f(x).$$

Định nghĩa 5.1. Một phần tử $x_0 \in \mathcal{X}$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VOP), nghĩa là $x_0 \in \text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ nếu

$$f(z) \not\preccurlyeq_{\text{int}\mathcal{C}} f(x_0), \forall z \in \mathcal{X}.$$

Ví dụ 5.1. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{C} = \mathbb{R}^2_+, \mathcal{X} = [-1; 1]$ và $f(x) = (x, x^4)$.

Nếu x là nghiệm của bài toán $\text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ thì với mọi $z \in [-1,1]$ ta có:

$$f(z) \notin f(x) - \text{int}\mathbb{R}^2_+$$
$$\Leftrightarrow f(z) - f(x) \notin -\text{int}\mathbb{R}^2_+$$
$$\Leftrightarrow z - x \geq 0 \text{ hoặc } z^4 - x^4 \geq 0.$$

Từ đó ta suy ra $\text{WEff}(\mathcal{X}, f) = \{-1; 0\}$.

Định lý 5.1. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con compact của $\mathbb{X}$. Giả sử rằng f là $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới trong $\mathcal{X}$. Khi đó, $\text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ là tập khác rỗng.

Chứng minh

Với mỗi $m \in \mathcal{X}$. Ta đặt

$$W(m) = \{\bar{z} \in \mathcal{X} \mid \forall x \in \mathcal{X}, \varphi(m, x) \geq \varphi(m, \bar{z})\}.$$

Vì f là $\mathcal{C}$-lsc trong $\mathcal{X}$, từ Bổ đề 4.3 (b) ta được φ nửa liên tục dưới theo biến thứ hai trong $\mathcal{X}$. Vì vậy, hàm φ đạt giá trị nhỏ nhất trên tập con compact $\mathcal{X}$, hay $W(m)$ là tập khác rỗng với mọi $m \in \mathcal{X}$.

Lấy một điểm $\bar{z} \in W(m)$, ta có

$$\varphi(m, x) \geq \varphi(m, \bar{z}), \forall x \in \mathcal{X}. \qquad (5.1)$$

Nếu $\bar{z} \notin \text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ thì ta tìm được $\hat{x} \in \mathcal{X}$ sao cho $f(\hat{x}) \preccurlyeq_{\text{int}\mathcal{C}} f(\bar{z})$. Từ đó suy ra,

$$f(\hat{x}) - f(m) \in f(\bar{z}) - f(m) - \text{int}\mathcal{C}.$$

Áp dụng Bổ đề 4.1 (f), ta được $\varphi(m, \hat{x}) < \varphi(m, \bar{z})$. Điều này mâu thuẫn với (5.1) nên $\bar{z} \in \text{WEff}(\mathcal{X}, f)$. Vì vậy, $\text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ là tập khác rỗng. ■

Ví dụ 5.2. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{X} = [-1; 1]$ và $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2_+$. Hàm vector thực $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ được định nghĩa là

$$f(x) \coloneqq ((-x)^3, -x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, f là hàm liên tục và $\mathcal{X}$ là tập compact. Từ Định lý 5.1, ta kết luận rằng $\text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ là tập khác rỗng.

Để nghiên cứu tính liên thông của các tập, chúng ta sử dụng tính chất quan trọng sau.

Bổ đề 5.1. (Khan et al., 2016) Giả sử rằng $\mathcal{X}$ là một tập con liên thông của $\mathbb{X}$ và một ánh xạ đa trị $W: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ là nửa liên tục trên với giá trị liên thông trong $\mathcal{X}$. Khi đó, $W(\mathcal{X})$ là tập liên thông.

Tiếp theo, các điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm $\text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ được xây dựng thông qua hàm vô hướng phi tuyến.

Định lý 5.2. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con liên thông và compact của $\mathcal{X}$. Giả sử rằng

(i) f là $\mathcal{C}$-liên tục trong $\mathcal{X}$;

(ii) f là $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông trong $\mathcal{X}$.

Khi đó, $\text{WEff}(\mathcal{X}, f)$ là tập khác rỗng và liên thông.

Chứng minh

Với mỗi $m \in \mathcal{X}$. Ta đặt

$$W(m) = \{\bar{z} \in \mathcal{X} \mid \forall x \in \mathcal{X}, \varphi(m, x) \geq \varphi(m, \bar{z})\}.$$

Bước 1. Chứng minh $W(m)$ là tập liên thông với bất kì $m \in \mathcal{X}$.

Với mỗi $m \in \mathcal{X}$, lấy hai điểm bất kì z_1, z_2 trong $W(m)$, ta được $\varphi(m, z_1) = \varphi(m, z_2)$ và với mọi $x \in \mathcal{X}$,

$$\varphi(m, z_i) \leq \varphi(m, x), \forall i \in \{1,2\}. \qquad (5.2)$$

Vì tính $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông của f nên tồn tại một tập liên thông $\mathcal{S}_{z_1,z_2} \subset \mathcal{X}$ chứa hai điểm z_1, z_2 thỏa mãn với mỗi $z^* \in \mathcal{S}_{z_1,z_2}$ thì tồn tại $\mu \in [0,1]$ sao cho

$$f(z^*) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1 - \mu) f(z_1) + \mu f(z_2).$$

Từ đó, ta suy ra

$$f(z^*) - f(m) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1 - \mu)[f(z_1) - f(m)] + \mu[f(z_2) - f(m)].$$

Điều này kết hợp với Bổ đề 4.1 (e) và (a), ta được:

$$\begin{aligned}\varphi(m, z^*) &\leq \Delta_{-\mathcal{C}}\big((1 - \mu)[f(z_1) - f(m)] + \mu[f(z_2) - f(m)]\big)\\ &\leq (1 - \mu)\Delta_{-\mathcal{C}}\big(f(z_1) - f(m)\big) + \mu\Delta_{-\mathcal{C}}\big(f(z_2) - f(m)\big)\end{aligned}$$

$$\leq (1-\mu)\varphi(m, z_1) + \mu\varphi(m, z_2).$$

Điều này kết hợp với (5.2), ta suy ra rằng với mọi $x \in \mathcal{X}$ và $z^* \in \mathcal{S}_{z_1,z_2}$

$$\varphi(m, z^*) \leq \varphi(m, z_1) \leq \varphi(m, x).$$

Do đó, $\mathcal{S}_{z_1,z_2} \subset W(m)$ nên $W(m)$ là liên thông.

Bước 2. Chứng minh

$$\mathrm{WEff}(\mathcal{X}, f) = \bigcup_{m \in \mathcal{X}} W(m). \qquad (5.3)$$

Từ chứng minh của Định lý 5.1 ta có $\mathrm{WEff}(\mathcal{X}, f)$ là tập khác rỗng và

$$\mathrm{WEff}(\mathcal{X}, f) \supset \bigcup_{m \in \mathcal{X}} W(m).$$

Ngược lại, lấy một điểm bất kỳ $\bar{z} \in \mathrm{WEff}(\mathcal{X}, f)$, ta có $f(x) - f(\bar{z}) \notin -\mathrm{int}\mathcal{C}$ với mọi $x \in \mathcal{X}$. Áp dụng Bổ đề 4.1 (b), ta được:

$$\varphi(\bar{z}, x) \geq 0 = \varphi(\bar{z}, \bar{z}).$$

Do đó, $\bar{z} \in W(\bar{z}) \subset \bigcup_{m \in \mathcal{X}} W(m)$. Vậy ta kết luận biểu thức (5.3) là đúng.

Bước 3. Chứng minh hàm đa trị $W: \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ là nửa liên tục trên trong $\mathcal{X}$.

Giả sử ngược lại rằng tồn tại $\hat{x}$ trong $\mathcal{X}$ sao cho W không là usc tại $\hat{x}$. Khi đó, ta tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của $W(\hat{x})$ và một dãy $\{\hat{x}_n\}$ hội tụ về $\hat{x}$ sao cho với mỗi n có $\hat{z}_n \in W(\hat{x}_n) \setminus \mathcal{U}$. Do $\mathcal{X}$ là tập compact nên ta có thể giả sử dãy $\{\hat{z}_n\}$ hội tụ về vector $\hat{z}$ trong $\mathcal{X}$. Nếu $\hat{z} \notin W(\hat{x})$, thì có $\tilde{z} \in \mathcal{X}$ sao cho

$$\varphi(\hat{x}, \tilde{z}) < \varphi(\hat{x}, \hat{z}). \qquad (5.4)$$

Vì $\hat{z}_n \in W(\hat{x}_n)$, ta có

$$\varphi(\hat{x}_n, \tilde{z}) \geq \varphi(\hat{x}_n, \hat{z}_n).$$

Điều này kết hợp với tính $\mathcal{C}$- liên tục của hàm f và Bổ đề 4.3 ta được

$$\varphi(\hat{x}, \tilde{z}) \geq \varphi(\hat{x}, \hat{z}),$$

Điều này mâu thuẫn với (5.4). Vậy $\hat{z}$ nằm trong $W(\hat{x})$, điều này vô lý vì $\hat{z}_n \notin \mathcal{U}$ với mọi n, nên W là usc trong $\mathcal{X}$.

Bước 4. Từ các Bước 1, 2, 3 và $\mathcal{X}$ là một tập con liên thông, ta áp dụng Bổ đề 5.1 cho ánh xạ có giá trị vector W. Ta kết luận rằng $\mathrm{WEff}(\mathcal{X}, f)$ là tập liên thông. ■

Nhận xét 5.1. Kết quả của Định lý 5.2 có nhiều sự cải tiến hiệu quả so với Hệ quả 4.11 trong Han và Huang (2018). Thật vậy, Định lý đã sử dụng tập ràng buộc là tập không lồi và liên thông; f là $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông. Trong khi đó, Han và Huang (2018) đã dùng tập ràng buộc là tập lồi và f là $\mathcal{C}$-lồi theo đoạn.

Ví dụ 5.3. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 \leq x_2 \leq 0.5x_1^2 + 2\}$, $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+^2$ và $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$f(\mathfrak{x}) = ((x_1x_2)^2, \|\mathfrak{x}\|), \forall \mathfrak{x} = (x_1, x_2).$$

Khi đó, $\mathcal{X}$ là tập compact nhưng không lồi, f là $\mathcal{C}$-liên tục trên $\mathcal{X}$. Theo Định lý 5.2, ta cần kiểm tra tính chất $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông của hàm f. Với mỗi $\hat{\mathfrak{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ và $\bar{\mathfrak{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ trong $\mathcal{X}$, ta xét tập liên thông

$$\mathcal{S}_{\hat{\mathfrak{x}},\bar{\mathfrak{x}}} = \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{x}},\mathfrak{x}_0} \cup \mathcal{D}_{\mathfrak{x}_0,\bar{\mathfrak{x}}}, \text{với } \mathfrak{x}_0 = (0,0).$$

Tiếp theo, với mỗi $\mathfrak{x} \in \mathcal{S}_{\hat{\mathfrak{x}},\bar{\mathfrak{x}}}$, ta chọn $\mu \in [0,1]$ sao cho

$$f(\mathfrak{x}) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} (1-\mu)f(\hat{\mathfrak{x}}) + \mu f(\bar{\mathfrak{x}}). \quad (5.5)$$

Xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. Nếu $\mathfrak{x} \in \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{x}},\mathfrak{x}_0}$, khi đó tồn tại $\alpha \in [0,1]$ sao cho $\mathfrak{x} = \alpha\hat{\mathfrak{x}}$. Suy ra,

$$f(\mathfrak{x}) = ((\alpha^2\hat{\mathfrak{x}}_1\hat{\mathfrak{x}}_2)^2, \alpha\|\hat{\mathfrak{x}}\|) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} f(\hat{\mathfrak{x}}).$$

Điều này dẫn đến (5.5) đúng khi $\mu = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $\mathfrak{x} \in \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{x}},\mathfrak{x}_0}$, khi đó tồn tại $\beta \in [0,1]$ sao cho $\mathfrak{x} = \beta\bar{\mathfrak{x}}$. Suy ra,

$$f(\mathfrak{x}) = ((\beta^2\bar{\mathfrak{x}}_1\bar{\mathfrak{x}}_2)^2, \beta\|\bar{\mathfrak{x}}\|) \preccurlyeq_{\mathcal{C}} f(\bar{\mathfrak{x}}).$$

Điều này dẫn đến (5.5) đúng khi $\mu = 1$.

Áp dụng Định lý 5.2, ta có tập $\mathrm{WEff}(\mathcal{X}, f)$ khác rỗng và liên thông.

6. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, tính liên thông cho tập nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu vector không lồi đã được nghiên cứu thông qua các đặc trưng của hàm vô hướng hóa phi tuyến dạng Hiriart-Urruty. Cách tiếp cận và các kết quả đạt được là mới và khác với các kết quả đã có. Hơn nữa, với những điều chỉnh thích hợp, phương pháp vô hướng hóa này cũng có thể dùng để xem xét tính liên thông của các tập nghiệm hữu hiệu khác trong tối ưu với điều kiện không lồi.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo được tài trợ bởi đề tài nghiên cứu của Trường Đại học Cần Thơ, mã số: TSV2022-125.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Hien, D. V. (2019). Stability for parametric vector quasi-equilibrium problems with variable cones. *Numerical Functional Analysis and Optimization, 40*(4), 461-483. https://doi.org/10.1080/01630563.2018.1556688

Anh, L. Q., Anh. N. T., Duoc, P. T., Khanh, L. T. V., & Thu, P. T. A. (2022). The connectedness of weakly and strongly efficient solution sets of nonconvex vector equilibrium problems. *Applied Set-Valued Analysis and Optimization 4*(1), 109-127. https://doi.org/10.23952/asvao.4.2022.1.08

Avriel, M., & Zang, I. (1980). Generalized arcwise-connected functions and characterizations of local-global minimum properties. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *32*(4), 407-425. https://doi.org/10.1007/BF00934030

Bialas, W., & Karwan, M. (1982). On two-level optimization. *IEEE transactions on automatic control*, *27*(1), 211-214. https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102880

Bourbaki, N. (2013). *General Topology: Chapters 1–4 (18)*. Springer Science & Business Media.

Cheng, Y. (2001). On the connectedness of the solution set for the weak vector variational inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 260*(1), 1-5. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7389

Farajzadeh, A. P. (2015). On the convexity of the solution set of symmetric vector equilibrium problems. *Filomat*, *29*(9), 2097-2105. https://doi.org/10.2298/FIL1509097F

Flores-Bazán, F. (2004). Semistrictly quasiconvex mappings and non-convex vector optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, *59*(1), 129-145. https://doi.org/10.1007/s001860300321

Gong, X. (1994). Connectedness of the efficient solution set of a convex vector optimization in normed spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *23*(9), 1105-1114. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90095-7

Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., & Zalinescu, C. (2006). *Variational methods in partially ordered spaces*. Springer Science and Business Media.

Han, Y., & Huang, N. J. (2018). Existence and connectedness of solutions for generalized vector quasi-equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *179*(1), 65-85. https://doi.org/10.1007/s10957-016-1032-9

Han, Y., Wang, S. H., & Huang, N. J. (2019). Arcwise connectedness of the solution sets for set optimization problems. *Operations Research Letters*, *47*(3), 168-172. https://doi.org/10.1016/j.orl.2019.03.005

Hiriart-Urruty, J. B. (1979). Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces. *Mathematics of operations research*, *4*(1), 79-97. https://doi.org/10.1287/moor.4.1.79

Huong, N. T. T., Yao, J. C., & Yen, N. D. (2017). Connectedness structure of the solution sets of vector variational inequalities. *Optimization*, *66*(6), 889-901. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1172073

Jiménez, B., Novo, V., & Vílchez, A. (2020). Characterization of set relations through extensions of the oriented distance. *Mathematical Methods of Operations Research, 91*(1), 89-115. https://doi.org/10.1007/s00186-019-00661-1

Khan, A. A., Tammer, C., & Zalinescu, C. (2016). *Set-valued optimization*. Springer-Verlag Berlin An. https://doi.org/10.1007/978-3-642-54265-7

Luc, D, T. (1989). *Theory of vector optimization*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4

Morgan, J., & Scalzo, V. (2004). Pseudocontinuity in optimization and nonzero-sum games. *Journal of optimization Theory and Applications*, *120*(1), 181-197. https://doi.org/10.1023/B:JOTA.0000012738.90889.5b

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis, Princeton Univ*. Press, Princeton, NJ.

Ruíz-Canales, P., & Rufián-Lizana, A. (1995). A characterization of weakly efficient points. *Mathematical Programming*, *68*(1), 205-212. https://doi.org/10.1007/BF01585765

Sun, E. J. (1996). On the connectedness of the efficient set for strictly quasiconvex vector minimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *89*(2), 475-481. https://doi.org/10.1007/BF02192541

Tanaka, T. (1994). Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimax theorem for vector-valued functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *81*(2), 355-377. https://doi.org/10.1007/BF02191669

Xu, Y., & Zhang, P. (2018). Connectedness of solution sets of strong vector equilibrium problems with an application. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *178*(1), 131-152. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1244-2

Warburton, A. R. (1983). Quasiconcave vector maximization: connectedness of the sets of Pareto-optimal and weak Pareto-optimal alternatives. *Journal of optimization theory and applications*, *40*(4), 537-557. https://doi.org/10.1007/BF00933970