CẬN SAI SỐ HOLDER TOÀN CỤC CHO CÁC HÀM NỬA ĐẠI SỐ KHẢ VI

Hoàng Phi Dũng[1]

Tóm tắt: *Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng một số kết quả trong [5] của H. V. Hà and P. D. Hoàng về cận sai số Holder toàn cục của tập mức dưới*

$$[f \le t] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le t\}$$

từ lớp hàm đa thức lên lớp hàm nửa đại số. Ngoài ra, chúng tôi đưa ra một số ví dụ cho thấy sự khác biệt về kết quả trong trường hợp hàm nửa đại số so với hàm đa thức.

Từ khoá: *cận sai số Holder toàn cục, hàm nửa đại số, tập các giá trị Fedoryuk.*

1. MỞ ĐẦU

Cho $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm nửa đại số khả vi. Với $t \in \mathbb{R}$, đặt $[f \le t] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le t\}$ và $[a]_+ = \max\{a,0\}$.

Định nghĩa 1.1 ([4]). Ta nói rằng tập khác rỗng $[f \le t]$ có một cận sai số Holder toàn cục (gọi tắt là CSS) nếu tồn tại các số thực $\alpha, \beta, c > 0$ sao cho

$$[f(x)-t]_+^{\alpha} + [f(x)-t]_+^{\beta} \ge c\,\mathrm{dist}\big(x,[f \le t]\big), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Sự tồn tại của các cận sai số có nhiều ứng dụng vào các bài toán khác, chẳng hạn như trong sự phân tích tính hội tụ của thuật toán, trong các bất đẳng thức biến phân, trong giải tích nhạy, … Những nghiên cứu về cận sai số đã có được sự chú ý rất nhiều, thể hiện qua một số lượng lớn các bài báo xuất bản trong những năm gần đây (chẳng hạn, xem bài báo [3,7,9]). Một số nghiên cứu về ổn định của cận sai số khi nhiễu giá trị *t* cũng đã được thực hiện, kết quả về ổn định có thể ứng dụng vào nghiên cứu sự ổn định và hội tụ của các thuật toán lặp. Trong bài báo này, chúng tôi xét các hàm nửa đại số và mở rộng một số kết quả trong bài báo [5]. Cụ thể hơn, chúng tôi quan tâm đến câu hỏi sau: Với những giá trị t nào thì $[f \le t]$ có cận sai số Holder toàn cục. Nói cách khác, công thức của tập $\Lambda_+(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid [f \le t] \text{ có CSS}\}$ như thế nào? Khi nào tập này khác rỗng trong trường

1 Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, Hà Nội, Email: dunghp@ptit.edu.vn

hợp f là hàm nửa đại số liên tục hoặc khả vi? Chúng tôi liên hệ tập $\Lambda_+(f)$ với một số giá trị đặc biệt của tập các giá trị Fedoryuk sau đây

$$\tilde{K}_\infty(f) := \left\{ t \in \mathbb{R} : \exists \{x^k\} \subset \mathbb{R}^n, \left\| x^k \right\| \to \infty, \left\| \nabla f(x^k) \right\| \to 0, f(x^k) \to t \right\}.$$

Tập các giá trị Fedoryuk là tổng quát hoá của tập các giá trị tới hạn thông thường và nó có nhiều mối liên hệ tô pô của các tập đại số và nửa đại số (xem [6,8]). Bằng một số ví dụ, chúng tôi chỉ ra rằng, trong trường hợp 2 biến, kết quả đối với hàm nửa đại số có sự khác biệt so với hàm đa thức. Vì vậy, Định lý 3.6 và 3.7 được trình bày trong bài báo này là một mở rộng không tầm thường cho các kết quả trong bài báo [5].

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Một số kết quả trong hình học nửa đại số

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ bản trong Hình học nửa đại số. Mục này chúng tôi tham khảo trong [1,2,6].

Định nghĩa 2.1. Một tập con nửa đại số của $\mathbb{R}^n$ là một tập gồm các điểm $(x_1, \ldots, x_n)$ thuộc $\mathbb{R}^n$ thoả mãn các phép toán Boole trên các đẳng thức và các bất đẳng thức của các đa thức hệ số thực. Nói cách khác, một tập con nửa đại số tạo thành lớp nhỏ nhất các tập con của $\mathbb{R}^n$, ký hiệu SA_n sao cho

i. Nếu $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, thì $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\} \in SA_n$ và $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\}$ thuộc SA_n;

ii. Nếu $A \in SA_n$ và $B \in SA_n$, thì $A \cup B, A \cap B$ và $\mathbb{R}^n \setminus A$ thuộc SA_n.

Tập nửa đại số có cấu trúc sau đây.

Mệnh đề 2.2 ([2]). *Mọi tập con nửa đại số của $\mathbb{R}^n$ là hợp của hữu hạn các tập con nửa đại số có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \ldots, Q_l(x) > 0\}, \text{ với } l \in \mathbb{N} \text{ và } P, Q_1, \ldots, Q_l \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

Định lý sau đây đóng vai trò quan trọng trong chứng minh nhiều kết quả của Hình học nửa đại số

Định lý 2.3 (Tarski-Seidenberg [2]). *Cho A là một tập con nửa đại số của $\mathbb{R}^{n+1}$ và $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ là một phép chiếu chính tắc lên n toạ độ đầu. Khi đó $\pi(A)$ là một tập con nửa đại số của $\mathbb{R}^n$.*

Định nghĩa 2.4 ([2]). Cho $A \subset \mathbb{R}^n$. Một hàm $f : A \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm nửa đại số nếu đồ thị $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ của nó là một tập con nửa đại số trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Ta liệt kê một số tính chất của các tập nửa đại số và các hàm nửa đại số.

1. Hợp, giao và phần bù của tập nửa đại số cũng là tập nửa đại số. Tích Đề các của các tập nửa đại số là nửa đại số. Bao đóng và phần trong của một tập nửa đại số cũng là nửa đại số.

2. Hợp của hai ánh xạ nửa đại số là một ánh xạ nửa đại số. Ảnh và nghịch ảnh của một tập nửa đại số qua ánh xạ nửa đại số cũng là các tập nửa đại số.

3. Nếu S là một tập nửa đại số thì hàm khoảng cách xác định bởi công thức

$\operatorname{dist}(.,S) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{dist}(x,S) := \inf\{\|x-y\| : y \in S\}$ cũng là nửa đại số.

2.2. Sự tồn tại của cận sai số holder toàn cục

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm nửa đại số khả vi và $t \in [\inf f, +\infty)$.

Định nghĩa 3.1 ([4]). Cho S là một tập con của $\mathbb{R}^n$. Ta nói rằng

i) Một dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là dãy loại một của tập $[f \le t]$ trên S nếu

$$\{x^k\} \subset S, \|x^k\| \to \infty, f(x^k) > t, f(x^k) \to t,$$
$$\exists \delta > 0 : \operatorname{dist}(x^k, [f \le t]) \ge \delta > 0.$$

ii) Một dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một dãy loại hai của tập $[f \le t]$ trên S nếu

$$\{x^k\} \subset S, \|x^k\| \to \infty, \exists M \in \mathbb{R}^n : t < f(x^k) \le M < +\infty,$$
$$\operatorname{dist}(x^k, [f \le t]) \to +\infty.$$

Nếu $S = \mathbb{R}^n$ thì ta gọi ngắn gọn là dãy loại một và dãy loại hai.

Định lý sau đây cho ta điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của cận sai số Holder toàn cục, đó là kết quả trong [3,7] và là mở rộng của Định lý A trong [4]. Có thể thấy, đặc trưng của cận sai số Holder là nhờ vào hai loại dãy đặc biệt này.

Định lý 3.2. *Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm nửa đại số liên tục. Khi đó, hai điều sau là tương đương:*

i) *Không tồn tại dãy loại một và loại hai của $[f \le t]$;*

ii) $[f \le t]$ *có cận sai số Holder toàn cục, tức là tồn tại* $\alpha, \beta, c > 0$ *sao cho*

$[f(x)-t]_+^{\alpha} + [f(x)-t]_+^{\beta} \ge c\text{dist}\left(x, [f \le t]\right)$, *với mọi* $x \in \mathbb{R}^n$.

Chú ý 3.3. Ta có thể mở rộng định lý trên cho các hàm định nghĩa được trong một cấu trúc o-tối tiểu nào đó (xem [7]), một đối tượng của hình học đại số thực, chứa cấu trúc của các tập nửa đại số.

Ký hiệu

$F_+^1 = \{t \in \mathbb{R} : [f \le t]$ có dãy loại một$\}$ và $F_+^2 = \{t \in \mathbb{R} : [f \le t]$ có dãy loại hai$\}$.

Tập F_+^2 có một tính chất quan trọng, thể hiện trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 3.4. *Nếu* $t \in F_+^2$ *và* $t' \le t$, *thì* $t' \in F_+^2$.

Chứng minh. Từ giả thiết, tồn tại một dãy loại hai theo t. Giả sử rằng dãy đó là $\{x^k\}$, khi đó $\|x^k\| \to +\infty, \exists M \in \mathbb{R} : t < f(x^k) \le M$ sao cho $\text{dist}\left(x^k, [f \le t]\right) \to +\infty$. Từ $\inf f \le t' \le t$, ta có $[f \le t'] \subseteq [f \le t]$.

Vì vậy, $\text{dist}\left(x^k, [f \le t']\right) \ge \text{dist}\left(x^k, [f \le t]\right)$. Nói các khác, $\text{dist}\left(x^k, [f \le t']\right) \to +\infty$. Từ đó suy ra $\{x^k\}$ là một dãy loại hai của $[f \le t']$, hay $t' \in F_+^2$.

Định nghĩa 3.5 ([5]). Đặt $h_+ = \begin{cases} \sup\{t \in \mathbb{R} : t \in F_+^2\}, & F_+^2 \ne \emptyset, \\ \inf f & , F_+^2 = \emptyset. \end{cases}$

h_+ được gọi là *ngưỡng* của cận sai số Holder toàn cục của *f*.

Chúng tôi mở rộng kết quả sau đây trong [5] từ các hàm đa thức cho các hàm nửa đại số liên tục.

Định lý 3.6. *Ta có*

$$\Lambda_+(f) = \begin{cases} (h_+, +\infty) \setminus F_+^1 & \text{khi } h_+ \in F_+^2, \\ [h_+, +\infty) \setminus F_+^1 & \text{khi } h_+ \notin F_+^2, \\ [\inf f, +\infty) \setminus F_+^1 & \text{khi } F_+^2 = \emptyset,\ \inf f > -\infty, \\ \mathbb{R} \setminus F_+^1 & \text{khi } F_+^2 = \emptyset,\ \inf f = -\infty. \end{cases}$$

Chứng minh. Từ Định lý 3.2, ta có tập $[f \le t]$ có cận sai số Holder toàn cục nếu và chỉ nếu $t \notin F_+^1 \cup F_+^2$. Do Mệnh đề 3.4, ta thấy F_+^2 sẽ là một khoảng về bên trái của ngưỡng h_+. Từ đó ta có các khả năng sau:

- $F_+^2 = \varnothing$ nếu $h_+ = \inf f$;
- $F_+^2 = \mathbb{R}$ nếu $h_+ = +\infty$;
- $F_+^2 = [\inf f, h_+]$ hoặc $F_+^2 = (-\infty, h_+]$ nếu $h_+ \in F_+^2$;
- $F_+^2 = [\inf f, h_+)$ hoặc $F_+^2 = (-\infty, h_+)$ nếu $h_+ \notin F_+^2$.

Hai mục cuối với giả sử $f^{-1}(\inf f) \ne \varnothing$ vì nếu ngược lại thì ta không lấy đầu mút bên trái của F_+^2. Từ các trường hợp trên, ta suy được công thức của tập $\Lambda_+(f)$ đã nêu trong định lý.

Mối liên hệ giữa tập $\Lambda_+(f)$ với tập các giá trị Fedoryuk trong trường hợp *f* là hàm nửa đại số khả vi là như sau:

1. $F_+^1 \subset \tilde{K}_\infty(f)$;

Thật vậy, đặt $X = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge t\right\}$, khi đó *X* là một không gian mê tric đủ với mê tric Euclid thông thường và hàm $f : X \to \mathbb{R}$ bị chặn dưới. Giả sử $t \in F_+^1$ và $\{x^k\}$ là dãy loại một của $[f \le t]$, khi đó

$$\left\|x^k\right\| \to \infty, f(x^k) \ge t, f(x^k) \to t,\ \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \operatorname{dist}\left(x^k, [f \le t]\right) \ge \delta > 0.$$

Đặt $\varepsilon_k = f(x^k) - t$, ta có $\varepsilon_k > 0$ và $\varepsilon_k \to 0$ (khi $k \to +\infty$). Đặt $\lambda_k = \sqrt{\varepsilon_k}$, áp dụng Nguyên lý biến phân Ekeland (xem, chẳng hạn [6]), ta suy ra tồn tại một dãy $\{y^k\} \subset X$, sao cho

$$f(y^k) \le t + \varepsilon_k = f(x^k) \text{ và } \operatorname{dist}\left(y^k, x^k\right) \le \lambda_k,$$

ngoài ra, với $x \in X, x \ne y^k$ bất kỳ thì

$$f(x) \ge f(\mathrm{y}^k) - \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k} \operatorname{dist}\left(x, y^k\right). \tag{1}$$

Từ $\operatorname{dist}\left(y^k, x^k\right) \leq \lambda_k = \sqrt{\varepsilon_k} \to 0$ và $\operatorname{dist}\left(x^k, [f \leq t]\right) \geq \delta > 0$ kéo theo hình cầu $B\left(y^k, \frac{\delta}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}\left(y^k, x\right) \leq \frac{\delta}{2}\right\}$ chứa trong tập *X*. Từ (1) kéo theo $\frac{f(y^k + \tau u) - f(y^k)}{\tau} \geq -\sqrt{\varepsilon_k}$ với mọi $u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1$ và $\tau \in \left[0, \frac{\delta}{2}\right)$. Cho $\tau \to 0$ ta có $\left\langle \nabla f(y^k), u \right\rangle \geq -\sqrt{\varepsilon_k}$. Đặt $u = -\frac{\nabla f(y^k)}{\left\|\nabla f(y^k)\right\|}$, khi đó ta được $\left\|\nabla f(y^k)\right\| \leq \sqrt{\varepsilon_k}$. Kết hợp với $f(y^k) \to t$ và $\left\|y^k\right\| \to \infty$, ta có $t \in \tilde{K}_\infty(f)$ (đpcm).

2. Nếu $[f \leq t]$ có một dãy loại hai thì tồn tại một dãy loại hai $\{y^k\}$ cũng của $[f \leq t]$ thoả mãn các tính chất sau: $\left\|\nabla f(y^k)\right\| \to 0$ và $\lim_{k \to \infty} f(y^k) \in \tilde{K}_\infty(f)$. Đặc biệt, $[t, M] \cap \tilde{K}_\infty(f) \neq \varnothing$, trong đó $M := \sup_k \left\{f(y^k)\right\}$.

3. Nếu $h_+ \neq \pm\infty$, thì $h_+ \in \tilde{K}_\infty(f)$.

Định lý sau đây trả lời cho câu hỏi khi nào thì tập $\Lambda_+(f)$ là khác rỗng.

Định lý 3.7. *Nếu tập* $\tilde{K}_\infty(f)$ *là tập hữu hạn, thì* $\Lambda_+(f) \neq \varnothing$.

Chứng minh. (Tương tự Định lý 4.1 trong [5])

Phản chứng, giả sử $\Lambda_+(f) = \varnothing$. Từ giả thiết tập Fedoryuk khác rỗng và tính chất $F_+^1 \subset \tilde{K}_\infty(f)$, ta có F_+^1 cũng là một tập hữu hạn. Khi đó, từ công thức của tập $\Lambda_+(f)$, ta có $\Lambda_+(f) = \varnothing$ nếu và chỉ nếu $h_+ = +\infty$. Vì vậy, với $t_1 \in (\inf f, +\infty)$, tồn tại một dãy loại hai của $[f \leq t_1]$. Từ tính chất số 2 trên đây, tồn tại $M_1 > t_1$ và $a_1 \in [t_1, M_1] \cap \tilde{K}_\infty(f)$. Lấy t_2 sao cho $M_1 < t_2$. Do $h_+ = +\infty$ nên tồn tại một dãy loại hai của $[f \leq t_2]$. Vì vậy tồn tại $M_2 > t_2$ và a_2 sao cho $a_2 \in [t_2, M_2] \cap \tilde{K}_\infty(f)$. Lặp lại quá trình này, ta tìm được dãy vô hạn $\{a_n\}_n$ thoả mãn $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ thuộc tập $\tilde{K}_\infty(f)$. Do đó $\#\tilde{K}_\infty(f) = +\infty$. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết của định lý. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2.3. Trường hợp hàm nửa đại số khả vi hai biến

Ta có Hệ quả sau đây trong trường hợp *f* là một hàm đa thức hai biến thực.

Hệ quả 3.8. (Định lý 6.1 trong [5]) *Cho* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *là một hàm đa thức hai biến, khi đó* $\Lambda_+(f) \neq \varnothing$.

Đối với hàm nửa đại số và hàm đa thức thì ở trường hợp này có một sự khác biệt khá lớn. Điều này thể hiện ở chỗ, hàm đa thức thì tập Fedoryuk $\tilde{K}_\infty(f)$ luôn là một tập hữu hạn trong trường hợp hai biến, do đó ta có hệ quả trên, trong khi đó, hàm nửa đại số hai biến thì tập Fedoryuk không nhất thiết phải là tập hữu hạn. Điều đó thể hiện trong hai ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.9. ([7]) Xét hàm nửa đại số $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$.

Ta lấy dãy $\{x^k\}_k$ sao cho $x^k = \left(k, a(1+k^2)\right), a \in \mathbb{R}$, khi đó ta có $\|x^k\| \to \infty, f(x^k) = a, \nabla f(x^k) \to 0.$ Điều này kéo theo $\tilde{K}_\infty(f) = \mathbb{R}$.

Ví dụ 3.10. Xét hàm nửa đại số $g(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x^2}$. Xét dãy $\{x^k\}_k$ sao cho $x^k = \left(k, \sqrt{a(1+k^2)}\right), a \in \mathbb{R}, a \geq 0,$ khi đó ta có $\|x^k\| \to \infty, g(x^k) = a, \nabla g(x^k) \to 0.$ Từ đó kéo theo $\tilde{K}_\infty(g) = [0, +\infty)$.

3. KẾT LUẬN

Kết quả chính ở đây, tức là Định lý 3.6 và Định lý 3.7, thực chất là hai mở rộng của các kết quả trong bài báo [5] của Hà Huy Vui – Hoàng Phi Dũng, đã trả lời được cho câu hỏi tự nhiên ban đầu, đó là khi nào thì tập $\Lambda_+(f)$ khác rỗng trong trường hợp *f* là một hàm nửa đại số khả vi. Bên cạnh đó, hai Ví dụ 3.9 và 3.10 đã chỉ rõ sự khác biệt trong giả thiết của Định lý 3.7, đó là tập Fedoryuk trong trường hợp hàm nửa đại số hai biến có thể là tập vô hạn, từ đó có thể tập $\Lambda_+(f)$ không khác rỗng giống như trong trường hợp *f* là hàm đa thức.

Acknowledgements: *Tác giả xin cảm ơn các phản biện về những bình luận và chỉ dẫn cùng chữa lỗi cho bài báo này.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. S. Basu, R. Pollack and M. Roy, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 10, Springer, 2003.
2. J. Bochnak, M. Coste and M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer, 1998.

3. S. T. Dinh, H. V. Hà and T. S. Phạm, *Holder-Type Global Error Bounds for Non-degenerate Polynomial Systems*, Acta Mathematica Vietnamica, 42 (2017), 563–585.
4. H. V. Hà, *Global Holderian error bound for non-degenerate polynomials*, SIAM. J. Optim., 23 (2013), No. 2, 917-933.
5. H. V. Hà, P. D. Hoàng, *Fedoryuk values and stability of global Holderian error bounds for polynomial functions*, Arxiv: 1902.05972, 2019.
6. H. V. Hà, T. S. Phạm, *Genericity in polynomial optimization*, World Scientific Publishing, 2017.
7. P. D. Hoàng, *Lojasiewicz-type inequalities and global error bounds for nonsmooth definable functions in o-minimal structures*, Bull. Aust. Math. Soc. 93 (2016), 99-112.
8. K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, *Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values*, J. Diff. Geom. 56 (2000), 67-92.
9. S. J. Pang, *Error bounds in Mathematical Programming*, Math. Programming, Ser.B, 79 (1997), 299-332.

GLOBAL HOLDERIAN ERROR BOUNDS FOR DIFFERENTIAL SEMI-ALGEBRAIC FUNCTIONS

Hoang Phi Dung

***Abstract**. In this paper, we extend some results in [5] of H. V. Hà and P. D. Hoàng on global Holderian error bounds of the sub-level set:*

$$[f \le t] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le t\}$$

from polynomial functions to semi-algebraic functions. Moreover, we give some examples which show the difference between polynomial functions and semi-algebraic functions.

***Keywords:** Global Holderian error bounds, semi-algebraic functions, the Fedoryuk values.*

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 24-8-2022; ngày phản biện đánh giá: 26-8-2022; ngày chấp nhận đăng: 30-8-2022)