XẤP XỈ ĐẠO HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ

APPROXIMATION OF DERIVATIVE OF A FUNCTION

Tôn Thất Tú*, Trần Thiên Ân, Đoàn Nhật Minh Thuỳ

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng[1]

*Tác giả liên hệ: tttu@ued.udn.vn

(Nhận bài: 08/9/2022; Chấp nhận đăng: 21/11/2022)

Tóm tắt - Phương pháp sai phân trên lưới đều là một công cụ cơ bản giúp ta tính xấp xỉ đạo hàm của hàm số [1, 2, 4]. Khi các hàm số có độ dốc lớn, người ta thường sử dụng lưới không đều để cải thiện độ chính xác của phép xấp xỉ. Trong phương pháp số, phương pháp ngoại suy Richardson [3, 5] thường được sử dụng để nâng bậc chính xác của các sơ đồ xấp xỉ, đặc biệt trong giải gần đúng phương trình vi phân và trong các thuật toán tối ưu. Trong bài báo này, dựa trên phương pháp sai phân và ý tưởng của phương pháp ngoại suy Richardson chúng tôi sẽ xây dựng các công thức tường minh xấp xỉ bậc cao cho đạo hàm cấp một của một hàm số tại một điểm. Việc mở rộng kết quả cho phép xấp xỉ đạo hàm cấp hai cũng được xét đến.

Từ khóa - Xấp xỉ bậc cao; đạo hàm; khai triển Taylor; phép ngoại suy Richardson

Abstract - The difference method on the uniform grid is a basic tool to help us approximate the derivative of a function [1, 2, 4]. When functions have large slopes, it is common to use non-uniform grids to improve the accuracy of the approximation. In numerical methods, the Richardson extrapolation method [3, 5] is often used to improve the accuracy order of approximation schemes, especially in approximately solving differential equations and in optimization algorithms. In this paper, based on the differences scheme and the idea of the Richardson extrapolation method, we will build explicit formulas for approximating the derivative of a function with high order of accuracy at a given point. The extension of obtained results for approximation of derivative of second order is also considered.

Key words - Approximation with high order; derivative; Taylor expansion; Richardson extrapolation

1. Giới thiệu vấn đề

Đạo hàm là một phép tính cơ bản của giải tích. Việc tính đạo hàm của hàm số không những giúp ta nghiên cứu dáng điệu của hàm số đó mà còn được ứng dụng trong nhiều tính toán khoa học khác, chẳng hạn như giải gần đúng phương trình phi tuyến và tìm điểm cực trị [1, 2, 4]. Tuy nhiên, việc tính chính xác giá trị đạo hàm tại điểm cần tìm trong nhiều trường hợp không phải là vấn đề dễ dàng, đặc biệt khi hàm được cho dưới dạng biểu thức giải tích phức tạp hoặc được cho bởi các hệ thức truy hồi. Do đó, việc tính xấp xỉ đạo hàm với độ chính xác cao là vấn đề cần thiết và có ý nghĩa.

Cho hàm $f(x)$ xác định trên **R**. Để thuận lợi cho việc biểu diễn, trong bài báo này ta giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp cần thiết sao cho các biểu diễn có nghĩa. Sử dụng khai triển Taylor, ta có:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h), \qquad (1)$$

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+O(h), \qquad (2)$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2), \qquad (3)$$

Công thức xấp xỉ đạo hàm (1), (2) và (3) lần lượt được gọi là công thức sai phân tiến, sai phân lùi và sai phân hướng tâm [1, 2]. Có thể thấy, công thức (3) có độ chính xác cao hơn. Để nâng bậc cho sơ đồ xấp xỉ (1), ta có thể sử dụng phương pháp Richardson [5]. Sử dụng công thức khai triển Taylor cho hàm $f(x)$ đến cấp cao hơn, ta có:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)$$
$$+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x)+O(h^7).$$

Từ đó, suy ra:

$$N_1^{(1)}(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2!}f''(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x)$$
$$+\frac{h^3}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{h^5}{6!}f^{(6)}(x)+O(h^7).$$

Tương tự, ta có:

$$N_2^{(1)}(h)=N_1^{(1)}(h)-2N_1^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right)$$
$$=-f'(x)+\left(\frac{h^2}{3!}-\frac{h^2}{2\cdot 3!}\right)f'''(x)+\left(\frac{h^3}{4!}-\frac{h^3}{2^2\cdot 4!}\right)f^{(4)}(x)$$
$$+\left(\frac{h^4}{5!}-\frac{h^4}{2^3\cdot 5!}\right)f^{(5)}(x)+\left(\frac{h^5}{6!}-\frac{h^5}{2^4\cdot 6!}\right)f^{(6)}(x)+O(h^6).$$

Do đó,

$$N_1^{(1)}(h)=f'(x)+O(h),\ \ N_2^{(1)}(h)=-f'(x)+O(h^2).$$

Điều này có nghĩa là

$$f'(x)=-N_2^{(1)}(h)+O(h^2).$$

Quá trình làm như vậy có thể tổng quát hoá lên và ta thu được các kết quả như Mục 2.

[1] The University of Danang – University of Science and Education (Ton That Tu, Tran Thien An, Doan Nhat Minh Thuy)

2. Kết quả chính

2.1. Xấp xỉ đạo hàm cấp một

Giả sử hàm $f(x)$ có thể khai triển ở dạng chuỗi Taylor:

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i)}(x)\frac{h^i}{i!}. \tag{4}$$

Giả sử a là một số thực, $a\notin\{-1,0,1\}$ và $x\in\mathbf{R}$ cố định. Ta xây dựng dãy hàm $N_i^{(1)}(h,a), i\geq 1$ như sau:

$$\begin{cases} N_1^{(1)}(h,a)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\ N_{i+1}^{(1)}(h,a)=N_i^{(1)}(h,a)-a^i N_i^{(1)}\left(\dfrac{h}{a},a\right), i\geq 1. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} N_1^{(1)}(h,a) &= f'(x)+\sum_{i=2}^{+\infty} f^{(i)}(x)\frac{h^{i-1}}{i!} \\ &= f'(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{h^i}{(i+1)!}. \end{aligned}$$

Định lý 1: Giả sử hàm $f(x)$ được biểu diễn ở dạng (4). Khi đó, với $k\geq 2$ ta có khai triển:

$$\begin{aligned} N_k^{(1)}(h,a) &= \prod_{i=1}^{k-1}(1-a^i)f'(x) \\ &+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{h^i}{(i+1)!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{a^{i-j}}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Với $k=2$ ta có đẳng thức (5) đúng vì

$$\begin{aligned} & N_2^{(1)}(h,a)=N_1^{(1)}(h,a)-aN_1^{(1)}(\tfrac{h}{a},a) \\ &= f(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{h^i}{(i+1)!}-a\left(f'(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{\left(\frac{h}{a}\right)^i}{(i+1)!}\right) \\ &= (1-a)f'(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{h^i}{(i+1)!}\left(1-\frac{1}{a^{i-1}}\right). \end{aligned}$$

Giả sử đẳng thức (5) đúng với $k\geq 2$. Ta có:

$$\begin{aligned} & N_{k+1}^{(1)}(h,a)=N_k^{(1)}(h,a)-a^k N_k^{(1)}\left(\frac{h}{a},a\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1}(1-a^i)f'(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{h^i}{(i+1)!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{a^{i-j}}\right) \\ &\quad -a^k\left(\prod_{i=1}^{k-1}(1-a^i)f'(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{\left(\dfrac{h}{a}\right)^i}{(i+1)!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{a^{i-j}}\right)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k}(1-a^i)f'(x)+\sum_{i=1}^{+\infty} f^{(i+1)}(x)\frac{h^i}{(i+1)!}\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{a^{i-j}}\right). \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa đẳng thức (5) cũng đúng với $k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, định lý được chứng minh. ■

Hệ quả 1: Với điều kiện của Định lý 1, ta có khai triển:

$$f'(x)=\frac{N_k^{(1)}(h,a)}{A_{k-1}(a)}+O(h^k),\ k\geq 2,$$

Trong đó

$$A_k(a)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(1-a^i), & k\geq 1, \\ 1, & k=0. \end{cases}$$

Chứng minh: Kết quả này được suy ra trực tiếp từ Định lý 1 với lưu ý rằng nếu $1\leq i\leq k-1$ thì

$$\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{a^{i-j}}\right)=0.$$ ■

Định lý 2: Với $k\geq 2$ hàm $N_k^{(1)}(h,a)$ được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} & N_k^{(1)}(h,a) \\ &= \frac{1}{h}\left[f(x+h)+\sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(1,k)}(a)f\left(x+\frac{h}{a^i}\right)-\frac{A_k(a)}{1-a}f(x)\right], \end{aligned} \tag{6}$$

Trong đó, $\{c_i^{(1,k)}(a), i\geq 1, k\geq 1\}$ là một mảng các số thực thoả điều kiện:

$$c_i^{(1,k)}(a)=\begin{cases} c_i^{(1,k-1)}(a)-a^k, & i=1, \\ c_i^{(1,k-1)}(a)-a^k c_{i-1}^{(1,k-1)}(a), & i=\overline{2,k-2}, \\ -a^k c_{i-1}^{(1,k-1)}(a), & i=k-1, \\ 0, & i\geq k. \end{cases}$$

Chứng minh: Khai triển (6) được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, vì

$$\begin{aligned} & N_2^{(1)}(h,a)=N_1^{(1)}(h,a)-aN_1^{(1)}\left(\frac{h}{a},a\right) \\ &= \frac{1}{h}\big(f(x+h)-f(x)\big)-a\left(\frac{1}{h/a}\left(f\left(x+\frac{h}{a}\right)-f(x)\right)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(f(x+h)-a^2 f\left(x+\frac{h}{a}\right)-(1-a^2)f(x)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left[f(x+h)+\sum_{i=1}^{1} c_i^{(1,2)}(a)f\left(x+\frac{h}{a^i}\right)-\prod_{i=2}^{2}\left(1-a^i\right)f(x)\right]. \end{aligned}$$

Do đó, đẳng thức (6) đúng với $k=2.$ Giả sử đẳng thức này đúng với $k\geq 2$. Ta có:

$$\begin{aligned} & N_{k+1}^{(1)}(h,a)=N_k^{(1)}(h,a)-a^k N_k^{(1)}\left(\frac{h}{a},a\right) \\ &= \frac{1}{h}\left[f(x+h)+\sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(1,k)}(a)f\left(x+\frac{h}{a^i}\right)-\prod_{i=2}^{k}(1-a^i)f(x)\right] \\ &\quad -\frac{a^k}{h/a}\left[f\left(x+\frac{h}{a}\right)+\sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(1,k)}(a)f\left(x+\frac{h}{a^{i+1}}\right)-\prod_{i=2}^{k}(1-a^i)f(x)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[f(x+h)+\left(c_1^{(1,k)}(a)-a^{k+1}\right)f\left(x+\frac{h}{a}\right)\right] \\ &\quad +\frac{1}{h}\left[\sum_{i=2}^{k-1}(c_i^{(1,k)}(a)-a^{k+1}c_{i-1}^{(1,k)}(a))f\left(x+\frac{h}{a^i}\right)\right] \\ &\quad -\frac{1}{h}\left[a^{k+1}c_{k-1}^{(1,k)}(a)f\left(x+\frac{h}{a^k}\right)+\prod_{i=2}^{k+1}(1-a^i)f(x)\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h}\left[f(x+h) + \sum_{i=1}^{k} c_i^{(1,k+1)}(a) f\left(x + \frac{h}{a^i}\right) - \prod_{i=2}^{k+1}(1-a^i) f(x)\right].$$

Vậy, đẳng thức (6) cũng đúng với $k+1$. Định lý được chứng minh. ■

Theo công thức (6) giá trị $N_k^{(1)}(h,a)$ được tính thông giá trị của hàm f tại x và tại các giá trị nằm bên phải x có dạng $x+h/a^i, i=\overline{0,k-1}$ khi $a>0$. Khi $a<0$ thì các điểm $x+h/a^i, i=\overline{0,k-1}$ sẽ nằm luân phiên bên phải và trái điểm x. Kết quả sau đây sẽ cho ta một công thức khai triển "đối xứng hơn".

Định lý 3: Cho b là một số thực cố định, $b \notin \{-1,0,1\}$. Giả sử hàm $f(x)$ được biểu diễn ở dạng (1). Khi đó, với $k \ge 2$ ta có khai triển:

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left[\frac{f(x+h)}{A_{k-1}(a)} + \frac{f(x-h)}{A_{k-1}(b)}\right] + \frac{1}{2h}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{c_i^{(1,k)}(a)}{A_{k-1}(a)} f\left(x+\frac{h}{a^i}\right) - \frac{c_i^{(1,k)}(b)}{A_{k-1}(b)} f\left(x-\frac{h}{b^i}\right)\right] + \frac{1}{2h}\left(\frac{1-b^k}{1-b} - \frac{1-a^k}{1-a}\right) f(x) + O(h^k).$$

Chứng minh: Trong Hệ quả 1, ta thay h bởi $-h$ và a bởi b ta được:

$$f'(x) = \frac{N_k^{(1)}(-h,b)}{A_{k-1}(b)} + O(h^k),\ k \ge 2.$$

Do đó,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{N_k^{(1)}(h,a)}{A_{k-1}(a)} + \frac{N_k^{(1)}(-h,b)}{A_{k-1}(b)}\right] + O(h^k),\ k \ge 2.$$

Áp dụng Định lý 2 ta được điều phải chứng minh. ■

Hệ quả 2: Với điều kiện Định lý 3, ta có khai triển:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2hA_{k-1}(a)} + \frac{1}{2hA_{k-1}(a)}\sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(1,k)}(a)\left[f\left(x+\frac{h}{a^i}\right) - f\left(x-\frac{h}{a^i}\right)\right] + O(h^k).$$

Có thể thấy, công thức khai triển đối xứng trong Hệ quả 2 với số nút (điểm trên lưới) đã tăng lên gần như gấp đôi ($2k$ so với $k+1$ nút ở Hệ quả 1) nhưng bậc xấp xỉ vẫn không đổi và bằng $O(h^k)$. Để cải thiện bậc xấp xỉ, ta có thể xuất phát từ sai phân hướng tâm. Cụ thể, ta xây dựng dãy hàm sau:

$$\begin{cases} N_1^{(2)}(h,a) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \\ N_{i+1}^{(2)}(h,a) = N_i^{(2)}(h,a) - a^{2i} N_i^{(2)}\left(\dfrac{h}{a}, a\right), i \ge 1. \end{cases}$$

Dễ thấy,

$$N_1^{(2)}(h,a) = f'(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} f^{(2i+1)}(x)\frac{h^{2i}}{(2i+1)!}.$$

Bằng cách thực hiện chứng minh tương tự Định lý 1, Hệ quả 1 và Định lý 2 ta cũng có các kết quả sau:

Định lý 4: Với $k \ge 2$ ta có khai triển sau:

$$N_k^{(2)}(h,a) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-a^{2i}) f'(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} f^{(2i+1)}(x)\frac{h^{2i}}{(2i+1)!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{1}{a^{2(i-j)}}\right).$$

Hệ quả 3: Với $k \ge 2$ ta có khai triển sau:

$$f'(x) = \frac{N_k^{(2)}(h,a)}{\bar{A}_{k-1}(a)} + O(h^{2k}),$$

Trong đó

$$\bar{A}_k(a) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(1-a^{2i}), & k \ge 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Định lý 5: Với $k \ge 2$ hàm $N_k^{(2)}(h,a)$ được biểu diễn như sau:

$$N_k^{(2)}(h,a) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] + \frac{1}{2h}\sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(2,k)}(a)\left[f\left(x+\frac{h}{a^i}\right) - f\left(x-\frac{h}{a^i}\right)\right],$$

Trong đó, $\{c_i^{(2,k)}(a), i \ge 1, k \ge 1\}$ là một mảng các số thực thoả điều kiện:

$$c_i^{(2,k)}(a) = \begin{cases} c_i^{(2,k-1)}(a) - a^{2k-1}, & i = 1 \\ c_i^{(2,k-1)}(a) - a^{2k-1}c_{i-1}^{(2,k-1)}(a), & i = \overline{2,k-2}, \\ -a^{2k-1}c_{i-1}^{(2,k-1)}, & i = k-1 \\ 0, & i \ge k. \end{cases}$$

2.2. Xấp xỉ đạo hàm cấp hai

Đối với phép xấp xỉ đạo hàm cấp hai, ta có thể sử dụng công thức sai phân:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2).$$

Sử dụng ý tưởng nâng bậc xấp xỉ tương tự mục trước, ta tiến hành xây dựng dãy hàm sau:

$$\begin{cases} N_1^{(3)}(h,a) = \dfrac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}, \\ N_{i+1}^{(3)}(h,a) = N_i^{(3)}(h,a) - a^{2i} N_i^{(3)}\left(\dfrac{h}{a}, a\right), i \ge 1. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng

$$N_1^{(3)}(h,a) = f''(x) + 2\sum_{i=2}^{+\infty} f^{(2i)}(x)\frac{h^{2(i-1)}}{(2i)!} = f''(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} f^{(2i+2)}(x)\frac{h^{2i}}{(2i+2)!}.$$

Sử dụng phương pháp chứng minh tương tự, ta được các kết quả khai triển sau đây cho phép xấp xỉ đạo hàm cấp hai của hàm số:

Định lý 6: Với $k \geq 2$ ta có khai triển sau:

$$N_k^{(3)}(h,a) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-a^{2i})f''(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} f^{(2i+2)}(x)\frac{h^{(2i)}}{(2i+2)!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{a^{2(i-j)}}\right).$$

Hệ quả 4: Với $k \geq 2$ ta có khai triển sau:

$$f''(x) = \frac{N_k^{(3)}(h,a)}{\overline{A}_{k-1}(a)} + O(h^{2k}).$$

Định lý 7: Với $k \geq 2$ hàm $N_k^{(3)}(h,a)$ được biểu diễn như sau:

$$N_k^{(3)}(h,a) = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h)+f(x-h)\right] + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(3,k)}(a)\left[f\left(x+\frac{h}{a^i}\right)+f\left(x-\frac{h}{a^i}\right)\right] - \frac{2\overline{A}_k}{h^2(1-a^2)}f(x),$$

Trong đó, $\{c_i^{(3,k)}(a), i \geq 1, k \geq 1\}$ là một mảng các số thực thoả điều kiện:

$$c_i^{(3,k)}(a) = \begin{cases} c_i^{(3,k-1)}(a) - a^{2k-2}, & i=1 \\ c_i^{(3,k-1)}(a) - a^{2k-2}c_{i-1}^{(3,k-1)}(a), & i=\overline{2,k-2}, \\ -a^{2k-2}c_{i-1}^{(3,k-1)}, & i=k-1 \\ 0, & i \geq k. \end{cases}$$

2.3. Ví dụ minh hoạ

Xét hàm $f(x)$ trên đoạn $[-1,1]$ xác định như sau:

$$f(x) = \frac{5000e^x}{0{,}1+x^2\cos(x)}.$$

Ta cần tính đạo hàm của $f(x)$ tại $x_0 = 0{,}1$. Giả sử giá trị đạo hàm xấp xỉ được tính theo công thức sai phân hướng tâm, theo Hệ quả 1 và theo Hệ quả 3 lần lượt được kí hiệu f'_{HT}, f'_{HQ1} và f'_{HQ3}. Giá trị chính xác của đạo hàm tại điểm $x_0 = 0{,}1$ được tính xấp xỉ ra số thập phân là -40248,5404696695. Kí hiệu các sai số:

$$\Delta_{HT} = |f'(x_0) - f'_{HT}(x_0)|, \Delta_{HQ1} = |f'(x_0) - f'_{HQ1}(x_0)|,$$
$$\Delta_{HQ3} = |f'(x_0) - f'_{HQ3}(x_0)|.$$

Từ Bảng 1 ta thấy, đối với việc xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân hướng tâm, giá trị f'_{HT} sẽ chính xác hơn nếu ta giảm h. Khi xét cùng tham số k, h và a, nhìn chung giá trị xấp xỉ tính theo Hệ quả 3 có mức độ chính xác cao hơn. Với $h = 0{,}1$ việc tăng nhẹ a sẽ làm tăng mức độ chính xác của các giá trị xấp xỉ.

Tuy nhiên, khi $h = 0{,}001$ việc tăng a đã làm cho giá trị xấp xỉ giảm đi sự chính xác. Điều này có thể giải thích là khi h nhỏ, các giá trị có dạng $x \pm \frac{h}{a^i}, i \geq 1$ sẽ không có sự khác biệt nhiều khi $a > 1$ và cách xa 1. Mặt khác, các nhân tử a^i, a^{2i} trong các công thức truy hồi của $N_i^{(1,k)}, N_i^{(2,k)}$ có thể "phóng đại" các sai số tính toán. Điều này dẫn đến ta không nên chọn a lớn, đặc biệt khi h nhỏ thì nên chọn $a > 1$ và ở gần 1.

***Bảng 1.** So sánh sai số giữa các phương pháp*

Tham số	$k=5; h=0{,}1; a=2$	$k=5; h=0{,}1; a=5$
f'_{HT}	-30643,0690979360	-30643,0690979360
Δ_{HT}	9605,4713717335	9605,4713717335
f'_{HQ1}	-40248,3155828278	-40248,5404499403
Δ_{HQ1}	0,2248868416	0,0000197292
f'_{HQ3}	-40248,5404698938	-40248,5404698945
Δ_{HQ3}	0,0000002243	0,0000002250
Tham số	$k=5; h=0{,}001; a=2$	$k=5; h=0{,}001; a=10$
f'_{HT}	-40247,4632282500	-40247,4632282500
Δ_{HT}	1,0772414195	1,0772414195
f'_{HQ1}	-40248,5404847032	-40248,5516207384
Δ_{HQ1}	0,0000150337	0,0111510689
f'_{HQ3}	-40248,5404670368	-40248,5425204060
Δ_{HQ3}	0,0000026327	0,0020507365

3. Kết luận

Bài báo đã thiết lập công thức xấp xỉ bậc cao cho đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 của hàm số tại một điểm (Hệ quả 1, 2, 3 và 4). Các điểm nút được sử dụng có dạng $x \pm \frac{h}{a^i}, i \geq 1$. Khi chọn $a > 1$ thì dãy các điểm nút này sẽ hội tụ nhanh chóng đến điểm x khi giá trị i tăng lên. Điều này phù hợp với việc tính xấp xỉ đạo hàm tại một điểm trên đồ thị mà đồ thị tại đó nhìn chung có độ dốc lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 1996.

[2] Nguyễn Minh Chương (chủ biên), Nguyễn Văn Khải, Khuất Văn Ninh, Nguyễn Văn Tuấn, Nguyễn Tường, *Giải tích số*, NXB Giáo dục, 2007.

[3] Francis Bach, "On the Effectiveness of Richardson Extrapolation in Data Science", *Journal on Mathematics of Data Science*, 3 (4), 2021, 1251 – 1277.

[4] Joe D. Hoffman, *Numerical methods for engineers and scientists*, McGraw-Hill, Inc, New York, 1992.

[5] Avram Sidi, *Practical extrapolation methods: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2003.