

## **PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA DẦM NANO CONG FG NẪM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH-RITZ**

**Trần Văn Kế<sup>1</sup>, Nguyễn Thị Hồng<sup>2</sup>**

**Tóm tắt:** Trong bài báo này, phương pháp giải tích sử dụng các đa thức Chebyshev trên cơ sở phương pháp Rayleigh-Ritz để phân tích dao động riêng của dầm nano cong cơ tính biến thiên có lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi. Các phương trình động học tổng quát của dầm được suy ra từ nguyên lý Hamilton's và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao Quasi 3D. Cơ tính của vật liệu dầm thay đổi biến thiên theo chiều dày theo quy luật phân bố hàm số mũ và lỗ rỗng được mô tả theo hai quy luật đồng đều và không đồng đều. Môi trường nhiệt độ và độ ẩm tác động lên kết cấu được giả định chỉ gây ra tải trọng tác dụng theo phương ngang mà không tác động đến cơ tính vật liệu. Tính chính xác của phương pháp do bài báo đề xuất được xác minh bằng cách so sánh các kết quả số thu được với các kết quả của các công trình đã xuất bản trong tài liệu. Ngoài ra, ảnh hưởng của độ cong, hệ số phi địa phương, hệ số lỗ rỗng, hệ số độ cứng nền đàn hồi đến đáp ứng dao động riêng của dầm được đánh giá chi tiết.

**Từ khóa:** Đàn hồi phi địa phương, phương pháp Rayleigh-Ritz, dầm cong nano FG, dao động riêng.

### **1. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU**

Trong các ngành công nghiệp đương đại như điện tử, y học, dược phẩm, quang học, v.v., các vật liệu và cấu trúc vi mô và kích thước nano đã trở nên phổ biến (V.Y. Prinz và ctv, 2001; M. Brzezinski và ctv, 2015). Kết quả là, nghiên cứu về hành vi cơ học của các cấu trúc vi mô và nano đã được công bố đã đạt được rất nhiều thành công (V.K. Tran và ctv, 2020; N. Triantafyllidis và ctv, 1986). Ngoài ra, việc nghiên cứu ứng xử cơ học của các cấu trúc và vật liệu có kích thước micro và nano là một yêu cầu rất quan trọng và cấp thiết. Cùng với xu hướng đó, hàng loạt lý thuyết tính toán đã được đề xuất và phát minh ra (J.N. Reddy và ctv, 2015; A. Eringen và ctv, 2003). Bài báo này nhằm mục đích thực hiện phân tích dao động cơ-nhiệt-ẩm của các dầm nano cong xấp xỉ có cơ tính biến thiên theo quy luật phân bố hàm số mũ nằm trên nền đàn hồi.

Có thể tóm tắt một số công trình tiêu biểu bằng

lý thuyết phi địa phương của Eringen như sau. Jena và cộng sự (S.K. Jena và ctv, 2019) đã nghiên cứu ổn định của một dầm nano Euler-Bernoulli được đặt trong trường điện từ để xem nó hoạt động như thế nào. Li và các đồng nghiệp (Y.S. Li và ctv, 2016) đã sử dụng lý thuyết phi địa phương và lý thuyết dầm Timoshenko để nghiên cứu sự uốn tĩnh, ổn định và dao động riêng của các dầm nano từ tính đàn hồi. Sự thay đổi của điện thế và điện thế từ dọc theo hướng độ dày của dầm nano được tính toán bằng cách sử dụng phương trình Maxwell và điều kiện biên từ trường. Nguyên lý Hamilton được sử dụng để phát triển các phương trình chi phối của dầm nano từ đàn hồi. Alzahrani và cộng sự. E.O. Alzahrani và ctv, 2013 đã nghiên cứu tác động của tải trọng quy mô nhỏ đối với sự uốn tĩnh của các tấm nano, chẳng hạn như tấm graphene, tựa trên đàn hồi hai tham số và chịu ứng suất cơ-nhiệt-hygro. Azimi và ctv, 2016 đã trình bày một nghiên cứu về dao động riêng của các dầm nano có cơ tính biến thiên theo quy luật phân bố hàm số mũ quay theo trục chịu tải nhiệt phi tuyến trong mặt phẳng. Dựa trên lý

---

<sup>1</sup>Bộ môn Cơ học vật rắn - Khoa Cơ khí, Học viện KTQS

<sup>2</sup>Bộ môn Đồ họa kỹ thuật - Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi

thuyết dầm Timoshenko, và áp dụng nguyên lý Hamilton. S. Dastjerdi và ctv, 2020 đã phát triển một lý thuyết nửa ba chiều rất hiệu quả để nghiên cứu phân tích uốn cơ nhiệt- ẩm phi tuyến tính của một đĩa quay có cơ tính biến thiên (FGM) rất dày trong môi trường nhiệt-ẩm, có tính đến độ xấp như một khiếm khuyết về cấu trúc. S. Ebrahimi và ctv, 2019 đã sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli để khảo sát hành vi dao động của một nhóm nano xấp được có cơ tính biến thiên (2D-FG) theo hai hướng dưới tải cơ học ẩm-nhiệt. Các đặc tính của dầm nano 2D-FG được coi là ở dạng lý thuyết luật lũy thừa.

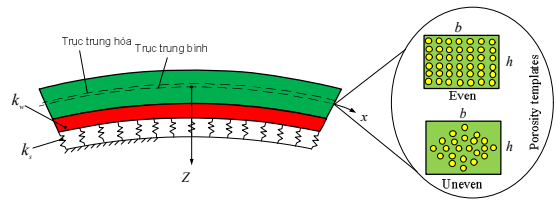
Theo sự hiểu biết của tác giả, chưa có nghiên cứu nào đề xuất và nghiên cứu dao động của cơ-nhiệt ẩm của các dầm nano cong xấp có cơ tính biến thiên nằm trên nền đàn hồi. Do đó, mục đích của bài viết này là đưa ra một mô hình bài toán cho chủ đề này. Trong đó, phương pháp phân tích dao động cơ-nhiệt ẩm của các dầm nano cong xấp có cơ tính biến thiên (FGP) tựa trên nền đàn hồi sử dụng đa thức Chebyshev dựa trên phương pháp Rayleigh-Ritz được trình bày. Nguyên lý Hamilton được sử dụng để suy ra phương trình chi phối của dầm nano, phương trình này dựa trên lý thuyết dầm biến dạng cắt bậc cao gần như 3D kết hợp với lý thuyết phi địa phương. Đây là một đóng góp mới giúp chúng ta hiểu được hành vi cơ học của cấu trúc nano. Ngoài ra, lý thuyết và phương pháp nghiên cứu cung cấp một khía cạnh hấp dẫn cho lĩnh vực cơ học tính toán.

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

### 2.1. Dầm nano cong làm bằng vật liệu FGP

Xét dầm hình chữ nhật có chiều dài  $L$ , chiều rộng  $b$  và chiều dày  $h$  như Hình 1. Tính chất vật liệu được giả thiết thay đổi liên tục từ mặt trên ( $Z = +h/2$ ) đến mặt dưới ( $Z = -h/2$ ) theo phân bố luật lũy thừa. Bề mặt trên của dầm nano là hoàn toàn bằng gốm trong khi bề mặt dưới là kim

loại hoàn toàn. Nền đàn hồi là nền Winkler-Pasternak, gồm hai thông số là hệ số cứng  $k_w$  và hệ số cứng trượt  $k_s$ .



Hình 1. Mô hình dầm nano cong làm bằng vật liệu FGP nằm trên nền đàn hồi

Do quá trình chế tạo dầm FG xuất hiện các lỗ rỗng tế vi nên quy luật cơ tính của dầm FG có lỗ rỗng được mô tả bởi công thức sau:

$$\begin{cases} S(z) = S_m + (S_c - S_m)V_c - \vartheta(S_c + S_m) \\ V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{p_z} \end{cases} \quad (1)$$

ở đây:  $S$  là ký hiệu chung cho cơ tính của vật liệu bao gồm mô đun đàn hồi  $E$ , khối lượng riêng  $\rho$  và hệ số Poát  $\nu$ .  $m$  là ký hiệu của thành phần kim loại,  $c$  là thành phần gốm,  $p_z$  là hệ số mũ thể tích của vật liệu.  $\vartheta$  là hệ số điều khiển lỗ rỗng của vật liệu,  $\chi$  là thể tích lỗ rỗng, mối quan hệ giữa  $\vartheta$  và  $\chi$  theo các quy luật phân bố lỗ rỗng được xác định bởi D. Shahsavari và ctv, 2018:

Quy luật phân bố lỗ rỗng đồng đều (Type 1):

$$\vartheta = \frac{\chi}{2} \quad (2)$$

Quy luật phân bố lỗ rỗng không đồng đều (Type 2):

$$\vartheta = \frac{\chi}{2} \left(1 + \frac{2|z|}{h}\right) \quad (3)$$

### 2.2. Lý thuyết biến dạng cắt Quasi 3D

Trong nghiên cứu này, trường chuyển vị đối với điểm bất kỳ của dầm FGP cong trong mặt phẳng trung bình được xác định theo lý thuyết biến dạng cắt tựa Quasi 3D được xác định như sau:

$$\begin{cases} U_1(x, y, Z, t) = \left(1 + \frac{Z}{R_x}\right) U_0(x, y, t) - Z \frac{\partial W^b}{\partial x} - f(Z) \frac{\partial W^s}{\partial x} \\ U_2(x, y, Z, t) = W^b + W^s + g(Z) W^{bz} \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó:  $U_1, U_3$  là dịch chuyển theo phương x và y;  $U_0, W^b, W^s$  and  $W^{bz}$  là các biến số.  $R_x$  là bán kính cong của dầm:

$R_x = \frac{a}{\phi}$ ;  $\phi$  là góc mở của dầm. Trường biến dạng tuyến tính của dầm cong được suy ra từ trường chuyển vị (4) như sau:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{U_3}{R_x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{W^b + W^s}{R_x} - Z \left( \frac{\partial^2 W^b}{\partial x^2} - \frac{\partial U_0}{R_x \partial x} \right) - f(Z) \frac{\partial^2 W^s}{\partial x^2} + \frac{g(Z) W^{bz}}{R_x} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_3}{\partial z} = g'(Z) W^{bz} \quad (6)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{U_0}{R_x} = g(Z) \left( \frac{\partial W^s}{\partial x} + \frac{\partial W^{bz}}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$f(Z)$  và  $g(Z)$  được cho bởi công thức sau:

$$f(Z) = Z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right); g(Z) = 1 - \frac{\partial f(Z)}{\partial z} = \cos\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \quad (8)$$

Công thức trên được viết gọn lại như sau

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon^1 + Z\varepsilon^2 + f(Z)\varepsilon^3 + g(Z)\varepsilon^4; \varepsilon_{zz} = g'(Z)\varepsilon^5; \gamma_{xz} = g(Z)\gamma^1. \quad (9)$$

ở đây:

$$\varepsilon^1 = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{W^b + W^s}{R_x}; \varepsilon^2 = -\frac{\partial^2 W^b}{\partial x^2} + \frac{\partial U_0}{R_x \partial x}; \varepsilon^3 = -\frac{\partial^2 W^s}{\partial x^2}; \varepsilon^4 = \frac{W^{bz}}{R_x}; \varepsilon^5 = W^{bz}; \gamma^1 = \frac{\partial W^s}{\partial x} + \frac{\partial W^{bz}}{\partial x}. \quad (10)$$

### 2.3. Lý thuyết phi địa phương

Trong lý thuyết dầm cục bộ (lý thuyết dầm cổ điển), tensor ứng suất tại bất kỳ điểm nào phụ thuộc vào tensor biến dạng tại điểm đó. Tuy nhiên, lý thuyết phi địa phương giả định rằng véc tơ ứng suất tại một điểm phụ thuộc vào tensor biến dạng tại tất cả các điểm. Mối quan hệ ứng suất-biến dạng có thể được viết dưới dạng A. Eringen và ctv, 2003:

$$\left(1 - \mu_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (11)$$

trong đó  $\sigma_{ij}$  là tensor ứng suất phi địa phương,  $C_{ijkl}$  là hệ số hằng số đàn hồi,  $\varepsilon_{ij}$  là véc tơ biến dạng cục bộ,  $\mu_1$  đại diện cho hiệu ứng quy mô nhỏ trong cấu trúc nano được gọi là hệ số phi địa phương.

Theo lý thuyết phi địa phương, mô hình công thức (11) đối với một tia nano đàn hồi có thể được biểu thị như sau:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \mu_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= \frac{E(Z)}{(1-\nu(Z)^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu(Z)\varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} - \mu_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} &= \frac{E(Z)}{(1-\nu(Z)^2)} (\nu(Z)\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{xz} - \mu_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} &= \frac{E(Z)}{2(1+\nu(Z))} (\gamma_{xz}) \end{aligned} \quad (12)$$

### 2.4. Phương pháp Rayleigh-Ritz

Năng lượng biến dạng U của dầm nano cong được tính bởi

$$U = \frac{1}{2} \int_L (\varepsilon^{1T} N^x + \varepsilon^{2T} M^x + \varepsilon^{3T} L^x + \varepsilon^{4T} P^x + \gamma^{1T} Q^x + \varepsilon^{5T} N^z) dx \quad (13)$$

Trong đó  $N^x, N^z, Q^x, M^x, L^x, P^x$  lần lượt là các thành phần nội lực.

Năng lượng của công của ngoại lực K được tính như sau

$$K = \frac{1}{2} \int_L (R + F^{nl}) dx \quad (14)$$

Trong đó:

$$R = k_w(W^b + W^s)^2 + k_s \left( \frac{\partial(W^b + W^s)}{\partial x} \right)^2;$$

$$F^{HT} = f_1^{HT} \left( \frac{\partial(W^b + W^s)}{\partial x} \right)^2 + f_2^{HT} \left( \frac{\partial W^{bZ}}{\partial x} \right)^2;$$
(15)

Ở đây:  $f_1^{HT}, f_2^{HT}$  lần lượt là lực nhiệt âm tác dụng theo phương nằm ngang của dầm do môi trường nhiệt độ và độ ẩm gây ra với quy luật phân bố đồng đều theo chiều dày S.Ebrahimi và ctv, 2016: Động năng V của hệ xác định bởi:

$$V = \frac{1}{2} \int_L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_b(x, Z) \left( (\dot{U}_1)^2 + (\dot{U}_2)^2 \right) dz dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_L \left( I_1 (\dot{U}_0)^2 + I_2 (\dot{W}^b + \dot{W}^s)^2 - 2I_3 \dot{U}_0 \frac{\partial W^b}{\partial x} - 2I_4 \dot{U}_0 \frac{\partial W^s}{\partial x} + I_5 \left( \frac{\partial W^b}{\partial x} \right)^2 + I_6 \left( \frac{\partial W^s}{\partial x} \right)^2 + 2I_7 \frac{\partial W^b}{\partial x} \frac{\partial W^s}{\partial x} + 2I_8 W^{bZ} (\dot{W}^b + \dot{W}^s) + I_9 (\dot{W}^{bZ})^2 \right) dx$$
(16)

Tổng năng lượng của dầm nano cong được tính như sau

$$\Pi = U + K - V = \frac{1}{2} \int_L \left( \varepsilon^{1T} N^x + \varepsilon^{2T} M^x + \varepsilon^{3T} L^x + \varepsilon^{4T} P^x + \gamma^{1T} Q^x + \varepsilon^{5T} N^z \right) dx +$$

$$\frac{1}{2} \int_L \left( R + F^{HT} \right) dx - \frac{1}{2} \int_L \left( I_1 (\dot{U}_0)^2 + I_2 (\dot{W}^b + \dot{W}^s)^2 - 2I_3 \dot{U}_0 \frac{\partial W^b}{\partial x} - 2I_4 \dot{U}_0 \frac{\partial W^s}{\partial x} + I_5 \left( \frac{\partial W^b}{\partial x} \right)^2 + I_6 \left( \frac{\partial W^s}{\partial x} \right)^2 + 2I_7 \frac{\partial W^b}{\partial x} \frac{\partial W^s}{\partial x} + 2I_8 W^{bZ} (\dot{W}^b + \dot{W}^s) + I_9 (\dot{W}^{bZ})^2 \right) dx = \text{const}$$
(17)

Trong nghiên cứu này, đa thức Chebyshev làm giảm chi phí tính toán. Một vài số hạng dịch chuyển loại thứ nhất được coi là một hàm đầu tiên của đa thức Chebyshev đã dịch của hình dạng so với đa thức đại số vì thực tế là đa loại thứ nhất có thể được biểu thị bằng S.K. thức Chebyshev là đa thức trực giao, điều này Jena và ctv, 2019:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = x, \quad \alpha_n = 2x\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}. \quad (18)$$

Các chuyển vị để thỏa mãn các điều kiện biên chung của dầm nano cong được đưa ra là

$$U_0 = \sum_{r=1}^n b_r \phi_r(x) e^{j\omega t}, \quad W^b = \sum_{r=1}^n c_r \phi_r(x) e^{j\omega t}, \quad (19)$$

$$W^s = \sum_{r=1}^n d_r \gamma_r(x) e^{j\omega t}, \quad W^{bZ} = \sum_{r=1}^n e_r \lambda_r(x) e^{j\omega t}, \quad (20)$$

$$\phi_r = f_u \alpha_{r-1}(x), \quad \phi_r = f_w \alpha_{r-1}(x), \quad \gamma_r = f_w \alpha_{r-1}(x), \quad \lambda_r = f_w \alpha_{r-1}(x), \quad (21)$$

ở đây  $b_r, c_r, d_r, e_r$  là các hệ số,  $\alpha_n(x)$  là đa thức Chebyshev được bậc m.  $f_u, f_w$  là hàm điều khiển của điều kiện biên được thể hiện trong Bảng 1.

**Bảng 1. Hàm điều khiển điều kiện biên của dầm**

Điều kiện biên	$f_u$	$f_w$	Điều kiện biên	$f_u$	$f_w$
SS	$\cos\left(\pi \frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(\pi \frac{x}{a}\right)$	CS	$x$	$x^2(a-x)$
CC	$\sin\left(\pi \frac{x}{a}\right)$	$\sin^2\left(\pi \frac{x}{a}\right)$	CF	$\sin\left(\pi \frac{x}{2a}\right)$	$1 - \cos\left(\pi \frac{x}{2a}\right)$

Thay thế các công thức (19) - (20) vào công thức (17) và sử dụng phương trình Lagrange, ta có:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{d}} = 0, \quad (22)$$

ở đây  $d = \{U_0, W^b, W^s, W^{bZ}\}$  hành vi uốn tĩnh, dao động riêng của dầm nano cong FG có thể thu được bằng cách giải các phương trình sau

$$\left( \begin{matrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} & K^{24} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} & K^{34} \\ K^{41} & K^{42} & K^{43} & K^{44} \end{matrix} \right) - \omega^2 \left( \begin{matrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} & M^{14} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} & M^{24} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} & M^{34} \\ M^{41} & M^{42} & M^{43} & M^{44} \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} U_0 \\ W^b \\ W^s \\ W^{bz} \end{pmatrix} = 0 \quad (23)$$

### 3. KẾT QUẢ SỐ

Trong mục này, bằng cách sử dụng phương pháp Rayleigh – Ritz, một số ví dụ được trình bày để xác nhận các ảnh hưởng của hệ số phi địa phương, hệ số xoắn, độ chênh lệch nhiệt độ, đường cong xuyên tâm, độ cứng của nền đối với đáp ứng dao động tự do của nhóm nano cong xoắn FG. Tính chất vật liệu của dầm nano lấy theo vật liệu  $Al/Al_2O_3$ . Các thông số hình học và số liệu đầu vào của khảo sát:  $a = 10nm$ ,  $b = 1nm$ ;  $\alpha/h = 5$ ,  $\Delta T = 100K$ ,  $\Delta C = 1\%$ ,  $p_z = 1$  và  $a/h = 10$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $p_z = 2$ ,  $\chi = 0.2$ ,  $K_w = 50$ ,  $K_s = 5$ ,  $\Delta T = 100K$ ,  $\Delta C = 1\%$ . Các công thức không thức nguyên được cho như dưới đây:

$$\Omega_m = \omega_m \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_c}{E_c}}, \quad m \text{ là tần số thứ } m^{th}.$$

$$K_w = \frac{k_w a^4}{D_c}, \quad K_s = \frac{k_s a^2}{D_c}, \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)}$$

**Bảng 2.** So sánh tần số dao động riêng không thức nguyên  $\Omega_1$  của dầm nano cong

Phương pháp	n	$\alpha/h = 5$				$\alpha/h = 20$			
		$\mu_1 = 0$	$\mu_1 = 1$	$\mu_1 = \sqrt{2}$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 0$	$\mu_1 = 1$	$\mu_1 = \sqrt{2}$	$\mu_1 = 2$
Bài báo $\varepsilon_{zz} \neq 0$	1	9.2909	8.8637	8.4906	7.8669	9.8294	9.3775	8.9828	8.3229
	2	9.2909	8.8637	8.4906	7.8669	9.8294	9.3775	8.9827	8.3229
	4	9.2909	8.8637	8.4906	7.8669	9.8294	9.3775	8.9828	8.3229
	6	9.2909	8.8637	8.4906	7.8669	9.8294	9.3775	8.9828	8.3229
	8	9.2909	8.8637	8.4906	7.8669	9.8294	9.3775	8.9828	8.3229
	10	9.2909	8.8637	8.4906	7.8669	9.8294	9.3775	8.9828	8.3229
	Navier	9.2909	8.8637	8.4906	7.8669	9.8294	9.3775	8.9827	8.3229
Present $\varepsilon_{zz} = 0$	$m = 1$	9.2745	8.8482	8.4757	7.8530	9.8281	9.3763	8.9816	8.3218
	Navier	9.2745	8.8482	8.4757	7.8530	9.8281	9.3763	8.9816	8.3218
Navier -sinz2 M. Ganapathi		9.2947	8.8674	8.4941	7.8701	9.8296	9.3777	8.9830	8.3231

### 3.2. Kết quả chính

Tại tiểu mục này, ảnh hưởng của độ cong, hệ số phi địa phương  $\mu_1$ , hệ số điều khiển lỗ rỗng  $\chi$ , hệ số độ cứng nền đàn hồi  $K_w, K_s$ , đến đặc tính

### 3.1. Xác minh độ chính xác của phương pháp

Độ hội tụ và độ chính xác của các công thức tính theo lời giải Navier's và Chebyshev polynomials-based Rayleigh-Ritz mà bài báo thiết lập cho vấn đề dao động riêng của dầm cong được bài báo nghiên cứu cụ thể. Đầu tiên, Bảng 2 biểu thị kết quả tần số  $\Omega_1$  theo tỷ lệ  $a/h = 5, 20$  và hệ số phi địa phương  $\mu_1$  khi sử dụng hai lời giải trên cho dầm nano thẳng có liên kết tựa đơn. Kết quả này được kiểm chứng với kết quả trong các công trình M. Ganapathi và ctv, 2017, ta thấy rằng, đối với điều kiện biên SS, sử dụng lời giải Rayleigh-Ritz dựa trên đa thức Chebyshev chỉ cần  $n=1$  tương đương với đa thức Chebyshev có hai số hạng là kết quả  $\Omega_1$  hội tụ và đạt độ chính xác như sử dụng lời giải chính xác Navier's.

dao động riêng của  $Al/Al_2O_3$  dầm nano cong được phát hiện, độ cong của dầm được nghiên cứu ở 2 góc  $\phi = 30^\circ, 120^\circ$ ; hệ số phi địa phương  $\mu_1$  thay đổi từ  $\mu_1 = 0, 1, \sqrt{2}, 2$  nm; hệ số điều

khiến lỗ rỗng  $\chi$  được cho là  $\chi = 0, 0.1, 0.2, 0.4$ ; hệ số độ cứng nền đàn hồi Pasternak's  $K_w, K_s$  được cho ở 4 trường hợp khác nhau là  $K_w, K_s = (0,0), (100,0), (0,10), (100,10)$ . Khi áp đặt điều kiện biên SS lên kết cấu ta thu được kết quả tần số  $\Omega_1$  như trong bảng 3, từ bảng kết quả này, chúng tôi có một số nhận xét sau: đối với dầm nano cong có quy luật lỗ rỗng là phân bố không đồng đều (Type 2) thì khi hệ số điều khiển lỗ rỗng tăng thì tần số  $\Omega_1$  cũng tăng lên. Tuy nhiên khi vật liệu có lỗ rỗng theo quy luật phân bố đồng đều thì kết quả của  $\Omega_1$  biến đổi phức tạp theo  $\chi$  và các thông số khác của kết cấu, ví dụ như

khi kết cấu dầm cong không có nền đàn hồi khi  $\phi = 30^\circ$  thì  $\chi$  tăng lên thì  $\Omega_1$  giảm đi, còn  $\phi = 120^\circ$  thì  $\chi$  tăng lên thì  $\Omega_1$  lại tăng lên. Còn khi kết cấu tựa lên nền đàn hồi thì khi  $\chi$  tăng lên thì  $\Omega_1$  đều tăng lên. Trong trường hợp  $\Omega_1$  tăng thì quy luật phân bố đồng đều cho tần số  $\Omega_1$  cao hơn quy luật phân bố không đồng đều. Đối với sự tăng lên của hệ số phi địa phương  $\mu_1$  thì đều làm cho tần số  $\Omega_1$  giảm đi. Ngược với sự tăng lên của  $\mu_1$ , sự tăng lên của độ cứng nền đàn hồi làm kết cấu dầm trở lên cứng vững hơn dẫn đến tần số  $\Omega_1$  tăng theo. Dầm cong có  $\phi = 30^\circ$  thì cho tần số  $\Omega_1$  lớn hơn khi dầm cong có  $\phi = 120^\circ$ .

**Bảng 3. Tần số không thứ nguyên  $\Omega_1$  của SS  $Al/Al_2O_3$  dầm nano cong đặt trên nền đàn hồi**

$K_w, K_s$	$\chi$	Lỗ rỗng	$\phi = 30^\circ$				$\phi = 120^\circ$			
			$\mu_1 = 0$	1	$\sqrt{2}$	2	$\mu_1 = 0$	1	$\sqrt{2}$	2
0,0	0	Perfect	6.3779	6.0421	5.7467	5.2475	2.5934	2.3971	2.2199	1.9076
	0.1	Type 1	6.2962	5.9701	5.6835	5.1999	2.6288	2.4436	2.2773	1.9874
		Type 2	6.5119	6.1737	5.8763	5.3745	2.7140	2.5207	2.3471	2.0439
	0.2	Type 1	6.1490	5.8357	5.5605	5.0970	2.6320	2.4586	2.3039	2.0363
		Type 2	6.6576	6.3161	6.0161	5.5103	2.8380	2.6465	2.4753	2.1785
	0.4	Type 1	5.4085	5.1423	4.9088	4.5167	2.4296	2.2892	2.1651	1.9535
		Type 2	6.9914	6.6406	6.3328	5.8148	3.1010	2.9100	2.7402	2.4489
100,0	0	Perfect	12.641	12.474	12.332	12.105	9.6169	9.5608	9.5128	9.4344
	0.1	Type 1	13.099	12.944	12.813	12.602	10.089	10.037	9.9918	9.9173
		Type 2	12.929	12.761	12.618	12.390	9.8586	9.8016	9.7529	9.6732
	0.2	Type 1	13.626	13.485	13.366	13.176	10.637	10.588	10.545	10.475
		Type 2	13.235	13.065	12.921	12.690	10.112	10.054	10.005	9.9238
	0.4	Type 1	14.967	14.869	14.785	14.651	12.064	12.024	11.990	11.929
		Type 2	13.905	13.730	13.582	13.344	10.662	10.601	10.548	10.462
100,10	0	Perfect	16.632	16.502	16.391	16.213	13.227	13.174	13.127	13.046
	0.1	Type 1	17.345	17.224	17.121	16.954	13.585	13.832	13.785	13.702
		Type 2	17.014	16.882	16.771	16.591	13.545	13.491	13.442	13.358
	0.2	Type 1	18.174	18.063	17.968	17.813	14.650	14.978	14.549	14.463
		Type 2	17.418	17.284	17.171	16.987	13.879	13.823	13.773	13.685
	0.4	Type 1	20.339	20.249	20.175	20.050	16.658	16.607	16.551	16.426
		Type 2	18.295	18.157	18.039	17.848	14.601	14.540	14.486	14.389

#### 4. KẾT LUẬN

Sử dụng phương pháp giải tích dựa trên phương pháp Rayleigh-Ritz và đa thức Chebyshev, bài báo đã phân tích hành vi dao động cơ-nhiệt hygro của dầm nano FGP cong nằm trên

nền đàn hồi. Các phương trình chi phối của dầm nano cong được suy ra dựa trên nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của các thông số khác nhau, chẳng hạn như độ cong, hệ số phi địa phương, hệ số xoắn, hệ số độ cứng đàn hồi của nền đàn hồi đối

với dao động tự do của dầm nano cong. Các kết quả chính mà bài báo thu được như sau:

- Sự tăng lên của hệ số phi địa phương  $\mu_1$  dẫn đến giảm tần số dao động riêng của các dầm nano FGP cong.

- Đối với phân bố không đều, khi tăng hệ số độ xấp  $\chi$  làm tăng tần số dao động riêng, tuy nhiên

đối với phân bố đều, khi hệ số xấp tăng thì tần số dao động riêng tăng hoặc giảm phải xét trong trường hợp kết cấu cụ thể.

- Độ cứng nền đàn hồi  $K_w, K_s$  cũng góp phần làm tăng tần số dao động riêng của kết cấu, do khi độ cứng nền tăng lên làm tăng độ cứng tổng thể của kết cấu.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- E. O. Alzahrani, A. M. Zenkour, and M. Sobhy, "Small scale effect on hygro-thermo-mechanical bending of nanoplates embedded in an elastic medium," *Compos. Struct.*, vol. 105, pp. 163–172, 2013
- M. Azimi, S. S. Mirjavadi, N. Shafiei, and A. M. S. Hamouda, "Thermo-mechanical vibration of rotating axially functionally graded nonlocal Timoshenko beam," *Appl. Phys. A*, vol. 123, no. 1, p. 104, 2016
- M. Brzeziński and T. Biela, "Micro- and nanostructures of polylactide stereocomplexes and their biomedical applications," *Polym. Int.*, vol. 64, no. 12, pp. 1667–1675, Dec. 2015
- S. Dastjerdi, Y. Tadi Beni, and M. Malikan, "A comprehensive study on nonlinear hygro-thermo-mechanical analysis of thick functionally graded porous rotating disk based on two quasi-three-dimensional theories," *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2020
- S. Ebrahimi-Nejad, G. R. Shaghaghi, F. Miraskari, and M. Kheybari, "Size-dependent vibration in two-directional functionally graded porous nanobeams under hygro-thermo-mechanical loading," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 134, no. 9, 2019
- S. Ebrahimi and M. R. Barati, "Wave propagation analysis of quasi-3D FG nanobeams in thermal environment based on nonlocal strain gradient theory," *Appl. Phys. A Mater. Sci. Process.*, vol. 122, no. 9, 2016
- A. Eringen, and J. Wegner, *Nonlocal Continuum Field Theories*, vol. 56, no. 2. 2003
- M. Ganapathi and O. Polit, "Dynamic characteristics of curved nanobeams using nonlocal higher-order curved beam theory," *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures*, vol. 91, pp. 190–202, 2017
- S. K. Jena, S. Chakraverty, and F. Tornabene, "Buckling Behavior of Nanobeams Placed in Electromagnetic Field Using Shifted Chebyshev Polynomials-Based Rayleigh-Ritz Method," *Nanomaterials*, vol. 9, no. 9. 2019
- Y. S. Li, P. Ma, and W. Wang, "Bending, buckling, and free vibration of magneto-electroelastic nanobeam based on nonlocal theory," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 27, no. 9, pp. 1139–1149, 2016
- N. D. Nguyen, T. K. Nguyen, H. T. Thai, and T. P. Vo, "A Ritz type solution with exponential trial functions for laminated composite beams based on the modified couple stress theory," *Compos. Struct.*, vol. 191, pp. 154–167, 2018
- V. Y. Prinz, D. Grützmacher, A. Beyer, C. David, B. Ketterer, and E. Deckardt, "A new technique for fabricating three-dimensional micro- and nanostructures of various shapes," *Nanotechnology*, vol. 12, no. 4, pp. 399–402, 2001
- J. N. Reddy, C. W. Lim, and G. Zhang, "A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 78, pp. 298–313, 2015

- D. Shahsavari, B. Karami, H. R. Fahham, and L. Li, "On the shear buckling of porous nanoplates using a new size-dependent quasi-3D shear deformation theory," *Acta Mech.*, vol. 229, no. 11, pp. 4549–4573, 2018
- V. K. Tran, T. T. Tran, M. Van Phung, Q. H. Pham, and T. Nguyen-Thoi, "A Finite Element Formulation and Nonlocal Theory for the Static and Free Vibration Analysis of the Sandwich Functionally Graded Nanoplates Resting on Elastic Foundation," *J. Nanomater.*, vol. 2020, 2020
- N. Triantafyllidis and E. C. Aifantis, "A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials," *J. Elast.*, vol. 16, no. 3, pp. 225–237, 1986

**Abstract:**

**FREE VIBRATION ANALYSIS OF FG CURVED NANOBEAM RESTING ON ELASTIC FOUNDATION USING RAYLEIGH-RITZ METHOD**

*In this paper, an analytical solution using Chebyshev polynomials based on the Rayleigh-Ritz method to analyze the free vibration analysis of functionally graded porous (FGP) curved nanobeams embedded in an elastic medium. Hamilton's principle is based on the Quasi 3D higher-order shear deformation beam theory, in conjunction with nonlocal elasticity theory, the governing equation of nanobeam is derived. Material properties of beam continuously change through the thickness via a power-law distribution and porosity distributions are described by two laws including even porosity distribution and uneven porosity distribution, respectively. Thermal and moisture subject on structures is assumed to cause tension load in the plane and do not change the material's mechanical properties. The accuracy of the proposed method is verified by comparing the obtained numerical results with those of the published works in the literature. In addition, the influence of the curve of the beam, nonlocal coefficient, porosity coefficient, stiffness foundation of the beam on the vibration response of the nanobeam is examined in detail.*

**Keywords:** Nonlocal elasticity, Rayleigh-Ritz method, FG curved nanobeam, free vibration.

---

Ngày nhận bài: 26/4/2022

Ngày chấp nhận đăng: 29/6/2022