TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 19, Số 8 (2022): 1387-1392

Vol. 19, No. 8 (2022): 1387-1392

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.8.3518(2022)

Bài báo nghiên cứu

PHÂN TÍCH MA TRẬN TRÊN TRƯỜNG VÔ HẠN THÀNH CÁC GIAO HOÁN TỬ CỦA CÁC MA TRẬN LŨY ĐƠN CHỈ SỐ 2

Lê Quang Trường

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Lê Quang Trường – Email: truong.hcmue@gmail.com

Ngày nhận bài: 07-8-2022; ngày nhận bài sửa: 18-8-2022; ngày duyệt đăng: 26-8-2022

TÓM TẮT

Cho F là một trường và A là một ma trận trong nhóm tuyến tính đặc biệt trên trường F. Khi F là trường số phức $\mathbb{C}$, Hou (2021) đã chỉ ra rằng A có thể phân tích được thành tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả trên trong trường hợp F là trường có vô hạn phần tử. Cụ thể, chúng tôi chứng minh được rằng mọi ma trận không vô hướng trong nhóm tuyến tính đặc biệt trên trường có vô hạn phần tử đều có thể phân tích được thành tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2.

***Từ khóa*:** giao hoán tử; ma trận không vô hướng; ma trận lũy đơn chỉ số 2; nhóm tuyến tính đặc biệt; trường vô hạn

1. Giới thiệu

Phân tích một ma trận thành tích của các ma trận có tính chất đặc biệt (như ma trận lũy đơn hoặc ma trận đối hợp) là một chủ đề thú vị của nhiều nghiên cứu và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau.

Cho F là một trường, $\mathrm{GL}_n(F)$ và $\mathrm{SL}_n(F)$ lần lượt là nhóm tuyến tính tổng quát và nhóm tuyến tính đặc biệt bậc n trên trường F. Một ma trận lũy đơn chỉ số k là một ma trận A thỏa mãn $(A-I_n)^k=0$ trong đó I_n là ma trận đơn vị của $\mathrm{GL}_n(F)$. Khi F là trường số phức $\mathbb{C}$, Fong và Sourour (1986) đã chứng minh được rằng mọi ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ là một tích của ba ma trận lũy đơn (không có điều kiện ràng buộc về chỉ số). Trong bài báo (Wang & Wu, 1991) đã đưa ra một kết quả mạnh hơn rằng mọi ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ là một tích của nhiều nhất bốn ma trận lũy đơn chỉ số 2.

Cite this article as: Le Quang Truong (2022). Decomposing matrices on an infinite field into commutators of unipotent matrices of index 2. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 19*(8), 1387-1392.

Một ma trận $A \in \mathrm{GL}_n(F)$ được gọi là ma trận đối hợp nếu ma trận nghịch đảo của A là chính nó, tức là, $A^2 = I_n$. Kí hiệu $[X,Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$ là giao hoán tử của hai ma trận X và Y. Phân tích các ma trận thành các giao hoán tử của các ma trận có các tính chất đặc biệt cũng là một chủ đề dành được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học hiện nay. Trong (Zheng, 2002), tác giả đã chứng minh rằng nếu F là trường số phức hoặc trường số thực, mọi ma trận trong $\mathrm{SL}_n(F)$ là tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận đối hợp. Một kết quả khác trong bài báo gần đây Tran, Truong, Nguyen và Mai (2022) đã chỉ ra rằng nếu F là một trường chứa ít nhất ba phần tử và n là một số nguyên dương lớn hơn 1, mọi ma trận trong $\mathrm{SL}_n(F)$ là một tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận đối hợp.

Trong bài báo (Hou, 2021), tác giả đã chứng minh rằng khi $F = \mathbb{C}$, mọi phần tử trong nhóm $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ có thể phân tích được thành tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả trên trong trường hợp F là trường có vô hạn phần tử.

Một ma trận $A \in \mathrm{SL}_n(F)$ được gọi là ma trận vô hướng nếu tồn tại phần tử $\lambda \in F$ sao cho $A = \lambda I_n$, ngược lại, ta gọi A là ma trận không vô hướng. Chúng tôi chứng minh được định lí sau đây.

Định lí 1.1. *Cho F là trường có vô hạn phần tử và n là số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó, mọi ma trận không vô hướng trong nhóm tuyến tính đặc biệt $\mathrm{SL}_n(F)$ có thể phân tích được thành tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2.*

Nếu F là trường đặc số 2 thì một ma trận là ma trận lũy đơn chỉ số 2 khi và chỉ khi nó là ma trận đối hợp. Do đó, theo (Tran et al., 2022) ta có nếu F là trường có đặc số 2 thì mọi ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_n(F)$ có thể phân tích được thành tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2. Vì vậy, trong bài báo này, chúng tôi chỉ xem xét trường hợp F là trường có vô hạn phần tử và có đặc số khác 2.

Trong phần còn lại của bài báo này, ta quy ước rằng trường F là trường có vô hạn phần tử và có đặc số khác 2; $\sigma(A)$ là kí hiệu tập hợp tất cả các giá trị riêng của ma trận A.

2. Kết quả chính

Nhận xét 2.1. (Hou, 2021) *Cho G là một nhóm ma trận và k là một số nguyên dương. Khi đó, $A \in G$ là một tích của k giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2 khi và chỉ khi mọi ma trận đồng dạng của A cũng là một tích của k giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2.*

Cho A là ma trận cỡ $m\times m$ và B là ma trận cỡ $n\times n$. Kí hiệu $A\oplus B=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ là ma trận cỡ $(m+n)\times(m+n)$. Dễ thấy, với mọi A, A' là các ma trận cỡ $m\times m$ và B, B' là các ma trận cỡ $n\times n$ ta luôn có:

$$\begin{pmatrix} AA' & 0\\ 0 & BB'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix}.$$

Hơn nữa $\det(A\oplus B)=\det A\cdot\det B$.

Nhận xét 2.2. (Hou, 2021) *Cho F là một trường. Khi đó, nếu $A\in \mathrm{SL}_m(F)$ là một tích của k giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2 và $B\in \mathrm{SL}_n(F)$ một tích của l giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2 thì $A\oplus B\in \mathrm{SL}_{m+n}(F)$ là tích của $\max\{k;l\}$ giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2.*

Bổ đề 2.3. *Ma trận*

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^{-2}\end{bmatrix},\ \text{với } \lambda^2\neq -1,$$

là một giao hoán tử của hai ma trận lũy đơn chỉ số 2.

Chứng minh. Hiển nhiên, bổ đề đúng với $\lambda^2=1$. Nếu $\lambda^2\neq\pm1$, với mọi $a\in F$,

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & a\\ 0 & \lambda^{-2}\end{bmatrix} \text{ và } \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^{-2}\end{bmatrix},$$

là hai ma trận đồng dạng với nhau. Mặt khác, ta lại có

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\left(\lambda-\lambda^{-1}\right)\\ 0 & \lambda^{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{2\lambda}{\lambda-1} & \dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\\ -\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1} & -\dfrac{2}{\lambda-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \lambda^{-1}\\ -\lambda & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2\lambda}{\lambda-1} & \dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\\ -\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1} & -\dfrac{2}{\lambda-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & \lambda^{-1}\\ -\lambda & 0\end{bmatrix}^{-1},$$

là một giao hoán tử của hai ma trận

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{2\lambda}{\lambda-1} & \dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\\ -\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1} & -\dfrac{2}{\lambda-1}\end{bmatrix} \text{ và } B=\begin{bmatrix} 2 & \lambda^{-1}\\ -\lambda & 0\end{bmatrix}.$$

Dễ thấy A và B là các ma trận lũy đơn chỉ số 2. Từ Nhận xét 2.1 suy ra ma trận

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda^{-2}\end{bmatrix},\ \text{với } \lambda^2\neq -1,$$

cũng là một giao hoán tử của hai ma trận lũy đơn chỉ số 2.

Chúng ta sẽ sử dụng định lí dưới đây được đưa ra bởi Sourour (1986) để chứng minh cho kết quả chính.

Định lí 2.4. (Sourour, 1986) *Cho* A *là một ma trận vuông cấp* $n \times n$ *khả nghịch không vô hướng trên trường* F , b_j *và* c_j $(1 \le j \le n)$ *là các phần tử của* F *sao cho* $\prod_{j=1}^{n} b_j c_j = \det A$. *Khi đó, tồn tại các ma trận* B *và* C *cấp* $n \times n$ *với các giá trị riêng lần lượt là* $b_1, b_2, ..., b_n$ *và* $c_1, c_2, ..., c_n$ *sao cho* $A = BC$. *Hơn nữa,* B *và* C *có thể được chọn để* B *là ma trận tam giác dưới và* C *là ma trận tam giác trên.*

Cuối cùng, chúng ta sẽ kết thúc bằng việc chứng minh Định lí 1.1.

Chứng minh **Định lí 1.1.**

Trường hợp 1: n là số chẵn. Ta đặt $n = 2k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Vì trường F có vô hạn phần tử nên ta có thể chọn $a_1^2, a_1^{-2}, a_2^2, a_2^{-2}, ..., a_k^2, a_k^{-2}$ là n phần tử đôi một phân biệt trên trường F. Từ Định lí 2.4 suy ra ta có thể chọn các ma trận B và C sao cho $A = BC$ và

$$\sigma(B) = \sigma(C) = \left\{a_1^2, a_1^{-2}, a_2^2, a_2^{-2}, ..., a_k^2, a_k^{-2}\right\}.$$

Do đó, B và C chéo hóa được và đồng dạng với ma trận chéo

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2^{-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_k^{-2} \end{bmatrix} = \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} a_i^2 & 0 \\ 0 & a_i^{-2} \end{bmatrix}.$$

Từ Bổ đề 2.3, Nhận xét 2.1 và Nhận xét 2.2 suy ra B và C đều là giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2. Do đó, A có thể phân tích được thành một tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2.

Trường hợp 2: n là số lẻ. Ta đặt $n = 2k+1$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Vì trường F có vô hạn phần tử nên ta có thể chọn $1, a_1^2, a_1^{-2}, a_2^2, a_2^{-2}, ..., a_k^2, a_k^{-2}$ là n phần tử đôi một phân biệt trên F. Từ Định lí 2.4 suy ra ta có thể chọn các ma trận B và C sao cho $A = BC$ và

$$\sigma(B) = \sigma(C) = \left\{1, a_1^2, a_1^{-2}, a_2^2, a_2^{-2}, ..., a_k^2, a_k^{-2}\right\}.$$

Do đó, B và C chéo hóa được và đồng dạng với ma trận chéo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{\,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{\,-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2^{\,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2^{\,-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_k^{\,-2} \end{bmatrix} = [1] \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} a_i^{\,2} & 0 \\ 0 & a_i^{\,-2} \end{bmatrix}.$$

Từ Bổ đề 2.3, Nhận xét 2.1 và Nhận xét 2.2 suy ra B và C đều là giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2. Do đó, A có thể phân tích được thành một tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2.

3. Kết luận

Cho F là trường có vô hạn phần tử và n là số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó, chúng tôi chứng minh được rằng mọi ma trận không vô hướng trong nhóm tuyến tính đặc biệt $\mathrm{SL}_n(F)$ có thể phân tích được thành một tích của nhiều nhất hai giao hoán tử của các ma trận lũy đơn chỉ số 2. Chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu với trường hợp ma trận vô hướng và trường hợp trường F có hữu hạn phần tử. Trường hợp F là trường hữu hạn lại liên quan tới nhiều bài toán mở khác. Ví dụ nếu F là trường hữu hạn có đặc số 2 thì mỗi ma trận lũy đơn chỉ số 2 cũng là một ma trận đối hợp. Như vậy, việc phân tích một ma trận thành tích của các giao hoán tử của ma trận lũy đơn chỉ số 2 đồng nghĩa với việc phân tích ma trận đó thành tích của các giao hoán tử của các ma trận đối hợp. Vẫn còn là một câu hỏi mở liệu một ma trận trong $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_2)$ có thể phân tích được thành một tích của hai giao hoán tử của ma trận đối hợp hay không? (xem Tran et al. (2022)). Chúng tôi hi vọng sẽ có câu trả lời cho trường hợp này.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Fong, C. K., & Sourour, A. R. (1986). The group generated by unipotent operators. *Proceedings of the American Mathematical Society, 97*(3), 453-458.

Hou, X. (2021). Decomposition of matrices into commutators of unipotent matrices of index 2. *The Electronic Journal of Linear Algebra, 37*, 31-34.

Sourour, A. R. (1986). A factorization theorem for matrices. *Linear and Multilinear Algebra, 19*(2), 141-147.

Tran, N. S., Truong, H. D., Nguyen, T. T. H, & Mai, H. B. (2022). On decompositions of matrices into products of commutators of involutions. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 123-130.

Wang, J. H., & Wu, P. Y. (1991). Products of unipotent matrices of index 2. *Linear Algebra and its Applications*, *149*, 111-123.

Zheng, B. (2002). Decomposition of matrices into commutators of involutions. *Linear algebra and its applications*, *347*(1-3), 1-7.

DECOMPOSING MATRICES ON AN INFINITE FIELD INTO COMMUTATORS OF UNIPOTENT MATRICES OF INDEX 2

Le Quang Truong

University of Science, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam

Corresponding author: Le Quang Truong – Email: truong.hcmue@gmail.com

Received: August 07, 2022; Revised: August 18, 2022; Accepted: August 26, 2022

ABSTRACT

Let F be a field and A a matrix in the special linear group over F. Hou (2021) has shown that if F is the field of complex numbers, A can be decomposed into a product of two commutators of unipotent matrices of index 2. In this paper, we will extend the above result for the case when F is an infinite field. Particularly, we will prove that every nonscalar matrix over an infinite field can be decomposed into a product of at most two commutators of unipotent matrices of index 2.

Keywords: commutator; infinite field; nonscalar matrix; special linear group; unipotent matrices of index 2