

VẬN DỤNG QUY TRÌNH MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC VÀO GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN TRONG DẠY HỌC NỘI DUNG “GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ” (GIẢI TÍCH 12)

Đinh Thị Kiều Diễm¹,
Nguyễn Văn Hồng^{2*}

¹Trường Đại học Cần Thơ; ²Trường Đại học Tây Đô
+ Tác giả liên hệ • Email: nghongct@cantho.edu.vn

Article history

Received: 10/5/2022

Accepted: 31/5/2022

Published: 20/7/2022

Keywords

Applying, modeling
mathematics, practical
problems, the greatest value

ABSTRACT

As stated in the general education program, a students' competency that needs to be formed in teaching Mathematics is math modelling capacity. Through mathematical modeling activities, students not only can solve practical problems but also form and develop their mathematical modeling capacity. This study applied the mathematical modeling process to teaching and solving practical problems in teaching the topic “Maximum value of a function” (Calculus 12). In order to effectively apply the mathematical modeling process in teaching Mathematics, teachers need to flexibly apply active teaching methods, select appropriate content to enhance the development of this capacity for students.

1. Mở đầu

Để thực hiện đổi mới căn bản, toàn diện GD-ĐT, đòi hỏi giáo dục phổ thông cần chuyển từ nền giáo dục theo hướng tiếp cận nội dung sang tiếp cận năng lực người học. Định hướng quan trọng trong đổi mới phương pháp dạy học ở trường phổ thông là phát huy tính tích cực, tự lực và sáng tạo, phát triển năng lực hành động, năng lực hợp tác của người học. Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, trong dạy học Toán, một trong những năng lực cần hình thành cho HS là năng lực mô hình hóa (MHH) toán học (Bộ GD-ĐT, 2018). Thông qua hoạt động MHH toán học để mô tả các tình huống đưa ra, giải quyết các bài toán thực tiễn, giúp HS không những nắm vững kiến thức, mối liên hệ giữa toán học với thực tiễn mà còn hình thành và phát triển năng lực MHH cho các em. Để hình thành mối liên hệ gắn kết đó, vận dụng MHH trong dạy học Toán là quá trình giúp HS tìm hiểu, khám phá các tình huống nảy sinh từ thực tiễn bằng công cụ và ngôn ngữ toán học. Vận dụng MHH toán học vào dạy học có thể góp phần giúp HS hiểu sâu và nhớ lâu kiến thức.

Giá trị lớn nhất của hàm số (Giải tích 12) là một nội dung quan trọng trong Chương trình môn Toán ở THPT và có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Dưới đây, sau khi đưa ra khái niệm mô hình, MHH toán học và một số quy trình mô hình hóa điển hình trong dạy học môn Toán, chúng tôi đã vận dụng một quy trình MHH toán học điển hình vào giải các bài toán thực tiễn trong dạy học nội dung “Giá trị lớn nhất của hàm số” (Giải tích 12), từ đó giúp HS nâng cao hứng thú học tập cũng như hiệu quả dạy học môn Toán.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm

2.1.1. Mô hình và mô hình hóa

Mô hình của một tình huống thực tế: Là tình huống thực tế sau khi đã được đơn giản hóa, cụ thể hóa, xây dựng lại theo mục đích và sự quan tâm của người giải quyết vấn đề, nhưng vẫn phản ánh đúng một phần nào đó của tình huống thực tế ban đầu (Blum, 1991). Mô hình có thể được hiểu là đối tượng vật lí (ví dụ như mô hình hình không gian), hoặc mô hình tổng quát (như tiên đề của hình học O-clit) (Shof, 2000). Theo Swetz và Hartzler (1991), mô hình là một mẫu, đại diện, minh họa, được thiết kế để mô tả cấu trúc, cách vận hành của một sự vật, hiện tượng, hệ thống hay một khái niệm.

Từ các quan điểm trên, theo chúng tôi, có thể hiểu mô hình được dùng để mô tả một đối tượng thực tiễn nào đó, song mô hình không thể thay thế cho vật mẫu. Mô hình hóa là quá trình tạo ra các mô hình để giải quyết vấn đề nào đó xuất phát từ tình huống thực tiễn.

2.1.2. Mô hình hóa toán học

Theo Xviregiev (1988), MHH toán học là quá trình chuyển đổi từ vấn đề thực tế sang vấn đề toán học bằng cách thiết lập và giải quyết các mô hình toán học. Theo Nguyễn Thị Tân An (2012): trong dạy học Toán, MHH cho phép HS kết nối toán học trong nhà trường với thực tiễn, cung cấp một bức tranh rộng hơn, phong phú hơn về toán học, giúp việc học toán trở nên ý nghĩa hơn. Theo Nguyễn Danh Nam (2016), MHH toán học là quá trình chuyển đổi từ vấn đề thực tiễn sang vấn đề toán học bằng cách thiết lập và giải quyết các mô hình toán học.

Như vậy, có thể hiểu, MHH toán học là phương pháp giúp HS tìm hiểu, khám phá các tình huống xuất phát từ thực tiễn bằng các công cụ và ngôn ngữ toán học, từ đó vận dụng kiến thức, kĩ năng toán học vào giải quyết bài toán đặt ra. MHH toán học giúp HS thông hiểu các khái niệm toán học, phát triển các kĩ năng hợp tác và nhận thức ở mức độ cao.

2.2. Một số quy trình mô hình hóa điển hình trong dạy học môn Toán

Để thực hiện tốt nhiệm vụ MHH, chúng ta cần có một công cụ cụ thể, đó là quy trình MHH toán học. Đã có nhiều tác giả nghiên cứu và đưa ra các quy trình khác nhau để mô tả quá trình MHH toán học. Các quy trình đều có cùng một điểm chung, đó là một quá trình lặp gồm nhiều bước, bắt đầu với một tình huống thực tiễn và kết thúc bằng một phương án giải quyết thành công hay quyết định thực hiện lại quy trình để đạt được kết quả tốt hơn.

Quy trình mô hình hóa phỏng theo PISA gồm các bước sau đây: - Bước 1: Bắt đầu từ một vấn đề trong thực tiễn; - Bước 2: Nhận ra các kiến thức toán phù hợp với vấn đề, tổ chức lại vấn đề theo các khái niệm toán học; - Bước 3: Phân tích các yếu tố thực tiễn để chuyển vấn đề thành một bài toán mà vẫn thể hiện trung thực cho tình huống; - Bước 4: Giải bài toán; - Bước 5: Biến đổi lời giải bài toán cho có ý nghĩa đối với tình huống thực tiễn, xác định những hạn chế của lời giải (OECD, 2009).

Theo Nguyễn Danh Nam (2015), quy trình mô hình hóa gồm 7 bước sau: - Bước 1: Tìm hiểu, xây dựng cấu trúc, làm sáng tỏ, phân tích, đơn giản hóa vấn đề, xác định giả thuyết, tham số, biến số trong phạm vi của vấn đề thực tiễn; - Bước 2: Thiết lập mối liên hệ giữa các giả thuyết khác nhau đã đưa ra; - Bước 3: Xây dựng bài toán bằng cách lựa chọn và sử dụng ngôn ngữ toán học mô tả tình huống thực tiễn cũng như tính toán đến độ phức tạp của bài toán; - Bước 4: Sử dụng các công cụ toán học thích hợp để giải bài toán; - Bước 5: Hiểu được lời giải của bài toán, ý nghĩa của mô hình toán học trong hoàn cảnh thực tiễn; - Bước 6: Kiểm nghiệm mô hình (ưu điểm và hạn chế), kiểm tra tính hợp lí và tối ưu của mô hình đã xây dựng; - Bước 7: Thông báo, giải thích, dự đoán, cải tiến mô hình hoặc xây dựng mô hình có độ phức tạp cao hơn sao cho phù hợp với thực tiễn.

Theo Nguyễn Phú Lộc (2016), quy trình mô hình hóa toán học gồm 4 bước như sau: - Bước 1: Chuyển từ bài toán thực tiễn sang bài toán toán học (mô hình toán học); - Bước 2: Sử dụng công cụ toán học để tìm lời giải cho bài toán; - Bước 3: Sử dụng kết quả ở bước 2 để diễn giải thành lời giải thực tiễn; - Bước 4: So sánh, đối chiếu lời giải với bài toán thực tiễn ban đầu xem có hợp lí hay không.

Trong bài báo này, chúng tôi vận dụng quy trình mô hình hóa toán học của Nguyễn Phú Lộc (2016) vào giải một số bài toán thực tiễn trong dạy học nội dung “Giá trị lớn nhất của hàm số” (Giải tích 12).

2.3. Vận dụng quy trình mô hình hóa toán học vào giải các bài toán thực tiễn trong dạy học nội dung “Giá trị lớn nhất của hàm số” (Giải tích 12)

Do khuôn khổ của một bài báo, dưới đây chúng tôi đề cập việc vận dụng MHH toán học thông qua giải một số bài toán thực tiễn sau trong dạy học nội dung “Giá trị lớn nhất của hàm số” (Giải tích 12):

Bài toán 1 (bài toán kinh tế): Trang trại rau sạch Organic ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau (xem hình 1). Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

- Mục tiêu của bài toán: + Chuyển hóa bài toán thực tiễn thành bài toán toán học; + Vận dụng mối liên hệ giữa các đại lượng về giá thành của rau và số lượng tăng số kg rau; + Vận dụng được công thức tính đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất; + Tính số tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày.



Hình 1. Trang trại rau sạch Organic ở Đà Lạt

Thông qua bài toán này, GV rèn luyện cho HS các kĩ năng sau: (1) Nhận dạng tình huống tìm giá trị lớn nhất của hàm số liên quan đến bài toán kinh tế; (2) Chuyển hóa bài toán thực tiễn thành bài toán toán học để giải; (3) Thiết lập và biểu diễn được mối quan hệ giữa các đại lượng; (3) Vận dụng công thức tính đạo hàm vào giải bài toán.

- *Phân tích bài toán 1*: Bài toán 1 là bài toán liên quan đến kinh tế về việc mua bán rau và giá cả tăng hàng ngày, số rau mỗi ngày bán được. Khi tính số tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là ta đang giải bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

- *Tiến trình hoạt động*: Dựa theo quy trình MHH toán học của Nguyễn Phú Lộc (2016), chúng tôi đưa ra tiến trình hoạt động gồm 4 bước như sau:

+ *Bước 1*: Chuyển từ bài toán thực tiễn sang bài toán toán học (mô hình toán học). Ở bước này, HS xây dựng mối liên hệ giữa các yếu tố khác nhau có trong bài toán thực tiễn để chuyển đổi về bài toán toán học. Dựa vào bài toán thực tiễn và kiến thức đã có, HS cần lựa chọn những thông tin phù hợp và đặt ra giả thuyết tương ứng để giải quyết vấn đề.

Vấn đề này khá quen thuộc nhưng HS có thể chưa quen khi vận dụng MHH toán học theo các bước. Lúc này, GV có thể gợi mở bằng cách đặt câu hỏi, kết hợp với kiến thức nền của HS để tìm hướng giải bài toán. GV có thể đặt các câu hỏi sau cho HS:

* Đối với bài toán này cho ta biết được những thông tin gì? (Câu trả lời mong đợi: Mỗi ngày trang trại thu hoạch được một tấn rau, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch; nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg.

* Bài toán yêu cầu làm gì? (Câu trả lời mong đợi: Tính số tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày).

* Để tính được số tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày, cần dựa vào những yếu tố nào? (Câu trả lời mong đợi: Cần dựa vào mối liên hệ giữa số tiền của số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi và số tiền thu được từ số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi).

GV có thể hướng dẫn HS gọi y (đồng) là số đơn vị giá bán rau tăng trên một ki-lô-gam ($y \geq 0$). Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá phụ thuộc vào y . Khi đó, giá bán rau sau khi tăng giá y đồng/kg là: $(30000 + 1000y)$ đồng/kg. Số ki-lô-gam rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y$ (kg), với $y \leq 50$.

Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi sẽ là: $1000 - 20y$ (kg).

Từ đó, HS tính được tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

$$P = (1000 - 20y)(30000 + 1000y) + 20y \cdot 2000 = -20000y^2 + 440000y + 30000000.$$

Để tính được số tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày, HS cần phát biểu được bài toán thực tiễn trên thành bài toán toán học: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$P(y) = -20000y^2 + 440000y + 30000000, (0 \leq y \leq 50).$$

+ *Bước 2*: Sử dụng công cụ toán học để tìm lời giải cho bài toán. Ở bước này, GV hướng dẫn HS sử dụng công cụ đạo hàm của hàm số để tìm lời giải của bài toán. Sau đó, GV cho HS trình bày lời giải chi tiết của bài toán.

Khi đó, bài toán đã cho trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$P(y) = -20000y^2 + 440000y + 30000000, (0 \leq y \leq 50).$$

Xét hàm số: $P(y) = -20000y^2 + 440000y + 30000000, (0 \leq y \leq 50)$.

Có: $P'(y) = -40000y + 440000$. Ta có: $P'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 11$.

Bảng biến thiên:

y	0	11	50
$P'(y)$		+	-
$P(y)$		$\nearrow P(11) \searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất của $P(y)$ là $P(11) = 32420000$.

+ *Bước 3*: Sử dụng kết quả giải bài toán ở bước 2 để diễn giải thành lời giải thực tiễn: Trang trại rau sạch Organic ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau, nếu bán rau với giá 30 000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau

tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Khi đó, số tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là 32420000đồng.

+ *Bước 4*: So sánh, đối chiếu lời giải với bài toán thực tiễn ban đầu xem có phù hợp hay không. Trên thực tế, việc thu hoạch rau mỗi ngày của trang trại là khác nhau. Giá cả của mỗi loại rau sẽ khác nhau, giá thành tăng giảm của rau theo mỗi ngày cũng có thể khác nhau phụ thuộc vào nhu cầu của thị trường. Nhưng bài toán đã được lí tưởng hóa số lượng để dễ dàng thực hiện các phép toán hơn. Kết quả của bài toán thu được phù hợp với các dữ kiện đã cho của bài toán và có thể chấp nhận được.

Bài toán 2 (bài toán y học): Về việc điều tra dịch virus Zika, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus Zika kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là: $f(t) = 45t^2 - t^3$, ($t = 0, 1, 2, \dots, 25$). Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì $f'(t)$ sẽ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

- *Mục tiêu của bài toán 2*: + Chuyển hóa bài toán thực tiễn thành bài toán toán học; + Vận dụng được công thức tính đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất; + Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy.

- *Phân tích bài toán 2*: Virus Zika còn được gọi là bệnh do virus Zika. Virus Zika là một loại bệnh truyền nhiễm do muỗi. Vào năm 1947, virus Zika lần đầu tiên được phân lập từ khi ở rừng Zika của Uganda nhưng không bị coi là một mầm bệnh quan trọng của con người cho tới khi các vụ dịch ở quy mô lớn đầu tiên ở các hòn đảo Nam Thái Bình Dương vào năm 2007. Virus Zika là một loại bệnh truyền nhiễm do muỗi truyền, chủ yếu xảy ra ở các khu vực nhiệt đới và cận nhiệt đới trên thế giới. Hầu hết những người bị nhiễm virus Zika không có dấu hiệu và triệu chứng. Một số dấu hiệu và triệu chứng có thể bắt gặp bao gồm đau đầu, đỏ mắt (viêm kết mạc). Bài toán được lí tưởng hóa về tốc độ lây lan của dịch Zika để dẫn đến thiết kế bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

- *Tiến trình hoạt động*: Dựa theo quy trình mô hình hóa toán học của Nguyễn Phú Lộc (2016), chúng tôi đưa ra tiến trình hoạt động gồm 4 bước như sau:

+ *Bước 1*: Chuyển từ bài toán thực tiễn sang bài toán toán học (mô hình toán học). Lúc này, GV có thể đặt các câu hỏi sau để định hướng cho HS chuyển từ bài toán thực tiễn sang bài toán toán học:

* Bài toán yêu cầu điều gì? (Câu trả lời: Tìm tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?).

* Để tính tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy, cần dựa vào yếu tố nào của bài toán? (Câu trả lời mong đợi: Cần dựa vào hàm $f(t) = 45t^2 - t^3$, với $t \in [0; 25]$ và $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t).

* Từ dữ kiện trên ta thu được kết quả gì? (Câu trả lời mong đợi: HS phát biểu được bài toán thực tiễn chuyển về bài toán toán học: Ta có: $f(t) = 45t^2 - t^3 \Rightarrow f'(t) = 90t - 3t^2$. Đặt $g(t) = 90t - 3t^2$. Bài toán trở thành: Tìm $t \in [0; 25]$ để $g(t)$ đạt giá trị lớn nhất).

Bước này giúp HS rèn luyện kĩ năng chuyển đổi bài toán thực tiễn thành bài toán toán học, kĩ năng phân tích, vận dụng và phát triển vấn đề.

+ *Bước 2*: Sử dụng công cụ toán học để tìm lời giải cho bài toán. GV có thể dẫn dắt HS tìm ra lời giải cho bài toán thông qua câu hỏi: Để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t) = 90t - 3t^2$, $t \in [0; 25]$, ta dùng phương pháp nào để giải bài toán? (Câu trả lời mong đợi: Sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất của hàm số).

HS sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất của hàm số và trình bày lời giải của bài toán.

Lời giải hoàn chỉnh:

Xét $g'(t) = 90 - 6t$. Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15 \in [0; 25]$.

Bảng biến thiên:

t	0	15	25
$g'(t)$		+	0
			-
$g(t)$	0	675	375

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất của $g(t) = 675$, tại $t = 15$.

+ *Bước 3*: Sử dụng kết quả giải bài toán ở bước 2 để diễn giải thành lời bài toán thực tiễn về việc điều tra dịch virus Zika, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus Zika kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t , tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ 15.

+ *Bước 4*: So sánh, đối chiếu lời giải với bài toán thực tiễn ban đầu. Trong thực tiễn, tốc độ truyền bệnh còn phụ thuộc vào nhiều yếu tố tác động. Tuy nhiên, ta đã lí tưởng hóa bài toán để dễ dàng thực hiện các phép toán. Kết quả của bài toán thu được phù hợp với các dữ kiện đã cho của bài toán và có thể chấp nhận được.

3. Kết luận

Thực tiễn dạy học cho thấy, khi vận dụng MHH toán học trong dạy học Toán đã giúp HS biết thiết lập các mệnh đề toán học, chuyển bài toán thực tế sang ngôn ngữ toán học, biết liên hệ lại vấn đề trong thực tiễn. Để thực hiện hiệu quả MHH toán học, GV cần vận dụng linh hoạt các quy trình MHH, chọn lọc những nội dung phù hợp nhằm giúp HS hiểu rõ mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn thông qua các tình huống thực tiễn, từ đó giúp các em hứng thú, yêu thích học môn Toán hơn và học tập ngày càng đạt kết quả cao.

Tài liệu tham khảo

- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.
- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Nguyễn Danh Nam (2015). Quy trình mô hình hóa trong dạy học Toán ở trường phổ thông. *Tạp chí Khoa học, Đại học Quốc gia Hà Nội*, 3, 1-10.
- Nguyễn Danh Nam (2016). *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*. NXB Đại học Thái Nguyên.
- Nguyễn Phú Lộc (2016). *Tích cực hóa hoạt động học tập của học sinh trong dạy học môn Toán - Một chuyên khảo trên cơ sở lí thuyết hoạt động*. NXB Đại học Cần Thơ.
- Nguyễn Thị Tân An (2012). Sự cần thiết của mô hình hoá trong dạy học Toán. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 37, 4-7.
- OECD (2009). *Learning Mathematics for Life. A view perspective from PISA*.
- Shof, V. A. (2000). *Mô hình và triết học*. NXB Đại học Sư phạm.
- Swetz, F., & Hartzler, J. S. (Eds) (1991). *Mathematical modelling in the secondary school curriculum*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Xviregiev, I. U. (1988). *Các mô hình toán học trong sinh thái học. Toán học trong hệ sinh thái* (Bùi Văn Thanh dịch). NXB Khoa học và Kỹ thuật.