SOLVING NONLINEAR FOURTH ODER DIFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENT DEPENDENT ON INTEGRAL FUNCTION BY NUMERICAL METHOD

Lai Van Trung, Quach Thi Mai Lien*
TNU - University of Information and Communication Technology

ARTICLE INFO

Received: 03/01/2022
Revised: 28/02/2022
Published: 28/02/2022

KEYWORDS

Higher order differentia lequations
Numerical methods
Integral function
Iteration diagram
Iterative algorithm

ABSTRACT

In recent years, higher-order differential equations problems have been of interested to many domestic and foreign scientists. There have been many approaches and solutions to these problems, one of which must be mentioned is how to build operators and use contraction mapping. In these problems, the class nonlinear higher-order differential equations with coefficcient dependent on integral function is very important in mechanics. Finding analytic solutions for classes of these problems is difficult, so solving these numerical problems is very necessary. In this paper, we present the solving of nonlinear fourth oder differential equations with coefficient dependent on integral function by numerical methods. At the same time, we also compare the convergence speed of this iterative method with previous methods to see the effectiveness of the method.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN CẤP BỐN VỚI HỆ SỐ PHỤ THUỘC PHIẾM HÀM TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ

Lại Văn Trung, Quách Thị Mai Liên*
Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 03/01/2022
Ngày hoàn thiện: 28/02/2022
Ngày đăng: 28/02/2022

TỪ KHÓA

Phương trình vi phân cấp cao
Phương pháp số
Phiếm hàm tích phân
Sơ đồ lặp
Thuật toán lặp

TÓM TẮT

Những năm gần đây, các bài toán về phương trình vi phân phi tuyến bậc cao được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm, nghiên cứu. Đã có nhiều hướng tiếp cận và giải quyết các bài toán này, một trong số đó phải kể đến cách xây dựng toán tử và sử dụng ánh xạ co. Trong các bài toán này, lớp các bài toán phương trình vi phân cấp cao có hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân có ý nghĩa rất quan trọng trong cơ học. Việc tìm nghiệm giải tích của lớp các bài toán này là khó khăn nên vấn đề giải số cho lớp các bài toán này là rất cần thiết. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày việc giải phương trình vi phân cấp bốn với hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân bằng phương pháp số. Đồng thời chúng tôi cũng đưa ra so sánh tốc độ hội tụ của phương pháp lặp này với các phương pháp trước đó để thấy được sự hiệu quả của phương pháp.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.5414

* Corresponding author. *Email: qtmlien@ictu.edu.vn*

1. Giới thiệu

Khi nghiên cứu về phương trình vi phân phi tuyến tính bậc cao đã có nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước đưa ra các kết quả quan trọng như [1]-[4]. Lớp các phương trình vi phân phi tuyến bậc cao với hệ số phụ thuộc vào phiếm hàm tích phân có nhiều ý nghĩa trong cơ học. Trong [5], chúng tôi đã đưa ra việc giải số cho bài toán cấp hai. Dạng phương trình đã được giải quyết trong [5] là:

$$\begin{cases} p_1\left(\int_a^b \left|u'\right|^2 ds\right)u'' + p_2\left(\int_a^b \left|u'\right|^2 ds\right)u = f(x), a < x < b, \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A, b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B. \end{cases} \tag{1}$$

Đặt $\xi = \int_a^b \left|u'(s)\right|^2 ds$, khi đó bài toán (1) có dạng:

$$\begin{cases} p_1(\xi)u''(x) + p_2(\xi)u(x) = f(x), a < x < b, \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A, b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B. \end{cases} \tag{2}$$

Hiển nhiên nếu xác định được ξ thì nghiệm số của bài toán sẽ tìm được theo thủ tục Mathlab [5]. Chúng tôi xây dựng thuật toán lặp như sau:

Thuật toán:

Bước 1: Xuất phát $\xi_0 = 0$;

Bước 2: Với mọi $k = 0,1,2,\ldots$ giải liên tiếp hai bài toán

$$\begin{cases} p_1(\xi_k)u_k'' - p_2(\xi_k)u_k = f(x), a < x < b, \\ a_0 u_k(a) - a_1 u_k'(a) = A, \\ b_0 u_k(b) + u_1 \mathrm{u}_k'(b) = B. \end{cases} \tag{3}$$

Hiệu chỉnh

$$\xi_{k+1} = \int_a^b \left|u_k^{'}(s)\right|^2 ds. \tag{4}$$

Trong bài báo này chúng tôi phát triển sang việc giải phương trình vi phân cấp bốn với hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân. Bài báo gồm 4 phần, sau Phần Giới thiệu là Phần 2, trình bày mô hình và thuật toán lặp để giải phương trình vi phân cấp bốn với hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân; Phần 3 trình bày các kết quả thực nghiệm và Phần 4 là phần kết luận.

2. Mô hình bài toán biên cấp bốn với hệ số phụ thuộc các phiếm hàm tích phân

Trong phần này, chúng tôi trình bày việc giải quyết mô hình bài toán biên cấp bốn với hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân bằng phương pháp số. Xét bài toán biên cấp bốn sau:

$$\begin{cases} p_1\left(\int_a^b \left|u'\right|^2 ds\right)u^{(4)} - p_2\left(\int_a^b \left|u'\right|^2 ds\right)u''(x) = f(x), a < x < b \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A, b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B, \\ c_0 u''(a) - c_1 u'''(a) = C, d_0 u''(b) + d_1 u'''(b) = D. \end{cases} \tag{5}$$

Đây chính là dạng tổng quát của các bài toán đã được các tác giả T. F. Ma, A. L. M. Martinez đưa ra trong [6] với mô hình bài toán:

$$\begin{cases} u^{(4)} - M(\int\limits_0^L \left|u'(s)\right|^2 ds)u''(x) = f(x,u,u'), \\ u(0) = A, u(L) = B, \\ u''(0) = C, u''(L) = g(u'(L)), \end{cases} \tag{6}$$

và Q. A. Dang, T. L. Vu đưa ra trong [7] với mô hình bài toán:

$$\begin{cases} y^{(4)} - \varepsilon y'' - \dfrac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^\pi (y')^2 dx\right) y'' = p(x), 0 < x < 1, \\ y(0) = y(\pi) = 0, y''(0) = y''(\pi) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Để giải quyết bài toán (5), chúng tôi đưa ra phương pháp lặp như sau:

Đặt $\xi = \int\limits_a^b \left|u'(s)\right|^2 ds$; $v(x) = u''(x)$. Khi đó bài toán (5) được đưa về hai bài toán cấp hai:

$$\begin{cases} p_1(\xi)v''(x) - p_2(\xi)v(x) = f(x), a < x < b, \\ c_0 v(a) - c_1 v'(a) = C, \\ d_0 v(b) + d_1 v'(b) = D, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} u''(x) = v(x), a < x < b, \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = A, \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = B. \end{cases} \tag{9}$$

Thuật toán lặp

Bước 1: Xuất phát $\xi_0 = 0$;

Bước 2: Với mọi $k = 0,1,2,...$ giải liên tiếp hai bài toán

$$\begin{cases} p_1(\xi_k)v_k'' - p_2(\xi_k)v_k = f(x), a < x < b, \\ c_0 v_k(a) - c_1 v_k'(a) = C, \\ d_0 v_k(b) + d_1 v_k'(b) = D, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} u_k'' = v_k, a < x < b, \\ a_0 u_k(a) - a_1 u_k'(a) = A, \\ b_0 u_k(b) + b_1 u_k'(b) = B. \end{cases} \tag{11}$$

Hiệu chỉnh:

$$\xi_{k+1} = \int\limits_a^b \left|u_k'(s)\right|^2 ds \tag{12}$$

Chú ý rằng, sự hội tụ của sơ đồ lặp trên chỉ phụ thuộc vào tính chất của hàm $p_1 \; z$, $p_2 \; z$. Sự hội tụ của phương pháp sẽ được kiểm tra bằng các chương trình thực nghiệm. Các bài toán (10), (11) được giải quyết qua lược đồ sai phân bậc bốn và nghiệm số được tìm bằng thủ tục Mathlab [5].

3. Một số kết quả thực nghiệm

Để kiểm tra sự hội tụ của các thuật toán, phương pháp chung chúng tôi sử dụng là xuất phát từ bài toán gốc, chúng tôi cho trước nghiệm đúng $u_d(x)$ của bài toán, các hàm $p_1(z), p_2(z)$. Từ đó xác định hàm vế phải $f(x)$ cùng các giá trị điều kiện biên. Trong các sơ đồ lặp, chúng tôi sẽ tiến hành sai phân các bài toán cấp hai với độ chính xác bậc 4, sau đó sử dụng thủ tục Mathlab [5] để xác định nghiệm gần đúng u^* tại tất cả các điểm lưới. Sai số tính toán được xác định bởi $\varepsilon = \left\| u_d - u^* \right\|$.

Trước tiên, chúng ta xét bài toán được các tác giả Q. A. Dang, T. L. Vu [7] với mô hình bài toán:

$$\begin{cases} y^{(4)} - \varepsilon y'' - \dfrac{2}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} (y')^2 dx\right) y'' = p(x), 0 < x < 1, \\ y(0) = y(\pi) = 0, y''(0) = y''(\pi) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Ta có thể thấy, bài toán (13) này là một trường hợp riêng của bài toán (5) với:

$$p_1(z) = 1; p_2(z) = \varepsilon + \frac{2}{\pi} z.$$

Xét với $\varepsilon = 2, f(x) = -4\,sin\,x$, bài toán (13) có nghiệm đúng là $u_d(x) = -\sin x$. Áp dụng thuật toán lặp trên, chúng tôi nhận được kết quả như sau:

Bảng 1. *Kết quả sai số so sánh với* [7]

Số bước lặp	Sai số	Số bước lặp	Sai số
5	0,0202	20	6×e-7
10	6×e-4	25	1×e-8
15	1×e-5	30	2×e-9

Dựa vào số liệu của Bảng 1, có thể thấy rằng phương pháp lặp hội tụ rất nhanh và sai số đạt được là tốt hơn nhiều so với sai số trong tài liệu [7] đã công bố (Sai số e-4).

Sau đây, chúng tôi đưa ra một số kết quả tính toán cho bài toán (5) với các hàm hệ số được chọn là tùy ý, điều kiện biên Neumann.

Bảng 2. *Kết quả kiểm tra đối với thuật toán lặp*

$$\begin{aligned} & p_1(z) = \frac{1}{z+1} + 1; p_2(z) = e^{-z}; a = 0, b = 1, \\ & a_0 = 2; a_1 = 3; b_0 = 5; b_1 = 4, \\ & c_0 = 2; c_1 = 1; d_0 = 5; d_1 = 3, N = 100. \end{aligned}$$

$u_d = x^4 - x^3 + 1$		$u_d = \sin \pi x$		$u_d = e^x$		$u_d = \cos x + e^{-x} + x^4$	
k	ε	k	ε	k	ε	k	ε
5	0,001	10	3,219	1	0,034	5	0,03
10	1×e-6	20	2,546	2	1×e-4	10	6×10-4
15	2×e-9	30	0,250	3	7×e-7	15	1×10-5
20	2×e-10	40	0,017	4	3×e-9	20	1×10-7
		50	1×e-5	5	1×e-9	25	3×10-9
		60	5×e-6			30	9×10-10

Bảng 2 cho chúng ta thấy thuật toán hội tụ rất rất nhanh và sai số đạt được cũng là rất tốt khi ta chọn các hệ số $p_1(z) = \dfrac{1}{z+1} + 1; p_2(z) = e^{-z}$. Tuy nhiên với việc chọn hệ số $p_1(z) = e^{-z} + 1;$ $p_2(z) = \cos z + 1,5$ thì có những trường hợp làm thuật toán không hội tụ, điều này được thể hiện trong

Bảng 3. Từ kết quả này, thúc đẩy chúng tôi đang tìm ra điều kiện cho các các hệ số $p_1(z), p_2(z)$ và sẽ được chúng tôi trình bày trong nghiên cứu tiếp theo.

Bảng 3. *Kết quả kiểm tra đối với thuật toán lặp*

$$p_1(z) = e^{-z} + 1; p_2(z) = \cos z + 1,5; a = 0, b = 1,$$
$$a_0 = 2; a_1 = 3; b_0 = 5; b_1 = 4,$$
$$c_0 = 2; c_1 = 1; d_0 = 5; d_1 = 3, N = 100.$$

$u_d = x^4 - x^3 + 1$		$u_d = \sin \pi x$		$u_d = e^x$		$u_d = \cos x + e^{-x} + x^3$	
k	ε	k	ε	k	ε	k	ε
5	0,0018	Không hội tụ		2	0,015	5	0,318
10	5×e-6			3	5×e-5	10	9×e-4
15	1×e-8			4	1×e-6	15	2×e-5
20	1×e-10			5	6×e-8	20	7×e-7
				6	1×e-9	25	2×e-8
						30	9×e-10

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày việc phát triển sang giải số cho bài toán phương trình vi phân cấp bốn tổng quát với hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân. Đây là một kết quả rất quan trọng để chúng tôi tiếp tục nghiên cứu và giải quyết các bài toán đạo hàm riêng có hệ số phụ thuộc phiếm hàm tích phân, cụ thể là bài toán:

$$\mathrm{w}_{tt}(x,t) - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \int_0^{\pi} \mathrm{w}_x^2(x,t)\,dx\right) \mathrm{w}_{xx}(x,t) = 0.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] Q. A. Dang and T. K. Q. Ngo, “Existence results and iterative method for solving the cantilever beamequation with fully nonlinear term,” *Nonlinear Anal. Real World Appl*., vol. 36, pp. 56-68, 2017.

[2] Q. A. Dang and T. L. Vu, “Iterative method for solving a nonlinear fourth order boundary valueproblem,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 60, pp. 112-121, 2010.

[3] T. F. Ma and A. L. M. Martinez, “Positive solutions for a fourth order equation with nonlinear boundary conditions,” *Math. Comput. Simul*., vol. 80, pp. 2177-2184, 2010.

[4] Q. A. Dang and T. H. Nguyen, “The Unique Solvability and Approximation of BVP for a Nonlinear Fourth Order Kirchhoff Type Equation,” *East Asian Journal on Applied Mathematics*, vol. 8, no. 2, pp. 323-335, 2018.

[5] V. Q. Vu and V. T. Lai, “Interative method for solving higher oder differential equations with coefficients dependent on integral functions,” *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 200, no. 07, pp. 41-47, 2019.

[6] T. F. Ma and A. L. M. Martinez, “Positive solution for a fourth order equation with nonlinear buondary conditions,” *Mathematics and Coputers in Simulation*, vol. 80, pp. 2177-2184, 2010.

[7] Q. A. Dang and T. L. Vu, “Iterative method for solving a nonlinear fourth order boundary value problem,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 60, pp. 112-121, 2010.