KHÔNG GIAN VECTƠ VÀ SỰ HÌNH THÀNH TƯ DUY CẤU TRÚC – HỆ THỐNG TRONG HOẠT ĐỘNG KINH TẾ – KINH DOANH

SPECTACULAR VECTOR AND TRADITIONAL CONSULTANCY – SYSTEM IN ECONOMIC AND BUSINESS ACTIVITIES

NGUYỄN VĂN LỘC[(*)] và ĐINH TIẾN LIÊM[(**)]

TÓM TẮT: *Không gian vectơ là khái niệm toán học trừu tượng, sinh viên được làm quen với các mô hình của không gian này ở môn toán bậc phổ thông, do vậy việc hình thành khái niệm không gian vectơ tổng quát hết sức thuận lợi nhờ sử dụng các mô hình cụ thể. Tri thức không gian vectơ cung cấp công cụ giải các bài toán kinh tế – kinh doanh và giúp cho sự hình thành tư duy cấu trúc – hệ thống, một trong các loại hình tư duy quan trọng nhất của con người.*

Từ khóa: *không gian vectơ; tư duy cấu trúc - hệ thống.*

ABSTRACTS: *Vector space is an abstract mathematical concept, but students have been familiar with its models since high schools, so the formation of the general vector space concept is very advantageous by using these specific models. Vector space knowledge provides not only a tool to solve economic and business problems, but also helps to form of system – structural thinking as one of the most important types of human thinking.*

Key words: *vector space; structured thinking – the system.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hoạt động dạy - học ở Trường Đại học Văn Lang không những chuẩn bị cho sinh viên có kỹ năng giỏi trong thực hành nghề nghiệp mà còn chuẩn bị cho họ có tầm nhìn chiến lược về cấu trúc - hệ thống của thế giới, của mỗi đối tượng trong các lĩnh vực kinh tế, kinh doanh và kỹ thuật để một số trong họ vươn lên thành những doanh nhân thành đạt. Muốn vậy, trong đào tạo phải có chương trình chuẩn bị tiềm lực cho sinh viên tri thức về cấu trúc - hệ thống, chuẩn bị cho sinh viên tự học, tự đào tạo, tiếp tục học lên bậc học cao hơn. Toán học nói chung và đại số tuyến tính nói riêng là môn học "tự thân" có tiềm năng trang bị cho sinh viên các tri thức đó. Sau hàng nghìn năm sàng lọc, toán học mới xác định được ba cấu trúc: thứ tự, tô pô, đại số là các cấu trúc cơ bản, dạy học toán tất yếu phải hướng tới hình thành các biểu tượng về cấu trúc thông qua các vật liệu cụ thể của các môn học. Trong các cấu trúc-hệ thống, không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính là cấu trúc đại số - hình học hiện đại đầu tiên mà sinh viên được tiếp cận kết nối tri thức toán phổ thông và tri thức toán cao cấp ở đại học. Do vậy, việc tổ chức dạy học hình

(*) PGS.TS. Trường Đại học Văn Lang, *nguyenvanloc@vanlanguni.edu.vn*
(**) ThS. Trường Đại học Văn Lang, *dinhtienliem@vanlanguni.edu.vn*, *Mã số: TCKH13-02-2019*

thành có chủ định biểu tượng về không gian vectơ có ý nghĩa quan trọng đối với sự hình thành tư duy cấu trúc - hệ thống cho sinh viên.

2. NỘI DUNG

Việc hình thành tư duy cấu trúc - hệ thống cho sinh viên có thể bắt đầu bằng hoạt động dạy học hình thành cấu trúc toán học, trước hết là cấu trúc đại số - hình học, xây dựng nên từ các tập hợp mà các phần tử có thể "cộng" với nhau và "nhân" với một số, từ đó hình thành biểu tượng về không gian vectơ tổng quát. Chúng ta bắt đầu bằng các ví dụ cụ thể về mô hình cấu trúc không gian vectơ hình thành nên từ các kiến thức mà sinh viên đã được học ở bậc phổ thông.

2.1. Các mô hình không gian vectơ ở bậc phổ thông

Ở bậc phổ thông, từ tiểu học, học sinh khi làm quen với các phép toán trên các tập hợp số: N, Z, Q, R, đã bắt đầu làm quen dưới hình thức "ẩn tàng" với các biểu tượng về không gian vectơ. Để thuận lợi cho việc nhận dạng các cấu trúc không gian vectơ, chúng ta sẽ "tường minh hóa" các biểu tượng không gian vectơ mà học sinh được làm quen dưới dạng "ẩn tàng", trước tiên là không gian vectơ hình thành từ các phần tử "số" và các phép toán trên các tập số.

2.1.1. Không gian vectơ R^2

Theo [5, tr.196-tr.197], xét R^2 là tập mà mỗi phần tử là bộ 2 số thực có thứ tự (x_1, x_2), ở bậc phổ thông, học sinh đã làm quen với mặt phẳng tọa độ, trong đó mỗi cặp số $(x_1, x_2) \in R^2$ được biểu diễn bằng một điểm, mà x_1 là hoành độ và x_2 là tung độ, tọa độ của điểm M cũng được đồng nhất với tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, học sinh cũng được làm quen với phép cộng hai vectơ quy về cộng các tọa độ tương ứng, phép nhân một số thực với một vectơ quy về nhân số thực với các tọa độ thành phần, do đó chúng ta có thể gọi (x_1, x_2) là vectơ hai thành phần. Ký hiệu $V = R^2$ là tập hợp các bộ số thực đó. Xét $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$. Phép cộng hai vectơ là một luật hợp thành trong trên V, cho phép tạo ra từ một cặp vectơ $x, y \in V$ một vectơ duy nhất gọi là tổng của chúng, ký hiệu là x+y. Phép nhân một vectơ với một số, còn gọi là phép nhân với vô hướng, là một luật hợp thành ngoài trên V, cho phép tạo ra từ một vectơ $x \in V$ và một số thực $k \in R$ một vectơ duy nhất gọi là tích của chúng, ký hiệu là *kx*. Kiểm tra được 10 yêu cầu sau thỏa mãn với mọi $x, y, z \in V$ và mọi $k, l \in R$.

(1) Nếu $x, y \in V$ thì $x + y \in V$

(2) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$

(3) $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in V$

(4) Tồn tại vectơ $\theta \in V$ sao cho $\theta + x = x + \theta = x, \forall x \in V$

Phần tử θ gọi là phần tử trung hòa của phép + (hay của V)

(5) Với mỗi $x \in V$ tồn tại $-x \in V$ sao cho $x + (-x) = (-x) + x = \theta$

Phần tử -*x* gọi là phần tử đối xứng (hay phần tử đối) của *x*

(6) Nếu $k \in R$ và $x \in V$, thì $kx \in V$

(7) k(x+y) =kx +ky

(8) (k+l)x = kx +lx

(9) k(lx) = (kl)x

(10) 1.x = x

Khi đó, tập $V = R^2$ còn được gọi là không gian vectơ trên trường số thực R.

Mười yêu cầu (1)-(10) gọi là mười tiên đề của không gian vectơ. Để xác định xem, một cấu trúc nào đó có phải là không gian vectơ hay không, chúng ta chỉ cần xác định tập đóng vai trò tập V, xác định hai phép toán và "nghiệm" 10 tiên đề đã nêu trên. Sau đây, chúng ta nêu thêm một số mô hình không gian vectơ mà học sinh đã làm quen dưới dạng "ẩn tàng" ở bậc phổ thông.

2.1.2. Không gian các vectơ hình học $\mathbb{R}_2$

Theo [5, tr.196], chúng ta gọi $\mathbb{R}_2$ là tập các vectơ hình học trong mặt phẳng. Như vậy, mỗi vectơ trong mặt phẳng là một phần tử của $\mathbb{R}_2$. Hai vectơ được xem là bằng nhau nếu chúng: cùng phương, cùng hướng và cùng độ dài.

Trong $\mathbb{R}_2$ định nghĩa 2 phép toán như sau:

Phép toán "cộng": chính là phép cộng vectơ; Phép toán "nhân": là phép nhân vectơ với một số thực.

Khi đó, tổng của 2 vectơ trong $\mathbb{R}_2$ là một vectơ trong $\mathbb{R}_2$, tích của một vectơ với một số thực là một vectơ trong $\mathbb{R}_2$.

Phần tử trung hòa là vectơ không ($\vec{0}$), vectơ này có tính chất: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a},\ \forall\vec{a}$

Phần tử đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ $-\vec{a}$, có tính chất: $\vec{a}+\overrightarrow{(-a)}=\vec{0},\ \forall\vec{a}$

Với các phép toán đã xác định, có thể kiểm tra được, 10 tiên đề nêu trên "nghiệm" thỏa mãn, khi đó chúng ta nói $\mathbb{R}_2$ là một không gian vectơ trên trường số thực R.

Một cách tương tự tập R_3 các vectơ hình học trong không gian có chung gốc hay các vectơ hình học tự do trong không gian (trong đó, chúng ta đồng nhất các vectơ bằng nhau) với phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với một số thực là một không gian vectơ.

2.1.3. Không gian các hàm số liên tục

Theo [2, tr.68], gọi $C[a,b]$ là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$, với a và b cho trước. Xét hai hàm số: $f\in C[a,b]$ và $g\in C[a,b]$. Chúng ta xem: $f=g$ nếu $f(x)=g(x),\ \forall x\in[a,b]$. Trên $C[a,b]$ định nghĩa 2 phép toán như sau:

Phép cộng 2 hàm số liên tục: $(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in[a,b]$.

Phép nhân hàm số liên tục với số thực: $(kf)(x)=kf(x);\ \forall \mathrm{k}\in\mathbb{R},\ \forall x\in[a,b]$.

Trong tập này có:

Phần tử trung hòa là hàm số đồng nhất không; Phần tử đối xứng của hàm f là hàm $-f$ được xác định như sau:

$$(-f)(x)=-f(x),\ \forall x\in[a,b].$$

Tập $C[a,b]$ với hai phép toán nêu trên, "nghiệm" thỏa mãn các tiên đề (1)-(10), do vậy $C[a,b]$ là một không gian vectơ.

Mở rộng ra, chúng ta xét tập $C(-\infty,+\infty)$ là tập các hàm số liên tục trên $(-\infty,+\infty)$, với các phép toán định nghĩa như trên tập $C[a,b]$ thì $C(-\infty,+\infty)$ là một không gian vectơ.

2.1.4. Không gian các đa thức

Theo [5, tr.200], trong tập các hàm liên tục $C(-\infty,+\infty)$, chúng ta xét một lớp hàm đặc biệt đó là lớp hàm đa thức, được định nghĩa như sau:

Đa thức bậc *n* (*n* nguyên dương) có dạng: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Trong đó: $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.

Gọi P_n là tập các đa thức có bậc bé hơn bằng *n* (với *n* nguyên dương), tức: $P_n = \left\{ p \mid p := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \right\}$.

Chúng ta thấy, một đa thức bậc *n* là một hàm số liên tục trên $(-\infty, +\infty)$,

Trong P_n, hai phép toán cộng và nhân được xác định cụ thể như sau:

Cho $p := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $q := b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, và $k \in \mathbb{R}$, chúng ta có:

$$kp := ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \cdots + ka_nx^n$$

$$p + q := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

Trong tập P_n này có:

Phần tử trung hòa là đa thức không

Phần tử đối của đa thức $p := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ là:

$$-p := -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n.$$

Tập P_n, với hai phép toán nêu trên "nghiệm" thỏa mãn các tiên đề (1)-(10), do vậy P_n là một không gian vectơ.

Khi thay *n* bởi các giá trị số cụ thể như: *n=2, 3,...* Chúng ta thu được các mô hình cụ thể của không gian vectơ.

Trên đây là một số mô hình không gian vectơ, được hình thành nên từ những tập hợp với các phần tử có tính chất khác nhau và sinh viên đã tiếp xúc ở bậc phổ thông. Tiếp theo sau, chúng ta sẽ nghiên cứu tiếp một số mô hình không gian vectơ hình thành nên từ những tập hợp các đối tượng mà sinh viên được tiếp xúc trong các môn học Toán cao cấp ở trường đại học.

2.2. Các mô hình không gian vectơ trong toán cao cấp ở trường đại học

2.2.1. Không gian $\mathbb{R}^n$

Theo [2, tr.66-tr.67], xét $\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$. Trên $\mathbb{R}^n$ định nghĩa hai phép toán:

Phép toán "cộng":

$$x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n);\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Phép toán "nhân" ngoài:

$$tx = t(x_1, x_2, ..., x_n) = (tx_1, tx_2, ..., tx_n);$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Với tập $\mathbb{R}^n$ cùng với hai phép toán được định nghĩa như trên, "nghiệm" thỏa mãn các tiên đề (1)-(10), do vậy $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ.

Đặc biệt, khi n = 1, thì $\mathbb{R}^n$ trở thành $\mathbb{R}$, và 2 phép toán cộng và nhân chính là 2 phép toán cộng và nhân 2 số thực mà ta đã biết.

Khi n=2, chúng ta có R^2 là không gian vectơ đã xét ở trên.

2.2.2. Không gian các ma trận cùng cấp

Theo [3, tr.90], cho $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận thực cỡ $m \times n$. Trên $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ định nghĩa hai phép toán cộng và nhân như sau:

Phép toán "cộng": là phép cộng 2 ma trận;

Phép toán "nhân": là phép nhân một số thực với một ma trận.

Phần tử trung hòa của tập $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là ma trận không cỡ $m \times n$.

Phần tử đối của phần tử $A=\left[a_{\text{ij}}\right]_{m\times n}$ là: $-A=\left[-a_{\text{ij}}\right]_{m\times n}$

Tập $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ cùng với hai phép toán nêu trên "nghiệm" thỏa mãn các tiên đề (1)-(10), do vậy $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là một không gian vectơ.

2.2.3. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Theo [3, tr.104], Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất *m* phương trình, *n* ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Và, chúng ta có các kết quả sau:

(0,0,…,0) là 1 nghiệm của hệ phương trình (*), và nó được gọi là nghiệm tầm thường của hệ;

Nếu $(c_1,c_2,...,c_n)$, $(d_1,d_2,...,d_n)$ là các nghiệm của hệ phương trình (*), thì $t(c_1,c_2,...,c_n)$ và $(c_1,c_2,...,c_n)+(d_1,d_2,...,d_n)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình (*);

Mọi tổ hợp tuyến tính các nghiệm của hệ phương trình (*) cũng là nghiệm của hệ phương trình (*).

Chúng ta gọi, tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (*) là:

$$T=\begin{Bmatrix} \alpha\in\mathbb{R}^n \mid \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n); \\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}.$$

Khi đó, chúng ta có: $\forall\alpha,\beta\in T;\ \forall c,d\in\mathbb{R}\ \Rightarrow c\alpha+d\beta\in T$.

Rõ ràng, *T* là tập con của $\mathbb{R}^n$, trên *T* cũng có 2 phép toán cộng và nhân như trong $\mathbb{R}^n$.

Tập *T* cùng với hai phép toán xác định như trên, "nghiệm" thỏa mãn các tiên đề (1)-(10), do vậy, *T* là một không gian vectơ.

Và hơn thế nữa, chúng ta có thể xem tập T được sinh ra từ 2 nghiệm gốc hay còn gọi là nghiệm cơ sở (giả sử là: α,β *), tức là:* $T=\{c\alpha+d\beta;\ \forall c,d\in\mathbb{R}\}$.

Từ các mô hình cụ thể, chúng ta hình thành nên khái niệm không gian vectơ tổng quát sau:

Theo "[3, tr.89], [4, tr.65]", cho tập $V\neq\varnothing$ (mỗi phần tử của *V* gọi là một vectơ), $\mathbb{R}$ là trường số thực, trang bị trên *V* hai phép toán:

Phép cộng trên *V*: $(+):\ V\times V\to V \qquad (x,y)\mapsto x+y$

Phép nhân ngoài: $(.):\ \mathbb{R}\times V\to V \qquad (k,x)\mapsto kx$

Với 2 phép toán đã xác định, khi đó 10 tiên đề nêu trên được thỏa mãn, thì ta nói *V* cùng với 2 phép toán trên làm thành một không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$.

Khái niệm không gian vectơ tổng quát có thể cũng cố bằng các phản ví dụ, trong đó đưa ra các tập hợp có trang bị 2 phép toán nhưng không "đóng kín", do vậy không tạo thành không gian vectơ.

Thể hiện trong các bài toán kinh tế - kinh doanh, các phép toán không gian vectơ không được xét riêng biệt mà thường thể hiện "ẩn tàng" dưới dạng tổ hợp các phép toán, chúng ta gọi là các tổ hợp tuyến tính, khái niệm này trong toán học được trình bày chính xác như sau: "V là một không gian vectơ, S là một họ vectơ của V: $S=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Biểu thức: $c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ với $c_i = const \in R$ là một vectơ thuộc V và được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của họ S, hay cũng có thể nói gọn là tổ hợp tuyến tính của họ S".

Khi đó, với hai phép toán đã xác định, với mọi số thực: $k_1, k_2, ..., k_n$, và với mọi vectơ: $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n} \in \mathbb{R}_2$, chúng ta có: $\vec{a} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{a_n} \in \mathbb{R}_2$, và chúng ta nói: vectơ $\vec{a}$ *biểu diễn tuyến tính qua tổ hợp các vectơ* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n} \in \mathbb{R}_2$. Sau đây, chúng ta nêu "chức năng kép" của không gian vectơ trong cấu trúc kinh tế - kinh doanh vừa là "tri thức nghề - tri thức kỹ thuật" vừa là "tri thức chiến lược", phương tiện hình thành tư duy cấu trúc - hệ thống.

2.3. Từ cấu trúc toán học tới cấu trúc kinh tế, kinh doanh

Theo "[1, tr.81-tr.93], [6, tr.353-tr.395]", vận dụng tri thức cấu trúc - hệ thống, tích lũy từ các tri thức về không gian vectơ, có thể tập dượt cho sinh viên "nhìn thấy" mối liên hệ có tính cấu trúc - hệ thống giữa các yếu tố của hoạt động kinh tế - kinh doanh.

2.3.1. Cấu trúc - hệ thống trong hoạt động kinh tế

Trong phần này, chúng ta sẽ xét bài toán trong kinh tế đưa về tổ hợp tuyến tính

Bài toán: Một công ty chuyên quản lý các dự án nông nghiệp, ứng dụng quy hoạch tuyến tính để tối đa lợi nhuận của một dự án dựa trên bảng các số liệu sau đây:

Số liệu đầu vào đối với một đơn vị sản phẩm	**Loại sản phẩm**		**Khả năng lớn nhất của các nguồn tài nguyên sẵn có**
	Lúa	**Đậu nành**	
Diện tích (ha/tấn)	4	6	100 ha
Lượng nước (10^3m^3/tấn)	12	8	180 x 10^3m^3
Nhân lực (công/tấn)	40	10	500 công
Lợi nhuận (USD/tấn)	18	21	

Để giải quyết bài toán này, người ta làm như sau:

Bước 1: Xác định các biến quyết định

Gọi: x_1 là số tấn lúa cần được sản xuất; x_2 là số tấn đậu nành cần được sản xuất.

Bước 2: Xác định hàm mục tiêu

Hàm mục tiêu trong bài toán này là cực đại lợi nhuận *Z*.

Max $Z = 18x_1 + 21x_2$

Bước 3: Xác định các ràng buộc

Ràng buộc về diện tích: $4x_1 + 6x_2 \le 100$

Ràng buộc về lượng nước: $12x_1 + 8x_2 \le 180$

Ràng buộc về nhân lực: $40x_1 + 10x_2 \le 500$

Giá trị của các biến không âm: $x_i \ge 0$ với $i = 1,2$

Với bài toán trên, mục tiêu là xét giá trị lớn nhất của biểu thức: $18x_1 + 21x_2$. Chúng ta thấy, biểu thức này là tổ hợp tuyến tính của các phần tử trong tập $\mathbb{R}$ (nếu ta bỏ qua ràng buộc: $x_1, x_2 \ge 0$). Tương tự, các ràng buộc của bài toán trên cũng là những tổ hợp tuyến tính của các phần tử trong tập $\mathbb{R}$.

Như vậy, với những dạng bài toán kinh tế này, ta đưa bài toán về xét tổ hợp tuyến tính của những phần tử trên tập $\mathbb{R}$ hoặc là trên một tập nào đó là tập con của tập $\mathbb{R}$.

2.3.2. Cấu trúc - hệ thống trong hoạt động kinh doanh

Trong phần này, chúng ta sẽ xét bài toán trong hoạt động kinh doanh đưa về tổ hợp tuyến tính.

Bài toán: Xét thị trường có 2 mặt hàng, biết hàm cung và hàm cầu của mỗi mặt hàng như sau:

$$Q_{s1} = -4 + 6P_1, \quad Q_{d1} = 20 - 4P_1 + 2P_2,$$
$$Q_{s2} = -3 + 6P_1, \quad Q_{d2} = 45 + 3P_1 - 3P_2$$

Hãy tìm điểm cân bằng thị trường.

Giải: Để tìm điểm (giá) cân bằng, ta xét hệ phương trình: $Q_{s1} = Q_{d1}$ và $Q_{s2} = Q_{d2}$, tức:

$$\begin{cases} -4 + 6P_1 = 20 - 4P_1 + 2P_2 \\ -3 + 6P_1 = 45 + 3P_1 - 3P_2 \end{cases}$$

hay $\begin{cases} 5P_1 - P_2 = 12 \\ P_1 + P_2 = 16 \end{cases}$

Giải hệ trên, chúng ta được: $P_1 = \dfrac{14}{3}, P_2 = \dfrac{34}{3}$, suy ra:

$$Q_{s1} = 12, Q_{s2} = \frac{25}{3}.$$

Vì: P_1, P_2, Q_{s1}, Q_{s2} đều dương nên ta có hệ thống giá cân bằng là: $P_1 = \dfrac{14}{3}, P_2 = \dfrac{34}{3}$.

Với bài toán này, chúng ta đưa bài toán cân bằng thị trường về giải hệ phương trình tuyến tính. Như vậy, vế trái của hai phương trình trong hệ này là tổ hợp tuyến tính của P_1 và P_2. Hơn nữa, nếu như vế phải của các phương trình trong hệ này đều bằng không, chúng ta được hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Vậy, chúng ta đưa bài toán ban đầu về bài toán mới với các tổ hợp tuyến tính.

Các ví dụ trên còn cho thấy, để tìm giá trị cực đại của lợi nhuận Z, hay tìm điểm cân bằng thị trường, chúng ta phải xét hệ thống các điều kiện ràng buộc trong cấu trúc tổng thể chứ không thể xét đơn lẻ từng điều kiện của bài toán, có nghĩa là phải xem xét và giải bài toán với phương thức tư duy cấu trúc - hệ thống.

2.4. Đổi mới phương pháp dạy học toán cao cấp ở Việt Nam và trên thế giới

2.4.1. Về phía sinh viên

Theo [7] Nguyễn Đức Trung, Đại học Toulouse (Pháp), đang là giảng viên của Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, cho rằng:"phương pháp duy nhất để đạt hiệu quả ở đại học đối với các học phần của Toán cao cấp là "Hoàn toàn chủ động tự học kiến thức mới và tự luyện tập trước khi lên giảng đường". Vì rằng, "ngày nay, các em sinh viên có nhiều điều kiện thuận lợi hơn thế hệ đi trước nhiều lần nhưng dường như tính chủ động của các em lại không được phát huy đúng mức. Với một máy tính hoặc điện thoại thông minh có kết nối mạng thì các em hoàn toàn có thể làm chủ kiến thức của nhân loại". Để thực hiện được điều này, dĩ nhiên cần có sự trợ giúp của giảng viên để "biến quá trình đào tạo thành quá trình tự đào tạo", bằng cách thông qua một số xemina, hướng dẫn cho sinh viên cách lựa chọn và sử dụng tài liệu, cách lập sơ đồ "cây" xác lập mối liên hệ giữa các kiến thức,…

2.4.2. Về phía giảng viên

Cần chú trọng sử dụng các thành tựu của công nghệ thông tin, đặc biệt trong dạy học giải bài tập cần kết hợp cách giải truyền thống với cách giải được trợ giúp bởi phần mềm Mathematica như một máy tính và như một ngôn ngữ lập trình, nhờ đó có thể tiết kiệm đáng kể công sức dành cho việc tính toán thủ công. Tuy nhiên về mặt thuật giải, sáng tạo của người giải vẫn là then chốt. Do vậy, giảng viên cần khai thác và sử dụng các phương pháp dạy học toán hiện đại của Pháp, Hà Lan,… như: Lý thuyết tình huống, dạy học khám phá, dạy học mô hình hóa, dạy học angorit hóa, dạy học chương trình hóa,… các phương pháp dạy học này đã được "du nhập" vào Việt Nam hàng chục năm nay; Giúp sinh viên có cách tiếp cận đa chiều với kiến thức nhằm khám phá nhiều cách giải khác nhau và thói quen lựa chọn phương án giải tối ưu. Chú trọng thực tiễn hóa kiến thức, hình thành cho sinh viên kỹ năng vận dụng Toán cao cấp vào giải quyết các tình huống thực tiễn của kinh tế - kinh doanh và kỹ thuật. Đồng thời thông qua dạy học toán cao cấp, hình thành có chủ định cho sinh viên các kỹ năng mềm đáp ứng yêu cầu của cuộc cách mạng 4.0 như: kỹ năng sáng tạo trong công việc; kỹ năng khám phá và lãnh đạo bản thân; kỹ năng tổ chức công việc và quản lý thời gian; kỹ năng ra quyết định; kỹ năng giải quyết vấn đề,… Phát triển ở sinh viên năng lực thích ứng với các yêu cầu luôn biến động của thị trường lao động trong giai đoạn hiện nay và trong tương lai.

3. KẾT LUẬN

Tư duy cấu trúc - hệ thống là một trong các loại hình tư duy giúp cho sự hình thành và phát triển nhân cách hoàn hảo của con người. Tri thức về cấu trúc - hệ thống là một trong các sản phẩm vĩ đại mà nhân loại đã tìm được cho mình bắt đầu từ sự phát hiện ra các cấu trúc cơ bản trong Toán học: Cấu trúc đại số, cấu trúc thứ tự, cấu trúc tô pô, tri thức đó nhanh chóng được ứng dụng rộng rãi trong kinh tế - kinh doanh và kỹ thuật. Do vậy, dạy học toán trong nhà trường tất yếu phải coi trọng dạy tư duy cấu trúc - hệ thống cho học sinh thông qua các vật liệu cụ thể của các bộ môn toán, trong đó tri thức cấu trúc - hệ thống về không gian vectơ là hình mẫu đầu tiên có thể hình thành cho sinh viên hết sức thuận lợi do sinh viên đã tiếp cận cụ thể ở trường phổ thông. Dạy học không gian vectơ cho sinh viên không những cung cấp cho sinh viên "phương tiện" xem xét bài toán kinh tế - kinh doanh bằng tri thức không gian vectơ mà còn giúp cho sự hình thành tư duy cấu trúc - hệ thống.

Trong năm học này (2018 - 2019), Toán cao cấp (phần 1) gồm các nội dung: Định thức - ma trận; hệ phương trình tuyến tính; quy hoạch tuyến tính (Tối ưu hóa hay Toán kinh tế) với thời gian bố trí 30 giờ, do đó phải loại khỏi chương trình những nội dung không gian vectơ, ánh xạ tuyến tính và dạng toàn phương. Trong khi đó, như đã trình bày ở trên, việc loại những nội dung này ra khỏi chương trình là hoàn toàn không nên. "Quy hoạch tuyến tính" ở các Trường Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội và Trường Đại học Kinh tế Thành phố Hồ Chí Minh dạy 120 tiết, do đó việc "gán ghép" một cách chắp vá, khiên cưỡng nội dung "Quy hoạch tuyến tính" vào đại số tuyến tính cũng là bất cập. Chúng tôi cho rằng, vì lợi ích to lớn của tri thức về không gian vectơ, ánh xạ tuyến tính và dạng toàn phương đem lại cho sinh viên, chúng ta nên "trả lại" cấu trúc lôgic vốn có của đại số tuyến tính: Bố trí tối thiểu 45 giờ dạy ma trận - định thức; hệ phương trình tuyến tính; không gian vectơ; ánh xạ tuyến tính và dạng toàn phương, và nên có một học phần độc lập dạy Quy hoạch tuyến tính tối thiểu 45-60 giờ. Giải tích toán học (Toán cao cấp, phần 2) với khối lượng gấp nhiều lần đại số tuyến tính cùng các ứng dụng đa dạng, phong phú cũng nên điều chỉnh giờ dạy, ít ra tương tự như đại số tuyến tính. Khi xem xét tổng thể phân bố thời gian các môn học ở các khoa, chúng tôi thấy rằng, chỉ cần điều chỉnh giờ môn học "Phương pháp nghiên cứu khoa học trong kinh tế và kinh doanh" là có thể thực hiện được đề nghị của chúng tôi (môn học này với thời gian ít hơn, chúng tôi vẫn đảm bảo dạy, thực hiện được các yêu cầu của nhà trường mà không ảnh hưởng tới các môn chuyên ngành). Nếu cân đối lại giờ các môn chuyên ngành, nên lập học phần "Thực hành giải toán kinh tế - kinh doanh bằng các phương pháp Toán cao cấp", trong học phần này chủ yếu "toán học hóa" các mô hình kinh tế và sử dụng công cụ toán học giải các bài toán kinh tế - kinh doanh. Chúng tôi hy vọng, những ý kiến tâm huyết của chúng tôi sẽ được các cấp lãnh đạo nhà trường, các khoa, các nhà khoa học chú ý đến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Huy Hoàng (2010), *Toán cao cấp tập một*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

[2] Trần Trọng Huệ (2012), *Đại số tuyến tính và hình học giải tích*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

[3] Nguyễn Tiến Quang (2014), *Cơ sở đại số tuyến tính*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

[4] Nguyễn Cảnh Toàn (2009), *Không gian vectơ*, Nxb Giáo dục.

[5] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên, 2014), *Toán cao cấp tập 1*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

[6] G. Xtreng. (1980), *Đại số tuyến tính và ứng dụng của nó*, Nxb Thế giới, Maxcơva (Tiếng Nga).

[7] PV Moon.vn (2018), *Nguyễn Đức Trung - Học toán cao cấp như thế nào*, moon.vn/Tintuc/NoiDung/5956/321/tsnguyen-duc-trung--hoc-toan-cao-cap-nhu-the-nao-5956, ngày truy cập: 10/1/2019.

Ngày nhận bài: 29-9-2018. Ngày biên tập xong: 10-01-2019. Duyệt đăng: 21-01-2019