MÔĐUN BẤT BIẾN DƯỚI TỰ ĐẲNG CẤU CỦA BAO TỔNG QUÁT

Nguyễn Quốc Tiến
Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP.HCM
Email: *nguyenquoctien1982@gmail.com*
Ngày nhận bài: 08/7/2019; Ngày chấp nhận đăng: 06/9/2019

TÓM TẮT

Bài báo giới thiệu về khái niệm χ – bao tổng quát, nó có thể được xem như khái niệm tổng quát của bao nội xạ của một môđun và nêu một vài tính chất của nó tương tự như trường hợp bao nội xạ. Ngoài ra, bài viết cũng giới thiệu khái niệm môđun χ – bất biến đẳng cấu như một sự tổng quát của môđun bất biến đẳng cấu và đưa ra một kết quả tương tự. Mục đích bài viết nhằm tổng quan những kết quả gần đây để định hướng cho việc nghiên cứu của tác giả.

Từ khóa: χ – bao tổng quát, bao nội xạ, χ - bất biến đẳng cấu, χ -bất biến đồng cấu.

1. GIỚI THIỆU VÀ MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Bài toán về môđun bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của chúng được nghiên cứu lần đầu bởi Johnson & Wong (1961), trong đó họ đã chứng minh được rằng môđun bất biến dưới các tự đồng cấu trùng với lớp môđun tựa nội xạ [1]. Sau đó, Dickson & Fuller đã nghiên cứu môđun bất biến dưới tự đẳng cấu của bao nội xạ [2]... Những năm gần đây, bằng nhiều kỹ thuật khác nhau, các nhà toán học đã tổng quát những khái niệm, tính chất trên theo các hướng khác nhau và thu được các kết quả đẹp, chẳng hạn trong [3, 4]. Trong bài viết này, tác giả giới thiệu về một trường hợp tổng quát các khái niệm bao nội xạ, môđun bất biến dưới các tự đẳng cấu của bao nội xạ cùng một số tính chất tiêu biểu của nó. Trong suốt bài viết, vành R đã cho là vành kết hợp có đơn vị và mọi R -môđun là môđun unita. Ta viết M_R (tương ứng, ${}_RM$) để chỉ M là một R -môđun phải (t.ư, trái). Khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, ta viết môđun M. Ký hiệu $A \le M$ để chỉ A là môđun con của M , $End(M)$ là tập tất cả các đồng cấu từ M đến M . Ta viết fg với f, g là các đồng cấu có nghĩa là hợp của đồng cấu f và g . Môđun con K của $R-$môđun M được gọi là môđun con cốt yếu trong M , kí hiệu $K \le^e M$, nếu với mọi môđun con L của M mà $K \cap L = 0$ thì $L = 0$. Lúc này, ta cũng nói M là mở rộng cốt yếu của K . Liên quan đến tính cốt yếu của các môđun con, chúng ta có khái niệm đơn cấu cốt yếu. Một đơn cấu $f : K \to M$ được gọi là cốt yếu nếu $\mathrm{Im}(f) \le^e M$. Một vành R được gọi là chính quy von Nemann (hoặc chính quy), nếu với mọi $a \in R$, tồn tại $x \in R$ sao cho $axa = a.$ Cho I là ideal hai phía của vành R , ta nói phần tử luỹ đẳng $r + I$ trong R / I có thể nâng (modulo I) nếu $r + I = e + I$ với e là phần tử luỹ đẳng của R .

2. χ – BAO TỔNG QUÁT VÀ MỘT VÀI TÍNH CHẤT

Nhắc lại rằng, đơn cấu $\mu : M \to Q$ được gọi là bao nội xạ đối với M nếu Q là môđun nội xạ và μ là đơn cấu cốt yếu ($\mathrm{Im}(\mu) \leq^e Q$). Ta cũng thường gọi Q là bao nội xạ của M và kí hiệu $E(M)$. Mọi môđun đều có bao nội xạ và đó là duy nhất (sai khác một đẳng cấu). Bây giờ chúng ta định nghĩa khái niệm bao tổng quát và tìm hiểu một số tính chất của nó.

Định nghĩa 2.1. Cho vành R và χ là lớp các $R-$môđun phải đóng dưới các đẳng cấu. Một $\chi-$bao tổng quát của một $R-$môđun phải M là một đồng cấu $u : M \to X(M), X(M) \in \chi$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Với mọi đồng cấu $u' : M \to X'(M), X'(M) \in \chi$ tồn tại đồng cấu $f : X(M) \to X'(M)$ sao cho $u' = fu$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"] & X(M) \arrow[dl, "f"] \\ X'(M) & \end{tikzcd}$$

2. Nếu mọi đồng cấu $h : X(M) \to X(M), X(M) \in \chi$ thỏa $hu = u$ thì h là một đẳng cấu

Từ định nghĩa trên, ta có tính chất sau về $\chi-$bao tổng quát của mô đun M [5].

Định lý 2.2. Giả sử môđun M có hai $\chi-$bao tổng quát là $u : M \to X(M)$ và $u' : M \to X'(M)$. Khi đó, $X'(M) \cong X(M)$.

Chứng minh: Vì u, u' là các $\chi-$bao tổng quát của M, theo định nghĩa, tồn tại các đồng cấu $f : X(M) \to X'(M)$ sao cho $u' = fu$ và $f' : X'(M) \to X(M)$ sao cho $u = f'u'$. Do đó, $u = f'u' = f'fu$ và $u' = fu = ff'u'$. Lại theo định nghĩa về $\chi-$bao tổng quát của M, suy ra $ff', f'f$ là các đẳng cấu, do đó ff' cũng là các đẳng cấu. Hay $X'(M) \simeq X(M)$.■

Cũng như bao nội xạ của môđun M, nếu M có sự phân tích thành tổng trực tiếp của hai môđun con M_1, M_2 thì từ bao nội xạ của M_1, M_2 ta suy được bao nội xạ của M. Bây giờ ta có kết quả tương tự:

Định lý 2.3 . Giả sử $M = M_1 \oplus M_2$ với M_1, M_2 là hai môđun con của M, và M_1, M_2 có $\chi-$bao tổng quát lần lượt $u_1 : M_1 \to X(M_1)$, $u_2 : M_2 \to X(M_2)$. Khi đó, $u_1 \oplus u_2 : M \to X(M_1) \oplus X(M_2)$ là một $\chi-$bao tổng quát của M.

Chứng minh: Lấy $u' : M \to X'$. Vì $u_1 : M_1 \to X(M_1)$ là $\chi-$bao tổng quát nên tồn tại $f_1 : X(M_1) \to X'$ sao cho $u'i_{M_1} = f_1 u_1$,

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "i_{M_1}"] \arrow[d, "u_1"] & M \arrow[r, "u'"] & X' \\ X(M_1) \arrow[urr, "f_1"] & & \end{tikzcd}$$

tương tự, tồn tại $f_2 : X(M_2) \to X'$ sao cho $u' i_{M_2} = f_2 u_2$. Theo tính chất phổ dụng của tổng trực tiếp, tồn tại $f : X(M_1) \oplus X(M_2) \to X'$ với $f|_{X(M_1)} = f_1$, $f|_{X(M_2)} = f_2$. Và kiểm tra được $f(u_1 \oplus u_2) = u'$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u_1 \oplus u_2"] \arrow[d, "u'"] & X(M_1) \oplus X(M_2) \arrow[dl, "f"] \\ X' & \end{tikzcd}$$

Bây giờ, lấy g là một tự đồng cấu của $X(M_1) \oplus X(M_2)$ thỏa $g(u_1 \oplus u_2) = u_1 \oplus u_2$. Ta chứng minh g là một tự đẳng cấu. Với mọi phần tử $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ của $X(M_1) \oplus X(M_2)$ ta có:

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = gi_1(x_1) + gi_2(x_2)$$

$$= \begin{pmatrix} \pi_1 gi_1(x_1) + \pi_1 gi_2(x_2) \\ \pi_2 gi_1(x_1) + \pi_2 gi_2(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 gi_1 & \pi_1 gi_2 \\ \pi_2 gi_1 & \pi_2 gi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Đặt $\pi_1 gi_1 = \phi_{11}, \pi_1 gi_2 = \phi_{12}, \pi_2 gi_1 = \phi_{21}, \pi_2 gi_2 = \phi_{22}$. Khi đó, g được biểu diễn dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}.$$

Với mọi $m_1 \in M_1$, với mọi $m_2 \in M_2$ ta có

$$\begin{pmatrix} u_1(m_1) \\ u_2(m_2) \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u_1(m_1) \\ u_2(m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}u_1(m_1) + \phi_{12}u_2(m_2) \\ \phi_{21}u_1(m_1) + \phi_{22}u_2(m_2) \end{pmatrix},$$

do đó $u_1(m_1) = \phi_{11}u_1(m_1) + \phi_{12}u_2(m_2)$ và $u_2(m_2) = \phi_{21}u_1(m_1) + \phi_{22}u_2(m_2)$ với mọi $m_1 \in M_1$, với mọi $m_2 \in M_2$. Suy ra $u_1 = \phi_{11}u_1, \phi_{12}u_2 = 0$ và $u_2 = \phi_{22}u_2, \phi_{21}u_1 = 0$. Vì u_1 là $\chi -$ bao tổng quát của M_1 nên ϕ_{11} là tự đẳng cấu của $X(M_1)$. Xét tích ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_{21}\phi_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & -\phi_{21}\phi_{11}^{-1}\phi_{12} + \phi_{22} \end{pmatrix},$$

vì $\phi_{12}u_2 = 0, u_2 = \phi_{22}u_2$, ta có $(-\phi_{21}\phi_{11}^{-1}\phi_{12} + \phi_{22})u_2 = u_2$.

Vì u_2 là $\chi -$ bao tổng quát của M_2 nên $-\phi_{21}\phi_{11}^{-1}\phi_{12} + \phi_{22}$ là tự đẳng cấu của $X(M_2)$. Vậy, từ tích ma trận xét trên, suy ra ma trận biểu diễn của g có nghịch đảo, hay g là tự đẳng cấu.■

Năm 2013, Zhou và Lee đưa ra khái niệm môđun bất biến đẳng cấu [6]. Đó là: môđun M được gọi là bất biến đẳng cấu nếu M bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó. Phần tiếp theo sau sẽ tổng quát các khái niệm này [7].

3. MÔĐUN $\chi-$ BẤT BIẾN ĐẲNG CẤU VÀ MỘT SỐ KẾT QUẢ LIÊN QUAN

Định nghĩa 3.1. Cho môđun M và χ là lớp môđun đóng dưới các đẳng cấu. M được gọi là $\chi-$bất biến đẳng cấu nếu tồn tại một $\chi-$bao tổng quát $u: M \to X$ sao cho với bất kì tự đẳng cấu $g: X \to X$ tồn tại tự đồng cấu $f: M \to M$ sao cho $uf = gu$.

Trong định nghĩa trên, ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 3.2. 1) Thêm giả thiết $u: M \to X$ trong định nghĩa trên là đơn cấu. Ta có, vì g^{-1} cũng là tự đẳng cấu của X nên tồn tại tự đồng cấu $f': M \to M$ sao cho $uf' = g^{-1}u$. Suy ra $uf'f = g^{-1}uf = g^{-1}gu = u$ và $uff' = guf' = gg^{-1}u = u$. Do u là đơn cấu, nên f là đẳng cấu.

2) Cho χ là lớp môđun nội xạ, $E(M)$ là bao nội xạ của M. Khi đó, phép đồng nhất $i: M \to E(M)$ là một $\chi-$bao tổng quát của M. Môđun M là $\chi-$ bất biến đẳng cấu khi và chỉ khi với mọi $g: E(M) \to E(M)$ tồn tại tự đẳng cấu $f: M \to M$ sao cho $if = gi$, hay $g(M) \subseteq M$. Vậy trong trường hợp này, môđun $\chi-$ bất biến đẳng cấu chính là môđun bất biến đẳng cấu như đã biết.

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu một số tính chất đặc trưng của môđun $\chi-$ bất biến đẳng cấu, nó tương tự như trong trường hợp môđun bất biến đẳng cấu nghiên cứu bởi Lee và Zhou. Chúng ta bắt đầu với các kết quả sau:

Bổ đề 3.3. Cho môđun M với $u: M \to X$ là $\chi-$bao tổng quát của M. Với mọi $f \in End(M)$, gọi $g, g' \in End(X)$ thỏa mãn $gu = uf, g'u = uf$. Khi đó, $g - g' \in J(End(X))$.

Chứng minh: Với mọi $f: M \to M$, theo định nghĩa của u, luôn tồn tại $g: X \to X$ sao cho uf được phân tích qua u, hay $uf = gu$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "u"] & X \\ X \arrow[urr, "g"] & & \end{tikzcd}$$

Gọi $g, g' \in End(X)$ thỏa mãn $gu = g'u = uf$. Để chỉ ra $g - g' \in J(End(X))$, ta cần chứng minh $1 - t(g - g')$ là phần tử khả nghịch với mọi $t \in End(X)$. Ta có $t(g - g')u = t(gu - g'u) = 0$, suy ra

$$u - t(g - g')u = (1 - t(g - g'))u = u.$$

Theo định nghĩa của u suy ra $1 - t(g - g')$ là đẳng cấu, hay là phần tử khả nghịch. ∎

Nhận xét 3.4. Từ bổ đề trên, với môđun M có $u: M \to X$ là $\chi-$bao tổng quát, chúng ta có thể xác định một đồng cấu vành

$$\varphi: End(M) \to End(X)/J(End(X)),$$

với $\varphi(f) = g + J(End(X))$ và g thỏa $uf = gu$. Lúc này, φ xác định một đơn cấu vành $\phi: End(M)/ker(\varphi) \to End(X)/J(End(X))$ hay $End(M)/ker(\varphi) \cong Im(\phi)$ là một vành con của $End(X)/J(End(X))$. Bổ đề sau cho ta thấy, khi M là $\chi-$ bất biến đẳng cấu thì mỗi phần tử của $J(End(X))$ có thể xem là một mở rộng của một phần tử của $ker(\varphi)$.

Bổ đề 3.5. Cho môđun M có $\chi-$ bao tổng quát là $u: M \to X$, giả sử M là $\chi-$ bất biến đẳng cấu. Khi đó với $j \in J(End(X))$, tồn tại $k \in ker(\varphi)$ sao cho $uk = ju$

Chứng minh: Do $j \in J(End(X))$ nên $1-j$ là tự đẳng cấu của X. Vì M là $\chi-$ bất biến đẳng cấu nên tồn tại $f \in End(M)$ sao cho $uf = (1-j)u$. Do đó,

$$ju = (1-(1-j))u = u-(1-j)u = u-uf = u(1-f).$$

Lấy $k = (1-f)$, ta có $uk = ju$ và $\varphi(k) = j + J(End(X)) = 0$ hay $k \in ker(\varphi)$. ■

Bổ đề 3.6. Giả sử $S = T_1 \times T_2$ với T_1 là vành chính quy aben tự nội xạ và mọi phần tử của T_2 là tổng của hai phần tử khả nghịch. Nếu R là một vành con của S mà bất biến dưới phép nhân trái bởi các phần tử khả nghịch của S thì R là vành chính quy von Neumann

Chứng minh: Vì R là vành con của S, nên có thể viết $R = R_1 \times R_2$ với R_1 là vành con của T_1, R_2 là vành con của T_2. Giả sử tất cả các phần tử khả nghịch của S đều nằm trong R. Lấy bất kì phần tử $t_2 \in T_2$. Khi đó $t_2 = \alpha + \beta$ với α, β khả nghịch trong T_2. Do đó, $1_{T_1} \times \alpha, 1_{T_1} \times \beta$ là các phần tử khả nghịch trong S. Theo giả thiết ta được $(1_{T_1} \times \alpha)(1_{R_1} \times 1_{R_2}) \in R$ và $(1_{T_1} \times \beta)(1_{R_1} \times 1_{R_2}) \in R$, suy ra $\alpha 1_{R_2} \in R_2$ và $\beta 1_{R_2} \in R_2$. Như vậy, $t_2 = t_2 1_{R_2} = (\alpha 1_{R_2}) + (\beta 1_{R_2}) \in R_2$ hay $T_2 \subseteq R_2$. Vậy $T_2 = R_2$, suy ra $T_2 \subseteq R$ và là ideal chính quy von Neumann của R. Vì mọi vành chính quy aben là chính quy khả nghịch, nên với $x \in T_1$ tồn tại phần tử khả nghịch $u \in T_1$ sao cho $x = xux$. Hơn nữa $u + 1_{T_2}$ là khả nghịch trong S nên khả nghịch trong R. Vậy R/T_2 là vành chính quy von Neumann. Theo bổ đề 1.3 trong [8], ta có R là vành chính quy von Neumann. ■

Nhắc lại trong [9], với M là môđun bất biến đẳng cấu thì $J\left(End(M)\right)$ gồm tất cả các tự đồng cấu của M có nhân cốt yếu. $End(M)/J\left(End(M)\right)$ là vành chính quy von Neumann và các luỹ đẳng nâng modulo $J(End(M))$. Với trường hợp M là $\chi-$ bất biến đẳng cấu, ta có:

Định lý 3.7. Giả sử M là môđun $\chi-$ bất biến đẳng cấu với đơn cấu $u: M \to X$ là $\chi-$ bao tổng quát của M. Giả sử vành $S = End(X)/J(End(X)) = T_1 \times T_2$ trong đó T_1 là vành chính quy aben tự nội xạ và mọi phần tử của T_2 là tổng của hai phần tử khả nghịch. Khi đó, nếu các luỹ đẳng trong S nâng modulo căn Jacobson thì $End(M)/J(End(M))$ là vành chính quy von Neumann và các luỹ đẳng nâng modulo $J(End(M))$.

Chứng minh: Lấy $g + J\left(End(X)\right)$ là phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$. Khi đó, g là tự đẳng cấu của X. Do M là môđun $\chi-$ bất biến đẳng cấu nên tồn tại một đồng cấu f của M sao cho $uf = gu$. Theo nhận xét 3.4, ta được

$$\phi(f + ker(\varphi)) = g + J(End(X)) \in Im(\phi).$$

Lấy $\phi(f' + ker(\varphi))$ là phần tử bất kì của $Im(\phi)$. Ta có

$$\begin{aligned}&\left(g+J(End(X))\right)\phi\left(f'+ker(\varphi)\right)\\&=\phi\left(f+ker(\varphi)\right)\phi\left(f'+ker(\varphi)\right)\\&=\phi\left(ff'+ker(\varphi)\right)\in Im(\phi).\end{aligned}$$

Vậy $Im(\phi)$ bất biến dưới phép nhân trái bởi phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$. Theo bổ đề 3.6, ta được $Im(\phi)$ là vành chính quy von Neumann nên $End(M)/ker(\varphi)$ cũng vậy. Do đó, $J\left(End(M)\right)/ker(\varphi)=0$ hay $J\left(End(M)\right)\subseteq ker(\varphi)$.

Bây giờ, với mọi $f\in ker(\varphi)$, ta có $\varphi(f)=g+J(End(X))=0$ với $g\in End(X)$ thỏa $uf=gu$. Suy ra $g\in J(End(X))$, do đó $1-g$ khả nghịch trong $J(End(X))$. Do M là môđun $\chi-$bất biến đẳng cấu, $(1-g)^{-1}$ là một tự đẳng cấu của X nên tồn tại $h\in End(M)$ sao cho $(1-g)^{-1}u=uh$. Khi đó,

$$u=(1-g)^{-1}(1-g)u=(1-g)^{-1}(u-gu)=(1-g)^{-1}(u-uf)=(1-g)^{-1}u(1-f)=uh(1-f),$$

đồng thời

$$u=(1-g)(1-g)^{-1}u=(1-g)uh=(u-gu)h=(u-uf)h=u(1-f)h.$$

Do u là đơn cấu, như nhận xét 3.2 ta được $1-f$ là khả nghịch hay $f\in J(End(M))$. Vậy $J(End(M))=ker(\varphi)$. Do đó, $End(M)/J(End(M))$ vành chính quy von Neumann.

Cuối cùng, lấy $f+J(End(M))$ là phần tử lũy đẳng của $End(M)/J(End(M))$. Khi đó, tồn tại $g\in End(X)$ thỏa $uf=gu$ hay $g+J(End(X))=\phi\left(f+J(End(M))\right)$. Vì $f+J(End(M))$ là lũy đẳng nên $g+J(End(X))$ là phần tử lũy đẳng của $End(X)/J(End(X))$. Do $g+J(End(X))$ nâng modulo $J(End(X))$, nên tồn tại phần tử lũy đẳng e của $End(X)$ sao cho $g+J(End(X))=e+J(End(X))$ hay $g-e\in J(End(X))$. Theo bổ đề 3.5, tồn tại $k\in J(End(M))$ sao cho $(g-e)u=uk$. Suy ra, $gu-uk=eu$ hay $u(f-k)=eu$. Vậy $\varphi(f-k)=e+J(End(X))$. Như vậy,

$$u(f-k)^2=eu(f-k)=e^2u=eu=u(f-k)$$

Do u đơn cấu nên $(f-k)^2=(f-k)$. Vậy $(f-k)$ là phần tử lũy đẳng của $End(M)$ và thỏa $f+J(End(M))=(f-k)+J(End(M))$. Hay các lũy đẳng của $End(M)/J(End(M))$ nâng modulo căn Jacobson. ■

4. KẾT LUẬN

Bài báo tổng quan một số kết quả liên quan tới khái niệm bao tổng quát và môđun bất biến dưới các tự đẳng cấu của bao tổng quát. Định lý 3.7 cho chúng ta một kết quả về tính chính quy của vành $End(M)/J(End(M))$ trong trường hợp M là χ _ bất biến đẳng cấu. Tiếp tục nghiên cứu theo hướng trên cho các phạm trù khác như phạm trù aben, phạm trù khớp… và nghiên cứu các tính chất liên quan, theo tác giả đây là một hướng nghiên cứu có nhiều triển vọng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Johnson R.E., Wong E.T. - Quasi-injective modules and irreducible rings, Journal of the London Mathematical Society **s1-36** (1) (1961) 260-268.
2. Dickson S. E., Fuller K. R. - Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope, Pacific Journal of Mathematics **31** (3) (1969) 655-658.
3. Asensio P.A.G., Quynh T.C., Srivastava A.K. - Additive unit structure of endomorphism rings and invariance of modules, Bulletin of Mathematical Sciences **7** (2) (2017) 229-246.
4. Alahmadi A., Facchini A., Tung N. K. - Automorphism-invariant modules, Rendiconti del Seminario Matematico della Universit`a di Padova **133** (2015) 241-260.
5. Xu J. - Flat covers of modules, Lecture Notes in Mathematics **1634**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
6. Lee T. K., Zhou Y. - Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls, Journal of Algebra and Its Applications **12** (2) (2013).
7. Asensio P.A.G., Tutuncu D.K., Srivastava A.K. - Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes, Israel Journal of Mathematics **206** (1) 457-482 (2015).
8. Goodearl K. R. - Von Neumann Regular Rings, Krieger Publishing Company, Malabar, FL, 1991.
9. Asensio P.A.G., Srivastava A.K. - Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property, Journal of Algebra **388** (2013) 101-106.

ABSTRACT

MODULES INVARIANT UNDER AUTOMORPHISMS OF THEIR ENVELOPES

Nguyen Quoc Tien
Ho Chi Minh City University of Food Industry
Email: *nguyenquoctien1982@gmail.com*

This article introduces the concept of χ – envelopes, which can be seen as the general concept of the injective envelopes and gives some of its properties similar to the case of injective envelopes. In addition, the study also introduces the concept of modules invariant under automorphisms of their envelopes as a generalization of automorphisms invariant modules and gives some similar results. The purpose of the article is to review recent results to prepare the writer's study.

Keywords: χ – envelope, injective envelope, χ -automorphisms, χ -endomorphisms.