

# NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM CHỈ SỐ PHÁ HOẠI ĐỘNG TRONG CHẨN ĐOÁN HƯ HỒNG KẾT CẤU

TS. HỒ XUÂN BA

ThS. TRINH THỊ TRANG

Phân hiệu tại Thành phố Hồ Chí Minh,  
Trường Đại học Giao thông vận tải

## TÓM TẮT:

Hư hỏng trong kết cấu sẽ dẫn đến sự thay đổi trong các đặc trưng động của kết cấu như tần số tự nhiên, hình thái dao động và hệ số giảm dao động. Sự thay đổi trong tần số dễ dàng xác định với độ chính xác cao hơn so với các thông số còn lại. Nên đây là thông số được sử dụng phổ biến nhất trong việc chẩn đoán hư hỏng kết cấu. Hạn chế của cách tiếp cận này ở chỗ nhiệt độ thay đổi cũng có thể làm thay đổi tần số hoặc hư hỏng tại vị trí đối xứng trong kết cấu cũng có thể gây ra sự thay đổi tần số giống nhau. Chính vì vậy, việc xác định sự có mặt của hư hỏng hoặc vị trí hư hỏng có thể sẽ không chính xác. Sử dụng hình thái dao động có thể khắc phục nhược điểm này nhưng việc xác định hình thái dao động thường đòi hỏi phải có một số cảm biến nhất định. Do đó, bài báo này khảo sát một số chỉ số phá hoại động tính toán từ hình thái dao động hoặc kết hợp với tần số để phát hiện sự hiện diện và vị trí hư hỏng. Ba phương pháp được giới thiệu để tính chỉ số phá hoại động bao gồm: phương pháp độ cong hình thái, phương pháp độ mềm hình thái và phương pháp làm giảm độ lệch. Tính khả thi của việc sử dụng chỉ số phá hoại động được chứng minh thông qua các mô phỏng số và thực nghiệm. Kết quả thu được cho thấy phương pháp độ cong hình thái và độ mềm hình thái khẳng định khả năng ứng dụng cao trong chẩn đoán hư hỏng trong khi phương pháp làm giảm độ lệch có thể cải thiện được khi tăng số lượng điểm đo.

**Từ khóa:** Chỉ số phá hoại, phương pháp độ cong hình thái, phương pháp độ mềm hình thái, phương pháp làm giảm độ lệch

## ABSTRACT:

The presence of damage in a structure leads to changes in its dynamic properties, e.g. natural frequencies, mode shapes and damping ratios. The frequency shifts are easier to determine with high accuracy compared to the others. Therefore, frequencies are the most popular parameters in damage detection. The limitation of this approach is that temperature changes can cause changes in frequencies, or damage located at symmetric positions can generate the same frequency shifts. The presence of damage or damage position can be misidentified. Using mode shapes can overcome these shortcomings, however it requires an affordable number of sensors. For this reason, this paper investigates some damage indices derived from mode shapes or combined with frequencies, including modal curvature method (MCM), modal flexibility method (MFM), and gapped smooth method (GSM). The feasibility of damage indices is proved by numerical and experimental studies. The obtained results confirmed the high applicability of MCM, MFM in damage identification while increasing measurement points can improve the quality of damage detection of GSM.

**Keyword:** damage index, modal curvature method (MCM), modal flexibility method (MFM), gapped smooth method (GSM)

## 1. DẶT VẤN ĐỀ

Các đặc trưng động của kết cấu như tần số tự nhiên, hình thái dao động hay hệ số giảm dao động thường có mối liên hệ chặt chẽ với tình trạng sức khỏe của chính kết cấu đó. Do đó, bất kỳ sự thay đổi nào trong các đặc trưng động này đều có thể chỉ ra sự hiện diện của hư hỏng trong kết cấu. Chính vì lý do này mà các đặc trưng động thường được sử dụng để phát hiện ra hư hỏng, xác định vị trí và

thậm chí có thể định lượng được mức độ của hư hỏng. Nhiều tác giả trên thế giới đã xác định hư hỏng thành công dựa vào sự thay đổi trong các đặc trưng này. Tuy nhiên, việc ứng dụng các thông số này vào chẩn đoán hư hỏng tại Việt Nam còn nhiều hạn chế. Hiện nay, công tác kiểm định cầu dựa trên dao động chỉ xác định được tần số dao động đầu tiên của kết cấu. Mặc dù sự thay đổi trong tần số có thể xác định được sự hiện diện của hư hỏng nhưng không

thể xác định được vị trí hư hỏng [1]. Do đó, bài báo đề cập đến việc sử dụng tần số (frequency) và hình thái dao động (mode shape) hoặc chỉ sử dụng thông tin từ hình thái dao động để tính toán chỉ số phá hoại. Chỉ số phá hoại này sau đó được dùng xác định sự hiện diện của hư hỏng cũng như vị trí hư hỏng. Đầu tiên, nghiên cứu được thực hiện trên các mô phỏng số. Sau đó, các đặc trưng động của một dầm trong phòng thí nghiệm được đo đạc nhằm kiểm chứng

khả năng ứng dụng trong thực tế của các chỉ số phá hoại này.

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT HƯỚNG PHÁP CHẨN ĐOÁN DÙNG CHỈ SỐ PHÁ HOẠI

### 2.1 Phương pháp làm giảm độ lệch (Gapped smoothing method - GSM)

Phương pháp dựa trên việc tính độ cong của hình thái dao động đo đạc với giả thiết rằng độ cong của hình thái dao động của dầm là một đường cong được mô tả gần đúng như một hàm đa thức bậc 3. Do đó, xét tại điểm thứ  $i$  cách đầu dầm một đoạn  $x_i$ , đường cong  $C_i$  được xây dựng dựa vào đường độ cong của hình thái dao động đo đạc có thể tính như sau [2-3]:

$$C_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 \quad (1)$$

Trong đó,  $a_0, a_1, a_2, a_3$  được xác định dựa vào độ cong của hình thái dao động đo đạc, tại các điểm lân cận điểm đang tính toán:  $\phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}$ . Với điểm đầu tiên và điểm cuối cùng trên dầm thì sử dụng 4 điểm sau và 4 điểm phía trước để tính các thông số  $a_i$ . Độ cong của hình thái dao động đo đạc tại điểm  $x$  được xác định theo hàm xấp xỉ sai phân trung tâm:

$$\phi_x = (\phi_{x+1} + \phi_{x-1} - 2\phi_x) / h^2 \quad (2)$$

Trong đó,  $\phi_x$ : giá trị chuyển vị của một đo đạc tại điểm  $x$ ,  $h$  là khoảng cách giữa các điểm đo.

Sau đó, chỉ số phá hoại được xác định dựa vào sự khác biệt giữa hàm đa thức bậc 3 vừa xây dựng  $C_i$  với đường độ cong của hình thái dao động đã được đo đạc:

$$GSM_i = (\phi_i'' - C_i) \quad (3)$$

### 2.2 Phương pháp độ cong hình thái (Modal curvature method - MCM)

Khác với phương pháp GSM, phương pháp độ cong hình thái phải sử dụng dữ liệu đặc trưng động của 2 trạng thái hư hỏng và

chưa hư hỏng để xác định chỉ số phá hoại. Với 1 dầm có độ cứng  $EJ$ , chịu tác dụng của mô men uốn

$M(x)$ , độ cong tại vị trí  $x$ ,  $\phi_x''$  được xác định:

$$\phi_x'' = \frac{M(x)}{EJ} \quad (4)$$

Có thể thấy với một giá trị mô men cho trước, khi độ cứng giảm sẽ làm tăng độ cong tại vị trí tương ứng. Do đó, độ chênh giữa độ cong của hình thái dao động trong 2 trạng thái hư hỏng và chưa hư hỏng có thể được sử dụng để phát hiện vị trí hư hỏng. Thông thường độ cong của hình thái dao động được tính toán bằng phương pháp xấp xỉ sai phân gần đúng [4-5], tương tự với công thức (2):

$$\phi_x = \frac{\phi_{x+1} - 2\phi_x + \phi_{x-1}}{h^2} \quad (5)$$

Trong đó,  $\phi_x$ : giá trị hình thái dao động đo đạc tại điểm  $x$ ,  $h$  là khoảng cách giữa các điểm đo.

Vị trí hư hỏng được xác định thông qua chỉ số phá hoại với các độ cong của hình thái dao động ở trạng thái trước và sau khi hư hỏng  $\phi_{x(u)}, \phi_{x(d)}$

$$MC_i = |\phi_{x(u)} - \phi_{x(d)}| \quad (6)$$

### 2.3 Phương pháp sử dụng độ mềm hình thái (Modal flexibility method - MFM)

Với  $m$  bậc tự do, ma trận độ mềm  $F$  của một kết cấu được xác định như sau [6]:

$$[F] = \sum_{j=1}^m \frac{\phi_j \times \phi_j^T}{\omega_j^2} \quad (7)$$

Trong đó,  $\phi_j$  hình thái dao động được chuẩn hóa khối lượng tại của một  $j$ ,  $T$  là hoán vị ma trận và  $\omega_j$  là tần số dao động của một thứ  $j$ . Sự thay đổi của ma trận độ mềm dựa trên 2 trạng thái trước và sau khi bị hư hỏng được xác định như sau:

$$[\Delta F] = [F_D - F_{UN}] \quad (8)$$

Trong đó,  $F_{UN}$  và  $F_D$  lần lượt là ma trận độ mềm của dầm trước và sau khi bị hư hỏng.

Dựa vào sự thay đổi của ma trận độ mềm, chỉ số phá hoại tại điểm  $i$  được xác định bằng trị số lớn nhất của giá trị tuyệt đối của cột  $i$ :

$$\delta_i = \max |\Delta f_{col i}| \quad (9)$$

Tuy nhiên, để vị trí hư hỏng được thể hiện rõ ràng, chỉ số phá hoại của phương pháp độ mềm hình thái được viết lại dựa vào công thức (5) như sau [7]:

$$MFC_i = \left| \min \left( \frac{\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}}{h^2}, 0 \right) \right| \quad (10)$$

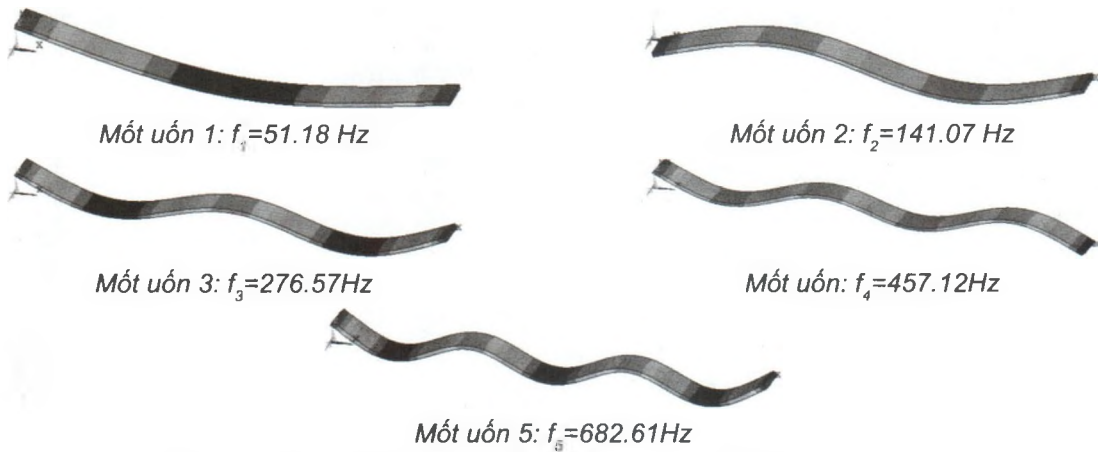
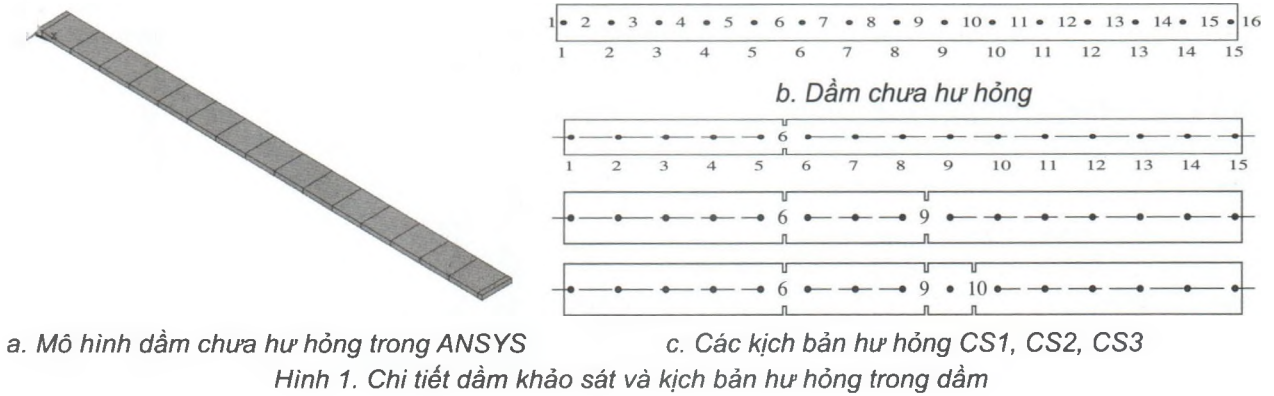
## 3. NGHIÊN CỨU CHẨN ĐOÁN HƯ HỎNG DỰA TRÊN MÔ HÌNH SỐ

### 3.1 Các kích bản hư hỏng trong dầm thép

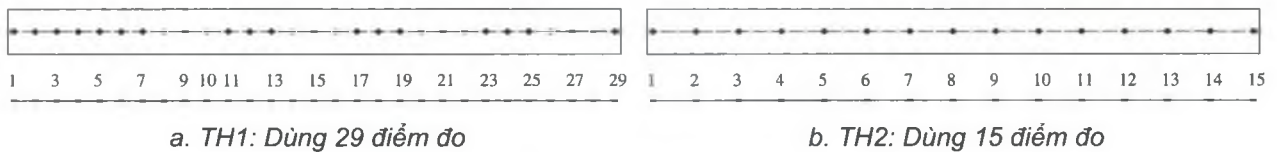
Như đã giới thiệu ở trên, để có thể xác định được chỉ số phá hoại, cần phải xác định được tần số tự nhiên và hình thái dao động tương ứng của kết cấu trong hai trạng thái hư hỏng và chưa hư hỏng. Do đó, một mô hình số của một dầm thép có điều kiện biên tự do được tạo ra bằng phần mềm ANSYS 17 [8]. Sau đó, dựa vào mô hình số để xuất ra các đặc trưng động của kết cấu.

Một dầm thép dài  $L = 1000$  (mm), mặt cắt ngang hình chữ nhật  $b \times h = 70 \times 10$  (mm), được mô hình bằng phần tử tám nút với 6 bậc tự do tại mỗi nút, SHELL181, dùng vật liệu giả thiết: mô đun đàn hồi  $E = 2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, khối lượng riêng  $\rho = 7820$  kg/m<sup>3</sup>, hệ số Poisson  $\nu = 0.3$ . Dầm thép được mô hình bằng 16 phần tử,  $10 + 15 \times 70 + 10$  (mm), kích thước lưới 2.5mm. Hư hỏng trong dầm được tạo ra bằng các vết cắt đối xứng qua tim dầm. Kích thước vết cắt  $10 \times 5$  (mm). Mô hình dầm trong ANSYS và các kích bản hư hỏng trong dầm thép được thể hiện trong Hình 1.

Đặc trưng động của kết cấu dầm ở trạng thái hư hỏng và nguyên trạng được thu thập để tính toán các chỉ số phá hoại. Trong nghiên cứu này,



Hình 2. Năm mốt uốn thẳng đứng đầu tiên của dầm chưa hư hỏng



Hình 3. Bố trí điểm đo dọc theo dầm

năm mốt đầu tiên của dầm được xác định để phục vụ việc xác định hư hỏng. Đây là các mốt có ảnh hưởng lớn đến đáp ứng động của một kết cấu. Ngoài ra, trong điều kiện thực tế, việc xác định các mốt cao khó khăn hơn nhiều so với việc xác định 5 mốt đầu.

Việc chẩn đoán hư hỏng sử dụng hình thái dao động càng chính xác khi số lượng điểm đo trên kết cấu được bố trí càng nhiều. Để khảo sát số lượng điểm đo hợp lý phục vụ cho thí nghiệm, giá trị chuyển vị của mốt dao động trên dầm mô phỏng được xác định theo 2 trường hợp. Trường hợp 1, dùng 29 điểm để xác định hình dạng của mốt dao động. Trường hợp 2 hình dạng của mốt dao động chỉ được thể hiện thông qua 15 điểm (xem Hình 3).

### 3.2 Kết quả nhận dạng hư hỏng trong dầm mô phỏng

Dữ liệu tần số và hình thái dao động được thu thập lần lượt ở các trạng thái dầm chưa hư hỏng và đã hư hỏng theo 3 kích bản CS1, CS2 và CS3. Sử dụng các công thức (3), (6), (10) để xác định các chỉ số phá hoại.

#### 3.2.1 Trường hợp 1, dùng 29 điểm đo:

Trong trường hợp này, việc xác định vị trí hư hỏng được khảo sát với số lượng mốt khác nhau để đánh giá khả năng ứng dụng chỉ số phá hoại. Với số lượng điểm đo đủ lớn, biểu đồ các chỉ số phá hoại dọc dầm có thể xác định được vị trí của hư hỏng. Dựa vào Hình 4, có thể thấy vị trí hư hỏng tương ứng với tất cả các kích bản đã được

xác định chính xác thông qua các đỉnh trong biểu đồ chỉ số phá hoại.

#### 3.2.2 Trường hợp 2, dùng 15 điểm đo:

Với trường hợp số lượng điểm đo ít hơn, biểu đồ chỉ số phá hoại chỉ có thể sử dụng để xác định phạm vi xuất hiện vết cắt. Nói cách khác, dựa vào biểu đồ các chỉ số phá hoại dọc dầm có thể khoanh vùng hư hỏng. Điều này có thể thấy rõ ở Hình 5b và Hình 5c, hai phương pháp MCM và MFM chỉ ra được phạm vi có hư hỏng thông qua sự thay đổi trong biểu đồ chỉ số phá hoại. Tuy nhiên, khi số lượng hư hỏng trong dầm tăng lên thì MFM lại tỏ ra có ưu thế hơn so với MCM trong việc khoanh vùng hư hỏng. Riêng phương pháp GSM không

thể xác định hư hỏng với số lượng điểm đo ở trường hợp 2.

Thông qua việc khảo sát khả năng xác định hư hỏng của các chỉ số phá hoại theo 3 kịch bản hư hỏng và 2 trường hợp bố trí lưới đo, có thể chỉ ra rằng số lượng điểm đo 15 hoàn toàn có thể sử dụng để khoanh vùng hư hỏng khi sử dụng 2 phương pháp MCM và MFM. Dựa vào kết luận này, thí nghiệm đo dao động trong phòng của một dầm có điều kiện biên tự do được thực hiện.

#### 4. NGHIÊN CỨU CHẨN ĐOÁN HƯ HỎNG DỰA TRÊN THỰC NGHIỆM

##### 4.1 Thí nghiệm dao động của dầm thép trong phòng thí nghiệm

##### 4.1.1 Giới thiệu dầm thí nghiệm

Dầm thép được chế tạo bằng 1 tấm thép có kích thước  $L \times b \times h = 1 \times 0.07 \times 0.01$  (m). Kéo cấu này được treo trên 2 dây thép tại 2 điểm số 4 và 12 thông qua một khung thép như Hình 6, Hình 7. Để tạo ra hư hỏng trên dầm, 2 vết cắt được tạo ra giữa 2 điểm 5 và 6 (Hình 7c). Kích thước mỗi vết cắt là  $0.01 \times 0.005$  (m).

##### 4.1.2 Triển khai thí nghiệm đo dao động dầm thép khi chưa hư hỏng và đã hư hỏng

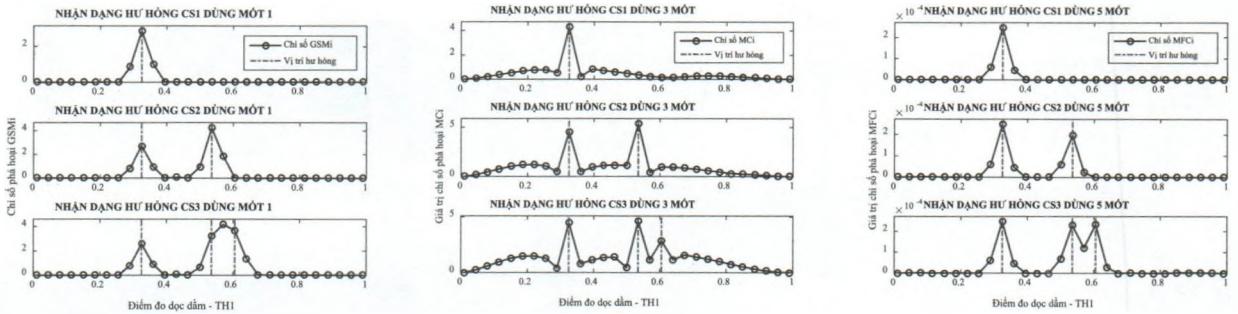
a. Bố trí điểm đo trên dầm thép trong phòng thí nghiệm

Sử dụng 15 đầu đo gia tốc PCB độ nhạy  $(10.13 - 10.50) \text{ mV/m.s}^{-2}$  với

dải đo tần số từ 0.5 đến 10,000Hz, để thu thập đáp ứng động của dầm. Việc tạo kích thích và kiểm soát giá trị lực kích thích được thực hiện bằng búa tạo xung PCB có độ nhạy  $2.25 \text{ mV/V}$ . Chi tiết việc bố trí điểm đo trong phòng thí nghiệm và thiết bị phục vụ đo đạc được thể hiện ở Hình 7a, Hình 7b. Trình tự thí nghiệm được thực hiện giống nhau cho cả 2 trường hợp dầm hư hỏng và không hư hỏng.

b. Thu thập, xử lý số liệu dựa trên sự hồi đáp động của dầm thép

Búa tạo xung được sử dụng để tạo ra kích thích dao động cho dầm. Tần số lấy mẫu là 2651 Hz trong thời gian 5 phút. Toàn bộ dữ liệu đo được lưu lại vào máy tính (Hình

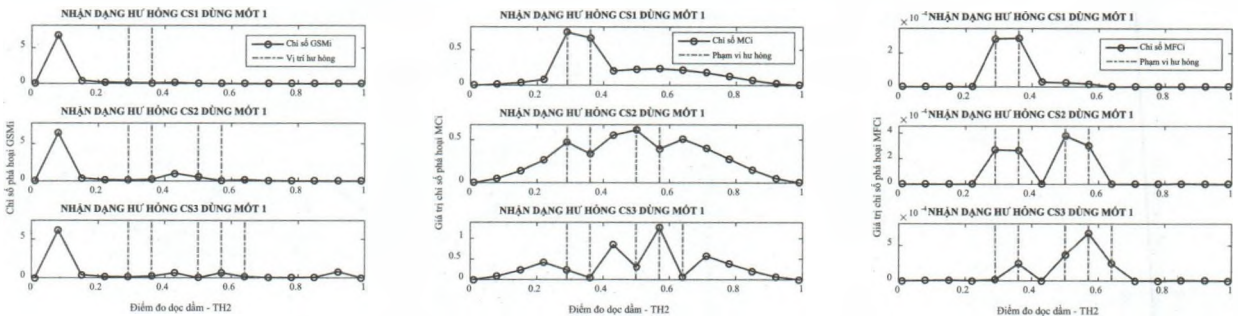


a. GSM + 1 một đầu tiên

b. MCM + 3 một đầu tiên

c. MFM + 5 một đầu tiên

Hình 4. Nhận dạng hư hỏng theo các kịch bản CS1, CS2 và CS3 với lưới đo TH1

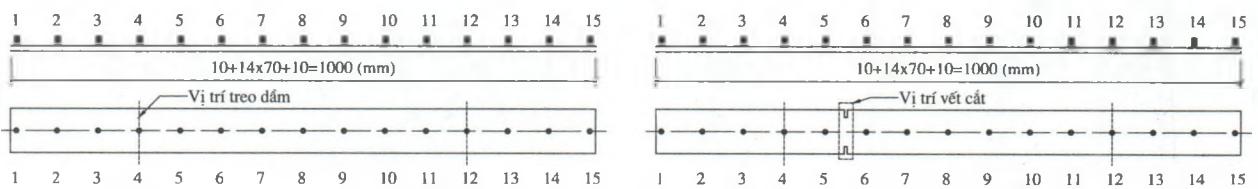


a. Dùng GSM

b. Dùng MCM

c. Dùng MFM

Hình 5. Nhận dạng hư hỏng theo các kịch bản CS1, CS2 và CS3 với lưới đo TH2



a. Dầm chưa hư hỏng

b. Dầm bị hư hỏng

Hình 6. Bố trí điểm đo trên dầm thí nghiệm

7b). Dữ liệu sau đó được chuyển từ miền thời gian sang miền tần số bằng biến đổi Fourier nhanh (FFT). Từ đó xây dựng nên biểu đồ ổn định dựa trên một số tiêu chí ổn định về tần số 1%, hình thái dao động 1% và hệ số giảm dao động 5% theo phương pháp nhận dạng không gian con ngẫu nhiên (Stochastic Subspace Identification SSI) [9]. Biểu đồ ổn định và hàm đáp ứng tần số (frequency response function) được sử dụng để xác định đặc trưng động của kết cấu thử nghiệm (Hình 8).

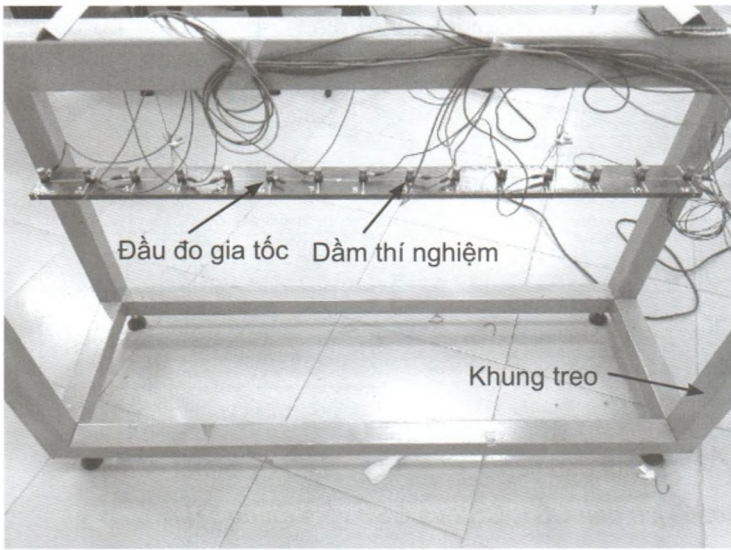
c. Kết quả xác định đặc trưng động của dầm thép (tần số, hình thái dao động)

Năm cột thẳng đứng trên biểu đồ ổn định thể hiện 5 một dao động đầu tiên của kết cấu. Ba hình thái dao động đối xứng và 2 hình thái dao động phản đối xứng được xác định với dải tần số dao động tương ứng được thể hiện trong Hình 9 và Bảng 1. Có thể thấy rằng, khi hư hỏng xuất hiện trong dầm, đồng nghĩa với việc độ cứng trong dầm đã giảm do đó, làm cho tần số dao động giảm so với trước khi hư hỏng. Tuy nhiên, không thể xác

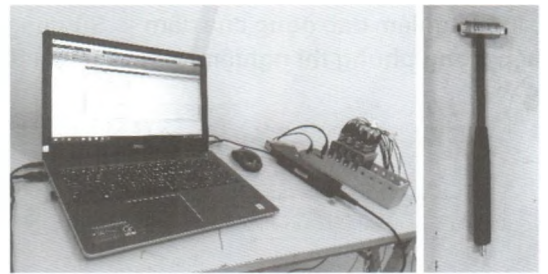
định được hư hỏng tại vị trí nào trên dầm nếu chỉ dựa vào sự thay đổi này của tần số.

Bảng 1 Tổng hợp tần số dao động tự nhiên của dầm thí nghiệm trước và sau hư hỏng

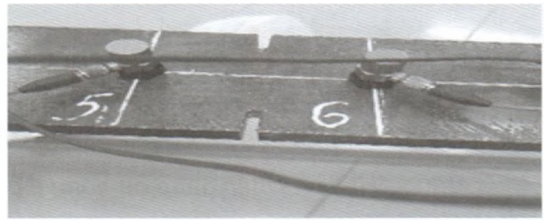
STT	Tần số, f (Hz)	
	Nguyên	Hư hỏng
1	50.83	50.38 ↓
2	140.40	138.66 ↓
3	274.74	273.68 ↓
4	456.94	454.12 ↓
5	678.90	672.61 ↓



a. Bố trí điểm đo trên dầm trong phòng thí nghiệm

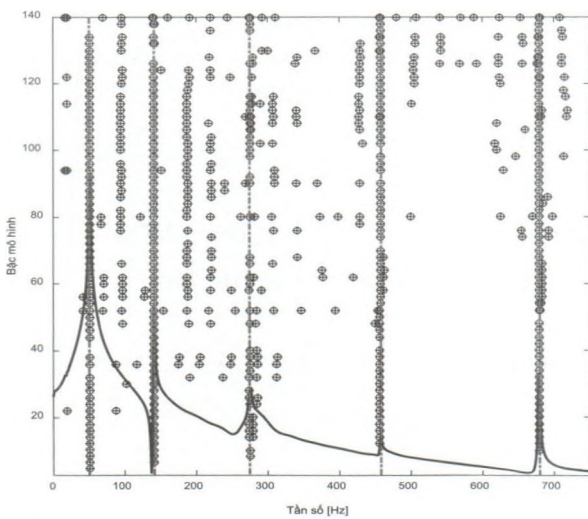


b. Thiết bị thu dữ liệu và búa tạo xung

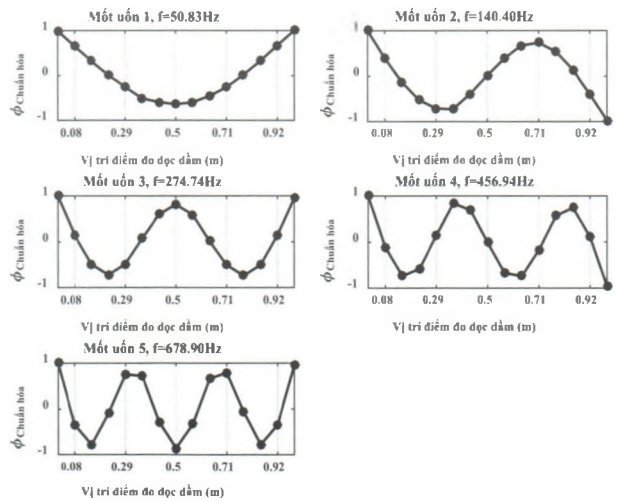


c. Vết cắt trên dầm

Hình 7. Dầm thép trong phòng thí nghiệm



Hình 8. Biểu đồ ổn định dựa trên dữ liệu đo của dầm nguyên



Hình 9. Năm một dao động thẳng đứng đầu tiên của dầm chưa hư hỏng

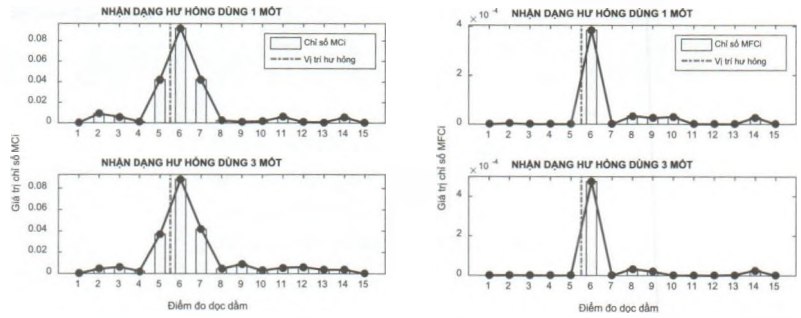
## 4.2 Ứng dụng chỉ số phá hoại trong việc chẩn đoán hư hỏng trong dầm

Đặc trưng động của dầm ở 2 trạng thái trước và sau hư hỏng được sử dụng để tính chỉ số phá hoại. Theo kết quả mô phỏng ở trên, phương pháp GSM có thể sử dụng hiệu quả khi tăng số lượng điểm đo theo phương dọc dầm. Chính vì vậy, với thí nghiệm hư hỏng này, chỉ có 2 phương pháp MCM và MFM được sử dụng để xác định vị trí hư hỏng trong dầm. Cả 2 phương pháp MCM và MFM dùng 3 một dao động đầu tiên đều có thể xác định được vùng có hư hỏng thông qua sự thay đổi giá trị chỉ số phá hoại theo phương dọc dầm. Phương pháp MFM tiếp tục tỏ ra ưu thế hơn so với MCM do đề xuất vùng có thể bị hư hỏng hẹp hơn từ điểm 5 đến 7 so với MCM từ điểm 4 đến 8. Việc không thể chỉ ra chính xác vị trí hư hỏng có thể cải thiện bằng cách tăng số lượng điểm đo như đã đề cập ở trên. Ngoài ra, sự sai lệch vị trí này có thể do nhiều trong quá trình đo, thao tác tháo lắp đầu đo trước và sau khi tạo hư hỏng trên dầm.

## 5. KẾT LUẬN

Chẩn đoán hư hỏng trong kết cấu dựa trên dữ liệu dao động là phương pháp có tính khả thi cao nhờ sự đơn giản, nhanh chóng trong việc triển khai, và tiết kiệm kinh phí. Dựa trên nền tảng này, bài báo đã ứng dụng các chỉ số phá hoại vào việc xác định hư hỏng trong kết cấu thông qua các mô hình số và thực nghiệm:

- Kết quả nghiên cứu đã khẳng định khả năng sử dụng hiệu quả của 2 phương pháp độ mềm hình thái (MFM) và độ cong hình thái (MCM) với số lượng điểm đo hạn chế, phù hợp với điều kiện thực tế.
- Biểu đồ chỉ số phá hoại xác định một cách trực quan sự hiện diện của hư hỏng cũng như phạm vi hư hỏng bằng mô phỏng và thực nghiệm chỉ với một vài một dao động đầu tiên.
- Việc tăng số lượng điểm đo sẽ tăng khả năng xác định vị trí hư



a. Dùng MCM với 1 và 3 một đầu tiên b. Dùng MFM với 1 và 3 một đầu tiên

Hình 10. Nhận dạng hư hỏng bằng MCM và MFM

hỏng của các phương pháp đề xuất, đặc biệt là phương pháp GSM.

Với kết quả đạt được, phương pháp chẩn đoán hư hỏng dựa vào dao động hoàn toàn có thể được ứng dụng vào kết cấu thực tế, đặc biệt là kết cấu cầu đang trong giai đoạn khai thác. Điều này có ý nghĩa thực tiễn cao vì quá trình thu thập dữ liệu dao động đơn giản, không

cần hạn chế giao thông, hiệu quả với cả tải trọng ngẫu nhiên, kinh phí thấp, công tác đánh giá hư hỏng nhanh chóng. Tuy nhiên, để tăng tính hiệu quả của phương pháp đề xuất, kết quả nhận dạng hư hỏng có thể được cải thiện bằng cách sử dụng thuật toán tối ưu hoặc mạng nơ ron thần kinh nhân tạo. ■

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Peeters, B., De Roeck, G., One-Year Monitoring of the Z24-Bridge: Environmental Effects versus Damage Events. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30.2 (2001): 149-71. Web.
- [2] H. Zhong and M. Yang, "Damage detection for plate-like structures using generalized curvature mode shape method," *J Civil Struct Health Monit*, vol. 6, no. 1, pp. 141-152, Feb. 2016, doi: 10.1007/s13349-015-0148-1.
- [3] M. K. Yoon, D. Heider, J. W. Gillespie, C. P. Ratcliffe, and R. M. Crane, "Local damage detection using the two-dimensional gapped smoothing method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 279, no. 1-2, pp. 119-139, Jan. 2005, doi: 10.1016/j.jsv.2003.10.058.
- [4] S. Ahmad, A. Waleed, U. S. Virk, M. T. Riaz, A. Sharjeel, and N. Ahmad, "Multiple damage detections in plate-like structures using curvature mode shapes and gapped smoothing method," *Advances in Mechanical Engineering*, p. 11.
- [5] V. B. Dawari and G. R. Vesmawala, "Modal Curvature and Modal Flexibility Methods for Honeycomb Damage Identification in Reinforced Concrete Beams," *Procedia Engineering*, vol. 51, pp. 119-124, 2013, doi: 10.1016/j.proeng.2013.01.018.
- [6] J.-M. Ndambi, J. Vantomme, and K. Harri, "Damage assessment in reinforced concrete beams using eigenfrequencies and mode shape derivatives," *Engineering Structures*, vol. 24, no. 4, pp. 501-515, Apr. 2002, doi: 10.1016/S0141-0296(01)00117-1.
- [7] F. N. Catbas, M. Gul, and J. L. Burkett, "Damage assessment using flexibility and flexibility-based curvature for structural health monitoring," *Smart Mater. Struct.*, p. 13, 2008.
- [8] ANSYS, Inc. Southpointe, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317, Release 17.2.
- [9] B. Peeters, "System Identification and Damage Detection in Civil Engineering", Ph.D. Dissertation; Katholieke Universiteit Leuven, Belgium," p. 256, 2000.