

Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền nhiệt đàn hồi đẳng hướng

Homogenization of very rough interfaces separating two isotropic thermoelastic solids

Nguyễn Thị Kiều

Tóm tắt

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu sự thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao của lý thuyết nhiệt đàn hồi đẳng hướng trong miền hai chiều. Sử dụng phương pháp thuần nhất hóa cùng với các phương trình cơ bản dạng ma trận của lý thuyết nhiệt đàn hồi đẳng hướng, tác giả thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện. Do các phương trình thuần nhất hóa thu được là dạng hiện nên rất hữu ích trong việc giải các bài toán thực tế.

Từ khóa: sự thuần nhất hóa, phương trình thuần nhất hóa, nhiệt đàn hồi, đẳng hướng

Abstract

In this paper, the homogenization of very rough two-dimensional interfaces separating two isotropic thermoelasticity solids is investigated. By employing the homogenization method along with the matrix formulation of the isotropic thermoelasticity theory, the explicit homogenized equations have been derived. Since obtained equations are, in practical problems.

Key words: homogenization, homogenized equation, thermoelasticity, isotropic

ThS. Nguyễn Thị Kiều
Bộ môn Cơ học lý thuyết
Khoa Xây dựng
ĐT: 0363 441 889
Email: kieumt@gmail.com

Ngày nhận bài: 10/12/2019
Ngày sửa bài: 30/12/2019
Ngày duyệt đăng: 9/3/2022

1. Giới thiệu

Các bài toán biên trong miền với biên hay biên phân chia nhám xuất hiện nhiều trong thực tế như sự tán xạ của sóng trên biên nhám [1], sự phản xạ, khúc xạ của sóng với biên phân chia nhám [2]...

Năm 1997, Nevard và Keller [3] nghiên cứu thuần nhất hóa biên phân chia có độ nhám cao trong miền ba chiều dao động giữa hai mặt phẳng song song của hai vật thể đàn hồi dị hướng tuyến tính. Sử dụng phương pháp thuần nhất hóa, các tác giả đã rút ra hệ phương trình thuần nhất hóa. Tuy nhiên, các phương trình này được viết dưới dạng ẩn. Năm 2010, Vinh và Tung đã cải tiến phương pháp thuần nhất hóa [4] và tìm ra các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của các lý thuyết đàn hồi, đàn điện, đàn nhiệt, đàn hồi xoắn, đàn hồi micropolar [5].

Gần đây, nhiều tác giả nghiên cứu sự truyền sóng trong môi trường nhiệt đàn hồi. Chakraborty và Singh [6] đã khảo sát sự phản xạ, khúc xạ của sóng nhiệt đàn hồi phẳng đối với hai bán không gian nhiệt đàn hồi đẳng hướng. Baljeet Singh [7] nghiên cứu sự phản xạ của sóng phẳng trên bề mặt tự do của bán không gian nhiệt đàn hồi monoclinic. Tuy nhiên, theo hiểu biết của tác giả, đến nay chưa có kết quả nào về sự thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao giữa hai vật thể nhiệt đàn hồi đẳng hướng. Do đó, mục tiêu chính trong bài báo này là tìm các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết nhiệt đàn hồi đẳng hướng. Để đạt được mục đích này, tác giả sử dụng phương pháp thuần nhất hóa [4] cùng các phương trình cơ bản dạng ma trận của lý thuyết nhiệt đàn hồi đẳng hướng. Các phương trình thuần nhất hóa dạng thành phần được trình bày trong bài báo này.

2. Các phương trình cơ bản và điều kiện liên tục dạng ma trận

Giả sử biên phân chia độ nhám cao L phân chia hai vật thể nhiệt đàn hồi đẳng hướng. Khi đó biên phân chia được biểu diễn bởi $x_3 = h(x_1 / \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, trong đó, $h(y)$, $(y = x_1 / \varepsilon)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 1.

Xét bài toán tĩnh với trạng thái biến dạng phẳng, các thành phần chuyển dịch và sự thay đổi nhiệt độ có dạng như sau [8]:

$$u_1 = u_1(x_1, x_3), \quad u_3 = u_3(x_1, x_3), \quad T = T(x_1, x_3) \quad (1)$$

Các thành phần biến dạng là [8]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 3 \quad (2)$$

ở đây dấu phẩy chỉ đạo hàm theo biến không gian x_i .

Các thành phần ứng suất có dạng [8]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\theta_e - (3\lambda + 2\mu)\alpha T]\delta_{ij} \quad (3)$$

trong đó, $\theta_e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}$, α là hệ số của biểu thức nhiệt tuyến tính, λ , μ là các hệ số Lamé được xác định như sau:

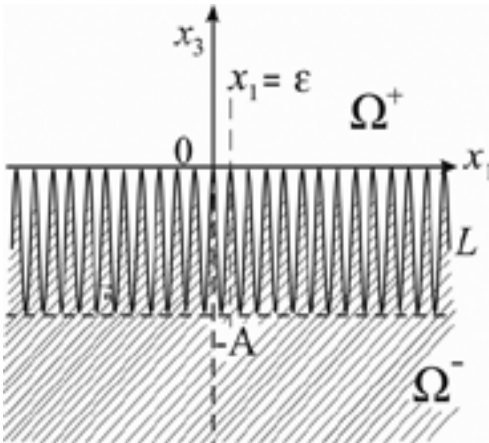
$$\lambda, \mu = \begin{cases} \lambda_+, \mu_+, & x_3 > h(x_1 / \varepsilon) \\ \lambda_-, \mu_-, & x_3 < h(x_1 / \varepsilon) \end{cases} \quad (4)$$

trong đó, λ_+ , μ_+ , λ_- , μ_- là các hằng số.

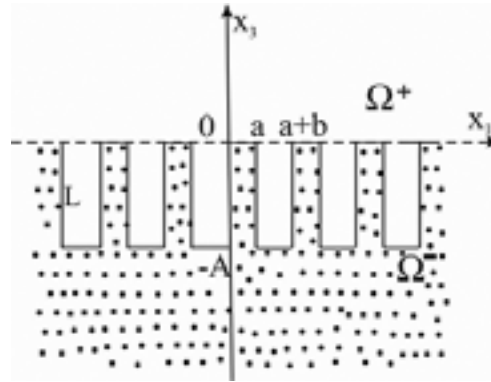
Bỏ qua lực khối và nguồn nhiệt, các phương trình cân bằng và phương trình truyền nhiệt Fourier có dạng [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} &= 0, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} &= 0, \\ T_{,11} + T_{,33} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Thay (1), (2), (3) vào (5), ta được:



Hình 1. Biên phân chia độ nhám cao



Hình 2. Biên phân chia độ nhám cao dạng hình lược

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{3,3} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \Big|_{,1} + \{\mu(u_{1,3} + u_{3,1})\}_{,3} = 0, \\ \{\mu(u_{1,3} + u_{3,1})\}_{,1} + \{(\lambda + 2\mu)u_{3,3} + \lambda u_{1,1} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\}_{,3} = 0, \\ T_{,11} + T_{,33} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Phương trình (6) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}_{11}\mathbf{U}_{,1})_{,1} + (\mathbf{A}_{13}\mathbf{U}_{,3})_{,1} + (\mathbf{A}_{31}\mathbf{U}_{,1})_{,3} + \\ & + (\mathbf{A}_{33}\mathbf{U}_{,3})_{,3} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{,1} + \mathbf{C}\mathbf{U}_{,3} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

trong đó, $\mathbf{U} = [u_1 \ u_3 \ T]^T$ và

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & \mathbf{A}_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{A}_{33} &= \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(3\lambda + 2\mu)\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(3\lambda + 2\mu)\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Chú ý rằng các ma trận

$$\mathbf{A}_{hk}, \mathbf{B}, \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{A}_{hk+}, \mathbf{B}_+, \mathbf{C}_+, & x_3 > h(x_1 / \varepsilon) \\ \mathbf{A}_{hk-}, \mathbf{B}_-, \mathbf{C}_-, & x_3 < h(x_1 / \varepsilon) \end{cases} \quad (9)$$

Trong đó, $\mathbf{A}_{hk+}, \mathbf{B}_+, \mathbf{C}_+$ ($\mathbf{A}_{hk-}, \mathbf{B}_-, \mathbf{C}_-$) được cho trong (8) với các thành phần λ, μ được thay tương ứng bằng λ_+, μ_+ (λ_-, μ_-).

Giả sử Ω^+, Ω^- gắn chặt với nhau. Khi đó các điều kiện liên tục trên biên phân chia L phải thỏa mãn:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{U}]_L = 0; \\ & [(\mathbf{A}_{11}\mathbf{U}_{,1} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{U}_{,3})n_1 + (\mathbf{A}_{31}\mathbf{U}_{,1} + \mathbf{A}_{33}\mathbf{U}_{,3})n_3]_L = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

với n_k là thành phần theo phương x_k của vectơ pháp tuyến đơn vị của đường cong L và $[\varphi]_L$ là bước nhảy của φ qua L .

Theo Vinh và Tung, \mathbf{U} được biểu diễn như sau [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{V} + \varepsilon (\mathbf{N}^1 \mathbf{V} + \mathbf{N}^{11} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{13} \mathbf{V}_{,3}) \\ &+ \varepsilon^2 (\mathbf{N}^2 \mathbf{V} + \mathbf{N}^{21} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{23} \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{N}^{211} \mathbf{V}_{,11} + \\ &+ \mathbf{N}^{213} \mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}^{233} \mathbf{V}_{,33}) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (11)$$

trong đó $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, x_3, t)$ (không phụ thuộc vào y) và $\mathbf{N}^i; \mathbf{N}^{i1}; \mathbf{N}^{i3}; \mathbf{N}^2; \mathbf{N}^{21}; \mathbf{N}^{23}; \mathbf{N}^{211}; \mathbf{N}^{213}; \mathbf{N}^{233}$ là ma trận 2x2 của các hàm y và x_3 (không phụ thuộc vào x_1), và chúng là các hàm tuần hoàn với chu kỳ 1. Các ma trận $\mathbf{N}^i; \dots; \mathbf{N}^{233}$ cần được xác định sao cho phương trình (7) và điều kiện liên tục (10) được thỏa mãn. Cách biểu diễn nghiệm (11) có tính đến đặc trưng vi mô (tính địa phương) thông qua các hàm $\mathbf{N}^i, \mathbf{N}^{ij}$ và đặc trưng vĩ mô (tính toàn cục) qua các hàm \mathbf{V} .

Sử dụng phương pháp thuần nhất hóa [4], ta thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng ma trận như sau:

Với $x_3 > 0$:

$$\mathbf{A}_{hk}^{(+)} \mathbf{V}_{,kh} + \mathbf{B}^{(+)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{C}^{(+)} \mathbf{V}_{,3} = \mathbf{0} \quad (12)$$

Với $-A < x_3 < 0$:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{V}_{,11} + \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{13} \rangle \mathbf{V}_{,13} + [\langle \mathbf{A}_{31} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{V}_{,1}]_{,3} \\ & + [(\langle \mathbf{A}_{33} \rangle + \langle \mathbf{A}_{31} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{13} \rangle - \langle \mathbf{A}_{31} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{13} \rangle) \mathbf{V}_{,3}]_{,3} \\ & + \langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{V}_{,1} + [\langle \mathbf{C} \rangle + \langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{13} \rangle - \langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{13} \rangle] \mathbf{V}_{,3} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Với $x_3 < -A$:

$$\mathbf{A}_{hk}^{(-)} \mathbf{V}_{,kh} + \mathbf{B}^{(-)} \mathbf{V}_{,1} + \mathbf{C}^{(-)} \mathbf{V}_{,3} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Chú ý rằng

$$\langle \phi \rangle = \int_0^1 (\phi) dy = (y_2 - y_1) \phi^{(+)} + (1 - y_2 + y_1) \phi^{(-)} \quad (15)$$

Trên các đường thẳng $x_3 = 0, x_3 = -A$, điều kiện liên tục được thỏa mãn:

$$\begin{aligned} & [\langle \mathbf{A}_{31} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{V}_{,1}]_+ \\ & + [(\langle \mathbf{A}_{33} \rangle + \langle \mathbf{A}_{31} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{13} \rangle - \langle \mathbf{A}_{31} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{13} \rangle) \mathbf{V}_{,3}]_L \\ & = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

3. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần

Thay các ma trận $\mathbf{A}_{hk+}, \mathbf{B}_+, \mathbf{C}_+$ ($\mathbf{A}_{hk-}, \mathbf{B}_-, \mathbf{C}_-$) trong (8) vào các phương trình thuần nhất hóa dạng ma trận (12), (13), (14), ta thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần như sau:

Với $x_3 > 0$:

$$\begin{cases} (\lambda_+ + 2\mu_+)V_{1,11} + \mu_+V_{1,33} + (\lambda_+ + \mu_+)V_{3,13} - (3\lambda_+ + 2\mu_+)\alpha T_{,1} = 0, \\ \mu_+V_{3,11} + (\lambda_+ + \mu_+)V_{1,13} + (\lambda_+ + 2\mu_+)V_{3,33} - (3\lambda_+ + 2\mu_+)\alpha T_{,3} = 0, \\ T_{,11} + T_{,33} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Với $-A < x_3 < 0$:

$$\begin{cases} \langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} V_{1,11} + \langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle V_{3,13} \\ + \left[\langle \mu^{-1} \rangle^{-1} (V_{1,3} + V_{3,1}) \right]_{,3} - \langle 3\lambda + 2\mu \rangle \alpha T_{,1} = 0, \\ \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} (V_{1,13} + V_{3,11}) + \left[\langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle V_{1,1} \right]_{,3} \\ + \left\{ \left[\langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^2 + 4 \langle \mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle \right] V_{3,3} \right\}_{,3} \\ - \langle 3\lambda + 2\mu \rangle \alpha T_{,3} = 0, \\ T_{,11} + T_{,33} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Với $x_3 < -A$:

$$\begin{cases} (\lambda_- + 2\mu_-)V_{1,11} + \mu_-V_{1,33} + (\lambda_- + \mu_-)V_{3,13} - (3\lambda_- + 2\mu_-)\alpha T_{,1} = 0, \\ \mu_-V_{3,11} + (\lambda_- + \mu_-)V_{1,13} + (\lambda_- + 2\mu_-)V_{3,33} - (3\lambda_- + 2\mu_-)\alpha T_{,3} = 0, \\ T_{,11} + T_{,33} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

trong đó V_j, V_3 và T là các thành phần của vectơ \mathbf{V} .

Điều kiện liên tục:

Các đại lượng $V_1, V_3, T, \sigma_{13}^0, \sigma_{33}^0, q_3^0$ liên tục trên các đường $x_3 = -A, x_3 = 0$, trong đó:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^0 &= \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} (V_{1,3} + V_{3,1}), \\ \sigma_{33}^0 &= \langle \lambda^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle V_{1,1} + \\ &+ \left[\langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^2 + 4 \langle \mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle \right] V_{3,3}, \\ q_3^0 &= T_{,3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Nhận xét:

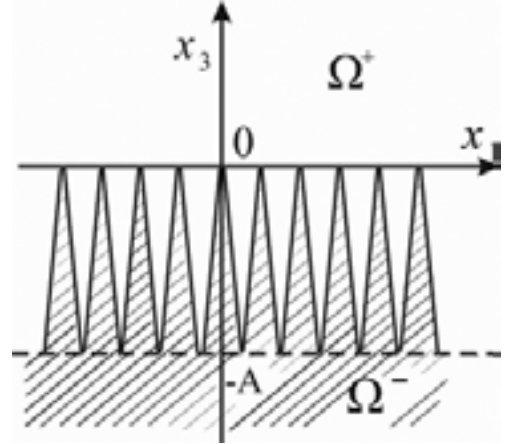
1) Nếu hai miền Ω^+, Ω^- giống nhau $\langle \phi \rangle = \phi_+ = \phi_-$, thì các phương trình (17), (18), (19) trùng nhau.

2) Khi biên phân chia độ nhám cao có dạng hình lược (xem Hình 2), ta có:

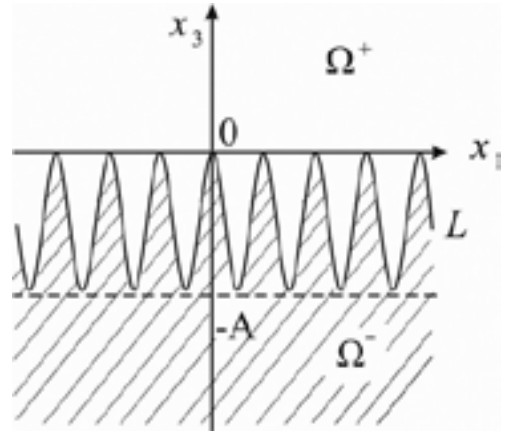
$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{a+b} (b\phi_+ + a\phi_-) \quad (21)$$

Khi đó các hệ số của phương trình (18) là các hằng số. Phương trình thuần nhất hóa (18) sẽ trở thành:

$$\begin{cases} \langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} V_{1,11} + \langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle V_{3,13} \\ + \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} (V_{1,33} + V_{3,13}) - \langle 3\lambda + 2\mu \rangle \alpha T_{,1} = 0, \\ \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} (V_{1,13} + V_{3,11}) + \langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle V_{1,13} \\ + \left[\langle (\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle^2 + 4 \langle \mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \rangle \right] V_{3,33} \\ - \langle 3\lambda + 2\mu \rangle \alpha T_{,3} = 0, \\ T_{,11} + T_{,33} = 0. \end{cases} \quad (22)$$



Hình 3. Biên phân chia độ nhám cao hình răng cưa



Hình 4. Biên phân chia độ nhám cao dạng hình sin

3) Khi biên phân chia độ nhám cao có dạng hình răng cưa (Hình 3):

Các hệ số của phương trình (18) không phải là các hằng số mà là hàm của x_3 và có dạng như sau:

$$\langle \varphi \rangle = \left(1 + \frac{x_3}{A}\right) \varphi_+ - \frac{x_3}{A} \varphi_- \quad (23)$$

4) Khi biên phân chia độ nhám cao có dạng hình sin (Hình 4):

Các hệ số của phương trình (18) có dạng sau:

$$\langle \varphi \rangle = \left[1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 + \frac{2}{A} x_3\right)\right] \varphi_+ + \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 + \frac{2}{A} x_3\right) \varphi_- \quad (24)$$

4. Kết luận

Sử dụng phương pháp thuần nhất hóa, tác giả đã thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện đối với biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền nhiệt đàn hồi đẳng hướng. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện và các điều kiện liên tục tương ứng được viết cụ thể dưới dạng thành phần. Ý nghĩa của phương pháp thuần nhất hóa là thay miền chứa biên phân chia độ nhám cao bằng một lớp không thuần nhất với biên là phẳng. Như vậy các kết quả thu được rất thuận lợi để xét bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng đối với biên phân chia độ nhám cao trong môi trường nhiệt đàn hồi đẳng hướng. Các nghiên cứu tiếp theo có thể mở rộng sang các môi trường phức tạp hơn như monoclinic hoặc dị hướng tổng quát./.

Tài liệu tham khảo

1. Abubakar, I., Scattering of plane elastic waves at rough surfaces-I. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 58, (1962), 136–157.
2. Singh, S. S., Tomar, S. K., qP-wave at a corrugated interface between two dissimilar pre-stressed elastic half-spaces, *J Sound Vibr.* 317, (2008), 687-708.
3. Nevard J., and Keller J. B., Homogenization of Rough Boundaries and Interfaces, *SIAM J. Appl. Math.*, 57, (1997), 1660-1686.
4. Vinh, P. C., Tung, D. X., Homogenized equations of the linear elasticity in two-dimensional domains with very rough interfaces, *Mech. Res. Comm.* 37, (2010), 285-288.
5. P.C. Vinh, VTN Anh, DX Tung, NT Kieu., Homogenization of very rough interfaces for the micropolar elasticity theory. *Applied Mathematical Modelling*, 54, (2018), 467-482.
6. N. R. Chakraborty, M. C. Singh, Reflection and refraction of a plane thermoelastic wave at a solid–solid interface under perfect boundary condition, in presence of normal initial stress. *Applied Mathematical Modelling*, 35, (2011), 5286-5301.
7. Baljeet Singh, Reflection of plane waves at the free surface of a monoclinic thermoelastic solid half-space, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 29 (5), (2010), 911-916.
8. Baljeet Singh, On the theory of generalized thermoelasticity for piezoelectric materials, *Applied Mathematics and Computation*, 171, (2005), 398-405.

Phản xạ và khúc xạ của sóng P đối với biên phân chia nhám...

(tiếp theo trang 59)

4. Kết luận

Trong bài báo này, dựa trên phương trình thuần nhất hóa thu được trong [8] khi thuần nhất hóa biên phân chia có độ nhám cao trong miền 2 chiều của 2 bán không gian đàn hồi monoclinic, bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng P tới biên phân chia có độ nhám cao dẫn đến bài toán phản xạ, khúc

xạ với lớp không thuần nhất kẹp giữa 2 bán không gian với biên phân chia là phẳng. Kết hợp giữa ma trận chuyển của lớp giữa và điều kiện liên tục tại các mặt biên dẫn đến biểu thức xác định hệ số phản xạ, khúc xạ của các sóng khi biết các đặc trưng của sóng tới P. Kết quả đạt được có nhiều ý nghĩa trong tính toán thực tế./.

Tài liệu tham khảo

1. Achenbach, J.D., *Wave propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1973.
2. Bensoussan, A., Lions, J. B., Papanicolaou, J., 1978. *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam.
3. Chattopadhyay A, Rik Venkateswarlu and S Saha., Reflection of quasi-P and quasi-SV waves at the free and rigid boundaries of a fibre-reinforced medium, *Sadhana Vol. 27, Part 6, December 2002*, pp. 613–630. © Printed in India
4. Norris, A.N., 1983, Propagation of plane waves in a pre-stressed elastic media, *J. Acoust. Soc. Am.* 74, 1642-1643.
5. Singh, S. S., Tomar, S. K., 2008. qP-wave at a corrugated interface between two dissimilar pre-stressed elastic half-spaces, *J Sound Vibr.* 317, 687-708.
6. Thomson, Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *J. Appl. Phys.*, 21 (1950), 89-93.
7. Tung, D.X, Kieu, N.T, Thang, L.T, Relection and transmission of qP waves through an orthotropic layer sandwiched between two half-spaces. *Vietnam Journal of Mechanics, VAST, Vol. 40, No. 2 (2018)*, pp. 171 – 180
8. Vinh, P. C., Tung, D. X., 2010, Homogenized equations of the linear elasticity in two-dimensional domains with very rough interfaces, *Mech. Res. Comm.* 37, 285-288.
9. Pham Chi Vinh, Tran Thanh Tuan, Marcos A. Capistran, 2015, "Explicit formulas for the reflection and transmission coefficients of one-component waves through a stack of an arbitrary number of layers", *Wave Motion, Volume 54, Pages 134–144*.
10. Zaki K. A., Neureuther, A. R., 1971. Scattering from a perfectly conducting surface with a sinusoidal hight profile: TE polarization, *IEEE Trans. Atenn. Propag.* 19(2), 208-214.