

# Phản xạ và khúc xạ của sóng P đối với biên phân chia nhám giữa hai bán không gian monoclinic

Reflection and refraction of p wave from a rough interface between two monoclinic half-spaces

Đỗ Xuân Tùng

## Tóm tắt

Trong bài báo này tác giả xét sự phản xạ, khúc xạ của sóng phẳng P đối với biên phân chia có độ nhám cao giữa hai bán không gian đàn hồi monoclinic. Sử dụng các kỹ thuật của phương pháp thuận nhất hóa, tác giả thay miền với biên phân chia có độ nhám cao bằng một lớp vật liệu không thuận nhất với biên là các đường thẳng. Giả sử sóng tới là quasi P(qP) trong mặt phẳng  $x_1x_3$ , hai sóng qP và qSV được sinh ra ở bán không gian trên và dưới. Các liên hệ giữa phương của dịch chuyển và lan truyền sóng được thiết lập. Biểu thức hệ số phản xạ, khúc xạ của các sóng qP và qSV cũng được tìm ra.

**Từ khóa:** phản xạ, khúc xạ, biên phân chia độ nhám cao

## Abstract

In this paper, the reflection and refraction of a plane wave at a rough interface between two monoclinic half-spaces have been considered by the author. By standard techniques of the homogenized method, the author replaces the domain with the rough interface with a material layer with an interface are two straight lines. It has been assumed that due to the incidence of a plane quasi-P (qP) wave in the plane, two types of waves, namely, quasi-P (qP) and quasi-SV (CSV), will be generated in the lower half-space whereas qP and CSV waves will be generated in the upper half-space. Some specific relations have been established between directions of motion and propagation, respectively. The expressions for reflection coefficients of qP, CSV, and refracted coefficients of qP and CSV waves are obtained.

**Key words:** reflection, refraction, rough interface

TS. Đỗ Xuân Tùng

Bộ môn Cơ học lý thuyết,

Khoa Xây dựng

ĐT: 0984.468.136

Email: tungdx2783@gmail.com

Ngày nhận bài: 5/10/2019

Ngày sửa bài: 25/10/2019

Ngày duyệt đăng: 9/3/2022

## 1. Giới thiệu

Các bài toán với biên phân chia giữa hai miền đàn hồi xuất hiện nhiều trong thực tế như: sự tán xạ của sóng đàn hồi [10], sự phản xạ, khúc xạ với biên phân chia nhám [3,5]... Khi biên phân chia có độ nhám cao thì phương pháp thuận nhất hóa được sử dụng [2,8]. Quá trình lan truyền sóng khối và sóng mặt trong môi trường dị hướng phức tạp hơn nhiều so với môi trường đẳng hướng. Vận tốc pha của các sóng này phụ thuộc vào hướng lan truyền sóng [3]. Các bài toán lan truyền của các sóng đàn hồi được nhiều tác giả quan tâm, nếu môi trường có tính đến ứng suất trước phải kể đến các công trình của Norris [4]. Trong số các bài toán này thì bài toán phản xạ, khúc xạ của các sóng có nhiều ứng dụng trong thực tế. Tuy nhiên, các tác giả mới chỉ xét đối với biên phân chia phẳng [1],[3] hoặc biên phân chia có độ nhám thấp [5]. Khi biên phân chia có độ nhám cao, các kết quả còn khá hạn chế.

Gần đây, Vinh và các cộng sự [8] đã tìm ra phương trình thuận nhất hóa với biên phân chia có độ nhám cao dao động giữa hai đường thẳng song song. Miền với biên phân chia được thay bởi 1 lớp không thuận nhất với biên phân chia là phẳng. Do đó, bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng đối với biên phân chia có độ nhám cao được đưa về bài toán phản xạ, khúc xạ đối với lớp kẹp giữa hai bán không gian. Mục tiêu chính trong bài báo này là nghiên cứu sự phản xạ, khúc xạ của sóng P đối với biên phân chia có độ nhám cao giữa 2 miền đàn hồi monoclinic. Mỗi liên hệ giữa phương dịch chuyển và phương lan truyền sóng được thiết lập. Các hệ số phản xạ, khúc xạ được tìm ra và chúng có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế.

## 2. Hệ các phương trình cơ bản và mối liên hệ giữa phương dịch chuyển và phương lan truyền sóng

Xét vật thể đàn hồi thuận nhất dị hướng monoclinic với mặt phẳng đối xứng trùng với mặt phẳng  $x_1x_3$ . Trạng thái biến dạng phẳng với các thành phần chuyển dịch có dạng như sau:

$$u_i = u_i(x_1, x_3, t); \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \equiv 0; (i = 1, 3) \quad (1)$$

Mối liên hệ giữa ứng suất với các thành phần chuyển dịch có dạng [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}u_{1,1} + c_{13}u_{3,3} + c_{15}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \sigma_{13} &= c_{15}u_{1,1} + c_{35}u_{3,3} + c_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \sigma_{33} &= c_{13}u_{1,1} + c_{35}u_{3,3} + c_{35}(u_{1,3} + u_{3,1}) \end{aligned} \quad (2)$$

Phương trình chuyển động bỏ qua lực khối:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3)$$

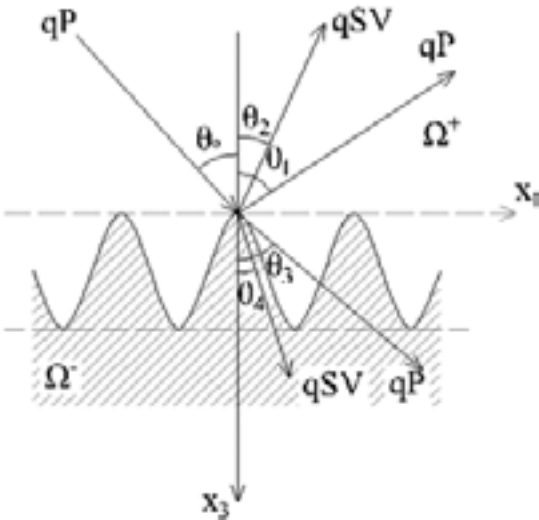
Thay (2) vào (3) ta được hệ phương trình đối với các thành phần chuyển dịch, cụ thể

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2c_{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + c_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (c_{55} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{35} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ c_{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{35} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2c_{35} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Gọi  $p_1, p_3$  là các thành phần của véc tơ lan truyền sóng,  $c$  là vận tốc pha,  $k$  là số sóng của các sóng lan truyền trong mặt phẳng  $x_1x_3$ .

Nghiệm của (4) được tìm dưới dưới dạng sau:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d_1 \\ d_3 \end{pmatrix} \exp[ik(x_1 p_1 + x_3 p_3 - ct)] \quad (5)$$



Hình 1: Sự phản xạ, khúc xạ của sóng P đối với biên phân chia nhám

Ở đây  $d_1, d_3$  là các thành phần của véc tơ dịch chuyển đơn vị. Thay (5) vào (4) dẫn đến

$$\begin{aligned} c_{11}d_1p_1^2 + 2c_{15}d_1p_1p_3 + c_{55}d_1p_3^2 + c_{15}d_3p_1^2 + \\ + (c_{55} + c_{13})d_3p_1p_3 + c_{35}d_3p_3^2 = \rho c^2 d_1 \\ c_{15}d_1p_1^2 + (c_{13} + c_{55})d_1p_1p_3 + c_{35}d_1p_3^2 + c_{55}d_3p_1^2 + \\ + 2c_{35}d_3p_1p_3 + c_{33}d_3p_3^2 = \rho c^2 d_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Hệ phương trình (6) có thể viết lại dưới dạng sau

$$\begin{cases} (U - \rho c^2)d_1 + Vd_3 = 0 \\ Vd_1 + (Z - \rho c^2)d_3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

trong đó

$$\begin{aligned} U &= c_{11}p_1^2 + 2c_{15}p_1p_3 + c_{55}p_3^2; \\ V &= c_{15}p_1^2 + (c_{13} + c_{55})p_1p_3 + c_{35}p_3^2; \\ Z &= c_{55}p_1^2 + 2c_{35}p_1p_3 + c_{33}p_3^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Điều kiện để hệ (7) có nghiệm không tầm thường dẫn đến phương trình xác định các vận tốc sóng, cụ thể [3,5]

$$\rho^2 c^4 - (U + Z)\rho c^2 + (UZ - V^2) = 0 \quad (9)$$

Nghiệm của (9) có dạng [3,5]

$$\begin{cases} 2\rho c^2(p_1, p_3) = (U + Z) + [(U - Z)^2 + 4V^2]^{1/2} (a) \\ 2\rho c^2(p_1, p_3) = (U + Z) - [(U - Z)^2 + 4V^2]^{1/2} (b) \end{cases} \quad (10)$$

Biểu thức vận tốc sóng (10a), (10b) tương ứng với vận tốc sóng của sóng P, SV. Hơn nữa chúng ta còn có mối liên hệ giữa 2 thành phần của véc tơ dịch chuyển sau

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{V}{\rho c^2 - U} = \frac{\rho c^2 - Z}{V} \quad (11)$$

### 3. Sự phản xạ, khúc xạ của sóng P đối với biên phân chia có độ nhám cao

Xét 2 bán không gian thuần nhất dị hướng monoclinic  $\Omega^{(+)}$  và  $\Omega^{(-)}$  được phân chia bởi biên phân chia nhám (như Hình 1) nằm trong mặt phẳng  $x_1x_3$ . Cho sóng tới P đến biên phân chia. Sóng tới P khi tới biên phân chia sẽ sinh ra các sóng phản xạ, khúc xạ P và SV.

Các sóng tới, sóng phản xạ, khúc xạ có dạng sau [1,3,7]

$$\begin{pmatrix} u_1^i \\ u_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{i1} \\ R_{i3} \end{pmatrix} \exp[ik_i(x_1p_1^i + x_3p_3^i - c_it)] \quad (12)$$

với  $i=0,1,2,3,4$  lần lượt tương ứng là sóng tới P, phản xạ P, phản xạ SV, khúc xạ P và khúc xạ SV.  $R_{i1}, R_{i3}$  là các thành phần của biên độ sóng  $R_i$  tương ứng ( $R_i = \sqrt{R_{i1}^2 + R_{i3}^2}$ ). Các vận tốc sóng  $c_i$  được xác định từ (10) với các giá trị U, V, Z trong (8) lấy giá trị (+), (-) tương ứng với miền  $\Omega^{(+)}$  và  $\Omega^{(-)}$ . Theo quy luật Snell [1] ta có

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = k_3 \sin \theta_3 = k_4 \sin \theta_4 = \xi_1 \quad (13)$$

trong đó  $\theta_i$  là các góc tạo bởi phương truyền sóng và trục  $x_3$  của các sóng.

Theo Vinh và cộng sự [8], bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng đối với biên phân chia có độ nhám cao dẫn đến bài toán phản xạ, khúc xạ đối với lớp không thuần nhất kẹp giữa 2 bán không gian (Hình 2). Các phương trình đối với chuyển dịch của lớp giữa có dạng [8]

$$\begin{cases} \bar{c}_{11}u_{1,11} + \bar{c}_{15}u_{1,13} + (\bar{c}_{15}u_{1,1})_{,3} + (\bar{c}_{55}u_{1,3})_{,3} + \bar{c}_{15}u_{3,11} + \\ + (\bar{c}_{55}u_{3,1})_{,3} + mu_{3,13} + (nu_{3,3})_{,3} = \langle \rho \rangle \ddot{u}_1 \\ \bar{c}_{15}u_{1,11} + \bar{c}_{55}u_{1,13} + (mu_{1,1})_{,3} + (nu_{1,3})_{,3} + \bar{c}_{515}u_{3,11} + \\ + (nu_{3,1})_{,3} + nu_{3,13} + (qu_{3,3})_{,3} = \langle \rho \rangle \ddot{u}_3 \end{cases} \quad (14)$$

trong đó

$$\bar{c}_{ij} = \left\langle \frac{c_{ij}}{d} \right\rangle / \bar{d}; d = c_{11}c_{55} - c_{15}^2;$$

$$\bar{d} = \langle c_{11} / d \rangle \langle c_{55} / d \rangle - \langle c_{15} / d \rangle^2;$$

$$a = (c_{55}c_{13} - c_{15}c_{35}) / d;$$

$$b = (c_{11}c_{35} - c_{15}c_{13}) / d;$$

$$q = \langle c_{33} \rangle - \langle (c_{11}c_{35}^2 + c_{55}c_{13}^2 - 2c_{13}c_{15}c_{35}) / d \rangle +$$

$$+ \langle a \rangle^2 \bar{c}_{11} + 2\langle a \rangle \langle b \rangle \bar{c}_{15} + \langle b \rangle^2 \bar{c}_{55};$$

$$m = \bar{c}_{11} \langle a \rangle + \bar{c}_{15} \langle b \rangle;$$

$$n = \bar{c}_{15} \langle a \rangle + \bar{c}_{55} \langle b \rangle$$

Nghiệm của (14) được tìm dưới dạng [7,9]

$$\begin{cases} u_1 = v_1(x_3) \exp[i(\xi_1 - \omega t)] \\ u_3 = v_3(x_3) \exp[i(\xi_1 - \omega t)] \end{cases} \quad (15)$$

Thay (15) vào (14) và dùng các hàm mới  $Y=Y(y_1; y_2; y_3; y_4)$  với

$$\begin{cases} y_1 = \bar{c}_{15}v_1i\xi + \bar{c}_{55}v_{1,3} + \bar{c}_{55}v_3i\xi + nv_{3,3} \\ y_2 = qv_{3,3} + ni\xi v_3 + mi\xi v_1 + nv_{1,3} \\ y_3 = v_1 \\ y_4 = v_3 \end{cases} \quad (16)$$

dẫn đến phương trình vi phân

$$\frac{dY(x_3)}{dx_3} = D(x_3)Y(x_3)$$

Từ đó chúng ta có nghiệm là trường chuyển dịch, ứng suất của lớp giữa. Tiếp theo ta biểu diễn trường chuyển dịch, ứng suất của các bán không gian  $\Omega^{(+)}$  và  $\Omega^{(-)}$  kết hợp với điều kiện liên tục tại  $x_3=0; x_3=h$  và ma trận chuyển T ta thu được hệ các phương trình xác định hệ số phản xạ, khúc xạ của các sóng [7]. Cụ thể là:

Đối với bán không gian trên  $\Omega^{(+)}$ :

$$u_1^+ = u_1^0 + u_1^2 + u_1^4; u_3^+ = u_3^0 + u_3^2 + u_3^4$$

Đối với bán không gian dưới  $\Omega^-$ :

$$u_1^- = u_1^3 + u_1^4; u_3^- = u_3^3 + u_3^4$$

Dựa vào biểu thức nghiệm (12) cho từng sóng, ta được

$$\begin{aligned} v_1(0) &= R_{01} + R_{11} + R_{21}; v_3(0) = R_{03} + R_{13} + R_{23}; \\ v_1(h) &= R_{31} \exp[ik_3 p_3^3 h] + R_{41} \exp[ik_4 p_3^4 h]; \\ v_3(h) &= R_{33} \exp[ik_3 p_3^3 h] + R_{43} \exp[ik_4 p_3^4 h]; \\ v_{1,3}(0) &= i(R_{01} k_0 p_3^0 + R_{11} k_1 p_3^1 + R_{21} k_2 p_3^2) \\ v_{3,3}(0) &= i(R_{03} k_0 p_3^0 + R_{13} k_1 p_3^1 + R_{23} k_2 p_3^2); \\ v_{1,3}(h) &= i(R_{31} k_3 p_3^3 \exp[ik_3 p_3^3 h] + R_{41} k_4 p_3^4 \exp[ik_4 p_3^4 h]); \\ v_{3,3}(h) &= i(R_{33} k_3 p_3^3 \exp[ik_3 p_3^3 h] + R_{43} k_4 p_3^4 \exp[ik_4 p_3^4 h]) \end{aligned} \quad (17)$$

Thay (17) vào (16) ta được

$$\begin{aligned} Y^+(0) &= \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 R_{13} + a_2 R_{23} + a_3 \\ a_4 R_{13} + a_5 R_{23} + a_6 \\ a_7 R_{13} + a_8 R_{23} + a_9 \\ a_{10} R_{13} + a_{11} R_{23} + a_{12} \end{pmatrix}; \\ Y^-(h) &= \begin{pmatrix} y_1(h) \\ y_2(h) \\ y_3(h) \\ y_3(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 R_{33} + b_2 R_{43} \\ b_3 R_{33} + b_4 R_{43} \\ b_5 R_{33} + b_6 R_{43} \\ b_7 R_{33} + b_8 R_{43} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

ở đây

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{15}^+ i \xi F_1 + c_{55}^+ i F_1 k_1 p_3^1 + c_{55}^+ i \xi + i k_1 p_3^1; \\ a_2 &= c_{15}^+ i \xi F_2 + c_{55}^+ i k_2 F_2 p_3^2 + c_{55}^+ i \xi + i k_2 p_3^2; \\ a_3 &= (c_{15}^+ i \xi F_0 + c_{55}^+ i k_0 p_3^0 F_0 + c_{55}^+ i \xi + i k_0 p_3^0) R_{03}; \\ a_4 &= c_{33}^+ i k_1 p_3^1 + i \xi + c_{13}^+ i \xi F_2 + i k_1 p_3^1 F_2; \\ a_5 &= c_{33}^+ i k_2 p_3^2 + i \xi + c_{13}^+ i \xi F_2 + i k_2 p_3^2 F_2; \\ a_6 &= (i \xi + c_{33}^+ i k_0 p_3^0 + c_{13}^+ i \xi F_0 + i k_0 p_3^0 F_0) R_{03}; \\ a_7 &= F_1; a_8 = F_2; a_9 = F_0 R_{03}; a_{10} = a_{11} = a_{12} = 1; \\ b_1 &= (c_{15}^- i \xi F_3 + c_{55}^- i k_3 p_3^3 F_3 + c_{55}^- i \xi + i k_3 p_3^3) \exp[ik_3 p_3^3 h]; \\ b_2 &= (c_{15}^- i \xi F_4 + c_{55}^- i k_4 p_3^4 F_4 + c_{55}^- i \xi + i k_4 p_3^4) \exp[ik_4 p_3^4 h]; \\ b_3 &= (c_{33}^- i k_3 p_3^3 + i \xi + c_{13}^- i \xi F_3 + i k_3 p_3^3 F_3) \exp[ik_3 p_3^3 h]; \\ b_4 &= (c_{33}^- i k_4 p_3^4 + i \xi + c_{13}^- i \xi F_4 + i k_4 p_3^4 F_4) \exp[ik_4 p_3^4 h]; \\ b_5 &= F_3 \exp[ik_3 p_3^3 h]; b_6 = F_3 \exp[ik_4 p_3^4 h]; \\ b_7 &= \exp[ik_3 p_3^3 h]; b_8 = \exp[ik_4 p_3^4 h] \end{aligned}$$

Dùng điều kiện liên tục [7,9]

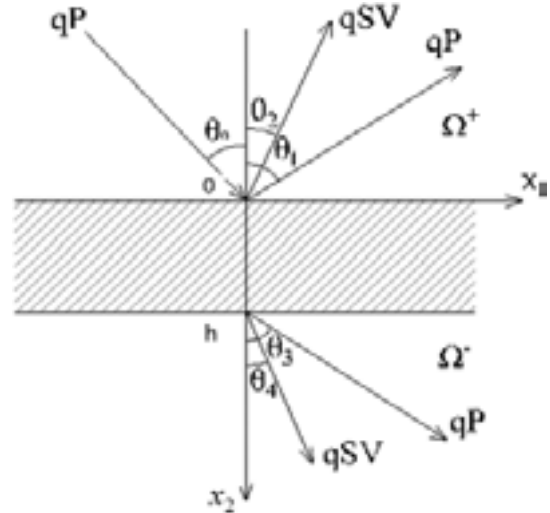
$$Y^-(h) = T Y^+(0) \quad (19)$$

ở đây T là ma trận chuyển

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}$$

với các phần tử  $T_{ij}$  được xác định Vinh và các cộng sự [9].

Thay (18) vào (19) ta được hệ 4 phương trình với 4 ẩn số  $R_{13}; R_{23}; R_{33}; R_{43}$



Hình2: Sự phản xạ, khúc xạ của sóng P đôi với lớp không thuần nhất kẹp giữa 2 bán không gian đàn hồi monoclinic

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & b_1 & b_2 \\ c_4 & c_5 & b_3 & b_4 \\ c_7 & c_8 & b_5 & b_6 \\ c_{10} & c_{11} & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \\ R_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_6 \\ c_9 \\ c_{12} \end{pmatrix} \quad (20)$$

trong đó

$$\begin{aligned} c_1 &= -(a_1 T_{11} + a_4 T_{12} + a_7 T_{13} + a_{10} T_{14}); \\ c_2 &= -(a_2 T_{11} + a_5 T_{12} + a_8 T_{13} + a_{11} T_{14}); \\ c_3 &= (a_3 T_{11} + a_6 T_{12} + a_9 T_{13} + a_{12} T_{14}); \\ c_4 &= -(a_1 T_{21} + a_4 T_{22} + a_7 T_{23} + a_{10} T_{24}); \\ c_5 &= -(a_2 T_{21} + a_5 T_{22} + a_8 T_{23} + a_{11} T_{24}); \\ c_6 &= (a_3 T_{21} + a_6 T_{22} + a_9 T_{23} + a_{12} T_{24}); \\ c_7 &= -(a_1 T_{31} + a_4 T_{32} + a_7 T_{33} + a_{10} T_{34}); \\ c_8 &= -(a_2 T_{31} + a_5 T_{32} + a_8 T_{33} + a_{11} T_{34}); \\ c_9 &= (a_3 T_{31} + a_6 T_{32} + a_9 T_{33} + a_{12} T_{34}); \\ c_{10} &= -(a_1 T_{41} + a_4 T_{42} + a_7 T_{43} + a_{10} T_{44}); \\ c_{11} &= -(a_2 T_{41} + a_5 T_{42} + a_8 T_{43} + a_{11} T_{44}); \\ c_{12} &= (a_3 T_{41} + a_6 T_{42} + a_9 T_{43} + a_{12} T_{44}); \end{aligned}$$

Do đó các hệ số  $R_{13}; R_{23}; R_{33}; R_{43}$  được xác định bởi

$$\begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \\ R_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & b_1 & b_2 \\ c_4 & c_5 & b_3 & b_4 \\ c_7 & c_8 & b_5 & b_6 \\ c_{10} & c_{11} & b_7 & b_8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_6 \\ c_9 \\ c_{12} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Cuối cùng, các hệ số phản xạ, khúc xạ của các sóng P, SV tương ứng là

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{R_{11}^2 + R_{13}^2}; F_1 = \frac{R_{11}}{R_{13}} = \frac{V_1}{\rho^+ c_1^2 - U_1}; \\ R_2 &= \sqrt{R_{21}^2 + R_{23}^2}; F = \frac{R_{21}}{R_{23}} = \frac{V_2}{\rho^+ c_2^2 - U_2}; \\ R_3 &= \sqrt{R_{31}^2 + R_{33}^2}; F_3 = \frac{R_{31}}{R_{33}} = \frac{V_3}{\rho^+ c_3^2 - U_3}; \\ R_4 &= \sqrt{R_{41}^2 + R_{43}^2}; F_4 = \frac{R_{41}}{R_{43}} = \frac{V_4}{\rho^+ c_4^2 - U_4} \end{aligned} \quad (22)$$

(xem tiếp trang 63)