XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ ĐỘ VÕNG, THÀNH PHẦN MÔ MEN TRONG BÀI TOÁN TẤM CHỮ NHẬT CHỊU TẢI TRỌNG PHÂN BỐ ĐỀU VỚI LIÊN KẾT HAI CẠNH NGÀM, HAI CẠNH TỰA ĐƠN

DETERMINATION OF DEFLECTION VALUE, BENDING MOMENT IN THE PROBLEM OF RECTANGULAR PLATES BEARING THE DISTRIBUTION LOAD WITH TWO OPPOSITE EDGES CLAMPED AND THE OTHER TWO EDGES SIMPLY SUPPORTED

Trương Quốc Khang

Tóm tắt:

Bài báo trình bày bài toán xác định phương trình giá trị độ võng trong tấm chữ nhật chịu tải trọng phân bố đều với liên kết hai cạnh ngàm, hai cạnh tựa đơn. Từ đó xác định các thành phần mô men, kiểm chứng bằng phần mềm Matlab và Sap2000.

***Từ khóa**: Bài toán tấm chữ nhật, độ võng trong tấm.*

Abstract:

The paper presents the problem of determining deflection value in a rectangular plate bearing the distribution load with two opposite edges clamped and the other two edges simply supported. Thereby determination of bending moment, verified by Mathlab and SAP2000 software.

***Keywords:** the problem of rectangular plates, deflection value of rectangular plate*

ThS. Trương Quốc Khang
Khoa Xây dựng - Trường ĐHXD Miền Tây
Email: truongquockhang@mtu.edu.vn
ĐT: 0907 028 028

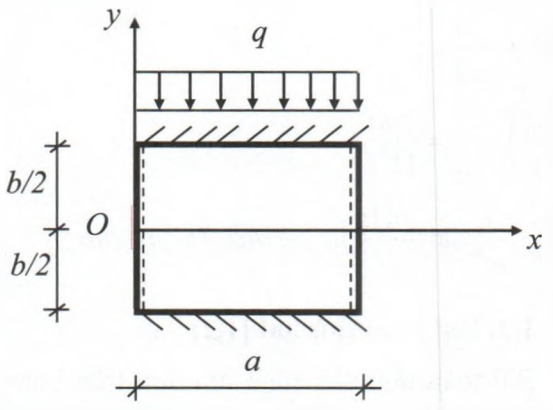
Ngày nhận bài: 16/02/2022
Ngày gửi phản biện: 28/02/2022
Ngày chấp nhận đăng: 10/3/2022

1. Đặt vấn đề

Để giải bài toán tấm chữ nhật có kích thước $a \times b$, chiều dày h, chịu lực phân bố đều q với 2 cạnh ngàm, 2 cạnh tựa đơn như Hình 1 nhằm xác định phương trình hàm độ võng w trong tấm, từ đó xác định các thành phần mô men, ta có thể xem như giải quyết cùng lúc hai bài toán dựa trên các giả thiết của lý thuyết tấm mỏng Kirchhoff:

- Bài toán tấm chữ nhật tựa đơn trên bốn cạnh chịu lực phân bố đều q.

- Bài toán tấm chữ nhật tựa đơn trên bốn cạnh chịu lực mômen phân bố f đối xứng tác động trên hai cạnh đối diện.



***Hình 1.** Tấm chữ nhật kích thước a x b, chiều dày h, chịu lực phân bố đều q với 2 cạnh ngàm, 2 cạnh tựa đơn*

1.1. Bài toán thứ nhất [1,2]

Bài toán tấm chữ nhật tựa đơn trên bốn cạnh chịu lực phân bố đều q.

Từ phương trình vi phân chủ đạo của tấm:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \qquad (1.1)$$

Độ cứng chống uốn của tấm $D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$

với υ: hệ số poisson.

Hàm độ võng phải thỏa các điều kiện biên như sau:

- Tại $x = 0$ và $x = a$: $w = 0$ và $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} = 0$

- Tại $y = -\frac{b}{2}$ và $y = \frac{b}{2}$:

$w = 0$ và $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = \varphi$

Ta có thể tìm được lời giải cho hàm độ võng như sau:

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum \frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a}$$
$$\left[1 - \frac{\alpha_m th\alpha_m + 2}{2ch\alpha_m} ch\frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2ch\alpha_m}\frac{2y}{b} sh\frac{2\alpha_m y}{b}\right]$$

với $\alpha_m = \frac{m\Pi b}{2a}$ (1.2)

Khi đó độ dốc (góc xoay) của tấm tại cạnh biên $y = \frac{b}{2}$:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\Pi^4 D}$$
$$\sum_{m=1,3,\ldots} \frac{1}{m^4}\sin\frac{m\Pi x}{a}\left[\alpha_m - th\alpha_m(1 + \alpha_m th\alpha_m\right] \qquad (1.3)$$

1.2. Bài toán thứ hai [1,2]

Bài toán tấm chữ nhật tựa đơn trên bốn cạnh chịu lực mômen phân bố f đối xứng tác động trên hai cạnh đối diện.

Hàm độ võng w phải thỏa phương trình vi phân chủ đạo của tấm:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \qquad (1.4)$$

và các điều kiện biên sau:

- Tại $x = 0$ và $x = a$: $w = 0$ và $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} = 0$

- Tại $y = -\frac{b}{2}$ và $y = \frac{b}{2}$:

$$\begin{cases} w = 0 \\ -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b/2} = f \\ -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=-b/2} = f \end{cases} \qquad (1.5)$$

Sau khi phân tích f thành chuỗi lượng giác theo $\sin\frac{m\pi x}{a}$:

$$f(x) = \sum E_m \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (1.6)$$

Ta có hàm độ võng:

$$w = \frac{a^2}{2\Pi^2 D}\sum \frac{\sin\frac{m\Pi x}{a}}{m^2 ch\alpha_m} E_m \qquad (1.7)$$
$$\left(\alpha_m th\alpha_m ch\frac{m\Pi y}{a} - \frac{m\Pi y}{a} sh\frac{m\Pi y}{a}\right)$$

Khi đó độ dốc (góc xoay) của tấm tại biên $y = \frac{b}{2}$:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{a}{2\pi D}\sum \frac{1}{m}\sin\frac{m\pi x}{a} E_m \qquad (1.8)$$
$$\left[th\alpha_m(\alpha_m th\alpha_m - 1) - \alpha_m\right]$$

1.3. Kết hợp hai bài toán [1,2]

Để kết hợp được hai bài toán 1 và 2 lại với nhau thì điều kiện góc xoay của tấm tại biên y = b/2 phải bị khử đi. Hay cụ thể là:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} \qquad (1.9)$$

Suy ra

$$E_m = \frac{4qa^2}{\pi^5 m^3}\frac{\alpha_m - th\alpha_m(1 + \alpha_m th\alpha_m)}{\alpha_m - th\alpha_m(\alpha_m th\alpha_m - 1)} \qquad (1.10)$$

Thay giá trị của E_m vào biểu thức của w_2 ta sẽ có giá trị cuối cùng của hàm độ võng w_2

$$w_2 = \frac{2qa^4}{\pi^5 D}\sum \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^5 ch\alpha_m}\frac{\alpha_m - th\alpha_m(1+\alpha_m th\alpha_m)}{\alpha_m - th\alpha_m(\alpha_m th\alpha_m - 1)}$$
$$\left(\alpha_m th\alpha_m ch\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} sh\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (1.11)$$

Và độ võng cuối cùng cần tính là

$$w = w_1 + w_2 \quad (1.12)$$

Khi đã biết giá trị độ võng của tấm ta có thể xác định được giá trị của thành phần mô men nội lực theo công thức sau:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (1.13)$$

$$M_y = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (1.14)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.15)$$

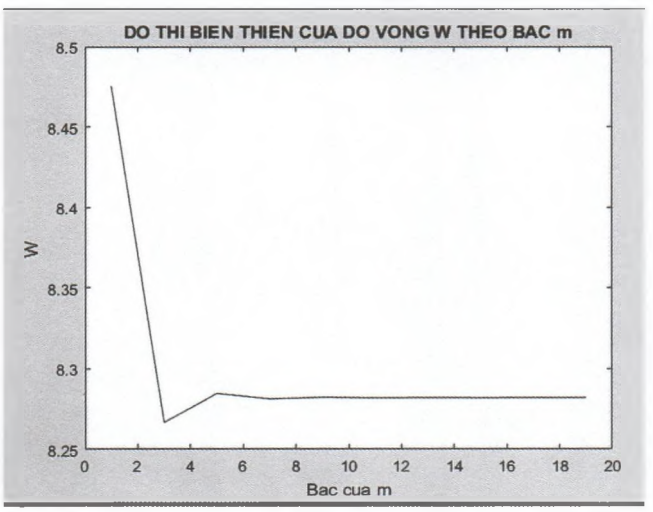
2. Ví dụ tính toán

Trường hợp tấm vuông $a = b = 8m$, mô đun đàn hồi $E = 2{,}5.10^3\ kN/cm^2$; $\nu = 0{,}25$; $h = 8\ cm$, cường độ phân bố đều $q = 12kN/m^2$.

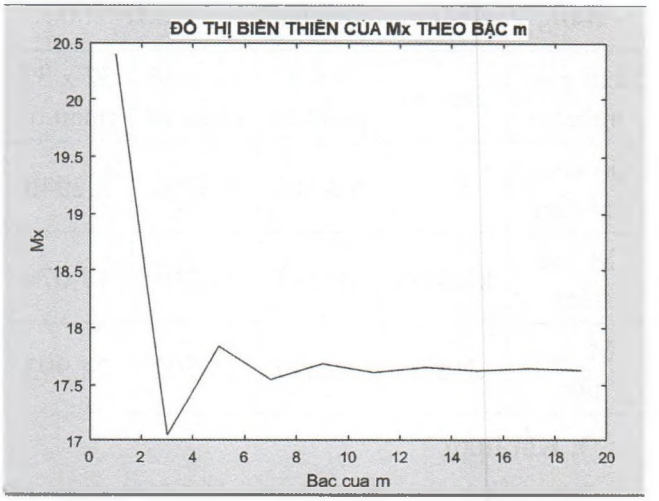
2.1. Phần mềm MATLAB

Áp dụng lý thuyết từ mục 1 để viết chương trình tính toán trong Matlab.

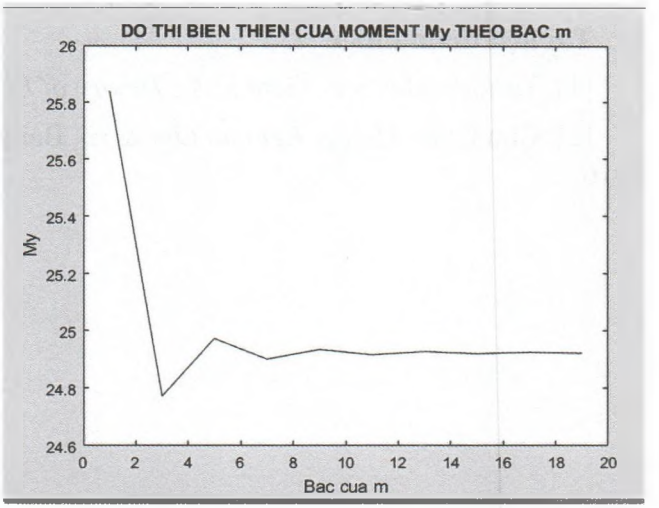
Minh họa cho đoạn chương trình lấy điểm khảo sát sự hội tụ là tâm tấm qua *Hình 2, Hình 3, Hình 4.*



Hình 2. *Đồ thị biến thiên của độ võng tại tâm tấm theo bậc m*



Hình 3. *Đồ thị biến thiên của mô men M_x tại tâm tấm theo bậc m*



Hình 4. *Đồ thị biến thiên của mô men M_y tại tâm tấm theo bậc m*

Từ Hình 2, 3 và 4 nhận thấy kết quả sự biến thiên của độ võng và các thành phần mô men tại tâm tấm và các kết quả này không sai khác nhiều khi $m \geq 11$.

Kết quả tính toán theo Matlab được trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1: *Kết quả bằng phần mềm MATLAB*

Lời giải nghiệm	Đơn vị	Giá trị
Độ võng tại tâm	Cm	8,2820
Mx tại tâm	kNm/m	17,629
My tại tâm	kNm/m	24,922

2.2. Phần mềm SAP 2000

Kết quả tính toán theo SAP 2000 được trình bày trong Bảng 2.

Bảng 2: *Kết quả bằng phần mềm SAP 2000*

Lời giải nghiệm	Đơn vị	8 x 8 phần tử	16 x 16 phần tử	32 x 32 phần tử
Độ võng tại tâm	Cm	8,4710	8,3304	8,2940
M_x tại tâm	kNm/m	18,273	17,791	17,674
M_y tại tâm	kNm/m	26,039	25,202	24,993

3. Kết luận

Bài viết đã xác định được giá trị độ võng tại tâm của tấm chữ nhật, các thành phần mô men của bài toán tấm chữ nhật chịu tải trọng phân bố đều q với hai cạnh ngàm, hai cạnh tựa đơn. Kiểm chứng kết quả bằng phần mềm Matlab và SAP 2000 cho thấy hàm độ võng w và M_x, M_y trong tấm hội tụ khá nhanh, chỉ sau vài vòng lặp là cho kết quả gần như chính xác với phương pháp phần tử hữu hạn SAP 2000, mức độ sai khác cụ thể:

$$\Delta w = \frac{8,2940 - 8,2820}{8,2940}.100\% = 0,14\%$$

$$\Delta M_x = \frac{17,674 - 17,629}{17,674}.100\% = 0,25\%$$

$$\Delta M_y = \frac{24,993 - 24,922}{24,993}.100\% = 0,28\%$$

Tài liệu tham khảo

[1]. Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, 1990.

[2]. Chu Quốc Thắng, *Kết cấu tấm & vỏ*, Bài giảng cao học xây dựng, Đại học Bách khoa TPHCM, 2016.