

KHAI THÁC MỐI LIÊN HỆ GIỮA TRỰC QUAN, TRÍ TƯỞNG TƯỢNG KHÔNG GIAN VÀ TƯ DUY TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Đào Tam¹ và Đậu Anh Tuấn²

¹*Hội Toán học Nghệ An*

²*Ban Quản lý Kì túc xá, Trường Cao đẳng Sư phạm Nghệ An*

Tóm tắt. Trí tưởng tượng không gian có vai trò quan trọng đối với học sinh trong việc học tập các kiến thức về hình học cũng như vận dụng toán học vào thực tiễn cuộc sống. Bài viết làm sáng tỏ mối liên hệ giữa ba thành tố trực quan, trí tưởng tượng không gian, tư duy toán học. Nhờ sử dụng trực quan, thông qua hoạt động quan sát học sinh tri giác đúng đắn các thuộc tính của sự vật, hiện tượng, từ đó xây dựng các biểu tượng kí ức và thông qua hoạt động tư duy hình thành các khái niệm, các quy luật. Khi có các biểu tượng kí ức, các tri thức về quan hệ không gian, học sinh có thể gián tiếp xây dựng các biểu tượng không gian mới, qua đó hình thành và phát triển trí tưởng tượng không gian. Việc xác định mối liên hệ này là cơ sở cho việc bồi dưỡng trí tưởng tượng không gian cho học sinh trong dạy học hình học ở trường trung học phổ thông.

Từ khóa: Trực quan, biểu tượng không gian, trí tưởng tượng không gian, tư duy toán học, hình học.

1. Mở đầu

Tưởng tượng là một hoạt động tinh thần quan trọng của con người. Nó có mối quan hệ mật thiết với các biểu tượng và tư duy và đã được các nhà tâm lí học quan tâm nghiên cứu, chẳng hạn các công trình [1-3]. Từ lâu, các nhà khoa học đã nghiên cứu về khái niệm này cũng như mối quan hệ của nó với trực quan và tư duy toán học. Trong [4], H. Gardner đã xem trí tưởng tượng không gian là một trong các thành phần của đa trí tuệ. Trong [5], Vũ Thị Thái đã xây dựng được khái niệm trí tưởng tượng không gian của học sinh tiểu học, đề xuất được các biện pháp để bồi dưỡng khái niệm đó. Trong [6], tác giả Nguyễn Văn Thiêm đã đưa ra các phương pháp phát huy trí tưởng tượng không gian của học sinh khi dạy hình học phẳng. Chương trình môn Toán trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 có mạch kiến thức Hình học và Đo lường, một trong những mục tiêu của mạch kiến thức này ở cả ba cấp học là phát triển trí tưởng tượng không gian [7].

Các nghiên cứu đã chỉ ra ở trên đem đến những kết quả quan trọng trong phân tích, phát triển trí tưởng tượng không gian. Tuy nhiên, các tác giả chưa quan tâm nghiên cứu một cách sâu sắc mối quan hệ giữa trực quan, biểu tượng, tư duy, đặc biệt là tư duy trực giác, tư duy logic, các tri thức về quan hệ không gian với trí tưởng tượng không gian trong dạy học hình học ở trường trung học phổ thông. Trong bài viết này chúng tôi phân tích làm sáng tỏ mối quan hệ đó nhằm làm cơ sở khoa học cho việc đề ra các phương thức rèn luyện trí tưởng tượng không gian cho học sinh.

Ngày nhận bài: 20/8/2019. Ngày sửa bài: 17/9/2019. Ngày nhận đăng: 24/9/2019.

Tác giả liên hệ: Đậu Anh Tuấn. Địa chỉ e-mail: dauanhtuancdsp@gmail.com

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Các khái niệm và thuật ngữ

2.1.1. Khái niệm về trực quan

Đã từ lâu trong lí luận dạy học Xô viết, nguyên tắc trực quan được giải thích: “Như là một yêu cầu của việc dạy học sao cho học sinh hình thành các biểu tượng, khái niệm trên cơ sở tri giác sinh động, các đối tượng, hiện tượng được nghiên cứu của thế giới khách quan hay là các biểu diễn của chúng” [8, tr. 65].

Ngày nay trong giáo dục toán học ở trường trung học phổ thông, trực quan của đối tượng, hiện tượng cần nghiên cứu của học sinh không chỉ là các đồ vật, đối tượng, quá trình của hiện thực xung quanh mà trực quan được sử dụng có thể là hình vẽ, hình biểu diễn của các hình không gian, các biểu diễn trực quan, kể cả biểu diễn trực quan động.

Biểu diễn trực quan động được hiểu là các biểu diễn trực quan được xây dựng trên màn hình máy tính với sự hỗ trợ của các phần mềm toán học động cho phép học sinh thực hiện các thao tác “kéo rê, ẩn/hiện, tạo vết, tịnh tiến, quay, đo đạc, tính toán, sắp xếp dữ liệu, thay đổi giá trị các tham số...” lên các đối tượng được biểu diễn.

2.1.2. Biểu tượng của kí ức

Trong tâm lí học người ta hiểu: “Biểu tượng của kí ức là những hình ảnh của các đối tượng, quá trình và hiện tượng không phải hiện đang được tri giác mà đã được tri giác trước đây” [9, tr. 43].

Các biểu tượng là cơ sở để hình thành các khái niệm. Tuy nhiên muốn cho các biểu tượng dễ trở thành điểm tựa cho việc lĩnh hội tri thức thì các biểu tượng phải phản ánh được các dấu hiệu đặc trưng đối với các khái niệm tương ứng. Để biểu tượng đạt được các yêu cầu nói trên đòi hỏi học sinh tri giác các đối tượng, các hình ảnh trực quan một cách đúng đắn.

Trên cơ sở hiểu biết về biểu tượng của kí ức, chúng tôi quan niệm biểu tượng của kí ức về không gian là biểu tượng của kí ức về tính chất và quan hệ của các đối tượng không gian.

2.1.3. Trí tưởng tượng không gian

** Trí tưởng tượng*

Trước hết ta hiểu trí tưởng tượng là việc xây dựng trong đầu những hình ảnh mới trên cơ sở các biểu tượng đã có [10].

** Trí tưởng tượng không gian*

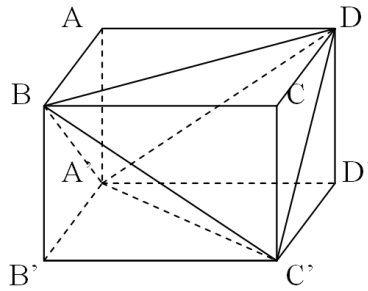
Trên cơ sở hiểu về trí tưởng tượng, chúng tôi quan niệm về trí tưởng tượng không gian là hoạt động trí óc thể hiện quá trình biến đổi những biểu tượng không gian đã có nhằm kiến tạo những biểu tượng không gian mới.

Ví dụ 1: Trên cơ sở học sinh đã có biểu tượng hình hộp chữ nhật: Đó là hình lăng trụ có các mặt là hình chữ nhật, các mặt đối diện là các hình chữ nhật bằng nhau và học sinh đã biết về tứ diện đều, đó là hình tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Khi đó học sinh có thể hình dung được trong hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cặp đường chéo sau đây bằng nhau: $BD = A'C'$; $A'B = DC'$; $BC' = A'D$.

Từ đó, học sinh tưởng tượng tứ diện $BDA'C'$ là tứ diện đều. Khi đó học sinh có thể tưởng tượng không gian mệnh đề sau đây: “Tồn tại một hình hộp chữ nhật ngoại tiếp tứ diện đều”.

Có thể chỉ ra sự tồn tại bằng cách qua các cặp cạnh đối người ta dựng các cặp mặt phẳng song song. Các cặp mặt phẳng này cắt nhau tạo thành một hình hộp chữ nhật.



Qua ví dụ này cho thấy: Trí tưởng tượng không gian không chỉ là hoạt động xây dựng biểu tượng mới trên cơ sở các biểu tượng đã có, mà còn trên cơ sở các tri thức đã có. Trong ví dụ trên, tri thức đã có là: Tồn tại duy nhất một cặp mặt phẳng song song đi qua hai đường thẳng chéo nhau.

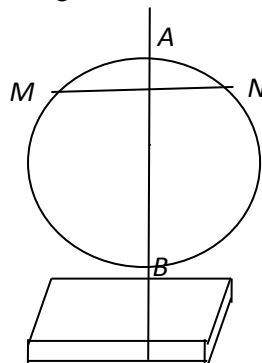
2.1.4. Khái niệm về tư duy logic

Do các đối tượng của trí tưởng tượng không gian là các mối liên hệ, quan hệ, các quy luật toán học cần phải được kiểm chứng về tính đúng sai. Vì vậy trí tưởng tượng không gian cần phải gắn với tư duy logic. Theo tác giả M.Iu. Koliagin: “Tư duy logic được đặc trưng bởi khả năng rút ra các hệ quả từ các tiền đề đã cho, khả năng phân chia triệt để các trường hợp riêng, khả năng dự đoán kết quả cụ thể bằng con đường lí thuyết, tổng quát hóa các kết quả thu được” [11].

Cũng giống như các loại hình tư duy khác, tư duy logic cũng có điểm tựa từ các trực quan sinh động.

Ví dụ 2: Từ vị trí tương đối giữa một đường thẳng và đường tròn được xét nhờ sự phân chia các trường hợp khoảng cách d từ tâm đến đường tròn đó: Nếu $d > R$ thì đường thẳng nằm ngoài đường tròn; nếu $d < R$ thì đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm; trường hợp riêng $d = 0$ thì đường thẳng đó chứa đường kính của đường tròn; nếu $d = R$ thì đường thẳng đó là tiếp tuyến. Nhờ việc xét sự tương tự giữa đường thẳng và đường tròn, tương tự giữa mặt phẳng và mặt cầu và biểu tượng trực quan, học sinh có thể phát hiện mệnh đề: “Nếu khoảng cách d từ tâm O của mặt cầu đến mặt phẳng (P) bé hơn bán kính R của mặt cầu thì giao giữa mặt phẳng và mặt cầu là đường tròn thuộc mặt phẳng đó có tâm là H – hình chiếu của O lên (P) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ”.

Biểu tượng trực quan nói ở đây có thể được tạo như sau: Hình tròn được hàn bằng thép, gắn kết với dây cung được đục lỗ ở trung điểm. Hệ thống trên có thể quay xung quanh trục xuyên qua hai điểm là hai đầu mút đường kính của đường tròn, sao cho đường kính AB được định vị như hình vẽ dưới. Khi quay nhanh quanh trục cố định được cắm vào giá đỡ, các vị trí của đường tròn trong không gian tạo biểu tượng mặt cầu, còn dây cung MN quét một đường tròn. Các điểm M, N quay tạo biểu tượng đường tròn.



Giáo viên cũng có thể tạo biểu tượng trực quan nhờ sử dụng phần mềm toán học động.

2.2. Quan niệm về mối liên hệ giữa trí tưởng tượng không gian và tư duy trực giác

Theo tác giả M.Iu. Koliagin: “Tư duy trực giác đặc trưng bởi sự thiếu vắng các bước xác định rõ ràng. Nó có khuynh hướng trí giác thu gọn toàn bộ vấn đề ngay lập tức. Người ta có thể đặt được câu trả lời “đúng” hoặc “sai”” [11, tr. 143].

Ngày nay sự phát triển của tư duy trực giác đã cuốn hút nhiều nhà sư phạm toán tiến bộ. Khi nói về vai trò của tư duy trực giác trong dạy học toán, viện sĩ A.H.Kônômôgôrôv ở Liên bang Nga đã viết: Khắp mọi nơi có thể các nhà toán học đã cố gắng làm cho các vấn đề được nghiên cứu của họ được trực quan bằng hình học,... Trí tưởng tượng hình học hay như người ta đã nói “Trực giác hình học đóng vai trò to lớn trong hoạt động nghiên cứu hầu khắp tất cả các lĩnh vực toán học, thậm chí cả những vấn đề trừu tượng” [11, tr. 44].

Từ nhận định trên, chúng tôi cho rằng trí tưởng tượng không gian là một lĩnh vực của trí tưởng tượng hình học và từ đó trí tưởng tượng không gian thuộc phạm trù của tư duy trực giác.

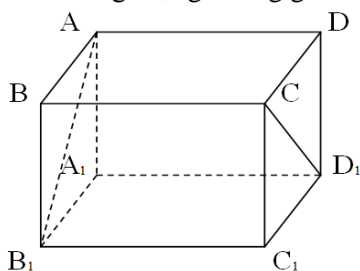
Thông thường tư duy trực giác dựa trên sự quen biết những kiến thức cơ bản ở lĩnh vực đã cho với cấu trúc của chúng. Điều đó cho phép con người thực hiện được dưới dạng các bước nhảy, sự chuyển tiếp nhanh chóng, sự bỏ qua các mắt xích riêng biệt trong quá trình lập luận. Những đặc tính này đòi hỏi sự kiểm tra các kết luận bằng các phương tiện phân tích, quy nạp hoặc suy diễn.

Từ sự phân tích trên, chúng tôi cho rằng trong quá trình dạy học toán, tư duy trực giác cũng như trí tưởng tượng không gian chưa đảm bảo kiến thức đúng đắn về các đối tượng. Để đảm bảo tính chính xác về các kiến thức cần phải tiến hành quá trình lập luận logic, dựa vào tư duy logic.

Nhiều nhà sư phạm cho rằng có thể đầu tiên cần sự hiểu biết trực giác về kiến thức và chỉ khi đó mới làm quen học sinh với phương pháp hình thức của suy diễn và chứng minh. Từ đó chúng tôi cho rằng việc phát triển trí tưởng tượng không gian giúp học sinh tiếp cận cách phát hiện vấn đề.

Ví dụ 3: Nhờ tri thức về hình hộp và tri thức về các bất biến của phép chiếu song song, học sinh có thể tưởng tượng không gian đưa ra mệnh đề: Hai đường thẳng song song là hình biểu diễn của hai đường thẳng chéo nhau.

Có thể mô tả trí tưởng tượng không gian của các em như sau.



Trong hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, các đường thẳng A_1B_1 và C_1D_1 là hình biểu diễn của hai đường thẳng chéo nhau AB_1 và CD_1 .

Có thể nhờ tư duy logic, lập luận mệnh đề nói trên là đúng. Thật vậy, qua hai đường thẳng chéo nhau có thể dựng cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa chúng. Khi đó, thực hiện phép chiếu song song theo phương song song với hai mặt phẳng và không song song với một trong hai đường thẳng chéo nhau, lên mặt phẳng (P) cắt hai mặt phẳng song song nói trên, ta sáng tỏ được mệnh đề trên là đúng.

Như vậy, qua ví dụ trên ta thấy nhiều khi trí tưởng tượng không gian có được nhờ độ thuần thực của các tri thức đã có và khả năng hình dung các hình không gian, các quan hệ không gian chứ không phải nhờ sử dụng hình ảnh trực quan trực tiếp.

2.3. Mối liên hệ giữa trực quan và trí tưởng tượng không gian

2.3.1. Mối liên hệ theo phương thức thứ nhất

Từ sự phân tích trên ta thấy việc chuyển từ trực quan sang trí tưởng tượng không gian được thực hiện thông qua các biểu tượng của kí ức về không gian.

Biểu tượng của kí ức về không gian là sản phẩm của tri giác trực tiếp các đối tượng, hiện tượng, quá trình hoặc tri giác hình ảnh thật của chúng. Trong trường hợp này, một trong những nhiệm vụ chủ yếu của việc sử dụng các tài liệu trực quan là hình thành những biểu tượng cụ thể trong kí ức của học sinh.

Thông qua tri giác nhiều lần có chủ định để tìm hiểu các thuộc tính của các đối tượng, các quy luật học sinh có được các biểu tượng của kí ức. Từ các biểu tượng của kí ức này, thông qua các hoạt động suy đoán, suy luận có lí để xây dựng các biểu tượng không gian mới. Đó chính là trí tưởng tượng không gian.

2.3.2. Mối liên hệ theo phương thức thứ hai

Trực quan cũng được dùng làm điểm tựa cho các thao tác tư duy khác nhau để vạch ra các thuộc tính bản chất của các đối tượng, các mối liên hệ có tính quy luật giữa các đối tượng, quá trình và hiện tượng. Từ đó để hình thành các tri thức nói chung và tri thức về mối liên hệ không gian nói riêng.

Khi tri thức về các mối liên hệ không gian nhuần nhuyễn, học sinh có thể xây dựng các biểu tượng không gian mới thông qua việc tri giác gián tiếp tài liệu.

Theo [9], ta hiểu tri giác gián tiếp là tri giác ngôn ngữ, lời nói, sự mô tả các đối tượng, hiện tượng, quá trình, sự kiện và các mối liên hệ có tính quy luật. Tri giác này đòi hỏi học sinh phải thông hiểu từng từ ngữ, từng tư tưởng được nghiên cứu trong quá trình học tập.

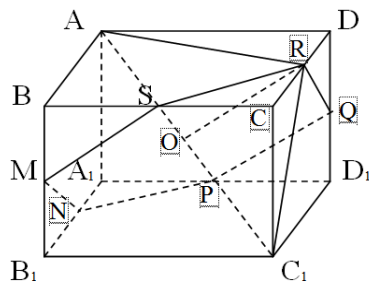
Chúng tôi mô tả trí tưởng tượng không gian thông qua tri giác gián tiếp, sử dụng các kiến thức đã được hình thành nhuần nhuyễn trong quá trình tư duy.

Ví dụ 4: Học sinh khá, giỏi có thể tưởng tượng không gian hình dung được một mặt phẳng vuông góc với đường chéo AC_1 của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ tại trung điểm O của đường chéo đó là một hình lục giác tạo bởi giao của mặt phẳng đi qua trung điểm các cạnh không cắt đường chéo AC_1 với các mặt của hình lập phương.

Họ hình dung được như vậy là do họ tri giác gián tiếp hiểu được trung điểm của các cạnh không cắt đường chéo AC_1 cách đều hai đầu mút của đường chéo đó. Khi đó, tam giác có đỉnh là trung điểm của các cạnh nói trên và đáy là AC_1 là tam giác cân. Khi đó, đoạn nối trung điểm của cạnh nói trên với trung điểm O của đường chéo là đường cao của các tam giác cân đó.

Thế Để thuận tiện theo dõi chúng tôi mô tả các yếu tố vừa phân tích qua hình biểu diễn của hình lập phương và thiết diện nhận được như sau.

Trên hình vẽ, nếu ta gọi R là trung điểm của CD thì độ dài đoạn thẳng $AR = C_1R$, do đó tam giác RAC_1 là tam giác cân tại R nên RO là đường cao tam giác RAC_1 suy ra RO thuộc mặt phẳng thiết diện. Tương tự, ta gọi M, N, P, Q, S lần lượt là trung điểm của các cạnh $BB_1, A_1B_1, A_1D_1, DD_1, BC$ thì các đoạn thẳng OM, ON, OP, OQ, OS thuộc mặt phẳng thiết diện. Như vậy mặt phẳng đi qua và vuông góc với trung điểm đường chéo AC_1 của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cắt các mặt phẳng của hình lập phương theo lục giác đều $MNPQRS$.

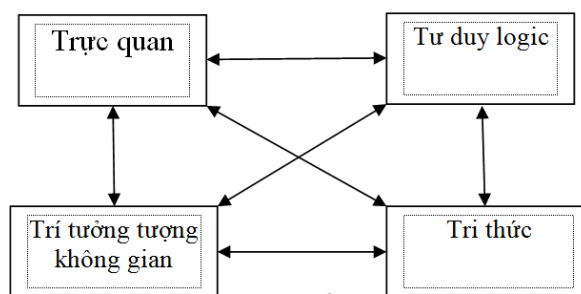


2.4. Mối liên hệ giữa tư duy logic và trí tưởng tượng không gian

Do kết quả của trí tưởng tượng không gian trong dạy học toán là các mệnh đề giả định về các mối liên hệ, quan hệ của các đối tượng không gian cần được kiểm chứng. Để khẳng định trí tưởng tượng không gian đúng ta cần phải chứng minh bằng lập luận logic, sử dụng tư duy logic.

Ngược lại, từ tư duy logic cho ta các tri thức toán học, những tri thức này là cơ sở cho trí tưởng tượng không gian tốt.

Từ sự phân tích các nghiên cứu trên, chúng tôi đưa ra sơ đồ mối liên hệ giữa trực quan, tư duy logic, trí tưởng tượng không gian và tri thức như sau:



Sơ đồ trên được đưa ra từ sự phân tích các mối quan hệ giữa các thành tố: Trực quan, trí tưởng tượng không gian, tư duy, đặc biệt là tư duy logic.

Trong đó sơ đồ nhấn mạnh các mối liên hệ sau:

- Trực quan là điểm tựa cho tư duy nói chung, nói riêng là tư duy logic. Ngược lại, từ tư duy trừu tượng, nói riêng là tư duy logic đạt trình độ bậc cao lại được soi sáng bởi trực quan phong phú hơn.

- Thông qua trực quan xây dựng các biểu tượng không gian, từ đó để xây dựng các biểu tượng mới – Trí tưởng tượng không gian. Ngược lại, nếu người có trí tưởng tượng không gian tốt thì sẽ nhìn nhận trực quan phong phú và sâu sắc hơn.

- Do sản phẩm của trí tưởng tượng không gian có thể đúng hoặc sai nên chúng cần được kiểm chứng nhờ tư duy logic. Ngược lại, nếu có tư duy logic tốt thì các giả thuyết đề ra nhờ trí tưởng tượng không gian có cơ sở khoa học.

- Nhờ có tri thức về mối liên hệ không gian phong phú cho phép học sinh đưa ra các biểu tượng không gian mới một cách gián tiếp – đó là trí tưởng tượng không gian. Ngược lại, nhờ có các mệnh đề là sản phẩm của trí tưởng tượng không gian, chúng sẽ trở thành tri thức mới thông qua kiểm chứng logic.

- Nhà sư phạm Xcatkin đã khẳng định rằng: “Sẽ không có gì trong đầu óc về những gì mà trước đó không được cảm thụ trực giác” [8, Tr65]. Nhận định này có nghĩa là tri thức có được bắt đầu với các đối tượng trực quan, bắt đầu bằng tri giác. Ngược lại, nếu có tri thức trừu tượng về mối liên hệ không gian thì cho phép nhìn nhận trực quan phong phú hơn.

Từ sự phân tích trên cho ta thấy, trọng tâm của việc dạy học hình học ở trường trung học phổ thông là giải quyết tốt các mối liên hệ biện chứng giữa các thành tố nêu trong sơ đồ trên.

3. Kết luận

Mối liên hệ giữa trực quan, trí tưởng tượng không gian, tư duy logic và tri thức toán học có vai trò rất quan trọng trong việc phát triển trí tưởng tượng không gian cho học sinh ở trường trung học phổ thông. Các tác giả đã phân tích làm sáng tỏ mối quan hệ đó và khai thác mối liên hệ này là cơ sở cho việc đưa ra các giải pháp nhằm phát triển trí tưởng tượng không gian cho học sinh trung học phổ thông góp phần đổi mới giáo dục toán học trong giai đoạn hiện nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Trọng Thủy, 1998. Tâm lí học, Nxb Giáo dục Việt Nam.
- [2] Hoàng Phê (chủ biên), 1998. Từ điển Tiếng Việt, Nxb Đà Nẵng.
- [3] Phạm Minh Hạc (chủ biên), 1988. Tâm lí học, Tập 1, Nxb Giáo dục.
- [4] Howard Gardner, Cơ cấu trí khôn, Nhà xuất bản tri thức (Phạm Toàn dịch).
- [5] Vũ Thị Thái, 2001. Bước đầu hình thành và phát triển trí tưởng tượng không gian cho học sinh tiểu học thông qua dạy học các yếu tố hình học, Luận án Tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- [6] Nguyễn Văn Thiêm, 1984. *Tưởng tượng không gian, phát huy trí tưởng tượng không gian của học sinh khi dạy hình học phẳng*. Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 11/1984, số 12/1984.
- [7] Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018. *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán*, Hà Nội.
- [8] M.H. Xcatkin, 1982. Lí luận dạy học ở trường phổ thông, Nhà xuất bản Giáo dục Matxcova (Bản tiếng Nga).
- [9] M.Alêcxêep (Chủ biên), 1976. Phát triển tư duy học sinh. Nhà xuất bản Giáo dục Matxcova.
- [10] Nguyễn Văn Lê, 1998. Cơ sở khoa học của sự sáng tạo, Nxb Giáo dục Việt Nam.
- [11] M.Iu. Koliagin, 1980. Phương pháp dạy học Toán ở trường phổ thông, Nhà xuất bản Giáo dục Matxcova.

ABSTRACT

Explore the relation among intuition, spatial imagination and mathematical thinking in teaching geometry in high school

Dao Tam¹ and Dau Anh Tuan²

¹*Mathematical Association of Nghe An*

²*Dormitory Management Board, Nghe An College of Education*

Spatial imagination plays an important role in learning geometry as well as applying math to the real life. This paper illustrates the relationship among the visual elements, spatial imagination and mathematical thinking. Memorial symbols are created by using intuition and observing students the right perception of the attributes of things, phenomena. The concepts and rules are formed through the students' thinking activities. Students are able to create new space symbols indirectly by memorial symbols and knowledge of spatial relation. The identification of this relationship is the basis to foster the spacial imagination for students in teaching geometry at high school.

Keywords: Intuition, spatial symbol, spatial imagination, mathematical thinking, geometry.