

# PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA TẤM COMPOSITE GIA CƯỜNG BỞI ỐNG NANO CARBON THEO LÝ THUYẾT BẬC CAO BỐN ẨN CHUYỂN VỊ

Dương Thành Huân<sup>1</sup>, Vũ Văn Thắm<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>*Khoa Cơ - Điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam*

<sup>2</sup>*Khoa Xây dựng dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng*

\*Tác giả liên hệ: thamvv@nuce.edu.vn

Ngày nhận bài: 26.04.2021

Ngày chấp nhận đăng: 18.05.2021

## TÓM TẮT

Bài báo sử dụng lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị (HSDT-4) để xây dựng lời giải giải tích phân tích dao động tự do của tấm chữ nhật làm từ vật liệu composite gia cường bởi các ống nano carbon đơn vách (FG-CNTRC). Các phương trình cân bằng động được thiết lập từ nguyên lý Hamilton. Độ tin cậy của thuật toán và chương trình tính được kiểm chứng qua so sánh với các kết quả đã công bố. Các khảo sát số trình bày để đánh giá sự ảnh hưởng của đặc trưng vật liệu, kích thước tấm, kiểu phân bố hay tỉ lệ thể tích ống nano carbon đến tần số dao động tự do của tấm composite FG-CNTRC.

Từ khóa: Vật liệu composite lớp, lý thuyết bốn ẩn chuyển vị, phân tích dao động tự do, ống nano carbon.

## Laminated Composite Plate Reinforced by Carbon Nanotube: Free Vibration Analysis using Four-variable High order Plate Theory

## ABSTRACT

In this paper, a four-variable refined plate theory (HSDT4) was used for free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced laminated composite plates. Equations of motion for simply supported rectangular plates were derived using Hamilton's principle. Comparison studies were carried out to verify accuracy of the present model. New parameter studies regarding the influence of material properties, plate geometry, CNT volume fraction, CNT distribution types, on the natural frequency were performed in detail.

Keywords: Composite material, four-variable refined plate theory, free vibration, carbon nanotube.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Dựa trên ý tưởng về sự phân bố cơ tính của vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material - FGM) và những tính chất cơ lý đặc biệt của ống nano carbon, Shen & Zhang (2010) đã đề xuất vật liệu composite có cơ tính biến thiên với cốt sợi là các ống nano carbon (Functionally graded carbon nanotube-reinforced composite - FG-CNTRC), trong đó các ống nano carbon được sắp xếp, phân bố theo một quy luật nào đó trên nền là vật liệu polyme hoặc kim loại. Hiện nay, vật liệu FG-CNTRC đã được cộng đồng các nhà khoa học và công nghệ trên thế giới công nhận là loại vật liệu composite thế

hệ mới, thu hút sự quan tâm nghiên cứu và áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), Zhu & cs. (2012) đã tiến hành phân tích uốn và dao động tự do của các tấm mỏng và tấm có chiều dày trung bình được làm từ composite cốt sợi là các ống nano carbon đơn vách bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Wattanasakulpong & Ungbhakorn (2013) đã phân tích ứng xử uốn, ổn định và dao động của dầm FG-CNTRC trên nền đàn hồi Pasternak. Dựa trên lý thuyết đàn hồi ba chiều, Alibeigloo & Liew (2013) đã khảo sát uốn của tấm hình chữ nhật FG-CNTRC bốn biên tựa khớp chịu tải trọng cơ - nhiệt. Theo hướng tiếp cận giải tích,

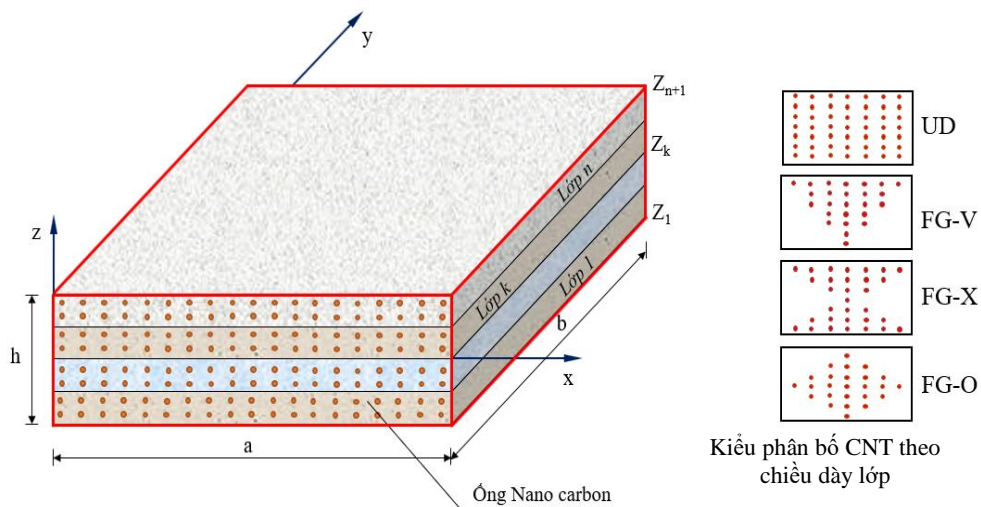
Huang & cs. (2017) đã tiến hành phân tích tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm composite nhiều lớp gia cường CNT theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản.

Các nhà khoa học Việt Nam trong những năm gần đây đã có những đóng góp nổi bật trong lĩnh vực cơ học vật liệu mới và kết cấu bằng vật liệu mới. Có thể kể đến vài công bố như Dương Thành Huân & cs. (2015; 2015) đã sử dụng các lý thuyết tấm bậc cao (HSDT-S) đơn giản và lý thuyết tấm bậc cao (HSDT) để phân tích tĩnh và dao động tự do kết cấu tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Bằng việc sử dụng lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị cải tiến (HSDT-4) và dạng nghiệm Navier (chuỗi Fourier kép) (Thẩm & cs., 2019), các tác giả đã phân tích dao động tự do của tấm composite lớp gia cường bằng ống nano carbon đơn vách (single-walled carbon nanotube - SWNT), tích hợp lớp vật liệu áp điện.

Sự phát triển của vật liệu đòi hỏi cần có những mô hình phù hợp để phân tích, tính toán các kết cấu được làm từ những loại vật liệu mới này. Độ chính xác, tính hiệu quả khi phân tích ứng xử cơ học của kết cấu phụ thuộc nhiều vào lý thuyết tính toán. Lý thuyết đàn hồi ba chiều (3D) được cho là lý thuyết chính xác. Tuy nhiên, các phương trình đàn hồi 3D cho tấm, vô nhiều lớp thường công kênh về mặt toán học nên gặp nhiều khó khăn khi giải, đặc biệt là đối với các điều kiện biên và tải trọng phức tạp. Một trong những lựa chọn thay thế phổ biến cho lý thuyết

3D là các lý thuyết đơn lớp tương đương (ESL), chẳng hạn như lý thuyết cổ điển (CST), lý thuyết bậc nhất (FSDT) và lý thuyết bậc cao (HSDT) đã được các nhà nghiên cứu trình bày để giảm các phương trình đàn hồi 3D thành các biểu thức hai chiều (2D). Trong các lý thuyết đơn lớp tương đương kể trên, lý thuyết tấm cổ điển (CST) chấp nhận giả thiết Kirchhoff, bỏ qua biến dạng cắt ngang, do vậy chỉ phù hợp với tấm mỏng. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) có kể đến biến dạng cắt ngang, phù hợp với tấm có chiều dày trung bình nhưng phải sử dụng đến hệ số hiệu chỉnh cắt. Để sát hơn quy luật phân bố của ứng suất cắt ngang dọc theo chiều dày tấm, các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) đã được đề xuất, tuy nhiên việc sử dụng các lý thuyết này dẫn đến lời giải công kênh, phức tạp do số ẩn chuyển vị lớn.

Những năm gần đây, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị (HSDT-4) được phát triển trên cơ sở phân tích các thành phần chuyển vị làm hai thành phần: Thành phần do mô men uốn và thành phần do lực cắt gây nên. Lý thuyết này có các ưu điểm như ít ẩn số, không cần sử dụng đến hệ số hiệu chỉnh cắt và thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang bị triệt tiêu tại hai bề mặt của kết cấu. Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả sử dụng lý thuyết tấm bốn ẩn cải tiến (HSDT-4) của Quốc & cs. (2019) để xây dựng lời giải giải tích phân tích dao động tự do của tấm composite nhiều lớp gia cường ống nano carbon.



Hình 1. Tấm composite lớp gia cường ống nano carbon

## 2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

### 2.1. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu trong bài báo này là tấm composite lớp cấu hình vuông góc phản xứng có chiều dài  $a$ , chiều rộng  $b$ , độ dày  $h$  (Hình 1). Mỗi lớp là vật liệu FG-CNTRC với bốn kiểu phân bố CNT theo phương chiều dày của từng lớp composite (UD, FG-V, FG-X, FG-O). Tỷ phần thể tích xác định theo (Quoc & cs., 2019; Vũ Văn Thắm & cs., 2019; Quoc & cs., 2021):

$$\begin{aligned} \text{UD: } V_{\text{CNT}}(z) &= V_{\text{CNT}}^* \\ \text{FG-V: } V_{\text{CNT}}(z) &= 2V_{\text{CNT}}^* \frac{z - z_k}{z_{k+1} - z_k} \\ \text{FG-O: } \\ V_{\text{CNT}}(z) &= 2V_{\text{CNT}}^* \left( 1 - \frac{|2z - z_k - z_{k+1}|}{z_{k+1} - z_k} \right) \quad (1) \\ \text{FG-O: } \\ V_{\text{CNT}}(z) &= 2V_{\text{CNT}}^* \left( 1 - \frac{|2z - z_k - z_{k+1}|}{z_{k+1} - z_k} \right) \end{aligned}$$

Trong đó,  $V_{\text{CNT}}(z)$  là tỷ phần thể tích CNT tại tọa độ  $z$ ;  $z_k$  và  $z_{k+1}$  là khoảng cách từ các bề mặt dưới và trên của lớp thứ  $k$  đến mặt giữa của tấm ( $z = 0$ );  $V_{\text{CNT}}^*$  là tỉ lệ phần trăm thể tích tổng của CNT được xác định theo công thức 1a:

$$V_{\text{CNT}}^* = \frac{W_{\text{CNT}}}{W_{\text{CNT}} + (\rho^{\text{CNT}} / \rho^m) - (\rho^{\text{CNT}} / \rho^m) W_{\text{CNT}}} \quad (1a)$$

Trong đó,  $w_{\text{CNT}}$  là khối lượng CNT;  $\rho^{\text{CNT}}$  và  $\rho^m$  lần lượt là khối lượng riêng của CNT và vật liệu nền.

Các tính chất hiệu dụng của vật liệu composite nano carbon đơn vách (SWCNT) trong từng lớp được tính như sau (Zhu & cs., 2012):

$$\begin{aligned} E_{11}(z) &= \eta_1 V_{\text{CNT}}(z) E_{11}^{\text{CNT}} + V_m(z) E^m; \\ \frac{\eta_2}{E_{22}(z)} &= \frac{V_{\text{CNT}}(z)}{E_{22}^{\text{CNT}}} + \frac{V_m(z)}{E^m}; \\ \frac{\eta_3}{G_{12}(z)} &= \frac{V_{\text{CNT}}(z)}{G_{12}^{\text{CNT}}} + \frac{V_m(z)}{G^m}; \quad (2) \\ \rho(z) &= V_{\text{CNT}}(z) \rho^{\text{CNT}} + V_m(z) \rho^m; \\ \nu_{12} &= V_{\text{CNT}}^* \nu_{12}^{\text{CNT}} + V_m(z) \nu^m \end{aligned}$$

Trong đó:  $E_{11}^{\text{CNT}}, E_{22}^{\text{CNT}}$  và  $G_{12}^{\text{CNT}}$  là mô đun đàn hồi Young và mô đun đàn hồi trượt của CNT;  $E_m$  và  $G_m$  là mô đun đàn hồi Young và mô đun đàn hồi trượt của vật liệu nền đẳng hướng;  $V_m(z)$  là tỷ phần thể tích của vật liệu nền ( $V_m(z) + V_{\text{CNT}}(z) = 1$ );  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  là các tham số hiệu dụng phụ thuộc vào khối lượng của CNT.

### 2.2. Phương pháp nghiên cứu

#### 2.2.1. Lý thuyết tấm bậc cao bốn ẩn chuyển vị

Bài báo sử dụng lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị để xây dựng lời giải giải tích cho bài toán dao động tự do của tấm composite lớp. Theo Quoc & cs. (2019; 2021) trường chuyển vị được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial x} \\ &\quad - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial x}; \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial y} \\ &\quad - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial y}; \quad (3) \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned}$$

Trong đó,  $u_0, v_0$  lần lượt là các thành phần chuyển vị màng của điểm bất kỳ trên mặt trung bình theo phương  $x, y$ ;  $w_b$  và  $w_s$  là các thành phần độ võng do mômen uốn và do lực cắt gây ra;  $f(z)$  là hàm đặc trưng cho quy luật biến thiên của ứng suất cắt ngang theo chiều dày tấm. Theo Quoc & cs. (2019; 2021) hàm:

$$f(z) = z \left[ -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h_t} \right)^2 \right]$$

thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới của tấm bằng không

Trường biến dạng:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(z) \kappa_x^s \\ f(z) \kappa_y^s \\ f(z) \kappa_{xy}^s \\ g(z) \gamma_{yz}^s \\ g(z) \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}; \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \\ \kappa_x^b &= -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}; \kappa_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}; \\ g(z) &= [1 - f'(z)]; \kappa_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}; \\ \kappa_y^s &= -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}; \kappa_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}; \\ \kappa_{xy}^s &= -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}; \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}; \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Quan hệ ứng suất - biến dạng của lớp vật liệu composite thứ k:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (6)$$

trong đó, các hằng số vật liệu trong hệ tọa độ tám  $(\bar{Q}_{ij})$  được xác định theo (Reddy, 2006).

### 2.2.2. Hệ phương trình chuyển động

Hệ phương trình chuyển động được thiết lập nhờ nguyên lý Hamilton và có dạng như sau

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \\ D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \\ H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \\ \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (8b)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$(A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) (\bar{Q}_{ij})_k dz; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (10)$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} [1 - f'(z)]^2 (\bar{Q}_{ij})_k dz; \quad i, j = 4, 5$$

(Quốc & cs., 2019):

$$\begin{aligned} \delta u_0 &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}; \\ \delta v_0 &: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}; \\ \delta w_b &: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = \\ & I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) \\ & - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s; \\ \delta w_s &: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} \\ & + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ & + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (7)$$

trong đó:

$$(N_x, N_y, N_{xy}) \text{ và } (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b, M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s)$$

là các thành phần lực màng và mô men uốn, xoắn của kết cấu tấm tổng thể. Các giá trị nội lực này được tính theo công thức 8a:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa^b \\ \kappa^s \end{Bmatrix} \quad (8a)$$

Hay theo công thức 8b.

**Bảng 1. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  ( $m = n = 1$ ) của tấm đơn lớp composite FG-CNTRC**

Kiểu phân bố CNT	Mô hình	Tỷ phần thể tích CNT ( $V_{CNT}^*$ )					
		0,11			0,17		
		$h/b = 0,02$	$h/b = 0,05$	$h/b = 0,10$	$h/b = 0,02$	$h/b = 0,05$	$h/b = 0,10$
UD	Zhu & cs. (2012)	19,223	17,355	13,532	23,697	21,456	16,815
	Huang & cs. (2017)	19,354	18,280	15,550	23,844	22,557	19,258
	Bài báo	19,341	18,215	15,406	23,828	22,479	19,084
FG-V	Zhu & cs. (2012)	16,252	15,110	12,452	19,982	18,638	15,461
	Huang & cs. (2017)	16,236	15,574	13,753	19,938	19,151	16,970
	Bài báo	16,302	15,601	13,708	20,036	19,205	16,941
FG-O	Zhu & cs. (2012)	14,302	13,523	11,550	17,544	16,628	14,282
	Huang & cs. (2017)	14,300	13,840	12,512	17,563	17,017	15,429
	Bài báo	14,330	13,802	12,318	17,582	16,975	15,245
FG-X	Zhu & cs. (2012)	22,984	19,939	14,616	28,413	24,764	18,278
	Huang & cs. (2017)	23,204	21,425	17,362	28,619	26,475	21,536
	Bài báo	23,227	21,383	17,252	28,667	26,400	21,313

**Bảng 2. Tần số dao động tự do không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  ( $m = n = 1$ ) của tấm nhiều lớp composite FG-CNTRC cấu hình vuông góc phản xứng  $(0/90)_n$**

$V_{CNT}^*$	Mô hình	UD		FG-V		FG-O		FG-X	
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$
0,11	Huang & cs. (2017)	11,348	17,714	10,056	17,495	9,182	17,378	13,064	17,975
	Bài báo	11,353	17,696	10,139	17,519	9,264	17,312	13,125	18,082
0,14	Huang & cs. (2017)	12,395	19,726	10,876	19,484	9,874	19,354	14,396	20,032
	Bài báo	12,401	19,701	10,957	19,498	9,954	19,266	14,458	20,143
0,17	Huang & cs. (2017)	14,035	21,831	12,435	21,565	11,367	21,421	16,180	22,165
	Bài báo	14,040	21,810	12,541	21,597	11,469	21,341	16,258	22,301

Với các số hạng ma trận được tính như công thức 10:

và các mô men quán tính  $(I_0; I_1; J_1; I_2; J_2; K_2)$  của lớp vật liệu thứ  $k$  tính theo công thức sau:

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho^{(k)} dz; \quad (11)$$

với  $\rho^{(k)}$  là khối lượng riêng lớp vật liệu thứ  $k$ .

### 2.2.3. Lời giải giải tích - nghiệm Navier

Điều kiện biên tựa bản lề bốn cạnh của tấm composite có góc phương ống CNT đặt phản xứng vuông với nhau có dạng:

- Tại  $x = 0$  và  $x = a$ :

$$v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (12a)$$

- Tại  $y = 0$  và  $y = b$ :

$$u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad (12b)$$

Các nghiệm chuyển vị tại mặt trung bình của tấm  $(u_0, v_0, w_s, w_b)$  được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên tựa bản lề bốn cạnh (Reddy, 2006) theo công thức 13:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y; \\ v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y; \\ w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^b e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; \\ w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^s e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó,  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$  và  $u_{mn}, v_{mn}, w_{bmn}, w_{smn}$  là các hệ số cần xác định.

Thay (13) vào hệ các phương trình cân bằng động (7), ta thu được phương trình để giải, biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$[S]_{4 \times 4} - \omega^2 [M]_{4 \times 4} \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}^b, w_{mn}^s\}^T = \{0\} \quad (14)$$

Trong đó, các hệ số ma trận độ cứng  $[S]$  và ma trận khối lượng  $[M]$  là  $s_{ij}$  và  $m_{ij}$  được biểu diễn trong phần phụ lục.

### 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

#### 3.1. Kết quả kiểm chứng

Độ tin cậy của mô hình lý thuyết mà nhóm tác giả đã trình bày trong bài báo được kiểm chứng thông qua ví dụ so sánh như sau:

Xét tấm composite lớp FG-CNTRC với bốn biên tựa khớp (SSSS), cơ tính của vật liệu được tham khảo theo nghiên cứu (Huang & cs., 2017). Vật liệu nền có:  $E^m = 2,1\text{Gpa}$ ;  $\nu_m = 0,34$ ;  $\rho_m = 1.150 \text{ kg/m}^3$ . Vật liệu gia cường CNT có:  $E_{11}^{\text{CNT}} = 5,6466\text{TPa}$ ;  $E_{22}^{\text{CNT}} = 7,08\text{TPa}$ ;  $G_{12}^{\text{CNT}} = 1,9445\text{TPa}$ ;  $\nu_{12}^{\text{CNT}} = 0,175$ ;  $G_{23}^{\text{CNT}} = G_{13}^{\text{CNT}} = G_{12}^{\text{CNT}}$ ;  $\rho^{\text{CNT}} = 1.400 \text{ kg/m}^3$ . Các tham số:  $\eta_1 = 0,149$ ;  $\eta_2 = 0,934$  và  $\eta_3 = \eta_2$  với  $V_{\text{CNT}}^* = 0,11$ ;  $\eta_1 = 0,150$ ;  $\eta_2 = 0,941$  và  $\eta_3 = \eta_2$  với  $V_{\text{CNT}}^* = 0,14$ ;  $\eta_1 = 0,149$ ;  $\eta_2 = 1,381$  và  $\eta_3 = \eta_2$  với  $V_{\text{CNT}}^* = 0,17$ . Tần số dao động tự do không thứ

nguyên của tấm theo công thức  $\bar{\omega} = \omega \left( \frac{b^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho^m}{E^m}}$ ,

kết quả được so sánh với các kết quả đã được công bố bởi các tác giả với mô hình lý thuyết khác, chi tiết được trình bày trên bảng 1 với tấm FG-CNTRC đơn lớp và bảng 2 với tấm composite vuông góc phản xứng nhiều lớp.

Từ bảng 1 và bảng 2 (tỷ số  $h/b = 0,02$ ) cho thấy, tần số dao động tự do được tính toán từ mô hình lý thuyết hiện tại có sự tương đồng cao so với kết quả được tính từ mô hình phần tử hữu hạn (trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất -FSDT) đã được thực hiện bởi Zhu & cs. (2012) và mô hình giải tích dựa trên lý thuyết tấm 4 ẩn đơn giản đã được thực hiện bởi Huang & cs. (2017), điều này khẳng định độ tin cậy của lý thuyết HSDT-4 và chương trình tính mà nhóm tác giả đã thiết lập. Với các thông số vật liệu như trong mục 3.1, các khảo sát số sẽ được thực hiện để đánh giá sự ảnh hưởng của đặc trưng vật liệu, kích thước tấm, kiểu phân bố hay tỉ lệ thể tích ống nano carbon đến tần số dao động tự do của tấm composite FG-CNTRC.

#### 3.2. Một số ví dụ khảo sát số

##### 3.2.1. Tần số dao động tự do và các dạng dao động của tấm FG-CNTRC

Bảng 3 và hình 2 và hình 3 biểu diễn kết quả tính toán sáu tần số dao động riêng đầu tiên của tấm chữ nhật bốn biên tựa khớp FG-CNTRC cấu hình [0/90/0]. Mỗi dạng dao động tương ứng với số sóng dao động theo các phương  $x$  và phương  $y$  (là giá trị của các cặp số  $m, n$ ). Có thể thấy rằng: trong bốn kiểu phân bố CNT thì kiểu phân bố FG-O có dạng dao động số 4 ( $m = 2, n = 2$ ) và dạng dao động số 5 ( $m = 3, n = 1$ ) khác với ba kiểu phân bố còn lại (dạng 4 ( $m = 3, n = 1$ ), dạng 5 ( $m = 2, n = 2$ )).

##### 3.2.2. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT

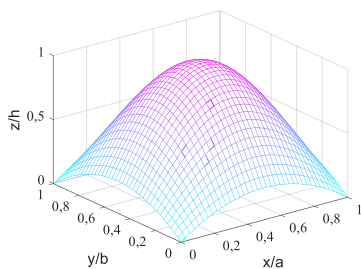
Đồ thị hình 4 biểu diễn sự ảnh hưởng của của bốn kiểu phân bố CNT (UD, FG-V, FG-O, FG-X) đến tần số dao động tự do của tấm composite FG-CNTRC cấu hình [0/90/0/90] theo tỷ số  $a/b$ . Đồ thị biểu diễn cho thấy kiểu phân bố CNT hình chữ X (FG-X) cho tần số dao động tự do lớn nhất (tấm có độ cứng lớn nhất), trong khi

kiểu phân bố FG-O cho tần số nhỏ nhất (tấm mềm nhất). Do vậy, có thể nhận xét: Khi cùng tỷ phân thể tích của CNT, nếu ống nano carbon được gia cường với mật độ nhiều hơn tại mặt trên và mặt dưới của các lớp sẽ làm cho kết cấu cứng lớn hơn so với khi ống nano carbon được

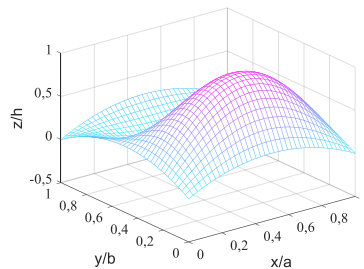
gia cường tập trung nhiều ở mặt giữa mỗi lớp. Mặt khác, khi tỉ lệ chiều dài chia chiều rộng ( $a/b$ ) tăng lên (với  $h/b = 0,02$ ) thì tần số dao động tự do cơ bản  $\bar{\omega}$  giảm và xu hướng biến thiên của tần số  $\bar{\omega}$  gần như giống nhau đối với tất cả các loại phân phối CNT.

**Bảng 3. Sáu tần số dao động tự do  $\bar{\omega}$  đầu tiên của tấm chữ nhật bốn biên tựa khớp composite FG-CNTRC cấu hình [0/90/0] ( $a/b = 1,5, h/b = 0,02$ )**

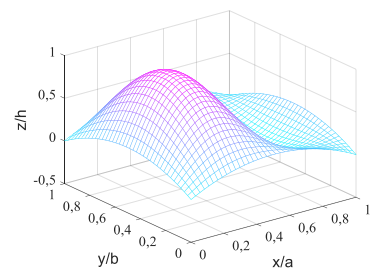
$V_{CNT}$	Kiểu phân bố CNT	Dạng dao động					
		Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3	Dạng 4	Dạng 5	Dạng 6
0,11	UD	9,813	20,800	32,929	38,712	42,416	70,056
	FG-V	9,540	19,242	32,518	37,668	38,691	69,263
	FG-O	9,314	18,156	32,069	36,134	36,783	68,289
	FG-X	10,295	23,169	33,780	40,579	47,879	71,820
0,14	UD	10,865	22,586	36,741	42,761	45,901	77,692
	FG-V	10,547	20,735	36,277	41,553	41,480	76,829
	FG-O	10,293	19,484	35,772	38,520	40,563	75,721
	FG-X	11,420	25,348	37,710	44,898	52,251	79,707
0,17	UD	12,104	25,746	40,568	47,770	52,541	86,387
	FG-V	11,770	23,843	40,064	46,494	47,990	85,439
	FG-O	11,491	22,508	39,509	44,851	45,398	84,233
	FG-X	12,714	28,727	41,640	50,137	59,412	88,631



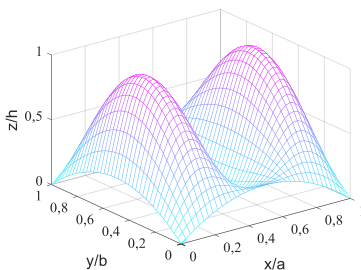
Dạng 1 ( $m = 1, n = 1$ )



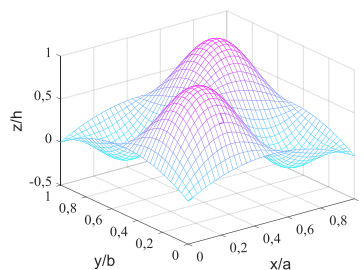
Dạng 2 ( $m = 1, n = 2$ )



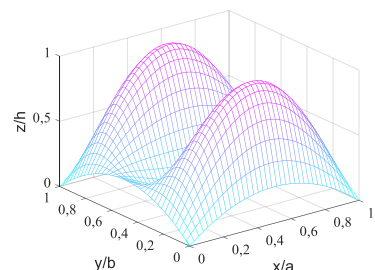
Dạng 3 ( $m = 2, n = 1$ )



Dạng 4 ( $m = 3, n = 1$ )

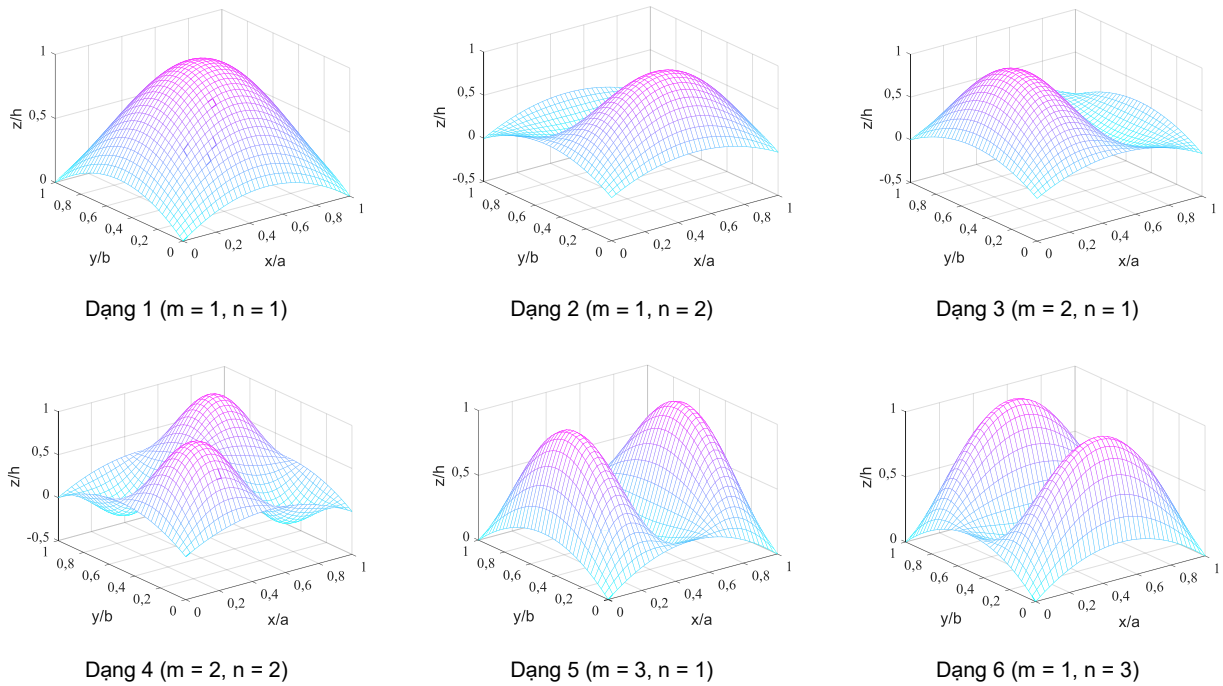


Dạng 5 ( $m = 2, n = 2$ )

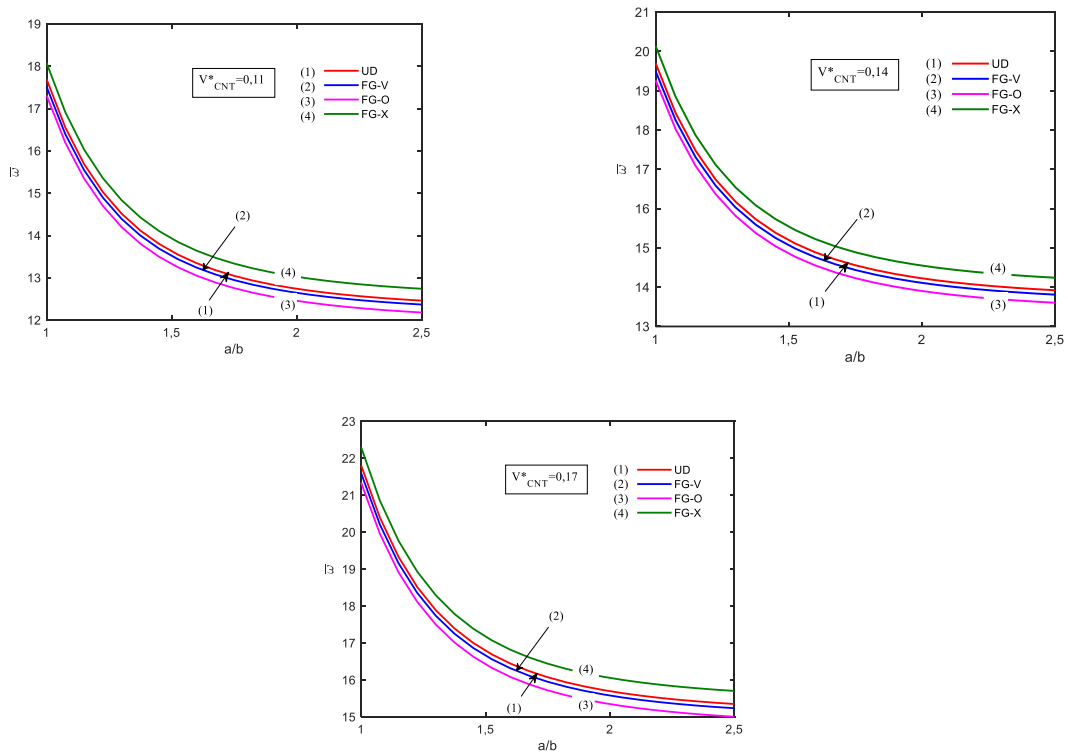


Dạng 6 ( $m = 1, n = 3$ )

**Hình 2. Dạng dao động của tấm bốn biên tựa khớp FG-CNTRC cấu hình [0/90/0], kiểu phân bố UD, FG-V, FG-X**



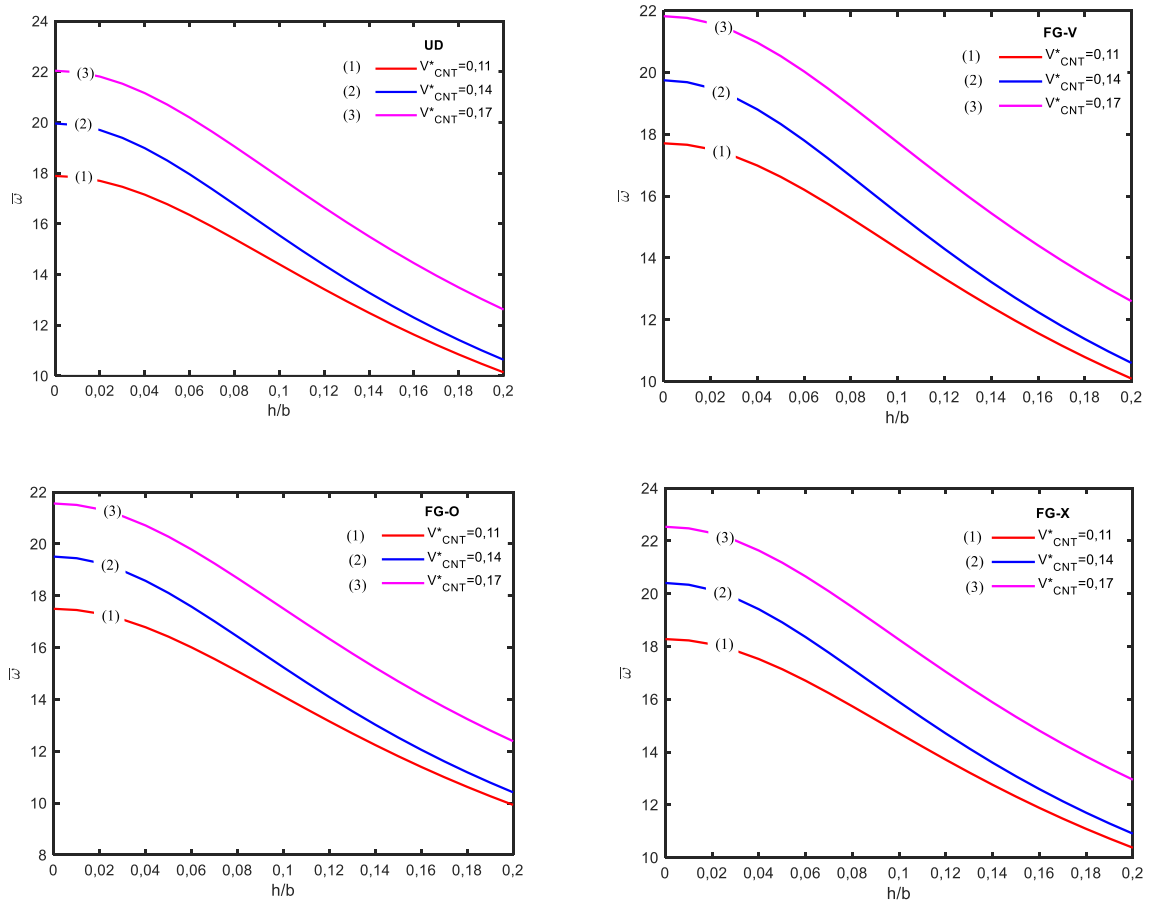
**Hình 3. Dạng dao động của tấm bốn biên tựa khớp FG-CNTRC cấu hình [0/90/0], kiểu phân bố FG-O**



**Hình 4. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đến tần số dao động tự do cơ bản**

$$\bar{\omega} = \omega \left( \frac{b^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho^m}{E^m}} \text{ của tấm FG-CNTRC cấu hình [0/90/0/90]}$$





Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ phần thể tích  $V_{CNT}^*$  đến tần số dao động tự do cơ bản

$$\bar{\omega} = \omega \left( \frac{b^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho^m}{E^m}} \text{ của tấm FG-CNTRC cấu hình [0/90/0/90]}$$

### 3.2.3. Ảnh hưởng của tỷ phần thể tích $V_{CNT}^*$

Đồ thị hình 5 biểu diễn sự ảnh hưởng của tỷ phần thể tích CNT ( $V_{CNT}^*$ ) đến tần số dao động tự do của tấm composite FG-CNTRC cấu hình [0/90/0/90]. Với cả bốn kiểu phân bố CNT (UD, FG-V, FG-O, FG-X), các đường đồ thị thể hiện khi tăng phần thể tích  $V_{CNT}^*$  thì tần số dao động của tấm tăng theo.

### 3.2.4. Ảnh hưởng của số lớp vật liệu composite

Đồ thị Hình 6 biểu diễn sự ảnh hưởng của số lớp vật liệu composite đến tần số dao động tự do của tấm vuông bốn biên tựa khớp FG-CNTRC cấu hình  $(0/90)_n$  theo tỷ số  $h/b$ . Với bốn

giá trị của số cặp lớp  $(0/90)_n$  là  $n = 1$ ;  $n = 2$ ;  $n = 3$ ;  $n = 5$ , các đường đồ thị cho thấy tần số dao động tự do của tấm FG-CNTRC tăng lên đáng kể khi số cặp lớp tăng từ 1 lên 2 (tăng số lượng lớp nhưng không thay đổi tổng chiều dày). Nếu tiếp tục tăng số cặp lớp này lên thì tần số dao động tự do sẽ tăng nhưng không đáng kể, điều này cũng trùng với nhận xét của (Reddy, 2006) cho composite cốt sợi đồng phương.

## 4. KẾT LUẬN

Bài báo xây dựng lời giải giải tích theo lý thuyết bốn ẩn chuyển vị tính toán tần số dao động tự do của kết cấu tấm composite lớp gia cường bởi ống nano carbon. Nghiên cứu so sánh cho thấy lý thuyết bốn ẩn chuyển vị là đơn giản

và hiệu quả trong phân tích dao động của kết cấu tấm. Kết quả số cũng chỉ ra ảnh hưởng của tỷ phần thể tích  $V_{CNT}^*$ , kiểu phân bố ống nano carbon hay số lớp vật liệu composite FG-CNTRC, ảnh hưởng đáng kể đến tần số hay độ cứng của tấm composite lớp gia cường bằng ống nano carbon. Cụ thể, tấm FG-X CNTRC có tần số dao động lớn nhất trong khi tấm FG-O CNTRC có tần số dao động nhỏ nhất.

### PHỤ LỤC

Các hệ số  $s_{ij}$  và  $m_{ij}$ :

$$s_{11} = -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2);$$

$$s_{12} = s_{21} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66});$$

$$s_{13} = s_{31} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2)$$

$$s_{14} = s_{41} = \alpha(B_{11}^s\alpha^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\beta^2);$$

$$s_{22} = -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2);$$

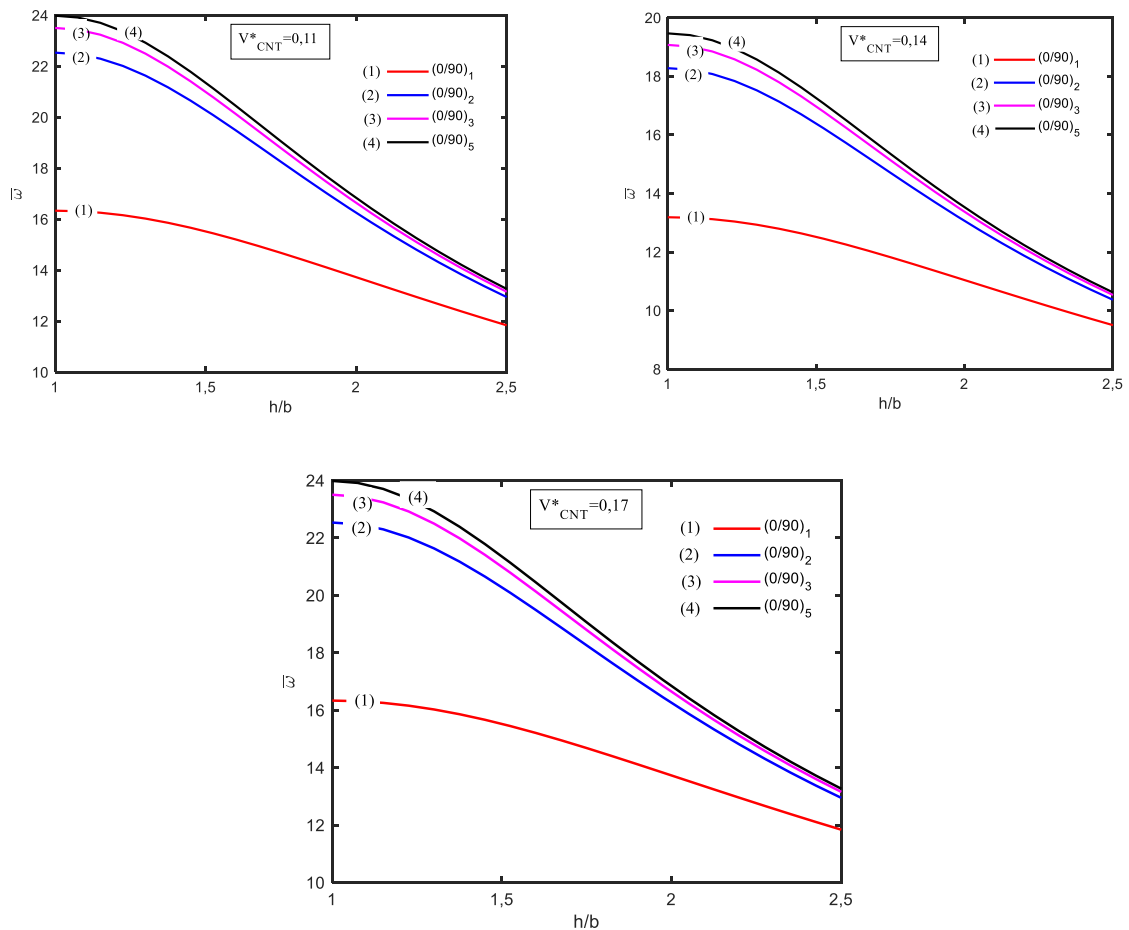
$$s_{23} = s_{32} = \beta((B_{12} + 2B_{66})\alpha^2 + B_{22}\beta^2);$$

$$s_{24} = s_{42} = \beta((B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2 + B_{22}^s\beta^2);$$

$$s_{33} = -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4);$$

$$s_{34} = s_{43} = -\left( \frac{D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2}{+D_{22}^s\beta^4} \right);$$

$$s_{44} = -\left( \frac{H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2}{+D_{22}^s\beta^4} \right);$$



Hình 6. Ảnh hưởng của số lớp vật liệu composite đến tần số dao động tự do cơ bản

$$\bar{\omega} = \omega \left( \frac{b^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho^m}{E^m}} \text{ của tấm FG-CNTRC}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = -I_0; & m_{12} &= m_{21} = 0; \\ m_{13} &= m_{31} = -\alpha I_1; & m_{14} &= m_{41} = -\beta J_1; \\ m_{23} &= m_{32} = \beta I_1; & m_{24} &= m_{42} = \beta J_1; \\ m_{33} &= -(I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)); \\ m_{34} &= m_{43} = -(I_0 + J_2(\alpha^2 + \beta^2)); \\ m_{44} &= -(I_0 + K_2(\alpha^2 + \beta^2)); \end{aligned}$$

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Alibeigloo A. & Liew K. (2013). Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate using theory of elasticity. *Composite Structures*. 106: 873-881.
- Dương Thành Huân, Lê Minh Lư & Trần Minh Tú (2015). Phân tích dao động riêng tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT). *J. Sci.* 13(1): 99-109.
- Dương Thành Huân, Lê Minh Lư, Trần Minh Tú & Vũ Văn Thắm (2015). Phân tích tĩnh và dao động riêng tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản. *J. Sci.* 13(5): 797-812.
- Huang B., Guo Y., Wang J., Du J., Qian Z., Ma T. & Yi L. (2017). Bending and free vibration analyses of antisymmetrically laminated carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. *Journal of Composite Materials*. 51(22): 3111-3125.
- Huu Quoc T., Minh Tu T. & Van Tham V. (2019). Free vibration analysis of smart laminated functionally graded CNT reinforced composite plates via new four-variable refined plate theory. *Materials*. 12(22): 3675.
- Quoc T.H., Van Tham V. & Tu T.M. (2021). Active vibration control of a piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced spherical shell panel. *Acta Mechanica*. pp. 1-19.
- Reddy J.N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.
- Shen H.S. & Zhang C.L. (2010). Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates. *Materials & Design*. 31(7): 3403-3411.
- Vũ Văn Thắm, Trần Hữu Quốc & Trần Minh Tú (2019). Phân tích dao động riêng kết cấu tấm composite lớp gia cường ống nano carbon có gắn lớp vật liệu áp điện. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCVN)-ĐHXD*. 13(3V): 42-54.
- Van Tham V., Huu Quoc T. & Minh Tu T. (2019). Free vibration analysis of laminated functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly curved shallow shell panels using a new four-variable refined theory. *Journal of Composites Science*. 3(4): 104.
- Wattanasakulpong N. & Ungbhakorn V. (2013). Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation. *Computational Materials Science*. 71: 201-208.
- Zhu P., Lei Z. & Liew K.M. (2012). Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory. *Composite Structures*. 94(4): 1450-1460.