ĐA THỨC TUTTE CỦA MỘT SỐ ĐỒ THỊ

Lê Mạnh Hà[1*], Hoàng Ngọc Phú[2]

[1]Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

[2] Học viên cao học, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế

*Email: lemanhhavn@gmail.com

Ngày nhận bài: 14/9/2020; ngày hoàn thành phản biện: 21/9/2020; ngày duyệt đăng: 22/10/2020

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ tính toán đa thức Tutte của một số đồ thị đơn giản. Sử dụng đa thức Tutte để tính số cây bao trùm của một đồ thị. Qua đó, chúng tôi sẽ chỉ ra mối liên hệ giữa số cây bao trùm và định thức của ma trận Laplace thu gọn của đồ thị.

Từ khóa: cây bao trùm, đồ thị vòng, đa thức Tutte, định lý ma trận cây, ma trận Laplace.

1. MỞ ĐẦU

Trong các lĩnh vực của toán học thì lý thuyết đồ thị là một nội dung không thể thiếu của nhiều nghiên cứu, trong đó một trong những hướng nghiên cứu quan trọng là đa thức Tutte của đồ thị và ứng dụng. Đa thức Tutte, còn được gọi là đa thức nhị phân hay đa thức Tutte-Whitney [7], là một đa thức được định nghĩa trên đồ thị. Đây là một đa thức trong hai biến đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết đồ thị. Đa thức Tutte là một bất biến cơ bản của đồ thị, được xác định cho mọi đồ thị và chứa thông tin về cách biểu đồ được kết nối. Đa thức Tutte của đồ thị ban đầu được xác định bởi W.T. Tutte [6, 7] vào năm 1954 như một phần mở rộng của đa thức màu. Việc tính toán đa thức Tutte của đồ thị được biết là khó khăn, do đó có nhiều mối quan tâm để tìm các biểu thức rõ ràng của chúng cho các họ đồ thị. Đa thức Tutte là đa thức hai biến có thuộc tính phổ quát quan trọng, được định nghĩa đệ quy thông qua hai phép toán co và xoá cạnh của đồ thị. Các phép toán co và xoá này xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều mô hình mạng ở nhiều lĩnh vực khác nhau như khoa học máy tính, tối ưu, vật lý và sinh học. Một trong nhiều ý nghĩa của đa thức Tutte là dùng để đo các chỉ số quan trọng của một đồ thị như số cây bao trùm hay số rừng bao trùm của một đồ thị. Hiện nay, việc nghiên cứu về đa thức Tutte của đồ thị và ứng dụng của nó vẫn được các nhà toán học trong nước và trên thế giới tiếp tục nghiên cứu, tìm hiểu. Một trong những nghiên cứu mới nhất về đa thức Tutte cho đồ thị có hướng vừa được đăng trên tạp chí rất nổi tiếng Journal of Combinatorial Theory, Series B [1]. Bài báo này đã xây dựng đa thức Tutte ba biến cho đồ thị có hướng dựa trên các phép xoá cạnh, co cạnh và phép đổi hướng nhằm xác định các tính chất của một đồ thị có hướng như số thành phần liên thông mạnh, độ dài của đường đi có hướng,... Với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về đa thức Tutte của đồ thị, bài viết này sẽ giúp chúng ta tính toán đa thức Tutte của một số đồ thị vô hướng.

Định nghĩa 1. Cho V là một tập khác rỗng, $E \subseteq V \times V$, khi đó $G = (V, E)$ gọi là một đồ thị.

i) Mỗi phần tử $v \in V$ được gọi là một *đỉnh* của đồ thị.

ii) Mỗi phần tử $e = (x, y) \in E$ với $x \neq y$ được gọi là một *cạnh* của đồ thị.

iii) Mỗi phần tử $e = (x, x) \in E$ được gọi là một *khuyên* của đồ thị.

iv) $V = V(G)$ được gọi là tập các đỉnh, $E = E(G)$ được gọi là tập các cạnh, $|V|$, $|E|$ lần lượt là số các đỉnh và số các cạnh của đồ thị.

Định nghĩa 2. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị, $e = (a, b) \in E$. Khi đó ta định nghĩa:

i) $G\backslash e = (V, E\backslash e)$ là *phép xóa cạnh* e trên G.

ii) $G/e = (V\backslash\{a, b\} \cup \{ab\}, E')$ là *phép co cạnh* trên G, với E' được xác định như sau: với mọi $(x, y) \in E$ mà

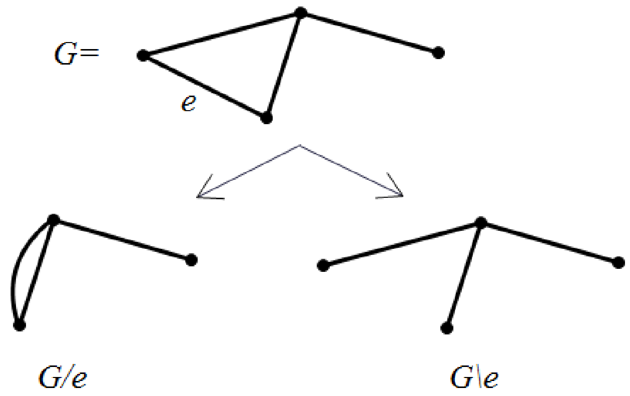
+) $(x, y) \neq (a, b)$ thì $(x, y) \in E'$.

+) $(x, y) \neq (a, b)$ thì $E' = E\backslash(x, y)$.

+) $y = a$ thì $(x, a) \to (x, ab)$.

+) $x = a$ thì $(a, y) \to (ab, y)$.

Từ định nghĩa ta dễ dàng kiểm tra các phép toán co và xoá có tính chất giao hoán. Do đó, với mọi tập con $A \subseteq E$, các đồ thị $G\backslash A$ và G/A hoàn toàn được xác định. Ngoài ra, với mọi $e_1, e_2 \in E$ mà $e_1 \neq e_2$ thì $G\backslash e_1/e_2$ và $G/e_2\backslash e_1$đẳng cấu với nhau. Đặc biệt, nếu e là một khuyên thì $G\backslash e = G/e$.



Hình 1. Phép co và xóa cạnh trên đồ thị G

Định nghĩa 3. (Đa thức Tutte của đồ thị) Cho đồ thị $G = (V, E), A \subseteq E$. $G_A = (V, A)$ là đồ thị con bao trùm của G. $r(A) = r_G(A) = |V(G)| - k(G_A)$ là hạng của A, với $k(G_A)$ là số thành phần liên thông của G_A. Khi đó, đa thức Tutte của G được cho bởi:

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \qquad (1)$$

Đa thức Tutte của một đồ thị vô hướng là một hàm sinh hai biến, dùng để đếm các cấu trúc của đồ thị như số thành phần liên thông hay số đồ thị con bao trùm (Định lý 2). Tuy nhiên, việc tính đa thức Tutte của một đồ thị dựa vào định nghĩa trên là khá phức tạp. Trong bài này, chúng tôi sẽ tính đa thức Tutte của đồ thị theo định nghĩa đệ quy sau đây. Sự tương đương của hai định nghĩa này đọc giả có thể xem chứng minh trong [2].

Định nghĩa 4. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị, $e = (a, b) \in E$. Xét hàm $T(G; x, y)$ của G với hai biến độc lập x, y như sau:

i) $T(G; x, y) = 1$ nếu $|E| = 0$;

ii) $T(G; x, y) = x.T(G/e; x, y)$ nếu e là cầu;

iii) $T(G; x, y) = y.T(G\backslash e; x, y)$ nếu e là khuyên;

iv) $T(G; x, y) = T(G\backslash e; x, y) + T(G/e; x, y)$ trong các trường hợp còn lại.

Hàm hai biến $T(G; x, y)$ này được chứng minh cũng chính là đa thức Tutte của đồ thị G [2].

Định nghĩa 5. Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị vô hướng, liên thông và không có khuyên, trong đó $V = \{v_1, \dots, v_n\}, E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Khi đó:

i) *Ma trận liên thuộc L của G*, $L = (l_{ij})_{n \times m}$ với

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } v_i \textit{ là đỉnh đầu của cạnh } e_j \\ -1 & \textit{nếu } v_i \textit{ là đỉnh cuối của cạnh } e_j \\ 0 & \textit{nếu } v_i \textit{ không liên thuộc với } e_j \end{cases}$$

ii) *Ma trận kề* $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ của G, với $a_{ij} = e\left(v_i, v_j\right)$, trong đó $e\left(v_i, v_j\right)$ là số cạnh nối v_i với v_j.

iii) *Ma trận Laplace* $\Delta = \left(\Delta_{ij}\right)_{n \times n}$ của G, với

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} deg(v_i) & \text{nếu } i = j \\ -e\left(v_i, v_j\right) & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

iv) *Ma trận Laplace thu gọn* Δ' của G ứng với đỉnh s có được từ ma trận Laplace Δ của G bằng cách xóa hàng và cột của ma trận Laplace Δ ứng với đỉnh s.

Mối quan hệ giữa số cây bao trùm của một đồ thị và ma trận Laplace được thể hiện trong Định lý sau.

Định lý 1. [4] (*Định lí Matrix-Tree*) Số cây bao trùm của G bằng định thức của ma trận Laplace thu gọn Δ' của G.

Đồ thị con bao trùm hay nói riêng, cây bao trùm của đồ thị đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết đồ thị. Định lý say đây cho thấy đa thức Tutte có thể dùng để đo các chỉ số quan trọng của một đồ thị như số cây bao trùm hay số rừng bao trùm. Chúng ta có thể xem chứng minh trong [4].

Định lý 2. [5] Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị liên thông. $T(G; x, y)$ là đa thức Tutte của G. Khi đó:

i) $T(G; 1,1)$ chính là số cây bao trùm của đồ thị G.

ii) $T(G; 2,1)$ chính là số rừng bao trùm của đồ thị G.

iii) $T(G; 1,2)$ chính là số đồ thị con liên thông bao trùm của đồ thị G.

iv) $T(G; 2,2) = 2^{|E|}$.

2. ĐA THỨC TUTTE CỦA MỘT SỐ ĐỒ THỊ

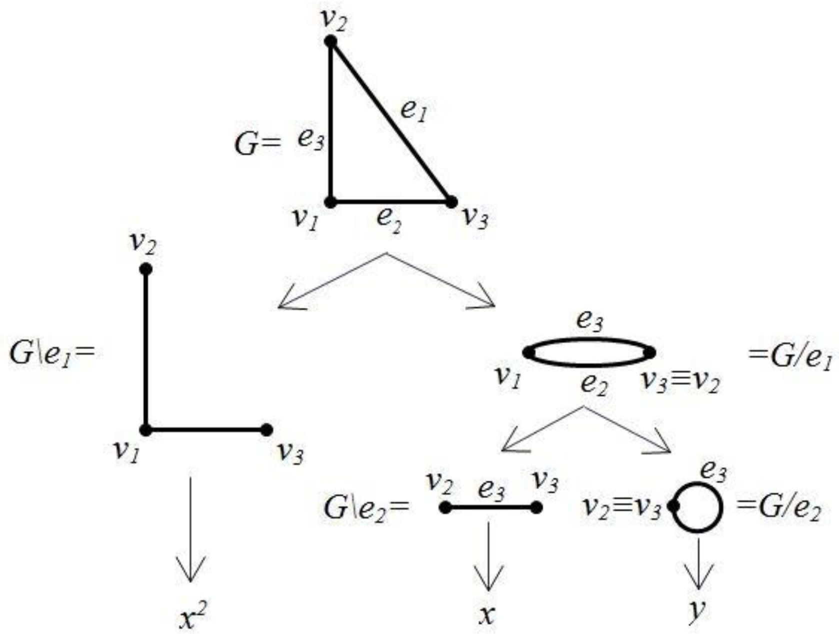
2.1 Đồ thị $G = K_3, G = K_4$

Định nghĩa 6. *Đồ thị đầy đủ* n đỉnh, ký hiệu là K_n, là đơn đồ thị mà hai đỉnh phân biệt bất kì của nó luôn liền kề.

Từ định nghĩa, ta thấy ngay đồ thị K_n có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh và mỗi đỉnh của K_n có bậc là $n - 1$.

Ví dụ 1. Tính đa thức Tutte của đồ thị đồ thị $G = K_3$.

Hình 2 dưới đây là cách khai triển đồ thị G trong việc tìm đa thức Tutte của nó.



Hình 2. Cách khai triển đồ thị $G = K_3$ trong việc tìm đa thức Tutte.

Từ khai triển này ta có đa thức Tutte của đồ thị $G = K_3$ là $T(K_3; x, y) = x^2 + x + y$.

Theo Định lí 2 thì số cây bao trùm của K_3 là $T(K_3; 1{,}1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$.

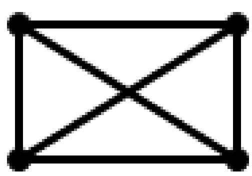
Bây giờ, chúng ta sẽ tính toán để thấy được số cây bao trùm của K_3 của chính bằng giá trị của định thức Laplace thu gọn (Định lí 1) và chính là giá trị của đa thức Tutte khi $x = y = 1$. Ta có ma trận kề A, ma trận Laplace Δ và ma trận Laplace thu gọn Δ' của $G = K_3$ là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \Delta'_{v_3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Suy ra $|\Delta'| = 2.2 - (-1).(-1) = 3$.

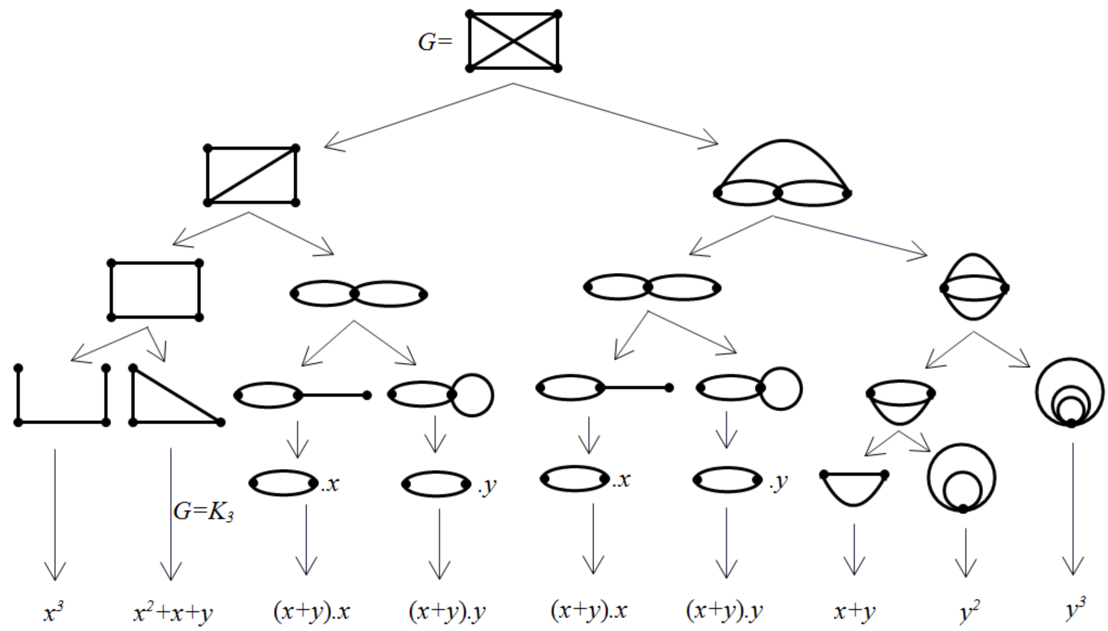
Do đó, số cây bao trùm của đồ thị K_3 chính bằng $T(K_3; 1{,}1)$ và bằng giá trị định thức của ma trận Laplace thu gọn Δ' của G.

Ví dụ 2. Cho đồ thị $G = K_4$ như hình dưới đây



Hình 3. Đồ thị $G = K_4$.

Hình 4 dưới đây là cách khai triển đồ thị G trong việc tìm đa thức Tutte của nó.



Hình 4. Cách khai triển đồ thị $G = K_4$ trong việc tìm đa thức Tutte.

Vậy đa thức Tutte của đồ thị $G = K_4$ là:

$$T(K_4; x, y) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3$$

Theo Định lí 2 thì số cây bao trùm của K_4 là:

$$T(K_4; 1,1) = 1^3 + 3.1^2 + 2.1 + 4.1.1 + 2.1 + 3.1^2 + 1^3 = 16$$

Bây giờ, chúng ta sẽ có một số tính toán để thấy rằng số cây bao trùm của $G = K_4$ của định lí 2 và định lí 1 là bằng nhau. Ta có ma trận kề A, ma trận Laplace Δ và ma trận Laplace thu gọn Δ' của $G = K_4$ là:

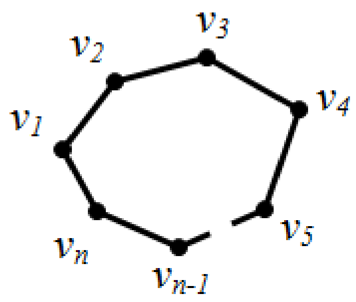
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \Delta = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \Delta'_{v_4} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Suy ra $|\Delta'| = 16$

Do đó, số cây bao trùm của đồ thị K_4 bằng $T(K_4; 1,1)$ và cũng chính là giá trị định thức của ma trận Laplace thu gọn Δ' của K_4 .

2.2 Đồ thị $G = C_4, G = C_n$

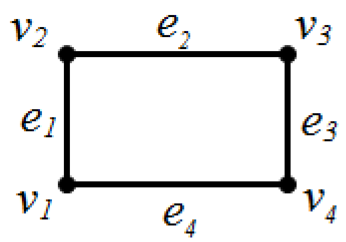
Định nghĩa 7. *Đồ thị vòng n* đỉnh, ký hiệu là C_n, là đơn đồ thị n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n (n \geq 3)$ và n cạnh $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$. Như vậy mỗi đỉnh của C_n có bậc là 2.



Hình 5. Đồ thị $G = C_n$.

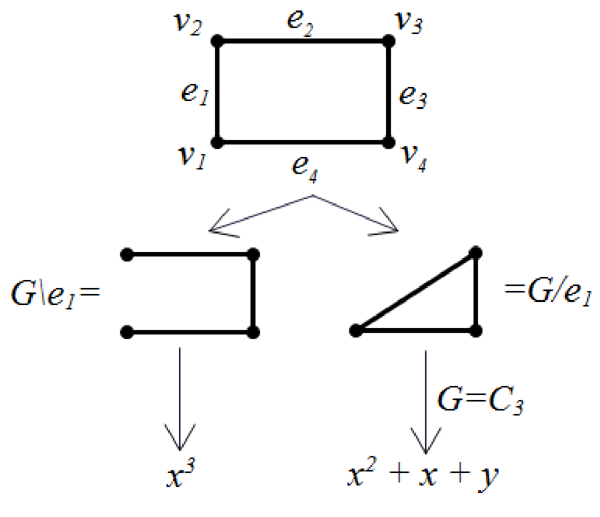
2.2.1 Đồ thị $G = C_4$

Cho đồ thị $G = C_4$ như hình dưới đây



Hình 6. Đồ thị $G = C_4$.

Hình 7 dưới đây minh họa cho cách khai triển đồ thị $G = C_4$ trong việc tìm đa thức Tutte.



Hình 7. Cách khai triển đồ thị $G = C_4$ trong việc tìm đa thức Tutte.

Vậy đa thức Tutte của đồ thị $G = C_4$ là $T(C_4; x, y) = x^3 + x^2 + x + y$

Theo Định lí 2 số cây bao trùm của $G = C_4$ là $T(C_4; 1,1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$

Ta có ma trận kề A, ma trận Laplace Δ và ma trận Laplace thu gọn Δ' của $G = C_4$ là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \Delta'_{v_4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Suy ra $|\Delta'| = 4$

Do đó, số cây bao trùm của đồ thị C_4 chính bằng $T(C_4; 1,1)$ và bằng giá trị định thức của ma trận Laplace thu gọn Δ'của G.

2.2.2 Đồ thị $G = C_n$

Định lí 3. Đa thức Tutte của đồ thị C_n là

$$T(C_n; x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + y$$

Chứng minh. Ta có

$T(C_n; x, y) = x^{n-1} + T(C_{n-1}; x, y)$ với mọi $n \geq 4$.

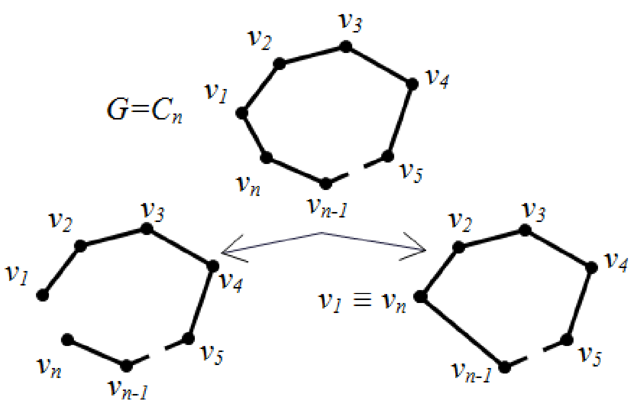
Do đó $T(C_n; x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^3 + T(C_3; x, y)$

Mà $T(C_3; x, y) = x^2 + x + y$

Suy ra $T(C_n; x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + y$.

□

Nhận xét: $T(C_n; 1,1) = n$ chính bằng số cây bao trùm của đồ thị vòng C_n và đó cũng chính là giá trị của định thức của ma trận Laplace thu gọn Δ' của C_n.



Hình 8. Cách khai triển đồ thị $G = C_n$ trong việc tìm đa thức Tutte.

3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã tính toán đa thức Tutte của một số đồ thị vô hướng. Sử dụng đa thức Tutte để tính số cây bao trùm của đồ thị. Qua đó, chúng tôi đã khẳng định được số cây bao trùm bằng định thức của ma trận Laplace thu gọn của một đồ thị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Awan, Jordan and Bernardi, Oliver (2020), *Tutte polynomials for directed graphs*, J.Combin. Theory Ser. B, Vol 140, pp 192-247.

[2]. Brylawski, T., Oxley, J.(1992), The Tutte Polynomial and its Applications. In: *White, N.(ed) Matroid Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

[3]. Merino López, Criel (1997), Chip fring and the Tutte polynomial, *Annals of Combinatorics*, (3) 1, pp 253-259.

[4]. Stanley, Richard P. (1998), *Enumerative combinatorics*, Cambridge University Press (Vol.1).

[5]. Ellis-Monaghan J.A., Merino C. (2011), *Graph Polynomials and Their Applications I: The Tutte Polynomial*. In Dehmer M. (eds) Structural Analysis of Complex Networks. Birkauser Boston, pp 219-255. https://doi/org/10.1007/978-0-8176-4789-6.

[6]. Tutte, W. T. (1947), *A ring in graph theory*. Proc. Cambridge Phil. Soc., 43, pp 26-40.

[7]. Tutte, W. T. (1954), *A contribution to the theory of chromatic polynomials*. Can. J. Math., 6, pp 80-91.

THE TUTTE POLYNOMIAL OF SOME GRAPHS

Le Manh Ha[1*], Hoang Ngoc Phu[2]

[1]University of Education, Hue University

[2]Graduate students, University of Sciences, Hue University

*Email: lemanhhavn@gmail.com

ABSTRACT

In this paper, we compute the Tutte polynomial of some graphs. We use the Tutte polynomial to calculate the number of spanning trees of the graph. Thereby, we can confirm that the number of spanning trees is equal to the determinant of Laplace matrix of a graph.

Keyword: Cycle graph, Laplace matrix, Matrix-tree Theorem, Spanning tree, Tutte polynomial.

Lê Mạnh Hà sinh ngày 25 tháng 02 năm 1979 tại Quảng Bình. Năm 2001, ông tốt nghiệp Đại học ngành SP Toán tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế. Ông nhận bằng thạc sỹ Toán Giải tích tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế năm 2005 và nhận học vị Tiến sĩ ngành Đảm bảo toán học cho máy tính và hệ thống tính toán tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam năm 2011. Hiện ông công tác tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.

Lĩnh vực nghiên cứu: Tính toán tổ hợp, Hệ động lực rời rạc, Lý thuyết đồ thị, Thuật toán.

Hoàng Ngọc Phú sinh ngày 14 tháng 07 năm 1994 tại Phú Yên. Năm 2016, ông tốt nghiệp Đại học ngành Toán học tại Trường Đại học Quy Nhơn. Ông nhận bằng thạc sỹ Toán Ứng dụng tại Trường Đại học khoa học, Đại học Huế năm 2020. Hiện ông công tác tại Trường Phổ thông Duy Tân, Thành phố Tuy Hòa, Phú Yên.

Lĩnh vực nghiên cứu: Toán ứng dụng.