GIỚI THIỆU MỘT SỐ MÔ HÌNH KINH TẾ ÁP DỤNG LÝ THUYẾT PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG VIỆC GIẢNG DẠY CHO SINH VIÊN KHỐI NGÀNH KINH TẾ TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

AN INTRODUCTION TO SOME MATHEMATICAL ECONOMIC MODELS WHICH APPLY THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATION IN TEACHING FOR ECONOMICS STUDENTS AT HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION

Nguyễn Quang Huy
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp.Hồ Chí Minh, Việt Nam

Ngày toà soạn nhận bài 13/8/2020, ngày phản biện đánh giá 28/8/2020, ngày chấp nhận đăng 5/10/2020.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi tổng hợp các mô hình Toán kinh tế áp dụng phương trình vi phân tuyến tính cấp một và phương trình vi phân tuyến tính cấp hai. Hơn nữa, chúng tôi còn khảo sát thêm một số mô hình kinh tế và xây dựng một số hệ thống thực trong kinh tế dẫn đến phương trình vi phân. Ngoài việc giải nghiệm, chúng tôi còn đánh giá tính ổn định của nghiệm các phương trình. Đây là một việc rất cần thiết. Qua đó, bài báo này có thể được sử dụng như một tài liệu tham khảo hữu ích cho giảng viên dạy các môn Toán kinh tế và sinh viên khối ngành kinh tế tại trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh cũng như các trường Đại học khác.

Từ khóa: *phương trình vi phân; phương trình vi phân tuyến tính cấp một; phương trình vi phân tuyến tính cấp hai; mô hình Toán Kinh tế; các phương pháp Toán kinh tế.*

ABSTRACT

In this article, we synthesize some mathematical models which apply first-order and second-order differential equations. Moreover, we consider other economics models and construct some real economics systems which lead to differential equations. Besides solving the solutions, we evaluate the stability of the solutions of those equations. This is a necessary work. Thereby, this article can be used as a useful referential material for lecturers of mathematical economics and economics students at Ho Chi Minh City University of Technology and Education and other universities.

Keywords: *differential equation; first-order linear differential equation; second-order linear differential equation; mathematical economics models; mathematical economics methods.*

1. PHẦN MỞ ĐẦU

Toán học đã và đang được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như vật lý, kỹ thuật, y học, sinh học, tự động hoá, cơ khí, công nghệ in, công nghệ thông tin, kinh tế, tài chính…Toán học là một công cụ hỗ trợ đắc lực cho việc phân tích và giải quyết các bài toán một cách logic. Khi mô hình kinh tế được thiết lập dưới dạng các mô hình toán học cụ thể thì việc vận dụng toán học để phân tích các mô hình kinh tế cũng như kiểm nghiệm các kết quả đạt được luôn là vấn đề cấp thiết đối với các chuyên gia kinh tế cũng như giảng viên, sinh viên.

Hiện nay, các môn học trang bị các kiến thức Toán học và áp dụng các kiến thức đó vào việc phân tích các mô hình kinh tế được đưa vào giảng dạy trong nhiều trường Đại học trong và ngoài nước. Tại trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TpHCM, sinh viên khối ngành kinh tế được học hai học phần Toán Kinh tế 1 và Toán Kinh tế 2 với tổng số tín chỉ là 6. Trong đó, phương trình vi phân được giảng dạy trong môn Toán Kinh tế 2 ở Học kỳ 2 năm nhất ([1]). Việc áp dụng lý thuyết phương trình vi phân vào các mô hình kinh tế là rất quan trọng đối với sinh viên khối ngành kinh tế. Trong bài báo này, chúng tôi tổng hợp các mô hình kinh tế áp dụng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và cấp 2 đã được nhiều nhà toán học quan tâm như xác định các hàm mục tiêu từ các hàm biên tế ([2]), xác định hàm cầu từ hệ số co giãn của cầu theo giá ([2]), mô hình tự điều chỉnh giá ([3]), mô hình tăng trưởng Domar([3]), mô hình thị trường với kỳ vọng giá ([4]), mô hình tăng trưởng Solow ([4]), mô hình lạm phát và thất nghiệp ([5]), mô hình tăng trưởng GDP ([6]), mô hình thu nhập quốc dân ([7])…Ngoài ra, chúng tôi giới thiệu thêm một số mô hình như mô hình Cob – Web, mô hình tự điều chỉnh sản lượng, mô hình tiền tệ, mô hình thị trường với hàng tồn kho, một số bài toán như bài toán giá trị bán lại, bài toán khai thác dầu… Khi viết bài báo này, chúng tôi mong muốn sinh viên nắm vững một cách sâu rộng lý thuyết phương trình vi phân và các ứng dụng trong các mô hình kinh tế. Hơn nữa, sinh viên có thể mô hình hóa một số bài toán kinh tế. Qua đó sinh viên có thể học tốt môn Toán Kinh tế cũng như các môn chuyên ngành. Điều này giúp bài báo trở nên thiết thực đối với giảng viên và sinh viên của trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật cũng như các trường Đại học khác.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

2.1 Xác định hàm tổng từ hàm giá trị biên tế ([2])

2.1.1 Xác định quỹ vốn theo lượng đầu tư

Giả sử lượng đầu tư ròng được cho bởi hàm $\frac{dK}{dt} = I(t) = 3\sqrt{t}$. Biết quỹ vốn tại thời điểm ban đầu là $K(0) = 100$. Xác định quỹ vốn tại thời điểm *t*.

Giải: Ta có

$$dK = I(t)dt$$
$$\Rightarrow \int dK = \int I(t)dt.$$
$$\Rightarrow K(t) = \int 3\sqrt{t}dt = 2t^{\frac{3}{2}} + K_0.$$
$$K(0) = 100 \Rightarrow K_0 = 100.$$
$$\Rightarrow K(t) = 2t^{\frac{3}{2}} + 100. \quad (1)$$

2.1.2 Xác định hàm chi phí từ hàm chi phí biên tế

Giả sử chi phí biên tế ở mỗi mức sản lượng *Q* là $MC = \frac{dC}{dQ} = 3e^{0,25Q}$ và chi phí cố định là $FC = 50$. Tìm hàm chi phí sản xuất.

Giải: Ta có

$$dC = 3e^{0,25Q}dQ$$
$$\Rightarrow C(Q) = \int 3e^{0,25Q}dQ = 12e^{0,25Q} + C_0.$$
$$FC = 50 = C(0) = 12 + C_0.$$
$$\Rightarrow C_0 = 38.$$
$$\Rightarrow C(Q) = 12e^{0,25Q} + 38. \quad (2)$$

2.1.3 Xác định hàm doanh thu từ doanh thu biên tế

Giả sử doanh thu biên tế ở mỗi mức sản lượng *Q* là $MR = \frac{dR}{dQ} = 4 - 2Q - 3Q^2.$ Tìm hàm doanh thu và hàm cầu ngược.

Giải: Ta có

$$dR = (4 - 2Q - 3Q^2)dQ$$
$$\Rightarrow R(Q) = \int (4 - 2Q)dQ = 4Q - Q^2 - Q^3 + C.$$
$$R(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$
$$\Rightarrow R(Q) = 4Q - Q^2 - Q^3.$$

Suy ra hàm cầu ngược

$$P = P(Q) = \frac{R(Q)}{Q} = 4 - Q - Q^2. \quad (3)$$

2.1.4 Xác định hàm lợi nhuận từ lợi nhuận biên tế

Giả sử lợi nhuận biên tế ở mỗi mức sản lượng *Q* là $M\pi = \frac{d\pi}{dQ} = 2Q + 1.$ Biết nếu công ty bán được 100 sản phẩm thì lời 2 triệu đồng. Tìm hàm lợi nhuận.

Giải: Ta có

$$d\pi = (2Q+1)dQ$$

$$\Rightarrow \pi(Q) = Q^2 + Q + C.$$

$$\pi(100) = 2.000.000 \Rightarrow C = 1989900.$$

$$\Rightarrow \pi(Q) = Q^2 + Q + 1989900. \qquad (4)$$

2.1.5 Xác định hàm tiết kiệm từ xu hướng tiết kiệm biên tế

Cho biết xu hướng tiết kiệm biên tế phụ thuộc vào mức thu nhập Y là $MS = \dfrac{dS}{dY} = 0,3 - \dfrac{0,2}{\sqrt{Y}}$. Tìm hàm tiết kiệm $S(Y)$ biết khi $Y = 16$ thì $S = 10$.

Giải: Ta có

$$dS = \left(0,3 - \frac{0,2}{\sqrt{Y}}\right)dY$$

$$\Rightarrow S(Y) = 0,3Y - 0,4\sqrt{Y} + C.$$

$$S(16) = 10 \Rightarrow C = 6,8.$$

$$\Rightarrow S(Y) = 0,3Y - 0,4\sqrt{Y} + 6,8. \qquad (5)$$

2.2 Xác định hàm sản lượng từ tốc độ tiêu thụ ([6])

Cho tốc độ tiêu thụ của một loại hàng hóa là $\dfrac{dQ}{dt} = 0,05(500-Q)$. Tìm hàm tiêu thụ.

Giải: Ta có

$$\frac{dQ}{0,05(500-Q)} = dt$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln\left|0,05(500-Q)\right|}{0,05} = t + C_0.$$

$$\Rightarrow 0,05(500-Q) = e^{-0,05t}C.$$

$$Q(0) = 0 \Rightarrow C = 25.$$

$$\Rightarrow Q(t) = 500 - 500e^{-0,05t}. \qquad (6)$$

Ta có $Q(t)$ ổn định theo thời gian và $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = 500.$

2.3 Xác định hàm đầu tư từ tốc độ đầu tư ([6])

Một khoản đầu tư tài chính $I(t)$ mất giá liên tục với tỷ lệ 5% mỗi năm. Cho biết giá trị khoản đầu tư tại thời điểm ban đầu là \$10000. Tìm hàm đầu tư.

Giải: Ta có

$$\frac{dI}{dt} = -0,05I$$

$$\Rightarrow \int \frac{dI}{I} = \int -0,05dt.$$

$$\Rightarrow \ln|I| = -0,05t + C_0.$$

$$\Rightarrow \quad I = Ce^{-0,05t}.$$

$$I(0) = 10000 \Rightarrow C = 10000.$$

$$\Rightarrow I(t) = 10000e^{-0,05t}. \qquad (7)$$

Ta có $I(t)$ ổn định theo thời gian và $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 0.$

2.4 Mô hình tăng trưởng (suy giảm) tổng sản phẩm nội địa(GDP) ([6])

Gọi $f(t)$ là tổng sản phẩm nội địa (GDP) của một nền kinh tế. Cho biết tốc độ thay đổi GDP là $f'(t) = kf(t)$ $(k = const)$. Tìm $f(t)$.

Giải: Ta có

$$\frac{df}{f(t)} = kdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{df}{f(t)} = \int kdt.$$

$$\Rightarrow \ln|f(t)| = kt + C.$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f(0)e^{kt}. \qquad (8)$$

GDP gọi là tăng trưởng nếu $k > 0$ và suy giảm nếu $k < 0$.

2.5 Xác định hàm cầu từ hệ số co giãn của cầu theo giá ([2])

Xác định lượng cầu ở mức giá $P = 15$ biết hệ số co giãn của cầu theo giá là $\varepsilon = -\dfrac{5P + 2P^2}{Q}$ và lượng cầu ở mức giá $P = 10$ là 500.

Giải: Ta có

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dP}.\frac{P}{Q} = -\frac{5P + 2P^2}{Q}$$

$$\Rightarrow dQ = (-5 - 2P)dP.$$

$$\Rightarrow \int dQ = \int (-5 - 2P)dP.$$

$$\Rightarrow Q = -5P - P^2 + C.$$

$$Q(10) = 500 \Rightarrow C = 650.$$

$$\Rightarrow Q = -5P - P^2 + 650.$$

$$\Rightarrow Q(15) = 350. \qquad (9)$$

2.6 Mô hình tự điều chỉnh giá ([3])

Giả sử mô hình tự điều chỉnh giá theo thời gian (đơn vị: tháng) của một loại sản phẩm là $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{3}(Q_d - Q_s)$. Biết hàm cung và hàm cầu lần lượt là $Q_d = 11 - 7P$, $Q_s = -1 + 2P$. Tìm hàm giá $P(t)$ biết giá ban đầu là 2 USD/sản phẩm.

Giải: Ta có

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{3}(11 - 7P + 1 - 2P) = 4 - 3P$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} + 3P(t) = 4.$$

Giá cân bằng là

$$P^* = \frac{4}{3}.$$

Hàm giá là

$$P(t) = P^* + (P(0) - P^*)e^{-3t}.$$

$$P(t) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t}. \qquad (10)$$

Phương trình vi phân cấp 1 trên ổn định. Khi đó giá $P(t)$ hội tụ đến giá cân bằng P^* khi $t \to +\infty$.

2.7 Mô hình tự điều chỉnh sản lượng

Giả sử mô hình tự điều chỉnh sản lượng theo thời gian (đơn vị: tháng) của một loại sản phẩm là $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{3}\left(P - MC(Q)\right)$ trong đó P =4 là giá của sản phẩm, $MC(Q) = 2Q$ là chi phí biên tế, sản lượng tại thời điểm ban đầu là $Q = 3$. Tìm hàm sản lượng $Q = Q(t)$.

Giải: Ta có

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{3}Q = \frac{4}{3}.$$

Sản lượng cân bằng là

$$Q^* = 2.$$

Hàm sản lượng là

$$Q(t) = 2 + (Q(0) - Q^*)e^{-\frac{2}{3}t}.$$

$$Q(t) = 2 + e^{-\frac{2}{3}t}. \qquad (11)$$

Ta có phương trình vi phân cấp 1 trên ổn định. Khi đó sản lượng $Q(t)$ hội tụ đến sản lượng cân bằng Q^* khi $t \to +\infty$.

2.8 Mô hình Cob – Web

Cho hàm cung và cầu của một thị trường như sau:

$$Q_d = 1 - \frac{1}{3}P + \frac{3}{4}\frac{dP}{dt},$$

$$Q_s = -2 + \frac{1}{2}P.$$

Xác định giá $P(t)$ của thị trường cân bằng.

Giải: Ta có:

Thị trường cân bằng

$$\Leftrightarrow Q_d = Q_s.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dt} - \frac{10}{9}P(t) = -4.$$

Giá cân bằng là

$$P^* = \frac{18}{5}.$$

Hàm giá là

$$P(t) = \frac{18}{5} + \left(P(0) - \frac{18}{5}\right)e^{\frac{10}{9}t}. \qquad (12)$$

Phương trình vi phân trên không ổn định. Khi đó $\lim_{t\to+\infty} P(t) = \infty$.

2.9 Mô hình thu nhập quốc dân ([7])

Cho mô hình thu nhập quốc dân

$$C = 200 + 0,75Y,$$
$$E = C + I, I = 80,$$
$$\frac{dY}{dt} = 0,8(E - Y),$$

trong đó Y là tổng thu nhập quốc dân hiện tại, E là tổng phí tổn, C là tiêu thụ của hộ gia đình, I là lượng đầu tư.Cho biết $Y0$ = 1250. Tìm $Y(t)$.

Giải: Ta có

$$\frac{dY}{dt} = 0,8(280 - 0,25Y).$$
$$\Rightarrow \frac{dY}{dt} + 0,2Y = 224.$$

Tổng thu nhập cân bằng là

$$Y^* = 1120.$$

Hàm tổng thu nhập là:

$$Y(t) = 1120 + 130e^{-0,2t}. \quad (13)$$

Ta có $Y(t)$ ổn định.

Khi đó $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 1120.$

2.10Mô hình tiền tệ

Giả sử ta có phương trình

$$m(t) - p(t) = -\frac{1}{2}\pi(t),$$

trong đó $m(t)$ là logarith tự nhiên của lượng cung tiền, p(t) là logarith tự nhiên của mức giá và $\pi(t)$ là lạm phát kỳ vọng. Giả sử sự dự đoán là hoàn hảo, nghĩa là $p'(t) = \pi(t)$.Cho biết $m(t)$ = 10, tìm $p(t)$.

Giải: Ta có

$$p'(t) = -2\left(10 - p(t)\right)$$
$$\Rightarrow p'(t) - 2p(t) = -20.$$

Ta được

$$p^* = 10.$$

Do đó

$$p(t) = 10 + \left(p(0) - 10\right)e^{2t}. \quad (14)$$

Ta thấy mức giá không ổn định và $\lim_{t\to+\infty} p(t) = \infty.$

2.11Bài toán giá trị bán lại

Giá trị bán lại $R(t)$ (triệu đồng) của một loại máy sau t năm sẽ giảm với tốc độ tỷ lệ với hiệu số giữa giá trị hiện tại và giá trị phế liệu của nó. Nghĩa là nếu S là giá trị phế liệu của máy thì

$\frac{dR}{dt} = -k\left(R - S\right),\ k > 0$ là hằng số tỷ lệ.

Xác định giá trị của máy sau 3 năm biết giá mua mới của nó là 16 triệu đồng, sau 2 năm giá trị của nó là 8 triệu đồng và giá trị phế liệu là 500 ngàn đồng.

Giải: Ta có:

$$\frac{dR}{dt} + kR = kS.$$

Giá trị bán lại cân bằng là

$$R^* = S.$$

Hàm giá trị bán lại của máy là

$$R(t) = S + \left(R(0) - S\right)e^{-kt} = 0,5 + 15,5e^{-kt}.$$

$$R(2) = 8 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{31}\right).$$

$$R(t) = 0,5 + 15,5e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{31}\right)t}. \quad (15)$$

Giá trị bán lại của máy sau 3 năm là:

$R(3) = 0,5 + 15,5e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{31}\right)3} \approx 5,717$ (triệu đồng).

Phương trình vi phân cấp 1 trên ổn định. Khi đó $\lim_{t\to+\infty} R(t) = 0,5.$

2.12. Bài toán đánh bắt thủy sản

Gọi y là trữ lượng cá tại một cửa vịnh và t là thời gian được cho bởi mô hình sau:

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - ky).$$

Cho biết trữ lượng cá tại thời điểm ban đầu là 0,5 và sau 1 năm là 1 (đơn vị tính là 100000 tấn). Tính trữ lượng cá vào năm thứ t.

Giải: Ta có

$$\frac{dy}{y(1-ky)} = dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(1-ky)} = \int dt.$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{1-ky}\right| = t + C_1.$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{k + Ce^{-t}}.$$

$$\begin{cases} y(0) = 0,5 \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0,5 \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{1}{1-e^{-1}} \\ k = \dfrac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1-e^{-1}}{1-2e^{-1}+e^{-t}}. \quad (16)$$

Ta thấy trữ lượng cá ổn định và $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{1-e^{-1}}{1-2e^{-1}}.$

2.13. Bài toán gửi tiền ngân hàng

Giả sử ban đầu chúng ta gửi *P* triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm trong ngân hàng với lãi suất hàng năm là *r*%, nhập lãi liên tục vào vốn. Mỗi năm ta gửi thêm *M* triệu đồng vào tài khoản. Gọi *Y*(*t*) là lượng tiền sau *t* năm. Tìm *Y(t*).

Giải: Ta có

$$\frac{dY}{dt} = rY + M$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{0,01rY + M} = dt.$$

$$\Rightarrow \int \frac{dY}{0,01rY + M} = \int dt.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0,01r}\ln(0,01rY + M) = t + C.$$

$$\Rightarrow 0,01rY + M = C_1e^{0,01rt}.$$

$$\Rightarrow Y = \frac{C_1e^{0,01rt} - M}{0,01r}.$$

Khi $t = 0$, ta có $Y = P$.

Suy ra

$C_1 = 0,01rP + M.$

Vậy ta được

$$Y(t) = \frac{(0,01rP + M)e^{0,01rt} - M}{0,01r}. \quad (17)$$

Ta có lượng tiền *Y*(*t*) không ổn định và $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = +\infty.$

2.14. Bài toán khai thác dầu

Một giếng dầu khai thác 300 thùng dầu thô mỗi ngày và khai thác hết trong 3 năm. Người ta ước tính rằng sau *t* ngày kể từ bây giờ, giá mỗi thùng dầu thô sẽ là $p(t) = 60 + 0.3\sqrt{t}$ đôla. Nếu dầu được bán hết ngay khi khai thác, tổng doanh thu $R(t)$ từ giếng dầu sẽ là bao nhiêu?

Giải: Ta có

$$\frac{dR}{dt} = \left(60 + 0,3\sqrt{t}\right)300$$

$$\Rightarrow \int dR = \int \left(60 + 0,3\sqrt{t}\right)300dt.$$

$$\Rightarrow R = 300\left(60t + 0,2t^{\frac{3}{2}}\right) + R_0.$$

$R(0) = 0 \Leftrightarrow R_0 = 0.$

Do đó

$$R(t) = 300\left(60t + 0,2t^{\frac{3}{2}}\right). \quad (18)$$

Tổng doanh thu từ giếng dầu sẽ là

$R(1095) = 21884064,52$ (đôla).

2.15. Mô hình tăng trưởng Domar ([3])

Mô hình này được thiết lập dựa trên các giả thiết sau đây

1) $\frac{K}{L} = const.$ Ta có thể xét hàm sản xuất $Q = f(K,L) = f(K)$

2) $Q = \alpha K \ (\alpha = const > 0)$

3) Thu nhập $Y = Q$

4) Đầu tư bằng tiết kiệm $I = S = cY \ (0 < c < 1)$.

Giải: Ta có

$$I(t)=\frac{dK}{dt}.$$

Từ 2) ta có $\frac{dQ}{dt}=\alpha\frac{dK}{dt}=\alpha I.$

Từ 3) ta có $\frac{dY}{dt}=\frac{dQ}{dt}.$

Từ 4) ta có

$$\frac{dI}{dt}=\frac{dS}{dt}=c\frac{dY}{dt}\Rightarrow\frac{dY}{dt}=\frac{1}{c}\frac{dI}{dt}.$$

Suy ra $\frac{1}{c}\frac{dI}{dt}=\alpha I$.

Từ đó ta có $\frac{dI}{dt}-c\alpha I=0.$

Ta được

$$I(t)=I(0)e^{c\alpha t},$$

trong đó $I(0)$ là lượng đầu tư ban đầu.

Do $c\alpha>0$ nên $I(t)$ không ổn định và $I(t)\to+\infty$ khi $t\to+\infty$.

Ta có

$$K(t)=\frac{I(0)e^{c\alpha t}}{c\alpha}+K(0)-\frac{I(0)}{c\alpha} \quad (19)$$

và

$$Y(t)=\alpha K(t)=\frac{I(0)e^{c\alpha t}}{c}+\alpha K(0)-\frac{I(0)}{c}. \quad (20)$$

Ta cũng có $K(t)$ và $Y(t)$ không ổn định.

2.16. Mô hình tăng trưởng Solow ([4])

Mô hình này được thiết lập dựa trên các giả thiết sau đây:

1) Ta xét hàm sản xuất $Q=f(K,L)$ là hàm thuần nhất bậc 1. Chẳng hạn ta xét

hàm sản xuất Cobb – Douglas $Q=AK^{\beta}L^{1-\beta}$. Khi đó

$$\frac{Q}{L}=AK^{\beta}L^{-\beta}=A\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}=Am^{\beta}$$

trong đó $m=\frac{K}{L}.$

2) Thu nhập $Y(t)=Q(t)$.

3) Đầu tư bằng tiết kiệm $\frac{dK}{dt}=I(t)=S(t)=cY(t)\ \ (0<c<1)$.

4) $\frac{dL}{dt}=nL\ (n=const>0)$

5) Giải: Ta có

$$K=mL\Rightarrow\frac{dK}{dt}=L\frac{dm}{dt}+m\frac{dL}{dt}.$$

Suy ra $\frac{dK}{dt}=cQ=cLAm^{\beta}$.

Do đó $cLAm^{\beta}=L\frac{dm}{dt}+mnL.$

Ta được

$$cLAm^{\beta}=L\frac{dm}{dt}+mnL.$$

$$\frac{dm}{dt}+nm=cAm^{\beta}.$$

Trên đây là phương trình vi phân Béc – nu - li.

Để giải phương trình, ta chia hai vế của phương trình cho m^{β}:

$$m^{-\beta}\frac{dm}{dt}+nm^{1-\beta}=cA.$$

Ta đặt $u=m^{1-\beta}$.

Khi đó $\frac{du}{dt}=(1-\beta)m^{-\beta}\frac{dm}{dt}.$

Ta được phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

$$m^{-\beta}\frac{dm}{dt}+nm^{1-\beta}=cA$$

$$\frac{1}{1-\beta}\frac{du}{dt}+nu=cA.$$

$$\frac{du}{dt}+(1-\beta)nu=(1-\beta)cA.$$

Ta có giá trị cân bằng

$$u^* = \frac{(1-\beta)cA}{(1-\beta)n} = \frac{cA}{n}.$$

Nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 là:

$$u = \frac{cA}{n} + \left(u(0) - \frac{cA}{n}\right)e^{(\beta-1)nt}.$$

Do vậy ta có

$$m(t) = \left[\frac{cA}{n} + \left(m^{1-\beta}(0) - \frac{cA}{n}\right)e^{(\beta-1)nt}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (21)$$

Vì $(\beta-1)n<0$ nên phương trình trên ổn định. Khi đó $\lim_{t\to+\infty} m(t) = \left(\frac{cA}{n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

3.1. Xác định giá của sản phẩm như là một hàm số theo thời gian

Tìm giá $P = P(t)$ của một loại sản phẩm biết giá tại thời điểm *t* thỏa phương trình vi phân

$$P''(t) - P'(t) - 2P(t) = -40;\ P(0) = 30, P'(0) = 1.$$

Giải: Ta có

Giá cân bằng là

$$P^* = \frac{-40}{-2} = 20.$$

Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 - k - 2 = 0$$

ta được $k_1 = -1,\ k_2 = 2$.

Nghiệm của phương trình có dạng là:

$$P(t) = 20 + A_1e^{-t} + A_2e^{2t}.$$

Ta có

$$\begin{cases} P(0) = 30 \\ P'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 + A_1 + A_2 = 30 \\ -A_1 + 2A_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{19}{3} \\ A_2 = \dfrac{11}{3} \end{cases}.$$

Vậy ta có

$$P(t) = 20 + \frac{19}{3}e^{-t} + \frac{11}{3}e^{2t}. \quad (22)$$

Vì $k_2 > 0$ nên phương trình không ổn định. Khi đó $\lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$.

3.2. Mô hình thị trường với kỳ vọng giá ([4])

Cho hàm cung và cầu của một thị trường như sau:

$$Q_d = 27 - 3P - 8P' - 2P'',$$
$$Q_s = -3 + 7P - P' - P''.$$

Với $P(0) = 2$ và $P'(0) = \frac{1}{2}$, hãy tìm quy luật biến động giá theo thời gian P(t) và tính ổn định của giá?

Giải: Ta có

Thị trường cân bằng

$$\Leftrightarrow Q_d = Q_s.$$

$$\Leftrightarrow P'' + 7P' + 10P = 30.$$

Giá cân bằng là

$$P^* = \frac{30}{10} = 3.$$

Giải phương trình đặc trưng

$$k^2 + 7k + 10 = 0$$

ta được $k_1 = -2,\ k_2 = -5$.

Nghiệm của phương trình có dạng là:

$$P(t) = 3 + A_1e^{-2t} + A_2e^{-5t}.$$

$$\begin{cases} P(0) = 2 \\ P'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + A_1 + A_2 = 2 \\ -2A_1 - 5A_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{3}{2} \\ A_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy quy luật biến động giá là:

$$P(t) = 3 - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-5t}. \quad (23)$$

Ta có $k_1 < 0,\ k_2 < 0$ nên giá ổn định. Khi đó $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 3$.

3.3. Mô hình tự điều chỉnh giá với lượng hàng tồn kho

Trong mục 2.6, chúng tôi đã xét mô hình tự điều chỉnh giá. Trong mục này, chúng tôi tính đến lượng hàng tồn kho trong mô hình tự điều chỉnh giá.

Giả sử mô hình tự điều chỉnh giá theo thời gian (đơn vị: tháng) của một loại sản phẩm là $\frac{dP}{dt}=\frac{1}{2}(Q_d-Q_s)-\frac{1}{3}\int_0^t\left(Q_s(s)-Q_d(s)\right)ds$. Biết hàm cung và hàm cầu lần lượt là $Q_d=11-7P,\ Q_s=1+P$. Tìm hàm giá $P(t)$.

Giải: Ta có

$$\frac{d^2P}{dt^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dQ_d}{dt}-\frac{dQ_s}{dt}\right)-\frac{1}{3}\left(Q_s(t)-Q_d(t)\right)$$

$$\frac{d^2P}{dt^2}+4\frac{dP}{dt}-\frac{8}{3}P=-\frac{10}{3}.$$

Giá cân bằng là

$$P^*=\frac{5}{4}.$$

Giải phương trình đặc trưng

$$k^2+4k-\frac{8}{3}=0$$

ta được $k_1=-2-\sqrt{\frac{20}{3}},\ k_2=-2+\sqrt{\frac{20}{3}}.$

Vậy quy luật biến động giá là:

$$P(t)=\frac{5}{4}+A_1e^{\left(-2-\sqrt{\frac{20}{3}}\right)t}+\frac{1}{2}e^{\left(-2+\sqrt{\frac{20}{3}}\right)t}. \quad (24)$$

Ta có $k_2>0$ nên giá không ổn định. Khi đó $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\infty.$

3.4. Mô hình kinh tế vĩ mô về lạm phát và thất nghiệp ([5])

Ta xét mô hình sau đây

$$\begin{cases} p=\frac{1}{6}-4U+\frac{1}{3}\pi, \\ \pi'(t)=\frac{1}{3}(p-\pi), \\ U'(t)=-\frac{1}{2}(m-p), \end{cases}$$

trong đó p là tỷ lệ lạm phát thực sự, T là hiệu suất lao động, π là tỷ lệ lạm phát kỳ vọng, U là tỷ lệ thất nghiệp và m là tỷ lệ tăng trưởng của đồng tiền danh nghĩa.

Tìm biểu thức của tỷ lệ lạm phát thực sự và tỷ lệ thất nghiệp theo thời gian.

Giải:

Ta tìm được phương trình vi phân cấp 2 sau:

$$p''(t)+\frac{20}{9}p'(t)+\frac{2}{3}p(t)=\frac{2}{3}m.$$

Tỷ lệ lạm phát thực sự cân bằng là

$$p^*=m$$

Phương trình đặc trưng là

$$k^2+\frac{20}{9}k+\frac{2}{3}=0.$$

Suy ra $k_1=\frac{-10-\sqrt{46}}{9}, k_1=\frac{-10+\sqrt{46}}{9}$.

Do đó

$$p(t)=m+A_1e^{\frac{-10-\sqrt{46}}{9}t}+A_2e^{\frac{-10+\sqrt{46}}{9}t}. \quad (25)$$

Vì $k_1<0,k_2<0$ nên tỷ lệ lạm phát thực sự ổn định. Khi đó $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=m.$

Mặt khác, ta tìm được tỷ lệ thất nghiệp là

$$U(t)=\frac{1}{24}-\frac{1}{6}m+C_1e^{\frac{-10-\sqrt{46}}{9}t}+C_2e^{\frac{-10+\sqrt{46}}{9}t} \quad (26)$$

Vì $k_1<0,k_2<0$ nên tỷ lệ thất nghiệp ổn định. Khi đó $\lim\limits_{t\to+\infty}U(t)=\frac{1}{24}-\frac{1}{6}m.$

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát nghiệm và đánh giá tính ổn định của nhiều mô hình ứng dụng phương trình vi phân cấp một và cấp hai trong kinh tế. Ngoài ra, chúng tôi mở rộng việc khảo sát cho một số mô hình kinh tế. Bài báo này giúp cho giảng viên, sinh viên, học viên cao học hiểu sâu rộng hơn các mô hình ứng dụng phương trình vi phân trong kinh tế cũng như có thể vận dụng chúng vào các bài toán trong thực tiễn. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ khảo sát thêm các mô hình ứng dụng phương trình vi phân và hệ phương trình vi phân trong kinh tế. Mặt khác, chúng tôi cũng sẽ khảo sát các mô hình ứng dụng phương trình vi phân trong vật lý, kỹ thuật, sinh học, y học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Michael Sampson, *An introduction to mathematical economics part 2*, Loglinear Publishing, 2001.
[2] Lê Đình Thúy, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, Phần II: Giải tích toán học*, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân, 2010.
[3] Lê Quang Hoàng Nhân, Hoàng Đức Hải, *Giáo trình Toán cao cấp (phần Giải tích)*, Nhà xuất bản Thống kê, 2008.
[4] Alpha C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Third edition, McGraw - Hill, Inc.
[5] Nguyễn Hải Thanh, *Các phương pháp Toán Kinh tế,* Hà Nội, 2008.
[6] Teresa Bradley, Paul Patton, *Essential Mathematics for Economics and Business*, Second Edition, John Wiley& Sons, LTD, 2002.
[7] Mike Rosser, *Basic mathematics for economists*, Second Edition, Routledge, 2003.

Tác giả chịu trách nhiệm bài viết:
Nguyễn Quang Huy
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp.Hồ Chí Minh
Email: huynq@hcmute.edu.vn