

Phân tích ứng xử động của tấm FGM chịu tải trọng di chuyển có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ sử dụng phương pháp phần tử chuyển động

Dynamic analysis of FGM plate subjected to a moving load under the effect of temperature using the Moving Element Method

TS. Trần Minh Thi - Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường ĐH Bách Khoa - ĐH Quốc gia TP.HCM - Email: : tmthi@hcmut.edu.vn / Điện thoại: 0938414090

KS. Trần Quang Sỹ - Học viên cao học ngành Kỹ thuật Xây dựng, Trường ĐH Bách Khoa - ĐH Quốc gia TP.HCM

TÓM TẮT: Bài báo nghiên cứu về ứng xử động của tấm vật liệu chức năng (Functionally Graded Materials - FGM) trên nền Pasternak chịu tải trọng di chuyển có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ. Kết cấu tấm được phân tích theo mô hình Reissner – Mindlin dựa trên phương pháp phần tử chuyển động (Moving Element Method – MEM), tấm được mô hình hóa thành các phần tử đẳng tham số tứ giác 9 nút. Một chương trình tính toán trên Matlab về ứng xử động lực học của tấm FGM chịu tải trọng di chuyển có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ được đề xuất. Chương trình này có độ tin cậy cao khi kết quả được kiểm chứng bằng việc so sánh với các kết quả được công bố trước đây. Sau đó, ứng xử động của tấm FGM được khảo sát với độ lớn khác nhau về nhiệt độ tác dụng lên hai mặt và từng mặt tấm. Kết quả cho thấy mức độ ảnh hưởng đáng kể của nhiệt độ đến ứng xử động của tấm. Bên cạnh đó, nghiên cứu này cũng khảo sát các thông số cơ bản của bài toán ảnh hưởng đến ứng xử của hệ như hệ số tỉ lệ thể tích, chiều dày tấm và độ cứng nền.

Từ khóa: FGM, MEM, Nhiệt độ, Tải trọng di chuyển.

ABSTRACT: The paper investigates dynamic response of Functionally Graded Materials (FGM) plate subjected to a moving load under effect of temperature. Reissner – Mindlin plate theory is employed to study the plate structure based on the Moving Element Method (MEM). The plate is modeled by isoparametric quadrilateral nine-node element. A Matlab program of modeling response of FGM plate subjected to a moving load under the effect of temperature is proposed. The program is highly accepted as the results were verified by comparing to previous results. Dynamic response of FGM plate under moving load was then investigated with magnitudes of different temperature on the two faces and each face of the plate. Results also show that significant influences of temperature on plate structure. In addition, influences of volume ratio, plate thickness and foundation stiffness on FGM response were investigated.

Keywords: FGM, MEM, Temperature, Moving load.

1. Giới thiệu

Ngày nay, việc nghiên cứu ứng dụng các loại vật liệu mới có các tính chất khác biệt dần thay thế các loại vật liệu truyền thống là xu hướng của thời đại. Vật liệu biến đổi chức năng FGM là vật liệu composite thế hệ mới được một nhóm nhà khoa học Nhật Bản giới thiệu năm 1984. Tấm FGM đã khắc phục được hiện tượng tập trung ứng suất và hiện tượng tách lớp của tấm composite. Nhờ vào những đặc tính ưu việt mà vật liệu FGM được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như hàng không (chế tạo thân vỏ máy bay), trong y học (chế tạo răng, xương nhân tạo), trong quốc phòng (áo giáp chống đạn), trong công nghiệp năng lượng (tấm cách nhiệt, tua bin, lò phản ứng) và trong xây dựng. Tấm FGM thường được chế tạo từ hỗn hợp gốm và kim loại, đây là vật liệu đẳng hướng nhưng không đồng nhất. Vì vậy việc sử dụng tấm vật liệu này đang ngày càng phổ biến trên thế giới.

Tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian và thay đổi theo vị trí trên kết cấu công trình liên quan đến động lực học công trình. Hướng nghiên cứu này có sức hấp

dẫn lớn và nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Mô hình kết cấu tấm trên nền đàn nhớt chịu tải trọng di chuyển có ứng dụng khá nhiều trong thực tiễn. Nhiều nghiên cứu về ứng xử của tấm dưới tác động của tải trọng di chuyển được công bố với việc sử dụng nhiều phương pháp phân tích khác nhau. Đầu tiên phải kể đến phương pháp giải tích, Uymaz và cộng sự [1] đã khảo sát dao động của tấm FGM vuông với các điều kiện biên khác nhau sử dụng phương pháp Ritz và công thức chuyển vị Chebyshev. Sau đó, Atmane và cộng sự [2] đã đề xuất một lý thuyết biến dạng cắt mới để phân tích dao động của tấm FGM trên nền Pasternak sử dụng phương pháp Navier. Zenkour và Radwan [3] đã trình bày nghiên cứu tổng quát về ứng xử tĩnh và dao động của tấm FGM trên nền Pasternak với lý thuyết biến dạng cắt sử dụng hàm hyperbolic. Thai và Vo [4] đã phát triển lý thuyết biến dạng cắt theo hàm sin cho bài toán phân tích uốn, ổn định và dao động của tấm FGM. Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), Melekzadeh và Monajjemzadeh [5,6] lần lượt đã phân tích ứng xử của tấm FGM trong môi trường nhiệt độ và

ứng xử phi tuyến của tấm FGM chịu tải trọng di chuyển. Phương pháp này cho ra lời giải chính xác nhưng gặp khó khăn và có thể dẫn đến bế tắc đối với các bài toán phức tạp như hệ có nhiều bậc tự do, chuyển động có gia tốc hoặc có xét đến ứng xử phi tuyến. Do đó, phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM) được sử dụng phổ biến để khắc phục những điểm yếu trên. Shahidzadeh và cộng sự [7] đã phân tích ứng xử của tấm FGM vuông với các điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng phần mềm Abacus và Fortran. Sarada Prasad Parida và cộng sự [8] đã phân tích ứng xử động của dầm FGM trong môi trường nhiệt độ cao bằng FEM. Tuy nhiên, đối với các bài toán kết cấu có chiều dài lớn thì chúng được giả thuyết là tấm dài vô hạn. Trong khi đó, mô hình tính toán theo phương pháp FEM là hữu hạn nên tải trọng sẽ nhanh chóng đến vị trí biên của mô hình. Để khắc phục hạn chế trên, mô hình kết cấu phải có chiều dài đủ lớn, kéo theo thời gian tính toán sẽ gia tăng và yêu cầu cấu hình máy tính cao. Để khắc phục các hạn chế trên, phương pháp phần tử chuyển động (MEM) ra đời để giải quyết các bài toán phân tích ứng xử kết cấu dầm và tấm chịu tải trọng di chuyển. Koh và cộng sự [9] đã đề xuất phương pháp MEM để phân tích ứng xử của hệ thống tàu cao tốc. Sau đó, Koh và cộng sự [10,11] tiếp tục phát triển phương pháp MEM cho bài toán phân tích ứng xử tấm hình vành khăn và ứng xử của nền bán không gian đàn hồi chịu tải trọng di chuyển. Luong và cộng sự [12] đã lần lượt trình bày phương pháp MEM để phân tích động tấm FGM trên nền Pasternak chịu tải điều hòa chuyển động và tải trọng di chuyển. Tuy nhiên, phân tích ứng xử của tấm FGM chịu tải trọng di chuyển có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ bằng phương pháp MEM chưa được nghiên cứu đến. Vì vậy, bài báo sẽ trình bày rõ về vấn đề này.

2. Cơ sở lý thuyết

Mô hình của bài toán được phân tích bao gồm kết cấu tấm FGM được mô phỏng dựa theo lý thuyết tấm Reissner – Mindlin, nền đàn nhớt Pasternak và tác dụng của tải di chuyển và nhiệt độ lên tấm.

Lý Thuyết tấm biến đổi chức năng

Vật liệu FGM là vật liệu composite thể hệ mới mà các đặc tính vật liệu biến đổi liên tục từ mặt này sang mặt khác của tấm. Vật liệu FGM đã khắc phục được những hạn chế vật liệu composite là giảm ứng suất tập trung và hạn chế được sự bong tách giữa các lớp. Có được tính chất này là nhờ trong vật liệu FGM tỉ lệ thể tích của các vật liệu thành phần thay đổi một cách liên tục theo chiều dày của tấm.

Vật liệu FGM phổ biến được kết hợp từ hai vật liệu gốm và kim loại, trong đó tỉ lệ thể tích của mỗi thành phần biến đổi một cách trơn và liên tục từ mặt giàu gốm đến mặt kia giàu kim loại. Sự biến thiên của các thuộc tính vật liệu FGM theo hàm tỉ lệ thể tích được thiết lập theo công thức:

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m \tag{1}$$

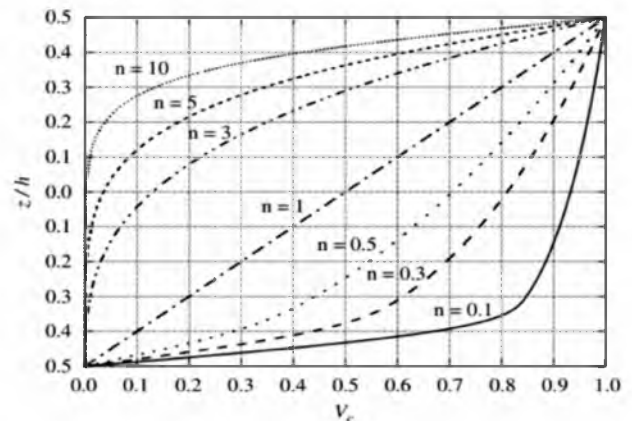
trong đó: P_c - thuộc tính của vật liệu gốm (mặt trên tấm); P_m - thuộc tính của vật liệu kim loại; $P(z)$ - thuộc tính của vật liệu tại tọa độ z bất kỳ trên chiều dài tấm; V_c - hàm tỉ lệ thể tích.

Quy luật phân bố của hàm tỉ lệ thể tích là cơ sở để phân loại vật liệu FGM thành ba loại như sau: vật liệu P-FGM có V_c thay đổi theo quy luật lũy thừa Power-Law, vật liệu E-FGM có V_c thay đổi theo quy luật hàm e-mũ và vật liệu S-FGM có V_c thay đổi theo quy luật hàm logarit chuẩn. Nghiên cứu này tập trung phân tích ứng xử của tấm vật liệu chức năng P-FGM với hàm tỉ lệ thể tích tuân theo quy luật lũy thừa Power-Law được viết:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n, (0 \leq n \leq \infty) \tag{2}$$

trong đó: n - chỉ số tỉ lệ thể tích; h - chiều dày tấm.

Sự thay đổi của hàm tỉ lệ thể tích V_c theo tỉ số z/h khi thay đổi chỉ số tỉ lệ thể tích n được thể hiện trên Hình 1. Khi giá trị của n lớn ($n > 10$) thì V_c có giá trị rất bé trên suốt chiều dày tấm, khi đó có thể xem như vật liệu kim loại của tấm chiếm ưu thế. Khi $n < 0.1$ thì V_c có giá trị tiến đến 1 trên suốt chiều dày tấm, khi đó có thể xem như vật liệu gốm của tấm chiếm ưu thế.



Hình 1. Quan hệ giữa V_c với tỉ số z/h và chỉ số tỉ lệ thể tích n .

Ảnh hưởng của hệ số Poisson $\nu(z)$ đến ứng xử của tấm FGM là nhỏ hơn rất nhiều so với ảnh hưởng của mô đun đàn hồi $E(z)$. Do đó, hệ số poisson của tấm FGM được xem là hằng số.

Mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của tấm

Trường biến dạng của một điểm bất kỳ trong tấm được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\kappa} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{0,x} \\ \beta_y + w_{0,y} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

trong đó: $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ - là trường biến dạng màng của tấm; $\boldsymbol{\kappa}$ - là độ cong của tấm.

Mối quan hệ giữa các thành phần ứng suất và biến

dạng trong tấm tuân theo định luật Hooke được trình bày:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\tau = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

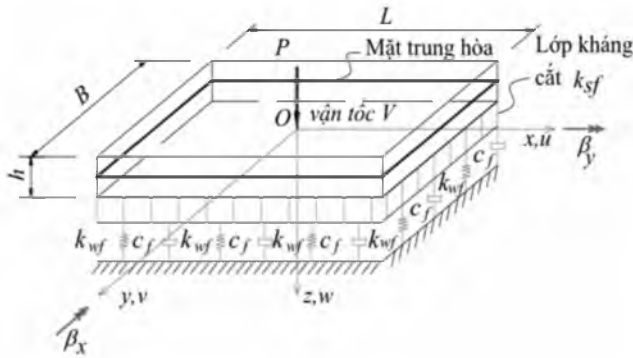
trong đó: E - module đàn hồi của vật liệu; ν - hệ số poisson; hằng số vật liệu được xác định theo công thức:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (7)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Mô hình nền Pasternak

Mô hình Pasternak (được gọi là mô hình nền hai thông số) đã khắc phục hạn chế của nền Winkler bằng cách đề xuất thêm lớp kháng cắt liên kết đỉnh của các lò xo, được cho bởi như Hình 2.



Hình 2. Tấm FGM trên nền đàn nhớt Pasternak.

Phản lực của nền Pasternak lên kết cấu tấm được thể hiện dưới dạng toán học như đã được trình bày trong các nghiên cứu được công bố trước đây ([2], [3]):

$$p = k_{wf}w - k_{sf}\nabla^2w + c_f\dot{w} \quad (8)$$

trong đó: k_{wf} - thông số nền thứ nhất (độ cứng theo phương đứng nền Winkler); k_{sf} - thông số nền thứ hai (độ cứng lớp kháng cắt của nền Pasternak); c_f - hệ số cản của nền w- chuyển vị theo phương đứng của tấm; \dot{w} - vận tốc của chuyển vị theo phương đứng của tấm. ∇^2 - đạo hàm cấp 2 theo phương x và phương y được xác định theo công thức:

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^T \quad (9)$$

Tấm FGM trên nền đàn nhớt Pasternak

Phương trình chuyển động của tấm được thiết lập dựa trên nguyên lý công ảo. Công nội ảo của tấm được cho bởi công thức:

$$\delta W_i = \int_{\Omega} \left\{ (\delta \varepsilon_m)^T \quad (\delta \kappa)^T \quad (\delta \gamma)^T \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & 0 \\ \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{D}_b & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} d\Omega \quad (10)$$

trong đó:

\mathbf{D}_m - ma trận vật liệu liên quan đến biến dạng màng;

$$\mathbf{D}_m = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} dz \quad (11)$$

\mathbf{D}_{mb} - ma trận vật liệu kết hợp biến dạng màng và biến dạng uốn;

$$\mathbf{D}_{mb} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} z dz \quad (12)$$

\mathbf{D}_b - ma trận vật liệu biến dạng uốn:

$$\mathbf{D}_b = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} z^2 dz \quad (13)$$

\mathbf{D}_s - ma trận vật liệu biến dạng cắt:

$$\mathbf{D}_s = \kappa_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} dz \quad (14)$$

$\kappa_s = 5/6$ - hệ số điều chỉnh cắt.

Tổng công ngoại ảo của tấm trên nền Pasternak gồm:

$$\delta W_E = \delta W_E^p + \delta W_E^m + \delta W_E^{k_s} + \delta W_E^{k_w} + \delta W_E^{c_f} \quad (15)$$

trong đó: δW_E^p - công ngoại ảo do tải trọng ngoài:

$$\delta W_E^p = \int_{\Omega} (\delta u)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (16)$$

\mathbf{b} - véc tơ tải trọng tác dụng lên tấm được xác định:

$$\mathbf{b} = [0 \quad 0 \quad P\delta(x-S)\delta(y-0) \quad 0 \quad 0]^T \quad (17)$$

P - lực tập trung di chuyển dọc theo trục x qua trong tấm; S - quãng đường di chuyển của tải trọng tại thời điểm t; $\delta(\cdot)$ - hàm Dirac - Delta;

δW_E^m - công ngoại ảo do lực quán tính:

$$\delta W_E^m = - \int_{\Omega} (\delta u)^T \mathbf{m} \dot{u} d\Omega \quad (18)$$

\mathbf{u} - véc tơ trường chuyển vị;

\dot{u} - véc tơ gia tốc của trường chuyển vị;

\mathbf{m} - ma trận khối lượng được xác định theo công thức:

$$\mathbf{m} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} dz \quad (19)$$

ρ - khối lượng riêng trên đơn vị thể tích của vật liệu.

$\delta W_E^{k_w}$ - công ngoại ảo do lực đàn hồi của nền:

$$\delta W_E^{k_w} = - \int_{\Omega} \delta w^T k_{wf} w d\Omega \quad (20)$$

$\delta W_E^{k_s}$ - công ngoại ảo do lực kháng cắt của nền:

$$\delta W_E^{k_s} = \int_{\Omega} \delta w^T k_{sf} \nabla^2 w d\Omega \quad (21)$$

$\delta W_E^{c_f}$ - công ngoại ảo do lực cản của nền:

$$\delta W_E^{c_f} = - \int_{\Omega} \delta w^T c_f \dot{w} d\Omega \quad (22)$$

Cân bằng công nội ảo và công ngoại ảo của tấm,

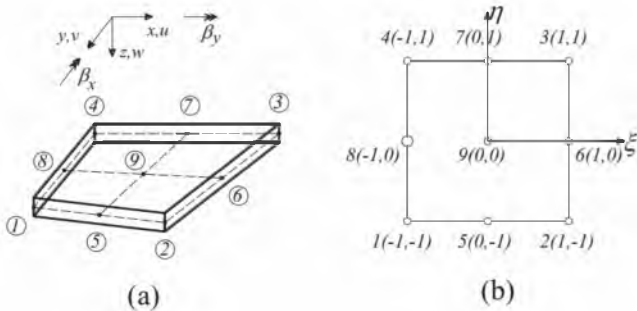
phương trình chuyển động của tấm được thiết lập:

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} (\partial \epsilon_m)^T & (\partial \kappa)^T & (\partial \gamma)^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & 0 \\ \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{D}_b & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} (\partial \mathbf{u})^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \partial w^T k_{,y} w d\Omega - \int_{\Omega} \partial w^T k_{,y} \nabla^2 w d\Omega + \int_{\Omega} \partial w^T c_f \dot{w} d\Omega = \int_{\Omega} (\partial \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega \quad (23)$$

Phần tử đẳng tham số

Khi miền khảo sát là đường cong hoặc có biên là đường cong hay mặt cong, nếu sử dụng phần tử một chiều thẳng hay các phần tử hai chiều dạng tam giác hoặc tứ giác thì sẽ không đủ để đảm bảo độ chính xác của kết quả bài toán. Để khắc phục điều này, phần tử có biên cong hay phần tử đẳng tham số (isoparametric element) được xây dựng.

Phần tử đẳng tham số dựa trên cơ sở phép biến đổi một phần tử được gọi là phần tử chuẩn (master element) trong hệ tọa độ tự nhiên $O\xi\eta$ thành phần tử thực tương ứng có dạng tùy ý trong tọa độ vuông góc Oxy (Hình 3). Phần tử tấm tứ giác 9 nút (Quadrilateral nine-node element - Q_9) thuộc loại đẳng tham số được sử dụng để mô hình hóa kết cấu tấm trong nghiên cứu này.



Hình 3. a. Phần tử Q_9 trong hệ tọa độ tổng thể (x,y) ; b. Phần tử Q_9 trong hệ tọa độ tự nhiên (ξ,η) .

Vì Q_9 là phần tử đẳng tham số nên tọa độ của điểm bất kì trong phần tử được xác định bởi nội suy tuyến tính:

$$x = \sum_{i=1}^9 N_i x_i; y = \sum_{i=1}^9 N_i y_i \quad (25)$$

trong đó: (x_i, y_i) là tọa độ của nút thứ i ($i = 1 \div 9$) trong hệ tọa độ tổng thể Oxy . Các hàm nội suy Lagrange N_i ($i = 1 \div 9$) của phần tử Q_9 và ma trận Jacobi J cho phép biến đổi tọa độ lần lượt được xác định như sau:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1)\xi\eta, & N_2 &= \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta - 1)\xi\eta \\ N_3 &= \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1)\xi\eta, & N_4 &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta + 1)\xi\eta \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta - 1)\eta, & N_6 &= \frac{1}{2}(\xi + 1)(1 - \eta^2)\xi \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta + 1)\eta, & N_8 &= \frac{1}{2}(\xi - 1)(1 - \eta^2)\xi \\ N_9 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (24)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_9 & y_9 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Định thức ma trận Jacobi trong công thức tích phân được chuyển đổi:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det J d\xi d\eta \quad (27)$$

Công thức (27) được tính bằng phương pháp cầu phương Gauss trong mặt phẳng và có dạng như sau:

$$\iint_{\Omega} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (28)$$

trong đó: ξ_i, η_j - tọa độ điểm Gauss nằm trong phần tử; w_i, w_j - các trọng số tương ứng; n - số điểm Gauss sử dụng trong phép cầu phương.

Tấm FGM trên nền Pasternak chịu tải trọng di chuyển có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ

Tấm được rời rạc hóa thành N_e phần tử tứ giác 9 nút đẳng tham số (Q_9) sao cho $\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega^{(e)}$ và $\Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)} = \emptyset, i \neq j$.

Theo phương pháp MEM, hệ tọa độ chuyển động (r,s) có gốc tọa độ được gắn tải trọng và chuyển động cùng vận tốc với tải trọng được sử dụng. Mối quan hệ giữa hệ tọa độ chuyển động (r,s) và hệ tọa độ cố định (x,y) :

$$\begin{cases} r = x - S \\ s = y \end{cases} \quad (29)$$

Trong đó: S là quãng đường di chuyển của tải trọng tại thời điểm tức thời t .

Khi tải trọng chuyển động với vận tốc ban đầu V_0 và gia tốc a thì mối quan hệ giữa hai hệ tọa độ được viết:

$$\begin{cases} r = x - V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ s = y \end{cases} \quad (30)$$

Phương trình vi phân chuyển động (23) của phần tử tấm được viết trong hệ tọa độ chuyển động (r,s) :

$$\int_{\Omega^{(e)}} \left\{ \begin{matrix} (\partial \epsilon_m)^T & (\partial \kappa)^T & (\partial \gamma)^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & 0 \\ \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{D}_b & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} dr ds + \int_{\Omega^{(e)}} (\partial \mathbf{u})^T \mathbf{m} \left(v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(r,s)}{\partial r^2} - 2v \frac{\partial^2 \mathbf{u}(r,s)}{\partial r \partial s} \right) dr ds + \int_{\Omega^{(e)}} \partial w^T k_{,y} w dr ds - \int_{\Omega^{(e)}} \partial w^T k_{,y} \nabla^2 w dr ds + \int_{\Omega^{(e)}} \partial w^T c_f \left(\frac{\partial w(r,s)}{\partial t} - v \frac{\partial w(r,s)}{\partial r} \right) dr ds = \int_{\Omega^{(e)}} (\partial \mathbf{u})^T \mathbf{b}(r,s) dr ds \quad (31)$$

trong đó: $\mathbf{b}(r,s)$ là véc tơ tải trọng được biến đổi sang hệ tọa độ (r,s) được xác định theo công thức:

$$\mathbf{b}(r,s) = [0 \ 0 \ P \partial(r) \partial(s - 0) \ 0 \ 0]^T \quad (32)$$

Trường chuyển vị u và chuyển vị theo phương đứng w tại một điểm trong phần tử được nội suy từ các thành

phần chuyển vị nút của phần tử lần lượt được viết:
 $u = Nd^{(e)} \quad (33) \quad w = N_w d^{(e)} \quad (34)$

trong đó:

N - ma trận hàm dạng được xác định bởi công thức:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_9 \end{bmatrix}_{1 \times 45} \quad (35)$$

N_w - véc tơ hàm dạng xác định bởi công thức:

$$N_w = [0 \ 0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ N_9 \ 0 \ 0]_{1 \times 45} \quad (36)$$

$d^{(e)}$ - véc tơ chuyển vị nút của phần tử được xác định bởi công thức:

$$d^{(e)} = [u_{01} \ v_{01} \ w_{01} \ \beta_{x1} \ \beta_{y1} \ \dots \ u_{09} \ v_{09} \ w_{09} \ \beta_{x9} \ \beta_{y9}]_{45 \times 1}^T \quad (37)$$

Các thành phần biến dạng màng, biến dạng uốn và biến dạng cắt của phần tử được trình bày ở dạng ma trận:

$$\varepsilon_m = B_m d^{(e)}; \kappa = B_b d^{(e)}; \gamma = B_s d^{(e)} \quad (38)$$

trong đó: B_m - ma trận gradient biến dạng màng; B_b - ma trận gradient biến dạng uốn; B_s - ma trận gradient biến dạng cắt xác định bởi công thức:

$$B_m = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{9,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,s} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_{9,s} & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,s} & N_{1,r} & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{9,s} & N_{9,r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 45} \quad (39)$$

$$B_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1,r} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{9,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,s} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{9,s} \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,r} & N_{1,s} & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{9,r} & N_{9,s} \end{bmatrix}_{3 \times 45} \quad (40)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{1,r} & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_{9,r} & N_9 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,s} & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{9,s} & 0 & N_9 \end{bmatrix}_{2 \times 45} \quad (41)$$

Trường nhiệt độ được giả định là không đổi trong mặt phẳng và chỉ thay đổi theo chiều dày của tấm. Mô đun đàn hồi E và hệ số giãn nở nhiệt α giả thiết là hàm phụ thuộc nhiệt độ, còn khối lượng riêng ρ , hệ số poisson ν không phụ thuộc nhiệt độ.

$$E(z, T) = (E_c(T) - E_m(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m(T) \quad (42)$$

$$\alpha(z, T) = (\alpha_c(T) - \alpha_m(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \alpha_m(T) \quad (43)$$

Khi làm việc trong môi trường nhiệt độ, các hằng số vật liệu cũng là các hàm số của nhiệt độ tuyệt đối T (Theo nhiệt độ Kelvin, 0°C ứng với 273°K . Theo [13], các hằng số vật liệu được biểu diễn dưới dạng:

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (44)$$

trong đó: $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ - các hằng số phụ thuộc vào từng loại vật liệu; T - Nhiệt độ khảo sát, tính theo Kelvin ($T = T_0 + \Delta T$); T_0 - Nhiệt độ phòng tương ứng với 300°K (27°C).

Với giả thiết biến thiên nhiệt độ chỉ theo phương chiều

dày z của tấm và trường nhiệt độ được xem là hằng số trong mặt phẳng Oxy. Theo đó, hàm phân bố nhiệt độ dọc theo chiều dày tấm có thể nhận được thông qua việc giải phương trình trạng thái truyền nhiệt như sau:

$$-\frac{d}{dz} \left[\kappa(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0 \quad (45)$$

Phương trình này được giải với điều kiện biên: $T=T_c$ tại $z = h/2$ và $T=T_m$ tại $z = -h/2$. Nghiệm của phương trình này có thể biểu diễn dưới dạng đa thức:

$$T(z) = T_m + (T_c + T_m)\eta(z) \quad (46)$$

trong đó:

$$\eta(z) = \frac{1}{C} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa_{cm}}{(n+1)\kappa_m} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} \\ & + \frac{\kappa_{cm}^2}{(2n+1)\kappa_m^2} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{2n+1} - \frac{\kappa_{cm}^3}{(3n+1)\kappa_m^3} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{3n+1} \\ & + \frac{\kappa_{cm}^4}{(4n+1)\kappa_m^4} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{4n+1} - \frac{\kappa_{cm}^5}{(5n+1)\kappa_m^5} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{5n+1} \end{aligned} \right] \quad (47)$$

$$C = 1 - \frac{\kappa_{cm}}{(n+1)\kappa_m} + \frac{\kappa_{cm}^2}{(2n+1)\kappa_m^2} - \frac{\kappa_{cm}^3}{(3n+1)\kappa_m^3} + \frac{\kappa_{cm}^4}{(4n+1)\kappa_m^4} - \frac{\kappa_{cm}^5}{(5n+1)\kappa_m^5} \quad (48)$$

$$\kappa_{cm} = \kappa_c - \kappa_m \quad (49)$$

Khi xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ, trường biến dạng được xác định bằng nguyên lý cộng tác dụng như sau:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^{c,h} + \{\varepsilon\}^T \quad (50)$$

trong đó: $\{\varepsilon\}^{c,h}$ - biến dạng do tải trọng cơ học gây ra; $\{\varepsilon\}^T$ -biến dạng do nhiệt gây ra.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \alpha \Delta T \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \alpha \Delta T \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \alpha \Delta T \end{Bmatrix} = \varepsilon_m + z\kappa + \alpha \Delta T \quad (51)$$

$$\tau = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Các thành phần ứng lực nhiệt được xác định:

$$\begin{bmatrix} N_x^T & M_x^T \\ N_y^T & M_y^T \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha(z, T) \\ \alpha(z, T) \\ 0 \end{Bmatrix} [1 \ z] \Delta T dz \quad (53)$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{12} \\ Q_{21} + Q_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \alpha(z, T) [1 \ z] \Delta T dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{E(z, T)\alpha(z, T)\Delta T}{1-\nu} [1 \ z] dz$$

Phương trình chuyển động của phần tử tấm FGM Q_0 được viết trong hệ tọa độ chuyển động trên nền đàn nhớt Pasternak khi chịu ảnh hưởng của nhiệt độ:

$$M^{(e)} \ddot{d}^{(e)} + C^{(e)} \dot{d}^{(e)} + K^{(e)} d^{(e)} = P^{(e)} \quad (54)$$

trong đó: ma trận khối lượng của phần tử tấm FGM chuyển động:

$$M^{(e)} = m \int_{\Omega^{(e)}} N^T N \det J d\xi d\eta \quad (55)$$

Ma trận cản của phần tử tấm FGM chuyển động:

$$C^{(e)} = -2m\nu \int_{\Omega^{(e)}} N^T N_r \det J d\xi d\eta + c_f \int_{\Omega^{(e)}} N_w^T N_w \det J d\xi d\eta \quad (56)$$

Ma trận độ cứng của phần tử tấm FGM chuyển động:

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left\{ (B_m)^T (B_b)^T (B_s)^T \right\} \begin{bmatrix} D_m & D_{mb} & 0 \\ D_{mb} & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_m \\ B_b \\ B_s \end{Bmatrix} \det J d\xi d\eta \\ + k_{w_f} \int_{\Omega^{(e)}} N_w^T N_w \det J d\xi d\eta - k_g \int_{\Omega^{(e)}} (N_w^T N_{w,rr} + N_w^T N_{w,ss}) \det J d\xi d\eta \quad (57) \\ + m\nu^2 \int_{\Omega^{(e)}} N^T N_{,rr} \det J d\xi d\eta - m\alpha \int_{\Omega^{(e)}} N^T N_r \det J d\xi d\eta \\ - c_f \nu \int_{\Omega^{(e)}} N_w^T N_{w,r} \det J d\xi d\eta$$

Với các ma trận hằng số vật liệu thay đổi khi chịu ảnh hưởng của nhiệt độ như sau:

$$D_m, D_{mb}, D_b = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} dz \quad (58)$$

$$D_s = \kappa_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{33} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} dz \quad (59)$$

Hệ số hiệu chỉnh cắt $\kappa_s = 5/6$ và các hằng số vật liệu:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z, T)}{1 - \nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E(z, T)}{1 - \nu^2} \quad (60) \\ Q_{44} = Q_{33} = Q_{66} = \frac{E(z, T)}{2(1 + \nu)}$$

Véc tơ tải trọng của phần tử tấm chuyển động:

$$P^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} N^T b(r, s) \det J d\xi d\eta \\ - \int_{\Omega^{(e)}} \left\{ (B_m)^T \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_z^T \end{Bmatrix} + (B_s)^T \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_z^T \end{Bmatrix} \right\} \det J d\xi d\eta \quad (61)$$

Phương pháp Newmark

Ý tưởng của phương pháp là từ giá trị của nghiệm đã biết tại thời điểm n suy ra giá trị của thời điểm tại $n+1$ bằng giả thiết khác nhau về sự biến thiên của gia tốc trong từng bước thời gian. Biểu thức của gia tốc \ddot{d}_{n+1} và vận tốc \dot{d}_{n+1} tại thời điểm cuối của bước thời gian:

$$\ddot{d}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (d_{n+1} - d_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{d}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{d}_n \quad (62)$$

$$\dot{d}_{n+1} = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{d}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{d}_n + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (d_{n+1} - d_n) \quad (63)$$

Thay vào phương trình chuyển động đã được rời rạc:

$$K_{eff} d_{n+1} = P_{eff} \quad (64)$$

trong đó: độ cứng hiệu dụng:

$$K_{eff} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C + K \quad (65)$$

Tải trọng hiệu dụng:

$$P_{eff} = P_{n+1} + M \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} d_n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{d}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{d}_n \right] + \quad (66)$$

$$C \left[\frac{1}{\beta \Delta t} d_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{d}_n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) \ddot{d}_n \right]$$

Giải phương trình đại số tuyến tính (64) được d_{n+1} từ đó tìm được \dot{d}_{n+1} và \ddot{d}_{n+1} từ phương trình (62) (63).

3. Ví dụ số

3.1. Kiểm chứng chương trình

Bài toán tấm chịu tải trọng tĩnh

Xét tấm vật liệu chức năng FGM hình vuông cạnh $L = 1m$, tỉ số $L/h = 5$ với biên tựa đơn 4 cạnh dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = 1$ ở mặt trên tấm. Tấm FGM được cấu tạo bởi mặt trên là vật liệu giàu gốm và mặt dưới là vật liệu giàu kim loại. Bảng 1 trình bày thông số vật liệu của tấm FGM, hệ số tỉ lệ thể tích lần lượt thay đổi với các giá trị: $n = 0$ (gốm), $0.5, 1, 2, \infty$ (kim loại) và xét tấm trong nhiệt độ phòng $300^{\circ}K$. Để khảo sát sự hội tụ của bài toán, phần tử tấm được rời rạc hóa theo phương x và y lần lượt là $5 \times 5, 10 \times 10, 20 \times 20, 30 \times 30$. Chuyển vị không thứ nguyên xác định theo công thức: $\bar{w} = w(L/2, B/2) E_m \times h^3$.

Bảng 1. Thông số vật liệu FGM ZrO2/Al

Vật liệu	Môđun đàn hồi E (Gpa)	Hệ số poisson ν	Trọng lượng riêng r (kg/m ³)
Zirconia (ZrO ₂ , gốm)	$E_c = 151$	0.3	$r_c = 3000$
Aluminum (AL, kim loại)	$E_m = 70$		$r_m = 2702$

Bảng 2. Chuyển vị không thứ nguyên tại tâm tấm FGM theo lưới chia phần tử.

Lưới chia	Chỉ số tỉ lệ thể tích n				
	0	0.5	1	2	∞
(5x5)	0.0247	0.0307	0.0337	0.0367	0.0530
(10x10)	0.0248	0.0309	0.0339	0.0370	0.0534
(20x20)	0.0248	0.0309	0.0339	0.0370	0.0534
(30x30)	0.0248	0.0309	0.0339	0.0370	0.0534
Ferreira và cộng sự [14]	0.0247	0.0313	0.0351	0.0388	0.0534
Sai khác (%)	0.51	1.37	3.35	4.74	0.02

Tấm FGM trên nền Pasternak chịu tải trọng di động

Xét tấm vật liệu chức năng FGM (dài $L = 40m$, rộng $B = 10m$, dày $h = 0.3m$) với hai cạnh ngắn của tấm có biên tựa đơn và hai cạnh dài có biên tự do. Tấm đặt trên nền Pasternak chịu tải trọng $P = 10^4N$ chuyển động đều với vận tốc $V = 20m/s$ dọc theo trục x của tấm. Thông số vật liệu của tấm được thể hiện trong Bảng1 và các hệ số của nền lần lượt là: $k_{wf} = 1 \times 10^7 N/m^3$, $k_{sf} = 1 \times 10^5 N/m$ và $c_f = 1 \times 10^4 Ns/m^3$. Tấm được rời rạc hóa thành các phần tử kích thước $1(m) \times 1(m)$.

Bảng 3. Chuyển vị không thứ nguyên tại tâm tấm FGM theo lưới chia phần tử

So sánh	Chỉ số tỉ lệ thể tích n			
	0	5	10	∞
Bài báo	-2.1942	-2.7713	-2.8824	-3.1660
Luong [12]	-2.1941	-2.8172	-2.9048	-3.1661
Sai số(%)	0.00	-1.62	-0.77	0.00

Bảng 2 và 3 cho thấy sai số của bài báo này so với các kết quả được công bố trước đây không đáng kể. Do đó, chương trình và phương pháp là đáng tin cậy và được sử dụng cho các bài toán khảo sát tiếp theo.

3.2. Các bài toán khảo sát

Xét tấm vật liệu chức năng FGM (dài $L = 20m$, rộng $B = 10m$, dày $h=0.1m$) với hai cạnh ngắn của tấm có biên tựa đơn và hai cạnh dài có biên tự do. Tấm đặt trên nền Pasternak chịu tải trọng $P = 10^6N$ chuyển động đều với vận tốc $V = 20m/s$ dọc theo trục x của tấm với hệ số tỉ lệ thể tích tấm FGM là $n = 1$ và trong điều kiện nhiệt độ $400^{\circ}K$, hệ số poisson $\nu = 0.3$. Thông số vật liệu của tấm được thể hiện trong Bảng 4 và các hệ số của nền lần lượt là: $k_{wf} = 1 \times 10^7 N/m^3$, $k_{sf} = 1 \times 10^8 N/m$ và $c_f = 1 \times 10^4 Ns/m^2$.

Bảng 4. Các hệ số phụ thuộc nhiệt độ của gốm và kim loại trong vật liệu FGM (Si3N4/SUS304)

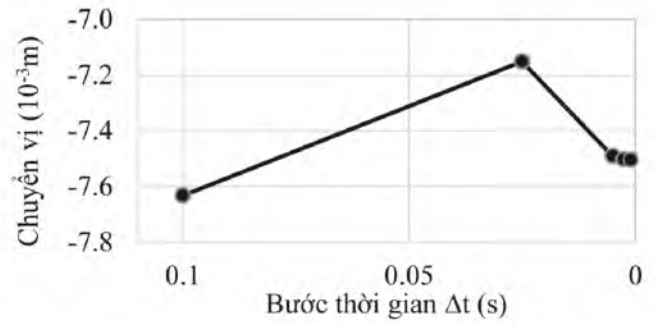
Si ₃ N ₄				
Thông số	E (Pa)	a (1/K)	r (kg/m ³)	k (W/mK)
P_0	3.48E+11	5.87E-06		
P_{-1}	0	0		
P_1	-3.07E-04	9.10E-04		
P_2	2.16E-07	0		
P_3	-8.95E-11	0		
P (300°K)	3.22E+11	7.47E-06	2370	9.19
SUS304				
Thông số	E (Pa)	a (1/K)	r (kg/m ³)	k (W/mK)
P_0	2.01E+11	1.23E-05		
P_{-1}	0	0		
P_1	3.07E-04	8.08E-04		
P_2	-6.53E-07	0		
P_3	0	0		
P (300°K)	2.07E+11	1.53E-05	8166	12.04

Các thông số trên được sử dụng cho tất cả các bài toán tiếp theo ngoại trừ một thông số thay đổi cho từng bài toán khảo sát cụ thể.

Khảo sát sự hội tụ của chuyển vị theo bước thời gian Δt

Để lựa chọn bước lặp thời gian hợp lý nhằm sử dụng cho các bài toán tiếp theo, khảo sát sự hội tụ của phương pháp được sử dụng là cần thiết. Tiến hành thực hiện khảo sát một nghiệm cụ thể bài toán với các bước lặp thời gian Δt thay đổi: 0.1s, 0.025s, 0.005s, 0.0025s,

0.001s trong môi trường nhiệt độ $400^{\circ}K$. Chuyển vị đứng w khi tính toán trong từng bước thời gian được thể hiện trong Hình 4.



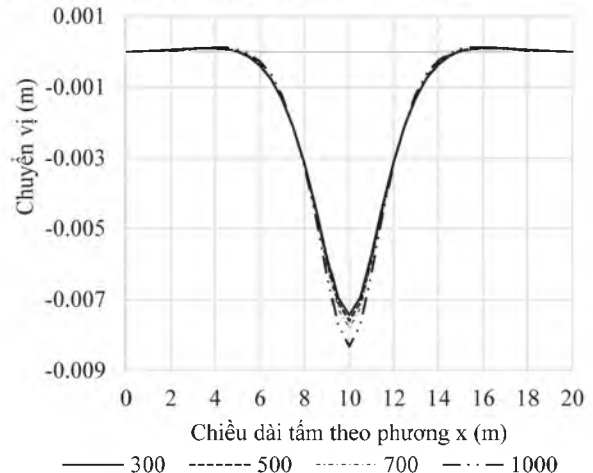
Hình 4. Hội tụ của chuyển vị theo bước thời gian Δt .

Kết quả cho thấy khi bước thời gian lặp Δt càng nhỏ thì kết quả càng hội tụ về một trị số nghiệm. Với tấm được chia thành các phần tử có kích thước $1(m) \times 1(m)$, chênh lệch kết quả giữa bước lặp thời gian $\Delta t = 0.0025s$ và $0.001s$ là rất nhỏ (0.0267%). Do đó, việc sử dụng bước lặp thời gian $\Delta t = 0.0025s$ và kích thước phần tử $1(m) \times 1(m)$ là đủ để đạt nghiệm chính xác.

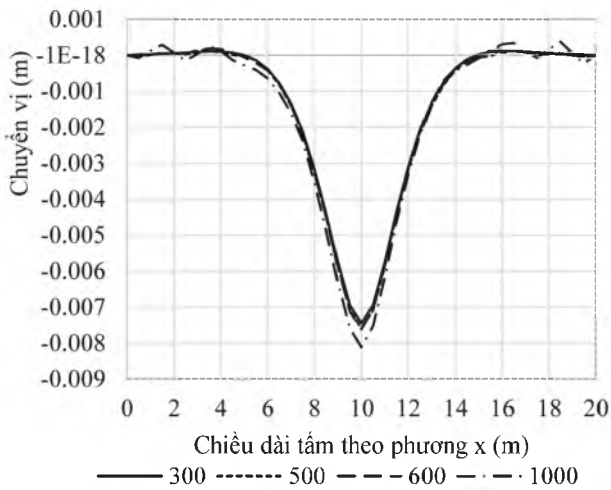
Khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ

Khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ tới độ võng lớn nhất của tấm FGM với nhiệt độ ban đầu là nhiệt độ phòng $T_0 = 300^{\circ}K$ và các mức nhiệt độ tác dụng đều lên 2 mặt của tấm $T_c = T_m = 500^{\circ}K, 700^{\circ}K, 1000^{\circ}K$. Kết quả trong Hình 5 cho thấy khi tấm chịu tải trọng nhiệt độ thì độ võng lớn nhất vẫn ở vị trí giữa tấm. Độ võng của tấm càng tăng khi nhiệt độ tuyệt đối càng tăng.

Tiếp tục khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ tới độ võng lớn nhất của tấm FGM với nhiệt độ ban đầu là nhiệt độ phòng $T_0=300^{\circ}K$ và các mức nhiệt độ chỉ tác dụng lên một mặt trên của tấm $T_c=500^{\circ}K, 600^{\circ}K, 1000^{\circ}K$ và một mặt dưới $T_m=500^{\circ}K, 800^{\circ}K, 1000^{\circ}K$. Kết quả được thể hiện trong Hình 6 và Hình 7 cho thấy độ võng lớn nhất tại tâm chịu đồng thời tải trọng cơ học và nhiệt độ tác dụng lên một mặt của tấm tăng dần khi nhiệt độ tuyệt đối tăng. Ngoài ra, khi so sánh hai trường hợp nhiệt chỉ tác dụng lên mặt trên (mặt gốm) hoặc mặt dưới (mặt kim loại) thì độ võng sẽ bé hơn khi tác dụng nhiệt lên mặt trên. Kết quả này có thể giải thích khi mặt trên gốm chịu được nhiệt tốt hơn mặt dưới kim loại.

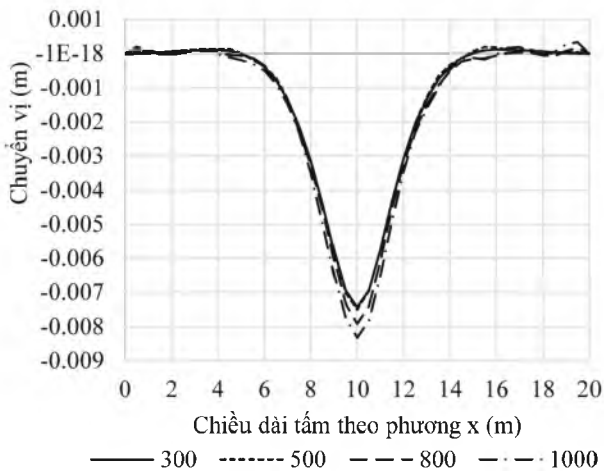


Hình 5. So sánh chuyển vị của tấm FGM khi nhiệt độ tác dụng lên 2 mặt thay đổi.

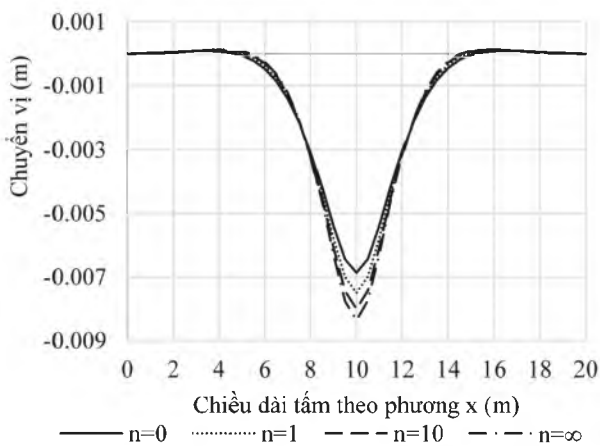


Hình 6. So sánh chuyển vị của tấm FGM khi nhiệt độ tác dụng lên mặt trên thay đổi.

Tóm lại, nhiệt độ có ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử động của tấm FGM mà cụ thể trong bài toán là độ võng tại tâm tấm. Với sự khác nhau khi tác dụng cùng một nhiệt độ giống nhau trên một mặt của tấm thì độ võng của tấm cũng khác nhau. Điều này cho thấy sự khác biệt giữa hai loại vật liệu ở hai mặt trên và dưới của tấm, đây chính là đặc trưng cơ bản của vật liệu FGM khi mỗi vật liệu thành phần là tuyến tính nhưng vật liệu tạo thành lại là phi tuyến.



Hình 7. So sánh chuyển vị của tấm FGM khi nhiệt độ tác dụng lên mặt dưới thay đổi.



Hình 8. So sánh chuyển vị ứng với hệ số tỉ lệ thể tích n thay đổi.

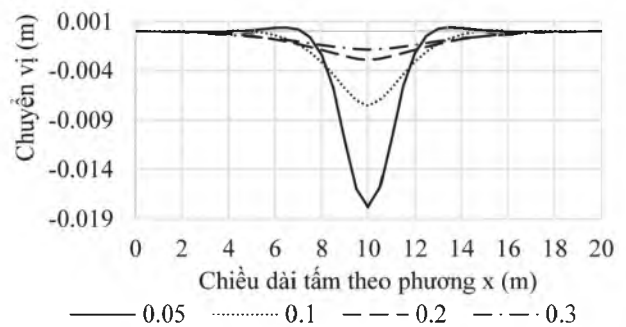
Khảo sát ảnh hưởng của hệ số tỉ lệ thể tích

Ảnh hưởng của hệ số tỉ lệ thể tích đến ứng xử động lực học của kết cấu tấm được xem xét trong bốn trường hợp hợp $n_1=0$ (gốm), $n_2=1$, $n_3=10$ và $n_4=\infty$ (kim loại). Độ võng của tấm dọc theo trục của lực di chuyển trong nhiệt độ 400°K được thể hiện trong Hình 8.

Từ kết quả được thể hiện trong Hình 8, khi hệ số vật liệu n của tấm tăng dần thì chuyển vị cũng tăng dần do càng tăng n thì tấm chuyển từ tính chất gốm sang kim loại. Vì vậy, trong quá trình thiết kế, hệ số n cần được chọn hợp lý để đảm bảo chuyển vị của tấm không vượt qua chuyển vị cho phép.

Khảo sát ảnh hưởng của chiều dày tấm

Ảnh hưởng của chiều dày tấm đến ứng xử động lực học của kết cấu được xem xét trong các trường hợp $h_1=0.05$ (m), $h_2=0.1$ (m), $h_3=0.2$ (m) và $h_4=0.3$ (m). Độ võng của tấm dọc theo trục của lực di chuyển được thể hiện trên Hình 9.

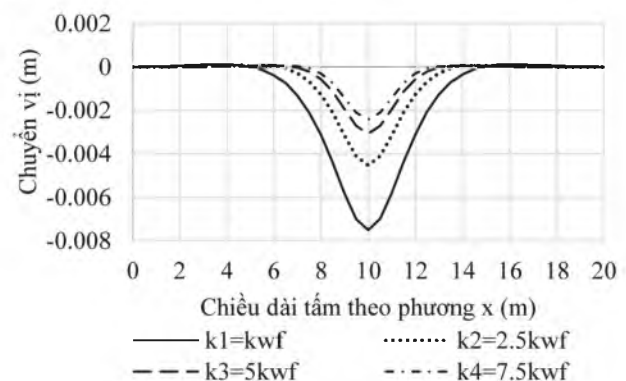


Hình 9. So sánh chuyển vị của tấm khi chiều dày tấm h thay đổi.

Từ kết quả trên, khi chiều dày tấm tăng dần thì chuyển vị giảm dần. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với tính chất vật lý của kết cấu khi chiều dày tấm tăng thì đồng nghĩa với việc độ cứng của tấm tăng do đó chuyển vị của tấm sẽ giảm đáng kể.

Khảo sát ảnh hưởng của các hệ số nền

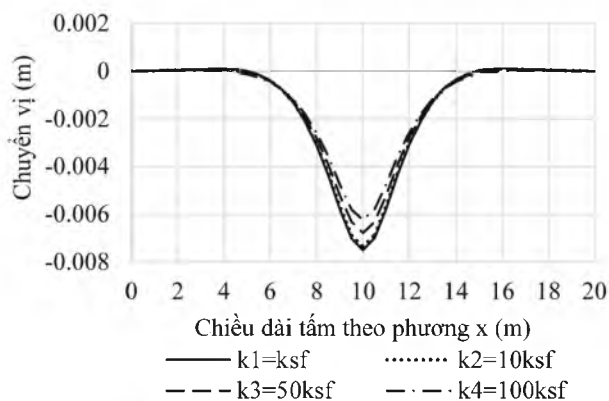
Ảnh hưởng của độ cứng nền đến ứng xử động lực học của kết cấu tấm được xem xét trong bốn trường hợp $k_1=k_{wf}=1 \times 10^7 \text{N/m}^3$, $k_2=2.5k_{wf}$, $k_3=5k_{wf}$ và $k_4=7.5k_{wf}$. Độ võng của tấm dọc theo trục của lực di chuyển được thể hiện trên Hình 10.



Hình 10. So sánh chuyển vị của tấm khi hệ số độ cứng nền k_{wf} thay đổi.

Để khảo sát ảnh hưởng của hệ số kháng cắt đến ứng xử động lực học của kết cấu tấm, xét các trường hợp $k_1=k_{sf}=1 \times 10^8 \text{N/m}^3$, $k_2=10k_{sf}$, $k_3=50k_{sf}$ và $k_4=100k_{sf}$. Độ võng của tấm dọc theo trục của lực di chuyển được thể

hiện trong Hình 11.



Hình 11. So sánh chuyển vị của tấm khi hệ số kháng cắt k_{sf} thay đổi.

Kết quả trong Hình 10 và Hình 11 cho thấy rằng khi hệ số độ cứng nền k_{wf} và hệ số kháng cắt k_{sf} tăng thì chuyển vị giảm. Kết quả này là hoàn toàn phù hợp với tính chất vật lý của kết cấu. Từ đó, khi xây dựng công trình để giảm lún cần tối ưu các hệ số nền cho phù hợp.

4. Kết luận

Từ các bài toán kiểm chứng và các bài toán khảo sát, một số kết luận được rút ra như sau:

1. Mô hình đề nghị đã phản ánh đúng sự làm việc hợp lý kết cấu tấm FGM trên nền Pasternak chịu tải trọng di chuyển có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ. Mô hình này đảm bảo độ tin cậy, độ chính xác và xu hướng hợp lý trong việc xác định ứng xử động lực học của tấm FGM.

2. Thông qua việc phân tích bài toán tĩnh và bài toán động, các kết quả cho thấy lời giải của phương pháp MEM là tin cậy và tỏ ra hiệu quả hơn FEM trong việc phân tích bài toán động. Chương trình và phương pháp có thể sử dụng trong thiết kế thực tế.

3. Nhiệt độ ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử động của tấm FGM chịu tải trọng di chuyển. Chuyển vị của tấm tăng khi nhiệt độ tác dụng lên tấm tăng. Bên cạnh đó, thông số tấm và nền cũng ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử tấm. □

Lời cảm ơn

Nghiên cứu được thực hiện tại Trường Đại học Bách Khoa – ĐHQG-HCM.

Tài liệu tham khảo:

- [1] B. Uymaz and M. Aydogdu, "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions". *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 26, no. 18, pp. 1847-1863, 2007.
- [2] H. A. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab and E. A. A. Bedia, "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 6, pp. 112-121, 2010.
- [3] A. M. Zenkour and A. F. Radwan, "Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak foundation under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory". *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, vol. 18, no. 2, pp. 645-658, 2018.
- [4] H. T. Thai and T. P. Vo, "A new sinusoidal shear deformation theo-

ry for bending, buckling and vibration of functionally graded plates". *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, pp. 3269-3281, 2013.

[5] P. Malekzadeh and S. M. Monajjemzadeh, "Dynamic response of functionally graded plates in thermal environment". *Composites: Part B*, vol. 45, pp. 1521-1533, 2013.

[6] P. Malekzadeh and S. M. Monajjemzadeh, "Nonlinear response of functionally graded plates under moving load". *Thin-Walled Structure*, vol. 96, pp. 120-129, 2015.

[7] S. J. Shahidzadeh Tabatabaei and A.M. Fattahi, "A finite element method for modal analysis of FGM plates". *An International Journal*, 2020.

[8] Sarada Prasad Parida and Pankaj Charan Jena, "FGM Beam analysis in Dynamical and Thermal surroundings using Finite Element Method". *Materials Today*, part 7, vol. 18, pp. 3676-3682, 2019.

[9] C. G. Koh, J. S. Y. Ong, D. K. H. Chua and J. Feng, "Moving element method for train-track dynamics". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 1549-1567, 2003.

[10] C. G. Koh, P. P. Sze and T. T. Deng, "Numerical and analytical methods for in-plane dynamic response of annular disk". *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 112-131, 2006.

[11] C. G. Koh, P. P. Sze and T. T. Deng, "A numerical method for moving load on continuum". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 300, pp. 126-138, 2007.

[12] V. H. Luong, T. N. T. Cao, Q. X. Lieu, X. V. Nguyen, "Moving element method for dynamic analysis of functionally graded plates resting on Pasternak foundation subjected to moving harmonic load". *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol.20 (1), pp. 2050003-1#2050003-25, 2020.

[13] J. Yang, H. S. Shen, "Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environment", *Soud and Vibration*, vol. 255(3), pp. 579-602, 2002.

[14] A. Ferreira, R. Batra, C. Roque, L. Qian ang P. Martins, "Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method", *Composite Structures*, vol. 69, pp. 449-457, 2005.

[15] M. Talha and B.N. Singh, "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory". *Applied Mathematical Modelling*, Volume 34, Issue 12, December 2010, Pages 3991-4011.

[16] Lương Văn Hải, Trần Minh Thi, Cao Tấn Ngọc Thân, "Phương pháp phần tử chuyển động". Nhà xuất bản xây dựng, 2020.

[17] S. M. Kim and J. Roesset, "Moving loads on a plate on elastic foundation". *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 124, pp. 1010-1017, 1998.

[18] T. N. T. Cao, D. M. Do, V. H. Lương, M. T. Tran, "Moving Multi-Layer Plate Method for Dynamic Analysis of Pavement Structure Subjected to Moving Load", *Journal of Science Ho Chi Minh City Open University*, vol. 20(4), pp.3-13, 2016.