

PHÂN TÍCH ĐẶC TRƯNG DAO ĐỘNG CỦA DẦM FGM THEO LÝ THUYẾT DẦM EULER-BERNOULLI BẰNG TIẾP CẬN GIẢI TÍCH

Nguyễn Văn Long^{a,*}, Trần Minh Tú^a, Trần Hữu Quốc^a

^aKhoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 12/05/2021, Sửa xong 26/06/2021, Chấp nhận đăng 28/06/2021

Tóm tắt

Bài báo phân tích dao động riêng và đáp ứng động của dầm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) dưới tác dụng của tải trọng phân bố vuông góc với bề mặt dầm. Với cách chọn hệ tọa độ quy chiếu được đi qua mặt trung hòa, các hệ thức quan hệ và phương trình chuyển động của dầm FGM được thiết lập trên cơ sở lý thuyết dầm Euler-Bernoulli. Lời giải giải tích dạng ẩn được xây dựng cho trường hợp dầm FGM có liên kết hai đầu khớp. Ví dụ kiểm chứng đã được thực hiện qua so sánh với công bố của các tác giả khác trong đó sử dụng hệ quy chiếu gắn với mặt trung bình. Ảnh hưởng của các tham số về vật liệu, kích thước hình học, tải trọng cường độ lên đặc trưng dao động của dầm được khảo sát cụ thể qua các ví dụ số.

Từ khoá: phân tích dao động; dầm FGM; mặt trung hòa; lý thuyết dầm Euler-Bernoulli.

VIBRATIONAL CHARACTERISTIC OF FGM BEAM BASED ON EULER-BERNOULLI BEAM THEORY BY USING ANALYTICAL APPROACH

Abstract

In this paper, free vibration and transient analysis of FGM beam under transverse distributed load is presented. The constitutive relations and governing equations are obtained based on Euler-Bernoulli beam theory including the neutral surface position concept. The analytical direct solution is proposed for simply supported FGM beam. The validated examples have been conducted by comparison with those of other authors using a reference coordinate system coinciding with the middle surface. The effects of material, geometric parameters, excitation on vibrational characteristics of the FGM beams are investigated through numerical examples.

Keywords: vibration analysis; functionally graded beam; neutral surface position; Euler-Bernoulli beam.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2021-15\(3V\)-01](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2021-15(3V)-01) © 2021 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

1. Giới thiệu

Trong khoa học vật liệu, vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) là loại composite thể hệ mới có cơ tính biến thiên liên tục dọc theo phương chiều dày kết cấu. Loại vật liệu này có thể được coi là loại vật liệu composite không đồng nhất được tạo thành từ hỗn hợp các thành phần gốm (ceramic) và kim loại (metal) [1], trong đó tỷ phần thể tích của các vật liệu thành phần thay đổi trơn theo phương chiều dày. Điều này góp phần tránh được sự tập trung ứng suất gây ra bởi sự gián đoạn các pha vật liệu như trong vật liệu composite lớp hay composite cốt sợi. Do tận dụng được đặc tính kháng nhiệt và kháng ăn mòn của gốm, kết hợp với độ bền dẻo của kim loại, vật liệu FGM được sử dụng rộng rãi trong nhiều ứng dụng kỹ thuật, đặc biệt là cho các kết cấu trong môi trường nhiệt độ cao như hàng không vũ trụ, điện hạt nhân, cơ khí, giao thông vận tải.

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: longnv@nuce.edu.vn (Long, N. V.)

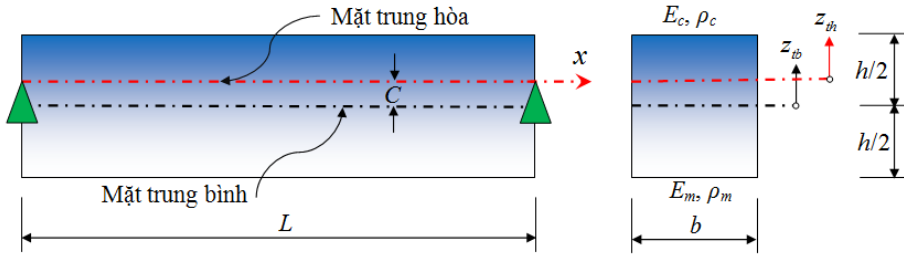
Các phân tích về ứng xử tĩnh và động của kết cấu dầm, tấm bằng vật liệu FGM đã và đang được tập trung nghiên cứu trong những năm gần đây. Nhiều công trình nghiên cứu về đặc trưng dao động và ứng xử uốn của kết cấu dầm FGM đã được thực hiện. Trong số này, Phuong và cs. [2] xây dựng nghiệm Navier phân tích ứng xử uốn dầm FGM có lỗ rỗng vì mô sử dụng mô hình dầm Timoshenko. Aydogdu và Taskin [3] đã thiết lập lời giải giải tích dạng nghiệm Navier phân tích dao động tự do của dầm đơn giản FGM sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết dầm cổ điển. Li [4] đề xuất một cách tiếp cận hợp nhất, xây dựng lời giải giải tích phân tích uốn và dao động riêng dầm FGM sử dụng hai mô hình dầm Timoshenko và Euler-Bernoulli. Sina và cs. [5] phân tích dao động riêng của dầm FGM với các điều kiện biên khác nhau, sử dụng lời giải giải tích được thiết lập từ mô hình tấm bậc nhất. Şimşek và Kocatürk [6] phân tích dao động tự do và đáp ứng động của dầm FGM liên kết hai đầu khớp dưới tác dụng của tải trọng tập trung di động điều hòa, dựa trên lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và khai triển nghiệm chuyển vị dưới dạng đa thức. Sử dụng lý thuyết dầm cổ điển, dầm bậc nhất và các lý thuyết dầm bậc cao, Şimşek [7] phân tích dao động tự do của dầm FGM với các điều kiện biên khác nhau; trong đó, các thành phần chuyển vị được khai triển theo chuỗi đa thức. Cũng sử dụng khai triển các thành phần chuyển vị dưới dạng chuỗi đa thức, Şimşek [8] phân tích dao động của dầm FGM dưới tác dụng của tải trọng di động theo một số lý thuyết dầm bao gồm: lý thuyết dầm cổ điển, bậc nhất và bậc ba. Thai và Vo [9] thiết lập nghiệm Navier cho bài toán phân tích uốn và dao động riêng của dầm FGM liên kết hai đầu khớp. Áp dụng phương pháp Rayleigh-Ritz, Pradhan và Chakraverty [10] phân tích tần số dao động riêng của dầm FGM với các liên kết khác nhau theo các lý thuyết dầm cổ điển và dầm bậc nhất. Mashat và cs. [11] phân tích dao động tự do của dầm FGM với các điều kiện biên khác nhau sử dụng các lý thuyết biến dạng cắt và mô hình phần tử hữu hạn một chiều. Su và Banerjee [12] áp dụng thuật toán Wittrick-Williams phát triển phương pháp độ cứng động lực phân tích dao động riêng của dầm FGM theo lý thuyết dầm Timoshenko với các liên kết khác nhau. Le và cs. [13] phân tích đáp ứng động của dầm FGM nhiều nhịp dưới tác dụng của tải trọng di động bằng phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng lý thuyết dầm bậc nhất.

Hầu hết các nghiên cứu trên đã tập trung phân tích tần số dao động riêng và đáp ứng động của dầm, với cách tiếp cận thông thường - hệ tọa độ quy chiếu được chọn trùng với mặt phẳng trung bình. Với vật liệu FGM, do các đặc trưng cơ học vật liệu thay đổi theo chiều dày kết cấu, vì thế mặt trung bình hình học thường không trùng với mặt trung hòa, do vậy sẽ tồn tại các tương tác màng-uốn trong quan hệ nội lực - biến dạng [14]. Trong các nghiên cứu về tấm FGM, Zhang [15, 16] đã chỉ ra rằng tương tác này sẽ được loại bỏ nếu mặt phẳng tham chiếu được lựa chọn đi qua mặt trung hòa. Ý tưởng này sau đó được một số tác giả khác áp dụng cho dầm FGM, chẳng hạn Yaghoobi và Fereidoon [17], Larbi và cs. [18], Li và cs. [19], Zhang [20]. Có thể thấy rằng, ngay cả với các công bố đi theo cách tiếp cận này, với dầm FGM, theo hiểu biết của tác giả, chưa có một nghiên cứu nào đưa ra được biểu thức hiển để khảo sát đáp ứng động.

Để góp phần làm phong phú thêm các nghiên cứu lý thuyết về ứng xử cơ học của dầm FGM, bài báo đưa ra một cách tiếp cận giải tích nhằm phân tích dao động riêng và đáp ứng động của dầm FGM. Với mục đích đưa ra được lời giải dạng hiển phục vụ cho những tính toán, thiết kế sơ bộ, lý thuyết dầm Euler-Bernoulli với hệ tọa độ quy chiếu đi qua mặt trung hòa sẽ được sử dụng. Các phương trình chủ đạo của dầm được thiết lập trên cơ sở nguyên lý Hamilton, do có kể đến vị trí mặt trung hòa nên sẽ có dạng đơn giản hơn. Tuy nhiên để thu được nghiệm giải tích dạng hiển của tần số dao động riêng và đáp ứng động qua việc giải phương trình vi phân dao động cưỡng bức, dầm FGM với liên kết khớp hai đầu, trong môi trường không cản sẽ là đối tượng được chọn. Các kết quả số sẽ được thực hiện nhằm đánh giá ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số hình học, tải trọng cưỡng bức đến tần số dao động riêng và đáp ứng động của dầm FGM.

2. Mô hình hóa dầm bằng vật liệu FGM

Vật liệu FGM được cấu thành từ hai vật liệu thành phần là gốm và kim loại. Các đặc trưng cơ học được giả thiết biến đổi trơn dọc chiều cao dầm. Tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu thường biến đổi theo quy luật hàm lũy thừa (P-FGM), hàm mũ (E-FGM) hoặc hàm Sigmoid (S-FGM) [21]. Trong khi vật liệu E-FGM thường được sử dụng trong phân tích về phá hủy, thì vật liệu P-FGM thường được sử dụng trong phân tích tĩnh, dao động và ổn định. Vật liệu S-FGM thường được sử dụng với kết cấu FGM nhiều lớp để tránh sự tập trung ứng suất tại bề mặt phân cách giữa các lớp. Do vậy, trong nghiên cứu này, dầm bằng vật liệu P-FGM, với chiều dài L , mặt các ngang chữ nhật với bề rộng b , chiều cao h như Hình 1 sẽ được xem xét.



Hình 1. Vị trí mặt trung bình và mặt trung hòa của dầm FGM

Các tính chất hiệu dụng của vật liệu FGM bao gồm mô đun đàn hồi E , khối lượng riêng ρ , được biểu diễn dưới dạng [18]:

$$P(z_{th}) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{z_{th} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (1)$$

với P_m và P_c tương ứng là cơ tính của gốm và kim loại; $p \geq 0$ là chỉ số tỷ lệ thể tích; C là khoảng cách giữa mặt trung hòa và mặt trung bình. Trong nghiên cứu này, để đơn giản trong tính toán, hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo tọa độ chiều cao dầm, $\nu = \text{const}$.

Do mô đun đàn hồi E của vật liệu FGM thay đổi theo tọa độ chiều cao dầm, mặt trung hòa và mặt trung bình hình học của dầm thường là không trùng nhau (khi $p \neq 0$). Trên Hình 1, các trục tọa độ x, z tương ứng với phương trục và chiều cao dầm, tọa độ của điểm bất kỳ trong hệ tọa độ đi qua mặt trung bình và mặt trung hòa được biểu diễn tương ứng là z_{tb} và z_{th} . Khi đó, vị trí mặt trung hòa của dầm FGM được xác định từ điều kiện [18, 22]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (z_{tb} - C) E(z_{tb}) dz_{tb} = 0 \Rightarrow C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z_{tb} E(z_{tb}) dz_{tb}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{tb}) dz_{tb}} = \frac{h(E_c - E_m)p}{2(p+2)(pE_m + E_c)} \quad (2)$$

3. Các phương trình cơ bản của lý thuyết dầm Euler-Bernoulli

Sử dụng hệ quy chiếu gắn với mặt trung hòa, trường chuyển vị theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli [23]:

$$u(x, z_{th}, t) = -z_{th} \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \quad (3a)$$

$$w(x, z_{th}, t) = w_0(x, t) \quad (3b)$$

trong đó w_0 độ võng của một điểm trên mặt trung hòa theo phương trục z_{th} ; t là biến thời gian. Các thành phần biến dạng được xác định thông qua các thành phần chuyển vị:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z_{th} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (4a)$$

$$\gamma_{xz_{th}} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z_{th}} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (4b)$$

Như vậy, trong lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, biến dạng góc: $\gamma_{xz_{th}} = 0$. Ứng suất pháp liên hệ với biến dạng theo định luật Hooke:

$$\sigma_x = E(z_{th})\varepsilon_x = -E(z_{th})z_{th} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (5)$$

Với lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, ta định nghĩa các thành phần nội lực của dầm bao gồm:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \sigma_x dz_{th} \quad (6a)$$

$$M_x = \int_A z_{th} \sigma_x dA = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{th} \sigma_x dz_{th} \quad (6b)$$

Thay (5) vào (6), ta được:

$$N_x = -b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} E(z_{th})z_{th} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dz_{th} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{th} E(z_{th}) dz_{th} = -B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (7a)$$

$$M_x = -b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{th}^2 E(z_{th}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dz_{th} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{th}^2 E(z_{th}) dz_{th} = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (7b)$$

Các hằng số độ cứng của dầm trong (7) được xác định bởi:

$$B_{11} = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{th} E(z_{th}) dz_{th} = 0 \quad (8a)$$

$$D_{11} = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{th}^2 E(z_{th}) dz_{th} \quad (8b)$$

Có thể thấy rằng, với việc sử dụng hệ tọa độ đi qua mặt trung hòa, $B_{11} = 0$; dẫn đến lực dọc $N_x = 0$; các biểu thức xác định các thành phần nội lực trong dầm FGM trở nên đơn giản, tương tự như với dầm đẳng hướng.

Phương trình chuyển động cho dầm được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton [24, 25]:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (9)$$

trong đó δU là biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của dầm, δV là biến phân thế năng của tải trọng và δK là biến phân động năng.

Biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của dầm:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA dx = - \int_0^L \int_A z_{th} \sigma_x \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} dA dx = - \int_0^L M_x \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} dx \quad (10)$$

Biến phân thế năng của tải trọng uốn:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx \quad (11)$$

Biến phân động năng được xác định bởi:

$$\delta K = \int_0^L \int_A \rho(z_{ns}) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dA dx = \int_0^L \left(I_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) dx \quad (12)$$

Dấu (.) trên các biến chuyển vị thể hiện đạo hàm theo thời gian t .

Các mô men quán tính khối lượng được định nghĩa trong (12) tính theo:

$$I_0 = \int_A \rho(z_{th}) dA = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \rho(z_{th}) dz_{th} \quad (13a)$$

$$I_2 = \int_A z_{th}^2 \rho(z_{th}) dA = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{th}^2 \rho(z_{th}) dz_{th} \quad (13b)$$

Thay các biểu thức của δU , δV và δK từ (10), (11) và (12) vào (9), tiến hành tích phân từng phần, ta được:

$$0 = V_{xz} \delta w_0 \Big|_0^L - M_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q - I_0 \ddot{w}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) \delta w_0 \right] dx \quad (14)$$

trong đó: $V_{xz} = \frac{\partial M_x}{\partial x} - I_0 \ddot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}$ là lực cắt hiệu dụng.

Cho hệ số của các biến phân độ võng trên chiều dài dầm bằng không, phương trình chuyển động của dầm thu được:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q = I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \quad (15)$$

Các tham số điều kiện biên: chuyển vị, lực cũng có thể rút ra từ (14):

$$(w_0, V_{xz}); \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}, M_x \right) \quad (16)$$

Thay (7) vào (15), ta được phương trình chuyển động theo chuyển vị:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - q + I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

Đây là phương trình chủ đạo để phân tích đáp ứng động của dầm FGM theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli.

Tiếp theo, bài báo sẽ tập trung phân tích dao động riêng và dao động cưỡng bức của dầm FGM với liên kết hai đầu khớp (SS). Các biểu thức điều kiện biên của dầm bao gồm tại $x = 0$ và $x = L$:

$$w_0 = 0 \quad (18a)$$

$$M_x = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (18b)$$

4. Phân tích dao động riêng

Trong phân tích dao động riêng, bỏ qua tải trọng uôn: $q = 0$, phương trình chuyển động của dầm FGM có dạng:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} = 0 \quad (19)$$

Nghiệm độ võng được giả thiết dưới dạng:

$$w_0(x, t) = W(x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (20)$$

trong đó ω là tần số dao động riêng của dầm, φ là pha ban đầu.

Thay (20) vào (19), ta được:

$$D_{11} \frac{d^4 W}{dx^4} + I_2 \omega^2 \frac{d^2 W}{dx^2} - I_0 \omega^2 W = 0 \quad (21)$$

Đây là phương trình vi phân cấp 4 tuyến tính thuần nhất; phương trình đặc trưng:

$$D_{11} k^4 + I_2 \omega^2 k^2 - I_0 \omega^2 = 0 \quad (22)$$

Bằng cách đặt $s = k^2$, phương trình (22) được đưa về dạng:

$$D_{11} s^2 + I_2 \omega^2 s - I_0 \omega^2 = 0 \quad (23)$$

Phương trình bậc hai trong (23) có hai nghiệm trái dấu:

$$s_1 = \frac{-I_2 \omega^2 + \sqrt{I_2^2 \omega^4 + 4D_{11} I_0 \omega^2}}{2D_{11}} = \lambda^2 > 0 \quad (24a)$$

$$s_2 = \frac{-I_2\omega^2 - \sqrt{I_2^2\omega^4 + 4D_{11}I_0\omega^2}}{2D_{11}} = -\mu^2 < 0 \quad (24b)$$

Do đó, nghiệm của phương trình (22):

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-I_2\omega^2 + \sqrt{I_2^2\omega^4 + 4D_{11}I_0\omega^2}}{2D_{11}}} = \pm \lambda \quad (25a)$$

$$k_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{I_2\omega^2 + \sqrt{I_2^2\omega^4 + 4D_{11}I_0\omega^2}}{2D_{11}}} = \pm i\mu \quad (25b)$$

Từ đó, suy ra nghiệm của phương trình (21) có dạng:

$$W(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x \quad (26)$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 phụ thuộc vào điều kiện biên (18); ba trong bốn hằng số này và tần số dao động riêng ω được xác định thông qua bốn phương trình điều kiện biên. Điều kiện để dầm dao động tự do là 4 hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 không đồng thời bằng không.

Với trường hợp dầm liên kết hai đầu khớp (SS); bốn phương trình điều kiện biên cho kết quả:

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0 \quad (27a)$$

$$C_1 \sin \mu L = 0 \quad (27b)$$

Để các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 không đồng thời bằng không, suy ra $C_1 \neq 0$; từ đây suy ra:

$$\sin \mu L = 0 \Rightarrow \mu L = m\pi; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Từ đây, ta thu được tần số dao động riêng:

$$\omega_m = \frac{m^2\pi^2}{L^2} \sqrt{D_{11} / \left(I_0 + I_2 \frac{m^2\pi^2}{L^2} \right)} \quad (29)$$

Tần số dao động cơ bản là tần số nhỏ nhất trong số các tần số dao động riêng thu được; rõ ràng là với dầm liên kết hai đầu khớp, khi $m = 1$:

$$\omega_{cb} = \min \{ \omega_m \} = \omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{D_{11} / \left(I_0 + I_2 \frac{\pi^2}{L^2} \right)} \quad (30)$$

Hàm độ võng của dầm khi đó:

$$W(x) = \sum_{m=1}^M W_m \sin \frac{m\pi x}{L} \Rightarrow w_0(x, t) = \sum_{m=1}^M W_m \sin \frac{m\pi x}{L} \sin (\omega_m t + \varphi_m) \quad (31)$$

5. Phân tích dao động cưỡng bức

Xét dầm FGM liên kết hai đầu khớp (SS), dưới tác dụng của tải trọng phân bố $q(t) = Q \sin \Omega t$ vuông góc với trục dầm.

Phương trình chuyển động của dầm (17) được viết lại thành:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} = Q \sin \Omega t \quad (32)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (32) bao gồm: nghiệm của phương trình thuần nhất (khi không có vế phải) và nghiệm riêng của phương trình có vế phải.

Nghiệm của phương trình thuần nhất của phương trình (32) là phương trình vi phân của dao động tự do, có dạng:

$$w_0^h(x, t) = \sum_{m=1}^M W_m^h \sin \frac{m\pi x}{L} \sin (\omega_m t + \varphi_m) \quad (33)$$

trong đó: W_m^h và φ_m tương ứng là biên độ và pha ban đầu của dao động tự do; chúng phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu của bài toán.

Để tìm nghiệm riêng của phương trình (32), lưu ý rằng, tải trọng phân bố Q cũng được khai triển theo biến không gian x dưới dạng chuỗi lượng giác tương tự như độ võng:

$$Q(x) = \sum_{m=1}^M Q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (34)$$

Với tải trọng bất kỳ:

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \quad (35)$$

Đối với cho tải trọng phân bố đều $Q = Q_0$, các hệ số Q_m được xác định bởi:

$$Q_m = \frac{2Q_0}{m\pi} (1 - \cos m\pi) \Rightarrow \begin{cases} Q_m = 0 & \text{khi } m = 2, 4, 6, \dots \\ Q_m = \frac{4Q_0}{m\pi} & \text{khi } m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (36)$$

Thay (34) vào (32) ta tìm được một nghiệm riêng của phương trình này là:

$$w_0^p = \sum_{m=1}^M \frac{F_m}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \Omega t \quad (37)$$

$$\text{trong đó: } F_m = \frac{Q_m}{I_0 + I_2 \frac{m^2 \pi^2}{L^2}}.$$

Từ đó, ta có nghiệm tổng quát của độ võng:

$$w_0 = w_0^h + w_0^p = \sum_{m=1}^M \left[W_m^h \sin (\omega_m t + \varphi_m) + \frac{F_m}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (38)$$

Trong bài báo này, các tác giả sử dụng điều kiện ban đầu của bài toán là, tại $t = 0$: $w_0 = 0$ và $\dot{w}_0 = 0, \forall x \in [0, L]$. Do đó, ta thu được:

$$\begin{cases} \varphi_m = 0 \\ W_m^h = \frac{\Omega/\omega_m}{\Omega^2 - \omega_m^2} F_m \end{cases} \quad \forall m \quad (39)$$

Thay các kết quả thu được trong (39) vào (38) ta được:

$$w_0(x, t) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^M F_m \left[\frac{\Omega/\omega_m}{(\Omega^2 - \omega_m^2)} \sin \omega_m t + \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (40)$$

Phương trình (40) được sử dụng để phân tích đáp ứng động của dầm FGM liên kết hai đầu khớp. Từ đây, ta tìm được độ võng tại chính giữa dầm ($x = L/2$):

$$w_0(L/2, t) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^M F_m \left[\frac{\Omega/\omega_m}{(\Omega^2 - \omega_m^2)} \sin \omega_m t + \frac{1}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \right] \sin \frac{m\pi}{2} \quad (41)$$

6. Kết quả số và thảo luận

Xét dầm bằng vật liệu P-FGM (Al/Al₂O₃), liên kết hai đầu khớp; chiều cao tiết diện dầm $h = 0,1$ m, bề rộng tiết diện dầm $b = 0,05$ m, chiều dài dầm L . Mô đun đàn hồi, hệ số Poisson, khối lượng riêng của kim loại (Al): $E_m = 70$ GPa, $\nu_m = 0,3$, $\rho_m = 2702$ kg/m³; của gốm (Al₂O₃): $E_c = 380$ GPa, $\nu_m = 0,3$, $\rho_m = 3800$ kg/m³.

6.1. Ví dụ kiểm chứng

Xét dầm tiết diện chữ nhật, liên kết hai đầu khớp, vật liệu P-FGM (Al/Al₂O₃). Bảng 1 trình bày các kết quả tính toán tần số dao động riêng không thứ nguyên, $\bar{\omega}_i = \omega_i \frac{L^2}{h} \sqrt{\rho_m/E_m}$ cho dầm trong hai

Bảng 1. Kiểm chứng tần số dao động riêng không thứ nguyên, $\bar{\omega}$ của dầm FGM liên kết hai đầu khớp

L/h	m	Nguồn	p				
			0	0,5	1	2	10
	1	Thai và Vo [9]	5,3953	4,5931	4,1484	3,7793	3,4921
		Bài báo	5,3953	4,5932	4,1485	3,7796	3,4923
5	2	Thai và Vo [9]	20,6187	17,5415	15,7982	14,3260	13,2376
		Bài báo	20,6187	17,5452	15,8063	14,3400	13,2521
	3	Thai và Vo [9]	43,3483	36,8308	33,0278	29,7458	27,4752
		Bài báo	43,3483	36,8640	33,0996	29,8650	27,6041
	1	Thai và Vo [9]	5,4777	4,6641	4,2163	3,8472	3,5547
		Bài báo	5,4777	4,6641	4,2163	3,8472	3,5547
20	2	Thai và Vo [9]	21,8438	18,5987	16,8100	15,3334	14,1676
		Bài báo	21,8438	18,5987	16,8100	15,3335	14,1677
	3	Thai và Vo [9]	48,8999	41,6328	37,6173	34,2954	31,6883
		Bài báo	48,8999	41,6330	37,6178	34,2961	31,6891

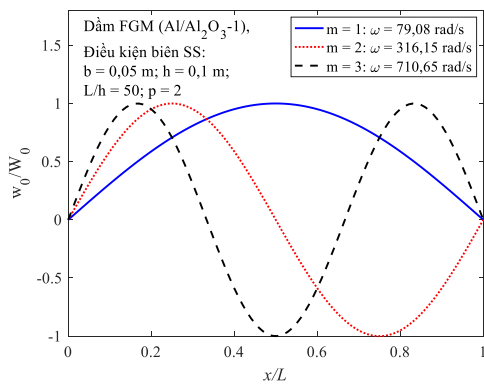
trường hợp kích thước dầm $L/h = 5; 20$ và áp dụng cho 3 dạng dao động đầu tiên với các chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 0; 0,5; 1; 2; 10$.

Nghiệm giải tích trong bài báo được so sánh với kết quả của các tác giả Thai và Vo [9] cũng sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli (CBT) với dạng nghiệm Navier; tuy nhiên được tính toán trên hệ trục gắn với mặt trung bình. Từ các kết quả tính toán kiểm chứng chỉ ra ở trên, có thể thấy rằng lời giải giải tích và chương trình máy tính sử dụng trong bài báo có độ tin cậy (sai lệch lớn nhất khi $L/h = 5, p = 10$ và $m = 3$ chỉ là 0,4691%).

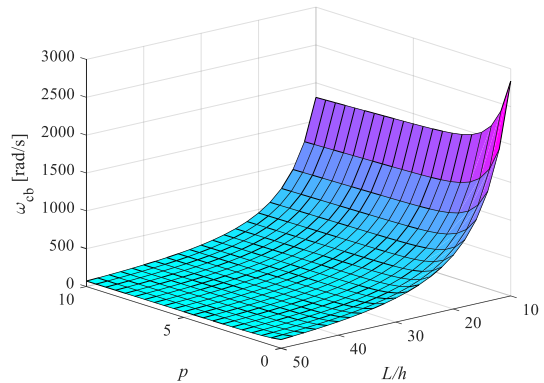
6.2. Khảo sát tần số dao động riêng của dầm FGM

Xét dầm chữ nhật, liên kết hai đầu khớp, vật liệu P-FGM dao động tự do trong môi trường hoàn toàn lý tưởng (không cản).

Hình 2 thể hiện dạng dao động (biến thiên độ võng w_0 theo chiều dài dầm) của dầm FGM với 3 dạng dao động đầu tiên với, tương ứng với $m = 1; 2; 3$. Có thể thấy rằng, giá trị của m chính là số nửa bước sóng hình sin của đường đàn hồi; và khi m tăng, tần số dao động riêng của dầm tăng. Tần số dao động cơ bản ứng với trường hợp $m = 1$ (đường đàn hồi có dạng một nửa bước sóng hình sin) có trị số nhỏ nhất, và nhỏ hơn nhiều so với các dạng dao động tiếp theo đó.



Hình 2. Ba dạng dao động riêng đầu tiên của dầm FGM tương ứng với $m = 1; 2; 3$



Hình 3. Biến thiên tần số cơ bản, ω_{cb} của dầm FGM theo p và L/h

Tần số dao động cơ bản ω_{cb} của dầm FGM với các chỉ số tỷ lệ thể tích, p và tỷ số kích thước dầm L/h được tính toán và trình bày như trong Bảng 2. Biến thiên của tần số dao động cơ bản theo hai tham số này được thể hiện trên Hình 3.

Các kết quả cho thấy, khi p tăng (đồng nghĩa với việc tăng hàm lượng kim loại trong vật liệu FGM), hoặc khi L/h tăng (dầm dài ra), tần số dao động cơ bản ω_{cb} giảm (độ cứng kết cấu giảm). Với mỗi tỷ số kích thước dầm L/h , tần số cơ bản ω_{cb} giảm nhanh khi p tăng trong khoảng $[0, 2]$, sau đó thì giảm chậm lại và gần như không thay đổi khi p tiến tới 10. Đồng thời, với mỗi chỉ số tỷ lệ thể tích p , tần số cơ bản ω_{cb} giảm nhanh khi L/h tăng trong khoảng $[10, 20]$, sau đó thì giảm chậm lại khi dầm trở nên dài (L/h tiến tới 50).

6.3. Khảo sát ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học, tải trọng uốn lên đáp ứng dao động của dầm FGM

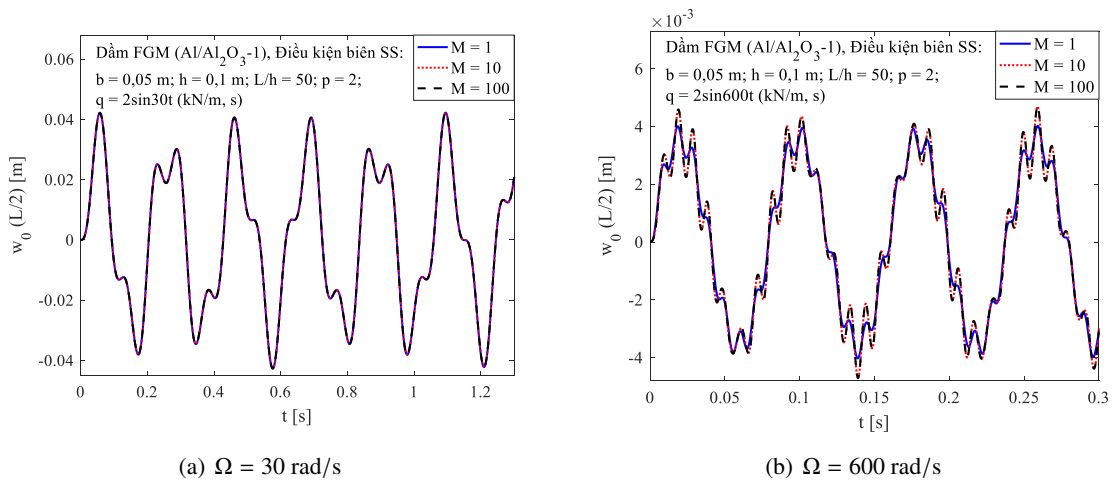
Trong phần này, bài báo xem xét dầm chữ nhật, liên kết hai đầu khớp, vật liệu P-FGM (Al/Al_2O_3-1); dầm dao động trong môi trường không cản dưới tác dụng của tải trọng cưỡng bức phân bố đều $q(t) = Q_0 \sin \Omega t$.

Bảng 2. Tần số dao động cơ bản, ω_{cb} [rad/s] của dầm FGM với các chỉ số tỷ lệ thể tích, p và tỷ số kích thước dầm L/h khác nhau

L/h	p							
	0	0,5	1	2	3	5	8	10
10	2837,5	2403,0	2165,1	1967,9	1905,8	1865,8	1830,4	1807,5
20	711,5	602,6	543,1	493,8	478,2	468,2	459,3	453,5
30	316,4	268,0	241,5	219,6	212,7	208,2	204,3	201,7
40	178,0	150,8	135,9	123,6	119,7	117,2	114,9	113,5
50	113,9	96,5	87,0	79,1	76,6	75,0	73,6	72,6

Khảo sát ảnh hưởng của số số hạng trong khai triển chuỗi lượng giác, M

Xét dầm FGM với tỷ số kích thước dầm $L/h = 50$ và chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 2$; hai tần số dao động riêng của dầm là: $\omega_1 = 79,08$ rad/s và $\omega_3 = 710,65$ rad/s. Dầm dao động dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều: $q(t) = 2 \sin \Omega t$ (kN/m, s).



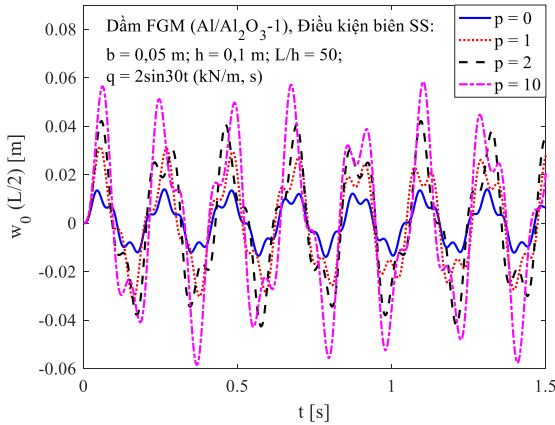
Hình 4. So sánh ảnh hưởng của số số hạng trong khai triển chuỗi lượng giác M lên đáp ứng động của dầm FGM

Hình 4 khảo sát đường cong tải trọng - độ võng của dầm FGM với hai trường hợp tần số lực cưỡng bức được khảo sát bao gồm: (a) $\Omega = 30$ rad/s, (b) $\Omega = 600$ rad/s. Số số hạng trong khai triển chuỗi lượng giác nghiệm độ võng được lấy với 3 giá trị: $M = 1$, $M = 10$ và $M = 100$. Các kết quả trên đồ thị cho thấy, khi tần số lực cưỡng bức gần với tần số dao động cơ bản của dầm, số số hạng trong khai triển khi $M = 1$, $M = 10$ và $M = 100$ cho kết quả đáp ứng động gần như trùng khớp nhau. Tuy nhiên, trong trường hợp tần số lực cưỡng bức gần với tần số dao động riêng tiếp theo của dầm, nếu chỉ lấy một số hạng trong khai triển ($M = 1$) thì đáp ứng động của dầm chưa đảm bảo độ hội tụ (sai lệch lớn nhất về biên độ độ võng khi $M = 1$ so với khi $M = 10$ và $M = 100$ lên đến 14,5%).

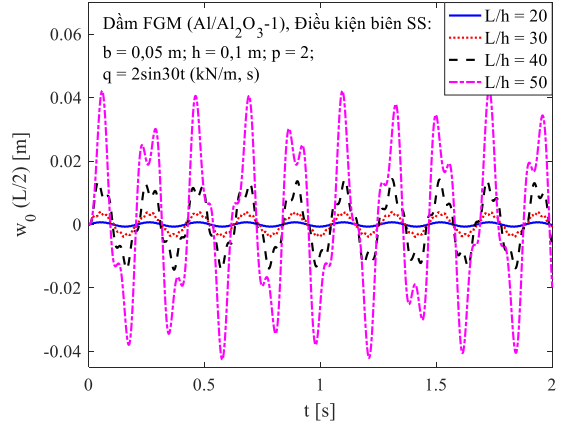
Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích, p , và tỷ số kích thước dầm, L/h

Xét dầm FGM dưới tác dụng của tải trọng cưỡng bức phân bố đều $q(t) = 2 \sin 30t$ (kN/m, s). Hình 5 và 6 bao gồm đường cong độ võng-thời gian của dầm FGM với các chỉ số tỷ lệ thể tích, p , và

tỷ số kích thước dầm, L/h khác nhau. Các kết quả trên đồ thị cho thấy, khi tăng p hoặc L/h đều làm tăng biên độ độ võng của dầm. Cụ thể là: khi $p = 10$, dầm có biên độ độ võng lớn gấp 4,19 lần so với khi $p = 0$; và khi $L/h = 50$, dầm có biên độ độ võng tăng 59,2 lần so với khi $L/h = 20$.



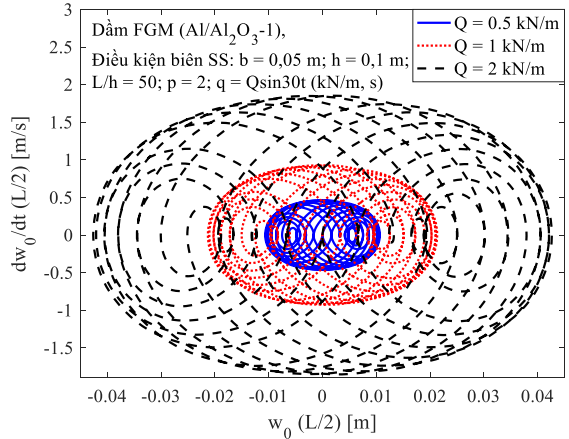
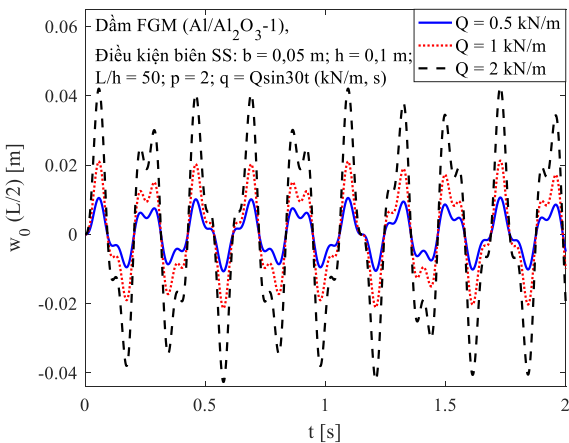
Hình 5. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p lên đáp ứng động của dầm FGM



Hình 6. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước L/h lên đáp ứng động của dầm FGM

Khảo sát ảnh hưởng của biên độ lực cưỡng bức, Q

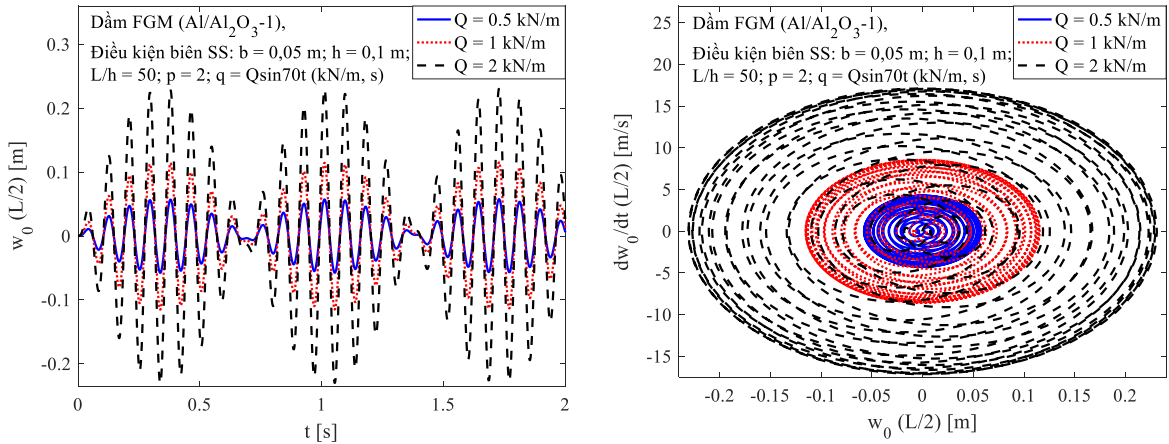
Hình 7 khảo sát đáp ứng động của dầm FGM ($L/h = 50, p = 2, \omega_1 = 79,08 \text{ rad/s}$) dưới tác dụng của tải trọng cưỡng bức phân bố đều $q(t) = Q \sin 30t$ (kN/m, s); ba trường hợp biên độ của lực cưỡng bức được xem xét bao gồm: $Q = 0,5; 1$ và 2 (kN/m). Có thể thấy rằng, khi biên độ lực cưỡng bức Q tăng ảnh hưởng lên biên độ dao động, vận tốc của độ võng, chúng tăng tuyến tính theo biên độ lực cưỡng bức. Đường cong quỹ đạo pha trong trường hợp tần số của lực cưỡng bức xa so với tần số cơ bản, trở nên hỗn loạn, gồm nhiều đường cong giao cắt nhau.



Hình 7. Đáp ứng động của dầm FGM dưới tác dụng của tải trọng uốn $q = Q \sin 30t$ (kN/m, s) với các biên độ của lực cưỡng bức khác nhau

Hình 8 khảo sát ảnh hưởng của biên độ lực cưỡng bức: $q(t) = Q \sin 70t$ (kN/m, s) lên hiện tượng phách điều hòa của dầm FGM ($L/h = 50, p = 2, \omega_1 = 79,08 \text{ rad/s}$). Dễ dàng thấy rằng, trong trường

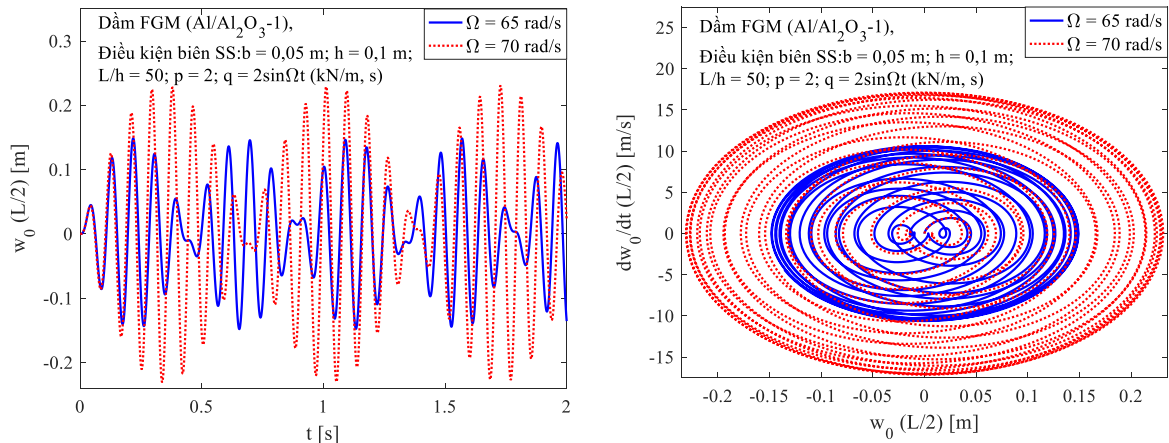
hợp tần số của lực cưỡng bức gần với tần số cơ bản, đường cong quỹ đạo pha gần như là một đường cong dạng xoắn ốc khép kín, dao động của dầm FGM tương tự dao động điều hòa. Biên độ phách tăng tuyến tính theo chiều tăng của biên độ lực cưỡng bức, trong khi chiều dài phách là không đổi. Nhìn chung, khi hiện tượng phách xảy ra, các biên độ của độ võng tăng đáng kể so với trường hợp tần số lực cưỡng bức xa tần số dao động cơ bản của dầm.



Hình 8. So sánh ảnh hưởng của biên độ lực cưỡng bức tới hiện tượng phách điều hòa của dầm FGM

Khảo sát ảnh hưởng của tần số lực cưỡng bức, Ω lên hiện tượng phách điều hòa

Hình 9 mô tả đáp ứng động của dầm FGM: ($L/h = 50, p = 2, \omega_1 = 79,08 \text{ rad/s}$) dưới tác dụng của tải trọng cưỡng bức phân bố đều $q(t) = 2 \sin \Omega t$ (kN/m, s); hai trường hợp tần số của lực cưỡng bức được xem xét bao gồm: $\Omega = 65$ và 70 (rad/s). Rõ ràng là, khi tần số của lực cưỡng bức càng gần với tần số cơ bản, biên độ phách và chiều dài phách đều tăng theo.



Hình 9. So sánh ảnh hưởng của tần số lực cưỡng bức tới hiện tượng phách điều hòa của dầm FGM

7. Kết luận

Trên cơ sở lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và chọn hệ tọa độ quy chiếu đi qua mặt trung hoàn, bài báo đã thiết lập được phương trình chủ đạo để phân tích đáp ứng động của dầm FGM chịu tải trọng uốn dưới dạng đơn giản, tương tự như đối với dầm đẳng hướng. Biểu thức giải tích dạng hiển của tần số dao động riêng và đáp ứng động của dầm FGM liên kết khớp ở hai đầu đã được thiết lập cho thấy ưu điểm của việc sử dụng hệ trục tọa độ đi qua mặt trung hòa để tính toán. Chương trình tính tự viết trên nền Matlab cũng như nghiệm giải tích thu được đã chứng tỏ độ tin cậy qua so sánh với kết quả các tác giả khác sử dụng nghiệm Navier và tính toán trên mặt trung bình. Các khảo sát số đã được thực hiện cho phép đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu đến đáp ứng động của dầm FGM liên kết khớp hai đầu. Các kết quả nhận được cho thấy:

- Tần số dao động cơ bản của dầm luôn ứng với dạng dao động gồm nửa bước sóng ($m = 1$);
- Việc lựa chọn và lấy đầy đủ số số hạng trong khai triển nghiệm độ võng là cần thiết để khảo sát đáp ứng động;
- Khi tăng p , hoặc tỷ số kích thước L/h làm giảm độ cứng kết cấu dầm, dẫn đến giảm tần số dao động tự do và độ võng tăng;
- Biên độ lực cưỡng bức tỷ lệ với độ võng của dầm trong phân tích đáp ứng động tuyến tính;
- Khi tần số lực cưỡng bức gần với tần số dao động tự do, hiện tượng phách điều hòa xảy ra với dầm. Biên độ lực cưỡng bức tăng sẽ làm tăng biên độ phách; trong khi tần số lực cưỡng bức ảnh hưởng tới cả biên độ và chiều dài phách.

Tài liệu tham khảo

- [1] Koizumi, M. (1993). *The concept of FGM*.
- [2] Phuong, N. T. B., Tu, T. M., Phuong, H. T., Long, N. V. (2019). [Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 13(1):33–45.
- [3] Aydogdu, M., Taskin, V. (2007). [Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges](#). *Materials & Design*, 28(5):1651–1656.
- [4] Li, X.-F. (2008). [A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams](#). *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5):1210–1229.
- [5] Sina, S. A., Navazi, H. M., Haddadpour, H. (2009). [An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams](#). *Materials & Design*, 30(3):741–747.
- [6] Şimşek, M., Kocatürk, T. (2009). [Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load](#). *Composite Structures*, 90(4):465–473.
- [7] Şimşek, M. (2010). [Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories](#). *Nuclear Engineering and Design*, 240(4):697–705.
- [8] Şimşek, M. (2010). [Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories](#). *Composite Structures*, 92(4):904–917.
- [9] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2012). [Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1):57–66.
- [10] Pradhan, K. K., Chakraverty, S. (2013). [Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method](#). *Composites Part B: Engineering*, 51:175–184.
- [11] Mashat, D. S., Carrera, E., Zenkour, A. M., Khateeb, S. A. A., Filippi, M. (2014). [Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements](#). *Composites Part B: Engineering*, 59:269–278.
- [12] Su, H., Banerjee, J. (2015). [Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams](#). *Computers & Structures*, 147:107–116.

- [13] Le, T. H., Gan, B. S., Trinh, T. H., Nguyen, D. K. (2014). [Finite element analysis of multi-span functionally graded beams under a moving harmonic load](#). *Mechanical Engineering Journal*, 1(3):CM0013–CM0013.
- [14] Bellifa, H., Benrahou, K. H., Hadji, L., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2015). [Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position](#). *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(1):265–275.
- [15] Zhang, D.-G. (2013). [Modeling and analysis of FGM rectangular plates based on physical neutral surface and high order shear deformation theory](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 68:92–104.
- [16] Zhang, D.-G., Zhou, Y.-H. (2008). [A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface](#). *Computational Materials Science*, 44(2):716–720.
- [17] Yaghoobi, H., Fereidoon, A. (2010). Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load. *World Applied Sciences Journal*, 10(3):337–341.
- [18] Larbi, L. O., Kaci, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2013). [An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams#](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41(4):421–433.
- [19] Li, J., Wang, G., Guan, Y., Zhao, G., Lin, J., Naceur, H., Coutellier, D. (2021). [Meshless analysis of bi-directional functionally graded beam structures based on physical neutral surface](#). *Composite Structures*, 259:113502.
- [20] Zhang, D.-G. (2013). [Nonlinear bending analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 100:121–126.
- [21] Chi, S.-H., Chung, Y.-L. (2006). [Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis](#). *International Journal of Solids and Structures*, 43(13):3657–3674.
- [22] Atmane, H. A., Tounsi, A., Bernard, F. (2015). [Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1):71–84.
- [23] Reddy, J. N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press.
- [24] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [25] Dym, C. L., Shames, I. H. (1973). *Solid mechanics*. Springer.