

PHÂN TÍCH TÍNH KẾT CẤU VỎ BẰNG PHẦN TỬ VỎ PHẪNG CÓ BIẾN DẠNG TRƠN KẾT HỢP ES+NS-MITC3

Đỗ Anh Vũ^a, Châu Đình Thành^{b,*}

^aPhòng Quản lý Kiến trúc quy hoạch và Hạ tầng kỹ thuật, Sở Xây Dựng Đồng Tháp, số 60 đường 30/4, Phường 1, thành phố Cao Lãnh, tỉnh Đồng Tháp, Việt Nam

^bKhoa Xây dựng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh, số 01 Võ Văn Ngân, Phường Linh Chiểu, TP. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

Nhận ngày 22/02/2021, Sửa xong 05/04/2021, Chấp nhận đăng 15/04/2021

Tóm tắt

Trong nghiên cứu này, phương pháp làm trơn biến dạng kết hợp trên cạnh (ES) và trên nút (NS) phần tử được phát triển cho phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút MITC3. Phần tử vỏ phẳng MITC3 có biến dạng cắt ngoài mặt phẳng được xấp xỉ lại nên không xảy ra hiện tượng khóa cắt khi phân tích các kết cấu vỏ mỏng. Các biến dạng hằng số trên miền phần tử vỏ phẳng MITC3 được làm trơn bằng cách trung bình trên miền các phần tử chung cạnh và chung nút. Phần tử vỏ phẳng đề xuất ES+NS-MITC3 điều chỉnh sự đóng góp của phương pháp làm trơn biến dạng trên cạnh có khuynh hướng làm tăng độ cứng và phương pháp làm trơn biến dạng trên nút có tính chất làm giảm độ cứng thông qua hệ số tỉ lệ $\beta \in [0, 1]$. Hiệu quả của phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 được đánh giá thông qua phân tích tĩnh một số kết cấu vỏ đồng nhất điển hình. Kết quả so sánh độ võng của các kết cấu vỏ điển hình khi được tính toán bằng phần tử ES+NS-MITC3 và một số phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút tương tự cho thấy độ chính xác và hội tụ của phần tử đề xuất được cải thiện.

Từ khóa: phần tử vỏ phẳng; khóa cắt; kỹ thuật MITC3; phương pháp làm trơn biến dạng; phương pháp làm trơn biến dạng kết hợp.

STATIC ANALYSES OF SHELL STRUCTURES USING FLAT SHELL FINITE ELEMENTS HAVING COMBINED SMOOTHED STRAINS ES+NS-MITC3

Abstract

In this study, the combination of the edge-based smoothed strain (ES) and the node-based smoothed strain (NS) methods is developed for the 3-node triangular flat shell finite element MITC3. Using the MITC3 technique to interpolate the transverse shear strains independently, the flat shell finite element MITC3 overcomes the shear locking phenomenon when used to analyze thin shell structures. The constant strains on each flat shell finite element MITC3 are smoothed by averaging on domains of elements having common edges and nodes. The proposed flat shell finite element ES+NS-MITC3 modifies the contribution of the edge-based smoothed strain approach, which usually behaves over stiffness, and the node-based smoothed strain approach normally causing overly soft behaviors by using the scale factor $\beta \in [0, 1]$. The effectiveness of the ES+NS-MITC3 element is evaluated by static analyses of several benchmark homogenous shell structures. Comparison between numerical deflections computed by the ES+NS-MITC3 element and those provided by other similar 3-node triangular flat shell finite elements shows that the accuracy and convergence of the proposed element are improved.

Keywords: flat shell finite element; shear locking; MITC3 technique; smoothed strain methods; combined smoothed strain methods.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2021-15\(2V\)-04](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2021-15(2V)-04) © 2021 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: chdthanh@hcmute.edu.vn (Thành, C. Đ.)

1. Giới thiệu

Việc phân tích các kết cấu vỏ có tầm quan trọng trong các ngành khoa học kỹ thuật như: xây dựng, cơ khí, hàng không, hàng hải, ô tô, ... Kết cấu vỏ tuy mỏng, nhẹ nhưng có ưu điểm là chịu tải trọng tốt, khả năng vượt nhịp lớn và có tính thẩm mỹ cao. Lý thuyết tấm vỏ đồng nhất hiện nay có thể chia làm 2 loại: lý thuyết tấm vỏ cổ điển của Kirchhoff –Love (CPT) và lý thuyết tấm vỏ biến dạng cắt bậc nhất của Reissner-Mindlin (FSDT) [1]. Trong đó, lý thuyết tấm vỏ cổ điển bỏ qua biến dạng cắt ngoài mặt phẳng được áp dụng cho các loại tấm vỏ mỏng. Đối với tấm vỏ dày, biến dạng cắt ngoài mặt phẳng luôn khác không nên lý thuyết tấm vỏ biến dạng cắt bậc nhất được sử dụng.

Do các kết cấu vỏ thường có hình dạng, điều kiện biên và chịu tải trọng phức tạp nên các phương pháp số, phổ biến nhất là phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH), được áp dụng. Khi phân tích bằng PP PTHH [2] các kết cấu vỏ thường được rời rạc bằng một trong các loại phần tử: phần tử vỏ khối 3 chiều, phần tử vỏ 3 chiều suy biến hoặc phần tử vỏ phẳng. Trong các loại phần tử này thì phần tử vỏ phẳng, kết hợp giữa phần tử tấm ứng xử theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phần tử ứng suất phẳng, thường được sử dụng rộng rãi vì dễ thiết lập công thức PTHH dựa vào xấp xỉ chuyển vị tuyến tính dạng C^0 . Tuy nhiên, khi phân tích các kết cấu vỏ mỏng, phần tử vỏ phẳng dạng C^0 thuần túy không loại bỏ được biến dạng cắt ngoài mặt phẳng và dẫn đến hiện tượng khóa cắt làm cho kết quả tính toán không chính xác. Do đó, để phân tích kết cấu vỏ dày hoặc mỏng bằng công thức PTHH vỏ phẳng dạng C^0 thì phải khử hiện tượng khóa cắt bằng các kỹ thuật xấp xỉ lại biến dạng cắt ngoài mặt phẳng như kỹ thuật dạng Mindlin (Mindlin type – MIN) [3], chênh lệch biến dạng cắt rời rạc (Discrete Shear Gap – DSG) [4], hoặc các thành phần ten-xơ nội suy hỗn hợp (Mixed Interpolation of Tensorial Components – MITC) [5]. Đối với phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút, với ưu điểm dễ dàng trong việc chia lưới PTHH các kết cấu vỏ có hình dạng phức tạp, các kỹ thuật khử khóa cắt MIN3 [3] và DSG3 [4] có ma trận độ cứng phụ thuộc vào thứ tự đánh số nút phần tử. Trong khi đó, Lee và Bathe [6] đã phát triển kỹ thuật khử khóa cắt MITC3 cho phần tử vỏ 3 chiều suy biến dạng tam giác 3 nút có đặc điểm nổi trội là ma trận độ cứng độc lập với thứ tự đánh số nút phần tử. Công thức biến dạng cắt ngoài mặt phẳng theo kỹ thuật MITC3 đã được Chau-Dinh và cs. [7] thiết lập ở dạng tường minh chỉ phụ thuộc vào tọa độ nút phần tử.

Trong nỗ lực cải thiện khả năng tính toán của PP PTHH thông thường, Liu và Nguyen – Thoi [8] đã phát triển PP PTHH trơn biến dạng bằng cách trung bình các biến dạng bên trong phần tử (cell-based smoothing – CS) hoặc giữa các phần tử chung cạnh (edge-based smoothing – ES) hoặc giữa các phần tử chung nút (node-based smoothing – NS). PP PTHH trơn đã được phát triển cho các phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút bằng cách kết hợp các phương pháp làm trơn biến dạng trên phần tử (CS) và trên cạnh (ES) hoặc trên nút (NS) với các kỹ thuật khử khóa cắt DSG3 hoặc MITC3. Kết quả, các phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút CS-DSG3, ES-DSG3 và NS-DSG3 đã được xây dựng để phân tích tĩnh kết cấu vỏ đồng nhất trong các nghiên cứu [9–11]. Tương tự, các phần tử vỏ phẳng ES-MITC3 và NS-MITC3 cũng đã được đề xuất để phân tích tĩnh kết cấu vỏ đồng nhất [12, 13]. Phạm và cs. [14, 15] nghiên cứu ứng xử tĩnh của các kết cấu vỏ làm bằng vật liệu composite nhiều lớp hoặc vật liệu phân lớp chức năng bằng phần tử ES-MITC3.

Các kết quả phân tích ứng xử kết cấu bằng PP PTHH trơn cho thấy so với PP PTHH thông thường, phương pháp làm trơn biến dạng trên cạnh thường làm tăng độ cứng phần tử. Ngược lại, phương pháp làm trơn biến dạng trên nút lại có khuynh hướng mềm hóa độ cứng phần tử. Vì vậy, với mong muốn cải thiện độ hội tụ bằng cách tận dụng đặc điểm của cả 2 phương pháp làm trơn biến dạng trên cạnh và trên nút, phương pháp làm trơn biến dạng kết hợp miền làm trơn trên cạnh và trên nút hay còn gọi là PP β -PTHH (β -FEM) đã được nghiên cứu. Nhờ hệ số $\beta \in [0, 1]$ tỉ lệ tham gia vào độ cứng phần tử của phương pháp làm trơn biến dạng trên cạnh và trên nút được hiệu chỉnh. PP β -PTHH đã được phát triển

cho các phần tử tấm sử dụng kỹ thuật khử khóa cắt DSG3 [16] hoặc MITC3 [17]. Nguyen-Hoang và cs. đã áp dụng phương pháp làm trơn biến dạng kết hợp cho phần tử vỏ phẳng DGS3 để phân tích tĩnh và dao động tự do các kết cấu vỏ đồng nhất theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất [18]. Kết quả nghiên cứu cho thấy phần tử sử dụng phương pháp làm trơn biến dạng kết hợp có kết quả nằm giữa kết quả của phần tử chỉ sử dụng một phương pháp làm trơn biến dạng trên cạnh hoặc trên nút.

Dựa trên các kết quả nghiên cứu về các phần tử tấm, vỏ có biến dạng được làm trơn, và từ phần tử tấm tam giác 3 nút ES+NS-MITC3 [17] bài báo này phát triển công thức PTHH vỏ phẳng tam giác 3 nút ES+NS-MITC3 để phân tích tĩnh một số kết cấu vỏ đồng nhất điển hình. Phần tử đề xuất sử dụng phương pháp làm trơn biến dạng trên cạnh kết hợp làm trơn biến dạng trên nút và kỹ thuật khử khóa cắt MITC3. So với phần tử tấm ES+NS-MITC3 [17], các biến dạng của phần tử đề xuất phải được chiếu trên cùng hệ trục tọa độ được thiết lập cho các phần tử chung cạnh và chung nút trước khi được làm trơn do các phần tử trong kết cấu vỏ không đồng phẳng. Trong phần tiếp theo, các bước thiết lập công thức PTHH vỏ phẳng ES+NS-MITC3 sẽ được trình bày chi tiết. Ở phần 3, độ hội tụ và chính xác của phần tử đề xuất được đánh giá thông qua kết quả phân tích chuyển vị tĩnh một số kết cấu vỏ đồng nhất điển hình. Cuối cùng, một số kết luận được tổng kết trong phần 4.

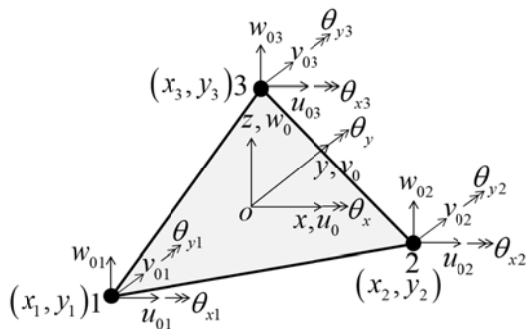
2. Công thức PTHH vỏ phẳng ES+NS-MITC3

2.1. Công thức PTHH vỏ phẳng MITC3 trong hệ tọa độ cục bộ

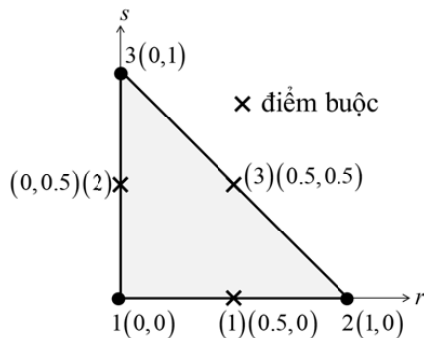
Xét kết cấu vỏ đồng nhất được rời rạc bằng các phần tử tam giác 3 nút. Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ $0xyz$ với mặt phẳng $0xy$ trùng với mặt trung bình phần tử được xác định [1]:

$$u = u_0 - z\theta_y; \quad v = v_0 + z\theta_x; \quad w = w_0 \tag{1}$$

trong đó u, v, w lần lượt là chuyển vị thẳng theo phương x, y, z ; u_0, v_0, w_0 là các chuyển vị thẳng của mặt trung bình và θ_x, θ_y lần lượt là các góc xoay của mặt trung bình quanh trục x và y với chiều dương qui ước như Hình 1.



Hình 1. Phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút và các thành phần chuyển vị theo chiều dương qui ước trong hệ tọa độ cục bộ $0xyz$



Hình 2. Tọa độ các điểm buộc trong hệ tọa độ tự nhiên rst theo kỹ thuật khử khóa cắt MITC3 [6]

Từ chuyển vị ở công thức (1), biến dạng trong mặt phẳng ϵ và biến dạng cắt ngoài mặt phẳng ϵ_s trong hệ tọa độ cục bộ phần tử có dạng:

$$\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T = [u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x}]^T = \epsilon_m + z\epsilon_b \tag{2}$$

với

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} u_{0,x} & v_{0,y} & u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix}^T; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} -\theta_{y,x} & \theta_{x,y} & -\theta_{y,y} + \theta_{x,x} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_{,z} + w_{,x}v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

Trong bài báo này, dấu phẩy dưới 1, j được dùng cho ký hiệu đạo hàm.

Các thành phần chuyển vị cục bộ $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y$ trên mặt trung bình của phần tử được xấp xỉ như sau [19]:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{I=1}^3 N_I \mathbf{u}_I \quad (5)$$

trong đó, $\mathbf{u}_0 = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ \theta_x \ \theta_y]^T$; $\mathbf{u}_I = [u_{0I} \ v_{0I} \ w_{0I} \ \theta_{xI} \ \theta_{yI}]^T$ là chuyển vị cục bộ của nút I có chiều dương qui ước ở Hình 1; và N_I là các hàm dạng tuyến tính dạng C^0 được xác định trong hệ tọa độ tự nhiên rst :

$$N_1 = 1 - r - s; \quad N_2 = r; \quad N_3 = s \quad (6)$$

Từ xấp xỉ chuyển vị cục bộ trên mặt trung bình ở công thức (5), các biến dạng màng $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, biến dạng uốn $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ và biến dạng cắt ngoài mặt phẳng $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ ở các công thức (3) và (4) được xác định:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_{mI} \mathbf{u}_I; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_{bI} \mathbf{u}_I \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_{sI} \mathbf{u}_I \quad (8)$$

với $\mathbf{B}_{mI}, \mathbf{B}_{bI}, \mathbf{B}_{sI}$ là các ma trận quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị nút phần tử có dạng

$$\mathbf{B}_{mI} = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{bI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 & N_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{I,x} & -N_{I,y} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_{sI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,x} & 0 & -N_I \\ 0 & 0 & N_{I,y} & N_I & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Gọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ và (x_3, y_3) lần lượt là tọa độ nút 1, 2, 3 của phần tử trong hệ tọa độ cục bộ $Oxyz$ như Hình 1 và định nghĩa $a = (x_2 - x_1), b = (y_2 - y_1), c = (y_3 - y_1), d = (x_3 - x_1), A^e$ là diện tích của phần tử. Đạo hàm của các hàm dạng N_I theo các biến x, y có thể được biểu diễn ở dạng tường minh chỉ phụ thuộc tọa độ nút phần tử như sau:

$$N_{1,x} = \frac{b-c}{2A_e}; \quad N_{1,y} = \frac{d-a}{2A_e}; \quad N_{2,x} = \frac{c}{2A_e}; \quad N_{2,y} = \frac{-d}{2A_e}; \quad N_{3,x} = \frac{-b}{2A_e}; \quad N_{3,y} = \frac{a}{2A_e} \quad (11)$$

Biến dạng cắt ngoài mặt phẳng $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ được tính trực tiếp từ xấp xỉ chuyển vị ở công thức (8) sẽ không tiến về 0 khi phân tích kết cấu vỏ có chiều dày mỏng dần. Kết quả phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút sẽ bị hiện tượng khóa cắt khi được sử dụng để phân tích kết cấu vỏ mỏng. Để khắc phục hiện tượng khóa cắt Lee và Bathe [6] đã phát triển kỹ thuật khử “khóa cắt” MITC3 bằng cách xấp xỉ lại các biến dạng cắt ngoài mặt phẳng bằng hàm mới thông qua những điểm buộc trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$\tilde{\varepsilon}_{rt} = \varepsilon_{rt}^{(1)} + cs; \quad \tilde{\varepsilon}_{st} = \varepsilon_{st}^{(2)} - cr \quad \text{với} \quad c = \varepsilon_{st}^{(2)} - \varepsilon_{rt}^{(1)} - \varepsilon_{st}^{(3)} + \varepsilon_{rt}^{(3)} \quad (12)$$

trong đó, $\varepsilon_{rt}^{(1)}$, $\varepsilon_{st}^{(2)}$, $\varepsilon_{rt}^{(3)}$, $\varepsilon_{st}^{(3)}$ lần lượt là giá trị của biến dạng cắt ngoài mặt phẳng tính theo công thức (8) tại các điểm buộc (1), (2), (3) có tọa độ như Hình 2.

$$\tilde{e}_{rt} = e_{rt}^{(1)} + cs; \quad \tilde{e}_{st} = e_{st}^{(2)} - cr \quad (13)$$

trong đó $c = e_{st}^{(2)} - e_{rt}^{(1)} - e_{st}^{(3)} + e_{rt}^{(3)}$.

Dùng công thức biến đổi biến dạng từ hệ tọa độ tự nhiên rst sang hệ tọa độ cục bộ xyz và sử dụng 1 điểm Gauss để tính toán, biến dạng cắt ngoài mặt phẳng xấp xỉ theo kỹ thuật MITC3 được biểu diễn lại theo chuyển vị nút phần tử như sau:

$$\varepsilon_s^{MITC3} = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_{sI}^{MITC3} \mathbf{u}_I \quad (14)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{s1}^{MITC3} &= \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & b-c & (b-c)(b+c)/6 & A_e + (d-a)(b+c)/6 \\ 0 & 0 & d-a & -A_e - (b-c)(a+d)/6 & -(d-a)(a+d)/6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{s2}^{MITC3} &= \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & -bc/2 + c(b+c)/6 & ac/2 - d(b+c)/6 \\ 0 & 0 & -d & bd/2 - c(a+d)/6 & -ad/2 + d(a+d)/6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{s3}^{MITC3} &= \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & bc/2 - b(b+c)/6 & -bd/2 + a(b+c)/6 \\ 0 & 0 & a & -ac/2 + b(a+d)/6 & ad/2 - a(a+d)/6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Thế các công thức (7) và (14) vào phương trình công ảo, ma trận độ cứng của phần tử vỏ phẳng MITC3 trong hệ trục tọa độ cục bộ được xác định:

$$\mathbf{K}_{IJ}^{e,loc} = \mathbf{B}_{mI}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{mJ} A^e + \mathbf{B}_{bI}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bJ} A^e + (\mathbf{B}_{sI}^{MITC3})^T \mathbf{D}_s (\mathbf{B}_{sJ}^{MITC3}) A^e \quad (16)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{D}_s &= \frac{kh^3}{h^2 + \alpha h_e^2} \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

với E , ν lần lượt là mô-đun đàn hồi và hệ số Poisson của vật liệu, h là chiều dày của vỏ, $k = 5/6$, h_e là chiều dài lớn nhất của cạnh phần tử và $\alpha = 0, 1$ là hệ số ổn định [20].

2.2. Công thức PTHH vỏ phẳng MITC3 trong hệ tọa độ toàn cục

Gọi $U_I = [U_I \ V_I \ W_I \ \theta_{XI} \ \theta_{YI} \ \theta_{ZI}]^T$ là chuyển vị của nút I trong hệ tọa độ toàn cục $OXYZ$. Quan hệ giữa chuyển vị nút \mathbf{u}_I trong hệ trục tọa độ cục bộ $0xyz$ và chuyển vị nút \mathbf{U}_I trong hệ trục tọa độ toàn cục $OXYZ$ cho bởi:

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{T} \mathbf{U}_I \quad (18)$$

trong đó

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_{xX} & n_{xY} & n_{xZ} & 0 & 0 & 0 \\ n_{yX} & n_{yY} & n_{yZ} & 0 & 0 & 0 \\ n_{zX} & n_{zY} & n_{zZ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{xX} & n_{xY} & n_{xZ} \\ 0 & 0 & 0 & n_{yX} & n_{yY} & n_{yZ} \\ 0 & 0 & 0 & n_{zX} & n_{zY} & n_{zZ} \end{bmatrix} \quad (19)$$

với $(n_{xX}, n_{xY}, n_{xZ}), (n_{yX}, n_{yY}, n_{yZ}), (n_{zX}, n_{zY}, n_{zZ})$ lần lượt là cosin chỉ phương của trục x, y, z trong hệ trục tọa độ toàn cục $OXYZ$.

Thế (18) vào (7) và (14), quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị nút phần tử trong hệ trục tọa độ toàn cục được xác định:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_{mI} \mathbf{TU}_I; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_{bI} \mathbf{TU}_I; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s^{MITC3} = \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_{sI}^{MITC3} \mathbf{TU}_I \quad (20)$$

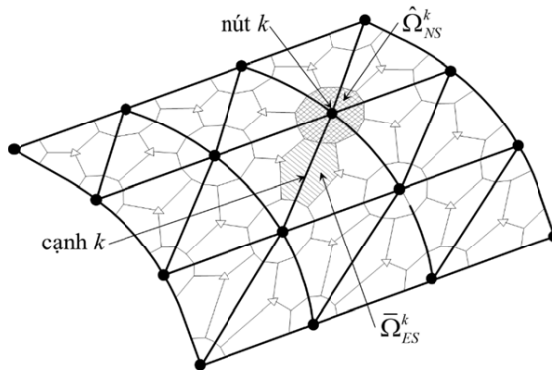
Kết quả, ma trận độ cứng của phần tử vỏ phẳng MITC3 trong hệ trục tọa độ toàn cục có dạng:

$$\mathbf{K}_{IJ}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{IJ}^{e,loc} \mathbf{T} \quad (21)$$

Công thức (16) cho thấy thành phần của ma trận độ cứng phần tử vỏ phẳng MITC3 trong hệ tọa độ cục bộ liên quan bậc tự do θ_{zI} bằng 0. Vì vậy, trong ma trận độ cứng kết cấu, thành phần liên quan đến bậc tự do θ_{zI} tại các nút kết nối giữa các phần tử đồng phẳng sẽ bằng 0, tức là ma trận độ cứng kết cấu bị suy biến. Để khắc phục hiện tượng này, tại vị trí liên quan bậc tự do θ_{zI} , một giá trị bằng 10^{-3} lần giá trị lớn nhất của các thành phần trên đường chéo chính của ma trận độ cứng phần tử được thêm vào [20].

2.3. Công thức PTHH vỏ phẳng ES+NS-MITC3

Các ma trận quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị nút của phần tử vỏ phẳng MITC3 cho bởi các công thức (9) và (15) là hằng số trên miền phần tử vì chỉ phụ thuộc vào tọa độ nút phần tử. Kết quả, trường biến dạng giữa các phần tử vỏ phẳng MITC3 không liên tục. Để giảm sự chênh lệch biến dạng này, biến dạng của các phần tử được làm trơn trên miền các phần tử chung cạnh Ω_{ES}^k hoặc chung nút Ω_{NS}^k . Các kết quả nghiên cứu cho thấy, phương pháp làm trơn biến dạng trên miền Ω_{ES}^k xác định bởi các đoạn thẳng nối 2 nút của 1 cạnh với trọng tâm của 2 phần tử chung cạnh có khuynh hướng làm tăng độ cứng. Ngược lại, phương pháp làm trơn biến dạng trên miền Ω_{NS}^k giới hạn bởi các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh với trọng tâm của các phần tử chung nút sẽ làm mềm độ cứng. Vì vậy, trong nghiên cứu này các biến dạng được làm trơn trên miền kết hợp gồm phần bao quanh nút để tạo thành miền làm trơn trên nút $\bar{\Omega}_{NS}^k$ và phần còn lại chung cạnh giữa 2 phần tử là miền làm trơn trên cạnh $\bar{\Omega}_{ES}^k$ [18] như Hình 3.



Hình 3. Miền làm trơn biến dạng kết hợp trên cạnh (ES) và trên nút (NS) của kết cấu vỏ được rời rạc bằng các phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút

Để điều chỉnh tỉ lệ giữa 2 miền làm trơn, hệ số hiệu chỉnh $\beta \in [0, 1]$ được định nghĩa nhằm xác định tỉ lệ chiều dài trên cạnh phần tử tham gia vào miền $\hat{\Omega}_{NS}^k$ và $\tilde{\Omega}_{ES}^k$. Nghĩa là, $\beta = 0$ tương ứng với miền làm trơn trên cạnh bằng 0 và trở thành miền làm trơn trên nút hoàn toàn; $\beta = 1$ tương ứng với miền làm trơn trên cạnh hoàn toàn. Khi đó, miền $\hat{\Omega}_{NS}^k$ có diện tích

$$\hat{A}_{NS}^k = (1 - \beta^2)A_{NS}^k \quad (22)$$

và miền $\tilde{\Omega}_{ES}^k$ có diện tích:

$$\tilde{A}_{ES}^k = \beta^2 A_{ES}^k \quad (23)$$

với A_{NS}^k và A_{ES}^k lần lượt là diện tích của miền làm trơn thuần túy trên nút Ω_{NS}^k và trên cạnh Ω_{ES}^k .

Do miền làm trơn $\tilde{\Omega}_{ES}^k$ của cạnh k gồm 2 phần tử vỏ phẳng không đồng phẳng nên các biến dạng được định nghĩa trong hệ trục tọa độ cục bộ $oxyz$ của mỗi phần tử được biến đổi thành các biến dạng trong hệ trục tọa độ cục bộ $\tilde{o}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ chung của 2 phần tử trước khi áp dụng phương pháp làm trơn. Hệ trục tọa độ cục bộ $\tilde{o}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ được định nghĩa bởi trục $\tilde{o}\tilde{x}$ trùng với cạnh chung, trục $\tilde{o}\tilde{z}$ có véc-tơ chỉ phương là tổng các véc-tơ pháp tuyến của 2 phần tử chung cạnh và trục $\tilde{o}\tilde{y}$ tạo với trục $\tilde{o}\tilde{x}$, $\tilde{o}\tilde{z}$ thành 1 tam diện thuận. Tương tự, một hệ trục tọa độ cục bộ $\tilde{o}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ chung cho các phần tử trong miền làm trơn $\hat{\Omega}_{NS}^k$ của nút k được thiết lập có trục $\tilde{o}\tilde{x}$ theo phương cạnh của phần tử đầu tiên, trục $\tilde{o}\tilde{z}$ có véc-tơ chỉ phương là tổng các véc-tơ pháp tuyến của các phần tử trong miền $\tilde{\Omega}_{NS}^k$ và trục $\tilde{o}\tilde{y}$ tạo với trục $\tilde{o}\tilde{x}$ và trục $\tilde{o}\tilde{z}$ thành một tam diện thuận.

Các biến dạng của phần tử vỏ phẳng MITC3 trong hệ tọa độ cục bộ $oxyz$ được chuyển sang hệ tọa độ toàn cục XYZ và cuối cùng chuyển sang hệ trục tọa độ cục bộ $\tilde{o}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, $\tilde{o}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ của các miền làm trơn $\tilde{\Omega}_{ES}^k$, $\hat{\Omega}_{NS}^k$ như sau [10, 19]:

$$\tilde{\varepsilon}_m = \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2} \varepsilon_m; \quad \tilde{\varepsilon}_b = \tilde{\mathbf{R}}_{b1} \mathbf{R}_{b2} \varepsilon_b; \quad \tilde{\varepsilon}_s^{MITC3} = \tilde{\mathbf{R}}_{s1} \mathbf{R}_{s2} \varepsilon_s^{MITC3} \quad (24)$$

$$\tilde{\varepsilon}_m = \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2} \varepsilon_m; \quad \tilde{\varepsilon}_b = \tilde{\mathbf{R}}_{b1} \mathbf{R}_{b2} \varepsilon_b; \quad \tilde{\varepsilon}_s^{MITC3} = \tilde{\mathbf{R}}_{s1} \mathbf{R}_{s2} \varepsilon_s^{MITC3} \quad (25)$$

trong đó, các ma trận chuyển hệ tọa độ được xác định bởi

$$\tilde{\mathbf{R}}_{m1} = \tilde{\mathbf{R}}_{b1} = \begin{bmatrix} n_{\tilde{x}X}^2 & n_{\tilde{x}Y}^2 & n_{\tilde{x}Z}^2 & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}Y}n_{\tilde{x}Z} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{x}Z} \\ n_{\tilde{y}X}^2 & n_{\tilde{y}Y}^2 & n_{\tilde{y}Z}^2 & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{y}Y} & n_{\tilde{y}Y}n_{\tilde{y}Z} & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{y}Z} \\ 2n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{y}X} & 2n_{\tilde{x}Y}n_{\tilde{y}Y} & 2n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{y}Z} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{y}Y} + n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{y}Y} + n_{\tilde{y}Z}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{y}Z} + n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{x}Z} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{s1} = \begin{bmatrix} 2n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{z}X} & 2n_{\tilde{x}Y}n_{\tilde{z}Y} & 2n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{z}Z} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}Z}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{z}Z} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{x}Z} \\ 2n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{z}X} & 2n_{\tilde{y}Y}n_{\tilde{z}Y} & 2n_{\tilde{y}Z}n_{\tilde{z}Z} & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{y}Y} & n_{\tilde{y}Z}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}Z}n_{\tilde{y}Y} & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{z}Z} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{y}Z} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{m1} = \tilde{\mathbf{R}}_{b1} = \begin{bmatrix} n_{\tilde{x}X}^2 & n_{\tilde{x}Y}^2 & n_{\tilde{x}Z}^2 & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}Y}n_{\tilde{x}Z} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{x}Z} \\ n_{\tilde{y}X}^2 & n_{\tilde{y}Y}^2 & n_{\tilde{y}Z}^2 & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{y}Y} & n_{\tilde{y}Y}n_{\tilde{y}Z} & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{y}Z} \\ 2n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{y}X} & 2n_{\tilde{x}Y}n_{\tilde{y}Y} & 2n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{y}Z} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{y}Y} + n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{y}Y} + n_{\tilde{y}Z}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{y}Z} + n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{x}Z} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{s1} = \begin{bmatrix} 2n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{z}X} & 2n_{\tilde{x}Y}n_{\tilde{z}Y} & 2n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{z}Z} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}Z}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}Z}n_{\tilde{x}Y} & n_{\tilde{x}X}n_{\tilde{z}Z} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{x}Z} \\ 2n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{z}X} & 2n_{\tilde{y}Y}n_{\tilde{z}Y} & 2n_{\tilde{y}Z}n_{\tilde{z}Z} & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{y}Y} & n_{\tilde{y}Z}n_{\tilde{z}Y} + n_{\tilde{z}Z}n_{\tilde{y}Y} & n_{\tilde{y}X}n_{\tilde{z}Z} + n_{\tilde{z}X}n_{\tilde{y}Z} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{R}_{m2} = \mathbf{R}_{b2} = \begin{bmatrix} n_{xX}^2 & n_{yX}^2 & n_{xX}n_{yX} \\ n_{xY}^2 & n_{yY}^2 & n_{xY}n_{yY} \\ n_{xZ}^2 & n_{yZ}^2 & n_{xZ}n_{yZ} \\ 2n_{xX}n_{xY} & 2n_{yX}n_{yY} & n_{xX}n_{yY} + n_{xY}n_{yX} \\ 2n_{xY}n_{xZ} & 2n_{yY}n_{yZ} & n_{xY}n_{yZ} + n_{xZ}n_{yY} \\ 2n_{xX}n_{xZ} & 2n_{yX}n_{yZ} & n_{xX}n_{yZ} + n_{xZ}n_{yX} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{R}_{s2} = \begin{bmatrix} n_{xX}n_{zX} & n_{yX}n_{zX} \\ n_{xY}n_{zY} & n_{yY}n_{zY} \\ n_{xZ}n_{zZ} & n_{yZ}n_{zZ} \\ n_{xX}n_{zY} + n_{xY}n_{zX} & n_{yX}n_{zY} + n_{yY}n_{zX} \\ n_{xZ}n_{zY} + n_{xY}n_{zZ} & n_{yZ}n_{zY} + n_{yY}n_{zZ} \\ n_{xX}n_{zZ} + n_{xZ}n_{zX} & n_{yX}n_{zZ} + n_{yZ}n_{zX} \end{bmatrix} \quad (31)$$

với $(n_{\bar{x}X}, n_{\bar{x}Y}, n_{\bar{x}Z}), (n_{\bar{y}X}, n_{\bar{y}Y}, n_{\bar{y}Z}), (n_{\bar{z}X}, n_{\bar{z}Y}, n_{\bar{z}Z}), (n_{\check{x}X}, n_{\check{x}Y}, n_{\check{x}Z}), (n_{\check{y}X}, n_{\check{y}Y}, n_{\check{y}Z}), (n_{\check{z}X}, n_{\check{z}Y}, n_{\check{z}Z})$ lần lượt là cosin chỉ phương của trục $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \check{x}, \check{y}, \check{z}$ trong hệ trục tọa độ toàn cục $OXYZ$.

Theo PP PTHH trơn [8], các biến dạng của phần tử vỏ phẳng MITC3 được làm trơn trên miền $\bar{\Omega}_{ES}^k$ và $\hat{\Omega}_{NS}^k$ như sau:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^k = \frac{1}{\bar{A}_{ES}^k} \int_{\bar{\Omega}_{ES}^k} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m d\Omega; \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^k = \frac{1}{\bar{A}_{ES}^k} \int_{\bar{\Omega}_{ES}^k} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b d\Omega; \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^k = \frac{1}{\bar{A}_{ES}^k} \int_{\bar{\Omega}_{ES}^k} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{MITC3} d\Omega \quad (32)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^k = \frac{1}{\hat{A}_{NS}^k} \int_{\hat{\Omega}_{NS}^k} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m d\Omega; \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^k = \frac{1}{\hat{A}_{NS}^k} \int_{\hat{\Omega}_{NS}^k} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_b d\Omega; \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^k = \frac{1}{\hat{A}_{NS}^k} \int_{\hat{\Omega}_{NS}^k} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{MITC3} d\Omega \quad (33)$$

Thế các biến dạng cho bởi các công thức (7), (14), (24) và (25) vào các biến dạng trơn ở các công thức (32) và (33), ta được

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^k = \frac{1}{\beta^2 \bar{A}_{ES}^k} \sum_{e=1}^{N_{ES}^k} \beta^2 \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2}^e \mathbf{B}_{ml}^e \mathbf{u}_I^e = \frac{1}{\bar{A}_{ES}^k} \sum_{e=1}^{N_{ES}^k} \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2}^e \mathbf{B}_{ml}^e \mathbf{u}_I^e; \quad (34)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^k = \frac{1}{\bar{A}_{ES}^k} \sum_{e=1}^{N_{ES}^k} \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{b1} \mathbf{R}_{b2}^e \mathbf{B}_{bl}^e \mathbf{u}_I^e; \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^k = \frac{1}{\bar{A}_{ES}^k} \sum_{e=1}^{N_{ES}^k} \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{s1} \mathbf{R}_{s2}^e \mathbf{B}_{sl}^{MITC3,e} \mathbf{u}_I^e$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^k = \frac{1}{(1-\beta^2) \hat{A}_{NS}^k} \sum_{e=1}^{N_{NS}^k} (1-\beta^2) \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2}^e \mathbf{B}_{ml}^e \mathbf{u}_I^e = \frac{1}{\hat{A}_{NS}^k} \sum_{e=1}^{N_{NS}^k} \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2}^e \mathbf{B}_{ml}^e \mathbf{u}_I^e; \quad (35)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^k = \frac{1}{\hat{A}_{NS}^k} \sum_{e=1}^{N_{NS}^k} \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{b1} \mathbf{R}_{b2}^e \mathbf{B}_{bl}^e \mathbf{u}_I^e; \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^k = \frac{1}{\hat{A}_{NS}^k} \sum_{e=1}^{N_{NS}^k} \frac{A^e}{3} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_{s1} \mathbf{R}_{s2}^e \mathbf{B}_{sl}^{MITC3,e} \mathbf{u}_I^e$$

trong đó N_{ES}^k và N_{NS}^k lần lượt là số phần tử chung cạnh và chung nút của miền làm trơn biến dạng $\bar{\Omega}_{ES}^k$ và $\hat{\Omega}_{NS}^k$.

Từ các quan hệ cho bởi các công thức (34) và (35), ma trận độ cứng của phần tử vỏ phẳng MITC3 có các biến dạng được làm trơn trên miền kết hợp cạnh (ES) và nút (NS), tức là độ cứng phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3, trong hệ tọa độ toàn cục $OXYZ$ có dạng:

$$\mathbf{K}_{IJ}^{ES+NS} = \mathbf{T}^T (\mathbf{K}_{IJ}^{ES,loc} + \mathbf{K}_{IJ}^{NS,loc}) \mathbf{T} \quad (36)$$

trong đó

$$\mathbf{K}_{IJ}^{ES,loc} = \left[\bar{\mathbf{B}}_{m1}^T \mathbf{D}_m \bar{\mathbf{B}}_{mJ} + \bar{\mathbf{B}}_{b1}^T \mathbf{D}_b \bar{\mathbf{B}}_{bJ} + (\bar{\mathbf{B}}_{s1}^{MITC3})^T \mathbf{D}_s (\bar{\mathbf{B}}_{sJ}^{MITC3}) \right] \beta^2 A_{ES}^k \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{NS,loc} = \left[\hat{\mathbf{B}}_{m1}^T \mathbf{D}_m \hat{\mathbf{B}}_{mJ} + \hat{\mathbf{B}}_{b1}^T \mathbf{D}_b \hat{\mathbf{B}}_{bJ} + (\hat{\mathbf{B}}_{s1}^{MITC3})^T \mathbf{D}_s (\hat{\mathbf{B}}_{sJ}^{MITC3}) \right] (1-\beta^2) A_{NS}^k \quad (38)$$

với

$$\bar{\mathbf{B}}_{mI} = \frac{1}{A_{ES}^k} \sum_{e=1}^{N_{ES}^k} \frac{A^e}{3} \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2}^e \mathbf{B}_{mI}^e; \quad \bar{\mathbf{B}}_{bI} = \frac{1}{A_{ES}^k} \sum_{e=1}^{N_{ES}^k} \frac{A^e}{3} \tilde{\mathbf{R}}_{b1} \mathbf{R}_{b2}^e \mathbf{B}_{bI}^e; \quad (39)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{sI}^{MITC3} = \frac{1}{A_{ES}^k} \sum_{e=1}^{N_{ES}^k} \frac{A^e}{3} \tilde{\mathbf{R}}_{s1} \mathbf{R}_{s2}^e \mathbf{B}_{sI}^{MITC3,e}$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{mI} = \frac{1}{A_{NS}^k} \sum_{e=1}^{N_{NS}^k} \frac{A^e}{3} \tilde{\mathbf{R}}_{m1} \mathbf{R}_{m2}^e \mathbf{B}_{mI}^e; \quad \hat{\mathbf{B}}_{bI} = \frac{1}{A_{NS}^k} \sum_{e=1}^{N_{NS}^k} \frac{A^e}{3} \tilde{\mathbf{R}}_{b1} \mathbf{R}_{b2}^e \mathbf{B}_{bI}^e; \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{sI}^{MITC3} = \frac{1}{A_{NS}^k} \sum_{e=1}^{N_{NS}^k} \frac{A^e}{3} \tilde{\mathbf{R}}_{s1} \mathbf{R}_{s2}^e \mathbf{B}_{sI}^{MITC3,e}$$

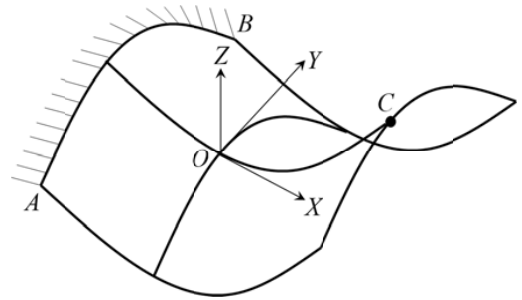
3. Các ví dụ số

Để đánh giá hiệu quả của phần tử vỏ phẳng đề xuất, trong phần này kết quả chuyển vị của phần tử ES+NS-MITC3 sẽ được so sánh với phần tử ES-MITC3 [12], NS-MITC3 [13], ES+NS-DSG3 [18] và lời giải tham khảo khi phân tích tĩnh một số kết cấu vỏ điển hình. Dựa trên kết quả so sánh chuyển vị cho bởi phần tử đề xuất khi β thay đổi từ 0 đến 1 với lời giải tham khảo, hệ số hiệu chỉnh tỉ lệ tham gia của miền làm trơn trên cạnh và trên nút của phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 được chọn $\beta = 0,9$ cho tất cả các ví dụ.

3.1. Vỏ hyperbolic paraboloid chịu tải trọng bản thân

Kết cấu vỏ dạng hyperbolic paraboloid [21] có phương trình hình học $Z = X^2 - Y^2, X \in [-0,5; 0,5]$ m và $Y \in [-0,5; 0,5]$ m, liên kết một đầu ngàm và một đầu tự do, và chịu trọng lượng bản thân $q = 8000 \text{ N/m}^3$ theo phương Z như Hình 4. Vỏ có chiều dày $h = 0,001$ m, và các đặc trưng vật liệu $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \nu = 0,3$.

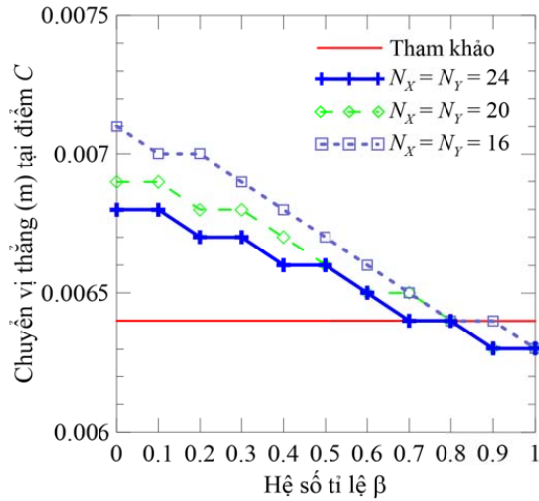
Vỏ được mô hình bằng các lưới $N_X \times N_Y \times 2$ với $N_X = N_Y = 8, 12, 16, 20$ và 24 là số phần tử trên các cạnh theo phương X và phương Y . Với các lưới phần tử $N_X = N_Y = 16, 20$ và 24 , chuyển vị thẳng tại điểm C của vỏ hyperbolic paraboloid cho



Hình 4. Hình học và điều kiện biên của vỏ hyperbolic paraboloid

bởi phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 với các giá trị của hệ số tỉ lệ β thay đổi từ 0 đến 1 được thể hiện trong Hình 5. So với kết quả tham khảo $0,0064$ m [21], Hình 5 cho thấy với hệ số tỉ lệ β từ $0,7$ đến $0,9$ phần tử đề xuất cho kết quả tốt nhất cho cả 3 loại lưới khảo sát $N_X = N_Y = 16, 20$ và 24 . Khảo sát tương tự với hệ số tỉ lệ β từ $0,7$ đến $0,9$ cho các ví dụ khác trong nghiên cứu này cho thấy với hệ số tỉ lệ $\beta = 0,9$ phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 cho các kết quả gần với các lời giải tham khảo nhất. Vì vậy, hệ số tỉ lệ $\beta = 0,9$ được chọn để tính toán chuyển vị bằng phần tử đề xuất cho các ví dụ số trong bài báo.

Kết quả chuyển vị theo phương Z tại điểm C ($X = 0,5$ m; $Y = 0$ m) tính bằng phần tử ES+NS-MITC3, các phần tử khác và lời giải tham khảo [21] được trình bày trong Bảng 1.

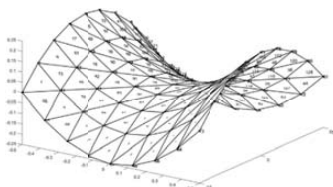


Hình 5. Chuyển vị thẳng (m) tại điểm C của vỏ hyperbolic paraboloid được xác định bằng các lưới $N_x = N_y = 8, 16, 24$ phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 và hệ số tỉ lệ β thay đổi từ 0 đến 1

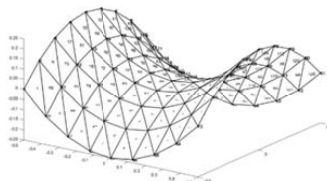
Bảng 1 cho thấy phần tử vỏ phẳng MITC3 được làm trơn trên nút (NS-MITC3) cho kết quả chuyển vị lớn hơn làm trơn trên cạnh (ES-MITC3). Phần tử MITC3 làm trơn kết hợp (ES+NS-MITC3) có chuyển vị nằm giữa giá trị tính bởi phần tử ES-MITC3 và NS-MITC3, và gần với kết quả của phần tử ES-MITC3 do hệ số hiệu chỉnh $\beta = 0,9$. Khi lưới phần tử mịn dần thì phần tử ES+NS-MITC3 cho kết quả hội tụ đến lời giải tham khảo với độ chính xác hơn phần tử cùng loại sử dụng kỹ thuật khử khóa cốt DSG3 (ES+NS-DSG3).

Bảng 1. Kết quả chuyển vị thẳng (m) tại điểm C của vỏ hyperbolic paraboloid

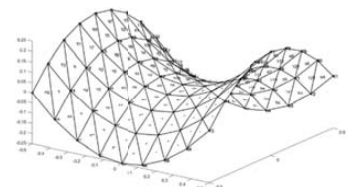
Loại phần tử	Lưới phần tử					%	Kết quả tham khảo
	8x8x2	12x12x2	16x16x2	20x20x2	24x24x2		
ES+NS-DSG3	0,0075	0,007	0,0068	0,0068	0,0067	4,69	0,0064
ES-MITC3	0,0064	0,0063	0,0063	0,0063	0,0063	1,56	
NS-MITC3	0,0083	0,0074	0,0071	0,0069	0,0068	6,25	
ES+NS-MITC3	0,0066	0,0064	0,0064	0,0063	0,0063	1,56	



(a) Lưới trái



(b) Lưới phải loại 1



(c) Lưới phải loại 2

Hình 6. Vỏ hyperbolic paraboloid được mô hình bằng 8x8x2 phần tử với 3 sơ đồ đánh số nút phần tử khác nhau

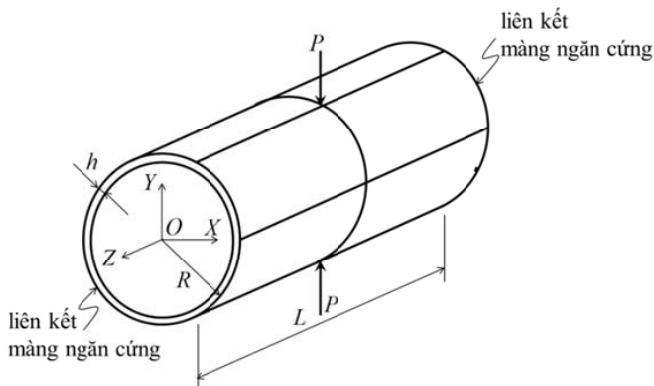
Bảng 2. Kết quả chuyển vị thẳng (m) tại điểm C của vỏ hyperbolic paraboloid mô hình bằng lưới 8×8×2 với các sơ đồ đánh số nút phần tử khác nhau

Loại phần tử	Sơ đồ đánh số nút phần tử		
	(a)	(b)	(c)
ES+NS-DSG3	0,0075	0,0072	0,0076
ES+NS-MITC3	0,0066	0,0066	0,0066

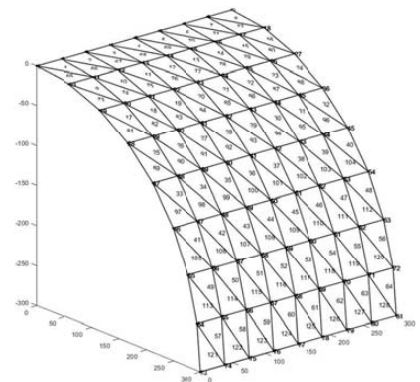
Để kiểm tra khả năng tính toán của phần tử ES+NS-MITC3 không phụ thuộc vào thứ tự đánh số nút, kết cấu vỏ hyperbolic paraboloid được đánh số nút theo 3 sơ đồ khác nhau với lưới 8×8×2 phần tử như Hình 6. Giá trị chuyển vị tại điểm C tính bởi phần tử ES+NS-MITC3 ở cả 3 trường hợp đánh số nút phần tử khác nhau được so sánh với phần tử ES+NS-DSG3 ở Bảng 2. Bảng 2 cho thấy kết quả tính toán bằng phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 không phụ thuộc vào thứ tự đánh số nút phần tử. Ngược lại, phần tử vỏ phẳng ES+NS-DSG3 cho kết quả tính toán phụ thuộc vào cách đánh số phần tử vì kỹ thuật khử khóa cắt DSG3 không có tính đẳng không gian.

3.2. Vỏ trụ chịu tải trọng tập trung

Vỏ trụ có bán kính $R = 300$ m, dài $L = 600$ m và dày $h = 3$ m ở Hình 7(a) chịu tải trọng tập trung $P = 1$ kN. Vỏ chịu liên kết màng ngăn cứng ở 2 đầu ($U = W = 0$). Vật liệu làm vỏ có $E = 3 \times 10^6$ kN/m² và $\nu = 0,3$ [22].



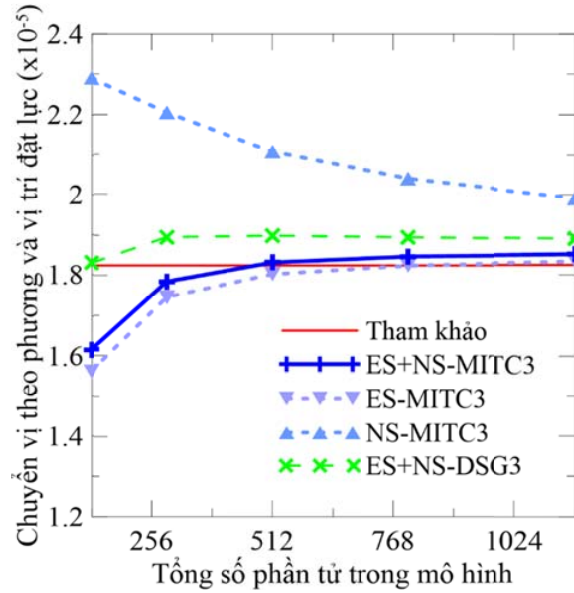
(a) Hình học, điều kiện biên và tải trọng



(b) Lưới 8×8×2 phần tử tam giác 3 nút mô phỏng 1/8 vỏ trụ

Hình 7. Vỏ trụ chịu tải tập trung

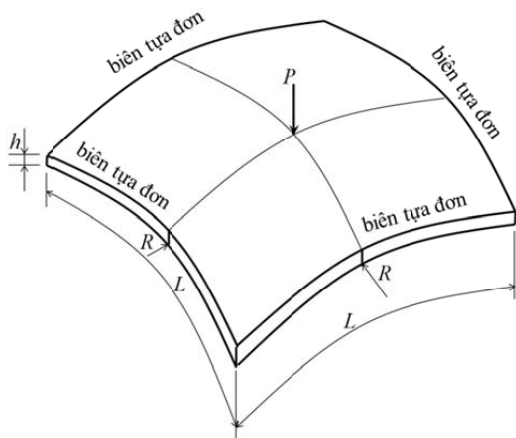
Do tính chất đối xứng, chỉ 1/8 vỏ được rời rạc bằng các lưới 8×8×2, 12×12×2, 16×16×2, 20×20×2 và 24×24×2, tương đương 128, 288, 512, 800 và 1152 phần tử. Hình 7(b) minh họa trường hợp lưới 8×8×2 phần tử. Chuyển vị theo phương và tại vị trí đặt lực tập trung của vỏ trụ khi phân tích bằng phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 sử dụng lưới có số phần tử tăng dần được thể hiện trong Hình 8. Kết quả chuyển vị ở Hình 8 cho thấy phần tử đề xuất ES+NS-MITC3 hội tụ đến lời giải tham khảo $1,8248 \times 10^{-5}$ m [22] khi lưới phần tử mịn dần và có độ chính xác tốt hơn phần tử ES+NS-DSG3. Trong ví dụ này, phần tử đề xuất có đường hội tụ của chuyển vị cũng nằm giữa so với kết quả cho bởi phần tử ES-MITC3 nằm dưới và phần tử NS-MITC3 nằm trên.



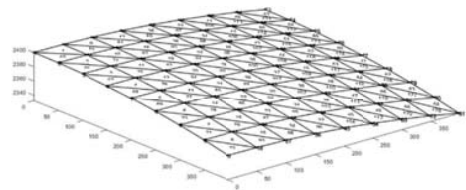
Hình 8. Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung của vỏ trụ được xác định bằng phần tử vỏ phẳng ES+NS-MITC3 và các phần tử tham khảo ứng với số phần tử tăng dần

3.3. Vỏ panel cầu chịu tải trọng tập trung

Vỏ panel cầu liên kết tựa đơn 4 cạnh và chịu tải trọng tập trung $P = 454$ N như Hình 9(a). Các thông số hình học và vật liệu của vỏ panel như sau: chiều dài $L = 0,4$ m, bán kính 2 phương $R = 2,4$ m, chiều dày $h = 2,54$ mm, mô-đun đàn hồi $E = 703,7 \times 10^{10}$ N/m² và hệ số Poisson $\nu = 0,3$ [23].



(a) Hình học, điều kiện biên và tải trọng



(b) Lưới 8x8x2 phần tử tam giác 3 nút mô phỏng 1/4 vỏ panel cầu

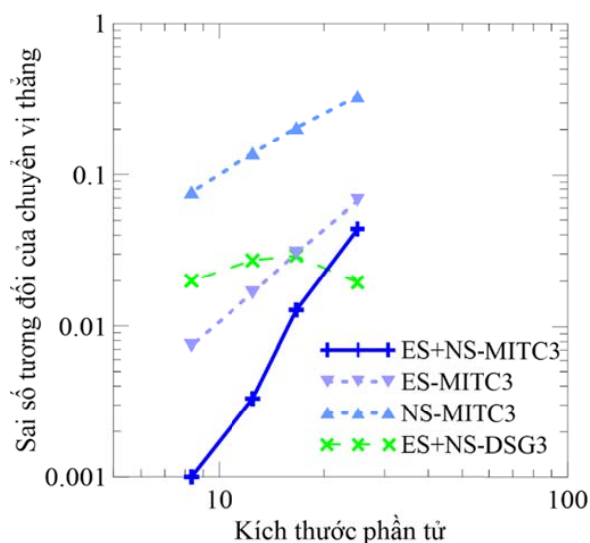
Hình 9. Vỏ panel cầu chịu tải tập trung

Vì tính chất đối xứng của kết cấu, chỉ 1/4 vỏ cầu panel được mô hình để tính toán chuyển vị thẳng tại vị trí đặt lực tập trung. Độ chính xác và tốc độ hội tụ của phần tử đề xuất được khảo sát bằng cách

tính chuyển vị và sai số tương đối của chuyển vị so với giá trị tham khảo $1,0 \times 10^{-5}$ m [23] khi vỏ cầu panel được rời rạc bằng lưới mịn dần từ $8 \times 8 \times 2$, $12 \times 12 \times 2$, $16 \times 16 \times 2$, $20 \times 20 \times 2$ đến $24 \times 24 \times 2$ phần tử. Hình 9(b) minh họa lưới $8 \times 8 \times 2$ phần tử tam giác 3 nút. Kết quả chuyển vị thẳng tại điểm đặt lực cho bởi phần tử ES+NS-MITC3 và các phần tử khác ứng với các lưới khác nhau được trình bày trong Bảng 3.

Bảng 3. Kết quả chuyển vị thẳng ($\times 10^{-5}$ m) tại điểm đặt lực của vỏ panel cầu

Loại phần tử	Lưới phần tử					Kết quả tham khảo
	$8 \times 8 \times 2$	$12 \times 12 \times 2$	$16 \times 16 \times 2$	$20 \times 20 \times 2$	$24 \times 24 \times 2$	
ES+NS-DSG3	1,0194	1,0292	1,0273	1,0235	1,0199	1,0
ES-MITC3	0,9328	0,9696	0,9834	0,9895	0,9926	
NS-MITC3	1,3335	1,2045	1,1382	1,1002	1,0765	
ES+NS-MITC3	0,9559	0,9873	0,9967	0,9999	1,0010	



Hình 10. Độ chính xác và tốc độ hội tụ của chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung của vỏ cầu panel cho bởi bằng phần tử ES+NS-MITC3 và các phần tử tham khảo

Hình 10 biểu diễn quan hệ giữa sai số tương đối của chuyển vị thẳng tại điểm đặt lực tập trung và chiều dài cạnh phần tử trong hệ tọa độ logarit được xác định bằng các phần tử ES-NS-MITC3, ES-MITC3, NS-MITC3 và ES+NS-DSG3. Nhờ phương pháp làm trơn biến dạng kết hợp trên cạnh và nút, trong trường hợp này, phần tử ES+NS-MITC3 có tốc độ hội tụ và độ chính xác tốt hơn phần tử chỉ sử dụng phương pháp làm trơn trên cạnh hoặc trên nút như ES-MITC3 hoặc NS-MITC3. Cùng phương pháp làm trơn kết hợp nhưng phần tử đề xuất sử dụng kỹ thuật khử khóa cứng MITC3 có độ chính xác và tốc độ hội tụ vượt trội phần tử ES+NS-DSG3.

4. Kết luận

Trong bài báo này, phần tử vỏ phẳng tam giác 3 nút ES+NS-MITC3 đã được phát triển để phân tích tĩnh kết cấu vỏ đồng nhất. Công thức PTHH của phần tử đề xuất được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Reissner-Mindlin và hàm xấp xỉ chuyển vị tuyến tính dạng C^0 . Kỹ thuật khử khóa cắt MITC3 với ưu điểm không phụ thuộc vào thứ tự đánh số nút phần tử được sử dụng để xấp xỉ lại biến dạng cắt ngoài mặt phẳng. Các biến dạng của phần tử ES+NS-MITC3 được làm trơn trên miền kết hợp giữa các phần tử chung cạnh và chung nút.

Kết quả phân tích chuyển vị của một vài kết cấu vỏ cong theo 1 hoặc 2 phương chịu tải tập trung và phân bố điển hình cho thấy phần tử được làm trơn trên cạnh (ES) tiếp cận lời giải tham khảo từ dưới lên, ngược lại phần tử được làm trơn trên nút (NS) tiếp cận lời giải tham khảo từ trên xuống. Bằng cách kết hợp cả 2 phương pháp làm trơn biến dạng trên cạnh và nút thông qua hệ số tỉ lệ $\beta \in [0, 1]$, phần tử ES+NS-MITC3 cho kết quả nằm giữa kết quả phần tử ES-MITC3 và NS-MITC3. Vì vậy, phần tử ES+NS-MITC3 có độ chính xác và hội tụ cao hơn phần tử ES-MITC3 và NS-MITC3 trong các ví dụ khảo sát. Ngoài ra, nhờ kỹ thuật khử khóa cắt MITC3, phần tử ES+NS-MITC3 cũng cho kết quả tốt hơn phần tử ES+NS-DSG3.

Phần tử đề xuất có thể ứng dụng để tính toán dao động và ổn định cũng như phát triển để phân tích các kết cấu vỏ không đồng nhất. Phần tử ES+NS-MITC3 có độ cứng được hiệu chỉnh thông qua hệ số tỉ lệ $\beta \in [0, 1]$ nên dự báo sẽ cải thiện được độ chính xác khi phân tích dao động và ổn định các kết cấu vỏ đồng nhất và không đồng nhất so với các phần tử ES-MITC3 và NS-MITC3.

Tài liệu tham khảo

- [1] Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-hill.
- [2] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (1989). *The finite element method: basic concepts and linear applications*. Mc Growhill, London.
- [3] Tessler, A., Hughes, T. J. R. (1985). [A three-node mindlin plate element with improved transverse shear](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50(1):71–101.
- [4] Bischoff, M., Bletzinger, K.-U. (2001). Stabilized DSG plate and shell elements. *Trends in Computational Structural Mechanics*, 253–263.
- [5] Dvorkin, E. N., Bathe, K.-J. (1984). [A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis](#). *Engineering Computations*, 1(1):77–88.
- [6] Lee, P.-S., Bathe, K.-J. (2004). [Development of MITC isotropic triangular shell finite elements](#). *Computers & Structures*, 82(11-12):945–962.
- [7] Chau-Dinh, T., Nguyen-Duy, Q., Nguyen-Xuan, H. (2017). [Improvement on MITC3 plate finite element using edge-based strain smoothing enhancement for plate analysis](#). *Acta Mechanica*, 228(6):2141–2163.
- [8] Liu, G.-R., Nguyen-Thoi, T. (2010). *Smoothed finite element methods*. CRC Press.
- [9] Nguyen-Thoi, T., Phung-Van, P., Thai-Hoang, C., Nguyen-Xuan, H. (2013). [A cell-based smoothed discrete shear gap method \(CS-DSG3\) using triangular elements for static and free vibration analyses of shell structures](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 74:32–45.
- [10] Cui, X., Liu, G.-R., Li, G.-Y., Zhang, G., Zheng, G. (2009). [Analysis of plates and shells using an edge-based smoothed finite element method](#). *Computational Mechanics*, 45(2-3):141–156.
- [11] Chai, Y., Li, W., Liu, G., Gong, Z., Li, T. (2017). [A superconvergent alpha finite element method \(\$\alpha\$ FEM\) for static and free vibration analysis of shell structures](#). *Computers & Structures*, 179:27–47.
- [12] Quach-Van, N. (2017). *Phân tích kết cấu vỏ bằng phần tử MITC3 được làm trơn trên cạnh (ES-MITC3)*. Luận văn thạc sĩ, Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM.
- [13] Do-Anh, V. (2020). *Phân tích kết cấu vỏ bằng phần tử trơn NS-MITC3*. Luận văn thạc sĩ, Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM.

- [14] Pham, Q.-H., Tran, T.-V., Pham, T.-D., Phan, D.-H. (2018). [An Edge-Based Smoothed MITC3 \(ES-MITC3\) Shell Finite Element in Laminated Composite Shell Structures Analysis](#). *International Journal of Computational Methods*, 15(07):1850060.
- [15] Pham, Q.-H., Pham, T.-D., Trinh, Q. V., Phan, D.-H. (2019). [Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells using an edge-based smoothed MITC3 \(ES-MITC3\) finite elements](#). *Engineering with Computers*, 36(3):1069–1082.
- [16] Wu, F., Zeng, W., Yao, L. Y., Hu, M., Chen, Y. J., Li, M. S. (2019). [Smoothing Technique Based Beta FEM \(\$\beta\$ FEM\) for Static and Free Vibration Analyses of Reissner–Mindlin Plates](#). *International Journal of Computational Methods*, 17(02):1845006.
- [17] Thanh, C. D., Con, H. T., Binh, L. P. (2019). [Static analysis of Reissner-Mindlin plates using ES+NS-MITC3 elements](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 13(3):45–57.
- [18] Nguyen-Hoang, S., Phung-Van, P., Natarajan, S., Kim, H.-G. (2015). [A combined scheme of edge-based and node-based smoothed finite element methods for Reissner–Mindlin flat shells](#). *Engineering with Computers*, 32(2):267–284.
- [19] Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall International, Inc.
- [20] Lyly, M., Stenberg, R., Vihinen, T. (1993). [A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110(3-4):343–357.
- [21] Bathe, K.-J., Iosilevich, A., Chapelle, D. (2000). [An evaluation of the MITC shell elements](#). *Computers & Structures*, 75(1):1–30.
- [22] Flugge, W. (1960). *Stress in shells*. Berlin: Springer.
- [23] Mousa, A. I., El Naggar, M. H. (2007). [Shallow spherical shell rectangular finite element for analysis of cross shaped shell roof](#). *Electronic Journal of Structural Engineering*, 7:41–51.