



STATIC ANALYSIS OF BEAM RESTING ON ELASTIC FOUNDATION BY ANISOTROPIC BEAM-FOUNDATION ELEMENT TAKING INTO ACCOUNT NON-CONTACT BETWEEN BEAM AND FOUNDATION

Do Xuan Quy*, Vu Thi Nga

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article

Received: 08/04/2021

Revised: 10/05/2021

Accepted: 14/05/2021

Published online: 15/06/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.4>

*Corresponding author

Email: quysbvl@utc.edu.vn; Tel: 0989556088

Abstract. Beam resting on the elastic foundation is a common structure in the construction engineering, especially in civil engineering, for instance, ground beams, buoys floating on water, piles resting in foundation or rails acting on railway sleepers. The well-known computing models used in design based on the assumption that beam is fully contacted with foundation. In fact, there are some non-contact regions between beam and foundation, and hence, the above assumption is not always valid. As a result, such conclusions or recommendations made by construction consultants are sometimes inappropriate with the actual behaviors of beam and foundation. This paper proposes a new element in FEM, so-called anisotropic beam-foundation element. Each proposed anisotropic beam-foundation element characterizes a combined model between beam element and foundation. This anisotropic beam-foundation element allows the FE analysis of beam resting on foundation considering contact and non-contact regions between beam and foundation. The behavior of beam and foundation is presented through explicit formulations. As a result, the analysis of beam resting in foundation with these explicit forms leads to faster convergence compared to other methods.

Keywords: beam resting on elastic foundation, FEM, nonlinearity, anisotropic restraints, anisotropic beam-foundation element.



PHÂN TÍCH TÍNH DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ KỂ ĐẾN SỰ KHÔNG TIẾP XÚC GIỮA DẦM VÀ NỀN SỬ DỤNG PHẦN TỬ DẦM - NỀN DỊ HƯỚNG

Đỗ Xuân Quý*, Vũ Thị Nga

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học

Ngày nhận bài: 08/04/2021

Ngày nhận bài sửa: 10/05/2021

Ngày chấp nhận đăng: 14/05/2021

Ngày xuất bản Online: 15/06/2021

<https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.4>

*Tác giả liên hệ

Email: quysbv1@utc.edu.vn; Tel: 0989556088

Tóm tắt. Dầm trên nền đàn hồi là kết cấu phổ biến trong xây dựng công trình nói chung, công trình giao thông nói riêng, các kết cấu có thể kể đến như: Dầm móng đặt trên nền đàn hồi, hệ phao nổi trên mặt nước, hệ cọc trong đất, tà vẹt trên nền đá ba lát. Các mô hình tính áp dụng trong thiết kế hiện nay giả thiết rằng dầm luôn luôn tiếp xúc với nền. Trong khi đó, nhiều trường hợp có một bộ phận của dầm không tiếp xúc với nền nên việc mô hình như trên là không thực sự phù hợp. Theo đó, các kết luận, khuyến cáo trong công tác tư vấn không sát với thực tế làm việc của dầm. Trong nghiên cứu này, tác giả công bố một loại phần tử mới có tên là dầm-nền dị hướng. Mỗi phần tử dầm-nền dị hướng là mô hình hóa của một phần tử dầm và nền trong phạm vi của nó. Phần tử này cho phép phân tích dầm trên nền đàn hồi có kể đến sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Ứng xử của phần tử dầm và nền trong phạm vi của nó được mô tả bằng các biểu thức toán học rõ ràng khiến cho việc phân tích dầm trên nền đàn hồi với loại phần tử này sẽ hội tụ nhanh hơn so với các phương pháp khác.

Từ khóa: dầm trên nền đàn hồi, phương pháp phần tử hữu hạn, phi tuyến, liên kết dị hướng, dầm-nền dị hướng.

© 2021 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay, các mô hình tính dầm trên nền đàn hồi trong nghiên cứu cũng như trong tính

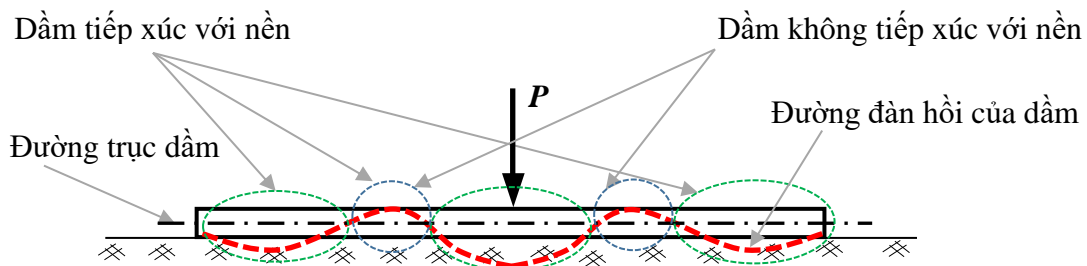
toán thiết kế công trình hầu hết chưa xét đến sự không tiếp giữa dầm và nền. Khi tính toán các tác giả thường sử dụng các mô hình nền có một hệ số nền hoặc hai hệ số nền. Các công bố có thể kể đến như: Vũ Đình Lai và cộng sự [1], Lều Thọ Trình và cộng sự [2], Anil K. Chopra [3], giới thiệu phương pháp tính dầm trên nền đàn hồi theo mô hình theo Winkler có một hệ số nền; Vũ Thị Bích Quyên [4], tính dầm trên nền đàn hồi với mô hình nền Winkler bằng phương pháp phần tử biên, Phạm Hoàng Anh [5], tính dầm trên nền đàn hồi có điều kiện biên phức tạp với mô hình nền Winkler bằng phương pháp giải tích.

Để mô phỏng gần với ứng xử thực tế của dầm trên nền đàn hồi, các tác giả đã xem xét đến sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền: Z. Celep và các cộng sự [6], khảo sát tác dụng động của dầm dài hữu hạn trên nền một chiều; Diego Froio và các cộng sự [7], phân tích dầm trên nền phi tuyến, dưới tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian di động; P. Castro Jorge và các cộng sự [8], nghiên cứu tác dụng của dầm hai đầu liên kết khớp trên nền đàn hồi, chịu tác dụng của tải trọng không đổi di động với mô hình nền Winkler, nền một chiều và nền phi tuyến bậc 3; Cristiano Viei Rodrigues [9], phân tích dầm trên nền phi tuyến, chịu tác dụng của bộ dao động di động bằng phương pháp phần tử hữu hạn; D. Froio và các cộng sự [10], sử dụng phương pháp số tính dầm giản đơn trên nền phi tuyến bậc 3, dưới tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian di động; S.M. Abdelghany và các cộng sự [11], khảo sát ứng xử của dầm trên nền phi tuyến, chịu tác dụng của tải trọng di động bằng phương pháp Galerkin và Runge-Kutta; Salih N Akour [12], phân tích động dầm trên nền phi tuyến chịu tác dụng của tải trọng điều hòa phân bố trên bề mặt dầm, sử dụng phương pháp Runge-Kutta để giải; Đỗ Xuân Quý và các cộng sự [13], nghiên cứu ứng xử cơ học của thanh có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động; Đỗ Xuân Quý và các cộng sự [14], nghiên cứu thực nghiệm ứng xử của có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động.

Trong bài báo này, nhóm tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích tĩnh dầm trên nền đàn hồi mà ở đó có xét đến sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền. Để mô tả được sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền, nhóm tác giả xây dựng một loại phần tử, có tên là phần tử dầm-nền dị hướng. Phần tử dầm-nền dị hướng cho phép mô phỏng ứng xử của dầm, nền và tương tác giữa dầm và nền trong phạm vi của nó, giúp cho việc phân tích dầm trên nền đàn hồi có kể đến sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền với số lượng phần tử ít hơn nhưng vẫn đảm bảo độ chính xác như mong muốn.

2. XÂY DỰNG MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA PHẦN TỬ DẦM-NỀN DỊ HƯỚNG

2.1. Tương tác giữa dầm và nền



Hình 1. Sơ đồ biến dạng của dầm trên nền đàn hồi.

Hình 1 là sơ đồ biến dạng của dầm trên nền đàn hồi khi chịu tác dụng của tải trọng tập trung P . Theo chiều dài dầm có đoạn dầm tiếp xúc với nền và có đoạn dầm không tiếp xúc với

nền. Ở các đoạn dầm tiếp xúc với nền, phản lực của nền có quan hệ bậc nhất với độ võng của dầm theo Winkler. Ngược lại ở các đoạn dầm không tiếp xúc với nền, phản lực của nền bằng không. Phản lực của nền vào đáy dầm được tính theo độ võng của dầm theo công thức thể hiện trên công thức (1) [13].

$$p = \frac{c_1}{2} w + \frac{c_1}{2} |w| \quad (1)$$

Trong đó: p - phản lực của nền, c_1 - độ cứng của nền khi dầm chuyển vị xuống dưới, w - độ võng của dầm. Công thức (1) được sử dụng để mô tả tương tác giữa dầm và nền trong trường hợp này. Mô hình nền có ứng xử như vậy được gọi là mô hình nền một chiều.

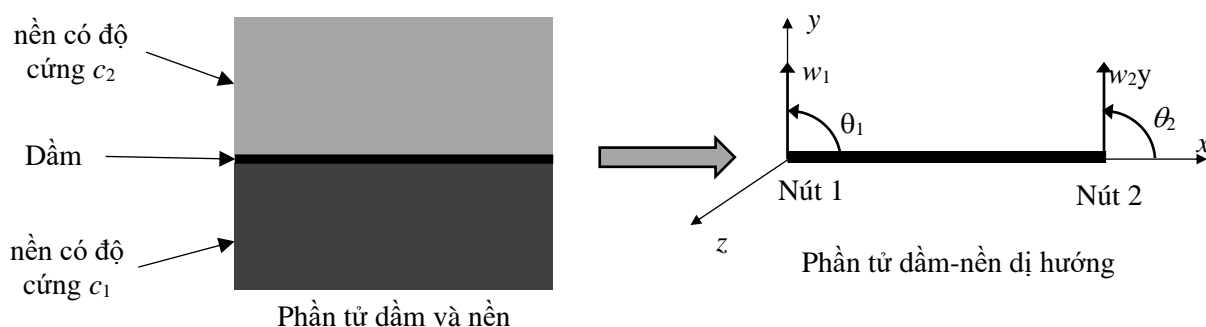
Mô hình nền dị hướng là loại mô hình nền có độ cứng thay đổi khi độ võng của dầm thay đổi. Công thức (2) được dùng để tính phản lực của nền vào đáy dầm, trong đó c_2 -độ cứng của nền khi dầm chuyển vị lên trên, w_0 - độ lệch chuẩn, mô tả nền bị ép trước hoặc giữa dầm và nền có khe hở [13].

$$p = \frac{c_2+c_1}{2} (w - w_0) + \frac{c_2-c_1}{2} |w - w_0| \quad (2)$$

Trong bài báo này, tác giả sẽ sử dụng công thức (2) để mô tả tương tác giữa dầm và nền.

2.2. Thành lập công thức tính ma trận độ cứng của phần tử dầm-nền dị hướng

Phần tử dầm và nền trong phạm vi của nó được thay thế bằng một phần tử dầm-nền dị hướng có cùng chiều dài với phần tử dầm và các thành chuyển vị nút như hình 2. Chọn hàm độ võng của dầm có dạng đa thức bậc 3, như công thức (3). Trong đó: a - chiều dài phần tử, x - hoành độ của mặt cắt cần tính độ võng; w_1, w_2 - độ võng của dầm tại nút 1 và nút 2 phần tử; θ_1, θ_2 - góc quay tại nút 1 và nút 2 của phần tử.



Hình 2. Mô hình phần tử dầm-nền dị hướng.

$$w = \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3}\right) w_1 + \left(x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3}\right) w_2 + \left(-\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\right) \theta_2 \quad (3)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi của phần tử dầm-nền dị hướng được tính bằng tổng của thế năng biến dạng đàn hồi của phần tử nền và thế năng biến dạng đàn hồi của nền trong phạm vi của phần tử dầm (4). Trong đó: U - thế năng biến dạng đàn hồi của phần tử dầm-nền dị hướng, U_1 - thế năng biến dạng đàn hồi của phần tử dầm (5), U_2 - thế năng biến dạng đàn hồi của nền trong phạm vi của phần tử dầm(6), E - mô đun đàn hồi của vật liệu dầm, J - mô men quán tính chống uốn của mặt cắt ngang phần tử dầm.

$$U = U_1 + U_2 \quad (4)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^a EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (5)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^a pw dx \quad (6)$$

Sử dụng nguyên lý cực tiểu thế năng tính được ma trận độ cứng của phần tử dầm - nền di hướng như công thức (7).

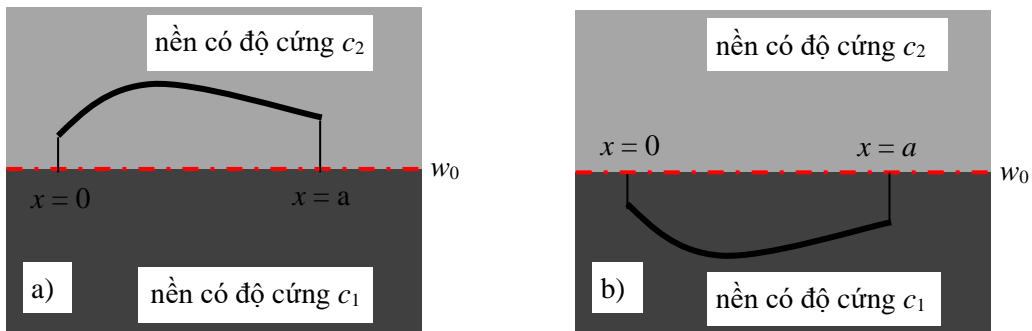
$$[k] = [k_1] + [k_2] \quad (7)$$

Trong đó: $[k_1]$ - ma trận độ cứng của phần tử dầm (8), $[k_2]$ - ma trận độ cứng của nền trong phạm vi phần tử dầm (9).

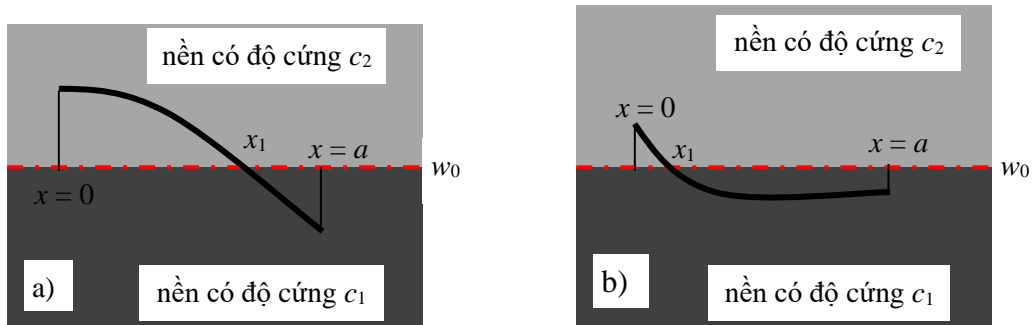
$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{a^3} & \frac{6EJ}{a^2} & -\frac{12EJ}{a^3} & \frac{6EJ}{a^2} \\ \frac{6EJ}{a^2} & \frac{4EJ}{a} & -\frac{6EJ}{a^2} & \frac{2EJ}{a} \\ -\frac{12EJ}{a^3} & -\frac{6EJ}{a^2} & \frac{12EJ}{a^3} & -\frac{6EJ}{a^2} \\ \frac{6EJ}{a^2} & \frac{2EJ}{a} & -\frac{6EJ}{a^2} & \frac{4EJ}{a} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[k_2] = \begin{bmatrix} TP_{11} & TP_{12} & TP_{13} & TP_{14} \\ TP_{12} & TP_{22} & TP_{23} & TP_{24} \\ TP_{13} & TP_{23} & TP_{33} & TP_{34} \\ TP_{14} & TP_{24} & TP_{34} & TP_{44} \end{bmatrix} \quad (9)$$

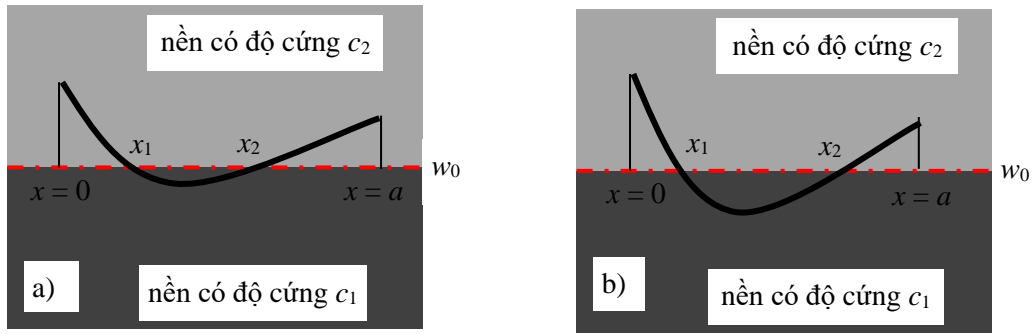
Trong đó các thành phần TP_{ij} trong ma trận $[k_2]$ được xác định theo hình dạng biến dạng trong nền đàn hồi của phần tử dầm, có 4 loại ma trận độ cứng nền trong phạm vi của phần tử dầm như trên hình 3,4,5,6 tương ứng được tính theo công thức (10), (11), (12), (13).



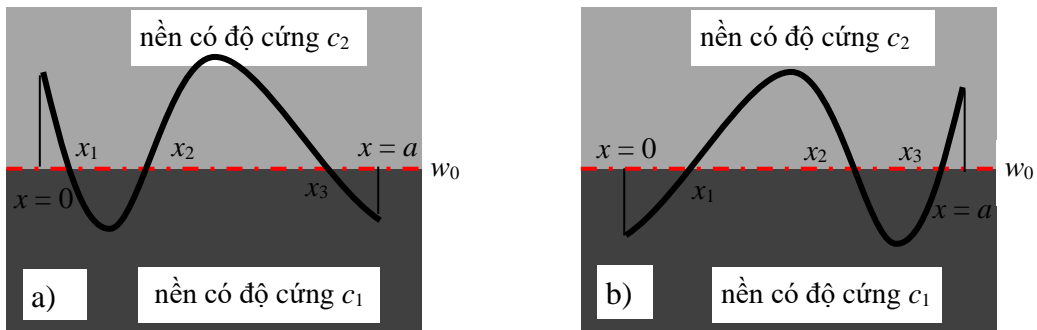
Hình 3. Đường đàn hồi của phần tử dầm không cắt với đường chuẩn w_0 .



Hình 4. Đường đàn hồi của phần tử dầm cắt đường chuẩn w_0 tại $x = x_1$.



Hình 5. Đường đàn hồi của phân tử dầm cắt đường chuẩn w_0 tại $x = x_1$ và $x = x_2$.



Hình 6. Đường đàn hồi của phân tử dầm cắt với đường chuẩn w_0 tại $x = x_1, x = x_2$ và $x = x_3$.

- Loại 1: Đường đàn hồi của phân tử dầm không cắt với đường chuẩn w_0 (hình 3)

$$\begin{aligned}
 TP_{11} &= \frac{13}{35}c_1 1a, & TP_{12} &= \frac{11}{210}c_1 a^2, & TP_{13} &= \frac{9}{70}c_1 a, & TP_{14} &= -\frac{13}{420}c_1 a^2, & TP_{22} &= \\
 & \frac{1}{105}c_1 a^3, & TP_{23} &= \frac{13}{420}c_1 a^2, & TP_{24} &= -\frac{1}{140}c_1 a^3, & TP_{33} &= \frac{13}{35}c_1 a, & TP_{34} &= -\frac{11}{210}c_1 a^2, \\
 TP_{44} &= \frac{1}{105}c_1 a^3
 \end{aligned} \tag{10}$$

- Loại 2: Đường đàn hồi của phân tử dầm cắt đường chuẩn w_0 tại $x = x_1$ (hình 4)

$$\begin{aligned}
 TP_{11} &= c_1 \left(x_1 + \frac{4x_1^7}{7a^6} - \frac{2x_1^6}{a^5} + \frac{9x_1^5}{5a^4} + \frac{x_1^4}{a^3} - \frac{2x_1^3}{a^2} \right) + c_2 \left(a - x_1 + \frac{4a^7 - x_1^7}{7a^6} - \right. \\
 & \left. \frac{2(a^6 - x_1^6)}{a^5} + \frac{9(a^5 - x_1^5)}{5a^4} + \frac{(a^4 - x_1^4)}{a^3} - \frac{2(a^3 - x_1^3)}{a^2} \right), \\
 TP_{12} &= c_1 \left(\frac{2x_1^7}{7a^5} - \frac{7x_1^6}{6a^4} + \frac{8x_1^5}{5a^3} - \frac{1x_1^4}{2a^2} - \frac{2x_1^3}{3a} + \frac{x_1^2}{2} \right) + c_2 \left(\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} - \frac{7-x_1^6+x_2^6}{6a^4} + \right. \\
 & \left. \frac{8-x_1^5+x_2^5}{5a^3} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{2a^2} - \frac{2-x_1^3+x_2^3}{3a} - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \right), \\
 TP_{13} &= c_1 \left(-\frac{4x_1^7}{7a^6} + 2\frac{x_1^6}{a^5} - \frac{9x_1^5}{5a^4} - \frac{1x_1^4}{2a^3} + \frac{x_1^3}{a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{4a^7 - x_1^7}{7a^6} + \frac{2(a^6 - x_1^6)}{a^5} - \right. \\
 & \left. \frac{9a^5 - x_1^5}{5a^4} - \frac{1a^4 - x_1^4}{2a^3} + \frac{a^3 - x_1^3}{a^2} \right),
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$TP_{14} = c_1 \left(\frac{2x_1^7}{7a^5} - \frac{5x_1^6}{6a^4} + \frac{3x_1^5}{5a^3} + \frac{1x_1^4}{4a^2} - \frac{1x_1^3}{3a} \right) + c_2 \left(\frac{2a^7-x_1^7}{7a^5} - \frac{5a^6-x_1^6}{6a^4} + \frac{3a^5-x_1^5}{5a^3} + \frac{1a^4-x_1^4}{4a^2} - \frac{1a^3-x_1^3}{3a} \right),$$

$$TP_{22} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{2x_1^6}{3a^3} + \frac{6x_1^5}{5a^2} - \frac{x_1^4}{a} + \frac{1}{3}x_1^3 \right) + c_2 \left(\frac{1a^7-x_1^7}{7a^4} - \frac{2a^6-x_1^6}{3a^3} + \frac{6a^5-x_1^5}{5a^2} - \frac{a^4-x_1^4}{a} + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}x_1^3 \right),$$

$$TP_{23} = c_1 \left(-\frac{2x_1^7}{7a^5} + \frac{7x_1^6}{6a^4} - \frac{8x_1^5}{5a^3} + \frac{3x_1^4}{4a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{2a^7-x_1^7}{7a^5} + \frac{7a^6-x_1^6}{6a^4} - \frac{8a^5-x_1^5}{5a^3} + \frac{3a^4-x_1^4}{4a^2} \right),$$

$$TP_{24} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{1x_1^6}{2a^3} + \frac{3x_1^5}{5a^2} - \frac{1x_1^4}{4a} \right) + c_2 \left(\frac{1a^7-x_1^7}{7a^4} - \frac{1a^6-x_1^6}{2a^3} + \frac{3a^5-x_1^5}{5a^2} - \frac{1a^4-x_1^4}{4a} \right),$$

$$TP_{33} = c_1 \left(\frac{4x_1^7}{7a^6} - 2\frac{x_1^6}{a^5} + \frac{9x_1^5}{5a^4} \right) + c_2 \left(\frac{4a^7-x_1^7}{7a^6} - \frac{2(a^6-x_1^6)}{a^5} + \frac{9a^5-x_1^5}{5a^4} \right),$$

$$TP_{34} = c_1 \left(-\frac{2x_1^7}{7a^5} + \frac{5x_1^6}{6a^4} - \frac{3x_1^5}{5a^3} \right) + c_2 \left(-\frac{2a^7-x_1^7}{7a^5} + \frac{5a^6-x_1^6}{6a^4} - \frac{3a^5-x_1^5}{5a^3} \right),$$

$$TP_{44} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{1x_1^6}{3a^3} + \frac{1x_1^5}{5a^2} \right) + c_2 \left(\frac{1a^7-x_1^7}{7a^4} - \frac{1a^6-x_1^6}{3a^3} + \frac{1a^5-x_1^5}{5a^2} \right).$$

- Loại 3: Đường đàn hồi của phân tử dầm cắt đường chuẩn w_0 tại $x = x_1$, và $x = x_2$ (hình 5)

$$TP_{11} = c_1 \left(x_1 + \frac{4x_1^7}{7a^6} - \frac{2x_1^6}{a^5} + \frac{9x_1^5}{5a^4} + \frac{x_1^4}{a^3} - \frac{2x_1^3}{a^2} \right) + c_2 \left(x_2 - x_1 + \frac{4-x_1^7+x_2^7}{7a^6} - \frac{2(-x_1^6+x_2^6)}{a^5} + \frac{9-x_1^5+x_2^5}{5a^4} + \frac{-x_1^4+x_2^4}{a^3} - \frac{2(-x_1^3+x_2^3)}{a^2} \right) + c_1 \left(a - x_2 + \frac{4a^7-x_2^7}{7a^6} - \frac{2(a^6-x_2^6)}{a^5} + \frac{9(a^5-x_2^5)}{5a^4} + \frac{(a^4-x_2^4)}{a^3} - \frac{2(a^3-x_2^3)}{a^2} \right),$$

$$TP_{12} = c_1 \left(\frac{2x_1^7}{7a^5} - \frac{7x_1^6}{6a^4} + \frac{8x_1^5}{5a^3} - \frac{1x_1^4}{2a^2} - \frac{2x_1^3}{3a} + \frac{1}{2}x_1^2 \right) + c_2 \left(\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} - \frac{7-x_1^6+x_2^6}{6a^4} + \frac{8-x_1^5+x_2^5}{5a^3} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{2a^2} - \frac{2-x_1^3+x_2^3}{3a} - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \right) + c_1 \left(\frac{2a^7-x_2^7}{7a^5} - \frac{7a^6-x_2^6}{6a^4} + \frac{8a^5-x_2^5}{5a^3} - \frac{1a^4-x_2^4}{2a^2} - \frac{2a^3-x_2^3}{3a} + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \right), \tag{12}$$

$$TP_{13} = c_1 \left(-\frac{4x_1^7}{7a^6} + \frac{2x_1^6}{a^5} - \frac{9x_1^5}{5a^4} - \frac{1x_1^4}{2a^3} + \frac{x_1^3}{a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{4-x_1^7+x_2^7}{7a^6} + \frac{2(-x_1^6+x_2^6)}{a^5} - \frac{9-x_1^5+x_2^5}{5a^4} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{2a^3} + \frac{(-x_1^3+x_2^3)}{a^2} \right) + c_1 \left(-\frac{4a^7-x_2^7}{7a^6} + \frac{2(a^6-x_2^6)}{a^5} - \frac{9(a^5-x_2^5)}{5a^4} - \frac{1(a^4-x_2^4)}{2a^3} + \frac{(a^3-x_2^3)}{a^2} \right),$$

$$TP_{14} = c_1 \left(\frac{2x_1^7}{7a^5} - \frac{5x_1^6}{6a^4} + \frac{3x_1^5}{5a^3} + \frac{1x_1^4}{4a^2} - \frac{1x_1^3}{3a} \right) + c_2 \left(\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} - \frac{5-x_1^6+x_2^6}{6a^4} + \frac{3-x_1^5+x_2^5}{5a^3} + \frac{1-x_1^4+x_2^4}{4a^2} - \frac{1-x_1^3+x_2^3}{3a} \right) + c_1 \left(\frac{2a^7-x_2^7}{7a^5} - \frac{5a^6-x_2^6}{6a^4} + \frac{3a^5-x_2^5}{5a^3} + \frac{1a^4-x_2^4}{4a^2} - \frac{1a^3-x_2^3}{3a} \right),$$

$$TP_{22} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{2x_1^6}{3a^3} + \frac{6x_1^5}{5a^2} - \frac{x_1^4}{a} + \frac{1}{3}x_1^3 \right) + c_2 \left(\frac{1-x_1^7+x_2^7}{7a^4} - \frac{2-x_1^6+x_2^6}{3a^3} + \frac{6-x_1^5+x_2^5}{5a^2} - \frac{-x_1^4+x_2^4}{a} - \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{3}x_2^3 \right) + c_1 \left(\frac{1a^7-x_2^7}{7a^4} - \frac{2a^6-x_2^6}{3a^3} + \frac{6a^5-x_2^5}{5a^2} - \frac{a^4-x_2^4}{a} + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}x_2^2 \right),$$

$$TP_{23} = c_1 \left(-\frac{2x_1^7}{7a^5} + \frac{7x_1^6}{6a^4} - \frac{8x_1^5}{5a^3} + \frac{3x_1^4}{4a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} + \frac{7-x_1^6+x_2^6}{6a^4} - \frac{8-x_1^5+x_2^5}{5a^3} + \frac{3-x_1^4+x_2^4}{4a^2} \right) + c_1 \left(-\frac{2a^7-x_2^7}{7a^5} + \frac{7a^6-x_2^6}{6a^4} - \frac{8a^5-x_2^5}{5a^3} + \frac{3a^4-x_2^4}{4a^2} \right),$$

$$TP_{24} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{1x_1^6}{2a^3} + \frac{3x_1^5}{5a^2} - \frac{1x_1^4}{4a} \right) + c_2 \left(\frac{1-x_1^7+x_2^7}{7a^4} - \frac{1-x_1^6+x_2^6}{2a^3} + \frac{3-x_1^5+x_2^5}{5a^2} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{4a} \right) + c_1 \left(\frac{1a^7-x_2^7}{7a^4} - \frac{1a^6-x_2^6}{2a^3} + \frac{3a^5-x_2^5}{5a^2} - \frac{1a^4-x_2^4}{4a} \right),$$

$$TP_{33} = c_1 \left(\frac{4x_1^7}{7a^6} - \frac{2x_1^6}{a^5} + \frac{9x_1^5}{5a^4} \right) + c_2 \left(\frac{4-x_1^7+x_2^7}{7a^6} - \frac{2(-x_1^6+x_2^6)}{a^5} + \frac{9-x_1^5+x_2^5}{5a^4} \right) + c_1 \left(\frac{4a^7-x_2^7}{7a^6} - \frac{2(a^6-x_2^6)}{a^5} + \frac{9a^5-x_2^5}{5a^4} \right),$$

$$TP_{34} = c_1 \left(-\frac{2x_1^7}{7a^5} + \frac{2x_1^6}{7a^4} - \frac{3x_1^5}{5a^3} \right) + c_2 \left(-\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} + \frac{5(-x_1^6+x_2^6)}{6a^4} - \frac{3-x_1^5+x_2^5}{5a^3} \right) + c_1 \left(-\frac{2a^7-x_2^7}{7a^5} + \frac{5(a^6-x_2^6)}{6a^4} - \frac{3a^5-x_2^5}{5a^3} \right),$$

$$TP_{44} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{1x_1^6}{3a^3} + \frac{1x_1^5}{5a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{1-x_1^7+x_2^7}{7a^4} - \frac{1(-x_1^6+x_2^6)}{3a^3} + \frac{1-x_1^5+x_2^5}{5a^2} \right) + c_1 \left(\frac{1a^7-x_2^7}{7a^4} - \frac{1(a^6-x_2^6)}{3a^3} + \frac{1(a^5-x_2^5)}{5a^2} \right).$$

- Loại 4: Đường đàn hồi của phân tử đậm và đường chuẩn w_0 có giao cắt ở $x = x_1, x = x_2$ và $x = x_3$ (hình 6)

$$TP_{11} = c_1 \left(x_1 + \frac{4x_1^7}{7a^6} - \frac{2x_1^6}{a^5} + \frac{9x_1^5}{5a^4} + \frac{x_1^4}{a^3} - \frac{2x_1^3}{a^2} \right) + c_2 \left(x_2 - x_1 + \frac{4-x_1^7+x_2^7}{7a^6} - \frac{2(-x_1^6+x_2^6)}{a^5} + \frac{9-x_1^5+x_2^5}{5a^4} + \frac{-x_1^4+x_2^4}{a^3} - \frac{2(-x_1^3+x_2^3)}{a^2} \right) + c_1 \left(x_3 - x_2 + \frac{4-x_2^7+x_3^7}{7a^6} - \frac{2(-x_2^6+x_3^6)}{a^5} + \frac{9(-x_2^5+x_3^5)}{5a^4} + \frac{-x_2^4+x_3^4}{a^3} - \frac{2(-x_2^3+x_3^3)}{a^2} \right) + c_2 \left(a - x_3 + \frac{4a^7-x_3^7}{7a^6} - \frac{2(a^6-x_3^6)}{a^5} + \frac{9a^5-x_3^5}{5a^4} + \frac{a^4-x_3^4}{a^3} - \frac{2(a^3-x_3^3)}{a^2} \right), \quad (13)$$

$$TP_{12} = c_1 \left(\frac{2x_1^7}{7a^5} - \frac{7x_1^6}{6a^4} + \frac{8x_1^5}{5a^3} - \frac{1x_1^4}{2a^2} - \frac{2x_1^3}{3a} + \frac{1}{2}x_1^2 \right) + c_2 \left(\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} - \frac{7-x_1^6+x_2^6}{6a^4} + \frac{8-x_1^5+x_2^5}{5a^3} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{2a^2} - \frac{2-x_1^3+x_2^3}{3a} - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \right) + c_1 \left(\frac{2-x_2^7+x_3^7}{7a^5} - \frac{7(-x_2^6+x_3^6)}{6a^4} + \frac{8(-x_2^5+x_3^5)}{5a^3} - \frac{1-x_2^4+x_3^4}{2a^2} - \frac{2-x_2^3+x_3^3}{3a} - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 \right) + c_2 \left(\frac{2a^7-x_3^7}{7a^5} - \frac{7a^6-x_3^6}{6a^4} + \frac{8a^5-x_3^5}{5a^3} - \frac{1a^4-x_3^4}{2a^2} - \frac{2a^3-x_3^3}{3a} + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x_3^2 \right),$$

$$TP_{13} = c_1 \left(-\frac{4x_1^7}{7a^6} + \frac{2x_1^6}{a^5} - \frac{9x_1^5}{5a^4} - \frac{1x_1^4}{2a^3} + \frac{x_1^3}{a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{4-x_1^7+x_2^7}{7a^6} + \frac{2(-x_1^6+x_2^6)}{a^5} - \frac{9-x_1^5+x_2^5}{5a^4} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{2a^3} + \frac{-x_1^3+x_2^3}{a^2} \right) + c_1 \left(-\frac{4-x_2^7+x_3^7}{7a^6} + \frac{2(-x_2^6+x_3^6)}{a^5} - \frac{9(-x_2^5+x_3^5)}{5a^4} - \frac{4-x_2^4+x_3^4}{7a^3} - \frac{-x_2^3+x_3^3}{a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{4a^7-x_3^7}{7a^6} + \frac{2(a^6-x_3^6)}{a^5} - \frac{9a^5-x_3^5}{5a^4} - \frac{1a^4-x_3^4}{2a^3} + \frac{a^3-x_3^3}{a^2} \right),$$

$$TP_{14} = c_1 \left(\frac{2x_1^7}{7a^5} - \frac{5x_1^6}{6a^4} + \frac{3x_1^5}{5a^3} + \frac{1x_1^4}{4a^2} - \frac{1x_1^3}{3a} \right) + c_2 \left(\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} - \frac{5-x_1^6+x_2^6}{6a^4} + \frac{3-x_1^5+x_2^5}{5a^3} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{4a^2} - \frac{1-x_1^3+x_2^3}{3a} \right) + c_1 \left(\frac{2-x_2^7+x_3^7}{7a^5} - \frac{5(-x_2^6+x_3^6)}{6a^4} + \frac{3(-x_2^5+x_3^5)}{5a^3} - \frac{1-x_2^4+x_3^4}{4a^2} - \frac{1-x_2^3+x_3^3}{3a} \right) + c_2 \left(\frac{2a^7-x_3^7}{7a^5} - \frac{5a^6-x_3^6}{6a^4} + \frac{3a^5-x_3^5}{5a^3} + \frac{1a^4-x_3^4}{4a^2} - \frac{1a^3-x_3^3}{3a} \right),$$

$$TP_{22} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{2x_1^6}{3a^3} + \frac{6x_1^5}{5a^2} - \frac{x_1^4}{a} + \frac{1}{3}x_1^3 \right) + c_2 \left(\frac{1-x_1^7+x_2^7}{7a^4} - \frac{2-x_1^6+x_2^6}{3a^3} + \frac{6-x_1^5+x_2^5}{5a^2} - \frac{6-x_1^4+x_2^4}{5a} - \frac{-x_1^3+x_2^3}{3} + \frac{1}{3}x_2^3 \right) + c_1 \left(\frac{1-x_2^7+x_3^7}{7a^4} - \frac{2-x_2^6+x_3^6}{3a^3} + \frac{6-x_2^5+x_3^5}{5a^2} - \frac{-x_2^4+x_3^4}{a} - \frac{1}{3}x_2^3 + \frac{1}{3}x_3^2 \right) + c_2 \left(\frac{1a^7-x_3^7}{7a^4} - \frac{2a^6-x_3^6}{3a^3} + \frac{6a^5-x_3^5}{5a^2} - \frac{a^4-x_3^4}{a} + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}x_3^2 \right),$$

$$TP_{23} = c_1 \left(-\frac{2x_1^7}{7a^5} + \frac{7x_1^6}{6a^4} - \frac{8x_1^5}{5a^3} + \frac{3x_1^4}{4a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{2-x_1^7+x_2^7}{7a^5} + \frac{7-x_1^6+x_2^6}{6a^4} - \frac{8-x_1^5+x_2^5}{5a^3} + \frac{3-x_1^4+x_2^4}{4a^2} \right) + c_1 \left(-\frac{2-x_2^7+x_3^7}{7a^5} + \frac{7(-x_2^6+x_3^6)}{6a^4} - \frac{8(-x_2^5+x_3^5)}{5a^3} + \frac{3-x_2^4+x_3^4}{4a^2} \right) + c_2 \left(-\frac{2a^7-x_3^7}{7a^5} + \frac{7a^6-x_3^6}{6a^4} - \frac{8a^5-x_3^5}{5a^3} + \frac{3a^4-x_3^4}{4a^2} \right),$$

$$TP_{24} = c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{1x_1^6}{2a^3} + \frac{3x_1^5}{5a^2} - \frac{x_1^4}{4a} \right) + c_2 \left(\frac{1-x_1^7+x_2^7}{7a^4} - \frac{1-x_1^6+x_2^6}{2a^3} + \frac{3-x_1^5+x_2^5}{5a^2} - \frac{1-x_1^4+x_2^4}{4a} \right) + c_1 \left(\frac{1-x_2^7+x_3^7}{7a^4} - \frac{1-x_2^6+x_3^6}{2a^3} + \frac{3-x_2^5+x_3^5}{5a^2} - \frac{1-x_2^4+x_3^4}{4a} \right) + c_2 \left(\frac{1a^7-x_3^7}{7a^4} - \frac{1a^6-x_3^6}{2a^3} + \frac{3a^5-x_3^5}{5a^2} - \frac{1a^4-x_3^4}{4a} \right),$$

$$TP_{33} = c_1 \left(\frac{4x_1^7}{7a^6} - \frac{2x_1^6}{a^5} + \frac{9x_1^5}{5a^4} \right) + c_2 \left(-\frac{4-x_1^7+x_2^7}{7a^6} - \frac{2(-x_1^6+x_2^6)}{a^5} + \frac{9-x_1^5+x_2^5}{5a^4} \right) + c_1 \left(\frac{4-x_2^7+x_3^7}{7a^6} - \frac{2(-x_2^6+x_3^6)}{a^5} + \frac{9(-x_2^5+x_3^5)}{5a^4} \right) + c_2 \left(\frac{4a^7-x_3^7}{7a^6} - \frac{2(a^6-x_3^6)}{a^5} + \frac{9a^5-x_3^5}{5a^4} \right),$$

$$\begin{aligned}
 TP_{34} &= c_1 \left(-\frac{2x_1^7}{7a^5} + \frac{5x_1^6}{6a^4} - \frac{3x_1^5}{5a^3} \right) + c_2 \left(-\frac{2(-x_1^7+x_2^7)}{7a^5} + \frac{5(-x_1^6+x_2^6)}{6a^4} - \frac{3(-x_1^5+x_2^5)}{5a^3} \right) + \\
 &c_1 \left(-\frac{2(-x_2^7+x_3^7)}{7a^5} + \frac{5(-x_2^6+x_3^6)}{6a^4} - \frac{3(-x_2^5+x_3^5)}{5a^3} \right) + c_2 \left(-\frac{2a^7-x_3^7}{7a^5} + \frac{5a^6-x_3^6}{6a^4} - \right. \\
 &\left. \frac{3a^5-x_3^5}{5a^3} \right), \\
 TP_{44} &= c_1 \left(\frac{1x_1^7}{7a^4} - \frac{1x_1^6}{3a^3} + \frac{1x_1^5}{5a^2} \right) + c_2 \left(\frac{1(-x_1^7+x_2^7)}{7a^4} - \frac{1(-x_1^6+x_2^6)}{3a^3} + \frac{1(-x_1^5+x_2^5)}{5a^2} \right) + \\
 &c_1 \left(\frac{1(-x_2^7+x_3^7)}{7a^4} - \frac{1(-x_2^6+x_3^6)}{3a^3} + \frac{1(-x_2^5+x_3^5)}{5a^2} \right) + c_2 \left(\frac{1a^7-x_3^7}{7a^4} - \frac{1a^6-x_3^6}{3a^3} + \frac{1a^5-x_3^5}{5a^2} \right).
 \end{aligned}$$

Căn cứ vào số lượng giao điểm giữa đường đàn hồi của phần tử dầm và đường chuẩn w_0 , ma trận độ cứng của nền được lựa chọn tương ứng là công thức (10), (11), (12), hoặc (13). Trong quá trình tính nếu dạng của đường đàn hồi của phần tử dầm tương ứng với các hình 3.a, 4.a, 5.a, 6.a thì công thức tính ma trận độ cứng nền được áp dụng trực tiếp, nếu ở dạng như các hình 3.b, 4.b, 5.b, 6.b thì trong các công thức tính ma trận độ cứng của nền trên, vị trí của c_1 và c_2 được đổi cho nhau.

3. SỬ DỤNG PHẦN TỬ DẦM NỀN - ĐỊNH HƯỚNG TÍNH DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG TĨNH

3.1. Thuật toán

Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn được viết như công thức (14)

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (14)$$

Trong đó: $[K]$ - ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu, $\{\Delta\}$ - véc tơ chuyển vị của kết cấu, $\{P\}$ - véc tơ tải trọng. Ma trận độ cứng $[K]$ của kết cấu được xây dựng trên cơ sở ma trận độ cứng của các phần tử dầm-nền định hướng như công thức (7).

Do trong (7) có chứa $[k_2]$, mà $[k_2]$ chỉ xác định được rõ ràng khi biết chính xác được đường đàn hồi của phần tử dầm tương ứng nên $[K]$ không thể tính ngay được, hay phương trình (14) là phương trình phi tuyến. Để giải phương trình (14) tác giả sử dụng phương pháp lặp Newton, trình tự giải được thực hiện như sau:

Trình tự giải phương trình (14):

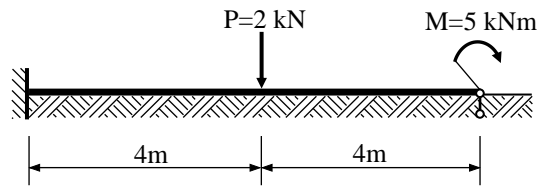
- Bước 1. Cho véc tơ chuyển vị $\{\Delta\} = 0$, lập véc tơ tải trọng $\{P\}$, lập ma trận độ cứng của phần tử dầm $[k_1]$.

- Bước 2. Suy ra thông số đầu các phần tử, xác lập đường đàn hồi của các phần tử, lập ma trận độ cứng của nền tương ứng $[k_2]$, lập ma trận độ cứng của phần tử dầm-nền định hướng tương ứng, lập ma trận độ cứng kết cấu. Giải phương trình (14) được véc tơ chuyển vị $\{\Delta_1\}$.

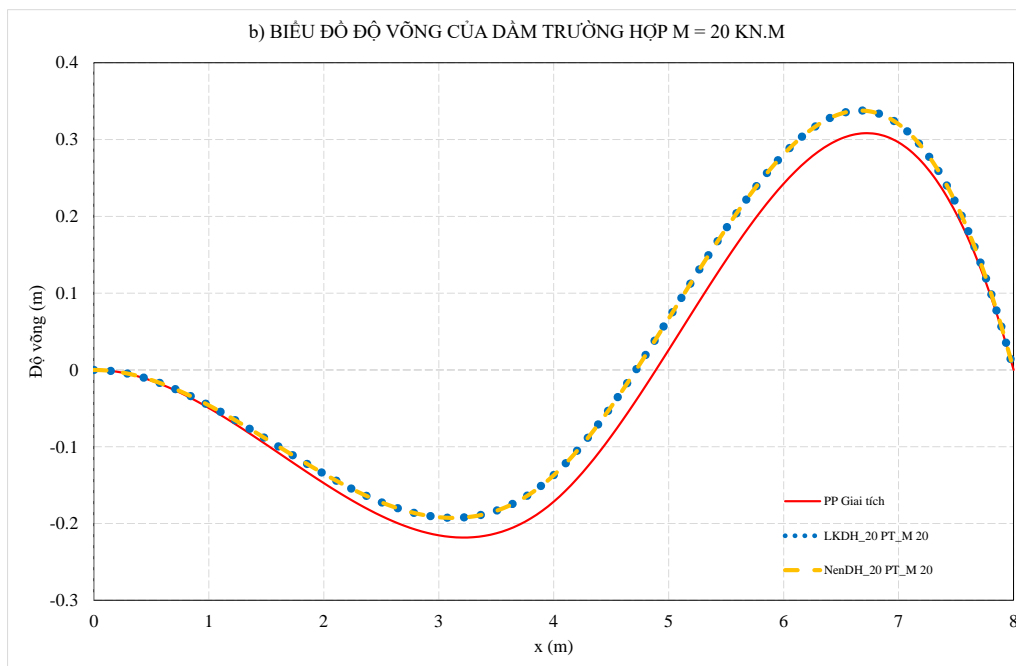
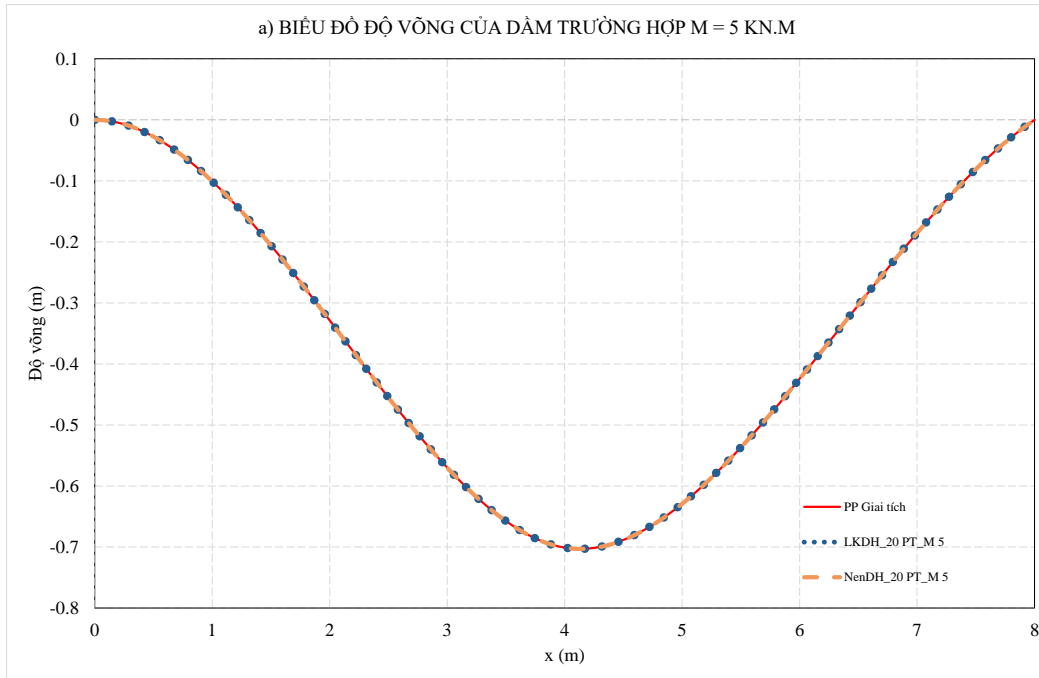
- Bước 3. Kiểm tra điều kiện dừng lặp: Nếu thỏa mãn thì dừng tính toán, nếu không thỏa mãn thì cho véc tơ chuyển vị mới theo phương pháp giải lặp Newton và quay lại bước 1.

3.2. Đánh giá độ tin cậy của phương pháp tính

Một dầm chịu lực như hình 7. Dầm có mô đun đàn hồi $E = 2.10^6$ kN/m², mặt cắt ngang có $J = 184.10^{-7}$ m⁴, $F = 268.10^{-5}$ m². Độ cứng của nền $c = 1$ kN/m². Mô men uốn của dầm xét hai trường hợp $M = 5$ kN.m và $M = 20$ kN.m.



Hình 7. Dầm trên nền đàn hồi.



Hình 8. Biểu đồ độ võng của dầm khi phân tích bằng phương pháp giải tích (đường —), phương pháp phần tử hữu hạn với mô hình liên kết dị hướng (đường ■■■) và mô hình dầm-nền dị hướng (đường —■—) trường hợp $M = 5 \text{ kN.m}$ (a) và $M = 20 \text{ kN.m}$ (b).

Trong mục này, tác giả sẽ tính và so sánh độ võng của dầm theo phương pháp giải tích với mô hình nền Winkler, phương pháp phần tử hữu hạn với liên kết dị hướng và phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử dầm - nền dị hướng.

Lời giải giải tích được tính theo tài liệu tham khảo [1]. Lời giải theo phương pháp phần tử hữu hạn với mô hình liên kết dị hướng [10] và phần tử dầm-nền dị hướng có được khi rời rạc hóa dầm thành 20 phần tử (với số lượng phần tử là 20 kết quả phân tích số có sai số dưới 0,2%) và nền một chiều có thông số $c_1 = 1 \text{ kN/m}^2$, $c_2 = 0$, $w_0 = 0$.

Trường hợp mô men uốn $M = 5 \text{ kN.m}$ kết quả phân tích cho thấy, toàn bộ dầm có chuyển vị xuống dưới, dầm tiếp xúc với nền trên toàn bộ chiều dài. Có thể dự đoán rằng kết quả phân tích dầm theo mô hình nền Winkler hay mô hình nền một chiều là giống nhau.

Hình 8.a phản ánh đúng dự đoán như vậy, kết quả phân tích dầm bằng phương pháp giải tích, và phương pháp phần tử hữu hạn là rất sát nhau đối với cả mô hình liên kết dị hướng hay mô hình phần tử dầm – nền dị hướng. Sai số về độ võng lớn nhất của phương pháp phần tử hữu hạn so với phương pháp giải tích bằng 0,0024% khi sử dụng mô hình liên kết dị hướng và bằng 0,0021% khi sử dụng mô hình dầm-nền dị hướng.

Hình 8.b cho thấy một phần của dầm có chuyển vị lên trên, dầm không tiếp xúc với nền, mô hình nền Winkler không còn phù hợp nữa, mô hình nền một chiều sẽ cho kết quả sát với ứng xử thực tế của dầm. Kết quả phân tích cho thấy lời giải bằng phương pháp giải tích khác so với phương pháp phần tử hữu hạn, sai số về độ võng lớn nhất bằng 25,8300% khi sử dụng mô hình liên kết dị hướng và bằng 25,8861% khi sử dụng phần tử dầm-nền dị hướng. Kết quả phân tích bằng phương pháp phần tử hữu hạn khi sử dụng mô hình liên kết dị hướng và phần tử dầm-nền dị hướng rất sát nhau, sai số về độ võng bằng 0,0446%.

Thông qua khảo sát này cho thấy, phần tử dầm-nền dị hướng cho phép mô tả được sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền. Kết quả phân tích cũng cho thấy độ chính xác và tin cậy khi sử dụng phần tử dầm-nền dị hướng để phân tích dầm trên nền đàn hồi.

4. KẾT LUẬN

Tác giả đã xây dựng được một loại phần tử mới, phần tử dầm-nền dị hướng, cho phép phân tích được dầm trên nền đàn hồi có độ cứng nền theo hai chiều chuyển vị khác nhau, có khe hở giữa dầm và nền $w_0 \neq 0$.

Kết quả phân tích cho thấy độ tin cậy khi sử dụng phần tử dầm-nền dị hướng để phân tích dầm trên nền đàn hồi có xét đến sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền.

Hướng nghiên cứu trong tương lai: Nhóm tác giả dự kiến sẽ nghiên cứu ứng dụng phần tử dầm-nền dị hướng để giải các bài toán động, ổn định và ứng dụng vào giải các bài toán trong thực tế kỹ thuật.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải trong đề tài mã số T2020-CT-004. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự đóng góp ý kiến của các thầy cô bộ môn Sức Bền Vật liệu - Trường Đại học Giao thông vận tải.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Vũ Đình Lai, Sức Bền Vật Liệu, tái bản 3, NXB Giao thông vận tải, Hà Nội, 2010.
- [2]. Lê Thị Quỳnh, Đỗ Văn Bình, Ôn Định Công Trình, lần 1, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2002.
- [3]. Anil K. Chopra, Dynamics of structures, fourth ed, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall, America, 2012.
- [4]. Vũ Thị Bích Quyên và cộng sự, Phương pháp phần tử biên tính nội lực và chuyển vị hệ dầm trên nền đàn hồi theo mô hình Winkler, Tạp chí KHCN Xây dựng, 2 (2017) 6-12. http://ibst.vn/upload/documents/file_upload/1512721967Vu-Thi-Bich-Quyên.pdf
- [5]. Phạm Hoàng Anh, Nghiệm giải tích rời rạc cho bài toán dầm trên nền đàn hồi Winkler, tập 2, Kỷ yếu Hội nghị Cơ học toàn quốc, Hà Nội, 2014, tr7-12.
- [6]. Z. Celep, K. Güler, F. Demir, Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load, Structural engineering and mechanics, 37 (2011) 61-77. <https://doi.org/10.12989/sem.2011.37.1.061>
- [7]. D. Froio et al., Critical velocities of a beam on nonlinear elastic foundation under harmonic moving load, Procedia Engineering, 199 (2017) 2585-2590. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.348>
- [8]. P. Castro Jorge, F.M.F. Simões, A. Pinto da Costa, Finite element dynamic analysis of beams on non-uniform nonlinear viscoelastic foundations under moving loads, Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EUROODYN 2014, Portugal, 2014, pp. 841-845.
- [9]. C. Rodrigues et al., Finite element dynamic analysis of beams on nonlinear elastic foundations under a moving oscillator, European Journal of Mechanics - A/Solids, 68 (2018) 9-24. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.10.005>
- [10]. D. Froio, R. Molioli, E. Rizzi, Numerical dynamic analysis of beams on nonlinear elastic foundation under harmonic moving load, ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Greece, 2016, pp. 4794-4809. <https://doi.org/10.7712/100016.2149.7515>
- [11]. S. M. Abdelghany et al., Dynamic response of non-uniform beam subjected to moving load and resting on non-linear viscoelastic foundation, Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences, 4 (2015) 192-199. <https://dx.doi.org/10.1016/j.bjbas.2015.05.007>
- [12]. S. N. Akour, Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation, Proceedings of the World Congress on Engineering 2010, London, U.K, 2010.
- [13]. Đỗ Xuân Quý và các cộng sự, Nghiên cứu ứng xử cơ học của thanh có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động, Tuyển tập công trình khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ XIV, Thành phố Hồ Chí Minh, 2018, tr. 549-556.
- [14]. Q. X. Do et al., Experimental research on dynamic response of beams with anisotropic restraints, The 5th international Conference on Engineering Mechanics and Automation, Ha Noi, 2019, pp. 98-104.
- [15]. Nguyễn Xuân Lựu, Phương pháp phần tử hữu hạn, NXB Giao thông vận tải, Hà Nội, 2007.