Transport and Communications Science Journal

NONLINEAR DYNAMICAL ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELL UNDER AERODYNAMIC LOAD USING THE FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Pham Thi Toan

University of Transport and Communications, No 3 Cau Giay Street, Hanoi, Vietnam

ARTICLE INFO

TYPE: Research Article
Received: 08/01/2021
Revised: 20/03/2021
Accepted: 24/03/2021
Published online: 15/06/2021
https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.1

*Corresponding author
Email: phamthitoan@utc.edu.vn; Tel: 0912580957

Abstract. The research on functionally graded material (FGM) has received a lot of attention recently because this material is used in many areas of life. This paper presents an analytical approach to investigate the dynamic characteristics of the functionally graded cylindrical thin shell subjected to aerodynamic loads. Based on the first-order shear deformation theory (FSDT) and the Piston theory supersonic aerodynamic, the governing equations of FGM cylindrical shell in the moving hypersonic airflow are established. The Galerkin technique together with Volmirs assumption and the fourth-order Runge-Kutta method are used to analyze dynamic problems of cylindrical shell. The research target is to find out critical Mach numbers of airflow, which made the shell unstable when geometrical parameters of shell and volume fraction index of the constituent material are varied. Numerical results show the influences of geometrical parameters, the material properties to the nonlinear flutter characteristics of FGM cylindrical shell. The results are obtained to find out critical Mach of airflow, which made the shell unstable.

Keywords: Cylindrical shell; FGM material; flutter; nonlinear dynamic.

© 2021 University of Transport and Communications

Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải

PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN DƯỚI TÁC DỤNG CỦA LỰC KHÍ ĐỘNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC NHẤT

Phạm Thị Toan

Trường Đại học Giao thông vận tải, Số 3 Cầu Giấy, Hà Nội, Việt Nam

THÔNG TIN BÀI BÁO

CHUYÊN MỤC: Công trình khoa học
Ngày nhận bài: 08/01/2021
Ngày nhận bài sửa: 20/03/2021
Ngày chấp nhận đăng: 24/03/2021
Ngày xuất bản Online: 15/06/2021
https://doi.org/10.47869/tcsj.72.5.1

*Tác giả liên hệ
Email: phamthitoan@utc.edu.vn; Tel: 0912580957

Tóm tắt. Các nghiên cứu về vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) đã nhận được rất nhiều sự quan tâm trong thời gian gần đây do vật liệu được sử dụng ở nhiều lĩnh vực của cuộc sống. Trong bài báo này đã phân tích các đặc trưng động học của vỏ trụ mỏng FGM dưới tác dụng của lực khí động. Trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và mô hình khí động lực theo lý thuyết Piston đã thiết lập các phương trình cơ bản của vỏ trụ FGM trong dòng khí chuyển động vượt âm. Phương pháp Galerkin, giả thiết Volmir và phương pháp Runge-Kutta bậc 4 đã được sử dụng cho phân tích động lực của vỏ. Mục tiêu nghiên cứu là tìm số Mach tới hạn của dòng khí làm cho vỏ mất ổn định khi thay đổi các tham số hình học của vỏ và chỉ số phân bố vật liệu thành phần. Kết quả số chỉ ra ảnh hưởng của các tham số hình học, các tính chất vật liệu đến các đặc trưng động lực phi tuyến của vỏ trụ FGM. Kết quả đã đạt là tìm được số Mach tới hạn của dòng khí làm cho vỏ mất ổn định.

Từ khóa: Vỏ trụ, vật liệu FGM, hiện tượng tự dao động, động lực phi tuyến.

© 2021 Trường Đại học Giao thông vận tải

1. LỜI GIỚI THIỆU

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được nghiên cứu đầu tiên bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu của Nhật vào năm 1984 trong dự án không gian đòi hỏi vật liệu có chiều dày nhỏ nhưng độ chênh lệch nhiệt độ cao [1]. Vật liệu FGM được dùng phổ biến nhất hiện nay là loại hai thành phần được tạo nên từ gốm và kim loại biến đổi một cách trơn và liên tục từ mặt này sang mặt kia theo chiều dày thành kết cấu. Vật liệu FGM thường được sử dụng trong

nhiều lĩnh vực khác nhau. Ví dụ, các cấu kiện cơ bản trong máy bay và lò phản ứng hạt nhân, trong y học và quốc phòng [2].

Đối với phân tích động lực của vỏ FGM, có nhiều nghiên cứu tập trung vào các đặc trưng dao động của vỏ. Loy và cộng sự [3] đã nghiên cứu dao động của vỏ trụ FGM. Đối tượng nghiên cứu là tần số dao động, ảnh hưởng của tỷ số thể tích và hiệu quả của hình dáng cấu trúc vật liệu lên tần số dao động. Huang và Han [4] đã trình bày bài toán ổn định động lực phi tuyến của vỏ trụ là vật liệu có cơ tính biến thiên chịu tác dụng của tải trọng dọc trục phụ thuộc thời gian bằng cách sử dụng tiêu chuẩn ổn định động lực của Budiansky-Roth.

Các nghiên cứu ở các bài báo trước đây thường sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển dựa trên các giả thiết Love-Kirchhoff bỏ qua các biến dạng trượt ngoài mặt phẳng. Ngược lại, lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (TSDT) có tính đến biến dạng ngoài mặt phẳng. Lý thuyết biến dạng trượt được xây dựng trên cơ sở lý thuyết của Reddy[5]. Bằng cách sử dụng lý thuyết vỏ TSDT và phương pháp phần tử hữu hạn, Shariyat [6] đã nghiên cứu bài toán ổn định động lực phi tuyến của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của tải trọng dọc trục và áp suất ngoài có tính đến yếu tố nhiệt. Dao Huy Bich và Nguyen Xuan Nguyen [7] đã nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ tròn FGM trên cơ sở các phương trình Donnell cải tiến. Dung DV và Nga NT. [8] đã nghiên cứu phân tích phi tuyến dáng điệu uốn và sau uốn của tấm FGM không hoàn hảo được gia cố bởi vật liệu FGM với các tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ trên cơ sở lý thuyết TSDT. Sofiyev [9] đã nghiên cứu dao động và độ uốn của vỏ trụ sandwich được bao bọc bởi các lớp phủ khác nhau chịu tác dụng tác dụng của áp lực thủy tĩnh bằng cách sử dụng FSDT. Ghosh và cộng sự [10] đã phân tích dao động tự do của tấm nhiều lớp có gia cường bằng cách sử dụng TSDT. Javaheri và cộng sự [11] đã nghiên cứu về tính ổn định nhiệt của tấm FGM trên cơ sở lý thuyết TSDT. Lanhe [12] đã nghiên cứu tính ổn định nhiệt của tấm chữ nhật FGM có độ dày tựa đơn. Matsugana [13] đã phân tích dao động tự do và ổn định của vỏ thoải FGM có sử dụng lý thuyết TSDT.

Trong các nghiên cứu của tác giả từ trước đến nay về phân tích động lực phi tuyến của vỏ đều dựa trên cơ sở lý thuyết vỏ cổ điển [14]. Mục tiêu nghiên cứu là tìm số Mach tới hạn của dòng khí làm cho vỏ mất ổn định khi thay đổi các tham số hình học của vỏ và chỉ số phân bố vật liệu thành phần. Với mục đích là tìm số Mach tới hạn khi xét đến biến dạng ngang, trong bài báo này tác giả tiến hành phân tích động lực của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của lực khí động trên cơ sở lý thuyết FSDT.

2. VỎ TRỤ MỎNG FGM DƯỚI TÁC DỤNG CỦA LỰC KHÍ ĐỘNG

2.1. Vật liệu FGM

Vật liệu có cơ tính biến thiên trong bài báo này, được giả thiết được làm từ hỗn hợp của ceramic (gốm) và kim loại với tỷ lệ thể tích của vật liệu thành phần được cho theo qui luật hỗn hợp:

$$V_m(z)+V_c(z)=1, V_m(z)=\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \tag{1}$$

Ở đây h là chiều dày của vỏ trụ; k ≥ 0 là chỉ số tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần; z là tọa độ chiều dày $\left(-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\right)$; Các chỉ số dưới c và m để chỉ thành phần gốm và kim loại tương ứng. Theo quy luật hỗn hợp, mô đun Young và mật độ khối có thể biểu diễn dưới dạng:

$$E(z)=E_mV_m+E_cV_c=E_c+(E_m-E_c)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k$$
$$\rho(z)=\rho_mV_m+\rho_cV_c=\rho_c+(\rho_m-\rho_c)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \quad (2)$$

2.2. Các hệ thức liên hệ ứng suất - biến dạng của vỏ trụ FGM

Xét vỏ trụ có bán kính R, độ dày h và độ dài a nằm dọc theo luồng khí chuyển động với vận tốc $\overline{U}$ (Hình 1). Chọn hệ trục tọa độ (x_1,x_2,z) sao cho trục x_1,x_2 là các hướng dọc trục và hướng vòng còn trục z vuông góc với mặt giữa vỏ trụ, có chiều dương hướng vào trong.

Theo lý thuyết vỏ biến dạng trượt bậc nhất và tính phi tuyến hình học von Kármán, các thành phần biến dạng tại mặt giữa và độ cong, độ xoắn của vỏ trụ liên hệ qua các thành phần chuyển vị $u,v,$w và ϕ_1,ϕ_2 là các góc quay của pháp tuyến ngang thuộc các trục x_2,x_1 tương ứng như sau [5]:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1^0=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2,\chi_1=\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1},\gamma_{13}=\gamma_{13}^0=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\phi_1\\
&\varepsilon_2^0=\frac{\partial v}{\partial x_2}-\frac{1}{R}w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2,\chi_2=\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2},\gamma_{23}=\gamma_{23}^0=\frac{\partial w}{\partial x_2}+\phi_2\\
&\gamma_{12}^0=\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2},\chi_{12}=\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Các thành phần biến dạng tại điểm cách mặt giữa một khoảng z được xác định bởi:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1^0-z\chi_1,\varepsilon_2=\varepsilon_2^0-z\chi_2,\gamma_{12}=\gamma_{12}^0-2z\chi_{12} \quad (4)$$

Từ (3) nhận được phương trình tương thích biến dạng của vỏ như sau:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1^0}{\partial\,x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_2^0}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\gamma_{12}^0}{\partial x_1\partial x_2}=\left(\frac{\partial^2w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2} \quad (5)$$

Quan hệ ứng suất và biến dạng theo định luật Hooke [5]

$$\sigma_1=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2),\sigma_2=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1),\tau_{12}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{12},$$
$$(\sigma_{13},\sigma_{23})=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}(\gamma_{13},\gamma_{23}) \quad (6)$$

Tích phân các biểu thức định nghĩa của nội lực màng và mômen, lực cắt của vỏ như sau:

$$N_1 = \frac{E_1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0\right) - \frac{E_2}{1-\nu^2}\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right);$$
$$N_2 = \frac{E_1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \nu\varepsilon_1^0\right) - \frac{E_2}{1-\nu^2}\left(\chi_2 + \nu\chi_1\right);\ N_{12} = \frac{E_1}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{12}^0 - \frac{E_2}{\left(1+\nu\right)}\chi_{12} \tag{8}$$

$$M_1 = \frac{E_2}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0\right) - \frac{E_3}{1-\nu^2}\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right); M_2 = \frac{E_2}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2^0 + \nu\varepsilon_1^0\right) - \frac{E_3}{1-\nu^2}\left(\chi_2 + \nu\chi_1\right)$$
$$M_{12} = \frac{E_2}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{12}^0 - \frac{E_3}{\left(1+\nu\right)}\chi_{12}; Q_1 = \frac{5E_1}{12\left(1+\nu\right)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_1\right), Q_2 = \frac{5E_1}{12\left(1+\nu\right)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_2\right) \tag{9}$$

Trong đó

$$E_1 = \left[E_c + \frac{E_m - E_c}{k+1}\right]h;\quad E_2 = \frac{\left(E_m - E_c\right)kh^2}{2\left(k+1\right)\left(k+2\right)};$$
$$E_3 = \left[\frac{E_c}{12} + \left(E_m - E_c\right)\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4}\right)\right]h^3 \tag{10}$$

Từ (8) biểu diễn ngược lại, ta có:

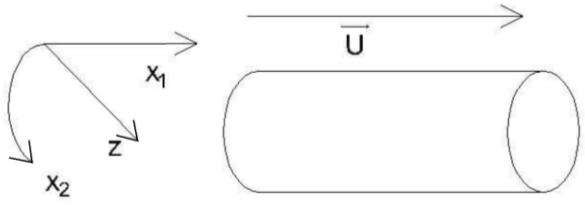
$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{E_1}\left(N_1 - \nu N_2\right) + \frac{E_2}{E_1}\chi_1;\ \varepsilon_2^0 = \frac{1}{E_1}\left(N_2 - \nu N_1\right) + \frac{E_2}{E_1}\chi_2,\ \gamma_{12}^0 = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E_1}N_{12} + 2\frac{E_2}{E_1}\chi_{12} \tag{11}$$

Thay thế (11) vào (9) ta nhận được

$$M_1 = \frac{E_2}{E_1}N_1 - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1\left(1-\nu^2\right)}\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right);\ M_2 = \frac{E_2}{E_1}N_2 - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1\left(1-\nu^2\right)}\left(\chi_2 + \nu\chi_1\right)$$
$$M_{12} = \frac{E_2}{E_1}N_{12} - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1\left(1-\nu^2\right)}\chi_{12} \tag{12}$$

2.3. Các phương trình cơ bản của vỏ trụ FGM chịu tải trọng khí động

Giả thiết vỏ trụ FGM nằm dọc theo luồng khí chuyển động với vận tốc vượt âm $\overline{U}$. Dòng khí tác dụng lên mặt của vỏ áp lực q_0 hướng theo pháp tuyến của mặt vỏ.



Hình 1. Vỏ trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên dưới tác dụng của dòng khí. Trục x_1, x_2 là các hướng dọc trục và hướng vòng còn trục z hướng vuông góc với mặt giữa vỏ trụ.

Phương trình chuyển động của vỏ FGM trên cơ sở biến dạng trượt bậc nhất có dạng [5]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2}=\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}=\rho_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_{12}\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{N_2}{R}+q_0=\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}-Q_1=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-Q_2=0 \tag{17}$$

Trong đó

$$\rho_1=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)dz=\left(\rho_c+\frac{\rho_m-\rho_c}{k+1}\right)h \tag{18}$$

Theo lý thuyết Piston tuyến tính bậc nhất, lực khí động xác định theo công thức [15]

$$q_0=-\gamma P_\infty\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{1}{a_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{19}$$

Trong đó γ là tỷ số nhiệt dung của chất khí; a_∞ là vận tốc âm; P_∞ là áp suất khí chưa bị nhiễu; M là số Mach; $M=\dfrac{U}{a_\infty}$, U là vận tốc dòng khí.

Sử dụng giả thiết Volmir, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to 0,\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\to 0$, vì $u=$ w, v $=$ w, hai phương trình (13), (14) thỏa mãn đồng nhất khi ta đưa vào hàm ứng suất φ sao cho:

$$N_1=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2},N_2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},N_{12}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \tag{20}$$

Phương trình (15) đưa về dạng:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+N_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{N_2}{R}+q_0=\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{21}$$

Thay (11) vào phương trình (5) và sử dụng (20) đưa phương trình tương thích về:

$$\frac{1}{E_1}\Delta\Delta\varphi = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \tag{22}$$

Thay (11) vào các phương trình (16), (17), (21) và sử dụng (20) ta có các phương trình chủ đạo:

$$\begin{aligned}&\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x_2^3}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \\ &2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \gamma P_\infty\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{a_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0\end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} + \frac{E_1E_3 - E_2^2}{2E_1\left(1-\nu\right)}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{E_1E_3 - E_2^2}{2E_1\left(1+\nu\right)}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_2^2} - \frac{5E_1}{12\left(1+\nu\right)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_1\right) = 0 \tag{24}$$

$$\frac{E_1E_3 - E_2^2}{E_1\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_2^2} + \frac{E_1E_3 - E_2^2}{2E_1\left(1-\nu\right)}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{E_1E_3 - E_2^2}{2E_1\left(1+\nu\right)}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_1^2} - \frac{5E_1}{12\left(1+\nu\right)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_2\right) = 0 \tag{25}$$

Các phương trình (22) –(25) chứa 4 ẩn $w, \varphi, \phi_1, \phi_2$ được sử dụng nghiên cứu dao động phi tuyến và ổn định động lực của vỏ trụ FGM trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất.

3. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ

Giả thiết vỏ trụ tựa đơn ở hai đầu, điều kiện biên có dạng:

$$w = 0, M_1 = 0, N_1 = N_{12} = 0 \text{ tại } x_1 = 0 \text{ và } x_1 = a \tag{26}$$

Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện biên và phải đạt được mục tiêu tìm số Mach tới hạn. Đặt nghiệm

$$w = f_1(t)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R} + f_2(t)\sin\frac{(m+1)\pi x_2}{a}\sin\frac{nx_2}{R} \tag{27}$$

Thay (27) vào phương trình (22) và giải phương trình này ta xác định hàm ứng suất như sau:

$$\begin{aligned}\varphi = {} & \varphi_1\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R} + \varphi_2\sin\frac{(m+1)\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R} + \varphi_3\cos\frac{2nx_2}{R} + \varphi_4\cos\frac{2m\pi x_1}{a} \\ & + \varphi_5\cos\frac{2(m+1)\pi x_1}{a} + \varphi_6\cos\frac{(2m+1)\pi x_1}{a} + \varphi_7\cos\frac{\pi x_1}{a} + \varphi_8\cos\frac{(2m+1)\pi x_1}{a}\cos\frac{2nx_2}{R} + \\ & + \varphi_9\cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{2nx_2}{R}\end{aligned} \tag{28}$$

Ở đây ký hiệu

$$\varphi_1=\frac{f_1m^2a^2E_1}{R\pi^2\left[m^2+n^2\lambda^2\right]^2},\varphi_2=\frac{f_1\left(m+1\right)^2a^2E_1}{R\pi^2\left[\left(m+1\right)^2+n^2\lambda^2\right]^2},\varphi_3=\frac{E_1}{32n^2\lambda^2}\left[f_1^2m^2+f_2^2\left(m+1\right)^2\right]$$
$$\varphi_4=\frac{f_1^2E_1n^2\lambda^2}{32m^2},\varphi_5=\frac{f_1^2E_1n^2\lambda^2}{32\left(m+1\right)^2},\varphi_6=\frac{f_1f_2E_1n^2\lambda^2}{4\left(2m+1\right)^2},\varphi_7=\frac{-f_1f_2E_1n^2\lambda^2}{4} \quad (29)$$
$$\varphi_8=\frac{-f_1f_2E_1n^2\lambda^2}{4\left[\left(2m+1\right)^2+4m^2\lambda^2\right]^2},\varphi_9=\frac{f_1f_2E_1n^2\lambda^2\left(2m+1\right)^2}{4\left[1+4n^2\lambda^2\right]^2}$$

Thay (27) vào các phương trình (24) và (25) ta xác định được các hàm ϕ_1,ϕ_2 như sau:

$$\phi_1=\phi_{10}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R}+\phi_{11}\cos\frac{\left(m+1\right)\pi x_1}{a}\sin\frac{nx_2}{R}$$
$$\phi_2=\phi_{20}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{nx_2}{R}+\phi_{21}\sin\frac{\left(m+1\right)\pi x_1}{a}\cos\frac{nx_2}{R} \quad (30)$$

Ở đây

$$\phi_{10}=\frac{5f_1aE_1}{12\left(1+\nu\right)\pi}\left(\frac{n\lambda A_{12}-mA_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\right),\phi_{20}=\frac{5f_1aE_1}{12\left(1+\nu\right)\pi}\left(\frac{mA_{12}-n\lambda A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\right)$$
$$\phi_{11}=\frac{5f_2aE_1}{12\left(1+\nu\right)\pi}\left[\frac{n\lambda B_{12}-\left(m+1\right)B_{22}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}\right],\phi_{21}=\frac{5f_2aE_1}{12\left(1+\nu\right)\pi}\left[\frac{\left(m+1\right)B_{12}-n\lambda B_{11}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}\right]$$
$$A_{11}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left[\frac{2m^2}{\left(1-\nu\right)}+n^2\lambda^2+\frac{5a^2E_1}{6E\pi^2}\right],A_{22}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left[\frac{2n^2\lambda^2}{\left(1-\nu\right)}+m^2+\frac{5a^2E_1}{6E\pi^2}\right] \quad (31)$$
$$,A_{12}=\frac{Emn\lambda}{2\left(1-\nu\right)},B_{11}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left[\frac{2\left(m+1\right)^2}{\left(1-\nu\right)}+n^2\lambda^2+\frac{5a^2E_1}{6E\pi^2}\right],E=\frac{E_1E_3-E_2^2}{E_1}$$
$$B_{22}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left[\frac{2n^2\lambda^2}{\left(1-\nu\right)}+\left(m+1\right)^2+\frac{5a^2E_1}{6E\pi^2}\right],\mathrm{B}_{12}=\frac{E\left(m+1\right)n\lambda}{2\left(1-\nu\right)}$$

Thay thế các biểu thức (27), (28), và (30) vào phương trình (23) và áp dụng phương pháp Galerkin , ta được:

$$\rho_1\frac{a^4}{\pi^4}\ddot{f}_1+\frac{5a^2\left(E_1E_3-E_2^2\right)\left(m^2+n^2\lambda^2\right)\left[m^2A_{22}+n^2\lambda^2A_{11}-2mn\lambda A_{12}\right]}{12\left(1-\nu^2\right)\left(1+\nu\right)\pi^2\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)}f_1+$$
$$+\frac{m^4a^4E_1}{R^2\pi^4\left[m^2+n^2\lambda^2\right]^2}f_1+\gamma P_\infty\frac{a^4}{\pi^4}\left[-f_2\frac{4Mm\left(m+1\right)}{a\left(2m+1\right)}+\frac{1}{a_\infty}\dot{f}_1\right]+ \quad (32)$$

$$+\frac{f_1 f_2^2 n^4\lambda^4 E_1}{16}\left[\frac{m^2(m+1)^2}{n^4\lambda^4}+\frac{(2m+1)^4}{\left[1+4n^2\lambda^2\right]^2}+\frac{1}{\left[(2m+1)^2+4n^2\lambda^2\right]^2}+4\right]+$$

$$+f_1^3\frac{E_1}{16}\left[m^4+n^4\lambda^4\right]=0$$

$$\rho_1\frac{a^4}{\pi^4}\ddot{f}_2+\frac{5a^2\left(E_1E_3-E_2^2\right)\left[(m+1)^2+n^2\lambda^2\right]\left[(m+1)^2B_{22}+n^2\lambda^2B_{11}-2(m+1)n\lambda B_{12}\right]}{12\left(1-\nu^2\right)(1+\nu)\pi^2\left(B_{11}B_{22}-B_{12}^2\right)}f_2$$

$$++\frac{(m+1)^4a^4E_1}{R^2\pi^4\left[(m+1)^2+n^2\lambda^2\right]^2}f_2+\gamma P_\infty\frac{a^4}{\pi^4}\left[-f_1\frac{4Mm(m+1)}{a(2m+1)}+\frac{1}{a_\infty}\dot{f}_2\right]+$$

$$+\frac{f_2 f_1^2 n^4\lambda^4 E_1}{16}\left[\frac{m^2(m+1)^2}{n^4\lambda^4}+\frac{(2m+1)^4}{\left[1+4n^2\lambda^2\right]^2}+\frac{1}{\left[(2m+1)^2+4n^2\lambda^2\right]^2}+4\right]+ \quad (33)$$

$$f_2^3\frac{E_1}{16}\left[(m+1)^4+n^4\lambda^4\right]=0$$

Từ các phương trình (32),(33), ta nhận được hệ thức xác định tần số dao động riêng của vỏ:

$$\left|K-\omega^2H\right|=0 \quad (34)$$

Trong đó: $K=\begin{bmatrix}K_{11}&0\\0&K_{22}\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix}\rho_1\frac{a^4}{\pi^4}&0\\0&\rho_1\frac{a^4}{\pi^4}\end{bmatrix}$,

$$K_{11}=\frac{5a^2\left(E_1E_3-E_2^2\right)\left(m^2+n^2\lambda^2\right)\left[m^2A_{22}+n^2\lambda^2A_{11}-2mn\lambda A_{12}\right]}{12\left(1-\nu^2\right)(1+\nu)\pi^2\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)}+\frac{m^4a^4E_1}{R^2\pi^4\left[m^2+n^2\lambda^2\right]^2}$$

$$K_{22}=\frac{5a^2\left(E_1E_3-E_2^2\right)\left[(m+1)^2+n^2\lambda^2\right]\left[(m+1)^2B_{22}+n^2\lambda^2B_{11}-2(m+1)n\lambda B_{12}\right]}{12\left(1-\nu^2\right)(1+\nu)\pi^2\left(B_{11}B_{22}-B_{12}^2\right)}+$$

$$+\frac{(m+1)^4a^4E_1}{R^2\pi^4\left[(m+1)^2+n^2\lambda^2\right]^2}$$

Hệ hai phương trình vi phân phi tuyến (32) và (33) mô tả dao động của vỏ, kết hợp với điều kiện đầu và sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 và chương trình phần mềm Matlab ta sẽ nhận được đồ thị đáp ứng động lực của vỏ. Vấn đề đặt ra là với các giá trị khác nhau của số Mach $M=U/a_\infty$, ta cần tìm số Mach tới hạn để từ đó vỏ mất ổn định. Số Mach tới hạn được ký hiệu là M_{th}. Khi $M\geq M_{th}$, vỏ trụ mất ổn định.

4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

4.1. Đánh giá độ tin cậy

Để đánh giá độ tin cậy của chương trình tính toán, tần số dao động riêng của vỏ trụ FGM đạt được từ biểu thức được so sánh với Loy và cộng sự [3], Bich và Nguyen [7]. Theo [3], xét vỏ trụ FGM gồm các thành phần Stainless Steel và Nickel với các tính chất vật liệu

$$E_m = 201,04\times10^9\,\frac{N}{m^2}, \rho_m = 8166\frac{kg}{m^3}, E_c = 223,95\times10^9\,\frac{N}{m^2}, \rho_c = 8900\frac{kg}{m^3}, \nu_m = \nu_c = 0,31$$

Khi đưa các số liệu này vào chương trình Matlab, kết quả nhận được tần số dao động riêng để so sánh độ tin cậy. So sánh tần số dao động riêng được thể hiện ở Bảng 1, loại trừ số hạng đầu với m=n=1, các số hạng khác sai khác không đáng kể.

Bảng 1. So sánh các tần số dao động riêng khác nhau (Hz) tương ứng với số sóng tròn n với m=1, h/R=0,002, a/R=20, k=2.

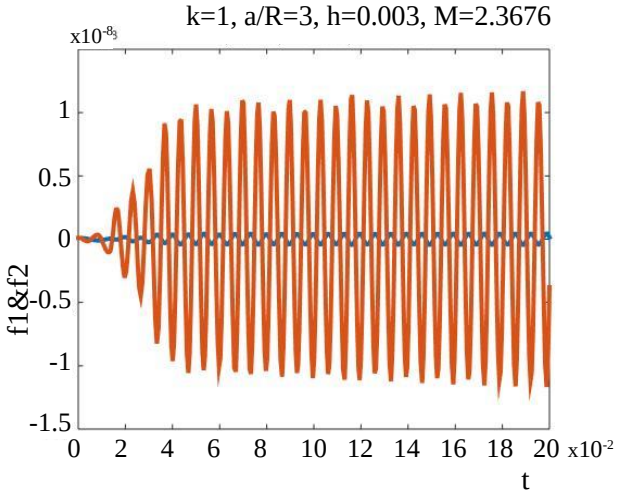
n	Bài báo	Bích và Nguyen [7]	Loy và cộng sự [3]
1	19,1056	19,0079	13,321
2	5,237	5,0554	4,5114
3	4,8699	4,4188	4,1827
4	7,8389	7,3179	7,0905
5	12,1164	11,5577	11,329
6	17,4144	16,8187	16,587
7	23,69	23,0521	22,454
8	30,9337	30,2487	30,014
9	40,5814	38,4063	38,171
10	48,4015	47,5242	47,288

4.2. Đáp ứng hiện tượng tự dao động phi tuyến và số Mach tới hạn

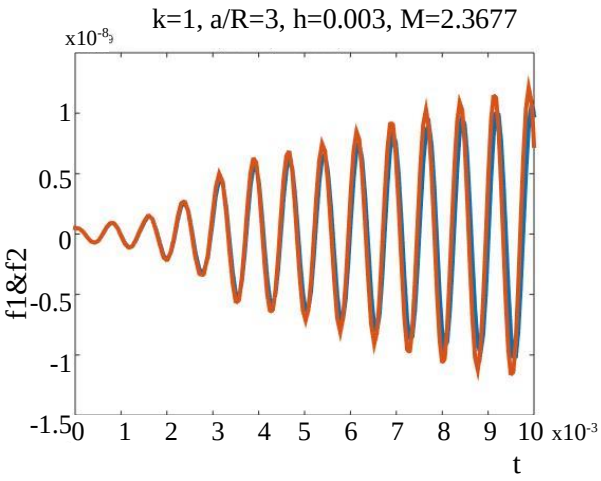
Bằng cách sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc 4 và ngôn ngữ lập trình Matlab để giải hệ phương trình (32)-(33). Xét vỏ trụ FGM nhôm-oxit nhôm với các tham số hình học và vậtliệu[14]:
$h = 0,003m, \mathrm{R} = 1\mathrm{m}, \mathrm{a} = 3\mathrm{m}, \mathrm{k} = 1, \mathrm{E}_c = 380\times10^9\,N/m^2, \rho_c = 3800kg/m^3, E_m = 70\times10^9\,N/m^2,$
$\rho_m = 2720kg/m^3, \nu = 0,3$ và các đặc trưng của khí động lực [15]: $\gamma = 1,4, a_\infty = 340m/s$
$P_\infty = 99473,4N/m^2$. Điều kiện đầu $f_1(0) = 1e-10$, $\dot{f}_1(0) = 0$, $f_2(0) = 1e-10$, $\dot{f}_2(0) = 0$.

Hình 2 là đáp ứng động lực phi tuyến của vỏ trụ FGM với *M*=2.3676, vỏ chưa mất ổn định. Hàm f_2 dao động điều hòa với biên độ nhỏ. Hàm f_1 dao động với biên độ tăng trong khoảng thời gian đầu *t* < 0,05s sau đó với *t* > 0,05s thực hiện dao động điều hòa. Khi số Mach tăng 0,0001 (tương ứng vận tốc tăng $\approx$0,034 m/s), tức là M_{th} = 2,3677, biên độ tăng liên tục, vỏ mất ổn định (Hình 3). Khi so sánh với lý thuyết vỏ cổ điển [14], M_{th} giảm khi có biến

dạng trượt ngang. Theo [14], M_{th} =2,3684 đối với vỏ trụ cùng kích thước và vật liệu, sai số là 0,0007.



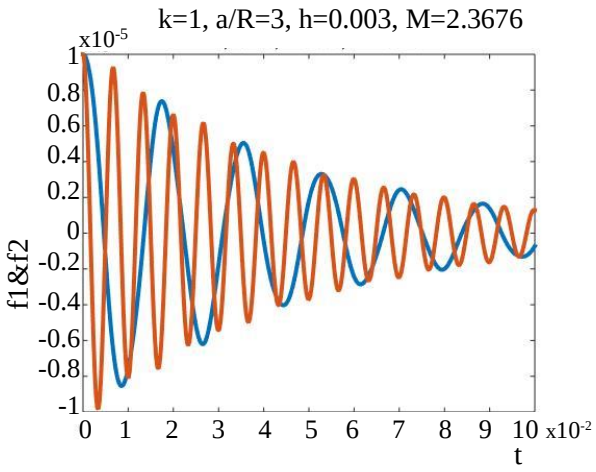
Hình 2. Đáp ứng động lực của vỏ trụ với số Mach M = 2,3676.



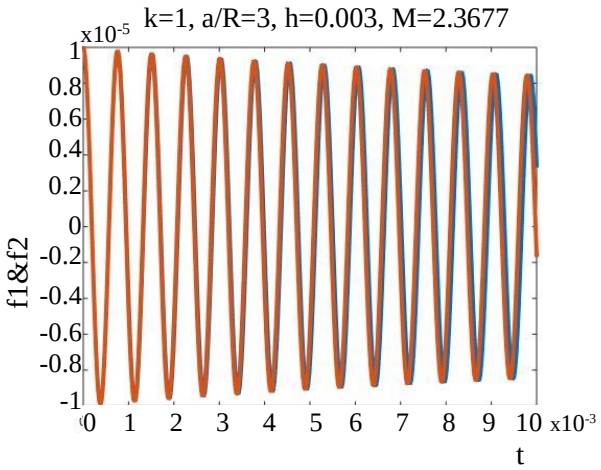
Hình 3. Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th} =2,3677.

a) Ảnh hưởng của điều kiện đầu

Khi thay đổi điều kiện đầu, chẳng hạn tại t = 0, $f_1(0)=1e-5$, $f_2(0)=1e-5$ và $\dot{f}_1(0)=\dot{f}_2(0)=0$, đáp ứng động lực thể hiện trên các Hình 4 và Hình 5. Hình 4 với số Mach M = 2,3676 đồ thị thể hiên dao động giảm dần. Khi M = 2,3677, đáp ứng động lực thay đổi so với Hình 3 trong cùng khoảng thời gian. Do ảnh hưởng của điều kiện đầu, biên độ dao động lúc đầu giảm sau đó có xu hướng điều hòa. Do yếu tố lực cản khí động và yếu tố phi tuyến trong phương trình (32) và (33) biên độ dao động không tăng đến vô cùng mà đến thời điểm nào đó hiện tượng tự dao động là điều hòa.



Hình 4. Đáp ứng động lực của vỏ trụ với M=2,3676 khi thay đổi điều kiện đầu.

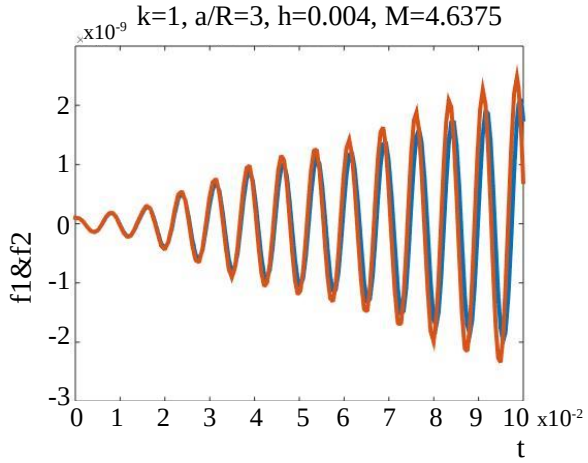


Hình 5. Đáp ứng động lực của vỏ trụ với M=2,3677 khi thay đổi điều kiện đầu.

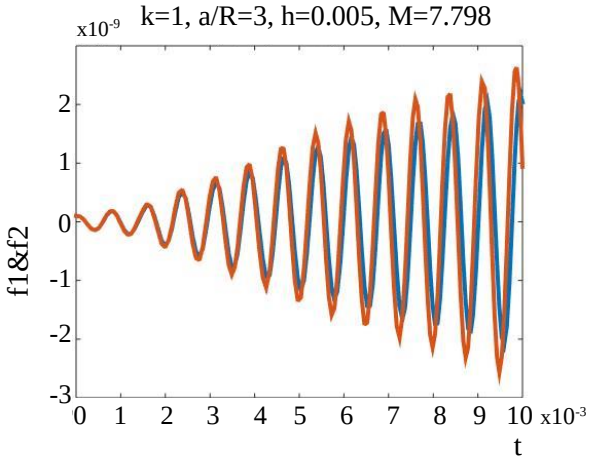
b) Ảnh hưởng của tỷ số h/R

Khi tăng chiều dầy của vỏ, M_{th} tăng. Xét vỏ với kích thước k = 1, a = 3m, R = 1m.

Khi đó với h=0,004m, M_{th} = 4,6375, hiện tượng mất ổn định xảy ra trên Hình 6, với M_{th} =7,798, h=0,005m, hiện tượng mất ổn định xảy ra trên Hình 7. Khảo sát cho thấy giai đoạn chưa mất ổn định, sự thay đổi của số Mach ảnh hưởng không đáng kể đến tần số dao động. Khi chiều dầy h của vỏ trụ tăng, M_{th} tăng nhanh. Bảng 2 thể hiện M_{th} khi tỷ số *h/R* tăng. Khi xét lý thuyết vỏ cổ điển [14] giá trị M_{th} = 4,6397 đối với vỏ cùng kích thước và vật liệu. Sai khác của M_{th} giữa hai lý thuyết là 0,0022. Như vậy khi xét biến dạng trượt độ mất ổn định của vỏ đến nhanh hơn. Ranh giới giữa ổn định và không ổn định với sự thay đổi của số Mach là 0,0001 thì sự sai khác 0,0022 không phải là nhỏ. Giá trị của M_{th} trong kết quả trên là chính xác hơn so với nghiên cứu theo lý thuyết vỏ cổ điển.



Hình 6. Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th} =4,6375, h=0,004m.

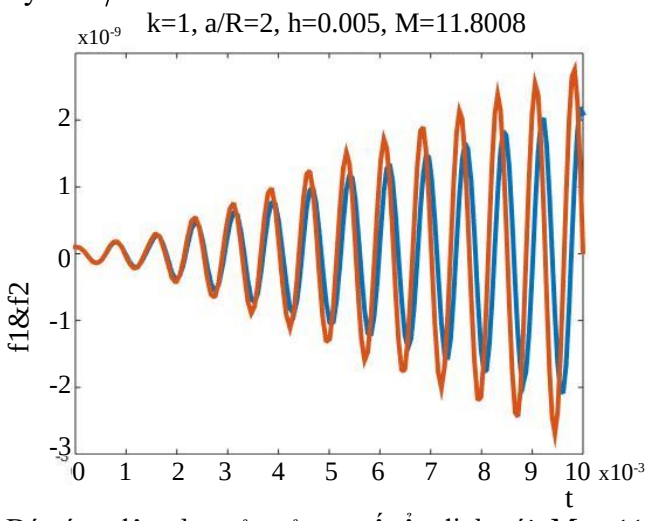


Hình 7. Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th} =7,798, h=0,005m.

Bảng 2. M_{th} khi tỷ số h/R thay đổi, k =1, a = 3m.

H(m) / R(m)	**0,002m**	**0,0025m**	**0,003m**	**0,0035m**	**0,004m**	**0,0045m**	**0,005m**
1m	0,9233	1,5534	2,3677	3,4001	4,6375	6,1392	7,798
1,1m	0,811	1,3637	2,0872	3,0045	4,0879	5,3842	6,9571
1,2m	0,7211	1,2157	1,8715	2,6641	3,66	4,8114	6,1282
1.3m	0,6527	1,097	1,6717	2,4166	3,2783	4,3173	5,5781
1,4m	0,588	0,9909	1,5271	2,1746	2,9784	3,9592	5,01
1,5m	0,5409	0,9065	1,3859	1,9905	2,7377	3,5707	4,5768

c) Ảnh hưởng của tỷ số a/R



Hinh 8. Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th} =11, 8008.

Ảnh hưởng của tỷ số a/R đến đáp ứng động lực của vỏ FGM được chỉ ra trên Hình 8 với a/R =2, h=0,005m. Khi M_{th} =11,8008, vỏ mất ổn định. Bảng 3 thể hiện khi tỷ số a/R thay đổi, M_{th} thay đổi. Khi a/R tăng, M_{th} giảm. Cố định R=1m, khi chiều dài của vỏ trụ tăng, độ cứng của vỏ trụ giảm nên độ ổn định của vỏ giảm. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với thực tế.

Bảng 3. Số Mach tới hạn ứng với tỷ số a/R và *h* thay đổi (*k* =1 , *R* = 1m).

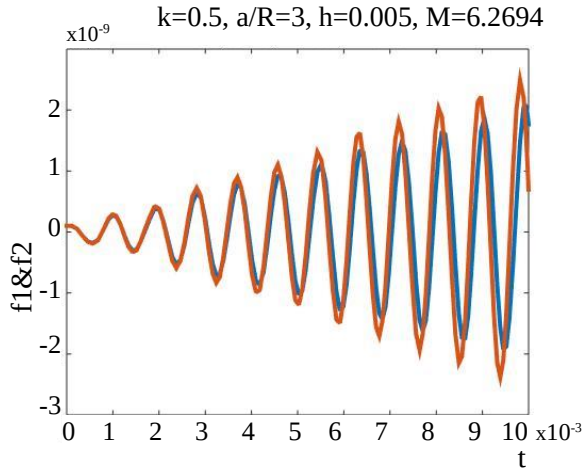
H(m) / a/R	**0,002m**	**0,003m**	**0,004m**	**0,005m**
1	2,8399	7,6033	14,5026	25,138
1,5	1,8556	4,8205	9,5422	16,1756
2	1,3859	3,5707	7,088	11,8008
2,5	1,1082	2,8451	5,5732	9,5247
3	0,9233	2,3677	4,6375	7,798

d) Ảnh hưởng của chỉ số k

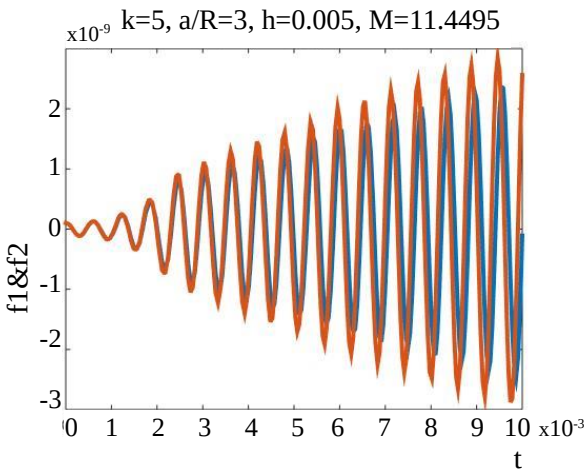
Khi cho chỉ số thể tích k thay đổi, M_{th} thay đổi. Vật liệu FGM được giả thiết làm từ hỗn hợp của ceramic và kim loại với tỷ lệ thể tích của thành phần được cho theo qui luật (1). Khi k=0, $V_m = 1, V_c = 0,$ vật liệu hoàn toàn là kim loại, M_{th} nhỏ. Khi $k = \infty$, $V_c = 1, V_m = 0,$ vật liệu hoàn toàn là ceramic, M_{th} tăng rõ rệt. Điều này hợp lý vì mô đun đàn hồi của của thép nhỏ hơn ceramic nhiều. Trên Bảng 4 thể hiện số M_{th} thay đổi khi k, h thay đổi. Hình 9 và Hình 10 thể hiện đáp ứng động lực của vỏ khi mất ổn định với k=0,5 và k=5.

Bảng 4. M_{th} khi cho tỷ số thể tích k và chiều dày h thay đổi với a/R=3.

k / h(m)	**0**	**0,2**	**0,5**	**1**	**2**	**5**	**∞**
0,002m	0,3207	0,5518	0,7408	0,9233	1,115	1,3563	1,7405
0,003m	0,8314	1,4291	1,9067	2,3677	2,8614	3,4772	4,5129
0,004m	1,6303	2,8021	3,7361	4,6375	5,6034	6,8111	8,8497
0,005m	2,7265	4,6885	6,2694	7,798	9,43	11,4495	14,8007



Hình 9. Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th} =6,2694.



Hình 10. Đáp ứng động lực của vỏ trụ mất ổn định với M_{th} =11,4495.

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này đã nghiên cứu động lực phi tuyến của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của lực khí động theo lý thuyết Piston bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất. Các kết quả số của đáp ứng động lực của vỏ trụ FGM đã đạt được bằng phương pháp Runge-Kutta và chương trình Matlab. Số Mach tới hạn có giá trị nhỏ hơn so với vật liệu cùng kích thước khi so sánh với lý thuyết vỏ cổ điển. Điều đó chứng tỏ rằng hiện tượng mất ổn định của vỏ đến sớm hơn. Tuy nhiên sai khác của số Mach tới hạn theo lý thuyết vỏ cổ điển và lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất là nhỏ. Các tham số hình học vẫn đóng vai trò quan trọng trong hiện tượng tự dao động của vỏ FGM. Khi tỷ số h/R tăng, M_{th} tăng nhanh. Khi tỷ số a/R tăng , M_{th} giảm nhanh.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải trong đề tài mã số T2020-CB-005.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. M. Koizumi, The concept of FGM, Ceram Trans, Funct Grad Materials, 34 (1993) 3-10.

[2]. Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, R. G. Ford, Functionally graded materials: design, processing and application, London: Kluwer Academic Publishers, 1999. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4

[3]. C. T. Loy, K. Y. Lam, J. N. Reddy, Vibration of functionnally graded cylindrical shells, International Journal of Mechanical Sciences, 41 (1999) 309-324. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00054-X

[4]. H. Huang, Q. Han, Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to a time-dependent axial load, Compos Struct, 92 (2010) 593-598. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.011

[5]. J. N. Reddy, Mechanics of lamilated composite plates and shells:theory and analysis, New York:CRC Press, (2004).

[6]. M. Shariyat, Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells under combined axial compression and external pressure, Int J Solids Struct, 45 (2008) 2598-2612. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.12.015

[7]. D. H. Bich, N. X. Nguyen, Nonlinear vibration of functionally graded circular cylindrical shells based on improved Donnell equations, Journal of Sound and Vibration, 331 (2012) 5488-5501. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.07.024

[8]. D. V. Dung, N. T. Nga, Buckling and postbuckling nonlinear analysis of imperfect FGM plates reinforced by FGM stiffeners with temperature-dependent properties based on TSDT, Acta Mech, 227 (2016) 2377-2401. https://doi.org/10.1007/s00707-016-1637-y

[9]. A. H. Sofiyev, The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure, Compos. Struct., 117 (2014) 124-134. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.06.025

[10]. A. K. Ghosh, K. C. Biswal, Free- vibration analysis of stiffined lamilated plates using higher-order deformation theory, Finite Elements in Analysis and Design, 22 (1996) 143-161. https://doi.org/10.1016/0168-874X(95)00051-T

[11]. R. Javaheri, M. R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, J. Thermal Stressees, 25 (2002) 603-625. https://doi.org/10.1080/01495730290074333

[12]. W. Lanhe, Thermal buckling of a simply supportrd moderately thick retangular FGM plate, Composite Structures, 64 (2004) 211-218. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.08.004

[13]. H. Matsunaga, Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2-D higher-order deformation theory, Compos Struct, 84 (2008) 132-146. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.07.006

[14]. Pham Thi Toan, Phân tích động lực phi tuyến của vỏ trụ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên dưới tác dụng của lực khí động sử dụng lý thuyết Piston, Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, 11 (2017) 56-63. https://stce.nuce.edu.vn/index.php/vn/article/view/771

[15]. Trần Thế Văn, Nghiên cứu ổn định của tấm composite lớp chịu tải trọng khí động, Luận án Tiến sỹ Kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, 2012.

[16]. D.D. Brush, B.O. Almroth, Buckling of bars, plates and shells, Mc.Graw-Hill, Inc., 1975.