PHÂN TÍCH ỨNG XỬ BÀI TOÁN PHẲNG VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN HỖN HỢP VÀ TẢI TRỌNG BẬC CAO BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ BIÊN TRUNG TÂM

ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEM WITH GENERAL BOUNDARIES USING THE SCALED BOUNDARY FINITE ELEMENT METHOD

Nguyễn Văn Chúng[1], Nguyễn Thanh Him[1], Lại Văn Qúi[2]
[1]Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM, Việt Nam
[2]Trường Đại học Bách Khoa TP.HCM, Việt Nam

Ngày toà soạn nhận bài 17/2/2021, ngày phản biện đánh giá 27/3/2021, ngày chấp nhận đăng 29/3/2021.

TÓM TẮT

Bài báo trình bày tính hiệu quả của phương pháp phần tử biên trung tâm trong phân tích bài toán phẳng với điều kiện biên hỗn hợp và tải trọng bậc cao. Phương trình chủ đạo của phương pháp phần tử biên trung tâm được thiết lập để phân tích bài toán phẳng với điều kiện biên tổng quát gồm trường chuyển vị, trường tải trọng, trọng lượng bản thân và xét tải trọng bậc cao dưới dạng hàm đa thức. Bài toán phẳng gồm tải trọng bậc cao, có điều kiện biên hỗn hợp trên biên được khảo sát để xem xét tính hiệu quả của phương pháp nghiên cứu. Kết quả bài toán khảo sát đã chứng tỏ được phương pháp phần tử biên trung tâm có độ chính xác, tốc độ hội tụ cao so với lời giải giải tích tham khảo. Phương pháp nghiên cứu có thể phát triển mở rộng áp dụng cho các bài toán phẳng với hàm dạng khác nhau và bài toán ba chiều.

Từ khóa: *Phần tử biên trung tâm; Bài toán phẳng; Điều kiện biên hỗn hợp; Tải trọng bậc cao; Hàm dạng đa thức.*

ABSTRACT

This paper presents the advantages of the scaled boundary finite element method for analysis of two-dimensional problems with general boundaries condition. The scaled boundary finite element formulation is formulated within a general framework including the influence of distributed body source, mixed boundary condition, contributions of the side face. The linear elasticity problem is presented to verify the proposed method with the analytical solution. Numerical example shows the accuracy and efficiency of the proposed method. The proposed method could be investigated with the other shape functions and developed for three-dimensional problems.

Keywords: *SBFEM; Linear Problem; Mixed boundary condition; High-Order Element; Polynomial shape function.*

1. GIỚI THIỆU

Phương pháp số được ứng dụng rộng rãi trong phân tích các bài toán kết cấu kỹ thuật của các ngành xây dựng, cầu đường, hàng không, cơ khí, cơ sinh học và các ngành khác, tính toán theo phương pháp rời rạc hóa kết cấu thành các phần tử liên kết với nhau tại các nút của phần tử. Phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp phần tử biên đã được phát triển và áp dụng rộng rãi trong các bài toán kỹ thuật, đã thể hiện được khá nhiều ưu điểm nổi trội. Tuy nhiên, đối với các kết cấu phức tạp, có điều kiện biên hỗn hợp, chuyển vị theo nhiều phương thì mỗi phương pháp có ưu, nhược điểm riêng. Độ chính xác, tốc độ hội tụ của bài toán phụ thuộc vào điều kiện biên của bài toán, trường khảo sát. Thời gian gần đây, phương pháp phần tử biên trung tâm (Scaled boundary finite element method-SB FEM) đã được phát triển và kế thừa những ưu điểm của các phương pháp số trước đây như phần tử hữu hạn và phần tử biên. Phương pháp phần tử biên đã được áp dụng để giải quyết các bài toán có xét đến trọng lượng riêng, bài toán đàn hồi, bài toán có miền vô cực mà không cần giới hạn miền biên vô cực, bài toán biến dạng tĩnh [1-4]. Các kết quả nghiên cứu đã chứng tỏ phương pháp phần tử biên trung tâm có những ưu điểm nổi trội. Gần đây, Chung [5] đã phát triển phương pháp phần tử biên trung tâm để phân tích bài toán phẳng hai chiều với đặc trưng hình học có tiết diện hình tròn, Jia và cộng sự [6] đã nghiên cứu lý thuyết phần tử bậc cao trong mô hình tính toán của phương pháp phần tử biên trung tâm trong phân tích hai chiều, ba chiều. Từ các nghiên cứu đã trình bày, phương pháp phần tử biên có thể áp dụng hiệu quả trong các bài toán kỹ thuật. Trong nghiên cứu này, bài báo áp dụng phương pháp phần tử biên trung tâm để phân tích bài toán phẳng với điều kiện biên hỗn hợp gồm cả trường chuyện vị và tải trọng. Đồng thời xem xét đến trọng lượng bản thân và tải trọng bậc cao với dạng hàm đa thức.

2. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Dựa theo các định luật cơ bản và quan hệ động học. Phương trình cân bằng cơ bản của trường trọng lượng và ứng suất, ứng suất và biến dạng, biến dạng và chuyển vị được biểu diễn như sau:

$$L^T\sigma + b = 0 \quad (1)$$

$$\sigma = D\bar{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\bar{\varepsilon} = Lu \quad (3)$$

Trong đó $u(x)$, $\bar{\varepsilon}(x)$, $\sigma(x)$ lần lượt là các trường chuyển vị, biến dạng, ứng suất.

Áp dụng phương pháp trọng số dư (weighted residual) và phương pháp tích phân từng phần với giả thuyết Gauss-divergence, kết hợp các phương trình quan hệ ứng suất và biến dạng, biến dạng và chuyển vị. Phương trình dạng yếu được thiết lập như sau:

$$\int_{\Omega}(L\omega)^T D(Lu)dA = \int_{\partial\Omega}\omega^T tdl + \int_{\Omega}\omega^T bdA \quad (4)$$

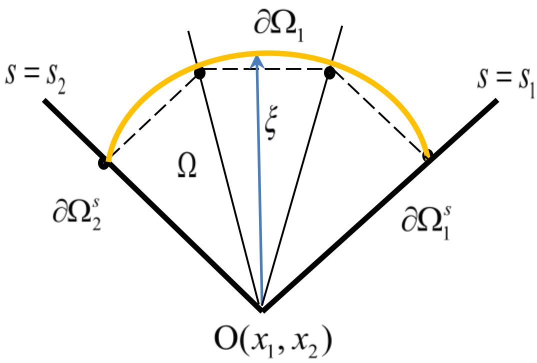
3. PHƯƠNG PHÁP SB FEM

3.1 Thiết lập công thức

Trong phương pháp phần tử biên trung tâm, trường chuyển vị và trọng số dự được xấp xỉ biểu diễn như phương trình (5)

$$\begin{aligned} u^h &= u^h(\xi, s) = N^s U^h \\ w^h &= w^h(\xi, s) = N^s W^h \end{aligned} \quad (5)$$

Trong đó N^s là ma trận các hàm dạng xấp xỉ tổng quát, U^h là vector chuyển vị nút tổng quát, W^h là vector tổng các hàm trọng số số xấp xỉ.



Hình 1. *Hệ tọa độ SBFEM*

Áp dụng phương pháp xấp xỉ trên biên của phần tử biên trung tâm cho bài toán phẳng như hình 1. Kết hợp phương trình (1), (2), (3), (4) và (5). Sau đó lấy tích phân từng phần trên biên bài toán khảo sát và áp dụng định lý Gauss. Phương trình chủ đạo của phương pháp phần tử biên trung tâm cho bài toán phẳng thu được như sau [5]:

$$\xi^2 E_0 U^h_{,\xi\xi} - \xi\left(E_1 - E_0 - E_1^T\right)U^h_{,\xi} - E_2 U^h + \xi F + P_b\xi^2 = 0 \quad (6)$$

$$Q^h(\xi) = -P \quad (7)$$

Trong đó

$$Q^h(\xi) = \xi E_0 U^h_{,\xi} + E_1^T U^h$$

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_s B_1^T D B_1 J ds \\ E_1 &= \int_s B_2^T D B_1 J ds \\ E_2 &= \int_s B_2^T D B_2 J ds \end{aligned} \quad (8)$$

$$P = \int_s \left(N^s\right)^T t_1 J^s ds;\ J^s = \sqrt{(dx_1/ds)^2 + (dx_2/ds)^2} \qquad (9)$$

$$F = \left(N_1^s\right)^T t_{1(\xi)}^s J_1^{\xi};\ P_b = \int_s \left(N^s\right)^T bJds \qquad (10)$$

Phương trình (6) là phương trình dạng yếu của bài toán được xây dựng trong hệ tọa độ của phương pháp phần tử biên trung tâm. Phương trình (7) là phương trình xác định tải tác dụng lên biên của bài toán. Khi điều kiện biên của bài toán có một phần trường chuyển vị, trường chuyển vị bài toán U^h được phân tích thành $U^h = \left\{U^{hu} \quad U^{hc}\right\}^T$ với U^{hc} là tập hợp của các giá trị chuyển vị đã biết, còn U^{hu} là tập hợp các giá trị chưa biết. Khi đó, phương trình chủ đạo của bài toán trong hệ tọa độ của phương pháp SB FEM được biểu diễn qua trường chuyển vị chưa biết như sau:

$$\begin{aligned}&\xi^2 E_0^{uu} U_{,\xi\xi}^{hu} + \xi\left[E_0^{uu} + \left(E_1^{uu}\right)^T - E_1^{uu}\right] U_{,\xi}^{hu} - E_2^{uu} U^{hu} \\ &= -\xi F^{tu} - \xi^2 P_b^u - F_s^{uu}\end{aligned} \qquad (11)$$

$$Q^{hu}\left(\xi\right) = -P^u \qquad (12)$$

3.2 Lời giải cho phương trình dạng yếu

Nghiệm của phương trình chủ đạo (11), là phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất. Nghiệm của phương trình được gồm nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng của bài toán.

Vế phải của phương trình (11) là phương trình vi phân cấp hai thuần nhất, nghiệm của phương trình có dạng

$$U_0^{hu}\left(\xi\right) = \sum_{i=1}^{2(m-p)\Lambda} c_i \xi^{\lambda_i} \psi_i^u \qquad (13)$$

Trong đó *m* là số hàm chưa biết tại nút $\boldsymbol{U}_0^{hu}$, λ_i là hệ số tỷ lệ, $\boldsymbol{\psi}_i^u$ là véc tơ đại lượng thứ i^{th}

$$AX_i = \lambda X_i \qquad (14)$$

Trong đó λ, X lần lượt là giá trị riêng và vector riêng của ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} -\left(E_0^{uu}\right)^{-1}\left(E_1^{uu}\right)^T & \left(E_0^{uu}\right)^{-1} \\ E_2^{uu} - E_1^{uu}\left(E_0^{uu}\right)^{-1}\left(E_1^{uu}\right)^T & E_1^{uu}\left(E_0^{uu}\right)^{-1} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Ta tìm λ bằng cách giải phương trình $\det\left(A - \lambda I\right) = 0$ và tìm X theo phương trình $\left(A - \lambda I\right) X = 0$. Trị riêng của bài toán λ thường có một nửa nghiệm có giá trị dương và một nửa là giá trị âm, tương ứng với miền của bài toán có biên xác định và biên vô cùng và λ^+. Tương ứng với giá trị riêng λ^- và λ^+, ta có cũng có các vector riêng như sau $\Phi^{\psi+}, \Phi^{\psi-}, \Phi^{q+}, \Phi^{q-}$ .Thế các giá trị này phương trình (11) và (12), có nghiệm tổng quát như sau:

$$U_0^{hu}(\xi) = \Phi^{\psi+}\Pi^+(\xi)C^+ + \Phi^{\psi-}\Pi^-(\xi)C^- \qquad (16)$$

$$Q_0^{hu}(\xi) = \Phi^{q+}\Pi^+(\xi)C^+ + \Phi^{q-}\Pi^-(\xi)C^- \qquad (17)$$

Trong đó Π^+, Π^- là các ma trận đường chéo, C^+, C^- là các vector chứa các hằng số.

Theo phương trình chủ đạo (11) nghiệm riêng của bài toán là thành phần vế phải của phương trình. Nghiệm riêng gồm các thành phần: trọng lượng bản thân của bài toán, thành phần chuyển vị trên đường cạnh biên. Nghiệm riêng của phương trình (11) tìm tương tự như [5]. Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình chủ đạo thu được như sau:

$$\begin{aligned}U^{hu}(\xi) &= U_0^{hu}(\xi) + U_1^{hu}(\xi) \\ &= \Phi^{\psi+}\Pi^+(\xi)C^+ + \Phi^{\psi-}\Pi^-(\xi)C^- + U_1^{hu}(\xi)\end{aligned} \qquad (18)$$

$$\begin{aligned}Q^{hu}(\xi) &= Q_0^{hu}(\xi) + Q_1^{hu}(\xi) \\ &= \Phi^{q+}\Pi^+(\xi)C^+ + \Phi^{q-}\Pi^-(\xi)C^- + Q_1^{hu}(\xi)\end{aligned} \qquad (19)$$

Trong đó các hệ số C^+, C^- tìm từ điều kiện biên của bài toán. Áp dụng các biên ở bên trong và bên ngoài, kết hợp các phương trình (12), (18) và (19), các hệ số được xác định như sau:

$$\begin{Bmatrix} C^+ \\ C^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^{q+}\Pi^+(\xi_1) & \Phi^{q-}\Pi^-(\xi_1) \\ \Phi^{q+}\Pi^+(\xi_2) & \Phi^{q-}\Pi^-(\xi_2) \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} -P_1^u \\ P_2^u \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_1^{hu}(\xi_1) \\ Q_1^{hu}(\xi_2) \end{Bmatrix}\right) \qquad (20)$$

Hay

$$KU^{hu} = P^u + KU_1^{hu} - Q_1^{hu} \qquad (21)$$

Với

$$K = \begin{bmatrix} \Phi^{q+}\Pi^+(\xi_1) & \Phi^{q-}\Pi^-(\xi_1) \\ \Phi^{q+}\Pi^+(\xi_2) & \Phi^{q-}\Pi^-(\xi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{\psi+}\Pi^+(\xi_1) & \Phi^{\psi-}\Pi^-(\xi_1) \\ \Phi^{\psi+}\Pi^+(\xi_2) & \Phi^{\psi-}\Pi^-(\xi_2) \end{bmatrix}^{-1} \qquad (22)$$

$$U^{hu} = \begin{Bmatrix} U^{hu}(\xi_1) \\ U^{hu}(\xi_2) \end{Bmatrix};\ P^{u} = \begin{Bmatrix} -P_1^{u} \\ P_2^{u} \end{Bmatrix} \tag{23}$$

$$U_1^{hu} = \begin{Bmatrix} U_1^{hu}(\xi_1) \\ U_1^{hu}(\xi_2) \end{Bmatrix};\ Q_1^{hu} = \begin{Bmatrix} Q_1^{hu}(\xi_1) \\ Q_1^{hu}(\xi_2) \end{Bmatrix} \tag{24}$$

3.3 HÀM DẠNG XẤP XỈ

Trong nghiên cứu này, hàm dạng khảo sát là hàm bậc nhất. Hàm dạng được viết như phương trình (25)

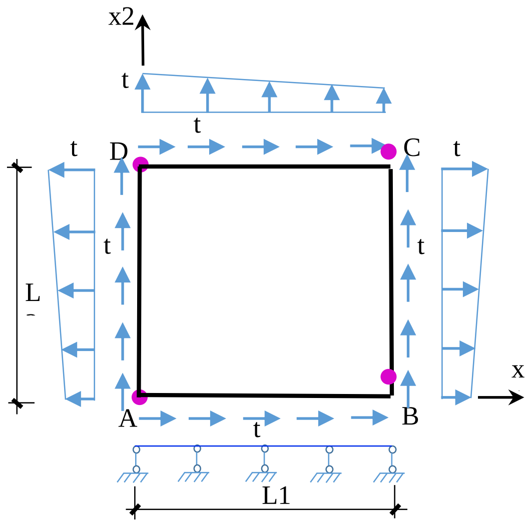
$$N_1 = \frac{1-s}{2};\quad N_2 = \frac{1+s}{2} \tag{25}$$

Khi đó, hệ tọa độ của phần tử trong hệ tọa độ của phương pháp SB FEM biểu diễn như sau:

$$\begin{cases} x_1 = N_1 x_1^{(1)} + N_2 x_1^{(2)} \\ x_2 = N_1 x_2^{(1)} + N_2 x_2^{(2)} \end{cases} \tag{26}$$

4. VÍ DỤ SỐ

Xét bài toán phẳng chịu tải trọng bậc cao, điều kiện biên hỗn hợp, có tính đến trọng lượng bản thân, đặc trưng hình học như Hình 2. Xem xét với vật liệu biến dạng phẳng, đàn hồi tuyến tính, đồng nhất đẳng hướng với môđun đàn hồi E, hệ số Poisson v.



Hình 2. *Bài toán tấm phẳng*

Áp dụng phương pháp phần tử biên trung tâm để khảo sát trường ứng suất bài toán. Phân tích với trường hợp $L_1 = 0,8$ m, $L_2 = 0,8$ m, $E = 2,0\times10^6 (kN/cm^2)$; $v = 0,3$. Có điều kiện biên trên cạnh biên và đường biên như sau:

Cạnh AB: $t_1^{AB} = 0;\quad u_2^{AB} = 0$

Cạnh AD: $t_1^{AD} = -4b_0 v x_2;\ \ t_2^{AD} = 0$

Cạnh BC: $t_1^{BC} = b_0\left[2(1-v)\mathrm{L}_1 + 4vx_2\right];\ \ t_2^{BC} = 0$

Cạnh CD:
$t_1^{CD} = 0;\ \ t_2^{CD} = b_0\left[2vx_1 + 4(1-v)\mathrm{L}_2\right]$

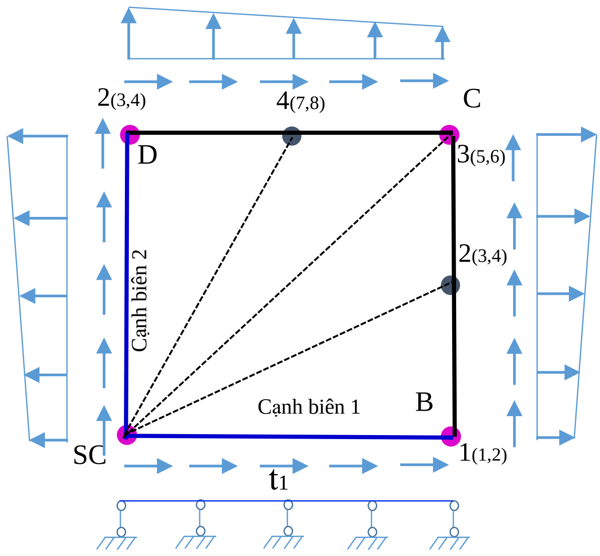
Theo (1), (2) và (3), lời giải giải tích của bài toán khảo sát như sau:

Chuyển vị: $$\begin{cases} u_1 = \dfrac{(1+v)(1-2v)}{E} b_0 x_1^2 \\ u_2 = \dfrac{(1+v)(1-2v)}{E} b_0 x_2^2 \end{cases}$$

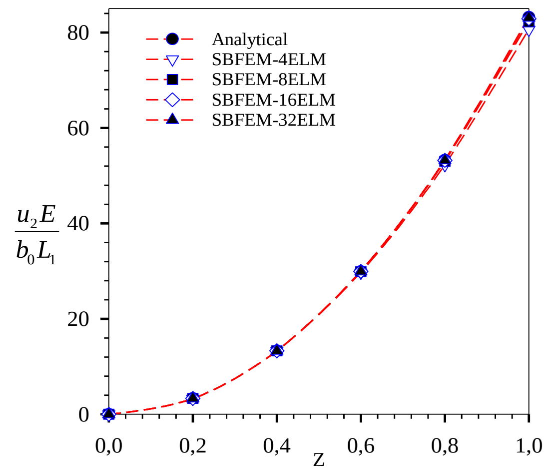
Ứng suất: $$\sigma_{11} = b_0\left[2(1-v)x_1 + 4vx_2\right]$$ $$\sigma_{22} = b_0\left[2vx_1 + 4(1-v)x_2\right]$$ $$\sigma_{12} = 0$$

Trọng lượng bản thân: $$b_1 = 2(1-v)b_0$$ $$b_2 = -4(1-v)b_0$$

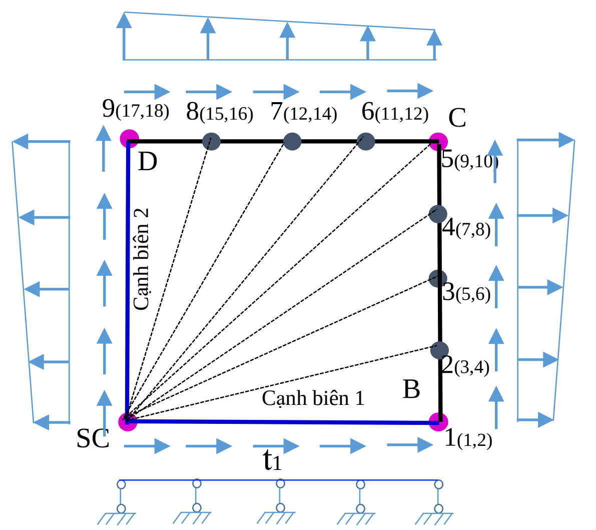
Bài toán được khảo sát với cấp độ chia phần tử trên đường biên gồm 4, 8, 16 và 32, cách chia phần tử trên biên như Hình 3, Hình 4. Khảo sát thành phần chuyển vị, ứng suất tại điểm C và so sánh với lời giải giải tích. Kết quả trình bày trong Bảng 1, Bảng 2. Kết quả cho thấy thành phần chuyển vị hội tụ khá nhanh với cấp độ chia lưới 32 phần tử. Đồng thời khảo sát các trường chuyển vị, ứng suất trên đường chéo AC của tấm. Kết quả thành phần chuyển vị, ứng suất được chuẩn hóa và biểu diễn trong Hình 5, 6, 7, 8 với $z = x_1 / L_1$. Kết quả cho thấy độ hội tụ của phương pháp SB FEM rất cao, mặc dù chỉ sử dụng hàm dạng bậc nhất trong xấp xỉ biên hình học và lời giải cho bài toán chịu tải trọng bậc hai và các điều kiện biên hỗn hợp.



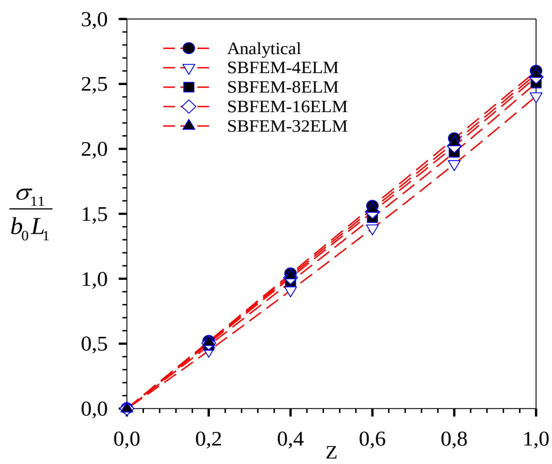
Hình 3. *Phân tích với 4 phần tử*



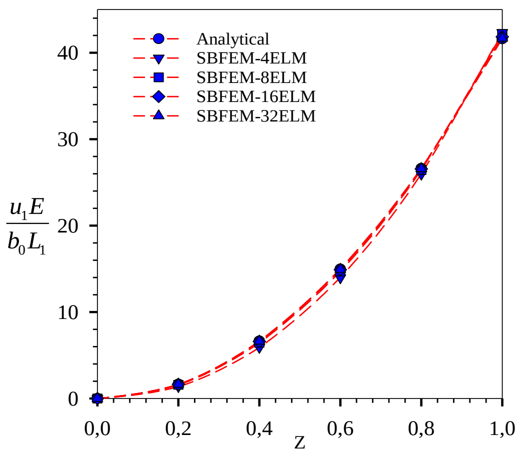
Hình 6. *Kết quả chuẩn hóa chuyển vị $u_2E / b_0 L_1$ trên cạnh AC trên cạnh AC*



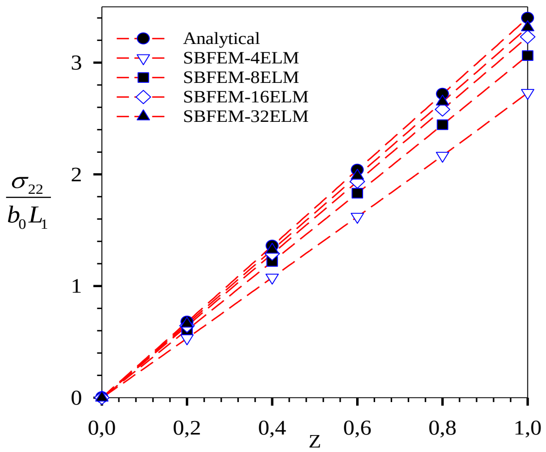
Hình 4. *Phân tích với 8 phần tử*



Hình 7. *Kết quả chuẩn hóa ứng suất σ_{11} / b_0L_1 trên cạnh AC*



Hình 5. *Kết quả chuẩn hóa chuyển vị u_1E / b_0L_1 trên cạnh AC*



Hình 8. *Kết quả chuẩn hóa ứng suất σ_{22} / b_0L_1 trên cạnh AC*

Bảng 1. *Kết quả chuyển vị tại điểm C*

	Lời giải giải tích	Phương pháp SB FEM			
		4 ELM	8 ELM	16 ELM	32 ELM
u_1	0,0050	0,005081	0,005061	0,005023	0,005003
u_2	0,0100	0,009671	0,009869	0,009945	0,009972

Bảng 2. *Kết quả ứng suất tại điểm C*

	Lời giải giải tích	Phương pháp SB FEM			
		4 ELM	8 ELM	16 ELM	32 ELM
σ_{11}	624,00	577,4587	601,7598	612,9770	618,4994
σ_{22}	816,00	655,2090	735,4634	775,5924	795,7559

5. KẾT LUẬN

Phương trình chủ đạo của phương pháp phần tử biên trung tâm (SB FEM) được thiết lập để phân tích bài toán phẳng với điều kiện biên hỗn hợp và tải trọng bậc cao. Trong mô hình phân tích phương pháp phần tử biên trung tâm chọn tâm trên đường biên để xem xét điều kiện biên hỗn hợp. Phương pháp nghiên cứu đã cung cấp thông tin hiệu quả để lựa chọn mô hình của phương pháp phần tử biên trung tâm.

Ví dụ số áp dụng phương pháp phần tử biên trung tâm đã được khảo sát. Kết quả được so sánh với lời giải giải tích. Hàm dạng bậc nhất được sử dụng trong việc xấp xỉ đặc trưng hình học, lời giải của phương pháp SB FEM. Kết quả đã chứng tỏ tính hiệu quả, độ hội tụ, tính chính xác của phương pháp phần tử biên trung tâm trong phân tích bài toán phẳng có điều kiện biên hỗn hợp và chịu tác dụng của tải trọng bậc cao.

Trong bài báo, tính hiệu quả của phương pháp phần tử biên trung tâm trong phân tích bài toán phẳng chỉ khảo sát với hàm dạng bậc nhất. Các hướng nghiên cứu tiếp theo: cần nghiên cứu ảnh hưởng của của các loại hàm dạng đến kết quả của phương pháp phần tử biên trung tâm, phát triển để phân tích bài toán hai chiều. Ngoài ra, phương pháp SB FEM cũng có thể nghiên cứu và phát triển để phân tích các bài toán nứt, bài toán tấm nhiều lớp, bài toán bán không gian.

ACKNOWLEDGEMENT

This work belongs to the project in 2021 funded by Ho Chi Minh City University of Technology and Education, Vietnam.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Song, C., Wolf, J. P. Body loads in scaled boundary finite-element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 180:117-135.

[2] Deeks, A. J & Wolf, J. P. A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics. Computational Mechanics, 2002, 28:489–504.

[3] Deeks, J.A. & Wolf, J. P. Semi-analytical elastostatic analysis of unbounded two-dimensional domains. International Journal for numerical and analytical in geomechanics, 2002, 26:1031–1057.

[4] Deeks, A. J. Prescribed side-face displacements in the scaled boundary finite-element method. Computers and Structures, 2004, 82:1153-1165.

[5] Nguyen Van Chung. Scaled boundary finite element method with exact defining curves for geo-machanics applications. Journal of Science and Technology in Civil Engineering NUCE, 2019, 13(3):124-134.

[6] Jia, M. Y., Li, J. C., Zhang, Y. & Chen, J. The high-order completeness analysis of the scaled boundary finite element method. ScienceDirect, 2020, 362:112867.

Tác giả chịu trách nhiệm bài viết:

Nguyễn Văn Chúng
Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM
Email: chungnv@hcmute.edu.vn

Nguyễn Thanh Him
Học Viên cao học Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM
Email: nguyenthanhhim@gmail.com